



Fundação

**CECIERJ**

Consórcio **cederj**

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

## **Caderno de Coordenação da Disciplina Cálculo IV**

**Volume Único**

Rioco Kamei Barreto



**GOVERNO DO  
Rio de Janeiro**

**SECRETARIA DE CIÊNCIA,  
TECNOLOGIA E INOVAÇÃO**

**UNIVERSIDADE  
ABERTA DO BRASIL**

Ministério da  
Educação

GOVERNO FEDERAL  
**BRASIL**  
PÁTRIA EDUCADORA

Apoio:

 **FAPERJ**  
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo  
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

 **NOVA  
CEDAE**

# Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua da Ajuda, 5 – Centro – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20040-000

Tel.: (21) 2333-1112 Fax: (21) 2333-1116

## Presidente

Carlos Eduardo Bielschowsky

## Vice-presidente

Masako Oya Masuda

## Coordenação do Curso de Matemática

Matemática (UFF) - Marcelo da Silva Corrêa

Matemática (UNIRIO) - Luiz Pedro San Gil Jutuca. Vice: Marcelo Rainha

## Material Didático

### Elaboração de Conteúdo

Rioco Kamei Barreto

### Biblioteca

Raquel Cristina da Silva Tiellet

Simone da Cruz Correa de Souza

Vera Vani Alves de Pinho

### Coordenação de Equipe

Marcelo Freitas

### Ilustração

Ronaldo d'Aguiar Silva

### Programação Visual

Aline Madeira Brondani

Giuseppe Luigi Toscano

### Revisão Linguística e Tipográfica

Patrícia Paula

### Coordenação de Produção

Fábio Rapello Alencar

### Assistente de Produção

Bianca Giacomelli

### Capa

Vinicius Mitchell

### Produção Gráfica

Patrícia Esteves

Ulisses Schnaider

Copyright © 2016, Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da Fundação.

B273

Barreto, Rioco Kamei.

Caderno de Coordenação da Disciplina Cálculo 4 : volume único /  
Rioco Kamei Barreto. - Rio de Janeiro : Fundação CECIERJ, 2015.

352p.; 19 x 26,5 cm.

ISBN: 978-85-458-0057-6

1. Cálculo. I. Título.

CDD: 515

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.  
Texto revisado segundo o novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa.

# Governo do Estado do Rio de Janeiro

## Governador

Luiz Fernando de Souza Pezão

## Secretário de Estado de Ciência, Tecnologia e Inovação

Gustavo Tutuca

## Instituições Consorciadas

### CEFET/RJ - Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca

Diretor-geral: Carlos Henrique Figueiredo Alves

### UENF - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Reitor: Silvério de Paiva Freitas

### UERJ - Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Reitor: Ricardo Vieiralves de Castro

### UFF - Universidade Federal Fluminense

Reitor: Sidney Luiz de Matos Mello

### UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro

Reitor: Roberto Leher

### UFRRJ - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Reitora: Ana Maria Dantas Soares

### UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Reitor: Luiz Pedro San Gil Jutuca





# Sumário

<b>Aula 1 • Integrais duplas.....</b>	<b>7</b>
<i>Rioco Kamei Barreto</i>	
<b>Aula 2 • Mudança de variáveis na integral dupla .....</b>	<b>17</b>
<i>Rioco Kamei Barreto</i>	
<b>Aula 3 • Aplicações das integrais duplas.....</b>	<b>27</b>
<i>Rioco Kamei Barreto</i>	
<b>Aula 4 • Integrais triplas .....</b>	<b>39</b>
<i>Rioco Kamei Barreto</i>	
<b>Aula 5 • Mudança de variáveis na integral tripla .....</b>	<b>49</b>
<i>Rioco Kamei Barreto</i>	
<b>Aula 6 • Curvas parametrizadas .....</b>	<b>57</b>
<i>Rioco Kamei Barreto</i>	
<b>Aula 7 • Aplicações da integral de linha de campo escalar .....</b>	<b>69</b>
<i>Rioco Kamei Barreto</i>	
<b>Aula 8 • Preparação para a AP1 .....</b>	<b>81</b>
<i>Rioco Kamei Barreto</i>	
<b>Aula 9 • Integral de linha de campo vetorial.....</b>	<b>83</b>
<i>Rioco Kamei Barreto</i>	
<b>Aula 10 • Teorema de green.....</b>	<b>95</b>
<i>Rioco Kamei Barreto</i>	
<b>Aula 11 • Superfícies parametrizadas .....</b>	<b>111</b>
<i>Rioco Kamei Barreto</i>	
<b>Aula 12 • Integral de superfície de campo escalar .....</b>	<b>123</b>
<i>Rioco Kamei Barreto</i>	
<b>Aula 13 • Integral de superfície de um campo vetorial.....</b>	<b>131</b>
<i>Rioco Kamei Barreto</i>	
<b>Aula 14 • Teorema de Gauss .....</b>	<b>141</b>
<i>Rioco Kamei Barreto</i>	

**Aula 15 • Teorema de Stokes ..... 149**

*Rioco Kamei Barreto*

**Aula 16 • Preparação para a AP2 ..... 159**

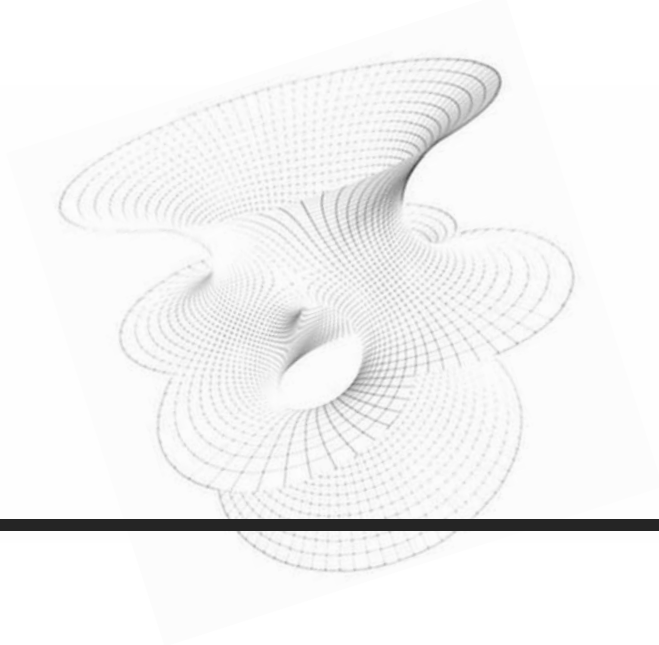
*Rioco Kamei Barreto*

**Gabarito ..... 161**

# Aula 1

## INTEGRAIS DUPLAS

---



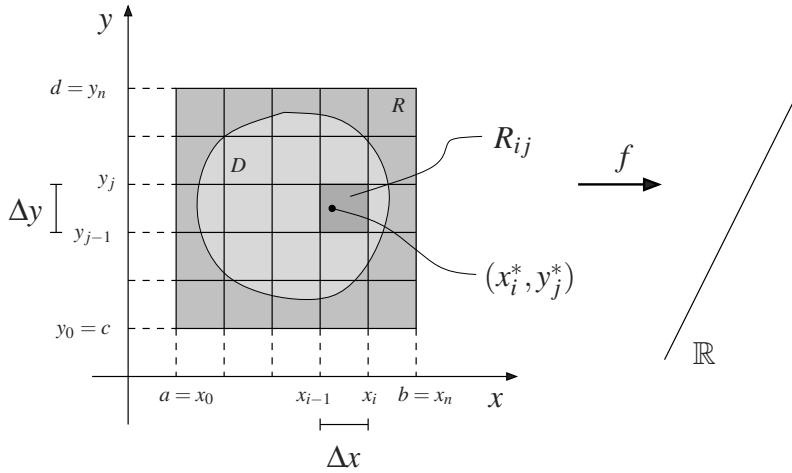
# O b j e t i v o s

- 1 compreender a noção de integral dupla;
- 2 estudar algumas propriedades;
- 3 estudar o Teorema de Fubini para retângulos;
- 4 estudar uma versão mais geral do Teorema de Fubini;
- 5 calcular Área e Volume.

## INTEGRAIS DUPLAS

No Cálculo II, você aprendeu as integrais definidas. Agora, no Cálculo IV, pretendemos estender essa ideia para integrais duplas e triplas de funções de duas ou três variáveis.

Então consideremos uma função  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $D$  é um conjunto fechado e limitado (também conhecido como conjunto compacto). Como  $D$  é limitado, então existe um retângulo  $R = [a, b] \times [c, d]$ , tal que  $D \subset R$ .



Vamos dividir o retângulo  $R$  em subretângulos  $R_{ij}$  da seguinte maneira: dividimos os intervalos  $[a, b]$  e  $[c, d]$  em  $n$  subintervalos de mesmo comprimento  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  e  $\Delta y = \frac{d-c}{n}$ , respectivamente; traçamos retas verticais e horizontais pelas extremidades desses subintervalos. Vamos escolher  $(x_i^*, y_j^*) \in R_{ij}$  e formemos a soma

$$S_n = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_j^*) \Delta x \Delta y = \sum_{i,j=1}^n f(x_i^*, y_j^*) \Delta A$$

onde  $f(x_i^*, y_j^*) = 0$  se  $(x_i^*, y_j^*) \notin D$ .

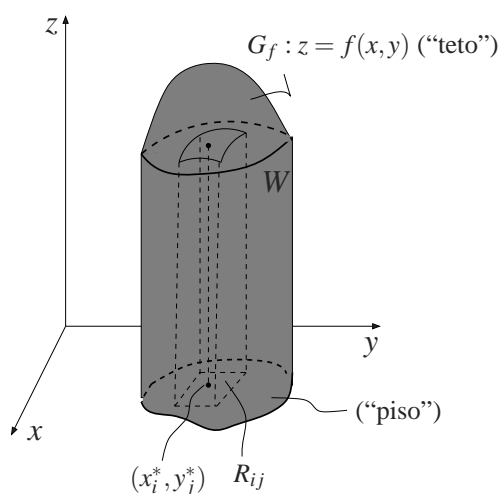
Esta soma é dita *soma de Riemann de f*. Se existir  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L$  dizemos que  $f$  é integrável e o número  $L$  é dito integral de  $f$  sobre  $D$  e é indicado por  $\iint_D f(x, y) dx dy$  ou  $\iint_D f(x, y) dA$  ou  $\int \int_D f dA$ . Assim,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^n f(x_i^*, y_j^*) \Delta x \Delta y.$$

- i. Prova-se que se  $f$  é contínua em  $D$ , então  $f$  é integrável.
- ii. Se  $f(x, y) \geq 0$  é contínua em  $D$ , então o gráfico de  $f$  ( $G_f$ ) está acima do plano  $xy$ . Então o volume do sólido  $W$  que está abaixo de  $G_f$  e acima de  $D$  é dado por

$$V(W) = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy.$$

Logo, para achar o volume do sólido  $W$ , integramos  $f(x, y)$  (o “teto”) sobre  $D$  (o “piso”).



- iii. Se  $f(x, y) = 1$  em  $D$ , então

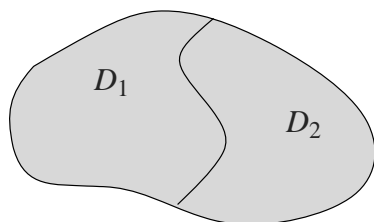
$$\iint_D 1 \, dx \, dy = \iint_D dx \, dy = A(D) = \text{Área de } D.$$

- iv. Propriedades:

iv.1.  $\iint_D (f + g) \, dA = \iint_D f \, dA + \iint_D g \, dA$

iv.2.  $\iint_D k f \, dA = k \iint_D f \, dA, \quad k \in \mathbb{R}$

iv.3.  $D = D_1 \cup D_2 \Rightarrow \iint_D f \, dA = \iint_{D_1} f \, dA + \iint_{D_2} f \, dA$



## UM MÉTODO PRÁTICO PARA CALCULAR INTEGRAIS DUPLAS

### Teorema 1.1 (Teorema de Fubini).

Se  $f(x, y)$  é contínua no retângulo  $D = [a, b] \times [c, d]$ , então

$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y) \, dx dy &= \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx \\ &= \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) \, dx \right] dy\end{aligned}$$

ou

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \underbrace{\int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx dy}_{\text{integrais iteradas ou repetidas}}$$

#### Exemplo 1.1.

Calcule  $\iint_D xy^2 \, dx dy$ , sendo  $D = [0, 1] \times [-1, 0]$ .

**Solução:** Temos

$$\iint_D xy^2 \, dx dy = \int_0^1 \int_{-1}^0 xy^2 \, dy dx.$$

Primeiro calculamos a integral interna. Logo:

$$\begin{aligned}\iint_D xy^2 \, dx dy &= \int_0^1 x \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^0 dy = \frac{1}{3} \int_0^1 x [0 - (-1)] \, dx = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{3} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

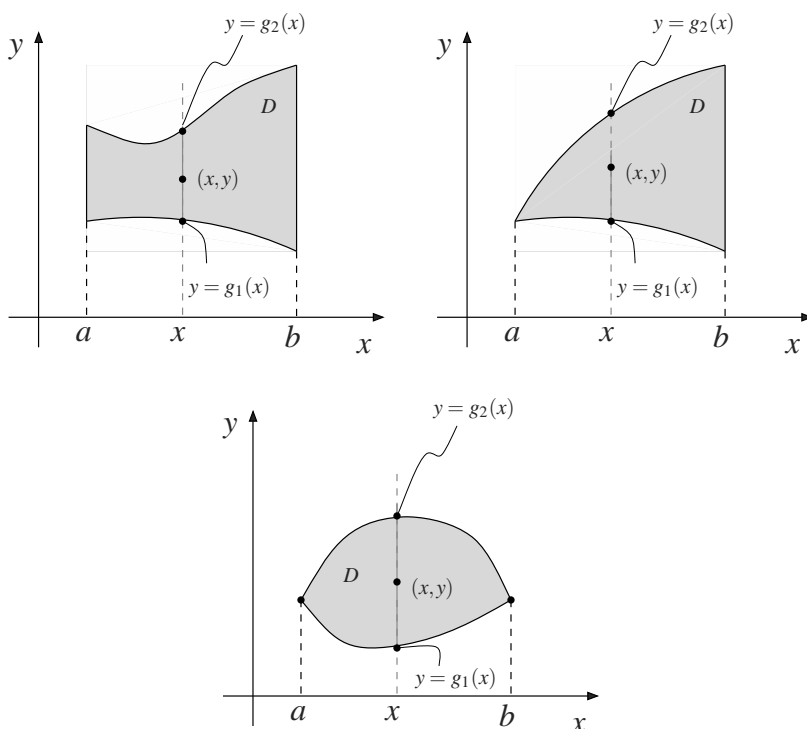
## CÁLCULO DE INTEGRAIS DUPLAS EM REGIÕES MAIS GERAIS

Suponhamos agora, que  $D$  seja diferente do retângulo  $[a, b] \times [c, d]$ . Então vamos definir dois tipos de região.

**Definição 1.1.**

Dizemos que  $D$  é uma região do tipo I ou uma região simples vertical se  $D$  for limitada à esquerda pela reta vertical  $x = a$ , à direita pela reta vertical  $x = b$ , inferiormente pela curva de equação  $y = g_1(x)$  e superiormente pela curva  $y = g_2(x)$ , onde  $g_1$  e  $g_2$  são contínuas.

As figuras que se seguem ilustram regiões do tipo I:



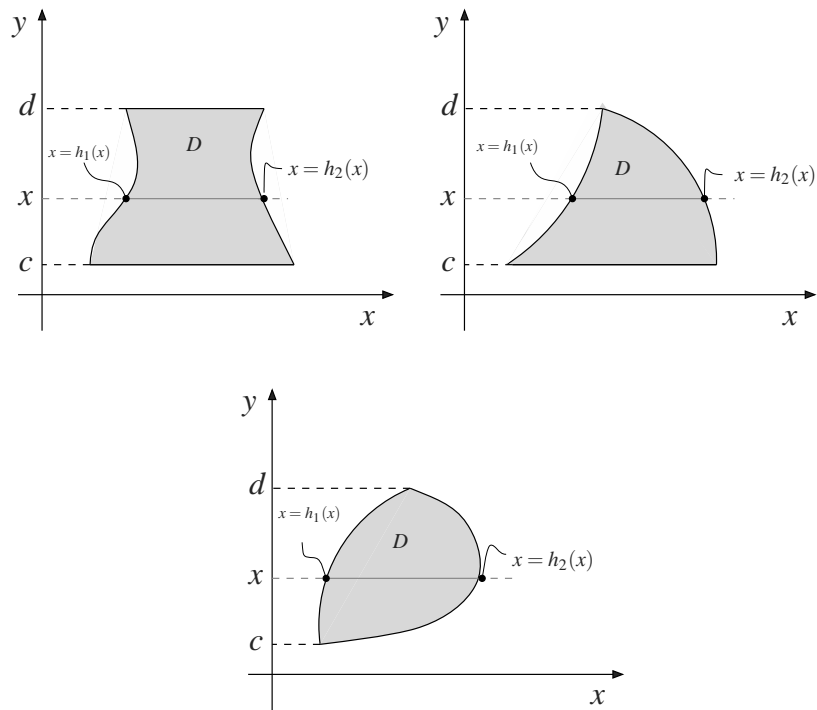
Logo,  $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ e } g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ .  
Prova-se que:

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy dx.$$

**Definição 1.2.**

Dizemos que  $D$  é uma região do tipo II ou uma região simples horizontal se  $D$  for limitada inferiormente e superiormente por retas horizontais  $y = c$  e  $y = d$ , respectivamente, pela esquerda pela curva  $x = h_1(y)$  e pela direita pela curva  $x = h_2(y)$ , onde  $h_1$  e  $h_2$  são contínuas.

As figuras que se seguem ilustram regiões do tipo II:



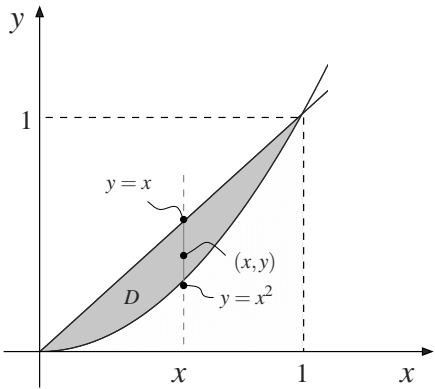
Logo,  $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d \text{ e } h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$ .  
Prova-se que:

$$\iint_D f(x,y) \, dx \, dy = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) \, dx \, dy.$$

**Exemplo 1.2.**

Calcule por dois métodos a integral de  $f(x,y) = xy$  sobre a região  $D$  limitada pelas curvas  $y = x$  e  $y = x^2$ .

**Solução:** As curvas se interceptam quando  $x^2 = x$  ou  $x(x - 1) = 0$ , logo  $x = 0$  ou  $x = 1$ . Assim, os pontos de interseção são  $(0,0)$  e  $(1,1)$ . Logo, o esboço de  $D$  está representado na figura ao lado.





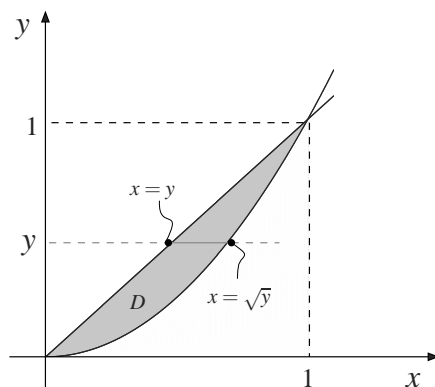
**Método 1**

Enquadrando  $D$  como tipo I, temos

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ e } x^2 \leq y \leq x\}.$$

Então:

$$\begin{aligned} \iint_D xy \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_{x^2}^x xy \, dy \, dx = \int_0^1 x \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^x dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x (x^2 - x^4) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^3 - x^5) \, dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} \right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{6} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

**Método 2**

Enquadrando  $D$  como tipo II, temos

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1 \text{ e } y \leq x \leq \sqrt{y}\}.$$

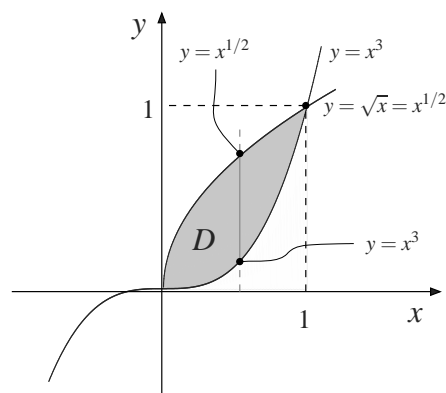
Então:

$$\begin{aligned} \iint_D xy \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} xy \, dx \, dy = \int_0^1 y \left[ \frac{x^2}{2} \right]_y^{\sqrt{y}} dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 y (y - y^2) \, dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (y^2 - y^3) \, dy = \frac{1}{2} \left[ \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

**Exemplo 1.3.**

Calcule, por integral dupla, a área da região plana  $D$  limitada pelas curvas  $y = x^3$  e  $y = \sqrt{x}$ .

**Solução:** O esboço de  $D$  está representado na figura que se segue.



Podemos descrever por

$$D : \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ x^3 \leq y \leq x^{1/2} \end{array} \right. .$$

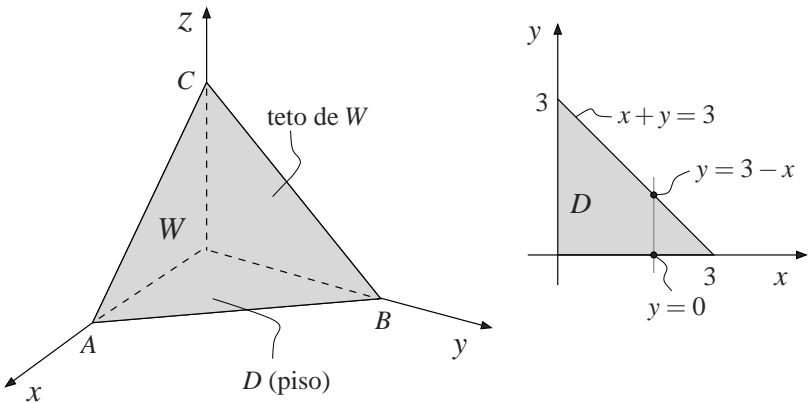
Então:

$$\begin{aligned} A(D) &= \iint_D dx dy = \int_0^1 \int_{x^3}^{x^{1/2}} dy dx = \int_0^1 (x^{1/2} - x^3) dx = \\ &= \left[ \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12} \text{ u.a.} \end{aligned}$$

**Exemplo 1.4.**

Calcule o volume do tetraedro  $W$  com faces nos planos coordenados e no plano  $x + y + z = 3$ .

**Solução:** O plano  $x + y + z = 3$  passa pelos pontos  $A = (3, 0, 0)$ ,  $B = (0, 3, 0)$  e  $C = (0, 0, 3)$ . Assim, o esboço de  $W$  é:



Observemos que o teto de  $W$  é a porção do plano  $x + y + z = 3$  ou  $z = 3 - x - y = f(x, y)$  e o piso de  $W$  é o triângulo  $D$ . Então:

$$\begin{aligned} V(W) &= \iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_D (3 - x - y) \, dx \, dy = \\ &= \int_0^3 \int_0^{3-x} (3 - x - y) \, dy \, dx = \int_0^3 \left[ 3y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^{3-x} dx = \\ &= \int_0^3 \left[ 3(3-x) - x(3-x) - \frac{(3-x)^2}{2} \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^3 (9 - 6x + x^2) \, dx = \frac{1}{2} \left[ 9x - 3x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{9}{2} \text{ u.v.} \end{aligned}$$

### Exercício 1.1.

1. Calcule  $I = \iint_D y e^{x+y^2} \, dx \, dy$ , sendo  $D = [-1, 1] \times [0, 1]$ .
2. Determine a região  $D$  e troque a ordem de integração das seguintes integrais:

a.  $I = \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy \, dx.$

b.  $I = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-\sqrt{y}} f(x, y) \, dx \, dy.$

3. A integral abaixo não pode ser calculada exatamente, em termos de funções elementares, com a ordem de integração dada. Inverta a ordem de integração e faça os cálculos em

$$I = \int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} \, dx \, dy.$$

4. Utilizando integral dupla, calcule a área da região  $D$  limitada pelas curvas  $y^2 = -x$ ,  $x - y = 4$ ,  $y = -1$  e  $y = 2$ .
5. Calcule  $\iint_D \frac{y}{1+x^2} \, dx \, dy$ , onde  $D$  é a região limitada por  $y = 0$ ,  $y = \sqrt{x}$  e  $x = 4$ .
6. Inverta a ordem de integração e calcule seu valor em

$$I = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}/2}^{\sqrt{y}} e^{x^3} \, dx \, dy + \int_1^4 \int_{\sqrt{y}/2}^1 e^{x^3} \, dx \, dy.$$

7. Encontre por integração dupla a área da região no plano  $xy$ , limitada pelas curvas  $y = x^2$  e  $y = 4x - x^2$ .
8. Determine a área da região limitada pelas curvas  $x = y^3$ ,  $x + y = 2$  e  $y = 0$ .
9. Calcule o volume do sólido  $W$ , no primeiro octante, limitado pelas superfícies  $z = 4 - x^2$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  e  $x + y = 2$ .
10. Calcule o volume do sólido  $W$  limitado pelos planos  $x = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x + y = 9$  e pelo cilindro parabólico  $z = 9 - y^2$ .

# Aula 2

## MUDANÇA DE VARIÁVEIS NA INTEGRAL DUPLA

---

### Objetivos

- 1 aprender a fazer mudança de variáveis em integrais duplas;
- 2 estudar uma mudança de variáveis bastante usada: coordenadas polares.

## MUDANÇA DE VARIÁVEIS NA INTEGRAL DUPLA

No Cálculo II, você aprendeu a fórmula da mudança de variável para uma função de uma variável:

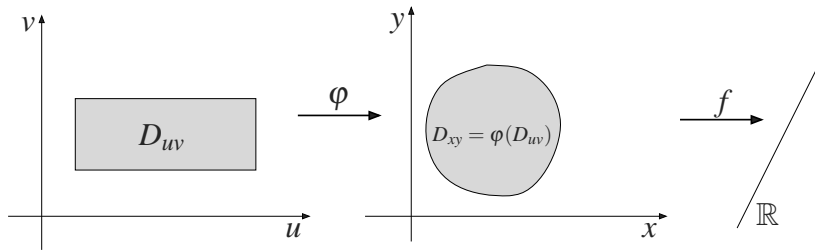
$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(g(u)) g'(u) du.$$

Para as integrais duplas, temos uma fórmula análoga.

Uma mudança de variáveis num subconjunto do  $\mathbb{R}^2$  é dada por uma transformação

$$\begin{aligned} \varphi : D_{uv} \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\longmapsto (x, y) = \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) \end{aligned}$$

de classe  $C^1$  e injetora no interior de  $D_{uv}$ .



Suponhamos que o jacobiano de  $\varphi$ ,  $J\varphi(u, v)$ , seja diferente de 0, isto é,

$$J = J\varphi(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Prova-se que  $dx dy = |J| du dv$ .

Seja  $D_{xy} = \varphi(D_{uv})$ . Então se  $f(x, y)$  é contínua em  $D_{xy}$ , temos:

$$\iint_{D_{xy}} f(x, y) dx dy = \iint_{D_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv.$$

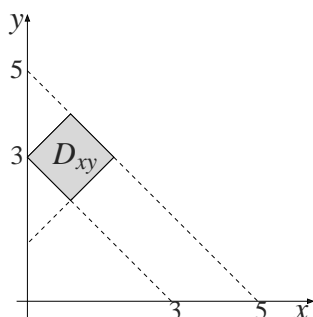
✍ Pelo teorema da função inversa, o jacobiano de  $\varphi^{-1}$  é dado por

$$J\varphi^{-1}(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = (J\varphi(u,v))^{-1} = \frac{1}{J(\varphi(u,v))}.$$

### Exemplo 2.1.

Calcule, utilizando uma mudança de variáveis conveniente, a integral  $\iint_{D_{xy}} \frac{(x+y)^6}{y-x} dx dy$ , sendo  $D_{xy}$  a região limitada pelas retas  $y+x=3$ ,  $y+x=5$ ,  $y-x=1$  e  $y-x=3$ .

**Solução:** O esboço de  $D_{xy}$  está representado na figura a seguir.



Façamos  $u = x + y$ ,  $v = y - x$ , que nos dá

$$\begin{cases} u+v=2y \\ u-v=2x \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = \frac{u-v}{2} \\ y = \frac{u+v}{2} \end{cases}.$$

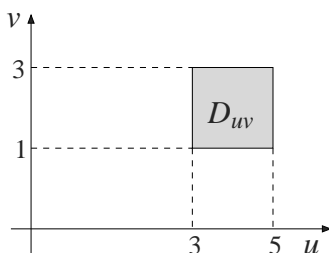
Temos:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Como  $dx dy = |J| du dv$ , temos  $dx dy = \frac{1}{2} du dv$ .

A seguir, vamos determinar  $D_{uv}$ .

Como  $D_{xy}$  é limitado por  $y + x = 3$ ,  $y + x = 5$ ,  $y - x = 1$  e  $y - x = 3$ , então  $D_{uv}$  é limitado por  $u = 3$ ,  $u = 5$ ,  $v = 1$  e  $v = 3$ .

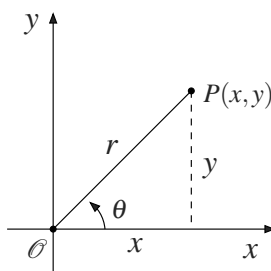


Segue da fórmula da mudança de variáveis que:

$$\begin{aligned} \iint_{D_{xy}} \frac{(x+y)^6}{y-x} dx dy &= \iint_{D_{uv}} \frac{u^6}{v} \cdot \frac{1}{2} du dv = \frac{1}{2} \iint_{D_{uv}} \frac{u^6}{v} du dv = \\ &= \frac{1}{2} \int_3^5 u^6 \int_1^3 \frac{1}{v} dv du = \frac{1}{2} \int_3^5 u^6 [\ln v]_1^3 du = \frac{\ln 3}{2} \int_3^5 u^6 du = \\ &= \frac{\ln 3}{2} \left[ \frac{u^7}{7} \right]_3^5 = (5^7 - 3^7) \frac{\ln 3}{14}. \end{aligned}$$

## INTEGRAIS DUPLAS EM COORDENADAS POLARES

No Cálculo II, você aprendeu coordenadas polares  $(r, \theta)$ , onde  $r$  é a distância de um ponto  $P = (x, y)$  à origem e  $\theta$  é o ângulo (em radianos) formado pelo eixo  $x$  positivo e o raio polar  $\overline{OP}$ .



Da figura, vemos que  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  donde  $x^2 + y^2 = r^2$ .



Então consideremos a mudança de variáveis dada por

$$\varphi : \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$


onde  $r \geq 0$  e  $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$ , para algum  $\theta_0 \in \mathbb{R}$ .

O jacobiano de  $\varphi$  é dado por

$$\begin{aligned} J = J\varphi = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = \\ &= r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r. \end{aligned}$$

Então

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{D_{r\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

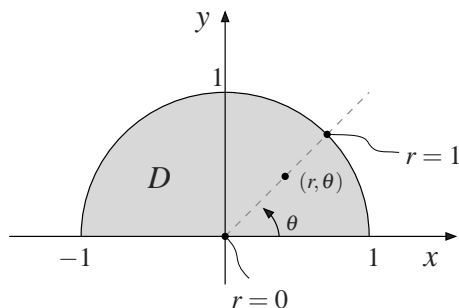
-  i. O termo  $dx dy$  não é substituído por  $dr d\theta$ , mas por  $r dr d\theta$ .
- ii. A área de  $D$  em coordenadas polares é dada por

$$A(D) = \iint_{D_{r\theta}} r dr d\theta.$$

### Exemplo 2.2.

Calcule  $\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy$ , onde  $D$  é a região limitada pela curva  $y = \sqrt{1-x^2}$  e o eixo  $x$ .

**Solução:** O esboço de  $D$  está representado na figura que se segue.



Passando para coordenadas polares, temos:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ dx dy = r dr d\theta \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}.$$

Observemos que em  $D$  o ângulo  $\theta$  varia de 0 (no eixo polar = eixo  $x$  positivo) a  $\pi$  (no ponto  $(-1, 0)$ ). Fixado  $\theta$ , tal que  $0 \leq \theta \leq \pi$ , o raio polar  $r$  varia de 0 a 1. Então,  $D_{r\theta}$  é dado por:

$$D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \iint_D e^{x^2+y^2} dx dy &= \iint_{D_{r\theta}} e^{r^2} r dr d\theta = \int_0^1 \int_0^\pi e^{r^2} r d\theta dr = \\ &= \pi \int_0^1 e^{r^2} r dr. \end{aligned}$$

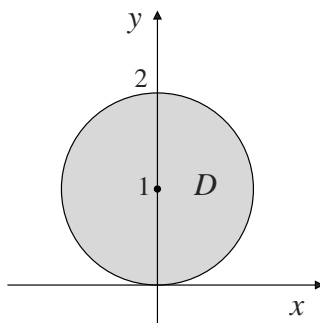
Temos  $d(r^2) = 2r dr$ , donde  $r dr = \frac{1}{2}d(r^2)$ . Então,

$$\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy = \frac{\pi}{2} \int_0^1 e^{r^2} d(r^2) = \frac{\pi}{2} [e^{r^2}]_0^1 = \frac{\pi}{2}(e - 1).$$

### Exemplo 2.3.

Calcule  $I = \iint_D y dx dy$ , onde  $D$  é limitado por  $x^2 + y^2 = 2y$ .

**Solução:** Completando quadrado em  $x^2 + y^2 = 2y$ , temos  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ . Logo, temos uma circunferência de centro  $(0, 1)$  e raio 1. Assim, o esboço de  $D$  está representado na figura que se segue.



Calcular  $I$ , enquadrando  $D$  como tipo I ou tipo II, é uma tarefa difícil (verifique!), então passemos para coordenadas polares.

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ dxdy = r dr d\theta \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}.$$

Passando  $x^2 + y^2 = 2y$  para coordenadas polares, temos  $r^2 = 2r \sin \theta$  ou  $r = 2 \sin \theta$ . Observemos que como o eixo  $x$  é tangente à circunferência na origem, então  $\theta$  varia de 0 a  $\pi$ . Fixando  $\theta$ , tal que  $0 \leq \theta \leq \pi$ , o raio polar  $r$  varia de 0 a  $2 \sin \theta$ . Logo, o conjunto  $D_{r\theta}$  é dado por

$$D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 2 \sin \theta \end{cases}.$$

Então,

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_{r\theta}} r \sin \theta \cdot r dr d\theta = \iint_{D_{r\theta}} r^2 \sin \theta dr d\theta = \\ &= \int_0^\pi \sin \theta \int_0^{2 \sin \theta} r^2 dr d\theta = \int_0^\pi \sin \theta \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^{2 \sin \theta} d\theta = \\ &= \frac{8}{3} \int_0^\pi \sin^4 \theta d\theta. \end{aligned}$$



Vale a pena lembrar que:

- $\sin^4 \theta = (\sin^2 \theta)^2 = \left( \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right)^2 =$   
 $= \frac{1}{4} (1 - 2 \cos 2\theta + \cos^2 2\theta);$
- $\int \cos^2 u du = \frac{1}{2} \left( u + \frac{\sin 2u}{2} \right) + C.$

Então:

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{3} \int_0^\pi (1 - 2 \cos 2\theta + \cos^2 2\theta) d\theta = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - 2 \cos 2\theta + \cos^2 2\theta) d(2\theta) = \\ &= \frac{1}{3} \left[ 2\theta - 2 \sin 2\theta + \frac{1}{2} \left( 2\theta + \frac{\sin 4\theta}{2} \right) \right]_0^\pi = \\ &= \frac{1}{3} \left[ 3\theta - 2 \sin 2\theta + \frac{\sin 4\theta}{4} \right]_0^\pi = \pi. \end{aligned}$$

**Exercício 2.1.**

1. Considere a transformação do plano  $uv$  no plano  $xy$  definida por  $T(u, v) = (x, y) = (u + v, u^2 - v)$ . Seja  $D_{uv}$  a região do plano  $uv$  limitada pelos eixos  $u$  e  $v$  e pela reta  $u + v = 2$ . Seja  $D_{xy} = T(D_{uv})$ , a imagem de  $D_{uv}$  por  $T$ .

a. Esboce  $D_{xy}$ .

b. Calcule  $\iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{1+4x+4y}} dx dy$ .

2. Calcule a seguinte integral dupla

$$\iint_D \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x-y}{x+y}\right) dx dy$$

onde  $D$  é a região do plano  $xy$ , limitada pelas retas  $x + y = 1$ ,  $x + y = 4$ ,  $x = 0$  e  $y = 0$ .

Sugestão: Use a mudança de variáveis  $u = \frac{x-y}{x+y}$  e  $v = x + y$ .

3. Mostre que a área da região limitada pela elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) é igual a  $\pi ab$ .

4. Calcule

$$I = \iint_D \sin(4x^2 + y^2) dx dy,$$

onde  $D = \{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ .

5. Calcule a área da região  $D$  do plano  $xy$ , definida por

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + (y - 2)^2 \leq 4 \text{ e } x^2 + y^2 \geq 4\}.$$

6. Calcule a integral iterada transformando-a, antes, para coordenadas polares:

a.  $I = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4y-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$

b.  $I = \int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} dy dx$

c.  $I = \int_0^1 \int_y^{1+\sqrt{1-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$

7. Passe para coordenadas polares e calcule  $\iint_B xy \, dxdy$ , onde  $B$  é a região  $x^2 + y^2 - 2y \leq 0$ ,  $x \geq 0$ .

8. Passe para coordenadas polares e calcule

$$I = \int_1^3 \int_0^y \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy$$

9. Achar o volume do sólido limitado superiormente pela esfera de equação  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , inferiormente pelo plano  $xy$  e lateralmente pelo cilindro de equação  $x^2 + y^2 = 1$ .

10. Determine o volume do sólido  $W$  limitado pelas superfícies  $x^2 + y^2 = 2y$ ,  $z = 0$  e  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .



# Aula 3

## APLICAÇÕES DAS INTEGRAIS DUPLAS

---

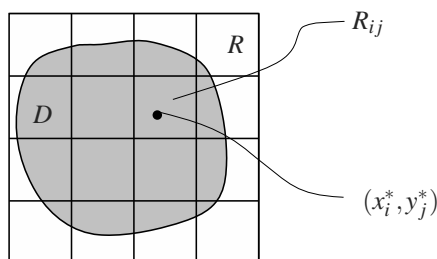
### Objetivos

- 1 estudar algumas aplicações físicas como massa, centro de massa e momento de inércia;
- 2 explorar simetrias em integrais duplas.

## APLICAÇÕES DAS INTEGRAIS DUPLAS

### MASSA

Seja  $D \subset \mathbb{R}^2$ , uma região compacta, representando uma lâmina plana delgada. Suponhamos que a função contínua e positiva  $\delta : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  representa a densidade superficial de massa (massa por unidade de área).




Considerando-se  $n^2$  subretângulos  $R_{ij}$  de algum retângulo  $R$  que contém  $D$  e uma escolha  $(x_i^*, y_j^*) \in R_{ij}$ , observamos que a soma

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \delta(x_i^*, y_j^*) \Delta A$$

é uma aproximação da massa  $M$  de  $D$ , onde  $\delta(x_i^*, y_j^*) = 0$  se  $(x_i^*, y_j^*) \notin D$ . Logo, é razoável definir a massa  $M$  de  $D$  com

$$M = \iint_D \delta(x, y) dx dy.$$

 Se  $\delta(x, y)$  for constante e igual a  $k$ , então a massa  $M$  será igual a  $kA(D)$ . Neste caso, dizemos que a lâmina  $D$  é homogênea.

### CENTRO DE MASSA

Seja um sistema finito de partículas  $P_1 = (x_1, y_1)$ ,  $P_2 = (x_2, y_2)$ ,  $\dots$ ,  $P_n = (x_n, y_n)$ , com massas  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , respectivamente. Lembrando da Física que os momentos de massa desse sistema, em relação aos eixos  $x$  e  $y$ , são definidos por:

$$M_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i \text{ e } M_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i.$$



O centro de massa do sistema é o ponto  $(\bar{x}, \bar{y})$  que se comporta como se a massa total  $M = \sum_{i=1}^n m_i$  do sistema estivesse concentrada nesse ponto. Logo,  $M\bar{x} = My$  e  $M\bar{y} = Mx$  ou

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Se considerarmos no lugar de um sistema finito de partículas, uma lâmina plana  $D$  com densidade superficial de massa dada por uma função contínua e positiva  $\delta(x, y)$ , fazemos uma partição de algum retângulo  $R$  contendo  $D$ , obtendo subretângulos  $R_{ij}$ . Escolhemos  $(x_i^*, y_j^*) \in R_{ij}$ . Logo, a massa de  $R_{ij}$  pode ser aproximada por  $\delta(x_i^*, y_j^*) \Delta A$ , onde  $\delta(x_i^*, y_j^*) = 0$  se  $\delta(x_i^*, y_j^*) \notin D$ .

Então


$$M_x \simeq \sum_{i,j=1}^n y_j^* \delta(x_i^*, y_j^*) \Delta A \quad \text{e} \quad M_y \simeq \sum_{i,j=1}^n x_i^* \delta(x_i^*, y_j^*) \Delta A.$$

Logo, definimos  $M_x$  e  $M_y$  por

$$M_x = \iint_D y \delta(x, y) dA \quad \text{e} \quad M_y = \iint_D x \delta(x, y) dA.$$

O centro de massa  $(\bar{x}, \bar{y})$  da lâmina  $D$  é definido por

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x \delta(x, y) dA}{M} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y \delta(x, y) dA}{M}.$$

 Se  $\delta(x, y) = k$ ,  $k$  constante, o ponto  $(\bar{x}, \bar{y})$  é dito centroide e temos as seguintes fórmulas

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x dx dy}{\iint_D dx dy} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y dx dy}{\iint_D dx dy}.$$

## MOMENTO DE INÉRCIA

O momento de inércia de uma lâmina  $D$  em relação a um eixo  $E$  é dado por

$$I_E = \iint_D r^2(x,y) \delta(x,y) dx dy$$

onde  $r(x,y)$  é a distância de  $(x,y)$  ao eixo  $E$ .

Assim, os momentos de inércia de  $D$  em relação aos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente, são dados por

$$I_x = \iint_D y^2 \delta(x,y) dx dy \quad \text{e} \quad I_y = \iint_D x^2 \delta(x,y) dx dy.$$

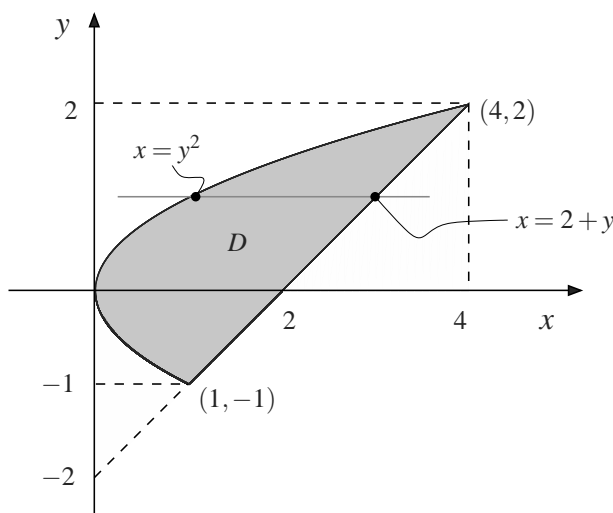
O momento de inércia polar em relação à origem é dado por

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \delta(x,y) dx dy = I_x + I_y.$$

### Exemplo 3.1.

Determine o centro de massa e o momento de inércia em relação ao eixo  $x$ , da região  $D$  limitada por  $x = y^2$  e  $x - y = 2$ , sendo  $\delta(x,y) = 3$ .

**Solução:** As curvas se interceptam quando  $y^2 - y - 2 = 0$ , logo  $y = -1$ ,  $y = 2$ . Assim, o esboço de  $D$  está representado na figura que se segue.



Descrevemos  $D$  como tipo II:

$$D = \{(x, y) \mid -1 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq 2 + y\}.$$

A massa de  $D$  é:

$$\begin{aligned} M &= \iint_D \delta(x, y) dA = \iint_D 3 dA = 3 \int_{-1}^2 \int_{y^2}^{2+y} dx dy = \\ &= 3 \int_{-1}^2 (2 + y - y^2) dy = 3 \left[ 2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^2 = \\ &= 3 \left[ \left( 4 + 2 - \frac{8}{3} \right) - \left( -2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \right] = \frac{27}{2}. \end{aligned}$$

O centro de massa  $(\bar{x}, \bar{y})$  é dado por

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x \delta(x, y) dA}{M}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y \delta(x, y) dA}{M}.$$

**Cálculo de  $\iint_D x \delta(x, y) dA$**

$$\begin{aligned} \iint_D x \delta(x, y) dA &= 3 \int_{-1}^2 \int_{y^2}^{2+y} x dx dy = 3 \int_{-1}^2 \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{y^2}^{2+y} dy = \\ &= \frac{3}{2} \int_{-1}^2 (4 + 4y + y^2 - y^4) dy = \frac{3}{2} \left[ 4y + 2y^2 + \frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5} \right]_{-1}^2 = \\ &= \frac{3}{2} \left[ \left( 8 + 8 + \frac{8}{3} - \frac{32}{5} \right) - \left( -4 + 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) \right] = \frac{3}{2} \cdot \frac{72}{5} = \frac{108}{5}. \end{aligned}$$

**Cálculo de  $\iint_D y \delta(x, y) dA$**

$$\begin{aligned} \iint_D y \delta(x, y) dA &= 3 \int_{-1}^2 \int_{y^2}^{2+y} y dx dy = \\ &= 3 \int_{-1}^2 y (2 + y - y^2) dy = 3 \int_{-1}^2 (2y + y^2 - y^3) dy = \\ &= 3 \left[ y^2 + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_{-1}^2 = \\ &= 3 \left[ \left( 4 + \frac{8}{3} - 4 \right) - \left( 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \right] = \frac{27}{4}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\bar{x} = \frac{\frac{108}{5}}{\frac{27}{2}} = \frac{8}{5} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{\frac{27}{4}}{\frac{27}{2}} = \frac{1}{2}.$$

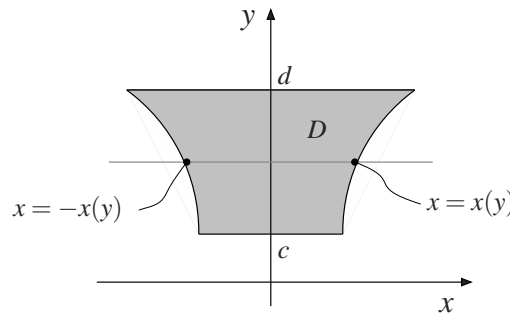
Assim, o centro de massa  $(\bar{x}, \bar{y})$  está localizado em  $\left(\frac{8}{5}, \frac{1}{2}\right)$ .

O momento de inércia em relação ao eixo  $x$  é:

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D y^2 \delta(x, y) dA = 3 \iint_D y^2 dA = 3 \int_{-1}^2 \int_{y^2}^{2+y} y^2 dx dy = \\ &= 3 \int_{-1}^2 y^2 (2+y-y^2) dy = 3 \int_{-1}^2 (2y^2 + y^3 - y^4) dy = \\ &= 3 \left[ \frac{2y^3}{3} + \frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5} \right]_{-1}^2 = \\ &= 3 \left[ \left( \frac{16}{3} + 4 - \frac{32}{5} \right) - \left( -\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) \right] = \frac{189}{20}. \end{aligned}$$

## SIMETRIA EM INTEGRAL DUPLA

Seja  $D \subset \mathbb{R}^2$ , simétrica em relação ao eixo  $y$  e  $f(x, y)$  ímpar na variável  $x$ , isto é,  $f(-x, y) = -f(x, y)$ . Então temos que  $\iint_D f(x, y) dx dy = 0$ . Com efeito, como  $D$  tem simetria em relação ao eixo  $y$ , observamos que  $D$  está limitada à direita pela curva  $x = x(y)$  e à esquerda pela curva  $x = -x(y)$ . Supondo que a projeção de  $D$  sobre o eixo  $y$  seja o intervalo  $[c, d]$ , temos o seguinte esboço para  $D$ :



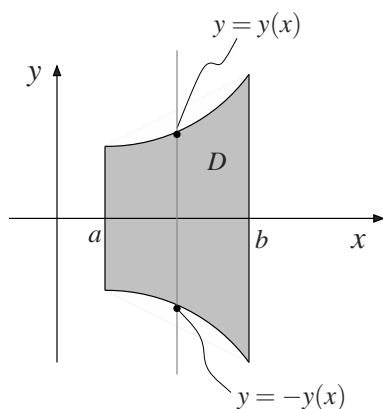
Então,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \underbrace{\left[ \int_{-x(y)}^{x(y)} f(x, y) dx \right]}_{= 0 (*)} dy = \int_c^d 0 dy = 0.$$

(\*) Aqui, usamos um fato do Cálculo II:

$$\int_{-a}^a g(x) dx = 0 \text{ se } g(x) \text{ é uma função ímpar.}$$

Analogamente, se  $D$  tem simetria em relação ao eixo  $x$  e  $f(x, y)$  é ímpar na variável  $y$ , então  $\iint_D f(x, y) dx dy = 0$ . Veja o esboço para  $D$  na figura a seguir.



### Exemplo 3.2.

Calcule

$$I = \iint_D \left( xy^6 + (x^4 + y^4) \operatorname{sen} y + 1 \right) dx dy,$$

onde  $D$  é o disco  $x^2 + y^2 \leq a^2$ ,  $(a > 0)$ .

**Solução:** Por propriedade, temos que

$$I = \underbrace{\iint_D xy^6 dx dy}_{I_1} + \underbrace{\iint_D (x^4 + y^4) \operatorname{sen} y dx dy}_{I_2} + \underbrace{\iint_D dx dy}_{I_3}.$$

- Como  $f(x, y) = xy^6$  é ímpar na variável  $x$  e  $D$  tem simetria em relação ao eixo  $y$ , então  $I_1 = 0$ .
- Como  $g(x, y) = (x^4 + y^4) \operatorname{sen} y$  é ímpar na variável  $y$  e  $D$  tem simetria em relação ao eixo  $x$ , então  $I_2 = 0$ .
- Como  $\iint_D dx dy = A(D)$ , então  $I_3 = \pi a^2$ . Logo,

$$I = 0 + 0 + \pi a^2 = \pi a^2.$$



**RECOMENDAÇÃO:** Nas integrais duplas, busque as simetrias e as funções ímpares. Não calcule cegamente!!!



- i. Se a densidade  $\delta(x, y)$  é uma função par na variável  $x$  (isto é,  $\delta(-x, y) = \delta(x, y)$ ), então  $x\delta(x, y)$  é ímpar na variável  $x$ . Se  $D$  tem simetria em relação ao eixo  $y$ , então  $\iint_D x\delta(x, y) dx dy = 0$  e portanto,  $\bar{x} = 0$ .

Analogamente, se  $\delta(x, y)$  é uma função par na variável  $y$  e se  $D$  tem simetria em relação ao eixo  $x$ , então  $\bar{y} = 0$ .

- ii. Se  $D$  é uma lâmina homogênea e tem simetria em relação ao eixo  $y$ , então  $\bar{x} = 0$ .

Analogamente, se  $D$  é homogênea e tem simetria em relação ao eixo  $x$ , então  $\bar{y} = 0$ .

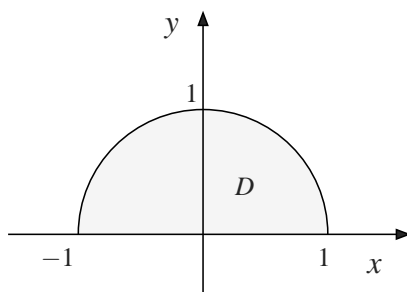
### Exemplo 3.3.

Uma lâmina delgada  $D$  ocupa a região  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $y \geq 0$ , de modo que a densidade em qualquer ponto é proporcional à distância do ponto à origem. Determine

a. a massa  $M$  de  $D$

b. o centro de massa

**Solução:** O esboço de  $D$  está representado na figura que se segue.



Como a distância de  $(x, y)$  à origem é  $\sqrt{x^2 + y^2}$  então a densidade é dada por  $\delta(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$  onde  $k$  é uma constante.

a. Como  $M = \iint_D \delta(x, y) \, dx \, dy$ , então temos que  $M = k \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$ .  
Passando para coordenadas polares, temos:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ dx \, dy = r \, dr \, d\theta \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}.$$

Além disso,  $D_{r\theta}$  é dado por:

$$D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}.$$

Então,

$$\begin{aligned} M &= k \iint_{D_{r\theta}} r \cdot r \, dr \, d\theta = k \iint_{D_{r\theta}} r^2 \, dr \, d\theta = k \int_0^1 r^2 \int_0^\pi d\theta \, dr = \\ &= k\pi \int_0^1 r^2 \, dr = \frac{k\pi}{3} \, u.m. \end{aligned}$$

b. Como  $\delta(x, y)$  é uma função par e  $D$  tem simetria em relação ao eixo  $y$ , então  $\bar{x} = 0$ . Sabemos que

$$\bar{y} = \frac{\iint_D y \delta(x, y) \, dx \, dy}{M},$$

onde

$$\begin{aligned} \iint_D y \delta(x, y) \, dx \, dy &= k \iint_D y \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy = \\ &= k \iint_{D_{r\theta}} r \sin \theta \cdot r \cdot r \, dr \, d\theta = k \iint_{D_{r\theta}} r^3 \sin \theta \, dr \, d\theta = \\ &= k \int_0^1 r^3 \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \, dr = k [-\cos \theta]_0^\pi \int_0^1 r^3 \, dr = \\ &= 2k \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\bar{y} = \frac{\frac{k}{2}}{\frac{k\pi}{3}} = \frac{3}{2\pi}.$$

Portanto, o centro de massa está localizado em  $\left(0, \frac{3}{2\pi}\right)$ .

### Exercício 3.1.

1. Calcule as coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$  do centro de massa de uma chapa homogênea  $D$  com o formato de um triângulo isósceles com base 10 cm e altura 5 cm.
2. Suponha que uma lâmina  $D$  tem a forma da região triangular de vértices  $(0, 0)$ ,  $(3, 0)$  e  $(3, 5)$  e a densidade  $\delta(x, y)$  em cada ponto  $P = (x, y) \in D$  é igual à distância de  $P$  ao eixo  $y$ . Calcule a massa total e as coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$  do centro de massa de  $D$ .
3. Determine as coordenadas do centro de massa da região  $D$  determinada por  $x^2 + y^2 \geq 1$ ,  $x^2 + y^2 \leq 4$  e  $y \geq 0$ , se a densidade de massa em cada ponto é proporcional à distância do ponto à origem.
4. Uma lâmina plana  $D$  tem a forma da região delimitada pelas curvas  $y = x^2 + 1$  e  $y = x + 3$ . Sua densidade de massa no ponto  $(x, y)$  é proporcional à distância desse ponto ao eixo  $x$ . Calcule
  - a. a massa de  $D$ .
  - b. a primeira coordenada  $\bar{x}$  do centro de massa de  $D$ .
5. Calcule o momento de inércia de um disco circular homogêneo de diâmetro 10 cm.
  - a. em relação a seu próprio centro.
  - b. em relação a seu diâmetro.
6. Calcule a massa de uma lâmina delimitada por  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$ , se a densidade em um ponto é proporcional à distância desse ponto a  $(1, 2)$ .
7. Uma lâmina homogênea tem a forma de um triângulo retângulo isósceles com lados iguais de medida  $a$ . Ache o momento de inércia em relação a um dos lados iguais.
8. Calcule a massa de uma chapa  $D$  limitada pelas curvas  $x^2 + y^2 = 2x$ ,  $x^2 + y^2 = 4x$ ,  $y = x$  e  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ , sabendo que a densidade de massa em um ponto é inversamente proporcional à distância do ponto a origem.



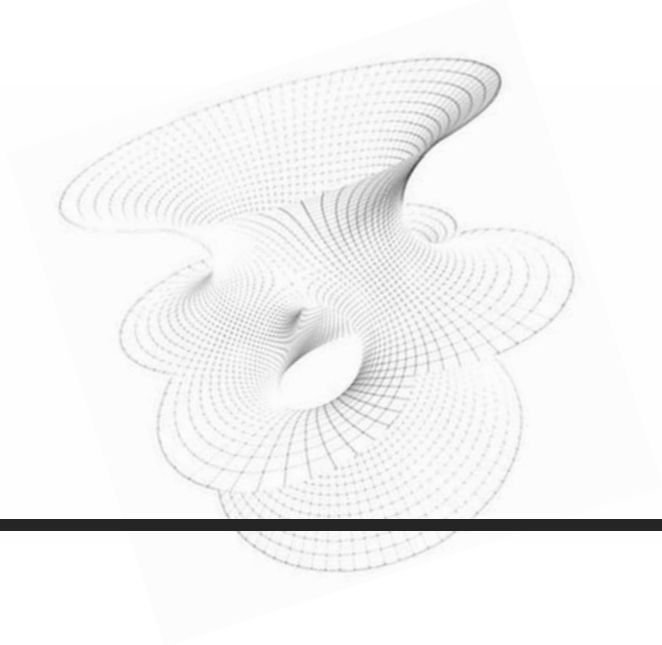
9. Mostre que o momento de inércia em relação ao eixo  $y$  de uma placa homogênea de massa  $M$ , limitada por  $x + y = 4$ ,  $x = 4$ ,  $y = 4$  é igual a  $8M$ .
10. Seja uma lâmina delgada representada pela região  $D$  determinada por  $y \leq x$ ,  $y \geq -x$ ,  $x^2 + y^2 \geq 2x$  e  $x^2 + y^2 \leq 4x$ . Se a densidade em cada ponto  $P = (x, y)$  da lâmina é dada por  $\delta(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  determine:
- a massa de  $D$ ;
  - o momento de inércia polar em relação à origem.



# Aula 4

## INTEGRAIS TRIPLAS

---



# O b j e t i v o s

- 1 compreender a noção de integral tripla;
- 2 reduzir o cálculo de uma integral tripla a uma integral dupla.

## INTEGRAIS TRIPLAS

Na Aula 1, você aprendeu a noção de integral dupla. Agora, você verá o conceito de integral tripla.

Seja  $f : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $W$  é uma região sólida do  $\mathbb{R}^3$  (região limitada e fechada de  $\mathbb{R}^3$ ). Como  $W$  é limitada, então existe um paralelepípedo (ou caixa)  $R = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ , contendo  $W$ . Dividimos  $R$  em  $n^3$  subcaixas  $R_{ijk}$ , por planos paralelos aos planos coordenados, todas de mesmo volume  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ , escolhemos  $(x_i^*, y_j^*, z_k^*) \in R_{ijk}$  e formamos a soma

$$S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f(x_i^*, y_j^*, z_k^*) \Delta V$$

onde  $f(x_i^*, y_j^*, z_k^*) = 0$  se  $(x_i^*, y_j^*, z_k^*) \notin W$ , dita *soma de Riemann de  $f$* .

Se existir  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L$ , dizemos que  $f$  é integrável e o número  $L$  é dito integral tripla de  $f$  sobre o sólido  $W$  e é indicado por

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz \text{ ou } \iiint_W f(x, y, z) dV \text{ ou } \iiint_W f dV.$$



i. Se  $f$  é contínua em  $W$  então  $f$  é integrável.

ii. Se  $f(x, y, z) = 1$  em  $W$ , então  $\iiint_W dx dy dz = V(W)$ .

iii.  $\iiint_W (f + g) dV = \iiint_W f dV + \iiint_W g dV$ .

iv.  $\iiint_W kf dV = k \iiint_W f dV$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

v. Se  $\delta(x, y, z)$  é contínua e positiva em  $W$ , e representa a densidade volumétrica de massa (massa por unidade de volume), então a massa  $M$  de  $W$  é dada por

$$M = \iiint_W \delta(x, y, z) dx dy dz.$$

vi. O centro de massa  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  é dado por

$$\bar{x} = \frac{\iiint_W x \cdot \delta(x, y, z) dV}{M}$$

$$\bar{y} = \frac{\iiint_W y \cdot \delta(x, y, z) dV}{M}$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint_W z \cdot \delta(x, y, z) dV}{M}.$$

vii. O momento de inércia em relação a um eixo  $E$  é dado por

$$I_E = \iiint_W r^2(x, y, z) \cdot \delta(x, y, z) dV$$

onde  $r(x, y, z) = \text{distância de } (x, y, z) \text{ ao eixo } E$ .

Se eixo  $E = \text{eixo } z$ , então

$$I_z = \iiint_W (x^2 + y^2) \delta(x, y, z) dV.$$

Se eixo  $E = \text{eixo } y$ , então

$$I_y = \iiint_W (x^2 + z^2) \delta(x, y, z) dV.$$

Se eixo  $E = \text{eixo } x$ , então

$$I_x = \iiint_W (y^2 + z^2) \delta(x, y, z) dV.$$

## REDUÇÃO DO CÁLCULO DE UMA INTEGRAL TRÍPLA A UMA INTEGRAL DUPLA

Observamos que um domínio de integração pode ser descrito como uma reunião de regiões dadas por:

$$W_1 = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D_{xy} \text{ e } z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$$

onde  $D_{xy} = \text{proj}_{x\mathcal{O}y}^{W_1}$  (projeção de  $W_1$  sobre o plano  $xy$ ) e  $z_1(x, y)$ ,  $z_2(x, y)$  contínuas;

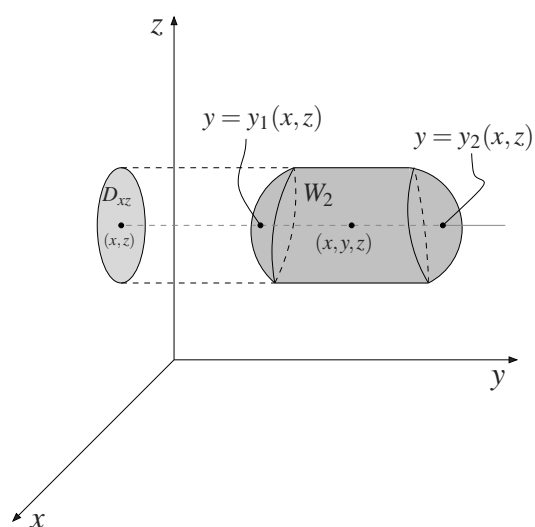
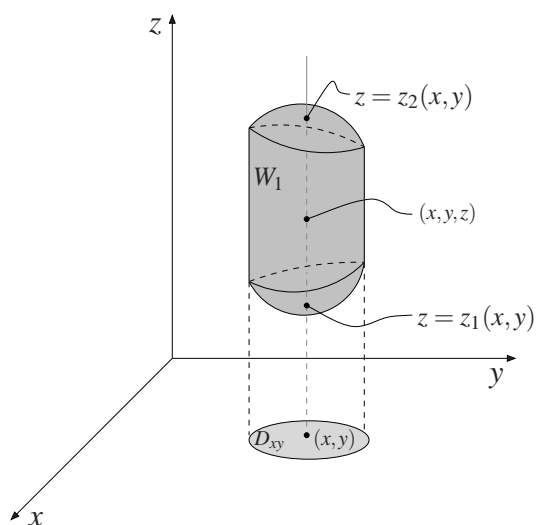
$$W_2 = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in D_{xz} \text{ e } y_1(x, z) \leq y \leq y_2(x, z)\}$$

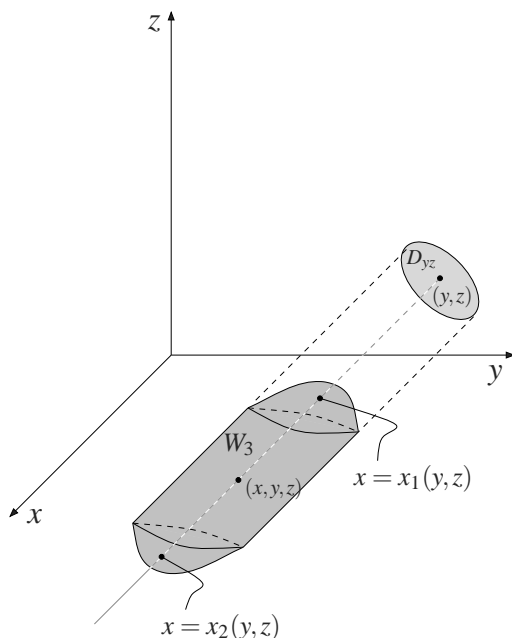
onde  $D_{xz} = \text{proj}_{xz}^{W_2}$  e  $y_1(x, z)$ ,  $y_2(x, z)$  contínuas;

$$W_3 = \{(x, y, z) \mid (y, z) \in D_{yz} \text{ e } x_1(y, z) \leq x \leq x_2(y, z)\}$$

onde  $D_{yz} = \text{proj}_{yz}^{W_3}$  e  $x_1(y, z)$ ,  $x_2(y, z)$  contínuas.

Os esboços de  $W_1$ ,  $W_2$  e  $W_3$  são:





Prova-se que

$$\iiint_{W_1} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xy}} \left[ \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

$$\iiint_{W_2} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xz}} \left[ \int_{y_1(x, z)}^{y_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right] dx dz$$

$$\iiint_{W_3} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{yz}} \left[ \int_{x_1(y, z)}^{x_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right] dy dz.$$

#### Exemplo 4.1.

Calcule  $\iiint_W e^{x^2} dx dy dz$  onde  $W$  é o conjunto  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq x$  e  $0 \leq z \leq 1$ .

**Solução:** Definimos  $W$  por:

$$W = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in D_{xz} \text{ e } 0 \leq y \leq x\}$$

onde  $D_{xz} = [0, 1] \times [0, 1]$ .

Logo:

$$\begin{aligned} \iiint_W e^{x^2} dx dy dz &= \iint_{D_{xz}} \left[ \int_0^x e^{x^2} dy \right] dx dz = \\ \iint_{D_{xz}} x e^{x^2} dx dz &= \int_0^1 \int_0^1 x e^{x^2} dx dz = \left[ \frac{e^{x^2}}{2} \right]_0^1 \int_0^1 dz = \frac{e-1}{2}. \end{aligned}$$

**Exemplo 4.2.**

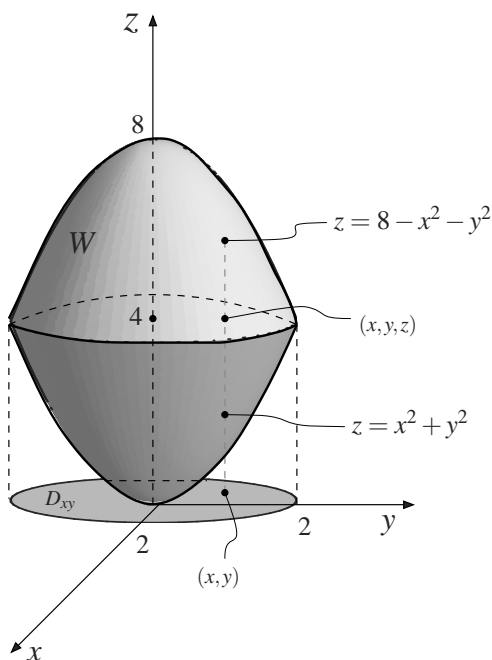
Calcule o volume do sólido limitado pelos paraboloides de equação  $z = x^2 + y^2$  e  $z = 8 - x^2 - y^2$ .

**Solução:** Inicialmente, calculemos a interseção das superfícies:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 8 - x^2 - y^2 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 8 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4.$$

Logo, a interseção dos paraboloides é a circunferência  $x^2 + y^2 = 4$ , situada no plano  $z = 4$ .



Descrevemos  $W$  por:

$$W = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D_{xy} \text{ e } x^2 + y^2 \leq z \leq 8 - x^2 - y^2\}$$

onde  $D_{xy}$  é o disco  $x^2 + y^2 \leq 4$ . Como  $V(W) = \iiint_W dx dy dz$ , então

$$V(W) = \iint_{D_{xy}} \left[ \int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} [8 - 2(x^2 + y^2)] dx dy.$$



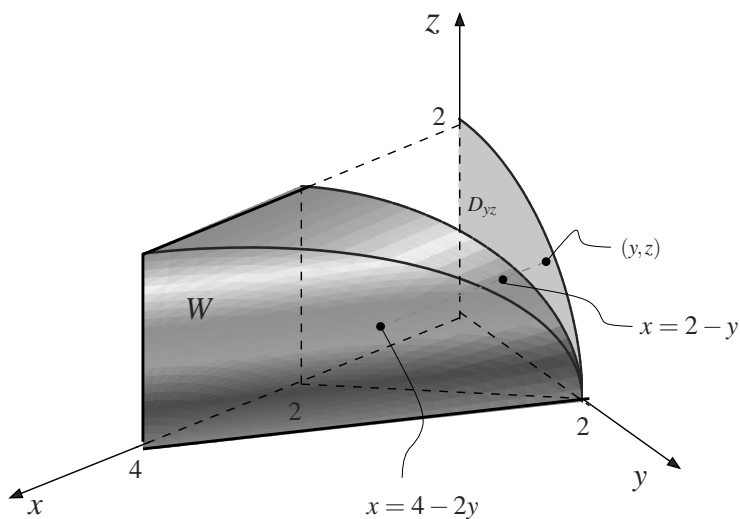
Passando para coordenadas polares, temos:

$$\begin{aligned} V(W) &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (8 - 2r^2) r d\theta dr = 2\pi \int_0^2 (8r - 2r^3) dr = \\ &= 2\pi \left[ 4r^2 - \frac{r^4}{2} \right]_0^2 = 2\pi(16 - 8) = 16\pi \text{ u.v.} \end{aligned}$$

**Exemplo 4.3.**

Calcule a massa do sólido  $W$ , no primeiro octante, limitado pelos planos  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x + y = 2$ ,  $x + 2y = 4$  e o cilindro  $y^2 + z^2 = 4$ , sendo a densidade igual à distância de  $(x, y, z)$  ao plano  $xz$ .

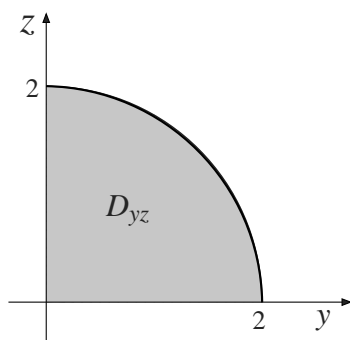
**Solução:** O esboço de  $W$  está representado na figura que se segue.



Podemos definir  $W$  por:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y, z) \in D_{yz} \text{ e } 2 - y \leq x \leq 4 - 2y\}$$

onde  $D_{yz}$  é tal que  $y^2 + z^2 \leq 4$ ,  $y \geq 0$  e  $z \geq 0$ .



Como  $M = \iiint_W \delta(x, y, z) dx dy dz$ , onde  $\delta(x, y, z) = |y| = y$ , pois  $y \geq 0$ , então:

$$\begin{aligned} M &= \iiint_W y dx dy dz = \iint_{D_{yz}} \left[ \int_{2-y}^{4-2y} y dx \right] dy dz = \\ &= \iint_{D_{yz}} y(4-2y-2+y) dy dz = \iint_{D_{yz}} (2y-y^2) dy dz. \end{aligned}$$

Passando para coordenadas polares, temos:

$$\begin{cases} y = r \cos \theta \\ z = r \sin \theta \\ dy dz = r dr d\theta \end{cases}$$

e  $D_{r\theta}$  é dado por  $D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \end{cases}$ . Então:

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 (2r \cos \theta - r^2 \cos^2 \theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 (2r^2 \cos \theta - r^3 \cos^2 \theta) dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{2r^3}{3} \cos \theta - \frac{r^4}{4} \cos^2 \theta \right]_0^2 d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left( \frac{16}{3} \cos \theta - 4 \cos^2 \theta \right) d\theta \\ &= \left[ \frac{16}{3} \sin \theta - \frac{4}{2} \left( \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{16}{3}(1-0) - 2 \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{16}{3} - \pi \text{ u.m.} \end{aligned}$$

### Exercício 4.1.

1. Calcule  $\iiint_W x dx dy dz$  onde  $W$  é o sólido limitado pelos planos coordenados e pelo plano  $x + y + z = 1$ .
2. Seja  $W$  o sólido limitado pelas superfícies  $z + x^2 = 4$ ,  $y + z = 4$ ,  $y = 0$  e  $z = 0$ .
  - a. Esboce  $W$ .
  - b. Calcule, por integral tripla, o volume do sólido  $W$ .

3. Calcule a massa do sólido  $W$  situado no primeiro octante, limitado pelos planos  $x = 0$ ,  $y = 2x$  e pelo cilindro  $y^2 + z^2 = 2$ , supondo que a densidade no ponto  $(x, y, z)$  é proporcional à distância deste ponto ao plano  $xy$ .
4. Seja  $W$  um sólido limitado pelas superfícies  $y^2 + z = 4$ ,  $y + z = 2$ ,  $x = 0$  e  $x = 2$ .
  - a. Esboce  $W$ .
  - b. Calcule  $\iiint_W e^{ax} dV$ .
5. Seja  $W$  um sólido limitado pelas superfícies  $z = y^2$ ,  $z = 2 - y^2$ ,  $x = 0$  e  $x + z = 4$ .
  - a. Esboce  $W$ .
  - b. Calcule o volume de  $W$ .
6. Calcule o volume da região  $W$  no primeiro octante limitada pelos planos  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x + y = 2$ ,  $2y + x = 6$  e o cilindro  $y^2 + z^2 = 4$ .
7. Determine o volume do sólido limitado pelas superfícies  $z = 3x^2$ ,  $z = 4 - x^2$ ,  $y = 0$  e  $z + y = 6$ .
8. Seja o sólido  $W$  limitado pelas superfícies  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z + y = 2$  e  $z = 0$ .
  - a. Esboce  $W$ .
  - b. Calcule a massa de  $W$ , supondo que a densidade em  $(x, y, z)$  é dada por  $\delta(x, y, z) = z$ .
9. Um sólido tem a forma de um cilindro circular de raio de base  $a$  e altura  $h$ . Determine a massa supondo que a densidade em cada ponto seja proporcional à distância do ponto a uma das bases do cilindro.
10. Calcule a massa de um sólido homogêneo limitado pelas superfícies  $z = y$ ,  $z = 4 - x^2$ ,  $z = 0$  e  $y = -4$  com  $z \geq 0$ .



# Aula 5

## MUDANÇA DE VARIÁVEIS NA INTEGRAL TRIPLA

---



## O b j e t i v o s

- 1 aprender a fazer mudança de variáveis em integrais triplas;
- 2 estudar a mudança de variáveis cilíndricas;
- 3 estudar a mudança de variáveis esféricas.

## MUDANÇA DE VARIÁVEIS NA INTEGRAL TRIPLA

Aqui temos um resultado similar à mudança de variáveis em integral dupla:

$$\begin{aligned} \iiint_W f(x, y, z) \, dx dy dz &= \\ &= \iiint_{W_{uvw}} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| \, du dv dw \end{aligned}$$

onde

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$$

é o jacobiano da mudança de variáveis

$$\varphi(u, v, w) = (x, y, z) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

e  $W_{uvw} = \varphi(W)$ .

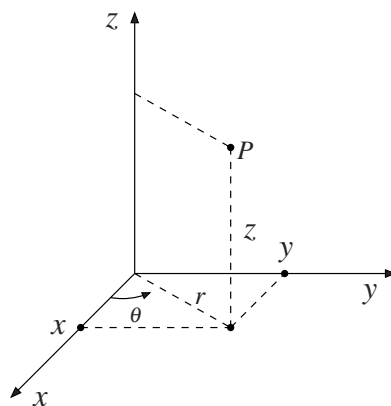
## UM CASO PARTICULAR DE MUDANÇA DE VARIÁVEIS

### COORDENADAS CILÍNDRICAS

As coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$  são definidas por

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}.$$

Portanto,  $x^2 + y^2 = r^2$ , com  $r \geq 0$  e, também,  $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$ , para algum  $\theta_0$  e  $z \in \mathbb{R}$ .



As coordenadas  $r$  e  $\theta$  são as mesmas que as coordenadas polares e, portanto, as suas variações são encontradas na projeção de  $W$  no plano  $xy$ . A variação de  $z$  é encontrada diretamente no

sólido. Supondo que  $z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)$ , então a variação de  $z$  será  $z_1(r \cos \theta, r \sin \theta) \leq z \leq z_2(r \cos \theta, r \sin \theta)$ . Calculando o jacobiano da transformação cilíndrica, encontramos

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = r \quad (\text{Verifique!})$$

Logo:

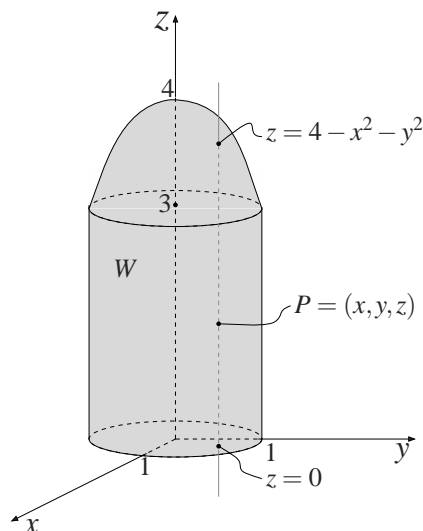
$$\iiint_W f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{W_{r\theta z}} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r \, dr \, d\theta \, dz$$

é a fórmula da integral tripla em coordenadas cilíndricas.

### Exemplo 5.1.

Calcule  $\iiint_W (zx^2 + zy^2) \, dx \, dy \, dz$ , sendo  $W$  o sólido limitado pelo cilindro  $x^2 + y^2 \leq 1$ , pelo plano  $z = 0$  e pelo parabolóide  $z = 4 - x^2 - y^2$ .

**Solução:** De  $z = 4 - x^2 - y^2$  e  $x^2 + y^2 = 1$ , temos  $z = 3$ . Isto significa que as superfícies apresentam interseção no plano  $z = 3$ . O esboço de  $W$  é a figura que se segue.



