Fundação
CECIERJ
Consórcio cederj
Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Introdução às Funções de Variáveis Complexas I

Volume Único

Luiz Amancio Machado de Sousa Jr.
Luiz Pedro San Gil Jutuca

GOVERNO DO
Rio de Janeiro

SECRETARIA DE CIÊNCIA,
TECNOLOGIA E INOVAÇÃO

UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL

Ministério da
Educação

GOVERNO FEDERAL
BRASIL
PÁTRIA EDUCADORA

Apoio:

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

NOVA
CEDAE

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj
Rua da Ajuda, 5 – Centro – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20040-000
Tel.: (21) 2333-1112 Fax: (21) 2333-1116

Material Didático

Elaboração de Conteúdo
Luiz Amancio Machado de Sousa Jr.
Luiz Pedro San Gil Jutuca

Biblioteca
Raquel Cristina da Silva Tiellet
Simone da Cruz Correa de Souza
Vera Vani Alves de Pinho

Coordenação de Equipe
Marcelo Freitas

Ilustração
Ronaldo d'Aguiar Silva

Programação Visual
Aline Madeira Brondani

Revisão Linguística e Tipográfica
Patrícia Paula

Coordenação de Produção
Fábio Rapello Alencar

Assistente de Produção
Bianca Giacomelli

Capa
Clara Gomes

Produção Gráfica
Patrícia Esteves
Ulisses Schnaider

S725

Sousa Jr., Luiz Amancio Machado de.
Introdução às Funções de Variáveis Complexas I : volume único / Luiz Amancio Machado de Sousa Jr. ; Luiz Pedro San Gil Jutuca - Rio de Janeiro : Fundação CECIERJ, 2015.
236p.; 19 x 26,5 cm.

ISBN: 978-85-458-0053-8

1. Funções (Matemática). 2. Funções exponenciais. 3. Logaritmos. I. Jutuca, Luiz Pedro San Gil. II. Título.

CDD: 513.22

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.
Texto revisado segundo o novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa.

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador
Luiz Fernando de Souza Pezão

Secretário de Estado de Ciência, Tecnologia e Inovação
Gustavo Tutuca

Instituições Consorciadas

CEFET/RJ - Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca
Diretor-geral: Carlos Henrique Figueiredo Alves

UENF - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro
Reitor: Silvério de Paiva Freitas

UERJ - Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Reitor: Ricardo Vieiralves de Castro

UFF - Universidade Federal Fluminense
Reitor: Sidney Luiz de Matos Mello

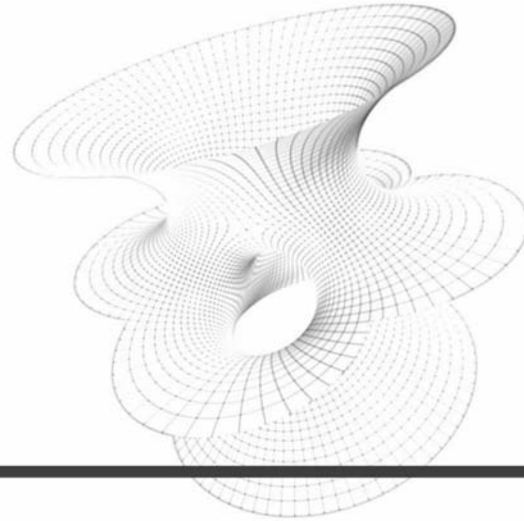
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Reitor: Roberto Leher

UFRRJ - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Reitora: Ana Maria Dantas Soares

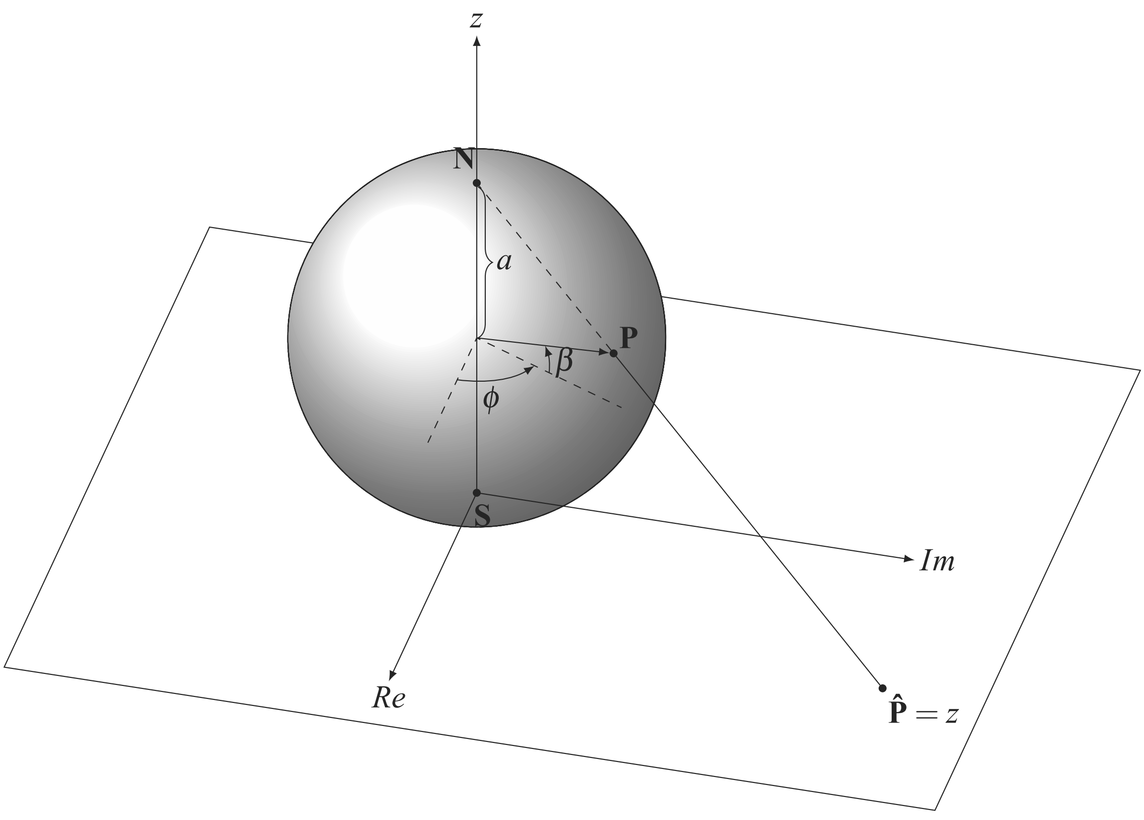
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Reitor: Luiz Pedro San Gil Jutuca

Sumário

Introdução



Introdução às Funções de Variáveis Complexas I



Luiz Amancio Machado de Sousa Jr.

Luiz Pedro San Gil Jutuca

Como Surgiram os Números Complexos

O primeiro contato do estudante com os *números complexos* ocorre, em geral, quando, ao tentar resolver uma equação do 2º grau, ele verifica que o seu discriminante, universalmente representado pela letra grega delta, é negativo. Provavelmente, o professor dirá que essa equação não possui solução no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, mas que há um conjunto onde tais soluções existem e que é chamado conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$.

Se, além disso, o professor ficar empolgado e disser que o conjunto dos números complexos é a união dos números reais com os números *imaginários*, é provável que o aluno pense que tais números somente existam na imaginação de quem os concebeu.

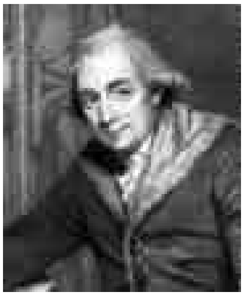
Dessa forma, fica a nítida impressão de que a motivação para a criação do conjunto $\mathbb{C}$ foi a de justificar a existência de solução para determinadas equações do 2º grau. Como veremos, o surgimento do conjunto $\mathbb{C}$ está diretamente relacionado ao estudo da solução da equação do 3º grau e não à do 2º grau, como é senso comum.

As equações do 2º grau apareceram há cerca de 1700 anos a.C., nas tabuletas de argila da Suméria e, em alguns casos, levaram a raízes quadradas de números negativos. Os matemáticos gregos resolviam alguns tipos de equação do 2º grau com régua e compasso. A conquista da Grécia por Roma praticamente acabou com o domínio da Matemática grega. Com o fim do Império Romano e a ascensão do Cristianismo, a Europa entrou na *Idade das Trevas*, restringindo o desenvolvimento da Matemática aos árabes e hindus.

Os hindus conseguiram importantes progressos em Álgebra, destacando-se o nome de *Baskara* (1114-1185), que está associado à solução da equação do 2º grau. As raízes da equação do 2º grau $ax^2+bx+c=0$ são obtidas pela *Fórmula de Baskara*: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Eventualmente, o número $\Delta=b^2-4ac$ pode ser negativo, por exemplo $x^2-x+1=0$. Quando isto ocorria, os matemáticos da época, simplesmente, diziam que o problema não tinha solução.

Os métodos algébricos desenvolvidos pelos árabes e hindus foram introduzidos na Europa por Gerardo de Cremona (1114-1187) e Leonardo de Pisa (Fibonacci) (1170-1250).

A equação do 3º grau $x^3+ax^2+bx+c=0$ pode ser reduzida à forma $y^3+py+q=0$ $(*)$ através da substituição $y=x+\frac{a}{3}$. O primeiro a resolver a equação $(*)$ foi Scipione del Ferro (1465-1526), professor da Universidade de Bolonha, que não chegou a publicar a solução. Entretanto, um de seus discípulos, Antonio Maria Fiore, conhecia a resolução.



Scipione del Ferro

Nesta época, era comum que os matemáticos propusessem a solução de problemas como desafios e, por conhecer a solução e desejoso de conseguir fama, Fiore desafiou Nicolo Fontana (1500-1557), apelidado Tartaglia a resolver a equação do 3º grau $(*)$. Tartaglia aceitou e venceu o desafio.

Tartaglia

Girolamo Cardano (1501-1576) pediu a Tartaglia que revelasse a solução da equação do 3º grau para que ele a publicasse no livro *Pratica Arithmeticae Generalis* que ele estava escrevendo. Após muito relutar, Tartaglia revelou a fórmula a

Cardano, exigindo que ele a mantivesse em segredo, pois ele mesmo queria publicar a sua descoberta. Posteriormente, Cardano soube que del Ferro havia sido o primeiro a resolver a equação do 3º grau e, além disso, quebrou a sua promessa a Tartaglia, publicando em seu livro *Ars Magna* (à época o maior compêndio de Álgebra existente) a fórmula de Tartaglia.

Cardano

A grande ideia de Tartaglia foi fazer a substituição $x = u + v$ em $x^3 + px + q = 0$ o que implica $u^3v^3 = -\dfrac{p^3}{27}$ e $u^3 + v^3 = -q$. A partir daí, ele concluiu que u^3 e v^3 são soluções da equação do 2º grau $x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0$. Portanto, uma das raízes da equação do 3º grau $(*)$ é

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}. \qquad (0.1)$$

Um fato intrigante é que a expressão $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ pode ser negativa (tome, por exemplo, $q = 2$ e $p = -6$; teremos $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -7$). Nesse caso, a tendência seria dizermos que a equação do 3º grau possui uma raiz que não é um número real, pois $\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \notin \mathbb{R}$.

Cardano chamou as soluções da equação do 3º grau $(*)$ tais que $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ de *casus irrreducibilis*, mas evitou discuti-las na *Ars Magna*.

Rafael Bombelli (1523-1573), autor do livro *L'Algebra parte maggiore dell' Arithmetica*, foi o primeiro a tratar do *casus irrreducibilis*. Bombelli considerou a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$. É fácil verificar, por substituição direta, que 4 é raiz desta equação. Contudo, a fórmula de Tartaglia (0.1) mostra que $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ é solução de $x^3 - 15x - 4 = 0$.

O quociente da divisão do polinômio $x^3 - 15x - 4$ por $x - 4$ é o polinômio $x^2 + 4x + 1$, cujas raízes são $-2 \pm \sqrt{3}$. Se admitirmos que a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ tem, no máximo 3 raízes reais, concluiremos que $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ é um número real. A pergunta natural é: se $\sqrt{-121} \notin \mathbb{R}$, como é possível que $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \in \mathbb{R}$?

Bombelli introduziu a notação $\sqrt{-1}$ que chamou de *piú di meno* e supôs que $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ pode ser escrito sob a forma $a + \sqrt{-b} + a - \sqrt{-b}$. Após alguns cálculos, Bombelli concluiu que $a = 2, b = 1$ e fez o seguinte comentário (em uma livre tradução): *Inicialmente, isto me pareceu mais sofisma do que verdade, mas continuei minhas pesquisas até encontrar a prova.*

Bombelli

René Descartes (1596-1650) foi um filósofo cujo trabalho *La Geometrie*, sobre aplicações da Álgebra à Geometria, deu origem à Geometria Analítica. Descartes usou construções geométricas para resolver equações do tipo $x^2 - a^2x + b^2 = 0$ e escreveu a seguinte frase (em livre tradução): *Para qualquer equação é possível obter tantas raízes quanto o grau permitir, mas, em muitos casos, não existe número de raízes que corresponda àquilo que imaginamos.* Esta é uma das razões pelas quais o número $\sqrt{-1}$ é chamado *imaginário*.

Descartes

A fórmula $(\cos\theta + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + \sqrt{-1}\operatorname{sen} n\theta$, atribuída ao francês Abraham de Moivre (1667-1754), era conhecida de Isaac Newton (1643-1727) que se aplicava ao cálculo das raízes cúbicas dos *casus irrreducibilis* que apareciam na fórmula de Tartaglia.

de Moivre

Leonhard Euler (1707-1783), um dos mais prolíficos matemáticos de todos os tempos, introduziu a notação $i = \sqrt{-1}$ e identificou as raízes da equação $z^n = 1$ com os vértices de um polígono regular de n lados. Além de definir a função exponencial no conjunto dos números complexos, ele provou a famosa fórmula: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$ que leva o seu nome.

Euler

Jean Robert Argand (1768-1822) era um contador francês que em 1806 escreveu um livreto intitulado *Ensaio sobre a Interpretação Geométrica das Quantidades Imaginárias*. Argand enviou seu trabalho ao célebre matemático francês Adrien-Marie Legendre (1752-1833). Em 1813, o trabalho de Argand foi publicado como artigo no periódico *Annales de Mathématiques*.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) foi quem introduziu a denominação *número complexo*. Em sua tese de doutoramento, Gauss provou um dos resultados mais celebrados da história da Matemática, o *Teorema Fundamental da Álgebra*, cujo enunciado é ”todo polinômio de grau maior ou igual a 1 e coeficientes complexos tem uma raiz complexa”. Deve-se também a Gauss a representação geométrica dos números complexos, associando as suas partes real e imaginária, respectivamente, à abscissa e à ordenada de pontos do $\mathbb{R}^2$. Com essa representação geométrica, os números complexos podem ser manejados, segundo os métodos da Geometria, e, por conseguinte, podem perder sua artificialidade temerosa. Atualmente, os matemáticos, seguindo outra orientação, preferem defini-los abstratamente como símbolos sujeitos a certas operações algébricas.

Gauss

OBJETIVOS DA DISCIPLINA

Este texto, que consideramos como introdutório à Análise Complexa, tem por objetivo iniciar o futuro Licenciado em Matemática em um dos ramos da Matemática mais presentes em outras ciências. Para exemplificar, citamos que a análise de funções de variáveis complexas se faz necessária quando são estudados os fenômenos relacionados à Teoria de Transmissão do Calor, à Mecânica dos Fluidos, à Eletricidade e a outros fenômenos em meios contínuos.

A Análise Complexa contribuiu para o desenvolvimento de praticamente todos os grandes ramos da Matemática como, por exemplo, Equações Diferenciais Parciais (em particular a Teoria do Potencial, uma vez que as partes real e imaginária de uma função analítica complexa são soluções da Equação de Laplace), Geometria Diferencial (estudo de superfícies de Riemann e de superfícies mínimas no $\mathbb{R}^3$), Teoria dos Números (estudo da distribuição de números primos através da Função Zeta de Riemann).

Nesse sentido, procuramos municiar o estudante com resultados sobre os temas mais clássicos da Análise Complexa e que, de forma natural, sempre estão presentes em todo curso de graduação sobre variáveis complexas. O texto é composto de 11 aulas cujos temas descreveremos a seguir:

- Aula 1. O Corpo dos Números Complexos.
- Aula 2. Forma Trigonométrica ou Polar dos Números Complexos.
- Aula 3. Potências e Raízes de Números Complexos.
- Aula 4. Funções de Variáveis Complexas.
- Aula 5. Funções Polinomiais.
- Aula 6. Funções Racionais.
- Aula 7. Função Exponencial.
- Aula 8. Funções Trigonométricas.
- Aula 9. Funções Hiperbólicas.
- Aula 10. Raiz n-ésima e Logaritmo.
- Aula 11. Limites, Continuidade e Derivadas.

Cada aula possui um bom número de exemplos e atividades que deverão ser resolvidas pelos alunos e cujo principal objetivo é auxiliar a compreensão do conteúdo da aula. Ao final de cada aula são apresentadas as soluções de todas as atividades propostas. É de muita importância que você tente resolver todas as atividades usando somente as notas da aula ou consultando a bibliografia auxiliar. Caso não consiga, procure e consulte seus colegas que, talvez, tenham soluções particulares ou consigam resolver suas dúvidas. Só em último caso consulte o tutor ou as soluções dadas pelos autores. Procure não desistir nunca. A cada semana enviaremos uma lista de Exercícios Programados, EPs, que se destinam a complementar os conceitos abordados no texto. Os alunos são fortemente aconselhados a resolver o maior número possível desses exercícios, pois o conhecimento matemático somente pode ser adquirido através da participação ativa no processo de pensar e aprender.

Referências

1. ÁVILA, G.S.S. - *Funções de uma Variável Complexa.* Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1974.

2. BERNARDES JR, N.C.B. e FERNANDEZ, C.S. - *Introdução às Funções de Variáveis Complexas.* Coleção Textos Universitários, Publicação SBM, Rio de Janeiro, 2006.

3. CHURCHILL, R.V. - *Variáveis Complexas e Suas Aplicações.* Mc Graw Hill do Brasil, São Paulo, 1975.

4. DO CARMO, M.; MORGADO, A.C. e WAGNER, E. - *Trigonometria e Números Complexos.* Publicação SBM, Rio de Janeiro, 2001.

5. LINS NETO, A. - *Funções de uma Variável Complexa.* Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1993.

6. SOARES, M.G. - *Cálculo em uma Variável Complexa.* Coleção Matemática Universitária. Publicação IMPA Schaum, Rio de Janeiro, 2009.

7. SPIEGEL, M.S. - *Variáveis Complexas*. Coleção Schaum, Mc Graw Hill do Brasil, São Paulo, 1973.

Aula 1

O Corpo dos Números Complexos

O Conjunto dos Números Complexos

Vimos, no guia da disciplina, que a notação i para a unidade imaginária foi introduzida por Leonhard Euler e que i é definido pela igualdade $i^2 = -1$. Como qualquer número real x, satisfaz $x^2 \geq 0$, podemos concluir que $i \notin \mathbb{R}$.

Definição 1.1.

Definiremos o conjunto $\mathbb{C}$ dos **Números Complexos** por

$$\mathbb{C} = \{z = x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Como exemplos de números complexos, temos:

a. $z = 1 + 5i$;

b. $z = 3 + \sqrt{2}i$;

c. $z = \pi i$;

d. $z = \dfrac{3}{7} - \dfrac{5}{13}i$;

e. $z = -2$.

Observemos que, quando $y = 0$, $z = x \in \mathbb{R}$, ou seja, o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é um subconjunto do conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$.

Os números reais x e y em $z = x + yi$ são, por definição, respectivamente, a **parte real** e a **parte imaginária** de z, representados por

> **!**
>
> $$x = \mathrm{Re}(z) \qquad e \qquad y = \mathrm{Im}(z).$$

Exemplo 1.1.

a. $z = -6 \Rightarrow \mathrm{Re}(z) = -6, \mathrm{Im}(z) = 0.$

b. $z = \dfrac{2}{9}i \Rightarrow \mathrm{Re}(z) = 0, \mathrm{Im}(z) = \dfrac{2}{9}.$

c. $z = -3 + 8i \Rightarrow \mathrm{Re}(z) = -3, \mathrm{Im}(z) = 8.$

Os números complexos da forma $z = ki, k \neq 0$ são chamados **imaginários puros**. A condição de igualdade entre números complexos é a seguinte.

Dois números complexos w e z são iguais se, e somente se,

> **!**
>
> $$Re(\mathrm{w}) = Re(\mathrm{z}) \qquad \mathrm{e} \qquad Im(\mathrm{w}) = Im(\mathrm{z})$$

Operações em $\mathbb{C}$

Do mesmo modo que, para números reais, podemos definir operações de soma, subtração, multiplicação e divisão para números complexos. É isto que faremos a seguir.

Dados $w = a + bi$ e $z = c + di$, definimos em $\mathbb{C}$ a operação de soma ou adição por

- Soma: $w + z = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.

Exemplo 1.2.

a. $3+(5+2i)=8+2i$.

b. $(2-3i)+4i=2+i$.

c. $(1+i)+(3+2i)=4+3i$.

Evidentemente, a soma complexa é comutativa e, como $z+0=z$, $\forall z\in\mathbb{C}$, o número complexo $w=0$ é o elemento "neutro da adição" ou "zero" de $\mathbb{C}$.

Se $z=a+b\,i$ e $w=-a-bi$, então $z+w=0$.

Assim, todo número complexo z possui elemento inverso para a soma, ou seja, existe $w\in\mathbb{C}$ tal que $w+z=0$. Denotaremos esse inverso por $-z=-a-bi$. Como exercício, constate a unicidade de $-z$.

Logo, para $w=a+bi$ e $z=c+di$, podemos definir em $\mathbb{C}$ a operação de subtração por

- Subtração: $w-z=(a+b\,i)-(c+d\,i)=(a-c)+(b-d)\,i$.

Exemplo 1.3.

a. $1-(5+2i)=-4+2i$.

b. $(2+3i)-3i=2$.

c. $(1+i)-(3+2i)=-2-i$.

As partes real e imaginária da soma e da diferença de números complexos satisfazem

1. $\mathrm{Re}(w+z)=\mathrm{Re}(w)+\mathrm{Re}(z)$.
2. $\mathrm{Re}(w-z)=\mathrm{Re}(w)-\mathrm{Re}(z)$.

Dados $w=a+bi$ e $z=c+di$, definimos em $\mathbb{C}$ a operação de multiplicação em $\mathbb{C}$ por

- Multiplicação: $w.z=(a+b\,i).(c+d\,i)=(ac-bd)+(ad+bc)\,i$.

Observe que o produto $w.z$ é obtido pela aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, como ocorre comos números reais, seguida da substituição de i^2 por -1, ou seja,

$$w.z = (a+bi).(c+di) = ac+bci+adi+bd(\underbrace{i^2}_{-1}) =$$
$$= ac-bd+(ad+bc)i.$$

Exemplo 1.4.

a. $3(5+2i) = 15+6i$.

b. $(2-3i)4i = 8i-12i^2 = 12+8i$.

c. $(1+i)(3+2i) = 3+3i+2i+2i^2 = 1+5i$.

d. $(a+bi)(a-bi) = a^2+abi-abi-b^2i^2 = a^2+b^2$.

e. $(a+bi)^2 = (a+bi)(a+bi) = a^2+2abi+b^2i^2 = a^2-b^2+2abi$.

Determinemos as potências de i. Temos:
$i^2 = -1 \Rightarrow i^3 = i.i^2 = -i \Rightarrow i^4 = (i^2)^2 = 1 \Rightarrow i^5 = i^4.i = i \Rightarrow i^6 = i^4.i^2 = -1 \Rightarrow i^7 = i^4.i^3 = -i \Rightarrow i^8 = (i^4)^2 = 1$.

Uma vez que todo inteiro $n \geq 0$ pode ser escrito como $n = 4q+r, 0 \leq n \leq 3$, podemos escrever $i^n = i^{4q+r} = i^{4q}.i^r = (i^4)^q.i^r = 1^q.i^r, r \in \{0,1,2,3\}$.

Assim, toda potência $k \geq 0$ de i é igual a $-1, 1, -i, i$ conforme k deixe, respectivamente, resto igual a $0,1,2$ ou 3 ao ser dividido por 4 (ou em linguagem de congruência: conforme $n \equiv 0,1,2,3 \pmod 4$).

Obviamente, a multiplicação complexa é comutativa e, como $z.1 = z, \forall z \in \mathbb{C}$, o número complexo $w = 1$ é o elemento "neutro da multiplicação" ou "unidade" de $\mathbb{C}$.

Se $z = a+b\,i \neq 0$, então $a^2+b^2 > 0$ e, se $w = \dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$, então

$$z.w = (a+bi)\left(\frac{a-bi}{a^2+b^2}\right) = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1.$$

Logo, todo número complexo $z \neq 0$ possui elemento inverso para a multiplicação, ou seja, existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $w.z = 1$. Denotaremos esse inverso por $z^{-1} = \frac{1}{z}$. Como exercício, constate a unicidade de $\frac{1}{z}$.

Deste modo, para $w = a + bi$ e $z = c + di \neq 0$, podemos definir em $\mathbb{C}$ a operação de divisão por

- Divisão: $\frac{w}{z} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$, $z \neq 0$.

Exemplo 1.5.

a. $\frac{1-i}{5+2i} = \frac{(1-i).(5-2i)}{(5+2i).(5-2i)} = \frac{5-2-5i-2i}{29} = \frac{3-7i}{29}$.

b. $\frac{2-3i}{2+3i} = \frac{(2-3i)^2}{(2+3i).(2-3i)} = \frac{4-9-12i}{13} = \frac{-5-12i}{13}$.

Portanto, dados $w = a + bi$ e $z = c + di$, podemos definir em $\mathbb{C}$ as seguintes operações

- Soma: $w + z = (a + b\,i) + (c + d\,i) = (a + c) + (b + d)\,i$.
- Subtração: $w - z = (a + b\,i) - (c + d\,i) = (a - c) + (b - d)\,i$.
- Multiplicação: $w.z = (a + b\,i).(c + d\,i) = (ac - bd) + (ad + bc)\,i$.
- Divisão: para $z \neq 0$, $\frac{w}{z} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$.

Certamente, muitos recordarão da Álgebra II que o conjunto $\mathbb{C}$ munido das operações soma e multiplicação definidas acima é um **corpo**.

O PLANO COMPLEXO

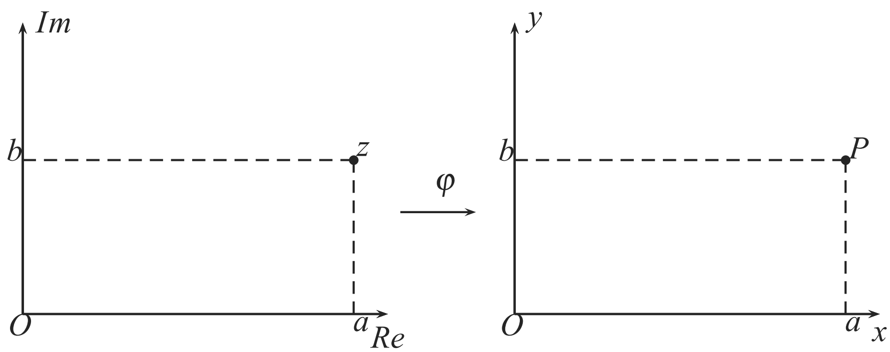
Considere a função $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\varphi(a+bi) = (a,b)$.

Devemos observar que φ é **injetora**, pois se $w = a+bi$ e $z = c+di$ são tais que $\varphi(w) = \varphi(z)$, então teremos $(a,b) = (c,d)$ e isto implica, pela condição de igualdade entre pares ordenados, que $a = c$ e $b = d$, ou seja, $w = z$.

A função φ também é **sobrejetora**, pois, dado $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, existe $z = a+bi$ tal que $\varphi(z) = (a,b)$.

Assim, pelo fato de φ ser injetora e sobrejetora, φ é **bijetora** e, deste modo, a todo número complexo $z = a+bi$ está associado um único par ordenado (a,b) e vice-versa.

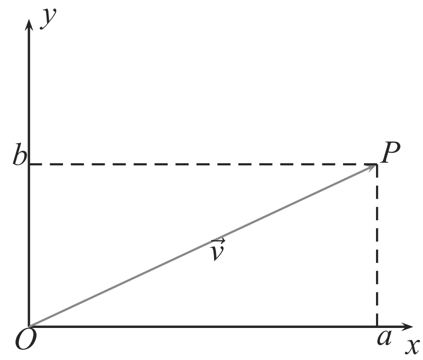
Essa bijeção entre $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$ nos permite chamar o sistema de coordenadas abaixo de **Plano Complexo**.



Os eixos real e imaginário do Plano Complexo correspondem, de certo modo, respectivamente aos eixos das abscissas e das ordenadas no plano cartesiano.

MÓDULO DE NÚMERO COMPLEXO

Em cursos de Física aprende-se que as coordenadas de um par ordenado (a,b) podem ser consideradas como componentes de um vetor $\overrightarrow{OP} = \vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$, onde O é a origem $(0,0)$, $P = (a,b)$, $\vec{i}$ é o vetor unitário cuja direção e sentido coincidem com o semieixo positivo $\overrightarrow{Ox}$ e $\vec{j}$ é o vetor unitário cuja direção e sentido coincidem com o semieixo positivo $\overrightarrow{Oy}$, como mostra a próxima figura.



Essa associação entre números complexos e vetores possibilita definir o **módulo** de $z = a + bi$ como o módulo do vetor $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$, e é isto que faremos a seguir.

Definição 1.2.

O módulo de $z = a + bi$, usualmente denotado por $|z|$, é definido por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Exemplo 1.6.

1. $z = 3 - 4i \;\Rightarrow\; |z| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5\,.$
2. $z = -17 \;\Rightarrow\; |z| = \sqrt{289} = 17\,.$
3. $z = \frac{2}{3}i \;\Rightarrow\; |z| = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}\,.$

Propriedades Básicas do Módulo

P.1: $|z| \geq 0$.

P.2: $|z| = 0 \;\Leftrightarrow\; z = 0$.

P.3: $\mathrm{Re}(z) \leq |\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$.

P.4: $\mathrm{Im}(z) \leq |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$.

P.5: $|w \cdot z| = |w| \cdot |z|$.

P.6: $\left|\dfrac{w}{z}\right| = \dfrac{|w|}{|z|}$, $z \neq 0$.

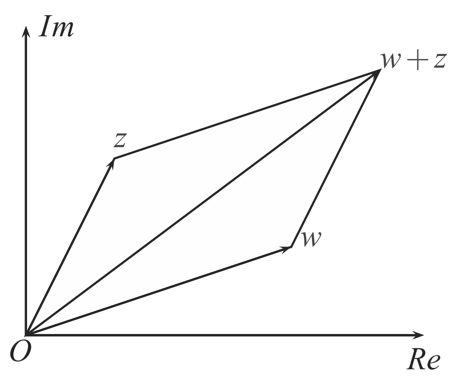
Verifiquemos as propriedade P.3 e P.4:

Se $x, y \in \mathbb{R}$, temos $x^2 + y^2 \geq x^2$ e, como a função $\begin{cases} f : [0,\infty) \to [0,\infty) \\ f(x) = \sqrt{x} \end{cases}$,
é estritamente crescente, segue-se que

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{x^2} = |x| = |\mathrm{Re}(z)| \geq \mathrm{Re}(z).$$

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{y^2} = |y| = |\mathrm{Im}(z)| \geq \mathrm{Im}(z).$$

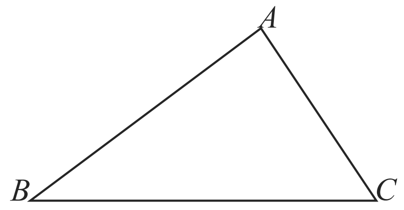
Dados os números complexos $w = a + b\,i$ e $z = c + d\,i$, consideremos suas representações vetoriais



Lembrando da "Regra do Paralelogramo" para a soma vetorial, $|w+z|$ é a diagonal do paralelogramo cujos vértices são a origem $O = (0,0)$, w, $w+z$ e z. Usando a notação $\overline{zw}$ para o segmento de extremos em w e z, temos:

$$\overline{Oz} = |z| \ \text{ e } \ \overline{z(w+z)} = \overline{Ow} = |w|\,.$$

Aprendemos em Geometria Plana que, dados três pontos A, B e C, a soma dos comprimentos dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ é maior ou igual ao comprimento do segmento $\overline{BC}$ e a igualdade ocorre se, e somente se, A, B e C são colineares.



Aplicando essa propriedade ao triângulo de vértices O, z e $w+z$ da figura acima, obtemos:

$$\overline{O(w+z)} \leq \overline{Oz} + \overline{z(w+z)}\,.$$

Essa expressão, ao ser escrita com a representação de módulos, é a propriedade P.7 de $|z|$, também conhecida por "Desigualdade Triangular":

P.7: $|w+z| \leq |w| + |z|$.

Exemplo 1.7.

1. Considere $w = 1+2\,i$ e $z = 3-i$. Com isso, temos:

$$w+z = 4+i \;\Rightarrow\; |w+z| = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}\,.$$

Por outro lado,

$$|w| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}\,,\;\; |z| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}\,.$$

Portanto,

$$|w+z| = \sqrt{17} < \sqrt{5}+\sqrt{10} = |w|+|z|\,.$$

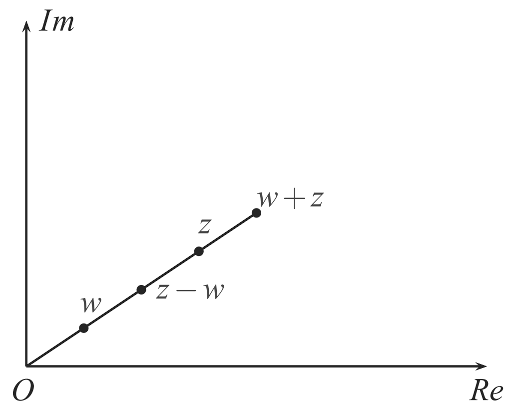
2. Tome agora $w = 3+2\,i$ e $z = 6+4\,i$. Temos,

$$w+z = 9+6\,i \;\Rightarrow\; |w+z| = \sqrt{81+36} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}\,.$$

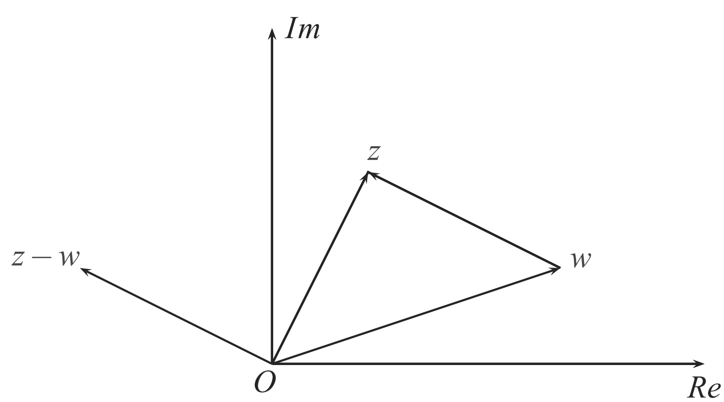
Obtemos também,

$$|w| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}\,,\;\; |z| = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}\,.$$

Assim, neste caso, $|w+z| = |w|+|z|$.



Se $w = a + b\,i$ e $z = c + d\,i$ vemos, na figura a seguir, que o vetor $\overrightarrow{wz}$ tem coordenadas $(c - a, d - b)$, portanto, a representação vetorial de $z - w$ é o vetor paralelo e de mesmo sentido que $\overrightarrow{wz}$ e que tem a origem $O = (0,0)$ como ponto inicial.



Ao considerar o triângulo de vértices O, w e z, podemos escrever $\overline{wz} \leq \overline{Ow} + \overline{Oz}$ que, ao passarmos para a representação de módulos, torna-se

P.8: $|w - z| \leq |w| + |z|$.

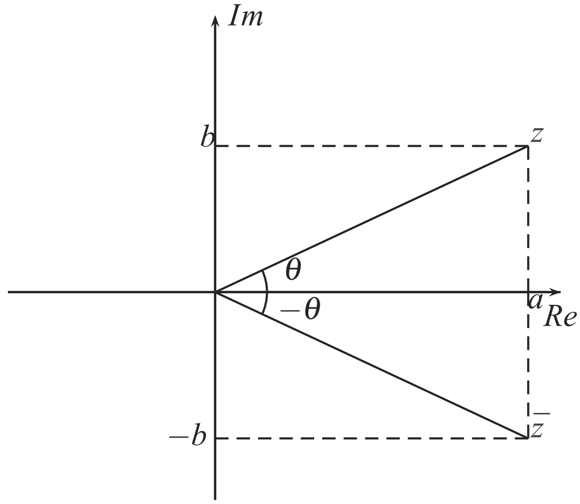
Note que a propriedade P.8 poderia ser obtida de P.7 substituindo z por $-z$ e observando que $|-z| = |z|$.

Dados dois números complexos w e z, a **distância** entre w e z é definida por $|w - z|$.

Conjugado de Número Complexo

Dado $z = a + bi$, o **conjugado** de z, que representaremos por $\overline{z}$, é definido por

$$\overline{z} = a - bi.$$



Exemplo 1.8.

i. $z = 2 + 3i \quad \Rightarrow \quad \overline{z} = 2 - 3i$

ii. $z = -5i \quad \Rightarrow \quad \overline{z} = 5i$

iii. $z = \dfrac{2}{3} - i \quad \Rightarrow \quad \overline{z} = \dfrac{2}{3} + i$

Propriedades Básicas do Conjugado:

Sejam $w = a + bi$ e $z = c + di$, então

a. $\overline{w + z} = \overline{w} + \overline{z}$

b. $\overline{w - z} = \overline{w} - \overline{z}$

c. $\overline{w \cdot z} = \overline{w} \cdot \overline{z}$

d. $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$

e. $z - \overline{z} = 2\,\mathrm{Im}(z)$

f. $|\overline{z}| = |z|$

Vamos verificar algumas dessas propriedades.

a. $w+z = a+c+(b+d)\,i \;\Rightarrow\; \overline{w+z} = a+c-(b+d)\,i = a-b\,i+c-d\,i$. Como $a-b\,i = \overline{w}$ e $c-d\,i = \overline{z}$, podemos, então, escrever $\overline{w+z} = \overline{w}+\overline{z}$.

c. $w\cdot z = ac-bd+(ad+bc)\,i \;\Rightarrow\; \overline{w\cdot z} = ac-bd-(ad+bc)\,i$. Por outro lado, $\overline{w}\cdot\overline{z} = (a-b\,i)(c-d\,i) = ac-bd-(ad+bc)\,i$, portanto $\overline{w\cdot z} = \overline{w}\cdot\overline{z}$.

d. $z+\overline{z} = a+b\,i+a-b\,i = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z)$.

e. $z = a+b\,i \;\Rightarrow\; \overline{z} = a-b\,i \;\Rightarrow\; |\overline{z}| = \sqrt{a^2+(-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$.

Se $z = a+b\,i$, então $z\cdot\overline{z} = (a+b\,i)(a-b\,i) = a^2+b^2 = |z|^2$.

Podemos usar essa relação para, por exemplo, provar a propriedade P.5: $|w.z| = |w|.|z|$.

De fato, $|w.z|^2 = w.z.\overline{w.z} = w.z.\overline{w}.\overline{z}$ pela propriedade c) do conjugado. Logo, $|w.z|^2 = (w.\overline{w})(z.\overline{z}) = |w|^2.|z|^2 \Rightarrow |w.z| = |w|.|z|$.

Também podemos escrever a divisão $\dfrac{w}{z}$, com $z \neq 0$, $w = a+b\,i$ e $z = c+d\,i$ da seguinte forma:

$$\frac{w}{z} = \frac{w\cdot\overline{z}}{z\cdot\overline{z}} = \frac{(a+b\,i)(c-d\,i)}{|z|^2} = \frac{ac+bd+(bc-ad)\,i}{|z|^2}.$$

Exemplo 1.9.

1. $z = \dfrac{2-i}{3+7i} = \dfrac{(2-i)(3-7i)}{9+49} = \dfrac{-1-17i}{58}.$

2. $z = \dfrac{i}{1-i} = \dfrac{i(1+i)}{1+1} = \dfrac{-1+i}{2}.$

Dado $z = a+b\,i \neq 0$, seu inverso multiplicativo $\dfrac{1}{z}$ pode ser escrito como

$$\frac{1}{z} = \frac{1\cdot\overline{z}}{z\cdot\overline{z}} = \frac{a-b\,i}{|z|^2}.$$

Exemplo 1.10.

$$\frac{1}{2+5i} = \frac{2-5i}{29}.$$

Exercícios Resolvidos

1. Calcule:

   a. $z = 2+7\,i+5-i$

   b. $z = (1+i)(3-2i)$

   c. $z = \dfrac{7-3i}{4+3i}$

   Solução:

   a. $z = 7+6\,i$

   b. $z = 3+2+3\,i-2\,i = 5+i$

   c. $z = \dfrac{(7-3\,i)(4-3\,i)}{(4+3\,i)(4-3\,i)} = \dfrac{28-9-21\,i-12\,i}{25} = \dfrac{19-33\,i}{25}$

2. Encontre o resultado para as seguintes potências de i.

   a. i^3

   b. i^4

   c. i^{307}

   Solução:

   a. $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$

   b. $i^4 = (i^2)^2 = (-i)^2 = 1$

   a. $i^{307} = i^{304+3} = \left(i^{76\cdot 4}\right) \cdot i^3 = (1)^{76} \cdot i^3 = i^3 = -i$

3. Se $n \in \mathbb{Z}$ é tal que $n \equiv r \pmod 4$ $r \in \{0,1,2,3\}$, mostre que $i^n = i^r$.

   Solução: Se $n \equiv r \pmod 4$, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 4k+r \Rightarrow$ $i^n = i^{4k+r} = i^{4k}.i^r = (i^4)^k.i^r = 1^k.i^r = i^r, r \in \{0,1,2,3\}$. □

4. Calcule $i^{378946779}$.

Solução: Inicialmente, observamos que se

$$N = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 \Rightarrow N = (a_n a_{n-1} \cdots a_3) \cdot 100 + a_2 a_1,$$

portanto o resto da divisão de N por 4 coincide com o resto da divisão de $a_2 a_1$ por 4.

Dessa forma, é suficiente dividirmos 79 por 4, obtendo

$$79 = 4 \cdot 19 + 3 \;\Rightarrow\; i^{378946779} = i^3 = -i.$$

5. Determine todos os números complexos z tais que $z = \overline{z}$.

Solução: Se $z = x + yi \;\Rightarrow\; \overline{z} = x - yi$. Logo $z = \overline{z} \Rightarrow y = -y \Rightarrow$ $y = 0 \;\Rightarrow\; z = x$, isto é, z é um número real.

6. Dado $x + yi$, calcule os itens a seguir em função de x e y:

   a. $\mathrm{Re}(z^2)$;

   b. $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{\overline{z}}\right)$, com $z \neq 0$.

Solução:

   a. $z = x + yi \;\Rightarrow\; z^2 = (x+yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \;\Rightarrow\; \mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2$.

   b. $z = x + yi \;\Rightarrow\; \overline{z} = x - yi \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{1}{x - yi} = \dfrac{x + yi}{(x - yi)(x + yi)} = \dfrac{x + yi}{x^2 + y^2} \;\Rightarrow\; \mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{\overline{z}}\right) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$.

7. Determine todos os números complexos z tais que:

   a. $z^2 = 9i$

   b. $\dfrac{z + \overline{z}}{1 + \overline{z}} = 3 - 4i$

Solução:

   a. $z = x + yi \;\Rightarrow\; z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$.

   Por outro lado, $z^2 = 9i \;\Rightarrow\; \begin{cases} x^2 - y^2 &= 0 \\ 2xy &= 9 \end{cases}$, o que implica $x = y$ ou $x = -y$.

   Se $x = y$, então $2x^2 = 9$ o que acarreta $x = \pm \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ e, por conseguinte, $z = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ ou $z = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}(1 + i)$.

Se $x = -y$, então $-2x^2 = 9$, o que é um absurdo, pois $x \in \mathbb{R}$.

Logo, $z = \pm \dfrac{3\sqrt{2}}{2}(1+i)$

b. Temos $z + \overline{z} = (1+\overline{z})(3-4i) = 3-4i+(3-4i)\overline{z} \Rightarrow -3+4i = -z+(2-4i)\overline{z}$. (1)

Substituindo $z = x + yi$ em (1), podemos escrever:

$$-3+4i = -x-yi+(2-4i)(x-yi) =$$
$$= -x-yi+2x-4y+(-4x-2y)i =$$
$$= x-4y+(-4x-3y)i \Rightarrow \begin{cases} x-4y &= -3 \\ -4x-3y &= 4 \end{cases}$$
$$\Rightarrow -19y = -8 \Rightarrow y = \frac{8}{19} \Rightarrow x = \frac{32}{19} - 3 = -\frac{25}{19}.$$

Portanto, $z = -\dfrac{25}{19} + \dfrac{8}{19}i$.

8. Dados os números complexos w e z, prove que

$$\big||w| - |z|\big| \leq |w - z|$$

Solução: Resulta da "Desigualdade Triangular" que $|w| = |(w-z)+z| \leq |w-z| + |z| \Rightarrow |w-z| \geq |w| - |z|$ e $|z| = |(z-w)+w| \leq |w-z| + |w| \Rightarrow |z-w| \geq |z| - |w|$. Como $|z-w| = |w-z|$, obtemos

$$|w-z| \geq |w| - |z|. \qquad (1)$$

$$|w-z| \geq |z| - |w|. \qquad (2)$$

Observando que $\big||w| - |z|\big| = \begin{cases} |w| - |z|, & \text{se } |w| \geq |z| \\ |z| - |w|, & \text{se } |z| > |w| \end{cases}$,

podemos concluir por (1) e (2) que $|w-z| \geq \big||w| - |z|\big|$. □

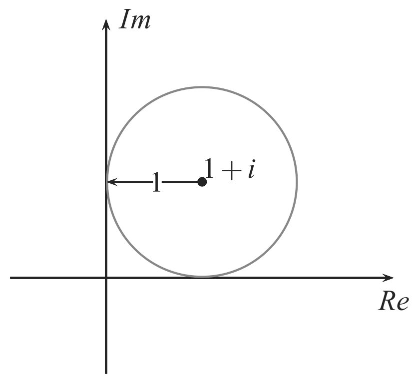
9. Represente, no Plano Complexo, os seguintes conjuntos

a. $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - (1+i)| = 1\}$.

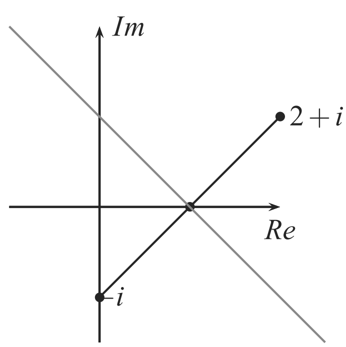
b. $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - (2+i)| = |z + i|\}$

Solução:

a. O conjunto A é o lugar geométrico dos pontos do plano, cuja distância ao ponto $(1,1)$ é igual a 1, ou seja, um círculo de centro em $(1,1)$ e raio 1.



b. Como $|z+i| = |z-(-i)|$, o conjunto B é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja distância ao ponto $P=(2,1)$ é igual a distância ao ponto $Q=(0,-1)$, ou seja, é a mediatriz do segmento $\overline{PQ}$.



10. Determine todos os números complexos z tais que $|z| - z = 2+2i$.

Solução: Seja $z = x+yi$. Temos:

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ e $\sqrt{x^2+y^2} - x - yi = 2+2i$. Logo,

$$\begin{cases} -y = 2 \;\Rightarrow\; y = -2\,, & (1) \\ \sqrt{x^2+y^2} = x+2\,. & (2) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2), temos $\sqrt{x^2+4} = x+2$, assim, para $x \geq -2$, podemos elevar os dois lados da equação ao quadrado, obtendo

$$x^2+4 = x^2+4x+4\,.$$

Daí, $4x = 0$ e, portanto, $x = 0$.

Logo, $z = -2i$ é o único número complexo tal que $|z| - z = 2+2i$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Escreva os números complexos a seguir na forma $z = a+bi$.

   a. $z = 17-2i+8i-5+4i$

   b. $z = (1+7i)\left(\dfrac{8-i}{4+3i}\right)$

   c. $z = (1+i)^3$

   d. $z = 3\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2 - 2\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$

   e. $z = (1+i)^{2014}$

2. Determine todas os complexos z tais que

   a. $2z - 5\overline{z} + \overline{8-i} + 3 + 4i = 0$

   b. $i(z+2\overline{z}) = \dfrac{3}{1-i}$

   c. $z^2 = (\overline{z})^2$

3. Se $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, calcule:

   a. $1+z+z^2$

   b. $(z+z^2)^2$

4. Determine os complexos w e z, sabendo que $w+z$ e $w \cdot z$ são números reais.

5. Mostre que:

   a. $z = \overline{\overline{z}}$.

   b. Se $w+z$ e $w.z$ são números negativos, então w e z devem ser números reais.

6. Existem números complexos z e w tais que $|z| = |w| = 1$ e $|z+w| = \sqrt{5}$?

7. Represente, no Plano Complexo, os conjuntos A, B, C e D, dados, respectivamente, por:

   a. $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-3-3i| < 2\}$.
   b. $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-3-3i| \geq 2\}$.
   c. $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+1-i| + |z-3-i| = 8\}$.
   d. $D = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \left|\, |z+\sqrt{2}| - |z-\sqrt{2}| \,\right| = 2\right\}$.

8. Se $z = 1+i$ e $w = -1+2i$, encontre os seguintes valores:

   a. $|w-3z|^2$
   b. $|z \cdot \overline{w} + w \cdot \overline{z}|$

9. Os vértices A, B e C do triângulo ABC são dados por $z_1 = 1+2i$, $z_2 = 4-2i$ e $z_3 = 1-6i$, respectivamente. Prove que o triângulo ABC é isósceles.

Solução dos Exercícios Propostos

1. Escreva os números complexos a seguir na forma $z = a+bi$.

   a. $z = 17-2i+8i-5+4i$
   b. $z = (1+7i)\left(\dfrac{8-i}{4+3i}\right)$
   c. $z = (1+i)^3$
   d. $z = 3\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2 - 2\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$
   e. $z = (1+i)^{2014}$

   Solução:

   a. $z = 12+10i$
   b. $z = \dfrac{(1+7i)[(8-i)(4-3i)]}{25} = \dfrac{(1+7i)(29-28i)}{25} = $
   $= \dfrac{225-175i}{25} = 9-7i$
   c. $z = 1+3i-3-i = -2+2i$

d. $z = 3i^2 - 2(-i)^3 = -3 - 2i$

e. $z = [(1+i)^2]^{1007} = (2i)^{1007} = -2^{1007}i$

2. Determine todas os complexos z tais que

a. $2z - 5\overline{z} + \overline{8-i} + 3 + 4i = 0$

b. $i(z + 2\overline{z}) = \dfrac{3}{1-i}$

c. $z^2 = (\overline{z})^2$

Solução: Seja $z = x + yi$. Temos $\overline{z} = x - yi$, logo

a. $2(x+yi) - 5(x-yi) + 8 + i + 3 + 4i = 0 \Rightarrow -3x + 7yi =$
$= -11 - 5i \Rightarrow x = \dfrac{11}{3}$ e $y = -\dfrac{5}{7}$.

b. $i(x + yi + 2(x - yi)) = \dfrac{3(1+i)}{2} \Rightarrow 3xi + y = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}i \Rightarrow$
$x = \dfrac{1}{2}$ e $y = \dfrac{3}{2}$.

c. $(x+yi)^2 = (x-yi)^2 \Rightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = x^2 - y^2 - 2xyi \Rightarrow$
$xy = 0 \Rightarrow y = 0$ e $z = x$ (número real) ou $x = 0$ e $z = yi$,
$y \neq 0$ (imaginário puro).

3. Se $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, calcule:

a. $1 + z + z^2$

b. $(z + z^2)^2$

Solução:

a. $z^2 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow 1 + z + z^2 = 0$.

b. Vimos em a) que $(z + z^2)^2 = (-1)^2 = 1$.

4. Determine os complexos w e z, sabendo que $w + z$ e $w \cdot z$ são números reais.

Solução: Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$. Temos $w + z = a + c + (b+d)i$ e $w.z = ac - bd + (ad + bc)i$.

Logo, $w + z \in \mathbb{R} \Rightarrow b = -d$ e $w.z \in \mathbb{R} \Rightarrow ad + bc = 0 \Rightarrow (a - c)d = 0 \Rightarrow d = 0$ ou $a = c$.

Se $b = d = 0$, os complexos são números reais e, se $b = -d$ e $a = c$, então $w = c + di = a - bi = \overline{z}$.

5. Mostre que:

   a. $z = \bar{\bar{z}}$.

   b. Se $w+z$ e $w.z$ são números negativos, então w e z devem ser números reais.

   Solução:

   a. $z = x+yi \Rightarrow \bar{z} = x-yi \Rightarrow \bar{\bar{z}} = x+yi = z$. □

   b. Sejam $z = a+bi$ e $w = c+di$.

      Vimos, no exercício anterior, que $b = -d$ e que $d = 0$ ou $a = c$.

      Mas, se $a = c$, teremos $w.z = a^2+b^2 \geq 0$, o que é um absurdo, pois $w.z < 0$. Logo, $d = 0$ e segue-se do Exercício 4 que $w, z \in \mathbb{R}$. □

6. Existem números complexos z e w tais que $|z| = |w| = 1$ e $|z+w| = \sqrt{5}$?

   Solução: Não, pois $|z|+|w| = 2 < |z+w| = \sqrt{5}$, o que contradiz a "Desigualdade Triangular".

7. Represente, no Plano Complexo, os conjuntos A, B, C e D, dados, respectivamente, por:

   a. $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-3-3i)| < 2\}$.

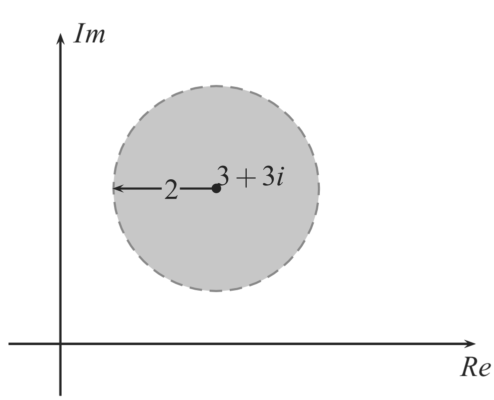
   b. $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-3-3i| \geq 2\}$.

   c. $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+1-i|+|z-3-i| = 8\}$.

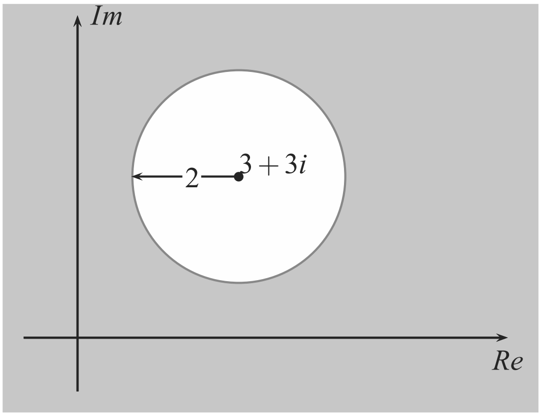
   d. $D = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \big|\, |z+\sqrt{2}|-|z-\sqrt{2}| \,\big| = 2\right\}$.

   Solução:

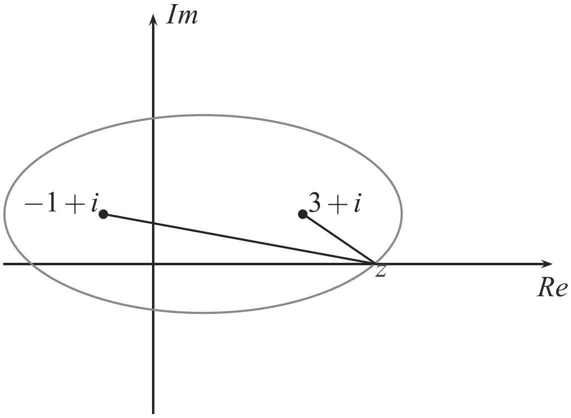
   a. O conjunto A é o lugar geométrico dos pontos do plano, cuja distância ao ponto $(3,3)$ é menor do que 2, ou seja, é o interior de um círculo de centro em $(3,3)$ e raio 2.



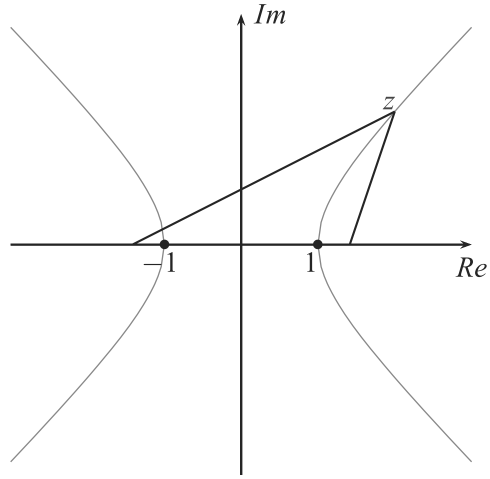
b. O conjunto B é o lugar geométrico dos pontos do plano, cuja distância ao ponto $(3,3)$ é maior ou igual a 2, ou seja, é a união do círculo de centro em $(3,3)$ e raio 2 com o seu exterior.



c. O conjunto C é o lugar geométrico dos pontos do plano, cuja soma das distâncias aos pontos $(-1,1)$ e $(3,1)$ é igual a 8, ou seja, é uma elipse de focos $(-1,1)$ e $(3,1)$ e semieixo maior 4.



d. O conjunto D é o lugar geométrico dos pontos do plano, cujo módulo da diferença das distâncias aos pontos $(-\sqrt{2},0)$ e $(\sqrt{2},0)$ é igual a 2, ou seja, é uma hipérbole de focos $(-1,1)$ e $(-1,3)$ e semieixo maior 1.



8. Se $z = 1+i$ e $w = -1+2i$, encontre os seguintes valores:

   a. $|w-3z|^2$

   b. $|z\cdot\overline{w}+w\cdot\overline{z}|$

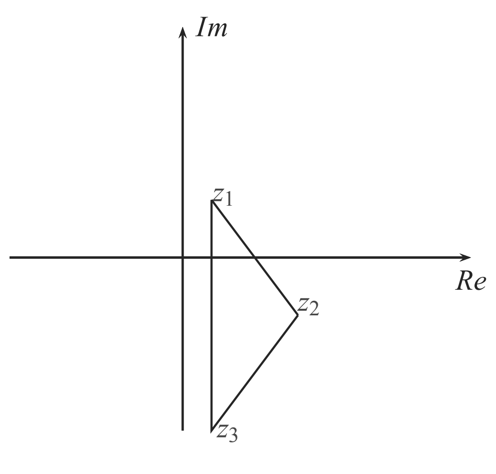
   Solução:

   a. $w-3z = -4-i \Rightarrow |w-3z| = \sqrt{17}$.

   b. $\overline{w} = -1-2i$ e $\overline{z} = 1-i \Rightarrow z\cdot\overline{w}+w\cdot\overline{z} = (1+i)(-1-2i)+(-1+2i)(1-i) = 1-3i+1+3i = 2$.

9. Os vértices A, B e C do triângulo ABC são dados por $z_1 = 1+2\,i$, $z_2 = 4-2\,i$ e $z_3 = 1-6\,i$, respectivamente. Prove que o triângulo ABC é isósceles.

   Solução: Como $z_2 - z_1 = 3-4i$ e $z_2 - z_3 = 3+4i$, temos $|z_2 - z_1| = |z_2 - z_3| = 5$. Portanto, a distância de z_2 a z_1 é igual distância de z_2 a $z_1 3$, o que mostra que o triângulo de vértices z_2, z_1 e z_3 é ísósceles. □



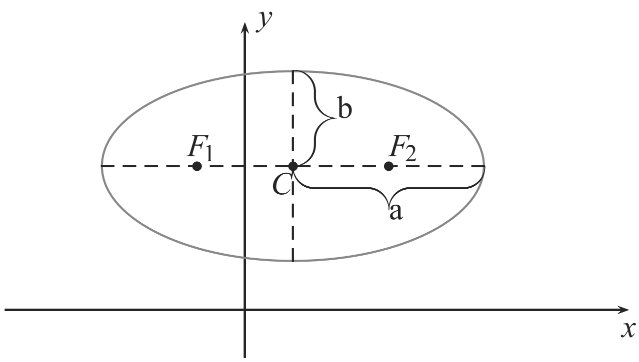
APÊNDICE: EQUAÇÕES CARTESIANAS DA ELIPSE E DA HIPÉRBOLE

a. **Elipse**

A elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é constante. Os pontos fixos, F_1 e F_2, são chamados **focos** e a constante é usualmente representada por $2a$. A distância entre os focos é usualmente representada por $2c$. O ponto médio de $\overline{F_1F_2}$ é chamado **centro** e, quando o segmento de reta que une os focos é paralelo ao eixo das abscissas, a equação cartesiana da elipse é

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,$$

onde $C=(x_0,y_0)$ é o centro e $b^2=a^2-c^2$.
Chamamos a de semieixo maior, b de semieixo menor e $2c$ de distância focal.



