



Fundação

CECIERJ

Consórcio **cederj**

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Cálculo IV

Volume Único

Ronaldo da Silva Busse



**GOVERNO DO
Rio de Janeiro**

**SECRETARIA DE CIÊNCIA,
TECNOLOGIA E INOVAÇÃO**

**UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL**

Ministério da
Educação

GOVERNO FEDERAL
BRASIL
PÁTRIA EDUCADORA

Apoio:



Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro



Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua da Ajuda, 5 – Centro – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20040-000
Tel.: (21) 2333-1112 Fax: (21) 2333-1116

Presidente

Carlos Eduardo Bielschowsky

Vice-presidente

Masako Oya Masuda

Coordenação do Curso de Matemática

Matemática (UFF) - Marcelo da Silva Corrêa

Matemática (UNIRIO) - Luiz Pedro San Gil Jutuca. Vice: Marcelo Rainha

Material Didático

Elaboração de Conteúdo

Ronaldo da Silva Busse

Biblioteca

Raquel Cristina da Silva Tiellet
Simone da Cruz Correa de Souza
Vera Vani Alves de Pinho

Coordenação de Equipe

Marcelo Freitas

Ilustração

Ronaldo d'Aguiar Silva

Programação Visual

Nilda Helena Lopes da Silva

Revisão Linguística e Tipográfica

Patrícia Paula
Rioco Kamei Barreto

Coordenação de Produção

Fábio Rapello Alencar

Assistente de Produção

Bianca Giacomelli

Capa

Vinicius Mitchell

Produção Gráfica

Patrícia Esteves
Ulisses Schnaider

Copyright © 2016, Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da Fundação.

B981

Busse, Ronaldo da Silva.

Cálculo 4 : volume único / Ronaldo da Silva Busse. - Rio de Janeiro :
Fundação CECIERJ, 2015.
270p.; 19 x 26,5 cm.

ISBN: 978-85-458-0056-9

1. Cálculo. I. Título.

CDD: 515

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.
Texto revisado segundo o novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa.

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador

Luiz Fernando de Souza Pezão

Secretário de Estado de Ciência, Tecnologia e Inovação

Gustavo Tutuca

Universidades Consorciadas

CEFET/RJ - Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca

Diretor-geral: Carlos Henrique Figueiredo Alves

UENF - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Reitor: Silvério de Paiva Freitas

UERJ - Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Reitor: Ricardo Vieiralves de Castro

UFF - Universidade Federal Fluminense

Reitor: Sidney Luiz de Matos Mello

UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro

Reitor: Roberto Leher

UFRRJ - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Reitora: Ana Maria Dantas Soares

UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Reitor: Luiz Pedro San Gil Jutuca

Sumário

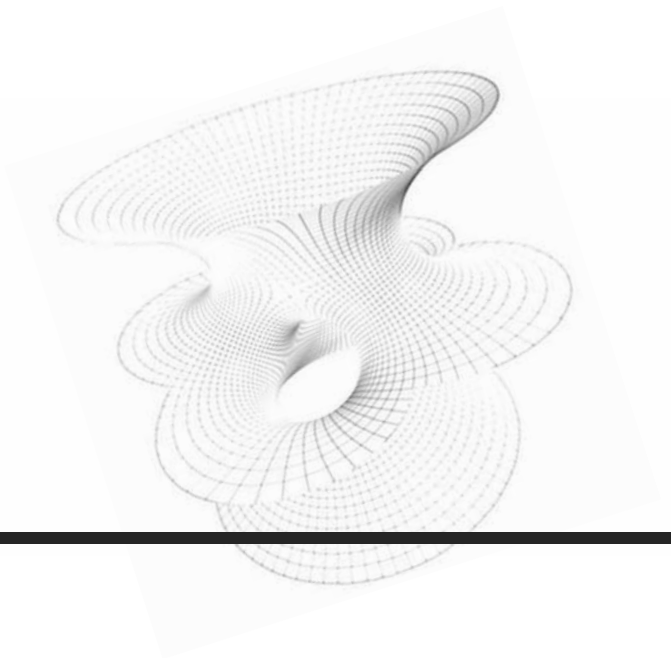
Aula 1 • Integrais duplas.....	7
<i>Ronaldo da Silva Busse</i>	
Aula 2 • Mudança de variáveis na integral dupla	29
<i>Ronaldo da Silva Busse</i>	
Aula 3 • Algumas aplicações da integral dupla.....	49
<i>Ronaldo da Silva Busse</i>	
Aula 4 • Integrais triplas	65
<i>Ronaldo da Silva Busse</i>	
Aula 5 • Mudança de variáveis na integral tripla	81
<i>Ronaldo da Silva Busse</i>	
Aula 6 • Integral de linha de função escalar	101
<i>Ronaldo da Silva Busse</i>	
Aula 7 • Algumas aplicações da integral de linha de função escalar	119
<i>Ronaldo da Silva Busse</i>	
Aula 8 • Campos vetoriais.....	137
<i>Ronaldo da Silva Busse</i>	
Aula 9 • Integral de linha de campo vetorial.....	151
<i>Ronaldo da Silva Busse</i>	
Aula 10 • Teorema de Green	169
<i>Ronaldo da Silva Busse</i>	
Aula 11 • Superfícies parametrizadas e área de superfícies.....	191
<i>Ronaldo da Silva Busse</i>	
Aula 12 • Integral de superfície de função escalar	211
<i>Ronaldo da Silva Busse</i>	
Aula 13 • Integral de superfície de campo vetorial.....	223
<i>Ronaldo da Silva Busse</i>	

Aula 14 • Teorema de Gauss239
Ronaldo da Silva Busse

Aula 15 • Teorema de Stokes.....255
Ronaldo da Silva Busse

Aula 1

INTEGRAIS DUPLAS



O b j e t i v o s

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 calcular a integral dupla de funções contínuas sobre regiões planas retangulares;
- 2 calcular a integral dupla de funções contínuas sobre regiões planas mais gerais e, em alguns casos, inverter a ordem de integração;
- 3 utilizar a integral dupla para o cálculo de volumes para alguns sólidos.

Meta da aula:

Apresentar a definição da integral de funções de duas variáveis (integral dupla) sobre uma região definida no plano, bem como sua aplicabilidade ao cálculo de alguns volumes. Será apresentado, inicialmente, o caso em que a região plana é dada por um retângulo para, em seguida, considerar-se regiões mais gerais. Será dado o Teorema de Fubini, que fornece um método prático de calcular tais integrais, para funções contínuas, por intermédio de integrais definidas para funções de uma variável.

INTEGRAL DUPLA SOBRE REGIÕES RETANGULARES

Pré-requisitos

Você vai precisar dos conhecimentos sobre Geometria Analítica, bem como dos conhecimentos sobre técnicas de integração e integral definida para funções reais de uma variável apresentados no Curso de Cálculo I.

Essa seção é dedicada à integração dupla de funções reais de duas variáveis sobre uma região retangular. Apresenta-se, inicialmente, a definição da integral dupla por intermédio das Somas de Riemann, como uma extensão da integral definida, para funções de uma variável real, sobre um intervalo fechado e limitado. Em seguida, é dado o Teorema de Fubini, que fornece um meio de calcular tais integrais para funções contínuas, tendo como ferramenta o Segundo Teorema Fundamental do Cálculo.

Definição 1.1.

Considere o retângulo

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} = [a,b] \times [c,d],$$

onde a, b, c, d são números reais tais que $a < b$ e $c < d$. Sejam

$$\begin{aligned} P_1 : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \\ P_2 : c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_m = d \end{aligned}$$

partições de $[a,b]$ e $[c,d]$, respectivamente. O conjunto

$$P = \{(x_i, y_j) / i = 0, 1, 2, \dots, n \text{ e } j = 0, 1, 2, \dots, m\}$$

é dito uma **partição** do retângulo R .

 Uma partição P divide o retângulo R em $n \cdot m$ retângulos

$$R_{ij} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\},$$

com $i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, m$, conforme ilustra a figura seguir:

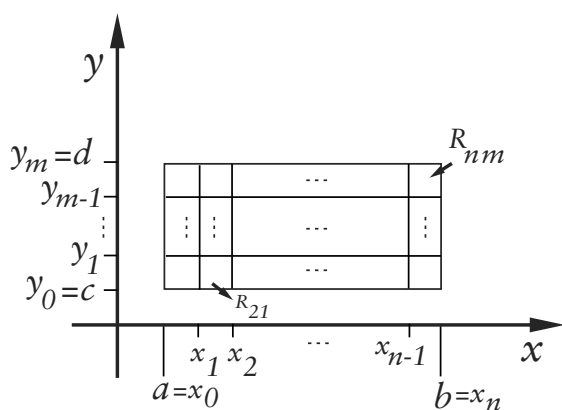


Figura 1.1

Definição 1.2.

Seja $f : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis definida no retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$ e considere uma partição P de R . Para cada retângulo R_{ij} , determinado pela partição P , seja $(x_i^*, y_j^*) \in R_{ij}$, escolhido arbitrariamente.

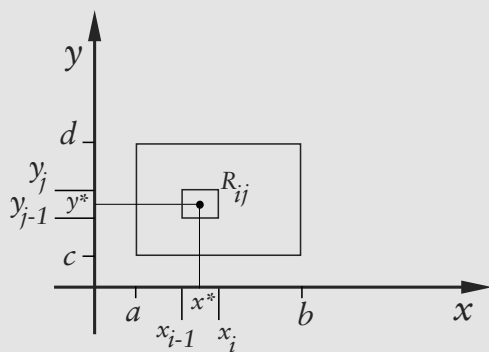


Figura 1.2

O número

$$S^* = \sum_{j=1}^m$$

é denominado soma de Riemann de f relativa à partição P e aos pontos (x_i^*, y_j^*) .

Definição 1.3.

Sejam f , P e S^* , como na definição anterior, e seja


$$\Delta = \max \{ \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n, \Delta y_1, \Delta y_2, \dots, \Delta y_m \}.$$

Diz-se que f é integrável sobre R se existe um número S tal que

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} S^* = S$$

independentemente das escolhas dos pontos (x_i^*, y_j^*) . Nesse caso, a integral dupla de f sobre R é dada por S e escreve-se

$$S = \iint_R f(x, y) dx dy.$$

 Segue da definição, as seguintes propriedades:

- i. A integral da função constante $f(x, y) = 1$ fornece a área da região retangular R sobre a qual é calculada a integral, ou seja,


$$\iint_R 1 dx dy = A(R).$$

- ii. Linearidade da integral dupla, isto é,

$$\begin{aligned} \iint_R [f(x, y) + g(x, y)] dx dy &= \\ \iint_R f(x, y) dx dy + \iint_R g(x, y) dx dy &= \\ \iint_R k f(x, y) dx dy = k \iint_R f(x, y) dx dy, &\text{ onde } k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- iii. Se $R = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_n$, então

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dx dy &= \\ \iint_{R_1} f(x, y) dx dy + \dots + \iint_{R_n} f(x, y) dx dy. & \end{aligned}$$

 Mostra-se que toda função f contínua em um retângulo R é integrável sobre R . (A demonstração desse resultado será omitida por não ser objetivo do texto)

UMA APLICAÇÃO DE INTEGRAL DUPLA

A definição da integral dupla pelas somas de Riemann é fundamental para se entender algumas de suas aplicações, que serão vistas mais adiante. Por hora, veremos sua utilização para o cálculo de alguns volumes.

Seja $f : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva no retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Considere o sólido W delimitado pelo gráfico de $z = f(x, y)$, o retângulo R e os planos $x = a$, $x = b$, $y = c$ e $y = d$.

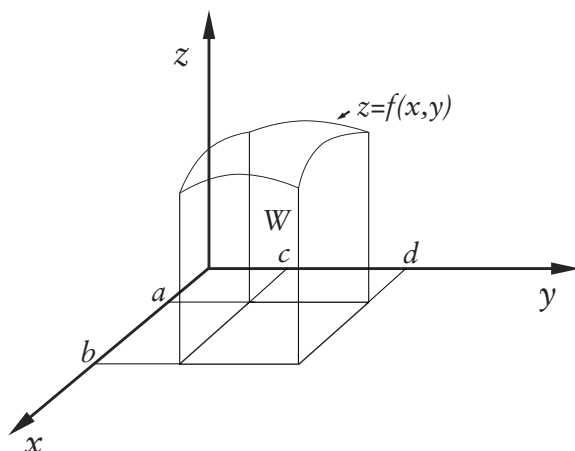


Figura 1.3

QUESTÃO: COMO PODEMOS CALCULAR O VOLUME DE W ?

A resposta está na utilização de sólidos, cujos volumes são conhecidos, para obter uma aproximação do volume desejado. Para isso, considere uma partição $P = \{(x_i, y_j) / i = 0, 1, 2, \dots, n \text{ e } j = 0, 1, 2, \dots, m\}$ do retângulo R e, para cada retângulo R_{ij} , determinado por P , sejam $(x_i^*, y_j^*) \in R_{ij}$ e $(x_i^{**}, y_j^{**}) \in R_{ij}$, escolhidos de modo que

$$\begin{aligned} f(x_i^*, y_j^*) &= \min \{f(x, y) / (x, y) \in R_{ij}\} \\ f(x_i^{**}, y_j^{**}) &= \max \{f(x, y) / (x, y) \in R_{ij}\}. \end{aligned}$$

Considere os paralelepípedos w_{ij} e W_{ij} , com base R_{ij} e alturas $f(x_i^*, y_j^*)$ e $f(x_i^{**}, y_j^{**})$, respectivamente, cujos volumes são da-

dos por

$$V(w_{ij}) = f(x_i^*, y_j^*) \Delta x_i \Delta y_j \quad \text{e} \quad V(W_{ij}) = f(x_i^{**}, y_j^{**}) \Delta x_i \Delta y_j$$

e note que esses volumes limitam inferior e superiormente o volume da parte de W que está sobre R_{ij} .

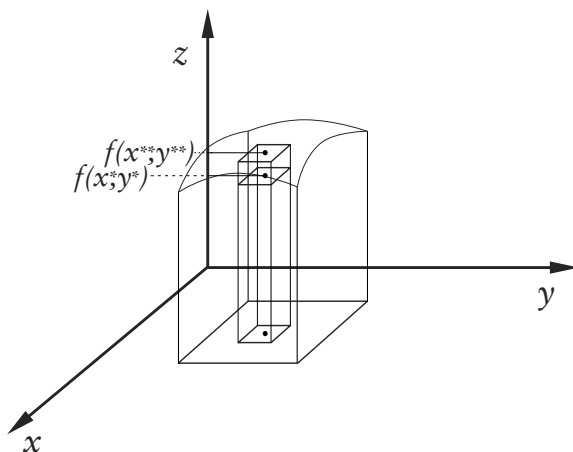


Figura 1.4

Dessa forma, o volume de W satisfaz

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m V(w_{ij}) \leq V(W) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m V(W_{ij}),$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i^*, y_j^*) \Delta x_i \Delta y_j \leq V(W) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i^{**}, y_j^{**}) \Delta x_i \Delta y_j.$$

Intuitivamente, observa-se que os paralelepípedos w_{ij} e W_{ij} se aproximam entre si à medida que consideramos suas bases cada vez menores e, portanto, devemos esperar que

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i^*, y_j^*) \Delta x_i \Delta y_j &= V(W) = \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i^{**}, y_j^{**}) \Delta x_i \Delta y_j. \end{aligned}$$

De fato, como a função f é contínua em R , segue-se da obser-

vação 3 que f é integrável sobre R e, portanto, os limites acima existem e são iguais à integral dupla de f sobre R . Nesse caso,

$$V(W) = \iint_R f(x, y) dx dy.$$


O TEOREMA DE FUBINI


Até aqui foram apresentadas a definição de integral dupla sobre uma região retangular e sua aplicação para o cálculo de volume. No entanto, ainda não conhecemos uma forma prática de calcular tais integrais. A seguir, é apresentado o Teorema de Fubini, que resolve essa questão para o caso de funções contínuas.

Teorema 1.1.

Seja $f : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Nesse caso a integral dupla de f sobre R pode ser calculada por intermédio de integrais iteradas, ou seja,

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

 Assim como na derivação parcial, quando resolvemos a integral com relação a uma das variáveis, a outra é considerada constante e a integração é realizada como para funções de uma variável, utilizando-se o Segundo Teorema Fundamental do Cálculo.

 Para representar a integral dupla da função f sobre a região retangular $R = [a, b] \times [c, d]$, podemos utilizar, também, as seguintes notações:

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy \quad \text{ou} \quad \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

Exemplo 1.1.

- a. Calcule a integral dupla $\iint_R f(x, y) dx dy$, onde $f(x, y) = xy + y^2$ e $R = [-1, 1] \times [0, 2]$.

Solução: Pelo Teorema de Fubini, temos que

$$\int_0^2 \int_{-1}^1 (xy + y^2) dx dy = \int_0^2 \left[\int_{-1}^1 (xy + y^2) dx \right] dy.$$

Resolvendo a integral em relação à variável x , considerando y constante, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \left[\frac{x^2}{2} y + xy^2 \right]_{x=-1}^{x=1} dy = \\ & \int_0^2 \left[\left(\frac{1^2}{2} y + 1y^2 \right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} y + (-1)y^2 \right) \right] dy = \int_0^2 2y^2 dy. \end{aligned}$$

Finalmente, resolvemos a integral restante em relação à variável y e obtemos

$$\int_0^2 2y^2 dy = \left[2 \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=2} = 2 \frac{2^3}{3} - 2 \frac{0^3}{3} = \frac{16}{3},$$

ou seja,

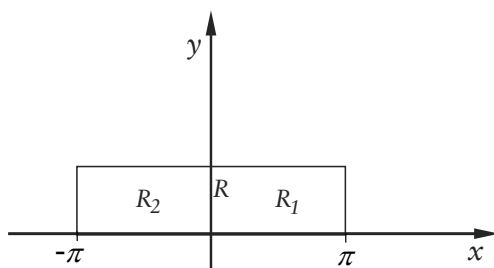
$$\iint_R f(x, y) dx dy = \frac{16}{3}$$

- Pelo Teorema de Fubini, a integral do exemplo anterior pode ser resolvida calculando-se primeiro a integral em relação à variável y , como se segue:

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dx dy &= \int_{-1}^1 \left[\int_0^2 (xy + y^2) dy \right] dx \\ &= \int_{-1}^1 \left[x \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=2} dx \\ &= \int_{-1}^1 \left[\left(x \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} \right) - \left(x \frac{0^2}{2} + \frac{0^3}{3} \right) \right] dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(2x + \frac{8}{3} \right) dx = \left[x^2 + \frac{8}{3}x \right]_{x=-1}^{x=1} \\ &= \left(1^2 + \frac{8}{3}1 \right) - \left((-1)^2 + \frac{8}{3}(-1) \right) = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

b. Calcule a integral dupla $\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(xy) dx dy$

Solução: Observe que a região de integração é dada pelo retângulo $R = [-\pi, \pi] \times [0, 1]$, conforme ilustração abaixo.



Como

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{se } x < 0 \\ x, & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

precisamos dividir a região de integração nos retângulos $R_1 = [-\pi, 0] \times [0, 1]$ e $R_2 = [0, \pi] \times [0, 1]$, de modo que

$$\begin{aligned} \iint_R |x| \cos(xy) dx dy &= \iint_{R_1} |x| \cos(xy) dx dy + \iint_{R_2} |x| \cos(xy) dx dy = \\ &= \iint_{R_1} -x \cos(xy) dx dy + \iint_{R_2} x \cos(xy) dx dy. \end{aligned}$$

Note que é mais "interessante" resolver primeiro a integral em relação à variável y (mantendo x constante) e, portanto,

$$\begin{aligned} \iint_R |x| \cos(xy) dx dy &= \\ &= - \int_{-\pi}^0 \left[\int_0^1 x \cos(xy) dy \right] dx + \int_0^{\pi} \left[\int_0^1 x \cos(xy) dy \right] dx = \\ &= - \int_{-\pi}^0 [\sin(xy)]_{y=0}^{y=1} dx + \int_0^{\pi} [\sin(xy)]_{y=0}^{y=1} dx = \\ &= - \int_{-\pi}^0 \sin x dx + \int_0^{\pi} \sin x dx = \\ &= [\cos x]_{x=-\pi}^{x=0} + [-\cos x]_{x=0}^{x=\pi} = [1 - (-1)] + [(-(-1)) - (-1)] = 4. \end{aligned}$$

- c. Calcule o volume do sólido limitado pelos planos $z = 0$, $y + z = 2$, $y = 0$, $y = 1$, $x = 0$ e $x = 3$.

Solução:

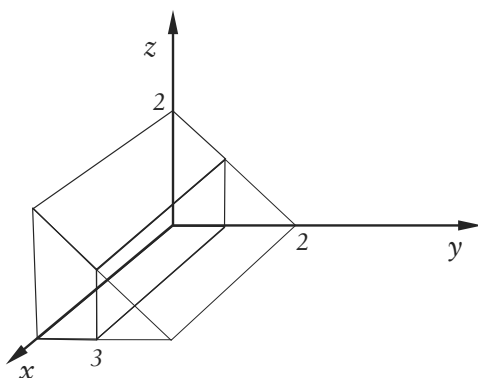


Figura 1.6

Note que o volume desejado é dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_0^3 \int_0^1 (2-y) dy dx = \int_0^3 \left[2y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^3 \frac{3}{2} dx = \\ &= \left[\frac{3}{2}x \right]_{x=0}^{x=3} = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

INTEGRAL DUPLA SOBRE REGIÕES MAIS GERAIS

Até aqui, trabalhamos com integrais duplas de funções definidas sobre regiões planas retangulares. Nesta seção, estendemos esse conceito para regiões planas de caráter mais geral.

Seja f uma função definida em uma região limitada D do plano xy e considere R um retângulo que contenha D . Dessa forma, podemos definir uma função \tilde{f} , em R , por

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{se } (x,y) \in D \\ 0, & \text{se } (x,y) \in R - D, \end{cases}$$

e, caso \tilde{f} seja integrável sobre R , definimos

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_R \tilde{f}(x,y) dx dy.$$

- ✎ Note que, devido à definição anterior, todas propriedades apresentadas na Seção 1 permanecem válidas para o caso de regiões mais gerais.
- ✎ Se $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e positiva em D , então o volume do sólido W que está abaixo do gráfico de f e acima de D (**Figura 1.7**) é dado por

$$V(W) = \iint_D f(x,y) dx dy$$

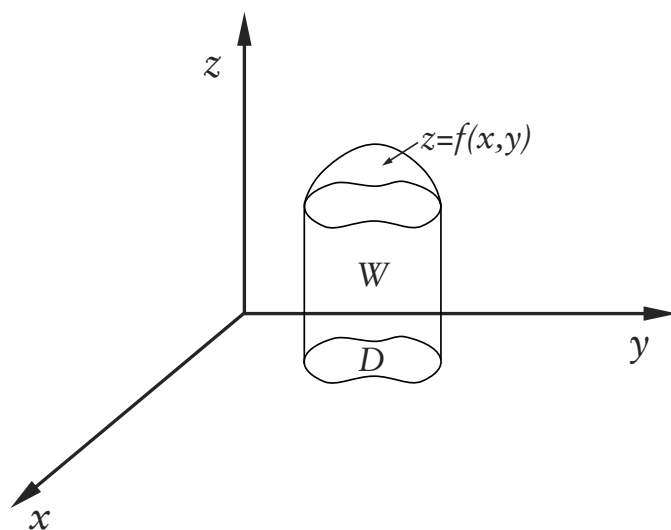


Figura 1.7

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em D . Para podermos utilizar aqui a ideia das integrais iteradas, como na seção anterior, para o cálculo de

$$\iint_D f(x,y) dx dy,$$

precisamos considerar dois tipos de regiões D .

REGIÕES DO TIPO I OU INSCRITAS EM FAIXAS VERTICAIS

São regiões definidas por

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \text{ e } g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

onde g_1 e g_2 são funções contínuas definidas em $[a,b]$.

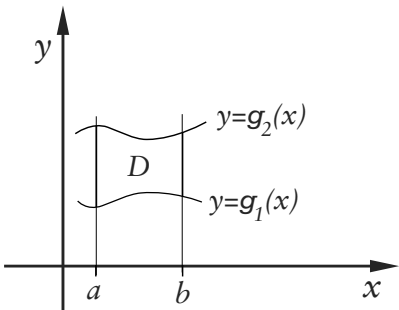



Figura 1.8

Nesse caso, a integral dupla de f sobre D pode ser calculada pelas integrais iteradas

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy \right] dx.$$

 Podemos interpretar a integral acima como se cobríssemos a região D por segmentos de reta verticais da seguinte forma: para cada $x \in [a,b]$ fixo, o segmento de reta vertical (que representa a variação de y) começa sobre a curva $y = g_1(x)$ e termina sobre a curva $y = g_2(x)$.

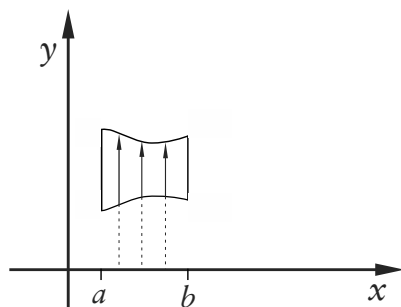


Figura 1.9

REGIÕES DO TIPO II OU INSCRITAS EM FAIXAS HORIZONTAIS

São regiões definidas por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / c \leq y \leq d \text{ e } h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\},$$

onde h_1 e h_2 são funções contínuas definidas em $[c, d]$.

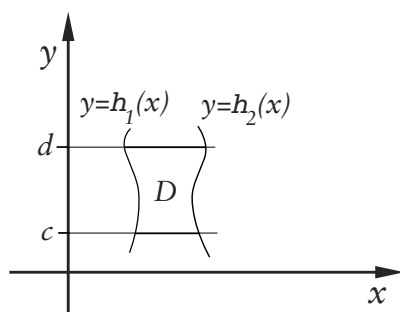



Figura 1.10

Nesse caso, a integral dupla de f sobre D pode ser calculada

pelas integrais iteradas

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y) dx \right] dy.$$

 Podemos interpretar a integral acima como se cobríssemos a região D por segmentos de reta horizontais da seguinte forma: para cada $y \in [c, d]$ fixo, o segmento de reta horizontal (que representa a variação de x) começa sobre a curva $x = h_1(y)$ e termina sobre a curva $x = h_2(y)$.

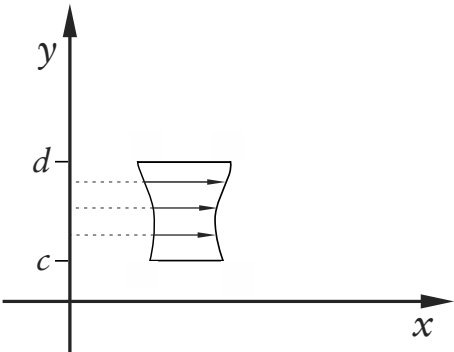


Figura 1.11

Todas as regiões que consideraremos serão do tipo I, do tipo II ou poderão ser divididas em regiões, cada qual do tipo I ou II.

Se uma região D for simultaneamente dos tipo I e II, é razoável se pensar no cálculo da integral dupla de f sobre D , utilizando-se qualquer um dos dois casos (isto é, integrando primeiro em relação à variável y ou primeiro em relação à variável x). No entanto, é importante ressaltar que essa inversão na ordem de integração não se dá tão diretamente, como no caso de regiões retangulares. É necessário analisar a região e "enxergá-la" como sendo do tipo desejado, como mostram os exemplos a seguir.

Exemplo 1.2.

- a. Esboce a região e troque a ordem de integração na integral dupla

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y) dy dx$$

Solução: Note que, da forma como está representada a integral, a região de integração D é considerada do tipo I, visto que a mesma se encontra inscrita nas faixas verticais $x = 0$ e $x = 1$. Além disso, percebemos que, para cada x fixo, a variação de y ocorre entre os gráficos das funções $y = 0$ e $y = x^2$, conforme a figura a seguir:

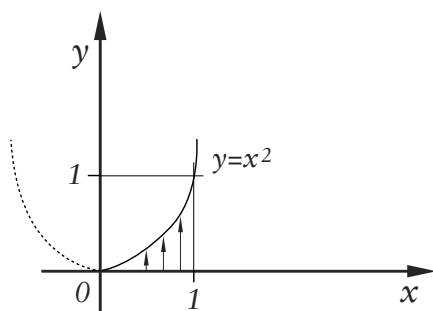


Figura 1.12

Para invertermos a ordem de integração, precisamos considerar a região como sendo do tipo II ou inscrita em faixas horizontais, conforme figura a seguir:

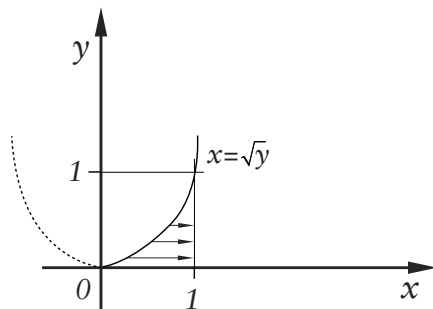


Figura 1.13

Note que a região se encontra inscrita nas faixas $x = 0$ e $x = 1$ e, ao cobri-la com segmentos de retas horizontais, observamos que, para cada y fixo, a variação de x ocorre entre os gráficos das funções $y = x^2$ e $x = 1$. No entanto, para considerarmos a região como do tipo II, precisamos considerar funções do tipo $x = h(y)$ e, portanto, a curva $y = x^2$, deve ser considerada como $x = \sqrt{y}$ (visto que x deve ser positivo). Dessa forma, temos que

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y) dy dx = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y) dx dy.$$

- b. Esboce a região e troque a ordem de integração na integral dupla

$$\int_0^1 \int_{y-1}^{1-y} f(x,y) dx dy$$

Solução: Note que, da forma como está representada a integral, a região de integração D é considerada do tipo II, visto que a mesma se encontra inscrita nas faixas horizontais $y = 0$ e $y = 1$. Além disso, percebemos que, para cada y fixo, a variação de x ocorre entre os gráficos das funções $x = y - 1$ e $x = 1 - y$, conforme a figura a seguir:

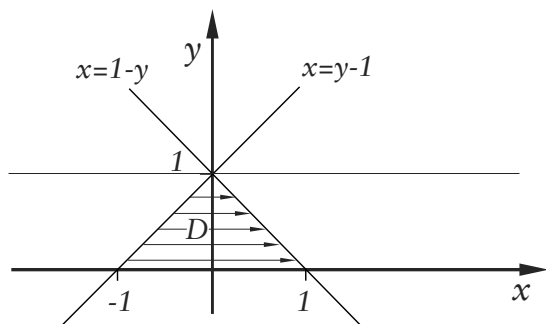


Figura 1.14

Para invertermos a ordem de integração, precisamos "olhar" para a região como sendo do tipo I ou inscrita em faixas verticais, conforme figura abaixo:

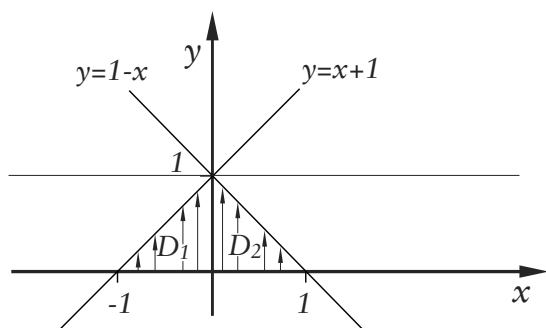


Figura 1.15

Para isso, necessitamos considerar funções do tipo $y = g(x)$ e, portanto,

$$\begin{aligned}x = y - 1 &\iff y = x + 1 \\x = 1 - y &\iff y = 1 - x\end{aligned}$$

Note que a região se encontra inscrita nas faixas $x = -1$ e $x = 1$ e que não é possível escrevê-la como do tipo II, pois, ao cobri-

la por segmentos de reta verticais, observamos que, para cada x fixo, temos a seguinte situação:

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq x+1 & \text{se } x \in [-1, 0] \\ 0 \leq y \leq 1-x & \text{se } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Logo, não encontramos uma única função $y = g(x)$ tal que tenhamos

$$\int_{-1}^1 \int_0^{g(x)} f(x, y) dy dx$$

Dessa forma, precisamos separar a região D em duas regiões D_1 e D_2 , dadas por,

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x \leq 0 \text{ e } 0 \leq y \leq x+1\} \\ D_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1-x\} \end{aligned}$$

de modo que,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_{y-1}^{1-y} f(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-1}^0 \int_0^{x+1} f(x, y) dy dx + \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x, y) dy dx. \end{aligned}$$

c. Calcule a integral dupla

$$\iint_D y dx dy$$

onde D é a região do primeiro quadrante delimitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$ e pela reta $x + y = 1$.

Solução: Observe a região D pode ser descrita como dos tipos I e II,

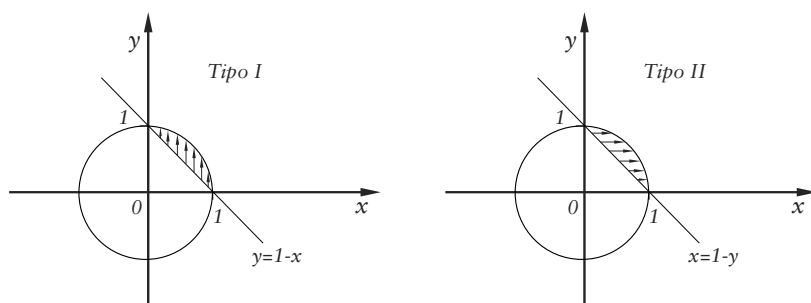


Figura 1.16

respectivamente, por

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 1-x \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\}$$

e

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq 1 \text{ e } 1-y \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \right\}.$$

Nesse caso, a integral procurada pode ser resolvida por

$$\int_0^1 \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} y dy dx \quad \text{ou} \quad \int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} y dx dy.$$

Note que ambas as integrais são possíveis de serem resolvidas, sendo a primeira forma bastante menos trabalhosa. Logo, consideraremos D como do tipo I e, portanto,

$$\begin{aligned} \iint_D y dx dy &= \int_0^1 \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} y dy dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=1-x}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1-x^2}{2} - \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx = \int_0^1 (x-x^2) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

d. Calcule a integral dupla

$$\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2} dy dx$$

Solução: Observe que a integral dupla está montada considerando-se a região de integração D como sendo do tipo I,

conforme figura abaixo

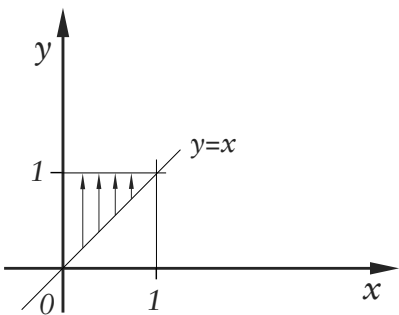


Figura 1.17

Entretanto, para calcularmos tal integral, precisaríamos obter a primitiva da função $f(x,y) = e^{y^2}$, em relação a y , o que não é possível, utilizando-se funções elementares. Por outro lado, a primitiva da função $f(x,y) = e^{y^2}$, em relação a x , é de fácil obtenção e, dessa forma, a única opção é trocar a ordem de integração, ou seja, considerar a região como sendo do tipo II.

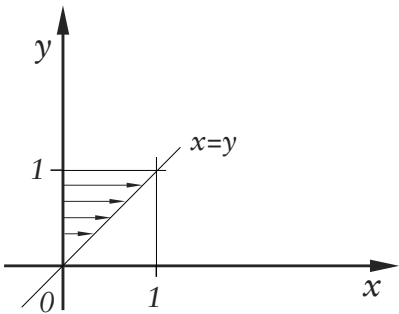


Figura 1.18

Nesse caso, temos

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq 1 \text{ e } 0 \leq x \leq y\}$$

e, portanto,

$$\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2} dy dx = \int_0^1 \int_0^y e^{y^2} dx dy = \int_0^1 [xe^{y^2}]_{x=0}^{x=y} dy = \int_0^1 ye^{y^2} dy.$$

Perceba que, agora, podemos calcular a primitiva da função $g(y) = ye^{y^2}$, por intermédio da integração por substituição e, assim, obter

$$\int_0^1 ye^{y^2} dy = \left[\frac{e^{y^2}}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{e^{1^2}}{2} - \frac{e^{0^2}}{2} = \frac{1}{2}(e - 1).$$

- e. Calcule o volume do sólido W limitado pelo cilindro $y = x^2$ e pelos planos $y = 1$, $z = 0$ e $z + y = 2$.

Solução: Observe que W é dado pela figura abaixo

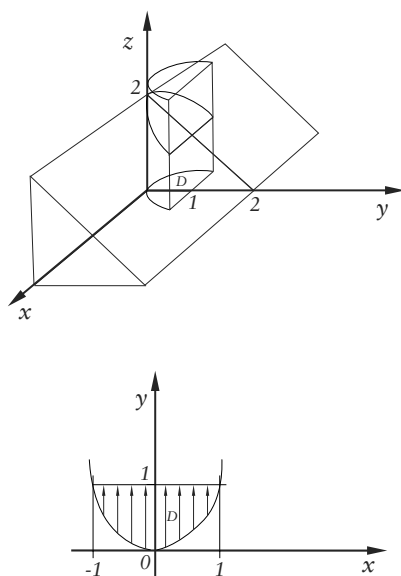


Figura 1.19

isto é,

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1 \text{ e } 0 \leq z \leq 2 - y\}.$$

Dessa forma, o volume procurado é dado por

$$\begin{aligned} V(W) &= \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 (2-y) dy dx = \int_{-1}^1 \left[2y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=x^2}^{y=1} dx = \\ &= \int_{-1}^1 \left(\left[2 \cdot 1 - \frac{1^2}{2} \right] - \left[2x^2 - \frac{(x^2)^2}{2} \right] \right) dx = \\ &= \int_{-1}^1 \left[\frac{3}{2} - 2x^2 + \frac{x^4}{2} \right] dx = \left[\frac{3x}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{10} \right]_{x=-1}^{x=1} = \\ &= \frac{14}{15} - \left(-\frac{14}{15} \right) = \frac{28}{15}. \end{aligned}$$

Aula 2

MUDANÇA DE VARIÁVEIS NA INTEGRAL DUPLA



O b j e t i v o

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 calcular a integral dupla de funções contínuas utilizando, convenientemente, mudanças de variáveis.

Meta da aula:

Apresentar o teorema de mudança de variáveis para a integral dupla. Será dado, inicialmente, o teorema na sua forma geral e, em seguida, será considerado o caso particular da mudança para coordenadas polares.

MUDANÇA DE VARIÁVEIS NA INTEGRAL DUPLA

Pré-requisitos

Você vai precisar dos conhecimentos sobre Integral Dupla apresentados na Aula 1 desse curso, bem como dos conhecimentos sobre derivadas parciais apresentados no Curso de Cálculo III.

No estudo de integração para funções de uma variável, utiliza-se, muitas vezes, a técnica de substituição para resolver integrais que não são simples de serem calculadas diretamente (seja pelo fato do integrando $f(x)$ ser uma função composta ou não) como, por exemplo,

$$\int \sin(2x) dx \quad \int \frac{\ln x}{x} dx \quad \int x e^{x^2} dx.$$

No caso de funções de duas variáveis, também precisamos de um resultado que ajude a simplificar o cálculo da integral dupla quando esta não for de resolução direta, seja devido ao integrando $f(x, y)$, seja devido à região de integração D . Nesta aula, apresentaremos o teorema de mudança de variáveis na integral dupla, que cumpre essa função. Com o intuito de introduzir a ideia do teorema, considere a seguinte integral definida:

$$\int_1^3 e^{2x} dx.$$

Como a função $f(x) = e^{2x}$ é composta, faz-se necessário utilizar a técnica de substituição para resolver a integral:

$$\int_1^3 e^{2x} dx = \int_2^6 e^u \frac{1}{2} du = \left[\frac{e^u}{2} \right]_{u=2}^{u=6} = \frac{1}{2} (e^6 - e^2).$$

Vamos analisar a mudança de variável

$$\int_1^3 e^{2x} dx = \int_2^6 e^u \frac{1}{2} du$$

no cálculo da integral acima:

i. considera-se $u = 2x$, isto é, $x = \frac{u}{2} = g(u)$;

ii. a função composta $f(x) = e^{2x}$ se torna

$$f(g(u)) = e^{2 \cdot \frac{u}{2}} = e^u;$$

iii. da igualdade $x = \frac{u}{2} = g(u)$, decorre que

$$dx = \frac{1}{2}du = g'(u)du;$$

iv. a relação entre as variáveis $x = g(u)$ define novos limites de integração:

$$\begin{aligned} x = 1 &\iff u = 2 & (1 = g(2)) \\ x = 3 &\iff u = 6 & (3 = g(6)) \end{aligned}$$

De forma geral, a mudança de variável na integral de uma função f de uma variável, contínua em $[a, b]$, é descrita pela fórmula

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)du,$$

onde g é uma função inversível com derivada contínua em $[c, d]$, $a = g(c)$ e $b = g(d)$.

No caso da integral dupla, utilizaremos uma mudança de variáveis

$$(x, y) \longleftrightarrow (u, v)$$

para obter uma relação do tipo

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_Q F(u, v)dudv,$$

onde D é uma região do plano xy e Q é uma região do plano uv . O teorema a seguir nos diz de que forma é possível realizar a mudança de variáveis na integral dupla.

Teorema 2.1.

Considere g uma aplicação que associa a cada ponto (u, v) do plano uv um ponto (x, y) do plano xy

$$g(u, v) = (x, y) = (x(u, v), y(u, v)),$$

onde x e y são funções de classe C^1 em um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Seja Q um subconjunto limitado e fechado contido em U tal que

- i. g é injetora em Q e
- ii. o determinante Jacobiano da aplicação g , dado por

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix},$$

nunca se anula em Q .

Se f é integrável em $g(Q)$, então

$$\iint_{g(Q)} f(x,y) dx dy = \iint_Q f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv.$$

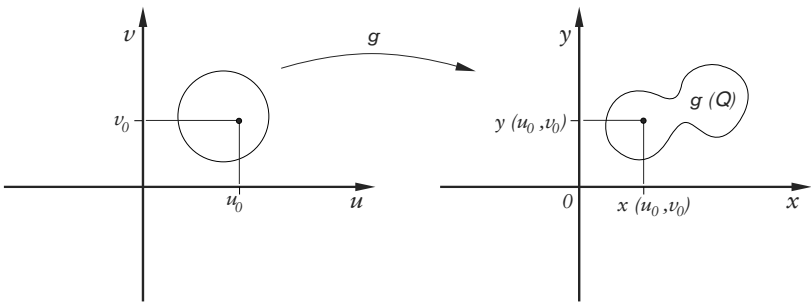


Figura 2.1

- ✎ A demonstração do resultado será omitida por não ser objetivo desse texto.
- ✎ O teorema permanece válido se as condições (i.) e (ii.) não ocorrerem em subconjuntos de Q dados por um ponto ou pelo gráfico de uma função contínua.
- ✎ As condições (i.) e (ii.) garantem que, para cada $(u_0, v_0) \in U$, existe uma vizinhança V de $(x_0, y_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))$ de modo que o sistema de equações

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

pode ser resolvido de modo único com

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

com $(x,y) \in V$. Logo, a aplicação g possui uma inversa g^{-1} definida em V .

Em alguns casos, pode ser mais simples calcular o determinante Jacobiano $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ de g^{-1} . Dessa forma, é necessário utilizar a relação

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

para resolver a integral.

Exemplo 2.1.

a. Calcule a integral dupla

$$\iint_R \frac{(x-y)^2}{(x+y)^3} dx dy,$$

onde $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x+y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$.

Solução: Note que a integral, como está dada, não é de fácil resolução. Entretanto, se conseguirmos exprimir o numerador e o denominador como variáveis independentes uma da outra, o cálculo da primitiva se torna simples e, caso a região de integração não "se complique", a integral dupla pode ser resolvida mais facilmente. Dessa forma, o integrando sugere a seguinte mudança de variáveis:

$$(*) \begin{cases} u(x,y) = x-y \\ v(x,y) = x+y \end{cases}$$

cujo determinante Jacobiano é dado por

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \neq 0.$$

Logo, pela observação anterior, as equações (*) definem uma mudança de variáveis x e y como funções de u e v , de modo que

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{2}.$$

No plano xy , a região de integração é dada pela figura a seguir:

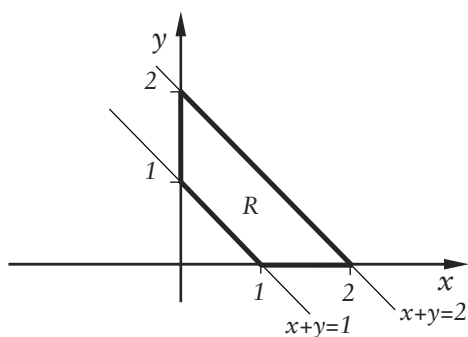


Figura 2.2

Vamos analisar, agora, a região de integração, no plano uv , obtida, a partir da região acima, pela mudança de variáveis:

- i. $x + y \geq 1 \implies v \geq 1$
- ii. $x + y \leq 2 \implies v \leq 2$
- iii. $x \geq 0$

Note que

$$\begin{cases} u(x,y) = x - y \\ v(x,y) = x + y \end{cases} \implies x = \frac{u+v}{2}$$

e, portanto, $x \geq 0 \implies u + v \geq 0$.

- iv. $y \geq 0$

Note que

$$\begin{cases} u(x,y) = x - y \\ v(x,y) = x + y \end{cases} \implies y = \frac{v-u}{2}$$

e, portanto, $y \geq 0 \implies v - u \geq 0$.

Logo, a região de integração Q , no plano uv , é dada pela figura a seguir:

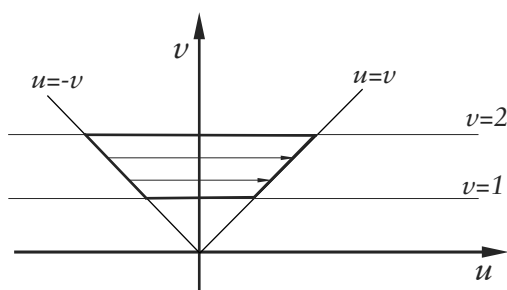


Figura 2.3

Note que Q é uma região do tipo II dada por

$$Q = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq v \leq 2 \text{ e } -v \leq u \leq v\}$$

e, portanto, pelo teorema de mudança de variáveis,

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{(x-y)^2}{(x+y)^3} dx dy &= \int_1^2 \int_{-v}^v \frac{u^2}{v^3} \frac{1}{2} du dv = \int_1^2 \frac{1}{2v^3} \left[\frac{u^3}{3} \right]_{u=-v}^{u=v} dv = \\ &= \int_1^2 \frac{1}{2v^3} \left[\frac{v^3}{3} - \frac{(-v)^3}{3} \right] dv = \int_1^2 \frac{1}{2v^3} \frac{2v^3}{3} dv = \\ &= \int_1^2 \frac{1}{3} dv = \left[\frac{v}{3} \right]_{v=1}^{v=2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

b. Calcule a integral dupla

$$\iint_R (2x^2 + y) dx dy$$

onde $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq xy \leq 1, 1 \leq y - x^2 \leq 2\}$.

Solução: Observe que o integrando é bastante simples e, em princípio, não traz qualquer dificuldade ao cálculo da integral. No entanto, se analisarmos a região de integração

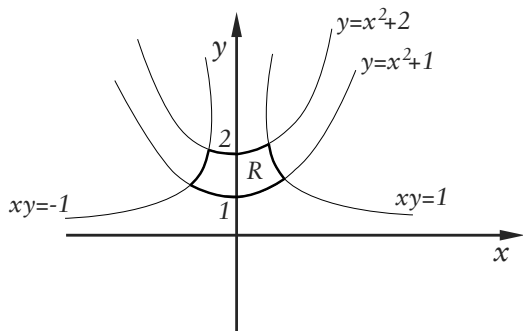


Figura 2.4

vemos que a mesma não é do tipo I ou do tipo II e, portanto, deveríamos dividi-la em regiões, cada qual sendo de um dos tipos. Por outro lado, a mesma região R sugere uma mudança de variáveis da forma

$$(*) \begin{cases} u(x,y) = xy \\ v(x,y) = y - x^2 \end{cases}$$

que a transforma, no plano uv , no retângulo

$$Q = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq u \leq 1, 1 \leq v \leq 2\}.$$

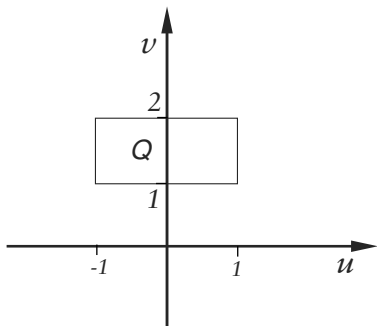


Figura 2.5

Precisamos, agora, avaliar a expressão a ser integrada com as variáveis u e v . Para isso, vamos calcular o determinante Jacobiano da mudança de variáveis definida acima


$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} y & x \\ -2x & 1 \end{bmatrix} = y + x^2.$$

Note que $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \neq 0$, $\forall (x, y) \in R$ e, portanto, as equações (*) definem uma mudança de variáveis x e y como funções de u e v , de modo que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} = \frac{1}{y(u, v) + (x(u, v))^2}.$$

Nesse caso, segue do teorema de mudança de variáveis que

$$\begin{aligned} \iint_R (2x^2 + y) dx dy &= \\ \int_1^2 \int_{-1}^1 [y(u, v) + (x(u, v))^2] \frac{1}{y(u, v) + (x(u, v))^2} dudv &= \\ \int_1^2 \int_{-1}^1 dudv = \text{área}(Q) = 2. \end{aligned}$$

 Conforme comentado no início dessa aula, os exemplos mostram que a mudança de variáveis tanto pode ser induzida pelo integrando quanto pela região de integração.

MUDANÇA PARA COORDENADAS POLARES

Um sistema de coordenadas no plano é um meio de determinarmos, de forma única, cada ponto localizado no plano. O sistema mais utilizado é o de coordenadas retangulares que, para cada ponto P no plano, considera suas projeções ortogonais x e y sobre os eixos coordenados. Outro sistema muito importante para determinação de pontos no plano é o de coordenadas polares, que considera a distância r do ponto à origem $(0, 0)$ e o ângulo θ formado pelo eixo positivo dos x e o segmento de reta que liga $(0, 0)$ a P .

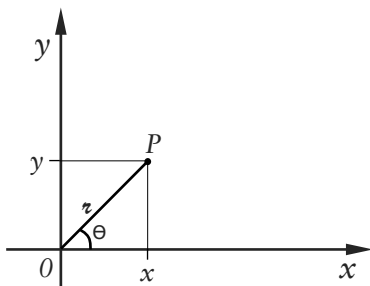


Figura 2.6

Os dois sistemas de coordenadas estão relacionados entre si por

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

onde $r \geq 0$ e $\theta \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$. Note que as equações acima definem uma aplicação

$$g(r, \theta) = (x(r, \theta), y(r, \theta))$$

do conjunto $Q = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 / r \geq 0, \theta_0 \leq \theta < \theta_0 + 2\pi\}$ em \mathbb{R}^2 .

i. A aplicação g é injetora em Q , exceto no subconjunto $\{(r, \theta) \in Q / r = 0\}$.

ii. O determinante Jacobiano da aplicação g , dado por

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} = r,$$

é diferente de zero em Q , exceto no subconjunto $\{(r, \theta) \in Q; r = 0\}$.