Passando para coordenadas cilíndricas, temos

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \\ dx \, dy \, dz = r \, dr \, d\theta \, dz \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}.$$

Seja  $P = (x, y, z) \in W$ . Uma reta por  $P$ , paralela ao eixo  $z$ , intercepta a fronteira de  $W$  em  $z = 0$  e  $z = 4 - x^2 - y^2 = 4 - r^2$ . Logo,  $0 \leq z \leq 4 - r^2$ . Como a projeção de  $W$  no plano  $xy$  é o disco  $x^2 + y^2 \leq 1$ , então  $0 \leq r \leq 1$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Logo, o conjunto  $W_{r\theta z}$  é dado por:

$$W_{r\theta z}: \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 4 - r^2 \end{cases}.$$

Temos,

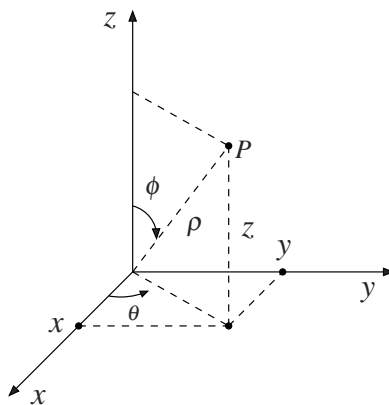
$$\begin{aligned} \iiint_W (zx^2 + zy^2) dx dy dz &= \iiint_W z(x^2 + y^2) dx dy dz = \\ &= \iiint_{W_{r\theta z}} zr^2 \cdot r dr d\theta dz = \iiint_{W_{r\theta z}} zr^3 dr d\theta dz = \\ &= \int_0^1 r^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{4-r^2} z dz d\theta dr = \int_0^1 r^3 \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^{4-r^2} \int_0^{2\pi} d\theta dr = \\ &= \pi \int_0^1 r^3 (4 - r^2)^2 dr = \pi \int_0^1 (16r^3 - 8r^5 + r^7) dr = \\ &= \pi \left[ 4r^4 - \frac{4r^6}{3} + \frac{r^8}{8} \right]_0^1 = \frac{67\pi}{24}. \end{aligned}$$

## INTEGRAL TRIPLA EM COORDENADAS ESFÉRICAS

As coordenadas esféricas  $(\rho, \phi, \theta)$  são definidas por

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}.$$

Portanto,  $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ , com  $\rho \geq 0$ ,  $0 \leq \phi \leq \pi$  e, também,  $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$ , para algum  $\theta_0$ .



A coordenada  $\rho$  mede a distância do ponto  $P$  à origem (portanto  $\rho \geq 0$ ). A coordenada  $\theta$  é a mesma que a coordenada cilíndrica e sua variação é encontrada na projeção de  $W$  no plano  $xy$ . A coordenada  $\phi$  é o ângulo entre o eixo  $z$  positivo (onde  $\phi = 0$ ) e a semirreta  $OP$ . A variação máxima de  $\phi$  é  $0 \leq \phi \leq \pi$ .



Calculando o jacobiano da transformação esférica, temos:

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \rho^2 \sin \phi \quad (\text{Verifique!})$$

Logo:

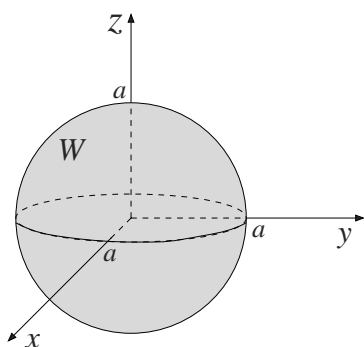
$$\begin{aligned} \iiint_W f(x, y, z) dV &= \\ &= \iiint_{W_{\rho\phi\theta}} f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \end{aligned}$$

é a fórmula da integral tripla em coordenadas esféricas.

### Exemplo 5.2.

Calcule o volume da esfera  $W : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ , com  $a > 0$ .

**Solução:** O esboço de  $W$  está representado na figura que se segue.



Passando para coordenadas esféricas, temos

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \\ dV = dx dy dz = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \end{cases}.$$

A equação da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  fica  $\rho = a$ . Logo, o conjunto  $W_{\rho\phi\theta}$  é dado por:

$$W_{\rho\phi\theta} : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq a \\ 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}.$$

Como  $V(W) = \iiint_W dx dy dz$  então:

$$\begin{aligned}
 V(W) &= \iiint_{W_{\rho\phi\theta}} \rho^2 \sin \phi \, d\rho d\phi d\theta \\
 &= \int_0^a \rho^2 \int_0^\pi \sin \phi \int_0^{2\pi} d\theta d\phi d\rho \\
 &= 2\pi \int_0^a \rho^2 \int_0^\pi \sin \phi \, d\phi d\rho \\
 &= 2\pi [-\cos \phi]_0^\pi \int_0^a \rho^2 d\rho \\
 &= 4\pi \left[ \frac{\rho^3}{3} \right]_0^a \\
 &= \frac{4\pi a^3}{3} \text{ u.v.}
 \end{aligned}$$

**Exemplo 5.3.**

Calcule o volume do elipsoide  $W : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ , com  $a, b, c > 0$ .

**Solução:** Fazemos a mudança de variáveis

$$\begin{cases} x = au \\ y = bv \\ z = cw \end{cases} .$$

Temos

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc \neq 0.$$

Logo,

$$dx dy dz = |J| du dv dw = abc du dv dw.$$

O elipsoide  $W : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$  é transformado na esfera  $W_{uvw} : u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$ . Como  $V(W) = \iiint_W dx dy dz$ , então:

$$\begin{aligned} V(W) &= \iiint_{W_{uvw}} |J| du dv dw \\ &= abc \iiint_{W_{uvw}} du dv dw \\ &= abc V(W_{uvw}) \\ &= abc \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3 \\ &= \frac{4}{3} \pi abc. \end{aligned}$$

### Exercício 5.1.

1. Calcule a massa do sólido limitado pelo parabolóide  $z = x^2 + y^2$  e pelo plano  $z = 4$ , sendo a densidade em cada ponto do sólido dada por  $\delta(x, y, z) = (x^2 + y^2)^{1/2}$ .
2. Calcule a massa do cone  $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$ , sendo a densidade no ponto  $(x, y, z)$  proporcional ao quadrado da distância do ponto ao eixo  $z$ .
3. Calcule  $\iiint_W \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV$ , onde  $W$  é limitado inferiormente pelo cone  $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$  e superiormente pela esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ .
4. Considere a integral iterada dada em coordenadas cilíndricas:

$$I = \int_0^\pi \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-r^2}} r^2 \sin \theta dz dr d\theta.$$

- a. Expresse  $I$  em coordenadas esféricas segundo a ordem de integração  $d\theta d\phi d\rho$ .
  - b. Calcule o valor de  $I$ .
5. Seja  $W$  um sólido dado pelas inequações  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z$  e  $z \geq \sqrt{\frac{1}{3}(x^2 + y^2)}$ .
    - a. Esboce  $W$ .
    - b. Calcule o volume de  $W$ .

6. Calcule o volume do conjunto  $W$  dado pelas inequações  $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1$  e  $z \geq x^2 + y^2$ .

7. Calcule  $\iiint_W \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dV$ , sendo  $W$  a região interior ao cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , limitada superiormente pela esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  e inferiormente pela esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

8. Calcule a massa do sólido  $W$  interior ao cone  $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$  e limitado pela esfera  $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ , sendo a densidade igual ao quadrado da distância de  $(x, y, z)$  ao plano  $z = 0$ .

9. Considere a integral iterada

$$I = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z \sqrt{x^2 + y^2} dz dy dx.$$

a. Expresse  $I$  em coordenadas cilíndricas e calcule o valor de  $I$ .

b. Expresse  $I$  em coordenadas esféricas (sem calculá-la).

10. Considere o sólido homogêneo, limitado pelo plano  $z = 0$ , o cilindro  $x^2 + y^2 = 2y$  e pelo cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Calcule o momento de inércia em relação ao eixo  $z$ .

# Aula 6

## CURVAS PARAMETRIZADAS

---



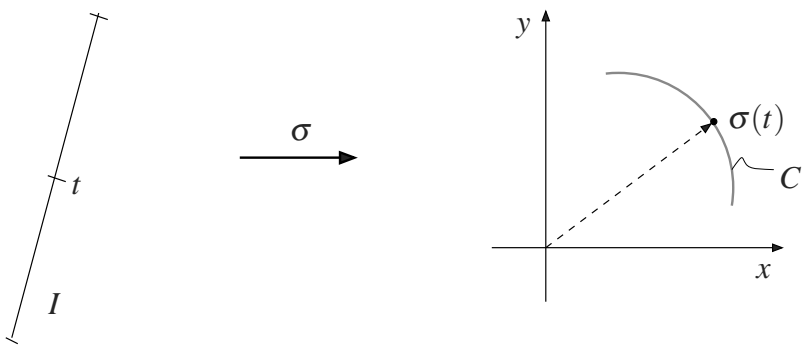
## Objetivos

- 1 parametrizar curvas planas e espaciais;
- 2 compreender a noção de integral de linha de campo escalar;
- 3 estudar algumas propriedades.

# CURVAS PARAMETRIZADAS

## PARAMETRIZAÇÃO DE CURVAS

Parametrizar uma curva  $C \subset \mathbb{R}^n$  ( $n = 2$  ou  $3$ ) consiste em apresentar uma função vetorial  $\sigma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $n = 2$  ou  $3$ ), onde  $I$  é um intervalo e  $\sigma(I) = C$ .



### Exemplo 6.1.

Sendo  $A, B \in \mathbb{R}^n$  ( $n = 2$  ou  $3$ ), parametrize o segmento de reta  $C$  de extremidade inicial  $A$  e final  $B$ .

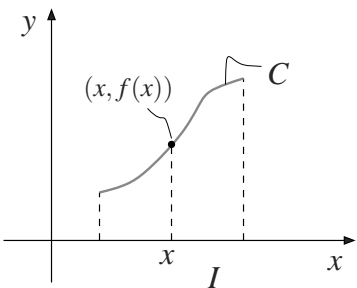
**Solução:** Se  $P \in C$ , então  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{AB}$ ,  $0 \leq t \leq 1$  ou  $P - 0 = B - 0 + t(B - A)$ , com  $0 \leq t \leq 1$  ou  $P = B + t(B - A)$ , com  $0 \leq t \leq 1$ . Então, uma parametrização do segmento  $C$  é dada por

$$\sigma(t) = B + t(B - A),$$

com  $0 \leq t \leq 1$ .

### Exemplo 6.2.

Seja  $C \subset$  plano  $xy$ , gráfico de uma função  $y = f(x)$ ,  $x \in I$ .

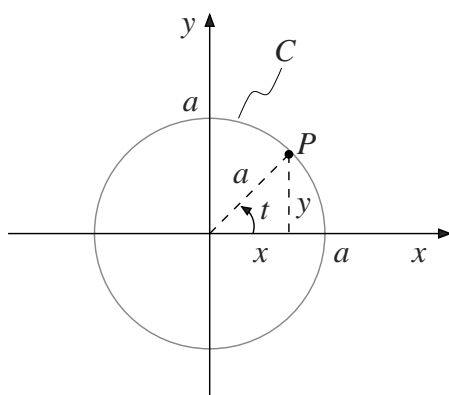


Então, uma parametrização de  $C$  é dada por

$$\sigma(t) = (t, f(t)), t \in I.$$

**Exemplo 6.3.**

Seja  $C$  a circunferência  $x^2 + y^2 = a^2$ , com  $a > 0$ . Seja  $P = (x, y) \in C$ . Seja  $t$  o ângulo em radianos entre o eixo positivo  $x$  e a semirreta  $OP$ .



Observe que, quando  $t$  aumenta de 0 a  $2\pi$ , o ponto  $P = (x, y) = (a \cos t, a \sin t)$  se move, uma vez sobre  $C$  no sentido anti-horário a partir do ponto  $(a, 0)$ . Então, uma parametrização de  $C$  é

$$\sigma_1(t) = (a \cos t, a \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Observe que  $\sigma_2(t) = (a \sin t, a \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  é também uma parametrização de  $C$ , pois  $x^2 + y^2 = a^2$ . Neste caso, quando  $t$  aumenta de 0 a  $2\pi$ , o ponto  $P$  se move uma vez ao longo de  $C$  no sentido horário a partir do ponto  $(0, a)$ .

Observe que  $\sigma_3(t) = (a \cos(2\pi - t), a \sin(2\pi - t)) = (a \cos t, -a \sin t)$ , com  $0 \leq t \leq 2\pi$  é outra parametrização de  $C$  e  $P$  se move ao longo de  $C$  no sentido horário a partir do ponto  $(a, 0)$ .

**Exemplo 6.4.**

Seja a circunferência  $C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$ , de centro  $(x_0, y_0)$  e raio  $a$ . Efetuando uma mudança de variáveis  $u = x - x_0$  e  $v = y - y_0$ , temos

$$u^2 + v^2 = a^2$$

que é uma circunferência no plano  $uv$ , de centro  $(0, 0)$  e raio  $a$ .

Logo,

$$\begin{cases} u = a \cos t \\ v = a \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Substituindo acima, temos

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cos t \\ y = y_0 + a \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Assim, uma parametrização diferenciável de  $C$  é dada por

$$\sigma(t) = (x_0 + a \cos t, y_0 + a \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi.$$

### Exemplo 6.5.

Seja uma elipse  $C : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ . Fazendo  $u = \frac{x-x_0}{a}$  e  $v = \frac{y-y_0}{b}$ , mostramos que

$$\sigma(t) = (x_0 + a \cos t, y_0 + b \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$$

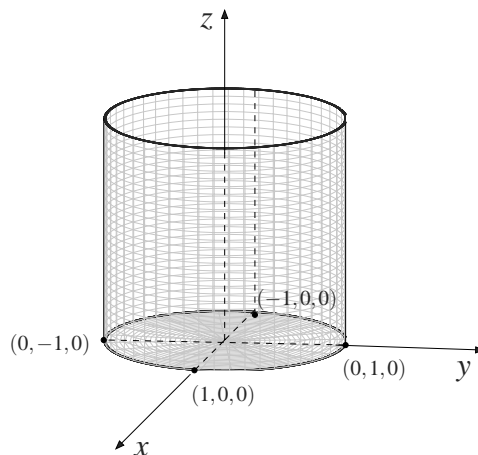
é uma parametrização de  $C$ .

### Exemplo 6.6.

Seja  $C$  uma curva do espaço dada pela interseção do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  com o plano  $x + z = 2$ .

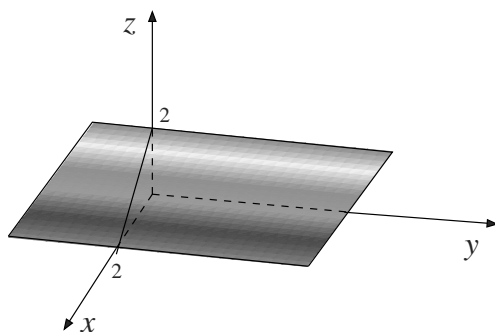
- Esboce  $C$ .
- Apresente uma parametrização diferenciável para  $C$ .

**Solução:** a. Inicialmente, façamos o esboço do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ . Desenhemos, no plano  $xy$ , a circunferência  $x^2 + y^2 = 1$ . Pelos pontos  $(1,0,0)$ ,  $(-1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$  e  $(0,-1,0)$  tracemos paralelas ao eixo  $z$ .

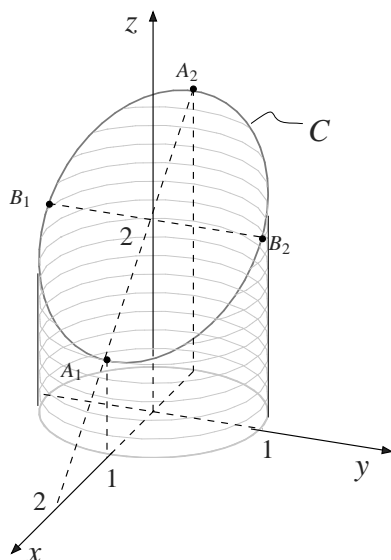




Para esboçar o plano  $x + z = 2$ , traçamos a reta  $x + z = 2$  no plano  $xz$ . Observe que a equação do plano não contém a variável  $y$ . Por isso, por pontos da reta traçamos paralelas ao eixo  $y$ .



Agora, juntemos as duas figuras, procurando destacar alguns pontos de interseção. A reta  $x + z = 2$  intercepta o cilindro nos pontos  $A_1$  e  $A_2$ . Por outro lado, a reta do plano, paralela ao eixo  $y$ , passando por  $(0, 0, 2)$  intercepta o cilindro nos pontos  $B_1$  e  $B_2$ . A curva  $C$  passa por  $A_1, B_1, A_2$  e  $B_2$ .



b. Seja  $(x, y, z) \in C$ . Logo,  $x$  e  $y$  satisfazem  $x^2 + y^2 = 1$ . Assim,  $x = \cos t$  e  $y = \sin t$ , com  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Como  $z = 2 - x$ , então  $z = 2 - \cos t$ . Logo,

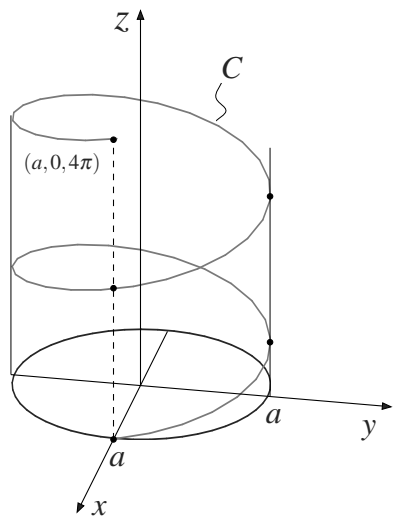
$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t, 2 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

é uma parametrização de  $C$ .

Exemplo 6.7.

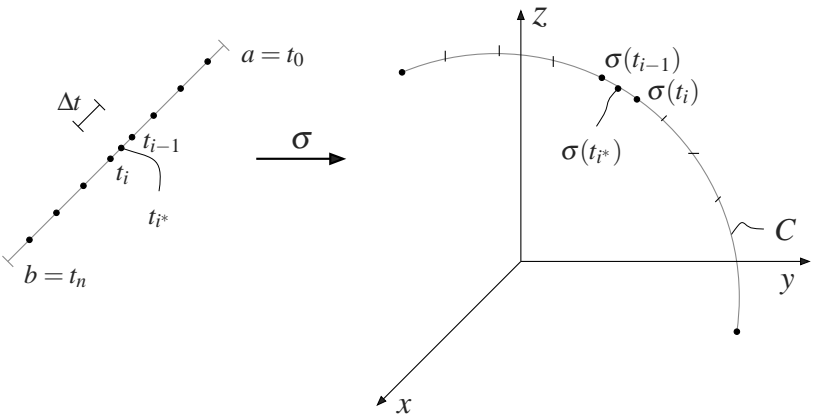
Seja  $C$  a curva no espaço representada pela função vetorial de equação  $\sigma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ ,  $0 \leq t \leq 4\pi$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ . Esboce  $C$ , dita hélice circular.

**Solução:** De  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ , temos  $x^2 + y^2 = a^2$ . Isto significa que  $C$  está contida no cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$ . Como  $z = bt$ , quando  $t$  vai de  $0$  a  $4\pi$ , o ponto  $(x, y, z)$  percorre a hélice contida no cilindro.



INTEGRAL DE LINHA DE CAMPO ESCALAR

Nesta aula definiremos uma integral similar a uma integral definida. Sejam dados um campo escalar em  $\mathbb{R}^3$  ou uma função real de três variáveis  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  e uma curva  $C$  em  $\mathbb{R}^3$ , dada por  $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ,  $t \in [a, b]$ , com  $\sigma$  de classe  $C^1$  (veja a figura que se segue).



Dividimos o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos  $I_i$ , com  $i = 1, \dots, n$ , de mesmo comprimento  $\Delta t = \frac{b-a}{n}$ . Logo, a curva  $C$  fica dividida em  $n$  subarcs de comprimento  $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ , onde  $\Delta s_i \simeq \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t$  para algum  $t_i^* \in I_i$ . Formemos a soma

$$\sum_{i=1}^n f(\sigma(t_i^{**})) \Delta s_i = \sum_{i=1}^n f(\sigma(t_i^{**})) \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t.$$

Definimos a integral de linha de  $f$  sobre  $C$  por

$$\int_C f ds = \int_C f(x, y, z) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\sigma(t_i^{**})) \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t$$

se o limite existir.



- i. Se  $f$  é uma função contínua, então o limite existe e, portanto,

$$\begin{aligned} \int_C f(x, y, z) ds &= \int_a^b f(\sigma(t)) \underbrace{\|\sigma'(t)\|}_{ds} dt = \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

- ii. Se  $f(x, y)$  é uma função contínua em  $\mathbb{R}^2$  e  $C$  uma curva em  $\mathbb{R}^2$ , dada por  $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in [a, b]$ , com  $\sigma$  de classe  $C^1$ , então definimos

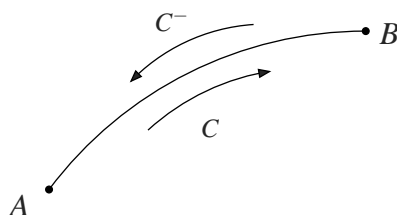
$$\begin{aligned} \int_C f ds &= \int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(\sigma(t)) \underbrace{\|\sigma'(t)\|}_{ds} dt = \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

- iii. Se  $f(x, y) = 1$  (ou  $f(x, y, z) = 1$ ), então

$$\int_C f ds = \text{comprimento de } C.$$

- iv. A integral de linha de um campo escalar  $f$  não depende da parametrização de  $C$  e nem de sua orientação, isto é, denotando por  $C^-$  a curva  $C$  percorrida em outro sentido, então

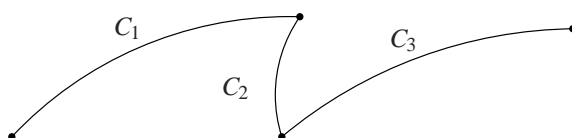
$$\int_{C^-} f ds = \int_C f ds.$$



- v. Se  $C$  é uma curva dada por uma parametrização  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $n = 2$  ou  $3$ ),  $C^1$  por partes, isto é,  $\sigma$  é contínua e existe uma partição  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  de  $[a, b]$  de modo que  $\sigma_i = \sigma|_{[t_{i-1}, t_i]}$  é de classe  $C^1$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Então

$$\int_C f ds = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} f ds$$

onde  $C_i = \sigma_i([t_{i-1}, t_i])$ .



### Exemplo 6.8.

Seja  $C$  a interseção do cilindro parabólico  $x = y^2$  com a parte do plano  $z = y$ , tal que  $0 \leq y \leq 1$ . Calcule  $\int_C y ds$ .

**Solução:** Fazamos  $y = t$ . Logo,  $x = t^2$  e  $z = t$ . Como  $0 \leq y \leq 1$ , então temos que  $0 \leq t \leq 1$ . Assim, uma parametrização de  $C$  é dada por  $\sigma(t) = (t^2, t, t)$ , com  $0 \leq t \leq 1$ , donde  $\sigma'(t) = (2t, 1, 1)$ . Como  $ds = \|\sigma'(t)\| dt$ , então temos que  $ds = \sqrt{4t^2 + 1 + 1} dt = \sqrt{2 + 4t^2} dt$ . Assim:

$$\int_C y ds = \int_0^1 t \sqrt{2 + 4t^2} dt = \int_0^1 (2 + 4t^2)^{1/2} t dt.$$

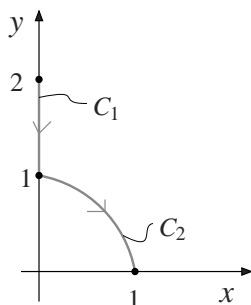
Observe que  $d(2 + 4t^2) = 8t dt$ , donde  $t dt = \frac{d(2 + 4t^2)}{8}$ . Logo:

$$\begin{aligned}\int_C y \, ds &= \frac{1}{8} \int_0^1 (2 + 4t^2)^{1/2} d(2 + 4t^2) = \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} (2 + 4t^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{12} (6^{3/2} - 2^{3/2}) = \frac{1}{6} (3\sqrt{6} - \sqrt{2}).\end{aligned}$$

**Exemplo 6.9.**

Calcule  $\int_C x \, ds$ , onde  $C$  é formado pelo segmento de reta  $C_1$  de  $(0, 2)$  a  $(0, 1)$ , seguido do arco  $C_2$  da parábola  $y = 1 - x^2$  de  $(0, 1)$  a  $(1, 0)$ .

**Solução:** O esboço de  $C$  está representado na figura a seguir.



Como  $C = C_1 \cup C_2$ , temos:

$$\int_C x \, ds = \int_{C_1} x \, ds + \int_{C_2} x \, ds = \int_{C_1^-} x \, ds + \int_{C_2} x \, ds.$$

**Cálculo de  $\int_{C_1^-} x \, ds$**

Uma parametrização de  $C_1^-$  é dada por  $\sigma(t) = (0, t)$ , com  $1 \leq t \leq 2$ . Logo,  $\sigma'(t) = (0, 1)$ , donde  $\|\sigma'(t)\| = 1$  e, portanto,  $ds = \|\sigma'(t)\| \, dt = dt$ . Assim,

$$\int_{C_1^-} x \, ds = \int_1^2 0 \, dt = 0.$$

**Cálculo de  $\int_{C_2} x \, ds$**

Uma parametrização de  $C_2$  é dada por  $\sigma(t) = (t, 1 - t^2)$ , com  $0 \leq t \leq 1$ , donde  $\sigma'(t) = (1, -2t)$ . Logo, temos que

$ds = \|\sigma'(t)\| dt = \sqrt{1+4t^2} dt$ . Então,

$$\int_{C_2} x ds = \int_0^1 t \sqrt{1+4t^2} dt = \int_0^1 (1+4t^2)^{1/2} dt.$$

Observe que  $t dt = \frac{d(1+4t^2)}{8}$ . Portanto:

$$\begin{aligned} \int_{C_2} x ds &= \frac{1}{8} \int_0^1 (1+4t^2)^{1/2} d(1+4t^2) = \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} (1+4t^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

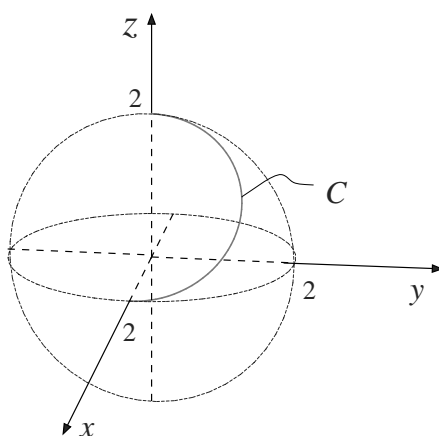
Assim:

$$\int_C x ds = \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1).$$

### Exemplo 6.10.

Seja a curva  $C$  obtida como interseção da semiesfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , com  $y \geq 0$ , com o plano  $x + z = 2$ . Calcule  $\int_C f(x, y, z) ds$ , onde  $f(x, y, z)$  é dada por  $f(x, y, z) = xy$ .

**Solução:** O esboço de  $C$  está representado na figura que se segue.



Seja  $(x, y, z) \in C$ . Então  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , com  $y \geq 0$  e  $x + z = 2$  donde  $x^2 + y^2 + (2-x)^2 = 4$ , com  $y \geq 0$  ou  $2x^2 - 4x + y^2 = 0$ , com  $y \geq 0$  ou  $2(x-1)^2 + y^2 = 2$ , com  $y \geq 0$  ou  $(x-1)^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ , com  $y \geq 0$ . Logo, a projeção de  $C$  sobre o plano  $xy$

é a semi-elipse de centro  $(1, 0)$  e semi-eixos  $1$  e  $\sqrt{2}$ . Então,

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sqrt{2} \sin t \\ z = 2 - (1 + \cos t) = 1 - \cos t \end{cases}.$$

Como  $y \geq 0$ , então  $\sqrt{2} \sin t \geq 0$ , donde  $0 \leq t \leq \pi$ . Logo, uma parametrização para  $C$  é dada por

$$\sigma(t) = (1 + \cos t, \sqrt{2} \sin t, 1 - \cos t), 0 \leq t \leq \pi.$$

Temos

$$\sigma'(t) = (-\sin t, \sqrt{2} \cos t, \sin t)$$

donde

$$ds = \|\sigma'(t)\| dt = \sqrt{\sin^2 t + 2 \cos^2 t + \sin^2 t} dt = \sqrt{2} dt.$$

Então,

$$\begin{aligned} \int_C f(x, y, z) ds &= \int_C xy ds = \int_0^\pi (1 + \cos t) (\sqrt{2} \sin t) \sqrt{2} dt \\ &= 2 \int_0^\pi (\sin t + \sin t \cos t) dt \\ &= 2 \left[ -\cos t + \frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^\pi \\ &= 4. \end{aligned}$$

### Exercício 6.1.

1. Calcule  $\int_C \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} ds$ , onde  $C$  é a curva dada por  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ , com  $0 \leq t \leq 2\pi$ .
2. Calcule  $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$  ao longo da curva  $\gamma(t) = (4 \cos t) \vec{i} + (4 \sin t) \vec{j} + 3t \vec{k}$ , com  $-2\pi \leq t \leq 2\pi$ .
3. Seja  $C$  a semicircunferência  $x^2 + y^2 = a^2, y \geq 0$  e  $a > 0$ .
  - a. Parametrize  $C$ .
  - b. Calcule  $\int_C (x^2 - y^2) ds$ .

4. Seja  $C$  o segmento de extremidades  $A = (1, 2, 3)$  e  $B = (4, 5, 6)$ .
  - a. Parametrize  $C$ .
  - b. Calcule  $\int_C (x + y + z) \, ds$ .
5. Calcular a integral  $\int_C (x - y) \, ds$ , onde  $C$  é a circunferência  $x^2 + y^2 = ax$ .
6. Calcule  $\int_C y^2 \, ds$ , onde  $C$  é a semicircunferência  $x^2 + y^2 = 2x$ , com  $y \geq 0$ .
7. Calcule  $\int_C 8x \, ds$ , onde a curva  $C$  é formada pelo arco  $C_1$  da parábola  $y = x^2$  de  $(0, 0)$  a  $(1, 1)$ , seguido pelo segmento de reta vertical  $C_2$  de  $(1, 1)$  a  $(1, 2)$ .
8. Seja  $C$  a curva interseção das superfícies  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ,  $z \geq 0$  e  $y = x$ , que liga o ponto  $A = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$  ao ponto  $B = (1, 1, \sqrt{2})$ .
  - a. Esboce  $C$ .
  - b. Parametrize  $C$ .
  - c. Calcule  $\int_C x^2 \, ds$ .
9. Calcular  $\int_C x \, ds$ , onde  $C$  é a interseção do cilindro parabólico  $y = x^2$  com a parte do plano  $z = x$ , tal que  $0 \leq x \leq 1$ .
10. Seja  $C$  a curva interseção da semiesfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 8 - 2(x + y)$ ,  $z \geq 0$  com o plano  $x + y = 2$ . Calcule  $\int_C (x^2 + y^2)z \, ds$ .



# Aula 7

## APLICAÇÕES DA INTEGRAL DE LINHA DE CAMPO ESCALAR

---



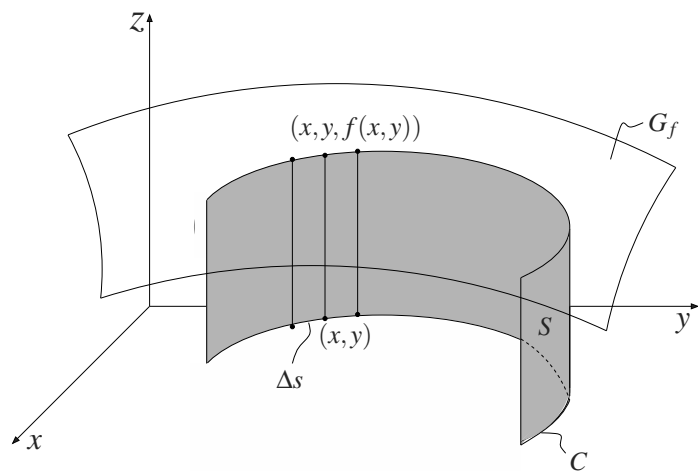
### O b j e t i v o s

- 1 apresentar uma interpretação geométrica;
- 2 apresentar algumas aplicações à Física;
- 3 apresentar os campos vetoriais;
- 4 estudar alguns operadores diferenciais.

# APLICAÇÕES DA INTEGRAL DE LINHA DE CAMPO ESCALAR

## INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA NO PLANO

Seja  $f(x,y) \geq 0$  e contínua. Então o gráfico de  $f$ ,  $G_f$ , está acima do plano  $xy$ .

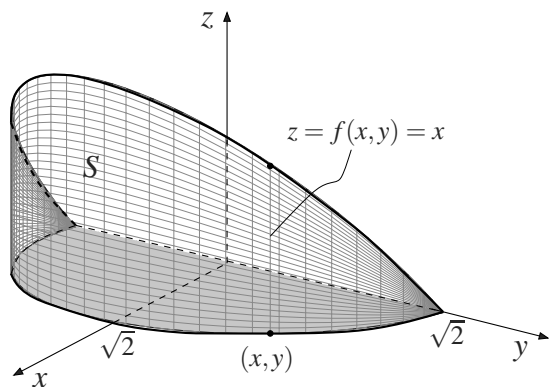


A partir da curva  $C \subset$  plano  $xy$ , construa a superfície  $S$  de base  $C$  e “altura”  $f(x,y)$  em  $(x,y) \in C$ . A integral  $\int_C f(x,y) \, ds$  representa a área de um lado da superfície  $S$ .

### Exemplo 7.1.

A base de uma superfície é dada por  $x^2 + y^2 = 2, x \geq 0$ . Se a altura da superfície em  $(x,y)$  é  $f(x,y) = x, x \geq 0$ , achar a área de um lado da superfície.

**Solução:** O esboço de  $S$  está representado na figura que se segue.



A área de um lado de  $S$  é dada por  $\int_C f(x, y) \, ds = \int_C x \, ds$ , onde  $C$  é parametrizada por  $\sigma(t) = (\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t)$ , com  $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$  (pois  $x \geq 0$ ).

Se  $\sigma'(t) = (-\sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \cos t)$ , então

$$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{2 \sin^2 t + 2 \cos^2 t} = \sqrt{2}$$

donde,

$$ds = \|\sigma'(t)\| \, dt = \sqrt{2} \, dt.$$

Portanto

$$\int_C x \, ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sqrt{2} \cos t) \sqrt{2} \, dt = 2 \sin t \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4 u.a.$$

## INTERPRETAÇÃO FÍSICA

Se  $\delta(x, y)$  representa a densidade (massa por unidade de comprimento) de um arame  $C \subset \mathbb{R}^2$ , então  $\int_C \delta(x, y) \, ds$  representa a massa total do arame:

$$M = \int_C \delta(x, y) \, ds.$$



i. O centro de massa  $(\bar{x}, \bar{y})$  do arame é dado por

$$M\bar{x} = \int_C x \delta(x, y) \, ds$$

$$M\bar{y} = \int_C y \delta(x, y) \, ds$$

ii. O momento de inércia de  $C \subset \mathbb{R}^2$  em relação a um eixo  $E$  é dado por

$$I_E = \int_C r^2(x, y) \delta(x, y) \, ds$$

onde  $r(x, y) =$  distância de  $(x, y)$  ao eixo  $E$ .

iii. Seja uma curva  $C \subset \mathbb{R}^3$ , representando um arame de densidade  $\delta = \delta(x, y, z)$  em  $(x, y, z) \in C$ . Então, observe as seguintes fórmulas:

iii.1. Comprimento do arame:  $L = \int_C ds$

iii.2. Massa do arame:  $M = \int_C \delta(x, y, z) ds$

iii.3. Centro de massa do arame  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , onde

$$M\bar{x} = \int_C x\delta(x, y, z) ds$$

$$M\bar{y} = \int_C y\delta(x, y, z) ds$$

$$M\bar{z} = \int_C z\delta(x, y, z) ds$$

iii.4. Momento de inércia do arame em relação a um eixo  $E$ :

$$I_E = \int_C r^2(x, y, z) \delta(x, y, z) ds$$

onde  $r(x, y, z) = \text{distância de } (x, y, z) \text{ ao eixo } E$ .

### Exemplo 7.2.

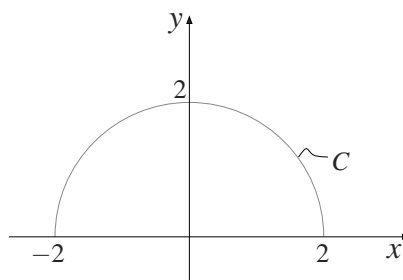
Um arame fino tem a forma de uma semicircunferência  $x^2 + y^2 = 4$ , com  $y \geq 0$ . Se a densidade linear é uma constante  $k$ , determine a massa e o centro de massa do arame.

**Solução:** small

O esboço de  $C$  está representado ao lado. Temos

$$\bar{x} = \frac{\int_C xk ds}{\int_C k ds} = \frac{\int_C x ds}{\int_C ds}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_C y ds}{\int_C ds}$$



onde  $\int_C ds = L = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r = 2\pi$ , pois  $r = 2$ . Como  $M = \int_C k ds$  então  $M = k \int_C ds = 2k\pi$ . Uma parametrização de  $C$  é dada por:

$$\sigma(t) = (2\cos t, 2\sin t), \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Se  $\sigma'(t) = (-2 \operatorname{sen} t, 2 \cos t, )$  então

$$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{4 \operatorname{sen}^2 t + 4 \cos^2 t} = 2.$$

Como  $ds = \|\sigma'(t)\| dt$ , então  $ds = 2 dt$ . Temos:

$$\int_C x ds = \int_0^\pi (2 \cos t) 2 dt = 4 [\operatorname{sen} t]_0^\pi = 0$$

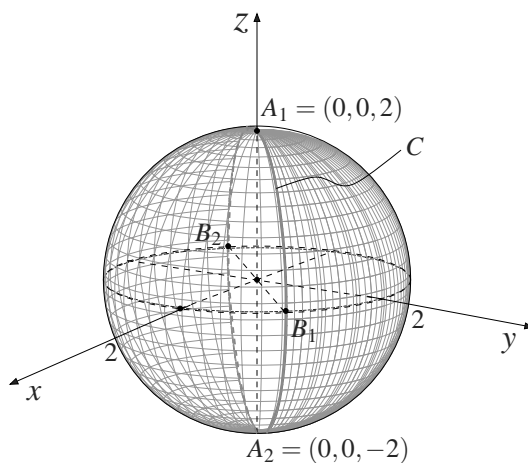
$$\int_C y ds = \int_0^\pi (2 \operatorname{sen} t) 2 dt = 4 [-\cos t]_0^\pi = 8$$

Logo,  $\bar{x} = 0$  e  $\bar{y} = \frac{8}{2\pi} = \frac{4}{\pi}$ . Portanto,  $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 4/\pi)$ .

### Exemplo 7.3.

Calcule o momento de inércia em relação ao eixo  $z$  de um arame  $C$  cuja forma é a interseção das superfícies  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  e  $y = x$ , sabendo que sua densidade é uma constante.

**Solução:** Como a interseção de uma esfera com um plano é uma circunferência, segue que  $C$  é uma circunferência contida no plano  $y = x$ . Para esboçá-la, procuremos encontrar pontos de interseção das duas superfícies. Observe que o plano  $x = y$  contém o eixo  $z$ . Logo, os pontos  $A_1 = (0, 0, 2)$  e  $A_2 = (0, 0, -2)$  estão em  $C$ . Por outro lado, a reta  $y = x$  do plano  $xy$  intercepta a esfera em dois pontos:  $B_1$  e  $B_2$ . Ligando os pontos  $A_1, A_2, B_1$  e  $B_2$ , encontramos a curva  $C$ .



Para parametrizar  $C$ , resolvemos o sistema  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ y = x \end{cases}$ . Temos  $2x^2 + z^2 = 4$  ou  $x^2/2 + z^2/4 = 1$ , que representa a projeção de  $C$  no plano  $xz$ . Portanto, se  $(x, y, z) \in C$ , então  $x$  e  $z$  satisfazem a elipse  $x^2/2 + z^2/4$ . Logo,  $x = \sqrt{2} \cos t$  e  $z = 2 \operatorname{sen} t$ , com  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Como

$y = x$ , então  $y = \sqrt{2} \cos t$ . Portanto,

$$\sigma(t) = (\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \cos t, 2 \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

é uma parametrização de  $C$ .

Se  $\sigma'(t) = (-\sqrt{2} \sin t, -\sqrt{2} \sin t, 2 \cos t)$  então:

$$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{2 \sin^2 t + 2 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} = 2.$$

Assim,  $ds = \|\sigma'(t)\| dt = 2 dt$ . O momento de inércia em relação ao eixo  $z$  é dado por

$$\begin{aligned} I_z &= \int_C (x^2 + y^2) \delta(x, y) ds = k \int_C (x^2 + y^2) ds = \\ &= k \int_0^{2\pi} (2 \cos^2 t + 2 \cos^2 t) 2 dt = 8k \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \\ &= 8k \cdot \frac{1}{2} \left[ t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{2\pi} = 8k\pi. \end{aligned}$$

## CAMPOS VETORIAIS

### DEFINIÇÃO DE UM CAMPO VETORIAL

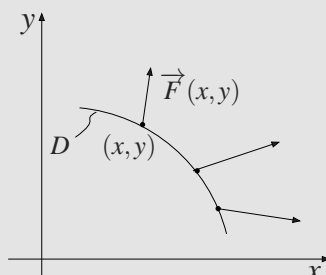
#### Definição 7.1.

Sejam  $P$  e  $Q$  funções reais de  $x$  e  $y$ , definidas em  $D \subset \mathbb{R}^2$ . A função vetorial  $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = P(x, y) \vec{i} + Q(x, y) \vec{j}$$

é chamada de campo vetorial definido em  $D \subset \mathbb{R}^2$ .

Outra notação:  $\vec{F}(x, y) = (P, Q)$ .

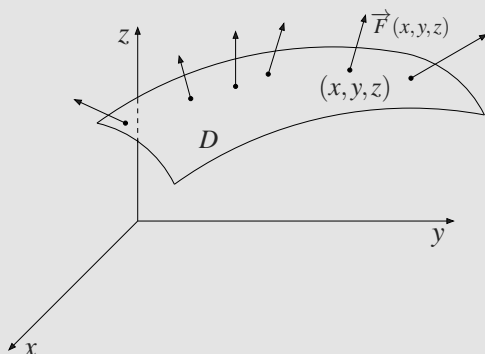


**Definição 7.2.**

Sejam  $P$ ,  $Q$  e  $R$  funções reais de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , definidas em  $D \subset \mathbb{R}^3$ . Temos que a função vetorial  $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$\begin{aligned}\vec{F}(x, y, z) &= (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) \\ &= P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}\end{aligned}$$

é chamada de campo vetorial definido em  $D \subset \mathbb{R}^3$ .

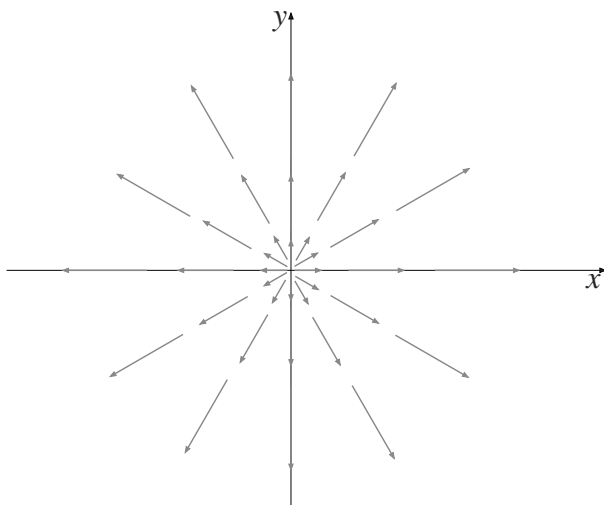


Os campos vetoriais são úteis para representar os campos de forças, campos de velocidades e campos elétricos.

Geometricamente, visualizamos um campo vetorial  $\vec{F}$  no plano esboçando vetores  $\vec{F}(x, y)$  com origem em  $(x, y)$ .

**Exemplo 7.4.**

O campo vetorial  $\vec{F}(x, y) = (x, y) = x \vec{i} + y \vec{j}$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , está representado por:



**Exemplo 7.5.**

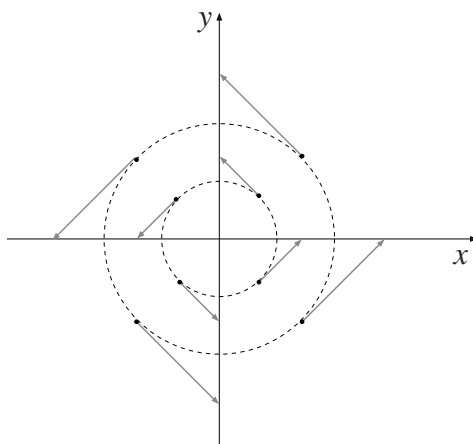
Represente geometricamente o campo vetorial  $\vec{F}(x, y) = (-y, x) = -y\vec{i} + x\vec{j}$ , com  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

**Solução:** Observemos que  $\|\vec{F}(x, y)\| = \sqrt{y^2 + x^2} = \|(x, y)\|$ , isto é, os vetores  $\vec{F}(x, y)$  e  $(x, y)$  têm mesmo comprimento. Além disso,

$$\vec{F}(x, y) \cdot (x, y) = (-y, x) \cdot (x, y) = -yx + xy = 0,$$

donde  $\vec{F}(x, y) \perp (x, y)$ .

Então o esboço do campo está representado na figura que se segue.



**Definição 7.3** (Dizemos que o campo vetorial  $\vec{F}$  é contínuo, de classe  $C^k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  ou  $C^\infty$  se as funções componentes  $P$  e  $Q$  (ou  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ) são contínuas, de classe  $C^k$  ou  $C^\infty$ , respectivamente.).

## OPERADORES DIFERENCIAIS

Se  $\vec{F} = (P, Q, R)$  é campo vetorial diferenciável em um conjunto aberto  $D$  do  $\mathbb{R}^3$ , então o divergente de  $\vec{F}$  é um *campo escalar* definido por

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad (1)$$



Se  $\vec{F} = (P, Q)$  é de classe  $C^1$  em um aberto  $D$  do  $\mathbb{R}^2$ , então  $\text{div } \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ . O rotacional de  $\vec{F}$  é um campo vetorial definido por

$$\text{rot } \vec{F} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (2)$$

Vamos expressar (1) e (2) usando a notação de operador. Então, consideremos o operador diferencial vetorial  $\nabla$  (“del”) dado por

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

O operador  $\nabla$  sobre uma função escalar  $f$  (ou um campo escalar) produz o gradiente de  $f$ :

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Consideremos o “produto vetorial” de  $\nabla$  pelo campo vetorial  $\vec{F} = (P, Q, R)$ :

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{F} &= \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \vec{k} = \\ &= \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} - \left( \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = \\ &= \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = \\ &= \text{rot } \vec{F}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F}.$$

Consideremos o “produto interno” de  $\nabla$  pelo campo  $\vec{F}$ :

$$\nabla \cdot \vec{F} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P, Q, R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \text{div } \vec{F}.$$

Assim,

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}.$$

**Exemplo 7.6.**

Calcule o divergente e o rotacional do campo vetorial

$$\vec{F}(x, y, z) = xy \vec{\mathbf{i}} + yz \vec{\mathbf{j}} + zx \vec{\mathbf{k}}.$$

**Solução:** Temos

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}(zx) = y + z + x.$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} &= \nabla \times \vec{F} = \\ &= \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & yz & zx \end{vmatrix} = (0 - y) \vec{\mathbf{i}} + (0 - z) \vec{\mathbf{j}} + (0 - x) \vec{\mathbf{k}} = \\ &= -y \vec{\mathbf{i}} - z \vec{\mathbf{j}} - x \vec{\mathbf{k}}. \end{aligned}$$

A seguir, apresentaremos algumas propriedades para o rotacional e o divergente.

Se  $f$  e  $\vec{F}$  são de classe  $C^2$ , então

- i.  $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \vec{0}$  ou  $\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$
- ii.  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0$  ou  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$
- iii.  $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \operatorname{lap} f$  ou  $\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f$  onde

$$\operatorname{lap} f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

é dito *laplaciano de  $f$* .


$$\text{iv. } \nabla \cdot (f \vec{F}) = f \nabla \cdot \vec{F} + \nabla f \cdot \vec{F}.$$

As demonstrações de (i) e (ii) seguem das definições e do Teorema de Schwartz. A demonstração de (iii) segue das definições. Demonstraremos a propriedade (iv). Escrevendo  $\vec{F} = (P, Q, R)$ , temos

$f\vec{F} = (fP, fQ, fR)$ . Então

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (f\vec{F}) &= \frac{\partial}{\partial x}(fP) + \frac{\partial}{\partial y}(fQ) + \frac{\partial}{\partial z}(fR) \\ &= f\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot P + f\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot Q + f\frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot R \\ &= f\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot (P, Q, R) \\ &= f\nabla \cdot \vec{F} + \nabla f \cdot \vec{F}.\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

 Se  $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ , então:

$$\text{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

### Exercício 7.1.

1. Calcule a massa de um fio que tem a forma do arco de elipse  $C: x^2 + y^2/4 = 1$ , no primeiro quadrante, se a densidade em cada ponto  $(x, y)$  do fio é dada por  $\delta(x, y) = xy$ .
2. Calcule a primeira coordenada do centro de massa de um fio homogêneo que está ao longo de uma curva  $\gamma(t) = t\vec{i} + \frac{2\sqrt{2}}{5}t^{5/2}\vec{j} + \frac{t^4}{4}\vec{k}$ , com  $0 \leq t \leq 2$ , se a densidade for  $\delta(x, y, z) = 10x$ .
3. Um arame tem a forma da curva  $C$  obtida como interseção da porção da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $x \geq 0$ , com o plano  $y + z = 1$ .
  - a. Esboce a curva  $C$ .
  - b. Apresente uma parametrização diferenciável para  $C$ .
  - c. Sabendo-se que a densidade em cada ponto do arame é dada por  $\delta(x, y, z) = yz$ , calcule a massa total do arame.
4. Deseja-se construir uma peça de zinco que tem a forma da superfície do cilindro  $x^2 + y^2 = 4$ , compreendida entre os planos  $z = 0$  e  $x + y + z = 2$ ,  $z \geq 0$ . Se o metro quadrado do zinco custa  $M$  reais, calcule o preço total da peça. Faça um esboço da peça.

5. Calcule a área de um lado da superfície  $S$  cuja base é a circunferência  $x^2 + y^2 = 1$  no plano  $xy$  e a altura em cada ponto  $(x, y)$  é  $f(x, y) = 1 - x^2$ . Esboce a superfície.
6. Um pintor deseja pintar ambos os lados de uma cerca cuja base está dada pela curva  $C : x^{2/3} + y^{2/3} = (20)^{2/3}$ , para  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ . A altura está dada por  $f(x, y) = y$ . Se o pintor cobra  $R$  reais por metro quadrado, quanto ele receberá?
7. Calcule o momento de inércia de um fio retilíneo, homogêneo de comprimento  $L$ , em torno de um eixo perpendicular ao fio e passando por uma das extremidades do fio, em função de sua massa.
8. Um fio delgado tem a forma do segmento de reta que une os pontos  $(1, 1)$  a  $(2, 2)$ . Determine o momento de inércia em relação ao eixo  $y = -1$ , supondo que a densidade no ponto  $(x, y)$  é proporcional à distância do ponto ao eixo  $y$ .
9. Calcule o divergente e o rotacional do seguinte campo:

$$\text{a. } \vec{F}(x, y) = \left( -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), (x, y) \neq (0, 0)$$

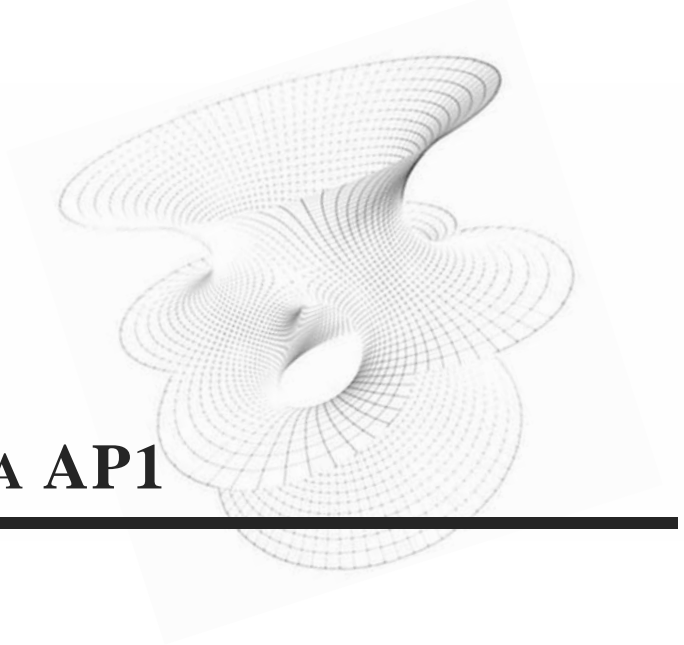
$$\text{b. } \vec{F}(x, y, z) = ye^z \vec{\mathbf{i}} + xe^z \vec{\mathbf{j}} + xye^z \vec{\mathbf{k}}$$

10. Quando o divergente de um campo vetorial é nulo, dizemos que o campo é **solenoidal**. Quando o rotacional de um campo vetorial é nulo, dizemos que o campo é **irrotacional**. Prove que o campo  $\vec{r}/r^3$  é solenoidal e também irrotacional fora da origem sendo  $\vec{r}(x, y, z) = x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}$ ,  $r = \|\vec{r}\|$ .

# Aula 8

## PREPARAÇÃO PARA A AP1

---



Queridos alunos de Cálculo IV,

Estamos na semana de preparação para a primeira prova presencial. Espero, sinceramente, que estejam em dia com a matéria.

Selecionei alguns exercícios para prepará-los para a prova.

Sucesso!!!

### Exercício 8.1.

1. Dada a integral

$$I = \iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_{-1}^0 \int_{-y}^1 f(x, y) \, dx dy + \int_0^1 \int_y^1 f(x, y) \, dx dy.$$

- Esboce a região  $D$ .
- Expresse a soma de integrais do segundo membro como uma só integral na qual a ordem de integração está invertida.
- Calcule o valor de  $I$  para  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ .

2. Seja uma lâmina homogênea com a forma da região

$$D: \begin{cases} y \leq x \\ x^2 + y^2 \leq 1 \\ y \geq -x \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Determine

- O centro de massa de  $D$ .
- O momento de inércia em relação ao eixo  $x$ .

3. Calcule a integral dupla passando para coordenadas polares

$$I = \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dx dy$$

onde  $D$  é a metade superior do disco  $x^2 + y^2 \leq ax$ ,  $a > 0$ .

4. Usando coordenadas polares, calcule

$$\text{a. } \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4y-y^2}} dx dy \quad \text{b. } \int_0^2 \int_y^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy$$

5. Calcule a integral passando para coordenadas esféricas

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dz dy dx.$$

6. Calcule o momento de inércia em relação ao eixo  $z$  do sólido homogêneo  $W$ , limitado pelas superfícies  $z = x^2 + y^2$ ,  $x^2 + y^2 = 1$  e  $z = 0$ .

7. Encontre o momento de inércia em relação ao eixo  $z$  do sólido homogêneo limitado pela esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ .

8. Seja uma mola que tem a forma de uma hélice circular

$$C : \gamma(t) = (4 \cos t, 4 \sin t, 3t), \quad 0 \leq t \leq 4\pi.$$

Sabendo que a densidade em  $(x, y, z)$  é dada por  $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2$ , calcule

- A massa  $M$  da hélice.
- O momento de inércia em relação ao eixo  $z$ .

9. Calcule  $\int_C xy \, ds$ , onde  $C$  é a interseção da superfície  $x + y = 2$  com a superfície  $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$ .

10. Encontre o momento de inércia em relação ao eixo  $z$  de um fio homogêneo fino que se encontra ao longo da curva

$$\gamma(t) = (t \cos t)\vec{\mathbf{i}} + (t \sin t)\vec{\mathbf{j}} + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\right)\vec{\mathbf{k}},$$

com  $0 \leq t \leq 1$ .

# Aula 9

## INTEGRAL DE LINHA DE CAMPO VETORIAL

---

### Objetivos

- 1 definir integrais de linha;
- 2 estudar algumas propriedades;
- 3 estudar uma classe de campos vetoriais que tem a propriedade de que a integral de linha não depende do caminho;
- 4 cálculo de funções potenciais.

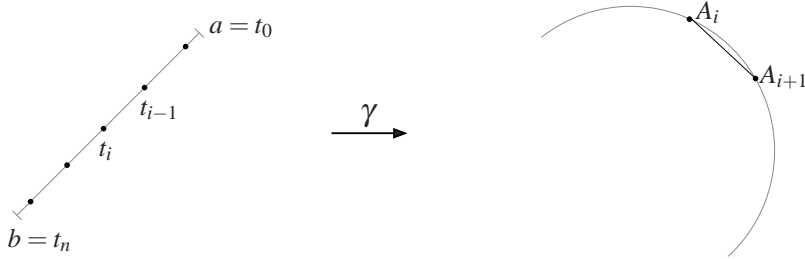
## INTEGRAL DE LINHA DE CAMPO VETORIAL

### MOTIVAÇÃO

Considere uma partícula que se move ao longo de uma curva  $C : \gamma(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in [a, b]$ , sob a ação de um campo de forças  $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ . Queremos calcular o trabalho realizado pela força  $\vec{F}$  quando a partícula se desloca de  $A = \gamma(a)$  até  $B = \gamma(b)$ .

Da física, temos que no caso em que  $\vec{F}$  é constante e  $C$  é um segmento de reta, o trabalho é dado pelo produto escalar  $W = \vec{F} \cdot \vec{AB}$ .

No caso geral, dividimos o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos  $[t_{i-1}, t_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , de mesmo comprimento  $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ . Temos  $n$  subarcs  $\gamma([t_{i-1}, t_i]) = C_i$  e  $n$  segmentos  $[A_{i-1}, A_i]$ ,  $A_i = \gamma(t_i) = (x(t_i), y(t_i))$ , com  $i = 1, \dots, n$ .



Supondo  $\vec{F}$  constante ao longo do segmento  $[A_{i-1}, A_i]$ , o trabalho ao longo de  $C_i$  é aproximadamente igual ao produto escalar

$$\begin{aligned} W_i &\cong \vec{F}(\gamma(t_i)) \cdot \overrightarrow{A_{i-1}A_i} = \vec{F}(\gamma(t_i)) \cdot (A_i - A_{i-1}) = \\ &= P(x(t_i), y(t_i))\Delta x + Q(x(t_i), y(t_i))\Delta y \end{aligned}$$

onde  $\Delta x = x(t_i) - x(t_{i-1})$  e  $\Delta y = y(t_i) - y(t_{i-1})$ .

Pelo Teorema do Valor Médio, temos  $\Delta x = x'(t_i^*)\Delta t$ , com  $t_i^* \in ]t_{i-1}, t_i[$  e  $\Delta y = y'(t_i^{**})\Delta t$ , com  $t_i^{**} \in ]t_{i-1}, t_i[$ . Logo,

$$W_i \cong \left[ P(x(t_i), y(t_i))x'(t_i^*) + Q(x(t_i), y(t_i))y'(t_i^{**}) \right] \Delta t$$

donde

$$W \cong \sum_{i=1}^n \left[ P(x(t_i), y(t_i))x'(t_i^*) + Q(x(t_i), y(t_i))y'(t_i^{**}) \right] \Delta t = S_n.$$



Assim, definimos  $W = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} S_n$ . Então

$$W = \int_a^b \left[ P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) \right] dt.$$

Esta motivação sugere a definição que se segue.

### Definição 9.1.

Seja  $C \subset \mathbb{R}^3$ , uma curva regular, dada por uma parametrização  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^1$ , tal que  $\gamma'(t) \neq 0$ , para todo  $t \in ]a, b[$ . Seja  $\vec{F} = (P, Q, R)$  um campo vetorial contínuo sobre  $C$ . Então a integral de linha do campo  $\vec{F}$  ao longo de  $C$ , denotado por  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , é definida por

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \\ &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \left[ P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + \right. \\ &\quad \left. + R(x(t), y(t), z(t))z'(t) \right] dt. \end{aligned}$$



- i. Seja  $C$  uma curva regular por partes, isto é,  $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$ . Então

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \dots + \int_{C_n} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- ii. A integral de linha de um campo vetorial  $\vec{F}$ ,  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , não depende da parametrização de  $C$ , desde que não se inverta sua orientação. Isto é, denotando por  $C^-$  a curva  $C$  percorrida em outro sentido, então

$$\int_{C^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- iii. Se  $C$  é uma curva fechada ( $\gamma(a) = \gamma(b)$ ) e está orientada no sentido anti-horário, denotamos a integral de linha por  $\oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ . Caso contrário, denotamos por  $\oint_{C^-} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ .

**Exemplo 9.1.**

Seja  $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ . Temos que a integral de linha  $\vec{F}$  ao longo de uma hélice  $C : \gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ , com  $0 \leq t \leq 2\pi$  é dada por

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot (\gamma'(t)) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos t, \sin t, t) \cdot (-\sin t, \cos t, 1) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos t \sin t + \sin t \cos t + t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} t dt = \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^{2\pi} = 2\pi^2. \end{aligned}$$

**Uma Outra Notação**

Sabemos que  $dx = x'(t) dt$ ,  $dy = y'(t) dt$  e  $dz = z'(t) dt$ . Se usarmos a convenção  $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} = (dx, dy, dz)$ , temos

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_C (P, Q, R) \cdot (dx, dy, dz) = \\ &= \int_C P dx + Q dy + R dz = \\ &= \int_a^b \left[ P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + \right. \\ &\quad \left. + R(x(t), y(t), z(t))z'(t) \right] dt. \end{aligned}$$

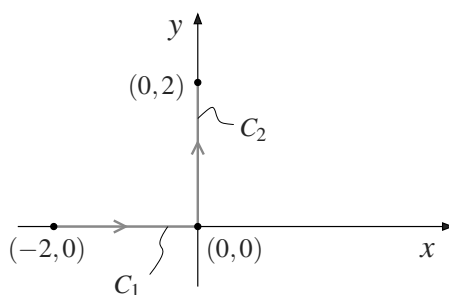
Logo, uma outra notação é  $\int_C P dx + Q dy + R dz$ .

**Exemplo 9.2.**

Calcule  $\int_C y dx + (x^2 + y^2) dy$ , onde  $C$  é formado pelos segmentos que ligam  $(-2, 0)$  a  $(0, 0)$  e  $(0, 0)$  a  $(0, 2)$ .

**Solução:**

O esboço da curva  $C = C_1 \cup C_2$  está representado na figura ao lado.



$C_1$  e  $C_2$  podem ser parametrizadas por

$$C_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 0, \end{cases} \quad -2 \leq t \leq 0, \quad \text{donde } dx = dt \text{ e } dy = 0.$$

$$C_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2, \quad \text{donde } dx = 0 \text{ e } dy = dt.$$

Temos

$$\int_{C_1} y \, dx + (x^2 + y^2) \, dy = \int_{-2}^0 0 \, dt + (t^2 + 0^2) \, dt = 0$$

$$\int_{C_2} y \, dx + (x^2 + y^2) \, dy = \int_0^2 t \cdot 0 + (0^2 + t^2) \, dt =$$

$$= \int_0^2 t^2 \, dt = \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Logo,  $\int_C y \, dx + (x^2 + y^2) \, dy = 0 + \frac{8}{3} = \frac{8}{3}.$

**CAMPOS CONSERVATIVOS**

Dizemos que  $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(n = 2, 3)$  é um **campo conservativo** ou um **campo gradiente** se existir um campo escalar diferenciável  $\varphi : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $\nabla \varphi = \vec{F}$  em  $D$ .

O campo escalar  $\varphi : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é dito função potencial de  $\vec{F}$  em  $D$ .

**Exemplo 9.3.**

O campo vetorial  $\vec{F}(x, y, z) = (2x + 3yz) \vec{i} + 3xz \vec{j} + 3xy \vec{k}$  é um campo conservativo em  $\mathbb{R}^3$ , pois existe  $\varphi(x, y, z) = x^2 + 3xyz$  diferenciável em  $\mathbb{R}^3$ , tal que  $\nabla \varphi = \vec{F}$  em  $\mathbb{R}^3$ .

A seguir apresentaremos alguns resultados dos campos conservativos.

### **Teorema 9.1.**

Seja  $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , ( $n = 2, 3$ ) um campo vetorial de classe  $C^1$ . Se  $\vec{F}$  é conservativo, então  $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ .

### **Demonstração**

Suponhamos  $n = 3$ . Então,  $\vec{F} = (P, Q, R)$ . Se  $\vec{F}$  é conservativo, então existe  $\varphi : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\nabla \varphi = \vec{F}$ . Logo,  $\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \nabla \times (\nabla \varphi) = \vec{0}$  por propriedade dos operadores diferenciais.

**CQD**

Mais adiante veremos um exemplo de um campo vetorial, não conservativo, com rotacional nulo.

 O Teorema 9.1 também pode ser enunciado da seguinte maneira:

*“Se  $\text{rot } \vec{F} \neq \vec{0}$  em  $D$  então  $\vec{F}$  não é conservativo em  $D$ ”.*

### **Exemplo 9.4.**

Temos que  $\vec{F}(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{2y}{x^2 + y^2} \vec{j}$  é um campo conservativo em  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ , pois existe  $\varphi(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$  tal que  $\nabla \varphi = \vec{F}$  em  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ .

### **Exemplo 9.5.**

Temos que  $\vec{F}(x, y) = -2y \vec{i} + 2x \vec{j}$  não é um campo conservativo. Ora, temos que

$$\text{rot } \vec{F}(x, y) = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = (2 - (-2)) \vec{k} = 4 \vec{k} \neq \vec{0}.$$

**Teorema 9.2.**

Seja  $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(n = 2, 3)$  de classe  $C^2$ . Se  $\vec{F}$  é conservativo, isto é,  $\vec{F} = \nabla \varphi$  em  $D$ , e se  $C$  é qualquer curva regular por partes com ponto inicial  $A$  e ponto final  $B$ , então

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla \varphi \cdot d\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A).$$

**Demonstração**

Seja  $\gamma(t)$ , com  $t \in [a, b]$  uma parametrização de  $C$ , de classe  $C^1$  e tal que  $\gamma'(t) \neq \vec{0}$  em  $]a, b[$  com  $\gamma(a) = A$  e  $\gamma(b) = B$ . Então,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b \nabla \varphi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Pela regra da cadeia, temos que

$$\nabla \varphi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (\varphi \circ \gamma)'(t).$$

Então:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b (\varphi \circ \gamma)'(t) dt = [\varphi \circ \gamma(t)]_a^b = \\ &= \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) = \varphi(B) - \varphi(A) \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

CQD

Este resultado é conhecido como Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha. É dele que concluímos que a integral de linha de um campo conservativo só depende dos pontos  $A$  e  $B$  e não depende da trajetória que os une.

**Teorema 9.3.**

Se  $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(n = 2, 3)$  é conservativo, então  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$  qualquer que seja o caminho fechado.

### Demonstração

A demonstração segue do Teorema 9.2, pois  $C$  sendo um caminho fechado, tem-se que o ponto final  $B$  coincide com o ponto inicial  $A$ , donde  $\varphi(B) - \varphi(A) = 0$  e, portanto, a integral de linha é zero.

CQD

Este Teorema também pode ser enunciado da seguinte maneira:

*“Se  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0$  para alguma curva fechada  $C$  então  $\vec{F}$  não é conservativo”.*

### Exemplo 9.6.

Calcule  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , onde  $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$  e  $C$  é dada pela equação  $\gamma(t) = (\arctg t, \cos t^4)$ , com  $0 \leq t \leq 1$ .

**Solução:** Observemos que  $\vec{F}$  é um campo conservativo em  $\mathbb{R}^2$  com função potencial  $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ . Assim,

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \varphi(\gamma(1)) - \varphi(\gamma(0)) = \\ &= \varphi(\arctg 1, \cos 1) - \varphi(\arctg 0, \cos 0) = \\ &= \varphi\left(\frac{\pi}{4}, \cos 1\right) - \varphi(0, 1) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\pi^2}{16} + \cos^2 1 \right) - \frac{1}{2} (0^2 + 1^2) = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi^2}{16} - 1 + \cos^2 1 \right). \end{aligned}$$

A seguir, exibiremos um campo vetorial não conservativo com rotacional  $\vec{0}$ , o que mostra que a recíproca do Teorema 9.1 é falsa.

**Exemplo 9.7.**

Seja  $\vec{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j}$ ,  $(x, y) \in D = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ .  
 Como  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$  (verifique!) então  $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$  em  $D$ . Calculemos  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , onde  $C$  é a circunferência  $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Temos

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_C \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{-a \sin t}{a^2} \right) (-a \sin t) + \left( \frac{a \cos t}{a^2} \right) (a \cos t) \right] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi \neq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Se  $\vec{F}$  fosse conservativo, teríamos encontrado, pelo Teorema 9.3, que  $\oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ , o que contradiz (1). Logo,  $\vec{F}$  não é conservativo.

Na Aula 10, veremos para o caso  $n = 2$ , que impondo certas condições ao domínio de  $\vec{F}$ , prova-se que a recíproca do Teorema 9.1 é verdadeira.

## CÁLCULO DE FUNÇÕES POTENCIAIS

**Exemplo 9.8.**

Sabe-se que  $\vec{F}(x, y) = (2xy^2 - y^3, 2x^2y - 3xy^2 + 2)$  é um campo gradiente. Determine uma função potencial.

**Solução:** Para determinar uma função potencial  $\varphi(x, y)$  devemos ter

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xy^2 - y^3 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2x^2y - 3xy^2 + 2 \quad (3)$$

Integrando (2) em relação a  $x$ , temos

$$\varphi(x, y) = x^2y^2 - xy^3 + f(y) \quad (4)$$

Integrando (3) em relação a  $y$ , temos

$$\varphi(x, y) = x^2 y^2 - xy^3 + 2y + g(x) \quad (5)$$

De (4) e (5), vemos que tomando  $f(y) = 2y$  e  $g(x) = 0$ , segue que uma função potencial é

$$\varphi(x, y) = x^2 y^2 - xy^3 + 2y.$$

### Exemplo 9.9.

Sabe-se que  $\vec{F}(x, y, z) = 2xy \vec{i} + (x^2 + z \cos(yz)) \vec{j} + y \cos(yz) \vec{k}$  é um campo conservativo. Determine uma função potencial.

**Solução:** Devemos ter:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xy \quad (6)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 + z \cos(yz) \quad (7)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = y \cos(yz) \quad (8)$$

Integrando (6), (7) e (8) em relação a  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente, temos

$$\varphi(x, y, z) = x^2 y + f(y, z) \quad (9)$$

$$\varphi(x, y, z) = x^2 y + \text{sen}(yz) + g(x, z) \quad (10)$$

$$\varphi(x, y, z) = \text{sen}(yz) + h(x, y) \quad (11)$$

De (9), (10) e (11), devemos ter  $f(y, z) = \text{sen}(yz)$ ,  $g(x, z) = 0$  e  $h(x, y) = x^2 y$ . Logo,

$$\varphi(x, y, z) = x^2 y + \text{sen}(yz)$$

é uma função potencial de  $\vec{F}$ .



### Exercício 9.1.

- Um objeto percorre uma elipse  $4x^2 + 25y^2 = 100$  no sentido anti-horário e se encontra submetido à força  $\vec{F}(x, y) = (-3y, 3x)$ . Ache o trabalho realizado.
- Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças  $\vec{F}(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$  ao mover uma partícula ao longo da fronteira do quadrado limitado pelos eixos coordenados e pelas retas  $x = a$  e  $y = a$ ,  $a > 0$  no sentido anti-horário.
- Calcule  $\oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  para  $\vec{F}(x, y) = (x^2, x + y)$  onde  $C$  é a fronteira do triângulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(1, 1)$ , orientada no sentido anti-horário.
- Calcule  $\int_C z dx + y dy - x dz$ , onde  $C$  é a interseção das superfícies  $y + z = 8$  e  $x^2 + y^2 + z^2 - 8z = 0$ , orientada no sentido anti-horário quando vista de cima (ou equivalentemente, no sentido horário quando vista da origem).
- Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças  $\vec{F}(x, y, z) = (y, z, x)$  ao mover uma partícula ao longo da curva  $C$  interseção das superfícies  $x + y = 2$  e  $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$ , percorrida uma vez no sentido anti-horário quando vista da origem.
- Calcule  $\int_C -2y dx + 3z dy + x dz$ , sendo  $C$  a interseção das superfícies  $x^2 + 4y^2 = 1$  e  $x^2 + z^2 = 1$ , com  $y \geq 0$  e  $z \geq 0$ , percorrida uma vez do ponto  $(1, 0, 0)$  ao ponto  $(-1, 0, 0)$ .
- Ache o trabalho que realiza a força

$$\vec{F}(x, y) = (y \operatorname{sen} xy - y^2 - 3) \vec{i} + (x \operatorname{sen} xy - 2xy) \vec{j}$$

para transladar uma partícula de  $(4, 0)$  a  $(0, 0)$  ao longo da curva

$$C: y = 2 - |2 - x|, \text{ com } 0 \leq x \leq 4.$$

- Determine uma função potencial para o campo gradiente

$$\begin{aligned} \vec{F}(x, y, z) = & (-4xe^{3y} + ze^{xz}) \vec{i} + \\ & + (-6x^2e^{3y} + 4y^2) \vec{j} + (xe^{xz} + \cos z) \vec{k}. \end{aligned}$$

b. Calcule  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , se  $C$  é a curva descrita por

$$\gamma(t) = (t-1)(t-2) \vec{i} + t \vec{j} + \frac{\pi}{2} t^5 \vec{k},$$

com  $0 \leq t \leq 1$ .

9. Mostre que  $\int_{(2,-1)}^{(1,4)} 2xy dx + x^2 dy$  é independente do caminho e calcule a integral.

10. Calcule  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , onde

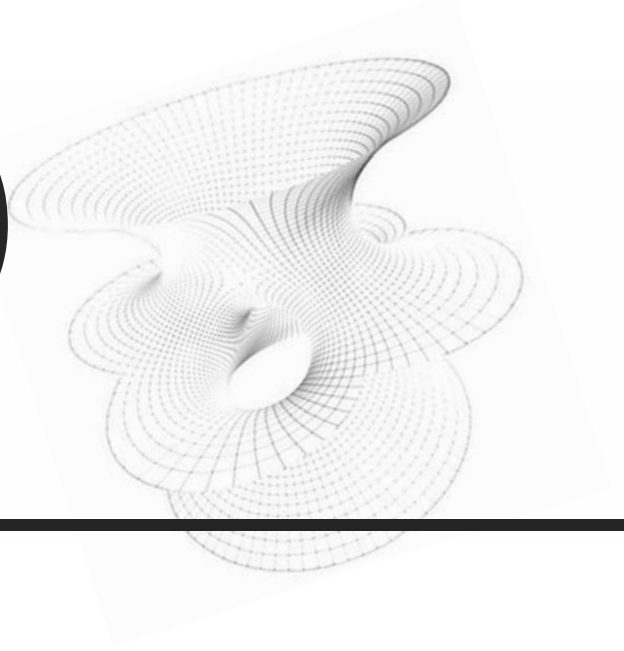
$$\vec{F}(x, y, z) = (2x \operatorname{sen} z, z^3 - e^y, x^2 \cos z + 3yz^2)$$

e  $C: \gamma(t) = (t, t(t-1), t^2+1)$ , com  $0 \leq t \leq 1$ .

# Aula 10

## TEOREMA DE GREEN

---



## Objetivos

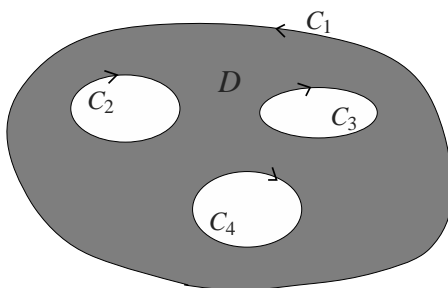
- 1 estudar um teorema que estabelece uma ligação importante entre integrais de linha e integrais duplas;
- 2 estudar condições sobre o domínio de  $\vec{F}$  para que valha a recíproca do Teorema 9.1, da Aula 9, isto é, em que domínios, campos de rotacional nulo são conservativos?

## TEOREMA DE GREEN

### Teorema 10.1.

Seja  $D$  uma região fechada e limitada de  $\mathbb{R}^2$ , cuja fronteira  $\partial D$  é formada por um número finito de curvas simples, fechadas e  $C^1$  por partes, duas a duas disjuntas, orientadas no sentido que deixa  $D$  à esquerda das curvas, (isto é,  $\partial D$  está orientada positivamente). Seja  $F = P(x, y) \vec{i} + Q(x, y) \vec{j}$  um campo vetorial de classe  $C^1$  em um conjunto aberto  $U$  com  $D \subset U$ . Então,

$$\oint_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\partial D^+} P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$



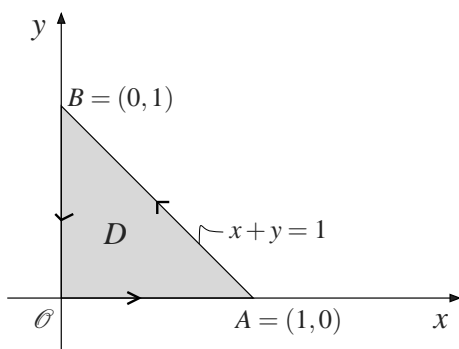
No caso,  $\partial D = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$  e

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \\ &= \oint_{C_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_2^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_3^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_4^-} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \end{aligned}$$

☞ Geralmente, usamos o Teorema de Green, quando  $\oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  é difícil de ser calculada diretamente.