Quando o segmento de reta que une os focos é paralelo ao eixo das ordenadas, a equação cartesiana da elipse é

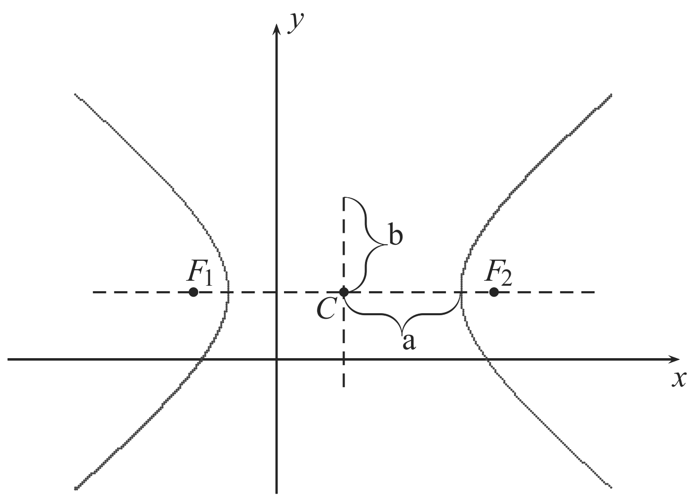
$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1.$$

b. **hipérbole**

A hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano cujo módulo da diferença de suas distâncias a dois pontos fixos é constante. Os pontos fixos, F_1 e F_2, são chamados **focos** e a constante é usualmente representada por $2a$. A distância entre os focos é usualmente representada por $2c$. O ponto médio de $\overline{F_1F_2}$ é chamado **centro** e, quando o segmento de reta que une os focos é paralelo ao eixo das abscissas, a equação cartesiana da hipérbole é

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1,$$

onde $C = (x_0, y_0)$ é o centro e $b^2 = c^2 - a^2$.
Chamamos a de semieixo maior, b de semieixo menor e $2c$ de distância focal.



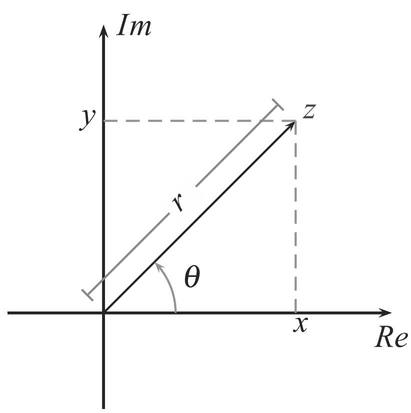
Quando o segmento de reta que une os focos é paralelo ao eixo das ordenadas, a equação cartesiana da hipérbole é

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1.$$

Aula 2

Forma Trigonométrica ou Polar dos Números Complexos

Dado um número complexo $z = x + yi \neq 0$, consideremos sua representação vetorial



Sejam $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ e θ o ângulo que o vetor correspondente a z forma com o eixo real positivo no sentido **anti-horário**.

Sabemos da Geometria Analítica que

$$x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad \text{com } \theta \in [0, 2\pi)\,. \qquad (1)$$

O ângulo θ, que **não** está definido para $z = 0$, é chamado **argumento** do número complexo z e será denotado por $\arg(z)$.

Observe que o argumento não é necessariamente único, pois as funções $\cos\theta$ e $\mathrm{sen}\,\theta$ têm período 2π, ou seja, $\cos\theta = \cos(\theta + 2k\pi)$ e $\mathrm{sen}\,\theta = \mathrm{sen}\,(\theta + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Deste modo, podemos falar sobre um conjunto de argumentos de $z \neq 0$, isto é,

$$\arg(z) = \{\theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}, \quad \text{onde} \quad \theta \quad \text{satisfaz} \quad (1).$$

Se $z = x + yi$ tem a parte real não nula, isto é, $Re(z) = x \neq 0$, então θ satisfaz $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{x}$ e podemos usar uma calculadora para obter $\varphi = \arctan\dfrac{y}{x} \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ e determinar θ a partir de x e y, ou seja:

a. Se $x > 0$ e $y \geq 0$, então $\theta = \varphi$ encontra-se no 1º Quadrante.

b. Se $x < 0$ e $y \geq 0$, então $\theta = \pi + \varphi$ encontra-se no 2º Quadrante.

c. Se $x < 0$ e $y \leq 0$, então $\theta = \pi + \varphi$ encontra-se no 3º Quadrante.

d. Se $x > 0$ e $y \leq 0$, então $\theta = 2\pi + \varphi$ encontra-se no 4º Quadrante.

Observemos que se $x = 0$, então $z = yi$. Assim, se $y \neq 0$, então z é imaginário puro e, nesse caso, $\theta = \pi$ se $y > 0$ e $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$ se $y < 0$.

!

Chamaremos a representação

$$z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

de forma **Trigonométrica** ou **Polar** de z.

Exemplo 2.1.

1. $z = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i \quad \Rightarrow \quad r = |z| = \sqrt{\dfrac{27+9}{4}} = \sqrt{9} = 3.$

   $\varphi = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad \theta = \dfrac{\pi}{6}.$

   $z = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}\right).$

2. $z=-1+\sqrt{3}\,i \quad \Rightarrow \quad r=|z|=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2.$

$\varphi=\arctan\left(-\sqrt{3}\right)=-\dfrac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \theta=\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}\cdot$

$z=2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{3}\right).$

3. $z=-3-3\,i \quad \Rightarrow \quad r=|z|=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}.$

$\varphi=\arctan(1)=\dfrac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \theta=\pi+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5\pi}{4}\cdot$

$z=3\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4}+i\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{4}\right).$

4. $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2} \quad \Rightarrow \quad r=|z|=\sqrt{\dfrac{3+1}{4}}=\sqrt{1}=1.$

$\varphi=\arctan\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\dfrac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad \theta=2\pi-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{11\pi}{6}\cdot$

$z=\left(\cos\dfrac{11\pi}{6}+i\operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{6}\right).$

5. $z=-7 \quad \Rightarrow \quad r=|z|=7.$ $\varphi=\arctan(0)=0 \quad \Rightarrow \quad \theta=\pi+0=\pi\cdot$

$z=7(\cos\pi+i\operatorname{sen}\pi).$

6. $z=\sqrt{2}\,i \quad \Rightarrow \quad r=|z|=\sqrt{2}$ e $\theta=\dfrac{\pi}{2}\cdot$

$z=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}\right).$

7. $z=-\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}i \quad \Rightarrow \quad r=|z|=\sqrt{\dfrac{1}{16}+\dfrac{3}{16}}=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}.$

$\varphi=\arctan\left(-\sqrt{3}\right)=-\dfrac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \theta=\pi+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{4\pi}{3}\cdot$

$z=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\operatorname{sen}\dfrac{4\pi}{3}\right).$

MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO NA FORMA TRIGONOMÉTRICA

Sejam $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2$. Temos por conseguinte:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\text{sen}\,\theta_2) + r_1 r_2(\cos\theta_1\text{sen}\,\theta_2 +$$

$$\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2)\,. \quad (2)$$

Por meio da Trigonometria, sabemos que $\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\text{sen}\,\theta_2$ e $\text{sen}\,(\theta_1+\theta_2) = \text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + \text{sen}\,\theta_2\cos\theta_1$. Logo, substituindo esses resultados em (2), obtemos

!

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\text{sen}\,(\theta_1+\theta_2)\right).$$

Portanto, para multiplicarmos números na forma trigonométrica, é suficiente que multipliquemos seus módulos e somemos seus argumentos.

Quando pensamos na divisão de números complexos na forma trigonométrica, para $z_2 \neq 0$, temos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)r_2(\cos\theta_2 - i\,\text{sen}\,\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)r_2(\cos\theta_2 - i\,\text{sen}\,\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1 r_2\left((\cos\theta_1\cos\theta_2 + \text{sen}\,\theta_1\text{sen}\,\theta_2) + i\,(\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_2\cos\theta_1)\right)}{{r_2}^2(\cos^2\theta_2 + \text{sen}^2\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left((\cos\theta_1\cos\theta_2 + \text{sen}\,\theta_1\text{sen}\,\theta_2) + i\,(\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_2\cos\theta_1)\right) \quad (3)$$

Mais uma vez recorreremos à Trigonometria com o objetivo de simplificar a expressão obtida. Neste sentido, relembrando que $\cos(\theta_1-\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \text{sen}\,\theta_1\text{sen}\,\theta_2$ e que $\text{sen}\,(\theta_1-\theta_2) = \text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\text{sen}\,\theta_2$ e substituindo esses resultados em (3) segue-se que

!

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\,\text{sen}\,(\theta_1-\theta_2)\right).$$

Assim, para dividirmos z_1 por z_2 em sua forma trigonométrica, é suficiente dividirmos o módulo de z_1 pelo módulo de z_2 e diminuirmos $\arg(z_2)$ de $\arg(z_1)$.

Exemplo 2.2.

$z_1 = 1 - \sqrt{3}$ e $z_2 = \sqrt{7} + \sqrt{7}i$.

Temos:

i. $r_1 = |z_1| = \sqrt{1+3} = 2,\ \varphi = \arctan(-\sqrt{3}) = -\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow$

$\theta = 2\pi + \varphi = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow z_1 = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\dfrac{5\pi}{3}\right)$.

ii. $r_2 = |z_2| = \sqrt{7+7} = \sqrt{14},\ \varphi = \arctan(1) = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow$

$\theta = \varphi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow z_2 = \sqrt{14}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Logo:

iii. $z_1.z_2 = 2\sqrt{14}\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\dfrac{5\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right) =$

$2\sqrt{14}\left(\cos\left(\dfrac{23\pi}{12}\right) + i\,\text{sen}\left(\dfrac{23\pi}{12}\right)\right)$

iv. $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{5\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{5\pi}{3}\right)\right) =$

$\dfrac{\sqrt{14}}{2}\left(\cos\left(-\dfrac{17\pi}{12}\right) + i\,\text{sen}\left(\dfrac{-17\pi}{12}\right)\right) =$

$\dfrac{\sqrt{14}}{2}\left(\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) + i\,\text{sen}\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)\right)$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Escreva $z = 4\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\dfrac{5\pi}{12}\right)$ em sua forma algébrica.

Solução: Como $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}$, aplicando as fórmulas do cosseno e do seno da soma, obtemos

i. $\cos\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=$
$\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)\,.$

ii. $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=$
$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)\,.$

Logo,

$$z=\frac{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{4}\left((\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)i\right)=2(\sqrt{3}-1)+2(\sqrt{3}+1)\,i\,.$$

2. Se $z=r(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)$, escreva $w_1=\frac{1}{z}$ e $w_2=\overline{z}$ na forma trigonométrica.

Solução: Temos

$$w_1=\frac{1}{z}=\frac{\cos 0+i\operatorname{sen}0}{r(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)}=\frac{1}{r}(\cos(-\theta)+i\operatorname{sen}-\theta))\,\frac{1}{r}(\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta).$$

Lembremos que $z\overline{z}=|z|^2\ \Rightarrow\ \overline{z}=\frac{1}{z}\cdot r^2=r(\cos(-\theta)+i\operatorname{sen}(-\theta))=$
$r(\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta)$.

3. Se $z\neq 0$, determine o valor **máximo** de $k=\left|\frac{z}{\overline{z}}-\frac{\overline{z}}{z}\right|$.

Solução: Seja $z=r(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)$. Já foi visto que $\overline{z}=r(\cos(-\theta)+i\operatorname{sen}(-\theta))$. Então

$$\frac{z}{\overline{z}}=\cos(2\theta)+i\operatorname{sen}(2\theta)\quad\text{e}\quad\frac{\overline{z}}{z}=\cos(-2\theta)+i\operatorname{sen}(-2\theta).\quad(i)$$

Desde que $\cos(-x)=\cos x$ e $\operatorname{sen}(-x)=-\operatorname{sen}x$, temos por (i) que

$$k=\left|\frac{z}{\overline{z}}-\frac{\overline{z}}{z}\right|=|2i|\,|\operatorname{sen}2\theta|=2\,|\operatorname{sen}2\theta|\leq 2\,.$$

Portanto, o maior valor de k é 2 e isto ocorre se, e somente se, $\operatorname{sen}2\theta=\pm1$, ou seja, $\theta=\frac{\pi}{4}$ ou $\theta=-\frac{\pi}{4}\cdot$

4. a. Determine todos os complexos z tais que $|z| + iz = 0$.

Solução: Se $z = x + yi$, temos $iz = xi + yi^2 = -y + xi$.

Logo, $0 = |z| + iz = |z| - y + xi \Leftrightarrow x = 0$ e $y = |z| \geq 0$, ou seja, $|z| + iz = 0 \Leftrightarrow z = ki, k \geq 0$.

b. Se z não é imaginário puro, prove que $w = \dfrac{|z| - iz}{|z| + iz}$ é imaginário puro.

Solução: Vimos na letra (a) que $z \neq yi \;\Rightarrow\; z_1 = |z| + iz \neq 0$.
Se $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, temos

i. $z_1 = |z| + iz = r + ir(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = r(1 - \operatorname{sen}\theta + i\cos\theta) \Rightarrow$

$\overline{z_1} = r(1 - \operatorname{sen}\theta - i\cos\theta)$.

ii. $z_2 = |z| - iz = r - ir(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = r(1 + \operatorname{sen}\theta - i\cos\theta)$.

Assim, $w = \dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{z_2 \cdot \overline{z_1}}{|z_1|^2}$ e, para mostrarmos que w é imaginário puro, basta mostar que $\operatorname{Re}(z_2 \cdot \overline{z_1}) = 0$ e $\operatorname{Im}(z_2 \cdot z_1) \neq 0$. Temos

$$
\begin{aligned}
z_2 \cdot \overline{z_1} &= r(1 + \operatorname{sen}\theta - i\cos\theta)r(1 - \operatorname{sen}\theta - i\cos\theta) \\
&= r^2\left[(1 - i\cos\theta) + \operatorname{sen}\theta\right]\left[(1 - i\cos\theta) - \operatorname{sen}\theta\right] \\
&= r^2\left[(1 - i\cos\theta)^2 - \operatorname{sen}^2\theta\right] \\
&= r^2(1 - \cos^2\theta - 2i\cos\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \\
&= r^2\left[1 - (\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) - 2\cos\theta\, i\right] \\
&= -2r^2\cos\theta\, i.
\end{aligned}
$$

Mas z **não** é imaginário puro, logo $r \neq 0$ e $\cos\theta \neq 0$ o que mostra que $\operatorname{Im}(w) \neq 0$ e completa nossa prova. □

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Escreva os números complexos abaixo em sua forma trigonométrica.

a. $z = -5 + 5i$

b. $z = -3 - 3\sqrt{3}\, i$

c. $z = \pi i$

2. Dados $z_1 = 2\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{3\pi}{4}\right), z_2 = 3\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\dfrac{7\pi}{6}\right)$ e $z_3 = 4\left(\cos\dfrac{31\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\dfrac{31\pi}{3}\right)$, calcule:

   a. $z_1 \cdot z_2$

   b. $\dfrac{z_3}{z_2}$

   c. $z_1 \cdot \overline{z_3}$

   d. $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$

3. Sejam $w = a + b\,i$ e $z = a + c\,i$, onde $a \neq 0$, números complexos tais que $w.z = k$, $k > 0$. Calcule $|w|$ e $|z|$.

   Sugestão: Considere o argumento do produto.

4. Determine, no plano complexo, os seguintes conjuntos:

   a. $A = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z) = \dfrac{\pi}{3}\right\}$

   b. $B = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \dfrac{5\pi}{12} \leq \arg(z) \leq \dfrac{5\pi}{6}\right\}$

   c. $C = \{z \in \mathbb{C} \mid 3 \leq |z| \leq 5\}$

   d. $D = B \cap C$

5. Determine todos os números complexos z tais que $|z| = 10$, a imagem de z no plano complexo pertence ao $1^{\underline{o}}$ Quadrante e $\left|\dfrac{z}{\overline{z}} + \dfrac{\overline{z}}{z}\right| = \dfrac{6}{5}$.

Solução dos Exercícios Propostos

1. Escreva os números complexos abaixo em sua forma trigonométrica.

   a. $z = -5 + 5\,i$

   b. $z = -3 - 3\sqrt{3}\,i$

   c. $z = \pi\,i$

Solução:

a. $r = |z| = 5\sqrt{2}$ e $\theta = \dfrac{3\pi}{4} \;\Rightarrow\; z = 5\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{3\pi}{4}\right).$

b $r=|z|=6$ e $\theta=\dfrac{4\pi}{3} \Rightarrow z=6\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\operatorname{sen}\dfrac{4\pi}{3}\right)$.

c. $r=|z|=\pi$ e $\theta=\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow z=\pi\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}\right)$.

2. Dados $z_1=2\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{4}\right), z_2=3\left(\cos\dfrac{7\pi}{6}+i\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{6}\right)$ e $z_3=4\left(\cos\dfrac{31\pi}{3}+i\operatorname{sen}\dfrac{31\pi}{3}\right)$, calcule:

   a. $z_1\cdot z_2$

   b. $\dfrac{z_3}{z_2}$

   c. $z_1\cdot\overline{z_3}$

   d. $z_1\cdot z_2\cdot z_3$

   Solução:

   a. $z_1\cdot z_2=6\left(\cos\dfrac{23\pi}{12}+i\operatorname{sen}\dfrac{23\pi}{12}\right)$.

   b. $\dfrac{z_3}{z_2}=\dfrac{4}{3}\left(\cos\dfrac{55\pi}{6}+i\operatorname{sen}\dfrac{55\pi}{6}\right)=4\left(\cos\dfrac{7\pi}{6}+i\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{6}\right)$.

   c. $z_1\cdot\overline{z_3}=8\left(\cos\left(-\dfrac{115\pi}{12}\right)+i\operatorname{sen}\left(-\dfrac{115\pi}{12}\right)\right)=$
   $8\left(\cos\dfrac{5\pi}{12}+i\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

   d. $z_1\cdot z_2\cdot z_3=24\left(\cos\dfrac{147\pi}{12}+i\operatorname{sen}\dfrac{147\pi}{12}\right)=$
   $24\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$.

3. Sejam $w=a+bi$ e $z=a+ci$, onde $a\neq 0$, números complexos tais que $w.z=k$, $k>0$. Calcule $|w|$ e $|z|$.

   Sugestão: Considere o argumento do produto.

   Solução: Se $w\cdot z=k,\ k>0 \Rightarrow \arg(w)+\arg(z)=0 \Rightarrow$ $\arg(w)=-\arg(z)=\arg(\overline{z})$.

   Como $\arg(w)=-\arg(z)$ e $\operatorname{Re}(w)=\operatorname{Re}(z)=a\neq 0$, concluímos que

   $$\operatorname{Im}(w)=a\operatorname{tg}(-\arg(z))=-a\operatorname{tg}(\arg(z))=-\operatorname{Im}(z).$$

Logo,

$$w = \mathrm{Re}(w) + \mathrm{Im}(w)\,i = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)\,i = \overline{z}$$

e isso implica o seguinte:

$k = |k| = |w \cdot z| = |w| \cdot |z| = |\overline{z}| \cdot |z| = |z|^2 \Rightarrow |z| = \sqrt{k}$ e $|w| = |\overline{z}| = |z| = \sqrt{k}$.

4. Determine, no plano complexo, os seguintes conjuntos:

   a. $A = \left\{ z \in \mathbb{C} \,|\; \arg(z) = \dfrac{\pi}{3} \right\}$

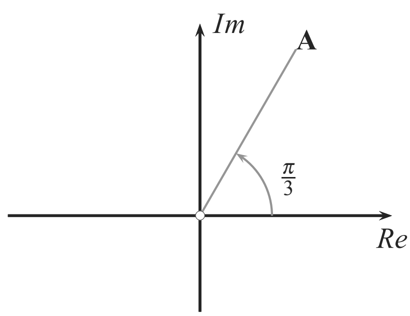
   b. $B = \left\{ z \in \mathbb{C} \,|\; \dfrac{5\pi}{12} \leq \arg(z) \leq \dfrac{5\pi}{6} \right\}$

   c. $C = \{ z \in \mathbb{C} \,|\; 3 \leq |z| \leq 5 \}$

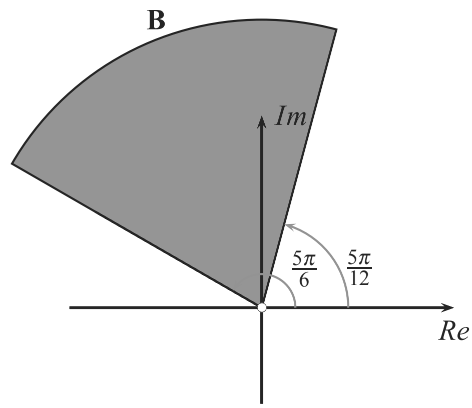
   d. $D = B \cap C$

Solução:

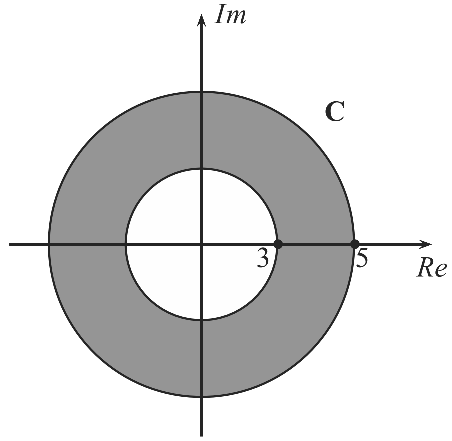
a. $A = \left\{ z \in \mathbb{C} \,|\; \arg(z) = \dfrac{\pi}{3} \right\}$



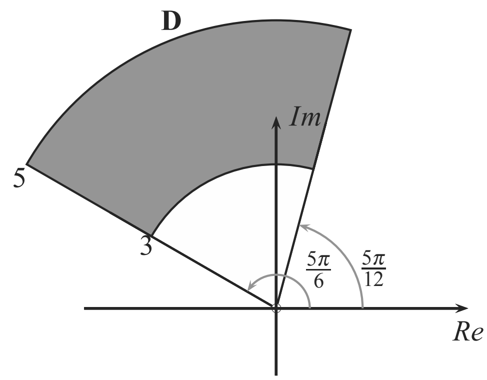
b. $B = \left\{ z \in \mathbb{C} \,|\; \dfrac{5\pi}{12} \leq \arg(z) \leq \dfrac{5\pi}{6} \right\}$



c. $C = \{z \in \mathbb{C} \mid 3 \leq |z| \leq 5\}$



d. $D = B \cap C$



5. Determine todos os números complexos z tais que $|z| = 10$, a imagem de z no plano complexo pertence ao $1^{\underline{o}}$ Quadrante e $\left|\dfrac{z}{\overline{z}} + \dfrac{\overline{z}}{z}\right| = \dfrac{6}{5}$.

Solução: Se $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, temos

$$\overline{z} = r\,(\cos(-\theta) + i\,\text{sen}\,(-\theta)) \Rightarrow \frac{z}{\overline{z}} = \cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta \quad \text{e}$$

$$\frac{\overline{z}}{z} = \cos(-2\theta) + i\,\text{sen}\,(-2\theta) = \cos 2\theta - i\,\text{sen}\,2\theta.$$

Temos

$$\frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z} = 2\cos 2\theta \Rightarrow \left|\frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z}\right| = 2\,|\cos 2\theta|.$$

Logo, $|\cos 2\theta| = \dfrac{3}{5}$, isto é, $\cos 2\theta = \pm\dfrac{3}{5}$.

Mas $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1,$, ou seja, $\cos^2\theta = \dfrac{1}{2}\left(1 \pm \dfrac{3}{5}\right) \Rightarrow$

$$\begin{cases} \cos^2\theta = \dfrac{4}{5} \Rightarrow |\cos\theta| = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow |\operatorname{sen}\theta| = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \\ \cos^2\theta = \dfrac{1}{5} \Rightarrow |\cos\theta| = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow |\operatorname{sen}\theta| = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Como z pertence ao 1º Quadrante e $|z| = 10$, segue-se que
$z = 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5}\,i$ ou $z = 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5}\,i$.

Aula 3

Potências e Raízes de Números Complexos

Fórmula de Moivre

Vimos, na Aula 2, que o produto de dois números complexos $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$ é dado por

!

$$w = z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\,(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\text{sen}\,(\theta_1+\theta_2))\,.$$

O seguinte resultado mostra que a fórmula acima pode ser estendida para n números complexos.

Teorema 3.1.

Sejam $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1),\ z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2), \cdots,$ $z_n = r_n(\cos\theta_n + i\,\text{sen}\,\theta_n)$. Então,

!

$$z_1 \cdot z_2 \ldots z_n = r_1 r_2 \ldots r_n(\cos(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n) + i\,\text{sen}\,(\theta_1 + \theta_2+\ldots+\theta_n)).$$

Prova

Demonstraremos o Teorema por indução sobre n.

i. $w = z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\,(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\text{sen}\,(\theta_1+\theta_2))$, o que mostra a validade da fórmula para $n = 2$.

ii. Suponhamos a validade da fórmula para $n \geq 3$, isto é,

$w = z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = r_1 r_2 \ldots r_n (\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n))$.

(Hipótese da Indução).

iii. Usando (i) e (ii), vamos agora provar a validade da fórmula para $n+1$, $n \geq 3$.

Seja $w = z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n \cdot z_{n+1} = (z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n) \cdot z_{n+1}$.

Denotando por w_1 o produto $z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n$, podemos escrever $w = w_1 \cdot z_{n+1}$. Portanto, se $w_1 = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ e $z_{n+1} = r_{n+1}(\cos\theta_{n+1} + i \operatorname{sen}\theta_{n+1})$, a partir de (i) resulta que

$$w = r r_{n+1} (\cos(\theta + \theta_{n+1}) + i \operatorname{sen}(\theta + \theta_{n+1})). \quad (*)$$

Mas, para $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2), \cdots,$ $z_n = r_n(\cos\theta_n + i \operatorname{sen}\theta_n)$, podemos aplicar (ii), obtendo

$$w_1 = r_1 r_2 \ldots r_n (\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)).$$

Fica, então, evidente que o módulo de w, denotado por r, é igual a $r_1 r_2 \ldots r_n$ e que o argumento de w, representado por θ, é igual a $\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n$. Aplicando-se esses resultados em (*), obtemos

!

$w = r_1 r_2 \ldots r_{n+1} (\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_{n+1}) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_{n+1}))$.

o que completa nossa prova.

CQD

Vamos, agora, enunciar um resultado que nos permitirá calcular potências inteiras de números complexos.

Teorema 3.2 (Fórmula de Moivre).

Seja $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Se $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ e $n \in \mathbb{Z}$, então

!

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta).$$

Prova

Se $n = 0$ ou $n = 1$, o resultado é óbvio.

Se $n \geq 2$, fazendo $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$, resulta do Teorema 3.1 que:

$$w = z \cdot z \cdot \ldots \cdot z = z^n = \underbrace{rr\ldots r}_{n \text{ vezes}}(\cos(\underbrace{\theta + \theta + \ldots + \theta}_{n \text{ vezes}}) +$$

$$i\operatorname{sen}(\underbrace{\theta + \theta + \ldots + \theta}_{n \text{ vezes}})) = r^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta). \quad (*)$$

Agora, se for considerado $n < 0$, podemos escrever $z^n = z^{-|n|} = \left(\dfrac{1}{z}\right)^{|n|}$. Vimos, na Aula 1, que $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|} = \dfrac{1}{r}$ e $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z) = -\theta$. Logo, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}(\cos(-\theta) + i\operatorname{sen}(-\theta))$ e podemos aplicar (*), obtendo

$$z^n = \frac{1}{r^{|n|}}(\cos(-|n|\theta) + i\operatorname{sen}(-|n|\theta)) = r^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta),$$

o que completa nossa prova.

CQD

Exemplo 3.1.

Seja $z = 4(\cos\dfrac{\pi}{8} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{8})$.

Pela Fórmula de Moivre, temos:

$$z^{20} = 4^{20}\left(\cos\frac{20\pi}{8} + i\operatorname{sen}\frac{20\pi}{8}\right) = 2^{40}\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{2}\right) = 2^{40}i$$

$$z^{-6} = 4^{-6}\left(\cos\frac{-6\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{-6\pi}{8}\right) = 2^{-12}\left(\cos\frac{-3\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{-3\pi}{4}\right)$$
$$= 2^{-12}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2^{13}}(1+i).$$

Interpretação Geométrica da Multiplicação de Números Complexos

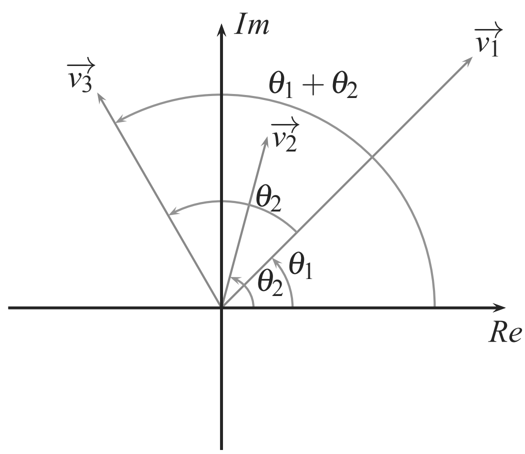
Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, cujas formas trigonométricas são

$$z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1),\ z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2).$$

O produto $w = z_1.z_2$ é

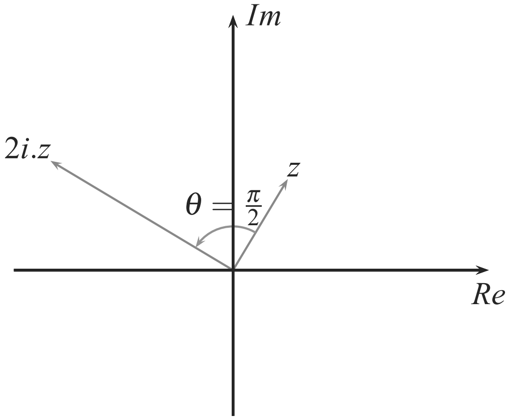
$$w = |z_1||z_2|(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\text{sen}\,(\theta_1+\theta_2)).$$

Portanto, se $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ são, respectivamente, as representações vetorais de z_1 e z_2, a multiplicação de z_1 por z_2 equivale a realizar uma rotação de $\overrightarrow{v_1}$ de um ângulo θ_2 no sentido anti-horário seguida de uma multiplicação por $|\overrightarrow{v_2}|$ do módulo de $\overrightarrow{v_1}$, resultando em $\overrightarrow{v_3}$, representação vetorial de $w = z_1.z_2$.



Exemplo 3.2.

A multiplicação de $z = 3+5i$ por $w = 2i$ equivale a uma rotação da representação vetorial de z de 90º no sentido anti-horário seguida da multiplicação de seu módulo por 2.



RAIZ N-ÉSIMA DE NÚMEROS COMPLEXOS

Dado um inteiro $n \geq 2$ e $z_0 \in \mathbb{C}$, consideremos a equação

$$z^n = z_0\,. \tag{3.1}$$

As soluções de (3.1) serão chamadas **raízes n-ésimas** de z_0.

Para determinarmos as raízes n-ésimas de z_0, utilizaremos o teorema a seguir.

Teorema 3.3.

Sejam $n \geq 2$ e $z_0 \in \mathbb{C}$ com $z_0 \neq 0$. Se $z_0 = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, então z_0 tem n raízes n-ésimas distintas dadas por

!

$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right) \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$

Prova

Seja $z = \rho(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$. Resulta da *Fórmula de Moivre* que $z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\,\mathrm{sen}\,n\varphi)$ e, ao considerarmos $z^n = z_0$, temos:

$$\rho^n(\cos n\varphi + i\,\mathrm{sen}\,n\varphi) = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \Rightarrow \rho^n = r \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r} \text{ e}$$

$$\begin{cases} \cos n\varphi = \cos\theta \\ \mathrm{sen}\,n\varphi = \mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \Rightarrow n\varphi = 2k\pi + \theta,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Para $k = 0, 1 \ldots, n-1$, consideremos $\varphi_k = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\cdot$

Observe que $0 \leq \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_{n-1} < 2\pi$, logo, os $n-1$ números complexos $z_k = \sqrt[n]{r}(\cos\varphi_k + i\,\mathrm{sen}\,\varphi_k)$ satisfazem

$z_k^n = r(\cos\varphi_k + i\,\mathrm{sen}\,\varphi_k) = z_0$, ou seja, z_k é raiz n-ésima de z_0.

Vamos agora mostrar que não há outras raízes n-ésimas. De fato, o argumento φ' de qualquer outra raiz n-ésima z' deve satisfazer $\varphi' = \dfrac{\theta + 2m\pi}{n}$, onde $m \in \mathbb{Z}$.

Lembremos dos Cursos de Álgebra que é possível escrever m na forma $m = nq + r$, onde $q \in \mathbb{Z}$ e $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, logo podemos escrever

$$\varphi' = \frac{\theta + 2(nq+r)\pi}{n} = \frac{\theta + 2r\pi}{n} + 2q\pi,\ q \in \mathbb{Z},\ r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

e sabemos da trigonometria que isso implica

$$\cos\varphi' = \cos\varphi_r \ \text{ e } \ \mathrm{sen}\,\varphi' = \mathrm{sen}\,\varphi_r\,.$$

Portanto, $z' = \sqrt[n]{r}(\cos\varphi' + i\,\mathrm{sen}\,\varphi') = \sqrt[n]{r}(\cos\varphi_r + i\,\mathrm{sen}\,\varphi_r)$, o que completa a nossa prova.

CQD

Denotaremos o conjunto das n-raízes n-ésimas de z_0 por $\sqrt[n]{z_0}$.

Exemplo 3.3.

Se $z = 1 + i$, então $1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4})$. Logo,

$$\sqrt[4]{z} = \left\{ z_k = \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right)\right),\right.$$

$$\left. k = 0, 1, 2, 3. \right\}$$

RESOLVENDO A EQUAÇÃO DO 2º GRAU COM COEFICIENTES COMPLEXOS

Considere a equação do 2º grau com coeficientes complexos

$$az^2 + bz + c = 0\,, \qquad a \neq 0. \tag{3.2}$$

A partir do nosso interesse, observemos que a equação (3.2) pode ser reescrita na forma

$$a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0\,,$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$ é conhecido como o discriminante da equação.

Portanto, as raízes de (3.2) são

$$\boxed{z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

e a fórmula da Equação do 2º Grau mostra-se válida no caso complexo.

Nossa principal dificuldade na solução da equação $az^2 + bz + c = 0$ será a determinação de $\sqrt{\Delta} = \sqrt{b^2 - 4ac}$.

Consideremos $w = \sqrt{\Delta} = x + yi$. Dessa forma,

$$w^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = \Delta = \mathrm{Re}(\Delta) + \mathrm{Im}(\Delta)\,i$$

e isto implica

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= \mathrm{Re}(\Delta) \\ 2xy &= \mathrm{Im}(\Delta) \end{cases} \tag{3.3}$$

A solução do sistema (3.3) determina $w = \sqrt{\Delta}$ e, em consequência, obtemos as raízes de (3.2).

Exemplo 3.4.

Considere a equação $z^2 - (5-2i)z + 9 - 7i = 0$ em $\mathbb{C}$. Temos

$$\Delta = (5-2i)^2 - 4(9-7i) = 21 - 20i - 36 + 28i = -15 + 8i\,.$$

Assim,

$$w=\sqrt{\Delta}=x+yi \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-15 \\ 2xy=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-15 \\ x^2y^2=16 \end{cases} \quad (*)$$

O sistema (*) pode ser resolvido por substituição e, assim, obtemos

$$x^2(x^2+15)=16 \ \Rightarrow \ x^4+15x^2-16=0 \ \Rightarrow \ x^2=1 \text{ ou } x^2=-16\,.$$

Como $x \in \mathbb{R}$, devemos ter $x^2 \geq 0$, logo as soluções de $(*)$ satisfazem $x^2=1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=4x=4$ ou $x=-1 \Rightarrow y=4x=-4$.

Logo, as raízes de (*) são $z=\dfrac{5-2i\pm(1+4i)}{2} \Rightarrow z=3+i$ e $z=2-3i$.

Exercícios Resolvidos

1. Seja $z=4\left(\cos\dfrac{5\pi}{21}+i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{5\pi}{21}\right)$

   a. Determine o menor n inteiro positivo tal que z^n é negativo.

   b. Determine o menor n inteiro positivo tal que z^n é positivo.

   c. Prove que z^n nunca é imaginário puro.

Solução:

a. Resulta da Fórmula de Moivre que $z^n=4^n\left(\cos\dfrac{5n\pi}{21}+i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{5n\pi}{21}\right)$, logo, para z^n ser negativo devemos ter $\dfrac{5n\pi}{21}=(2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, ou seja, $\dfrac{5n}{21}$ deve ser um inteiro ímpar o que implica que n divide 21, e o menor n positivo com essa propriedade é o próprio 21.

b. Raciocinando do mesmo modo que em (a), devemos ter $\dfrac{5n\pi}{21}=2k\pi \ \Rightarrow \ \dfrac{5n}{42}=k,\ k\in\mathbb{Z}$. O menor n positivo com essa propriedade é o 42.

c. Como $z^n = 4^n\left(\cos\dfrac{5n\pi}{21} + i\operatorname{sen}\dfrac{5n\pi}{21}\right)$, z^n será imaginário puro se, e somente se, $\cos\dfrac{5n\pi}{21} = 0$ o que implica $\dfrac{5n\pi}{21} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Nesse caso, podemos escrever $10n = 21 + 42k$. Se tal n existisse, deveríamos ter $5n - 21k = \dfrac{21}{2}$, o que é um absurdo, pois $\dfrac{21}{2} \notin \mathbb{Z}$. Portanto, z^n nunca será imaginário puro. $\square$

2. Se θ é um ângulo do 3º quadrante e $\operatorname{sen}\theta = -\dfrac{4}{5}$, calcule $\cos 5\theta$ e $\operatorname{sen} 5\theta$.

Solução: Considere o número complexo $z = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$.

Pela Fórmula de Moivre, podemos escrever

$$z^5 = \cos 5\theta + i\operatorname{sen} 5\theta. \quad \text{(i)}$$

Por outro lado, aplicando a Fórmula do Binômio de Newton, a $w = (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^5$, obtemos

$$\begin{aligned} z^5 &= \cos^5\theta + 5\cos^4\theta\operatorname{sen}\theta\, i + 10\cos^3\theta\operatorname{sen}^2\theta\, i^2 \\ &\quad + 10\cos^2\theta\operatorname{sen}^3\theta\, i^3 + 5\cos\theta\operatorname{sen}^4\theta\, i^4 + \operatorname{sen}^5\theta\, i^5 \\ &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\operatorname{sen}^2\theta + 5\cos\theta\operatorname{sen}^4\theta \\ &\quad + (5\cos^4\theta\operatorname{sen}\theta - 10\cos^2\theta\operatorname{sen}^3\theta + \operatorname{sen}^5\theta)i. \quad \text{(ii)} \end{aligned}$$

Resulta da igualdade dos complexos em (i) e (ii) que

$$\begin{aligned} \cos 5\theta &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\operatorname{sen}^2\theta + 5\cos\theta\operatorname{sen}^4\theta \\ \operatorname{sen} 5\theta &= 5\cos^4\theta\operatorname{sen}\theta - 10\cos^2\theta\operatorname{sen}^3\theta + \operatorname{sen}^5\theta\ . \end{aligned}$$

Se $\operatorname{sen}\theta = -\dfrac{4}{5}$ e θ pertence ao 3º quadrante, então $\cos\theta = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta} = -\dfrac{3}{5}$ e, por conseguinte,

$$\cos 5\theta = -\frac{3}{5}\left(\frac{81}{625} - \frac{10\cdot 9\cdot 16}{625} + \frac{5\cdot 256}{625}\right) = \frac{237}{3125}$$

e

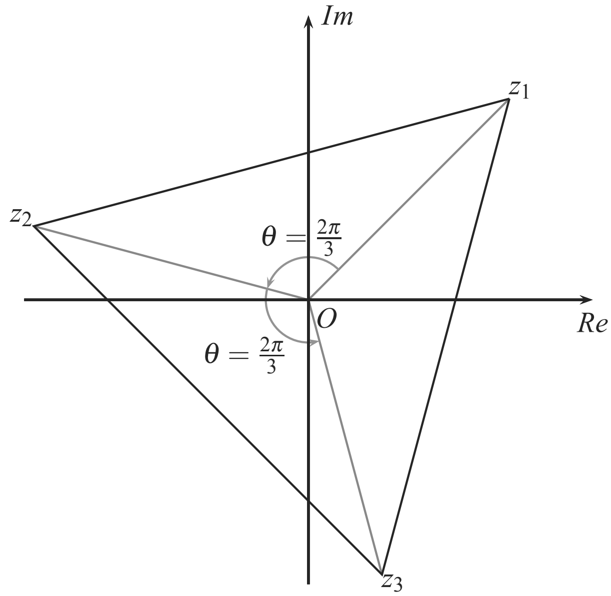
$$\operatorname{sen} 5\theta = -\frac{4}{5}\left(\frac{5\cdot 81}{625} - \frac{10\cdot 9\cdot 16}{625} + \frac{256}{625}\right) = \frac{3116}{3125}.$$

3. As representações geométricas de z_1, z_2 e z_3 no Plano Complexo são vértices de um triângulo equilátero com centro na origem. Se $z_1 = 1+i$, determine z_2 e z_3.

   Solução: Para obter z_2, devemos rodar $\overrightarrow{Oz_1}$ de um ângulo $\dfrac{2\pi}{3}$ (ângulo central do triângulo equilátero) no sentido anti-horário, logo

   $z_2 = z_1\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{11\pi}{12} + i\operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{12}\right).$

   Para obter z_3, devemos realizar uma rotação anti-horária de um ângulo de $\dfrac{2\pi}{3}$ de $\overrightarrow{Oz_2}$, portanto $z_3 = z_2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{11\pi}{12} + i\operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{12}\right)\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{19\pi}{12} + i\operatorname{sen}\dfrac{19\pi}{12}\right).$



4. Prove que os n pontos de $\mathbb{R}^2$ correspondentes às raízes n-ésimas da unidade

   $$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,\ n \geq 3,$$

   são vértices de um polígono regular de n lados, inscrito na circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$.

Solução: Seja $A_k = \left(\cos\dfrac{2k\pi}{n}, \operatorname{sen}\dfrac{2k\pi}{n}\right)$ o ponto do $\mathbb{R}^2$ associado a

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Se $O = (0,0)$, temos $\overline{OA_k} = |z_k| = 1$, logo A_k pertence à circunferência de centro em O e raio 1, isto é, a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$.

Para $k = 0, 1, \ldots, n-2$ o ângulo central $A_k\widehat{O}A_{k+1}$ é dado por:

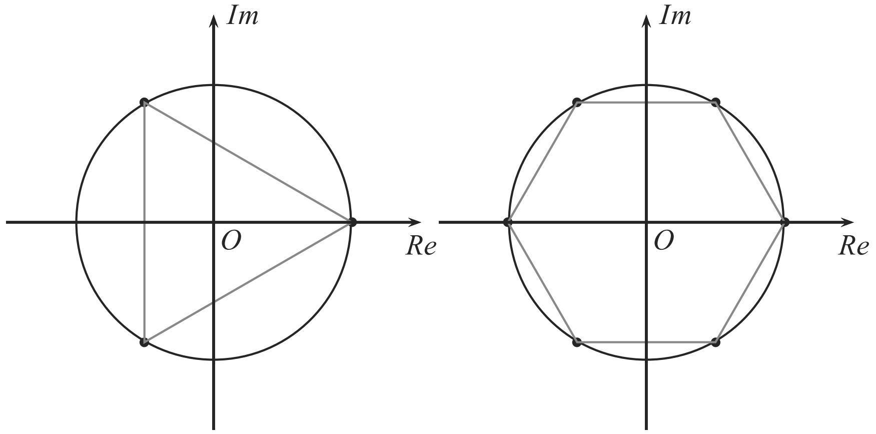
$$A_k\widehat{O}A_{k+1} = \arg(z_{k+1}) - \arg(z_k) = \frac{2(k+1)\pi}{n} - \frac{2k\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}$$

e

$$A_{n-1}\widehat{O}A_0 = 2\pi - \frac{2(n-1)\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}\cdot$$

Como todos os arcos $\widehat{A_0A_1}, \ldots, \widehat{A_{n-2}A_{n-1}}, \widehat{A_{n-1}A_0}$ são iguais, o polígono de vértices $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ inscrito na circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$ é regular. □

As figuras abaixo ilustram os casos $n = 3$ e $n = 6$.



Exercícios Propostos

1. Determine o **menor** inteiro positivo n de forma que $z^n = (10\sqrt{3} - 10\,i)^n$ seja:

   a. real positivo;

   b. imaginário puro.

2. Determine $\sqrt[8]{\dfrac{i}{1-i}}$.

3. Se z é um complexo de módulo 1 e argumento θ, prove que $z^n + \dfrac{1}{z^n} = 2\cos n\theta$.

4. Usando a Fórmula de Moivre, obtenha uma fórmula para $\cos 4\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$ que envolva apenas $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$.

5. As representações no Plano Complexo de z_1, z_2, z_3, z_4 são vértices consecutivos de um quadrado. Se $z_1 = 1+2i$ e $z_2 = 3+5i$, determine z_3 e z_4 sabendo que $\mathrm{Im}(\mathrm{z}_4) < \mathrm{Im}(\mathrm{z}_1)$.

6. Determine todas as soluções complexas da equação $x^3+1=0$ e as represente no Plano Complexo.

7. Resolva a equação $z^4-(1+2i)z^2-1+i=0$ em $\mathbb{C}$.

8.
   a. Prove que $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$ e $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$.

   b. Prove que $1-\cos\theta = 2\operatorname{sen}^2\dfrac{\theta}{2}$ e $\operatorname{sen}\theta = 2\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$.

   c. Prove que as soluções complexas da equação $(z-1)^n - z^n = 0$ são dadas por

   $$z_k = \frac{i}{2}\operatorname{cossec}\frac{k\pi}{n}\left(\cos\frac{k\pi}{n} - i\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n}\right), k=1,\ldots,n-1.$$

Solução dos Exercícios Propostos

1. Determine o **menor** inteiro positivo n de forma que $z^n = (10\sqrt{3}-10\,i)^n$ seja:

   a. real positivo.

   b. imaginário puro.

Solução:

a. Temos $|z| = \sqrt{400} = 20$ e $\operatorname{tg}\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Como z está no 4º quadrante, concluímos que $\theta = \dfrac{11\pi}{6}$ e, portanto, $z = 20\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + i\operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{6}\right)$.

Resulta da Fórmula de Moivre, que $z^n = 20^n\left(\cos\dfrac{n11\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{n11\pi}{6}\right)$. A partir dessa representação, temos:

$$\mathrm{Re}(z^n) = 20^n\cos\frac{n11\pi}{6} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(z^n) = 20^n\mathrm{sen}\,\frac{n11\pi}{6}.$$

Para z^n ser real positivo, $\dfrac{n11\pi}{6}$ deve ser par. Logo, o menor n com essa propriedade é $n = 12$.

b. Aplicando o mesmo raciocínio do item (a), concluímos que para z^n ser imaginário puro, devemos ter $\dfrac{n11\pi}{6} = k\pi + \dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$, o que implica $11n = 6k+3$. Ora, o menor múltiplo de 11, que deixa resto 3 quando dividido por 6 é 33. Portanto, $n = \dfrac{33}{11} = 3$.

2. Determine $\sqrt[8]{\dfrac{i}{1-i}}$.

Solução:

$$\frac{i}{1-i} = \frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right).$$

Logo,

$$\sqrt[8]{\frac{i}{1-i}} = \left\{\frac{1}{\sqrt[16]{2}}\left(\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{8}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{8}\right)\right),\ k = 0, 1, \ldots, 7\right\} = \left\{\frac{\sqrt[16]{2^{15}}}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{32}+\frac{k\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{32}+\frac{k\pi}{4}\right)\right),\ k = 0, 1, \ldots, 7\right\}.$$

3. Se z é um complexo de módulo 1 e argumento θ, prove que $z^n + \dfrac{1}{z^n} = 2\cos n\theta$.

Solução: A forma trigonométrica de z é $z = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$ e, pela Fórmula de Moivre, podemos escrever

$$z^n = \cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta. \qquad (1)$$

Como

$$\frac{1}{z^n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n \quad \text{e} \quad \frac{1}{z} = \cos(-\theta) + i\,\text{sen}\,(-\theta)\,,$$

aplicando novamente a Fórmula de Moivre, obtemos

$$\frac{1}{z^n} = \cos(-n\theta) + i\,\text{sen}\,(-n\theta). \qquad (2)$$

Mas $\cos(-n\theta) = \cos n\theta$ e $\text{sen}\,(-n\theta) = -\text{sen}\,n\theta$, logo, somando (1) e (2) segue-se que

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta. \qquad \square$$

4. Usando a Fórmula de Moivre, obtenha uma fórmula para $\cos 4\theta$ e $\text{sen}\,\theta$ que envolva apenas $\cos\theta$ e $\text{sen}\,\theta$.

Solução: Pela Fórmula de Moivre, se $z = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$, temos

$$z^4 = \cos 4\theta + i\,\text{sen}\,4\theta\,. \qquad (5)$$

Por outro lado, aplicando a Fórmula do Binômio de Newton em $z^4 = (\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^4$, obtemos

$$\begin{aligned} z^4 &= \cos^4\theta + 4\cos^3\theta(i\,\text{sen}\,\theta) + 6\cos^2\theta(i^2\text{sen}^2\theta) + 4\cos\theta \\ &\quad (i^3\text{sen}^3\theta) + i^4\text{sen}^4\theta \\ &= \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\text{sen}^2\theta + \text{sen}^4\theta + 4\cos^3\theta\text{sen}\,\theta i \\ &\quad -4\cos\theta\text{sen}^3\theta i. \qquad (6) \end{aligned}$$

Comparando as partes reais e imaginárias em (5) e (6) resulta que

$$\cos 4\theta = \cos^4\theta + \text{sen}^4\theta - 6\cos^2\theta\,\text{sen}^2\theta;$$

$$\text{sen}\,4\theta = 4(\cos^3\theta\,\text{sen}\,\theta - \cos\theta\,\text{sen}^3\theta).$$

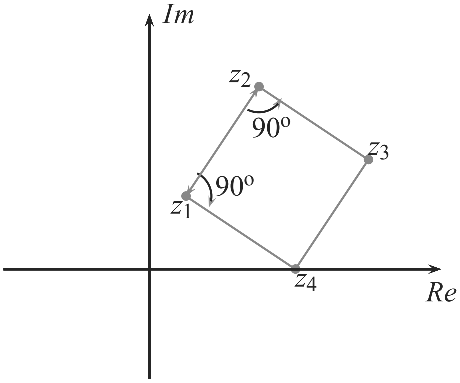
5. As representações no Plano Complexo de z_1, z_2, z_3, z_4 são vértices consecutivos de um quadrado. Se $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 3 + 5i$, determine z_3 e z_4 sabendo que $\text{Im}(z_4) < \text{Im}(z_1)$.

Solução: Como $\text{Im}(z_4) < \text{Im}(z_1)$, devemos rodar o vetor $\overrightarrow{z_1 z_2}$ de 90^o no sentido horário a partir de z_1, ou seja, multiplicar $w_1 = z_2 - z_1$ por $-i$ e, em seguida, realizar a translação para z_1, ou seja, somar z_1 a $w_1.(-i)$.

Temos $z_4 = (z_2 - z_1)(-i) + z_1 = (2 + 3i)(-i) + 1 + 2i = 3 - 2i + 1 + 2i = 4$.

Para obter z_3, devemos rodar o vetor $\overrightarrow{z_2z_1}$ de 90º no sentido anti-horário a partir de z_2, ou seja, multiplicar $w_2 = z_1 - z_2$ por i e, em seguida, realizar a translação para z_2, ou seja, somar z_2 a $w_2.i$.

Logo, $z_3 = (z_1 - z_2)i + z_2 = (-2-3i)i + 3 + 5i = 3 - 2i + 3 + 5i = 6 + 3i$.



6. Determine todas as soluções complexas da equação $x^3 + 1 = 0$ e as represente no plano complexo.

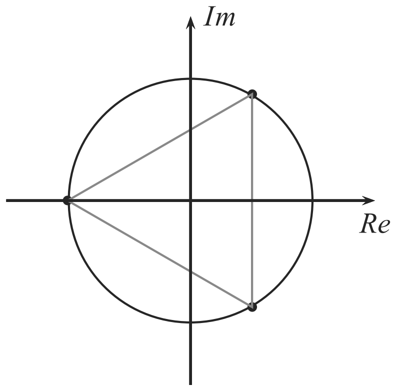
   Solução: Como $x^3 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; x^3 = -1$, devemos determinar $\sqrt[3]{-1}$.

   Temos $-1 = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi$, logo

   $$\sqrt[3]{-1} = \left\{ z_k = \cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right),\; k = 0, 1, 2 \right\}.$$

   Isso implica:

   $$z_0 = \cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
   $$z_1 = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi = -1$$
   $$z_2 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$



7. Resolva a equação $z^4-(1+2i)z^2-1+i=0$ em $\mathbb{C}$.

   Solução: Podemos fazer a mudança de variável $y=z^2$, obtendo a equação
   $$y^2-(1+2\,i)y-1+i=0\,.$$
   Temos $\Delta=(1+2\,i)^2-4(-1+i)=-3+4\,i+4-4\,i=1\Rightarrow$
   $$y=\frac{1+2\,i\pm 1}{2}\Rightarrow z^2=y=\begin{cases}1+i=\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{4})\\ i=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{2}\end{cases}.$$
   Como $\sqrt{\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{4}\right)}=\left\{\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\dfrac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}\right)+\right.\right.$
   $\left.\left.\text{sen}\left(\dfrac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}\right)\right),\ k=0,1\right\},$
   $$\sqrt{\cos\frac{\pi}{2}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}}=\left\{\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right)+\text{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right)\right),\right.$$
   $\left.k=0,1\right\}.$

   As raízes são:
   $\sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{8}+i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{8}\right)$, $\sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{9\pi}{8}+i\,\text{sen}\,\dfrac{9\pi}{8}\right)$, $\cos\dfrac{\pi}{4}+i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{4}$
   e $\cos\dfrac{5\pi}{4}+i\,\text{sen}\,\dfrac{5\pi}{4}$.

8. a. Prove que $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\text{sen}^2\theta$ e $\text{sen}\,2\theta=2\text{sen}\,\theta\cos\theta$.

   b. Prove que $1-\cos\theta=2\text{sen}^2\dfrac{\theta}{2}$ e $\text{sen}\,\theta=2\,\text{sen}\,\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$.

   c. Prove que as soluções complexas da equação $(z-1)^n-z^n=0$ são dadas por
   $$z_k=\frac{i}{2}\text{cossec}\,\frac{k\pi}{n}\left(\cos\frac{k\pi}{n}-i\,\text{sen}\,\frac{k\pi}{n}\right),k=1,\ldots,n-1.$$

   Solução:

   a. Seja $z=\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta$. Temos
   $$z^2=\cos^2\theta-\text{sen}^2\theta+2\text{sen}\,\theta\cos\theta\,i\,. \qquad (1)$$

Por outro lado, resulta da Fórmula de Moivre que

$$z^2 = \cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta\,. \qquad (2)$$

Igualando as partes real e imaginária em (1) e (2), obtemos

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$$
$$\text{e} \ \operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,. \qquad \square$$

b. Substituindo 2θ por θ em (a), obtemos

$$1 - \cos\theta = 2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,\cdot \qquad \square$$

c. Temos

$$(z-1)^n = z^n \ \Rightarrow \ \left(\frac{z-1}{z}\right)^n = 1 \ \Rightarrow \ \left(1 - \frac{1}{z}\right)^n = 1\,.$$

Assim, $1 - \dfrac{1}{z_k} = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\dfrac{2k\pi}{n}$ o que implica

$$\frac{1}{z_k} = 1 - \cos\frac{2k\pi}{n} - i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 1, \ldots, n-1\,. \quad (1)$$

Resulta de (b) que

$$1 - \cos\frac{2k\pi}{n} = 2\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{n} \ \text{ e } \ \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n} = 2\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\,,$$

logo

$$1 - \cos\frac{2k\pi}{n} - i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n} = 2\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n} - i\cos\frac{k\pi}{n}\right)$$
$$= -2i\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n}\left(\cos\frac{k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n}\right). \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1), obtemos

$$\frac{1}{z_k} = -2i\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right).$$

Portanto, $z_k = -\dfrac{1}{2i\operatorname{sen}\dfrac{k\pi}{n}}\left[\dfrac{1}{\cos\dfrac{k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\dfrac{k\pi}{n}}\right]$

$$= \frac{i}{2}\operatorname{cossec}\frac{k\pi}{n}\left(\cos\left(-\frac{k\pi}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{k\pi}{n}\right)\right)$$
$$= \frac{i}{2}\operatorname{cossec}\frac{k\pi}{n}\left(\cos\frac{k\pi}{n} - i\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n}\right), \ k = 0, 1, \ldots, n-1. \qquad \square$$

Aula 4

Funções de Variáveis Complexas

Introdução

Inicialmente, recordemos que uma função f do conjunto A no conjunto B é uma regra bem definida que permite associar, de modo bem determinado, a cada elemento de A **um único** elemento de B. Utilizaremos a notação $f : A \to B$ para representar uma função f do conjunto A no conjunto B. O conjunto A é chamado **domínio** da função e será denotado por $\mathrm{Dom}(f)$. Já o conjunto B, onde os elementos de A assumem seus valores, é chamado **contradomínio** da função.

Dada uma função $f : A \to B$, se $X \subseteq A$, a imagem de X pela função f, que denotaremos por $f(X)$, é o conjunto $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$.

Em particular, a imagem da função, que será representada por $\mathrm{Im}(f)$, é o conjunto $f(A)$. Observe que a imagem é um subconjunto do contradomínio e, quando $B = \mathrm{Im}(f)$, diremos que a função é **sobrejetora**.

Quando uma função $f : A \to B$ é tal que $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$, chamaremos essa função de **injetora** e, caso f seja **injetora e sobrejetora**, ela será chamada de **bijetora**.

Ao longo desse curso, estudaremos funções $f : A \to \mathbb{C}$, com $A \subseteq \mathbb{C}$, ou seja, funções definidas em subconjuntos de $\mathbb{C}$ e que assumem valores em $\mathbb{C}$.

Quando não for especificado o domínio de f, $\mathrm{Dom}(f)$, convencionaremos que ele é o conjunto "máximo"$A \subseteq \mathbb{C}$ para o qual a função está definida. Por exemplo, quando escrevermos $f(z) = \dfrac{z+i}{z^2-1}$, o domínio de f é subentendido como $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{C} - \{-1, 1\}$.

PARTES REAL E IMAGINÁRIA DE FUNÇÕES COMPLEXAS

Quando estudamos funções reais de variável real, isto é, $f : A \to \mathbb{R}$ com $A \subseteq \mathbb{R}$, usamos a notação $y = f(x)$. Assim, por analogia, adotaremos a notação $w = f(z)$ para funções complexas de variável complexa.

Como $w = f(z) \in \mathbb{C}$, podemos escrever

$$w = f(z) = u + iv, \ \ u, v \in \mathbb{R}.$$

Desse modo, podemos representar uma função $f : A \to \mathbb{C}$, $A \subseteq \mathbb{C}$, como

$$f(z) = u(z) + iv(z),$$

onde u e v são funções de A em $\mathbb{R}$.

Temos $u(z) = \text{Re}(f(z))$ e $v(z) = \text{Im}(f(z))$ e, de forma mais usual, escreveremos $u(z) = u(x,y), v(z) = v(x,y), z = x+yi$, pensando em u e v como funções de um subconjunto do $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$.

Exemplo 4.1.

Seja $f(z) = 2z^3 - z + i$. Temos:

$f(z) = 2(x+yi)^3 - (x+yi) + i = 2(x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i) - (x+yi) + i = 2x^3 - 6xy^2 - x + (6x^2y - 2y^3 - y + 1)i$.

Logo, $u(x,y) = 2x^3 - 6xy^2 - x$ e $v(x,y) = 6x^2y - 2y^3 - y + 1$.

Observando que se $z = x + yi$, então $x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ e $y = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$, dada uma função $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, podemos escrevê-la em função de z e $\overline{z}$.

Exemplo 4.2.

Seja $f(z) = xy + (x^2 + y)i$. Temos:

$$f(z) = \frac{(z+\overline{z})(z-\overline{z})}{4i} + \left(\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^2 + \frac{z-\overline{z}}{2i}\right)i =$$

$$= \frac{z^2 - \overline{z}^2}{4i} + \left(\frac{z^2 + \overline{z}^2 + 2z\overline{z}}{4} + \frac{z - \overline{z}}{2i} \right) i =$$

$$= \left(\frac{\overline{z}^2 - z^2}{4} + \frac{z^2 + \overline{z}^2}{4} + \frac{z\overline{z}}{2} \right) i + \frac{z - \overline{z}}{2} =$$

$$= \left(\frac{\overline{z}^2}{2} + \frac{z\overline{z}}{2} \right) i + \frac{z - \overline{z}}{2}.$$

Mas $z\overline{z} = |z|^2$ e $\overline{z}^2 = \overline{z^2}$, logo também podemos escrever $f(z)$ como $f(z) = \frac{1}{2}(\overline{z^2} + |z|^2)i + \frac{z - \overline{z}}{2}$.

Quando $z = 0 \notin \mathrm{Dom}(f)$ e escrevemos z em sua forma trigonométrica, $z = r(\cos\theta + i\mathrm{sen}\,\theta)$, $r = \sqrt{|z|}$, podemos pensar u e v como funções de r e θ.

Exemplo 4.3.

Seja $f(z) = z + \frac{1}{z} - z\overline{z}$, $z \neq 0$. Como $z.\overline{z} = |z|^2$, temos:

$$f(z) = r(\cos\theta + i\mathrm{sen}\,\theta) + \frac{1}{r(\cos\theta + i\mathrm{sen}\,\theta)} - r^2 =$$

$$= r(\cos\theta + i\mathrm{sen}\,\theta) + \left(\frac{\cos(-\theta) + i\mathrm{sen}\,(-\theta)}{r} \right) - r^2 =$$

$$= r\cos\theta + \frac{\cos\theta}{r} - r^2 + \left(r\mathrm{sen}\,\theta - \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r} \right) i.$$

Logo, $u(r,\theta) = r\cos\theta + \frac{\cos\theta}{r} - r^2$ e $v(r,\theta) = r\mathrm{sen}\,\theta - \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r}$, $r \neq 0$.