Dessa forma, pela observação do teorema de mudança de variáveis, é válida a seguinte fórmula:

$$\iint_{g(Q)} f(x, y) dx dy = \iint_Q f(x(r, \theta), y(r, \theta)) r dr d\theta.$$

- ✎ A imagem da semirreta $r = a$, no plano xy , é uma circunferência de raio a centrada na origem. A imagem da semirreta $\theta = k$, no plano xy , é uma semirreta que contém a origem

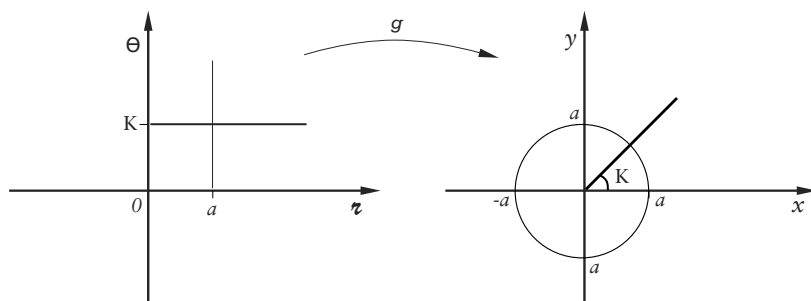


Figura 2.7

- ✎ A mudança para coordenadas polares é bastante útil quando a região de integração, no plano xy , é dada por um círculo ou uma parte de círculo.

Exemplo 2.2.

- a. Calcule a integral dupla

$$\iint_R e^{x^2+y^2} dx dy,$$

onde $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$.

Solução: Note que, além de termos um integrando bastante "complicado", a região de integração não pode ser escrita como sendo do tipo I ou II, sem que seja dividida em regiões menores.

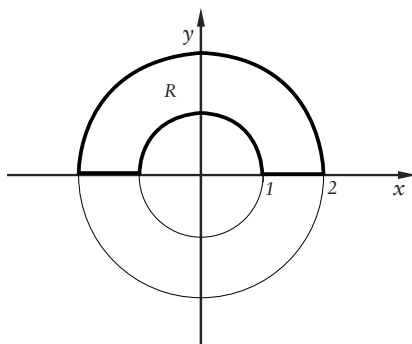


Figura 2.8

Entretanto, se considerarmos a mudança de variáveis para coordenadas polares, observamos que:

- i. $1 \leq x^2 + y^2 \implies 1 \leq r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2 \implies 1 \leq r$
- ii. $4 \geq x^2 + y^2 \implies 4 \geq r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2 \implies 2 \geq r$
- iii. $y \geq 0$

Considerando a condição $y \geq 0$ no novo sistema de coordenadas, tem-se que $r \sin \theta \geq 0$. Visto que $r \geq 0$, conclui-se que $\sin \theta \geq 0$ e, portanto, $0 \leq \theta \leq \pi$.

Dessa forma, a região de integração, no plano $r\theta$, é dada pelo retângulo


$$Q = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

Além disso,

$$e^{x^2+y^2} dx dy \implies e^{r^2} r dr d\theta$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \iint_R e^{x^2+y^2} dx dy &= \int_0^\pi \int_1^2 e^{r^2} r dr d\theta = \int_0^\pi \left[\frac{e^{r^2}}{2} \right]_{r=1}^{r=2} d\theta = \\ &= \int_0^\pi \left[\frac{e^4}{2} - \frac{e^1}{2} \right] d\theta = \frac{1}{2} (e^4 - e) [\theta]_{\theta=0}^{\theta=\pi} = \frac{\pi}{2} (e^4 - e). \end{aligned}$$

 No exemplo anterior, poderíamos analisar as variações de r e θ , por intermédio da região no plano xy , da seguinte forma: ao traçarmos segmentos de reta a partir da origem (que representam a variação de r),

percebemos que estes começam a cobrir a região ao tocar a circunferência de raio 1 e deixam de cobri-la ao passar pela circunferência de raio 2 e, portanto, $1 \leq r \leq 2$. Além disso, todos esses segmentos fazem ângulos com a parte positiva do eixo x entre 0 e π e, portanto, $0 \leq \theta \leq \pi$.

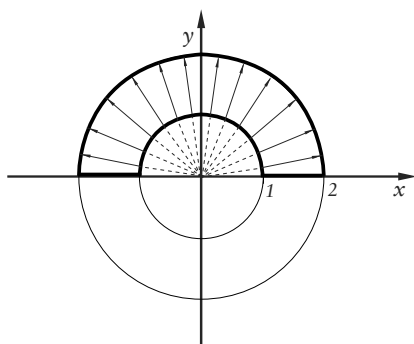


Figura 2.9

- b. Mostre que o volume da esfera de raio R é igual a $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Solução: Vamos considerar a esfera de raio R centrada na origem, dada pela equação $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

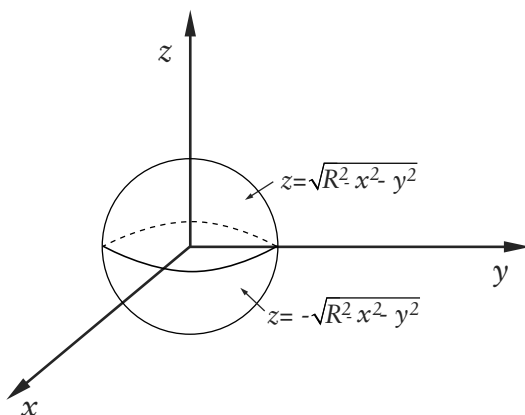


Figura 2.10

Note que o hemisfério norte está limitado superiormente pelo

gráfico de $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ e, inferiormente, pelo interior da circunferência $x^2 + y^2 = R^2$ no plano xy . Dessa forma

$$V_E = 2V_{HN} = 2 \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy.$$

Dada a dificuldade de se integrar a função $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ e visto que a região de integração é circular, é indicada a mudança de variáveis para coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r \cos \theta & 0 \leq r \leq R \\ y = r \sin \theta & 0 \leq \theta < 2\pi. \end{cases}$$

Nesse caso, tem-se

$$\begin{aligned} V_E &= 2 \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r dr d\theta. \end{aligned}$$

Observe que a integral é resolvida, em relação à variável r , utilizando-se a substituição simples $u = R^2 - r^2$ e, portanto,

$$\begin{aligned} V_E &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r dr d\theta = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} \frac{(R^2 - r^2)^{3/2}}{3/2} \right]_{r=0}^{r=R} d\theta = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \left[\left(-\frac{(R^2 - R^2)^{3/2}}{3} \right) - \left(-\frac{(R^2 - 0^2)^{3/2}}{3} \right) \right] d\theta = \\ &= \frac{2}{3} R^3 \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2}{3} R^3 [\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

- c. Calcule o volume do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ e pelos planos $z = 0$ e $x + z = 2$.

Solução: Observe, inicialmente, que

$$x^2 + y^2 = 2y \iff x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

e, portanto, o sólido é dado pela figura a seguir:

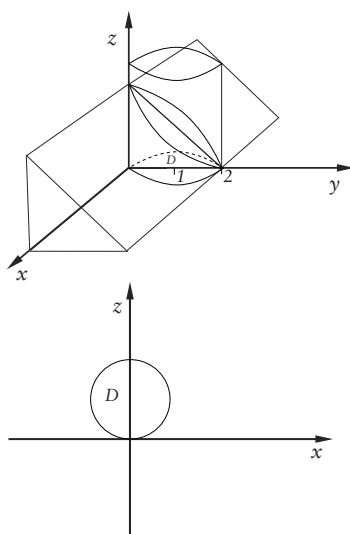


Figura 2.11

Note que o sólido é limitado superiormente pelo gráfico de $z = 2 - x$ e, inferiormente, pelo interior da circunferência $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, no plano xy . Dessa forma,

$$V = \iint_{x^2 + (y-1)^2 \leq 1} (2 - x) dx dy.$$

A região de integração é circular e, portanto, sugere uma mudança de variáveis para coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta. \end{cases}$$

Visto que o eixo x é tangente à circunferência na origem, então $0 \leq \theta \leq \pi$. Além disso, utilizando a mudança de variáveis sobre a curva que limita a região de integração, tem-se

$$x^2 + y^2 = 2y \implies r^2 = 2r \sin \theta \implies r = 0 \text{ ou } r = 2 \sin \theta.$$

Dessa forma, segue-se que

$$\begin{aligned} V &= \iint_{x^2 + (y-1)^2 \leq 1} (2 - x) dx dy = \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2 \sin \theta} (2 - r \cos \theta) r dr d\theta = \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2 \sin \theta} (2r - r^2 \cos \theta) dr d\theta = \\ &= \int_0^\pi \left[r^2 - \frac{r^3}{3} \cos \theta \right]_{r=0}^{r=2 \sin \theta} d\theta = \\ &= \int_0^\pi \left(4 \sin^2 \theta - \frac{8}{3} \sin^3 \theta \cos \theta \right) d\theta. \end{aligned}$$

Antes de continuar com o cálculo do volume, vale destacar a obtenção das primitivas das funções envolvidas:

i. $\int \sin^2 \theta d\theta = \int \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{\theta}{2} - \frac{\cos 2\theta}{4}$

ii. $\int \sin^3 \theta \cos \theta d\theta = \frac{\sin^4 \theta}{4}$

Voltando ao cálculo do volume, obtém-se, então,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\pi \left(4 \sin^2 \theta - \frac{8}{3} \sin^3 \theta \cos \theta \right) d\theta = \\ &= \left[4 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\cos 2\theta}{4} \right) - \frac{8}{3} \frac{\sin^4 \theta}{4} \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} = \\ &= (2\pi - \cos 2\pi - \frac{2}{3} \sin^4 \pi) - (2 \cdot 0 - \cos(2 \cdot 0) - \frac{2}{3} \sin^4 0) = 2\pi. \end{aligned}$$

- c. Note pela figura abaixo que, ao cobrir o interior da circunferência $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ com segmentos de reta a partir da origem (que representam a variação de r), percebemos que todos começam na própria origem e possuem comprimentos diferentes que dependem do ponto onde eles interceptem a circunferência. Dessa forma, é razoável esperar que a variação de r dependa do ângulo θ que o segmento de reta faz com a parte positiva do eixo x , como vimos no exemplo anterior.

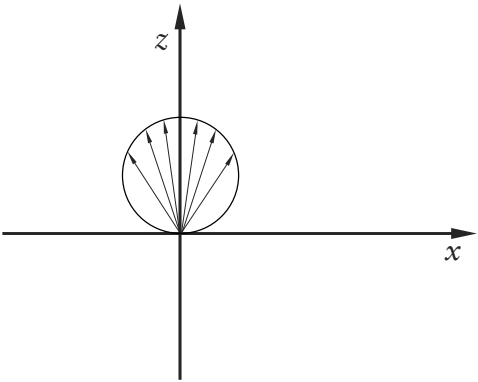


Figura 2.12

- d. Ainda no exemplo anterior, a região de integração limitada por $x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$ poderia sugerir, também, a mudança de variáveis

$$\begin{cases} x = r \cos \theta & 0 \leq r \leq 1 \\ y - 1 = r \sin \theta. & 0 \leq \theta < 2\pi, \end{cases}$$

isto é,

$$\begin{cases} x = r \cos \theta & 0 \leq r \leq 1 \\ y = 1 + r \sin \theta. & 0 \leq \theta < 2\pi, \end{cases}$$

Nesse caso, teríamos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} = r$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} V &= \iint_{x^2 + (y-1)^2 \leq 1} (2-x) dx dy = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2-r \cos \theta) r dr d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2r - r^2 \cos \theta) dr d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[r^2 - \frac{r^3}{3} \cos \theta \right]_{r=0}^{r=1} d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\cos \theta}{3} \right) d\theta = \\ &= \left[\theta - \frac{\sin \theta}{3} \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 2\pi \end{aligned}$$

- e. No caso em que a região de integração é dada por uma elipse, digamos,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \quad (a, b > 0)$$

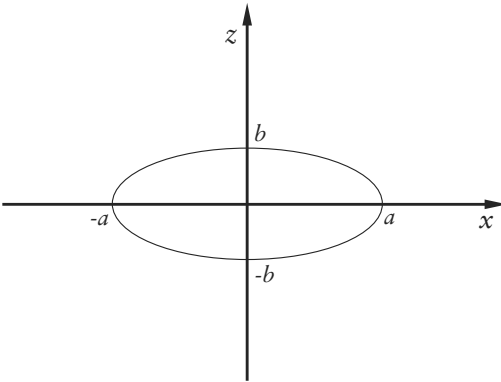


Figura 2.13

utilizamos a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = r \cos \theta & 0 \leq r \leq 1 \\ \frac{y}{b} = r \sin \theta. & 0 \leq \theta < 2\pi, \end{cases}$$

isto é,

$$\begin{cases} x = ar \cos \theta & 0 \leq r \leq 1 \\ y = br \sin \theta. & 0 \leq \theta < 2\pi, \end{cases}$$

Nesse caso, o determinante Jacobiano da mudança é dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} &= \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \\ &= \det \begin{bmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{bmatrix} = \\ &= abr. \end{aligned}$$

- f. Calcule o volume do elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, onde $a, b, c > 0$.

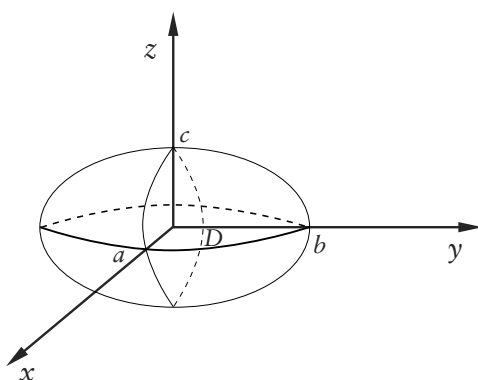


Figura 2.14

Solução: Note que a metade superior do elipsóide está limitada superiormente pelo gráfico de $z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ e, inferiormente, pelo interior da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ no plano xy . Dessa forma

$$V = 2 \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy.$$

Visto que a região de integração é limitada por uma elipse e dada a observação anterior, vamos considerar a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{cases} x = ar \cos \theta \\ y = br \sin \theta. \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta < 2\pi. \end{matrix}$$

Nesse caso, $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = abr$ e, portanto,

$$V = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 c \sqrt{1 - r^2} abr dr d\theta = 2abc \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} r dr d\theta.$$

Como no item b. deste exemplo, a integral é resolvida, em relação à variável r , utilizando-se uma substituição simples e, assim,

$$\begin{aligned} V &= 2abc \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} \frac{(1 - r^2)^{3/2}}{3/2} \right]_{r=0}^{r=1} d\theta = \\ &= 2abc \int_0^{2\pi} \left[0 - \left(-\frac{1}{3} \right) \right] d\theta = \\ &= \frac{2}{3} abc \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2}{3} abc [\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{4}{3} \pi abc. \end{aligned}$$

Aula 3

ALGUMAS APLICAÇÕES DA INTEGRAL DUPLA



O b j e t i v o

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 aplicar a integral dupla de funções contínuas para calcular a massa, o centro de massa e o momento de inércia de corpos bidimensionais.

Meta da aula:

Apresentar os conceitos de massa, centro de massa e momento de inércia por intermédio da integral dupla.

ALGUMAS APLICAÇÕES DA INTEGRAL DUPLA

Pré-requisitos

Você vai precisar dos conhecimentos sobre Integral Dupla apresentados nas Aulas 1 e 2 desse curso.

Na primeira aula do curso, foi apresentada a utilização da integral dupla para o cálculo de volumes. Foi visto que se $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e positiva em D , o volume do sólido W que está abaixo do gráfico de f e acima de D é dado por

$$V(W) = \iint_D f(x,y) dx dy.$$

Nesta aula, vamos ampliar a aplicabilidade da integral dupla, apresentando alguns conceitos por intermédio de tais integrais.

MASSA

Definição 3.1 (Massa).

Seja $B \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto compacto e seja $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x,y)$ determina a densidade em cada ponto $(x,y) \in B$. Se f for constante ($f(x,y) = d$), então a massa de B é dada por

$$m_B = d \cdot \text{área}(B).$$

No caso em que f não seja constante, como podemos obter a massa de B ?

A fim de tornar o trato mais simples, vamos supor que B seja dado pelo retângulo $[a,b] \times [c,d]$.

Considere uma partição

$$P = \{ (x_i, y_j) / i = 0, 1, 2, \dots, n \text{ e } j = 0, 1, 2, \dots, m \}$$

de B e, para cada retângulo B_{ij} , determinado por P , sejam $(x_i^*, y_j^*) \in B_{ij}$ e $(x_i^{**}, y_j^{**}) \in B_{ij}$, escolhidos de modo que

$$\begin{aligned} f(x_i^*, y_j^*) &= \min \{ f(x,y) / (x,y) \in B_{ij} \} \\ f(x_i^{**}, y_j^{**}) &= \max \{ f(x,y) / (x,y) \in B_{ij} \} \end{aligned}$$

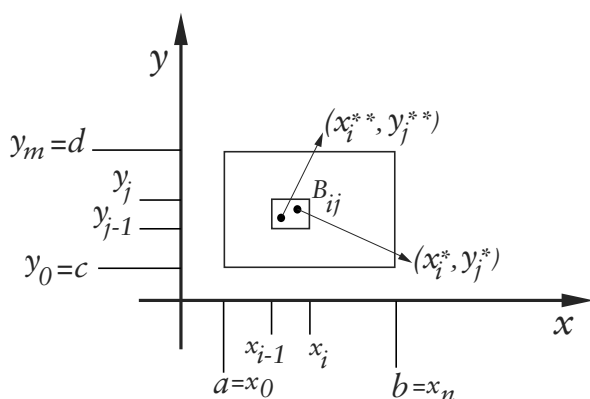


Figura 3.1

Note que

$$f(x_i^*, y_j^*) \cdot \text{área}(B_{ij}) \leq m_{B_{ij}} \leq f(x_i^{**}, y_j^{**}) \cdot \text{área}(B_{ij})$$

e, portanto,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i^*, y_j^*) \Delta x_i \Delta y_j \leq m_B \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i^{**}, y_j^{**}) \Delta x_i \Delta y_j$$

Intuitivamente, observa-se que os valores de $f(x_i^*, y_j^*)$ e $f(x_i^{**}, y_j^{**})$ se aproximam entre si à medida que consideramos retângulos B_{ij} cada vez menores e, portanto, devemos esperar que

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i^*, y_j^*) \Delta x_i \Delta y_j = m_B = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i^{**}, y_j^{**}) \Delta x_i \Delta y_j.$$

De fato, como a função f é contínua em B , então f é integrável sobre B e, portanto, os limites acima existem e são iguais à integral dupla de f sobre B . Nesse caso,

$$m_B = \iint_B f(x, y) dx dy.$$

Exemplo 3.1.

- a. Considere uma lâmina B dada pelo círculo $x^2 + y^2 \leq 1$.

Supondo que a densidade, em cada ponto, seja proporcional à distância do ponto à origem, determine a massa total da lâmina.

Solução: Note que densidade, em cada ponto $(x, y) \in B$, é dada por

$$f(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2},$$

onde k é a constante de proporcionalidade. Dessa forma, tem-se que

$$m_B = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} k\sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

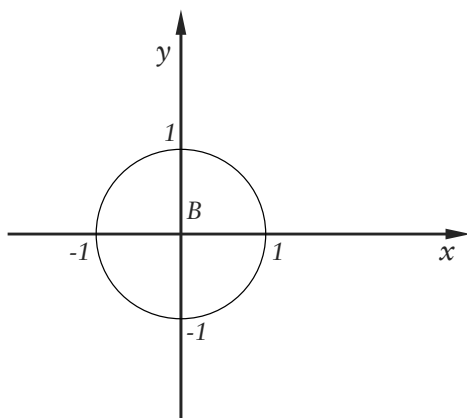


Figura 3.2

Observe que a região de integração é circular e, portanto, vamos utilizar a mudança de variáveis para coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta & 0 \leq r \leq 1 \\ y = r \sin \theta & 0 \leq \theta < 2\pi. \end{cases}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} m_B &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} k\sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 k\sqrt{r^2} r dr d\theta \\ &= k \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 dr d\theta = k \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=1} d\theta \\ &= \frac{k}{4} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{k}{3} [\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{k}{3} 2\pi = \frac{2k\pi}{3}. \end{aligned}$$

- b. Considere uma lâmina B dada pelo triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$. Supondo que a densidade, em cada ponto, seja proporcional ao quadrado distância do ponto à origem, determine a massa total da lâmina.

Solução: Note que densidade, em cada ponto $(x,y) \in B$, é dada por

$$f(x,y) = k(x^2 + y^2),$$

onde k é a constante de proporcionalidade. Dessa forma, tem-se que

$$m_B = \iint_B k(x^2 + y^2) dx dy.$$

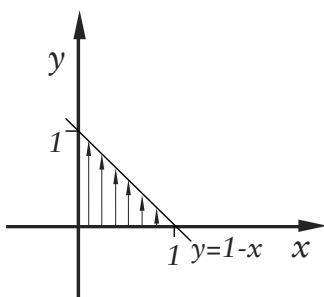


Figura 3.3

Observe que a região de integração pode ser descrita como do tipo I

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1 - x\}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} m_B &= \int_0^1 \int_0^{1-x} k(x^2 + y^2) dy dx = k \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \\ &= k \int_0^1 \left[x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3} \right] dx = \\ &= k \int_0^1 \left(\frac{1}{3} - x + 2x^2 - \frac{4x^3}{3} \right) dx = \\ &= k \left[\frac{x}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{k}{6}. \end{aligned}$$

CENTRO DE MASSA

Definição 3.2 (Centro de Massa).

Dado um sistema de "massas pontuais" m_1, m_2, \dots, m_n localizadas nos pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, definimos o centro de massa do sistema como o ponto (x_c, y_c) , onde

$$x_c = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

e

$$y_c = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + \dots + y_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Consideremos, agora, $B \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto compacto e $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x, y)$ determina a densidade em cada ponto $(x, y) \in B$. Como podemos definir o centro de massa (x_c, y_c) de B ?

Como na seção anterior, suponhamos que B seja dado pelo retângulo $[a, b] \times [c, d]$ e consideremos uma partição

$$P = \{(x_i, y_j) / i = 0, 1, 2, \dots, n \text{ e } j = 0, 1, 2, \dots, m\}$$

de B . Para cada retângulo B_{ij} , determinado por P , seja $(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \in B_{ij}$ e consideremos um sistema de "massas pontuais"

$$m_{ij} = f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n \text{ e } j = 0, 1, 2, \dots, m)$$

localizadas nos pontos (\bar{x}_i, \bar{y}_j) .

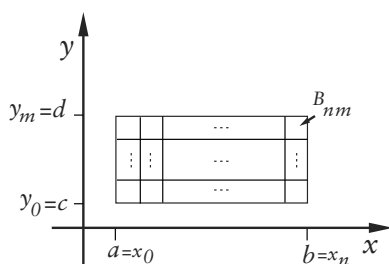


Figura 3.4

Nesse caso, o centro de massa é dado pelo ponto (\bar{x}_c, \bar{y}_c) , onde

$$\bar{x}_c = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \bar{x}_i m_{ij}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij}} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \bar{x}_i f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j}$$

e

$$\bar{y}_c = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \bar{y}_j m_{ij}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij}} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \bar{y}_j f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j}.$$

Note que as "massas pontuais" m_{ij} fornecem, aproximadamente, as massas dos retângulos B_{ij} e que tais aproximações se tornam "melhores" à medida que consideramos B_{ij} cada vez menores. Dessa forma, definimos o centro de massa de B como sendo o ponto (x_c, y_c) , onde

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \bar{x}_i f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j}{\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j} = \frac{\iint_B x f(x, y) dx dy}{\iint_B f(x, y) dx dy} = \\ &= \frac{\iint_B x f(x, y) dx dy}{\text{massa}(B)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_c &= \frac{\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \bar{y}_j f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j}{\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j} = \frac{\iint_B y f(x, y) dx dy}{\iint_B f(x, y) dx dy} = \\
 &= \frac{\iint_B y f(x, y) dx dy}{\text{massa}(B)}.
 \end{aligned}$$

Exemplo 3.2.

- a. No primeiro exemplo da seção anterior, determine o centro de massa da lâmina B .

Solução: Por definição, o centro de massa de B é o ponto (x_c, y_c) , onde

$$x_c = \frac{\iint_B x f(x, y) dx dy}{\text{massa}(B)} \quad \text{e} \quad y_c = \frac{\iint_B y f(x, y) dx dy}{\text{massa}(B)}.$$

Visto que a massa de B foi calculada no outro exemplo e $m_B = \frac{2k\pi}{3}$, precisamos calcular as integrais que faltam. Como anteriormente, utilizaremos a mudança para coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r \cos \theta & 0 \leq r \leq 1 \\ y = r \sin \theta & 0 \leq \theta < 2\pi. \end{cases}$$

i.

$$\begin{aligned}
 \iint_B x f(x, y) dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \cos \theta k \sqrt{r^2} r dr d\theta \\
 &= k \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \cos \theta dr d\theta \\
 &= k \int_0^{2\pi} \cos \theta \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=1} d\theta \\
 &= \frac{k}{4} \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \\
 &= \frac{k}{4} [\sin \theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0
 \end{aligned}$$


ii.

$$\begin{aligned}
 \iint_B yf(x,y)dxdy &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \sin \theta k \sqrt{r^2} r dr d\theta \\
 &= k \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \sin \theta dr d\theta \\
 &= k \int_0^{2\pi} \sin \theta \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=1} d\theta \\
 &= \frac{k}{4} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta \\
 &= \frac{k}{4} [-\cos \theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0
 \end{aligned}$$

Dessa forma, segue-se que

$$x_c = 0 \quad \text{e} \quad y_c = 0$$

isto é, o centro de massa de B é o ponto $(x_c, y_c) = (0, 0)$.

 Note que o resultado já deveria ser esperado, visto que tanto a lâmina quanto a função densidade são simétricas com relação à origem $(0, 0)$.

Se tivéssemos considerado apenas o semicírculo superior ($y \geq 0$),

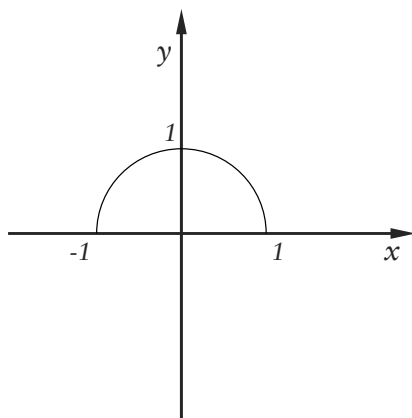


Figura 3.5

teríamos uma simetria da lâmina e da função densidade em relação ao eixo y e, portanto, esperaríamos que o centro de massa estivesse localizado sobre o eixo y . De fato, nesse caso a mudança para coordenadas polares seria

$$\begin{cases} x = r \cos \theta & 0 \leq r \leq 1 \\ y = r \sin \theta & 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

e, dessa forma, teríamos

$$\begin{aligned} \iint_B xf(x,y)dx dy &= \int_0^\pi \int_0^1 r \cos \theta k \sqrt{r^2} r dr d\theta \\ &= k \int_0^\pi \int_0^1 r^3 \cos \theta dr d\theta \\ &= k \int_0^\pi \cos \theta \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=1} d\theta \\ &= \frac{k}{4} \int_0^\pi \cos \theta d\theta \\ &= \frac{k}{4} [\sin \theta]_{\theta=0}^{\theta=\pi} = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \iint_B yf(x,y)dx dy &= \int_0^\pi \int_0^1 r \sin \theta k \sqrt{r^2} r dr d\theta \\ &= k \int_0^\pi \int_0^1 r^3 \sin \theta dr d\theta \\ &= k \int_0^\pi \sin \theta \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=1} d\theta \\ &= \frac{k}{4} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \\ &= \frac{k}{4} [-\cos \theta]_{\theta=0}^{\theta=\pi} = \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Como a massa de B seria a metade da obtida no exemplo anterior (VERIFIQUE!), teríamos

$$x_c = \frac{\iint_B xf(x,y)dx dy}{\text{massa}(B)} = \frac{0}{\frac{k\pi}{3}} = 0$$

e

$$y_c = \frac{\iint_B yf(x,y)dx dy}{\text{massa}(B)} = \frac{\frac{k}{2}}{\frac{k\pi}{3}} = \frac{3}{2\pi}$$

e, portanto, o centro de massa de B seria o ponto

$$(x_c, y_c) = \left(0, \frac{3}{2\pi} \right).$$

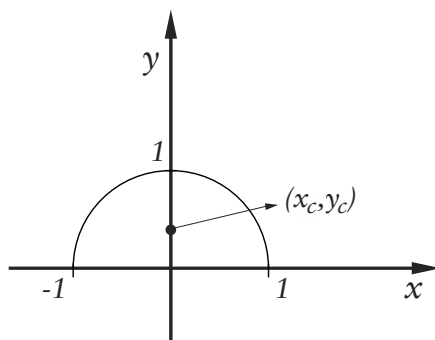


Figura 3.6

- b. No segundo exemplo da seção anterior, determine o centro de massa da lâmina B .

Solução: Novamente, vamos utilizar o valor $m_B = \frac{k}{6}$ obtido no exemplo da outra seção. Nesse caso, precisamos calcular

$$\iint_B xf(x,y)dxdy \quad \text{e} \quad \iint_B yf(x,y)dxdy.$$

i.

$$\begin{aligned} \iint_B xf(x,y)dxdy &= \int_0^1 \int_0^{1-x} xk(x^2 + y^2) dydx \\ &= k \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^3 + y^2x) dydx \\ &= k \int_0^1 \left[x^3y + \frac{y^3}{3}x \right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\ &= k \int_0^1 \left(\frac{x}{3} - x^2 + 2x^3 - \frac{4x^4}{3} \right) dx \\ &= k \left[\frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{2} - \frac{4x^5}{15} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{k}{15} \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}\iint_B yf(x,y)dxdy &= \int_0^1 \int_0^{1-x} yk(x^2+y^2) dydx \\ &= k \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2y+y^3) dydx \\ &= k \int_0^1 \left[x^2 \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\ &= k \int_0^1 \left(\frac{1}{4} - x + 2x^2 - 2x^3 + \frac{3x^4}{4} \right) dx \\ &= k \left[\frac{x}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{3x^5}{20} \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{k}{15}\end{aligned}$$

Dessa forma, segue-se que

$$x_c = \frac{\iint_B xf(x,y)dxdy}{\text{massa}(B)} = \frac{\frac{k}{15}}{\frac{k}{6}} = \frac{2}{5}$$

e

$$y_c = \frac{\iint_B yf(x,y)dxdy}{\text{massa}(B)} = \frac{\frac{k}{15}}{\frac{k}{6}} = \frac{2}{5}$$

isto é, o centro de massa de B é o ponto $(x_c,y_c) = \left(\frac{2}{5},\frac{2}{5}\right)$.

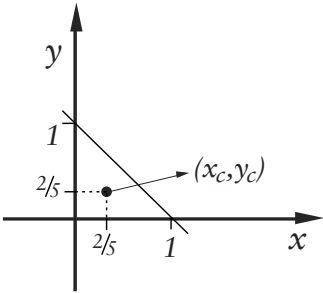


Figura 3.7

MOMENTO DE INÉRCIA

Definição 3.3 (Momento de Inércia).

O momento de inércia de um corpo em relação a um eixo é sua capacidade de resistir à aceleração angular em torno desse eixo. No caso de uma partícula de massa m , o momento de inércia é definido por

$$I = mr^2,$$

onde r é a distância da partícula ao eixo.

Consideremos, agora, $B \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto compacto e $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x, y)$ determina a densidade em cada ponto $(x, y) \in B$. Como podemos definir os momentos de inércia I_x e I_y de B , em torno dos eixos x e y , respectivamente ?

Como nas seções anteriores, vamos supor que B seja dado pelo retângulo $[a, b] \times [c, d]$ e consideremos uma partição

$$P = \{(x_i, y_j) / i = 0, 1, 2, \dots, n \text{ e } j = 0, 1, 2, \dots, m\}$$

de B . Para cada retângulo B_{ij} , determinado por P , seja $(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \in B_{ij}$ e suponhamos que a massa do retângulo B_{ij} se concentre toda em (\bar{x}_i, \bar{y}_j) . Dessa forma, os momentos de inércia de cada ponto (\bar{x}_i, \bar{y}_j) , $i = 0, 1, 2, \dots, n$ e $j = 0, 1, 2, \dots, m$, em relação aos eixos x e y são dados, respectivamente, por

$$I_x = \text{massa}(B_{ij}) \cdot d_x^2 \quad \text{e} \quad I_y = \text{massa}(B_{ij}) \cdot d_y^2,$$

onde d_x e d_y são, respectivamente as distâncias do ponto (\bar{x}_i, \bar{y}_j) aos eixos x e y .

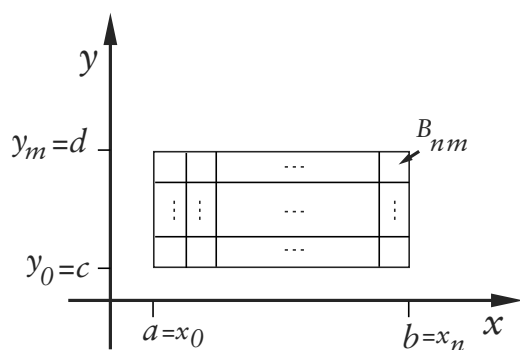


Figura 3.8

Note que $d_x = \bar{y}_j$, $d_y = \bar{x}_i$ e que a massa do retângulo B_{ij} pode ser aproximada por

$$m_{ij} = f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n \text{ e } j = 0, 1, 2, \dots, m).$$

Nesse caso, o momento de inércia de cada ponto (\bar{x}_i, \bar{y}_j) , $i = 0, 1, 2, \dots, n$ e $j = 0, 1, 2, \dots, m$, em relação aos eixos x e y é aproximado, respectivamente, por

$$I_x = m_{ij} d_x^2 = \bar{y}_j^2 f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

$$I_y = m_{ij} d_y^2 = \bar{x}_i^2 f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j.$$

Dessa forma, podemos estender o conceito de momento de inércia ao conjunto B , considerando a soma dos momentos de inércia dos pontos (\bar{x}_i, \bar{y}_j) , para cada vez mais pontos (e, conseqüentemente, para retângulos B_{ij} cada vez menores). Nesse caso, definimos os momentos de inércia I_x e I_y de B , em torno dos eixos x e y , respectivamente, por

$$I_x = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \bar{y}_j^2 f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j = \iint_B y^2 f(x, y) dx dy$$

e

$$I_y = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \bar{x}_i^2 f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j = \iint_B x^2 f(x, y) dx dy.$$

Podemos definir, ainda, o momento de inércia polar ou momento

de inércia em relação à origem por

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_B (x^2 + y^2) f(x, y) dx dy.$$

Exemplo 3.3.

- a. Dizemos que um corpo é homogêneo quando possui densidade constante. Determine o momento de inércia polar I_0 de um disco homogêneo, com densidade k e raio R .

Solução: Sem perda de generalidade, vamos considerar o disco centrado na origem

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Nesse caso, tem-se que


$$I_0 = \iint_B (x^2 + y^2) f(x, y) dx dy = \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} (x^2 + y^2) k dx dy.$$

Observe que a região de integração é circular e, portanto, vamos utilizar a mudança de variáveis para coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta & 0 \leq r \leq R \\ y = r \sin \theta & 0 \leq \theta < 2\pi. \end{cases}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} I_0 &= \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} (x^2 + y^2) k dx dy = k \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 r dr d\theta \\ &= k \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 dr d\theta = k \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=R} d\theta = \frac{kR^4}{4} \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{kR^4}{4} [\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{k\pi R^4}{2}. \end{aligned}$$

 No caso em que a densidade do disco B é uma constante k , sua massa é dada por

$$m = k \cdot \text{área}(B) = k\pi R^2.$$

Nesse caso, o exemplo anterior nos diz que

$$I_0 = \frac{1}{2} m R^2.$$

Portanto, se aumentarmos o raio ou a massa do disco, aumentamos o seu momento de inércia. O momento de inércia desempenha, em um movimento de rotação, um papel semelhante ao da massa em um movimento linear. Quanto maior for o momento de inércia de uma roda, maior será a dificuldade em começar o seu movimento de rotação.

- b. Determine os momentos de inércia I_x , I_y e I_0 de um retângulo $B = [-a, a] \times [-b, b]$, $a, b > 0$, com densidade constante k .

Solução:

i.

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_B y^2 f(x, y) dx dy = \int_{-b}^b \int_{-a}^a y^2 k dx dy \\ &= k \int_{-b}^b [xy^2]_{x=-a}^{x=a} dy = 2ka \int_{-b}^b y^2 dy \\ &= 2ka \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=-b}^{y=b} = \frac{4kab^3}{3} \end{aligned}$$

ii.

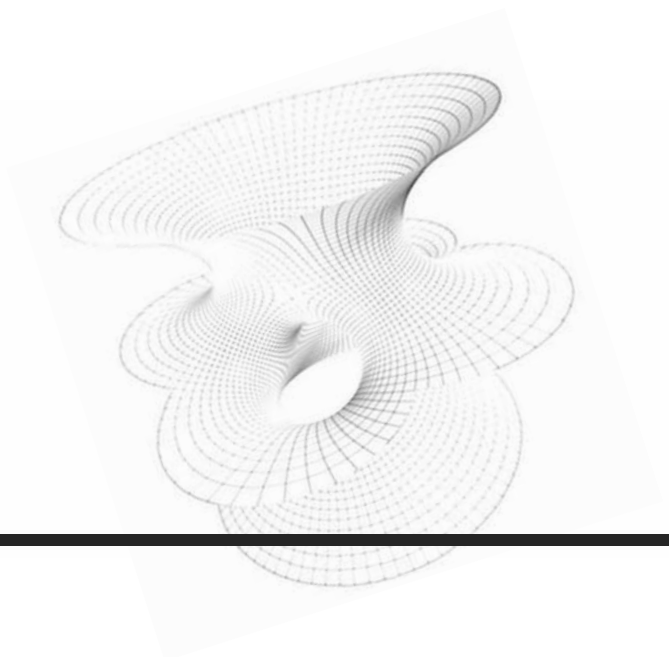
$$\begin{aligned} I_y &= \iint_B x^2 f(x, y) dx dy = \int_{-b}^b \int_{-a}^a x^2 k dx dy \\ &= k \int_{-b}^b \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=-a}^{x=a} dy = \frac{2ka^3}{3} \int_{-b}^b dy \\ &= \frac{2ka^3}{3} [y]_{y=-b}^{y=b} = \frac{4ka^3b}{3} \end{aligned}$$

iii.

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{4ka^3b}{3} + \frac{4kab^3}{3} = \frac{4kab}{3} (a^2 + b^2).$$

Aula 4

INTEGRAIS TRIPLAS



O b j e t i v o

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 calcular a integral tripla de funções contínuas sobre regiões no espaço e, em alguns casos, inverter a ordem de integração.

Meta da aula:

Apresentar a definição da integral de funções de três variáveis (integral tripla) sobre uma região definida no espaço. Será apresentado, inicialmente, o caso em que a região é dada por um paralelepípedo para, em seguida, considerar-se regiões mais gerais. Será dado o Teorema de Fubini, que fornece um método prático de calcular tais integrais, para funções contínuas, por intermédio de integrais definidas para funções de uma variável.

Pré-requisitos

Você vai precisar dos conhecimentos sobre Geometria Analítica, bem como dos conhecimentos sobre técnicas de integração e integral definida para funções reais de uma variável apresentados no Curso de Cálculo I.

INTEGRAIS TRIPLAS

INTERGAL DUPLA SOBRE PARALELEPÍPEDOS E O TEOREMA DE FUBINI

Como no caso de duas variáveis, definiremos a integral tripla por intermédio de somas de Riemann associadas a partições da região a ser integrada e, em seguida, enunciaremos o Teorema de Fubini, que fornece um meio de calcular tais integrais para funções contínuas, tendo como ferramenta o Segundo Teorema Fundamental do Cálculo.

Definição 4.1.

Seja $f : R \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real de três variáveis definida no paralelepípedo

$$R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, p \leq z \leq q\} = [a,b] \times [c,d] \times [p,q],$$

onde a,b,c,d,p,q são números reais tais que $a < b, c < d$ e $p < q$. Considere uma partição $P = P_1 \times P_2 \times P_3$ de R , isto é,

$$\begin{aligned} P_1 : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \\ P_2 : c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_m = d \\ P_3 : p = z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_r = q. \end{aligned}$$

e, para cada paralelepípedo

$$R_{ijk} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j, z_{k-1} \leq z \leq z_k\} \subset R,$$

seja $(x_i^*, y_j^*, z_k^*) \in R_{ijk}$, escolhido arbitrariamente.

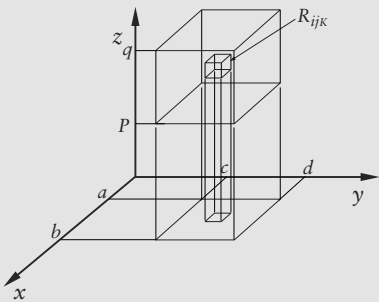


Figura 4.1

O número
$$S^* = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_j^*, z_k^*) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

(onde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ e $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$) é denominado soma de Riemann de f relativa à partição P e aos pontos (x_i^*, y_j^*, z_k^*) .

Definição 4.2.

Sejam f , P e S^* como na definição anterior e seja

$$\Delta = \max \{ \Delta x_1, \dots, \Delta x_n, \Delta y_1, \dots, \Delta y_m, \Delta z_1, \dots, \Delta z_r \}.$$

Diz-se que f é integrável sobre R se existe um número S tal que

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} S^* = S$$

independentemente das escolhas dos pontos (x_i^*, y_j^*, z_k^*) . Nesse caso, a integral tripla de f sobre R é dada por S e escreve-se

$$S = \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz.$$

 De forma análoga às integrais duplas, tem-se as seguintes propriedades:

- i. A integral da função constante $f(x, y, z) = 1$ fornece o volume do paralelepípedo R sobre o qual é calculada a integral, ou seja,

$$\iiint_R 1 dx dy dz = V(R).$$

- ii. Linearidade da integral tripla, isto é,


$$\begin{aligned} \iiint_R [f(x, y, z) + g(x, y, z)] dx dy dz = \\ \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_R g(x, y, z) dx dy dz \end{aligned}$$

$$\iiint_R k f(x, y, z) dx dy dz = k \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz,$$

onde $k \in \mathbb{R}$.

- iii. Se $R = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_n$, então

$$\begin{aligned} \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{R_1} f(x, y, z) dx dy dz + \dots + \\ \iiint_{R_n} f(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned}$$

 Mostra-se que toda função f contínua em um paralelepípedo R é integrável sobre R . (A demonstração desse resultado será omitida por não ser objetivo do texto)

Até aqui, vimos a definição e as propriedades da integral tripla sobre um paralelepípedo. O próximo passo é descobrir uma forma prática de calcular tais integrais. O Teorema de Fubini, apresentado a seguir, resolve essa questão para o caso de funções contínuas.

Teorema 4.1.

Seja $f : R \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no paralelepípedo $R = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$. Nesse caso, a integral tripla de f sobre R pode ser calculada por intermédio de integrais iteradas, não importando a ordem em que se realizam as integrações.

Por exemplo,

$$\iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_p^q f(x, y, z) dz \right] dy \right] dx,$$

Exemplo 4.1.

- a. Calcule a integral tripla $\iiint_R f(x, y, z) dx dy dz$, onde $f(x, y, z) = xy \cos(xz)$ e $R = [0, 2] \times [1, 2] \times [0, 1]$.

Solução: Pelo Teorema de Fubini, podemos calcular a integral em relação a uma variável de cada vez. Note que se escolhermos resolver primeiro em relação a x , teremos que utilizar a técnica de integração por partes, juntamente com a de substituição. No entanto, se integrarmos em relação a z , precisamos apenas da técnica de substituição:

$$\begin{aligned} \iiint_R xy \cos(xz) dx dy dz &= \int_1^2 \int_0^2 \left[\int_0^1 xy \cos(xz) dz \right] dx dy = \\ &= \int_1^2 \int_0^2 [y \sin(xz)]_{z=0}^{z=1} dx dy = \int_1^2 \int_0^2 y \sin x dx dy \end{aligned}$$

Observe que, agora, a integral em relação à variável x se torna bem mais simples.

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left[\int_0^2 y \sin x dx \right] dy &= \int_1^2 [y(-\cos x)]_{x=0}^{x=2} dy = \\ &= \int_1^2 y(-\cos 2 + \cos 0) dy\end{aligned}$$

Finalmente, resolvemos a integral restante em relação à variável y e obtemos

$$\int_1^2 y(1 - \cos 2) dy = (1 - \cos 2) \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=2} = \left[2 - \frac{1}{2} \right] (1 - \cos 2),$$

ou seja,

$$\iiint_R xy \cos(xz) dx dy dz = \frac{3}{2} (1 - \cos 2)$$

b. Calcule a integral tripla $\int_0^1 \int_{-1}^1 \int_0^1 ye^{x^2+z^2} dx dy dz$

Solução: Observe que a região de integração é dada pelo paralelepípedo $R = [0, 1] \times [-1, 1] \times [0, 1]$ e que não é possível obtermos a primitiva da função em relação às variáveis x ou z . Dessa forma, utilizando o Teorema de Fubini, teremos que calcular a integral primeiramente em relação à variável y , ou seja,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 \left[\int_{-1}^1 ye^{x^2+z^2} dy \right] dx dz &= \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} e^{x^2+z^2} \right]_{y=-1}^{y=1} dx dz = \\ \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1^2}{2} e^{x^2+z^2} - \frac{(-1)^2}{2} e^{x^2+z^2} \right] dx dz &= \int_0^1 \int_0^1 0 dx dz.\end{aligned}$$

Dessa forma, temos que

$$\int_0^1 \int_{-1}^1 \int_0^1 ye^{x^2+z^2} dx dy dz = 0$$

INTEGRAL TRIPLA SOBRE REGIÕES MAIS GERAIS


Nesta seção, trataremos da integral tripla sobre regiões, no espaço, mais gerais do que paralelepípedos. Para isso, assim como no caso das integrais duplas, dada uma função


f definida em uma região limitada W do \mathbb{R}^3 , definimos uma extensão \tilde{f} , em um paralelepípedo R contendo W , por

$$\tilde{f}(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & \text{se } (x, y, z) \in W \\ 0, & \text{se } (x, y, z) \in R - W, \end{cases}$$

e, caso \tilde{f} seja integrável sobre R , teremos

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_R \tilde{f}(x, y, z) dx dy dz.$$

 Note que, devido à definição anterior, todas propriedades apresentadas na Seção 1 permanecem válidas para o caso de regiões mais gerais.

 Se $f : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ representa a densidade em cada ponto da região W , então a massa total de W é dada por

$$m(W) = \iiint_W f(x, y, z) dx dy dz.$$

Seja $f : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em W . Para podermos utilizar aqui a ideia das integrais iteradas, como na seção anterior, para o cálculo de

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz,$$

precisamos considerar três tipos de regiões W .

REGIÕES DO TIPO I

São regiões definidas por

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in D \text{ e } f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\},$$

onde f_1 e f_2 são funções contínuas definidas em $D \subset \mathbb{R}^2$.

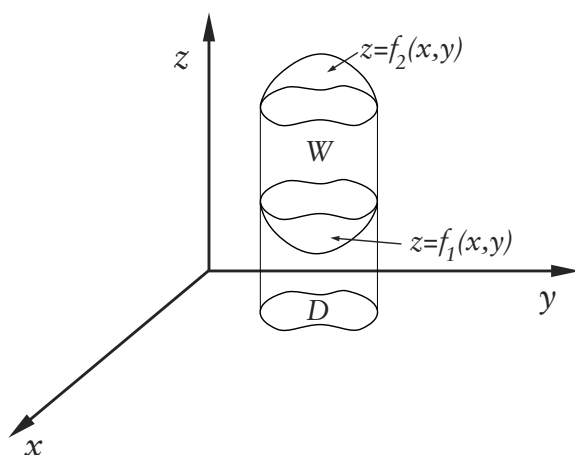



Figura 4.2

Nesse caso, a integral tripla de f sobre W pode ser calculada pelas integrais iteradas

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left[\int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy.$$

 Podemos interpretar a integral acima como se cobríssemos a região W por segmentos de reta da seguinte forma: para cada $(x, y) \in D$ fixo, o segmento de reta paralelo ao eixo z (que representa a variação de z) começa sobre a superfície $z = f_1(x, y)$ e termina sobre a superfície $z = f_2(x, y)$.

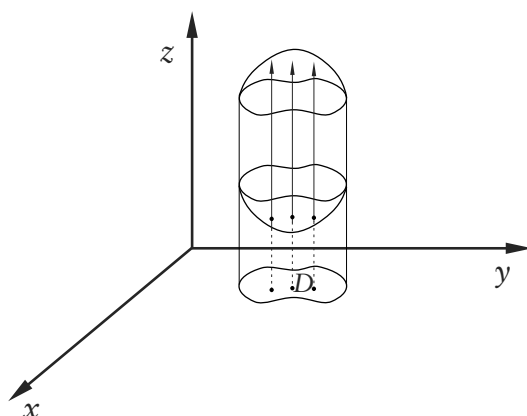


Figura 4.3

REGIÕES DO TIPO II

São regiões definidas por

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,z) \in D \text{ e } g_1(x,z) \leq y \leq g_2(x,z)\},$$

onde g_1 e g_2 são funções contínuas definidas em $D \subset \mathbb{R}^2$.

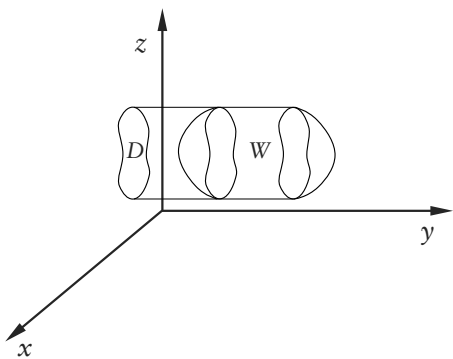



Figura 4.4

Nesse caso, a integral dupla de f sobre D pode ser calculada pelas integrais iteradas

$$\iiint_W f(x,y,z) dx dy dz = \iint_D \left[\int_{g_1(x,z)}^{g_2(x,z)} f(x,y,z) dy \right] dx dz.$$

 Podemos interpretar a integral acima como se cobríssemos a região W por segmentos de reta da seguinte forma: para cada $(x,z) \in D$ fixo, o segmento de reta paralelo ao eixo y (que representa a variação de y) começa sobre a superfície $y = g_1(x,z)$ e termina sobre a superfície $y = g_2(x,z)$.