#### Exemplo 10.1.

Seja  $\vec{F}(x, y) = (2x + y) \vec{i} + (3y + 4x) \vec{j}$ . Vamos calcular as duas integrais do enunciado do Teorema de Green, para  $D$  a região triangular de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$ .



**Solução:** Temos  $\partial D = \mathcal{O}A \cup AB \cup B\mathcal{O}$ .

**Cálculo de**  $\int_{\mathcal{O}A} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Temos  $\mathcal{O}A : y = 0, 0 \leq x \leq 1$ , donde  $dy = 0$ . Então,

$$\int_{\mathcal{O}A} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{O}A} P(x, 0) dx = \int_0^1 2x dx = [x^2]_0^1 = 1.$$

**Cálculo de**  $\int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Temos  $AB : x = 1 - y, 0 \leq y \leq 1$ , donde  $dx = -dy$ . Então,

$$\begin{aligned} \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{AB} P(1-y, y) (-dy) + Q(1-y, y) dy = \\ &= \int_0^1 -[2(1-y) + y] dy + [3y + 4(1-y)] dy = \\ &= \int_0^1 (-2 + 2y - y + 3y + 4 - 4y) dy = \int_0^1 2 dy = [2y]_0^1 = 2. \end{aligned}$$

**Cálculo de**  $\int_{B\mathcal{O}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{\mathcal{O}B} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Temos  $\mathcal{O}B : x = 0, 0 \leq y \leq 1$ , donde  $dx = 0$ . Então:

$$\begin{aligned} \int_{B\mathcal{O}} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= - \int_{\mathcal{O}B} Q(0, y) dy = - \int_0^1 (3y + 0) dy = \\ &= - \left[ \frac{3y^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Somando, temos

$$\oint_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 1 + 2 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Por outro lado,

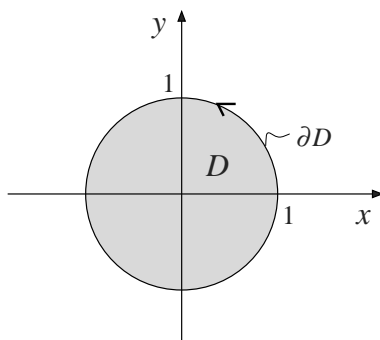
$$\begin{aligned} \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_D (4 - 1) dx dy = \\ &= 3A(D) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

**Exemplo 10.2.**

Seja  $\vec{F}(x, y) = -x^2y \vec{i} + xy^2 \vec{j}$  e  $D$  o disco de centro  $(0, 0)$  e raio 1. Calculemos  $\oint_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , para  $\partial D$  orientada no sentido anti-horário.

**Solução:** Do Teorema de Green, temos

$$\oint_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (y^2 + x^2) dx dy.$$



Passando para coordenadas polares, temos

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ dx dy = r dr d\theta \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

e  $D_{r\theta}$  é dado por  $D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$ . Então:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{D_{r\theta}} r^2 \cdot r dr d\theta = \int_{D_{r\theta}} r^3 dr d\theta \\ &= \int_0^1 r^3 \int_0^{2\pi} d\theta dr = 2\pi \int_0^1 r^3 dr = 2\pi \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

**Exemplo 10.3.**

Seja  $\vec{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2} \vec{j}$  definido em  $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ . Calculemos:

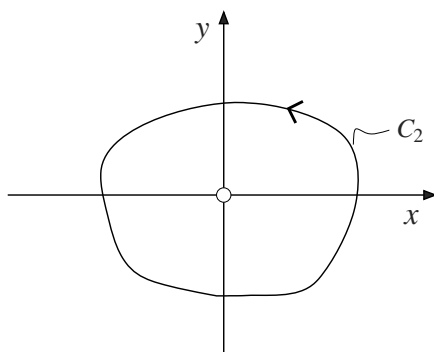
- $\oint_{C_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , sendo  $C_1 : x^2 + y^2 = a^2, a > 0$ ;
- $\oint_{C_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , sendo  $C_2$  uma curva fechada,  $C^1$  por partes, que envolve a origem.

**Solução:**

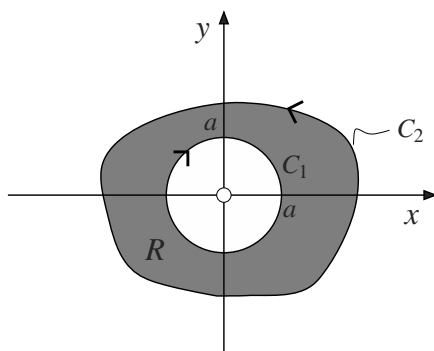
a. Observemos que a região limitada por  $C_1$  não está contida em  $D$ , pois  $(0,0) \notin D$ . Então não podemos aplicar o Teorema de Green. Sendo assim, usaremos a definição. Parametrizando  $C_1$ , temos  $x = a \cos t$  e  $y = a \sin t$ , com  $0 \leq t \leq 2\pi$  donde  $dx = -a \sin t \, dt$  e  $dy = a \cos t \, dt$ . Então

$$\begin{aligned} \oint_{C_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \oint_{C_1^+} \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{-a \sin t}{a^2} (-a \sin t) + \frac{a \cos t}{a^2} (a \cos t) \right] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

b.



Aqui também não podemos aplicar o Teorema de Green, pois  $(0,0)$  está na região limitada por  $C_2$  e  $(0,0) \notin D$ . Usar a definição é impossível, pois nem conhecemos uma equação de  $C_2$ . Então o que fazer?



A ideia é de isolar  $(0,0)$  por uma circunferência  $C_1 : x^2 + y^2 = a^2$  com o raio  $a$  adequado de modo que  $C_1$  esteja no interior da região limitada por  $C_2$ , orientada no sentido horário.

Seja  $R$  a região limitada por  $C_1$  e  $C_2$ . Logo,  $\partial R = C_2 \cup C_1$ . Como  $R$  não contém  $(0,0)$ , então podemos aplicar o Teorema de Green em  $R$ . Temos

$$\oint_{\partial R^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Como  $\left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0$  (Verifique!) então

$$\oint_{\partial R^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

Logo,

$$\oint_{C_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_1^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

donde

$$\oint_{C_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \oint_{C_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

ou

$$\oint_{C_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi$$

por (a).

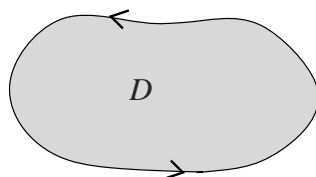
#### Exemplo 10.4.

- Se  $D$  é uma região plana qualquer à qual se aplica o Teorema de Green, mostre que a área de  $D$  é dada por  $A(D) = \oint_{\partial D^+} -y \, dx$  ou  $A(D) = \oint_{\partial D^+} x \, dy$  ou  $A(D) = \frac{1}{2} \oint_C -y \, dx + x \, dy$ .
- Aplique uma das fórmulas acima para mostrar que a área limitada pela elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  é  $\pi ab$ .



**Solução:**

a.



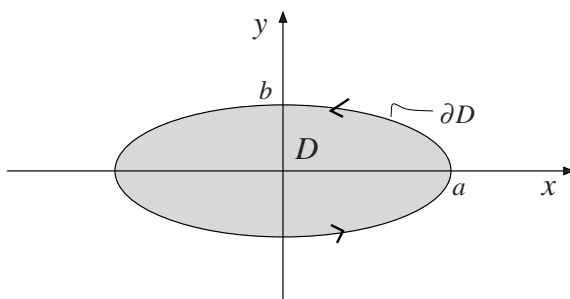
Pelo Teorema de Green, tem-se

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D^+} -y dx &= \oint_{\partial D^+} -y dx + 0 dy = \\ &= \iint_D \left( \frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial (-y)}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (0 + 1) dx dy = \\ &= \iint_D dx dy = A(D).\end{aligned}$$

Logo,

$$A(D) = \oint_{\partial D^+} -y dx.$$

Analogamente, provam-se as outras fórmulas.

b. O esboço de  $D$  está representado na figura que se segue.

A área de  $D$  é dada por  $A(D) = \oint_{\partial D^+} -y dx$  onde  $\partial D$  é parametrizada por

$$\begin{cases} \gamma(t) = (a \cos t, b \sin t) \\ \gamma'(t) = (-a \sin t, b \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Então

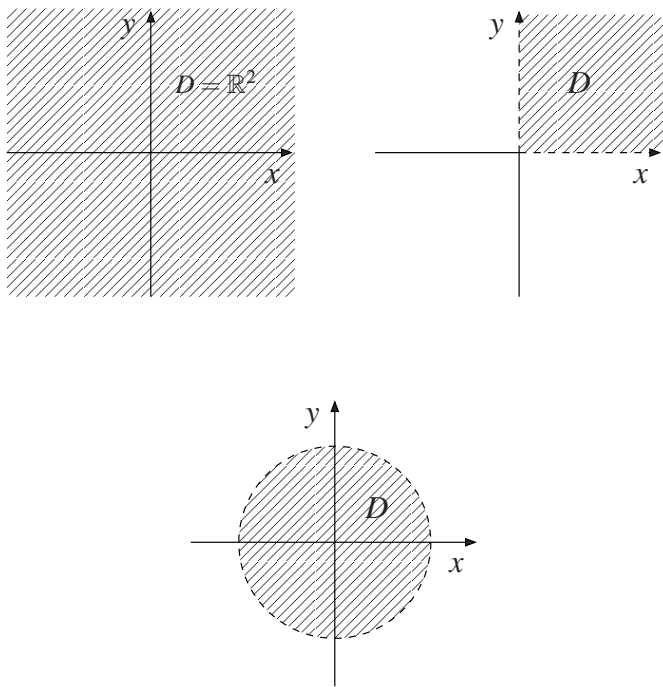
$$\begin{aligned}A(D) &= \int_0^{2\pi} (-b \sin t)(-a \sin t) dt = \int_0^{2\pi} ab \sin^2 t dt = \\ &= ab \cdot \frac{1}{2} \left[ t - \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{2\pi} = ab \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi ab \text{ u.a.}\end{aligned}$$

# TEOREMA DAS QUATRO EQUIVALÊNCIAS

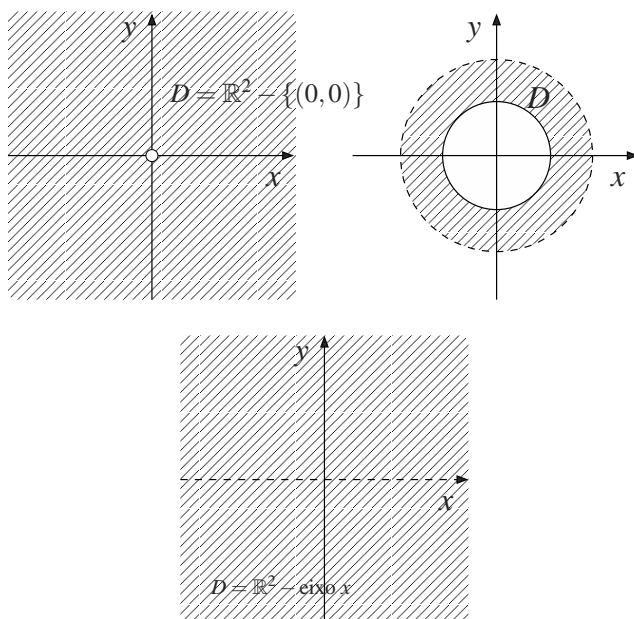
## CONDIÇÕES SOBRE $D$

- i.  $D$  é aberto.
- ii.  $D$  é conexo (isto é, dois pontos quaisquer de  $D$  podem ser ligados por uma curva contida em  $D$ ).
- iii.  $D$  é “sem buracos” (isto é, qualquer curva fechada de  $D$  delimita uma região inteiramente contida em  $D$ ).

Um conjunto satisfazendo as condições (i), (ii) e (iii) é dito um conjunto **simplesmente conexo**. A seguir daremos exemplos de conjuntos simplesmente conexos.



Agora, daremos exemplos de conjuntos não simplesmente conexos.



Seja  $D \subset \mathbb{R}^3$ . Dizemos que  $D$  é um conjunto simplesmente conexo se  $D$  é aberto, conexo e “sem buracos” (no sentido de que qualquer curva fechada de  $D$  delimita uma superfície inteiramente contida em  $D$ ).

### Exemplo 10.5.

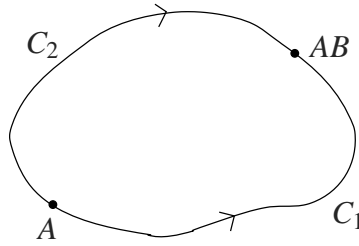
O  $\mathbb{R}^3$ , uma bola aberta em  $\mathbb{R}^3$ , o  $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$  são conjuntos simplesmente conexos. O  $\mathbb{R}^3$  sem uma reta não é simplesmente conexo.

### Teorema 10.2.

Seja  $\vec{F}$  um campo de classe  $C^1$  em um domínio  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ , simplesmente conexo. Se  $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$  então  $\vec{F}$  é conservativo.

### Demonstração

Do Teorema de Green segue que  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ , para todo caminho fechado de  $D$ . Tomemos dois pontos  $A$  e  $B$  quaisquer de  $D$  e sejam  $C_1$  e  $C_2$  caminhos  $C^1$  por partes ligando  $A$  e  $B$ .



Seja o caminho fechado  $\overline{C} = C_1 \cup C_2^-$ . Logo, temos que  $\int_{\overline{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$  ou  $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$  ou  $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ , donde  $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ . Isto mostra que  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  não depende do caminho.

Então, fixemos um ponto  $A = (a_1, a_2)$  em  $D$  e para cada  $X = (x, y) \in D$ , definimos  $\varphi(x, y) = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  onde  $C$  é um caminho  $C^1$  por partes ligando  $A$  a  $X$ . Como essa integral não depende do caminho  $C$  escolhido,  $\varphi$  é uma função bem definida. Finalmente, mostra-se sem grandes dificuldades que  $\nabla\varphi = \vec{F}$  em  $D$  e, portanto, o teorema está demonstrado.

CQD

Do Teorema 10.1 e de teoremas da Aula 9, enunciamos um teorema contendo quatro equivalências.

**Teorema 10.3** (Teorema das Quatro Equivalências).

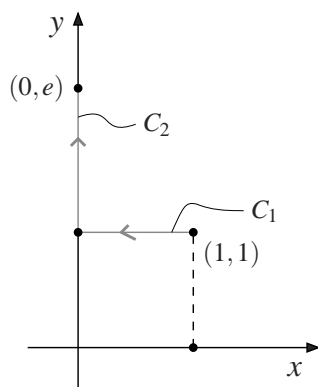
Seja  $\vec{F} = (P, Q) : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo de classe  $C^1$  em  $D$ . Se  $D \subset \mathbb{R}^2$  é um conjunto simplesmente conexo, então as seguintes afirmações são equivalentes:

- a.  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$  em  $D$ .
- b.  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$  qualquer que seja a curva fechada  $C$  de  $D$ .
- c.  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  não depende do caminho  $C$  de  $D$ .
- d.  $\vec{F}$  é conservativo.

**Exemplo 10.6.**

Considere a curva  $C$  dada por  $\sigma(t) = \left(-\cos \frac{\pi}{t}, e^{t-1}\right)$ ,  $1 \leq t \leq 2$ . Calcule  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , onde  $\vec{F}(x, y) = (-y^2 \sin x, 2y \cos x)$ .

**Solução:** Como  $\vec{F}$  é de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2$  (que é um conjunto simplesmente conexo) e  $\frac{\partial Q}{\partial x} = -2y \sin x = \frac{\partial P}{\partial y}$ , então pelo teorema das quatro equivalências, segue que  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  não depende do caminho que liga  $\sigma(1) = (1, 1)$  e  $\sigma(2) = (0, e)$ . Então, considere  $C = C_1 \cup C_2$ , onde  $C_1^- : y = 1, 0 \leq x \leq 1$ , donde  $dy = 0$  e  $C_2 : x = 0, 1 \leq y \leq e$ , donde  $dx = 0$ .



Temos

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= - \int_{C_1^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{C_1^-} P(x, 1) dx = \\ &= - \int_0^1 (-\sin x) dx = \int_0^1 \sin x dx = -\cos x \Big|_0^1 = 1 - \cos 1 \\ \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{C_2} Q(0, y) dy = \int_1^e 2y \cos 0 dy = \\ &= \int_1^e 2y dy = y^2 \Big|_1^e = e^2 - 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 1 - \cos 1 + e^2 - 1 = e^2 - \cos 1.$$

### Uma Solução Alternativa

Pelo teorema das quatro equivalências, segue que  $\vec{F}$  é conservativo. Logo, existe  $\varphi(x, y)$  definido em  $\mathbb{R}^2$ , tal que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -y^2 \sin x \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y \cos x \quad (2)$$

Integrando (1) e (2) em relação a  $x$  e  $y$  respectivamente, temos

$$\varphi(x, y) = y^2 \cos x + f(y)$$

$$\varphi(x, y) = y^2 \cos x + g(x).$$

Tomando  $f(y) = 0$  e  $g(x) = 0$ , temos que  $\varphi(x, y) = y^2 \cos x$  é uma função potencial de  $\vec{F}$ . Logo,

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \varphi(\sigma(2)) - \varphi(\sigma(1)) = \varphi(0, e) - \varphi(1, 1) = \\ &= e^2 \cos 0 - 1^2 \cos 1 = e^2 - \cos 1. \end{aligned}$$

#### Exemplo 10.7.

Considere a integral de linha

$$\int_C (kxe^y + y) dx + (x^2 e^y + x - ky) dy.$$

- Determine a constante  $k$  para que esta integral seja independente do caminho.
- Calcule o valor da integral de  $A = (0, 0)$  a  $B = (1, 1)$  para o valor de  $k$  encontrado em (a).

### Solução:

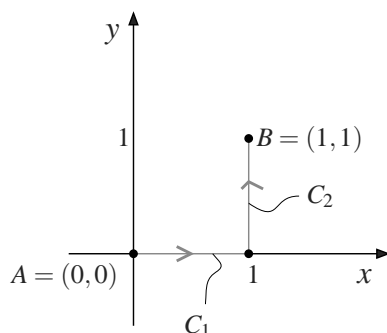
- O campo  $\vec{F}$  é definido em  $\mathbb{R}^2$  que é um conjunto simplesmente conexo. Pelo teorema das quatro equivalências é necessário que  $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$  para que a integral independa do caminho. Então

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0} &\Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \text{ em } \mathbb{R}^2 \\
 &\Leftrightarrow 2xe^y + 1 = kxe^y + 1 \\
 &\Leftrightarrow 2xe^y = kxe^y \\
 &\Leftrightarrow 2x = kx \text{ pois } e^y \neq 0 \text{ para todo } y \in \mathbb{R} \\
 &\Leftrightarrow k = 2.
 \end{aligned}$$

Portanto, para  $k = 2$  segue que  $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$ , donde pelo teorema das equivalências temos que a integral independe do caminho.

b. Temos que

$$k = 2 \Rightarrow \vec{F}(x, y) = (2xe^y + y) \vec{i} + (x^2e^y + x - 2y) \vec{j}.$$



Como a integral independe do caminho, tomemos  $C = C_1 \cup C_2$ , onde  $C_1 : y = 0$ , com  $0 \leq x \leq 1$  donde  $dy = 0$  e  $C_2 : x = 1$ , com  $0 \leq y \leq 1$ , donde  $dx = 0$ . Temos

$$\begin{aligned}
 \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{C_1} P(x, 0) dx = \int_0^1 2xe^0 dx = \int_0^1 2x dx = \\
 &= \left[ x^2 \right]_0^1 = 1 \\
 \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{C_2} Q(1, y) dy = \int_0^1 (e^y + 1 - 2y) dy = \\
 &= \left[ e^y + y - y^2 \right]_0^1 = e - 1.
 \end{aligned}$$

Somando, temos

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 1 + e - 1 = e.$$

### Uma Solução Alternativa

Também do teorema das equivalências resulta que  $\vec{F}$  é conservativo, isto é, existe  $\varphi(x, y)$  definido em  $\mathbb{R}^2$ , tal que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xe^y + y \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2e^y + x - 2y \quad (4)$$

Integrando (3) e (4) em relação a  $x$  e  $y$  respectivamente, temos

$$\varphi(x, y) = x^2e^y + xy + f(y)$$

$$\varphi(x, y) = x^2e^y + xy - y^2 + g(x).$$

Devemos tomar  $f(y) = -y^2$  e  $g(x) = 0$ . Assim, temos que  $\varphi(x, y) = x^2e^y + xy - y^2$  é uma função potencial de  $\vec{F}$ . Logo,

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \varphi(B) - \varphi(A) = \varphi(1, 1) - \varphi(0, 0) = \\ &= e + 1 - 1 - 0 + 0 - 0 = e. \end{aligned}$$

### Exercício 10.1.

1. Verifique o teorema de Green, calculando as duas integrais do enunciado para  $P(x, y) = \frac{2}{3}(xy^3 - x^2y)$ ,  $Q(x, y) = x^2y^2$ ,  $D$  é o triângulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(1, 1)$ .

2. Calcule  $\oint_C x^{-1}e^y dx + (e^y \ln x + 2x) dy$ , onde  $C$  é a fronteira da região limitada por  $x = y^4 + 1$  e  $x = 2$ , orientada no sentido anti-horário.

3. Calcule

$$I = \int_C (y - x + \arctg x) dx + (2x - y + \sqrt{1 + y^2}) dy,$$

sabendo que  $C$  é a fronteira da região limitada pelas curvas  $y = x + 2$  e  $y = x^2$ , orientada positivamente.

4. Se  $D$  é a região interior à elipse  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  e exterior à circunferência  $x^2 + y^2 = 4$ , calcule a integral de linha

$$I = \int_C (2xy + e^{x^2}) dx + (x^2 + 2x + \cos y^2) dy$$

onde  $C = \partial D$  está orientada positivamente.



5. Calcule

$$\int_{(4,0)}^{(0,0)} -xy(1+x)^{-1} dx + \ln(1+x) dy,$$

onde  $C$  é formada por  $x + 2y = 4$  e  $x = 0$ .

6. Seja

$$\vec{F}(x, y) = \left( \frac{y-1}{x^2 + (y-1)^2} - y, \frac{-x}{x^2 + (y-1)^2} \right),$$

com  $(x, y) \neq (0, 1)$ . Calcule a integral de linha do campo  $\vec{F}$  ao longo de  $C_1$  e  $C_2$ , orientadas no sentido anti-horário, onde

a.  $C_1 : x^2 + (y-1)^2 = 1$

b.  $C_2 : x^2 + y^2 = 16$

7. Calcule as integrais

a.  $\int_C \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy$ , sendo  $C : \gamma(t) = (e^t, \text{sen } t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$

b.  $\int_C 7x^6 y dx + x^7 dy$ , sendo  $C : \gamma(t) = (t, e^{t^2-1})$ ,  $0 \leq t \leq 1$

8. Mostre que a seguinte integral independe do caminho e calcule seu valor:

$$I = \int_{(1,-2)}^{(3,4)} \frac{2xy dx - x^2 dy}{x^4}.$$

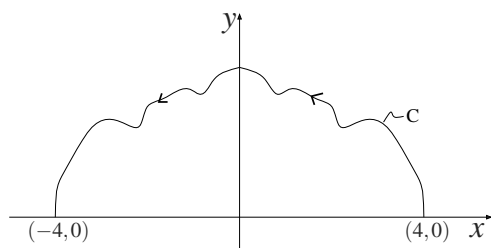
9. Mostre que a seguinte integral de linha

$$I = \int_C (3 + 2xy) dx + (x^2 - 3y^2) dy$$

é independente do caminho e calcule o valor de  $I$  quando  $C$  é a curva dada por

$$\sigma(t) = e^t \text{sen } t \vec{\mathbf{i}} + e^t \cos t \vec{\mathbf{j}}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

10. Seja  $C$  uma curva simétrica em relação ao eixo  $y$ , que vai de  $(4,0)$  a  $(-4,0)$ , como mostrada na figura que se segue. Sabendo-se que a área da região delimitada por  $C$  e pelo eixo  $x$  vale 16, calcule o trabalho realizado pela força  $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{x^2}{4} + xy^3\right) \vec{i} + (2x + \arctg y) \vec{j}$ .



# Aula 11

## SUPERFÍCIES PARAMETRIZADAS

---

### Objetivos

- 1 estudar as superfícies parametrizadas visando as integrais de superfície;
- 2 estudar as áreas de superfícies parametrizadas.

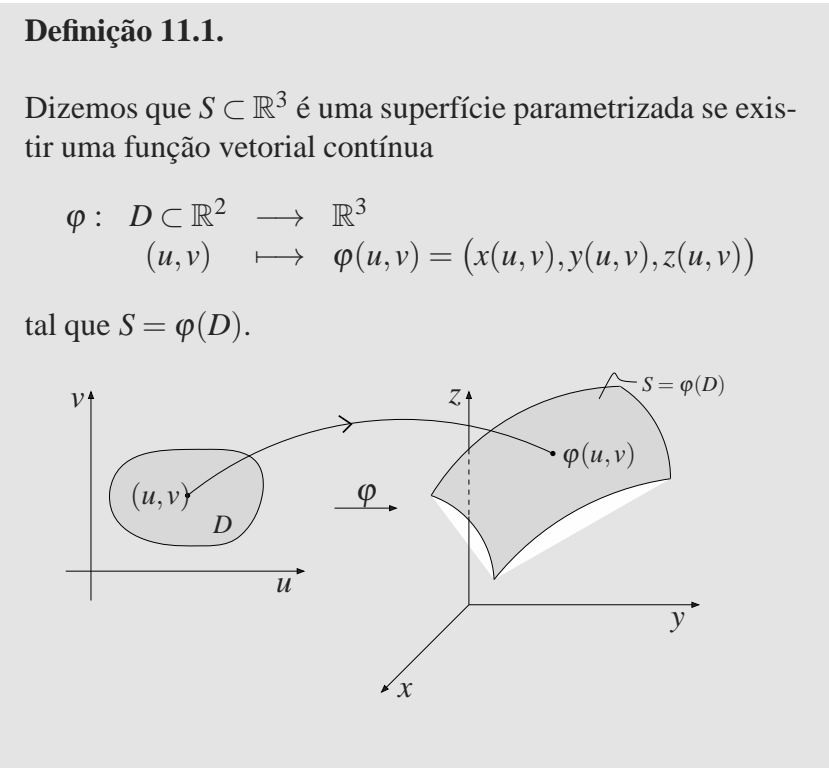
# SUPERFÍCIES PARAMETRIZADAS

**Definição 11.1.**

Dizemos que  $S \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície parametrizada se existir uma função vetorial contínua

$$\begin{aligned} \varphi : D \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

tal que  $S = \varphi(D)$ .

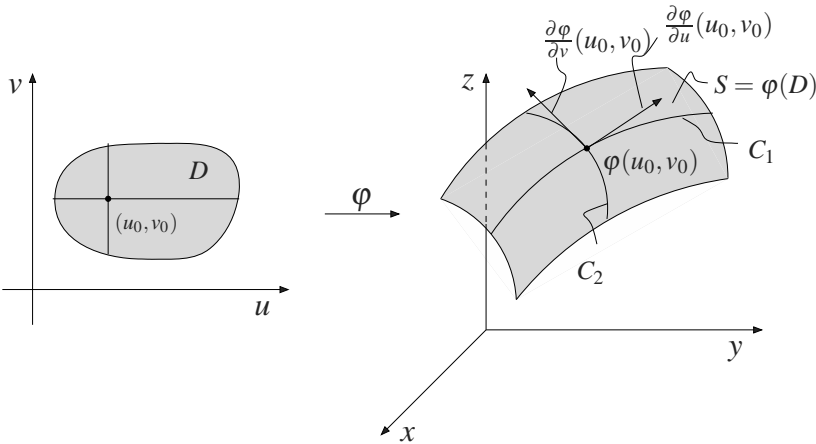


As funções  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$  são chamadas equações paramétricas de  $S$ .

Se  $\varphi$  for diferenciável em  $(u_0, v_0) \in D$ , fixando  $v = v_0$ , obtemos uma curva diferenciável

$$C_1 : \gamma(u) = \varphi(u, v_0) = (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0))$$

(Veja a figura a seguir).



Se

$$\begin{aligned}\gamma'(u_0) &= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) = \varphi_u(u_0, v_0) = \\ &= \left( \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right) \neq \vec{0}\end{aligned}$$

segue que  $\varphi_u(u_0, v_0)$  é um vetor tangente a  $C_1$  em  $\varphi(u_0, v_0)$ .

Analogamente, se

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) &= \varphi_v(u_0, v_0) = \\ &= \left( \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right) \neq \vec{0}\end{aligned}$$

então este vetor é um vetor tangente a  $C_2$  em  $\varphi(u_0, v_0)$ .

Se o vetor

$$\begin{aligned}\vec{N} &= \vec{N}(u_0, v_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) = \\ &= \varphi_u(u_0, v_0) \times \varphi_v(u_0, v_0) \neq \vec{0}\end{aligned}$$

então  $\vec{N}$  é um vetor normal a  $S$  em  $\varphi(u_0, v_0)$ . O vetor  $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$  é um vetor normal unitário a  $S$  em  $\varphi(u_0, v_0)$ .

Dizemos que  $S$  é regular em  $\varphi(u_0, v_0)$  se  $\vec{N}(u_0, v_0) \neq \vec{0}$ . O plano tangente a  $S$  em  $\varphi(u_0, v_0)$  é dado por

$$[(x, y, z) - \varphi(u_0, v_0)] \cdot \vec{N}(u_0, v_0) = 0.$$

Apresentaremos, agora, parametrizações das principais superfícies:

## PLANO $S$

Sejam  $P_0 \in S$ ,  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  não paralelos contido no plano  $S$ . Seja  $P \in S$ . Então, existem escalares  $u$  e  $v$ , tais que:

$$\overrightarrow{P_0P} = u\vec{a} + v\vec{b} \Leftrightarrow P = P_0 + u\vec{a} + v\vec{b}.$$

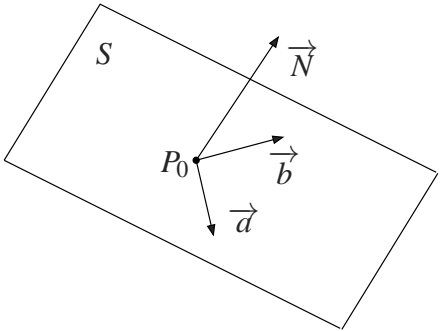
Então, uma parametrização de  $S$  é dada por:

$$\varphi(u, v) = P_0 + u\vec{a} + v\vec{b}$$

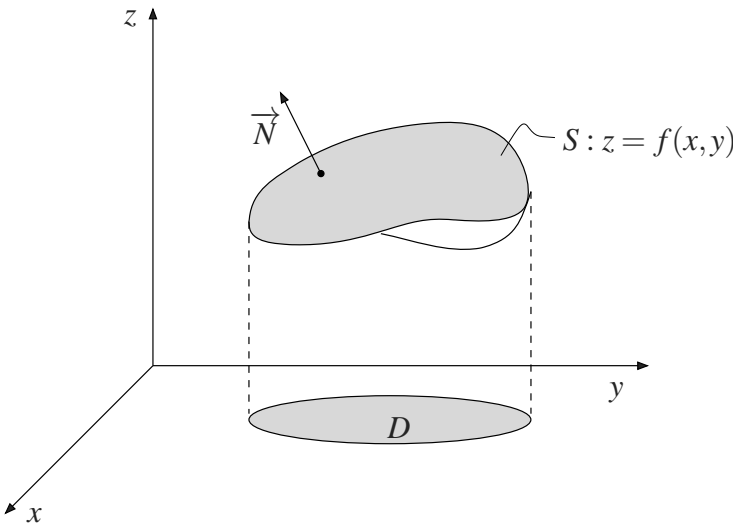
com  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ .

Da Geometria Analítica, vê-se que um vetor normal a  $S$  em  $P_0$  é:

$$\vec{N} = \vec{a} \times \vec{b}.$$



**$S = \text{GRÁFICO DE } z = f(x, y), \text{ COM } (x, y) \in D \text{ E } f(x, y) \text{ DE CLASSE } C^1$**



Uma parametrização natural (ou canônica) de  $S = G_f$  (gráfico de  $f$ ) é dada por

$$\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y)), \text{ com } (x, y) \in D.$$

Um vetor normal é dado por:

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = \varphi_x(x, y) \times \varphi_y(x, y) = \\ &= (-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1) \text{ Verifique!} \end{aligned}$$

Como  $\vec{N}(x, y) \neq \vec{0}$ , para todo  $(x, y) \in D$ , segue que  $S = G_f$  é uma superfície regular.

**CILINDRO**  $x^2 + y^2 = a^2, a > 0$ 

Utilizamos as coordenadas cilíndricas para parametrizar um cilindro de raio  $a$ . Tem-se:

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

Então

$$\varphi(\theta, z) = (a \cos \theta, a \sin \theta, z)$$

com  $(\theta, z) \in D : 0 \leq \theta \leq 2\pi, z \in \mathbb{R}$  é uma parametrização de  $S$ .

Verifique que  $\vec{N} = \varphi_\theta(\theta, z) \times \varphi_z(\theta, z) = (a \cos \theta, a \sin \theta, 0)$ . Logo,  $\vec{N} = (x, y, 0)$  é um vetor normal exterior a  $S$  em cada  $(x, y, z) \in S$ , donde  $\vec{n} = \frac{(x, y, 0)}{a}$  é o vetor unitário normal exterior a  $S$ .

**ESFERA**  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, a > 0$ 

Utilizamos as coordenadas esféricas para parametrizar a esfera. Tem-se:

$$\begin{cases} x = a \sin \phi \cos \theta \\ y = a \sin \phi \sin \theta \\ z = a \cos \phi \end{cases}$$

com  $0 \leq \phi \leq \pi$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Então:

$$\varphi(\phi, \theta) = (a \sin \phi \cos \theta, a \sin \phi \sin \theta, a \cos \phi)$$

com  $(\phi, \theta) \in D : \begin{cases} 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$ . Verifique que:

$$\vec{N} = \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} =$$

$$= (a^2 \sin^2 \phi \cos \theta, a^2 \sin^2 \phi \sin \theta, a^2 \sin \phi \cos \phi)$$

$$\|\vec{N}\| = a^2 \sin \phi.$$

Logo:

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} = \frac{\varphi(\phi, \theta)}{a} = \frac{(x, y, z)}{a},$$

isto é,  $\vec{n} = \frac{(x, y, z)}{a}$  é o vetor unitário normal exterior à esfera.

## SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO $S$

a. Seja  $C$  uma curva no plano  $yz$  dada por

$$C : \begin{cases} x = 0 \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

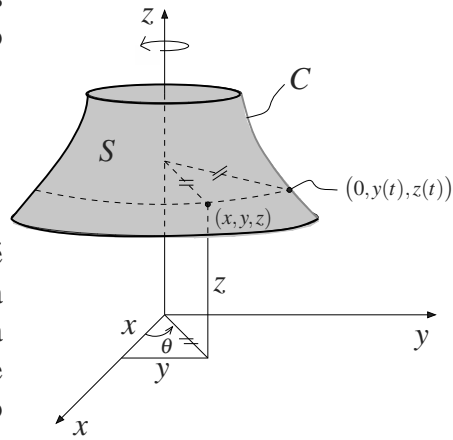
com  $a \leq t \leq b$  e  $y(t) \geq 0$  em  $[a, b]$ .

Ao girar o ponto  $(0, y(t), z(t))$  ao redor do eixo  $z$ , na altura  $z(t)$ , obtemos uma circunferência de raio  $y(t)$ , parametrizada por

$$(y(t) \cos \theta, y(t) \sin \theta, z(t)),$$

com  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

Fazendo  $t$  variar de  $a$  até  $b$ , a circunferência começa a se deslocar segundo a altura  $z = z(t)$ , gerando a superfície de revolução  $S$  da figura ao lado. Tem-se:



$$S : \varphi(t, \theta) = (y(t) \cos \theta, y(t) \sin \theta, z(t))$$

onde  $(t, \theta) \in D : \begin{cases} a \leq t \leq b \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$

Observe que na superfície  $S$  tem-se:

$y(t)$  = raio de uma circunferência transversal

$z(t)$  = altura desta circunferência.

b. Se  $C$  é uma curva no plano  $xz$  dada por

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = 0 \\ z = z(t) \end{cases}$$

com  $a \leq t \leq b$ , então:

$x(t)$  = raio de uma circunferência transversal

$z(t)$  = altura dessa circunferência.



Logo, uma parametrização da superfície de revolução  $S$  obtida girando  $C$  ao redor do eixo  $z$  é

$$S: \varphi(t, \theta) = (x(t) \cos \theta, x(t) \sin \theta, z(t))$$

$$\text{com } (t, \theta) \in D: \begin{cases} a \leq t \leq b \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}.$$

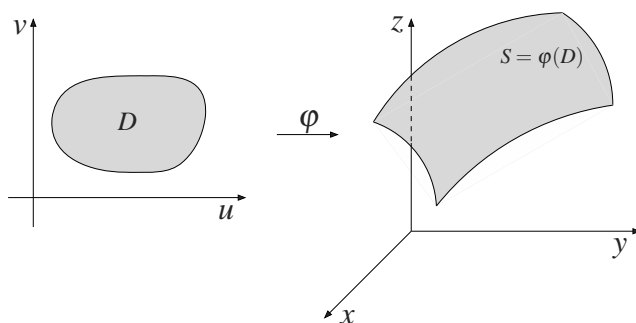
## ÁREA DE SUPERFÍCIE

Seja  $S$  uma superfície parametrizada por  $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in D$  onde  $D$  é um conjunto compacto que tem área e com  $\varphi$  de classe  $C^2$  em um conjunto aberto contendo  $D$ . É necessário também que  $\varphi$  seja uma função injetora exceto possivelmente na fronteira de  $D$  e que  $S$  seja regular exceto em um número finito de pontos.

Daqui por diante, até o final do curso, trabalharemos somente com superfícies descritas acima.

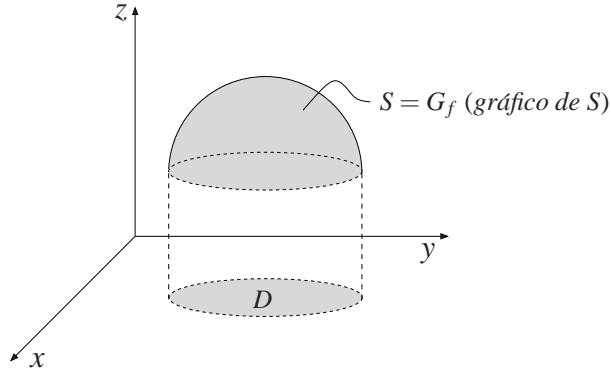
Definimos a área de  $S$  por

$$A(S) = \iint_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| du dv.$$



✎ Se  $S$  for o gráfico de uma função de classe  $C^1$ ,  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ , onde  $D$  é um conjunto compacto que tem área, então:

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} dx dy.$$



**Exemplo 11.1.**

Mostre que a área da esfera  $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $a > 0$  é dada por  $A(S) = 4\pi a^2$ .

**Solução:** Usando as coordenadas esféricas com  $\rho = a$ , para parametrizar a esfera, tem-se

$$\varphi(\phi, \theta) = (a \sen \phi \cos \theta, a \sen \phi \sen \theta, a \cos \phi)$$

$$\text{com } (\phi, \theta) \in D : \begin{cases} 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}.$$

Calculemos  $\varphi_\phi \times \varphi_\theta(\phi, \theta) = \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\phi, \theta)$  e seu módulo.

Tem-se

$$\varphi_\phi = (a \cos \phi \cos \theta, a \cos \phi \sen \theta, -a \sen \phi)$$

$$\varphi_\theta = (-a \sen \phi \sen \theta, a \sen \phi \cos \theta, 0)$$

donde

$$\begin{aligned} \varphi_\phi \times \varphi_\theta &= \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a \cos \phi \cos \theta & a \cos \phi \sen \theta & -a \sen \phi \\ -a \sen \phi \sen \theta & a \sen \phi \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= (a^2 \sen^2 \phi \cos \theta, a^2 \sen^2 \phi \sen \theta, \\ &\quad \underbrace{a^2 \sen \phi \cos \phi \cos^2 \theta + a^2 \sen \phi \cos \phi \sen^2 \theta}_{=a^2 \sen \phi \cos \phi}) \\ &= a \sen \phi (a \sen \phi \cos \theta, a \sen \phi \sen \theta, a \cos \phi) \\ &= (a \sen \phi) \cdot \varphi(\phi, \theta). \end{aligned}$$

Esta última expressão mostra que o vetor normal em cada ponto da esfera é radial, isto é, é um múltiplo do vetor posição  $\varphi(\phi, \theta)$ .

Tem-se

$$\|\varphi_\phi \times \varphi_\theta(\phi, \theta)\| = |a \sin \phi| \|\varphi(\phi, \theta)\| = a^2 |\sin \phi| = a^2 \sin \phi$$

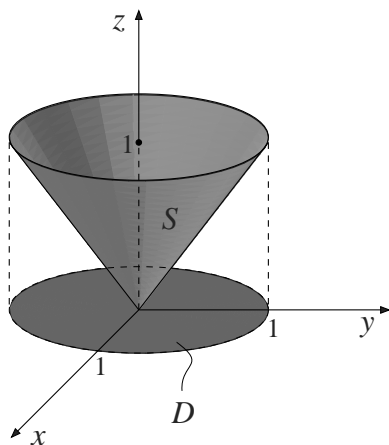
pois  $0 \leq \phi \leq \pi$ , isto é,  $\|\varphi_\phi \times \varphi_\theta\| = a^2 \sin \phi$  (memorize este resultado). Como  $A(S) = \iint_D \|\varphi_\phi \times \varphi_\theta\| d\phi d\theta$ , então

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_D a^2 \sin \phi d\phi d\theta = a^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \phi d\theta d\phi = \\ &= 2\pi a^2 \int_0^\pi \sin \phi d\phi = 2\pi a^2 [-\cos \phi]_0^\pi = 4\pi a^2 \text{ u.a.} \end{aligned}$$

### Exemplo 11.2.

Calcule a área da superfície  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $0 \leq z \leq 1$ .

**Solução:** O esboço da superfície  $S$  está representado na figura que se segue.



Temos que  $S : z = \underbrace{\sqrt{x^2 + y^2}}_{f(x,y)}$ ,  $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1$ . Também temos

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ e } f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \text{ Logo,}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} &= \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \\ &= \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Como

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} dx dy$$

então

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_D \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} \iint_D dx dy = \sqrt{2} \cdot A(D) = \\ &= \sqrt{2} \cdot \pi \cdot 1^2 = \pi\sqrt{2} \text{ u.a.} \end{aligned}$$

### Exercício 11.1.

- Esboce e parametrize as superfícies abaixo, indicando o domínio dos parâmetros:
  - $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 1\}$ .
  - $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ .
  - $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ .
  - $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 2 + \frac{x}{4} - \frac{y}{2}\}$ .
  - $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 2y, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$ .
- Seja  $S$  uma superfície parametrizada por
 
$$\varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, 1 - v^2),$$
 com  $0 \leq u \leq 2\pi$  e  $v \geq 0$ .
  - Identifique esta superfície.
  - Encontre uma equação da reta normal e a equação do plano tangente a  $S$  em  $\varphi(0, 1)$ .
- Seja  $S$  a superfície parametrizada por  $\varphi(u, v) = (u, v, 1 - v^2)$ ,  $u \geq 0$ ,  $v \geq 0$  e  $u + v \leq 1$ .
  - Desenhe  $S$ .
  - Determine o plano tangente a  $S$  no ponto  $\varphi(1/2, 1/4)$ .
  - Determine a área de  $S$ .
- Seja  $S$  a superfície obtida girando-se a circunferência  $C : (x - a)^2 + z^2 = b^2$  com  $0 < b < a$ , em torno do eixo  $z$ . Essa superfície é dita toro.
  - Parametrize-a.
  - Calcule a sua área.

5. Determine a área do parabolóide  $z = 2(x^2 + y^2)$ , abaixo do plano  $z = 8$ .
6. Calcule a área da parte da superfície esférica  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$  que se encontra dentro do parabolóide  $z = x^2 + y^2$ .
7. Calcule a área da parte da superfície  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  compreendida entre os planos  $x + y = 1$ ,  $x + y = 2$ ,  $x = 0$  e  $y = 0$ .
8. Seja  $S$  a superfície de equação  $2z = x^2 + y^2$ , onde  $0 \leq z \leq k$ , com  $k > 0$ .
  - a. Dê uma parametrização para  $S$ .
  - b. Sabendo-se que a área de  $S$  vale  $\frac{14\pi}{3}$ , determine o valor de  $k$ .
9. Calcule a área da superfície  $S$  parte da superfície  $x^2 + y^2 = 4$ , limitada por  $z = 4 - x^2$  e  $z = 0$ .
10. Calcule a área da superfície do cilindro  $x^2 + y^2 = 2y$  limitada pelo plano  $z = 0$  e o cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .



# Aula 12

## INTEGRAL DE SUPERFÍCIE DE UM CAMPO ESCALAR

---

### O b j e t i v o s

- 1 estudar as integrais de superfície de um campo escalar;
- 2 estudar aplicações como cálculo de massa, centro de massa e momento de inércia.

## INTEGRAL DE SUPERFÍCIE DE UM CAMPO ESCALAR

Definimos a integral de superfície de um campo escalar contínuo  $f(x, y, z)$  sobre uma superfície  $S$ , parametrizada por  $\varphi(u, v)$ , com  $(u, v) \in D$ , da seguinte maneira:

$$\iint_S f dS = \iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(\varphi(u, v)) \underbrace{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|}_{dS} du dv$$

onde  $dS = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| du dv$  é o elemento de área.



- i. Temos que, se  $S$  é o gráfico da função  $z = z(x, y)$ , com  $(x, y) \in D$ , então:

$$\begin{aligned} \iint_S f dS &= \iint_S f(x, y, z) dS = \\ &= \iint_D f(x, y, z(x, y)) \underbrace{\sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}}_{dS} dx dy \end{aligned}$$

onde  $dS = \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2} dx dy$  é o elemento de área.

- ii. Se  $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$ , então

$$\iint_S f dS = \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} f dS.$$

- iii. Se  $f(x, y, z) = 1$  em  $S$ , então

$$\iint_S 1 dS = \iint_S dS = A(S).$$

### Exemplo 12.1.

Calcule  $\iint_S xy dS$ , onde  $S$  é parametrizada por  $\varphi(u, v) = (u - v, u + v, 2u + v + 1)$  com  $(u, v) \in D : 0 \leq u \leq 1$  e  $0 \leq v \leq u$ .



**Solução:** Temos  $\frac{\partial \phi}{\partial u} = (1, 1, 2)$  e  $\frac{\partial \phi}{\partial v} = (-1, 1, 1)$ , donde

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -3, 2) \quad \text{e}$$

$$\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}.$$

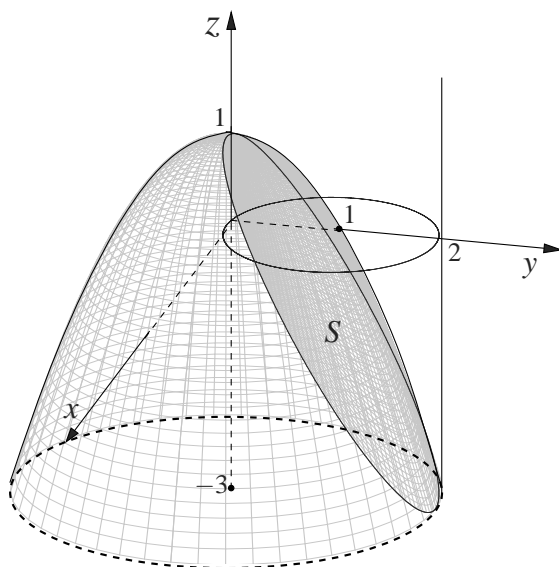
Logo,  $dS = \sqrt{14} du dv$ .

$$\begin{aligned} \iint_S xy dS &= \iint_D (u-v)(u+v) \sqrt{14} du dv = \\ &= \sqrt{14} \iint_D (u^2 - v^2) du dv = \sqrt{14} \int_0^1 \int_0^u (u^2 - v^2) dv du = \\ &= \sqrt{14} \int_0^1 \left[ u^2 v - \frac{v^3}{3} \right]_0^u du = \sqrt{14} \int_0^1 \left[ u^3 - \frac{u^3}{3} \right] du = \\ &= \frac{2\sqrt{14}}{3} \int_0^1 u^3 du = \frac{\sqrt{14}}{6} [u^4]_0^1 = \frac{\sqrt{14}}{6}. \end{aligned}$$

### Exemplo 12.2.

Calcule  $\iint_S \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} dS$ , onde  $S$  é a parte da superfície  $z = 1 - x^2 - y^2$  que se encontra dentro do cilindro  $x^2 + y^2 \leq 2y$ .

**Solução:** O esboço de  $S$  é dado na figura que se segue.



Temos  $S : z = \underbrace{1 - x^2 - y^2}_{f(x,y)}$ , com  $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 2y$ . Como

$dS = \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} dx dy$ , então  $dS = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy$ . Logo,

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} dS &= \\ &= \iint_D \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy = \\ &= \iint_D dx dy = A(D) = \pi \cdot 1^2 = \pi. \end{aligned}$$

## APLICAÇÕES À FÍSICA

Seja  $S$  uma chapa delgada formando uma superfície no espaço e seja  $\delta(x, y, z)$  sua densidade superficial que supomos contínua. Então, a massa  $M$  de  $S$  é dada por

$$M = \iint_S \delta(x, y, z) dS.$$

O momento de inércia de  $S$  em relação a um eixo  $E$  é dado por

$$I_E = \iint_S r^2(x, y, z) \delta(x, y, z) dS$$

onde  $r(x, y, z)$  = distância de  $(x, y, z)$  ao eixo  $E$ .

Se o eixo  $E$  = eixo  $z$ , então  $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$  e

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2) \delta(x, y, z) dS.$$

Se o eixo  $E$  = eixo  $y$ , então  $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + z^2}$ , donde

$$I_y = \iint_S (x^2 + z^2) \delta(x, y, z) dS.$$

Se o eixo  $E$  = eixo  $x$ , então  $r(x, y, z) = \sqrt{y^2 + z^2}$ , donde

$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2) \delta(x, y, z) dS.$$

O centro de massa  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  é dado por

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\iint_S x \delta(x, y, z) dS}{M} \\ \bar{y} &= \frac{\iint_S y \delta(x, y, z) dS}{M} \\ \bar{z} &= \frac{\iint_S z \delta(x, y, z) dS}{M}.\end{aligned}$$

**Exemplo 12.3.**

Calcule a massa da chapa fina  $S$  dada por  $\varphi(u, v) = (u, v, 2u + v)$ , com  $(u, v) \in D : 0 \leq u \leq 1$  e  $0 \leq v \leq u$ , sendo  $\delta(x, y, z) = x + y + z$  a densidade superficial.

**Solução:** Temos

$$M = \iint_S (x + y + z) dS = \iint_D (3u + 2v) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| dudv,$$

onde

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2, -1, 1)$$

e

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}.$$

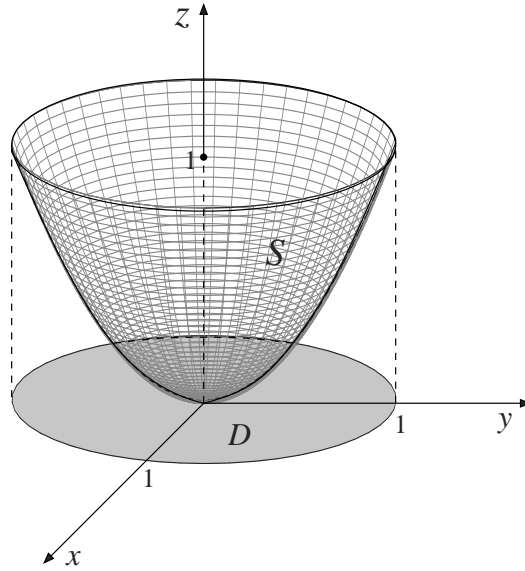
Logo,

$$\begin{aligned}M &= \sqrt{6} \iint_D (3u + 2v) dudv = \sqrt{6} \int_0^1 \int_0^u (3u + 2v) dv du = \\ &= \sqrt{6} \int_0^1 [3uv + v^2]_0^u du = \sqrt{6} \int_0^1 [3u^2 + u^2] du \\ &= \sqrt{6} \int_0^1 4u^2 du = \frac{4\sqrt{6}}{3} \text{ u.m.}\end{aligned}$$

**Exemplo 12.4.**

Calcule o momento de inércia da superfície homogênea de equação  $z = x^2 + y^2$ , com  $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1$ , em torno do eixo  $z$ .

**Solução:** O esboço de  $S$  está representado na figura que se segue.



A superfície  $S$  é descrita por

$$S : z = f(x, y) = x^2 + y^2, (x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1.$$

Temos

$$dS = \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} dx dy = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy.$$

Então:

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2) \delta(x, y, z) dS = k \iint_S (x^2 + y^2) dS.$$

pois  $S$  é homogênea. Logo:

$$I_z = k \iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy.$$

Usando coordenadas polares, temos

$$I_z = k \iint_{D_{r\theta}} r^2 \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta = 2k\pi \int_0^1 r^2 (1 + 4r^2)^{1/2} r dr$$

Fazendo  $u = 1 + 4r^2$ , temos  $r^2 = (u - 1)/4$  e  $r dr = du/8$ . Para  $r = 0$  temos  $u = 1$  e para  $r = 1$  temos  $u = 5$ . Então

$$\begin{aligned} I_z &= 2k\pi \int_1^5 \frac{u-1}{4} u^{1/2} \frac{du}{8} = \frac{k\pi}{16} \int_1^5 (u^{3/2} - u^{1/2}) du = \\ &= \frac{k\pi}{16} \left[ \frac{2}{5} u^{5/2} - \frac{2}{3} u^{3/2} \right]_1^5 = \frac{k\pi}{16} \left( \frac{2}{5} 5^{5/2} - \frac{2}{3} 5^{3/2} + \frac{4}{15} \right). \end{aligned}$$

### Exercício 12.1.

1. Calcule  $\iint_S (z - x^2 + xy^2 - 1) dS$ , onde  $S$  é a superfície

$$\varphi(u, v) = u \vec{i} + v \vec{j} + (u^2 + 1) \vec{k},$$

com  $0 \leq u \leq 1$  e  $0 \leq v \leq 2$ .

2. Calcule  $\iint_S x dS$ , onde  $S$  é o triângulo com vértices  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  e  $(0, 0, 1)$ .

3. Calcule  $\iint_S (x^2 + y^2) dS$ , onde  $S$  é a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

4. Calcule a massa da superfície  $S$  parte do plano  $z = 2 - x$  dentro do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ , sendo a densidade dada por  $\delta(x, y, z) = y^2$ .

5. Calcule  $\iint_S f(x, y, z) dS$ , onde  $f(x, y, z) = z$  e  $S$  é a parte da superfície  $z^2 = x^2 + y^2$  que se encontra acima do parabolóide  $4z = x^2 + y^2 + 3$ .

6. Seja  $S$  uma superfície fechada tal que  $S = S_1 \cup S_2$ , onde  $S_1$  e  $S_2$  são as superfícies de revolução obtidas pela rotação em torno do eixo  $z$  das curvas  $C_1 : z = 1 - x$ ,  $0 \leq x \leq 1$  e  $C_2 : z = 0$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , respectivamente. Se  $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$  é a função que fornece a densidade (massa por unidade de área) em cada ponto  $(x, y, z) \in S$ , calcule a massa de  $S$ .

7. Mostre que o momento de inércia em relação ao eixo  $z$  da casca do cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  de altura  $h$  que está no primeiro octante com densidade constante é  $I = \frac{Mh^2}{2}$ , onde  $M$  é a massa total.

8. Calcule o momento de inércia da superfície esférica de raio  $R$ , homogênea, de massa  $M$ , em torno de qualquer diâmetro.
9. Calcule o momento de inércia da superfície homogênea, de massa  $M$ , de equação  $x^2 + y^2 = R^2$ , ( $R > 0$ ), com  $0 \leq z \leq 1$ , em torno do eixo  $z$ .
10. Mostre que o momento de inércia em relação a um diâmetro que passa pelo centro de uma casca cilíndrica de comprimento  $L$  e raio de base  $a$  com densidade constante é  $I = \frac{1}{2}Ma^2 + \frac{1}{12}ML^2$ , onde  $M$  é a massa total.

# Aula 13

## INTEGRAL DE SUPERFÍCIE DE UM CAMPO VETORIAL

---



### O b j e t i v o s

- 1 compreender a noção de superfície orientável;
- 2 estudar as integrais de superfície de campos vetoriais.

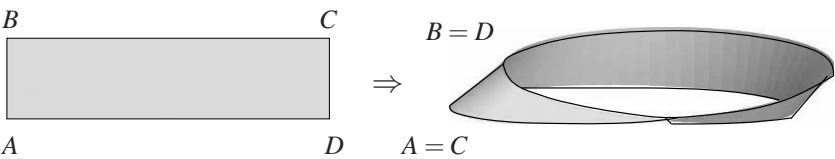
# INTEGRAL DE SUPERFÍCIE DE UM CAMPO VETORIAL

Hoje vamos integrar campos vetoriais sobre superfícies. Quando estudamos as integrais de linha de campos vetoriais, vimos que a definição dependia da orientação da curva, isto é,


$$\int_{C^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

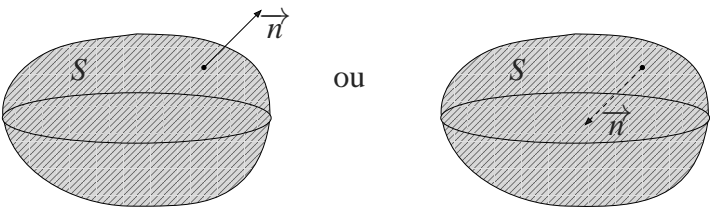
Aqui, em integral de superfície de um campo vetorial ou fluxo de um campo vetorial, a definição também depende do conceito de superfície orientada, que passaremos a definir.

Dizemos que  $S$  é uma superfície orientável quando for possível escolher sobre  $S$  um campo de vetores unitários normais a  $S$  que varie continuamente sobre  $S$ . Intuitivamente falando, significa que  $S$  tem dois lados. Há superfícies que tem um lado só como, por exemplo, a fita de Möbius que pode ser facilmente construída. Peguem uma tira de papel retangular  $ABCD$ . Pintem um lado de vermelho e o outro de azul. Fixem o lado  $AB$  e façam uma meia volta com o lado  $CD$  e cole  $A$  com  $C$  e  $B$  com  $D$ .



A fita de Möbius tem apenas um lado, pois as duas cores se encontram.

 Superfícies fechadas orientáveis terão duas orientações “naturais”, determinadas pela normal “exterior” e pela normal “interior”.






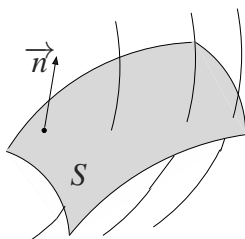
Daqui para frente só consideraremos superfícies orientáveis (com dois lados).

### Definição 13.1.

Seja  $S$  uma superfície regular orientável. Seja  $\vec{n}$  uma orientação de  $S$ . Seja  $\vec{F}$  um campo vetorial contínuo definido em um aberto contendo  $S$ . A integral de superfície de  $\vec{F}$  através de  $S$  ou o fluxo  $\Phi$  de  $\vec{F}$  através de  $S$  é a integral de superfície do campo escalar  $\vec{F} \cdot \vec{n}$ :

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS.$$

-  i. Se  $\vec{F}$  representa o campo de velocidades de um fluido, essa integral fornece o volume do fluido que atravessa  $S$  em uma unidade de tempo, na direção de  $\vec{n}$ .



- ii. Se  $S$  é parametrizada por  $\varphi(u, v)$ ,  $(u, v) \in D$ , então

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \\ &= \iint_D \vec{F}(\varphi(u, v)) \cdot \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} \cdot \|\varphi_u \times \varphi_v\| \, dudv = \\ &= \iint_D \vec{F}(\varphi(u, v)) \cdot (\varphi_u \times \varphi_v) \, dudv \\ \text{se } \vec{n} &= \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} \mathbf{e} \\ \Phi &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \\ &= - \iint_D \vec{F}(\varphi(u, v)) \cdot (\varphi_u \times \varphi_v) \, dudv \\ \text{se } \vec{n} &= - \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}. \end{aligned}$$

- iii. Se  $S$  é o gráfico da função  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ , então

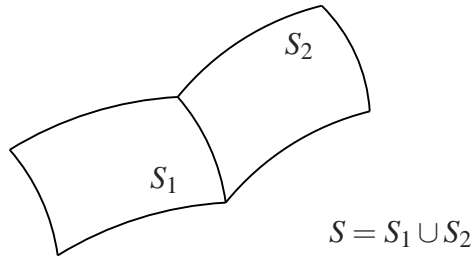
$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \\ &= \iint_D \vec{F}(x, y, f(x, y)) \cdot (-f_x, -f_y, 1) \, dxdy\end{aligned}$$

$$\text{se } \vec{n} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}} \mathbf{e}$$

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \\ &= \iint_D \vec{F}(x, y, f(x, y)) \cdot (f_x, f_y, -1) \, dxdy\end{aligned}$$

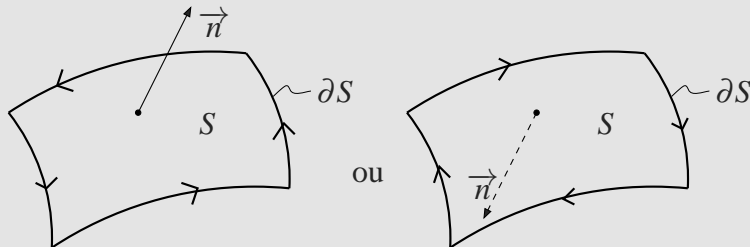
$$\text{se } \vec{n} = \frac{(f_x, f_y, -1)}{\sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}}.$$

- iv. Queremos definir  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$ , onde temos que  $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m$ .



### Definição 13.2.

Seja  $S$  uma superfície orientada por um campo de vetores normais unitários  $\vec{n}$ . Dizemos que o bordo de  $S$ ,  $\partial S$ , está orientado positivamente se ao caminhar ao longo de  $\partial S$  com a cabeça no sentido de  $\vec{n}$ , tivermos  $S$  à nossa esquerda.

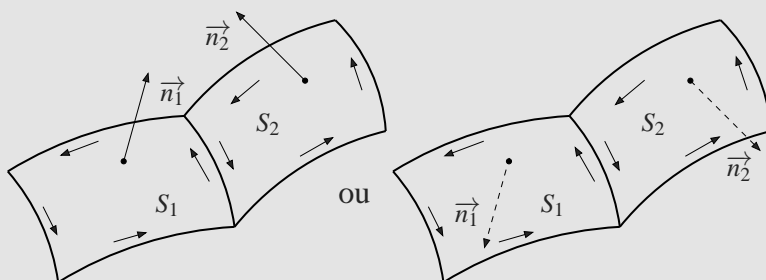


✍ Uma regra prática para orientar  $\partial S$  é a conhecida “regra da mão direita” com polegar no sentido de  $\vec{n}$ .



### Definição 13.3.

Dizemos que  $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m$  está orientada se for possível orientar cada  $S_i$  de forma que nos bordos comuns a duas superfícies, as orientações resultem opostas.



Então:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \\ &= \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, dS + \dots + \iint_{S_m} \vec{F} \cdot \vec{n}_m \, dS. \end{aligned}$$

### Exemplo 13.1.

Calcule o fluxo de  $\vec{F}(x, y, z) = 2x\vec{i} + (x + y)\vec{j} - 2xy\vec{k}$  através da superfície  $S : \varphi(u, v) = (u, v, 1 - u^2 - v^2)$ , com  $(u, v) \in D : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$  e com normal  $\vec{n} = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$ .

**Solução:** Temos  $\varphi_u = (1, 0, -2u)$  e  $\varphi_v = (0, 1, -2v)$  donde

$$\varphi_u \times \varphi_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = (2u, 2v, 1).$$

O fluxo de  $\vec{F}$  é dado por

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \\ &= \iint_D \vec{F}(\varphi(u, v)) \cdot \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} \cdot \|\varphi_u \times \varphi_v\| \, dudv = \\ &= \iint_D \vec{F}(\varphi(u, v)) \cdot (\varphi_u \times \varphi_v) \, dudv = \\ &= \iint_S (2u, u + v, -2uv) \cdot (2u, 2v, 1) \, dudv = \\ &= \iint_S (4u^2 + 2uv + 2v^2 - 2uv) \, dudv = \\ &= \iint_S (4u^2 + 2v^2) \, dudv = \int_0^1 \int_0^1 (4u^2 + 2v^2) \, dudv = \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{4u^3}{3} + 2uv \right]_0^1 dv = \int_0^1 \left( \frac{4}{3} + 2v \right) dv = \left[ \frac{4}{3}v + v^2 \right]_0^1 = \\ &= \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

### Exemplo 13.2.

Calcule o fluxo do campo  $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  através da parte da superfície esférica  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , com a normal exterior.

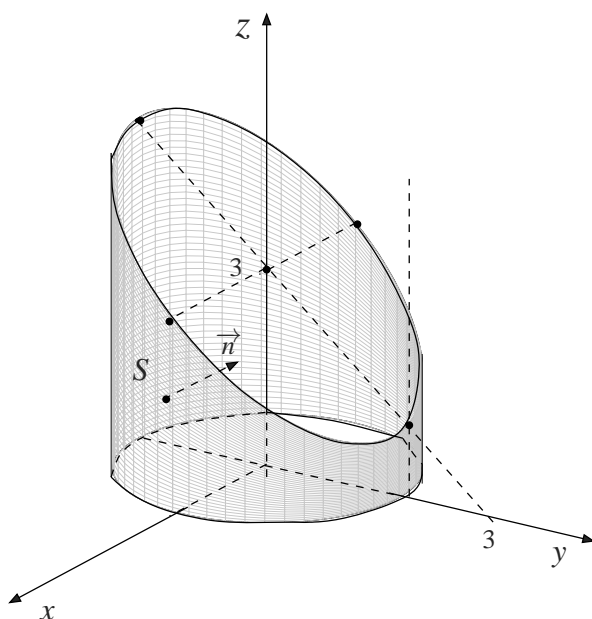
**Solução:** Lembremos que, no caso da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  (ver Aula 11), temos  $\vec{n} = \frac{(x, y, z)}{a}$ . Então, o fluxo é dado por

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iint_S (x, y, z) \cdot \frac{(x, y, z)}{a} \, dS = \\ &= \iint_S \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a} \, dS = \iint_S \frac{a^2}{a} \, dS = a \iint_S dS = \\ &= aA(S) = a4\pi a^2 = 4\pi a^3. \end{aligned}$$

**Exemplo 13.3.**

Calcule  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$ , sendo  $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  e  $S$  a parte do cilindro  $x^2 + y^2 = 4$  entre  $z = 0$  e  $y + z = 3$ , com a orientação normal que aponta para o eixo  $z$ .

**Solução:** O esboço de  $S$  está representado na figura que se segue.



Lembremos que, no caso do cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$  (ver Aula 11), o vetor unitário normal interior a  $S$  é  $\vec{n} = \frac{(-x, -y, 0)}{2}$ . Então:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iint_S (x, y, z) \cdot \frac{(-x, -y, 0)}{2} \, dS = \\ &= - \iint_S \frac{(x^2 + y^2)}{2} \, dS = - \iint_S \frac{4}{2} \, dS = -2 \iint_S dS. \end{aligned}$$

Para calcular  $\iint_S dS$ , devemos parametrizar  $S$ . Logo,  $S : \varphi(t, z) = (2 \cos t, 2 \sin t, z)$ , com  $(t, z) \in D : 0 \leq t \leq 2\pi$  e  $0 \leq z \leq 3 - 2 \sin t$ .

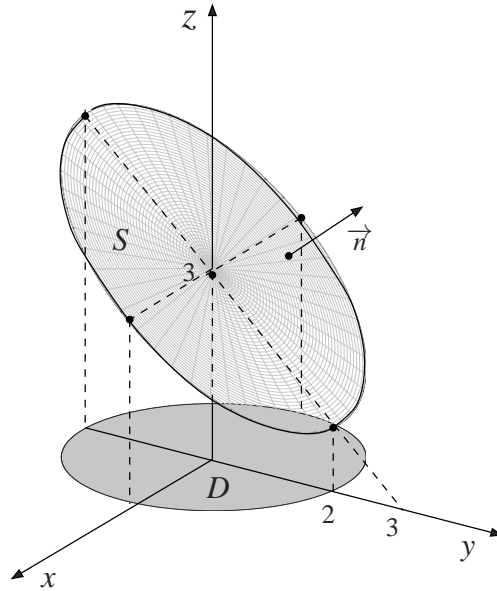
Vimos, na Aula 11, que  $\|\varphi_t \times \varphi_z\| = \|(2 \cos t, 2 \sin t, 0)\| = 2$ . Como temos que  $dS = \|\varphi_t \times \varphi_z\| \, dt \, dz$ , então  $dS = 2 \, dt \, dz$ . Logo:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= -2 \iint_D 2 \, dt \, dz = \\ &= -4 \int_0^{2\pi} \int_0^{3-2\sin t} dz \, dt = -4 \int_0^{2\pi} (3 - 2 \sin t) \, dt = -24\pi. \end{aligned}$$

**Exemplo 13.4.**

Calcule  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$ , sendo  $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  e  $S$  a parte do plano  $y + z = 3$ , limitada pelo cilindro  $x^2 + y^2 = 4$ , orientada com a normal  $\vec{n}$  tal que  $\vec{n} \cdot \vec{k} \geq 0$ .

**Solução:** O esboço de  $S$  é dado a seguir.



Se  $\vec{n} \cdot \vec{k} \geq 0$ , então a componente  $z$  de  $\vec{n}$  é maior ou igual a zero donde  $\vec{n}$  aponta para cima. A superfície  $S$  pode ser descrita da seguinte maneira  $S: z = 3 - y = f(x, y)$ , com  $(x, y) \in D: x^2 + y^2 \leq 4$ . Um vetor normal a  $S$  é dado por  $\vec{N} = (-f_x, -f_y, 1) = (0, 1, 1)$  que aponta para cima. Logo, temos que  $\vec{n} = \frac{(0, 1, 1)}{\sqrt{2}}$ .

Por outro lado, sabemos da Aula 19 que  $dS = \|\vec{N}\| \, dxdy = \sqrt{2} \, dxdy$ . Portanto:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iint_D (x, y, 3 - y) \cdot \frac{(0, 1, 1)}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \, dxdy = \\ &= \iint_D (y + 3 - y) \, dxdy = 3 \iint_D dxdy = \\ &= 3A(D) = 3\pi 2^2 = 12\pi. \end{aligned}$$

## Exercício 13.1.

1. Calcular o fluxo do campo rotacional dado por  $\vec{F} = (x - y - 4)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  através da semiesfera superior de  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , com campo de vetores normais  $\vec{n}$  tal que  $\vec{n} \cdot \vec{k} > 0$ .
2. Calcule  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$  onde  $\vec{F}(x, y, z) = xze^y\vec{i} - xze^y\vec{j} + z\vec{k}$  e  $S$  é a parte do plano  $x + y + z = 1$  no primeiro octante com orientação para baixo.
3. Calcule  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$ , onde  $\vec{F} = -z\vec{k}$  e  $S$  é a parte da esfera de equação  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  fora do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $\vec{n}$  apontando para fora.
4. Calcule o fluxo do campo  $\vec{F} = -x\vec{i} - y\vec{j} + 3y^2z\vec{k}$  sobre o cilindro  $x^2 + y^2 = 16$ , situado no primeiro octante entre  $z = 0$  e  $z = 5 - y$  com a orientação normal que aponta para o eixo  $z$ .
5. Calcule  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$ , sendo  $\vec{F}(x, y, z) = z\vec{i} + yz\vec{j}$  e  $S$  é a parte do plano  $z = 2 - x$ , limitada pelo cilindro  $x^2 + y^2 = 9$ , orientada com o campo  $\vec{n}$  tal que  $\vec{n} \cdot \vec{k} \geq 0$ .
6. Ache o fluxo de  $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  através da superfície  $S$  do sólido limitado por  $z = 0$ ,  $x^2 + y^2 = 4$  e  $x + y + z = 3$ , com vetor  $\vec{n}$  exterior.
7. Ache o fluxo de  $\vec{F} = (yz, -xz, x^2 + y^2)$  através de  $S$  superfície de revolução obtida girando-se o segmento de reta que liga  $(1, 0, 1)$  e  $(0, 0, 3)$  em torno do eixo  $z$ , onde o vetor normal  $\vec{n}$  tem componente  $z$  não negativa.
8. Calcule o fluxo do campo  $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  através de  $S$ : superfície cilíndrica  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $a > 0$ , limitada superiormente pela superfície  $z = x^2$  e inferiormente pelo plano  $z = 0$ , com  $\vec{n}$  apontando para fora de  $S$ .
9. Calcule  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$ , onde  $\vec{F}(x, y, z) = -x\vec{i} + 2z\vec{k}$  e  $S$  é a fronteira com região limitada por  $z = 1$  e  $z = x^2 + y^2$ , com  $\vec{n}$  exterior a  $S$ .

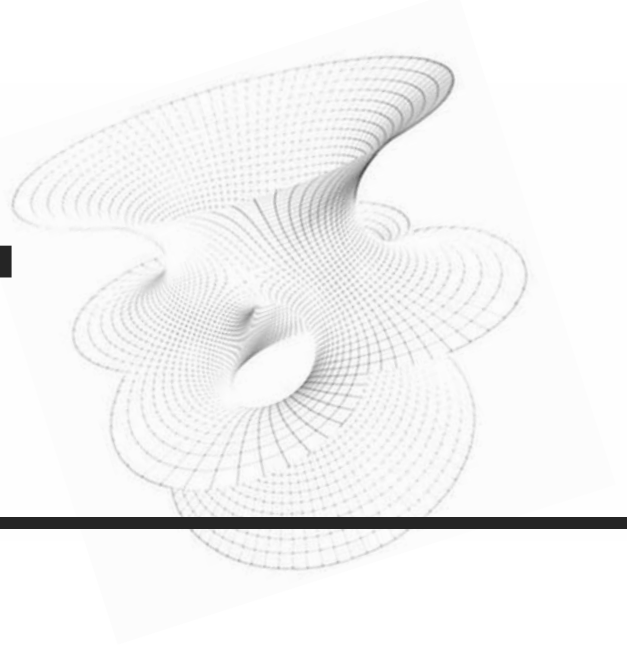
10. Determine o fluxo de  $\vec{F} = x \vec{i} + y \vec{j} + 2z \vec{k}$  através de  $S$  porção do cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  entre os planos  $z = 1$  e  $z = 2$ , orientada para cima por normais unitários.



# Aula 14

## TEOREMA DE GAUSS

---



# O b j e t i v o

- 1 estudar um teorema famoso que permite calcular fluxos através de superfícies fechadas: o Teorema de Gauss.

## TEOREMA DE GAUSS

O curso de Cálculo IV contém alguns teoremas fascinantes como o Teorema de Green, o Teorema de Stokes e o Teorema de Gauss. Nesta aula, apresentamos o famoso Teorema de Gauss ou Teorema da Divergência. Na próxima aula, apresentaremos o também famoso Teorema de Stokes.

O Teorema de Gauss estabelece uma relação entre uma integral tripla numa região sólida  $W$  de  $\mathbb{R}^3$  com uma integral de superfície na sua fronteira. Este teorema é um instrumento poderoso para os modelos matemáticos que descrevem alguns fenômenos físicos como, fluxos de fluidos, fluxos de campos elétricos ou magnéticos e fluxos de calor.

Finalmente, enunciaremos o Teorema da Divergência ou de Gauss.

### **Teorema 14.1** (Teorema de Gauss).

Seja  $W \subset \mathbb{R}^3$  um sólido, cuja fronteira  $\partial W = S$  está orientada positivamente, com  $\vec{n}$  exterior a  $W$ . Seja  $\vec{F}$  um campo vetorial de classe  $C^1$  em um aberto  $U$  contendo  $W$ . Então:

$$\iint_{S=\partial W} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_W \operatorname{div} \vec{F} \, dx dy dz.$$

Para enunciar os Teoremas de Gauss e de Stokes, utilizaremos conceitos definidos na Aula 7 – Campos Vetoriais: divergente e rotacional. Lembrando aqui que:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \\ &= \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}. \end{aligned}$$

**Exemplo 14.1.**

Verifique o teorema de Gauss para  $\vec{F}(x, y, z) = xz \vec{i} + yz \vec{j} + z^2 \vec{k}$ , calculando as duas integrais do enunciado, e  $S$  a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  e  $\vec{n}$  a normal unitária exterior a  $S$ .

