Fundação Cecierj

Pré-Vestibular Social

Matemática

Augusto César de Oliveira Morgado

Fabio Henrique Teixeira de Souza

Celso José da Costa

Luiz Manoel Figueiredo

Victor augusto Giraldo

6ª edição

Revisada e ampliada

Módulo 1

2015

GOVERNO DO Rio de Janeiro

SECRETARIA DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO

Fundação CECIERJ Consórcio cederj

NOVA CEDAE

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador
Luiz Fernando de Souza Pezão

Secretário de Estado de Ciência, Tecnologia e Inovação
Gustavo Tutuca

Fundação Cecierj

Presidente
Carlos Eduardo Bielschowsky

Vice-Presidente de Educação Superior a Distância
Masako Oya Masuda

Vice-Presidente Científica
Mônica Damouche

Pré-Vestibular Social

Rua da Ajuda 5 - 15º andar - Centro - Rio de Janeiro - RJ - 20040-000
Site: www.pvs.cederj.edu.br

Diretora
Celina M.S. Costa

Coordenadores de Matemática
Carmem Maria Costa de Carvalho
Fabio Henrique Teixeira de Souza
Victor Augusto Giraldo

Material Didático

Elaboração de Conteúdo
Augusto César de Oliveira Morgado
Fabio Henrique Teixeira de Souza
Celso José da Costa
Luiz Manoel Figueiredo
Victor Augusto Giraldo

Revisão de Conteúdo
Fabio Henrique Teixeira de Souza
Victor Augusto Giraldo

Capa, Projeto Gráfico, Manipulação de Imagens e Editoração Eletrônica
Filipe Dutra de Brito
Cristina Portella
Deborah Curci
Mário Lima

Foto de Capa
Fonte: http://www.freeimages.com/browse.phtml?f=download&id=1195369
Uploaded by: nkzs

P922p
Pré-vestibular social: matemática. v. 1 / Augusto César Morgado... [et al.]. – 6. ed. rev. ampl. – Rio de Janeiro : Fundação Cecierj, 2014.
120 p. ; 21 x 28 cm.

ISBN: 978-85-7648-984-9

1. Matemática. 2. Conjuntos. 3. Sequências. 4. Probabilidade. 5. Análise combinatória. 6. Gráficos. 7. Funções. I. Souza, Fabio Henrique Teixeira de. II. Costa, Celso José da. III. Figueiredo, Luiz Manoel. IV. Giraldo, Victor Augusto I. Título.

CDD: 510

Sumário

Apresentação

Caro Aluno,

Este conjunto de apostilas foi elaborado de acordo com as necessidades e a lógica do projeto do Pré-Vestibular Social. Os conteúdos aqui apresentados foram desenvolvidos para embasar as aulas semanais presenciais que ocorrem nos polos. O material impresso por si só não causará o efeito desejado, portanto é imprescindível que você compareça regularmente às aulas e sessões de orientação acadêmica para obter o melhor resultado possível. Procure, também, a ajuda do atendimento 0800 colocado à sua disposição. A leitura antecipada dos capítulos permitirá que você participe mais ativamente das aulas expondo suas dúvidas o que aumentará as chances de entendimento dos conteúdos. Lembre-se que o aprendizado só acontece como via de mão dupla.

Aproveite este material da maneira adequada e terá mais chances de alcançar seus objetivos.

Bons estudos!

Equipe de Direção do PVS

1

Números Inteiros e Conjuntos

Números inteiros

Você já conhece o conjunto dos números naturais, representado pela letra IN:

IN = {1, 2, 3, 4, 5, 6...}

Este conjunto é formado pelos números inteiros positivos e que são usados basicamente para contar objetos. Entretanto, existem situações numéricas em que precisamos subtrair números sem ter um limite inferior. Para situações como esta, precisamos de um novo tipo de número; pois em IN, podemos considerar números cada vez maiores, sem limite superior, mas não podemos subtrair indefinidamente.

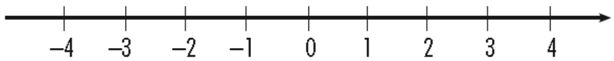
São exemplos deste tipo de situações:

- dívidas e saldos bancários;
- temperaturas;
- altitude (comparação com o nível do mar);
- pontos em um jogo.

Então, precisamos do conjunto dos números inteiros, representado pela letra Z:

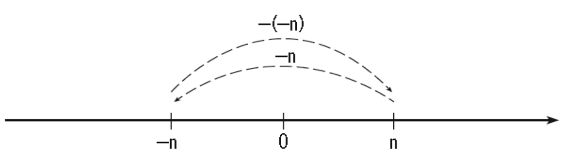
Z = {...,–6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,...}

Quando aprendemos as operações com números inteiros na escola, estudamos algumas "regras", como "menos com menos é mais". Porém, para que entendamos por que essas regras são válidas, e as apliquemos corretamente, é importante entender a representação dos números inteiros na reta numérica:

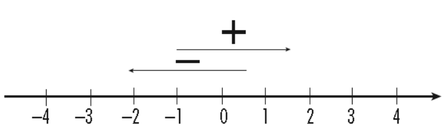


É importante lembrar que a seta indica o sentido de crescimento da reta. Assim, se andamos no mesmo sentido da seta, estamos aumentando os valores dos números; e se andamos no sentido oposto, estamos diminuindo os valores. Também podemos perceber que se n é um número inteiro qualquer, então –n corresponde ao simétrico desse número em relação ao 0. Assim, se fizermos –(–n), estaremos tomando o simétrico do simétrico de n. Ou seja, o próprio n.

$$-(-n) = n$$



A adição e a subtração de números inteiros também podem ser interpretadas na reta numérica: somar um número inteiro qualquer com um número positivo significa andar no sentido positivo da reta (isto é, para a direita); subtrair de um número inteiro qualquer um número positivo significa andar no sentido negativo da reta (isto é, para a esquerda). Para entender melhor, faça os exercícios de 1 a 5 no final desta seção.



A chamada regra dos sinais que vale para a multiplicação de números inteiros não é uma "convenção" nem uma "regra arbitrária". Podemos entendê-la se pensamos na multiplicação com números positivos. Suponha que você esteja multiplicando os números naturais por 3 (isto é, escrevendo a "tabuada" de multiplicação por 3). Observe que, sempre que você subtrai uma unidade do primeiro fator, o resultado da multiplicação é subtraído de 3 unidades.

$$\begin{array}{lcr} & 4 \times 3 = 12 & \\ -1 & & -3 \\ & 3 \times 3 = 9 & \\ -1 & & -3 \\ & 2 \times 3 = 6 & \\ -1 & & -3 \\ & 1 \times 3 = 3 & \\ -1 & & -3 \\ & 0 \times 3 = 0 & \end{array}$$

Se quisermos continuar este processo, multiplicando o número 3 por números menores que 0, devemos continuar subtraindo 3 unidades dos resultados. Assim, vamos obter o seguinte.

$$\begin{array}{lcr} & 4 \times 3 = 12 & \\ -1 & & -3 \\ & 3 \times 3 = 9 & \\ -1 & & -3 \\ & 2 \times 3 = 6 & \\ -1 & & -3 \\ & 1 \times 3 = 3 & \\ -1 & & -3 \\ & 0 \times 3 = 0 & \\ -1 & & -3 \\ & (-1) \times 3 = -3 & \\ -1 & & -3 \\ & (-2) \times 3 = -6 & \\ -1 & & -3 \\ & (-3) \times 3 = -9 & \end{array}$$

Como base neste raciocínio, podemos concluir a primeira parte da "regra dos sinais" para a multiplicação: quando multiplicamos um número positivo por um número negativo, o resultado é sempre um número negativo.

Agora precisamos determinar o que acontece quando multiplicamos dois números negativos. Pela regra que acabamos de deduzir, já sabemos multiplicar, por exemplo, por –3. Observando os resultados desta multiplicação, vemos que agora, sempre que diminuímos 1 unidade do primeiro fator, são somadas 3 unidades ao resultado. Lembre-se que, para ir de –12 a –9, estamos andando no sentido positivo da reta numérica (pois –12 é menor que –9). Assim, estamos somando 3 unidades.

$$\begin{array}{lcr} & 4 \times (-3) = -12 & \\ -1 & & +3 \\ & 3 \times (-3) = -9 & \\ -1 & & +3 \\ & 2 \times (-3) = -6 & \\ -1 & & +3 \\ & 1 \times (-3) = -3 & \\ -1 & & +3 \\ & 0 \times (-3) = 0 & \end{array}$$

Para prosseguir nesse processo, devemos continuar somando 3 unidades ao resultado. Então, obtemos o seguinte.

$$\begin{array}{lcr} & 4 \times (-3) = -12 & \\ -1 & & +3 \\ & 3 \times (-3) = -9 & \\ -1 & & +3 \\ & 2 \times (-3) = -6 & \\ -1 & & +3 \\ & 1 \times (-3) = -3 & \\ -1 & & +3 \\ & 0 \times (-3) = -0 & \\ -1 & & +3 \\ & (-1) \times (-3) = 3 & \\ -1 & & +3 \\ & (-2) \times (-3) = 6 & \\ -1 & & +3 \\ & (-3) \times (-3) = 9 & \end{array}$$

Como base nesse raciocínio, podemos concluir a segunda parte da "regra dos sinais" para a multiplicação: quando multiplicamos um número negativo por outro número negativo, o resultado é sempre um número positivo.

Conjuntos

A ideia de conjunto é uma das mais básicas de toda a Matemática. Embora o conceito de conjunto tenha sido introduzido na Matemática relativamente há pouco tempo (sendo muito mais recente que outros conceitos importantes, como o de número, por exemplo), essencialmente toda a linguagem da Matemática desenvolvida hoje se baseia na ideia de conjunto.

Podemos pensar em um conjunto como uma reunião de objetos, que são denominados elementos. Esses objetos podem ser números, figuras geométricas, pontos no plano ou no espaço, bem como quaisquer outras coisas. Assim, um conjunto é formado por elementos.

Quando um elemento a está em um conjunto X, dizemos que este elemento pertence a X, e usamos o símbolo $a \in$ X. Se a não está em um conjunto X, dizemos que não pertence a X, e usamos o símbolo $a \notin$ X. Em geral, representamos um conjunto pondo seus elementos entre chaves. Vejamos alguns exemplos.

Exemplos:

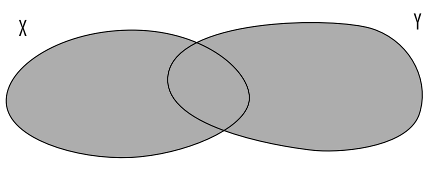
- A = {1,2,3,4,5}
- B = {2,3,5,8,11}
- N = {1,2,3,...} (conjunto dos números naturais)
- P = {n $\in$ N | n é múltiplo de 2} (conjunto dos números pares)
- M = {meses do ano}
- F = {meses do ano que começam com a letra j}
- G = {meses do ano cuja segunda letra é u}
- H = {meses do ano que começam com a letra b}
- Z = {...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...} (conjunto dos números inteiros)
- Q = { a/b | a,b $\in$ IN, b $\neq$ 0} (conjunto dos números racionais)
- T = {figuras planas com quatro lados} (conjunto dos quadriláteros)
- R = {figuras planas com quatro lados iguais e quatro ângulos retos} (conjunto dos quadrados)

União, Interseção e Diferença entre Conjuntos

Há algumas maneiras especiais de combinar os elementos de dois conjuntos X e Y, formando novos conjuntos. As principais são:

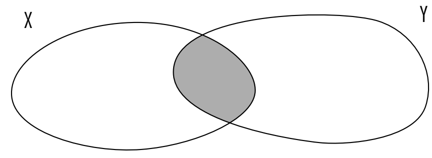
- A <u>união</u> de X e Y, representada por X $\cup$ Y, que é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a X *ou* pertencem a Y:

X $\cup$ Y = {a | a $\in$ X ou a $\in$ Y}



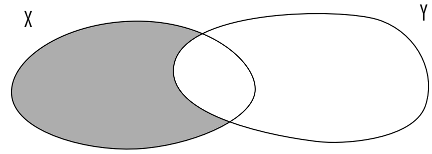
- A <u>interseção</u> de X e Y, representada por X $\cap$ Y, que é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a X *e* pertencem a Y:

X $\cap$ Y = {a | a $\in$ X e a $\in$ Y}



- A <u>diferença</u> de X e Y, representada por X − Y, que é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a X *e não* pertencem a Y:

- X − Y = {a | a $\in$ X e a $\notin$ Y}



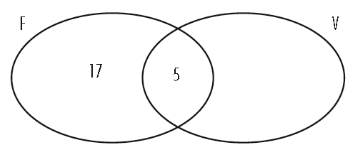
Exemplo

Em uma turma com 30 alunos, todos jogam futebol ou vôlei. Desses, 17 jogam apenas futebol, e 5 jogam futebol e vôlei. Quantos jogam apenas vôlei?

Solução: Sejam F e V, respectivamente, o conjunto dos alunos que jogam futebol e o conjunto dos alunos que jogam vôlei. Então, temos:

- F $\cup$ V é o conjunto total, formado pelos 30 alunos;
- F $\cap$ V é o conjunto dos alunos que jogam futebol e vôlei, formado por 5 alunos;
- F − V é o conjunto dos alunos que jogam futebol, mas não jogam vôlei, formado por 17 alunos;
- V − F é o conjunto dos alunos que jogam vôlei, mas não jogam futebol (cuja quantidade queremos determinar).

Podemos representar esses conjuntos como diagramas da seguinte forma:



Exemplo

Em uma turma com 30 alunos, todos jogam futebol, vôlei ou basquete. Desses sabemos que: 20 jogam futebol; 15 jogam vôlei; 7 alunos jogam futebol e basquete; 5 praticam apenas vôlei; apenas 2 praticam simultaneamente os três esportes; e nenhum joga apenas basquete. Determine:

a. Quantos alunos jogam apenas futebol?

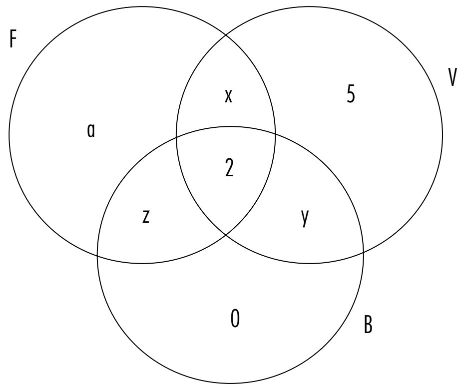
b. Quantos alunos jogam futebol e vôlei?

c. Quantos alunos jogam vôlei e basquete?

Solução: Sejam F, V e B, respectivamente, o conjunto dos alunos que jogam futebol, o conjunto dos alunos que jogam vôlei e o conjunto dos alunos que jogam basquete. Então, sabemos que:

- $F \cup V \cup B$ é o conjunto total, formado pelos 30 alunos;
- F é o conjunto de alunos que jogam futebol, e tem 20 elementos;
- V é o conjunto de alunos que jogam vôlei, e tem 15 elementos;
- $F \cap B$ é o conjunto de alunos que jogam futebol e basquete, e tem 7 elementos;
- $V - (F \cup B)$ é o conjunto de alunos que jogam apenas vôlei (isto é, jogam vôlei, mas não praticam futebol nem basquete), e tem 5 elementos;
- $B - (F \cup V) = \varnothing$ é o conjunto de alunos que jogam apenas basquete (isto é, jogam basquete, mas não praticam futebol nem vôlei);
- $F \cap V \cap B$ tem 2 elementos.

Podemos representar esses conjuntos em um diagrama, e indicar neste diagrama as quantidades que conhecemos e aquelas que queremos descobrir:



Como $F \cap B$ tem 7 elementos, temos que $z = 7 - 2 = 5$. Como o total de alunos é 30, podemos concluir que $y = 30 - 20 - 5 = 5$. Como V tem 15 elementos e $y = 5$, então $x = 15 - 5 - 5 - 2 = 3$. Como F tem 20 elementos, $x = 3$ e $z = 5$, então $a = 20 - 3 - 5 - 2 = 10$.

a. O número de alunos que jogam apenas futebol é $a = 10$.

b. O número de alunos que jogam futebol e vôlei é $x + 2 = 5$.

c. O número de alunos que jogam vôlei e basquete é $y + 2 = 7$.

Exercícios

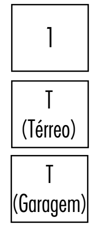
1) Pedro tinha R$ 500,00 na sua conta bancária.

(A) Ele sacou R$ 400,00. Quanto sobrou?

(B) Pedro precisou gastar mais R$ 300,00. Qual foi o saldo resultante?

2) André tinha R$ 150,00 na conta bancária. Um amigo depositou R$ 250,00 em sua conta para pagar uma dívida, mas André teve que sacar R$ 500,00. Que saldo restou na conta de André?

3) A figura abaixo mostra parte dos botões do elevador de um prédio. A garagem fica no subsolo. Quantos andares se deve subir para ir da garagem ao 5º andar?



4) O ponto mais alto da Terra é o pico do Monte Everest, localizado na cadeia de montanhas do Himalaia, na fronteira entre o Nepal e o Tibet. A altitude do pico é de cerca de 8.850m acima do nível do mar. O ponto mais profundo do nosso planeta é a Fossa das Marianas, no Oceano Pacífico, com aproximadamente 10.900 m abaixo do nível do mar. Qual é a diferença de altitude entre o ponto mais alto e o ponto mais profundo da Terra?

5) Uma aeromoça trabalha em uma linha área que liga Londres ao Rio de Janeiro. No último voo, ao sair de Londres, a temperatura era de -6^{o}C. Quando o avião chegou ao Rio, os termômetros locais marcavam 37^{o}C. Qual foi o aumento de temperatura experimentado pela aeromoça?

6) Determine os valores das expressões.

(A) $3 - 2\ (-4)$

(B) $-(-5) - (-2) - (-3)$

(C) $-5 - (-3) + 2$

(D) $(-3) \times (-2) - (-4)$

(E) $-(-1) \times (-(-2)) \times (-3)$

(F) $5 \times (-(-3)) - (-3)$

(G) $(-4) \times (-(-3)) - (-3) \times 2$

(H) $(-5) \times (-3) + (-(-3)) \times (-(-2))$

7) Se o dobro de um número é -12, que número é este?

8) Represente por meio de uma expressão algébrica o perímetro de um quadrado de lado X.

9) Expresse em palavras a expressão algébrica $3a + 4b$.

10) Expresse em palavras a expressão algébrica $5k - 8 = 12$.

11) Escreva uma expressão algébrica para a sentença "a metade um número somado ao triplo de outro número".

12) O preço de 6 canetas é R$ 12,60. Qual das expressões abaixo representa o preço p (em reais) de n canetas?

(A) $p = 12,60 \cdot n$
(B) $p = 2,10 + n$
(C) $p = 2,10 \cdot n$
(D) $p = 6 \cdot n + 12,60$

13) Cláudia contratou um pintor para pintar a parede da sala de sua casa. Para fazer o serviço, o pintor cobra uma taxa fixa de R$ 150,00 mais R$ 20,00 por metro quadrado pintado. Qual das expressões abaixo representa o valor p (em reais) cobrado pelo pintor por área pintada s (em metros quadrados)?

(A) $p = 20 \cdot s + 150$
(B) $p = 150 \cdot s +$
(C) $p = 20 \cdot s - 150$
(D) $p = 150 \cdot s - 20$

14) Considere as expressões abaixo. Qual delas se torna uma igualdade verdadeira quando substituímos x por 1 e por -2?

(A) $x^2 - x - 2 = 0$
(B) $x^2 + x - 2 = 0$
(C) $(x + 1) \cdot (x - 2) = 0$
(D) $(x - 1) \cdot (x + 2) = 0$

15) Em cada expressão abaixo, encontre valores para a letra que tornem a igualdade verdadeira.

(A) $a - 3 = 5$
(B) $2 \cdot b = -6$
(C) $k^2 = 9$
(D) $t^3 = 8$

16) (UFRJ/2002) Um clube oferece a seus associados aulas de três modalidades de esporte: natação, tênis e futebol. Nenhum associado pôde se inscrever simultaneamente em tênis e futebol, pois, por problemas administrativos, as aulas destes dois esportes serão dadas no mesmo horário. Encerradas as inscrições, verificou-se que: dos 85 inscritos em natação, 50 só farão natação; o total de inscritos para as aulas de tênis foi de 17 e, para futebol, de 38; o número de inscritos só para as aulas de futebol excede em 10 o número de inscritos só para as de tênis. Quantos associados se inscreveram simultaneamente para aulas de futebol e natação?

17) (UERJ/2003) Três candidatos, A, B e C, concorrem a um mesmo cargo público de uma determinada comunidade. A tabela resume o resultado de um levantamento sobre a intenção de voto dos eleitores dessa comunidade.

Número de eleitores que votaram em...							
... um único candidato			**... dois candidatos**			**... qualquer um dos candidatos**	**... nenhum dos candidatos**
A	**B**	**C**	**A - B**	**B - C**	**A - C**		
600	1.000	1.400	100	300	200	100	1.300

Pode-se concluir, pelos dados da tabela, que a percentagem de eleitores consultados que não votariam no candidato B é:

(A) 66,0%
(B) 70,0%
(C) 94,5%
(D) 97,2%

18) (UERJ/2002) Em um posto de saúde foram atendidas, em determinado dia, 160 pessoas com a mesma doença, apresentando, pelo menos, os sintomas diarreia, febre ou dor no corpo, isoladamente ou não. A partir dos dados registrados nas fichas de atendimento dessas pessoas, foi elaborada a tabela abaixo.

Sintomas	**Frequência**
diarreia	62
febre	62
dor no corpo	72
diarreia e febre	14
diarreia e dor no corpo	08
febre e dor no corpo	20
diarreia, febre e dor no corpo	X

Na tabela, X corresponde ao número de pessoas que apresentaram, ao mesmo tempo, os três sintomas. Pode-se concluir que X é igual a:

(A) 6
(B) 8
(C) 10
(D) 12

19) (UFRJ/2002) Os 87 alunos do 3 ano do ensino médio de uma certa escola prestaram vestibular para três universidades: A, B e C. Todos os alunos dessa escola foram aprovados em pelo menos uma das universidades, mas somente um terço do total obteve aprovação em todas elas. As provas da universidade A foram mais difíceis e todos os alunos aprovados nesta foram também aprovados em pelo menos uma das outras duas. Os totais de alunos aprovados nas universidades A e B foram, respectivamente, 51 e 65. Sabe-se que, dos alunos aprovados em B, 50 foram também aprovados em C. Sabe-se também que o número de aprovados em A e em B é igual ao de aprovados em A e em C. Quantos alunos foram aprovados em apenas um dos três vestibulares prestados? Justifique.

20) (ENEM) No dia 17 de Maio próximo passado, houve uma campanha de doação de sangue em uma Universidade. Sabemos que o sangue das pessoas pode ser classificado em quatro tipos quanto a antígenos. Uma pesquisa feita com um grupo de 100 alunos da Universidade constatou que 42 deles têm o antígeno A, 36 têm o antígeno B e 12 o antígeno AB. Sendo assim, podemos afirmar que o número de alunos cujo sangue tem o antígeno O é:

(A) 20 alunos

(B) 26 alunos
(C) 34 alunos
(D) 35 alunos
(E) 36 alunos

Gabarito

1) a) 100,00 1b) – 200,00

2) – 100,00

3) 6 andares

4) 19.750 m

5) 43oC

6)
a) 5
b) 10
c) 0
d) 10
e) – 6
f) 18
g) – 6
h) 21

7) – 6

8) 4x

9) O triplo de a somado a quatro vezes b.

10) 5 vezes k somado a 8 é igual a 12.

11) $x \div 2 + 3 \cdot y$

12) C

13) A

14) D

15)
a) $a = 8$
b) $b = -3$
c) $k = -3$ ou $k = 3$
d) $t = 2$

16) 13

17) A

18) A

19) B

20) C

2

Números racionais

Números Racionais

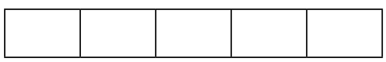
Os números racionais aparecem em situações em que precisamos lidar com quantidades não inteiras como, por exemplo, quando:

- tomamos uma parte de um todo;
- comparamos duas quantidades inteiras;
- fazemos uma divisão cujo resultado não é inteiro.

Estes números podem ser representados com frações p/q, em que p e q são números inteiros e q é diferente de 0 (pois divisão por zero não existe). Neste caso, p é chamado de numerador da fração e q de denominador da fração. Vejamos alguns exemplos.

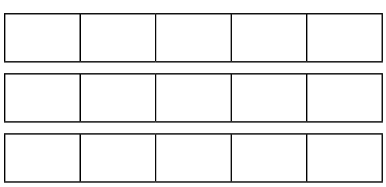
Exemplo 1

Se dividimos um chocolate inteiro em 5 partes iguais, qual é o resultado obtido? É claro que o resultado deve ser menor do que o próprio chocolate inteiro. Cada uma das partes será menor que o inteiro. Representamos cada uma dessas partes pela fração 1/5 para indicar que estamos dividindo 1 inteiro em 5 partes.

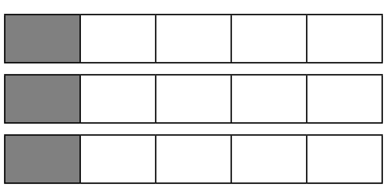


Se dividimos 1 inteiro em 5 partes iguais e tomamos 3 partes, como representamos o resultado? Para indicar que estamos dividindo por 5 e tomando 3 partes, representamos este valor pela fração 3/5.

Se dividimos 3 inteiros em 5 partes iguais, como representamos o resultado? Uma forma de dividir 3 inteiros em um número igual de partes é dividir cada inteiro separadamente nesse número de partes e depois juntar o resultado.

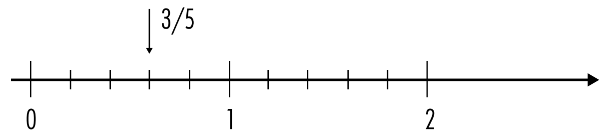


Assim, tomamos 3 pedaços, cada um de 1/5. Isto é outra forma de tomar 3/5.



Que número devemos multiplicar por 5 para obter 3 como resultado? Para responder a esta pergunta, devemos dividir 3 inteiros por 5. Como vimos na situação acima, o resultado é 3/5.

Podemos representar a fração 3/5 na reta numérica? Como vimos, a fração 3/5 representa uma quantidade menor que a unidade, mas ainda assim, podemos representá-la na reta. Para isto, basta dividir a unidade em 5 partes iguais e tomar 3 destas partes.



Exemplo 2

Em uma turma com 30 alunos, 3/5 são meninos. Isto significa que estamos dividindo a turma em 5 partes iguais e 3 destas partes correspondem a meninos. Para calcular 3/5 de 30, faça:

$$(30 \div 5) \times 3 = 6 \times 3 = 18.$$

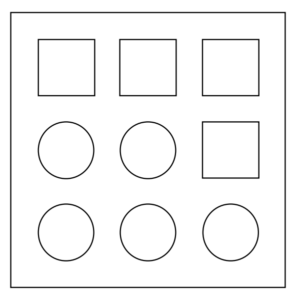
Isto é, a turma tem 18 meninos.

Exemplo 3

Na figura abaixo, o retângulo está dividido em 5 partes iguais, das quais colorimos 3. Por isso, a parte colorida representa 3/5 do total.

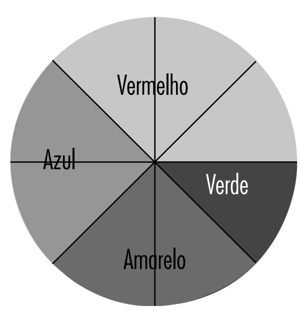
Exemplo 4

Na figura abaixo, temos 5 círculos em um total de 9 figuras. Por isso, o número de círculos representa 5/9 do total de figuras. Por outro lado, há 4 quadrados em um total de 9 figuras. Portanto, os quadrados representam 4/9 do total de figuras.



Exemplo 5

Em uma turma de 40 alunos, foi feita uma pesquisa para saber a cor favorita de cada aluno. Os resultados foram representados no gráfico abaixo.



O gráfico está dividido em 8 partes iguais. Dessas, 3 correspondem aos alunos que preferem vermelho; 1 aos têm verde como cor favorita; 2 aos que preferem amarelo; e também 2 aos que têm azul como cor favorita.

Portanto, podemos dizer que: 3/8 dos alunos preferem vermelho; 1/8 prefere verde; 2/8 preferem azul; e 2/8 preferem amarelo.

Exemplo 6

Se uma turma tem 15 meninos e 25 meninas, dizemos que a razão entre o número de meninos e o número de meninas é 15/25. Além disso, como a turma tem um total de 40 alunos, dizemos que a razão entre o número de meninos e o total de alunos na turma é 15/40 e a razão entre o número de meninas e o total de alunos na turma é 25/40.

Exercícios

1) Na figura abaixo, o retângulo está dividido em partes iguais. Que fração do retângulo a parte cinza representa?

2) Uma turma é dividida em 5 grupos, tendo cada grupo o mesmo número de alunos. Três desses grupos são formados apenas por meninas e o restante dos grupos, só por meninos. Que fração do total os grupos formados por meninas representam? Quantos meninos há na turma?

3) Carlos recebeu R$ 200,00 de presente de aniversário de sua tia. Como quer juntar dinheiro para comprar uma bicicleta, conseguiu guardar 80% do que recebeu. Quanto Carlos guardou?

4) Dividi uma barra de chocolate em 6 partes e comi 4 dessas partes. Que fração da barra de chocolate eu comi?

5) Num colar, para cada 3 contas amarelas são colocadas 5 contas vermelhas.
a) Qual é a razão entre as contas amarelas e vermelhas no colar?
b) Qual a razão entre as contas vermelhas e amarelas no colar?
c) Se o colar tiver 56 contas, quantas serão amarelas?

6) Marcelo dividiu 30 balas entre 6 amigos.
a) Que fração do total de balas cada um recebeu?
b) Quantas balas cada um recebeu?

7) Em uma fazenda, são criados apenas galinhas e porcos em um total de 48 animais. Se 5/6 desses animais são galinhas, qual é o número de porcos na fazenda?

8) Ana comprou um saco com 30 balas. Separou 1/3 para si própria e dividiu o restante entre 4 amigas. Quantas balas cada amiga recebeu?

9) Em qual das figuras a parte cinza representa 2/5 do retângulo?

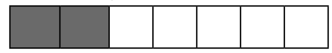
(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

10) Em qual das figuras a parte cinza representa 3/4 do retângulo?

(A) 

(B) 

(C) 

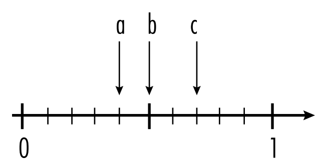
(D) 

11) Marcelo convidou 40 amigos para sua festa de aniversario. Ao final da festa, ele verificou que somente 4/5 dos convidados compareceram. Quantos amigos foram à festa de Marcelo?

12) Ana Paula estava resolvendo os exercícios de Matemática de seu dever de casa. Ao terminar 12 exercícios, verificou que já tinha completado 3/4 dos exercícios. Qual era o número total de exercícios no dever de casa?

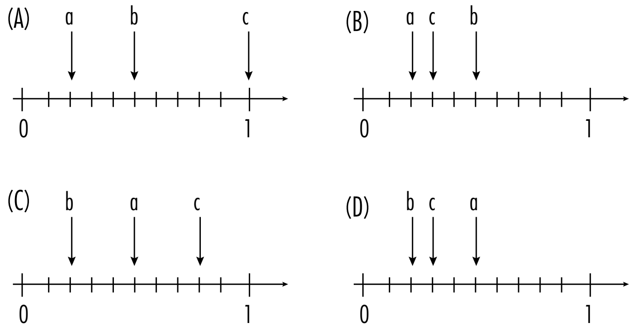
13) João recebeu R$ 400,00 de bônus em certo mês em seu trabalho. Ele conseguiu poupar 70% do bônus. Quanto João poupou?

14) Considere os números racionais indicados a seguir. Que números são estes?



(A) a = 2/5, b = 1/5 e c = 7/10
(B) a = 1/4, b = 1/2 e c = 1/7
(C) a = 1/4, b = 1/5 e c = 1/7
(D) a = 2/5, b = 1/2 e c = 7/10

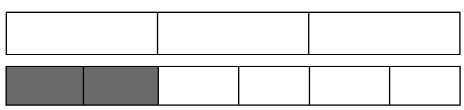
15) Considere os números racionais a = 1/2, b = 1/5 e c = 3/10 . Qual é a forma correta de localizar esses números na reta?



Frações Equivalentes

Um fato que parece surpreender estudantes de matemática é que uma mesma quantidade pode ser representada de diferentes formas. Por exemplo, 1/3 e 2/6 correspondem à mesma quantidade.

Observe a figura abaixo.



Na primeira representação, o inteiro foi dividido em 3 pedaços iguais e foi tomado um desses pedaços. Na segunda, o inteiro foi dividido em 6 pedaços iguais e foram tomamos 2 desses. É claro que esses pedaços são menores do que os anteriores. Mais precisamente, cada pedaço maior corresponde a dois pedaços menores. Mas como estamos tomando 2 pedaços menores, obtemos o mesmo resultado.

Assim, as frações 1/3 e 2/6 são formas equivalentes de representar uma mesma quantidade. Por isto, dizemos que essas são frações equivalentes.

Pelo mesmo raciocínio acima, podemos perceber que há infinitas formas equivalentes de representar esta mesma quantidade: 1/3 = 2/6 = 3/9 = 4/12...

De forma mais geral, podemos observar o seguinte processo para obter frações equivalentes. Se dividimos 1 inteiro em q partes iguais e tomamos p destas partes, temos como resultado a fração p/q. Se dividimos o mesmo inteiro em k vezes mais partes (isto é, em k.q) mais partes e, em compensação, também tomamos k vezes mais partes (isto é, k.p) obtemos o mesmo resultado.

Em outras palavras, se multiplicamos o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número k, obtemos uma fração equivalente:

$$\frac{p}{q} = \frac{k.p}{k.q}$$

Da mesma forma, se dividimos o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número $k \in Z$, obtemos frações equivalentes.