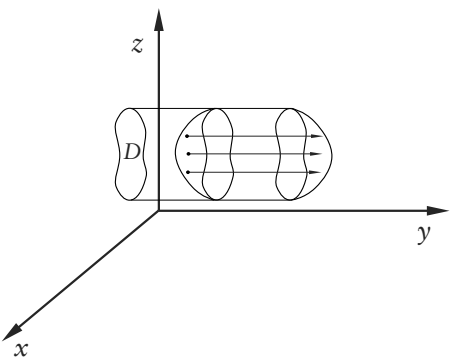


Figura 4.5

REGIÕES DO TIPO III

São regiões definidas por

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (y, z) \in D \text{ e } h_1(y, z) \leq x \leq h_2(y, z)\},$$

onde h_1 e h_2 são funções contínuas definidas em $D \subset \mathbb{R}^2$.

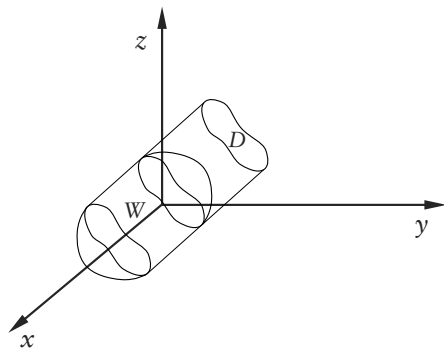



Figura 4.6

Nesse caso, a integral dupla de f sobre D pode ser calculada pelas integrais iteradas

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left[\int_{h_1(y, z)}^{h_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right] dy dz.$$

-  Podemos interpretar a integral acima como se cobríssemos a região W por segmentos de reta da seguinte forma: para cada $(y, z) \in D$ fixo, o segmento de reta paralelo ao eixo x (que representa a variação de x) começa sobre a superfície $x = h_1(y, z)$ e termina sobre a superfície $x = h_2(y, z)$.

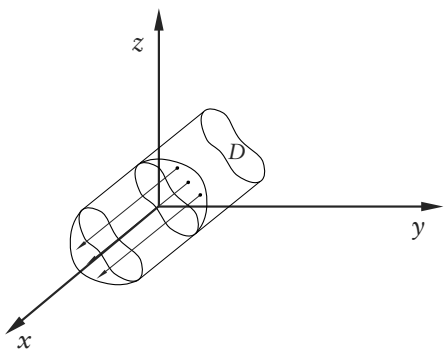


Figura 4.7

Todas as regiões que consideraremos serão de um dos três tipos ou poderão ser divididas em regiões, cada qual do tipo I, II ou III.

✎ Não se preocupe em classificar uma região W como sendo do tipo I, II ou III. O importante é escolher a ordem de integração mais adequada e definir os domínios de integração. Note que o procedimento para "montar" a integral tripla é exatamente o mesmo para o cálculo de volumes utilizando integral dupla.

Exemplo 4.2.

- a. Calcule o volume do sólido W limitado pelo cilindro $y = x^2$ e pelos planos $z = 1$ e $z + y = 2$.

Solução: Observe que W é dado pela figura abaixo

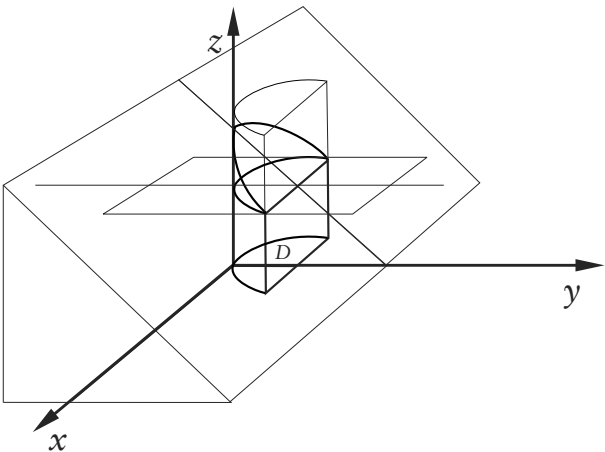


Figura 4.8

Vamos considerar o caso em que $f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y)$ e o conjunto D está no plano xy .

Observe, inicialmente, que se cobrirmos o interior do sólido com segmentos de reta verticais (que representam a variação de z), todos começarão no plano $z = 1$ e terminarão no plano $z + y = 2$.

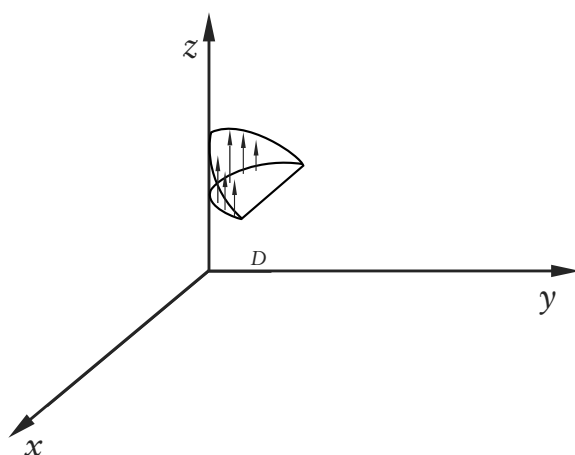


Figura 4.9

Além disso, a região D no plano xy encontra-se limitada pela diretriz do cilindro $y = x^2$ e pela reta $y = 1$, que é a interseção entre do planos $z = 1$ e $z + y = 2$. Se a cobrirmos por segmentos de retas verticais (que representam a variação de y) todos começarão na parábola $y = x^2$ e terminarão na reta $y = 1$.

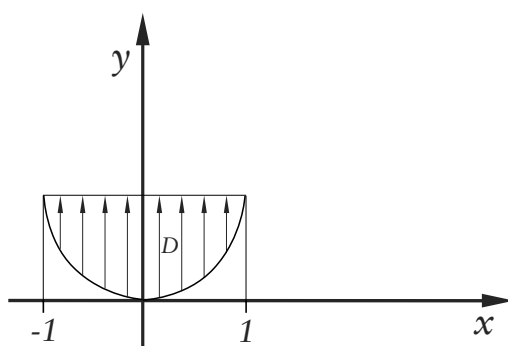


Figura 4.10

Logo,

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq 1 \\ 1 \leq z \leq 2 - y \end{cases}$$

e, portanto, o volume procurado é dado por

$$\begin{aligned}
 V(W) &= \iiint_W f(x, y, z) dx dy dz = \\
 &= \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 \left[\int_1^{2-y} 1 dz \right] dy dx = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 (1-y) dy dx = \\
 &= \int_{-1}^1 \left[y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=x^2}^{y=1} dx = \\
 &= \int_{-1}^1 \left(\left[1 - \frac{1^2}{2} \right] - \left[x^2 - \frac{(x^2)^2}{2} \right] \right) dx = \\
 &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} \right]_{x=-1}^{x=1} = \\
 &= \frac{8}{30} - \left(-\frac{8}{30} \right) = \frac{8}{15}.
 \end{aligned}$$

- b. Calcule o volume do sólido limitado pelas superfícies $z = 4 - x^2$, $z = 0$, $x + y = 2$ e $y = 0$

Solução: A figura abaixo mostra um esboço da região cujo volume é procurado

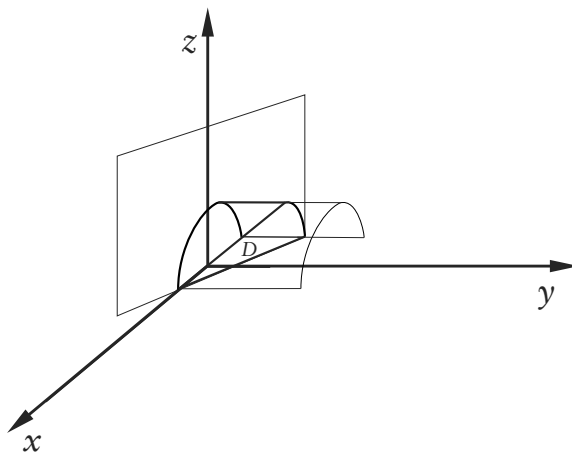


Figura 4.11

Vamos considerar o caso em que $f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)$ e o conjunto D está no plano xy .

Observe, inicialmente, que se cobrirmos o interior do sólido com segmentos de reta verticais (que representam a variação de z), todos começarão no plano xy (isto é $z = 0$) e terminarão no cilindro $z = 4 - x^2$.

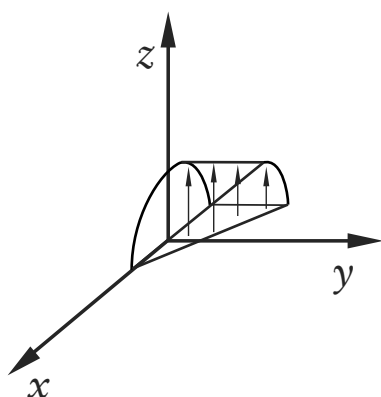


Figura 4.12

Além disso, a região D no plano xy encontra-se limitada pelas retas $x = -2$, $y = 0$, $x + y = 2$ e, se a cobrirmos por segmentos de retas verticais (que representam a variação de y) todos começarão no eixo x e terminarão na reta $x + y = 2$.

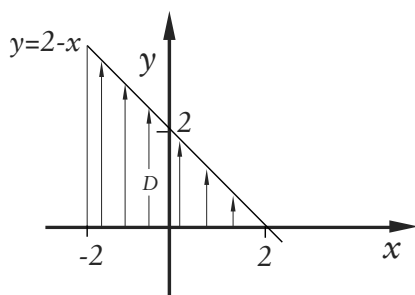



Figura 4.13

Dessa forma, tem-se que

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2 - x \\ 0 \leq z \leq 4 - x^2 \end{cases}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} V &= \iiint_W 1 dx dy dz = \int_{-2}^2 \int_0^{2-x} \left[\int_0^{4-x^2} 1 dz \right] dy dx = \\ &= \int_{-2}^2 \int_0^{2-x} (4-x^2) dy dx = \int_{-2}^2 (2-x)(4-x^2) dx = \\ &= \int_{-2}^2 (8+4x-2x^2+x^3) dx = \\ &= \left[8x-2x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4 \right]_{x=-2}^{x=2} = \frac{64}{3} \end{aligned}$$

 Podemos resolver o exemplo anterior considerando o caso em que $g_1(x,z) \leq y \leq g_2(x,z)$ e a região D encontra-se no plano xz .

Nesse caso, ao cobrirmos a região com segmentos de reta paralelos ao eixo y , observamos que todos começam no plano xz (isto é, $y = 0$) e terminam no plano $x + y = 2$. Além disso, a região D no plano xz está delimitada pela própria diretriz do cilindro $z = 4 - x^2$, com $z \geq 0$ (conforme figuras abaixo).

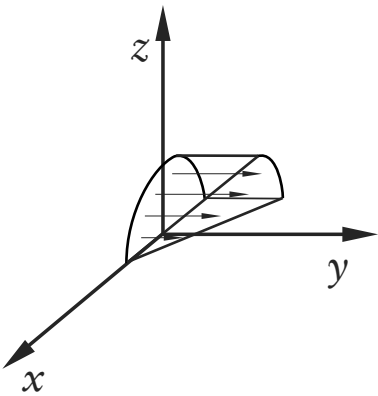


Figura 4.14

Assim, temos

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq z \leq 4 - x^2 \\ 0 \leq y \leq 2 - x \end{cases}$$

e, portanto,

$$V = \int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} \left[\int_0^{2-x} 1 dy \right] dz dx = \frac{64}{3}$$

c. Calcule

$$\iiint_W z dx dy dz,$$

onde W é o sólido limitado pelas superfícies $z = \sqrt{2-x^2-y^2}$ e $z = x^2 + y^2$.

Solução: Observe, inicialmente, que

$$z = \sqrt{2-x^2-y^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 2 \text{ e } z \geq 0,$$

e, portanto, tal superfície é a metade superior da esfera de centro em $(0,0,0)$ e raio $\sqrt{2}$. Logo, o sólido pedido é dado pela ilustração abaixo.

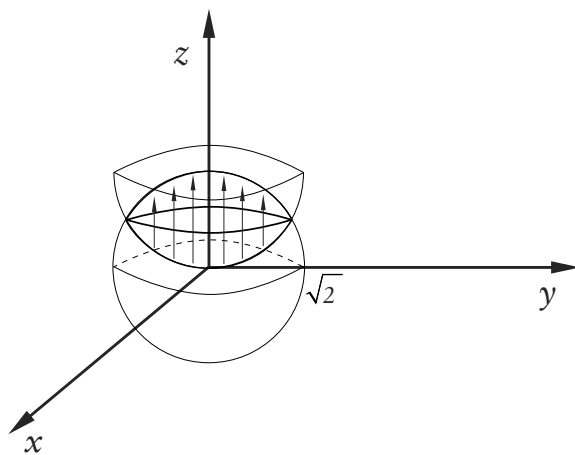


Figura 4.15

Note pela figura que, se traçarmos segmentos de reta verticais para cobrir o sólido em questão, tais segmentos começarão sobre a superfície do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e terminarão sobre o hemisfério $z = \sqrt{2-x^2-y^2}$. Logo, $x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{2-x^2-y^2}$ e, sendo D a projeção, sobre o plano xy , da curva de interseção entre o hemisfério e o parabolóide, tem-se que

$$\begin{aligned}\iiint_W z dx dy dz &= \iint_D \left[\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z dz \right] dx dy = \\ \iint_D \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=x^2+y^2}^{z=\sqrt{2-x^2-y^2}} dx dy &= \\ \frac{1}{2} \iint_D \left(2 - (x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2 \right) dx dy.\end{aligned}$$

Para determinar a região D , precisamos obter a curva de interseção entre o hemisfério e o parabolóide, ou seja,

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= \sqrt{2 - x^2 - y^2} \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 = 2 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow \\ (x^2 + y^2)^2 + (x^2 + y^2) - 2 &= 0.\end{aligned}$$

Resolvendo a equação do segundo grau em $x^2 + y^2$, obtemos

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ ou } x^2 + y^2 = -2.$$

Visto que a segunda equação não é possível, a região D é dada por

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

Logo, utilizando mudança de coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r \cos \theta & 0 \leq r \leq 1 & \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r, \\ y = r \sin \theta & 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

obtêm-se

$$\begin{aligned}\iiint_W z dx dy dz &= \frac{1}{2} \iint_D \left(2 - (x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2 \right) dx dy = \\ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2 - r^2 - r^4) r dr d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2r - r^3 - r^5) dr d\theta = \\ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6} \right]_{r=0}^{r=1} d\theta &= \frac{7}{24} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{7\pi}{12}.\end{aligned}$$

Aula 5

MUDANÇA DE VARIÁVEIS NA INTEGRAL TRIPLA



O b j e t i v o

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 calcular a integral tripla de funções contínuas utilizando, convenientemente, mudanças de variáveis.

Meta da aula:

Apresentar o teorema de mudança de variáveis para a integral tripla. Será dado, inicialmente, o teorema na sua forma geral e, em seguida, serão considerados os casos particulares de mudança para coordenadas cilíndricas e esféricas.

MUDANÇA DE VARIÁVEIS NA INTEGRAL TRIPLA

Pré-requisitos

Você vai precisar dos conhecimentos sobre Integral Tripla, apresentados na Aula 4 desse curso, sobre Mudança de Variáveis na Integral Dupla, apresentados na Aula 2 desse curso, bem como dos conhecimentos sobre derivadas parciais apresentados no Curso de Cálculo III.

Nesta aula, será enunciado o Teorema de Mudança de Variáveis na Integral Tripla e serão apresentados dois casos particulares de mudanças de variáveis: mudança para coordenadas cilíndricas e para coordenadas esféricas.

O teorema, dado a seguir, mostra que a fórmula de mudança de variáveis na integral tripla é uma simples extensão do caso de duas variáveis:

Teorema 5.1.

Considere $g : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação definida por

$$g(u, v, w) = (x, y, z) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)),$$

onde x, y e z são funções de classe C^1 em um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^3$. Seja Q um subconjunto limitado e fechado contido em U tal que

- i. g é injetora em Q e
- ii. o determinante Jacobiano da aplicação g , dado por

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix},$$

nunca se anula em Q .

Se f é integrável em $g(Q)$, então

$$\begin{aligned} \iiint_{g(Q)} f(x, y, z) dx dy dz = \\ \iint_Q f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw. \end{aligned}$$

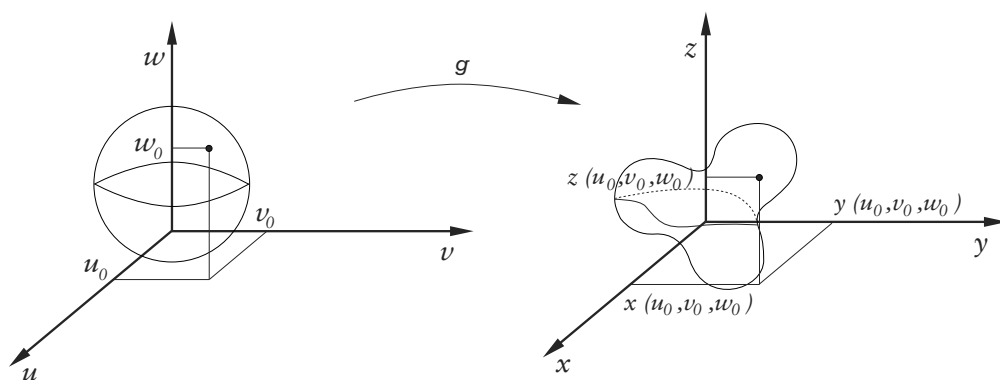


Figura 5.1

- ✍ A demonstração do resultado será omitida por não ser objetivo desse texto.
- ✍ O teorema permanece válido se as condições (i.) e (ii.) não ocorrerem em subconjuntos de Q dados por um ponto ou pelo gráfico de uma função contínua.

MUDANÇA PARA COORDENADAS CILÍNDRICAS

Um ponto P de coordenadas retangulares (x, y, z) tem coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , onde r e θ são as coordenadas polares da projeção de P no plano xy , conforme figura abaixo.

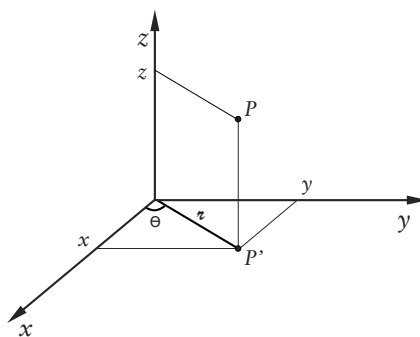


Figura 5.2

Os dois sistemas de coordenadas se relacionam pelas igualdades

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

onde $r \geq 0$, $\theta \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$ e $-\infty < z < +\infty$, que definem uma mudança de variáveis

$$g(r, \theta, z) = (x(r, \theta, z), y(r, \theta, z), z(r, \theta, z)),$$

definida no conjunto

$$Q = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3; r \geq 0, \theta_0 \leq \theta < \theta_0 + 2\pi, -\infty < z < +\infty\},$$

cujo determinante Jacobiano

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r$$

é diferente de zero em Q , exceto no subconjunto $\{(r, \theta, z) \in Q; r = 0\}$.

✎ Para cada $r > 0$ fixo, o conjunto $g(Q)$ descreve um cilindro circular reto de raio r e ilimitado na direção do eixo z .

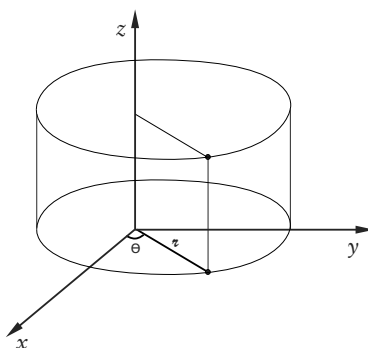


Figura 5.3

✎ Embora a definição tenha sido dada mantendo-se inalterada a variável z , pode-se, por intermédio de uma permutação dos eixos coordenados, definir as coordenadas cilíndricas mantendo-se qualquer uma das outras duas variáveis.

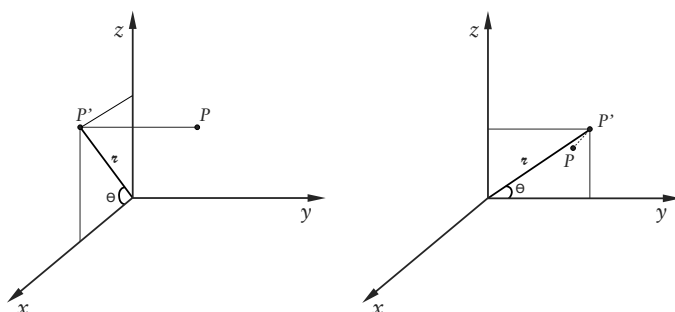


Figura 5.4

Voltemos ao item c. , do **Exemplo 4.2**, da Aula 4:

Calcular

$$\iiint_W z dx dy dz,$$

onde W é o sólido limitado pelas superfícies $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ e $z = x^2 + y^2$.

Vimos que o sólido W é dado pela figura abaixo

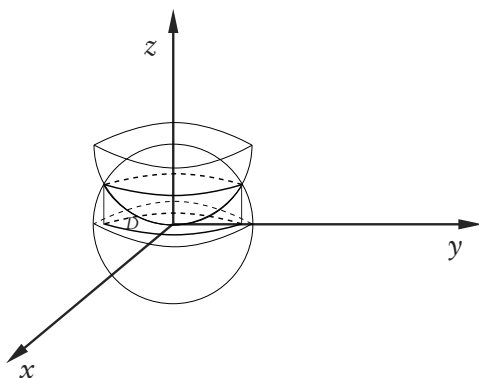


Figura 5.5

onde $x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ e D é a região do plano xy no interior da circunferência $x^2 + y^2 = 1$. Dessa forma, resolvemos a integral em relação a z , obtendo

$$\begin{aligned} \iiint_W z dx dy dz &= \iint_D \left[\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z dz \right] dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \iint_D \left(2 - (x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2 \right) dx dy. \end{aligned}$$

e, só então, realizamos a mudança de coordenadas polares na integral dupla. Note que, o sólido W é o interior de um cilindro circular reto de raio 1, limitado inferiormente pelo parabolóide e superiormente pelo hemisfério, e que, em última análise, foi utilizada a mudança de coordenadas cilíndricas.

O exemplo acima ilustra o fato de que a mudança para coordenadas cilíndricas corresponde à manutenção de uma das variáveis (no exemplo, a variável z) e à aplicação de coordenadas polares nas duas variáveis restantes.

Exemplo 5.1.

a. Calcule

$$\iiint_W (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$$

onde W é o sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$, pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e pelo plano $z = 4$.

Solução: Note, pela figura abaixo, que o sólido W é o interior do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ limitado inferiormente pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e superiormente pelo plano $z = 4$.

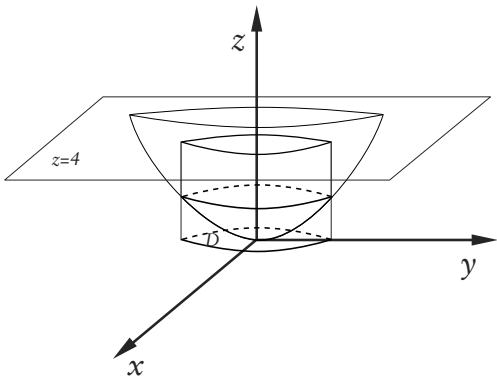


Figura 5.6

Dessa forma, utilizando a mudança de coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta < 2\pi \\ r^2 \leq z \leq 4 \end{matrix} \quad \text{e} \quad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r,$$

temos

$$\begin{aligned} \iiint_W (x^2 + y^2) dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^4 (r^2) r dz dr d\theta = \\ \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^4 r^3 dz dr d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 [z]_{z=r^2}^{z=4} dr d\theta = \\ \int_0^{2\pi} \int_0^1 (4r^3 - r^5) dr d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[r^4 - \frac{r^6}{6} \right]_{r=0}^{r=1} d\theta = \\ \int_0^{2\pi} \frac{5}{6} dr d\theta &= \frac{5}{6} [\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{5\pi}{3} \end{aligned}$$

- b. Calcule o volume do sólido limitado inferiormente pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e superiormente pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Solução: Note, pela figura abaixo, que o sólido W é o interior do cilindro, limitado inferiormente pelo cone e superiormente pela esfera, cuja diretriz é a curva C de interseção entre essas duas superfícies.

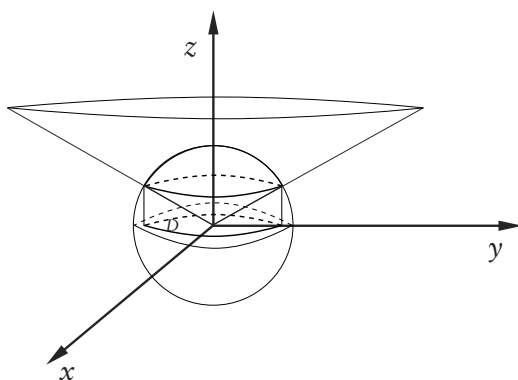


Figura 5.7

Note que a interseção ocorre no hemisfério superior, cuja equação é $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Dessa forma, para obter C , fazemos

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= \sqrt{4 - x^2 - y^2} \iff x^2 + y^2 = 4 - x^2 - y^2 \\ &\iff x^2 + y^2 = 2. \end{aligned}$$

Logo, utilizando a mudança de coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = r,$$

tem-se que

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 \leq 2 &\implies 0 \leq r \leq \sqrt{2} \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2} &\implies r \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}. \end{aligned}$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned} V &= \iiint_W 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_r^{\sqrt{4-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} r [z]_{z=r}^{z=\sqrt{4-r^2}} \, dr \, d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} r (\sqrt{4-r^2} - r) \, dr \, d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (r\sqrt{4-r^2} - r^2) \, dr \, d\theta. \end{aligned}$$

Para resolver a integral da primeira parcela, utiliza-se o método de substituição, obtendo

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (r\sqrt{4-r^2} - r^2) \, dr \, d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} \frac{(4-r^2)^{3/2}}{3/2} - \frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{2}} d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\left[-\frac{(2)^{3/2}}{3} - \frac{(2)^{3/2}}{3} \right] - \left[-\frac{(4)^{3/2}}{3} - 0 \right] \right) d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{8-4\sqrt{2}}{3} \right) d\theta = \left(\frac{8-4\sqrt{2}}{3} \right) [\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \\ &= \frac{2\pi(8-4\sqrt{2})}{3} = \frac{8\pi(2-\sqrt{2})}{3}. \end{aligned}$$

- c. Calcule o volume do sólido limitado pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e pelo plano $z = 2y$.

Solução: Note, pela figura abaixo, que o sólido W é o interior do cilindro, limitado inferiormente pelo parabolóide e superiormente pelo plano, cuja diretriz é a curva C , projeção sobre o plano xy , da interseção entre essas duas superfícies.

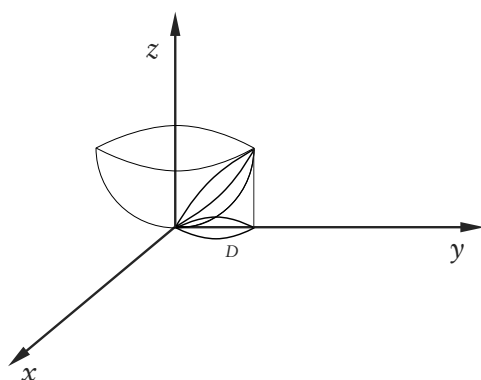


Figura 5.8

Para obter C , fazemos

$$x^2 + y^2 = 2y \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

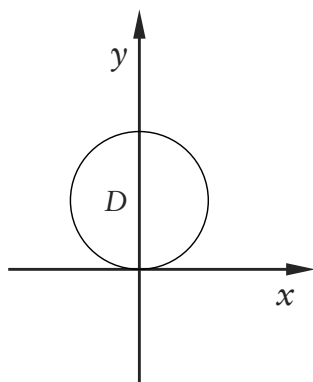


Figura 5.9

Como vimos no Exemplo 2.3, da Aula 2, a região delimitada por C induz duas possíveis mudanças de coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r \cos \theta & 0 \leq r \leq 2 \sin \theta \\ y = r \sin \theta. & 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x = r \cos \theta & 0 \leq r \leq 1 \\ y = 1 + r \sin \theta. & 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

Vamos utilizar a mudança de coordenadas cilíndricas associada ao segundo sistema de coordenadas polares. Neste caso, teremos

$$\begin{aligned} z \geq x^2 + y^2 &\Rightarrow z \geq 1 + 2r \sin \theta + r^2 \\ z \leq 2y &\Rightarrow z \leq 2 + 2r \sin \theta \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{cases} x = r \cos \theta & 0 \leq r \leq 1 \\ y = 1 + r \sin \theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z = z & 1 + 2r \sin \theta + r^2 \leq z \leq 2 + 2r \sin \theta \end{cases} \quad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r.$$

Dessa forma, segue que

$$\begin{aligned} V &= \iiint_W 1 dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1+2r \sin \theta + r^2}^{2+2r \sin \theta} r dz dr d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r [z]_{z=1+2r \sin \theta + r^2}^{z=2+2r \sin \theta} dr d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r (1 - r^2) dr d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r - r^3) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=1} d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) d\theta = \frac{1}{4} [\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

MUDANÇA PARA COORDENADAS ESFÉRICAS

Um ponto P de coordenadas retangulares (x,y,z) tem coordenadas esféricas (ρ, θ, φ) , onde ρ é a distância do ponto P à origem, θ é o ângulo formado pelo eixo positivo dos x e o segmento de reta que liga $(0,0)$ a (x,y) e φ é o ângulo formado pelo eixo positivo dos z e o segmento que liga P à origem (figura abaixo).

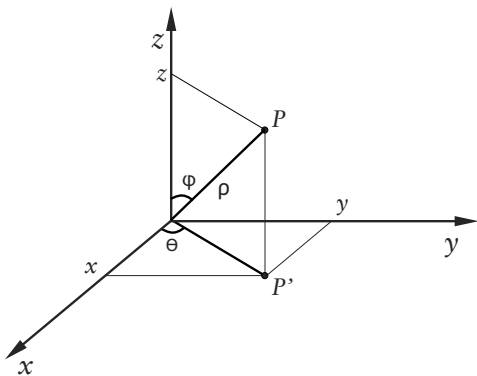


Figura 5.10

Os dois sistemas de coordenadas se relacionam pelas igualdades

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

onde $\rho \geq 0$, $\theta \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$ e $\rho \in [0, \pi]$, que definem uma mudança de variáveis

$$g(\rho, \theta, \varphi) = (x(\rho, \theta, \varphi), y(\rho, \theta, \varphi), z(\rho, \theta, \varphi)),$$

definida no conjunto

$$Q = \{(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3; \rho \geq 0, \theta_0 \leq \theta < \theta_0 + 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi\},$$

cujo determinante Jacobiano

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{bmatrix} =$$

$$\det \begin{bmatrix} \sin \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi & 0 & -\rho \sin \varphi \end{bmatrix} = -\rho^2 \sin \varphi$$

é diferente de zero em Q , exceto no subconjunto

$$\{(\rho, \theta, \varphi) \in Q; \rho = 0 \text{ ou } \varphi = 0 \text{ ou } \varphi = \pi\}.$$

✎ Para cada $\rho > 0$ fixo, o conjunto $g(Q)$ descreve uma esfera centrada na origem e de raio ρ .

De fato, considere $\theta = 0$. Nesse caso,

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \\ y = 0 \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi,$$

descreve a semicircunferência de raio ρ no plano xz , conforme figura abaixo:

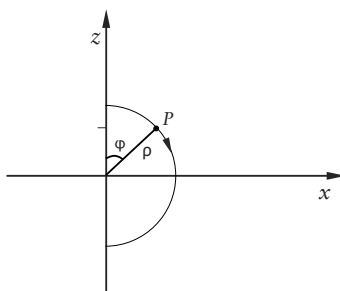


Figura 5.11

Variando, agora, o θ , de 0 a 2π , fazemos com que esse meridiano faça uma rotação completa em torno do eixo z , gerando a esfera de raio ρ , conforme a figura a seguir

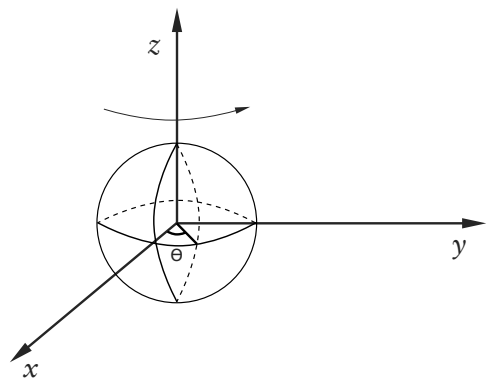


Figura 5.12

✎ É fundamental prestar atenção para o fato de que $0 \leq \varphi \leq \pi$ e, portanto, $\sin \varphi \geq 0$. Logo,

$$\left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} \right| = |-\rho^2 \sin \varphi| = \rho^2 \sin \varphi.$$

Desse modo, a fórmula de mudança de coordenadas esféricas é dada por

$$\begin{aligned} \iiint_{g(Q)} f(x,y,z) dx dy dz &= \\ \iiint_Q f(x(\rho, \theta, \varphi), y(\rho, \theta, \varphi), z(\rho, \theta, \varphi)) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

Exemplo 5.2.

- a. Na Aula 2, calculamos o volume de uma esfera de raio R , utilizando mudança de coordenadas polares na integral dupla. Nesse exemplo, vamos mostrar que o trabalho se torna bem mais simples quando usamos coordenadas esféricas.

Solução: De fato, para

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta & 0 \leq \rho \leq R \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta & 0 \leq \theta < 2\pi \\ z = \rho \cos \varphi & 0 \leq \varphi \leq \pi \end{cases} \quad \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} \right| = \rho^2 \sin \varphi$$

temos que

$$\begin{aligned} V(W) &= \iiint_W 1 dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \varphi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_{\rho=0}^{\rho=R} d\varphi d\theta = \\ &= \frac{R^3}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi d\theta = \\ &= \frac{R^3}{3} \int_0^{2\pi} [-\cos \varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} d\theta = \\ &= \frac{2R^3}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2R^3}{3} 2\pi = \frac{4}{3} \pi R^3 \end{aligned}$$

- b. No item b., do exemplo anterior, calculamos o volume do sólido W limitado inferiormente pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e superiormente pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, utilizando mudança de coordenadas cilíndricas. Vamos mostrar que o mesmo volume pode ser calculado usando mudança de coordenadas esféricas.

Solução: Note que o sólido W é o interior da porção da esfera de raio 2 gerada pela rotação da curva ilustrada a seguir:

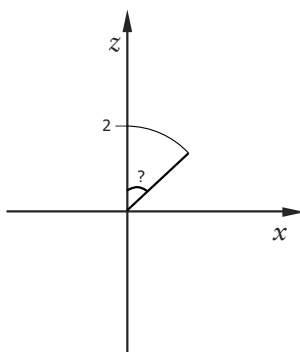


Figura 5.13

Dessa forma, podemos utilizar a mudança de coordenadas esfé-

ricas

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta & 0 \leq \rho \leq 2 \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta & 0 \leq \theta < 2\pi \\ z = \rho \cos \varphi & 0 \leq \varphi \leq ? \end{cases} \quad \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} \right| = \rho^2 \sin \varphi$$

Observe que o ângulo φ vai variar de 0 até um valor determinado pela interseção da esfera com o cone, ou seja,

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4 - x^2 - y^2} &\iff x^2 + y^2 = 4 - x^2 - y^2 \\ &\iff x^2 + y^2 = 2 \iff z = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos, pela figura abaixo, que

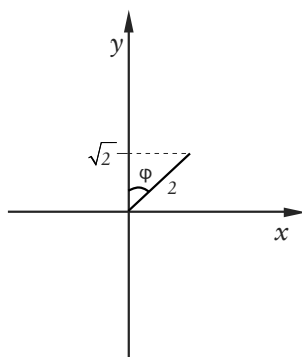


Figura 5.14

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies \varphi = \frac{\pi}{4},$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} V(W) &= \iiint_W 1 dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_{\rho=0}^{\rho=2} d\varphi d\theta = \\ &= \frac{8}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi d\theta = \\ &= \frac{8}{3} \int_0^{2\pi} [-\cos \varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{8}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \int_0^{2\pi} d\theta = \\ &= \frac{8}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) 2\pi = \frac{8\pi(2 - \sqrt{2})}{3}. \end{aligned}$$

☞ Se, no exemplo anterior, tivéssemos o parabolóide $z = x^2 + y^2$ no lugar do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, não seria

indicada a mudança de coordenadas esféricas. De fato, o sólido W seria obtido a partir da rotação, em torno do eixo z , da região abaixo

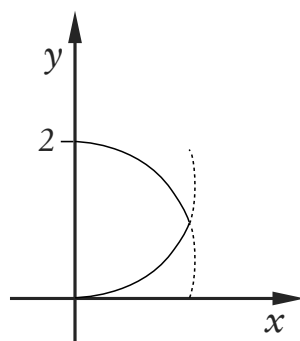


Figura 5.15

e, dessa forma, não teríamos um triângulo retângulo para utilizarmos as relações trigonométricas.

c. Calcule

$$\iiint_W \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$$

onde W é o sólido limitado superiormente pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ e inferiormente pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Solução: Observe, inicialmente, que

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2z \iff x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$$

e, portanto, o sólido W é dado pela figura a seguir

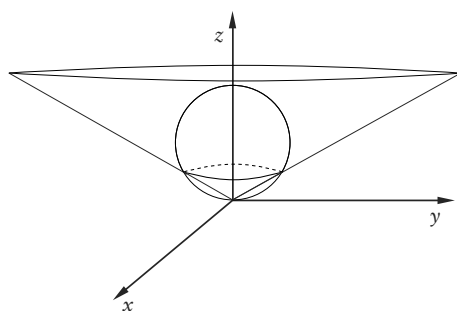


Figura 5.16

Observe que W é obtido pela rotação completa, em torno do eixo z , da região ilustrada abaixo

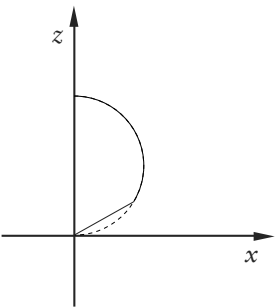


Figura 5.17

Logo, utilizando mudança de coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases} \quad \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} \right| = \rho^2 \sin \varphi,$$

temos que

- i. $0 \leq \theta < 2\pi$
- ii. O ângulo φ terá variação de 0 ao valor correspondente à interseção da esfera com o cone, isto é,

$$\begin{aligned} z = \sqrt{x^2 + y^2} &\implies \rho \cos \varphi = \sqrt{(\rho \sin \varphi)^2} = \rho \sin \varphi \\ \implies \tan \varphi = 1 &\implies \varphi = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

- iii. Ao cobrirmos a região de integração com segmentos de reta partindo da origem (que representam a variação de ρ), observamos que todos terminam sobre a superfície da esfera, conforme figura abaixo.

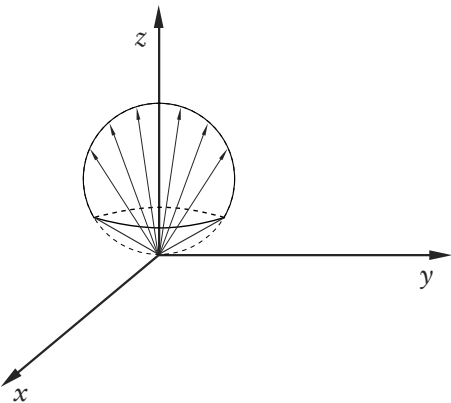


Figura 5.18

Logo, a variável ρ assumirá valores entre 0 e aqueles correspondentes à equação da esfera, ou seja,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2z \implies \rho^2 = 2\rho \cos \varphi \implies \rho = 2 \cos \varphi.$$

Dessa forma, segue que

$$\begin{aligned} \iiint_W \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz &= \\ \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2 \cos \varphi} \sqrt{\rho^2} \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta &= \\ \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2 \cos \varphi} \rho^3 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta &= \\ \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_{\rho=0}^{\rho=2 \cos \varphi} \sin \varphi d\varphi d\theta &= \\ \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4 \cos^4 \varphi \sin \varphi d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

Para resolver a integral acima, utilizamos o método da substituição e obtemos

$$\begin{aligned} \iiint_W \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4 \cos^4 \varphi \sin \varphi d\varphi d\theta = \\ 4 \int_0^{2\pi} \left[-\frac{\cos^5 \varphi}{5} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} d\theta &= 4 \int_0^{2\pi} -\frac{1}{5} \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^5 - 1 \right) d\theta = \\ \frac{4}{5} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{8} \right) \int_0^{2\pi} d\theta &= \frac{4}{5} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{8} \right) 2\pi = \frac{\pi}{5} (8 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

- d. Calcule o volume do interior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ situado, no primeiro octante, entre os planos $y = x$ e $y = \sqrt{3}x$.

Solução: Note que o sólido em questão, dado pela figura a seguir,

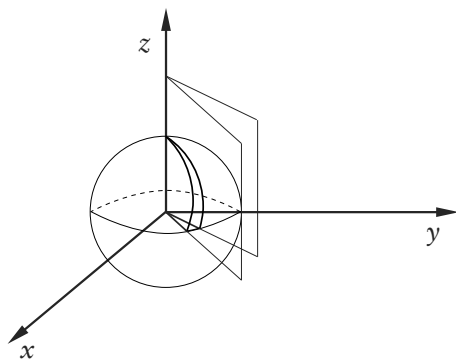


Figura 5.19

é gerado pela rotação do quarto de círculo de raio 1, em torno do eixo z , entre os planos $y = x$ e $y = \sqrt{3}x$, conforme ilustrações abaixo

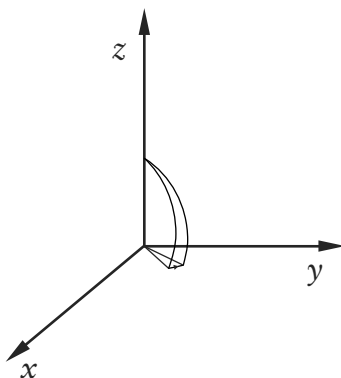


Figura 5.20

Dessa forma, utilizando mudança de coordenadas esféricas


$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta & 0 \leq \rho \leq 1 \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta & ? \leq \theta \leq ? \\ z = \rho \cos \varphi & 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} \right| = \rho^2 \sin \varphi$$

a variação de θ corresponderá aos valores situados entre os planos dados, ou seja,

- i. $y = x \implies \rho \sin \varphi \sin \theta = \rho \sin \varphi \cos \theta \implies \tan \theta = 1 \implies \theta = \frac{\pi}{4}$
- ii. $y = \sqrt{3}x \implies \rho \sin \varphi \sin \theta = \sqrt{3}\rho \sin \varphi \cos \theta \implies \tan \theta = \sqrt{3} \implies \theta = \frac{\pi}{3}$.

Dessa forma, o volume pedido é dado por

$$\begin{aligned} V(W) &= \iiint_W 1 dx dy dz = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta = \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_{\rho=0}^{\rho=1} d\varphi d\theta = \\ &= \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi d\theta = \\ &= \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} [-\cos \varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{36}. \end{aligned}$$

 No caso em que a região de integração é dada por um elipsoide, digamos,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \quad (a, b, c > 0)$$

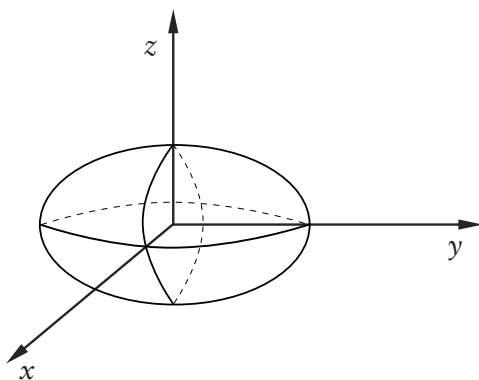


Figura 5.21

utilizamos a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ \frac{y}{b} = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ \frac{z}{c} = \rho \cos \varphi \end{cases} \quad \begin{aligned} 0 &\leq \rho \leq 1 \\ 0 &\leq \theta < 2\pi \\ 0 &\leq \varphi \leq \pi, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{cases} x = a\rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = b\rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = c\rho \cos \varphi \end{cases} \quad \begin{aligned} 0 &\leq \rho \leq 1 \\ 0 &\leq \theta < 2\pi, \\ 0 &\leq \varphi \leq \pi \end{aligned}$$

Nesse caso, o determinante Jacobiano da mudança é dado por

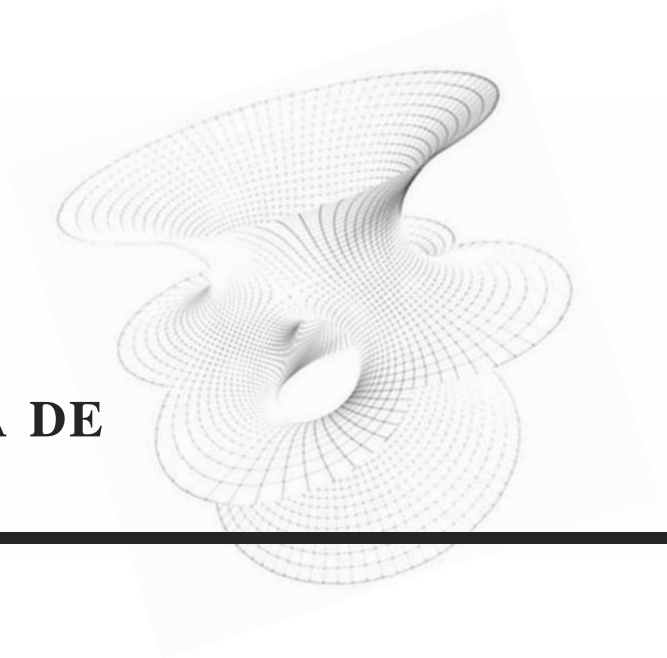
$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} &= \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \\ &= \det \begin{bmatrix} a \sin \varphi \cos \theta & -a\rho \sin \varphi \sin \theta & a\rho \cos \varphi \cos \theta \\ b \sin \varphi \sin \theta & b\rho \sin \varphi \cos \theta & b\rho \cos \varphi \sin \theta \\ c \cos \varphi & 0 & -c\rho \sin \varphi \end{bmatrix} = \\ &= -abc\rho^2 \sin \varphi \end{aligned}$$

e, portanto, a fórmula de mudança de coordenadas é dada por

$$\iiint_{g(Q)} f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_Q f(x(\rho,\theta,\varphi),y(\rho,\theta,\varphi),z(\rho,\theta,\varphi)) abc \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi.$$

Aula 6

INTEGRAL DE LINHA DE FUNÇÃO ESCALAR



O b j e t i v o s

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 calcular a integral de linha de funções escalares utilizando, convenientemente, as parametrizações das curvas envolvidas.

Meta da aula:

Apresentar a definição da integral de funções reais de duas ou três variáveis ao longo de uma curva no plano ou no espaço, a chamada Integral de Linha. Para tanto, serão dadas algumas parametrizações de curvas na primeira seção. A segunda seção é reservada para a definição e exemplos da Integral de Linha citada acima.

INTEGRAL DE LINHA DE FUNÇÃO ESCALAR

Pré-requisitos

Você vai precisar dos conhecimentos sobre Funções Vetoriais, apresentados no Curso de Cálculo II, bem como dos conhecimentos sobre técnicas de integração e integral definida para funções reais de uma variável apresentados no Curso de Cálculo II.

O foco principal dessa aula é definir e apresentar exemplos de integrais de funções de duas ou três variáveis definidas ao longo de curvas no plano ou no espaço, respectivamente. Para isso, como veremos mais a frente, é necessário trabalhar com a representação paramétrica de tais curvas, o que introduziremos na seção a seguir.

CURVAS PARAMETRIZADAS

Apresentamos abaixo a definição de curva parametrizada para o caso do \mathbb{R}^3 . A definição para o caso do \mathbb{R}^2 , é inteiramente análoga.

Definição 6.1.

Seja $C \subset \mathbb{R}^3$ uma curva. Uma parametrização de C é uma função vetorial $\sigma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

tal que, ao tomarmos os valores de $t \in I$, o ponto final $P = (x, y, z)$ do vetor $\sigma(t)$ percorre toda a curva C .
As equações

$$x = x(t), y = y(t) \text{ e } z = z(t)$$

são ditas equações paramétricas de C e a varável t é dita o parâmetro.

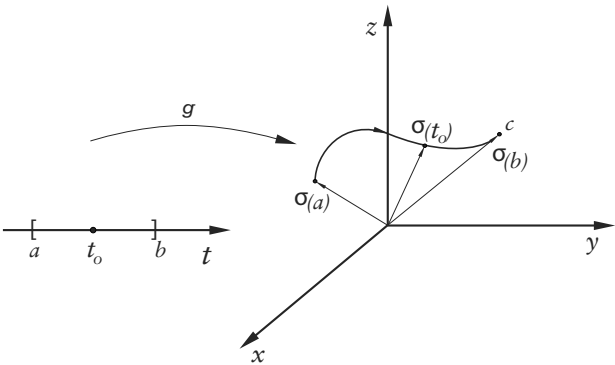


Figura 6.1

✎ Uma curva $C \subset \mathbb{R}^3$ pode ter diversas parametrizações. O processo de se obter uma parametrização para C consiste em, a partir de um parâmetro t escolhido, encontrar uma forma de representar as coordenadas x , y e z , de um ponto qualquer de C , em função de t . Aqui é fundamental determinar o intervalo I , ao longo do qual o parâmetro deve variar, para que sejam representados todos os pontos de C .

Exemplo 6.1.

a. Obtenha uma parametrização para a parábola $y = x^2$

Solução: Se tomarmos como parâmetro t a própria variável x , podemos considerar

$$x(t) = t \text{ e } y(t) = t^2.$$

Como x pode assumir qualquer valor, temos que $t \in \mathbb{R}$.

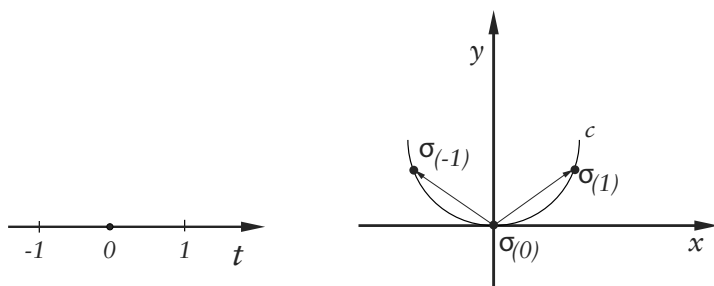


Figura 6.2

✎ De modo geral, se uma curva $C \in \mathbb{R}^2$ é o gráfico de uma função

$$y = f(x), x \in I,$$

uma parametrização natural de C é dada por

$$\sigma(t) = (t, f(t)), t \in I.$$

- b. Encontre uma parametrização para a circunferência $x^2 + y^2 = R^2$.