**Solução:** Temos que  $\vec{n} = \frac{(x, y, z)}{a}$ . Logo,

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iint_S (xz, yz, z^2) \cdot \frac{(x, y, z)}{a} \, dS = \\ &= \frac{1}{a} \iint_S (x^2z + y^2z + z^3) \, dS = \\ &= \frac{1}{a} \iint_S z (x^2 + y^2 + z^2) \, dS = \frac{a^2}{a} \iint_S z \, dS = a \iint_S z \, dS. \end{aligned}$$

Parametrizando  $S$ , temos

$$\varphi(\phi, \theta) = (a \sin \phi \cos \theta, a \sin \phi \sin \theta, a \cos \phi)$$

com  $D: 0 \leq \phi \leq \pi$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Temos também que  $dS = a^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta$ . Então:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= a \iint_D (a \cos \phi) (a^2 \sin \phi) \, d\phi \, d\theta = \\ &= a^4 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos \phi \sin \phi \, d\phi \, d\theta = \\ &= a^4 \int_0^{2\pi} \left. \frac{\sin^2 \phi}{2} \right|_0^\pi d\theta = a^4 \int_0^{2\pi} 0 \, d\theta = 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = z + z + 2z = 4z$$

e, então:

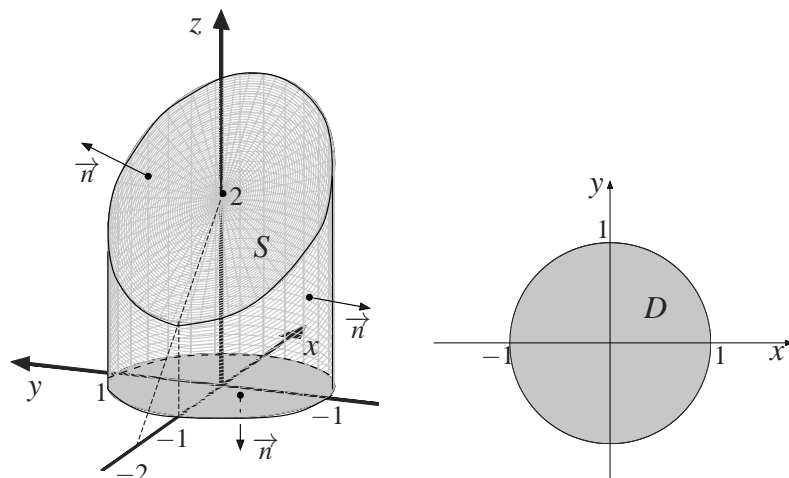
$$\begin{aligned} \iiint_W \operatorname{div} \vec{F} \, dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^\pi 4\rho^3 \cos \phi \sin \phi \, d\phi \, d\rho \, d\theta = \\ &= 4 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^3 \left[ \frac{\sin^2 \phi}{2} \right]_0^\pi d\rho \, d\theta = 4 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^3 \cdot 0 \, d\rho \, d\theta = 0. \end{aligned}$$

O teorema de Gauss está, portanto, verificado.

**Exemplo 14.2.**

Calcule  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$ , onde  $\vec{F}(x, y, z) = (x + ye^z, y + ze^x, z^2 + xe^y)$ ,  $S$  é a fronteira do sólido interior ao cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ , entre os planos  $z = 0$  e  $z = x + 2$  e  $\vec{n}$  a normal exterior a  $S$ .

**Solução:** O esboço de  $S$  está representado na figura que se segue.



Seja  $W$  o sólido limitado por  $S$ . Pelo teorema de Gauss, temos:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iiint_W \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \iiint_W (1 + 1 + 2z) \, dV = \\ &= 2 \iint_D \int_0^{x+2} (1 + z) \, dz \, dx \, dy = 2 \iint_D \left[ z + \frac{z^2}{2} \right]_0^{x+2} \, dx \, dy = \\ &= 2 \iint_D \left[ x + 2 + \frac{(x+2)^2}{2} \right] \, dx \, dy = \\ &= \iint_D (6x + 8 + x^2) \, dx \, dy = \\ &= \underbrace{6 \iint_D x \, dx \, dy}_{=0} + \underbrace{8A(D)}_{8\pi} + \iint_D x^2 \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Passando para coordenadas polares, temos:

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 \, dx \, dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \cos^2 \theta \, dr \, d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \left[ \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

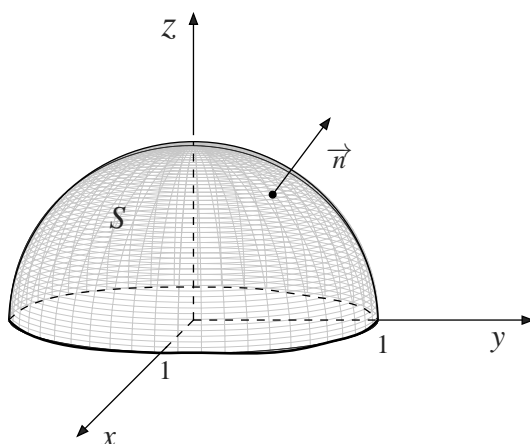
Logo,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = 8\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{33\pi}{4}.$$

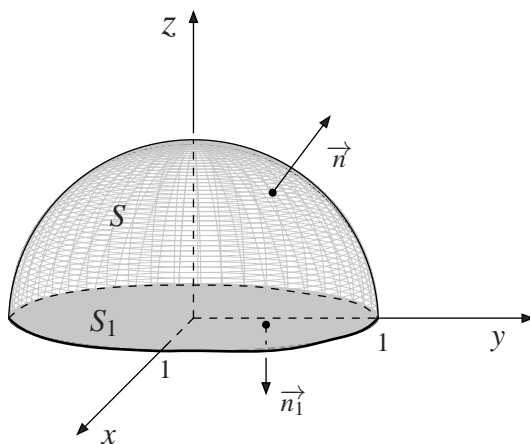
**Exemplo 14.3.**

Calcule  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$ , sendo  $\vec{F}(x, y, z) = x^3 \vec{i} + y^3 \vec{j} + z^3 \vec{k}$ ,  $\vec{n}$  a orientação normal exterior a  $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , com  $z \geq 0$ .

**Solução:** O esboço de  $S$  (aberta) está representado na figura que se segue.



Seja  $\bar{S} = S \cup S_1$  onde  $S_1 : z = 0, x^2 + y^2 \leq 1$ , com  $\vec{n}_1 = -\vec{k}$ .



Seja  $W$  o sólido limitado pela superfície fechada  $\bar{S}$ . Como estamos nas condições do teorema de Gauss, temos:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS + \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, dS &= \iiint_W \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \\ &= \iiint_W 3(x^2 + y^2 + z^2) \, dV. \end{aligned}$$

Passando para coordenadas esféricas, temos que  $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ , também,  $dV = \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$  e

$$W_{\rho\phi\theta} : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \phi \leq \pi/2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}.$$

Então:

$$\begin{aligned} \iiint_W 3(x^2 + y^2 + z^2) \, dV &= \\ &= 3 \iiint_{W_{\rho\phi\theta}} \rho^2 \cdot \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \\ &= 3 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^4 \sin \phi \, d\theta \, d\rho \, d\phi = \\ &= 6\pi \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho^4 \sin \phi \, d\rho \, d\phi = \\ &= \frac{6\pi}{5} \int_0^{\pi/2} \sin \phi \, d\phi = \frac{6\pi}{5} [-\cos \phi]_0^{\pi/2} = \frac{6\pi}{5}. \end{aligned}$$

**Cálculo de  $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, dS$**

Temos

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, dS = \iint_{S_1} (x^3, y^3, 0) \cdot (0, 0, -1) \, dS = \iint_{S_1} 0 \, dS = 0.$$

Logo,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{6\pi}{5}.$$

### Exercício 14.1.

1. Verifique o teorema de Gauss para o campo vetorial  $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$  no sólido  $W$  limitado pelas superfícies  $z = x^2 + y^2$  e  $z = 4$ .
2. Considere o campo vetorial  $\vec{F}(x, y, z) = (2x + e^z) \vec{i} + (3y - ze^x) \vec{j} + (z - 2) \vec{k}$ , e seja  $S$  a calota esférica  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , com  $z \geq 0$  e raio  $a > 0$ . Sabendo que o fluxo de  $\vec{F}$  na direção da normal exterior  $\vec{n}$  é igual a  $2\pi a^3$ , calcule o raio da calota.

3. Calcule  $\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ , sendo  $\vec{F}(x, y, z) = (x^2y + 2, x^3 + y^4, 2xz - 1)$ , e  $S$  a parte da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$ , com  $z \leq 1$ , orientada com  $\vec{n}$  exterior.
4. Seja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ . Seja  $W$  um sólido e seja  $S$  a fronteira de  $W$ , com normal exterior  $\vec{n}$ . Prove que

$$\iint_S \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} dS = \iiint_W \nabla^2 f dx dy dz$$

onde  $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = \nabla f \cdot \vec{n}$  é a derivada direcional de  $f$  na direção e sentido do vetor unitário  $\vec{n}$  e  $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$  é o laplaciano de  $f$  (estudado na Aula 7).

5. Seja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ , tal que  $\nabla^2 f = x^2 + y^2$  e  $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, 1) = \frac{1}{3}$ , para todo  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Calcule  $\iint_S \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} dS$ , onde  $S$  é a lata cilíndrica com fundo e sem tampa dada por  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ ,  $x^2 + y^2 \leq 1$  e  $z = 0$ , com normal  $\vec{n}$  apontando para fora de  $S$ .
6. Seja  $\vec{F}(x, y, z) = z \arctg(y^2) \vec{i} + z^3 \ln(x^2 + 1) \vec{j} + z \vec{k}$ . Determine o fluxo de  $\vec{F}$  através da parte do parabolóide  $x^2 + y^2 + z = 2$  que está acima do plano  $z = 1$ , sendo  $\vec{n}$  a normal com componente  $z$  não negativa.
7. Seja  $Q$  uma carga elétrica localizada na origem. Pela Lei de Coulomb, a força elétrica  $\vec{F}(x, y, z)$  exercida por essa carga sobre uma carga  $q$  localizada no ponto  $(x, y, z)$  com vetor posição  $X$  é

$$\vec{F}(X) = \frac{\varepsilon q Q}{\|X\|^3} X$$

onde  $\varepsilon$  é uma constante. Considere a força por unidade de carga

$$\vec{E}(X) = \frac{1}{q} \vec{F}(X) = \frac{\varepsilon Q}{\|X\|^3} X = \frac{\varepsilon Q(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

que é chamada campo elétrico de  $Q$ . Mostre que o fluxo elétrico de  $\vec{E}$  é igual a  $4\pi\varepsilon Q$ , através de qualquer superfície fechada  $S$  que contenha a origem, com normal  $\vec{n}$  apontando para fora de  $S$ . Esta é a Lei de Gauss para uma carga simples.

8. Calcule  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ , onde

$$\vec{F}(x, y, z) = x \vec{i} + (-2y + e^x \cos z) \vec{j} + (z + x^2) \vec{k}$$

e  $S$  é definida por  $z = 9 - (x^2 + y^2)$ ,  $0 \leq z \leq 5$ ;  $z = 5$ ,  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$  e  $z = 8 - 3(x^2 + y^2)$ ,  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

9. Seja a superfície cônica  $S$  de vértice  $(0, 0, h)$  e de base situada no plano  $xy$  com raio 1 e  $\vec{n}$  com a componente  $\vec{k}$  não negativa. Seja

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \vec{i} - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \vec{j} + 2(z + 1) \vec{k},$$

sendo  $f(x, y, z)$  de classe  $C^2$ . Calcule o fluxo de  $\vec{F}$  através de  $S$ .

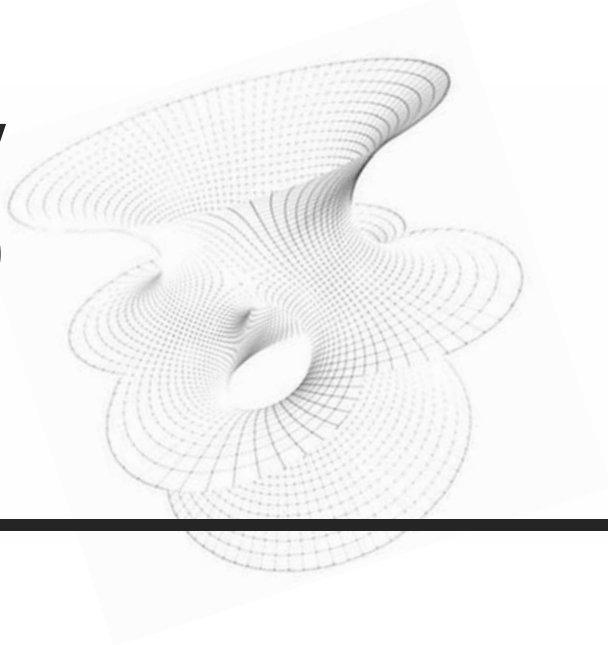
10. Calcule o fluxo do campo  $\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{x^3}{3} + y, \frac{y^3}{3}, \frac{z^3}{3} + 2\right)$  através da superfície  $S$  do sólido  $W$  definido por  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \geq 1, x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \leq 4, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$ , com campo de vetores normais a  $S$  apontando para fora de  $W$ .



# Aula 15

## TEOREMA DE STOKES

---

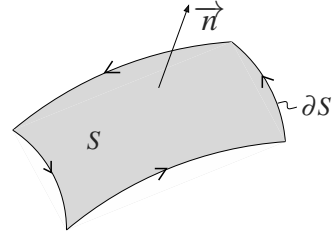


### O b j e t i v o

- 1 estudar um teorema famoso que generaliza o Teorema de Green para o espaço.

## TEOREMA DE STOKES

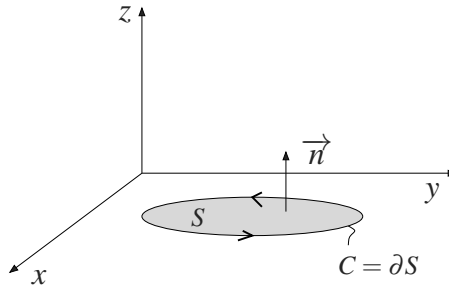
Seja  $U$  um aberto conexo de  $\mathbb{R}^3$  e  $\vec{F} = (P, Q, R)$  um campo vetorial de classe  $C^1$  em  $U$ . Seja  $S \subset U$ , uma superfície regular por partes, orientada pelo campo normal unitário  $\vec{n}$ . Seja  $\partial S$  o bordo de  $S$ , com a orientação induzida pela de  $S$ . Então,



$$\underbrace{\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS}_{\text{fluxo do rotacional}} = \underbrace{\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}}_{\text{circulação de } \vec{F}}$$

✎ Seja  $S$  uma superfície plana contida no plano  $xy$ , orientada com  $\vec{n} = \vec{k}$ . Então,  $S : z = 0, (x, y) \in D$ . Logo,  $dS = dxdy$ . Seja  $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ , então:

$$\text{rot } \vec{F} = \text{rot}(P, Q, 0) = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$



Logo, pelo Teorema de Stokes, temos:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \oint_{\partial S} P \, dx + Q \, dy = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \\ &= \iint_D \left( 0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot (0, 0, 1) \, dxdy = \\ &= \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dxdy. \end{aligned}$$

Isto prova que o Teorema de Stokes generaliza o Teorema de Green.

Como consequência do Teorema de Stokes, temos:

“Se  $U = \text{dom } \vec{F}$  é um conjunto simplesmente conexo, isto é,  $U$  é o  $\mathbb{R}^3$  ou  $U$  é o  $\mathbb{R}^3$ , exceto um número finito de pontos, e se  $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ , então  $\vec{F}$  é conservativo”.

O teorema das quatro equivalências é dado por:

### Teorema 15.1.

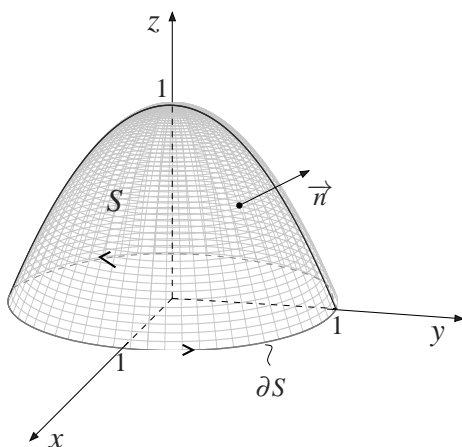
Seja  $\vec{F} = (P, Q, R)$  um campo vetorial de classe  $C^1$  em um conjunto simplesmente conexo do  $\mathbb{R}^3$ . Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

1.  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$  para toda curva fechada  $C$ ;
2.  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  é independente do caminho;
3.  $\vec{F}$  é um campo gradiente, isto é,  $\vec{F} = \nabla \varphi$  para algum campo escalar  $\varphi$ ;
4.  $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ .

#### Exemplo 15.1.

Verifique o teorema de Stokes, calculando as duas integrais do enunciado, para  $\vec{F}(x, y, z) = -y\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}$  e  $S$  o parabolóide  $z = 1 - x^2 - y^2$  com  $z \geq 0$  e  $\vec{n}$  a normal unitária exterior a  $S$ .

**Solução:** O esboço de  $S$  está representado na figura que se segue.



Pela regra da mão direita, com o polegar no de sentido  $\vec{n}$  e movimentando os dedos, vemos que a curva bordo de  $S$ ,  $\partial S$ , fica orientada no sentido anti-horário, quando vista de cima. Então, uma parametrização de  $\partial S$  é,  $\partial S : x = \cos t$ ,  $y = \sin t$  e  $z = 0$ , com  $0 \leq t \leq 2\pi$ , donde  $dx = -\sin t \, dt$ ,  $dy = \cos t \, dt$  e  $dz = 0$ . Então:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_C -y \, dx + x \, dy + z \, dz = \\ &= \int_0^{2\pi} [(-\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t)] \, dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) \, dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & z \end{vmatrix} = (0, 0, 1 + 1) = (0, 0, 2).$$

Temos,  $S : z = 1 - x^2 - y^2 = f(x, y)$ , com  $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1$ . Um vetor normal a  $S$  é dado por  $\vec{N} = (-f_x, -f_y, 1) = (2x, 2y, 1)$  que é exterior a  $S$ .

Logo,

$$\vec{n} = \frac{(2x, 2y, 1)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \quad \text{e} \quad dS = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dx \, dy.$$

Então,

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iint_D (0, 0, 2) \cdot (2x, 2y, 1) \, dx \, dy = \\ &= 2 \iint_D dx \, dy = 2A(D) = 2\pi \cdot 1^2 = 2\pi. \end{aligned}$$

Assim, o teorema de Stokes está verificado para este caso.

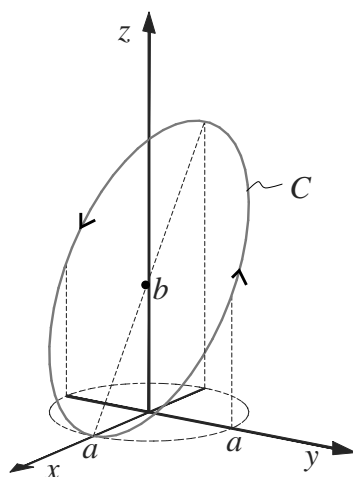
### Exemplo 15.2.

Use o teorema de Stokes para calcular  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , onde

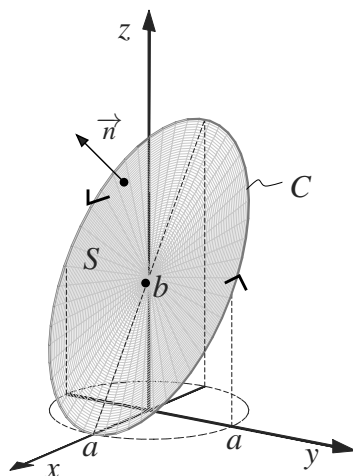
$$\vec{F}(x, y, z) = (y - x + \sin x, z - x + \cos y, x - y + e^z)$$

e  $C$  é a interseção do cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$  com o plano  $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1$ , sendo  $a > 0$ ,  $b > 0$ , orientada no sentido anti-horário quando vista da parte superior do eixo  $z$ .

**Solução:** O esboço de  $C$  está representado na figura a seguir.



Para aplicar o teorema de Stokes, precisamos de uma superfície  $S$  cujo bordo seja a curva  $C$ . Então, consideremos a porção do plano  $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1$ , limitada por  $C$ .



Pela regra da mão direita, vemos que  $\vec{n}$  aponta para cima. Logo, podemos descrever  $S$  por  $S : z = b - \frac{bx}{a} = f(x, y)$ , com  $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq a^2$ . Um vetor normal a  $S$  é  $\vec{N} = (-f_x, -f_y, 1) = \left(\frac{b}{a}, 0, 1\right)$  que aponta para cima. Então,  $\vec{n} = \frac{(\frac{b}{a}, 0, 1)}{\|\vec{N}\|}$  e  $dS = \|\vec{N}\| dx dy$ .

Temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} &= \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-x+\operatorname{sen} x & z-x+\cos y & x-y+e^z \end{vmatrix} = \\ &= (-1-1, 0-1, -1-1) = (-2, -1, -2). \end{aligned}$$

Do Teorema de Stokes, temos:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \\ &= \iint_D (-2, -1, -2) \cdot \left(\frac{b}{a}, 0, 1\right) \, dx \, dy = \\ &= \left(\frac{-2b}{a} - 2\right) \iint_D dx \, dy = -2 \left(\frac{b+a}{a}\right) \pi ab = \\ &= -2\pi b(b+a). \end{aligned}$$

**Exemplo 15.3.**

Seja  $\vec{F}(x, y, z) = (3x^2z + y^3, 3xy^2 + e^z, x^3 + ye^z)$ .

- $\vec{F}$  é conservativo? Por quê?
- Seja  $C$  a curva obtida como interseção da superfície  $z = x^2 + y^2 - 4$ ,  $z \leq 1$  com o plano  $y = -1$ . Calcule  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , especificando a orientação escolhida.

**Solução:**

- Temos  $\operatorname{rot} \vec{F} = (e^z - e^z, 3y^2 - 3y^2, 3y^2 - 3y^2) = \vec{0}$  e  $\operatorname{dom} \vec{F} = \mathbb{R}^3$  que é um conjunto simplesmente conexo. Então, pelo teorema das equivalências em  $\mathbb{R}^3$ , segue que  $\vec{F}$  é um campo conservativo.
- Logo, existe uma função potencial  $\varphi(x, y, z)$ , tal que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 3x^2z + y^3 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 3xy^2 + e^z \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = x^3 + ye^z \quad (3)$$

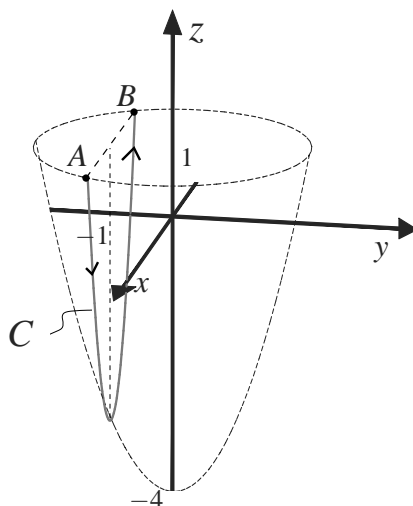
Integrando (1), (2) e (3) em relação a  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, temos:

$$\varphi(x, y, z) = x^3 z + xy^3 + f(y, z) \quad (4)$$

$$\varphi(x, y, z) = xy^3 + ye^z + g(x, z) \quad (5)$$

$$\varphi(x, y, z) = x^3 z + ye^z + h(x, y) \quad (6)$$

Comparando (4), (5) e (6), vemos que  $f(y, z) = ye^z$ ,  $g(x, z) = x^3 z$  e  $h(x, y) = xy^3$ . Logo,  $\varphi(x, y, z) = x^3 z + xy^3 + ye^z$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  é uma função potencial de  $\vec{F}$ . O esboço de  $C$  está representado na figura a seguir.



Escolhamos a orientação de  $A = (2, -1, 1)$  para  $B = (-2, -1, 1)$ .

Então

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \\ &= \varphi(B) - \varphi(A) = \varphi(-2, -1, 1) - \varphi(2, -1, 1) = \\ &= (-8 + 2 - e) - (8 - 2 - e) = -12. \end{aligned}$$

### Exercício 15.1.

1. Use o teorema de Stokes para mostrar que a integral de linha é igual ao valor dado, indicando a orientação da curva  $C$ .

$$\oint_C (3y + z) dx + (x + 4y) dy + (2x + y) dz = -\frac{3\sqrt{2}\pi a^2}{4}$$

onde  $C$  é a curva obtida como interseção da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  com o plano  $y + z = a$ .

2. Use o Teorema de Stokes para mostrar que a integral de linha é igual ao valor dado, indicando a orientação da curva.

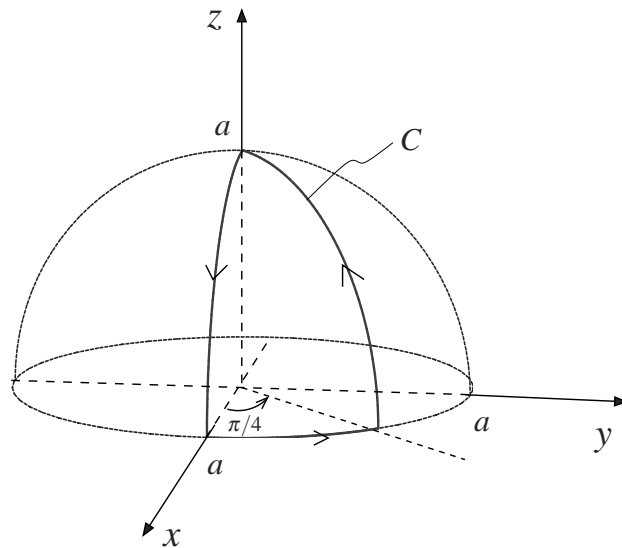
$$\oint_C 2xy \, dx + [(1-y)z + x^2 + x] \, dy + \left(\frac{x^2}{2} + e^z\right) \, dz = \pi$$

onde  $C$  é a curva obtida como interseção do cilindro  $x^2 + y^2 = 1, z \geq 0$ , com o cone  $z^2 = x^2 + (y-1)^2$ .

3. Seja  $\vec{F}$  um campo vetorial cujo rotacional em cada ponto de  $\mathbb{R}^3$  é dado por

$$\text{rot } \vec{F}(x, y, z) = (x, -2y, z).$$

Calcule  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , onde  $C$  é o contorno do semifuso esférico, de ângulo  $\pi/4$ , indicado na figura que se segue.



4. Seja  $\vec{F}(x, y, z) = (2xz + y^2, 2xy + 3y^2, e^z + x^2)$ .
- $\vec{F}$  é um campo conservativo em  $\mathbb{R}^3$ ? Por quê?
  - Seja  $C$  a curva obtida como interseção da superfície de equação  $z = 9 - x^2 - y^2, z \geq -4$  com o plano  $y = 2$ . Calcule  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , especificando a orientação escolhida.
5. Utilizando o Teorema de Stokes, transforme a integral  $\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$  numa integral de linha e calcule, onde  $\vec{F}(x, y, z) = y \vec{i}$ ,  $S$  é a superfície  $z = x^2 + y^2$  com  $z \leq 1$ , e  $\vec{n}$  a normal com componente  $z$  positiva.



6. Use o Teorema de Stokes para calcular o fluxo do rotacional do campo

$$\vec{F}(x, y, z) = x^2y \vec{i} + 2y^3z \vec{j} + 3z \vec{k}$$

através da superfície  $S : \varphi(r, \theta) = (r \cos \theta) \vec{i} + (r \sin \theta) \vec{j} + r \vec{k}$ , com  $0 \leq r \leq 1$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  no sentido do vetor unitário normal exterior  $\vec{n}$ .

7. Calcule  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , onde

$$\vec{F}(x, y, z) = (e^{-y} - ze^{-x}, e^{-z} - xe^{-y}, e^{-x} - ye^{-z})$$

e  $C$  é a curva parametrizada por  $\gamma(t) = \left( \frac{\ln(1+t)}{\ln 2}, \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right), \frac{1-e^t}{1-e} \right)$ , com  $0 \leq t \leq 1$ .

8. Determine  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , onde

$$\vec{F}(x, y, z) = (yz + x^3, xz + 3y^2, xy + 4)$$

e  $C$  é a curva obtida como interseção das superfícies de equações  $z = 5 - y^2$ ,  $z \geq 1$  e  $x + z = 5$ , orientada no sentido de crescimento de  $y$ .

9. Calcule  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , onde  $\vec{F}(x, y, z) = (-2y + e^{\sin x}, -z + y, x^3 + e^{\sin z})$  e  $C$  é a interseção da superfície  $z = y^2$  com o plano  $x + z = 1$ , orientada no sentido do crescimento de  $y$ .

10. Calcule  $\int_C (z - y)dx + \ln(1 + y^2)dy + [\ln(1 + z^2) + y]dz$ , sendo  $C$  dada por  $\gamma(t) = (4\cos t, 4\sin t, 4 - 4\cos t)$ , com  $0 \leq t \leq 2\pi$ .



# Aula 16

## PREPARAÇÃO PARA A AP2

### Exercício 16.1.

1. Calcule  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , ao longo da circunferência  $x^2 + y^2 = 2y$ , no sentido horário, sendo

$$\vec{F}(x, y) = \left( 10x^2 - 3y, \frac{3x^2}{2} + \sqrt{y^4 + 1} \right).$$

2. a. A integral  $I = \int_C (\sin xy + xy \cos xy) dx + x^2 \cos xy dy$  é independente do caminho?  
b. Calcule o valor  $I$  onde  $C$  é dada por  $\sigma(t) = (t^2 - 1, t^2 + 1)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

3. Uma lâmina tem a forma da parte lateral do cilindro  $x^2 + y^2 = 4$ , entre os planos  $z = 0$  e  $z = 3 - x$ . Determine a massa dessa lâmina se a densidade no ponto  $(x, y, z)$  é dada por  $f(x, y, z) = x^2$ .

4. Calcule

$$I = \int_C (e^{x^2} + y^2) dx + (e^{y^2} - z^2) dy + (e^{z^2} - x^2) dz,$$

onde  $C$  é o contorno da parte do plano  $x + y + z = 1$ , que está no primeiro octante, no sentido anti-horário.

5. Calcule o fluxo de

$$\vec{F} = (e^z \arctg z) \vec{i} + [e^z \ln(x^2 + 1)] \vec{j} + z \vec{k}$$

através de  $S$  parte do parabolóide  $z = 4 - x^2 - y^2$ , acima de  $z = 1$ , na direção da normal exterior  $\vec{n}$ .

6. Calcule

$$I = \oint_C \left( -\frac{x^2 y}{1+x^2} + y^2 \right) dx + (x + \arctg x) dy,$$

onde  $C$  é o caminho fechado formado por  $y = 0$ ,  $x + 2y = 4$  e  $x = 0$ , orientado no sentido anti-horário.

7. Considere a superfície  $S$  porção do cilindro  $x^2 + y^2 = 2x$ , compreendida entre o plano  $z = -1$  e o parabolóide  $z = x^2 + y^2$ . Pede-se.

- Uma parametrização de  $S$ .
- A área de  $S$ .
- O fluxo do campo  $\vec{F}(x, y, z) = (3x - 3 - y, 3y + x - 1, e^{\sin z})$  através de  $S$ , com o campo de vetores normais apontando para dentro de  $S$ .

8. Seja

$$\vec{F}(x, y, z) = 2y \vec{i} + \frac{x^2}{2} \vec{j} + \sqrt{1+z^8} \vec{k}.$$

Calcule  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , onde  $C$  é a curva dada pela interseção das superfícies  $z = x^2 + y^2$  e  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$  com um sentido de percurso tal que, quando projetado no plano  $z = 0$ , produz um percurso no sentido anti-horário.

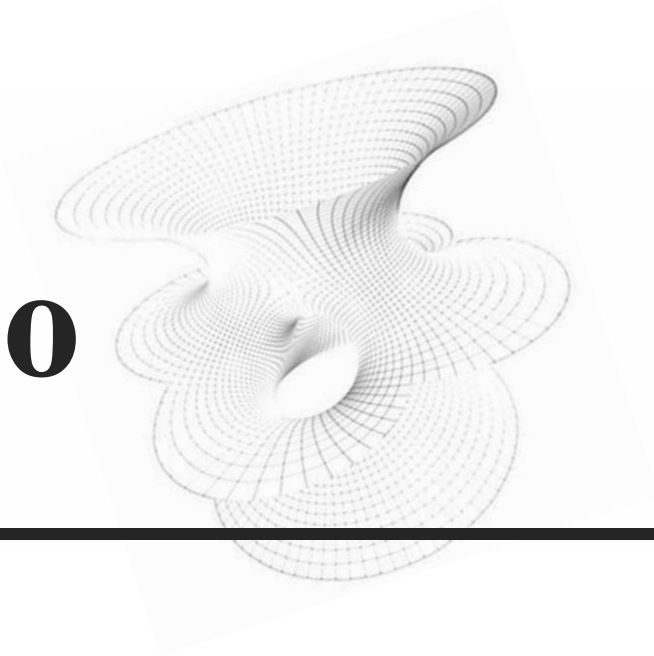
9. Seja um campo de forças dado por

$$\vec{F}(x, y, z) = (3x^2 yz + e^z, x^3 z, x^3 y + xe^z + 3z^2).$$

- $\vec{F}$  é um campo conservativo? Por quê?
- Calcule o trabalho realizado por  $\vec{F}$  para mover uma partícula ao longo da curva  $C$  interseção da superfície  $z = 1 - x^2$  com o plano  $y + z = 1$ , orientada no sentido do crescimento de  $x$ .

10. Use o teorema de Stokes para transformar a integral  $\iint_S \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$  em uma integral de linha e calcule-a sendo  $\vec{F}(x, y, z) = (ye^{z-1}, -xe^{z-1}, 3e^z)$  e  $S$  a superfície  $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$  com  $0 \leq z \leq 1$  e  $\vec{n}$  a normal apontando para baixo.

# Gabarito



## RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DAS AULAS

### AULA 1

1. Temos

$$\begin{aligned} I &= \iint_D e^x (ye^{y^2}) \, dx dy = \int_0^1 \int_{-1}^1 e^x (ye^{y^2}) \, dx dy = \\ &= \int_0^1 (ye^{y^2}) [e^x]_{-1}^1 \, dy = (e - e^{-1}) \int_0^1 ye^{y^2} \, dy. \end{aligned}$$

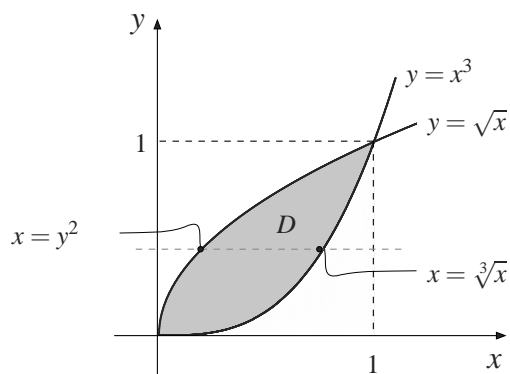
Fazendo  $u = y^2$  temos  $du = 2y \, dy$ , donde  $y \, dy = \frac{du}{2}$ . Para  $y = 0$ , temos  $u = 0$  e, para  $y = 1$ , temos  $u = 1$ . Logo,

$$I = \frac{(e - e^{-1})}{2} \int_0^1 e^u \, du = \frac{(e - e^{-1})}{2} [e^u]_0^1 = \frac{(e - e^{-1})}{2} (e - 1).$$

2. a. Observe que  $I = \iint_D f(x, y) \, dx dy$ , onde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

Portanto,  $D$  é do tipo I e está ilustrada na figura a seguir.



Descrevendo  $D$  como tipo II, temos:

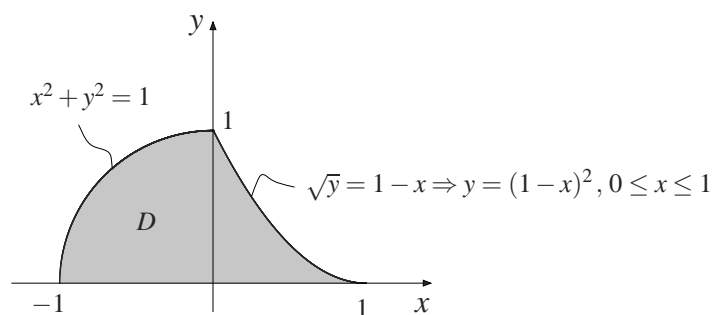
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq \sqrt[3]{y}\}.$$

Então, 
$$\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) \, dx \, dy.$$

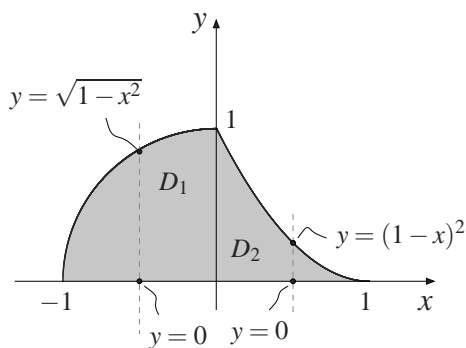
b. Temos que  $I = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy$ , onde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq 1-\sqrt{y}\}$$

é do tipo II.



Para descrever  $D$  como tipo I, devemos dividi-la em duas regiões:  $D = D_1 \cup D_2$ .



onde

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x^2\}.$$

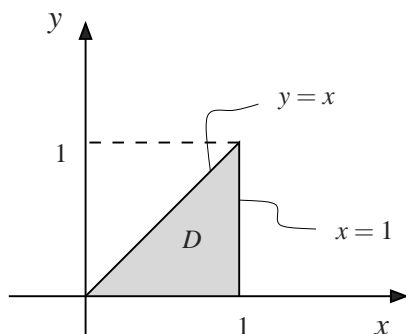
Então

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_1} f(x, y) \, dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) \, dx dy = \\ &= \int_{-1}^0 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) \, dy dx + \int_0^1 \int_0^{(1-x)^2} f(x, y) \, dy dx. \end{aligned}$$

3. Temos que  $I = \iint_D e^{x^2} \, dx dy$ , onde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\}$$

é do tipo II.



### Descrição de $D$ como tipo I

Projetando  $D$  sobre o eixo  $x$ , temos o intervalo  $[0, 1]$ . Fixando  $x \in [0, 1]$ , a ordenada  $y$  varia de  $y = 0$  a  $y = x$ . Então,

$$I = \int_0^1 \int_0^x e^{x^2} \, dy dx = \int_0^1 e^{x^2} [y]_0^x \, dx = \int_0^1 x e^{x^2} \, dx.$$

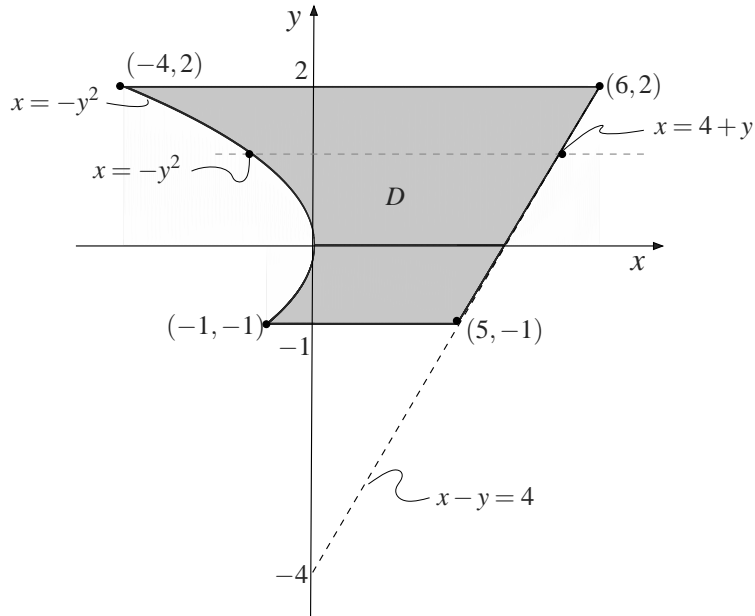
Fazendo  $u = x^2$ , temos  $du = 2x \, dx$ , donde  $x dx = \frac{du}{2}$ . Temos:

$$\begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow u = 0 \\ x = 1 &\Rightarrow u = 1 \end{aligned}$$

Então

$$I = \int_0^1 e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} e^u \Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}.$$

4. O esboço de  $D$  está representado na figura que se segue.



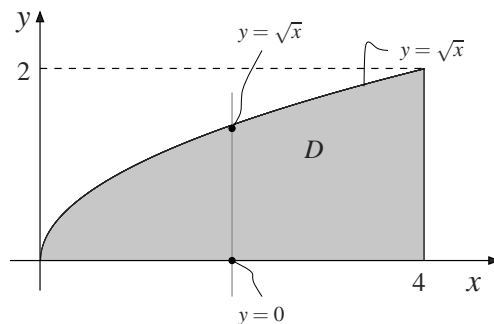
Da figura, temos que

$$D = \{(x, y) \mid -1 \leq y \leq 2, -y^2 \leq x \leq 4 + y\}.$$

Como  $A(D) = \iint_D dx dy$ , então

$$\begin{aligned} A(D) &= \int_{-1}^2 \int_{-y^2}^{4+y} dx dy = \int_{-1}^2 (4 + y + y^2) dy = \\ &= \left[ 4y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^2 = \left( 8 + 2 + \frac{8}{3} \right) - \left( -4 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \\ &= \frac{38}{3} + \frac{23}{6} = \frac{33}{2} \text{ u.a.} \end{aligned}$$

5. O esboço de  $D$  está representado na figura que se segue.





Enquadrando  $D$  como tipo I, temos

$$D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{x} \end{cases}.$$

Então:

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{y}{1+x^2} dx dy &= \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{y}{1+x^2} dy dx = \\ &= \int_0^4 \frac{1}{1+x^2} \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^4 \frac{x}{1+x^2} dx. \end{aligned}$$

Temos  $d(1+x^2) = 2x dx$ , donde  $x dx = \frac{1}{2} d(1+x^2)$ . Logo,

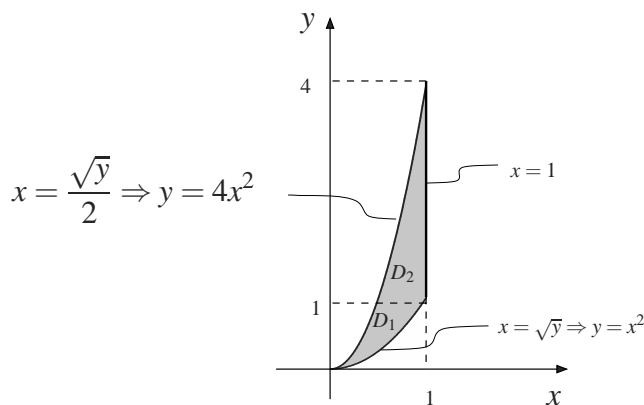
$$\begin{aligned} \iint_D \frac{y}{1+x^2} dx dy &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^4 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \\ &= \frac{1}{4} \ln(1+x^2) \Big|_0^4 = \frac{1}{4} (\ln 17 - \ln 1) = \frac{\ln 17}{4}. \end{aligned}$$

6. Temos  $I = \iint_D e^{x^3} dx dy$ , onde  $D = D_1 \cup D_2$  com

$$D_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, \frac{\sqrt{y}}{2} \leq x \leq \sqrt{y} \right\}$$

$$D_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y \leq 4, \frac{\sqrt{y}}{2} \leq x \leq \sqrt{y} \right\}.$$

Com as informações dadas acima, podemos ilustrar a nossa região  $D$ .



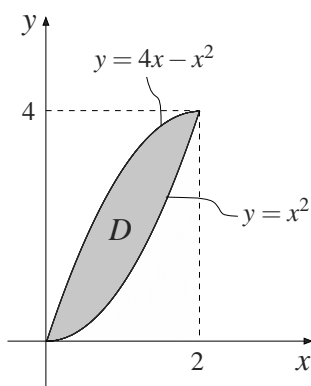
Enquadrando  $D$  como tipo I, temos

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 4x^2 \right\}.$$

Então

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_{x^2}^{4x^2} e^{x^3} dy dx = \int_0^1 e^{x^3} (4x^2 - x^2) dx = \\ &= \int_0^1 e^{x^3} (3x^2) dx = e^{x^3} \Big|_0^1 = e - 1. \end{aligned}$$

7. De  $y = x^2$  e  $y = 4x - x^2$ , temos  $2x^2 - 4x = 0$ , donde  $x = 0$ ,  $x = 2$ . Logo, as interseções são  $(0,0)$  e  $(2,4)$ . O esboço da região  $D$  está representado na figura que se segue.

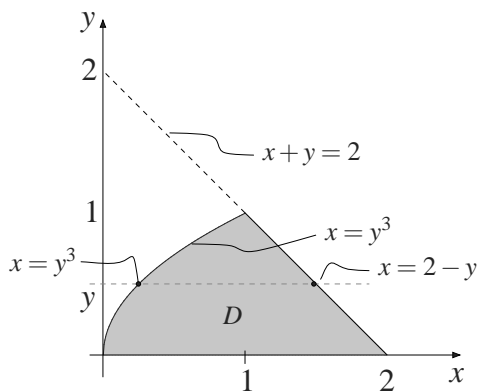


Escrevendo  $D$  como tipo I, temos:

$$D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 \leq y \leq 4x - x^2. \end{cases}$$

Como  $A(D) = \iint_D dx dy$ , então:

$$\begin{aligned} A(D) &= \int_0^2 \int_{x^2}^{4x-x^2} dy dx = \int_0^2 (4x - x^2 - x^2) dx = \\ &= \int_0^2 (4x - 2x^2) dx = \left[ 2x^2 - \frac{2x^3}{3} \right]_0^2 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3} u.a. \end{aligned}$$



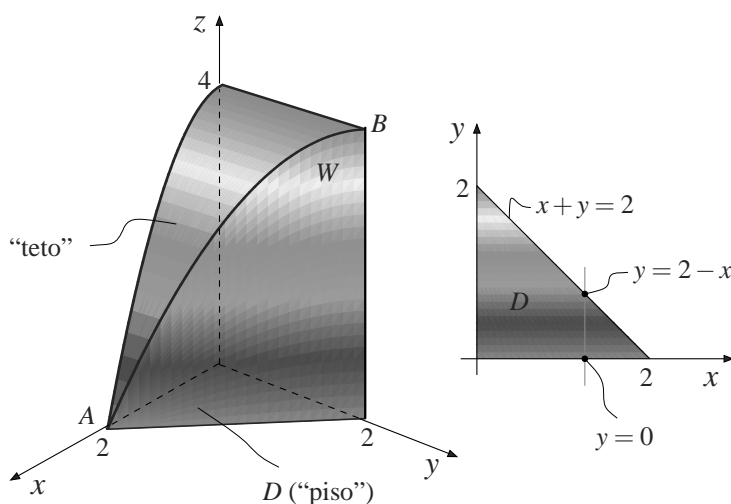
8. Vamos enquadrar  $D$  como tipo II:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, y^3 \leq x \leq 2 - y\}.$$

Como  $A(D) = \iint_D dx dy$ , então:

$$\begin{aligned} A(D) &= \int_0^1 \int_{y^3}^{2-y} dx dy = \int_0^1 (2 - y - y^3) dy = \\ &= \left[ 2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1 = \frac{5}{4} \text{ u.a.} \end{aligned}$$

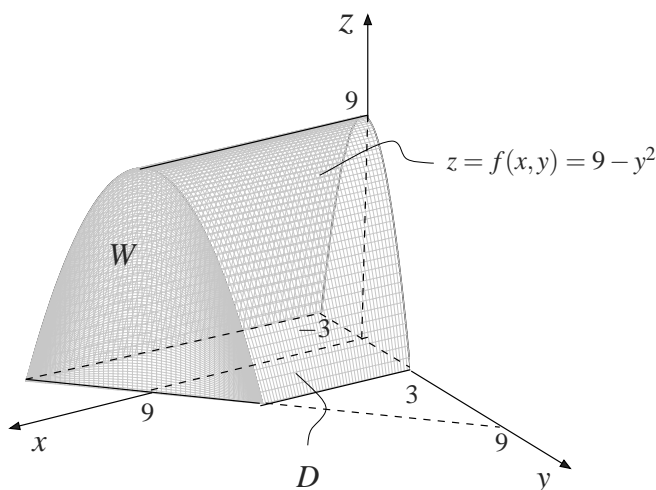
9. Para esboçar a superfície  $z = 4 - x^2$ , no primeiro octante, desenhamos a parábola  $z = 4 - x^2$  no plano  $xz$ , com  $x \geq 0$  e  $z \geq 0$ . Como a equação não contém a variável  $y$ , então devemos traçar paralelas ao eixo  $y$  por pontos da parábola. Para esboçar o plano  $x + y = 2$ , no primeiro octante, desenhamos a reta  $x + y = 2$  no plano  $xy$ , com  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ . Como a equação não contém a variável  $z$ , então traçamos paralelas ao eixo  $z$  por pontos da reta. Observamos que a reta  $x + y = 2$  do plano intercepta a superfície  $z = 4 - x^2$  no ponto  $A$ . Além disso, a reta do plano, paralela ao eixo  $z$ , passando por  $(0, 2, 0)$ , intercepta a superfície  $z = 4 - x^2$  no ponto  $B$ . Ligando  $A$  a  $B$ , encontramos a curva interseção das duas superfícies. Assim, o esboço de  $W$  é:



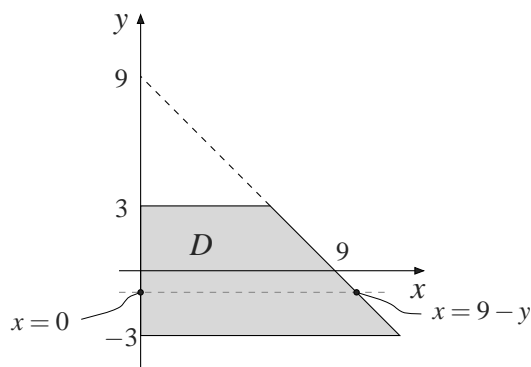
Observe que a equação do “teto” é  $z = 4 - x^2 = f(x, y)$  e o “piso”  $D$  é o triângulo acima. Então:

$$\begin{aligned}
 V(W) &= \iint_D f(x,y) \, dx dy = \iint_D (4-x^2) \, dx dy = \\
 &= \int_0^2 \int_0^{2-x} (4-x^2) \, dy dx = \int_0^2 (2-x)(4-x^2) \, dx = \\
 &= \int_0^2 (8-2x^2-4x+x^3) \, dx = \left[ 8x - 2\frac{x^3}{3} - 2x^2 + \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \\
 &= 16 - \frac{16}{3} - 8 + 4 = \frac{20}{3} \text{ u.v.}
 \end{aligned}$$

10. A integral dupla de uma função positiva  $f(x,y)$  pode ser interpretada como o volume do sólido abaixo do gráfico de  $f(x,y)$  e acima do domínio  $D$  de  $f(x,y)$ , contido no plano  $xy$ . Devemos esboçar o sólido para encontrar a região de integração.



Do esboço de  $W$ , vemos que a região de integração tem a seguinte forma:



Então,

$$V(W) = \iint_D f(x,y) \, dx dy = \iint_D (9 - y^2) \, dx dy.$$

Descrevendo  $D$  como tipo II, temos:

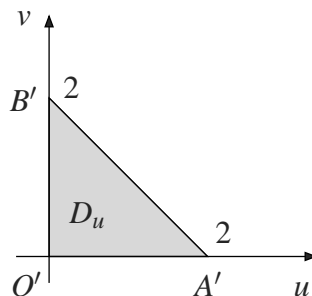
$$D = \{(x,y) \mid -3 \leq y \leq 3, 0 \leq x \leq 9 - y\}.$$

Então:

$$\begin{aligned} V(W) &= \int_{-3}^3 \int_0^{9-y} (9 - y^2) \, dx dy \\ &= \int_{-3}^3 (9 - y^2) (9 - y) \, dy \\ &= \int_{-3}^3 (81 - 9y - 9y^2 + y^3) \, dy \\ &= \left[ 81y - \frac{9y^2}{2} - 3y^3 + \frac{y^4}{4} \right]_{-3}^3 \\ &= 81(3 + 3) - 0 - 3[3^3 - (-3)^3] + 0 \\ &= 81 \cdot 6 - 3 \cdot 2 \cdot 27 \\ &= 6 \cdot 27(3 - 1) \\ &= 324 \, u.v. \end{aligned}$$

## AULA 2

1. a. Temos que:



**Imagem de  $O'A'$  pela transformação  $T$**

$$O'A' : v = 0, 0 \leq u \leq 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OA : x = u, y = u^2, 0 \leq u \leq 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OA : y = x^2, 0 \leq x \leq 2.$$

**Imagem de  $A'B'$  pela transformação  $T$**

$$A'B' : u + v = 2, 0 \leq u \leq 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB : x = 2, y = u^2 - (2 - u), 0 \leq u \leq 2 \Rightarrow$$

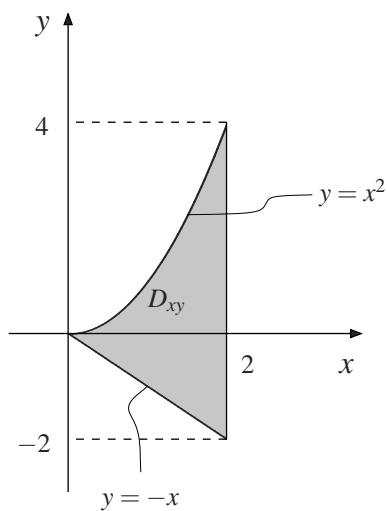
$$\Rightarrow AB : x = 2, -2 \leq y \leq 4.$$

**Imagem de  $O'B'$  pela transformação  $T$**

$$O'B' : u = 0, 0 \leq v \leq 2 \Rightarrow$$

$$OB : x = v, y = -v, 0 \leq v \leq 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OB : y = -x, 0 \leq x \leq 2.$$



b. Temos

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2u & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2u.$$

Usando a fórmula

$$\begin{aligned} \iint_{D_{xy}} f(x, y) \, dx dy &= \\ &= \iint_{D_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, dudv \end{aligned}$$

temos:

$$\begin{aligned} \iint_{D_{xy}} \frac{dx dy}{\sqrt{1+4x+4y}} &= \\ &= \iint_{D_{uv}} \frac{1}{\sqrt{1+4(u+v)+4(u^2-v)}} |-1-2u| \, dudv = \\ &= \iint_{D_{uv}} \frac{1}{\sqrt{1+4u+4u^2}} (1+2u) \, dudv = \\ &= \iint_{D_{uv}} \frac{1}{\sqrt{(1+2u)^2}} (1+2u) \, dudv = \\ &= \iint_{D_{uv}} dudv = A(D_{uv}) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2. \end{aligned}$$

2. Considerando a mudança de variáveis  $u = \frac{x-y}{x+y}$ ,  $v = x+y$ , temos:

$$\begin{cases} uv = x - y \\ v = x + y \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} x = \frac{uv+v}{2} \\ y = \frac{v-uv}{2} \end{cases}.$$

Assim,

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{v}{2} & \frac{1}{2}(u+1) \\ -\frac{v}{2} & \frac{1}{2}(1-u) \end{vmatrix} = \frac{v}{2}.$$

Como  $dx dy = |J| \, dudv$ , então  $dx dy = \frac{v}{2} \, dudv$ .

Passando para as coordenadas  $u$  e  $v$  as equações das curvas que limitam  $D$ , temos:

$$\begin{aligned} x+y=1 &\Rightarrow v=1 \\ x+y=4 &\Rightarrow v=4 \\ x=0 &\Rightarrow u=-1 \\ y=0 &\Rightarrow u=1 \end{aligned}$$

Portanto  $D_{uv}$  pode ser descrito por:

$$D_{uv} : \begin{cases} -1 \leq u \leq 1 \\ 1 \leq v \leq 4 \end{cases}.$$

Do Teorema da Mudança de Variáveis, temos:

$$\begin{aligned} \iint_D \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x-y}{x+y}\right) dx dy &= \iint_{D_{uv}} \cos\left(\frac{\pi}{2}u\right) \frac{v}{2} dudv = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}u\right) \int_1^4 v dv du = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}u\right) \left[\frac{v^2}{2}\right]_1^4 du = \frac{15}{4} \int_{-1}^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}u\right) du = \\ &= \frac{15}{4} \cdot \frac{2}{\pi} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}u\right)\right]_{-1}^1 = \frac{15}{2\pi} \left[\sin \frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \\ &= \frac{15}{2\pi} (1 - (-1)) = \frac{15}{\pi}. \end{aligned}$$

3. Façamos  $x = au$  e  $y = bv$ . Logo,

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab.$$

O conjunto  $D : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$  é transformado em  $D_{uv} : u^2 + v^2 \leq 1$ . Como  $A(D) = \iint_D dx dy$ , então:

$$\begin{aligned} A(D) &= \iint_{D_{uv}} |J| dudv = \iint_{D_{uv}} ab dudv = \\ &= ab \iint_{D_{uv}} dudv = ab A(D_{uv}) = ab \cdot \pi \cdot 1^2 = \pi ab \text{ u.a.} \end{aligned}$$

4. Façamos a mudança de variáveis  $u = 2x$ ,  $v = y$  ou  $x = \frac{u}{2}$ ,  $y = v$ . Logo:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2},$$

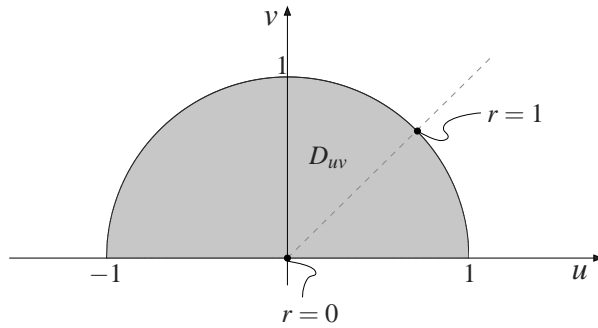
donde,

$$dx dy = |J| dudv = \frac{1}{2} dudv.$$



A região  $D$  é limitada pela semielipse  $4x^2 + y^2 = 1$ , com  $y \geq 0$  e a reta  $y = 0$ .

Passando essas equações para as novas coordenadas, temos  $u^2 + v^2 = 1$ , com  $v \geq 0$  e  $v = 0$ . Logo,  $D_{uv}$  é limitada pela semicircunferência  $u^2 + v^2 = 1$ , com  $v \geq 0$  e o eixo  $u$ .



Então, pelo Teorema da Mudança de Variáveis, temos:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \sin(4x^2 + y^2) \, dx dy = \\ &= \iint_{D_{uv}} \sin(u^2 + v^2) \frac{1}{2} \, du dv = \\ &= \frac{1}{2} \iint_{D_{uv}} \sin(u^2 + v^2) \, du dv. \end{aligned}$$

Passando para coordenadas polares, temos

$$\begin{cases} u = r \cos \theta \\ v = r \sin \theta \\ du dv = r dr d\theta \\ u^2 + v^2 = r^2 \end{cases}$$

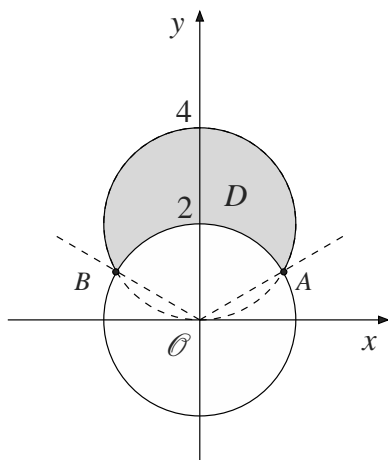
A região  $D_{uv}$  descrita em coordenadas polares é:

$$D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \iint_{D_{r\theta}} \sin(r^2) r \, dr d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^\pi \sin(r^2) r \, d\theta dr = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \sin(r^2) r \, dr = \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} [-\cos r^2]_0^1 = \frac{\pi}{4} (1 - \cos 1). \end{aligned}$$

5. O esboço de  $D$  está representado na figura que se segue.



A circunferência  $x^2 + (y - 2)^2 = 4$  se, e somente se,  $x^2 + y^2 - 4y = 0$  se transforma em  $r^2 - 4r \sin \theta = 0$ , isto é,  $r = 4 \sin \theta$ .

A circunferência  $x^2 + y^2 = 4$  se transforma em  $r^2 = 4$ , isto é,  $r = 2$ .

A região  $D$  é “varrida” girando o raio  $\overrightarrow{OA}$ , no sentido anti-horário, até o raio  $\overrightarrow{OB}$ . Os pontos  $A$  e  $B$  são interseções das duas circunferências. Então, resolvendo o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

temos:

$$4y = 4 \Rightarrow y = 1, x = \pm\sqrt{3}.$$

Então:

$$A = (\sqrt{3}, 1), B = (-\sqrt{3}, 1).$$

O ângulo de inclinação do segmento  $OA$  é:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}.$$

O ângulo de inclinação do segmento  $OB$  é:

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6}.$$

Assim, conseguimos transformar a região  $D$  em outra região  $D_{r\theta}$  expressa em coordenadas polares:

$$D_{r\theta} = \{(r, \theta) \mid 2 \leq r \leq 4 \sin \theta, \pi/6 \leq \theta \leq 5\pi/6\}.$$

Como  $A(D) = \iint_D dx dy$ , então:

$$\begin{aligned} A(D) &= \iint_{D_{r\theta}} r \, dr d\theta = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \int_2^{4\sin\theta} r \, dr d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left[ r^2 \right]_2^{4\sin\theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (16\sin^2\theta - 4) d\theta. \end{aligned}$$

Da trigonometria, temos:

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} A(D) &= \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (16\sin^2\theta - 4) d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left( 16 \frac{1 - \cos 2\theta}{2} - 4 \right) d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (4 - 8\cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{2} \left[ 4\theta - 4\sin 2\theta \right]_{\pi/6}^{5\pi/6} = \\ &= 2 \left[ \left( \frac{5\pi}{6} - \sin \frac{5\pi}{3} \right) - \left( \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{3} \right) \right] = \\ &= 2 \left( \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left( \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \right) \text{ u.a.} \end{aligned}$$

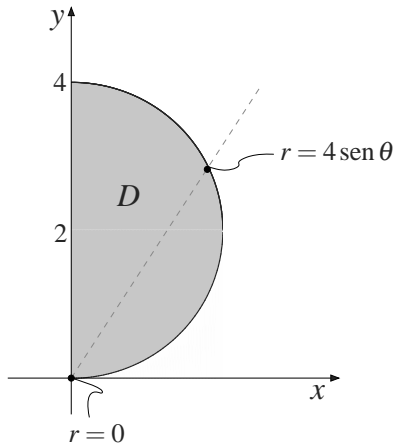
6. a. Temos

$$\begin{aligned} I &= \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4y-y^2}} \sqrt{x^2+y^2} \, dx dy = \\ &= \iint_D \sqrt{x^2+y^2} \, dx dy \end{aligned}$$

onde

$$D = \left\{ (x,y) \mid 0 \leq y \leq 4, 0 \leq x \leq \sqrt{4y-y^2} \right\}.$$

De  $x = \sqrt{4y-y^2}$  temos  $x^2 + y^2 - 4y = 0$ , com  $x \geq 0$  donde  $x^2 + (y-2)^2 = 4$ , com  $x \geq 0$ . Então, o esboço de  $D$  está representado na figura que se segue.



Passando  $x^2 + y^2 - 4y = 0$  para coordenadas polares, temos  $r^2 = 4r \operatorname{sen} \theta$  ou  $r = 4 \operatorname{sen} \theta$ . Assim, a região  $D$  pode ser descrita em coordenadas polares por:

$$D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq r \leq 4 \operatorname{sen} \theta \end{cases} .$$

Então,

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_{r\theta}} \sqrt{r^2} r dr d\theta = \iint_{D_{r\theta}} r^2 dr d\theta = \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{4 \operatorname{sen} \theta} r^2 dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^{4 \operatorname{sen} \theta} d\theta = \\ &= \frac{64}{3} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 \theta d\theta = \\ &= \frac{64}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 \theta) \operatorname{sen} \theta d\theta . \end{aligned}$$

Fazendo  $u = \cos \theta$ , temos  $du = -\operatorname{sen} \theta d\theta$ . Para  $\theta = 0$ , temos  $u = 1$  e para  $\theta = \pi/2$ , temos  $u = 0$ . Então:

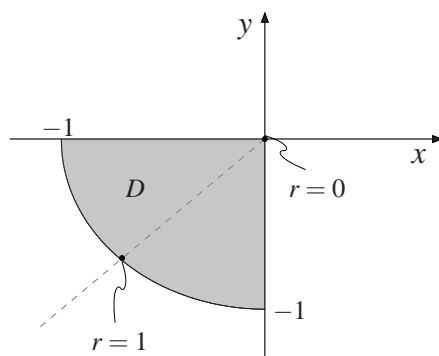
$$I = -\frac{64}{3} \int_1^0 (1 - u^2) du = -\frac{64}{3} \left[ u - \frac{u^3}{3} \right]_1^0 = \frac{64}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{128}{9} .$$

b. Temos

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} dy dx = \\ &= \iint_D \frac{2}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \end{aligned}$$

$$\text{onde } D = \left\{ (x, y) \mid -1 \leq x \leq 0, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq 0 \right\} .$$

Pela descrição da região  $D$ , vemos que ela é limitada inferiormente pela curva  $y = -\sqrt{1-x^2}$ , se, e somente se,  $x^2 + y^2 = 1$ , com  $y \geq 0$  e limitada superiormente pela reta  $y = 0$  (eixo  $x$ ) e, além disso, a projeção de  $D$  sobre o eixo  $x$  é o intervalo  $[-1, 0]$ . Com estas informações, temos que o esboço de  $D$  é:



Em coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ dxdy = r dr d\theta \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}.$$

A região  $D$  se transforma em:

$$D_{r\theta} : \begin{cases} \pi \leq \theta \leq 3\pi/2 \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}.$$

A integral  $I$  se transforma em:

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_{r\theta}} \frac{2}{1+r} r dr d\theta = \\ &= 2 \int_0^1 \int_{\pi}^{3\pi/2} \frac{r}{1+r} d\theta dr = 2 \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{r}{1+r} dr \\ &= \pi \int_0^1 \frac{1+r-1}{1+r} dr = \pi \int_0^1 \left( \frac{1+r}{1+r} - \frac{1}{1+r} \right) dr = \\ &= \pi \int_0^1 \left( 1 - \frac{1}{1+r} \right) dr = \pi [r - \ln(1+r)]_0^1 = \\ &= \pi [(1 - \ln 2) - (0 - \ln 1)] = \pi(1 - \ln 2). \end{aligned}$$

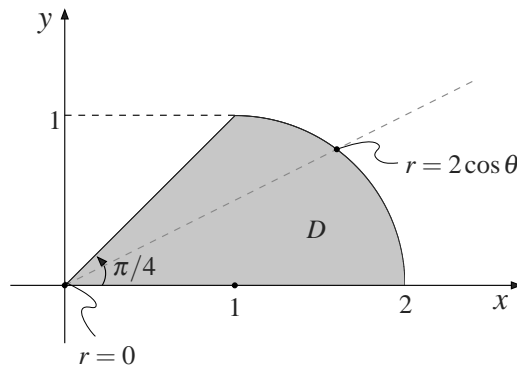
c. Temos

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_y^{1+\sqrt{1-y^2}} \sqrt{x^2+y^2} \, dx dy = \\ &= \iint_D \sqrt{x^2+y^2} \, dx dy \end{aligned}$$

onde

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1 + \sqrt{1-y^2} \right\}.$$

Da descrição de  $D$  vemos que a sua projeção sobre o eixo  $y$  é o intervalo  $[0, 1]$  e sua fronteira lateral da esquerda é a reta  $x = y$  e a da direita é a curva  $x = 1 + \sqrt{1-y^2}$  (se, e somente se,  $x-1 = \sqrt{1-y^2}$ , com  $x \geq 1$ , se e somente se  $(x-1)^2 + y^2 = 1$ , com  $x \geq 1$ ). Levando em conta essas informações, temos o esboço de  $D$ :



Passando para coordenadas polares, temos:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ dx dy = r dr d\theta \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}.$$

A equação polar da circunferência  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  ou  $x^2 + y^2 = 2x$  é  $r = 2 \cos \theta$ . Logo, a região  $D_{r\theta}$  é dada por:

$$D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi/4 \\ 0 \leq r \leq 2 \cos \theta \end{cases}.$$

Assim:

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{D_{r\theta}} \sqrt{r^2} r dr d\theta = \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\cos\theta} r^2 dr d\theta = \\
 &= \int_0^{\pi/4} \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^{2\cos\theta} d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\pi/4} \cos^3 \theta d\theta = \\
 &= \frac{8}{3} \int_0^{\pi/4} (1 - \sin^2 \theta) \cos \theta d\theta = \\
 &= \frac{8}{3} \left[ \sin \theta - \frac{\sin^3 \theta}{3} \right]_0^{\pi/4} = \frac{8}{3} \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 \right] = \\
 &= \frac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \left( 1 - \frac{1}{6} \right) = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10\sqrt{2}}{9}.
 \end{aligned}$$

## 7. Passando a circunferência

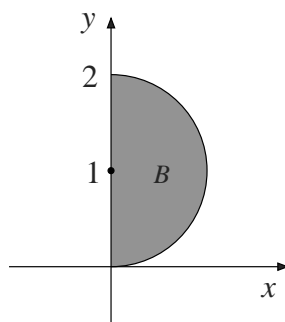
$$x^2 + y^2 - 2y = 0$$

para coordenadas polares, temos

$$\rho^2 = 2\rho \sin \theta \Rightarrow \rho = 2 \sin \theta.$$

Da figura ao lado, temos

$$B' : 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \rho \leq 2 \sin \theta.$$



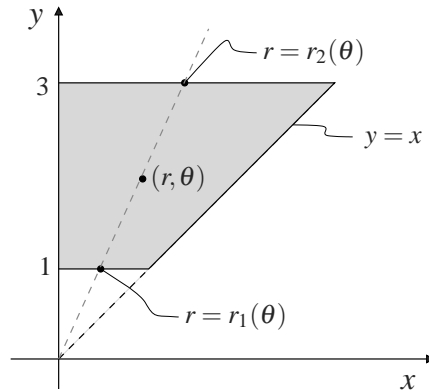
Então:

$$\begin{aligned}
 \iint_B xy dx dy &= \iint_{B'} \rho \cos \theta \rho \sin \theta \rho d\rho d\theta = \\
 &= \iint_{B'} \rho^3 \cos \theta \sin \theta d\rho d\theta = \\
 &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\sin\theta} \rho^3 \cos \theta \sin \theta d\rho d\theta = \\
 &= \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_0^{2\sin\theta} \cos \theta \sin \theta d\theta = \\
 &= 4 \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta \cos \theta \sin \theta d\theta = \\
 &= 4 \int_0^{\pi/2} \sin^5 \theta \cos \theta d\theta = 4 \left[ \frac{\sin^6 \theta}{6} \right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

8. Temos  $I = \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$ , onde  $D$  é dado por:

$$D: \begin{cases} 1 \leq y \leq 3 \\ 0 \leq x \leq y \end{cases}$$

e cujo esboço está representado na figura a seguir.



Passando para coordenadas polares, temos

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ dx dy = r dr d\theta \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases} .$$

Transformando  $y = 1$  e  $y = 3$  para coordenadas polares, temos  $r \sin \theta = 1$  e  $r \sin \theta = 3$  ou  $r = r_1(\theta) = \frac{1}{\sin \theta} = \csc \theta$  e  $r = r_2(\theta) = 3 \csc \theta$ . Então, o conjunto  $D_{r\theta}$  é dado por:

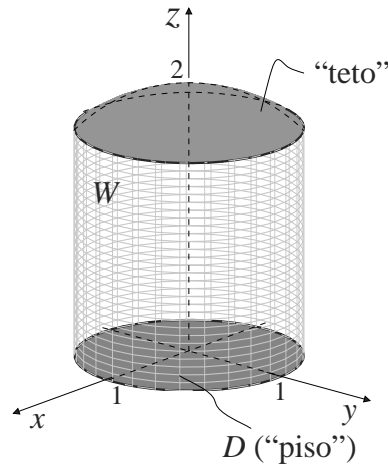
$$D_{r\theta}: \begin{cases} \pi/4 \leq \theta \leq \pi/2 \\ \csc \theta \leq r \leq 3 \csc \theta \end{cases} .$$

Logo:

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_{r\theta}} \frac{1}{\sqrt{r^2}} \cdot r dr d\theta = \iint_{D_{r\theta}} dr d\theta = \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_{\csc \theta}^{3 \csc \theta} dr d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/2} 2 \csc \theta d\theta = \\ &= 2 \ln \left[ \csc \theta - \cot \theta \right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \\ &= 2 \left[ \ln(1 - 0) - \ln(\sqrt{2} - 1) \right] = -2 \ln(\sqrt{2} - 1) = \\ &= 2 \ln \left( \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \right) = 2 \ln(\sqrt{2} + 1) . \end{aligned}$$



9. O esboço de  $W$  está representado na figura que se segue.



Observemos que o “teto” do sólido  $W$  é uma porção da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , donde  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} = f(x, y)$ . O “piso” de  $W$  é o disco  $D : x^2 + y^2 \leq 1$ . Então:

$$V(W) = \iint_D f(x, y) \, dxdy = \iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} \, dxdy.$$

Passando para coordenadas polares, temos:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ dxdy = r dr d\theta \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}.$$

O conjunto  $D_{r\theta}$  é dado por:  $0 \leq r \leq 1$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Então:

$$\begin{aligned} V(W) &= \iint_{D_{r\theta}} \sqrt{4 - r^2} \cdot r \, dr d\theta = \\ &= \int_0^1 (4 - r^2)^{1/2} r \int_0^{2\pi} d\theta \, dr = 2\pi \int_0^1 (4 - r^2)^{1/2} r \, dr. \end{aligned}$$

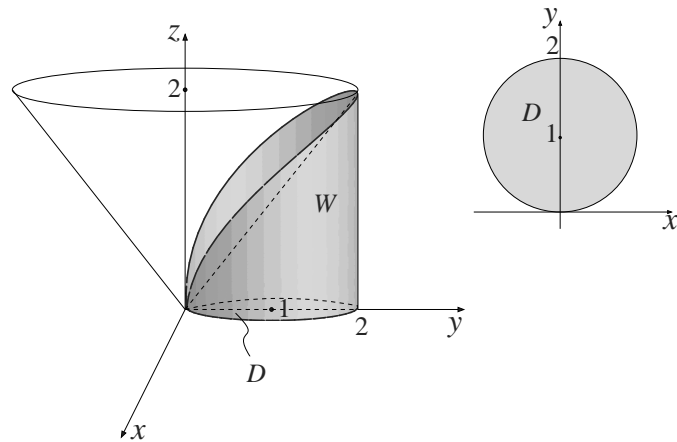
Temos  $d(4 - r^2) = -2r \, dr$ , donde  $r \, dr = -\frac{1}{2} d(4 - r^2)$ .

Logo,  $V(W) = 2\pi \left(-\frac{1}{2}\right) \int_0^1 (4 - r^2)^{1/2} d(4 - r^2) =$

$$= -\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \left[ (4 - r^2)^{3/2} \right]_0^1 = -\frac{2\pi}{3} \left( 3^{3/2} - 4^{3/2} \right) =$$

$$= \frac{2\pi}{3} (8 - 3\sqrt{3}) \text{ u.v.}$$

10. Identificando as superfícies  $z = 0$  (plano  $xy$ ),  $x^2 + y^2 = 2y$ , isto é,  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$  (superfície cilíndrica circular de diretriz circunferência no plano  $xy$  e geratrizes paralelas ao eixo  $z$ ) e  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  (superfície cônica).



Observe na figura acima que o sólido  $W$  está abaixo do gráfico de  $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  e está acima da região  $D$  limitada pela circunferência  $x^2 + y^2 = 2y$ . Como  $V(W) = \iint_D f(x, y) \, dxdy$ , então temos que  $V(W) = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dxdy$ . Passando a equação  $x^2 + y^2 = 2y$  para coordenadas polares, temos  $r^2 = 2r \sin \theta$  ou  $r = 2 \sin \theta$ . Observe que

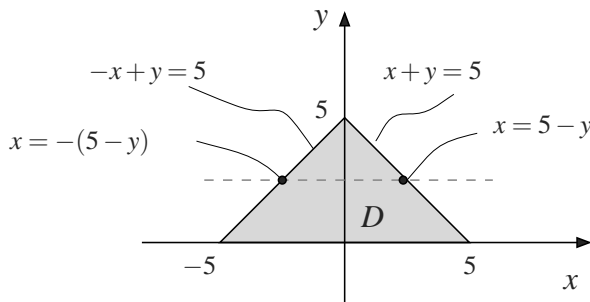
$$V(W) = \iint_{D_{r\theta}} r \cdot r \, dr d\theta = \iint_{D_{r\theta}} r^2 \, dr d\theta$$

onde  $D_{r\theta} = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq 2 \sin \theta\}$ . Então

$$\begin{aligned} V(W) &= \int_0^\pi \int_0^{2 \sin \theta} r^2 \, dr d\theta = \int_0^\pi \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^{2 \sin \theta} d\theta = \\ &= \frac{8}{3} \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta = \frac{8}{3} \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta \, d\theta = \\ &= -\frac{8}{3} \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) d(\cos \theta) = \\ &= -\frac{8}{3} \left[ \cos \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^\pi = -\frac{8}{3} \left[ \left( -1 + \frac{1}{3} \right) - \left( 1 - \frac{1}{3} \right) \right] = \\ &= -\frac{8}{3} \left( -2 + \frac{2}{3} \right) = \frac{32}{9} \text{ u.v.} \end{aligned}$$

## AULA 3

1. Consideremos o eixo  $x$  passando pela base e o eixo  $y$  coincidindo com a mediatriz relativa à base do triângulo.



Como  $D$  é homogênea e é simétrica em relação ao eixo  $y$ , então pela observação 5, segue que  $\bar{x} = 0$ . Temos

$$\bar{y} = \frac{\iint_D y \, dx dy}{A(D)}$$

onde

$$A(D) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 = 25 \text{ u.a.}$$

Como  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 5, -(5 - y) \leq x \leq 5 - y\}$ , então

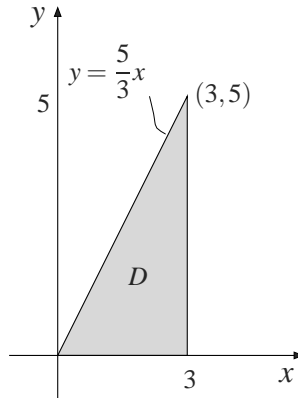
$$\begin{aligned} \iint_D y \, dx dy &= \int_0^5 \int_{-(5-y)}^{5-y} y \, dx dy = \int_0^5 y [x]_{-(5-y)}^{5-y} dy = \\ &= 2 \int_0^5 y(5 - y) \, dy = 2 \int_0^5 (5y - y^2) \, dy = \\ &= 2 \left[ \frac{5y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^5 = \frac{125}{3}. \end{aligned}$$

Logo:

$$\bar{y} = \frac{\frac{125}{3}}{25} = \frac{5}{3}.$$

Assim, o centro de massa situa-se a  $\frac{5}{3}$  cm da base, sobre sua mediatriz.

