Fundação

CECIERJ

Consórcio cederj

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Caderno de Coordenação da Disciplina Cálculo II

Volume 2

Cruz Sonia Quiroga de Caldas
Pedro do Nascimento Nóbrega

GOVERNO DO Rio de Janeiro

SECRETARIA DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO

UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

Ministério da Educação

GOVERNO FEDERAL BRASIL PÁTRIA EDUCADORA

Apoio:

FAPERJ

Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj
Rua da Ajuda, 5 – Centro – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20040-000
Tel.: (21) 2333-1112 Fax: (21) 2333-1116

Material Didático

Elaboração de Conteúdo
Cruz Sonia Quiroga de Caldas
Pedro do Nascimento Nóbrega

Biblioteca
Raquel Cristina da Silva Tiellet
Simone da Cruz Correa de Souza
Vera Vani Alves de Pinho

Coordenação de Equipe
Marcelo Freitas

Ilustração
Ronaldo d'Aguiar Silva

Programação Visual
Aline da S. Madeira Brondani

Revisão Linguística e Tipográfica
Patrícia Paula

Coordenação de Produção
Fábio Rapello Alencar

Assistente de Produção
Bianca Giacomelli

Capa
Eduardo Bordoni
Fábio Muniz

Produção Gráfica
Patrícia Esteves
Ulisses Schnaider

C145

Caldas, Cruz Sonia Quiroga de.
Caderno de Coordenação da Disciplina Cálculo 2: volume 2 / Cruz Sonia Quiroga de Caldas ; Pedro do Nascimento Nóbrega - Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2015.
342p.; 19 x 26,5 cm.

ISBN: 978-85-458-0055-2

1. Cálculo. I. Nóbrega, Pedro do Nascimento. II. Título.

CDD: 515

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.
Texto revisado segundo o novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa.

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador
Luiz Fernando de Souza Pezão

Secretário de Estado de Ciência, Tecnologia e Inovação
Gustavo Tutuca

Instituições Consorciadas

CEFET/RJ - Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca
Diretor-geral: Carlos Henrique Figueiredo Alves

FAETEC - Fundação de Apoio à Escola Técnica
Presidente: Wagner Granja Victer

IFF - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense
Reitor: Luiz Augusto Caldas Pereira

UENF - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro
Reitor: Luis César Passoni

UERJ - Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Reitor: Ruy Garcia Marques

UFF - Universidade Federal Fluminense
Reitor: Sidney Luiz de Matos Mello

UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Reitor: Roberto Leher

UFRRJ - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Reitora: Ana Maria Dantas Soares

UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Reitor: Luiz Pedro San Gil Jutuca

Sumário

Semana 10

MÉTODO DE SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA

As substituições trigonométricas nos permitem substituir os binômios $a^2 - u^2$, $a^2 + u^2$ e $u^2 - a^2$ pelo quadrado de um único termo e, portanto, transformar várias integrais que contêm raízes quadradas em integrais, que podemos calcular diretamente. As substituições mais comuns são $u = a \operatorname{sen}\theta$, $u = a \operatorname{tg}\theta$ e $u = a\sec\theta$. Elas vêm dos triângulos retângulos de referência correspondentes. Vejamos caso a caso:

Substituição Trigonométrica ($a > 0$)

1. Para integrais que envolvem $\sqrt{a^2 - u^2}$. Observe, na figura a seguir, neste caso, a hipotenusa do triângulo retângulo tem que ser a, um cateto é u e o outro cateto pelo Teorema de Pitágoras só pode ser $\sqrt{a^2 - u^2}$.

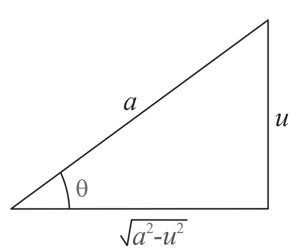


Figura 10.1: Triângulo de referência ou triângulo associado ao caso 1.

Portanto, da figura, temos que $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{u}{a}$ e $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a}$.

!

Faça a substituição $u = a \operatorname{sen}\theta$, logo $du = a\cos\theta\, d\theta$ e $\sqrt{a^2 - u^2} = a\cos\theta$, onde $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$.

2. Para integrais que envolvem $\sqrt{a^2+u^2}$. Observe, na figura a seguir, neste caso, um cateto é u, o outro cateto é a e a hipotenusa do triângulo retângulo pelo Teorema de Pitágoras só pode ser $\sqrt{a^2+u^2}$.

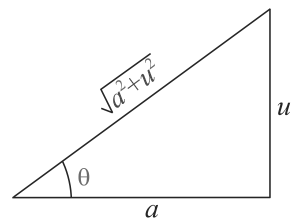


Figura 10.2: Triângulo de referência ou triângulo associado ao caso 2.

Portanto, da figura, temos que $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{u}{a}$ e $\sec\theta = \dfrac{\sqrt{a^2+u^2}}{a}$.

> **!**
>
> Faça a substituição $u = a\operatorname{tg}\theta$, logo $du = a\sec^2\theta\, d\theta$. Então, $\sqrt{a^2+u^2} = a\sec\theta$, onde $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

3. Para integrais que envolvem $\sqrt{u^2-a^2}$. Observe, na figura a seguir, neste caso, a hipotenusa do triângulo retângulo tem que ser u, um cateto é a e o outro cateto pelo Teorema de Pitágoras só pode ser $\sqrt{u^2-a^2}$.

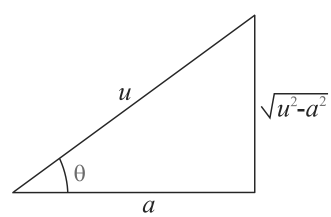


Figura 10.3: Triângulo de referência ou triângulo associado ao caso 3.

Portanto, da figura, temos que $\sec\theta = \dfrac{u}{a}$ e $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sqrt{u^2-a^2}}{a}$.

> **!**
>
> Faça a substituição $u = a\sec\theta$, logo $du = a\sec\theta\operatorname{tg}\theta\, d\theta$. Então, $\sqrt{u^2-a^2} = \pm a\operatorname{tg}\theta$, onde $0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2}$ ou $\dfrac{\pi}{2} < \theta \le \pi$. Use o valor positivo se $u > a$ e o negativo se $u < -a$.

✍ i. As restrições em θ garantem, que a função que define a substituição é uma a uma e assim fica garantido que em cada caso existe a função inversa. Na verdade, esses são os mesmos intervalos sobre os quais as funções (arco seno, arco tangente e arco secante) estão definidas.

ii. **!**

No método de substituição trigonométrica observe que: no primeiro e no segundo casos u tratase de um cateto do triângulo retângulo, nesses casos, é conveniente colocar u como o cateto oposto ao ângulo θ, já no terceiro caso u é a hipotenusa do triângulo retângulo, neste caso convém colocar o termo que contem u, ou seja, $\sqrt{u^2 - a^2}$ como cateto oposto ao ângulo θ e como cateto adjacente justamente a. (Veja que assim procedemos nos triângulos de referência associados a cada caso mostrado nas páginas anteriores).

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Exercício 10.1.

Substituição trigonométrica $u = a \operatorname{sen}\theta$

Calcule:

a. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}\,dx$

b. $\displaystyle\int \frac{2x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

Solução:

a. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}\,dx$

Primeiro, note que nenhuma das regras básicas de integração é aplicável. Para usar uma substituição trigonométrica, observe que $\sqrt{25-x^2}$ é da forma $\sqrt{a^2-x^2}$ com $a = 5$.

Observe, na **Figura 10.4** a seguir, que, neste caso, a hipotenusa do triângulo retângulo tem que ser $a = 5$, o cateto oposto ao ângulo θ é x e o outro cateto, pelo Teorema de Pitágoras, só pode ser $\sqrt{5^2 - x^2} = \sqrt{25 - x^2}$.

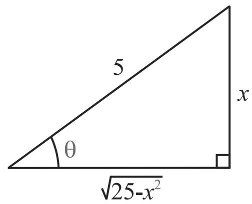


Figura 10.4

Do triângulo retângulo associado, tem-se:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = 5\operatorname{sen}\theta \\ dx = 5\cos\theta\, d\theta \end{cases}.$$

Também $\dfrac{\sqrt{25-x^2}}{5} = \cos\theta \Rightarrow \sqrt{25-x^2} = 5\cos\theta.$

Assim,

$$\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}\,dx = \int \frac{5\cos\theta}{5\operatorname{sen}\theta}(5\cos\theta)d\theta = 5\int \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}d\theta$$
$$= 5\int \frac{(1-\operatorname{sen}^2\theta)}{\operatorname{sen}\theta}d\theta = 5\int(\operatorname{cossec}\theta - \operatorname{sen}\theta)d\theta$$
$$= -5\ln|\operatorname{cossec}\theta + \operatorname{cotg}\theta| + 5\cos\theta + C$$

Note-se que estamos utilizando a Fórmula 6.6 provada no Exercício 6.3 deste caderno:

$$\int \operatorname{cossec} x\, dx = -\ln|\operatorname{cossec} x + \operatorname{cotg} x| + C.$$

Olhando novamente o triângulo associado observamos que $\operatorname{cossec}\theta = \dfrac{x}{5}$ e $\operatorname{cotg}\theta = \dfrac{\sqrt{25-x^2}}{x}$. Assim,

$$\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}dx = -5\ln\left|\frac{5}{x} + \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}\right| + 5\frac{\sqrt{25-x^2}}{5} + C.$$

Ou ainda,

$$\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}dx = -5\ln\left|\frac{5+\sqrt{25-x^2}}{x}\right| + \sqrt{25-x^2} + C.$$

b. $\displaystyle\int \frac{2x^3}{\sqrt{4-x^2}}dx$

Primeiro, note que nenhuma das regras básicas de integração é aplicável. Para usar uma substituição trigonométrica, observe que $\sqrt{4-x^2}$ é da forma $\sqrt{a^2-x^2}$ com $a=2$.

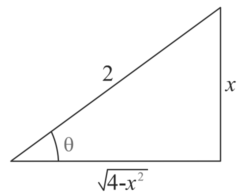


Figura 10.5

Do triângulo retângulo associado, tem-se:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\operatorname{sen}\theta \\ dx = 2\cos\theta\, d\theta \end{cases}.$$

Também $\quad \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2} = \cos\theta \Rightarrow \sqrt{4-x^2} = 2\cos\theta.$

Observe que $\sqrt{4-x^2}$ está no denominador, assim é preciso que $\cos\theta$ seja maior do que zero. Note-se que $\cos\theta > 0$ para $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

Assim, $\quad \displaystyle\int \frac{2x^3}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int \frac{2(2\operatorname{sen}\theta)^3}{2\cos\theta}(2\cos\theta)d\theta =$

$$= 2^4 \int \operatorname{sen}^3\theta d\theta = 16\int (1-\cos^2\theta)\operatorname{sen}\theta\, d\theta \qquad (10.1)$$

Assim, temos que calcular agora uma integral que envolve potências de funções trigonométricas, que foi o assunto da semana anterior.

Fazendo a substituição $\begin{cases} u = \cos\theta \\ du = -\operatorname{sen}\theta\, d\theta \end{cases}$ na última integral da direita, temos

$$16\int (1-\cos^2\theta)\operatorname{sen}\theta\, d\theta = -16\int (1-\cos^2\theta)(-\operatorname{sen}\theta)d\theta$$

$$= -16\int (1-u^2)du = -16u + 16\frac{u^3}{3} + C = -16\cos\theta + 16\frac{\cos^3\theta}{3} + C$$

$$= -16\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + \frac{16}{3}\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)^3 + C$$

$$= -8\sqrt{4-x^2} + \frac{2}{3}(4-x^2)\sqrt{4-x^2} + C \qquad (10.2)$$

Substituindo 10.2 em 10.1, temos finalmente

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{4-x^2}}dx = -8\sqrt{4-x^2} + \frac{2}{3}(4-x^2)\sqrt{4-x^2} + C.$$

Exercício 10.2.

Substituição trigonométrica $u = a\,\mathrm{tg}\,\theta$

Calcule:

a. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{25+x^2}}{x}\,dx$

b. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$

Solução:

a. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{25+x^2}}{x}\,dx$

Primeiro, note que nenhuma das regras básicas de integração é aplicável. Para usar uma substituição trigonométrica, observe que estamos no caso de integrais que têm termos da forma $\sqrt{a^2+x^2}$ com $a = 5$.

Observe, na **Figura 10.6** a seguir: neste caso o cateto oposto ao ângulo θ é x, o outro cateto é $a = 5$ e a hipotenusa do triângulo retângulo, pelo Teorema de Pitágoras, só pode ser $\sqrt{5^2+x^2} = \sqrt{25+x^2}$.

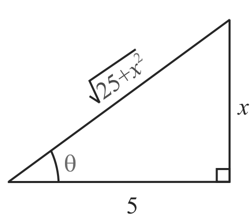


Figura 10.6

Do triângulo retângulo associado, tem-se:

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{x}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = 5\,\mathrm{tg}\,\theta \\ dx = 5\sec^2\theta\,d\theta \end{cases}.$$

Também $\dfrac{\sqrt{25+x^2}}{5} = \sec\theta \Rightarrow \sqrt{25+x^2} = 5\sec\theta$.

Assim, $\displaystyle\int \frac{\sqrt{25+x^2}}{x}dx = \int \frac{5\sec\theta}{5\,\mathrm{tg}\,\theta} 5\sec^2\theta\, d\theta =$

$$= 5\int \frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta}} \sec^2\theta\, d\theta = 5\int \mathrm{cossec}\,\theta \sec^2\theta\, d\theta \qquad (10.3)$$

Aplicaremos integração por partes na última integral à direita.

Seja $\begin{cases} u = \mathrm{cossec}\,\theta \Rightarrow du = -\mathrm{cossec}\,\theta\ \mathrm{cotg}\,\theta\, d\theta \\ dv = \sec^2\theta\, d\theta \Rightarrow v = \mathrm{tg}\,\theta \end{cases}$.

Assim,

$$\int \underbrace{\mathrm{cossec}\,\theta}_{u} \underbrace{\sec^2\theta\, d\theta}_{dv} = \mathrm{cossec}\,\theta\ \mathrm{tg}\,\theta - \int \mathrm{tg}\,\theta(-\mathrm{cossec}\,\theta\ \mathrm{cotg}\,\theta)d\theta$$

$$= \mathrm{cossec}\,\theta\, \mathrm{tg}\,\theta + \int \mathrm{cossec}\,\theta d\theta = \mathrm{cossec}\,\theta\, \mathrm{tg}\,\theta - \ln|\mathrm{cossec}\,\theta + \mathrm{cotg}\,\theta| + C$$

(Note-se que estamos utilizando a Fórmula 6.6 provada no Exercício 6.3 deste caderno: $\displaystyle\int \mathrm{cossec}\, x\, dx = -\ln|\mathrm{cossec}\, x + \mathrm{cotg}\, x| + C$)

Portanto, $\displaystyle 5\int \mathrm{cossec}\,\theta \sec^2\theta\, d\theta =$

$$= 5\,\mathrm{cossec}\,\theta\ \mathrm{tg}\,\theta - 5\ln|\mathrm{cossec}\,\theta + \mathrm{cotg}\,\theta| + C. \qquad (10.4)$$

Voltando ao triângulo associado, observamos que $\mathrm{cossec}\,\theta = \dfrac{\sqrt{25+x^2}}{x}$ e $\mathrm{cotg}\,\theta = \dfrac{5}{x}$, logo

$$5\int \mathrm{cossec}\,\theta \sec^2\theta\, d\theta = 5\frac{\sqrt{25+x^2}}{x}\frac{x}{5} - 5\ln\left|\frac{\sqrt{25+x^2}}{x} + \frac{5}{x}\right| + C$$

$$= \sqrt{25+x^2} - 5\ln\left|\frac{5+\sqrt{25+x^2}}{x}\right| + C. \qquad (10.5)$$

Finalmente, substituindo 10.5 em 10.3, obtemos

$$\int \frac{\sqrt{25+x^2}}{x}dx = \sqrt{25+x^2} - 5\ln\left|\frac{5+\sqrt{25+x^2}}{x}\right| + C.$$

b. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^2}}dx$

Primeiro, note que nenhuma das regras básicas de integração é aplicável. Para usar uma substituição trigonométrica, observe que estamos no caso de integrais que têm termos da forma $\sqrt{a^2+x^2}$ com $a = 2$.

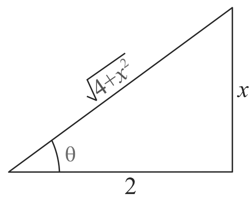


Figura 10.7

Do triângulo retângulo associado, tem-se:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\operatorname{tg}\theta \\ dx = 2\sec^2\theta\, d\theta \end{cases}.$$

Também $\dfrac{\sqrt{4+x^2}}{2} = \sec\theta \Rightarrow \sqrt{4+x^2} = 2\sec\theta.$

Assim,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^2}}dx = \int \frac{2^2\operatorname{tg}^2\theta}{2\sec\theta}2\sec^2\theta\, d\theta = 4\int \operatorname{tg}^2\theta \sec\theta\, d\theta \tag{10.6}$$

Observe que agora usamos a identidade trigonométrica $\operatorname{tg}^2\theta = \sec^2\theta - 1$ em 10.6 para obter

$$4\int \operatorname{tg}^2\theta \sec\theta\, d\theta = 4\int(\sec^2\theta - 1)\sec\theta\, d\theta =$$

$$= 4\int \sec^3\theta\, d\theta - 4\int \sec\theta\, d\theta. \tag{10.7}$$

Usando a Fórmula 1 da Aula 21 e a Fórmula obtida no Exemplo 21.4, Módulo 2, temos:

$$\int \sec\theta\, d\theta = \ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + C \tag{10.8}$$

$$\int \sec^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\sec\theta\operatorname{tg}\theta + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + C \tag{10.9}$$

Substituindo 10.9 e 10.8 em 10.7, temos

$$4\int \operatorname{tg}^2\theta \sec\theta\, d\theta = 2\sec\theta\operatorname{tg}\theta + 2\ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| - 4\ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + C$$

$$= 2\sec\theta\operatorname{tg}\theta - 2\ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + C$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{4+x^2}}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right) - 2\ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| + C_1$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{4+x^2} - 2\ln\left|\sqrt{4+x^2}+x\right| + C. \qquad (10.10)$$

Finalmente, substituindo 10.10 em 10.6, obtemos

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^2}}dx = \frac{x}{2}\sqrt{4+x^2} - 2\ln\left|\sqrt{4+x^2}+x\right| + C.$$

Exercício 10.3.

Substituição trigonométrica $u = a \sec\theta$

Calcule:

a. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx$, onde $x > 5$

b. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-4)^{\frac{3}{2}}}$, onde $x > 2$

Solução:

a. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx$, onde $x > 5$

Primeiro, note que nenhuma das regras básicas de integração é aplicável. Para usar uma substituição trigonométrica, observe que estamos no caso de integrais que têm termos da forma $\sqrt{x^2-a^2}$ com $a = 5$, onde $x > 5$.

Observe, na **Figura 10.8**, que neste caso a hipotenusa do triângulo retângulo tem que ser x, um cateto é $a = 5$ e o outro cateto (justamente o oposto ao ângulo θ), pelo Teorema de Pitágoras, só pode ser $\sqrt{x^2-5^2} = \sqrt{x^2-25}$. Como $x > 5$, lembre-se de que $\sqrt{x^2-5^2} = 5\,\mathrm{tg}\,\theta$, onde $0 \leq \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

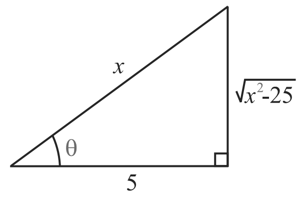


Figura 10.8

Do triângulo associado, tem-se:

$$\sec\theta = \frac{x}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = 5\sec\theta \\ dx = 5\sec\theta\,\operatorname{tg}\theta\,d\theta \end{cases}.$$

Também $\quad \dfrac{\sqrt{x^2-25}}{5} = \operatorname{tg}\theta \Rightarrow \sqrt{x^2-25} = 5\operatorname{tg}\theta$

Assim, $\quad \displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}\,dx = \int \frac{5\operatorname{tg}\theta\, 5\sec\theta\,\operatorname{tg}\theta\,d\theta}{(5\sec\theta)} =$

$$5\int \operatorname{tg}^2\theta\,d\theta = 5\int(\sec^2\theta - 1)d\theta = 5\operatorname{tg}\theta - 5\theta + C.$$

É claro do triângulo associado que $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sqrt{x^2-25}}{5}$ e como $x > 5$, lembre-se de que $\sqrt{x^2-5^2} = 5\operatorname{tg}\theta$, onde $0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2}$. As restrições em θ garantem que a função que define a substituição sec é injetora e assim fica garantido que existe a função inversa $\theta = \operatorname{arcsec}\left(\dfrac{x}{5}\right)$.

Finalmente, reescrevendo como uma função de x, resulta

$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-25} - 5\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{5}\right) + C.$$

b. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-4)^{\frac{3}{2}}}$, onde $x > 2$

Primeiro, note que nenhuma das regras básicas de integração é aplicável. Para usar uma substituição trigonométrica, observe que estamos no caso de integrais que têm termos da forma, $\sqrt{x^2-a^2}$ com $a = 2$, onde $x > 2$.

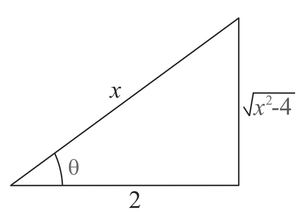


Figura 10.9

Do triângulo retângulo associado, tem-se:

$$\sec\theta = \frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\sec\theta \\ dx = 2\sec\theta\,\operatorname{tg}\theta\,d\theta \end{cases}.$$

Também $\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{2} = \operatorname{tg}\theta \Rightarrow \sqrt{x^2-4} = 2\operatorname{tg}\theta$.

Observe que $\sqrt{x^2-4}$ está no denominador, assim é preciso que $\operatorname{tg}\theta$ seja maior do que zero. Note-se que $\operatorname{tg}\theta > 0$ para $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

Assim,

$$\int \frac{dx}{(x^2-4)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{2\sec\theta\operatorname{tg}\theta\, d\theta}{(2\operatorname{tg}\theta)^3} = \frac{1}{2^2}\int \frac{\sec\theta}{\operatorname{tg}^2\theta} d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos\theta}\frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} d\theta = \frac{1}{4}\int \operatorname{sen}^{-2}\theta\cos\theta\, d\theta$$

Fazendo a substituição $\begin{cases} u = \operatorname{sen}\theta \\ du = \cos\theta\, d\theta \end{cases}$, obtemos

$$\int \frac{dx}{(x^2-4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4}\int u^{-2} du = \frac{1}{4}\frac{u^{-1}}{(-1)} + C = -\frac{1}{4u} + C =$$

$$= -\frac{1}{4\operatorname{sen}\theta} + C = -\frac{1}{4\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\right)} + C.$$

Finalmente, temos

$$\int \frac{dx}{(x^2-4)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{4\sqrt{x^2-4}} + C.$$

INTEGRAIS ENVOLVENDO $ax^2 + bx + c$

As integrais que envolvem a expressão quadrática $ax^2 + bx + c$, onde $a \neq 0$ e $b \neq 0$, podem ser frequentemente calculadas, primeiro **completando o quadrado** e depois fazendo-se uma substituição apropriada. Os exemplos a seguir ilustram esta ideia.

Exercício 10.4.

Calcule as seguintes integrais:

a. $\displaystyle\int 2\sqrt{8-2x-x^2}\, dx$

b. $\displaystyle\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

c. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+6x+13)^2}$

d. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+4x+13)^{\frac{3}{2}}}$

e. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+4x-5}}{x+2}\,dx,$ onde $x>2$

f. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-6x+5}},$ onde $x>5$

Sugestão: Completando o quadrado, transforme o integrando em uma função para a qual a substituição trigonométrica é apropriada. Use depois, caso necessário, uma substituição trigonométrica apropriada.

Solução:

a. $\displaystyle\int 2\sqrt{8-2x-x^2}\,dx$

Completando o quadrado como foi sugerido, obtém-se

$8-2x-x^2 = 8-(x^2+2x) = 8+1-(x^2+2x+1) = 9-(x+1)^2.$

Isso sugere a substituição $\left\{\begin{array}{l} u = x+1 \\ du = dx \end{array}\right.$.

Assim,

$$\int 2\sqrt{8-2x-x^2}\,dx = \int 2\sqrt{9-(x+1)^2}\,dx = 2\int \sqrt{9-u^2}\,du.$$

Primeiro, note que nenhuma das regras básicas de integração é aplicável. Para usar uma substituição trigonométrica, observe que estamos no caso de integrais que têm termos da forma $\sqrt{a^2-u^2}$ com $a=3$.

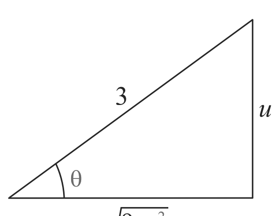


Figura 10.10

Do triângulo retângulo associado, tem-se:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{u}{3} \Rightarrow \begin{cases} u = 3\operatorname{sen}\theta \\ du = 3\cos\theta\, d\theta \end{cases}.$$

Também, $\dfrac{\sqrt{9-u^2}}{3} = \cos\theta \Rightarrow \sqrt{9-u^2} = 3\cos\theta$.

Assim,

$$\int 2\sqrt{9-(x+1)^2}\,dx = 2\int \sqrt{9-u^2}\,du = 2\int 3\cos\theta(3\cos\theta)d\theta =$$

$$= 18\int \cos^2\theta\, d\theta = 18\int \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta = 9\int (1+\cos 2\theta)d\theta =$$

$$= 9\theta + \frac{9}{2}\operatorname{sen} 2\theta + C = 9\theta + \frac{9}{2} 2\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta + C =$$

$$= 9\operatorname{arcsen}\left(\frac{u}{3}\right) + 9\left(\frac{u}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{9-u^2}}{3}\right) + C =$$

$$= 9\operatorname{arcsen}\left(\frac{u}{3}\right) + u\sqrt{9-u^2} + C =$$

$$= 9\operatorname{arcsen}\left(\frac{x+1}{3}\right) + (x+1)\sqrt{9-(x+1)^2} + C =$$

$$= 9\operatorname{arcsen}\left(\frac{x+1}{3}\right) + (x+1)\sqrt{8-2x-x^2} + C.$$

b. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

Completando o quadrado como foi sugerido, obtém-se

$$4x - x^2 = -(x^2-4x) = 4 - (x^2-4x+4) = 4-(x-2)^2.$$

Isso sugere a substituição $\begin{cases} u = x-2 \Rightarrow x = u+2 \\ du = dx \end{cases}$.

Assim,

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4x-x^2}} = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}} = \int \frac{(u+2)^2\,dx}{\sqrt{4-u^2}} = \int \frac{(u^2+4u+4)\,du}{\sqrt{4-u^2}} =$$

$$= \underbrace{\int \frac{u^2du}{\sqrt{4-u^2}}}_{(3)} + 4\underbrace{\int \frac{u\,du}{\sqrt{4-u^2}}}_{(2)} + 4\underbrace{\int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}}}_{(1)} \qquad (10.11)$$

Resolvendo (1):

Note-se que uma das regras básicas de integração $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \text{arcsen}\left(\frac{u}{a}\right) + C_3$ é aplicável, logo

$$4\int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}} = 4\,\text{arcsen}\left(\frac{u}{2}\right) + C_3 = 4\,\text{arcsen}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C_3 \tag{10.12}$$

Resolvendo (2):

Observe que podemos integrar imediatamente (2), se fizermos uma substituição simples do tipo $z = 4-u^2 \Rightarrow dz = -2u\,du$.

De fato,

$$4\int \frac{u}{\sqrt{4-u^2}}du = 4\int (4-u^2)^{-\frac{1}{2}}u\,du = -2\int z^{-\frac{1}{2}}dz =$$

$$= -2\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C_2 = -4(4-u^2)^{\frac{1}{2}} + C_2 = -4\sqrt{4-u^2} + C_2 =$$

$$= -4\sqrt{4-(x-2)^2} + C_2 = -4\sqrt{4x-x^2} + C_2 \tag{10.13}$$

Resolvendo (3):

Note-se que nenhuma das regras básicas de integração é aplicável. Vamos usar uma substituição trigonométrica; observe que $\sqrt{4-u^2}$ é da forma $\sqrt{a^2-x^2}$ com $a = 2$.

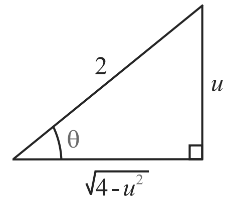


Figura 10.11

Do triângulo associado, tem-se:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{u}{2} \Rightarrow \begin{cases} u = 2\,\text{sen}\,\theta \\ du = 2\cos\theta\,d\theta \end{cases}.$$

Também $\frac{\sqrt{4-u^2}}{2} = \cos\theta \Rightarrow \sqrt{4-u^2} = 2\cos\theta.$

Observe que $\sqrt{4-u^2}$ está no denominador, assim é preciso que $\cos\theta$ seja maior do que zero. Note-se que $\cos\theta > 0$ para $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{4-u^2}} &= \int \frac{(2\operatorname{sen}\theta)^2 2\cos\theta}{2\cos\theta} d\theta = 4\int \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta \\
&= 4\int \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta = 2\theta - \operatorname{sen} 2\theta + C_1 \\
&= 2\theta - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C_1 \\
&= 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{u}{2}\right) - 2\left(\frac{u}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{4-u^2}}{2}\right) + C_1 \\
&= 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{u}{2}\right) - \frac{u}{2}\sqrt{4-u^2} + C_1 \\
&= 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{x-2}{2}\right) - \frac{x-2}{2}\sqrt{4-(x-2)^2} + C_1
\end{aligned}$$

$$= 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{x-2}{2}\right) - \frac{x-2}{2}\sqrt{4x-x^2} + C_1 \qquad (10.14)$$

Substituindo 10.14, 10.13 e 10.12 em 10.11, obtemos

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4x-x^2}} = 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{x-2}{2}\right) - \frac{(x-2)}{2}\sqrt{4x-x^2} - 4\sqrt{4x-x^2} + 4\operatorname{arcsen}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C$$

Finalmente, resulta

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4x-x^2}} = 6\operatorname{arcsen}\left(\frac{x-2}{2}\right) - \frac{(x+6)}{2}\sqrt{4x-x^2} + C.$$

c. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+6x+13)^2}$

Completando o quadrado, obtém-se

$$x^2+6x+13 = (x^2+6x+9) - 9 + 13 = (x+3)^2 + 4.$$

Isso sugere a substituição $\begin{cases} u = x+3 \\ du = dx \end{cases}$.

Assim,

$$\int \frac{dx}{(x^2+6x+13)^2} = \int \frac{dx}{[(x+3)^2+4]^2} = \int \frac{du}{(u^2+4)^2} \qquad (10.15)$$

Primeiro, note que nenhuma das regras básicas de integração é aplicável. Para usar uma substituição trigonométrica, observe que estamos no caso de integrais que têm termos da forma $\sqrt{a^2+u^2}$ com $a=2$.

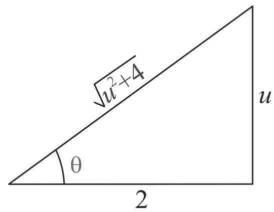


Figura 10.12

Do triângulo retângulo associado, tem-se:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{u}{2} \Rightarrow \begin{cases} u = 2\operatorname{tg}\theta \\ du = 2\sec^2\theta\, d\theta \end{cases}.$$

Também,

$$\sec\theta = \frac{\sqrt{u^2+4}}{2} \Rightarrow \sqrt{u^2+4} = 2\sec\theta \Rightarrow u^2+4 = 4\sec^2\theta.$$

Assim,

$$\int \frac{du}{(u^2+4)^2} = \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{(4\sec^2\theta)^2} = \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{16\sec^4\theta} = \frac{1}{8}\int \frac{d\theta}{\sec^2\theta}$$

$$= \frac{1}{8}\int \cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{8}\int \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{16}\theta + \frac{1}{32}\operatorname{sen}2\theta + C = \frac{1}{16}\theta + \frac{1}{32}(2\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta) + C$$

$$= \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{2}\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+4}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{u^2+4}}\right) + C.$$

Reescrevendo como uma função de x:

$$\int \frac{du}{(u^2+4)^2} = \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+3}{2}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{x+3}{x^2+6x+13}\right) + C \qquad (10.16)$$

Substituindo 10.16 em 10.15, temos

$$\int \frac{dx}{(x^2+6x+13)^2} = \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+3}{2}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{x+3}{x^2+6x+13}\right) + C.$$

d. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+4x+13)^{\frac{3}{2}}}$

Completando o quadrado, obtém-se

$$x^2+4x+13=(x^2+4x+4)-4+13=(x+2)^2+9.$$

Isso sugere a substituição $\left\{\begin{array}{l} u=x+2 \\ du=dx \end{array}\right.$.

Assim,

$$\int \frac{dx}{(x^2+4x+13)^{\frac{3}{2}}}=\int \frac{dx}{[(x+2)^2+9]^{\frac{3}{2}}}=\int \frac{du}{(u^2+9)^{\frac{3}{2}}} \tag{10.17}$$

Note-se que nenhuma das regras básicas de integração é aplicável. Vamos usar uma substituição trigonométrica.

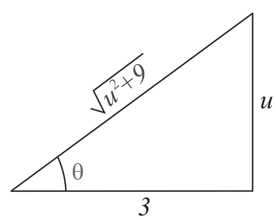


Figura 10.13

Do triângulo associado, tem-se:

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{u}{3}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} u=3\operatorname{tg}\theta \\ du=3\sec^2\theta\,d\theta \end{array}\right. .$$

Também,

$$\sec\theta=\frac{\sqrt{u^2+9}}{3}\Rightarrow\sqrt{u^2+9}=3\sec\theta\Rightarrow u^2+9=9\sec^2\theta.$$

Assim,

$$\int \frac{du}{(u^2+9)^{\frac{3}{2}}}=\int \frac{3\sec^2\theta\,d\theta}{(3^2\sec^2\theta)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{9}\int \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\sec^3\theta}=\frac{1}{9}\int \frac{d\theta}{\sec\theta}$$

$$=\frac{1}{9}\int \cos\theta\,d\theta=\frac{1}{9}\operatorname{sen}\theta+C=\frac{1}{9}\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+9}}\right)+C.$$

Logo,

$$\int \frac{du}{(u^2+9)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{9}\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+13}}\right)+C. \tag{10.18}$$

Substituindo 10.18 em 10.17, resulta

$$\int \frac{dx}{(x^2+4x+13)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{9}\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+13}}\right) + C.$$

e. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+4x-5}}{x+2}\,dx$, onde $x > 1$

Completando o quadrado, obtém-se

$$x^2+4x-5 = (x^2+4x+4)-4-5 = (x+2)^2-9.$$

Isso sugere a substituição $\begin{cases} u = x+2 \Rightarrow x = u-2 \\ du = dx \end{cases}$. Note-se que como $x > 1$, então $u > 3$.

Assim,

$$\int \frac{\sqrt{x^2+4x-5}}{x+2}dx = \int \frac{\sqrt{(x+2)^2-9}}{x+2}dx = \int \frac{\sqrt{u^2-9}}{u}du.$$

Primeiro, note que nenhuma das regras básicas de integração é aplicável. Para usar uma substituição trigonométrica, observe que estamos no caso de integrais que têm termos da forma $\sqrt{u^2-a^2}$ com $a = 3$, onde $u > 3$.

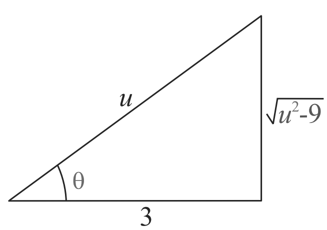


Figura 10.14

Do triângulo retângulo associado, tem-se:

$$\sec\theta = \frac{u}{3} \Rightarrow \begin{cases} u = 3\sec\theta \\ du = 3\sec\theta\,\operatorname{tg}\theta\,d\theta \end{cases}.$$

Também,

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{u^2-9}}{3} \Rightarrow \sqrt{u^2-9} = 3\,\operatorname{tg}\theta.$$

Assim,

$$\int \frac{\sqrt{x^2+4x-5}}{x+2}dx = \int \frac{\sqrt{(x+2)^2-9}}{x+2}dx = \int \frac{\sqrt{u^2-9}}{u}du$$

$$= \int \frac{3\,\mathrm{tg}\,\theta(3\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta)}{3\sec\theta}d\theta = 3\int \mathrm{tg}^2\theta\,d\theta = 3\int(\sec^2\theta-1)d\theta$$

$$= 3\,\mathrm{tg}\,\theta - 3\theta + C = 3\frac{\sqrt{u^2-9}}{3} - 3\,\mathrm{arcsec}\,\frac{u}{3} + C$$

$$= \sqrt{x^2+4x-5} - 3\,\mathrm{arcsec}\left(\frac{x+2}{3}\right) + C$$

f. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-6x+5}}$, onde $x>5$

Completando o quadrado, obtém-se

$$x^2-6x+5 = x^2-6x+9-9+5 = (x-3)^2-4.$$

Isso sugere a substituição $\begin{cases} u = x-3 \Rightarrow x = u+3 \\ du = dx \end{cases}$. Note-se que como $x>5$, então $u>2$.

Assim,

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-6x+5}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{(x-3)^2-4}}dx =$$

$$= \int \frac{u+3}{\sqrt{u^2-4}}du = \underbrace{\int \frac{u}{\sqrt{u^2-4}}du}_{(1)} + 3\underbrace{\int \frac{du}{\sqrt{u^2-4}}}_{(2)} \qquad (10.19)$$

Resolvendo (1):

Observe que podemos integrar imediatamente (1), se fizermos uma substituição simples do tipo $z = u^2-4 \Rightarrow dz = 2u\,du \Rightarrow u\,du = \dfrac{dz}{2}$.

Assim, $\displaystyle\int \frac{u}{\sqrt{u^2-4}}du = \int (u^2-4)^{-\frac{1}{2}}u\,du = \frac{1}{2}\int z^{-\frac{1}{2}}dz$

$$= \frac{1}{2}\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C_1 = (u^2-4)^{\frac{1}{2}} + C_1 = \sqrt{u^2-4} + C_1$$

$$= \sqrt{(x-3)^2-4} + C_1 = \sqrt{x^2-6x+5} + C_1 \qquad (10.20)$$

Resolvendo (2):

Primeiro, note que nenhuma das regras básicas de integração é aplicável. Vamos usar uma substituição trigonométrica; observe que estamos no caso de integrais que têm termos da forma $\sqrt{u^2 - a^2}$ com $a = 2$, onde $u > 2$.

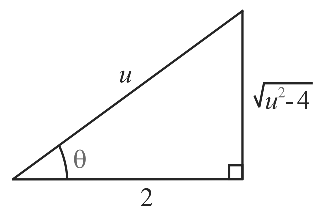


Figura 10.15

Do triângulo associado, tem-se:

$$\sec\theta = \frac{u}{2} \Rightarrow \begin{cases} u = 2\sec\theta \\ du = 2\sec\theta\,\operatorname{tg}\theta\, d\theta \end{cases} .$$

Também $\quad \operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sqrt{u^2-4}}{2} \Rightarrow \sqrt{u^2-4} = 2\operatorname{tg}\theta.$

Observe que $\sqrt{u^2-4}$ está no denominador, assim $\operatorname{tg}\theta$ tem que ser maior do que zero. Note-se que $\operatorname{tg}\theta > 0$ para $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

Assim,

$$\begin{aligned} 3\int \frac{du}{\sqrt{u^2-4}} &= 3\int \frac{2\sec\theta\,\operatorname{tg}\theta}{2\operatorname{tg}\theta} d\theta = 3\int \sec\theta\, d\theta \\ &= 3\ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + C_2 = 3\ln\left|\frac{u}{2} + \frac{\sqrt{u^2-4}}{2}\right| + C_2 \\ &= 3\ln\left|\frac{x-3+\sqrt{x^2-6x+5}}{2}\right| + C_2 \\ &= 3\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+5}\right| + C_3 \end{aligned} \tag{10.21}$$

Substituindo 10.21 e 10.20 em 10.19, resulta

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \sqrt{x^2-6x+5} + 3\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+5}\right| + C.$$

Exercício 10.5.

Mudando os limites de integração

Calcule a integral definida $\displaystyle\int_0^{\ln 4} \frac{e^t}{\sqrt{e^{2t}+9}}dt.$

Sugestão: Faça uma substituição adequada para tornar o exercício mais simples e depois poder aplicar a substituição trigonométrica.

Solução: Fazendo a substituição $\begin{cases} w = e^t \\ dw = e^t\,dt \end{cases}$, sendo a integral definida, precisamos considerar os limites de integração, isto é, enquanto t varia desde $t = 0$ até $t = \ln 4$, w varia desde $w = e^0 = 1$ até $w = e^{\ln 4} = 4$. Logo,

$$\int_0^{\ln 4} \frac{e^t}{\sqrt{e^{2t}+9}}dt = \int_1^4 \frac{dw}{\sqrt{w^2+9}} \tag{10.22}$$

Para resolver a última integral à direita, note-se que nenhuma das regras básicas de integração é aplicável. Podemos avaliar esta nova integral usando a substituição trigonométrica. Estamos no caso de integral que tem termos da forma $\sqrt{a^2+w^2}$ com $a = 3$.

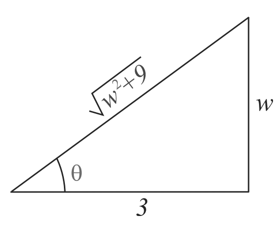


Figura 10.16

Do triângulo retângulo associado, tem-se:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{w}{3} \Rightarrow \begin{cases} w = 3\operatorname{tg}\theta \\ dw = 3\sec^2\theta\,d\theta \end{cases}.$$

Também $\quad \sec\theta = \dfrac{\sqrt{w^2+9}}{3} \Rightarrow \sqrt{w^2+9} = 3\sec\theta.$

Há duas abordagens para resolver a última integral à direita em 10.22: podemos fazer a substituição trigonométrica na integral indefinida e, então, calcular a integral definida usando os limites de integração em w, ou podemos fazer a substituição trigonométrica na integral definida e converter os limites em w nos correspondentes limites em θ.

Vamos resolver este exercício seguindo a primeira abordagem. Assim,

$$\int \frac{dw}{\sqrt{w^2+9}} = \int \frac{3\sec^2\theta\, d\theta}{3\,\sec\theta} = \int \sec\theta\, d\theta = \ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + C_1$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{w^2+9}}{3} + \frac{w}{3}\right| + C_1 = \ln\left|\sqrt{w^2+9}+w\right| + C.$$

Logo,

$$\int_0^{\ln 4} \frac{e^t}{\sqrt{e^{2t}+9}}dt = \int_1^4 \frac{dw}{\sqrt{w^2+9}}dw = \ln\left|\sqrt{w^2+9}+w\right|\Big]_1^4$$

$$= \ln\left|\sqrt{16+9}+4\right| - \ln\left|\sqrt{1+9}+1\right| = \ln 9 - \ln\left|\sqrt{10}+1\right|.$$

Exercício 10.6.

Calcule a integral definida $\displaystyle\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}\,dx.$

Solução: Primeiro, note que nenhuma das regras básicas de integração é aplicável. Vamos usar uma substituição trigonométrica, observando que estamos no caso de integrais que têm termos da forma $\sqrt{x^2-a^2}$ com $a = 3$, onde $x \geq 3$.

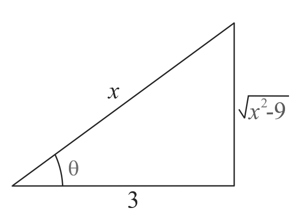


Figura 10.17

Do triângulo associado, tem-se:

$$\sec\theta = \frac{x}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 3\,\sec\theta \\ dx = 3\,\sec\theta\,\operatorname{tg}\theta\, d\theta \end{cases}.$$

Também $\quad \operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{3} \Rightarrow \sqrt{x^2-9} = 3\,\operatorname{tg}\theta.$

Há duas abordagens para resolver a integral definida dada: podemos fazer a substituição trigonométrica na integral indefinida e, então, calcular a integral definida usando os limites de integração em x, ou podemos fazer a substituição trigonométrica na integral definida e converter os limites em x nos correspondentes limites em θ.

Vamos resolver o exercício <u>seguindo a segunda abordagem</u>.

A integral dada é definida precisamos considerar a mudança dos limites de integração, isto é, enquanto x varia desde $x = 3$ até $x = 6$, varia desde $\theta = \operatorname{arcsec}\dfrac{3}{3} = \operatorname{arcsec}(1) = 0$ até $\theta = \operatorname{arcsec}\dfrac{6}{3} = \operatorname{arcsec}(2) = \dfrac{\pi}{3}$. Assim, $0 \leq \theta < \dfrac{\pi}{3}$.

Assim, $\displaystyle\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{3\,\mathrm{tg}\,\theta}{(3\sec\theta)^2} 3\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta\,d\theta$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{tg}^2\theta}{\sec\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec^2\theta - 1}{\sec\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec\theta - \cos\theta)d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec\theta\,d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\theta\,d\theta = \ln|\sec\theta + \mathrm{tg}\,\theta|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} - \mathrm{sen}\,\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \ln\left|\sec\frac{\pi}{3} + \mathrm{tg}\frac{\pi}{3}\right| - \ln|\sec 0 + \mathrm{tg}\,0| - \mathrm{sen}\frac{\pi}{3} + \mathrm{sen}\,0$$

$$= \ln|2 + \sqrt{3}| - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exercício 10.7.

Calcule a integral definida $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}}dx.$

Solução: Primeiro, note que nenhuma das regras básicas de integração é aplicável. Podemos avaliar esta nova integral usando a substituição trigonométrica, estamos no caso de integral que têm termos da forma $\sqrt{a^2-x^2}$ com $a = 4$.

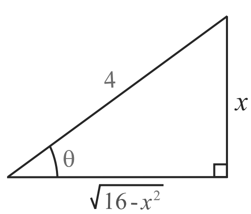


Figura 10.18

Do triângulo retângulo associado, tem-se:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 4\,\operatorname{sen}\theta \\ dx = 4\,\cos\theta\,d\theta \end{cases}$$

Também, $\dfrac{\sqrt{16-x^2}}{4} = \cos\theta \Rightarrow \sqrt{16-x^2} = 4\,\cos\theta.$

Há duas abordagens: podemos fazer a substituição trigonométrica na integral indefinida e, então, calcular a integral definida usando os limites de integração em x, ou podemos fazer a substituição trigonométrica na integral definida e converter os limites em x nos correspondentes limites em θ.

Vamos resolver o exercício seguindo a segunda abordagem.

A integral dada é definida; precisamos considerar a mudança dos limites de integração, isto é, enquanto x varia desde $x = 0$ até $x = 2\sqrt{3}$, θ varia desde $\theta = \operatorname{arcsen}\dfrac{0}{4} = \operatorname{arcsen}(0) = 0$ até $\theta = \operatorname{arcsen}\dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \operatorname{arcsen}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$. Assim $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{3}$, portanto

$$\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(4\operatorname{sen}\theta)^3}{4\cos\theta} 4\cos\theta\,d\theta = 64\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen}^3\theta\,d\theta \tag{10.23}$$

onde

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen}^3\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen}^2\theta\,\operatorname{sen}\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos^2\theta)\operatorname{sen}\theta\,d\theta \tag{10.24}$$

Há novamente duas abordagens para calcular a última integral à direita: podemos fazer uma nova substituição na integral indefinida e, então, calcular a integral definida usando os limites de integração em θ, ou podemos fazer uma nova substituição u na integral definida e converter os limites em θ nos correspondentes limites em u.

Vamos resolver o exercício seguindo a primeira abordagem.

$$\int (1-\cos^2\theta)\operatorname{sen}\theta\,d\theta = \int \operatorname{sen}\theta\,d\theta - \int \cos^2\theta\,\operatorname{sen}\theta\,d\theta$$

$$= -\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3} + C.$$

Logo,

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos^2\theta)\operatorname{sen}\theta\,d\theta = -\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\Bigg]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= -\cos\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}\cos^3\frac{\pi}{3} + \cos 0 - \frac{1}{3}\cos^3 0 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{8}\right) + 1 - \frac{1}{3}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \frac{2}{3} = \frac{-12+1+16}{24} = \frac{5}{24} \qquad (10.25)$$

Substituindo 10.25 em 10.24 e 10.24 em 10.23, resulta

$$\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}}\,dx = 64\cdot\frac{5}{24} = \frac{40}{3}.$$

Apenas como informação, seguindo a segunda abordagem o processo é o seguinte:

Façamos a substituição $\begin{cases} u = \cos\theta \\ du = -\operatorname{sen}\theta\, d\theta \end{cases}$. Logo, os limites em u correspondentes a $\theta = 0$ e $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ são $\theta = 0 \Rightarrow u = \cos 0 = 1$ $\theta = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow u = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.

Assim,

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos^2\theta)\operatorname{sen}\theta\, d\theta = -\int_1^{\frac{1}{2}} (1-u^2)du = -u + \frac{u^3}{3}\Bigg]_1^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\right) + 1 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \frac{2}{3} = \frac{-12+1+16}{24} = \frac{5}{24} \qquad (10.26)$$

Substituindo 10.26 em 10.24 e 10.24 em 10.23, resulta novamente

$$\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}}\,dx = 64\cdot\frac{5}{24} = \frac{40}{3}.$$

Passo a Passo de Alguns Exercícios Propostos no Caderno Didático

Exercício 10.8.

Calcule as seguintes integrais:

a. $\displaystyle\int_0^5 \sqrt{x^2+25}\,dx$

b. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx$

c. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}\,dx$

(Aula 22 do caderno didático, exercícios propostos número 5, 7 e 9, respectivamente)

Solução:

a. $\displaystyle\int_0^5 \sqrt{x^2+25}\,dx$

Primeiro, note que nenhuma das regras básicas de integração é aplicável. Para usar uma substituição trigonométrica, observe que estamos no caso de integrais que têm termos da forma $\sqrt{a^2+x^2}$ com $a=5$.

Observe, na **Figura 10.19** a seguir, que, nesse caso, o cateto oposto ao ângulo θ é x, o outro cateto é $a=5$ e a hipotenusa do triângulo retângulo, pelo Teorema de Pitágoras, só pode ser $\sqrt{5^2+x^2}=\sqrt{25+x^2}$.

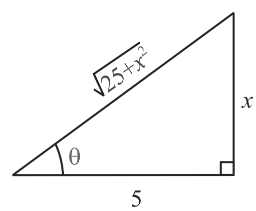


Figura 10.19

Do triângulo retângulo associado, tem-se:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{x}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = 5\operatorname{tg}\theta \\ dx = 5\sec^2\theta\, d\theta \end{cases}.$$

Também, $\quad \dfrac{\sqrt{25+x^2}}{5} = \sec\theta \Rightarrow \sqrt{25+x^2} = 5\sec\theta.$

Há duas abordagens: podemos fazer a substituição trigonométrica na integral indefinida e, então, calcular a integral definida usando os limites de integração em x, ou podemos fazer a substituição trigonométrica na integral definida e converter os limites em x nos correspondentes limites em θ.

Vamos resolver este exercício seguindo a primeira abordagem.

Assim,

$$\int \sqrt{x^2+25}dx = \int 5\sec\theta\, 5\sec^2\theta\, d\theta = 25\int \sec^3\theta\, d\theta.$$

Por outro lado, no Exemplo 21.4 do caderno didático, foi provado que

$$\int \sec^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\sec\theta\ \mathrm{tg}\,\theta + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \mathrm{tg}\,\theta| + C.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+25}\,dx &= \frac{25}{2}\frac{\sqrt{25+x^2}}{5}\frac{x}{5} + \frac{25}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{25+x^2}}{5} + \frac{x}{5}\right| + C\\ &= \frac{x}{2}\sqrt{25+x^2} + \frac{25}{2}\ln\left|\sqrt{25+x^2}+x\right| + C_1 \qquad (10.27)\end{aligned}$$

Usando o resultado obtido em 10.27 com os limites de integração em x, obtemos

$$\int_0^5 \sqrt{x^2+25}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{25+x^2} + \frac{25}{2}\ln\left|\sqrt{25+x^2}+x\right|\Big]_0^5$$

$= \frac{5}{2}\sqrt{25+5^2} + \frac{25}{2}\ln\left|\sqrt{25+5^2}+5\right| - \frac{0}{2}\sqrt{25+0^2} - \frac{25}{2}\ln\left|\sqrt{25+0^2}+0\right| = \frac{25}{2}\sqrt{2} + \frac{25}{2}\ln|5\sqrt{2}+5| - \frac{25}{2}\ln 5$

$$= \frac{25}{2}\sqrt{2} + \frac{25}{2}\ln|5(\sqrt{2}+1)| - \frac{25}{2}\ln 5$$

$$= \frac{25}{2}\sqrt{2} + \frac{25}{2}\left[\ln 5 + \ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right] - \frac{25}{2}\ln 5$$

$$= \frac{25}{2}\sqrt{2} + \frac{25}{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

b. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{9-4x^2}}dx$

Primeiro, note que nenhuma das regras básicas de integração é aplicável. Para usar uma substituição trigonométrica, observe que $\sqrt{9-4x^2}$ é da forma $\sqrt{a^2-u^2}$ com $a=3$ e $u=2x$.

Façamos primeiro a substituição simples $u=2x$ então $x=\dfrac{u}{2}$ e $dx=\dfrac{du}{2}$, logo

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-4x^2}}dx = \int \frac{\frac{u^2}{4}}{\sqrt{9-u^2}}\frac{du}{2} = \frac{1}{8}\int \frac{u^2}{\sqrt{9-u^2}}du \quad (10.28)$$

Vamos resolver $\displaystyle\int \frac{u^2}{\sqrt{9-u^2}}\,du.$

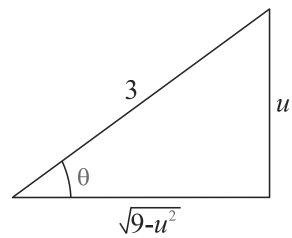


Figura 10.20

Do triângulo retângulo associado, tem-se:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{u}{3} \Rightarrow \begin{cases} u = 3\operatorname{sen}\theta \\ du = 3\cos\theta\, d\theta \end{cases}.$$

Também, $\dfrac{\sqrt{9-u^2}}{3} = \cos\theta \Rightarrow \sqrt{9-u^2} = 3\cos\theta.$

Assim, $\displaystyle\int \frac{u^2}{\sqrt{9-u^2}}du = \int \frac{9\operatorname{sen}^2\theta}{3\cos\theta} 3\cos\theta\, d\theta = 9\int \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta$

$$= 9\int \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta = 9\left(\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\operatorname{sen}2\theta\right) + C$$

$$= 9\left(\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right) + C = \frac{9}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{u}{3}\right) - \frac{1}{2}u\sqrt{9-u^2} + C$$

$$= \frac{9}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{2x}{3}\right) - x\sqrt{9-4x^2} + C. \qquad (10.29)$$

Substituindo 10.29 em 10.28, obtemos

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-4x^2}}dx = \frac{9}{16}\operatorname{arcsen}\left(\frac{2x}{3}\right) - \frac{x}{8}\sqrt{9-4x^2} + C.$$

c. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}dx$

Primeiro, note que nenhuma das regras básicas de integração é aplicável. Para usar uma substituição trigonométrica, observe que estamos no caso de integrais que têm termos da forma $\sqrt{x^2-a^2}$ com $a = \sqrt{2}$, vamos supor $x > \sqrt{2}$.

Observe, na figura a seguir que, neste caso, a hipotenusa do triângulo retângulo tem que ser x, um cateto é $a = \sqrt{2}$ e o outro cateto (justamente o oposto ao ângulo θ), pelo Teorema de Pitágoras, só pode ser $\sqrt{x^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{x^2-2}$. Como $x>\sqrt{2}$, lembre-se de que $\sqrt{x^2-2}=\sqrt{2}\,\text{tg}\,\theta$, onde $0\leq\theta<\dfrac{\pi}{2}$.

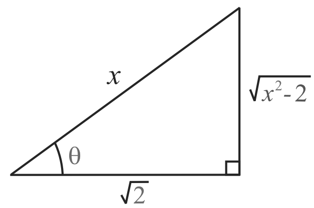


Figura 10.21

Do triângulo associado, tem-se:

$$\sec\theta=\frac{x}{\sqrt{2}}\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{2}\sec\theta\\ dx=\sqrt{2}\sec\theta\,\text{tg}\,\theta\,d\theta\end{cases}.$$

Também, $\dfrac{\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{2}}=\text{tg}\,\theta\Rightarrow\sqrt{x^2-2}=\sqrt{2}\,\text{tg}\,\theta.$

Assim,

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}\,dx=\int\frac{2\sec^2\theta}{\sqrt{2}\,\text{tg}\,\theta}\sqrt{2}\sec\theta\,\text{tg}\,\theta\,d\theta$$

$$=\int 2\sec^2\theta\sec\theta\,d\theta=2\int\sec^3\theta\,d\theta. \qquad (10.30)$$

Por outro lado, no Exemplo 21.4 do caderno didático, foi provado que

$$\int\sec^3\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\sec\theta\,\text{tg}\,\theta+\frac{1}{2}\ln|\sec\theta+\text{tg}\,\theta|+C.$$

Logo,

$$=\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{2}}\right|+C$$

$$\int\sec^3\theta\,d\theta=\frac{1}{4}x\sqrt{x^2-2}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right|+C_1 \quad (10.31)$$

Substituindo 10.31 em 10.30, temos

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-2}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right|+C_1.$$

Exercício 10.9.

Calcule as seguintes integrais:

a. $\displaystyle\int x\sqrt{2x-x^2}\,dx$ b. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ c. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$

(Aula 25 do caderno didático, exercícios propostos número 3 , 13 e 23, respectivamente)

d. $\displaystyle\int \frac{dx}{(9x^2+6x-8)^{\frac{1}{2}}}$

Sugestão: Completando o quadrado, transforme o integrando em uma função para a qual a substituição trigonométrica é conveniente. Use depois uma substituição trigonométrica apropriada.

Solução:

a. $\displaystyle\int x\sqrt{2x-x^2}\,dx$

Completando o quadrado como foi sugerido, obtém-se

$$2x-x^2 = -(x^2-2x) = 1-(x^2-2x+1) = 1-(x-1)^2.$$

Isso sugere a substituição $\begin{cases} u = x-1 \Rightarrow x = u+1 \\ du = dx \end{cases}$.

Assim, $\displaystyle\int x\sqrt{2-x^2}\,dx = \int x\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx$

$$= \int (u+1)\sqrt{1-u^2}\,du = \int u\sqrt{1-u^2}\,du + \int \sqrt{1-u^2}\,du$$

$$= \frac{1}{(-2)}\int (-2)u(1-u^2)^{\frac{1}{2}}du + \int \sqrt{1-u^2}du$$

$$= \frac{2}{(-2)}\frac{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + \int \sqrt{1-u^2}\,du = -\frac{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + \int \sqrt{1-u^2}\,du$$

$$= -\frac{\left(1-(x-1)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3} + \int \sqrt{1-u^2}\,du \qquad (10.32)$$

Vamos calcular $\displaystyle\int \sqrt{1-u^2}\,du.$

Primeiro, note que nenhuma das regras básicas de integração é aplicável. Para usar uma substituição trigonométrica, observe que estamos no caso de integrais que têm termos da forma $\sqrt{a^2-u^2}$ com $a=1$.

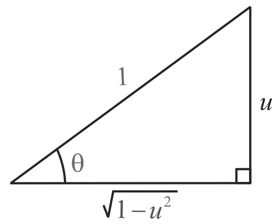


Figura 10.22

Do triângulo retângulo associado, tem-se:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{u}{1} \Rightarrow \begin{cases} u = \operatorname{sen}\theta \\ du = \cos\theta\, d\theta \end{cases}.$$

Também $\dfrac{\sqrt{1-u^2}}{1} = \cos\theta \Rightarrow \sqrt{1-u^2} = \cos\theta.$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-u^2}\, du &= \int \cos\theta(\cos\theta)d\theta\, d\theta = \int \cos^2\theta\, d\theta \\
&= \int \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2\theta)\, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta + C = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4} 2\operatorname{sen}\theta\, \cos\theta + C \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(u) + \frac{1}{2}u\sqrt{1-u^2} + C \qquad (10.33)
\end{aligned}$$

Substituindo 10.33 em 10.32, temos $\displaystyle\int x\sqrt{2x-x^2}\, dx =$

$$= -\frac{(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{2x-x^2} + C.$$

b. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

Completando o quadrado como foi sugerido, obtém-se

$$2x-x^2 = -(x^2-2x) = 1-(x^2-2x+1) = 1-(x-1)^2.$$

Isso sugere a substituição $\begin{cases} u = x-1 \Rightarrow x = u+1 \\ du = dx \end{cases}.$

Assim,

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$$

$$= \int \frac{(u+1)du}{\sqrt{1-u^2}} = \int \frac{u\,du}{\sqrt{1-u^2}} + \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \frac{1}{(-2)} \int (-2)u(1-u^2)^{-\frac{1}{2}} du + \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

Observe que, neste caso, as integrais resultantes são imediatas, já que a primeira é uma substituição óbvia e a segunda está na tabela de integrais imediatas, logo

$$\frac{1}{(-2)} \int (-2)u(1-u^2)^{-\frac{1}{2}} du + \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} =$$

$$= \frac{2}{(-2)} \frac{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}}{1} + \operatorname{arcsen} u + C.$$

Portanto,

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x-x^2}} = -(2x-x^2)^{\frac{1}{2}} + \operatorname{arcsen}(x-1) + C =$$

$$= -\sqrt{2x-x^2} + \operatorname{arcsen}(x-1) + C.$$

c. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$

Completando o quadrado, obtém-se

$$x^2+4x+8 = (x^2+4x+4)+4 = (x+2)^2+4.$$

Isso sugere a substituição $\left\{ \begin{array}{l} u = x+2 \\ du = dx \end{array} \right.$.

Assim,

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+8} = \int \frac{du}{(x+2)^2+4} = \int \frac{du}{u^2+4}. \qquad (10.34)$$

Observe que, neste caso, a integral resultante é uma integral imediata, já que

$$\int \frac{du}{u^2+2^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{u}{2} + C.$$

Logo,

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+8} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x+2}{2} \right) + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{2} + 1 \right) + C.$$

d. $\displaystyle\int \frac{dx}{(9x^2+6x-8)^{\frac{1}{2}}}$

Completando o quadrado, obtém-se

$$9x^2+6x-8 = 9\left(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\right)-1-8 = 9\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-9$$

$$= \left[3\left(x+\frac{1}{3}\right)\right]^2-(3)^2.$$

Isso sugere a substituição $\begin{cases} u = 3\left(x+\frac{1}{3}\right) = 3x+1 \\ du = 3\,dx \Rightarrow dx = \dfrac{du}{3} \end{cases}$.

Assim,

$$\int \frac{dx}{(9x^2+6x-8)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{1}{\sqrt{\left[3\left(x+\frac{1}{3}\right)\right]^2-9}}dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{u^2-3^2}}du \qquad (10.35)$$

Primeiro, note que nenhuma das regras básicas de integração é aplicável. Para usar uma substituição trigonométrica, observe que estamos no caso de integrais que têm termos da forma $\sqrt{u^2-a^2}$ com $a=3$.

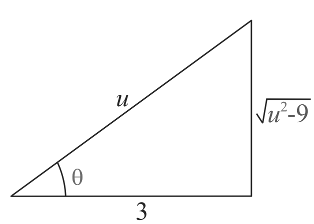


Figura 10.23

Do triângulo retângulo associado, tem-se:

$$\sec\theta = \frac{u}{3} \Rightarrow \begin{cases} u = 3\sec\theta \\ du = 3\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta\,d\theta \end{cases}.$$

Também, $\quad \mathrm{tg}\,\theta = \dfrac{\sqrt{u^2-9}}{3} \Rightarrow \sqrt{u^2-9} = 3\,\mathrm{tg}\,\theta.$

Assim,

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2-3^2}}du = \int \frac{1}{3\,\mathrm{tg}\,\theta} 3\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta\,d\theta = \int \sec\theta\,d\theta$$

$$= \ln|\sec\theta + \mathrm{tg}\,\theta| + C = \ln\left|\frac{u}{3} + \frac{\sqrt{u^2-9}}{3}\right| + C = \ln\left|u + \sqrt{u^2-9}\right| + C_1$$

$$= \ln\left|3x+1+\sqrt{9x^2+6x-8}\right| + C_1 \qquad (10.36)$$

Substituindo 10.36 em 10.35, temos

$$\int \frac{dx}{(9x^2+6x-8)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{3}\ln\left|3x+1+\sqrt{9x^2+6x-8}\right| + C_1.$$

Veja, no Apêndice 7, no final deste caderno, o passo a passo de exercícios adicionais correspondentes a esta semana.

Semana 11

Integração de Funções Racionais por Frações Parciais

Lembre-se de que uma função racional é o quociente de dois polinômios. Uma função racional $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, onde $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios, é dita **própria** se o grau do numerador for menor do que o grau do denominador. Se o grau do numerador for maior ou igual ao grau do denominador, então a função racional é **imprópria**. Por outro lado, qualquer função racional imprópria pode ser escrita como a soma de um polinômio e de uma função racional própria, $\dfrac{p(x)}{q(X)} = s(x) + \dfrac{r(x)}{q(x)}$. Isto é, dividindo o numerador pelo denominador, o polinômio s é chamado de **quociente** e o polinômio r é chamado de **resto**.

Em Álgebra, costuma-se mostrar que toda função racional **própria** pode ser escrita de uma, e somente uma, maneira: como uma soma de frações do tipo $\dfrac{A}{(ax+b)^k}$ e $\dfrac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^k}$, onde a função quadrática $ax^2 + bx + c$ é irredutível, isto é, $b^2 - 4ac < 0$. Tais frações são chamadas de **frações parciais**. Quando uma função racional própria $R(x) = \dfrac{r(x)}{q(x)}$ é expressa como uma soma de frações parciais, a soma é chamada a **decomposição de R em frações parciais**. Explicamos os detalhes para os quatro casos que ocorrem:

Caso I: O denominador $q(x)$ é um produto de <u>fatores lineares distintos</u>

Isto é, $q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\dots(a_kx + b_k)$, onde nenhum fator é repetido. Neste caso, o teorema das frações parciais "próprias" estabelece que existem constantes $A_1, A_2, \dots,$ A_k, tais que

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \dots + \frac{A_k}{a_kx+b_k}.$$

Essas constantes podem ser determinadas como nos exemplos seguintes.

Exemplo 11.1.

Calcule $\displaystyle\int \frac{1-2x}{x^2+3x+2}dx$

(Aula 23 do caderno didático, exercício proposto nº 6)

Solução: Observe que a função $f(x) = \dfrac{1-2x}{x^2+3x+2}$ é uma função racional e é própria, isto é, o grau do numerador é menor que o grau do denominador.

Fatoramos o denominador e como ele tem dois fatores lineares distintos, a decomposição em frações parciais tem a forma:

$$\frac{1-2x}{x^2+3x+2} = \frac{1-2x}{(x+2)(x+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} \tag{11.1}$$

Para calcular as constantes, existem três métodos diferentes. Neste primeiro exercício, a modo de exemplo, usaremos os três métodos. Na prática, bastará usar apenas um método.

1º Método

Para determinar os valores de A e B, multiplicamos ambos os lados da Expressão 11.1 pelo produto dos denominadores $(x+2)(x+1)$, obtendo

$$1-2x = A(x+1) + B(x+2) \tag{11.2}$$

Expandindo o lado direito da Equação 11.2 e escrevendo na forma padrão para polinômios, temos $1-2x = Ax + A + Bx + 2B$. Isto é, $-2x+1 = (A+B)x + (A+2B)$.

Assim, da igualdade de polinômios, temos:

Do termo constante $\qquad A+2B = 1 \qquad (11.3)$

Do termo de grau 1 $\qquad A+B = -2 \qquad (11.4)$

Multiplicando por -1 a Equação 11.4 e somando com 11.3, obtemos

$$B = 3 \tag{11.5}$$

Substituindo 11.5 em 11.3, temos

$$A = -5 \tag{11.6}$$

Substituindo 11.5 e 11.6 em 11.1, dá

$$\frac{1-2x}{x^2+3x+2} = \frac{1-2x}{(x+2)(x+1)} = \frac{-5}{x+2} + \frac{3}{x+1}$$

Assim,

$$\int \frac{1-2x}{x^2+3x+2}dx = \int \frac{1-2x}{(x+2)(x+1)}dx = -5\int \frac{dx}{x+2} + 3\int \frac{dx}{x+1}$$

$$= -5\ln|x+2| + 3\ln|x+1| + C$$

Os outros métodos alternativos para encontrar os coeficientes A e B são:

2º Método: Uso de limites para calcular as constantes

Vamos usar limites para determinar os valores de A e B da Expressão 11.1.

Se $f(x) = \dfrac{1-2x}{x^2+3x+2} = \dfrac{1-2x}{(x+2)(x+1)}$ então

$$A = \lim_{x\to -2}(x+2)f(x) = \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(1-2x)}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x\to -2}\frac{1-2x}{x+1}$$

$$= \frac{1+4}{-1} = -5 \to A = -5$$

$$B = \lim_{x\to -1}(x+1)f(x) = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(1-2x)}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x\to -1}\frac{1-2x}{x+2}$$

$$= \frac{1+2}{1} = 3 \Rightarrow B = 3$$

3º Método

Para determinar os valores de A e B, multiplicamos ambos os lados da Expressão 11.1 pelo produto dos denominadores $(x+2)(x+1)$, obtendo

$$1-2x = A(x+1) + B(x+2) \tag{11.7}$$

A Equação 11.7 é uma identidade, isto é, verdade para cada $x \in \mathbb{R}$.

O método consiste em dar valores convenientes para x na identidade 11.7; a ideia é escolher valores de x que simplificam a equação: "geralmente as raízes dos fatores do polinômio que está no denominador da função racional".

Assim, se $x=-2$ em 11.7, obtemos

$$1-2(-2)=A(-2+1)+B(0)\Rightarrow 1+4=-A\Rightarrow 5=-A\Rightarrow A=-5$$

Também, se $x=-1$ em 11.7, tem-se

$$1-2(-1)=A(0)+B(-1+2)\Rightarrow 1+2=B\Rightarrow 3=B\Rightarrow B=3$$

Integrando uma Função Racional Imprópria

Exemplo 11.2.

Calcule $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2-x}\,dx$

Solução: Note-se que a função racional $R(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-x}dx$ é imprópria pois, neste caso, o grau do numerador é igual ao grau do denominador. Vamos efetuar a divisão dos polinômios:

$$\begin{array}{r|l} x^2+0x+1 & x^2-x \\ \cline{2-2} \underline{-x^2+x\quad} & 1 \\ 0+\ x\ +1 & \end{array}$$

Assim,

$$\frac{x^2+1}{x^2-x}=1+\frac{x+1}{x^2-x}$$

$$\int\left(\frac{x^2+1}{x^2-x}\right)dx=\int\left(1+\frac{x+1}{x^2-x}\right)dx=x+\int\frac{x+1}{x(x-1)}dx \qquad (11.8)$$

Usando frações parciais para a última integral à direita (que agora é uma fração própria), tem-se

$$\frac{x+1}{x(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1} \qquad (11.9)$$

Isto é,

$$x+1=A(x-1)+Bx \qquad (11.10)$$

Se $x = 0$ em 11.10, tem-se $0+1 = A(-1)+B(0) \Rightarrow A = -1$.

Se $x = 1$ em 11.10, tem-se $1+1 = A(0)+B(1) \Rightarrow B = 2$

Substituindo os valores de A e B em 11.9, temos

$$\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{2}{x-1}$$

Logo,

$$\int \frac{x+1}{x(x-1)}dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{2}{x-1}\right) dx = -\ln|x| + 2\ln|x-1| + C \tag{11.11}$$

Finalmente, substituindo 11.11 em 11.8, temos

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-x}dx = x - \ln|x| + 2\ln|x-1| + C.$$

Exemplo 11.3.

Calcule $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 11x^2 + 20x - 1}{x^2 - 5x + 6}\, dx$

(Aula 23 do caderno didático, exercício proposto nº 14)

Solução: Note-se que a função racional $R(x) = \dfrac{2x^3 - 11x^2 + 20x - 1}{x^2 - 5x + 6}$ é imprópria pois, neste caso, o grau do numerador é maior que o grau do denominador. Vamos efetuar a divisão dos polinômios:

$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & -11x^2 & +20x & -1 & x^2 - 5x + 6 \\ \cline{5-5} -2x^3 & +10x^2 & -12x & & 2x - 1 \\ \cline{1-3} 0 & -\ x^2 & +\ 8x & -\ 1 & \\ & +\ x^2 & -\ 5x & +\ 6 & \\ \cline{2-4} & 0 & +\ 3x & +\ 5 & \end{array}$$

Assim, $\displaystyle\frac{2x^3 - 11x^2 + 20x - 1}{x^2 - 5x + 6} = (2x-1) + \frac{3x+5}{x^2 - 5x + 6}$

Logo, $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 11x^2 + 20x - 1}{x^2 - 5x + 6}dx = \int (2x-1)dx + \int \frac{3x+5}{x^2 - 5x + 6}dx$

$$= 2\frac{x^2}{2} - x + \int \frac{3x+5}{(x-3)(x-2)}dx = x^2 - x + \int \frac{3x+5}{(x-3)(x-2)}dx$$

$$\int \frac{2x^3 - 11x^2 + 20x - 1}{x^2 - 5x + 6}dx = x^2 - x + \int \frac{3x+5}{(x-3)(x-2)}dx \tag{11.12}$$

Usando frações parciais para $\dfrac{3x+5}{(x-3)(x-2)}$ que é uma fração própria, tem-se

$$\frac{3x+5}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x-2)} \tag{11.13}$$

Vamos usar limites para calcular as constantes, isto é, o 2º método.

Se $f(x) = \dfrac{3x+5}{(x-3)(x-2)}$

$$A = \lim_{x\to 3}(x-3)f(x) = \lim_{x\to 3}(x-3)\frac{3x+5}{(x-3)(x-2)} = \lim_{x\to 3}\frac{3x+5}{x-2}$$

$$= \frac{14}{1} = 14 \Rightarrow A = 14$$

$$B = \lim_{x\to 2}(x-2)f(x) = \lim_{x\to 2}(x-2)\frac{3x+5}{(x-3)(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{3x+5}{x-3}$$

$$= \frac{11}{-1} = -11 \Rightarrow B = -11$$

Substituindo os valores de A e B em 11.13, dá

$$\frac{3x+5}{(x-3)(x-2)} = \frac{14}{(x-3)} + \frac{-11}{(x-2)}$$

Logo,

$$\int \frac{3x+5}{(x-3)(x-2)}dx = \int \frac{14}{(x-3)}dx + \int \frac{-11}{(x-2)}dx$$

$$= 14\ln|x-3| - 11\ln|x-2| + C \tag{11.14}$$

Finalmente, substituindo 11.14 em 11.12, temos

$$\int \frac{2x^3-11x^2+20x-1}{x^2-5x+6}dx = x^2 + 14\ln|x-3| - 11\ln|x-2| + C.$$

Caso II: O denominador $q(x)$ é um produto de <u>fatores lineares, mas alguns deles são repetidos</u>

Suponha, por exemplo, que o primeiro fator linear (a_1x+b_1) seja repetido r vezes; isto é, $q(x) = (a_1x+b_1)^r(a_2x+b_2)\ldots(a_kx+b_k)$. Neste caso, o teorema das frações parciais "próprias" estabelece que existem constantes $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1r}, A_2, \ldots, A_k$, tais que

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{A_{11}}{a_1x+b_1} + \frac{A_{12}}{(a_1x+b_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1r}}{(a_1x+b_1)^r} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \ldots + \frac{A_k}{a_kx+b_k}.$$

Essas constantes podem ser determinadas como nos exemplos seguintes.

Exemplo 11.4.

Calcule $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)(x+5)^2}$

Solução: Observe que a função racional $R(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x+5)^2}$ é própria, isto é, o grau do numerador é menor que o grau do denominador.