Exemplo 7

No exemplo 5 (acima), os alunos que prefere a cor azul são representados por 2/8 do gráfico. Dividir o gráfico em 8 partes e tomar 2 dessas partes é equivalente a dividir este mesmo gráfico em 4 partes e tomar 1. Isto é:

$$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Exemplo 8

No exemplo 6 (acima), as razões encontradas correspondem às frações 15/25, 15/40 e 25/40. Podemos obter frações equivalentes dividindo os numeradores e denominadores destas frações por 5:

$$\frac{15}{25} = \frac{3}{5}\ ,\ \ \frac{15}{40} = \frac{3}{8}\ ,\ \ \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$$

Exercícios

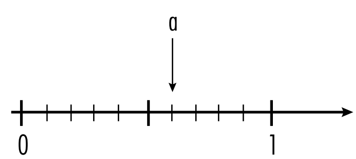
16) Represente 3/5 graficamente de duas maneiras diferentes. Encontre uma fração equivalente com denominador 10. Localize este número racional na reta.

17) Represente 9/12 graficamente de duas maneiras diferentes. Encontre uma fração equivalente com denominador 4. Localize este número racional na reta.

18) Que fração com denominador 8 é equivalente a 2/4?

19) Que fração com denominador 6 é equivalente a 30/18?

20) Considere o número racional a indicado abaixo. Que fração com denominador 5 representa este número? E com denominador 10?



Representação Decimal

Quando escrevemos um número natural no sistema de numeração decimal, o valor dos algarismos depende da posição. Por exemplo, quando escrevemos 222, os algarismos são iguais, mas seus valores são diferentes. O algarismo 2 da esquerda representa 2 centenas, isto é, 200; o do meio, 2 dezenas, isto é, 20; e o da esquerda, 2 unidades. Assim, temos:

$$222 = 2 \times 100 + 2 \times 10 + 2 = 2 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 2 \times 10^0$$

Assim, os números naturais são representados, no sistema decimal, pela soma de seus algarismos multiplicados por potências de 10. Veja outro exemplo:

$6023 = 6 \times 1000 + 0 \times 100 + 2 \times 10 + 3 = 6 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 2 \text{ x } 10^1 + 3 \times 10^0$

O sistema de numeração decimal permite uma extensão natural para números não inteiros. Neste caso, temos que usar os números 0,1; 0,01; 0,001; ... (que correspondem aos décimos, centésimos, milésimos, e assim por diante). No Brasil, as casas decimais inteiras são separadas das casas decimais não inteiras pela vírgula (na maioria dos outros países o ponto é usado em lugar da vírgula). Veja os exemplos:

$34{,}5 = 3 \times 10 + 4 \text{ x } 1 + 5 \times 0{,}1$

$189{,}27 = 1 \times 100 + 8 \times 10 + 9 \text{ x } 1 + 2 \times 0{,}1 + 7 \times 0{,}01$

Sabemos que os números 0,1; 0,01; 0,001; ... também são potências de 10, mas com expoentes negativos (faremos uma revisão sobre isso no próximo capítulo). Então, as representações dos exemplos acima podem ser escritas da seguinte forma:

$34{,}5 = 3 \times 10^1 + 4 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1}$

$189{,}27 = 1 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 9 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 7 \times 10^{-2}$

Sempre que temos um número racional escrito em forma de fração, podemos encontrar sua representação decimal. Para isto, basta efetuar a divisão entre o numerador e o denominador.

Por exemplo, suponha que queiramos escrever a fração 49/20 na forma decimal. Fazendo a divisão de 49 por 20, obtemos:

$$\begin{array}{r|l} 49 & 20 \\ \hline 9 & 2 \end{array}$$

Para obter a representação decimal do número, continuamos o processo de divisão, acrescentando um 0 ao lado dos restos:

$$\begin{array}{r|l} 49 & 20 \\ \cline{2-2} 90 & 2{,}45 \\ 100 & \\ 0 & \end{array}$$

Assim, temos: 49/20 = 2,45. Entretanto, pode acontecer que o processo de divisões sucessivas se prolongue indefinidamente. Observe o que ocorre quando determinamos a representação decimal do número 27/11, por exemplo:

$$\begin{array}{r|l} 27 & 11 \\ \cline{2-2} 50 & 2{,}4545... \\ 60 & \\ 50 & \\ 60 & \\ ... & \end{array}$$

Como o processo consiste em acrescentar um 0 ao lado de cada resto encontrado, no processo acima, depois da segunda vez que o resto 5 se repetir, todo o processo se repetirá indefinidamente. Neste caso, a representação do número tem infinitas casas decimais, que representamos das seguintes formas:

$$\frac{27}{11} = 2{,}4545... = 2{,}\overline{45}$$

As três formas acima são maneiras equivalentes de representar este número. O traço em cima das casas decimais serve para indicar que estas se repetem indefinidamente. Neste caso, dizemos que a representação decimal do número é uma dízima periódica. A palavra dízima se refere ao sistema decimal e a palavra periódica indica que um algarismo ou um bloco de algarismos se repete(m) indefinidamente (esse algarismo ou bloco é chamado de período). Observe que, no processo de encontrar a representação decimal de uma fração, sempre que um resto aparecer pela segunda vez, o processo todo se repetirá indefinidamente.

É muito importante observar ainda que o fato da representação decimal do número ter infinitas casas decimais depois da vírgula não significa que o número seja "inexato" ou "aproximado". As dizimas periódicas representam números tão exatos quanto quaisquer outros. Como veremos nos exercícios a seguir, estes correspondem a um ponto fixo na reta numérica, como qualquer outro número.

Reciprocamente, podemos representar números escritos na forma decimal como frações. Se o número em questão possui uma quantidade finita de casas decimais, basta expressá-lo como uma fração cujo denominador é uma potência de 10. Por exemplo:

$$3{,}2 = \frac{32}{10} = \frac{16}{5} \qquad 1{,}25 = \frac{125}{100} = \frac{5}{4}$$

Sempre podemos também representar qualquer dízima periódica sob a forma de fração. Porém, o processo é um pouco mais complicado. Para isto, empregamos o procedimento exemplificado a seguir.

Exemplo 9

Qual é a representação do número 0,1515... na forma de fração?

Para determinar esta representação, primeiro usamos uma letra para indicar o número, por exemplo, x:

$x = 0{,}\ 1515...$

$100\text{ x} = 15{,}1515...$

Ao multiplicar o número por 100, obtemos dois números com as mesmas casas decimais depois da vírgula (1515...). Isto ocorre porque o período 15 se repete infinitamente. Então se subtraímos esses dois números, o resultado é um número inteiro:

$100\text{ x} - \text{x} = 15 \rightarrow 99\text{ x} = 15 \rightarrow \text{x} = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}$.

Exemplo 10

Qual é a representação do número 1, 7231231... na forma de fração?

Começamos o processo da mesma forma. Mas, neste caso, depois da vírgula o número dado possui uma parte não periódica (isto é, que não repete), seguida de um período. Como nosso objetivo é obter dois números com as mesmas casas decimais depois da vírgula (cuja subtração resultará em um número inteiro), precisamos fazer duas multiplicações por potências de 10:

$x = 1{,}\ 7231231...$

$10x = 17{,}231231...$

$10000x = 17231{,}231231...$

$1000x - 10x = 17231{,}231231... - 17{,}231231...$

$9990x = 17214$

$$x = \frac{17214}{9990} = \frac{8607}{4995} = \frac{2869}{1665}.$$

Por meio do raciocínio exemplificado acima, podemos concluir que:

- Qualquer número representado sob a forma de fração pode ser também representado na forma decimal, e a representação correspondente tem uma quantidade finita de casas decimais ou é uma dizima periódica.
- Qualquer número representado na forma decimal pode ser também representado como fração.

Em resumo, os números racionais admitem duas formas principais de representação: fração e decimal (finto ou periódico).

Exercícios

21) A que fração corresponde o número 1,6?

(A) 8/5 (B) 8/6
(C) 1/6 (D) 6/10

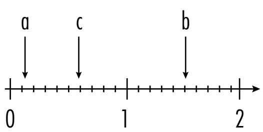
22) Qual é a representação da fração 2/5 na forma decimal?

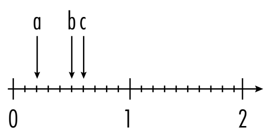
(A) 0,2 (B) 0,4
(C) 1,5 (D) 2,5

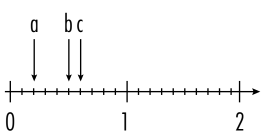
23) Qual é a representação de 1,2 na forma de fração?

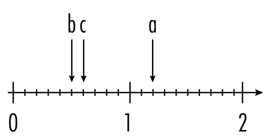
(A) 1/2 (B) 12/5
(C) 6/5 (D) 3/2

24) Considere os números racionais a = 0,12, b = 1,5 e c = 0,6 . Qual é a forma correta de localizar esses números na reta?

(A)


(B)


(C)


(D)


25) Considere os números racionais indicados abaixo. Que números são estes?

(A) a = 0,6, b = 1,1 e c = 0,3 (B) a = 1,4, b = 1,9 e c = 0,3
(C) a = 0,4, b = 0,9 e c = 1,3 (D) a = 0,4, b = 0,9 e c = 1,7

26) Considere os números racionais a = 0,45, b = 0,5, c = 0,06 e d = 0,012.

(A) Localize estes números na reta.
(B) Escreva estes números na forma de fração.
(C) Coloque os números em ordem crescente.

27) Considere os números racionais a = 2/5, b = 2/7, c = 7/10 e d = 1/3.

(A) Localize estes números na reta.
(B) Escreva estes números na forma decimal.
(C) Coloque os números em ordem crescente.

28) Escreva na forma de fração os números racionais abaixo e localize-os na reta numérica.

(A) 1,666...
(B) 0,25333...
(C) 0,999...
(D) 1,888...
(E) 0,5333...
(F) 0,7252525

29) O resultado de $(0{,}333...)^2 + (0{,}666...)^2$ é menor, maior ou igual a $(0{,}333... + 0{,}666...)^2$?

30) Dê a razão entre 1,3 e 1,33...

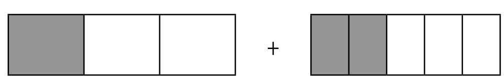
31) Dê o resultado da soma infinita 0,4 + 0,04 + 0,004 + 0,0004 + ...

Adição e Subtração de Frações

Para somar ou subtrair duas frações a/b e c/d, devemos encontrar frações equivalentes a estas com o mesmo denominador. Se encontrarmos frações com o mesmo denominador, significa que estamos dividindo a unidade em um mesmo número de partes, portanto obtemos partes do mesmo tamanho. Assim, devemos igualar os denominadores de a/b e c/d para garantir que estaremos somando ou subtraindo partes do mesmo tamanho. Observe o exemplo a seguir.

Exemplo 11

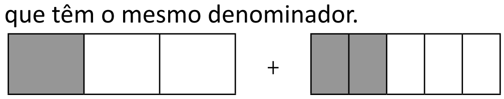
Suponha que queiramos somar as frações 1/3 e 2/5.

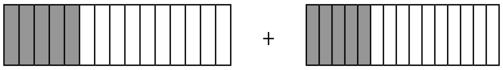


Procuramos então frações equivalentes a 1/3 e a 2/5 :

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \frac{5}{15} = \ldots$$
$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} = \frac{8}{20} = \frac{10}{25} = \ldots$$

Observe que 5/15 e 6/15 são frações equivalentes a 1/3 e a 2/5 que têm o mesmo denominador.





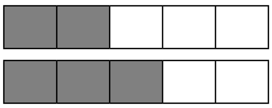
Assim, temos . De forma geral, para somar duas frações a/b e c/d, devemos encontrar um múltiplo comum entre os denominadores b e d.

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{5}{15}+\frac{6}{15}=\frac{11}{15}$$

Exercícios

32) Em cada item abaixo, some as frações representadas.

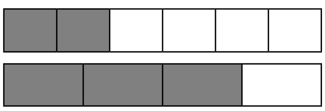
a)



b)

c)

d)



33) Encontre a soma das frações.

a) $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$

b) $\frac{2}{5}+\frac{2}{3}$

c) $\frac{5}{6}+\frac{5}{3}$

d) $\frac{7}{5}+\frac{1}{4}$

34) Verifique se $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ é menor ou maior do que 1.

35) Efetue $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$.

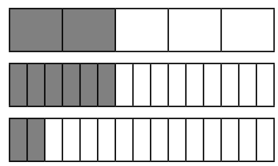
Multiplicação e Divisão de Frações por Números Naturais

Agora aprenderemos como multiplicar e dividir duas frações. Antes disso, será útil aprender como multiplicar e dividir uma fração por um número natural. Por exemplo, suponha que queiramos multiplicar 2/5 por 3. Para fazer esta operação, pensamos exatamente da mesma forma que pensamos quando queremos multiplicar dois números naturais. Isto é, somar o número 2/5 com ele mesmo 3 vezes:

$$\frac{2}{5}\times 3=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{2\cdot 3}{5}=\frac{6}{5}$$

Suponha agora que queiramos dividir 2/5 por 3. A fração 2/5 representa a quantidade que resulta da operação de dividir 1 unidade em 5 partes iguais e tomar 2 destas partes. Se queremos dividir esta quantidade por 3, podemos dividir cada uma das 2 partes tomadas em 3 e somar o resultado. Assim, a unidade será dividia em $5 \times 3 = 15$ partes, das quais tomaremos 2. Isto é:

$$\frac{2}{5}\div 3=\frac{2}{5\cdot 3}=\frac{2}{15}$$



Por meio deste raciocínio, podemos concluir que:

- para multiplicar uma fração p/q por um número natural k, devemos multiplicar o numerador por k, e manter o denominador: $\frac{p}{q}\times k=\frac{p\times k}{q}$
- para dividir uma fração p/q por um número natural k, devemos multiplicar o denominador por k, e manter o numerador: $\frac{p}{q}\div k=\frac{p}{q\times k}$

Multiplicação de Frações

Se quisermos multiplicar duas frações a/b e c/d, podemos pensar que isto é o mesmo que multiplicar a/b por c e, em seguida, dividir por d. Assim, temos:

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times c\div d=\frac{a\times c}{b}\div d=\frac{a\times c}{b\times d}$$

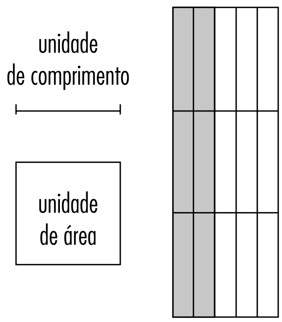
Assim, para multiplicar duas frações, multiplicamos numerador por numerador e denominador por denominador. Observe que, diferente do que ocorre com a adição e a subtração, para multiplicar não é necessário igualar os denominadores.

Aprofundamentos (Leitura Opcional)

Outra maneira de entender a multiplicação de frações é pensar na ideia da multiplicação como área de retângulo. Isto é, a área de um retângulo é dada pelo produto dos comprimentos de seus lados. Observe os exemplos a seguir.

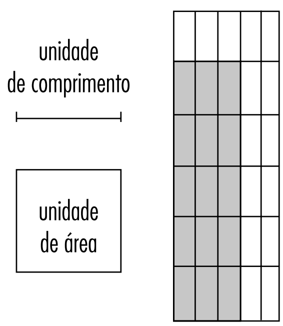
Exemplo 12: multiplicação de fração por número natural

Para representar a multiplicação $\frac{2}{5}\times 3$, construímos um retângulo cujos lados meçam 3 e 2/5 unidades de comprimento. Este retângulo será formado por 6 blocos cuja área é igual 1/5 da unidade de área. Portanto, sua área total será de 6/5.



Exemplo 13: multiplicação de fração por fração

Para representar a multiplicação $\frac{3}{5}\times\frac{5}{2}$, construímos um retângulo cujos lados meçam 5/2 e 3/5 unidades de comprimento. Este retângulo será formado por 15 blocos com área de 1/10 (1/2 vezes 1/5) da unidade de área. Portanto, sua área total será de 15/10, ou, simplificando, 3/2.



Divisão de Frações

Para duas frações a/b e c/d, vamos chamar o resultado da divisão (que ainda não conhecemos) de x/y. Isto é:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{x}{y}$$

Como a multiplicação e a divisão são operações inversas, quando multiplicarmos o resultado x/y por c/d, devemos encontrar novamente a/b. Isto é:

$$\frac{x}{y}\times\frac{c}{d}=\frac{a}{b} \quad\rightarrow\quad \frac{x}{y}\times\frac{c}{d}\times\frac{d}{c}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c} \quad\rightarrow\quad \frac{x}{y}\times 1=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c} \quad\rightarrow\quad \frac{x}{y}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$$

A fração d/c é chamada fração inversa de c/d, pois $\frac{c}{d}\times\frac{d}{c}=1$.

Assim, para dividir duas frações, multiplicamos a primeira fração pela fração inversa da segunda.

Aprofundamentos (Leitura Opcional)

Outra maneira de entender a divisão de frações é pensar na ideia da divisão como medida. Neste sentido, dividir duas quantidades, digamos dividir x por y, corresponde a determinar quantas vezes y "cabe" em x. Ou, em outras palavras, determinar qual será o valor da medida de y se tomamos x como unidade de medição. Observe os seguintes exemplos:

Em quantos sacos de 2 kg podem ser divididos 20 kg de feijão?
Em outras palavras: Quantas vezes 2 kg cabem em 20 kg?
A resposta é: 20 ÷ 2 = 10 vezes.

Em quantos sacos de 0,5 kg podem ser divididos 10,5 kg de feijão?
Em outras palavras: Quantas vezes 0,5 kg cabem em 10,5 kg?
A resposta é: 10,5 ÷ 0,5 = 21 vezes.

Se tomarmos uma tira de papel de 1,5 cm de comprimento como unidade de medida, quanto medirá uma tábua de 5,25 cm de comprimento?

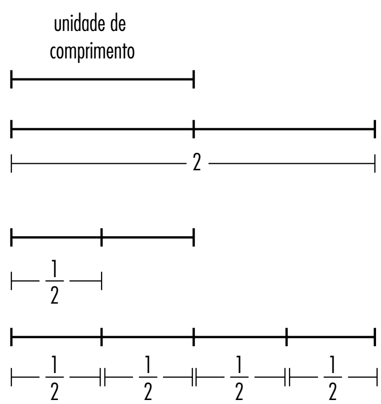
Em outras palavras: Quantas vezes 1,5 cm cabem em 5,25 cm? A resposta é: 5,25 ÷ 1,5 vezes. Se já sabemos operar com divisão de frações, podemos fazer esta conta:

$$5{,}25\div 1{,}5=\frac{525}{100}\div\frac{15}{10}=\frac{21}{4}\div\frac{3}{2}=\frac{21}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{42}{12}=\frac{7}{2}=3{,}5$$

Por outro lado, se ainda não sabemos operar com divisão de frações, podemos usar esta ideia de medida para entender como se faz isso. Observe os exemplos a seguir.

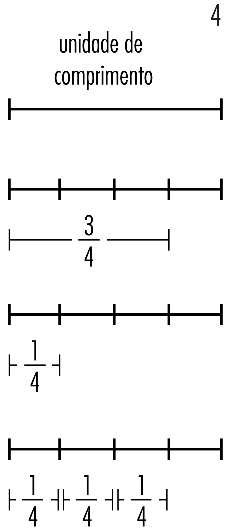
Exemplo 14

Para efetuar a divisão $2\div\frac{1}{2}$, observamos que o segmento de comprimento cabe 4 vezes dentro do segmento de comprimento 2, isto é, se o segmento de comprimento 2 fosse medido tendo o segmento de comprimento 1/2 como nova unidade, sua medida seria 4. Assim $2\div\frac{1}{2}=4$.



Exemplo 15

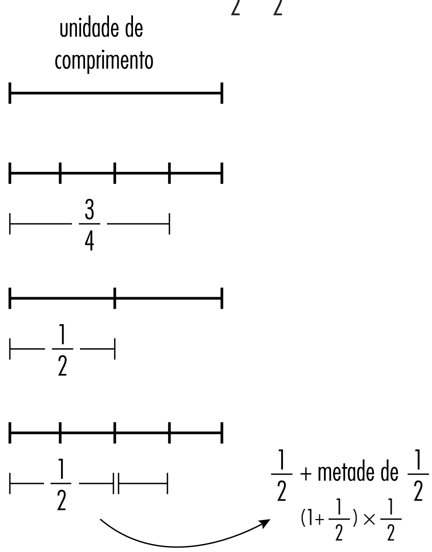
Para efetuar a divisão $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4}$, observamos que o segmento de comprimento 1/4 cabe 3 vezes dentro do segmento de comprimento 3/4, isto é, se o segmento de comprimento 3/4 fosse medido tendo o segmento de comprimento 1/4 como nova unidade, sua medida seria 3. Assim $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} = 3$.



Nos dois exemplos acima, o resultado da divisão foi um número natural. Isto significa que o segundo segmento cabe um número inteiro de vezes no primeiro. Porém, nem sempre isto ocorre. De forma geral, o resultado da divisão de dois números racionais é outro número racional, que pode não ser inteiro. Os casos em que este resultado não é inteiro requerem um pouco mais de atenção.

Exemplo 16

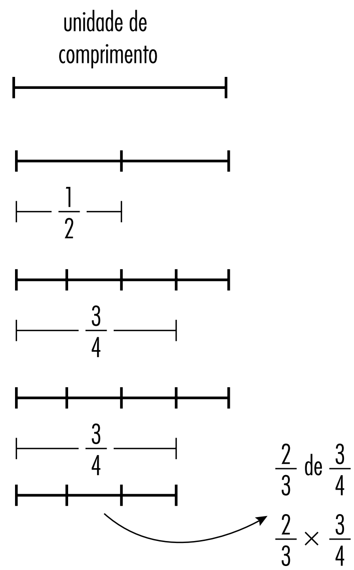
Para efetuar a divisão $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$, devemos determinar quantas vezes o segmento 1/2 cabe dentro do segmento 3/4. Na figura a seguir, vemos que 1/2 cabe uma vez e meia em 3/4. Isto é, se o segmento 3/4 fosse medido tendo 1/2 como unidade, sua medida seria $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.



Nos três exemplos acima, dividimos um número maior por um número menor. Porém, podemos dividir um número maior por um menor. Isto corresponde à situação em que o segundo segmento "cabe menos de uma vez" dentro do primeiro. Isto é, o resultado da divisão é um número menor que 1.

Exemplo 17

Para efetuar a divisão $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$, devemos determinar quantas vezes o segmento 3/4 cabe dentro do segmento 1/4. Mas $\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$, logo 3/4 não caberá nem uma vez em 1/2. Observando, podemos ver que 3/4 cabe mais de uma vez em 1/2. Isto é, se o segmento 3/4 fosse medido tendo 1/2 como unidade, sua medida seria 3/2.



Exercícios

36) Calcular $\frac{3}{5}$ de $\frac{7}{6}$.

37) Calcule 12% de 40.

38) Calcule 8% de 30.

39) Calcule 15% de 25%.

40) Determine a razão entre 1/3 e 2/5.

41) Determine a terça parte de 6/5.

42) Determine o resultado das seguintes expressões numéricas.

a) $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)\times\frac{4}{5}$

b) $\left(\frac{5}{6}-\frac{3}{4}\right)\div\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{4}\div\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}$

d) $\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)\div\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{4}\right)$

e) $\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\div\frac{4}{15}\right)\times\frac{2}{13}$

43) Em cada expressão abaixo, encontre valores para a letra que tornem a igualdade verdadeira.

a) $2y=\frac{1}{3}$

b) $2a + 3 = -4$

c) $\frac{1}{x}=2$

d) $3-w=\frac{5}{3}$

e) $-\frac{z}{2}-1=\frac{2}{5}$

f) $(2x-1)\times\left(x-\frac{3}{2}\right)=0$

44) A soma do dobro certo número com a sua terça parte é igual a 21. Que número é esse?

45) Qual das sentenças abaixo pode é representada pela equação ? $3x-\frac{x}{2}=7$

(A) O triplo de um número é 7 vezes maior que a sua metade.

(B) A terça parte de um número é 7 vezes maior que o seu dobro.

(C) A diferença entre o dobro de um número e a sua terça parte é igual a 7

(D) A diferença entre o triplo de um número e a sua metade é igual a 7.

46) (ENEM 2006) Para se obter 1,5 kg do dióxido de urânio puro, matéria-prima para a produção de combustível nuclear, é necessário extrair-se e tratar-se 1,0 tonelada de minério. Assim, o rendimento (dado em % em massa) do tratamento do minério até chegar ao dióxido de urânio puro é de

(A) 0,10%

(B) 0,15%

(C) 0,20%

(D) 1,5%

(E) 2,0%

47) (ENEM 2006) Não é nova a ideia de se extrair energia dos oceanos aproveitando-se a diferença das marés alta e baixa. Em 1967, os franceses instalaram a primeira usina "maré-motriz", construindo uma barragem equipada de 24 turbinas, aproveitando-se a potência máxima instalada de 240 MW, suficiente para a demanda de uma cidade com 200 mil habitantes. Aproximadamente 10% da potência total instalada são demandados pelo consumo residencial.

Nessa cidade francesa, aos domingos, quando parcela dos setores industrial e comercial pára, a demanda diminui 40%. Assim, a produção de energia correspondente à demanda aos domingos será atingida mantendo-se:

(I) todas as turbinas em funcionamento, com 60% da capacidade máxima de produção de cada uma delas.

(II) a metade das turbinas funcionando em capacidade máxima e o restante, com 20% da capacidade máxima.

(III) quatorze turbinas funcionando em capacidade máxima, uma com 40% da capacidade máxima e as demais desligadas.

Está correta a situação descrita:

(A) apenas em I.

(B) apenas em II.

(C) apenas em I e III.

(D) apenas em II e III.

(E) em I, II e III.

48) (ENEM 2004) As "margarinas" e os chamados "cremes vegetais" são produtos diferentes, comercializados em embalagens quase idênticas. O consumidor, para diferenciar um produto do outro, deve ler com atenção os dizeres do rótulo, geralmente em letras muito pequenas. As figuras que seguem representam rótulos desses dois produtos.

Peso Líquido **500 g** **MARGARINA** 65% de Lipídios Valor energético por porção de 10g: 59 Kcal	Peso Líquido **500 g** **CREME VEGETAL** 35% de Lipídios Valor energético por porção de 10g: 32 Kcal Não recomendado para uso culinário

Uma função dos lipídios no preparo das massas alimentícias é torná-las mais macias. Uma pessoa que, por desatenção, use 200 g de creme vegetal para preparar uma massa cuja receita pede 200 g de margarina, não obterá a consistência desejada, pois estará utilizando uma quantidade de lipídios que é, em relação à recomendada, aproximadamente:

(A) o triplo.

(B) o dobro.

(C) a metade.

(D) um terço.

(E) um quarto.

49) (ENEM 2002) A capa de uma revista de grande circulação trazia a seguinte informação, relativa a uma reportagem daquela edição:

O brasileiro diz que é feliz na cama, mas debaixo dos lençóis 47% não sentem vontade de fazer sexo.

O texto abaixo, no entanto, adaptado da mesma reportagem, mostra que o dado acima está errado:

Outro problema predominantemente feminino é a falta de desejo - 35% das mulheres não sentem nenhuma vontade de ter relações. Já entre os homens, apenas 12% se queixam de falta de desejo.

Considerando que o número de homens na população seja igual ao de mulheres, a porcentagem aproximada de brasileiros que não sentem vontade de fazer sexo, de acordo com a reportagem, é

(A) 12%. (B) 24%. (C) 29%.
(D) 35%. (E) 50%

50) (ENEM 2001) Em um colégio, 40% da arrecadação das mensalidades correspondem ao pagamento dos salários dos seus professores. A metade dos alunos desse colégio é de estudantes carentes, que pagam mensalidades reduzidas. O diretor propôs um aumento de 5% nas mensalidades de todos os alunos para cobrir os gastos gerados por reajuste de 5% na folha de pagamento dos professores. A associação de pais e mestres concorda com o aumento nas mensalidades, mas não com o índice proposto. Pode-se afirmar que:

(A) o diretor fez um cálculo incorreto e o reajuste proposto nas mensalidades não é suficiente para cobrir os gastos adicionais.

(B) o diretor fez os cálculos corretamente e o reajuste nas mensalidades que ele propõe cobrirá exatamente os gastos adicionais.

(C) a associação está correta em não concordar com o índice proposto pelo diretor, pois a arrecadação adicional baseada nesse índice superaria em muito os gastos adicionais.

(D) a associação, ao recusar o índice de reajuste proposto pelo diretor, não levou em conta o fato de alunos carentes pagarem mensalidades reduzidas.

(E) o diretor deveria ter proposto um reajuste maior nas mensalidades, baseado no fato de que a metade dos alunos paga mensalidades reduzidas.

GABARITO

1) 4/6

2) As meninas representam 3/5 da turma. Não é possível saber quantos são os meninos.

3) R$ 160,00

4) 4/6

5) a) 3/5 b) 5/3 c) 21

6) a) 1/6 b) 5 balas.

7) 8

8) 5

9) C

10) C

11) 32

12) 16

13) R$ 280,00

14) D

15) D

16) 6/10

17) 3/4

18) 4/8

19) 10/6

20) 3/5 e 6/10

21) A

22) B

23) C

24) A

25) C

26) a = 45/100 = 9/20 ; b = 5/10 = 1/2 ; c = 6/100 = 3/50 ; d = 12/1000 = 3/250 Em ordem: d, c, a, b.

27) a = 0,4 ; b = 0,285714285714... ; c = 0,7 ; d = 0,333... Em ordem: b, d, a, c.

28) a = 5/3 ; b = 19/75 ; c = 1 ; d = 17/9 ; e = 8/15 ; f = 359/495

29) 5/9 < 1

30) 39/40

31) 4/9

32) a) 1 b) 7/6 c) 7/6 d) 13/12

33) a) 5/6 b) 16/15 c) 5/2 d) 33/20

34) é igual a 1.

35) 47/60

36) 7/10

37) 4,8

38) 2,4

39) 3/80

40) 5/6

41) 2/5

42) a) 14/15 b) 1/6 c) 9/10 d) 1/7 e) 1/3

43) a) $y = 1/6$ b) $a = -7/2$ c) $x = 1/2$ d) $w = 4/3$ e) $z = -14/5$

44) 9

45) D

46) B

47) E

48) C

49) B

50) C

3

Números reais

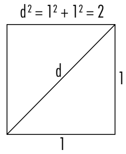
Números Reais

No capítulo anterior, aprendemos que os números racionais correspondem às frações, com numerador e denominador inteiros. De forma equivalente, na forma decimal os números racionais caracterizam-se por possuírem uma quantidade finita de casas, ou serem dizimas periódicas.

Entretanto, os números racionais não são suficientes para representar todas as grandezas numéricas possíveis. É possível mostrar, por exemplo, de forma razoavelmente simples, que existem comprimentos cujas medidas não podem ser representadas por números racionais.

Por exemplo, consideremos um quadrado de lado 1. Seja d a diagonal desse quadrado. Pelo Teorema de Pitágoras, temos que:

$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$



$$\begin{aligned} 2^4 &= 16 \\ 2^3 &= 8 \\ 2^2 &= 4 \\ 2^1 &= 2 \end{aligned} \quad \begin{matrix} \div 2 \\ \div 2 \\ \div 2 \end{matrix}$$

Portanto, a medida de d é o número cujo quadrado é igual a 2. Chamamos este número de raiz quadrada de 2 e representamos pelo símbolo $\sqrt{2}$.

Entretanto, é possível mostrar que este número não pode ser racional, isto é, que não existe nenhum número racional cujo quadrado seja igual 2 (veja a seção Aprofundamentos a seguir).

Logo, existem grandezas que não podem ser representadas por números racionais. Em outras palavras, para representar todas as quantidades possíveis, é necessário criar outros números, além dos racionais. Esses são chamados de números irracionais. O conjunto formado pelos números (racionais e irracionais) necessários para representar todas as grandezas possíveis é chamado conjunto dos números reais, representado por IR.

Como já sabemos que os números racionais são aqueles cuja representação decimal é finita ou periódica, podemos concluir que os números irracionais possuem representação infinita e não periódica. Isto é, as casas decimais de um número irracional continuam indefinidamente, sem que nunca apareça um padrão de repetição.

Isto significa que não podemos determinar todas as casas decimais de um número irracional. Entretanto, isto não quer dizer esses números sejam "inexatos" ou "aproximados". Ao contrário, assim como as dizimas periódicas, os números irracionais também correspondem a pontos fixos na reta numérica.

Embora não possamos determinar todas as casas decimais de um número irracional, em alguns casos, podemos encontrar aproximações para estes números com tantas casas decimais quanto queiramos. Voltemos ao exemplo do número $\sqrt{2}$.

Exemplo 1

Tomemos $x = \sqrt{2}$. Portanto, $x^2 = 2$. Como $1 < 2 < 4$, temos que $1 < \sqrt{2} < 2$, isto é, $\sqrt{2}$ é um número localizado entre 1 e 2.

Ele é menor ou maior que 1,5? Para responder a esta pergunta, com a ajuda de uma calculadora, observamos que $1{,}5^2 = 2{,}25 > 2$. Logo, $1{,}5 > \sqrt{2}$. Agora, observamos que $1{,}4^2 = 1{,}96 < 2$. Então, $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$. Assim, obtemos uma primeira aproximação decimal para a raiz quadrada de 2:

$\sqrt{2} = 1{,}4...$

Para descobrir a segunda casa decimal depois da vírgula, continuamos fazendo tentativas:

$1{,}41^2 = 1{,}9881$

$1{,}42^2 = 2{,}0164$

Portanto, $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$. Logo:

$\sqrt{2} = 1{,}41...$

Continuando, o processo, sempre usando a calculadora, obtemos:

$1{,}411^2 = 1{,}990921$

$1{,}412^2 = 1{,}993744$

$1{,}413^2 = 1{,}996569$

$1{,}414^2 = 1{,}999396$

$1{,}415^2 = 2{,}002225$

Portanto, $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$. Logo:

$\sqrt{2} = 1{,}414...$

Continuando este processo, podemos encontrar quantas casas decimais quisermos. Por exemplo, se formos até a 10ª casa decimal, obteremos:

$\sqrt{2} = 1{,}4142135623...$

Da mesma forma que demonstramos que não existe um número racional cujo quadrado seja igual a $\sqrt{2}$ (veja a seção Aprofundamentos a seguir), é possível mostrar que são irracionais todas as raízes quadradas dos números que não são quadrados perfeitos (isto é, que não correspondem aos quadrados de números naturais).