Como $r = \sqrt{|z|}$ e valem as relações $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \\ \mathrm{sen}\,\theta = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} \\ \mathrm{tg}\,\theta = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)},\ \mathrm{Re}(z) \neq 0 \end{cases}$, dada uma função $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$, podemos escrevê-la em função de $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)$ e $|z|$.

Exemplo 4.4.

Seja $f(z)=\left(r+\dfrac{1}{r}\right)^2+\sec\theta i,\ r\neq 0,\ \ \theta\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.
Temos:

$f(z)=\left(|z|+\dfrac{1}{|z|}\right)^2+\dfrac{|z|}{\mathrm{Re}(z)}i=|z|^2+\dfrac{1}{|z|^2}+2+\dfrac{|z|}{\mathrm{Re}(z)}i, z\neq 0$ e $\mathrm{Re}(z)\neq 0$.

Se quisermos escrever u e v como funções de x e y, obteremos: $f(z)=x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2+y^2}+2+\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}i, (x,y)\neq(0,0)$ e $x\neq 0$.

Transformações ou Mapeamentos

Dada uma função $f:A\to\mathbb{R}$, $A\subseteq\mathbb{R}$, o gráfico de f, $\mathrm{Graf}(f)$, é o subconjunto do $\mathbb{R}^2$ definido por

$$\mathrm{Graf}(f)=\{(x,f(x))\mid x\in A\}.$$

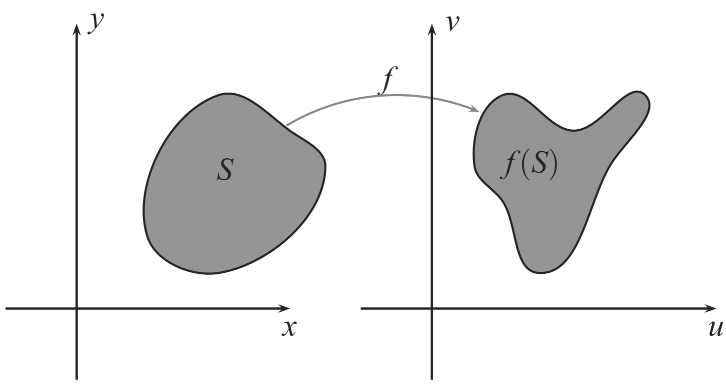
Se a função é complexa de variável complexa, isto é, $f:A\to\mathbb{C}$, $A\subseteq\mathbb{C}$, seu gráfico é o subconjunto de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\cong\mathbb{C}^2$ definido por

$$\mathrm{Graf}(f)=\{(x,f(x))\mid x\in A\}.$$

Na maioria das vezes, é possível construir o gráfico de uma função real de variável real, mas, no caso das funções complexas de variável complexa, feitas as devidas identificações, verificamos que $\mathrm{Graf}(f)\subseteq\mathbb{R}^4$, o que impossibilita qualquer tentativa de visualizá-lo no caso geral.

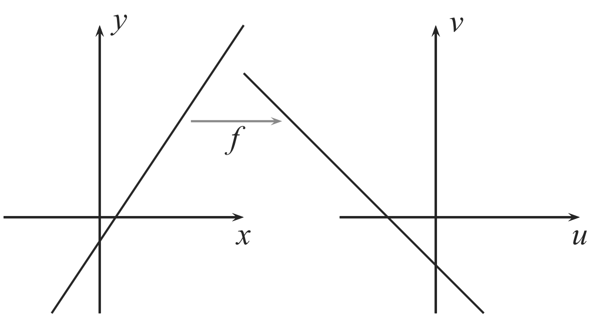
Um recurso para visualizar geometricamente uma função $w=f(z)$ é representar imagens de curvas ou regiões do domínio, que está contido em um plano que identificaremos como plano xy, no contradomínio, que identificaremos como plano uv. Deste modo, a função é considerada como uma "transformação" ou "mapeamento" (do inglês "mapping"). Essa ideia de pensar na função complexa de variável complexa como uma transformação ou mapeamento entre dois planos é atribuída ao matemático alemão Bernhard Riemann.

A figura abaixo ilustra o caso em que uma região S do domínio da função f, que está contido no plano xy, é transformada na região $f(S)$ do contradomínio de f, contido no plano uv.



Exemplo 4.5.

Seja $f(z) = -iz$. A reta $z = 1 + t(1+i)$, $t \in \mathbb{R}$, contida em $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{C}$ (identificado como plano xy) é transformada por f na reta $w = f(z) =$
$-i[1+t(1+i)] = -i+t(1-i)$ contida no contradomínio de f (identificado como plano uv).



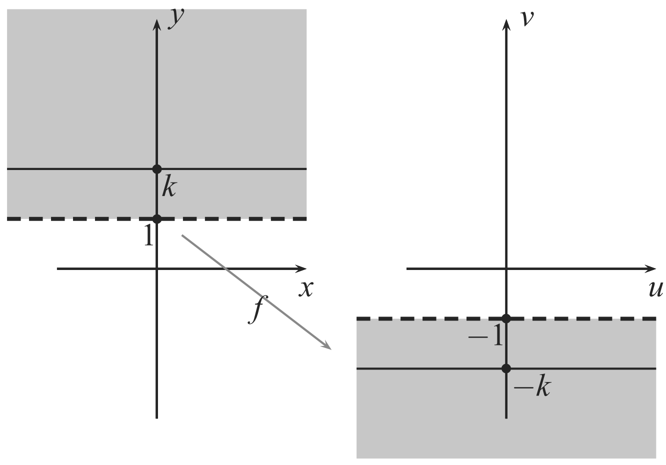
Recordando da Aula 3 que a multiplicação por $-i$ equivale a uma rotação de 90º no sentido horário, concluímos que a reta $z = 1+t(1+i)$, $t \in \mathbb{R}$, é perpendicular à sua imagem pela função $f(z) = -iz$.

Quando uma região S pode ser escrita como união de curvas cujas imagens pela função f sabemos determinar, a imagem da região, $f(S)$, é a união das imagens dessas curvas.

Exemplo 4.6.

Seja $f(z) = \bar{z}$. O conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im} > 1\}$ é um semiplano aberto que pode ser escrito como a união das retas horizontais $y = k,\ k > 1$.

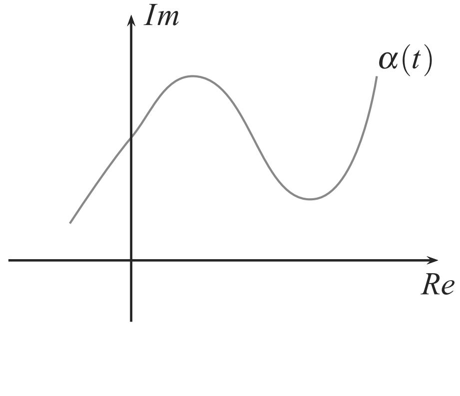
Cada uma dessas retas é da forma $z = t + ki,\ t \in \mathbb{R}$, e sua imagem por f é $f(z) = \overline{t+ki} = t - ki,\ t \in \mathbb{R}$ e $k > 1$. Portanto, a imagem de A pela função f é o semiplano união das retas horizontais $y = k,\ k < -1$, como mostra a figura abaixo.



Como $f(a+bi) = a - bi$, podemos interpretar geometricamente a função $f(z) = \bar{z}$ como uma reflexão em relação ao eixo real.

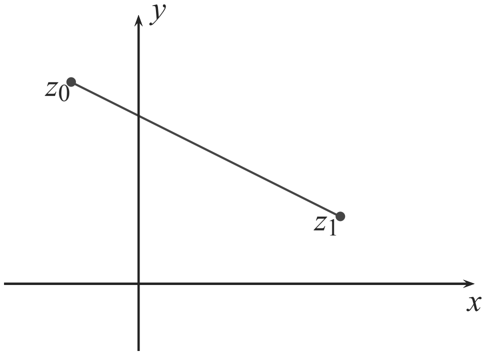
CURVAS PARAMETRIZADAS COMPLEXAS

Sejam I um intervalo da reta real e $x(t)$, $y(t)$ funções de I em $\mathbb{R}$. A função $\alpha : I \to \mathbb{C}$ definida por $\alpha(t) = x(t) + iy(t)$ é chamada **curva parametrizada complexa** e a variável real t é chamada **parâmetro**.

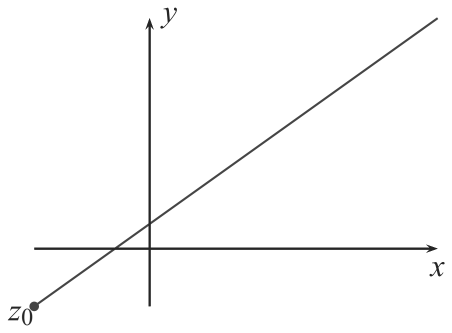


Exemplo 4.7.

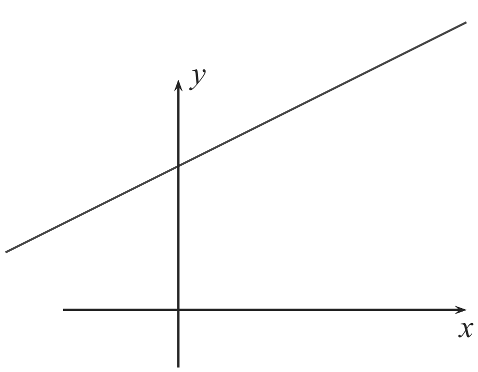
1. Segmento de reta de extremos z_0 e z_1: $\alpha(t) = (1-t)z_0 + tz_1,\ t \in [0,1]$.



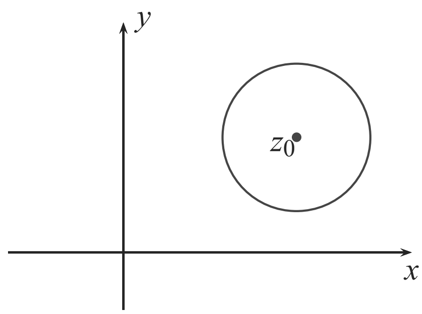
2. Semirreta com origem em z_0 e que passa por z_1: $\alpha(t) = (1-t)z_0 + tz_1,\ t \in [0,\infty)$.



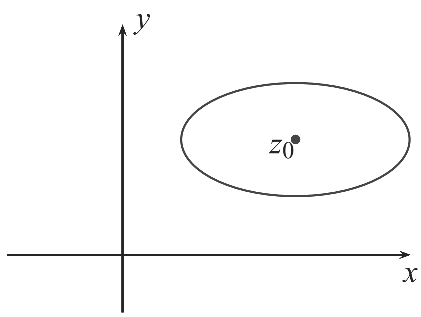
3. Reta que passa por z_0 e z_1: $\alpha(t) = (1-t)z_0 + tz_1$, $t \in \mathbb{R}$.



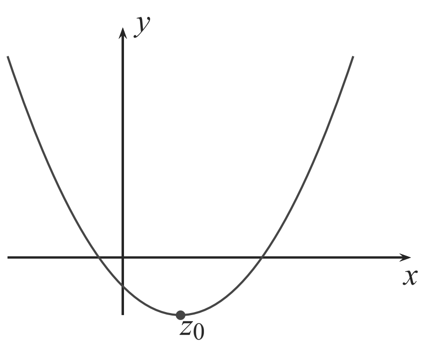
4. Círculo de centro em z_0 e raio r: $\alpha(t) = z_0 + r(\cos t + i\,\text{sen}\,t)$, $t \in [0, 2\pi]$.



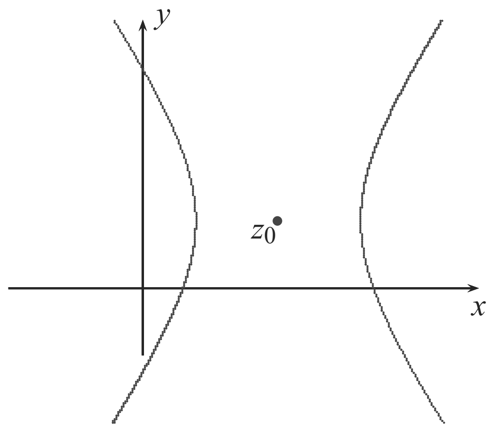
5. Elipse de centro em z_0, semieixo maior a paralelo ao eixo real e semieixo menor b: $\alpha(t) = z_0 + a\cos t + b\,\text{sen}\,t\,i$, $t \in [0, 2\pi]$.



6. Parábola de vértice em z_0: $\alpha(t) = z_0 + t + kt^2 i$, $k \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$.



7. Hipérbole de vértice em z_0: $\alpha(t) = z_0 + a\cosh t + b\,\mathrm{senh}\,t\,i$, $t \in \mathbb{R}$. $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ e $\mathrm{senh}\,t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$.

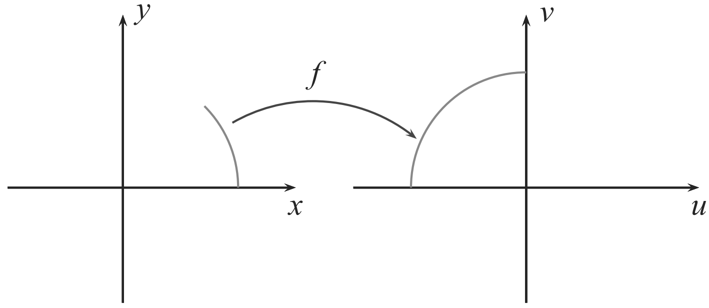


A imagem de uma curva parametrizada complexa $\alpha : I \to \mathbb{C}$ por uma função complexa de variável complexa $f : A \to \mathbb{C}$ tal que $\alpha(I) \subseteq A$ é uma curva parametrizada complexa no plano uv.

Exemplo 4.8.

Seja $f(z) = iz^2$ e considere o arco $\alpha(t) = \cos t + i\,\mathrm{sen}\,t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ no plano xy. A imagem desse arco pela função f é $f(z) = i(\cos t + i\,\mathrm{sen}\,t)^2 + 2 + 2i = i(\cos 2t + i\,\mathrm{sen}\,2t) = = \cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Observe que se $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, então $s = 2t + \frac{\pi}{2} \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, ou seja, a imagem do arco no plano xy é o arco $\beta(s) = \cos s + i\,\mathrm{sen}\,s$, $s \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ no plano uv.



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Dadas as funções $f(z)$, determine as imagens dos pontos indicados.

   a. $f(z) = \dfrac{z^2+\overline{z}}{z-i}$, $z = 2-i$.

   b. $f(z) = \cos \pi x + i(x^2 - y^3)$, $z = \dfrac{1}{2} + \sqrt[3]{2}\, i$.

   Solução:

   a. Temos $f(2-i) = \dfrac{(2-i)^2+2+i}{2-2i} = \dfrac{3-4i+2+i}{2(1-i)} =$
   $= \dfrac{(5-3i)(1+i)}{4} = \dfrac{8+2i}{4} = \dfrac{4+i}{2}$.

   b. Temos $f\left(\dfrac{1}{2}+\sqrt[3]{2}\, i\right) = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\left(\dfrac{1}{4}-2\right) = -\dfrac{7}{4}\, i$.

2. a. Determine o domínio da função complexa

   $$f(z) = \frac{z^3}{z^2-(3-i)z+4}.$$

   b. Determine a imagem da função $\begin{cases} f : A \to \mathbb{C} \\ f(z) = 2z+i \end{cases}$,
   $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re(z)} \geq 1\}$.

   Solução:

   a. A única restrição é o denominador $z^2-(3-i)z+4$ ser diferente de zero.

   Determinemos as raízes da equação do 2º grau $z^2-(3-i)z+4 = 0$. Temos $\Delta = (3-i)^2 - 16 = -8-6i$.

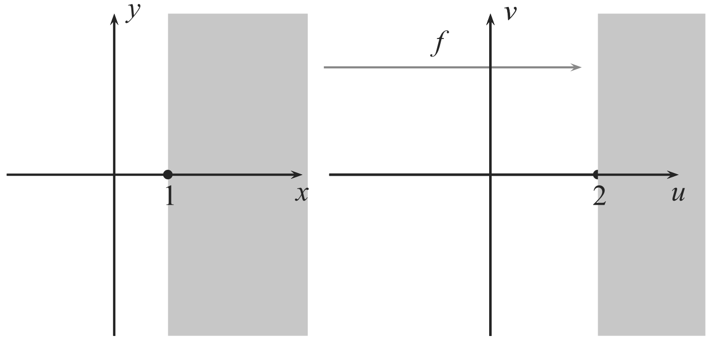
   Recordemos da Aula 3 que $(x+yi)^2 = \Delta = -8-6i \Rightarrow$
   $\begin{cases} x^2-y^2 = -8 \\ 2xy = -6 \end{cases} \Rightarrow x^2 - \dfrac{9}{x^2} = -8 \Rightarrow x^4+8x^2-9 = 0 \Rightarrow$
   $x^2 = 1$ ou $x^2 = -9$.

   Como $x \in \mathbb{R}$, devemos ter $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow y = \mp 3 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm(1-3i)$.

   Logo, as raízes são $\dfrac{3-i\pm(1-3i)}{2} \Rightarrow z = 2-2i$ ou $z = 1+i$ e o domínio de f é $\text{Dom}(f) = \mathbb{C} - \{1+i, 2-2i\}$.

b. O conjunto A é formado pela união das retas $\alpha(t) = k + ti$, $t \in \mathbb{R}$ e $k \geq 1$. A imagem dessas retas pela f é $f(\alpha(t)) = 2(k+ti)+i = 2k+(2t+1)i, t \in \mathbb{R}$.

Mas, para $t \in \mathbb{R}$, a imagem da função $s = 2t+1$ é $\mathbb{R}$. Logo, $f(\alpha(t))$ é a reta vertical $u = 2k$ e, como $k \geq 2$ a união dessas retas é o semiplano $B = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re(z)} \geq 2\}$.



3. a. Dada a função complexa $f(z) = z^2 + \dfrac{z+i}{z-i}$, $z \neq i$, determine as funções reais $u(x,y)$ e $v(x,y)$ tais que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

b. Escreva $f(z) = (r^2 + \cos\theta)^2 + \text{tg}\,2\theta i$, $r \neq 0$,

$$\theta \neq \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \text{ em função de } z.$$

Solução:

a. Temos:

$$f(z) = (x+yi)^2 + \frac{x+(y+1)i}{x+(y-1)i} =$$

$$= x^2 - y^2 + 2xyi + \frac{(x+(y+1)i)(x-(y-1)i)}{x^2+(y-1)^2} =$$

$$= x^2 - y^2 + \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2} + \left(2xy + \frac{2x}{x^2+(y-1)^2}\right)i.$$

Logo, $u(x,y) = x^2 - y^2 + \dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2}$ e $v(x,y) = 2xy + \dfrac{2x}{x^2+(y-1)^2}$, $(x,y) \neq (0,1)$.

b. Relembrando da Trigonometria que $\operatorname{tg} 2\theta = \dfrac{2\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta}$,

temos: $f(z) = \left(|z|^2 + \dfrac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}\right)^2 + \left(\dfrac{\dfrac{2\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}}{1-\left(\dfrac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right)^2}\right) i =$

$= \; |z|^4 \; + \; \left(\dfrac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}\right)^2 \; + \; 2|z|\operatorname{Re}(z) \; + \; \dfrac{2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z))}{\operatorname{Re}(z)^2 - \operatorname{Im}(z)^2} i,$

$\operatorname{Re}(z) \neq 0, \; \operatorname{Re}(z) \neq \pm \operatorname{Im}(z).$

4. Dadas as curvas abaixo, determine suas imagens pela função $f(z)$.

   a. $\alpha(t) = 2(\cos t + i \operatorname{sen} t),\, t \in [0, 2\pi]$ e $f(z) = \operatorname{Re}(z)$.

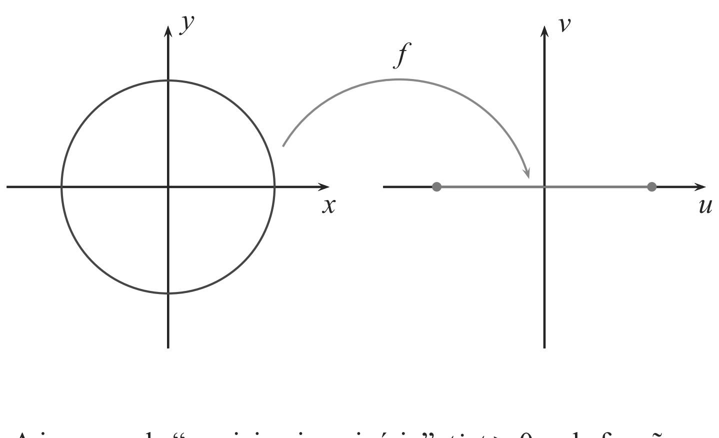
   b. $\alpha(t) = ti,\; t > 0$ e $f(z) = z^3$.

   c. $\alpha(t) = 1 + ti, t \in \mathbb{R}$ e $f(z) = z^2$.

Solução:

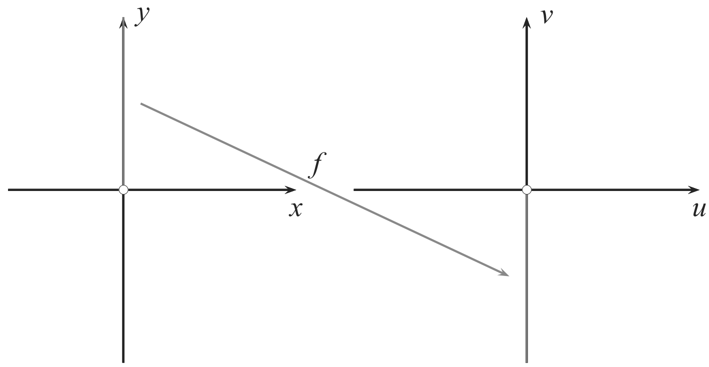
a. A imagem do círculo de centro na origem e raio 2 pela função f é $f(2(\cos t + i \operatorname{sen} t)) = 2\cos t$. Como $t \in [0, 2\pi]$, a imagem de $\alpha(t)$ é o segmento de extremos $(-2, 0)$ e $(2, 0)$.

Outra maneira de obter a imagem de $\alpha(t)$ é observar que, geometricamente, a função f corresponde à projeção ortogonal sobre o eixo real (eixo Ox).



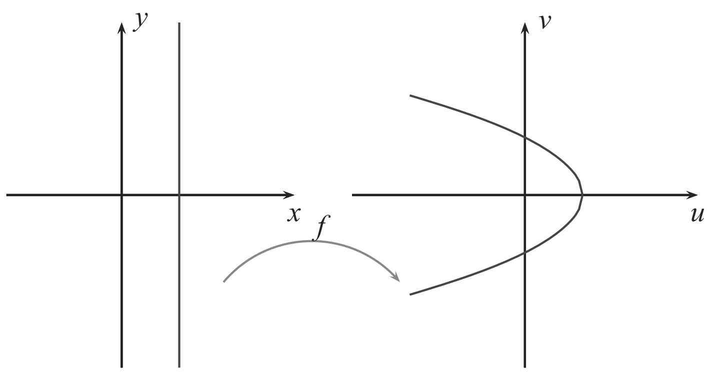
b. A imagem do "semieixo imaginário" $ti, t > 0$ pela função f é $f(ti) = (ti)^3 = -t^3 i$.

Como a função a imagem da função real $g(t) = -t^3, t < 0$ é $I = (-\infty, 0)$, a imagem de $\alpha(t)$ é o "semieixo imaginário" $ti, \; t < 0$.



c. A imagem da reta vertical $x = 1$ pela função f é $f(1+ti) = (1+ti)^2 = 1-t^2+2ti$. As equações paramétricas da curva no plano uv são $\begin{cases} u = 1-t^2 & (i) \\ v = -2t & (ii) \end{cases}$.

Substituindo $t = -\dfrac{v}{2}$ em (i), obtemos $u = 1-\dfrac{v^2}{4}$ uma parábola de vértice em $(1,0)$.



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Dadas as funções $f(z)$, determine as imagens dos pontos indicados.

   a. $f(z) = z^3 + \dfrac{1}{z^3}, \; z = 1+i.$

   b. $f(z) = r\operatorname{tg}\theta + i\ln\left(\dfrac{1+r^2}{2}\right), \; z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$

2. a. Determine o domínio da função complexa $f(z) = \ln(x^2 - 5x + 4) + \dfrac{y^3}{x^2 - 16} i$.

   b. Determine a imagem da função $\begin{cases} f : A \to \mathbb{C} \\ f(z) = \mathrm{Im}(z) \end{cases}$, $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2 - 2i| \leq 1\}$.

3. a. Escreva $f(z) = xy + 2x^2 - y^2 i$ em função de z e $\bar{z}$.

   b. Dada a função complexa $f(z) = z^3 - \dfrac{1}{z}$, $z \neq 0$, determine as funções reais $u(r,\theta)$ e $v(r,\theta)$ tais que $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$.

4. Determine a imagem das curvas parametrizadas abaixo pela função $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $z \neq 0$.

   a. $\alpha(t) = (1+i)t,\ t \neq 0.\ \ \alpha(t) = 1 + ti,\ t \in \mathbb{R}$

   b. $\alpha(t) = 1 + ti,\ t \in \mathbb{R}$

   c. $\alpha(t) = 2(\cos t + i \operatorname{sen} t),\ t \in [0, 2\pi]$.

Solução dos Exercícios Propostos

1. Dadas as funções $f(z)$, determine as imagens dos pontos indicados.

   a. $f(z) = z^3 + \dfrac{1}{z^3},\ z = 1 + i$.

   b. $f(z) = r\operatorname{tg}\theta + i\ln\left(\dfrac{1+r^2}{2}\right),\ z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$.

Solução:

a. Temos $f(1+i) = (1+i)^3 + \dfrac{1}{(1+i)^3}$. Como $(1+i)^3 = 1 + 3i + 3(i)^2 + (i)^3 = -2 + 2i$, segue-se que $f(2+3i) = -2 + 2i + \dfrac{1}{-2+2i} = -2 + 2i - \dfrac{1+i}{4} = -\dfrac{9}{4} + \dfrac{7}{4}i$.

b. Temos $z = \cos\dfrac{7\pi}{4} + i\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{4}$. Logo, $f\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{4} + i\ln\left(\dfrac{1+1}{2}\right) = -1$.

2. a. Determine o domínio da função complexa $f(z) = \ln(x^2 - 5x + 4) + \dfrac{y^3}{x^2 - 16} i$.

b. Determine a imagem da função $\begin{cases} f : A \to \mathbb{C} \\ f(z) = \operatorname{Im}(z) \end{cases}$, $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2 - 2i| \leq 1\}$.

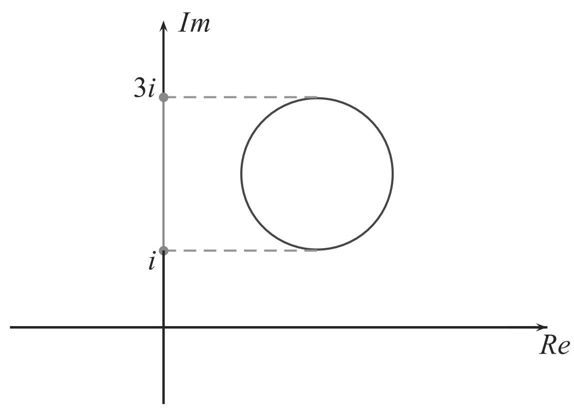
Solução:

a. As restrições são $x^2 - 5x + 4 > 0$ devido ao logaritmo e $x^2 - 16 \neq 0$ para não anular o denominador.

Temos $x^2 - 5x + 4 > 0 \Leftrightarrow x < 1$ ou $x > 4$ e $x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 4$.

Logo, o domínio de f é $\operatorname{Dom}(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 4$ ou $\operatorname{Re}(z) < 1$ e $\operatorname{Re}(z) \neq -4\}$.

b. O domínio de f é o disco de centro em $(2, 2)$ e raio 1. A imagem da função é obtida pela projeção desse disco sobre o eixo imaginário, logo $\operatorname{Im}(f) = (1 - t)i + t3i = (1 + 2t)i$, $t \in [0, 1]$ (segmento de extremos em $z_0 = i$ e $z_1 = 3i$). Veja a figura abaixo.



3. a. Escreva $f(z) = xy + 2x^2 - y^2 i$ em função de z e $\bar{z}$.

b. Dada a função complexa $f(z) = z^3 - \dfrac{1}{z}$, $z \neq 0$, determine as funções reais $u(r, \theta)$ e $v(r, \theta)$ tais que $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$.

Solução:

a. Temos:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{(z+\overline{z})(z-\overline{z})}{4i} + 2\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)^2 i = \\ &= \frac{z^2-\overline{z}^2}{4i} + 2\left(\frac{z^2+\overline{z}^2+2z\overline{z}}{4}\right) - \left(\frac{z^2+\overline{z}^2-2z\overline{z}}{-4}\right) i = \\ &= \left(\frac{\overline{z}^2-z^2}{4}\right) i + \left(\frac{z^2+\overline{z}^2}{2}\right) + z\overline{z} + \left(\frac{z^2+\overline{z}^2}{4} - \frac{z\overline{z}}{2}\right) i = \\ &= \frac{z^2+\overline{z}^2}{2} + z\overline{z} + \left(\frac{\overline{z}^2}{2} - \frac{z\overline{z}}{2}\right) i. \end{aligned}$$

Mas $z\overline{z} = |z|^2$ e $\overline{z}^2 = \overline{z^2} \Rightarrow \dfrac{z^2+\overline{z}^2}{2} = \dfrac{z^2+\overline{z^2}}{2} = \mathrm{Re}(z^2)$, logo, também podemos escrever $f(z)$ como

$$f(z) = \mathrm{Re}(z^2) + |z|^2 + \frac{1}{2}\left(\overline{z^2} - |z|^2\right) i.$$

b. Temos:

$$\begin{aligned} f(z) &= (r(\cos\theta + i\mathrm{sen}\,\theta))^3 - \frac{1}{r(\cos\theta + i\mathrm{sen}\,\theta)} = \\ &= r^3(\cos 3\theta + i\mathrm{sen}\, 3\theta) - \left(\frac{\cos(-\theta) + i\mathrm{sen}\,(-\theta)}{r}\right) = \\ &= r^3\cos 3\theta - \frac{\cos\theta}{r} + \left(r^3\mathrm{sen}\,3\theta + \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r}\right) i. \end{aligned}$$

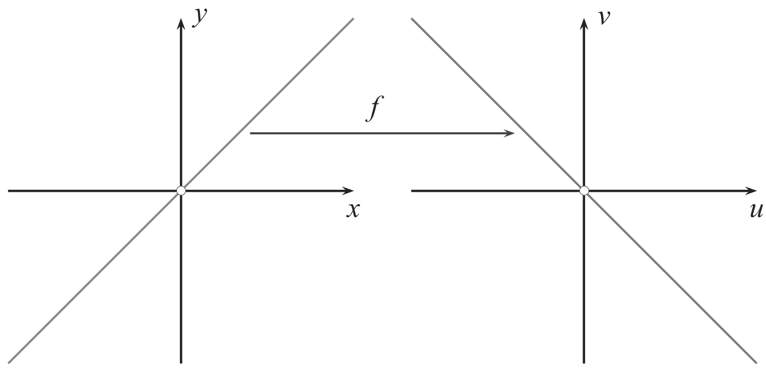
Logo, $u(r,\theta) = r^3\cos 3\theta - \dfrac{\cos\theta}{r}$ e $v(r,\theta) = r^3\mathrm{sen}\,3\theta + \dfrac{\mathrm{sen}\,\theta}{r}$, $r \neq 0$.

4. Determine a imagem das curvas parametrizadas abaixo pela função $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $z \neq 0$.

   a. $\alpha(t) = (1+i)t,\ t \neq 0.\ \ \alpha(t) = 1+ti,\ t \in \mathbb{R}$
   b. $\alpha(t) = 1+ti,\ t \in \mathbb{R}$
   c. $\alpha(t) = 2(\cos t + i\mathrm{sen}\, t),\ t \in [0,2\pi]$.

Solução:

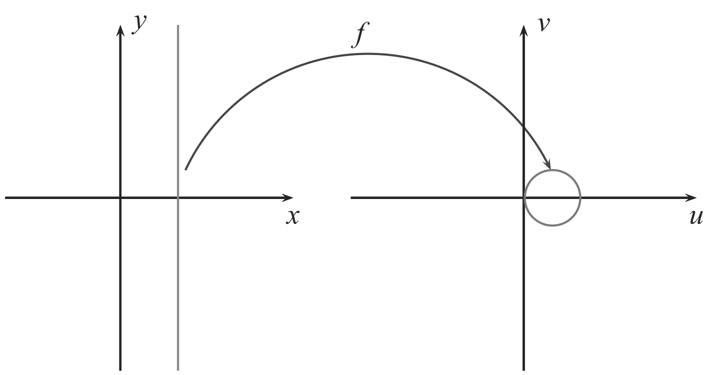
a. Temos $f(\alpha(t)) = \dfrac{1}{t(1+i)} = \dfrac{1-i}{2t}$. Como a imagem da função $g(t) = \dfrac{1}{2t}$, $t \neq 0$ é o conjunto $\mathbb{R} - \{0\}$, segue-se que a imagem de α pela função f é a "reta perfurada" $\alpha(t) = t(1-i), t \neq 0$.



b. Temos $f(\alpha(t)) = \dfrac{1}{1+ti} = \dfrac{1-ti}{1+t^2}$.

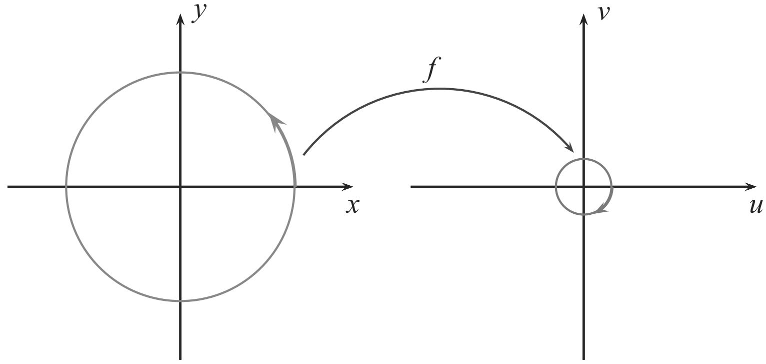
As equações paramétricas da curva no plano uv são $\begin{cases} u = \dfrac{1}{1+t^2} & (i) \\ v = \dfrac{-t}{1+t^2} & (ii) \end{cases}$.

Dividindo (ii) por (i), obtemos $t = -\dfrac{v}{u}$ e, substituindo esse resultado em (i), segue-se que $u = \dfrac{u^2}{u^2+v^2} \Rightarrow u^2 + v^2 = u \Rightarrow \left(u - \dfrac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \dfrac{1}{4}$, um círculo de centro em $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ e raio $\dfrac{1}{2}$.

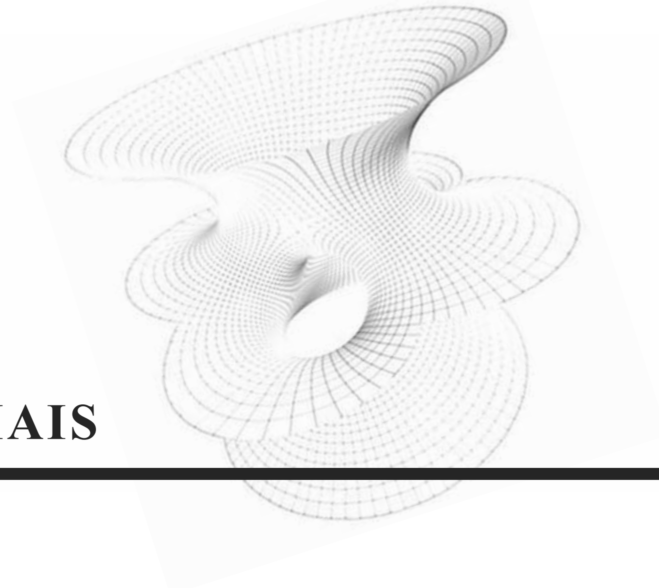


c. Temos $f(\alpha(t)) = \dfrac{1}{2(\cos t + i\operatorname{sen} t)} = \dfrac{\cos(-t) + i\operatorname{sen}(-t)}{2}$.

Como $t \in [0, 2\pi] \Rightarrow -t \in [-2\pi, 0]$, a imagem de α pela função f é um círculo de centro na origem e raio $\dfrac{1}{2}$ percorrido no sentido horário.



Aula 5



Funções Polinomiais

Introdução

Os polinômios ou funções polinomiais com coeficientes reais, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, com $a_n,\ a_{n-1}, \ldots,$ $a_1,\ a_0 \in \mathbb{R}$, são nossos velhos conhecidos. Nesta aula, estudaremos polinômios com coeficientes complexos, que são funções complexas da forma

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, \text{ onde } a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}.$$

Definição 5.1.

Uma função complexa da forma $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, onde n denota um número inteiro maior ou igual a zero e $a_n,\ a_{n-1}, \ldots, a_1,\ a_0 \in \mathbb{C}$, é chamada polinômio ou função polinomial.

Os números complexos $a_n,\ a_{n-1}, \ldots, a_1,\ a_0$ são chamados **coeficientes**, a_n é chamado coeficiente líder e a_0 é o termo independente. Quando $a_n = 1$, o polinômio é chamado **mônico**, quando $p(z) = a_0$, dizemos que o polinômio é **constante** e, em particular, se $a_0 = 0,\ p(z) = 0$ é chamado **polinômio identicamente nulo**. O conjunto de todos os polinômios complexos será denotado por $\mathbb{C}[z]$.

Soma e Produto de Polinômios

A soma e o produto de $f(z),\ g(z) \in \mathbb{C}[z]$ são definidos do mesmo modo que a soma e produto de polinômios com coeficientes reais, ou seja:

SOMA E PRODUTO DE POLINÔMIOS

Sejam $f(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ e $g(z) = b_m z^m + \ldots + b_1 z + b_0 \in \mathbb{C}[z]$, então:

a. $h(z) = f(z) + g(z) = c_r z^r + c_{r-1} z^{r-1} + \ldots + c_1 z + c_0$, onde $c_i = a_i + b_i,\ \ a_i = 0$ se $i \geq n+1$ e $b_j = 0$ se $j \geq m+1$.

b. $p(z) = f(z)g(z) = d_s z^s + d_{s-1} z^{s-1} + \ldots + d_1 z + d_0$, onde $d_i = a_i b_0 + a_{i-1} b_0 + \ldots + a_0 b_i$, $a_i = 0$ se $i \geq n+1$ e $b_j = 0$ se $j \geq m+1$.

Na prática, multiplicamos cada termo $a_i x^i$ de $f(x)$ por cada termo $b_j x^j$ de $g(x)$ de acordo com a regra $a_i x^i . b_j x^j = a_i b_j x^{i+j}$ e somamos os resultados obtidos.

Exemplo 5.1.

Se $f(z) = iz^4 + 2z^3 - (1+2i)z + 3$ e $g(z) = -4z^3 + (1-i)z + 2i$, então:

$$\begin{aligned} h(z) &= f(z) + g(z) = iz^4 - 2z^3 - 3iz + 3 + 2i \\ p(z) &= f(z)g(z) = -4iz^7 - 8z^6 + (1+i)z^5 + (4+6i)z^4 + \\ &\quad (-12+6i)z^3 - (3+i)z^2 + (4-2i)z + 6i\,. \end{aligned}$$

Dados os polinômios $f(z)$ e $g(z)$ em $\mathbb{C}$, sua diferença, denotada por $f(z) - g(z)$ é definida por:

$$s(z) = f(z) - g(z) = f(z) + (-1)g(z) = e_k z^k + e_{k-1} z^{k-1} + \ldots + e_1 z + e_0\,,$$

onde $e_i = a_i - b_i$, $a_i = 0$ se $i \geq n+1$ e $b_j = 0$ se $j \geq m+1$.

Exemplo 5.2.

Se $f(z) = (3+i)z^3 - 2z^2 + iz + 1$ e $g(z) = 2z^3 + z + 1$, então $s(z) = f(z) - g(z) = (1+i)z^3 - 2z^2 + (-1+i)z$.

Grau de um Polinômio

Se $f(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ e $a_n \neq 0$, então o grau de $f(z)$, que representaremos por $gr(f)$, é o inteiro não negativo n.

Observe que **não** definimos grau para o polinômio identicamente nulo e que se $f(z)$ é um polinômio constante, ou seja, $f(z) = a_0 \neq 0$, então $gr(f) = 0$.

Também decorre diretamente da definição de grau que se $f(z)$ e $g(z)$ pertencem a $\mathbb{C}[z]$ e ambos não são identicamente nulos, então:

a. Se $h(z) = f(z) + g(z)$, então $gr(h) \leq$ máx$\{gr(f), gr(g)\}$; onde máx$\{a, b\}$ é o maior dos números reais a e b.

b. Se $p(z) = f(z)g(z)$, então $\mathrm{gr}(p) = \mathrm{gr}(f) + \mathrm{gr}(g)$.

Um importante resultado que aqui não será demonstrado é o **Algoritmo da Divisão** em $\mathbb{C}[z]$.

Teorema 5.1.

Sejam $f(z)$, $g(z) \in \mathbb{C}[z]$, com $g(z) \neq 0$. Então, existem $q(z)$ e $r(z) \in \mathbb{C}[z]$ tais que:

$$f(z) = q(z)g(z) + r(z), \quad \text{onde } r(z) = 0 \text{ ou } \mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)\,.$$

Chamaremos $q(z)$ de quociente e $r(z)$ de resto da divisão de $f(z)$ por $g(z)$.

Na prática, para dividirmos o polinômio $f(z)$ por $g(z)$ utilizamos o "Método da Chave".

Exemplo 5.3.

Determine o quociente e o resto da divisão de $f(z) = z^4 + z^3 + 3iz^2 + i$ por $g(z) = z^2 + 2i$.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
z^4 & +z^3 & +3iz^2 & & +i & z^2 \qquad +2i \\ \cline{6-6}
-z^4 & & -2iz^2 & & & z^2 \quad +z \quad +i \\ \cline{1-3}
 & z^3 & +iz^2 & & & \\
 & -z^3 & & -2iz & & \\ \cline{2-4}
 & & iz^2 & -2iz & +i & \\
 & & -iz^2 & & +2 & \\ \cline{3-5}
 & & & -2iz & +2+i &
\end{array}
$$

Portanto, $q(z) = z^2 + z + i$ e $r(x) = -2iz + 2 + i$.

Quando $r(z) = 0$, dizemos que $g(z)$ divide $f(z)$.

Exemplo 5.4.

Determine a para que $g(z) = 2z + i$ divida $f(z) = z^3 - iz + a$ em $C[z]$.

Resulta do Algoritmo da Divisão que

$$z^3 - iz + a = q(z)(2z+i) + c\,, \quad c \in \mathbb{C}\,.$$

Como $g(z)$ divide $f(z)$, devemos ter $c = 0$, ou seja, $z^3 - iz + a = q(z)(2z+i)$; além disso, fazendo $z = -\dfrac{i}{2}$, obtemos

$$\left(-\frac{i}{2}\right)^3 - i\left(-\frac{i}{2}\right) + a = q(z)\cdot 0 = 0 \;\Rightarrow\; a = \frac{i}{8} + \frac{1}{2} = \frac{1}{8}(4+i)$$

✍ Usando esse mesmo raciocínio, podemos mostrar que o resto da divisão de $f(z)$ por $g(z) = az + b$, $a \neq 0$ é $r(z) = f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$.

RAÍZES

Dado $p(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\alpha \in \mathbb{C}$ é chamado **raiz** de $p(z)$ se $p(\alpha) = 0$.

Exemplo 5.5.

1. $\alpha = i$ é raiz de $p(z) = z^6 + z^3 + 2z^2 + z + 3$, pois $p(i) = i^6 + i^3 + 2i^2 + i + 3 = -1 - i - 2 + i + 3 = 0$.

2. $\alpha = 1+i$ e $\beta = 2-i$ são raízes de $p(z) = z^2 - 3z + 3 + i$.

   De fato, as raízes de $z^2 - 3z + 3 + i$ são: $\dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 4(3+i)}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{-3-4i}}{2}$.

   Notemos que se $(a+bi)^2 = -3-4i$, então

$$\begin{cases} a^2 - b^2 &= -3 \\ 2ab &= -4 \end{cases} \Rightarrow a^2 - \left(\frac{-2}{a}\right)^2 = -3.$$

   Portanto, $a^4 + 3a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a^2 = 1$ ou $a^2 = -4$ (não serve) $\Rightarrow a = \pm 1 \Rightarrow b = \mp 2$.

   Logo, as raízes de $z^2 - 3z + 3 + i$ são $\dfrac{3 \pm (1-2i)}{2} = 2 - i$ ou $1 + i$.

Quando o polinômio $p(z)$ tem coeficientes reais, é possível que nenhum $\alpha \in \mathbb{R}$ seja raiz de $p(z)$. Considere, por exemplo, $p(z) = z^2 + 1$, ou mais geralmente, qualquer $p(z) = az^2 + bz + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Entretanto, um resultado surpreendente, conhecido como **Teorema Fundamental da Álgebra**, primeiramente provado por K. F. Gauss em 1848, mostra que isso não ocorre quando consideramos raízes complexas.

Teorema 5.2 (Teorema Fundamental da Álgebra)**.**

Se $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 \in \mathbb{C}[z]$, com $n \geq 1$, então $p(z)$ possui pelo menos uma raiz complexa.

Um importante corolário do Teorema Fundamental da Álgebra é o:

Teorema 5.3.

Seja $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 \in \mathbb{C}[z]$, com $n \geq 1$. Então, $p(z)$ possui n raízes complexas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Além disso, $p(z)$ pode ser escrito como $p(z) = a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n)$.

Prova

A demonstração dar-se-á por meio de indução sobre n que é o grau de $p(z)$. Dessa forma, temos:

i. Validade para $n = 1$.

   Se $n = 1$, então $p(z) = a_1 z + a_0$, $a_1 \neq 0$. Logo, $z = \dfrac{-a_0}{a_1}$ é sua única raiz e $p(z) = a_1 z + a_0 = a_1\left(z + \dfrac{a_0}{a_1}\right) = a_1\left(z - \left(\dfrac{-a_0}{a_1}\right)\right)$.

ii. Assumimos a validade para $n-1$ com $n \geq 2$, ou seja, considerando que $p(z) = b_{n-1}z^{n-1} + \ldots + b_0$ tem $n-1$ raízes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ e $p(z) = b_{n-1}(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_{n-1})$. (Hipótese de Indução)

iii. Provaremos agora a validade do resultado para n.

   Seja $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 \in \mathbb{C}[z]$, com $n \geq 2$.

   Resulta do "Teorema Fundamental da Álgebra", e esse é o passo crucial, que $p(z)$ tem uma raiz α_n.

   Vamos agora dividir $p(z)$ por $f(z) = z - \alpha_n$. Pelo "Algoritmo da Divisão" temos

   $$p(z) = (z-\alpha_n)q(z) + c, \text{ onde } \mathrm{gr}(q) = n-1 \geq 1 \text{ e } c \in \mathbb{C}.$$

   Fazendo $z = \alpha_n$ na expressão acima, obtemos

   $$0 = p(\alpha_n) = 0 \cdot q(\alpha) + c = c,$$

   isto é, $p(z) = (z-\alpha_n)q(z)$. Observemos que $q(z)$ satisfaz à Hipótese de Indução e portanto pode ser escrito na forma

   $$q(z) = b_{n-1}(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_{n-1})$$

   e, por conseguinte,

   $$p(z) = b_{n-1}(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n).$$

   De forma evidente, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são as raízes de $p(z)$ em $\mathbb{C}$. Assim, quando igualamos os coeficientes líderes da equação anterior, concluímos que $a_n = b_{n-1}$, ou seja,

   $$p(z) = a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n).$$

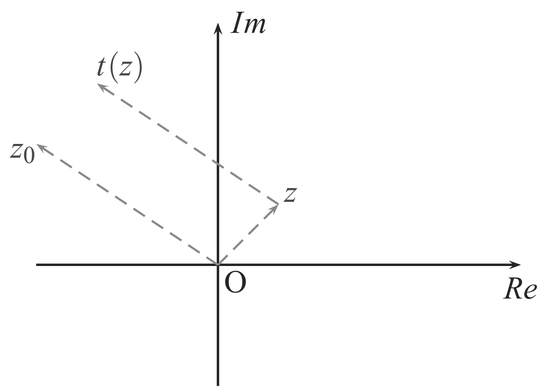
$\square$

POLINÔMIOS DO 1º GRAU

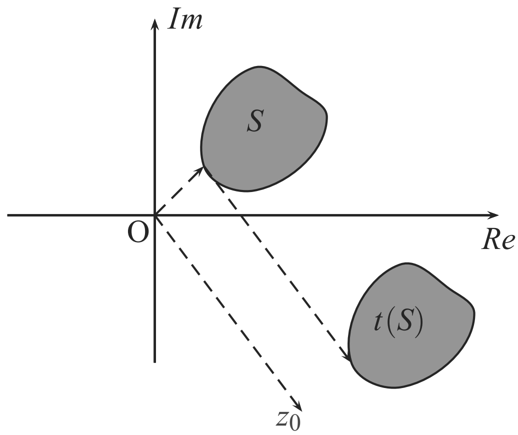
Os polinômios complexos do 1º grau são da forma $p(z) = az + b$, $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Veremos que as transformações ou mapeamentos por polinômios complexos do 1º grau são obtidos por composição de translações, rotações e homotetias, que definiremos a seguir.

a. **Translações:** os polinômios do 1º grau da forma $t(z) = z + z_0, z_0 \neq 0$, são chamados **translações**.

   Geometricamente, a imagem de z é obtida como mostra a figura abaixo. O ponto z é "deslocado" para o ponto $t(z)$ segundo um vetor com origem em z e congruente ao vetor $\overrightarrow{0z_0}$.

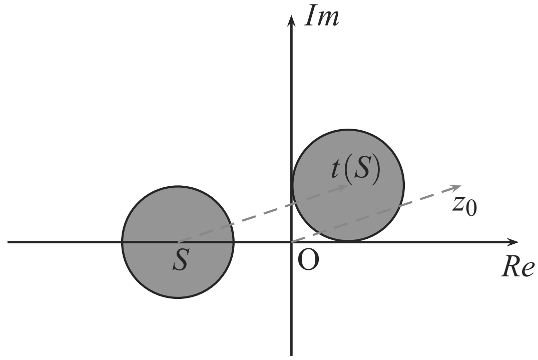


   A imagem de uma curva ou região é obtida transladando-se cada um de seus pontos. Portanto, se $t(z) = z + z_0$ e S é uma região, então $t(S)$ é a região obtida pelo deslocamento de S segundo um vetor com origem em um de seus pontos e congruente a $\overrightarrow{0z_0}$.



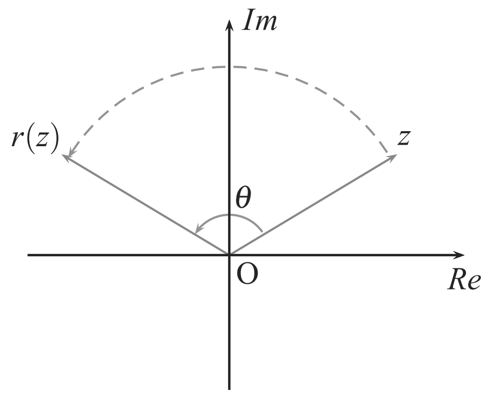
Exemplo 5.6.

Seja $t(z) = z+3+i$. Se $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+2| \leq 1\}$, então $t(S) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-(1+i)| \leq 1\}$.

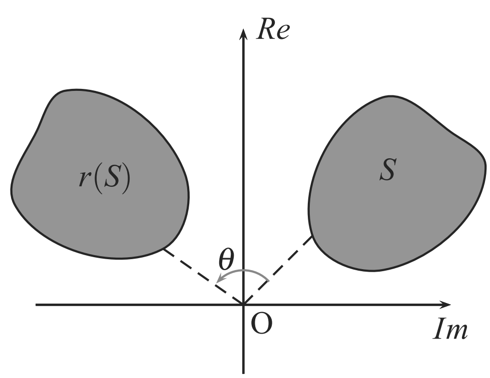


b. **Rotações:** os polinômios do 1º grau da forma $r(z) = z_0 z$, $|z_0| = 1$, são chamados **rotações**.

Como vimos, na Aula 3, a imagem de z é obtida pela rotação do vetor $\overrightarrow{0z}$ de um ângulo $\theta = \text{Arg }(z_0)$ no sentido anti-horário.

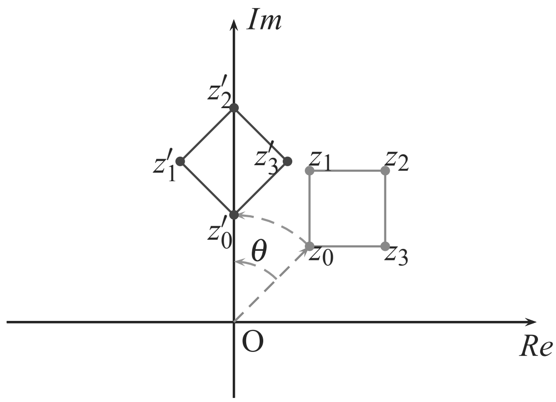


A imagem de uma curva ou região é obtida pela rotação de cada um de seus pontos.



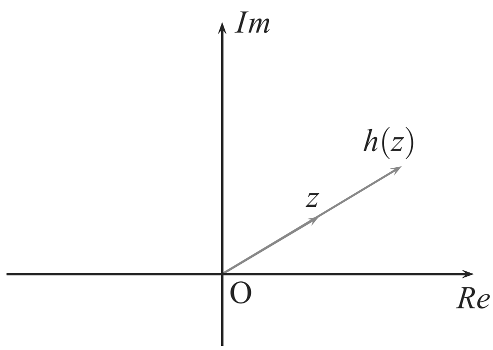
Exemplo 5.7.

Seja $r(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z$. Se S é o quadrado de vértices $z_0 = 1+i$, $z_1 = 1+2i$, $z_2 = 2+2i$ e $z_3 = 2+i$, então $r(S)$ é o quadrado de vértices $z'_0 = \sqrt{2}i$, $z'_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$, $z'_2 = 2\sqrt{2}i$ e $z'_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$.

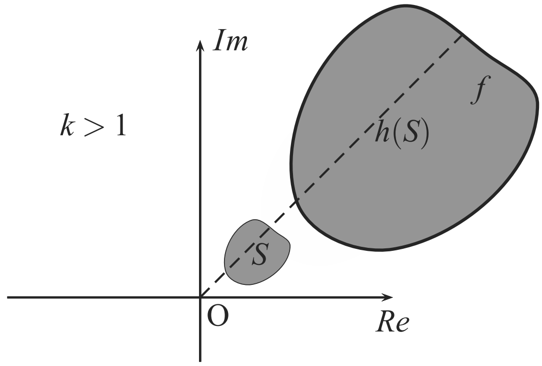


c. **Homotetias:** os polinômios do 1º grau da forma $h(z) = kz$, $k \in \mathbb{R} - \{0\}$, são chamados **homotetias de razão** k.

Geometricamente, a imagem de z é o número complexo $h(z)$ de argumento Arg (z) e módulo $k|z|$, se $k > 0$ e argumento $\pi + \text{Arg}\,(z)$ e módulo $|k||z|$, se $k < 0$.

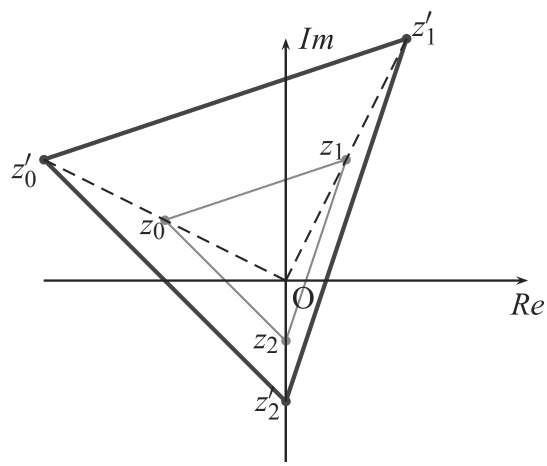


A imagem de uma curva ou região limitadas corresponderá a uma "ampliação" ou "redução" de escala da curva ou região de k unidades quando $k > 1$ e $0 < k < 1$, respectivamente.



Exemplo 5.8.

Seja $h(z) = 2z$. Se S é triângulo de vértices $z_0 = -2+i$, $z_1 = 1+2i$ e $z_2 = -i$, então $h(z)$ é o triângulo de vértices $z'_0 = -2+2i$, $z'_1 = 2+4i$ e $z'_2 = -2i$.



Dado um polinômio complexo do 1º grau, $p(z) = az + z_0$, se a forma trigonométrica de a é $a = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, temos:

$$p(z) = [r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)]z + z_0.$$

Portanto, para $t(z) = z + z_0$, $r(z) = (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)z$ e $h(z) = rz$, podemos escrever $p(z) = (t \circ h \circ r)(z)$, ou seja, $p(z)$ é obtido pela composição de uma rotação com uma homotetia com uma translação, nessa ordem.

✍ Embora a rotação e a homotetia comutem, isto é, $r \circ h = h \circ r$, a translação, no caso geral, **não** comuta com ambas. De fato, se $t(z) = z + z_0$, $r(z) = az$ e $h(z) = kz$, temos:

i. $(t \circ r)(z) = t(az) = az + z_0$ e $(r \circ t)(z) = r(z + z_0) = az + az_0 \Rightarrow t \circ r = r \circ t \Leftrightarrow z_0 = az_0 \Leftrightarrow a = 1$, pois $z_0 \neq 0$.

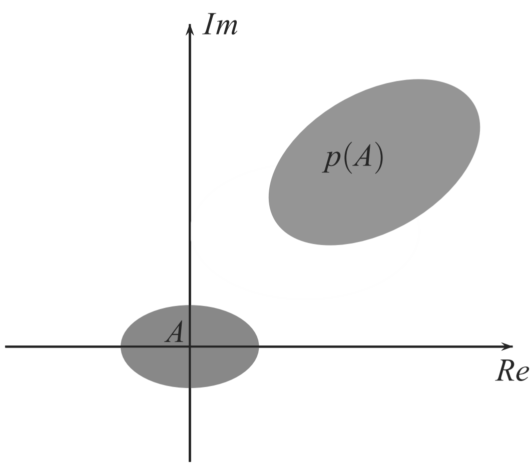
ii. o conjunto vazio é um subconjunto de qualquer conjunto. Ou seja, $\emptyset \subset A$, qualquer que seja o conjunto A;

iii. $(t \circ h)(z) = t(kz) = kz + z_0$ e $(h \circ t)(z) = h(z + z_0) = kz + kz_0 \Rightarrow t \circ h = h \circ t \Leftrightarrow z_0 = kz_0 \Leftrightarrow k = 1$, pois $z_0 \neq 0$.

Assim, **não** podemos realizar a translação antes da rotação e da homotetia.

Exemplo 5.9.

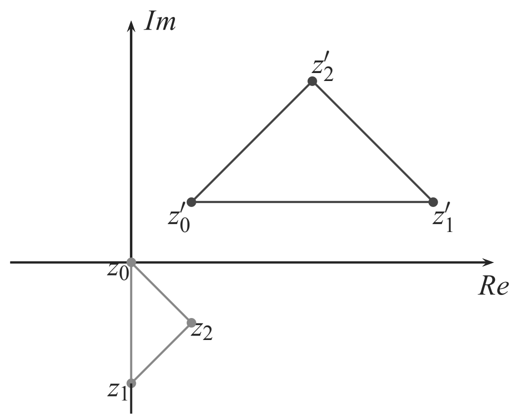
Seja $f(z) = (\sqrt{3} + i)z + 8 + 8i$. Se $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+2| + |z-2| \leq 5\}$, então a imagem da elipse A é obtida pela composição da rotação $r(z)\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{6}\right)z$ com a homotetia $h(z) = 2z$ com a translação $t(z) = z + 8 + 8i$.



Exercícios Resolvidos

1. Dados os triângulos T e T' de vértices $z_0 = 0$, $z_1 = -2i$, $z_2 = 1-i$, $z'_0 = 1+i$, $z'_1 = 5+i$, $z'_2 = 3+3i$, respectivamente, obtenha um polinômio $p(z) \in \mathbb{C}[z]$, do 1º grau, tal que $p(T) = T'$.

Solução: Observe que $\overline{z_0 z_1} = 2$, $\overline{z'_0 z'_1} = 4$ e que esses segmentos são ortogonais.



Se $\overline{z''_0 z''_1}$ é o segmento obtido de $\overline{z_0 z_1}$ por uma rotação anti-horária de 90º seguida de uma homotetia de razão 2, então $z''_0 = 0$ e $z''_1 = 4$. Como $z'_0 = 1+i = 1+i+0 = 1+i+z''_0$ e $z'_1 = 5+i = 1+i+4 = 1+i+z''_1$, concluímos que $\overline{z'_0 z'_1}$ é obtido de $\overline{z''_0 z''_1}$ por uma translação segundo $z = 1+i$, ou seja, $\overline{z'_0 z'_1}$ é obtido de $\overline{z_0 z_1}$ por uma rotação anti-horária de 90º, seguida de uma homotetia de razão 2, seguida de uma translação segundo $z = 1+i$. Portanto $\overline{z'_0 z'_1}$ é a imagem de $\overline{z_0 z_1}$ pela função $p(z) = 2iz+1+i$.

Além disso, temos $p(z_2) = p(1-i) = 2i(1-i)+1+i = 3+3i = z'_2$. Logo, o triângulo T' é a imagem de T pela função $p(z) = 2iz+1+i$.