No denominador, o fator linear $(x+5)$ ocorre duas vezes, então a decomposição em frações parciais é

$$\frac{1}{(x-1)(x+5)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+5} + \frac{C}{(x+5)^2} \qquad (11.15)$$

Para determinar os valores de A, B e C, multiplicamos ambos os lados da Expressão 11.15 pelo produto dos denominadores $(x-1)(x+5)^2$, obtendo

$$1 = A(x+5)^2 + B(x-1)(x+5) + C(x-1) \qquad (11.16)$$

Usando o 3° Método para calcular as constantes, obtemos:

Se $x = 1 \Rightarrow 1 = A(1+5)^2 + B(0)(1+5) + C(0) \Rightarrow A = \dfrac{1}{36}$

Se $x = -5 \Rightarrow 1 = A(0) + B(-6)(0) + C(-5-1) \Rightarrow 1 = -6C \Rightarrow C = -\dfrac{1}{6}$

Falta descobrir B. Consideremos um valor arbitrário, digamos

$$x = 0 \Rightarrow 1 = \frac{1}{36}(5)^2 + B(-1)(5) + \left(-\frac{1}{6}\right)(0-1)$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{25}{36} - 5B + \frac{1}{6} = \frac{25}{36} - 5B + \frac{6}{36}$$

$$\Rightarrow 5B = \frac{31}{36} - 1 \Rightarrow 5B = \frac{31-36}{36} = -\frac{5}{36} \Rightarrow B = -\frac{1}{36}$$

Substituindo em 11.15 os valores de A, B e C achados, dá

$$\frac{1}{(x-1)(x+5)^2} = \frac{1}{36(x-1)} + \frac{-1}{36(x+5)} + \frac{-1}{6(x+5)^2}$$

Assim,

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x+5)^2} = \frac{1}{36}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{36}\int \frac{dx}{x+5} - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{(x+5)^2}$$

$$= \frac{1}{36}\ln|x-1| - \frac{1}{36}\ln|x+5| - \frac{1}{6}\int (x+5)^{-2}dx$$

$$= \frac{1}{36}\ln|x-1| - \frac{1}{36}\ln|x+5| - \frac{1}{6}\frac{(x+5)^{-1}}{(-1)} + C$$

$$= \frac{1}{36}\ln|x-1| - \frac{1}{36}\ln|x+5| + \frac{1}{6(x+5)} + C$$

Exemplo 11.5.

Calcule $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+4}{x(x-2)^2}dx$

(Aula 23 do caderno didático, exercício propostos nº 12)

Solução: Note-se que a função racional $R(x) = \dfrac{x^2-3x+4}{x(x-2)^2}$ é própria. Como o fator linear $(x-2)$ ocorre duas vezes, a decomposição em frações parciais é

$$\frac{x^2-3x+4}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} \qquad (11.17)$$

Para determinar os valores de A, B e C, multiplicamos ambos os lados da Expressão 11.17 pelo produto dos denominadores $x(x-2)^2$, obtendo

$$x^2-3x+4 = A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx.$$

Usando o 3º Método:

Se $x=2 \Rightarrow 2^2-3(2)+4 = C(2) \Rightarrow 4-6+4 = 2C \Rightarrow C=1$

Se $x=0 \Rightarrow 4 = A(0-2)^2 \Rightarrow A=1$

Se tomarmos um valor arbitrário, digamos

$x=1 \Rightarrow 1-3+4 = (1-2)^2 + B(1-2)+1 \Rightarrow 2 = 1+(-B)+1 \Rightarrow B=0$

Logo,

$$\int \frac{x^2-3x+4}{x(x-2)^2}dx = \int \left(\frac{1}{x}+\frac{0}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}\right)dx$$

$$= \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{(x-2)^2} = \ln|x| + \int (x-2)^{-2}dx + C$$

Finalmente,

$$\int \frac{x^2-3x+4}{x(x-2)^2}dx = \ln|x| + \frac{-1}{(x-2)} + C = \ln|x| - \frac{1}{(x-2)} + C.$$

Caso III: O denominador $q(x)$ contém fatores quadráticos irredutíveis, nenhum dos quais se repete

Suponha, por exemplo, que $q(x) = (a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\ldots(a_kx+b_k)(ax^2+bx+c)$, onde $b^2-4ac<0$. Neste caso, o teorema das frações parciais "próprias" estabelece que existem constantes $A_1, A_2, \ldots, A_k, B, C$, tais que

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \ldots + \frac{A_k}{a_kx+b_k} + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}.$$

Note-se que o termo $\dfrac{Bx+C}{ax^2+bx+c}$ pode ser integrado completando-se o quadrado. Essas constantes podem ser determinadas como nos exemplos seguintes.

Exemplo 11.6.

Calcule $\displaystyle\int \frac{3x^2-3x+2}{(x-2)(x^2+4)}dx$

(Aula 24 do caderno didático, exercício proposto nº 3-a)

Solução: Note-se que a função racional $R(x) = \dfrac{3x^2-3x+2}{(x-2)(x^2+4)}$ é própria. Como o denominador é o produto do fator linear $(x-2)$ pelo fator quadrático irredutível (x^2+4), a decomposição em frações parciais para $\dfrac{3x^2-3x+2}{(x-2)(x^2+4)}$ tem a forma:

$$\frac{3x^2-3x+2}{(x-2)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+4} \qquad (11.18)$$

Para determinar os valores de A, B e C, multiplicamos ambos os lados da Expressão 11.18 pelo produto dos denominadores $(x-2)(x^2+4)$, obtendo

$$3x^2-3x+2 = A(x^2+4)+(Bx+C)(x-2).$$

Usando o 1º Método resulta

$$3x^2-3x+2 = Ax^2+4A+Bx^2-2Bx+Cx-2C$$

$$3x^2-3x+2 = (A+B)x^2+(C-2B)x+(4A-2C)$$

Assim, igualando os polinômios, temos

$$A+B=3 \tag{11.19}$$

$$C-2B=-3 \tag{11.20}$$

$$4A-2C=2 \tag{11.21}$$

Multiplicando a Equação 11.20 por 2, e somando com a Equação 11.21, temos

$$\begin{array}{c} 2C-4B=-6 \\ -2C+4A=2 \\ \hline 4A-4B=-4 \end{array}$$

Ou seja,

$$A-B=-1 \tag{11.22}$$

Somando as Equações 11.19 e 11.22, temos $2A=2 \Rightarrow A=1$, substituindo este valor de A em 11.22, temos

$$B=2 \tag{11.23}$$

Substituindo 11.23 em 11.20, temos

$$C=1. \tag{11.24}$$

Substituindo os valores de A, B e C em 11.18, dá

$$\frac{3x^2-3x+2}{(x-2)(x^2+4)} = \frac{1}{x-2}+\frac{2x+1}{x^2+4}.$$

Assim,

$$\int \frac{3x^2-3x+2}{(x-2)(x^2+4)}dx = \int \frac{dx}{x-2}+\int\left(\frac{2x+1}{x^2+4}\right)dx$$

$$= \ln|x-2|+\int\frac{2x\,dx}{x^2+4}+\int\frac{dx}{x^2+4}.$$

Portanto,

$$\int \frac{3x^2-3x+2}{(x-2)(x^2+4)}dx = \ln|x-2|+\ln(x^2+4)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)+C.$$

Exemplo 11.7.

Calcule a seguinte integral $\displaystyle\int \frac{x^3-4x+5}{x^2(x^2-4x+5)}dx$

(Aula 24 do caderno didático, exercício proposto nº 3-b)

Solução: Note-se que a função racional $R(x) = \dfrac{x^3-4x+5}{x^2(x^2-4x+5)}$ é própria. Por outro lado, considere o polinômio x^2-4x+5. O discriminante Δ do polinômio dado é $\Delta = b^2-4ac = 4^2-4(1)(5) = 16-20 = -4 < 0$, isto é, o polinômio dado é irredutível. Como o denominador da função racional é o produto do fator linear repetido x^2 pelo fator quadrático irredutível x^2-4x+5, a decomposição em frações parciais para $\dfrac{x^3-4x+5}{x^2(x^2-4x+5)}$ resulta

$$\frac{x^3-4x+5}{x^2(x^2-4x+5)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2-4x+5} \tag{11.25}$$

Para determinar os valores de A, B, C e D, multiplicamos ambos os lados da Expressão 11.25 pelo produto dos denominadores $x^2(x^2-4x+5)$, obtendo

$$x^3-4x+5 = Ax(x^2-4x+5)+B(x^2-4x+5)+(Cx+D)x^2.$$

Usando o 1º Método, obtemos

$$x^3-4x+5 = Ax^3-4Ax^2+5Ax+Bx^2-4Bx+5B+Cx^3+Dx^2$$

$$x^3-4x+5 = Ax^3+Cx^3+Bx^2-4Ax^2+Dx^2+5Ax-4Bx+5B$$

$$x^3-4x+5 = (A+C)x^3+(B-4A+D)x^2+(5A-4B)x+5B$$

Assim, da igualdade de polinômios, temos

$$A+C=1 \tag{11.26}$$

$$B-4A+D=0 \tag{11.27}$$

$$5A-4B=-4 \tag{11.28}$$

$$5B=5 \tag{11.29}$$

Portanto, de 11.29, obtemos

$$B=1 \tag{11.30}$$

Substituindo 11.30 em 11.28, temos $5A-4=-4$, isto é,

$$A=0 \tag{11.31}$$

Substituindo 11.31 em 11.26, temos

$$C = 1 \tag{11.32}$$

Substituindo 11.30 e 11.31 em 11.27, temos

$$D = -1 \tag{11.33}$$

Substituindo os valores de A, B, C e D em 11.25, dá

$$\frac{x^3-4x+5}{x^2(x^2-4x+5)} = \frac{0}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1x+1}{x^2-4x+5}.$$

Assim,

$$\int \frac{x^3-4x+5}{x^2(x^2-4x+5)}dx = \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2-4x+5}\right) dx$$

$$= \int x^{-2}dx + \int \frac{x-1}{x^2-4x+5}dx = -\frac{1}{x} + \int \frac{x-1}{x^2-4x+5}dx \tag{11.34}$$

Vamos calcular a última integral à direita.

Note-se que $x^2-4x+5 = x^2-4x+4+1 = (x-2)^2+1$. Logo,

$$\int \frac{x-1}{x^2-4x+5}dx = \int \frac{x-1}{(x-2)^2+1}dx$$

Fazendo a substituição $\begin{cases} u = x-2 \Leftrightarrow x = 2+u \\ du = dx \end{cases}$, temos

$$\int \frac{x-1}{(x-2)^2+1}dx = \int \frac{2+u-1}{u^2+1}du = \int \frac{1+u}{u^2+1}du$$

$$= \int \frac{1}{u^2+1}du + \int \frac{u}{u^2+1}du = \operatorname{arctg}(u) + \frac{1}{2}\ln(u^2+1) + C$$

$$= \operatorname{arctg}(x-2) + \frac{1}{2}\ln\left((x-2)^2+1\right) + C$$

$$= \operatorname{arctg}(x-2) + \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5) + C \tag{11.35}$$

Substituindo 11.35 em 11.34, temos

$$\int \frac{x^3-4x+5}{x^2(x^2-4x+5)}dx = -\frac{1}{x} + \operatorname{arctg}(x-2) + \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5) + C.$$

Caso IV: O denominador $q(x)$ contém fatores quadráticos irredutíveis repetidos

Suponha, por exemplo, que $q(x) = (a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\ldots(a_kx+b_k)(ax^2+bx+c)^r$, onde $b^2-4ac<0$. Neste caso, o teorema das frações parciais "próprias" estabelece que existem constantes $A_1, A_2, \ldots, A_k, B_1, C_1, B_2, C_2, \ldots, B_r, C_r$, tais que $\dfrac{r(x)}{q(x)} = \dfrac{A_1}{a_1x+b_1} + \dfrac{A_2}{a_2x+b_2} + \ldots + \dfrac{A_r}{a_kx+b_k} + \dfrac{B_1x+C_1}{ax^2+bx+c} + \dfrac{B_2x+C_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \ldots + \dfrac{B_rx+C_r}{(ax^2+bx+c)^r}$.

Note-se que cada termo $\dfrac{B_rx+C_r}{(ax^2+bx+c)^r}$ pode ser integrado primeiro, completando-se o quadrado. Essas constantes podem ser determinadas como nos exemplos seguintes.

Exemplo 11.8.

Calcule $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x(x^2+1)^2}dx$

Solução: Note-se que a função racional $R(x) = \dfrac{x^4+1}{x(x^2+1)^2}$ é própria. Como o denominador é o produto do fator linear x pelo fator quadrático irredutível repetido $(x^2+1)^2$, a decomposição em frações parciais para $\dfrac{x^4+1}{x(x^2+1)^2}$ tem a forma:

$$\frac{x^4+1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}. \qquad (11.36)$$

Para determinar os valores de A, B, C, D e E, multiplicamos ambos os lados da Expressão 11.36 pelo produto dos denominadores $x(x^2+1)^2$, obtendo

$$x^4+1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x(x^2+1) + (Dx+E)x$$

Usando o 1º Método, obtemos

$$x^4+1 = A(x^4+2x^2+1) + (Bx+C)(x^3+x) + (Dx^2+Ex)$$

$$x^4+1 = Ax^4+2Ax^2+A+Bx^4+Bx^2+Cx^3+Cx+Dx^2+Ex$$

$$x^4+1 = (A+B)x^4+Cx^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x+A$$

Assim, da igualdade de polinômios, temos

$$A+B=1 \tag{11.37}$$

$$C=0 \tag{11.38}$$

$$2A+B+D=0 \tag{11.39}$$

$$C+E=0 \tag{11.40}$$

$$A=1 \tag{11.41}$$

Substituindo 11.41 em 11.37, temos

$$B=0 \tag{11.42}$$

Substituindo 11.41 e 11.42 em 11.39, temos

$$D=-2 \tag{11.43}$$

Substituindo 11.38 em 11.40, temos

$$E=0. \tag{11.44}$$

Substituindo os valores de A, B, C, D e E em 11.36, dá

$$\frac{x^4+1}{x(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{0x+0}{x^2+1}+\frac{-2x+0}{(x^2+1)^2}.$$

Assim,

$$\int \frac{x^4+1}{x(x^2+1)^2}dx=\int \frac{1}{x}+\int \frac{-2xdx}{(x^2+1)^2}$$

$$\int \frac{x^4+1}{x(x^2+1)^2}dx=\ln|x|-\int \frac{2xdx}{(x^2+1)^2} \tag{11.45}$$

Fazendo a substituição $\begin{cases} u=x^2+1 \\ du=2x\,dx \end{cases}$ na última integral da direita, temos

$$\int \frac{2xdx}{(x^2+1)^2}=\int \frac{du}{u^2}=-u^{-1}=-\frac{1}{(x^2+1)}+C \tag{11.46}$$

Substituindo 11.46 em 11.45, temos

$$\int \frac{x^4+1}{x(x^2+1)^2}dx=\ln|x|+\frac{1}{(x^2+1)}+C.$$

Exemplo 11.9.

Calcule $\displaystyle\int \frac{3x^3+8x^2+11x+4}{x(x^2+2x+2)^2}dx$

(Aula 24 do caderno didático, exercício proposto nº 3-d)

Solução: Note-se que a função racional $R(x) = \dfrac{3x^3+8x^2+11x+4}{x(x^2+2x+2)^2}$ é própria. Por outro lado, considere o polinômio x^2+2x+2. Como o discriminante Δ do polinômio é $\Delta = b^2-4ac = 4-4(1)(2) = 4-8 = -4 < 0$, ele é um polinômio irredutível. Usando frações parciais para $\dfrac{3x^3+8x^2+11x+4}{x(x^2+2x+2)^2}$, obtemos:

$$\frac{3x^3+8x^2+11x+4}{x(x^2+2x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2} + \frac{Dx+E}{(x^2+2x+2)^2}$$

$3x^3+8x^2+11x+4 = A(x^2+2x+2)^2 + (Bx+C)x(x^2+2x+2) + (Dx+E)x$

$3x^3+8x^2+11x+4 = A(x^2+2x+2)(x^2+2x+2) + (Bx+C)x(x^2+2x+2) + (Dx+E)x$

$3x^3+8x^2+11x+4 = A(x^4+2x^3+2x^2+2x^3+4x^2+4x+2x^2+4x+4) + (Bx+C)(x^3+2x^2+2x) + Dx^2+Ex$

$3x^3+8x^2+11x+4 = A(x^4+4x^3+8x^2+8x+4) + Bx^4+2Bx^3+2Bx^2+Cx^3+2Cx^2+2Cx+Dx^2+Ex$

$3x^3+8x^2+11x+4 = Ax^4+4Ax^3+8Ax^2+8Ax+4A+Bx^4+2Bx^3+2Bx^2+Cx^3+2Cx^2+2Cx+Dx^2+Ex$

$3x^3+8x^2+11x+4 = Ax^4+Bx^4+2Bx^3+4Ax^3+Cx^3+8Ax^2+2Bx^2+2Cx^2+Dx^2+2Cx+8Ax+Ex+4A$

$3x^3+8x^2+11x+4 = (A+B)x^4+(2B+4A+C)x^3+(8A+2B+2C+D)x^2+(2C+8A+E)x+4A$

Assim, da igualdade de polinômios, temos

$$A+B=0 \tag{11.47}$$

$$4A+2B+C=3 \tag{11.48}$$

$$8A+2B+2C+D=8 \tag{11.49}$$

$$8A+2C+E=11 \tag{11.50}$$

$$4A=4 \tag{11.51}$$

Portanto, de 11.51, obtemos

$$A = 1 \tag{11.52}$$

Substituindo 11.52 em 11.47, temos

$$B = -1 \tag{11.53}$$

Substituindo 11.52 e 11.53 em 11.48, temos $4 - 2 + C = 3$, isto é,

$$C = 1 \tag{11.54}$$

Substituindo 11.52, 11.53 e 11.54 em 11.49, temos $8 - 2 + 2 + D = 8$, isto é,

$$D = 0 \tag{11.55}$$

Substituindo 11.52 e 11.54 em 11.50, temos $8 + 2 + E = 11$, isto é,

$$E = 1 \tag{11.56}$$

Assim,

$$\int \frac{3x^3 + 8x^2 + 11x + 4}{x(x^2 + 2x + 2)^2} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{-x + 1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{0x + 1}{(x^2 + 2x + 2)^2} \right) dx$$

$$= \ln|x| + \int \frac{-x + 1}{x^2 + 2x + 2} dx + \int \frac{1}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx \tag{11.57}$$

Vamos calcular as duas últimas integrais de 11.57.

Note-se que, $x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x + 1)^2 + 1$. Logo, fazendo a substituição $\begin{cases} u = x + 1 \Leftrightarrow x = u - 1 \\ du = dx \end{cases}$, temos que

$$\int \frac{3x^3 + 8x^2 + 11x + 4}{x(x^2 + 2x + 2)^2} dx = \ln|x| + \int \frac{-(u - 1) + 1}{u^2 + 1} du + \int \frac{1}{(u^2 + 1)^2} du$$

$$= \ln|x| + \int \frac{2 - u}{u^2 + 1} du + \int \frac{1}{(u^2 + 1)^2} du$$

$$= \ln|x| + 2 \int \frac{1}{u^2 + 1} du - \frac{1}{2} \int \frac{2u}{u^2 + 1} du + \int \frac{1}{(u^2 + 1)^2} du$$

$$= \ln|x| + 2 \operatorname{arctg}(u) - \frac{1}{2} \ln(u^2 + 1) + \int \frac{1}{(u^2 + 1)^2} du$$

$$= \ln|x| + 2 \operatorname{arctg}(x + 1) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 2) + \int \frac{1}{(u^2 + 1)^2} du \tag{11.58}$$

Só resta calcular a última integral à direita. Faremos o cálculo da dita integral usando substituição trigonométrica. (Note-se que na página 97 da Aula 24, Módulo 2, do caderno didático é feito o cálculo de uma expressão parecida, usando integração por partes).

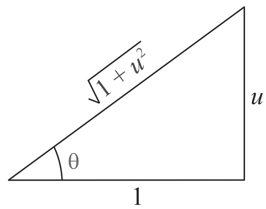


Figura 11.1

Do triângulo associado, tem-se: $\operatorname{tg}\theta = u \Rightarrow \begin{cases} u = \operatorname{tg}\theta \\ du = \sec^2\theta\, d\theta \end{cases}$.

Também, $\sec\theta = \sqrt{u^2+1} \Rightarrow \sqrt{u^2+1} = \sec\theta$

Assim,

$$\int \frac{1}{(u^2+1)^2} du = \int \frac{\sec^2\theta}{\sec^4\theta} d\theta = \int \frac{d\theta}{\sec^2\theta} = \int \cos^2\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int (1+\cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta + C$$

$$= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4} 2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} u + \frac{1}{2}\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\frac{1}{\sqrt{u^2+1}} + C$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} u + \frac{1}{2}\frac{u}{u^2+1} + C \qquad (11.59)$$

Finalmente substituindo 11.59 em 11.58, obtemos

$$\int \frac{3x^3+8x^2+11x+4}{x(x^2+2x+2)^2} dx = \ln|x| + 2\operatorname{arctg}(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)$$
$$+ \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+1) + \frac{1}{2}\frac{(x+1)}{(x^2+2x+2)} + C$$

$$\int \frac{3x^3+8x^2+11x+4}{x(x^2+2x+2)^2} dx = \ln|x| + \frac{5}{2}\operatorname{arctg}(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{(x+1)}{(x^2+2x+2)} + C.$$

Observações Finais

- Frações parciais podem ser usadas em alguns quocientes que envolvam funções transcendentes. Por exemplo, a substituição $\begin{cases} u = \cos x \\ du = -\operatorname{sen} x\, dx \end{cases}$ permite que $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x(\cos x - 1)}dx = -\int \frac{du}{u(u-1)}$ e esta última integral pode ser resolvida facilmente pelo uso de frações parciais.

- Há alguns casos nos quais é inapropriado o uso do método de frações parciais:

1. Por exemplo, seria ilógico usar frações parciais para efetuar a integração de $\displaystyle\int \frac{3x^2+4}{x^3+4x-5}\,dx,$ uma vez que pode ser calculada mais facilmente pela regra do ln , já que $\displaystyle\int \frac{3x^2+4}{x^3+4x-5}dx = \ln|x^3+4x-5| + C$ .Analogamente, a integração $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+1}dx$ requer somente um pouco de Álgebra, uma vez que o integrando já esta na forma de frações parciais, assim $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+1}dx = \int \frac{x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C.$
2. Se o integrando está na forma reduzida, a redução pode eliminar a necessidade do uso de frações parciais, como por exemplo: $\displaystyle\int \frac{x^2-x-2}{(x^3-2x-4)}dx = \int \frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+2)}dx = \int \frac{x+1}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2| + C.$
3. Observe que o método de frações parciais *só é aplicável se o numerador e o denominador são polinômios*, se não estamos nesse caso, não poderemos aplicar as regras estudadas nesta aula. Por exemplo, não poderemos usar frações parciais para resolver $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}dx$, pois o integrando é uma função algébrica, porém poderemos resolver a integral usando outro método (fazendo uma substituição apropriada a integral dada poderá ser resolvida usando o método de substituição trigonométrica, deixamos ao leitor os detalhes, a resposta é $-\dfrac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1} + C$).

De forma análoga, por exemplo, não poderemos usar frações parciais para resolver $\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}dx$. (Lembre-se de que esta última integral já foi resolvida na semana anterior pelo método de substituição trigonométrica).

4. Agora que você conhece quase todos os métodos de integração, talvez surja a dúvida que, frequentemente, aparece na plataforma e que foi rapidamente respondida em forma simples e esclarecedora pela Professora Eliane Amiune.

   Quando utilizar?

   - Integração simples
   - Integração por substituição ou mudança de variável
   - Integração por partes
   - Integração por substituição trigonométrica
   - Integração por frações parciais

   Resposta:

   Os métodos em si são mutuamente exclusivos. Você usa a **integração direta** quando identifica que o integrando é a derivada de uma função simples, a **substituição** quando o integrando é a composição de funções, **por partes** quando o integrando é o produto de duas funções, **substituição trigonométrica** quando o integrando é uma fração com denominador irredutível ou o integrando contém expressões do tipo $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$ ou $\sqrt{x^2-a^2}$ e **frações parciais** quando o denominador da função racional pode ser fatorado em fatores lineares e/ou quadráticos irredutíveis.

Exercícios Resolvidos

Exercício 11.1.

Calcule as seguintes funções racionais:

a. $\displaystyle\int \frac{x^3-3x^2+2x-3}{x^2+1}dx$

b. $\displaystyle\int \frac{x^4+6x^3+10x^2+x}{x^2+6x+10}dx$

Solução:

a. $\displaystyle\int \frac{x^3-3x^2+2x-3}{x^2+1}dx$

Note-se que, neste caso, o grau do numerador é maior que o grau do denominador, isto é, a função racional é imprópria. Primeiro, efetuamos a divisão de polinômios:

$$
\begin{array}{rl}
x^3-3x^2+2x-3 & \underline{|\ x^2+1\quad} \\
\underline{-x^3 \qquad\quad -x \quad} & \ x-3 \\
0-3x^2+\ x\ -3 & \\
\underline{+\ 3x^2 \qquad\quad +3} & \\
0\ +\ x\ +\ 0 &
\end{array}
$$

Assim, $\displaystyle\frac{x^3-3x^2+2x-3}{x^2+1}=(x-3)+\frac{x}{x^2+1}$.

Logo, $\displaystyle\int \frac{x^3-3x^2+2x-3}{x^2+1}dx=\int(x-3)dx+\int\frac{xdx}{x^2+1}$

$$=\frac{x^2}{2}-3x+\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}=\frac{x^2}{2}-3x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$

Observe-se que, neste caso, não foi necessário o uso do método de frações parciais, pois as integrais resultantes são muito simples. Assim,

$$\int \frac{x^3-3x^2+2x-3}{x^2+1}dx=\frac{x^2}{2}-3x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$

b. $\displaystyle\int \frac{x^4+6x^3+10x^2+x}{x^2+6x+10}dx$

Note-se que, neste caso, o grau do numerador é maior que o grau do denominador, isto é, a função racional é imprópria. Primeiro, efetuamos a divisão de polinômios:

$$
\begin{array}{rl}
x^4+6x^3+10x^2+x & \underline{|\ x^2+6x+10\quad} \\
\underline{-x^4-6x^3-10x^2 \quad} & \ x^2 \\
0\ +\ 0x^3\ +\ 0x^2\ +x &
\end{array}
$$

Assim, $\displaystyle\frac{x^4+6x^3+10x^2+x}{x^2+6x+10}=x^2+\frac{x}{x^2+6x+10}$

Logo, $$\int \frac{x^4+6x^3+10x^2+x}{x^2+6x+10}dx = \int x^2 dx + \int \frac{xdx}{x^2+6x+10}$$
$$= \frac{x^3}{3} + \int \frac{xdx}{x^2+6x+10}$$

Observe-se que, neste caso, $\int \frac{x}{x^2+6x+10}dx$ requer somente completar quadrados, uma vez que o integrando já está na forma de frações parciais, já que $x^2+6x+10$ é irredutível, visto que $b^2-4ac = 36-4(10) < 0$.

Assim, completando quadrados: $x^2+6x+10 = x^2+6x+9+1 = (x+3)^2+1$, e fazendo a substituição $\begin{cases} u = x+3 \Rightarrow x = u-3 \\ du = dx \end{cases}$ obtemos

$$\int \frac{x}{x^2+6x+10}dx = \int \frac{x}{(x+3)^2+1}dx = \int \frac{u-3}{u^2+1}du$$
$$= \int \frac{u}{u^2+1}du - 3\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{2}\ln(u^2+1) - 3\,\mathrm{arctg}(u) + C.$$

Finalmente, resulta

$$\int \frac{x}{x^2+6x+10}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+6x+9) - 3\,\mathrm{arctg}(x+3) + C.$$

Exercício 11.2.

Usando o método das frações parciais, calcule as seguintes integrais:

a. $\int \frac{1}{4x^2-9}\,dx$

b. $\int_1^5 \frac{(x-1)dx}{x^2(x+1)}$

Solução:

a. $\int \frac{1}{4x^2-9}\,dx$

Observe que a função racional dada é própria. Fatorando o denominador, temos $4x^2-9 = (2x-3)(2x+3)$. Como esta expressão tem dois fatores lineares distintos, então a decomposição em frações parciais tem a forma:

$$\frac{1}{4x^2-9} = \frac{A}{2x-3} + \frac{B}{2x+3} \tag{11.60}$$

Para determinar os valores de A e B, multiplicamos ambos os lados da Expressão 11.60 pelo produto dos denominadores $(2x-3)(2x+3)$, obtendo

$$1 = A(2x+3) + B(2x-3) \tag{11.61}$$

Usaremos o 3º método para achar as constantes em 11.61.

Assim, se $x = \dfrac{3}{2}$ em 11.61, obtemos

$$1 = A\left(2\left(\frac{3}{2}\right)+3\right) + B(0) \Rightarrow 1 = 6A \Rightarrow A = \frac{1}{6}.$$

Também, se $x = -\dfrac{3}{2}$ em 11.61, tem-se

$$1 = A(0) + B\left(2\left(\frac{-3}{2}\right)-3\right) \Rightarrow 1 = -6B \Rightarrow -\frac{1}{6} = B.$$

Substituindo os valores de A e B em 11.60:

$$\frac{1}{4x^2-9} = \frac{\frac{1}{6}}{2x-3} + \frac{-\frac{1}{6}}{2x+3} = \frac{1}{6}\frac{1}{(2x-3)} - \frac{1}{6}\frac{1}{(2x+3)}.$$

Assim, $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2-9} = \frac{1}{6}\int \frac{dx}{(2x-3)} - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{(2x+3)}$

$$= \frac{1}{12}\int \frac{2\,dx}{(2x-3)} - \frac{1}{12}\int \frac{2\,dx}{(2x+3)}$$

$$= \frac{1}{12}\ln|2x-3| - \frac{1}{12}\ln|2x+3| + C = \frac{1}{12}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+3}\right| + C.$$

b. $\displaystyle\int_1^5 \frac{(x-1)dx}{x^2(x+1)}$

Vamos calcular primeiro a integral indefinida $\displaystyle\int \frac{(x-1)dx}{x^2(x+1)}$.

Observe que a função racional dada é própria. No denominador, o fator linear x ocorre duas vezes, então a decomposição em frações parciais é:

$$\frac{(x-1)}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{(x+1)} \tag{11.62}$$

Para determinar os valores de A, B e C, multiplicamos ambos os lados da Expressão 11.62 pelo produto dos denominadores $x^2(x+1)$, obtendo

$$x-1=Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2 \tag{11.63}$$

Usando o 3° Método para calcular as constantes, obtemos

Se $x=-1 \Rightarrow -1-1=A(0)+B(0)+C(-1)^2 \Rightarrow C=-2$.

Se $x=0 \Rightarrow -1=A(0)+B(1)+C(0) \Rightarrow -1=B \Rightarrow B=-1$.

Falta descobrir A. Consideremos um valor arbitrário, digamos

$$x=1 \Rightarrow 1-1=A(2)+(-1)(2)+(-2)(1)^2$$

$$\Rightarrow 0=2A-2-2 \Rightarrow 4=2A \Rightarrow A=2.$$

Substituindo em 11.61 os valores de A, B e C achados, dá

$$\frac{(x-1)}{x^2(x+1)}=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{(x+1)}.$$

Assim, $\displaystyle\int \frac{(x-1)}{x^2(x+1)}dx=\int \frac{2}{x}dx-\int \frac{1}{x^2}dx-\int \frac{2}{(x+1)}dx$

$$=2\int \frac{dx}{x}-\int \frac{dx}{x^2}-2\int \frac{dx}{(x+1)}=2\ln|x|-\int x^{-2}dx-2\ln|x+1|$$

$$=2\ln|x|-\frac{x^{-1}}{-1}-2\ln|x+1|+C$$

$$\int \frac{(x-1)dx}{x^2(x+1)}=2\ln|x|+\frac{1}{x}-2\ln|x+1|+C.$$

Finalmente, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$\int_1^5 \frac{(x-1)dx}{x^2(x+1)}=2\ln|x|+\frac{1}{x}-2\ln|x+1|\Big]_1^5$$

$$=\left[2\ln|5|+\frac{1}{5}-2\ln|5+1|\right]-\left[2\ln|1|+\frac{1}{1}-2\ln|1+1|\right]$$

$$=2\ln|5|+\frac{1}{5}-2\ln|(3)\cdot(2)|-1+2\ln|2|$$

$$=2\ln|5|+\frac{1}{5}-2\ln|3|-2\ln|2|-1+2\ln|2|$$

$$=2\ln|5|+\frac{1}{5}-2\ln|3|-1.$$

Assim,

$$\int_1^5 \frac{(x-1)dx}{x^2(x+1)}=2\ln\left(\frac{5}{3}\right)-\frac{4}{5}.$$

Exercício 11.3.

Usando o método das frações parciais, calcule as seguintes integrais:

a. $\displaystyle\int \frac{x}{16x^4 - 1}dx$

b. $\displaystyle\int \frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 + x - 2}{x^2(x^2+1)^2}dx$

Solução:

a. $\displaystyle\int \frac{x}{16x^4 - 1}dx$

Note-se que a função racional é própria. Como o denominador $16x^4 - 1 = (4x^2 - 1)(4x^2 + 1) = (2x - 1)(2x + 1)(4x^2 + 1)$ é o produto dos fatores lineares distintos pelo fator quadrático irredutível $(4x^2 + 1)$, a decomposição em frações parciais para $\dfrac{x}{16x^4 - 1}$ tem a forma:

$$\frac{x}{16x^4 - 1} = \frac{A}{2x - 1} + \frac{B}{2x + 1} + \frac{Cx + D}{4x^2 + 1} \qquad (11.64)$$

Para determinar os valores de A, B, C e D, multiplicamos ambos os lados da Expressão 11.64 pelo produto dos denominadores $(2x - 1)(2x + 1)(4x^2 + 1)$, obtendo

$$x = A(2x+1)(4x^2+1) + B(2x-1)(4x^2+1) + (Cx+D)(2x-1)(2x+1)$$

Usando o 3° Método para calcular as constantes, obtemos

Se $x = \dfrac{-1}{2} \Rightarrow \dfrac{-1}{2} = A(0) + B\left(2\left(\dfrac{-1}{2}\right) - 1\right)\left(4\left(\dfrac{1}{4}\right) + 1\right)$

$\Rightarrow \dfrac{-1}{2} = B(-2)(2) \Rightarrow B = \dfrac{1}{8}.$

Se $x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = A(2)(2) \Rightarrow A = \dfrac{1}{8}.$

Falta descobrir C e D. Consideremos um valor arbitrário, digamos

$x = 0 \Rightarrow 0 = \dfrac{1}{8}(1)(1) + \dfrac{1}{8}(-1)(1) + D(-1)(1) \Rightarrow 0 = \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{8} - D$

$\Rightarrow D = 0$

$x = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{8}(3)(5) + \frac{1}{8}(1)(5) + C(1)(3) \Rightarrow 1 = \frac{15}{8} + \frac{5}{8} + 3C$

$\Rightarrow 1 = \frac{5}{2} + 3C \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$

Substituindo em 11.64 os valores de A, B, C e D achados, dá

$$\int \frac{x\,dx}{16x^4-1} = \frac{1}{8}\int \frac{dx}{2x-1} + \frac{1}{8}\int \frac{dx}{2x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{x\,dx}{4x^2+1}$$

$$= \frac{1}{16}\int \frac{2\,dx}{2x-1} + \frac{1}{16}\int \frac{2\,dx}{2x+1} - \frac{1}{16}\int \frac{8x\,dx}{4x^2+1}$$

$$= \frac{1}{16}\ln|2x-1| + \frac{1}{16}\ln|2x+1| - \frac{1}{16}\ln|4x^2+1| + C$$

Ou ainda,

$$\int \frac{x\,dx}{16x^4-1} = \frac{1}{16}\left|\frac{(2x-1)(2x+1)}{4x^2+1}\right| + C = \frac{1}{16}\ln\left|\frac{4x^2-1}{4x^2+1}\right| + C.$$

b. $\displaystyle\int \frac{x^5-2x^4+2x^3+x-2}{x^2(x^2+1)^2}dx$

Note-se que a função racional é própria. Como o denominador é o produto do fator linear repetido x pelo fator quadrático irredutível repetido $(x^2+1)^2$, a decomposição em frações parciais para $\dfrac{x^5-2x^4+2x^3+x-2}{x^2(x^2+1)^2}$ tem a forma:

$$\frac{x^5-2x^4+2x^3+x-2}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2} \tag{11.65}$$

Para determinar os valores de A, B, C, D, E e F, multiplicamos ambos os lados da Expressão 11.65 pelo produto dos denominadores $x^2(x^2+1)^2$, obtendo

$x^5 - 2x^4 + 2x^3 + x - 2 = Ax(x^2+1)^2 + B(x^2+1)^2 + (Cx+D)x^2(x^2+1) + (Ex+F)x^2$

Usando o 1º Método, obtemos

$x^5-2x^4+2x^3+x-2 = Ax(x^4+2x^2+1) + B(x^4+2x^2+1) + (Cx+D)(x^4+x^2) + Ex^3 + Fx^2$

$= Ax^5 + 2Ax^3 + Ax + Bx^4 + 2Bx^2 + B + Cx^5 + Dx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex^3 + Fx^2$

$= (A+C)x^5 + (B+D)x^4 + (2A+C+E)x^3 + (2B+D+F)x^2 + Ax + B$

Assim, da igualdade de polinômios, temos

$$A+C=1 \tag{11.66}$$

$$B+D=-2 \tag{11.67}$$

$$2A+C+E=2 \tag{11.68}$$

$$2B+D+F=0 \tag{11.69}$$

$$A=1 \tag{11.70}$$

$$B=-2 \tag{11.71}$$

Substituindo 11.70 em 11.66, temos

$$C=0 \tag{11.72}$$

Substituindo 11.71 em 11.67, temos

$$D=0 \tag{11.73}$$

Substituindo 11.70 e 11.72 em 11.68, temos $2(1)+0+E=2$, isto é,

$$E=0 \tag{11.74}$$

Substituindo 11.71 e 11.73 em 11.69, temos $-4+0+F=0$, isto é,

$$F=4 \tag{11.75}$$

Substituindo os valores das constantes em 11.65, obtemos

$$\frac{x^5-2x^4+2x^3+x-2}{x^2(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{4}{(x^2+1)^2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int\frac{x^5-2x^4+2x^3+x-2}{x^2(x^2+1)^2}dx &= \int\frac{dx}{x}-2\int\frac{dx}{x^2}+4\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}\\ &= \ln|x|-2\int x^{-2}dx+4\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}\\ &= \ln|x|+\frac{2}{x}+4\int\frac{dx}{(x^2+1)^2} \qquad (11.76)\end{aligned}$$

Só resta calcular a última integral à direita. Faremos o cálculo da dita integral usando substituição trigonométrica.

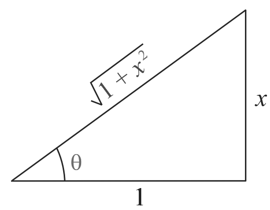


Figura 11.2

Do triângulo associado, tem-se: $\operatorname{tg}\theta = x \Rightarrow \begin{cases} x = \operatorname{tg}\theta \\ dx = \sec^2\theta\, d\theta \end{cases}$

Também, $\sec\theta = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow \sqrt{x^2+1} = \sec\theta.$

Assim,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{\sec^2\theta}{\sec^4\theta} d\theta = \int \frac{d\theta}{\sec^2\theta} = \int \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int (1+\cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta + C$$

$$= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4} 2 \operatorname{sen}\theta\, \cos\theta + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + C$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)} + C$$

Substituindo o resultado da integral em 11.76, resulta

$$\int \frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 + x - 2}{x^2(x^2+1)^2} dx = \ln|x| + \frac{2}{x} + 2\operatorname{arctg} x + \frac{2x}{(x^2+1)} + C.$$

Exercício 11.4.

Ache a área da região sob a curva $y = \dfrac{1}{1+e^x}$ acima do intervalo $[-\ln 5, \ln 5]$.

Sugestão: Faça uma substituição que converta o integrando em uma função racional.

Solução: Observe que a função $y = \dfrac{1}{1+e^x}$ é sempre maior que zero, assim no intervalo $[-\ln 5, \ln 5]$ a área da região está dada por $A(R) = \displaystyle\int_{-\ln 5}^{\ln 5} \frac{dx}{1+e^x}$.

Note-se que:

$$A(R) = \int_{-\ln 5}^{\ln 5} \frac{dx}{1+e^x}$$

Faça a substituição $\begin{cases} u = e^x \\ du = e^x\,dx \end{cases}$ então $du = u\,dx \Rightarrow dx = \dfrac{du}{u}$.
Como a integral é definida, vamos mudar os limites de integração.

Se $x = \ln 5 \Rightarrow u = e^{\ln 5} \Rightarrow u = 5$.

Se $x = -\ln 5 \Rightarrow u = e^{-\ln 5} \Rightarrow u = \dfrac{1}{e^{\ln 5}} = \dfrac{1}{5}$.

Assim, $\quad A(R) = \displaystyle\int_{\frac{1}{5}}^{5} \frac{du}{u(1+u)}$.

Observe que a função racional resultante é própria. Como o denominador tem dois fatores lineares distintos, a decomposição em frações parciais tem a forma:

$$\frac{1}{u(1+u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1+u} \tag{11.77}$$

Para determinar os valores de A e B multiplicamos ambos os lados da Expressão 11.77 pelo produto dos denominadores $u(1+u)$, obtendo

$$1 = A(1+u) + Bu \tag{11.78}$$

Usaremos o 3º método para achar as constantes em 11.78.

Se $u = -1 \Rightarrow 1 = A(0) + B(-1) \Rightarrow B = -1$.

Se $u = 0 \Rightarrow 1 = A(1) + B(0) \Rightarrow A = 1$.

$$\int_{\frac{1}{5}}^{5} \frac{du}{u(1+u)} = \int_{\frac{1}{5}}^{5} \frac{du}{u} - \int_{\frac{1}{5}}^{5} \frac{du}{1+u} = \ln|u|\Big]_{\frac{1}{5}}^{5} - \ln|1+u|\Big]_{\frac{1}{5}}^{5}$$

$$= \ln 5 - \ln\frac{1}{5} - \ln 6 + \ln\left(\frac{1}{5} + 1\right) = \ln 5 - \ln\frac{1}{5} - \ln 6 + \ln\left(\frac{6}{5}\right)$$

$$= \ln 5 - \ln 1 + \ln 5 - \ln 6 + \ln 6 - \ln 5 = \ln 5.$$

Portanto, $\quad A(R) = \ln 5$ unidades de área.

Passo a Passo dos Exercícios Propostos no Caderno Didático

Note-se que, desde o Exemplo 11.1 deste caderno, estamos fazendo o passo a passo de vários exercícios propostos no caderno didático sobre integração de funções racionais. Vamos, então, estudar aqui outros exercícios propostos sobre este tópico.

Exercício 11.5.

a. Calcule a seguinte integral $\displaystyle\int \frac{3x^2-10x+11}{(x-3)(x^2-1)}dx$.

b. Expanda $\dfrac{(x^2-x)}{(x-1)^2(x-3)^3(x-1)}$ em somas de frações parciais, deixando as constantes indicadas, sem calculá-las.

(Aula 23 do caderno didático, exercícios propostos nº: 10 e 15, respectivamente)

Solução:

a. $\displaystyle\int \frac{3x^2-10x+11}{(x-3)(x^2-1)}dx$

Observe que a função $f(x)=\dfrac{3x^2-10x+11}{(x-3)(x^2-1)}$ é uma função racional e é própria, isto é, o grau do numerador é menor que o grau do denominador.

Fatoramos o denominador e como ele tem três fatores lineares distintos, a decomposição em frações parciais tem a forma:

$$\frac{3x^2-10x+11}{(x-3)(x^2-1)}=\frac{3x^2-10x+11}{(x-3)(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1} \tag{11.79}$$

Para determinar os valores de A, B e C, multiplicamos ambos os lados da Expressão 11.79 pelo produto dos denominadores $(x-3)(x^2-1)$, obtendo

$$3x^2-10x+11=A(x^2-1)+B(x-3)(x+1)+C(x-3)(x-1) \tag{11.80}$$

Se $x=1$ em 11.80, obtemos

$$3(1)-10(1)+11=B(1-3)(1+1)\Rightarrow 4=-4B$$

$$\Rightarrow 1=-B\Rightarrow B=-1 \tag{11.81}$$

Também, se $x=-1$ em 11.80, tem-se

$$3(-1)^2-10(-1)+11=C(-1-3)(-1-1)\Rightarrow 3+10+11=8C$$

$$\Rightarrow 24=8C\Rightarrow C=3 \tag{11.82}$$

Se $x = 3$ em 11.80, obtemos

$$3(3)^2 - 10(3) + 11 = A(3^2 - 1) \Rightarrow 27 - 30 + 11 = 8A$$

$$\Rightarrow 8 = 8A \Rightarrow A = 1 \qquad (11.83)$$

Substituindo 11.83, 11.82 e 11.81 em 11.79, dá

$$\int \frac{3x^2 - 10x + 11}{(x-3)(x^2-1)}dx = \int \frac{1}{x-3}dx - \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{3}{x+1}dx$$

$$= \ln|x-3| - \ln|x-1| + 3\ln|x+1| + C.$$

b. $\dfrac{(x^2 - x)}{(x-1)^2(x-3)^3(x-1)}$

Observe que a função $f(x) = \dfrac{(x^2 - x)}{(x-1)^2(x-3)^3(x-1)}$ é uma função racional e é própria, isto é, o grau do numerador é menor que o grau do denominador e por outro lado $\text{Dom}_f = \mathbb{R} - \{1, 3\}$. Como $x \neq 1$, podemos simplificar o numerador e o denominador, assim $f(x) = \dfrac{(x^2 - x)}{(x-1)^2(x-3)^3(x-1)} = \dfrac{x(x-1)}{(x-1)^2(x-3)^3(x-1)} = \dfrac{x}{(x-1)^2(x-3)^3}$.

Note-se que o denominador tem fatores lineares repetidos, assim, a decomposição em frações parciais para $x \in \text{Dom}_f = \mathbb{R} - \{1, 3\}$ tem a forma:

$$\frac{(x^2 - x)}{(x-1)^2(x-3)^3(x-1)} = \frac{x}{(x-1)^2(x-3)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-3} + \frac{D}{(x-3)^2} + \frac{E}{(x-3)^3}.$$

Exercício 11.6.

Calcule as seguintes integrais:

a. $\displaystyle\int \frac{2x^3 + x^2 + 2x - 1}{(x^4 - 1)}dx$

b. $\displaystyle\int \frac{1}{(2x^2 + 4)^2}dx$

c. Expanda $\dfrac{(x^2 - x)}{(x-1)^2(x^2+5x+7)^3(x^2+1)}$ em somas de frações parciais, deixando as constantes indicadas, sem calculá-las.

(Aula 24 do caderno didático, exercícios propostos nº: 3-c, 3-e e 4, respectivamente)

Solução:

a. $\displaystyle\int \frac{2x^3+x^2+2x-1}{(x^4-1)}dx$

Note-se que a função racional $R(x) = \dfrac{2x^3+x^2+2x-1}{(x^4-1)} = \dfrac{2x^3+x^2+2x-1}{(x^2-1)(x^2+1)} = \dfrac{2x^3+x^2+2x-1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$ é própria. Como o denominador é o produto dos fatores lineares $(x-1)(x+1)$ pelo fator quadrático irredutível (x^2+1), a decomposição em frações parciais para $\dfrac{2x^3+x^2+2x-1}{(x^4-1)}$ tem a forma:

$$\frac{2x^3+x^2+2x-1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \qquad (11.84)$$

Para determinar os valores de A, B, C e D, multiplicamos ambos os lados da Expressão 11.84 pelo produto dos denominadores $(x-1)(x+1)(x^2+1)$, obtendo $2x^3+x^2+2x-1$

$$= A(x^2+1)(x+1) + B(x^2+1)(x-1) + (Cx+D)(x^2-1) \qquad (11.85)$$

Se $x = 1$ em 11.85, obtemos

$$2(1)^3+(1)^2+2(1)-1 = A(1^2+1)(1+1) \Rightarrow 4 = 4A \Rightarrow 1 = A \qquad (11.86)$$

Também, se $x = -1$ em 11.85, tem-se

$$2(-1)+1+2(-1)-1 = +B(1+1)(-1-1) =$$

$$\Rightarrow -4 = -4B \Rightarrow B = 1 \qquad (11.87)$$

Se $x = 0$ em 11.85 e substituindo os valores de A e B, obtemos

$$-1 = 1(1)(1)+1(1)(-1)+(D)(-1) \Rightarrow -1 = -D \Rightarrow D = 1 \qquad (11.88)$$

Se $x = 2$ em 11.85 e substituindo os valores de A, B e D, obtemos

$2(2)^3+(2)^2+2(2)-1 = 1(2^2+1)(2+1)+1(2^2+1)(2-1)+$
$(C(2)+1)(2^2-1)$

$$16+4+4-1 = 15+(5)+(C(2)+1)3$$

$$3 = (C(2)+1)3 \Rightarrow 2C+1 = 1 \Rightarrow 2C = 0 \Rightarrow C = 0 \qquad (11.89)$$

Substituindo 11.89, 11.88, 11.87 e 11.86 em 11.84, dá

$$\frac{2x^3+x^2+2x-1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}+\frac{0x+1}{x^2+1}$$

Assim,

$$\int \frac{2x^3+x^2+2x-1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}dx = \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx$$

$$\int \frac{2x^3+x^2+2x-1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}dx = \ln|x-1| + \ln|x+1| + \int \frac{1}{x^2+1}dx$$

$$\int \frac{2x^3+x^2+2x-1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}dx = \ln|x-1| + \ln|x+1| + \operatorname{arctg} x + C.$$

b. $\displaystyle\int \frac{1}{(2x^2+4)^2}dx$

Observe que a função racional dada é uma fração parcial e não pode ser decomposta em outras frações mais simples. Neste caso, só nos resta resolver a integral dada usando alguma outra técnica de integração.

Por outro lado,

$$\int \frac{1}{(2x^2+4)^2}dx = \int \frac{1}{((\sqrt{2}x)^2+2^2)^2}dx$$

Faça a substituição $u=\sqrt{2}x \Rightarrow du=\sqrt{2}\,dx \Rightarrow dx=\dfrac{du}{\sqrt{2}}$. Logo,

$$\int \frac{1}{(2x^2+4)^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{(u^2+2^2)^2}du \qquad (11.90)$$

A técnica da substituição trigonométrica é a mais indicada neste caso.

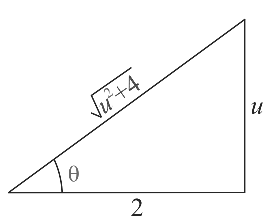


Figura 11.3

Do triângulo associado tem-se: $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{u}{2} \Rightarrow \begin{cases} u = 2\operatorname{tg}\theta \\ du = 2\sec^2\theta\, d\theta \end{cases}$

Também, $\sec\theta = \dfrac{\sqrt{u^2+2^2}}{2} \Rightarrow \sqrt{u^2+4} = 2\sec\theta$

Assim, $\displaystyle\int \frac{1}{(u^2+4)^2}du = \int \frac{2\sec^2\theta}{16\sec^4\theta}d\theta = \frac{1}{8}\int \frac{d\theta}{\sec^2\theta}$

$$= \frac{1}{8}\int \cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{16}\int (1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{16}\theta + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 2\theta + C = \frac{1}{16}\theta + \frac{1}{16}\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta + C$$

$$= \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{u}{2} + \frac{1}{16}\frac{u}{\sqrt{u^2+4}}\frac{2}{\sqrt{u^2+4}} + C$$

$$= \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{u}{2} + \frac{1}{8}\left(\frac{u}{u^2+4}\right) + C \qquad (11.91)$$

Substituindo 11.91 em 11.90, resulta

$$\int \frac{1}{(2x^2+4)^2}dx = \frac{\sqrt{2}}{32}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right) + \frac{x}{16(x^2+2)} + C.$$

c. $\displaystyle\frac{(x^2-x)}{(x-1)^2(x^2+5x+7)^3(x^2+1)}$

Observe que a função $f(x) = \dfrac{(x^2-x)}{(x-1)^2(x^2+5x+7)^3(x^2+1)}$ é uma função racional e é própria, isto é, o grau do numerador é menor que o grau do denominador. Por outro lado, x^2+1 é um fator quadrático irredutível, pois $b^2-4ac = 0-4(1)(1) < 0$. Analogamente, x^2+5x+7 é também um fator quadrático irredutível, pois $b^2-4ac = 5^2-4(1)(7) < 0$. Sabemos também que $\mathrm{Dom}_f = \mathbb{R}-\{1\}$. Como $x \neq 1$, podemos simplificar o numerador e o denominador, assim $\dfrac{(x^2-x)}{(x-1)^2(x^2+5x+7)^3(x^2+1)} = \dfrac{x(x-1)}{(x-1)^2(x^2+5x+7)^3(x^2+1)} = \dfrac{x}{(x-1)(x^2+5x+7)^3(x^2+1)}$.
Note-se que o denominador da função racional tem fatores lineares e fatores quadráticos irredutíveis, alguns deles repetidos, assim, seguindo as regras estudadas, resulta que a decomposição em frações parciais tem a forma:

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+5x+7)^3(x^2+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)} + \frac{Dx+E}{(x^2+5x+7)}$$
$$+\frac{Fx+G}{(x^2+5x+7)^2} + \frac{Hx+I}{(x^2+5x+7)^3}.$$

Exercício 11.7.

Calcule a seguinte integral $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2+x+1)}dx$

(Aula 25 do caderno didático, exercício proposto nº 20)

Solução: Note-se que x^2+x+1 é um fator quadrático irredutível, pois $b^2-4ac = 1^2-4(1)(1) < 0$.

Observe que a função racional $\dfrac{x+1}{(x^2+x+1)}$ é uma fração parcial e não pode ser decomposta em outras frações mais simples. Neste caso, só nos resta resolver a integral dada usando alguma outra técnica de integração.

Note-se que

$$x^2+x+1 = \left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+1-\frac{1}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}.$$

Assim,

$$\int \frac{x+1}{(x^2+x+1)}dx = \int \frac{x+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx \qquad (11.92)$$

Façamos a substituição: $u = x+\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = u-\dfrac{1}{2} \Rightarrow dx = du$

$$\int \frac{x+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = \int \frac{\left(u-\frac{1}{2}+1\right)}{u^2+\frac{3}{4}}du = \int \frac{\left(u+\frac{1}{2}\right)}{u^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}du$$

$$= \int \frac{u}{u^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}du + \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}du$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}du + \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}du$$

Para resolver a primeira integral, usamos a fórmula:

$$\int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C.$$

Para resolver a segunda integral, fazemos uso da fórmula:

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a}\right)+C.$$

Assim,

$$\int \frac{x+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = \frac{1}{2}\ln\left(u^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(u^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)+C$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left(\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{2\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} \right) + C \qquad (11.93)$$

Substituindo 11.93 em 11.92, resulta

$$\int \frac{x+1}{(x^2+x+1)} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + C.$$

Veja, no Apêndice 7, no final deste caderno, o passo a passo de exercícios adicionais correspondentes a esta semana.

Semana 12

Resumo sobre Integrais Impróprias e Critérios de Convergência e Divergência

Na definição da integral definida $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, supõe-se que $[a,b]$ é um intervalo limitado e que a função é limitada. Nesta aula, aprenderemos que é possível, com o uso de limites, estender essa noção para as regiões nas quais o intervalo não é limitado ou a certos intervalos abertos limitados (sobre os quais funções contínuas podem não ter máximo ou mínimo), isto é, a função é não limitada nesse intervalo. Tais integrais são chamadas **impróprias**. Aqui estão alguns exemplos:

- **Primeiro Tipo**: Integrais impróprias sobre intervalos não limitados ou também chamadas integrais impróprias com intervalos infinitos de integração ou ainda integrais impróprias com limites de integração infinitos:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}, \qquad \int_{-\infty}^{0} x\,e^x\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}dx, \qquad \text{etc.}$$

- **Segundo Tipo**: Integrais impróprias de funções não limitadas ou também chamadas integrais impróprias com descontinuidades infinitas no intervalo de integração:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int_0^1 \ln x\,dx, \qquad \int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}\,dx, \qquad \text{etc.}$$

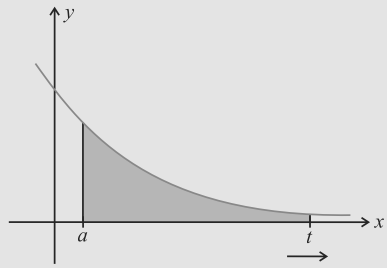
- **Tipo Misto**: Integrais impróprias de tipo misto ou duplamente impróprias ou Integrais impróprias de funções não limitadas sobre intervalos não limitados ou também chamadas integrais impróprias com descontinuidades infinitas e intervalos infinitos de integração:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)}, \qquad \text{etc.}$$

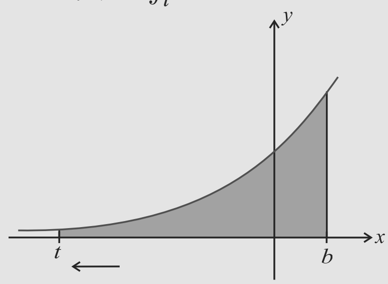
Definição 12.1.

Integrais Impróprias sobre Intervalos Não Limitados

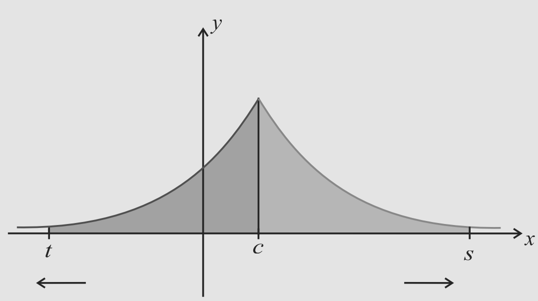
1. Se f é uma função contínua em $[a,+\infty)$, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx.$



2. Se f é uma função contínua em $(-\infty,b]$, então $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx.$



3. Se f é uma função contínua em $(-\infty,+\infty)$, então $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^c f(x)\,dx + \lim_{s\to+\infty}\int_c^s f(x)\,dx$, em que c é qualquer número real.

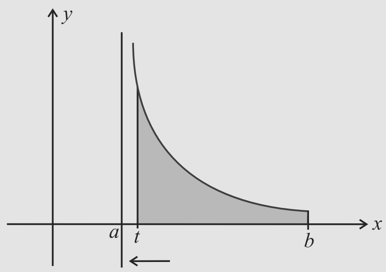


Nas partes 1 e 2, se o limite é finito, dizemos que a integral imprópria **converge** e o limite é o **valor** da integral imprópria. Caso contrário, dizemos que a integral imprópria **diverge**. Na parte 3, a integral do lado esquerdo da igualdade **converge** se as duas integrais do lado direito também forem convergentes. Se isso não ocorre, dizemos que a integral **diverge**. Pode-se mostrar que a escolha de c na parte 3 não é importante. Na verdade, podemos calcular ou determinar a convergência ou divergência de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ com qualquer escolha conveniente.

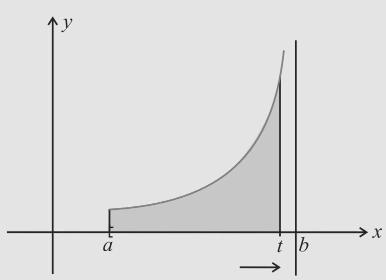
Definição 12.2.

Integrais Impróprias de Funções Não Limitadas

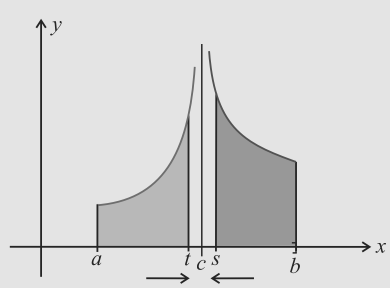
1. Se f é uma função contínua em $(a,b]$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx.$



2. Se f é uma função contínua em $[a,b)$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx.$



3. Se f é uma função contínua em $[a,c)\cup(c,b]$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)\,dx + \lim_{s\to c^+}\int_s^b f(x)\,dx.$



SEMANA 12 MÓDULO 2

Nas partes 1 e 2, se o limite é finito, dizemos que a integral imprópria **converge** e o limite é o **valor** da integral imprópria. Caso contrário, dizemos que a integral imprópria **diverge**. Na parte 3, a integral do lado esquerdo da igualdade **converge** se as duas integrais do lado direito também forem convergentes. Se isso não ocorre, dizemos que a integral **diverge**.

EXEMPLOS REFERENCIAIS

Antes de apresentarmos os critérios de convergência, vamos apresentar a convergência ou divergência de algumas funções, que serão úteis como parâmetros de comparação no estudo de divergência e convergência de integrais impróprias.

1. Nas seguintes afirmações, a é um número maior do que zero.
   - Se $r > 1$, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^r}dx$ é convergente.
   - Se $r \leq 1$, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^r}dx$ é divergente.
   - Se $r > 0$, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{-rx}dx$ é convergente.
2. Nas seguintes afirmações, b é um número maior do que zero.
   - Se $r < 1$, então $\displaystyle\int_0^{b} \frac{1}{x^r}dx$ é convergente.
   - Se $r \geq 1$, então $\displaystyle\int_0^{b} \frac{1}{x^r}dx$ é divergente.

CRITÉRIOS PARA CONVERGÊNCIA OU DIVERGÊNCIA DE INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

Quando não podemos resolver uma integral imprópria diretamente (o que é muito frequente na prática), tentamos primeiro determinar se ela é convergente ou divergente. Se a integral diverge, acabou o impasse. Se ela converge, poderemos (não agora, mas no futuro) utilizar métodos numéricos para obter seu valor aproximado.

Primeiro Tipo: Integrais Impróprias sobre Intervalos não Limitados

Os principais testes para a convergência ou divergência de integrais impróprias deste tipo são:

1. **Critério da comparação**: Sejam f e g contínuas em $[a,+\infty)$, com $0 \le f(x) \le g(x)$ para qualquer $x \ge a$. Nessas condições:

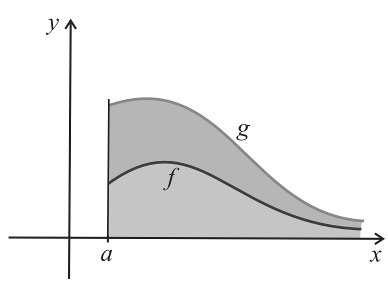
   - Se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, então $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ também converge.

   (Em outras palavras, se a integral maior converge, então a integral menor converge).

   - Se $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge, então $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ também diverge.

   (Isto é, se a integral menor diverge, então a integral maior diverge).

   Veja, na figura seguinte, uma ilustração dos gráficos de f e g.



   Critério análogo (com as modificações correspondentes) pode ser aplicado para $(-\infty,b]$, como veremos a seguir.

2. **Critério da comparação**: Sejam f e g contínuas em $(-\infty,b]$, com $0 \le f(x) \le g(x)$ para qualquer $x \le b$. Nessas condições:

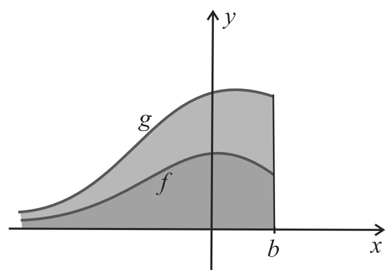
   - Se $\int_{-\infty}^{b} g(x)\,dx$ converge, então $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ também converge.

   (Em outras palavras, se a integral maior converge, então a integral menor converge).

- Se $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ diverge, então $\int_{-\infty}^{b} g(x)\,dx$ também diverge.

(Isto é, se a integral menor diverge, então a integral maior diverge).

Veja, na figura seguinte, uma ilustração dos gráficos de f e g.



3. **Critério do limite do quociente ou teste de comparação no limite**: Sejam f e g contínuas em $[a,+\infty)$, com $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$ para qualquer $x \geq a$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$, com $L \in (0,+\infty)$. Isto é, o limite do quociente é um número positivo. Então, as integrais $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\int_{a}^{+\infty} g(x)\,dx$ comportam-se da mesma maneira. Ou seja, ambas convergem ou ambas divergem.

   Critério análogo (com as modificações correspondentes) pode ser aplicado para $(-\infty,b]$, como veremos a seguir.

4. **Critério do limite do quociente ou teste de comparação no limite**: Sejam f e g contínuas em $(-\infty,b]$, com $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$ para qualquer $x \leq b$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$, com $L \in (0,+\infty)$. Isto é, o limite do quociente é um número positivo. Então, as integrais $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ e $\int_{-\infty}^{b} g(x)\,dx$ comportam-se da mesma maneira. Ou seja, ambas convergem ou ambas divergem.

5. Observe que os critérios de comparação 1, 2, 3 e 4 são válidos somente para funções positivas. Quando não lidamos com este caso, podemos tentar usar a seguinte **propriedade**:

   "Seja f contínua em $[a,+\infty)$ e não necessariamente positiva. Se $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ converge, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ também converge."

   Propriedade análoga (com as modificações correspondentes) pode ser aplicada para $(-\infty,b]$.

   Note que se $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ não converge, nada pode ser dito sobre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

6. Como uma consequência da condição necessária para a convergência de integrais impróprias sobre intervalos não limitados, tem-se ainda a seguinte propriedade, que serve somente para afirmar a divergência de uma integral do primeiro tipo:

   "Seja f contínua em $[a,+\infty)$. Se $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge."

   Afirmação análoga (com as modificações correspondentes) pode ser feita sobre $(-\infty,b]$. Observe também que se $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, nada pode ser dito sobre a convergência ou divergência de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Segundo Tipo: Integrais Impróprias de Funções não Limitadas

Os principais testes para a convergência ou divergência de integrais deste tipo são:

1. **Critério da comparação**: Sejam f e g contínuas em $[a,b)$, com $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para qualquer $x \in [a,b)$. Nessas condições:

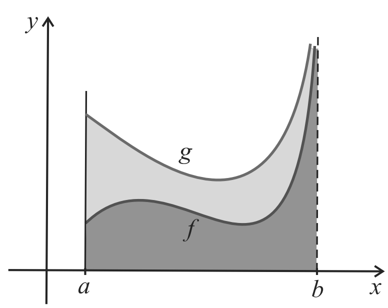
- Se $\int_a^b g(x)\,dx$ converge, então $\int_a^b f(x)\,dx$ também converge.

(Em outras palavras, se a integral maior converge, então a integral menor converge).

- Se $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge, então $\int_a^b g(x)\,dx$ também diverge.

(Isto é, se a integral menor diverge, então a integral maior diverge).

Veja, na figura seguinte, uma ilustração dos gráficos de f e g.



Análogo critério (com as modificações correspondentes) pode ser aplicado para $[a,b)$, como veremos a seguir.

2. **Critério da comparação**: Sejam f e g contínuas em $(a,b]$, com $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para qualquer $x \in (a,b]$. Nessas condições:

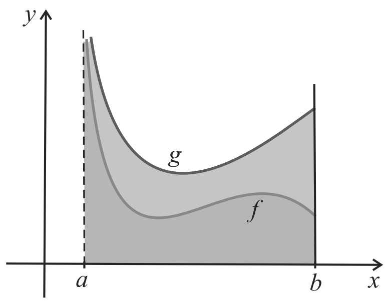
- Se $\int_a^b g(x)\,dx$ converge, então $\int_a^b f(x)\,dx$ também converge.

(Em outras palavras, se a integral maior converge, então a integral menor converge).

- Se $\int_a^b f(x)dx$ diverge, então $\int_a^b g(x)dx$ também diverge.

(Isto é, se a integral menor diverge, então a integral maior diverge).

Veja, na figura seguinte, uma ilustração dos gráficos de f e g.



3. **Critério do limite do quociente ou teste de comparação no limite**: Sejam f e g contínuas em $[a,b)$, com $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$ para qualquer $x \in [a,b)$ e $\lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$ com $L \in (0,+\infty)$. Isto é, o limite do quociente é um número positivo. Então, as integrais impróprias $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ comportam-se da mesma maneira. Ou seja, ambas convergem ou ambas divergem.

   Critério análogo (com as modificações correspondentes) pode ser aplicado para $(a,b]$, como veremos a seguir.

4. **Critério do limite do quociente ou teste de comparação no limite**: Sejam f e g contínuas em $(a,b]$, com $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$ para qualquer $x \in (a,b]$ e $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$ com $L \in (0,+\infty)$. Isto é, o limite do quociente é um número positivo. Então, as integrais impróprias $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ e $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ comportam-se da mesma maneira. Ou seja, ambas convergem ou ambas divergem.

5. **Observe que os critérios de comparação 1, 2, 3 e 4 são válidos somente para funções positivas.** Quando não lidamos com este caso, podemos tentar usar a seguinte **propriedade**:

   "Seja f contínua em $[a,b)$ não necessariamente positiva. Se $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$ converge, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ também converge."

Propriedade análoga (com as modificações correspondentes) pode ser aplicada para $(a,b]$. Note que se $\int_a^b |f(x)|\,dx$ não converge, nada pode ser dito sobre a convergência ou divergência de $\int_a^b f(x)\,dx$.

6. ✍ A propriedade 6 dada para as integrais impróprias sobre intervalos não limitados não é válida para integrais impróprias de funções não limitadas.

Integrais Impróprias de Tipo Misto ou Duplamente Impróprias

Estas integrais impróprias não precisam de definições nem de critérios especiais, pois o que faremos neste caso será: decompor a integral mista numa soma de integrais em que uma será de um tipo e a outra do tipo restante.

Exercícios Resolvidos

Cálculo de Integrais Impróprias do Primeiro Tipo: Integrais Impróprias sobre Intervalos Não Limitados

Exercício 12.1.

Uma integral imprópria do primeiro tipo que diverge

Calcule $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

Solução:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{t\to+\infty} \int_2^t \frac{dx}{x} = \lim_{t\to+\infty} \ln x\Big]_2^t = \lim_{t\to+\infty} (\ln t - \ln 2) = +\infty.$$

Logo, $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge.

Exercício 12.2.

Integrais impróprias do primeiro tipo que convergem

Usando a definição de integral imprópria, calcule as seguintes integrais:

a. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$

(Aula 26 do caderno didático, exercício proposto nº 2)

b. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\,e^x\,dx$

c. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$

Solução:

a. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$

Observe que neste exercício o limite de integração superior é infinito.

Pela definição de integral imprópria sobre um intervalo não limitado, temos

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{t\to+\infty}\int_2^{t} \frac{dx}{x^2-1} \tag{12.1}$$

Mas,

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)}$$

Para resolver esta última integral, usaremos o método das frações parciais. Como o denominador é o produto do fator linear $(x-1)$ pelo fator linear $(x+1)$, a decomposição em frações parciais para $\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}$, tem a forma:

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} \tag{12.2}$$

Para determinar os valores de A e B, multiplicamos ambos os lados da Expressão 12.2 pelo produto dos denominadores $(x-1)(x+1)$, obtendo

$$1 = A(x+1) + B(x-1)$$

$$1 = (A+B)x + (A-B)$$

Assim, igualando os polinômios, temos:

$$A + B = 0 \tag{12.3}$$

$$A - B = 1 \tag{12.4}$$

Somando as Equações 12.3 e 12.4, temos $2A = 1 \Rightarrow A = \dfrac{1}{2}$, substituindo este valor de A em 12.3, temos $B = -\dfrac{1}{2}$.

Substituindo os valores de A e B em 12.2 resulta

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)} + \frac{-\frac{1}{2}}{(x+1)}$$

Assim,

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+1)}dx = \int \frac{1}{2(x-1)}dx - \int \frac{1}{2(x+1)}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C \tag{12.5}$$

Logo, $\displaystyle\int_2^t \frac{1}{x^2-1}dx = \int_2^t \frac{1}{(x-1)(x+1)}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg]_2^t$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{1}{2}\ln 1 + \frac{1}{2}\ln 3$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \frac{1}{2}\ln 3 \tag{12.6}$$

Substituindo em 12.1 o resultado obtido em 12.6, temos

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{t\to+\infty}\int_2^t \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \frac{1}{2}\ln 3\right]$$

$$= \frac{1}{2}\ln 1 + \frac{1}{2}\ln 3 = \frac{1}{2}\ln 3.$$

b. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 x\,e^x\,dx$

Observe que neste exercício o limite de integração inferior é infinito.

Pela definição de integral imprópria sobre um intervalo não limitado, temos

$$\int_{-\infty}^0 x\,e^x\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 x\,e^x\,dx \tag{12.7}$$

Usaremos integração por partes para calcular a integral indefinida $\int x e^x \, dx$.

Fazendo $\begin{cases} u = x & \Rightarrow \quad du = dx \\ dv = e^x \, dx & \Rightarrow \quad v = e^x \end{cases}$, temos

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x \, dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{e^x}_{v} \underbrace{dx}_{du} = x e^x - e^x + C$$

Assim,

$$\int_t^0 x e^x dx = x e^x - e^x \Big]_t^0 = (0 - e^0) - (t e^t - e^t) = -1 - t e^t + e^t \tag{12.8}$$

Substituindo 12.8 em 12.7:

$$\int_{-\infty}^0 x e^x dx = \lim_{t \to -\infty} (-1 - t e^t + e^t) = -1 - \lim_{t \to -\infty} (t e^t) + \lim_{t \to -\infty} (e^t)$$

Note-se que $\displaystyle \lim_{t \to -\infty} (e^t) = \lim_{t \to -\infty} \left(\frac{1}{e^{-t}} \right) = 0$

E usando a regra de L'Hôpital, temos

$$\lim_{t \to -\infty} (t e^t) = \lim_{t \to -\infty} \left(\frac{t}{e^{-t}} \right) \overset{L'H}{=} \lim_{t \to -\infty} \left(\frac{1}{-e^{-t}} \right) = 0$$

Portanto, $\displaystyle \int_{-\infty}^0 x e^x \, dx = \lim_{t \to -\infty} (-1 - t e^t + e^t) = -1$. Isto é, $\displaystyle \int_{-\infty}^0 x e^x \, dx = -1$.

c. $\displaystyle \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx$

Observe que neste exercício os dois limites de integração são infinitos.

Da definição de integral imprópria sobre um intervalo não limitado, para qualquer c número real. Temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx = \int_{-\infty}^{c} e^{-|x|} dx + \int_{c}^{+\infty} e^{-|x|} dx$$

Como

$$e^{-|x|} = \begin{cases} e^{-x} & \text{se} \quad x \geq 0 \\ e^{-(-x)} & \text{se} \quad x < 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{-x} & \text{se} \quad x \geq 0 \\ e^{x} & \text{se} \quad x < 0 \end{cases},$$

isto mostra que é conveniente considerar $c = 0$ como o número real, tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-|x|}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-|x|}dx$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} e^{x}dx}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx}_{\mathrm{II}} \tag{12.9}$$

Vamos calcular a integral I de 12.9.

Pela definição de integral imprópria sobre um intervalo não limitado, temos

$$\int_{-\infty}^{0} e^{x}dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} e^{x}dx = \lim_{t\to-\infty} e^{x}\Big]_{t}^{0} = \lim_{t\to-\infty}\left[e^{0}-e^{t}\right]$$

$$= 1 - \lim_{t\to-\infty} e^{t} = 1-0 = 1 \tag{12.10}$$

Analogamente, vamos calcular a integral II de 12.9.

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{0}^{t} e^{-x}dx = \lim_{t\to+\infty}\Big[-e^{-x}\Big]_{0}^{t}$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left[-e^{-t}+e^{0}\right] = \lim_{t\to+\infty}\left[\left(\frac{-1}{e^{t}}\right)+1\right] = 1 \tag{12.11}$$

Substituindo 12.11, 12.10 em 12.9 podemos concluir que a integral imprópria $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}dx$ converge e $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}dx$ $= 1+1 = 2$.

Cálculo de Integrais Impróprias do Segundo Tipo: Integrais Impróprias de Funções Não Limitadas

Exercício 12.3.

Uma integral imprópria do segundo tipo que diverge

Calcule $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}$.

Solução:

$$\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to0^+}\int_{t}^{1}\frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to0^+}\frac{x^{-1}}{-1}\Big]_{t}^{1} = \lim_{t\to0^+}\left(-1+\frac{1}{t}\right) = +\infty,$$

logo, a integral imprópria $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}$ diverge.

Exercício 12.4.

Integrais impróprias do segundo tipo que convergem

Usando a definição de integral imprópria, calcule as seguintes integrais:

a. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ b. $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$ c. $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$

(Aula 26 do caderno didático, exercícios propostos nº 9 e 8, respectivamente)

Solução:

a. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Observe que neste exercício o integrando é uma função não limitada no limite de integração superior.

Pela definição de integrais impróprias de funções não limitadas, temos

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1^-}\int_0^t = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{12.12}$$

Mas $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x$. Então,

$$\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x\Big]_0^t = (\operatorname{arcsen} t) - 0 = \operatorname{arcsen} t \tag{12.13}$$

Substituindo 12.13 em 12.12, obtemos

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1^-}\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1^-}(\operatorname{arcsen} t) = \frac{\pi}{2}.$$

b. $\displaystyle\int_0^1 \ln x dx$

Observe que neste exercício o integrando é uma função não limitada no limite de integração inferior.

Pela definição de integrais impróprias de funções não limitadas, temos

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{t\to 0^+} \ln x\,dx \tag{12.14}$$

Usaremos integração por partes para calcular a integral indefinida.