Solução: Seja $P = (x,y)$ um ponto sobre a circunferência. Se pensarmos nas coordenadas polares r e θ , observamos que todos os pontos que estão sobre a circunferência possuem a mesma coordenada $r = R$ e, portanto, se diferenciam pela coordenada θ , que é dada pelo ângulo formado pelo segmento que liga a origem a P e pela parte positiva do eixo x . Dessa forma, é natural escolhermos como parâmetro t a coordenada polar θ .

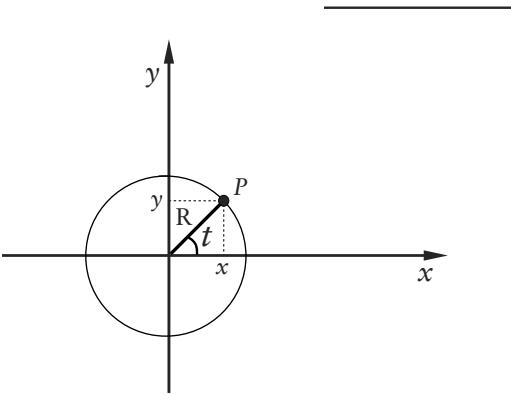



Figura 6.3

Note pela figura acima que

$$\begin{aligned}\cos t &= \frac{x}{R} \implies x = R \cos t \\ \text{sent } t &= \frac{y}{R} \implies y = R \text{ sent } t.\end{aligned}$$

Além disso, como desejamos percorrer toda a circunferência, o parâmetro t deve assumir todos os valores entre 0 e 2π . Logo, uma parametrização é dada por

$$\sigma(t) = (R \cos t, R \text{ sent } t), 0 \leq t < 2\pi.$$

 Para o caso geral $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$,

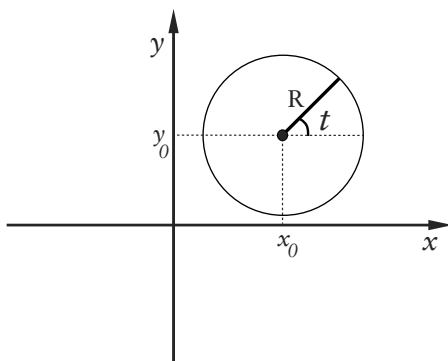


Figura 6.4

podemos considerar a mudança de variáveis

$$X = x - x_0 \text{ e } Y = y - y_0$$

e, nesse caso, teremos $X^2 + Y^2 = R^2$. Dessa forma, segue do exemplo anterior que

$$\begin{cases} X = R \cos t \\ Y = R \sin t \end{cases} \implies \begin{cases} x = x_0 + R \cos t \\ y = y_0 + R \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t < 2\pi$$

- c. Ainda generalizando o item b., podemos considerar uma elipse $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$.

Aqui a mudança de variáveis indicada é

$$X = \frac{x - x_0}{a} \text{ e } Y = \frac{y - y_0}{b}$$

e, nesse caso, teremos $X^2 + Y^2 = 1$. Logo, segue do item anterior que

$$\begin{cases} X = \cos t \\ Y = \sin t \end{cases} \implies \begin{cases} x = x_0 + a \cos t \\ y = y_0 + b \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t < 2\pi$$

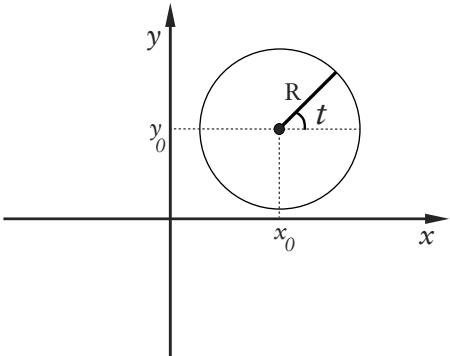


Figura 6.4

- d. Obtenha uma parametrização para a reta $l \subset \mathbb{R}^3$ que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e é paralela ao vetor não nulo $V = (v_1, v_2, v_3)$.

Solução: Note, pela figura abaixo, que se pegarmos um ponto $P = (x, y, z)$ sobre a reta l , o vetor $OP - OP_0$ será paralelo ao vetor V , ou seja, $OP - OP_0 = kV$.

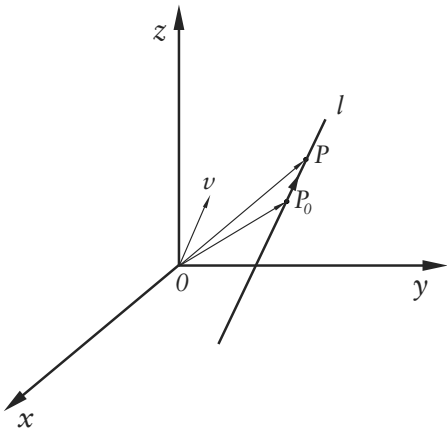


Figura 6.6

Note que a constante de paralelismo define de forma única o ponto P tomado arbitrariamente sobre a reta l :

- i. $k = 0 \implies P = P_0$;
- ii. $k > 0 \implies OP - OP_0$ tem o mesmo sentido de V e, quanto maior for o valor de k , mais distante de P_0 encontra-se o ponto P ;


- iii. $k < 0 \implies OP - OP_0$ tem o sentido contrário ao de V e, quanto menor for o valor de k , mais distante de P_0 encontra-se o ponto P .

Dessa forma, podemos tomar a constante de paralelismo k como parâmetro t e, fazendo $t \in \mathbb{R}$, percorremos toda a reta l . Logo

$$\begin{aligned} OP - OP_0 &= kV \implies (x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) = t(v_1, v_2, v_3) \\ \implies (x, y, z) &= (x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3) \end{aligned}$$

e, portanto, uma parametrização é dada por

$$\sigma(t) = (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2, z_0 + tv_3), t \in \mathbb{R}$$

 Podemos utilizar o mesmo raciocínio do exemplo anterior para obter uma parametrização do segmento de reta ligando um ponto $A = (a_1, a_2, a_3)$ a um ponto $B = (b_1, b_2, b_3)$.

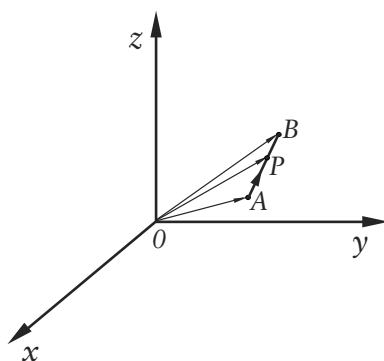


Figura 6.7

De fato, pela ilustração acima, observa-se que, dado um ponto qualquer $P = (x, y, z)$ sobre o segmento de reta, o vetor $OP - OA$ é paralelo ao vetor $OB - OA$ e, portanto,

$$\begin{aligned} OP - OA &= t(OB - OA) \implies (x, y, z) - (a_1, a_2, a_3) = \\ &= t(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3). \end{aligned}$$

Note que os vetores possuem o mesmo sentido e que

$$\begin{aligned} t = 0 &\implies P = A \\ t = 1 &\implies P = B. \end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos a seguinte parametrização:

$$\sigma(t) = (a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2), a_3 + t(b_3 - a_3)), 0 \leq t \leq 1.$$

- e. Parametrize a hipotenusa do triângulo retângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.

Solução: Observe que a hipotenusa é dada pelo segmento de reta que liga os pontos $(1,0)$ e $(0,1)$.

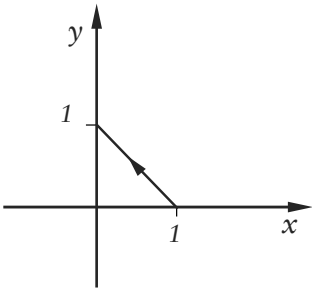



Figura 6.8

Vamos parametrizar esse segmento partindo do ponto $(1,0)$ em direção ao ponto $(0,1)$. Pela observação anterior, temos

$$\begin{aligned} (x,y) - (1,0) &= t((0,1) - (1,0)) \implies \\ (x,y) &= (1,0) + t((0,1) - (1,0)) = (1-t,t). \end{aligned}$$

Logo

$$\sigma(t) = (1-t,t), 0 \leq t \leq 1$$

 No exemplo anterior, se eliminarmos o parâmetro t , obtemos a representação explícita da reta

$$x = 1 - t = 1 - y \implies x + y = 1$$

- f. Ainda no exemplo anterior, podemos parametrizar o mesmo segmento percorrendo-o no outro sentido. Nesse caso, temos

$$(x, y) - (0, 1) = t((1, 0) - (0, 1)) = (t, 1 - t), \\ 0 \leq t \leq 1$$

e, da mesma forma, podemos eliminar o parâmetro e obter

$$y = 1 - t = 1 - x \implies x + y = 1.$$

- g. Encontre uma parametrização para a curva C de interseção entre o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e o plano $y + z = 2$.

Solução: Observe, pela figura abaixo, que a curva C encontra-se sobre o plano $y + z = 2$ e sua projeção sobre o plano xy coincide com a diretriz do cilindro $x^2 + y^2 = 1$

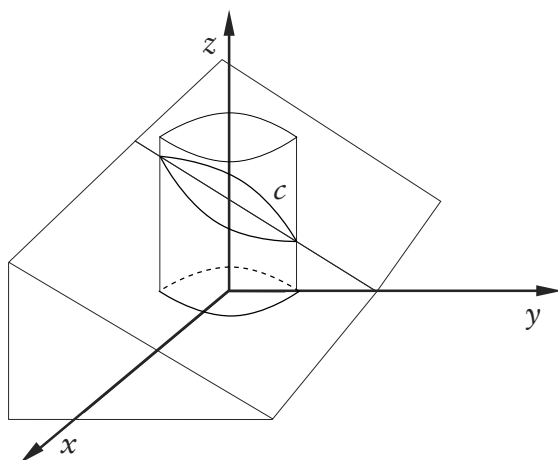


Figura 6.9

Dessa forma, um ponto $P = (x, y, z) \in C$ satisfaz

- i. $x^2 + y^2 = 1 \implies x = \cos t, y = \sin t$ e $0 \leq t < 2\pi$.
- ii. $y + z = 2 \implies z = 2 - y = 2 - \sin t$

e, portanto, uma parametrização para C é dada por

$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t, 2 - \sin t), 0 \leq t < 2\pi.$$

- h. Encontre uma parametrização para a curva C de interseção entre o paraboloide $z = x^2 + y^2$ e o plano $z = 2x$.

Solução:

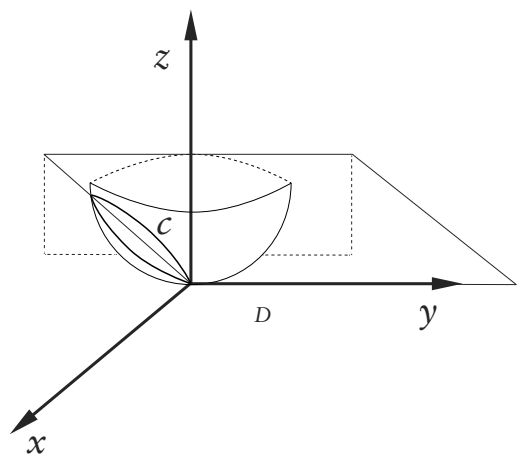


Figura 6.10

Observe que a coordenada z de um ponto qualquer $P = (x, y, z) \in C$ satisfaz às equações de ambas as superfícies e, portanto, as coordenadas x e y verificam

$$x^2 + y^2 = z = 2x \implies (x - 1)^2 + y^2 = 1.$$

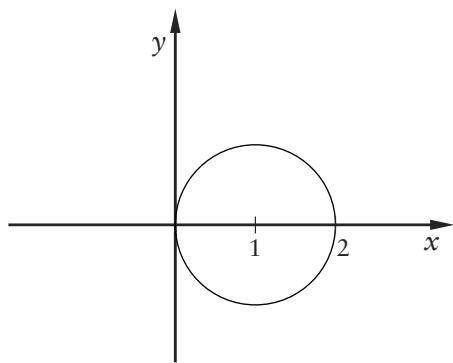


Figura 6.11

Logo ,temos

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t < 2\pi$$

e, nesse caso,

$$z = 2x \implies z = 2 + 2\cos t.$$

Dessa forma, uma parametrização para C é dada por

$$\sigma(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2 + 2\cos t), \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

INTEGRAL DE LINHA DE FUNÇÃO ESCALAR

A partir de agora, estamos aptos a definir a integral de linha de função escalar. Daremos a definição para o caso de uma curva no \mathbb{R}^3 . Para o caso do \mathbb{R}^2 a definição é inteiramente análoga.

Definição 6.2.

Seja C uma curva no \mathbb{R}^3 , parametrizada por


$$\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in [a, b],$$


onde σ é de classe C^1 , isto é, $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ são funções com derivadas contínuas. Considere

$$f : C \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$


uma função real contínua definida em C . Definimos a integral de linha de f ao longo de C por

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt.$$

 Embora a parametrização da curva C seja utilizada na definição acima, a integral de linha de ao longo de C não depende da escolha da parametrização.

 Se a curva C é de classe C^1 por partes ($C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$), então

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_{C_1} f(x,y,z)ds + \int_{C_2} f(x,y,z)ds + \dots + \int_{C_n} f(x,y,z)ds.$$

 Ainda com relação à definição anterior, o elemento de comprimento ds é associado a $\|\sigma'(t)\|dt$, onde $\|\sigma'(t)\|$ denota a norma do vetor derivada e é dado por

$$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}.$$

Exemplo 6.2.

- a. Calcule $\int_C f(x,y)ds$, onde $f(x,y) = x$ e C é a parábola dada por $\sigma(t) = (t, t^2)$, com $0 \leq t \leq 1$.

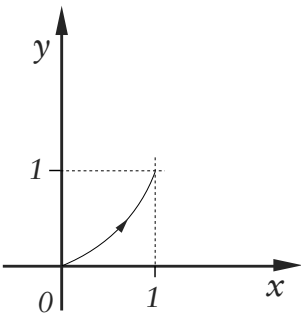


Figura 6.12

Solução: Temos que

i. $f(\sigma(t)) = f(t, t^2) = t$;

ii. $\sigma'(t) = (1, 2t) \implies \|\sigma'(t)\| = \sqrt{1^2 + (2t)^2} = \sqrt{1 + 4t^2}$

e, portanto,

$$\int_C f(x,y)ds = \int_0^1 t \sqrt{1 + 4t^2} dt.$$

Para resolver a integral acima, utilizamos o método da substituição e obtemos

$$\int_C f(x,y) ds = \left[\frac{1}{8} \frac{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{12} (5^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1)$$

- b. Calcule $\int_C (x+y) ds$, onde C é a fronteira do triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.

Solução: Como a fronteira do triângulo não é determinada por uma única curva, precisamos dividir a integral de linha em três integrais ao longo de segmentos de reta

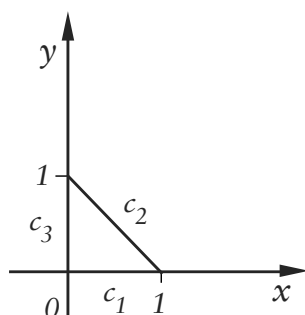


Figura 6.13

- i. C_1 : segmento ligando os pontos $(0,0)$ e $(1,0)$

$$\sigma(t) = (0,0) + t((1,0) - (0,0)) = (t,0), 0 \leq t \leq 1.$$

$$\sigma'(t) = (1,0) \implies \|\sigma'(t)\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

Logo,

$$\int_{C_1} (x+y) ds = \int_0^1 (t+0) 1 dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{2}.$$

ii. C_2 : segmento ligando os pontos $(1, 0)$ e $(0, 1)$

$$\sigma(t) = (1, 0) + t((0, 1) - (1, 0)) = (1 - t, t), 0 \leq t \leq 1.$$

$$\sigma'(t) = (-1, 1) \Rightarrow \|\sigma'(t)\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{C_2} (x+y) ds &= \int_0^1 (1-t+t) \sqrt{2} dt = \int_0^1 \sqrt{2} dt = \\ &= \left[\sqrt{2}t \right]_{t=0}^{t=1} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

iii. C_3 : segmento ligando os pontos $(0, 1)$ e $(0, 0)$

$$\sigma(t) = (0, 1) + t((0, 0) - (0, 1)) = (0, 1 - t), 0 \leq t \leq 1.$$

$$\sigma'(t) = (0, -1) \Rightarrow \|\sigma'(t)\| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$$

Logo,

$$\int_{C_3} (x+y) ds = \int_0^1 (0+1-t) 1 dt = \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{2}.$$

Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned} \int_C (x+y) ds &= \int_{C_1} (x+y) ds + \int_{C_2} (x+y) ds + \int_{C_3} (x+y) ds = \\ &= 1 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

c. Calcule $\int_C zy^2 ds$, onde C é a curva de interseção do cilindro $y = e^x$, $0 \leq x \leq 1$, com o plano $z = 2$.

Solução: Observe, pela figura abaixo, que a curva C encontra-se sobre o plano $z = 2$ e sua projeção sobre o plano xy coincide com a diretriz do cilindro $y = e^x$, $0 \leq x \leq 1$

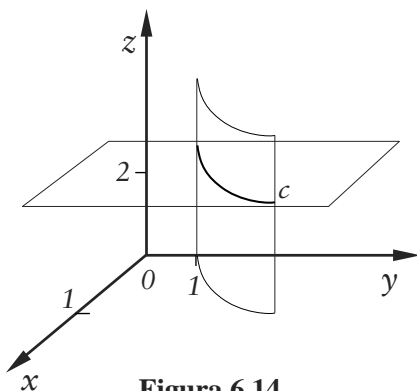


Figura 6.14

Dessa forma, um ponto $P = (x, y, z) \in C$ satisfaz

- i. $y = e^x, 0 \leq x \leq 1 \implies x = t, y = e^t$ e $0 \leq t \leq 1$.
- ii. $z = 2$

e, portanto, uma parametrização para C é dada por

$$\sigma(t) = (t, e^t, 2), 0 \leq t \leq 1$$

$$\sigma'(t) = (1, e^t, 0) \implies \|\sigma'(t)\| = \sqrt{1^2 + (e^t)^2 + 0^2} = \sqrt{1 + e^{2t}}.$$

Logo, temos que

$$\int_C zy^2 ds = \int_0^1 2(e^t)^2 \sqrt{1 + e^{2t}} dt = \int_0^1 2e^{2t} \sqrt{1 + e^{2t}} dt$$

Para resolver a integral acima, utilizamos o método da substituição e obtemos

$$\int_C zy^2 ds = \left[\frac{(1 + e^{2t})^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{2}{3} \left((1 + e^2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}} \right)$$

- d. Calcule $\int_C 3xyz ds$, onde C é a curva de interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x \geq 0$, com o plano $z = y$.

Solução:

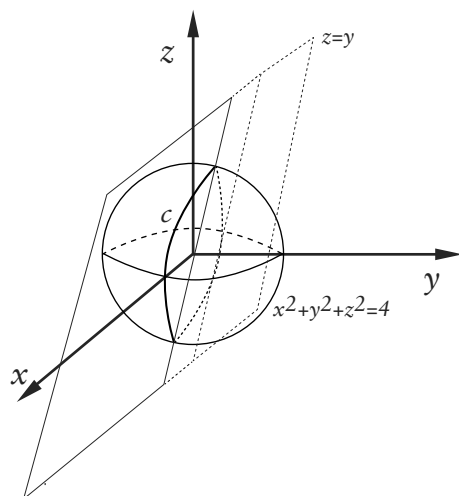


Figura 6.15

Observe que a coordenada z de um ponto qualquer $P = (x, y, z) \in C$ satisfaz às equações de ambas as superfícies e, portanto, as coordenadas x e y verificam

$$x^2 + y^2 + y^2 = 4 \implies x^2 + 2y^2 = 4 \implies \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1, x \geq 0.$$

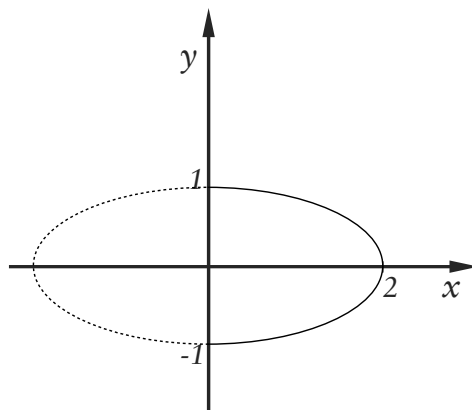


Figura 6.16

Logo, temos:

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = \sqrt{2} \sin t \end{cases} \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

e, nesse caso,

$$z = y = \sqrt{2} \sin t.$$

Dessa forma, segue que

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= (2 \cos t, \sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \sin t), \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ \sigma'(t) &= (-2 \sin t, \sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \cos t) \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \|\sigma'(t)\| &= \sqrt{(-2 \sin t)^2 + (\sqrt{2} \cos t)^2 + (\sqrt{2} \cos t)^2} = \\ &= \sqrt{4(\sin^2 t + \cos^2 t)} = 2 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\int_C 3xyz ds &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(3 \cdot 2 \cos t \cdot \sqrt{2} \sin t \cdot \sqrt{2} \sin t \right) 2 dt = \\ &= 24 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^2 t dt =\end{aligned}$$

Para resolver a integral acima, utilizamos o método da substituição e obtemos

$$\int_C 3xyz ds = 24 \left[\frac{\sin^3 t}{3} \right]_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{\pi}{2}} = 24 \left(\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) \right) = 16.$$

Aula 7

ALGUMAS APLICAÇÕES DA INTEGRAL DE LINHA DE FUNÇÃO ESCALAR

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 utilizar a integral de linha de funções escalares para calcular a área de determinadas superfícies, bem como a Massa, o Centro de Massa e o Momento de Inércia de um arame determinado por uma curva.

Meta da aula:

Apresentar a interpretação geométrica da integral de linha de função escalar, bem como algumas aplicações na área de Física, tais como cálculo de Massa, Centro de Massa e Momento de Inércia.

ALGUMAS APLICAÇÕES DA INTEGRAL DE LINHA DE FUNÇÃO ESCALAR

Pré-requisitos

Você vai precisar dos conhecimentos sobre Funções Vetoriais, apresentados no Curso de Cálculo II, bem como dos conceitos de integral de linha, vistos na Aula 6 desse curso.

Antes de apresentarmos o que propõe a aula, vamos definir o comprimento de curva, cuja justificativa, que consiste em aproximar a curva por linhas poligonais (**Figura 7.1**), não será detalhada por não ser objetivo deste texto.

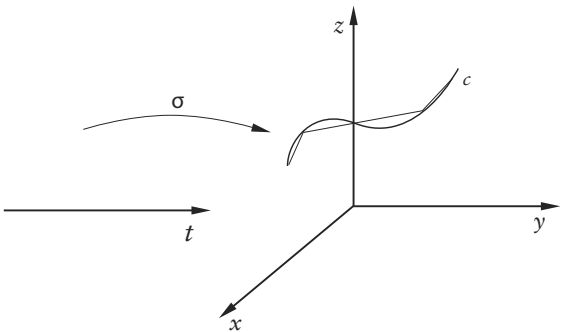



Figura 7.1

Definição 7.1.

Se $C \subset \mathbb{R}^3$ é uma curva com parametrização $\sigma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, definimos o comprimento de C da seguinte forma:

$$L(C) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt.$$

 Observe pela definição de integral de linha, dada na Aula 6, que, no caso particular em que $f(x, y, z) = 1$, a integral de linha de f ao longo de C fornece o comprimento de C :

$$\int_C 1 ds = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt = L(C).$$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA INTEGRAL DE LINHA

Seja $C \subset \mathbb{R}^2$ uma curva com parametrização $\sigma : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$\sigma(t) = (x(t), y(t)),$$

e considere uma função $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in C$$

Vamos verificar que a integral de linha de f ao longo de C , fornece a área A da superfície S , com base C e altura $f(x, y)$, conforme ilustração abaixo.

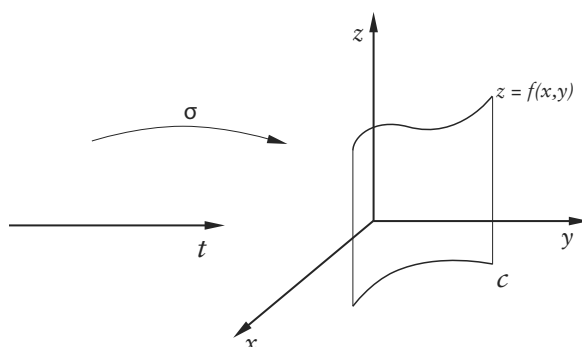


Figura 7.2

De fato, considere uma partição P do intervalo $[a, b]$

$$P : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

e note que P divide a curva C em n pedaços C_i , cada qual imagem do subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ por σ , ou seja,

$$C_i = \sigma([t_{i-1}, t_i]), i = 1, 2, \dots, n.$$

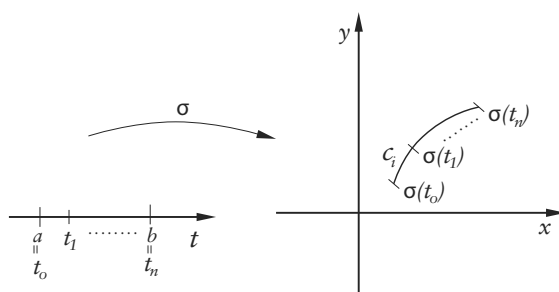


Figura 7.3

Note que o comprimento de cada pedaço C_i é dado por

$$L(C_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\sigma'(t)\| dt.$$

Pelo Teorema do Valor Médio para Integrais, para cada $i = 1, 2, \dots, n$, existe $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que

$$L(C_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\sigma'(t)\| dt = \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t_i.$$

Para cada pedaço $i = 1, 2, \dots, n$, seja $\sigma(t_i^*) = (x_i^*, y_i^*) \in C_i$ e note que

$$f(x_i^*, y_i^*) \cdot L(C_i) = f(x_i^*, y_i^*) \cdot \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t_i$$

fornece uma aproximação da área A_i da parte da superfície que tem como base o pedaço da curva C_i e altura $f(x, y)$, conforme figura abaixo.

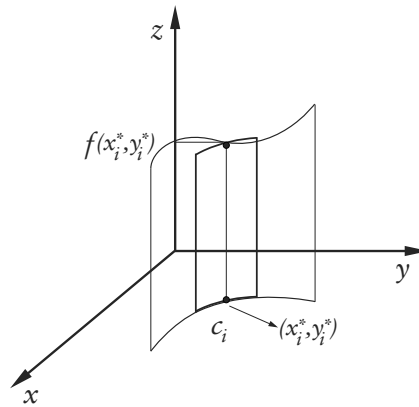


Figura 7.4

Dessa forma,

$$A(S) \approx \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t_i$$

e tal aproximação se torna melhor à medida que consideramos subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ cada vez menores. Logo, considerando

$$\Delta = \max \{ \Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n \},$$

a área procurada será dada por

$$A(S) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_j^*) \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t_i = \int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt$$

$$= \int_C f(x, y) ds$$

Exemplo 7.1.

a. Área lateral de um cilindro circular reto.

Solução: Considere um cilindro circular reto com raio da base R e altura h . Vamos considerar o cilindro centrado ao longo do eixo z , conforme ilustração abaixo.

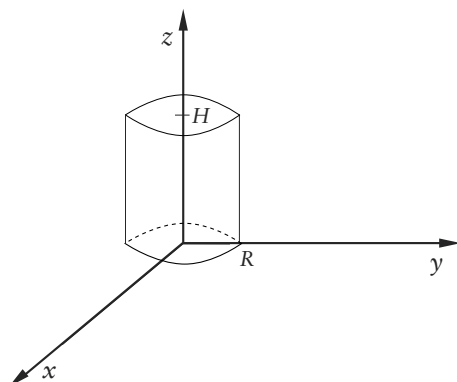


Figura 7.5

Note que ele corresponde à superfície S que tem como base a circunferência $C : x^2 + y^2 = R^2$ e altura a função constante $f(x, y) = h$ e, portanto,

$$A(S) = \int_C f(x, y) ds = \int_C h ds.$$

Utilizando a parametrização da circunferência

$$\sigma(t) = (R \cos t, R \sin t), \quad 0 \leq t < 2\pi$$

$$\sigma'(t) = (-R \sin t, R \cos t) \Rightarrow$$

$$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} = R$$

obtemos

$$A(S) = \int_C h ds = \int_0^{2\pi} h R dt = h R [t]_{t=0}^{t=2\pi} = 2\pi R h.$$

- b. Uma cerca tem sua base no plano xy que é o contorno da região limitada pelas curvas $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$, e $y = 0$, $-1 \leq x \leq 1$. Se a altura da cerca, em cada ponto (x, y) , é $f(x, y) = y + 1$, encontre a área total da cerca.

Solução: Observe que a cerca S é formada pela união das superfícies S_1 e S_2 , onde S_1 é a lateral do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$, situada abaixo do plano $z = y + 1$, e S_2 é o retângulo

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; -1 \leq x \leq 1, y = 0, 0 \leq z \leq 1\},$$

cuja área é igual a 2.

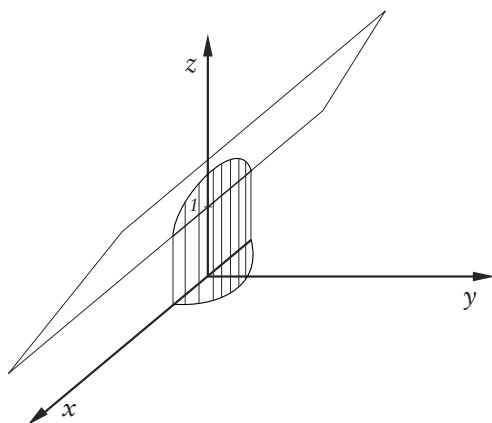


Figura 7.6

Dessa forma,

$$A(S) = A(S_1) + A(S_2) = \int_C (y + 1) ds + 2,$$

onde C é a semicircunferência $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$. Logo, utilizando a parametrização

$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$\sigma'(t) = (-\sin t, \cos t) \implies \|\sigma'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1,$$

obtemos

$$A(S) = \int_C (y+1) ds + 2 = \int_0^\pi (\sin t + 1) \cdot 1 dt + 2 = \\ [-\cos t + t]_{t=0}^{t=\pi} + 2 = 4 + \pi.$$

ALGUMAS APLICAÇÕES DA INTEGRAL DE LINHA À FÍSICA

Em todas as aplicações da integral de linha que serão apresentadas nessa seção, consideraremos uma curva C , com parametrização $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

e uma função contínua $f(x, y, z)$, definida em C , com imagem real. O caso em que a curva C encontra-se no \mathbb{R}^2 (e, consequentemente, $f = f(x, y)$) é inteiramente análogo.

CÁLCULO DE MASSA

Suponha que a curva C represente um arame e a função $f(x, y, z)$ forneça a densidade em cada ponto de C . Vamos verificar que

$$\int_C f(x, y, z) ds = \text{Massa}(C).$$

Lembremos, inicialmente de que no caso em que a densidade é constante e igual a d , a massa do arame será dada por

$$\text{Massa}(C) = d \cdot L(C).$$

Voltando ao caso em que a densidade é variável, considere uma partição P do intervalo $[a, b]$

$$P : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

e note que P divide o arame C em n pedaços C_i , cada qual imagem do subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ por σ , ou seja,

$$C_i = \sigma([t_{i-1}, t_i]), i = 1, 2, \dots, n.$$

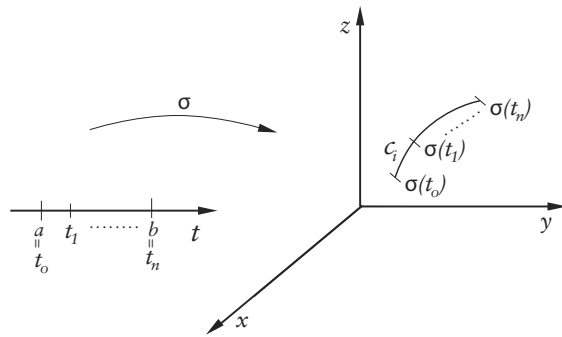


Figura 7.7

Observe que o comprimento de cada pedaço C_i é dado por

$$L(C_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\sigma'(t)\| dt.$$

Pelo Teorema do Valor Médio para Integrais, para cada $i = 1, 2, \dots, n$, existe $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que

$$L(C_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\sigma'(t)\| dt = \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t_i.$$

Agora, supondo que cada pedaço C_i do arame possui densidade constante e igual a $f(\sigma(t_i^*))$, a massa de C_i será dada, **aproximadamente**, por

$$\text{Massa}(C_i) \approx f(\sigma(t_i^*)) \cdot L(C_i) = f(\sigma(t_i^*)) \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t_i.$$

Dessa forma, o somatório

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\sigma(t_i^*)) \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t_i$$

fornece uma aproximação da massa total do arame C , que se torna melhor à medida que consideramos partições cada vez mais finas do intervalo $[a, b]$ e, portanto,

$$\text{Massa}(C) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} S_n = \int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt = \int_C f(x, y, z) ds.$$

CENTRO DE MASSA

Novamente, suponha que a curva C represente um arame e a função $f(x, y, z)$ forneça a densidade em cada ponto de C . Como no cálculo da massa, considere uma partição P do intervalo $[a, b]$

$$P : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

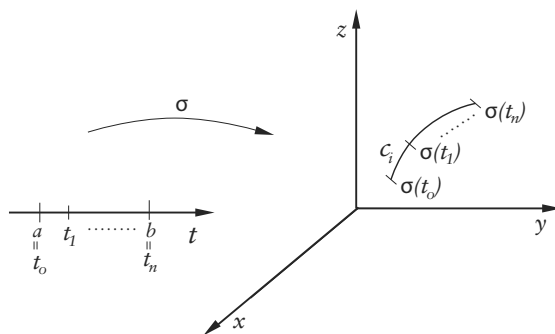


Figura 7.8

e note que P divide o arame C em n pedaços C_i , tais que

$$L(C_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\sigma'(t)\| dt = \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t_i,$$

onde $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$, para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Agora, supondo que cada pedaço C_i do arame possui densidade constante e igual a $f(\sigma(t_i^*))$, a massa de C_i será dada, **aproximadamente**, por

$$\text{Massa}(C_i) \approx f(\sigma(t_i^*)) \cdot L(C_i) = f(\sigma(t_i^*)) \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t_i.$$

Vamos considerar o sistema de "massas pontuais", dado por

$$m_i = f(\sigma(t_i^*)) \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t_i \approx \text{Massa}(C_i),$$

localizadas nos pontos $(x_i^*, y_i^*, z_i^*) = \sigma(t_i^*)$, para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Vimos, na Aula 3 desse curso, que o centro de massa para o sistema acima é definido por $(\bar{x}_c, \bar{y}_c, \bar{z}_c)$, onde

$$\bar{x}_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^* m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n x(t_i^*) f(\sigma(t_i^*)) \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t_i}{\sum_{i=1}^n f(\sigma(t_i^*)) \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t_i}$$

$$\begin{aligned}\overline{y}_c &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i^* m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n y(t_i^*) f(\sigma(t_i^*)) \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t_i}{\sum_{i=1}^n f(\sigma(t_i^*)) \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t_i} \\ \overline{z}_c &= \frac{\sum_{i=1}^n z_i^* m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n z(t_i^*) f(\sigma(t_i^*)) \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t_i}{\sum_{i=1}^n f(\sigma(t_i^*)) \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t_i}\end{aligned}$$

Observe que as "massas pontuais" m_i fornecem uma aproximação da massa dos pedaços C_i do arame e que tais aproximações se tornam "melhores" à medida que consideramos C_i cada vez menores. Dessa forma, definimos o centro de massa de C como sendo o ponto (x_c, y_c, z_c) , onde

$$\begin{aligned}x_c &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n x(t_i^*) f(\sigma(t_i^*)) \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t_i}{\sum_{i=1}^n f(\sigma(t_i^*)) \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t_i} = \\ &= \frac{\int_a^b x(t) f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt}{\int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt} = \\ &= \frac{\int_C x f(x, y, z) ds}{\int_C f(x, y, z) ds} = \frac{\int_C x f(x, y, z) ds}{\text{Massa}(C)} \\ y_c &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n y(t_i^*) f(\sigma(t_i^*)) \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t_i}{\sum_{i=1}^n f(\sigma(t_i^*)) \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t_i} = \\ &= \frac{\int_a^b y(t) f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt}{\int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt} = \\ &= \frac{\int_C y f(x, y, z) ds}{\int_C f(x, y, z) ds} = \frac{\int_C y f(x, y, z) ds}{\text{Massa}(C)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z_c &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n z(t_i^*) f(\sigma(t_i^*)) \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t_i}{\sum_{i=1}^n f(\sigma(t_i^*)) \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t_i} = \\
 &= \frac{\int_a^b z(t) f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt}{\int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt} = \\
 &= \frac{\int_C z f(x, y, z) ds}{\int_C f(x, y, z) ds} = \frac{\int_C z f(x, y, z) ds}{\text{Massa}(C)}
 \end{aligned}$$

MOMENTO DE INÉRCIA

Como vimos na Aula 3 desse curso, o momento de inércia de um corpo de massa m em relação a um eixo é definido por

$$I = mr^2,$$

onde r é a distância da partícula ao eixo.

Mais uma vez, consideremos um arame representado pela curva C , tal que cada ponto $(x, y, z) \in C$ possui densidade dada pela função $f(x, y, z)$ e distância a um determinado eixo E , dada por $r(x, y, z)$. Como nos casos anteriores, seja P uma partição do intervalo $[a, b]$

$$P : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

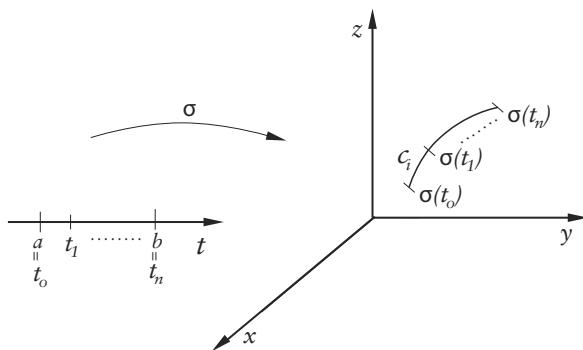


Figura 7.9

e note que P divide o arame C em n pedaços C_i , tais que

$$L(C_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\sigma'(t)\| dt = \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t_i,$$

onde $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$, para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Agora, supondo que cada pedaço C_i do arame possui densidade constante e igual a $f(\sigma(t_i^*))$, a massa de C_i será dada, **aproximadamente**, por

$$\text{Massa}(C_i) \approx f(\sigma(t_i^*)) \cdot L(C_i) = f(\sigma(t_i^*)) \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t_i.$$

Suponhamos, agora, que a massa de cada pedaço C_i do arame se concentre toda em $(x_i^*, y_i^*, z_i^*) = \sigma(t_i^*)$, para cada $i = 1, 2, \dots, n$ e seja


$$r_i = r(x_i^*, y_i^*, z_i^*) = r(\sigma(t_i^*))$$

a distância do ponto (x_i^*, y_i^*, z_i^*) ao eixo E . Dessa forma, o momento de inércia de cada ponto (x_i^*, y_i^*, z_i^*) , $i = 1, 2, \dots, n$, em relação ao eixo E é dado por

$$I_i = (r_i)^2 \text{Massa}(C_i) \approx (r_i)^2 \cdot f(\sigma(t_i^*)) \cdot L(C_i) = (r_i)^2 f(\sigma(t_i^*)) \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t_i.$$

Sendo assim, podemos estender o conceito de momento de inércia ao arame C , considerando a soma dos momentos de inércia dos pontos (x_i^*, y_i^*, z_i^*) , para cada vez mais pontos (e, consequentemente, para pedaços C_i cada vez menores). Nesse caso, definimos o momentos de inércia I de C , em torno do eixo E , por

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (r_i)^2 f(\sigma(t_i^*)) \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t_i = \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (r(\sigma(t_i^*)))^2 f(\sigma(t_i^*)) \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t_i = \\ &= \int_a^b (r(\sigma(t)))^2 f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt = \\ &= \int_C r^2(x, y, z) f(x, y, z) ds. \end{aligned}$$

 No caso particular em que a curva C encontra-se no \mathbb{R}^2 , as distâncias de cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ aos eixos x e y são dadas, respectivamente, por $|x|$ e $|y|$.

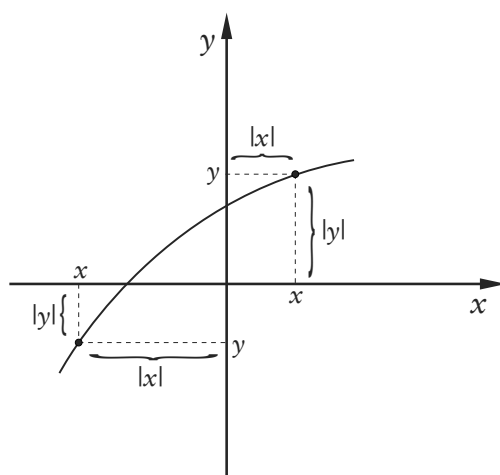


Figura 7.10

Dessa forma, os momentos de inércia de C em relação aos eixos x e y são dados por

$$I_x = \int_C y^2 f(x, y) ds \text{ e } I_y = \int_C x^2 f(x, y) ds.$$

- i. Se C é uma curva no \mathbb{R}^3 , a distância de cada ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ao eixo z é dada, por $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

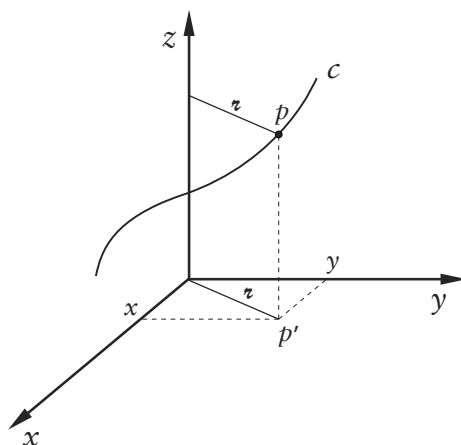


Figura 7.11

Dessa forma, o momento de inércia de C em relação ao eixo z é dado por

$$I_z = \int_C (x^2 + y^2) f(x, y, z) ds.$$

Analogamente, os momentos de inércia de C em relação

aos eixos x e y são dados por

$$I_x = \int_C (y^2 + z^2) f(x, y, z) ds$$

e

$$I_y = \int_C (x^2 + z^2) f(x, y, z) ds.$$

Exemplo 7.2.

- a. Uma hélice circular é uma curva gerada pelo deslocamento de um ponto $P = (x, y, z)$ em torno do eixo z , mantendo-se a uma distância constante desse eixo e de modo que sua altura é proporcional ao ângulo de rotação.

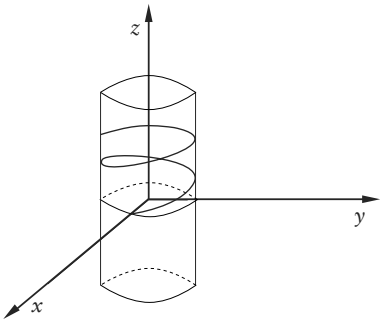


Figura 7.12

Considere um arame representado por uma hélice circular C , parametrizada por

$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

e suponha que a densidade em cada ponto de C seja igual à altura do ponto, ou seja, $f(x, y, z) = z$. Determine a massa, o centro de massa e o momento de inércia em relação ao eixo z do arame.

Solução: Note, inicialmente, que

$$\begin{aligned} \sigma'(t) &= (-\sin t, \cos t, 1) \implies \\ \|\sigma'(t)\| &= \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Dessa forma, segue que:

i. massa

$$\text{Massa}(C) = \int_C z ds = \int_0^{2\pi} t\sqrt{2} dt = \left[\frac{t^2\sqrt{2}}{2} \right]_{t=0}^{t=2\pi} = 2\sqrt{2}\pi^2$$

ii. Centro de Massa

$$x_c = \frac{\int_C xz ds}{\text{Massa}(C)} = \frac{\int_0^{2\pi} (\cos t) t\sqrt{2} dt}{2\sqrt{2}\pi^2} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} t \cos t dt$$

Para resolver a integral acima, utilizamos a técnica de integração por partes e obtemos

$$x_c = \frac{1}{2\pi^2} [t \sin t + \cos t]_{t=0}^{t=2\pi} = 0.$$

Analogamente,

$$y_c = \frac{\int_C yz ds}{\text{Massa}(C)} = \frac{\int_0^{2\pi} (\sin t) t\sqrt{2} dt}{2\sqrt{2}\pi^2} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} t \sin t dt = \frac{1}{2\pi^2} [-t \cos t + \sin t]_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{1}{2\pi^2} (-2\pi) = -\frac{1}{\pi}$$

$$z_c = \frac{\int_C z^2 ds}{\text{Massa}(C)} = \frac{\int_0^{2\pi} t^2\sqrt{2} dt}{2\sqrt{2}\pi^2} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} t^2 dt = \frac{1}{2\pi^2} \left[\frac{t^3}{3} \right]_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{8\pi^3}{3} = \frac{4}{3}\pi.$$

Logo,

$$(x_c, y_c, z_c) = \left(0, -\frac{1}{\pi}, \frac{4}{3}\pi \right)$$

iii. momento de inércia em relação ao eixo z

$$I_z = \int_C (x^2 + y^2) z ds = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) t\sqrt{2} dt = \int_0^{2\pi} t\sqrt{2} dt = \left[\frac{t^2\sqrt{2}}{2} \right]_{t=0}^{t=2\pi} = 2\sqrt{2}\pi^2.$$

b. Calcule a massa, o centro de massa e o momentos de inércia em relação ao eixo x de um arame cuja forma é dada pela curva C de interseção das superfícies

$x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$, e $z = y$, supondo que a densidade em cada ponto de C seja dada por $f(x, y, z) = y$

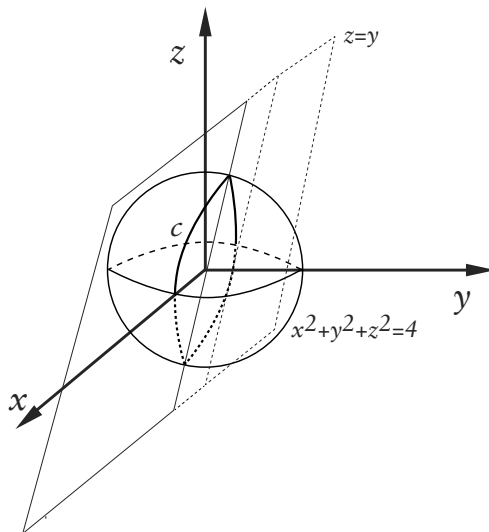


Figura 7.13

Solução: Primeiramente, vamos obter uma parametrização para a curva C . Observe que a coordenada z de um ponto qualquer $P = (x, y, z) \in C$ satisfaz às equações de ambas as superfícies e, portanto, as coordenadas x e y verificam

$$x^2 + y^2 + y^2 = 4 \implies x^2 + 2y^2 = 4 \implies \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1, y \geq 0.$$

Logo, temos

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = \sqrt{2} \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi$$

e, nesse caso,

$$z = y \implies z = \sqrt{2} \sin t.$$

Dessa forma, uma parametrização para C é dada por

$$\sigma(t) = (2 \cos t, \sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \sin t), \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$\sigma(t) = (-2 \sin t, \sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \cos t)$$

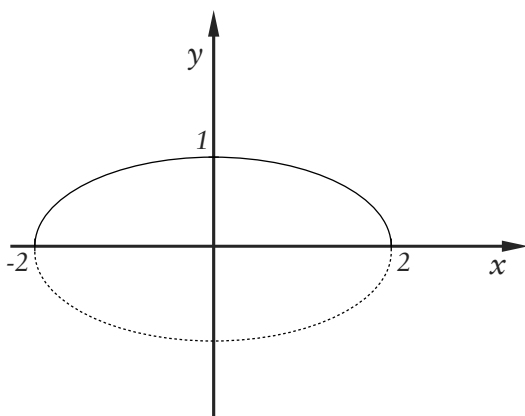


Figura 7.14

donde segue que

$$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{(-2\operatorname{sen} t)^2 + (\sqrt{2}\cos t)^2 + (\sqrt{2}\cos t)^2} = \sqrt{4(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)} = 2.$$

Assim, temos que

i. massa

$$\begin{aligned} \text{Massa}(C) &= \int_C y ds = \int_0^\pi (\sqrt{2}\operatorname{sen} t) 2dt = \\ &= \left[-2\sqrt{2}\cos t \right]_{t=0}^{t=\pi} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

ii. centro de massa

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\int_C xy ds}{\text{Massa}(C)} = \frac{\int_0^\pi (2\cos t) (\sqrt{2}\operatorname{sen} t) 2dt}{4\sqrt{2}} = \\ &= \frac{\int_0^\pi \cos t \operatorname{sen} t dt}{1} \end{aligned}$$

Para resolver a integral acima, utilizamos a técnica de substituição e obtemos

$$x_c = \left[\frac{\operatorname{sen}^2 t}{2} \right]_{t=0}^{t=\pi} = 0.$$

Além disso,

$$y_c = \frac{\int_C y^2 ds}{\text{Massa}(C)} = \frac{\int_0^\pi (\sqrt{2} \operatorname{sen} t)^2 2dt}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 t dt$$

Na resolução da integral acima, utilizamos a identidade

$$\operatorname{sen}^2 t = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{2}$$

e a técnica de substituição na segunda parcela da subtração, obtendo

$$y_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4} \right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$$

Analogamente,

$$z_c = \frac{\int_C zy ds}{\text{Massa}(C)} = \frac{\int_0^\pi (\sqrt{2} \operatorname{sen} t)^2 2dt}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$$

Logo,

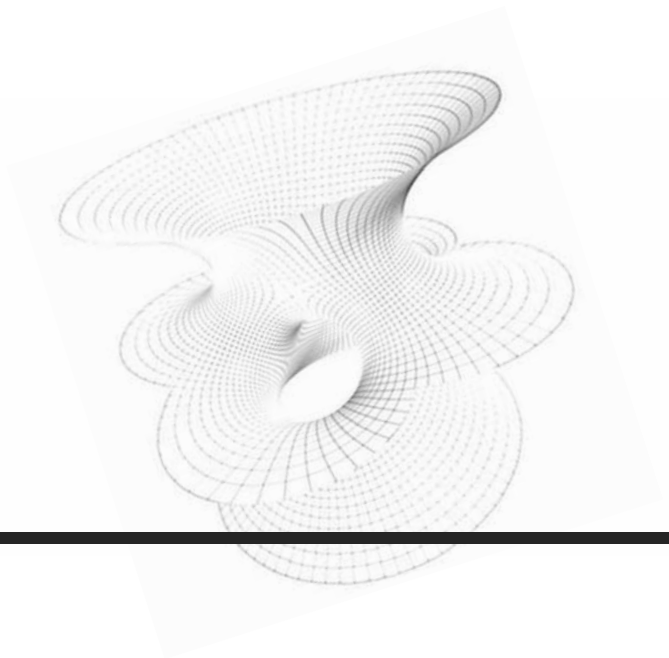
$$(x_c, y_c, z_c) = \left(0, \frac{\sqrt{2}\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \right)$$

iii. momento de inércia em relação ao eixo x

$$\begin{aligned} I_x &= \int_C (y^2 + z^2) y ds = \\ &= \int_0^\pi \left((\sqrt{2} \operatorname{sen} t)^2 + (\sqrt{2} \operatorname{sen} t)^2 \right) \cdot \sqrt{2} \operatorname{sen} t \cdot 2dt = \\ &= 8\sqrt{2} \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 t \operatorname{sen} t dt = 8\sqrt{2} \int_0^\pi (1 - \cos^2 t) \operatorname{sen} t dt = \\ &= 8\sqrt{2} \int_0^\pi (\operatorname{sen} t - \cos^2 t \operatorname{sen} t) dt = \\ &= 8\sqrt{2} \left[-\cos t + \frac{\cos^3 t}{3} \right]_{t=0}^{t=\pi} = \\ &= 8\sqrt{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) \right] = \frac{32\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

Aula 8

CAMPOS VETORIAIS



O b j e t i v o s

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 compreender a definição de campos vetoriais;
- 2 encontrar a função potencial de um campo conservativo;
- 3 obter o divergente e o rotacional de um campo vetorial.