2. a. Seja $p(z) = az+b \in \mathbb{C}[z]$. Se $p(z_1) = \omega_1$ e $p(z_2) = \omega_2$, escreva a e b em função de z_1, z_2, ω_1 e ω_2.

   b. Seja $p(z) = az+b \in \mathbb{C}[z]$. Se $a \neq 0$, prove que $p(z)$ é uma função bijetora de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$ e determine sua inversa $p^{-1}(z)$.

Solução:

a. Temos o sistema $\begin{cases} p(z_1) = az_1 + b = \omega_1 & (i) \\ p(z_2) = az_2 + b = \omega_2 & (ii) \end{cases}$

Diminuindo (i) de (ii), obtemos

$a(z_2 - z_1) = \omega_2 - \omega_1 \Rightarrow a = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{z_2 - z_1}$ e isso implica

$b = \omega_1 - az_1 = \omega_1 - \dfrac{a(\omega_2 - \omega_1)}{z_2 - z_1} = \dfrac{\omega_1(a + z_2 - z_1) - a\omega_2}{z_2 - z_1}$.

b. i. $p(z)$ é injetora. De fato, se $p(z_1) = p(z_2) \Rightarrow az_1 + b = az_2 + b \Rightarrow a(z_1 - z_2) = 0 \Rightarrow z_1 = z_2$, pois $a \neq 0$.

ii. $p(z)$ é sobrejetora, pois se $w \in \mathbb{C}$, podemos resolver a equação $p(z) = w = az + b \Rightarrow z = \dfrac{w-b}{a} \Rightarrow p\left(\dfrac{w-b}{a}\right) = w$.

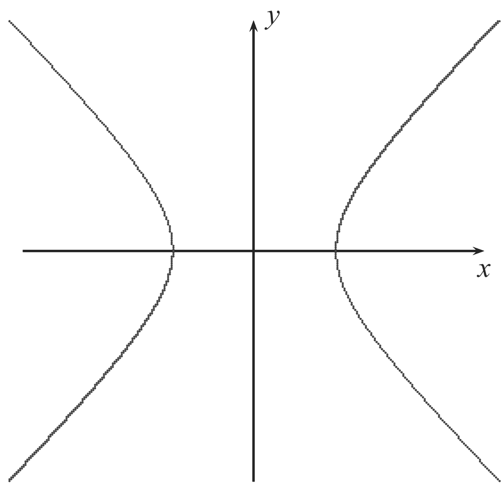
Resulta de (i) e (ii) que $p(z)$ é bijetora. □

Para determinar $p^{-1}(z)$, devemos resolver a equação

$$z = aw + b \Rightarrow w = \frac{z-b}{a} \Rightarrow w = p^{-1}(z) = \frac{z-b}{a}.$$

3. Dada uma função complexa $f(z)$ com domínio $\text{Dom}(f) = A$, a imagem inversa de $B \subseteq \mathbb{C}$, que representaremos por $f^{-1}(B)$, é o conjunto $f^{-1}(B) = \{z \in A \mid f(z) \in B\}$. Se $f(z) = z^2$ e $B = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) = 2\}$, determine $f^{-1}(B)$.

Solução: Se $z = x + yi$, então $f(z) = (x+yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. Logo, se $w \in B$, então $\text{Re}(w) = 2 \Rightarrow 2 = x^2 - y^2$. Portanto, $f^{-1}(B)$ é a **hipérbole** de equação $x^2 - y^2 = 2$ no plano xy.



4. Se $f(z) = z^2$ e T é o triângulo de vértices $z_0 = 0$, $z_1 = 1$ e $z_2 = i$, determine $f(T)$.

Solução: Sejam $\alpha(t)=t$, $\beta(t)=ti$, $\gamma(t)=1-t+ti$, $t\in[0,1]$, respectivamente, as equações dos segmentos $\overline{z_0z_1}$, $\overline{z_0z_2}$ e $\overline{z_1z_2}$. Temos

$$\begin{cases} f(\alpha(t))=t^2 \\ f(\beta(t))=-t^2 \\ f(\gamma(t))=(1-t)^2-t^2+2(1-t)ti=1-2t+2(1-t)i \end{cases},t\in[0,1].$$

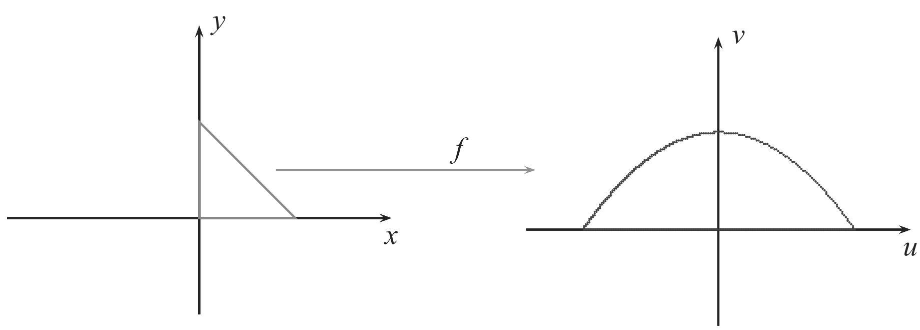
Evidentemente, $f(\alpha(t))$ e $f(\beta(t))$ são segmentos sobre o eixo real.

Vamos escrever as equações paramétricas de $f(\gamma(t))$. Temos $\begin{cases} u=(1-t)^2-t^2=1-2t \quad (i) \\ v=2(1-t) \quad (ii) \end{cases}$.

Resulta de (i) que $t=\dfrac{1-u}{2}$ e, substituindo esse resultado em (ii), segue-se que

$$v = 2\left(1-\left(\frac{1-u}{2}\right)\right)\left(\frac{1-u}{2}\right) = \frac{(1+u)(1-u)}{2} = \frac{1-u^2}{2},$$

parábola de vértice em $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ e zeros $(-1,0),(1,0)$. A representação de $f(T)$ no plano uv é mostrada na figura



Exercícios Propostos

1. Dados os quadrados Q e Q' de vértices $z_0=0$, $z_1=1$, $z_2=1+i$, $z_3=i$ e $z'_0=2$, $z'_1=2+2\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, $z'_2=2+2\sqrt{2}i$, $z'_3=2-2\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, respectivamente, obtenha um polinômio $p(z)\in\mathbb{C}[z]$, do 1º grau, tal que $p(Q)=Q'$.

2. Prove a desigualdade $|iz+1|\leq 2$, se $|z|\leq 1$, analisando a imagem do disco $D=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\leq 1\}$ pela função $p(z)=iz+1$.

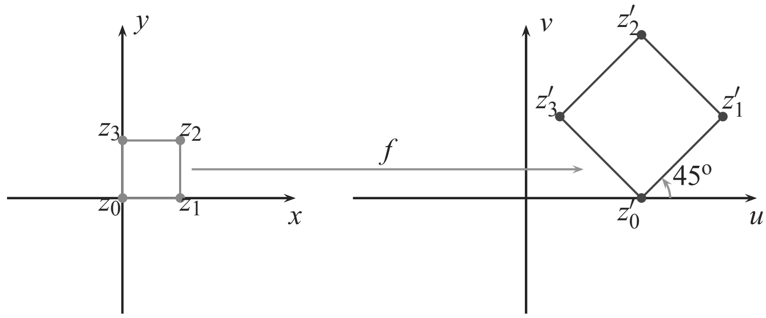
3. Determine a imagem do quadrado Q de vértices $z_0=0$, $z_1=1$, $z_2=1+i$, $z_3=i$ pela função $f(z)=z^2$.

4. Determine a imagem do círculo $S=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-1|=1\}$ pela função $f(z)=z^2-2z$.

Solução dos Exercícios Propostos

1. Dados os quadrados Q e Q' de vértices $z_0 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = 1+i$, $z_3 = i$ e $z'_0 = 2$, $z'_1 = 2+2\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, $z'_2 = 2+2\sqrt{2}i$, $z'_3 = 2-2\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, respectivamente, obtenha um polinômio $p(z) \in \mathbb{C}[z]$, do 1º grau, tal que $p(Q) = Q'$.

   Solução: Observe que $\overline{z_0z_1} = 1$, $\overline{z'_0z'_1} = 2$ e que esses segmentos fazem um ângulo agudo de 45º.

   Se $\overline{z''_0z''_1}$ é o segmento obtido de $\overline{z_0z_1}$ por uma rotação anti-horária de 45º seguida de uma homotetia de razão 2, então $z''_0 = 0$ e $z''_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$.

   Como $z'_0 = 2 = 2+0 = 2+z''_0$ e $z'_1 = 2+\sqrt{2}i+2 = 2+z''_1$, concluímos que $\overline{z'_0z'_1}$ é obtido de $\overline{z''_0z''_1}$ por uma translação segundo $z = 2$, ou seja, $\overline{z'_0z'_1}$ é obtido de $\overline{z_0z_1}$ por uma rotação anti-horária de 45º, seguida de uma homotetia de razão 2, seguida de uma translação segundo $z = 2$.

   Portanto, $\overline{z'_0z'_1}$ é a imagem de $\overline{z_0z_1}$ pela função $p(z) = \sqrt{2}(1+i)z+2$.

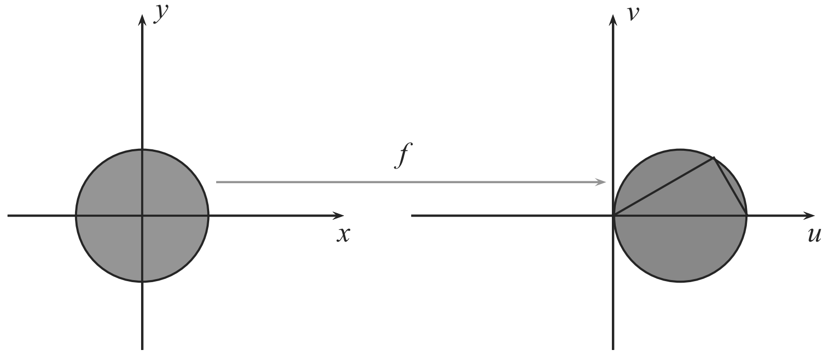
   Além disso, temos $p(z_2) = p(1+i) = \sqrt{2}(1+i)(1+i)+2 = 2+2\sqrt{2}i = z'_2$ e $p(z_3) = p(i) = \sqrt{2}(1+i)(i)+2 = 2-\sqrt{2}+2\sqrt{2}i = z'_3$.

   Logo, o quadrado Q' é a imagem de Q pela função $p(z) = \sqrt{2}(1+i)z+2$.

2. Prove a desigualdade $|iz+1| \leq 2$, se $|z| \leq 1$, analisando a imagem do disco $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ pela função $p(z) = iz+1$.

   Solução: Geometricamente, a função $p(z) = iz+1$ corresponde a uma rotação anti-horária de 90º seguida de uma translação segundo $z = 1$.

Como a imagem por rotação de um disco é o próprio disco, a imagem de $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ pela função $p(z)$ é o disco $p(D) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w-1| \leq 1\}$, como mostra a figura a seguir.



Vimos, na questão 6 do EP 2, que o valor máximo de $|w|$ para $w \in p(D)$ é obtido pelas interseções da reta que une o centro de D à origem.

Logo, se $w_0 = 2$, o valor máximo de $|w|$ se $w \in p(D)$ é $|w_0| = 2$.

Além disso, se quisermos, podemos determinar $z \in D$ tal que $|p(z)|$ assume seu valor máximo, basta resolvermos a equação $p(z) = w_0 = 2 \Rightarrow iz+1 = 2 \Rightarrow z = \dfrac{1}{i} = -i$.

3. Determine a imagem do quadrado Q de vértices $z_0 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = 1+i$, $z_3 = i$ pela função $f(z) = z^2$.

Solução: Sejam $\alpha(t) = t$, $\beta(t) = (1-t)+t(1+i) = 1+ti$, $\gamma(t) = (1-t)i+t(1+i) = i+t$, $\delta(t) = ti$ $t \in [0,1]$, respectivamente, as equações dos segmentos $\overline{z_0z_1}$, $\overline{z_1z_2}$, $\overline{z_2z_3}$ e $\overline{z_3z_1}$.

Temos: $\begin{cases} f(\alpha(t)) = t^2 \\ f(\beta(t)) = 1-t^2+2ti \\ f(\gamma(t)) = -1+t^2+2ti \\ f(\delta(t)) = -t^2 \end{cases}$, $t \in [0,1]$.

Evidentemente, $f(\alpha(t))$ e $f(\delta(t))$ são segmentos sobre o eixo real.

Vamos escrever as equações paramétricas de $f(\beta(t))$. Temos: $\begin{cases} u = 1-t^2 & (i) \\ v = 2t & (ii) \end{cases}$.

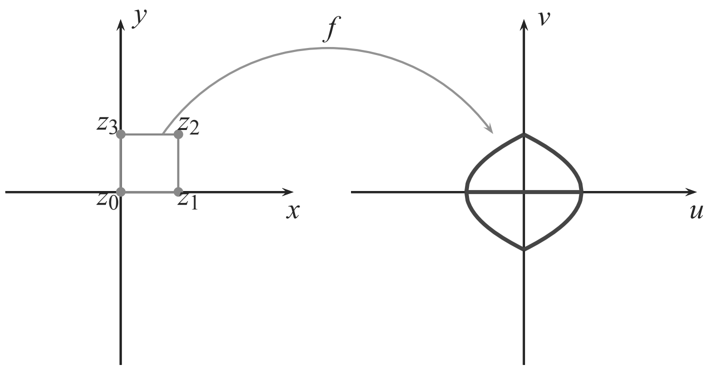
Resulta de (ii) que $t = \dfrac{v}{2}$ e, substituindo esse resultado em (i), segue-se que

$u = 1 - \dfrac{v^2}{4}$, parábola de vértice em $(1,0)$ e zeros $(0,-2),(0,2)$.

As equações paramétricas de $f(\gamma(t))$ são: $\begin{cases} u = t^2 - 1 & (iii) \\ v = 2t & (iv) \end{cases}$.

Resulta de (iv) que $t = \dfrac{v}{2}$ e, substituindo esse resultado em (iii), segue-se que

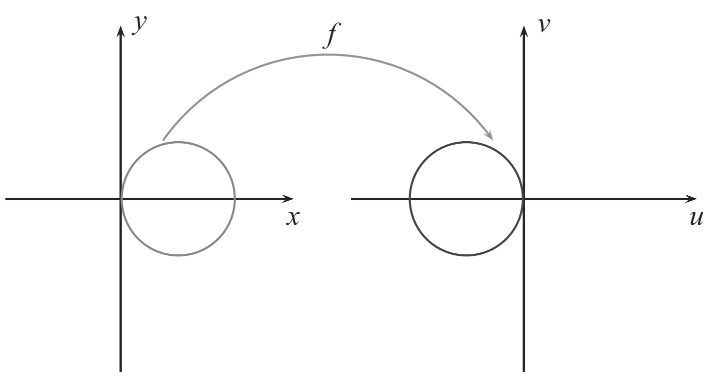
$u = \dfrac{v^2}{4} - 1$, parábola de vértice em $(-1,0)$ e zeros $(0,-2),(0,2)$.



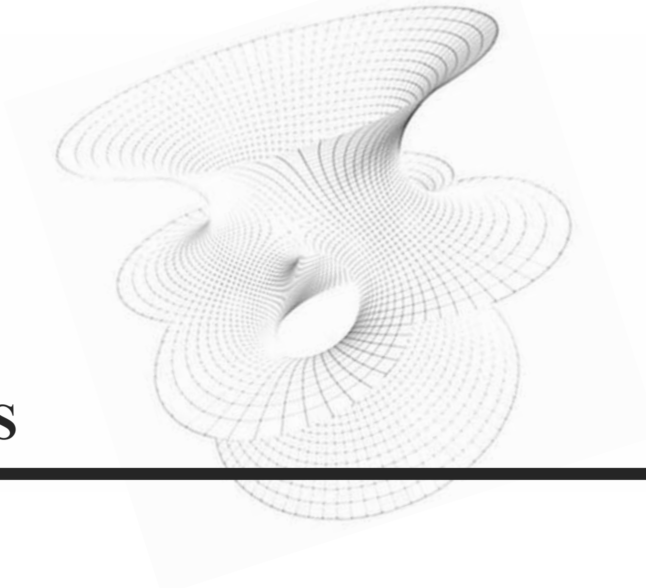
4. Determine a imagem do círculo $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = 1\}$ pela função $f(z) = z^2 - 2z$.

Solução: Podemos escrever $f(z) = z^2 - 2z + 1 - 1 = (z-1)^2 - 1$.

A equação paramétrica de S é $\alpha(t) = 1 + \cos t + i\,\text{sen}\,t$, $t \in [0,2\pi] \Rightarrow f(\alpha(t)) = (\cos t + i\,\text{sen}\,t)^2 - 1 = \cos 2t i + \text{sen}\,2t - 1$, $t \in [0,2\pi]$, ou seja, um círculo de centro em $(-1,0)$ e raio 1.



Aula 6



FUNÇÕES RACIONAIS

INTRODUÇÃO

Nesta aula, estudaremos funções da forma $p(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$, onde $p(z)$ e $q(z)$ são polinômos complexos.

Definição 6.1.

Uma função complexa da forma $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$, onde $p(z),\ q(z) \in \mathbb{C}[z]$, conjunto de todos os polinômios com coeficientes complexos, é chamada **função racional**.

Na determinação do domínio de $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$, devemos excluir de $\mathbb{C}$ as raízes de $q(z)$. Vimos, no Teorema 5.3, que $q(z)$ tem no máximo $m = \mathrm{gr}(q)$ raízes distintas. Logo, se $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ são as raízes distintas de $q(z)$, o domínio de $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ é $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{C} - \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$.

Exemplo 6.1.

Seja $f(z) = \dfrac{z^3 + z - i}{z^2 - (1+i)z + i}$.

Sejam $p(z) = z^3 + z - i$ e $q(z) = z^2 - (1+i)z + i$. Temos $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$. As raízes de $q(z) = z^2 - (1+i)z + i$ são dadas por

$$\frac{1+i \pm \sqrt{(1+i)^2 - 4i}}{2} = \frac{1+i \pm \sqrt{-2i}}{2}.$$

Observemos que $(1-i)^2 = -2i$ e isto implica o seguinte:

$$\frac{1+i \pm \sqrt{(1+i)^2 - 4i}}{2} = \frac{1+i \pm (1-i)}{2} = 1 \text{ ou } i.$$

Portanto, $\text{Dom}(f) = \mathbb{C} - \{1, i\}$.

Exemplo 6.2.

Seja $f(z) = \dfrac{iz^5 - 2z^3 + (1+i)z - 3}{z^2 - (2+3i)z + 6i}$

Sejam $p(z) = iz^5 - 2z^3 - (1+i)z - 3$ e $q(z) = z^2 - (2+3i)z + 6i$. Temos $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$.

As raízes de $q(z)$ são dadas por

$$\frac{2+3i \pm \sqrt{(2+3i)^2 - 24i}}{2} = \frac{2+3i \pm \sqrt{-5-12i}}{2}.$$

Como $(2-3i)^2 = -5-12i$, as raízes de $q(z)$ são

$$\frac{2+3i \pm (2-3i)}{2} = 2 \text{ ou } 3i \Rightarrow \text{Dom(f)} = \mathbb{C} - \{2, 3\text{i}\}.$$

Para determinarmos a imagem de f, $\text{Im}(f)$, observemos que $\alpha \in \text{Im}(f)$ se, e somente se, a equação $f(z) = \alpha$ possui solução em $\text{Dom}(f)$, ou seja, se existe pelo menos um $\beta \in \text{Dom}(f)$ tal que $f(\beta) = \alpha$.

Temos: $p(2) = 32i - 16 - (1+i)2 - 3 = -21 + 30i$ e $p(3i) = i(3i)^5 - 2(3i)^3 - (1+i)3i - 3 = 243i^2 + 54i - 3i + 3 - 3 = -243 + 51i$, ou seja, $p(z)$ e $q(z)$ **não** têm raízes comuns.

Dado $c \in \mathbb{C}$, considere o polinômio $g(z) = p(z) - cq(z)$. O polinômio $g(z)$ tem grau 5, portanto, pelo Teorema 5.3, $g(z)$ tem raízes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{C}$ (não necessariamente distintas), isto é, $0 = g(\alpha_i) = p(\alpha_i) - cq(\alpha_i)$, $i = 1, \ldots, 5$. Todavia, observemos que nenhum dos α_i's é raiz de $q(z)$, pois, se isso ocorresse, teríamos $0 = p(\alpha_i) - c.0 = p(\alpha_i)$ e assim α_i seria raiz de $p(z)$, o que seria um absurdo, uma vez que $p(z)$ e $q(z)$ **não** possuem raízes comuns.

Portanto, $\alpha_i \in \text{Dom}(f)$ e $c = \dfrac{p(\alpha_i)}{q(\alpha_i)} = f(\alpha_i),\ \forall c \in \mathbb{C}$.

Logo, $\text{Im}(f) = \mathbb{C}$, ou seja, $f(z)$ é **sobrejetora**.

TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS OU FUNÇÕES HOMOGRÁFICAS

Um caso particular importante de funções racionais $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ ocorre quando $p(z)$ e $q(z)$ são polinômios de 1º grau, isto é, $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$.

Inicialmente, mostraremos o seguinte resultado:

Teorema 6.1.

A função racional $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ é constante, ou seja, $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} = k \in \mathbb{C}$ se, e somente se, $ad = bc$.

Prova

De fato, se $f(z)$ é constante, $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} = k$, então $az+b = kcz+kd$ e podemos escrever:

$$\begin{cases} a = kc \\ b = kd \end{cases} \quad \Rightarrow \quad bc = (kc)d = ad.$$

Reciprocamente, suponhamos $ad = bc$.

Se $c = 0$, então $d \neq 0$, senão o denominador seria nulo, e isso implica $a = \dfrac{bc}{d} = 0 \Rightarrow f(z) = \dfrac{c}{d}$.

Se $c \neq 0$, a ideia é somarmos e diminuirmos constantes ao numerador de modo que ele fique proporcional ao denominador. Temos:

$$f(z) = \frac{az + \frac{ad}{c} + b - \frac{ad}{c}}{cz+d} = \frac{az + \frac{ad}{c}}{cz+d} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz+d} =$$

$$= \frac{a}{c}\left(\frac{cz+d}{cz+d}\right) - \left(\frac{\frac{ad-bc}{c}}{cz+d}\right) = \frac{a}{c} - \left(\frac{\frac{ad-bc}{c}}{cz+d}\right) = \frac{a}{c}.$$

□

As funções racionais da forma $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$, com $ad-bc\neq 0$, isto é, que não são constantes, são chamadas **Transformações de Möbius** ou **Funções Homográficas**.

Evidentemente, o domínio de uma Transformação de Möbius, $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$, que não se reduz a um polinômio, ou seja, $c\neq 0$, é $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{C}-\left\{\dfrac{d}{c}\right\}$.

Vamos a seguir determinar a imagem de uma Transformação de Möbius $f(z)$, $\mathrm{Im}(f)$.

Se $c=0$, vimos que $d\neq 0\Rightarrow a\neq 0$, senão $ad=bc$. Logo, $f(z)=\dfrac{a}{d}z+\dfrac{b}{d}$ é um polinômio de 1º grau que é uma bijeção e, em particular, a imagem de f é $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{C}$.

Suponhamos $c\neq 0$. Dado $k\in\mathbb{C}$, se $k=f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$, então $kcz+kd=az+b$ e isto implica que $z(kc-a)=b-kd$.

Se $k=\dfrac{a}{c}$, então $0=b-kd\Rightarrow b=kd\Rightarrow b=\dfrac{ad}{c}\Rightarrow ad=bc$. Mas isso é um absurdo, pois f é uma Transformação de Möbius. Logo, se $k\neq\dfrac{a}{c}$, então $z=\dfrac{b-kd}{kc-a}$ é a **única** solução de $f(z)=k$. Isto mostra que $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{C}-\left\{\dfrac{a}{c}\right\}$, $c\neq 0$, e também que f é **injetora**. Assim,

$$\begin{cases} f:\mathbb{C}-\left\{\dfrac{d}{c}\right\}\longrightarrow\mathbb{C}-\left\{\dfrac{a}{c}\right\},\ c\neq 0, ad-bc\neq 0\\[2ex] f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}\end{cases},$$

é uma função bijetora.

Podemos então determinar a sua inversa $f^{-1}:\mathbb{C}-\left\{\dfrac{a}{c}\right\}\longrightarrow\mathbb{C}-\left\{\dfrac{d}{c}\right\}$. Escrevendo $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$, $f^{-1}(z)$ é obtida pela resolução da equação

$$z=\frac{aw+b}{cw+d}\ \Rightarrow\ czw+dz=aw+b\ \Rightarrow\ w(cz-a)=-dz+b\,.$$

Isto implica que

$$f^{-1}(z) = w = \frac{-dz+b}{cz-a}, \text{ com } ad-bc \neq 0\,.$$

Devemos observar que a condição para que $f^{-1}(z)$ seja Transformação de Möbius é que $(-d)(-a)-bc = ad-bc \neq 0$.

Portanto, a inversa de uma Transformação de Möbius também é uma Transformação de Möbius.

Exemplo 6.3.

Seja $f(z) = \dfrac{2z-i}{iz+1}$. Temos $2-(-i^2) = 2-1 = 1$, logo $f(z)$ é uma Transformação de Möbius. Para obtermos a sua inversa, devemos resolver a equação $z = \dfrac{2w-i}{iw+1} \Rightarrow wiz+z = 2w-i \Rightarrow w(iz-2) = -z-i \Rightarrow f^{-1}(z) = w = \dfrac{-z-i}{iz-2}$.

Vamos agora provar que toda Transformação de Möbius com $c \neq 0$, ou seja que não se reduz a um polinômio de 1º grau, pode ser escrita como $f(z) = (p \circ g \circ t)(z)$, onde $t(z)$ é uma translação, $t(z) = z+z_0$, $g(z) = \dfrac{1}{z}$ e $p(z)$ é um polinômio de 1º grau, $p(z) = z_1.z+z_2$, z_0, z_1 e $z_2 \in \mathbb{C}, z_1 \neq 0$.

Vimos, na prova do Teorema 6.1, que

$$f(z) = \frac{a}{c} - \left(\frac{\dfrac{ad-bc}{c}}{cz+d}\right) = \frac{a}{c} - \left(\frac{\dfrac{ad-bc}{c^2}}{z+\dfrac{d}{c}}\right).$$

Resulta da expressão acima que, para $t(z) = z+\dfrac{d}{c}$, $g(z) = \dfrac{1}{z}$ e $p(z) = -\left(\dfrac{ad-bc}{c^2}\right)z+\dfrac{a}{c}$, temos $f(z) = (p \circ g \circ t)(z)$.

Exemplo 6.4.

Seja $f(z) = \dfrac{(1+i)z-2}{3z+i}$.

Temos

$$f(z)=\frac{(1+i)z+\frac{1+i}{3}i}{3z+i}+\left(\frac{-2-\frac{1+i}{3}i}{3z+i}\right)=\frac{1+i}{3}\left(\frac{3z+i}{3z+i}\right)$$

$$+\left(\frac{-\frac{1}{3}(6+(-1+i))}{3(z+\frac{1}{3})}\right)=\frac{1+i}{3}+\frac{-\frac{1}{9}(5+i)}{z+\frac{1}{3}}.$$

Portanto, para $t(z)=z+\frac{1}{3}$, $g(z)=\frac{1}{z}$ e $p(z)=-\frac{1}{9}(5+i)z+\frac{1+i}{3}$, podemos escrever $f(z)=(p\circ g\circ t)(z)$.

Transformações ou Mapeamentos de $g(z)=\frac{1}{z}$

Considere o conjunto

$$X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0\}.$$

a. Se $A=0$, então X é a reta de equação $Bx+Cy+D=0$.

b. Se $A\neq 0$, então $0=x^2+\frac{B}{A}x+y^2+\frac{C}{A}y+\frac{D}{A}=x^2+\frac{B}{A}x+\frac{B^2}{4A^2}+y^2+\frac{C}{A}y+\frac{C^2}{4A^2}+\frac{D}{A}-\left(\frac{B^2+C^2}{4A^2}\right)=\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{C}{2A}\right)^2-\left(\frac{B^2+C^2-4AD}{4A^2}\right)$

ou, fazendo $\Delta=B^2+C^2-4AD$, obtemos

$\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{C}{2A}\right)^2=\frac{\Delta}{4A^2}$ (1). Portanto,

i. Se $\Delta>0$, então (1) é a equação de um círculo de centro em $\left(-\frac{B}{2A},-\frac{C}{2A}\right)$ e raio $\frac{\sqrt{\Delta}}{2|A|}$.

ii. Se $\Delta=0$, então (1) reduz-se ao ponto $\left(-\frac{B}{2A},-\frac{C}{2A}\right)$.

iii. Se $\Delta<0$, então (1) é o conjunto vazio.

Podemos descrever o conjunto X em coordenadas polares $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$, obtendo:

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid Ar^2 + Br\cos\theta + Cr\operatorname{sen}\theta + D = 0\}.$$

Se $g(z) = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)} = \dfrac{1}{r}(\cos(-\theta) + i\operatorname{sen}(-\theta)) = \dfrac{1}{r}(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)$, as funções $u(r,\theta)$ e $v(r,\theta)$ tais que $g(z) = \dfrac{1}{z} = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ são

$$u(r,\theta) = \frac{1}{r}\cos\theta \;\text{ e }\; v(r,\theta) = -\frac{1}{r}\operatorname{sen}\theta.$$

Como a imagem do conjunto X pela função $g(z) = \dfrac{1}{z}$ no plano uv é

$Y = f(X) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid A(u^2(r,\theta) + v^2(r,\theta)) + Bu(r,\theta) + Cv(r,\theta) + D = 0\}$,

resulta da substituição $u(r,\theta) = \dfrac{1}{r}\cos\theta$ e $v(r,\theta) = -\dfrac{1}{r}\operatorname{sen}\theta$ que $0 = A\dfrac{1}{r^2} + B\dfrac{\cos\theta}{r} - C\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{r} + D$ o que implica

$0 = Dr^2 + Br\cos\theta - Cr\operatorname{sen}\theta + A = D(u^2+v^2) + Bu - Cv + A.$

A mesma análise que fizemos para o conjunto X permanece válida para o conjunto $Y = f(X)$, isto é:

c. Se $D = 0$, então Y é a reta de equação $Bu - Cv + A = 0$.

d. Se $D \neq 0$, então, para $\Delta = B^2 + C^2 - 4AD$, obtemos $\left(u + \dfrac{B}{2D}\right)^2 + \left(v - \dfrac{C}{2D}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4D^2}$ (2). Portanto,

   iii. Se $\Delta > 0$, então (2) é a equação de um círculo de centro em $\left(-\dfrac{B}{2D}, \dfrac{C}{2D}\right)$ e raio $\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2|D|}$.

   iv. Se $\Delta = 0$, então (2) reduz-se ao ponto $\left(-\dfrac{B}{2D}, \dfrac{C}{2D}\right)$.

   v. Se $\Delta < 0$, então (2) é o conjunto vazio.

Portanto, as imagens de retas e círculos do plano xy pela função $g(z) = \dfrac{1}{z}$ são retas e círculos no plano uv e temos os seguintes casos:

1. Se X é uma reta, então $A = 0$ e

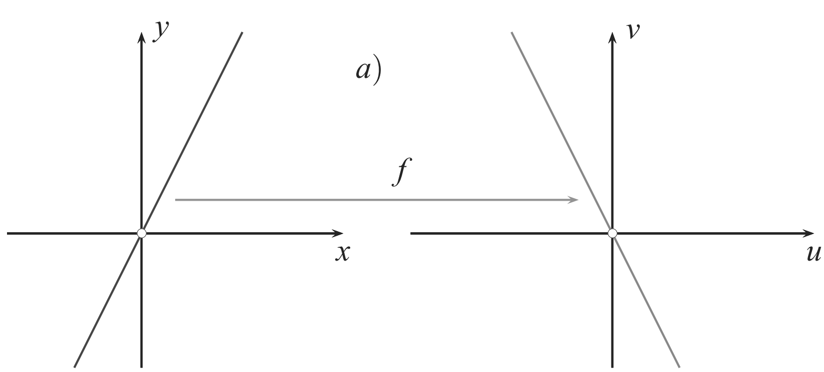
   a. Se a origem $O = (0,0) \in X \Rightarrow D = 0$, isto é, X é a reta "perfurada na origem" (sem a origem do plano uv) de equação $Bx + Cy = 0$ e Y é a reta de equação $Bu - Cv = 0$.

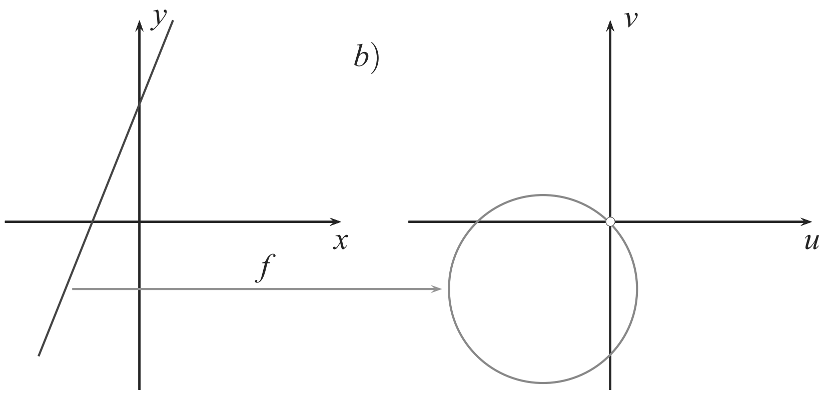
   b. Se a origem $O = (0,0) \notin X \Rightarrow D \neq 0$ e Y é o círculo "perfurado na origem" (sem a origem do plano uv) de equação
   $$\left(u + \frac{B}{2D}\right)^2 + \left(v - \frac{C}{2D}\right)^2 = \frac{B^2 + C^2}{4D^2}.$$

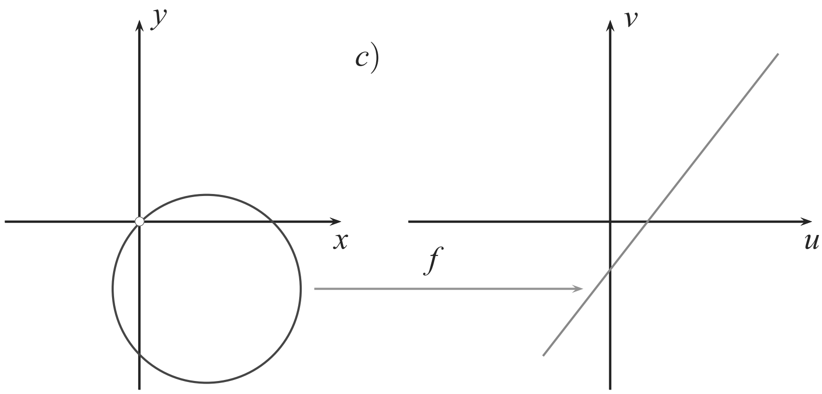
2. Se X é um círculo, então $A \neq 0$ e

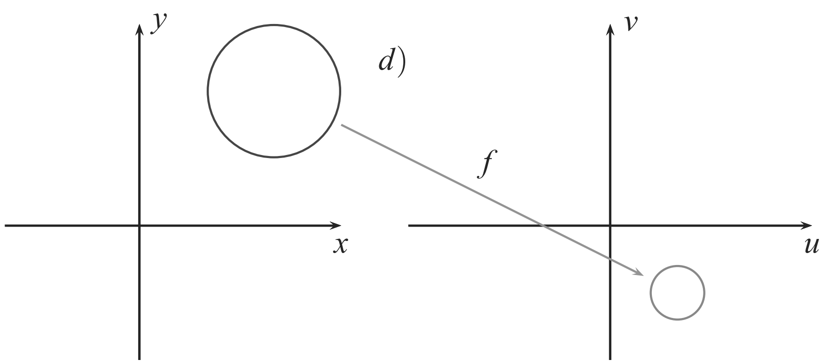
   c. Se X é "perfurado na origem" do plano xy, então $D = 0$ e Y é a reta de equação $Bu - Cv + A = 0$, $A \neq 0$.

   d. Se a origem do plano $xy \notin X$, então $D \neq 0$ e Y é o círculo de equação
   $$\left(u + \frac{B}{2D}\right) + \left(v - \frac{C}{2D}\right)^2 = \frac{\Delta}{4D^2},\ \Delta = B^2 + C^2 - 4AD.$$









Exercícios Resolvidos

1. Determine o domínio e a imagem da função

$$f(z) = \frac{2z^2 - 4iz + 4}{z^2 - 2iz + 3}.$$

Solução: O delta da equação do 2º grau $z^2 - 2iz + 3 = 0$ é $\Delta = (2i)^2 - 12 = -16 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{-16} = \pm 4i$. Logo, as raízes dessa equação são $\dfrac{2i \pm 4i}{2} = 3i$ ou $-i$ e o domínio de $f(z)$ é $\text{Dom}(f) = \mathbb{C} - \{-i, 3i\}$.

Podemos escrever

$$f(z) = \frac{2z^2 - 4iz + 4}{z^2 - 2iz + 3} = \frac{2(z^2 - 2iz + 3)}{z^2 - 2iz + 3} - \frac{2}{z^2 - 2iz + 3} =$$

$$= 2 - \frac{2}{z^2 - 2iz + 3}.$$

Assim, se $c \in \mathbb{C}$, a equação $f(z) = c$ equivale à equação $c = 2 - \dfrac{2}{z^2 - 2iz + 3} \Rightarrow z^2 - 2iz + 3 = -\dfrac{2}{c-2} \Rightarrow z^2 - 2iz + 3 + \dfrac{2}{c-2} = 0$ e sabemos que essa equação do 2º grau possui soluções (distintas quando seu Δ for diferente de zero) para $c \neq 2$.

Além disso, essas soluções não são soluções de $z^2 - 2iz + 3$ senão teríamos $\dfrac{2}{c-2} = 0$, um absurdo.

Portanto, se $c \in \mathbb{C} - \{2\}$, então $f(z) = c$ possui solução em $\text{Dom}(f)$, ou seja, $\text{Im}(f) = \mathbb{C} - \{2\}$.

2. Determine $Y \subseteq \mathbb{C}$ para que a função $\begin{cases} f : \mathbb{C} - \{3\} \to Y \\ f(z) = \dfrac{2z + 1 - i}{-z + 3} \end{cases}$ seja invertível e determine sua inversa $f^{-1}(z)$.

Solução: Temos $ad - bc = 2.3 - (-1)(1 - i) = 7 - i$, logo $f(z)$ é uma Transformação de Möbius e sabemos que $f(z)$ é invertível. Para obtermos a sua inversa, devemos resolver a equação

$z = \dfrac{2w + 1 - i}{-w + 3} \Rightarrow -wz + 3z = 2w + 1 - i \Rightarrow w(-z - 2) = -3z + 1 - i \Rightarrow f^{-1}(z) = w = \dfrac{3z - 1 + i}{z + 2} \Rightarrow z \neq -2 \Rightarrow Y = \mathbb{C} - \{-2\}$

e a inversa de f é $\begin{cases} f^{-1} : \mathbb{C} - \{-2\} \to \mathbb{C} - \{3\} \\ f^{-1}(z) = \dfrac{3z - 1 + i}{z + 2} \end{cases}$.

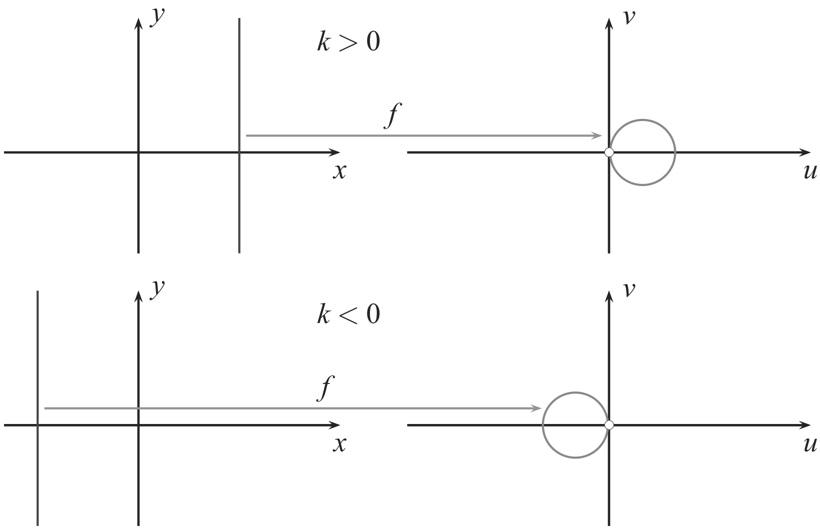
3. Determine a imagem pela função $f(z) = \dfrac{1}{z}$ dos seguintes conjuntos

   a. $A = \{z \in \mathbb{C} - \{0\} \mid \text{Re}(z) = k\}$.

   b. $B = \{z \in \mathbb{C} - \{0\} \mid \text{Im}(z) = k\}$.

Solução:

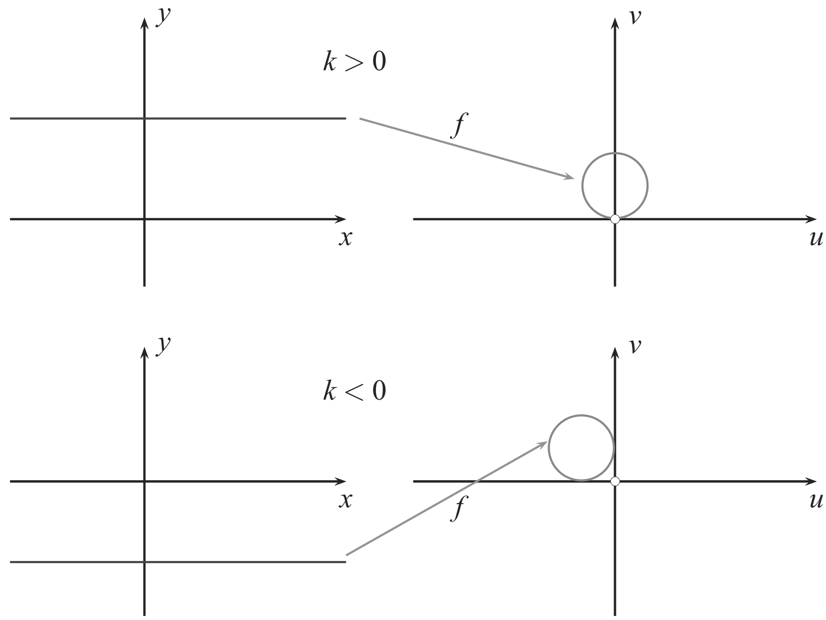
a. • Se $k = 0$, A é o eixo imaginário "perfurado na origem", $\alpha(t) = ti$, $t \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $f(\alpha(t)) = \dfrac{1}{ti} = \dfrac{-i}{t}$, $t \neq 0$. Como a função real $g(t) = \dfrac{1}{t}$, $t \neq 0$ é uma bijeção de $\mathbb{R} - \{0\}$ em $\mathbb{R} - \{0\}$, segue-se que a imagem de A é o próprio A.
Se $k \neq 0$, A é uma reta vertical que não passa pela origem e sabemos que a imagem dessa reta é um círculo "perfurado na origem" do plano uv.
A equação da reta A no plano xy é $x - k = 0$, $k \neq 0$ e sua imagem pela função $f(z)$ é o círculo de equação (tome $A = C = 0, B = 1$ e $D = -k$ em 1 letra b)
$\left(u - \dfrac{1}{2k}\right)^2 + v^2 = \dfrac{1}{4k^2}$ - centro em $\left(\dfrac{1}{2k}, 0\right)$ e raio $\dfrac{1}{2|k|}$.



b. • Se $k = 0$, B é o eixo real "perfurado na origem", $\alpha(t) = t$, $t \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $f(\alpha(t)) = \dfrac{1}{t}$ $t \neq 0$. Como a função real $g(t) = \dfrac{1}{t}$, $t \neq 0$ é uma bijeção de $\mathbb{R} - \{0\}$ em $\mathbb{R} - \{0\}$, segue-se que a imagem de B é o próprio B.

• Se $k \neq 0$, B é uma reta horizontal que não passa pela origem e sabemos que a imagem dessa reta é um círculo "perfurado na origem" do plano uv.

A equação da reta B no plano xy é $y-k=0,\ k\neq 0$ e sua imagem pela função $f(z)$ é o círculo de equação (tome $A=B=0, C=1$ e $D=-k$ em 1 letra b) $u^2+\left(v-\dfrac{1}{2k}\right)^2=\dfrac{1}{4k^2}$ - centro em $\left(0,\dfrac{1}{2k}\right)$ e raio $\dfrac{1}{2|k|}$.



4. Escreva a Transformação de Möbius $f(z)=\dfrac{(1+2i)z+8+5i}{iz+2}$, $z\neq 2i$, como $f(z)=(p\circ g\circ t)(z)$, onde $t(z)$ é uma translação $t(z)=z+z_0$, $g(z)=\dfrac{1}{z}$ e $p(z)$ é um polinômio de 1º grau $p(z)=az+b$.

Solução: A ideia é somar e diminuir uma constante ao numerador para deixá-lo proporcional ao denominador.

O coeficiente de z no denominador é i e o coeficiente de z no numerador é $1+2i$, logo devemos multiplicar o denominador por $\dfrac{1+2i}{i}$ para determinar a constante.

Como $\dfrac{1+2i}{i}(iz+2)=(1+2i)z+2\left(\dfrac{1+2i}{i}\right)$, a constante é $2\left(\dfrac{1+2i}{i}\right)=2(1+2i)(-i)=4-2i$ e temos

$$f(z)=\frac{(1+2i)z+(4-2i)}{iz+2}+\frac{-(4-2i)+8+5i}{iz+2}=$$

$$=\frac{1+2i}{i}\left(\frac{iz+2}{iz+2}\right)+\frac{4+7i}{iz+2}=\frac{1+2i}{i}+\frac{\frac{4+7i}{i}}{z+\frac{2}{i}}=2-i+\frac{7-4i}{z-2i}.$$

Portanto, $t(z)=z-2i$ e $p(z)=(7-4i)z+2-i$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Determine o domínio e a imagem da função $f(z)=\dfrac{z^3+iz-2}{z^4-16}$.

2. Determine $Y\subseteq\mathbb{C}$ e $z_0\in\mathbb{C}$ para que a função $\begin{cases} f:\mathbb{C}-\{\pm i\}\to Y \\ f(z)=\dfrac{z-z_0}{z^2+1}\end{cases}$

   seja invertível e determine sua inversa $f^{-1}(z)$.

3. Determine a imagem do conjunto $A=\{z\in\mathbb{C}\mid 2\le \mathrm{Re}(z)\le 4\}$ pela função $f(z)=\dfrac{1}{z}$, $z\neq 0$.

4. Considere a Transformação de Möbius $f(z)=\dfrac{2iz+7+8i}{z+2-4i}$, $z\neq -2+4i$.

   a. Escreva $f(z)$ como $f(z)=(p\circ g\circ t)(z)$, onde $t(z)$ é uma translação $t(z)=z+z_0$, $g(z)=\dfrac{1}{z}$ e $p(z)$ é um polinômio de 1º grau $p(z)=az+b$.

   b. Determine a imagem do círculo $\Gamma=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-3-4i|\le 5\}$.

SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Determine o domínio e a imagem da função $f(z)=\dfrac{z^3+iz-2}{z^4-16}$.

   Solução: As soluções da equação $z^4-16=0$ são ± 2 e $\pm 2i$, logo, o domínio de $f(z)$ é $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{C}-\{\pm 2,\pm i\}$.

   Se $p(z)=z^3+iz-2$, então $p(2)=6+2i$, $p(-2)=-10-2i$, $p(2i)=-4-8i$ e $p(-2i)=-8i$ e isso mostra que $p(z)$ e $q(z)=z^4-16$ **não** possuem raízes comuns.

Seja $c \in \mathbb{C}$. Se $c = 0$, a equação $f(z) = c$ equivale à equação $p(z) = z^3 + iz - 2 = 0$ que, pelo *Teorema Fundamental da Álgebra*, possui solução.

Se $c \neq 0$, a equação $f(z) = c$ equivale à equação $z^4 - \frac{1}{c}(z^3 + iz - 2) - 16 = 0$ que também possui solução pelo *Teorema Fundamental da Álgebra*.

Além disso, nenhuma das raízes α dessa equação é raiz de $z^4 - 16 = 0$, senão teríamos $0 = 0 - \frac{1}{c}(\alpha^3 + i\alpha - 2) \Rightarrow \alpha^3 + i\alpha - 2$, ou seja, α é raiz de $p(z)$. Mas isto não pode ocorrer, pois vimos que $p(z)$ e $q(z) = z^4 - 16$ **não** possuem raízes comuns.

Portanto, se $c \in \mathbb{C}$, então $f(z) = c$ possui solução em $\mathrm{Dom}(f)$, ou seja, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{C}$.

2. Determine $Y \subseteq \mathbb{C}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$ para que a função $\begin{cases} f : \mathbb{C} - \{\pm i\} \to Y \\ f(z) = \dfrac{z - z_0}{z^2 + 1} \end{cases}$ seja invertível e determine sua inversa $f^{-1}(z)$.

Solução: Dado $c \neq 0$, a solução da equação $f(z) = c$ equivale à equação $z^2 + 1 = \frac{1}{c}(z - z_0)$ e, se $z - z_0$ **não** dividir $z^2 + 1$, essa equação terá 2 soluções e a função **não** será injetora.

Portanto, para que $f(z)$ seja bijetora, $z - z_0$ deve dividir $z^2 + 1$ e isso implica que z_0 é raiz de $z^2 + 1$, ou seja, $z_0 = \pm i$.

Se $z_0 = i$, então $f(z) = \dfrac{1}{z + i}$ e $f^{-1}(z)$ é obtida pela solução da equação $z = \dfrac{1}{w + i} \Rightarrow wz + iz = 1 \Rightarrow f^{-1}(z) = w = \dfrac{1 - iz}{z}$, $z \neq 0$. Como a imagem de $f^{-1}(z)$ é $\mathbb{C} - \{\pm i\}$, devemos excluir $f(i) = \dfrac{1}{i + i} = -\dfrac{i}{2}$ do domínio de $f^{-1}(z)$.

Assim, f^{-1} é dada por $\begin{cases} f^1 : \mathbb{C} - \left\{\dfrac{-i}{2}, 0\right\} \to \mathbb{C} - \{\pm i\} \\ f^{-1}(z) = \dfrac{1 - iz}{z} \end{cases}$.

Se $z_0 = -i$, então $f(z) = \dfrac{1}{z - i}$ e $f^{-1}(z)$ é obtida pela solução da equação $z = \dfrac{1}{w - i} \Rightarrow wz - iz = 1 \Rightarrow f^{-1}(z) = w = \dfrac{1 + iz}{z}$, $z \neq 0$.

Como a imagem de $f^{-1}(z)$ é $\mathbb{C}-\{\pm i\}$, devemos excluir $f(-i) = \dfrac{1}{-i-i} = \dfrac{i}{2}$ do domínio de $f^{-1}(z)$.

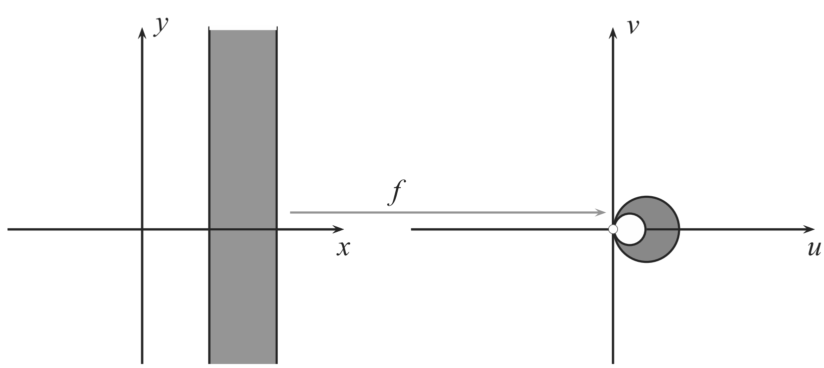
Assim, nesse caso, f^{-1} é dada por $\begin{cases} f^{1} : \mathbb{C} - \left\{\dfrac{i}{2}, 0\right\} \to \mathbb{C} - \{\pm i\} \\ f^{-1}(z) = \dfrac{1+iz}{z} \end{cases}$.

3. Determine a imagem do conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 2 \le \text{Re}(z) \le 4\}$ pela função $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $z \ne 0$.

   Solução: O conjunto A é a união das retas verticais $x = k$, $2 \le k \le 4$, no plano xy.

   Vimos, no Exercício Resolvido 3, que a imagem da reta vertical $x = k$ pela função $f(z)$ é o círculo de equação $\left(u - \dfrac{1}{2k}\right)^2 + v^2 = \dfrac{1}{4k^2}$ - centro em $\left(\dfrac{1}{2k}, 0\right)$ e raio $\dfrac{1}{2k}$.

   Portanto, $f(A)$ é obtida pela união desses círculos, que é mostrada na figura.



4. Considere a Transformação de Möbius $f(z) = \dfrac{2iz + 8 + 7i}{z + 2 - 4i}$, $z \ne -2 + 4i$.

   a. Escreva $f(z)$ como $f(z) = (p \circ g \circ t)(z)$, onde $t(z)$ é uma translação $t(z) = z + z_0$, $g(z) = \dfrac{1}{z}$ e $p(z)$ é um polinômio de 1º grau $p(z) = az + b$.

   b. Determine a imagem do círculo $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 3 - 4i| \le 5\}$.

Solução:

a. A ideia é somar e diminuir uma constante ao numerador para deixá-lo proporcional ao denominador.

O coeficiente de z no denominador é 1 e o coeficiente de z no numerador é $2i$, logo, devemos multiplicar o denominador por $2i$ para determinar a constante.

Como $2i(z+2-4i) = 2iz+8+4i$, a constante é $8+4i$ e temos

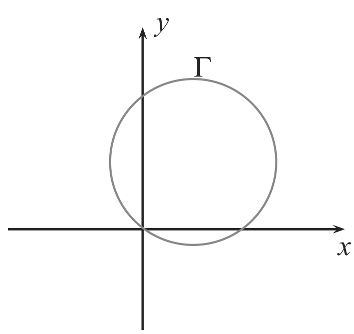
$$f(z) = \frac{2iz+8+4i}{z+2-4i} + \frac{-(8+4i)+8+7i}{z+2-4i} =$$
$$= 2i\left(\frac{z+2-4i}{z+2-4i}\right) + \frac{3i}{z+2-4i} = 2i + \frac{3i}{z+2-4i}.$$

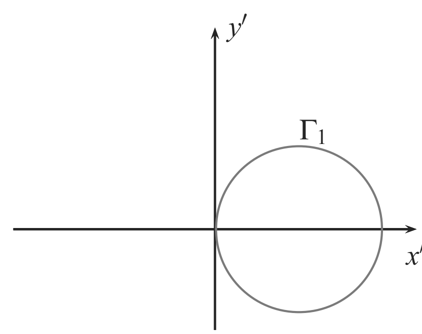
Portanto, $t(z) = z+2-4i$ e $p(z) = 3iz+2i$.

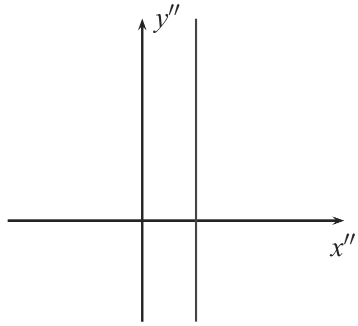
b. O círculo Γ tem centro em $(3,4)$ e raio 5. Vimos, na letra a, que $f(z)$ é obtida pela composição de uma translação segundo $2-4i$, com a função $g(z) = \dfrac{1}{z}$, com o polinômio de 1^{o} grau $p(z) = 3iz+2i$ que, geometricamente, corresponde a uma rotação anti-horária de 90^{o}, seguida de uma homotetia de razão 3, seguida de uma translação segundo $2i$.

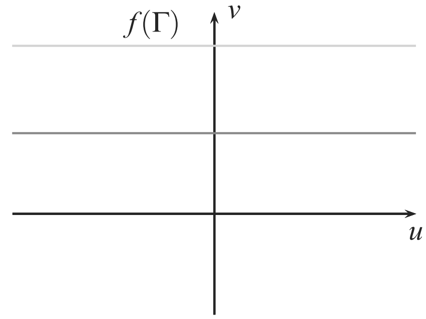
A imagem de Γ pela translação segundo $2-4i$ é o círculo Γ_1 de centro em $(5,0)$ e raio 5, a imagem de Γ_1 pela função $g(z) = \dfrac{1}{z}$ é a reta vertical $x = \dfrac{1}{10}$, pois a origem $O \in \Gamma_1$ (recorde o exercício resolvido 3 letra a).

A rotação anti-horária de 90^{o}, seguida de uma homotetia de razão 3, da reta $x = \dfrac{1}{10}$ é a reta horizontal $y = \dfrac{3}{10}$ e, finalmente, a translação segundo $2i$ dessa reta é a reta horizontal $x = \dfrac{3}{10} + 2 = \dfrac{23}{10}$. Veja a sequência das transformações nas figuras a seguir.






y''
x''


$f(\Gamma)$
v
u

Aula 7

Função Exponencial

Introdução

Todos nós aprendemos nos cursos de Cálculo que a série de Taylor da função exponencial real $f(x) = e^x$ é dada por

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad .$$

Isso nos sugere que a função exponencial complexa poderia ser definida pela série $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, mas essa abordagem requer o conhecimento de critérios de convergência de séries de potências complexas, dos quais ainda não dispomos (a título de curiosidade, a série $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge para todo $z \in \mathbb{C}$).

Vamos admitir a convergência de $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ e vejamos o que ocorre quando z é imaginário puro, ou seja, $z = yi, y \in \mathbb{R}$. Temos

$$e^{yi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(yi)^n}{n!} = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + \ldots +$$

$$\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \right) i. \qquad (1)$$

Recordemos dos cursos de Cálculo que as séries de Taylor das funções $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \operatorname{sen} x$ são:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad (2)$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \qquad (3)$$

Substituindo (2) e (3) em (1), obtemos

!

$$e^{yi} = \cos y + i \operatorname{sen} y. \qquad (4)$$

A expressão acima é conhecida como **Fórmula de Euler**.

Portanto, uma definição da função exponencial complexa de modo que sua restrição aos números reais coincida com a função exponencial real é

!

$$e^z = e^{x+yi} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \qquad (5)$$

Se $w = a + bi$ e $z = c + di$, resulta de (5) que

$$e^{w+z} = e^{a+c+(b+d)i} = e^{a+c}(\cos(b+d) + i\operatorname{sen}(b+d)). \quad (6)$$

Vimos, na Aula 3, que

$$\cos(b+d) + i\operatorname{sen}(b+d) = (\cos b + i\operatorname{sen} b)(\cos d + i\operatorname{sen} d)$$

o que, junto com $e^{a+c} = e^a.e^c$ e (6) implica

$$e^{w+z} = e^a.e^c(\cos b + i\operatorname{sen} b)(\cos d + i\operatorname{sen} d) =$$
$$= e^a(\cos b + i\operatorname{sen} b)e^c(\cos d + i\operatorname{sen} d) = e^w.e^z.$$

Logo, a definição da função exponencial em (5) “preserva” a propriedade $e^{w+z} = e^w.e^z$ da função exponencial real e, de fato, será essa a definição que adotaremos.

Definição 7.1.

A função exponencial complexa $\begin{cases} f:\mathbb{C}\to\mathbb{C} \\ f(z)=e^z \end{cases}$ é definida por

$$e^z = e^{x+yi} = e^x(\cos y + i\,\text{sen}\,y).$$

Exemplo 7.1.

1. $e^{\pi i} = \cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi = -1$
2. $4\sqrt{2}e^{2+\frac{\pi}{4}i} = 4\sqrt{2}e^2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}e^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$ $= 4e^2(1+i)$.

Módulo, Argumento e Conjugado de $f(z)=e^z$

Seja $z = x+yi$. Como $e^z = e^{x+yi} = e^x(\cos y + i\,\text{sen}\,y)$, podemos concluir que

a. $|e^z| = |e^x(\cos y + i\,\text{sen}\,y)| = e^x|\cos y + i\,\text{sen}\,y| = e^x$.

b. $\arg(e^z) = y + 2k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

c. $e^{\bar{z}} = e^{x-yi} = e^x(\cos(-y) + i\,\text{sen}\,(-y)) = e^x(\cos y - i\,\text{sen}\,y) = \overline{(e^z)}$.

Em particular, o item a mostra que $|e^z| = e^x > 0$, $\forall z\in\mathbb{C} \Rightarrow e^z \neq 0$, $\forall z\in\mathbb{C}$.

Além disso, ao contrário do que ocorre com a função exponencial real, que é sempre positiva, a função exponencial complexa pode ser negativa – recorde do Exemplo 7.1 que $e^{\pi i} = -1$.

Propriedades Algébricas de $f(z)=e^z$

Sejam w e $z\in\mathbb{C}$. A função exponencial complexa, $f(z)=e^z$, possui as seguintes propriedades

a. $e^0 = 1$.

b. $e^{w+z} = e^w.e^z$.

c. $e^{-z} = (e^z)^{-1} = \dfrac{1}{e^z}$.

d. $e^{w-z} = \dfrac{e^w}{e^z}$.

e. $(e^z)^k = e^{kz}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

A verificação da propriedade $e^0 = 1$ é imediata e a propriedade b já foi provada na Introdução. Provemos c.

Por a e b, podemos escrever $1 = e^0 = e^{z+(-z)} = e^z.e^{-z} \Rightarrow e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$.

Combinando b e c, provamos a propriedade d e a prova da propriedade e é o Exercício Proposto 1.