Fazendo $\begin{cases} u = \ln x & \Rightarrow \quad du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = dx & \Rightarrow \quad v = x \end{cases}$, temos que

$$\int \underbrace{\ln x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{x}_{v} \underbrace{\ln x}_{u} - \int \underbrace{x}_{v} \underbrace{\frac{1}{x}dx}_{du} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$$

Assim, $\displaystyle\int_t^1 \ln x dx = x\ln x - x\Big]_t^1 =$

$$= 1(\ln 1) - 1 - (t\ln t - t) = -1 - t\ln t + t \qquad (12.15)$$

Substituindo 12.15 em 12.14 e levando em conta que $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} t = 0$,

temos $\displaystyle\int_0^1 \ln x dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \ln x dx =$

$$= \lim_{t\to 0^+} (-1 - t\ln t + t) = -1 - \lim_{t\to 0^+} (t\ln t) \qquad (12.16)$$

Note-se que

$$\lim_{t\to 0^+} (t\ln t) = \lim_{t\to 0^+} \left(\frac{\ln t}{\frac{1}{t}}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{t\to 0^+} \left(\frac{\frac{1}{t}}{\frac{-1}{t^2}}\right) = \lim_{t\to 0^+} (-t) = 0 \qquad (12.17)$$

Substituindo 12.17 em 12.16, finalmente temos

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \ln x dx = -1.$$

c. $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} dx$

Observe que neste exercício o integrando é uma função não limitada no interior do intervalo.

Note-se que

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}}_{\mathrm{II}} \qquad (12.18)$$

Vamos calcular a integral I de 12.18.

Pela definição de integrais impróprias de funções não limitadas, temos

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{t\to -1} \int_0^t \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} \qquad (12.19)$$

Mas,

$$\int \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \int (x-1)^{-\frac{2}{3}} dx = 3\frac{(x-1)^{\frac{1}{3}}}{1} + C \qquad (12.20)$$

Então,

$$\int_0^t \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = 3(x-1)^{\frac{1}{3}}\Big]_0^t = 3(t-1)^{\frac{1}{3}} - 3(0-1)^{\frac{1}{3}} = 3(t-1)^{\frac{1}{3}} + 3 \qquad (12.21)$$

Substituindo 12.21 em 12.19, temos

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{t\to 1^-} \left[3(t-1)^{\frac{1}{3}} + 3\right] = 3 \qquad (12.22)$$

Analogamente, calculamos a integral II de 12.18.

Pela definição de integrais impróprias de funções não limitadas, temos

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{t\to 1^+} \int_t^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$$

Então, fazendo uso da fórmula 12.20, temos

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{t\to 1^+} \int_t^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{t\to 1^+} \left[3(x-1)^{\frac{1}{3}}\right]_t^3$$

$$= \lim_{t\to 1^+} \left[3(2)^{\frac{1}{3}} - 3(t-1)^{\frac{1}{3}}\right] = 3\sqrt[3]{2} - 0 = 3\sqrt[3]{2} \qquad (12.23)$$

Substituindo 12.23 e 12.22 em 12.18, temos

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = 3 + 3\sqrt[3]{2} = 3\left(1 + \sqrt[3]{2}\right).$$

Cálculo de Integrais Impróprias de Tipo Misto ou Duplamente Impróprias

Exercício 12.5.

Integral duplamente imprópria que converge

Usando a definição de integral imprópria, calcule a seguinte integral:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)}$$

(Aula 26 do caderno didático, exercício proposto nº 10)

Solução: Note-se que a integral dada é duplamente imprópria, já que

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)} = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)}}_{\text{Integral imprópria do tipo II}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)}}_{\text{Integral imprópria do tipo I}} \qquad (12.24)$$

Vamos calcular separadamente cada uma das integrais à direita.

Pela definição de integrais impróprias de funções não limitadas, temos

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)} = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)} \qquad (12.25)$$

Por outro lado, fazendo a substituição $u = \sqrt{x} \Rightarrow u^2 = x \Rightarrow dx = 2u\,du$, temos que a integral indefinida $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)}$ é dada por

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)} = \int \frac{2u\,du}{u(u^2+4)} = 2\int \frac{du}{u^2+4}$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right). \qquad (12.26)$$

Assim, usando 12.26, obtemos

$$\int_t^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\Bigg]_t^1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right)$$

Portanto,

$$\lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)} = \lim_{t\to 0^+} \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right)\right] = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) \qquad (12.27)$$

Substituindo 12.27 em 12.25, obtemos

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) \qquad (12.28)$$

Para calcular a segunda integral de 12.24, temos pela definição de integral imprópria sobre um intervalo não limitado que

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)} = \lim_{t\to +\infty} \int_1^t \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)} \qquad (12.29)$$

Usando em 12.29 a fórmula de integral indefinida encontrada em 12.26, obtemos

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)} = \lim_{t\to +\infty} \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right]_1^t$$

$$= \lim_{t\to +\infty} \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) \qquad (12.30)$$

Assim, substituindo 12.28 e 12.30 em 12.24, temos

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Isto é, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)} = \frac{\pi}{2}.$

Exercício 12.6.

Sabendo que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x^2\, dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$, calcule $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} dx.$

(Aula 26 do caderno didático, exercício proposto nº 19)

Solução: Note-se que a integral dada é duplamente imprópria, já que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} dx}_{\text{Integral imprópria de Tipo II}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} dx}_{\text{Integral imprópria de Tipo I}} \tag{12.31}$$

Pela definição de integrais impróprias de funções não limitadas, temos

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} dx.$$

Por outro lado, fazendo a substituição $u = \sqrt{x} \Rightarrow u^2 = x \Rightarrow dx = 2u\,du$ e a mudança dos limites de integração, quando $x = 0 \Rightarrow u = \sqrt{0} = 0$ e $x = 1 \Rightarrow u = \sqrt{1} = 1$, temos que

$$\int_t^1 \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} dx = 2\int_{\sqrt{t}}^1 \operatorname{sen} u^2\, du.$$

Logo, $$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} dx = 2 \lim_{t \to 0^+} \int_{\sqrt{t}}^1 \operatorname{sen} u^2\, du$$

$$= 2 \lim_{s \to 0^+} \int_s^1 \operatorname{sen} u^2\, du = 2\int_0^1 \operatorname{sen} u^2\, du \tag{12.32}$$

Por outro lado, da definição de integral imprópria sobre intervalos não limitados, temos que

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} dx.$$

Por outro lado, fazendo a substituição $u = \sqrt{x} \Rightarrow u^2 = x \Rightarrow dx = 2u\,du$ e a mudança dos limites de integração, quando $x = 0 \Rightarrow u = \sqrt{0} = 0$

e $x = 1 \Rightarrow u = \sqrt{1} = 1$, temos que

$$\int_1^t \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\, dx = 2\int_1^{\sqrt{t}} \operatorname{sen} u^2\, du.$$

Logo, $$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\, dx = 2\lim_{t\to+\infty}\int_1^{\sqrt{t}} \operatorname{sen} u^2\, du$$

$$= 2\lim_{s\to+\infty}\int_1^s \operatorname{sen} u^2\, du = 2\int_1^{+\infty} \operatorname{sen} u^2\, du. \qquad (12.33)$$

Portanto, substituindo 12.32 e 12.33 em 12.31, obtemos que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\, dx = 2\left[\int_0^1 \operatorname{sen} u^2\, du + \int_1^{+\infty} \operatorname{sen} u^2\, du\right] = 2\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} u^2\, du \qquad (12.34)$$

Por outro lado, por hipótese $\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x^2\, dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$, ou em forma equivalente, $\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} u^2\, du = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$ e substituindo este último resultado em 12.34, obtemos finalmente que $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\, dx = 2\frac{\sqrt{2\pi}}{4} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

Exercícios sobre Critérios para Convergência ou Divergência de Integrais Impróprias

Critérios para Convergência ou Divergência de Integrais Impróprias do Primeiro Tipo

Exercício 12.7.

Usando critérios de convergência, determine a convergência ou divergência das seguintes integrais impróprias:

a. $$\int_1^{+\infty} \frac{x^3 + e^{-x}}{x^3 + x^2 + 1}\, dx$$

(Aula 26 do caderno didático, exercício proposto nº 20)

b. $$\int_1^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 + 2x + 1}\, dx$$

(Aula 27 do caderno didático, exercício proposto nº 7)

c. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\text{sen}^3 x}{x^2} dx$

(Aula 27 do caderno didático, exercício proposto nº 6)

d. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^8+x^6+2}} dx$

Solução:

a. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^3+e^{-x}}{x^3+x^2+1} dx$

Observe que a integral dada é uma integral imprópria sobre um intervalo não limitado. Temos também que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+e^{-x}}{x^3+x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{e^{-x}}{x^3}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}} = 1$, pois sabemos que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ para $n \in \mathbb{N}$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x x^3} = 0$. Assim, $f(x) = \dfrac{x^3+e^{-x}}{x^3+x^2+1}$ é contínua em $[1,+\infty)$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+e^{-x}}{x^3+x^2+1} = 1 \neq 0$. Logo, por uma consequência do Teorema 26.1, do Módulo 2 do caderno didático (ou pela propriedade 6, página 81 deste caderno) que diz:

"Seja f contínua em $[a,+\infty)$. Se, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ diverge."

Podemos, então, afirmar que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^3+e^{-x}}{x^3+x^2+1} dx$ diverge.

b. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^3+2x+1} dx$

Observe que a integral dada é uma integral imprópria sobre um intervalo não limitado. Neste caso, não podemos usar o critério usado no exemplo anterior já que agora $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^3+2x+1} = 0$, o que não implica coisa alguma. Vamos tentar usar outro critério.

Como a maior potência do numerador da fração: $\dfrac{x^2+1}{x^3+2x+1}$ é 2, e a maior potência do denominador é 3, **podemos usar o critério do limite do quociente** com $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3+2x+1}$

e $g(x) = \dfrac{x^2}{x^3} = \dfrac{1}{x}$. Como $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x^3+2x+1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x}{x^3+2x+1} = 1 > 0$. Então, as integrais impróprias $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^3+2x+1}dx$ e $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ comportam-se da mesma maneira, ou seja, ambas convergem ou ambas divergem. Por outro lado, sabemos do primeiro exemplo referencial dado na página 78 deste caderno (ou Exemplo 27.2 do Módulo 2 do caderno didático) que:

"$\displaystyle\int \frac{1}{x^r}\,dx$ com $a > 0$ converge se $r > 1$ e diverge se $r \leq 1$."

Assim, neste caso, $a = 1 > 0$ e $r = 1$, logo $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ diverge.

Portanto, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^3+2x+1}\,dx$ também diverge.

!

Erro frequente nas provas!!! Observe que é errado escolher no Exercício 12.7-b, por exemplo, $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x^3 + 2x + 1$ e aplicar o critério do quociente a essas funções, pois o integrando, neste caso, é $\dfrac{x^2+1}{x^3+2x+1}$ e, para aplicar o critério, todo esse integrando (e não uma parte dele) é que tem que ser uma das funções f ou g.

c. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^2}dx$

A integral dada é uma integral imprópria sobre um intervalo não limitado.

Note-se que, neste exemplo, não podemos aplicar o critério da comparação para integrais impróprias sobre intervalos não limitados, uma vez que a função $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{x^2}$ assume também valores negativos. Vamos, então, considerar a integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^2}\right| dx$.

Como $0 \leq |\operatorname{sen} x| \leq 1$, segue que $0 \leq |\operatorname{sen}^3 x| \leq 1$, logo $0 \leq \left|\dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{x^2}\right| \leq \dfrac{1}{x^2}$.

Por outro lado, novamente lembremos do primeiro exemplo referencial dado na página 78 deste caderno (ou Exemplo 27.2 do Módulo 2 do caderno didático) que:

"$\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^r}\,dx$ com $a > 0$ converge se $r > 1$ e diverge se $r \leq 1$."

Logo, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge, pois neste caso $a = 1 > 0$ e $r = 2 > 1$. Assim, estamos em condições de aplicar o **critério da comparação**, pois as funções são todas positivas. Considerando $f(x) = \left|\dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{x^2}\right|$ e $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, temos que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para todo $x \geq 1$. Como $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge, então, temos, pelo critério da comparação, que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^2}\right| dx$ converge.

Usando agora o critério 5 dado na página 81 deste caderno (ou Exemplo 27.6 do Módulo 2 do caderno didático) que diz:

"Seja f contínua em $[a, +\infty)$ e não necessariamente positiva. Se $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ converge, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ também converge."

Afirmamos, então, que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^2} dx$ também converge.

d. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^8 + x^6 + 2}} dx$

A integral dada é uma integral imprópria sobre um intervalo não limitado. Note-se que, neste caso, também não podemos usar a propriedade que usamos no Exercício 12.7-a, pois, se $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^8 + x^6 + 2}} = 0$ nada pode ser dito sobre a convergência ou divergência de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^8 + x^6 + 2}} dx$. Novamente, do primeiro exemplo referencial das notas de aula (ou Exemplo 27.2 do Módulo 2) que diz:

"$\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^r} dx$ com $a > 0$ converge se $r > 1$ e diverge se $r \leq 1$."

Podemos afirmar que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ é convergente. Por outro lado, $x^8 \leq x^8 + x^6 + 2$ vale para todo $x \in \mathbb{R}$, em particular, vale para todo $x \geq 1$ e como a função raiz quadrada é crescente para todo $x \geq 0$, temos: $x^4 = \sqrt{x^8} \leq \sqrt{x^8 + x^6 + 2}$ para todo $x \geq 1$, de onde $0 < \dfrac{1}{\sqrt{x^8 + x^6 + 2}} \leq \dfrac{1}{x^4}$. Logo, $0 < \dfrac{x^2}{\sqrt{x^8 + x^6 + 2}} \leq \dfrac{x^2}{x^4} = \dfrac{1}{x^2}$. Considerando $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^8 + x^6 + 2}}$ e $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, temos que $0 < f(x) \leq g(x)$ para todo $x \geq 1$. Como $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ é convergente, temos pelo **critério da comparação** que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^8 + x^6 + 2}} dx$ é convergente.

Critérios para Convergência ou Divergência de Integrais Impróprias do Segundo Tipo

Exercício 12.8.

Usando critérios de convergência, determine a convergência ou divergência das seguintes integrais impróprias:

a. $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}x^{-\frac{3}{2}}dx$

b. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}dx$

(Aula 27 do caderno didático, exercício proposto nº 14)

Solução:

a. $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}x^{-\frac{3}{2}}dx$

Observe que $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}x^{-\frac{3}{2}}dx = \int_0^1 \frac{dx}{e^x x^{\frac{3}{2}}}$ é uma integral imprópria de uma função não limitada no limite inferior.

Note-se que a função e^x é crescente para todo $x \in \mathbb{R}$, em particular, para $0 < x \leq 1$, então $0 < e^x \leq e^1$. Logo, $0 < \dfrac{1}{e} \leq \dfrac{1}{e^x}$.

Portanto, $0 < \displaystyle\frac{1}{e}\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} < \int_0^1 \frac{dx}{e^x x^{\frac{3}{2}}}$.

Considerando $f(x) = \dfrac{1}{e}\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ e $g(x) = \dfrac{1}{e^x x^{\frac{3}{2}}}$, temos que $0 < f(x) \leq g(x)$ para todo $0 < x \leq 1$.

Afirmamos que a integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ diverge. De fato, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ pode ser calculada diretamente usando definição de integrais impróprias de funções não limitadas ou podemos observar que a integral dada é um caso particular para $b = 1 > 0$ e $r = \dfrac{3}{2} > 1$ do segundo exemplo referencial dado na página 78 deste caderno que diz:

"$\displaystyle\int_0^b \frac{1}{x^r}dx$ com $b > 0$ converge se $r < 1$ e diverge se $r \geq 1$."

Logo, $\displaystyle\frac{1}{e}\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ também diverge, assim, pelo **critério da comparação**, concluímos que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x x^{\frac{3}{2}}}$ diverge, isto é, a integral $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}x^{-\frac{3}{2}}dx$ é divergente.

b. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}dx$ é uma integral imprópria de uma função não limitada no limite inferior.

Observe que para $x > 1$, temos

$$\sqrt{x^4-1} = \sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x-1}\sqrt{x+1}\sqrt{x^2+1}$$

Por outro lado, se $1 < x \leq 2$ temos que, $1+1 < x+1 \leq 2+1$, isto é, $2 < x+1 \leq 3$.

Note-se que a função $\sqrt{x+1}$ é crescente para todo $x \geq -1$, em particular para $2 < x+1 \leq 3$, então $\sqrt{2} < \sqrt{x+1} \leq \sqrt{3}$.

Analogamente, se $1 < x \leq 2$ temos que, x^2 é uma função crescente nesse intervalo. Logo, $1 < x^2 \leq 2^2 \Rightarrow 1 < x^2 \leq 4 \Rightarrow 1+1 < x^2+1 \leq 4+1 \Rightarrow 2 < x^2+1 \leq 5$ e, como a raiz quadrada é crescente no último intervalo, temos que $\sqrt{2} < \sqrt{x^2+1} \leq \sqrt{5}$.

Assim, $2 = \sqrt{2}\sqrt{2} < \sqrt{x+1}\sqrt{1+x^2}$ para $1 < x \leq 2 \Rightarrow \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{\sqrt{x+1}\sqrt{1+x^2}}$. Portanto, para $1 < x \leq 2$ temos que, $\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} > \dfrac{1}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^4-1}} > 0$.

Considerando $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^4-1}}$ e $g(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$, temos que $0 < f(x) \leq g(x)$ para todo $1 < x \leq 2$.

Afirmamos que a integral $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{x-1}}dx$ converge.

De fato, $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{x-1}}dx$ pode ser calculada diretamente usando definição de integrais impróprias de funções não limitadas ou podemos observar que fazendo a substituição $\begin{cases} y = x-1 \\ dy = dx \end{cases}$, onde $y = 0$ se $x = 1$ e $y = 1$ se $x = 2$, obtemos $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{y^{\frac{1}{2}}}dy$. A integral dada é um caso particular para $b = 1 > 0$ e $r = \dfrac{1}{2} < 1$ do segundo exemplo referencial dado na página 78 deste caderno que diz:

"$\displaystyle\int_0^b \frac{1}{y^r}dy$ com $b > 0$ converge se $r < 1$ e diverge se $r \geq 1$."

Logo, $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{x-1}}dx$ converge, assim pelo **critério da comparação** concluímos que $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}dx$ converge, isto é, a integral $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}dx$ é convergente.

✍ Note-se que muitas vezes o mesmo exercício pode ser estudado usando um outro critério para a convergência ou divergência de integrais impróprias.

Por exemplo, no Exercício 12.8-b, a integral $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$ pode ser estudada também da seguinte forma:

Observe que

$$\sqrt{x^4-1} = \sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x-1}\sqrt{x+1}\sqrt{x^2+1}.$$

Note que, se $x \to 1$ então $\sqrt{x+1}\sqrt{x^2+1} \to \sqrt{2}\sqrt{2} = 2$. Isso sugere usar o critério do limite do quociente com $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^4-1}}$ e $g(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$. Lembremos o critério do limite do quociente:

"Sejam f e g contínuas em $(a,b]$, com $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$ para qualquer $x \in (a,b]$ e $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ com $L \in (0,+\infty)$. Isto é, o limite do quociente é um número positivo. Então, as integrais impróprias $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ comportam-se da mesma maneira. Ou seja, ambas convergem ou ambas divergem."

Note-se que, neste caso, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^4-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}\sqrt{x^2+1}} > 0$ e $g(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} > 0$ em $(1,2]$.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}\sqrt{x^2+1}}}{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2}{\sqrt{x+1}\sqrt{x^2+1}} = \frac{2}{2}$$
$$= 1 \in (0,+\infty).$$

Então, pelo critério do quociente, as integrais $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$ e

$$\int_1^2 \frac{dx}{2\sqrt{x-1}} \text{ ambas convergem ou ambas divergem.} \quad (12.35)$$

Por outro lado, observe que na integral $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{2\sqrt{x-1}}$, se fizermos a substituição $\begin{cases} u = x-1 \\ du = dx \end{cases}$ e a mudança correspondente dos limites de integração $\begin{cases} x=1 \Rightarrow u=0 \\ x=2 \Rightarrow u=1 \end{cases}$, resulta que

$$\int_1^2 \frac{dx}{2\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{du}{u^{\frac{1}{2}}} \qquad (12.36)$$

Por outro lado, $\int_0^1 \frac{du}{u^{\frac{1}{2}}}$ pode ser calculada diretamente usando definição de integrais impróprias de funções não limitadas ou podemos observar que a integral dada é um caso particular para $b=1>0$ e $r=\frac{1}{2}<1$ do segundo exemplo referencial dado na página 78 deste caderno que diz:

"$\int_0^b \frac{1}{x^r}\,dx$ com $b>0$ converge se $r<1$ e diverge se $r \geq 1$."

Assim, podemos afirmar que $\int_0^1 \frac{du}{u^{\frac{1}{2}}}$ converge. Logo, usando 12.36 afirmamos que $\int_1^2 \frac{dx}{2\sqrt{x-1}}$ converge. Levando este último resultado a 12.35 podemos finalmente afirmar que $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$ converge.

Aplicações das Integrais Impróprias ao Cálculo de Áreas de Regiões Não Limitadas

Exercício 12.9.

Determine a área A da região ilimitada acima do eixo x sob a curva $y=\frac{1}{9+x^2}$, chamada *Bruxa de Agnesi*.

Solução: Observe que $y=\frac{1}{9+x^2}$ é uma função sempre positiva e definida para todo $x \in \mathbb{R}$. A região ilimitada está acima do eixo x, assim, não precisamos do gráfico da região para perceber que a área A é dada por $A=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{9+x^2}dx$, desde que essa última integral seja convergente. **(Observe que a integral que vamos calcular é o exercício proposto nº 3, Aula 26 do caderno didático)**

Da definição de integral imprópria sobre um intervalo não limitado, para qualquer c número real, temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{9+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{c}\frac{1}{9+x^2}\,dx + \int_{c}^{+\infty}\frac{1}{9+x^2}\,dx$$

Para facilitar os cálculos, podemos considerar $c = 0$ como o número real, tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{9+x^2}\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{9+x^2}\,dx}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{9+x^2}\,dx}_{\mathrm{II}} \qquad (12.37)$$

Vamos calcular a integral I de 12.37.

Pela definição de integral imprópria sobre um intervalo não limitado, temos

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{9+x^2}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{1}{9+x^2}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\Big]_{t}^{0}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \left[0 - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3}\right] = -\frac{1}{3}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{6}. \qquad (12.38)$$

Lembre-se de que $\displaystyle\int \frac{1}{9+x^2}\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C$ e $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} \operatorname{arctg}\frac{t}{3} = -\frac{\pi}{2}$.

Analogamente, vamos calcular a integral II de 12.37.

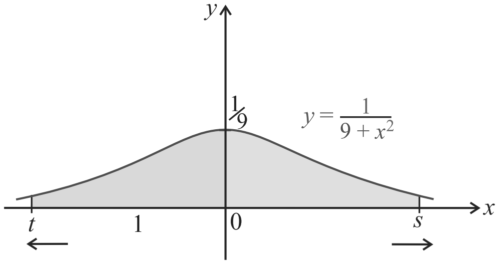
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{9+x^2}\,dx = \lim_{s\to+\infty} \int_{0}^{s} \frac{1}{9+x^2}\,dx = \lim_{s\to+\infty} \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\Big]_{0}^{s}$$

$$= \lim_{s\to+\infty} \left[\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{s}{3} - 0\right] = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{6}. \qquad (12.39)$$

Lembre-se de que $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} \operatorname{arctg}\frac{s}{3} = \frac{\pi}{2}$.

Substituindo 12.39, 12.38 em 12.37 podemos concluir que a integral imprópria $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{9+x^2}\,dx$ converge e $\displaystyle A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{9+x^2}\,dx = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ unidades de área.

Somente como informação, forneceremos o gráfico da região estudada:



Exercício 12.10.

Encontre a área A da região do primeiro quadrante limitada pela curva $y = \dfrac{1}{\sqrt{x(2-x)}}$, o eixo Ox e as retas $x = 0$ e $x = 2$.

Solução: Observe que $y = \dfrac{1}{\sqrt{x(2-x)}}$ para $0 < x < 2$ é uma função sempre positiva. Também sabemos que dita região está no primeiro quadrante e é limitada inferiormente pelo eixo Ox, assim não precisamos do gráfico da região para perceber que a área A é dada por $A = \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx$, desde que essa última integral seja convergente.

Note-se também que

$$A = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx}_{\mathrm{II}} \tag{12.40}$$

Vamos calcular a integral I dada na Expressão 12.40.

Pela definição de integrais impróprias de funções não limitadas, temos

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx \tag{12.41}$$

Usando a técnica de completar quadrados, temos que

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x^2-2x+1)}}\,dx$$
$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx.$$

Fazendo a substituição $\begin{cases} u = x-1 \\ du = dx \end{cases}$ na última integral à direita, temos

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \operatorname{arcsen} u + C = \operatorname{arcsen}(x-1) + C \tag{12.42}$$

Substituindo 12.42 em 12.41, obtemos

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\left(\left[\operatorname{arcsen}(x-1)\right]_t^1\right)$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\left[\operatorname{arcsen}(1-1) - \operatorname{arcsen}(t-1)\right]$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\left[-\operatorname{arcsen}(t-1)\right] = -\operatorname{arcsen}(-1) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (12.43)$$

Analogamente, calculamos a integral II dada em 12.40.

Pela definição de integrais impróprias de funções não limitadas, temos

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx = \lim_{s\to 2^-}\int_1^s \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx \quad (12.44)$$

Então, fazendo uso da fórmula 12.42, temos

$$\int_1^s \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx = \operatorname{arcsen}(x-1)\Big]_1^s$$

$$= \operatorname{arcsen}(s-1) - \operatorname{arcsen}(1-1) = \operatorname{arcsen}(s-1) \quad (12.45)$$

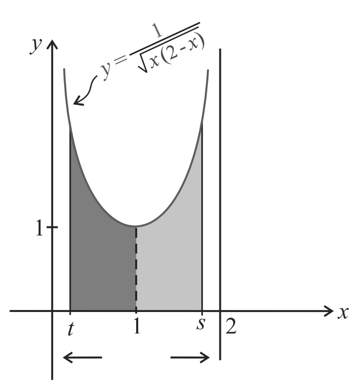
Substituindo 12.45 em 12.44, temos

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx = \lim_{s\to 2^-}\operatorname{arcsen}(s-1) = \operatorname{arcsen}(1) = \frac{\pi}{2} \quad (12.46)$$

Substituindo 12.46 e 12.43 em 12.40, temos

$$A = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \text{ unidades de área.}$$

Somente como informação, forneceremos o gráfico da região estudada:



Exercício 12.11.

Determine a área A da região ilimitada do primeiro quadrante limitada pela curva $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}(x+1)}$, o eixo Ox e o eixo Oy.

Solução: Observe que $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}(x+1)}$ para $0 < x < +\infty$ é uma função sempre positiva, assim não precisamos do gráfico da região para perceber que a região ilimitada sob a curva $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}(x+1)}$ à direita do eixo Oy e limitada inferiormente pelo eixo Ox tem a área dada por $A = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$, desde que essa última integral seja convergente.

Observe que

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \underbrace{\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}}_{\text{Integral imprópria de Tipo II}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}}_{\text{Integral imprópria de Tipo I}} \qquad (12.47)$$

Vamos calcular separadamente cada uma das integrais à direita.

Pela definição de integrais impróprias de funções não limitadas, temos

$$\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \lim_{t\to 0^+} \int_t^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} \qquad (12.48)$$

Por outro lado, fazendo-se a substituição $u = \sqrt{x} \Rightarrow u^2 = x \Rightarrow dx = 2u\,du$, temos que a integral indefinida $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$ é dada por

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} &= \int \frac{2u\,du}{u(u^2+1)} = \int \frac{2\,du}{u^2+1}\\ &= 2\,\mathrm{arctg}(u) + C = 2\,\mathrm{arctg}(\sqrt{x}) + C \qquad (12.49)\end{aligned}$$

Assim, usando 12.49, obtemos

$$\int_t^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = 2\,\mathrm{arctg}(\sqrt{x})\Big]_t^1 = 2\,\mathrm{arctg}(1) - 2\,\mathrm{arctg}(\sqrt{t}) = 2\frac{\pi}{4} - 2\,\mathrm{arctg}(\sqrt{t}).$$

Portanto,

$$\lim_{t\to 0^+} \int_t^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{\pi}{2} - 2\,\mathrm{arctg}(\sqrt{t})\right] = \frac{\pi}{2} \qquad (12.50)$$

Substituindo 12.50 em 12.48, obtemos

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \frac{\pi}{2} \qquad (12.51)$$

Para calcular a segunda integral de 12.47, temos pela definição de integral imprópria sobre um intervalo não limitado que

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \lim_{s\to+\infty} \int_1^s \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} \qquad (12.52)$$

Usando em 12.52 a fórmula de integral indefinida encontrada em 12.49, obtemos

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \lim_{s\to+\infty} \left[2\operatorname{arctg}(\sqrt{x})\right]_1^s$$

$$= \lim_{s\to+\infty} \left((2\operatorname{arctg}(\sqrt{s}) - 2\operatorname{arctg} 1)\right) = 2\frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \qquad (12.53)$$

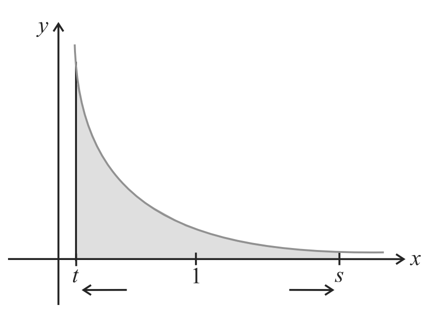
Assim, substituindo 12.51 e 12.53 em 12.47, temos

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Isto é,

$$A = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \pi \ \text{ unidades de área.}$$

Somente como informação, forneceremos o gráfico da região estudada:



Aplicações das Integrais Impróprias Envolvendo Física e Química

Exercício 12.12.

A velocidade média das moléculas em um gás ideal é

$$\overline{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{M}{2RT} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{+\infty} v^3 e^{-Mv^2/(2RT)} dv$$

em que M é o peso molecular do gás, R é a constante do gás, T é a temperatura do gás, e v é a velocidade molecular. Calculando a integral imprópria dada, mostre que $\overline{v} = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi M}}$.

Exercício 12.13.

Uma substância radioativa decai exponencialmente: a massa no tempo t é $m(t) = m(0)e^{kt}$, onde $m(0)$ é a massa inicial e k é uma constante negativa. A vida média M de um átomo na substância é $\quad M = -k \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{kt} dt$.

Para o isótopo radioativo de carbono, C^{14}, usado para datação, o valor de k é $-0,000121$. Calculando a integral imprópria dada, mostre que a vida média de um átomo de C^{14} é $M = \dfrac{1}{0,000121} \approx 8264,5$ anos.

Passo a Passo dos Outros Exercícios Propostos no Caderno Didático

Exercício 12.14.

Analise as seguintes integrais impróprias, indicando quando elas divergem e calculando-as, caso contrário:

a. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 4x}$

b. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x \operatorname{sen}(2x) dx$

c. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

d. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(\frac{x}{2}\right) dx$

e. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$

f. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$

(Aula 26 do caderno didático, exercícios propostos n$^{\underline{os}}$ 7, 15, 17, 16, 18 e 12, respectivamente)

Solução:

a. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3+4x}$

Observe que a integral dada é uma integral imprópria sobre um intervalo não limitado, logo

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3+4x} = \lim_{t\to+\infty} \int_1^{t} \frac{dx}{x^3+4x} \qquad (12.54)$$

Mas,

$$\int \frac{dx}{x^3+4x} = \frac{dx}{x(x^2+4)}$$

Para resolver esta última integral, usaremos o método das frações parciais. Como o denominador é o produto do fator linear x pelo fator quadrático irredutível (x^2+4), a decomposição em frações parciais para $\dfrac{1}{x(x^2+4)}$ tem a forma

$$\frac{1}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+4)} \qquad (12.55)$$

Para determinar os valores de A, B e C, multiplicamos ambos os lados da Expressão 12.55 pelo produto dos denominadores $x(x^2+4)$, obtendo

$$1 = A(x^2+4)+(Bx+C)x$$

$$1 = (A+B)x^2+Cx+4A$$

Assim, igualando os polinômios, temos:

$$A+B=0 \qquad (12.56)$$

$$C=0 \qquad (12.57)$$

$$4A=1 \qquad (12.58)$$

De 12.57 temos $C=0$, de 12.58 $A=\dfrac{1}{4}$. Substituindo este valor de A em 12.56, temos $B=-\dfrac{1}{4}$.

Substituindo os valores de A, B e C em 12.55 resulta

$$\frac{1}{x(x^2+4)} = \frac{1}{4x} - \frac{x}{4(x^2+4)}$$

Assim,

$$\int \frac{dx}{x(x^2+4)} = \int \frac{1}{4x}dx - \int \frac{x}{4(x^2+4)}dx =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{8}\ln|x^2+4| = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2}{x^2+4}\right| + C \qquad (12.59)$$

Logo,

$$\int_1^t \frac{dx}{x(x^2+4)} = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2}{x^2+4}\right|\Bigg]_1^t =$$

$$= \frac{1}{8}\ln\left|\frac{t^2}{t^2+4}\right| - \frac{1}{8}\ln\left|\frac{1}{5}\right| = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{t^2}{t^2+4}\right| + \frac{1}{8}\ln 5 \qquad (12.60)$$

Substituindo em 12.54 o resultado obtido em 12.60, temos

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3+4x} = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{dx}{x^3+4x} = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{8}\ln\left|\frac{t^2}{t^2+4}\right| + \frac{1}{8}\ln 5\right]$$

$$= \frac{1}{8}\ln\left|\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2}{t^2+4}\right| + \frac{1}{8}\ln 5 = \frac{1}{8}\ln|1| + \frac{1}{8}\ln 5$$

Assim, resulta

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3+4x} = \frac{1}{8}\ln 5.$$

b. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^x \operatorname{sen}(2x)dx$

Observe que a integral dada é uma integral imprópria sobre um intervalo não limitado, logo

$$\int_{-\infty}^0 e^x \operatorname{sen}(2x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 e^x \operatorname{sen}(2x)dx \qquad (12.61)$$

Usaremos integração por partes para calcular a integral indefinida $\displaystyle\int e^x \operatorname{sen}(2x)dx$.

Fazendo $\begin{cases} u = e^x & \Rightarrow \quad du = e^x dx \\ dv = \operatorname{sen}(2x)dx & \Rightarrow \quad v = -\dfrac{1}{2}\cos(2x) \end{cases}$, temos que

$$\int \underbrace{e^x}_{u}\underbrace{\operatorname{sen}(2x)dx}_{dv} = -\underbrace{\frac{e^x}{2}}_{u}\underbrace{\cos(2x)}_{v} + \frac{1}{2}\int \underbrace{\cos(2x)}_{v}\underbrace{e^x dx}_{du} \qquad (12.62)$$

Aplicaremos novamente integração por partes na última integral à direita.

Fazendo $\begin{cases} u = e^x & \Rightarrow \quad du = e^x dx \\ dv = \cos(2x)dx & \Rightarrow \quad v = \dfrac{1}{2}\,\text{sen}(2x) \end{cases}$, temos que

$$\int e^x \cos(2x)dx = \frac{e^x}{2}\,\text{sen}(2x) - \frac{1}{2}\int e^x\,\text{sen}(2x)dx \qquad (12.63)$$

Substituindo 12.63 em 12.62, obtemos

$$\left(\frac{1}{4}+1\right)\int e^x\,\text{sen}(2x)dx = -\frac{e^x}{2}\cos(2x) + \frac{e^x}{4}\,\text{sen}(2x) + C_1$$

$$\int e^x\,\text{sen}(2x)dx = -\frac{2}{5}e^x\cos(2x) + \frac{e^x}{5}\,\text{sen}(2x) + C \qquad (12.64)$$

Assim, $\displaystyle\int_t^0 e^x\,\text{sen}(2x)dx = -\frac{2}{5}e^x\cos(2x) + \frac{e^x}{5}\,\text{sen}(2x)\Big]_t^0$

$$= -\frac{2}{5}e^0\cos(0) + \frac{e^0}{5}\,\text{sen}(0) + \frac{2}{5}e^t\cos(2t) - \frac{e^t}{5}\,\text{sen}(2t)$$

$$= -\frac{2}{5} + \frac{2}{5}e^t\cos(2t) - \frac{e^t}{5}\,\text{sen}(2t) \qquad (12.65)$$

Aplicando o limite em 12.65 resulta

$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^0 e^x\,\text{sen}(2x)dx = \lim_{t\to-\infty}\left[-\frac{2}{5} + \frac{2}{5}e^t\cos(2t) - \frac{e^t}{5}\,\text{sen}(2t)\right]$$

$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^0 e^x\,\text{sen}(2x)dx = -\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\lim_{t\to-\infty} e^t\cos(2t) - \frac{1}{5}\lim_{t\to-\infty} e^t\,\text{sen}(2t)$$

Note-se que $\displaystyle\lim_{t\to-\infty}(e^t\cos 2t) = \lim_{t\to-\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{e^{-t}}\right)}_{\to 0}\overbrace{\cos t}^{\text{limitada}} = 0$ e que $\displaystyle\lim_{t\to-\infty}\overbrace{(\text{sen}(2t))}^{\text{limitada}}\underbrace{\left(\frac{1}{e^{-t}}\right)}_{\to 0} = 0$. Portanto, $\displaystyle\lim_{t\to-\infty}\int_t^0 e^x\,\text{sen}(2x)dx = -\frac{2}{5}$. Isto é, $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^x\,\text{sen}(2x)dx = -\frac{2}{5}$.

c. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

Pela definição de integrais impróprias de funções não limitadas, temos

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t\to 1^-}\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \qquad (12.66)$$

Mas $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \int (1-x)^{-\frac{1}{2}}dx = -2(1-x)^{\frac{1}{2}} + C$. Então

$$\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2(1-x)^{\frac{1}{2}}\Big]_0^t = -2(1-t)^{\frac{1}{2}} + 2 \qquad (12.67)$$

Substituindo 12.67 em 12.66, obtemos

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t\to 1^-}\left(-2(1-t)^{\frac{1}{2}} + 2\right) = 2.$$

d. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(\frac{x}{2}\right) dx$

Pela definição de integrais impróprias de funções não limitadas, temos

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(\frac{x}{2}\right) dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^2 \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(\frac{x}{2}\right) dx \qquad (12.68)$$

Usaremos integração por partes para calcular a integral indefinida $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(\frac{x}{2}\right) dx$.

Fazendo $\begin{cases} u = \ln\dfrac{x}{2} & \Rightarrow \quad du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = x^{-\frac{1}{2}}dx & \Rightarrow \quad v = 2x^{\frac{1}{2}} \end{cases}$, temos que

$$\int \underbrace{\ln\frac{x}{2}}_{u}\,\underbrace{x^{-\frac{1}{2}}dx}_{dv} = \underbrace{2x^{\frac{1}{2}}}_{v}\,\underbrace{\ln\frac{x}{2}}_{u} - 2\int \underbrace{x^{\frac{1}{2}}}_{v}\,\underbrace{\frac{1}{x}dx}_{du} = 2\sqrt{x}\ln\frac{x}{2} - 2\int x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= 2\sqrt{x}\ln\frac{x}{2} - 4x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x}\ln\frac{x}{2} - 4\sqrt{x} + C$$

Assim, $\displaystyle\int_t^2 \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(\frac{x}{2}\right) dx = 2\sqrt{x}\ln\frac{x}{2} - 4\sqrt{x}\Big]_t^2$

$$= 2\sqrt{2}\ln\frac{2}{2} - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{t}\ln\frac{t}{2} + 4\sqrt{t} = -4\sqrt{2} - 2\sqrt{t}\ln\frac{t}{2} + 4\sqrt{t} \qquad (12.69)$$

Substituindo 12.69 em 12.68 e levando em conta que $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \sqrt{t} = 0$, temos

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(\frac{x}{2}\right) dx = \lim_{t\to 0^+}\left(-4\sqrt{2} - 2\sqrt{t}\ln\frac{t}{2} + 4\sqrt{t}\right)$$

$$= -4\sqrt{2} - 2\lim_{t\to 0^+}\left(\sqrt{t}\ln\frac{t}{2}\right) \qquad (12.70)$$

Note-se que

$$\lim_{t\to 0^+}\left(\sqrt{t}\ln\frac{t}{2}\right)=\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{\ln\frac{t}{2}}{\frac{1}{\sqrt{t}}}\right)\overset{L'H}{=}\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{2}/\frac{t}{2}}{-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1/t}{-1/(2t^{\frac{3}{2}})}\right)=\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{-2t^{\frac{3}{2}}}{t}\right)=\lim_{t\to 0^+}(-2\sqrt{t})=0 \qquad (12.71)$$

Substituindo 12.71 em 12.70, finalmente temos

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\ln\left(\frac{x}{2}\right)dx=-4\sqrt{2}.$$

e. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$

!

Muitas vezes, os alunos ficam tentados a aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo diretamente a uma integral imprópria, sem fazer os limites apropriados. Para ilustrar o que pode acontecer de errado se procedemos dessa maneira, vamos resolver o seguinte exercício de duas maneiras.

A primeira, de forma errada, ignorando o fato de que a integral dada é imprópria

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}=\int_0^2 (x-1)^{-2}dx=\left.\frac{(x-1)^{-1}}{-1}\right]_0^2=-\left.\frac{1}{(x-1)}\right]_0^2$$
$$=-1-(-1)=-2.$$

Observe que este último resultado não faz sentido, pois o integrando é uma função que nunca é negativa e, pelas propriedades das integrais definidas, a integral também nunca será negativa. Temos assim um absurdo!

Para calcular $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ de forma correta observe que

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}=\underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}}_{\mathrm{I}}+\underbrace{\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}}_{\mathrm{II}} \qquad (12.72)$$

Vamos calcular a integral I de 12.72.

Pela definição de integrais impróprias de funções não limitadas, temos

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{(x-1)^2} \tag{12.73}$$

Mas,

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2} = \int (x-1)^{-2} dx = \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + C \tag{12.74}$$

Então,

$$\int_0^t \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(t-1)} - 1 \tag{12.75}$$

Substituindo 12.75 em 12.73, temos

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{t\to 1^-} \left[-\frac{1}{(t-1)} - 1\right] = +\infty \tag{12.76}$$

Como uma das integrais que compõe a soma em 12.72 diverge, podemos concluir (mesmo sem estudar a integral II em 12.72) que a integral $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ diverge.

f. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$

$$\int_1^t \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = -\int_1^t \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} dx = -e^{\frac{1}{x}}\Big]_1^t = -e^{\frac{1}{t}} + e$$

Assim, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \lim_{t\to+\infty} (-e^{\frac{1}{t}}) + e = -1 + e = e - 1.$

Exercício 12.15.

Usando critérios de convergência, determine a convergência ou divergência das seguintes integrais impróprias:

a. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{4+x^3}} dx$

b. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4+x^3}} dx$

c. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{4+x^3}} dx$

(Aula 27 do caderno didático, exercício proposto nº 16)

d. $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+2x+1}dx$

(Aula 27 do caderno didático, exercício proposto nº 9)

e. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^4+2x+1}dx$

(Aula 27 do caderno didático, exercício proposto nº 4)

Solução:

a. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{4+x^3}}dx$

Observe que a integral dada é uma integral imprópria sobre um intervalo não limitado. Temos também que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{4+x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{4+x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^3}{4+x^3}}$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{4+x^3}} = \sqrt{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{4}{x^3}+1}} = 1,$$

pois sabemos que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ para $n \in \mathbb{N}$.

Assim, $f(x) = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{4+x^3}}$ é contínua em $[1,+\infty)$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{4+x^3}} = 1 \neq 0$. Logo, por uma consequência do Teorema 26.1 do Módulo 2 do caderno didático (ou pela Propriedade 6 dada na página 81 deste caderno) que diz:

"Seja f contínua em $[a,+\infty)$. Se $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$ então $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge."

Podemos, então, afirmar que $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{4+x^3}}dx$ diverge.

b. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4+x^3}}dx$

Observe que a integral dada é uma integral imprópria sobre um intervalo não limitado. Neste caso, não podemos usar o critério usado no exemplo anterior já que agora $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{4+x^3}} = 0$, o que não implica coisa alguma. Vamos tentar usar outro critério.

Note-se que $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3}} > 0$ e $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4+x^3}} > 0$ em $[1,+\infty)$.

Podemos usar o critério do limite do quociente ou também chamado teste de comparação no limite com $f(x)$ e $g(x)$ acima definidas. Como $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x^3}}}{\frac{1}{\sqrt{4+x^3}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4+x^3}}{\sqrt{x^3}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{4}{x^3}+1} = 1 \in (0,+\infty)$. Então, as integrais impróprias $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4+x^3}}dx$ e $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx$ comportam-se da mesma maneira, ou seja, ambas convergem ou ambas divergem. Por outro lado, sabemos do primeiro exemplo referencial, página 78 deste caderno (ou Exemplo 27.2 do Módulo 2 do caderno didático) que diz:

"$\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^r}dx$ com $a > 0$ converge se $r > 1$ e diverge se $r \leq 1$."

Assim, neste caso, $a = 1 > 0$ e $r = \dfrac{3}{2} > 1$, logo $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx$ converge. Portanto, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4+x^3}}dx$ também converge.

c. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{4+x^3}}dx$

A integral dada é uma integral imprópria sobre um intervalo não limitado.

Note-se que, neste exemplo, não podemos aplicar o critério da comparação para integrais impróprias sobre intervalos não limitados, uma vez que a função $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{4+x^3}}$ assume também valores negativos. Vamos então considerar a integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{4+x^3}}\right| dx$.

Como $0 \leq |\operatorname{sen} x| \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$ segue que $0 \leq |\operatorname{sen}^3 x| \leq 1$, logo $0 \leq \left|\dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{4+x^3}}\right| \leq \dfrac{1}{\sqrt{4+x^3}}$ em $[1,+\infty)$. Temos então duas funções positivas $f(x) = \left|\dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{4+x^3}}\right|$ e $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4+x^3}}$ tal que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ em $[1,+\infty)$.

Por outro lado, no Exercício 12.15-b provamos que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4+x^3}}dx$ converge. Assim, estamos em condições de aplicar o **critério da comparação**, pois agora todas as funções são positivas. Assim, pelo critério da comparação, podemos afirmar que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left|\frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{4+x^3}}\right|dx$ converge. Usando agora o critério 5 dado na página 81 deste caderno (ou Exemplo 27.6 do Módulo 2 do caderno didático) que diz:

"Seja f contínua em $[a,+\infty)$ e não necessariamente positiva. Se $\displaystyle\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$ converge, então $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ também converge."

Afirmamos então que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{4+x^3}}dx$ também converge.

d. $\displaystyle\int_\pi^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x^2+2x+1}dx$

Observe que, neste caso, não podemos aplicar diretamente o critério da comparação para integrais impróprias sobre intervalos não limitados, uma vez que a função $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2+2x+1}$ assume também valores negativos. Vamos então considerar a integral $\displaystyle\int_\pi^{+\infty}\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x^2+2x+1}\right|dx$.

Note-se que, em particular, para todo $x\in[\pi,+\infty)$ temos que $0\leq|\operatorname{sen} x|\leq 1$ e $x^2+2x+1>0$ então $0\leq\left|\dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2+2x+1}\right|\leq\dfrac{1}{x^2+2x+1}$. Temos também que $x^2+2x+1>x^2$ para todo $x>-\dfrac{1}{x^2}$, em particular para $x\in[\pi,+\infty)$; logo $\dfrac{1}{x^2+2x+1}<\dfrac{1}{x^2}$ para todo $x\in[\pi,+\infty)$.

Assim, podemos afirmar que $0\leq\left|\dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2+2x+1}\right|\leq\dfrac{1}{x^2}$ para todo $x\in[\pi,+\infty[$.

Por outro lado, por cálculo direto (ou fazendo uso do primeiro exemplo referencial dado na página 78 deste caderno [Exemplo 27.2, Módulo 2, do caderno didático] temos que $\displaystyle\int_\pi^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ converge, pois neste caso $a=\pi>0$ e $r=2>1$. Considerando $f(x)=\left|\dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2+2x+1}\right|$ e $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$, temos que $0\leq f(x)\leq g(x)$ para todo $x\geq\pi$. Assim, estamos em condições de aplicar o critério da comparação, pois as funções agora são todas positivas, então $\displaystyle\int_\pi^{+\infty}\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x^2+2x+1}\right|dx$ converge. Portanto, fazendo uso da Propriedade 27.4 do Módulo 2 do caderno didático ou a Propriedade 5 dada na página 81 deste caderno, podemos afirmar que $\displaystyle\int_\pi^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x^2+2x+1}dx$ também converge.

e. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4+2x+1}dx$

Note-se que $f(x) = \dfrac{1}{x^4} > 0$ e $g(x) = \dfrac{1}{x^4+2x+1} > 0$ em $[1,+\infty)$. Podemos usar o critério do limite do quociente ou também chamado teste de comparação no limite com $f(x)$ e $g(x)$ acima definidas. Como $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^4+2x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+2x+1}{x^4} =$ $1 \in (0,+\infty)$. Então as integrais impróprias $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4+2x+1}dx$ e $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4}dx$ comportam-se da mesma maneira, ou seja, ambas convergem ou ambas divergem. Por outro lado, sabemos do primeiro exemplo referencial dado na página 78 deste caderno (ou Exemplo 27.2 do Módulo 2 do caderno didático) que

"$\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^r}dx$ com $a > 0$ converge se $r > 1$ e diverge se $r \le 1$."

Assim, neste caso, $a = 1 > 0$ e $r = 4 > 1$, logo $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4}dx$ converge. Portanto, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4+2x+1}dx$ também converge.

Exercício 12.16.

Analise as seguintes integrais impróprias, indicando quando elas divergem e calculando-as, caso contrário:

a. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

b. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+1}dx$

c. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{dx}{1-x}$

d. $\displaystyle\int_1^{4} \frac{1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}dx$

e. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-ax}dx,\ a > 0$

(Aula 26 do caderno didático, exercícios propostos nºs 6, 11, 4, 5 e 14, respectivamente)

Solução:

a. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

O domínio de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ é o intervalo aberto $(0,+\infty)$. Observe que f, em particular, é contínua no intervalo $[1,+\infty)$, assim, a integral dada resulta uma integral imprópria sobre um intervalo não limitado.

Pela definição de integral imprópria sobre um intervalo não limitado, temos

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{dx}{\sqrt{x}} \tag{12.77}$$

Mas,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C \tag{12.78}$$

Substituindo 12.78 em 12.77 e aplicando a segunda forma do Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to+\infty} 2x^{\frac{1}{2}}\Big]_1^t = \lim_{t\to+\infty} \left(2\sqrt{t} - 2\right) = +\infty.$$

Portanto, a integral imprópria $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ diverge.

b. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2} dx$

O domínio de $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+2}$ é $(-\infty, +\infty)$. Observe que f, em particular, é contínua no intervalo $[1, +\infty)$, assim a integral dada resulta uma integral imprópria sobre um intervalo não limitado.

Pela definição de integral imprópria sobre um intervalo não limitado, temos

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2} dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2+2x+2} dx \tag{12.79}$$

Mas,

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{1}{x^2+2x+1+1} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2+1} dx \tag{12.80}$$

Façamos $u = x+1 \Rightarrow du = dx$

$$\int \frac{1}{(x+1)^2+1} dx = \int \frac{1}{u^2+1} du = \operatorname{arctg} u + C = \operatorname{arctg}(x+1) + C \tag{12.81}$$

Assim, substituindo 12.81 em 12.79 e usando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2} dx = \lim_{t\to+\infty} \left(\left[\operatorname{arctg}(x+1)\right]_1^t \right)$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \{\operatorname{arctg}(t+1) - \operatorname{arctg}(2)\} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(2).$$

c. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{1-x}$

O domínio de $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ é $\mathbb{R} - \{1\}$. Observe que f, em particular, é contínua no intervalo $(1,2]$, assim a integral dada resulta uma integral imprópria onde o integrando é uma função não limitada no limite de integração inferior.

Pela definição de integrais impróprias de funções não limitadas, temos

$$\int_1^2 \frac{dx}{1-x} = \lim_{t\to 1^+} \int_t^2 \frac{dx}{1-x} = \lim_{t\to 1^+} \Big[-\ln|1-x| \Big]_t^2$$

$$= \lim_{t\to 1^+} \Big[-\underbrace{\ln|1-2|}_{0} + \ln|1-t| \Big] = -\infty.$$

Logo, a integral dada diverge para $-\infty$.

d. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}dx$

O domínio de $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}$ é $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$ f. Observe que f, em particular, é uma função contínua em $[1,2)\cup(2,4]$, assim a integral dada resulta uma integral imprópria em que o integrando é uma função não limitada num ponto interior do intervalo $[1,4]$.

Devemos dividir a integral em dois casos:

$$\int_1^4 \frac{1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}dx = \int_1^2 \frac{1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}dx + \int_2^4 \frac{1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}dx \qquad (12.82)$$

A escolha do número 2 para dividir o intervalo em dois subintervalos é necessária para transformar a integral dada em duas integrais impróprias de funções não limitadas nos extremos do intervalo.

Pela definição de integrais impróprias de funções não limitadas, temos

$$\int_1^2 \frac{1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}dx = \lim_{t\to 2^-} \int_1^t \frac{1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}dx = \lim_{t\to 2^-} \int_1^t (x-2)^{-\frac{2}{3}}dx$$

$$= \lim_{t\to 2^-} \left[3\frac{(x-2)^{\frac{1}{3}}}{1} \right]_1^t = \lim_{t\to 2^-} \Big[3(t-2)^{\frac{1}{3}} - 3(1-2)^{\frac{1}{3}} \Big] = 3 \qquad (12.83)$$

$$\int_2^4 \frac{1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}dx = \lim_{t\to 2^+}\int_t^4 \frac{1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}dx = \lim_{t\to 2^+}\int_t^4 (x-2)^{-\frac{2}{3}}dx$$

$$= \lim_{t\to 2^+}\left[3\frac{(x-2)^{\frac{1}{3}}}{1}\right]_t^4 = \lim_{t\to 2^+}\left[3(4-2)^{\frac{1}{3}} - 3(t-2)^{\frac{1}{3}}\right] = 3\sqrt[3]{2} \tag{12.84}$$

Substituindo 12.83 e 12.84 em 12.82, obtemos

$$\int_1^4 \frac{1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}dx = 3 + 3\sqrt[3]{2} = 3\left(1+\sqrt[3]{2}\right).$$

e. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-ax}dx, \ a > 0$

O domínio de $f(x) = xe^{-ax}$ é $\mathbb{R}$. Observe que f, em particular, é uma função contínua em $[0,+\infty)$, assim, a integral dada é uma integral imprópria sobre um intervalo não limitado.

$$\int_0^{+\infty} xe^{-ax}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t xe^{-ax}dx \tag{12.85}$$

Para calcular $\displaystyle\int xe^{-ax}dx$ usamos a integração por partes:

Fazendo

$$\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-ax}dx \Rightarrow v = \displaystyle\int e^{-ax}dx = -\frac{1}{a}\int(-a)e^{-ax}dx = -\frac{1}{a}e^{-ax} \end{cases}$$

temos que $\displaystyle\int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{e^{-ax}dx}_{dv} = -\frac{x}{a}e^{-ax} + \frac{1}{a}\int e^{-ax}dx$, isto é

$$\int xe^{-ax}dx = -\frac{x}{a}e^{-ax} - \frac{1}{a^2}\int e^{-ax}(-a)dx = -\frac{x}{a}e^{-ax} - \frac{1}{a^2}e^{-ax} + C \tag{12.86}$$

Substituindo 12.86 em 12.85 e pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$\int_0^{+\infty} xe^{-ax}dx = \lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{x}{a}e^{-ax} - \frac{1}{a^2}e^{-ax}\right]_0^t$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{t}{a}e^{-at} - \frac{1}{a^2}e^{-at} + \frac{1}{a^2}\right] \tag{12.87}$$

Por outro lado,

$$\lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{t}{a}e^{-at}\right]=\lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{t}{ae^{at}}\right]\overset{L'H}{=}\lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{1}{a^2e^{at}}\right]=0 \text{ e}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{e^{-at}}{a^2}\right]=\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{a^2e^{at}}\right]=0 \qquad (12.88)$$

Substituindo 12.88 em 12.87, obtemos

$$\int_0^{+\infty} xe^{-ax}dx=\frac{1}{a^2},\quad a>0.$$

Exercício 12.17.

Usando critérios de convergência, determine a convergência ou divergência das seguintes integrais impróprias:

a. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+e^x}dx$ b. $\displaystyle\int_4^8\frac{x}{\sqrt{x-4}}dx$ c. $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}\ln x}dx$

(Aula 27 do caderno didático, exercícios propostos n$^{\underline{os}}$ 13, 15 e 20, respectivamente)

Solução:

a. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+e^x}dx$

O domínio da função $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$ é $\mathbb{R}$. Observe que f, em particular, é uma função contínua em $(-\infty,0]$, assim a integral dada resulta uma integral imprópria sobre o intervalo não limitado $(-\infty,0]$. Note-se também que $f(x)\geq 0$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

Por outro lado, observe que para $-\infty<x\leq 0$ temos que $e^x\leq 1\Rightarrow 1+e^x\leq 1+1=2$, logo $\dfrac{1}{1+e^x}\geq\dfrac{1}{2}>0$. Portanto, considerando $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$ e $g(x)=\dfrac{1}{2}$, temos que $0<g(x)\leq f(x)$ para todo $x\leq 0$. Pelo critério de comparação para integrais impróprias sobre intervalos não limitados se $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}g(x)dx$ diverge, então $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}f(x)dx$ também diverge. Assim, se $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}dx$ diverge, então, a integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+e^x}dx$ diverge.

De fato, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}dx = \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{2}\int_{t}^{0} dx = \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{2}[0-t] = +\infty$, logo $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}dx$ diverge, portanto $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+e^x}dx$ diverge para $+\infty$.

✍ Note-se que se $0 < x < \infty$ não é verdade que $e^x \leq 1$.

b. $\displaystyle\int_{4}^{8} \frac{x}{\sqrt{x-4}}dx$

O domínio de $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x-4}}$ é $(4,+\infty)$. Observe que f, em particular, é uma função contínua em $(4,8]$, assim a integral dada resulta uma integral imprópria em que o integrando é uma função não limitada no limite de integração inferior.

Vamos aplicar o critério do limite do quociente ou teste de comparação no limite para integrais impróprias de funções não limitadas:

Sejam $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x-4}}$ e $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-4}}$ contínuas em $(4,8]$, claramente $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$ para qualquer $x \in (4,8]$ e $\displaystyle\lim_{x\to 4^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 4^+} \frac{\frac{x}{\sqrt{x-4}}}{\frac{1}{\sqrt{x-4}}} = \lim_{x\to 4^+} x = 4$. Isto é, o limite do quociente é um número positivo. Então, as integrais impróprias $\displaystyle\int_{4}^{8} \frac{x}{\sqrt{x-4}}dx$ e $\displaystyle\int_{4}^{8} \frac{1}{\sqrt{x-4}}dx$ comportam-se da mesma maneira. Ou seja, ambas convergem ou ambas divergem.

Por outro lado, é fácil observar que

$$\int_{4}^{8} \frac{1}{\sqrt{x-4}}dx = \lim_{t\to 4^+} \int_{t}^{8} (x-4)^{-\frac{1}{2}}dx = \lim_{t\to 4^+} \left[2(x-4)^{\frac{1}{2}}\right]_{t}^{8}$$

$$= \lim_{t\to 4^+} \left[2(8-4)^{\frac{1}{2}} - 2(t-4)^{\frac{1}{2}}\right] = 4,$$

ou seja, $\displaystyle\int_{4}^{8} \frac{1}{\sqrt{x-4}}dx$ converge logo $\displaystyle\int_{4}^{8} \frac{x}{\sqrt{x-4}}dx$ também converge.

c. $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}dx$

O domínio de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}\ln x}$ é $(0,1)\cup(1,+\infty)$. Observe que f é contínua no intervalo $[2,+\infty)$, assim, a integral dada resulta uma integral imprópria sobre o intervalo não limitado. Por outro lado, observe que ln é uma função crescente, assim, para $x > 1$ temos $\ln x > \ln 1 = 0$, logo $f(x) > 0 \quad \forall x \in [2,+\infty)$.

Por outro lado, para todo $x \in (0,+\infty)$ temos que $\sqrt{x} \in (0,+\infty)$. Logo, pela Proposição 7.4 do caderno didático, podemos afirmar que $\ln\sqrt{x} \leq \sqrt{x}$. Assim, em particular para todo $x \in [2,+\infty)$ podemos afirmar que $0 < \ln\sqrt{x} \leq \sqrt{x}$, logo $\sqrt{x}\ln\sqrt{x} \leq \sqrt{x}\sqrt{x} = x \Rightarrow \dfrac{\sqrt{x}}{2}\ln x \leq x \Rightarrow \sqrt{x}\ln x \leq 2x$. Consequentemente, podemos afirmar que $\dfrac{1}{\sqrt{x}\ln x} \geq \dfrac{1}{2x} > 0$ para todo $x \in [2,+\infty)$.

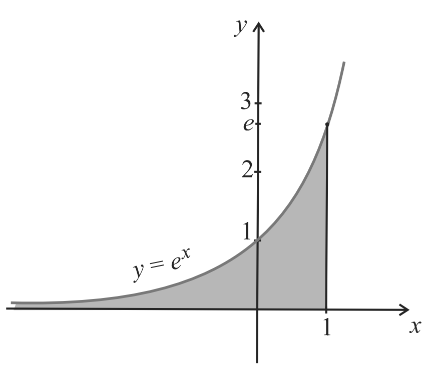
Portanto, considerando $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}\ln x}$ e $g(x) = \dfrac{1}{2x}$, temos que $0 < g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in [2,+\infty)$. Pelo critério de comparação para integrais impróprias sobre intervalos não limitados, se $\displaystyle\int_2^{+\infty} g(x)dx$ diverge, então $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)dx$ também diverge. Por outro lado, sabemos do primeiro exemplo referencial das notas de aula (ou Exemplo 27.2 do Módulo 2 do caderno didático) que:

"$\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^r}dx$ com $a > 0$ converge se $r > 1$ e diverge se $r \leq 1$."

Assim, neste caso, $a = 2 > 0$ e $r = 1$, então $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ diverge, logo $\displaystyle\frac{1}{2}\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ diverge e, portanto, a integral maior diverge, isto é, $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}dx$ diverge.

Exercício 12.18.

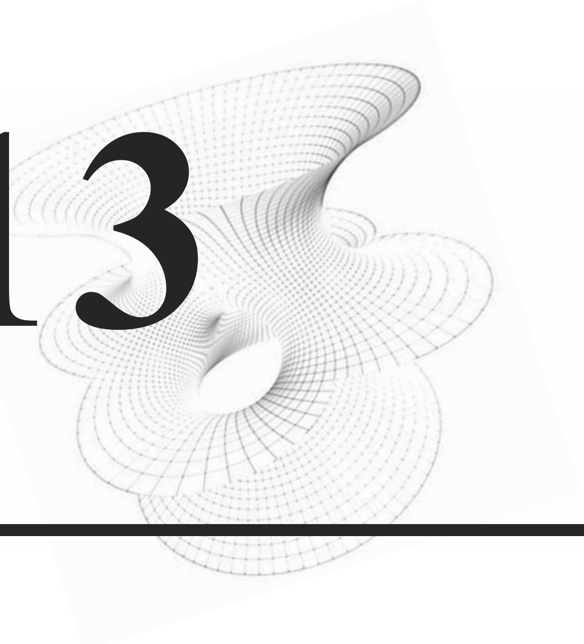
Encontre a área da região sombreada não limitada $y = e^x$, $-\infty < x \leq 1$.



Solução: Do gráfico da função dada vemos que a área da região ilimitada será $A(R) = \int_{-\infty}^{1} e^x dx$, desde que a integral dada seja convergente. De fato, $A(R) = \int_{-\infty}^{1} e^x dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{1} e^x dx = \lim_{t\to-\infty} e^x \Big]_t^1 = \lim_{t\to-\infty} \left[e - e^t\right] = e - \underbrace{\lim_{t\to-\infty} e^t}_{0} = e$ unidades de área.

Veja, no Apêndice 7, no final deste caderno, o passo a passo de exercícios adicionais correspondentes a esta semana.

Semana 13



Volume de Sólidos

Volume de Sólidos de Revolução

Métodos dos Discos e das Cascas Cilíndricas

Para calcular o volume de sólidos de revolução, temos à nossa disposição dois métodos:

- O método das seções transversais circulares ou método dos discos ou arruelas e
- O método das cascas cilíndricas.

1. Mostraremos nas páginas seguintes (em forma prática) o uso do **método dos discos** para calcular o volume do sólido obtido quando uma região plana R gira:

   a. Em torno do eixo x.
   b. Em torno de um eixo horizontal abaixo (ou acima) da região.
   c. Em torno do eixo y.
   d. Em torno de um eixo vertical à esquerda (ou à direita) da região.

Em cada figura, que mostra as situações anteriormente descritas, desenharemos o(s) raio(s) típico(s) de cada caso e proporcionaremos as fórmulas para calcular o volume do sólido assim gerado. Para facilitar a compreensão do leitor, vamos desenhar a região no primeiro quadrante, porém, em geral, a região pode estar em qualquer quadrante e até em mais de um. Levamos em conta também as seguintes observações:

✍ i. Para aplicar o método dos discos ou anéis numa região plana que gira em torno do eixo x ou de um eixo horizontal, é conveniente expressar a região dada na forma:
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \quad g(x) \leq y \leq f(x),\ f$ e g contínuas em $[a,b]\}$.

ii. Para aplicar o método dos discos ou anéis numa região plana que gira em torno do eixo y ou de um eixo vertical, é conveniente expressar a região dada na forma:
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \quad n(y) \leq x \leq m(y),\ m$ e n contínuas em $[c,d]\}$.

2. Mostraremos também paralelamente (em forma prática) o uso do **método das cascas cilíndricas** para calcular o volume do sólido obtido quando uma região plana R gira:

   e. Em torno do eixo y.
   f. Em torno de um eixo vertical à esquerda (ou à direita) da região.
   g. Em torno do eixo x.
   h. Em torno de um eixo horizontal abaixo (ou acima) da região.

Em cada figura, que mostra as situações anteriormente descritas, desenharemos o raio médio $\overline{r}$ e a altura h da casca típica de cada caso e proporcionaremos as fórmulas para calcular o volume do sólido assim gerado. Levamos em conta também as seguintes observações:

✍ iii. Para aplicar o método das cascas cilíndricas numa região plana que gira em torno do eixo y ou de um eixo vertical, é conveniente expressar a região dada na forma:
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \quad g(x) \leq y \leq f(x),\ f$ e g contínuas em $[a,b]\}$.

iv. Para aplicar o método das cascas cilíndricas numa região plana que gira em torno do eixo x ou de um eixo horizontal, é conveniente expressar a região dada na forma:
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \quad n(y) \leq x \leq m(y),\ m$ e n contínuas em $[c,d]\}$.

Note-se também que, em cada figura, o eixo de rotação é indicado por uma seta circular em torno do mesmo.

Resumo (Volume de Sólidos de Revolução)

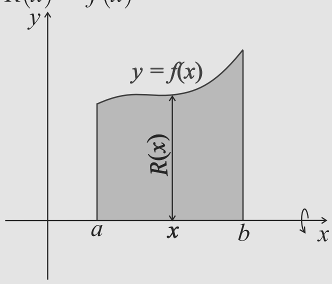
Discos ou Arruelas

Eixo de Revolução Horizontal

$R =$ Raio do disco maior

$r =$ raio do disco menor

$R(x) = f(x)$



$$V = \pi \int_a^b [R(x)]^2 \, dx$$

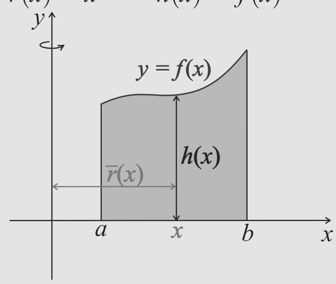
Cascas Cilíndricas

Eixo de Revolução Vertical

$\overline{r} =$ raio médio da casca

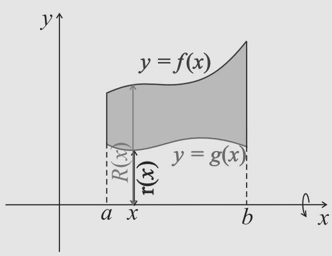
$h =$ altura da casca

$\overline{r}(x) = x \qquad h(x) = f(x)$

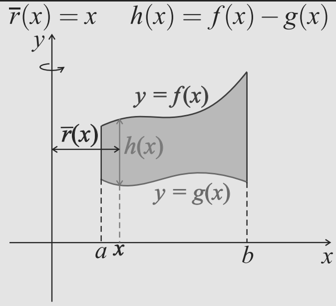


$$V = 2\pi \int_a^b \overline{r}(x)\, h(x)\, dx$$

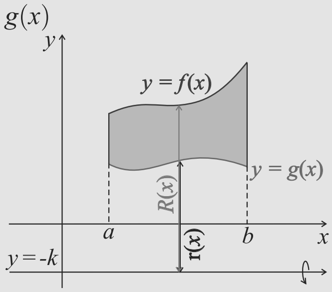
$R(x) = f(x) > 0 \quad r(x) = g(x) > 0$



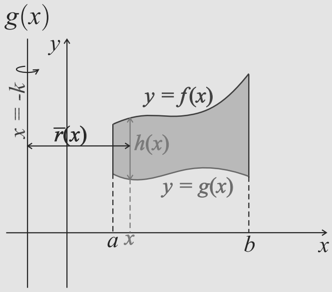
$\overline{r}(x) = x \quad h(x) = f(x) - g(x)$



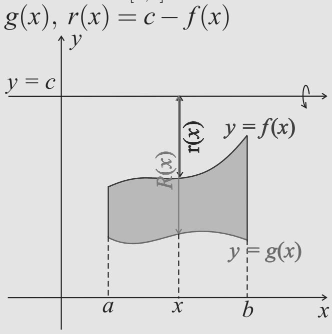
$k > 0,\ R(x) = k + f(x),\ r(x) = k + g(x)$



$k > 0,\ \overline{r}(x) = k + x,\ h(x) = f(x) - g(x)$

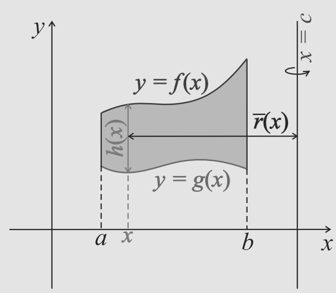


$c \geq \max_{x \in [a,b]} f(x),\ R(x) = c - g(x),\ r(x) = c - f(x)$



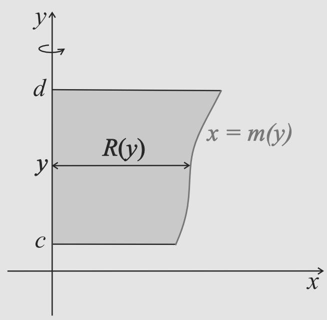
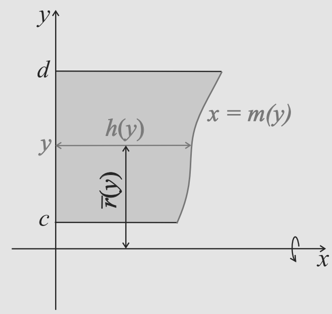
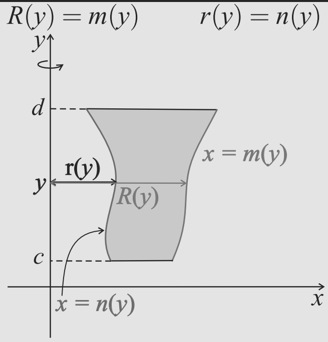
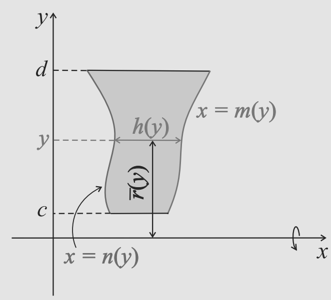
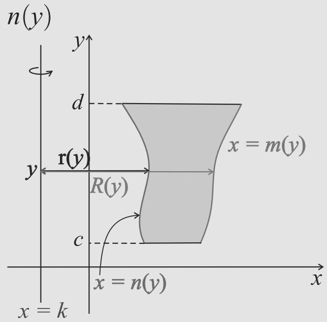
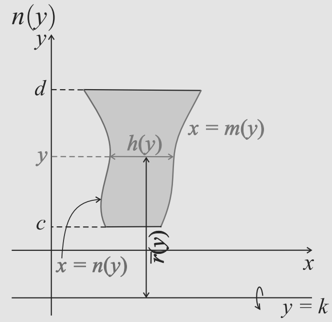
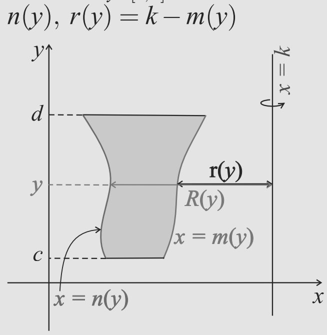
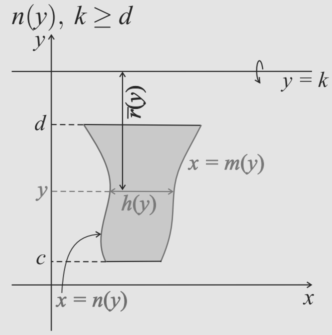
$$V = \pi \int_a^b \left[(R(x))^2 - (r(x))^2 \right] dx$$

$c \geq b, \overline{r}(x) = c - x,\ h(x) = f(x) - g(x)$



$$V = 2\pi \int_a^b \overline{r}(x)\, h(x)\, dx$$

Resumo (Volume de Sólidos de Revolução - Continuação)

Discos ou Arruelas Eixo de Revolução Vertical	Cascas Cilíndricas Eixo de Revolução Horizontal
$R(y) = m(y)$  $V = \pi \int_c^d [R(y)]^2\, dy$	$\overline{r}(y) = y \qquad h(y) = m(y)$  $V = 2\pi \int_c^d \overline{r}(y)\, h(y)\, dy$
$R(y) = m(y) \qquad r(y) = n(y)$ 	$\overline{r}(y) = y \quad h(y) = m(y) - n(y)$ 
$k > 0,\ R(y) = k + m(y),\ r(y) = k + n(y)$ 	$k > 0,\ \overline{r}(y) = k + y,\ h(y) = m(y) - n(y)$ 
$k \geq \max_{y \in [c,d]} m(y),\ R(y) = k - n(y),\ r(y) = k - m(y)$  $V = \pi \int_c^d \left[(R(y))^2 - (r(y))^2 \right] dy$	$\overline{r}(y) = k - y,\ h(y) = m(y) - n(y),\ k \geq d$  $V = 2\pi \int_c^d \overline{r}(y)\, h(y)\, dy$

Comparação entre os Métodos dos Discos e das Cascas

Os métodos dos discos e das cascas podem ser distinguidos da seguinte forma: para o **método dos discos**, o retângulo ou raio típico é sempre **perpendicular** ao eixo de revolução, enquanto no **método das cascas** o retângulo ou raio típico é sempre paralelo ao eixo de revolução. Para verificar esse fato, basta observar as figuras das páginas 129 e 130 destas notas.

Dependendo do caso, o uso de um método é mais conveniente que o outro.

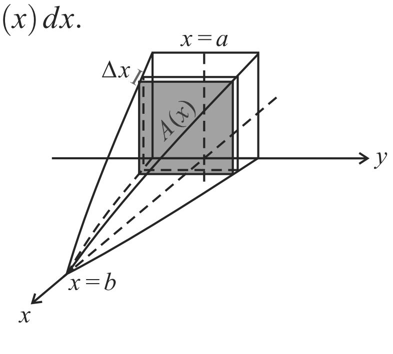
Método das Seções Transversais, para Sólidos com Seção Transversal Conhecida

Lembre-se de que, com o método dos discos, podemos achar o volume de sólidos que tem seção transversal circular cuja área é $A = \pi R^2$. Esse método nos leva a generalizar a definição de volume a outros sólidos, não necessariamente sólidos de revolução, desde que se conheça a fórmula para a área da seção transversal. Algumas seções transversais mais comuns são triângulos, quadrados, retângulos, trapézios e semicírculos.

Volume de Sólidos com Seção Transversal Conhecida

1. **Para seções transversais de área perpendicular ao eixo x**

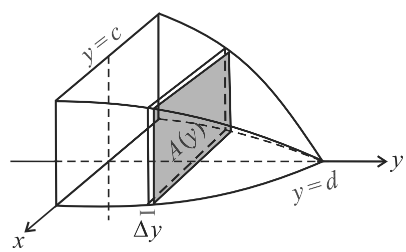
   Suponha que B seja um sólido limitado por dois planos perpendiculares ao eixo Ox, em $x = a$ e $x = b$, e que para cada $x \in [a,b]$ a área da seção transversal do sólido com o plano perpendicular ao eixo Ox seja dada pela função contínua $A(x)$; então, o volume do sólido B é dado por $V = \int_a^b A(x)\,dx$.



2. **Para seções transversais de área perpendicular ao eixo** y

   Suponha que B seja um sólido limitado por dois planos perpendiculares ao eixo Oy, em $y = c$ e $y = d$, e que para cada $y \in [c, d]$ a área da seção transversal do sólido com o plano perpendicular ao eixo Oy seja dada pela função contínua $A(y)$; então, o volume do sólido B é dado por

$$V = \int_c^d A(y)\,dy.$$



Exercícios Resolvidos

Volume de Sólidos de Revolução

• **Usando o método dos discos ou arruelas**

Exercício 13.1.