Meta da aula:

Apresentar alguns conteúdos que serão fundamentais para a sequência do curso. Na primeira seção, serão dadas definição e representação geométrica de campos vetoriais e, em particular, as propriedades de um campo dito conservativo. A segunda seção é reservada para o estudo sobre o divergente e o rotacional de um campo vetorial.

Pré-requisitos

Você vai precisar dos conhecimentos sobre técnicas de integração para funções reais de uma variável, apresentados no Curso de Cálculo I, sobre Funções Vetoriais, apresentados no Curso de Cálculo II, bem como sobre Funções Reais de Duas e Três Variáveis, vistos no Curso de Cálculo III.

CAMPOS VETORIAIS

Definição 8.1.

Um campo vetorial definido em um conjunto $D \subset \mathbb{R}^3$ é uma função $F : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, dada por

$$F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)),$$

onde cada $F_i : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função definida em D .

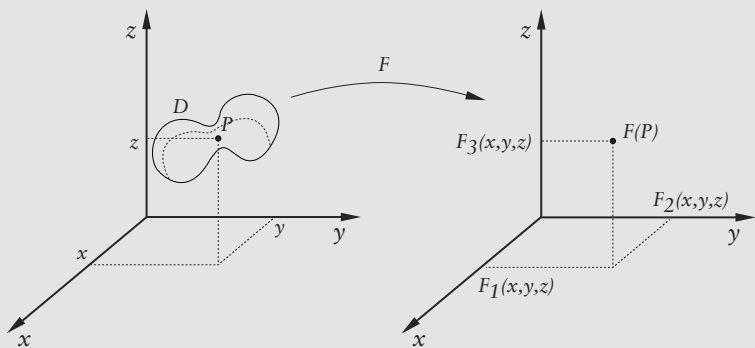


Figura 8.1

De forma análoga, definimos um campo vetorial em um conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ por $F : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y)),$$

onde cada $F_i : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função definida em D .

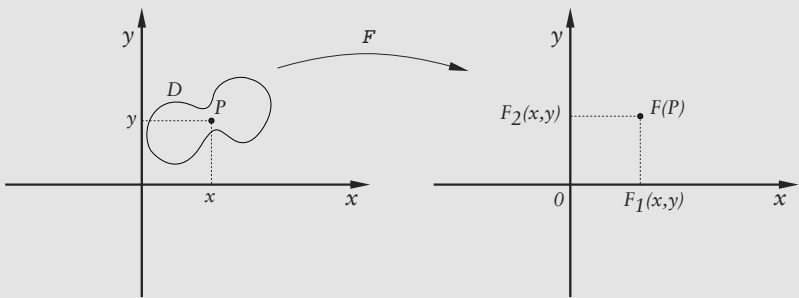



Figura 8.2

 Os campos vetoriais são úteis para representar os campos de força, de velocidade e elétricos. Geometricamente, vi-

sualizamos um campo vetorial esboçando vetores $\vec{F}(x, y, z)$ (ou $\vec{F}(x, y)$) com origem em $(x, y, z) \in D$ (ou $(x, y) \in D$).

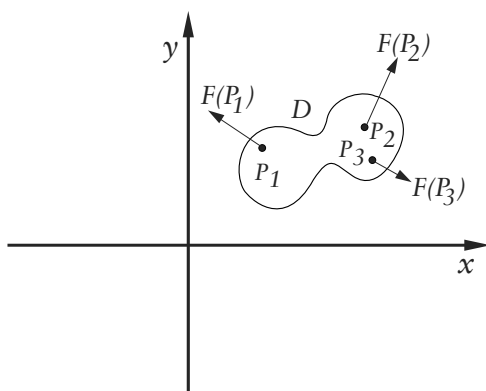


Figura 8.3

Exemplo 8.1.

- a. Vamos representar geometricamente o campo vetorial $F(x, y) = (x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Solução: Para entendermos o campo vetorial acima, considere uma circunferência qualquer de raio r e vamos pensar na imagem $F(x, y)$ de cada ponto (x, y) sobre a circunferência.

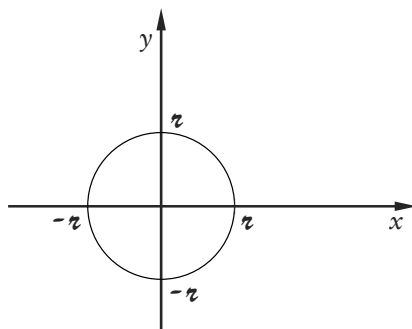


Figura 8.4

Note que o vetor $\vec{F}(x,y) = (x,y)$ tem comprimento igual ao raio r e direção e sentido iguais ao segmento de reta orientado, ligando a origem $(0,0)$ ao ponto (x,y) . Dessa forma, esboçando esse vetor com origem no próprio ponto (x,y) , obtemos

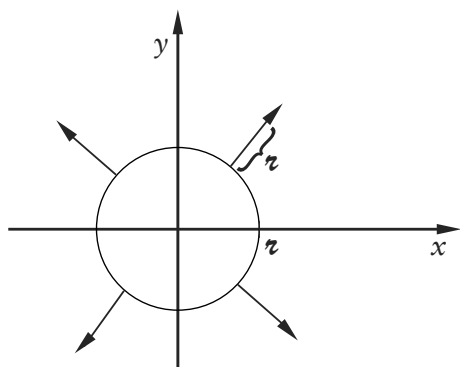


Figura 8.5

Uma vez que o campo vetorial está definido em todo o plano \mathbb{R}^2 , devemos imaginar circunferências com raios cada vez maiores e, assim, teremos

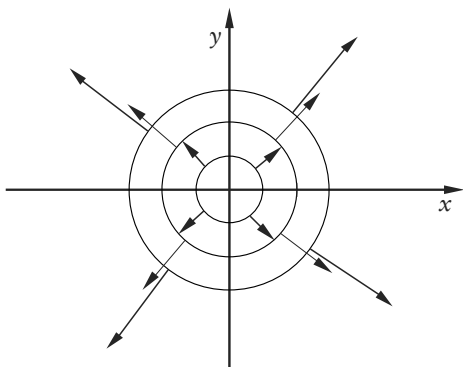


Figura 8.6

- b. Represente geometricamente o campo vetorial $F(x,y) = (-y,x), (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Solução: Como no exemplo anterior, vamos considerar uma circunferência qualquer de raio r e vamos pensar na imagem $F(x,y)$ de cada ponto (x,y) sobre a circunferência.

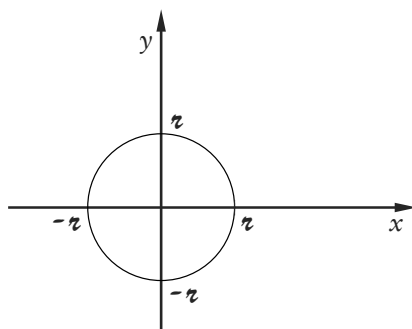


Figura 8.7

Note que o vetor $\vec{F}(x,y) = (-y,x)$ tem comprimento igual ao raio r ,

$$\|\vec{F}(x,y)\| = \|(-y,x)\| = \sqrt{(-y)^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = r.$$

e é perpendicular ao vetor com extremidade (x,y)

$$\vec{F}(x,y) \cdot (x,y) = (-y,x) \cdot (x,y) = -yx + xy = 0.$$

Além disso, analisando os sinais de x e y , observamos que o ponto $(-y,x)$ encontra-se um quadrante à frente do ponto (x,y) , considerando-se o sentido anti-horário. Dessa forma, esboçando esse vetor com origem no próprio ponto (x,y) , obtemos

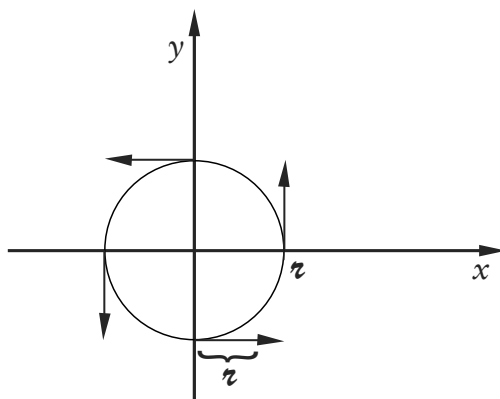


Figura 8.8

Novamente, imaginando circunferências com raios cada vez maiores, teremos

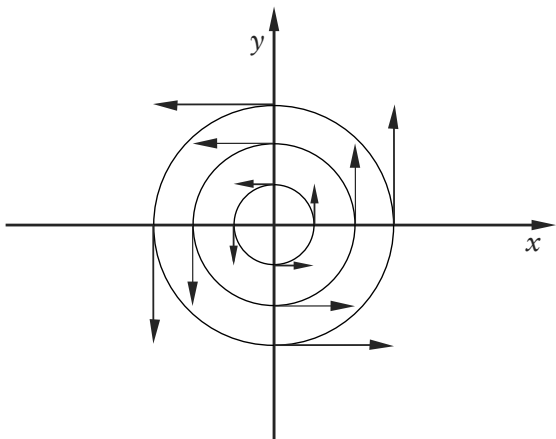


Figura 8.9

c. Se $F : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial. dado por

$$F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)),$$

então F será contínuo em $(x,y,z) \in D$, se cada função F_i for contínua em $(x,y,z) \in D$. Analogamente, F será de classe C^k , com $k \in \mathbb{N}$, ou C^∞ se cada função F_i o for.


CAMPOS VETORIAIS CONSERVATIVOS

Definição 8.2.

Seja $D \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto. Um campo vetorial $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, dado por

$$F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)),$$

é dito um **campo conservativo** ou **campo gradiente**, quando existe uma função $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(x,y,z) = F(x,y,z)$, $\forall (x,y,z) \in D$

 Na Aula 10, veremos uma forma de reconhecer quando

um campo vetorial $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é conservativo. Na Aula 15 faremos o mesmo para o caso em que $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Por hora, vamos descrever um método prático de se obter a função f , da definição acima, dita **função potencial de F** .

Note, pela definição, acima que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = F_1(x, y, z) \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = F_2(x, y, z) \quad (8.2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = F_3(x, y, z). \quad (8.3)$$

Integrando a Equação 9.1 com respeito a x , mantendo y e z constantes, obtemos

$$f(x, y, z) = \int F_1(x, y, z) dx + A(y, z), \quad (8.4)$$


onde $A(y, z)$ é a constante de integração a ser determinada. Analogamente, integrando as Equações 8.2 e 8.3 com respeito a y e z , respectivamente, obtemos

$$f(x, y, z) = \int F_2(x, y, z) dy + B(x, z) \quad (8.5)$$

e

$$f(x, y, z) = \int F_3(x, y, z) dz + C(x, y). \quad (8.6)$$

Por fim, para determinar a função f , devemos determinar $A(y, z)$, $B(x, z)$ e $C(x, y)$ de modo que as Equações 8.4, 8.5 e 8.6 tenham o mesmo lado direito.


 Observe que se $f(x, y, z)$ é uma função potencial de um campo conservativo $F(x, y, z)$, então $g(x, y, z) = f(x, y, z) + k$, com $k \in \mathbb{R}$, também o será, visto que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = F_1(x, y, z)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = F_2(x, y, z)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = F_3(x, y, z).$$

Dessa forma, um campo conservativo possui infinitas funções potenciais, diferentes entre si por uma constante. Para simplificar, vamos considerar a função potencial f na qual $k = 0$.

 O método é o mesmo para o caso em que o campo vetorial está definido no \mathbb{R}^2 .

Exemplo 8.2.

a. Encontre a função potencial f do campo conservativo

$$F(x, y) = (e^{-y} - 2x, -xe^{-y} - \sin y), (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Solução: Uma vez que sabemos que o campo é conservativo, vamos aplicar o método descrito anteriormente. Note que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{-y} - 2x \quad (8.7)$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -xe^{-y} - \sin y. \quad (8.8)$$

Integrando as Equações 8.7 e 8.8 com respeito a x e y , respectivamente, obtemos

$$f(x, y) = \int (e^{-y} - 2x) dx = xe^{-y} - x^2 + A(y)$$

e

$$f(x, y) = \int (-xe^{-y} - \sin y) dy = xe^{-y} + \cos y + B(x).$$

Comparando as duas expressões acima, verificamos que, para que ambas sejam iguais, devemos ter $A(y) = \cos y$ e $B(x) = -x^2$ e, portanto,

$$f(x, y) = xe^{-y} + \cos y - x^2.$$

b. Encontre a função potencial f do campo conservativo

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right), (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}.$$

Solução: Integrando a identidade

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

com relação a x , obtém-se, pelo método da substituição

$$f(x, y) = \int \frac{x}{x^2 + y^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + A(y). \quad (8.9)$$

Por outro lado, integrando a identidade

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

com relação a y , obtém-se

$$f(x, y) = \int \frac{y}{x^2 + y^2} dy = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + B(x). \quad (8.10)$$

Comparando as Expressões 8.9 e 8.10, verificamos que, para ambas serem iguais, devemos ter $A(y) = B(x) = 0$ e, portanto,

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2).$$

c. Encontre a função potencial f do campo conservativo

$$F(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Solução: Note que

- i. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = y + z \implies f(x, y, z) = \int (y + z) dx = xy + xz + A(y, z)$
- ii. $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x + z \implies f(x, y, z) = \int (x + z) dy = xy + yz + B(x, z)$
- iii. $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = x + y \implies f(x, y, z) = \int (x + y) dz = xz + yz + C(x, y)$

Comparando as três identidades anteriores, verificamos que, para todas serem iguais, devemos ter

$$A(y, z) = yz, B(x, z) = xz \text{ e } C(x, y) = xy$$

e, nesse caso,

$$f(x, y, z) = xy + xz + yz.$$

DIVERGENTE E ROTACIONAL DE UM CAMPO VETORIAL

Para as definições que se seguem, vamos considerar um campo vetorial $F : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, dado por

$$F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)).$$

Definição 8.3.

Se F é um campo vetorial tal que as derivadas parciais de F_i estão definidas em D , o **divergente** de F , denotado por $\text{div}F$, é definido por

$$\text{div}F(x, y, z) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(x, y, z).$$

Definição 8.4.

Nas mesmas condições da definição anterior, podemos definir o **rotacional** de F , denotado por $\text{rot}F$, como sendo

$$\text{rot}F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

 Observe que quando o campo vetorial $F : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é dado por

$$F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)),$$

tem-se o caso particular das definições anteriores em que


$$F(x, y, 0) = (F_1(x, y), F_2(x, y), 0)$$

e, portanto,

$$\operatorname{div} F(x, y) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y)$$

e

$$\operatorname{rot} F(x, y, 0) = \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right).$$

 O divergente e o rotacional de um campo vetorial podem ser escritos com o auxílio do operador gradiente

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

i. $\operatorname{div} F(x, y, z)$

Considerando o "produto interno" de ∇ com $F(x, y, z)$, obtemos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot F &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_1, F_2, F_3) = \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = \nabla \cdot F(x, y, z)$$

ii. $\operatorname{rot} F(x, y, z)$

Considerando o "produto vetorial" de ∇ com $F(x, y, z)$, obtemos

$$\begin{aligned} \nabla \times F &= \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \vec{k} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\operatorname{rot} F(x, y, z) = \nabla \times F(x, y, z)$$

Exemplo 8.3.

- a. Dados $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, ambas de classe C^2 , vamos mostrar que

- i. $\text{rot}(\nabla f(x, y, z)) = \vec{0}$
- ii. $\text{div}(\text{rot} F(x, y, z)) = 0$
- ii. $\text{div}(\nabla f(x, y, z)) = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

Solução:

- i. Como

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right),$$

temos que

$$\begin{aligned} \text{rot}(\nabla f) &= \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) &= \vec{0}, \end{aligned}$$

visto que as derivadas de segunda ordem mistas de f são iguais, pois a função é de classe C^2

- ii. Uma vez que

$$\text{rot} F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right),$$

segue que

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{rot} F) &= \\ \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y} &= 0, \end{aligned}$$


visto que as derivadas de segunda ordem mistas de F são iguais, pois a função é de classe C^2

- iii. Novamente, utilizando

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right),$$

obtemos

$$\text{div}(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f.$$

 O operador $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ do exemplo anterior é denominado Laplaciano.

- b. Dados $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ com derivadas parciais bem definidas, tem-se que

$$\operatorname{div}(fF(x, y, z)) = f(\operatorname{div}F) + \nabla f \cdot F,$$

$$\text{onde } fF(x, y, z) = (fF_1(x, y, z), fF_2(x, y, z), fF_3(x, y, z))$$

Solução: De fato,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(fF(x, y, z)) &= \frac{\partial(fF_1)}{\partial x} + \frac{\partial(fF_2)}{\partial y} + \frac{\partial(fF_3)}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}F_1 + f\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}F_2 + f\frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}F_3 + f\frac{\partial F_3}{\partial z} = \\ &= f\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}F_1 + \frac{\partial f}{\partial y}F_2 + \frac{\partial f}{\partial z}F_3\right) = \\ &= f\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot (F_1, F_2, F_3) = \\ &= f(\operatorname{div}F) + \nabla f \cdot F \end{aligned}$$

O Teorema a seguir relaciona o operador rotacional e campos conservativos. Sua demonstração será apresentada na Aula 10, para campos definidos no \mathbb{R}^2 , e, na Aula 15, para campos definidos no \mathbb{R}^3 .

Teorema 8.1.



Seja $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ e $n = 3$) um campo vetorial de classe C^1 . Se F é conservativo, então $\operatorname{rot}F = \vec{0}$.

Demonstração

Como F é conservativo, existe uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(x, y, z) = F(x, y, z)$, $\forall (x, y, z) \in D$. Dessa forma, temos que

$$\operatorname{rot}F(x, y, z) = \operatorname{rot}(\nabla f(x, y, z)) = \vec{0},$$

onde a última igualdade segue da propriedade [i.], do item a., no **Exemplo 8.3**.

-  O Teorema anterior pode ser escrito na seguinte forma:
Se $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ e $n = 3$) é um campo vetorial de classe C^1 tal que $\text{rot}F \neq \vec{0}$, então F não é conservativo.
-  Ao contrário do que se possa imaginar, **não é verdade** que se $\text{rot}F = \vec{0}$, então F é conservativo. Na próxima aula, veremos um exemplo de campo não conservativo com rotacional nulo.

Aula 9



INTEGRAL DE LINHA DE CAMPO VETORIAL

Objetivo

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 calcular a integral de linha de campos vetoriais e aplicá-la para calcular o trabalho realizado por uma força.

Meta da aula:

Apresentar a definição da integral de campos vetoriais de duas ou três variáveis ao longo de uma curva no plano ou no espaço, a chamada Integral de Linha. Será vista, ainda, uma aplicação à Física: o cálculo de trabalho realizado por uma força. Por fim, enunciaremos um resultado que fornece uma forma de calcular a integral de linha de um campo vetorial conservativo.

Pré-requisitos

Você vai precisar dos conhecimentos sobre Campos Vetoriais, apresentados na Aula 8 desse curso, sobre Funções Vetoriais, apresentados no Curso de Cálculo II, bem como dos conhecimentos sobre técnicas de integração e integral definida para funções reais de uma variável apresentados no Curso de Cálculo I.

INTEGRAL DE LINHA DE CAMPO VETORIAL

Vamos motivar a definição da integral de linha de um campo vetorial por intermédio do conceito físico de trabalho realizado por uma força. Para isso, considere uma campo de forças dado por

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

definido por

$$F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$$

e seja $C \subset \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$.

No caso em que C é um segmento de reta ligando os pontos $\sigma(a)$ e $\sigma(b)$ e F é constante, o trabalho realizado por F para deslocar uma partícula ao longo de C é, por definição,

$$W = F \cdot (\sigma(b) - \sigma(a)) = \|F\| \|\sigma(b) - \sigma(a)\| \cos \theta,$$

onde $F \cdot (\sigma(b) - \sigma(a))$ denota o produto escalar entre F e $(\sigma(b) - \sigma(a))$ e θ é o ângulo entre o vetor $F(x,y,z)$ e o segmento de reta C .

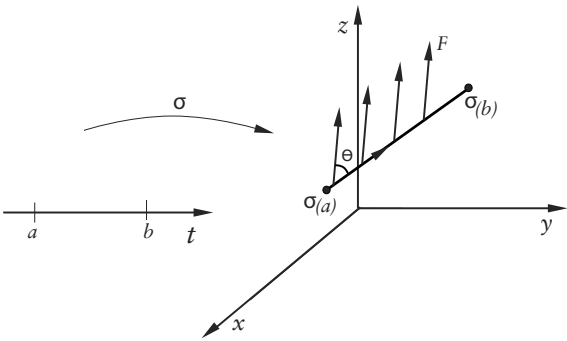


Figura 9.1

Voltando ao caso em que a C é uma curva qualquer, considere uma partição P do intervalo $[a, b]$

$$P : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

e note que P divide C em n pedaços C_i , cada qual imagem do subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ por σ , ou seja,

$$C_i = \sigma([t_{i-1}, t_i]), i = 1, 2, \dots, n.$$

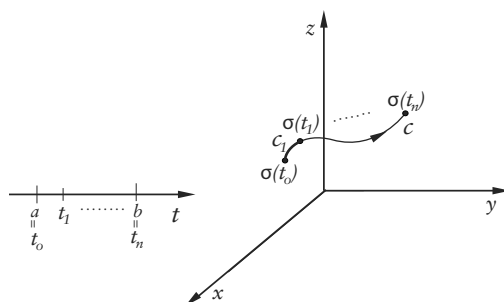


Figura 9.2

Para cada $i = 1, 2, \dots, n$, vamos aproximar o deslocamento da partícula ao longo de C_i pelo deslocamento da mesma ao longo do segmento de reta ligando os pontos $\sigma(t_{i-1})$ e $\sigma(t_i)$. Dessa forma, supondo que, ao longo de cada parte C_i , a força seja constante e igual a $F(\sigma(t_{i-1}))$, o trabalho realizado pela força F , para deslocar a partícula ao longo de cada parte C_i é aproximado por

$$W_i \approx F(\sigma(t_i)) \cdot (\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1}))$$

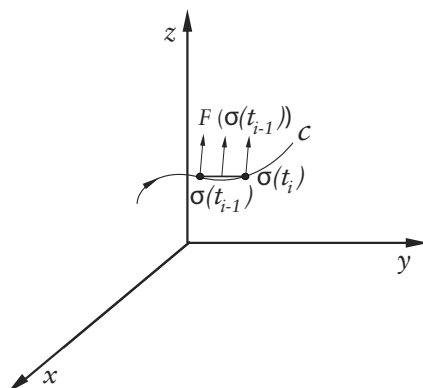


Figura 9.3

Note que, pela definição de derivada,

$$\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1}) \approx \sigma'(t_{i-1})\Delta t_i$$

e, portanto, o somatório

$$S_n = \sum_{i=1}^n (F(\sigma(t_i)) \cdot \sigma'(t_{i-1})) \Delta t_i$$

fornece uma aproximação do trabalho total realizado pela força F para deslocar uma partícula ao longo de C , que se torna melhor à medida que consideramos partições cada vez mais finas do intervalo $[a, b]$ e, portanto,

$$W = \lim_{\Delta \rightarrow 0} S_n = \int_a^b (F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)) dt,$$

desde que F seja contínuo em C e σ' seja contínua em $[a, b]$.

A partir da motivação acima, tem-se a seguinte definição:

Definição 9.1.

Seja C uma curva no \mathbb{R}^3 , parametrizada por

$$\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in [a, b],$$

onde σ é de classe C^1 , isto é, $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ são funções com derivadas contínuas. Considere

$$F : C \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$


um campo vetorial contínuo definido em C . Definimos a integral de linha de F ao longo de C por

$$\int_C F \cdot dr = \int_a^b (F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)) dt, \quad (9.1)$$


onde $F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)$ denota o produto escalar de $F(\sigma(t))$ por $\sigma'(t)$.

A definição anterior nos indica que o trabalho realizado por um campo de forças F para deslocar uma partícula ao longo de uma curva C é dado por

$$W = \int_C F \cdot dr.$$


 Se a curva C é fechada, isto é, $\sigma(a) = \sigma(b)$, a integral de linha definida acima é denotada por

$$\oint_C F \cdot dr.$$

 Se a curva C é de classe C^1 por partes ($C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$), então

$$\int_C F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr + \int_{C_2} F \cdot dr + \dots + \int_{C_n} F \cdot dr$$

A observação a seguir corresponde, na verdade, a um teorema, cuja demonstração será omitida por não ser objetivo do curso.

 Embora a parametrização da curva C seja utilizada na definição acima, a integral de linha de ao longo de C não depende da escolha da parametrização. No entanto, se invertermos a orientação da curva, isto é, o sentido no qual ela é percorrida, a integral de linha mudará de sinal. Em resumo, denotando por C^- a curva C com orientação contrária, tem-se

$$\int_{C^-} F \cdot dr = - \int_C F \cdot dr.$$

UMA OUTRA NOTAÇÃO...

Se utilizarmos as componentes de

$$F(\sigma(t)) = (F_1(\sigma(t)), F_2(\sigma(t)), F_3(\sigma(t)))$$

e $\sigma'(t)$, a Equação 9.1 pode ser reescrita como

$$\int_a^b (F_1(\sigma(t))x'(t)dt + F_2(\sigma(t))y'(t)dt + F_3(\sigma(t))z'(t)dt).$$

Dessa forma, sabendo que $x'(t)dt = dx$, $y'(t)dt = dy$ e $z'(t)dt = dz$, é usual denota-se a integral de linha por

$$\int_C F \cdot dr = \int_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz.$$

Exemplo 9.1.

- a. Calcule $\int_C xdx + ydy + zdz$, onde C é a hélice parametrizada por

$$\sigma(t) = (\sin t, \cos t, t), 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Solução: Observe, inicialmente, que

$$\int_C xdx + ydy + zdz = \int_C F \cdot dr,$$

onde $F(x, y, z) = (x, y, z)$.

Como,

- i. $F(\sigma(t)) = F(\sin t, \cos t, t) = (\sin t, \cos t, t)$;
- ii. $\sigma'(t) = (\cos t, -\sin t, 1)$

então

$$\begin{aligned} \int_C xdx + ydy + zdz &= \int_0^{2\pi} ((\sin t, \cos t, t) \cdot (\cos t, -\sin t, 1)) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin t \cos t - \cos t \sin t + t) dt = \int_0^{2\pi} t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=2\pi} = 2\pi^2. \end{aligned}$$

- b. Calcule o trabalho W realizado pela força $F(x, y) = (-y, x)$ para deslocar uma partícula ao longo de toda a circunferência $x^2 + y^2 = 1$, partindo do ponto $(1, 0)$.

Solução: Sabemos que

$$W = \oint_C F \cdot dr$$

e, como a integral de linha depende da orientação da curva, precisamos definir em que sentido a partícula percorrerá a circunferência

- i. sentido anti-horário

Nesse caso, temos

$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t), 0 \leq t < 2\pi.$$

$$\sigma'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

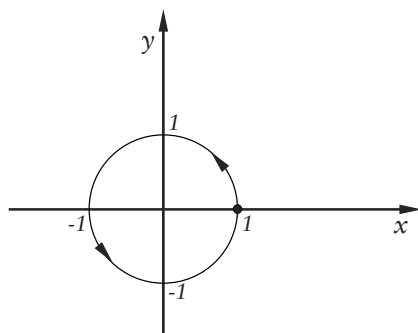


Figura 9.4

e, portanto,

$$\oint_C F \cdot dr = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = [t]_{t=0}^{t=2\pi} = 2\pi.$$

iii. sentido horário

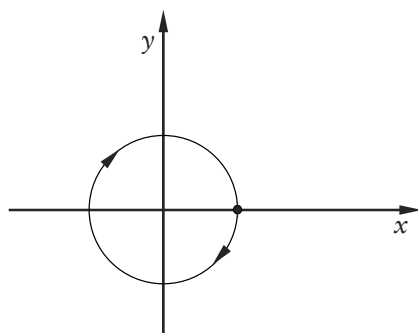



Figura 9.5

Como utilizamos a notação C para o sentido anti-horário, temos que

$$\oint_{C^-} F \cdot dr = -\oint_C F \cdot dr = -2\pi.$$

 Como vimos na Aula 8 desse curso, o campo de forças F é representado pela ilustração a seguir.

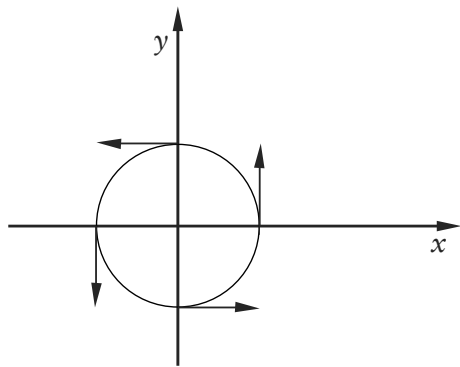


Figura 9.6

Note que, em cada ponto da circunferência, o vetor $\vec{F}(x,y)$ aponta para o sentido anti-horário e, dessa forma, é natural esperar que o trabalho realizado por F para deslocar uma partícula ao longo da circunferência seja positivo quando esta é percorrida no sentido anti-horário.

c. Calcule a integral de linha do campo vetorial

$$F(x,y) = (x^2 - 2y, x^3 + y)$$

do ponto $(0,0)$ ao ponto $(1,1)$ ao longo das seguintes curvas:

- i. o segmento de reta $y = x$
- ii. o segmento de parábola $y = x^2$

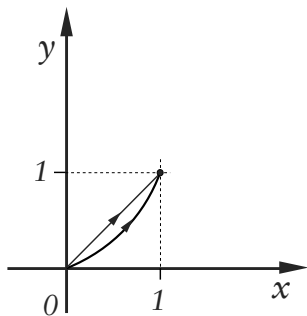


Figura 9.7

Solução:

- i. Note que uma parametrização para o segmento é

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= (t, t), 0 \leq t \leq 1 \\ \sigma'(t) &= (1, 1)\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\int_C F \cdot dr &= \int_0^1 (t^2 - 2t, t^3 + t) \cdot (1, 1) dt = \\ &= \int_0^1 (t^3 + t^2 - t) dt = \left[\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=1} = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

- ii. Para essa curva a parametrização mais natural é

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= (t, t^2), 0 \leq t \leq 1 \\ \sigma'(t) &= (1, 2t)\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\int_C F \cdot dr &= \int_0^1 (t^2 - 2t^2, t^3 + t^2) \cdot (1, 2t) dt = \\ &= \int_0^1 (2t^4 + 2t^3 - t^2) dt = \left[\frac{2t^5}{5} + \frac{t^4}{2} - \frac{t^3}{3} \right]_{t=0}^{t=1} = \\ &= \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{17}{30}.\end{aligned}$$

- d. Calcule a integral de linha do campo vetorial

$$F(x, y) = (x, y)$$

do ponto $(0, 0)$ ao ponto $(1, 1)$ ao longo das seguintes curvas:

- i. o segmento de reta $y = x$
- ii. o segmento de parábola $y = x^2$
- iii. união do segmento de reta ligando $(0, 0)$ a $(1, 0)$ com o segmento de reta ligando $(1, 0)$ a $(1, 1)$

Solução:

- i. Como no exemplo anterior, temos

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= (t, t), 0 \leq t \leq 1 \\ \sigma'(t) &= (1, 1)\end{aligned}$$

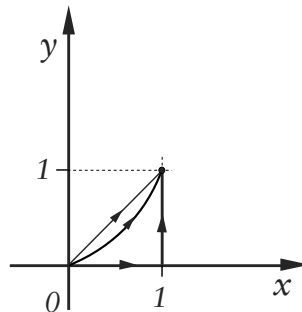


Figura 9.8

e, portanto,

$$\int_C F \cdot dr = \int_0^1 (t, t) \cdot (1, 1) dt = \int_0^1 2t dt = [t^2]_{t=0}^{t=1} = 1$$

- ii. Novamente, utilizando a parametrização do exemplo anterior

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= (t, t^2), 0 \leq t \leq 1 \\ \sigma'(t) &= (1, 2t)\end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned}\int_C F \cdot dr &= \int_0^1 (t, t^2) \cdot (1, 2t) dt = \int_0^1 (t + 2t^3) dt = \\ &= \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2} \right]_{t=0}^{t=1} = 1.\end{aligned}$$

- iii. Para resolver a integral, vamos separar a curva em duas partes $C = C_1 \cup C_2$.

1. C_1 ; segmento de reta ligando $(0,0)$ a $(1,0)$
Nesse caso,

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= (t, 0), 0 \leq t \leq 1 \\ \sigma'(t) &= (1, 0)\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\int_{C_1} F \cdot dr = \int_0^1 (t, 0) \cdot (1, 0) dt = \int_0^1 t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{2}.$$

2. C_2 ; segmento de reta ligando $(1,0)$ a $(1,1)$

Nesse caso,

$$\sigma(t) = (1, t), 0 \leq t \leq 1$$


$$\sigma'(t) = (0, 1)$$

e, portanto,

$$\int_{C_2} F \cdot dr = \int_0^1 (1, t) \cdot (0, 1) dt = \int_0^1 t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{2}.$$

Dessa forma, segue que

$$\int_C F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr + \int_{C_2} F \cdot dr = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

 Diferentemente do item c., no qual o cálculo da integral de linha ligando dois pontos por curvas distintas levou a resultados diferentes, no item d. o valor da integral de linha ligando os pontos $(0,0)$ e $(1,1)$ foi o mesmo para os três caminhos escolhidos. O Teorema a seguir dá um significado a esse fato.

Teorema 9.1.

Seja $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ e $n = 3$) um campo vetorial contínuo e conservativo tal que $F = \nabla f$ em D . Se C é uma curva em D com ponto inicial A e final B , então

$$\int_C F \cdot dr = f(B) - f(A).$$

Demonstração

Faremos a prova para $n = 3$. Seja $\sigma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow C$ uma parametrização de classe C^1 para C dada por

$$\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

e considere a função $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por


$$g(t) = f(\sigma(t)) = f(x(t), y(t), z(t)).$$

Pela regra da cadeia, temos que

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\sigma(t))y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(\sigma(t))z'(t) = \nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t).$$

Note que $\sigma(a) = A$ e $\sigma(b) = B$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot dr &= \int_C \nabla f \cdot dr = \int_a^b (\nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)) dt = \\ &= \int_a^b g'(t) dt = g(b) - g(a) = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)) = \\ &= f(B) - f(A). \end{aligned}$$

 Esse teorema é conhecido como Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha e garante que a integral de linha de um campo conservativo só depende dos pontos inicial e final A e B e não da trajetória que os une.

Voltando ao item d. , desejamos calcular a integral de linha do campo vetorial $F(x, y) = (x, y)$ do ponto $(0, 0)$ ao ponto $(1, 1)$. Vamos supor que o campo é conservativo e tentar obter uma função potencial f .

- i. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = F_1(x, y) = x \implies f(x, y) = \int x dx = \frac{x^2}{2} + A(y)$
- ii. $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = F_2(x, y) = y \implies f(x, y) = \int y dy = \frac{y^2}{2} + B(x)$

Comparando as identidades anteriores, verificamos que, para ambas serem iguais, devemos ter

$$A(y) = B(x) = 0$$

e, nesse caso,

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

De fato, F é um campo conservativo e, portanto, qualquer que seja a curva C ligando o ponto $(0, 0)$ ao ponto $(1, 1)$, tem-se que

$$\int_C F \cdot dr = f(1, 1) - f(0, 0) = \frac{1^2 + 1^2}{2} - \frac{0^2 + 0^2}{2} = 1$$

Uma consequência imediata do teorema anterior é o resultado que a seguir:

Teorema 9.2.

Se $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ e $n = 3$) é um campo vetorial contínuo e conservativo, então


$$\oint_C F \cdot dr = 0$$

qualquer que seja a curva fechada C .

Demonstração

De fato, se a curva é fechada, os pontos inicial e final A e B , de sua trajetória, coincidem e, portanto, sendo f a função potencial de F ,

$$\oint_C F \cdot dr = f(B) - f(A) = 0.$$

 Segue do Teorema anterior que, se $\oint_C F \cdot dr \neq 0$, para alguma curva fechada C , então F não é conservativo. Esse fato nos permite apresentar um exemplo de campo vetorial não conservativo com rotacional nulo, conforme indicado no final da última aula.

Seja $F : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

- i. Para garantirmos que F não seja conservativo, basta mostrarmos que $\oint_C F \cdot dr \neq 0$, para alguma curva fechada C . Vamos considerar C a circunferência $x^2 + y^2 = 1$, percorrida no sentido anti-horário. Nesse caso, uma parametrização de C é dada por

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= (\cos t, \sin t), 0 \leq t < 2\pi \\ \sigma'(t) &= (-\sin t, \cos t). \end{aligned}$$

Logo,

$$\oint_C F \cdot dr = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = [t]_{t=0}^{t=2\pi} = 2\pi \neq 0$$

e, portanto, F não é conservativo.

- ii. Por outro lado, vamos verificar que $\text{rot} F = \vec{0}$. De fato, como F está definido no \mathbb{R}^2 , basta que tenhamos
- $$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} &= \frac{1(x^2 + y^2) - x2x}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-1(x^2 + y^2) - (-y)2y}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

Exemplo 9.2.

- a. Sabendo que $F(x, y, z) = (e^{y+2z}, xe^{y+2z}, 2xe^{y+2z})$ é conservativo, calcule $\int_C F \cdot dr$ onde C é a curva com parametrização

$$\sigma(t) = (1 + \sin t, 1 + \cos t, t), 0 \leq t \leq \pi.$$

Solução: Note que, embora tenhamos a parametrização da curva C , o cálculo da integral de linha por intermédio da definição seria extremamente penoso. Entretanto, sendo o campo vetorial conservativo, só precisamos de sua função potencial e dos pontos inicial e final, A e B , da curva.

- i. Cálculo da função potencial

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= e^{y+2z} \implies \\ f(x, y, z) &= \int e^{y+2z} dx = xe^{y+2z} + A(y, z) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = xe^{y+2z} \implies$$

$$f(x, y, z) = \int xe^{y+2z} dy = xe^{y+2z} + B(x, z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2xe^{y+2z} \implies$$

$$f(x, y, z) = \int 2xe^{y+2z} dz = xe^{y+2z} + C(x, y)$$

Comparando as três identidades anteriores, verificamos que, para todas serem iguais, devemos ter

$$A(y, z) = B(x, z) = C(x, y) = 0$$

e, nesse caso,

$$f(x, y, z) = xe^{y+2z}.$$

$$\text{ii. } A = \sigma(0) = (1 + \sin 0, 1 + \cos 0, 0) = (1, 2, 0)$$

$$B = \sigma(\pi) = (1 + \sin \pi, 1 + \cos \pi, \pi) = (1, 0, \pi)$$

Logo, segue do Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha que

$$\int_C F \cdot dr = f(1, 0, \pi) - f(1, 2, 0) = 1e^{0+2\pi} - 1e^{2+2 \cdot 0} = e^{2\pi} - e^2.$$

- b. Calcule o trabalho W realizado pela força representada pelo campo conservativo $F(x, y, z) = (\cos z, 2y, -x \sin z)$ para deslocar uma partícula ao longo de toda a curva C de interseção entre o hemisfério $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e o plano $z = y$, percorrida no sentido horário quando vista da origem.

Solução: Mais uma vez, sendo o campo vetorial conservativo, precisamos de sua função potencial e dos pontos inicial e final, A e B , da curva C .

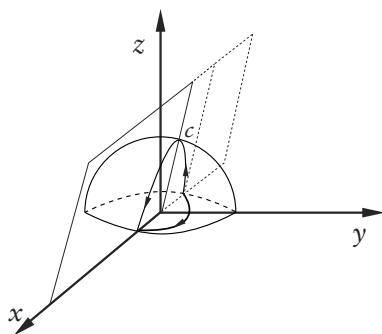


Figura 9.9

Note que, como a curva encontra-se sobre o plano $z = y$, com y e z positivos, o sentido horário, quando observado da origem, corresponde ao de crescimento do eixo x . Para obtermos a curva C , observamos que a coordenada z de um ponto qualquer $P = (x, y, z) \in C$ satisfaz às equações de ambas as superfícies e, portanto, as coordenadas x e y verificam

$$\sqrt{1 - x^2 - y^2} = z = y \implies 1 - x^2 - y^2 = y^2 \implies x^2 + 2y^2 = 1.$$

Dessa forma, a curva C é descrita por

$$x^2 + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1 \text{ e } z = y \geq 0$$

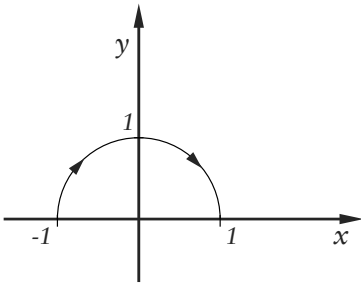


Figura 9.10

e seus pontos inicial e final são dados, respectivamente, por

i. $A = (-1, 0, 0)$ e $B = (1, 0, 0)$

ii. Cálculo da função potencial

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \cos z \implies f(x, y, z) = \int \cos z dx = x \cos z + A(y, z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2y \implies f(x, y, z) = \int 2y dy = y^2 + B(x, z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -x \sin z \implies f(x, y, z) = \int -x \sin z dz = x \cos z + C(x, y)$$

Comparando as três identidades anteriores, verificamos que, para todas serem iguais, devemos ter

$$A(y, z) = C(x, y) = y^2 \text{ e } B(x, z) = x \cos z$$

e, nesse caso,

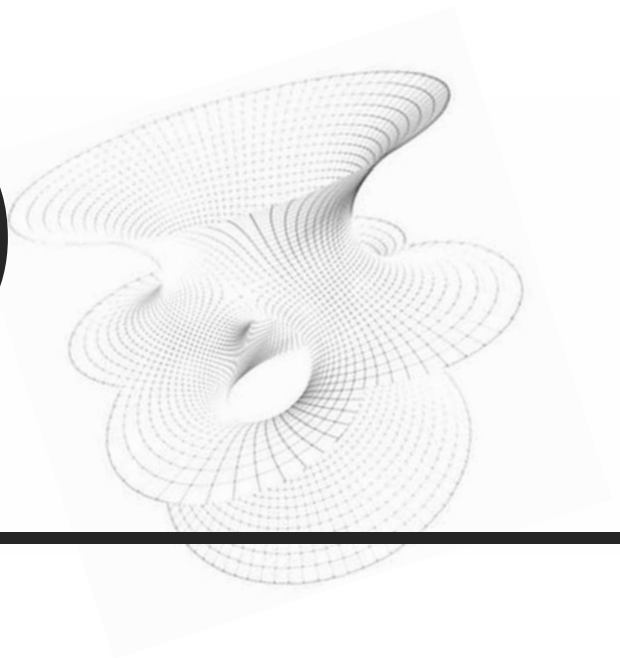
$$f(x, y, z) = y^2 + x \cos z.$$

Logo, segue do Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha que

$$\int_C F \cdot dr = f(1, 0, 0) - f(-1, 0, 0) = (0^2 + 1 \cos 0) - (0^2 - 1 \cos 0) = 2.$$

Aula 10

TEOREMA DE GREEN



O b j e t i v o s

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 utilizar o Teorema de Green para calcular a integral de linha de campos vetoriais ao longo de curvas fechadas no plano;
- 2 identificar quando um campo vetorial é conservativo no plano e calcular integrais de linha de tais campos.

Meta da aula:

Apresentar o Teorema de Green para integrais de linha de campo vetorial ao longo de curvas fechadas no plano. Será visto, ainda, como consequência do Teorema de Green, o chamado Teorema das Quatro Equivalências, que caracteriza um campo conservativo no plano.

Pré-requisitos:

Você vai precisar dos conhecimentos sobre Integral de Linha de Campos Vetoriais, apresentados nas Aulas 8 e 9 desse curso, bem como sobre Integrais Duplas apresentadas nas Aulas 1, 2 e 3, também desse curso.

TEOREMA DE GREEN

O foco principal dessa aula é apresentar o Teorema de Green, que associa a integral de linha de um campo vetorial ao longo de uma curva fechada no plano a uma integral dupla sobre a região delimitada por essa curva. Antes de enunciarmos o teorema, precisamos definir o conceito de orientação positiva.

Definição 10.1.

Diz-se que a fronteira ∂D de uma região fechada $D \subset \mathbb{R}^2$ está orientada positivamente se a região D fica à esquerda quando percorremos a fronteira ∂D .

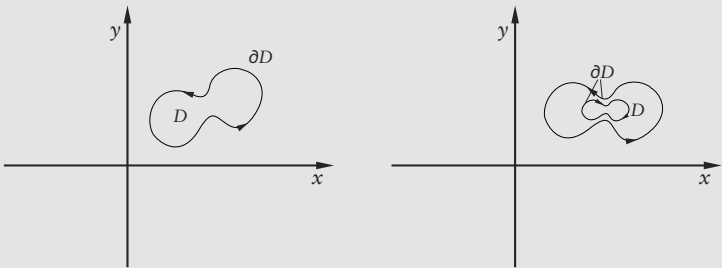


Figura 10.1

Teorema 10.1 (Teorema de Green).

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ uma região fechada e limitada cuja fronteira ∂D seja dada por uma curva fechada simples, orientada positivamente e parametrizada por uma função de classe C^1 por partes, de modo que seja percorrida apenas uma vez. Se $F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ é um campo vetorial de classe C^1 em D , então

$$\oint_{\partial D} F_1 dx + F_2 dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

Demonstração

Vamos considerar o caso em que a região D é, simultaneamente, dos tipos I e II (conforme a Aula I), isto é,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \text{ e } g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

e

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / c \leq y \leq d \text{ e } h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}.$$

A demonstração será feita calculando-se, separadamente, as parcelas da integral de linha.

- i. Para a primeira, utilizamos o fato de D ser do tipo I e observamos que

$$\oint_{\partial D} F_1 dx = \int_{C_1 \cup C_2^-} F_1 dx = \int_{C_1} F_1 dx - \int_{C_2} F_1 dx$$

onde C_1 é a curva inferior, percorrida da esquerda para a direita, e C_2^- é a curva superior, percorrida da direita para esquerda, de modo que a orientação de ∂D seja positiva.

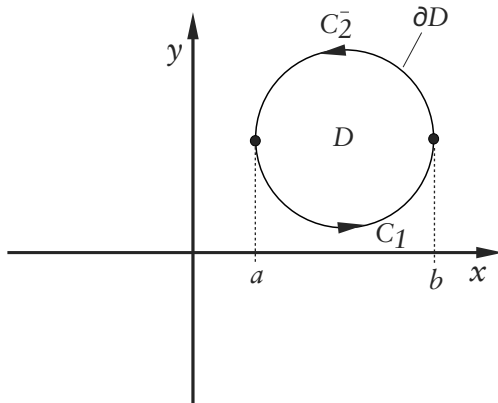


Figura 10.2

Uma parametrização para a curva C_1 é dada por

$$\begin{aligned}\sigma_1(x) &= (x, g_1(x)), \quad a \leq x \leq b \\ \sigma_1'(x) &= (1, g_1'(x)).\end{aligned}$$

Para a curva C_2 , podemos utilizar a parametrização

$$\begin{aligned}\sigma_2(x) &= (x, g_2(x)), \quad a \leq x \leq b \\ \sigma_2'(x) &= (1, g_2'(x)).\end{aligned}$$

Dessa forma, segue que

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D} F_1 dx &= \int_{C_1} F_1 dx - \int_{C_2} F_1 dx = \\ &= \int_a^b F_1(\sigma_1(x)) dx - \int_a^b F_1(\sigma_2(x)) dx = \\ &= \int_a^b F_1(x, g_1(x)) dx - \int_a^b F_1(x, g_2(x)) dx = \\ &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} -\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) dy dx = \\ &= \iint_D -\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) dx dy.\end{aligned}$$

ii. Analogamente, utilizamos o fato de D ser do tipo II

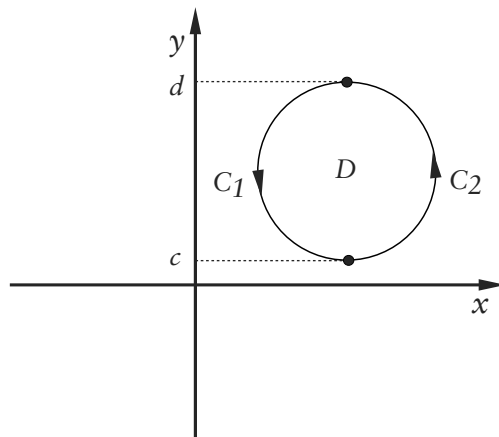


Figura 10.3

e obtemos, para a segunda parcela,

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D} F_2 dy &= -\int_c^d F_2(\sigma_1(y)) dy + \int_c^d F_2(\sigma_2(y)) dy = \\ &= -\int_c^d F_2(h_1(y), y) dy + \int_c^d F_2(h_2(y), y) dy = \\ &= \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) dx dy = \iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) dx dy.\end{aligned}$$

Logo, somando as parcelas, concluímos que

$$\oint_{\partial D} F_1 dx + F_2 dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

✍ A demonstração foi feita para o caso particular em que a região D é, simultaneamente, dos tipos I e II. No caso em que D é uma região mais geral, a decomposomos em uma união finita de regiões com essa característica, $D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$, e aplicamos o Teorema de Green a cada região D_i .