Periodicidade da Função Exponencial Complexa

Uma função complexa $f : A \to \mathbb{C}, A \subseteq \mathbb{C}$, é **periódica** se existir um número complexo não nulo ω, chamado **período**, tal que $f(z+w) = f(z), \forall z \in A$.

Exemplos clássicos de funções periódicas reais são as funções $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \operatorname{sen} x$. Ambas têm período 2π, isto é, $\cos(x+2\pi) = \cos x$ e $\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen} x$. A função exponencial real $f(x) = e^x$ é não periódica, pois é uma bijeção de $\mathbb{R}$ em $(0,\infty)$.

É interessante observar que se ω é período de $f(z)$, então $k\omega, k \in Z$, também é período de $f(z)$.

De fato, temos $f(z+2\omega) = f(z+\omega+\omega) = f(z+\omega) = f(z)$ e $f(z) = f(z-\omega+\omega) = f(z-\omega)$. A partir daí, aplicando o Princípio da Indução Finita, podemos concluir que $f(z+k\omega) = f(z), \forall k \in \mathbb{Z}$ (veja os detalhes no Exercício Resolvido 1).

Ao contrário da função exponencial real, a função exponencial complexa, $f(z) = e^z$, é periódica e possui período $2\pi i$, pois $f(z+2\pi i) = e^{z+2\pi i} = e^z.e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi) = e^z = f(z)$.

Portanto, se $k \in \mathbb{Z}$, então $e^{z+2k\pi i} = e^z$ e, usando esse fato, provaremos o seguinte resultado:

Teorema 7.1.

Se $y_0 \in \mathbb{R}$ e $A = \{z \in \mathbb{C} \mid y_0 < \mathrm{Im}(z) \leq y_0 + 2\pi\}$, a função $\begin{cases} f : A \to \mathbb{C} - \{0\} \\ f(z) = e^z \end{cases}$, é bijetora.

Prova

Provaremos, inicialmente, que f é injetora.

Sejam $w = a + bi$ e $z = c + di \in A$ tais que $e^w = e^z$. Temos $1 = \dfrac{e^w}{e^z} = e^{w-z} = e^{a-c+(b-d)i} = e^{a-c}(\cos(b-d) + i\,\mathrm{sen}\,(b-d)) \Rightarrow e^{a-c} = 1 \Rightarrow \mathrm{sen}\,(b-d) = 0 \Rightarrow b - d = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow e^{a-c} = 1 \Rightarrow a = c$.

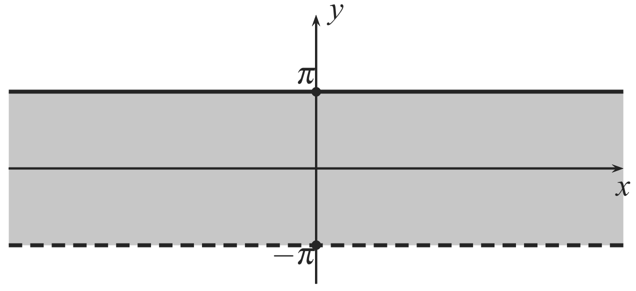
Mas $w, z \in A \Rightarrow |b-d| < |y_0 + 2k\pi - y_0| = 2\pi \Rightarrow k = 0$ e $b = d$, logo $w = a + bi = c + di = z$ e f é injetora.

Para provarmos que f é sobrejetora, dado $w \in \mathbb{C} - \{0\}$, escrevamos w em sua forma trigonométrica $w = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$. Se $z = \ln r + \theta i$, então $f(z) = e^{\ln r + \theta i} = e^{\ln r}(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) = w$.

Assim, $f(z)$ é sobrejetora e, como já havíamos provado que f é injetora, segue-se que f é uma bijeção.

$\square$

A região $A = \{z \in \mathbb{C} \mid y_0 < \mathrm{Im} \leq y_0 + 2\pi\}$, onde $f(z)$ é injetora, será chamada de **Região Fundamental** da função exponencial complexa.



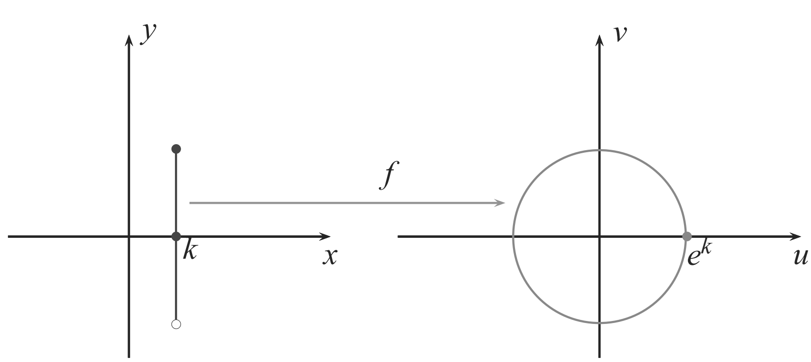
Transformações ou Mapeamentos de $f(z) = e^z$

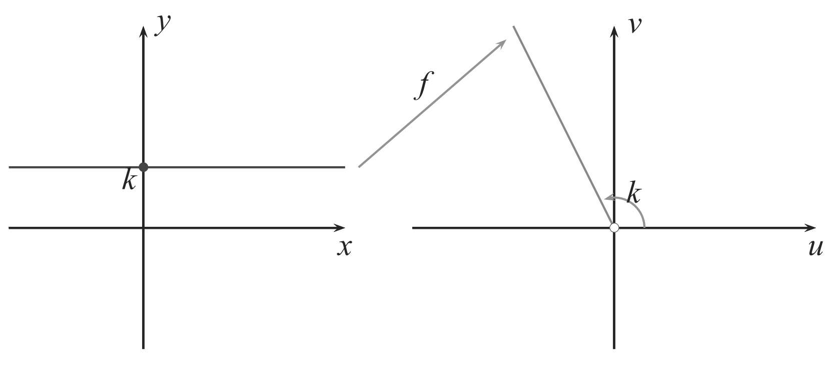
Como a função $f(z) = e^z$ é periódica de período $2\pi i$, podemos restringir o estudo de suas transformações ou mapeamentos à **Região Fundamental**, $A = \{z \in \mathbb{C} \mid y_0 < \text{ Im } \leq y_0 + 2\pi\}$.

Se $\alpha(t) = k + ti$, $k \in \mathbb{R}$ e $-\pi < t \leq \pi$ (segmento vertical $x = k$ e $y \in (-\pi, \pi]$), então $f(\alpha(t)) = e^{\alpha(t)} = e^{k+ti} = e^k(\cos t + i\text{sen}\, t), t \in (-\pi, \pi]$ é um círculo de centro na origem e raio e^k no plano uv – observe que $f(\alpha(t)) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| = e^k\}$.

Se $\beta(t) = t + ki$, $t \in \mathbb{R}$ e $-\pi < k \leq \pi$ (reta horizontal $y = k$), então $f(\beta(t)) = e^{\beta(t)} = e^{t+ki} = e^t(\cos k + i\text{sen}\, k)$, $t \in \mathbb{R}$.

Como a imagem da função real $g(t) = e^t$ é $(0, \infty)$, $f(\beta(t))$ é a semirreta "aberta" na origem que faz um ângulo orientado no sentido anti-horário de k radianos com o eixo Ou – observe que $f(\beta(t)) = \{w \in \mathbb{C} \mid \arg(z) = k\}$.





Exemplo 7.2.

Se $\mathscr{R}$ é o retângulo $z_1 = -\ln 2 - \frac{\pi}{2}i$, $z_2 = -\ln 2 + \frac{\pi}{2}i$, $z_3 = \ln 2 + \frac{\pi}{2}i, z_4 = \ln 2 - \frac{\pi}{2}i$, sua imagem pela função $f(z) = e^z$ é a união da imagem dos segmentos

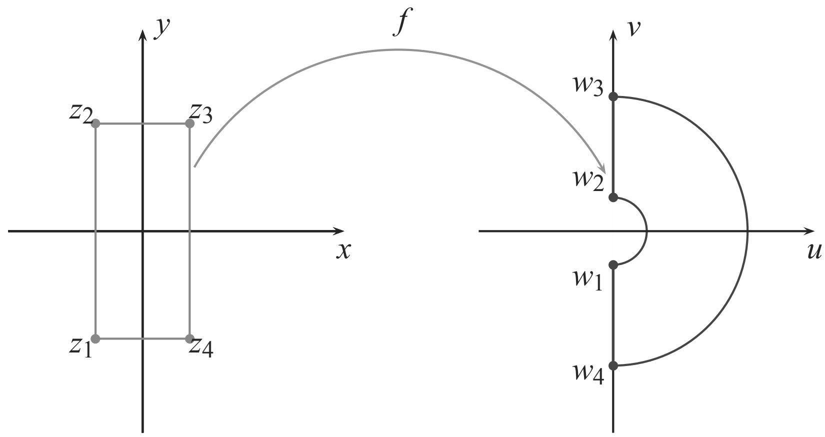
$$\begin{cases} \alpha(t) = -\ln 2 + it\frac{\pi}{2} \\ \beta(t) = t\ln 2 + i\frac{\pi}{2} \\ \gamma(t) = \ln 2 + it\frac{\pi}{2} \\ \delta(t) = -t\ln 2 - i\frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad t \in [-1,1],$$

respectivamente, as equações dos segmentos $\overline{z_1z_2}$, $\overline{z_2z_3}$, $\overline{z_3z_4}$ e $\overline{z_4z_1}$.

Temos:

$$\begin{cases} f(\alpha(t)) = e^{-\ln 2 + it\frac{\pi}{2}} = e^{-\ln 2}\left(\cos\left(t\frac{\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(t\frac{\pi}{2}\right)\right) = \\ \frac{1}{2}\left(\cos\left(t\frac{\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(t\frac{\pi}{2}\right)\right); \\ f(\beta(t)) = e^{t\ln 2 + i\frac{\pi}{2}} = e^{t\ln 2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2^t i,; \\ f(\gamma(t)) = e^{\ln 2 + it\frac{\pi}{2}} = e^{\ln 2}\left(\cos\left(t\frac{\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(t\frac{\pi}{2}\right)\right) = \\ 2\left(\cos\left(t\frac{\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(t\frac{\pi}{2}\right)\right); \\ f(\delta(t)) = e^{-t\ln 2 - i\frac{\pi}{2}} = e^{-t\ln 2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^t i. \end{cases} \qquad t \in [-1,1].$$

Portanto, $f(\alpha(t))$ e $f(\gamma(t))$ são, respectivamente, semicírculos de centro na origem do plano uv e raios $\frac{1}{2}$ e 2, $f(\beta(t))$ é o segmento vertical $\overline{w_2w_3}, w_2 = f(z_2) = \frac{1}{2}i$ e $w_3 = f(z_3) = 2i$ e $f(\delta(t))$ é o segmento vertical $\overline{w_1w_4}, w_1 = f(z_1) = -\frac{1}{2}i$ e $w_4 = f(z_4) = -2i$ (veja a figura a seguir).



Exercícios Resolvidos

1. Se ω é período da função $f(z)$, prove que $k\omega, k \in \mathbb{Z}$, também é período de $f(z)$.

   Solução: Vamos considerar incialmente o caso $k \geq 0$ e provar por indução que $f(z+k\omega) = f(z)$.

   i. A validade para $k = 0$ e $k = 1$ é óbvia.

   ii. Vamos assumir a validade para $k \geq 2$, isto é, $f(z+k\omega) = f(z), k \geq 2$. (Hipótese da Indução)

   iii. Provemos a validade para $k+1$. Temos $f(z+(k+1)\omega)) = f(z+k\omega+\omega) = f(z+k\omega) = f(z)$, pela Hipótese da Indução.

   $\square$

   Vamos agora tratar do caso $k \leq -1, k = -|k|$.

   Como $f(z) = f(z-\omega+\omega) = f(z-\omega)$, vemos que $-\omega$ é período e, desse modo, de acordo com a prova indutiva que fizemos, podemos escrever: $f(z) = f(z+|k|(-\omega)) = f(z-|k|\omega) = f(z+k\omega)$. Isto completa a nossa prova.

   $\square$

2. a. Se $f(z) = e^{2z}$, calcule $f\left(\dfrac{7\pi}{8}i\right)$ e $f\left(\ln 7 + \dfrac{5\pi}{3}i\right)$.

   b. Determine todos os números complexos z tais que $e^z = 5i$.

Solução:

a. $f\left(\frac{7\pi}{8}i\right) = e^{\frac{7\pi}{4}i} = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\text{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ e
$f\left(\ln 7 + \frac{5\pi}{3}i\right) = e^{2\ln 7 + \frac{10\pi}{3}i} = e^{2\ln 7}\left(\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{10\pi}{3}\right)\right).$
Mas $e^{2\ln 7} = (e^{\ln 7})^2 = 7^2 = 49$ e $\frac{10\pi}{3} = 2\pi + \frac{4\pi}{3} \Rightarrow$
$\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ e sen $\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) =$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}.$
Logo, $f\left(\ln 7 + \frac{5\pi}{3}i\right) = -\frac{49}{2}(1+\sqrt{3}i).$

b. Temos $e^z = e^x(\cos y + i\text{sen} y) = 5i = 5\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \Rightarrow$
$e^x = 5 \Rightarrow x = \ln 5$ e $y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
Portanto, $z = \ln 5 + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i,\ k \in \mathbb{Z}.$

3. Determine todos os números complexos z tais que $f(z) = e^z$ é

a. real

b. imaginário puro

Solução:

a. Como $e^z = e^x(\cos y + i\text{sen} y)$, e^z é real se, e somente se, $z \in B = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) = \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

b. Temos $e^z = e^x(\cos y + i\text{sen} y)$, logo e^z é imaginário puro se, e somente se, $z \in B = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

4. Escreva as seguintes funções como $f(z) = f(x+yi) = u(x,y) + iv(x,y)$:

a. $f(z) = e^{z^2}.$

b. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}.$

Solução:

a. Se $z = x+yi$, então $e^{z^2} = e^{(x+yi)^2} = e^{x^2-y^2+2xyi} = e^{x^2-y^2}(\cos(2xy) + i\text{sen}\,(2xy)) \Rightarrow u(x,y) = e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$ e $v(x,y) = e^{x^2-y^2}\text{sen}\,(2xy).$

b. Se $z = x + yi$, então $e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{\bar{z}}{z.\bar{z}}} = e^{\frac{\bar{z}}{|z|^2}} = e^{\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}}$
$= e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \left(\cos\left(\frac{y}{x^2+y^2} \right) - i\text{sen}\left(\frac{y}{x^2+y^2} \right) \right)$
$\Rightarrow u(x,y) = e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \cos\left(\frac{y}{x^2+y^2} \right)$ e $v(x,y) = -e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \text{sen}\left(\frac{y}{x^2+y^2} \right)$.

Exercícios Propostos

1. Prove que $(e^z)^k = e^{kz}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.
2. Prove que se $\text{Re}(z) \leq c$, então $|e^z|$ é limitado.
3. Prove que $e^{xi} - 1 = 2i\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) e^{\frac{x}{2}i}$.

   Sugestão: recorde do EP 1 que $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = 1 - 2\text{sen}^2 x$ e $\text{sen}\, 2x = 2\text{sen}\, x \cos x$.
4. Usando o exercício anterior prove que:

   a. $\text{sen}\, x + \text{sen}\, 2x + \ldots + \text{sen}\, nx = \dfrac{\text{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}$.

   b. $1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \dfrac{\text{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \cos\left(\frac{nx}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Solução dos Exercícios Propostos

1. Prove que $(e^z)^k = e^{kz}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

   Solução: Vamos considerar incialmente o caso $k \geq 0$ e provar por indução que $(e^z)^k = e^{kz}$.

   i. A validade para $k = 0$ e $k = 1$ é óbvia.
   ii. Vamos assumir a validade para $k \geq 2$, isto é, $(e^z)^k = e^{kz}$, $k \geq 2$. (Hipótese da Indução)
   iii. Provemos a validade para $k+1$. Temos $(e^z)^{k+1} = [(e^z)^k].e^z = e^{kz}.e^z = e^{kz+z} = e^{(k+1)z}$, pela Propriedade b e pela Hipótese da Indução.

   $\square$

Se $k \leq -1$, podemos escrever $k = -|k| \Rightarrow (e^z)^k = (e^z)^{-|k|}$ $(\star)$.

Mas $1 = (e^z)^{|k|-|k|} = (e^z)^{|k|}.(e^z)^{-|k|} \Rightarrow (e^z)^{-|k|} = [(e^z)^{|k|}]^{-1}$ e, substituindo esse resultado em $(\star)$, obtemos $(e^z)^k = (e^z)^{-|k|} = [(e^z)^{|k|}]^{-1} = (e^{z|k|})^{-1} = e^{-z|k|} = e^{z(-|k|)} = e^{zk}$, pelo caso $k \geq 0$, que provamos acima e pela Propriedade c. Isto completa nossa prova.

$\square$

2. Prove que se $\mathrm{Re}(z) \leq c$, então $|e^z|$ é limitado.

   Solução: Vimos que $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)} \leq e^c$, pois a função exponencial real é crescente.

   $\square$

3. Prove que $e^{xi} - 1 = 2i\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right) e^{\frac{x}{2}i}$.

   Sugestão: recorde do EP 1 que $\cos 2x = \cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x = 1 - 2\mathrm{sen}^2 x$ e $\mathrm{sen}\, 2x = 2\,\mathrm{sen}\, x \cos x$.

   Solução: Temos $e^{xi} - 1 = \cos x + i\,\mathrm{sen}\, x - 1 = \cos x - 1 + i\,\mathrm{sen}\, x \quad (*)$.

   Substituindo x por $\frac{x}{2}$ na sugestão, podemos escrever

   $\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \mathrm{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - 2\mathrm{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)$, $\mathrm{sen}\, x = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

   e inserindo esses resultados em $(*)$, obtemos

   $e^{xi} - 1 = -2\mathrm{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2i\cos\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right) =$

   $2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\left(-\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + i\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 2i\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right) =$
   $2i\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right) e^{\frac{x}{2}i}$.

   $\square$

4. Usando o exercício anterior, prove que:

   a. $\mathrm{sen}\, x + \mathrm{sen}\, 2x + \ldots + \mathrm{sen}\, nx = \dfrac{\mathrm{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}$.

   b. $1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \dfrac{\mathrm{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Solução: Seja $S = 1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx + i(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \ldots + \operatorname{sen} nx) = 1 + (\cos x + i\operatorname{sen} x) + (\cos 2x + i\operatorname{sen} 2x) + \ldots + (\cos nx + i\operatorname{sen} nx) = 1 + e^{xi} + e^{2xi} + \ldots + e^{nxi}$.

As somas das letras a e b correspondem, respectivamente, às partes imaginária e real de S.

Observe que S é a soma de $n+1$ termos de uma progressão geométrica de razão e^{xi} e primeiro termo 1, logo podemos calcular S através da fórmula $S = \dfrac{(e^{xi})^{n+1} - 1}{e^{xi} - 1}$ $(*)$.

Mas $(e^{xi})^{n+1} - 1 = e^{(n+1)xi} - 1 = 2i\operatorname{sen}\left(\dfrac{(n+1)x}{2}\right) e^{\frac{(n+1)x}{2}i}$ e $e^{xi} - 1 = 2i\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right) e^{\frac{x}{2}i}$ pelo exercício anterior, logo, substituindo esses resultados em $(*)$, obtemos

$$S = \frac{2i\operatorname{sen}\left(\dfrac{(n+1)x}{2}\right) e^{\frac{(n+1)x}{2}i}}{2i\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right) e^{\frac{x}{2}i}} = \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{(n+1)x}{2}\right) e^{\frac{nx}{2}i}}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)} =$$

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{(n+1)x}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)}\left(\cos\left(\frac{nx}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)\right).$$

Assim,

$$\operatorname{Im}(S) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \ldots + \operatorname{sen} nx = \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{(n+1)x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{nx}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)}$$

e

$$\operatorname{Re}(S) = 1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{(n+1)x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{nx}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)}.$$

$\square$

Aula 8

Funções Trigonométricas

Funções Trigonométricas Complexas

Na Aula 7, demonstramos a *Fórmula de Euler*

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x. \quad (1)$$

Substituindo x por $-x$ em (1), podemos escrever

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i \operatorname{sen}(-x) = \cos x - i \operatorname{sen} x. \quad (2)$$

Somando (1) e (2) e diminuindo (2) de (1), obtemos, respectivamente

$$2\cos x = e^{ix} + e^{-ix} \Rightarrow \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}. \quad (3)$$

$$2i \operatorname{sen} x = e^{ix} - e^{-ix} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \quad (4)$$

As expressões em (3) e (4) relacionam as funções reais cosseno e seno com a função exponencial complexa.

As funções cosseno e seno complexos são definidas, estendendo (3) e (4) a $\mathbb{C}$, ou seja,

!

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \text{ e } \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \qquad (5)$$

Exemplo 8.1.

1. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+i\ln 3\right)=\dfrac{e^{-\ln 3+\frac{\pi}{2}i}+e^{-\left(-\ln 3+\frac{\pi}{2}i\right)}}{2}=\dfrac{\frac{1}{3}i+3(-i)}{2}=$
$-\dfrac{8}{6}i=-\dfrac{4}{3}i.$

2. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}-i\ln 2\right)=\dfrac{e^{\ln 2+\frac{\pi}{3}i}-e^{-(\ln 2+\frac{\pi}{3}i)}}{2i}=\dfrac{2\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)}{2i}=$
$\dfrac{5\sqrt{3}-3i}{8}.$

Módulo, Argumento e Conjugado das Funções $f(z)=\cos z$ e $g(z)=\operatorname{sen} z$

Seja $f(z)=\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}.$

Recordemos da Aula 7 que $\overline{e^{z}}=e^{\overline{z}}$, logo

$$\overline{\cos z}=\overline{\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}}=\frac{\overline{e^{iz}}+\overline{e^{-iz}}}{2}=\frac{e^{\overline{iz}}+e^{\overline{-iz}}}{2}=\frac{e^{-i\overline{z}}+e^{i\overline{z}}}{2}=\cos\overline{z}. \quad (6)$$

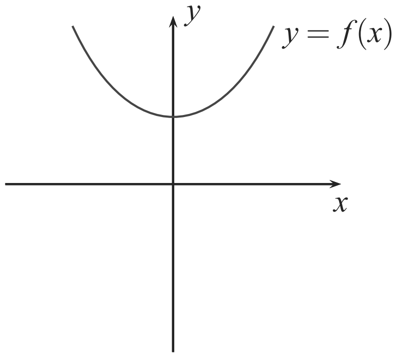
Nos cursos de Cálculo, estudamos as funções cosseno e seno hiperbólicos, definidas respectivamente por

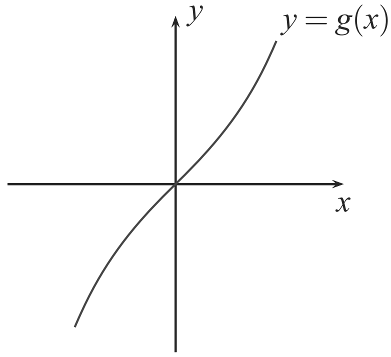
$$\cosh x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{senh} x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}.$$

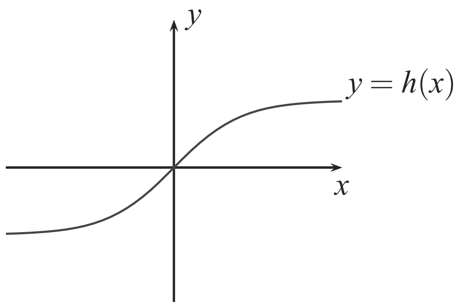
As demais funções hiperbólicas são definidas a partir de $\cosh x$ e $\operatorname{senh} x$

- Tangente hiperbólica: $\operatorname{tgh} x=\dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}.$
- Cotangente hiperbólica: $\operatorname{cotgh} x=\dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$, $x\neq 0.$
- Secante hiperbólica: $\operatorname{sech} x=\dfrac{1}{\cosh x}=\dfrac{2}{e^{x}+e^{-x}}.$
- Cossecante hiperbólica: $\operatorname{cossech} x=\dfrac{1}{\operatorname{senh} x}=\dfrac{2}{e^{x}-e^{-x}}$, $x\neq 0.$

As figuras abaixo mostram os gráficos de $f(x) = \cosh x$, $g(x) = \operatorname{senh} x$ e $h(x) = \operatorname{tgh} x$







Vamos agora escrever $f(z) = \cos z$ sob a forma $f(z) = f(x+yi) = u(x,y) + iv(x,y)$. Temos

$$\cos z = \cos(x+yi) = \frac{e^{i(x+yi)} + e^{-i(x+yi)}}{2} = \frac{e^{-y}e^{xi} + e^{y}e^{-xi}}{2} =$$

$$= \frac{e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) + e^{y}(\cos x - i \operatorname{sen} x)}{2} =$$

$$= \cos x \left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right) - i \operatorname{sen} x \left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right) =$$

$$= \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y. \quad (7)$$

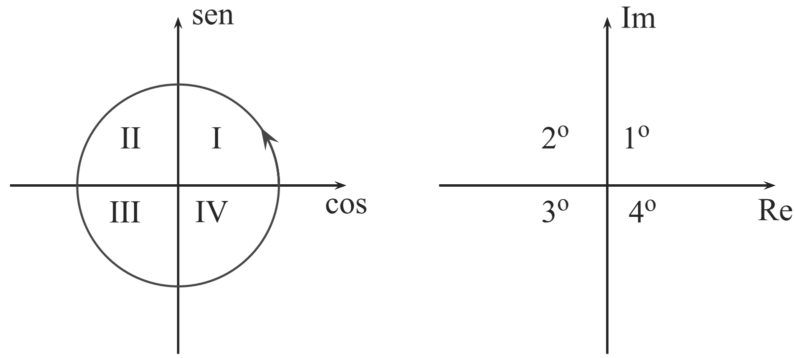
Como as funções reais $y = \cos x$, $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cosh x$, $y = \operatorname{senh} x$ satisfazem

$$\begin{cases} \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \\ \cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \end{cases},$$

resulta de (7) que

$|\cos z|^2 = \cos^2 x \cosh^2 y + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{senh}^2 y = \cos^2 x(1 + \operatorname{senh}^2 y) + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{senh}^2 y = \cos^2 x + (\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x) \operatorname{senh}^2 y = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y.$

Logo, $|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y}$. (8)



Vemos, na figura anterior, que $\cos x \geq 0$ no I e no IV quadrantes, $\cos x \leq 0$ no II e no III quadrantes, $\operatorname{sen} x \geq 0$ no I e no II quadrantes e $\operatorname{sen} x \leq 0$ no III e no IV quadrantes do ciclo trigonométrico. Como $\cosh y \geq 1, \forall y \in \mathbb{R}$, $\operatorname{senh} y \geq 0$ se $y \geq 0$ e $\operatorname{senh} y \leq 0$ se $y \leq 0$, se $w = \cos z = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$ vemos que

- Se $x \in I$ e $y \leq 0$ ou $x \in IV$ e $y \geq 0$, então $w = \cos z \in$ 1º quadrante.
- Se $x \in II$ e $y \leq 0$ ou $x \in III$ e $y \geq 0$, então $w = \cos z \in$ 2º quadrante.
- Se $x \in II$ e $y \geq 0$ ou $x \in III$ e $y \geq 0$, então $w = \cos z \in$ 3º quadrante.
- Se $x \in I$ e $y \geq 0$ ou $x \in IV$ e $y \leq 0$, então $w = \cos z \in$ 4º quadrante.

Se $\theta = \arg(\cos z) = \arg(\cos(x + yi))$, então

i. Se $z = \frac{\pi}{2} + k\pi + yi, k \in \mathbb{Z}$, então $\cos z = -i \operatorname{senh} y$, se k é par e $\cos z = i \operatorname{senh} y$, se k é ímpar o que implica

$$\arg(\cos z) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{se } y < 0 \text{ e } k \text{ é par ou se } y > 0 \text{ e } k \text{ é ímpar} \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{se } y < 0 \text{ e } k \text{ é ímpar ou se } y > 0 \text{ e } k \text{ é par} \end{cases}$$

ii. Se $x = \operatorname{Re}(z) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ e $\theta = \arctan(-\operatorname{tg} x \operatorname{tgh} y)$, então

$$\arg(\cos z) = \begin{cases} \theta, \text{se} \cos z \in 1^{\text{o}} \text{ quadrante} \\ \pi + \theta, \text{se} \cos z \in 2^{\text{o}} \text{ quadrante} \\ \pi + \theta, \text{se} \cos z \in 3^{\text{o}} \text{ quadrante} \\ 2\pi + \theta, \text{se} \cos z \in 4^{\text{o}} \text{ quadrante} \end{cases}.$$

De modo inteiramente análogo (veja Exercício Resolvido 2), podemos provar que a função $f(z) = \operatorname{sen} z$ satisfaz as propriedades:

$\overline{\operatorname{sen} z} = \operatorname{sen} \bar{z}$ (9).

$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$ (10).

$|\operatorname{sen} z| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y}$ (11).

Se $w = \operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$, então

- Se $x \in I$ e $y \geq 0$ ou $x \in II$ e $y \leq 0$, então $w = \operatorname{sen} z \in 1^{\text{o}}$ quadrante.
- Se $x \in III$ e $y \leq 0$ ou $x \in IV$ e $y \geq 0$, então $w = \operatorname{sen} z \in 2^{\text{o}}$ quadrante.
- Se $x \in III$ e $y \geq 0$ ou $x \in IV$ e $y \leq 0$, então $w = \operatorname{sen} z \in 3^{\text{o}}$ quadrante.
- Se $x \in II$ e $y \geq 0$ ou $x \in I$ e $y \leq 0$, então $w = \operatorname{sen} z \in 4^{\text{o}}$ quadrante.

Se $\theta = \arg(\operatorname{sen} z) = \arg(\operatorname{sen}(x + yi))$, então

i. Se $z = k\pi + yi, k \in \mathbb{Z}$, então $\operatorname{sen} z = i \operatorname{senh} y$, se k é par e $\operatorname{sen} z = -i \operatorname{senh} y$, se k é ímpar o que implica

$$\arg(\operatorname{sen} z) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{se } y < 0 \text{ e } k \text{ é ímpar ou se } y > 0 \text{ e } k \text{ é par} \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{se } y < 0 \text{ e } k \text{ é par ou se } y > 0 \text{ e } k \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

ii. Se $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ e $\theta = \arctan(\operatorname{cotg} x \operatorname{tgh} y)$, então

$$\arg(\operatorname{sen} z) = \begin{cases} \theta, \text{se } \operatorname{sen} z \in 1^{\text{o}} \text{ quadrante} \\ \pi + \theta, \text{se } \operatorname{sen} z \in 2^{\text{o}} \text{ quadrante} \\ \pi + \theta, \text{se } \operatorname{sen} z \in 3^{\text{o}} \text{ quadrante} \\ 2\pi + \theta, \text{se } \operatorname{sen} z \in 4^{\text{o}} \text{ quadrante} \end{cases}.$$

Exemplo 8.2.

Se $\cos z = 0$ resulta de (8) que $0 = |\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{senh} y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases}.$$

Logo, $\cos z = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 8.3.

Se $\operatorname{sen} z = 0$ resulta de (11) que $0 = |\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{senh} y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases}.$$

Logo, $\operatorname{sen} z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$.

Ao contrário do que ocorre com as funções reais $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \operatorname{sen} x$ que são limitadas, ou seja, $|\cos x| \leq 1$ e $|\operatorname{sen} x| \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, as funções trigonométricas complexas $f(z) = \cos z$ e $g(z) = \operatorname{sen} z$ **não** são limitadas.

De fato, se $z = x + yi$ resulta de (8) e (11) que

$$|\cos z|^2 \geq \operatorname{senh}^2 y \quad \text{e} \quad |\operatorname{sen} z|^2 \geq \operatorname{senh}^2 y.$$

Como a função real $f(x) = \operatorname{senh} y$ é ilimitada, concluímos que $f(z) = \cos z$ e $g(z) = \operatorname{sen} z$ também são ilimitadas.

Propriedades Algébricas das Funções Trigonométricas Complexas $f(z) = \cos z$ e $g(z) = \operatorname{sen} z$

Sejam w e $z \in \mathbb{C}$. As funções complexas $f(z) = \cos z$ e $g(z) = \operatorname{sen} z$ possuem as seguintes propriedades

a. $\cos(-z) = \cos z$ e $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$.

b. $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$.

c. $e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$.

d. $\cos(w \pm z) = \cos w \cos z \mp \operatorname{sen} w \operatorname{sen} z$.

e. $\operatorname{sen}(w \pm z) = \operatorname{sen} w \cos z \pm \cos w \operatorname{sen} z$.

f. $\cos 2z = \cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z = 2\cos^2 z - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 z$.

g. $\operatorname{sen} 2z = 2\operatorname{sen} z \cos z$.

Vamos provar a, b, c, d e f. Temos

a. $\cos(-z) = \dfrac{e^{i(-z)} + e^{-i(-z)}}{2} = \dfrac{e^{-iz} + e^{iz}}{2} = \cos z$

$\operatorname{sen}(-z) = \dfrac{e^{i(-z)} - e^{-i(-z)}}{2i} = \dfrac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} = -\operatorname{sen} z.$ $\square$

b. $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = \left(\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 =$

$\dfrac{e^{2iz} + e^{-2iz} + 2}{4} - \left(\dfrac{e^{2iz} + e^{-2iz} - 2}{4}\right) = 1.$ $\square$

c. $\begin{cases} \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ i\operatorname{sen} z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} \end{cases} \Rightarrow e^{iz} = \cos z + i\operatorname{sen} z.$ $\square$

d. Por c podemos escrever

$2\cos(w+z) = e^{i(w+z)} + e^{-i(w+z)} = e^{iw}e^{iz} + e^{-iw}e^{iz} =$

$= (\cos w + i\operatorname{sen} w)(\cos z + i\operatorname{sen} z) + (\cos(-w) + i\operatorname{sen}(-w))$
$(\cos(-z) + i\operatorname{sen}(-z)) =$

$= (\cos w + i\operatorname{sen} w)(\cos z + i\operatorname{sen} z) + (\cos w - i\operatorname{sen} w)(\cos z -$
$i\operatorname{sen} z) =$

$= \cos w \cos z - \operatorname{sen} w \operatorname{sen} z + (\cos w \operatorname{sen} z + \operatorname{sen} w \cos z)i +$
$\cos w \cos z - \operatorname{sen} w \operatorname{sen} z - (\cos w \operatorname{sen} z + \operatorname{sen} w \cos z)i =$

$= 2(\cos w \cos z - \operatorname{sen} w \operatorname{sen} z) \Rightarrow \cos(w+z) = \cos w \cos z -$
$\operatorname{sen} w \operatorname{sen} z.$ $\square$

Como $\cos(-z) = \cos z$ e $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$, temos

$\cos(w-z) = \cos(w+(-z)) = \cos w \cos(-z) - \operatorname{sen} w \operatorname{sen}(-z) =$

$= \cos w \cos z + \operatorname{sen} w \operatorname{sen} z.$ $\square$

f. Fazendo $w = z$ por d e b, obtemos

$\cos 2z = \cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z = 2\cos^2 z - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 z.$ $\square$

A verificação das propriedades e e g é o Exercício Resolvido 3.

Exemplo 8.4.

1. Resulta de (3) que
$\cos\left(z \pm \frac{\pi}{2}\right) = \cos z \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \mp \operatorname{sen} z \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mp \operatorname{sen} z.$

2. Resulta de (3) que
$\operatorname{sen}\left(z \pm \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} z \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \pm \cos z \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos z.$

PERIODICIDADE DAS FUNÇÕES $f(z) = \cos z$ E $g(z) = \operatorname{sen} z$

As funções $f(z) = \cos z$ e $g(z) = \operatorname{sen} z$ são periódicas com período 2π, pois $\cos 2\pi = 1, \operatorname{sen} 2\pi = 0$ e, por c e d, da seção anterior, temos

$$f(z+2\pi) = \cos(z+2\pi) = \cos z \cos 2\pi - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} 2\pi = \cos z = f(z) \text{ e}$$

$$g(z+2\pi) = \operatorname{sen}(z+2\pi) = \operatorname{sen} z \cos 2\pi + \cos z \operatorname{sen} 2\pi = \operatorname{sen} z = g(z).$$

Dada uma função $h : A \to B$, se $X \subset A$, a **restrição** da função h ao conjunto X é a função $h_{|X}$ cujo domínio é o conjunto X.

Como $f(z) = \cos z$ e $g(z) = \operatorname{sen} z$ têm período 2π, se $X \subset \mathbb{C}$ e $Y \subset \mathbb{C}$ são tais que as restrições $f_{|X}$ e $g_{|Y}$ são injetoras, então existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que X e Y estão contidos em $A = \{z \in \mathbb{C} \mid x_0 < \operatorname{Re}(z) \leq x_0 + 2\pi\}$.

Vamos determinar X e Y para $x_0 = -\pi \Rightarrow A = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Re}(z) \leq \pi\}$.

Se $f(z) = \cos z$, vimos que

$$\begin{cases} \cos(-ti) = \cos(ti) = \cos 0 \cosh t - \operatorname{sen} 0 \operatorname{senh} t = \cosh t \\ \cos(\pi + ti) = \cos(\pi - ti) = \cos\pi \cos(ti) \mp \operatorname{sen}\pi \operatorname{sen}(ti) = \\ \qquad\qquad = -\cos(ti) = -\cosh t \end{cases} .$$

Logo, as retas verticais $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$ (perfurada em $z = 0$) e $\{z \in \mathbb{C} - \{\pi\} \mid \operatorname{Re}(z) = \pi\}$ (perfurada em $z = \pi$) **não** estão contidas em X, pois vimos acima que nessas retas há pontos com a mesma imagem.

Além disso, temos $\cos(-z) = \cos z$, donde concluímos que os conjuntos $B = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \mathrm{Re}(z) < 0\}$ e $C = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}(z) < \pi\}$ têm a mesma imagem pela função $f(z)$. Assim, somente um desses conjuntos têm interseção não vazia com X, digamos C.

Provaremos agora um importante resultado.

Teorema 8.1.

Se $X = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}(z) < \pi\}$, então a função

$$\begin{cases} f : X \to \mathbb{C} - \{(-\infty, -1] \cup [1, \infty)\} \\ f(z) = \cos z \end{cases} \quad \text{é bijetora.}$$

Prova

Seja $w_0 \in \mathbb{C} - \{(-\infty, -1] \cup [1, \infty)\}$. Devemos mostrar que a equação $\cos z = w_0$ possui exatamente uma solução em X.

Temos

$$w_0 = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \Rightarrow e^{iz} + \frac{1}{e^{iz}} = 2w_0 \Rightarrow (e^{iz})^2 + 1 = 2w_0 e^{iz}$$

e, fazendo $e^{zi} = y$, podemos escrever

$$y^2 - 2w_0 y + 1 = 0. \qquad (*)$$

A equação $(*)$ foi estudada na Aula 3 e, como seu $\Delta = 4w_0^2 - 4$ é diferente de zero para $w_0 \neq \pm 1$, ela possui 2 raízes distintas α e β **não** nulas, pois $\alpha\beta = 1$.

Se $e^{iz} = y = \alpha$, recordando da Aula 7 que a função exponencial $\begin{cases} f : U = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \mathrm{Im}(z) \leq \pi\} \to \mathbb{C} - \{0\} \\ f(z) = e^z \end{cases}$ é bijetora, podemos obter $z_1 \in U$ tal que $e^{z_1} = \alpha$.

Logo, $z_0 = \dfrac{z_1}{i} = -iz_1$ satisfaz $e^{iz_0} = e^{z_1} = \alpha \Rightarrow \cos(z_0) = w_0$.

Observe que se $z_1 = a + bi \in U$, então $-\pi < b \leq \pi \Rightarrow z_0 = -iz_1 = b - ai$ satisfaz $-\pi < b = \mathrm{Re}(z_0) \leq \pi$ com $\mathrm{Re}(z_0) \neq 0$ e $\mathrm{Re}(z_0) \neq \pi$, pois $\cos(ti) = \cosh t, \cos(\pi + ti) = -\cosh t$ e $w_0 \in \mathbb{C} - \{(-\infty, -1] \cup [1, \infty)\}$.

Portanto, $z_0 \in \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \text{Re}(z) < 0 \text{ ou } 0 < \text{Re}(z) < \pi\}$.

- Se $z_0 \in X = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \text{Re}(z) < \pi\}$, a equação $\cos z = w_0$ possui solução em X.
- Se $z_0 \notin X$, então $-z_0 \in X$ e, como $\cos(-z_0) = \cos z_0 = w_0$, concluímos que a equação $\cos z = w_0$ possui solução em X.

Vamos agora provar que não há mais de uma solução.

Ao demonstrarmos que equação $\cos z = w_0 \in \mathbb{C} - \{(-\infty, -1] \cup [1, \infty)\}$ possui solução z_0, provamos que essa solução satisfaz $e^{iz_0} = \alpha$ ou $e^{iz_0} = \dfrac{1}{\alpha}$.

Logo, se z_0 e z_1 são tais que $\cos z_0 = \cos z_1$ devemos ter

i. $e^{iz_0} = e^{iz_1} = \alpha \Rightarrow iz_0 = iz_1 + 2k\pi i \Rightarrow z_0 - z_1 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Mas $z_0, z_1 \in U \Rightarrow -\pi <$ $\text{Re}(z_0) - \text{Re}(z_1) < \pi \Rightarrow k = 0 \Rightarrow$ $z_0 = z_1$.

ii. $e^{iz_1} = \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{e^{iz_0}} = e^{-iz_0} \Rightarrow iz_1 = -iz_0 + 2k\pi i \Rightarrow z_1 = -z_0 + 2k\pi \Rightarrow z_1 + z_0 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Mas $0 <$ $\text{Re}(z_0) + \text{Re}(z_1) < 2\pi$, absurdo.

Assim, se $f(z_0) = f(z_1) = w$, então $z_0 = z_1$ o que mostra que a equação $\cos z = w_0$ possui exatamente uma solução em X e completa a prova de que f é bijetora. $\square$

Se $g(z) = \text{sen}\, z$, vimos que

$$\text{sen}\left(ti \pm \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}(ti)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \pm \cos(ti)\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos(ti) = $$
$$= \pm\cos(-ti) = \text{sen}\left(-ti \pm \frac{\pi}{2}\right).$$

Logo, as retas verticais $\left\{z \in C - \left\{\pm\dfrac{\pi}{2}\right\} \mid \text{Re}(z) = \pm\dfrac{\pi}{2}\right\}$ $\left(\text{perfuradas em } z = \pm\dfrac{\pi}{2}\right)$ **não** estão contidas em Y.

Como $\text{sen}(\pi - z) = \text{sen}\,\pi\cos z - \cos\pi\,\text{sen}\, z = \text{sen}\, z$, segue-se que os conjuntos

$D = \left\{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \text{Re}(z) < -\dfrac{\pi}{2} \text{ ou } \dfrac{\pi}{2} < \text{Re}(z) < \pi\right\}$ e

$E = \left\{z \in \mathbb{C} \mid -\dfrac{\pi}{2} < \text{Re}(z) < \dfrac{\pi}{2}\right\}$ têm a mesma imagem pela função $g(z)$.

Assim, somente um desses conjuntos têm interseção não vazia com Y, digamos E. Podemos agora enunciar o

Teorema 8.2.

Se $Y = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid -\dfrac{\pi}{2} < \mathrm{Re}(z) < \dfrac{\pi}{2} \right\}$, então a função

$$\begin{cases} g : Y \to \mathbb{C} - \{(-\infty, -1] \cup [1, \infty)\} \\ f(z) = \operatorname{sen} z \end{cases} \quad \text{é bijetora.}$$

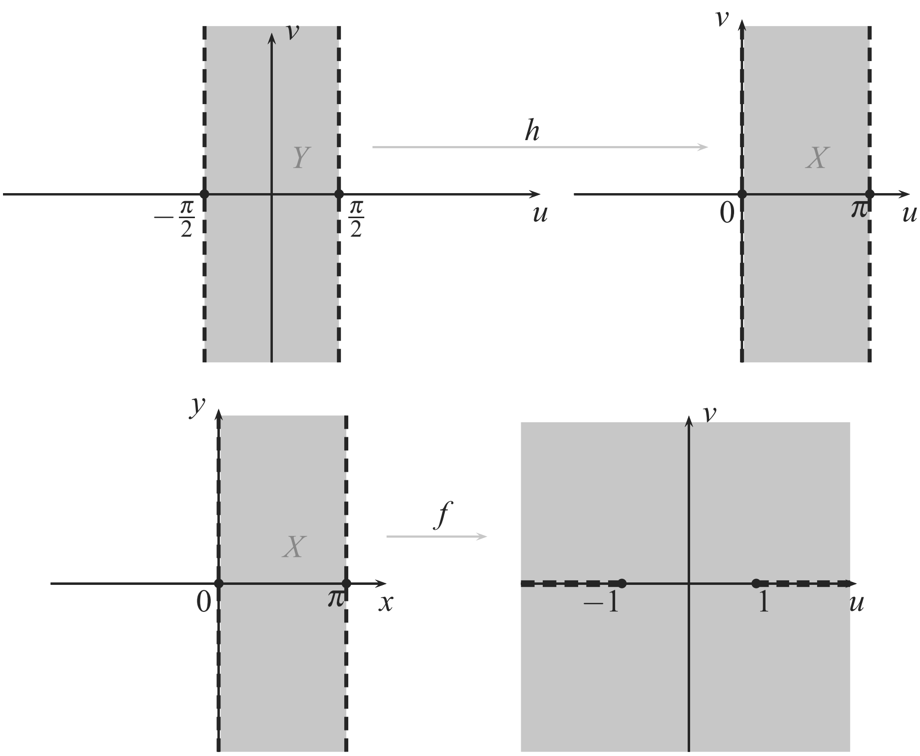
Prova

Vimos que

$$\cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos z + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} z.$$

Seja $\begin{cases} h : Y \to \mathbb{C} \\ h(z) = \dfrac{\pi}{2} - z \end{cases}$.

A imagem de h é o conjunto $X = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}(z) < \pi\}$ do Teorema 8.1, logo, podemos escrever $g(z) = \operatorname{sen} z = (f \circ h)(z)$ e isso mostra que g é bijetora por ser a composta das funções bijetoras f e h. $\square$

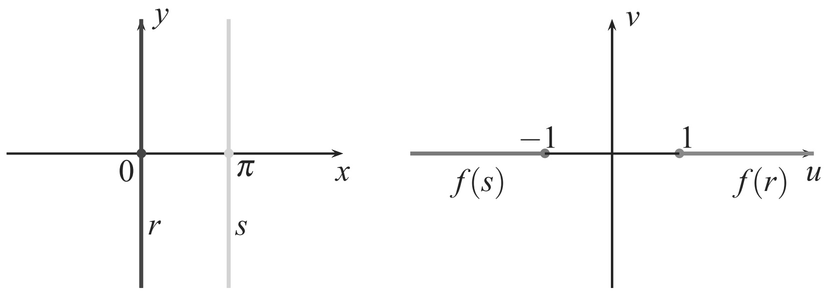


TRANSFORMAÇÕES OU MAPEAMENTOS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS $f(z) = \cos z$ E $g(z) = \operatorname{sen} z$

Inicialmente, estudaremos as transformações ou mapeamentos de $f(z) = \cos z$.

Pelo Teorema 8.1, podemos restringir os mapeamentos de $f(z) = \cos z$ ao conjunto X e às retas verticais $x = 0$ e $x = \pi$.

Vimos, na prova do Teorema 8.1, que as imagens de $f(z) = \cos z$ pelas retas verticais $x = 0$ e $x = \pi$ são, respectivamente, os conjuntos $[1, \infty)$ e $(-\infty, -1]$.

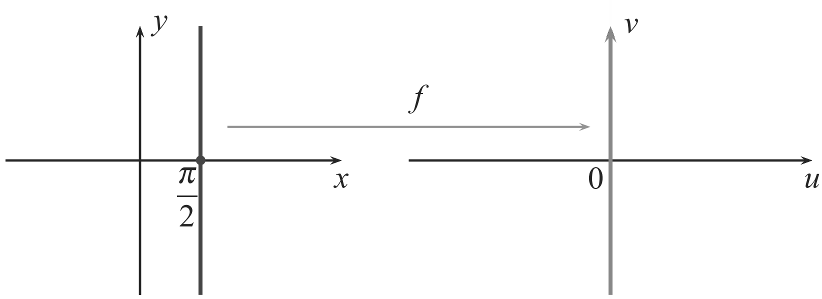


Seja $\alpha(t) = a + ti, a \in (0, \pi), t \in \mathbb{R}$ a reta vertical $x = a$.

Temos $f(\alpha(t)) = \cos(a + ti) = \cos a \cosh t - i \operatorname{sen} a \operatorname{senh} t \Rightarrow$

$$\begin{cases} u = \cos a \cosh t \\ v = -\operatorname{sen} a \operatorname{senh} t \end{cases}.$$

Se $a = \dfrac{\pi}{2}$, então $f(\alpha(t)) = -i \operatorname{senh} t$ e, como a imagem da função $h(t) = \operatorname{senh} t$, $\operatorname{Im}(h)$, é $\operatorname{Im}(h) = \mathbb{R}$, $f(\alpha(t))$ é o eixo imaginário $u = 0$.



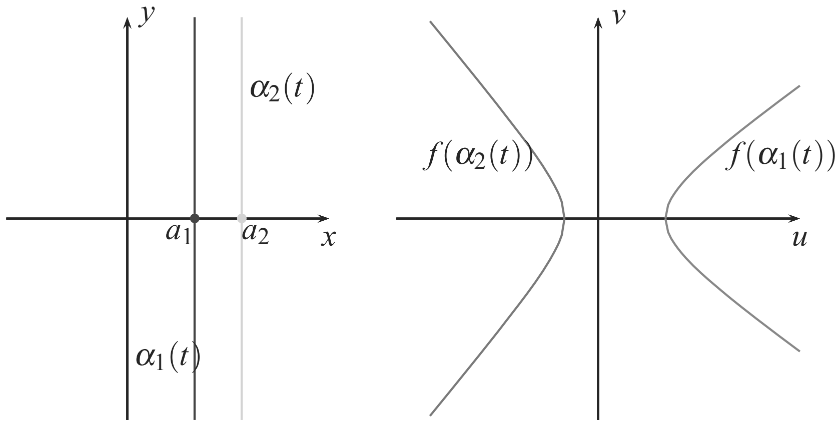
Se $a \neq \dfrac{\pi}{2}$, podemos escrever

$$\begin{cases} \dfrac{u}{\cos a} = \cosh t \\ \dfrac{v}{\operatorname{sen} a} = -\operatorname{senh} t \end{cases} \Rightarrow \frac{u^2}{\cos^2 a} - \frac{v^2}{\operatorname{sen}^2 a} = \cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1,$$

que é equação de um ramo de hipérbole com vértice em $u = \cos a$.

Se $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$, então $u = \cos a \cosh t > 0$ e, se $\dfrac{\pi}{2} < a < \pi$, então $u = \cos a \cosh t < 0$.

Na figura abaixo, $\alpha_1(t) = a_1 + ti, \alpha_2(t) = a_2 + ti, a_1 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $a_2 \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right), t \in \mathbb{R}$.



Como X é a união das retas verticais $\alpha(t) = a + ti, a \in (0, \pi)$, $t \in \mathbb{R}$ e $f_{|X}$ é uma bijeção de X em $\mathbb{C} - \{(-\infty, -1] \cup [1, \infty)\}$ as hipérboles $\dfrac{u^2}{\cos^2 a} - \dfrac{v^2}{\operatorname{sen}^2 a} = 1$ **não** se interceptam ($f_{|X}$ é injetora) e, se $z_0 \in \mathbb{C} - \{(-\infty, -1] \cup [1, \infty)\}$, então existe um único $a \in (0, \pi)$ tal que $z_0 \in \dfrac{u^2}{\cos^2 a} - \dfrac{v^2}{\operatorname{sen}^2 a} = 1$ ($f_{|X}$ é sobrejetora).

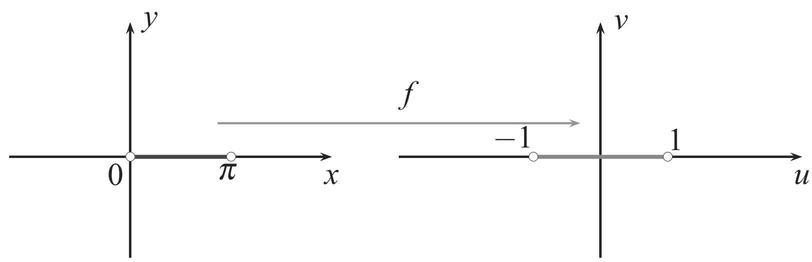
Seja $\beta(t) = \pi t + ci, c \in \mathbb{R}, t \in (0, 1)$, o segmento horizontal aberto com extremos $z_1 = ci$ e $z_2 = \pi + ci$.

Temos

$f(\beta(t)) = \cos(\pi t + ci) = \cos(\pi t)\cosh c - i\,\mathrm{sen}(\pi t)\,\mathrm{senh}\, c \Rightarrow$

$$\begin{cases} u = \cos(\pi t)\cosh c \\ v = -\,\mathrm{sen}(\pi t)\,\mathrm{senh}\, c \end{cases}.$$

Se $c = 0$, então $f(\beta(t)) = \cos(\pi t)$, $t \in (0,1) \Rightarrow f(\beta(t)) = (-1,1)$.

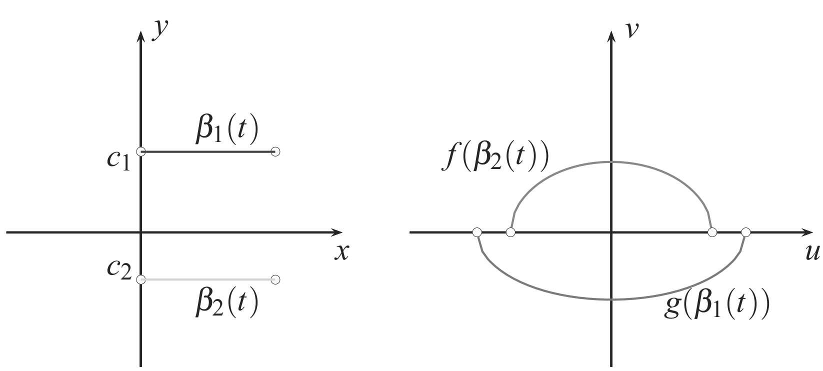


Se $c \neq 0$, obtemos $\begin{cases} \dfrac{u}{\cosh c} = \cos(\pi t) \\ \dfrac{v}{\mathrm{senh}\, c} = -\,\mathrm{sen}(\pi t) \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{u^2}{\cosh^2 c} + \dfrac{v^2}{\mathrm{senh}^2 c} = \cos^2(\pi t) + \mathrm{sen}^2(\pi t) = 1, t \in (0,1)$, que é equação de uma semielipse sem os vértices $(\cosh c, 0)$ e $(-\cosh c, 0)$ contida no semiplano superior $v > 0$, se $c < 0$ ou contida no semiplano inferior $v < 0$, se $c > 0$.

Além disso, pelo Exercício Resolvido 1, temos $-1 < \mathrm{tgh}\, c < 1 \Rightarrow \mathrm{tgh}^2 c < 1 \Rightarrow \dfrac{\mathrm{senh}^2 c}{\cosh^2 c} < 1 \Rightarrow \mathrm{senh}^2 c < \cosh^2 c$. Portanto, as "semielipses" $\dfrac{u^2}{\cosh^2 c} + \dfrac{v^2}{\mathrm{senh}^2 c} = 1$ têm eixo maior contido no eixo real ($v = 0$) e focos $F_1 = (-1,0), F_2 = (1,0)$.

Na figura abaixo, $\beta_1(t) = c_1 + ti, \beta_2(t) = c_2 + ti$ e $t \in (0,1)$.



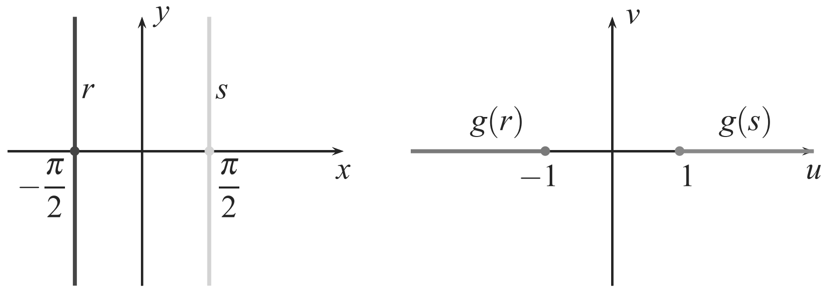
Como X é a união das retas horizontais $\beta(t) = \pi t + ci$, $c \in \mathbb{R}$, $t \in (0,1)$ e $f_{|X}$ é uma bijeção de X em $\mathbb{C} - \{(-\infty,-1] \cup [1,\infty)\}$ as elipses $\dfrac{u^2}{\cosh^2 c} + \dfrac{v^2}{\operatorname{senh}^2 c} = 1$, $v \neq 0$, **não** se interceptam ($f_{|X}$ é injetora) e, se $z_0 \in \mathbb{C} - \{(-\infty,-1] \cup [1,\infty)\}$, então existe um único $c \in \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{u^2}{\cosh^2 c} + \dfrac{v^2}{\operatorname{senh}^2 c} = 1$ ($f_{|X}$ é sobrejetora).

Se $g(z) = \operatorname{sen} z$, pelo Teorema 8.2, podemos restringir os mapeamentos de $g(z) = \operatorname{sen} z$ ao conjunto Y e às retas verticais $x = \pm\dfrac{\pi}{2}$.

As retas verticais $x = \dfrac{\pi}{2}$ e $x = -\dfrac{\pi}{2}$ podem ser parametrizadas respectivamente por $\alpha(t) = \dfrac{\pi}{2} + ti$ e $\beta(t) = -\dfrac{\pi}{2} + ti, t \in \mathbb{R}$.

Temos $\operatorname{sen}(\alpha(t)) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + ti\right) = \cosh t$ e $\operatorname{sen}(\beta(t)) = \operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{2} + ti\right) = -\cosh t$.

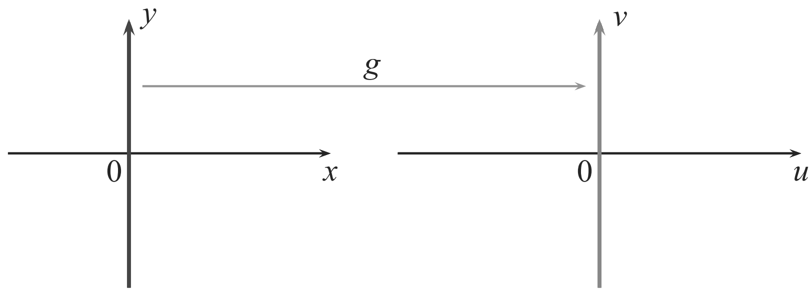
Logo, $g(\alpha(t)) = [1,\infty)$ e $g(\beta(t)) = (-\infty,-1]$



Como $g(z) = \operatorname{sen} z = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - z\right)$, a transformação ou mapeamento de Y pela função $g(z)$ corresponde à transformação ou mapeamento pela função $f(z) = \cos z$ da imagem de Y pela função $h(z) = \dfrac{\pi}{2} - z$.

Seja $\gamma(t) = b + ti, b \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right), t \in \mathbb{R}$, a reta vertical $x = b$.

Se $b = 0$, $\gamma(t) = ti \Rightarrow g(\gamma(t)) = g(ti) = \operatorname{sen}(ti) = \operatorname{senh} ti$, $t \in \mathbb{R}$, ou seja, o eixo imaginário coincide com sua imagem pela função $g(z) = \operatorname{sen} z$.



Suponhamos $b \neq 0$.

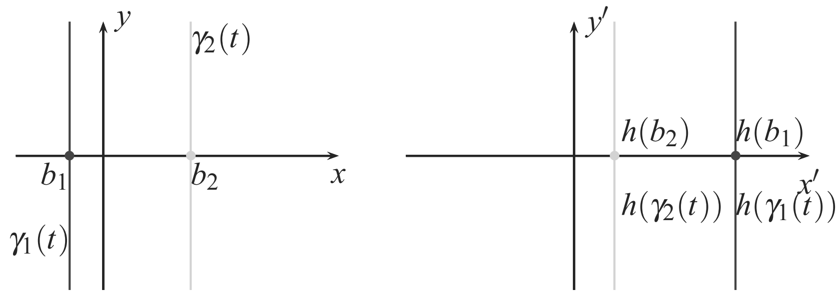
Temos $h(\gamma(t)) = \alpha(t) = \dfrac{\pi}{2} - b - ti,\ t \in \mathbb{R}$. Podemos reparametrizar a reta vertical $\alpha(t) = \dfrac{\pi}{2} - b - ti,\ t \in \mathbb{R}$ como $\alpha(t) = \dfrac{\pi}{2} - b + ti, t \in \mathbb{R}, b \neq 0 \Rightarrow g(\gamma(t)) = f(\alpha(t))$.

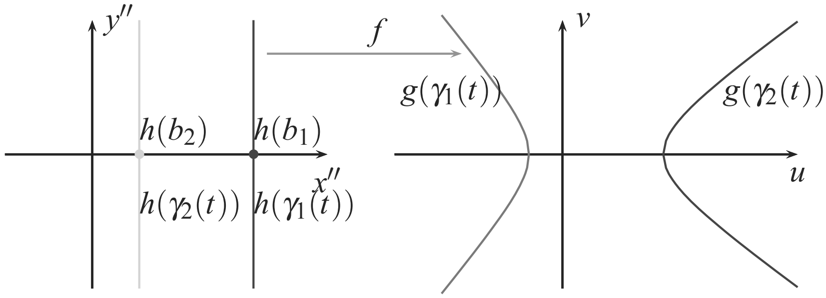
Ao estudarmos os mapeamentos de $f(z) = \cos z$, vimos que a reta vertical $\alpha(t) = \dfrac{\pi}{2} - b + ti, t \in \mathbb{R}, b \neq 0$, tem como imagem

$$\begin{cases} \dfrac{u}{\cos(\frac{\pi}{2} - b)} = \cosh t \Rightarrow \dfrac{u}{\operatorname{sen} b} = \cosh t \\ \dfrac{v}{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - b)} = -\operatorname{senh} t \Rightarrow \dfrac{u}{\cos b} = -\operatorname{senh} t \end{cases}$$

$\Rightarrow \dfrac{u^2}{\operatorname{sen}^2 b} - \dfrac{v^2}{\cos^2 b} = \cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$ (equação de um ramo de hipérbole com vértice em $u = \operatorname{sen} b$).