Assim, não são números irracionais:

$\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$

Por outro lado, os números a seguir são irracionais:

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$

Também é possível provar que o importante número ϖ, definido como a razão entre o perímetro e o diâmetro de uma circunferência, é um número irracional. No entanto, os argumentos matemáticos necessários para esta prova estão além dos objetivos deste texto.

Aprofundamentos (Leitura Opcional)

$\sqrt{2}$ é irracional

Suponhamos que **exista** uma fração $\frac{p}{q}$, com $p, q \in IN$, tal que $\frac{p^2}{q^2} = 2$. Podemos supor que esta fração é irredutível, isto é, que não podemos simplificá-la. Como $\frac{p^2}{q^2} = 2$, então, $p^2 = 2 \cdot q^2$. Então, p^2 é um número par. Logo, p também tem que ser um número par, isto é, existe um número $k \in IN$ tal que $p = 2 \cdot k$.

Então:

$p^2 = 4 \cdot k^2$

$2 \cdot q^2 = 4 \cdot k^2$

$q^2 = 2 \cdot k^2$

Então, q^2 é um número par. Logo, q também tem que ser um número par. Assim, temos que p e q são **ambos** números pares. Mas isso contradiz o fato de que a fração $\frac{p}{q}$ é irredutível, pois neste caso poderíamos simplificá-la por 2. Podemos concluir daí que **não pode existir tal fração**.

Exercício

1) Com a ajuda de uma calculadora, encontre aproximações decimais para os números $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ (procedendo da mesma maneira que fizemos no exemplo acima para $\sqrt{2}$).

Potências e Raízes

Como sabemos, calcular a potenciação a^n significa multiplicar o número a por ele mesmo n vezes. Por exemplo: $2^2 = 2 \cdot 2$, $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, e assim por diante. Assim, de forma geral, temos que, se $a \in IR$ e $n \in IN$ então: $a^n = \underbrace{a.a \quad a}_{n}$

Neste caso, a é chamado de base e n de expoente da operação de potenciação. Não é difícil verificar que a operação de potenciação satisfaz as seguintes propriedades, para todo $a, b \in IR$; $m, n \in IN$:

$a^{m+n} = a^m \times a^n$

$a^{m \times n} = (a^m)^n$

$(a \times b)^n = a^n \times b^n$

Também podemos calcular uma potenciação a^n em que o expoente n é igual a 0, ou um número inteiro negativo. Mas como podemos determinar os valores de 2^0, 2^{-1} ou 2^{-2}, por exemplo? Para responder a esta pergunta, observamos o que acontece quando calculamos 2^n com $n \in IN$.

$2^4 = 16$

$2^3 = 8$

$2^2 = 4$

$2^1 = 2$

Como o resultado de 2^n corresponde ao número 2 multiplicado por ele mesmo n vezes, cada vez que diminuímos uma unidade no expoente, dividimos o resultado da potenciação pela base, que no caso é igual a 2. Então, continuando com este processo para expoentes menores que 1, teremos:

$2^4 = 16$

$2^3 = 8$

$2^2 = 4$

$2^1 = 2$

$2^0 = 1$

$2^{-1} = 1/2$

$2^{-2} = 1/4$

$2^{-3} = 1/8$

Assim, para calcular 2^0, devemos dividir $2^1 = 2$ por 2, obtendo $2^0 = 2$. Pelo mesmo raciocínio, concluímos que, para todo número $a \in IR^*$, temos: $a^0 = 1$. Para calcular 2^n com n negativo, devemos continuar dividindo sucessivamente por 2 os resultados, obtendo $2^{-1} = 1/2$, $2^{-2} = 1/4$, $2^{-3} = 1/8$,...

Portanto, para $n \in IR$ e $a \in IR^*$, temos que:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Podemos também verificar que são verdadeiras, para $m, n \in IN$ e $a \in IR^*$, as seguintes propriedades:

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Agora que já sabemos calcular potências com expoentes negativos, podemos perguntar como calcular potências cujos expoentes são frações. Por exemplo, como calcular $2^{1/2}$ ou $2^{1/3}$?

A resposta desta pergunta está relacionada com a ideia de radiciação. Já sabemos que $\sqrt{a}$ é o número que multiplicado por ele mesmo tem a como resultado. Da mesma forma, dado um número real $a > 0$, definimos:

- $\sqrt[3]{a}$ é o número positivo que multiplicado por si mesmo 3 vezes tem a como resultado, isto é $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$. Este número é chamado de raiz cúbica de a.
- $\sqrt[4]{a}$ é o número positivo que multiplicado por si mesmo 4 vezes tem a como resultado, isto é $\left(\sqrt[4]{a}\right)^4 = a$. Este número é chamado de raiz quarta de a.

De forma geral, temos:

- $\sqrt[n]{a}$ é o número positivo que multiplicado por si mesmo n vezes tem a como resultado, isto é $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$. Este número é chamado de raiz de ordem n de a.

Observe que, para cada $a > 0$, existem dois números que multiplicados por si mesmos têm a como resultado. Por exemplo, se $a = 4$, temos que $2^2 = 4$ e $(-2)^2 = 4$. Isto vale para qualquer expoente par. De forma geral, temos:

- Se n é impar, então para todo real $a > 0$, existe um único número que multiplicado por si mesmo n vezes tem a como resultado. Este número é positivo.
- Se n é par, então para todo real $a > 0$, existem dois números que multiplicados por si mesmos n vezes têm a como resultado. Estes números são simétricos um do outro, portanto um é positivo e outro negativo.
- Em ambos os casos, o símbolo (raiz de ordem n de a) refere-se apenas ao número positivo que multiplicado por si mesmo n vezes tem a como resultado.

Agora voltemos à pergunta feita anteriormente: como calcular $2^{1/2}$ ou $2^{1/3}$? Como devem continuar valendo as propriedades enunciadas acima, teremos:

$$2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 2^1 = 2$$

$$2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = 2^1 = 2$$

Assim, $2^{1/2}$ é o número que multiplicado por si mesmo 2 vezes tem 2 como resultado e $2^{1/3}$ é o número que multiplicado por si mesmo 3 vezes tem 2 como resultado. Logo, pela definição de raiz, concluímos que $2^{1/2} = \sqrt{2}$ e $2^{1/3} = \sqrt{3}$. De forma mais geral, observamos que, para $n \in \mathbb{N}^*$ e $a > 0$ teremos:

$$\underbrace{a^{1/n} \ldots a^{1/n}}_{n} = a^{1/n + \cdots + 1/n} = a^{n \cdot 1/n} = a^1 = a$$

Logo $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$. Finalmente, para m, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, e $a > 0$, teremos

$$a^{m/n} = a^{m \cdot 1/n} = \left(a^{1/n}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Exercícios

2) Determine os valores de:

(A) $2^{\left(3^2\right)}$

(B) $\left(2^3\right)^2$

(C) $-9^{-\frac{1}{2}}$

(D) $9^{\frac{3}{2}}$

(E) $-8^{-\frac{2}{3}}$

(F) (103·105)0,25

(G) $\dfrac{6^3}{3^3}$

(H) $\sqrt[3]{4^2 \cdot 32}$

3) Simplifique as seguintes raízes:

(A) $\sqrt{8}$

(B) $\sqrt[3]{8}$

(C) $\sqrt{12}$

(D) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$

(E) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

(F) $\sqrt{18}$

(G) $\sqrt[4]{32}$

(H) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

4) Calcule

$$\left[\left(8^{\frac{1}{2}}\right)^4\right]^{1/6} + 16^{0,25} - 27^{2/3}$$

5) A metade de 2^{10} é:

6) Mostre que $\left[\left(8^{\frac{1}{2}}\right)^4\right]^{1/6} + 16^{0,25} - 27^{2/3}$.

7) Se $b > 0$; e se n, p e q são inteiros positivos, então $\left[b^{-\frac{p}{q}}\right]^m$ vale:

(A) $b^{\frac{pm}{q}}$ (B) $b^{\frac{qm}{p}}$ (C) $b^{m-\frac{p}{q}}$ (D) $\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{pm}{q}}$

8) O valor da expressão $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^4 : \left(\frac{1}{2}\right)^3\right] \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 - 2^{-7}$.

9) Racionalize:

a) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{3} - 1}$

c) $\dfrac{2}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$

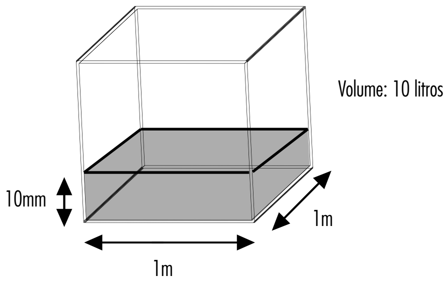
10) Efetue: $\sqrt{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

11) Em notação científica, um número é escrito na forma $p.10^t$, sendo p um número real tal que $1 < p < 10$ e sendo t um inteiro. A distância da Terra ao Sol é 150.000.000 km. Reescreva essa distância em metros utilizando a notação científica.

12) Em astronomia, é usual medir-se as distâncias em ano-luz. Um ano-luz corresponde a 9.500.000.000.000 quilômetros. Utilizando a notação científica, converta 1 ano–luz para metros.

13) Assim como na vida cotidiana existem quantidades pré-estabelecidas (como dúzia, dezena e resma), na química, há o mol, que corresponde a $6{,}02 \times 10^{23}$ unidades. Quantos átomos há em 500 mols de átomos?

14) Quando se diz que numa determinada região a precipitação pluviométrica foi de 10 mm, significa que a precipitação naquela região foi de 10 litros de água por metro quadrado, em média.



Se numa região de 10 km^2 de área ocorreu uma precipitação de 5 cm, quantos litros de água foram precipitados?

15) A carga de um elétron é 1,6 x 10^{-19}C. Por um ponto de um condutor passam 10^{20} elétrons por segundo. Qual a carga total, em *coulomb*, que passa por esse ponto em 10 segundos?

16) Quando um gás está a uma temperatura de 0^o C e a uma pressão de 1 atm, dizemos que esse gás está nas condições normais de temperatura e pressão, ou seja, nas CNTP. Experimentalmente, verificou-se que um mol de moléculas de qualquer substância no estado gasoso ocupa um volume de 22,4 litros se estiver nas CNTP. Qual o volume, em mililitro, ocupado por 3,01 x 10^{22} moléculas de O_2 nas CNTP?

17) A *ferritina* é uma proteína globular que se localiza essencialmente no fígado. Sua função primordial é acumular o ferro intracelular constituindo uma reserva de ferro rapidamente mobilizável. Seu valor normal no sangue varia de 10 a 80 μg/L. Uma pessoa de 100 kg tem 10 L de sangue em seu corpo. Se a taxa de ferritina no sangue dessa pessoa é 60 μg/L e admitindo que 1 grama de ferritina estoque 8 mg de ferro, qual a massa de ferro, em gramas, no sangue dessa pessoa?

18) A densidade da água a 25^o C é 1,0 g/mL. A essa temperatura, qual a quantidade aproximada de átomos de hidrogênio em 9 litros de água?

19) A acidez de uma solução é dada pelo seu pH. Quanto menor o pH, maior a acidez. O pH é uma medida relacionada à concentração de H+ (representada por [H+]). Se a concentração de H+ em certa solução for $10^{-8,5}$, o pH da solução será 8,5. Na água pura, [H+] = 10^{-7}. Portanto, seu pH é 7. Certa solução tem pH = 9. Para que seu pH fique igual ao da água, é preciso que a concentração de hidrogênio seja:

(A) reduzida 1000 vezes.
(B) reduzida 100 vezes.
(C) aumentada 10 vezes.
(D) aumentada 100 vezes.
(E) aumentada 1000 vezes.

20) Qual a concentração, em mol/L, de íons de H+ em uma bebida cujo pH é 5,5?
(A) 10^{-6}
(B) 3,16 x 10^{-6}
(C) 10^{-5}
(D) 3,16 x 10^{-5}
(E) $10^{-4,5}$

21) Em junho de 2013, a população mundial atingiu a marca de 7,2 bilhões de habitantes. Escreva essa cifra em notação científica.

22) A intensidade da força eletrostática entre duas cargas puntiformes no vácuo é dada por:

$F = k_0 \dfrac{Qq}{d^2}$, em que k_0 = 9 x 10^9 (no Sistema Internacional). A distância entre o elétron e o próton em um átomo de hidrogênio é da ordem de 4,8 x 10^{-9} cm. Determine a intensidade da força de atração eletrostática, em newtons, entre essas partículas.

23) Duas cargas puntiformes Q_1 = 1,5 x 10^{-6} C e Q_2 = 4 x 10^{-6} C estão fixas no vácuo e afastadas uma da outra de 30 cm. Determine a intensidade da força de repulsão em newtons.

24) Segundo a Lei da Gravitação Universal, dois pontos materiais atraem-se com forças de mesma intensidade. Essa intensidade é dada por: $F = G\dfrac{Mm}{d^2}$, em que G = 6,7 x 10^{-11} (no Sistema Internacional).
As massas da Terra e da Lua, em quilogramas, são, respectivamente, 6 x 10^{24} e 7,5 x 10^{22}. A distância entre elas é 375 mil quilômetros. Determine a intensidade da força gravitacional entre a Terra e seu satélite natural.

Ordem de Grandeza

A ordem de grandeza (O.G.) é uma forma de estimativa em que se utilizam potências de base 10. Sendo assim, a O.G. de uma medida é dada pela potência de 10 mais próxima dessa medida.

Para se avaliar a ordem de grandeza de uma medida, é preciso que ela esteja escrita em notação científica, ou seja, um número entre 1 (inclusive) e 10 (exclusive) multiplicado por uma potência de 10.

$N \cdot 10^P$ em que $1 \leq N < 10$

Naturalmente, esse formato é uma convenção. A ideia por trás do conceito de notação científica é que o número seja representado de forma ÚNICA.

Depois que o número é escrito em notação científica, podemos dar a sua ordem de grandeza. Para isso, basta que a potência de 10 que aparece na notação científica seja arredondada para a potência de expoente natural mais próxima.

Exemplo 1

Dar a ordem de grandeza de $2 \cdot 10^5$. Comparando o número dado com potências de 10, nota-se que $2 \cdot 10^5$ é um número maior do que 10^5 e menor do que 10^6. Assim:

$10^5 \leq 2 \cdot 10^5 < 10^6$

Escrevendo $2 \cdot 10^5$ (ou seja, 200.000) como uma única potência de 10, o resultado vai ser $10^{5,301...}$. Perceba que 5,301... está mais próximo de 5 do que de 6. Portanto, diz-se que "$2 \cdot 10^5$ é da ordem de 10^5".

Exemplo2

Dar a ordem de grandeza de $4 \cdot 10^5$. Comparando o número dado com potências de 10, nota-se que $4 \cdot 10^5$ é um número maior do que 10^5 e menor do que 10^6. Assim:

$10^5 \leq 4 \cdot 10^5 < 10^6$

Escrevendo $4 \cdot 10^5$ (ou seja, 400.000) como uma única potência de 10, o resultado vai ser $10^{5,602...}$. Perceba que 5,602... está mais próximo de 6 do que de 5. Portanto, diz-se que "$4 \cdot 10^5$ é da ordem de 10^6".

A chave para entender porque $2 \cdot 10^5$ está mais próximo de 10^5 e $4 \cdot 10^5$ está mais próximo de 10^6 está na discussão da raiz quadrada de 10. A raiz quadrada de 10 é $10^{0,5}$ e esse valor, em decimais, vale aproximadamente 3,16.

Se o número for $\sqrt{10} \cdot 10^5$, ele será escrito como uma potência única de 10 da seguinte forma: $10^{5,5}$.

Portanto, se o N da expressão $N \cdot 10^P$ for menor do que 3,16 (que é a aproximação de $\sqrt{10}$), então $N \cdot 10^P$ estará mais próximo de 10^P. Ao contrário, se o N da expressão $N \cdot 10^P$ for maior do que 3,16 (ou igual a), então $N \cdot 10^P$ estará mais próximo de 10^{P+1}.

25) (UEZO) Furacões parecem com tornados, mas são mais devastadores e têm um poder de destruição inesquecível. Em 1992, o furacão Andrew passou rapidamente por Miami deixando um saldo de 62 mortes e um dano ambiental com a geração de 3,5 milhões de toneladas de lixo. A ordem de grandeza, em kg, da quantidade de lixo gerada pelo furacão Andrew foi de:

(A) 1010 (B) 109 (C) 108 (D) 107 (E) 106

Gabarito

1) $\sqrt{3} = 1,7320508075...$ e $\sqrt{5} = 2.2360679775...$

2) a) 512 b) 64 c) -1/3 d) 27 e) - 1/4 f) 100 g) 8 h) 8

3) a) $2\sqrt{2}$ b) 2 c) $2\sqrt{3}$ d) $\sqrt{3}$ e) $\sqrt[3]{4}/2\ 2$
f) $3\sqrt{2}\ 2$ g) $2\sqrt[4]{2}$ h) $\sqrt{6}/2$

4) -5

5) 29

6) $2^{67} - 2^{66} = 2 \cdot 2^{66} - 2^{66} = 2^{66} \cdot (2-1) = 2^{66}$

7) D

8) 0

9) a) $\sqrt[4]{8}/2$ b) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{}}{4}$

10) $\sqrt{2}/2$

11) 150.000.000 km = 150.000.000.000 m = $1,5 \cdot 10^{11}$ m.

12) 9.500.000.000.000 km = 9.500.000.000.000.000 m = $9,5 \cdot 10^{15}$ m.

13) 500 x 6,02 x 10^{23} átomos = 3010 x 10^{23} átomos = 3,01 x 10^{26} átomos.

14) 5 cm = 50 mm que corresponde a 50 litros/m^2. Como a área tem 10 km^2 = 107 m^2, então a resposta é 5 x 10^8 litros

15) 160 coulombs

16) 3,01 x 10^{26}mL

17) 4,8 x 10^{-6}g

18) 6,02 x 10^{26} átomos de hidrogênio.

19) D

20) B

21) 7,2 x 10^9 habitantes.

22) 10^{-7} N

23) 0,6 N

24) 2,1 x 10^{20} N

25) D

4

Sequências

Progressões aritméticas

São comuns, na vida real, grandezas que sofrem variações iguais em intervalos de tempo iguais.

Exemplo 1

Uma fábrica de automóveis produziu 400 veículos em janeiro e aumenta mensalmente sua produção em 30 veículos. Quantos veículos produziu em junho?

Solução

Os valores da produção mensal, à partir de janeiro, são 400, 430, 460, 490, 520, 550,... Logo, a fábrica produziu 550 veículos em junho.

Poderíamos ter evitado escrever a produção mês a mês, raciocinando do modo a seguir: se a produção aumenta de 30 veículos por mês, em 5 meses ela aumenta de 5 x 30 = 150 veículos. Em junho, a fábrica produziu 400 + 150 = 550 veículos.

Progressões aritméticas são sequências nas quais o aumento (ou redução) de cada termo para o seguinte é sempre o mesmo.

A sequência (400, 430, 460, 490, 520, 550, ...) é um exemplo de progressão aritmética. O aumento constante de cada termo para o seguinte é chamado de razão da progressão. A razão dessa progressão é igual a 30.

Portanto, progressão aritmética é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão e representada pela letra r.

Exemplo 2

As sequências (2, 5, 8, 11, ...) e (7, 5, 3, 1, ...) são progressões aritméticas cujas razões valem respectivamente 3 e – 2.

Em uma progressão aritmética (a_1, a_2, a_3, ...), onde a1 é o primeiro termo, a2 o segundo termo, a3 o terceiro termo, e assim por diante, para avançar um termo a partir de outro basta somar a razão. Para avançar dois termos, basta somar duas vezes a razão, e assim sucessivamente. Por exemplo, : $a_{13} = a_5 + 8r$, pois, ao passar de a_5 para a_{13}, avançamos 8 termos; $a_{12} = a_7 + 5r$, pois avançamos 5 termos ao passar de a_7 para a_{12}; $a_4 = a_{17}$
$-13r$, pois retrocedemos 13 termos ao passar de a17 para a4 e, de modo geral, $a_n = a_1+(n-1)r$, pois, ao passar de a1 para an, avançamos (n - 1) termos.

Exemplo 3

Em uma progressão aritmética, o quinto termo vale 30 e o vigésimo termo vale 50. Quanto vale o oitavo termo dessa progressão?

Solução

$a_{20} = a_5 + 15r$ pois, ao passar do quinto termo para o vigésimo, avançamos 15 termos.

Logo, $50 = 30+15r$ e $r = \frac{4}{3}$. Analogamente, $a_8 = a_5+3r = 30+3\left(\frac{4}{3}\right) = 34$. O oitavo termo vale 34.

Exemplo 4

Qual é a razão da progressão aritmética que se obtém inserindo 10 termos entre os números 3 e 25?

Solução

Colocando 10 termos entre 3 e 25, ficamos com 12 termos sendo 25 o último deles. Temos $a_1=3$ e $a_{12}=25$. Como $a_{12} = a_1+11r$, temos $25 = 3+11r$. Daí, $r=2$.

Exemplo 5

O cometa Halley visita a Terra a cada 76 anos. Sua última passagem por aqui foi em 1986. Quantas vezes ele visitou a Terra desde o nascimento de Cristo? Em que ano foi sua primeira passagem na era cristã?

Solução

Os anos de passagem do cometa foram 1986, 1910, 1834, ... progressão aritmética de razão –76). O termo de ordem n dessa progressão é $a_n = a_1+(n-1)$ r, isto é, $a_n = 1986 - 76(n-1)$ ou, ainda, $a_n = 2062 - 76n$.

Temos $a_n > 0$ quando $n < \frac{2062}{76} = 27,13....$

Portanto, os termos positivos dessa progressão são os 27 primeiros, a_1, a_2, a_3, ..., a_{27}. Logo, ele nos visitou 27 vezes na era cristã, e sua primeira visita nessa era foi no ano: $a_{27} = 2062 - 76 \times 27 = 10$.

Poderíamos também ter resolvido o problema aproveitando o fato dos termos dessa progressão serem inteiros, pois em uma progressão aritmética de termos inteiros e razão não nula, todos os termos dão o mesmo resto quando divididos pelo módulo da razão. Como 1986 dividido por 76 dá resto 10, todos os anos em que o cometa por aqui passou dão resto 10 quando divididos por 76. A primeira visita ocorreu entre os anos 1 e 76, inclusive. Entre esses anos, o único que dividido por 76 dá resto 10 é o ano 10. Para descobrir a ordem desse termo, usamos $a_n = a_1 + (n-1)r$, isto é:

$$10 = 1986 + (n-1)(-76) = 1986 - 76n + 76 = 2062 - 76n$$

$$n = \frac{(2062-10)}{76} = 27 .$$

Muitas vezes é conveniente enumerar os termos de uma progressão aritmética a partir de zero, conforme mostra o exemplo a seguir. Em geral, esse artifício é utilizado quando os termos são indexados pelo tempo.

Exemplo 6

O preço de um carro novo é de R$ 15 000,00 e diminui de R$ 1 000,00 a cada ano de uso. Qual será o preço com 4 anos de uso?

Solução

Chamando o preço com n anos de uso de a_n, temos $a_0 = 15\,000$ e queremos calcular a_4. Como a desvalorização anual é constante, (a_n) é uma progressão aritmética. Logo, $a_4 = a_0+4r = 15\,000 + 4 \times (-1\,000) = 11\,000$. O valor será de R$ 11 000,00.

Exemplo 7

Os lados de um triângulo retângulo formam uma progressão aritmética crescente. Mostre que a razão dessa progressão é igual ao raio do círculo inscrito.

Solução

Chamemos os lados do triângulo de x–r, x, x+r. Esse é um bom truque para facilitar as contas; ao representar uma progressão aritmética com um número ímpar de termos, começando pelo termo central.

Como a progressão é crescente, a hipotenusa é o último termo. Pelo Teorema de Pitágoras, $(x+r)^2 = (x-r)^2 + x^2$. Daí, $x^2 = 4rx$ e, já que $x \neq 0$, pois x é um dos catetos, x = 4r. Os lados são então 3r, 4r e 5r. O perímetro é 2p = 3r + 4r + 5r = 12r e a área é $S = \frac{(3r.4r)}{2} = 6r^2$. O raio do círculo inscrito é $\frac{S}{p} = \frac{6r^2}{6r} = r$

Exemplo 8

Determine 4 números em progressão aritmética crescente, conhecendo sua soma 8 e a soma de seus quadrados 36.

Solução

Um bom truque, para representar progressões aritméticas com um número par de termos, é chamar os dois termos centrais de x–y e x+y. Isso faz com que a razão seja (x+y)–(x–y) = 2y. A progressão então será x–3y, x–y, x+y, x+3y.

Temos:

$$(x-3y)+(x-y)+(x+y)+(x+3y)=8$$
$$(x-3y)^2+(x-y)^2+(x+y)^2+(x+3y)^2=36$$

$$4x=8$$
$$4x^2+20y^2=36$$

$$x=2$$
$$y=\pm 1$$

Como a progressão é crescente, y > 0. Logo, x = 2 e y = 1. Os números são -1, 1, 3, 5.

Quando o grande matemático alemão Carl F. Gauss (1777-1855) tinha sete anos de idade, seu professor lhe pediu que calculasse a soma dos inteiros de 1 até 100. O professor ficou surpreso quando, depois de poucos minutos, o pequeno Gauss anunciou que o valor da soma era 5 050. A resposta estava correta e, curioso, o professor lhe perguntou como conseguira fazer o cálculo tão rapidamente. Gauss explicou-lhe que somara primeiramente 1+100, 2+99, 3+98,... Assim, obtivera 50 somas iguais a 101 e a resposta era 50x101 = 5050. Baseados nessa ideia, podemos calcular a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética qualquer.

Fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética

A soma dos n primeiros termos da progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3,...)$ é

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Prova:

Temos:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$ e, escrevendo a soma de trás para frente, $S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ...+ a_2 + a_1$.

Daí, $2S_n = (a_1+a_n) + (a_2+a_{n-1}) + (a_3+a_{n-2}) +...+ (a_{n-1}+a_2) + (a_n+a_1)$.

Observe que, ao passar de um parênteses para o seguinte, a primeira parcela aumenta de r e a segunda parcela diminui de r, o que não altera a soma. Portanto, todos os parênteses são iguais ao primeiro, (a_1+a_n).

Como são n parênteses, temos:

$$2S_n = (a_1 + a_n).n \quad \text{e} \quad S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Exemplo 9

Qual é o valor da soma dos 20 primeiros termos da progressão aritmética 2, 6, 10,...?

Solução

$a_{20} = a_1+19r = 2+19x4 = 78$

$$S_{20} = \frac{(2+78)\cdot 20}{2} = 800.$$

Exemplo 10

A soma dos n primeiros números inteiros e positivos é

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exemplo 11

A soma dos n primeiros números ímpares é

$$1+3+5+...+(2n-1) = \frac{(1+2n-1)n}{2} = n^2.$$

Exercícios

1) Formam-se n triângulos com palitos, conforme mostram as figuras.

n = 1 n = 2 n = 3

Qual o número de palitos usados para construir n triângulos?

2) Os ângulos internos de um pentágono convexo estão em progressão aritmética. Determine o ângulo mediano.

3) Se 3–x, –x, $\sqrt{9-x}$,... é uma progressão aritmética, determine x e calcule o quinto termo.

4) Calcule a soma dos termos da progressão aritmética 2, 5, 8, 11,... desde o 25º até o 41º termo, inclusive.

5) Calcule a soma de todos os inteiros que divididos por 11 dão resto 7 e estão compreendidos entre 200 e 400.

6) Um bem, cujo valor hoje é de R$ 8 000,00, desvaloriza-se de tal forma que seu valor daqui a 4 anos será de R$ 2 000,00. Supondo constante a desvalorização anual, qual será o valor desse bem daqui a 3 anos?

7) Determine o primeiro termo e a razão da progressão aritmética na qual a soma dos n primeiros termos é, para todo n:

a) $S_n = 2n^2+n$

b) $S_n = n^2+n+1$

8) No turno do campeonato brasileiro de futebol, que é disputado por 22 clubes, quaisquer dois times jogam entre si uma única vez. Quantos jogos há?

9) Uma bobina de papel tem raio interno 5 cm, raio externo 10 cm e a espessura do papel é 0,01 cm. Qual é o comprimento da bobina desenrolada?

10) Qual é o número máximo de regiões em que n retas podem dividir o plano?

PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

O problema a seguir, adaptado de uma questão do Exame Nacional do MAA (Mathematical Association of America), é interessante e costuma deixar os alunos intrigados e os professores desconfiados. Você aceita o desafio? Então, vamos começar.

Exemplo 1

Uma pessoa, começando com R$ 64,00, faz seis apostas consecutivas, em cada uma das quais arrisca perder ou ganhar a metade do que possui na ocasião. Se ela ganha três e perde três dessas apostas, pode-se afirmar que ela:

(A) ganha dinheiro.

(B) não ganha nem perde dinheiro.

(C) perde R$ 27,00.

(D) perde R$ 37,00.

(E) ganha ou perde dinheiro, dependendo da ordem em que ocorreram suas vitórias e derrotas.

Comentário

Em geral, os alunos escolhem uma ordem para ver o que acontece; aliás, essa é até uma boa estratégia. Por exemplo, se ela vence as três primeiras apostas e perde as últimas três, o seu capital evolui de acordo com o esquema:

$64 \to 96 \to 144 \to 216 \to 108 \to 54 \to 27.$

Se ela começou com R$ 64,00 e terminou com R$ 27,00, ela perdeu R$ 37,00. Já houve um progresso. Sabemos agora que a resposta só poderá ser (C) ou (E).

Em seguida, os alunos costumam experimentar uma outra ordem, por exemplo, ganhando e perdendo alternadamente. Obtêm-se:

$64 \to 96 \to 48 \to 72 \to 36 \to 54 \to 27.$

Nessa ordem, a pessoa também perdeu R$ 37,00.

Em uma nova tentativa, experimentam outra ordem, torcendo para que a pessoa não termine com R$ 27,00, o que permitiria concluir que a resposta é (E). Infelizmente, descobrem que a pessoa novamente termina com R$ 27,00 e permanecem na dúvida. Alguns se dispõem a tentar todas as ordens possíveis, mas logo desistem ao perceber que há 20 possibilidades.

Solução

A melhor maneira de abordar problemas nos quais há uma grandeza variável, da qual é conhecida a taxa (porcentagem) de variação, é concentrar a atenção, não na taxa de variação da grandeza - mas, sim no valor da grandeza depois da variação.

Nesse problema, devemos pensar assim:

• cada vez que a pessoa ganha, o capital aumenta $\frac{1}{2}$ (ou seja, 50%) e passa a valer $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ do que valia;

• cada vez que perde, o capital diminui $\frac{1}{2}$ (ou seja, 50%) e passa a vale $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ do que valia.

Pensando assim, fica claro que se a pessoa vence as três primeiras apostas e perde as três últimas, a evolução de seu capital se dá de acordo com o esquema:

$$64 \to 64\cdot\frac{3}{2} \to 64\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} \to 64\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} \to 64\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} \to$$
$$64\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \to 64\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

Ela termina com $64\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=27$ reais .

Além disso, fica claro também que se as vitórias e derrotas tivessem ocorrido em outra ordem, isso apenas mudaria a ordem dos fatores, sem alterar o produto, e a pessoa também terminaria com R$ 27,00.

Se ela começou com R$ 64,00 e terminou com R$ 27,00, perdeu R$ 37,00. A resposta é (C).

Exemplo 2

Aumentando em 20% o raio da base de um cilindro e diminuindo de 30% sua altura, de quanto variará seu volume?

Solução

O volume é diretamente proporcional ao quadrado do raio e à altura. Portanto, $V = kr^2h$, onde k é a constante de proporcionalidade. Sabemos que $k = \pi$, mas isso é irrelevante para o problema.

Depois da variação, os valores de r e h serão: $r' = 1{,}2r$ E $h' = 0{,}7h$, pois o que aumenta 20% passa a valer 120% = 1,2 do que valia, e o que diminui 30% passa a valer 70% = 0,7 do que valia.

O novo volume será $V' = k(1{,}2r)2\ 0{,}7h = 1{,}008\ kr2h = 100{,}8\%V$. O volume aumenta 0,8%.

Exemplo 3

A população de um país é hoje igual a P_0 e cresce 2% ao ano. Qual será a população desse país daqui a n anos?

Solução

Se a população cresce 2% ao ano, em cada ano a população será 102% da população do ano anterior. Portanto, a cada ano que passa, a população sofre uma multiplicação por 102% = 1,02. Depois de n anos, a população será $P_0 \cdot 1{,}02^n$.

Exemplo 4

A torcida de certo clube é hoje igual a P_0 e decresce 5% ao ano. Qual será a torcida desse clube daqui a n anos?

Solução

Se a torcida decresce 5% ao ano, em cada ano a torcida será 95% da torcida do ano anterior. Portanto, a cada ano que passa, a torcida sofrerá uma multiplicação por 95% = 0,95. Depois de n anos, a torcida será $P_0 \cdot 0{,}95^n$.

O que deve ter ficado claro nesses exemplos é que se uma grandeza tem taxa de crescimento igual a i, cada valor da grandeza é igual a (1 + i) vezes o valor anterior.

Progressões geométricas são sequências nas quais a taxa de crescimento i, de cada termo para o seguinte, é sempre a mesma.

Exemplo 5

A sequência (1, 2, 4, 8, 16, 32, ...) é um exemplo de uma progressão geométrica. Aqui a taxa de crescimento de cada termo para o seguinte é de 100%, o que faz com que cada termo seja igual a 200% do termo anterior.

Exemplo 6

A sequência (1000, 800, 640, 512, ...) é um exemplo de uma progressão geométrica. Aqui, cada termo é 80% do termo anterior. A taxa de crescimento de cada termo para o seguinte é de –20%.