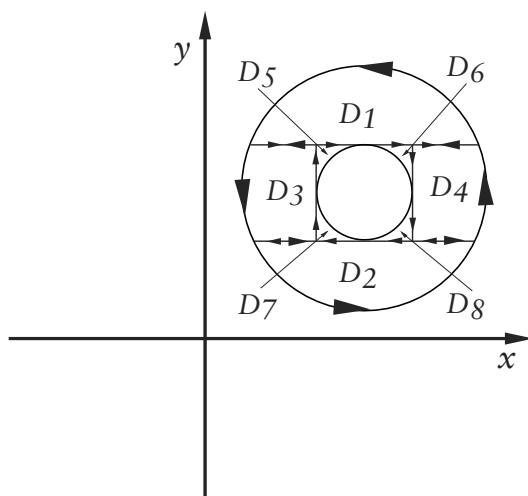


Figura 10.4

Denotando por ∂D_i a fronteira de cada região D_i , observamos que as partes de ∂D_i que não constituem a fronteira de D agem como fronteira comum a duas regiões vizinhas e, nesse caso, serão percorridas duas vezes em sentidos opostos. Dessa forma, as suas integrais de linha se cancelarão e, portanto,

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} F_1 dx + F_2 dy &= \oint_{\partial D_1} F_1 dx + F_2 dy + \dots + \oint_{\partial D_n} F_1 dx + F_2 dy = \\ &= \iint_{D_1} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy + \dots + \iint_{D_n} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Exemplo 10.1.

- a. Calcule $\oint_C (3x - y) dx + (x + 5y) dy$, onde C é a circunferência de raio 1

$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t), 0 \leq t < 2\pi.$$

Solução: É possível resolver a integral acima utilizando diretamente a definição, embora exija um certo trabalho (**TENTE FAZER COMO EXERCÍCIO!**). No entanto, com o auxílio do Teorema de Green esse processo se torna muito mais simples, como veremos a seguir.

Note que, com a parametrização dada, a circunferência está orientada no sentido anti-horário e, portanto, positivamente.

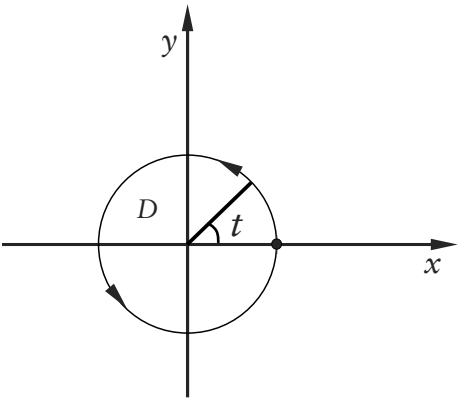


Figura 10.5

Dessa forma, denotando por D o interior da circunferência, visto que o campo vetorial é de classe C^1 em \mathbb{R}^2 , segue do Teorema de Green que

$$\begin{aligned} \oint_C (3x - y) dx + (x + 5y) dy &= \\ \iint_D \left(\frac{\partial (x + 5y)}{\partial x} - \frac{\partial (3x - y)}{\partial y} \right) dx dy &= \\ \iint_D (1 - (-1)) dx dy = 2A(D) = 2\pi \end{aligned}$$

- b. Calcule $\oint_C \left(y^2 + \sqrt{1+x^4} \right) dx + \left(5x - e^{y^2} \right) dy$, onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$, percorrida no sentido horário.

Solução: Diferentemente do exemplo anterior, a resolução dessa integral de linha, usando diretamente a definição, nos parece impossível. Entretanto, como o campo vetorial é de classe C^1 em \mathbb{R}^2 , o Teorema de Green nos oferece uma alternativa. Note que, ao ser percorrida no sentido horário, a circunferência C está orientada negativamente.

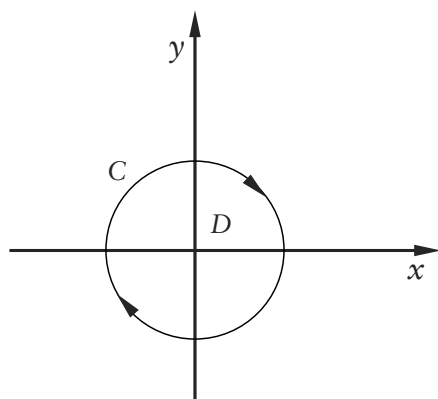


Figura 10.6

Dessa forma, denotando por D o interior da circunferência, aplicamos o Teorema de Green a C^- e obtemos

$$\begin{aligned} & \oint_C \left(y^2 + \sqrt{1+x^4} \right) dx + \left(5x - e^{y^2} \right) dy = \\ & - \oint_{C^-} \left(y^2 + \sqrt{1+x^4} \right) dx + \left(5x - e^{y^2} \right) dy = \\ & - \iint_D \left(\frac{\partial \left(5x - e^{y^2} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(y^2 + \sqrt{1+x^4} \right)}{\partial y} \right) dxdy = \\ & - \iint_D (5 - 2y) dxdy. \end{aligned}$$

Utilizando mudança de coordenadas polares, para resolver a última integral, obtemos:

$$\begin{aligned} & \oint_C \left(y^2 + \sqrt{1+x^4} \right) dx + \left(5x - e^{y^2} \right) dy = \\ & - \iint_D (5 - 2y) dx dy = \\ & - \int_0^{2\pi} \int_0^1 (5 - 2r \sin \theta) r dr d\theta = \\ & - \int_0^{2\pi} \int_0^1 (5r - 2r^2 \sin \theta) dr d\theta = \\ & - \int_0^{2\pi} \left[\frac{5r^2}{2} - \frac{2r^3}{3} \sin \theta \right]_{r=0}^{r=1} d\theta = - \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{2} - \frac{2}{3} \sin \theta \right) d\theta = \\ & - \left[\frac{5}{2} \theta + \frac{2}{3} \cos \theta \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = -5\pi. \end{aligned}$$

- c. Calcule $\int_C (x^4 - y^3) dx + (x^3 + y^5) dy$, onde C é a semicircunferência $y = \sqrt{1-x^2}$, percorrida no sentido anti-horário.

Solução: Assim como no exercício do item a., é possível resolver a integral de linha utilizando diretamente a definição. Para tal, seria necessário resolver integrais envolvendo potências das funções seno e cosseno, o que acarretaria um certo trabalho (**TENTE CALCULAR COMO EXERCÍCIO!**). Como o campo vetorial é de classe C^1 em \mathbb{R}^2 , podemos pensar em utilizar o Teorema de Green como uma alternativa. No entanto, a curva C não é fechada e, por isso, não delimita uma região. Para podermos aplicar o Teorema de Green, vamos "fechar" a curva, considerando o segmento de reta γ ligando os pontos $(-1,0)$ e $(1,0)$, orientado no sentido de crescimento do eixo x .

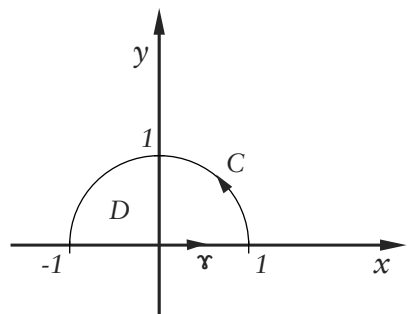


Figura 10.7

Dessa forma, a região fechada D , delimitada por $C \cup \gamma$, possui fronteira orientada positivamente e, portanto, segue do Teorema de Green, que

$$\begin{aligned} \oint_{C \cup \gamma} (x^4 - y^3) dx + (x^3 + y^5) dy &= \\ \iint_D \left(\frac{\partial (x^3 + y^5)}{\partial x} - \frac{\partial (x^4 - y^3)}{\partial y} \right) dxdy &= \\ \iint_D (3x^2 + 3y^2) dxdy. \end{aligned}$$

Utilizando mudança de coordenadas polares, para resolver a última integral, obtemos:

$$\begin{aligned} \oint_{C \cup \gamma} (x^4 - y^3) dx + (x^3 + y^5) dy &= \iint_D (3x^2 + 3y^2) dxdy = \\ \int_0^\pi \int_0^1 3r^2 r dr d\theta &= \int_0^\pi \int_0^1 3r^3 dr d\theta = \int_0^\pi \left[\frac{3r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=1} d\theta = \\ &= \frac{3}{4} \int_0^\pi d\theta = \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

Note que o valor encontrado corresponde à integral de linha ao longo de $C \cup \gamma$, isto é,

$$\begin{aligned} \int_C (x^4 - y^3) dx + (x^3 + y^5) dy + \int_\gamma (x^4 - y^3) dx + (x^3 + y^5) dy \\ = \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_C (x^4 - y^3) dx + (x^3 + y^5) dy &= \\ \frac{3\pi}{4} - \int_\gamma (x^4 - y^3) dx + (x^3 + y^5) dy \end{aligned}$$

e, portanto, para calcularmos a integral de linha desejada, precisamos determinar o valor de

$$\int_\gamma (x^4 - y^3) dx + (x^3 + y^5) dy.$$

Para isso, consideremos a seguinte parametrização de γ :


$$\begin{aligned} \sigma(t) &= (t, 0), \quad -1 \leq t \leq 1 \\ \sigma'(t) &= (1, 0). \end{aligned}$$

Então, calculando a integral ao longo de γ , utilizando a definição, obtemos

$$\int_{\gamma} (x^4 - y^3) dx + (x^3 + y^5) dy = \int_{-1}^1 (t^4, t^3) \cdot (1, 0) dt = \int_{-1}^1 t^4 dt = \left[\frac{t^5}{5} \right]_{t=-1}^{t=1} = \frac{2}{5}$$

e, finalmente,

$$\int_C (x^4 - y^3) dx + (x^3 + y^5) dy = \frac{3\pi}{4} - \frac{2}{5} = \frac{15\pi - 8}{20}.$$

 No exemplo anterior, o Teorema de Green não resolveu diretamente a integral desejada. No entanto, precisamos calcular a integral ao longo de um segmento de reta no lugar de uma semicircunferência, o que foi consideravelmente mais simples. No exemplo a seguir, veremos uma situação semelhante, na qual obteremos a integral de linha ao longo de uma elipse por intermédio do cálculo da mesma ao longo de uma circunferência.

- d. $\oint_C F \cdot dr$, onde C é a elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, percorrida no sentido anti-horário, e F é o campo vetorial dado por

$$F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

Solução: Dada a expressão do campo vetorial, a integral de linha desejada é bastante complicada de ser calculada pela definição, uma vez que a curva C é dada por uma elipse. Note que o campo vetorial é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ e, portanto, como a origem pertence à região delimitada por C , não podemos aplicar o Teorema de Green. A fim de "isolar" a origem vamos considerar a circunferência $\gamma, x^2 + y^2 = 1$, orientada no horário.

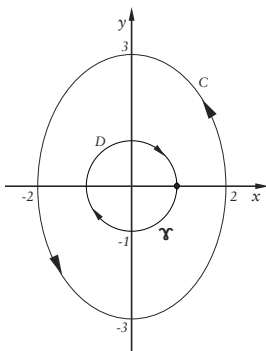


Figura 10.8

Dessa forma, a região fechada D delimitada pelas curvas C e γ , não contém a origem e possui fronteira orientada positivamente. Assim, podemos aplicar o Teorema de Green e obter

$$\oint_{C \cup \gamma} F \cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \right) dx dy = \iint_D \left(\frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) dx dy = 0.$$

Como no exemplo anterior, o valor encontrado corresponde à integral de linha ao longo de $C \cup \gamma$, isto é,

$$\int_C F \cdot dr + \int_{\gamma} F \cdot dr = 0$$

e, portanto, precisamos calcular a integral de linha ao longo de γ . Para isso, observe que a parametrização

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= (\cos t, \sin t), 0 \leq t < 2\pi. \\ \sigma'(t) &= (-\sin t, \cos t) \end{aligned}$$

corresponde à circunferência percorrida no sentido anti-horário (ou seja, γ^-) e que


$$\int_{\gamma^-} F \cdot dr = - \int_{\gamma} F \cdot dr.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma^-} F \cdot dr &= \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi. \end{aligned}$$

e, finalmente,

$$\int_C F \cdot dr = - \int_{\gamma} F \cdot dr = \int_{\gamma^-} F \cdot dr = 2\pi.$$

 No exemplo anterior, foi utilizada a circunferência de raio 1 para "isolar" a origem. No entanto, não faz sentido a integral de linha ao longo da elipse depender da escolha dessa circunferência. De fato, como exercício, considere γ uma circunferência qualquer $x^2 + y^2 = r^2$ que esteja inteiramente no interior da elipse (isto é, com $r < 2$) e mostre que o resultado obtido será o mesmo.

Na Aula 8 foi mostrado que se um campo vetorial é conservativo, então o seu operador rotacional é nulo. Em contrapartida, vimos, na Aula 9, que o contrário não é verdade, pois o campo vetorial

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

possui rotacional nulo, mas não é conservativo em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. O Teorema a seguir mostra que, sob certas condições adicionais, determinamos situações equivalentes a um campo vetorial ser conservativo no plano. Antes de enunciarmos o Teorema, precisamos de algumas definições:

Definição 10.2.

Um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ é dito conexo por caminhos se quaisquer dois pontos de U podem ser ligados por um caminho contínuo totalmente contido em U .

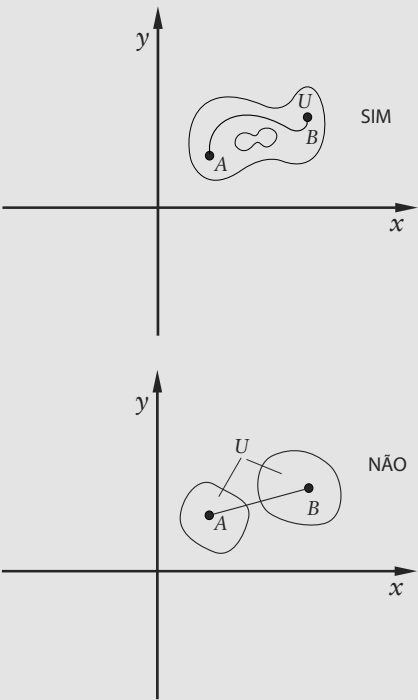


Figura 10.9

Definição 10.3.

Dizemos que um conjunto conexo por caminhos $U \subset \mathbb{R}^2$ é **simplesmente conexo** se, para toda curva fechada em C em U , a região limitada por C está totalmente contida em U . Intuitivamente, um aberto U é simplesmente conexo se não possui "buracos".

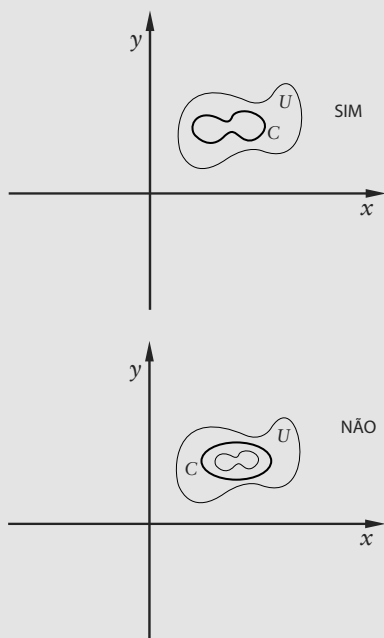


Figura 10.10

Teorema 10.2 (Teorema das Quatro Equivalências).

Seja $F : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 definido em um conjunto simplesmente conexo U . As seguintes condições são equivalentes:

- i. $\oint_C F \cdot dr = 0$, qualquer que seja a curva fechada C , de classe C^1 por partes, contida em U .
- ii. A integral de linha de F do ponto A ao ponto B independe da curva C , de classe C^1 por partes, contida em U , ligando A a B .
- iii. F é um campo vetorial conservativo em U .

iv. $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ em U .

Demonstração

A prova do teorema será feita nas seguintes etapas:

$i. \implies ii. \implies iii. \implies iv. \implies i..$

- $i. \implies ii.$

Sejam C_1 e C_2 duas curvas quaisquer, de classe C^1 por partes, contida em U , ligando A a B , conforme ilustração abaixo.

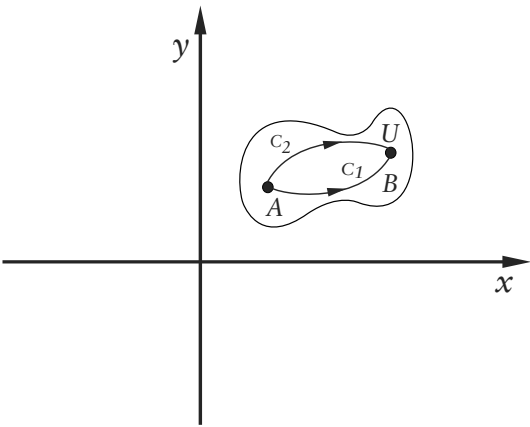


Figura 10.11

Sendo a curva $C = C_1 \cup C_2^-$ fechada, de classe C^1 por partes e contida em U , segue de i) que

$$\int_{C_1} F \cdot dr - \int_{C_2} F \cdot dr = \oint_C F \cdot dr = 0$$

e, portanto,

$$\int_{C_1} F \cdot dr = \int_{C_2} F \cdot dr,$$

o que prova $ii.$

- $ii. \implies iii.$

Vamos fixar $(x_0, y_0) \in U$ e definir uma função f por

$$f(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} F \cdot dr,$$

para cada $(x, y) \in U$. Como a integral de linha de F independe do caminho ligando (x_0, y_0) a (x, y) , a função está bem definida. Vamos mostrar que f é uma função potencial de F (isto é, $\frac{\partial f}{\partial x} = F_1$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = F_2$), em U . Para tal, note que

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, y) - f(x, y) &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x + \Delta x, y)} F \cdot dr - \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} F \cdot dr = \\ &= \int_{(x, y)}^{(x + \Delta x, y)} F \cdot dr \end{aligned}$$

e que a última integral pode ser tomada ao longo do segmento de reta ligando (x, y) a $(x + \Delta x, y)$, visto que a integral de linha de F independe do caminho ligando os dois pontos.

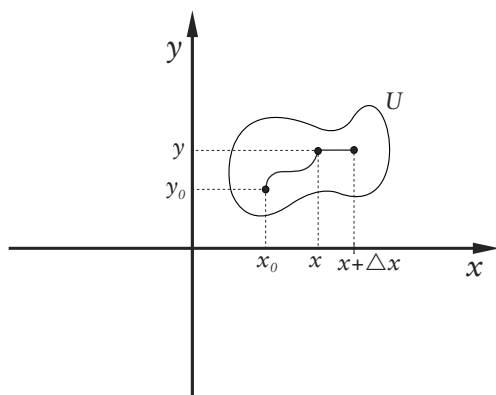


Figura 10.12

Dessa forma, parametrizamos o segmento por

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= (x + t\Delta x, y), \quad 0 \leq t \leq 1. \\ \sigma'(t) &= (\Delta x, 0) \end{aligned}$$

e obtemos

$$\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} F \cdot dr = \int_0^1 F_1(x+t\Delta x, y) \Delta x dt.$$

Como F_1 é contínua, então, pelo Teorema do Valor Médio para Integrais, existe $t_0 \in [0, 1]$ tal que

$$\int_0^1 F_1(x+t\Delta x, y) \Delta x dt = F_1(x+t_0\Delta x, y) \Delta x$$

e, portanto,

$$\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = F_1(x+t_0\Delta x, y).$$

Tomando o limite quando $\Delta x \rightarrow 0$, segue da continuidade de F_1 que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = F_1(x, y).$$

De maneira análoga, mostra-se que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = F_2(x, y),$$

concluindo a prova de *iii.*.


- *iii. \implies iv.*

Observe que essa passagem equivale a mostrar que se um campo vetorial é conservativo, então o seu operador rotacional é nulo, o que foi feito na Aula 8.

- *iv. \implies i.*

Seja C uma curva fechada, de classe C^1 por partes, contida em U . Como U é simplesmente conexo, a região D , delimitada por C , está contida em U e, portanto, F é de classe C^1 em D . Dessa forma, segue do Teorema de Green que

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

 Observe que a condição de U ser simplesmente conexo é fundamental para provarmos *iv. \implies i.* e, portanto, representa a condição adicional para que $\text{rot} F = \vec{0}$ implique em F ser conservativo.

 Vimos no item d. , do **Exemplo 10.1**, que para o campo vetorial

$$F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right),$$

temos

$$\oint_C F \cdot dr = 2\pi \neq 0,$$

onde C é a elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, embora tenhamos $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Isto ocorreu porque a origem pertence à região delimitada pela elipse e, portanto, é impossível definirmos um conjunto simplesmente conexo que contenha a elipse e não contenha a origem. Entretanto, se C for uma curva fechada, de classe C^1 por partes, não envolvendo a origem, então, pelo teorema anterior, F será conservativo na região fechada delimitada por C e teremos

$$\oint_C F \cdot dr = 0.$$

Exemplo 10.2.

a. Encontre todos os valores possíveis para

$$\oint_C \frac{x+y}{x^2+y^2} dx + \frac{y-x}{x^2+y^2} dy,$$

onde C é uma curva fechada, de classe C^1 por partes, que não passa pela origem.

Solução:

Observe que o campo vetorial é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ e, portanto, precisamos considerar dois casos separadamente: quando C "envolve" a origem e quando C não "envolve" a origem. Note, inicialmente, que

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

i. **Caso 1:** C não "envolve" a origem

Nesse caso, a curva está contida em um conjunto simplesmente conexo U no qual o campo vetorial F é de classe C^1

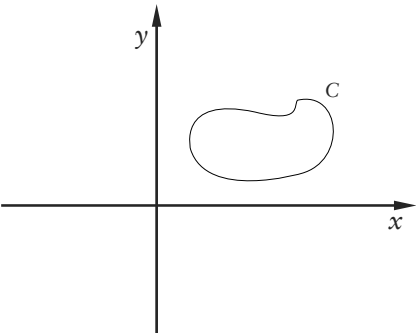


Figura 10.13

e, portanto, segue do Teorema das Quatro Equivalências que

$$\oint_C \frac{x+y}{x^2+y^2} dx + \frac{y-x}{x^2+y^2} dy = 0,$$

independentemente da orientação de C .

• **Caso 2:** C "envolve" a origem

Aqui, não é possível considerarmos um conjunto simplesmente conexo U , que contenha a curva C , tal que F seja de classe C^1 em U . Nesse caso, vamos proceder como no exemplo 4 e "isolar" a origem. Para isso, consideremos $a > 0$ tal que a circunferência γ , dada por $x^2 + y^2 = a^2$, esteja totalmente no interior da região delimitada por C .

A fim de aplicarmos o Teorema de Green sobre a região fechada D , delimitada por $C \cup \gamma$, vamos orientar positivamente sua fronteira, ou seja, vamos considerar C percorrida no sentido anti-horário e γ , no sentido horário.

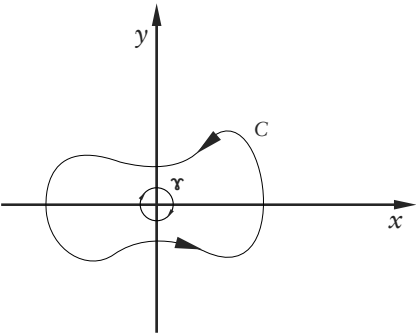


Figura 10.14

Agora, sendo F de classe C^1 em D , segue do Teorema de Green que

$$\oint_{C \cup \gamma} F \cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

e, portanto,

$$\int_C F \cdot dr = - \int_{\gamma} F \cdot dr = \int_{\gamma^-} F \cdot dr,$$

onde γ^- é a circunferência γ , orientada no sentido anti-horário. Para calcularmos a integral de linha sobre γ^- , vamos utilizar a parametrização

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= (a \cos t, a \sin t), \quad 0 \leq t < 2\pi. \\ \sigma'(t) &= (-a \sin t, a \cos t),\end{aligned}$$

obtendo

$$\begin{aligned}\int_{\gamma^-} F \cdot dr &= \\ \int_0^{2\pi} \left(\frac{a \cos t + a \sin t}{a^2}, \frac{a \sin t - a \cos t}{a^2} \right) \cdot (-a \sin t, a \cos t) dt &= \\ \int_0^{2\pi} \left(\frac{a \cos t + a \sin t}{a^2}, \frac{a \sin t - a \cos t}{a^2} \right) \cdot (-a \sin t, a \cos t) dt &= \\ \int_0^{2\pi} (-\cos^2 t - \sin^2 t) dt = \int_0^{2\pi} -1 dt = -2\pi.\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_C F \cdot dr = \int_{\gamma^-} F \cdot dr = -2\pi.$$

O valor obtido corresponde ao caso em que C está orientada no sentido anti-horário. No caso em que invertemos a orientação, a integral de linha muda de sinal e, portanto, para C orientada percorrida no sentido horário, temos

$$\int_C F \cdot dr = 2\pi.$$

Conclusão: Os valores possíveis para a integral de linha são 0, 2π e -2π .

- b. Calcule $\int_C 2xy^3 dx + (1 + 3x^2y^2) dy$, onde C é a parte da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ situada no primeiro quadrante, percorrida no sentido anti-horário.

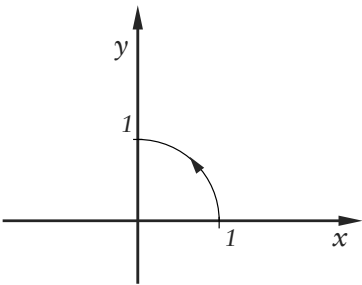


Figura 10.15

Solução:

É possível resolver a integral de linha utilizando diretamente a definição. Para tal, seria necessário resolver integrais envolvendo potências das funções seno e cosseno, o que acarretaria um certo trabalho (**TENTE CALCULAR COMO EXERCÍCIO!**). No entanto, como o campo vetorial é de classe C^1 em \mathbb{R}^2 e

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} = 6xy^2,$$

segue do Teorema das Quatro Equivalências que F é conservativo e a integral independe do caminho que liga o ponto $(1, 0)$ ao ponto $(0, 1)$. Podemos resolver a integral de duas formas: utilizando uma função potencial f do campo F ou calculando a integral de linha ao longo de um caminho "mais simples" do que o arco de circunferência. Vamos utilizar as duas formas.

i. **Solução 1:** utilizando uma função potencial f

Vamos obter f pelo método visto na Aula 8, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2xy^3 \implies f(x, y) = \int 2xy^3 dx = x^2y^3 + A(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= (1 + 3x^2y^2) \implies f(x, y) = \int (1 + 3x^2y^2) dy \\ &= y + x^2y^3 + B(z). \end{aligned}$$

Comparando as identidades acima, concluímos que $A(y) = y$ e $B(x) = 0$ e, portanto,

$$f(x, y) = y + x^2y^3.$$

Dessa forma, segue do Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linhas que

$$\int_C F \cdot dr = f(0,1) - f(1,0) = (1 + 0^2 1^3) - (1^2 0^3) = 1.$$

ii. **Solução 1:** utilizando um caminho mais simples

Vamos utilizar o caminho poligonal $C_1 \cup C_2$, ligando o ponto $(1,0)$ ao ponto $(0,1)$, ao longo dos eixos coordenados, conforme ilustração abaixo.

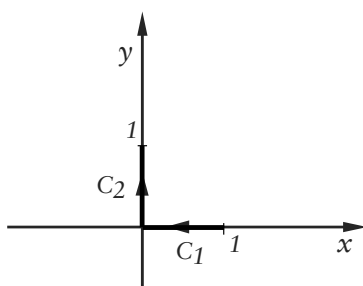


Figura 10.16

Os segmentos de reta C_1 e C_2 podem ser parametrizados, respectivamente, por

$$\begin{aligned}\sigma_1(t) &= (1-t, 0), 0 \leq t \leq 1 \\ \sigma_1'(t) &= (-1, 0)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\sigma_2(t) &= (0, t), 0 \leq t \leq 1 \\ \sigma_2'(t) &= (0, 1).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_C F \cdot dr &= \int_{C_1} F \cdot dr + \int_{C_2} F \cdot dr = \\ &= \int_0^1 (2(1-t)0^3, 1+3(1-t)^2 0^2) \cdot (-1, 0) dt + \\ &+ \int_0^1 (2 \cdot 0 \cdot t^3, 1+3 \cdot 0^2 t^2) \cdot (0, 1) dt = \int_0^1 0 dt + \int_0^1 1 dt = 1.\end{aligned}$$

Aula 11

SUPERFÍCIES PARAMETRIZADAS E ÁREA DE SUPERFÍCIES

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 parametrizar algumas superfícies e calcular suas áreas utilizando, convenientemente, tais parametrizações.

Meta da aula:

Apresentar a representação paramétrica de superfícies e utilizá-la para o cálculo de suas áreas.

SUPERFÍCIES PARAMETRIZADAS E ÁREA DE SUPERFÍCIES

Pré-requisitos

Você vai precisar dos conhecimentos sobre Funções Vetoriais e Superfícies, vistos no Curso de Cálculo III, bem como dos conhecimentos sobre integrais duplas, apresentados nas Aulas 1, 2 e 3 desse curso.

No curso de Cálculo III, vimos que as superfícies podem ser representadas implicitamente, como superfícies de nível do tipo $F(x,y,z) = c$ e, em alguns casos, explicitamente, como gráficos de função $z = f(x,y)$.

Daqui para frente, no curso, estudaremos a integral ao longo de superfícies. Assim como no caso das curvas, para definirmos a integral de superfícies, é necessário trabalharmos com uma terceira forma de expressão para superfícies, dita representação paramétrica. Na primeira seção, apresentaremos a parametrização de algumas superfícies conhecidas (ou parte delas) e, na segunda seção, utilizaremos essas representações para calcularmos suas áreas.

SUPERFÍCIES PARAMETRIZADAS

Definição 11.1.

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície. Uma parametrização de S é uma função $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

tal que, ao tomarmos os valores de $(u,v) \in D$, o ponto final $P = (x,y,z)$ do vetor $\varphi(u,v)$ percorre toda a superfície S .

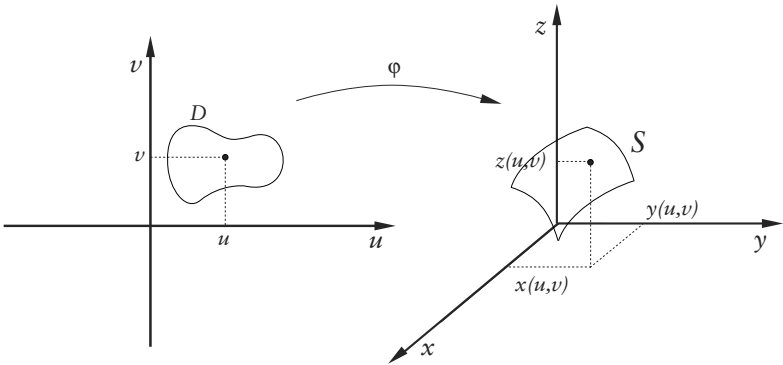


Figura 11.1

- ✎ Assim como as curvas, uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ pode ter diversas parametrizações. O processo de se obter uma parametrização para S consiste em, a partir de um par de parâmetros (u, v) escolhido, encontrar uma forma de representar as coordenadas x , y e z , de um ponto qualquer de S , em função de (u, v) . Aqui é fundamental determinar o conjunto D , ao longo do qual o parâmetro deve variar, para que sejam representados todos os pontos de S .
- ✎ A função φ é dita de classe C^k se as funções $x(u, v)$, $y(u, v)$ e $z(u, v)$ o forem.

No curso de Cálculo I, definimos a reta tangente a uma curva plana por intermédio da derivada. No caso de uma superfície, podemos pensar, de forma análoga, em plano tangente, conforme ilustração abaixo.

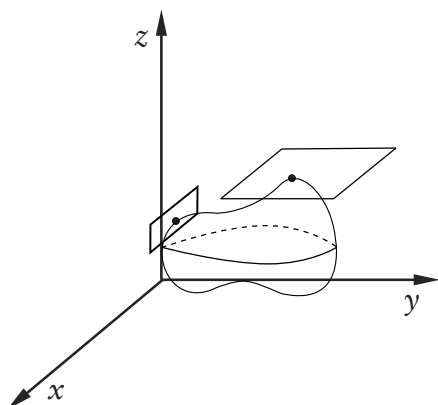


Figura 11.2

Para tanto, consideremos uma superfície S com representação paramétrica

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D,$$

diferenciável em $(u_0, v_0) \in D$. Fixando $u = u_0$, teremos uma função vetorial de uma variável

$$\varphi(u_0, v) = (x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v)), \quad v \in I,$$

que define uma curva diferenciável C_1 sobre a superfície S . Dessa forma, conforme visto no curso de Cálculo III, se o vetor

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$$

é não nulo, então é um vetor tangente a esta curva no ponto $\varphi(u_0, v_0)$.

De maneira análoga, fixando $v = v_0$, consideramos a curva diferenciável C_2 sobre a superfície S , dada por

$$\varphi(u, v_0) = (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)), \quad u \in J.$$

Novamente, se o vetor

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right)$$

é não nulo, então é um vetor tangente a esta curva no ponto $\varphi(u_0, v_0)$.

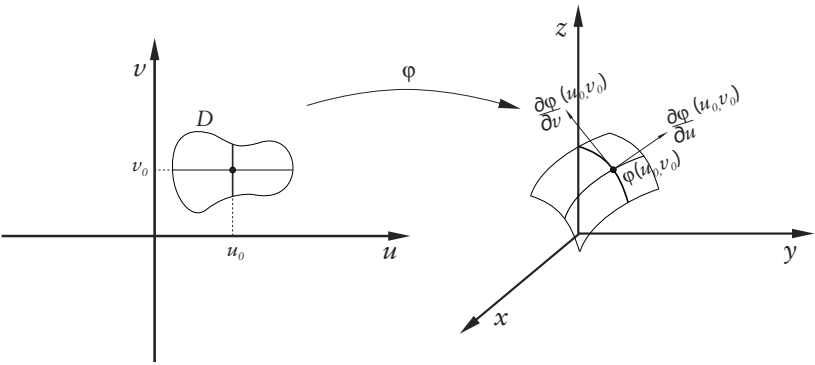


Figura 11.3

Por fim, se o produto vetorial

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$$

é não nulo, então os vetores $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$ são não paralelos e, portanto, geram um plano.


Definição 11.2.

Seja S uma superfície parametrizada por $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ são contínuas em algum $(u_0, v_0) \in D$. Se

$$N(u_0, v_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$$

é não nulo, dizemos que S é regular em $\varphi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$ e, nesse caso, definimos o plano tangente a S em $\varphi(u_0, v_0)$ como sendo o plano gerado pelos vetores $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$.

 Intuitivamente, uma superfície é regular em um ponto quando, ali, não possui "bicos".

 Note que, quando o vetor

$$N(u_0, v_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$$

é não nulo, é normal ao plano gerado por $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$. Dessa forma, dado um ponto qualquer $P = (x, y, z)$ pertencente a esse plano, o vetor

$$P - \varphi(u_0, v_0) = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

é perpendicular a $N(u_0, v_0)$.

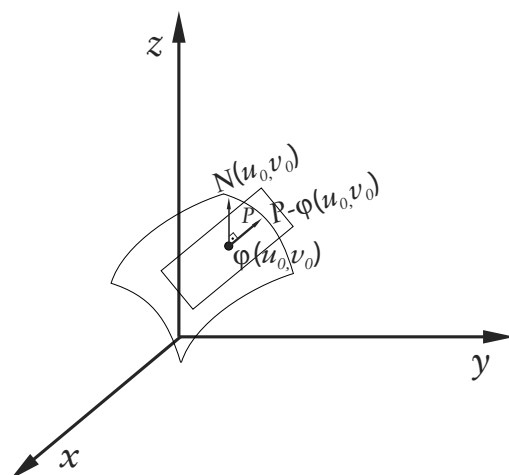


Figura 11.4

Logo, a equação do plano tangente à superfície S , no ponto $\varphi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$, é dada por

$$N(u_0, v_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

São apresentadas, a seguir, algumas parametrizações para as principais superfícies.

PLANOS

Sejam P_0 um ponto do plano S e \vec{a} e \vec{b} dois vetores não paralelos contidos em S . Se P é um ponto qualquer de S , então o vetor $\overrightarrow{P - P_0}$ pertence ao plano e, portanto é, uma combinação linear dos vetores \vec{a} e \vec{b} . Logo, existem escalares u e v tais que

$$\overrightarrow{P - P_0} = u\vec{a} + v\vec{b} \implies P = P_0 + u\vec{a} + v\vec{b}.$$

Note que u e v determinam o ponto P de maneira única e, portanto, uma parametrização para S é dada por

$$\varphi(u, v) = P_0 + u\vec{a} + v\vec{b}, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Exemplo 11.1.

Definimos, anteriormente, o plano tangente a uma superfície regular S com parametrização de classe C^1 , $\varphi(u, v)$, no ponto $\varphi(u_0, v_0)$, como sendo o plano gerado pelos vetores $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$. Dessa forma, uma representação paramétrica para esse plano é dada por

$$\psi(t, s) = \varphi(u_0, v_0) + t\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) + s\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0), \quad (t, s) \in \mathbb{R}^2.$$

SUPERFÍCIES COM REPRESENTAÇÃO EXPLÍCITA

Se uma superfície S possui representação explícita

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

uma parametrização natural para S pode ser dada utilizando-se x e y como parâmetros:

$$\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y)), (x, y) \in D.$$

Se $f(x, y)$ é de classe C^1 , então S é regular, pois

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{vmatrix} =$$

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), 1 \right)$$

é não nulo para todo $(x, y) \in D$.

Exemplo 11.2.

- a. O plano de equação $x + y + z = 1$ pode ser visto como o gráfico da função

$$z = f(x, y) = 1 - x - y$$

e, portanto, pode ser parametrizado por:

$$\varphi(x, y) = (x, y, 1 - x - y), (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

- b. O cilindro $y = x^2$ pode ser visto como o gráfico da função

$$y = f(x, z) = x^2$$

e, portanto, pode ser parametrizado por:

$$\varphi(x, z) = (x, x^2, z), (x, z) \in \mathbb{R}^2$$

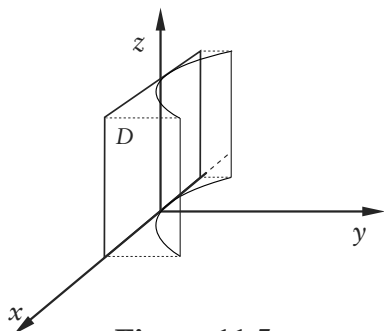


Figura 11.5

- c. Uma parametrização para o parabolóide $z = x^2 + y^2$ é

$$\varphi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2), (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

- d. O cone de equação $z^2 = x^2 + y^2$, não pode ser representado de forma explícita.

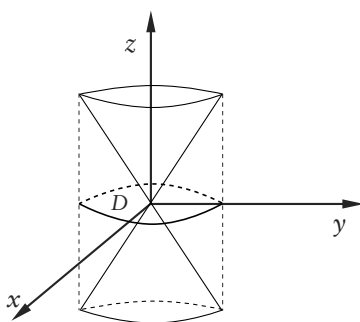


Figura 11.6

No entanto, podemos "separá-lo" em duas partes:

$$\begin{aligned} z \geq 0 &\implies z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z \leq 0 &\implies z = -\sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Dessa forma, podemos parametrizar cada parte, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}), (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ \varphi_2(x, y) &= (x, y, -\sqrt{x^2 + y^2}), (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

- e. Assim como no caso do cone, para obtermos uma representação explícita para a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, precisamos considerar, separadamente, os dois hemisférios

$$\begin{aligned} z \geq 0 &\implies z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \\ z \leq 0 &\implies z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}. \end{aligned}$$

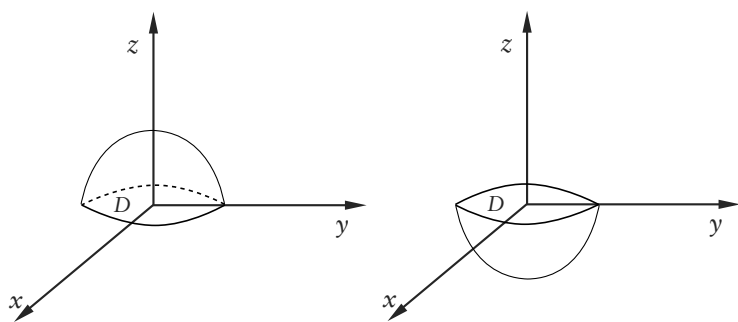


Figura 11.7

e assim, parametrizar cada parte, respectivamente, por

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, y) &= \left(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2} \right), \text{ onde } x^2 + y^2 \leq 1 \\ \varphi_2(x, y) &= \left(x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \right), \text{ onde } x^2 + y^2 \leq 1.\end{aligned}$$

SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO

Seja C uma curva no plano xz com equações paramétricas

$$x = x(t), z = z(t), t \in I,$$

tais que $x(t) \geq 0$, para todo $t \in I$.

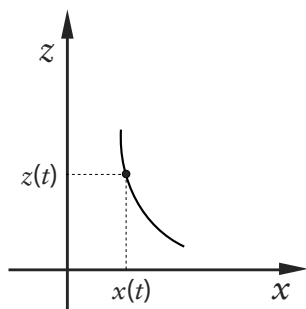


Figura 11.8

Considere a superfície de revolução S obtida pela rotação da curva C em torno do eixo z . Observe que um ponto $P \in S$ é gerado pela rotação, em torno do eixo z , de um ponto $(x(t), 0, z(t))$ e, portanto, pertence à circunferência de raio $x(t)$, com "altura" $z(t)$.

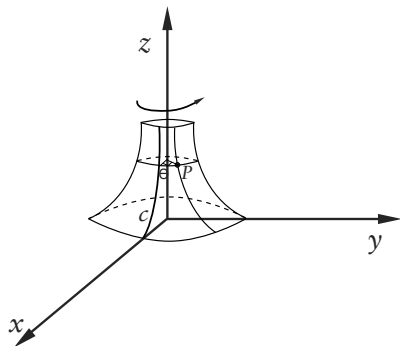


Figura 11.9

Dessa forma, considerando como parâmetro, além de t , o ângulo de rotação θ , obtemos uma representação paramétrica para S dada por

$$\varphi(t, \theta) = (x(t) \cos \theta, x(t) \sin \theta, z(t)), t \in I \text{ e } 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Exemplo 11.3.

- a. O cilindro $x^2 + y^2 = 1$ é uma superfície de revolução, obtida pela rotação da reta $x = 1$ em torno do eixo z

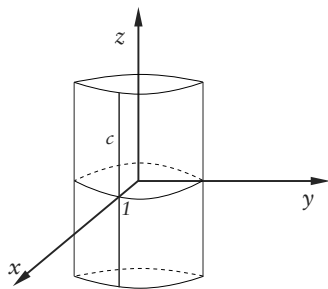


Figura 11.10

cuja parametrização é dada por

$$\sigma(t) = (1, t), t \in \mathbb{R}.$$

Dessa forma, o cilindro pode ser parametrizado por

$$\varphi(t, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, t), t \in \mathbb{R} \text{ e } 0 \leq \theta < 2\pi,$$

que corresponde à representação em coordenadas cilíndricas, com $(r, \theta, z) = (1, \theta, t)$.

- b. O parabolóide $z = x^2 + y^2$ é uma superfície de revolução, obtida pela rotação da meia parábola $z = x^2$, $x \geq 0$, em torno do eixo z .

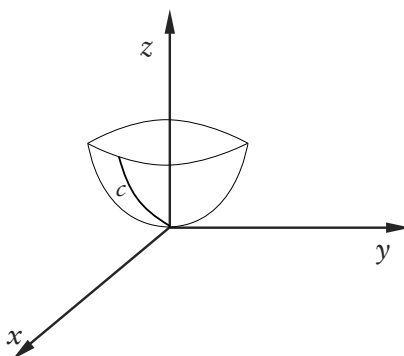


Figura 11.11

Visto que a parábola pode ser parametrizada por

$$\sigma(t) = (t, t^2), t \geq 0,$$

uma representação paramétrica para o parabolóide pode ser dada por

$$\varphi(t, \theta) = (t \cos \theta, t \sin \theta, t^2), t \geq 0 \text{ e } 0 \leq \theta < 2\pi.$$

- c. O cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ é uma superfície de revolução, obtida pela rotação da semirreta $z = x$, $x \geq 0$, em torno do eixo z .

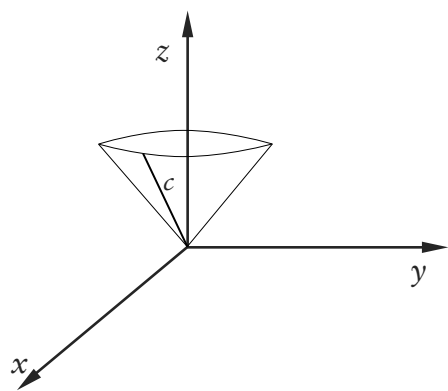


Figura 11.12

que possui parametrização

$$\sigma(t) = (t, t), t \geq 0.$$

Logo, uma representação paramétrica para o cone pode ser dada por

$$\varphi(t, \theta) = (t \cos \theta, t \sin \theta, t), t \geq 0 \text{ e } 0 \leq \theta < 2\pi.$$

- d. A esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ é uma superfície de revolução, obtida pela rotação da semicircunferência $x^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, em torno do eixo z .

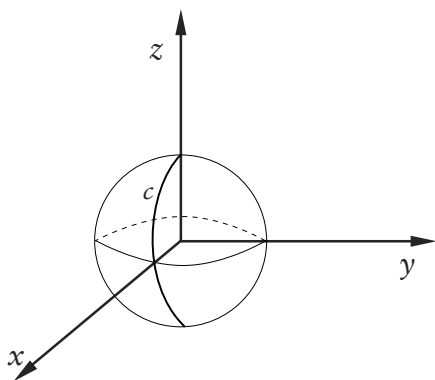


Figura 11.13


Parametrizando a semicircunferência por

$$\sigma(t) = (\sin t, \cos t), 0 \leq t \leq \pi,$$

obtemos uma parametrização para a esfera, dada por

$$\varphi(t, \theta) = (\sin t \cos \theta, \sin t \sin \theta, \cos t), 0 \leq t \leq \pi \text{ e } 0 \leq \theta < 2\pi,$$

que corresponde à representação em coordenadas esféricas, com $(\rho, \theta, \varphi) = (1, \theta, t)$.

 Os exemplos anteriores ilustram bem a principal característica das superfícies de revolução: qualquer corte horizontal de altura z fornece uma circunferência nas coordenadas x e y .

- i. cilindro $x^2 + y^2 = 1$: circunferência de raio sempre igual a 1
- ii. paraboloide $z = x^2 + y^2$: circunferência de raio \sqrt{z}
- iii. cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$: circunferência de raio z
- iv. esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$: circunferência de raio $\sqrt{1 - z^2}$, com $-1 \leq z \leq 1$

ÁREA DE SUPERFÍCIES

Agora que sabemos parametrizar algumas superfícies, podemos ver como calcular suas áreas. Para tanto, consideraremos superfícies S com parametrizações $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tais que:

- i. D é um subconjunto limitado e fechado do plano;
- ii. φ é injetora exceto, possivelmente, na fronteira de D ;
- iii. a superfície é regular exceto, possivelmente, num número finito de pontos.

A fim de motivarmos a definição de área, vamos supor que o conjunto D seja dado por um retângulo e consideremos uma partição P de D :

$$P = \{(u_i, v_j) / i = 0, 1, 2, \dots, n \text{ e } j = 0, 1, 2, \dots, m\}.$$

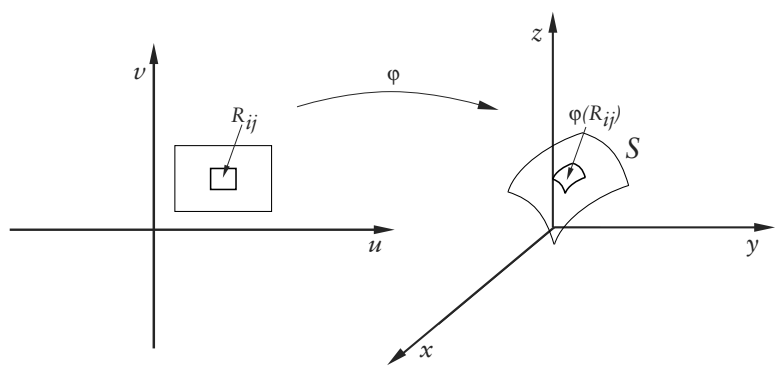


Figura 11.14

Observe que cada retângulo $R_{ij} \subset D$ possui imagem $\varphi(R_{ij})$ dada por "paralelogramo curvilíneo" contido em S .

A área de S será dada pela soma das áreas desses "paralelogramos curvilíneos" $\varphi(R_{ij})$. Pela definição de comprimento de arco, tem-se que

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_{i-1}, v_{j-1}) \Delta u_i \right\| = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_{i-1}, v_{j-1}) \right\| \Delta u_i \approx \text{comprimento do arco } AB$$

e

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_{i-1}, v_{j-1}) \Delta v_j \right\| = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_{i-1}, v_{j-1}) \right\| \Delta v_j \approx \text{comprimento do arco } AD.$$

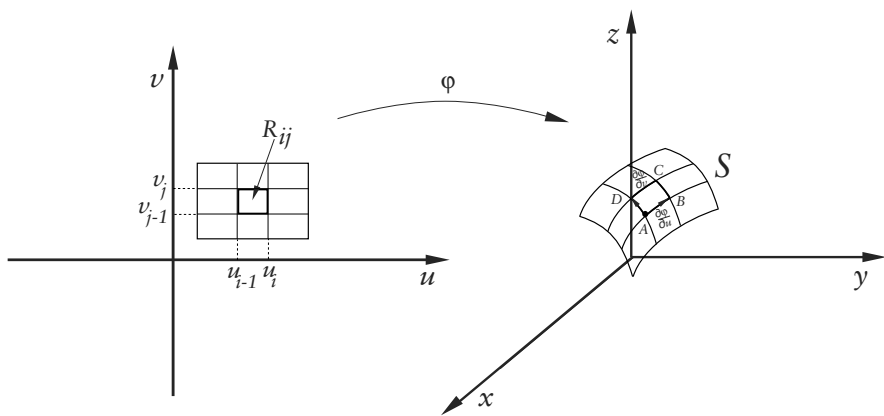


Figura 11.15

Logo, a área de cada $\varphi(R_{ij})$ é aproximada pela área do paralelogramo determinado pelos vetores $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_{i-1}, v_{j-1}) \Delta u_i$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_{i-1}, v_{j-1}) \Delta v_j$ (note que tal paralelogramo se encontra no plano tangente a S em $\varphi(u_{i-1}, v_{j-1})$), isto é,

$$A(\varphi(R_{ij})) \approx \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_{i-1}, v_{j-1}) \Delta u_i \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_{i-1}, v_{j-1}) \Delta v_j \right\| = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_{i-1}, v_{j-1}) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_{i-1}, v_{j-1}) \right\| \Delta u_i \Delta v_j.$$

Dessa forma, a soma

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_{i-1}, v_{j-1}) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_{i-1}, v_{j-1}) \right\| \Delta u_i \Delta v_j$$

fornece uma aproximação para a área de S , que se torna "melhor" à medida que consideramos partições mais finas de D e, portanto, é natural definirmos a área de S por:




Definição 11.3.