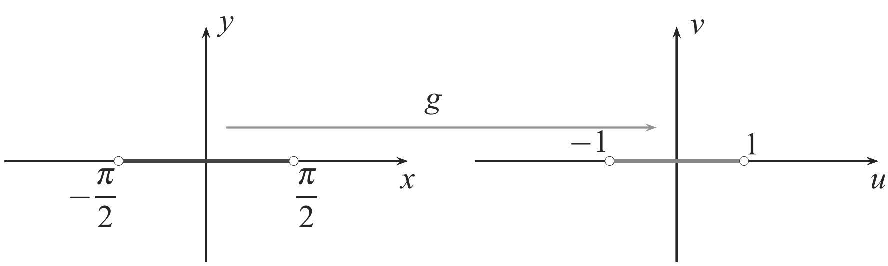
Se $-\dfrac{\pi}{2} < b < 0$, então $u = \operatorname{sen} b \cosh t < 0$ e, se $0 < b < \dfrac{\pi}{2}$, então $u = \operatorname{sen} b \cosh t > 0$.





Seja $\delta(t) = \frac{\pi}{2}t + di$, $d \in \mathbb{R}$, $t \in (-1,1)$, o segmento horizontal aberto com extremos $z_1 = -\frac{\pi}{2} + di$ e $z_2 = \frac{\pi}{2} + di$.

Se $d = 0$, $\delta(t) = \frac{\pi}{2}t \Rightarrow g(\gamma(t)) = g\left(\frac{\pi}{2}t\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$, $t \in (-1,1)$. Logo, a imagem do intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ pela função $g(z) = \operatorname{sen} z$ é o intervalo $(-1,1)$.



Suponhamos $d \neq 0$.

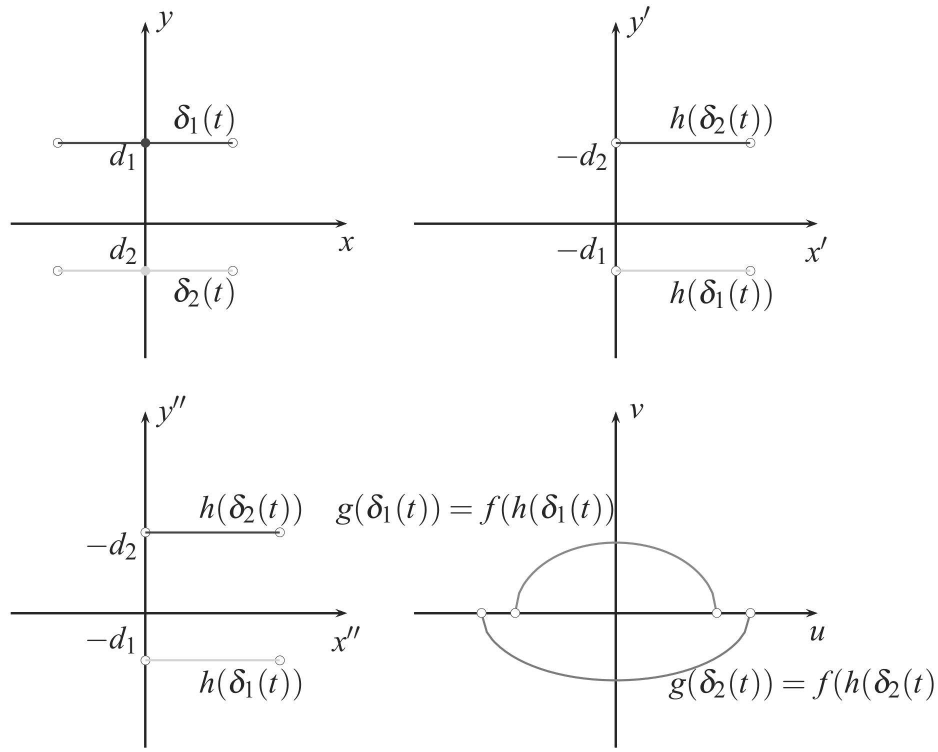
Temos $h(\delta(t)) = \beta(t) = \frac{\pi}{2}(1-t) - di$, $d \in \mathbb{R}$, $t \in (-1,1)$, segmento aberto de extremos $(0,-d)$ e $(\pi,-d)$. Assim, $g(\delta(t)) = f(\beta(t))$.

Quando estudamos os mapeamentos de $f(z) = \cos z$, provamos que o segmento horizontal $\beta(t) = \frac{\pi}{2}(1-t) - di$, $d \in \mathbb{R}$, $t \in (-1,1)$ tem como imagem

$$\begin{cases} \dfrac{u}{\cosh(-d)} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}(1-t)\right) \Rightarrow \dfrac{u}{\cosh d} = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}t\right) \\ \dfrac{u}{\operatorname{senh}(-d)} = -\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}(1-t)\right) \Rightarrow \dfrac{u}{\operatorname{senh} d} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}t\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{u^2}{\cosh^2 d} + \frac{v^2}{\operatorname{senh}^2 d} = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) = 1.$$

Equação de uma semielipse sem os vértices $(\cosh d, 0)$ e $(-\cosh d, 0)$ contida no semiplano superior $v > 0$, se $d > 0$ ou contida no semiplano inferior $v < 0$, se $d < 0$.



Outras Funções Trigonométricas Complexas

A partir das funções $f(z) = \cos z$ e $g(z) = \operatorname{sen} z$, podemos, como no caso real, definir as funções

- Tangente: $\operatorname{tg} z = \dfrac{\operatorname{sen} z}{\cos z},\ z \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$
- Cotangente: $\operatorname{cotg} z = \dfrac{\cos z}{\operatorname{sen} z},\ z \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$
- Secante: $\sec z = \dfrac{1}{\cos z}, z \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$
- Cossecante: $\operatorname{cossec} z = \dfrac{1}{\operatorname{sen} z},\ z \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

Exemplo 8.5.

1. $\operatorname{tg}(ti) = \dfrac{\operatorname{sen}(ti)}{\cos(ti)} = \dfrac{i\operatorname{senh} t}{\cosh t} = i\operatorname{tgh} t, \forall t \in \mathbb{R}.$

2. $\operatorname{cotg}(\pi i) = \dfrac{1}{\operatorname{tg}(\pi i)} = \dfrac{1}{i\operatorname{tgh}\pi} = -i\operatorname{cotgh}\pi.$

3. $\sec(\pi + i\ln 3) = \dfrac{1}{\cos(\pi + i\ln 3)} = \dfrac{1}{-\frac{(3+1/3)}{2}} = -\dfrac{3}{5}.$

4. $\operatorname{cossec}\left(\dfrac{\pi}{4} + i\ln 2\right) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{4} + i\ln 2\right)} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{8}(5+3i)}$

$= \dfrac{2\sqrt{2}}{17}(5-3i).$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Prove que $|\operatorname{tgh} x| < 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Solução: Como $\operatorname{tgh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ e $e^x > 0$, temos

$-1 = \dfrac{-e^{-x}}{e^{-x}} < \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < \dfrac{e^x}{e^x} = 1 \Rightarrow |\operatorname{tgh} x| < 1.$ □

2. Prove que

a. $\overline{\operatorname{sen} z} = \operatorname{sen}\bar{z}$.

b. Se $z = x + yi$, então $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i\cos x \operatorname{senh} y$.

c. Prove que $|\operatorname{sen} z| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y}$.

Solução:

a. Temos $\overline{\operatorname{sen} z} = \overline{\left(\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)} = \dfrac{\overline{e^{iz}} - \overline{e^{-iz}}}{-2i} = \dfrac{e^{\overline{iz}} - e^{\overline{-iz}}}{-2i} =$
$\dfrac{e^{-i\bar{z}} - e^{i\bar{z}}}{-2i} = \dfrac{e^{i\bar{z}} - e^{-i\bar{z}}}{2i} = \operatorname{sen}\bar{z}.$ □

b. Temos $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(x+yi) = \dfrac{e^{i(x+yi)} - e^{-i(x+yi)}}{2i} =$
$= \dfrac{e^{-y}e^{xi} - e^{y}e^{-xi}}{2i} = \dfrac{e^{-y}(\cos x + i\operatorname{sen} x) - e^{y}(\cos x - i\operatorname{sen} x)}{2i}$
$= \cos x\left(\dfrac{e^{-y}-e^{y}}{2i}\right) + i\operatorname{sen} x\left(\dfrac{e^{y}+e^{-y}}{2i}\right) = \operatorname{sen} x\cosh y +$
$i\cos x\operatorname{senh} y.$ □

c. Como as funções reais $y=\cos x$, $y=\operatorname{sen} x$, $y=\cosh x$, $y=\operatorname{senh} x$ satisfazem

$$\begin{cases}\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x = 1\\ \cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1\end{cases},$$

resulta de b que
$|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x\cosh^2 y + \cos^2 x\operatorname{senh}^2 y = \operatorname{sen}^2 x(1+\operatorname{senh}^2 x)+$
$\cos^2 x\operatorname{senh}^2 y = \operatorname{sen}^2 x + (\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)\operatorname{senh}^2 y = \operatorname{sen}^2 x +$
$\operatorname{senh}^2 y$. Logo, $|\operatorname{sen} z| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y}$. □

3. Determine todos os números complexos z tais que $g(z)=\cos z$ é

a. real

b. imaginário puro

Solução:

a. Se $z=x+yi$, temos $w=\cos z = \cos x\cosh y - i\operatorname{sen} x\operatorname{senh} y$
e $\operatorname{Im}(w)=0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x\operatorname{senh} y = 0 \Rightarrow \begin{cases}\operatorname{senh} y = 0 \Rightarrow y=0 \quad \text{ou}\\ \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{cases}.$
Logo, $g(z)=\cos z$ é real se, e somente se, $z\in\mathbb{R}$ ou $z=k\pi+yi$, $k\in\mathbb{Z}$.

b. Se $z=x+yi$, temos $w=\cos z=\cos x\cosh y - i\operatorname{sen} x\operatorname{senh} y$
e $\operatorname{Re}(w)=0 \Leftrightarrow \cos x\cosh y = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} +$
$k\pi, k\in\mathbb{Z} \Rightarrow$

$$\operatorname{Im}(z) = \begin{cases}\operatorname{senh} y, & \text{se k é ímpar}\\ -\operatorname{senh} y, & \text{se k é par}\end{cases}.$$

Vemos, portanto, que $g(z)=\cos z$ é imaginário puro se, e somente se, $z=\dfrac{\pi}{2}+k\pi+yi$, $k\in\mathbb{Z}$, $y\neq 0$.

4. Prove que $\operatorname{sen}(w\pm z) = \operatorname{sen} w\cos z \pm \cos w\operatorname{sen} z$ e $\operatorname{sen} 2z = 2\operatorname{sen} z\cos z$.

Solução: Relembremos do Exemplo 8.4 que

$$\begin{cases} \operatorname{sen} w = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - w\right) \\ \cos w = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - w\right) \end{cases}.$$

Logo, pela propriedade c, temos

$$\operatorname{sen}(w \pm z) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (w \pm z)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - w\right) \mp z)\right)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - w\right)\cos z \pm \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - w\right)\operatorname{sen} z$$
$$= \operatorname{sen} w \cos z \pm \cos w \operatorname{sen} z. \qquad \square$$

Fazendo $w = z$ em $\operatorname{sen}(w + z) = \operatorname{sen} w \cos z + \cos w \operatorname{sen} z$, obtemos $\operatorname{sen} 2z = 2 \operatorname{sen} z \cos z$. $\square$

Exercícios Propostos

1. Determine todos os números complexos z tais que $g(z) = \operatorname{sen} z$ é
   a. real
   b. imaginário puro
2. Resolva em $\mathbb{C}$ a equação $\cos z = \operatorname{senh}(\pi)i$.
3. Resolva em $\mathbb{C}$ a equação $\operatorname{sen} z = i$.
4. Prove que as funções $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{cotg} z$, $\sec z$ e $\operatorname{cossec} z$ são periódicas e determine seus períodos.

Solução dos Exercícios Propostos

1. Determine todos os números complexos z tais que $g(z) = \operatorname{sen} z$ é
   a. real
   b. imaginário puro

Solução:

a. Se $z = x + yi$, temos
$w = \operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$ e $\operatorname{Im}(w) = 0$
$\Leftrightarrow \cos x \operatorname{senh} y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ou} \\ \cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \end{cases}$.
Logo, $g(z) = \operatorname{sen} z$ é real se, e somente se, $z \in \mathbb{R}$ ou $z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi + yi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b. Se $z = x + yi$, temos
$w = \operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$ e $\operatorname{Re}(w) = 0$
$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x \cosh y = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
$\operatorname{Im}(z) = \begin{cases} \operatorname{senh} y, \text{ se k é par} \\ -\operatorname{senh} y, \text{ se k é ímpar} \end{cases}$.
Vemos, portanto, que $g(z) = \operatorname{sen} z$ é imaginário puro se, e somente se, $z = k\pi + yi$, $k \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$.

2. Resolva em $\mathbb{C}$ a equação $\cos z = \operatorname{senh}(\pi)i$.

Solução: Vimos, no Exercício Resolvido 3-b, que $g(z) = \cos z$ é imaginário puro se, e somente se, $z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi + yi$, $k \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$.

Logo, $\cos z = \operatorname{senh}(\pi)i \Rightarrow z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi + yi \Rightarrow \operatorname{senh}(\pi)i = -i \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) \operatorname{senh} y$.

Como $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) = \begin{cases} 1, \text{ se k é par} \\ -1, \text{ se k é ímpar} \end{cases}$ e $g(x) = \operatorname{senh} x$, $x \in \mathbb{R}$, é uma função injetora, então

- Se k é ímpar, então $\operatorname{senh}(\pi) = \operatorname{senh} y \Rightarrow y = \pi$.
- Se k é par, então $\operatorname{senh}(\pi) = -\operatorname{senh} y \Rightarrow \operatorname{senh}(\pi) = \operatorname{senh}(-y) \Rightarrow y = -\pi$.

Portanto, $z = \dfrac{\pi}{2} + (2k+1)k\pi + \pi i$ ou $z = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi - \pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Resolva em $\mathbb{C}$ a equação $\operatorname{sen} z = i$.

Solução: Vimos, na letra b do Exercício Proposto 1, que $g(z) = \operatorname{sen} z$ é imaginário puro se, e somente se, $z = k\pi + yi$, $k \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$.

Logo, $\operatorname{sen} z = i \Rightarrow z = k\pi + yi \Rightarrow \cos(k\pi) \operatorname{senh}(\pi)i = i$.

Como $\cos(k\pi) = \begin{cases} 1, \text{ se k é par} \\ -1, \text{ se k é ímpar} \end{cases}$, então

- Se k é par, então $\operatorname{senh} y = 1$.
- Se k é ímpar, então $\operatorname{senh} y = -1$.

Vamos agora resolver a equação $\operatorname{senh} y = 1$. Temos

$$\frac{e^y - e^{-y}}{2} = 1 \Rightarrow 1 = \frac{e^y - \frac{1}{e^y}}{2} = \frac{(e^y)^2 - 1}{2e^y} \Rightarrow (e^y)^2 - 2e^y - 1 = 0.$$

Fazendo $e^y = w$, obtemos a equação do 2º grau

$$w^2 - 2w - 1 = 0 \Rightarrow w = 1 + \sqrt{2} \text{ ou } w = 1 - \sqrt{2}.$$

Mas $e^y > 0, \forall y \in \mathbb{R}$, assim a única raiz é $e^y = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow y = \ln(1 + \sqrt{2})$.

Se $\operatorname{senh} y = -1$, o mesmo raciocínio leva à equação do 2º grau $w^2 - 2w - 1 = 0, w = e^y$, cujas soluções são $\begin{cases} -1 + \sqrt{2} \\ -1 - \sqrt{2} \end{cases}$.

Como $e^y > 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$, a única raiz é $e^y = -1 + \sqrt{2} \Rightarrow y = \ln(\sqrt{2} - 1)$.

Portanto, $z = 2k\pi + \ln(\sqrt{2}+1)i$ ou $z = 2(k+1)\pi + \ln(\sqrt{2}-1)i$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. Prove que as funções $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{cotg} z$, $\sec z$ e $\operatorname{cossec} z$ são periódicas e determine seus períodos.

   Solução: Inicialmente, observemos que se $f(z)$ é uma função periódica com período ω, então a função $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ definida em $A = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) \neq 0\}$ é também periódica com período ω.

   De fato, se w é período de $f(z)$, então $g(z+\omega) = \frac{1}{f(z+\omega)} = \frac{1}{f(z)} = g(z)$.

   Assim, as funções $f(z) = \sec z = \frac{1}{\cos(z)}$ e $g(z) = \operatorname{cossec} z = \frac{1}{\operatorname{sen} z}$ são periódicas com período 2π, pois vimos que $f(z) = \cos z$ e $g(z) = \operatorname{sen} z$ têm período 2π.

   Vamos agora mostrar que $\operatorname{tg} z$ tem período π. Temos

   $$\operatorname{tg}(z+\pi) = \frac{\operatorname{sen}(z+\pi)}{\cos(z+\pi)} = \frac{-\operatorname{sen} z}{-\cos z} = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} = \operatorname{tg} z.$$

   Como $f(z) = \operatorname{tg} z$ tem período π, a função $g(z) = \operatorname{cotg} z = \frac{1}{\operatorname{tg} z}$ também tem período π.

Aula 9

Funções Hiperbólicas

Funções Hiperbólicas Complexas

As funções complexas cosseno hiperbólico $(f(z) = \cosh z)$ e seno hiperbólico $(g(z) = \operatorname{senh} z)$ são definidas como no caso real, isto é

!

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Se $z = x + yi$, temos

$$\begin{aligned}
\cosh z = \cosh(x+yi) &= \frac{e^{x+yi} + e^{-(x+yi)}}{2} = \\
&= \frac{e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) + e^{-x}(\cos y - i \operatorname{sen} y)}{2} = \\
&= \cos y \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) + i \operatorname{sen} y \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \\
&= \cosh x \cos y + i \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y. \qquad (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{senh} z = \operatorname{senh}(x+yi) &= \frac{e^{x+yi} - e^{-(x+yi)}}{2} = \\
&= \frac{e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) - e^{-x}(\cos y - i \operatorname{sen} y)}{2} = \\
&= \cos y \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) + i \operatorname{sen} y \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = \\
&= \operatorname{senh} x \cos y + i \cosh x \operatorname{sen} y. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Exemplo 9.1.

1. $\cosh(\pi i) = \dfrac{e^{\pi i} + e^{-\pi i}}{2} = \dfrac{-1-1}{2} = -1.$

2. $\operatorname{senh}\left(\dfrac{\pi}{2} i\right) = \dfrac{e^{\frac{\pi}{2}i} - e^{-\frac{\pi}{2}i}}{2} = \dfrac{i+i}{2} = i.$

3. $\operatorname{senh}\left(\ln 2 + \dfrac{\pi}{3} i\right) = \dfrac{e^{\ln 2 + \frac{\pi}{3}i} - e^{-(\ln 2 + \frac{\pi}{3}i)}}{2} =$

$$= \frac{2\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)}{2} = \frac{3+5\sqrt{3}i}{8}.$$

Módulo, Argumento e Conjugado das Funções $f(z) = \cosh z$ e $g(z) = \operatorname{senh} z$

Como $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$, temos

$$\overline{\cosh z} = \overline{\left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)} = \frac{\overline{e^z} + \overline{e^{-z}}}{2} = \frac{e^{\bar{z}} + e^{\overline{-z}}}{2} = \frac{e^{\bar{z}} + e^{-\bar{z}}}{2} = \cosh \bar{z}. \quad (3)$$

$$\overline{\operatorname{senh} z} = \overline{\left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)} = \frac{\overline{e^z} - \overline{e^{-z}}}{2} = \frac{e^{\bar{z}} - e^{\overline{-z}}}{2} = \frac{e^{\bar{z}} - e^{-\bar{z}}}{2} = \operatorname{senh} \bar{z}. \quad (4)$$

Se $z = x + yi$, vimos que $\cosh z = \cosh x \cos y + i \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y$ e $\operatorname{senh} z = \operatorname{senh} x \cos y + i \cosh x \operatorname{sen} y$, logo

$$
\begin{aligned}
|\cosh z|^2 &= \cosh^2 x \cos^2 y + \operatorname{senh}^2 x \operatorname{sen}^2 y = \\
&= (1 + \operatorname{senh}^2 x) \cos^2 y + \operatorname{senh}^2 x \operatorname{sen}^2 y = \\
&= \cos^2 y + \operatorname{senh}^2 x (\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y) = \\
&= \cos^2 y + \operatorname{senh}^2 x \Rightarrow \\
|\cosh z| &= \sqrt{\operatorname{senh}^2 x + \cos^2 y}. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\operatorname{senh} z|^2 &= \operatorname{senh}^2 x \cos^2 y + \cosh^2 x \operatorname{sen}^2 y = \\
&= \operatorname{senh}^2 x \cos^2 y + (1 + \operatorname{senh}^2 x) \operatorname{sen}^2 y = \\
&= \operatorname{senh}^2 x (\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y) + \operatorname{sen}^2 y = \\
&= \operatorname{senh}^2 x + \operatorname{sen}^2 y \Rightarrow \\
|\operatorname{senh} z| &= \sqrt{\operatorname{senh}^2 x + \operatorname{sen}^2 y}. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Vimos, na Aula 8, que $\cos y \geq 0$ no I e no IV quadrantes, $\cos y \leq 0$ no II e no III quadrantes, $\operatorname{sen} y \geq 0$ no I e no II quadrantes e $\operatorname{sen} \leq 0$ no III e no IV quadrantes do ciclo trigonométrico.

Além disso, $\cosh y \geq 1$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $\operatorname{senh} y \geq 0$ se $y \geq 0$ e $\operatorname{senh} y \leq 0$ se $y \leq 0$.

Logo, se $w = \cosh z = \cosh x \cos y + i \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y$, temos

- Se $y \in I$ e $x \geq 0$ ou $y \in IV$ e $x \leq 0$, então $w = \cosh z \in 1^{\text{o}}$ quadrante.
- Se $y \in II$ e $x \geq 0$ ou $y \in III$ e $x \leq 0$, então $w = \cosh z \in 2^{\text{o}}$ quadrante.
- Se $y \in II$ e $x \leq 0$ ou $y \in III$ e $x \geq 0$, então $w = \cosh z \in 3^{\text{o}}$ quadrante.
- Se $y \in I$ e $x \leq 0$ ou $y \in IV$ e $x \geq 0$, então $w = \cosh z \in 4^{\text{o}}$ quadrante.

Se $\theta = \arg(\cosh z) = \arg(\cosh(x + yi))$, então

i. Se $z = x + \left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) i$, $k \in \mathbb{Z}$, então $\cosh z = i \operatorname{senh} x$, se k é par e $\cosh z = -i \operatorname{senh} x$ se k é ímpar o que implica

$$\arg(\cosh z) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{se } x > 0 \text{ e } k \text{ é par ou se } x < 0 \text{ e } k \text{ é ímpar} \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{se } x < 0 \text{ e } k \text{ é par ou se } x > 0 \text{ e } k \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

ii. Se $y = \operatorname{Im}(z) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ e $\theta = \arctan(\operatorname{tgh} x \operatorname{tgh} y)$,

$$\text{então } \arg(\cosh z) = \begin{cases} \theta, \text{se } \cosh z \in 1^{\text{o}} \text{ quadrante} \\ \pi + \theta, \text{se } \cosh z \in 2^{\text{o}} \text{ quadrante} \\ \pi + \theta, \text{se } \cosh z \in 3^{\text{o}} \text{ quadrante} \\ 2\pi + \theta, \text{se } \cosh z \in 4^{\text{o}} \text{ quadrante} \end{cases}.$$

Se $w = \operatorname{senh} z = \operatorname{senh} x \cos y + i \cosh x \operatorname{sen} y$, temos

- Se $y \in I$ e $x \geq 0$ ou $y \in II$ e $x \leq 0$, então $w = \operatorname{senh} z \in 1^{\text{o}}$ quadrante.
- Se $y \in I$ e $x \leq 0$ ou $y \in II$ e $x \geq 0$, então $w = \operatorname{senh} z \in 2^{\text{o}}$ quadrante.

- Se $y \in III$ e $x \geq 0$ ou $y \in IV$ e $x \leq 0$, então $w = \operatorname{senh} z \in$ 3º quadrante.

- Se $y \in III$ e $x \leq 0$ ou $y \in IV$ e $x \geq 0$, então $w = \operatorname{senh} z \in$ 4º quadrante.

Se $\theta = \arg(\operatorname{senh} z) = \arg(\operatorname{senh}(x+yi))$, então

i. Se $x = 0$, então $\operatorname{senh} z = i \operatorname{sen} y$, logo

$$\arg(yi) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{se } y \in I \cup II \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{se } y \in III \cup IV \end{cases}, \; y \neq k\pi.$$

ii. Se $y = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, então $\operatorname{senh} z = i \cosh x$, se k é par e $\operatorname{senh} z = -i \cosh x$, se k é ímpar, o que implica

$$\arg\left(\operatorname{senh}\left(x + \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) i\right)\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{se } k \text{ é par} \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{se } k \text{ é par} \end{cases}.$$

iii. Se $x = \operatorname{Re}(z) \neq 0$, $y = \operatorname{Im}(z) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e $\theta = \arctan(\coth x \operatorname{tgh} y)$, então

$$\arg(\operatorname{senh} z) = \begin{cases} \theta, \text{se } \operatorname{senh} z \in 1^{\text{o}} \text{ quadrante} \\ \pi + \theta, \text{se } \operatorname{senh} z \in 2^{\text{o}} \text{ quadrante} \\ \pi + \theta, \text{se } \operatorname{senh} z \in 3^{\text{o}} \text{ quadrante} \\ 2\pi + \theta, \text{se } \operatorname{senh} z \in 4^{\text{o}} \text{ quadrante} \end{cases}.$$

Exemplo 9.2.

1. Se $\cosh z = 0$ resulta de (5) que $0 = |\cosh z|^2 = \operatorname{senh}^2 x + \cos^2 y \Rightarrow \begin{cases} \cos y = 0 \Rightarrow y = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{senh} x = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}.$

   Logo, $\cosh z = 0 \Leftrightarrow z = \left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) i, k \in \mathbb{Z}$.

2. Se $\operatorname{senh} z = 0$ resulta de (6) que $0 = |\operatorname{senh} z|^2 = \operatorname{senh}^2 x + \operatorname{sen}^2 y \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} y = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{senh} x = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$.

   Logo, $\operatorname{senh} z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ao contrário do que ocorre com a função real $f(x) = \cosh x$ que satisfaz $\cosh x \geq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$ a função trigonométrica complexa $f(z) = \cosh z$ pode assumir valores menores ou iguais a zero - temos $\cosh\left(\frac{\pi}{2} i\right) = 0$ e $\cosh(\pi i) = -1$.

PROPRIEDADES ALGÉBRICAS DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS COMPLEXAS $f(z) = \cosh z$ E $g(z) = \operatorname{senh} z$

Sejam w e $z \in \mathbb{C}$. As funções complexas $f(z) = \cosh z$ e $g(z) = \operatorname{senh} z$ possuem as seguintes propriedades

a. $\cosh(-z) = \cosh z$ e $\operatorname{senh}(-z) = -\operatorname{senh} z$.

b. $\cosh^2 z - \operatorname{sen}^2 z = 1$.

c. $\cos z = \cosh(iz)$ e $\cosh z = \cos(iz)$.

d. $\operatorname{sen} z = -i \operatorname{senh}(iz)$ e $\operatorname{senh} z = -i \operatorname{sen}(iz)$.

e. $\cosh(w \pm z) = \cosh w \cosh z \pm \operatorname{senh} w \operatorname{senh} z$.

f. $\operatorname{senh}(w \pm z) = \operatorname{senh} w \cosh z \pm \cosh w \operatorname{senh} z$.

g. $\cosh 2z = \cosh^2 z + \operatorname{senh}^2 z = 2\cosh^2 z - 1 = 1 + 2\operatorname{senh}^2 z$.

h. $\operatorname{senh} 2z = 2 \operatorname{senh} z \cosh z$.

Vamos provar a, b, c, d, e e g. Temos

a. i. $\cosh(-z) = \dfrac{e^{(-z)} + e^{-(-z)}}{2} = \dfrac{e^{-z} + e^{z}}{2} = \cosh z$

   ii) $\operatorname{senh}(-z) = \dfrac{e^{(-z)} - e^{-(-z)}}{2} = \dfrac{e^{-z} - e^{z}}{2} = -\operatorname{senh} z$. $\square$

b. $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = \left(\dfrac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2 =$

   $= \dfrac{e^{2z} + e^{-2z} + 2}{4} - \dfrac{(e^{2z} + e^{-2z} - 2)}{4} = 1.$ $\square$

c. $\cosh(iz) = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos z$ e, substituindo z por $-iz$ nessa expressão, obtemos $\cosh z = \cos(-iz) = \cos(iz)$. $\square$

d. $\operatorname{senh}(iz) = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2} = i\left(\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right) = i\operatorname{sen} z \Rightarrow \operatorname{sen} z = -i\operatorname{senh}(iz)$ e, substituindo z por $-iz$ nessa expressão, obtemos $-i\operatorname{senh} z = \operatorname{sen}(-iz) = -\operatorname{sen}(iz) \Rightarrow \operatorname{senh} z = -i\operatorname{sen}(iz)$. $\square$

e. Por c podemos escrever $\cosh(w \pm z) = \cos(i(w \pm z)) = \cos(iw \pm iz) = \cos(iw)\cos(iz) \mp \operatorname{sen}(iw)\operatorname{sen}(iz)$.

   Substituindo c e d na expressão acima, obtemos

   $\cosh(w \pm z) = \cosh w \cosh z \mp (i\operatorname{senh} w)(i\operatorname{senh} z) = \cosh w \cosh z \pm \operatorname{senh} w \operatorname{senh} z$. $\square$

g. Fazendo $w = z$ em e, resulta de b que $\cos 2z = \cosh^2 z + \operatorname{senh}^2 z = 2\cosh^2 z - 1 = 1 + 2\operatorname{senh}^2 z$. $\square$

A verificação das propriedades f e h é o Exercício Resolvido 1.

PERIODICIDADE DAS FUNÇÕES $f(z) = \cosh z$ E $g(z) = \operatorname{senh} z$

As funções $f(z) = \cosh z$ e $g(z) = \operatorname{senh} z$ são periódicas com período $2\pi i$, pois $\cosh 2\pi i = 1, \operatorname{senh} 2\pi i = 0$ e, por e e f, temos

$f(z+2\pi i) = \cosh(z+2\pi i) = \cosh z \cosh(2\pi i) + \operatorname{senh} z \operatorname{sen}(2\pi i) = \cosh z = f(z)$ e $g(z+2\pi i) = \operatorname{senh}(z+2\pi i) = \operatorname{senh} z \cosh(2\pi i) + \cosh z \operatorname{senh}(2\pi i) = \operatorname{senh} z = g(z)$.

Podemos estabelecer resultados análogos aos Teoremas 8.1 e 8.2 para as funções $f(z) = \cosh z$ e $g(z) = \operatorname{senh} z$.

Teorema 9.1.

Se $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$, então a função

$$\begin{cases} f : A \to \mathbb{C} - \{(-\infty, -1] \cup [1, \infty)\} \\ f(z) = \cosh z \end{cases} \quad \text{é bijetora.}$$

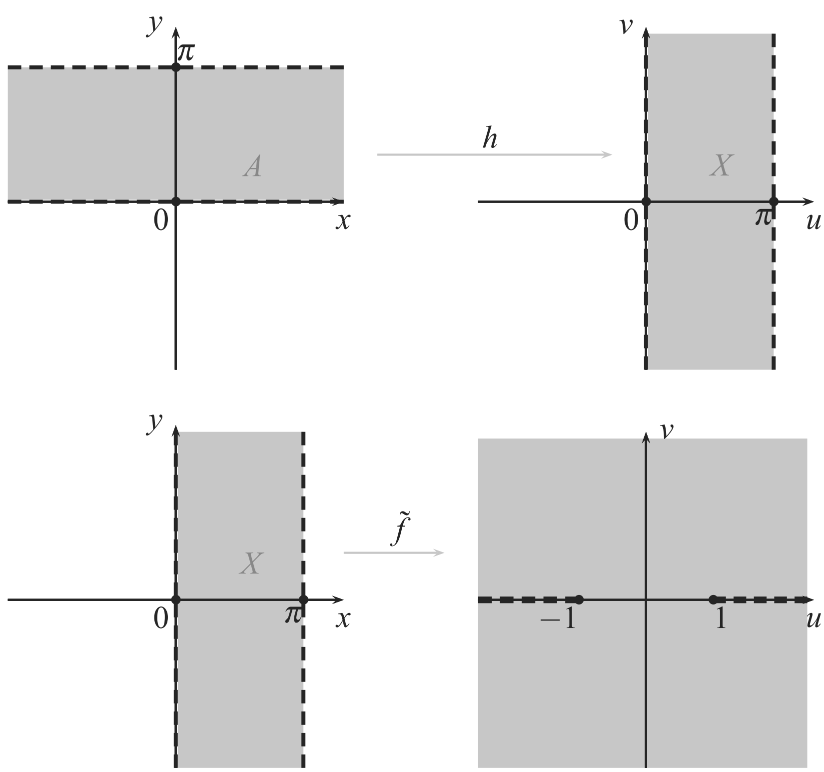
Prova

Vimos, no item c da seção anterior, que $\cosh z = \cos(-iz)$.

Seja $\begin{cases} h : A \to \mathbb{C} \\ h(z) = -iz \end{cases}$.

A função h corresponde geometricamente a uma rotação de 90^{o} no sentido horário com centro na origem. Logo, a imagem de h é o conjunto $X = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}(z) < \pi\}$ do Teorema 8.1 e, se $\tilde{f}(z)$ é a restrição da função $w = \cos z$ ao conjunto X, podemos escrever $f(z) = \cosh z = (\tilde{f} \circ h)(z)$.

Como $\tilde{f}$ é uma bijeção, pelo Teorema 8.1, e $h(z)$ é também bijetora, concluímos que a função $f = (\tilde{f} \circ h)(z)$ é bijetora. $\square$



Teorema 9.2.

Se $B = \left\{z \in \mathbb{C} \mid -\dfrac{\pi}{2} < \mathrm{Im}(z) < \dfrac{\pi}{2}\right\}$, então a função

$$\begin{cases} f : B \to \mathbb{C} - \{ti \mid t \leq -1 \text{ ou } t \geq 1\} \\ g(z) = \operatorname{senh} z \end{cases} \quad \text{é bijetora.}$$

Prova

Vimos, na Aula 8, que $\operatorname{senh} z = -i\operatorname{sen}(iz)$.

Seja $\begin{cases} h : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ h(z) = iz \end{cases}$.

A função h corresponde geometricamente a uma rotação de 90^{o} no sentido anti-horário com centro na origem.

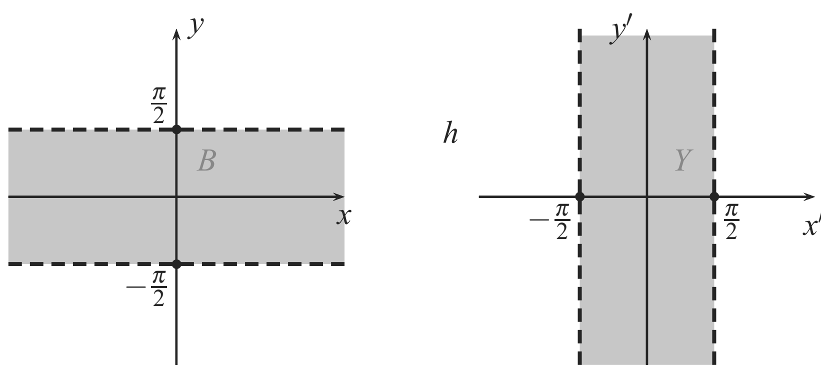
Seja $h_{|B}$ a restrição da função h ao conjunto B. A imagem de $h_{|B}$ é o conjunto $Y = \{z \in \mathbb{C} \mid -\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{Re}(z) < \dfrac{\pi}{2}\}$ do Teorema 8.2 e, se $\tilde{g}(z)$ é a restrição da função $w = \operatorname{sen} z$ ao conjunto Y, podemos escrever $g(z) = \operatorname{senh} z = (-h \circ \tilde{g} \circ h)(z)$ o que prova que $g(z)$ é injetora, pois é a composta de três funções bijetoras $h_{|B}, \tilde{g}$ e $-h$.

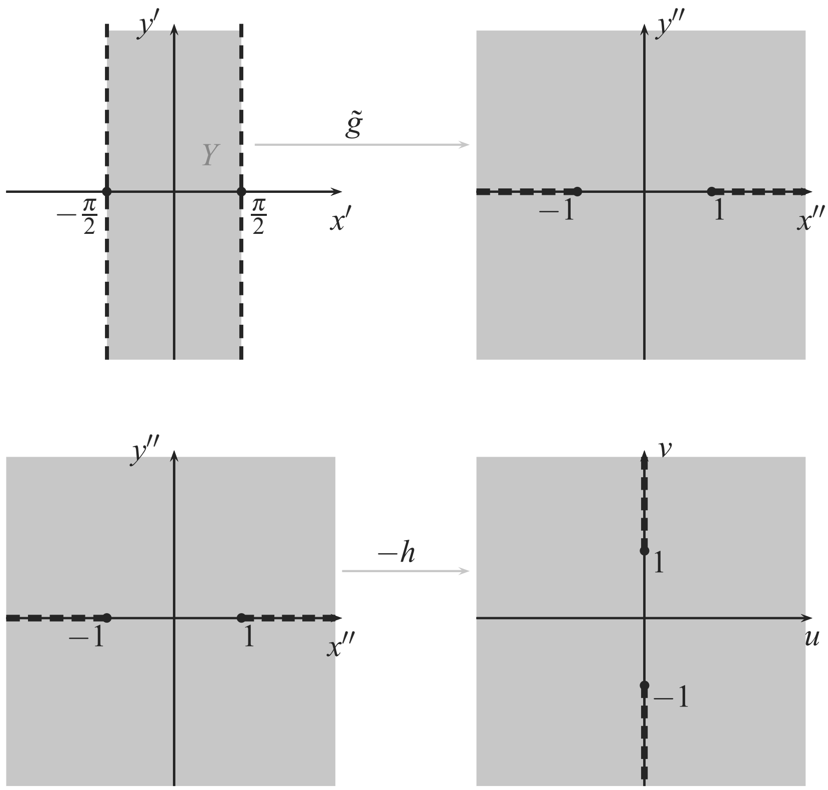
Observe que a função $-h$ corresponde geometricamente a uma rotação de 90^{o} no sentido horário com centro na origem. Deste modo, a imagem de $g(z)$, $\operatorname{Im}(g(z))$, é obtida pela rotação de 90^{o} no sentido horário com centro na origem da imagem de $\tilde{g}$, isto é, $\operatorname{Im}(g(z))$ é a imagem do conjunto $\mathbb{C} - \{(-\infty, -1] \cup [1, \infty)\}$ por uma rotação de 90^{o} no sentido horário com centro na origem.

Temos $-h((-\infty, -1]) = \{ti \mid t \geq 1\}$ e $-h([1, \infty)) = \{ti \mid t \leq -1\}$. Logo,

$$\operatorname{Im}(g(z)) = \mathbb{C} - (-h((-\infty, -1]) \cup -h([1, \infty))) =$$
$$= \mathbb{C} - \{ti \mid t \leq -1 \text{ ou } t \geq 1\}$$

que é o contradomínio de g, ou seja, a função injetora $g(z)$ é sobrejetora e isso completa a nossa prova. $\square$



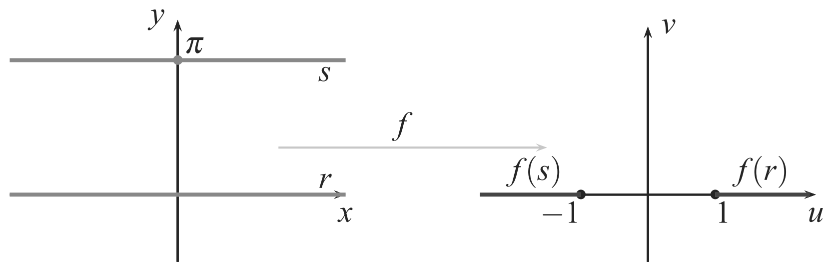


Transformações ou Mapeamentos das Funções $f(z) = \cosh z$ e $g(z) = \operatorname{senh} z$

Como $\cosh z = \cos(-iz) = \cos(h(z))$, onde $h(z) = -iz$ corresponde geometricamente a uma rotação de 90º no sentido horário com centro na origem, as transformações ou mapeamentos de $f(z) = \cosh(z)$ são obtidos pelas transformações ou mapeamentos pela função $\tilde{f} = \cos z$ das imagens dos subconjuntos do domínio de f pela função h.

Pelo Teorema 9.1, podemos restringir os mapeamentos de $f(z) = \cosh z$ ao conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$ e às retas horizontais $y = 0$ e $y = \pi$.

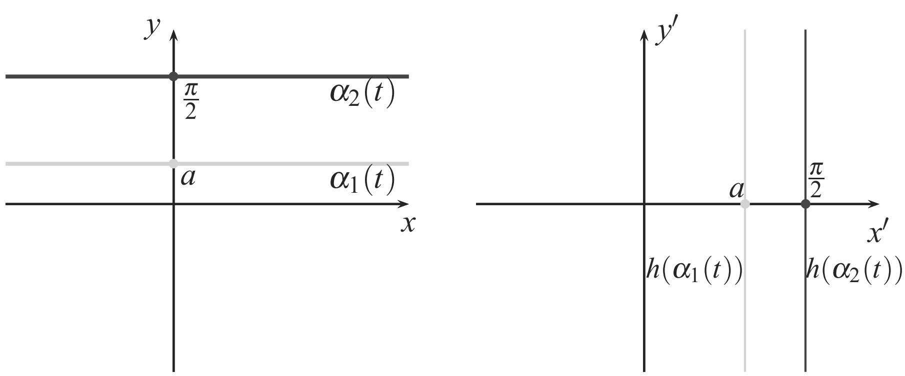
O eixo real $y = 0$ e a reta horizontal $y = \pi$ podem ser respectivamente parametrizados por $\alpha(t) = t$ e $\beta(t) = t + \pi i$, $t \in \mathbb{R}$. Assim, suas imagens pela função $f(z) = \cosh z$ são $f(\alpha(t)) = \cosh(\alpha(t)) = \cosh t$ e $f(\beta(t)) = \cosh(\beta(t)) = -\cosh t$, $t \in \mathbb{R}$.

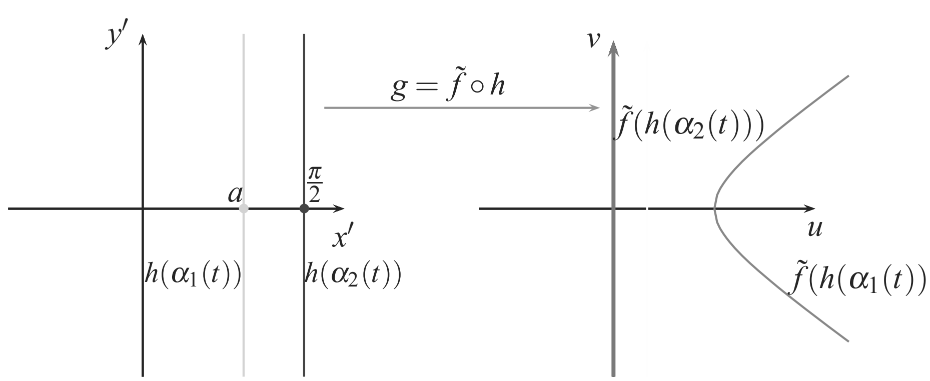


Vimos, na prova do Teorema 9.1, que as imagens das retas horizontais $y = 0$ e $y = \pi$ pela função h, são, respectivamente, as retas verticais $x = 0$ e $x = \pi$ e sabemos da Aula 8 que essas retas verticais são, respectivamente, mapeadas por $\cos z$ em $[1, \infty)$ e $(-\infty, -1]$.

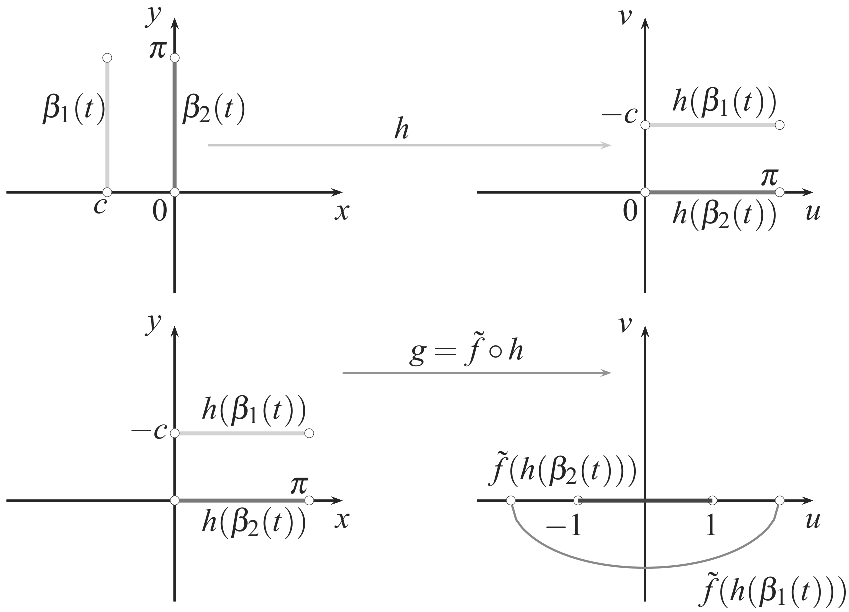
Seja $\alpha(t) = t + ai, a \in (0, \pi), t \in \mathbb{R}$, a reta horizontal $y = a$.

Temos $h(\alpha(t)) = a - ti, a \in (0, \pi), t \in \mathbb{R}$ (reta vertical $u = a$) e provamos, na Aula 8, que a imagem de $h(\alpha(t))$ por $\tilde{f}(z) = \cos z$ é o eixo imaginário, se $a = \dfrac{\pi}{2}$ e um ramo de hipérbole, caso contrário.





Seja $\beta(t) = c + t\pi i$, $c \in \mathbb{R}$, $t \in (0,1)$ o segmento vertical aberto de extremos $z_1 = c$ e $z_2 = c + \pi i$. Temos $h(\beta(t)) = t\pi - ci$, $c \in \mathbb{R}$, $t \in (0,1)$ (segmento horizontal aberto de extremos $z_1 = -ci$ e $z_2 = \pi - ci$) e provamos, na Aula 8, que a imagem de $h(\beta(t))$ por $\tilde{f}(z) = \cos z$ é o intervalo $(-1,1)$ se $c = 0$ e uma semielipse sem os vértices $(\cosh(-c), 0) = (\cosh c, 0)$ e $(-\cosh(-c), 0) = (-\cosh c, 0)$ contida no semiplano superior $v > 0$, se $c > 0$ ou contida no semiplano inferior $v < 0$, se $c < 0$.



Vamos agora estudar as transformações ou mapeamentos de $g(z) = \operatorname{senh} z$.

Seja $h(z)$ a rotação anti-horária de 90º com centro na origem, isto é, $h(z) = iz$.

Vimos, na prova do Teorema 9.2, que $\operatorname{senh} z = -i \operatorname{sen}(iz) = (-h \circ \tilde{g} \circ h)(z)$, onde

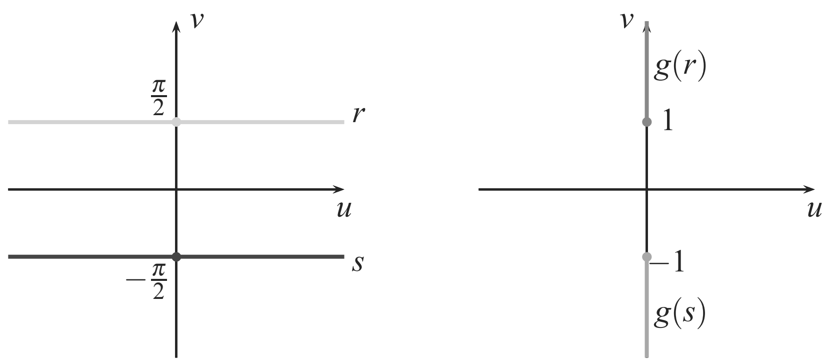
$$\begin{cases} \tilde{g} : \left\{ z \in \mathbb{C} \mid -\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{Re}(z) < \dfrac{\pi}{2} \right\} \to \mathbb{C} - \{(-\infty, -1] \cup [1, \infty)\} \\ \tilde{g}(z) = \operatorname{sen} z \end{cases}.$$

Pelo Teorema 9.2, podemos restringir os mapeamentos de $g(z) = \operatorname{senh} z$ ao conjunto B e às retas horizontais $y = -\dfrac{\pi}{2}$ e $y = \dfrac{\pi}{2}$.

As retas horizontais $y = \dfrac{\pi}{2}$ e $y = -\dfrac{\pi}{2}$ podem ser parametrizadas respectivamente por $\alpha(t) = t + \dfrac{\pi}{2}i$ e $\beta(t) = t - \dfrac{\pi}{2}i$, $t \in \mathbb{R}$.

Temos $\operatorname{senh}(\alpha(t)) = \operatorname{senh}\left(t + \dfrac{\pi}{2}i\right) = \cosh t\, i$ e $\operatorname{senh}(\beta(t)) = \operatorname{senh}\left(t - \dfrac{\pi}{2}i\right) = -\cosh t\, i$.

Logo, $g(\alpha(t)) = ti$, $t \geq 1$ e $g(\beta(t)) = -ti$, $t \geq 1$.



Seja $\gamma(t) = t + bi$, $b \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $t \in \mathbb{R}$, a reta horizontal $x = b$.

Se $b = 0, \gamma(t) = t \Rightarrow g(\gamma(t)) = g(t) = \operatorname{senh}(t), t \in \mathbb{R}$, ou seja, o eixo real coincide com sua imagem pela função $g(z) = \operatorname{senh} z$.

Suponhamos $b \neq 0$.

Temos $h(\gamma(t)) = \alpha(t) = -b + ti$, $t \in \mathbb{R}$.

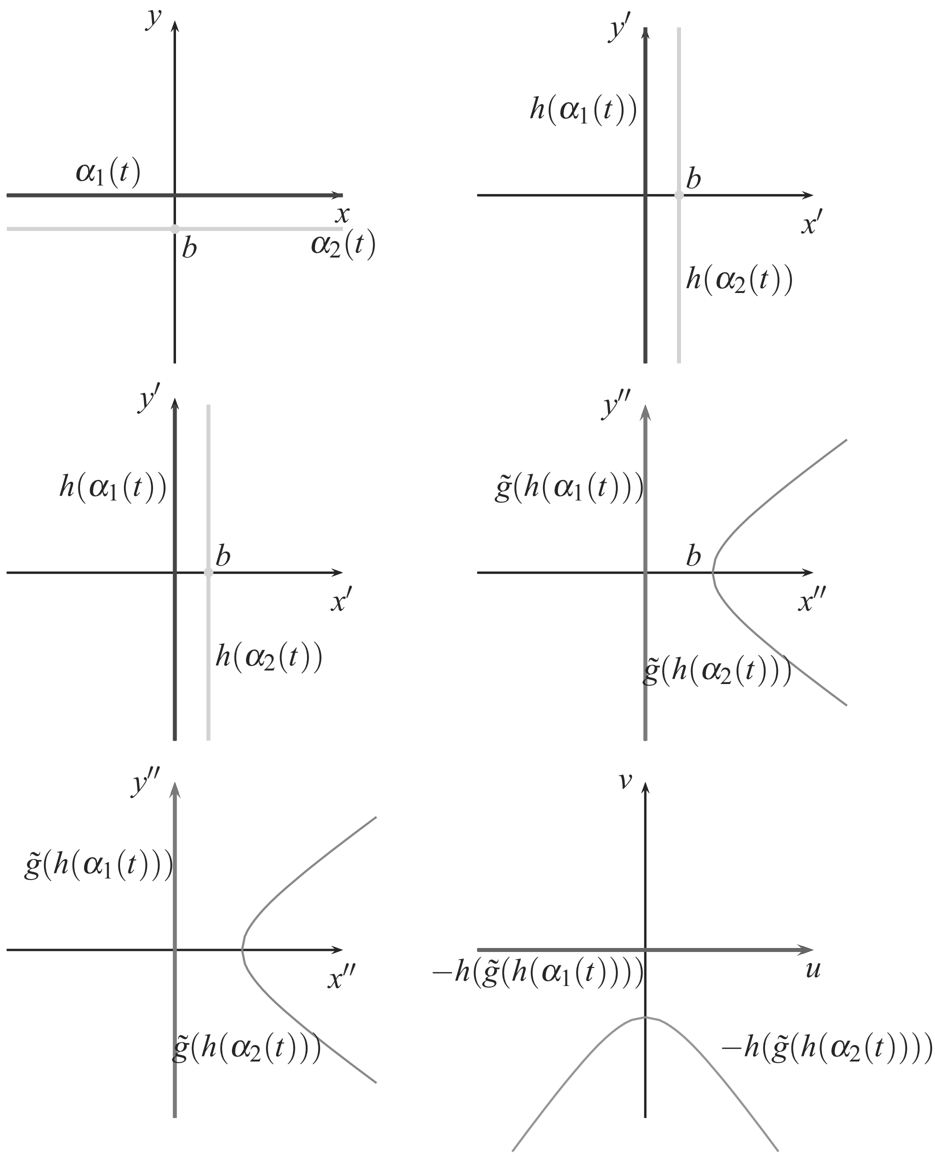
Ao estudarmos os mapeamentos de $\tilde{g}(z) = \operatorname{sen} z$, vimos que a reta vertical $\alpha(t) = -b + ti$, $t \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, tem como imagem

$$\begin{cases} \dfrac{u}{\cos(\frac{\pi}{2} + b)} = \cosh t \Rightarrow \dfrac{u}{-\operatorname{sen} b} = \cosh t \\ \dfrac{v}{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + b)} = -\operatorname{senh} t \Rightarrow \dfrac{v}{\cos b} = -\operatorname{senh} t \end{cases} \Rightarrow$$

$\dfrac{u^2}{\operatorname{sen}^2 b} - \dfrac{v^2}{\cos^2 b} = \cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$ (equação de um ramo de hipérbole com vértice em $u = -\operatorname{sen} b$).

A imagem desse ramo de hipérbole pela função $-h(z) = -iz$ é o ramo de hipérbole com vértice em $v = \operatorname{sen} b$ e equações paramétricas $\begin{cases} u = -\cos b \operatorname{senh} t \\ v = \operatorname{sen} b \cosh t \end{cases}$.

Se $-\dfrac{\pi}{2} < b < 0$, então o ramo está contido no "semiplano inferior", $v < 0$, e se $0 < b < \dfrac{\pi}{2}$, o ramo está contido no "semiplano superior", $v > 0$.



Seja $\delta(t) = d + t\dfrac{\pi}{2}i$, $d \in \mathbb{R}$, $t \in (-1,1)$, o segmento vertical aberto de extremos $z_1 = d - \dfrac{\pi}{2}i$ e $z_2 = d + \dfrac{\pi}{2}i$.

Se $d = 0$, então $\delta(t) = t\dfrac{\pi}{2}i \Rightarrow g(\delta(t)) = g\left(t\dfrac{\pi}{2}i\right) = \operatorname{senh}\left(t\dfrac{\pi}{2}i\right) = \operatorname{sen}\left(t\dfrac{\pi}{2}\right)i$, $t \in (-1,1) \Rightarrow g(\delta(t)) = ti$, $t \in (-1,1)$.

Suponhamos $d \neq 0$.

Temos $h(\delta(t)) = -t\dfrac{\pi}{2} + di$, $d \in \mathbb{R}$, $t \in (-1,1)$, segmento horizontal aberto de extremos $z_3 = -\dfrac{\pi}{2} + di$ e $z_4 = \dfrac{\pi}{2} + di$. Quando estudarmos os mapeamentos de $\tilde{g}(z) = \operatorname{sen} z$, demonstramos que o segmento horizontal $\alpha(t) = -t\dfrac{\pi}{2} + di$, $d \in \mathbb{R}$, $t \in (-1,1)$ tem como imagem

$$\begin{cases} \dfrac{u}{\cosh(-d)} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}(1-t)\right) \Rightarrow \dfrac{u}{\cosh d} = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}t\right) \\ \dfrac{v}{\operatorname{senh}(-d)} = -\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}(1-t)\right) \Rightarrow \dfrac{v}{\operatorname{senh} d} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}t\right) \end{cases} \Rightarrow$$

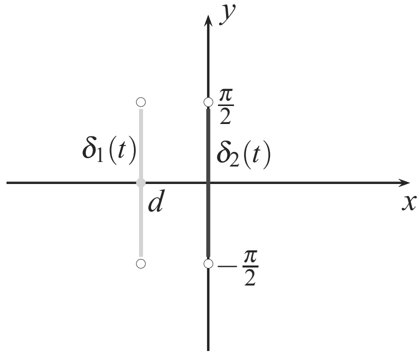
$$\frac{u^2}{\cosh^2 d} + \frac{v^2}{\operatorname{senh}^2 d} = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) = 1.$$

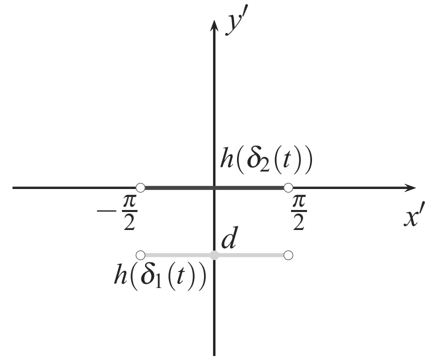
Equação de uma semielipse sem os vértices $(\cosh d, 0)$ e $(-\cosh d, 0)$ contida no semiplano superior $v > 0$, se $d > 0$ ou contida no semiplano inferior $v < 0$, se $d < 0$.

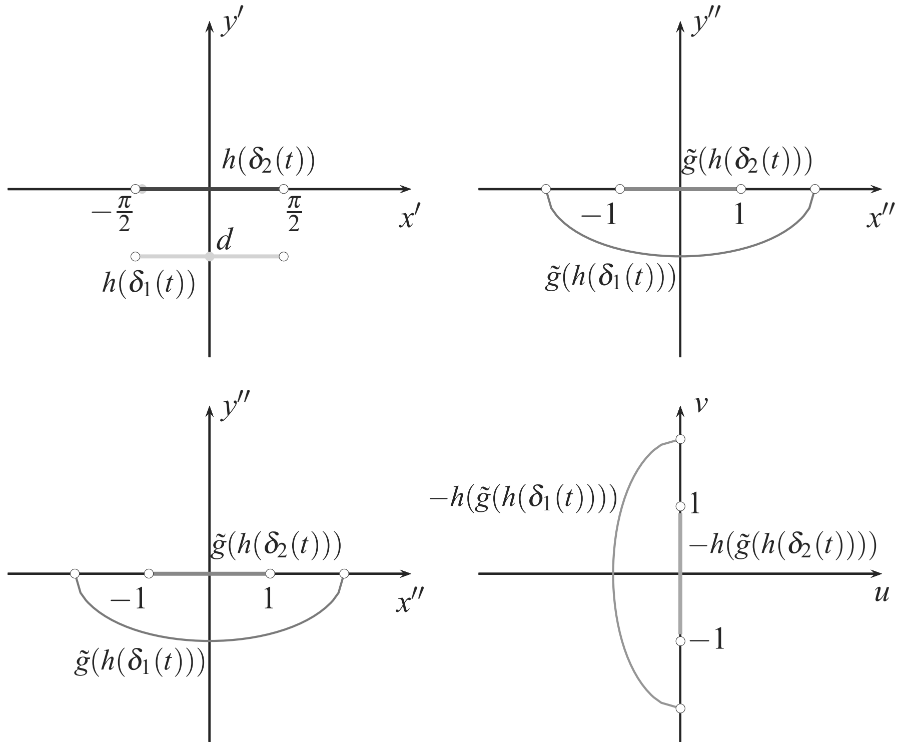
A imagem dessa semielipse pela função $-h(z) = -iz$ é a semielipse sem vértices $(0, -\cosh)$ e $(0, \cosh d)$ e equações paramétricas

$$\begin{cases} u = \operatorname{senh} d \cos\left(\dfrac{\pi}{2}t\right) \\ v = \cosh d \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}t\right) \end{cases}.$$

Se $d > 0$, então a semielipse está contida no semiplano $u > 0$ e se $d < 0$, a semielipse está contida no semiplano $u < 0$.







OUTRAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS COMPLEXAS

A partir das funções $f(z) = \cosh z$ e $g(z) = \operatorname{senh} z$, podemos, como no caso real, definir as funções

- Tangente Hiperbólica: $\operatorname{tgh} z = \dfrac{\operatorname{senh} z}{\cosh z}$, $z \neq \left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)i$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Cotangente Hiperbólica: $\operatorname{cotgh} z = \dfrac{\cosh z}{\operatorname{senh} z}$, $z \neq (k\pi)i$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Secante Hiperbólica: $\operatorname{sech} z = \dfrac{1}{\cosh z}$, $z \neq \left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)i$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Cossecante Hiperbólica: $\operatorname{cossech} z = \dfrac{1}{\operatorname{senh} z}$, $z \neq (k\pi)i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 9.3.