Usando o método dos discos ou arruelas, encontre o volume do sólido gerado pela revolução da região entre a curva $y = \sqrt{x}$ e as retas $x = 1$ e $y = 0$, em torno do eixo x.

Solução: Desenhamos a **Figura 13.1**, mostrando a região e o **eixo de rotação (eixo** x**)**. Identificamos a função raio do disco típico $R(x)$, onde, neste caso, $R(x) = \sqrt{x}$, para $0 \leq x \leq 1$.

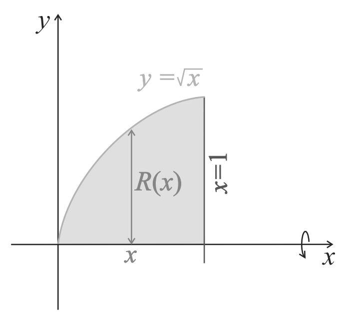


Figura 13.1

O volume é dado pela fórmula $V=\pi\displaystyle\int_a^b [R(x)]^2\,dx$. Assim, o volume é

$$V=\pi\int_0^1 \left[\sqrt{x}\right]^2 dx=\pi\int_0^1 x\,dx=\pi\frac{x^2}{2}\Big]_0^1=\frac{\pi}{2}\ \text{unidades de volume.}$$

Exercício 13.2.

Usando o método dos discos ou arruelas, encontre o volume do sólido gerado pela revolução da região limitada entre as curvas $y=x^3$ e $y=\sqrt{x}$.

a. Em torno do eixo x.

b. Em torno da reta $y=-1$.

c. Em torno da reta $y=2$.

d. Em torno do eixo y.

e. Em torno da reta $x=-2$.

f. Em torno da reta $x=2$.

Solução: Na página 128 destas notas, mencionamos o seguinte:

✍ i. Note-se que, para aplicar o método dos discos ou anéis numa região que gira em torno do eixo x ou de um eixo horizontal, é conveniente expressar a região dada como $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b,\ g(x)\le y\le f(x),\ f \text{ e } g \text{ contínuas em } [a,b]\}$.

Veja que, neste exercício, a região plana R pode ser expressa como $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ x^3\le y\le\sqrt{x},\ y=x^3 \text{ e } y=\sqrt{x} \text{ contínuas em } [0,1]\}$. Note-se também que as funções $y=x^3$ e $y=\sqrt{x}$ interceptam-se em $(0,0)$ e em $(1,1)$.

a. Em torno do eixo coordenado x.

Desenhamos a **Figura 13.2**, mostrando a região e o eixo de rotação (eixo x). Identificamos as funções raio maior $R(x)$ e o raio menor $r(x)$, onde $R(x)=\sqrt{x}$ e $r(x)=x^3$ para $0\le x\le 1$. Note-se também que $0\le r(x)\le R(x)$ para $0\le x\le 1$.

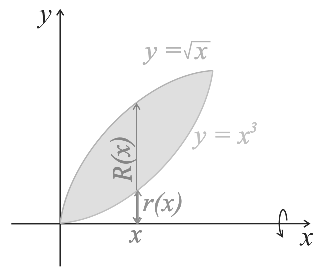


Figura 13.2

O volume é dado pela fórmula $V = \pi \int_a^b \left[(R(x))^2 - (r(x))^2\right] dx$.
Assim, o volume é

$$V = \pi \int_0^1 \left[\left(\sqrt{x}\right)^2 - (x^3)^2\right] dx = \pi \int_0^1 \left[x - x^6\right] dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^7}{7}\right]_0^1$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{7}\right] = \frac{5}{14}\pi \text{ unidades de volume.}$$

b. Em torno da reta horizontal $y = -1$. (Note-se que essa reta está abaixo da região dada)

Desenhamos a **Figura 13.3**, mostrando a região e o eixo de rotação (a reta horizontal $y = -1$). Identificamos as funções raio maior $R(x)$ e o raio menor $r(x)$, onde $R(x) = 1 + \sqrt{x}$, e $r(x) = 1 + x^3$ para $0 \le x \le 1$. Note-se que $0 \le r(x) \le R(x)$ para $0 \le x \le 1$. Note-se também que o eixo de rotação está abaixo da região dada.

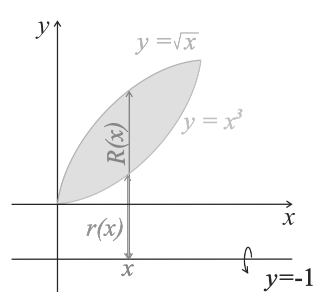


Figura 13.3

O volume é dado pela fórmula $V = \pi \int_a^b \left[(R(x))^2 - (r(x))^2\right] dx$.
Assim, o volume é

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 \left[\left(1 + \sqrt{x}\right)^2 - (1 + x^3)^2\right] dx \\ &= \pi \int_0^1 \left[1 + 2\sqrt{x} + x - (1 + 2x^3 + x^6)\right] dx \\ &= \pi \int_0^1 \left[1 + 2\sqrt{x} + x - 1 - 2x^3 - x^6\right] dx \end{aligned}$$

$$= \pi \int_0^1 \left[2\sqrt{x} + x - 2x^3 - x^6\right] dx = \pi \left[4\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{x^2}{2} - 2\frac{x^4}{4} - \frac{x^7}{7}\right]_0^1$$

$$= \pi \left[4\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right] = \pi \left[\frac{4}{3} - \frac{1}{7}\right] = \pi \left[\frac{28-3}{21}\right]$$

$$= \frac{25}{21}\pi \text{ unidades de volume.}$$

c. Em torno da reta horizontal $y = 2$. (Note-se que essa reta está acima da região dada)

Desenhamos a **Figura 13.4**, mostrando a região e o eixo de rotação (a reta horizontal $y = 2$). Identificamos as funções raio maior $R(x)$ e o raio menor $r(x)$, onde $R(x) = 2 - x^3$ e $r(x) = 2 - \sqrt{x}$ para $0 \le x \le 1$. Note-se que $0 \le r(x) \le R(x)$ para $0 \le x \le 1$. Note-se também que o eixo de rotação está por cima da região dada.

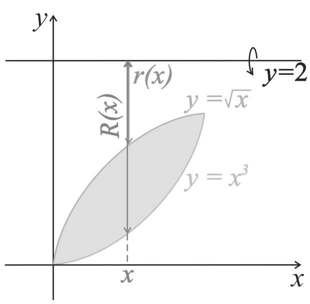


Figura 13.4

O volume é dado pela fórmula $V = \pi \int_a^b \left[(R(x))^2 - (r(x))^2\right] dx$.
Assim, o volume é

$$V = \pi \int_0^1 \left[(2 - x^3)^2 - (2 - \sqrt{x})^2\right] dx$$

$$= \pi \int_0^1 \left[(4 - 4x^3 + x^6) - (4 - 4\sqrt{x} + x)\right] dx$$

$$= \pi \int_0^1 \left[4 - 4x^3 + x^6 - 4 + 4x^{\frac{1}{2}} - x\right] dx$$

$$= \pi \int_0^1 \left[-4x^3 + x^6 + 4x^{\frac{1}{2}} - x\right] dx = \pi \left[-4\frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} + 4\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= \pi \left[-x^4 + \frac{x^7}{7} + \frac{8x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \pi \left[-1 + \frac{1}{7} + \frac{8}{3} - \frac{1}{2}\right]$$

$$= \pi \left[\frac{-42 + 6 + 112 - 21}{42}\right] = \frac{55}{42}\pi \text{ unidades de volume.}$$

d. Em torno do eixo coordenado y.

Na página 128 destas notas, mencionamos o seguinte:

✍ ii. Note-se que, para aplicar o método dos discos ou anéis numa região que gira em torno do eixo y ou de um eixo vertical, precisamos expressar a região dada como $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \quad n(y) \leq x \leq m(y),\ m$ e n contínuas em $[c,d]\}$.

Veja que, neste exercício, a região plana R pode ser expressa como $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1,\ y^2 \leq x \leq \sqrt[3]{y},\ x = y^2$ e $\sqrt[3]{y}$ contínuas em $[0,1]\}$. Note-se também que as funções $x = y^2$ e $x = \sqrt[3]{y}$ interceptam-se em $(0,0)$ e em $(1,1)$.

Desenhamos a **Figura 13.5**, mostrando a região e o eixo de rotação (eixo y). Identificamos as funções raio maior $R(y)$ e o raio menor $r(y)$, onde $R(y) = \sqrt[3]{y}$ e $r(y) = y^2$ para $0 \leq y \leq 1$. Note-se que $0 \leq r(y) \leq R(y)$ para $0 \leq y \leq 1$.

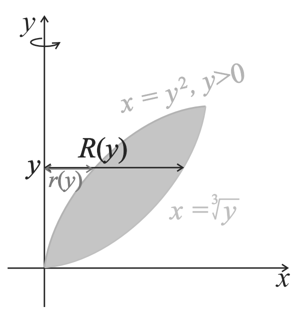


Figura 13.5

O volume é dado pela fórmula $V = \pi \displaystyle\int_c^d \left[(R(y))^2 - (r(y))^2\right] dy$.
Assim, o volume é

$$V = \pi \int_0^1 \left[(\sqrt[3]{y})^2 - (y^2)^2\right] dy$$

$$= \pi \int_0^1 \left[y^{\frac{2}{3}} - y^4\right] dy = \pi \left[\frac{y^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - \frac{y^5}{5}\right]_0^1 = \pi \left[\frac{1}{\frac{5}{3}} - \frac{1}{5}\right] = \pi \left[\frac{3}{5} - \frac{1}{5}\right]$$

$$= \frac{2}{5}\pi \ \text{ unidades de volume.}$$

e. Em torno da reta vertical $x = -2$. (Note-se que essa reta está à esquerda da região dada)

Desenhamos a **Figura 13.6**, mostrando a região e o eixo de rotação (reta vertical $x = -2$). Identificamos as funções raio maior, neste caso, $R(y)$ e o raio menor $r(y)$, onde $R(y) = 2 + \sqrt[3]{y}$ e $r(y) = 2 + y^2$ para $0 \leq y \leq 1$. Note-se que $0 \leq r(y) \leq R(y)$ para $0 \leq y \leq 1$. Note-se também que a reta vertical dada se encontra à esquerda da região.

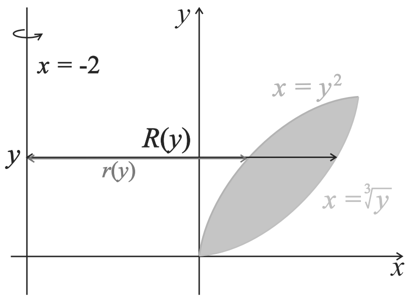


Figura 13.6

O volume é dado pela fórmula $V = \pi \int_c^d \left[(R(y))^2 - (r(y))^2\right] dy$. Assim, o volume é

$$V = \pi \int_0^1 \left[(2 + \sqrt[3]{y})^2 - (2 + y^2)^2\right] dy$$

$$= \pi \int_0^1 \left[\left(4 + 4y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right) - (4 + 4y^2 + y^4)\right] dy$$

$$= \pi \int_0^1 \left[4 + 4y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - 4 - 4y^2 - y^4\right] dy$$

$$= \pi \int_0^1 \left[4y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - 4y^2 - y^4\right] dy = \pi \left[4\frac{y^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + \frac{y^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - 4\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5}\right]_0^1$$

$$= \pi \left[\frac{12y^{\frac{4}{3}}}{4} + \frac{3y^{\frac{5}{3}}}{5} - \frac{4y^3}{3} - \frac{y^5}{5}\right]_0^1 = \pi \left[\frac{12}{4} + \frac{3}{5} - \frac{4}{3} - \frac{1}{5}\right]$$

$$= \pi \left[3 + \frac{3}{5} - \frac{4}{3} - \frac{1}{5}\right] = \pi \left[\frac{45 + 9 - 20 - 3}{15}\right]$$

$$= \frac{31}{15}\pi \ \text{ unidades de volume.}$$

f. Em torno da reta vertical $x = 2$. (Note-se que essa reta está à direita da região dada)

Desenhamos a **Figura 13.7**, mostrando a região e o eixo de rotação (a reta vertical $x = 2$). Identificamos as funções raio maior, neste caso, $R(y)$ e o raio menor $r(y)$, onde $R(y) = 2 - y^2$ e $r(y) = 2 - \sqrt[3]{y}$ para $0 \leq y \leq 1$. Note-se que $0 \leq r(y) \leq R(y)$ para $0 \leq y \leq 1$. Note-se também que a reta vertical dada se encontra à direita da região.

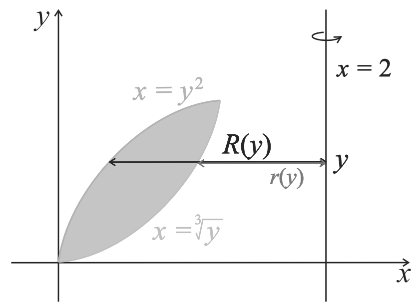


Figura 13.7

O volume é dado pela fórmula $V = \pi \int_c^d \left[(R(y))^2 - (r(y))^2\right] dy$.
Assim, o volume é

$$V = \pi \int_0^1 \left[(2-y^2)^2 - (2-\sqrt[3]{y})^2\right] dy$$

$$= \pi \int_0^1 \left[(4-4y^2+y^4) - \left(4-4y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)\right] dy$$

$$= \pi \int_0^1 \left[4-4y^2+y^4-4+4y^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{2}{3}}\right] dy$$

$$= \pi \int_0^1 \left[-4y^2+y^4+4y^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{2}{3}}\right] dy = \pi \left[-4\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}+4\frac{y^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}-\frac{y^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right]_0^1$$

$$= \pi \left[-\frac{4y^3}{3}+\frac{y^5}{5}+3y^{\frac{4}{3}}-\frac{3y^{\frac{5}{3}}}{5}\right]_0^1 = \pi\left[-\frac{4}{3}+\frac{1}{5}+3-\frac{3}{5}\right]$$

$$= \pi\left[\frac{-20+3+45-9}{15}\right] = \frac{19}{15}\pi \text{ unidades de volume.}$$

- **Usando o <u>método das cascas cilíndricas</u>**

Exercício 13.3.

Usando o método das cascas cilíndricas, encontre o volume do sólido gerado pela revolução da região entre a curva $y = \sqrt{x}$ e as retas $x = 1$ e $y = 0$, em torno do eixo y.

Solução: Desenhamos a **Figura 13.8**, mostrando a região e o **eixo de rotação (eixo** y**)**. Identificamos a função altura da casca típica $h(x)$ e o raio médio da casca típica $\overline{r}$, onde $h(x) = \sqrt{x}$ e $\overline{r} = x$ para $0 \leq x \leq 1$.

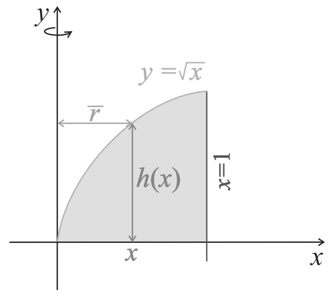


Figura 13.8

O volume é dado pela fórmula $V = 2\pi \int_a^b \overline{r}(x)\, h(x)\, dx$. Assim, o volume é

$$V = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{x}\, dx = 2\pi \int_0^1 x x^{\frac{1}{2}}\, dx = 2\pi \int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\, dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_0^1 = 2\pi \left[\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} \right]_0^1 = 2\pi \left[\frac{2}{5} \right]$$

$= \frac{4}{5}\pi$ unidades de volume.

Exercício 13.4.

Usando o método das cascas cilíndricas, encontre o volume do sólido gerado pela revolução da região limitada entre as curvas $y = x^3$ e $y = \sqrt{x}$.

a. Em torno do eixo y.

b. Em torno da reta $x = -2$.

c. Em torno da reta $x = 1$.

d. Em torno do eixo x.

e. Em torno da reta $y = -1$.

f. Em torno da reta $y = 2$.

Solução: Na página 128 destas notas, mencionamos o seguinte:

✍ iii. Note-se que, para aplicar o método das cascas cilíndricas numa região que gira em torno do eixo y ou de um eixo vertical, é conveniente expressar a região dada como $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ g(x) \le y \le f(x),\ f$ e g contínuas em $[a,b]\}$.

Veja que, neste exercício, a região plana R pode ser expressa como $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\, x^3 \leq y \leq \sqrt{x},\, y = x^3$ e $y = \sqrt{x}$ contínuas em $[0,1]\}$. Note-se também que as funções $y = x^3$ e $y = \sqrt{x}$ interceptam-se em $(0,0)$ e em $(1,1)$.

a. Em torno do eixo coordenado y.

Desenhamos a **Figura 13.9**, mostrando a região e o eixo de rotação (do eixo y). Identificamos a função altura da casca típica $h(x)$ e o raio médio da casca típica $\overline{r}(x)$, onde $h(x) = \sqrt{x} - x^3$ e $\overline{r}(x) = x$ para $0 \leq x \leq 1$. Note-se que $0 \leq x^3 \leq \sqrt{x}$ para $0 \leq x \leq 1$, assim $h(x) = \sqrt{x} - x^3 \geq 0$ e $\overline{r}(x) = x \geq 0$.

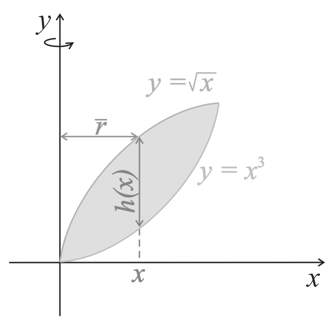


Figura 13.9

O volume é dado pela fórmula $V = 2\pi \int_a^b \overline{r}(x)\, h(x)\, dx$. Assim, o volume é

$$V = 2\pi \int_0^1 x\left(\sqrt{x} - x^3\right) dx = 2\pi \int_0^1 x\left(x^{\frac{1}{2}} - x^3\right) dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}} - x^4\right) dx = 2\pi \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 2\pi \left[\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$= 2\pi \left[\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right] = \frac{2}{5}\pi \text{ unidades de volume.}$$

Observe que a resposta obtida neste exercício coincide com a resposta do Exercício 13.2.d, pois o sólido gerado é o mesmo. Apenas usamos métodos diferentes para calcular o volume do mesmo sólido.

b. Em torno da reta vertical $x = -2$. (Note-se que essa reta está à esquerda da região dada)

Desenhamos a **Figura 13.10**, mostrando a região e o eixo de rotação (da reta vertical $x = -2$). Identificamos a função altura da casca típica $h(x)$ e o raio médio da casca típica $\overline{r}(x)$, onde $h(x) = \sqrt{x} - x^3$ e $\overline{r} = 2 + x$ para $0 \leq x \leq 1$. Note-se que $0 \leq x^3 \leq \sqrt{x}$ para $0 \leq x \leq 1$, assim $h(x) = \sqrt{x} - x^3 \geq 0$ e $\overline{r}(x) = 2 + x \geq 0$. Veja também que a reta vertical $x = -2$ encontra-se à esquerda da região dada.

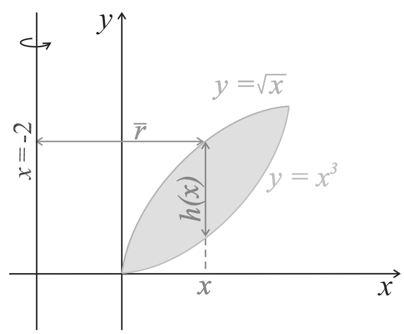


Figura 13.10

O volume é dado pela fórmula $V = 2\pi \displaystyle\int_a^b \overline{r}(x)\, h(x)\, dx$. Assim, o volume é

$$V = 2\pi \int_0^1 (2+x)\left(\sqrt{x} - x^3\right) dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(2\sqrt{x} - 2x^3 + x\sqrt{x} - x^4\right) dx = 2\pi \int_0^1 \left(2x^{\frac{1}{2}} - 2x^3 + x^{\frac{3}{2}} - x^4\right) dx$$

$$= 2\pi \left[2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 2\pi \left[\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$= 2\pi \left[\frac{4}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right] = 2\pi \left[\frac{4}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right] = 2\pi \left[\frac{40 - 15 + 6}{30}\right]$$

$$= 2\pi \left[\frac{31}{30}\right] = \frac{31}{15}\pi \text{ unidades de volume.}$$

Observe que a resposta obtida neste exercício coincide com a resposta do Exercício 13.2.e, pois o sólido gerado é o mesmo. Apenas usamos métodos diferentes para calcular o volume do mesmo sólido.

c. Em torno da reta vertical $x = 1$. (Note-se que esta reta está à direita da região dada)

Desenhamos a **Figura 13.11**, mostrando a região e o eixo de rotação (a reta vertical $x = 1$). Identificamos a função altura da casca típica $h(x)$ e o raio médio da casca típica $\overline{r}(x)$, onde $h(x) = \sqrt{x} - x^3$ e $\overline{r}(x) = 1 - x$ para $0 \leq x \leq 1$. Note-se que

$0 \leq x^3 \leq \sqrt{x}$ para $0 \leq x \leq 1$, assim $h(x) = \sqrt{x} - x^3 \geq 0$ e $\overline{r}(x) = 1 - x \geq 0$. Observe que a reta vertical $x = 1$ encontra-se à direita da região dada.

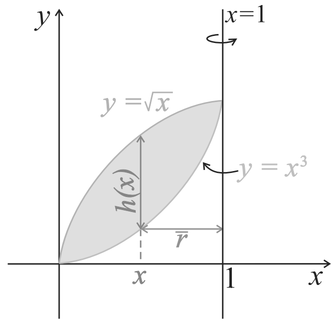


Figura 13.11

O volume é dado pela fórmula $V = 2\pi \int_a^b \overline{r}(x)\, h(x)\, dx$. Assim, o volume é

$$V = 2\pi \int_0^1 (1-x)\left(\sqrt{x} - x^3\right) dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^3 - x\sqrt{x} + x^4\right) dx = 2\pi \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^3 - x^{\frac{3}{2}} + x^4\right) dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 2\pi \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$= 2\pi \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\right] = 2\pi \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right] = 2\pi \left[\frac{40 - 15 - 12}{60}\right]$$

$$= \frac{13}{30}\pi \text{ unidades de volume.}$$

Observe que a resposta obtida neste exercício não coincide com a resposta do Exercício 13.2.f, pois o sólido gerado não é o mesmo. Note-se que, neste caso, a região gira em torno da reta $x = 1$, e no Exercício 13.2.f a mesma região gira em torno da reta $x = 2$. Você pode agora tentar resolver o Exercício 13.2.f pelo método das cascas cilíndricas e, analogamente, o Exercício 13.4.c pelo método do disco. As respostas dos exercícios você já as tem.

d. Em torno do eixo coordenado x.

Na página 128 destas notas, mencionamos o seguinte:

✍ iv. Note-se que, para aplicar o método das cascas cilíndricas numa região que gira em torno do eixo x ou de um eixo horizontal, é conveniente expressar a região dada como
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d,\ \ n(y) \leq x \leq m(y),\ m$ e n contínuas em $[c,d]\}$.

Veja que, neste exercício, a região plana R pode ser expressa como $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1,\ y^2 \leq x \leq \sqrt[3]{y}, x = y^2$ e $x = \sqrt[3]{y}$ contínuas em $[0,1]\}$. Note-se também que as funções $x = y^2$ e $x = \sqrt[3]{y}$ interceptam-se em $(0,0)$ e em $(1,1)$.

Desenhamos a **Figura 13.12**, mostrando a região e o eixo de rotação (o eixo x). Identificamos a função altura da casca típica $h(y)$ e o raio médio da casca típica $\overline{r}(y)$, onde $h(y) = \sqrt[3]{y} - y^2$ e $\overline{r}(y) = y$ para $0 \leq y \leq 1$. Note-se que $0 \leq y^2 \leq \sqrt[3]{y}$ para $0 \leq y \leq 1$, assim $h(y) = \sqrt[3]{y} - y^2 \geq 0$ e $\overline{r}(y) = y \geq 0$.

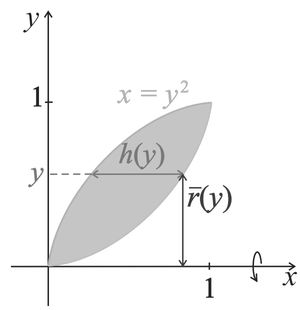


Figura 13.12

O volume é dado pela fórmula $V = 2\pi \displaystyle\int_c^d \overline{r}(y)\, h(y)\, dy$. Assim, o volume é

$$V = 2\pi \int_0^1 y\left(\sqrt[3]{y} - y^2\right) dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(y^{\frac{4}{3}} - y^3\right) dy = 2\pi \left[\frac{y^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 = 2\pi \left[\frac{3y^{\frac{7}{3}}}{7} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1$$

$$= 2\pi \left[\frac{3}{7} - \frac{1}{4}\right] = 2\pi \left[\frac{12-7}{28}\right] = \frac{5}{14}\pi \text{ unidades de volume.}$$

Observe que a resposta obtida neste exercício coincide com a resposta do Exercício 13.2.a, pois o sólido gerado é o mesmo. Apenas usamos métodos diferentes para calcular o volume do mesmo sólido.

e. Em torno da reta horizontal $y = -1$. (Note-se que essa reta está abaixo da região dada)

Desenhamos a **Figura 13.13**, mostrando a região e o eixo de rotação (a reta $y = -1$). Identificamos a função altura da casca típica $h(y)$ e o raio médio da casca típica $\overline{r}(y)$, onde $h(y) = \sqrt[3]{y} - y^2$ e $\overline{r}(y) = 1 + y$ para $0 \leq y \leq 1$. Note-se que $0 \leq y^2 \leq \sqrt[3]{y}$ para $0 \leq y \leq 1$, assim $h(y) = \sqrt[3]{y} - y^2 \geq 0$ e

$\overline{r}(y) = 1 + y \geq 0$. Veja que a reta horizontal $y = -1$ encontra-se abaixo da região dada.

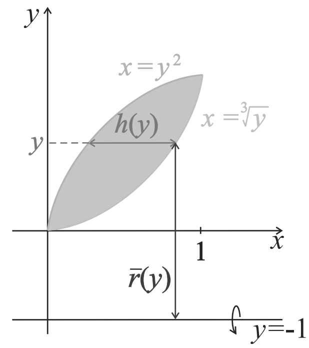


Figura 13.13

O volume é dado pela fórmula $V = 2\pi \displaystyle\int_c^d \overline{r}(y)\, h(y)\, dy$. Assim, o volume é

$$V = 2\pi \int_0^1 (1+y)\left(\sqrt[3]{y} - y^2\right) dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(y^{\frac{1}{3}} - y^2 + y^{\frac{4}{3}} - y^3\right) dy = 2\pi \left[\frac{y^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1$$

$$= 2\pi \left[\frac{3y^{\frac{4}{3}}}{4} - \frac{y^3}{3} + \frac{3y^{\frac{7}{3}}}{7} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 = 2\pi \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{3} + \frac{3}{7} - \frac{1}{4}\right]$$

$$= 2\pi \left[\frac{2}{4} - \frac{1}{3} + \frac{3}{7}\right] = 2\pi \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{3}{7}\right] = 2\pi \left[\frac{21 - 14 + 18}{42}\right]$$

$$= 2\pi \left[\frac{25}{42}\right] = \frac{25}{21}\pi \text{ unidades de volume}$$

Observe que a resposta obtida neste exercício coincide com a resposta do Exercício 13.2.b, pois o sólido gerado é o mesmo. Apenas usamos métodos diferentes para calcular o volume do mesmo sólido.

f. Em torno da reta horizontal $y = 2$. (Note-se que essa reta está acima da região dada)

Desenhamos a **Figura 13.14**, mostrando a região e o eixo de rotação (a reta $y = 2$). Identificamos a função altura da casca típica $h(y)$ e o raio médio da casca típica $\overline{r}(y)$, onde $h(y) = \sqrt[3]{y} - y^2$ e $\overline{r}(y) = 2 - y$ para $0 \leq y \leq 1$. Note-se que $0 \leq y^2 \leq \sqrt[3]{y}$ para $0 \leq y \leq 1$, assim $h(y) = \sqrt[3]{y} - y^2 \geq 0$ e $\overline{r}(y) = 2 - y \geq 0$. Perceba que a reta horizontal $y = 2$ encontra-se acima da região dada.

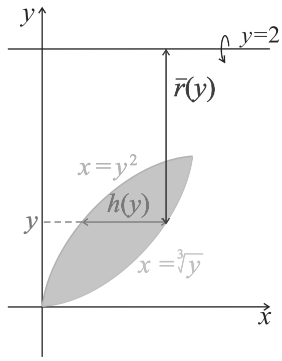


Figura 13.14

O volume é dado pela fórmula $V = 2\pi \int_c^d \bar{r}(y)\, h(y)\, dy$. Assim, o volume é

$$V = 2\pi \int_0^1 (2-y)\left(\sqrt[3]{y}-y^2\right) dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(2y^{\frac{1}{3}} - 2y^2 - y^{\frac{4}{3}} + y^3\right) dy = 2\pi \left[2\frac{y^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - 2\frac{y^3}{3} - \frac{y^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + \frac{y^4}{4}\right]_0^1$$

$$= 2\pi \left[\frac{3y^{\frac{4}{3}}}{2} - \frac{2y^3}{3} - \frac{3y^{\frac{7}{3}}}{7} + \frac{y^4}{4}\right]_0^1 = 2\pi \left[\frac{3}{2} - \frac{2}{3} - \frac{3}{7} + \frac{1}{4}\right]$$

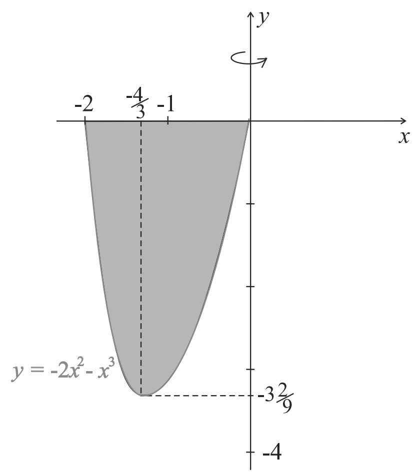
$$= 2\pi \left[\frac{126-56-36+21}{84}\right] = 2\pi \left[\frac{55}{84}\right] = \frac{55}{42}\pi$$ unidades de volume.

Observe que a resposta obtida neste exercício coincide com a resposta do Exercício 13.2.c, pois o sólido gerado é o mesmo. Apenas usamos métodos diferentes para calcular o volume do mesmo sólido.

• Método dos Discos ou Método das Cascas?

Exercício 13.5.

A região aqui apresentada gira em torno do eixo y, gerando um sólido de revolução. Qual dos métodos você usaria para determinar o volume do sólido fazendo o menor esforço? Calcule o volume seguindo o método que escolheu.



Solução: Como a região apresentada gira em torno do eixo y, note-se que, se decidirmos usar o método do disco, precisaremos expressar a região dada na forma $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d,\ n(y) \leq x \leq m(y),$ m e n contínuas em $[c,d]\}$, para isso seremos obrigados a encontrar as funções $x = n(y)$ e $x = m(y)$ a partir da equação cúbica $x^3 + 2x^2 + y = 0$. Essa tarefa não é nada fácil! **Vamos, então, usar o método das cascas cilíndricas. (Este exemplo ilustra muito bem o caso em que o método das cascas é preferível).**

Neste caso, vê-se que a região dada pode ser expressa como $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 0,\ -2x^2 - x^3 \leq y \leq 0,\ f(x) = 0$ e $g(x) = -2x^2 - x^3$ contínuas em $[-2,0]\}$.

Desenhamos a **Figura 13.15**, mostrando a região e o eixo de rotação (o eixo y). Identificamos a função altura da casca típica $h(x)$ e o raio médio da casca típica $\overline{r}(x)$, onde $h(x) = 0 - (-2x^2 - x^3) = 2x^2 + x^3$ e $\overline{r}(x) = 0 - x = -x$ para $-2 \leq x \leq 0$. Note-se que $h(x) = 2x^2 + x^3 = x^2(2 + x) \geq 0$ para $-2 \leq x$, assim em particular $h(x) = 2x^2 + x^3 \geq 0$ e $\overline{r}(x) = -x \geq 0$ para $-2 \leq x \leq 0$.

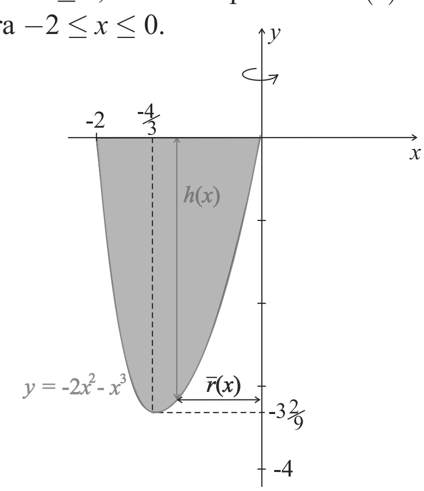


Figura 13.15

O volume é dado pela fórmula $V = 2\pi \int_a^b \overline{r}(x)\,h(x)\,dx$. Assim, o volume é

$$V = 2\pi \int_{-2}^{0} (-x)(2x^2 + x^3)dx$$

$$= 2\pi \int_{-2}^{0} (-2x^3 - x^4)dx = -2\pi \int_{-2}^{0} (2x^3 + x^4)dx$$

$$= -2\pi \left[\frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{0} = -2\pi \left[0 - \left\{\frac{(-2)^4}{2} + \frac{(-2)^5}{5}\right\}\right]$$

$$= -2\pi \left[-\frac{16}{2} - \frac{-32}{5}\right] = -2\pi \left[-8 + \frac{32}{5}\right] = -2\pi \left[\frac{-40+32}{5}\right]$$

$$= -2\pi \left[\frac{-8}{5}\right] = -\pi \left[\frac{-16}{5}\right] = \frac{16}{5}\pi \text{ unidades de volume.}$$

Exercício 13.6.

Esboce o gráfico da região R sob o gráfico da função $y = 2 + 2\cos x$ sobre o intervalo $[0, \pi]$. Calcule o volume do sólido de revolução de R em torno do eixo $0y$, e faça um esboço desse sólido.

(Aula 28 do caderno didático, exercício proposto nº4)

Solução: Observe que o gráfico de $y = 2 + 2\cos x$ sobre o intervalo $[0, \pi]$ é obtido esticando o gráfico da função $y = \cos x$ sobre o intervalo $[0, \pi]$ verticalmente pelo fator 2 e depois deslocando o gráfico $y = 2\cos x$ em 2 unidades para cima sobre o intervalo $[0, \pi]$. Veja as **Figuras 13.16**, **13.17** e **13.18** a seguir:

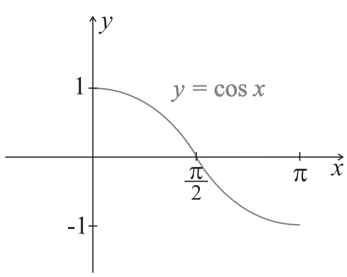


Figura 13.16

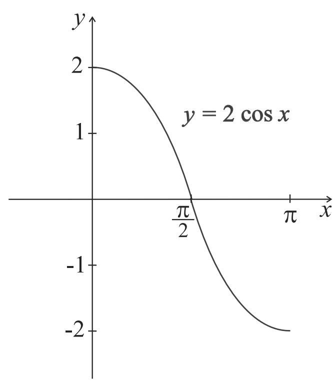


Figura 13.17

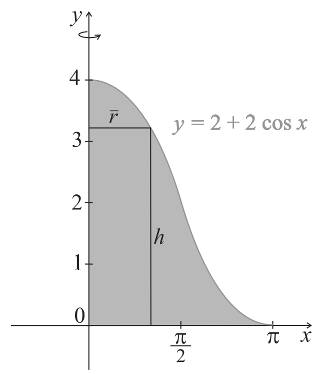


Figura 13.18

Veja que, neste exercício, a região plana R pode ser expressa como $\{(x,y) \mid 0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq 2+2\cos x, y=0$ e $y=2+2\cos x$, contínuas em $[0,\pi]\}$. Note-se que o eixo de rotação, neste caso, é o eixo Oy.

A **Figura 13.18** mostra a região e o eixo de rotação é o eixo Oy. Usaremos o método das cascas cilíndricas, pois a região está pronta para aplicar esse método e, por outro lado, como veremos mais adiante, a integral resultante neste caso será mais simples de resolver que a integral resultante se usar o método dos discos circulares.

Identificamos a função altura da casca típica $h(x)$ e o raio médio da casca típica $\overline{r}(x)$, onde $h(x) = 2+2\cos x$ e $\overline{r}(x) = x$. Note-se que para $0 \leq x \leq \pi$, $h(x) = 2+2\cos x \geq 0$ e $\overline{r}(x) = x \geq 0$.

O volume é dado pela fórmula $V = 2\pi \displaystyle\int_a^b \overline{r}(x)\,h(x)\,dx$. Assim, o volume é

$$V = 2\pi \int_0^{\pi} x(2+2\cos x)dx = 4\pi \int_0^{\pi} x\,dx + 4\pi \int_0^{\pi} x\,\cos x\,dx$$

$$V = 4\pi \frac{x^2}{2}\bigg]_0^{\pi} + 4\pi \int_0^{\pi} x\,\cos x\,dx = 2\pi^3 + 4\pi \int_0^{\pi} x\,\cos x\,dx$$

Usando integração por partes com $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \operatorname{sen} x \end{cases}$, na última integral à direita, temos

$$V = 2\pi^3 - 8\pi = 2\pi(\pi^2 - 4) \text{ unidades de volume. (Verifique!)}$$

Veja o esboço do sólido na **Figura 13.19**:

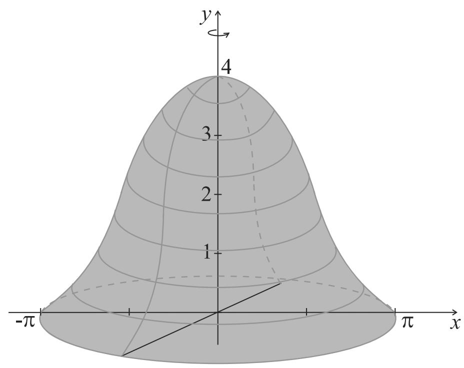


Figura 13.19

✍ Se queremos usar o método dos discos para calcular o volume do sólido, será preciso colocar a região na forma: $\{(x,y) \mid 0 \leq y \leq 4, \quad 0 \leq x \leq \arccos\left(\dfrac{y-2}{2}\right),\ x = 0$ e $x = \arccos\left(\dfrac{y-2}{2}\right)$ contínuas em $[0,4]\}$.

Desenhamos a **Figura 13.20**, mostrando a região e o eixo de rotação continua sendo o eixo Oy.

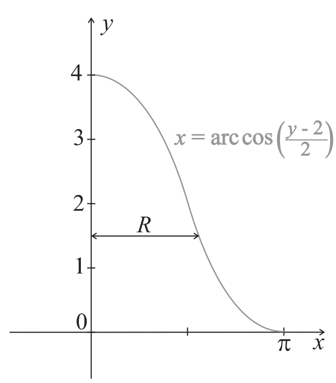


Figura 13.20

Identificamos a função raio $R(y)$, onde $R(y) = \arccos\left(\dfrac{y-2}{2}\right)$ para $0 \leq y \leq 4$. Note-se que $0 \leq R(y)$ para $0 \leq y \leq 4$.

O volume é dado pela fórmula $V = \pi \displaystyle\int_c^d (R(y))^2 dy$.

Assim, podemos verificar também que o volume é

$$V = \pi \int_0^4 \left[\arccos\left(\frac{y-2}{2}\right)\right]^2 dy = 2\pi(\pi^2 - 4) \text{ unidades de volume.}$$

A integral definida resultante neste caso evidentemente vai dar mais trabalho para calculá-la que a integral obtida anteriormente quando fizemos uso do outro método. Observe que sempre que pudermos escolher, usaremos a lei do "menor esforço", isto é, a gente escolherá sempre o método que dê menos trabalho.

• Encontrando o Volume de um Sólido de Revolução Infinito

Exercício 13.7.

Seja $R = \left\{(x,y) \mid x \geq 1,\ 0 \leq y \leq \dfrac{1}{x}\right\}$ uma região. Quando essa região é girada em torno do eixo Ox, ela gera um sólido de revolução cuja superfície é conhecida como **Trombeta do anjo Gabriel** (por razões que ficam claras na **Figura 13.21** em anexo). Mostre que o sólido tem um volume finito.

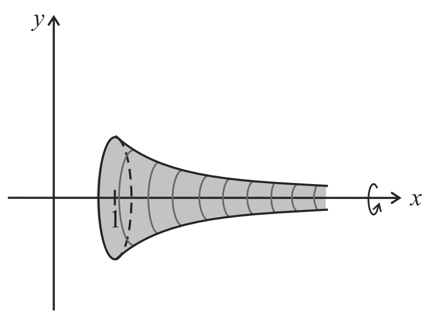


Figura 13.21

Solução: Desenhamos a **Figura 13.22**, mostrando a região e o eixo de rotação (eixo x). Identificamos a função raio do disco típico $R(x)$, onde, neste caso, $R(x) = \dfrac{1}{x}$, para $1 \leq x \leq +\infty$.

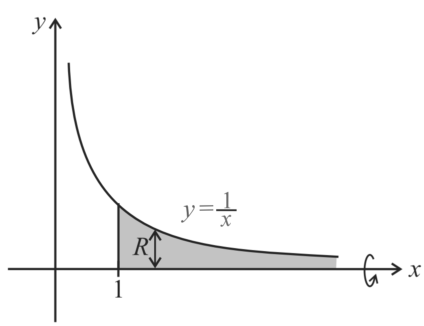


Figura 13.22

O volume é dado, neste caso, pela fórmula $V = \pi \int_1^{+\infty} [R(x)]^2\, dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t [R(x)]^2 dx$, desde que o limite exista.

Assim, o volume é

$$V = \pi \int_1^{+\infty} \left[\frac{1}{x}\right]^2 dx = \pi \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \pi \lim_{t\to+\infty} \left.\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^t$$

$$= \pi \lim_{t\to+\infty} \left[-\frac{1}{t} + 1\right] = \pi \text{ unidades de volume.}$$

MÉTODO DAS SEÇÕES TRANSVERSAIS, PARA SÓLIDOS COM SEÇÃO TRANSVERSAL CONHECIDA

Seção Transversal Triangular

Exercício 13.8.

Um sólido é construído sobre o triângulo limitado pelas retas $y = 1 - \frac{x}{2}$, $y = -1 + \frac{x}{2}$ e $x = 0$ de tal forma que cada seção perpendicular ao eixo Ox é um triângulo equilátero. Calcule o seu volume.

Solução: Na **Figura 13.23**, representamos o sólido e a área da seção transversal $A(x)$.

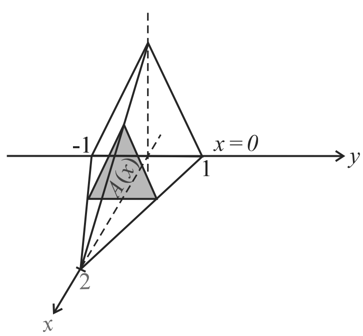


Figura 13.23

Precisamos achar a área da seção transversal obtida pelo corte dado pelo plano que é perpendicular ao eixo Ox. Por dados do problema sabemos que é um triângulo equilátero.

Observe agora a **Figura 13.24** que representa a base do sólido, em dita figura. ℓ representa o lado do triângulo equilátero da seção perpendicular ao eixo Ox. Note-se que ℓ pode ser obtido pela fórmula

$$\ell = \left(1 - \frac{x}{2}\right) - \left(-1 + \frac{x}{2}\right) = 2 - x. \tag{13.1}$$

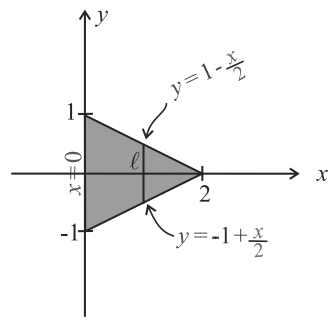


Figura 13.24

Lembre-se de que a área de um triângulo equilátero é dada pela fórmula $\frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2$ e, por outro lado, de 13.1 temos que $\ell = 2 - x$.

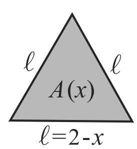


Figura 13.25

Assim, a área transversal resulta $A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(2-x)^2$. Como x varia entre 0 e 2, o volume do sólido é

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_0^2 \frac{\sqrt{3}}{4}(2-x)^2 dx = -\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{(2-x)^3}{3}\Bigg]_0^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{(2)^3}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ unidades de volume.}$$

PASSO A PASSO DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS NO CADERNO DIDÁTICO

Exercício 13.9.

Calcule o volume do sólido de revolução formado girando a região $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \frac{x}{2}\right\}$ em torno do eixo Ox. Faça um esboço do sólido.

(Aula 28 do caderno didático, exercício proposto nº3-a)

Solução: Desenhamos a **Figura 13.26**, mostrando a região e o eixo de rotação (eixo Ox). Identificamos a função raio do disco típico $R(x)$, onde, neste caso, $R(x) = \dfrac{x}{2}$, para $0 \leq x \leq 2$.

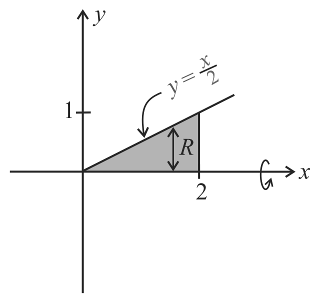


Figura 13.26

O volume é dado pela fórmula $V = \pi \displaystyle\int_a^b [R(x)]^2 dx$. Assim, o volume é

$$V = \pi \int_0^2 \left[\frac{x}{2}\right]^2 dx = \frac{\pi}{4}\int_0^2 x^2\, dx = \frac{\pi}{4}\frac{x^3}{3}\Bigg]_0^2 = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{8}{3}$$

$$= \frac{2\pi}{3} \text{ unidades de volume.}$$

O esboço do sólido está dado na **Figura 13.27**:

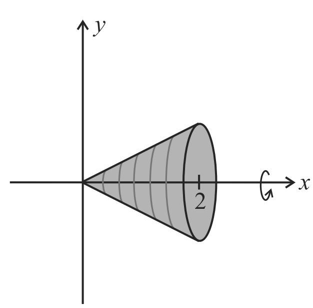


Figura 13.27

Exercício 13.10.

Encontre o volume do sólido de revolução formado girando a região $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\}$

a. Em torno do eixo Ox.

b. Em torno do eixo Oy

(Aula 28 do caderno didático, exercício proposto nº3-b)

c. Em torno da reta horizontal $y = -1$.

d. Em torno da reta vertical $x = \dfrac{3\pi}{2}$.

Faça o esboço do sólido em cada caso.

Solução:

a. Em torno do eixo Ox.

Desenhamos a **Figura 13.28**, mostrando a região e o eixo de rotação (eixo Ox). Identificamos a função raio do disco típico $R(x)$, onde, neste caso, $R(x) = \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$, para $0 \leq x \leq \pi$.

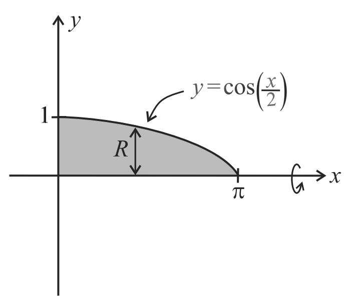


Figura 13.28

O volume é dado pela fórmula $V = \pi \displaystyle\int_a^b [R(x)]^2 dx$. Assim, o volume é

$$V = \pi \int_0^{\pi} \left[\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 dx = \pi \int_0^{\pi} \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1+\cos x}{2} dx$$

$$= \frac{\pi}{2}(x + \operatorname{sen} x)\Big]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}(\pi + \operatorname{sen}\pi) = \frac{\pi^2}{2} \text{ unidades de volume.}$$

O esboço do sólido está dado na **Figura 13.29**:

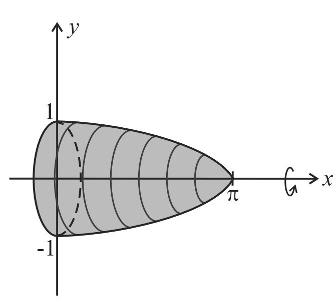


Figura 13.29

b. Em torno do eixo Oy.

Desenhamos a **Figura 13.30**, mostrando a região e o eixo de rotação (eixo Oy). Identificamos a função altura da casca típica $h(x)$ e o raio médio da casca típica $\overline{r}$, onde $h(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ e $\overline{r} = x$ para $0 \leq x \leq \pi$.

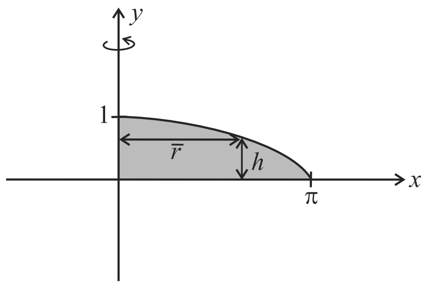


Figura 13.30

O volume é dado pela fórmula $V = 2\pi \int_a^b \overline{r}(x)\, h(x)\, dx$. Assim, o volume é

$$V = 2\pi \int_0^{\pi} x \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx.$$

Usaremos integração por partes para resolver a integral.

Faça $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx \Rightarrow v = 2\,\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \end{cases}$

$$\int_0^{\pi} \underbrace{x}_{u} \underbrace{\cos\left(\frac{x}{2}\right) dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{2\,\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}_{v}\Bigg]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

$$= 2\pi\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4\cos\left(\frac{x}{2}\right)\Bigg]_0^{\pi} = 2\pi + 4\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 4\cos 0 = 2\pi - 4$$

Assim, $V = 2\pi \int_0^{\pi} x\cos\left(\frac{x}{2}\right) dx = 2\pi[2\pi - 4] = 4\pi[\pi - 2]$ unidades de volume.

O esboço do sólido está dado na **Figura 13.31**.

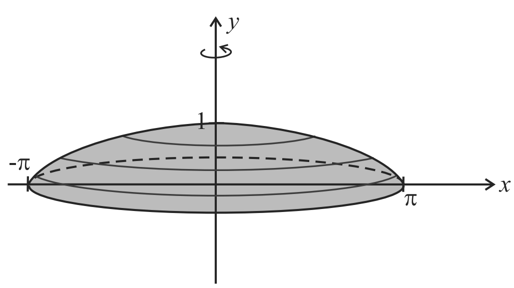


Figura 13.31

c. Em torno da reta horizontal $y = -1$.

Desenhamos a **Figura 13.32**, mostrando a região e o eixo de rotação (a reta horizontal $y = -1$). Identificamos as funções raio maior $R(x)$ e o raio menor $r(x)$, onde $R(x) = 1 + \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ e $r(x) = 1$ para $0 \le x \le \pi$. Note-se que $0 \le r(x) \le R(x)$ para $0 \le x \le \pi$. Note-se também que o eixo de rotação está abaixo da região dada.

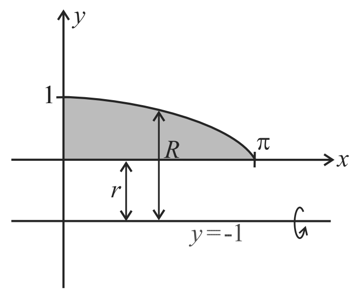


Figura 13.32

O volume é dado pela fórmula $V = \pi \displaystyle\int_a^b \left[(R(x))^2 - (r(x))^2\right] dx$.
Assim o volume é

$$V = \pi \int_0^\pi \left[\left(1 + \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 - (1)^2\right] dx$$

$$= \pi \int_0^\pi \left[1 + 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right] dx$$

$$= 2\pi \int_0^\pi \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx + \pi \int_0^\pi \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

$$= 4\pi \,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\Big]_0^\pi + \pi \int_0^\pi \frac{1 + \cos x}{2} dx$$

$$= 4\pi \,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\Big]_0^\pi + \frac{\pi}{2}(x + \mathrm{sen}\, x)\Big]_0^\pi = 4\pi \,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}(\pi + \mathrm{sen}\,\pi)$$

$$= 4\pi + \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}(8 + \pi) \text{ unidades de volume.}$$

O esboço do sólido está dado na **Figura 13.33**:

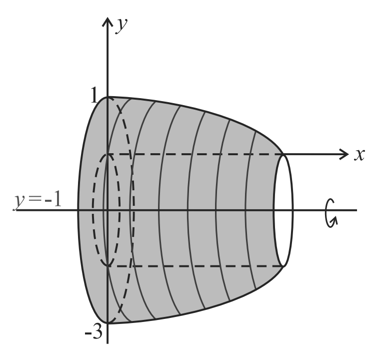


Figura 13.33

d. Em torno da reta vertical $x = \dfrac{3\pi}{2}$.

Desenhamos a **Figura 13.34**, mostrando a região e o eixo de rotação $\left(\text{a reta vertical } x = \dfrac{3\pi}{2}\right)$. Identificamos a função altura da casca típica $h(x)$ e o raio médio da casca típica $\overline{r}(x)$, onde $h(x) = \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ e $\overline{r}(x) = \dfrac{3\pi}{2} - x$ para $0 \leq x \leq \pi$. Note-se que $0 \leq \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ para $0 \leq x \leq \pi$, assim $h(x) = \cos\left(\dfrac{x}{2}\right) \geq 0$ e $\overline{r}(x) = \dfrac{3\pi}{2} - x \geq 0$. Observe que a reta vertical $x = \dfrac{3\pi}{2}$ encontra-se à direita da região dada.

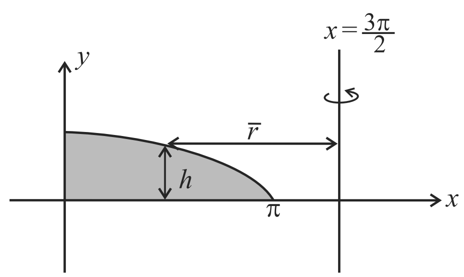


Figura 13.34

O volume é dado pela fórmula $V = 2\pi \displaystyle\int_a^b \overline{r}(x)\, h(x)\, dx$. Assim, o volume é

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_0^\pi \left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx \\
&= 2\pi \int_0^\pi \frac{3\pi}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx - 2\pi \int_0^\pi x \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx \\
&= 3\pi^2 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \Big]_0^\pi - 2\pi \int_0^\pi x \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx \\
&= 6\pi^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\pi \underbrace{\int_0^\pi x \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx}_{(*)}
\end{aligned}
$$

Lembre-se de que a integral $(*)$ foi calculada em 13.2.b e $\displaystyle\int_0^\pi x \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx = 2\pi - 4$.

Assim, $V = 6\pi^2 - 2\pi(2\pi - 4) = 6\pi^2 - 4\pi^2 + 8\pi = 2\pi^2 + 8\pi$

$$V = 2\pi[\pi + 4] \text{ unidades de volume.}$$

O esboço do sólido está dado na **Figura 13.35**.

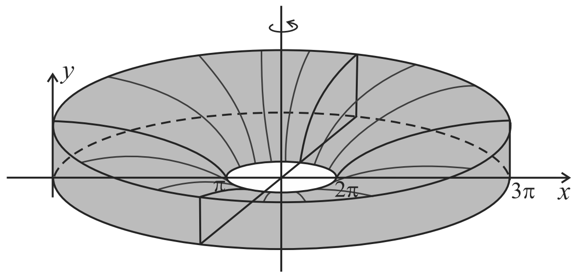


Figura 13.35

Exercício 13.11.

Calcule o volume do sólido de revolução formado girando a região $R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2,\ \dfrac{1}{x} \leq y \leq e^x \right\}$

a. Em torno do eixo Ox.

(Aula 28 do caderno didático, exercício proposto nº3-e)

b. Em torno do eixo Oy.

Faça o esboço do sólido em cada caso.

Solução:

a. Em torno do eixo Ox.

Desenhamos a **Figura 13.36**, mostrando a região e o eixo de rotação (eixo x). Identificamos as funções raio maior $R(x)$ e o raio menor $r(x)$, onde $R(x) = e^x$ e $r(x) = \dfrac{1}{x}$ para $1 \leq x \leq 2$. Note-se também que $0 \leq r(x) \leq R(x)$ para $1 \leq x \leq 2$.

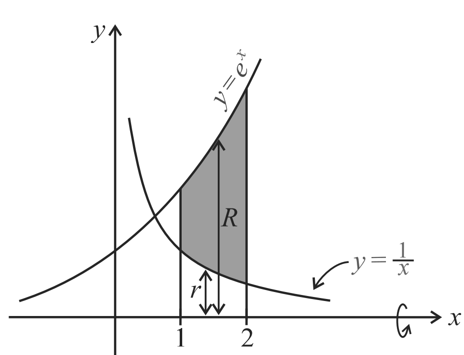


Figura 13.36

O volume é dado pela fórmula $V = \pi \int_a^b \left[(R(x))^2 - (r(x))^2\right] dx$.

Assim, o volume é

$$V = \pi \int_1^2 \left[(e^x)^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^2\right] dx = \pi \int_1^2 \left[e^{2x} - x^{-2}\right] dx = \pi \left[\frac{e^{2x}}{2} - \frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^2$$

$$= \pi \left[\frac{e^4}{2} + \frac{1}{2} - \frac{e^2}{2} - 1\right] = \frac{\pi}{2}\left[e^4 - e^2 - 1\right] \text{ unidades de volume.}$$

O esboço do sólido está dado na **Figura 13.37**:

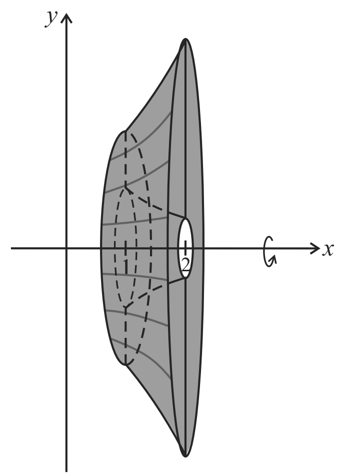


Figura 13.37

b. Em torno do eixo Oy.

Desenhamos a **Figura 13.38**, mostrando a região e o eixo de rotação (do eixo y). Identificamos a função altura da casca típica $h(x)$ e o raio médio da casca típica $\overline{r}(x)$, onde $h(x) = e^x - \frac{1}{x}$ e $\overline{r}(x) = x$ para $1 \leq x \leq 2$. Note-se que $0 \leq \frac{1}{x} \leq e^x$ para $1 \leq x \leq 2$, assim $h(x) = e^x - \frac{1}{x} \geq 0$ e $\overline{r}(x) = x \geq 0$.

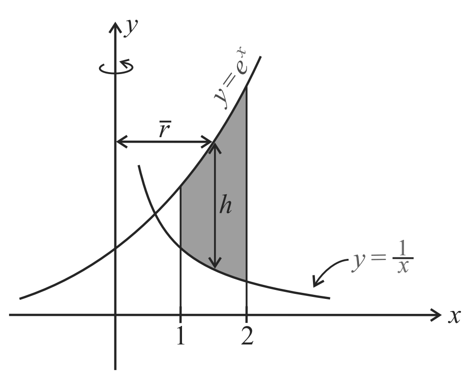


Figura 13.38

O volume é dado pela fórmula $V = 2\pi \int_a^b \overline{r}(x)\, h(x)\, dx$. Assim, o volume é

$$V = 2\pi \int_1^2 x\left(e^x - \frac{1}{x}\right) dx = 2\pi \int_1^2 x e^x \, dx - 2\pi \int_1^2 dx$$
$$= 2\pi \int_1^2 x e^x \, dx - 2\pi$$

Para resolver a integral, usaremos integração por partes:
$$\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{cases}$$

$$\int_1^2 x e^x \, dx = x e^x \Big]_1^2 - \int_1^2 e^x dx = (2e^2 - e) - (e^2 - e)$$
$= e^2$ unidades de volume.

O esboço do sólido está dado na **Figura 13.39**:

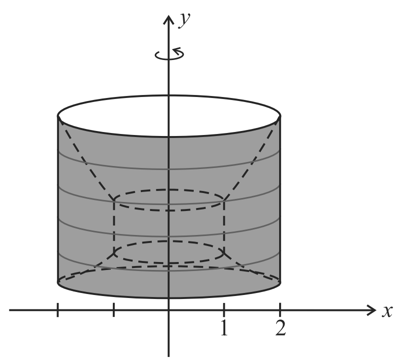


Figura 13.39

Exercício 13.12.

Calcule o volume do sólido de revolução formado girando a região sob o gráfico da função $f(x) = \sec x$, no intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ ao redor do eixo Ox. Faça o esboço do sólido.

(Aula 28 do caderno didático, exercício proposto nº6)

Solução: Desenhamos a **Figura 13.40**, mostrando a região e o eixo de rotação (eixo Ox). Identificamos a função raio do disco típico $R(x)$, onde, neste caso, $R(x) = \sec x$, para $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.

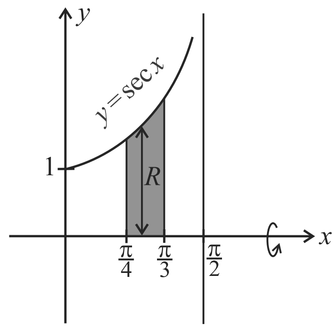


Figura 13.40

O volume é dado pela fórmula $V = \pi \int_a^b [R(x)]^2\,dx$. Assim, o volume é

$$V = \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} [\sec x]^2 dx = \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x\,dx = \pi \operatorname{tg} x \Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \pi \left[\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right]$$

$= \pi\left[\sqrt{3} - 1\right]$ unidades de volume.

O esboço do sólido está dado na **Figura 13.41**:

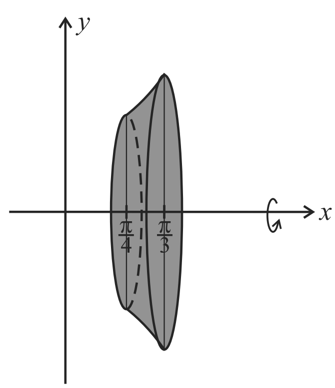


Figura 13.41

Exercício 13.13.

Em uma esfera de raio 1 foi cavado um buraco cilíndrico, cujo eixo de simetria é um diâmetro máximo da esfera. Calcule o volume obtido da esfera menos o cilindro, sabendo que o raio do cilindro é $\frac{1}{2}$.

(Aula 28 do caderno didático, exercício proposto nº7)

Solução: Esboçamos o sólido na **Figura 13.42**. Como o eixo de simetria é um diâmetro máximo da esfera, estamos supondo (para facilitar os cálculos) que esse eixo coincide com o eixo y (raciocínio análogo poderá ser feito se consideramos o eixo de simetria coincidindo com o eixo x).

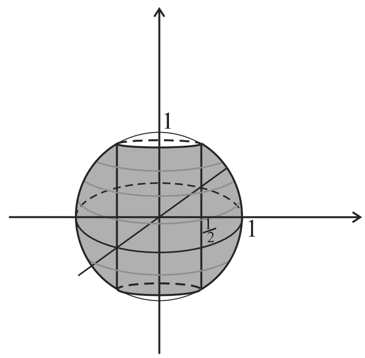


Figura 13.42

Observe que, para obter o sólido de revolução acima, basta considerar a região $R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leq y \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \right\}$ girando em torno do eixo y. Veja a **Figura 13.43**.

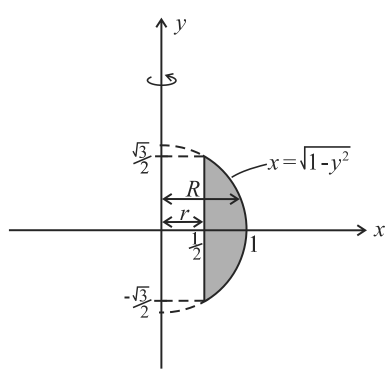


Figura 13.43

Usaremos o método dos discos ou arruelas. Identificamos as funções raio maior $R(y)$ e o raio menor $r(y)$, onde $R(y) = \sqrt{1-y^2}$ e $r(y) = \dfrac{1}{2}$ para $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leq y \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Note-se também que $0 \leq r(y) \leq R(y)$ para $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leq y \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

O volume é dado pela fórmula $V = \pi \int_c^d \left[(R(y))^2 - (r(y))^2\right] dy$. Assim, o volume é

$$V = \pi \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left[\left(\sqrt{1-y^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] dy$$

Usando a simetria da região em relação ao eixo x, temos

$$V = 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left[1 - y^2 - \frac{1}{4}\right] dy = 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{3}{4} - y^2\right) dy = 2\pi \left(\frac{3}{4}y - \frac{y^3}{3}\right)\Big]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= 2\pi \left(\frac{3}{4}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{2} \text{ unidades de volume.}$$

Exercício 13.14.

Uma cunha (situada acima do plano $z = 0$) é cortada do cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$ pelos planos $z = 0$ e $z = y$. Calcule o seu volume.

(Aula 28 do caderno didático, exercício proposto nº10)

Solução: Na **Figura 13.44**, representamos o sólido e a área da seção transversal $A(x)$.

Lembre-se de que

$$V = \int_a^b A(x)\, dx \tag{13.2}$$

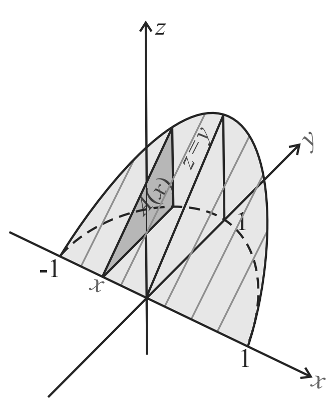


Figura 13.44

Precisamos achar a área da seção transversal obtida pelo corte dado pelo plano que é perpendicular ao eixo Ox. Observe que a seção transversal é um triângulo retângulo de base B.

Na **Figura 13.45**, podemos observar que para cada $x \in [-1,1]$, $B = y = \sqrt{1-x^2}$.

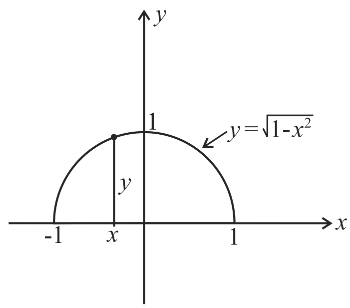


Figura 13.45

Por outro lado, observe, na **Figura 13.46**, que a altura "h" do triângulo retângulo é z e como $z = y$ resulta que $h = y = \sqrt{1-x^2}$.

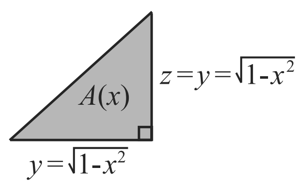


Figura 13.46

Logo, a área $A(x)$ da seção transversal é $A(x) = \dfrac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}{2} = \dfrac{1-x^2}{2}$. Finalmente, usando 13.2, podemos calcular o volume:

$V = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1-x^2}{2}dx = 2\int_0^1 \frac{1-x^2}{2}dx = x - \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ unidades de volume.

Exercício 13.15.

Calcule o volume do sólido formado pela revolução da região $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le e^x\right\}$ em torno do eixo Ox. Faça um esboço do sólido de revolução.

(Aula 28 do caderno didático, exercício proposto nº3-d)

Solução: Desenhamos a **Figura 13.47**, mostrando a região e o eixo de rotação (eixo Ox). Identificamos a função raio do disco típico $R(x)$, onde, neste caso, $R(x) = e^x$ para $1 \leq x \leq 2$.

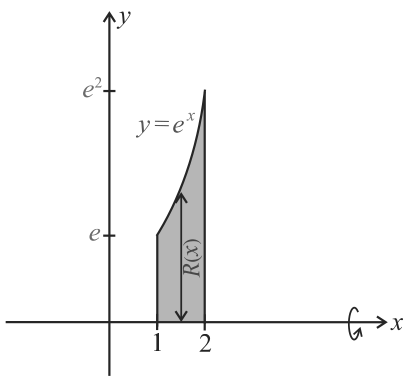


Figura 13.47

O volume é dado pela fórmula $V = \pi \int_a^b [R(x)]^2\, dx$. Assim, o volume é

$$V = \pi \int_1^2 [e^x]^2 dx = \pi \int_1^2 e^{2x} dx = \frac{\pi}{2} e^{2x} \Big]_1^2 = \frac{\pi}{2}(e^4 - e^2)$$

$$= \frac{\pi}{2} e^2 (e^2 - 1) \text{ unidades de volume.}$$

O esboço do sólido está dado na **Figura 13.48**:

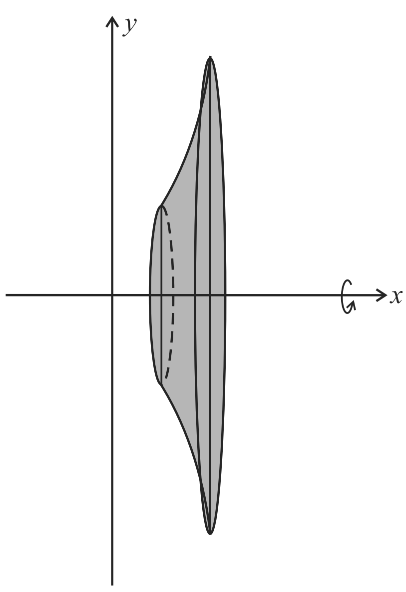


Figura 13.48

Exercício 13.16.

Calcule o volume do sólido de revolução formado girando a região $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4x + 4 \leq y \leq 1\right\}$ em torno do eixo Ox. Faça um esboço do sólido.

(Aula 28 do caderno didático, exercício proposto nº3-c)

Solução: Desenhamos a **Figura 13.49**, mostrando a região e o eixo de rotação (eixo x). Identificamos as funções raio maior $R(x)$ e o raio menor $r(x)$, onde $R(x) = 1$ e $r(x) = (x-2)^2$, onde $1 \leq x \leq 3$. Com efeito, resolvendo a equação $(x-2)^2 = 1$, resulta que $(x-2) = \pm 1$. Logo, $x = 1$ e $x = 3$. Note-se também que $0 \leq r(x) \leq R(x)$ para $1 \leq x \leq 3$.

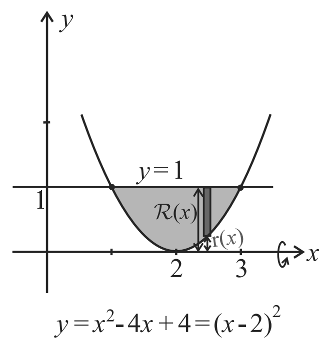


Figura 13.49

O volume é dado pela fórmula $V = \pi \int_a^b \left[(R(x))^2 - (r(x))^2\right] dx$. Assim, o volume é

$$V = \pi \int_1^3 \left[(1)^2 - \left((x-2)^2\right)^2\right] dx = \pi \int_1^3 1\, dx - \pi \int_1^3 (x-2)^4 dx$$

$$= \pi x\Big]_1^3 - \pi \frac{(x-2)^5}{5}\Big]_1^3 = 2\pi - \frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = \frac{8\pi}{5} \text{ unidades de volume.}$$

O esboço do sólido é mostrado na **Figura 13.50**:

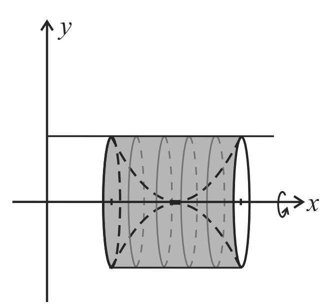


Figura 13.50

Exercício 13.17.

Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região R limitada pelas curvas $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$, $y = 4$ e $x = 0$.

a. Em torno do eixo Oy.

b. Em torno da reta vertical $x = 4$.

c. Em torno da reta horizontal $y = 4$.

d. Em torno da reta vertical $x = -1$.

e. Em torno da reta horizontal $y = -1$.

Em cada caso: esboce a região e, de acordo com o seu raciocínio, mostre uma casca típica ou um disco típico ou arruela. Faça um esboço do sólido correspondente.

Solução:

a. Desenhamos a **Figura 13.51**, mostrando a região e o eixo de rotação (do eixo y). Identificamos a função altura da casca típica $h(x)$ e o raio médio da casca típica $\overline{r}(x)$, onde $h(x) = 4 - x^2$ e $\overline{r}(x) = x$ para $0 \leq x \leq 2$. Note-se que $0 \leq x^2 \leq 4$ para $0 \leq x \leq 2$, assim $h(x) = 4 - x^2 \geq 0$ e $\overline{r}(x) = x \geq 0$. Na **Figura 13.52**, mostramos o esboço do sólido correspondente.

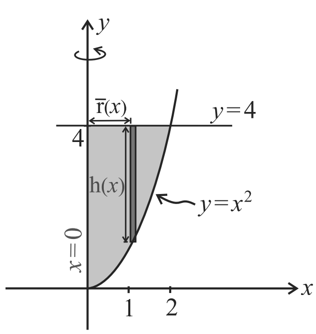


Figura 13.51

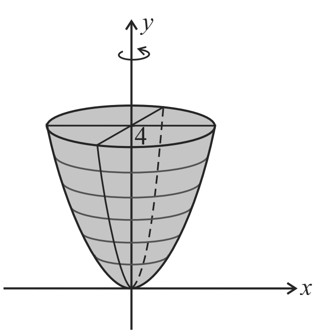


Figura 13.52

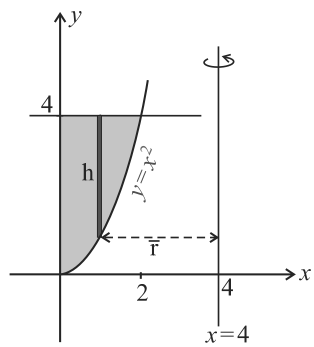
O volume é dado pela fórmula $V = 2\pi \int_a^b \overline{r}(x)\, h(x)\, dx$. Assim, o volume é

$$V = 2\pi \int_0^2 x(4-x^2)dx = 2\pi \int_0^2 (4x-x^3)dx = 2\pi \left(4\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big]_0^2$$

$$= 2\pi \left(2x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\Big]_0^2 = 2\pi \left(2(2)^2 - \frac{(2)^4}{4}\right) = (2)^4\pi \left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$= 8\pi$ unidades de volume.

b. Desenhamos a **Figura 13.53**, mostrando a região e o eixo de rotação (a reta vertical $x = 4$). Identificamos a função altura da casca típica $h(x)$ e o raio médio da casca típica $\overline{r}(x)$, onde $h(x) = 4 - x^2$ e $\overline{r}(x) = 4 - x$ para $0 \leq x \leq 2$. Note-se que $0 \leq x^2 \leq 4$ para $0 \leq x \leq 2$, assim $h(x) = 4 - x^2 \geq 0$ e $\overline{r}(x) = 4 - x \geq 0$. Observe que a reta vertical $x = 4$ encontra-se à direita da região dada. Na **Figura 13.54**, mostramos o esboço do sólido correspondente.



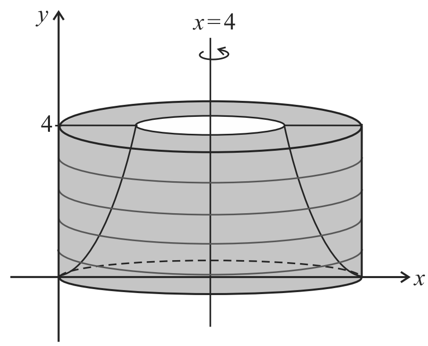


Figura 13.53 **Figura 13.54**

O volume é dado pela fórmula $V = 2\pi \displaystyle\int_a^b \overline{r}(x)\, h(x)\, dx$. Assim, o volume é

$$V = 2\pi \int_0^2 (4-x)(4-x^2)dx = 2\pi \int_0^2 (16 - 4x^2 - 4x + x^3)dx$$

$$= 2\pi \left(16x - 4\frac{x^3}{3} - 2x^2 + \frac{x^4}{4} \right) \Big]_0^2$$

$$= 2\pi \left(16(2) - 4\frac{2^3}{3} - 2(2)^2 + \frac{2^4}{4} \right) = 2\pi \left(32 - \frac{32}{3} - 4 \right)$$

$$= 2\pi \left(\frac{64-12}{3} \right) = \frac{104\pi}{3} \text{ unidades de volume.}$$

c. Desenhamos a **Figura 13.55**, mostrando a região e o eixo de rotação (a reta $y = 4$). Identificamos a função raio do disco típico $R(x)$, onde, neste caso, $R(x) = 4 - x^2$ para $0 \leq x \leq 2$. Na **Figura 13.56**, mostramos o esboço do sólido correspondente.

O volume é dado pela fórmula $V = \pi \displaystyle\int_a^b (R(x))^2 dx$.