Seja S uma superfície parametrizada por $\varphi(u, v)$, $(u, v) \in D$, como descrita acima. Definimos a área de S por

$$A(S) = \iint_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| du dv,$$

onde $\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\|$ é a norma do vetor

$$N(u, v) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v).$$

-  Embora a parametrização da superfície S seja utilizada na definição acima, a área independe da representação paramétrica de S .
-  Se a superfície S é decomposta em uma união finita de superfícies S_i , então sua área é a soma das áreas de S_i .
-  Vimos, na seção anterior, que no caso em que S possui representação explícita $z = f(x, y)$, uma parametrização

natural é da forma

$$\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y)), (x, y) \in D$$

e, portanto,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), 1 \right).$$

Dessa forma, a área de S é dada por

$$A(S) = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)^2 + 1} dx dy.$$

Exemplo 11.4.

- a. Mostre que a área da esfera de raio R é igual a $4\pi R^2$.

Solução: Vamos considerar a esfera de raio R centrada na origem, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, parametrizada por

$$\begin{aligned} \varphi(t, \theta) &= (R \sin t \cos \theta, R \sin t \sin \theta, R \cos t), \\ 0 &\leq t \leq \pi \text{ e } 0 \leq \theta < 2\pi. \end{aligned}$$

Note que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ R \cos t \cos \theta & R \cos t \sin \theta & -R \sin t \\ -R \sin t \sin \theta & R \sin t \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 \sin^2 t \cos \theta, R^2 \sin^2 t \sin \theta, R^2 \sin t \cos t \end{pmatrix}$$

só se anula em $t = 0$ e, portanto, com esta parametrização, a esfera é regular exceto no ponto $(0, 0, R)$. Visto que

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right\| = R^2 \sin t,$$

segue que a área da esfera é dada por

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin t dt d\theta = R^2 \int_0^{2\pi} [-\cos t]_{t=0}^{t=\pi} d\theta = \\ &= 2R^2 \int_0^{2\pi} d\theta = 4\pi R^2 \end{aligned}$$

b. Calcule a área do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, com $z \leq 2$.

Solução: O cone possui representação explícita, com $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, e portanto,

$$A(S) = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy.$$

Como $z \leq 2$, então

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq 2 \implies x^2 + y^2 \leq 4,$$

ou seja, o domínio D é dado pelo círculo de raio 2 com centro na origem.

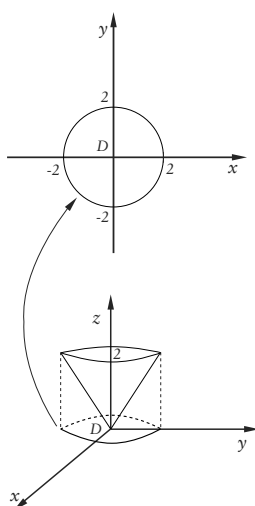


Figura 11.16

Além disso,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Logo

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_D \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + 1} dx dy = \\ &= \iint_D \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} + 1} dx dy = \iint_D \sqrt{2} dx dy = \\ &= \sqrt{2} A(D) = \sqrt{2} \pi 2^2 = 4\sqrt{2} \pi. \end{aligned}$$

- c. Calcule a área da superfície da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ que não se encontra no interior do parabolóide $z = x^2 + y^2$.

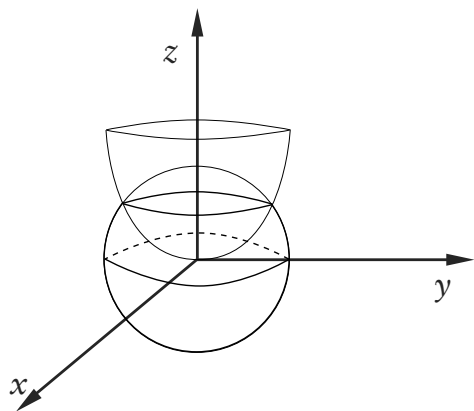


Figura 11.17

Solução: Observe, que a superfície é obtida pela rotação, em torno do eixo z , da parte da semicircunferência $x = \sqrt{12 - z^2}$ situada abaixo da parábola $z = x^2$.

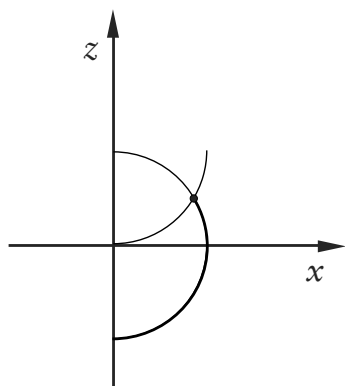


Figura 11.18

Na Aula 5, observamos que para calcular a integral tripla sobre um sólido delimitado por uma esfera e um parabolóide, não é indicada a mudança para coordenadas esféricas, uma vez que

o sólido é gerado pela rotação de uma região que não define um triângulo retângulo. No entanto, aqui buscamos a integral sobre a superfície da esfera (e não no seu interior) e, portanto, vamos utilizar a parametrização correspondente às coordenadas esféricas:

$$\varphi(t, \theta) = (\sqrt{12} \sin t \cos \theta, \sqrt{12} \sin t \sin \theta, \sqrt{12} \cos t)$$

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right\| = 12 \sin t$$

Note que a semicircunferência faz uma volta completa em torno do eixo z e, portanto, $0 \leq \theta < 2\pi$. Para determinar o intervalo de variação de t , observe que a curva termina no ponto correspondente a $t = \pi$ e começa no ponto de interseção entre a semicircunferência e a parábola, ou seja,

$$\begin{aligned} x^2 + z^2 &= 12 \\ z &= x^2 \end{aligned} \implies z^2 + z - 12 = 0 \implies z = -4 \text{ ou } z = 3.$$

Logo,

$$z = 3 \implies \sqrt{12} \cos t = 3 \implies \cos t = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies t = \frac{\pi}{6}.$$

Assim

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} 12 \sin t \, dt \, d\theta = 12 \int_0^{2\pi} [-\cos t]_{t=\frac{\pi}{6}}^{t=\pi} d\theta = \\ &= 12 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \int_0^{2\pi} d\theta = 24\pi \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right). \end{aligned}$$

- d. Calcule a área da superfície do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ situada entre os planos $z = 0$ e $y + z = 2$.

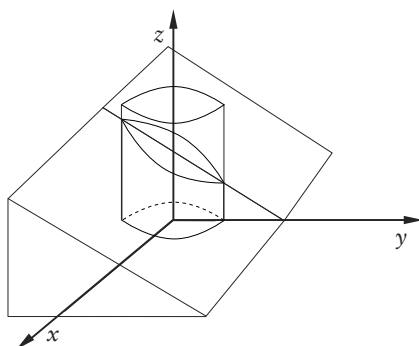


Figura 11.19

Solução: Conforme visto na seção anterior, uma parametrização para a superfície é dada por

$$\varphi(t, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, t)$$

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right\| = 1.$$

Inicialmente, note que $0 \leq \theta < 2\pi$, visto que a projeção da superfície sobre o plano xy dá a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ inteira. Além disso, como $0 \leq z \leq 2 - y$, segue que $0 \leq t \leq 2 - \sin \theta$. Logo

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2-\sin \theta} 1 dt d\theta = \int_0^{2\pi} (2 - \sin t) d\theta = \\ &= [2\theta + \cos \theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 4\pi. \end{aligned}$$

Aula 12

INTEGRAL DE SUPERFÍCIE DE FUNÇÃO ESCALAR



Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 calcular a integral de superfície de funções escalares utilizando, convenientemente, as parametrizações das superfícies envolvidas;
- 2 calcular a massa, o centro de massa e o momento de inércia de uma superfície, conhecida a sua densidade em cada ponto.

Meta da aula:

Apresentar a definição da integral de funções reais de três variáveis sobre uma superfície, a chamada Integral de Superfície, bem como algumas aplicações à Física.

INTEGRAL DE SUPERFÍCIE DE FUNÇÃO ESCALAR

Pré-requisitos

Você vai precisar dos conhecimentos sobre representação paramétrica de superfícies, vistos na Aula 11 desse curso, bem como dos conhecimentos sobre integração dupla, apresentados nas Aulas 1, 2 e 3, também desse curso.


Assim como no estudo sobre área de superfícies, trataremos, aqui, de superfícies S com parametrizações $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tais que:


- i. D é um subconjunto limitado e fechado do plano;
- ii. φ é injetora exceto, possivelmente, na fronteira de D ;
- iii. a superfície é regular exceto, possivelmente, num número finito de pontos.


Definição 12.1.

Seja S uma superfície parametrizada por $\varphi(u, v)$, $(u, v) \in D$, como descrita acima. Considere uma função $f(x, y, z)$ uma função real definida em S . Definimos a integral de superfície de f sobre S por

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(\varphi(u, v)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| du dv.$$

 Assim como no caso de curvas, a integral de superfície independe da representação paramétrica de S .

 O elemento de área dS é associado a $\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| du dv$, onde $\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\|$ foi definido na Aula 11.

 Se a superfície S é decomposta em uma união finita de superfícies, isto é $S = S_1 \cup \dots \cup S_n$, então

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{S_1} f(x, y, z) dS + \dots + \iint_{S_n} f(x, y, z) dS.$$

 No caso particular em que $f(x, y, z) = 1$

$$\iint_S 1 dS = \iint_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| du dv = A(S).$$

✎ Se S possui representação explícita $z = g(x, y)$, a integral de superfície pode ser escrita como

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy.$$

Exemplo 12.1.

a. Calcule $\iint_S xy dS$, onde S possui representação paramétrica

$$\varphi(u, v) = (u - v, u + v, 2u + v + 1), 0 \leq u \leq 1 \text{ e } 0 \leq v \leq u.$$

Solução: Para utilizarmos a definição de integral de superfície, precisamos inicialmente calcular

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -3, 2)$$

para obtermos

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{14}.$$

Dessa forma, a integral procurada é dada por

$$\begin{aligned} \iint_S xy dS &= \int_0^1 \int_0^u (u - v)(u + v) \sqrt{14} dv du = \\ &= \int_0^1 \int_0^u (u^2 - v^2) \sqrt{14} dv du = \\ &= \sqrt{14} \int_0^1 \left[u^2 v - \frac{v^3}{3} \right]_{v=0}^{v=u} du = \sqrt{14} \int_0^1 \left(u^3 - \frac{u^3}{3} \right) du = \\ &= \sqrt{14} \int_0^1 \frac{2u^3}{3} du = \sqrt{14} \left[\frac{u^4}{6} \right]_{u=0}^{u=1} = \frac{\sqrt{14}}{6}. \end{aligned}$$

b. Calcule $\iint_S z dS$, onde S é a porção do plano $x + y + z = 1$ situada no primeiro octante.

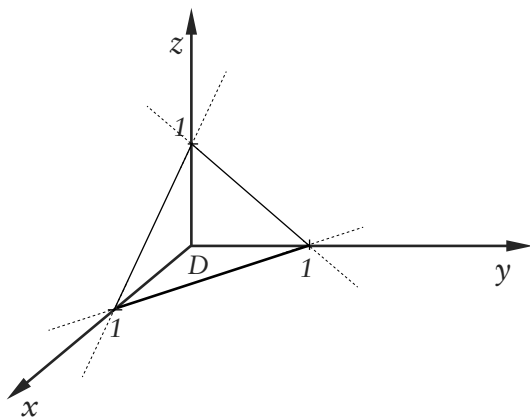


Figura 12.1

Solução: Note que o plano possui representação explícita $z = g(x, y) = 1 - x - y$ e, portanto,

$$\iint_S z dS = \iint_D (1 - x - y) \sqrt{3} dx dy.$$

Para determinarmos o domínio D no plano xy , observamos que, estando a superfície no primeiro octante, temos

$$\begin{aligned} x &\geq 0, y \geq 0 \\ z &\geq 0 \implies x + y \leq 1, \end{aligned}$$

ou seja, a região de integração é dada pela figura abaixo.

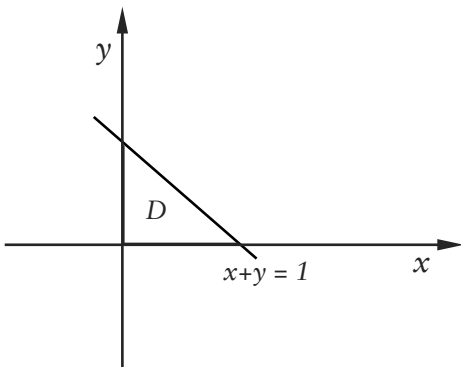


Figura 12.2

Dessa forma, tem-se que

$$\begin{aligned}
 \iint_S z dS &= \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y) dy dx = \\
 &= \sqrt{3} \int_0^1 \left[y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \\
 &= \sqrt{3} \int_0^1 \left(1-x - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx = \\
 &= \sqrt{3} \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2} \right) dx = \\
 &= \sqrt{3} \left[\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right]_{x=0}^{x=1} = \\
 &= \sqrt{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{6}.
 \end{aligned}$$

- c. Calcule $\iint_S \frac{z}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} dS$, onde S é a porção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ situada no interior do cilindro $x^2 + y^2 = 2y$

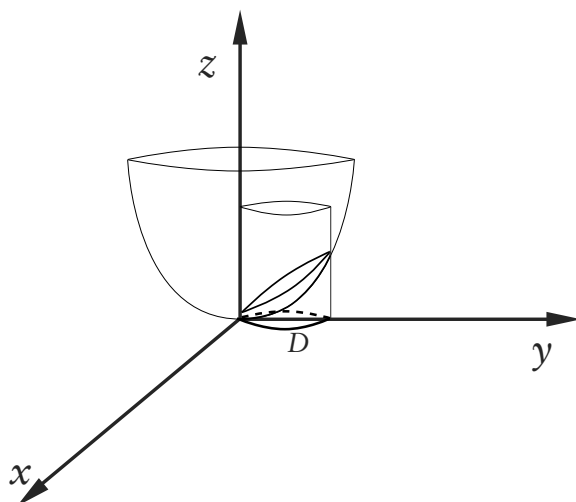


Figura 12.3

Solução: Como o parabolóide possui uma representação explícita, então

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{z}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} dS &= \\ \iint_D \frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \sqrt{(2x)^2+(2y)^2+1} dx dy &= \\ \iint_D (x^2+y^2) dx dy, \end{aligned}$$

onde D é dado pela circunferência que define o cilindro, isto é,

$$x^2 + y^2 = 2y \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1.$$

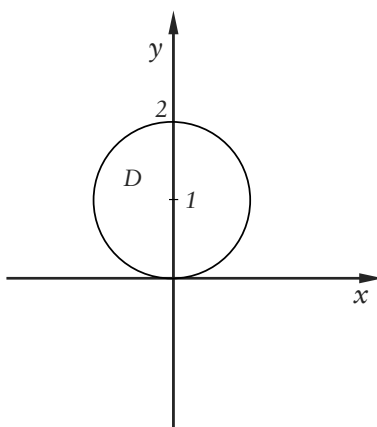


Figura 12.4

A fim de resolver a última integral dupla, vamos utilizar a seguinte mudança de coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = 1 + r \sin \theta. \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{matrix} \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{z}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} dS &= \iint_D (x^2+y^2) dx dy = \\ \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1+2r \sin \theta + r^2) r dr d\theta &= \\ \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r+2r^2 \sin \theta + r^3) dr d\theta &= \\ \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} + \frac{2r^3}{3} \sin \theta + \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=1} d\theta &= \\ \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin \theta + \frac{1}{4} \right) d\theta &= \left[\frac{3}{4} \theta - \frac{2}{3} \cos \theta \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

ALGUMAS APLICAÇÕES À FÍSICA

Assim como as integrais duplas e de linha, as integrais de superfície de função escalar são utilizadas para o cálculo de **massa**, **centro de massa** e **momento de inércia** de superfícies. Os detalhes de como obter tais expressões serão omitidos, pois são inteiramente análogos aos realizados para os casos citados acima, respectivamente, nas Aulas 3 e 7.

Para as três aplicações da integral de superfícies que serão exibidas, consideraremos uma chapa fina, representada por uma superfície S com as propriedades descritas no início da aula, com densidade em cada ponto dada por uma função real contínua $f(x, y, z)$, definida em S .

i. Massa

A massa M da chapa é dada por

$$M = \iint_S f(x, y, z) dS.$$

ii. Centro de Massa

O centro de massa da chapa é dado por (x_c, y_c, z_c) , onde

$$x_c = \frac{\iint_S x f(x, y, z) dS}{M}$$

$$y_c = \frac{\iint_S y f(x, y, z) dS}{M}$$

$$z_c = \frac{\iint_S z f(x, y, z) dS}{M}.$$

iii. Momento de Inércia

O momento de inércia I_E da chapa, em relação a um eixo E , é dado por

$$I_E = \iint_S r^2(x, y, z) f(x, y, z) dS,$$

onde $r(x, y, z)$ é a distância de cada ponto $(x, y, z) \in S$ ao eixo E .

✍ Visto que a distância de um ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ao eixo z é dada, por $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

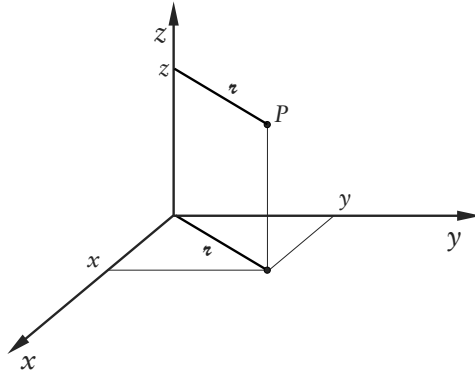


Figura 12.5

segue da expressão anterior, que o momento de inércia de S em relação ao eixo z é dado por

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2) f(x, y, z) dS.$$

Analogamente, os momentos de inércia de S em relação aos eixos x e y , são dados, respectivamente, por

$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2) f(x, y, z) dS,$$

e

$$I_y = \iint_S (x^2 + z^2) f(x, y, z) dS.$$

Exemplo 12.2.

- a. Seja S a superfície do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, fechada inferiormente pelo plano $z = 1$ e, superiormente, pelo plano $x + z = 2$. Calcule a massa M de S , se a densidade em cada ponto é dada por $f(x, y, z) = z$.

Solução: Note que S é a união de três superfícies:

S_1 : cilindro $x^2 + y^2 = 1$, com $1 \leq z \leq 2 - x$

S_2 : plano $z = 1$, com $x^2 + y^2 \leq 1$

S_3 : plano $z = 2 - x$, com $x^2 + y^2 \leq 1$,

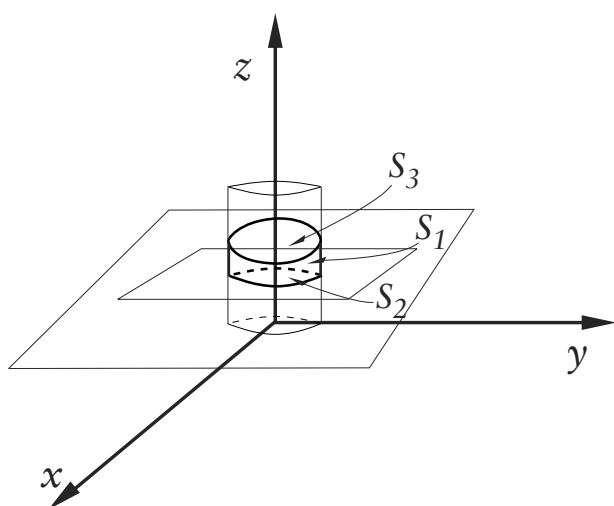


Figura 12.6

e, portanto, precisamos calcular, separadamente, a massa em cada uma dessas superfícies.

S_1 : uma parametrização para o cilindro é da forma

$$\varphi(t, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, t), 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ e } 1 \leq t \leq 2 - \cos \theta$$

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right\| = 1.$$

Dessa forma, segue que

$$\begin{aligned} M_1 &= \iint_{S_1} z dS = \int_0^{2\pi} \int_1^{2-\cos \theta} t dt d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{t=1}^{t=2-\cos \theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos \theta + \frac{\cos^2 \theta}{2} \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos \theta + \frac{1 + \cos(2\theta)}{4} \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{7}{4} - 2\cos \theta + \frac{\cos(2\theta)}{4} \right) d\theta \\ &= \left[\frac{7}{4}\theta - 2\sin \theta + \frac{\sin(2\theta)}{8} \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{7\pi}{2}. \end{aligned}$$

S_2 : como o plano possui representação explícita $z = 1$, com domínio $D: x^2 + y^2 \leq 1$, então

$$M_2 = \iint_{S_2} z dS = \iint_D 1 \sqrt{0^2 + 0^2 + 1} dx dy = \iint_D 1 dx dy = A(D) = \pi,$$

$\underline{S_3}$: como o plano possui representação explícita $z = 2 - x$, com domínio $D: x^2 + y^2 \leq 1$, então

$$M_3 = \iint_{S_3} z dS = \iint_D (2-x) \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1} dx dy = \sqrt{2} \iint_D (2-x) dx dy.$$

Utilizando coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta. \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{matrix} \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r,$$

segue que

$$\begin{aligned} M_3 &= \sqrt{2} \iint_D (2-x) dx dy \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2-r \cos \theta) r dr d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2r - r^2 \cos \theta) dr d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left[r^2 - \frac{r^3}{3} \cos \theta \right]_{r=0}^{r=1} d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\cos \theta}{3} \right) d\theta = \sqrt{2} \left[\theta - \frac{\sin \theta}{3} \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \\ &= 2\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

Dessa forma, somando a massa das três superfícies, concluímos que

$$M = \frac{7\pi}{2} + \pi + 2\sqrt{2}\pi = \frac{9+4\sqrt{2}}{2}\pi.$$

- b. Determine o centro de massa de uma chapa fina definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } 0 \leq z \leq 1\}$$

sabendo que a densidade, em cada ponto é dada por $f(x, y, z) = xyz$

Solução: Note que a superfície corresponde a quarta parte do cilindro circular reto de raio da base 1 e altura 1.

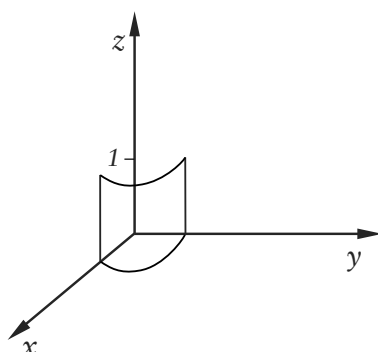


Figura 12.7

e, portanto, uma parametrização para S é da forma

$$\varphi(t, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, t), 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ e } 0 \leq t \leq 1$$

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right\| = 1.$$

Para calcularmos o centro de massa, precisamos antes, obter a massa da chapa.

$$\begin{aligned} M &= \iint_S xyz dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \cos \theta \sin \theta t dt d\theta = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta \left[\frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=1} d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Podemos, agora determinar as coordenadas x_c , y_c e z_c do centro de massa de S .

x_c :

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{M} \iint_S x f(x, y, z) dS = 4 \iint_S x^2 yz dS \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \cos^2 \theta \sin \theta t dt d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin \theta \left[\frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=1} d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \\ &= 2 \left[-\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

y_c :

$$\begin{aligned} y_c &= \frac{1}{M} \iint_S y f(x, y, z) dS = 4 \iint_S xy^2 z dS \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \cos \theta \sin^2 \theta t dt d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin^2 \theta \left[\frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=1} d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin^2 \theta d\theta = 2 \left[\frac{\sin^3 \theta}{3} \right]_{\theta=0}^{\theta} \\ &= \frac{\pi}{2} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

z_c :

$$\begin{aligned} z_c &= \frac{1}{M} \iint_S x f(x, y, z) dS = 4 \iint_S xyz^2 dS \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \cos \theta \sin \theta t^2 dt d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta \left[\frac{t^3}{3} \right]_{t=0}^{t=1} d\theta = \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta \\ &= \frac{4}{3} \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Dessa forma, o centro de massa de S é dado por $(x_c, y_c, z_c) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$.

- c. Determine o momento de inércia em relação ao eixo z da chapa fina do exemplo anterior.

Solução: Utilizando a parametrização dada no Exemplo b., obtemos

$$\begin{aligned} I_z &= \iint_S (x^2 + y^2) xyz dS \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \cos \theta \sin \theta t dt d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \cos \theta \sin \theta t dt d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta \left[\frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=1} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Aula 13

INTEGRAL DE SUPERFÍCIE DE CAMPO VETORIAL



O b j e t i v o s

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 calcular a integral de superfície de campos vetoriais.

Meta da aula:

Apresentar a definição da integral de campos vetoriais de três variáveis sobre superfícies, a chamada Integral de Superfície. Para tanto, será apresentada a noção de superfície orientada.

INTEGRAL DE SUPERFÍCIE DE CAMPO VETORIAL

Pré-requisitos

Você vai precisar dos conhecimentos sobre representação paramétrica de superfícies, vistos na Aula 11 desse curso, bem como dos conhecimentos sobre integração dupla, apresentados nas Aulas 1, 2 e 3, também desse curso.

O foco da presente aula é estudar a integral de superfície de campos vetoriais. Para tanto, assim como no caso da integral de linha, será necessário definir a orientação das superfícies em questão.

Da mesma forma que na aula anterior, consideraremos superfícies S com parametrizações $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tais que:

- i. D é um subconjunto limitado e fechado do plano;
- ii. φ é injetora exceto, possivelmente, na fronteira de D ;
- iii. a superfície é regular exceto, possivelmente, num número finito de pontos.

Como uma curva pode ser percorrida em apenas uma direção (e dois sentidos), é natural associarmos sua orientação ao sentido em que é percorrida, conforme visto na Aula 9.

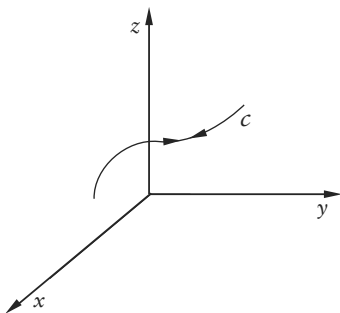


Figura 13.1

No entanto, ao pensarmos em uma superfície, a mesma pode ser percorrida tomando-se diversas direções. Por outro lado, em cada ponto $\varphi(u, v)$ de uma superfície regular, temos apenas dois vetores normais unitários, cada um com sentido contrário ao do outro:

$$n_1(\varphi(u, v)) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\|}$$

e

$$n_2(\varphi(u, v)) = -n_1(\varphi(u, v)).$$

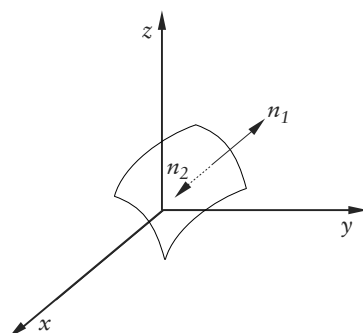



Figura 13.2

Dessa forma, é natural associarmos a orientação de uma superfície regular ao sentido no qual aponta um campo de vetores normais unitários.

Definição 13.1.

Dizemos que uma superfície S é orientável quando podemos fixar, sobre S , um campo contínuo de vetores unitários, normais a S . Ao definirmos tal campo de vetores, dizemos que S está orientada.

 Um exemplo de superfície não orientável é chamada Faixa de Möbius, obtida a partir de uma faixa retangular $ABCD$, juntando-se os lados AB e CD , após uma torção do lado CD (conforme ilustração abaixo).

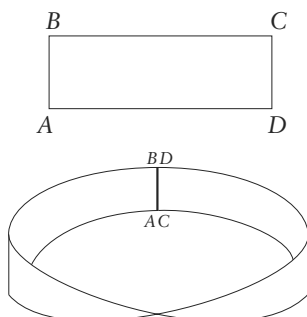


Figura 13.3

Note que, ao tentarmos definir um campo contínuo n_1 de vetores unitários a normais S , teremos, no mesmo ponto, dois vetores com sentidos opostos.

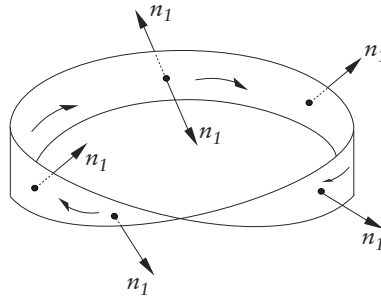


Figura 13.4

Podemos, agora, definir a integral de superfície de campo vetorial sobre uma superfície orientada S .

Definição 13.2.

Seja S uma superfície regular orientada por um campo contínuo n de vetores normais unitários. Se $F : S \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é um campo vetorial contínuo definido em S , definimos a integral de superfície de F sobre S por

$$\iint_S F dS = \iint_S (F \cdot n) dS,$$

onde $F \cdot n$ representa o produto escalar de F por n .

- i. Se S possui representação paramétrica $\varphi(u, v)$, $(u, v) \in D$, então S é orientada por

$$n = \pm \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|}.$$

Logo, segue da definição de integral de superfície de função escalar que

$$\begin{aligned}
\iint_S (F \cdot n) dS &= \\
&\pm \iint_D \left(F(\varphi(u, v)) \cdot \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|} \right) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| dudv = \\
&\pm \iint_D F(\varphi(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right) dudv,
\end{aligned}$$


dependendo da orientação escolhida para S .


- ii. Quando S é representada explicitamente por $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, temos

$$n = \pm \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + 1}}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\iint_S (F \cdot n) dS &= \\
&\pm \iint_D F(x, y, f(x, y)) \cdot \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), 1 \right) dx dy.
\end{aligned}$$

 A integral de superfície depende apenas da orientação da superfície S e não de sua representação paramétrica.

 Se o campo vetorial contínuo $F : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ representa um campo de velocidade associado ao escoamento de um fluido, a integral $\iint_S (F \cdot n) dS$ fornece o fluxo ou taxa de escoamento, por unidade de tempo, Φ do fluido através de S .

Exemplo 13.1.

- a. Calcule $\iint_S (F \cdot n) dS$, onde $F(x, y, 2z) = (x, y, z)$ e S é o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 2$, orientado com vetor normal apontando para cima.

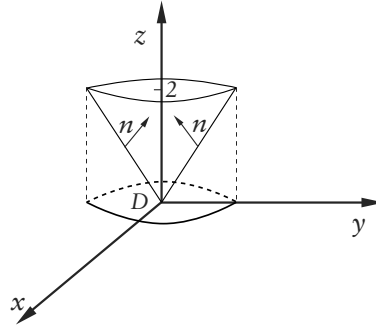


Figura 13.5

Solução: Como o cone possui representação explícita, então os vetores normais são dados por

$$n = \pm \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} = \pm \frac{\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1\right)}{\sqrt{2}}.$$

Como o campo de vetores, que define a orientação definida para S , aponta para cima, então a terceira componente tem que ser positiva e, portanto,

$$n = \frac{\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1\right)}{\sqrt{2}}.$$

Dessa forma, segue que

$$\begin{aligned} \iint_S (F \cdot n) dS &= \\ &= \iint_D \left(x, y, 2\sqrt{x^2 + y^2}\right) \cdot \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1\right) dxdy = \\ &= \iint_D \frac{(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dxdy, \end{aligned}$$

onde $D : x^2 + y^2 \leq 4$. Utilizando coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r \cos \theta & 0 \leq r \leq 2 \\ y = r \sin \theta & 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases} \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$$

para resolver esta última integral, obtemos

$$\begin{aligned} \iint_S (F \cdot n) dS &= \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 dr d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=2} d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{16\pi}{3}. \end{aligned}$$

- b. Calcule $\iint_S (F \cdot n) dS$, onde $F(x, y, z) = (xyz^2, x, y)$ e S é a porção do plano $2y + z = 1$ no interior do parabolóide $z = x^2 + y^2$, orientada com vetor normal apontando para baixo.

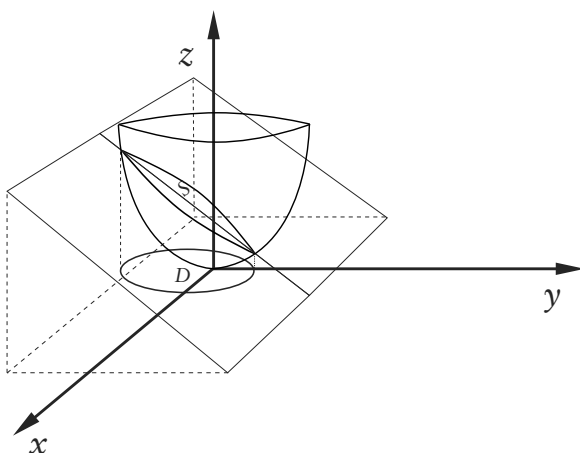


Figura 13.6

Solução: Assim como no exemplo anterior, o plano possui representação explícita $z = f(x, y) = 1 - 2y$ e, portanto,

$$n = \pm \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + 1}} = \pm \frac{(0, -2, 1)}{\sqrt{5}}.$$

Como o campo de vetores, que define a orientação definida para S , aponta para baixo, então a terceira componente tem que ser negativa e, assim,

$$n = \frac{(0, 2, -1)}{\sqrt{5}}.$$

Dessa forma, segue que

$$\begin{aligned} \iint_S (F \cdot n) dS &= \iint_D (xyz^2, x, y) \cdot (0, 2, -1) dx dy = \\ &= \iint_D (2x - y) dx dy, \end{aligned}$$

onde D é determinado pela interseção entre o plano e o parabolóide, ou seja,

$$x^2 + y^2 = 1 - 2y \implies x^2 + (y + 1)^2 = 2.$$

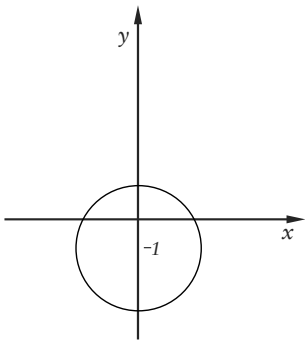


Figura 13.7

Utilizando coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r \cos \theta & 0 \leq r \leq \sqrt{2} \\ y = -1 + r \sin \theta & 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases} \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r$$

para resolver a última integral, obtemos

$$\begin{aligned} \iint_S (F \cdot n) dS &= \iint_D (2x - y) dx dy = \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} (2r \cos \theta + 1 - r \sin \theta) r d\theta dr = \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} [2r^2 \sin \theta + r\theta + r^2 \cos \theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr = \int_0^{\sqrt{2}} 2\pi r dr = \\ &= [\pi r^2]_{r=0}^{r=\sqrt{2}} = 2\pi. \end{aligned}$$

- c. Calcule o fluxo do campo vetorial $F(x, y, z) = (-x, -y, 1 - z)$ através da superfície S da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, orientada com vetor normal apontando para a origem.

Solução: Observe, inicialmente, que, cada ponto $P = (x, y, z)$ sobre a esfera é extremidade do vetor unitário normal à esfera em (x, y, z) . Dessa forma, o vetor unitário n , normal em cada ponto $P = (x, y, z)$ da esfera e apontando para a origem, é dado por $n = (-x, -y, -z)$.

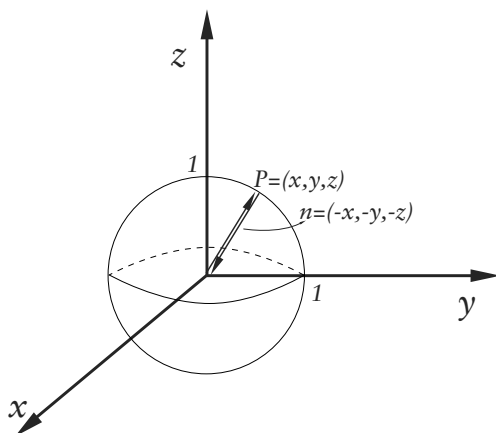


Figura 13.8

Dessa forma, o fluxo procurado é dado por

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_S (F \cdot n) dS = \iint_S (-x, -y, 1-z) \cdot (-x, -y, -z) dS = \\ &= \iint_S (x^2 + y^2 + z^2 - z) dS = \iint_S (1 - z) dS.\end{aligned}$$

Observe que a integral acima é uma integral de superfície de função escalar sobre a esfera e, portanto, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Para resolver tal integral, vamos utilizar a parametrização da esfera

$$\varphi(t, \theta) = (\sin t \cos \theta, \sin t \sin \theta, \cos t), \quad 0 \leq t \leq \pi \text{ e } 0 \leq \theta < 2\pi.$$

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right\| = \sin t.$$

Dessa forma, segue que

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_S (1 - z) dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (1 - \cos t) \sin t dt d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\sin t - \sin t \cos t) dt d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\cos t - \frac{\sin^2 t}{2} \right]_{t=0}^{t=\pi} d\theta = 2 \int_0^{2\pi} d\theta = 4\pi.\end{aligned}$$

Quando uma superfície S é dada por uma união finita de superfícies coladas por bordos comuns, é natural pensarmos em calcular a integral de superfície em cada parte separadamente, como acontece no caso de curvas. Para isso, é necessário definirmos orientação para superfícies deste tipo, o que passamos a fazer a seguir.

Definição 13.3.

Seja S uma superfície orientada por um campo contínuo de vetores normais unitários n . Dizemos que a fronteira ∂S de S está orientada positivamente se a superfície S está à esquerda quando percorremos ∂S , tendo como posição vertical o sentido do vetor n .

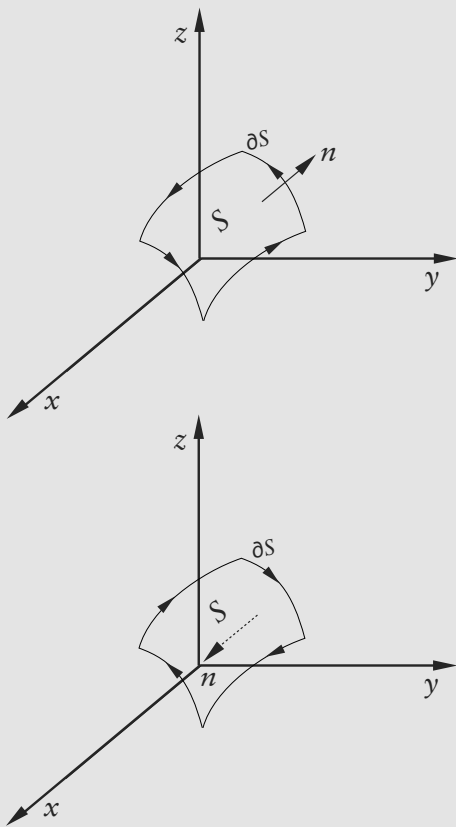



Figura 13.9

 Note que a orientação de fronteira ∂D de uma região plana D , vista na Aula 10, é um caso particular dessa definição, considerando $n = (0, 0, 1)$

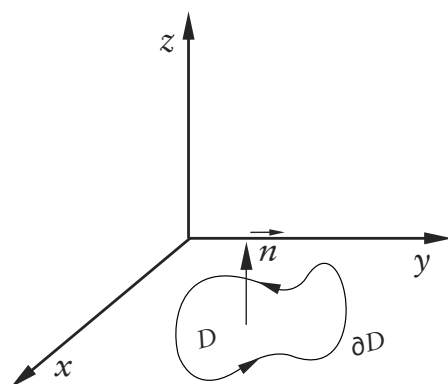


Figura 13.10

Definição 13.4.

Seja $S = S_1 \cup \dots \cup S_n$ uma superfície formada por uma união finita de superfícies coladas por bordos comuns. Dizemos que S é orientável se cada parte S_i é orientável de modo que, quando as fronteiras ∂S_i estão orientadas positivamente, os bordos comuns a duas partes são percorridos em sentido contrário.

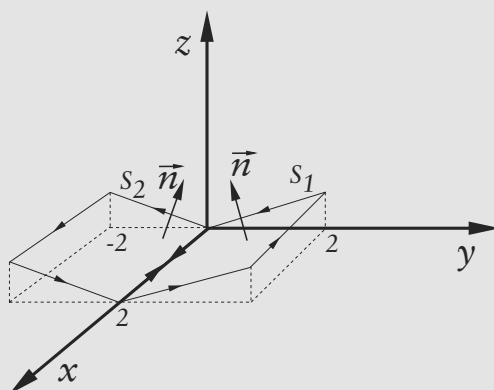


Figura 13.11

Nesse caso, se F é um campo vetorial contínuo sobre cada S_i , então

$$\iint_S (F \cdot n) dS = \iint_{S_1} (F \cdot n) dS + \dots + \iint_{S_n} (F \cdot n) dS.$$

Exemplo 13.2.

- a. Calcule $\iint_S (F \cdot n) dS$, onde $F(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$ e S é a superfície $z = |y|$, $0 \leq x \leq 2$ e $-2 \leq y \leq 2$, orientada com vetor normal n apontando para cima.

Solução: Observe que a superfície é dada pela união do plano S_1 , $z = y$, $0 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq 2$, com o plano S_2 , $z = -y$, $0 \leq x \leq 2$ e $-2 \leq y \leq 0$ e, portanto, precisamos verificar se a orientação está bem definida. De fato, se orientarmos cada um dos dois planos com vetor normal para cima, e considerarmos as fronteiras orientadas positivamente, o bordo comum será percorrido em sentidos contrários.

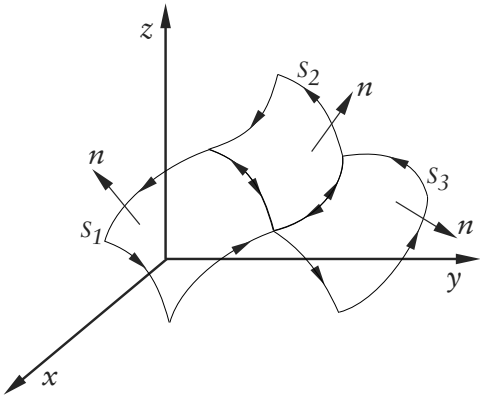


Figura 13.12

Dessa forma, podemos calcular as integrais de superfície separadamente para cada plano S_i .

S_1 : como o plano possui representação explícita $z = y$, com $0 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq 2$, então

$$n = \pm \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} = \pm \frac{(0, -1, 1)}{\sqrt{2}}.$$

Visto que o plano está orientado com vetor normal para cima, então $n = \frac{(0, -1, 1)}{\sqrt{2}}$ e, portanto,

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} (F \cdot n) dS &= \iint_{S_1} (y+z, x+z, x+y) \cdot \frac{(0, -1, 1)}{\sqrt{2}} dS = \\ \int_0^2 \int_0^2 (y+y, x+y, x+y) \cdot (0, -1, 1) dx dy &= \int_0^2 \int_0^2 0 dx dy = 0.\end{aligned}$$

S_2 : novamente, o plano possui representação explícita $z = -y$, com $0 \leq x \leq 2$ e $-2 \leq y \leq 0$, e orientação com vetor normal para cima. Dessa forma,

$$n = \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} = \frac{(0, 1, 1)}{\sqrt{2}}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\iint_{S_2} (F \cdot n) dS &= \iint_{S_2} (y+z, x+z, x+y) \cdot \frac{(0, 1, 1)}{\sqrt{2}} dS = \\ \int_{-2}^0 \int_0^2 (y-y, x-y, x+y) \cdot (0, 1, 1) dx dy &= \int_{-2}^0 \int_0^2 2x dx dy = \\ \int_{-2}^0 [x^2]_{x=0}^{x=2} dy &= 4 \int_{-2}^0 dy = 8.\end{aligned}$$

Logo, segue que

$$\iint_S (F \cdot n) dS = \iint_{S_1} (F \cdot n) dS + \iint_{S_2} (F \cdot n) dS = 0 + 8 = 8.$$

- b. Calcule o fluxo de $F(x, y, z) = (x, y, x + y + z)$ através da superfície S da região delimitada por $x^2 + y^2 = 1$, $y + z = 1$ e $z = 4$, orientada com vetor normal n exterior.

Solução: O fluxo é dado por

$$\Phi = \iint_S (F \cdot n) dS,$$

onde S é dada pela união de três superfícies: o cilindro S_1 , $x^2 + y^2 = 1$, $1 - y \leq z \leq 4$; o plano S_2 , $z = 1 - y$, $x^2 + y^2 \leq 1$; o plano S_3 , $z = 4$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

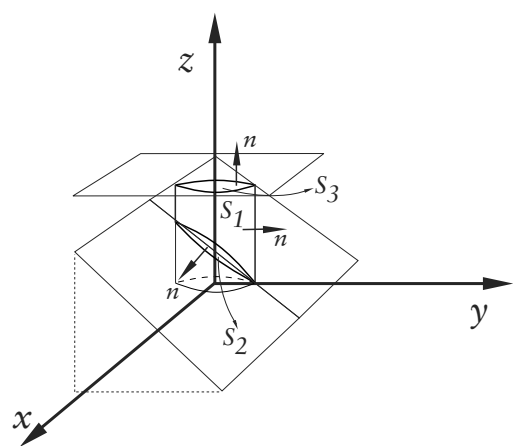


Figura 13.13

Dessa forma, precisamos verificar se a orientação está bem definida. De fato, se orientarmos cada uma das superfícies com vetor normal exterior e considerarmos as fronteiras orientadas positivamente, os bordos comuns serão percorridos em sentidos contrários.

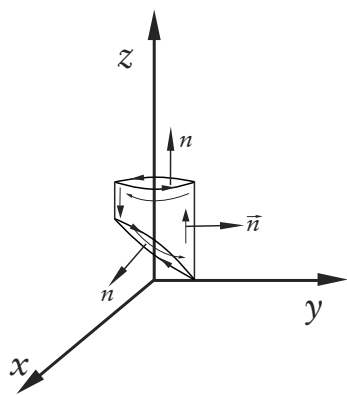


Figura 13.14

Logo, como no exemplo anterior, podemos calcular as integrais de superfície separadamente para cada superfície S_i .

S_1 : uma parametrização para o cilindro é dada por

$$\varphi(t, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, t), 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ e } 1 - \sin \theta \leq t \leq 4$$

$$n = \pm \frac{\partial \varphi}{\partial t} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \pm (-\cos \theta, -\sin \theta, 0)$$

Para determinar qual dos dois vetores normais aponta para fora, vamos considerar o ponto $(1, 0, 4)$. Note que $(1, 0, 4) = \varphi(0, 4)$ e, portanto, nesse ponto, os vetores normais são dados por

$$n = \pm \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, 0) \times \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(0, 0) = \pm (-1, 0, 0),$$

dos quais, o vetor $(1, 0, 0)$ aponta para fora de S . Dessa forma, o vetor correspondente à orientação definida para o cilindro é $n = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ e, assim,

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} (F \cdot n) dS &= \int_0^{2\pi} \int_{1-\sin \theta}^4 (\cos \theta, \sin \theta, \cos \theta + \sin \theta + t) \cdot (\cos \theta, \sin \theta, 0) dt d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\sin \theta} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) dt d\theta = \int_0^{2\pi} [t]_{t=1-\sin \theta}^{t=4} d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} (4 - 1 + \sin \theta) d\theta = [3\theta - \cos \theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 6\pi. \end{aligned}$$

S_2 : como o plano possui representação explícita $z = 1 - y$, então

$$n = \pm \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} = \pm \frac{(0, 1, 1)}{\sqrt{2}}.$$

Como a superfície está orientada com vetor normal apontando para fora, então, no plano S_2 , o vetor deve apontar para baixo, ou seja, $n = \frac{(0, -1, -1)}{\sqrt{2}}$. Assim,

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} (F \cdot n) dS &= \iint_D (x, y, x + y + 1 - y) \cdot (0, -1, -1) dx dy = \\ &= \iint_D (-y - x - 1) dx dy, \end{aligned}$$

onde $D: x^2 + y^2 \leq 1$. Utilizando coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r \cos \theta & 0 \leq r \leq 1 \\ y = r \sin \theta & 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases} \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r$$

para resolver esta última integral, obtemos

$$\begin{aligned}\iint_{S_2} (F \cdot n) dS &= \iint_D (-y - x - 1) dx dy = \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (-r \sin \theta - r \cos \theta - 1) r d\theta dr = \\ &= \int_0^1 [-r^2 \cos \theta - r^2 \sin \theta - r\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr = \\ &= \int_0^1 -2\pi r dr = [-\pi r^2]_{r=0}^{r=1} = -\pi.\end{aligned}$$

S_3 : Ao contrário do plano anterior, para $z = 4$ o vetor normal que aponta para fora da região delimitada por S , deve apontar para cima e, portanto,

$$n = \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} = (0, 0, 1).$$

Logo, visto que o domínio D é o mesmo que em S_2 , utilizamos as coordenadas polares e obtemos

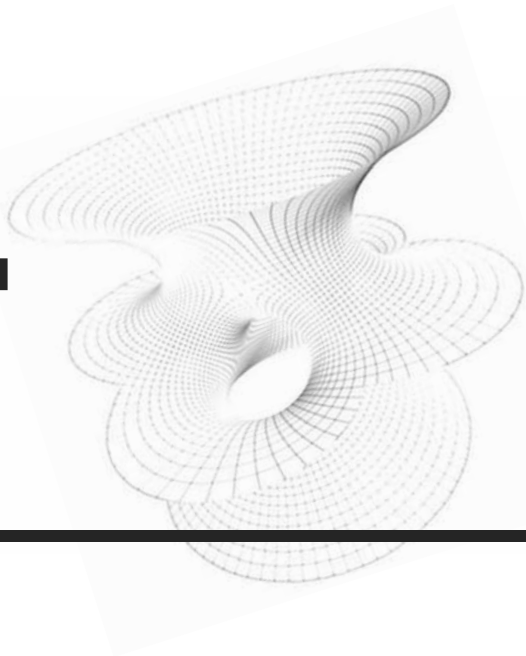
$$\begin{aligned}\iint_{S_3} (F \cdot n) dS &= \iint_D (x, y, x + y + 4) \cdot (0, 0, 1) dx dy = \\ &= \iint_D (x + y + 4) dx dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r \cos \theta + r \sin \theta + 4) r d\theta dr = \\ &= \int_0^1 [r^2 \cos \theta + r^2 \sin \theta + 4r\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr = \\ &= \int_0^1 8\pi r dr = [4\pi r^2]_{r=0}^{r=1} = 4\pi.\end{aligned}$$

Logo, segue que

$$\Phi = \iint_S (F \cdot n) dS = 6\pi - \pi + 4\pi = 9\pi.$$

Aula 14

TEOREMA DE GAUSS



O b j e t i v o

Ao final desta aula, você deverá ser capaz:

- 1 utilizar o Teorema de Gauss para calcular a integral de superfície de campo vetorial sobre superfícies fechadas e limitadas.

Meta da aula:

Apresentar o Teorema de Gauss para integrais de superfície de campo vetorial sobre superfícies fechadas e limitadas. Veremos, ainda, como obter uma versão em duas dimensões do Teorema de Gauss a partir do Teorema de Green, apresentado na Aula 10.

TEOREMA DE GAUSS

Pré-requisitos

Você vai precisar dos conhecimentos sobre Integral de Superfície de Campos Vetoriais, apresentados na Aula 13, sobre campos vetoriais, apresentados na Aula 8, bem como sobre Integrais Triplas, apresentadas nas Aulas 4 e 5, todas as aulas desse curso. Precisarás também dos conhecimentos sobre funções vetoriais, vistos no curso de Cálculo III.