É claro, então, que numa progressão geométrica, cada termo é igual ao anterior, multiplicado por 1 + i, no qual i é a taxa de crescimento dos termos. Chamamos 1 + i de razão da progressão e representamos a razão por q.

Portanto, uma progressão geométrica é uma sequência na qual é constante a razão entre cada termo e seu antecessor. Esse número constante é chamado razão da progressão e é representado pela letra q. A razão q de uma progressão geométrica é simplesmente o valor de 1 + i, no qual i é a taxa de crescimento constante de cada termo para o seguinte.

Exemplo 7

As sequências (2, 6, 18, 54,...) e (128, 32, 8, 2, ...) são progressões geométricas cujas razões valem, respectivamente, $q_1 = 3$ e $q_2 = 1/4$. Suas taxas de crescimento são, respectivamente, $i_1 = 200\%$ e $i_2 = -3/4 = -75\%$, pois $q = 1 + i$.

Solução

Em uma progressão geométrica ($a_1, a_2, a_3, \ldots$), para avançar um termo a partir de outro, basta multiplicar este último pela razão; para avançar dois termos, basta multiplicar duas vezes pela razão, e assim por diante.

Por exemplo, $a_{13} = a_5 . q^8$, pois avançamos 8 termos ao passar de a_5 para a_{13}; $a_{12} = a_7 . q^5$, pois avançamos 5 termos ao passar de a_7 para a_{12}; $a_4 = a^{17}/q^{13}$, pois ao passar de a_{17} para a_4, retrocedemos 13 termos. De modo geral, $a_n = a_1 . q^{n-1}$, pois, ao passar de a_1 para a_n, avançamos n – 1 termos.

Em muitos casos, é mais natural numerar os termos a partir de zero, como foi feito nos exemplos 3 e 4; nesse caso, $a_n = a_0 q^n$, pois avançamos n termos ao passar de a_0 para a_n. Isso é comum quando os termos estão indexados pelo tempo.

Exemplo 8

Em uma progressão geométrica, o quinto termo vale 5 e o oitavo termo vale 135. Quanto vale o sétimo termo dessa progressão?

Solução

$a_8 = a_5 . q^3$, pois ao passar do quinto termo para o oitavo, avançamos 3 termos.

Logo, $135 = 5q^3$ e $q = 3$. Analogamente, $a_7 = a_5 . q^2 = 5 . 32 = 45$. O sétimo termo vale 45.

Exemplo 9

Qual é a razão da progressão geométrica que se obtém inserindo 3 termos entre os números 30 e 480?

Solução

Inserindo-se 3 termos entre 30 e 480, ficamos com 5 termos sendo 30 o primeiro e 480 o último deles. Temos $a_1 = 30$ e $a_5 = 480$. Como $a_5 = a_1 . q^4$, $480 = 30 . q^4$, $q^4 = 16$ e $q = \pm 2$.

Fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica

A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica (a_n) de razão $q \neq 1$, é:

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} .$$

Prova

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$.

Multiplicando os dois lados por q: $qS_n = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + a_{n+1}$. Subtraindo as duas equações: $S_n - qS_n = a_1 - a_{n+1}$, isto é, $S_n(1 - q) = a_1 - a_1 q^n$ e, finalmente:

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} .$$

Exemplo 10

Diz a lenda que o inventor do xadrez pediu como recompensa 1 grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, 2 grãos pela segunda, 4 pela terceira e assim por diante, sempre dobrando a quantidade a cada nova casa. Como o tabuleiro de xadrez tem 64 casas, o número de grãos pedido pelo inventor do jogo é a soma dos 64 primeiros termos da progressão geométrica 1,2,4, ...

O valor dessa soma é $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = 1\frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1$.

Calculando, obtemos um estupendo número de vinte dígitos: 18446744073709551615.

Nas progressões geométricas em que $|q| < 1$, a soma dos n primeiros termos tem um limite finito, mesmo quando n assume valores próximos ao "infinito"...

Nesse caso, o valor de qn tende a 0, e temos o limite da soma dos termos da P.G.:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

Exemplo 11

O valor da soma 0,3 + 0,03 + 0,003 + ..., quando o número de parcelas tende ao infinito, é igual a $\frac{0,3}{1-0,1} = \frac{1}{3}$. O resultado é intuitivo, pois somando um número muito grande de termos da progressão, encontraremos aproximadamente a dízima periódica 0,333333 ... = $\frac{1}{3}$.

Exemplo 12

Calcule o valor da soma da P.G. infinita $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$.

Solução

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

O resultado admite uma interessante paráfrase. Suponha que Salvador deva correr 1km. Inicialmente, ele corre metade dessa distância, isto é, 1/2 km; em seguida, ele corre metade da distância que falta, isto é, 1/4 km; depois, metade da distância restante, isto é, 1/8 km, e assim por diante.

Depois de n dessas etapas, Salvador terá corrido $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}$ km.

Se n for grande, essa soma será aproximadamente igual a 1 km.

Exercícios

11) Aumentos sucessivos de 10% e 20% equivalem a um aumento único de quanto?

12) Descontos sucessivos de 10% e 20% equivalem a um desconto único de quanto?

13) Um aumento de 10%, seguido de um desconto de 20%, equivale a um desconto único de quanto?

14) Aumentando a velocidade em 60%, de quanto diminui o tempo de viagem?

15) Mantida constante a temperatura, a pressão de um gás perfeito é inversamente proporcional a seu volume. De quanto aumenta a pressão, quando reduzimos em 20% o volume?

16) Se a base de um retângulo aumenta 10% e a altura diminui 10%, quanto aumenta (ou diminui) a área?

17) Um carro novo custa R$ 18.000,00 e, com 4 anos de uso, vale R$ 8.000,00. Supondo que o valor decresça a uma taxa anual constante, determine o valor do carro com 2 anos de uso.

18) Os lados de um triângulo retângulo formam uma progressão geométrica crescente. Determine a razão dessa progressão.

19) Qual é o quarto termo da progressão geométrica $\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[6]{2}, \ldots$?

20) A soma de três números em progressão geométrica crescente é 19. Subtraindo-se 1 do primeiro, eles passam a formar uma progressão aritmética. Calcule-os.

21) Quatro números são tais que os três primeiros formam uma progressão aritmética de razão 6, os três últimos uma progressão geométrica e o primeiro número é igual ao quarto. Determine-os.

22) A espessura de uma folha de estanho é 0,1 mm. Forma-se uma pilha de folhas colocando-se uma folha na primeira vez e, em cada uma das vezes seguintes, tantas quantas já tinham sido colocadas anteriormente. Depois de 33 dessas operações, a altura da pilha será, aproximadamente:

(A) a altura de um poste de luz.
(B) a altura de um prédio de 40 andares.
(C) o comprimento da praia de Copacabana.
(D) a distância entre Rio e São Paulo.
(E) o comprimento do equador terrestre.

23) Um garrafão com p litros está completamente cheio de vinho. Retira-se um litro de vinho do garrafão e acrescenta-se um litro de água, obtendo-se uma mistura homogênea; retira-se, a seguir, um litro da mistura e acrescenta-se um litro de água, e assim por diante. Qual a quantidade de vinho que restará no garrafão após n dessas operações?

24) Determine as geratrizes das seguintes dízimas periódicas:

a) 0, 141 414 141...

b) 0, 345 454 545...

c) 0, 999 999 999...

d) 1, 711 111 111...

25) Determine os limites das somas a seguir:

a) $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+...$

b) $\frac{1}{7}+\frac{2}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\frac{2}{7^4}+\frac{1}{7^5}+\frac{2}{7^6}+...$

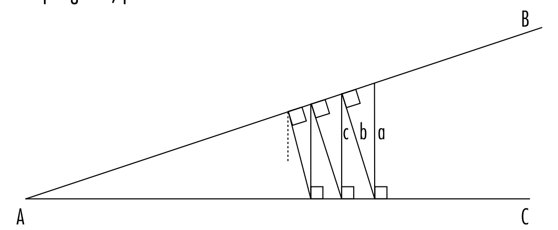
c) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{7}{16}+\frac{9}{32}+...$

d) $1+2x+3x^2+4x^3+...,\ -1<x<1$

e) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{64}-...$

26) Larga-se uma bola de uma altura de 5 m. Após cada choque com o solo, ela recupera apenas 4/9 da altura anterior. Determine a distância total percorrida pela bola.

27) Na figura a seguir, temos uma linha poligonal, de lados ora perpendiculares a AB, ora perpendiculares a AC. Sendo a e b, respectivamente, os dois primeiros lados da poligonal, pede-se determinar:



a) o comprimento dessa linha poligonal;

b) o comprimento do n-ésimo lado poligonal.

28) Uma faculdade recebe, todos os anos, 300 novos alunos no primeiro semestre e 200 no segundo. Trinta por cento dos alunos são reprovados no primeiro período e o repetem no semestre seguinte. Sendo a_n e b_n, respectivamente, o número de alunos do primeiro período no primeiro e no segundo semestres do ano n, calcule lim a_n e lim b_n.

29) Seja S_n a soma das áreas dos n primeiros quadrados obtidos, a partir de um quadrado Q_1 de lado 1, pelo seguinte processo: "Os vértices do quadrado Q_{n+1} são os pontos médios dos lados de Q_n". Determine quais das afirmações abaixo são verdadeiras:

(A) É possível escolher S_n de modo que $S_n > 1,9$.
(B) É possível escolher S_n de modo que $S_n > 2$.
(C) É possível escolher S_n de modo que $S_n > 2,1$.
(D) É possível escolher S_n de modo que $S_n = 2$.
(E) É possível escolher S_n de modo que $S_n = 1,75$.

30) Sendo x e y positivos, calcule:

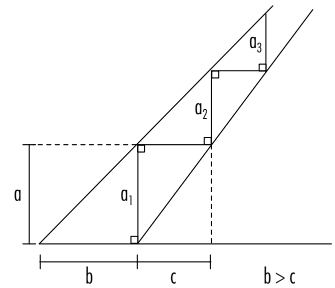
a) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x...}}}}$

b) $\sqrt{x\sqrt{y\sqrt{x\sqrt{y...}}}}$

Exercícios de vestibular

1) (UFRJ / 2006) Considere uma escada com infinitos degraus, de alturas a_1, a_2, a_3, ..., definidas conforme a figura a seguir.

Calcule a altura da escada em função de a, b e c.



2) (UFRJ / 2005) Ana e Bia participam de um site de relacionamentos. No dia 1º de abril de 2005, elas notaram que Ana tinha exatamente 128 vezes o número de amigos de Bia. Ana informou que, para cada amigo que tinha no final de um dia, três novos amigos entravam para sua lista de amigos no dia seguinte. Já Bia disse que, para cada amigo que tinha no final de um dia, cinco novos amigos entravam para sua lista no dia seguinte. Suponha que nenhum amigo deixe as listas e que o número de amigos aumente, por dia, conforme elas informaram.

a) No dia 2 de abril de 2005, vinte novos amigos entraram para a lista de Bia. Quantos amigos havia na lista de Ana em 1º de abril?

b) Determine a partir de que dia o número de amigos de Bia passa a ser maior do que o número de amigos de Ana. Se precisar, use $\log_2 3 = 1{,}585$.

3) (UEZO / 2006) Em um terremoto, ocorreram vários tremores. No primeiro minuto, apenas um; no segundo, três; no terceiro, cinco; no quarto, sete... Dessa forma, podemos afirmar que no décimo minuto o número de tremores foi igual a:

(A) 13
(B) 17
(C) 19
(D) 21

4) (UFRJ / 2004) Filipe começa a escrever números naturais em uma folha de papel muito grande, uma linha após a outra como mostrado a seguir:

1
2 3 4
3 4 5 6 7
4 5 6 7 8 9 10
....
....

Considerando que Filipe mantenha em todas as linhas o padrão adotado:

a) determine quantos números naturais ele escreverá na 50ª linha;

b) determine a soma de todos os números escritos na 50ª linha;

c) prove que a soma de todos os elementos de uma linha é sempre o quadrado de um número ímpar.

5) (UFRRJ / 2003) Júlio foi a um baile comandado pela Orquestra Boa Música, que tocava em períodos de 45 minutos e parava 15 minutos. Observe, abaixo, como Júlio dançou.

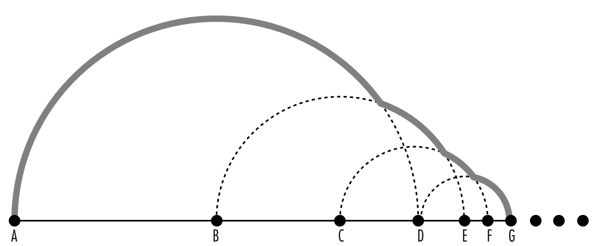
Rodadas	Ritmos		
	Bolero	**Samba**	**Fox**
1ª	2	1	1
2ª	3	2	2
3ª	4	3	3
...			

E assim dançou, sucessivamente, até o fim do baile, que começou às 23h e terminou às 4h do dia seguinte. O número de vezes que Júlio dançou, foi:

(A) 45
(B) 50
(C) 55
(D) 60
(E) 65

6) (CEDERJ / 2001) Meu avô, que nasceu no dia 29 de fevereiro de um ano bissexto, tem, na presente data, 77 anos de idade. Determine quantos aniversários de meu avô ocorreram no dia e mês do seu nascimento.

7) (UERJ / 2007) A figura mostra uma sequência de semicírculos. O esquema abaixo indica quatro desses semicírculos.



Admita que as medidas dos raios (AB, BC, CD, DE, EF, FG, ...) formem uma progressão tal que AB/BC = BC/CD = CD/DE = ... Assim, considerando AB = 2, a soma AB + BC + CD + DE + ... será equivalente a:

(A) $2 + \sqrt{3}$
(B) $2 + \sqrt{5}$
(C) $3 + \sqrt{3}$
(D) $3 + \sqrt{5}$

8) (PROVÃO / 2001) Uma partícula se move sobre o eixo dos x, partindo da origem. No primeiro minuto, ela avança 1 unidade para a direita; no segundo minuto, retrocede 0,5 unidade; no terceiro minuto, avança 0,25 unidade; e, assim, sucessivamente, alternando avanços com retrocessos, as distâncias percorridas formando uma progressão geométrica. O limite da abscissa da partícula, quando o tempo tender para infinito, é

(A) 1/2
(B) 2/3
(C) 3/4
(D) 3/5
(E) 7/10

9) Durante uma experiência em laboratório, observou-se que uma bola de 1 kg de massa, deslocando-se com uma velocidade v, medida em km/h, possui uma determinada energia cinética E, medida em joules.

Se (v, E, 1) é uma progressão aritmética e $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, o valor de v corresponde a:

(A) $\phi/2$
(B) ϕ
(C) 2ϕ
(D) 3ϕ

10) (UERJ / 2006) Num experimento para a determinação do número de partículas emitidas pelo radônio, foi utilizada uma amostra contendo 0,1 mg desse radioisótopo. No primeiro dia do experimento, foram emitidas $4{,}3 \times 10^{16}$ partículas. Sabe-se que a emissão de um dia é sempre 16% menor que a do dia anterior. O número total de partículas que essa amostra emite, a partir do primeiro dia do experimento, é aproximadamente igual a:

(A) $4{,}2 \times 10^{18}$
(B) $2{,}6 \times 10^{18}$
(C) $4{,}3 \times 10^{17}$
(D) $2{,}7 \times 10^{17}$

11) (UNI-RIO / 2004) Passando em uma sala de aula, um aluno verificou que, no quadro-negro, o professor havia escrito os números naturais ímpares da seguinte maneira:

1
3 5
7 9 11
13 15 17 19
21 23 25 27 29

O aluno achou interessante e continuou a escrever, até a décima linha. Somando os números dessa linha, ele encontrou

(A) 800
(B) 900
(C) 1000
(D) 1100
(E) 1200

GABARITO

Exercícios

1) 2n+1

2) 108°

3) –7 e –2

4) 1666

5) 5373

6) R$ 3500,00

7) a) 3 e 4 b) Não existe tal PA.

8) 231

9) Aproximadamente 236m.

10) $\frac{n^2+n+2}{2}$

11) 32%

12) 28%

13) 12%

14) 37,5%

15) 25%

16) –1%

17) R$ 12 000,00

18) $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

19) 1

20) 4, 6 e 9

21) –8, –2, 4 e –8

22) d

23) $p\left(1-\frac{1}{p}\right)^{n-1}$

24) a) $\frac{14}{99}$ b) $\frac{19}{55}$ c) 1 d) $\frac{77}{45}$

25) a) 3 b) $\frac{3}{16}$ c) 3 d) $(1-x)^{-2}$ e) $\frac{2}{7}$

26) 13 m

27) a) $\frac{a^2}{a-b}$ b) $a\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}$

28) 396 e 319, aproximadamente.

29) "a" e "e"

30) a) x b) $\sqrt[3]{x^2y}$

Gabarito

Exercícios de Vestibular

1) $\frac{ab}{b-c}$

2) a) 512 b) 13 de abril de 2005

3) C

4) a) 99 b) $99^2 = 9801$ c) demonstração

5) B

6) 19

7) D

8) B

9) B

10) D

11) C

5

Combinatória

Princípios Básicos

O princípio fundamental da contagem diz que se há x modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1, há y modos de tomar a decisão D_2, então, o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é xy.

Exemplo 1

Com 5 homens e 5 mulheres, de quantos modos se pode formar um casal?

Solução: Formar um casal equivale a tomar as decisões:

D_1: Escolha do homem (5 modos).

D_2: Escolha da mulher (5 modos).

Há, portanto, 5x5 = 25 modos de formar um casal.

Exemplo 2

Uma bandeira é formada por 7 listras que devem ser coloridas usando apenas as cores verde, azul e cinza. Se cada listra deve ter apenas uma cor e não se pode usar cores iguais em listras adjacentes, de quantos modos se pode colorir a bandeira?

Solução

Colorir a bandeira equivale a escolher a cor de cada listra. Há 3 modos de escolher a cor da primeira listra e, a partir daí, 2 modos de escolher a cor de cada uma das outras 6 listras.

A resposta é $3x2^6$=192.

Exemplo 3

Quantos são os números de três dígitos distintos?

Solução

O primeiro dígito pode ser escolhido de 9 modos, pois ele não pode ser igual a 0. O segundo dígito pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual ao primeiro. O terceiro dígito pode ser escolhido de 8 modos, pois não pode ser igual nem ao primeiro nem ao segundo dígitos.

A resposta é 9x9x8=648.

Você já deve ter percebido nesses exemplos qual é a estratégia para resolver problemas de Combinatória:

1) Postura: temos sempre de nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar. No exemplo 3, nós nos colocamos no papel da pessoa que deveria escrever o número de três dígitos; no exemplo 2, nós nos colocamos no papel da pessoa que deveria colorir a bandeira; no exemplo 1, nós nos colocamos no papel da pessoa que deveria formar o casal.

2) Divisão: devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples. Formar um casal foi dividido em escolher o homem e a mulher; colorir a bandeira foi dividido em colorir cada listra; formar um número de três dígitos foi dividido em escolher cada um dos três dígitos.

Vamos voltar ao exemplo anterior – "Quantos são os números de três dígitos distintos?"– para ver como algumas pessoas conseguem, por erros de estratégia, tornar complicadas coisas simples.

Começando a escolha dos dígitos pelo último dígito, há 10 modos de escolher o último dígito. Em seguida, há 9 modos de escolher o dígito central, pois não podemos repetir o dígito já usado. Agora temos um impasse: de quantos modos podemos escolher o primeiro dígito? A resposta é "depende". Se não tivermos usado o 0, haverá 7 modos de escolher o primeiro dígito, pois não poderemos usar nem o 0 nem os dois dígitos já utilizados nas demais casas; se já tivermos usado o 0, haverá 8 modos de escolher o primeiro dígito.

Um passo importante na estratégia para resolver problemas de Combinatória é:

3) Não adiar dificuldades: pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar. No exemplo 3, a escolha do primeiro dígito era uma decisão mais restrita do que as outras, pois o primeiro dígito não pode ser igual a 0. Essa é, portanto, a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar e, conforme acabamos de ver, postergá-la só serve para causar problemas.

Exemplo 4

O código Morse usa dois sinais, ponto e traço, e as letras têm de 1 a 4 sinais. Quantas são as letras do código Morse?

Solução

Há 2 letras de um sinal; há 2x2=4 letras de dois sinais, pois há dois modos de escolher o primeiro sinal e dois modos de escolher o segundo; analogamente, há 2x2x2=8 letras de três sinais e 2x2x2x2=16 letras de 4 sinais. O número total de letras é, portanto, 2+4+8+16=30.

Exemplo 5

Quantos divisores inteiros e positivos possui o número 360? Quantos desses divisores são pares? Quantos são ímpares? Quantos são quadrados perfeitos?

Solução

a) $360=2^3 x 3^2 x 5$. Os divisores inteiros e positivos de 360 são os números da forma $2^\alpha x\ 3^\beta\ x\ 5^\gamma$, com $\alpha \in \{0,1,2,3\}$, $\beta \in \{0,1,2\}$ e $\gamma \in \{0,1\}$. Há 4x3x2=24 maneiras de escolher os expoentes α, β e γ. Há 24 divisores.

b) Para que o divisor seja par, α não pode ser 0. Há 3x3x2=18 divisores pares.

c) Para que o divisor seja ímpar, α deve ser 0. Há 1X3X2=6divisores ímpares. Veja que também poderíamos ter achado essa resposta subtraindo (a)-(b).

d) Para que o divisor seja quadrado perfeito, os expoentes α, β e γ devem ser pares. Há 2x2x1=4 divisores que são quadrados perfeitos.

Exemplo 6

Quantos são os números pares de três dígitos distintos?

Solução

Há 5 modos de escolher o último dígito. Note que começamos pelo último dígito, que é o mais restrito; o último dígito só pode ser 0,2,4,6 ou 8.

Em seguida, vamos ao primeiro dígito. De quantos modos se pode escolher o primeiro dígito? A resposta é "depende". Se não tivermos usado o 0, haverá 8 modos de escolher o primeiro dígito, pois não poderemos usar nem o 0 nem o dígito já usado na última casa; se já tivermos usado o 0, haverá 9 modos de escolher o primeiro dígito, pois apenas o 0 não poderá ser usado na primeira casa. Esse tipo de impasse é comum na resolução de problemas, e há dois métodos para vencê-lo.

O primeiro método consiste em voltar atrás e contar separadamente. Contaremos separadamente os números que terminam em 0 e os que não terminam em 0.

Comecemos pelos que terminam em 0. Há 1 modo de escolher o último dígito, 9 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o dígito central. Há 1X9X8=72 números terminados em 0.

Para os que não terminam em 0, há 4 modos de escolher o último dígito, 8 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o dígito central. Há 4X8X8=256 números que não terminam em 0.

A resposta é 72+256=328.

O segundo método consiste em ignorar uma das restrições do problema, o que nos fará contar em demasia. Depois descontaremos o que houver sido contado indevidamente.

Primeiramente, imagine que o 0 possa ser usado na primeira casa do número. Procedendo assim, há 5 modos de escolher o último dígito (só pode ser 0,2,4,6 ou 8), 9 modos de escolher o primeiro dígito (não podemos repetir o dígito usado na última casa; note que estamos permitindo o uso do 0 na primeira casa) e, portanto, 8 modos de escolher o dígito central. Há 5x9x8 números, aí inclusos os que começam por 0.

Agora vamos determinar quantos desses números começam por zero; são esses os números que foram contados indevidamente. Há 1 modo de escolher o primeiro dígito (tem que ser 0), 4 modos de escolher o último (só pode ser 2,4,6 ou 8 – lembre-se de que os dígitos são distintos) e 8 modos de escolher o dígito central (não podemos repetir os dígitos já usados). Há 1x4x8=32 números começados por 0.

A resposta é 360-32=328.

É claro que este problema poderia ter sido resolvido com um truque. Para determinar quantos são os números pares de três dígitos distintos, poderíamos fazer os números de três dígitos distintos menos os números ímpares de três dígitos distintos.

Para os números de três dígitos distintos, há 9 modos de escolher o primeiro dígito, 9 modos de escolher o segundo e 8 modos de escolher o último.

Há 9x9x8=648 números de três dígitos distintos.

Para os números ímpares de três dígitos distintos, há 5 modos de escolher o último dígito, 8 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o dígito central.

Há 5x8x8=320 números ímpares de três dígitos distintos.

A resposta é 648-320=328.

Há alguns (poucos) problemas de Combinatória que, embora sejam aplicações do princípio básico, aparecem com muita frequência. Para esses problemas, vale a pena saber de cor as respostas. O primeiro deles é:

Problema das permutações simples

De quantos modos podemos ordenar em fila n objetos distintos?

A escolha do objeto que ocupará o primeiro lugar pode ser feita de n modos; a escolha do objeto que ocupará o segundo lugar pode ser feita de n–1 modos; a escolha do objeto que ocupará o terceiro lugar pode ser feita de n–2 modos etc.; a escolha do objeto que ocupará o último lugar pode ser feita de 1 modo.

A resposta é n(n-1)(n-2)...1=n!.

Cada ordem que se dá aos objetos é chamada permutação simples dos objetos. Por exemplo, as permutações simples das letras a, b e c são

(abc), (acb), (bac), (bca), (cab) e (cba).

Portanto, o número de permutações simples de n objetos distintos, ou seja, o número de ordens em que podemos colocar n objetos distintos é P_n=n!.

Exemplo 1

Quantos são os anagramas da palavra "CALOR"? Quantos começam por consoante?

Solução

Cada anagrama corresponde a uma ordem de colocação dessas 5 letras. O número de anagramas é P_5 = 5! = 120.

Para formar um anagrama começado por consoante, devemos primeiramente escolher a consoante (3 modos) e, depois, arrumar as quatro letras restantes em seguida à consoante (4!=24 modos). Há 3x24=72 anagramas começados por consoante.

Exemplo 2

De quantos modos podemos arrumar em fila 5 livros diferentes de Matemática, 3 livros diferentes de Estatística e 2 livros diferentes de Física, de modo que todos os livros de uma mesma matéria permaneçam juntos?

Solução

Podemos escolher a ordem das matérias de 3! Modos. Feito isso, há 5! Modos de colocar os livros de Matemática nos lugares que lhes foram destinados, 3! Modos para os de Estatística e 2! Modos para os de Física.

A resposta é 3!5!3!2!= 8 640.

Exemplo 3

Quantos são os anagramas da palavra "BOTAFOGO"?

Solução

Se as letras fossem diferentes, a resposta seria 8!. Como as três letras "O" são iguais, quando as trocamos entre si, obtemos o mesmo anagrama e não um anagrama distinto, o que aconteceria se fossem diferentes. Isso faz com que, na nossa contagem de 8!, tenhamos considerado o mesmo anagrama várias vezes, 3! Vezes precisamente, pois há 3! Modos de trocar as letras "O" entre si.

A resposta é $\frac{8!}{3!} = 6720$.

De modo geral, o número de permutações de n objetos, dos quais α são iguais a A, β são iguais a B, γ são iguais a C etc. é:

$$P_n^{\alpha,\beta,\gamma,...} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!...}.$$

Exemplo 4

De quantos modos podemos dividir 8 objetos em um grupo de 5 objetos e um de 3 objetos?

Solução

Um processo de fazer essa divisão é colocar os objetos em fila; os 5 primeiros formam o grupo de 5 e os 3 últimos formam o grupo de 3.

Há 8! modos de dispor os objetos em fila.

Entretanto, note que filas como abcde|fgh e badce|ghf são filas diferentes e geram a mesma divisão em grupos. Cada divisão em grupos foi contada uma vez para cada ordem dos objetos dentro de cada grupo. Há 5!3! modos de arrumar os objetos em cada grupo. Cada divisão em grupos foi contada 5!3! vezes.

A resposta é $\frac{8!}{5!3!} = 56$.

O segundo problema importante é o:

PROBLEMA DAS COMBINAÇÕES SIMPLES

De quantos modos podemos selecionar p objetos distintos entre n objetos distintos dados?

Cada seleção de p objetos é chamada combinação simples de classe p dos n objetos. Assim, as combinações simples de classe 3 dos objetos a, b,c,d,e e são {a,b,c}, {a,b,d},{a,b,e}, {a,c,d}, {a,c,e}, {a,d,e}, {b,c,d}, {b,c,e}, {b,d,e} e {c,d,e}. Representamos o número de combinações simples de classe p de n elementos por C_n^p ou $\binom{n}{p}$. Assim, $C_5^3 = \binom{5}{3} = 10$.

Para resolver o problema das combinações simples, basta notar que selecionar p entre os n objetos equivale a dividir os n objetos em um grupo de p objetos selecionados, e um grupo de n–p objetos, que são os não selecionados. Esse é o problema do exemplo 4, e a resposta é $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Exemplo 5

Com 5 homens e 4 mulheres, quantas comissões de 5 pessoas, com exatamente 3 homens, podem ser formadas?

Solução

Para formar a comissão, devemos escolher 3 dos homens e 2 das mulheres. Há $C_5^3 \cdot C_4^2 = 10 \times 6 = 60$ comissões.

Exemplo 6

Com 5 homens e 4 mulheres, quantas comissões de 5 pessoas, com pelo menos 3 homens, podem ser formadas?

Solução

Há comissões com 3 homens e 2 mulheres, 4 homens e 1 mulher, 5 homens. A resposta é $C_5^3 \cdot C_4^2 + C_5^4 \cdot C_4^1 + C_5^5 = 10 \times 6 + 5 \times 4 + 1 = 81$.

Exemplo 7

Tem-se 5 pontos sobre uma reta r e 8 pontos sobre uma reta s paralela a r. Quantos triângulos e quantos quadriláteros convexos com vértices nesses pontos existem?

Solução

Para formar um triângulo ou você toma um ponto em r e dois pontos em s, ou toma um ponto em s e dois pontos em r. O número de triângulos é $5 \cdot C_8^2 + 8 \cdot C_5^2 = 140 + 80 = 220$.

Também se poderia pensar em tomar 3 dos 13 pontos e excluir dessa contagem as escolhas de pontos colineares, o que daria $C_{13}^3 - C_8^3 - C_5^3 = 286 - 58 - 10 = 220$.

Para formar um quadrilátero convexo, devemos tomar dois pontos em r e dois pontos em s, o que pode ser feito de $C_5^2 \cdot C_8^2 = 10 \cdot 28 = 280$ modos.

Exemplo 8

De quantos modos 5 crianças podem formar uma roda de ciranda?

Solução

À primeira vista, parece que para formar uma roda com as cinco crianças basta escolher uma ordem para elas, o que poderia ser feito de 5! = 120 modos.

Entretanto, as rodas ABCDE e EABCD são iguais, pois na roda o que importa é a posição relativa das crianças entre si, e a roda ABCDE pode ser "virada" até formar a roda EABCD. Como cada roda pode ser "virada" de cinco modos, a nossa contagem de 120 rodas contou cada roda 5 vezes, e a resposta é 120/5 = 24.

Em geral, o número de modos de colocar n objetos em círculo, de maneira que disposições que possam coincidir por rotação sejam consideradas iguais, isto é, o número de permutações circulares de n objetos é $(PC)_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!$

O exemplo a seguir mostra um tipo de raciocínio que, apesar de inesperado, pode ser muito eficiente.

Exemplo 9

Quantos são os anagramas da palavra "BÚLGARO" que não possuem duas vogais adjacentes?

Solução

Vamos primeiramente arrumar as consoantes e, depois, entremear as vogais. O número de modos de arrumar em fila as consoantes B, L, G, R é P_4 = 4! = 24. Arrumadas as consoantes, por exemplo na ordem BLGR, devemos colocar as vogais U, A, O nos 5 espaços da figura. Como não podemos colocar duas vogais no mesmo espaço, três dos espaços serão ocupados, cada um com uma vogal, e dois dos espaços ficarão vazios. Temos $C_5^3 = 10$ modos de escolher os três espaços que serão ocupados e P_3 = 3! = 6 modos de colocar as vogais nos espaços escolhidos.

__B__L__G__R__

A resposta é 24x10x6=1 440.

Exemplo 10

Quantas são as soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + ... + x_n = p$?

Solução

A resposta deste problema é representada por CR_n^p .

Para determinar o valor de CR_n^p, vamos representar cada solução da equação por uma fila de sinais + e | . Por exemplo, para a equação x+y+z=5, as soluções (2,2,1) e (5,0,0) seriam representadas por ++|++|+ e +++++||, respectivamente. Nessa representação, as barras são usadas para separar as incógnitas e a quantidade de sinais + indica o valor de cada incógnita.

Para a equação $x_1 + x_2 + ... + x_n = p$, cada solução seria representada por uma fila com n−1 barras (as barras são para separar as incógnitas; para separar n incógnitas, usamos n−1 barras) e p sinais+. Ora, para formar uma fila com n−1 barras e p sinais +, basta escolher dos n+p−1 lugares da fila, os p lugares onde serão colocados os sinais +, o que pode ser feito de C_{n+p-1}^p modos.

Exemplo 11

Um bar oferece 6 sabores diferentes de sorvete. De quantos modos podemos comprar 3 sorvetes desse bar?

Solução

A resposta não é $C_6^3 = 20$. C_6 seria o número de modos de comprar 3 sorvetes diferentes.

Chamando de x_k o número de sorvetes do k-ésimo sabor que vamos comprar, devemos determinar valores inteiros e não negativos para x_k , k=1,2,3,4,5,6, tais que $x_1+x_2+...+x_6 = 3$. Isso pode ser feito de $CR_6^3 = C_8^3 = 56$ modos.

Exercícios

1) Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 10 questões de múltipla escolha, com 5 opções por questão?

2) Se um conjunto possui n elementos, quantos são os seus subconjuntos?

3) De quantos modos 3 pessoas podem se sentar em 5 cadeiras enfileiradas?

4) De quantos modos 5 homens e 5 mulheres podem se sentar em 5 bancos de 2 lugares, considerando-se que, em cada banco, deva haver um homem e uma mulher?

5) De quantos modos podemos colocar 2 reis diferentes em casas não adjacentes de um tabuleiro 8x8? E se os reis fossem iguais?