Assim, o volume é

$$V = \pi \int_0^2 [4 - x^2]^2 dx = \pi \int_0^2 [16 - 8x^2 + x^4] dx$$

$$= \pi \left[16x - 8\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right] \Bigg]_0^2 = \pi \left[2^5 - \frac{2^6}{3} + \frac{2^5}{5} \right]$$

$$= 32\pi\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right) = 32\pi\left(\frac{15-10+3}{15}\right) = 32\pi\left(\frac{8}{15}\right)$$

$$= \frac{256\pi}{15} \text{ unidades de volume.}$$

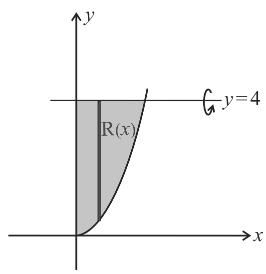


Figura 13.55

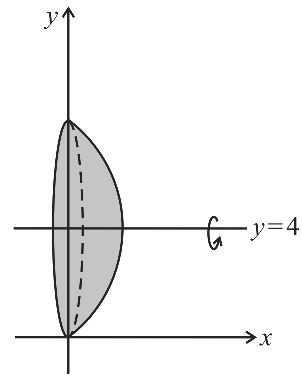


Figura 13.56

d. Desenhamos a **Figura 13.57**, mostrando a região e o eixo de rotação (da reta vertical $x = -1$). Identificamos a função altura da casca típica $h(x)$ e o raio médio da casca típica $\overline{r}(x)$, onde $h(x) = 4 - x^2$ e $\overline{r} = 1 + x$ para $0 \le x \le 2$. Note-se que $0 \le x^2 \le 4$ para $0 \le x \le 2$, assim $h(x) = 4 - x^2 \ge 0$ e $\overline{r}(x) = 1 + x \ge 0$. Veja também que a reta vertical $x = -1$ encontra-se à esquerda da região dada. Na **Figura 13.58**, mostramos o esboço do sólido correspondente.

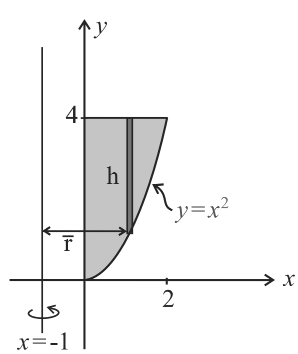


Figura 13.57

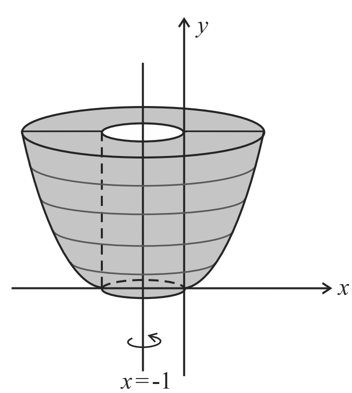


Figura 13.58

O volume é dado pela fórmula $V = 2\pi \int_a^b \overline{r}(x)\, h(x)\, dx$. Assim, o volume é

$$V = 2\pi \int_0^2 (1+x)(4-x^2)dx = 2\pi \int_0^2 (4+4x-x^2-x^3)dx$$

$$= 2\pi\left(4x+4\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg]_0^2 = 2\pi\left(4(2)+4\frac{2^2}{2}-\frac{2^3}{3}-\frac{2^4}{4}\right)$$

$= 2\pi\left(8+8-\frac{8}{3}-4\right) = 2\pi\left(12-\frac{8}{3}\right) = \frac{56}{3}\pi$ unidades de volume.

e. Desenhamos a **Figura 13.59**, mostrando a região e o eixo de rotação (a reta horizontal $y=-1$). Identificamos as funções raio maior $R(x)$ e o raio menor $r(x)$, onde $R(x)=1+4=5$ e $r(x)=1+x^2$ para $0\leq x\leq 2$. Note-se que $0\leq r(x)\leq R(x)$ para $0\leq x\leq 2$. Note-se também que o eixo de rotação está abaixo da região dada. Na **Figura 13.60**, mostramos o esboço do sólido correspondente.

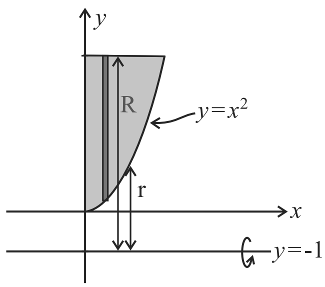


Figura 13.59

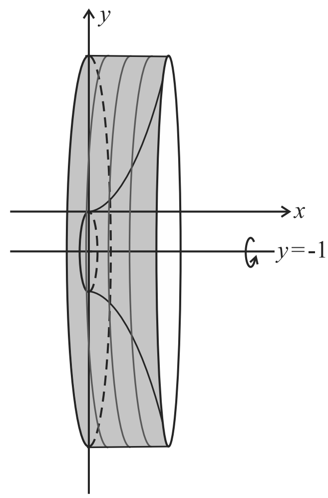


Figura 13.60

O volume é dado pela fórmula $V=\pi\int_a^b\left[(R(x))^2-(r(x))^2\right]dx$.
Assim, o volume é

$$V=\pi\int_0^2\left[(5)^2-\left(1+x^2\right)^2\right]dx=\pi\int_0^2\left[25-(1+2x^2+x^4)\right]dx$$

$$=\pi\int_0^2\left[24-2x^2-x^4\right]dx=\pi\left(24x-2\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\bigg]_0^2$$

$$=\pi\left(48-\frac{16}{3}-\frac{32}{5}\right)=\pi\left(\frac{48(15)-16(5)-32(3)}{15}\right)$$

$$=\frac{544}{15}\pi \text{ unidades de volume.}$$

Exercício 13.18.

Calcule o volume do sólido de revolução em torno do eixo Ox da região sob o gráfico da função $f(x)=x\sqrt{\cos x}$, no intervalo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

(Aula 28 do caderno didático, exercício proposto n°5)

Solução: Observe que $\cos x \geq 0$ no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, assim $f(x) = x\sqrt{\cos x}$, para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ é uma função sempre positiva. Também sabemos que dita região está no primeiro quadrante e é limitada inferiormente pelo eixo Ox que é também o eixo de rotação do sólido de revolução; assim não precisamos do gráfico da região para perceber que podemos aplicar o método dos discos, onde $R(x) = x\sqrt{\cos x} \geq 0$ para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. O volume é dado pela fórmula $V = \pi \int_a^b (R(x))^2 dx$.

Assim, o volume é:

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x\sqrt{\cos x}\right)^2 dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \, dx \tag{13.3}$$

Usaremos integração por partes para calcular a integral indefinida $\int x^2 \cos x \, dx$. Fazendo $\begin{cases} u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx \\ dv = \cos x \, dx \Rightarrow v = \operatorname{sen} x \end{cases}$, temos que

$$\int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{\cos x \, dx}_{dv} = x^2 \operatorname{sen} x - 2 \int x \operatorname{sen} x \, dx \tag{13.4}$$

Usaremos novamente integração por partes para calcular a integral indefinida $\int x \operatorname{sen} x \, dx$. Fazendo $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \operatorname{sen} x \, dx \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$, temos que

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\operatorname{sen} x \, dx}_{dv} = x(-\cos x) + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + C_1 \tag{13.5}$$

Substituindo 13.5 em 13.4, obtemos

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C \tag{13.6}$$

Substituindo 13.6 em 13.3, resulta

$$V = \pi \left(x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x\right) \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \pi \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \underbrace{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}}_{1} + 2\frac{\pi}{2} \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{0} - 2 \underbrace{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}}_{1} \right) - 0 = \pi \left(\frac{\pi^2}{4} - 2 \right)$$

$$= \frac{\pi}{4}(\pi^2 - 8) \text{ unidades de volume.}$$

Exercício 13.19.

Calcule o volume do sólido cuja base é o disco $x^2 + y^2 \leq 4$, tal que cada uma de suas seções transversais perpendiculares ao eixo Ox é um quadrado.

(Aula 28 do caderno didático, exercício proposto nº8)

Faça um esboço do sólido.

Solução: Na **Figura 13.61**, representamos a base do sólido e a área da seção transversal $A(x)$ que, neste caso, são quadrados. Na **Figura 13.62**, mostramos um esboço do sólido.

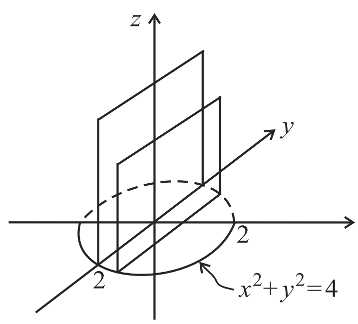


Figura 13.61

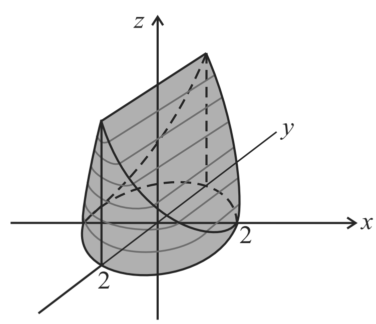


Figura 13.62

Sabemos que

$$V = \int_a^b A(x)\,dx \tag{13.7}$$

Precisamos achar a área da seção transversal obtida pelo corte dado pelo plano que é perpendicular ao eixo Ox. Observe que a seção transversal é um quadrado de lado ℓ. Na **Figura 13.61**, podemos observar que para cada $x \in [-2,2]$, $\ell = \sqrt{4-x^2} - \left(-\sqrt{4-x^2}\right) = 2\sqrt{4-x^2} \geq 0$.

Logo, a área $A(x)$ da seção transversal é

$$A(x) = \ell^2 = \left(2\sqrt{4-x^2}\right)^2 = 4(4-x^2) \tag{13.8}$$

Substituindo 13.8 em 13.7, onde $a = -2$ e $b = 2$, obtemos

$$V = \int_{-2}^{2} 4(4-x^2)dx = \int_{-2}^{2} (16-4x^2)dx = 16x - 4\frac{x^3}{3}\Big]_{-2}^{2}$$

$$= \left(16(2) - 4\frac{2^3}{3}\right) - \left(16(-2) - 4\frac{(-2)^3}{3}\right) = 2\left(32 - \frac{32}{3}\right)$$

$$= 64\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{128}{3} \text{ unidades de volume.}$$

Exercício 13.20.

Um sólido é construído sobre o triângulo de vértices $(0,-2)$, $(0,2)$ e $(4,0)$ de tal forma que cada seção perpendicular ao eixo Ox é um semicírculo.

(Aula 28 do caderno didático, exercício proposto nº9)

Calcule o volume e faça um esboço do sólido.

Solução: Na **Figura 13.63**, representamos a base do sólido e, na **Figura 13.64**, a área da seção transversal $A(x)$ que, neste caso, são semicírculos. Na **Figura 13.65**, mostramos um esboço do sólido. Por outro lado, na **Figura 13.63**, podemos calcular a equação da reta que passa por $(0,2)$ e $(4,0)$ assim $y-0=\dfrac{0-2}{4-0}(x-4)$, isto é, $y=-\dfrac{1}{2}(x-4)=2-\dfrac{x}{2}$, analogamente, a equação da reta que passa por $(0,-2)$ e $(4,0)$ é $y=\dfrac{1}{2}(x-4)=\dfrac{x}{2}-2$.

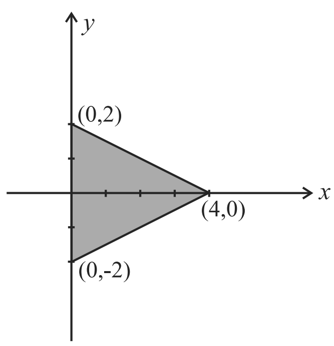


Figura 13.63

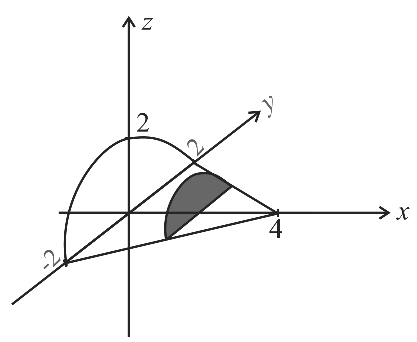


Figura 13.64

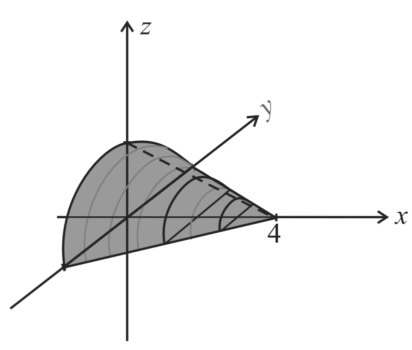


Figura 13.65

Sabemos que

$$V = \int_a^b A(x)\,dx \tag{13.9}$$

Precisamos achar a área da seção transversal obtida pelo corte dado pelo plano que é perpendicular ao eixo Ox. Observe que a seção transversal é um semicírculo de raio r. Nas **Figuras 13.63** e **13.64**, podemos observar que para cada $x \in [0,4]$, $2r = \left(2 - \frac{x}{2}\right) - \left(\frac{x}{2} - 2\right) = 2 - \frac{x}{2} - \frac{x}{2} + 2 = 4 - x$, logo $r = \frac{4-x}{2} = 2 - \frac{x}{2} \geq 0$.

Logo, a área $A(x)$ da seção transversal é

$$A(x) = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi}{2}\left(2 - \frac{x}{2}\right)^2 \tag{13.10}$$

Substituindo 13.10 em 13.9, onde $a = 0$ e $b = 4$, obtemos

$$V = \int_0^4 \frac{\pi}{2}\left(2 - \frac{x}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}\int_0^4 \left(2 - \frac{x}{2}\right)^2 dx \tag{13.11}$$

Fazendo a substituição $u = 2 - \frac{x}{2} \Rightarrow du = -\frac{dx}{2} \Rightarrow dx = -2\,du$, obtemos a integral indefinida

$$\int \left(2 - \frac{x}{2}\right)^2 dx = -2\int u^2\,du = -2\frac{u^3}{3} = -\frac{2}{3}\left(2 - \frac{x}{2}\right)^3 + C \tag{13.12}$$

Substituindo 13.12 em 13.11, temos

$$V = \left(-\frac{\pi}{3}\right)\left(2 - \frac{x}{2}\right)^3\Bigg]_0^4 = \left(-\frac{\pi}{3}\right)\left(2 - \frac{4}{2}\right)^3 - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\left(2 - \frac{0}{2}\right)^3$$

$= \frac{8\pi}{3}$ unidades de volume.

Exercício 13.21.

Calcule o volume do sólido de revolução em torno do eixo Ox da região sob o gráfico da função $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$ para $x \geq 1$. Esboce a região e, de acordo com o seu raciocínio, mostre uma casca típica ou um disco típico ou arruela. Faça um esboço do sólido correspondente.

Solução: Desenhamos a **Figura 13.66**, mostrando a região ilimitada e o eixo de rotação (eixo Ox). Identificamos a função raio do disco típico $R(x)$, onde neste caso $R(x) = x^{-\frac{2}{3}}$, para $1 \leq x \leq +\infty$.

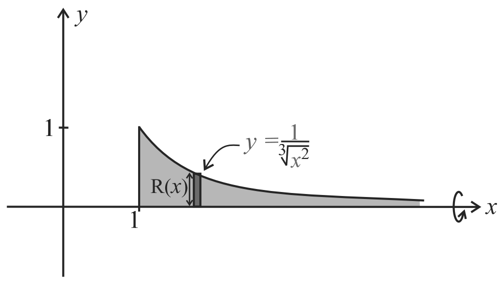


Figura 13.66

Na **Figura 13.67**, mostramos um esboço do sólido.

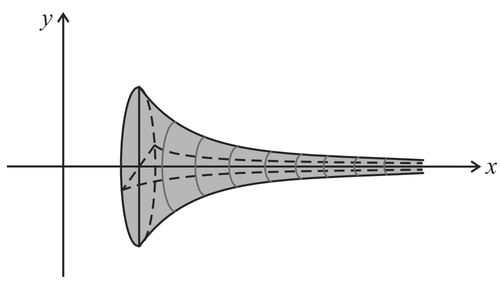


Figura 13.67

O volume é dado, neste caso, pela fórmula $V = \pi \int_1^{+\infty} [R(x)]^2 dx = \pi \lim_{t \to +\infty} \int_1^t [R(x)]^2 dx$, desde que o limite exista.

Assim, o volume é

$$V = \pi \int_1^{+\infty} \left[x^{-\frac{2}{3}}\right]^2 dx = \pi \lim_{t \to +\infty} \int_1^t x^{-\frac{4}{3}} dx = \pi \lim_{t \to +\infty} \left. \frac{x^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}} \right]_1^t$$

$$= \pi \lim_{t \to +\infty} \left[-\frac{3}{t^{\frac{1}{3}}} + 3 \right] = 3\pi \text{ unidades de volume.}$$

Veja, no Apêndice 7, no final deste caderno, o passo a passo de exercícios adicionais correspondentes a esta semana. Veja também o Apêndice 5 com o passo a passo de Simulados da AD2.

Semana 14

A Equação Diferencial Fundamental

Introdução

SEJA BEM-VINDO! Esta parte da disciplina Cálculo II é dedicada ao estudo de Equações Diferenciais.

Para começar, uma boa notícia:

"***Você já vem estudando equações diferenciais há muito tempo***"

De fato, no estudo de Cálculo Diferencial, desde o início da disciplina Cálculo II, você vem trabalhando com equações diferenciais. Veja o seguinte problema que você sabe resolver:

"*Dada a função contínua*

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 3x^2 + 1\,,$$

determinar todas as funções $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tais que*

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1\text{"} \qquad (14.1)$$

A equação (14.1) é uma equação diferencial. As *soluções* desta equação são simplesmente as primitivas da função $f(x) = 3x^2 + 1$. Em outras palavras, uma função $y(x)$ é solução da equação diferencial (14.1) se sua derivada é a função $f(x) = 3x^2 + 1$. Do que conhecemos do Cálculo,

$$y(x) = x^3 + x + c \qquad (14.2)$$

onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária, é uma representação convencional do conjunto de todas as funções deriváveis em $(-\infty, +\infty)$, com derivadas iguais a $3x^2 + 1$.

Dizemos também que para cada $c \in \mathbb{R}$, $y(x) = x^3 + x + c$ é uma função que *resolve* a equação diferencial $y'(x) = 3x^2 + 1$.

Usando a notação de primitivas, podemos escrever

$$y(x) = \int f(x)\,dx = \int \left(3x^2 + 1\right) dx = x^3 + x + c\,.$$

Frequentemente, obtemos muitas informações úteis sobre as soluções de uma equação diferencial apenas pelo exame visual de seus gráficos[1]. Veja a **Figura 14.1** abaixo

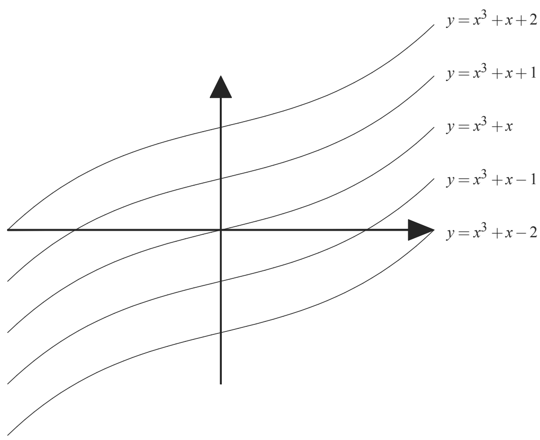


Figura 14.1: Família de soluções $y(x) = x^3 + x + c$

Uma das informações que podemos obter do exame dos gráficos das soluções da equação $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 + 1$ é a respeito do comportamento das soluções à medida que $x \to \pm\infty$:

Atividade 14.1.

Complete: qualquer que seja o valor de c,

à medida que $x \to +\infty$, $y(x) \to \ldots\ldots$

à medida que $x \to -\infty$, $y(x) \to \ldots\ldots$

Às vezes, é necessário particularizar uma função $y(x)$ dentre todas as outras funções do conjunto solução. Uma das maneiras de conseguir isso é especificar um determinado valor para a

[1] quando é possível um tal exame

solução, num ponto dado. Por exemplo, podemos estar interessados em descobrir a solução $y(x)$ cujo valor em $x = 1$ é 0; isto é, $y(1) = 0$. Então, nosso problema pode ser formulado como:

Encontre uma função $y(x)$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} &= 3x^2 + 1 \\ y(1) &= 0\,. \end{cases} \tag{14.3}$$

Olhando para a família de funções $y(x)$ em (14.2) e impondo a condição $y(1) = 0$, encontramos

$$y(1) = 1^3 + 1 + C = 0 \Longrightarrow C = -2\,.$$

Logo,

$$y(x) = x^3 + x - 2\,,$$

é a solução do problema (14.3).

Uma pergunta que cabe aqui é a seguinte: todas as equações diferenciais são equações da forma $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$? Ou será que existem equações diferenciais diferentes daquelas que estudamos na primeira parte da disciplina Cálculo II? Se existirem, a pergunta passa a ser: O que é uma equação diferencial geral?

Outra pergunta: o que é uma solução de uma tal equação diferencial geral?

Um dos objetivos desta parte da disciplina é obter respostas para estas questões. Quer dizer, você vai ter de esperar um pouquinho até poder ter uma resposta mais completa. Por enquanto, vamos apresentar apenas algumas ponderações iniciais. Por exemplo, a palavra *equação* já é nossa conhecida. Falando genericamente, uma equação é uma expressão representando uma igualdade entre elementos de um conjunto fixado. Na expressão, aparecem elementos bem determinados do conjunto sobre o qual a equação é estabelecida e aparecem um ou mais elementos incógnitos (isto é, desconhecidos), representados por letras que simbolizam elementos variáveis no conjunto.

Resolver a equação é determinar os valores das variáveis que tornam a igualdade verdadeira.

Exemplo 14.1.

Suponha que necessitamos encontrar todos os números reais x tais que

$$x^4 - 1 = 0\,.$$

Solução: As soluções são os números reais $x = 1$ e $x = -1$. No entanto, buscar a solução da mesma equação sobre os números complexos fornece como soluções os números $x = 1$, $x = -1$, $x = i$ e $x = -i$.

Portanto, vem a primeira lição, reforçando o que escrevemos acima sobre equações: quando procuramos resolver uma equação, temos que ter bem definido o conjunto no qual estamos procurando as soluções.

Mas já demos muita volta. Consideremos novamente as questões principais:

" O que é uma equação diferencial?",

"O que é resolver uma equação diferencial?"

Podemos tentar algumas respostas, baseadas na nossa experiência com o Cálculo e a Física, sabendo que elas, provavelmente, vão precisar ser aperfeiçoadas e completadas.

Uma equação diferencial é uma equação, na qual a incógnita (o elemento desconhecido) é uma função. Para ser uma equação diferencial é preciso que uma ou mais derivadas da incógnita ocorra na equação.

Resolver a equação diferencial é encontrar todas as funções que, substituídas nas posições da incógnita, tornam a igualdade expressa na equação verdadeira, i.é, uma identidade entre funções.

Volte a examinar a equação diferencial (14.1). A incógnita desta equação é uma função $y(x)$. O conjunto ao qual pertence toda solução $y(x)$ é o conjunto das funções de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$. A equação estabelece que toda solução $y(x)$ é uma função cuja derivada é $3x^2 + 1$.

A solução da equação diferencial (14.3) é uma função especial: exatamente aquela que satisfaz à condição ($y(1) = 0$). Diz-se que (14.3) é uma equação diferencial, com valores iniciais.

Equações diferencias são muito utilizadas em modelagens (construção de modelos) de problemas da Física, da Química, da Biologia, da Economia etc. e da própria Matemática, que envolvem variáveis contínuas. Daí a importância do estudo destas equações.

Por exemplo, o problema (14.3) é um modelo para um caso especial de um antigo problema denominado "quadratura de parábolas". A solução $y(x) = x^3 + x - 2$ expressa a área da figura plana sob a parábola $3x^2 + 1$, definida pelo eixo x e duas retas verticais, uma dessas retas sendo a reta $x = 1$. Veja a **Figura 14.2** a seguir.

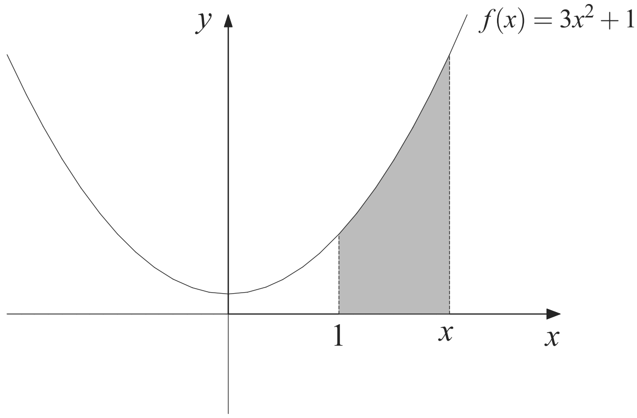


Figura 14.2: Quadratura da parábola

Temos que $y(x) = \int_1^x (3x^2 + 1)\ dx = x^3 + x$ representa a área hachurada. Por exemplo, $y(3) = 3^3 + 3 - 2 = 28$ expressa a área sob a parábola, limitada pelo eixo x e as retas verticais $x = 1$ e $x = 3$.

Para terminar esta breve introdução, propomos a você um *"compromisso de viagem"*: faremos todo o esforço para que esta jornada seja um passeio agradável, entretanto uma vez ou outra voce terá de "subir uma ladeira", gastando um pouquinho de energia; mas, certamente, para chegar a um patamar mais alto, onde nossa visão vai se alargar e de onde poderemos apreciar melhor a beleza do panorama. Vamos iniciar pela equação que tem a forma mais simples, e que chamamos de *equação fundamental*. É precisamente a equação diferencial do tipo da que aprendemos na primeira parte da disciplina Cálculo II, sendo $y' = 3x^2 + 1$ um exemplo. As outras equações diferenciais que estudaremos nas outras aulas têm formas distintas, mas, em última instância, se reduzem à equação fundamental.

A EQUAÇÃO DIFERENCIAL FUNDAMENTAL

Ao terminar de estudar esta semana, você estará capacitado a:

1. Identificar as equações diferenciais do tipo fundamental.
2. Definir solução geral e soluções particulares de equações fundamentais em intervalos.
3. Reconhecer e resolver Problemas de Valor Inicial com equações diferenciais fundamentais.

A primeira equação diferencial que vamos estudar é uma conhecida nossa desde os primeiros cursos da Licenciatura. De fato, o Cálculo de Antiderivadas, ou Cálculo de Primitivas, estudado nos primeiros cursos de Cálculo Diferencial e Integral, trata precisamente da determinação de soluções de equações diferenciais do tipo que vamos chamar *fundamental*.

Definição 14.1.

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, e f é uma função real *contínua* definida em I.
A equação diferencial ordinária, de primeira ordem, fundamental, definida em I pela funcção f, é a equação

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

A nossa primeira tarefa é entender alguns dos termos utilizados na definição acima (e no parágrafo que a precede), que estão sendo apresentados pela primeira vez. A palavra *equação* dispensaria maiores comentários; afinal, trabalhamos com equações desde o Ensino Fundamental. O que é interessante aqui é notar que estamos introduzindo um novo "tipo" de equação: uma equação cuja incógnita é uma função. Dizendo de outro modo, é uma equação cujo conjunto-solução é formado por funções.

Uma outra palavra que aparece na Definição 14.1 é o adjetivo “diferencial”, indicando que a equação envolve derivadas da função incógnita (desconhecida).

Suponha que queremos descobrir todas as funções y tais que

$$y^2 - 2xy = e^x.$$

Certamente, estamos diante de uma equação cujas soluções (caso existam) são *funções*. Entretanto não é uma equação *diferencial*, pois não aparece nela nenhuma derivada da função incógnita y.

Por outro lado, uma equação como

$$y' - y = 0,$$

é uma equação diferencial onde aparece uma derivada da função desconhecida.

Dizemos que uma equação diferencial é de *ordem m* se a derivada de maior ordem que aparece nela é uma derivada de ordem m.

Exemplo 14.2.

A equação

$$\frac{d^5y}{dt^5} - t\,\frac{d^2y}{dt^2} - 10y = \cos 2t$$

é uma equação diferencial de ordem cinco.

Problema: O que significa “resolver” uma equação diferencial?

Vamos abordar esta questão aos poucos, iniciando pelo estudo das equações diferenciais fundamentais.

Na verdade, praticamente todos os conceitos que vamos enunciar e os principais resultados a que vamos chegar se adaptam, sem problemas, às equações diferenciais mais gerais do que a equação fundamental.

Definição 14.2 (Solução de uma EDO fundamental)**.**

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, e f é uma função real *contínua* definida em I.

Uma *solução da equação diferencial fundamental*

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

é uma função F, definida em I, tal que

$$\forall x \in I \qquad \frac{dF}{dx}(x) = f(x).$$

Resolver a equação diferencial fundamental é determinar o conjunto de suas soluções.

Falando desse jeito, parece que estamos nos referindo a um conceito novo, que ainda não foi trabalhado em nenhum curso até agora.

Não é bem assim!

Veja a seguinte definição, certamente mais familiar:

Definição 14.3.

Dada uma função contínua $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida no intervalo aberto I, uma *primitiva* de f em I é uma função derivável F, cuja derivada é igual a f em I. O conjunto de todas as primitivas de f é representado por

$$\int f(x)\, dx$$

Percebemos imediatamente que calcular o conjunto de todas as soluções da equação é o mesmo que calcular

$$\int f(x)\, dx.$$

O que já sabemos fazer há muito tempo, certo?

Exemplo 14.3.

Determine as soluções da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \cos\, x - 2.$$

Solução: O conjunto de funções $\int (\cos\, x - 2)\, dx$ que aprendemos a representar abreviadamente por $y(x) = \operatorname{sen} x - 2x + c$ contém todas as soluções da equação.

Resposta: $y(x) = \operatorname{sen} x - 2x + c.$

A letra c no exemplo acima, representa um número real arbitrário que costumamos chamar de *constante de integração*, ou - preferencialmente - de *parâmetro da família de soluções*. Fazendo variar o parâmetro, obtemos todas as *soluções particulares* da equação dada.

!

Todas as soluções da equação diferencial $dy/dx = f(x)$ podem ser representadas pela "integral indefinida"

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c,$$

onde $F(x)$ representa uma solução qualquer e c é um parâmetro real.

✍ É bastante comum encontrarmos textos que chamam

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c$$

de solução *geral* da equação fundamental. A solução é dita *geral* porque é uma expressão que contém todas as soluções da equação fundamental no intervalo especificado. E acrescentam que a solução geral de uma equação diferencial *qualquer* de primeira ordem contém uma e apenas uma "constante abitrária".

Todavia, é preciso tomar cuidado com estas caracterizações de soluções gerais, pois - como veremos - existem equações diferenciais de primeira ordem para as quais obtemos expressões de soluções contendo um parâmetro arbitrário, as quais não abarcam todas as soluções da equação. Podemos até continuar dizendo que expressões contendo uma "constante arbitrária" são soluções gerais, mas devemos estar prevenidos de que, para certas equações, podem existir outras soluções que não "estão contidas" na fórmula da solução geral.

Bom . . . voltaremos a este ponto na hora adequada.

Além disso, *no caso de equações diferenciais fundamentais*, a expressão $\int f(x)\,dx = F(x)+c$ realmente engloba todas as soluções possíveis da equação.

Atividade 14.2.

Considere a equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = 0$ definida no conjunto

$$A = (-1,1)\ \cup (2,3).$$

É correto afirmar que φ e ψ definidas por

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in (-1,1) \\ 2, & \text{se } x \in (2,3) \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \psi(x) = 4,\ x \in A$$

são duas soluções da equação?

Solução: Se você calcular a derivada da função ϕ em qualquer ponto do seu domínio (que é a união de intervalos $(-1,1)\ \cup (2,3)$), você vai obter o número zero. A mesma coisa ocorre com a função ψ em todos os pontos de $(-1,1)\ \cup (2,3)$.

Tudo indica que ambas, ϕ e ψ, são soluções da equação diferencial $dy/dx = 0 \qquad x \in A$.

Lembre que o domínio de definição de uma equação diferencial deve ser um intervalo e o conjunto A não é um intervalo. Por quê?

Mas nenhuma das duas é - de fato - solução da equação naquele domínio, simplesmente *porque a equação não está definida num intervalo.*

E, para reforçar o argumento, repare que não existe um parâmetro $c \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in A$, $\phi(x) = \psi(x) + c$. No "pedaço" $(-1,1)$, c teria de ser igual a 3, enquanto que, na parte $(2,3)$, necessariamente c deveria ser 2.

!

Para não esquecer!

Resolver

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \qquad x \in I$$

é o mesmo que calcular

$$\int f(x)\, dx.$$

Definição 14.4.

Uma solução é chamada de *solução particular* quando é obtida da solução geral pela especificação de um valor para o parâmatro de integração.

✍ No curso de Cálculo, foram estudadas diversas "técnicas de integração" para a resolução de integrais indefinidas. Dependendo da função f, usava-se substituições, integração por partes, integração de funções racionais etc. Todas aquelas técnicas serão muito úteis nos processos de obtenção de soluções de equações diferenciais.

É uma boa ideia revisar as principais técnicas do cálculo de primitivas.

A *forma* da equação diferencial fundamental é muito simples. Entretanto todos já nos deparamos com aquelas funções complicadas, que exigem um esforço enorme para descobrir suas primitivas. E outras para as quais não sabemos definitivamente calcular nenhuma primitiva.

Equação fundamental não é, necessariamente, sinônimo de equação fácil de resolver.

Exemplo 14.4.

Marque os itens correspondentes a equações diferenciais do tipo fundamental:

a. $y' = \sqrt{x}$

b. $y' = \sqrt{y^{1/3}}$

c. $y' = 2^x + x^2$

d. $xy' = \cos x - 1, \qquad x \in (-\infty, 0)$

Solução: As equações dos itens a e c são equações do tipo fundamental. Já a equação do item b não está na forma das equações fundamentais. Entretanto, muitas vezes uma equação não é apresentada numa forma imediatamente reconhecível, mas, depois de algumas manipulações, assume uma forma familiar. É exatamente o caso da equação do item d, que pode ser reescrita como $y' = (\cos x - 1)/x$.

Você verá, nas próximas aulas, que, às vezes, uma mesma equação pode ser classificada em duas (ou até mais) categorias diferentes.

Atividade 14.3.

O quadro a seguir mostra equações diferenciais na coluna da esquerda, e funções $y(x)$ candidatas a solução na coluna do meio.

Assinale, no espaço à direita, V (verdadeiro) ou F (falso) conforme a função proposta $y(x)$ seja ou não solução.

i. $\dfrac{dy}{dx} - ae^{ax} = 0;$	$y(x) = e^{ax}$; $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ (fixado)	
ii. $\text{sen } x + \dfrac{dy}{dx} = 0;$	$y(x) = \text{sen } x$; $x \in \mathbb{R}$,	
iiii. $\dfrac{dy}{dx} = ln\, x;$	$y(x) = x\, ln\, x - x + 1, ;\ x \in (0, +\infty)$	

Solução: Quando nos pedem para verificar se uma determinada função proposta é solução de uma equação diferencial (dada), normalmente o que temos de fazer é substituir a função e suas derivadas no lugar da função desconhecida (e suas derivadas) na equação diferencial. Se obtivermos uma identidade, isto é, uma frase verdadeira para todos os valores da variável independente x no intervalo considerado, então a função proposta será uma solução. Não precisamos nos preocupar em resolver a equação para mostrar que a solução que vamos calcular coincide com a candidata[2].

i. Substituindo y (e/ou sua derivada com relação a x) por e^{ax} (e/ou sua derivada com relação a x), na equação, obtemos

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \frac{de^{ax}}{dx} = a\, e^{ax}$$

mostrando que e^{ax} é solução.

A resposta é V.

ii. A equação, escrita na forma da equação fundamental, é $\dfrac{dy}{dx} = -\operatorname{sen} x$. Substituindo (a derivada de) y pela derivada de $\operatorname{sen} x$ nesta última equação, obtemos $\cos x = -\operatorname{sen} x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, o que é evidentemente falso.

A resposta é F.

iii. Calculando a derivada de $f(x) = x\, ln\, x - x + 1,\ x > 0$, obtemos $x\,\dfrac{1}{x} + ln\, x - 1 + 0 = ln\, x$, mostrando que a resposta é V.

PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

✍ Talvez você esteja perguntando por que uma equação diferencial fundamental tem de ser definida em um intervalo aberto.

E mais: por que as funções ϕ e ψ, da Atividade 14.2, não podem ser soluções legítimas? Afinal de contas suas derivadas não são iguais a zero em todos os pontos?

Bem, quando a gente exige que o domínio de definição da equação (e de suas soluções) seja um intervalo aberto, garantimos duas coisas:

[2]No entanto, precisamos prestar atenção nos domínios de definição da equação e da solução. O Exemplo 14.3 e a Atividade 14.2 pretendem ressaltar este ponto.

- Podemos calcular derivadas em todos os pontos do domínio, pois ele é um conjunto sem fronteira.
- Além disso, para cada par de soluções que consideremos, existe uma **única** constante c de tal modo que a diferença entre as duas, em todos os pontos, é igual a c. Justamente este fato nos dá um certo controle sobre o conjunto de todas as soluções da equação.

Conhecendo uma solução $F(x)$, saberemos calcular todas as outras. Basta adicionar um parâmetro $c \in \mathbb{R}$ a $F(x)$. E isto certamente é bem importante. Sabendo uma solução, saberemos todas as outras soluções.

✍ Mas temos ainda uma questão: de que adianta conhecer todas as respostas possíveis de um problema? Normalmente, nas aplicações, precisamos calcular uma resposta específica: A RESPOSTA PARA UM PROBLEMA CONCRETO.

Saber uma infinidade de respostas possíveis, na prática, é equivalente a não saber nenhuma, você não acha?

A colocação acima é bastante razoável, e a maneira de contornar a dificuldade apresentada é utilizar informações adicionais, além da equação diferencial.

Essas informações adicionais, no caso de equações diferenciais fundamentais, permitem escolher uma solução particular dentre todas as soluções possíveis.

Vejamos um par de exemplos:

Exemplo 14.5.

No curso de Física, o movimento de uma partícula (ao longo de uma trajetória) é definido como a variação de sua distância, em relação a algum marco de referência, com o passar do tempo.

A tradução matemática (i.e, o modelo matemático) do movimento é feita quando conseguimos uma função $e : J \longrightarrow \mathbb{R}$, que a cada instante de tempo $t \in J$, associa o número $e(t)$, que mede a distância da partícula até o marco de referência.

Um problema fundamental da mecânica das partículas é o de calcular a função-movimento de uma partícula que se desloca sobre uma tajetória.

Resolver este problema pode ser uma tarefa bastante complicada, dependendo do comportamento da partícula. Ela pode andar devagar, ou acelerar, ou parar, ou retroceder por um certo tempo e depois voltar a andar na direção original ... Enfim! Para ajudar a resolvê-lo, definem-se as funções-velocidade média e instantânea, as quais são obtidas a partir das funções-movimento, mas são mais fáceis de registrar do que as próprias funções-movimento.

A relação entre as funções-movimento e funções-velocidade, que vamos supor deriváveis, se expressa matematicamente por meio de uma equação diferencial do tipo fundamental:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\,(\text{função-movimento}) = \text{função-velocidade}}$$

O problema passa a ser o seguinte:

Admitindo conhecida a função-velocidade de certa partícula, queremos recuperar a sua função-movimento.

Considere, por exemplo, que a partícula é um automóvel que se move, sem parar, ao longo de uma estrada que une o sul ao norte do país, tendo marco ZERO na cidade de São Paulo. Suponha que a função-velocidade desta partícula é dada por $v(t) = 3t^2 + 1km/h$.

Queremos calcular a que distância do marco inicial se encontra a partícula $t = 10h$ após iniciarmos a observação de seu movimento. Para simplificar, o instante inicial de observação será o instante $t = 0$, quando acionamos o cronômetro e começamos a medir o tempo.

A ideia é calcular a sua função-movimento $e(t)$. E a resposta será o número $e(10)$.

É claro que a resposta $e(10)$ vai depender de $e(0)$, a sua distância ao marco zero quando iniciamos a observação. Se ele estava exatamente passando por São Paulo ($e(0) = 0$), então $10\,h$ depois ele estará mais ao norte (possivelmente próximo de Campos-RJ, se imaginamos que o trecho da estrada coincide coma rodovia BR 101). Em compensação, se começamos as medidas quando o automóvel já estava passando pela cidade do Rio de Janeiro ($e(0) = 400km$), dez horas depois ele já estará bem adiantado no estado do Espírito Santo, a caminho da Bahia. Neste caso, teremos um outro valor para $e(10)$.

Do ponto de vista da matemática, você deve se convencer de que qualquer uma das curvas da figura abaixo pode ser função-movimento para a função-velocidade $v(t) = 3t^2 + 1$.

E o ponto de interseção de cada curva com o eixo vertical é uma posição inicial possível.

!

A equação diferencial sozinha não nos permite resolver o problema.

Todas as curvas nos informam que

$$\frac{d}{dt}e(t) = 3t^2 + 1.$$

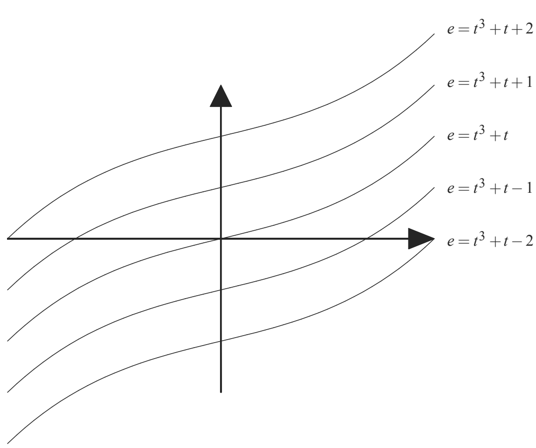


Figura 14.3: Família de curvas $e(t) = t^3 + t + c$

Não poderemos determinar $e(10)$ se não conhecermos previamente o valor $e(0)$.

Se nos pedirem para calcular $e(10)$, informando também a posição inicial $e(0)$, teremos condições de determinar a única função-movimento que descreve a trajetória do automóvel.

✍ Não é estritamente necessário informar a posição no instante em que começam as medidas. Se fosse informada a posição em um instante qualquer t_0, poderíamos igualmente determinar a função-movimento. Todavia, por tradição, e como uma homenagem à Mecânica, vamos prosseguir chamando de *condição inicial* a informação do valor da solução procurada num instante t_0 qualquer, fixado, o qual será chamado de *ponto inicial*.

O par de informações

$$\begin{cases} \text{“equação diferencial do movimento”} \\ \text{“informação inicial”} \end{cases}$$

é um caso particular de *Problema de Valor Inicial* ou *Problema de Cauchy*.

Exemplo 14.6.

Determine uma função real $(y(x)$, definida no intervalo $I = (-3, +\infty)$, solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = e^x - 3x^2 \tag{14.4}$$

sabendo que seu gráfico no plano $\mathbb{R}^2$ contém o ponto $(0, -1)$.

Solução: As funções cujas derivadas são iguais a $e^x - 3x^2$, no intervalo especificado, são precisamente as soluções da equação (14.4).

A *família* de funções

$$y(x) = e^x - x^3 + c \tag{14.5}$$

é a solução geral da equação.

Agora, utilizamos a informação extra:

o gráfico da função solução passa pelo ponto $(0, -1)$.

Isso significa que, no ponto $x = 0$, o correspondente valor y é igual a -1. E essa observação vai permitir calcular o valor que o parâmetro C deve assumir para poder determinar a função que é solução do problema proposto.

Substituindo $x = 0$ e $y = -1$ na solução geral (14.5), temos

$$-1 = y(0) = e^0 - 0^3 + c \Longrightarrow c = -2\,.$$

Conclusão: Dentre todas as funções definidas em $(-3, +\infty)$ com derivadas iguais a $e^x - 3x^2$, aquela cujo gráfico passa por $(0, -1)$ é $y(x) = e^x - x^3 - 2$.

✍ Problemas de Valor Inicial

Repare que, como no problema da função-movimento, apenas o conhecimento da equação diferencial não nos permitiu descobrir a solução do problema.

i. Uma outra conclusão que podemos tirar dos exemplos que acabamos de estudar é que o conhecimento de alguma informação extra sobre a função que resolve um determinado problema não é essencial apenas quando se está trabalhando com um problema concreto como o da determinação de funções-movimento.

ii. O matemático ***Cauchy*** foi um dos primeiros a ressaltar a importância dos dados extras para questões com equações diferenciais em problemas da própria matemática.

iii. Uma forma abreviada de apresentar a questão de procurar a solução de uma equação diferencial que satisfaz a uma condição adicional num ponto especificado é

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x), \quad x \in I \subset \mathbb{R} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Na primeira linha dentro da chave, temos a equação diferencial propriamente dita. Na segunda linha está explicitada uma propriedade da solução procurada.

iv. Utilizamos a denominação *Problema de Valores Iniciais* (PVI), ou também *Problema de Cauchy* para indicar uma equação diferencial junto com um *valor inicial* especificado.

EXERCÍCIOS

Exercício 14.1.

Calcule $\int f(x)\,dx = F(x) + c$. Em seguida, calcule c para que a solução y satisfaça a condição extra apresentada:

a. $f(x) = x^2, \quad y(2) = 0;$

b. $f(x) = \cos^2 x, \quad y(\pi) = \pi/2$

Respostas: a. $y = \frac{1}{3}(x^3 - 8)$; b. $y = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4}$

Exercício 14.2.

Determine as soluções gerais de:

a. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x \, \cos x$

b. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x^2(1+x)}$

c. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

d. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(4x-2)}{x^3 - x^2 - 2x}$

e. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\ln x}{x}$

f. $\dfrac{dy}{dx} = xe^x$

Respostas: a. $y(x) = \frac{1}{2} sen^2 x + c$; b. $y(x) = \ln\left|\frac{1+x}{x}\right| - \frac{1}{x} + c$
c. $y(x) = \operatorname{arcsen} x + c$; d. $y = \ln\left|\frac{x(x-2)}{(x+1)^2}\right| + c$; e. $y(x) = \frac{1}{2}\ln^2 x + c$
f. $y(x) = xe^x - e^x + c$.

Exercício 14.3.

A função $f(x) = \operatorname{sen} x - \pi$ é solução particular da equação diferencial $y' = \cos x$?

Resposta: Sim, porque a solução geral de $y' = \cos x$ é $y(x) = \operatorname{sen} x + c$; e a função $f(x) = \operatorname{sen} x - \pi$ é obtida a partir da solução geral, tomando o parâmetro c igual a π.

Exercício 14.4.

Usando uma substituição trigonométrica adequada, calcule

a. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2}\, dx$

b. a área da região do interior da elipse de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Sugestões:

1. A área da elipse é igual a quatro vezes a área sob o gráfico da curva $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad 0 \le x \le a$.
2. A mudança de variáveis $x = \cos\,\theta, \quad dx = -\operatorname{sen}(\theta)\, d\theta$ pode ser útil na solução do exercício.

Respostas: a. $\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}$ b. πab

Semana 15

Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem

Introdução

Uma equação diferencial frequentemente está associada a um fenômeno que estamos investigando na natureza. Assim, a equação é um modelo que criamos para investigar o fenômeno. Um bom modelo (isto é, uma boa equação) é aquele que, uma vez criado, é capaz de prever situações relacionadas ao fenômeno antes insuspeitadas.

Mesmo quando criamos modelos incorretos é útil. A incorreção evidencia ideias falsas que tínhamos acerca do fenômeno. Vamos mostrar através de um exemplo esta última afirmação.

Vamos traduzir em equação diferencial (modelo) a seguinte crença antiga acerca da queda livre de corpos no vácuo.

Desfazendo uma Crença muito Antiga

Antes de Galileu Galilei, acreditava-se que a velocidade de um corpo em queda livre era diretamente proporcional à sua distância até a posição inicial de repouso.

✍ Galileu Galilei foi um físico, matemático, astrônomo e filósofo italiano. Ele teve um papel preponderante na chamada revolução científica. Galileu desenvolveu os primeiros estudos sistemáticos do movimento e descobriu a lei da queda livre dos corpos, entre diversas outras contribuições que influenciaram decisivamente na instauração dos padrões e metodologia científicas atuais. Galileu é considerado o “pai da ciência moderna”.

Discussão:

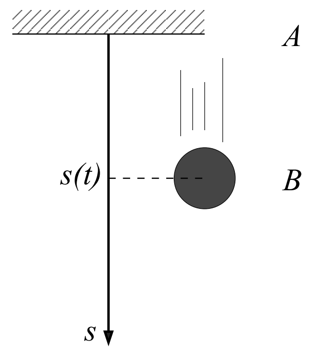


Figura 15.1: Queda livre de um corpo.

Suponhamos que realmente fosse verdade que a velocidade de um corpo em queda livre fosse diretamente proporcional à sua distância até a posição inicial de repouso.

- Representemos por t o tempo de queda do corpo a partir da posição de repouso A; e por $s(t)$ a distância percorrida desde A passado o tempo t de queda.

  No ponto A, temos $t = 0$ e $s(0) = 0$.

- No ponto B, corpo em queda após um tempo t.

- Distância de A até B é igual a $s(t)$.

Seja v a velocidade instantânea do corpo no instante t. Como estamos admitindo (como se achava antigamente) que v é proporcional a $s(t)$, então existe uma constante $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{ds}{dt} = k \cdot s(t). \tag{15.1}$$

é a equação diferencial que traduz matematicamente (dizemos: *modela matematicamente*) o problema.

Você percebeu que a Equação 15.1 não está na forma de uma equação diferencial fundamental?

Entretanto podemos "transformar" 15.1 até colocá-la na forma de uma equação diferencial fundamental: basta multiplicá-la por $1/s(t)$, o que pode ser feito sem susto, pois $s(t) > 0$ para $t > 0$, e não corremos o risco de efetuar divisões por zero. Obtemos a equação

$$\frac{ds/dt}{s} = k,$$

isto é,

$$\frac{1}{s(t)} \cdot \frac{ds}{dt} = k$$

e esta última nada mais é do que

$$\frac{d}{dt}\underbrace{[\ln s(t)]}_{y(t)} = \underbrace{k}_{f(t)} \tag{15.2}$$

A Equação 15.2 é uma equação diferencial fundamental. De acordo com o que aprendemos na semana anterior, a sua solução geral é

$$y(t) = \int k dt = kt + \tilde{c},$$

ou ainda

$$\ln[s(t)] = kt + \tilde{c},$$

onde $\tilde{c}$ representa um parâmetro real arbitrário.

A imagem da função logaritmo é o conjunto $\mathbb{R}$. Isso significa que, seja qual for $\tilde{c}$, podemos dizer que $\tilde{c} = ln\ c$, para algum outro número real c. Assim, a solução geral da Equação 15.2 é

$$\ln[s(t)] = kt + \ln c$$

ou (aplicando a função exponencial nos dois lados)

$$s(t) = e^{kt+\ln c} = e^{kt} \cdot e^{\ln c}$$

e, finalmente,

$$y(t) = ce^{kt}. \tag{15.3}$$

✍ Obtivemos a Expressão 15.3 da solução geral da Equação 15.1.

Qualquer que seja a constante k, a distância percorrida é dada por uma expressão da forma 15.3. Então, como vamos descobrir, a partir de 15.3, se a suposição dos antigos era verdadeira ou falsa?

É aqui que entram as condições iniciais!

De acordo com o que aprendemos na Semana 14, a fim de particularizar uma solução que resolva um problema específico, precisamos utilizar informações adicionais.

E como já observamos, no ponto A, $t = 0$, e a posição inicial $s(0)$ é igual a 0 (ele ainda não tinha percorrido nenhuma distância). Logo, substituindo $s(0) = 0$ na expressão da solução geral, obtemos

$$0 = s(0) = ce^0 = c.$$

Isto é, $c = 0$. Mas, se $c = 0$, então, para todo $t \geq 0$,

$$s(t) = 0 \cdot e^{kt} = 0.$$

Olha só que conclusão estranha: *Se a velocidade final de choque com o chão é proporcional à altura da queda, e se o objeto parte do repouso, então... simplesmente não há movimento*.

O objeto fica simplesmente suspenso no ar.

Isto é certamente um absurdo!

PRECISAMOS REVER NOSSAS HIPÓTESES!!!!

✍ Galileu, através de experiências com planos inclinados, demonstrou que a velocidade do corpo em queda livre é proporcional ao tempo de percurso

$$\frac{ds}{dt} = kt,$$

que já é - por construção - uma equação diferencial fundamental (entretanto muito menos intuitiva do que a Equação 15.1).

Essa é uma outra história, que deixaremos para depois.

UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL NOTÁVEL

A Equação 15.1, embora não sendo a equação correta para o problema dos corpos que caem a partir do repouso, é fora de série. Vamos estudar vários problemas que podem ser traduzidos (corretamente) pela equação

$$\frac{dy}{dt} = ky,$$

ou generalizações dela. Podemos afirmar sem exageros que essas equações vão dominar a maior parte do nosso curso.

No restante desta semana, vamos explorar as generalizações mais imediatas da Equação 15.1.

Equações Lineares de Primeira Ordem

Definição 15.1 (Equação diferencial linear de primeira ordem)**.**

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo,

$$p : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{e} \quad q : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

funções contínuas. Toda a equação diferencial que está ou pode ser posta na forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

é chamada uma *equação diferencial linear de primeira ordem*

Para facilitar o nosso estudo, vamos considerar dois casos:

(A) quando $q(x)$ é identicamente nula em I, isto é, $q(x) = 0$ para todo $x \in I$.

(B) $q(x)$ não é identicamente nula em I, isto é, $q(x) \neq 0$ em I.

Caso (A): $\mathbf{q(x)}$ Identicamente Nula ($\mathbf{q(x) \equiv 0}$)

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $p : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, uma função contínua. A equação diferencial linear de primeira ordem definida em 15.1 resulta:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0\,. \tag{15.4}$$

✍ É importante sabermos porque a Equação Diferencial 15.4 se chama linear de primeira ordem. Bem, ela é linear porque dadas quaisquer duas funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ tais que, individualmente

$$\frac{dy_1}{dx}+p(x)y_1=0\,,\qquad \frac{dy_2}{dx}+p(x)y_2=0\,,$$

e dado qualquer número real α, então, para todo $x\in I$,

$$\frac{d(y_1+y_2)}{dx}+p(x)(y_1+y_2)=$$
$$=\left(\tfrac{dy_1}{dx}+p(x)y_1\right)+\left(\tfrac{dy_2}{dx}+p(x)y_2\right)=0+0=0 \qquad \text{e}$$

$$\frac{d(\alpha\cdot y)}{dx}+p(x)(\alpha\cdot y)=\alpha\cdot\left(\frac{dy}{dx}+p(x)y\right)=\alpha\cdot 0=0\,.$$

As duas igualdades anteriores mostram que somas de funções, que verificam a equação, e produtos de funções, que verificam a equação por números reais, são também funções que verificam a equação. Esses são os quesitos básicos que caracterizam processos lineares. Vamos discutir esses processos mais detalhadamente na disciplina Equações Diferenciais.

Finalmente, uma equação é de primeira ordem porque a maior ordem de derivação da incógnita que aparece na equação é um.

Exemplo 15.1.

Evidentemente, a equação $\frac{dy}{dx}=p(x)y$ é uma generalização da equação $\frac{dy}{dx}=ky$. Nesta última equação, a função $p(x)$ é a função constante que a cada número x associa o valor k.

Definição 15.2.

Uma *solução* da equação diferencial linear de primeira ordem $\frac{dy}{dx}=p(x)y$, definida no intervalo $I\subset\mathbb{R}$, é uma função f, derivável em I, tal que

$$\forall x\in I, \frac{df}{dx}(x)=p(x)f(x).$$

Exemplo 15.2.

Para qualquer valor do parâmetro $c \in \mathbb{R}$, a função $f(x) = ce^{x^2}$ é solução da equação diferencial linear de primeira ordem $y' - 2xy = 0$.

Solução: Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos (usando a regra da cadeia):

$$\begin{aligned} f(x) = ce^{x^2} &\Rightarrow f'(x) = ce^{x^2} \cdot (2x) \\ &\Leftrightarrow f'(x) = 2x\left(ce^{x^2}\right) \\ &\Leftrightarrow f'(x) = 2xf(x) \end{aligned}$$

provando que a função proposta ($f(x) = ce^{x^2}$) é solução da equação dada ($y' - 2xy = 0$).

✍ Quando nos apresentam uma solução f de uma equação diferencial (ou mesmo uma candidata a solução de uma equação), para verificar se ela é realmente solução, basta substituir a função desconhecida y e suas derivadas, na equação diferencial, por f e suas derivadas. Não precisamos resolver a equação para mostrar que a candidata proposta é solução.

Exercício 15.1.

Assinale, no espaço à direita de cada equação diferencial, aquelas que são equações lineares de primeira ordem da forma $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$.

1. $y' - ae^{ay} = 0$;		7. $(x^2+1) + y' = e^{-x}$	
2. $xy' - ay = 0$		8. $y' + \sqrt{1+x^2}\, y = 0$	
3. $y' - ye^{ax} + 1/x = 0$		9. $(x^2+1)y' = y+1$	
4. $y' + 2xy = 0$		10. $x(x+1)y' = 2y$	
5. $(x^2+1)y' = e^{ax}$		11. $(x^2+1)y' = y$	
6. $(x^2-1)y' - x^2y = 0$		12. $(x^2+1)y' = y^3$	

Solução: A rigor, para saber se uma equação diferencial é linear de primeira ordem, precisamos escrever a transformação $\mathscr{D}$ (do Exemplo

15.3) relativa a ela, e checar se

$$\mathscr{D}(\alpha y_1 + \beta y_2)(x) = \alpha \mathscr{D}(y_1) + \beta \mathscr{D}(y_2)$$

para duas soluções quaisquer y_1 e y_2, e todos os valores de x onde a equação está bem definida. Mas isso é, em geral, um tanto trabalhoso e desnecessário. Basta verificar se a equação pode ser escrita na forma padrão que define as equações diferenciais lineares de primeira ordem. Portanto, o problema é basicamente o de identificar a forma da equação.

Repetimos o quadro acima assinalando as equações que estão ou podem ser postas no formato das lineares de primeira ordem da forma $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$:

1. $y' - ae^{ay} = 0;$		7. $(x^2+1) + y' = e^{-x}$	
2. $xy' - ay = 0$	✓	8. $y' + \sqrt{1+x^2}\, y = 0$	✓
3. $y' - ye^{ax} + 1/x = 0$		9. $(x^2+1)y' = y + 1$	
4. $y' + 2xy = 0$	✓	10. $x(x+1)y' = 2y$	✓
5. $(x^2+1)y' = e^{ax}$		11. $(x^2+1)y' = y$	✓
6. $(x^2-1)y' - x^2y = 0$	✓	12. $(x^2+1)y' = y^3$	

✍

i. A equação 1, $y' - ae^{ay} = 0$, não pode ser posta na forma $y' = p(x)y$, devido à presença da função y no expoente. A equação 12, $(x^2+1)y' = y^3$ também não pode ser posta na forma $y' = p(x)y$, devido à função y estar elevada ao cubo.

ii. As equações 3 e 9 não são lineares porque não podem ser postas na forma padrão. Elas podem ser escritas na forma $y' = p(x)y + q(x)$, sendo $q(x) = -1/x$ na equação 3 e $q(x) = 1/(x^2+1)$ na equação 9. A presença da parcela $q(x)$ impede que essas equações sejam lineares.

iii. As equações 5 e 7 são equações fundamentais, que não podem ser postas na forma padrão das equações lineares. Lembre-se: A lineridade é com relação à "variável" y.

iv. As demais equações (2, 4, 6, 8, 10 e 11) são lineares de primeira ordem. Deixamos para você a tarefa de escrevê-las na forma padrão, indicando o intervalo (ou os intervalos) onde essas equações estão bem definidas.

Resposta: As equações 2, 4, 6, 8, 10 e 11 são lineares de primeira ordem.

CÁLCULO DE SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO LINEAR DA FORMA $\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} + \mathbf{p(x)y = 0}$

Para resolver a equação linear de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0,$$

basta adaptar o método de solução do problema da queda-livre de um corpo, do início desta semana.

Observe que a função identicamente nula $y \equiv 0$ é uma solução trivial da equação.

Sabemos também que se uma função contínua é diferente de zero em um determinado ponto x_0, então ela é diferente de zero em todo um intervalo contendo o ponto x_0. E como as soluções de equações diferenciais são funções contínuas (já que são deriváveis), no que segue vamos procurar soluções $y : I \to \mathbb{R}$ da equação, com a condição que $y(x) \neq 0$, para todo $x \in I$. É uma hipótese "otimista". Se for necessário, vamos modificá-la.

Suponhamos inicialmente que toda solução $y(x)$ é positiva em todos os pontos de um subintervalo $J \subset I$ que contém o ponto x_0. Para simplificar, e sem perder a generalidade, vamos supor que $J = I$.

Multiplicando a equação por $\frac{1}{y}$, obtemos

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = -p(x),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dx}[\ln y(x)] = -p(x).$$

Temos assim uma equação do tipo fundamental cuja solução geral é

$$\ln|y(x)| = \int -p(x)dx + k.$$

Nesta frase, convencionamos que o símbolo $\int p(x)dx$ representa (de modo abusivo) apenas <u>uma</u> primitiva de $p(x)$, e não a família de todas as primitivas de $p(x)$; e o parâmetro de integração foi representado explicitamente. A vantagem disso é que, ao aplicar a exponencial aos dois lados, e representando e^k por c, temos que

$c > 0$ e

$$|y| = ce^{-\int p(x)dx} \Rightarrow |y| = \pm ce^{-\int p(x)dx} \Rightarrow y = ce^{-\int p(x)dx}.$$

Note que o sinal $\pm$ foi incorporado ao parâmetro, que agora não mais é obrigatoriamente positivo (você deve se convencer de que podemos continuar representando o parâmetro pela letra c, só que agora c pode ser positivo ou negativo).

Além disso, a função identicamente nula também é solução da equação, e pode ser obtida da fórmula $y = ce^{-\int p(x)dx}$ fazendo o parâmetro c igual a zero.

O resumo da discussão acima é que temos uma única expressão para representar todas as soluções da equação linear.

Assim, *solução geral* da equação diferencial linear

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

é dada pela expressão

$$y(x) = ce^{-\int p(x)dx},$$

onde c é um parâmetro arbitrário.

!

Como no caso da equação fundamental - e isso vale para todos os tipos de equações que vamos estudar - uma *solução particular* da equação linear de primeira ordem é uma solução obtida a partir da expressão da solução geral, pela escolha, ou cálculo, de um valor para o parâmetro que ocorre na solução geral.

Exemplo 15.3.

A solução geral de $dy/dx + y\cos x = 0$ é $y(x) = ce^{-\operatorname{sen} x}$. Uma solução particular dessa equação é $y(x) = -3e^{-\operatorname{sen} x}$.

PROBLEMAS DE VALOR INICIAL COM EQUAÇÕES LINEARES DA FORMA $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$

Como já assinalamos na semana anterior, ao resolver um problema cuja solução depende da resolução de uma equação diferencial, normalmente precisamos levar em conta informações adicionais sobre a função que procuramos. A solução procurada, $y(x)$, deve assumir um valor conhecido y_0 quando a variável independente valer x_0. Procuramos, portanto, a função $y(x)$ que seja solução do *Problema de Valor Inicial (PVI)*

$$\begin{cases} y' + p(x)y = 0 \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Uma maneira comum de resolver o problema com valor inicial acima é calcular primeiramente a solução geral da equação diferencial, e usando os dados iniciais, definir o valor do parâmetro c que corresponde à solução particular procurada.

Exemplo 15.4.

Calcule a solução do PVI

$$\begin{cases} y' = -3y, \quad x \in (0, +\infty) \\ y(1) = -2. \end{cases}$$

Solução: A solução geral de $y' = -3y$ é $y(x) = c\, e^{-3x}$. (Verifique isso!)

Impondo a condição inicial (isto é, obrigando que a condição inicial seja atendida):

$$-2 = y(1) = c\, e^{(-3)(1)}.$$

Tirando o valor de c, obtemos $c = -2e^3$, e levando esse valor na solução geral, obtemos a solução do PVI:

$$y(x) = -2e^3 e^{-3x}.$$

Ou seja, $$y(x) = -2e^{3(1-x)}.$$

Resposta: A solução é $y(x) = -2e^{3(1-x)}$.

Uma maneira alternativa de escrever e calcular a solução geral de

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

é

$$y(x) = ce^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}.$$

Aqui, x_0 é um ponto do intervalo onde a equação está definida, e $\int p(t)\,dt$ é uma primitiva particular de $p(t)$. A integral é a Integral de Riemann.

Portanto, para resolver o PVI

$$\begin{cases} y' + p(x)y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases},$$

podemos utilizar a solução geral $y(x) = ce^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$.

A seguir, usando a condição inicial, calculamos o valor de c:

$$y_0 = y(x_0) = ce^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} = ce^0 = c$$

de modo que a solução do PVI

$$\begin{cases} y' + p(x)y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

é dada por

$$y(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}.$$

Esta última expressão pode ser empregada mesmo quando não podemos calcular primitivas de $p(x)$ por meio de um número finito de funções elementares.

Exemplo 15.5.

Obtenha a solução $y(x)$ da equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} + e^{x^4}y = 0$, tal que $y(1) = 2$.

Solução: Não sabemos calcular, com métodos elementares, uma primitiva de $p(x) = e^{x^4}$ (experimente). Mas, conforme visto anteriormente, após a escolha de um número real x_0, a fórmula $y(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} e^{t^4} dt}$ representa a solução geral. Usando o valor $x_0 = 1$ e impondo a condição inicial $y(1) = 2$, calculamos

$$2 = y(1) = ke^{-\int_1^1 e^{t^4} dt} = k \cdot 1 \Rightarrow k = 2.$$

Então,

$$y(x) = 2e^{-\int_1^x e^{t^4} dt}$$

é a solução procurada.

Resposta: $\quad y(x) = 2e^{-\int_1^x e^{t^4} dt}$.

Exercício 15.2.

Complete a tabela abaixo de modo que cada linha se converta numa frase verdadeira:

Equação	Solução Geral	Solução Particular	Dados Iniciais
$y' + 2xy = 0$	......	$y(x) = \pi e^{-x^2}$	$x_0 = \ldots,\ y_0 = \ldots$
$x^2 y' = y\ (x > 0)$	......	......	$x_0 = -1/\ln 3,\ y_0 = 2$

Solução: 1ª linha: A solução geral de $y' + 2xy = 0$ é $y = ce^{-\int 2x dx} = ce^{-x^2}$. Por comparação com a solução particular apresentada, devemos ter $c = \pi$. E como $c = y_0 = y(x_0)$, então $y_0 = \pi = \pi e^{-x_0^2}$. Portanto, $e^{-x_0^2} = 1$ e consequentemente $x_0 = 0$.

2ª linha: A solução geral de $y' - \frac{1}{x^2} y = 0$ é $y = ce^{-\int -1/(x^2) dx} = ce^{-1/x}$ $\big($observe que dividimos toda a equação por x^2, para colocá-la na forma normal $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ e identificamos $p(x)$ como sendo $-\frac{1}{x^2}\big)$. Substituindo os dados iniciais $x = -1/\ln(3)$ e $y = 2$, obtemos $2 = ce^{-1/(-\ln 3)} = ce^{\ln 3} = 3c$. Portanto, $c = 2/3$. Então, a solução particular é $y = (2/3)e^{-1/x}$.

Resposta: A tabela com as lacunas preenchidas é

Equação	Solução Geral	Solução Particular	Dados Iniciais
$y' + 2xy = 0$	ce^{-x^2}	$y(x) = \pi e^{-x^2}$	$x_0 = 0,\ y_0 = \pi$
$x^2 y' = y\ (x > 0)$	$ce^{-1/x}$	$y = (2/3)e^{-1/x}$	$x_0 = -1/\ln(3),\ y_0 = 2$

CASO (B): EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES ONDE $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ NÃO É IDENTICAMENTE NULA

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo,

$$p : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{e} \quad q : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

funções contínuas, sendo $q(x)$ não identicamente nula. A equação linear de primeira ordem definida em 15.1 resulta:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x). \tag{15.5}$$

Exemplo 15.6.

A equação diferencial cuja solução descreve aproximadamente o processo de mudança de temperatura de um corpo que inicialmente estava a T_0 °C, e é introduzido num ambiente de temperatura T_a °C é a equação diferencial linear de 1ª ordem da forma 15.5

$$\frac{dT}{dt} + kT(t) = kT_a\,, \quad T_a \neq 0.$$

SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO LINEAR DA FORMA $\mathbf{\dfrac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)}$

Como exercício, escreva a definição de solução de uma equação diferencial linear para a forma $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$.

Vamos nos ocupar diretamente com os cálculos de soluções. Para obter uma solução da equação, o procedimento foi o de reduzi-la a uma equação do tipo fundamental, dividindo tudo por $1/y$.

Quer dizer, a multiplicação de toda a equação por $1/y$ permitiu transformá-la numa equação fundamental.

Vamos tentar fazer o mesmo no caso da equação linear.

Multiplicando dos dois membros da equação por $1/y$, obtemos

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} + p(x) = \frac{q(x)}{y}$$

que, infelizmente, não nos levou a nenhuma posição melhor. Entretanto, insistindo um pouco mais, podemos perguntar se existe alguma função μ de x tal que

$$\mu(x) \cdot \frac{dy}{dx} + p(x)\mu(x)y = \mu(x)q(x)$$

se reduz a uma equacão fundamental.

Não é difícil verificar que, se a função $\mu(x)$ verificar

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = p(x)\mu(x),$$

então a equação se torna simplesmente

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \frac{d\mu(x)}{dx}y = \mu(x)q(x);$$

ou ainda

$$\frac{d}{dx}\left(\mu(x)y\right) = \mu(x)q(x),$$

que é do tipo fundamental, como queríamos.

Também não é difícil descobrir a função μ. Basta resolver a linear

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = p(x)\mu(x),$$

e isso já sabemos fazer.

Repare que precisamos calcular apenas *uma* função μ para resolver o problema. Então, podemos tomar qualquer solução particular da equação $\frac{d\mu(x)}{dx} = p(x)\mu(x)$. Por exemplo, escolhendo o parâmetro igual a um:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}.$$

Voltando à equação $\frac{d}{dx}\left(\mu(x)y\right) = \mu(x)q(x)$, calculamos

$$\mu(x)y = \int \mu(x)q(x)dx + c.$$

Assim, a solução geral da equação $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$ é

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)q(x)dx + c\right).$$

Explicitamente, a solução geral de $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$ é

$$y = e^{(-\int p(x)dx)} \left[\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + c \right]$$

onde c é um parâmetro arbitrário.

✍ i. Talvez você esteja estranhando o fato de na fórmula da solução geral da equação $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$, o parâmetro "$c$" ter sido mantido, mesmo sabendo que a expressão $\int \mu(x)q(x)dx$ já engloba - por construção - todas as primitivas de $\mu(x)q(x)$. O parâmetro "c" é, a rigor, desnecessário. Todavia vamos mantê-lo, por uma razão basicamente de escrita. Repare que quando $q(x)$ é a função nula, a equação se reduz a uma equação linear $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$. E para recuperar a expressão de sua solução geral basta esquecer a integral que ocorre entre os colchetes. Ou seja, a fórmula da solução geral da equação $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$ se reduz à fórmula da solução geral da equação $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ *correspondente*.

ii. A função $\mu(x) = e^{\left(\int p(x)\,dx\right)}$ é chamada de *fator de integração* para a equação $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$. Note que esta função nunca se anula.

Exercício 15.3.

[**Lei do resfriamento**]

Em um certo instante inicial t_0, um corpo, a uma temperatura T_0, é introduzido num ambiente cuja temperatura é T_a. Suponhamos que:

- $T_0 \neq T_a$.
- O corpo é homogêneo, isto é, em cada instante de tempo, a temperatura em todos os pontos é a mesma, só variando com o tempo.
- A temperatura do meio ambiente T_a é constante no tempo, e é a mesma em todos os pontos do ambiente.

- O calor flui do ambiente mais quente para o ambiente mais frio.

- Lei do resfriamento: Em cada instante de tempo t, a variação da temperatura do corpo devida a troca de calor através da superfície é proporcional à diferença entre as temperaturas do corpo e do meio ambiente naquele instante.

Mostre que a temperatura $T(t)$ do corpo em cada instante $t > t_0$ é dada aproximadamente pela solução do problema de valor

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= -k[T(t) - T_a] \\ T(t_0) &= T_0. \end{aligned}$$

Solução:

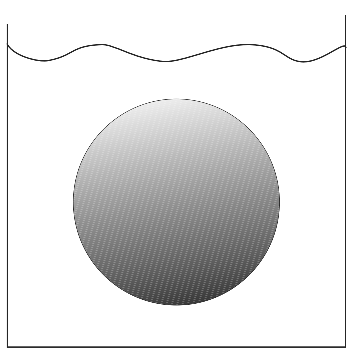


Figura 15.2: Lei do resfriamento.

Seja ΔT a variação da temperatura do corpo devida a troca de calor através da superfície no intervalo de tempo Δt.

A variação por unidade de tempo é calculada por meio da regra de três:

$$\begin{array}{ccc} \Delta t & \rightsquigarrow & \Delta T \\ 1 & \rightsquigarrow & x \end{array},$$

de onde

$$x = \frac{\Delta T}{\Delta t}.$$

Consequentemente, a variação instantânea da temperatura do corpo é dada por

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{dT}{dt}.$$

As informações físicas das hipóteses feitas podem ser resumidas na fórmula

$$\frac{dT}{dt} = -k(T(t) - T_a),$$

onde k é uma constante positiva que depende das propriedades físico-químicas do corpo.

!

O sinal negativo se deve ao fato do calor fluir do ambiente mais quente para o mais frio.

De fato, se $T > T_a$, então $T - T_a > 0$ e, portanto, $-k(T(t) - T_a) < 0$. Isto é, $\frac{dT}{dt} < 0$, de modo que a temperatura do corpo está diminuindo. Isso é consistente com o fato de o corpo estar perdendo calor para o meio ambiente.

Se $T < T_a$, então $T - T_a < 0$, e portanto $-k(T(t) - T_a) > 0$. Daí, $\frac{dT}{dt} > 0$, o que significa que o corpo está ganhando calor do meio ambiente.

Para completar o modelo, acrescentamos o "dado inicial": $T(t_0) = T_0$. Temos assim o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= -k(T(t) - T_a) \\ T(t_0) &= T_0. \end{aligned}$$

A próxima etapa consiste na resolução do problema acima.

Utilizando a mudança de variáveis $y = T(t) - T_a$, temos que $dy/dt = dT/dt$ e a equação se torna

$$\frac{dy}{dt} = -ky$$

cuja solução é $y(t) = Ce^{-kt}$, ou seja,

$$T(t) - T_a = ce^{-kt}.$$

Introduzindo o dado inicial $T(t_0) = T_0$, calculamos

$$c = e^{kt_0}(T_0 - T_a).$$

Assim,

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-k(t-t_0)}.$$

Observe que à medida que t aumenta, o valor $T(t)$ se aproxima da temperatura ambiente T_a. No limite, a tempertatura do corpo se estabiliza no valor da temperatura do ambiente.

No nosso modelo, a temperatura do corpo só se estabiliza num tempo infinito. Na prática, a temperatura do meio ambiente é atingida num tempo finito. Essa é uma indicação de que o nosso modelo é apenas um modelo aproximado.

EXERCÍCIOS

Exercício 15.4.

Calcule $\int f(x)dx = F(x) + c$. Em seguida, determine c para que a solução y satisfaça à condição extra apresentada:

a. $f(x) = x^2, \quad y(2) = 0;$

b. $f(x) = \cos^2 x, \quad y(\pi) = \pi/2$

Resposta: a. $y = \frac{1}{3}(x^3 - 8)$; b. $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\,\text{sen}(2x)$

Exercício 15.5.

Complete a tabela abaixo de modo que cada linha se converta numa frase verdadeira:

Equação	Solução Geral	Solução Particular	Dados Iniciais
......	$y = ce^{-\int_{-1}^{x} \frac{e^t}{\sqrt{t^2+2}}dt}$	......	$x_0 = \ldots,\ y_0 = 2\pi$
$y' = 3y$	......	$y(x) = 0$	$x_0 = 1,\ y_0 = \ldots$

Resposta:

Equação	Solução Geral	Solução Particular	Dados Iniciais
$y' + \frac{e^x}{\sqrt{x^2+2}}y = 0$	$y = ce^{-\int_{-1}^{x} \frac{e^t}{\sqrt{t^2+2}}dt}$	$y = 2\pi e^{-\int_{-1}^{x} \frac{e^t}{\sqrt{t^2+2}}dt}$	$x_0 = -1,\ y_0 = 2\pi$
$y' = 3y$	$y = ce^{3x}$	$y(x) = 0$	$x_0 = 1,\ y_0 = 0$

Exercício 15.6.

1. Faça o que se pede:

   a. Calcule a solução geral de $\dfrac{dy}{dx} + 3xy = 0$.

   Resposta: $y = ce^{\left(-\frac{3}{2}\right)x^2}$.

   b. Determine o comportamento, quando $x \to +\infty$ das soluções da equação $\dfrac{dy}{dx} + axy = 0$, sendo a uma constante real.