2. O esboço de  $D$  está representado na figura que se segue.



Seja  $(x, y) \in D$ . Então,  $x \geq 0$ . Logo,  $\delta(x, y) = x$ . Como  $M = \iint_D \delta(x, y) \, dx dy$ , então  $M = \iint_D x \, dx dy$ .

Olhando  $D$  como tipo I, tem-se:

$$D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq \frac{5}{3}x \end{cases} .$$

Então:

$$\begin{aligned} M &= \int_0^3 \int_0^{\frac{5}{3}x} x \, dy dx = \int_0^3 x [y]_0^{\frac{5}{3}x} dx = \frac{5}{3} \int_0^3 x^2 dx = \\ &= \frac{5}{3} \cdot \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 15 \, u.m. \end{aligned}$$

O centro de massa  $(\bar{x}, \bar{y})$  é dado por:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\iint_D x \delta(x, y) \, dx dy}{M} = \frac{\iint_D x^2 \, dx dy}{M} \\ \bar{y} &= \frac{\iint_D y \delta(x, y) \, dx dy}{M} = \frac{\iint_D xy \, dx dy}{M} . \end{aligned}$$

Tem-se:

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 \, dx dy &= \int_0^3 \int_0^{\frac{5}{3}x} x^2 \, dy dx = \int_0^3 x^2 \cdot \frac{5}{3}x \, dx = \\ &= \frac{5}{3} \int_0^3 x^3 \, dx = \frac{5}{3} \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^3 = \frac{135}{4} \end{aligned}$$

e

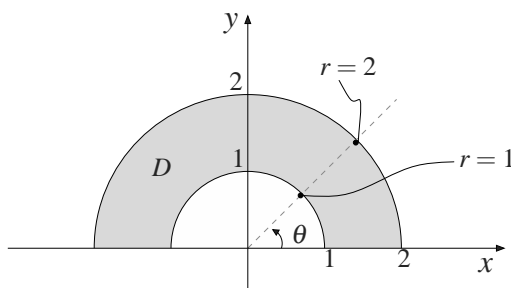
$$\begin{aligned}\iint_D xy \, dx dy &= \int_0^3 \int_0^{\frac{5}{3}x} xy \, dy dx = \int_0^3 x \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^{\frac{5}{3}x} dx = \\ &= \frac{25}{18} \int_0^3 x^3 \, dx = \frac{25}{18} \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^3 = \frac{225}{8}.\end{aligned}$$

Logo:

$$\bar{x} = \frac{135/4}{15} = \frac{9}{4} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{225/8}{15} = \frac{15}{8}$$

donde  $(\bar{x}, \bar{y}) = \left( \frac{9}{4}, \frac{15}{8} \right)$ .

3. O esboço de  $D$  está representado na figura que se segue.



Como a distância de  $P = (x, y)$  à origem é  $\sqrt{x^2 + y^2}$ , então a densidade em  $P$  é dada por  $\delta(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$ , onde  $k$  é uma constante de proporcionalidade. O centro de massa  $(\bar{x}, \bar{y})$  é dado por:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{k \iint_D x \sqrt{x^2 + y^2} \, dA}{M} \\ \bar{y} &= \frac{k \iint_D y \sqrt{x^2 + y^2} \, dA}{M}\end{aligned}$$

onde  $M$  é a massa de  $D$ .

Como a função  $f(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2}$  é ímpar na variável  $x$ , pois temos que  $f(-x, y) = -x\sqrt{x^2 + y^2} = -f(x, y)$  e como  $D$  tem simetria em relação ao eixo  $y$ , então, temos que

$$\iint_D x \sqrt{x^2 + y^2} \, dA = 0. \text{ Logo, } \bar{x} = 0.$$

### Cálculo de M

$$M = \iint_D \delta(x, y) \, dx dy = k \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dA.$$

Passando para coordenadas polares, temos:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ dx dy = r dr d\theta \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

e  $D_{r\theta}$  é dado por  $D_{r\theta} : \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$ . Então:

$$\begin{aligned} M &= k \iint_{D_{r\theta}} \sqrt{r^2} \cdot r \, dr d\theta = k \int_1^2 r^2 \int_0^\pi d\theta \, dr = \\ &= k\pi \int_1^2 r^2 \, dr = k\pi \left[ \frac{r^3}{3} \right]_1^2 = \frac{7k\pi}{3}. \end{aligned}$$

### Cálculo de $\iint_D y \sqrt{x^2 + y^2} \, dA$

$$\begin{aligned} \iint_D y \sqrt{x^2 + y^2} \, dA &= \iint_{D_{r\theta}} (r \sin \theta) r \cdot r \, dr d\theta = \\ &= \iint_{D_{r\theta}} r^3 \sin \theta \, dr d\theta = \int_1^2 r^3 \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \, dr = \\ &= [-\cos \theta]_0^\pi \int_1^2 r^3 \, dr = 2 \left[ \frac{r^4}{4} \right]_1^2 = \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

Logo:

$$\bar{y} = \frac{\frac{15k}{2}}{\frac{7k\pi}{3}} = \frac{45}{14\pi}.$$

Assim,  $(\bar{x}, \bar{y}) = \left( 0, \frac{45}{14\pi} \right)$ .

4. a. Inicialmente, calcule-mos os pontos de interseção da parábola  $y = x^2 + 1$  com a reta  $y = x + 3$ :

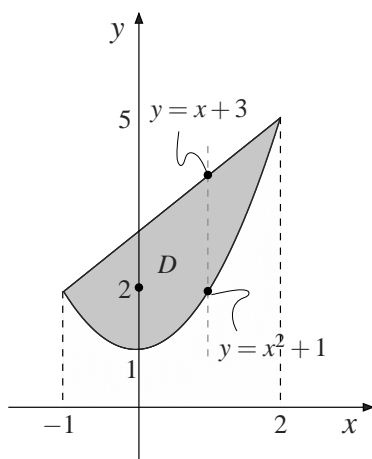
$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 = x + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -1.$$

Logo, os pontos de interseção são:  $(-1, 2)$  e  $(2, 5)$ . Assim, o esboço de  $D$  está representado na figura ao lado.



Descrevendo  $D$  como tipo I, temos:

$$D: \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ x^2 + 1 \leq y \leq x + 3 \end{cases}.$$

Como a distância de  $(x, y) \in D$  ao eixo  $x$  é  $|y| = y$ , pois  $y \geq 0$ , então a densidade em  $(x, y)$  é dada por  $\delta(x, y) = ky$ ,  $k > 0$ . Como  $M = \iint_D \delta(x, y) dx dy$ , então

$$\begin{aligned} M &= k \iint_D y dx dy = k \int_{-1}^2 \int_{x^2+1}^{x+3} y dy dx = \\ &= k \int_{-1}^2 \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{x^2+1}^{x+3} dx = \frac{k}{2} \int_{-1}^2 \left[ (x+3)^2 - (x^2+1)^2 \right] dx = \\ &= \frac{k}{2} \int_{-1}^2 (-x^4 - x^2 + 6x + 8) dx = \\ &= \frac{k}{2} \left[ -\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 8x \right]_{-1}^2 = \\ &= \frac{k}{2} \left[ \left( -\frac{32}{5} - \frac{8}{3} + 12 + 16 \right) - \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 3 - 8 \right) \right] = \\ &= \frac{k}{2} \left( -\frac{32}{5} - \frac{8}{3} + 28 - \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + 5 \right) = \frac{117k}{10} \text{ u.m.} \end{aligned}$$

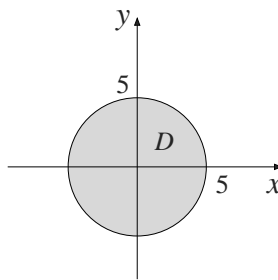
b. Sabemos que  $\bar{x} = \frac{\iint_D x \delta(x,y) dx dy}{M} = \frac{k \iint_D xy dx dy}{M}$ . Temos que:

$$\begin{aligned} \iint_D xy dx dy &= \int_{-1}^2 \int_{x^2+1}^{x+3} xy dy dx = \\ &= \int_{-1}^2 x \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{x^2+1}^{x+3} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^2 x (-x^4 - x^2 + 6x + 8) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^2 (-x^5 - x^3 + 6x^2 + 8x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{4} + 2x^3 + 4x^2 \right]_{-1}^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( -\frac{64}{6} - 4 + 16 + 16 \right) - \left( -\frac{1}{6} - \frac{1}{4} - 2 + 4 \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{64}{6} + 28 + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - 2 \right) = \frac{63}{8}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\bar{x} = \frac{\frac{63k}{8}}{\frac{117k}{10}} = \frac{35}{52}.$$

5. Considere o disco  $D$  de raio 5 cm centrado na origem como na figura a seguir.



Se  $D$  é homogêneo, então a densidade é constante, isto é,  $f(x,y) = k$  para todo  $(x,y) \in D$ .

a. Temos:

$$\begin{aligned} I_0 &= \iint_D (x^2 + y^2) f(x,y) dx dy = \\ &= k \iint_D (x^2 + y^2) dx dy. \end{aligned}$$



Passando para coordenadas polares, temos

$$I_0 = k \iint_{D_{r\theta}} r^2 \cdot r \, dr d\theta = k \iint_{D_{r\theta}} r^3 \, dr d\theta$$

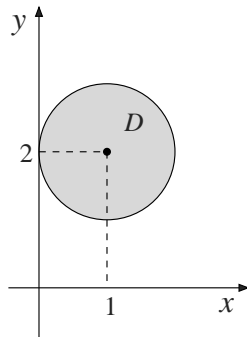
onde  $D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 5 \end{cases}$ . Então:

$$\begin{aligned} I_0 &= k \int_0^5 \int_0^{2\pi} r^3 \, d\theta dr = \\ &= 2k\pi \int_0^5 r^3 \, dr = 2k\pi \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^5 = \frac{625k\pi}{2}. \end{aligned}$$

b. Considere o diâmetro contido no eixo  $x$ . Então:

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D y^2 f(x,y) \, dx dy = k \iint_D y^2 \, dx dy = \\ &= k \iint_{D_{r\theta}} r^2 \sin^2 \theta \cdot r \, dr d\theta = \\ &= k \int_0^5 r^3 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \, d\theta dr = \\ &= k \cdot \frac{1}{2} \left[ \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{2\pi} \int_0^5 r^3 \, dr = \\ &= k\pi \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^5 = \frac{625k\pi}{4}. \end{aligned}$$

6. O esboço da lâmina  $D$  é a figura que se segue.



A distância de um ponto  $(x,y) \in D$  ao ponto  $(1,2)$  é dada pela expressão  $\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$ . Portanto, a densidade é dada pela equação  $\delta(x,y) = k\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$ .

Como  $M = \iint_D \delta(x,y) dx dy$ , então temos que  $M = k \iint_D \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} dx dy$ . Para calcular essa integral, devemos usar a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{cases} u = x - 1 \\ v = y - 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = u + 1 \\ y = v + 1 \end{cases}.$$

Logo,

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

donde  $dx dy = |J| du dv = du dv$ .

O disco  $D : (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 1$  é transformado em  $D_{uv} : u^2 + v^2 \leq 1$ . Aplicando a fórmula da mudança de variáveis, temos:

$$M = k \iint_{D_{uv}} \sqrt{u^2 + v^2} du dv.$$

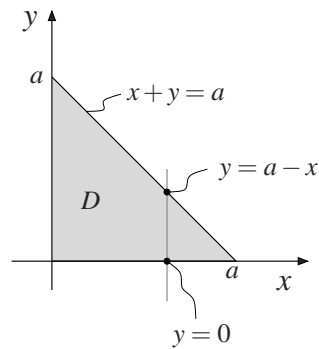
Passando para coordenadas polares, temos

$$\begin{cases} u = r \cos \theta \\ v = r \sin \theta \\ du dv = r dr d\theta \\ u^2 + v^2 = r^2 \end{cases}$$

e  $D_{r\theta}$  é dado por  $D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$ . Assim:

$$\begin{aligned} M &= k \iint_{D_{r\theta}} \sqrt{r^2} \cdot r dr d\theta = k \iint_{D_{r\theta}} r^2 dr d\theta = \\ &= k \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 dr d\theta = k \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^1 d\theta = \\ &= \frac{k}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2k\pi}{3} \text{ u.m.} \end{aligned}$$

7. É conveniente considerar um sistema de coordenadas como o da figura que se segue, com o vértice do ângulo reto na origem e os catetos sobre os eixos coordenados, e a hipotenusa sobre a reta  $x + y = a$ .



Podemos definir  $D$  por  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a - x\}$ . Calculemos o momento de inércia em relação ao cateto que está sobre o eixo  $y$ :  $I_y$ . Temos:

$$I_y = \iint_D x^2 \delta(x, y) dA$$

onde  $\delta(x, y) = c$ ,  $c > 0$  é uma constante. Portanto:

$$\begin{aligned} I_y &= c \iint_D x^2 dA = c \int_0^a \int_0^{a-x} x^2 dy dx = \\ &= c \int_0^a x^2 (a - x) dx = c \int_0^a (ax^2 - x^3) dx = \\ &= c \left[ \frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^a = c \left( \frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4} \right) = \frac{ca^4}{12}. \end{aligned}$$

8. Primeiro vamos encontrar as interseções das curvas, isto é, as interseções de  $y = x$  com as circunferências.

$$\begin{aligned} \begin{cases} y &= x \\ x^2 + y^2 &= 2x \end{cases} &\Leftrightarrow 2x^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1. \end{aligned}$$

Logo, as interseções são  $(0, 0)$  e  $(1, 1)$ .

$$\begin{aligned} \begin{cases} y &= x \\ x^2 + y^2 &= 4x \end{cases} &\Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2. \end{aligned}$$

Logo, as interseções são  $(0,0)$  e  $(2,2)$ .

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + \frac{x^2}{3} = 2x \Leftrightarrow 4x^2 = 6x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{3}{2}.$$

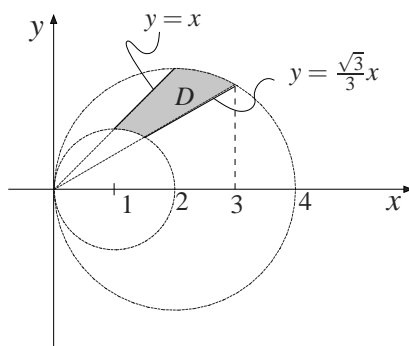
Logo, as interseções são  $(0,0)$  e  $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \\ x^2 + y^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + \frac{x^2}{3} = 4x \Leftrightarrow 4x^2 = 12x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 3.$$

Logo, as interseções são  $(0,0)$  e  $(3, \sqrt{3})$ .

De  $x^2 + y^2 = 2x$  e  $x^2 + y^2 = 4x$ , temos respectivamente,  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  e  $(x-2)^2 + y^2 = 4$ . Levando em conta essas informações, esboçamos a região  $D$  na figura que se segue.



A distância de  $(x,y) \in D$  à origem é  $\sqrt{x^2 + y^2}$ . Como a densidade é inversamente proporcional a distância de  $(x,y)$  à origem, então  $\delta(x,y) = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , onde  $k > 0$  é a constante de proporcionalidade. Como  $M = \iint_D \delta(x,y) dA$ , então  $M = k \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dA$ .

Passando para coordenadas polares, temos

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ dx dy = r dr d\theta \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}.$$

Temos

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 2x &\Rightarrow r^2 = 2r \cos \theta \xrightarrow{r \neq 0} r = 2 \cos \theta \\ x^2 + y^2 = 4x &\Rightarrow r^2 = 4r \cos \theta \xrightarrow{r \neq 0} r = 4 \cos \theta \\ y = x &\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \\ y = \frac{\sqrt{3}x}{3} &\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

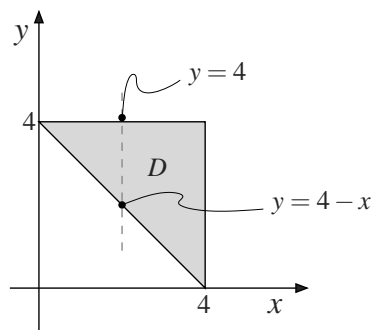
Então, o conjunto  $D_{r\theta}$  é dado por:

$$D_{r\theta} : \begin{cases} \pi/6 \leq \theta \leq \pi/4 \\ 2 \cos \theta \leq r \leq 4 \cos \theta \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} M &= k \iint_{D_{r\theta}} \frac{1}{\sqrt{r^2}} r dr d\theta = k \iint_{D_{r\theta}} dr d\theta = \\ &= k \int_{\pi/6}^{\pi/4} \int_{2 \cos \theta}^{4 \cos \theta} dr d\theta = 2k \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos \theta d\theta = \\ &= 2k \left[ \sin \theta \right]_{\pi/6}^{\pi/4} = 2k \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= k \left( \sqrt{2} - 1 \right) \text{ u.m.} \end{aligned}$$

9. O esboço da placa  $D$  é a figura a seguir.



Observemos que  $D$  pode ser definido por

$$D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 4-x \leq y \leq 4 \end{cases}.$$

Como  $D$  é homogênea, então, a densidade é constante,  $\delta(x, y) = k$ , e portanto, a massa de  $D$  é igual a  $M = kA(D) = k \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8k \text{ u.m.}$ . Sabemos que o momento de inércia em relação ao eixo  $y$  é dado por:

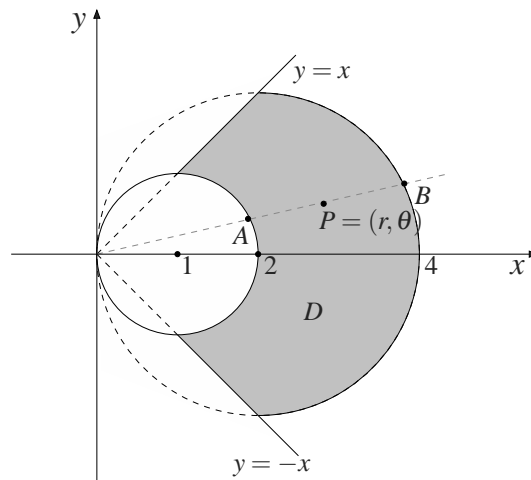
$$I_y = \iint_D x^2 \delta(x, y) dx dy = k \iint_D x^2 dx dy$$

ou

$$\begin{aligned} I_y &= k \int_0^4 \int_{4-x}^4 x^2 dy dx = k \int_0^4 x^2 (4 - 4 + x) dx \\ &= k \int_0^4 x^3 dx = k \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^4 = 64k = 8(8k) = 8M. \end{aligned}$$

10. a. Completando quadrado em  $x^2 + y^2 = 2x$  e  $x^2 + y^2 = 4x$ , obtemos a equação  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  e  $(x-2)^2 + y^2 = 4$ .

Logo, o esboço de  $D$  está representado na figura que se segue.



A massa  $M$  é dada por:

$$M = \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy.$$

Vamos usar coordenadas polares para descrever a região  $D$ . Temos:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ dx dy = r dr d\theta \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

Logo,  $x^2 + y^2 = 2x$  e  $x^2 + y^2 = 4x$  acarretam em  $r^2 = 2r \cos \theta$  e  $r^2 = 4r \cos \theta$ , e para  $r \neq 0$ , obtemos  $r = 2 \cos \theta$  e  $r = 4 \cos \theta$ . Para descrever  $D$ , consideramos um ponto  $P = (x, y) = (r, \theta) \in D$ . A semirreta  $OP$  intercepta a fronteira de  $D$  em  $A = (r_1(\theta), \theta)$  e  $B = (r_2(\theta), \theta)$ , onde  $r_1(\theta) = 2 \cos \theta$  e  $r_2(\theta) = 4 \cos \theta$ . Logo,  $2 \cos \theta \leq r \leq 4 \cos \theta$ .

As retas  $y = x$  e  $y = -x$  acarretam em  $r \sin \theta = r \cos \theta$  e  $r \sin \theta = -r \cos \theta$  ou  $\operatorname{tg} \theta = 1$  e  $\operatorname{tg} \theta = -1$ , donde  $\theta = \pi/4$  e  $\theta = -\pi/4$ , respectivamente. Logo,  $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$ .

Assim,  $D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4, 2 \cos \theta \leq r \leq 4 \cos \theta\}$ . Então:

$$\begin{aligned} M &= \iint_{D_{r\theta}} \frac{1}{\sqrt{r^2}} \cdot r dr d\theta = \iint_{D_{r\theta}} dr d\theta = \\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_{2 \cos \theta}^{4 \cos \theta} dr d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2 \cos \theta d\theta = \\ &= \left[ 2 \sin \theta \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \text{ u.m.} \end{aligned}$$

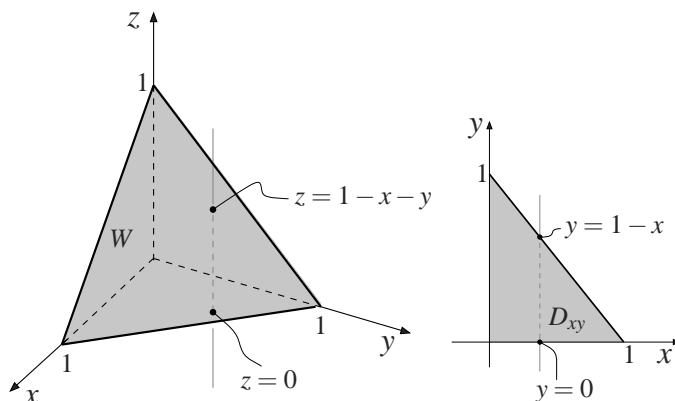
b. Temos:

$$\begin{aligned} I_0 &= \iint_D (x^2 + y^2) \delta(x, y) dA = \iint_D \frac{(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dA = \\ &= \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dA = \iint_{D_{r\theta}} \sqrt{r^2} \cdot r dr d\theta = \\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_{2 \cos \theta}^{4 \cos \theta} r^2 dr d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[ \frac{r^3}{3} \right]_{2 \cos \theta}^{4 \cos \theta} d\theta = \\ &= \frac{1}{3} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (64 \cos^3 \theta - 8 \cos^3 \theta) d\theta = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{56}{3} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^3 \theta \, d\theta = \\
&= \frac{56}{3} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 - \sin^2 \theta) \cos \theta \, d\theta = \\
&= \frac{56}{3} \left[ \sin \theta - \frac{\sin^3 \theta}{3} \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \\
&= \frac{56}{3} \cdot 2 \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 \right] = \frac{112}{3} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{12} \right) = \\
&= \frac{112}{3} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{12} = \frac{140\sqrt{2}}{9}.
\end{aligned}$$

## AULA 4

1. O esboço de  $W$  está representado na figura que se segue.



Podemos descrever  $W$  por  $W = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D_{xy} \text{ e } 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$ , onde  $D_{xy} = \text{proj}_{x \text{ e } y} W : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x \end{cases}$ .  
Então:

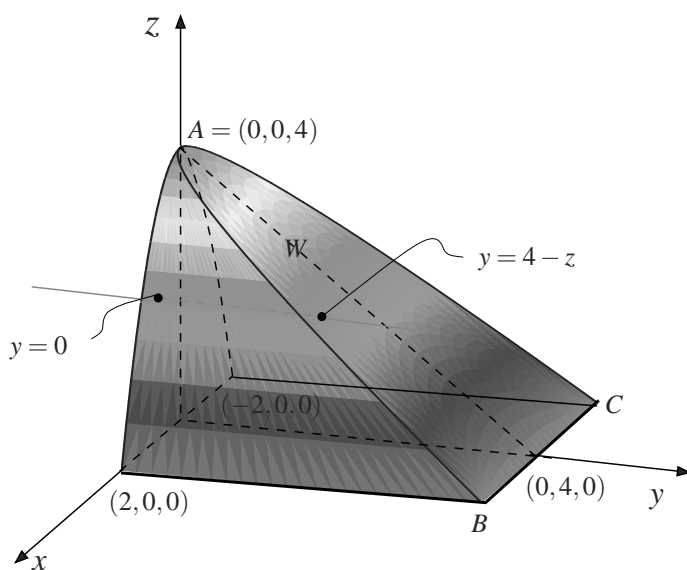
$$\begin{aligned}
\iiint_W x \, dx \, dy \, dz &= \iint_{D_{xy}} \left[ \int_0^{1-x-y} x \, dz \right] dx \, dy = \\
&= \iint_{D_{xy}} x(1-x-y) \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} x(1-x-y) \, dy \, dx =
\end{aligned}$$



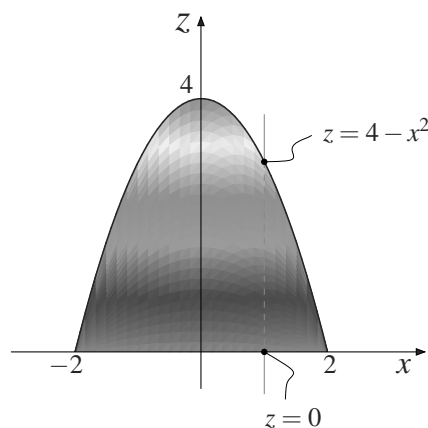
$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 x \left[ y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx = \\
&= \int_0^1 x \left[ 1 - x - x(1 - x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right] dx = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 x(2 - 2x - 2x + 2x^2 - 1 + 2x - x^2) dx = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3) dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{x^2}{2} - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{24}.
\end{aligned}$$

2. a. Para esboçar a superfície  $z + x^2 = 4$  (dita cilindro parabólico), traçamos no plano  $y = 0$ , a parábola  $z = 4 - x^2$ . Como a equação não contém a variável  $y$ , então por pontos da parábola (por exemplo  $A = (0, 0, 4)$ ,  $(2, 0, 0)$  e  $(-2, 0, 0)$ ) traçamos paralelas ao eixo  $y$ . No plano  $x = 0$ , traçamos a reta  $y + z = 4$ , que intercepta o cilindro em  $A = (0, 0, 4)$ .

Para esboçar o plano, devemos traçar paralelas ao eixo  $x$ , por pontos da reta. Em particular, por  $(0, 4, 0)$ . Esta paralela intercepta o cilindro nos pontos  $B$  e  $C$ . A curva que passa por  $B$ ,  $A$  e  $C$  representa a curva interseção do plano com o cilindro. Considerando os planos  $y = 0$  e  $z = 0$ , temos o esboço de  $W$ .



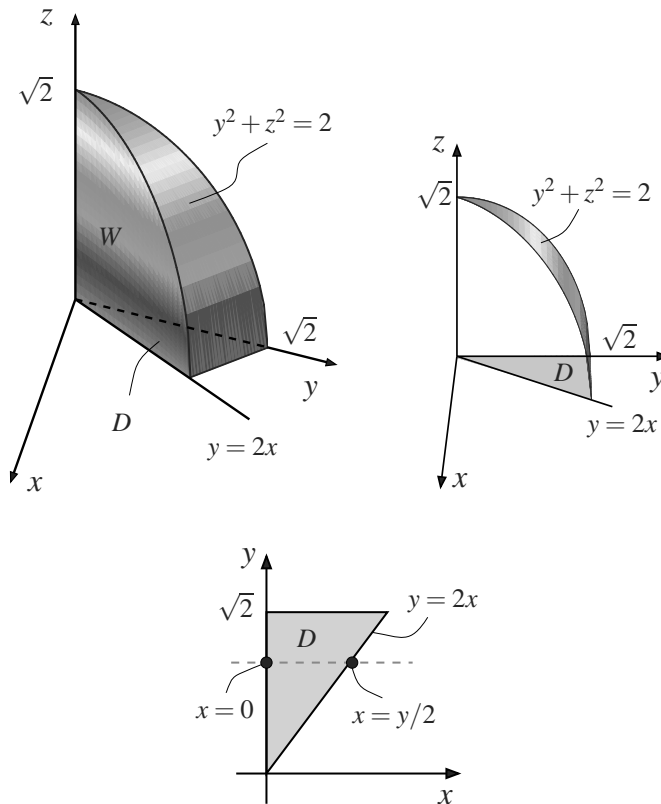
- b. Temos  $V(W) = \iiint_W dx dy dz$ , onde  $W$  pode ser descrito por  $W = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in D_{xz} \text{ e } 0 \leq y \leq 4 - z\}$  de onde temos  $D_{xz} = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2, 0 \leq z \leq 4 - x^2\}$ .



Então:

$$\begin{aligned}
 V(W) &= \iint_{D_{xz}} \left[ \int_0^{4-z} dy \right] dx dz = \\
 &= \iint_{D_{xz}} (4 - z) dx dz = \int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} (4 - z) dz dx = \\
 &= \int_{-2}^2 \left[ 4z - \frac{z^2}{2} \right]_0^{4-x^2} dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (32 - 8x^2 - 16 + 8x^2 - x^4) dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (16 - x^4) dx = \frac{1}{2} \left[ 16x - \frac{x^5}{5} \right]_{-2}^2 = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 2 \left( 32 - \frac{32}{5} \right) = \frac{128}{5} \text{ u.v.}
 \end{aligned}$$

3. O sólido  $W$  e sua projeção sobre o plano  $xy$  acham-se ilustrados nas figuras a seguir.



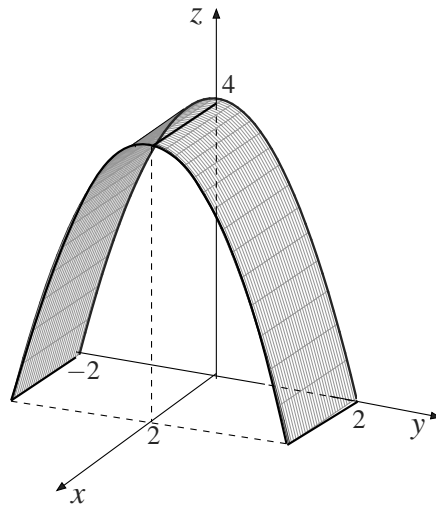
Podemos descrever  $W$  como  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq \sqrt{2 - y^2}, (x, y) \in D\}$  onde  $D$  é a projeção de  $W$  sobre o plano  $xy$ . Temos:

$$M = \iiint_W f(x, y, z) dx dy dz$$

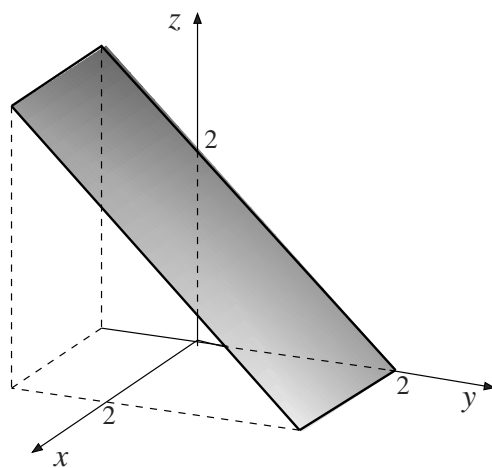
onde  $f(x, y, z)$  é a densidade dada por  $f(x, y, z) = kz$ , com  $k$  constante de proporcionalidade. Então:

$$\begin{aligned} M &= k \iiint_W z dx dy dz = k \iint_D \left[ \int_0^{\sqrt{2-y^2}} z dz \right] dx dy = \\ &= \frac{k}{2} \iint_D (2 - y^2) dx dy = \frac{k}{2} \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{y/2} (2 - y^2) dx dy = \\ &= \frac{k}{2} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{y}{2} (2 - y^2) dy = \frac{k}{4} \int_0^{\sqrt{2}} (2y - y^3) dy = \\ &= \frac{k}{4} \left[ y^2 - \frac{y^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{k}{4} (2 - 1) = \frac{k}{4} \text{ u.m.} \end{aligned}$$

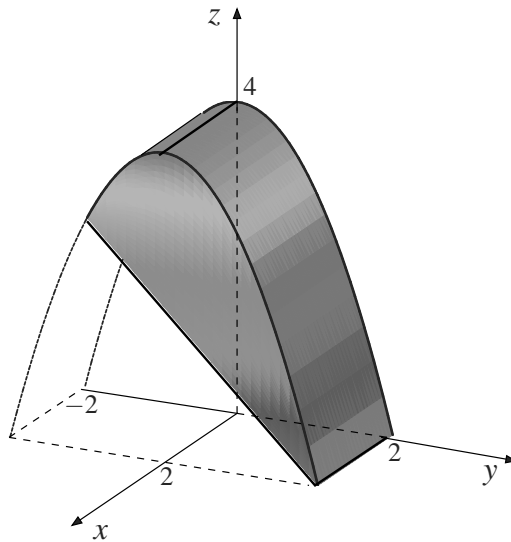
4. a. Para esboçar a superfície  $y^2 + z = 4$ ,  $0 \leq x \leq 2$  ou  $z = 4 - y^2$ ,  $0 \leq x \leq 2$ , esboçamos inicialmente a parábola  $z = 4 - y^2$  no plano  $yz$  e, em seguida, por pontos da parábola traçamos paralelas ao eixo  $x$  (pois a variável  $x$  não está presente na equação da parábola).



Para esboçar a porção do plano  $y + z = 2$ ,  $0 \leq x \leq 2$ , traçamos a reta  $y + z = 2$  no plano  $yz$  e por pontos da reta traçamos paralelas ao eixo  $x$  (pois a variável não está presente na equação do plano).



Juntando as duas superfícies, temos o esboço do sólido  $W$  na figura que se segue.



Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} z = 4 - y^2 \\ z = 2 - y \end{cases} \Rightarrow 4 - y^2 = 2 - y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow y = -1 \text{ ou } y = 2.$$

Portanto, projetando  $W$  sobre o plano  $xy$ , encontramos o retângulo  $D_{xy} : \begin{cases} -1 \leq y \leq 2 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$ . Assim, descrevemos o sólido  $W$  por  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D_{xy} \text{ e } 2 - y \leq z \leq 4 - y^2\}$ . Logo,

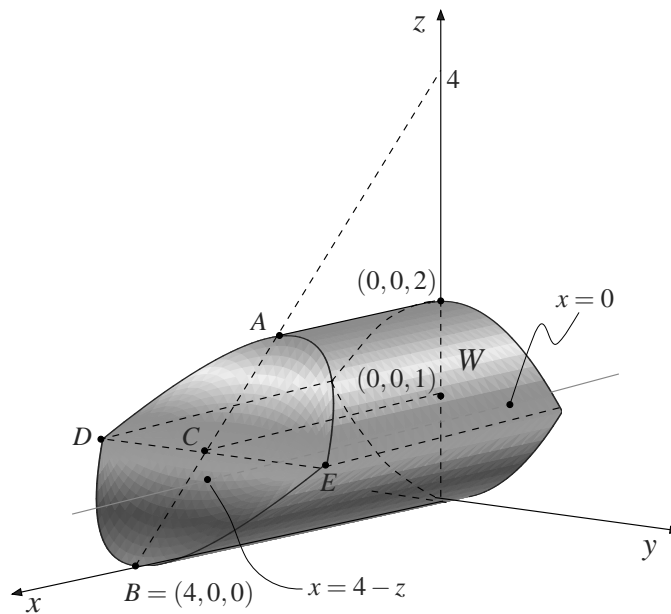
$$\begin{aligned} \iiint_W e^{ax} dV &= \iint_{D_{xy}} \int_{2-y}^{4-y^2} e^{ax} dz dx dy = \\ &= \iint_{D_{xy}} e^{ax} (2 - y^2 + y) dx dy = \\ &= \int_0^2 e^{ax} \int_{-1}^2 (2 - y^2 + y) dy dx = \\ &= \int_0^2 e^{ax} \left[ 2y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} \right]_{-1}^2 dx = \frac{9}{2} \int_0^2 e^{ax} dx = \\ &= \frac{9}{2} \left[ \frac{e^{ax}}{a} \right]_0^2 = \frac{9}{2a} (e^{2a} - 1). \end{aligned}$$

5. a. Inicialmente, encontremos os pontos de interseção das duas parábolas:

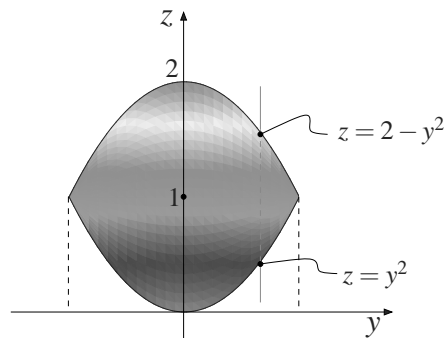
$$\begin{cases} z = y^2 \\ z = 2 - y^2 \end{cases} \Leftrightarrow y^2 = 2 - y^2 \Leftrightarrow 2y^2 = 2 \Leftrightarrow y = \pm 1.$$

Por pontos das parábolas, traçamos paralelas ao eixo  $x$  (por exemplo,  $(0,0,2)$ ,  $(0,0,0)$ ,  $(0,-1,1)$  e  $(0,1,1)$ ).

No plano  $xz$ , traçamos a reta  $x + z = 4$ , que intercepta as superfícies anteriores em  $A$  e  $B$ . Por  $(0,0,1)$ , traçamos uma paralela ao eixo  $x$ , que intercepta a reta em  $C$ . Por  $C$ , traçamos uma paralela ao eixo  $y$ , que intercepta as superfícies anteriores em  $D$  e  $E$ . Ligando  $A$ ,  $E$ ,  $B$  e  $D$  por uma curva fechada, obtemos o sólido  $W$  na figura a seguir.



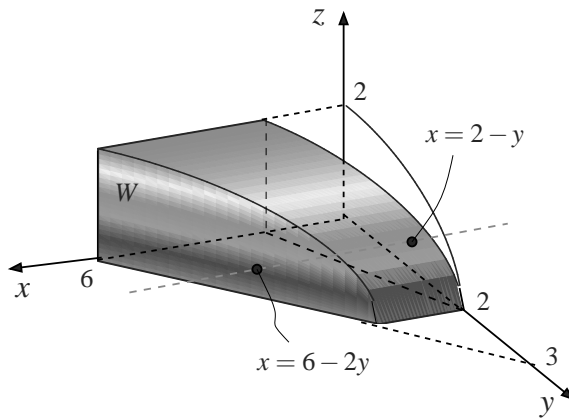
- b. Projetando  $W$  sobre o plano  $yz$ , encontramos  $D_{yz}$  na figura a seguir.



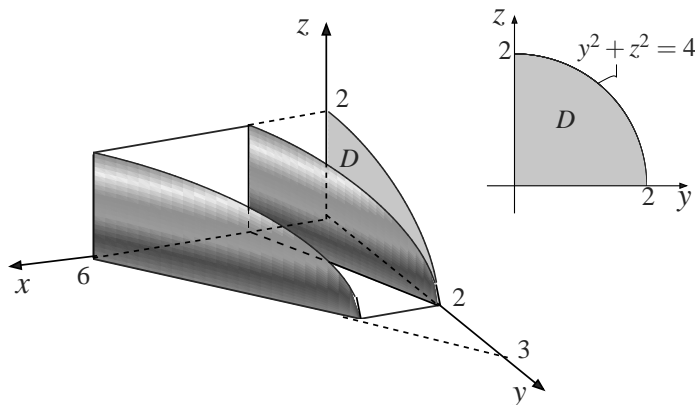
Então, descrevemos  $W$  por  $W = \{(x, y, z) \mid (y, z) \in D_{yz} \text{ e } 0 \leq x \leq 4 - z\}$ . Temos:

$$\begin{aligned}
 V(W) &= \iiint_W dx dy dz = \iint_{D_{yz}} \left[ \int_0^{4-z} dx \right] dy dz = \\
 &= \iint_{D_{yz}} (4 - z) dy dz = \int_{-1}^1 \int_{y^2}^{2-y^2} (4 - z) dz dy = \\
 &= \int_{-1}^1 \left[ 4z - \frac{z^2}{2} \right]_{y^2}^{2-y^2} dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[ 8z - z^2 \right]_{y^2}^{2-y^2} dy = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[ (16 - 8y^2 - 4 + 4y^2 - y^4) - (8y^2 - y^4) \right] dy = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (12 - 12y^2) dy = \frac{1}{2} \left[ 12y - 4y^3 \right]_{-1}^1 = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 2(12 - 4) = 8 \text{ u.v.}
 \end{aligned}$$

6. A figura a seguir mostra o sólido dado.



Projetando  $W$  sobre o plano  $yz$ , encontramos a região  $D$  ilustrada na figura que se segue.



Então,  $W$  pode ser descrito por

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2 - y \leq x \leq 6 - 2y, (y, z) \in D\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} V(W) &= \iiint_W dx dy dz = \iint_D \left[ \int_{2-y}^{6-2y} dx \right] dy dz = \\ &= \iint_D (4 - y) dy dz. \end{aligned}$$

Passando para coordenadas polares, temos:

$$\begin{cases} y = r \cos \theta \\ z = r \sin \theta \\ dy dz = r dr d\theta \end{cases} \quad \text{com} \quad \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \end{cases}.$$

Então

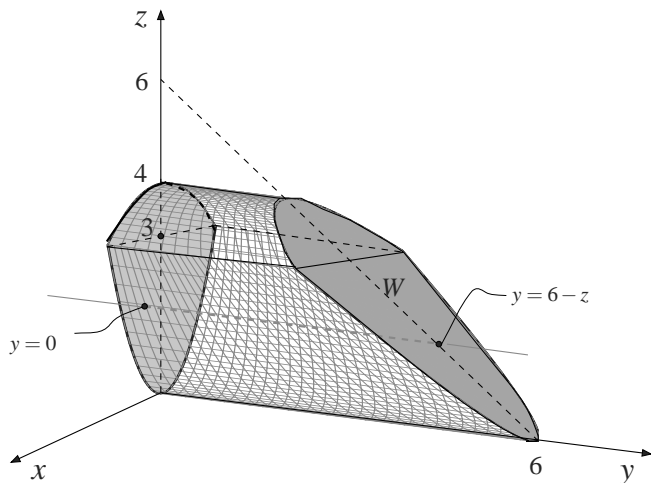
$$\begin{aligned} V(W) &= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 (4 - r \sin \theta) r dr d\theta = \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 (4r - r^2 \sin \theta) dr d\theta = \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[ 2r^2 - \frac{r^3}{3} \sin \theta \right]_0^2 d\theta = \\ &= \int_0^{\pi/2} \left( 8 - \frac{8}{3} \sin \theta \right) d\theta = \left[ 8\theta + \frac{8}{3} \cos \theta \right]_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{4}{3}(3\pi - 2) \text{ u.v.} \end{aligned}$$

7. Inicialmente, encontremos as interseções das curvas  $z = 3x^2$  e  $z = 4 - x^2$ .

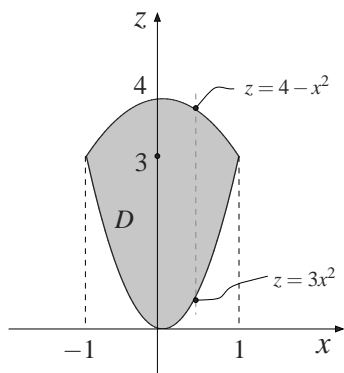
$$\begin{aligned} 3x^2 = 4 - x^2 &\Rightarrow 4x^2 = 4 \\ &\Rightarrow x^2 = 1 \\ &\Rightarrow x = \pm 1 \text{ e } z = 3. \end{aligned}$$

Esboçando os cilindros parabólicos  $z = 3x^2$ , com  $0 \leq z \leq 3$ ,  $z = 4 - x^2$ , com  $0 \leq z \leq 3$  e o plano  $y + z = 6$ , podemos visualizar o nosso sólido  $W$  na figura que se segue.





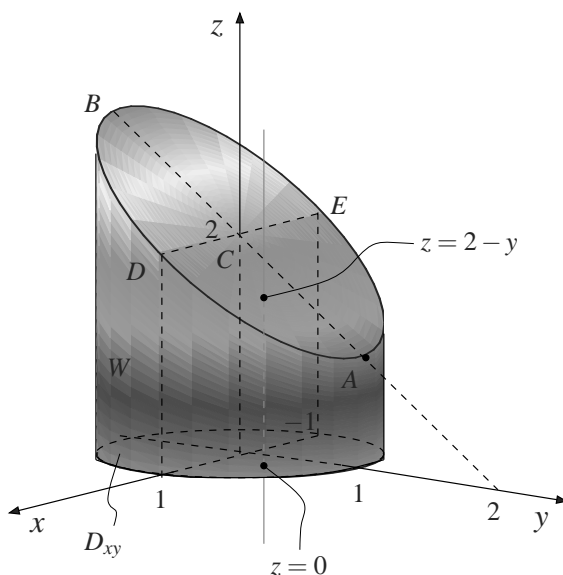
Projetando  $W$  sobre o plano  $xz$  encontramos a seguinte região  $D$  na figura a seguir.



Portanto:

$$\begin{aligned}
 V(W) &= \iiint_W dx dy dz = \iint_D \left[ \int_0^{6-z} dy \right] dx dz = \\
 &= \iint_D (6-z) dx dz = \int_{-1}^1 \int_{3x^2}^{4-x^2} (6-z) dz dx = \\
 &= \int_{-1}^1 \left[ 6z - \frac{z^2}{2} \right]_{3x^2}^{4-x^2} dx = 4 \int_{-1}^1 (4 - 5x^2 + x^4) dx = \\
 &= 4 \left[ 4x - \frac{5x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 = \frac{304}{15} \text{ u.v.}
 \end{aligned}$$

8. a. Inicialmente, traçamos o cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ , em seguida, traçamos no plano  $yz$ , a reta  $y + z = 2$ , que intercepta o cilindro em  $A$  e  $B$ . Pelo ponto  $C = (0, 0, 2)$  da reta, traçamos uma paralela ao eixo  $x$ , que intercepta o cilindro em  $D$  e  $E$ . Ligando os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $D$  e  $E$ , obtemos a curva interseção do cilindro com o plano. Assim, temos o sólido  $W$  na figura a seguir.



- b. Temos  $W = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D_{xy}, 0 \leq z \leq 2 - y\}$  onde  $D_{xy}$  é dado por  $D_{xy} : x^2 + y^2 \leq 1$ . Temos:

$$\begin{aligned} M &= \iiint_W \delta(x, y, z) dV = \iiint_W z dV = \\ &= \iint_{D_{xy}} \left[ \int_0^{2-y} z dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^{2-y} dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} (4 - 4y + y^2) dy. \end{aligned}$$

Aplicando coordenadas polares, temos

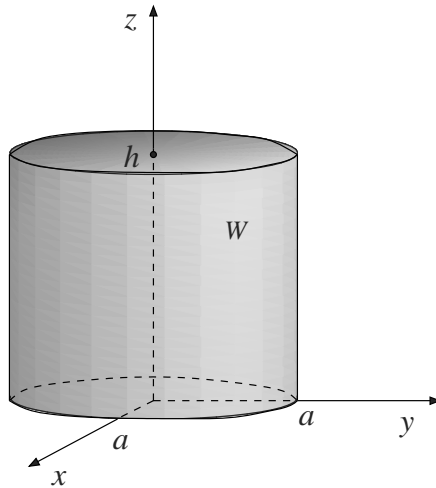
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ dx dy = r dr d\theta \end{cases}$$

$$\text{e } D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}.$$

Então:

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{1}{2} \iint_{D_{r\theta}} (4 - 4r \operatorname{sen} \theta + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta) r dr d\theta = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (4r - 4r^2 \operatorname{sen} \theta + r^3 \operatorname{sen}^2 \theta) dr d\theta = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[ 2r^2 - 4\frac{r^3}{3} \operatorname{sen} \theta + \frac{r^4}{4} \operatorname{sen}^2 \theta \right]_0^1 d\theta = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[ 2 - \frac{4}{3} \operatorname{sen} \theta + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 \theta \right] d\theta = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ 2\theta + \frac{4}{3} \cos \theta + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \left( \theta - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} \right) \right]_0^{2\pi} = \\
 &= \frac{1}{2} \left( 4\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{17\pi}{8} \text{ u.m.}
 \end{aligned}$$

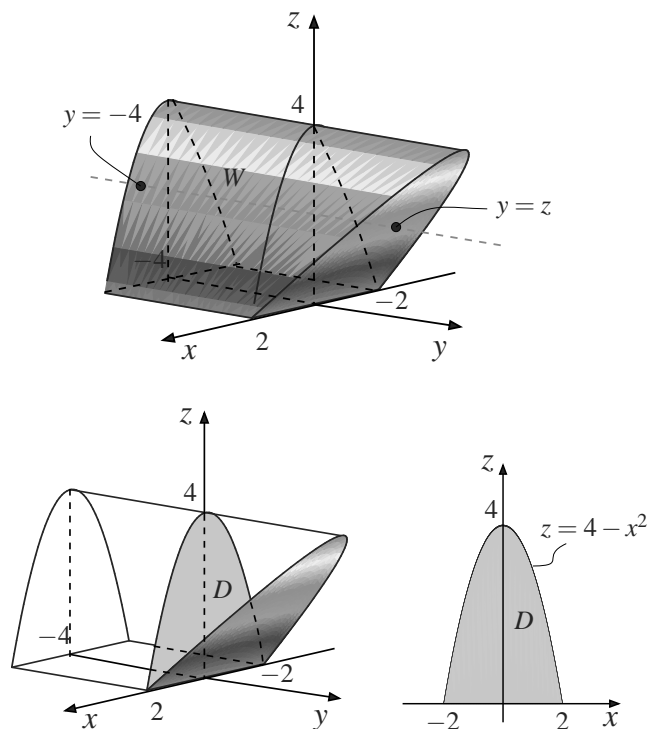
9. Consideramos um sistema de coordenadas conforme a figura a seguir.



Como a densidade em  $(x, y, z)$  é proporcional à distância  $z$  da base, então  $\delta(x, y, z) = kz$ , onde  $k > 0$  é uma constante de proporcionalidade. A massa do sólido é

$$\begin{aligned}
 M &= \iiint_W \delta(x, y, z) dV = \iiint_W kz dV = \\
 &= k \iiint_W z dV = \iint_D \left[ \int_0^h z dz \right] dxdy = \\
 &= k \iint_D \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^h dxdy = \frac{kh^2}{2} \iint_D dxdy = \\
 &= \frac{kh^2}{2} A(D) = \frac{kh^2}{2} \pi a^2 = \frac{k\pi h^2 a^2}{2}.
 \end{aligned}$$

10. As figuras a seguir mostram o sólido  $W$  e a sua projeção sobre o plano  $xz$ .



O sólido  $W$  pode ser definido por

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -4 \leq y \leq z, (x, z) \in D\}.$$

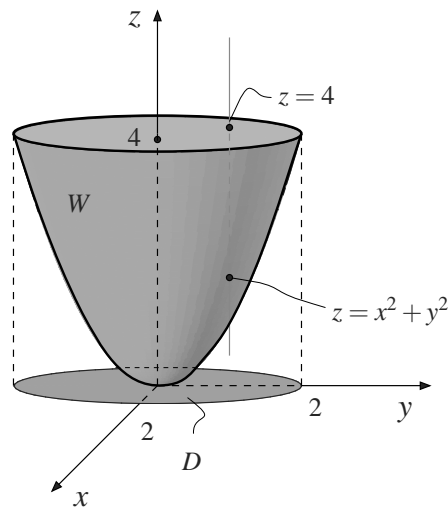
onde  $D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2, 0 \leq z \leq 4 - x^2\}$ .

Como  $W$  é homogêneo, então a densidade é constante, isto é,  $f(x, y, z) = k$ . Então:

$$\begin{aligned} M &= k \iiint_W dx dy dz = k \iint_D \left[ \int_{-4}^z dy \right] dx dz = \\ &= k \iint_D (z + 4) dx dz = k \int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} (z + 4) dz dx = \\ &= k \int_{-2}^2 \left[ \frac{z^2}{2} + 4z \right]_0^{4-x^2} dx = \\ &= \frac{k}{2} \int_{-2}^2 (48 - 16x^2 + x^4) dx = \\ &= \frac{k}{2} \left[ 48x - \frac{16x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_{-2}^2 = \frac{896k}{15} \text{ u.m.} \end{aligned}$$

## AULA 5

1. O esboço de  $W$  está representado na figura que se segue.



A massa de  $W$  é dada por:

$$M = \iiint_W \delta(x, y, z) \, dV = \iiint_W (x^2 + y^2)^{1/2} \, dx dy dz.$$

Passando para coordenadas cilíndricas, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \\ dx dy dz = r \, dr d\theta dz \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{array} \right. .$$

Como  $W$  é dado por  $W : \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in D \\ x^2 + y^2 \leq z \leq 4 \end{array} \right.$  então  $W_{r\theta z}$  é

dado por  $W_{r\theta z} : \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ r^2 \leq z \leq 4 \end{array} \right.$  . Assim:

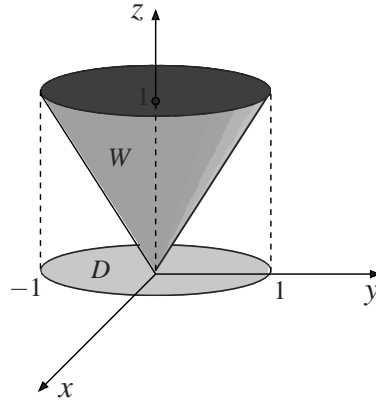
$$\begin{aligned} M &= \iiint_W (x^2 + y^2)^{1/2} \, dx dy dz = \\ &= \iiint_{W_{r\theta z}} (r^2)^{1/2} r \, dr d\theta dz = \iiint_{W_{r\theta z}} r^2 \, dr d\theta dz = \\ &= \int_0^2 r^2 \int_{r^2}^4 \int_0^{2\pi} d\theta dz dr = 2\pi \int_0^2 r^2 \int_{r^2}^4 dz dr = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \int_0^2 r^2(4-r^2) dr = 2\pi \int_0^2 (4r^2 - r^4) dr = \\
&= 2\pi \left[ \frac{4r^3}{3} - \frac{r^5}{5} \right]_0^2 = \frac{128\pi}{15} \text{ u.m.}
\end{aligned}$$

2. Sendo  $f(x,y,z)$  a densidade em  $(x,y,z)$ , então  $f(x,y,z) = k(\sqrt{x^2+y^2})^2 = k(x^2+y^2)$ , onde  $k$  é a constante de proporcionalidade.

Temos que

$$\begin{aligned}
M &= \iiint_W f(x,y,z) dx dy dz = \\
&= k \iiint_W (x^2+y^2) dx dy dz
\end{aligned}$$



onde

$$W = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1, (x,y) \in D \right\}$$

sendo  $D$  o disco dado por  $x^2+y^2 \leq 1$ .

Passando para coordenadas cilíndricas, temos

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \\ dx dy dz = r dr d\theta dz \end{cases} .$$

Temos que  $W$  é a imagem do conjunto

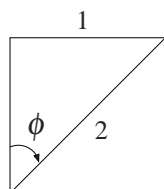
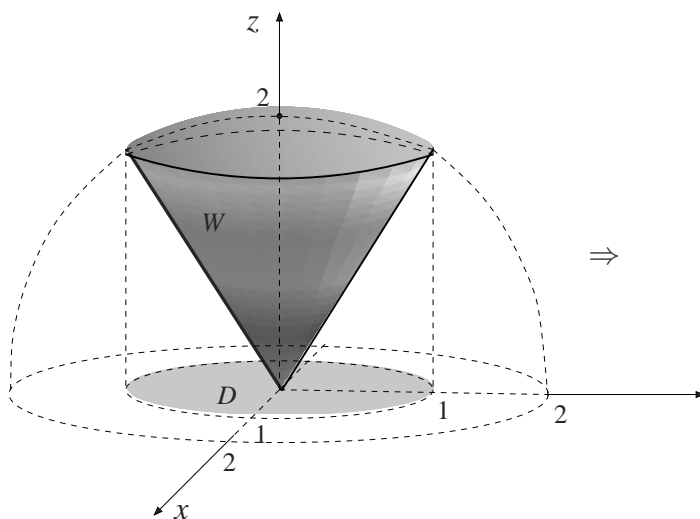
$$Q = \left\{ (r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r \leq z \leq 1 \right\} .$$

Então:

$$\begin{aligned}
M &= k \iiint_Q r^2 r dr d\theta dz = k \iiint_Q r^3 dr d\theta dz = \\
&= k \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_r^1 r^3 dz d\theta dr = k \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3(1-r) d\theta dr = \\
&= 2k\pi \int_0^1 (r^3 - r^4) dr = 2k\pi \left[ \frac{r^4}{4} - \frac{r^5}{5} \right]_0^1 = \frac{k\pi}{10} \text{ u.m.}
\end{aligned}$$

3. De  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  e  $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ , tem-se  $x^2 + y^2 = 1$  que é a projeção, no plano  $xy$ , da curva interseção das duas superfícies. A projeção do sólido  $W$  é o disco  $D: x^2 + y^2 \leq 1$ .

O sólido  $W$  e sua projeção  $D$  são mostrados a seguir:



$$\Rightarrow \sin \phi = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{6}$$

Passando para coordenadas esféricas, tem-se:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \\ dx dy dz = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \end{cases}.$$

A equação da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  fica em coordenadas esféricas  $\rho^2 = 4$  ou  $\rho = 2$ . Então:

$$W_{\rho\phi\theta} = \{(\rho, \phi, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \phi \leq \pi/6, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Logo:

$$\begin{aligned}
 & \iiint_W \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx dy dz = \\
 & = \iiint_{W_{\rho\phi\theta}} \rho \cdot \rho^2 \sin \phi \, d\rho d\phi d\theta = \\
 & = \int_0^{\pi/6} \int_0^2 \int_0^{2\pi} \rho^3 \sin \phi \, d\theta d\rho d\phi = \\
 & = 2\pi \int_0^{\pi/6} \sin \phi \int_0^2 \rho^3 \, d\rho d\phi = \\
 & = 2\pi \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_0^2 \int_0^{\pi/6} \sin \phi \, d\phi = \\
 & = 8\pi \left[ -\cos \phi \right]_0^{\pi/6} = 8\pi \left( 1 - \cos \frac{\pi}{6} \right) = \\
 & = 8\pi \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 4\pi(2 - \sqrt{3}).
 \end{aligned}$$

4. a. Inicialmente, passaremos de coordenadas cilíndricas a coordenadas cartesianas:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \\ dx dy dz = r \, dz dr d\theta \end{cases}.$$

Logo:

$$r^2 \sin \theta \, dz dr d\theta = r \sin \theta \, r dz dr d\theta = y \, dx dy dz.$$

A equação  $z = \sqrt{4 - r^2}$  em coordenadas cartesianas é  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$  ou  $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$ . Logo, a imagem do conjunto  $Q$  dado por

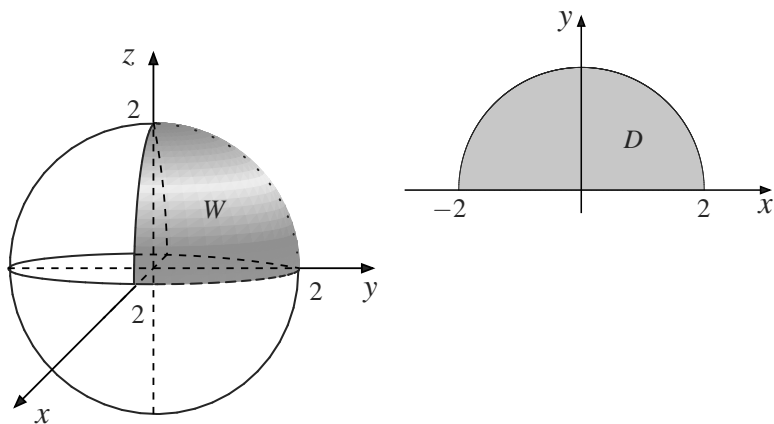
$$Q: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq z \leq \sqrt{4 - r^2} \end{cases}$$

é o sólido  $W$  dado por

$$W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D \right\}$$

onde  $D$  é dado a seguir.





Então

$$I = \iiint_W y \, dx dy dz.$$

Passando para coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \\ dx dy dz = \rho^2 \sin \varphi \, d\rho d\varphi d\theta \end{cases}.$$

Temos que  $W$  é a imagem de

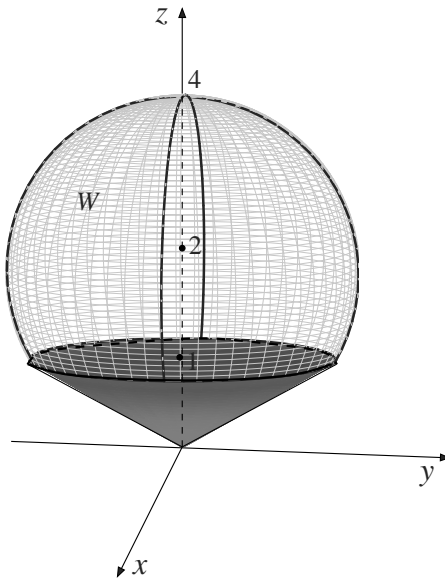
$$Q: \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{Então: } I &= \iiint_Q \rho \sin \varphi \sin \theta \rho^2 \sin \varphi \, d\rho d\varphi d\theta = \\ &= \iiint_Q \rho^3 \sin^2 \varphi \sin \theta \, d\rho d\varphi d\theta = \\ &= \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^\pi \rho^3 \sin^2 \varphi \sin \theta \, d\theta d\varphi d\rho. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } I &= \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \rho^3 \sin^2 \varphi \left[ -\cos \theta \right]_0^\pi d\varphi d\rho = \\ &= 2 \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \rho^3 \sin^2 \varphi \, d\varphi d\rho = \\ &= 2 \int_0^2 \rho^3 \cdot \frac{1}{2} \left[ \varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_0^{\pi/2} d\rho = \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^2 \rho^3 \, d\rho = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_0^2 = 2\pi. \end{aligned}$$

5. a. De  $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ , temos  $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$ . De  $z = \sqrt{\frac{1}{3}(x^2 + y^2)}$ , temos  $x^2 + y^2 = 3z^2$ . Logo, substituindo em  $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ , temos  $3z^2 + z^2 - 4z = 0$  ou  $4z^2 - 4z = 0$ , donde  $z = 0$  ou  $z = 1$ .

Se  $z = 1$ , temos  $x^2 + y^2 = 3$ . Assim, o cone intercepta a esfera segundo uma circunferência de raio  $\sqrt{3}$ , contida no plano  $z = 1$ . Portanto, o esboço de  $W$  está representado na figura que se segue.



Usando coordenadas esféricas, temos

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \\ dx dy dz = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \end{array} \right. .$$

Para encontrar o conjunto  $W_{\rho\phi\theta}$ , devemos descrever as superfícies que compõem a fronteira  $W$ .

De  $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ , temos  $\rho^2 = 4\rho \cos \phi$  ou  $\rho = 4 \cos \phi$ , se  $\rho \neq 0$ . De  $z = \sqrt{\frac{1}{3}(x^2 + y^2)}$  ou  $3z^2 = x^2 + y^2$ , temos  $3\rho^2 \cos^2 \phi = \rho^2 \sin^2 \phi$ , donde  $\tan^2 \phi = 3$ , se  $\rho \neq 0$  ou  $\tan \phi = \sqrt{3}$ , se  $\rho \neq 0$ . Logo,

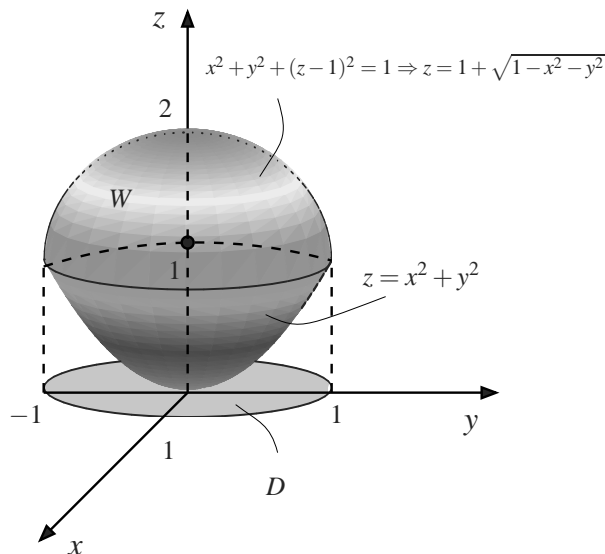
$\phi = \pi/3$ . Assim,  $W_{\rho\phi\theta}$  é dado por:

$$W_{\rho\phi\theta} : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \pi/3 \\ 0 \leq \rho \leq 4 \cos \phi \end{cases}.$$

b. Como  $V(W) = \iiint_W dx dy dz$  então:

$$\begin{aligned} V(W) &= \iiint_{W_{\rho\phi\theta}} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \sin \phi \int_0^{4 \cos \phi} \rho^2 \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \sin \phi \left[ \frac{\rho^3}{3} \right]_0^{4 \cos \phi} d\phi \, d\theta = \\ &= \frac{64}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \sin \phi \cos^3 \phi \, d\phi \, d\theta = \\ &= -\frac{64}{3} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\cos^4 \phi}{4} \right]_0^{\pi/3} d\theta = \\ &= -\frac{16}{3} \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^4 - 1 \right] d\theta = \\ &= \frac{16}{3} \left( 1 - \frac{1}{16} \right) \cdot 2\pi = 10\pi \text{ u.v.} \end{aligned}$$

6. Na figura a seguir, representamos o conjunto  $W$ .



Temos

$$V(W) = \iiint_W dx dy dz$$

onde  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D\}$  sendo  $D$  a projeção de  $W$  sobre o plano  $xy$ .

As superfícies se interceptam segundo a curva  $x^2 + y^2 = 1$  e  $z = 1$ . Logo:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Passando para coordenadas cilíndricas, temos:

$$\begin{cases} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= z \end{cases}.$$

Temos que  $W$  é a imagem do conjunto

$$Q = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r^2 \leq z \leq 1 + \sqrt{1 - r^2}\}.$$

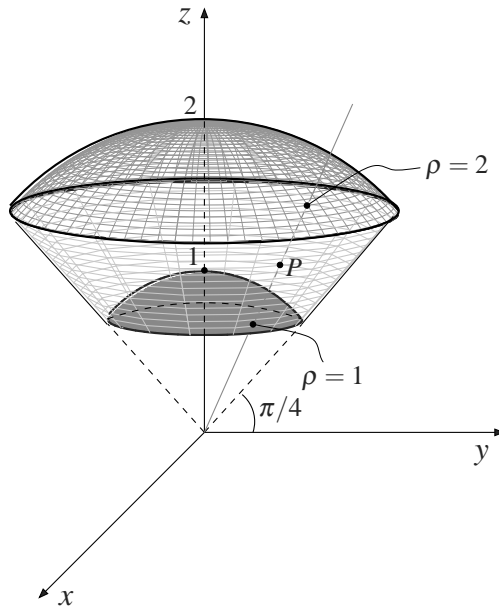
Portanto, usando a fórmula

$$\begin{aligned} \iiint_W f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_Q f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz \end{aligned}$$

com  $f(x, y, z) = 1$ , temos

$$\begin{aligned} V(W) &= \iiint_Q r dr d\theta dz = \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^{1 + \sqrt{1 - r^2}} r dz d\theta dr = \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r(1 + \sqrt{1 - r^2} - r^2) d\theta dz = \\ &= 2\pi \int_0^1 (r + r\sqrt{1 - r^2} - r^3) dr = \\ &= 2\pi \left[ \frac{r^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (1 - r^2)^{3/2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \\ &= 2\pi \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{7\pi}{6} \text{ u.v.} \end{aligned}$$

7. O esboço de  $W$  está representado na figura que se segue.



### Descrição de $W$ em coordenadas esféricas

Consideremos um ponto  $P = (x, y, z)$  qualquer em  $W$ ; observemos que o raio  $OP$  intercepta a superfície do sólido (ou a fronteira do sólido) inicialmente em  $\rho = 1$  e depois em  $\rho = 2$ . Logo,  $1 \leq \rho \leq 2$ . O ângulo  $\phi$  varia de 0 (eixo  $z$  positivo) até  $\pi/4$  (parede do cone); a variação do ângulo  $\theta$  é encontrada na projeção de  $W$  no plano  $xy$ :  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Logo,  $W_{\rho\phi\theta}$  é dado por:

$$W_{\rho\phi\theta} : \begin{cases} 1 \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq \phi \leq \pi/4 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} .$$

Como  $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$  e  $dV = \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$ , então

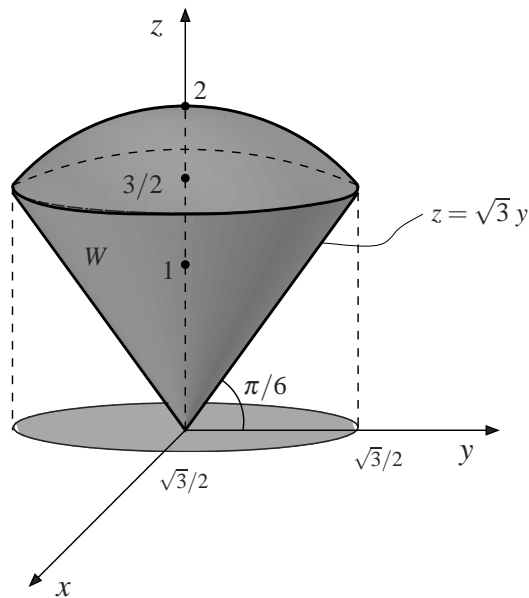
$$\begin{aligned} & \iiint_W \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dV = \\ &= \iiint_{W_{\rho\phi\theta}} \frac{1}{\rho^2} \cdot \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \\ &= \int_0^{\pi/4} \sin \phi \, d\phi \int_1^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = \\ &= 2\pi [\rho]_1^2 [-\cos \phi]_0^{\pi/4} = 2\pi \left( \frac{-\sqrt{2}}{2} + 1 \right) = \pi (2 - \sqrt{2}) . \end{aligned}$$

8. Primeiramente, calculemos a interseção das duas superfícies.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \\ z = \sqrt{3(x^2 + y^2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2z \\ z^2 = 3(x^2 + y^2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{z^2}{3} + z^2 = 2z \Rightarrow 4z^2 - 6z = 0 \Rightarrow z = 0 \text{ ou } z = \frac{3}{2}.$$

Logo, a interseção se dá no plano  $z = 3/2$ , e a sua projeção no plano  $xy$  é a circunferência  $x^2 + y^2 = 3/4$ . Assim, o esboço de  $W$  é:



Como o ângulo da reta  $z = \sqrt{3}y$  (corte do cone  $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ , considerando  $x = 0$ ) é o ângulo  $\pi/6$ , então  $\phi$  varia de 0 (eixo  $z$  positivo) a  $\pi/2 - \pi/6 = \pi/3$ . Transformando a equação  $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$  ou  $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$  para coordenadas esféricas, temos  $\rho^2 = 2\rho \cos \phi$  donde  $\rho = 0$  ou  $\rho = 2 \cos \phi$ . Isto significa que  $\rho$  varia de 0 a  $2 \cos \phi$ . A variação de  $\theta$  é encontrada na projeção de  $W$  no plano  $xy$ . Logo,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Assim,  $W_{\rho\phi\theta}$  é dado por:

$$W_{\rho\phi\theta} : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \pi/3 \\ 0 \leq \rho \leq 2 \cos \phi \end{cases}.$$

Como a distância de  $(x, y, z)$  ao plano  $z = 0$  é  $|z|$ , então

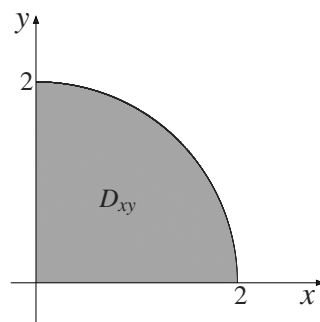
$\delta(x, y, z) = |z|^2 = z^2$ . A massa de  $W$  é:

$$\begin{aligned}
 M &= \iiint_W \delta(x, y, z) dV = \iiint_W z^2 dV = \\
 &= \iiint_{W_{\rho\phi\theta}} (\rho \cos \phi)^2 \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \\
 &= \iiint_{W_{\rho\phi\theta}} \rho^4 \cos^2 \phi \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \cos^2 \phi \sin \phi \int_0^{2\cos \phi} \rho^4 d\rho d\phi d\theta = \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \cos^2 \phi \sin \phi \left[ \frac{\rho^5}{5} \right]_0^{2\cos \phi} d\phi d\theta = \\
 &= \frac{32}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \cos^7 \phi \sin \phi d\phi d\theta = \\
 &= \frac{32}{5} \left[ \frac{-\cos^8 \phi}{8} \right]_0^{\pi/3} \int_0^{2\pi} d\theta = \\
 &= \frac{8\pi}{5} \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^8 \right] = \frac{8\pi}{5} \cdot \frac{2^8 - 1}{2^8} = \frac{51\pi}{32} \text{ u.m.}
 \end{aligned}$$

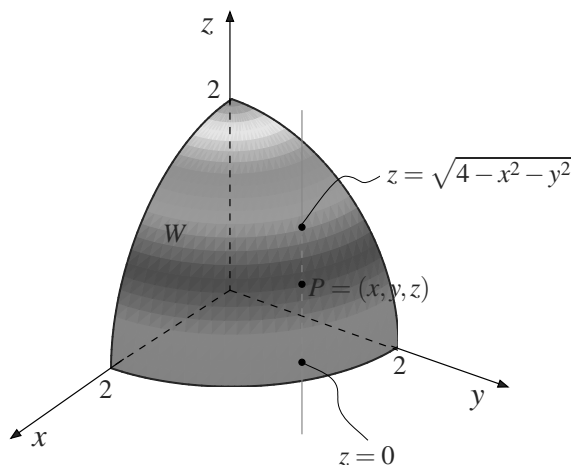
9. a. Temos que  $I = \iiint_W z \sqrt{x^2 + y^2} dV$ , onde

$$\begin{aligned}
 W &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D_{xy} \text{ e} \\
 &0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2} \}
 \end{aligned}$$

sendo  $D_{xy}$  dado por  $D_{xy} : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2} \end{cases}$  cujo esboço está representado na figura a seguir.



De  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ , temos  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , com  $z \geq 0$ . Como  $D_{xy}$  é a projeção de  $W$  sobre o plano  $xy$ , concluímos que o esboço de  $W$  é:



Vamos descrever  $W$  em coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \\ dV = r \, dr \, d\theta \, dz \end{cases}.$$

Seja  $P = (x, y, z) \in W$ . Então, a reta que passa por  $P$ , paralela ao eixo  $z$ , intercepta a fronteira de  $W$  em  $z = 0$  e  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} = \sqrt{4 - r^2}$ . Logo,  $0 \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}$ . As variações de  $r$  e  $\theta$  são encontradas examinando  $D_{xy}$ . Logo,  $0 \leq r \leq 2$  e  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ . Então,  $W_{r\theta z}$  é dado por:

$$W_{r\theta z} : \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq z \leq \sqrt{4 - r^2} \end{cases}.$$

Assim:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{W_{r\theta z}} z \sqrt{r^2} \cdot r \, dr \, d\theta \, dz = \\ &= \int_0^2 r^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{4-r^2}} z \, dz \, d\theta \, dr = \\ &= \int_0^2 r^2 \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^{\sqrt{4-r^2}} d\theta \, dr = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_0^2 r^2 (4 - r^2) \int_0^{\pi/2} d\theta dr = \\
&= \frac{\pi}{4} \int_0^2 (4r^2 - r^4) dr = \\
&= \frac{\pi}{4} \left[ \frac{4r^3}{3} - \frac{r^5}{5} \right]_0^2 = \\
&= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{5 \cdot 2^5 - 3 \cdot 2^5}{15} = \frac{16\pi}{15}.
\end{aligned}$$

- b. Também podemos resolver o exercício usando coordenadas esféricas. O conjunto  $W_{\rho\phi\theta}$  é dado por:

$$W_{\rho\phi\theta} : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq \phi \leq \pi/2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \end{cases}.$$

Como

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \\ dV = \rho^2 \sin \phi \, d\rho d\phi d\theta \end{cases}$$

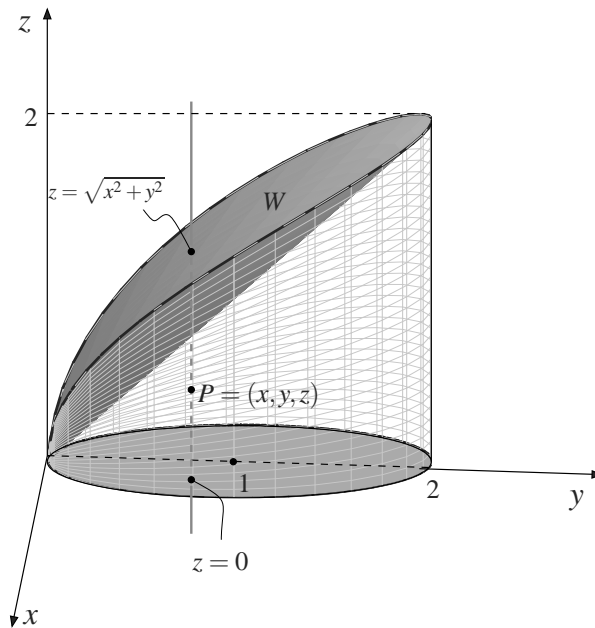
temos

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 + y^2} &= \\
&= \sqrt{\rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta} = \\
&= \sqrt{\rho^2 \sin^2 \phi} = \rho |\sin \phi| = \rho \sin \phi
\end{aligned}$$

pois  $0 \leq \phi \leq \pi/2$ . Então:

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_{W_{\rho\phi\theta}} (\rho \cos \phi) (\rho \sin \phi) (\rho^2 \sin \phi) d\rho d\phi d\theta = \\
&= \int_0^2 \rho^4 \int_0^{\pi/2} \cos \phi \sin^2 \phi \int_0^{\pi/2} d\theta d\phi d\rho = \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot \left[ \frac{\sin^3 \phi}{3} \right]_0^{\pi/2} \int_0^2 \rho^4 d\rho = \frac{\pi}{6} \left[ \frac{\rho^5}{5} \right]_0^2 = \frac{16\pi}{15}.
\end{aligned}$$

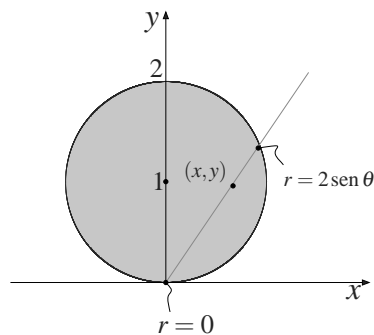
10. O esboço do sólido  $W$ , limitado superiormente pelo cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , inferiormente pelo plano  $z = 0$  e lateralmente pelo cilindro  $x^2 + y^2 = 2y$  ou  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$  está representado na figura que se segue.