6) De quantos modos podemos colocar 8 torres iguais em um tabuleiro 8x8, de modo que não haja duas torres na mesma linha ou na mesma coluna? E se as torres fossem diferentes?

7) De um baralho comum de 52 cartas, sacam-se, sucessivamente e sem reposição, duas cartas. De quantos modos isso pode ser feito, considerando-se que a primeira carta deva ser de copas e a segunda não deva ser um rei?

8) O conjunto A possui 4 elementos, e o conjunto B, 7. Quantas funções $f:A \rightarrow B$ existem? Quantas delas são injetivas?

9) Dispomos de 5 cores distintas. De quantos modos podemos colorir os quatro quadrantes de um círculo, cada quadrante com uma só cor, se quadrantes cuja fronteira é uma linha não puderem receber a mesma cor?

10) De quantos modos podemos formar uma palavra de 5 letras de um alfabeto de 26, se a letra A deve figurar na palavra mas não pode ser a primeira letra? E se a palavra devesse ter letras distintas?

11) As placas dos veículos são formadas por três letras (de um alfabeto de 26) seguidas por 4 algarismos. Quantas placas diferentes podem ser formadas?

12) Um vagão de metrô tem 10 bancos individuais, sendo 5 de frente e 5 de costas. De 10 passageiros, 4 preferem sentar de frente, 3 preferem sentar de costas e os demais não têm preferência. De quantos modos eles podem se sentar, respeitadas as preferências?

13) Quantos são os inteiros positivos de 4 dígitos nos quais o algarismo 5 figura?

14) Em uma banca há 5 exemplares iguais da *Veja*, 6 exemplares iguais da *Época* e 4 exemplares iguais da *Isto É*. Quantas coleções não vazias de revistas dessa banca podem ser formadas?

15) Uma turma tem aulas às segundas, quartas e sextas, das 13h às 14h e das 14h às 15h. As disciplinas são Matemática, Física e Química, cada uma com duas aulas semanais, em dias diferentes. De quantos modos pode ser feito o horário dessa turma?

16) Quantos são os anagramas da palavra "capítulo":

a) possíveis?

b) que começam e terminam por vogal?

c) que têm as vogais e as consoantes intercaladas?

d) que têm as letras c,a,p juntas nessa ordem?

e) que têm as letras c,a,p juntas em qualquer ordem?

f) que têm a letra p em primeiro lugar e a letra a em segundo?

g) que têm a letra p em primeiro lugar ou a letra a em segundo?

h) nos quais a letra a é uma das letras à esquerda de p e a letra c é uma das letras à direita de p?

17) Se A é um conjunto de n elementos, quantas são as funções $f:A \rightarrow A$ bijetoras?

18) De quantos modos é possível colocar 8 pessoas em fila de modo que duas dessas pessoas, Vera e Paulo, não fiquem juntas?

19) De quantos modos é possível colocar 8 pessoas em fila de modo que duas dessas pessoas, Vera e Paulo, não fiquem juntas e duas outras, Helena e Pedro, permaneçam juntas?

20) De quantos modos é possível dividir 15 atletas em três times de 5 atletas, denominados Esporte, Tupi e Minas?

21) De quantos modos é possível dividir 15 atletas em três times de 5 atletas?

22) Um campeonato é disputado por 12 clubes em rodadas de 6 jogos cada. De quantos modos é possível selecionar os jogos da primeira rodada?

23) Permutam-se de todas as formas possíveis os algarismos 1, 2, 4, 6, 7 e escrevem-se os números assim formados em ordem crescente. Determine:

a) que lugar ocupa o número 62 417.

b) que número que ocupa o 66º lugar.

c) qual o 166º algarismo escrito.

24) De quantos modos é possível colocar r rapazes e m moças em fila de modo que as moças permaneçam juntas?

25) Quantos dados diferentes é possível formar gravando números de 1 a 6 sobre as faces de um cubo?

a) Suponha uma face de cada cor.

b) Suponha as faces iguais.

c) Suponha que as faces são iguais e que a soma dos pontos de faces opostas deva ser igual a 7.

26) Quantos são os anagramas da palavra ESTRELADA?

27) O conjunto A possui n elementos. Quantos são os seus subconjuntos com p elementos?

28) Uma faculdade realiza seu vestibular em 2 dias de provas. Este ano a divisão foi: Matemática, Português, Biologia e Inglês no primeiro dia e Geografia, História, Física e Química no segundo dia. De quantos modos pode ser feito o calendário de provas?

29) Quantas diagonais possui:

a) um octaedro regular?

b) um icosaedro regular?

c) um dodecaedro regular?

d) um cubo?

e) um prisma hexagonal regular?

30) Sejam $I_m = \{1,2,...,m\}$ e $I_n = \{1,2,...,n\}$, com $m \leq n$. Quantas são as funções $f: I_m \rightarrow I_n$ estritamente crescentes?

31) Quantos são os números naturais de 7 dígitos nos quais o dígito 4 figura exatamente 3 vezes e o dígito 8 exatamente 2 vezes?

32) Quantos são os subconjuntos de $\{a_1, a_2,...,a_n\}$, com p elementos, nos quais:

a) a_1 figura;

b) a_1 não figura;

c) a_1 e a_2 figuram;

d) pelo menos um dos elementos a_1, a_2 figura;

e) exatamente um dos elementos a_1 e a_2 figura.

33) De um baralho de pôquer (7,8,9,10, valete, dama, rei e ás, cada um desses grupos aparecendo em 4 naipes: copas, ouros, paus, espadas), sacam-se simultaneamente 5 cartas.

a) Quantas são as extrações possíveis?

Quantas são as extrações nas quais se forma:

b) um par (duas cartas em um mesmo grupo e as outras três em três outros grupos diferentes)?

c) dois pares (duas cartas em um grupo, duas em outro grupo e uma em um terceiro grupo)?

d) uma trinca (três cartas em um grupo e as outras duas em dois outros grupos diferentes)?

e) um "four" (quatro cartas em um grupo e uma em outro grupo)?

f) um "full hand" (três cartas em um grupo e duas em outro grupo)?

g) uma sequência (5 cartas de grupos consecutivos, não sendo todas do mesmo naipe)?

h) um "flush" (5 cartas do mesmo naipe, não sendo elas de 5 grupos consecutivos)?

i) um "straight flush" (5 cartas de grupos consecutivos, todas do mesmo naipe)?

j) um "royal straight flush" (10, valete, dama, rei e ás de um mesmo naipe)?

34) O conjunto A possui p elementos e o conjunto B possui n elementos. Determine o número de funções f: A $\rightarrow$ B sobrejetoras para:

a) $p = n$;

b) $p = n+1$;

35) Considere um conjunto C de 20 pontos do espaço que tem um subconjunto C_1 formado por 8 pontos coplanares. Sabe-se que toda vez que 4 pontos de C são coplanares, então eles são pontos de C_1. Quantos são os planos que contêm pelo menos três pontos de C?

36) Formam-se as combinações simples de classe 5 dos elementos $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$, as quais são escritas com os elementos em ordem crescente de índices. Quantas são as combinações nas quais o elemento a_8 ocupa o 3º lugar?

37) De quantos modos é possível colocar em fila h homens e m mulheres, todos de alturas diferentes, de modo que os homens entre si e as mulheres entre si fiquem em ordem crescente de alturas?

38) Em uma escola, x professores se distribuem em 8 bancas examinadoras de modo que cada professor participa de exatamente duas bancas e cada duas bancas têm exatamente um professor em comum.

a) Calcule x.

b) Determine quantos professores há em cada banca.

39) De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com 5 meninos e 5 meninas de modo que pessoas de mesmo sexo não fiquem juntas?

40) De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com 6 crianças, de modo que duas delas, Vera e Isadora, não fiquem juntas?

41) Quantas são as soluções inteiras e positivas de $x+y+z=7$?

42) Quantas são as soluções inteiras e não-negativas de $x+y+z \leq 6$?

43) Uma indústria fabrica 5 tipos de balas que são vendidas em caixas de 20 balas, de um só tipo ou sortidas. Quantos tipos de caixas podem ser montados?

Exercícios de vestibular

1) (UFRJ / 2007) Nove pessoas serão distribuídas em três equipes de três para concorrer a uma gincana. O número de maneiras diferentes de formar as três equipes é menor do que 300?

2) (UEZO / 2006) Dentre 8 pessoas, deverão ser formadas equipes de 3 pessoas para auxiliar nos serviços de ajuda aos desabrigados. O número de equipes diferentes que poderão ser formadas é:

(A) 24
(B) 40
(C) 48
(D) 56

3) (UEZO / 2006) O conjunto dos 11 jogadores titulares de uma seleção prepara-se para entrar em campo. Essa entrada não obedecerá nenhuma ordem preestabelecida. Tanto poderá entrar primeiramente o camisa 7, como o goleiro, o camisa 10, como o camisa 5... O número de maneiras distintas desse conjunto de jogadores entrar em campo é representado pela seguinte expressão:

(A) $11!$
(B) $11!/8!$
(C) $11! - 3!$
(D) $11!/8!3!$

4) (UFRRJ / 2003) Caroline vai todos os dias à sorveteria para saborear um "sorvetão" (um sorvete formado por duas bolas de sabores diferentes). Sabe-se que há um total de 15 tipos de sabores diferentes de sorvetes. Se Caroline saborear apenas um "sorvetão" por dia, e se considerarmos que a ordem das bolas não importa, ela terá experimentado todos os possíveis "sorvetões" em:

(A) 15 dias (B) 30 dias
(C) 90 dias (D) 105 dias
(E) 110 dias

5) (CEDERJ / 2001) Para disputar a final do campeonato de futebol, um técnico formará seu time de onze jogadores com um goleiro, dois laterais, dois zagueiros, dois atacantes e quatro no meio-campo. Sabe-se que o técnico conta com um grupo de vinte e dois jogadores especializados em suas respectivas posições, sendo: dois goleiros, quatro laterais, quatro zagueiros, quatro atacantes e oito para o meio-campo. O número de maneiras distintas que esse técnico, respeitando a especialidade de cada jogador, poderá formar seu time é:

(A) 1024
(B) 5806080
(C) 5670
(D) 30240
(E) 32

6) (CEDERJ / 2002) Em uma cidade, o número de cada linha telefônica é formado por oito algarismos, sendo que os algarismos zero e nove não figuram dentre as quatro primeiras posições. O primeiro algarismo do número é dois, quando o segundo algarismo é três ou oito, e o primeiro algarismo é três nos demais casos. A maior quantidade possível de linhas telefônicas para essa cidade é:

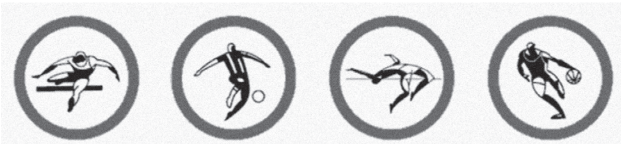
(A) $8^3 \times 10^4$
(B) $9 \times 8^2 \times 10^4$
(C) $14 \times 8^2 \times 10^4$
(D) $8^2 \times 10^5$
(E) $2 \times 8^3 \times 10^4$

7) (CEDERJ / 2002) Determine quantos números de quatro algarismos distintos, escolhidos de 1 a 9, podem ser formados, respeitando-se, para cada número, a seguinte condição: se o algarismo 1 pertencer ao número, então o algarismo 9 não pode pertencer a esse número.

8) (FAETEC / 2005) Numa comunidade, foram recrutadas 25 pessoas para o combate à dengue. Essas pessoas vão trabalhar em duplas, para visitar as residências. O número máximo de duplas diferentes é:

(A) 52
(B) 104
(C) 300
(D) 750

9) (UERJ / 2007) Sete diferentes figuras foram criadas para ilustrar, em grupos de quatro, o Manual do Candidato do Vestibular Estadual 2007. Um desses grupos está apresentado a seguir.



Considere que cada grupo de quatro figuras que poderia ser formado é distinto de outro somente quando pelo menos uma de suas figuras for diferente. Nesse caso, o número total de grupos distintos entre si que poderiam ser formados para ilustrar o Manual é igual a:

(A) 24
(B) 35
(C) 70
(D) 140

GABARITO

1) 5^{10}
2) 2^n
3) 60
4) 460800
5) 3612 e 1806
6) a) 8! = 40320 b) $8!^2$
7) 612
8) 2401 e 840
9) 260
10) 1658775 e 1214400
11) 175760000
12) 43200
13) 3168
14) 209
15) 48
16) a) 40320 b) 8640 c) 1152 d) 720 e) 4320 f) 720 g) 9360 h) 6720
17) n!
18) 30240
19) 7200
20) 756756
21) 126126
22) 10395
23) a) 81^o b) 46721 c) 2
24) m!(r+1)!
25) a) 720 b) 30 c) 2
26) 90720
27) C_n^p
28) 70
29) a) 3 b) 36 c) 100 d) 4 e) 18
30) C_n^m
31) 12960
32) a) C_{n-1}^{p-1} b) C_{n-1}^{p} c) C_{n-2}^{p-2} d) $2C_{n-1}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2} = C_n^p - C_{n-2}^p$ e) $2C_{n-2}^{p-1}$
33) a) 201376 b) 107520 c) 24192 d) 10752 e) 224 f) 1344 g) 4080 h) 208 i) 16 j) 4
34) a) n! b) $\frac{(n+1)!n}{2}$
35) 1085

36) 126

37) $\dfrac{(m+h)!}{m!h!}$

38) a) 28 b) 7

39) 2880

40) 72

41) 15

42) 84

43) 10626

Gabarito

Exercícios de Vestibular

1) menor (280)

2) D

3) A

4) D

5) D

6) A

7) 2520

8) C

9) B

6

Probabilidade

Em palavras simples, é um número que expressa a chance de alguma coisa acontecer.

O termo experimento significa fazer ou observar alguma coisa sob certas condições. Um experimento é dito determinístico quando fornece sempre os mesmos resultados, desde que repetido em condições semelhantes. Por exemplo, se observarmos o número de jogadores com que se começa uma partida oficial de futebol, o resultado é sempre 11. Ao contrário, se um experimento é realizado nas mesmas condições e, mesmo assim, seus resultados não podem ser preditos, dizemos que esse experimento é aleatório. Nesses casos, justamente por não podermos dizer antecipadamente qual será o resultado do experimento, trabalhamos simultaneamente com duas informações:

- o conjunto de todos os possíveis resultados do experimento, o chamado espaço amostral;
- a chance que cada um desses resultados tem de acontecer, denominada probabilidade.

Exemplo 1

Uma urna contém 5 bolas numeradas de 6 a 10. Uma bola será retirada ao acaso.

Espaço Amostral: {6,7,8,9,10}

ATENÇÃO: o espaço amostral é o conjunto e não a quantidade de elementos do conjunto. Não diga que o espaço amostral é 5.

Note, por exemplo, que 7 é uma possibilidade e que essa possibilidade tem probabilidade igual a $\frac{1}{5}$.

Exemplo 2

Na sala estão João, José e Pedro. Um deles deve ser escolhido para ir à cozinha.

Espaço Amostral: {João,José,Pedro}

Note que José é uma possibilidade e que essa possibilidade tem probabilidade igual a $\frac{1}{3}$.

Exemplo 3

Uma moeda será lançada 2 vezes.

Espaço Amostral: {(cara,cara),(cara,coroa),(coroa,cara),(coroa,coroa)}

Note que (coroa,coroa) é uma possibilidade cuja probabilidade vale $\frac{1}{4}$.

A probabilidade é a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis.

A probabilidade, portanto, tem que ser um número racional com valor mínimo 0 e valor máximo 1.

CUIDADO: não confunda problemas de probabilidade com problemas combinatórios.

É fácil fazer a distinção.

Problemas de Análise Combinatória

- em geral, há na pergunta a expressão "de quantas maneiras", ou "de quantos modos", ou ainda, "de quantas formas";
- a resposta SEMPRE será um número inteiro, já que não é possível fazer-se algo de 3 formas e meia.

Problemas de Probabilidade

- em geral, há na pergunta a expressão "qual a probabilidade", ou "qual a chance";
- a resposta SEMPRE será 0, 1 ou um número fracionário entre eles;
- a probabilidade será 0 quando for impossível acontecer o evento;
- a probabilidade será 1 quando o evento sempre acontecer.

Exemplo 4

Um dado comum será lançado 2 vezes.

Espaço Amostral:

{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)}

Note que qualquer das 36 possibilidades listadas tem probabilidade igual a $\frac{1}{36}$

Ainda com relação ao exemplo 4, vamos responder às seguintes perguntas:

1ª Pergunta

Qual a probabilidade de que se obtenha 3 no 1º lançamento e 5 no 2º lançamento?

Casos favoráveis: (3,5)

Casos possíveis: Todo o espaço amostral

Probabilidade = $\frac{1}{36}$

2ª Pergunta

Qual a probabilidade de que se obtenha 5 no 1º lançamento e 3 no 2º lançamento?

Casos favoráveis: (5,3)

Casos possíveis: Todo o espaço amostral

Probabilidade = $\frac{1}{36}$

3ª Pergunta

Qual a probabilidade de que se obtenham, nesses lançamentos, os números 3 e 5?

Casos favoráveis: (3,5),(5,3)

Casos possíveis: Todo o espaço amostral

Probabilidade = $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

Quem começa a estudar probabilidade, frequentemente pensa que (3,5) é o mesmo que (5,3). Isso não é verdade, como podemos observar na resposta dada à 3ª pergunta.

A possibilidade de permutar os resultados aumenta a probabilidade.

Nota

A confusão entre problemas de combinatória e problemas de probabilidade acontece porque muitas vezes utilizamos a análise combinatória para calcular os valores do numerador e do denominador. No exemplo 4, o denominador poderia ser calculado através do seguinte procedimento combinatório:

• ao lançar-se o dado pela 1ª vez, podem ser obtidos 6 resultados diferentes;

• ao lançar-se o dado pela 2ª vez, novamente podem ser obtidos 6 resultados diferentes.

TOTAL = 6 x 6 = 36

Exemplo 5

Uma prova tem 5 questões de múltipla escolha. Cada questão tem 4 alternativas (A, B, C e D) e apenas uma resposta correta. Uma pessoa marca as respostas das 5 questões aleatoriamente, ou seja, no "chute".

a) Qual a probabilidade de que essa pessoa acerte APENAS a 1ª questão?

Nem todos percebem sozinhos que implicitamente o problema nos "diz" que haverá erro nas 4 últimas questões. Vamos, então, resolver esse problema questão a questão.

Esqueça, por enquanto, as outras 4 questões e pense somente na 1ª questão.

Pergunta: qual a probabilidade de que essa pessoa acerte a 1ª questão?

Resposta: como há quatro alternativas na questão e apenas uma delas é a certa, há uma chance em quatro (1/4) de se acertar a 1ª questão (aliás, a probabilidade de acerto será a mesma para qualquer outra questão).

Agora pense somente na 2ª questão.

Pergunta: qual a probabilidade de que essa pessoa erre a 2ª questão?

Resposta: como há quatro alternativas na questão e três delas estão erradas, há três chances em quatro (3/4) de se errar a 2ª questão (aliás, a probabilidade de erro será a mesma para qualquer outra questão).

A pessoa não acertará as questões 3, 4 e 5. Portanto, o mesmo acontecerá nessas questões.

Assim, a probabilidade de que essa pessoa acerte apenas a 1ª questão é:

$$\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{1024}$$

Nota

Muitos alunos se perguntam se as probabilidades devem ser multiplicadas (como no cálculo que acabamos de fazer) ou somadas. A resposta é: depende!

No cálculo feito acima, queremos que a pessoa

(acerte a 1º questão) e (erre a 2ª questão) e (erre a 3ª questão) e (erre a 4ª questão) e (erre a 5ª questão).

Portanto, todas as probabilidades devem ser multiplicadas. Veremos, no item abaixo, um exemplo em que se deve somar.

b) Qual a probabilidade de que essa pessoa acerte APENAS uma das 5 questões?

A comparação entre os itens (a) e (b) é de extrema importância. É preciso que o estudante de probabilidade entenda que o item (b) engloba todas as 5 possibilidades existentes na letra (a), ou seja:

- acertar apenas a 1ª questão, cuja probabilidade é $\frac{81}{1024}$
- acertar apenas a 2ª questão, cuja probabilidade é $\frac{81}{1024}$
- acertar apenas a 3ª questão, cuja probabilidade é $\frac{81}{1024}$
- acertar apenas a 4ª questão, cuja probabilidade é $\frac{81}{1024}$
- acertar apenas a 5ª questão, cuja probabilidade é $\frac{81}{1024}$

Portanto, a probabilidade de que essa pessoa acerte apenas uma das 5 questões é:

$$\frac{81}{1024}+\frac{81}{1024}+\frac{81}{1024}+\frac{81}{1024}+\frac{81}{1024}=5\cdot\frac{81}{1024}=\frac{405}{1024}$$

Nota

Como vimos, o item (b) será satisfeito em qualquer dos seguintes casos:

• acertar apenas a 1ª questão;

• acertar apenas a 2ª questão;

• acertar apenas a 3ª questão;

• acertar apenas a 4ª questão;

• acertar apenas a 5ª questão.

Portanto, é IMPOSSÍVEL que a tal pessoa:

(acerte APENAS a 1ª questão) e (acerte APENAS a 2ª questão) e (acerte APENAS a 3ª questão) e (acerte APENAS a 4ª questão) e (acerte APENAS a 5ª questão).

Na verdade, o que precisa acontecer para que esse indivíduo acerte APENAS uma das 5 questões é que ela:

(acerte APENAS a 1ª questão) ou (acerte APENAS a 2ª questão) ou (acerte APENAS a 3ª questão) ou (acerte APENAS a 4ª questão) ou (acerte APENAS a 5ª questão).

Portanto, todas as probabilidades devem ser somadas.

c) Qual a probabilidade de que essa pessoa acerte EXATAMENTE 2 questões?

Algo que é preciso diferenciar: uma coisa são as possibilidades. Outra, as probabilidades. Para resolver este item, vamos inicialmente listar as possibilidades:

acertar a 1ª questão e a 2ª questão.
acertar a 1ª questão e a 3ª questão.
acertar a 1ª questão e a 4ª questão.
acertar a 1ª questão e a 5ª questão.
acertar a 2ª questão e a 3ª questão.
acertar a 2ª questão e a 4ª questão.

acertar a 2ª questão e a 5ª questão.

acertar a 3ª questão e a 4ª questão.

acertar a 3ª questão e a 5ª questão.

acertar a 4ª questão e a 5ª questão.

Note que existem, ao todo, 10 possibilidades de se acertar exatamente 2 questões em 5.

Em seguida, vamos calcular as probabilidades de cada uma das 10 possibilidades. Para fazer o cálculo da probabilidade, não devemos esquecer que quem acerta exatamente duas questões erra as outras três.

Probabilidade de acertar a 1ª questão e a 2ª questão:

$$\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{1024}$$

Probabilidade de acertar a 1ª questão e a 3ª questão:

$$\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{1024}$$

Probabilidade de acertar a 1ª questão e a 4ª questão:

$$\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{1024}$$

Probabilidade de acertar a 1ª questão e a 5ª questão:

$$\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{1024}$$

Probabilidade de acertar a 2ª questão e a 3ª questão:

$$\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{1024}$$

Probabilidade de acertar a 2ª questão e a 4ª questão:

$$\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{1024}$$

Probabilidade de acertar a 2ª questão e a 5ª questão:

$$\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{1024}$$

Probabilidade de acertar a 3ª questão e a 4ª questão:

$$\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{1024}$$

Probabilidade de acertar a 3ª questão e a 5ª questão:

$$\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{1024}$$

Probabilidade de acertar a 4ª questão e a 5ª questão:

$$\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{1024}$$

Finalmente, para que esse indivíduo acerte EXATAMENTE duas das 5 questões, é preciso que ele:

(acerte apenas a 1ª e a 2ª questão) ou

(acerte apenas a 1ª e a 3ª questão) ou

(acerte apenas a 1ª e a 4ª questão) ou

(acerte apenas a 1ª e a 5ª questão) ou

(acerte apenas a 2ª e a 3ª questão) ou

(acerte apenas a 2ª e a 4ª questão) ou

(acerte apenas a 2ª e a 5ª questão) ou

(acerte apenas a 3ª e a 4ª questão) ou

(acerte apenas a 3ª e a 5ª questão) ou

(acerte apenas a 4ª e a 5ª questão)

Portanto, todas as probabilidades devem ser somadas. Como todas as probabilidades a serem somadas são iguais, podemos substituir essa enorme soma por uma simples multiplicação:

$$10\cdot\frac{27}{1024}=\frac{270}{1024}=\frac{135}{512}$$

Agora que o item (c) está resolvido, vamos a outra discussão. Vimos que o número de possibilidades de se acertar exatamente 2 questões em 5 é igual a 10. Era possível saber isto sem ter que listar todas essas possibilidades?

A resposta é SIM.

Vamos representar os acertos pela letra A e os erros pela letra E. No nosso problema, há 5 questões e queremos que haja exatamente 2 acertos (consequentemente, 3 erros). Assim:

acertar a 1ª questão e a 2ª questão pode ser representado por AAEEE.

acertar a 1ª questão e a 3ª questão pode ser representado por AEAEE.

acertar a 1ª questão e a 4ª questão pode ser representado por AEEAE.

acertar a 1ª questão e a 5ª questão pode ser representado por AEEEA.

acertar a 2ª questão e a 3ª questão pode ser representado por EAAEE.

acertar a 2ª questão e a 4ª questão pode ser representado por EAEAE.

acertar a 2ª questão e a 5ª questão pode ser representado por EAEEA.

acertar a 3ª questão e a 4ª questão pode ser representado por EEAAE.

acertar a 3ª questão e a 5ª questão pode ser representado por EEAEA.

acertar a 4ª questão e a 5ª questão pode ser representado por EEEAA.

É interessante perceber que cada anagrama de AAEEE (ao todo, são 10 anagramas) corresponde a uma das possibilidades de se acertarem 2 questões em 5. Na realidade, não precisamos saber quais são esses anagramas. É preciso saber quantos são.

No capítulo de Análise Combinatória, aprendemos a calcular a quantidade de anagramas, utilizando Permutação com Repetição.

Quantidade de Anagramas de AAEEE = $\dfrac{5!}{2!\cdot 3!}=\dfrac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\dfrac{5\cdot 4}{2\cdot 1}=10$

d) Qual a probabilidade de que essa pessoa acerte PELO MENOS 2 questões?

Esse problema junta quatro problemas do mesmo tipo que o apresentado no item (c). Mais uma vez, começaremos listando as possibilidades para só depois calcular as probabilidades. A pessoa deverá acertar pelo menos duas questões. Isso pode acontecer de uma das seguintes formas:

- acertando exatamente 2 questões, ou
- acertando exatamente 3 questões, ou
- acertando exatamente 4 questões, ou
- acertando todas as 5 questões.

Deve-se calcular a probabilidade de ocorrer cada uma dessas quatro possibilidades. Essas probabilidades deverão, em seguida, ser somadas.

Probabilidade de acertar exatamente 2 questões:

$$\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3=10\cdot\left(\frac{27}{1024}\right)=\frac{270}{1024}$$

Probabilidade de acertar exatamente 3 questões:

$$\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2=10\cdot\left(\frac{9}{1024}\right)=\frac{90}{1024}$$

Probabilidade de acertar exatamente 4 questões:

$$\frac{5!}{4!\cdot 1!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^1=5\cdot\left(\frac{3}{1024}\right)=\frac{15}{1024}$$

Probabilidade de acertar todas as 5 questões:

$$\frac{5!}{5!\cdot 0!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^5\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^0=5\cdot\left(\frac{1}{1024}\right)=\frac{5}{1024}$$

Probabilidade de acertar PELO MENOS 2 questões:

$$\frac{270}{1024}+\frac{90}{1024}+\frac{15}{1024}+\frac{5}{1024}=\frac{380}{1024}$$

Exemplo 6

Um casal deseja ter dois filhos. Qual a probabilidade de que PELO MENOS um dos filhos seja uma menina?

Vamos representar por SIM o nascimento de uma menina, e por NÃO o nascimento de um menino. Dessa forma, a lista de possibilidades é:

SIM SIM
SIM NÃO
NÃO SIM
NÃO NÃO

A probabilidade de ocorrer um SIM é a mesma de ocorrer um NÃO e vale 1/2. Assim, podemos calcular a probabilidade de cada uma das possibilidades:

1ª Possibilidade: SIM SIM: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

Não se esqueça de que queremos que o primeiro nascimento seja de uma menina e o segundo nascimento também. Por isso, as probabilidades são multiplicadas. O mesmo se aplicará para as outras possibilidades.

2ª Possibilidade: SIM NÃO: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

3ª Possibilidade: NÃO SIM: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

4ª Possibilidade: NÃO NÃO: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

A probabilidade de que PELO MENOS um dos filhos seja uma menina será a soma das probabilidades relativas às 3 primeiras possibilidades, ou seja:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

Mais uma vez, é necessário perceber que não é possível que ocorra a (1ª Possibilidade) e a (2ª Possibilidade) e a (3ª Possibilidade), ou seja, todas ao mesmo tempo. Por esse motivo, as probabilidades não são multiplicadas. Na verdade, é necessário que aconteça a (1ª Possibilidade) ou a (2ª Possibilidade) ou a (3ª Possibilidade), ou seja, que ocorra uma dentre as três. Por tal motivo, as probabilidades devem ser somadas.

Há outra maneira bem interessante de resolver este problema. Das 4 possibilidades apresentadas, apenas a 4ª é indesejada. Para calcular a probabilidade pedida:

- calcula-se a probabilidade de ocorrer essa 4a possibilidade;
- subtrai-se essa probabilidade de 1 (que é a probabilidade TOTAL).

A probabilidade de ocorrer NÃO NÃO é $\frac{1}{4}$.

Probabilidade de que pelo menos um dos filhos seja uma menina:

$$1-\frac{1}{4}=\frac{4}{4}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

Exemplo 7

Uma pesquisa foi feita com 50 adultos, dos quais 64% eram mulheres, para saber se eram ou não casados. A pesquisa constatou que 66% dos entrevistados eram casados e que, entre as mulheres entrevistadas, 75% eram casadas. Sorteando-se, ao acaso, um dos entrevistados:

a) Qual a probabilidade de que essa pessoa seja um homem não casado?

É provável que você esteja com aquela sensação desagradável de quem não sabe por onde começar. Isso é natural e acontece porque os dados não estão tabulados de forma lógica. Vamos então, antes de responder à pergunta, tabular os dados.

É muito importante notar que os dados podem ser classificados de 2 maneiras diferentes;

- quanto ao sexo (masculino ou feminino);
- quanto ao estado civil (casado ou não casado).

Nota

Uma pessoa que não seja casada não será necessariamente solteira. Pode ser, por exemplo, viúva. Não é correto dizer que o contrário de CASADO é SOLTEIRO. O correto é dizer que o contrário de CASADO é NÃO CASADO.

Não tomamos esse cuidado ao classificar quanto ao sexo porque não há uma 3ª opção. Portanto, uma opção exclui a outra. Nesse caso, dizemos que as duas (masculino e feminino) são "opções auto excludentes".

Para tabular os dados, é habitual organizá-los em uma tabela na qual as opções referentes à primeira classificação virão em colunas, ao passo que as opções referentes á segunda classificação virão em linhas. Essa tabela é conhecida como TABELA DE DUPLA ENTRADA.

No nosso problema, colocaremos as opções relativas ao sexo em colunas e as opções referentes ao estado civil em linhas.

	Masculino	Feminino	Total
Casado			
Não casado			
Total			

Vamos preencher, passo a passo, a tabela.

O total de pessoas entrevistadas é 50.

	Masculino	Feminino	Total
Casado			
Não casado			
Total			50

Dos 50 entrevistados, 64% são mulheres. Então, a quantidade de mulheres entrevistadas é

$$\frac{64}{100}\cdot 50 = 32$$

	Masculino	Feminino	Total
Casado			
Não casado			
Total		32	50

Se existem 32 mulheres entre os entrevistados, a quantidade de homens é 18.

	Masculino	Feminino	Total
Casado			
Não casado			
Total	18	32	50

Dos 50 entrevistados, 66% são pessoas casadas. Portanto, a quantidade de pessoas casadas é

$$\frac{66}{100}\cdot 50 = 33$$

	Masculino	Feminino	Total
Casado			33
Não casado			
Total	18	32	50

Se existem 33 pessoas casadas entre os entrevistados, a quantidade de não casados é 17.

	Masculino	Feminino	Total
Casado			33
Não casado			17
Total	18	32	50

Entre as 32 mulheres entrevistadas, 75% são casadas. Logo, a quantidade de mulheres casadas é

$$\frac{75}{100}\cdot 32 = 24$$

	Masculino	Feminino	Total
Casado		24	33
Não casado			17
Total	18	32	50

Se, das 32 mulheres entrevistadas, 24 são casadas, existem 8 mulheres não casadas entre os entrevistados.

	Masculino	Feminino	Total
Casado		24	33
Não casado		8	17
Total	18	32	50

Se, dos 33 entrevistados casados, 24 são mulheres, os outros 9 são homens.

	Masculino	Feminino	Total
Casado	9	24	33
Não casado		8	17
Total	18	32	50

Se, dos 18 homens entrevistados, 9 são casados, os outros 9 são não casados.

	Masculino	Feminino	Total
Casado	9	24	33
Não casado	9	8	17
Total	18	32	50

Finalmente, os dados encontram-se tabulados. Podemos agora responder à pergunta.

Sorteando-se, ao acaso, um dos entrevistados, qual a probabilidade de que essa pessoa seja um homem não casado?

Resposta: Há 9 homens não casados em um total de 50 pessoas. Logo, a probabilidade é 9/50.

b) Qual a probabilidade de que essa pessoa seja uma mulher?

Resposta: Há 32 mulheres em um total de 50 pessoas. Logo, a probabilidade é 32/50.

c) Qual a probabilidade de que essa pessoa não seja casada?

Resposta: Há 17 pessoas não casadas em um total de 50 pessoas. Logo, a probabilidade é 17/50.

d) Qual a probabilidade de que essa pessoa seja casada sabendo-se que é uma mulher?