1. $\operatorname{tgh}(ti) = \dfrac{\operatorname{senh}(ti)}{\cosh(ti)} = \dfrac{-i\operatorname{sen}(-t)}{\cos(-t)} = \dfrac{-i(-\operatorname{sen} t)}{\cos t} = \dfrac{i\operatorname{sen} t}{\cos t} = \operatorname{tg} t i$, $t \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. $\coth(ti) = \dfrac{1}{\operatorname{tgh}(ti)} = \dfrac{1}{i\operatorname{tgh}(t)} = -\operatorname{cotgh}(t)i,\ t \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

3. $\operatorname{sech}(\ln 3 + \pi i) = \dfrac{1}{\cosh(\ln 3 + \pi i)} = \dfrac{2}{-(3+1/3)} = -\dfrac{3}{5}.$

4. $\operatorname{cossech}\left(\ln 2 + i\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\operatorname{senh}\left(\ln 2 + i\dfrac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{8}(3+5i)} =$

   $2\sqrt{2}\left(\dfrac{3-5i}{17}\right).$

Exercícios Resolvidos

1. Prove que

   a. $\operatorname{senh}(w \pm z) = \operatorname{senh} w \cosh z \pm \cosh w \operatorname{senh} z.$

   b. $\operatorname{senh} 2z = 2\operatorname{senh} z \cosh z.$

   Solução:

   a. Relembremo-nos da Aula 8 que

   $$\operatorname{sen}(iw \pm iz) = \operatorname{sen}(iw)\cos(iz) \pm \cos(iw)\operatorname{sen}(iz).$$

   Logo, pelas propriedades c e d, temos

   $$\begin{aligned}\operatorname{senh}(w \pm z) &= -i\operatorname{sen}(i(w \pm z)) = -i\operatorname{sen}(iw \pm iz) = \\ &= -i[\operatorname{sen}(iw)\cos(iz) \pm \cos(iw)\operatorname{sen}(iz)] = \\ &= -i(i\operatorname{senh} w \cosh z \pm \cosh w(i\operatorname{senh} z)) = \\ &= \operatorname{senh} w \cosh z \pm \cosh w \operatorname{senh} z. \qquad \square\end{aligned}$$

   b. Fazendo $w = z$ em

   $$\operatorname{senh}(w+z) = \operatorname{senh} w \cosh z + \cosh w \operatorname{senh} z,$$

   obtemos $\operatorname{senh} 2z = 2\operatorname{senh} z \cosh z.$ $\square$

2. Prove que

   a. $1 - \operatorname{tgh}^2 z = \operatorname{sech}^2 z,\ z \neq \left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)i,\ k \in \mathbb{Z}.$

   b. $\coth^2 z - 1 = \operatorname{cossech}^2 z,\ z \neq k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}.$

Solução:

a. Pela propriedade b, temos $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1 \ (*)$.
Se $\cosh z \neq 0$, isto é, se $z \neq \left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) i, k \in \mathbb{Z}$, resulta de $(*)$ que $\dfrac{\cosh^2 z}{\cosh^2 z} - \dfrac{\operatorname{senh}^2 z}{\cosh^2 z} = \dfrac{1}{\cosh^2 z} \Rightarrow 1 - \operatorname{tgh}^2 z = \operatorname{sech}^2 z, z \neq \left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) i, k \in \mathbb{Z}$. □

b. Pela propriedade b, temos $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1 \ (*)$.
Se $\operatorname{senh} z \neq 0$, isto é, se $z \neq k\pi i$, $k \in Z$, resulta de $(*)$ que $\dfrac{\cosh^2 z}{\operatorname{senh}^2 z} - \dfrac{\operatorname{senh}^2 z}{\operatorname{senh}^2 z} = \dfrac{1}{\operatorname{senh}^2 z} \Rightarrow \coth^2 z - 1 = \operatorname{cossech}^2 z$, $z \neq k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. □

3. Determine todos os números complexos z tais que $f(z) = \cosh z$ é

   a. real
   b. imaginário puro

Solução:

a. Se $z = x + yi$, temos $w = \cosh z = \cosh x \cos y + i \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y$
e $\operatorname{Im}(w) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{senh} x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{ou} \\ \operatorname{sen} y = 0 \Rightarrow y = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
Logo, $f(z) = \cosh z$ é real se, e somente se, $z = yi$ ou $z = x + k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

b. Se $z = x + yi$, temos $w = \cosh z = \cosh x \cos y + i \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y$
e $\operatorname{Re}(w) = 0 \Leftrightarrow \cosh x \cos y = 0 \Rightarrow \cos y = 0 \Rightarrow y = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Vemos, portanto, que $f(z) = \cosh z$ é imaginário puro se, e somente se, $z = x + \left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) i$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. Resolva em $\mathbb{C}$ a equação $\cosh z = i$.

Solução: Vimos, na letra b do exercício anterior, que $f(z) = \cosh z$ é imaginário puro se, e somente se, $z = x + \left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Assim,

$$\cosh z = i \Rightarrow z = x + \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) i \Rightarrow i \operatorname{senh} x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = i.$$

Como $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)=\begin{cases}1, \text{ se k é par}\\-1, \text{ se k é ímpar}\end{cases}$, então

- Se k é par, então $\operatorname{senh} x = 1$.
- Se k é ímpar, então $\operatorname{senh} x = -1$.

Vamos, agora, resolver a equação $\operatorname{senh} x = 1$. Temos

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 1 \Rightarrow 1 = \frac{e^x - \dfrac{1}{e^x}}{2} = \frac{(e^x)^2 - 1}{2e^x} \Rightarrow (e^x)^2 - 2e^x - 1 = 0.$$

Fazendo $e^x = w$, obtemos a equação do 2º grau $w^2 - 2w - 1 = 0 \Rightarrow w = 1+\sqrt{2}$ ou $w = 1-\sqrt{2}$.

Mas $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, assim a única raiz é $e^x = 1+\sqrt{2} \Rightarrow x = \ln(1+\sqrt{2})$.

Se $\operatorname{senh} x = -1$, o mesmo raciocínio leva à equação do 2º grau $w^2 - 2w - 1 = 0, w = e^y$, cujas soluções são $\begin{cases}-1+\sqrt{2}\\-1-\sqrt{2}\end{cases}$.

Como $e^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, a única raiz é $e^x = -1+\sqrt{2} \Rightarrow x = \ln(\sqrt{2}-1)$.

Logo, $z = \ln(\sqrt{2}+1) + \left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)i$ ou $z = \ln(\sqrt{2}-1) + \left(\dfrac{\pi}{2}+(2k+1)\pi\right)i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercícios Propostos

1. Determine todos os números complexos z tais que $f(z) = \operatorname{senh} z$ é
   a. real
   b. imaginário puro
2. Prove que $\left|\operatorname{tgh}\left(\dfrac{(1+i)\pi}{4}\right)\right| = 1$.
3. Resolva em $\mathbb{C}$ a equação $3\operatorname{senh} z = e^z$.
4. Prove que as funções: $\operatorname{tgh} z$, $\operatorname{cotgh} z$, $\operatorname{sech} z$ e $\operatorname{cossech} z$ são periódicas e determine seus períodos.

Solução dos Exercícios Propostos

1. Determine todos os números complexos z tais que $g(z) = \operatorname{senh} z$ é

   a. real

   b. imaginário puro

   Solução:

   a. Se $z = x + yi$, temos $w = \operatorname{senh} z = \operatorname{senh} x \cos y + i \cosh x \operatorname{sen} y$ e $\operatorname{Im}(w) = 0 \Leftrightarrow \cosh x \operatorname{sen} y = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} y = 0 \Rightarrow y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
   Logo, $g(z) = \operatorname{senh} z$ é real se, e somente se, $z = x + k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

   b. Se $z = x + yi$, temos $w = \operatorname{senh} z = \operatorname{senh} x \cos y + i \cosh x \operatorname{sen} y$ e $\operatorname{Re}(w) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{senh} x \cos y = 0$
   $$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{senh} x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{ou} \\ \cos y = 0 \Rightarrow y = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$
   Vemos, portanto, que $g(z) = \operatorname{senh} z$ é imaginário puro se, e somente se, $z = yi$ ou $z = x + \left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) i$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Prove que $\left| \operatorname{tgh}\left(\dfrac{(1+i)\pi}{4}\right) \right| = 1.$

   Solução: Seja $z = x + yi$. Vimos que
   $$|\operatorname{tgh} z|^2 = \left|\frac{\operatorname{senh} z}{\cosh z}\right|^2 = \frac{|\operatorname{senh} z|^2}{|\cosh z|^2} = \frac{\operatorname{senh}^2 x + \operatorname{sen}^2 y}{\operatorname{senh}^2 x + \cos^2 y}$$
   $$\Rightarrow \left| \operatorname{tgh}\left(\frac{(1+i)\pi}{4}\right) \right|^2 = \frac{\operatorname{senh}^2(\frac{\pi}{4}) + \operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{4})}{\operatorname{senh}^2(\frac{\pi}{4}) + \cos^2(\frac{\pi}{4})}.$$
   Como $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, temos
   $$|\operatorname{tgh} z|^2 = \frac{\operatorname{senh}^2(\frac{\pi}{4}) + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{\operatorname{senh}^2(\frac{\pi}{4}) + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = 1 \Rightarrow \left| \operatorname{tgh}\left(\frac{(1+i)\pi}{4}\right) \right| = 1. \quad \square$$

3. Resolva em $\mathbb{C}$ a equação $3 \operatorname{senh} z = e^z$.

   Solução: Temos $3 \operatorname{senh} z = e^z \Rightarrow 3\left(\dfrac{e^z - e^{-z}}{2}\right) = e^z \Rightarrow e^z = 3e^{-z} \Rightarrow e^z = \dfrac{3}{e^z} \Rightarrow e^{2z} = 3 \;\; (*)$

Como $w = e^z$ é uma função periódica com período $2\pi i$, as soluções da equação $(*)$ satisfazem

$$e^{2z} = 3 = e^{\ln 3 + 2k\pi i} \Rightarrow 2z = \ln 3 + 2k\pi i \Rightarrow z = \frac{\ln 3}{2} + k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}.$$

4. Prove que as funções: $\operatorname{tgh} z$, $\operatorname{cotgh} z$, $\operatorname{sech} z$ e $\operatorname{cossech} z$ são periódicas e determine seus períodos.

Solução: Provamos, no Exercício Proposto 4 da Aula 8, que se $f(z)$ é uma função periódica com período ω, então a função $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ definida em $A = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) \neq 0\}$ é também periódica com período ω.

Assim, as funções $f(z) = \operatorname{sech} z = \dfrac{1}{\cosh(z)}$ e $g(z) = \operatorname{cossech} z = \dfrac{1}{\operatorname{senh} z}$ são periódicas com período $2\pi i$, pois vimos que $f(z) = \cosh z$ e $g(z) = \operatorname{senh} z$ têm período $2\pi i$.

Vamos agora mostrar que $\operatorname{tgh} z$ tem período πi.

Pelas propriedades c e d, temos

$\operatorname{tgh}(z) = \dfrac{\operatorname{senh}(z)}{\cosh(z)} = -i\dfrac{\operatorname{sen}(iz)}{\cos(iz)} = -i\operatorname{tg}(zi) \Rightarrow \operatorname{tgh}(z+\pi i) = -i\operatorname{tg}((z+\pi i)i) = -i\operatorname{tgh}(zi-\pi) = -i\operatorname{tg}(zi) = \operatorname{tgh} z$, pois vimos, no Exercício Proposto 4 da Aula 8, que $w = \operatorname{tg} z$ tem período π, o que implica $\operatorname{tg}(z-\pi) = \operatorname{tg} z$.

Como $f(z) = \operatorname{tgh} z$ tem período πi, a função $g(z) = \operatorname{cotgh} z = \dfrac{1}{\operatorname{tgh} z}$ também tem período πi.

Aula 10

RAIZ N-ÉSIMA E LOGARITMO

INTRODUÇÃO

Recordemos da Aula 2 que, se $z \neq 0$, as soluções do sistema

$$(*) \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \\ \mathrm{sen}\,\theta = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} \end{cases},$$

são chamadas **argumentos** de z, $\arg(z)$.

Além disso, se θ_0 é uma solução particular de $(*)$ todas as demais soluções são da forma $\theta = \theta_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, logo $\arg(z) = \{\theta_0 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, onde θ_0 é uma solução particular de $(*)$.

Vimos, na Aula 2, que se $x = \mathrm{Re}(z) = 0$, então

$$\theta_0 = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, \text{ se } y = \mathrm{Im}(z) > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, \text{ se } y = \mathrm{Im}(z) < 0 \end{cases}$$

e, se $x \neq 0$ e $\varphi = \arctan\dfrac{y}{x}$, então

- Se $x > 0$ e $y \geq 0$, então $\theta_0 = \varphi$.
- Se $x < 0$ e $y \geq 0$, então $\theta_0 = \pi + \varphi$.
- Se $x < 0$ e $y \leq 0$, então $\theta_0 = \pi + \varphi$.
- Se $x > 0$ e $y \leq 0$, então $\theta_0 = 2\pi + \varphi$.

Nesse caso, $\theta_0 \in [0, 2\pi)$.

Lembrando da Aula 7 que $e^{\theta i} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$, $\arg(z)$ também pode ser definido como o conjunto das soluções de $e^{\theta i} = \dfrac{z}{|z|}$, $z \neq 0$.

Na Aula 3, provamos que dado $z_0 \neq 0$, $z_0 = r(\cos\theta + i\ \text{sen}\,\theta)$, a equação $z^n = z_0$ tem n soluções, chamadas **raízes n-ésimas** de z_0, $\sqrt[n]{z_0}$, dadas por

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\ \text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right),\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Vemos, portanto, que tomar argumento ou raiz n-ésima de um número complexo $z_0 \neq 0$ **não** define uma função de variável complexa, uma vez que a cada z_0 **não** podemos associar **um único** argumento ou raiz n-ésima, mas sim um conjunto de números complexos.

O argumento e a raiz n-ésima de complexos não nulos são exemplos do que chamamos **funções multiformes** ou **funções plurívocas**. Essa denominação é inapropriada, pois uma função multiforme **não** é uma função (que deve associar a **cada** elemento de seu domínio **um único** elemento de seu contradomínio). Contudo, a denominação função multiforme (tradução livre de "multiple-valued function" em inglês) é tradicional em livros texto de Análise Complexa e, por essa razão, nós a utilizaremos ao longo dessa aula.

Observe, entretanto, que podemos restringir o contradomínio de uma função multiforme de modo a torná-la uma função.

Por exemplo, podemos restringir o contradomínio de $F(z) = \arg(z)$ a intervalos da forma $I = (x_0, x_0 + 2\pi]$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Quando $\arg(z) \in (-\pi, \pi]$, o argumento é chamado **principal** e será denotado por $\text{Arg}(z)$.

Exemplo 10.1.

1. $z = 1 + \sqrt{3}i \Rightarrow \text{Arg}(z) = \dfrac{\pi}{3}$.
2. $z = -3 + 3i \Rightarrow \text{Arg}(z) = \dfrac{3\pi}{4}$.
3. $z = -i \Rightarrow \text{Arg}(z) = -\dfrac{\pi}{2}$
4. $z = 4\sqrt{3} - 4i \Rightarrow \text{Arg}(z) = -\dfrac{\pi}{6}$.

RAIZ N-ÉSIMA DE z

Inicialmente, trataremos do caso $n = 2$.

No caso real, a função $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, é definida como a função inversa de $g(x) = x^2$, logo há necessidade de restringir $g(x)$ a um domínio onde essa função seja **injetora**. É usual definir $g(x)$ em $[0,\infty)$ e, nesse caso, a imagem de $g(x)$ é $[0,\infty)$, portanto, $f(x) = \sqrt{x} = g^{-1}(x)$ tem domínio $[0,\infty)$ e imagem $[0,\infty)$.

No Teorema 10.1 determinaremos subconjuntos X e Y de $\mathbb{C}$ tais que $\begin{cases} f : X \to Y \\ f(z) = z^2 \end{cases}$ é bijetora.

Teorema 10.1.

Se $X = \left\{z \in \mathbb{C} \mid z = 0 \text{ ou } -\dfrac{\pi}{2} < \text{Arg}(z) \leq \dfrac{\pi}{2}\right\}$, então a função $\begin{cases} f : X \to \mathbb{C} \\ f(z) = z^2 \end{cases}$ é bijetora.

Prova

Vamos provar primeiro que $f(z)$ é injetora.

Temos $f(0) = 0$ e se $w, z \in X - \{0\}$ são tais que $w^2 = f(w) = f(z) = z^2$, então, escrevendo $w = |w|e^{\text{Arg}(w)i}$ e $z = |z|e^{\text{Arg}(z)i}$, obtemos

$|w|^2 e^{2\text{Arg}(w)i} = |z|^2 e^{2\text{Arg}(z)i} \Rightarrow$

$$\begin{cases} |w|^2 = |z|^2 \Rightarrow |w| = |z| \ \ (i). \\ 2\text{Arg}(w) = 2\text{Arg}(z) + 2k\pi \Rightarrow \text{Arg}(w) = \text{Arg}(z) + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \\ |\text{Arg}(z) - \text{Arg}(w)| = k\pi, k \in \{0, 1, \ldots.\} \ \ (ii). \end{cases}$$

Mas $w,\ z \in X - \{0\} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} < \text{Arg}(w) \leq \dfrac{\pi}{2} \\ -\dfrac{\pi}{2} < \text{Arg}(z) \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow$

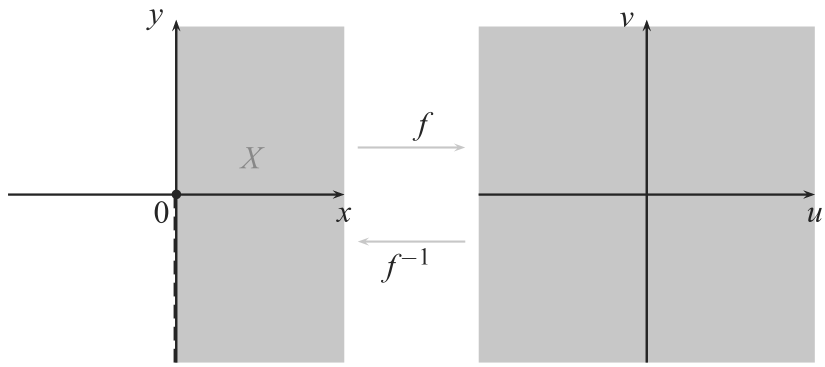
$-\pi < \text{Arg}(z) - \text{Arg}(w) < \pi \Rightarrow |\text{Arg}(z) - \text{Arg}(w)| < \pi$ o que junto com (ii) implica $k = 0 \Rightarrow |\text{Arg}(z) - \text{Arg}(w)| = 0 \Rightarrow \text{Arg}(z) = \text{Arg}(w)$ (iii).

Resulta de (i) e (iii) que $w = z$ o que prova a injetividade de f.

Provaremos agora que f é sobrejetora, ou seja, que dado $z_0 \in \mathbb{C}$ a equação $f(z) = z_0$ possui solução.

Se $z_0 = 0$, então $z = 0$ é obviamente solução.

Se $z_0 \neq 0$, podemos escrever $z_0 = |z_0|e^{\mathrm{Arg}(z_0)i}$ e, se $z = \sqrt{|z_0|}e^{\frac{\mathrm{Arg}(z_0)}{2}i}$, temos $f(z) = \left(\sqrt{|z_0|}e^{\frac{\mathrm{Arg}(z_0)}{2}i}\right)^2 = |z_0|e^{\mathrm{Arg}(z_0)i} = z_0$ o que mostra que f é sobrejetora e completa a nossa prova. $\square$



Na prova do Teorema 10.1, ao resolvermos a equação $f(z) = z_0$ ainda determinamos a inversa da função $f^{-1}(z) = \sqrt{z}$. De fato, podemos enunciar o

Corolário 10.2.

A inversa da função $\begin{cases} f : X \to \mathbb{C} \\ f(z) = z^2 \end{cases}$ definida no Teorema 10.1 é a função $\begin{cases} f^{-1} : \mathbb{C} \to X \\ f^{-1}(z) = \begin{cases} f(0) = 0 \\ \sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{i\frac{\mathrm{Arg}(z)}{2}}, \text{ se } z \neq 0. \end{cases} \end{cases}$

Prova

Vimos, na prova da sobrejetividade da função f do Teorema 10.1, que $f(0) = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = 0$ e que dado $z \neq 0$, temos $f\left(\sqrt{|z|}e^{\frac{\mathrm{Arg}(z)}{2}i}\right) = z \Rightarrow f^{-1}(z) = \sqrt{|z|}e^{\frac{\mathrm{Arg}(z)}{2}i}$. $\square$

Observe que $f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{\frac{\mathrm{Arg}(z)}{2}i}$ é obtida da função multiforme $F(z) = \sqrt{z} = \{\sqrt{|z|}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta+2k\pi}{2}\right)\right),$

$k = 0, 1, \ldots, n-1\}$, fazendo $k = 0$. Chamaremos $f(z) = \sqrt{z}$ de **valor principal da raiz quadrada**.

Um raciocínio inteiramente análogo nos permite enunciar o Teorema 10.2 e o Corolário 10.2, cujas provas são, respectivamente, as letras a e b do Exercício Resolvido 1.

Teorema 10.3.

Se $X = \left\{z \in \mathbb{C} \mid z = 0 \text{ ou } -\dfrac{\pi}{n} < \operatorname{Arg}(z) \leq \dfrac{\pi}{n}\right\}$, então a função $\begin{cases} f : X \to \mathbb{C} \\ f(z) = z^n \end{cases}$ é bijetora.

Corolário 10.4.

A inversa da função $\begin{cases} f : X \to \mathbb{C} \\ f(z) = z^n \end{cases}$ definida no Teorema 10.2 é a função

$$\begin{cases} f^{-1} : \mathbb{C} \to X \\ f^{-1}(z) = \begin{cases} f^{-1}(0) = 0 \\ \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{\frac{\operatorname{Arg}(z)}{n}i}, \text{ se } z \neq 0. \end{cases} \end{cases}$$

Observe que $f(z) = \sqrt{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{\frac{\operatorname{Arg}(z)}{n}i}$ é obtida da função multiforme $F(z) = \sqrt[n]{z} = \{\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1\}$, fazendo $k = 0$. Chamaremos $f(z) = \sqrt[n]{z}$ de **valor principal da raiz n-ésima**.

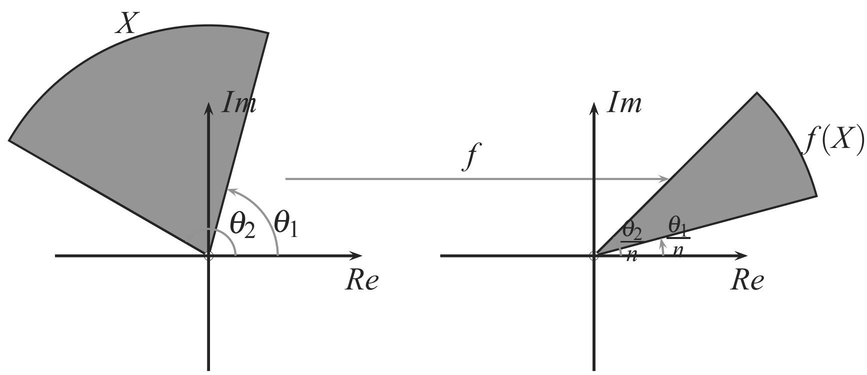
Exemplo 10.2.

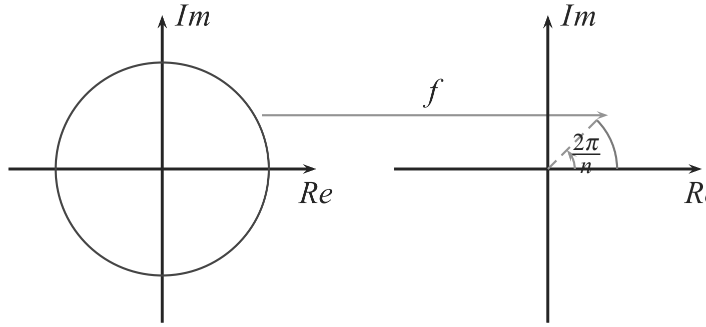
1. Se $z = -3 + 3i = 3\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$, então o valor principal da raiz quadrada de z é $\sqrt{z} = \sqrt[4]{18}e^{\frac{3\pi}{8}i}$.
2. Se $z = i = e^{\frac{\pi}{2}i}$, então o valor principal da raiz cúbica de z é $\sqrt[3]{z} = e^{\frac{\pi}{6}i} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$.

TRANSFORMAÇÕES OU MAPEAMENTOS DE $f(z) = \sqrt[n]{z}$

Considere o setor circular $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le r \text{ e } \theta_1 \le \text{Arg}(z) \le \theta_2\}$ e a função $f(z) = \sqrt[n]{z}$. A imagem de X pela função $f(z)$ é o setor circular $Y = f(X) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le \sqrt[n]{r} \text{ e } \frac{\theta_1}{n} \le \text{Arg}(z) \le \frac{\theta_2}{n}\}$.

Em particular, a imagem do círculo $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$ é o arco de círculo $Y = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \sqrt[n]{r} \text{ e } 0 \le \text{Arg}(z) \le \frac{2\pi}{n}\}$.





LOGARITMO DE z

Dado $z_0 \neq 0$, considere a equação $e^z = z_0$. Se escrevermos $z_0 = |z_0|e^{\text{Arg}(z_0)i}$, obteremos $e^z = |z_0|e^{\text{Arg}(z_0)i} = e^{\ln|z_0| + i\text{Arg}(z_0)} \Rightarrow z = \ln|z_0| + (\text{Arg}(z_0) + 2k\pi)i$, $k \in \mathbb{Z}$, pois vimos, na Aula 7, que a função $g(z) = e^z$ é periódica de período $2\pi i$.

Relembrando que $\{\text{Arg}(z_0) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \arg(z)$, podemos escrever

$$e^z = z_0 \Leftrightarrow z = \ln|z_0| + \arg(z_0).$$

Chamaremos esse conjunto de soluções da equação $e^z = z_0$ de **Logaritmo** de z_0, $\text{Log}(z_0)$, e, de modo inteiramente análogo ao que fizemos para a raiz n-ésima de z, definiremos a função multiforme Logaritmo de z, $z \neq 0$, por $F(z) = \text{Log}(z) = \{\ln|z| + (\text{Arg}(z) + 2k\pi)i,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Contudo, temos interesse em, como no caso real, definir a função logarítmica complexa como a função inversa da função exponencial $f(z) = e^z$.

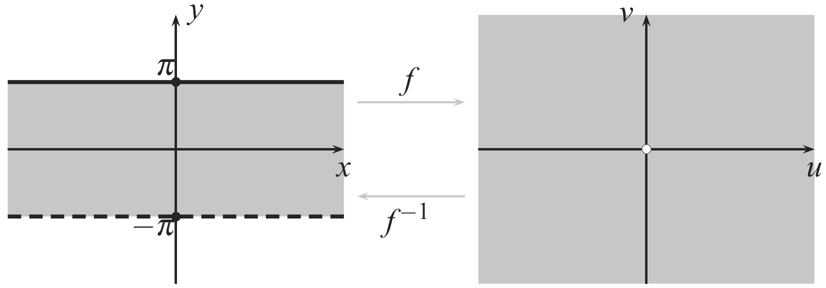
Vimos, na Aula 7, que se $A = \{z \in \mathbb{C} \mid y_0 < \text{Im} \leq y_0 + 2\pi\}$, então a função $\begin{cases} f: A \to \mathbb{C} - \{0\} \\ f(z) = e^z \end{cases}$ é bijetora.

Fazendo $y_0 = -\pi$, obtemos

$$\begin{cases} f: \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \text{Im} \leq \pi\} \to \mathbb{C} - \{0\} \\ f(z) = e^z \end{cases}.$$

Para obtermos a função inversa $f^{-1}(z)$, devemos então resolver a equação $e^z = z_0$, cujas soluções sabemos que são da forma $z = \ln|z_0| + (\text{Arg}(z_0) + 2k\pi)i$, $k \in \mathbb{Z}$. Mas a imagem de $f^{-1}(z)$ é o domínio de $f(z)$ dada pelo Teorema 10.1, ou seja, $\text{Im}(f^{-1}) = \text{Dom}(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \text{Im} \leq \pi\} \Rightarrow -\pi < \text{Arg}(z_0) + 2k\pi \leq \pi \Rightarrow -(2k+1)\pi < \text{Arg}(z_0) \leq (1-2k)\pi \Rightarrow k = 0$, pois $-\pi < \text{Arg}(z_0) \leq \pi$.

Portanto, como fizemos com a raiz n-ésima, podemos definir o **valor principal do logaritmo** por $\text{Log}(z) = \ln|z| + \text{Arg}(z)i$, $z \neq 0$, e ele é obtido fazendo $k = 0$ na função multiforme $F(z) = \text{Log}(z) = \{\ln|z| + (\text{Arg}(z) + 2k\pi)i,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

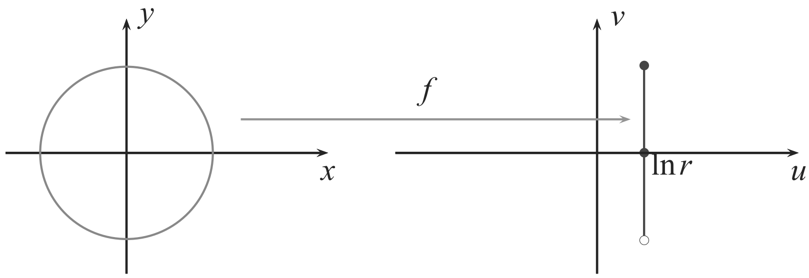


Exemplo 10.3.

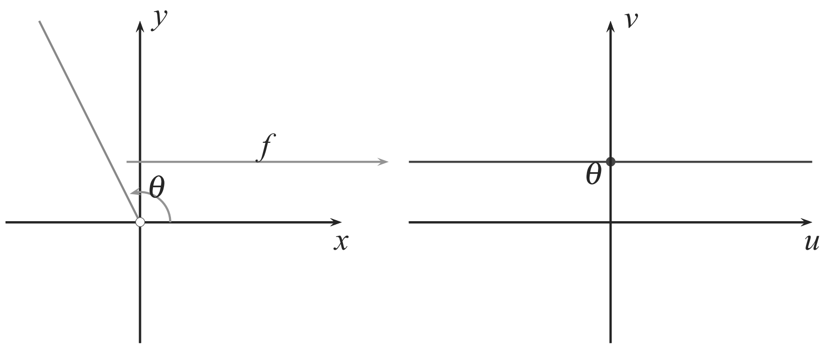
1. Se $z = -1 = e^{\pi i}$, então o valor principal do logaritmo de z é $\text{Log}z = \pi i$.
2. Se $z = ei = ee^{\frac{\pi}{2}i}$, então o valor principal do logaritmo de z é $\text{Log}z = 1 + \frac{\pi}{2}i$.
3. Se $z = -1 - \sqrt{3}i = 2e^{-\frac{2\pi}{3}i}$, então o valor principal do logaritmo de z é $\text{Log}z = \ln 2 - \frac{2\pi}{3}i$.

Transformações ou Mapeamentos da Função $f(z) = \text{Log}(z)$

Considere o círculo $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$. Como $f(z) = \text{Log}(z) = \ln|z| + \text{Arg}(z)i$, a imagem de X pela função f é o segmento vertical aberto $\alpha(t) = \ln r + ti,\ t \in (-\pi, \pi]$.



Seja $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Arg}(z) = \theta\}$ (semirreta aberta na origem e que faz um ângulo θ com o eixo real), a imagem de A pela função f é a reta horizontal $\beta(t) = \ln t + \theta i$, $\theta \in (-\pi, \pi]$, $t > 0$.



POTÊNCIAS GENERALIZADAS

Podemos utilizar a função exponencial $f(z) = e^z$ e a função multiforme $F(z) = \text{Log}(z)$ para definir a função multiforme potência generalizada $G(z) = z^{z_o}$, $z \neq 0$.

Temos $G(z) = z^{z_o} = e^{z_0 \text{Log}(z)} = \{e^{z_0 \cdot (\ln|z| + (\text{Arg}(z) + 2k\pi)i)}$, $k \in \mathbb{Z}\}$.

Analogamente ao que fizemos nas Seções: Raiz n-ésima de z e Logaritmo de z, definimos a função potência generalizada por

$$\begin{cases} f : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C} \\ f(z) = z^{z_o} = e^{z_0 \cdot (\ln|z| + \text{Arg}(z)i)} \end{cases}.$$

Também definimos o **valor principal da potência** como $z^{z_0} = e^{z_0 \cdot (\ln|z| + \text{Arg}(z)i)}$, $z \neq 0$.

Exemplo 10.4.

1. O valor principal da potência $z = i^i$ é $z = e^{i \text{Log}(i)} = e^{i\left(\ln 1 + \frac{\pi}{2} i\right)} = e^{-\frac{\pi}{2}}$.
2. O valor principal da potência $z = (-1)^i$ é $z = e^{i \text{Log}(-1)} = e^{i(\ln 1 + \pi i)} = e^{-\pi}$.
3. O valor principal da potência $z = (1+i)^{1+i}$ é $z = e^{(1+i)\text{Log}(1+i)} = e^{(1+i)(\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} i)} = e^{\ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4} + (\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4})i} = e^{\ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}}\left(\cos\left(\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. a. Prove o Teorema 10.2.
   Se $X = \left\{z \in \mathbb{C} \mid z = 0 \text{ ou } -\dfrac{\pi}{n} < \text{Arg}(z) \leq \dfrac{\pi}{n}\right\}$,
   então a função $\begin{cases} f : X \to \mathbb{C} \\ f(z) = z^n \end{cases}$ é bijetora.

b. Prove o Corolário 10.2.

A inversa da função $\begin{cases} f : X \to \mathbb{C} \\ f(z) = z^2 \end{cases}$ definida no Teorema 10.3 é a função

$$\begin{cases} f^{-1} : \mathbb{C} \to X \\ f^{-1}(z) = \begin{cases} f(0) = 0 \\ \sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{i\frac{\mathrm{Arg}(z)}{2}}, \text{ se } z \neq 0. \end{cases} \end{cases}$$

Solução:

a. Vamos provar primeiro que $f(z)$ é injetora.

Temos $f(0) = 0$ e se $w, z \in X - \{0\}$ são tais que $w^n = f(w) = f(z) = z^n$, então, escrevendo , $w = |w|e^{\mathrm{Arg}(w)i}$ e $z = |z|e^{\mathrm{Arg}(z)i}$, obtemos $|w|^n e^{n\mathrm{Arg}(w)i} = |z|^n e^{n\mathrm{Arg}(z)i} \Rightarrow$

$$\begin{cases} |w|^n = |z|^n \Rightarrow |w| = |z| \ (i). \\ n\mathrm{Arg}(w) = n\mathrm{Arg}(z) + 2k\pi \Rightarrow \mathrm{Arg}(w) = \mathrm{Arg}(z) + \dfrac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \\ |\mathrm{Arg}(z) - \mathrm{Arg}(w)| = \dfrac{2k\pi}{n}, k \in \{0, 1, ...\} \ (ii). \end{cases}$$

Mas $w, z \in X - \{0\} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{n} < \mathrm{Arg}(w) \leq \dfrac{\pi}{n} \\ -\dfrac{\pi}{n} < \mathrm{Arg}(z) \leq \dfrac{\pi}{n} \end{cases} \Rightarrow -\dfrac{2\pi}{n} <$ $\mathrm{Arg}(z) - \mathrm{Arg}(w) < \dfrac{2\pi}{n} \Rightarrow |\mathrm{Arg}(z) - \mathrm{Arg}(w)| < \dfrac{2\pi}{n}$ o que junto com (ii) implica $k = 0 \Rightarrow |\mathrm{Arg}(z) - \mathrm{Arg}(w)| = 0 \Rightarrow \mathrm{Arg}(z) = \mathrm{Arg}(w)$ (iii).

Resulta de (i) e (iii) que $w = z$ o que prova a injetividade de f.

Provaremos agora que f é sobrejetora, ou seja, que dado $z_0 \in \mathbb{C}$ a equação $f(z) = z_0$ possui solução.

Se $z_0 = 0$, então $z = 0$ é obviamente solução.

Se $z_0 \neq 0$ podemos escrever $z_0 = |z_0|e^{\mathrm{Arg}(z_0)i}$ e, se $z = \sqrt[n]{|z_0|}e^{\frac{\mathrm{Arg}(z_0)}{n}i}$, temos $f(z) = \left(\sqrt[n]{|z_0|}e^{\frac{\mathrm{Arg}(z_0)i}{n}}\right)^n = |z_0|e^{\mathrm{Arg}(z_0)i} = z_0$ o que mostra que f é sobrejetora e completa a nossa prova. $\square$

b. Vimos, na prova da sobrejetividade da função f da letra a, que $f(0) = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = 0$ e que dado $z \neq 0$, temos $f\left(\sqrt[n]{|z|}e^{\frac{\mathrm{Arg}(z)}{n}i}\right) = |z|e^{\mathrm{Arg}(z)i} = z \Rightarrow f^{-1}(z) = \sqrt[n]{|z|}e^{\frac{\mathrm{Arg}(z)}{n}i}$.

$\square$

2. Determine as funções reais $u(x,y)$ e $v(x,y)$ tais que $f(z) = \text{Log}(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

Solução: Se $z \neq 0$, temos $f(z) = \text{Log}(z) = \ln|z| + \text{Arg}(z)i$.

Logo, $u(x,y) = \ln|z| = \ln(\sqrt{x^2+y^2}) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ e $v(x,y) = \text{Arg}(z)$.

A função $\text{Arg}(z)$ pode ser definida como

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, \text{ se } x = 0 \text{ e } y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, \text{ se } x = 0 \text{ e } y < 0 \\ \text{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) \text{ se } x \neq 0 \text{ e } z \in 1^{\text{o}} \text{ ou } 4^{\text{o}} \text{ quadrantes} \\ \pi + \text{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) \text{ se } x \neq 0 \text{ e } z \in 2^{\text{o}} \text{ quadrante} \\ -\pi + \text{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) \text{ se } x \neq 0 \text{ e } z \in 3^{\text{o}} \text{ quadrante} \end{cases}.$$

3. a. Calcule o valor principal do logaritmo de $z = e^2(-\sqrt{3}+i)$.

   b. Calcule o valor principal $z = i^{\sqrt{2}}$.

Solução:

a. Temos $z = 2e^2e^{\frac{5\pi}{6}i} = 2e^{2+\frac{5\pi}{6}i} \Rightarrow \text{Log}(z) = \ln 2 + 2 + \frac{5\pi}{6}i$.

b. Temos $z = i^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\text{Log}(i)} = e^{\frac{\sqrt{2}\pi}{2}i} = \cos\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{2}\right)$.

4. Resolva em $\mathbb{C}$ a equação $e^{2z} - \sqrt{3}e^z + 1 + \sqrt{3}i = 0$.

Solução:

Fazendo $w = e^z$ temos $e^{2z} = (e^z)^2 = w^2$ e obtemos a equação do 2º grau $w^2 - \sqrt{3}w + 1 + \sqrt{3}i = 0$, cujo Δ é $\Delta = 3 - 4 - 4\sqrt{3}i = -1 - 4\sqrt{3}i$.

Se $(x+yi)^2 = -1 - 4\sqrt{3}i \Rightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -1 - 4\sqrt{3}i \Rightarrow$
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ 2xy = -4\sqrt{3} \end{cases}.$$

Temos $y = -\frac{2\sqrt{3}}{x} \Rightarrow x^2 - \frac{12}{x^2} = -1 \Rightarrow x^4 + x^2 - 12 = 0$, equação biquadrada cujas raízes são $x^2 = 3$ e $x^2 = -4$, que não nos interessa, pois $x \in \mathbb{R}$.

Se $x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow y \mp 2$, portanto as raízes da equação $w^2 - \sqrt{3}w + 1 + \sqrt{3}i = 0$ são $w = \frac{\sqrt{3}\pm(\sqrt{3}-2i)}{2} = \begin{cases} \sqrt{3} - i \\ i \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} e^z = \sqrt{3} - i = 2e^{-\frac{\pi}{6}i} \Rightarrow z = \ln 2 + \left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)i, \; k \in \mathbb{Z} \\ e^z = i = e^{\frac{\pi}{2}i} \Rightarrow z = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Determine $w, z, z_0 \in \mathbb{C}$ tais que
   a. Se $f(z) = \text{Log}(z)$, então $\text{Log}(w.z) \neq \text{Log}(w) + \text{Log}(z)$.
   b. O valor principal de $(z^{z_0})^w$ é diferente do valor principal de $z^{z_0.w}$.
2. Se $z_0 = x_0 + y_0 i$ e $f(z) = z^{z_0}, z \neq 0$, determine $|f(z)|$ e $\arg(f(z))$.
3. Prove que se $|z| = 1$ e z_0 é imaginário puro, então o valor principal de $w = z^{z_0}$ é um número real.
4. Se $\sqrt{z}$ é o valor principal da raiz quadrada, resolva em $\mathbb{C}$ a equação $z - (1+2i)\sqrt{z} - 1 + i = 0$.

SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Determine $w, z, z_0 \in \mathbb{C}$ tais que
   a. Se $f(z) = \text{Log}(z)$, então $\text{Log}(w.z) \neq \text{Log}(w) + \text{Log}(z)$.
   b. O valor principal de $(z^{z_0})^w$ é diferente do valor principal de $z^{z_0.w}$.

   Solução:

   a. A propriedade $\ln(w.z) = \ln w + \ln z$ é válida para logaritmos de números reais, contudo é falsa quando $w,\ z \in \mathbb{C} - \{0\}$.

   Tomemos, por exemplo, $w = -1$ e $z = i$. Temos $w.z = -i \Rightarrow \text{Log}(w.z) = \text{Log}(-i) = -\frac{\pi}{2}i$, mas $\text{Log}(-1) = \pi i$ e $\text{Log}(i) = \frac{\pi}{2}i \Rightarrow \text{Log}(-1) + \text{Log}(i) = \pi i + \frac{\pi}{2}i = \frac{3\pi}{2}i \neq -\frac{\pi}{2}i$.

b. A propriedade $(z^{z_0})^w = z^{z_0 \cdot w}$ é válida para potências de números reais, contudo é falsa quando $w, z, z_0 \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Tomemos, por exemplo, $z = e$, $w = i$ e $z_0 = 2\pi i$.

Temos $(e^{2\pi i})^i = 1^i$, cujo valor principal é $e^{i\mathrm{Log}1} = e^{i.0} = e^0 = 1$ e $e^{2\pi i.i} = e^{-2\pi}$.

2. Se $z_0 = x_0 + y_0 i$ e $f(z) = z^{z_0}, z \neq 0$, determine $|f(z)|$ e $\arg(f(z))$.

Solução: Resulta da definição da função potência generalizada que
$f(z) = z^{z_0} = e^{z_0 \mathrm{Log} z} = e^{z_0.(\ln|z| + \mathrm{Arg}(z)i)} = e^{(x_0+y_0 i).(\ln|z| + \mathrm{Arg}(z)i)} = e^{x_0 \ln|z| - y_0 \mathrm{Arg}(z) + (y_0 \ln|z| + x_0 \mathrm{Arg}(z))i}$.

Logo, $|f(z)| = e^{x_0 \ln|z| - y_0 \mathrm{Arg}(z)}$ e $\arg(f(z)) = y_0 \ln|z| + x_0 \mathrm{Arg}(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Prove que se $|z| = 1$ e z_0 é imaginário puro, então o valor principal de $w = z^{z_0}$ é um número real.

Solução:

Sejam z e z_0 tais que $|z| = 1$ e z_0 é imaginário puro.

Podemos escrever $z = e^{\mathrm{Arg}(z)i}$ e $z_0 = ti, t \neq 0$, logo $f(z) = z^{z_0} = e^{ti.\mathrm{Arg}(z)i} = e^{-t\mathrm{Arg}(z)} \in \mathbb{R}$.

$\square$

4. Se $\sqrt{z}$ é o valor principal da raiz quadrada, resolva em $\mathbb{C}$ a equação $z - (1+2i)\sqrt{z} - 1 + i = 0$.

Solução:

Fazendo a substituição $w = \sqrt{z}$, como $\sqrt{z}$ é valor principal da raiz quadrada, temos $w^2 = (\sqrt{z})^2 = z$ e obtemos a equação $w^2 - (1+2i)w - 1 + i = 0$, que possui $\Delta = (1+2i)^2 - 4(-1+i) = 1 - 4 + 4i + 4 - 4i = 1$.

Logo, as soluções são

$$\sqrt{z} = w = \frac{1+2i \pm 1}{2} = \begin{cases} 1+i \\ i \end{cases} \Rightarrow z = \begin{cases} (1+i)^2 = 2i \\ i^2 = -1 \end{cases}.$$

Aula 11

LIMITES, CONTINUIDADE E DERIVADAS

NOÇÕES SOBRE A TOPOLOGIA DE $\mathbb{C}$

Vimos, na Aula 1, que o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$ é naturalmente identificado com o espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$.

Podemos, portanto, estender a $\mathbb{C}$ as propriedades métricas e topológicas do $\mathbb{R}^2$. Apresentaremos algumas noções métricas e topológicas que utilizaremos ao longo dessa aula.

Definição 11.1.

O *disco aberto* de centro z_0 e raio $r > 0$ é o conjunto

$$D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}.$$

Definição 11.2.

O *disco fechado* de centro z_0 e raio $r > 0$ é o conjunto

$$\overline{D_r}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}.$$

Definição 11.3.

Seja $X \subseteq \mathbb{C}$. Um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ é *ponto interior* a X, quando existe $\delta > 0$ tal que $D_\delta(z_0) \subset X$.

Definição 11.4.

Um conjunto $X \subseteq \mathbb{C}$ é *aberto*, quando todos os seus pontos são interiores.

Definição 11.5.

Um conjunto $Y \subseteq \mathbb{C}$ é *fechado*, quando seu complementar $\mathbb{C} - Y$ é **aberto**.

Definição 11.6.

Seja $X \subseteq \mathbb{C}$. Um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ é *ponto de acumulação* de X, quando **todo disco aberto de centro em** z_0 tem interseção não vazia com X, isto é, $D_r(z_0) \cap X \neq \emptyset$, $\forall r > 0$. O conjunto de todos os pontos de acumulação de X é chamado *derivado* de X e será denotado por X'.

Definição 11.7.

Seja $X \subseteq \mathbb{C}$. Um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ é *ponto isolado* de X, se z_0 **não é ponto de acumulação de** X.

Definição 11.8.

Seja $X \subseteq \mathbb{C}$. Um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ é *fronteira* de X se **todo disco aberto de centro em** z_0 contém pontos de X e pontos de seu complementar $\mathbb{C} - X$. O conjunto de todos os pontos fronteira de X será chamado *fronteira* de X e o denotaremos por $\partial(X)$.

Definição 11.9.

Um conjunto $X \subseteq \mathbb{C}$ é *limitado* se existe $r > 0$ tal que $X \subset D_r(0)$ e *ilimitado*, caso contrário.

Definição 11.10.

Um conjunto $X \subseteq \mathbb{C}$ é *compacto*, quando é **fechado e limitado**.

LIMITES

Recordemos dos cursos de Cálculo que a noção intuitiva de limite de funções $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, é a seguinte:

"L é o limite da função $f(x)$ quando x tende para a se podemos tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo de L desde que tomemos x suficientemente próximo de a."

Adotando a notação consagrada, $L = \lim_{x \to a} f(x)$, a definição de limite para funções $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ é

Definição 11.11.

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$ (a é ponto de acumulação de X). Diremos que L é o limite de $f(x)$ quando x tende para a e escreveremos $L = \lim_{x \to a} f(x)$ se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X \ \text{ e } \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Como $|x - a| > 0 \Rightarrow x \neq a$, é totalmente irrelevante o que ocorre com $f(a)$ e $f(x)$, pode inclusive nem ser definida para $x = a$, contudo, é essencial que a seja ponto de acumulação de X, pois, do contrário, existe $r > 0$ tal que $|x - a| < r \Rightarrow x \notin X$ e, para todos $L \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = r$, teremos

$$x \in X \ \text{ e } \ 0 < |x - a| < r \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Logo, todo número real L seria limite de $f(x)$ quando x tende para a e a noção de limite não teria utilidade.

Por exemplo, se retirarmos da definição de limite de $f(x)$ quando x tende para a a condição $a \in X'$ (a ponto de acumulação do domínio da função), qualquer número real será limite da função

$$\begin{cases} f : (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \cup \{0\} \to \mathbb{R} \\ f(x) = \ln(x^2 - 1), \ \text{ se } \ x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}, \quad \text{quando } x \text{ tende para } 0.$$

A Definição 11.11 pode ser adotada para funções $f: X \to Y$ desde que exista a noção de distância nos conjuntos X e Y para que faça sentido falar em arbitrária e suficientemente próximo.

Vimos, na Aula 1, que a distância entre dois números complexos $w = a + bi$ e $z = c + di$ é definida por

$$|z - w| = |a - c + (b - d)i| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}.$$

Assim, podemos estabelecer a seguinte definição de limite para funções complexas de uma variável complexa

Definição 11.12.

Sejam $X \subset \mathbb{C}$, $f: X \to \mathbb{C}$ e $a \in X'$ (a é ponto de acumulação de X). Diremos que L é o limite de $f(z)$ quando z tende para z_0 e escreveremos $L = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$z \in X \ \text{ e } \ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon.$$

Exemplo 11.1.

Seja $\begin{cases} f: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ f(z) = 2z + i, \ \text{ se } \ z \neq 3 + i, \\ f(3+i) = 7 \end{cases}$

Mostraremos que $\lim\limits_{z \to 3+i} 2z + 1 = 6 + 3i$.

Dado $\varepsilon > 0$ devemos determinar $\delta > 0$ tal que $0 < |z - (3+i)| < \delta \Rightarrow |f(z) - (6+3i)| < \varepsilon$.

Temos $|f(z) - (6+3i)| = |2z + i - (6+3i)| = |2z - 6 - 2i| = 2|z - (3+i)|$, logo, $|f(z) - (6+3i)| < \varepsilon \Rightarrow 2|z - (3+i)| < \varepsilon \Rightarrow |z - (3+i)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Portanto, para $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ segue-se que $0 < |z - (3+i)| < \dfrac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |f(z) - (6+3i)| < \varepsilon$ e isso mostra que $\lim\limits_{z \to 3+i} 2z + 1 = 6 + 3i$.

O primeiro resultado sobre limites que estabeleceremos é a unicidade do limite.

Teorema 11.1.

Sejam $X \subset \mathbb{C}$, $f : X \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in X'$. Se $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$ e $\lim_{z\to z_0} f(z) = M$, então $L = M$.

Prova

Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Como $\lim_{z\to z_0} = L$ e $\lim_{z\to z_0} = M$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$\begin{cases} z \in X \text{ e } 0 < |z - z_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(z) - L| < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ z \in X \text{ e } 0 < |z - z_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(z) - M| < \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases} .$$

Logo, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ (menor dos números δ_1 e δ_2), podemos escrever
$z \in X$ e $0 < |z - z_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(z) - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ e $|f(z) - M| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ (i).

Segue-se de (i) que

$|L - M| = |L - f(z) + f(z) - M| \leq |f(z) - L| + |f(z) - M| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Fazendo ε tender a zero, resulta do *Teorema do Sanduíche* para funções reais que

$$0 \leq |L - M| \leq \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon = 0 \Rightarrow |L - M| = 0 \Rightarrow L = M.$$

□

Uma consequência imediata do Teorema 11.1 é:

✍ Se $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$ e Y é um subconjunto do domínio de f tal que $z_0 \in Y'$, então o limite da restrição de f a Y, $f_{|Y}$, quando z tende para z_0 existe e $\lim_{z\to z_0} f_{|Y}(z) = L$.

Essa observação é bastante útil para provarmos que $\lim_{z\to z_0} f(z)$ **não** existe - é suficiente obter 2 subconjuntos X e Y do domínio de f tais que $x_0 \in X' \cap Y'$ e $\lim_{z\to z_0} f_{|X}(z) \neq \lim_{z\to z_0} f_{|Y}(z)$.

Exemplo 11.2.

Seja $\begin{cases} f : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C} \\ f(z) = \dfrac{z}{\overline{z}} \end{cases}$.

Mostraremos que $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{z}{\overline{z}}$ não existe.

Sejam $X = \mathbb{R}$ e $Y = \{ti \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Se $z = t \in X$, temos $\lim\limits_{z\to 0} f_{|X} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t}{t} = \lim\limits_{t\to 0} 1 = 1$.

Se $z = ti \in Y$, então $\lim\limits_{z\to 0} f_{|Y} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t}{-t} = \lim\limits_{t\to 0} -1 = -1$.

Portanto, resulta da observação que $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{z}{\overline{z}}$ não existe.

Exemplo 11.3.

Seja $\begin{cases} f : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C} \\ f(z) = \operatorname{Arg}(z) \end{cases}$.

Mostraremos que não existe $\lim\limits_{z\to z_0} \operatorname{Arg}(z)$, se $z \leq 0$.

Podemos escrever

$$\operatorname{Arg}(z) = \begin{cases} \operatorname{arcsen} \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } x \geq 0, \\ \pi - \operatorname{arcsen} \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } x \leq 0 \text{ e } y \geq 0, \\ -\pi - \operatorname{arcsen} \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } x \leq 0 \text{ e } y \leq 0. \end{cases}$$

Se $X = \{ti \mid t > 0\}$ e $Y = \{ti \mid t < 0\}$, então $\lim\limits_{z\to 0} \operatorname{Arg}(z)_{|X} = \lim\limits_{t\to 0^+} \operatorname{Arg}(ti) = \dfrac{\pi}{2}$ e $\lim\limits_{z\to 0} \operatorname{Arg}(z)_{|Y} = \lim\limits_{t\to 0^-} \operatorname{Arg}(ti) = -\dfrac{\pi}{2}$. Logo, não existe $\lim\limits_{z\to 0} \operatorname{Arg}(z)$.

Se $z = x_0 < 0$, considere os conjuntos $X = \{x_0 + ti \mid t \geq 0\}$ e $Y = \{x_0 + ti \mid t \leq 0\}$.

Temos

$$\lim_{z\to x_0} \operatorname{Arg}(z)_{|X} = \lim_{t\to 0^+} \operatorname{Arg}(x_0+ti) = \lim_{t\to 0^+}\left(\pi - \operatorname{arcsen}\frac{t}{\sqrt{x_0^2+t^2}}\right) = \pi$$

e

$$\lim_{z\to x_0} \operatorname{Arg}(z)_{|Y} = \lim_{t\to 0^-} \operatorname{Arg}(x_0+ti) = \lim_{t\to 0^-}\left(-\pi - \operatorname{arcsen}\frac{t}{\sqrt{x_0^2+t^2}}\right) = -\pi.$$

Portanto, não existe $\lim\limits_{z\to x_0} \operatorname{Arg}(z)$ e isso completa a prova de que não existe $\lim\limits_{z\to z_0} \operatorname{Arg}(z)$, se $z \leq 0$.

Outros resultados importantes são:

Teorema 11.2.

Sejam $X \subset \mathbb{C}$, $f : X \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in X'$. Se $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = L \neq 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $z \in X$ e $0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow f(z) \neq 0$.

Prova

Como $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = L$, existe $\delta > 0$ tal que $z \in X$ e $0 < |z-z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \dfrac{|L|}{2}$.

Logo, $z \in X$ e $0 < |z-z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| = |f(z) - L + L| \geq |L| - |f(z) - L| \geq |L| - \dfrac{|L|}{2} = \dfrac{|L|}{2} > 0 \Rightarrow f(z) \neq 0$. $\square$

Teorema 11.3.

Sejam $X \subset \mathbb{C}$, $f : X \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in X'$. Se $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = L$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(z)$ é limitada para todo $z \in X$ e $0 < |z - z_0| < \delta$.

Prova

Como $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = L$, existe $\delta > 0$ tal que $z \in X$ e $0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < 1 \Rightarrow |f(z)| - |L| < 1 |f(z)| < |L| + 1$. $\square$

Se $f(z)$ é uma função complexa, vimos, na Aula 4, que $f(z)$ pode ser escrita como $f(z) = f(x+yi) = u(x,y)+iv(x,y)$. Nosso próximo resultado mostra como calcular $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ a partir dos limites das funções de duas variáveis reais $u(x,y)$ e $v(x,y)$ quando (x,y) tende para (x_0,y_0).

Teorema 11.4.

Sejam $X \subset \mathbb{C}$, $f : X \to \mathbb{C}$ e $z_0 = x_0 + y_0 i \in X'$. Se $f(z) = f(x+yi) = u(x,y) + iv(x,y)$, então $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = L = a+bi$ se, e somente se, $\begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = a \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = b \end{cases}$.

Prova

Se $z = x+yi$, então

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{x^2} = |x| \text{ e } |z| = \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{y^2} = |y|. \quad (i)$$

Suponhamos $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = L = a+bi$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$z \in X \text{ e } 0 < |z-z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)-L| < \varepsilon. \quad (ii).$$

Mas $|z-z_0| = |x+yi-(x_0+y_0 i)| = |x-x_0+(y-y_0)i| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = |(x,y)-(x_0,y_0)|_{\mathbb{R}^2}$, onde $|(x,y)|_{\mathbb{R}^2}$ é a norma euclidiana.

Além disso, por (i), temos

$$|f(z)-L| = |u(x,y)+iv(x,y)-(a+bi)| = |u(x,y)-a+(v(x,y)-b)i| \Rightarrow$$

$$\begin{cases} |u(x,y)-a| \leq |f(z)-L| < \varepsilon \\ |v(x,y)-b| \leq |f(z)-L| < \varepsilon \end{cases} . \quad (iii)$$

Seja X^* o conjunto do $\mathbb{R}^2$ correspondente a X pela identificação natural entre $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$. Resulta de (iii) que

$$(x,y) \in X^* \text{ e } 0 < |(x,y)-(x_0,y_0)|_{\mathbb{R}^2} < \delta \Rightarrow \begin{cases} |u(x,y)-a| < \varepsilon \\ |v(x,y)-b| < \varepsilon \end{cases} .$$

Assim, $\begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = a \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = b \end{cases}$.

Reciprocamente, suponhamos $\begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = a \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = b \end{cases}$.

Dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$(x,y) \in X^* \text{ e } 0 < |(x,y)-(x_0,y_0)|_{\mathbb{R}^2} < \delta_1 \Rightarrow |u(x,y)-a| < \frac{\varepsilon}{2}. \ (iv)$$

$$(x,y) \in X^* \text{ e } 0 < |(x,y)-(x_0,y_0)|_{\mathbb{R}^2} < \delta_2 \Rightarrow |v(x,y)-b| < \frac{\varepsilon}{2}. \ (v)$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_1\}$, resulta de (iv) e (v) que

$$z \in X \text{ e } 0 < |z-z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)-L| = |u(x,y)-a+(v(x,y)-b)i| \leq$$

$$|u(x,y)-a| + |(v(x,y)-b)i| = |u(x,y)-a| + |v(x,y)-b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Vemos, portanto, que $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = L = a+bi$. $\square$

Exemplo 11.4.

Como aplicação do Teorema 11.4, mostraremos que $\lim\limits_{z\to z_0} e^z = e^{z_0}$.

Seja $z_0 = x_0 + y_0 i$. Se $z = x + yi$, temos $f(z) = e^z = e^{x+yi} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y$.

Se $u(x,y) = e^x \cos y \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} e^x \cos y = e^{x_0} \cos y_0$ e se $v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} e^x \operatorname{sen} y = e^{x_0} \operatorname{sen} y_0$.

Logo, resulta do Teorema 11.4 que

$\lim\limits_{z\to z_0} e^z = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) + i \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = e^{x_0}(\cos y_0 + i \operatorname{sen} y_0) = e^{z_0}$.

PROPRIEDADES OPERATÓRIAS DOS LIMITES

Nessa seção, provaremos o

Teorema 11.5.

Sejam $X \subset \mathbb{C}$, $Y \subset \mathbb{C}$, $f : X \to \mathbb{C}, g : Y \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in X' \cap Y'$. Se $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L$ e $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = M$, então

a. Se $w \in \mathbb{C} \Rightarrow \lim\limits_{z \to z_0} (f(z) + wg(z)) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z) + w \lim\limits_{z \to z_0} g(z) = L + wM$.

b. $\lim\limits_{z \to z_0} (f(z).g(z)) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z). \lim\limits_{z \to z_0} g(z) = L.M$.

c. Se $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = M \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{1}{g(z)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{z \to z_0} g(z)} = \dfrac{1}{M}$.

d. Se $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = M \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{\lim\limits_{z \to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z \to z_0} g(z)} = \dfrac{L}{M}$.

Prova

Admitiremos que o leitor tenha conhecimento de que essas propriedades operatórias são válidas para limites de funções reais $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$, $\mathscr{U} \subset \mathbb{R}^2$.

Sejam $f(z) = u_1(x,y) + iv_1(x,y)$, $g(z) = u_2(x,y) + iv_2(x,y)$.

Mostraremos b e as provas de a, c e d são deixadas como exercícios aos leitores interessados.

Sejam $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L = a + bi$ e $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = M = c + di$.