Passando para coordenadas cilíndricas, temos:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \\ dV = r \, dr \, d\theta \, dz \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}.$$

Seja  $P = (x, y, z) \in W$ . A reta passando por  $P$  e paralela ao eixo  $z$  intercepta a fronteira de  $W$  em  $z = 0$  e  $z = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ . As variações de  $r$  e  $\theta$  são olhadas na projeção de  $W$  no plano  $xy$ :  $x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$  ou  $x^2 + y^2 \leq 2y$ .



De  $x^2 + y^2 = 2y$ , temos  $r^2 = 2r \sin \theta$  ou  $r = 2 \sin \theta$  se  $r \neq 0$ . Então:

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 2 \sin \theta \end{cases}.$$

Logo,  $W_{r\theta z}$  é dado por:

$$W_{r\theta z} : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 2 \operatorname{sen} \theta \\ 0 \leq z \leq r \end{cases} .$$

O momento de inércia em relação ao eixo  $z$  é:

$$I_z = \iiint_W (x^2 + y^2) \cdot \delta(x, y, z) \, dV ,$$

onde  $\delta(x, y, z) = k$ . Logo:

$$\begin{aligned} I_z &= k \iiint_W (x^2 + y^2) \, dV = k \iiint_{W_{r\theta z}} r^2 \cdot r \, dr \, d\theta \, dz = \\ &= k \int_0^\pi \int_0^{2 \operatorname{sen} \theta} r^3 \int_0^r dz \, dr \, d\theta = k \int_0^\pi \int_0^{2 \operatorname{sen} \theta} r^4 \, dr \, d\theta = \\ &= k \int_0^\pi \left[ \frac{r^5}{5} \right]_0^{2 \operatorname{sen} \theta} d\theta = \frac{32k}{5} \int_0^\pi \operatorname{sen}^5 \theta \, d\theta = \\ &= \frac{32k}{5} \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta)^2 \operatorname{sen} \theta \, d\theta = \\ &= \frac{32k}{5} \int_0^\pi (1 - 2 \cos^2 \theta + \cos^4 \theta) \operatorname{sen} \theta \, d\theta = \\ &= \frac{-32k}{5} \left[ \cos \theta - \frac{2 \cos^3 \theta}{3} + \frac{\cos^5 \theta}{5} \right]_0^\pi = \\ &= \frac{64k}{5} \left( 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{512}{75} k . \end{aligned}$$

## AULA 6

1. Se  $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ , então  $\gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$ ,  
donde

$$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2} .$$

Como  $ds = \|\sigma'(t)\| \, dt$ , então  $ds = \sqrt{2} \, dt$ . Temos:

$$\begin{aligned} \int_C \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \, ds &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + t^2} \cdot \sqrt{2} \, dt = \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+t^2} \, dt = \sqrt{2} \operatorname{arctg} t \Big|_0^{2\pi} = \sqrt{2} \operatorname{arctg} 2\pi . \end{aligned}$$

2. Por definição de integral de linha de campo escalar, temos

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt.$$

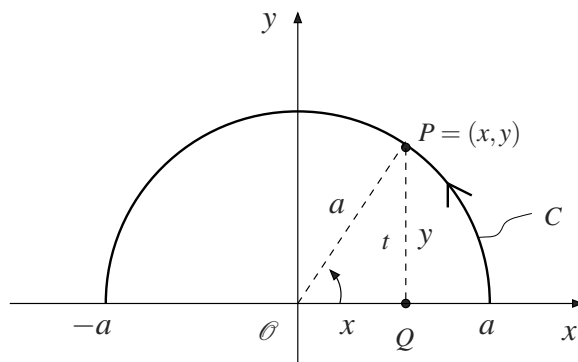
Se  $\gamma(t) = (4 \cos t, 4 \sin t, 3t)$  então  $\gamma'(t) = (-4 \sin t, 4 \cos t, 3)$  donde

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{(-4 \sin t)^2 + (4 \cos t)^2 + 3^2} = \\ &= \sqrt{16 \sin^2 t + 16 \cos^2 t + 9} = \\ &= \sqrt{16(\sin^2 t + \cos^2 t) + 9} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds &= \int_{-2\pi}^{2\pi} \sqrt{(4 \cos t)^2 + (4 \sin t)^2} \cdot 5 dt = \\ &= 5 \int_{-2\pi}^{2\pi} \sqrt{16(\cos^2 t + \sin^2 t)} dt = \\ &= 20 \int_{-2\pi}^{2\pi} ds = 20(2\pi + 2\pi) = 80\pi. \end{aligned}$$

3. a. Observe a figura a seguir.



Seja  $P = (x, y) \in C$ . Seja  $t$  o ângulo (em radianos) formado pelo semieixo positivo  $Ox$  e a semirreta  $OP$ . Então

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}$$

com  $0 \leq t \leq \pi$ .

Assim, uma parametrização para  $C$  é dada por  $\sigma(t) = (a \cos t, a \sin t)$ , com  $0 \leq t \leq \pi$ . Observe que com esta parametrização,  $C$  está sendo percorrida no sentido anti-horário.

b. Temos  $\sigma'(t) = (-a \sin t, a \cos t)$  donde

$$\begin{aligned}\|\sigma'(t)\| &= \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} = \\ &= \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} = \sqrt{a^2(1)} = \\ &= \sqrt{a^2} = |a| = a.\end{aligned}$$

Como  $\int_C f \, ds = \int_0^\pi f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| \, dt$ , então:

$$\begin{aligned}\int_C (x^2 - y^2) \, ds &= \int_0^\pi (a^2 \cos^2 t - a^2 \sin^2 t) a \, dt = \\ &= a^3 \int_0^\pi (\cos^2 t - \sin^2 t) \, dt = a^3 \int_0^\pi \cos 2t \, dt = \\ &= a^3 \left[ \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^\pi = 0.\end{aligned}$$

4. a. O segmento  $AB$  pode ser parametrizado por  $\sigma(t) = A + t(B - A)$ , com  $0 \leq t \leq 1$  donde

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= (1, 2, 3) + t[(4, 5, 6) - (1, 2, 3)] = \\ &= (1, 2, 3) + t(3, 3, 3) = (1 + 3t, 2 + 3t, 3 + 3t)\end{aligned}$$

com,  $0 \leq t \leq 1$ .

b. Temos que  $\sigma'(t) = (3, 3, 3)$  o que implica  $\|\sigma'(t)\| = 3\sqrt{3}$ . Como

$$\int_C f \, ds = \int_0^1 f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| \, dt$$

então

$$\begin{aligned}\int_C f \, ds &= \int_0^1 (1 + 3t + 2 + 3t + 3 + 3t) 3\sqrt{3} \, dt = \\ &= 3\sqrt{3} \int_0^1 (6 + 9t) \, dt = 9\sqrt{3} \int_0^1 (2 + 3t) \, dt = \\ &= 9\sqrt{3} \left[ 2t + \frac{3t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{63\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

5. Tem-se  $C : x^2 + y^2 = ax$  ou  $C : \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ . Logo, uma parametrização de  $C$  é  $\gamma(t) = \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos t, \frac{a}{2}\sin t\right)$ , com  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Assim:

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= \left(-\frac{a}{2}\sin t, \frac{a}{2}\cos t\right) \\ \|\gamma'(t)\| &= \frac{a}{2}\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = \frac{a}{2}.\end{aligned}$$

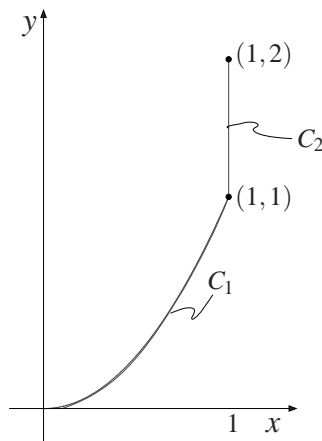
Como  $ds = \|\gamma'(t)\| dt$ , então  $ds = \frac{a}{2} dt$ . Assim:

$$\begin{aligned}\int_C (x-y) ds &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos t - \frac{a}{2}\sin t\right) \frac{a}{2} dt = \\ &= \frac{a^2}{4} \int_0^{2\pi} (1 + \cos t - \sin t) dt = \\ &= \frac{a^2}{4} \left[t + \sin t + \cos t\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi a^2}{2}.\end{aligned}$$

6. Parametrizando  $C : x^2 + y^2 = 2x$ , com  $y \geq 0$  ou  $C : (x-1)^2 + y^2 = 1$ , com  $y \geq 0$ , temos  $x = 1 + \cos t$  e  $y = \sin t$ . Como  $y \geq 0$  então  $\sin t \geq 0$ , donde  $0 \leq t \leq \pi$ . Então, uma parametrização de  $C$  é  $\gamma(t) = (1 + \cos t, \sin t)$ , com  $0 \leq t \leq \pi$ . Logo,  $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$ , donde  $\|\gamma'(t)\| = 1$  e, portanto,  $ds = \|\gamma'(t)\| dt = dt$ . Então:

$$\int_C y^2 ds = \int_0^\pi \sin^2 t dt = \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

7. O esboço de  $C$  está representado na figura que se segue.



Como  $C = C_1 \cup C_2$ , por propriedade de integral de linha, temos

$$\int_C 8x ds = \int_{C_1} 8x ds + \int_{C_2} 8x ds.$$

**Cálculo de  $\int_{C_1} 8x ds$**

Uma parametrização de  $C_1$  é  $\gamma_1(t) = (t, t^2)$ , com  $0 \leq t \leq 1$ . Logo, temos que  $\gamma'_1(t) = (1, 2t)$ , donde  $ds = \|\gamma'_1(t)\| dt = \sqrt{1 + 4t^2} dt$ . Então,

$$\int_{C_1} 8x ds = \int_0^1 8t \sqrt{1 + 4t^2} dt.$$

Fazendo  $u = 1 + 4t^2$ , temos  $du = 8t dt$ . Para  $t = 0$ , temos  $u = 1$  e para  $t = 1$ , temos  $u = 5$ . Então

$$\int_{C_1} 8x ds = \int_1^5 u^{1/2} du = \frac{2}{3} \left[ u^{3/2} \right]_1^5 = \frac{2}{3} (5\sqrt{5} - 1).$$

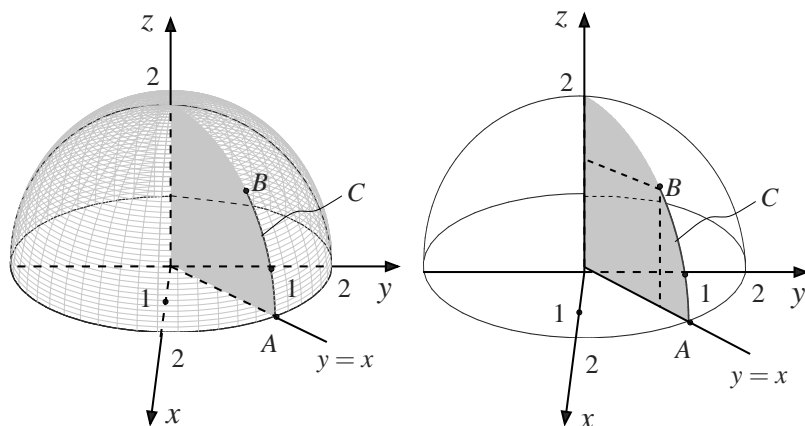
**Cálculo de  $\int_{C_2} 8x ds$**

Uma parametrização de  $C_2$  é  $\gamma_2(t) = (1, t)$ , com  $1 \leq t \leq 2$ . Logo,  $\gamma'_2(t) = (0, 1)$ , de onde  $ds = \|\gamma'_2(t)\| dt = dt$ . Então,

$$\int_{C_2} 8x ds = \int_1^2 8 dt = \left[ 8t \right]_1^2 = 8.$$

Assim, 
$$\int_C 8x ds = \frac{10\sqrt{5} - 2}{3} + 8 = \frac{10\sqrt{5} + 22}{3}.$$

8. a. A figura que se segue mostra um esboço da curva  $C$ .



- b. Seja  $(x, y, z) \in C$ . Então,  $x = y$  e  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ,  $z \geq 0$ . Logo,  $2y^2 + z^2 = 4$  ou  $\frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{4} = 1$ ,  $z \geq 0$  (semi-elipse) é a equação da projeção de  $C$  sobre o plano  $yz$ .

Temos

$$\begin{cases} y = \sqrt{2} \cos t \\ z = 2 \sin t \\ x = y = \sqrt{2} \cos t \end{cases}.$$

Se  $A = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ , então  $t = 0$ . Se  $B = (1, 1, \sqrt{2})$ , então  $t = \pi/4$ . Logo, uma parametrização de  $C$  é dada por  $\sigma(t) = (\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \cos t, 2 \sin t)$ , com  $0 \leq t \leq \pi/4$ .

$$\begin{aligned} \text{c. } \sigma'(t) &= (-\sqrt{2} \sin t, -\sqrt{2} \sin t, 2 \cos t) \Rightarrow \|\sigma'(t)\| \\ &= \sqrt{2 \sin^2 t + 2 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} \\ &= \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Logo,  $ds = \|\sigma'(t)\| dt = 2 dt$ . Então:

$$\begin{aligned} \int_C x^2 ds &= \int_0^{\pi/4} (\sqrt{2} \cos t)^2 \cdot 2 dt = \\ &= 4 \int_0^{\pi/4} \cos^2 t dt = 4 \cdot \frac{1}{2} \left[ t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\pi/4} = \\ &= 2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi+2}{2}. \end{aligned}$$

9. Uma parametrização de  $C$  é dada por  $\gamma(t) = (t, t^2, t)$ , com  $0 \leq t \leq 1$ . Então:

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= (1, 2t, 1) \\ \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{1 + 4t^2 + 1} = \sqrt{2 + 4t^2} \\ ds &= \|\gamma'(t)\| dt = \sqrt{2 + 4t^2} dt. \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \int_C x ds &= \int_0^1 t (2 + 4t^2)^{1/2} dt = \frac{1}{8} \int_0^1 (2 + 4t^2)^{1/2} d(2 + 4t^2) = \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left[ (2 + 4t^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{12} (6^{3/2} - 2^{3/2}) = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{6}. \end{aligned}$$



10. De

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 8 - 2(x + y) \\ x + y = 2 \end{cases}, \quad z \geq 0$$

temos  $x^2 + (2 - x)^2 + z^2 = 8 - 4$ ,  $z \geq 0$  ou  $2x^2 - 4x + z^2 = 0$ ,  
 $z \geq 0$  ou  $2(x - 1)^2 + z^2 = 2$ ,  $z \geq 0$  ou  $(x - 1)^2 + \frac{z^2}{2} = 1$ ,  
 $z \geq 0$  que é a semi-elipse no plano  $xz$  e representa a projeção  
de  $C$  nesse plano. Portanto,

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = 2 - x = 1 - \cos t \\ z = \sqrt{2} \sin t \end{cases}.$$

Como  $z \geq 0$  então  $0 \leq t \leq \pi$ . Logo, uma parametrização  
para  $C$  é

$$\gamma(t) = (1 + \cos t, 1 - \cos t, \sqrt{2} \sin t), \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Temos que  $\gamma'(t) = (-\sin t, \sin t, \sqrt{2} \cos t)$ . Logo, temos  
que  $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \sin^2 t + 2 \cos^2 t} = \sqrt{2}$  donde  
 $ds = \|\gamma'(t)\| dt = \sqrt{2} dt$ . Portanto:

$$\begin{aligned} \int_C (x^2 + y^2) z ds &= \\ &= \int_0^\pi \left[ (1 + \cos t)^2 + (1 - \cos t)^2 \right] (\sqrt{2} \sin t) \sqrt{2} dt = \\ &= 2 \int_0^\pi (2 + 2 \cos^2 t) \sin t dt = 4 \int_0^\pi (1 + \cos^2 t) \sin t dt. \end{aligned}$$

Como  $d(\cos t) = -\sin t dt$ , então:

$$\int_C (x^2 + y^2) z ds = -4 \left[ \cos t + \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^\pi = -8 \left( -1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{32}{3}.$$

## AULA 7

1. Seja  $(x, y) \in C$ . Então  $x^2 + y^2/4 = 1$ , com  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ .  
Logo,

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$$

com  $0 \leq t \leq \pi/2$ .

Então  $\sigma(t) = (\cos t, 2 \operatorname{sen} t)$ , com  $0 \leq t \leq \pi/2$  é uma parametrização de  $C$ . Temos  $\sigma'(t) = (-\operatorname{sen} t, 2 \cos t)$ , donde temos que  $\|\sigma'(t)\| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + 4 \cos^2 t} = \sqrt{1 + 3 \cos^2 t}$ .

Logo,  $ds = \|\sigma'(t)\| dt = \sqrt{1 + 3 \cos^2 t} dt$ . Como  $M = \int_C \delta(x, y) ds = \int_C xy ds$ , então

$$M = \int_0^{\pi/2} 2 \cos t \operatorname{sen} t \sqrt{1 + 3 \cos^2 t} dt.$$

Temos  $d(1 + 3 \cos^2 t) = -6 \cos t \operatorname{sen} t dt$ , donde

$$2 \cos t \operatorname{sen} t dt = -\frac{1}{3} d(1 + 3 \cos^2 t).$$

Logo,  $M = -\frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} (1 + 3 \cos^2 t)^{1/2} d(1 + 3 \cos^2 t) =$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} (1 + 3 \cos^2 t)^{3/2} \Big|_0^{\pi/2} = \\ &= -\frac{2}{9} [1 - (1 + 3)^{3/2}] = -\frac{2}{9} (1 - 8) = \frac{14}{9} \text{ u.m.} \end{aligned}$$

2. De  $\gamma(t) = \left(t, \frac{2\sqrt{2}}{5} t^{5/2}, \frac{t^4}{4}\right)$  temos  $\gamma'(t) = (1, \sqrt{2} t^{3/2}, t^3)$

donde obtemos  $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + 2t^3 + t^6} = \sqrt{(1 + t^3)^2} = 1 + t^3$ . Logo, obtemos  $ds = \|\gamma'(t)\| dt = (1 + t^3) dt$ . A primeira coordenada do centro de massa do fio homogêneo é dada por

$$\bar{x} = \frac{\int_C x ds}{L}$$

onde  $L$  é o comprimento de  $C$ , isto é,

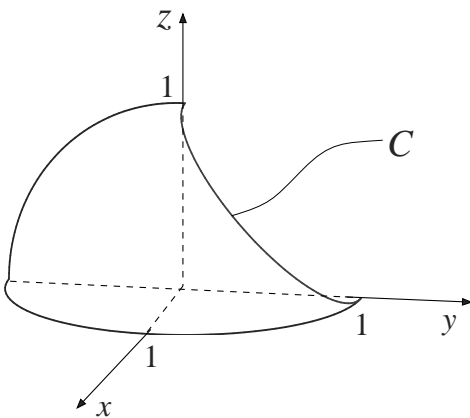
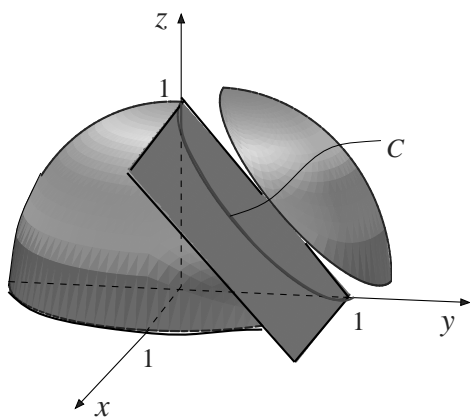
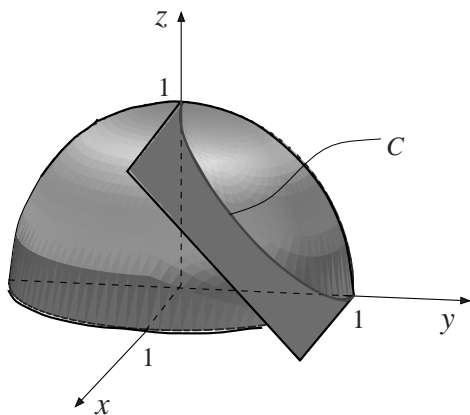
$$L = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^2 (1 + t^3) dt = \left[t + \frac{t^4}{4}\right]_0^2 = 6.$$

Por outro lado,  $\int_C x ds = \int_0^2 t (1 + t^3) dt =$

$$= \int_0^2 (t + t^4) dt = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^5}{5}\right]_0^2 = 2 + \frac{32}{5} = \frac{42}{5}.$$

Logo:  $\bar{x} = \frac{42}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{5}.$

3. a. O esboço de  $C$  está representado abaixo.



- b. Seja  $(x, y, z) \in C$ . Então,  $(x, y, z)$  satisfaz as equações  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $y + z = 1$  e  $x \geq 0$ . De  $y + z = 1$ , temos  $z = 1 - y$ . Substituindo em  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , temos  $x^2 + y^2 + (1 - y)^2 = 1$  ou  $x^2 + 2y^2 - 2y = 0$ .

Completando quadrado, temos  $x^2 + 2(y - 1/2)^2 = 1/2$  ou  $\frac{x^2}{1/2} + \frac{(y - 1/2)^2}{1/4} = 1$  (elipse) que representa a projeção de  $C$  sobre o plano  $xy$ . Então  $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t$ ,  $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin t$ . Como  $x \geq 0$ , então  $\frac{\sqrt{2}}{2} \cos t \geq 0$ , donde  $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ . Como  $z = 1 - y$ , então  $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin t$ . Assim, uma parametrização diferenciável para  $C$  é dada por

$$\gamma(t) = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin t, \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin t \right)$$

com  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ .

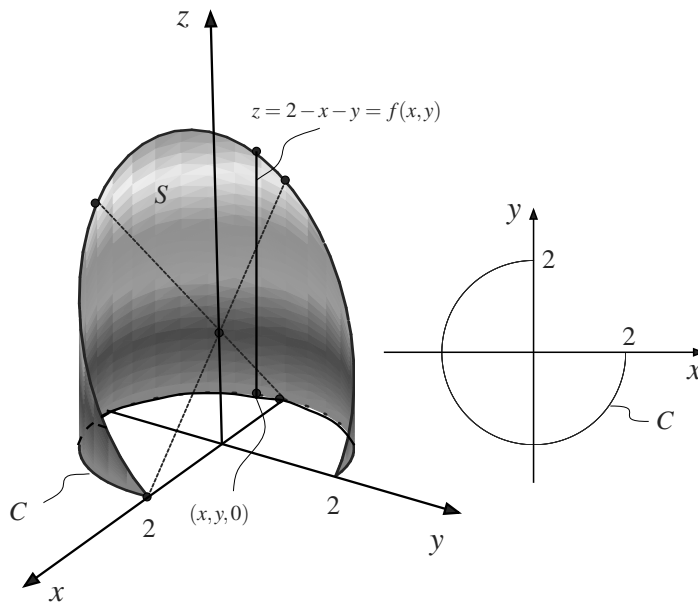
c. Temos  $\gamma'(t) = \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t, \frac{1}{2} \cos t, -\frac{1}{2} \cos t \right)$  donde

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{\frac{1}{2} \sin^2 t + \frac{1}{4} \cos^2 t + \frac{1}{4} \cos^2 t} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \sin^2 t + \frac{1}{2} \cos^2 t} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Como  $ds = \|\gamma'(t)\| dt$ , então  $ds = \frac{\sqrt{2}}{2} dt$ . Temos

$$\begin{aligned} M &= \int_C \delta(x, y, z) ds = \int_C yz ds = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin t \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin t \right) \frac{\sqrt{2}}{2} dt = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \sin^2 t \right) dt = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 t) dt = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{1}{2} \left[ t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{16} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{16} \text{ u.m.} \end{aligned}$$

4. Observe a figura a seguir.



Seja  $S$  a superfície lateral de base  $C$  contida no plano  $xy$  e altura  $f(x, y) = 2 - x - y$  em cada  $(x, y) \in C$ . Então,

$$A(S) = \int_C f(x, y) \, ds = \int_C (2 - x - y) \, ds$$

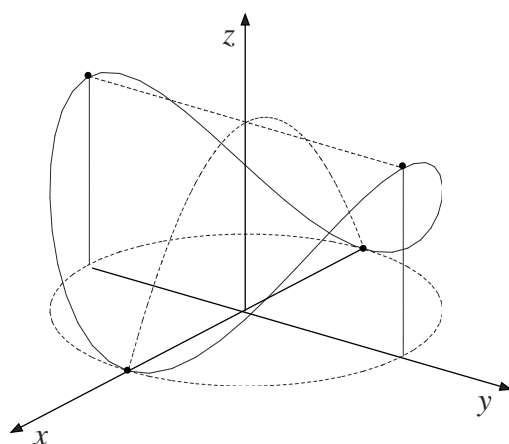
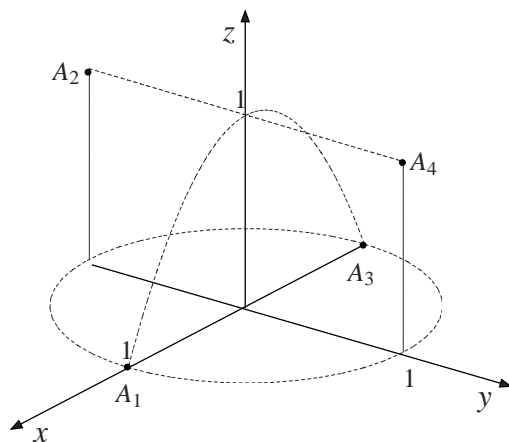
onde  $C$  é parametrizada por  $\sigma(t) = (2\cos t, 2\sin t)$ , com  $\pi/2 \leq t \leq 2\pi$ .

Logo,  $\sigma'(t) = (-2\sin t, 2\cos t)$  donde  $ds = \|\sigma'(t)\| \, dt = 2 \, dt$ . Então:

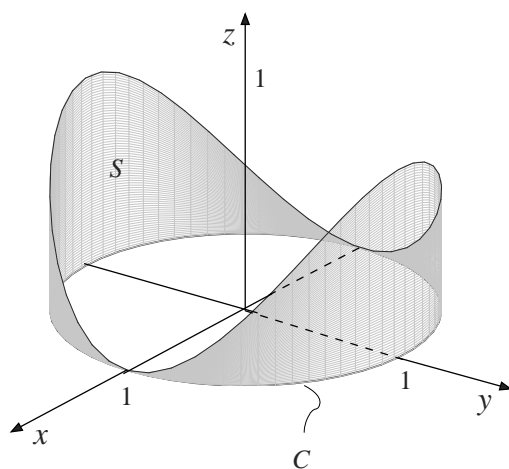
$$\begin{aligned} A(S) &= \int_{\pi/2}^{2\pi} (2 - 2\cos t - 2\sin t) 2 \, dt = \\ &= 4 \left[ t - \sin t + \cos t \right]_{\pi/2}^{2\pi} = \\ &= 4 \left[ (2\pi - 0 + 1) - \left( \frac{\pi}{2} - 1 + 0 \right) \right] = \\ &= 4 \left( \frac{3\pi}{2} + 2 \right) = 6\pi + 8 \, u.a. \end{aligned}$$

Logo, o preço da peça é igual a  $(6\pi + 8)M$  reais.

5. Esboçando o cilindro circular  $x^2 + y^2 = 1$  e o cilindro parabólico  $z = 1 - x^2$ , vemos que  $A_1, A_2, A_3$  e  $A_4$  são pontos de interseção.



Ligando estes pontos por uma curva fechada temos a interseção das superfícies. O esboço de  $S$  é:

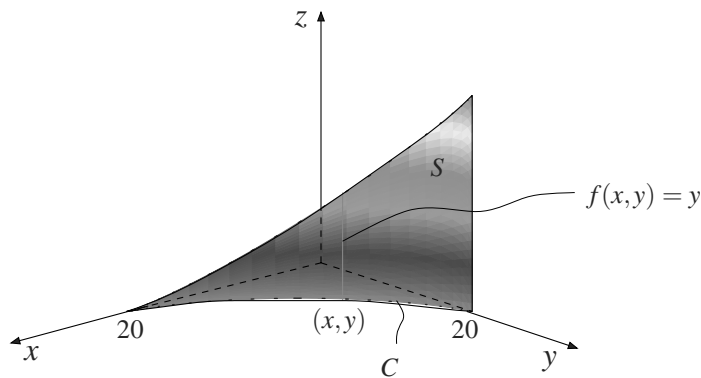


Da teoria, temos que  $A(S) = \int_C f(x,y) ds = \int_C (1 - x^2) ds$ .  
 Uma parametrização de  $C$  é dada por  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  
 com  $0 \leq t \leq 2\pi$ , donde  $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$ .

Logo,  $ds = \|\gamma'(t)\| dt = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = dt$ .  
 Portanto:

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \\ &= \frac{1}{2} \left[ t - \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{2\pi} = \pi \text{ u.a.} \end{aligned}$$

6. O esboço da cerca  $S$  está representado na figura que se segue.



Apresentemos uma parametrização para  $C$ . Fazendo  $u = x^{1/3}$ ,  $v = y^{1/3}$  e  $a = 20^{1/3}$  e substituindo na equação de  $C$ , temos  $u^2 + v^2 = a^2$ , com  $u \geq 0$  e  $v \geq 0$ , donde,  $u = a \cos t$  e  $v = a \sin t$ , com  $0 \leq t \leq \pi/2$ . Como  $x = u^3$ ,  $y = v^3$ , então

$$\begin{aligned} x &= a^3 \cos^3 t = 20 \cos^3 t \\ y &= a^3 \sin^3 t = 20 \sin^3 t \end{aligned}$$

Logo,  $\gamma(t) = (20 \cos^3 t, 20 \sin^3 t)$ , com  $0 \leq t \leq \pi/2$  é uma parametrização para  $C$ . Temos que  $\gamma'(t) = (-60 \cos^2 t \sin t, 60 \sin^2 t \cos t)$ , então:

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\| &= 60 \sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t} \\ &= 60 \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} \\ &= 60 |\cos t \sin t| = 60 \cos t \sin t. \end{aligned}$$

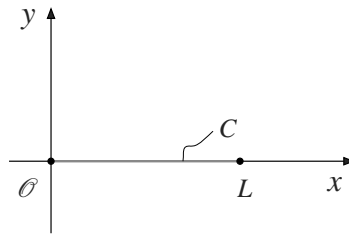
pois  $0 \leq t \leq \pi/2$ . Logo,  $ds = \|\gamma'(t)\| dt = 60 \cos t \sin t dt$ .

A área de um lado da superfície é dada por

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_C f(x,y) ds = \int_C y ds = \\ &= \int_0^{\pi/2} (20 \sin^3 t) 60 \cos t \sin t dt = \\ &= 1200 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos t dt = 1200 \cdot \frac{\sin^5 t}{5} \Big|_0^{\pi/2} = 240 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

Portanto, o pintor receberá  $2 \times 240 R = 480 R$  reais.

7. Consideremos o fio  $C$  sobre o eixo  $x$  com a extremidade da esquerda na origem e da direita em  $x = L$ . Então, o eixo perpendicular ao fio passando pela origem é o eixo  $y$ .



Uma parametrização do fio  $C$  é dada por  $\sigma(t) = (t, 0)$ , com  $0 \leq t \leq L$ . Como  $\sigma'(t) = (1, 0)$  então  $\|\sigma'(t)\| = 1$ . Logo,  $ds = \|\sigma'(t)\| dt = dt$ .

O momento de inércia em relação ao eixo  $y$  é:

$$I_y = \int_C x^2 \delta(x,y) ds = k \int_C x^2 ds$$

pois o fio é homogêneo. Logo,

$$I_y = k \int_0^L t^2 dt = k \frac{t^3}{3} \Big|_0^L = \frac{kL^3}{3}.$$

Como  $\delta(x,y) = k$ ,  $k \in \mathbb{R}$  então  $M = kL$ . Logo,

$$I_y = \frac{ML^2}{3}.$$



8. Uma parametrização de  $C$  é  $\gamma(t) = (t, t)$ , com  $1 \leq t \leq 2$ , donde  $\gamma'(t) = (1, 1)$  e  $ds = \|\gamma'(t)\| dt = \sqrt{2} dt$ . Como a distância de  $(x, y) \in C$  ao eixo  $y$  é  $|x| = x$ , então a densidade é  $\delta(x, y) = kx$ , com  $k \in \mathbb{R}$ . Como a distância de  $(x, y) \in C$  ao eixo  $E: y = -1$  é  $r(x, y) = y + 1$ , então o momento de inércia é:

$$\begin{aligned} I_E &= \int_C r^2(x, y) \delta(x, y) ds = k \int_C (y + 1)^2 x ds = \\ &= k \int_1^2 (t + 1)^2 t \sqrt{2} dt = k \sqrt{2} \int_1^2 (t^3 + 2t^2 + t) dt = \\ &= k \sqrt{2} \left[ \frac{t^4}{4} + \frac{2t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right]_1^2 = \\ &= k \sqrt{2} \left[ \left( 4 + \frac{16}{3} + 2 \right) - \left( \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{119\sqrt{2}k}{12}. \end{aligned}$$

9. a. Temos:  $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{-\left(0 - y \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)}{x^2 + y^2} = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{-x \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{(x^2 + y^2)} = \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Logo,  $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$ .

Por outro lado,  $\operatorname{rot} \vec{F} = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$ , onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \\ &= \frac{x^2 + y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - y \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \\ &= -\frac{x^2 + y^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = -\frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Logo,  $\operatorname{rot} \vec{F} = \left(0, 0, \frac{y^2 + x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\right) = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$

b. Temos

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial (ye^z)}{\partial x} + \frac{\partial (xe^z)}{\partial y} + \frac{\partial (xye^z)}{\partial z} = 0 + 0 + xye^z = xye^z.$$

Temos

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ye^z & xe^z & xye^z \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xe^z & xye^z \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ xye^z & ye^z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ ye^z & xe^z \end{vmatrix} \vec{k} = \\ &= (xe^z - xe^z) \vec{i} + (ye^z - ye^z) \vec{j} + (e^z - e^z) \vec{k} = \vec{0}. \end{aligned}$$

10. Se  $\vec{r} = (x, y, z)$ , então

$$r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}.$$

$$\text{Portanto: } \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} =$$

$$= \left( \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right).$$

$$\text{Logo: } \operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = \nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right). \end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) &= \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - x \cdot \frac{3}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \cdot 2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = \\ &= \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} (x^2 + y^2 + z^2 - 3x^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = \frac{-2x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) = \frac{-2y^2 + x^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) = \frac{-2z^2 + x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}.$$

Logo,

$$\operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = 0$$

e, portanto,  $\vec{r}/r^3$  é solenoidal. Por outro lado,

$$\operatorname{rot} \frac{\vec{r}}{r^3} = \nabla \times \frac{\vec{r}}{r^3} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} & \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} & \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \end{vmatrix}$$

Desenvolvendo o “determinante” em relação à primeira linha, temos:

$$\operatorname{rot} \frac{\vec{r}}{r^3} =$$

$$= \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) \right) \vec{i} +$$

$$+ \left( \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) \right) \vec{j} +$$

$$+ \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) \right) \vec{k} =$$

$$= \left( \frac{-2yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{2yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right) \vec{i} +$$

$$+ \left( \frac{-2xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{2xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right) \vec{j} +$$

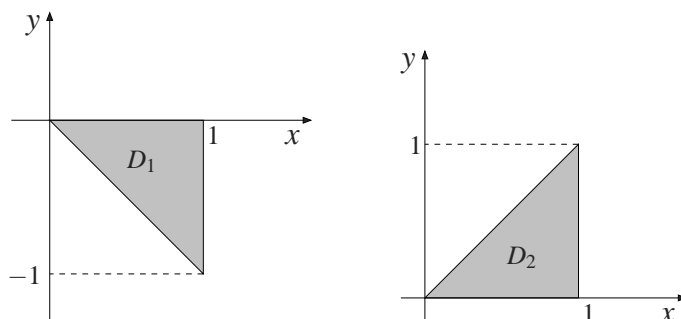
$$+ \left( \frac{-2xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{2xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right) \vec{k} =$$

$$= \vec{0}.$$

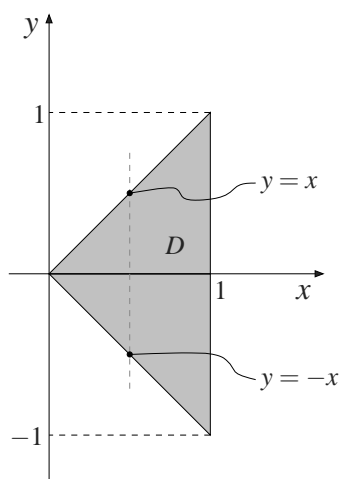
Logo,  $\vec{r}/r^3$  é um campo irrotacional.

## AULA 8

1. a. Temos que  $D = D_1 \cup D_2$  onde  $D_1 : \begin{cases} -1 \leq y \leq 0 \\ -y \leq x \leq 1 \end{cases}$   
e  $D_2 : \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ y \leq x \leq 1 \end{cases}$ .



Logo, o esboço de  $D$  está representado na figura que se segue.



- b. Descrevendo  $D$  como tipo I, temos

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq x\}.$$

Então:

$$I = \int_0^1 \int_{-x}^x f(x,y) dy dx.$$

c. Temos:

$$I = \int_0^1 \int_{-x}^x \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dy dx = \int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx =$$

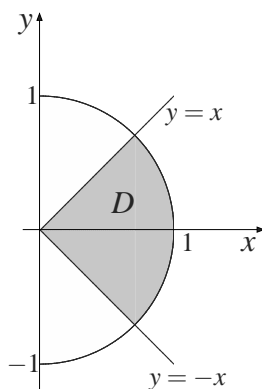
$$= 2 \int_0^1 x(1+x^2)^{-1/2} dx.$$

Como  $d(1+x^2) = 2x dx$ , então:

$$I = \int_0^1 (1+x^2)^{-1/2} d(1+x^2) = \frac{(1+x^2)^{1/2}}{1/2} \Big|_0^1 =$$

$$= 2(\sqrt{2}-1).$$

2. a. O esboço de  $D$  está representado na figura que se segue.



Como  $D$  é homogênea, então o centro de massa  $(\bar{x}, \bar{y})$  é dado por

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x dA}{A(D)}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y dA}{A(D)}$$

onde

$$A(D) = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{4}.$$

Como  $f(x, y) = y$  é uma função ímpar na variável  $y$  e  $D$  tem simetria em relação ao eixo  $x$ , então  $\int \int_D y dA = 0$ , donde  $\bar{y} = 0$ .

Calculemos  $\int \int_D x dA$ , usando coordenadas polares.

Temos:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ dA = r dr d\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad D_{r\theta} : \begin{cases} -\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4 \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}.$$

Temos

$$\begin{aligned} \iint_D x dA &= \iint_{D_{r\theta}} (r \cos \theta) r dr d\theta = \\ &= \iint_{D_{r\theta}} r^2 \cos \theta dr d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos \theta \int_0^1 r^2 dr d\theta = \\ &= \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^1 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos \theta d\theta = \\ &= \frac{1}{3} [\sin \theta]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Logo:

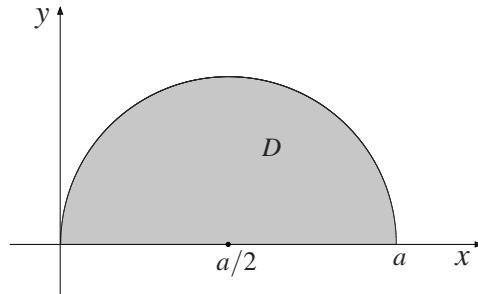
$$\bar{x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi},$$

donde o centro de massa está localizado em  $\left(\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}, 0\right)$ .

- b. O momento de inércia em relação ao eixo  $x$  é dado por:

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D y^2 \delta(x, y) dA = k \iint_D y^2 dA = \\ &= k \iint_{D_{r\theta}} r^3 \sin^2 \theta dr d\theta = \\ &= k \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^2 \theta \int_0^1 r^3 dr d\theta = \\ &= \frac{k}{4} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^2 \theta d\theta = \frac{k}{4} \cdot \frac{1}{2} \left[ \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \\ &= \frac{k}{8} \left[ \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\sin \pi/2}{2} \right) - \left( -\frac{\pi}{4} - \frac{\sin(-\pi/2)}{2} \right) \right] = \\ &= \frac{k}{8} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{k}{8} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right). \end{aligned}$$

3. De  $x^2 + y^2 = ax$  tem-se  $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ . O esboço de  $D$  está representado na figura a seguir.



Passando para coordenadas polares, tem-se:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ dx dy = r dr d\theta \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases} .$$

A circunferência  $x^2 + y^2 = ax$  em coordenadas polares é  $r^2 = ar \cos \theta$ , ou  $r = a \cos \theta$ . Logo,  $D_{r\theta}$  é dado por:

$$D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq r \leq a \cos \theta \end{cases} .$$

Então:

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_{r\theta}} \sqrt{a^2 - r^2} \cdot r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{a \cos \theta} (a^2 - r^2)^{1/2} r dr d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{a \cos \theta} (a^2 - r^2)^{1/2} d(a^2 - r^2) d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{2}{3} \cdot (a^2 - r^2)^{3/2} \Big|_0^{a \cos \theta} d\theta \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \left[ (a^2 - a^2 \cos^2 \theta)^{3/2} - (a^2)^{3/2} \right] d\theta \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \left[ (a^2 \sin^2 \theta)^{3/2} - a^3 \right] d\theta \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} (a^3 \sin^3 \theta - a^3) d\theta \\ &= -\frac{a^3}{3} \left( \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta - \frac{\pi}{2} \right) . \end{aligned}$$

Da trigonometria, tem-se:

$$\operatorname{sen}^3 \theta = \operatorname{sen}^2 \theta \cdot \operatorname{sen} \theta = (1 - \cos^2 \theta) \operatorname{sen} \theta .$$

Então:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 \theta d\theta &= - \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 \theta) d(\cos \theta) = \\ &= - \left[ \cos \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\pi/2} = \cos 0 - \frac{\cos^3 0}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

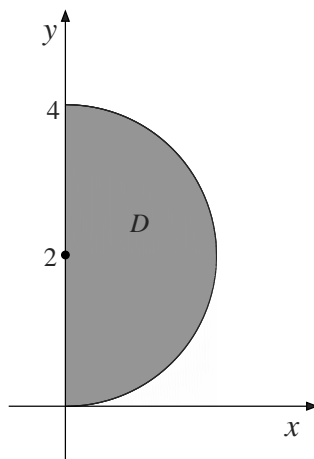
$$\text{Logo } I = \frac{a^3}{3} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) .$$

4. a. Temos que:

$$I = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4y-y^2}} dx dy = \iint_D dx dy$$

onde  $D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq 4, 0 \leq x \leq \sqrt{4y-y^2} \right\}$ .

De  $x = \sqrt{4y-y^2}$ , temos  $x^2 + y^2 = 4y$  com  $x \geq 0$  ou  $x^2 + (y-2)^2 = 4$ , com  $x \geq 0$ . Como  $0 \leq y \leq 4$ , então o esboço de  $D$  está representado a seguir.



Passando para coordenadas polares, temos

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \\ dx dy = r dr d\theta \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases} .$$



A equação  $x^2 + y^2 = 4y$  em coordenadas polares é:  
 $r^2 = 4r \operatorname{sen} \theta$  ou  $r = 4 \operatorname{sen} \theta$ . Portanto, a região  $D$  em  
 coordenadas polares é:

$$D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq r \leq 4 \operatorname{sen} \theta \end{cases} .$$

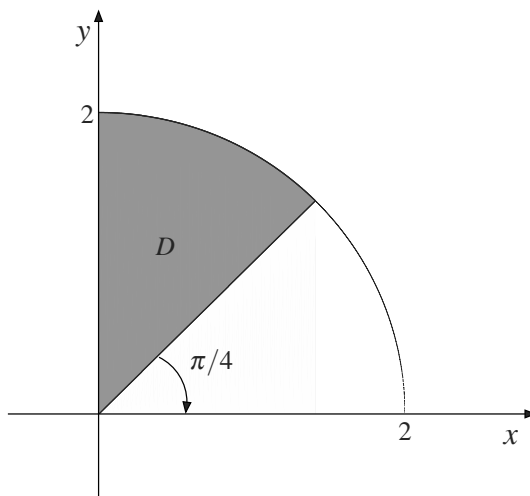
Logo:

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_{r\theta}} r \, dr \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \int_0^{4 \operatorname{sen} \theta} r \, dr \, d\theta = \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^{4 \operatorname{sen} \theta} d\theta = 8 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta = \\ &= 8 \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = 8 \cdot \frac{1}{2} \left[ \theta - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} = 2\pi . \end{aligned}$$

b. Temos que:

$$I = \int_0^2 \int_y^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2) \, dx \, dy = \iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy$$

onde  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 2, y \leq x \leq \sqrt{4-y^2}\}$ . De  
 $x = \sqrt{4-y^2}$ , temos  $x^2 + y^2 = 4$ , com  $x \geq 0$ . Da  
 definição de  $D$ , vemos que  $D$  é limitado superior-  
 mente por um arco da circunferência  $x^2 + y^2 = 4$  e  
 inferiormente pela reta  $y = x$  e a projeção de  $D$  sobre  
 o eixo  $y$  é o intervalo  $[0, 2]$ . Logo, o esboço de  $D$  está  
 representado na figura que se segue.



Passando para coordenadas polares, temos:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ dxdy = r dr d\theta \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}.$$

A descrição de  $D$  em coordenadas polares é:

$$D_{r\theta} : \begin{cases} \pi/4 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq r \leq 2 \end{cases}.$$

Então:

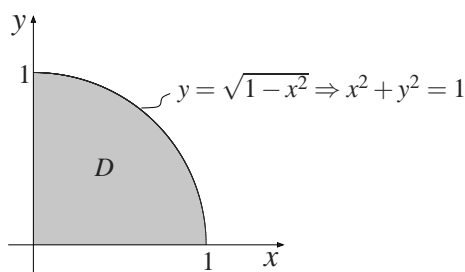
$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_{r\theta}} r^2 \cdot r dr d\theta = \iint_{D_{r\theta}} r^3 dr d\theta = \\ &= \int_0^2 r^3 \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta dr = \frac{\pi}{4} \int_0^2 r^3 dr = \\ &= \frac{\pi}{4} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^2 = \pi. \end{aligned}$$

5. Tem-se que :

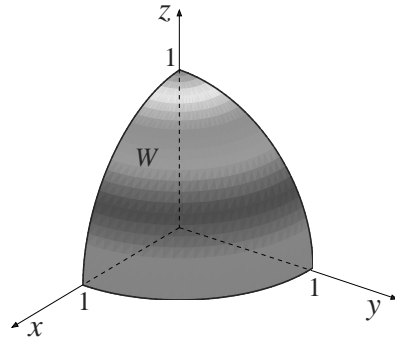
$$I = \iiint_W \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$$

com  $W = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D\}$   
onde  $D$  é a projeção de  $W$  sobre o plano  $xy$  e é dada por:

$$D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2} \end{cases}.$$



De  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  tem-se  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Logo,  $W$  é a porção da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , no primeiro octante, que se projeta no plano  $xy$ , segundo a região  $D$ . O esboço de  $W$  está na figura que se segue.



Passando para coordenadas esféricas, tem-se:

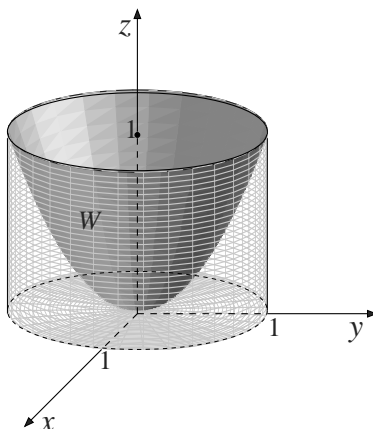
$$\left\{ \begin{array}{l} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \\ dx dy dz = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \end{array} \right. .$$

O conjunto  $W_{\rho\phi\theta}$  é dado por

$$W_{\rho\phi\theta} : \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq \phi \leq \pi/2 \end{array} \right. .$$

$$\begin{aligned} \text{Então: } I &= \iiint_{W_{\rho\phi\theta}} \rho \cdot \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \\ &= \iiint_{W_{\rho\phi\theta}} \rho^3 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin \phi \int_0^1 \rho^3 \int_0^{\pi/2} d\theta d\rho d\phi = \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \sin \phi \int_0^1 \rho^3 d\rho d\phi = \\ &= \frac{\pi}{2} \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 \int_0^{\pi/2} \sin \phi d\phi = \\ &= \frac{\pi}{8} \left[ -\cos \phi \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8} . \end{aligned}$$

6. O esboço do sólido  $W$  está na figura a seguir.



Da figura vemos que  $W$  pode ser descrito por:

$$W = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D \text{ e } 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$$

onde  $D$  é o disco  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Como  $W$  é homogêneo, então o momento de inércia em relação ao eixo  $z$  é:

$$I_z = \iiint_W (x^2 + y^2) \delta(x, y, z) dV = k \iiint_W (x^2 + y^2) dV.$$

Passando para coordenadas cilíndricas, temos

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \\ dV = r dr d\theta dz \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}.$$

Como  $0 \leq z \leq x^2 + y^2$ , então  $0 \leq z \leq r^2$  donde  $W_{r\theta z}$  é dado por:

$$W_{r\theta z} : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq r^2 \end{cases}.$$

$$\text{Então: } I_z = k \iiint_{W_{r\theta z}} r^2 \cdot r dr d\theta dz = k \iiint_{W_{r\theta z}} r^3 dr d\theta dz =$$

$$= k \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{r^2} r^3 dz dr d\theta = k \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \cdot r^2 dr d\theta =$$

$$= k \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^5 dr d\theta = k \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^6}{6} \right]_0^1 d\theta = \frac{k}{6} \cdot 2\pi = \frac{k\pi}{3}.$$

7. Como  $W$  é homogêneo, então a densidade é constante, isto é,  $\delta(x, y, z) = k$ . Da definição de momento de inércia em relação ao eixo  $z$ , temos

$$I_z = \iiint_W (x^2 + y^2) \delta(x, y, z) dV = k \iiint_W (x^2 + y^2) dV$$

onde  $W = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ .

Passando para coordenadas esféricas, temos:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \\ dV = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \end{cases}.$$

O conjunto  $W$  é descrito em coordenadas esféricas por:

$$W_{\rho\phi\theta} : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0 \leq \rho \leq 2 \end{cases}.$$

$$\text{Então: } I_z = k \iiint_{W_{\rho\phi\theta}} (\rho^2 \sin^2 \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta =$$

$$= k \iiint_{W_{\rho\phi\theta}} \rho^4 \sin^3 \phi d\rho d\phi d\theta =$$

$$= k \int_0^\pi \sin^3 \phi \int_0^2 \rho^4 \int_0^{2\pi} d\theta d\rho d\phi =$$

$$= 2k\pi \int_0^\pi \sin^3 \phi \left[ \frac{\rho^5}{5} \right]_0^2 d\phi =$$

$$= \frac{64k\pi}{5} \int_0^\pi \sin^2 \phi \sin \phi d\phi =$$

$$= \frac{64k\pi}{5} \int_0^\pi (1 - \cos^2 \phi) \sin \phi d\phi.$$

Fazendo  $u = \cos \phi$  temos  $du = -\sin \phi d\phi$ . Para  $\theta = 0$ , temos  $u = 1$  e para  $\theta = \pi$ , temos  $u = -1$ . Então:

$$I_z = \frac{64k\pi}{5} \int_{-1}^1 (1 - u^2) (-du) =$$

$$= \frac{64k\pi}{5} \int_{-1}^1 (1 - u^2) du = \frac{64k\pi}{5} \left[ u - \frac{u^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{256k\pi}{15}.$$

8. a. Temos  $\gamma'(t) = (-4 \operatorname{sen} t, 4 \cos t, 3)$  donde

$$\begin{aligned}\|\gamma'(t)\| &= \sqrt{16 \operatorname{sen}^2 t + 16 \cos^2 t + 9} = \\ &= \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.\end{aligned}$$

Como  $ds = \|\gamma'(t)\| dt$ , então  $ds = 5 dt$ . A massa  $M$  é dada por

$$\begin{aligned}M &= \int_C \delta(x, y, z) ds = \int_C (x^2 + y^2) ds = \\ &= \int_0^{4\pi} (16 \cos^2 t + 16 \operatorname{sen}^2 t) 5 dt = 80 \int_0^{4\pi} dt = 320\pi.\end{aligned}$$

- b. O momento de inércia em relação ao eixo  $z$  é:

$$\begin{aligned}I_z &= \int_C (x^2 + y^2) \delta(x, y, z) ds = \int_C (x^2 + y^2)^2 ds = \\ &= \int_0^{4\pi} (16 \cos^2 t + 16 \operatorname{sen}^2 t) 5 dt = 5120\pi = 16M.\end{aligned}$$

9. De  $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$  temos  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 2$  (que é uma esfera de centro  $(1, 1, 0)$  e raio  $\sqrt{2}$ ). Substituindo  $y = 2 - x$  em  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 2$ , temos  $(x - 1)^2 + (1 - x)^2 + z^2 = 2$  ou  $2(x - 1)^2 + z^2 = 2$  donde  $(x - 1)^2 + z^2/2 = 1$  (elipse) representa a projeção de  $C$  no plano  $xz$ . Então, se  $(x, y, z) \in C$ ,  $x$  e  $z$  satisfazem à equação  $(x - 1)^2 + z^2/2 = 1$ . Logo,  $x = 1 + \cos t$  e  $z = \sqrt{2} \operatorname{sen} t$ , com  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Como  $y = 2 - x$ , então  $y = 1 - \cos t$ . Assim, uma parametrização de  $C$  é

$$\gamma(t) = (1 + \cos t, 1 - \cos t, \sqrt{2} \operatorname{sen} t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Temos  $\gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t, \sqrt{2} \cos t)$ , donde

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen}^2 t + 2 \cos^2 t} = \sqrt{2}.$$

Logo:  $ds = \|\gamma'(t)\| dt = \sqrt{2} dt$ . Então:

$$\begin{aligned}\int_C xy ds &= \int_0^{2\pi} (1 + \cos t)(1 - \cos t) \sqrt{2} dt = \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 t) dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t dt = \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \left[ t - \frac{\operatorname{sen} 2t}{2} \right]_0^{2\pi} = \sqrt{2} \pi.\end{aligned}$$

10. De  $\gamma(t) = \left(t \cos t, t \sin t, \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\right)$ , temos

$$\gamma'(t) = \left(\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, \sqrt{2} t^{1/2}\right)$$

donde

$$\begin{aligned}\|\gamma'(t)\| &= \sqrt{1 + t^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) + 2t} = \sqrt{1 + t^2 + 2t} = \\ &= \sqrt{(1+t)^2} = |1+t| = 1+t\end{aligned}$$

pois  $1+t > 0$ . Logo,  $ds = \|\gamma'(t)\|dt = (1+t)dt$ . Temos:

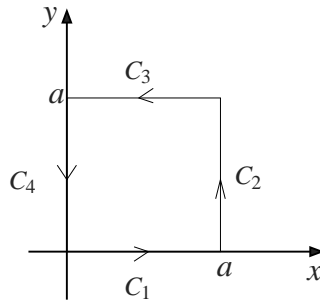
$$\begin{aligned}I_z &= \int_C (x^2 + y^2) \delta(x, y, z) ds = k \int_C (x^2 + y^2) ds = \\ &= k \int_0^1 (t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t) (1+t) dt = \\ &= k \int_0^1 t^2 (1+t) dt = k \int_0^1 (t^2 + t^3) dt = \\ &= k \left[ \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} \right]_0^1 = k \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{7k}{12}.\end{aligned}$$

## AULA 9

1. De  $4x^2 + 25y^2 = 100$ , temos  $x^2/25 + y^2/4 = 1$ . Então,  $\gamma(t) = (5 \cos t, 2 \sin t)$ , com  $0 \leq t \leq 2\pi$  é uma parametrização da elipse no sentido anti-horário. O trabalho é dado por

$$\begin{aligned}W &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C -3y dx + 3x dy = \\ &= \int_0^{2\pi} [(-6 \sin t)(-5 \sin t) + (15 \cos t)(2 \cos t)] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (30 \sin^2 t + 30 \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} 30 dt = 60\pi.\end{aligned}$$

2. Temos que  $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ . Para calcular a integral, dividimos  $C$  em quatro caminhos  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$ , conforme a figura a seguir.



O caminho  $C_1$  tem equação vetorial (ou parametrização)  $\sigma(t) = (t, 0)$ , com  $t \in [0, a]$ . Portanto:

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^a \vec{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt = \\ &= \int_0^a (t^2, 0) \cdot (1, 0) dt = \int_0^a t^2 dt = \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^a = \frac{a^3}{3}. \end{aligned}$$

O caminho  $C_2$  tem equação vetorial  $\sigma(t) = (a, t)$ , com  $t \in [0, a]$ . Portanto:

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^a \vec{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt = \\ &= \int_0^a (a^2 - t^2, 2at) \cdot (0, 1) dt = \int_0^a 2at dt = \left[ at^2 \right]_0^a = a^3. \end{aligned}$$

O caminho  $C_3$  tem equação vetorial  $\sigma(t) = (a - t, a)$ , com  $t \in [0, a]$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^a \vec{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt = \\ &= \int_0^a ((a - t)^2 - a^2, 2a(a - t)) \cdot (-1, 0) dt = \\ &= \int_0^a (2at - t^2) dt = \left[ at^2 - \frac{t^3}{3} \right]_0^a = \frac{2a^3}{3}. \end{aligned}$$

O caminho  $C_4$  tem equação vetorial  $\sigma(t) = (0, a - t)$ , com  $t \in [0, a]$ . Portanto:

$$\begin{aligned} \int_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^a \vec{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt = \\ &= \int_0^a (-(a - t)^2, 0) \cdot (0, -1) dt = \int_0^a 0 dt = 0. \end{aligned}$$

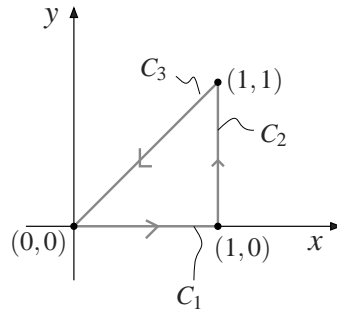


Logo:

$$\begin{aligned}
 W &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \\
 &= \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \\
 &= \frac{a^3}{3} + a^3 - \frac{2a^3}{3} = 2a^3 \quad u.\omega.
 \end{aligned}$$

3. Temos  $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ . Então:

$$\oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$



**Cálculo de  $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$**

Temos  $C_1 : y = 0$ , com  $0 \leq x \leq 1$ . Logo,  $dy = 0$ . Então:

$$\begin{aligned}
 \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{C_1} x^2 dx + (x+y) dy = \int_{C_1} x^2 dx = \\
 &= \int_0^1 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

**Cálculo de  $\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$**

Temos  $C_2 : x = 1$ , com  $0 \leq y \leq 1$ . Logo,  $dx = 0$ . Então:

$$\begin{aligned}
 \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{C_2} x^2 dx + (x+y) dy = \int_{C_2} (1+y) dy = \\
 &= \int_0^1 (1+y) dy = \left[ y + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

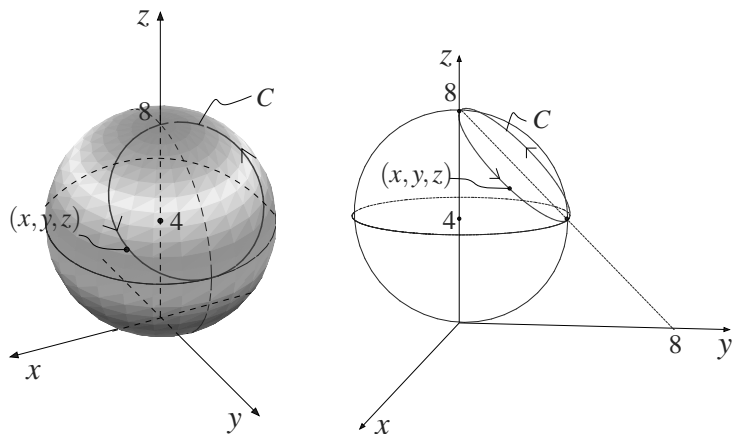
### Cálculo de $\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Temos que  $C_3^-$  é a curva  $C_3$  percorrida no sentido contrário. Logo,  $C_3^- : y = x$ , com  $0 \leq x \leq 1$  donde  $dy = dx$ . Logo:

$$\begin{aligned} \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= - \int_{C_3^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \\ &= - \int_{C_3^-} x^2 dx + (x+y) dy = - \int_{C_3^-} x^2 dx + (x+x) dx = \\ &= - \int_{C_3^-} (x^2 + 2x) dx = - \int_0^1 (x^2 + 2x) dx = \\ &= - \left[ \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^1 = - \left[ \frac{1}{3} + 1 \right] = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Portanto:  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{4}{3} = \frac{1}{2}.$

4. A figura que se segue mostra um esboço da curva  $C$ .



Para parametrizá-la, observamos que  $x$ ,  $y$  e  $z$  satisfazem

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 16 \\ z = 8 - y \end{cases} &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + (4-y)^2 = 16 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2y^2 - 8y = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2(y-2)^2 = 8 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{8} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1 \end{aligned}$$

que é uma elipse de centro  $(0,2)$  e semieixos  $2\sqrt{2}$  e  $2$ . Esta elipse é a projeção de  $C$  sobre o plano  $xy$ .

Temos

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t \\ y = 2 + 2\sin t \\ z = 8 - (2 + 2\sin t) = 6 - 2\sin t \end{cases}$$

com  $0 \leq t \leq 2\pi$  donde:

$$\begin{cases} dx = -2\sqrt{2}\sin t \, dt \\ dy = 2\cos t \, dt \\ dz = -2\cos t \, dt \end{cases}.$$

Então:

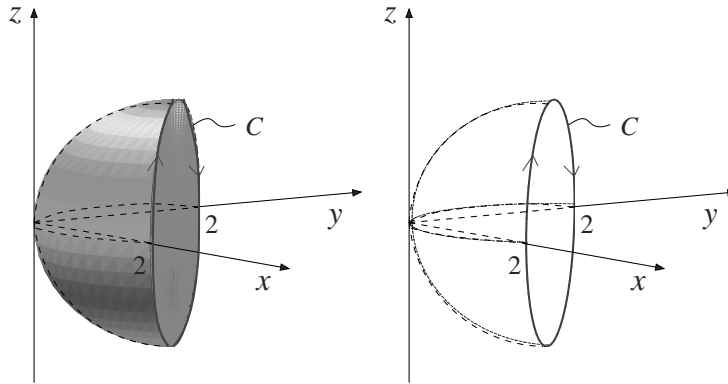
$$\begin{aligned} \int_C zdx + ydy - xdz &= \\ &= \int_0^{2\pi} [(6 - 2\sin t)(-2\sqrt{2}\sin t) + (2 + 2\sin t)2\cos t - \\ &\quad - 2\sqrt{2}\cos t(-2\cos t)] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (-12\sqrt{2}\sin t + 4\sqrt{2}\sin^2 t + 4\cos t + \\ &\quad + 4\sin t\cos t + 4\sqrt{2}\cos^2 t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (4\sqrt{2} - 12\sqrt{2}\sin t + 4\cos t + 4\sin t\cos t) dt = \\ &= \left[ 4\sqrt{2}t + 12\sqrt{2}\cos t + 4\sin t + 2\sin^2 t \right]_0^{2\pi} = \\ &= 8\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

5. Ao interceptar a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$  com o plano  $x + y = 2$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} (2 - y)^2 + y^2 + z^2 &= 4 \Rightarrow 2y^2 - 4y + z^2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2(y - 1)^2 + z^2 &= 2 \Rightarrow (y - 1)^2 + \frac{z^2}{2} = 1 \end{aligned}$$

que é uma elipse no plano  $yz$ .

A elipse representa a projeção da curva  $C$  sobre o plano  $yz$ . Como  $C$  está orientada no sentido anti-horário quando vista da origem, então a elipse está orientada no sentido horário. O esboço de  $C$  está ilustrado a seguir.



Devemos parametrizar  $C^-$ . Tem-se:

$$\begin{cases} y = 1 + \cos t \\ z = \sqrt{2} \operatorname{sen} t \\ x = 2 - y = 2 - (1 + \cos t) = 1 - \cos t \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases} .$$

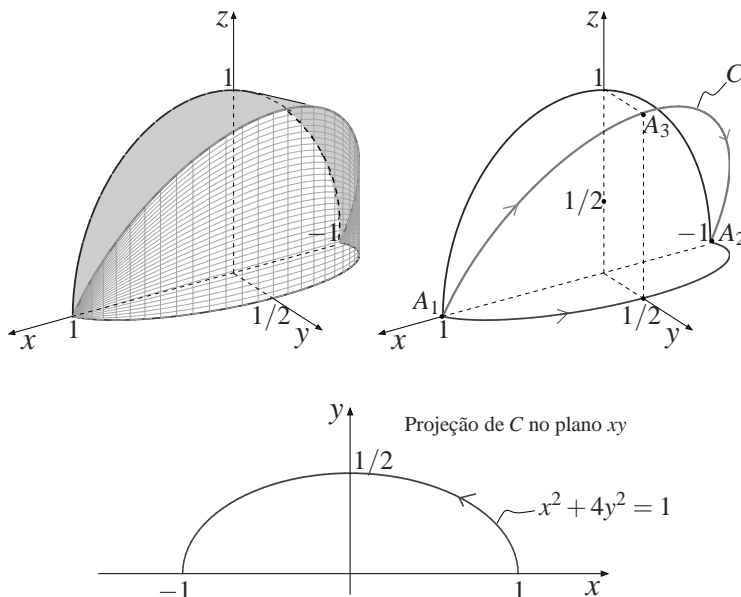
Portanto:

$$C^- : \quad \gamma(t) = (1 - \cos t, 1 + \cos t, \sqrt{2} \operatorname{sen} t) \\ \gamma'(t) = (\operatorname{sen} t, -\operatorname{sen} t, \sqrt{2} \cos t) .$$

com  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Tem-se:

$$\begin{aligned} W &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{C^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \\ &= - \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \\ &= - \int_0^{2\pi} (1 + \cos t, \sqrt{2} \operatorname{sen} t, 1 - \cos t) \cdot \\ &\quad \cdot (\operatorname{sen} t, -\operatorname{sen} t, \sqrt{2} \cos t) dt = \\ &= - \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t \cos t - \sqrt{2} \operatorname{sen}^2 t + \\ &\quad + \sqrt{2} \cos t - \sqrt{2} \cos^2 t) dt = \\ &= - \left( -\sqrt{2} \cdot 2\pi \right) = 2\sqrt{2}\pi \text{ u.}\omega. \end{aligned}$$

6. Esboçando os dois cilindros, vemos que  $A_1 = (1, 0, 0)$ ,  $A_2 = (-1, 0, 0)$  e  $A_3 = (0, 1/2, 1)$  são pontos de interseção. Ligando-os encontramos  $C$ .



Se  $(x, y, z) \in C$ , então  $(x, y, z)$  satisfaz

$$\begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{1/4} = 1 & \text{com } y \geq 0 \\ x^2 + z^2 = 1 & \text{com } z \geq 0 \end{cases}$$

então  $x = \cos t$  e  $y = (1/2) \sin t$ , com  $0 \leq t \leq \pi$ . Como  $z = \sqrt{1 - x^2}$ , então temos que  $z = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = \sin t$ . Logo, obtemos que  $\gamma(t) = (\cos t, (1/2) \sin t, \sin t)$ , com  $0 \leq t \leq \pi$  é uma parametrização de  $C$ , orientada de  $A_1$  para  $A_2$ . Temos  $dx = -\sin t \, dt$ ,  $dy = (1/2) \cos t \, dt$  e  $dz = \cos t \, dt$ . Então:

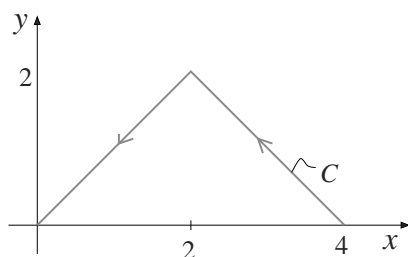
$$\begin{aligned} \int_C -2y \, dx + 3z \, dy + x \, dz &= \\ &= \int_0^\pi \left[ \left( -2 \cdot \frac{1}{2} \sin t \right) (-\sin t) + (3 \sin t) \cdot \frac{1}{2} \cos t + \right. \\ &\quad \left. + (\cos t)(\cos t) \right] dt = \\ &= \int_0^\pi \left( \sin^2 t + \frac{3}{2} \sin t \cos t + \cos^2 t \right) dt = \\ &= \int_0^\pi \left( 1 + \frac{3}{2} \sin t \cos t \right) dt = \left[ t + \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^\pi = \pi. \end{aligned}$$

7. Temos:

$$|2-x| = \begin{cases} 2-x & \text{se } x \leq 2 \\ -2+x & \text{se } x > 2 \end{cases}.$$

Então

$$C: y = \begin{cases} 2 - (2-x) = x & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 2 - (-2+x) = 4-x & \text{se } 2 < x \leq 4 \end{cases}.$$



Pela expressão de  $\vec{F}$ , vemos que calcular diretamente a integral é uma tarefa penosa. Surge então uma pergunta natural:  $\vec{F}$  é conservativo? Ou existirá alguma função potencial de  $\vec{F}$ ?

Observe que

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= \\ &= (\text{sen}.xy - xy\cos xy - 2y) - (\text{sen}.xy - xy\cos xy - 2y) = 0. \end{aligned}$$

Logo,  $\text{rot } \vec{F} = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = \vec{0}$ . Isto significa que  $\vec{F}$  pode ser conservativo.

Então, tentemos resolver

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = y \text{sen}.xy - y^2 - 3 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x \text{sen}.xy - 2xy \quad (2)$$

Integrando (1) e (2) em relação a  $x$  e  $y$  respectivamente, temos

$$\phi(x,y) = -\cos(xy) - xy^2 - 3x + f(y) \quad (3)$$

$$\phi(x,y) = -\cos(xy) - xy^2 + g(x) \quad (4)$$

De (3) e (4), vemos que se  $f(y) = 0$  e  $g(x) = -3x$  então, temos que  $\varphi(x, y) = -\cos(xy) - xy^2 - 3x$  é uma função potencial de  $\vec{F}$ . Logo, o trabalho é dado por

$$\begin{aligned} W &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \varphi(0, 0) - \varphi(4, 0) = \\ &= (-1 - 0 - 0) - (-1 - 0 - 12) = -1 + 13 = 12 \text{ u.w.} \end{aligned}$$

8. a. Devemos resolver

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -4xe^{3y} + ze^{xz} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -6x^2e^{3y} + 4y^2 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = xe^{xz} + \cos(z) \quad (3)$$

Integrando (1), (2) e (3) em relação a  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, temos

$$\varphi(x, y, z) = -2x^2e^{3y} + e^{xz} + f(y, z)$$

$$\varphi(x, y, z) = -2x^2e^{3y} + \frac{4y^3}{3} + g(x, z)$$

$$\varphi(x, y, z) = e^{xz} + \sin(z) + h(x, y)$$

Devemos tomar  $f(y, z) = (4/3)y^3 + \sin z$ ,  $g(x, z) = e^{xz} + \sin z$  e, também  $h(x, y) = -2x^2e^{3y} + (4/3)y^3$ .

Então, temos que

$$\varphi(x, y, z) = -2x^2e^{3y} + e^{xz} + (4/3)y^3 + \sin z$$

é uma função potencial de  $\vec{F}$ .

b. Então:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \varphi(\gamma(1)) - \varphi(\gamma(0)) = \\ &= \varphi\left(0, 1, \frac{\pi}{2}\right) - \varphi(2, 0, 0) = \\ &= \left(0 + 1 + \frac{4}{3} + 1\right) - (-8 + 1 + 0 + 0) = \\ &= \frac{10}{3} + 7 = \frac{31}{3}. \end{aligned}$$

9. Seja  $\vec{F}(x, y) = (2xy, x^2)$ , com  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Se provarmos que  $\vec{F}$  é um campo conservativo, então por propriedade, temos que a integral de linha de  $\vec{F}$  é independente do caminho. Para isso, basta provar que  $\vec{F}$  admite uma função  $\varphi(x, y)$ , tal que  $\nabla\varphi = \vec{F}$  em  $\mathbb{R}^2$ , dita função potencial de  $\vec{F}$ . Então, devemos resolver o sistema  $\nabla\varphi = \vec{F}$  em  $\mathbb{R}^2$ , isto é,

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2xy & (1) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = x^2 & (2) \end{cases}$$

Integrando (1) e (2) em relação a  $x$  e  $y$ , respectivamente, temos

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= x^2y + f(y) \\ \varphi(x, y) &= x^2y + g(x) \end{aligned}$$

onde  $f(y)$  e  $g(x)$  são “constantes” de integração. Tomando  $f(y) = 0$  e  $g(x) = 0$ , temos que  $\varphi(x, y) = x^2y$  é uma função potencial de  $\vec{F}$ .

Logo,  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  é independente do caminho e:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \varphi(1, 4) - \varphi(2, -1) = 1^2 \cdot 4 - 2^2(-1) = \\ &= 4 + 4 = 8. \end{aligned}$$

10. Como é extremamente difícil calcular a integral via definição, procuremos saber se o campo  $\vec{F}$  é conservativo, isto é, se existe  $\varphi(x, y, z)$  tal que  $\nabla\varphi = \vec{F}$  em  $\mathbb{R}^3 = \text{dom } \vec{F}$ . Devemos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2x \sin z & (1) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = z^3 - e^y & (2) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} = x^2 \cos z + 3yz^2 & (3) \end{cases}$$

Integrando (1), (2) e (3) em relação a  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectiva-



mente, temos:

$$\begin{cases} \varphi(x, y, z) = x^2 \operatorname{sen} z + A(y, z) & (4) \\ \varphi(x, y, z) = yz^3 - e^y + B(x, z) & (5) \\ \varphi(x, y, z) = x^2 \operatorname{sen} z + yz^3 + C(x, y) & (6) \end{cases}$$

Comparando as equações (4), (5) e (6), devemos tomar  $A(y, z) = yz^3 - e^y$ ,  $B(x, z) = x^2 \operatorname{sen} z$  e  $C(x, y) = -e^y$ . Logo

$$\varphi(x, y, z) = x^2 \operatorname{sen} z + yz^3 - e^y$$

é uma função potencial de  $\vec{F}$  e, portanto,  $\vec{F}$  é conservativo. Logo,

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \varphi(\gamma(1)) - \varphi(\gamma(0)) = \varphi(1, 0, 2) - \varphi(0, 0, 1) = \\ &= (1^2 \operatorname{sen} 2 + 0 - e^0) - (0 + 0 - e^0) = \operatorname{sen} 2 - 1 + 1 = \operatorname{sen} 2. \end{aligned}$$

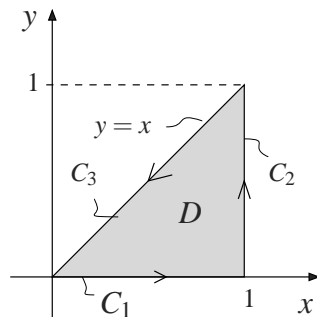
## AULA 10

1. Devemos verificar que

$$\oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

onde  $\vec{F} = (P, Q) = \left( \frac{2}{3} (xy^3 - x^2y), x^2y^2 \right)$  com  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  e  $C = \partial D$  é conforme figura abaixo. Logo,  $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ . Por propriedade, temos

$$\oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$



### Cálculo de $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Parametrizando  $C_1$ , temos  $\sigma(t) = (t, 0)$ , com  $0 \leq t \leq 1$ . Da definição de integral de linha de campo vetorial, temos:

$$\begin{aligned}\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \vec{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt = \\ &= \int_0^1 (0, 0) \cdot (1, 0) dt = \int_0^1 0 dt = 0.\end{aligned}$$

### Cálculo de $\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Temos  $C_2 : \sigma(t) = (1, t)$ , com  $0 \leq t \leq 1$ . Logo,

$$\begin{aligned}\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \vec{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt = \\ &= \int_0^1 \left( \frac{2}{3}(t^3 - t), t^2 \right) \cdot (0, 1) dt = \\ &= \int_0^1 t^2 dt = \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

### Cálculo de $\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Temos  $C_3 : \sigma(t) = (1 - t, 1 - t)$ , com  $0 \leq t \leq 1$ . Logo,

$$\begin{aligned}\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \\ &= \int_0^1 \left( \frac{2}{3}(1 - t)^4 - \frac{2}{3}(1 - t)^3, (1 - t)^4 \right) \cdot (-1, -1) dt = \\ &= \int_0^1 \left( -\frac{5}{3}(1 - t)^4 - \frac{2}{3}(1 - t)^3 \right) dt = \\ &= \left[ \frac{5}{3} \cdot \frac{(1 - t)^5}{5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{(1 - t)^4}{4} \right]_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \quad (1)$$

Por outro lado

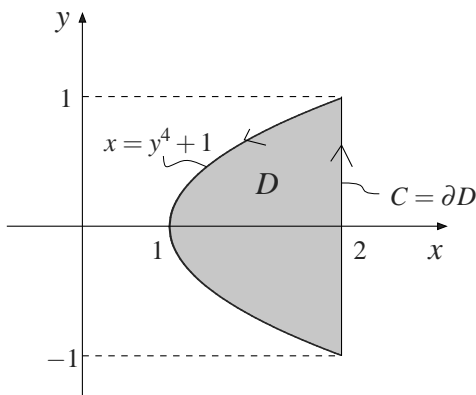
$$\begin{aligned}
 & \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \\
 &= \iint_D \left[ 2xy^2 - \frac{2}{3} (3xy^2 - x^2) \right] dx dy = \\
 &= \iint_D \left( 2xy^2 - 2xy^2 + \frac{2}{3} x^2 \right) dx dy = \\
 &= \frac{2}{3} \iint_D x^2 dx dy = \frac{2}{3} \int_0^1 \int_0^x x^2 dy dx = \\
 &= \frac{2}{3} \int_0^1 x^3 dx = \frac{2}{3} \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

ou

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \frac{1}{6} \quad (2)$$

De (1) e (2) vemos que o teorema está verificado.