Este item apresenta uma novidade: a expressão "sabendo-se que é uma mulher". Tal expressão não pode ser negligenciada, pois ela indica que o espaço amostral (ver definição no início do capítulo) deixou de ser o conjunto de PESSOAS ENTREVISTADAS e passou a ser o conjunto de MULHERES ENTREVISTADAS. Isso significa dizer que a pessoa será sorteada somente entre as mulheres.

Como, nesses casos, a probabilidade está sujeita a uma condição, dizemos que é uma PROBABILIDADE CONDICIONADA.

Podemos agora responder à pergunta.

Resposta: Há 24 mulheres casadas em um total de 32 mulheres. Logo, a probabilidade é 24/32.

Exemplo 8

Uma urna tem 6 bolas brancas e 3 bolas pretas. Três bolas serão retiradas sucessivamente e sem reposição. Qual a probabilidade de que exatamente duas delas sejam brancas?

Listemos as possibilidades:

• possibilidade 1: (1ª branca) e (2ª branca) e (3ª preta) cuja probabilidade é

$$\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}=\frac{5}{28}$$

• possibilidade 2: (1ª branca) e (2ª preta) e (3ª branca) cuja probabilidade é

$$\frac{6}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}=\frac{5}{28}$$

• possibilidade 3: (1ª preta) e (2ª branca) e (3ª branca) cuja probabilidade é

$$\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{5}{7}=\frac{5}{28}$$

Para que exatamente duas delas sejam brancas, é preciso que ocorra a possibilidade 1 ou a possibilidade 2 ou a possibilidade 3. Logo, devemos somar as probabilidades.

Probabilidade de que exatamente duas bolas sejam brancas:

$$\frac{5}{28}+\frac{5}{28}+\frac{5}{28}=\frac{15}{28}$$

Nota

O que há de especial no problema 8 é que, cada vez que uma bola é retirada, a probabilidade de sorteio da próxima bola sofre alteração. Perceba que os denominadores vão se reduzindo, pois as bolas vão sendo sacadas da urna, mas não são repostas. Da mesma forma, a probabilidade de se retirar uma bola branca pela 1ª vez é diferente da probabilidade de se retirar uma bola branca pela 2ª vez. Essa modificação nas probabilidades NÃO ACONTECERÁ caso a retirada das bolas seja feita com REPOSIÇÃO.

Exercícios resolvidos

1) (CEDERJ/2008.1) Uma caixa contém quatro bolas azuis com diâmetros medindo 1 cm, 2 cm, 4 cm e 5 cm e três bolas verdes com diâmetros medindo 2 cm, 4 cm e 7 cm. Escolhe-se, aleatoriamente, uma bola da caixa.

a) Determine a probabilidade de a bola escolhida ser azul.

b) Qual a probabilidade de a bola escolhida ser verde ou ter diâmetro maior que 3 cm ?

Solução:

a) Casos favoráveis: 4 bolas azuis

Casos possíveis: 7 bolas (que é o total)

Portanto, a probabilidade é 4/7

b) Casos favoráveis:

- 2 bolas são verdes e têm o diâmetro maior do que 3 cm;

- 1 bola tem diâmetro menor do que 3 cm, mas é verde e, portanto, também serve;

- 2 bolas são azuis, mas têm o diâmetro maior do que 3 cm. Essas também nos servem.

Ao todo, temos 5 casos favoráveis em um total de 7 bolas.

A probabilidade procurada é 5/7.

2) (CEDERJ/2008.2) Uma pesquisa revelou os seguintes dados a respeito dos estudantes matriculados em um curso de Licenciatura em Matemática a Distância: 4/5 dos estudantes do sexo masculino trabalham e 3/10 dos estudantes do sexo feminino não trabalham. Sabendo que 3/5 dos estudantes matriculados no curso são do sexo feminino, determine a probabilidade de que um estudante escolhido ao acaso dentre os que trabalham seja do sexo masculino.

Solução:

Suponha, para facilitar, que a classe tenha 100 alunos.

Sabe-se que 3/5 dos integrantes da classe são do sexo feminino, o que corresponde a 60 mulheres. Há, portanto, na classe, 60 mulheres e 40 homens.

Sabe-se que 4/5 dos homens trabalham. Logo, 32 homens trabalham e 8 homens não trabalham.

Sabe-se que 3/10 das mulheres não trabalham. Assim, 18 mulheres não trabalham e 42 mulheres trabalham.

Para calcular a probabilidade requerida, verifiquemos que:

1º) entre homens e mulheres, há 74 pessoas que trabalham (32 homens + 42 mulheres);

2º) entre aqueles que trabalham, há 32 homens.

Assim, a probabilidade procurada é 32/74 = 16/37

3) (CEDERJ/2009.1) Uma loja de roupas colocou seus artigos em promoção dentro de um cesto. Após alguns dias de promoção, o cesto continha 5 blusas vermelhas, 7 blusas brancas e 8 blusas amarelas.

a) Considere, nessas condições, que uma blusa do cesto seja escolhida ao acaso. Determine a probabilidade de que a blusa escolhida seja branca.

b) Suponha que duas blusas do cesto sejam escolhidas ao acaso. Determine a probabilidade de que as duas sejam da mesma cor.

Solução:

a) Casos favoráveis: 7 blusas brancas.

Casos possíveis: 20 blusas, ao todo (5 vermelhas, 7 brancas e 8 amarelas)

Portanto, a probabilidade é 7/20

b) ATENÇÃO: NÃO TENTE FAZER QUESTÕES COMO ESSA EM UMA TACADA SÓ.

É prudente dividir em possibilidades!

1ª possibilidade: ambas serem vermelhas.

Probabilidade de a primeira blusa sorteada ser vermelha: 5/20

Probabilidade de a segunda blusa sorteada ser vermelha: 4/19

Probabilidade de ambas serem vermelhas: 5/20 . 4/19 = 20/380

Nota: quando você tiver que calcular mais de uma possibilidade, não simplifique denominadores, pois, logo depois, você precisará igualá-los para somar.

2^a possibilidade: ambas serem brancas.

Probabilidade de a primeira blusa sorteada ser branca: 7/20 (cálculo feito na letra a)

Probabilidade de a segunda blusa sorteada ser branca: 6/19

Probabilidade de ambas serem brancas: 7/20 . 6/19 = 42/380

3^a possibilidade: ambas serem amarelas.

Probabilidade de a primeira blusa sorteada ser amarela: 8/20

Probabilidade de a segunda blusa sorteada ser amarela: 7/19

Probabilidade de ambas serem brancas: 8/20 . 7/19 = 56/380

Probabilidade de que as duas sejam da mesma cor: 20/380 + 42/380 + 56/380 = 118/380 = 59/190

Exercícios de fixação

1) Um juiz de futebol possui três cartões no bolso. Um é todo amarelo, outro é todo vermelho e o terceiro é vermelho de um lado e amarelo do outro. Num dado lance, o juiz retira, ao acaso, um cartão do bolso e mostra ao jogador. Qual a probabilidade do juiz ver a face vermelha e o jogador ver a face amarela ?

2) Duas cartas são extraídas simultaneamente, ao acaso, de um baralho comum de 52 cartas. Qual é a probabilidade de que pelo menos uma seja de ouros?

3) Um casal possui dois filhos. Se um deles é menino, qual é a probabilidade de o outro filho ser uma menina?

4) Uma caixa contém onze bolas numeradas de 1 a 11. Retirando-se uma delas ao acaso, observa-se que a mesma traz um número ímpar. Determine a probabilidade de esse número ser menor que 5.

5) Numa maratona estavam inscritos 20 corredores, dentre os quais os amigos João, Carlos e Pedro. Sabendo-se que todos os inscritos correram, completaram a prova e tinham as mesmas oportunidades, de vitória individualmente, qual era a probabilidade de os três amigos subirem ao pódio juntos?

6) Um dado não viciado é lançado 5 vezes sobre uma mesa. Qual é a probabilidade de sair o "6" somente nas três primeiras vezes?

7) Um fiscal deverá visitar aleatoriamente uma dentre cinco lojas de um shopping-center. Qual é a probabilidade de que uma determinada dessas lojas não seja a visitada?

8) De um torneio de voleibol participam cinco clubes sendo que quatro deles têm probabilidades iguais de vitória, enquanto o outro é considerado favorito com chance de vitória igual ao dobro dos demais. Qual a probabilidade de que o favorito não ganhe este torneio?

9) Em um saco existem, em grande quantidade, pares de meias (arrumadas juntas) de 5 cores diferentes. Qual é o menor número de pares de meias que se deve retirar sem olhar para garantir a obtenção de dois pares de meias da mesma cor?

10) Uma urna tem 3 bolas vermelhas e 5 azuis. Outra urna tem 2 bolas vermelhas e 3 azuis. Passa-se uma bola da primeira urna para a segunda urna e retira-se então uma bola da segunda urna. Qual a probabilidade desta bola ser vermelha ?

11) Jogam-se dois dados honestos. Qual é a probabilidade de se obter resultados:

a) cuja soma é não superior a 7?

b) cujo produto é par?

12) Uma urna tem 7 bolas pretas e 3 brancas. Retirando simultaneamente 4 bolas, qual a probabilidade de que:

a) as três primeiras sejam pretas e a última seja branca?

b) apenas duas sejam brancas?

13) Admitindo que o aniversário de uma pessoa possa cair com igual probabilidade em qualquer dos dias do ano, num conjunto de 40 pessoas, qual é a probabilidade de que duas delas tenham nascido no mesmo dia do ano?

14) Uma Loteria consiste na extração semanal de um bilhete dentre 1000 bilhetes numerados de 0001 até 1000. Jaime compra 10 bilhetes para uma extração da referida Loteria, enquanto Luiz compra um bilhete, da mesma loteria, só que para 10 extrações diferentes. Ambos gastam a mesma quantidade de dinheiro. Qual deles tem maior probabilidade de ganhar o jogo?

15) Numa turma de 32 alunos, há 18 homens e 12 alunos loiros dos quais 6 são mulheres. Escolhendo um aluno ao acaso, qual é a probabilidade de ele ser loiro ou mulher?

16) (FGV / 2008) Uma caixa tem 5 bolas azuis e 3 vermelhas. Tirando-se, ao mesmo tempo, duas bolas ao acaso, a probabilidade de que as duas sejam de cores diferentes é:

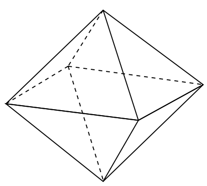
(A) 15/56
(B) 56/59
(C) 15/28
(D) 7/10
(E) 15/64

17) (FGV / 2008) Numa urna são colocadas 5 bolas brancas, além de certa quantidade de bolas azuis e pretas. Retirando-se ao acaso uma bola dessa urna, a probabilidade de essa bola ser preta é ¼, enquanto a probabilidade de ela ser azul é 2/3. Então, o número total de bolas das 3 cores, colocadas nessa urna, é igual a:

(A) 35
(B) 40
(C) 45
(D) 55
(E) 60

18) (CEDERJ / 2007-1) Escolhidas, ao acaso, três arestas de um octaedro regular (poliedro regular com oito faces), a probabilidade de elas pertencerem a mesma face é:

(A) 2/55
(B) 3/55
(C) 6/55
(D) 8/55
(E) 12/55



19) (UERJ / 2008) Um RNA sintético foi formado apenas pelas bases citosina e guanina, dispostas ao acaso, num total de 21 bases. O esquema abaixo mostra o RNA mensageiro, formado a partir da introdução dos códons de iniciação AUG e de terminação UAA nas extremidades do RNA original. Nesse esquema, B representa as bases C ou G.

AUG.BBB.BBB.BBB.BBB.BBB.BBB.BBB.UAA

Sabe-se que:

– os códons correspondentes ao aminoácido arginina são AGA, AGG, CGA, CGC, CGG e CGU;

– o aminoácido metionina correspondente ao códon de iniciação AUG é removido do peptídeo sintetizado pela tradução desse RNA mensageiro.

A probabilidade de que a arginina apareça pelo menos uma vez na estrutura final deste peptídeo é de:

(A) $1-\left(\frac{1}{3}\right)^7$
(B) $\left(\frac{1}{8}\right)^7$
(C) $1-\left(\frac{3}{4}\right)^7$
(D) $\left(\frac{1}{4}\right)^7$

20) (UERJ / 2009) Um pesquisador possui em seu laboratório um recipiente contendo 100 exemplares de *Aedes aegypti*, cada um deles contaminado com apenas um dos tipos de vírus, de acordo com a seguinte tabela:

Tipo	Quantidade de mosquitos
DEN 1	30
DEN 2	60
DEN 3	10

Retirando-se simultaneamente e ao acaso dois mosquitos desse recipiente, a probabilidade de que pelo menos um esteja contaminado com o tipo DEN 3 equivale a:

(A) 8/81
(B) 10/99
(C) 11/100
(D) 21/110

21) (UEZO / 2006) Cem voluntários apresentaram-se para prestar ajuda aos desabrigados em consequência de um terremoto. De acordo com a ordem da chegada, receberam uma senha. O primeiro recebeu o número 1, o segundo, o número 2, e assim por diante, até completar 100. Todas as senhas foram colocadas numa urna. A probabilidade de numa primeira retirada de urna sair um número menor que 21 é:

(A) 15%
(B) 20%
(C) 25%
(D) 30%

22) (UFRJ / 2009) João criou uma senha de 4 algarismos para o segredo de seu cofre. Mais tarde, quando foi abrir o cofre, João percebeu que não lembrava mais qual era a senha, mas sabia que os algarismos eram 1, 3, 8 e 9. Ele, então, resolveu escrever todos os números possíveis formados pelos 4 algarismos e, em seguida, tentar abrir o cofre sorteando ao acaso, um a um, os números de sua lista, sem repetir números já testados.

a) Determine quantos números João escreveu.

b) Calcule a probabilidade de que ele abra o cofre na 12ª tentativa.

23) (FGV / 2006) Três pessoas, A, B e C, disputam um prêmio. Para determinar o ganhador, joga-se um par de dados. A ganha se a soma dos números dos dados for menor que 6, B ganha se a soma for maior que 7, e C ganha se a soma for 6 ou 7.

a) Determine a probabilidade de A ganhar o jogo.

b) Determine a probabilidade de A ganhar o jogo sabendo que C não ganhou.

24) (FGV / 2005) Duas arestas distintas de um cubo são escolhidas ao acaso. A probabilidade de que elas sejam reversas é:

(A) 1/2
(B) 1/3
(C) 2/3
(D) 4/11
(E) 6/11

25) (UFRJ / 2006) Uma caixa contém bombons de nozes e bombons de passas. O número de bombons de nozes é superior ao número de bombons de passas em duas unidades. Se retirarmos, ao acaso, dois bombons dessa caixa, a probabilidade de que ambos sejam de nozes é 2/7.

a) Determine o número total de bombons.

b) Se retirarmos, ao acaso, dois bombons da caixa, determine a probabilidade de que sejam de sabores distintos

26) (FESO / 2005) Escolhidos ao acaso dois vértices de um hexágono, qual é a probabilidade de eles serem adjacentes?

(A) 1/5
(B) 1/3
(C) 2/5
(D) 1/2
(E) 2/3

27) (FESO / 2005) Um dado não-tendencioso é lançado 2 vezes. Qual é a probabilidade de o resultado do segundo lançamento ser maior que o do primeiro?

(A) 1/2
(B) 1/3
(C) 1/5
(D) 5/12
(E) 5/18

28) (BNDES / 2008) A tabela abaixo apresenta as idades, por classes, dos integrantes de uma turma preparatória para um concurso e suas respectivas frequências absolutas acumuladas.

Idades (anos)	Frequência Acumulada
20 – 24	20
24 – 28	52
28 – 32	78
32 – 36	90
36 – 40	100

Uma dessas pessoas será escolhida ao acaso. Qual a probabilidade de que a idade dessa pessoa esteja entre 28 anos e 36 anos, dado que a pessoa escolhida tem 24 anos ou mais?

(A) 11/40
(B) 13/32
(C) 19/40
(D) 19/32
(E) 29/40

29) (PROMINP / 2007) Duas moedas honestas serão jogadas para cima simultaneamente. Pode-se afirmar que a probabilidade:

(A) de o resultado ser duas caras é maior do que a probabilidade de o resultado ser duas coroas.

(B) de o resultado ser duas caras é menor do que a probabilidade de o resultado ser duas coroas.

(C) de o resultado ser uma cara e uma coroa é maior do que a probabilidade de o resultado ser duas caras.

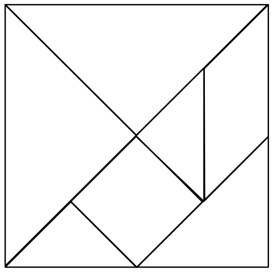
(D) de o resultado ser uma cara e uma coroa é igual a probabilidade de o resultado ser duas caras.

(E) de o resultado ser uma cara e uma coroa é menor do que a probabilidade de o resultado ser duas caras.

30) (PROMINP / 2008) Em uma urna, há cinco bolas distinguíveis somente pela cor. Duas delas são pretas e três, brancas. Um dado comum, ou seja, cúbico, com suas faces numeradas de um a seis, será lançado aleatoriamente. Se o resultado do lançamento for seis, retirar-se-á uma bola da urna. Caso o dado forneça qualquer outro resultado, nenhuma bola será extraída dessa urna. Sabendo-se que os resultados do dado são equiprováveis, qual a probabilidade de que, após o lançamento, uma bola branca NÃO seja retirada da urna?

(A) 5/6
(B) 9/10
(C) 1/15
(D) 23/30
(E) 5/36

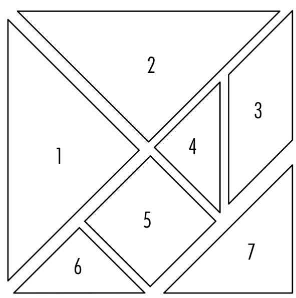
31) (TERMOAÇU / 2008)



A figura acima ilustra um TANGRAN, quebra-cabeças composto por 7 peças que podem ser posicionadas de maneira a formar um quadrado. Suas peças são:

- 2 triângulos grandes idênticos;
- 1 triângulo médio;
- 2 triângulos pequenos idênticos;
- 1 quadrado e
- 1 paralelogramo.

Essas peças foram numeradas de 1 a 7 como ilustrado na figura abaixo.

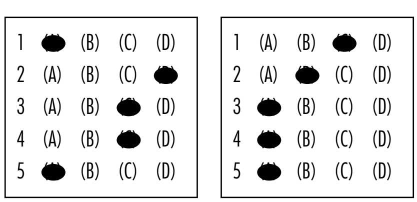


Sorteiam-se simultaneamente, de maneira aleatória, duas dessas peças pelo número. Sabendo-se que todas as peças têm a mesma probabilidade de serem sorteadas, a probabilidade de que a soma das áreas das peças escolhidas seja MAIOR do que a quarta parte da área do Tangran completo é:

(A) 12/21
(B) 11/21
(C) 10/21
(D) 9/21
(E) 8/21

32) (TRANSPETRO / 2008) Um candidato fará uma prova com 5 questões de múltipla escolha. Cada questão possui 4 alternativas sendo apenas uma destas a correta. O candidato marcará apenas uma alternativa em cada questão e não deixará questão em branco.

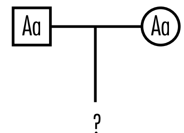
A figura ilustra duas maneiras diferentes de o candidato preencher cartões-respostas dessa prova.



Se o candidato decidir preencher as alternativas dessa prova de forma totalmente aleatória, qual a probabilidade de que ele acerte exatamentivas 4 questões?

(A) 15/1024
(B) 3/1024
(C) 3/512
(D) 3/256
(E) 1/256

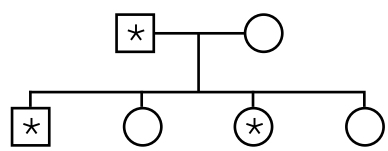
33) (CEDERJ/2008.2) Em certo cromossomo, um loco pode ser ocupado por dois alelos. O alelo A é autossômico dominante e os indivíduos portadores desse alelo são normais. O alelo a é autossômico recessivo e é letal em homozigose, ou seja, os indivíduos aa morrem antes de nascer.



A probabilidade de que o casal representado na figura acima gere um descendente vivo com o genótipo Aa é igual a:

(A) 3/4;
(B) 2/4;
(C) 2/3;
(D) 1/3;
(E) 1/4.

34) (UERJ/1º Exame de 2011) A doença de von Willebrand, que atinge cerca de 3% da população mundial, tem causa hereditária, de natureza autossômica dominante. Essa doença se caracteriza pela diminuição ou disfunção da proteína conhecida como fator von Willebrand, o que provoca quadros de hemorragia. O esquema abaixo mostra o heredograma de uma família que registra alguns casos dessa doença.



⋆ presença da doença

Admita que os indivíduos 3 e 4 casem com pessoas que não apresentam a doença de Von Willebrand. As probabilidades percentuais de que seus filhos apresentem a doença são, respectivamente, de:

(A) 50 e 0
(B) 25 e 25
(C) 70 e 30
(D) 100 e 50

Gabarito

1) 1/6
2) 15/34
3) 2/3
4) 1/3
5) 1/1140
6) 5/1296
7) 4/5
8) 2/3
9) 6 pares
10) 19/48
11) a) 7/12 b) 3/4
12) a) 1/8 b) 3/10
13) Cerca de 90%.
14) Jaime com 1% de "chance" contra 0,99% de Luiz.
15) 5/8
16) C
17) E
18) A
19) C
20) D
21) B
22) a) 24 b) 1/24
23) a) 10/36 b) 2/5
24) D
25) a) 22, sendo 10 de passas. b) 20/77
26) C
27) D
28) C
29) C
30) B
31) B
32) A
33) D
34) A

7

Gráficos

Gráficos são ferramentas de apresentação de dados. Seu objetivo é proporcionar ao leitor uma exibição simples, tornando rápida a visualização desses dados, a fim de que se possam perceber tendências e/ou relações. Em resumo, gráficos precisam ter simplicidade e clareza.

Os tipos mais populares de gráficos são:

- Gráfico de Segmentos (também chamado Gráfico de Linhas);
- Gráfico de Barras ou de Colunas;
- Gráfico de Setores e
- Gráfico Cartográfico (representação gráfica que contém figuras).

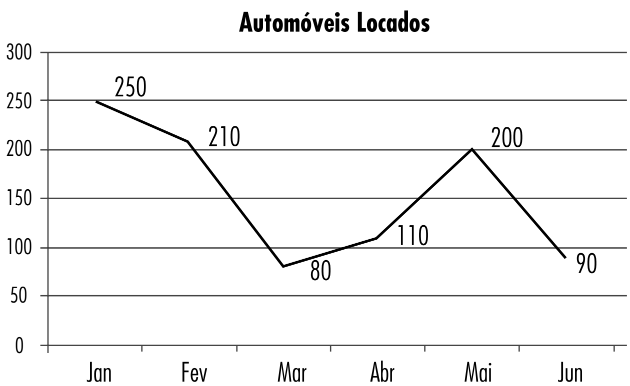
Neste capítulo, faremos análises de gráficos, extraindo várias informações deles. Daremos preferência aos gráficos do tipo Gráfico de Segmentos.

Gráficos de segmentos

Geralmente são usados para representar a relação entre uma grandeza e o tempo.

Abaixo está apresentado um gráfico de segmentos com as quantidades mensais de carros alugados em uma locadora de veículos nos meses de janeiro a junho.

Mês	Automóveis locados
Jan	250
Fev	210
Mar	80
Abr	110
Mai	200
Jun	90



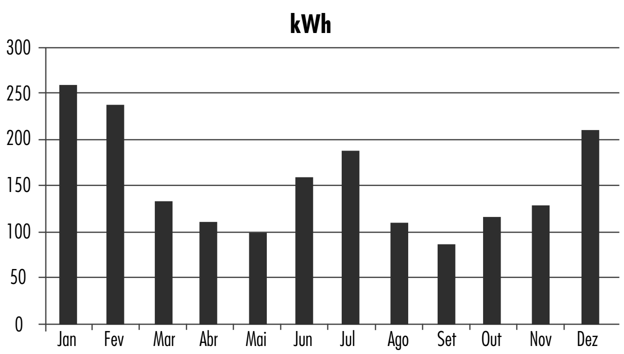
Nesse gráfico, é possível perceber que janeiro foi um mês de forte movimento na locadora (250 locações), mas a quantidade de locações foi caindo rapidamente até março, mês mais fraco (80 locações). A partir daí, houve uma recuperação quase total nos dois meses seguintes, atingindo a marca das 200 locações para, em seguida, sofrer nova queda.

Gráficos de barras ou colunas

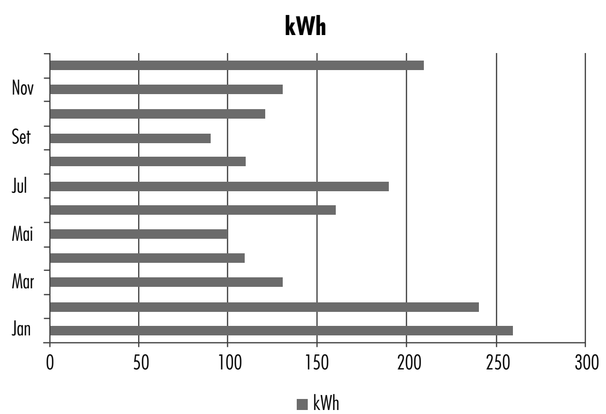
Ambos seguem a mesma ideia, sendo classificados em gráfico de colunas quando na vertical ou de barras quando forem horizontais. São geralmente usados para apresentar séries categóricas ou cronológicas (ou seja, de tempo).

Abaixo, temos um gráfico de colunas que apresenta o consumo de energia elétrica de uma residência no decorrer do ano. Nele, pode-se ver que os maiores consumos ocorreram nos meses de janeiro, fevereiro, junho, julho e dezembro, meses em que as pessoas estão mais em casa por ser período de férias, festas ou carnaval.

Mês	Kwh
Jan	260
Fev	240
Mar	130
Abr	110
Mai	100
Jun	160
Jul	190
Ago	110
Set	90
Out	120
Nov	130
Dez	210

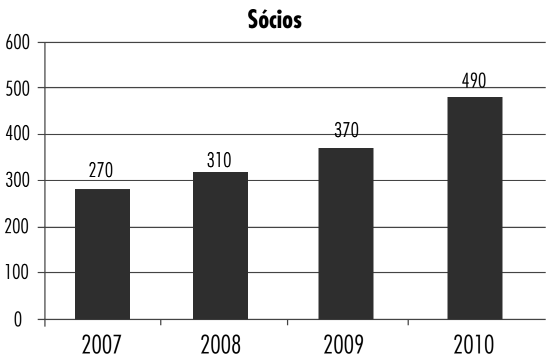


Abaixo temos as mesmas informações na horizontal (gráfico de barras)



O gráfico abaixo apresenta a quantidade de sócios de um clube A nos últimos 4 anos.

Clube A	
Ano	**Sócios**
2007	270
2008	310
2009	370
2010	490



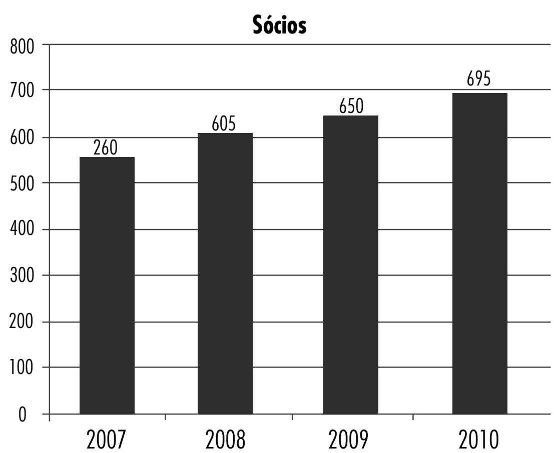
O clube A parece estar fazendo sucesso, pois, não só o número de associados vem aumentando, como esses aumentos vêm sendo cada vez maiores. Vamos entender:

- de 2007 para 2008, houve um aumento de 40 sócios;
- de 2008 para 2009, houve um aumento de 60 sócios e
- de 2009 para 2010, houve um aumento de 120 sócios.

Portanto, a sequência de acréscimos está aumentando: (40, 60, 120). Esse comportamento cria uma expectativa de que o aumento de 2010 para 2011 seja maior do que 120 sócios.

Observe, a seguir, o gráfico do clube B nos últimos 4 anos.

Clube B	
Ano	**Sócios**
2007	560
2008	605
2009	650
2010	695



No clube B, o número de associados vem aumentando a um ritmo constante. Observe:

- de 2007 para 2008, houve um aumento de 45 sócios;
- de 2008 para 2009, houve um aumento de 45 sócios e
- de 2009 para 2010, houve um aumento de 45 sócios.

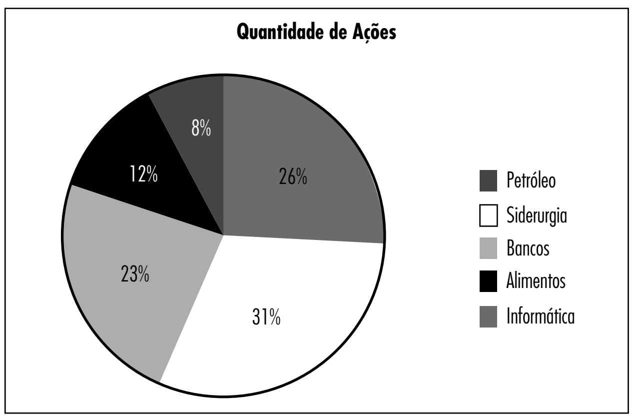
Portanto, a sequência de acréscimos está constante: (45, 45, 45). Esse comportamento cria uma expectativa de que o aumento de 2010 para 2011 seja também de 45 sócios.

Gráficos de setores

Têm por objetivo expressar as informações em um círculo fracionado. É um gráfico muito usado na demonstração de dados percentuais.

O gráfico a seguir mostra a distribuição das ações de um grupo de investidores por setores da economia.

Empresa	Quantidade de ações
Petróleo	230
Siderurgia	280
Bancos	210
Alimentos	110
Informática	70
Total	900

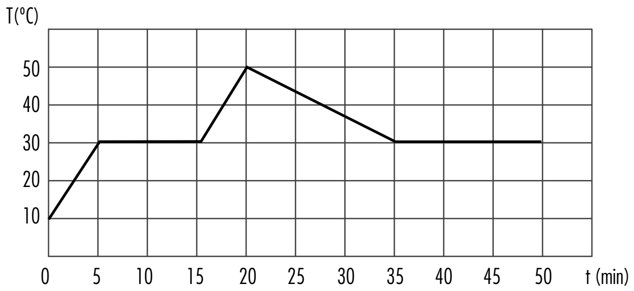


No gráfico, é possível ver que siderurgia e petróleo são os setores preferidos por esse grupo de investidores. Mesmo que os percentuais não estivessem informados, seria possível estimar, por exemplo, que cerca de ¼ das ações correspondem ao setor de petróleo, pois o setor correspondente a essa categoria ocupa aproximadamente ¼ do círculo, ou seja, 25%.

Exemplo

CEDERJ 2010.1 – Física (Adaptado)

Certa quantidade de uma substância desconhecida, contida em um recipiente de capacidade térmica desprezível, encontra-se inicialmente no estado sólido. Um aquecedor, a partir do instante t = 0, fornece-lhe calor a uma potência constante. Em um determinado instante, o aquecedor é desligado. O gráfico a seguir descreve o comportamento da temperatura (T) dessa quantidade da substância em relação ao tempo (t).



1º grupo de perguntas:

Com base no gráfico, responda aos itens abaixo a respeito do comportamento da substância nos primeiros 5 minutos.

a) Qual a temperatura inicial da substância?

b) Qual a temperatura da substância após 5 minutos?

c) Qual a taxa de variação da temperatura com relação à variação de tempo?

d) Qual a temperatura da substância quando t = 3 minutos?

e) Qual a função que, nesse intervalo, associa a temperatura ao tempo?

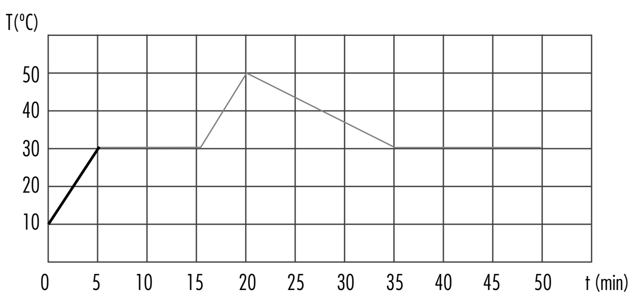
Solução:

Esse gráfico relaciona duas grandezas: temperatura (T) e tempo (t). A temperatura está em graus Celsius (º C) e será lida no eixo vertical. O tempo está em minutos (min) e será lido no eixo horizontal. Diz-se, assim, que "o gráfico dá a temperatura da substância em função do tempo".

Observe que o ponto (20,50) pertence ao gráfico. Isso quer dizer que, quando o tempo era igual a 20 minutos, a temperatura da substância era 50º C. Outro exemplo é o ponto (35,30), que também pertence ao gráfico e indica que, quando o tempo era igual a 35 minutos, a temperatura era 30º C.

Um exemplo contrário é o ponto (20,40), que não representa nada para a tal substância, pois esse ponto não pertence ao gráfico.

A seguir, responderemos às perguntas com base nos primeiros 5 minutos. Portanto, neste momento, só nos interessa o trecho destacado.



Note que o trecho do gráfico que está destacado é um segmento de reta que começa no ponto (0,10) e termina no ponto (5,30). Costumamos dizer, de maneira descuidada, que é uma reta. Entretanto, sabemos que as retas são infinitas, não começam e nem terminam em pontos.

Saber que esse trecho é um segmento de reta é muito importante, pois será, em breve, uma vantagem.

a) Qual a temperatura inicial da substância?