   Resposta: Se $a > 0$ as soluções tendem a zero. Se $a < 0$ e $c < 0$ as soluções tendem a $-\infty$. Se $a < 0$ e $c > 0$ as soluções tendem a $+\infty$. Se $a = 0$, $y =$ cte.

   c. Resolva o problema de valor inicial

   $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + (\operatorname{sen} t)y &= 0 \\ y(0) &= \dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

   Resposta: $y = \frac{3}{2}e^{(\cos t - 1)}$.

   d. Resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -e^{t^2}y \\ y(1) = 2 \end{cases}$

   Resposta: $y = 2e^{\left(-\int_1^t e^{u^2}\,du\right)}$.

Exercício 15.7.

Calcule a solução geral de $\left(\frac{dy}{dx}\right) - 2xy = x$.

Resposta: $y = ce^{x^2} - 1/2$.

Exercício 15.8.

Calcule a solução geral de cada uma das seguintes equações:

a. $\left(1+t^2\right)\frac{dy}{dt} + 2ty = 1$,

b. $\frac{dy}{dx} + y\sqrt{x}\,\mathrm{sen}\,x = 0$,

c. $\frac{dy}{dt} + y\cos t = 0$,

d. $\frac{dy}{dx} + yx^2 = x^2$,

e. $\frac{dy}{dx} + y = xe^x$,

Respostas: a. $y = \frac{t+C}{1+t^2}$; b. $y = Ce^{-\int_0^x \sqrt{u}\,\mathrm{sen}\,u\,du}$; c. $y = ce^{-\mathrm{sen}\,t}$; d. $y = ce^{-\frac{x^3}{3}} + 1$; e. $y = Ce^{-x} + e^x\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)$.

Exercício 15.9.

Resolva os PVI's:

a. $\begin{cases} dy/dx + \sqrt{1+x^2}\,y = 0 \\ y(0) = \sqrt{5}, \end{cases}$ b. $\begin{cases} y' + \sqrt{1+x^2}\,e^{-x}y = 0 \\ y(0) = 1, \end{cases}$

c. $\begin{cases} y' + \sqrt{1+x^2}\;e^{-x}\;y = 0 \\ y(0) = 0, \end{cases}$ d. $\begin{cases} y' = -xy + x + 1 \\ y\left(\frac{3}{2}\right) = 0, \end{cases}$

e. $\begin{cases} y' + y = \dfrac{1}{x^2+1} \\ y(1) = 2, \end{cases}$ f. $\begin{cases} y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{1}{x^2} \\ y(1) = 1. \end{cases}$

Respostas: a. $y = \sqrt{5}e^{\left(-\int_0^x \sqrt{1+u^2}\,du\right)}$; b. $y = e^{-\left(\int_0^x \frac{\sqrt{1+u^2}}{e^u}du\right)}$; c. $y \equiv 0$; d. $y = e^{-\frac{x^2}{2}}\int_{\frac{3}{2}}^x e^{\frac{t^2}{2}}(t+1)\,dt$; e. $y = e^{-x}\left(2e + \int_1^x \frac{e^t}{1+t^2}dt\right)$; f. $y = \frac{(1+\ln x)}{x}$.

Exercício 15.10.

Estude o comportamento das soluções das equações a seguir quando $t \to +\infty$:

a. $\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{1}{t}y = \cos t + \dfrac{\mathrm{sen}\,t}{t}$,

b. $\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{1}{\sqrt{t}}y = e^{-2\sqrt{t}}$, $\quad y(1) = 0$.

Respostas: a. A solução geral é $y = Ct^{-1} + \operatorname{sen} t$, a qual oscila em torno de $y_0 = 0$, quando $t \to +\infty$.

b. A solução do PVI é $y = \frac{t-1}{e^{2\sqrt{t}}}$. Utilizando a regra de L'Hôpital, vemos que $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = 0$.

Exercício 15.11.

Mostre que toda solução da equação $\left(\frac{dy}{dt}\right) + ay = be^{-ct}$ onde a e c são constantes positivas e b é um real arbitrário tende a zero à medida que $t \to +\infty$.

Exercício 15.12.

Dada a equação $\frac{dy}{dt} + a(t)y = f(t)$ com $a(t)$ e $f(t)$ contínuas em $-\infty < t < +\infty$, $a(t) \geq c > 0$, e $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$, mostre que toda solução tende a zero à medida que t tende a $+\infty$.

Exercício 15.13.

Determine as soluções gerais de:

a. $\frac{dy}{dx} - y \tan x = \operatorname{sen} x$

b. $(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + y = \arctan x + 1$

c. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} - \frac{\cot x}{x} = 0$

d. $x\frac{dy}{dx} - y = x^2$

e. $y' + 2yx^{-1} - x^3 = 0$

f. $y^2 - (2xy + 3)y' = 0$

g. $x \ln(x)\frac{dy}{dx} + (y - 2\ln x) = 0$

h. $\frac{dx}{dy} - x \ln y = y^y$

Dica: f. Escreva x como função de y e transforme numa equação não-homogênea em função de y.

Resposta: a. $y = \sec x \cdot \left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + c\right)$; b. $y = \arctan x + c \cdot e^{-\arctan x}$; c. $y = \frac{1}{x}[\ln(\operatorname{sen} x) + c]$; d. $y = cx + x^2$; e. $y = \frac{x^4}{6} + Cx^{-2}$; f. $x = Cy^2 - 1/y$; g. $y = \ln x + \frac{C}{\ln x}$; h. $x = y^y(1 + Ce^{-y})$.

Semana 16

Equações Separáveis

Introdução

Nesta semana, vamos ampliar o conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, introduzindo um novo tipo de equação: as equações diferenciais com variáveis separáveis.

Como você terá ocasião de verificar, muitas equações diferenciais de primeira ordem, que temos estudado, enquadram-se como equações de variáveis separáveis. São exemplos a equação fundamental, as equações lineares de primeira ordem homogêneas (e algumas não-homogêneas também, mas não todas). Porém, certamente, encontraremos novas equações, ainda não tratadas.

Equações Diferenciais de Variáveis Separáveis

Definição 16.1.

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ e $J \subset \mathbb{R}$ intervalos e sejam

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f(x)$$

e

$$g : J \longrightarrow \mathbb{R}; y \mapsto g(y)$$

duas funções deriváveis.

Uma *equação diferencial de variáveis separáveis* é uma equação que é da - ou pode ser posta em uma das - forma(s)

$$g(y)\,\frac{dy}{dx} = f(x), \tag{16.1}$$

ou

$$f(x)\,\frac{dx}{dy} = g(y). \tag{16.2}$$

✍ Nesta semana, vamos estudar e obter resultados para a Equação 16.1, deixando as adaptações referentes à Equação 16.2, se necessárias, por conta do leitor.

Normalmente, as equações separáveis podem ser escritas sob ambas as formas, admitindo, é claro, que tanto y pode ser visto como função de x, como x pode ser vista como função de y.

Exemplo 16.1.

i. A equação diferencial

$$y' = (1+y^2)/xy \qquad x > 0,$$

é uma equação separável em $I = J = (0, +\infty)$. Neste caso, temos

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad g(y) = \frac{y}{1+y^2}.$$

ii. Toda equação linear homogênea de primeira ordem $y' + p(x)y = 0$ pode ser escrita como uma equação separável $y' = -\dfrac{p(x)}{1/y}$ em qualquer intervalo J onde $y \neq 0$.

iii. A equação linear não-homogênea $y' - (1+x)y = 1+x$ pode ser escrita como a equação separável $y' = (1+x)\cdot(1+y) = \dfrac{1+x}{1/(1+y)}$.

✍ Ao escrever a equação $y' - (1+x)y = 1+x$ na forma padrão de uma equação de variáveis separáveis, $y' = \dfrac{1+x}{1/(1+y)}$, precisamos (em princípio) restringir a variável y a pertencer a um intervalo que não contenha -1

Exercício 16.1.

Resolva as equações $y' - (1+x)y = 1+x, \quad x \in \mathbb{R}$ e $y' = \dfrac{1+x}{1/(1+y)} \quad x > -1$ e compare suas soluções.

Atividade 16.1.

Mostre que as seguintes equações diferenciais são separáveis. Identifique, em cada item, as funções $f(x)$ e $g(y)$, bem como os correspondentes intervalos maximais I e J onde elas estão definidas

1. $\dfrac{dy}{dx} = x^3y^2 - x^3y - xy^2 + xy$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{\dfrac{x-1}{(y^2+1)^2}}$

3. $\dfrac{dy}{dx} = e^{x+y}$

Solução de uma Equação Diferencial Separável

Uma solução da equação separável $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f(x)}{g(y)}$, caracterizada na Definição 16.1, é uma função $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

1. Para todo $x \in I \qquad \varphi(x) \in J,$

2. Para todo $x \in I \qquad \dfrac{d\varphi}{dx}(x) = \dfrac{f(x)}{g(\varphi(x))}$

Quais são os procedimentos para encontrar uma solução φ da equação? Acompanhe o seguinte desenvolvimento:

Inicialmente, multiplicamos a equação dada por $g(y)$ obtendo

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x) \qquad (1) \tag{16.3}$$

Em seguida, observamos que se g tiver uma primitiva G definida em J, ainda podemos escrever a equação como

$$\frac{d}{dx}G[y(x)] = f(x) \tag{16.4}$$

Para ver porque 16.3 e 16.4 são equivalentes, basta efetuar a derivação indicada em 16.4, usar a regra da cadeia e o fato de que $G' = g$. Portanto, reduzimos a equação dada a uma equação diferencial fundamental.

A solução agora é imediata. “Integrando” com relação a x no intervalo I, encontramos:

$$G[y(x)] = \int f(x)\, dx.$$

Se F é uma primitiva de f em I, então

$$G[y(x)] = F(x) + C,$$

onde c uma constante arbitrária.

✍ A fórmula acima define implicitamente as soluções $y(x)$ da equação separável.

Se, além disso, G for invertível, podemos explicitar a solução $y(x)$, obtendo

$$y(x) = G^{-1}\Big(F(x) + c\Big)$$

Exemplo 16.2.

Calcule soluções de $\quad y' = -\dfrac{x}{y}, \qquad x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad y > 0.$

Solução: Identificando as funções que aparecem na equação com as da forma padrão da Definição 16.1, temos

$$f(x) = -x \quad \text{e} \quad g(y) = y.$$

Multiplicando a equação por y, ela se reescreve como

$$yy' = -x;$$

ou ainda

$$\frac{1}{2} 2yy' = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}[y(x)^2] = -x.$$

Integrando os dois lados com relação a x:

$$y(x)^2 = -x^2 + c$$

onde c é uma constante arbitrária. Portanto,

$$x^2 + y(x)^2 = c$$

A natureza da resposta impõe que a constante c seja positiva. Para cada $c > 0$, a fórmula acima define soluções $y(x)$, contínuas em intervalos abertos convenientes. Por exemplo, a **Figura 16.1** exibe duas possíveis soluções distintas de $y' = -\dfrac{x}{y}$.

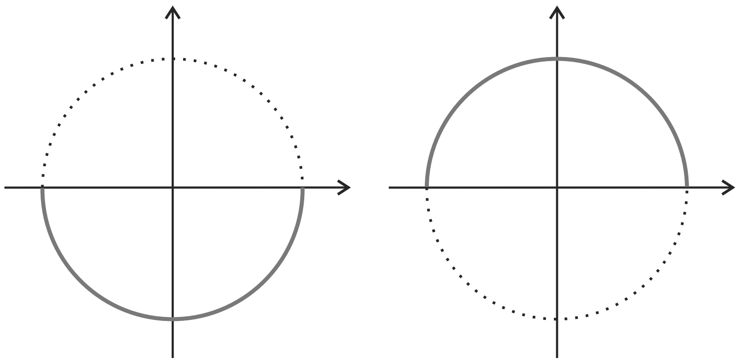


Figura 16.1: Soluções $x^2 + y(x)^2 = c$.

Para finalmente escolher a boa solução, lembramos que a equação é definida para $x \in \mathbb{R}$ e $y > 0$. Portanto, a solução compatível é o gráfico da direita na **Figura 16.1**.

Moral da história: *Não basta resolver tecnicamente uma equação. É sempre recomendável fazer uma análise das respostas obtidas, para verificar a compatibilidade da resposta com os dados da equação diferencial.*

Atividade 16.2.

Marque as afirmações corretas:

i. A equação $dy/dx = -y^2$ é linear.

ii. A equação $dy/dx = -y^2$ é separável.

iii. Uma equação pode ser simultaneamente linear e separável.

iv. Toda equação linear homogênea de primeira ordem é separável.

Respostas: São corretas apenas as afirmações de ii a iv.

Método das Diferenciais na Solução de Equações Diferenciais Separáveis

Frequentemente, encontramos a seguinte "mágica" (matemágica) sendo empregada na solução de equações diferenciais separáveis.

Partindo de
$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)},$$
operamos simbolicamente para encontrar
$$f(x)dx = g(y)dy.$$
A seguir, "integramos o lado esquerdo com relação a x, e o lado direito com relação a y", obtendo
$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$
Isso não é lá muito justificável nos padrões do rigor da Matemática que estamos praticando. Desde o Cálculo I, sabemos que dx não é um número; logo, não faz sentido a multiplicação cruzada que efetuamos acima. No entanto, o método sempre funciona.

O detalhe agora é que tratamos x e y no mesmo pé de igualdade. Integramos "um lado" com relação a y, e, independentemente, integramos o "outro lado" com relação a x, sem a preocupação de saber qual era a variável dependente e qual a variável independente. Na prática, dá certo.

A pergunta é: Por quê?

A rigor, o que justifica o método utilizado é a teoria de *formas diferenciais*, um assunto avançado que foge aos nossos objetivos.

✍ Escrevendo a equação $y' = \dfrac{f(x)}{g(y)}$ na forma
$$f(x)\,dx = g(y)\,dy,$$
fica claro o porquê do nome *equação com variáveis separáveis*. As variáveis x e y são efetivamente *separadas* em lados distintos da igualdade.

Para resolver uma equação separável, basta integrar os dois lados separadamente, tratando x e y como variáveis independentes entre si.

Ilustremos a "matemágica" com um exemplo.

Exemplo 16.3.

Resolva novamente a equação $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$, agora reescrita na forma diferencial

$$x\,dx + y\,dy = 0$$

Solução: $x\,dx + y\,dy = 0 \iff x\,dx = -y\,dy \iff \int x\,dx = -\int y\,dy$

integrando independentemente com relação a x e a y

$$\iff \frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + c \iff \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c$$

Isto é $x^2 + y^2 = c$, exatamente o mesmo resultado calculado antes pelo método do Exemplo 16.2.

Exemplo 16.4.

Resolva a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$$

Solução: A equação dada pode ser escrita na forma

$$y\,\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{(1+x^2)x}$$

Integrando o lado esquerdo com relação a y e o direito com relação a x, obtemos

$$\int \frac{y}{1+y^2}\,dy = \int \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\, ln(1+y^2)+c=\int \frac{1}{x(1+x^2)}\, dx, \qquad c \text{ constante} \tag{16.5}$$

Para resolver a integral da direita, precisamos decompor o integrando em frações parciais,

$$\frac{1}{x(1+x^2)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(1+x^2)},\ A,\ B,\ C\in\mathbb{R}$$

Igualando os numeradores:

$$A+B=0, \qquad C=0 \qquad \text{e} \qquad A=1$$

Assim, os valores das constantes são

$$A=1, \qquad B=-1 \qquad \text{e} \qquad C=0,$$

e

$$\frac{1}{x(1+x^2)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}$$

Portanto,

$$\int \frac{1}{x(1+x^2)}\, dx=\int \frac{dx}{x}-\int \frac{x}{1+x^2}=ln(x)-\frac{1}{2}\, ln(1+x^2).$$

Substituindo em 16.5, chegamos a

$$\frac{1}{2}\, ln(1+y^2)=ln(x)-\frac{1}{2}\, ln(1+x^2)+k_1,$$

onde $k_1\in\mathbb{R}$ é uma constante de integração.

Finalmente, observando que o contra-domínio da função $x\mapsto ln(x)$ é o conjunto $\mathbb{R}$, podemos garantir que $k_1=ln(k)$ para algum número positivo k. Assim, a última igualdade pode ser reescrita como

$$\frac{1}{2}\, ln(1+y^2)=ln(x)-\frac{1}{2}\, ln(1+x^2)+ln(k).$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} ln(1+y^2) &= 2\cdot ln(x)-ln(1+x^2)+2\cdot ln(k),\\ ln(1+y^2) &= ln\left(\frac{x^2k^2}{x^2+1}\right)\\ 1+y^2 &= \frac{x^2c}{x^2+1}, \qquad c=k^2 \end{aligned}$$

Observe que não é possível explicitar y em função de x de maneira única. Temos

$$y = \pm\sqrt{\frac{cx^2}{x^2+1} - 1}$$

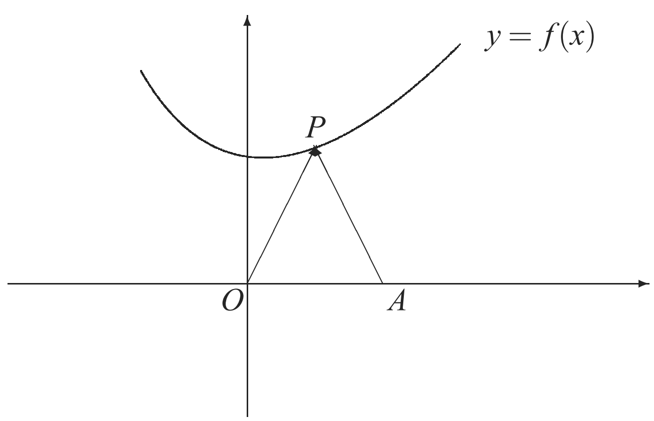
Em um problema específico, precisamos de alguma informação extra (um dado inicial), mediante o qual possamos escolher qual das duas possibilidades representa a solução procurada.

Atividade 16.3.

Desenhe o gráfico da solução de $\dfrac{dy}{dx} = -y^2$ que passa pelo ponto $(0,1)$.

UM MODELO GEOMÉTRICO COM UMA EQUAÇÃO SEPARÁVEL

A reta normal em cada ponto do gráfico de uma função $y = f(x)$ e a reta que liga esse ponto à origem formam os lados de um triângulo isósceles, cuja base está sobre o eixo dos x. Determine a função. Ela é única?



Baseados na figura acima, calculemos a equação da reta normal ao gráfico de $y = f(x)$ num ponto $P = (x_0, y_0)$.

A reta tangente num ponto $P(x_0, y_0)$, em que $y_0 = f(x)$, é dada por $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$, em que $m = f'(x_0)$ é o coeficiente angular da reta.

Segue da geometria analítica plana que $m_N = -\frac{1}{m}$ (se $m \neq 0$) é o coeficiente angular da reta normal. Portanto a reta normal passando por $P(x_0, y_0)$ fica dada por

$$y - y_0 = -\frac{1}{m} \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow (y - y_0) \cdot (-f'(x_0)) = x - x_0$$

$$\Leftrightarrow x - x_0 + f'(x_0) \cdot (y - y_0) = 0.$$

Seja $A = (x_A, 0)$ a interseção da normal com o eixo $x = 0$. Impondo a condição $y = 0$ na equação da reta normal, encontramos

$$x_A = x_0 + f'(x_0) \cdot y_0$$

A seguir, acrescentamos a informação de que $d(P,O) = d(P,A)$, isto é:

$$\sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{(y_0 \cdot f'(x_0))^2 + y_0{}^2}.$$

Elevando ao quadrado e simplificando,

$$|f'(x_0) \cdot y_0| = |x_0|$$

Essa relação deve ser satisfeita em cada ponto $(x_0, f(x_0))$ da curva. Podemos abandonar o índice inferior, uma vez que a expressão vale para todos os pontos.

Notamos ainda que

$$|f'(x_0) \cdot y_0| = |x_0| \Longleftrightarrow |f'(x_0) \cdot f(x_0)| = |x_0|.$$

Assim, abandonando o índice inferior,

$$|f'(x) \cdot f(x)| = |x| \quad \text{ie,} \quad |y' \cdot y| = |x|$$

Ou seja, *as funções $y = f(x)$ procuradas são as soluções das equações separáveis*

$$y' \cdot y = x \qquad \text{ou} \qquad y' \cdot y = -x$$

- A primeira equação tem como solução a coleção de curvas

$$y^2 - x^2 = C.$$

- A segunda equação tem como solução a origem, ou a coleção de círculos

$$x^2 + y^2 = C,$$

conforme seja $C = 0$ ou $C > 0$. A hipótese $C < 0$ não corresponde a nenhuma curva do plano real.

Análise das Soluções - As retas perpendiculares em cada ponto de cada círculo $x^2 + y^2 = C$ coincidem com as retas unindo esses pontos à origem. Portanto não podem ser os lados de triângulos isósceles (não-degenerado) e temos de eliminar a família de círculos. As curvas da primeira família são as retas $y = \pm x$ ou hipérboles equiláteras. Mais exatamente, as soluções da equação são:

- quatro semirretas (caso $c = 0$)
- quatro arcos de hipérboles (um em cada quadrante) se $c > 0$
- quatro arcos de hipérboles (um em cada quadrante), se $c < 0$

Atividade 16.4.

Desenhe soluções do problema anterior correspondentes aos casos $c = 0$, $c = 1$ e $c = -1$

EXERCÍCIOS

Exercício 16.2.

Determine as soluções das equações diferenciais abaixo:

a. $(x-1)y' - y = 0$

b. $y' + y\cos(x) = 0$

c. $\sec^2 x \cdot \operatorname{tg} y \, dx + \sec^2 y \cdot \operatorname{tg} x \, dy = 0$

d. $a \cdot \left(x\dfrac{dy}{dx} + 2y \right) = xy\dfrac{dy}{dx}$

e. $(1+x^2)y^3\, dx - y^2x^3\, dy = 0$

f. $(x^2+a^2)(y^2+b^2) + (x^2-a^2)(y^2-b^2)y' = 0$

g. $\dfrac{1}{x} - \text{tg}\,(y)y' = 0$

h. $4xy^2\, dx + (x^2+1)\, dy = 0$

i. $xy - 3(y-2)\dfrac{dy}{dx} = 0$

j. $x\, dx + y\, e^{-x^2}\, dy = 0$

l. $(2+y)\, dx - (3-x)\, dy = 0$

m. $xy\, dx - (1+x^2)\, dy = 0$

n. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{-2y}}{x^2+4}$

Respostas: a. $y = K(x-1)$; b. $y = \dfrac{C}{e^{sen(x)}}$; c. ; d. $y = ln(C\,x^{2a} \cdot y^a)$ e. $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}\right) = C$; f. $x + a\ln\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right) + y - 2b\ \text{arctg}\left(\dfrac{y}{b}\right) = C$; g. $x\ \cos(y) + C$; h. $\ln(x^2+1)^2 - \dfrac{1}{y} = C$; i. $6y - x^2 = \ln(C\,y)^{12}$; j. $e^{x^2} + y^2 = C$; l. $(2+y)(3-x) = C$; m. $y^2 = C(1+x^2)$; n. $e^{2y} = \text{arctg}(\dfrac{x}{2}) + C$

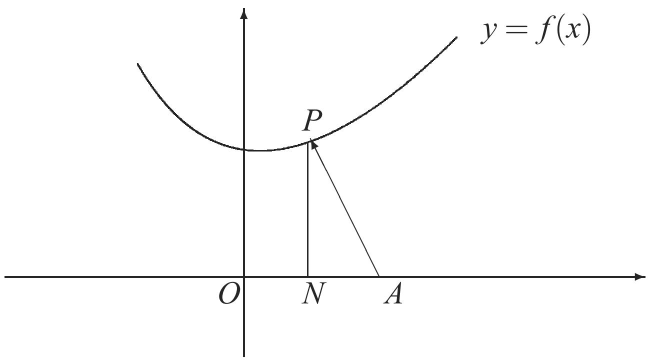
Exercício 16.3.

Determinar as equações das curvas $\alpha = (x, f(x))$, cujo comprimento do segmento da normal compreendido entre a curva e a interseção com o eixo x seja constante.

Exercício 16.4.

Dar a equação das curvas $C : y = f(x)$, que têm subnormal constante.

✍ A subnormal no ponto $P = |NA|$ é a projeção, sobre o eixo OX, do segmento da reta normal (em P) entre P e OX.



Semana 17

Simulados da AP2

✍ Para os alunos que desejam estudar resolvendo simulados da AP2 de Cálculo II, estamos colocando nesta semana algumas provas aplicadas em semestres passados. Os gabaritos das mesmas encontram-se no Apêndice 6, no final do caderno.

> **!**
>
> Todas as respostas devem estar acompanhadas das justificativas, mesmo que não exista o que está sendo pedido.

Prova 1

1ª Questão - Calcule as seguintes integrais:

a. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+1)^3}dx$

b. $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$

c. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+2)(x+3)}dx$

2ª Questão - Use o teorema de comparação para determinar se a seguinte integral imprópria é convergente ou divergente.

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

3ª Questão - Calcule o volume do sólido de revolução obtido pela rotação da região limitada por $y = x^2 - 4x + 4$ e $y = 1$ em torno do eixo Oy. Faça um esboço do sólido.

4ª Questão

a. Calcule o comprimento da curva $y = \frac{1}{3}\left(x^2+2\right)^{\frac{3}{2}}$ com $x \in [0,1]$.

b. Encontre a solução geral da equação diferencial:

$$y' - e^x y = 0.$$

Prova 2

1ª Questão - Calcule:

a. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^4 x}\,dx$ b. $\displaystyle\int_{-\infty}^{3} \frac{dx}{x^2+9}$

2ª Questão - Analise a convergência ou divergência da integral usando um dos critérios apresentados na aula.

$$\int_1^{+\infty} \frac{5}{2+e^x}\,dx$$

3ª Questão - Seja R a região limitada pela curva $y = \operatorname{sen} x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e o eixo x.

a. Esboce o gráfico da região R.

b. Calcule o volume do sólido obtido pela revolução de R.

i. em torno do eixo Oy.

ii. em torno do eixo Ox.

4ª Questão

a. Calcule o comprimento do gráfico da função $y = f(x) = \frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$ de $x = 0$ até $x = 3$.

b. Encontre a solução geral da equação diferencial:

$$y' + \frac{1}{1+e^x}y = \frac{1}{1+e^x}.$$

PROVA 3

1ª Questão - Calcule:

a. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)}$

b. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2(x^2+1)}\,dx$

2ª Questão - Analise a convergência ou divergência da integral $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\text{sen}^2 2x}{x^2}\,dx$ utilizando os critérios apresentados na aula.

3ª Questão - Seja R a região limitada pelas curvas $x = y - y^2$ e $x = 0$.

a. Esboce o gráfico da região R.

b. Calcule o volume do sólido obtido pela revolução de R em torno do eixo Ox.

4ª Questão

a. Resolva o problema de valor inicial $y\,dy - 4x(y^2+1)^{\frac{1}{2}}dx = 0$, $y(0) = 1$.

b. Determine a solução geral de $y' - 2y = 1 - 2x$.

Semana 20

SIMULADOS DA AP3

✍ Para os alunos que desejam estudar resolvendo simulados da AP3 de Cálculo II, estamos colocando nesta semana diversos simulados da AP3. No Apêndice 8, encontrará os gabaritos correspondentes.

PROVA 1

1ª Questão - Calcule as seguintes integrais:

a. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{1+4x^2}\,dx$ b. $\displaystyle\int \frac{(x+1)\,dx}{x^2+x+1}$

2ª Questão - Seja R a região limitada entre o gráfico de $y=e^{-\frac{x}{2}}$ e o eixo Ox, $x \geq 0$.

a. Esboce R.

b. Calcule a área de R.

c. Calcule o volume do sólido obtido pela revolução da região R em torno do eixo Ox. Faça um esboço do sólido.

3ª Questão - Usando critérios de convergência, determine a convergência ou divergência da seguinte integral imprópria:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x}\,dx$$

4ª Questão

a. Resolva a equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+3y^2}{2xy}$.

b. Calcule o comprimento de arco do gráfico de $y = (x-1)^{\frac{3}{2}}$ no intervalo $[1,5]$.

PROVA 2

1ª Questão - Calcule as seguintes integrais:

a. $\displaystyle\int_0^1 x\,3^x\,dx$

b. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$

2ª Questão - Seja R a região limitada pelas curvas $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$;

a. Esboce R.

b. Calcule a área de R.

c. Calcule o volume do sólido obtido pela revolução da região R em torno do eixo Ox. Faça um esboço do sólido correspondente.

3ª Questão - Usando critérios de convergência, determine a convergência ou divergência da seguinte integral imprópria:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\,dx$$

4ª Questão

a. Encontre a solução geral da equação $xy' = \dfrac{y-y^2}{2+y}$.

b. Encontre a solução do PVI abaixo.

$$\begin{cases} y' - 2y = e^{2x}(x-1)^4 \\ y(2) = e^4 \end{cases}$$

PROVA 3

1ª Questão - Considere a região R, do primeiro quadrante, limitada pelas retas $y = 2$, $x = 2$ e o gráfico de $y = x^2 + 2$.

a. Esboce R.

b. Calcule a área de R.

c. Expresse, **mas não calcule**, o volume do sólido obtido pela rotação da região R em torno do eixo Ox, usando o método:

   i. dos discos circulares

   ii. das cascas cilíndricas

2ª Questão - Calcule as seguintes integrais:

a. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x e^{-x}\, dx$

b. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^4 x\, dx$

3ª Questão - Usando **apenas** critérios de convergência, determine a convergência ou divergência da seguinte integral imprópria:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(x-1)}}$$

4ª Questão

a. Calcule a solução geral da equação: $\dfrac{dy}{dx} + yx^2 = x^2$

b. Resolva o problema de valor inicial: $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x^2(1+x)} \\ y(1) = -1 \end{cases}$

Apêndice 5

AD2 (Simulados e Passo a Passo)

Simulado 1

1ª Questão - Calcule:

a. $\displaystyle\int \frac{dx}{(4-x^2)^{\frac{5}{2}}}$

b. $\displaystyle\int \frac{e^{2t}}{(2+e^{2t})(1-e^t)}dt$

c. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^6+1}dx$

d. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sec^2\theta \operatorname{sen}\theta - \sec^2\theta)d\theta$

Sugestão: Faça (quando necessário) uma substituição adequada para tornar o exercício mais simples.

2ª Questão - Determine o volume do sólido resultante ao se girar a região entre o eixo x e a curva $y = x^2 - 2x$, em torno:

a. da reta $y = -1$, utilizando o método dos discos ou arruelas. Esboce a região e um raio típico.

b. da reta $x = 2$, utilizando o método das cascas cilíndricas. Esboce a região e um elemento típico que irá gerar uma casca cilíndrica.

3ª Questão - Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt.$

Sugestão: Apresente o limite dado como o limite do quociente de duas expressões. Observe que o limite do numerador é uma integral imprópria, mas que não é possível calculá-la diretamente. Usando algum critério de convergência, mostre que a integral imprópria diverge. Por outro lado, calcule o limite do denominador e mostre que esse limite também diverge. A partir daí, você estará em condições de aplicar a regra de L'Hôpital.

4ª Questão - Usando critérios de convergência, determine a convergência ou divergência de

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{x}(\operatorname{sen}^4 x+1)}.$$

SIMULADO 2

1ª Questão - Calcule:

a. $\displaystyle\int \frac{(2e^{2x}-e^x)}{\sqrt{3e^{2x}-6e^x-1}}dx$, onde $x>\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

Sugestão: Faça uma substituição adequada para tornar o exercício mais simples.

b. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+4}$

Sugestão: Lembre que $x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2$.

c. $\displaystyle\int_0^2 z^2\ln z\,dz$

Sugestão: Observe que a integral definida dada é uma integral imprópria de funções não limitadas.

d. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}dt$

Sugestão: Apresente o limite dado como o limite do quociente de duas expressões. Observe que o limite do numerador é uma integral imprópria. Usando algum critério de convergência, mostre que a integral imprópria diverge. Por outro lado, calcule o limite do denominador e mostre que esse limite também diverge. A partir daí, você estará em condições de aplicar a regra de L'Hôpital.

2ª **Questão** - Considere a região infinita no primeiro quadrante, entre a curva $y = e^{-x}$ e o eixo x.

a. Esboce a região e calcule a área.

b. Calcule o volume do sólido gerado pela revolução da região dada em torno do eixo Oy e faça um esboço desse sólido.

c. Calcule o volume do sólido gerado pela revolução da região dada em torno do eixo Ox e faça um esboço desse sólido.

SIMULADO 3

1ª **Questão** - Calcule:

a. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{5+12x-9x^2}}dx$

b. $\displaystyle\int \frac{x^3+4x^2-4x-1}{(x^2+1)^2}dx$

2ª **Questão** - Mostre que a integral imprópria $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x}dx$ é convergente, mas a integral imprópria $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x}\right| dx$ é divergente.

3ª **Questão**

a. Verifique se a integral imprópria $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{arctg} z\, dz$ converge ou diverge.

b. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x \operatorname{arctg} z\, dz$.

4ª **Questão** - Determine os volumes dos sólidos obtidos com a rotação da região, no primeiro quadrante, limitada por $x = y - y^3$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 1$ em torno dos eixos dados:

a. do eixo Ox

b. do eixo Oy

c. da reta $x = 1$

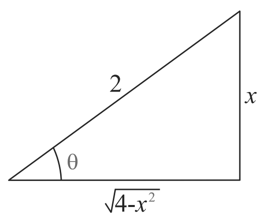
d. da reta $y = 1$

Em cada caso, esboce a região mostrando a casca ou o disco típico e faça um esboço do sólido correspondente.

PASSO A PASSO DO SIMULADO 1

Solução da 1ª Questão

a. Estamos no caso de integrais que tem termos da forma $\sqrt{a^2 - x^2}$, com $a = 2$.



Do triângulo associado tem-se: $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\operatorname{sen}\theta \\ dx = 2\cos\theta\, d\theta \end{cases}$,

onde $x \in]-2, 2[$.

Também, $\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2} = \cos\theta \Rightarrow \sqrt{4-x^2} = 2\cos\theta$.

Observe que $\sqrt{4-x^2}$ está no denominador, assim é preciso que $\cos\theta$ seja maior do que zero.

$\left(\text{Note que } \cos\theta > 0 \text{ para } -\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}.\right)$

Assim,

$$\int \frac{dx}{(4-x^2)^{\frac{5}{2}}} = \int \frac{dx}{(\sqrt{4-x^2})^5} = \int \frac{2\cos\theta}{(2\cos\theta)^5} d\theta = \frac{1}{2^4}\int \sec^4\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{16}\int (1+\operatorname{tg}^2\theta)\sec^2\theta\, d\theta = \frac{1}{16}\int \sec^2\theta\, d\theta + \frac{1}{16}\int \operatorname{tg}^2\theta \sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{16}\operatorname{tg}\theta + \frac{1}{16}\int \operatorname{tg}^2\theta\sec^2\theta\, d\theta$$

Logo,

$$\int \frac{dx}{(4-x^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{16}\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{1}{16}\int \operatorname{tg}^2\theta\sec^2\theta\, d\theta \quad (5.1)$$

Fazendo a substituição $\begin{cases} u = \operatorname{tg}\theta \\ du = \sec^2\theta\, d\theta \end{cases}$ na última integral da direita, temos

$$\int \operatorname{tg}^2\theta \sec^2\theta\, d\theta = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\theta + C$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^3 + C = \frac{1}{3}\frac{x^3}{(\sqrt{4-x^2})^3} + C. \qquad (5.2)$$

Substituindo 5.2 em 5.1, temos, finalmente,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{16}\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{1}{48}\frac{x^3}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}} + C.$$

b. Observe que $\displaystyle\int \frac{e^{2t}}{(2+e^{2t})(1-e^t)}dt = \int \frac{e^t\, e^t\, dt}{(2+(e^t)^2)\,(1-e^t)}$.

Fazendo a substituição $\begin{cases} u = e^t \\ du = e^t\, dt \end{cases}$, obtemos $\displaystyle\int \frac{u\,du}{(2+u^2)(1-u)}$.

Para resolver esta última integral, usaremos o método das frações parciais:

$$\frac{u}{(2+u^2)(1-u)} = \frac{u}{(1-u)(2+u^2)} = \frac{A}{1-u} + \frac{Bu+C}{2+u^2}$$

$$\frac{u}{(2+u^2)(1-u)} = \frac{2A + Au^2 + Bu + C - Bu^2 - Cu}{(2+u^2)(1-u)}$$

Assim: $0u^2 + u + 0 = (A-B)u^2 + (B-C)u + (2A+C)$.
Logo,

$$A - B = 0 \qquad (5.3)$$

$$B - C = 1 \qquad (5.4)$$

$$2A + C = 0 \qquad (5.5)$$

Somando 5.3 e 5.4 e formando um sistema com 5.5, temos

$$\begin{array}{l} A - C = 1 \\ \underline{2A + C = 0} \\ 3A \qquad = 1 \end{array} \Rightarrow A = \frac{1}{3} \qquad (5.6)$$

Substituindo 5.6 em 5.5, obtemos

$$C = -2A = -\frac{2}{3} \Rightarrow C = -\frac{2}{3} \qquad (5.7)$$

Substituindo 5.6 e 5.3, temos

$$B = A = \frac{1}{3} \Rightarrow B = \frac{1}{3} \tag{5.8}$$

De 5.6, 5.7 e 5.8, obtemos

$$\frac{u}{(2+u^2)(1-u)} = \frac{\frac{1}{3}}{1-u} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)u - \left(\frac{2}{3}\right)}{2+u^2} \tag{5.9}$$

Assim, $\displaystyle\int \frac{u\,du}{(2+u^2)(1-u)} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{1-u} + \frac{1}{3}\int \frac{(u-2)du}{2+u^2}$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{-du}{1-u} + \frac{1}{3(2)}\int \frac{2u\,du}{2+u^2} - \frac{2}{3}\int \frac{du}{2+u^2}$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|1-u| + \frac{1}{6}\ln(2+u^2) - \frac{2}{3}\Bigg[\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)}_{(*)}\Bigg] + C. \tag{5.10}$$

Note que, em $(*)$, estamos usando a fórmula

$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{u}{a}\right) + C.$$

De 5.10, tendo em conta que $u = e^t$, temos, finalmente, que

$$\int \frac{e^{2t}\,dt}{(2+e^{2t})(1-e^t)} = -\frac{1}{3}\ln|1-e^t| + \frac{1}{6}\ln(2+e^{2t}) - \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{e^t}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|1-e^t| + \frac{1}{6}\ln(2+e^{2t}) - \frac{\sqrt{2}}{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}e^t}{2}\right) + C$$

c. Note-se que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^6+1}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{x^2}{x^6+1}dx. \tag{5.11}$$

Para calcular a última integral à direita, faça $\begin{cases} u = x^3 \\ du = 3x^2\,dx \end{cases}$.

Note que, quando $x = 0$, então $u = 0$ e, quando $x = t$, então $u = t^3$.

Assim,

$$\frac{1}{3}\left(\int_0^t \frac{3x^2dx}{x^6+1}\right) = \frac{1}{3}\left(\int_0^{t^3} \frac{du}{u^2+1}\right) = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} u\Big]_0^{t^3}$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{arctg}(t^3) - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}(0) = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}(t^3) \qquad (5.12)$$

Substituindo 5.12 em 5.11 e tomando o limite, resulta

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^6+1}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{x^2}{x^6+1}dx = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(t^3)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Assim, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^6+1}dx = \frac{\pi}{6}.$

d. Note que a integral dada é imprópria, pois a função secante não está definida em $\dfrac{\pi}{2}$. Assim,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sec^2\theta \operatorname{sen}\theta - \sec^2\theta)d\theta = \lim_{t\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\int_0^t (\sec^2\theta \operatorname{sen}\theta - \sec^2\theta)d\theta. \qquad (5.13)$$

Por outro lado,

$$\int (\sec^2\theta \operatorname{sen}\theta - \sec^2\theta)d\theta = \int \frac{1}{\cos^2\theta}\operatorname{sen}\theta d\theta - \int \sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \left(\int \cos^{-2}\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta\right) - \operatorname{tg}\theta = -\operatorname{tg}\theta + \left(\int \cos^{-2}\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta\right)$$

Fazendo a substituição $\begin{cases} u = \cos\theta \\ du = -\operatorname{sen}\theta\, d\theta \end{cases}$ na última integral à direita, temos

$$\int \cos^{-2}\theta \operatorname{sen}\theta d\theta = -\int u^{-2}du = -\frac{u^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{u} + C = \frac{1}{\cos\theta} + C.$$

Assim, $\displaystyle\int_0^t (\sec^2\theta \operatorname{sen}\theta - \sec^2\theta)d\theta = \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\Big]_0^t$

$$= \frac{1}{\cos t} - \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} - 1 = \frac{1-\operatorname{sen} t}{\cos t} - 1. \qquad (5.14)$$

Portanto, substituindo 5.14 em 5.13, temos

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sec^2\theta \operatorname{sen}\theta - \sec^2\theta)d\theta = \lim_{t\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \left[\left(\frac{1-\operatorname{sen}t}{\cos t}\right) - 1\right]$$

$$= \lim_{t\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \left(\frac{1-\operatorname{sen}t}{\cos t}\right) - 1. \qquad (5.15)$$

Porém,

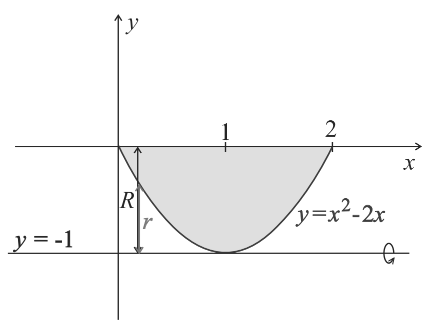
$$\lim_{t\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \left[\frac{1-\operatorname{sen}t}{\cos t}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{t\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \left(\frac{-\cos t}{-\operatorname{sen}t}\right) = \frac{-0}{-1} = 0. \qquad (5.16)$$

Substituindo 5.16 em 5.15, resulta que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sec^2\theta \operatorname{sen}\theta - \sec^2\theta)d\theta = -1.$$

Solução da 2ª Questão

a. Desenhamos a figura mostrando a região e um raio típico.



Observe que, neste caso, a partição para obter os discos é feita no eixo x. Observe também que o raio do disco maior é $R = 1$ e o raio do disco menor é $r = (x^2-2x)-(-1) = x^2-2x+1$.

Assim, lembrando que:

$$V = \pi \int_0^2 \left[(\text{raio do disco maior})^2 - (\text{raio do disco menor})^2\right] dx$$

$$V = \pi \int_0^2 \left[(R)^2 - (r)^2\right] dx$$

$$V = \pi \int_0^2 \left[(1)^2 - (x^2 - 2x + 1)^2\right] dx$$

$$V = \pi \int_0^2 \left[1 - (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1)\right] dx$$

$$V = \pi \int_0^2 \left[-x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x\right] dx$$

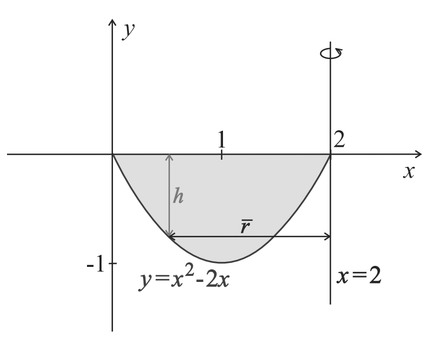
$$V = \pi \left[-\frac{x^5}{5} + 4\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2}\right]_0^2$$

$$V = \pi \left[-\frac{2^5}{5} + 4\frac{2^4}{4} - 6\frac{2^3}{3} + 4\frac{2^2}{2}\right]$$

$$V = \pi \left[-\frac{2^5}{5} + 2^4 - 2^4 + 2^3\right] = \pi \left[-\frac{2^5}{5} + 2^3\right]$$

$$V = \frac{8\pi}{5} \text{ unidades de volume.}$$

b. Desenhamos a figura mostrando a região e um elemento típico.



Observe que, neste caso, a partição para obter as cascas é feita no eixo x. Observe também que o raio médio da casca é $\overline{r} = 2 - x$ e a altura da casca é $h = 0 - (x^2 - 2x)$, isto é, $h = 2x - x^2$.

Assim, lembrando que

$$V = 2\pi \int_0^2 (\text{raio médio da casca})(\text{altura da casca})dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 \overline{r} \cdot h\,dx$$

Temos que

$$V = 2\pi \int_0^2 (2-x)(2x-x^2)dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 (4x-2x^2-2x^2+x^3)dx, \text{ isto é,}$$

$$V = 2\pi \int_0^2 (4x-4x^2+x^3)dx = 2\pi \left[4\frac{x^2}{2} - 4\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^2$$

$$= 2\pi \left[2^3 - \frac{2^5}{3} + \frac{2^3}{2}\right] = 2^4\pi \left[1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2}\right]$$

$$V = 16\pi \left[\frac{3}{2} - \frac{4}{3}\right] = \frac{8\pi}{3} \text{ unidades de volume.}$$

Solução da 3ª Questão

Observe que

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{\left(\frac{e^{x^2}}{x}\right)} \tag{5.17}$$

• Vamos estudar o limite do numerador da Expressão 5.17.

Da definição de integral imprópria, temos que

$$\int_0^{+\infty} e^{t^2}dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{t^2}dt.$$

Note que não podemos calcular a última integral da direita diretamente porque não existe uma fórmula para a primitiva de e^{t^2} em termos de funções elementares. Devemos, então, determinar sua convergência ou divergência de outra maneira.

Veja também que

$$\int_0^{+\infty} e^{t^2}dt = \int_0^1 e^{t^2}dt + \int_1^{+\infty} e^{t^2}dt. \tag{5.18}$$

A integral $\int_0^1 e^{t^2}dt$ existe, posto que e^{t^2} é contínua. Porém, como dissemos anteriormente, não podemos avaliar a integral $\int_0^1 e^{t^2}dt$ diretamente, mas sabemos que é uma integral definida ordinária e o seu valor é um número real.

Por outro lado, para $t \geq 1$, temos $t^2 \geq t$ e como a função exponencial é crescente, então $e^{t^2} \geq e^t$, $\forall t \geq 1$. Assim,

$$\int_1^{+\infty} e^{t^2}\,dt \geq \int_1^{+\infty} e^t\,dt. \tag{5.19}$$

Porém, $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^t\,dt = \lim_{s\to+\infty}\int_1^s e^t\,dt = \lim_{s\to+\infty} e^t\Big]_1^s = \lim_{s\to+\infty}(e^s - e) =$ $+\infty$. Isto é,

$$\int_1^{+\infty} e^t\,dt \quad \text{diverge.} \tag{5.20}$$

Logo, de 5.20, 5.19 e o teste de comparação, podemos afirmar que $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{t^2}\,dt$ diverge. Ou seja,

$$\int_1^{+\infty} e^{t^2}\,dt = +\infty \tag{5.21}$$

Portanto, de 5.21 e 5.18 podemos concluir que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{t^2}\,dt = +\infty$. Logo,

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{t^2}\,dt = +\infty \tag{5.22}$$

- Vamos estudar o limite do denominador da Expressão 5.17:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{x^2}}{x}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}2x}{1} = +\infty. \tag{5.23}$$

Assim, de 5.21 e 5.22 podemos concluir que é possível aplicar a regra de L'Hôpital em 5.17 e

$$\lim_{x\to+\infty} x e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^{t^2}\,dt}{\left(\frac{e^{x^2}}{x}\right)} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{d}{dx}\left(\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{x^2}}{x}\right)}.$$

Usando a primeira forma do Teorema Fundamental do Cálculo no numerador e derivando o denominador, temos

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{\frac{2x^2e^{x^2}-e^{x^2}}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{\frac{(2x^2-1)e^{x^2}}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(2x^2-1)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(2-\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{2}.$$

Isto é, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt = \frac{1}{2}.$

Solução da 4ª Questão

Observe que, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que $\operatorname{sen}^4(x)+1 \geq 1$ $\Rightarrow \dfrac{1}{\operatorname{sen}^4(x)+1} \leq 1$. Assim, em particular:

$$\frac{1}{\sqrt[5]{x}(\operatorname{sen}^4(x)+1)} \leq \frac{1}{\sqrt[5]{x}} \quad \forall x \in (0,1]. \tag{5.24}$$

Vamos provar que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{x}}$ é convergente. Com efeito,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{x}} = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 x^{-\frac{1}{5}}dx = \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{5x^{\frac{4}{5}}}{4}\right]_t^1 = \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{5}{4}-\frac{5t^{\frac{4}{5}}}{4}\right] = \frac{5}{4}. \tag{5.25}$$

Logo, de 5.25 temos que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{x}}$ converge. Então, usando 5.24 e o teste de comparação, podemos concluir que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{x}(\operatorname{sen}^4 x+1)}$ converge.

PASSO A PASSO DO SIMULADO 2

Solução da 1ª Questão

a. $\displaystyle\int \frac{(2e^{2x}-e^x)}{\sqrt{3e^{2x}-6e^x-1}}dx = \int \frac{(2e^x-1)e^x dx}{\sqrt{3e^{2x}-6e^x-1}}$

Faça $u = e^x \Rightarrow du = e^x\,dx$. Por outro lado, como $x > \ln\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow u = e^x > 1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Assim,

$$\int \frac{(2e^x-1)e^x dx}{\sqrt{3e^{2x}-6e^x-1}} = \int \frac{(2u-1)du}{\sqrt{3u^2-6u-1}}. \tag{5.26}$$

Para resolver a última integral da direita, vamos usar a técnica de completar quadrados: $3u^2-6u-1 = 3(u^2-2u+1)-3-1 = 3(u-1)^2-4 = \left[\sqrt{3}(u-1)\right]^2-4$. Isto sugere a mudança $w = \left[\sqrt{3}(u-1)\right] \Rightarrow dw = \sqrt{3}\,du$ e $u = \dfrac{w}{\sqrt{3}}+1$. Note que, como $u > 1+\dfrac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow w = \sqrt{3}(u-1) > 2$.

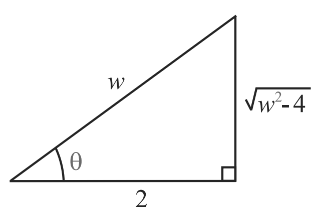
Assim,

$$\int \frac{(2u-1)du}{\sqrt{3u^2-6u-1}} = \int \frac{(2u-1)du}{\sqrt{\left[\sqrt{3}(u-1)\right]^2-4}} = \int \frac{\left(2\frac{w}{\sqrt{3}}+2-1\right)\frac{dw}{\sqrt{3}}}{\sqrt{w^2-4}}$$

$$= \int \frac{\left(\frac{2}{3}w+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)dw}{\sqrt{w^2-4}} = \underbrace{\frac{2}{3}\int \frac{w\,dw}{\sqrt{w^2-4}}}_{\text{(II)}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dw}{\sqrt{w^2-4}}}_{\text{(I)}}. \tag{5.27}$$

Resolvendo (I), isto é: $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\displaystyle\int \frac{dw}{\sqrt{w^2-4}}$.

Primeiro, note que nenhuma das regras básicas de integração é aplicável. Para usar uma substituição trigonométrica, observe que estamos no caso de integrais que tem termos da forma $\sqrt{w^2-a^2}$, com $a=2$, onde $w>2$.



Do triângulo associado, tem-se:

$$\sec\theta = \frac{w}{2} \Rightarrow \begin{cases} w = 2\sec\theta \\ dw = 2\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta\,d\theta \end{cases}.$$

Também, $\dfrac{\sqrt{w^2-4}}{2} = \mathrm{tg}\,\theta \Rightarrow \sqrt{w^2-4} = 2\,\mathrm{tg}\,\theta.$

Observe que $\sqrt{w^2-4}$ está no denominador. Assim, é preciso que $\mathrm{tg}\,\theta$ seja maior do que zero. Note que $\mathrm{tg}\,\theta>0$ para $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$.

Assim,

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dw}{\sqrt{w^2-4}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{2\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta\,d\theta}{2\,\mathrm{tg}\,\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \sec\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln|\sec\theta+\mathrm{tg}\,\theta|+C_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln|\sec\theta+\mathrm{tg}\,\theta|+C_1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{w}{2}+\frac{\sqrt{w^2-4}}{2}\right|+C_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|w+\sqrt{w^2-4}\right|+C_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| (u-1)\sqrt{3} + \sqrt{3u^2 - 6u - 1} \right| + C_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| (e^x - 1)\sqrt{3} + \sqrt{3e^{2x} - 6e^x - 1} \right| + C_2. \qquad (5.28)$$

Resolvendo (II)

$$\frac{2}{3} \int \frac{w\,dw}{\sqrt{w^2 - 4}} = \frac{1}{3} \int (w^2 - 4)^{-\frac{1}{2}} (2w) dw$$

$$= \frac{1}{3} \frac{(w^2 - 4)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C_2 = \frac{2}{3} (w^2 - 4)^{\frac{1}{2}} + C_2$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{3u^2 - 6u - 1} + C_3 = \frac{2}{3} \sqrt{3e^{2x} - 6e^x - 1} + C_3. \quad (5.29)$$

Substituindo 5.28 e 5.29 em 5.27 e, finalmente, substituindo em 5.26, obtemos $\displaystyle\int \frac{(2e^{2x} - e^x)}{\sqrt{3e^{2x} - 6e^x - 1}}\, dx =$

$$= \tfrac{2}{3} \sqrt{3e^{2x} - 6e^x - 1} + \tfrac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| (e^x - 1)\sqrt{3} + \sqrt{3e^{2x} - 6e^x - 1} \right| + C.$$

b. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 + 4}$

Completando quadrados $\quad x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2$

$$= (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = [x^2 + 2 - 2x][x^2 + 2 + 2x].$$

Assim,

$$\int \frac{dx}{x^4 + 4} = \int \frac{dx}{[x^2 - 2x + 2][x^2 + 2x + 2]}.$$

Observe que os 2 fatores quadráticos são irredutíveis, isto é, $b^2 - 4ac < 0$.

Vamos resolver a última integral da direita utilizando o método das frações parciais:

$$\frac{1}{[x^2 + 2x + 2][x^2 - 2x + 2]} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \frac{Cx + D}{x^2 - 2x + 2}$$

$$= \frac{(Ax + B)(x^2 - 2x + 2) + (Cx + D)(x^2 + 2x + 2)}{[x^2 + 2x + 2][x^2 - 2x + 2]}$$

$1 = (Ax+B)(x^2-2x+2)+(Cx+D)(x^2+2x+2)$

$1 = Ax^3-2Ax^2+2Ax+Bx^2-2Bx+2B+Cx^3+2Cx^2+2Cx+Dx^2+2Dx+2D$

$1 = Ax^3+Cx^3-2Ax^2+Bx^2+2Cx^2+Dx^2+2Ax-2Bx+2Cx+2Dx+2B+2D$

$1 = (A+C)x^3+(-2A+B+2C+D)x^2+(2A-2B+2C+2D)x+(2B+2D)$.

Então, $\begin{cases} A+C=0 \\ -2A+B+2C+D=0 \\ 2A-2B+2C+2D=0 \\ 2B+2D=1 \end{cases}$.

Ou

$$A+C=0 \tag{5.30}$$

$$-2A+2C+B+D=0 \tag{5.31}$$

$$A+C-B+D=0 \tag{5.32}$$

$$B+D=\frac{1}{2} \tag{5.33}$$

Substituindo 5.30 em 5.32 e resolvendo o sistema $\begin{cases} -B+D=0 \\ B+D=\frac{1}{2} \end{cases}$ obtemos $2D=\frac{1}{2} \Rightarrow D=\frac{1}{4}$ e $B=\frac{1}{4}$.

Substituindo 5.33 em 5.31 e resolvendo o sistema $\begin{cases} -2A+2C=-\frac{1}{2} \\ A+C=0 \end{cases}$ obtemos $4C=-\frac{1}{2} \Rightarrow C=-\frac{1}{8}$ e $A=\frac{1}{8}$.

$$\int \frac{dx}{x^4+4} = \int \frac{dx}{[x^2-2x+2][x^2+2x+2]}$$

$$= \underbrace{\int \frac{\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}}{x^2+2x+2}dx}_{\text{(I)}} + \underbrace{\int \frac{-\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}}{x^2-2x+2}dx}_{\text{(II)}}. \tag{5.34}$$

Para resolver (I), vamos usar a técnica de completar quadrados e fazer uma substituição adequada. Com efeito, $x^2+2x+2=(x^2+2x+1)+1=(x+1)^2+1$, assim a substituição adequada é $u=x+1 \Rightarrow x=u-1$ e $du=dx$.

$$\int \frac{\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{\frac{1}{8}(u-1)+\frac{2}{8}}{u^2+1}du = \frac{1}{8}\int \frac{(u-1)+2}{u^2+1}du$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{u+1}{u^2+1}du = \frac{1}{16}\int \frac{2u}{u^2+1}du + \frac{1}{8}\int \frac{1}{u^2+1}du$$

$$= \frac{1}{16}\ln(u^2+1) + \frac{1}{8}\operatorname{arctg} u + C_1.$$

Logo,

$$\int \frac{\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{16}\ln(x^2+2x+2) + \frac{1}{8}\operatorname{arctg}(x+1) + C_1. \tag{5.35}$$

Analogamente, para resolver (II), vamos usar a técnica de completar quadrados e fazer uma substituição adequada. Com efeito, $x^2-2x+2 = (x^2-2x+1)+1 = (x-1)^2+1$, assim a substituição adequada é $v = x-1 \Rightarrow x = v+1$ e $dv = dx$.

$$\int \frac{-\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}}{x^2-2x+2}dx = \int \frac{-\frac{1}{8}(v+1)+\frac{2}{8}}{v^2+1}dv = \frac{1}{8}\int \frac{-(v+1)+2}{v^2+1}dv$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1-v}{v^2+1}dv = \frac{1}{8}\int \frac{1}{v^2+1}dv - \frac{1}{16}\int \frac{2v}{v^2+1}dv$$

$$= \frac{1}{8}\operatorname{arctg} v - \frac{1}{16}\ln(v^2+1) + C_2.$$

Assim,

$$\int \frac{-\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}}{x^2-2x+2}dx = \frac{1}{8}\operatorname{arctg}(x-1) - \frac{1}{16}\ln(x^2-2x+2) + C_2. \tag{5.36}$$

Substituindo 5.35 e 5.36 em 5.34, resulta

$$\int \frac{dx}{x^4+4} = \frac{1}{16}\ln(x^2+2x+2) + \frac{1}{8}\operatorname{arctg}(x+1) + \frac{1}{8}\operatorname{arctg}(x-1)$$
$$-\frac{1}{16}\ln(x^2-2x+2) + C.$$

Ou ainda, $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+4} = \frac{1}{16}\ln\left(\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2}\right) + \frac{1}{8}\operatorname{arctg}(x+1)$ $\displaystyle+\frac{1}{8}\operatorname{arctg}(x-1) + C.$

c. $\displaystyle\int_0^2 z^2 \ln z\,dz$

A integral dada é uma integral imprópria de funções não limitadas.

$$\int_0^2 z^2 \ln z\,dz = \lim_{t\to 0^+}\int_t^2 z^2 \ln z\,dz. \qquad (5.37)$$

Utilizando a técnica de integração por partes, faça:

$$\begin{cases} u = \ln z \Rightarrow du = \dfrac{1}{z}dz \\ dv = z^2\,dz \Rightarrow v = \dfrac{z^3}{3} \end{cases}$$

$$\int_t^2 z^2 \ln z\,dz = \int_t^2 \underbrace{\ln z}_{u}\,\underbrace{z^2\,dz}_{dv} = \underbrace{\ln z}_{u}\underbrace{\left(\frac{z^3}{3}\right)}_{v}\Bigg]_t^2 - \int_t^2 \underbrace{\left(\frac{z^3}{3}\right)}_{v}\underbrace{\frac{1}{z}dz}_{du}$$

$$= \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{t^3}{3}\ln t - \frac{1}{3}\int_t^2 z^2\,dz = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{t^3}{3}\ln t - \frac{1}{3}\frac{z^3}{3}\Bigg]_t^2$$

$$= \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{t^3}{3}\ln t - \frac{8}{9} + \frac{t^3}{9} = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{8}{9} - \frac{t^3}{3}\ln t + \frac{t^3}{9}.$$

Assim, $$\int_0^2 z^2 \ln z\,dz = \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{8}{3}\ln 2 - \frac{8}{9} - \frac{t^3}{3}\ln t + \frac{t^3}{9}\right)$$

$$= \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{8}{9} - \frac{1}{3}\lim_{t\to 0^+} t^3 \ln t + \frac{1}{9}\lim_{t\to 0^+} t^3.$$

É claro que $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} t^3 = 0.$

Por outro lado,

$$\lim_{t\to 0^+} t^3 \ln t = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{\frac{1}{t^3}} \overset{L'H}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{3}{t^4}} = -\lim_{t\to 0^+}\frac{t^3}{3} = 0.$$

Finalmente, resulta que $\displaystyle\int_0^2 z^2 \ln z\,dz = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{8}{9}.$

d. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}dt$

$$\lim_{x\to 0^+} x\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}dt = \lim_{x\to 0^+}\frac{\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}dt}{\frac{1}{x}} \qquad (5.38)$$

Observe que $\lim_{x\to 0^+}\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}dt = \int_0^1 \frac{\cos t}{t^2}dt$ e esta última integral é uma integral imprópria de funções não limitadas.

Vamos mostrar que $\int_0^1 \frac{\cos t}{t^2}dt$ é divergente. Observe que $\frac{1}{t^2} > 0$ e $\cos t > 0$ no intervalo $(0,1]$, logo $\frac{\cos t}{t^2} > 0$ no intervalo $(0,1]$. Por outro lado, é claro que $\frac{\cos t}{t^2}$ e $\frac{1}{t^2}$ são contínuas em $(0,1]$. Estamos, então, em condições de aplicar o critério do limite do quociente $\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{\cos t}{t^2}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to 0^+}\cos t = 1 \in (0,+\infty)$. Então, o critério diz que as integrais impróprias $\int_0^1 \frac{\cos t}{t^2}dt$ e $\int_0^1 \frac{1}{t^2}dt$ comportam-se da mesma maneira.

Por outro lado, pelos exemplos referenciais, sabemos que se $r = 2 > 1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{dt}{t^2}$ é divergente. Assim, pelo critério, resulta que $\int_0^1 \frac{\cos t}{t^2}dt$ é divergente.

Por outro lado, observando o limite do denominador de 5.38, sabemos que $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$. Portanto, estamos em condições de aplicar a regra de L'Hôpital em 5.38:

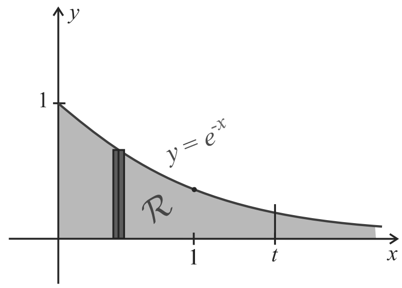
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}dt}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{d}{dx}\left(\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}dt\right)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{d}{dx}\left(\int_1^x \frac{\cos t}{t^2}dt\right)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$\overset{TFC}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{\cos x}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\cos x = 1.$$

Finalmente, $\lim_{x\to 0^+} x\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}dt = 1.$

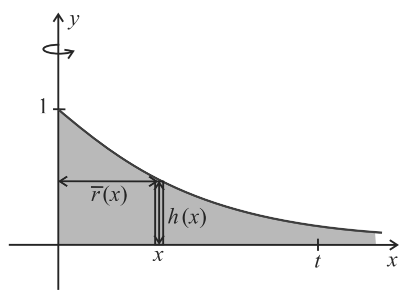
Solução da 2ª Questão

a.



$$A(R) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-x}dx = \lim_{t\to+\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big]_0^t$$
$$= \lim_{t\to+\infty}\left[-e^{-t}+e^{-0}\right] = 0+1 = 1 \text{ unidade de área.}$$

b. O método apropriado neste caso é o das cascas cilíndricas.



Neste caso, $\overline{r}(x) = x$ e $h(x) = e^{-x}$.

Assim, $V = 2\pi\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = 2\pi\lim_{t\to+\infty}\int_0^t xe^{-x}dx.$

Aplicaremos o método de integração por partes para resolver $\int_0^t xe^{-x}dx$. Seja $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{cases}$

$$\int_0^t xe^{-x}dx = x(-e^{-x})\Big]_0^t - \int_0^t -e^{-x}dx = -te^{-t} - e^{-x}\Big]_0^t$$
$$= -te^{-t} - e^{-t} + 1.$$

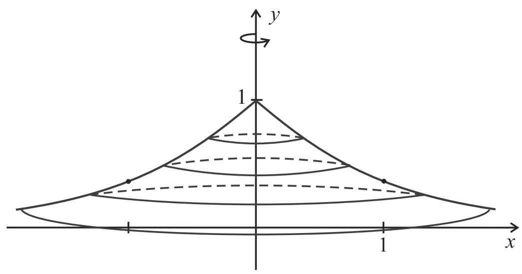
Assim, $V = 2\pi\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = 2\pi\lim_{t\to+\infty}\left[-te^{-t} - e^{-t} + 1\right]$

$$= 2\pi\lim_{t\to+\infty}\left[-te^{-t}\right] - 2\pi\lim_{t\to+\infty}\left[e^{-t}\right] + 2\pi.$$

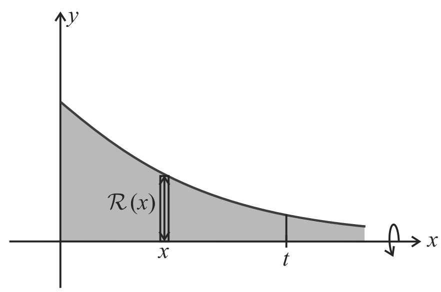
Observe que $\lim_{t\to+\infty}\left[-e^{-t}\right] = 0$ e $\lim_{t\to+\infty}\left[-te^{-t}\right] = \lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{t}{e^t}\right] \overset{L'H}{=}$
$\lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{e^t} = 0.$

Logo, $V = 2\pi$ unidades de volume.

Esboço do sólido:



c. O método apropriado neste caso é o dos discos.

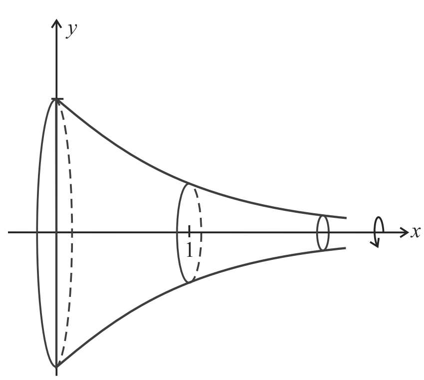


Neste caso, $R(x) = e^{-x}$.

$$V = \pi \int_0^{+\infty} \left[e^{-x}\right]^2 dx = \pi \lim_{t \to +\infty} \int_0^t e^{-2x} dx = \pi \lim_{t \to +\infty} \left. \frac{e^{-2x}}{-2} \right]_0^t$$

$= \pi \lim\limits_{t \to +\infty} \left[\dfrac{e^{-2t}}{-2} + \dfrac{1}{2}\right] = -\pi \lim\limits_{t \to +\infty} \left[\dfrac{1}{2e^{2t}}\right] + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ unidades de volume.

Esboço do sólido:



PASSO A PASSO DO SIMULADO 3

Solução da 1ª Questão

a. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{5+12x-9x^2}}dx$

Usando a técnica de completar quadrados, temos que $5+12x-9x^2 = 5+4-(9x^2-12x+4) = 9-(3x-2)^2$.

Logo, $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{5+12x-9x^2}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{9-(3x-2)^2}}dx.$

Façamos a substituição $u = 3x-2 \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}(u+2)$ $\Rightarrow dx = \dfrac{1}{3}du.$

Logo, $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{9-(3x-2)^2}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{3}(u+2)}{\sqrt{9-u^2}}du$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{(u+2)}{\sqrt{9-u^2}}du = \underbrace{\frac{1}{9}\int \frac{u}{\sqrt{9-u^2}}du}_{\text{(I)}} + \underbrace{\frac{2}{9}\int \frac{1}{\sqrt{9-u^2}}}_{\text{(II)}}. \qquad (5.39)$$

Observe que podemos integrar imediatamente (I) se fizermos uma substituição simples do tipo $z = 9-u^2 \Rightarrow dz = -2u\,du \Rightarrow -\dfrac{dz}{2} = u\,du.$

Assim,

$$\frac{1}{9}\int \frac{u}{\sqrt{9-u^2}}du = \frac{1}{9}\int (9-u^2)^{-\frac{1}{2}}u\,du = -\frac{1}{9}\int z^{-\frac{1}{2}}\frac{dz}{2}$$

$$= -\frac{1}{18}\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C_1 = -\frac{1}{9}\left(9-u^2\right)^{\frac{1}{2}} + C_1 = -\frac{1}{9}(5+12x-9x^2)^{\frac{1}{2}} + C_1. \qquad (5.40)$$

Por outro lado, note-se que uma das regras básicas de integração $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \text{arcsen}\left(\frac{u}{a}\right) + C$ é aplicável. Logo,

$$\frac{2}{9}\int \frac{du}{\sqrt{9-u^2}} = \frac{2}{9}\,\text{arcsen}\left(\frac{u}{3}\right) + C_2 = \frac{2}{9}\,\text{arcsen}\left(\frac{3x-2}{3}\right) + C_2. \qquad (5.41)$$

Substituindo 5.40 e 5.41 em 5.39, temos

$$\int \frac{x}{\sqrt{5+12x-9x^2}}dx = -\frac{1}{9}(5+12x-9x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{9}\,\text{arcsen}\left(\frac{3x-2}{3}\right) + C.$$

b. $\displaystyle\int \frac{x^3+4x^2-4x-1}{(x^2+1)^2}\,dx$

A expansão em frações parciais tem a seguinte forma:

$$\frac{x^3+4x^2-4x-1}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}.$$

Multiplicando a igualdade por $(x^2+1)^2$, temos

$$\begin{aligned} x^3+4x^2-4x-1 &= (Ax+B)(x^2+1)+Cx+D \\ &= Ax^3+Ax+Bx^2+B+Cx+D \\ &= Ax^3+Bx^2+(A+C)x+(B+D). \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes, obtemos o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} A=1 \\ B=4 \\ A+C=-4 \\ B+D=-1 \end{cases}$$

A solução desse sistema é $A=1$, $B=4$, $C=-5$ e $D=-5$.

Portanto, $\displaystyle\int \frac{x^3+4x^2-4x-1}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{(x+4)}{(x^2+1)}dx - \int \frac{(5x+5)}{(x^2+1)^2}dx$

$$= \int \frac{x}{(x^2+1)}dx + 4\int \frac{1}{(x^2+1)}dx - 5\int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx - 5\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2+1)}dx + 4\,\text{arctg}\,x - \frac{5}{2}\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx - 5\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$$

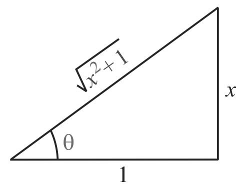
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 4\,\text{arctg}\,x - \underbrace{\frac{5}{2}\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx}_{\text{(III)}} - \underbrace{5\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx}_{\text{(IV)}} \tag{5.42}$$

$$\frac{5}{2}\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{5}{2}\int (x^2+1)^{-2}2x\,dx = \frac{5}{2}\frac{(x^2+1)^{-1}}{-1} + C_1$$

$$= -\frac{5}{2(x^2+1)} + C_1. \tag{5.43}$$

Vamos calcular $\quad 5\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx.$

Primeiro note que nenhuma das regras básicas de integração é aplicável. Para usar uma substituição trigonométrica, observe que estamos no caso de integrais que tem termos da forma $\sqrt{a^2+x^2}$, com $a = 1$.



Do triângulo retângulo associado, tem-se: $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{x}{1} \Rightarrow$
$\begin{cases} x = \operatorname{tg}\theta \\ dx = \sec^2\theta\, d\theta \end{cases}$

Também, $\sec\theta = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{1} \Rightarrow \sqrt{x^2+1} = \sec\theta \Rightarrow x^2+1 = \sec^2\theta.$

Assim,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{(\sec^2\theta)^2} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec^4\theta} = \int \frac{d\theta}{\sec^2\theta}$$

$$= \int \cos^2\theta\, d\theta = \int \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta + C$$

$$= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}(2\operatorname{sen}\theta\, \cos\theta) + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) + C.$$

Portanto, $\quad \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}\right) + C.$

Logo,

$$5\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{5}{2}\operatorname{arctg}(x) + \frac{5}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}\right) + C \qquad (5.44)$$

Substituindo 5.43 e 5.44 em 5.42, resulta

$$\int \frac{x^3+4x^2-4x-1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 4\operatorname{arctg} x + \frac{5}{2(x^2+1)}$$
$$-\frac{5}{2}\operatorname{arctg}(x) - \frac{5}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}\right) + C.$$

Solução da 2ª Questão

• Vamos mostrar que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x}dx$ é convergente.

Lembremos que

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{\pi}^{t} \frac{\cos x}{x}dx. \qquad (5.45)$$

Por outro lado, usando integração por partes, temos que

$$\int_{\pi}^{t} \frac{\cos x}{x}dx = \int_{\pi}^{t} \underbrace{\frac{1}{x}}_{u}\,\underbrace{\cos x\,dx}_{dv} = \frac{1}{x}(\operatorname{sen} x)\Big]_{\pi}^{t} + \int_{\pi}^{t} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}dx$$

$$= \frac{1}{t}(\operatorname{sen} t) - \frac{1}{\pi}(\underbrace{\operatorname{sen}\pi}_{0}) + \int_{\pi}^{t} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}dx.$$

Logo,

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{\pi}^{t} \frac{\cos x}{x}dx = \underbrace{\lim_{t\to\infty}\underbrace{\frac{1}{t}}_{\searrow 0}\,(\underbrace{\operatorname{sen} t}_{\text{função limitada}})}_{=0 \text{ (Corol. do T. do Confronto)}} + \lim_{t\to\infty}\int_{\pi}^{t} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}dx = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}dx. \qquad (5.46)$$

Substituindo 5.46 em 5.45, obtemos

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x}dx = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}dx. \qquad (5.47)$$

Afirmamos que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}dx$ é convergente.

De fato, observe que $0 \le |\operatorname{sen} x| \le 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, logo $0 \le \left|\dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}\right| = \dfrac{|\operatorname{sen} x|}{x^2} \le \dfrac{1}{x^2}$, para todo $x \in [\pi, +\infty)$. E, pelos exemplos referenciais, sabemos que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ é convergente. Assim, pelo critério de comparação, resulta que

$$\int_{\pi}^{+\infty} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\right| dx \text{ é convergente.} \qquad (5.48)$$

De 5.48 e da propriedade dada no Exemplo 27.6 do caderno didático resulta que

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} dx \text{ é convergente.} \qquad (5.49)$$

Assim, de 5.47 e 5.49, podemos afirmar que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ é convergente.

• Mostraremos que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x}\right| dx$ é divergente.

Sabemos que $0 \leq |\cos x| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Multiplicando a expressão anterior por $0 \leq |\cos x|$, temos $0 \leq |\cos x||\cos x| \leq |\cos x|$, logo, $0 \leq \underbrace{|\cos x|^2}_{\cos^2 x} \leq |\cos x|$, assim $0 \leq \cos^2 x \leq |\cos x|$.

Portanto,

$$0 \leq \frac{\cos^2 x}{x} \leq \frac{|\cos x|}{x} = \left|\frac{\cos x}{x}\right| \text{ para todo } x \in [\pi, +\infty). \quad (5.50)$$

Basta mostrar então que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x} dx$ diverge. Assim, pela desigualdade dada em 5.50 e o critério de comparação, podemos concluir que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x}\right| dx$ diverge.

Lembremos que

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x} dx = \lim_{t \to +\infty} \int_{\pi}^{t} \frac{\cos^2 x}{x} dx. \qquad (5.51)$$

Por outro lado,

$$\int_{\pi}^{t} \frac{\cos^2 x}{x} dx = \int_{\pi}^{t} \frac{1}{x} \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) dx. \qquad (5.52)$$

Utilizando integração por partes, temos que

$$\int_{\pi}^{t} \underbrace{\frac{1}{x}}_{u} \underbrace{\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) dx}_{dv} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4}\right)\Bigg]_{\pi}^{t} + \int_{\pi}^{t} \left(\frac{1}{2x} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4x^2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4t} - \frac{1}{2} - \frac{\overbrace{\operatorname{sen} 2\pi}^{0}}{4\pi} + \frac{1}{2}\int_{\pi}^{t} \frac{1}{x}dx + \int_{\pi}^{t} \frac{\operatorname{sen} 2x}{(2x)^2}dx$$

$$= \frac{\operatorname{sen} 2t}{4t} + \frac{1}{2}\int_{\pi}^{t} \frac{1}{x}dx + \int_{\pi}^{t} \frac{\operatorname{sen} 2x}{(2x)^2}dx. \tag{5.53}$$

Substituindo 5.53 em 5.52 e tomando limite quando $t \to +\infty$, obtemos

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{\pi}^{t} \frac{\cos^2 x}{x}dx = \underbrace{\lim_{t\to+\infty} \underbrace{\frac{1}{4t}}_{\searrow 0}\ \underbrace{\operatorname{sen} 2t}_{\text{limitada}}}_{=0 \text{ (Corol. do T. do Confronto)}} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_{\pi}^{+\infty} \frac{dx}{x}}_{\text{diverge}} + \underbrace{\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} 2x}{(2x)^2}dx}_{\text{converge (Basta comparar com } \int_{\pi}^{+\infty} \frac{dx}{(2x)^2})}. \tag{5.54}$$

De acordo com os exemplos referenciais, sabemos que uma das integrais impróprias no segundo membro de 5.54 diverge, podemos concluir de 5.54 e 5.51 que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x}\right| dx$ diverge.