2. A região  $D$ , limitada por  $C$  está ilustrada na figura a seguir.



Como  $\vec{F} = (P, Q) = \left( \frac{e^y}{x}, e^y \ln x + 2x \right)$  é de classe  $C^1$  no conjunto aberto  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$  contendo  $D$  e  $C = \partial D$  está orientada positivamente, então podemos aplicar o teorema de Green. Temos, então, que

$$\begin{aligned}
 \oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \\
 &= \iint_D \left( \frac{e^y}{x} + 2 - \frac{e^y}{x} \right) dx dy = 2 \iint_D dx dy.
 \end{aligned}$$

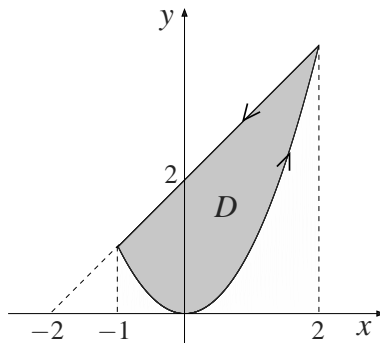
Descrevendo  $D$  como tipo II, temos:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1, y^4 + 1 \leq x \leq 2\}.$$

Então:

$$\begin{aligned} \oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= 2 \int_{-1}^1 \int_{y^4+1}^2 dx dy = \\ &= 2 \int_{-1}^1 (1 - y^4) dy = 2 \left[ y - \frac{y^5}{5} \right]_{-1}^1 = \\ &= 2 \left( 2 - \frac{2}{5} \right) = \frac{16}{5}. \end{aligned}$$

3. O esboço da região  $D$  está representado na figura que se segue.



Façamos a interseção das curvas  $y = x^2$  e  $y = x + 2$ :

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases} &\Rightarrow x^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 2. \end{aligned}$$

Como  $\vec{F} = (P, Q) = (y - x + \arctg x, 2x - y + \sqrt{1 + y^2})$  é de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2$  e  $\partial D = C$  está orientada positivamente, podemos aplicar o Teorema de Green. Como

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2 - 1 = 1$$

então: 
$$I = \oint_{C^+} P dx + Q dy =$$

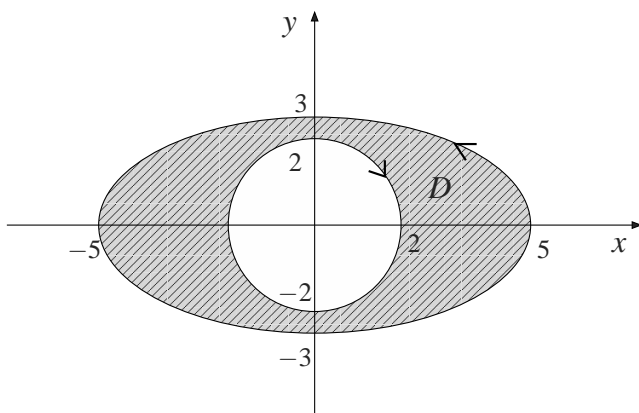
$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D dx dy$$

onde  $D$  pode ser descrita como tipo I:

$$D: \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ x^2 \leq y \leq x+2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Então: } I &= \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} dy dx = \int_{-1}^2 (x+2-x^2) dx = \\ &= \left[ \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \left( 2 + 4 - \frac{8}{3} \right) - \left( \frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

4. O esboço de  $D$  está representado na figura que se segue.



Como  $\vec{F} = (P, Q) = (2xy + e^{x^2}, x^2 + 2x + \cos y^2)$  é um campo de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2$  e  $\partial D$  está orientada positivamente, podemos aplicar o Teorema de Green. Tem-se

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + 2$$

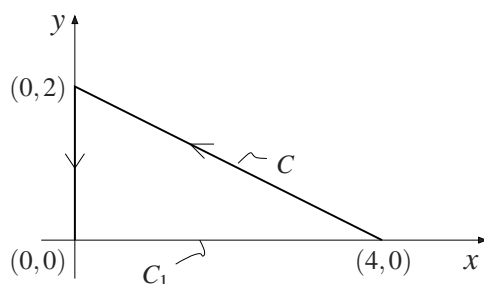
$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x$$

$$\text{donde} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2.$$

Então, pelo Teorema de Green, tem-se:

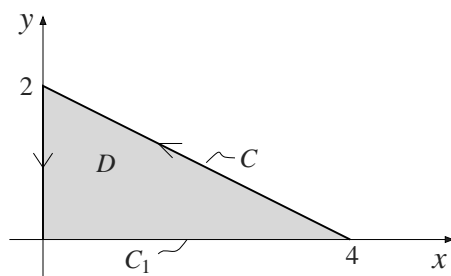
$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 2 \iint_D dx dy = \\ &= 2A(D) = 2 \cdot (\text{área da elipse} - \text{área do disco}) = \\ &= 2(\pi ab - \pi r^2) = 2(\pi \cdot 5 \cdot 3 - \pi \cdot 2^2) = \\ &= 2(15\pi - 4\pi) = 22\pi. \end{aligned}$$

5. A curva  $C$  está ilustrada na figura que se segue.



Não é fácil calcular a integral pela definição. Então, procuremos uma alternativa para resolvê-la. Como o teorema de Green só se aplica em curvas fechadas, consideremos a curva fechada  $\bar{C} = C \cup C_1$ , onde  $C_1$  é o segmento de reta que liga  $(0,0)$  a  $(4,0)$  parametrizada por  $\sigma(t) = (t, 0)$ , com  $0 \leq t \leq 4$ .

Seja  $D$  a região limitada por  $\bar{C}$ .



Do teorema de Green, temos:

$$\begin{aligned}
 \oint_{\bar{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \\
 &= \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \\
 &= \iint_D \left( \frac{1}{1+x} + \frac{x}{1+x} \right) dx dy = \\
 &= \iint_D \frac{1+x}{1+x} dx dy = \\
 &= \iint_D dx dy = A(D) = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4.
 \end{aligned}$$

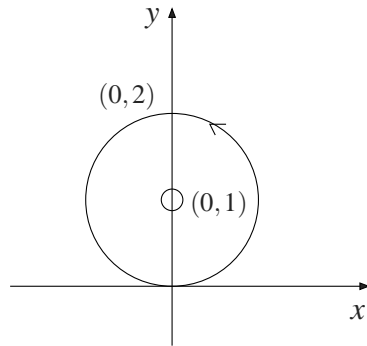
Mas

$$\begin{aligned}\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^4 \vec{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt = \\ &= \int_0^4 (0, \ln(1+t)) \cdot (1, 0) dt = \int_0^4 0 dt = 0.\end{aligned}$$

Logo:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 4.$$

6. a. Observe que  $\vec{F}$  é de classe  $C^1$  no aberto  $U = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ . Como  $C_1$  envolve  $(0, 1)$ , vemos que a região limitada por  $C_1$  não está contida em  $U$ , conforme a figura a seguir.

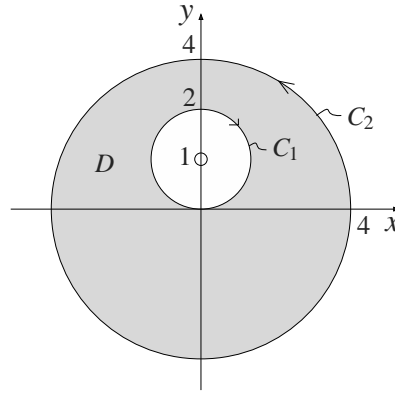


Portanto, o teorema de Green não se aplica. Então, parametrizando  $C_1$ , temos que  $\sigma(t) = (\cos t, 1 + \sin t)$ , com  $0 \leq t \leq 2\pi$ , donde  $\sigma'(t) = (-\sin t, \cos t)$ . Então:

$$\begin{aligned}\oint_{C_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{1 + \sin t - 1}{1} - (1 + \sin t), \frac{-\cos t}{1} \right) \cdot \\ &\quad \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \int_0^{2\pi} (\sin t - \cos^2 t) dt = \\ &= \left[ -\cos t - \frac{1}{2} \left( t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \right]_0^{2\pi} = -\pi.\end{aligned}$$

- b. Como  $C_2$  também envolve  $(0, 1)$  não podemos aplicar o teorema de Green. Calcular a integral por definição é uma tarefa difícil, portanto usemos o seguinte

procedimento: isolamos o ponto  $(0, 1)$  com a curva  $C_1$  do item (a) e consideramos a região  $D$  que não contém  $(0, 1)$ , limitada por  $C_1$  e  $C_2$ . Orientamos positivamente  $\partial D = C_1 \cup C_2$  ( $C_2$  no sentido anti-horário e  $C_1$  no sentido horário) e, finalmente, usamos o teorema de Green.



Temos, então,

$$\begin{aligned} \oint_{C_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_1^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \\ &= \iint_D \left( \frac{x^2 - (y-1)^2}{(x^2 + (y-1)^2)^2} - \frac{x^2 - (y-1)^2}{(x^2 + (y-1)^2)^2} + 1 \right) dx dy = \\ &= \iint_D dx dy = A(D) = 16\pi - \pi = 15\pi \end{aligned}$$

ou

$$\oint_{C_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \oint_{C_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 15\pi.$$

Do item (a), temos que

$$\oint_{C_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} - (-\pi) = 15\pi$$

donde

$$\oint_{C_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 14\pi.$$

7. a. Observe que calcular a integral por definição é complicado. Por outro lado, tem-se:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$



Porém, o dom  $\vec{F} = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$  **não** é simplesmente conexo. Logo, não podemos usar o teorema das equivalências. Então, tentemos encontrar uma função  $\varphi(x,y)$  tal que

$$\nabla \varphi = \vec{F} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} & (1) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} & (2) \end{cases}$$

em  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ . Integrando (1) em relação a  $x$ , e integrando (2) em relação a  $y$ , obtém-se:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + A(y) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + B(x) \end{cases}$$

Devemos tomar  $A(y) = 0$  e  $B(x) = 0$ . Como o domínio de  $\varphi$  é também  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ , então concluímos que

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

é uma função potencial de  $\vec{F}$ . Então:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \varphi(\gamma(\pi)) - \varphi(\gamma(0)) = \\ &= \varphi(e^\pi, 0) - \varphi(1, 0) = \frac{1}{2} \ln e^{2\pi} - \frac{1}{2} \ln 1 = \\ &= \frac{2\pi}{2} \ln e = \pi. \end{aligned}$$

b. Seja  $\vec{F} = (P, Q) = (7x^6y, x^7)$ . Então:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 7x^6 = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Como  $\text{dom } \vec{F} = \mathbb{R}^2$  é simplesmente conexo então, do teorema das equivalências,  $\vec{F}$  é conservativo com uma função potencial dada por  $\varphi(x,y) = x^7y$  (por inspeção). Logo:

$$\begin{aligned} \int_C 7x^6y \, dx + x^7 \, dy &= \varphi(\gamma(1)) - \varphi(\gamma(0)) = \\ &= \varphi(1, 1) - \varphi(0, e^{-1}) = 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

8. Pondo  $\vec{F}(x, y) = (2y/x^3, -1/x^2)$ , vemos que o seu domínio é  $D = \mathbb{R}^2 - \text{eixo } y$ . Vemos também que  $\partial Q/\partial x = -(-2x)/x^4 = 2/x^3 = \partial P/\partial y$ , donde  $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ . Mas  $D$  não é um conjunto simplesmente conexo. Logo, não podemos usar o teorema das quatro equivalências. Então, tentemos encontrar uma função potencial de  $\vec{F}$ . Devemos ter

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{2y}{x^3} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{x^2} \quad (2)$$

Integrando (1) e (2) em relação a  $x$  e  $y$  respectivamente, temos:

$$\varphi(x, y) = -\frac{y}{x^2} + f(y)$$

$$\varphi(x, y) = -\frac{y}{x^2} + g(x)$$

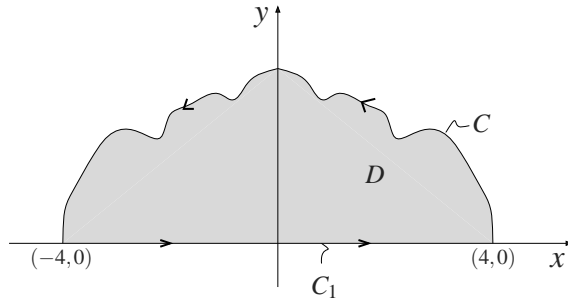
Tomando  $f(y) = 0$  e  $g(x) = 0$ , temos que  $\varphi(x, y) = -y/x^2$ , para todo  $(x, y) \in D$  é uma função potencial de  $\vec{F}$ . Logo,  $\vec{F}$  é conservativo e, portanto, a integral independe do caminho. Temos:

$$I = \varphi(3, 4) - \varphi(1, -2) = -\frac{4}{9} - \frac{-(-2)}{1} = -\frac{4}{9} - 2 = -\frac{22}{9}.$$

9. Pondo  $\vec{F}(x, y) = (3 + 2xy, x^2 - 3y^2)$ , vemos que o seu domínio é o  $\mathbb{R}^2$ , que é um conjunto simplesmente conexo. Vemos que  $\partial Q/\partial x = 2x = \partial P/\partial y$ , donde  $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ . Logo, pelo teorema das quatro equivalências, segue que a integral é independente do caminho. Também do teorema das equivalências temos que  $\vec{F}$  é um campo conservativo com uma função potencial  $\varphi(x, y) = 3x + x^2y - y^3$  (Verifique!) Logo,

$$\begin{aligned} I &= \varphi(\sigma(\pi)) - \varphi(\sigma(0)) = \varphi(0, -e^\pi) - \varphi(0, 1) = \\ &= (-e^{3\pi}) - (-1) = 1 - e^{3\pi}. \end{aligned}$$

10. Sabemos que o trabalho é dado por  $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ . Mas é impossível calcular diretamente a integral, pois não conhecemos a equação de  $C$ . Como nós temos que  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2 - 3xy^2 \neq 0$ , então  $\vec{F}$  não é conservativo. Assim, só nos resta aplicar o Teorema de Green. Para isso, devemos fechar a curva por um segmento de reta sobre o eixo  $x$ , de  $(-4, 0)$  a  $(4, 0)$ .



Seja  $D$  a região limitada por  $\overline{C} = C \cup C_1$ . Como  $\vec{F}$  é de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2$  e  $\overline{C}$  é a fronteira de  $D$  e está contida em  $\mathbb{R}^2$  e está orientada no sentido anti-horário, podemos aplicar o Teorema de Green. Então, temos:

$$\begin{aligned} \oint_{\overline{C}^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \oint_{\overline{C}^+} \underbrace{\left(\frac{x^2}{4} + xy^3\right)}_P dx + \underbrace{(2x + \arctg y)}_Q dy = \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \\ &= \iint_D (2 - 3xy^2) dxdy = \iint_D 2 dxdy - \iint_D 3xy^2 dxdy. \end{aligned}$$

Como  $f(x,y) = 3xy^2$  é uma função ímpar na variável  $x$  e  $D$  tem simetria em relação ao eixo  $y$ , então

$$\iint_D 3xy^2 dxdy = 0.$$

$$\text{Assim: } \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2 A(D) = 2 \cdot 16 = 32.$$

**Cálculo de  $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$**

Temos  $C_1 : y = 0$ , com  $-4 \leq x \leq 4$ , donde  $dy = 0$ . Então:

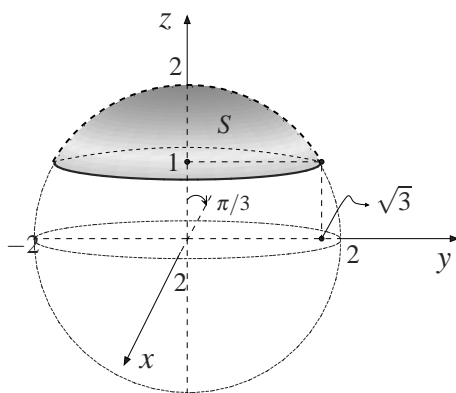
$$\begin{aligned} \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{C_1} \left(\frac{x^2}{4} + xy^3\right) dx + (2x + \arctg y) dy = \\ &= \int_{C_1} \frac{x^2}{4} dx = \int_{-4}^4 \frac{x^2}{4} dx = \left[\frac{x^3}{12}\right]_{-4}^4 = \frac{2 \cdot 4^3}{12} = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

Logo:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 32 - \frac{32}{3} = \frac{64}{3}.$$

## AULA 11

1. a. A superfície  $S$  está ilustrada na figura a seguir.



Usando  $\phi$  e  $\theta$  como parâmetros, temos

$$S: \varphi(\phi, \theta) = (2 \sin \phi \cos \theta, 2 \sin \phi \sin \theta, 2 \cos \phi)$$

com  $\begin{cases} 0 \leq \phi \leq \pi/3 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$ . Também podemos definir  $S$  usando as coordenadas retangulares  $x$  e  $y$ . Temos

$$S: \varphi(x, y) = \left(x, y, \sqrt{4 - x^2 - y^2}\right)$$

com  $(x, y) \in D: x^2 + y^2 \leq 3$ .

Uma outra forma de definir  $S$  é usando as coordenadas  $r$  e  $\theta$ . Temos:

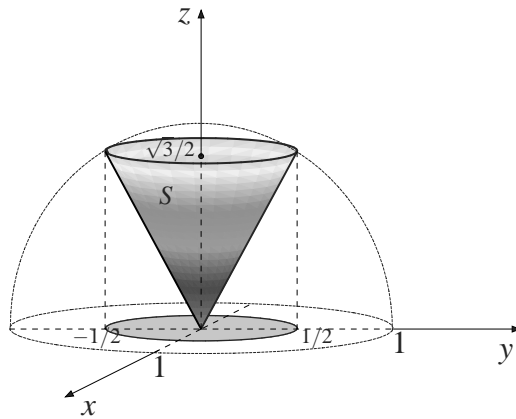
$$S: \varphi(r, \theta) = \left(r \cos \theta, r \sin \theta, \sqrt{4 - r^2}\right)$$

com  $\begin{cases} 0 \leq r \leq \sqrt{3} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$ .

- b. Encontremos a interseção das duas superfícies:

$$\begin{aligned} \begin{cases} z = \sqrt{3(x^2 + y^2)} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} &\Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 + y^2 + 3(x^2 + y^2) &= 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{4} &\Rightarrow z = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Elas se interceptam segundo uma circunferência contida no plano horizontal  $z = \sqrt{3}/2$  de centro  $(0,0,\sqrt{3}/2)$  e raio  $1/2$ .



Usando as coordenadas  $x$  e  $y$  para definir  $S$ , temos:

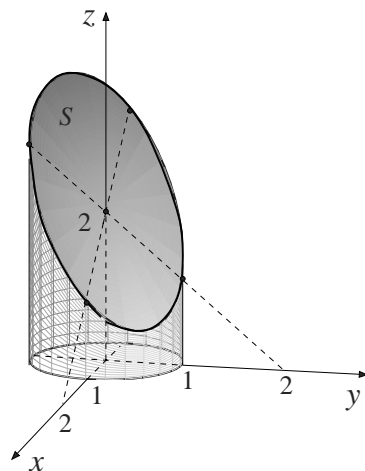
$$\varphi(x,y) = \left( x, y, \sqrt{3(x^2 + y^2)} \right)$$

com  $(x,y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1/4$ . Outra parametrização:

$$S : \varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \sqrt{3}r)$$

$$\text{com } \begin{cases} 0 \leq r \leq 1/2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}.$$

c. O esboço de  $S$  pode ser visto na figura que se segue.



Uma parametrização é dada por

$$S: \varphi(x, y) = (x, y, 2 - x - y)$$

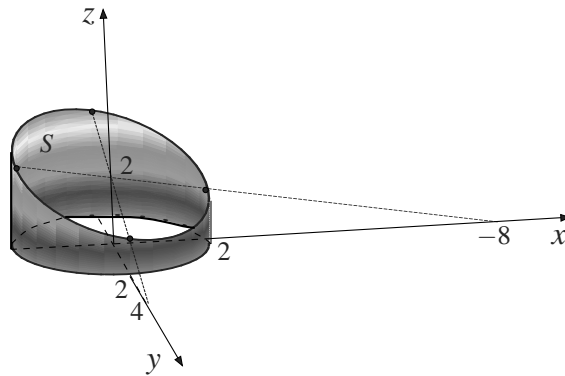
com  $(x, y) \in D: x^2 + y^2 \leq 1$ .

Outra parametrização:

$$S: \varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 2 - r \cos \theta - r \sin \theta)$$

$$\text{com } \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}.$$

d. O esboço de  $S$  está na figura a seguir.

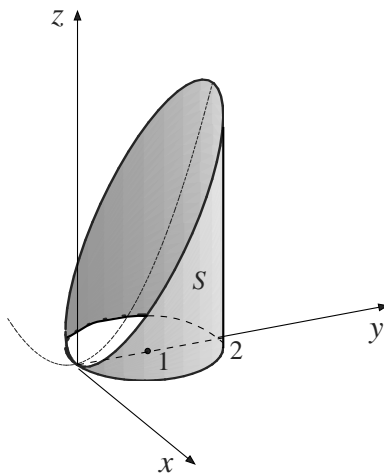


Adotando  $\theta$  e  $z$  como parâmetros, definimos  $S$  por

$$\varphi(\theta, z) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, z)$$

$$\text{com } \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 2 + \frac{\cos \theta}{2} - \sin \theta \end{cases}.$$

e. A superfície  $S$  está ilustrada na figura a seguir.



Seja  $(x, y, z) \in S$ . Então,  $x$  e  $y$  satisfazem  $x^2 + y^2 = 2y$  ou  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ . Logo,

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 + \operatorname{sen} t \end{cases}$$

com  $t \in [0, 2\pi]$ .

Adotando  $t$  e  $z$  como parâmetros, temos a seguinte parametrização para  $S$ :

$$\varphi(t, z) = (\cos t, 1 + \operatorname{sen} t, z)$$

com

$$\begin{cases} 0 \leq t \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 2(1 + \operatorname{sen} t) \end{cases} \quad .$$

2. a. As equações paramétricas de  $S$  são:

$$\begin{cases} x = v \cos u \\ y = v \operatorname{sen} u \\ z = 1 - v^2 \end{cases}$$

com  $0 \leq u \leq 2\pi$  e  $v \geq 0$ . Eliminando os parâmetros  $u$  e  $v$ , temos que  $x^2 + y^2 = v^2 = 1 - z$  ou  $z = 1 - x^2 - y^2$  (parabolóide circular).

- b. Um vetor normal de  $S$  em  $\varphi(0, 1) = (1, 0, 0)$  é:

$$\begin{aligned} \vec{N}(0, 1) &= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(0, 1) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(0, 1) = \\ &= (-v \operatorname{sen} u, v \cos u, 0) \times (\cos u, \operatorname{sen} u, -2v) \Big|_{(0,1)} = \\ &= (0, 1, 0) \times (1, 0, -2) = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= (-2, 0, -1) \end{aligned}$$

**Equação do plano tangente a  $S$  em  $\varphi(0, 1) = (1, 0, 0)$**

Da fórmula  $[(x, y, z) - \varphi(0, 1)] \cdot \vec{N}(0, 1) = 0$  temos:

$$\begin{aligned} [(x, y, z) - (1, 0, 0)] \cdot (-2, 0, -1) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (x - 1, y, z) \cdot (-2, 0, -1) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -2(x - 1) - z &= 0 \Rightarrow 2x + z - 2 = 0. \end{aligned}$$

**Equação da reta normal a S em  $\varphi(0,1) = (1,0,0)$**

Da fórmula  $(x,y,z) - \varphi(0,1) = \lambda \vec{N}(0,1)$ , com  $\lambda \in \mathbb{R}$  temos:

$$(x,y,z) - (1,0,0) = \lambda(-2, 0, -1),$$

com  $\lambda \in \mathbb{R}$ , que é a equação vetorial da reta normal ou

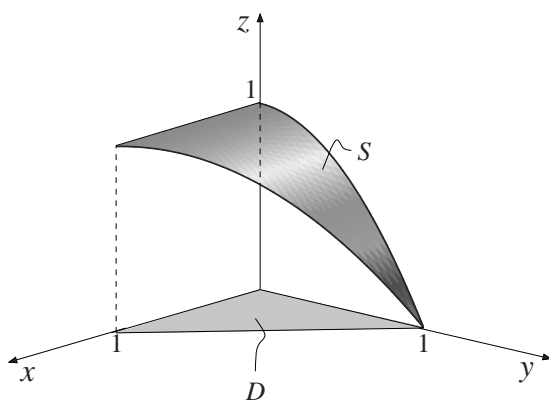
$$\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 0 \\ z = -\lambda \end{cases}$$

com  $\lambda \in \mathbb{R}$ , que são equações paramétricas da reta normal.

3. a. Temos:

$$S: \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 - v^2 \end{cases}$$

com  $(u,v) \in D: u+v \leq 1, u \geq 0$  e  $v \geq 0$  donde, eliminando os parâmetros, temos que  $S: z = 1 - y^2$  com  $(x,y) \in D_{xy}: x+y \leq 1, x \geq 0$  e  $y \geq 0$ . Logo, o esboço de S está representado na figura que se segue.



b. Temos:

$$\varphi(1/2, 1/4) = (1/2, 1/4, 15/16)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) = (1,0,0)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) = (0,1,-2v)$$



donde

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = (0, 2v, 1).$$

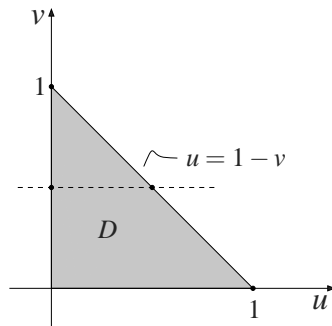
Logo,  $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} (1/2, 1/4) = (0, 1/2, 1)$  é um vetor normal a  $S$  em  $\varphi(1/2, 1/4)$ . Portanto, uma equação do plano tangente a  $S$  em  $\varphi(1/2, 1/4)$  é dada por

$$\left[ (x, y, z) - \varphi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \right] \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\text{ou} \quad \left(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{4}, z - \frac{15}{16}\right) \cdot \left(0, \frac{1}{2}, 1\right) = 0$$

$$\text{ou} \quad y + 2z = \frac{17}{8}.$$

$$\begin{aligned} \text{c. Temos: } A(S) &= \iint_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| du dv = \\ &= \iint_D \sqrt{1 + 4v^2} du dv. \end{aligned}$$



Enquadrando  $D$  como tipo II, temos:

$$D : \begin{cases} 0 \leq v \leq 1 \\ 0 \leq u \leq 1 - v \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{Logo: } A(S) &= \int_0^1 \int_0^{1-v} \sqrt{1 + 4v^2} du dv = \\ &= \int_0^1 (1 - v) \sqrt{1 + 4v^2} dv = \\ &= \underbrace{\int_0^1 \sqrt{1 + 4v^2} dv}_{I_1} - \underbrace{\int_0^1 v \sqrt{1 + 4v^2} dv}_{I_2}. \end{aligned}$$

### Cálculo de $I_1$

Fazendo  $2v = \operatorname{tg} \theta$ , temos  $dv = \frac{1}{2} \sec^2 \theta d\theta$ . Para

$$\begin{cases} v = 0 \\ v = 1 \end{cases} \quad \text{temos} \quad \begin{cases} \theta = 0 \\ \theta = \operatorname{arctg} 2 \end{cases} \quad .$$

Então:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\operatorname{arctg} 2} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} \cdot \frac{1}{2} \sec^2 \theta d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arctg} 2} \sec^3 \theta d\theta . \end{aligned}$$

Do Cálculo II, temos:

$$\begin{aligned} \int \sec^3 \theta d\theta &= \\ &= \frac{1}{2} \sec \theta \operatorname{tg} \theta + \frac{1}{2} \ln(\sec \theta + \operatorname{tg} \theta) + C \text{ (Verifique!)} \end{aligned}$$

Logo:

$$I_1 = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \sec \theta \operatorname{tg} \theta + \frac{1}{2} \ln(\sec \theta + \operatorname{tg} \theta) \right]_0^{\operatorname{arctg} 2} .$$

Fazendo  $u = \operatorname{arctg} 2$  temos  $\operatorname{tg} u = 2$ . Então,  $\sec^2 u = 1 + \operatorname{tg}^2 u = 5$ , donde  $\sec u = \sqrt{5}$  ou  $\sec(\operatorname{arctg} 2) = \sqrt{5}$ . Então,

$$I_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(2 + \sqrt{5}) .$$

### Cálculo de $I_2$

Temos que:

$$I_2 = \int_0^1 v \sqrt{1 + 4v^2} dv = \int_0^1 v (1 + 4v^2)^{1/2} dv$$

Como  $d(1 + 4v^2) = 8v dv$  então:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{8} \int_0^1 (1 + 4v^2)^{1/2} d(1 + 4v^2) = \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \left[ (1 + 4v^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1) . \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}
 A(S) &= I_1 - I_2 = \\
 &= \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(2 + \sqrt{5}) - \frac{5\sqrt{5}}{12} + \frac{1}{12} = \\
 &= \frac{\sqrt{5}}{12} + \frac{1}{4} \ln(2 + \sqrt{5}) + \frac{1}{12} \text{ u.a.}
 \end{aligned}$$

4. a. Parametrizando a curva  $C$  contida no plano  $xz$ , temos  $C : x(t) = a + b \cos t$ ,  $y(t) = 0$  e  $z(t) = b \sin t$ , com  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Sabemos que uma parametrização de  $S$  é dada por

$$\varphi(t, \theta) = (x(t) \cos \theta, x(t) \sin \theta, z(t))$$

com  $(t, \theta) \in D : 0 \leq t \leq 2\pi$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  ou

$$\begin{aligned}
 \varphi(t, \theta) &= \\
 &= ((a + b \cos t) \cos \theta, (a + b \cos t) \sin \theta, b \sin t)
 \end{aligned}$$

com  $(t, \theta) \in D : 0 \leq t \leq 2\pi$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

- b. Temos:

$$\varphi_t = (-b \sin t \cos \theta, -b \sin t \sin \theta, b \cos t)$$

$$\varphi_\theta = (-(a + b \cos t) \sin \theta, (a + b \cos t) \cos \theta, 0)$$

$$\varphi_t \times \varphi_\theta =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -b \sin t \cos \theta & -b \sin t \sin \theta & b \cos t \\ -(a + b \cos t) \sin \theta & (a + b \cos t) \cos \theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= (-b(a + b \cos t) \cos \theta \cos t, \\
 &\quad -b(a + b \cos t) \sin \theta \cos t, -b(a + b \cos t) \sin t)
 \end{aligned}$$

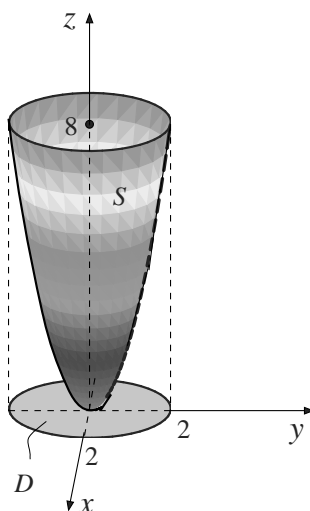
donde

$$\begin{aligned}
 \|\varphi_t \times \varphi_\theta\| &= \\
 &= b(a + b \cos t) \sqrt{\cos^2 \theta \cos^2 t + \sin^2 \theta \cos^2 t + \sin^2 t} = \\
 &= b(a + b \cos t) \sqrt{\cos^2 t (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \sin^2 t} = \\
 &= b(a + b \cos t).
 \end{aligned}$$

Como  $A(S) = \iint_D \|\varphi_t \times \varphi_\theta\| dt d\theta$ , então:

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_D b(a + b \cos t) dt d\theta = \\ &= b \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (a + b \cos t) d\theta dt = \\ &= 2\pi b \int_0^{2\pi} (a + b \cos t) dt = 2\pi b [at + b \sin t]_0^{2\pi} = \\ &= 2\pi b(2\pi a) = 4\pi^2 ab \text{ u.a.} \end{aligned}$$

5. O esboço da superfície  $S$  pode ser visto na figura a seguir.



Definimos  $S$  da seguinte maneira:

$$S : z = 2(x^2 + y^2) = f(x, y),$$

com  $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 4$ . Como

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

então:

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_D \sqrt{1 + (4x)^2 + (4y)^2} dx dy = \\ &= \iint_D \sqrt{1 + 16x^2 + 16y^2} dx dy. \end{aligned}$$

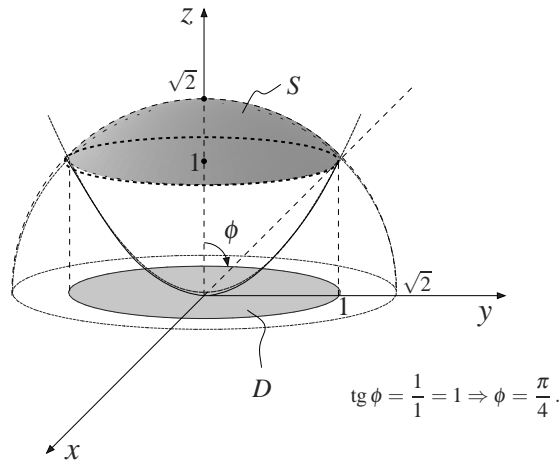
Em coordenadas polares, temos:

$$\begin{aligned}
 A(S) &= \iint_{D_{r\theta}} \sqrt{1+16r^2} r dr d\theta = \\
 &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (1+16r^2)^{1/2} r d\theta dr = \\
 &= \frac{2\pi}{32} \int_0^2 (1+16r^2)^{1/2} d(1+16r^2) = \\
 &= \frac{\pi}{16} \cdot \frac{2}{3} \left[ (1+16r^2)^{3/2} \right]_0^2 = \frac{\pi}{24} (65\sqrt{65} - 1) \text{ u.a.}
 \end{aligned}$$

6. Fazendo a interseção das superfícies, temos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow z^2 + z - 2 = 0 \Leftrightarrow z = 1$$

pois  $z \geq 0$ . Logo, a interseção é uma circunferência de raio 1, contida no plano  $z = 1$  cujo gráfico está representado na figura que se segue.



Parametrizando  $S$ , adotando  $\phi$  e  $\theta$  (coordenadas esféricas) como parâmetros:

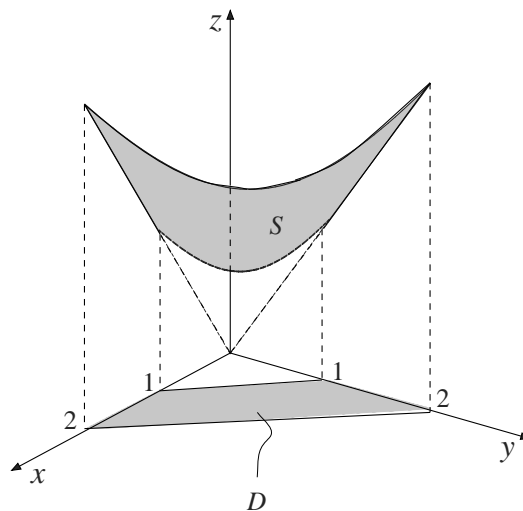
$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ y = \sqrt{2} \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z = \sqrt{2} \cos \phi \end{cases}$$

com  $(\phi, \theta) \in D : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \pi/4 \end{cases}$

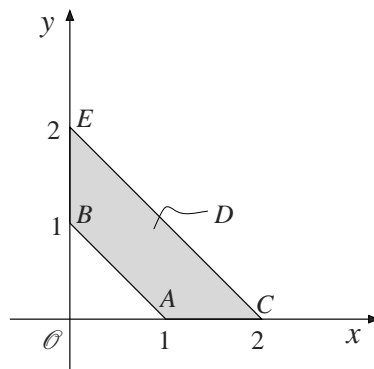
Da Aula 11, temos que  $dS = \rho^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta = 2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta$ .  
Portanto:

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_S dS = \iint_S 2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta = \\ &= 2 \int_0^{\pi/4} \sin \phi \int_0^{2\pi} d\theta \, d\phi = 4\pi \int_0^{\pi/4} \sin \phi \, d\phi = \\ &= 4\pi [-\cos \phi]_0^{\pi/4} = 4\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\pi (2 - \sqrt{2}) \text{ u.a.} \end{aligned}$$

7. O esboço da superfície  $S$  está representado na figura que se segue.



Podemos definir  $S$  por  $S : z = \sqrt{x^2 + y^2} = f(x, y)$ , com  $(x, y) \in D$  onde  $D$  é dada pela figura que se segue



Portanto:

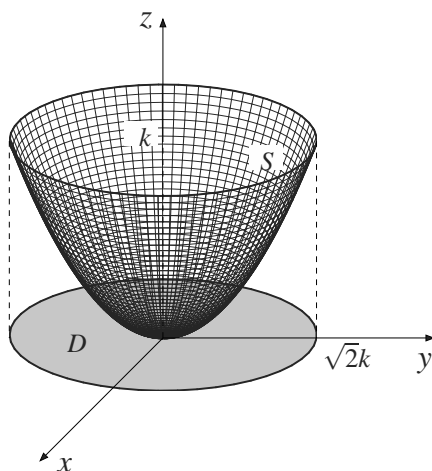
$$\begin{aligned}
 A(S) &= \iint_D \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} \, dxdy = \\
 &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2} \, dxdy = \\
 &= \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}} \, dxdy = \\
 &= \iint_D \sqrt{2} \, dxdy = \sqrt{2} A(D) = \\
 &= \sqrt{2} (\text{área } \triangle OCE - \text{área } \triangle OAB) = \\
 &= \sqrt{2} \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \, u.a.
 \end{aligned}$$

8. a. Adotando  $x$  e  $y$  como parâmetros, temos:

$$S : \varphi(x, y) = \left( x, y, \underbrace{\frac{x^2+y^2}{2}}_{f(x,y)} \right)$$

com  $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 2k$ .

Observe a figura a seguir.



b. Como

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \, dxdy$$

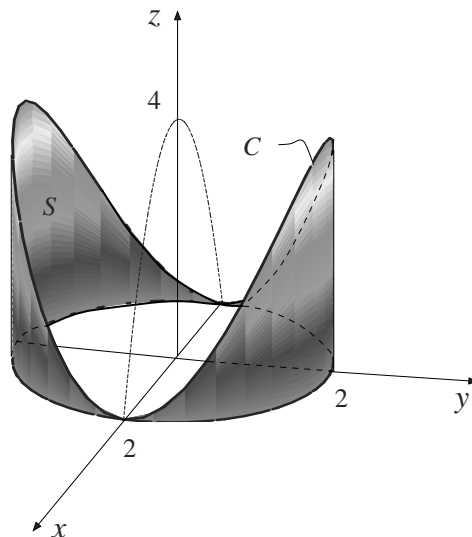
então:

$$\begin{aligned}
 A(S) &= \iint_D \sqrt{1+x^2+y^2} \, dxdy = \\
 &= \iint_{D_{r\theta}} \sqrt{1+r^2} \, r \, drd\theta \quad (\text{coordenadas polares}) = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2k}} (1+r^2)^{1/2} \, d(1+r^2) \, d\theta = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} \left[ (1+r^2)^{3/2} \right]_0^{\sqrt{2k}} \, d\theta = \\
 &= \frac{1}{3} \left[ (1+2k)^{3/2} - 1 \right] \int_0^{2\pi} d\theta = \\
 &= \frac{2\pi}{3} \left[ (1+2k)^{3/2} - 1 \right].
 \end{aligned}$$

Como  $A(S) = \frac{14\pi}{3}$ , temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{2\pi}{3} \left[ (1+2k)^{3/2} - 1 \right] &= \frac{14\pi}{3} \Rightarrow \\
 \Rightarrow (1+2k)^{3/2} - 1 &= 7 \Rightarrow \\
 \Rightarrow (1+2k)^{3/2} &= 8 = 2^3 \Rightarrow (1+2k)^{1/2} = 2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow 1+2k &= 4 \Rightarrow 2k = 3 \Rightarrow k = \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

9. A superfície  $S$  está ilustrada na figura que se segue.





Uma parametrização de  $S$  é dada por

$$S: \varphi(t, z) = (2 \cos t, 2 \sin t, z)$$

com

$$(t, z) \in D: \begin{cases} 0 \leq t \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 4 - 4 \cos^2 t = 4 \sin^2 t \end{cases}.$$

Temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \times \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 \sin t & 2 \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (2 \cos t, 2 \sin t, 0) \end{aligned}$$

donde

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \times \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\| = 2.$$

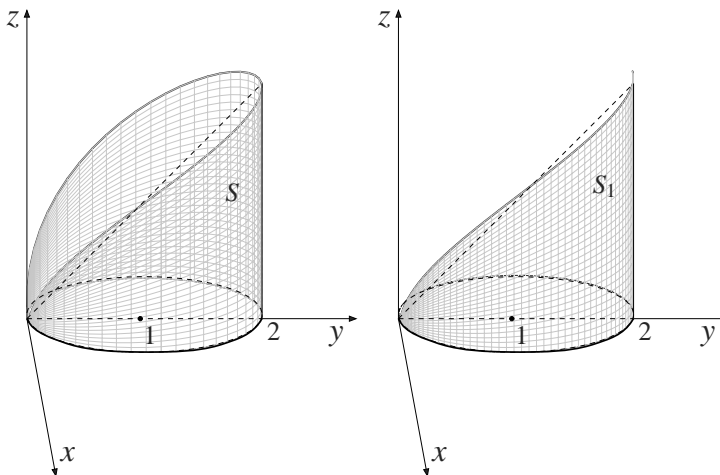
Como

$$A(S) = \iint_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \times \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\| dt dz$$

então

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_D 2 dt dz = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{4 \sin^2 t} dz dt = \\ &= 8 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = 8 \cdot \frac{1}{2} \left[ t - \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{2\pi} = \\ &= 8\pi \text{ u.a.} \end{aligned}$$

10. O esboço de  $S$  está representado na figura que se segue.



Por simetria, tem-se que  $A(S) = 2A(S_1)$ , onde  $S_1$  é dada por:

$$S_1 : x^2 + (y-1)^2 = 1, x \geq 0, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Se  $(x, y, z) \in S_1$ , então  $x$  e  $y$  satisfazem  $x^2 + (y-1)^2 = 1$ ,  $x \geq 0$ . Logo:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 + \sin t \end{cases}.$$

Como  $x \geq 0$ , então  $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ . Portanto, uma parametrização para  $S_1$  é dada por

$$\varphi(t, z) = (\cos t, 1 + \sin t, z)$$

com

$$(t, z) \in D : \begin{cases} -\pi/2 \leq t \leq \pi/2 \\ 0 \leq z \leq \sqrt{\cos^2 t + (1 + \sin t)^2} = \\ = \sqrt{2(1 + \sin t)} \end{cases}.$$

Tem-se  $\varphi_t = (-\sin t, \cos t, 0)$  e  $\varphi_z = (0, 0, 1)$  donde

$$\varphi_t \times \varphi_z = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos t, \sin t, 0)$$

e  $\|\varphi_t \times \varphi_z\| = 1$ .

Como

$$A(S_1) = \iint_D \|\varphi_t \times \varphi_z\| dt dz$$

então

$$\begin{aligned} A(S_1) &= \iint_D dt dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{2(1+\sin t)}} dz dt = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{2(1+\sin t)} dt = \sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1+\sin t} dt. \end{aligned}$$

Da Trigonometria, tem-se:

$$\begin{cases} 1 &= \cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2} \\ \sin t &= 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} 1 + \operatorname{sen} t &= \cos^2 \frac{t}{2} + 2 \operatorname{sen} \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} = \\ &= \left( \cos \frac{t}{2} + \operatorname{sen} \frac{t}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Logo:

$$\sqrt{1 + \operatorname{sen} t} = \left| \cos \frac{t}{2} + \operatorname{sen} \frac{t}{2} \right| = \cos \frac{t}{2} + \operatorname{sen} \frac{t}{2}$$

pois  $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Então:

$$\begin{aligned} A(S_1) &= \sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \cos \frac{t}{2} + \operatorname{sen} \frac{t}{2} \right) dt = \\ &= \sqrt{2} \left[ 2 \operatorname{sen} \frac{t}{2} - 2 \cos \frac{t}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \\ &= 2\sqrt{2} \left( \operatorname{sen} \frac{t}{2} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \cos \frac{t}{2} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \right) = \\ &= 2\sqrt{2} \left( 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 \right) = 4 \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Portanto,

$$A(S) = 2 \cdot 4 = 8 \text{ u.a.}$$

## AULA 12

$$1. \text{ Temos: } \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2u, 0, 1)$$

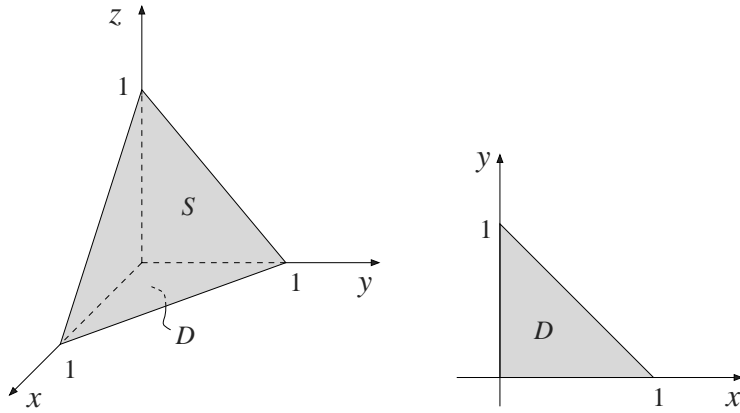
$$\text{donde } \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| = \sqrt{1 + 4u^2}. \text{ Temos:}$$

$$dS = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| dudv = \sqrt{1 + 4u^2} dudv.$$

$$\begin{aligned} \text{Então: } \iint_S (z - x^2 + xy^2 - 1) dS &= \\ &= \iint_D (u^2 + 1 - u^2 + uv^2 - 1) \sqrt{1 + 4u^2} dudv = \\ &= \iint_D uv^2 \sqrt{1 + 4u^2} dudv = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_0^2 u(1+4u^2)^{1/2} v^2 dv du = \\
&= \int_0^1 u(1+4u^2)^{1/2} \left[ \frac{v^3}{3} \right]_0^2 du = \\
&= \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{8} \int_0^1 (1+4u^2)^{1/2} d(1+4u^2) = \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \left[ (1+4u^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{9} (5\sqrt{5} - 1) .
\end{aligned}$$

2. A superfície  $S$  e a sua projeção sobre o plano  $xy$  estão ilustradas nas figuras que se seguem.



Definimos  $S$  por  $S : z = 1 - x - y = f(x, y)$ , onde

$$(x, y) \in D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x \end{cases}$$

Temos que:  $dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy =$

$$= \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2} dxdy = \sqrt{3} dxdy .$$

Então:

$$\begin{aligned}
\iint_S x dS &= \iint_D x \sqrt{3} dxdy = \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-x} x dy dx = \\
&= \sqrt{3} \int_0^1 x(1-x) dx = \sqrt{3} \int_0^1 (x - x^2) dx = \\
&= \sqrt{3} \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{6} .
\end{aligned}$$

3. Uma parametrização da esfera é

$$\varphi(\phi, \theta) = (a \sen \phi \cos \theta, a \sen \phi \sen \theta, a \cos \phi)$$

com

$$(\phi, \theta) \in D: \begin{cases} 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}.$$

Lembramos que (ver Aula 11, Exemplo 1)  $\|\varphi_\phi \times \varphi_\theta\| = a^2 \sen \phi$ . Como  $dS = \|\varphi_\phi \times \varphi_\theta\| d\phi d\theta$ , então temos que  $dS = a^2 \sen \phi d\phi d\theta$  (memorize este resultado). Logo:

$$\begin{aligned} \iint_S (x^2 + y^2) dS &= \\ &= \iint_D \underbrace{(a^2 \sen^2 \phi \cos^2 \theta + a^2 \sen^2 \phi \sen^2 \theta)}_{= a^2 \sen^2 \phi} a^2 \sen \phi d\phi d\theta = \\ &= a^4 \iint_D \sen^3 \phi d\phi d\theta = a^4 \int_0^\pi \sen^3 \phi \int_0^{2\pi} d\theta d\phi = \\ &= 2\pi a^4 \int_0^\pi \sen^3 \phi d\phi. \end{aligned}$$

Da Trigonometria, temos:

$$\sen^3 \phi = \sen^2 \phi \cdot \sen \phi = (1 - \cos^2 \phi) \sen \phi.$$

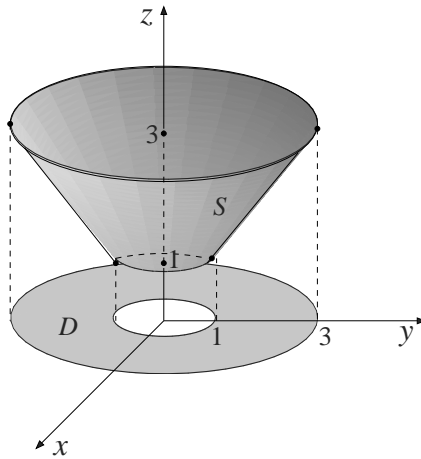
Então:

$$\begin{aligned} \iint_S (x^2 + y^2) dS &= 2\pi a^4 \int_0^\pi (1 - \cos^2 \phi) \sen \phi d\phi \\ &= -2\pi a^4 \int_0^\pi (1 - \cos^2 \phi) d(\cos \phi) = \\ &= -2\pi a^4 \left[ \cos \phi - \frac{\cos^3 \phi}{3} \right]_0^\pi = \\ &= -2\pi a^4 \left( -2 + \frac{2}{3} \right) = \frac{8\pi a^4}{3}. \end{aligned}$$

4. O esboço de  $S$  está representado na figura que se segue.



Logo, o cone intercepta o parabolóide no plano  $z = 1$ , segundo uma circunferência de raio 1 e também no plano  $z = 3$ , segundo uma circunferência de raio 3. Portanto, a parte do cone que está acima do parabolóide é:



A superfície  $S$  pode ser dada por

$$S : z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in D : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9.$$

Neste caso,

$$dS = \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2} \, dxdy$$

onde

$$z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{e} \quad z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

donde

$$1 + (z_x)^2 + (z_y)^2 = 1 + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 2.$$

Portanto, no caso do cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  temos que  $dS = \sqrt{2} \, dxdy$ . Assim:

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) \, dS &= \iint_S z \, dS = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{2} \, dxdy = \\ &= \sqrt{2} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dxdy. \end{aligned}$$

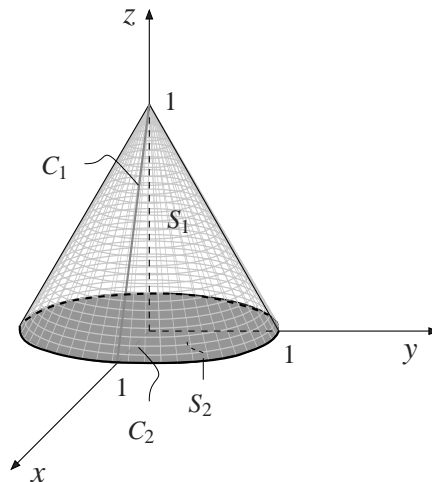
Para calcular a integral dupla, usamos coordenadas polares. Temos:

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \iint_{D_{r\theta}} r \cdot r dr d\theta = \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 d\theta dr = 2\pi \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

Logo:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}.$$

6. O esboço de  $S$  está representado na figura que se segue.



Tem-se:

$$\begin{aligned}M &= \iint_S \rho(x, y, z) dS = \iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dS = \\ &= \iint_{S_1} \sqrt{x^2 + y^2} dS + \iint_{S_2} \sqrt{x^2 + y^2} dS.\end{aligned}$$

**Cálculo de**  $\iint_{S_1} \sqrt{x^2 + y^2} dS$

Uma parametrização da curva  $C_1$  é

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = 1 - t \end{cases}$$



com  $0 \leq t \leq 1$ . Logo:

$x(t) = t =$  raio de uma circunferência transversal

$z(t) = 1 - t =$  altura dessa circunferência.

Então, uma parametrização de  $S_1$  é dada por

$$\varphi(t, \theta) = (t \cos \theta, t \sin \theta, 1 - t)$$

com  $(t, \theta) \in D: \begin{cases} 0 \leq t \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$ . Tem-se:

$$\varphi_t = (\cos \theta, \sin \theta, -1) \quad \text{e} \quad \varphi_\theta = (-t \sin \theta, t \cos \theta, 0)$$

donde

$$\begin{aligned} \varphi_t \times \varphi_\theta &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & -1 \\ -t \sin \theta & t \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= (t \cos \theta, t \sin \theta, \underbrace{t \cos^2 \theta + t \sin^2 \theta}_{=t}) \\ &= t(\cos \theta, \sin \theta, 1). \end{aligned}$$

Logo:

$$\|\varphi_t \times \varphi_\theta\| = |t| \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 1} = t\sqrt{2}$$

pois  $0 \leq t \leq 1$  e, portanto:

$$dS = \|\varphi_t \times \varphi_\theta\| dt d\theta = t\sqrt{2} dt d\theta.$$

Então:

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \sqrt{x^2 + y^2} dS &= \\ &= \iint_D \sqrt{t^2 \cos^2 \theta + t^2 \sin^2 \theta} t\sqrt{2} dt d\theta = \\ &= \sqrt{2} \iint_D t^2 dt d\theta = \sqrt{2} \int_0^1 t^2 \int_0^{2\pi} d\theta dt = \\ &= 2\sqrt{2}\pi \int_0^1 t^2 dt = 2\sqrt{2}\pi \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}. \end{aligned}$$

**Cálculo de**  $\iint_{S_2} \sqrt{x^2 + y^2} \, dS$

A superfície  $S_2$  é dada por

$$S_2 : z = f(x, y) = 0, \text{ com } (x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1.$$

Como  $dS = \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} \, dxdy$ , então temos que  $dS = \sqrt{1 + 0 + 0} \, dxdy$  ou  $dS = dxdy$ .

Se  $S$  é uma porção do plano  $z = 0$  ou  $z = c$  ( $c =$  constante), segue que  $dS = dxdy$  (memorize este resultado).

Logo,

$$\iint_{S_2} \sqrt{x^2 + y^2} \, dS = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dxdy.$$

Passando para coordenadas polares, tem-se:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ dxdy = r dr d\theta \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

e  $D_{r\theta}$  é dado por

$$D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}.$$

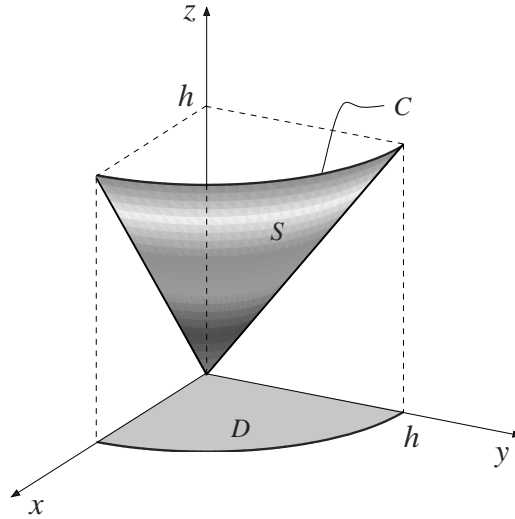
Logo:

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \sqrt{x^2 + y^2} \, dS &= \iint_{D_{r\theta}} r \cdot r \, dr d\theta = \\ &= \iint_{D_{r\theta}} r^2 \, dr d\theta = \int_0^1 r^2 \int_0^{2\pi} d\theta dr = \\ &= 2\pi \int_0^1 r^2 \, dr = 2\pi \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

Assim,

$$M = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \text{ ou } M = \frac{2\pi}{3}(1 + \sqrt{2}) \text{ u.m.}$$

7. A superfície  $S$  pode ser vista na figura a seguir.



Temos  $S : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , com  $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq h^2$ ,  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$  donde  $dS = \sqrt{2} \, dxdy$ . Como

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2) k \, dS$$

então:

$$\begin{aligned} I_z &= k \iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{2} \, dxdy = \\ &= k\sqrt{2} \iint_D (x^2 + y^2) \, dxdy. \end{aligned}$$

Passando para coordenadas polares, temos:

$$\begin{aligned} I_z &= k\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^h r^2 r \, dr d\theta = k\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^h r^3 \, dr d\theta = \\ &= k\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^h d\theta = \frac{h^4 k}{4} \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{h^4 k \sqrt{2} \pi}{8}. \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} M &= \iint_S k \, dS = k\sqrt{2} \iint_D dxdy = k\sqrt{2} A(D) = \\ &= \frac{k\sqrt{2} \pi h^2}{4} = \frac{h^2 k \sqrt{2} \pi}{4}. \end{aligned}$$

Logo,  $I_z = \frac{Mh^2}{2}$ .

8. Consideremos a esfera centrada em  $(0, 0, 0)$ . Então tem-se  $S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ . Considerando um diâmetro sobre o eixo  $z$ , devemos calcular o momento de inércia em relação ao eixo  $z$ . Tem-se

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2) \rho \, dS = \rho \iint_S (x^2 + y^2) \, dS.$$

Sabemos que  $S$  é dada por

$$\varphi(\phi, \theta) = (R \sin \phi \cos \theta, R \sin \phi \sin \theta, R \cos \phi)$$

$$\text{com } (\phi, \theta) \in D: \begin{cases} 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}.$$

Tem-se  $x^2 + y^2 = R^2 \sin^2 \phi$  e  $dS = R^2 \sin \phi \, d\phi d\theta$ . Então:

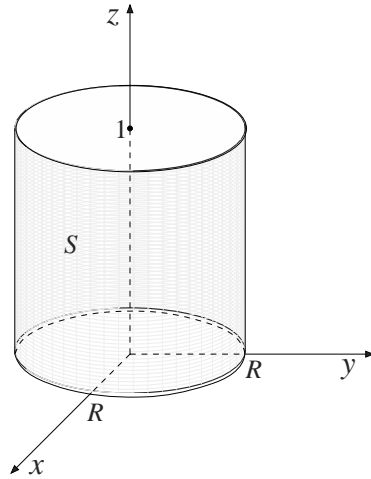
$$\begin{aligned} I_z &= \rho \iint_D (R^2 \sin^2 \phi) \cdot (R^2 \sin \phi) \, d\phi d\theta = \\ &= \rho R^4 \iint_D \sin^3 \phi \, d\phi d\theta = \\ &= \rho R^4 \int_0^\pi \sin^3 \phi \int_0^{2\pi} d\theta d\phi = \\ &= 2\rho \pi R^4 \int_0^\pi (\sin^2 \phi) \cdot (\sin \phi) \, d\phi = \\ &= -2\rho \pi R^4 \int_0^\pi (1 - \cos^2 \phi) \, d(\cos \phi) = \\ &= -2\rho \pi R^4 \left[ \cos \phi - \frac{\cos^3 \phi}{3} \right]_0^\pi = \\ &= -2\rho \pi R^4 \left( -2 + \frac{2}{3} \right) = \frac{8\rho \pi R^4}{3}. \end{aligned}$$

Como  $S$  é homogênea, então

$$M = \rho A(S) = \rho(4\pi R^2) = 4\rho \pi R^2.$$

$$\text{Logo, } I_z = \frac{2MR^2}{3}.$$

9. O esboço de  $S$  está representado na figura que se segue.



Uma parametrização de  $S$  é dada por

$$\varphi(t, z) = (R \cos t, R \sin t, z)$$

com  $(t, z) \in D : 0 \leq t \leq 2\pi$  e  $0 \leq z \leq 1$ .

Temos  $\varphi_t = (-R \sin t, R \cos t, 0)$  e  $\varphi_z = (0, 0, 1)$  donde

$$\varphi_t \times \varphi_z = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -R \sin t & R \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (R \cos t, R \sin t, 0)$$

e  $\|\varphi_t \times \varphi_z\| = R$ . Como  $dS = \|\varphi_t \times \varphi_z\| dt dz$ , então  $dS = R dt dz$ .

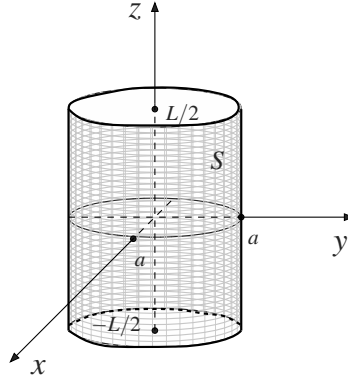
Daqui por diante, no caso do cilindro  $x^2 + y^2 = R^2$ , use o fato de que  $dS = R dt dz$ .

O momento de inércia é dado por

$$\begin{aligned} I_z &= \iint_S (x^2 + y^2) \underbrace{\delta(x, y, z)}_k dS = \\ &= k \iint_D (R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t) R dt dz = \\ &= kR^3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 dz dt = 2k\pi R^3. \end{aligned}$$

Como  $M = kA(S) = k(2\pi R) \cdot 1 = 2k\pi R$ , então  $I_z = MR^2$ .

10. Sem perda de generalidade, podemos considerar a casca cilíndrica  $S$  conforme figura a seguir.



Então,  $S$  é dada por

$$S : \varphi(t, z) = (a \cos t, a \sin t, z)$$

com  $(t, z) \in D : \begin{cases} 0 \leq t \leq 2\pi \\ -L/2 \leq z \leq L/2 \end{cases}$ . Temos  $dS = a \, dt \, dz$ .

Como um diâmetro pelo centro do cilindro é o eixo  $y$ , então o momento de inércia em relação ao eixo  $y$  é dado por

$$I_y = \iint_S (x^2 + z^2) f(x, y, z) \, dS$$

onde  $f(x, y, z) = k$ . Então:

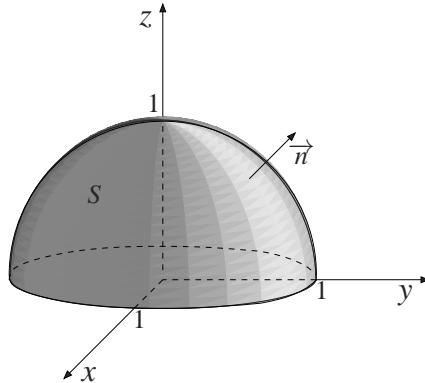
$$\begin{aligned} I_y &= k \iint_D (a^2 \cos^2 t + z^2) a \, dt \, dz = \\ &= ka \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} (a^2 \cos^2 t + z^2) \, dz \, dt = \\ &= ka \int_0^{2\pi} \left[ (a^2 \cos^2 t)z + \frac{z^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} dt = \\ &= kaL \left[ \frac{a^2}{2} \left( t + \frac{\sin 2t}{2} \right) + \frac{L^2 t}{12} \right]_0^{2\pi} = \\ &= 2k\pi aL \left( \frac{a^2}{2} + \frac{L^2}{12} \right). \end{aligned}$$

Como  $M = kA(S)$ , então  $M = k \cdot 2\pi aL = 2k\pi aL$ . Logo,

$$I_y = \frac{Ma^2}{2} + \frac{ML^2}{12}.$$

## AULA 13

1. O esboço de  $S$  está representado na figura a seguir.



Como  $\vec{n} \cdot \vec{k} > 0$ , então  $\vec{n}$  aponta para cima e, portanto, temos que  $\vec{n} = \frac{(x,y,z)}{a} = (x,y,z)$  pois  $a = 1$ . O fluxo é dado por:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iint_S (x - y - 4, y, z) \cdot (x, y, z) \, dS = \\ &= \iint_S (x^2 - xy - 4x + y^2 + z^2) \, dS = \\ &= \iint_S (\underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{=1} - xy - 4x) \, dS = \\ &= \iint_S (1 - xy - 4x) \, dS = \\ &= \iint_S dS - \iint_S (xy + 4x) \, dS = \\ &= A(S) - \iint_S (xy + 4x) \, dS = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4\pi \cdot 1^2 - \iint_S (xy + 4x) \, dS \\ &= 2\pi - \iint_S (xy + 4x) \, dS. \end{aligned}$$

Ora, para calcular  $\iint_S (xy + 4x) \, dS$  devemos parametrizar  $S$ . Então, temos que

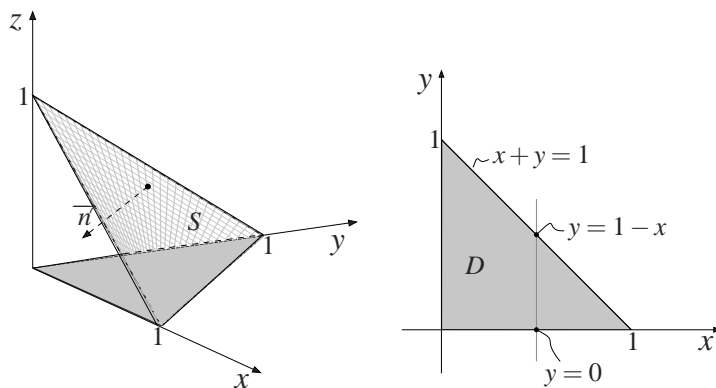
$$S : \varphi(\phi, \theta) = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi)$$

com  $(\phi, \theta) \in D : 0 \leq \phi \leq \pi/2$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Também temos que  $dS = a^2 \sin \phi \, d\phi d\theta = \sin \phi \, d\phi d\theta$ . Logo:

$$\begin{aligned}
 \iint_S (xy + 4x) \, dS &= \\
 &= \iint_D (\sin^2 \phi \sin \theta \cos \theta + 4 \sin \phi \cos \theta) \sin \phi \, d\phi d\theta = \\
 &= \iint_D \sin^3 \phi \sin \theta \cos \theta \, d\phi d\theta + \\
 &+ 4 \iint_D \sin^2 \phi \cos \theta \, d\phi d\theta = \\
 &= \int_0^{\pi/2} \sin^3 \phi \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta \, d\theta d\phi + \\
 &+ 4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \phi \int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta d\phi = \\
 &= \int_0^{\pi/2} \sin^3 \phi \left[ \frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{2\pi} d\phi + \\
 &+ 4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \phi [\sin \theta]_0^{2\pi} d\theta = \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Portanto:  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = 2\pi$ .

2. O esboço de  $S$  está representado na figura a seguir.



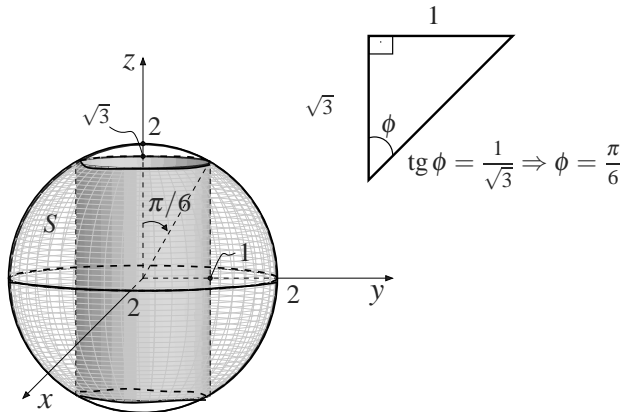
A superfície pode ser descrita por  $S: z = 1 - x - y = f(x, y)$ , com  $(x, y) \in D : 0 \leq x \leq 1$  e  $0 \leq y \leq 1 - x$ . Um vetor normal a  $S$  é dado por  $\vec{N} = (-f_x, -f_y, 1) = (1, 1, 1)$ . Como  $\vec{n}$  aponta para baixo, então  $\vec{n} = \frac{(-1, -1, -1)}{\sqrt{3}}$ .



Temos que  $dS = \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} dx dy = \sqrt{3} dx dy$ .  
Então:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \iint_S (xze^y, -xze^y, z) \cdot \frac{(-1, -1, -1)}{\sqrt{3}} dS = \\ &= \iint_S \frac{(-xze^y + xze^y - z)}{\sqrt{3}} dS = \iint_S \frac{-z}{\sqrt{3}} dS = \\ &= \iint_D \frac{-(1-x-y)}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} dx dy = \\ &= \iint_D (-1+x+y) dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} (-1+x+y) dy dx = \\ &= \int_0^1 \left[ -y + xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx = \frac{-1}{6}. \end{aligned}$$

3. A superfície  $S$  está ilustrada na figura a seguir:



Uma parametrização para  $S$  é dada por:

$$S: \varphi(\phi, \theta) = (2 \sin \phi \cos \theta, 2 \sin \phi \sin \theta, 2 \cos \phi)$$

$$\text{com } (\phi, \theta) \in D = \left[ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right] \times [0, 2\pi].$$

Temos:

$$dS = a^2 \sin \phi d\phi d\theta \stackrel{a=2}{=} 4 \sin \phi d\phi d\theta.$$

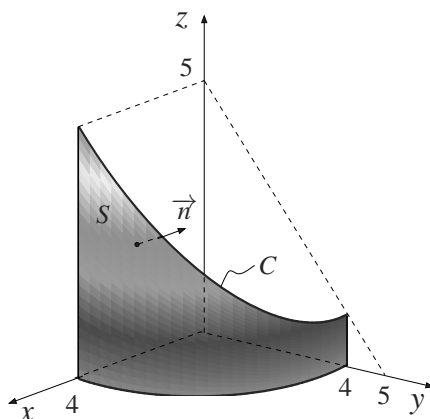
Como  $\vec{n}$  é exterior a  $S$ , então

$$\vec{n} = \frac{(x, y, z)}{a} \stackrel{a=2}{=} \frac{(x, y, z)}{2}.$$

Então:

$$\begin{aligned}
 \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \iint_S (0, 0, -z) \cdot \frac{(x, y, z)}{2} dS = \\
 &= - \iint_S z^2 dS = - \iint_D 4 \cos^2 \phi \cdot 4 \sin \phi d\phi d\theta = \\
 &= -16 \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \sin \phi d\theta d\phi = \\
 &= 32\pi \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \cos^2 \phi d(\cos \phi) = 32\pi \left[ \frac{\cos^3 \phi}{3} \right]_{\pi/6}^{5\pi/6} = \\
 &= \frac{32\pi}{3} \left[ - \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 - \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 \right] = \\
 &= -\frac{32\pi}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} = -4\pi\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

4. A superfície  $S$  está ilustrada na figura a seguir.



Temos:

$$S: \varphi(t, z) = (4 \cos t, 4 \sin t, z)$$

$$\text{com } (t, z) \in D: \begin{cases} 0 \leq t \leq \pi/2 \\ 0 \leq z \leq 5 - 4 \sin t \end{cases}.$$

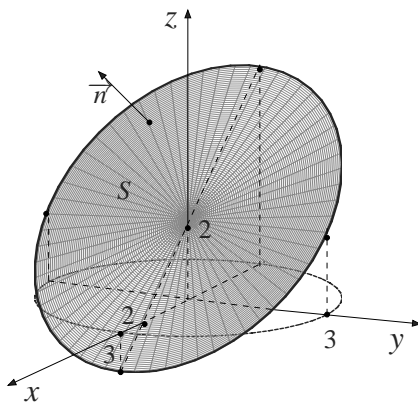
Além disso,  $dS = a dt dz \stackrel{a=4}{=} 4 dt dz$ . Como  $\vec{n}$  aponta para o eixo  $z$ , então:

$$\vec{n} = \frac{(-x, -y, 0)}{a} = \frac{(-x, -y, 0)}{4}.$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
 \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \\
 &= \iint_S (-x, -y, 3y^2z) \cdot \frac{(-x, -y, 0)}{4} dS = \\
 &= \frac{1}{4} \iint_S \underbrace{(x^2 + y^2)}_{=16} dS = \\
 &= 4 \iint_S dS = 4 \iint_S dS = \\
 &= 4 \iint_D 4 dt dz = 16 \int_0^{\pi/2} \int_0^{5-4\sin t} dz dt = \\
 &= 16 \int_0^{\pi/2} (5 - 4\sin t) dt = 16 [5t + 4\cos t]_0^{\pi/2} = \\
 &= 16 \left( \frac{5\pi}{2} - 4 \right) = 40\pi - 64.
 \end{aligned}$$

5. O esboço de  $S$  está representado na figura que se segue.



Como  $S$  é a porção do plano  $z = 2 - x$  que se projeta no plano  $xy$  segundo o disco  $x^2 + y^2 \leq 9$ , definimos  $S$  por  $S: z = 2 - x$ , com  $(x, y) \in D: x^2 + y^2 \leq 9$ . Como  $\vec{n} \cdot \vec{k} \geq 0$ , então o campo  $\vec{n}$  aponta para cima.

Sabemos que  $\vec{N} = (-z_x, -z_y, 1) = (1, 0, 1)$ . Como a última componente de  $\vec{N}$  é positiva, então  $\vec{N}$  aponta para cima.

Logo  $\vec{n} = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}}$  e  $dS = \sqrt{2} \, dxdy$ . Então:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \\ &= \iint_D (2-x, y(2-x), 0) \cdot (1, 0, 1) \, dxdy = \\ &= \iint_D (2-x) \, dxdy. \end{aligned}$$

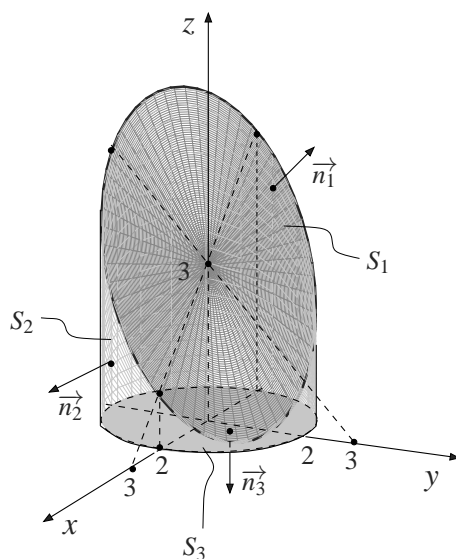
Passando para coordenadas polares, tem-se:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ dxdy = r dr d\theta \end{cases}$$

e  $D_{r\theta}$  é dado por  $D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq r \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$ . Então:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iint_{D_{r\theta}} (2-r \cos \theta) r \, dr d\theta = \\ &= \iint_{D_{r\theta}} (2r - r^2 \cos \theta) \, dr d\theta = \\ &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} (2r - r^2 \cos \theta) \, d\theta dr = \\ &= \int_0^3 [2r\theta - r^2 \sin \theta]_0^{2\pi} dr = \\ &= \int_0^3 4\pi r \, dr = 4\pi \frac{r^2}{2} \Big|_0^3 = 18\pi. \end{aligned}$$

6. O esboço de  $S$  está representado na figura que se segue.



Devemos olhar para  $S$  como reunião das superfícies  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$ , isto é,  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ . Então:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \\ &= \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, dS + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 \, dS + \iint_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{n}_3 \, dS. \end{aligned}$$

**Cálculo de  $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, dS$**

Tem-se  $S_1 : z = 3 - x - y$ , com  $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 4$  donde temos que  $\vec{N} = (-z_x, -z_y, 1) = (1, 1, 1)$ . Como  $\vec{n}_1$  aponta para cima, então  $\vec{n}_1 = \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}}$  e  $dS = \sqrt{3} \, dx dy$ . Logo:

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, dS &= \iint_D (x, y, 3 - x - y) \cdot (1, 1, 1) \, dx dy = \\ &= \iint_D (x + y + 3 - x - y) \, dx dy = 3 \iint_D dx dy = \\ &= 3A(D) = 3 \cdot \pi \cdot 2^2 = 12\pi. \end{aligned}$$

**Cálculo de  $\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 \, dS$**

Tem-se  $S_2 : x^2 + y^2 = 4$ , com  $0 \leq z \leq 3 - x - y$ . Como  $\vec{n}_2$  é exterior a  $S_2$ , então  $\vec{n}_2 = \frac{(x, y, 0)}{2}$ , conforme Aula 11. Logo:

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 \, dS &= \frac{1}{2} \iint_{S_2} (x, y, z) \cdot (x, y, 0) \, dS = \\ &= \frac{1}{2} \iint_{S_2} (x^2 + y^2) \, dS = \\ &= \frac{1}{2} \iint_{S_2} 4 \, dS = 2 \iint_{S_2} dS \end{aligned}$$

onde  $S_2$  é parametrizada por

$$S_2 : \varphi(t, z) = (2 \cos t, 2 \sin t, z)$$

$$\text{com } (t, z) \in D : \begin{cases} 0 \leq t \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 3 - 2 \cos t - 2 \sin t \end{cases}.$$

Sabemos que  $dS = a \, dt \, dz = 2 \, dt \, dz$ , conforme Aula 11. Então:

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 \, dS &= 2 \iint_D 2 \, dt \, dz = \\ &= 4 \int_0^{2\pi} \int_0^{3-2\cos t-2\sin t} dz \, dt = \\ &= 4 \int_0^{2\pi} (3-2\cos t-2\sin t) \, dt = \\ &= 4 \left[ 3t - 2\sin t + 2\cos t \right]_0^{2\pi} = 24\pi. \end{aligned}$$

**Cálculo de  $\iint_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{n}_3 \, dS$**

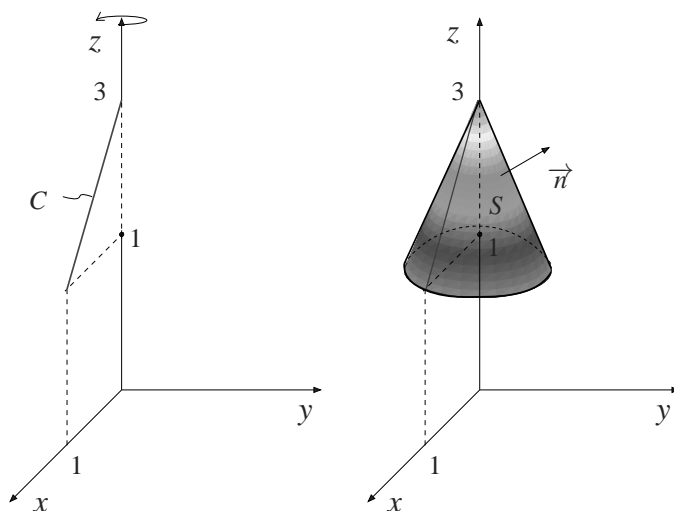
Tem-se  $S_3 : z = 0$ , com  $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 4$ . Logo,  $dS = dx \, dy$ . Observe que  $\vec{n}_3 = -\vec{k} = (0, 0, -1)$ . Então:

$$\begin{aligned} \iint_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{n}_3 \, dS &= \iint_D (x, y, 0) \cdot (0, 0, -1) \, dx \, dy = \\ &= \iint_D 0 \, dx \, dy = 0. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = 12\pi + 24\pi = 36\pi.$$

7. As figuras a seguir, mostram a curva  $C$  e a superfície  $S$ .



Uma parametrização para  $C$  é dada por:

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= (1, 0, 1) + t[(0, 0, 3) - (1, 0, 1)] = \\ &= (1, 0, 1) + t(-1, 0, 2) = (1 - t, 0, 1 + 2t)\end{aligned}$$

com  $t \in [0, 1]$ . Logo:

$$\begin{cases} x(t) = 1 - t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = 1 + 2t \end{cases}$$

com  $t \in [0, 1]$ . Uma parametrização para  $S$  é dada por:

$$\begin{aligned}S: \varphi(\theta, t) &= (x(t) \cos \theta, x(t) \sin \theta, z(t)) = \\ &= ((1 - t) \cos \theta, (1 - t) \sin \theta, 1 + 2t)\end{aligned}$$

com  $\theta \in [0, 2\pi]$  e  $t \in [0, 1]$ .