O termo "inicial" normalmente significa que o tempo vale zero (t = 0). Lembre-se de que o tempo deve ser lido no eixo horizontal e siga as instruções:

- procure, sobre o eixo horizontal, a marca correspondente a zero;
- coloque o lápis sobre essa marca;
- movimente o lápis na vertical, neste caso para cima/ para esquerda, até encontrar o gráfico;
- ao encontrá-lo, marque sobre ele um ponto;
- agora movimente o lápis na horizontal, para a esquerda, até encontrar o eixo vertical. Isso acontecerá na marca correspondente a 10. Assim, a temperatura inicial (t = 0) da substância era 10º C.

b) Qual a temperatura da substância após 5 minutos?

Mais uma vez, o tempo deve ser lido no eixo horizontal. Siga as instruções:

- procure, sobre o eixo horizontal, a marca correspondente a 5;
- coloque o lápis sobre essa marca;
- movimente o lápis na vertical, para cima, até encontrar o gráfico;
- ao encontrá-lo, marque sobre ele um ponto;
- agora movimente o lápis na horizontal, para a esquerda, até encontrar o eixo vertical. Isso acontecerá na marca correspondente a 30. Assim, quando t = 5 minutos, T = 30º C.

c) Qual a taxa de variação da temperatura com relação à variação de tempo?

Não devemos nos esquecer de que estamos estudando apenas o segmento destacado no gráfico acima. Note que, no início do segmento, o tempo valia 0 e no final, 5 minutos.

Representaremos essas informações da seguinte forma:

$t_{INICIAL} = 0$

$t_{FINAL} = 5$ minutos

Chamamos de variação do tempo à diferença $t_{FINAL} - t_{INICIAL}$. O símbolo utilizado para representar variações é Δ (delta). Assim, a variação de tempo é $\Delta t = t_{FINAL} - t_{INICIAL} = 5 - 0 \rightarrow \Delta t = 5$ min.

No início do segmento, a temperatura valia 10º C e no final, 30º C.

Representaremos essas informações da seguinte forma:

$T_{INICIAL} = 10º$ C

$T_{FINAL} = 30º$ C

Chamamos de variação da temperatura à diferença $T_{FINAL} - T_{INICIAL}$. Assim, a variação de temperatura é $\Delta T = T_{FINAL} - T_{INICIAL} = 30 - 10 \rightarrow \Delta T = 20$ ºC.

O termo "taxa" corresponde sempre à variação de uma grandeza em relação à variação de outra grandeza. A taxa é obtida através de uma divisão. Calcular a **taxa** de variação da temperatura **com relação** à variação de tempo é simples. Siga os passos:

1º) Variação de temperatura(ΔT) = 20 °C

2º) Variação de tempo(Δt) = 5 min

3º) Taxa da "primeira" com relação à "segunda" = $\Delta T / \Delta t$ = 20°C / 5 min = 4°C/min

Logo, a taxa de variação da temperatura com relação à variação do tempo é 4 graus Celsius por minuto. Essa taxa nos informa **que, a cada minuto, a temperatura aumenta 4 graus Celsius.**

d) Qual a temperatura da substância quando t = 3 minutos?

Com o auxílio da conclusão acima, vamos montar uma tabela.

Temperatura (T)	Tempo (t)
10	0
14	1
18	2
22	3

Explicando:

• a temperatura inicial (ou seja, quando o tempo é zero) era 10°C;

• como a temperatura aumenta 4 °C a cada minuto, quando t = 1, T = 10 + 4 = 14°C

• como a temperatura aumenta 4 °C a cada minuto, quando t = 2, T = 10 + 4 + 4 = 18°C

• como a temperatura aumenta 4 °C a cada minuto, quando t = 3, T = 10 + 4 + 4 + 4 = 22 °C

A resposta é 22 °C.

e) Qual a função que, nesse intervalo, associa a temperatura ao tempo?

Antes de responder ao item (a), foi dito que "saber que esse trecho é um segmento de reta é muito importante, pois será, em breve, uma vantagem". Pois bem, quando os gráficos são retas ou segmentos de retas, a função procurada é uma função polinomial de 1º grau, ou seja, **y = a.x + b**

Jamais esqueça:

• **a** e **b** são números fixos. Chamamos esses números fixos de coeficientes;

• **a** é **a taxa de variação** de y com relação à variação de x;

• **b** é o **valor inicial** da variável y.

No nosso exemplo, x é t e y é T. Assim: **T = a.t + b** em que:

• T é a temperatura (em °C) e t é o tempo (em minutos);

• a é a taxa de variação de T com relação à variação de t. Esse valor é 4 e já foi calculado no item (c);

• b é o valor inicial da variável T. Esse valor é 10 e já foi calculado no item (a).

Logo, a função que, no intervalo que vai de t = 0 a t = 5 minutos, associa a temperatura ao tempo é **T = 4t + 10**

Para treinar, vamos refazer o exercício em outro trecho do gráfico.

2º grupo de perguntas:

Com base no gráfico, responda aos itens abaixo a respeito do comportamento da substância no intervalo que vai de t = 15 minutos a t = 20 minutos.

a) Qual a taxa de variação da temperatura com relação à variação de tempo?

b) Qual a temperatura da substância quando t = 17 minutos?

c) Qual a temperatura da substância quando t = 19 minutos?

d) Qual a função que, nesse intervalo, associa a temperatura ao tempo?

Solução:

a) Qual a taxa de variação da temperatura com relação à variação de tempo?

No início do segmento, o tempo vale 15 minutos e no final, 20 minutos.

$t_{INICIAL}$ = 15 minutos

t_{FINAL} = 20 minutos

Variação de tempo: $\Delta t = t_{FINAL} - t_{INICIAL} = 20 - 15 \rightarrow \Delta t = 5$ min.

No início do segmento, a temperatura valia 30 °C e no final, 50 °C.

$T_{INICIAL}$ = 30 °C

T_{FINAL} = 50 °C

Variação da temperatura: $\Delta T = T_{FINAL} - T_{INICIAL} = 50 - 30 \rightarrow \Delta T = 20$ °C.

Taxa de variação = $\Delta T/\Delta t$ = 20 °C / 5 min = 4 °C/min

b) Qual a temperatura da substância quando t = 17 minutos?

c) Qual a temperatura da substância quando t = 19 minutos?

Temperatura (T)	Tempo (t)
30	15
34	16
38	17
42	18
46	19
50	20

Observa-se na tabela que:

• quando t = 17 minutos, T = 38 °C.

• quando t = 19 minutos, T = 46 °C.

d) Qual a função que, nesse intervalo, associa a temperatura ao tempo?

Como o trecho é um segmento de reta, a função procurada é uma função polinomial de 1º grau: **T = a.t + b**

• T é a temperatura (em °C) e t é o tempo (em minutos);

• a é a taxa de variação de T com relação à variação de t. Esse valor é 4 e já foi calculado no item (a);

• **b** é o **valor inicial** da variável T. Entretanto, não temos esse valor. Não pense que o valor inicial é o mesmo calculado no trecho de 0 a 5 minutos, pois os segmentos de reta nesses dois trechos não pertencem à mesma reta. Basta prolongar um deles e notar que um não passa por cima do outro.

É preciso outra forma para se calcular **b**. Como já sabemos que a vale 4, podemos, provisoriamente, escrever **T = 4t + b**

Para calcular b, vamos nos lembrar de que quando t = 17, T = 38. Substituiremos esses valores na expressão acima: **38 = 4.17 + b**

Passamos a ter uma equação. A resolução dessa equação vai nos dar o valor de b.

38 = 4.17 + b

38 = 68 + b

– 30 = b , ou seja, b = -30

Logo, a função que, no intervalo que vai de t = 15 a t = 20 minutos, associa a temperatura ao tempo é **T = 4t – 30**

Observe que, substituindo t por 19, obtém-se T = 46 (valor obtido no item (c))

Vejamos agora um caso um pouco diferente.

3º grupo de perguntas:

Com base no gráfico, responda aos itens abaixo a respeito do comportamento da substância no intervalo que vai de t = 20 minutos a t = 35 minutos.

a) Qual a temperatura da substância quando t = 20 minutos?

b) Qual a temperatura da substância quando t = 35 minutos?

c) Qual a taxa de variação da temperatura com relação à variação de tempo?

d) Qual a temperatura da substância quando t = 22 minutos?

e) Qual a temperatura da substância quando t = 30 minutos?

f) Qual a função que, nesse intervalo, associa a temperatura ao tempo?

a) Qual a temperatura da substância quando t = 20 minutos?

Basta observar o gráfico: T(20 min) = 50ºC

Note que apresentamos uma maneira diferente de se escrever a informação. Funciona da seguinte forma:

• sabemos que a temperatura depende do tempo. Em linguagem matemática, isso é escrito assim: T(t);

• quando escrevemos **T(20)**, estamos representando, em linguagem matemática, a temperatura no momento em que o tempo é igual a 20 min.

b) Qual a temperatura da substância quando t = 35 minutos?

Basta observar o gráfico: T(35) = 30 ºC.

c) Qual a taxa de variação da temperatura com relação à variação de tempo?

No início do segmento, o tempo vale 20 minutos e no final, 35 minutos.

$t_{INICIAL}$ = 20 minutos

t_{FINAL} = 35 minutos

Variação de tempo: $\Delta t = t_{FINAL} - t_{INICIAL} = 35 - 20 \rightarrow \Delta t = 15$ min.

No início do segmento, a temperatura valia 50 ºC e no final, 30 ºC.

$T_{INICIAL}$ = 50 ºC

T_{FINAL} = 30 ºC

Variação da temperatura: $\Delta T = T_{FINAL} - T_{INICIAL} = 30 - 50 \rightarrow \Delta T = -20$ ºC.

Taxa de variação = $\Delta T/\Delta t$ = – 20 ºC / 15 min = – 4 ºC/ 3 min

Note que, dessa vez, a taxa de variação foi negativa. Note ainda que, após a simplificação da fração 20/15, o denominador é 3. Isso quer dizer que: a cada 3 minutos, a temperatura <u>diminui</u> 4 graus Celsius.

Essa informação obedece à proporção. Assim, ao longo desse trecho:

• a cada 6 minutos, a temperatura <u>diminui</u> 8 graus Celsius.

• a cada 1,5 minuto, a temperatura <u>diminui</u> 2 graus Celsius.

• a cada minuto, a temperatura <u>diminui</u> 4/3 de grau Celsius.

d) Qual a temperatura da substância quando t = 22 minutos?

e) Qual a temperatura da substância quando t = 30 minutos?

Temperatura (T)	Tempo (t)
50	20
50 – 4/3 = 146/3	21
146/3 – 4/3 = 142/3	22
142/3 – 4/3 = 138/3 = 46	23
46 – 4/3 = 134/3	24
134/3 – 4/3 = 130/3	25
130/3 – 4/3 = 126/3 = 42	26
42 – 4/3 = 122/3	27
122/3 – 4/3 = 118/3	28
118/3 – 4/3 = 114/3 = 38	29
38 – 4/3 = 110/3	30

Observa-se na tabela que:

• quando t = 22 minutos, T = 142/3 ºC = 47,33 ºC

• quando t = 30 minutos, T = 110/3 ºC = 36,67 ºC

f) Qual a função que, nesse intervalo, associa a temperatura ao tempo?

Como o trecho é um segmento de reta, a função procurada é uma função polinomial de 1º grau.

T = a.t + b

• T é a temperatura (em ºC) e t é o tempo (em minutos);

• a é a taxa de variação de T com relação à variação de t. Esse valor é – 4/3 e já foi calculado no item (c);

• Como já sabemos que a vale – 4/3, podemos, provisoriamente, escrever **T = – 4t/3 + b**

Para calcular b, vamos nos lembrar de que quando t = 20, T = 50. Substituiremos esses valores na expressão acima: **50 = – 4.20/3 + b**

Passamos a ter uma equação. A resolução dessa equação vai nos dar o valor de b.

50 + 80/3 = b

230/3 = b

Logo, a função que, no intervalo que vai de t = 20 a t = 35 minutos, associa a temperatura ao tempo é **T = – 4t/3 + 230/3**

Observe que, substituindo t por 35, obtém-se:

T = – 4.35/3 + 230/3 = – 140/3 + 230/3 = 90/3 = 30 (valor obtido no item (b))

4º grupo de perguntas:

Com base no gráfico, responda aos itens abaixo a respeito do comportamento da substância no intervalo que vai de t = 5 minutos a t = 15 minutos.

a) Qual a temperatura da substância quando t = 5 minutos?

b) Qual a temperatura da substância quando t = 15 minutos?

c) Qual a taxa de variação da temperatura com relação à variação de tempo?

d) Qual a temperatura da substância quando t = 10 minutos?

e) Qual a função que, nesse intervalo, associa a temperatura ao tempo?

a) Qual a temperatura da substância quando t = 5 minutos?

Basta observar o gráfico: T(5) = 30 °C.

b) Qual a temperatura da substância quando t = 15 minutos?

Basta observar o gráfico: T(15) = 30 °C.

c) Qual a taxa de variação da temperatura com relação à variação de tempo?

No início do segmento, o tempo vale 5 minutos e no final, 15 minutos.

$t_{INICIAL}$ = 5 minutos

t_{FINAL} = 15 minutos

Variação de tempo: $\Delta t = t_{FINAL} - t_{INICIAL} = 15 - 5 \rightarrow \Delta t = 10$ min.

No início do segmento, a temperatura valia 30 °C e no final, 30 °C também.

$T_{INICIAL}$ = 30 °C

T_{FINAL} = 30 °C

Variação da temperatura: $\Delta T = T_{FINAL} - T_{INICIAL} = 30 - 30 \rightarrow \Delta T = 0$ °C.

Taxa de variação = $\Delta T/\Delta t$ = 0 °C / 10 min = 0 °C/min

Nesse caso, a taxa de variação é nula. Isso quer dizer que **a temperatura, nesse trecho, não aumenta e nem/ e não diminui, seu valor permanece constante.**

d) Qual a temperatura da substância quando t = 10 minutos?

Se a temperatura permanece constante (e igual a 30 °C), então a temperatura valerá 30 °C quando o tempo for igual a 10 minutos. Assim, T(10) = 30 °C.

e) Qual a função que, nesse intervalo, associa a temperatura ao tempo?

A resposta é simplesmente: **T (t) = 30**

Portanto, nesse trecho, qualquer que seja o valor de t, a temperatura valerá 30 °C. Dizemos, nesses casos, que a temperatura independe de t. Na verdade, para que a temperatura dependa de t de alguma forma, é preciso que a variável t apareça na expressão que está à direita do sinal de igual.

Também é importante saber que essa função não é uma função de 1º grau ainda que o trecho seja um segmento de reta. É uma **função constante.**

No entanto, imaginemos que você não tivesse percebido que o trecho não corresponde a uma função de 1º grau e resolvesse esta questão exatamente da mesma maneira que resolveu as anteriores. Vejamos como ficaria:

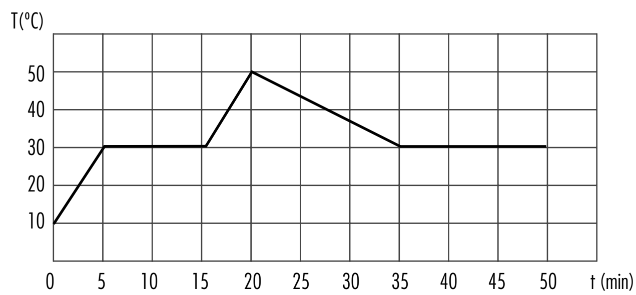
- a função procurada seria uma função polinomial de 1º grau: **T = a.t + b**
- T é a temperatura (em °C) e t é o tempo (em minutos);
- **a** é a **taxa de variação** de T com relação à variação de t. Esse valor é 0 e já foi calculado no item (c);
- Como já sabemos que **a** vale 0, podemos, **provisoriamente**, escrever **T = 0.t + b**, ou seja, **T = b.**

Para calcular b, vamos nos lembrar de que quando t = 5 min, T = 30ºC. Substituiremos esses valores na expressão acima: 50 = b.

Perceba que não há como substituir o valor do tempo (t), pois ele não aparece na equação. Podemos substituir apenas o valor da temperatura (T).

Logo, a função que, no intervalo que vai de t = 5 a t = 15 minutos, associa a temperatura ao tempo é T = 50ºC

Interpretações adicionais



Acima, o gráfico foi repetido para que possamos extrair mais algumas informações.

Esse gráfico mostra para o leitor que a substância estava inicialmente a 10 °C, quando o aquecedor foi ligado. Sabe-se que a substância estava no estado sólido (ver enunciado). A temperatura dessa substância sobe até 30 °C. Nesse ponto, a temperatura permanece constante, formando, no gráfico, um patamar.

Em gráficos de temperatura, esse patamar corresponde a mudanças de estado. Quando as substâncias mudam de estado, a sua temperatura permanece constante, voltando a variar depois que toda a transformação é concluída.

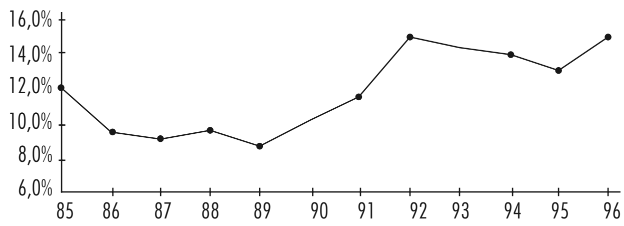
Portanto, dos 5 aos 15 minutos, a substância foi passando do estado sólido para o estado líquido (fusão). Depois, esse líquido continuou aumentando de temperatura até atingir os 50 °C, quando, de repente, a temperatura começa a cair. Essa temperatura passa a cair porque o aquecedor foi desligado exatamente quando o tempo era de 20 minutos. A temperatura desce até voltar, aos 35 minutos, para a temperatura de fusão (30 °C). Em seguida, volta a ocorrer mudança de estado, de líquido para sólido (solidificação).

O gráfico não deixa claro o que acontece depois.

Exercícios de fixação

1) Um estudo sobre o problema do desemprego na Grande São Paulo, no período 1985-1996, realizado pelo SEADE-DIEESE, apresentou o seguinte gráfico sobre taxa de desemprego.

Médias Anuais da Taxa de Desemprego Total
Grande São Paulo - 1985 - 1996



Fonte: SEP, Convênio SEADE-DIEESE.

Pela análise do gráfico, no período considerado, é correto afirmar que:

(A) a maior taxa de desemprego foi de 14%.

(B) a taxa de desemprego no ano de 1995 foi a menor do período.

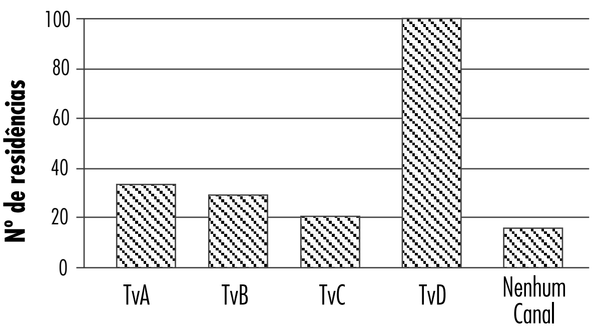
(C) a partir de 1992, a taxa de desemprego foi decrescente.

(D) no período de 1985 a 1996, a taxa de desemprego esteve entre 8% e 16%.

(E) a taxa de desemprego foi crescente no período compreendido entre 1988 e 1991.

O enunciado a seguir se refere às questões 2 e 3.

Uma pesquisa de opinião foi realizada para avaliar os níveis de audiência de alguns canais de televisão, entre 20h e 21h, durante uma determinada noite. Os resultados obtidos estão representados no gráfico de barras abaixo:



2) O número de residências atingidas nessa pesquisa foi <u>aproximadamente</u> de:

(A) 100

(B) 135

(C) 150

(D) 200

(E) 220

3) A percentagem de entrevistados que declararam estar assistindo à TvB é aproximadamente:

(A) 15%

(B) 20%

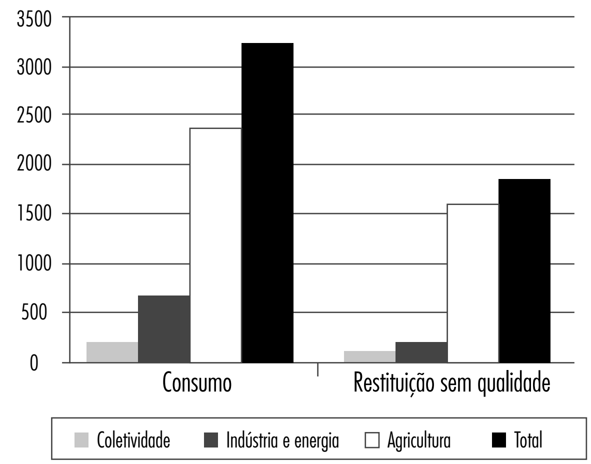
(C) 22%

(D) 27%

(E) 30%

4) Boa parte da água utilizada nas mais diversas atividades humanas não retorna ao ambiente com qualidade para ser novamente consumida. O gráfico mostra alguns dados sobre esse fato, em termos dos setores de consumo.

Consumo e restituição de água no mundo
(em bilhões de m³ / ano)



Fonte: Adaptado de MARGAT, Jean-François. A água ameaçada pelas atividades humanas. In WIKOWSKI, N. (Coord.) *Ciência e tecnologia hoje*. São Paulo: Ensaio, 1994.

Com base nesses dados, é possível afirmar que:

(A) mais da metade da água usada não é devolvida ao ciclo hidrológico.

(B) as atividades industriais são as maiores poluidoras de água.

(C) mais da metade da água restituída sem qualidade para o consumo contém algum teor de agrotóxico ou adubo.

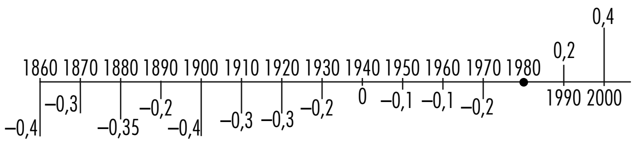
(D) cerca de um terço do total da água restituída sem qualidade é proveniente das atividades energéticas.

(E) o consumo doméstico, dentre as atividades humanas, é o que mais consome e repõe água com qualidade.

Exercícios de vestibular

1) (Cederj / 2009.2 – Matemática)

O gráfico a seguir mostra as temperaturas médias anuais (em °C) na superfície terrestre no período de 1860 a 2000.



Fonte: http://www.memorial.sp.gov.br/memorial

Com relação às temperaturas apresentadas no gráfico, é correto concluir que:

(A) a média aritmética de todas as temperaturas apresentadas no gráfico é igual a zero;

(B) a média aritmética das temperaturas apresentadas de 1860 a 1930 é maior do que a média das temperaturas apresentadas de 1940 a 2000;

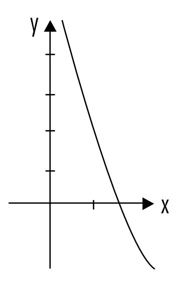
(C) a média aritmética das temperaturas apresentadas de 1940 a 1970 é igual à média das temperaturas apresentadas de 1900 a 1930;

(D) a média aritmética das temperaturas apresentadas de 1910 a 1940 é menor do que a média das temperaturas apresentadas de 1940 a 1970;

(E) a média aritmética das temperaturas apresentadas no gráfico de 1900 a 1940 é igual à média das temperaturas apresentadas de 1940 a 2000.

2) (Cederj / 2009.2 – Matemática)

Um programa de computador apresentou parte do gráfico de uma função polinomial de segundo grau com coeficientes reais, f: R $\rightarrow$ R, como mostrado na figura a seguir:



Pode-se, então, concluir que a função f :

(A) tem duas raízes reais distintas;

(B) tem apenas uma raiz real;

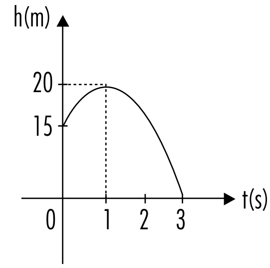
(C) tem duas raízes reais negativas;

(D) não possui raízes reais;

(E) possui uma raiz complexa.

3) (Cederj / 2009.2 – Física) (Adaptado)

Da varanda de seu apartamento, a uma certa altura do solo, um garoto joga uma pedra verticalmente. O gráfico da figura representa como a altura h da pedra em relação ao solo varia em função do tempo entre o instante do lançamento (t = 0) e o instante em que a pedra chega ao solo.



Todo o movimento da pedra se processa na direção vertical.

a) De que altura a pedra foi lançada?

b) A pedra foi lançada para cima ou para baixo? Por quê?

c) Em quantos segundos ela atinge a altura máxima?

d) Qual a altura máxima atingida?

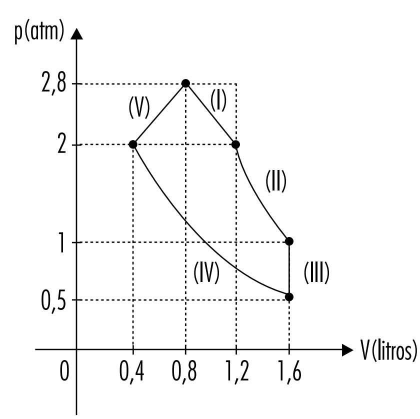
e) Quanto tempo a pedra leva na descida?

f) Quanto tempo transcorre entre o lançamento e o momento em que ela cai no solo?

g) Qual a distância total que ela percorre entre o instante do lançamento e o instante em que chega ao solo?

4) (Cederj / 2009.2 – Física) (Adaptado)

A figura representa o gráfico pressão $\times$ volume para um ciclo termodinâmico de um gás ideal. O ciclo é composto de 5 processos numerados como I, II, III, IV e V.



a) No ciclo I, qual a variação da pressão em relação à variação do volume?

b) No ciclo I, qual a função que relaciona a pressão ao volume?

c) No ciclo V, qual a variação da pressão em relação à variação de volume?

d) No ciclo V, qual a função que relaciona a pressão ao volume?

e) Quando o volume varia de 1,2 ℓ para 1,6 ℓ, qual a variação de pressão?

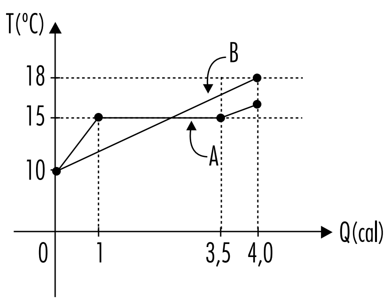
f) Quando o volume varia de 1,2 ℓ para 1,6 ℓ, qual a taxa média de variação de pressão em relação à variação de volume?

g) Qual dos processos pode representar a etapa do ciclo em que a temperatura permanece constante?

Essa questão exige conhecimentos de química (consta inclusive no gabarito).

5) (Cederj / 2009.2 – Física) (Adaptado)

Considere dois corpos A e B que interagem com as vizinhanças apenas pelo recebimento de calor. O gráfico da figura mostra como suas temperaturas variam em função das quantidades de calor por eles recebidas.



a) Qual a taxa de variação da temperatura em relação à variação do calor, para o corpo B, no intervalo [0,4]?

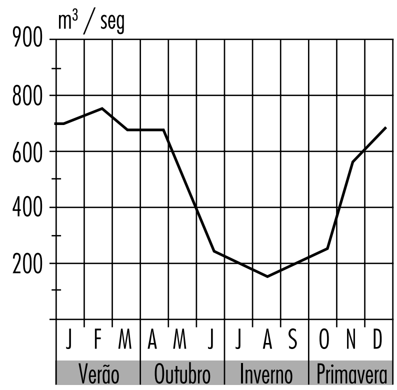
b) Qual a função que, nesse intervalo, associa a temperatura do corpo B à quantidade de calor recebida por ele?

c) Considere que o gráfico referente ao corpo A seja, no intervalo [3,5; 4,0], paralelo ao gráfico do corpo B. Qual a função que, nesse intervalo, associa a temperatura do corpo A à quantidade de calor recebida por ele?

d) Qual a temperatura final do corpo A?

6) (Cederj / 2009.1 – Geografia) (Adaptado)

O gráfico abaixo representa a descarga fluvial (quantidade de água de um rio, em metros cúbicos por segundo, ao passar por um determinado ponto do seu curso) do rio Paraíba do Sul em Resende no período de um ano.



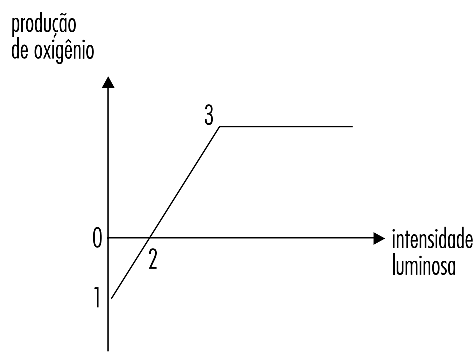
Fonte: Carlos de Castro Botelho, Hidrografia, in IBGE. Geografia do Brasil. Região Sudeste, p.30.

O gabarito dessa questão faz aproximações "forçadas", como V(8) = 150. Poderia ser evidenciada a leitura de dois pontos: "Considere que maio e novembro apresentam descarga fluvial igual a 500 m³/seg e agosto, 150m³/seg."

Entre os meses de maio e novembro, o gráfico pode ser aproximado por uma parábola. Dê a função que associa a descarga fluvial do rio Paraíba do Sul ao mês.

7) (Cederj / 2009.1 – Biologia) (Adaptado)

A velocidade da fotossíntese pode ser calculada medindo-se a quantidade de oxigênio liberada durante o processo. O gráfico a seguir representa uma planta que inicialmente está no escuro (ponto 1) e depois vai sendo gradativamente iluminada.



Assinale V ou F.

a) No ponto 1, a planta não produz oxigênio e sim o consome. ( )

b) Do ponto 1 ao ponto 3, a intensidade luminosa aumenta. ( )

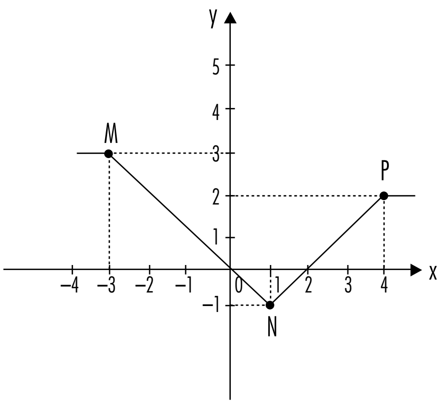
c) Do ponto 1 ao ponto 3, a taxa de variação da produção de oxigênio com relação à variação da intensidade luminosa aumenta. ( )

d) A partir do ponto 3, a produção de oxigênio permanece constante. ( )

e) A partir do ponto 3, a taxa de variação da produção de oxigênio com relação à variação da intensidade luminosa aumenta. ( )

8) (Cederj / 2009.1 – Matemática)

O gráfico da função real f abaixo é formado pelos segmentos de reta MN e NP e por duas semirretas paralelas ao eixo das abscissas conforme mostra a figura a seguir:



Sabendo que M = (-3, 3), N = (1, -1) e P = (4, 2), pode-se afirmar que:

(A) f é positiva no intervalo (0, 2);

(B) f não possui raízes reais;

(C) o conjunto imagem de f é o intervalo [- 1, 3];

(D) existe um único valor de x tal que f (x) = 3.

(E) não existe número real x tal que f (x) = 1.

9) (Cederj / 2009.1 – Geografia) (Adaptado)

Países como os Estados Unidos da América e a China se recusam a assinar o protocolo de Kyoto. Esse protocolo determina a redução das emissões de gás carbônico para os níveis de 1990. Esses dois países continuam aumentando as emissões de gás carbônico e são os principais poluidores da atmosfera. Avalie agora os gráficos a seguir, que relacionam o consumo de petróleo com a riqueza do país (gráfico 1) e com as emissões de gás carbônico (gráfico 2).

gráfico 1

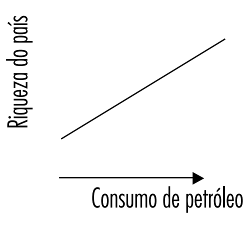
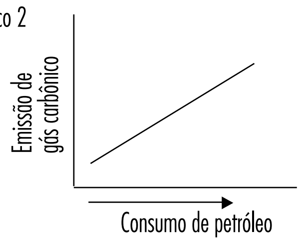


gráfico 2



Assinale S para as conclusões que podem ser tiradas exclusivamente da análise dos gráficos. Assinale N em caso contrário.

a) Os países mais ricos consomem mais petróleo do que os países mais pobres. ( )

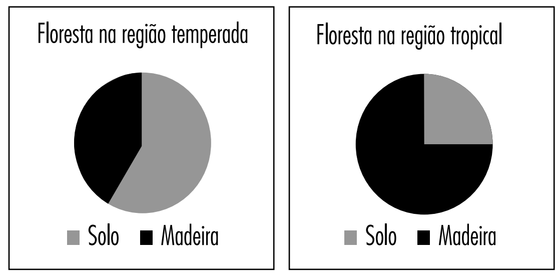
b) Os países mais ricos emitem menor quantidade de gás carbônico. ( )

c) A quantidade de gás carbônico emitido é proporcional à quantidade de petróleo consumido. ( )

d) O aumento na emissão de gás carbônico é proporcional ao aumento no consumo de petróleo. ( )

10) (Cederj 2009.1 – Biologia) (Adaptado)

Os gráficos abaixo mostram a quantidade de matéria orgânica (carbono orgânico) em duas florestas. A quantidade de matéria orgânica no solo e na madeira apresenta percentagens diferentes em cada região.



Assinale V (verdadeiro), F (falso) ou N (nada pode ser afirmado).

a) Nas florestas tropicais, a porcentagem de matéria orgânica no solo é maior do que na madeira. ( )

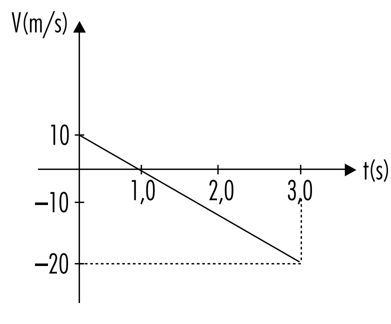
b) Nas florestas temperadas, a quantidade de matéria orgânica no solo é maior do que na madeira. ( )

c) A quantidade de matéria orgânica no solo é maior nas florestas temperadas do que nas tropicais. ( )

d) A porcentagem de matéria orgânica no solo é maior nas florestas temperadas do que nas florestas tropicais. ( )

11) (Cederj / 2008.2 – Física) (Adaptado)

Da janela de seu apartamento, a uma altura h do solo, um garoto lança uma pedra verticalmente para cima. A pedra chega ao solo 3,0 s depois de lançada. A figura representa como a velocidade escalar da pedra varia em função do tempo entre o instante em que foi lançada (t = 0) e o instante em que chega ao solo (t = 3,0 s).



a) Com que velocidade a pedra foi lançada para o alto?

b) Quanto tempo transcorreu desde o lançamento até o momento em que a pedra atingiu seu ponto mais alto?

c) Com que velocidade a pedra atingiu o solo?