Solução da 3ª Questão

a.
$$\int_{0}^{+\infty} \operatorname{arctg} z\, dz = \lim_{t\to+\infty} \int_{0}^{t} \operatorname{arctg} z\, dz \tag{5.55}$$

Por outro lado, usando integração por partes, temos que

$$\int_{0}^{t} \underbrace{\operatorname{arctg} z}_{u}\, \underbrace{dz}_{dv} = z \operatorname{arctg} z\Big]_{0}^{t} - \frac{1}{2}\int_{0}^{t} \frac{2z\,dz}{1+z^2}$$

$$= t \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln(1+z^2)\Big]_{0}^{t} = t \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2). \tag{5.56}$$

Logo,

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{0}^{t} \operatorname{arctg} z\, dz = \lim_{t\to+\infty} \left[t \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]. \tag{5.57}$$

Observe que este último limite é uma forma indeterminada do tipo $\infty - \infty$. Assim, para eliminar a indeterminação, observe que

$$\lim_{t\to+\infty} \left[t \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right] = \lim_{t\to+\infty} t\left[\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\frac{\ln(1+t^2)}{t}\right]. \tag{5.58}$$

Como

$$\lim_{t\to+\infty}\left[\operatorname{arctg} t-\frac{1}{2}\frac{\ln(1+t^2)}{t}\right]=\lim_{t\to+\infty}\operatorname{arctg} t-\underbrace{\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2}\frac{\ln(1+t^2)}{t}}_{\text{forma indeterminada } \frac{\infty}{\infty}}$$

$$\overset{L'H}{=}\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1}\overset{L'H}{=}\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(0)=\frac{\pi}{2}.$$

Segue que

$$\lim_{t\to+\infty} t\left[\operatorname{arctg} t-\frac{1}{2}\frac{\ln(1+t^2)}{t}\right]=+\infty. \tag{5.59}$$

Substituindo 5.59 em 5.58; 5.58 em 5.57 e 5.57 em 5.55 resulta que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\operatorname{arctg} z\,dz$ diverge.

b. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^{x}\operatorname{arctg} z\,dz$

Observemos que da parte (a) tem-se que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\operatorname{arctg} z\,dz$ diverge. Logo, podemos afirmar que, quando $x\to+\infty$, a expressão $\displaystyle\frac{1}{x}\int_0^{x}\operatorname{arctg} z\,dz$ é uma forma indeterminada do tipo $0\cdot\infty$. Lembremos que, para aplicar a regra de L'Hôpital, precisamos de uma forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Assim, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^{x}\operatorname{arctg} z\,dz=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{x}\operatorname{arctg} z\,dz}{x}$

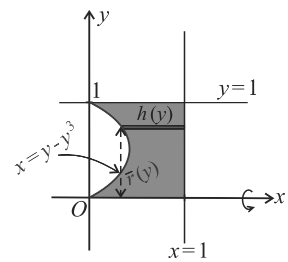
$$\overset{L'H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{d}{dx}\left(\int_0^{x}\operatorname{arctg} z\,dz\right)}{1}\overbrace{=}^{1^{\underline{a}}\text{ f. TFC}}\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2}.$$

Solução da 4ª Questão

a. do eixo Ox

O método apropriado aqui é o das cascas cilíndricas.

Esboço da região mostrando a casca típica:



Neste caso, $\overline{r}(y) = y$ e $h(y) = 1-(y-y^3)$.

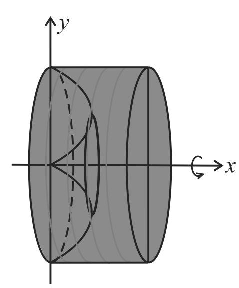
Assim, $V = 2\pi \int_0^1 \overline{r}(y)\, h(y)\, dy = 2\pi \int_0^1 y(1-(y-y^3))dy$

$$V = 2\pi \int_0^1 y(1-y+y^3)dy = 2\pi \int_0^1 (y-y^2+y^4)dy$$

$$V = 2\pi \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right) \Bigg]_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right).$$

$$V = 2\pi \frac{(15-10+6)}{30} = \frac{11}{15}\pi \text{ unidades de volume.}$$

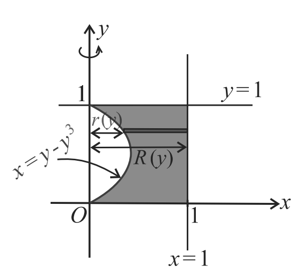
Esboço do sólido de revolução:



b. do eixo Oy

O método apropriado neste caso é o dos discos ou arruelas.

Esboço da região mostrando a arruela típica:



Note-se que $R(y)=1,\ r(y)=(y-y^3)$

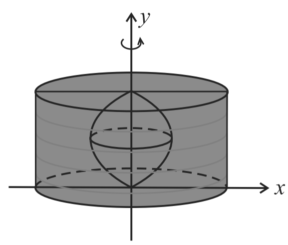
$$V=\pi\int_0^1\left[(R(y))^2-(r(y))^2\right]dy=\pi\int_0^1\left[1-\left(y-y^3\right)^2\right]dy$$

$$V=\pi\int_0^1\left[1-\left(y^2-2y^4+y^6\right)\right]dy=\pi\int_0^1\left[1-y^2+2y^4-y^6\right]dy$$

$$V=\pi\left[y-\frac{y^3}{3}+2\frac{y^5}{5}-\frac{y^7}{7}\right]_0^1=\pi\left[1-\frac{1}{3}+\frac{2}{5}-\frac{1}{7}\right]$$

$$V=\pi\frac{(105-35+42-15)}{105}=\frac{97}{105}\pi \text{ unidades de volume.}$$

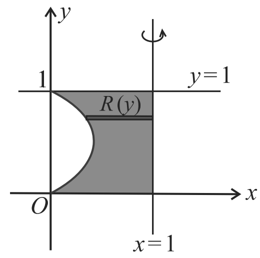
Esboço do sólido de revolução:



c. da reta $x=1$

O método apropriado neste caso é o dos discos.

Esboço da região mostrando o disco típico:



Note-se que $R(y)=1-(y-y^3)$.

$$V=\pi\int_0^1[R(y)]^2\,dy=\pi\int_0^1\left[1-\left(y-y^3\right)\right]^2dy$$

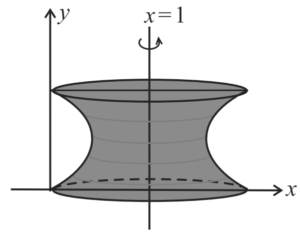
$$V=\pi\int_0^1\left[1-y+y^3\right]^2dy=\pi\int_0^1\left[1-2y+y^2+2y^3-2y^4+y^6\right]dy$$

$$V=\pi\left(y-2\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+2\frac{y^4}{4}-2\frac{y^5}{5}+\frac{y^7}{7}\right]_0^1$$

$$V=\pi\left(1-1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{5}+\frac{1}{7}\right)=\pi\left(\frac{70+105-84+30}{210}\right)$$

$$V=\frac{121}{210}\pi \text{ unidades de volume.}$$

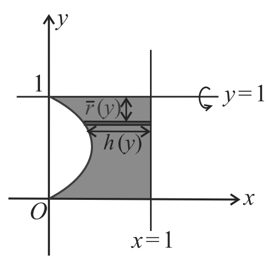
Esboço do sólido de revolução:



d. da reta $y = 1$.

O método apropriado é o das cascas cilíndricas.

Esboço da região mostrando a casca típica:



Neste caso, $\overline{r}(y) = 1 - y$ e $h(y) = 1 - (y - y^3)$.

Assim,

$$V = 2\pi \int_0^1 \overline{r}(y)\, h(y)\, dy = 2\pi \int_0^1 (1-y)(1-(y-y^3))dy$$

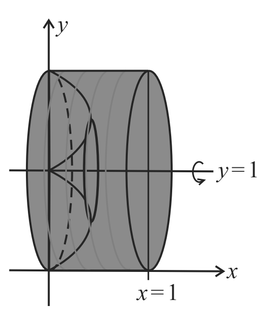
$$V = 2\pi \int_0^1 \left(1-(y-y^3)\right) dy - \underbrace{2\pi \int_0^1 y\left(1-(y-y^3)\right) dy}_{\frac{11}{15}\pi \text{ (veja a parte (a))}}$$

$$V = 2\pi \int_0^1 (1-y+y^3)dy - \frac{11}{15}\pi = 2\pi \left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4}\right)\Bigg]_0^1 - \frac{11}{15}\pi$$

$$V = 2\pi \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - \frac{11}{15}\pi = 2\pi \left(\frac{4-2+1}{4}\right) - \frac{11}{15}\pi$$

$$V = \frac{3}{2}\pi - \frac{11}{15}\pi = \frac{45-22}{30}\pi = \frac{23}{30}\pi \text{ unidades de volume.}$$

Esboço do sólido de revolução:



Apêndice 6

Gabaritos dos Simulados da AP2

Prova 1

Solução da 1ª Questão

a. $\dfrac{x^2}{(x+1)^3} = \dfrac{A}{(x+1)} + \dfrac{B}{(x+1)^2} + \dfrac{C}{(x+1)^3}$, logo

$$x^2 = A(x+1)^2 + B(x+1) + C \tag{6.1}$$

Se em 6.1 fazemos:

$x = -1 \Rightarrow 1 = C$

$x = 0 \Rightarrow 0 = A + B + 1 \Rightarrow A + B = -1$

$x = 1 \Rightarrow 1 = 4A + 2B + 1 \Rightarrow 4A + 2B = 0$

Resolvendo o sistema resulta $A = 1$ e $B = -2$.

Assim, $$\int \frac{x^2}{(x+1)^3}dx = \int \frac{dx}{(x+1)} + \int \frac{-2dx}{(x+1)^2} + \int \frac{dx}{(x+1)^3}$$
$$= \ln|x+1| - 2\int (x+1)^{-2}dx + \int (x+1)^{-3}dx$$
$$= \ln|x+1| - 2\frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \frac{(x+1)^{-2}}{-2} + C$$
$$= \ln|x+1| + \frac{2}{(x+1)} - \frac{1}{2(x+1)^2} + C$$

b. Vamos fazer a substituição trigonométrica na integral indefinida $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$ e, então, calcular a integral definida usando os limites de integração em x.

Primeiro note-se que nenhuma das regras básicas de integração é aplicável. Para usar uma substituição trigonométrica, observe que $\sqrt{9+x^2}$ é da forma $\sqrt{a^2+x^2}$ com $a = 3$.

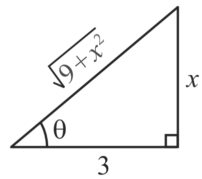


Figura 6.1

Fazendo a substituição trigonométrica $\begin{cases} x = 3\,\mathrm{tg}\,\theta \\ dx = 3\sec^2\theta\, d\theta \end{cases}$, temos do triângulo associado da **Figura 6.1** que $\sqrt{9+x^2} = 3\sec\theta$.

Obtemos $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}} = \int \frac{3\sec^2\theta\, d\theta}{3\sec\theta} = \int \sec\theta\, d\theta$

$$= \ln|\sec\theta + \mathrm{tg}\,\theta| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{9+x^2}}{3} + \frac{x}{3}\right| + C.$$

Logo, $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}} = \ln\left|\frac{\sqrt{9+3^3}}{3} + \frac{3}{3}\right| - \ln\left|\frac{\sqrt{9+0^2}}{3} + \frac{0}{3}\right|$

$$= \ln\left|\frac{3\sqrt{2}}{3} + 1\right| - \ln 1 = \ln(\sqrt{2}+1)$$

c. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+2)(x+3)}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{1}{(x+2)(x+3)}dx$

Vamos calcular a integral indefinida $\displaystyle\int \frac{1}{(x+2)(x+3)}dx$

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+3)} \Rightarrow 1 = A(x+3) + B(x+2) \tag{6.2}$$

Se em 6.2 fazemos:

$x = -2 \Rightarrow 1 = A$

$x = -3 \Rightarrow 1 = B(-1) \Rightarrow B = -1$

$$\int \frac{1}{(x+2)(x+3)}dx = \int \frac{1}{(x+2)}dx - \int \frac{1}{(x+3)}dx$$

$$= \ln|x+2| - \ln|x+3| + C = \ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right| + C.$$

Logo, $\displaystyle\int_0^t \frac{1}{(x+2)(x+3)}dx = \ln\left|\frac{t+2}{t+3}\right| - \ln\left(\frac{2}{3}\right).$

Portanto, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{1}{(x+2)(x+3)}dx = \lim_{t\to+\infty}\left[\ln\left|\frac{t+2}{t+3}\right|\right] - \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

$$= \ln\Bigg|\underbrace{\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+2}{t+3}\right)}_{1}\Bigg| - \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln|1| - \ln\left(\frac{2}{3}\right) = -\ln\left(\frac{2}{3}\right).$$

Solução da 2ª Questão

Observe que $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$ é uma integral imprópria de uma função não-limitada quando $x \to 0^+$. Note-se que, para $x > 0$, temos que $e^x > 1$, então $\frac{1}{e^x} < 1$. Podemos afirmar também que $\sqrt{x} > 0$ para $x > 0$, portanto $0 < \frac{1}{e^x\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ para todo $x > 0$, em particular

$$0 < \frac{1}{e^x\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{para todo } \; 0 < x \leq 1. \tag{6.3}$$

Por outro lado, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx$ é um caso particular do exemplo referencial: "Se $r < 1$, então $\int_0^b \frac{1}{x^r}dx$ é convergente". Neste caso, $r = \frac{1}{2} < 1$, assim $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ é convergente. Logo, de 6.3 e do Teste de Comparação para integrais impróprias, resulta que $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ é convergente.

Solução da 3ª Questão

Observe que $y = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$. Por outro lado, fazendo a interseção de $y = 1$ e $y = (x-2)^2$, resulta que $x = 1$ e $x = 3$. Desenhamos a **Figura 6.2** mostrando a região e o eixo de rotação Oy. O esboço do sólido é mostrado na **Figura 6.3**.

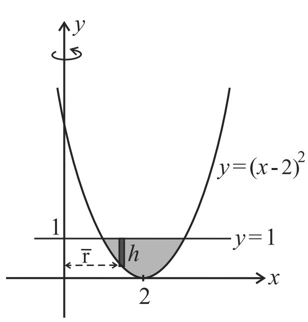


Figura 6.2

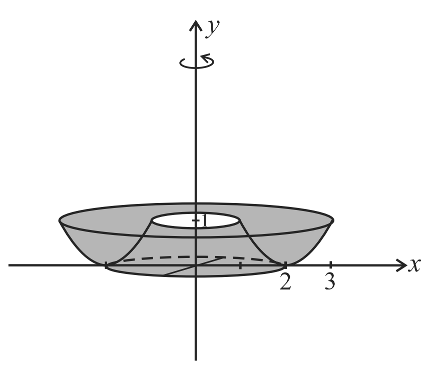


Figura 6.3

Identificamos a função altura da casca típica $h(x)$ e o raio médio da casca típica $\overline{r}(x)$, onde $h(x) = 1 - (x-2)^2$ e $\overline{r} = x$ para $1 \leq x \leq 3$. Note que $0 \leq (x-2)^2 \leq 1$ para $1 \leq x \leq 3$, assim $h(x) = 1-(x-2)^2 \geq 0$ e $\overline{r}(x) = x \geq 0$.

O volume é dado pela fórmula $V = 2\pi \int_a^b \overline{r}(x)\,h(x)\,dx$. Assim, o volume é

$$V = 2\pi \int_1^3 x\left(1-(x-2)^2\right)dx = 2\pi \int_1^3 x(1-x^2+4x-4)dx$$

$$= 2\pi \int_1^3 (-x^3+4x^2-3x)dx = 2\pi \left(-\frac{x^4}{4}+4\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}\right)\Bigg]_1^3$$

$$= 2\pi \left[\left(-\frac{3^4}{4}+4\frac{3^3}{3}-3\frac{3^2}{2}\right)-\left(-\frac{1^4}{4}+4\frac{1^3}{3}-3\frac{1^2}{2}\right)\right]$$

$$= 2\pi \left[3^3\left(\frac{-9+16-6}{12}\right)+\left(\frac{3-16+18}{12}\right)\right]$$

$$= 2\pi \left[27\left(\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{5}{12}\right)\right] = \frac{16\pi}{3} \text{ unidades de volume.}$$

Solução da 4ª Questão

a. Observe que $y = f(x) = \frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$ é contínua, positiva em $[0,1]$ e é diferenciável em $(0,1)$. Temos também que $y' = f'(x) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)(x^2+2)^{\frac{1}{2}}2x = x(x^2+2)^{\frac{1}{2}}$ é contínua em $(0,1)$. Logo,

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+x^2(x^2+2)}\,dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+x^4+2x^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{(1+x^2)^2}\,dx = \int_0^1 |1+x^2|\,dx$$

$$= \int_0^1 (1+x^2)\,dx = x+\frac{x^3}{3}\Bigg]_0^1 = 1+\frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

b. $y' - e^x y = 0$

Observe que $y' - e^x y = 0$ é uma equação linear de primeira ordem homogênea da forma $y' + p(x)y = 0$. Neste caso, $p(x) = -e^x$ e $q(x) = 0$. $\int p(x)\,dx = \int -e^x\,dx = -e^x$, assim o fator integrante é $\mu(x) = e^{-e^x}$, logo $e^{-e^x}y' - e^{-x}e^{-e^x}y = 0$.

$\frac{d}{dx}\left(e^{-e^x}y\right) = 0 \Rightarrow e^{-e^x}y = C \Rightarrow y = Ce^{e^x}$ é a solução geral da equação dada.

PROVA 2

Solução da 1ª Questão

a. $\displaystyle\int \frac{\text{sen}^3 x}{\cos^4 x}\,dx = \int \text{sen}^3 x \cos^{-4} x\,dx$

$$\int \text{sen}^3 x\,\cos^{-4} x\,dx = \int \text{sen}^2 x\,\cos^{-4} x\ \text{sen}\,x\,dx$$

$$= -\int (1-\underbrace{\cos^2 x}_{u^2})\ \underbrace{\cos^{-4} x}_{u^{-4}}\ \underbrace{(-\,\text{sen}\,x)\,dx}_{du}$$

$$= -\int (1-u^2)u^{-4}\,du = \int (-u^{-4}+u^{-2})\,du$$

$$= -\frac{u^{-3}}{-3} + \frac{u^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{3u^3} - \frac{1}{u} + C$$

$$= \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C$$

b. $\displaystyle\int_{-\infty}^{3} \frac{dx}{x^2+9} = \lim_{t\to-\infty} \int_t^3 \frac{dx}{x^2+9} = \lim_{t\to-\infty} \left[\frac{1}{3}\,\text{arctg}\,\frac{x}{3}\right]_t^3$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left[\frac{1}{3}\,\text{arctg}\,1 - \frac{1}{3}\,\text{arctg}\,\frac{t}{3}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{\pi}{4}\right] - \frac{1}{3}\underbrace{\lim_{t\to-\infty}\left[\text{arctg}\,\frac{t}{3}\right]}_{-\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3}\left[-\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$$

Logo, a integral dada converge a $\dfrac{\pi}{4}$.

Solução da 2ª Questão

Observe que $f(x) = \dfrac{1}{e^x} > 0$ e $g(x) = \dfrac{5}{2+e^x} > 0$.

Podemos usar o critério do quociente

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{5}{2+e^x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+e^x}{5e^x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{5e^x} + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}.$$

Como $L = \dfrac{1}{5}$, pelo teste de comparação no limite $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{5}{2+e^x}\,dx$ e $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^x}\,dx$ comportam-se da mesma maneira.

Por outro lado, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^x}\,dx = \int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$ e esta última integral, pelos exemplos referenciais, (ou calculando-a diretamente) sabemos que converge, logo, pelo critério do limite do quociente, podemos afirmar que $\int_1^{+\infty} \frac{5}{2+e^x}\,dx$ é convergente.

Solução da 3ª Questão

a. Na **Figura 6.4**, mostramos um esboço da região

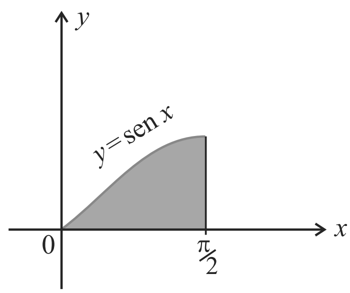


Figura 6.4

b. i. em torno do eixo Oy.

Na **Figura 6.5**, mostramos um retângulo típico para este caso.

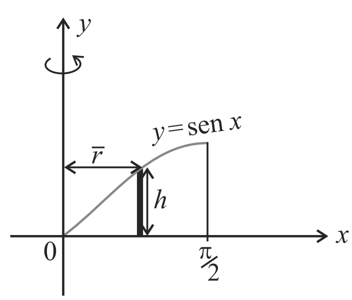


Figura 6.5

Assim, temos usando o método das cascas cilíndricas que

$$V = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \overline{r}(x)\; h(x)\; dx.$$

Isto é,

$$V = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{x}_{u}\underbrace{\operatorname{sen} x\,dx}_{dv} = \underbrace{2\pi \underbrace{x}_{u}\underbrace{(-\cos x)}_{v}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{0} - 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{-\cos x}_{v}\underbrace{dx}_{du}$$

$$V = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\; dx = 2\pi\; \operatorname{sen} x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi \text{ unidades de volume.}$$

ii. em torno do eixo Ox.

Na **Figura 6.6**, mostramos um retângulo típico neste caso.

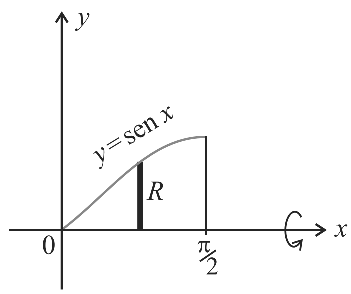


Figura 6.6

Usando o método dos discos, temos que

$$V = \left(\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (R(x))^2\, dx\right)$$

Isto é,

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (R(x))^2 dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{sen}^2 x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x) dx$$

$$V = \frac{\pi}{2}\, x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{4} \int_0^{2} (\cos 2x) 2\; dx = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{4} (\text{sen}\, 2x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$V = \frac{\pi^2}{2} \text{ unidades de volume.}$$

Solução da 4ª Questão

a. Observe que $y = f(x) = \frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$ é contínua, positiva em $[0,3]$ e é diferenciável em $(0,3)$. Temos também que $y' = f'(x)$ $= \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)(x^2+2)^{\frac{1}{2}}\; 2x = x(x^2+2)^{\frac{1}{2}}$ é contínua em $(0,3)$.

Logo,

$$L = \int_0^3 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\; dx = \int_0^3 \sqrt{1 + x^2(x^2+2)}\; dx$$

$$= \int_0^3 \sqrt{1 + x^4 + 2x^2}\; dx = \int_0^3 \sqrt{(1+x^2)^2}\; dx = \int_0^3 |1 + x^2|\; dx$$

$$= \int_0^3 (1+x^2)\; dx = x + \frac{x^3}{3}\Big]_0^3 = 3 + 9 = 12.$$

b. $y' + \frac{1}{1+e^x} y = \frac{1}{1+e^x}$

Observe que $y' + \frac{1}{1+e^x} y = \frac{1}{1+e^x}$ é uma equação linear de primeira ordem não-homogênea da forma $y' + p(x)y = q(x)$. Neste caso, $p(x) = \frac{1}{1+e^x}$ e $q(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

$$\int p(x)\,dx = \int \frac{1}{1+e^x}\,dx \overbrace{=}^{\begin{cases} u = e^x \\ du = e^x dx \end{cases}} \int \frac{1}{u(1+u)}\,du$$

$$\overbrace{=}^{\text{f. parciais}} \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du = \ln|u| - \ln|1+u| = \ln\left(\frac{|u|}{|1+u|}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)$$

Assim, o fator integrante é $\mu(x) = e^{\ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)} = \frac{e^x}{1+e^x}$, logo

$$\frac{e^x}{1+e^x} y' + \frac{1}{1+e^x}\,\frac{e^x}{1+e^x} y = \frac{1}{1+e^x}\,\frac{e^x}{1+e^x}$$

$$\frac{e^x}{1+e^x} y' + \frac{e^x}{(1+e^x)^2} y = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{1+e^x} y\right) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \Rightarrow \frac{e^x}{1+e^x} y = -\frac{1}{1+e^x} + C$$

$\Rightarrow y = -e^{-x} + C(1+e^{-x})$ é a solução geral da equação dada. Observe que esta solução pode também ser expressa como $y = 1 + K(e^{-x}+1)$, onde K é uma constante arbitraria.

Prova 3

Solução da 1ª Questão

a. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)} = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$. Faça a substituição

$$u = \sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \Rightarrow 2\,du = \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \\ u^2 = x \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = 2\int \frac{du}{(1+u^2)} = 2\,\text{arctg}\,u + C = 2\,\text{arctg}\,\sqrt{x} + C$$

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \lim_{t\to\infty} 2\,\text{arctg}\,\sqrt{x}\Big]_1^t = \lim_{t\to\infty} (2\,\text{arctg}\,\sqrt{t} - 2\underbrace{\text{arctg}\,1}_{\frac{\pi}{4}})$$

$$= 2\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

b. Note-se que a decomposição em frações parciais para $\dfrac{x+1}{x^2(x^2+1)}$ tem a forma

$$\frac{x+1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \tag{6.4}$$

Para determinar os valores de A, B, C e D, multiplicamos ambos os lados da Expressão 6.4 pelo produto dos denominadores $x^2(x^2+1)$, obtendo

$$x+1 = Ax(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)x^2 \tag{6.5}$$

$$x+1 = Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx^3 + Dx^2$$

$$x+1 = (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + Ax + B$$

$$A + C = 0 \tag{6.6}$$

$$B + D = 0 \tag{6.7}$$

$$A = 1 \tag{6.8}$$

$$B = 1 \tag{6.9}$$

Substituindo 6.9 em 6.7 dá $D = -1$. Substituindo 6.8 em 6.6 dá $C = -1$. Logo, resulta de 6.4 que

$$\frac{x+1}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{-x-1}{x^2+1}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{x^2(x^2+1)}\,dx &= \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{-x-1}{x^2+1}\,dx \\
&= \ln|x| + \int x^{-2}\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\
&= \ln|x| + \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x + C \\
&= \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x + C.
\end{aligned}$$

Solução da 2ª Questão

Observe que $0 \leq |\operatorname{sen} 2x| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ em particular para todo $x \in (\pi, +\infty)$. Logo, $0 \leq |\operatorname{sen} 2x|^2 \leq |\operatorname{sen} 2x| \leq 1$, ou seja, $0 \leq |\operatorname{sen}^2 2x| \leq 1$ para todo $x \in (\pi, +\infty)$.

Assim, $0 \leq \dfrac{|\operatorname{sen}^2 2x|}{x^2} \leq \dfrac{1}{x^2}$ para todo $x \in (\pi, +\infty)$. Como, pelos exemplos referenciais, $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ é convergente, podemos utilizar o critério de comparação para afirmar que

$$\int_{\pi}^{+\infty} \left| \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{x^2} \right| dx \text{ é convergente} \tag{6.10}$$

Logo, pela propriedade dada no Exemplo 27.6 do caderno didático, podemos afirmar que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{x^2}\, dx$ é convergente.

Outra forma de ver o problema é observar que neste caso:

$$\int_{\pi}^{+\infty} \left| \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{x^2} \right| dx = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen}^2 2x|}{x^2}\, dx = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{x^2}\, dx,$$

assim, neste caso, sem a necessidade da Propriedade dada no Exemplo 27.6, podemos afirmar diretamente de 6.10 que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{x^2}\, dx$ é convergente.

Solução da 3ª Questão

a. Utilizando a técnica de completar quadrados, temos que

$$x = y - y^2 = -\left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = -\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{4} = -\left(y - \frac{1}{2}\right)^2$$

Isto é, a equação dada é o gráfico de uma parábola de vértice em $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ que abre para a esquerda, por outro lado $x = 0$ é o eixo y. A região R é mostrada na **Figura 6.7**.

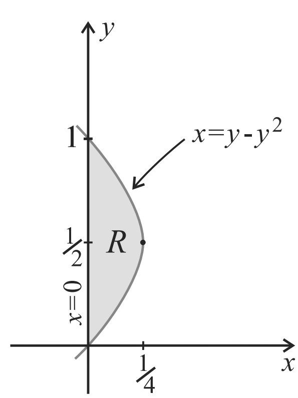


Figura 6.7

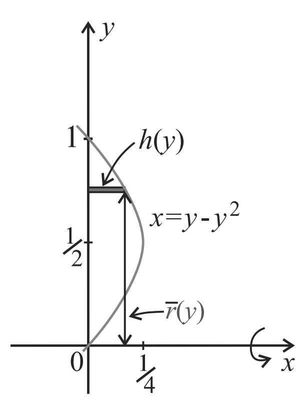


Figura 6.8

b. Em torno do eixo Ox.

Observe que, neste caso, utilizar o método das cascas cilíndricas resulta mais prático. Na **Figura 6.8**, mostramos o retângulo típico que vai gerar a casca típica e o eixo de rotação.

Identificamos a função altura da casca típica $h(y)$ e o raio médio da casca típica $\overline{r}(y)$ onde $h(y) = y - y^2$ e $\overline{r}(y) = y$ para $0 \leq y \leq 1$. A fórmula a ser utilizada é $V = 2\pi \int_a^b \overline{r}(y)\, h(y)\, dy$.

Logo, neste caso,

$$V = 2\pi \int_0^1 y(y-y^2)\, dy = 2\pi \int_0^1 (y^2-y^3)dy = 2\pi \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right) \Big]_0^1$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = 2\pi \frac{1}{12} = \frac{\pi}{6} \text{ unidades de volume.}$$

Solução da 4ª Questão

a. $y\,dy - 4x(y^2+1)^{\frac{1}{2}} dx = 0,\ y(0) = 1$

Da equação dada, temos que $y\,dy = 4x(y^2+1)^{\frac{1}{2}}\, dx$.

Podemos separar as variáveis na forma:

$$\frac{y}{(y^2+1)^{\frac{1}{2}}}\, dy = 4x\,dx \Rightarrow \int y(y^2+1)^{-\frac{1}{2}}\, dy = 4\int x\,dx.$$

Isto é,

$$\frac{1}{2}\int 2y(\underbrace{y^2+1}_{u})^{-\frac{1}{2}} dy = 4\int x\,dx \ \Rightarrow\ \frac{1}{2}\frac{(y^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 4\frac{x^2}{2} + C$$

$$\Rightarrow (y^2+1)^{\frac{1}{2}} = 2x^2 + C.$$

Da condição inicial $y(0) = 1$, obtém-se $\sqrt{1+1} = 2(0) + C \Rightarrow C = \sqrt{2}$. Portanto, a solução que satisfaz o problema de valor inicial dado tem a forma implícita $(y^2+1)^{\frac{1}{2}} = 2x^2 + \sqrt{2}$.

b. Observe que $y' - 2y = 1 - 2x$ é uma equação linear de primeira ordem não-homogênea da forma $y' + p(x)y = q(x)$. Neste caso, $p(x) = -2$ e $q(x) = 1 - 2x$. Podemos trabalhar por etapas achando $\int p(x)\, dx$, depois achar o fator integrante $\mu(x) = e^{\int p(x)\, dx}$, multiplicar a equação dada pelo fator integrante e continuar o processo como fizemos no EP14 ou podemos também, para fazer diferente, utilizar a fórmula da solução geral: $y = e^{(-\int p(x)\, dx)} \left[\int e^{(\int p(x)\, dx)} q(x)\, dx + C \right]$, onde C é uma constante arbitrária, assim resulta

$$y = e^{(-\int -2\,dx)}\left[\int e^{(\int -2\,dx)}(1-2x)\,dx + C\right],$$

ou seja, $\boxed{y = e^{2x}\left[\int e^{-2x}(1-2x)dx + C\right]}$.

Observe que $\displaystyle\int e^{-2x}(1-2x)\,dx = \int e^{-2x}dx - 2\int xe^{-2x}\,dx$

$$= -\frac{1}{2}\int e^{-2x}(-2)\,dx - 2\int xe^{-2x}\,dx = -\frac{e^{-2x}}{2} - 2\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^{-2x}\,dx}_{dv} \tag{6.11}$$

Integrando por partes a última integral e fazendo $u = x \Rightarrow du = dx$ e $dv = e^{-2x}\,dx \Rightarrow v = -\dfrac{1}{2}e^{-2x}$ resulta que

$$\int xe^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}\int e^{-2x}(-2)dx$$

$$= -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C_1$$

E substituindo este valor na integral 6.11 resulta

$$\int e^{-2x}(1-2x)\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} - 2\left[-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right] + C_1$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x} + xe^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} + C_1 = xe^{-2x} + C_1$$

Donde, finalmente, temos $y = e^{2x}\left[xe^{-2x} + C\right]$, ou seja, $y = x + Ce^{2x}$ onde C é uma constante arbitrária.

Apêndice 7

Exercícios Adicionais para as Semanas 10 até 13

Neste Apêndice apresentamos, para cada uma das semanas 10 até 13, o passo a passo de exercícios adicionais e outros exercícios propostos no caderno didático.

Semana 10

Exercício 7.1.

Calcule a integral $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{t^2}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}\, dt,$ usando:

a. Os limites de integração dados.

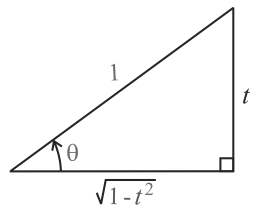
b. Os limites obtidos por uma substituição trigonométrica.

Solução:

a. Para usar os limites de integração dados, vamos encontrar primeiro a primitiva da integral indefinida

$$\int \frac{t^2}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}\, dt = \int \frac{t^2}{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3}\, dt.$$

Note-se que nenhuma das regras básicas de integração é aplicável. Para usar uma substituição trigonométrica, observe que $\sqrt{1-t^2}$ é da forma $\sqrt{a^2-x^2}$, com $a = 1$.



Do triângulo retângulo associado, tem-se:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{t}{1} \Rightarrow \begin{cases} t = \operatorname{sen}\theta \\ dt = \cos\theta\, d\theta \end{cases}.$$

Também $\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{1} = \cos\theta \Rightarrow \sqrt{1-t^2} = \cos\theta.$

Observe que $\sqrt{1-t^2}$ está no denominador da integral dada, assim é preciso que $\cos\theta$ seja maior do que zero. Note que $\cos\theta > 0$ para $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

$$\int \frac{t^2}{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3}\,dt = \int \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{(\cos\theta)^3}\cos\theta\,dt = \int \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \int \operatorname{tg}^2\theta\,d\theta = \int \left(\sec^2\theta - 1\right)d\theta = \int \sec^2\theta\,d\theta - \int 1\,d\theta$$

$$= \operatorname{tg}\theta - \theta + C = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} - \operatorname{arcsen} t + C$$

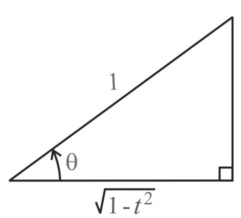
Agora calcularemos a integral definida usando a 2ª forma do TFC e os limites de integração dados, resultando

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{t^2}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}\,dt = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} - \operatorname{arcsen} t\Bigg]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} - \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} - \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.$$

b. Os limites obtidos por uma substituição trigonométrica.

Neste caso, vamos fazer a substituição trigonométrica e a mudança dos limites de integração.



Do triângulo retângulo associado, tem-se:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{t}{1} \Rightarrow \begin{cases} t = \operatorname{sen}\theta \\ dt = \cos\theta\, d\theta \end{cases}.$$

Também $\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{1} = \cos\theta \Rightarrow \sqrt{1-t^2} = \cos\theta.$

Observe que $\sqrt{1-t^2}$ está no denominador da integral dada, assim é preciso que $\cos\theta$ seja maior do que zero. Note que $\cos\theta > 0$ para $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

Precisamos considerar a mudança dos limites de integração, isto é, enquanto t varia desde $t = 0$ até $t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, θ varia desde $\theta = \operatorname{arcsen} 0 = 0$ até $\theta = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}$. Assim, $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{3}$, portanto

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{t^2}{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{(\cos\theta)^3}\cos\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^2\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sec^2\theta - 1\right)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec^2\theta\,d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{3}} 1\,d\theta$$

$$= \operatorname{tg}\theta - \theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.$$

Exercício 7.2.

Calcule as seguintes integrais:

a. $\displaystyle\int \frac{1}{t^4\sqrt{1-t^2}}\,dt$

b. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$

c. $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2+16)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

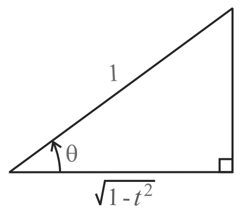
d. $\displaystyle\int_2^4 \sqrt{x^2-4}\,dx$

(Aula 22 do caderno didático, exercícios propostos nº 8, 4, 10 e 6, respectivamente)

Solução:

a. $\displaystyle\int \frac{1}{t^4\sqrt{1-t^2}}\,dt$

Note-se que nenhuma das regras básicas de integração é aplicável. Para usar uma substituição trigonométrica, observe que $\sqrt{1-t^2}$ é da forma $\sqrt{a^2-t^2}$ com $a = 1$.



Do triângulo retângulo associado, tem-se:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{t}{1} \Rightarrow \begin{cases} t = \operatorname{sen}\theta \\ dt = \cos\theta\, d\theta \end{cases}.$$

Também $\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{1} = \cos\theta \Rightarrow \sqrt{1-t^2} = \cos\theta.$

Observe que $\sqrt{1-t^2}$ está no denominador da integral dada, assim é preciso que $\cos\theta$ seja maior do que zero. Note que $\cos\theta > 0$ para $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$. Por outro lado, note que $\theta \neq 0$, pois se $\theta = 0$, então $t = 0$, logo $\dfrac{1}{t^4\sqrt{1-t^2}}$ não faria sentido.

$$\int \frac{1}{t^4\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int \frac{1}{\operatorname{sen}^4\theta\,\cos\theta}\cos\theta\, d\theta = \int \operatorname{cossec}^4\theta\, d\theta$$

$$= \int \operatorname{cossec}^2\theta\operatorname{cossec}^2\theta\, d\theta = \int \left(1+\operatorname{cotg}^2\theta\right)\operatorname{cossec}^2\theta\, d\theta \tag{7.1}$$

Fazendo a substituição $u = \operatorname{cotg}\theta \;\; du = -\operatorname{cossec}^2\theta\, d\theta$ na integral anterior, temos

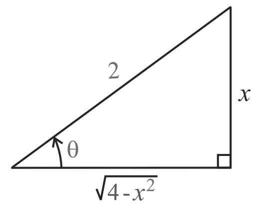
$$\int (1+\operatorname{cotg}^2\theta)\operatorname{cossec}^2\theta\; d\theta = -\int (1+u^2)du = -u - \frac{u^3}{3} + C$$

$$= -\operatorname{cotg}\theta - \frac{\operatorname{cotg}^3\theta}{3} + C.$$

Portanto, $\displaystyle\int \frac{1}{t^4\sqrt{1-t^2}}\,dt = -\frac{\sqrt{1-t^2}}{t} - \frac{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3}{3t^3} + C.$

b. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$

Note-se que nenhuma das regras básicas de integração é aplicável. Para usar uma substituição trigonométrica, observe que $\sqrt{4-x^2}$ é da forma $\sqrt{a^2-x^2}$ com $a = 2$.



Do triângulo retângulo associado, tem-se:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\operatorname{sen}\theta \\ dx = 2\cos\theta\, d\theta \end{cases}.$$

Também $\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2} = \cos\theta \Rightarrow \sqrt{4-x^2} = 2\cos\theta$.

Observe que $\sqrt{4-x^2}$ está no numerador da integral dada, assim é preciso que $\cos\theta$ seja maior ou igual do que zero. Note que $\cos\theta \geq 0$ para $-\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Há duas abordagens: podemos fazer a substituição trigonométrica na integral indefinida e, então, calcular a integral definida usando os limites de integração em x, ou podemos fazer a substituição trigonométrica na integral definida e converter os limites em x nos correspondentes limites em θ.

Vamos resolver o exercício seguindo a primeira abordagem:

Calculando a integral indefinida, temos

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \int 2\cos\theta\; 2\cos\theta\, d\theta = 4\int \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= 4\int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta = 2\int (1+\cos 2\theta)d\theta = 2\theta + \underbrace{\operatorname{sen} 2\theta}_{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta} + C$$

$$= 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) + 2\frac{x}{2}\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + C = 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) + x\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + C.$$

Logo, calculando a integral definida dada, obtemos

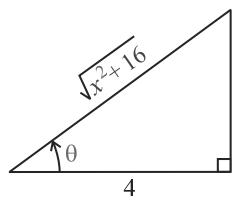
$$\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx = 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) + x\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\Bigg]_0^1$$

$$= 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

c. $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2+16)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

Note-se que nenhuma das regras básicas de integração é aplicável. Para usar uma substituição trigonométrica, observe que estamos no caso de integrais que tem termos da forma $\sqrt{a^2+x^2}$ com $a=4$.

Observe, na figura a seguir, neste caso, o cateto oposto ao ângulo θ é x, o outro cateto é $a=4$ e a hipotenusa do triângulo retângulo, pelo Teorema de Pitágoras, só pode ser $\sqrt{4^2+x^2}=\sqrt{16+x^2}=\sqrt{x^2+16}$.



Do triângulo retângulo associado, tem-se:

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{x}{4}\Rightarrow\begin{cases} x=4\operatorname{tg}\theta \\ dx=4\sec^2\theta\,d\theta\end{cases}.$$

Também $\dfrac{\sqrt{x^2+16}}{4}=\sec\theta\Rightarrow\sqrt{x^2+16}=4\sec\theta\Rightarrow x^2+16=4^2\sec^2\theta$. Note-se que $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$.

$$\int\frac{x^3}{(x^2+16)^{\frac{3}{2}}}\,dx=\int\frac{(4\operatorname{tg}\theta)^3}{(4^2\sec^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\,4\sec^2\theta\,d\theta=4\int\frac{\operatorname{tg}^3\theta}{\sec\theta}\,d\theta$$

$$=4\int\underbrace{\operatorname{tg}^3\theta}_{n\text{ ímpar}}(\sec\theta)^{-1}\,d\theta=4\int\operatorname{tg}^3\theta\,(\sec\theta)^{-1}\frac{\sec\theta}{\sec\theta}\,d\theta$$

$$=4\int\operatorname{tg}^2\theta(\sec\theta)^{-2}\sec\theta\,\operatorname{tg}\theta\,d\theta$$

$$=4\int\left(\sec^2\theta-1\right)(\sec\theta)^{-2}\sec\theta\,\operatorname{tg}\theta\,d\theta$$

Fazendo a substituição $u=\sec\theta\;\; du=\sec\theta\,\operatorname{tg}\theta\,d\theta$ na integral anterior, temos

$$=4\int(u^2-1)(u)^{-2}du=4\int\left(1-(u)^{-2}\right)du=4u-4\frac{u^{-1}}{-1}+C$$

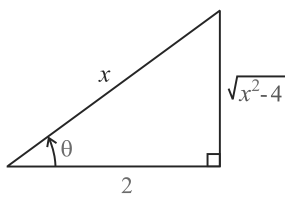
$$=4u+\frac{4}{u}+C=4\sec\theta+4\cos\theta+C=4\left(\frac{\sqrt{x^2+16}}{4}\right)+4\frac{4}{\sqrt{x^2+16}}+C.$$

Logo, $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2+16)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \sqrt{x^2+16} + \frac{16}{\sqrt{x^2+16}} + C$

$$= \frac{x^2+16+16}{\sqrt{x^2+16}} + C = \frac{x^2+32}{\sqrt{x^2+16}} + C.$$

d . $\displaystyle\int_2^4 \sqrt{x^2-4}\,dx$

Note-se que nenhuma das regras básicas de integração é aplicável. Para usar uma substituição trigonométrica, observe que estamos no caso de integrais que tem termos da forma $\sqrt{x^2-a^2}$ com $a=2$. Observe também na integral definida dada que $x \geq a = 2$.



Do triângulo retângulo associado, tem-se:

$$\sec\theta = \frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\sec\theta \\ dx = 2\sec\theta\,\operatorname{tg}\theta\,d\theta \end{cases}.$$

Como $x \geq 2$ temos que $\operatorname{tg}\theta \geq 0$ se $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Também $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{2} \Rightarrow \sqrt{x^2-4} = 2\operatorname{tg}\theta$.

Há duas abordagens: podemos fazer a substituição trigonométrica na integral indefinida e, então, calcular a integral definida usando os limites de integração em x, ou podemos fazer a substituição trigonométrica na integral definida e converter os limites em x nos correspondentes limites em θ.

Vamos resolver o exercício seguindo a segunda abordagem:

Precisamos considerar a mudança dos limites de integração, isto é, enquanto x varia desde $x=2$ até $x=4$, θ varia desde $\theta = \operatorname{arcsec}\dfrac{2}{2} = \operatorname{arcsec}1 = 0$ até $\theta = \operatorname{arcsec}\left(\dfrac{4}{2}\right) = \operatorname{arcsec}(2) = \dfrac{\pi}{3}$.

Assim, $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{3}$ e, portanto,

$$\int_2^4 \sqrt{x^2-4}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\operatorname{tg}\theta\, 2\sec\theta\, \operatorname{tg}\theta\, d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^2\theta\, \sec\theta\, d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2\theta - 1)\sec\theta\, d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec^3\theta\, d\theta - 4\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec\theta\, d\theta. \tag{7.2}$$

Por outro lado, no Exemplo 21.4 do caderno didático, é provado que

$$\int \sec^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\sec\theta\, \operatorname{tg}\theta + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + C. \tag{7.3}$$

No Exemplo 21.3 do caderno didático também foi provado que

$$\int \sec\theta\, d\theta = \ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + C. \tag{7.4}$$

Substituindo 7.3 e 7.4 em 7.2, temos

$$\int_2^4 \sqrt{x^2-4}\,dx = 4\frac{1}{2}\sec\theta\, \operatorname{tg}\theta + 4\frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} - 4\ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= 2\sec\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} + 2\ln\left|\sec\frac{\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right| - \underbrace{2\ln|\underbrace{\sec 0}_{1} + \underbrace{\operatorname{tg} 0}_{0}|}_{0} - 4\ln\left|\sec\frac{\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right|$$

$$+ \underbrace{4\ln|\underbrace{\sec 0}_{1} + \underbrace{\operatorname{tg} 0}_{0}|}_{0}.$$

Portanto, $\displaystyle\int_2^4 \sqrt{x^2-4}\,dx = 2\underbrace{\sec\frac{\pi}{3}}_{2}\underbrace{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}_{\sqrt{3}} - 2\ln\left|\underbrace{\sec\frac{\pi}{3}}_{2} + \underbrace{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}_{\sqrt{3}}\right|$

$$= 4\sqrt{3} - 2\ln\left(2+\sqrt{3}\right).$$

Exercício 7.3.

Calcule as seguintes integrais:

a. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x+2}$ b. $\displaystyle\int \sqrt{3+2x-x^2}\, dx$

(Aula 25 do caderno didático, exercícios propostos nº 28 e 26, respectivamente)

Sugestão: Completando o quadrado, transforme o integrando em uma função para a qual a substituição trigonométrica é conveniente. Use depois uma substituição trigonométrica apropriada.

c. $\int x\sqrt{9-x^4}\,dx$

(Aula 25 do caderno didático, exercício proposto nº29)

Faça uma substituição adequada e use depois uma substituição trigonométrica apropriada.

Solução:

a. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x+2}$

Completando o quadrado como foi sugerido, obtém-se

$$x^2-2x+2=(x^2-2x+1)+2-1=(x-1)^2+1.$$

Isso sugere a substituição $\begin{cases} u=x-1 \Rightarrow x=u+1 \\ du=dx \end{cases}$.

Assim, $$\int \frac{dx}{x^2-2x+1}=\int \frac{dx}{(x-1)^2+1}=\int \frac{du}{u^2+1}$$
$$=\operatorname{arctg} u+C=\operatorname{arctg}(x-1)+C.$$

b. $\int \sqrt{3+2x-x^2}\,dx$

Completando o quadrado como foi sugerido, obtém-se

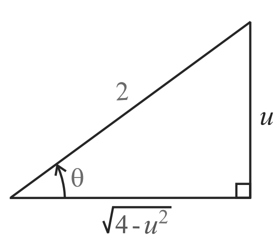
$$3+2x-x^2=3-(x^2-2x)=4-(x^2-2x+1)=4-(x-1)^2.$$

Isso sugere a substituição $\begin{cases} u=x-1 \Rightarrow x=u+1 \\ du=dx \end{cases}$.

Assim,

$$\int \sqrt{3+2x-x^2}\,dx=\int \sqrt{4-(x-1)^2}\,dx=\int \sqrt{4-u^2}\,du. \tag{7.5}$$

Note-se que nenhuma das regras básicas de integração é aplicável. Para usar uma substituição trigonométrica, observe que $\sqrt{4-u^2}$ é da forma $\sqrt{a^2-x^2}$ com $a=2$.



Do triângulo retângulo associado, tem-se:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{u}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\operatorname{sen}\theta \\ dx = 2\cos\theta\, d\theta \end{cases}.$$

Também $\dfrac{\sqrt{4-u^2}}{2} = \cos\theta \Rightarrow \sqrt{4-u^2} = 2\cos\theta$.

Observe que $\sqrt{4-u^2}$ está no numerador na integral dada, assim é preciso que $\cos\theta$ seja maior ou igual do que zero. Note que $\cos\theta \geq 0$ para $-\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$.

$$\int \sqrt{4-u^2}\, du = \int 2\cos\theta\, 2\cos\theta\, d\theta = 4\int \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= 4\int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta = 2\int (1+\cos 2\theta) d\theta = 2\theta + \int 2\cos 2\theta\, d\theta$$

$$= 2\theta + \operatorname{sen} 2\theta + C = 2\theta + 2\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta + C = 2\arcsen\frac{u}{2} + 2\frac{u}{2}\frac{\sqrt{4-u^2}}{2} + C$$

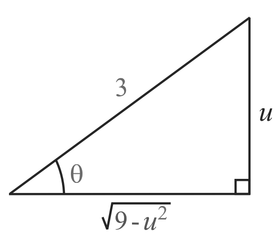
$$= 2\arcsen\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{(x-1)}{2}\sqrt{3+2x-x^2} + C.$$

c. $\displaystyle\int x\sqrt{9-x^4}\, dx = \int x\sqrt{9-(x^2)^2}\, dx$

Isso sugere a substituição $\begin{cases} u = x^2 \\ du = 2x\,dx \Rightarrow x\,dx = \dfrac{du}{2} \end{cases}$

$$\int x\sqrt{9-x^4}\; dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{9-u^2}\; du. \qquad (7.6)$$

Note-se que nenhuma das regras básicas de integração é aplicável. Para usar uma substituição trigonométrica, observe que $\sqrt{9-u^2}$ é da forma $\sqrt{a^2-x^2}$ com $a = 3$.



Do triângulo retângulo associado, tem-se:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{u}{3} \Rightarrow \begin{cases} u = 3\operatorname{sen}\theta \\ du = 3\cos\theta\, d\theta \end{cases}.$$

Também $\dfrac{\sqrt{9-u^2}}{3} = \cos\theta \Rightarrow \sqrt{9-u^2} = 3\cos\theta$.

Observe que $\sqrt{9-u^2}$ está no numerador na integral dada, assim é preciso que $\cos\theta$ seja maior ou igual do que zero. Note que $\cos\theta \geq 0$ para $-\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{9-u^2}\,du &= \int 3\cos\theta\, 3\cos\theta\, d\theta = 9\int \cos^2\theta\, d\theta \\
&= 9\int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \frac{9}{2}\int (1+\cos 2\theta)d\theta \\
&= \frac{9}{2}\theta + \frac{9}{4}\int 2\cos 2\theta\, d\theta = \frac{9}{2}\theta + \frac{9}{4}\operatorname{sen} 2\theta + C \\
&= \frac{9}{2}\theta + \frac{9}{4}(2\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta) + C = \frac{9}{2}\operatorname{arcsen}\frac{u}{3} + \frac{9}{2}\frac{u}{3}\frac{\sqrt{9-u^2}}{3} + C \\
&= \frac{9}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x^2}{3}\right) + \frac{x^2}{2}\sqrt{9-x^4} + C. \qquad (7.7)
\end{aligned}$$

Substituindo 7.7 em 7.6, obtemos

$$\int x\sqrt{9-x^4}\,dx = \frac{9}{4}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x^2}{3}\right) + \frac{x^2}{4}\sqrt{9-x^4} + C.$$

Exercício 7.4.

Calcule as seguintes integrais definidas:

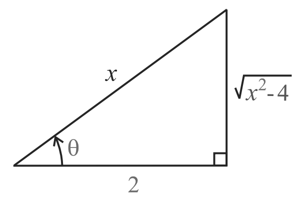
a. $\displaystyle\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$

b. $\displaystyle\int_{-4}^{-2} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$

Solução:

a. $\displaystyle\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$

Note-se que nenhuma das regras básicas de integração é aplicável. Para usar uma substituição trigonométrica, observe que estamos no caso de integrais que tem termos da forma $\sqrt{x^2-a^2}$, com $a=2$. Observe também na integral definida dada que $x \geq a = 2$.



Do triângulo retângulo associado, tem-se:

$$\sec\theta = \frac{x}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2\sec\theta \\ dx = 2\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta\,d\theta \end{array} \right. .$$

Por outro lado, $\mathrm{tg}\,\theta = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{2} \Rightarrow \sqrt{x^2-4} = 2\,\mathrm{tg}\,\theta$. Logo, temos que $\mathrm{tg}\,\theta \geq 0$ se $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Há duas abordagens: podemos fazer a substituição trigonométrica na integral indefinida e, então, calcular a integral definida usando os limites de integração em x, ou podemos fazer a substituição trigonométrica na integral definida e converter os limites em x nos correspondentes limites em θ.

Vamos resolver o exercício seguindo a segunda abordagem. Precisamos considerar a mudança dos limites de integração, isto é, enquanto x varia desde $x = 2$ até $x = 4$, θ varia desde $\theta = \mathrm{arcsec}\,\dfrac{2}{2} = \mathrm{arcsec}\,1 = 0$ até $\theta = \mathrm{arcsec}\left(\dfrac{4}{2}\right) = \mathrm{arcsec}(2) = \dfrac{\pi}{3}$.

Assim, $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{3}$, portanto

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\,\mathrm{tg}\,\theta}{2\sec\theta} 2\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{tg}^2\theta\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2\theta - 1)\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec^2\theta\,d\theta - 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta$$

$$= 2\,\mathrm{tg}\,\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} - 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = 2\underbrace{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{\sqrt{3}} - 2\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}.$$

b. $\displaystyle\int_{-4}^{-2} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$

✍ Quando usar uma substituição trigonométrica para calcular integrais definidas, você precisa ser cuidadoso e verificar se os valores de θ estão nos intervalos discutidos nas notas de aula.

Por exemplo, neste caso, o integrando é o mesmo que o da função dada no Exemplo 4-a, a diferença é que agora $-4 \leq x \leq -2$.

Note-se que nenhuma das regras básicas de integração é aplicável. Para usar uma substituição trigonométrica, observe que estamos no caso de integrais que tem termos da forma $\sqrt{x^2 - a^2}$, com $a = 2$, onde $x \leq -a$. Pela observação dada no item 3, na página 274 das notas de aula da Semana 9, temos, neste caso, que $\begin{cases} x = 2\sec\theta \\ dx = 2\sec\theta \, \text{tg}\,\theta \, d\theta \end{cases}$ e $\sqrt{x^2 - 4} = -2\,\text{tg}\,\theta$, onde $\dfrac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$.

Observe que, para $\dfrac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$, temos que $\text{tg}\,\theta \leq 0$. Logo, $-2\,\text{tg}\,\theta \geq 0$ e a igualdade $\sqrt{x^2 - 4} = -2\,\text{tg}\,\theta$ faz sentido. Para determinar os limites superior e inferior de integração, você deverá escolher θ tal que $\dfrac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$. Precisamos considerar a mudança dos limites de integração, isto é, enquanto x varia desde $x = -4$ até $x = 2$, θ varia desde $\theta = \text{arcsec}\,\dfrac{-4}{2} = \text{arcsec}(-2) = \dfrac{2\pi}{3}$ até $\theta = \text{arcsec}\left(\dfrac{-2}{2}\right) = \text{arcsec}(-1) = \pi$. Logo, $\dfrac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \pi$.

$$\int_{-4}^{-2} \sqrt{x^2 - 4}\, dx = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \frac{(-2\,\text{tg}\,\theta)}{2\sec\theta} 2\sec\theta \, \text{tg}\,\theta \, d\theta = -2\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \text{tg}^2\theta \, d\theta$$

$$= -2\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} (\sec^2\theta - 1) d\theta = -2\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \sec^2\theta \, d\theta + 2\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} d\theta$$

$$= -2\,\text{tg}\,\theta\Big]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} + 2\theta\Big]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} = -2\underbrace{\text{tg}\,\pi}_{0} + 2\underbrace{\text{tg}\,\frac{2\pi}{3}}_{-\sqrt{3}} + 2\pi - \frac{4\pi}{3}$$

$$= -2\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}.$$

SEMANA 11

Exercício 7.5.

Calcule as seguintes integrais:

a. $\displaystyle\int \frac{3x - 1}{x^2 - x}\, dx$

b. $\displaystyle\int \frac{8x - 5}{(2x - 1)(x - 1)}\, dx$

c. $\displaystyle\int \frac{5x-7}{x^2-2x-3}\,dx$

d. $\displaystyle\int \frac{3x^2-16+4x}{(x-1)(x^2-4)}\,dx$

e. $\displaystyle\int \frac{9x^2+2x-2}{x(x-1)(x+2)}\,dx$

(Aula 23 do caderno didático, exercícios propostos nº: 5, 7, 8, 9 e 11, respectivamente)

Solução:

a. $\displaystyle\int \frac{3x-1}{x^2-x}\,dx$

Observe que a função $f(x) = \dfrac{3x-1}{x^2-x}$ é uma função racional e é própria, isto é, o grau do numerador é menor que o grau do denominador.

Fatoramos o denominador e como o mesmo tem dois fatores lineares distintos, a decomposição em frações parciais tem a forma

$$\frac{3x-1}{x^2-x} = \frac{3x-1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}. \tag{7.8}$$

Para determinar os valores de A e B, multiplicamos ambos os lados da Expressão 7.8 pelo produto dos denominadores $x(x-1)$, obtendo

$$3x-1 = A(x-1)+Bx. \tag{7.9}$$

Se $x=1$ em 7.9, obtemos

$$3(1)-1 = B(1) \;\Rightarrow\; 2 = B. \tag{7.10}$$

Também, se $x=0$ em 7.9, tem-se

$$3(0)-1 = A(-1) \;\Rightarrow\; A = 1. \tag{7.11}$$

Substituindo 7.11 e 7.10 em 7.8, dá

$$\int \frac{3x-1}{x^2-x}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx = \ln|x| + 2\ln|x-1| + C.$$

b. $\displaystyle\int \frac{8x-5}{(2x-1)(x-1)}\,dx$

Observe que a função $f(x) = \dfrac{8x-5}{(2x-1)(x-1)}$ é uma função racional e é própria, isto é, o grau do numerador é menor que o grau do denominador.

O denominador tem dois fatores lineares distintos e a decomposição em frações parciais tem a forma

$$\frac{8x-5}{(2x-1)(x-1)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x-1}. \tag{7.12}$$

Para determinar os valores de A e B, multiplicamos ambos os lados da Expressão 7.12 pelo produto dos denominadores $(2x-1)(x-1)$, obtendo

$$8x-5 = A(x-1) + B(2x-1). \tag{7.13}$$

Se $x = 1$ em 7.13, obtemos

$$8(1)-5 = B(2(1)-1) \;\Rightarrow\; 3 = B. \tag{7.14}$$

Também, se $x = \dfrac{1}{2}$ em 7.13, tem-se

$$8\left(\frac{1}{2}\right) - 5 = A\left(-\frac{1}{2}\right) \;\Rightarrow\; A = 2. \tag{7.15}$$

Substituindo 7.15 e 7.14 em 7.12, dá

$$\begin{aligned}\int \frac{8x-5}{(2x-1)(x-1)}\,dx &= \int \frac{2}{2x-1}\,dx + \int \frac{3}{x-1}\,dx \\ &= \ln|2x-1| + 3\ln|x-1| + C.\end{aligned}$$

c. $\displaystyle\int \frac{5x-7}{x^2-2x-3}\,dx$

Observe que a função $f(x) = \dfrac{5x-7}{x^2-2x-3}$ é uma função racional e é própria, isto é, o grau do numerador é menor que o grau do denominador.

Fatoramos o denominador e como o mesmo tem dois fatores lineares distintos, a decomposição em frações parciais tem a forma

$$\frac{5x-7}{x^2-2x-3} = \frac{5x-7}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}. \tag{7.16}$$

Para determinar os valores de A e B, multiplicamos ambos os lados da Expressão 7.16 pelo produto dos denominadores $(x-3)(x+1)$, obtendo

$$5x-7 = A(x+1)+B(x-3). \tag{7.17}$$

Se $x=-1$ em 7.17, obtemos

$$5(-1)-7 = +B(-1-3) \Rightarrow 12 = 4B \Rightarrow 3 = B. \tag{7.18}$$

Também, se $x=3$ em 7.17, tem-se

$$5(3)-7 = A(3+1) \Rightarrow 8 = 4A \Rightarrow 2 = A. \tag{7.19}$$

Substituindo 7.19 e 7.18 em 7.16, dá

$$\begin{aligned}\int \frac{5x-7}{x^2-2x-3}\,dx &= \int \frac{2}{x-3}\,dx + \int \frac{3}{x+1}\,dx\\ &= 2\ln|x-3| + 3\ln|x+1| + C.\end{aligned}$$

d. $\displaystyle\int \frac{3x^2-16+4x}{(x-1)(x^2-4)}\,dx$

Observe que a função $f(x) = \dfrac{3x^2-16+4x}{(x-1)(x^2-4)}$ é uma função racional e é própria, isto é, o grau do numerador é menor que o grau do denominador.

Fatoramos o denominador e como o mesmo tem três fatores lineares distintos, a decomposição em frações parciais tem a forma

$$\frac{3x^2-16+4x}{(x-1)(x^2-4)} = \frac{3x^2-16+4x}{(x-1)(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}. \tag{7.20}$$

Para determinar os valores de A, B e C, multiplicamos ambos os lados da Expressão 7.20 pelo produto dos denominadores $(x-1)(x-2)(x+1)$, obtendo

$$3x^2+4x-16 = A(x-2)(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)(x-2). \tag{7.21}$$

Se $x=1$ em 7.21, obtemos

$$3(1^2)+4(1)-16 = A(1-2)(1+2) \Rightarrow 9 = 3A \Rightarrow 3 = A. \tag{7.22}$$

Também, se $x = 2$ em 7.21, tem-se

$$3(2^2)+4(2)-16 = B(2-1)(2+2) \Rightarrow 12+8-16 = B(1)(4)$$

$$\Rightarrow 4 = 4B \Rightarrow 1 = B. \qquad (7.23)$$

Também, se $x = -2$ em 7.21, tem-se

$$3(-2)^2+4(-2)-16 = C(-2-1)(-2-2)$$

$$\Rightarrow 12-8-16 = C(-3)(-4) \Rightarrow -12 = 12C \Rightarrow -1 = C. \qquad (7.24)$$

Substituindo 7.24, 7.23 e 7.22 em 7.20, dá

$$\int \frac{3x^2-16+4x}{(x-1)(x^2-4)}\,dx = 3\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{dx}{x+2}$$

$$= 3\ln|x-1| + \ln|x-2| - \ln|x+2| + C.$$

e. $\displaystyle\int \frac{9x^2+2x-2}{x(x-1)(x+2)}\,dx$

Observe que a função $f(x) = \dfrac{9x^2+2x-2}{x(x-1)(x+2)}$ é uma função racional e é própria, isto é, o grau do numerador é menor que o grau do denominador.

O denominador tem três fatores lineares distintos e a decomposição em frações parciais tem a forma

$$\frac{9x^2+2x-2}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}. \qquad (7.25)$$

Para determinar os valores de A, B e C, multiplicamos ambos os lados da Expressão 7.25 pelo produto dos denominadores $x(x-1)(x+2)$, obtendo

$$9x^2+2x-2 = A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1). \qquad (7.26)$$

Se $x = 0$ em 7.26, obtemos

$$-2 = A(0-1)(0+2) \Rightarrow -2 = -2A \Rightarrow 1 = A. \qquad (7.27)$$

Também, se $x = 1$ em 7.26, tem-se

$$9(1)^2+2(1)-2 = B(1)(1+2) \Rightarrow 9 = B(1)(3) \Rightarrow 3 = B. \qquad (7.28)$$

Também, se $x = -2$ em 7.26, tem-se

$$9(-2)^2+2(-2)-2 = C(-2)(-2-1) \Rightarrow 36-4-2 = C(-2)(-3)$$

$$\Rightarrow\ 30 = 6C\ \Rightarrow\ 5 = C. \tag{7.29}$$

Substituindo 7.29, 7.28 e 7.27 em 7.25, dá

$$\int \frac{9x^2+2x-2}{x(x-1)(x+2)}dx = \int \frac{dx}{x} + 3\int \frac{dx}{x-1} + 5\int \frac{dx}{x+2}$$

$$= \ln|x| + 3\ln|x-1| + 5\ln|x+2| + C.$$

Exercício 7.6.

Calcule as seguintes integrais:

a. $\displaystyle\int \frac{4x^2+2x-1}{(x^3+x^2)}\,dx$

b. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{x(x^2+1)}\,dx$

c. $\displaystyle\int \frac{x^2-x+9}{(x^2+9)^2}\,dx$

d. $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^3+2x^2+5x}\,dx$

Solução:

a. $\displaystyle\int \frac{4x^2+2x-1}{(x^3+x^2)}\,dx$

Note que a função racional $R(x) = \dfrac{4x^2+2x-1}{(x^3+x^2)} = \dfrac{4x^2+2x-1}{x^2(x+1)}$ é própria. Como o denominador é o produto dos fatores lineares alguns repetidos $x^2(x+1)$, logo a decomposição em frações parciais para $\dfrac{4x^2+2x-1}{x^2(x+1)}$, tem a forma

$$\frac{4x^2+2x-1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}. \tag{7.30}$$

Para determinar os valores de A, B e C, multiplicamos ambos os lados da Expressão 7.30 pelo produto dos denominadores $x^2(x+1)$, obtendo

$$4x^2+2x-1 = A(x)(x+1) + B(x+1) + Cx^2. \tag{7.31}$$

Se $x = 0$ em 7.31, obtemos

$$-1 = +B(1) \;\Rightarrow\; -1 = B. \qquad (7.32)$$

Também, se $x = -1$ em 7.31, tem-se

$$4(-1)^2 + 2(-1) - 1 = C(-1)^2 \;\Rightarrow\; 1 = C. \qquad (7.33)$$

Se $x = 1$ em 7.31 e substituindo os valores de B e C, obtemos

$$4(1)^2 + 2(-1) - 1 = A(1)(1+1) + (-1)(1+1) + (1)(1)^2$$

$$\Rightarrow 5 = 2A - 1 \Rightarrow A = 3. \qquad (7.34)$$

Substituindo 7.34, 7.33 e 7.32 em 7.30, dá

$$\frac{4x^2 + 2x - 1}{x^2(x+1)} = \frac{3}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x+1}.$$

Assim,

$$\int \frac{4x^2 + 2x - 1}{x^2(x+1)}\,dx = \int \frac{3}{x}\,dx + \int \frac{-1}{x^2}\,dx = \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= 3\ln|x| - \frac{x^{-1}}{-1} + \ln|x+1| + C = 3\ln|x| + \frac{1}{x} + \ln|x+1| + C.$$

Ou também

$$\int \frac{4x^2 + 2x - 1}{(x^3 + x^2)}\,dx = \ln|x^3(x+1)| + \frac{1}{x} + C = \ln|x^4 + x^3| + \frac{1}{x} + C.$$

b. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{x(x^2+1)}\,dx$

Vamos calcular em primeiro lugar a integral indefinida $\displaystyle\int \frac{x+1}{x(x^2+1)}\,dx$.

Note que a função racional $R(x) = \dfrac{x+1}{x(x^2+1)}$ é própria. Por outro lado, $x^2 + 1$ é um fator quadrático irredutível, pois $b^2 - 4ac = 0 - 4(1)(1) < 0$. Como o denominador é o produto do fator linear x pelo fator quadrático irredutível $(x^2 + 1)$, a decomposição em frações parciais para $R(x) = \dfrac{x+1}{x(x^2+1)}$ tem a forma

$$\frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}. \qquad (7.35)$$

Para determinar os valores de A, B e C, multiplicamos ambos os lados da Expressão 7.35 pelo produto dos denominadores $x(x^2+1)$, obtendo

$$x+1 = A(x^2+1)+(Bx+C)x. \tag{7.36}$$

Se $x=0$ em 7.36, obtemos

$$0+1 = A(0^2+1) \;\Rightarrow\; 1 = A. \tag{7.37}$$

Também, se $x=1$ em 7.36 e substituindo o valor de A, tem-se

$$1+1 = 1((1)^2+1)+(B(1)+C)1 \Rightarrow 2 = 2+B+C \Rightarrow B+C = 0. \tag{7.38}$$

Se $x=2$ em 7.36 e substituindo o valor de A, obtemos

$$\begin{aligned} 2+1 = (1)(2^2+1)+(B(2)+C)2 &\Rightarrow 3 = 5+4B+2C \\ &\Rightarrow 2B+C = -1. \end{aligned} \tag{7.39}$$

Resolvendo 7.38 e 7.39, obtemos

$$B=-1 \qquad \text{e} \qquad C=1. \tag{7.40}$$

Substituindo 7.40 e 7.37 em 7.35, dá

$$\frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x}+\frac{-x+1}{x^2+1}. \tag{7.41}$$

Assim,
$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x(x^2+1)}dx &= \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{-x+1}{x^2+1}dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\operatorname{arctg} x + C. \end{aligned} \tag{7.42}$$

Usando 7.42 e o Teorema Fundamental do Cálculo, resulta que

$$\begin{aligned} &\int_1^2 \frac{x+1}{x(x^2+1)}dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\operatorname{arctg} x\Big]_1^2 \\ &= \ln|2| - \frac{1}{2}\ln(2^2+1)+\operatorname{arctg} 2 + \frac{1}{2}\ln(1^2+1) - \operatorname{arctg} 1 \\ &= \ln|2| - \frac{1}{2}\ln 5 + \operatorname{arctg} 2 + \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} 2. \end{aligned}$$

c. $\displaystyle\int \frac{x^2-x+9}{(x^2+9)^2}\,dx$

Note que a função racional é própria. Por outro lado, x^2+9 é um fator quadrático irredutível, pois $b^2-4ac = 0-4(1)(9) < 0$. Como o denominador é formado pelo fator quadrático irredutível repetido $(x^2+9)^2$, a decomposição em frações parciais para $\dfrac{x^2-x+9}{(x^2+9)^2}$, tem a forma

$$\frac{x^2-x+9}{(x^2+9)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+9} + \frac{Cx+D}{(x^2+9)^2}. \tag{7.43}$$

Para determinar os valores de A, B, C e D, multiplicamos ambos os lados da Expressão 7.43 pelo produto dos denominadores $(x^2+1)^2$, obtendo

$$x^2-x+9 = (Ax+B)(x^2+9)+(Cx+D).$$

Usando o 1º método, obtemos

$$x^2-x+9 = Ax^3+Bx^2+9Ax+9B+Cx+D$$

$$0x^3+x^2-x+9 = Ax^3+Bx^2+(9A+C)x+(9B+D).$$

Assim, da igualdade de polinômios, temos

$$A = 0 \tag{7.44}$$

$$B = 1 \tag{7.45}$$

$$9A+C = -1 \tag{7.46}$$

$$9B+D = 9. \tag{7.47}$$

Substituindo 7.45 em 7.47, temos

$$D = 0. \tag{7.48}$$

Substituindo 7.44 em 7.46, temos

$$C = -1. \tag{7.49}$$

Substituindo os valores das constantes em 7.43, obtemos

$$\frac{x^2-x+9}{(x^2+9)^2} = \frac{1}{x^2+9} - \frac{x}{(x^2+9)^2}.$$

Assim, $$\int \frac{x^2-x+9}{(x^2+9)^2}dx = \int \frac{dx}{x^2+9} - \int \frac{x\,dx}{(x^2+9)^2}$$
$$= \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{(x^2+9)^2}.$$

Faça a substituição $u = x^2+9 \Rightarrow du = 2x\,dx$.
$$= \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{u^{-1}}{-1}\right) + C$$
$$= \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + \frac{1}{2u} + C.$$

Portanto,
$$\int \frac{x^2-x+9}{(x^2+9)^2}\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + \frac{1}{2(x^2+9)} + C.$$

d. $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^3+2x^2+5x}\,dx$

Observe que a função $f(x) = \dfrac{x+2}{x^3+2x^2+5x} = \dfrac{x+2}{x(x^2+2x+5)}$ é uma função racional e é própria, isto é, o grau do numerador é menor que o grau do denominador. Por outro lado, x^2+2x+5 é também um fator quadrático irredutível, pois $b^2-4ac = 2^2-4(1)(5) < 0$. Como o denominador é o produto do fator linear x pelo fator quadrático irredutível x^2+2x+5, a decomposição em frações parciais para $\dfrac{x+2}{x(x^2+2x+5)}$, tem a forma

$$\frac{x+2}{x(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5}. \tag{7.50}$$

Para determinar os valores de A, B e C, multiplicamos ambos os lados da Expressão 7.50 pelo produto dos denominadores $x(x^2+2x+5)$, obtendo

$$0x^2+x+2 = A(x^2+2x+5)+(Bx+C)x$$
$$0x^2+x+2 = Ax^2+2Ax+5A+Bx^2+Cx$$
$$0x^2+x+2 = (A+B)x^2+(2A+C)x+5A$$

$$A+B=0 \tag{7.51}$$
$$2A+C=1 \tag{7.52}$$
$$5A=2 \tag{7.53}$$

De 7.53 resulta que

$$A = \frac{2}{5}. \tag{7.54}$$

Substituindo 7.54 em 7.51, temos

$$B = -\frac{2}{5}. \tag{7.55}$$

Substituindo 7.54 em 7.52, temos

$$C = \frac{1}{5}. \tag{7.56}$$

Substituindo os valores das constantes em 7.50, obtemos

$$\frac{x+2}{x(x^2+2x+5)} = \frac{2}{5x} + \frac{1}{5}\frac{(-2x+1)}{x^2+2x+5} = \frac{2}{5x} - \frac{(2x-1)}{5(x^2+2x+5)}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{x(x^2+2x+5)}\,dx &= \frac{2}{5}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{5}\int \frac{(2x-1)dx}{x^2+2x+5} \\ &= \frac{2}{5}\ln|x| - \frac{1}{5}\int \frac{(2x-1)dx}{x^2+2x+5}. \qquad (7.57)\end{aligned}$$

Por outro lado, usando a técnica de completar quadrados no denominador, temos

$$\int \frac{(2x-1)dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{(2x-1)dx}{x^2+2x+1+4} = \int \frac{(2x-1)dx}{(x+1)^2+4}.$$

Faça a substituição $u = x+1 \Rightarrow du = dx$ e temos também que $x = u-1$.

$$\begin{aligned}&\int \frac{(2x-1)dx}{(x+1)^2+4} = \int \frac{(2(u-1)-1)du}{u^2+4} = \int \frac{2u-3}{u^2+4}du \\ &= \int \frac{2u}{u^2+4}du - 3\int \frac{du}{u^2+4} = \ln(u^2+4) - \frac{3}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{u}{2} + C \\ &= \ln((x+1)^2+4) - \frac{3}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{(x+1)}{2} + C \\ &= \ln(x^2+2x+5) - \frac{3}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{(x+1)}{2} + C. \qquad (7.58)\end{aligned}$$

Substituindo 7.58 em 7.57, resulta

$$\int \frac{x+2}{x^3+2x^2+5x}\,dx = \frac{2}{5}\ln|x| - \frac{1}{5}\ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{10}\,\mathrm{arctg}\,\frac{(x+1)}{2} + C.$$

SEMANA 12

Exercício 7.7.