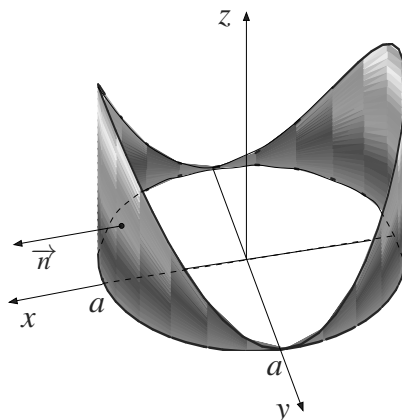
Um vetor normal a  $S$  é dado por:

$$\begin{aligned}\vec{N} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -(1 - t) \sin \theta & (1 - t) \cos \theta & 0 \\ -\cos \theta & -\sin \theta & 2 \end{vmatrix} \\ &= (2(1 - t) \cos \theta, 2(1 - t) \sin \theta, 1 - t).\end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned}\phi &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \\ &= \iint_D ((1 - t)(1 + 2t) \sin \theta, -(1 - t)(1 + 2t) \cos \theta, \\ &\quad (1 - t)^2) \cdot (2(1 - t) \cos \theta, 2(1 - t) \sin \theta, 1 - t) dt = \\ &= \iint_D [2(1 - t)^2(1 + 2t) \sin \theta \cos \theta - \\ &\quad -2(1 - t)^2(1 + 2t) \sin \theta \cos \theta + (1 - t)^3] dt = \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - t)^3 dt = -2\pi \left[ \frac{(1 - t)^4}{4} \right]_0^1 = \\ &= -2\pi \left( 0 - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

8. A superfície  $S$  está ilustrada na figura a seguir.



Uma parametrização para  $S$  é dada por

$$S: \varphi(t, z) = (a \cos t, a \sin t, z)$$

onde  $(t, z) \in D: 0 \leq t \leq 2\pi, 0 \leq z \leq a^2 \cos^2 t$ . Temos que  $\vec{n} = \frac{(x, y, 0)}{a}$  e  $dS = a \, dt \, dz$ . Como

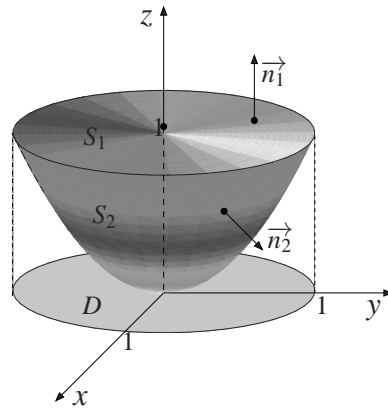
$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

então:

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_S (x, y, z) \cdot \frac{(x, y, 0)}{a} \, dS = \\ &= \frac{1}{a} \iint_S (x^2 + y^2) \, dS = \\ &= \frac{1}{a} \iint_S a^2 \, dS = a \iint_D a \, dt \, dz = \\ &= a^2 \iint_D dt \, dz = a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{a^2 \cos^2 t} dz \, dt = \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} a^2 \cos^2 t \, dt = a^4 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \\ &= a^4 \cdot \frac{1}{2} \left[ t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{2\pi} = \pi a^4. \end{aligned}$$



9. O esboço de  $S = S_1 \cup S_2$  está representado na figura a seguir.



Usando propriedade de fluxo, temos

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, dS + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 \, dS.$$

**Cálculo de  $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, dS$**

Temos  $S_1 : z = 1 = f(x, y)$ , com  $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1$ .  
Temos também que  $\vec{n}_1 = \vec{k}$  e  $dS = dxdy$ . Então:

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, dS &= \iint_{S_1} (-x, 0, 2 \cdot 1) \cdot (0, 0, 1) \, dS = \\ &= \iint_{S_1} 2 \, dS = 2A(S) = 2(\pi \cdot 1^2) = 2\pi. \end{aligned}$$

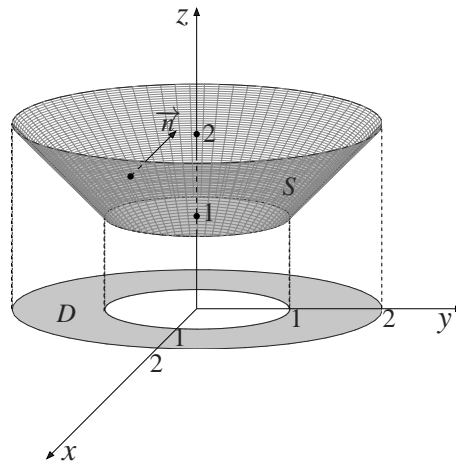
**Cálculo de  $\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 \, dS$**

Temos  $S_2 : z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} = g(x, y)$ , com  $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1$ . Um vetor normal a  $S$  é dado por  $\vec{N} = (-g_x, -g_y, 1) = (-2x, -2y, 1)$  que aponta para cima. Como  $\vec{n}_2$  aponta para baixo, então  $\vec{n}_2 = \frac{(2x, 2y, -1)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}$ .

Temos que  $dS = \|\vec{N}\| dx dy = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy$ . Então:

$$\begin{aligned}
 \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 dS &= \\
 \iint_D (-x, 0, 2(x^2 + y^2)) \cdot (2x, 2y, -1) dx dy &= \\
 = \iint_D (-2x^2 - 2x^2 - 2y^2) dx dy &= \\
 = \iint_{D_{r\theta}} (-2r^2 - 2r^2 \cos^2 \theta) r dr d\theta &= \\
 = -2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + \cos^2 \theta) r^3 dr d\theta &= \\
 = -2 \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^1 \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 \theta) d\theta &= \\
 = -\frac{1}{2} \left[ \theta + \frac{1}{2} \left( \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \right]_0^{2\pi} &= -\frac{3\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

10. O esboço de  $S$  está representado na figura que se segue.



Temos

$$S: z = \sqrt{x^2 + y^2} = f(x, y)$$

com  $(x, y) \in D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ .

Um vetor normal a  $S$  é dado por

$$\vec{N} = (-f_x, -f_y, 1) = \left( \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right).$$

Como  $\vec{n}$  aponta para cima, então temos que,  $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$  e também

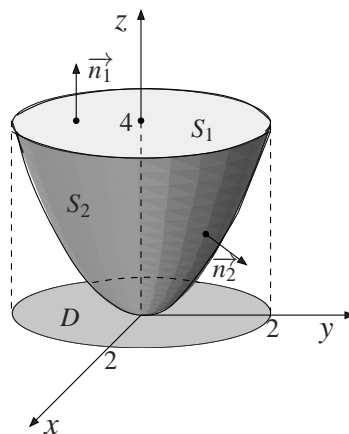
$$dS = \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}} dx dy = \sqrt{2} dx dy.$$

Logo:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \\ &= \iint_D (x, y, 2\sqrt{x^2 + y^2}) \left( \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right) dx dy = \\ &= \iint_D \left( \frac{-x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2\sqrt{x^2 + y^2} \right) dx dy = \\ &= \iint_D \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = \iint_{D_{r\theta}} \frac{r^2}{r} r dr d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^2 dr d\theta = \left[ \frac{r^3}{3} \right]_1^2 \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{14\pi}{3}. \end{aligned}$$

## AULA 14

1. O esboço do sólido  $W$  está representado na figura que se segue.



Vemos que  $\partial W = S_1 \cup S_2$ , orientada positivamente. Logo,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 dS + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 dS.$$

**Cálculo de**  $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 dS$

Temos  $S_1 : z = 4 = f(x, y)$ , com  $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $\vec{n}_1 = \vec{k}$  e também

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} dx dy = \\ &= \sqrt{1 + 0 + 0} dx dy = dx dy. \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 dS &= \iint_D (x, y, 4) \cdot (0, 0, 1) dx dy = \\ &= 4 A(D) = 4\pi \cdot 2^2 = 16\pi. \end{aligned}$$

**Cálculo de**  $\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 dS$

Temos  $S_2 : z = x^2 + y^2 = g(x, y)$ , com  $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 4$ . Um vetor normal a  $S_2$  é dado por  $\vec{N} = (-g_x, -g_y, 1) = (-2x, -2y, 1)$  que está voltado para cima. Como  $\vec{n}_2$  aponta para baixo então  $\vec{n}_2 = \frac{(2x, 2y, -1)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}$ . Temos

$$dS = \|\vec{N}\| dx dy = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy.$$

Então:

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 dS &= \iint_D (x, y, x^2 + y^2) \cdot (2x, 2y, -1) dx dy = \\ &= \iint_D (2x^2 + 2y^2 - x^2 - y^2) dx dy = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy. \end{aligned}$$

Passando para coordenadas polares, temos:

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 dS &= \iint_{D_{r,\theta}} r^2 \cdot r dr d\theta = \\ &= \int_0^2 r^3 \int_0^{2\pi} d\theta dr = 2\pi \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^2 = 8\pi. \end{aligned}$$

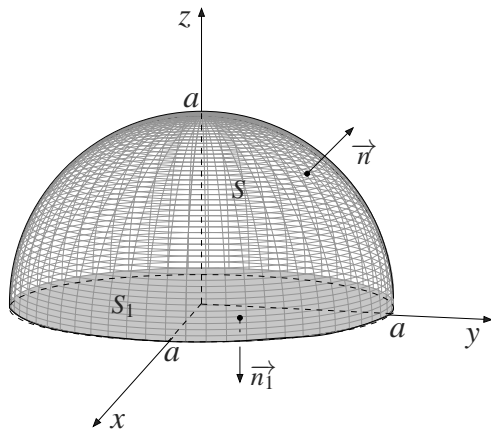
Então:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 16\pi + 8\pi = 24\pi.$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}
 \iiint_W \operatorname{div} \vec{F} \, dV &= 3 \iiint_W dV = \\
 &= 3 \iint_D \int_{x^2+y^2}^4 dz \, dx \, dy = 3 \iint_D (4 - x^2 - y^2) \, dx \, dy = \\
 &= 3 \iint_{D_{r\theta}} (4 - r^2) r \, dr \, d\theta = 3 \int_0^2 (4r - r^3) \int_0^{2\pi} d\theta \, dr = \\
 &= 6\pi \left[ 2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 = 6\pi(8 - 4) = 24\pi.
 \end{aligned}$$

2. Seja  $\bar{S} = S \cup S_1$ , onde  $S_1 : z = 0, (x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq a^2$  com  $\vec{n}_1 = -\vec{k}$ .



Seja  $W$  o sólido limitado por  $\bar{S}$ . Como  $\partial W = \bar{S}$  está orientada positivamente e  $\vec{F}$  é de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^3$ , podemos aplicar o teorema de Gauss em  $\bar{S}$ .

Temos

$$\begin{aligned}
 \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS + \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, dS &= \\
 &= \iiint_W \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \\
 &= \iiint_W (2 + 3 + 1) \, dV = 6V(W) = \\
 &= 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 = 4\pi a^3.
 \end{aligned}$$

**Cálculo de**  $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 dS$

Temos

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2} dx dy = \\ &= \sqrt{1 + 0 + 0} dx dy = dx dy. \end{aligned}$$

Logo:

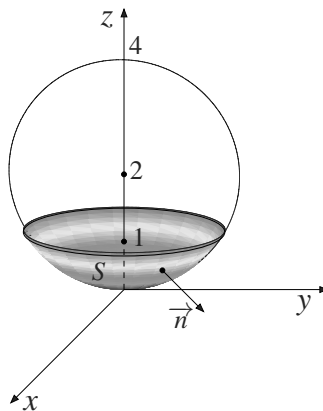
$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 dS &= \\ &= \iint_D (2x + e^0, 3y - 0, 0 - 2) \cdot (0, 0, -1) dx dy = \\ &= 2 \iint_D dx dy = 2A(D) = 2\pi a^2. \end{aligned}$$

Como  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 2\pi a^3$ , então

$$2\pi a^3 + 2\pi a^2 = 4\pi a^3$$

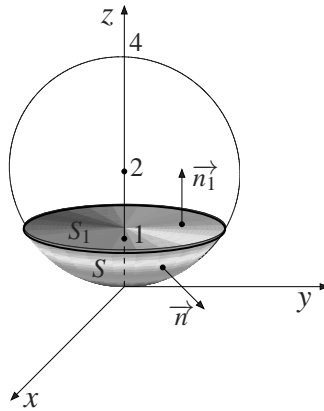
donde  $2\pi a^2 = 2\pi a^3$ . Logo,  $a = 1$ .

3. De  $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$ , temos  $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$ . Logo, o esboço de  $S$  é a figura que se segue.



Seja a superfície  $\bar{S} = S \cup S_1$ , onde  $S_1$  é dada por  $S_1 : z = 1 = f(x, y)$ , com  $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 3$  e com  $\vec{n}_1 = \vec{k}$  e, também

$$dS = \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} dx dy = dx dy.$$



Seja  $W$  o sólido limitado por  $\bar{S}$ . Como estamos nas condições do teorema de Gauss, temos:

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_1} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n}_1 dS = \iiint_W \text{div rot } \vec{F} dV.$$

Da Aula 7, temos que  $\text{div rot } \vec{F} = 0$ . Logo,

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_1} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n}_1 dS = \iiint_W 0 dV = 0.$$

**Cálculo de  $\iint_{S_1} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n}_1 dS$**

$$\text{Temos } \text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y+2 & x^3+y^4 & 2xz-1 \end{vmatrix} =$$

$$(0, -2z, 3x^2 - x^2) = (0, -2z, 2x^2).$$

$$\text{Logo: } \iint_{S_1} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n}_1 dS = \iint_{S_1} (0, -2 \cdot 1, 2x^2) \cdot (0, 0, 1) dS =$$

$$= \iint_{S_1} 2x^2 dS = 2 \int_0^{\sqrt{3}} r^3 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta dr =$$

$$= 2 \int_0^{\sqrt{3}} r^3 \cdot \frac{1}{2} \left[ \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{2\pi} dr =$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} r^3 dr = 2\pi \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{9\pi}{2}.$$

$$\text{Portanto: } \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS = -\frac{9\pi}{2}.$$

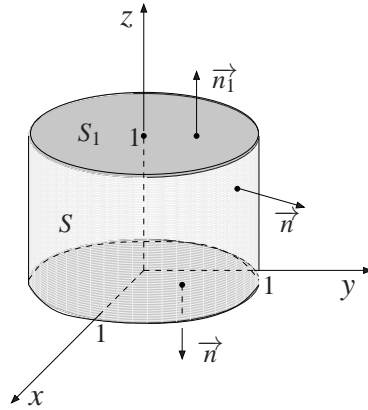
4. Temos:  $\iint_S \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} dS = \iiint_S \nabla f \cdot \vec{n} dS.$

Do teorema de Gauss, temos:

$$\begin{aligned} \iint_S \nabla f \cdot \vec{n} dS &= \iiint_W \operatorname{div} \nabla f dV = \\ &= \iiint_W \nabla \cdot \nabla f dV = \iiint_W \nabla^2 f dV. \end{aligned}$$

Logo:  $\iint_S \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} dS = \iiint_W \nabla^2 f dV.$

5. Seja  $\bar{S} = S \cup S_1$ , onde  $S_1$  é a tampa da lata. Logo,  $S_1$  é dada por  $S_1 : z = 1$ , com  $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1$  e com  $\vec{n}_1 = \vec{k}$  e  $dS = dx dy$ .



Seja  $W$  o sólido limitado por  $\bar{S}$ . Pelo teorema de Gauss, temos

$$\begin{aligned} \iint_{\bar{S}} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} dS &= \iint_{\bar{S}} \nabla f \cdot \vec{n} dS = \\ &= \iiint_W \nabla \cdot \nabla f dV = \iiint_W \nabla^2 f dV = \\ &= \iiint_W (x^2 + y^2) dV = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 r^2 \cdot r dr dz d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 r^3 dr dz d\theta = \\ &= \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 dz d\theta = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$



Mas: 
$$\iint_{\bar{S}} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} dS = \iint_S \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} dS + \iint_{S_1} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}_1} dS.$$

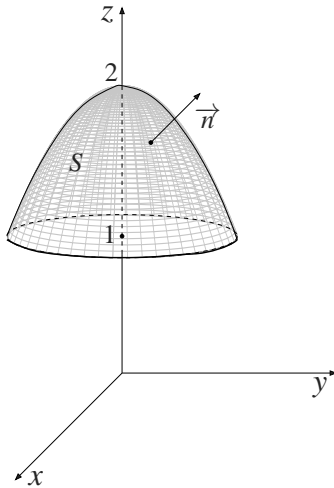
**Cálculo de** 
$$\iint_{S_1} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}_1} dS$$

Temos:

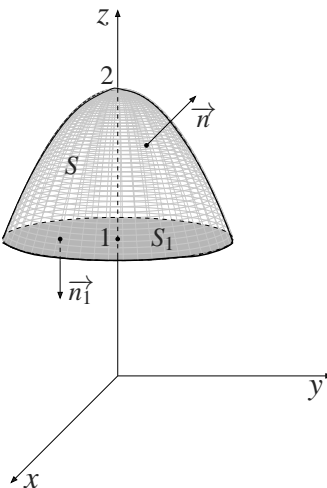
$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}_1} dS &= \iint_{S_1} \nabla f \cdot \vec{n}_1 dS = \\ &= \iint_{S_1} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, 1), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, 1), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, 1) \right) \cdot \\ &\quad \cdot (0, 0, 1) dS = \\ &= \iint_{S_1} \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, 1) dS = \iint_{S_1} \frac{1}{3} dS = \\ &= \frac{1}{3} A(S_1) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Logo: 
$$\iint_S \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} dS = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

6. O esboço da superfície  $S: z = 2 - x^2 - y^2$  está representado abaixo.



O cálculo direto de  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$  seria difícil. Então fechamos a superfície  $S$  com a superfície  $S_1$ , o disco  $x^2 + y^2 \leq 1$ , contido no plano  $z = 1$ , orientado com  $\vec{n}_1 = -\vec{k}$ . Seja  $\bar{S} = S \cup S_1$ , da figura que se segue.



Seja  $W$  a região do espaço limitada por  $\bar{S}$ . Pelo Teorema de Gauss, temos:

$$\begin{aligned} \iint_{\bar{S}} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iiint_W \operatorname{div} \vec{F} \, dxdydz = \\ &= \iiint_W (0 + 0 + 1) \, dxdydz = \iiint_W dxdydz \end{aligned}$$

com

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, 1 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$$

onde  $D$  é dado por  $D: x^2 + y^2 \leq 1$ . Passando para coordenadas cilíndricas, temos:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & r \cos \theta \\ y & = & r \sin \theta \\ z & = & z \\ dxdydz & = & r dr d\theta dz \\ x^2 + y^2 & = & r^2 \end{array} \right.$$

e  $D_{r\theta z}$  é dado por

$$D_{r\theta z}: \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 1 \leq z \leq 2 - r^2 \end{array} \right. .$$

$$\begin{aligned} \text{Então: } \iint_{\bar{S}} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iiint_{W_{r\theta z}} r \, dr d\theta dz = \\ &= \int_0^1 r \int_1^{2-r^2} \int_0^{2\pi} d\theta dz dr = 2\pi \int_0^1 r \int_1^{2-r^2} dz dr = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \int_0^1 r(2 - r^2 - 1) \, dr = 2\pi \int_0^1 r(1 - r^2) \, dr = \\
&= 2\pi \int_0^1 (r - r^3) \, dr = 2\pi \left[ \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

ou

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS + \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, dS = \frac{\pi}{2}.$$

**Cálculo de  $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, dS$**

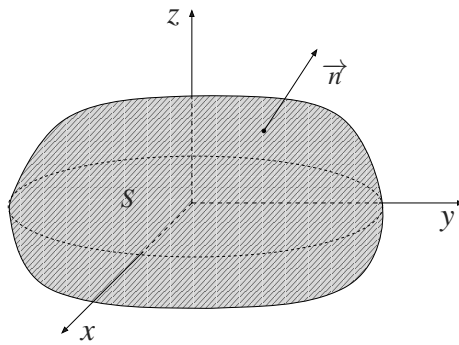
Temos  $S_1 : z = 1$ ,  $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $\vec{n}_1 = -\vec{k}$  e  $dS = dxdy$ . Então:

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, dS &= \iint_D \vec{F}(x, y, 1) \cdot (0, 0, -1) \, dxdy = \\
&= \iint_D (\arctg(y^2), \ln(x^2 + 1), 1) \cdot (0, 0, -1) \, dxdy = \\
&= - \iint_D dxdy = -A(D) = -\pi \cdot 1^2 = -\pi.
\end{aligned}$$

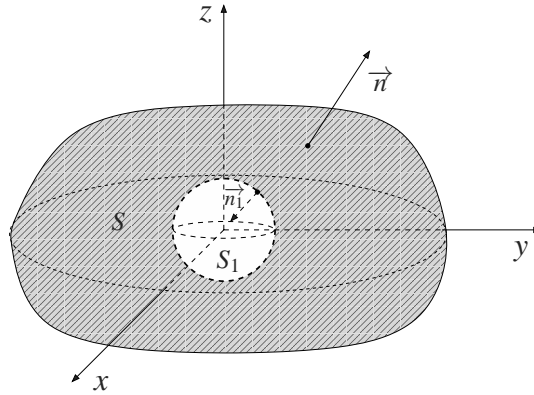
Logo:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}.$$

7. Seja  $S$  uma superfície fechada contendo a origem.



Seja  $W$  a região sólida limitada por  $S$ . Como  $W$  não está contida no domínio de  $\vec{E}$ ,  $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ , então não podemos aplicar o Teorema de Gauss no cálculo de  $\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS$ . Então consideremos uma esfera  $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , com  $a > 0$  tal que  $S_1 \subset W$ .



Seja  $W_1$  a região sólida limitada por  $S$  e  $S_1$ . Logo  $W_1 \subset \text{dom } \vec{E}$ . Temos  $\partial W_1 = S \cup S_1$ . Seja  $\vec{n}_1$  a normal a  $S_1$  apontando para o interior de  $S_1$ . Como  $\partial W_1$  está orientada positivamente, podemos aplicar o Teorema de Gauss. Temos, então,

$$\iint_{\partial W_1} \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{W_1} \text{div } \vec{E} \, dxdydz$$

ou

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS + \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n}_1 \, dS = \iiint_{W_1} \text{div } \vec{E} \, dxdydz.$$

Verifique que  $\text{div } \vec{E} = 0$ . Então:

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = - \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n}_1 \, dS = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot (-\vec{n}_1) \, dS.$$

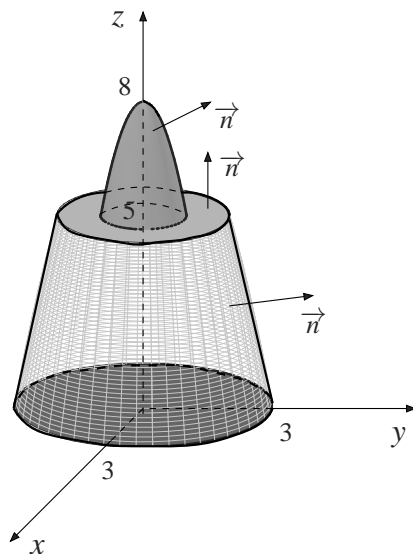
**Cálculo de  $\iint_{S_1} \vec{E} \cdot (-\vec{n}_1) \, dS$**

Se  $\vec{n}_1$  aponta para o interior de  $S_1$ , então  $-\vec{n}_1$  aponta para o exterior de  $S_1$ . Logo  $-\vec{n}_1 = \frac{(x, y, z)}{a}$ . Então

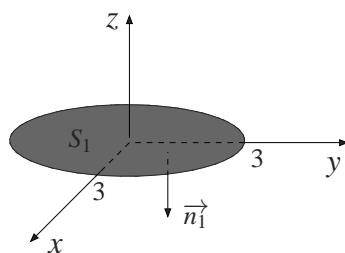
$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \vec{E} \cdot (-\vec{n}_1) \, dS &= \iint_{S_1} \frac{\epsilon Q(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \frac{(x, y, z)}{a} \, dS = \\ &= \frac{\epsilon Q}{a} \iint_{S_1} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \, dS = \frac{\epsilon Q}{a} \iint_{S_1} \frac{a^2}{(a^2)^{3/2}} \, dS = \\ &= \frac{\epsilon Q}{a^2} \iint_{S_1} dS = \frac{\epsilon Q}{a^2} A(S_1) = \frac{\epsilon Q}{a^2} \cdot 4\pi a^2 = 4\pi \epsilon Q. \end{aligned}$$

Logo:  $\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = 4\pi \epsilon Q$ .

8. A superfície  $S$  **não é fechada** e pode ser visualizada na figura que se segue.



Como  $\text{div } \vec{F} = 1 - 2 + 1 = 0$ , vamos usar o teorema de Gauss. Para isso, é necessário fechar  $S$  através da superfície  $S_1$ , porção do plano  $z = 0$  com  $x^2 + y^2 \leq 9$ , orientada com  $\vec{n}_1 = -\vec{k}$ .



Seja  $W$  o sólido limitado por  $S$  e  $S_1$ . Como  $\partial W = S \cup S_1$  está orientada positivamente, podemos aplicar o teorema de Gauss. Temos, então,

$$\begin{aligned} \iint_{\partial W} \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \iiint_W \text{div } \vec{F} dx dy dz = \\ &= \iiint_W 0 dx dy dz = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 dS = 0.$$

Mas

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 dS &= \\ &= \iint_{S_1} (x, -2y + e^x \cos 0, 0 + x^2) \cdot (0, 0, -1) dS = \\ &= - \iint_{S_1} x^2 dS \end{aligned}$$

onde  $S_1$  é dada por  $z = 0$ , com  $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 9$  e  $\vec{n}_1 = -\vec{k}$ . Logo:

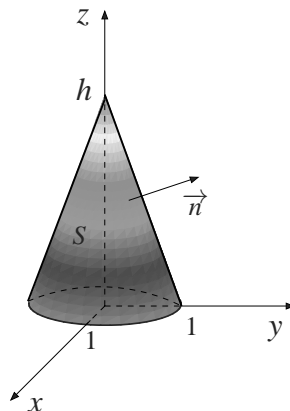
$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy = \\ &= \sqrt{1 + 0 + 0} dxdy = dxdy. \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 dS &= - \iint_D x^2 dxdy \text{ (em coordenadas polares) } = \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^3 \cos^2 \theta dr d\theta = \\ &= - \frac{3^4}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \\ &= - \frac{3^4}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = - \frac{81\pi}{4}. \end{aligned}$$

Logo:  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \frac{81\pi}{4}.$

9. A superfície  $S$  **não fechada** pode ser visualizada na figura a seguir.



Como  $\vec{n}$  tem a componente  $\vec{k}$  não negativa, então  $\vec{n}$  é exterior a  $S$ . Temos:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + 2 = 2$$

pois  $f$  é de classe  $C^2$  e portanto, vale aqui o teorema de Schwartz.

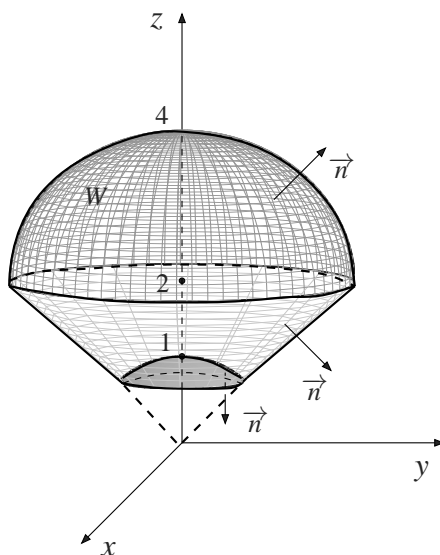
Para aplicarmos o teorema de Gauss, devemos considerar o sólido  $W$  limitado por  $S$  e  $S_1$  porção do plano  $z = 0$ , com  $x^2 + y^2 \leq 1$ , orientada com  $\vec{n}_1 = -\vec{k}$ . Temos, então,

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS + \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, dS &= \\ = \iiint_W \operatorname{div} \vec{F} \, dx dy dz &= 2V(W) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot h = \frac{2\pi h}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mas: } \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, dS &= \\ = \iint_{S_1} \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, 0), -\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, 0), 2(0+1) \right) \cdot (0, 0, -1) \, dS &= \\ = \iint_{S_1} (-2) \, dS = -2A(S_1) = -2\pi. \end{aligned}$$

$$\text{Logo: } \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{2\pi}{3}(h+3).$$

10. A figura que se segue mostra o sólido  $W$ .



Como estamos nas condições do teorema de Gauss, temos:

$$\begin{aligned}
 \iint_{S=\partial W} \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \iiint_W \operatorname{div} \vec{F} dxdydz = \\
 &= \iiint_W (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz = \\
 &= \iiint_{W_{\rho\phi\theta}} \rho^2 \cdot \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \\
 &= \iiint_{W_{\rho\phi\theta}} \rho^4 \sin \phi d\rho d\phi d\theta
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 W_{\rho\phi\theta} &= \{(\rho, \phi, \theta) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}, \\
 &1 \leq \rho \leq 4 \cos \phi\}.
 \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}
 \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_1^{4 \cos \phi} \rho^4 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \sin \phi \left[ \frac{\rho^5}{5} \right]_1^{4 \cos \phi} d\phi d\theta = \\
 &= \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \left( 4^5 \cos^5 \phi \sin \phi - \sin \phi \right) d\phi d\theta = \\
 &= \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{4^5}{6} \cos^6 \phi + \cos \phi \right]_0^{\pi/4} d\theta = \\
 &= \frac{1}{5} \left( -\frac{4^5}{6} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^6 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{4^5}{6} - 1 \right) \int_0^{2\pi} d\theta = \\
 &= \frac{2\pi}{5} \left( \frac{4^5}{6} \cdot \frac{7}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) = \\
 &= \frac{2\pi}{5} \left( \frac{4^3 \cdot 7}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) = \\
 &= \frac{2\pi}{5} \left( \frac{445}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\pi}{15} \left( 890 + 3\sqrt{2} \right).
 \end{aligned}$$



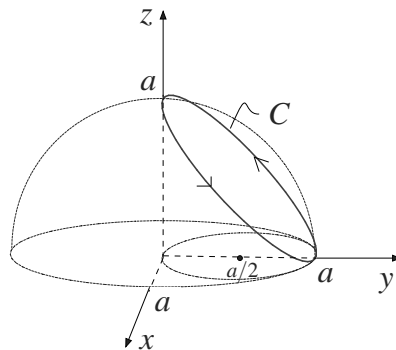
## AULA 15

1. Calculemos a interseção das superfícies:

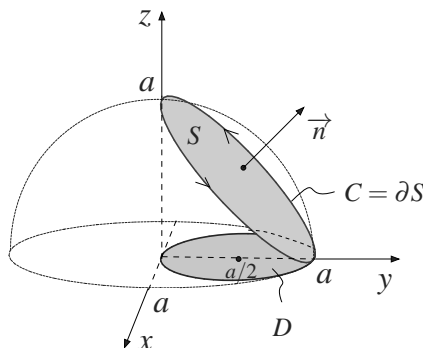
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ z = a - y \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + (y - a)^2 = a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 2\left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{\left(y - \frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = 1$$

que é uma elipse de centro  $\left(0, \frac{a}{2}\right)$  e semieixos  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$  e  $\frac{a}{2}$ . Esta elipse é a projeção de  $C$  sobre o plano  $xy$ . A curva  $C$  com a orientação escolhida pode ser visualizada na figura que se segue.



Considere a superfície  $S$ , porção do plano  $z = a - y$ , limitada por  $C$ , que pode ser vista na figura a seguir.



A projeção de  $S$  sobre o plano  $xy$  é a região  $D$  dada por

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{\left(y - \frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} \leq 1.$$

De acordo com a orientação de  $C = \partial S$ , segue que  $\vec{n}$  aponta para cima.

Então,  $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$ , onde  $\vec{N} = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right) = (0, 1, 1)$ .

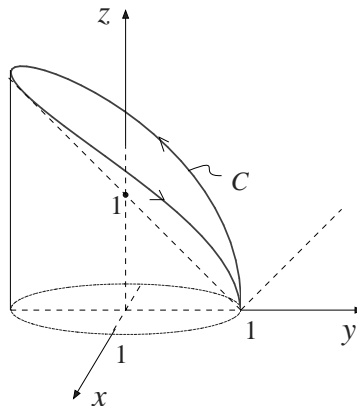
Logo,  $\vec{n} = \frac{(0, 1, 1)}{\sqrt{2}}$  e  $dS = \sqrt{2} \, dxdy$ . Temos:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y+z & x+4y & 2x+y \end{vmatrix} = \\ &= (1, 1-2, 1-3) = (1, -1, -2). \end{aligned}$$

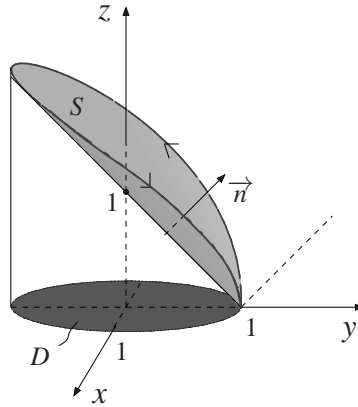
Do teorema de Stokes, temos:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \\ &= \iint_D (1, -1, -2) \cdot \frac{(0, 1, 1)}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \, dxdy = \\ &= \iint_D (-3) \, dxdy = -3 \cdot A(D) = \\ &= -3\pi \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{2} = -\frac{3\sqrt{2} \pi a^2}{4}. \end{aligned}$$

2. A curva com a orientação que escolhemos pode ser visualizada na figura a seguir.



Consideremos a superfície  $S$ , porção do cone  $z = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$  que se projeta no plano  $xy$  segundo o disco  $D : x^2 + y^2 \leq 1$  (veja a figura que se segue).



De acordo com a orientação escolhida para  $C$ , resulta que  $\vec{n}$  aponta para cima. Então,  $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$  onde

$$\vec{N} = \left( -\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1 \right) = \left( -\frac{x}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}}, \frac{-(y-1)}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}}, 1 \right).$$

Como  $\|\vec{N}\| = \sqrt{1 + \frac{x^2 + (y-1)^2}{x^2 + (y-1)^2}} = \sqrt{2}$  então

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{-x}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}}, \frac{-(y-1)}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}}, 1 \right)$$

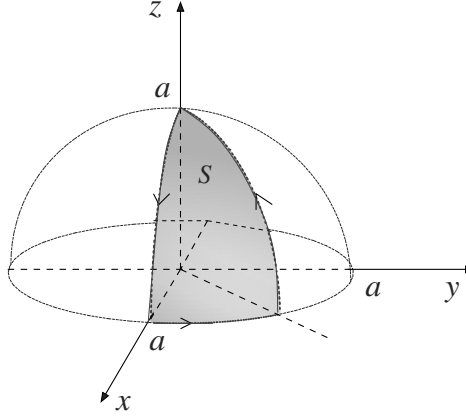
e  $dS = \sqrt{2} \, dx \, dy$ . Temos:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & (1-y)z + x^2 + x & \frac{x^2}{2} + e^z \end{vmatrix} \\ &= (-1 + y, -x, 2x + 1 - 2x) \\ &= (-1 + y, -x, 1). \end{aligned}$$

Do teorema de Stokes, vem:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_D (-1 + y, -x, 1) \cdot \\ &\cdot \left( \frac{-x}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}}, \frac{-y+1}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}}, 1 \right) dx \, dy = \\ &\iint_D \left( \frac{x - xy + xy - x}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} + 1 \right) dx \, dy = \\ &= \iint_D dx \, dy = A(D) = \pi. \end{aligned}$$

3. Considere a superfície  $S$ , porção da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , limitada por  $C$ , que pode ser vista na figura que se segue.



Temos que  $S$  pode ser parametrizada por:

$$\varphi(\phi, \theta) = (a \sin \phi \cos \theta, a \sin \phi \sin \theta, a \cos \phi)$$

com  $(\phi, \theta) \in D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ . De acordo com a orientação de  $C$ , segue que  $\vec{n}$  é exterior à esfera. Logo,  $\vec{n} = \frac{(x, y, z)}{a}$ . Temos que  $dS = a^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta$ .

Do teorema de Stokes, temos:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S (x, -2y, z) \cdot \frac{(x, y, z)}{a} \, dS = \\ &= \frac{1}{a} \iint_S (x^2 - 2y^2 + z^2) \, dS = \frac{1}{a} \iint_S (a^2 - 3y^2) \, dS = \\ &= \frac{1}{a} \iint_D (a^2 - 3a^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta) a^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta = \\ &= a^3 \iint_D (\sin \phi - 3 \sin^3 \phi \sin^2 \theta) \, d\phi \, d\theta = \\ &= a^3 \int_0^{\pi/2} \left[ \theta \sin \phi - \frac{3}{2} \sin^3 \phi \left( \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \right]_0^{\pi/4} d\phi = \\ &= a^3 \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{\pi}{4} \sin \phi - \frac{3}{2} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) \sin^3 \phi \right] d\phi = \\ &= a^3 \left[ -\frac{\pi}{4} \cos \phi - \frac{3}{2} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) \left( -\cos \phi + \frac{\cos^3 \phi}{3} \right) \right]_0^{\pi/2} = \\ &= a^3 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{3} \right) \right) = a^3 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{a^3}{2}. \end{aligned}$$

4. a. Como  $\text{dom } \vec{F} = \mathbb{R}^3$  e

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xz + y^2 & 2xy + 3y^2 & e^z + x^2 \end{vmatrix} = \\ &= (0, 2x - 2x, 2y - 2y) = \vec{0} \end{aligned}$$

então, pelo teorema das equivalências, segue que  $\vec{F}$  é conservativo.

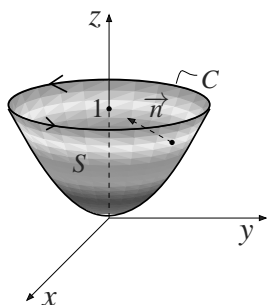
- b. Encontremos os pontos de interseção:

$$\begin{cases} z = 9 - x^2 - y^2 \\ z = -4 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow -4 = 9 - x^2 - 4 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3.$$

Então, as extremidades da curva  $C$  são  $A = (-3, 2, -4)$  e  $B = (3, 2, -4)$ . Orientemos  $C$  de  $A$  para  $B$ . Também do teorema das equivalências segue que a integral de linha não depende do caminho que liga  $A$  a  $B$ . Então, consideremos o segmento de reta  $AB$ , dado por  $z = -4$  e  $y = 2$ , com  $-3 \leq x \leq 3$  donde  $dz = 0$  e  $dy = 0$ . Então:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \\ &= \int_C (2xz + y^2) dx + (2xy + 3y^2) dy + (e^z + x^2) dz = \\ &= \int_{-3}^3 (-8x + 4) dx = \left[ -4x^2 + 4x \right]_{-3}^3 = 24. \end{aligned}$$

5. O esboço da superfície  $S$  está representado na figura que se segue.



Como  $\vec{n}$  tem componente  $z$  positivo, então  $\vec{n}$  aponta para o interior de  $S$ . Logo, a orientação de  $C = \partial S$  é no sentido anti-horário quando vista de cima. Use a regra da mão direita para se convencer.

Pelo Teorema de Stokes, temos

$$\iint_S \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

onde  $C$  é dada por  $C : z = 1, x^2 + y^2 = 1$ . Logo, uma parametrização de  $C$  é dada por  $C : \gamma(t) = (\cos t, \sin t, 1)$ , com  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Temos:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin t, 0, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) \, dt = \\ &= -\int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = -\frac{1}{2} \left[ t - \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{2\pi} = -\pi. \end{aligned}$$

Logo:  $\iint_S \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = -\pi.$

6. Da descrição de  $S$ , temos

$$x = r \cos \theta \quad (1)$$

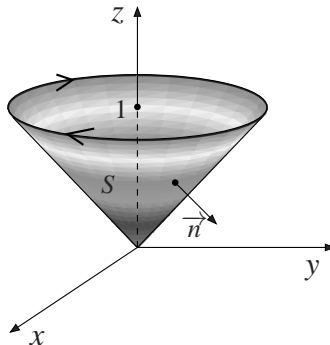
$$y = r \sin \theta \quad (2)$$

$$z = r \quad (3)$$

com

$$0 \leq r \leq 1 \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (4)$$

De (1), (2), (3) e (4), temos que  $S$  é um cone dado por  $S : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , com  $0 \leq z \leq 1$ .



Note que o bordo de  $S$ ,  $\partial S$ , é a circunferência  $x^2 + y^2 = 1$ , contida no plano  $z = 1$ . Como  $\vec{n}$  é exterior a  $S$ , então o bordo  $\partial S$  está orientado no sentido horário quando vista de cima. Parametrizando  $\partial S^-$ , temos  $\partial S^- : \gamma(t) = (\cos t, \sin t, 1)$ , com  $0 \leq t \leq 2\pi$  donde  $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$ . Pelo Teorema de Stokes, temos

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \\ &= - \int_{\partial S^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \\ &= - \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt = \\ &= - \int_0^{2\pi} (\cos^2 t \sin t, 2 \sin^3 t, 3) \cdot \\ &\quad \cdot (-\sin t, \cos t, 0) \, dt = \\ &= - \int_0^{2\pi} (-\cos^2 t \sin^2 t + 2 \sin^3 t \cos t) \, dt = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} 4 \cos^2 t \sin^2 t \, dt - 2 \int_0^{2\pi} \sin^3 t \cos t \, dt = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t \, dt - 2 \int_0^{2\pi} \sin^3 t \cos t \, dt = \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t \, d(2t) - 2 \int_0^{2\pi} \sin^3 t \, d(\sin t) = \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \left[ 2t - \frac{\sin 4t}{2} \right]_0^{2\pi} - 2 \left[ \frac{\sin^4 t}{4} \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

7. Calcular a integral diretamente é uma tarefa difícil. Então, calculemos o  $\text{rot } \vec{F}$ . Temos:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ e^{-y} - ze^{-x} & e^{-z} - xe^{-y} & e^{-x} - ye^{-z} \end{vmatrix} = \\ &= (-e^{-z} + e^{-z}, -e^{-x} + e^{-x}, -e^{-y} + e^{-y}) = \\ &= (0, 0, 0) = \vec{0}. \end{aligned}$$

Como  $\text{dom } \vec{F} = \mathbb{R}^3$  então, pelo Teorema das Equivalências,

segue que  $\vec{F}$  é um campo gradiente, isto é, existe um campo escalar  $\varphi(x, y, z)$ , tal que:

$$\nabla \varphi = \vec{F} \text{ em } \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = e^{-y} - ze^{-x} & (1) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = e^{-z} - xe^{-y} & (2) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} = e^{-x} - ye^{-z} & (3) \end{cases}$$

Integrando (1), (2), (3) em relação a  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, temos:

$$\varphi(x, y, z) = xe^{-y} + ze^{-x} + A(y, z)$$

$$\varphi(x, y, z) = ye^{-z} + xe^{-y} + B(x, z)$$

$$\varphi(x, y, z) = ze^{-x} + ye^{-z} + C(x, y)$$

Por inspeção, temos que:

$$A(y, z) = ye^{-z}$$

$$B(x, z) = ze^{-x}$$

$$C(x, y) = xe^{-y}.$$

Logo,  $\varphi(x, y, z) = xe^{-y} + ze^{-x} + ye^{-z}$ . Então, temos que

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \varphi(\gamma(1)) - \varphi(\gamma(0))$$

onde:

$$\gamma(1) = \left( \frac{\ln 2}{\ln 2}, \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}, \frac{1-e}{1-e} \right) = (1, 1, 1)$$

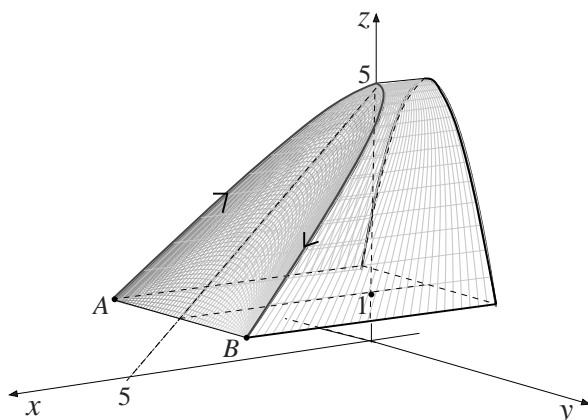
$$\gamma(0) = \left( \frac{\ln 1}{\ln 2}, \operatorname{sen} 0, \frac{1-e^0}{1-e} \right) = (0, 0, 0).$$

Logo:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \varphi(1, 1, 1) - \varphi(0, 0, 0) = \\ &= (e^{-1} + e^{-1} + e^{-1}) - (0 + 0 + 0) = 3e^{-1}. \end{aligned}$$



8. O esboço de  $C$  está representado a seguir.



Resolvendo o sistema  $\begin{cases} z = 5 - y^2 \\ z = 1 \\ x + z = 5 \end{cases}$  obtemos  
 $A = (4, -2, 1)$  e  $B = (4, 2, 1)$ . Temos:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ yz + x^3 & xz + 3y^2 & xy + 4 \end{vmatrix} = \\ &= (x - x, y - y, z - z) = \vec{0}. \end{aligned}$$

Como  $\text{dom } \vec{F} = \mathbb{R}^3$  então, pelo Teorema das Equivalências,  $\vec{F}$  é um campo gradiente, isto é, existe  $\varphi(x, y, z)$  tal que  $\nabla \varphi = \vec{F}$  em  $\mathbb{R}^3$  ou

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = yz + x^3 & (1) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = xz + 3y^2 & (2) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} = xy + 4 & (3) \end{cases}$$

Integrando (1), (2), (3) em relação a  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, temos:

$$\begin{cases} \varphi(x, y, z) = xyz + \frac{x^4}{4} + A(y, z) \\ \varphi(x, y, z) = xyz + y^3 + B(x, z) \\ \varphi(x, y, z) = xyz + 4z + C(x, y) \end{cases}$$

Por inspeção, vemos que

$$A(y, z) = y^3 + 4z$$

$$B(x, z) = \frac{x^4}{4} + 4z$$

$$C(x, y) = \frac{x^4}{4} + y^3.$$

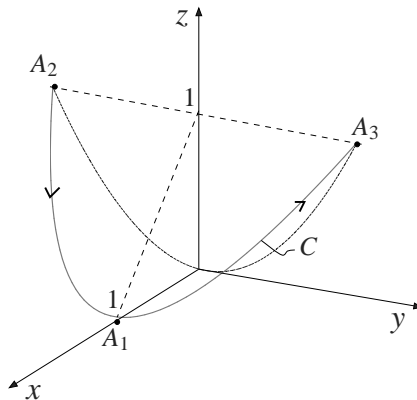
Logo, temos que

$$\varphi(x, y, z) = xyz + \frac{x^4}{4} + y^3 + 4z$$

é uma função potencial de  $\vec{F}$ . Assim:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \varphi(B) - \varphi(A) = \varphi(4, 2, 1) - \varphi(4, -2, 1) = \\ &= (8 + 4 + 8 + 4) - (-8 + 4 - 8 + 4) = 24 + 8 = 32. \end{aligned}$$

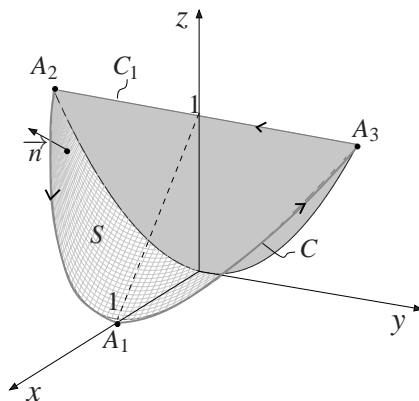
9. Esboçando o cilindro parabólico  $z = y^2$  e o plano  $x + z = 1$ , vemos que os pontos  $A_1, A_2$  e  $A_3$  são comuns às duas superfícies. Ligando-os, temos um esboço de  $C$  na figura que se segue.



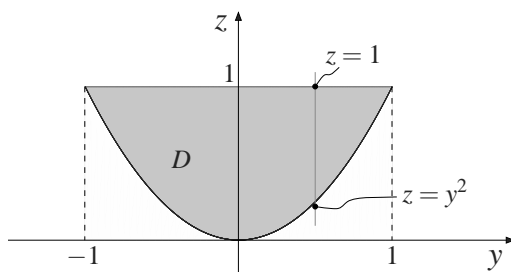
Observe que calcular  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  pela definição é uma tarefa extremamente complicada. Temos:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -2y + e^{\sin x} & -z + y & x^3 + e^{\sin z} \end{vmatrix} = \\ &= (1, -3x^2, 2) \neq \vec{0}. \end{aligned}$$

Logo,  $\vec{F}$  não é conservativo. Para aplicar o teorema de Stokes, devemos fechar  $C$  utilizando o segmento de reta  $C_1$  que liga  $A_3$  a  $A_2$ .



Seja  $S$  a porção do plano  $x + z = 1$ , limitada por  $\bar{C} = C \cup C_1$  e que se projeta no plano  $yz$  segundo a região  $D$  cujo esboço se segue.



Descrevemos  $S$  por  $S : x = 1 - z = f(y, z)$ , com  $(y, z) \in D : -1 \leq y \leq 1$  e  $y^2 \leq z \leq 1$ . Considerando a orientação de  $\bar{C} = \partial S$ , segue que a normal a  $S$  está voltada para cima. Um vetor normal a  $S$  é  $\vec{N} = (1, -f_y, -f_z) = (1, 0, 1)$ . Logo,  $\vec{n} = \frac{(1, 0, 1)}{\sqrt{2}}$  e  $dS = \sqrt{2} dy dz$ . Pelo teorema de Stokes, temos:

$$\begin{aligned} \int_{\bar{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \\ &= \iint_D (1, -3(1-z)^2, 2) \cdot (1, 0, 1) \, dy dz = \\ &= \iint_D (1+2) \, dy dz = 3 \iint_D dy dz = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 3 \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 dz dy = 3 \int_{-1}^1 (1 - y^2) dy = \\
 &= 3 \left[ y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^1 = 6 \left( 1 - \frac{1}{3} \right) = 4.
 \end{aligned}$$

ou

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 4.$$

**Cálculo de  $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$**

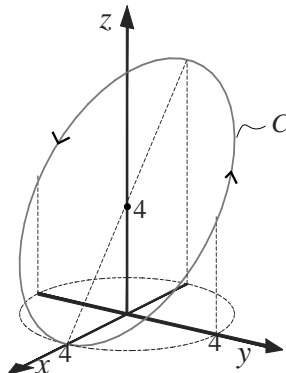
Temos  $C_1^- : z = 1$ , com  $x = 0$  e  $-1 \leq y \leq 1$  donde  $dz = dx = 0$ . Então:

$$\begin{aligned}
 \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= - \int_{C_1^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \\
 &= - \int_{C_1^-} Q(0, y, 1) dy = - \int_{-1}^1 (-1 + y) dy = \\
 &= - \left[ -y + \frac{y^2}{2} \right]_{-1}^1 = 2.
 \end{aligned}$$

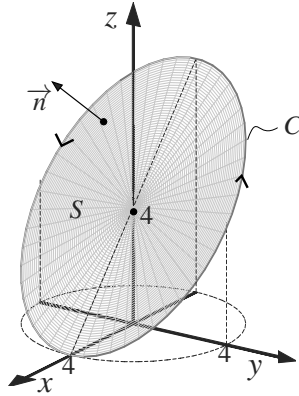
Logo:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 4 - 2 = 2.$$

10. Da parametrização de  $C$ , temos  $x = 4\cos t$ ,  $y = 4\sin t$  e  $z = 4 - 4\cos t$ , com  $0 \leq t \leq 2\pi$  donde  $x^2 + y^2 = 16$  e  $z = 4 - x$ . Logo,  $C$  é a curva interseção do cilindro  $x^2 + y^2 = 16$  com o plano  $z = 4 - x$ , orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.



Seja  $S$  a porção do plano  $z = 4 - x$ , limitada por  $C$ .



Da regra da mão direita, vemos que  $\vec{n}$  aponta para cima. A superfície  $S$  pode ser descrita por  $S: z = 4 - x = f(x, y)$ , com  $(x, y) \in D: x^2 + y^2 \leq 16$ . Temos  $\vec{N} = (-f_x, -f_y, 1) = (1, 0, 1)$ , donde  $\vec{n} = \frac{(1, 0, 1)}{\sqrt{2}}$  e  $dS = \sqrt{2} \, dxdy$ . Temos:

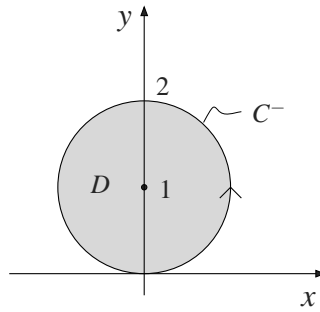
$$\text{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z - y & \ln(1 + y^2) & \ln(1 + z^2) + y \end{vmatrix} = (1, 1, 1).$$

Logo, do teorema de Stokes, temos:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \\ &= \iint_D (1, 1, 1) \cdot (1, 0, 1) \, dxdy = \\ &= \iint_D (1 + 1) \, dxdy = \\ &= 2A(D) = 2 \cdot \pi \cdot 4^2 = 32\pi. \end{aligned}$$

## AULA 16

1. Como  $C$  está orientada no sentido horário, não podemos aplicar o teorema de Green. Então, denotemos por  $C^-$  a circunferência orientada no sentido anti-horário. Seja  $D$  a região delimitada pela circunferência.



Temos, então:

$$\begin{aligned}\oint_{C^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \\ &= \iint_D (3x + 3) dx dy = 3 \iint_D (x + 1) dx dy.\end{aligned}$$

Passando para coordenadas polares:

$$x^2 + y^2 = 2y \Rightarrow r^2 = 2r \sin \theta \Rightarrow r = 2 \sin \theta.$$

Então:

$$\begin{aligned}\oint_{C^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= 3 \int_0^\pi \int_0^{2 \sin \theta} (r \cos \theta + 1) r dr d\theta = \\ &= 3 \int_0^\pi \int_0^{2 \sin \theta} (r^2 \cos \theta + r) dr d\theta = \\ &= 3 \int_0^\pi \left[ \frac{r^3}{3} \cos \theta + \frac{r^2}{2} \right]_0^{2 \sin \theta} d\theta = \\ &= 3 \int_0^\pi \left( \frac{8}{3} \sin^3 \theta \cos \theta + 2 \sin^2 \theta \right) d\theta = \\ &= 3 \left[ \frac{8}{3} \cdot \frac{\sin^4 \theta}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} \left( \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \right]_0^\pi = \\ &= 3(0 + \pi) = 3\pi.\end{aligned}$$

Mas:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \oint_{C^-} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Logo:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -3\pi.$$

2. a. Seja  $\vec{F} = (P, Q) = (\sin xy + xy \cos xy, x^2 \cos xy)$ , para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= \\ &= (2x \cos xy - x^2 y \sin xy) - \\ &\quad - (x \cos xy + x \cos xy - x^2 y \sin xy) = \\ &= 0 \end{aligned}$$

em  $\mathbb{R}^2$ . Como  $\mathbb{R}^2$  é um conjunto simplesmente conexo então, pelo teorema das equivalências segue que  $I$  é independente do caminho.

- b. Também do teorema das equivalências temos que  $\vec{F}$  é conservativo.

### **Construção de uma função potencial para $\vec{F}$**

Temos:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \sin xy + xy \cos xy \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 \cos xy \quad (2)$$

Integrando (2) em relação a  $y$ , temos:

$$\varphi(x, y) = x \sin xy + f(x) \quad (3)$$

onde  $f(x)$  é uma “constante” de integração. Derivando (3) em relação a  $x$  e usando (1), temos:

$$\sin xy + xy \cos xy + f'(x) = \sin xy + xy \cos xy$$

ou  $f'(x) = 0$ . Logo,  $f(x) = c$ . Fazendo  $c = 0$ , temos uma função potencial

$$\varphi(x, y) = x \sin xy$$

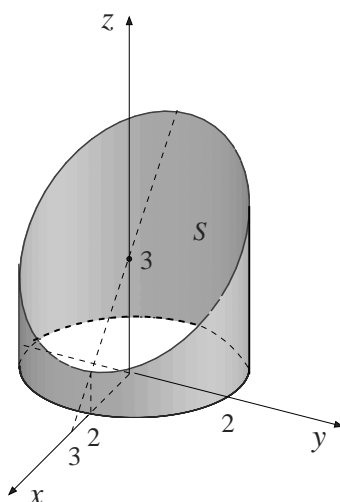
em  $\mathbb{R}^2$ . Logo:

$$\begin{aligned} I &= \varphi(\sigma(1)) - \varphi(\sigma(0)) = \varphi(0, 1) - \varphi(-1, 1) = \\ &= 0 - (-1) \sin(-1) = \sin(-1) = -\sin 1. \end{aligned}$$

3. Temos que:

$$M = \iint_S f(x,y,z) \, dS = \iint_S x^2 \, dS,$$

onde  $S$  está ilustrada na figura que se segue.



Uma parametrização para  $S$  é dada por

$$\varphi(t, z) = (2 \cos t, 2 \sin t, z)$$

onde  $(t, z) \in D : \begin{cases} 0 \leq t \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 3 - 2 \cos t \end{cases}.$

Temos que  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = (-2 \sin t, 2 \cos t, 0)$  e  $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = (0, 0, 1)$   
 donde

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \times \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 \sin t & 2 \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2 \cos t, 2 \sin t, 0).$$

Como  $dS = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \times \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\| dt dz$ , então  $dS = 2 \, dt dz$ . Logo:

$$\begin{aligned} M &= \iint_D (2 \cos t)^2 \cdot 2 \, dt dz = \\ &= 8 \int_0^{2\pi} \int_0^{3-2 \cos t} \cos^2 t \, dz dt = \end{aligned}$$



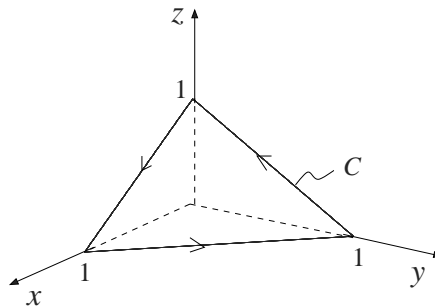
$$\begin{aligned}
&= 8 \int_0^{2\pi} (3 \cos^2 t - 2 \cos^3 t) dt = \\
&= 24 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt - 16 \int_0^{2\pi} \cos^3 t dt.
\end{aligned}$$

Temos:  $\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \left[ t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{2\pi} = \pi$  e

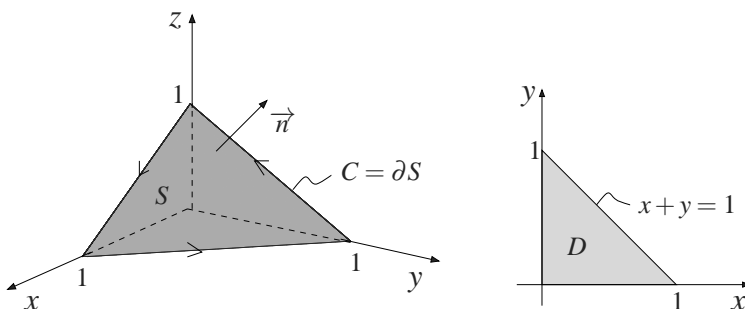
$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos^3 t dt &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t \cdot \cos t dt = \\
&= \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t) d(\sin t) = \left[ \sin t - \frac{\sin^3 t}{3} \right]_0^{2\pi} = 0.
\end{aligned}$$

Logo:  $M = 24\pi \text{ u.m.}$

4. A curva  $C$  é constituída de três partes e pode ser visualizada na figura a seguir.



Calcular  $I$  usando a definição é uma tarefa penosa. Calculamos então através do teorema de Stokes. Seja  $S$  a porção do plano  $x + y + z = 1$  delimitada pela curva  $C$ . De acordo com a orientação de  $C$ , devemos tomar  $\vec{n}$  apontando para cima. As figuras que se seguem mostram  $S$  e sua projeção sobre o plano  $xy$ .



Temos  $S : z = 1 - x - y = f(x, y)$ , com  $(x, y) \in D : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x$ .

Como  $\vec{N} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) = (1, 1, 1)$  aponta para cima então temos que  $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} = \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}}$  e  $dS = \sqrt{3} \, dxdy$ .

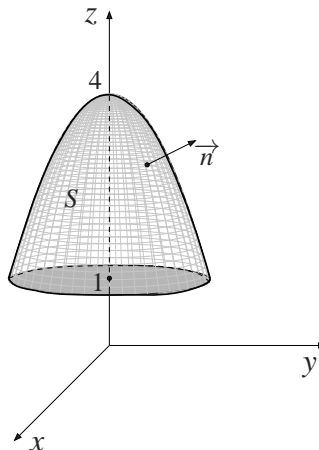
Por outro lado

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{x^2+y^2} & e^{y^2-z^2} & e^{z^2-x^2} \end{vmatrix} = (2z, 2x, -2y).$$

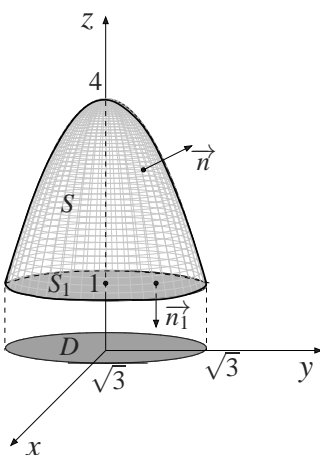
Do teorema de Stokes, temos:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \\ &= \iint_D (2(1-x-y), 2x, -2y) \cdot \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} \, dxdy = \\ &= \iint_D (2 - 2x - 2y + 2x - 2y) \, dxdy = \\ &= 2 \iint_D (1 - 2y) \, dxdy = 2 \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - 2y) \, dydx = \\ &= 2 \int_0^1 \left[ y - y^2 \right]_0^{1-x} dx = 2 \int_0^1 (1 - x - 1 + 2x - x^2) dx = \\ &= 2 \int_0^1 (x - x^2) dx = 2 \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

5. Note na figura que se segue que a superfície  $S$  não é fechada.



Da complexidade do campo  $\vec{F}$ , calcular o fluxo diretamente não é uma tarefa simples. Então, tentemos usar o teorema de Gauss. Para isso, devemos fechar a superfície  $S$  com a porção  $S_1$  do plano  $z = 1$ , delimitada pela circunferência  $x^2 + y^2 = 3$ , orientada com  $\vec{n}_1 = -\vec{k}$ . A figura a seguir mostra o sólido  $W$  delimitado por  $S$  e  $S_1$ .



Como estamos nas condições do teorema de Gauss, temos:

$$\begin{aligned}
 & \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS + \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, dS = \\
 &= \iiint_W \operatorname{div} \vec{F} \, dxdydz = \iiint_W (0 + 0 + 1) \, dxdydz = \\
 &= \iiint_W dxdydz = \iint_D \left[ \int_1^{4-x^2-y^2} dz \right] dxdy = \\
 &= \iint_D (3 - x^2 - y^2) \, dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} (3 - r^2) r \, dr d\theta = \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} (3r - r^3) \, dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ 3 \cdot \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{3}} d\theta = \\
 &= \left( \frac{9}{2} - \frac{9}{4} \right) \cdot 2\pi = \frac{9\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

Mas:

$$\begin{aligned}
 \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, dS &= \\
 &= \iint_{S_1} (e \operatorname{arctg} 1, e \ln(x^2 + 1), 1) \cdot (0, 0, -1) \, dS = \\
 &= - \iint_{S_1} dS = -A(S_1) = -\pi(\sqrt{3})^2 = -3\pi.
 \end{aligned}$$

$$\text{Logo: } \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{9\pi}{2} + 3\pi = \frac{15\pi}{2}.$$

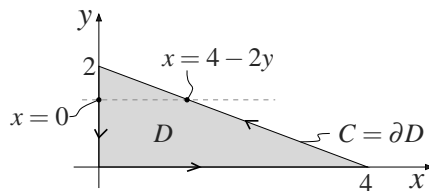
6. O cálculo direto da integral parece uma tarefa impossível, mas o Teorema de Green fornece um outro método de resolução. Temos  $P = -\frac{x^2 y}{1+x^2} + y^2$  e  $Q = x + \operatorname{arctg} x$  donde

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= 1 + \frac{1}{1+x^2} - \left( -\frac{x^2}{1+x^2} + 2y \right) = \\
 &= 1 + \frac{1+x^2}{1+x^2} - 2y = 2 - 2y = 2(1-y).
 \end{aligned}$$

Então:

$$I = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 2 \iint_D (1-y) dx dy$$

onde  $D$  é a região do plano limitada por  $C$ , conforme a figura que se segue.



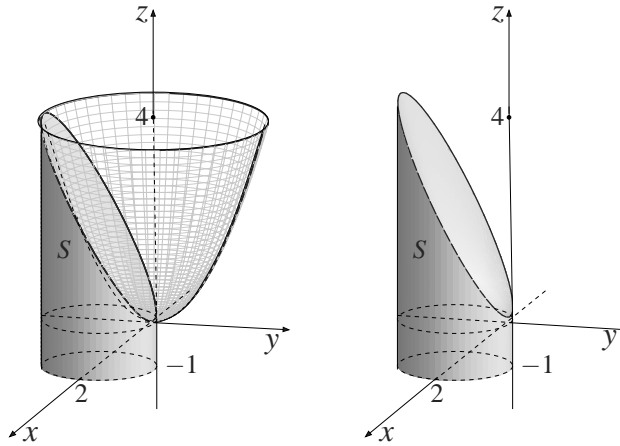
A região  $D$  pode ser vista como tipo II:

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq 4 - 2y\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 I &= 2 \int_0^2 \int_0^{4-2y} (1-y) \, dx dy = 2 \int_0^2 (1-y)(4-2y) \, dy = \\
 &= 4 \int_0^2 (2-3y+y^2) \, dy = 4 \left[ 2y - \frac{3y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3}.
 \end{aligned}$$

7. a. Considerando-se que  $x^2 + y^2 = 2x$  é equivalente a  $(x-1)^2 + y^2 = 1$ , então o esboço de  $S$  está representado na figura que se segue.



Seja  $(x, y, z) \in S$ . Então  $x$  e  $y$  satisfazem  $(x-1)^2 + y^2 = 1$ . Logo

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

com  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Como  $-1 \leq z \leq x^2 + y^2 = 2x$  então  $-1 \leq z \leq 2 + 2\cos t$ .

Adotando  $t$  e  $z$  como parâmetros, temos que uma parametrização para  $S$  é dada por

$$\varphi(t, z) = (1 + \cos t, \sin t, z)$$

$$\text{com } (t, z) \in D: \begin{cases} 0 \leq t \leq 2\pi \\ -1 \leq z \leq 2 + 2\cos t \end{cases}.$$

b. Temos:

$$\varphi_t = (-\sin t, \cos t, 0) \quad \text{e} \quad \varphi_z = (0, 0, 1)$$

donde

$$\varphi_t \times \varphi_z = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos t, \sin t, 0).$$

Logo,  $\|\varphi_t \times \varphi_z\| = 1$ .

Como  $A(S) = \iint_D \|\varphi_t \times \varphi_z\| \, dt dz$ , então

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_D dt dz = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{2+2\cos t} dz dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (3 + 2\cos t) \, dt = \left[ 3t + 2\sin t \right]_0^{2\pi} = 6\pi \, u.a. \end{aligned}$$

c. O fluxo é dado por:

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

onde  $\vec{n} = (-\cos t, -\sin t, 0)$  pois  $\vec{n}$  aponta para dentro de  $S$ .

Como  $dS = \|\varphi_t \times \varphi_z\| \, dt dz$  então  $dS = dt dz$ .

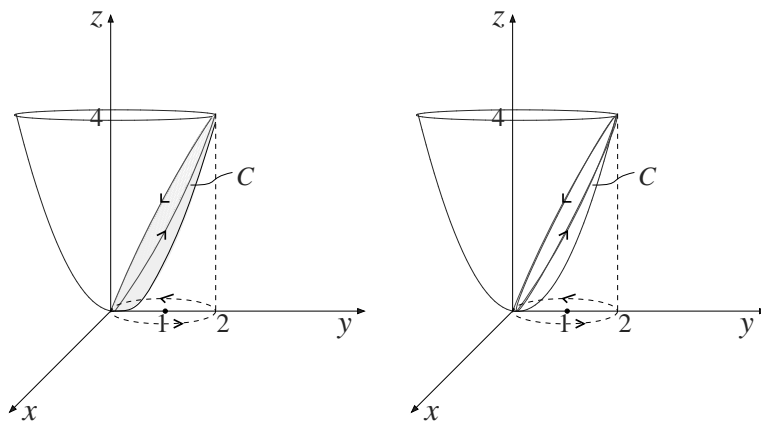
Logo:

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_D \vec{F}(\varphi(t, z)) \cdot \vec{n} \, dt dz = \\ &= \iint_D (3 + 3\cos t - 3 - \sin t, 3\sin t + 1 + \\ &\quad + \cos t - 1, e^{\sin z}) \cdot (-\cos t, -\sin t, 0) \, dt dz = \\ &= \iint_D (3\cos t - \sin t, 3\sin t + \cos t, e^{\sin z}) \cdot \\ &\quad \cdot (-\cos t, -\sin t, 0) \, dt dz = \\ &= \iint_D (-3\cos^2 t + \sin t \cos t - 3\sin^2 t - \\ &\quad - \sin t \cos t) \, dt dz = \\ &= \iint_D -3 \, dt dz = -3 \iint_D dt dz. \end{aligned}$$

Como  $\iint_D dt dz = 6\pi$  (ver item (a)), então

$$\Phi = -18\pi.$$

8. O esboço de  $C$  está representado na figura que se segue.



Considerando o sistema

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + (y-1)^2 = 1 \text{ ou } x^2 + y^2 = 2y \end{cases}$$

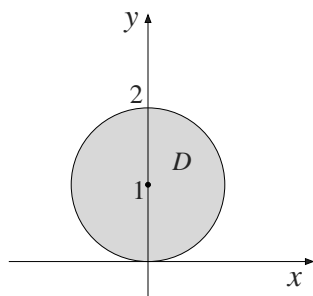
temos  $z = 2y$ . Isto significa que a curva interseção  $C$  está contida no plano  $z = 2y$ . Então, seja  $S$  a superfície porção do plano  $z = 2y$ , limitada por  $C$ . Logo,  $\partial S = C$ . Temos

$$S : z = 2y = f(x, y)$$

com

$$(x, y) \in D : x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \text{ ou } x^2 + y^2 \leq 2y.$$

O esboço de  $D$  está representado na figura que se segue.



Como  $dS = \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2} dx dy$  então

$$dS = \sqrt{1 + 0 + 2^2} dx dy = \sqrt{5} dx dy.$$

De acordo com a orientação de  $C = \partial S$ , devemos tomar  $\vec{n}$  apontando para cima. Então,

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} = \frac{(-z_x, -z_y, 1)}{\|\vec{N}\|} = \frac{(0, -2, 1)}{\sqrt{5}}.$$

Temos que:

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2y & \frac{x^2}{2} & \sqrt{1+z^8} \end{vmatrix} = (0, 0, x-2).$$

Pelo Teorema de Stokes, temos:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \\ &= \iint_D (0, 0, x-2) \cdot \frac{(0, -2, 1)}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} \, dxdy = \\ &= \iint_D (x-2) \, dxdy. \end{aligned}$$

Passando para coordenadas polares, temos:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ dxdy = r dr d\theta \\ x^2 + y^2 = 2y \Rightarrow r^2 = 2r \sin \theta \Rightarrow \\ \Rightarrow r = 0 \text{ ou } r = 2 \sin \theta \end{cases}$$

Do esboço de  $D$ , temos que  $D_{r\theta}$  é dado por

$$D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 2 \sin \theta \end{cases}.$$

Então:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_{D_{r\theta}} (r \cos \theta - 2)r \, dr d\theta = \\ &= \iint_{D_{r\theta}} (r^2 \cos \theta - 2r) \, dr d\theta = \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2 \sin \theta} (r^2 \cos \theta - 2r) \, dr d\theta = \end{aligned}$$



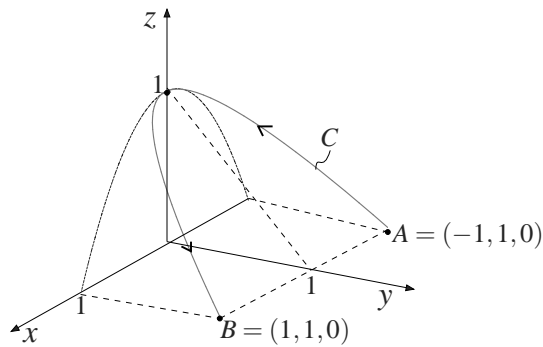
$$\begin{aligned}
&= \int_0^\pi \left[ \cos \theta \frac{r^3}{3} - r^2 \right]_0^{2 \sin \theta} d\theta = \\
&= \int_0^\pi \left( \frac{8}{3} \cos \theta \sin^3 \theta - 4 \sin^2 \theta \right) d\theta = \\
&= \left[ \frac{8}{3} \cdot \frac{\sin^4 \theta}{4} - \frac{4}{2} \left( \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \right]_0^\pi = -2\pi.
\end{aligned}$$

9. a. Temos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2yz + e^z & x^3z & x^3y + xe^z + 3z^2 \end{vmatrix} = \\
&= (x^3 - x^3, 3x^2y + e^z - e^z - 3x^2y, 3x^2z - 3x^2z) = \\
&= (0, 0, 0) = \vec{0}.
\end{aligned}$$

Como  $\operatorname{dom} \vec{F} = \mathbb{R}^3$ , que é um conjunto simplesmente conexo e  $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$ , então pelo teorema das equivalências, segue que  $\vec{F}$  é conservativo.

b. O esboço de  $C$  está representado na figura que se segue.



O trabalho  $W$  é dado por:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Como  $\vec{F}$  é conservativo, logo existe uma função

$\varphi(x, y, z)$ , tal que  $\nabla\varphi = \vec{F}$  em  $\mathbb{R}^3$ , isto é,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 3x^2yz + e^z \quad (1)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = x^3z \quad (2)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = x^3y + xe^z + 3z^2 \quad (3)$$

Integrando (1), (2) e (3) em relação a  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente, temos

$$\varphi(x, y, z) = x^3yz + xe^z + f(y, z) \quad (4)$$

$$\varphi(x, y, z) = x^3yz + g(x, z) \quad (5)$$

$$\varphi(x, y, z) = x^3yz + xe^z + z^3 + h(x, y) \quad (6)$$

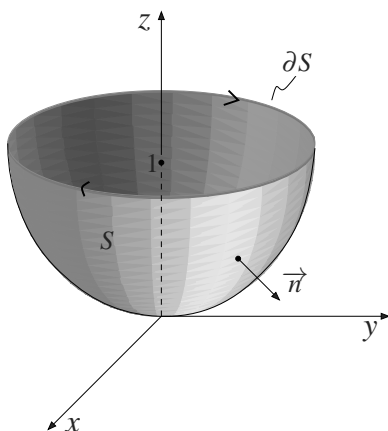
De (4), (5) e (6) vemos que  $f(y, z) = z^3$ ,  $g(x, z) = xe^z$  e  $h(x, y) = 0$ . Logo:

$$\varphi(x, y, z) = x^3yz + xe^z + z^3$$

é uma função potencial de  $\vec{F}$ . Então:

$$\begin{aligned} W &= \varphi(B) - \varphi(A) = \\ &= \varphi(1, 1, 0) - \varphi(-1, 1, 0) = \\ &= e^0 - (-e^0) = 2 \text{ u.}\omega. \end{aligned}$$

10. O esboço de  $S$  está representado na figura que se segue.



Como  $\vec{n}$  aponta para baixo, então o bordo de  $S$ ,  $\partial S$ , está orientado no sentido horário quando visto de cima. Parametrizando  $\partial S$ , no sentido anti-horário, temos  $\partial S^- : x = \cos t$ ,  $y = \sin t$  e  $z = 1$ , com  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Logo,  $dx = -\sin t \, dt$ ,  $dy = \cos t \, dt$  e  $dz = 0$ . Do teorema de Stokes, temos:

$$\begin{aligned}
 \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \\
 &= - \int_{\partial S^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \\
 &= - \int_{\partial S^-} P(x, y, 1) \, dx + Q(x, y, 1) \, dy + R(x, y, 1) \cdot 0 = \\
 &= - \int_{\partial S^-} ye^{1-1} \, dx - xe^{1-1} \, dy = \\
 &= - \int_{\partial S^-} y \, dx - x \, dy = \\
 &= - \int_0^{2\pi} [(\sin t)(-\sin t) - (\cos t)(\cos t)] \, dt = \\
 &= - \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t) \, dt = \\
 &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.
 \end{aligned}$$