O foco principal desta aula é apresentar o Teorema de Gauss, que associa a integral de superfície de um campo vetorial sobre uma superfície fechada e limitada a uma integral tripla sobre o sólido delimitado por essa superfície. Assim como no Teorema de Green, quando definimos orientação positiva para curvas fechadas, precisamos fazer o mesmo para superfícies fechadas e limitadas. Lembre-se de que uma superfície é orientada a partir da definição de um campo de vetores normais unitários e note que, em uma superfície fechada e limitada, podemos definir dois campos de tais vetores: apontando para dentro ou para fora do sólido delimitado pela superfície.

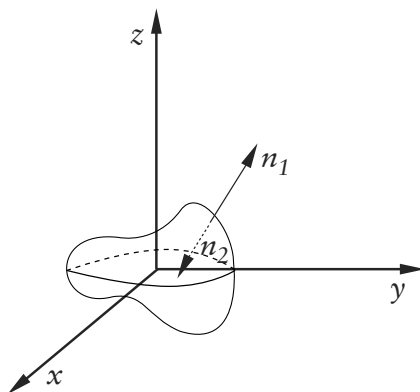


Figura 14.1

Consideraremos sólidos delimitados por superfícies S como as das duas últimas aulas, isto é, com parametrizações $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tais que:

- i. D é um subconjunto limitado e fechado do plano;
- ii. φ é injetora exceto, possivelmente, na fronteira de D ;
- iii. a superfície é regular exceto, possivelmente, num número finito de pontos.

Definição 14.1.

Diz-se que a fronteira ∂W de um sólido fechado e limitado $W \subset \mathbb{R}^3$ está orientada positivamente se o campo de vetores normais unitários, que define a orientação de ∂W , aponta para fora de W .

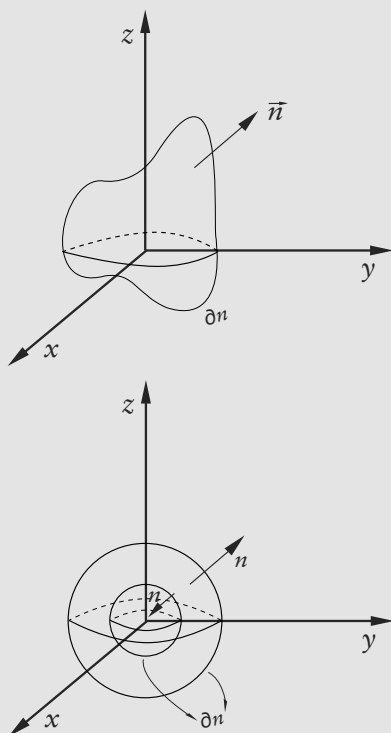


Figura 14.2

Teorema 14.1 (Teorema de Gauss).

Seja $W \subset \mathbb{R}^3$ uma região fechada e limitada cuja fronteira ∂W seja dada por uma superfície orientada positivamente. Se $F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ é um campo vetorial de classe C^1 em W , então

$$\iint_{\partial W} (F \cdot n) dS = \iiint_W \operatorname{div} F dx dy dz, \quad (14.1)$$

onde

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(x, y, z)$$

é o operador divergente, definido na Aula 8.

Demonstração

Vamos considerar o caso em que a região W é uma região simples, isto é, dos tipos I, II e III simultaneamente (conforme a Aula 4).

Observe que, inicialmente, que

$$\begin{aligned} \iint_{\partial W} (F \cdot n) dS &= \iint_{\partial W} ((F_1, 0, 0) \cdot n) dS + \\ &\quad \iint_{\partial W} ((0, F_2, 0) \cdot n) dS + \\ &\quad \iint_{\partial W} ((0, 0, F_3) \cdot n) dS \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \iiint_W \operatorname{div} F dx dy dz &= \iiint_W \frac{\partial F_1}{\partial x} dx dy dz + \iiint_W \frac{\partial F_2}{\partial y} dx dy dz + \\ &\quad \iiint_W \frac{\partial F_3}{\partial z} dx dy dz. \end{aligned}$$

Dessa forma, a demonstração da Identidade 14.1 será feita mostrando-se as igualdades

$$\iint_{\partial W} ((F_1, 0, 0) \cdot n) dS = \iiint_W \frac{\partial F_1}{\partial x} dx dy dz, \quad (14.2)$$

$$\iint_{\partial W} ((0, F_2, 0) \cdot n) dS = \iiint_W \frac{\partial F_2}{\partial y} dx dy dz \quad (14.3)$$

e

$$\iint_{\partial W} ((0, 0, F_3) \cdot n) dS = \iiint_W \frac{\partial F_3}{\partial z} dx dy dz. \quad (14.4)$$

Vamos provar a Equação 14.4. As Equações 14.2 e 14.3 são demonstradas de forma análoga. Para tanto, vamos considerar a região W como sendo do tipo I, isto é,

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in D \text{ e } f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\}.$$

Assim, o lado direito de 14.4 é calculado por

$$\begin{aligned} \iiint_W \frac{\partial F_3}{\partial z} dx dy dz &= \iint_D \left(\int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} \frac{\partial F_3}{\partial z} dz \right) dx dy = \\ &= \iint_D [F_3(x, y, f_2(x, y)) - F_3(x, y, f_1(x, y))] dx dy. \end{aligned}$$

Por outro lado, a superfície ∂W é dada por $S_1 \cup S_2 \cup S_3$, onde S_1 é o gráfico da função $z = f_1(x, y)$, $(x, y) \in D$, S_2 é o gráfico da função $z = f_2(x, y)$, $(x, y) \in D$, e S_3 é a porção de cilindro $(x, y) \in \partial D$, $f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)$.

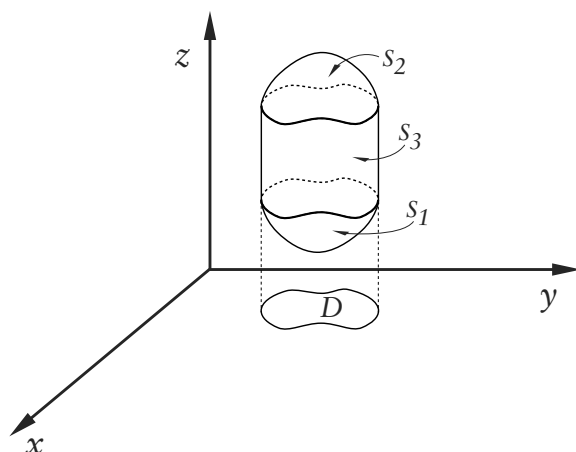


Figura 14.3

Observe que essa é a possibilidade mais geral, e a parte S_3 pode não existir, conforme figura abaixo.

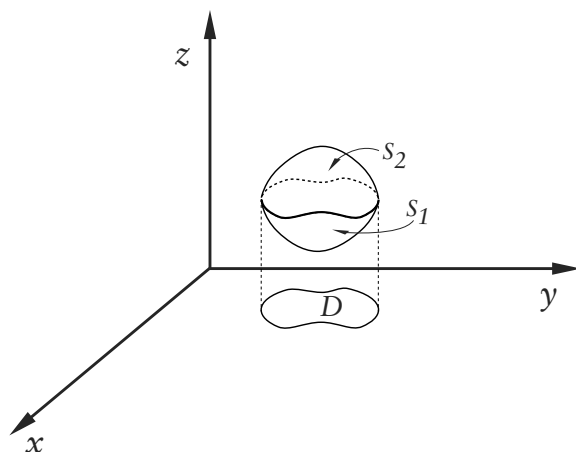


Figura 14.4

Logo, o lado esquerdo de 14.4 divide-se em três integrais de

superfície

$$\begin{aligned} \iint_{\partial W} ((0, 0, F_3) \cdot n) dS &= \iint_{S_1} ((0, 0, F_3) \cdot n) dS + \\ &\iint_{S_2} ((0, 0, F_3) \cdot n) dS + \iint_{S_3} ((0, 0, F_3) \cdot n) dS. \end{aligned}$$

- Visto que a superfície S_1 possui representação explícita, o campo de vetores normais (sem serem unitários) com orientação positiva, isto é, apontando para fora de W , é dado por

$$N_1 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y), -1 \right)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} ((0, 0, F_3) \cdot n) dS &= \\ \iint_D (0, 0, F_3(x, y, f_1(x, y))) \cdot \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, -1 \right) dxdy &= \\ \iint_D -F_3(x, y, f_1(x, y)) dxdy. \end{aligned}$$

- Da mesma forma, a superfície S_2 possui representação explícita e, portanto, o campo de vetores normais (sem serem unitários) com orientação positiva, isto é, apontando para fora de W , é dado por

$$N_2 = \left(-\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y), 1 \right).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} ((0, 0, F_3) \cdot n) dS &= \\ \iint_D (0, 0, F_3(x, y, f_2(x, y))) \cdot \left(-\frac{\partial f_1}{\partial x}, -\frac{\partial f_1}{\partial y}, 1 \right) dxdy &= \\ \iint_D F_3(x, y, f_2(x, y)) dxdy. \end{aligned}$$


- Por fim, note que, caso a superfície S_3 exista, ela possui campo de vetores normais, perpendiculares ao eixo z e, portanto, com terceira componente nula. Dessa forma,

$$\iint_{S_3} ((0, 0, F_3) \cdot n) dS = 0.$$

Logo, somando as parcelas, concluímos que

$$\begin{aligned} \iint_{\partial W} ((0, 0, F_3) \cdot n) dS &= \\ \iint_D [F_3(x, y, f_2(x, y)) dx dy - F_3(x, y, f_1(x, y))] dx dy &= \\ \iiint_W \frac{\partial F_3}{\partial z} dx dy dz, \end{aligned}$$

finalizando a prova da Igualdade 14.4.

 A demonstração foi feita para o caso particular em que a região W é, simples. No caso em que W é mais geral, podemos decompô-la em uma união finita de regiões simples, $W = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_n$, e aplicar o Teorema de Gauss a cada região W_i .

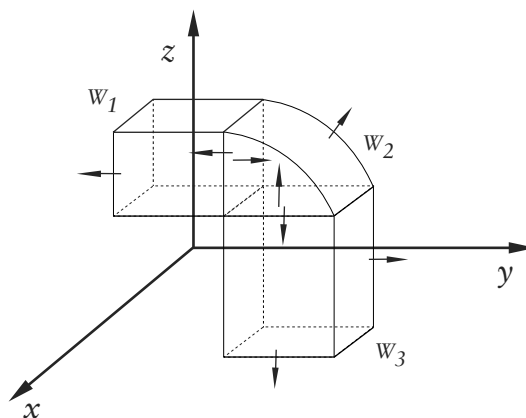


Figura 14.5

Observe que as partes de ∂W_i que não constituem a fronteira de W agem como fronteira comum a duas regiões vizinhas e, nesse caso, os vetores normais exteriores a essas regiões apontam em sentidos opostos. Dessa forma, as suas integrais de linha se cancelarão e, portanto,

$$\begin{aligned} \iiint_W \operatorname{div} F dx dy dz &= \iiint_{W_1} \operatorname{div} F dx dy dz = \\ &+ \dots + \iiint_{W_n} \operatorname{div} F dx dy dz = \\ \iint_{\partial W_1} (F \cdot n) dS &+ \dots + \iint_{\partial W_n} (F \cdot n) dS = \\ \iint_{\partial W} (F \cdot n) dS. \end{aligned}$$

O TEOREMA DE GAUSS EM DUAS DIMENSÕES

A fim de obtermos uma versão em duas dimensões do Teorema de Gauss, vamos considerar $F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ um campo vetorial de classe C^1 em uma região $D \subset \mathbb{R}^2$ fechada e limitada cuja fronteira ∂D é uma curva, orientada positivamente, com parametrização

$$\sigma(t) = (x(t), y(t)), t \in [a, b],$$

de classe C^1 .

Vimos, no curso de Cálculo II, que se o vetor tangente $\|\sigma'(t)\|$ é não nulo em cada ponto de ∂D , então o vetor normal unitário é dado por

$$n(t) = \left(\frac{y'(t)}{\|\sigma'(t)\|}, -\frac{x'(t)}{\|\sigma'(t)\|} \right).$$

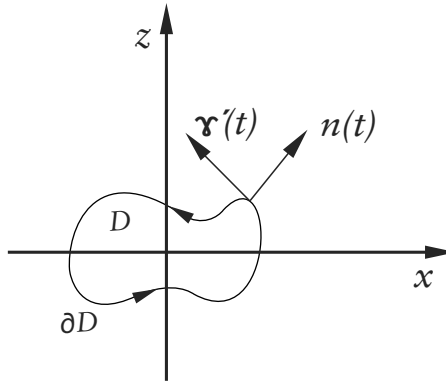


Figura 14.6

Dessa forma, a integral de linha ao longo de ∂D , equivalente à integral de superfície obtida pelo Teorema de Gauss, é dada por

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} (F \cdot n) dS &= \int_a^b (F_1(x(t), y(t)), F_2(x(t), y(t))) \cdot \left(\frac{y'(t)}{\|\sigma'(t)\|}, -\frac{x'(t)}{\|\sigma'(t)\|} \right) \|\sigma'(t)\| dt = \\ &= \int_a^b [-F_2(x(t), y(t)) x'(t) + F_1(x(t), y(t)) y'(t)] dt = \oint_{\partial D} -F_2 dx + F_1 dy. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Green à última integral, obtemos

$$\oint_{\partial D} (F \cdot n) dS = \iint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dx dy,$$

conforme desejávamos.

Vamos utilizar o último exemplo da aula passada para ilustrar a utilidade do Teorema de Gauss. Desejávamos calcular o fluxo de $F(x, y, z) = (x, y, x + y + z)$ através da superfície S da região delimitada por $x^2 + y^2 = 1$, $y + z = 1$ e $z = 4$, orientada com vetor normal n exterior. Lembre-se de que precisamos calcular a integral de superfície de F sobre três superfícies, o que acarretou certo trabalho. Entretanto, note que a superfície S é a fronteira ∂W , orientada positivamente, do sólido W dado por

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 1, 1 - y \leq z \leq 4\}.$$

Visto que

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3,$$

segue do Teorema de Gauss que

$$\iint_S (F \cdot n) dS = \iiint_W \operatorname{div} F dx dy dz = 3 \iiint_W dx dy dz.$$

Utilizando as coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = r \cos \theta & 0 \leq r \leq 1 \\ y = r \sin \theta & 0 \leq \theta < 2\pi \\ z = z & 1 - r \sin \theta \leq z \leq 4 \end{cases} \quad \text{e} \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = r,$$

temos

$$\begin{aligned} \iint_S (F \cdot n) dS &= 3 \iiint_W dx dy dz = \\ &= 3 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{1-r \sin \theta}^4 r dz d\theta dr = \\ &= 3 \int_0^1 \int_0^{2\pi} (3r + r^2 \sin \theta) d\theta dr = \\ &= 3 \int_0^1 [3r\theta - r^2 \cos \theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr = \\ &= 18\pi \int_0^1 r dr = 18\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=1} = 18\pi \cdot \frac{1}{2} = 9\pi. \end{aligned}$$

Exemplo 14.1.

- a. Calcule o fluxo do campo vetorial $F(x, y, z) = (xz^2, yx^2, zy^2)$ através da superfície S da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, com vetor normal exterior.

Solução: É possível resolver a integral de superfície utilizando diretamente a definição. Para tal, seria necessário resolver integrais envolvendo potências das funções seno e cosseno, o que acarretaria certo trabalho. No entanto, com o auxílio do Teorema de Gauss esse processo se torna muito mais simples, como veremos a seguir.

Note que, a esfera é uma superfície fechada e limitada que está orientada positivamente, e o campo vetorial F é de classe C^1 em \mathbb{R}^3 . Logo, segue do Teorema de Gauss que

$$\Phi = \iint_S (F \cdot n) dS = \iiint_W \operatorname{div} F dx dy dz = \iiint_W (z^2 + x^2 + y^2) dx dy dz.$$

Dessa forma, utilizando mudança de coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta & 0 \leq \rho \leq 1 \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta & 0 \leq \theta < 2\pi \\ z = \rho \cos \varphi & 0 \leq \varphi \leq \pi \end{cases} \quad \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = \rho^2 \sin \varphi$$

para resolver a integral tripla, obtemos

$$\begin{aligned} \Phi &= \iiint_W (z^2 + x^2 + y^2) dx dy dz = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \rho^2 \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \varphi \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_{\rho=0}^{\rho=1} d\varphi d\theta = \\ &= \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi d\theta = \\ &= \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} [-\cos \varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} d\theta = \frac{2}{5} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2}{5} 2\pi = \frac{4\pi}{5}. \end{aligned}$$

- b. Calcule o fluxo do campo vetorial $F(x, y, z) = (x, x - y, x - y + z)$ através da superfície S dada pela união do hemisfério $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, com o cone $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, com vetor normal exterior.

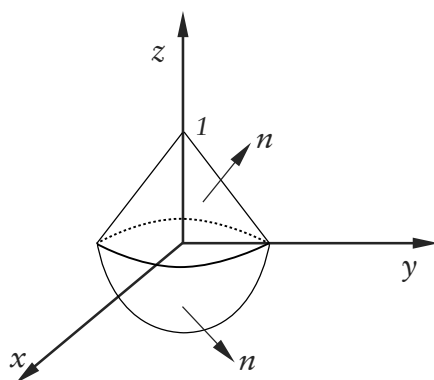


Figura 14.7

Solução: Como no exemplo anterior, o cálculo do fluxo por intermédio da definição de integral de superfície acarretaria um grande trabalho. Entretanto, como o campo vetorial é de classe C^1 em \mathbb{R}^3 e a superfície é fechada, limitada e orientada positivamente, podemos aplicar o Teorema de Gauss e obter

$$\Phi = \iint_S (F \cdot n) dS = \iiint_W \operatorname{div} F dx dy dz = \iiint_W 1 dx dy dz = V(W).$$

Visto que W é sólido dado pela metade de uma esfera de raio $r = 1$ e um cone com raio da base $r = 1$ e altura $h = 1$, podemos determinar o volume W sem calcular a integral e obter

$$\Phi = V(W) = \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi (1)^3 + \frac{1}{3} \pi (1)^2 1 = \pi.$$

- c. Calcule $\iint_S (F \cdot n) dS$, onde $F(x, y, z) = (x + e^{y^2+z^2}, y + e^{x^2+z^2}, z + e^{x^2+y^2})$ e S é a superfície do paraboloide $z = x^2 + y^2$, $z \leq 4$, orientada com vetor normal apontando para baixo.

Solução: Dada a dificuldade em resolver a integral de superfície utilizando a definição, vamos tentar calculá-la com o auxílio do Teorema de Gauss. Inicialmente, note que o campo vetorial é de classe C^1 em \mathbb{R}^3 . Entretanto, a superfície S não é fechada e, por isso, não delimita uma região. Para podermos aplicar o teorema, vamos "fechar" a superfície, considerando o plano S_0 , de equação $z = 4$, $x^2 + y^2 \leq 4$, orientado com normal apontando para cima

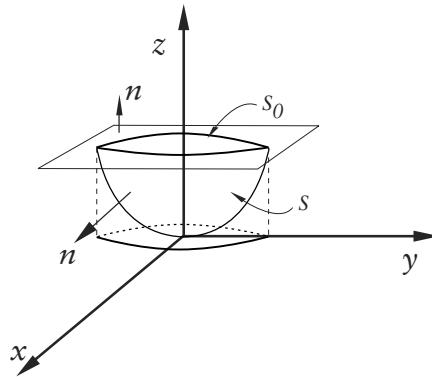


Figura 14.8

Dessa forma, o sólido W , delimitado por $S \cup S_0$, possui fronteira orientada positivamente (com vetor norma exterior) e, portanto, segue do Teorema de Gauss, que

$$\iint_{S \cup S_0} (F \cdot n) dS = \iiint_W \operatorname{div} F dx dy dz = \iiint_W 3 dx dy dz.$$

Utilizando mudança de coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = r \cos \theta & 0 \leq r \leq 2 \\ y = r \sin \theta & 0 \leq \theta < 2\pi \\ z = z & r^2 \leq z \leq 4 \end{cases} \quad \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = r$$

para resolver a integral tripla, obtemos

$$\begin{aligned} \iint_{S \cup S_0} (F \cdot n) dS &= \iiint_W 3 dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{r^2}^4 3r dz dr d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 3r [z]_{z=r^2}^{z=4} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (12r - 3r^3) dr d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[6r^2 - \frac{3r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=2} d\theta = 12 \int_0^{2\pi} d\theta = 12 \cdot 2\pi = 24\pi. \end{aligned}$$

Note que o valor encontrado corresponde à integral de superfície sobre $S \cup S_0$, isto é,

$$\iint_S (F \cdot n) dS + \iint_{S_0} (F \cdot n) dS = 24\pi.$$

Logo

$$\iint_S (F \cdot n) dS = 24\pi - \iint_{S_0} (F \cdot n) dS$$

e, portanto, para determinarmos a integral de linha desejada, precisamos calcular o valor de

$$\iint_{S_0} (F \cdot n) dS.$$

Para isso, observe que o plano $z = f(x, y) = 4, x^2 + y^2 \leq 4$, possui representação explícita e está orientado com vetor normal para cima. Dessa forma,

$$n = \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} = (0, 0, 1)$$

e, assim,


$$\begin{aligned} \iint_{S_0} (F \cdot n) dS &= \\ \iint_{S_0} (x + e^{y^2+z^2}, y + e^{x^2+z^2}, z + e^{x^2+y^2}) \cdot (0, 0, 1) dS &= \\ \iint_{S_0} (z + e^{x^2+y^2}) dS &= \iint_D (4 + e^{x^2+y^2}) dx dy. \end{aligned}$$

Calculando a última integral por coordenadas polares, obtemos

$$\begin{aligned} \iint_{S_0} (F \cdot n) dS &= \iint_D (4 + e^{x^2+y^2}) dx dy = \\ \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 + e^{r^2}) r dr d\theta &= \\ \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4r + re^{r^2}) dr d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[2r^2 + \frac{e^{r^2}}{2} \right]_{r=0}^{r=2} d\theta = \\ \int_0^{2\pi} \left(8 + \frac{e^4}{2} - \frac{1}{2} \right) d\theta &= \frac{15 + e^4}{2} \cdot 2\pi = (15 + e^4) \pi. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\iint_S (F \cdot n) dS = 24\pi - (15 + e^4) \pi = (9 - e^4) \pi.$$

 No exemplo anterior, o Teorema de Gauss não resolveu diretamente a integral desejada. No entanto, precisamos calcular a integral sobre um plano no lugar de um parabolóide, o que foi consideravelmente mais simples. No exemplo a seguir, veremos uma situação semelhante, na qual obteremos a integral sobre uma superfície qualquer envolvendo a origem,

por intermédio do cálculo da mesma sobre uma esfera.

d. Calcule o fluxo do campo

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

através de uma superfície qualquer S , que seja limitada e fechada, envolvendo a origem, orientada com vetor normal exterior.

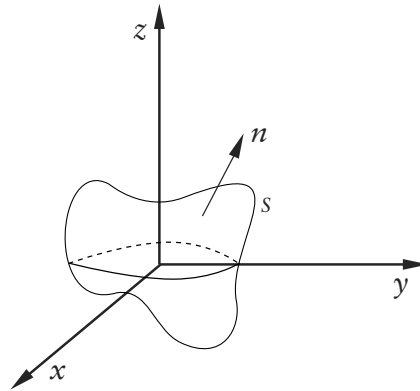


Figura 14.9

Solução: Como não conhecemos a expressão de S , é impossível calcularmos o fluxo utilizando diretamente a integral de superfície sobre S . Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x} &= \frac{1(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - x \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} 2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = \\ &= \frac{-2x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} &= \frac{x^2 - 2y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{\partial F_3}{\partial z} &= \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}. \end{aligned}$$

Logo, $\text{div}F = 0$ e, assim, é natural pensarmos em utilizar o Teorema de Gauss. Entretanto, observe que o campo é de classe

C^1 em $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ e, portanto, como a origem pertence ao sólido delimitado por S , precisamos "isolá-la", a fim de aplicar o teorema. Para tanto, vamos considerar a esfera S_0 de centro na origem e raio a , $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, com $a > 0$ suficientemente pequeno de modo que a esfera esteja totalmente interior a S . Dessa forma, o sólido W delimitado por $S \cup S_0$ não contém a origem. Finalmente, para que a fronteira de W esteja orientada positivamente, vamos considerar a esfera S_0 orientada com vetor normal apontando para a origem.

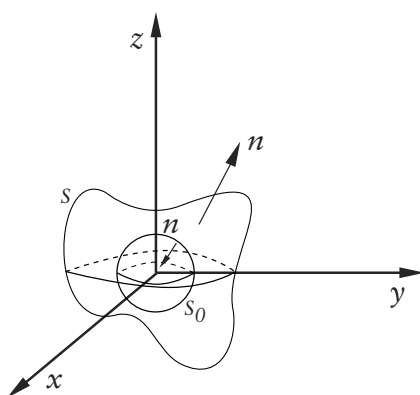


Figura 14.10

Assim, segue do Teorema de Gauss que

$$\iint_{S \cup S_0} (F \cdot n) dS = \iiint_W \operatorname{div} F dx dy dz = 0$$

e, portanto,

$$\Phi = \iint_S (F \cdot n) dS = - \iint_{S_0} (F \cdot n) dS.$$

Para calcular a integral de superfície sobre a esfera S_0 , observe que o campo de vetores normais unitários aponta para a origem e, portanto, é dado por

$$n = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{-z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right).$$

Dessa forma, fazendo o produto interno entre F e n , observamos que

$$- \iint_{S_0} (F \cdot n) dS = \iint_{S_0} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dS$$

e, portanto, utilizando a parametrização

$$\varphi(t, \theta) = (a \operatorname{sen} t \cos \theta, a \operatorname{sen} t \operatorname{sen} \theta, a \cos t), \quad 0 \leq t \leq \pi \\ \text{e } 0 \leq \theta < 2\pi$$

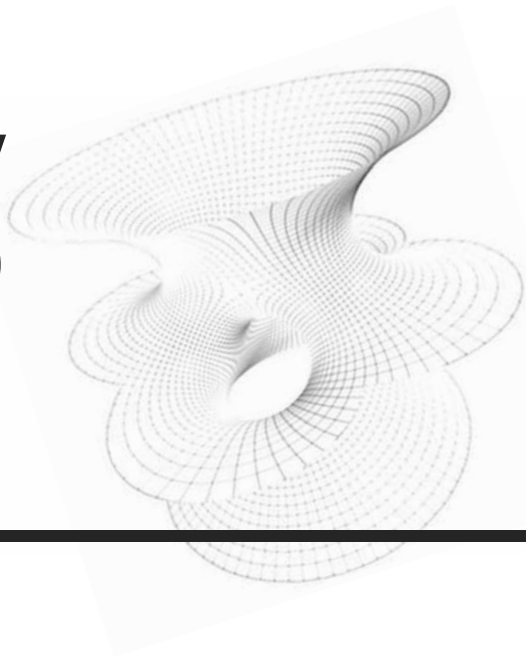
$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right\| = a^2 \sin t,$$

chegamos a

$$\Phi = \iint_{S_0} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{a^2} a^2 \sin t dt d\theta = \\ \int_0^{2\pi} [-\cos t]_{t=0}^{t=\pi} d\theta = 2 \int_0^{2\pi} d\theta = 4\pi.$$

Aula 15

TEOREMA DE STOKES



O b j e t i v o s

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 utilizar o Teorema de Stokes para calcular a integral de linha de campo vetorial ao longo de curvas fechadas no \mathbb{R}^3 ;
- 2 saber identificar quando um campo vetorial é conservativo no espaço e calcular integrais de linha de tais campos.

Meta da aula:

Apresentar o Teorema de Stokes que associa integrais de linha de campo vetorial ao longo de curvas fechadas no \mathbb{R}^3 a integrais sobre as superfícies delimitadas por tais curvas. Será visto, ainda, um resultado análogo ao apresentado na Aula 10, o chamado Teorema das Quatro Equivalências, que caracteriza um campo conservativo no espaço \mathbb{R}^3 .

Pré-requisitos

Você vai precisar dos conhecimentos sobre Integral de Superfície de Campos Vetoriais, apresentados na Aula 13, sobre Integrais de Linha de Campos Vetoriais, apresentadas nas Aulas 9 e 10, bem como sobre Campos Vetoriais, apresentados na Aula 8, todas as aulas desse curso. Precisar também dos conhecimentos sobre funções vetoriais, vistos no curso de Cálculo III.

TEOREMA DE STOKES

Antes de enunciarmos o Teorema de Stokes, vale lembrar que a fronteira ∂S de uma superfície S , orientada por um campo contínuo de vetores normais unitários n , está orientada positivamente se a superfície S está à esquerda quando percorremos ∂S , tendo como posição vertical o sentido do vetor n .

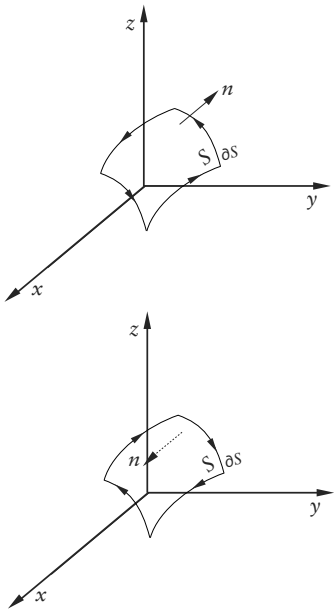


Figura 15.1

Teorema 15.1 (Teorema de Stokes).

Seja S uma superfície orientada, parametrizada por $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^2 em um conjunto aberto contendo D , cuja fronteira ∂S está orientada positivamente. Se

$$F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

é um campo vetorial de classe C^1 em um aberto contendo S , então

$$\oint_{\partial S} F \cdot dr = \iint_S (\text{rot} F \cdot n) dS,$$

onde

$$\text{rot} F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

é o operador rotacional, definido na Aula 8.

Demonstração

Vamos considerar a superfície S orientada com o campo de vetores normais unitários

$$n = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\|},$$

onde

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} = \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right).$$

Dessa forma, segue da definição de integral de superfície de função vetorial que

$$\begin{aligned} \iint_S (\text{rot} F \cdot n) dS &= \\ \iint_D \left(\text{rot} F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) dudv &= \\ \iint_D \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right) dudv &+ \\ \iint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) dudv &+ \\ \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) dudv. \end{aligned}$$

Visto que

$$\oint_{\partial S} F \cdot dr = \oint_{\partial S} F_1 dx + \oint_{\partial S} F_2 dy + \oint_{\partial S} F_3 dz,$$

provaremos o teorema se verificarmos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} F_1 dx &= \\ \iint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) - \frac{\partial F_1}{\partial y} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) \right) dudv, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} F_2 dy &= \\ \iint_D \left(-\frac{\partial F_2}{\partial z} \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right) + \frac{\partial F_2}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) \right) dudv, \end{aligned}$$

e

$$\oint_{\partial S} F_3 dz = \iint_D \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right) - \frac{\partial F_3}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \right) du dv.$$

Vamos provar apenas a primeira identidade, pois as outras duas são demonstradas de forma análoga. Para tanto, suponhamos que $\sigma(t) = (u(t), v(t))$, $t \in [a, b]$, seja uma parametrização para a fronteira de D , orientada de modo que $\varphi(\sigma(t)) = \varphi(u(t), v(t))$ seja uma parametrização da fronteira de S , orientada positivamente.

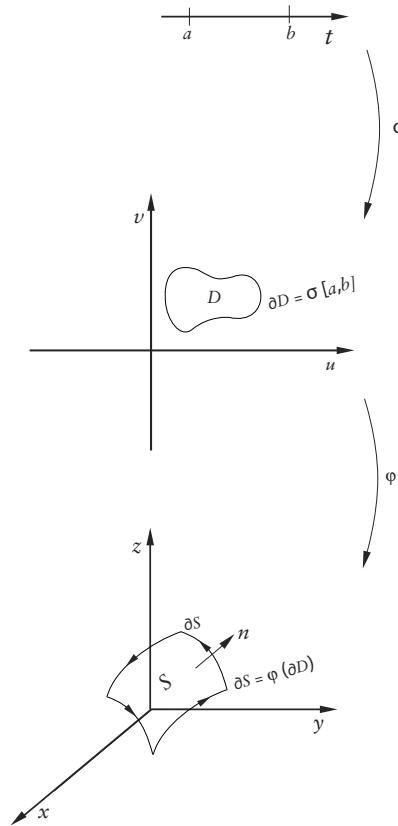


Figura 15.2

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} F_1 dx &= \int_a^b (F_1(\varphi(\sigma(t))), 0, 0) \cdot \frac{d}{dt} \varphi(\sigma(t)) dt = \\ &= \int_a^b F_1(\varphi(u(t), v(t))) \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u(t), v(t)) u'(t) + \frac{\partial x}{\partial v}(u(t), v(t)) v'(t) \right) dt = \\ &= \oint_{\partial D} F_1(\varphi(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) du + F_1(\varphi(u, v)) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) dv. \end{aligned}$$

Como $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ é de classe C^2 em um aberto contendo D , então as derivadas parciais $\frac{\partial x}{\partial u}$ e $\frac{\partial x}{\partial v}$ são de classe C^1 no mesmo aberto e, portanto, o campo vetorial

$$G(u, v) = \left(F_1(\varphi(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v), F_1(\varphi(u, v)) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \right)$$

também será de classe C^1 . Dessa forma, podemos aplicar o Teorema de Green a $G(u, v)$ na última integral, obtendo

$$\oint_{\partial S} F_1 dx = \oint_{\partial D} F_1(\varphi(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) du + F_1(\varphi(u, v)) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) dv = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(F_1(\varphi(u, v)) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(F_1(\varphi(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \right) \right] dudv.$$


Para completar a prova, observe que, sendo φ de classe C^2 , tem-se $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u}$ e, portanto,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial u} \left(F_1(\varphi(u, v)) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(F_1(\varphi(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \right) = \\ & \frac{\partial F_1}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + F_1 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - \frac{\partial F_1}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} - F_1 \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} = \frac{\partial F_1}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial F_1}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} = \\ & \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} - \\ & \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} = \\ & \frac{\partial F_1}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) - \frac{\partial F_1}{\partial y} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right). \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} & \oint_{\partial S} F_1 dx = \\ & \iint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) - \frac{\partial F_1}{\partial y} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) \right) dudv, \end{aligned}$$

conforme queríamos mostrar.

 Se D é uma região fechada e limitada do plano xy , cuja fronteira está orientada positivamente, então é determinada pela superfície do plano $z = 0$, com $(x, y) \in D$, orien-

tada com vetor $n = (0, 0, 1)$.

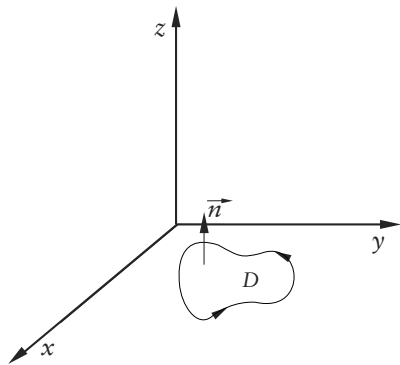


Figura 15.3

Além disso, um campo vetorial $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ definido em D pode ser identificado com $F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), 0)$. Nesse caso, o Teorema de Stokes nos leva a

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} F \cdot dr &= \oint_{\partial S} F \cdot dr = \iint_S (\text{rot} F \cdot n) dS = \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Observamos, assim, que o Teorema de Green, visto na Aula 10, é o caso particular, em duas dimensões, do Teorema de Stokes.

Exemplo 15.1.

- a. Calcule $\oint_C F \cdot dr$, onde

$$F(x, y, z) = \left(-y^3 + yz + e^{x^2}, x^3 + xz + e^{y^2}, xy + e^{z^2} \right)$$

e C é a circunferência $x^2 + y^2 = 4$, situada no plano $z = 4$, percorrida no sentido anti-horário, quando vista de cima.

Solução: Observe que o cálculo da integral de linha, utilizando diretamente a definição, seria bastante complicado. No entanto, como

$$\text{rot} F = (x - x, y - y, 3x^2 + z - (3y^2 + z)) = (0, 0, 3(x^2 + y^2)),$$

é natural pensarmos em utilizar o Teorema de Stokes. Para isso, note que a curva C é fronteira da superfície S , do plano $z = f(x, y) = 4$, com $D : x^2 + y^2 \leq 4$. Finalmente, para que a curva C esteja orientada positivamente como bordo de S , o plano precisa estar orientado com vetor normal apontando para cima, isto é,

$$n = \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} = (0, 0, 1).$$

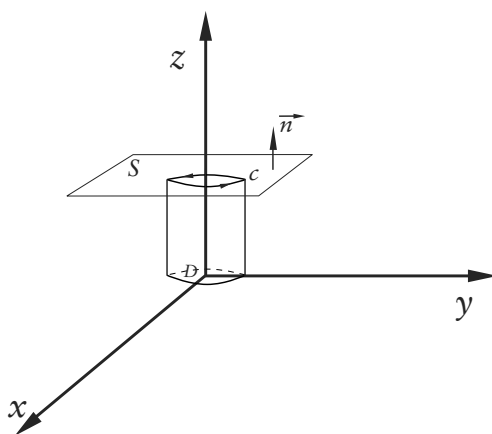


Figura 15.4

Logo, segue do Teorema de Stokes que


$$\oint_C F \cdot dr = \iint_S (\text{rot} F \cdot n) dS = \iint_D 3(x^2 + y^2) dxdy.$$

Utilizando mudança de coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r \cos \theta & 0 \leq r \leq 2 \\ y = r \sin \theta & 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases} \quad \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = r$$

para resolver a integral dupla, obtemos

$$\begin{aligned} \oint_C F \cdot dr &= \iint_D 3(x^2 + y^2) dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^2 3r^2 r dr d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{3r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=2} d\theta = 12 \int_0^{2\pi} d\theta = 12 \cdot 2\pi = 24\pi. \end{aligned}$$

 No exemplo anterior, consideramos a curva C como bordo de uma parte do plano $z = 4$. No entanto, a

escolha da superfície S não deve influenciar no resultado da integral. Apenas para ilustrar, considere a curva C como fronteira do parabolóide $z = x^2 + y^2$, com $0 \leq z \leq 4$. Para que a curva C esteja orientada positivamente como bordo do parabolóide, este precisa estar orientado com vetor normal apontando para cima, isto é,

$$n = \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} = \frac{(-2x, -2y, 1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

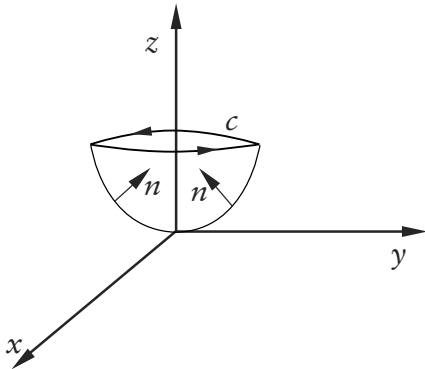


Figura 15.5

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \oint_C F \cdot dr &= \\ \iint_D (0, 0, 3(x^2 + y^2)) \cdot (-2x, -2y, 1) \, dx dy &= \\ \iint_D 3(x^2 + y^2) \, dx dy &= 24\pi, \end{aligned}$$

uma vez que $D : x^2 + y^2 \leq 4$.

- b. Calcule $\oint_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, onde C é a fronteira da porção do plano $x + y + z = 1$ situada no primeiro octante, percorrida no sentido horário, quando vista da origem.

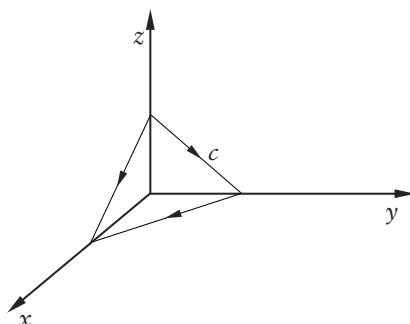


Figura 15.6

Solução: Para determinar a integral de linha solicitada, é necessário dividir a curva em três segmentos de reta e calcular, separadamente, a integral ao longo de cada um deles. Entretanto, com o auxílio do Teorema de Stokes, esse trabalho se torna mais simples. Inicialmente, observe que, para que a curva C esteja orientada positivamente como bordo do plano $z = f(x, y) = 1 - x - y$, este precisa estar orientado com vetor normal apontando para baixo, isto é,

$$n = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + 1}} = \frac{(-1, -1, -1)}{\sqrt{3}}.$$

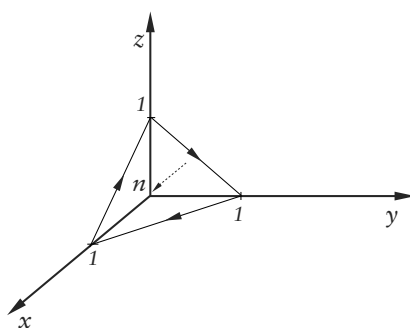


Figura 15.7

Visto que

$$\text{rot}F = (0 - 2z, 0 - 2x, 0 - 2y) = (-2z, -2x, -2y),$$

segue do Teorema de Stokes que

$$\begin{aligned}\oint_C F \cdot dr &= \\ \iint_D (-2(1-x-y), -2x, -2y) \cdot (-1, -1, -1) dx dy &= \\ 2 \iint_D dx dy &= 2A(D).\end{aligned}$$

A fim de calcular a área do domínio D , no plano xy , observe que este é delimitado pelos eixos coordenados e pela reta $x + y = 1$

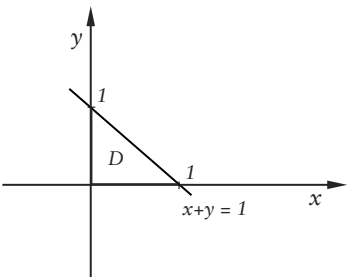


Figura 15.8

e, portanto, é um triângulo retângulo com base e altura iguais a 1. Assim,

$$\oint_C F \cdot dr = 2A(D) = 2 \cdot \frac{1 \cdot 1}{2} = 1.$$

- c. Calcule $\int_C (yz + x^2) dx + (xz - y^2) dy + xydz$, onde C é a curva de interseção do hemisfério $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ com o plano $x + y = 1$, percorrida no sentido anti-horário, quando vista da origem.

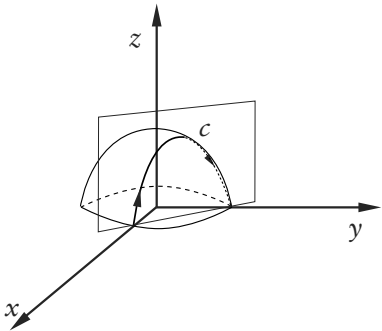


Figura 15.9

Solução: Dada a dificuldade em resolver a integral de linha utilizando a definição, vamos tentar calculá-la com o auxílio do Teorema de Stokes, visto que

$$\text{rot}F = (x - x, y - y, z - z) = (0, 0, 0).$$

No entanto, a curva C não é fechada e, portanto, precisamos "fechá-la" para poder aplicar o teorema. Para isso, vamos considerar o segmento de reta γ ligando o ponto $(0, 1, 0)$ ao ponto $(1, 0, 0)$, percorrido nesse sentido. Dessa forma, $C \cup \gamma$ delimitam uma região do plano $x + y = 1$, orientada com vetor normal apontando na direção da parte negativa dos eixos x e y . Dessa

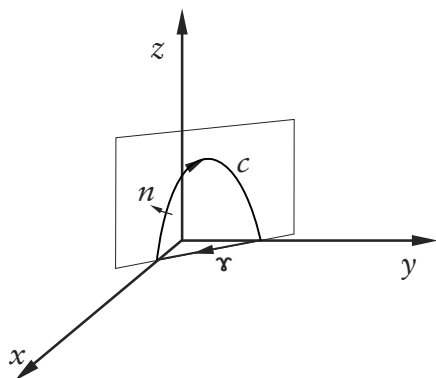


Figura 15.10

forma, segue do Teorema de Stokes que

$$\oint_{C \cup \gamma} F \cdot dr = \iint_S (\text{rot}F \cdot n) dS = 0$$

e, portanto,

$$\int_C F \cdot dr = - \int_{\gamma} F \cdot dr.$$

Para resolver a integral de linha ao longo de γ , note que o segmento de reta possui equação $x + y = 1, z = 0, 0 \leq x \leq 1$,

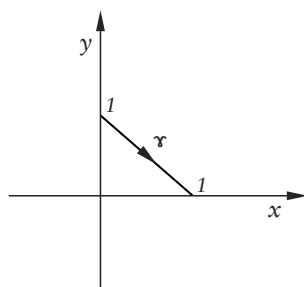


Figura 15.11

e, portanto, uma parametrização natural é dada por


$$\begin{aligned}\sigma(t) &= (t, 1-t, 0), \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \sigma'(t) &= (1, -1, 0)\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} F \cdot dr &= \\ \int_0^1 \left((1-t) \cdot 0 + t^2, t \cdot 0 - (1-t)^2, t(1-t) \right) \cdot (1, -1, 0) dt &= \\ \int_0^1 \left(t^2 + (1-t)^2 \right) dt &= \int_0^1 (2t^2 - 2t + 1) dt = \\ \left[\frac{2t^3}{3} - t^2 + t \right]_{t=0}^{t=1} &= \frac{2}{3},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_C F \cdot dr = -\frac{2}{3}.$$

 No exemplo anterior, o Teorema de Stokes não resolveu diretamente a integral desejada. No entanto, precisamos calcular a integral sobre um segmento de reta no lugar de uma semicircunferência, o que foi consideravelmente mais simples.


Na Aula 10, apresentamos, como consequência do Teorema de Green, o Teorema das Quatro Equivalências, que caracterizava um campo vetorial conservativo no plano. Da mesma forma, o Teorema de Stokes nos permite apresentar um teorema que caracteriza um campo conservativo em \mathbb{R}^3 . Seu enunciado será dado a seguir e a demonstração será omitida por ser inteiramente análoga a do teorema visto na Aula 10.

Teorema 15.2 (Teorema das Quatro Equivalências).

Seja $F : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe C^1 ex-ceto, possivelmente, em um número finito de pontos. As seguintes condições são equivalentes:

- i. $\oint_C F \cdot dr = 0$, qualquer que seja a curva fechada C , de classe C^1 por partes, contida em U .

- ii. A integral de linha de F do ponto A ao ponto B independe da curva C , de classe C^1 por partes, contida em U , ligando A a B .
- iii. F é um campo vetorial conservativo em U .
- iv. $\text{rot}F = \vec{0}$ em U .

 Diferentemente do Teorema visto na Aula 10, aqui F pode não ser de classe C^1 em um número finito de pontos. Isso acontece, pois na prova de que $(iv) \implies (i)$, dada a curva fechada C , utilizamos o Teorema de Stokes a uma superfície S escolhida adequadamente de modo que $C = \partial S$ e F seja de classe C^1 sobre S .

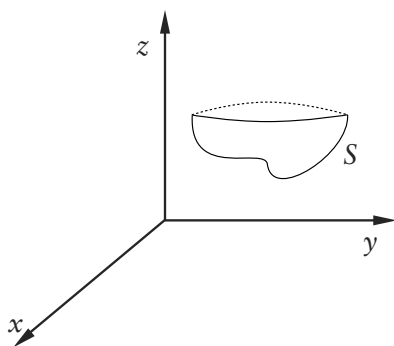


Figura 15.12

Exemplo 15.2.

Considere o campo vetorial

$$F(x, y, z) = (zy + x, xz + y, xy + z).$$

- a. Calcule a integral de linha de F ao longo do segmento de reta ligando o ponto $(0, 0, 0)$ ao ponto $(1, 1, 2)$, percorrido nesse sentido.

- b. Verifique se F é conservativo. Em caso, afirmativo, encontre uma função potencial f .
- c. Determine a integral de linha de F ao longo da curva de interseção do parabolóide $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 2$, com o plano $x = y$, $x \geq 0$, percorrida no sentido decrescente de z .

Solução:

- a. Vamos calcular a integral de linha solicitada utilizando a seguinte parametrização do segmento C :

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= (t, t, 2t), 0 \leq t \leq 1 \\ \sigma'(t) &= (1, 1, 2).\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}\int_C F \cdot dr &= \int_0^1 (2t \cdot t + t \cdot t \cdot 2t + t \cdot t + 2t) \cdot (1, 1, 2) dt = \\ &= \int_0^1 (6t^2 + 6t) dt = [2t^3 + 3t^2]_{t=0}^{t=1} = 5.\end{aligned}$$

- b. Visto que F é de classe C^1 em \mathbb{R}^3 , basta verificarmos se $\text{rot} F = \vec{0}$. De fato, F é conservativo, pois

$$\text{rot} F = (x - x, y - y, z - z) = (0, 0, 0) = \vec{0}.$$

Vamos, então, determinar sua função potencial f . Seguindo o procedimento visto na Aula 8, observamos que $F(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$, se e somente se:


- i. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = zy + x \implies f(x, y, z) = \int (zy + x) dx = xyz + \frac{x^2}{2} + A(y, z)$
- ii. $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = xz + y \implies f(x, y, z) = \int (xz + y) dy = xyz + \frac{y^2}{2} + B(x, z)$
- iii. $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = xy + z \implies f(x, y, z) = \int (xy + z) dz = xyz + \frac{z^2}{2} + C(x, y)$

Comparando as três identidades anteriores, verificamos que, para todas serem iguais, devemos ter

$$A(y, z) = \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}, B(x, z) = \frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{2} \text{ e } C(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

e, nesse caso,

$$f(x, y, z) = xyz + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}.$$

 Como vimos na Aula 8, a integral de linha do campo F ao longo de qualquer curva C que vai do ponto $(0, 0, 0)$ ao ponto $(1, 1, 2)$, é dada por

$$\int_C F \cdot dr = f(1, 1, 2) - f(0, 0, 0) = 5.$$

- c. Observe que a curva C é um pedaço de parábola, começando no ponto $(1, 1, 2)$ e terminando no ponto $(0, 0, 0)$.

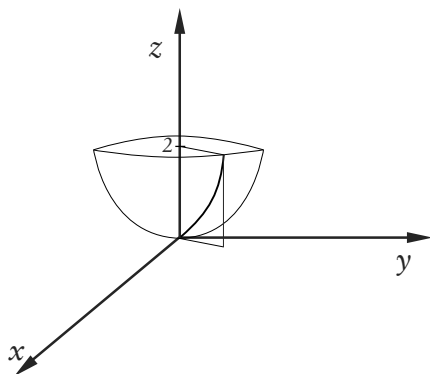


Figura 15.13

Assim, a mesma curva, percorrida no sentido contrário, C^- , tem as características da observação acima e, portanto,

$$F \cdot dr = 5.$$

Logo, a integral desejada é dada por

$$\int_C F \cdot dr = - \int_{C^-} F \cdot dr = -5.$$