Pelo Teorema 11.4, obtemos

$$\begin{cases} \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u_1(x,y) = a, \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v_1(x,y) = b \\ \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u_1(x,y) = c, \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v_2(x,y) = d \end{cases}.$$

Como a e b do Teorema 11.5 valem para limites de funções $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}, \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^2$, temos

$$\begin{cases} \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} (u_1(x,y)u_2(x,y) - v_1(x,y)v_2(x,y)) = ac - bd. \ (i) \\ \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} (u_1(x,y)v_2(x,y) + v_1(x,y)u_2(x,y)) = ad + bc. \ (ii) \end{cases}$$

Além disso,

$\lim_{z\to z_0}(f(z).g(z)) = \lim_{z\to z_0}[(u_1(x,y)+iv_1(x,y))(u_2(x,y)+iv_2(x,y))] =$

$= \lim_{z\to z_0}(u_1(x,y)u_2(x,y) - v_1(x,y)v_2(x,y) + i(u_1(x,y)v_2(x,y) + v_1(x,y)u_2(x,y))).$ $\quad (iii).$

Portanto, resulta do Teorema 11.4, (i), (ii) e (iii) que

$$\lim_{z\to z_0}(f(z).g(z)) = ac-bd+(ad+bc)i = L.M.$$

$\square$

Exemplo 11.5.

Se $p(z) = a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1z + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ (polinômio com coeficientes complexos), então $\lim_{z\to z_0} p(z) = p(z_0)$.

Obviamente, se $f(z) = a_0$, então $\lim_{z\to z_0} f(z) = a_0$.

Além disso, se $a_i \neq 0$, dado $\varepsilon > 0$, temos $0 < |z-z_0| < \dfrac{\varepsilon}{a_i} \Rightarrow |a_iz - a_iz_0| = |a_i||z-z_0| = \varepsilon \Rightarrow \lim_{z\to z_0} a_iz = a_iz_0$.

Em particular, $a_i = 1 \Rightarrow \lim_{z\to z_0} z = z_0$.

Logo, resulta de b do Teorema 11.5 que

$$\begin{cases} \lim_{z\to z_0} a_iz^2 = \lim_{z\to z_0} a_iz.\lim_{z\to z_0} z = a_iz_0.z_0 = a_iz_0^2 \\ \lim_{z\to z_0} a_iz^3 = \lim_{z\to z_0} a_iz^2.\lim_{z\to z_0} z = a_iz_0^2.z_0 = a_iz_0^3 \\ \vdots \\ \lim_{z\to z_0} a_iz^n = \lim_{z\to z_0} a_iz^{n-1}.\lim_{z\to z_0} z = a_iz_0^{n-1}.z_0 = a_iz_0^n. \end{cases}$$

Podemos agora aplicar sucessivamente a letra a do Teorema 11.5 para obter

$\lim_{z\to z_0}(a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1z + a_0) = \lim_{z\to z_0} a_nz^n + \lim_{z\to z_0} a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + \lim_{z\to z_0} a_1z + \lim_{z\to z_0} a_0 = a_nz_0^n + a_{n-1}z_0^{n-1} + \ldots + a_1z_0 + a_0 = p(z_0)$.

Exemplo 11.6.

Se $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ (função racional) e z_0 **não** é raiz de $q(z)$, então $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \dfrac{p(z_0)}{q(z_0)} = f(z_0)$.

De fato, resulta da letra d do Teorema 11.5 e do Exemplo 11.5 que

$$\lim_{z\to z_0} p(z) = p(z_0), \lim_{z\to z_0} q(z) = q(z_0) \neq 0 \Rightarrow \lim_{z\to z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q(z_0)} = f(z_0).$$

Para o cálculo do limite de funções compostas, aplicaremos o

Teorema 11.6.

Sejam $X \subset \mathbb{C}$, $Y \subset \mathbb{C}$, $f : X \to \mathbb{C}$, $g : Y \to \mathbb{C}$ tais que a imagem de f, $Im(f) \subset Y$, $z_0 \in X'$ e $w_0 \in Y'$. Suponha $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0$ e $\lim\limits_{z\to w_0} g(z) = L$. Se

a. $w_0 \in Y$ e $L = g(w_0)$ ou

b. $z \neq z_0 \Rightarrow f(z) \neq w_0$,

então $\lim\limits_{z\to z_0} g(f(z)) = L$.

Prova

Se $\lim\limits_{z\to w_0} g(z) = L$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$z \in Y \text{ e } 0 < |z - w_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(z) - L| < \varepsilon. \quad (i)$$

Se $\lim\limits_{z\to w_0} f(z) = w_0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$z \in X \text{ e } 0 < |z - z_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(z) - w_0| < \delta_2. \quad (ii)$$

Suponhamos $g(w_0) = L$, quando $|f(z) - w_0| = 0$. Temos $f(z) = w_0 \Rightarrow |g(f(z)) - L| = |g(w_0) - g(w_0)| = 0 < \varepsilon$.

Assim, segue-se de (i) e (ii) que

$$z \in X \text{ e } 0 < |z - z_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(z) - w_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(f(z)) - L| < \varepsilon.$$

Portanto, $\lim\limits_{z \to z_0} g(f(z)) = L$.

Se temos como hipótese $z \neq z_0 \Rightarrow f(z) \neq w_0$ isso implica $0 < |f(z) - w_0|$ e por (i) e (ii), obtemos

$$z \in X \text{ e } 0 < |z - z_0| < \delta_1 \Rightarrow 0 < |f(z) - w_0| < \delta_2 \Rightarrow$$

$$|g(f(z)) - L| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{z \to z_0} g(f(z)) = L.$$

$\square$

Como aplicação do Teorema 11.6, mostraremos que $\lim\limits_{z \to z_0} \text{Arg}(z) = \text{Arg}(z_0),\ z \in \mathbb{C} - (-\infty, 0]$.

Exemplo 11.7.

Sejam $\begin{cases} f : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C} \\ f(z) = \text{Arg}(z) \end{cases}$ e $z_0 \in \mathbb{C} - (-\infty, 0]$. Então, $\lim\limits_{z \to z_0} \text{Arg}(z) = \text{Arg}(z_0)$.

De fato, se $\begin{cases} g : \mathbb{C} - \{0\} \to [-1, 1] \\ g(z) = \dfrac{\text{Im(z)}}{|z|} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$ e $z_0 = x_0 + y_0 i \neq 0$, então, $\lim\limits_{z \to z_0} \text{Im}(z) = y_0$ e $\lim\limits_{z \to z_0} |z| = |z_0| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \neq 0$ e, por d do Teorema 11.5, temos $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{\text{Im}(z)}{|z|} = \dfrac{\text{Im}(z_0)}{|z_0|} = g(z_0)$.

Sejam $\begin{cases} h_1 : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ h_1(x) = \text{arccos}(x) \end{cases}$ e $\begin{cases} h_2 : [-1, 1] \to [0, \pi] \\ h_2(x) = \text{arcsen}(x) \end{cases}$.

Sabemos dos cursos de Cálculo que $h_1(x)$ e h_2 são contínuas, logo, se $a \in [-1, 1] \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \text{arccos}(x) = \text{arccos}(a)$ e $\lim\limits_{x \to a} \text{arcsen}(x) = \text{arcsen}(a)$.

Vamos definir $\mathrm{Arg}(z)$ por $\mathrm{Arg}(z) = \begin{cases} h_2 \circ g(z), \text{ se } x \geq 0, \\ h_1 \circ g(z), \text{ se } y \geq 0, \\ -h_1 \circ g(z), \text{ se } y < 0. \end{cases}$

Assim, se $x_0 > 0$, ou $x_0 \leq 0$ e $y_0 > 0$, ou $x_0 \leq 0$ e $y_0 < 0$ resulta do Teorema 11.6 (Limite da Função Composta) que

$$\lim_{z \to z_0} \mathrm{Arg}(z_0) = \begin{cases} h_2 \circ g(z_0), \text{ se } x_0 > 0, \\ h_1 \circ g(z_0), \text{ se } x_0 \leq 0 \text{ e } y_0 > 0, \\ -h_1 \circ g(z_0), \text{ se } x_0 \leq 0 \text{ e } y_0 < 0 \end{cases} = \mathrm{Arg}(z_0),$$

o que completa a nossa prova.

Quando $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \lim\limits_{z \to z_0} g(z) = 0$, a priori nada podemos afirmar sobre $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)}$.

Com efeito, o limite pode não existir como mostra o Exemplo 11.1 ou, tomando $f(z) = z_0 z$ e $g(z) = z$, temos $\lim\limits_{z \to z_0} z_0 z = \lim\limits_{z \to z_0} z = 0$, mas $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \lim\limits_{z \to z_0} = z_0$ e z_0 é arbitrário. Por essa razão, as expressões da forma $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{0}{0}$ são chamadas "indeterminações".

Exemplo 11.8.

O limite $\lim\limits_{z \to 1+i} \dfrac{z^3 - z^2 + 2}{z^2 - (3+4i)z - 1 + 5i}$ é uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$, pois $\lim\limits_{z \to 1+i} z^3 - z^2 + 2 = (1+i)(2i) - 2i + 2 = 0$ e $\lim\limits_{z \to 1+i} z^2 - (3+4i)z - 1 + 5i = 2i - (3+4i)(1+i) - 1 + 5i = 2i - (-1+7i) - 1 + 5i = 0$. Vamos dividir $p(z) = z^3 - z^2 + 2$ e $q(z) = z^2 - (3+4i)z - 1 + 5i$ por $g(z) = z - (1+i)$.

Utilizando o *Dispositivo Prático de Briot-Ruffini*, temos

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 1+i \\ \hline 1 & i & -1+i & 0 & \end{array}$$

Logo, $z^3 - z^2 + 2 = (z^2 + iz - 1 + i)(z - (1+i))$.

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -3-4i & -1+5i & 1+i \\ \hline 1 & -2-3i & 0 & \end{array}$$

Assim, $z^2-(3+4i)z-1+5i=(z-(2+3i))(z-(1+i))$.

Segue-se que

$$\lim_{z\to 1+i}\frac{z^3-z^2+2}{z^2-(3+4i)z-1+5i}=\lim_{z\to 1+i}\frac{(z^2+iz-1+i)(z-(1+i))}{(z-(2+3i))(z-(1+i))}$$

$$=\lim_{z\to 1+i}\frac{z^2+iz-1+i}{z-(2+3i)}=\frac{-2+4i}{-1-2i}=-\left(\frac{6+8i}{5}\right).$$

FUNÇÕES CONTÍNUAS

A noção intuitiva de função $f:X\to\mathbb{R}, X\subset\mathbb{R}$, **contínua** no ponto $x_0\in X$ é a seguinte

"A função $f(x)$ é **contínua** em x_0 se podemos tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo de $f(x)$ desde que tomemos x suficientemente próximo de x_0."

Desse modo, a definição de continuidade da função $f:X\to\mathbb{R},\ X\subset\mathbb{R}$, no ponto $x_0\in X$ é

Definição 11.13.

Sejam $X\subset\mathbb{R}$ e $f:X\to\mathbb{R}$. Diremos que f é **contínua** em $x_0\in X$ se, dado $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que $x\in X$ e $|x-x_0|<\delta_1\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Do mesmo modo que procedemos para $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$, podemos, através da distância entre w_0 e $z_0\in\mathbb{C}$, $|z_0-w_0|$, estabelecer a definição de função contínua para funções $f:X\to\mathbb{C}$, $X\subset\mathbb{C}$, no ponto $z_0\in X$.

Definição 11.14.

Sejam $X \subset \mathbb{C}$ e $f : X \to \mathbb{C}$. Diremos que f é **contínua** em $z_0 \in X$ se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $z \in X$ e $|z - z_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Quando $f(z)$ é contínua em todos os pontos de seu domínio X, diremos que $f(z)$ é uma **função contínua**.

Observe a semelhança entre as definições de limite de $f(z)$ quando z tende para z_0 e $f(z)$ contínua em z_0. Isso nos permite definir a continuidade de $f(z)$ em z_0 usando o conceito de limite de $f(z)$ quando z tende para z_0.

De fato, suponha $z_0 \in X \cap X'$ então $\lim\limits_{z \to z_0} = f(z_0)$ se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $z \in X$ e $|z - z_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ que é exatamente a definição de função contínua em z_0. Portanto, também poderíamos ter definido a continuidade da função f no ponto z_0 como

Definição 11.15.

Sejam $X \subset \mathbb{C}$ e $f : X \to \mathbb{C}$. Diremos que f é **contínua** em $z_0 \in X \cap X'$ se $\lim\limits_{z \to z_0} = f(z_0)$.

É importante destacar que a continuidade é um fenômeno **local**, ou seja, $f : X \to \mathbb{C}$ é contínua em $z_0 \in X$ se, e somente se, existe um disco aberto $D_r(z_0)$ tal que $f_{|D_r(z_0)}$ é contínua em z_0.

Quando z_0 é um ponto isolado do conjunto X, então toda função $f : X \to \mathbb{C}$ é contínua em z_0, pois existe $\delta > 0$ tal que $X \cap D_\delta = \emptyset$ e para $\varepsilon > 0$ podemos escrever $z \in X$ e $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| = 0 < \delta$.

Por exemplo, se $X = (\mathbb{C} - D_1(0)) \cup \{0\}$ toda função $f : X \to \mathbb{C}$ é contínua em $z = 0$.

Exemplo 11.9.

Resulta dos Exemplos 11.4 e 11.5 que $f(z) = e^z$ e $g(z) = p(z) \in \mathbb{C}[x]$ são funções contínuas em $\mathbb{C}$.

Exemplo 11.10.

Resulta do Exemplo 11.7 que $\begin{cases} f : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C} \\ f(z) = \text{Arg}(z) \end{cases}$ é contínua em $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$.

Exemplo 11.11.

A função $f(z) = |z|$ é contínua em todo ponto $z_0 \in \mathbb{C}$.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, $|z - z_0| < \varepsilon \Rightarrow ||z| - |z_0|| \leq |z - z_0| < \varepsilon$.

Alguns importantes resultados sobre funções contínuas são:

Teorema 11.7.

Se $f : X \to \mathbb{C}$ é contínua em $z_0 \in X$ e $f(z_0) \neq 0$, então existe $r > 0$ tal que $z \in X \cap D_r(z_0) \Rightarrow f(z) \neq 0$.

Teorema 11.8.

Sejam $X \subset \mathbb{C}$ e $f : X \to \mathbb{C}$. Se $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ então $f(z)$ é contínua em $z_0 = x_0 + y_0 i$ se, e somente se, $u(x,y)$ e $v(x,y)$ são contínuas em (x_0, y_0).

Teorema 11.9.

Sejam $X \subset \mathbb{C}$, $Y \subset \mathbb{C}$, $f : X \to \mathbb{C}$, $g : Y \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in X \cap Y$. Se $f(z)$ e $g(z)$ são funções contínuas em z_0, então as funções $h_1(z) = f(z) + wg(z), w \in \mathbb{C}$ e $h_2 = f(z).g(z)$ são contínuas em z_0. Se $g(z_0) \neq 0$, então $h_3 = \dfrac{f(z)}{g(z)}$ é contínua em z_0.

Teorema 11.10.

Sejam $X \subset \mathbb{C}$, $Y \subset \mathbb{C}$, $f : X \to \mathbb{C}, g : Y \to \mathbb{C}$ com $Im(f) \subset Y$. Se f é contínua em z_0 e g é contínua em $w_0 = f(z_0)$, então $g \circ f$ é contínua em z_0.

As provas dos Teoremas 11.7, 11.8, 11.9 e 11.10 decorrem imediatamente dos Teoremas 11.2, 11.4, 11.5 e 11.6 e são deixadas como exercícios aos leitores interessados.

Como exemplo, demonstraremos o Teorema 11.10.

Prova do Teorema 11.10

Como f é contínua em z_0 e g é contínua em $w_0 = f(z_0)$, temos $w_0 = f(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ e $g(w_0) = \lim\limits_{z \to w_0} g(z)$. Logo, resulta do Teorema 11.6 que $\lim\limits_{z \to z_0} g(f(z)) = g(w_0) = g(f(z_0))$, o que prova a continuidade de $g \circ f$ em z_0.

$\square$

Ramos da Raiz n-ésima e do Logaritmo

Recordemos da Aula 10 que a função *valor principal da raiz n-ésima*,

$$\begin{cases} f : \mathbb{C} \to X \\ f(z) = \begin{cases} f(0) = 0 \\ \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\mathrm{Arg}(z)}{n}}, \quad \text{se } z \neq 0, \end{cases} \end{cases}$$

é a função inversa da função

$$\begin{cases} g : \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z = 0 \ \text{ ou } \ -\dfrac{\pi}{n} < \mathrm{Arg}(z) \leq \dfrac{\pi}{n} \right\} \to \mathbb{C} \\ g(z) = z^n \end{cases} .$$

Sabemos dos cursos de Cálculo que a função real $g(x) = \sqrt[n]{x}$, $x \geq 0$, é contínua. Logo, resulta do Exemplo 11.11 e do Teorema 11.10 que a função composta $g_1(z) = g(|z|) = \sqrt[n]{|z|}$ é contínua.

Também vimos, no Exemplo 11.4, que $f(z) = e^z$ é contínua.

Além disso, pelo Exemplo 11.10, $g(z) = \dfrac{i\mathrm{Arg}(z)}{n}$ é contínua em $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$, logo, novamente pelo Teorema 11.10, concluímos que $g_2(z) = f \circ g(z) = e^{ig(z)}$ é contínua em $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$.

Portanto, segue-se do Teorema 11.9 que $f(z) = g_1(z).g_2(z)$ é contínua em $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$.

A imagem de $f(z)=g_1(z).g_2(z)$ é o conjunto $\left\{z\in\mathbb{C} \mid -\dfrac{\pi}{n} < \operatorname{Arg}(z) < \dfrac{\pi}{n}\right\}$.

A função **contínua**

$$\begin{cases} f:\mathbb{C}-(-\infty,0] \to \left\{z\in\mathbb{C} \mid -\dfrac{\pi}{n} < \operatorname{Arg}(z) < \dfrac{\pi}{n}\right\} \\ f(z)=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\operatorname{Arg}(z)}{n}}, \end{cases}$$

é chamada **ramo principal da raiz *n*-ésima**.

A função ramo principal da raiz n-ésima é a função inversa da função

$$\begin{cases} g:\left\{z\in\mathbb{C} \mid -\dfrac{\pi}{n} < \operatorname{Arg}(z) < \dfrac{\pi}{n}\right\} \to \mathbb{C}-(-\infty,0] \\ g(z)=z^n \end{cases}.$$

Também vimos, na Aula 10, que a função *valor principal do Logaritmo*,

$$\begin{cases} f:\mathbb{C}-\{0\} \to \{z\in\mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im} \leq \pi\} \\ f(z)=\operatorname{Log} z=\ln|z|+\operatorname{Arg}(z)i \end{cases}$$

é a função inversa da função

$$\begin{cases} g:\{z\in\mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im} \leq \pi\} \to \mathbb{C}-\{0\} \\ g(z)=e^z \end{cases}.$$

Sabemos dos cursos de Cálculo que a função real $g(x)=\ln x$, $x>0$, é contínua. Logo, resulta do Exemplo 11.11 e do Teorema 11.10 que a função composta $g_1(z)=g(|z|)=\ln(|z|)$ é contínua.

Além disso, pelo Exemplo 11.10, $g_2(z)=i\operatorname{Arg}(z)$ é contínua em $\mathbb{C}-(-\infty,0]$, logo, segue-se do Teorema 11.9 que $f(z)=g_1(z)+g_2(z)$ é contínua em $\mathbb{C}-(-\infty,0]$. A imagem de $f(z)=g_1(z)+g_2(z)$ é o conjunto $\{z\in\mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im} < \pi\}$.

A função **contínua**

$$\begin{cases} f:\mathbb{C}-(-\infty,0] \to \{z\in\mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im} < \pi\} \\ f(z)=\operatorname{Log} z=\ln|z|+\operatorname{Arg}(z)i, \end{cases}$$

é chamada **ramo principal do Logaritmo**.

A função ramo principal do Logaritmo é a função inversa da função

$$\begin{cases} g : \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \mathrm{Im} < \pi\} \to \mathbb{C} - (-\infty, 0] \\ g(z) = e^z \end{cases}.$$

Derivada Complexa

Antes de definir a derivada de funções $f : X \to \mathbb{C}$, $X \subset \mathbb{C}$, recordaremos alguns resultados sobre diferenciabilidade de aplicações $f; \mathscr{U} \to \mathbb{R}^2$, $\mathscr{U}$ aberto do $\mathbb{R}^2$.

Sejam $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$, $\mathscr{U}$ aberto do $\mathbb{R}^2$ e $a = (x_0, y_0) \in \mathscr{U}$. Quando existirem os limites

i. $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{f(a + t(1,0)) - f(a)}{t} = \lim_{t \to x_0} \frac{f(t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t - x_0} \in \mathbb{R}$, o chamaremos de **derivada parcial** em relação a x no ponto a e o representaremos por $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)$.

ii. $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{f(a + t(0,1)) - f(a)}{t} = \lim_{t \to y_0} \frac{f(x_0, t) - f(x_0, y_0)}{t - y_0} \in \mathbb{R}$, o chamaremos de **derivada parcial** em relação a y no ponto a e o representaremos por $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$.

Dado $v \in \mathbb{R}^2$, se existir o limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \in \mathbb{R},$$

o chamaremos de **derivada direcional da função** f em relação ao vetor v no ponto a e o representaremos por $\dfrac{\partial f}{\partial v}$.

Considere uma aplicação $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}^2$, $\mathscr{U}$ aberto do $\mathbb{R}^2$. A aplicação é **diferenciável** no ponto $a \in \mathscr{U}$ se existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(a + v) - f(a) = T(v) + r(v), \text{ com } \lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0.$$

Aqui assumimos que $a + v \in \mathscr{U}$ (como $\mathscr{U}$ é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $|v| < \delta \Rightarrow a + v \in \mathscr{U}$).

Dado $v \in \mathbb{R}^2$, se existir o limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} \in \mathbb{R}^2,$$

o chamaremos de **derivada direcional da aplicação** f em relação ao vetor v no ponto a e o representaremos por $\dfrac{\partial f}{\partial v}$.

Se $f(x,y) = (g(x,y), h(x,y))$, onde f e g são funções de $\mathscr{U}$ em $\mathbb{R}$, então $\dfrac{\partial f}{\partial v} = \left(\dfrac{\partial g}{\partial v}, \dfrac{\partial h}{\partial v}\right)$ e, se $v = e_1 = (1,0)$ ou $v = e_2 = (0,1)$, a derivada direcional coincide com as derivadas parciais

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial e_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x} = \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}, \dfrac{\partial h}{\partial x}\right) \\ \dfrac{\partial f}{\partial e_2} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = \left(\dfrac{\partial g}{\partial y}, \dfrac{\partial h}{\partial y}\right) \end{cases}.$$

Se f é diferenciável em a, para todo $v \in \mathbb{R}^2$ e todo $t \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeno, podemos escrever $f(a+tv) - f(a) = T(tv) + r(tv)$, com $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{r(tv)}{|tv|} = 0$ e, se $t \neq 0$, temos

$$\frac{f(a+tv)-f(a)}{t} = \frac{T(tv)}{t} + \frac{r(tv)}{t}. \qquad (i)$$

Observe que se T é transformação linear, então $T(tv) = tT(v)$ e que $|tv| = |t||v| \Rightarrow 0 = \displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{r(tv)}{|tv|} = \lim_{t\to 0} \frac{r(tv)}{|t||v|} \Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{r(tv)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{r(tv)}{|t||v|} \frac{|t||v|}{t} = 0$, pois $\left|\dfrac{|t||v|}{t}\right| = |v|$ é limitado.

Logo, resulta de (i) que

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{tT(v)}{t} + \lim_{t\to 0} \frac{r(tv)}{t} = T(v) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(a) = T(v).$$

Portanto, se f é diferenciável em a e $v \in \mathbb{R}^2$, nesse ponto existe a derivada direcional da aplicação f em relação ao vetor v.

A **única** transformação linear T da definição de função diferenciável em a é chamada **derivada** de f em a e será denotada por $f'(a)$. A transformação linear $f'(a) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ possui em relação à base canônica do $\mathbb{R}^2$ uma matriz 2x2 chamada

matriz jacobiana de f em a, que representaremos por $Jf(a)$. Suas colunas são os vetores $f'(a).e_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}(a), \dfrac{\partial h}{\partial x}(a)\right)$ e $f'(a).e_2 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = \left(\dfrac{\partial g}{\partial y}(a), \dfrac{\partial h}{\partial y}(a)\right)$, isto é

$$Jf(a) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x}(a) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(a) \\ \dfrac{\partial h}{\partial x}(a) & \dfrac{\partial h}{\partial y}(a) \end{bmatrix}.$$

Como $\mathbb{C}$ é um corpo, se $X \subset \mathbb{C}$ é aberto, a definição de derivada da função $f : X \to \mathbb{C}$, em $z_0 \in X$ é semelhante à definição de derivada de funções reais de variável real.

Definição 11.16.

Sejam X um aberto de $\mathbb{C}$ e $f : X \to \mathbb{C}$. Se $z_0 \in X$ e existe o limite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

diremos que f é **derivável** ou **holomorfa** em z_0.

O limite $\displaystyle\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ é chamado **derivada** de f em z_0.

Exemplo 11.12.

Obviamente, a função constante, $f(z) = w_0$, definida em um conjunto aberto de $\mathbb{C}$ é holomorfa em todos os pontos de seu domínio e $f'(z_0) = 0$.

Seja $\begin{cases} f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ f(z) = w_0 z^n,\ n \geq 1,\ w_0 \in \mathbb{C} \end{cases}$.

Afirmamos que a função f é holomorfa em todo $z_0 \in \mathbb{C}$.

De fato, devemos mostrar que existe o limite $\displaystyle\lim_{z \to z_0} \frac{w_0 z^n - w_0 {z_0}^n}{z - z_0}$.

Temos uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$.

Relembrando que a fórmula da soma dos n primeiros termos da progressão geométrica $1+q+q^2+\ldots+q^n$ é $S_n = \dfrac{q^n-1}{q-1}$, $q \neq 1$, podemos escrever

$$\frac{z^n - {z_0}^n}{z - z_0} = \frac{{z_0}^n\left(\dfrac{z^n}{z_0^n} - 1\right)}{z_0\left(\dfrac{z}{z_0} - 1\right)} = \frac{{z_0}^{n-1}\left(\left(\dfrac{z}{z_0}\right)^n - 1\right)}{\dfrac{z}{z_0} - 1} =$$

$$z_0^{n-1}\left(\left(\frac{z}{z_0}\right)^{n-1} + \left(\frac{z}{z_0}\right)^{n-2} + \ldots + \frac{z}{z_0} + 1\right),\ z \neq z_0.$$

Logo,

$$\lim_{z\to z_0} \frac{z^n - {z_0}^n}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} z_0^{n-1}\left(\left(\frac{z}{z_0}\right)^{n-1} + \left(\frac{z}{z_0}\right)^{n-2} + \ldots + \frac{z}{z_0} + 1\right) =$$

$$= nz_0^{n-1}$$

e, resulta de a do Teorema 11.5 que

$$\lim_{z\to z_0} \frac{w_0 z^n - w_0 {z_0}^n}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} w_0\left(\frac{z^n - {z_0}^n}{z - z_0}\right) = w_0\left(\lim_{z\to z_0} \frac{z^n - {z_0}^n}{z - z_0}\right) =$$

$$= w_0 n z_0^{n-1} = f'(z_0).$$

Exemplo 11.13.

Seja $\begin{cases} f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ f(z) = \overline{z}. \end{cases}$. Afirmamos que $f(z)$ **não** é holomorfa em nenhum ponto de $\mathbb{C}$.

Devemos mostrar que não existe o limite $\displaystyle\lim_{z\to z_0} \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0}$ para todo $z_0 \in \mathbb{C}$.

Se $z = x + yi$, $z_0 = x_0 + y_0 i$ e $g(z) = \dfrac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} = \dfrac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} = \dfrac{(\overline{z - z_0})^2}{|z - z_0|^2}$ podemos escrever

$$\frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} = \frac{(x - x_0 - (y - y_0)i)^2}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \Rightarrow$$

$$\lim_{z\to z_0} \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{(x - x_0 - (y - y_0)i)^2}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Sejam $X = \{x_0 + ti \mid t \in \mathbb{R}\}$ e $Y = \{t + y_0 i \mid t \in \mathbb{R}\}$. Temos

$$\begin{cases} \lim\limits_{z \to z_0} g_{|X} = \lim\limits_{t \to y_0} \dfrac{-(t-y_0)^2}{(t-y_0)^2} = -1 \\ \lim\limits_{z \to z_0} g_{|Y} = \lim\limits_{t \to x_0} \dfrac{(t-x_0)^2}{(t-x_0)^2} = 1 \end{cases}.$$

Vemos, portanto, que $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0}$ **não** existe, ou seja, $f(z)$ **não** é holomorfa em nenhum ponto de $\mathbb{C}$, o que prova nossa afirmação.

Um resultado útil para provarmos que $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ não é holomorfa em $z_0 \in \mathbb{C}$ é o

Teorema 11.11.

Sejam X um aberto de $\mathbb{C}$, $f : X \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in X$. Se $f(z)$ é holomorfa em z_0, então $f(z)$ é **contínua** em z_0.

Prova

Se $f(z)$ é holomorfa em z_0 existe o limite $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$, logo resulta de b do Teorema 11.5 que existe o limite

$$\lim_{z \to z_0} (f(z) - f(z_0)) = \lim_{z \to z_0} \left[\left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right) (z - z_0) \right] =$$

$$= \left(\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right) . \left(\lim_{z \to z_0} (z - z_0) \right) = f'(z_0).0 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

□

Exemplo 11.14.

Seja $\begin{cases} f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ f(z) = \dfrac{z}{\overline{z}}, \text{ se } z \neq 0, \\ f(0) = 0. \end{cases}$

Vimos, no Exemplo 11.2, que $f(z)$ **não** é contínua em $z = 0$. Logo, pelo Teorema 11.13, $f(z)$ **não** é holomorfa em $z = 0$.

Definição 11.17.

Sejam X um aberto de $\mathbb{C}$ e $f: X \to \mathbb{C}$. Se f for holomorfa em **todos** os pontos de X, diremos que f é **holomorfa** em X e, nesse caso, podemos definir a função derivada de f, $f': X \to \mathbb{C}$, que associa a cada $z \in X$ a sua derivada $f'(z)$.

Se f' também for holomorfa, podemos considerar a sua derivada $(f')'$, que denotaremos por f'' e chamaremos de **segunda derivada**. Analogamente, se f'' for holomorfa, podemos considerar a **terceira derivada** $(f'')' = f'''$ e, se f''' for holomorfa, podemos considerar a **quarta derivada** $(f''')' = f^{(4)}$.

Podemos definir indutivamente a **n-ésima derivada** de f, que denotaremos por $f^{(n)}$, por:

Definição 11.18.

Sejam X um aberto de $\mathbb{C}$ e $f: X \to \mathbb{C}$. Se $n \geq 2$ e $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ são holomorfas em X, definiremos a **n-ésima derivada** de f por $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Exemplo 11.15.

Resulta do Exemplo 11.12 que a função $f(z) = z^n$, $z \in C$ e $n \geq 1$ é holomorfa em $\mathbb{C}$ e temos

$$\begin{cases} f'(z) = nz^{n-1} \\ f''(z) = n(n-1)z^{n-2} \\ f'''(z) = n(n-1)(n-2)z^{n-3} \\ \vdots \\ f^{(k)} = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-k+1)z^{n-k} \\ \vdots \\ f^{(n)} = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 2.1 = n! \\ f^{(k)} = 0, k \geq n+1 \end{cases}.$$

No Teorema 11.12, provaremos que as regras operacionais das derivadas das funções reais de variável real permanecem válidas para funções complexas de variável complexa.

Teorema 11.12.

Se $w \in \mathbb{C}$ e f e g são holomorfas em z_0, então $h_1 = f(z) + wg(z)$ e $h_2(z) = f(z)g(z)$ são holomorfas em z_0 e

a. $h_1'(z_0) = f'(z_0) + wg'(z_0)$

b. $h_2'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$

Além disso, se $g(z_0) \neq 0$, então $h_3 = \dfrac{f(z)}{g(z)}$ é derivável em z_0 e

c. $h_3'(z) = \dfrac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}$.

Prova

Demonstraremos a letra b, e as provas de a e c são deixadas como exercícios aos leitores interessados.

Como f e g são holomorfas em z_0 existem os limites $f'(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ e $g'(0) = \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}$.

Devemos mostrar que existe $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0}$.

Podemos escrever $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} =$

$$= \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z) + f(z_0)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} =$$

$$= \lim_{z\to z_0} \left[\left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right) g(z) + f(z_0) \left(\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \right) \right].$$

Se g é holomorfa em z_0, então g é contínua em z_0, logo, $\lim\limits_{z\to z_0} = g(z_0)$ e resulta das propriedades operatórias dos limites do Teorema 11.5 que

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0). \quad \square$$

Exemplo 11.16.

Considere as funções $f(z) = z^3 + z + 2$ e $g(z) = z^4 + z^2 + i$. Resulta do Exemplo 11.15 e do Teorema 11.12 que

$$f'(z) = 3z^2 + 1, g'(z) = 4z^3 + 2z \text{ e, se } h_1(z) = f(z).g(z),$$

então

$$h_1'(z) = (3z^2+1)(z^4+z^2+i) + (z^3+z+2)(4z^3+2z) \Rightarrow h_1'(0) = i.$$

Além disso, se Y é o conjunto das raízes de $g(z) = z^4 + z^2 + i$ e $h_2(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$, se $z \notin Y$, então

$$h_2'(z) = \frac{(3z^2+1)(z^4+z^2+i) - (z^3+z+2)(4z^3+2z)}{(z^4+z^2+i)^2} \Rightarrow h_2'(0) = -i.$$

O próximo resultado que apresentaremos é conhecido como **Regra da Cadeia** ou derivada da função composta.

Teorema 11.13 (Regra da Cadeia)**.**

Sejam X e Y subconjuntos abertos de $\mathbb{C}$ e $f : X \to \mathbb{C}$, $g : Y \to \mathbb{C}$ com $\mathrm{Im}(f) \subset Y$. Se f é holomorfa em z_0 e g é holomorfa em $f(z_0)$, então $h = f \circ g$ é holomorfa em z_0 e $(f \circ g)'(z_0) = f'(z_0).g'(f(z_0))$.

Prova

Se f é holomorfa em z_0 e g é holomorfa em $w_0 = f(z_0)$, existem os limites

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \text{ e } g'(f(z_0)) = \lim_{z \to f(z_0)} \frac{g(z) - g(f(z_0))}{z - f(z_0)}. \ (i)$$

Considere a função $s(z) = \begin{cases} \dfrac{g(z) - g(f(z_0))}{z - f(z_0)}, & \text{se } z \neq f(z_0) \\ g'(f(z_0)), & \text{se } z = f(z_0) \end{cases}$.

Por (i), temos $\displaystyle\lim_{z \to f(z_0)} s(z) = \lim_{z \to f(z_0)} \frac{g(z) - g(f(z_0))}{z - f(z_0)} = g'(f(z_0)) =$ $s(f(z_0))$ o que mostra que s é contínua em $f(z_0)$. (ii)

Como a igualdade

$$g(f(z)) - g(f(z_0)) = s(f(z))(f(z) - f(z_0))$$

é válida para todo $z \in \mathbb{C}$, podemos escrever

$$\frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} = s(f(z))\left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right)$$

e segue-se de $(i), (ii)$ e de b do Teorema 11.5 que

$$\lim_{z\to z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} s(f(z)). \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =$$

$$= g'(f(z_0)).f'(z_0) \Rightarrow (g\circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)).f'(z_0). \qquad \square$$

Exemplo 11.17.

Seja $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $z \neq 0$. Por c do Teorema 11.11, temos $f'(z) = \dfrac{0.z - 1.1}{z^2} = -\dfrac{1}{z^2}$, $z \neq 0$.

Logo, resulta da *Regra da Cadeia* e do Exemplo 11.15 que se Y é o conjunto das raízes de $g(z) = z^4 + z^2 + i$ e $h(z) = \dfrac{1}{g(z)} = f\circ g(z)$, $z \notin Y$, então $h'(z) = g'(z).f'(g(z)) = -\dfrac{4z^3 + 2z}{(z^4 + z^2 + i)^2}$.

AS EQUAÇÕES DE CAUCHY-RIEMANN

Nesta seção, relacionaremos a derivada da função $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ com as derivadas parciais $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

Se $\mathscr{U}$ é um aberto do $\mathbb{R}^2$ e $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (g(x,y), h(x,y))$, sabemos dos cursos de Cálculo que f é diferenciável em $a = (x,y)$ se, e somente se, g e h são diferenciáveis e uma condição suficiente para g e h serem diferenciáveis é $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial g}{\partial x}, \dfrac{\partial g}{\partial y}$ serem **contínuas** em a.

Por exemplo, $\begin{cases} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ f(x,y) = (x,-y) \end{cases}$ é diferenciável em todos os pontos do $\mathbb{R}^2$, pois, se $f(x,y) = x$ e $g(x,y) = -y$, temos $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -1$, $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$ e essas derivadas parciais são funções obviamente contínuas.

Contudo, vimos, no Exemplo 11.13, que $f(z) = \bar{z} = x - yi$ **não** é holomorfa em nenhum ponto de $\mathbb{C}$ e, fazendo a identificação natural de $\mathbb{C}$ com o $\mathbb{R}^2$, podemos escrever $f(x,y) = (x,-y)$, que é uma aplicação diferenciável de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$. Esse fato evidencia que há sensíveis diferenças entre diferenciação no espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$ e derivação em $\mathbb{C}$.

O objetivo dessa seção é estabelecer as *Equações de Cauchy-Riemann* que fornecem uma condição necessária para que a função $f : X \to \mathbb{C}$, $X \subset \mathbb{C}$, seja holomorfa.

Teorema 11.14 (Equações de Cauchy-Riemann)**.**

Sejam X um aberto de $\mathbb{C}$ e $f : X \to \mathbb{C}$. Se $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ é holomorfa em $z_0 = x_0 + iy_0 \in X$, então, no ponto $a = (x_0,y_0)$, existem as derivadas parciais $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$, das funções reais u e v e elas satisfazem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Além disso, tem-se

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Prova

Como a função f é holomorfa em z_0, temos

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{u(x,y) - u(x_0,y_0) + i(v(x,y) - v(x_0,y_0))}{(x-x_0) + (y-y_0)i}.$$

Seja $g(z) = \dfrac{u(x,y) - u(x_0,y_0) + i(v(x,y) - v(x_0,y_0))}{(x-x_0)+(y-y_0)i}, z \neq z_0.$

Se $X = \{x_0 + ti \mid t \in \mathbb{R}\}$ e $Y = \{t + y_0 i \mid t \in \mathbb{R}\}$ existem os limites

i. $f'(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} g(z)_{|X} = \lim\limits_{t \to y_0} \dfrac{u(x_0,t) - u(x_0,y_0)}{(t-y_0)i} + \lim\limits_{t \to y_0} \dfrac{v(x_0,t) - v(x_0,y_0)}{t-y_0}.$

ii. $f'(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} g(z)_{|Y} = \lim\limits_{t \to x_0} \dfrac{u(t,y_0) - u(x_0,y_0)}{t-x_0} + \lim\limits_{t \to x_0} i\left(\dfrac{v(t,y_0) - v(x_0,y_0)}{t-x_0}\right).$

Vimos que

$$\lim_{t \to y_0} \frac{u(x_0,t) - u(x_0,y_0)}{(t-y_0)i} = -i\frac{\partial u}{\partial y} \text{ e } \lim_{t \to x_0} \frac{u(t,y_0) - u(x_0,y_0)}{t-x_0} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

$$\lim_{t \to y_0} \frac{v(x_0,t) - v(x_0,y_0)}{t-y_0} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ e } \lim_{t \to x_0} i\left(\frac{v(t,y_0) - v(x_0,y_0)}{t-x_0}\right) = i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Portanto, resulta do Teorema 11.4, que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{Re}(f'(z_0)) = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \mathrm{Im}(f'(z_0)) = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases},$$

o que completa a nossa prova. □

O exemplo abaixo mostra que uma função $f(z)$ pode satisfazer as *Equações de Cauchy-Riemann* em z_0 e **não** ser holomorfa nesse ponto.

Exemplo 11.18.

Seja $\begin{cases} f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ f(z) = f(x+yi) = \sqrt{|xy|} \end{cases}.$

Temos $u(x,y) = \sqrt{|xy|},\ v(x,y) = 0$ e

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x.0} - 0}{x} = 0 = \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{0.y} - 0}{y} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}(0,0).$$

Logo, em $z = 0$, f satisfaz as *Equações de Cauchy-Riemann*.

Mostraremos agora que f **não** é holomorfa em $z = 0$, ou seja, que $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sqrt{|xy|}}{z} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{|xy|}}{x+yi}$ não existe.

Se $g(z) = g(x+yi) = \dfrac{\sqrt{|xy|}}{x+yi}, z \neq 0$ e $X = \{t(1+i) \mid t \in \mathbb{R}\}$, então $\lim\limits_{z\to 0} g_{|X} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{t^2}}{t(1+i)} = \dfrac{1}{1+i} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{|t|}{t}$ e sabemos dos cursos de Cálculo que esse limite **não** existe (os limites laterais são diferentes).

Portanto, satisfazer as *Equações de Cauchy-Riemann* **não** é uma condição suficiente para f ser holomorfa.

Entretanto, se além de satisfazer as *Equações de Cauchy-Riemann*, as funções u e v possuem derivadas parciais **contínuas**, então podemos concluir que f é holomorfa. Mais precisamente, podemos enunciar o teorema a seguir.

Teorema 11.15.

Sejam X um aberto de $\mathbb{C}$ e $f : X \to \mathbb{C}$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Suponha que em $z_0 \in X$ as derivadas parciais $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ existem e são contínuas. Se, além disso, $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$, satisfazem as *Equações de Cauchy-Riemann*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

então, f é holomorfa em z_0.

Não demonstraremos aqui o Teorema 11.14, porque a prova envolve alguns resultados que usualmente não são vistos nos cursos de Cálculo. O leitor interessado pode consultar uma prova desse resultado em *Cálculo em uma Variável Complexa, Márcio G. Soares, 5ª Edição, Coleção Matemática Universitária, IMPA*.

Podemos aplicar os Teoremas 11.14 e 11.15 para calcular a derivada de algumas funções complexas de variável complexa.

Exemplo 11.19.

Seja $f(z) = e^z$, $z \in \mathbb{C}$. Vimos, na Aula 7, que $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \Rightarrow u(x,y) = e^x \cos y$ e $v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$. Temos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen} y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \operatorname{sen} y \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}.$$

Logo, $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ satisfazem as *Equações de Cauchy-Riemann* e como essas derivadas parciais são evidentemente contínuas, segue-se do Teorema 11.14 que $f(z)$ é holomorfa em todos os pontos de $\mathbb{C}$.

Além disso, resulta do Teorema 11.13 que $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} - i\dfrac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^z$.

Agora, podemos aplicar os Teoremas 11.11 e 11.12 para calcular as derivadas das funções trigométricas e hiperbólicas.

i. $f(z) = \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \Rightarrow f'(z) = i\left(\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}\right) = -\left(\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i}\right) = -\operatorname{sen} z$.

ii. $f(z) = \operatorname{sen} z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \Rightarrow f'(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$.

iii. $f(z) = \cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} \Rightarrow f'(z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} = \operatorname{senh} z$.

iv. $f(z) = \operatorname{senh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} \Rightarrow f'(z) = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z$.

O próximo resultado é uma condição necessária e suficiente para a existência de derivada da função inversa.

Teorema 11.16.

Sejam X e Y abertos de $\mathbb{C}$ e $f : X \to Y$ uma bijeção. Se $g : Y \to X$ é a função inversa de f, $g(z) = f^{-1}(z)$, então, g é holomorfa em $z_0 \in Y$ se, e somente se, $g(z)$ é contínua em z_0 e $f'(g(z_0)) = w_0 \neq 0$. Nesse caso, a derivada de $g'(z_0)$ é

$$g'(z_0) = \frac{1}{f'(g(z_0))}.$$

Prova

Suponhamos g holomorfa em z_0. Então, pelo Teorema 11.11, g é contínua e, como f é diferenciável em $g(z_0)$ e $f(g(z)) = z$ resulta da *Regra da Cadeia* que

$$g'(z_0)f'(g(z_0)) = 1 \Rightarrow f'(g(z_0)) = w_0 \neq 0 \text{ e } g'(z_0) = \frac{1}{f'(g(z_0))}.$$

Reciprocamente, suponhamos $g(z)$ contínua em z_0 e $f'(g(z_0)) = w_0 \neq 0$.

Temos $\displaystyle\lim_{z \to g(z_0)} \frac{f(z) - f(g(z_0))}{z - g(z_0)}$.

Como g é uma bijeção contínua em z_0, então $\displaystyle\lim_{z \to z_0} g(z) = g(z_0)$ e $g(z) \neq g(z_0)$ se $z \neq z_0$, logo, se $h(z)$ é definida por $h(z) = \dfrac{f(z) - f(g(z_0))}{z - g(z_0)}$, $z \neq g(z_0)$, a função composta $h \circ g(z)$, $z \neq z_0$, está bem definida e segue-se do Teorema 11.6 que

$$w_0 = f'(g(z_0)) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(g(z)) - f(g(z_0))}{g(z) - g(z_0)} = \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{g(z) - g(z_0)}. \quad (i)$$

Mas $f'(g(z_0)) = w_0 \neq 0$, portanto, resulta de (i) e c do Teorema 11.5 que

$$\frac{1}{f'(g(z_0))} = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = g'(z_0). \qquad \square$$

Como aplicação do Teorema 11.16, determinaremos as derivadas dos ramos principais da raiz n-ésima e do Logaritmo.

Exemplo 11.20.

Seja $\begin{cases} g : \mathbb{C} - (-\infty, 0] \to \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \text{Im} < \pi\} \\ g(z) = \text{Log}\, z = \ln|z| + \text{Arg}(z)i \end{cases}$ o ramo principal do Logaritmo.

Vimos que $g(z)$ é a inversa de

$$f : \begin{cases} \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \text{Im} < \pi\} \to \mathbb{C} - (-\infty, 0] \\ f(z) = e^z \end{cases}.$$

Como $f'(z) = e^z \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$, resulta do Teorema 11.15 que

$$g'(z) = \frac{1}{f'(\text{Log}\, z)} = \frac{1}{e^{\text{Log}\, z}} = \frac{1}{z},\ z \notin \mathbb{C} - (-\infty, 0].$$

Seja $\begin{cases} g : \mathbb{C} - (-\infty, 0] \to \left\{z \in \mathbb{C} \mid -\dfrac{\pi}{n} < \text{Arg}(z) < \dfrac{\pi}{n}\right\} \\ g(z) = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\text{Arg}(z)}{n}} \end{cases}$ o ramo principal da raiz n-ésima. Vimos que $g(z)$ é a inversa de

$$f : \begin{cases} \left\{z \in \mathbb{C} \mid -\dfrac{\pi}{n} < \text{Arg}(z) < \dfrac{\pi}{n}\right\} \to \mathbb{C} - (-\infty, 0] \\ f(z) = z^n \end{cases}.$$

Como $f'(z) = nz^{n-1} \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C} - (-\infty, 0]$, resulta do Teorema 11.15 que $g'(z) = \dfrac{1}{f'(\sqrt[n]{z})} = \dfrac{1}{n(\sqrt[n]{z})^{n-1}} =$
$= \dfrac{1}{n(\sqrt[n]{|z|})^{n-1}e^{i(n-1)\frac{\text{Arg}(z)}{n}}}$, $z \in \mathbb{C} - (-\infty, 0]$.

Terminaremos essa seção apresentando a versão complexa da *Regra de L'Hopital*.

Teorema 11.17.

Sejam $f(z)$ e $g(z)$ funções holomorfas em z_0. Se $f(z_0) = g(z_0) = 0$ e $g'(z_0) \neq 0$, então

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Prova

Podemos escrever $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}$.

Como existem os limites $f'(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ e $g'(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}$, segue-se de c do Teorema 11.5 que

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}=\frac{\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}. \qquad \square$$

Exemplo 11.21.

Se $f(z)=\text{sen}^2(z)$, pela *Regra da Cadeia*, temos $f'(z)=2\cos z\,\text{sen}\,z$.

Logo, resulta da *Regra de L'Hopital* que

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\text{sen}^2 z}{e^z-1}=\lim_{z\to z_0}\frac{2\cos z\,\text{sen}\,z}{e^z}=\frac{0}{1}=0.$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Se $f(z)=\sqrt{z}$ é o ramo principal da raiz quadrada, calcule $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{z-z_0}{\sqrt{z}-\sqrt{z_0}}$.

   Solução: Como $f(z)=\sqrt{z}$ é o ramo principal da raiz quadrada, temos $(\sqrt{z})^2=z$ e podemos escrever

   $$\lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{\sqrt{z}-\sqrt{z_0}}=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)(\sqrt{z}+\sqrt{z_0})}{(\sqrt{z}-\sqrt{z_0})(\sqrt{z}+\sqrt{z_0})}=$$
   $$=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)(\sqrt{z}+\sqrt{z_0})}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\sqrt{z}+\sqrt{z_0}=2\sqrt{z_0}.$$

2. Determine, caso existam, as descontinuidades da função
   $$\begin{cases} f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}\\ f(r(\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta))=\text{sen}\,\theta, \ \text{ se } z\neq 0,\\ f(0)=0.\end{cases}$$

Solução: Se $z = x + yi \neq 0$, podemos escrever $f(z) = f(x+yi) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Como $y = \mathrm{Im}(z)$ e $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{1}{|z|}$ são funções contínuas para $z \neq 0$, seu produto $f(z)$ é uma função contínua para $z \neq 0$.

Portanto, a única possível descontinuidade de $f(z)$ é $z = 0$.

Seja $\alpha(t) = t(1+i), t \neq 0$. Temos $f_{|\alpha(t)} = f(\alpha(t)) = \dfrac{(1+i)t}{|t|\sqrt{2}}$ e, como não existe $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{|t|}$, segue-se que $f(z)$ é descontínua em $z = 0$.

3. Prove que a função $f(z) = z\mathrm{Re}(z)$ é holomorfa somente na origem.

Solução: Determinemos em que pontos as *Equações de Cauchy-Riemann* são satisfeitas. Temos $f(z) = z\mathrm{Re}(z) = (x+yi)x = x^2 + xyi \Rightarrow u(x,y) = x^2$ e $v(x,y) = xy$, logo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x = \dfrac{\partial v}{\partial y} = x \Rightarrow x = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = -y \Rightarrow y = 0 \end{cases}.$$

Assim, $z = 0$ é o único ponto de $\mathbb{C}$ no qual f pode ser holomorfa.

Como $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z\mathrm{Re}(z)}{z} = \lim\limits_{z\to 0} \mathrm{Re}(z) = 0$, segue-se que $f'(0) = 0$. □

4. Determine a derivada das seguintes funções

   a. $f(z) = \mathrm{tg}\, z$
   b. $f(z) = \mathrm{cotg}\, z$
   c. $f(z) = \sec z$
   d. $f(z) = \mathrm{cossec}\, z$

Solução:

a. Temos $f(z) = \mathrm{tg}\, z = \dfrac{\mathrm{sen}\, z}{\cos z}$ e resulta do Exemplo 11.18 e do Teorema 11.12 que
$f'(z) = \dfrac{\cos z \cos z - \mathrm{sen}\, z(-\mathrm{sen}\, z)}{\cos^2 z} = \dfrac{1}{\cos^2 z} = \sec^2 z$, $z \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

b. Temos $f(z) = \operatorname{cotg} z = \dfrac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$ e resulta do Exemplo 11.18 e do Teorema 11.12 que
$f'(z) = \dfrac{-\operatorname{sen} z \operatorname{sen} z - \cos z \cos z}{\operatorname{sen}^2 z} = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 z} = -\operatorname{cossec}^2 z$,
$z \neq \pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Observação: Poderíamos também ter determinado $f'(z)$ aplicando a *Regra da Cadeia* à função $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{tg} z}$.

c. Temos $f(z) = \sec z = \dfrac{1}{\cos z}$ e resulta do Exemplo 11.18 e do Teorema 11.12 que
$f'(z) = \dfrac{0.\cos z - (-\operatorname{sen} z)}{\cos^2 z} = \dfrac{\operatorname{sen} z}{\cos z}\dfrac{1}{\cos z} = \sec z \operatorname{tg} z$,
$z \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Observação: Poderíamos também ter determinado $f'(z)$ aplicando a *Regra da Cadeia* à função $f(z) = \dfrac{1}{\cos z}$.

d. Temos $f(z) = \operatorname{cossec} z = \dfrac{1}{\operatorname{sen} z}$ e resulta do Exemplo 11.18 e do Teorema 11.12 que
$f'(z) = \dfrac{0.\operatorname{sen} z - \cos z}{\operatorname{sen}^2 z} = -\dfrac{\cos z}{\operatorname{sen} z}\dfrac{1}{\operatorname{sen} z} = -\operatorname{cossec} z \operatorname{cotg} z$,
$z \neq \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Observação: Poderíamos também ter determinado $f'(z)$ aplicando a *Regra da Cadeia* à função $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} z}$.

5. Determine a derivada da função $f(z) = \operatorname{sen}(e^z + z)$.

Solução: Resulta da *Regra da Cadeia* que

$$f'(z) = (e^z + 1)\cos(e^z + z).$$

6. Calcule o limite $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{z^2}$

Solução: Aplicando duas vezes a *Regra de L'Hopital*, obtemos

$$\lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{2z} = \lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{2} = \frac{1}{2}.$$

Exercícios Propostos

1. Determine a e $b \in \mathbb{C}$ para que a função

$$\begin{cases} f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ f(z) = \dfrac{z^2 + az + b}{z - 1 + i}, \text{ se } z \neq 1 - i, \\ f(1-i) = 2 \end{cases}$$

seja contínua em $z = 1 - i$.

2. Determine, caso existam, as descontinuidades da função

$$\begin{cases} f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ f(z) = \dfrac{\text{Re}(z)}{z}, \text{ se } z \neq 0, \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

3. Prove que a função $f(z) = e^{\bar{z}}$ **não** é holomorfa em nenhum ponto de $\mathbb{C}$.

4. Determine a derivada das seguintes funções
   a. $f(z) = \text{tgh}\, z$.
   b. $f(z) = \text{cotgh}\, z$.
   c. $f(z) = \text{sech}\, z$.
   d. $f(z) = \text{cossech}\, z$.

5. Se $f(z) = \sqrt[3]{z}$ é o ramo principal da raiz cúbica e $f(z) = \text{Log}\, z$ é o ramo principal do Logaritmo, determine a derivada da função $h(z) = \sqrt[3]{\text{Log}\, z + \cos z}$.

6. Calcule o limite $\displaystyle\lim_{z \to 0} \frac{z - \text{sen}\, z}{e^{z^3} - 1}$.

Solução dos Exercícios Propostos

1. Determine a e $b \in \mathbb{C}$ para que a função

$$\begin{cases} f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ f(z) = \dfrac{z^2 + az + b}{z - 1 + i}, \text{ se } z \neq 1 - i, \\ f(1-i) = 2 \end{cases}$$

seja contínua em $z = 1 - i$.

Solução: Para que $f(z)$ seja contínua em $z = 1-i$, é necessário que $\displaystyle\lim_{z\to 1-i} \frac{z^2+az+b}{z-1+i} = f(1-i) = 2$.

Se $g(z) = z^2+az+b$, devemos ter $0 = g(1-i) = (1-i)^2 + a(1-i)+b = -2i+a(1-i)+b$. (i).

Temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, logo, resulta da *Regra de L´Hopital* que $\displaystyle\lim_{z\to 1-i} \frac{z^2+az+b}{z-1+i} = \lim_{z\to 1-i} 2z+a = 2(1-i)+a = 2 \Rightarrow a = 2i$.

Substituindo $a = 2i$ em (i), obtemos $b = 2i + a(-1+i) = = 2i+2i(-1+i) = -2$.

2. Determine, caso existam, as descontinuidades da função

$$\begin{cases} f:\mathbb{C}\to\mathbb{C} \\ f(z) = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{z},\ \text{se } z\neq 0, \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Solução: Como $g(z) = \mathrm{Re}(z)$ e $h(z) = z$ são funções contínuas e $h(z)\neq 0$ para $z\neq 0$, pelo Teorema 11.9, seu quociente $f(z)$ é uma função contínua para $z\neq 0$.

Portanto, a única possível descontinuidade de $f(z)$ é $z = 0$.

Seja $X\{t(1+mi), t\neq 0\}$.

Temos $f_{|\alpha(t)} = f(\alpha(t)) = \dfrac{t}{t(1+mi)} = \dfrac{1}{1+mi} \Rightarrow \displaystyle\lim_{t\to 0} f_{|X} = \frac{1}{1+mi}$ e, uma vez que esse limite depende de m, segue-se que $f(z)$ é descontínua em $z = 0$.

3. Prove que a função $f(z) = e^{\bar{z}}$ **não** é holomorfa em nenhum ponto de $\mathbb{C}$.

Solução: Mostraremos que as *Equações de Cauchy-Riemann* **não** são satisfeitas em nenhum ponto de $\mathbb{C}$. Temos $f(z) = e^x(\cos y - i\,\mathrm{sen}\,y) \Rightarrow u(x,y) = e^x\cos y$ e $v(x,y) = -e^x\,\mathrm{sen}\,y$, logo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos y = \dfrac{\partial v}{\partial y} = -e^x\cos y \Rightarrow e^x\cos y = 0 \Rightarrow \cos y = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -e^x\,\mathrm{sen}\,y = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = e^x\,\mathrm{sen}\,y \Rightarrow e^x\,\mathrm{sen}\,y = 0 \Rightarrow \mathrm{sen}\,y = 0 \end{cases}.$$

Mas não é possível que $\operatorname{sen} y = \cos y = 0$, logo as *Equações de Cauchy-Riemann* não são satisfeitas em nenhum ponto $z = x + yi \in \mathbb{C}$, donde concluímos que $f(z)$ **não** é holomorfa em nenhum ponto de $\mathbb{C}$. $\square$

4. Determine a derivada das seguintes funções
   a. $f(z) = \operatorname{tgh} z$.
   b. $f(z) = \operatorname{cotgh} z$.
   c. $f(z) = \operatorname{sech} z$.
   d. $f(z) = \operatorname{cossech} z$.

Solução:

a. Temos $f(z) = \operatorname{tgh} z = \dfrac{\operatorname{senh} z}{\cosh z}$ e resulta do Exemplo 11.18 e do Teorema 11.12 que
$$f'(z) = \frac{\cosh z \cosh z - \operatorname{senh} z(\operatorname{senh} z)}{\cosh^2 z} = \frac{1}{\cosh^2 z} = \operatorname{sech}^2 z,$$
$z \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

b. Temos $f(z) = \operatorname{cotgh} z = \dfrac{\cosh z}{\operatorname{senh} z}$ e resulta do Exemplo 11.18 e do Teorema 11.12 que
$$f'(z) = \frac{\operatorname{senh} z \operatorname{senh} z - \cosh z \cosh z}{\operatorname{sen}^2 z} = -\frac{1}{\operatorname{senh}^2 z} = -\operatorname{cossech}^2 z,$$
$z \neq \pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Observação: Poderíamos também ter determinado $f'(z)$ aplicando a *Regra da Cadeia* à função $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{tgh} z}$.

c. Temos $f(z) = \operatorname{sech} z = \dfrac{1}{\cosh z}$ e resulta do Exemplo 11.18 e do Teorema 11.12 que
$$f'(z) = \frac{0.\cosh z - (\operatorname{senh} z)}{\cos^2 z} = -\frac{\operatorname{senh} z}{\cosh z}\frac{1}{\cosh z} = -\operatorname{sech} z \operatorname{tgh} z,$$
$z \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Observação: Poderíamos também ter determinado $f'(z)$ aplicando a *Regra da Cadeia* à função $f(z) = \dfrac{1}{\cosh z}$.

d. Temos $f(z) = \operatorname{cossech} z = \dfrac{1}{\operatorname{senh} z}$ e resulta do Exemplo 11.18 e do Teorema 11.12 que
$$f'(z) = \frac{0.\operatorname{senh} z - \cosh z}{\operatorname{senh}^2 z} = -\frac{\cosh z}{\operatorname{senh} z}\frac{1}{\operatorname{senh} z} = -\operatorname{cossech} z \operatorname{cotgh} z,$$
$z \neq \pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Observação: Poderíamos também ter determinado $f'(z)$ aplicando a *Regra da Cadeia* à função $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{senh} z}$.

5. Se $f(z) = \sqrt[3]{z}$ é o ramo principal da raiz cúbica e $f(z) = \operatorname{Log} z$ é o ramo principal do Logaritmo, determine a derivada da função $h(z) = \sqrt[3]{\operatorname{Log} z + \cos z}$.

   Solução: Resulta da *Regra da Cadeia* que

$$h'(z) = \frac{1}{3}\left[\frac{\frac{1}{z} - \operatorname{sen} z}{(\sqrt[3]{\operatorname{Log} z + \cos z})^2}\right].$$

6. Calcule o limite $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{z - \operatorname{sen} z}{e^{z^3} - 1}$.

   1ª Solução: Aplicando a *Regra de L'Hopital*, obtemos

$$\lim_{z\to 0} \frac{z - \operatorname{sen} z}{e^{z^3} - 1} = \lim_{z\to 0} \frac{1 - \cos z}{3z^2 e^{z^3}}.$$

   Provamos no Exercício Resolvido que $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} = \frac{1}{2}$ e, como $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{1}{3e^{z^3}} = \frac{1}{3}$, resulta de b do Teorema 11.5 que $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{z - \operatorname{sen} z}{e^{z^3} - 1} = \frac{1}{2}.\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

   2ª Solução: Aplicando a *Regra de L'Hopital* três vezes, obtemos

$$\lim_{z\to 0} \frac{z - \operatorname{sen} z}{e^{z^3} - 1} = \lim_{z\to 0} \frac{1 - \cos z}{3z^2 e^{z^3}} = \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{9z^4 e^{z^3} + 6ze^{z^3}} =$$
$$= \lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{27z^6 e^{z^3} + 6e^{z^3}} = \frac{1}{6}.$$