Analise as seguintes integrais impróprias, indicando quando elas divergem e calculando-as, caso contrário:

a. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ b. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx,\ a>0$

(Aula 26 do caderno didático, exercícios propostos nº 1 e 13, respectivamente)

c. $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{x^2+4}$ d. $\displaystyle\int_0^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

e. $\displaystyle\int_0^{9} \frac{1}{\sqrt{9-x}}\,dx$ f. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^{-2}dx$

Solução:

a. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$

O domínio de $h(x)=\dfrac{1}{x^2}$ é $\mathbb{R}-\{0\}$, observe que h, em particular, é contínua no intervalo $[1,+\infty)$, assim a integral dada resulta uma integral imprópria sobre um intervalo não-limitado. Observe também que dos exemplos referenciais dados tanto no caderno didático como no da coordenação vemos que para $r=2>1$ a integral $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^r}dx$ converge. Como foi pedido calcular as integrais que convergem vamos calcular a integral pedida.

Note-se que da definição de integral imprópria sobre um intervalo não-limitado, temos:

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{t\to+\infty}\int_1^{t}\frac{1}{x^2}dx. \tag{7.59}$$

Mas,

$$\int\frac{dx}{x^2}=\int x^{-2}dx=\frac{x^{-1}}{-1}+C=\frac{-1}{x}+C. \tag{7.60}$$

Substituindo 7.60 em 7.59 e aplicando a segunda forma do Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{-1}{x}\Big]_1^t = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{-1}{t}+1\right) = 1.$$

b. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx,\ a>0$

Como o domínio de $h(x)=e^{-ax}$ é $(-\infty,+\infty)$, observe que h, em particular, é contínua no intervalo $[0,+\infty)$, assim a integral dada resulta uma integral imprópria sobre um intervalo não-limitado. Observe também que dos exemplos referenciais dados tanto no caderno didático como no da coordenação vemos que se $a>0$, segue que a integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx$ converge. A seguir, vamos calcular o valor da integral.

Por definição de integral imprópria sobre um intervalo não-limitado, temos para $a>0$

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx = \lim_{t\to+\infty} e^{-ax}dx. \qquad (7.61)$$

Mas,

$$\int e^{-ax}dx = -\frac{1}{a}\int -ae^{-ax}dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}+C. \qquad (7.62)$$

Assim, substituindo 7.62 em 7.61 e usando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx = \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{a}e^{-ax}\Big]_0^t = \lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{1}{a}e^{-at}+\frac{1}{a}\right]$$
$$= \lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{1}{ae^{at}}\right]+\frac{1}{a} = \frac{1}{a}.$$

c. $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{x^2+4}$

Como o domínio de $h(x)=\dfrac{1}{x^2+4}$ é $\mathbb{R}$, observe que h, em particular, é contínua no intervalo $(-\infty,2]$, assim a integral dada resulta uma integral imprópria sobre um intervalo não-limitado.

Por definição de integral imprópria sobre um intervalo não-limitado, temos

$$\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{x^2+4} = \lim_{t\to-\infty}\int_t^2 \frac{dx}{x^2+4} = \lim_{t\to-\infty}\left[\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}\right]_t^2$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\right] = \lim_{t\to-\infty}\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}1-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\lim_{t\to-\infty}\left[\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\right].$$

Observe, na **Figura 7.1**, que $\lim\limits_{t\to-\infty}\left[\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\right] = -\frac{\pi}{2}$.

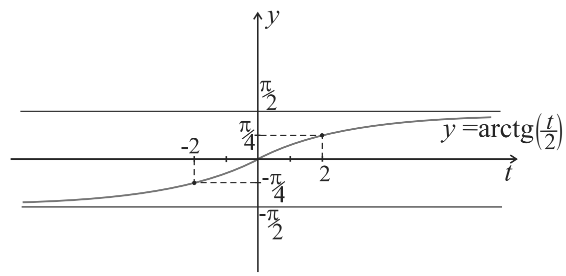


Figura 7.1

$$\int_{-\infty}^{2}\frac{dx}{x^2+4} = \frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\left[-\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{8}$$

Logo, a integral dada converge a $\frac{3\pi}{8}$.

d. $\displaystyle\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

O domínio de $h(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ é $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Observe que h, em particular, é uma função contínua em $(0,8]$, assim a integral dada resulta uma integral imprópria onde o integrando é uma função não-limitada no extremo inferior do intervalo. Observe também que dos exemplos referenciais dados tanto no caderno didático como no da coordenação vemos que para $r = \frac{1}{3} < 1$ a integral $\displaystyle\int_0^8 \frac{1}{x^r}dx$ converge. A seguir, vamos calcular o valor da integral.

$$\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{t\to0^+}\int_t^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{t\to0^+}\int_t^8 x^{-\frac{1}{3}}dx = \lim_{t\to0^+} 3\frac{x^{\frac{2}{3}}}{2}\Bigg]_t^8$$

$$= \lim_{t\to0^+}\left(\frac{3}{2}(8)^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{2}(t)^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{3}{2}(2^3)^{\frac{2}{3}} - \underbrace{\lim_{t\to0^+}\left(\frac{3}{2}(t)^{\frac{2}{3}}\right)}_{0} = \frac{3}{2}2^2 = 6.$$

e. $\displaystyle\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{9-x}}dx$

O domínio de $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9-x}}$ é $(-\infty,9)\cup(9,+\infty)$. Observe que h, em particular, é uma função contínua em $[0,9)$, assim a integral dada resulta uma integral imprópria onde o integrando é uma função não-limitada no extremo superior do intervalo. Note também que

$$\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{9-x}}dx = \lim_{t\to 9^-}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{9-x}}dx = -\lim_{t\to 9^-}\int_0^t -(9-x)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= -\lim_{t\to 9^-} 2\frac{(9-x)^{\frac{1}{2}}}{1}\Bigg]_0^t = -\lim_{t\to 9^-}\left(2(9-t)^{\frac{1}{2}} - 2(9-0)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= -\left(-2\sqrt{9}\right) = 6.$$

f. $\displaystyle\int_{-1}^1 x^{-2}dx$

O domínio de $h(x) = x^{-2}$ é $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Observe que h, em particular, é uma função contínua em $[-1,0)\cup(0,1]$, assim a integral dada resulta uma integral imprópria onde o integrando é uma função não-limitada no ponto 0, que é um ponto interior do intervalo $[-1,1]$.

Devemos dividir a integral em dois casos:

$$\int_{-1}^1 x^{-2}dx = \int_{-1}^0 x^{-2}dx + \int_0^1 x^{-2}dx. \qquad (7.63)$$

Observe que a escolha do número 0 para dividir o intervalo em dois subintervalos é necessária para transformar a integral dada em duas integrais impróprias de funções não-limitadas nos extremos do intervalo.

Por definição de integrais impróprias de funções não-limitadas, temos

$$\int_{-1}^0 x^{-2}dx = \lim_{t\to 0^-}\int_{-1}^t x^{-2}dx = \lim_{t\to 0^-}\frac{x^{-1}}{-1}\Bigg]_{-1}^t$$

$$= \lim_{t\to 0^-}\left[\frac{t^{-1}}{-1} - \frac{(-1)^{-1}}{-1}\right] = \lim_{t\to 0^-}\left[\frac{-1}{t} - 1\right] = +\infty. \qquad (7.64)$$

Como uma das integrais que compõe a soma dada em 7.63 diverge, podemos concluir, mesmo sem estudar a outra integral, que a integral dada diverge.

Exercício 7.8.

Usando critérios de convergência, determine a convergência ou divergência das seguintes integrais impróprias:

a. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\operatorname{sen}^4 x\,dx$

b. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2\ln x}\,dx$

c. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+\sqrt{x})\,(1+x)}\,dx$

(Aula 27 do caderno didático, exercícios propostos nº 3, 5 e 10, respectivamente)

Solução:

a. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\operatorname{sen}^4 x\,dx$

Observe que o domínio da função $f(x) = e^{-x}\operatorname{sen}^4 x$ é $\mathbb{R}$. Observe também que f, em particular, é contínua no intervalo $[0,+\infty)$, assim a integral dada resulta uma integral imprópria sobre o intervalo não-limitado $[0,+\infty)$. Note-se também que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Lembre-se de que se $0 \leq u \leq 1$ então $0 \leq u^2 \leq u \leq 1$. Por outro lado, sabemos que $0 \leq |\operatorname{sen} x| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $0 \leq \operatorname{sen}^2 x \leq |\operatorname{sen} x| \leq 1$. Logo, $0 \leq \operatorname{sen}^2 x \leq 1$ e, analogamente, usando a mesma propriedade, temos que $0 \leq \operatorname{sen}^4 x \leq \operatorname{sen}^2 x \leq 1$, isto é, $0 \leq \operatorname{sen}^4 x \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, $0 \leq e^{-x}\operatorname{sen}^4 x \leq e^{-x}$.

Considerando $f(x) = e^{-x}\operatorname{sen}^4 x$ e $g(x) = e^{-x}$ temos, em particular, que $0 < f(x) \leq g(x)$ para todo $x \geq 0$. Observe também que dos exemplos referenciais dados tanto no caderno didático como no da coordenação vemos que se $r > 0$ segue que a integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-rx}dx$ converge. Neste caso, para $r = 1$ temos que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ converge.

Pelo critério de comparação para integrais impróprias sobre intervalos não-limitados, se $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, então $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ também converge.

Assim, o critério anterior nos permite afirmar que a integral $\int_0^{+\infty} e^{-x}\operatorname{sen}^4 x\,dx$ converge.

b. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x}\,dx$

O domínio de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 \ln x}$ é $(0,1)\cup(1,+\infty)$, observe que f, em particular, é contínua no intervalo $[2,+\infty)$, assim a integral dada resulta uma integral imprópria sobre o intervalo não-limitado $[2,+\infty)$. Note-se também que $x \geq 2 \Rightarrow \ln x \geq \ln 2 > 0$ e $x^2 > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ para todo $x \in [2,+\infty)$.

Por outro lado, observe que como $\ln x \geq \ln 2 \Rightarrow \dfrac{1}{\ln x} \leq \dfrac{1}{\ln 2}$ para todo $x \in [2,+\infty)$, então $\dfrac{1}{x^2}\dfrac{1}{\ln x} \leq \dfrac{1}{x^2}\dfrac{1}{\ln 2}$. Portanto, $0 \leq \dfrac{1}{x^2 \ln x} \leq \dfrac{1}{x^2 \ln 2}$ para todo $x \in [2,+\infty)$.

Considerando $f(x) = \dfrac{1}{x^2 \ln x}$ e $g(x) = \dfrac{1}{x^2 \ln 2}$ temos, em particular, que $0 < f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [2,+\infty)$. Observe também que dos exemplos referenciais dados tanto no caderno didático como no da coordenação vemos que se $p > 1$ segue que a integral $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ converge. Neste caso, para $p = 2 > 1$, temos que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ converge, logo $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln 2}dx = \frac{1}{\ln 2}\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ converge.

Pelo critério de comparação para integrais impróprias sobre intervalos não-limitados, se $\displaystyle\int_2^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, então $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ também converge.

Assim, o critério anterior nos permite afirmar que a integral $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x}\,dx$ converge.

c. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+\sqrt{x})(1+x)}\,dx$

O domínio de $h(x) = \dfrac{1}{(1+\sqrt{x})(1+x)}$ é $[0,+\infty)$, observe que h é contínua no intervalo $[1,+\infty)$, assim a integral dada resulta uma integral imprópria sobre o intervalo não-limitado $[1,+\infty)$.

Para facilitar o nosso estudo, vamos fazer a substituição $u = \sqrt{x}$. Então, $x = u^2$, logo $dx = 2u\,du$. Fazendo a mudança dos limites de integração, temos que, quando $x = 1$, então $u = \sqrt{1} = 1$ e quando $x \to +\infty$ temos que $u = \sqrt{x} \to +\infty$. Assim, resulta que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+\sqrt{x})(1+x)}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{2u}{(1+u)(1+u^2)}\,du. \quad (7.65)$$

Observe que, em particular, a função racional $\dfrac{2u}{(1+u)(1+u^2)}$ é contínua para $u \in [1,+\infty)$. Vamos estudar esta última integral imprópria sobre o intervalo não-limitado $[1,+\infty)$.

Note-se também que se chamamos $f(u) = \dfrac{2u}{(1+u)(1+u^2)} > 0$ e $g(u) = \dfrac{1}{u^2} > 0$ para $u \in [1,+\infty)$ podemos usar **o critério do limite do quociente ou também chamado teste de comparação no limite** com $f(u)$ e $g(u)$ acima definidas.

Como $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} \frac{f(u)}{g(u)} = \lim_{u\to+\infty} \frac{\frac{2u}{(1+u)(1+u^2)}}{\frac{1}{u^2}} = \lim_{u\to+\infty} \frac{2u^3}{(1+u)(1+u^2)} = 2 \in (0,+\infty)$. Então, as integrais impróprias $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2u}{(1+u)(1+u^2)}\,du$ e $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2}\,du$ comportam-se da mesma maneira, ou seja, ambas convergem ou ambas divergem.

Por outro lado, sabemos do primeiro exemplo referencial do caderno de coordenação , [ou Exemplo 27.2 do Módulo 2 do caderno didático] que

“$\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{u^r}\,du$ com $a > 0$ converge se $r > 1$ e diverge se $r \le 1$.”

Assim, neste caso, $a = 1$ e $r = 2 > 1$, logo $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2}\,du$ converge.

Portanto, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2u}{(1+u)(1+u^2)}\,du$ também converge. Assim de 7.65 podemos concluir que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+\sqrt{x})(1+x)}\,dx$ converge.

Exercício 7.9.

Encontre os valores de p para os quais cada integral converge:

a. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$ b. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$

Solução:

a. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$

O domínio de $h(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^p}$ é $(0,1) \cup (1,+\infty)$, observe que, em particular, h é contínua no intervalo $[2,+\infty)$, assim a integral dada resulta uma integral imprópria sobre o intervalo não-limitado $[2,+\infty)$.

Faça a substituição $u = \ln x$, então $du = \dfrac{dx}{x}$. Logo, se $x = 2 \Rightarrow u = \ln 2$ e se $x \to +\infty \Rightarrow u \to +\infty$. Assim

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{du}{u^p}. \tag{7.66}$$

Esta última integral é conhecida dos exemplos referenciais e sabemos que ela converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$. Portanto, da igualdade dada em 7.66, deduzimos que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$ converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

b. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x)^p}$

O domínio de $h(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^p}$ é $(0,1) \cup (1,+\infty)$, observe que, em particular, h é contínua no intervalo $(1,2]$, assim a integral dada resulta em uma integral imprópria onde o integrando é uma função não-limitada no extremo inferior do intervalo.

Faça a substituição $u = \ln x$, então $du = \dfrac{dx}{x}$. Logo, se $x = 1 \Rightarrow u = \ln 1 = 0$ e se $x = 2 \Rightarrow u = \ln 2$.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int_0^{\ln 2} \frac{du}{u^p}. \tag{7.67}$$

Esta última integral é conhecida dos exemplos referenciais e sabemos que ela converge se $p < 1$ e diverge se $p \geq 1$. Portanto, da igualdade dada em 7.67 deduzimos que $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x)^p}$ converge se $p < 1$ e diverge se $p \geq 1$.

Exercício 7.10.

Ache a área da região entre o eixo Ox e a curva $y = \dfrac{8}{x^2 - 4}$, para $x \geq 3$.

Solução: Observe que $y = \dfrac{8}{x^2 - 4}$, para $x \geq 3$ é uma função sempre positiva, sabemos também que dita região encontra-se no primeiro quadrante e que é limitada inferiormente pelo eixo, assim não precisamos do gráfico da região para perceber que a área da região ilimitada $A(R)$ é dada por $A(R) = \displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{8}{x^2-4}\,dx$, desde que a integral dada seja convergente. De fato,

$$A(R) = \int_3^{+\infty} \frac{8}{x^2-4}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_3^t \frac{8}{(x-2)(x+2)}\,dx. \tag{7.68}$$

Vamos calcular a integral indefinida $\displaystyle\int \frac{8}{(x-2)(x+2)}\,dx$.

Usando a técnica de integração de frações parciais, temos que

$$\frac{8}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$$8 = A(x+2) + B(x-2)$$

$$0x + 8 = (A+B)x + (2A-2B), \text{ logo } \begin{cases} A+B=0 \\ A-B=4 \end{cases}.$$

Portanto, $A = 2$ e $B = -2$.

$$\int \frac{8}{(x-2)(x+2)}\,dx = \int \frac{2\,dx}{x-2} - \int \frac{2\,dx}{x+2}$$

$$= 2\ln|x-2| - 2\ln|x+2| + C = 2\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C \tag{7.69}$$

Substituindo o resultado de 7.69 em 7.68, temos que

$$A(R) = \int_3^{+\infty} \frac{8}{x^2-4}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_3^t \frac{8}{x^2-4}\,dx = \lim_{t\to+\infty} 2\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\Bigg]_3^t$$

$$A(R) = \lim_{t\to+\infty}\left[2\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| - 2\ln\left|\frac{3-2}{3+2}\right|\right] = 2\ln\left(\lim_{t\to+\infty}\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\right) - 2\ln\frac{1}{5}$$

$$A(R) = 2\underbrace{\ln 1}_{0} - 2\underbrace{\ln 1}_{0} + 2\ln 5 = 2\ln 5 \text{ unidades quadradas.}$$

Só como informação, fornecemos o gráfico da região estudada na **Figura 7.2**.

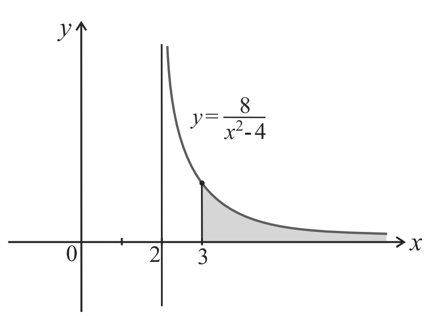


Figura 7.2

SEMANA 13

Exercício 7.11.

Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região R no primeiro quadrante limitada pelas curvas $x = y^2, x = y+2, y = 0$.

a. Em torno do eixo Oy.

b. Em torno do eixo Ox.

c. Em torno da reta vertical $x = 4$.

d. Em torno da reta horizontal $y = 2$.

e. Em torno da reta horizontal $y = 4$.

Em cada caso: esboce a região e, de acordo com o seu raciocínio, mostre uma casca típica ou um disco típico ou arruela. Faça um esboço do sólido correspondente.

Solução:

a. Em torno do eixo Oy.

Desenhamos a **Figura 7.3**, mostrando a região e o eixo de rotação (eixo Oy). Identificamos as funções raio maior $R(y)$ e o raio menor $r(y)$, onde $R(y) = y+2$ e $r(y) = y^2$ onde $0 \leq y \leq 2$. Com efeito, intersectando $x = y^2$ e $x = y+2$ e resolvendo a equação $y^2 = y+2$, ou seja, $y^2 - y - 2 = 0$ resulta que $y = 2$ logo $x = 4$, ou $y = -1$ logo $x = 1$. Como a região está no primeiro quadrante só interessa o ponto $(4,2)$. Note-se também que, em particular, $0 \leq r(y) \leq R(y)$ para $0 \leq y \leq 2$. (Observe também que se tentamos usar o método das cascas cilíndricas, neste caso, teremos que dividir em regiões e dará mais trabalho).

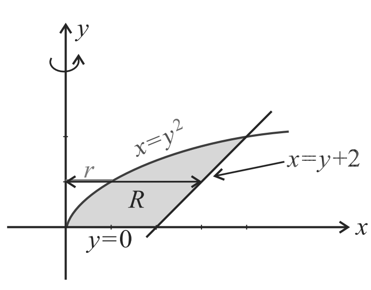


Figura 7.3

O volume é dado pela fórmula $V = \pi \int_c^d \left[(R(y))^2 - (r(y))^2\right] dy$.
Assim, o volume é

$$V = \pi \int_0^2 \left[(y+2)^2 - (y^2)^2\right] dy = \pi \int_0^2 \left(y^2 + 4y + 4 - y^4\right) dy$$

$$V == \pi \left(\frac{y^3}{3} + 4\frac{y^2}{2} + 4y - \frac{y^5}{5}\right)\Bigg]_0^2 = \pi \left(\frac{2^3}{3} + 4\frac{2^2}{2} + 4(2) - \frac{2^5}{5}\right)$$

$$V = \pi \left(\frac{8}{3} + 8 + 8 - \frac{32}{5}\right) = \pi \left(\frac{8}{3} + 16 - \frac{32}{5}\right) = \pi \left(\frac{40-96}{15} + 16\right)$$

$$V = \pi \left(16 - \frac{56}{15}\right) = \pi \left(\frac{184}{15}\right) \text{ unidades de volume.}$$

Na **Figura 7.4**, mostramos o esboço do sólido correspondente.

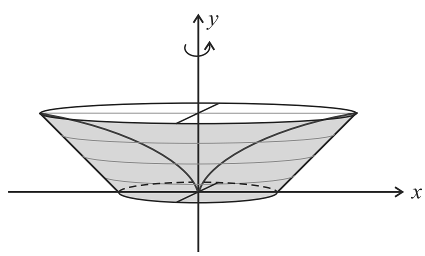


Figura 7.4

b. Em torno do eixo Ox.

Desenhamos a **Figura 7.5**, mostrando a região e o eixo de rotação (eixo Ox). Identificamos a função altura da casca típica $h(y)$ e o raio médio da casca típica $\overline{r}(y)$, onde $h(y) = (y+2) - y^2$ e $\overline{r}(y) = y$ para $0 \le y \le 2$. Note-se que $0 \le y^2 \le y+2$ para $0 \le y \le 2$, assim $h(y) \ge 0$ e $\overline{r}(y) \ge 0$ nesse intervalo. Na **Figura 7.6**, mostramos o esboço do sólido correspondente. (Observe também que se tentamos usar o método dos discos ou arruelas neste caso teremos que dividir em regiões e dará mais trabalho).

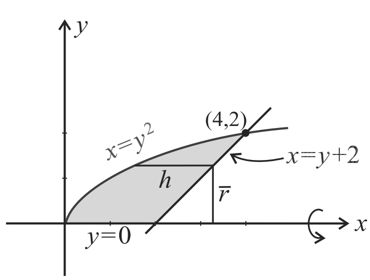


Figura 7.5

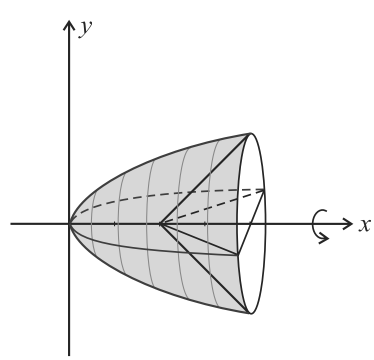


Figura 7.6

O volume é dado pela fórmula $V = 2\pi \int_c^d \overline{r}(y)\, h(y)\, dy$. Assim, o volume é

$$V = 2\pi \int_0^2 y(y+2-y^2)dx = 2\pi \int_0^2 (y^2+2y-y^3)dy$$

$$V = 2\pi \left(\frac{y^3}{3} + 2\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right) \Big]_0^2 = 2\pi \left(\frac{2^3}{3} + (2^2) - \frac{2^4}{4} \right)$$

$$V = 2\pi \left(\frac{8}{3} + 4 - 4 \right) = \frac{16\pi}{3} \text{ unidades de volume.}$$

c. Em torno da reta vertical $x = 4$.

Desenhamos a **Figura 7.7**, mostrando a região e o eixo de rotação (a reta vertical $x = 4$). Identificamos as funções raio maior $R(y)$ e o raio menor $r(y)$, onde $R(y) = 4 - y^2$ e $r(y) = 4 - (y+2) = 2 - y$ para $0 \le y \le 2$. Note-se que $0 \le r(y) \le R(y)$ para $0 \le y \le 2$. Observe também que o eixo de rotação está do lado direito da região dada. Na **Figura 7.8**, mostramos o esboço do sólido correspondente. (Observe também que, se tentamos usar o método das cascas cilíndricas, neste caso, teremos que dividir em regiões e dará mais trabalho).

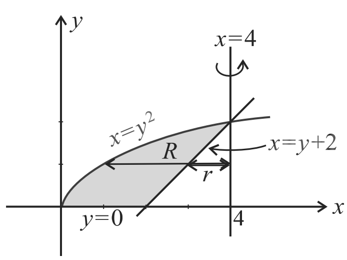


Figura 7.7

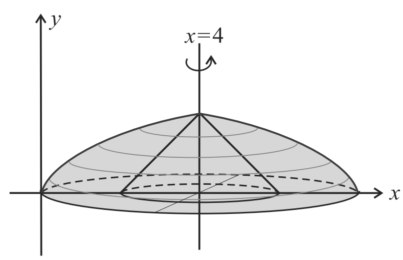


Figura 7.8

O volume é dado pela fórmula $V = \pi \int_c^d \left[(R(y))^2 - (r(y))^2 \right] dy$. Assim, o volume é

$$V = \pi \int_0^2 \left[(4-y)^2 - (2-y)^2 \right] dy$$

$$V = \pi \int_0^2 \left[16 - 8y + y^2 - (4 - 4y + y^2) \right] dy$$

$$V = \pi \int_0^2 \left[16 - 8y + y^2 - 4 + 4y - y^2 \right] dy = \pi \int_0^2 [12 - 4y]\, dy$$

$V = \pi \left(12y - 4\frac{y^2}{2} \right) \Big]_0^2 = \pi(24-8) = 16\pi$ unidades de volume.

d. Em torno da reta horizontal $y = 2$.

Desenhamos a **Figura 7.9**, mostrando a região e o eixo de rotação (da reta horizontal $y = 2$). Identificamos a função altura da casca típica $h(y)$ e o raio médio da casca típica $\overline{r}(y)$, onde $h(y) = y + 2 - y^2$ e $\overline{r}(y) = 2 - y$ para $0 \leq y \leq 2$. Note que $0 \leq y^2 \leq y + 2$ para $0 \leq y \leq 2$, assim $h(y) = y + 2 - y^2 \geq 0$ e $\overline{r}(y) = 2 - y \geq 0$ nesse intervalo. Veja também que a reta horizontal $y = 2$ encontra-se acima da região dada. Na **Figura 7.10**, mostramos o esboço do sólido correspondente. (Observe também que, se tentamos usar o método dos discos ou arruelas, neste caso, teremos que dividir em regiões e dará mais trabalho).

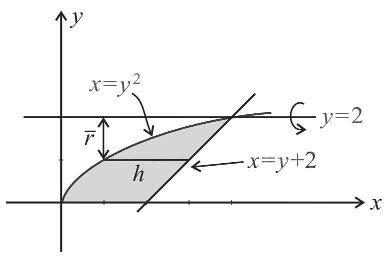


Figura 7.9

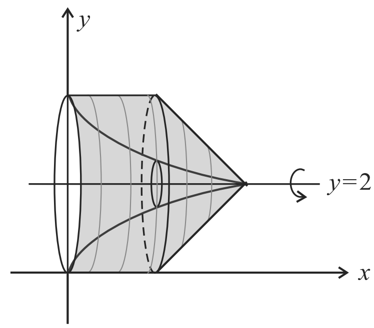


Figura 7.10

O volume é dado pela fórmula $V = 2\pi \int_c^d \overline{r}(y)\, h(y)\, dy$. Assim, o volume é

$$V = 2\pi \int_0^2 (2-y)(y+2-y^2)dy$$

$$V = 2\pi \int_0^2 (2y - y^2 + 4 - 2y - 2y^2 + y^3)dy$$

$$V = 2\pi \int_0^2 (4 - 3y^2 + y^3)dy = 2\pi \left(4y - 3\frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} \right) \Big]_0^2$$

$$V = 2\pi(8 - 8 + 4) = 2\pi(4) = 8\pi \text{ unidades de volume.}$$

e. Em torno da reta horizontal $y = 4$.

Desenhamos a **Figura 7.11**, mostrando a região e o eixo de rotação (da reta horizontal $y = 4$). Identificamos a função altura da casca típica $h(y)$ e o raio médio da casca típica $\overline{r}(y)$, onde $h(y) = y + 2 - y^2$ e $\overline{r}(y) = 4 - y$ para $0 \leq y \leq 2$. Note que $0 \leq y^2 \leq y + 2$ para $0 \leq y \leq 2$, assim $h(y) = y + 2 - y^2 \geq 0$ e $\overline{r}(y) = 4 - y \geq 0$ nesse intervalo. Veja também que a reta horizontal $y = 4$ encontra-se acima da região dada. Na **Figura 7.12**, mostramos o esboço do sólido correspondente. Observe também que, neste caso, se tentamos usar o método dos discos ou arruelas, teremos que dividir em regiões e dará mais trabalho.

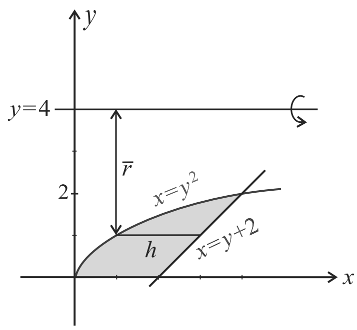


Figura 7.11

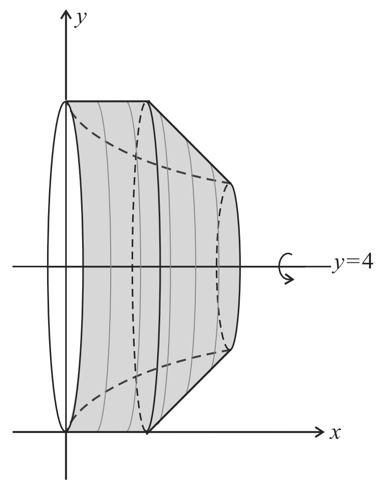


Figura 7.12

O volume é dado pela fórmula $V = 2\pi \int_c^d \overline{r}(y)\, h(y)\, dy$. Assim, o volume é

$$V = 2\pi \int_0^2 (4-y)(y+2-y^2)dy$$

$$V = 2\pi \int_0^2 (4y - y^2 + 8 - 2y - 4y^2 + y^3)dy$$

$$V = 2\pi \int_0^2 (2y - 5y^2 + 8 + y^3)dy$$

$$V = 2\pi \left(2\frac{y^2}{2} - 5\frac{y^3}{3} + 8y + \frac{y^4}{4} \right) \Bigg]_0^2$$

$$V = 2\pi \left(4 - \frac{40}{3} + 16 + 4 \right) = 2\pi \left(24 - \frac{40}{3} \right) = \frac{64}{3}\pi$$ unidades de volume.

Exercício 7.12.

Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região R limitada pelas curvas $x = 1 - y^2$, $x = 2 + y^2$, $y = -1$, $y = 1$.

a. Em torno do eixo Oy.

b. Em torno do eixo Ox.

c. Em torno da reta vertical $x = -1$.

d. Em torno da reta horizontal $y = 2$.

Em cada caso: esboce a região e de acordo com o seu raciocínio, mostre uma casca típica ou um disco típico ou arruela. Faça um esboço do sólido correspondente.

Solução:

a. Em torno do eixo Oy.

Desenhamos a **Figura 7.13**, mostrando a região e o eixo de rotação (eixo Oy). Identificamos as funções raio maior $R(y)$ e o raio menor $r(y)$, onde $R(y) = 2 + y^2$ e $r(y) = 1 - y^2$, onde $-1 \leq y \leq 1$. Note-se também que, em particular, $0 \leq r(y) \leq R(y)$ para $-1 \leq y \leq 1$. Observe que, pela simetria da região em relação ao eixo Ox, podemos também calcular o volume para $0 \leq y \leq 1$ e multiplicar o resultado por 2. Observe também que, neste caso, se tentamos usar o método das cascas cilíndricas, dará mais trabalho.

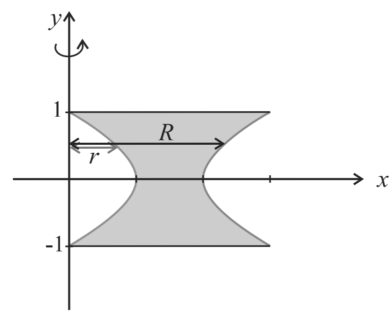


Figura 7.13

O volume é dado pela fórmula $V = \pi \displaystyle\int_c^d \left[(R(y))^2 - (r(y))^2\right] dy$.
Assim, o volume é

$$V = \pi \int_{-1}^{1} \left[(2+y^2)^2 - (1-y^2)^2\right] dy = 2\pi \int_0^1 \left[(2+y^2)^2 - (1-y^2)^2\right] dy$$

$$V = 2\pi \int_0^1 \left[4 + 4y^2 + y^4 - 1 + 2y^2 - y^4\right] dy = 2\pi \int_0^1 \left[3 + 6y^2\right] dy$$

$$V = 6\pi \int_0^1 \left[1 + 2y^2\right] dy = 6\pi \left(y + 2\frac{y^3}{3}\right)\Bigg]_0^1 = 6\pi \left(1 + \frac{2}{3}\right)$$

$V = 10\pi$ unidades de volume.

Na **Figura 7.14**, mostramos o esboço do sólido correspondente.

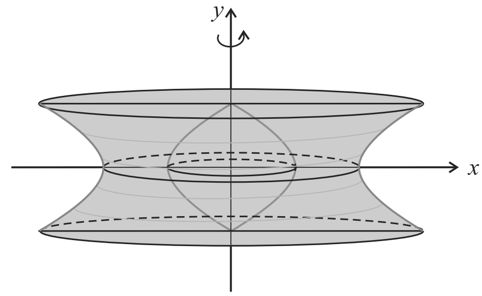


Figura 7.14

b. Em torno do eixo Ox.

Observe que pela simetria da região sombreada em torno do eixo Ox, basta considerar a região sombreada que está acima do eixo x como mostra a **Figura 7.15** para obter o sólido correspondente mostrado na **Figura 7.16**.

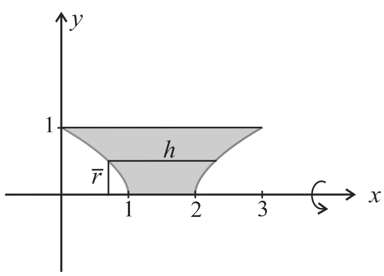


Figura 7.15

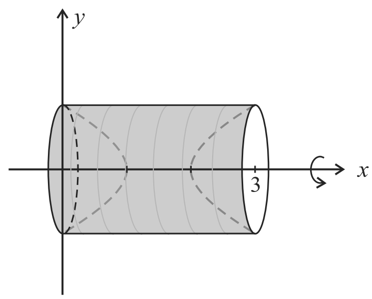


Figura 7.16

Observe que o método que dá menos trabalho, neste caso, é o das cascas cilíndricas. Identificamos a função altura da casca típica $h(y)$ e o raio médio da casca típica $\overline{r}(y)$, onde $h(y) = (2+y^2)-(1-y^2) = 1+2y^2$ e $\overline{r}(y) = y$ para $0 \le y \le 1$. Note-se que $h(y) \ge 0$ e $\overline{r}(y) \ge 0$ nesse intervalo.

O volume é dado pela fórmula $V = 2\pi \int_c^d \overline{r}(y)\,h(y)\,dy$. Assim, o volume é

$$V = 2\pi \int_0^1 y\left[1+2y^2\right] dy = 2\pi \int_0^1 (y+2y^3)dy = 2\pi \left(\frac{y^2}{2}+2\frac{y^4}{4}\right)\Big]_0^1$$

$$V = 2\pi \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = 2\pi \ \text{ unidades de volume.}$$

c. Em torno da reta vertical $x = -1$.

Desenhamos a **Figura 7.17**, mostrando a região e o eixo de rotação (reta vertical $x = -1$). Observe que o método dos discos ou arruelas é o mais adequado. Identificamos as funções raio maior $R(y)$ e o raio menor $r(y)$, onde $R(y) = 1+(2+y^2) = 3+y^2$ e $r(y) = 1+(1-y^2) = 2-y^2$, onde $-1 \le y \le 1$. Note-se também que, em particular, $0 \le r(y) \le R(y)$ para $-1 \le y \le 1$. Observe que, pela simetria da região em relação ao eixo Ox, podemos também calcular o volume para $0 \le y \le 1$ e multiplicar o resultado por 2.

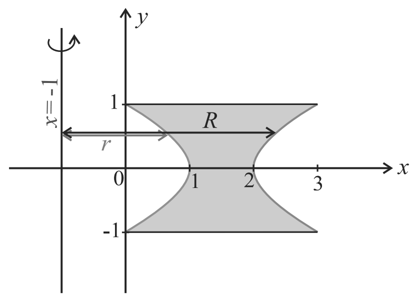


Figura 7.17

O volume é dado pela fórmula $V = \pi \int_c^d \left[(R(y))^2 - (r(y))^2\right] dy$.
Assim, o volume é

$$V = \pi \int_{-1}^{1} \left[(3+y^2)^2 - (2-y^2)^2\right] dy = 2\pi \int_0^1 \left[(3+y^2)^2 - (2-y^2)^2\right] dy$$

$$V = 2\pi \int_0^1 \left[9+6y^2+y^4-4+4y^2-y^4\right] dy = 2\pi \int_0^1 \left[5+10y^2\right] dy$$

$$V = 2\pi \left(5y + 10\frac{y^3}{3}\right)\Bigg]_0^1 = 2\pi \left(5 + \frac{10}{3}\right) = \frac{50}{3}\pi \text{ unidades de volume.}$$

Na **Figura 7.18**, mostramos o esboço do sólido correspondente.

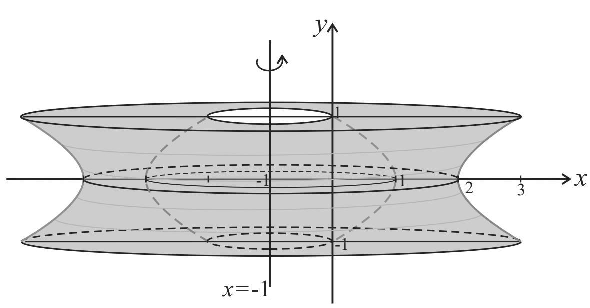


Figura 7.18

d. Em torno da reta horizontal $y = 2$.

Desenhamos a **Figura 7.19**, mostrando a região e o eixo de rotação (reta horizontal $y = 2$). Observe que o método que dá menos trabalho, neste caso, é o das cascas cilíndricas. Identificamos a função altura da casca típica $h(y)$ e o raio médio da casca típica $\overline{r}(y)$, onde $h(y) = (2+y^2) - (1-y^2) = 1+2y^2$ e $\overline{r}(y) = 2-y$ para $-1 \le y \le 1$. Note-se que $h(y) \ge 0$ e $\overline{r}(y) \ge 0$ nesse intervalo.

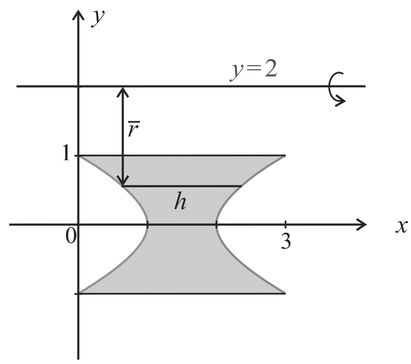


Figura 7.19

O volume é dado pela fórmula $V = 2\pi \int_c^d \overline{r}(y)\,h(y)\,dy$. Assim, o volume é

$$V = 2\pi \int_{-1}^{1} (2-y)[1+2y^2]dy = 2\pi \int_{-1}^{1} (2-y+4y^2-2y^3)dy$$

$$V = 2\pi \left(2y - \frac{y^2}{2} + 4\frac{y^3}{3} - 2\frac{y^4}{4}\right)\Bigg]_{-1}^{1}$$

$$V = 2\pi \left(2 - \frac{1}{2} + \frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right) - 2\pi \left(2(-1) - \frac{1}{2} - \frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right)$$

$$V = 2\pi \left(1 + \frac{4}{3}\right) - 2\pi \left(-3 - \frac{4}{3}\right) = 2\pi \left(1 + \frac{4}{3} + 3 + \frac{4}{3}\right)$$

$$V = 2\pi \left(4 + \frac{8}{3}\right) = 2\pi \left(\frac{20}{3}\right) = \frac{40\pi}{3} \text{ unidades de volume.}$$

Na **Figura 7.20**, mostramos o esboço do sólido correspondente.

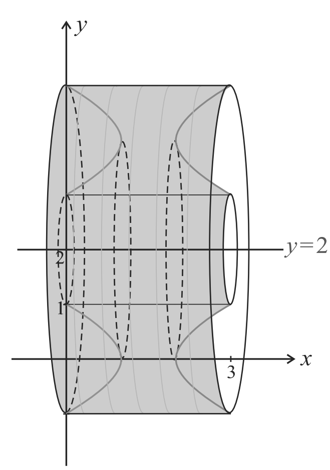


Figura 7.20

Exercício 7.13.

Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região R limitada pelas curvas $y = \dfrac{1}{x^2+1}$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$.

a. Em torno do eixo Ox.

b. Em torno do eixo Oy.

c. Em torno da reta vertical $x = 1$.

d. Em torno da reta horizontal $y = 1$.

Em cada caso: esboce a região e de acordo com o seu raciocínio, mostre uma casca típica ou um disco típico ou arruela. Faça um esboço do sólido correspondente.

Solução:

a. Em torno do eixo Ox.

Desenhamos a **Figura 7.21**, mostrando a região e o eixo de rotação (eixo Ox). Observe que o método dos discos ou arruelas é o mais adequado. Identificamos a função raio do disco típico $R(x)$, onde neste caso $R(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, para $0 \le x \le 1$. Na **Figura 7.22**, mostramos o esboço do sólido correspondente.

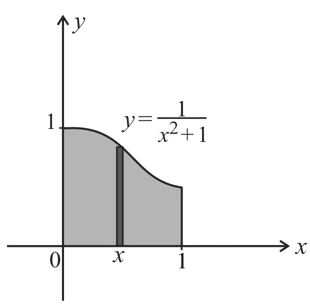


Figura 7.21

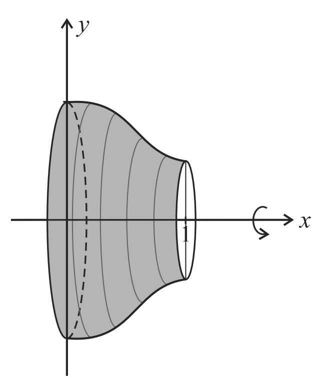
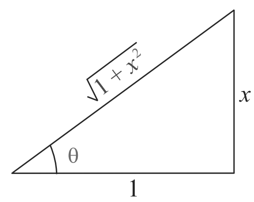


Figura 7.22

O volume é dado pela fórmula $V = \pi \displaystyle\int_a^b ((R(x))^2\,dx$. Assim, o volume é

$$V = \pi \int_0^1 \left[\frac{1}{x^2+1}\right]^2 dx = \pi \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

A técnica da substituição trigonométrica é a mais indicada para resolver a integral indefinida neste caso.



Do triângulo associado, tem-se: $\operatorname{tg}\theta = x \Rightarrow \begin{cases} x = \operatorname{tg}\theta \\ dx = \sec^2\theta\, d\theta \end{cases}$.

Também, $\sec\theta = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow \sqrt{x^2+1} = \sec\theta$.

Assim,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{sec^2\theta}{\sec^4\theta} d\theta = \int \frac{d\theta}{\sec^2\theta} = \int \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int (1+\cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta + C$$

$$= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4} 2\operatorname{sen}\theta\, \cos\theta + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + C$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)} + C. \tag{7.70}$$

Usando 7.70 e o Teorema Fundamental do Cálculo resulta

$$V = \pi\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)}\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{(1^2+1)}\right)$$

$$= \pi\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{8}(\pi+2) \text{ unidades de volume.}$$

b. Em torno do eixo Oy.

Desenhamos a **Figura 7.23**, mostrando a região e o eixo de rotação (eixo y). Observe que o método que dá menos trabalho, neste caso, é o das cascas cilíndricas. Identificamos a função altura da casca típica $h(x)$ e o raio médio da casca típica $\overline{r}(x)$, onde $h(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ e $\overline{r}(x) = x$ para $0 \leq x \leq 1$. Assim, $h(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \geq 0$ e $\overline{r}(x) = x \geq 0$. Na **Figura 7.24**, mostramos o esboço do sólido correspondente.

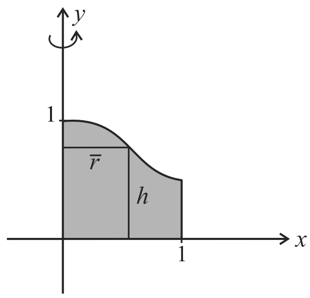


Figura 7.23

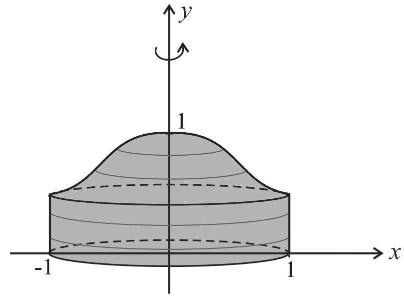


Figura 7.24

O volume é dado pela fórmula $V = 2\pi \int_a^b \overline{r}(x)\, h(x)\, dx$. Assim, o volume é

$$V = 2\pi \int_0^1 x \left(\frac{1}{x^2+1}\right) dx = \pi \int_0^1 \left(\frac{2x}{x^2+1}\right) dx$$

$$= \pi \ln(x^2+1)\Big]_0^1 = \pi \ln 2 \text{ unidades de volume.}$$

c. Em torno da reta vertical $x = 1$.

Desenhamos a **Figura 7.25**, mostrando a região e o eixo de rotação (a reta vertical $x = 1$). Observe que o método que dá menos trabalho, neste caso, é o das cascas cilíndricas. Identificamos a função altura da casca típica $h(x)$ e o raio médio da casca típica $\overline{r}(x)$, onde $h(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ e $\overline{r}(x) = 1 - x$ para $0 \leq x \leq 1$. Assim, $h(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \geq 0$ e $\overline{r}(x) = 1 - x \geq 0$. Na **Figura 7.26**, mostramos o esboço do sólido correspondente.

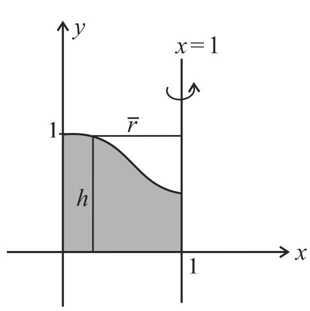


Figura 7.25

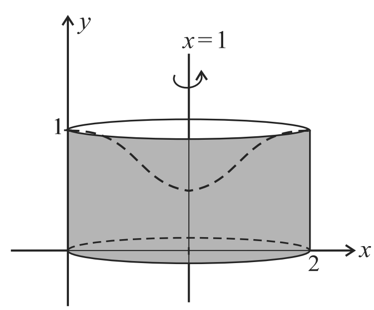


Figura 7.26

O volume é dado pela fórmula $V = 2\pi \int_a^b \overline{r}(x)\, h(x)\, dx$. Assim, o volume é

$$V = 2\pi \int_0^1 (1-x) \left(\frac{1}{x^2+1}\right) dx$$

$$V = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx - \pi \int_0^1 \left(\frac{2x}{x^2+1}\right) dx$$

$$V = 2\pi \operatorname{arctg} x\Big]_0^1 - \pi \ln(x^2+1)\Big]_0^1 = 2\pi \frac{\pi}{4} - \pi \ln 2$$

$$V = \pi\left(\frac{\pi}{2} - \ln 2\right) \text{ unidades de volume.}$$

d. Em torno da reta horizontal $y = 1$.

Desenhamos a **Figura 7.27**, mostrando a região e o eixo de rotação (a reta horizontal $y = 1$). Observe que o método que dá menos trabalho, neste caso, é o dos discos ou arruelas. Identificamos as funções raio maior $R(x)$ e o raio menor $r(x)$, onde $R(x) = 1$ e $r(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2+1}$ para $0 \leq x \leq 1$. Note-se que $0 \leq r(x) \leq R(x)$ para $0 \leq x \leq 1$. Note-se também que o eixo de rotação está acima da região dada. Na **Figura 7.28**, mostramos o esboço do sólido correspondente.

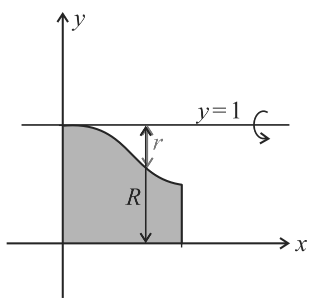


Figura 7.27

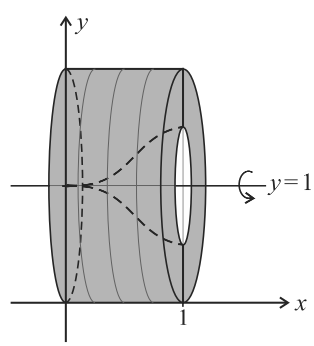


Figura 7.28

O volume é dado pela fórmula $V = \pi \displaystyle\int_a^b \left[(R(x))^2 - (r(x))^2\right] dx$.
Assim, o volume é

$$V = \pi \int_0^1 \left[1^2 - \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)^2\right] dx$$

$$V = \pi \int_0^1 \left[1 - \left(1 - \frac{2}{x^2+1} + \frac{1}{(x^2+1)^2}\right)\right] dx$$

$$V = \pi \int_0^1 \left[1 - 1 + \frac{2}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2}\right] dx$$

$$V = \pi \int_0^1 \left[\frac{2}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2}\right] dx = 2\pi \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} - \pi \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$V = 2\pi \operatorname{arctg} x\Big]_0^1 - \pi \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Usando a fórmula da integral indefinida achada em 7.70 (Exercício 7.13-a), temos

$$V = 2\pi\frac{\pi}{4} - \pi\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x + \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)}\right)\Bigg]_0^1$$

$$V = \frac{\pi^2}{2} - \pi\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,1 + \frac{1}{2}\frac{1}{(1^2+1)}\right)$$

$$V = \frac{\pi^2}{2} - \pi\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4}$$

$$V = \frac{\pi}{8}(3\pi - 2) \text{ unidades de volume.}$$

Exercício 7.14.

A base de um certo sólido é a região limitada por $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ e $x = 4$. Cada uma de suas seções transversais perpendiculares ao eixo Ox é um semicírculo, com o seu diâmetro de um lado a outro da base. Ache o volume do sólido e faça um esboço do sólido.

Solução: Na **Figura 7.29**, representamos a base do sólido e na **Figura 7.30**, a área da seção transversal $A(x)$ que, neste caso, são semicírculos. Na **Figura 7.31**, mostramos um esboço do sólido.

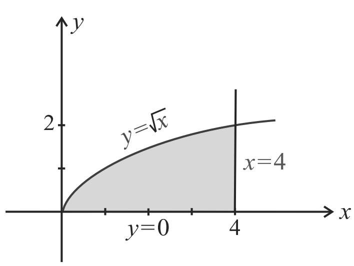


Figura 7.29

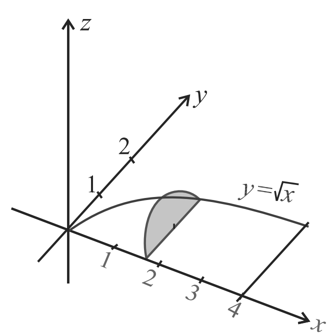


Figura 7.30

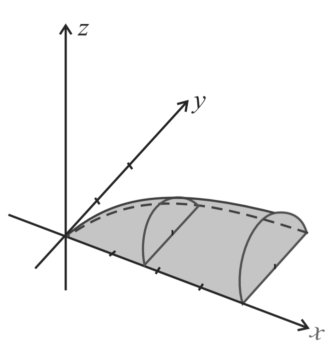


Figura 7.31

Sabemos que

$$V = \int_a^b A(x)\,dx. \tag{7.71}$$

Precisamos achar a área da seção transversal obtida pelo corte dado pelo plano que é perpendicular ao eixo Ox. Observe que a seção transversal é um semicírculo de raio r. Nas **Figuras 7.29** e **7.30**, podemos observar que, para cada $x \in [0,4]$, $r = \dfrac{\sqrt{x}}{2} \geq 0$.

Logo, a área $A(x)$ da seção transversal é

$$A(x) = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2 = \frac{\pi x}{8}. \tag{7.72}$$

Substituindo 7.72 em 7.71, onde $a = 0$ e $b = 4$, obtemos

$$V = \int_0^4 \frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{8}\int_0^4 x\,dx = \frac{\pi}{8}\frac{x^2}{2}\Bigg]_0^4 = \pi \text{ unidades de volume.}$$

Apêndice 8

Gabarito dos Simulados da AP3

Prova 1

Solução da 1ª Questão

a. Faça a substituição $u = 1+4x^2 \Rightarrow du = 8x\,dx \Rightarrow x\,dx = \dfrac{du}{8}$.

Mudando os limites de integração, se $x = 0 \Rightarrow u = 1$ e se $x = \sqrt{2} \Rightarrow u = 1+4(2) = 9$.

Assim, $$\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{1+4x^2}\,dx = \int_1^9 \sqrt{u}\,\frac{du}{8} = \frac{2}{8}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg]_1^9$$

$$= \frac{1}{12}(3^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12} = \frac{26}{12} = \frac{13}{6}.$$

b. $$\int \frac{(x+1)dx}{x^2+x+1} = \int \frac{(x+1)dx}{x^2+x+\frac{1}{4}+1-\frac{1}{4}} = \int \frac{(x+1)dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.$$

Faça a substituição $u = x+\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = u-\dfrac{1}{2}$ e $du = dx$.

Logo, $$\int \frac{(x+1)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = \int \frac{\left(u-\frac{1}{2}+1\right)}{u^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{\left(u+\frac{1}{2}\right)}{u^2+\frac{3}{4}}du$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+\frac{3}{4}}du + \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}du$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(u^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}du$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(u^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\right] + C.$$

Solução da 2ª Questão

a. Esboço da região R.

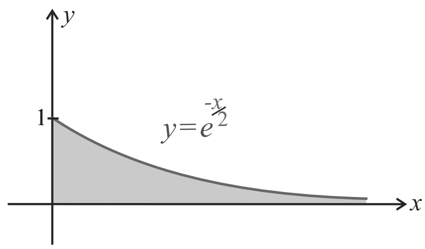


Figura 8.1

b. $A(R) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx = \lim_{t\to+\infty} (-2) \int_0^t e^{-\frac{x}{2}} \left(-\frac{1}{2}\right) dx$

$= \lim_{t\to+\infty} (-2)e^{-\frac{x}{2}}\Big]_0^t = \lim_{t\to+\infty} \left((-2)e^{-\frac{t}{2}} - (-2)e^0\right)$

Assim, $A(R) = \underbrace{\lim_{t\to+\infty} (-2)\frac{1}{e^{\frac{t}{2}}}}_{0} + 2 = 2$ unidades de área.

c.

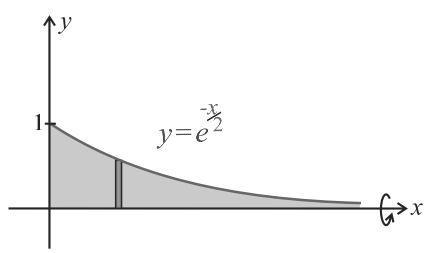


Figura 8.2

$V(R) = \pi \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 dx = \pi \lim_{t\to+\infty} \int_0^t e^{-x} dx$

$= \pi \lim_{t\to+\infty} (-1) \int_0^t e^{-x}(-1)dx = \pi \lim_{t\to+\infty} (-1)e^{-x}\Big]_0^t$

$= \pi \left(\lim_{t\to+\infty} (-1)e^{-t} + e^{-0}\right) = \pi \left(\underbrace{\lim_{t\to+\infty} \left((-1)\frac{1}{e^t}\right)}_{0} + 1\right)$

$= \pi$ unidades de volume.

O esboço do sólido aparece na **Figura 8.3**:

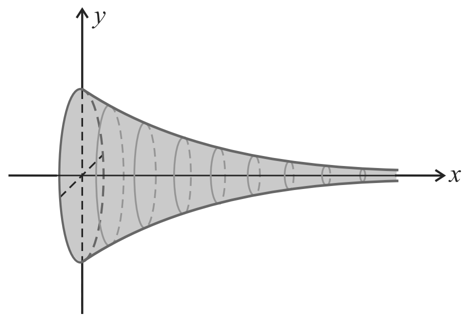


Figura 8.3

Solução da 3ª Questão

Note-se que para $x \geq 2$ temos que $\ln x \geq \ln 2 > 0$, então $0 < \dfrac{1}{\ln x} \leq \dfrac{1}{\ln 2}$.
Podemos afirmar também que

$$0 < \frac{1}{x^2 \ln x} \leq \frac{1}{x^2 \ln 2} \quad \text{para } x \geq 2. \tag{8.1}$$

Por outro lado, $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ é um caso particular do exemplo referencial: "Se $r > 1$, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^r}\,dx$ é convergente", neste caso $r = 2 > 1$, assim $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ é convergente, portanto $\displaystyle\frac{1}{\ln 2}\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ é convergente, logo de 8.1 e do Teste de Comparação para integrais impróprias resulta que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x}\,dx$ é convergente.

Solução da 4ª Questão

a. $y' = \dfrac{x^2 + 3y^2}{2xy} = \dfrac{\frac{x^2+3y^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}} = \dfrac{1 + 3\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, isto é, $y' = f(u)$ onde $f(u) = \dfrac{1+3u^2}{2u}$.

Fica evidente que a equação é da forma $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$. As variáveis não podem ser separadas. Assim, somos levados a fazer a substituição $u = \dfrac{y}{x} \Leftrightarrow y = x \cdot u \Rightarrow y' = u + x \cdot u'$.

Logo, $f(u) = u + x\dfrac{du}{dx} \Rightarrow x\dfrac{du}{dx} = f(u) - u$.

Neste caso, $f(u) - u = \dfrac{1+3u^2}{2u} - u = \dfrac{1+3u^2-2u^2}{2u} = \dfrac{1+u^2}{2u}$,
logo $x\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1+u^2}{2u} \Rightarrow \dfrac{2u}{1+u^2}du = \dfrac{dx}{x} \Rightarrow \displaystyle\int \frac{2u}{1+u^2}du = \int \frac{dx}{x}$

$$\Rightarrow \ln|1+u^2| = \ln|x| + \ln|C| = \ln|xC| \Rightarrow 1+u^2 = xC$$

$$\Leftrightarrow 1+\left(\frac{y}{x}\right)^2 = xC \Rightarrow \frac{y^2}{x^2} = Cx-1 \Rightarrow y^2 = Cx^3 - x^2$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2+y^2-Cx^3=0},$$

esta última representa a solução na forma implícita.

b. Observe que $y = f(x) = (x-1)^{\frac{3}{2}}$ é contínua, positiva em $[1,5]$ e é diferenciável no intervalo $(1,5)$. Temos também que $y' = f'(x) = \dfrac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}$ é contínua no intervalo $(1,5)$. Logo,

$$L = \int_1^5 \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = \int_1^5 \sqrt{1+\left[\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}\right]^2}\,dx =$$

$$= \int_1^5 \sqrt{1+\frac{9}{4}x-\frac{9}{4}}\,dx = \int_1^5 \sqrt{\frac{9}{4}x-\frac{5}{4}}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^5 \sqrt{9x-5}\,dx =$$

$$= \frac{1}{18}\frac{(9x-5)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg]_1^5 = \frac{1}{27}\left(40^{\frac{3}{2}}-4^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right) \approx 9{,}07.$$

Prova 2

Solução da 1ª Questão

a. Para calcular $\displaystyle\int_0^1 x\,3^x\,dx$, usaremos a fórmula de integração por partes para integrais definidas

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big]_a^b - \int_a^b v\,du$$

Faça $\begin{cases} u = x \\ dv = 3^x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \displaystyle\int 3^x\,dx = \frac{3^x}{\ln 3} \end{cases}$

$$\int_0^1 x\,3^x\,dx = x\frac{3^x}{\ln 3}\Bigg]_0^1 - \int_0^1 \frac{3^x}{\ln 3}\,dx = x\frac{3^x}{\ln 3}\Bigg]_0^1 - \frac{1}{\ln 3}\int_0^1 3^x\,dx$$

$$= \left(\frac{3}{\ln 3}-0\right) - \frac{1}{\ln 3}\left(\frac{3^x}{\ln 3}\right)\Bigg]_0^1 = \frac{3}{\ln 3} - \frac{3}{(\ln 3)^2} + \frac{1}{(\ln 3)^2}$$

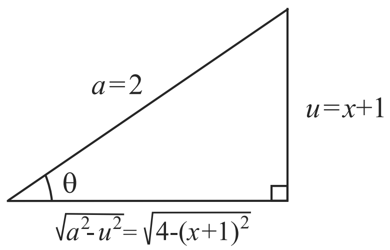
$$= \frac{3(\ln 3 - 1)+1}{(\ln 3)^2} = \frac{3\,\ln 3 - 2}{(\ln 3)^2}$$

b. Completando o quadrado no denominador, fica:

$$3-2x-x^2 = 3-(x^2+2x) = 3+1-(x^2+2x+1) = 4-(x+1)^2.$$

Logo, $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{4-(x+1)^2}}\,dx.$

Agora, no denominador, aparece uma expressão da forma a^2-u^2, com $a=2$ e $u=x+1$.



Assim: $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{x+1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\operatorname{sen}\theta - 1 \\ dx = 2\cos\theta\, d\theta \end{cases}.$

E ainda, $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{4-(x+1)^2}}{2} \Rightarrow \sqrt{4-(x+1)^2} = 2\cos\theta.$

Portanto: $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx = \int \frac{(2\operatorname{sen}\theta-1)}{2\cos\theta}\cdot 2\cos\theta\, d\theta =$

$$= \int (2\operatorname{sen}\theta - 1)d\theta = -2\cos\theta - \theta + C$$

$$= -\sqrt{3-2x-x^2} - \operatorname{arcsen}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C.$$

Solução da 2ª Questão

a. A região é mostrada a seguir

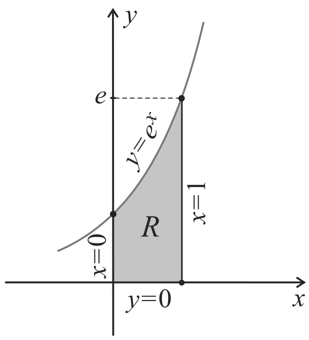


Figura 8.4

b. Calcule a área de R.

$$A(R) = \int_0^1 e^x\,dx = e^x\Big]_0^1 = e - 1 \text{ unidades de área.}$$

c. Calcule o volume do sólido obtido pela revolução da região R em torno do eixo Ox. Faça um esboço do sólido correspondente.

Observe que, neste caso, o método dos discos é o mais indicado, o raio do disco típico é perpendicular ao eixo x e a integração será feita em relação ao eixo x. O raio, neste caso, é $R(x) = e^x$ e $0 \leq x \leq 1$. Note-se que $0 < e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, em particular para $0 \leq x \leq 1$, assim $R(x) > 0$ nesse intervalo. Na **Figura 8.5**, mostramos a região, o eixo de rotação e o raio típico que vai gerar o disco típico. Na **Figura 8.6**, mostramos o esboço do sólido correspondente.

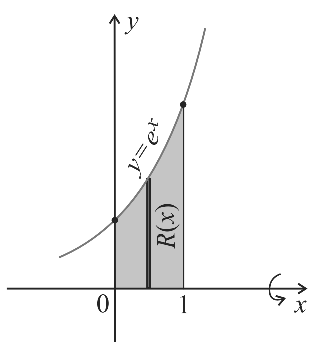


Figura 8.5

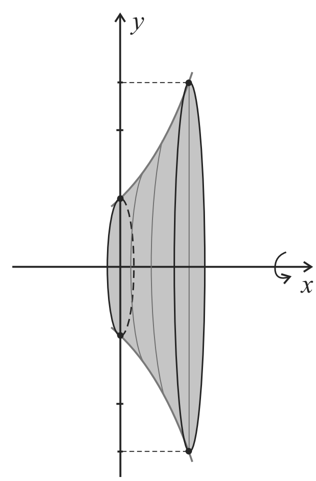


Figura 8.6

A fórmula a ser utilizada é $V = \pi \displaystyle\int_a^b (R(x))^2 dx$, onde $a = 0$ e $b = 1$. Assim,

$$V = \pi \int_0^1 (e^x)^2 \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^1 e^{2x} \, 2 \, dx = \frac{\pi}{2} e^{2x} \Big]_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{2}(e^2 - 1) \text{ unidades de volume.}$$

Solução da 3ª Questão

Observe que a integral dada é uma integral imprópria sobre o intervalo ilimitado $[1, +\infty)$.

Podemos usar o critério do limite do quociente. Observe que para $x \in [1, +\infty)$ $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x^3} > 0$ e $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^4}}{x^3} = \dfrac{1}{x} > 0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}}{1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{x^4}}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{1}=1>0$$

Então as integrais impróprias $\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\,dx$ e $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx$ comportam-se da mesma maneira, ou seja, ambas convergem ou ambas divergem. Por outro lado, sabemos do *primeiro exemplo referencial das notas de aula, [ou Exemplo 27.2 do Módulo 2]* que "$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^r}\,dx$ com $a>0$ converge se $r>1$ e diverge se $r\leq 1$." Assim, neste caso, $a=1>0$ e $r=1$, logo $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx$ diverge. Portanto, $\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\,dx$ também diverge.

Solução da 4ª Questão

Lembre a seguinte definição:

Definição 8.1.

Seja

$$y'=g(x)H(y) \tag{8.2}$$

Dizemos que $y=a$ é solução constante de 8.2 $\Leftrightarrow$ $y=a$ é raiz de $H(y)$.

a. Da equação dada, temos para $x\neq 0$ que

$$y'=\frac{1}{x}\left(\frac{y-y^2}{2+y}\right). \tag{8.3}$$

Assim, da definição dada, podemos dizer que $y=0$ e $y=1$ são soluções constantes de 8.3, pois $y=0$ e $y=1$ são raízes de $H(y)=\dfrac{y-y^2}{2+y}$.

Por outro lado, sabemos que $dy=y'\,dx$, logo $dy=\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{y-y^2}{2+y}\right)dx$.

Supondo $y\neq 0$ e $y\neq 1$, podemos separar as variáveis na forma:

$$\frac{2+y}{(y-y^2)}\,dy=\frac{1}{x}\,dx\Rightarrow\int\frac{2+y}{y(1-y)}\,dy=\int\frac{1}{x}\,dx \tag{8.4}$$

Por outro lado,

$$\frac{2+y}{(y-y^2)} = -\frac{2+y}{(y^2-y)} = -\frac{2+y}{y(y-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1}.$$

Logo, $-\dfrac{2+y}{y(y-1)} = \dfrac{A(y-1)+By}{y(y-1)}$.

Assim, $-y-2 = (A+B)y - A \Leftrightarrow A+B = -1$ e $A = 2$.

Portanto, $A = 2$ e $B = -3$.

$$\int \frac{2+y}{y(1-y)}\,dy = \int \frac{2}{y}\,dy - \int \frac{3}{y-1}\,dy =$$

$$= 2\ln|y| - 3\ln|y-1| + c = \ln\frac{|y|^2}{|y-1|^3} + c.$$

Logo, substituindo em 8.4 resulta que $\ln\dfrac{|y|^2}{|y-1|^3} = \ln|x| + \ln C$, onde $C > 0$ então $\ln\dfrac{|y|^2}{|y-1|^3} = \ln(C|x|)$, de onde obtemos a família a um parâmetro de soluções $\dfrac{|y|^2}{|y-1|^3} = C|x|$ para $x \neq 0$, $y \neq 0$ e $y \neq 1$.

b. A equação diferencial $y' - 2y = e^{2x}(x-1)^4$ é linear, onde $p(x) = -2$ e $q(x) = e^{2x}(x-1)^4$ são contínuas em $I = (-\infty, +\infty)$. Podemos utilizar a fórmula para a solução geral ou podemos trabalhar por etapas, onde não é necessário decorar a fórmula.

Observe uma primitiva de $\displaystyle\int p(x)\,dx = \int -2\,dx = 2x \quad x \in I.$

Assim, o fator integrante é $\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{-2x}$, $x \in I$. Logo, multiplicando a equação diferencial pelo fator $\mu(x)$ resulta

$$\underbrace{e^{-2x}y' - 2e^{-2x}y}_{\frac{d}{dx}(e^{-2x}y)} = \underbrace{e^{-2x}e^{2x}}_{1}(x-1)^4 = (x-1)^4 \Rightarrow \frac{d}{dx}(e^{-2x}y) = (x-1)^4$$

$$\Rightarrow e^{-2x}y = \int (x-1)^4 dx + C = \frac{(x-1)^5}{5} + C \Rightarrow y = \frac{e^{2x}(x-1)^5}{5} + Ce^{2x}$$

onde $x \in I$ e C é uma constante arbitraria é a solução geral da equação diferencial linear dada.

Porém, da condição inicial, sabemos que

$$e^4 = y(2) = e^4\frac{(2-1)^5}{5} + Ce^4 \Rightarrow 1 = \frac{1}{5} + C \Rightarrow 1 - \frac{1}{5} = C \Rightarrow C = \frac{4}{5}.$$

Assim, a solução particular do problema de valor inicial dado é

$$y = \frac{e^{2x}(x-1)^5}{5} + \frac{4}{5}e^{2x}.$$

PROVA 3

Solução da 1ª Questão

a. Esboce R. A região é mostrada a seguir

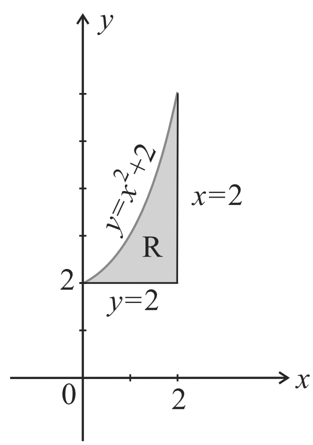


Figura 8.7

b. Calcule a área de R.

$A(R) = \int_0^2 \left[(x^2+2)-2\right] dx = \int_0^2 x^2\, dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$ unidades de área.

c. Expresse, **mas não calcule**, o volume do sólido obtido pela rotação da região R em torno do eixo Ox, usando o método:

i. dos discos circulares

Neste caso, o raio do disco típico ou arruela é perpendicular ao eixo x e a integração será feita em relação à x. O raio maior é $R(x) = x^2+2$ e $0 \leq x \leq 2$. O raio menor é $r(x) = 2$ e $0 \leq x \leq 2$. Na **Figura 8.8**, mostramos a região, o eixo de rotação e os raios indicados.

A fórmula a ser utilizada é $V = \pi \int_a^b [(R(x))^2 - (r(x))^2]dx$.
Assim,

$$V = \pi \int_0^2 \left[(x^2+2)^2 - (2)^2\right] dx.$$

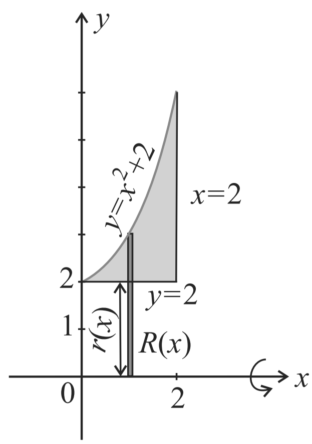


Figura 8.8

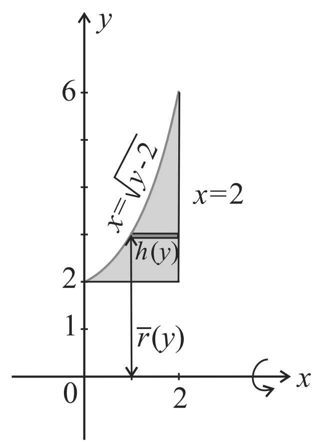


Figura 8.9

ii. das cascas cilíndricas

Note que a região dada pode ser expressa como

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq y \leq 6,\ \sqrt{y-2} \leq x \leq 2\}.$$

Desenhamos a **Figura 8.9**, mostrando a região R e o eixo de rotação (o eixo x). Identificamos na região R a função altura da casca típica $h(y)$ e o raio médio da casca típica $\overline{r}(y)$ onde $h(y) = 2 - \sqrt{y-2}$ e $\overline{r}(y) = y$ para $2 \leq y \leq 6$. O volume é dado pela fórmula $V = 2\pi \int_c^d \overline{r}(y)\, h(y)\, dy$. Assim, o volume é dado por $V = 2\pi \int_2^6 y\left(2 - \sqrt{y-2}\right) dy$.

Solução da 2ª Questão

a. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t xe^{-x}\, dx$

Para calcular $\displaystyle\int_0^t xe^{-x}\, dx$ usaremos a fórmula de integração por partes para integrais definidas $\displaystyle\int_a^b u\, dv = uv\Big]_a^b - \int_a^b v\, du$

Faça $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x}\, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \displaystyle\int e^{-x}\, dx = -e^{-x} \end{cases}$

$$\int_0^t xe^{-x}\, dx = -xe^{-x}\Big]_0^t - \int_0^t -e^{-x}\, dx = -te^{-t} - e^{-t} + 1$$

Logo, $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\, dx = \lim_{t\to+\infty}(-te^{-t} - e^{-t} + 1).$

Por outro lado, $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-t} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{e^t} = 0.$

Analogamente, $\lim\limits_{t\to\infty} t\,e^{-t} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t}{e^t} \underbrace{=}_{\text{L'H}} \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{e^t} = 0.$

Portanto, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x e^{-x}\,dx = 1.$

b. Vamos calcular a integral indefinida

$$\int \operatorname{tg}^4 x\,dx = \int \operatorname{tg}^2 x\,\operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \operatorname{tg}^2 x(\sec^2 x - 1)dx$$

$$= \int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x\,dx - \int \operatorname{tg}^2 x\,dx \underbrace{=}_{\substack{u = \operatorname{tg} x \\ du = \sec^2 x}} \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \int (\sec^2 x - 1)dx$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C.$$

Logo, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^4 x\,dx = \left.\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$

$$= \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right).$$

Solução da 3ª Questão

Observe que a integral dada é uma integral imprópria sobre o intervalo ilimitado $[2,+\infty)$.

Podemos usar o critério do limite do quociente. Note que para $x \in [2,+\infty)$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)}} > 0$ e $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}} > 0$. Por outro lado, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x(x-1)}} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1-\frac{1}{x}}} =$ $1 \in (0,+\infty)$. Então, as integrais impróprias $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(x-1)}}$ e $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ comportam-se da mesma maneira, ou seja, ambas convergem ou ambas divergem. Por outro lado, sabemos do *primeiro exemplo referencial da Semana 11 do Caderno da Coordenação [ou também pelo Exemplo 27.2 do Módulo 2]*, que "$\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^r}\,dx$ com $a > 0$ converge se $r > 1$ e diverge se $r \le 1$." Assim, neste caso, $a = 2 > 0$ e $r = \dfrac{2}{3} < 1$, logo $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ diverge. Portanto, $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(x-1)}}$ também diverge.

O aluno poderia observar também que para $x \in [2,+\infty)$, tem-se $x(x-1) < x^2 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)}} > \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ e usar o critério de comparação.

Solução da 4ª Questão

a. A equação diferencial $\dfrac{dy}{dx}+yx^2=x^2$ é linear, com $p(x)=x^2$ e $q(x)=x^2$. Podemos utilizar a fórmula para a solução geral ou podemos trabalhar por etapas, onde não é necessário decorar a fórmula.

Observe que $\displaystyle\int p(x)\,dx=\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}$.

Assim, o fator integrante é $\mu(x)=e^{\int p(x)\,dx}=e^{\frac{x^3}{3}}$. Logo,

$$\underbrace{e^{\frac{x^3}{3}}\frac{dy}{dx}+e^{\frac{x^3}{3}}x^2y}_{\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{x^3}{3}}y\right)}=e^{\frac{x^3}{3}}x^2\Rightarrow\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{x^3}{3}}y\right)=e^{\frac{x^3}{3}}x^2$$

$$\Rightarrow e^{\frac{x^3}{3}}y=\int e^{\frac{x^3}{3}}x^2\,dx+C.$$

Isto é, $e^{\frac{x^3}{3}}y=e^{\frac{x^3}{3}}+C\Rightarrow y=1+Ce^{-\frac{x^3}{3}}$ é a solução geral da equação diferencial dada.

b. Dada a equação $y'=\dfrac{1}{x^2(1+x)}$ segue que $y=\displaystyle\int\frac{1}{x^2(1+x)}\,dx$

Como o integrando é uma função racional utilizaremos o método de frações parciais:

$$\frac{1}{x^2(1+x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{1+x}=\frac{Ax(x+1)+B(1+x)+Cx^2}{x^2(1+x)}.$$

Assim, igualando os numeradores, fica $1=(A+C)x^2+(A+B)x+B$, de onde $B=1$. Como $A+B=0\Rightarrow A=-1$. Analogamente, como $A+C=0\Rightarrow C=1$.

Logo,

$$y(x)=\int\frac{1}{x^2(1+x)}\,dx=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$=-\ln|x|+\frac{x^{-1}}{-1}+\ln|1+x|+C.$$

Tendo em vista a condição inicial $y(1)=-1$, resulta que

$$y(1)=-\underbrace{\ln|1|}_{0}-\frac{1}{1}+\ln|1+1|+C=-1+\ln2+C=-1$$

$$\Rightarrow C=-\ln2.$$

Também da condição inicial, podemos afirmar que $x>0$.

Portanto, $y=-\ln x-\dfrac{1}{x}+\ln(1+x)-\ln2=\ln\left(\dfrac{1+x}{2x}\right)-\dfrac{1}{x}$, onde $x>0$ é a solução do PVI dado.