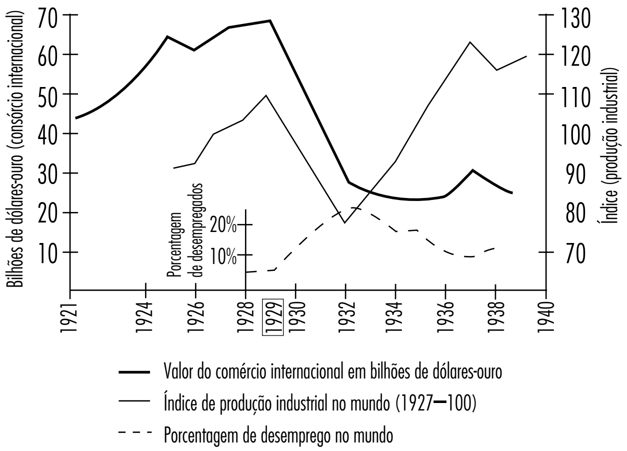
d) Qual a função que associa a velocidade da pedra ao tempo transcorrido?

e) Após ser lançada, quantos metros a pedra subiu?

f) Após atingir a altura máxima, quantos metros a pedra desceu?

g) Qual o valor de h?

12) (Cederj / 2008.1 – História) (Adaptado)



ARRUDA, J.J. de. Nova história moderna e contemporânea. S.P.: Bandeirantes, 2004

Com relação às informações contidas no gráfico, assinale V (verdadeiro) ou F (falso).

a) Em 1932, atingiu-se o maior índice mundial de desemprego que correspondeu a 30%. ( )

b) O maior índice mundial de desemprego coincide com o menor índice mundial de produção industrial. ( )

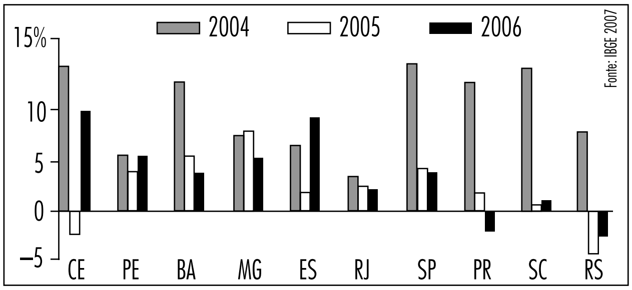
c) O valor do comércio internacional teve seu máximo em 1929, quando atingiu a casa de aproximadamente 70 bilhões de dólares-ouro. ( )

d) De 1929 a 1932, a taxa de variação do índice de produção industrial foi negativa e constante. ( )

e) De 1929 a 1932, a taxa de variação do valor do comércio internacional foi de, aproximadamente, 10 bilhões de dólares-ouro por ano. ( )

13) (Cederj 2008.1 – Matemática)

O gráfico a seguir mostra as taxas anuais de crescimento da produção industrial, em porcentagem, de alguns estados brasileiros, em 2004, 2005 e 2006.



Pode-se concluir que:

(A) todos os estados apresentaram crescimento em cada um dos três anos considerados;

(B) a produção do Paraná (PR) decresceu em cada um dos três anos considerados;

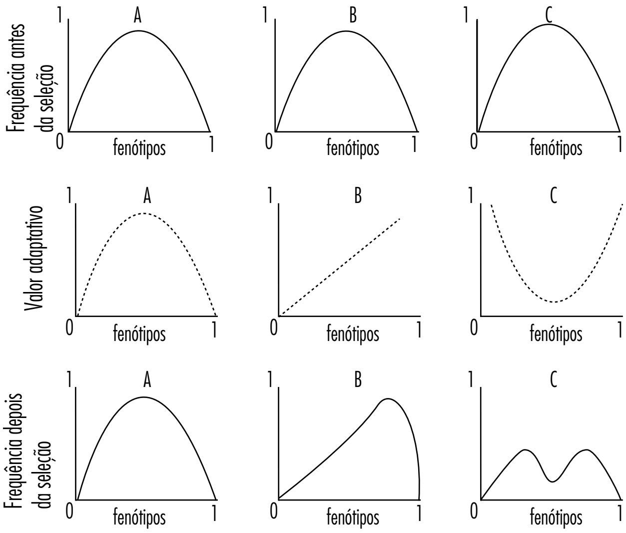
(C) a produção de Minas Gerais (MG) cresceu apenas em 2004 e em 2005;

(D) a produção do Rio Grande do Sul (RS) cresceu em cada um dos três anos considerados;

(E) a produção do Rio de Janeiro (RJ) cresceu em cada um dos três anos considerados.

14) (Cederj / 2008.1 – Biologia) (Adaptado)

A figura a seguir mostra a ação de três tipos de seleção natural: a seleção natural direcional, que favorece indivíduos inicialmente pouco frequentes, a seleção natural estabilizadora, que favorece os indivíduos de maior frequência, e a seleção natural disruptiva ou bidirecional, que favorece dois fenótipos inicialmente pouco frequentes. O valor adaptativo de um indivíduo é medido pelo número de descendentes desse indivíduo comparado com o número de descendentes dos demais indivíduos da população. Aqueles que deixam mais descendentes têm valor adaptativo igual a um e os que não deixam descendentes têm valor adaptativo zero.



Com relação às informações contidas no gráfico, assinale V (verdadeiro) ou F (falso).

a) O gráfico A do valor adaptativo pode ser aproximado pela função $y = x - x^2$ ( )

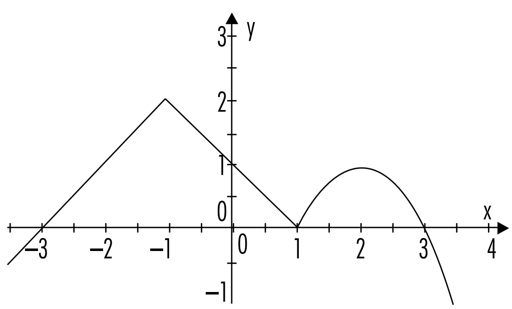
b) O gráfico B do valor adaptativo pode ser aproximado por $y = x + 1$ ( )

c) O gráfico C do valor adaptativo pode ser aproximado por $y = x^2 - x + 1$ ( )

15) (Cederj / 2008.1 – Matemática)

A figura a seguir representa o gráfico da função f: R → R definida por:

$$y = f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 3, \text{ se } x > 1 \\ 2 - |x + 1|, \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$$



Determine:

a) a imagem de f;

b) as raízes de f;

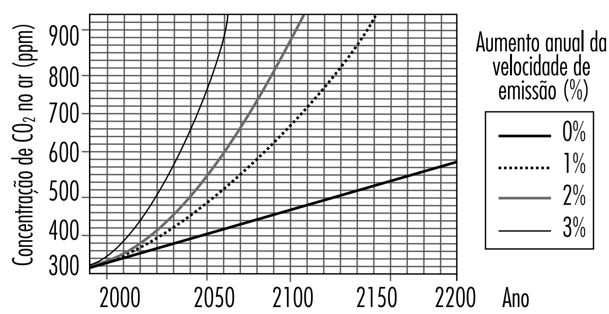
c) o número de soluções distintas da equação f (x) = 1;

d) o conjunto solução da inequação f (x) > 1.

16) (UFRJ / 2011 Prova 2 – Química) (Adaptado)

A figura a seguir apresenta projeções, resultantes de simulações computacionais, da concentração de dióxido de carbono, em ppm, na atmosfera terrestre até o ano de 2200.

As projeções dependem do aumento anual da velocidade de emissão de dióxido de carbono.



a) Determine a taxa de variação média anual da concentração de dióxido de carbono entre os anos de 2020 e 2050 para o pior cenário de emissão apresentado no gráfico.

b) Dê a função que associa a concentração de dióxido de carbono ao tempo para o melhor cenário.

Gabarito

Exercícios de fixação

1) (D) **2)** (D) **3)** (A) **4)** (C)

Questões de vestibulares

1) (D)

2) (A)

Uma função polinomial de grau N tem sempre N raízes. Essas raízes podem ser reais ou complexas. Se uma raiz é real, o gráfico corta o eixo horizontal exatamente nesse valor. O gráfico apresenta parte de uma função de 2º grau. Portanto, a função terá 2 raízes.

Os gráficos de funções de 2º grau são parábolas. Se esta parábola está cortando o eixo horizontal em um ponto, certamente ela descerá um pouco mais e voltará a subir, cortando, novamente, o eixo horizontal em um ponto mais à direita. Esses dois pontos correspondem a raízes reais diferentes (distintas).

3) a) 15 metros, pois a altura inicial é corresponde ao instante t = 0.

b) para cima, pois, imediatamente após o lançamento, a altura é maior do que 15 m.

c) 1 s

d) 20 m

e) 2 s, pois a pedra começa a descer quando t = 1 s e termina a sua queda quando t = 3 s.

f) 3 s = 1 s (subindo) + 2 s (descendo)

g) 25 m = 5 m (para cima) + 20 m (para baixo).

4) a) Início: (p = 2,8 atm ; V = 0,8 L)

Final: (p = 2,0 atm ; V = 1,2 L)

$\Delta p = 2{,}0 - 2{,}8 = -0{,}8$ atm

$\Delta V = 1{,}2 - 0{,}8 = 0{,}4$ L

$\Delta p/\Delta V = -0{,}8/0{,}4 = -2$ atm/L

b) Sabemos que o coeficiente a é a taxa de variação. Logo, $p(V) = -2V + B$

Substituindo o ponto (0,8;2,8), obtemos:

$2{,}8 = -2.(0{,}8) + B$

$2{,}8 = -1{,}6 + B$

$4{,}4 = B$

$p(V) = -2V + 4{,}4$

c) Início: (p = 2,0 atm ; V = 0,4 L)

Final: (p = 2,8 atm ; V = 0,8 L)

$\Delta p = 2{,}8 - 2{,}0 = 0{,}8$ atm

$\Delta V = 0{,}8 - 0{,}4 = 0{,}4$ L

$\Delta p/\Delta V = 0{,}8/0{,}4 = 2$ atm/L

d) Sabemos que o coeficiente a é a taxa de variação. Logo, $p(V) = 2V + B$

Substituindo o ponto (0,8 ; 2,8).

$2{,}8 = 2.(0{,}8) + B$

$2{,}8 = 1{,}6 + B$

$1{,}2 = B$

$p(V) = 2V + 1{,}2$

e) $-1{,}0$ atm, pois a pressão varia de 2,0 atm para 1,0 atm.

f) $\Delta p/\Delta V = -1{,}0/0{,}4 = -2{,}5$ atm/L.

g) O enunciado diz que o gás estudado é ideal. Gases ideais obedecem à equação PV = nRT, em que:

- P, V e T são, respectivamente pressão, volume e temperatura;
- n é a quantidade de gás em moles;
- R é uma constante específica para gases.

Em processos isotérmicos, a temperatura é constante. Assim, em processos isotérmicos, PV = valor constante. Em gráficos de pressão x volume, processos isotérmicos <u>nunca</u> correspondem a segmentos de reta.

Observe o processo II:

Início: (p = 2,0 atm ; V = 1,2 L)

Final: (p = 1,0 atm ; V = 1,6 L)

$2{,}0 \,.\, 1{,}2 \neq 1{,}0 \,.\, 1{,}6$

Conclui-se que II não pode ser um processo isotérmico.

Observe o processo IV:

Início: (p = 0,5 atm ; V = 1,6 L)

Final: (p = 2,0 atm ; V = 0,4 L)

$0{,}5 \,.\, 1{,}6 = 2{,}0 \,.\, 0{,}4$

Conclui-se que II é um processo isotérmico.

Os processos I, III e V não podem ser isotérmicos porque são segmentos de reta. Em particular, o processo III é isovolumétrico (ou isocórico, quando o volume é constante).

5) a) Para o corpo B, no intervalo [0,4]:

Início: (T = 10 °C ; Q = 0 cal)

Final: (T = 18 °C ; Q = 4 cal)

$\Delta T = 18 - 10 = 8$ °C

$\Delta Q = 4 - 0 = 4$ cal

$\Delta T/\Delta Q = 8/4 = 2$ °C/cal

b) Sabemos que o coeficiente a é a taxa de variação. Logo, $T(Q) = 2Q + B$

Substituindo o ponto (0,10), obtemos.

$10 = 2.(0) + B$

$10 = 0 + B$

$10 = B$

$T(Q) = 2Q + 10$

c) Quando retas ou segmentos de retas são paralelos, elas representam funções de mesma taxa de variação. Assim, o gráfico de A tem taxa de variação também igual a 2. Logo, $T(Q) = 2Q + B$

Substitua o ponto (3,5 ; 15).

$15 = 2.(3{,}5) + B$

$15 = 7 + B$

$8 = B$

$T(Q) = 2Q + 8$

d) Conseguiremos responder porque agora temos a função que associa a temperatura do corpo A à quantidade de calor recebida por ele. Basta substituir Q = 4 na função. $T(4) = 2.4 + 8 = 16$ °C.

6) Vamos fazer a seguinte associação:

t = 1 (para janeiro)

t = 2 (para fevereiro)

t = 3 (para março)

t = 4 (para abril)

t = 5 (para maio)

t = 6 (para junho)

t = 7 (para julho)

t = 8 (para agosto)

t = 9 (para setembro)

t = 10 (para outubro)

t = 11 (para novembro)

t = 12 (para dezembro)

A parábola começa em maio, o que corresponde ao ponto (5,500) e termina em novembro, o que corresponde ao ponto (11,500). O ponto mais baixo dessa parábola é (8,150).

Parábolas são representações gráficas de funções do 2º grau. As funções do 2º grau são da forma $y = Ax^2 + Bx + C$.

No nosso caso: $V = At^2 + Bt + C$, em que V é o volume (em m^3/seg) e t é o tempo em meses como definimos acima.

Vamos substituir os 3 pontos conhecidos no modelo acima.

I) Ponto (11,500)

$500 = A.11^2 + B.11 + C$, o que nos dá $121A + 11B + C = 500$

II) Ponto (8,150)

$150 = A.8^2 + B.8 + C$, o que nos dá $64A + 8B + C = 150$

III) Ponto (5,500)

$500 = A.5^2 + B.5 + C$, o que nos dá $25A + 5B + C = 500$

Faremos, agora, a diferença entre as duas primeiras equações obtidas:

$$\begin{array}{l} 121A + 11B + C = 500 \\ \underline{64A + 8B + C = 150} \\ 57A + 3B = 350 \end{array}$$

Em seguida, faremos a diferença entre as duas últimas equações obtidas:

$$\begin{array}{l} 64A + 8B + C = 150 \\ \underline{25A + 5B + C = 500} \\ 39A + 3B = -350 \end{array}$$

Finalmente, faremos a diferença entre as duas equações obtidas.

$$\begin{array}{l} 57A + 3B = 350 \\ \underline{39A + 3B = -350} \\ 18A = 700 \end{array}$$

$A = 700/18 = 350/9$

Sabendo que $A = 350/9$, podemos achar B substituindo o valor de A na equação $39A + 3B = -350$

$39.350/9 + 3B = -350$

$13650/9 + 3B = -350$

$13650 + 27B = -3150$

$27B = -3150 - 13650$

$27B = -16800$

$9B = -5600$

$B = -5600/9$

Sabendo que $A = 350/9$ e $B = -5600/9$, podemos calcular C substituindo os valores de A e B na equação $25.(350/9) + 5.(-5600/9) + C = 500$

$8750/9 - 28000/9 + C = 500$

$-19250/9 + C = 500$

$-19250 + 9C = 4500$

$9C = 4500 + 19250$

$9C = 23750$

$C = 23750/9$

$V = 350t^2/9 - 5600t/9 + 23750/9$

7) V V F V F

8) (C)

9) S N N S

Nota: Quando duas grandezas são proporcionais, o gráfico que as relaciona é uma reta que passa pela origem.

10) F V N V

Nota: não podemos comparar as quantidades em florestas tropicais com as quantidades em florestas temperadas porque o gráfico só nos informa percentuais e não quantidades. Dessa forma, só podemos comparar solo com madeira em um mesmo tipo de floresta.

11) a) 10 m/s, pois é a velocidade corresponde ao instante $t = 0$.

b) 1 s. Quando a pedra sobe, a velocidade é positiva. Essa velocidade vai diminuindo até chegar a zero. No momento em que a velocidade vale zero, a pedra para de subir e começa a descer, ou seja, está no ponto mais alto de sua trajetória. Na descida, a velocidade é negativa.

c) 20 m/s. A velocidade está representada no gráfico com sinal negativo para indicar que é uma queda.

d) Taxa de Variação = -10 m/s^2. Logo, $v = -10t + 10$

e) ATENÇÃO: em gráficos de velocidade x tempo, a área entre o gráfico e o eixo horizontal corresponde ao deslocamento. Note que o deslocamento (ΔS) procurado corresponde à área do triângulo. Assim, $\Delta S = (10.1)/2 = 5$ m.

f) Pelo mesmo raciocínio, $\Delta S = (2.20)/2 = 20$ m.

g) Após o lançamento, a pedra subiu 5 metros até atingir o ponto mais alto. Em seguida, do ponto mais alto até o chão, a pedra desceu 20 metros. Logo, a altura de lançamento (h) é $20-5=15$ metros.

12)

a) Falso. É verdade que, em 1932, atingiu-se o maior índice mundial de desemprego, mas esse índice foi de pouco mais de 20%.

b) Verdadeiro.

c) Verdadeiro.

d) Verdadeiro. O gráfico segue um segmento de reta decrescente.

e) O gráfico segue um segmento de reta decrescente. O início do segmento é o ponto (1929,70) e o final do segmento é (1932,28). Falso. Taxa de Variação $= (70 - 28)/(1932 - 1929) = 42/3 = 14$ bilhões de dólar-ouro por ano.

13) E)

14) a) Falso. Se $y = x - x^2$, então:

$y(0) = 0$, que corresponde ao ponto (0,0);

$y(1) = 0$, que corresponde ao ponto (1,0) e

$y(0,5) = 0,25$, o que corresponde ao ponto (0,5 ; 0,25)

Os dois primeiros pontos pertencem ao gráfico. O terceiro ponto, não.

b) Falso. Se $y = x + 1$, então:

$y(0) = 1$, que corresponde ao ponto (0,1). Esse ponto não pertence ao gráfico.

c) Falso. Se $y = x^2 - x + 1$, então:

$y(0) = 1$, que corresponde ao ponto (0,1);

$y(1) = 1$, que corresponde ao ponto (1,1) e

$y(0,5) = 0,25 - 0,5 + 1 = 0,25 + 0,5 = 0,75$, o que corresponde ao ponto (0,5 ; 0,75)

Os dois primeiros pontos pertencem ao gráfico. O terceiro ponto, não.

15) a) Todos os valores de 2 para baixo, ou seja, $(-\infty,2)$.

b) Basta ver onde o gráfico corta ou encosta no eixo horizontal. Isso acontece em $x = -3$, $x = 1$ e $x = 3$.

c) Trace uma reta horizontal passando por $y = 1$. Você perceberá que a reta corta o segmento de reta ascendente em um ponto e o segmento de reta descendente em outro ponto. Essa reta horizontal ainda toca o ponto mais alto da parábola (2,1). Assim, f (x) = 1 tem 3 soluções.

d) A expressão f (x) > 1 é a forma matemática de perguntar "para quais valores de x a função f assume valores maiores do que 1?"

Observe que f(– 2) = 1 e f(0) = 1. Entre esses dois valores de x, a função f assume valores maiores do 1. Observando-se o gráfico, percebe-se que isso não acontecerá para outros valores de x. Assim, o conjunto solução é (-2,0).

16) Cada traço no eixo horizontal corresponde a 10 anos.

Cada traço no eixo vertical corresponde a 20 ppm.

a) O pior cenário corresponde ao aumento de 3% ao ano na velocidade de emissão. Nesse gráfico, o ano de 2020 está associado a 480 ppm e o ano de 2050 está associado a 780 ppm. A taxa de variação média anual da concentração de dióxido de carbono é dada por ΔConcentração/Δtempo = (780 – 480)/(2050 – 2020) = 300/30 = 10 ppm/ano.

b) O melhor cenário corresponde a não ter aumento na velocidade de emissão. Nesse caso, o gráfico é uma semirreta que passa pelos pontos (1980,300) e (2190,560). Logo, C(t) = A.t + B.

A = taxa de variação = ΔConcentração/Δtempo = (560 – 300)/(2190 – 1980) = 260/210 = 26/21

Em seguida, substituímos o ponto (1980,300) na função.

300 = 26.1980/21 + B

300 = 26.660/7 + B

300 = 17160/7 + B

2100 = 17160 + 7B

– 15060 = 7B

B = – 15060/7

C(t) = 26t/21 – 15060/7

8

Funções

Introdução – Funções na Vida Diária

Em muitas situações do dia a dia, lidamos com elementos de um conjunto que estão relacionadas com elementos de outro conjunto. Em particular, muitas vezes lidamos com quantidades variáveis que dependem dos valores de outras quantidades. Observe o exemplo a seguir.

Exemplo

Considere o conjunto formado pelos alunos na sua turma. Todos os alunos têm uma idade, e cada aluno tem uma única idade. Não pode haver ninguém sem idade, nem ninguém com duas idades. Por isso, dizemos que sabemos a idade em função da pessoa.

Funções representam formas de relacionar elementos de dois conjuntos X e Y, com duas propriedades especiais:

i) todo elemento de X está associado a um elemento de Y;

ii) nenhum elemento de X está associado a mais de um elemento de Y.

Assim, no exemplo anterior, podemos dizer que a idade é função da pessoa, pois: (i) cada pessoa tem uma idade; (ii) nenhuma pessoa tem mais de uma idade. Por outro lado, não podemos dizer que a pessoa é função da idade, pois uma mesma idade pode corresponder a mais de uma pessoa.

Exercícios

1) André anda de bicicleta a uma velocidade constante de 5 km/h.

a) Que distância André percorre em 1h?

b) E em 2h?

c) Escreva uma expressão algébrica que represente a distância percorrida (em km) por André em função do tempo (em horas) que ele anda de bicicleta.

2) Um caderno custa R$ 3,00.

a) Escreva uma expressão que represente o preço pago em função da quantidade de cadernos comprados.

b) Quantos cadernos podem ser comprados com R$ 102,00?

c) E com R$ 152,00?

3) Uma companhia de eletricidade cobra R$ 0,50 por cada kwh consumido.

a) Expresse algebricamente o valor a ser pago em função da quantidade de kwh consumida.

b) Qual é o valor a ser pago por uma residência que consumiu 120 kwh em um certo mês?

c) Quantos kwh foram gastos por um consumidor que recebeu uma conta no valor de R$ 40,00?

4) Uma companhia de telefonia celular cobra, mensalmente, R$ 30,00 de assinatura, mais R$ 0,50 por minuto de conversação.

a) Expresse algebricamente o valor a ser pago em função dos minutos de conversação.

b) Qual o valor da conta a ser pago por um cliente que não faz chamadas durante o mês?

c) E por outro que fala durante 20 minutos?

d) Quantos minutos falou um consumidor que pagou uma conta no valor de R$ 100,00?

5) Uma papelaria faz fotocópias cobrando:

- R$ 0,10 por cópia, para quantidades inferiores a 1000 cópias;
- R$ 0,05 por cópia, para quantidades maiores ou iguais a 1000 cópias.

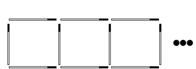
a) Expresse algebricamente o preço a pagar em função do número de cópias tiradas.

b) Quantas cópias uma pessoa que pagou R$ 100,00 tirou?

c) E R$ 50,00?

d) E R$ 200,00?

6) Juntando palitos de fósforos, um menino forma quadrados, como indica a figura.



a) Complete a tabela abaixo

número de quadrados	**número de palitos**
1	
2	
3	
4	
5	
6	

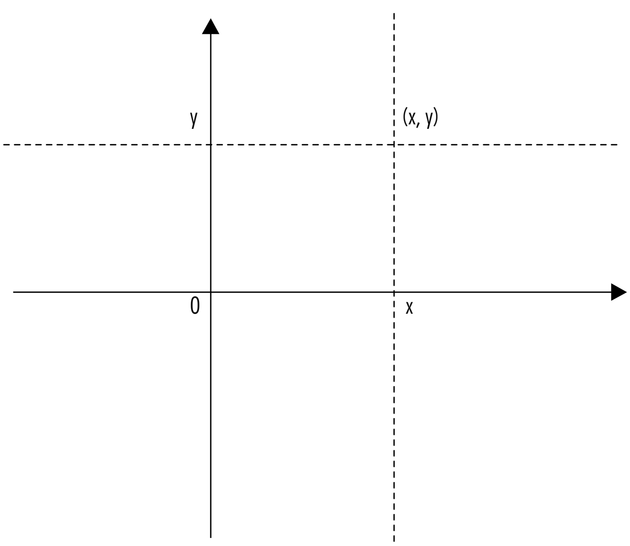
b) Quantos palitos são necessários para formar 50 quadrados?

c) Expresse o número de palitos necessários para formar k quadrados.

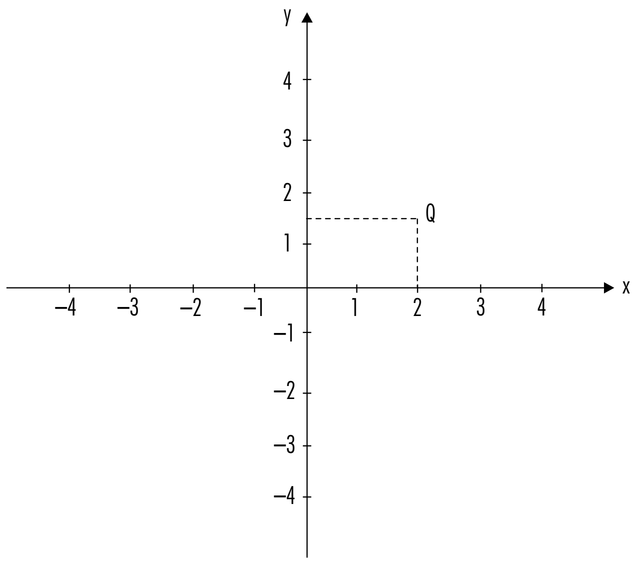
O Plano Cartesiano

Para representar funções que associam números a outros números, é importante entender bem a estrutura do plano cartesiano, chamado IR^2.

Construímos dois eixos ortogonais se interceptando em um ponto, cada um dos quais representando a reta real. Isto nos fornece um sistema de localização em que é possível representar qualquer ponto do plano por meio de um par de números reais (x,y), que chamamos de um par ordenado. Os valores x e y são chamados de coordenadas do par ordenado (x,y). Dado um par ordenado (x,y), localizamos a coordenada no eixo horizontal e a coordenada y no eixo vertical. Em seguida, traçamos a reta vertical passando pela coordenada x e a reta horizontal passando pela coordenada y. Neste sistema, as coordenadas horizontais são chamadas abscissas e as coordenadas verticais de ordenadas. O ponto no plano dado pelo encontro dessas duas retas representará (x,y) .



Veja, por exemplo, a representação do ponto Q = (2, 3/2).



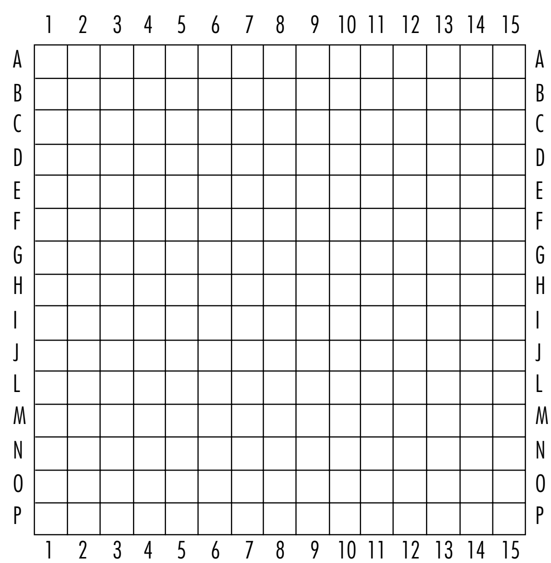
Observe que o termo par ordenado se deve ao fato de que é a ordem em que escrevemos os números que indica qual deles corresponde à coordenada horizontal e qual corresponde à coordenada vertical. Assim, por exemplo, os pares ordenados correspondem a pontos no plano diferentes.

Este tipo de representação tem uma importante propriedade, que permite que localizemos qualquer ponto de forma inequívoca:

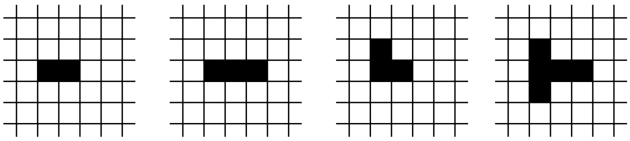
Cada ponto no plano representa um único par ordenado e cada par ordenado é representado por um único ponto.

Exercícios

7) No jogo “Batalha Naval”, o objetivo de cada jogador é afundar a frota naval do adversário. O campo de batalha é representado por um quadriculado em que as linhas são representadas por letras e as colunas por números, como mostra a figura abaixo.



Os navios de cada frota são representados por conjuntos de quadradinhos pintados em configurações específicas, como as exemplificadas abaixo. Cada jogador posiciona sua frota sem que o outro veja. Este deve tentar adivinhar a localização da frota do adversário, anunciando, em cada jogada, uma localização escolhida.



a) Se um jogador anunciar, por exemplo, a posição F9, o adversário terá alguma dúvida sobre que ponto do tabuleiro foi escolhido?

b) Se um jogador quiser anunciar o ponto que está na 2ª linha (de cima para baixo) e na 3ª coluna (da esquerda para a direita), como ele deve identificá-lo? Existe mais de uma maneira de identificar o ponto no sistema do jogo?

c) Por que é necessário que as linhas e colunas sejam identificadas por letras e números para que o jogo possa ocorrer?

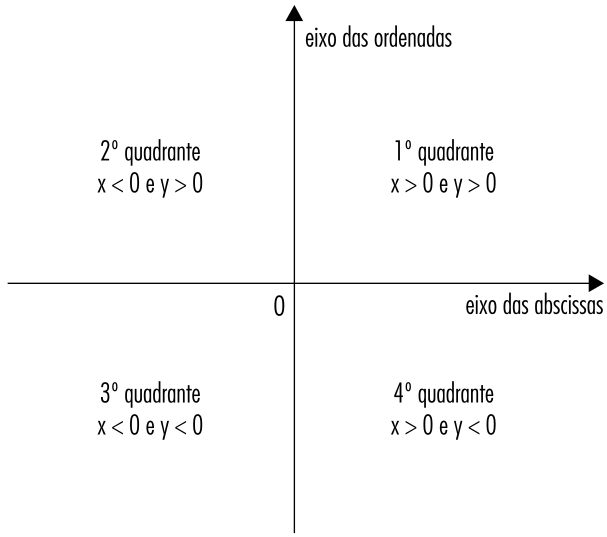
8) Nos mapas do mundo, usamos o sistema de localização por latitudes e longitudes para localizar pontos. Nesse sistema, cada ponto é representado por duas coordenadas, sendo que a primeira representa a latitude e a segunda a longitude. Os pontos de latitude 0 correspondem à linha do equador, os pontos a norte do equador são identificados pela letra N e os ao sul pela letra S. Os pontos de longitude 0 correspondem ao meridiano de Greenwich (que passa pelo observatório astronômico de Greenwich, em Londres, Inglaterra), os pontos a leste de Greenwich são identificados pela letra E e os pontos a oeste de Greenwich pela letra W. Por exemplo, as coordenadas (64N, 58W) representam o ponto de latitude 64º norte e longitude 58º oeste.

a) Encontre as coordenadas da cidade de Brasília neste sistema. Existe mais de uma forma de representar a cidade de Brasília no sistema de latitudes e longitudes?

b) Localize no mapa o ponto correspondente às coordenadas (57S, 22E). Existe mais de um ponto no mundo que corresponda a estas coordenadas?

9) O que os sistemas de localização usados no jogo de Batalha Naval e nos mapas do mundo têm em comum com o sistema de localização por coordenadas do plano cartesiano?

O plano em que representamos este sistema de localização é chamado de plano cartesiano. O eixo horizontal é chamado de eixo das abscissas e o vertical de eixo das ordenadas. Podemos ainda dividir o plano cartesiano em quatro regiões determinadas pelos eixos. Estas regiões são chamadas quadrantes.

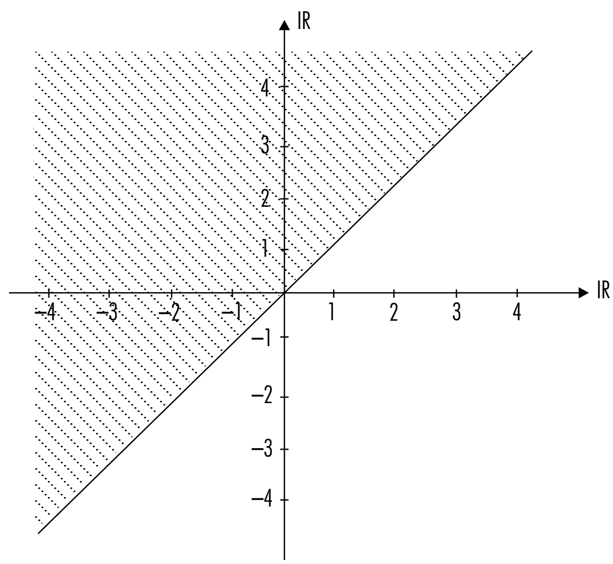


Como no plano cartesiano cada ponto é representado de forma única, este sistema nos permite representar subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. Observe os exemplos a seguir.

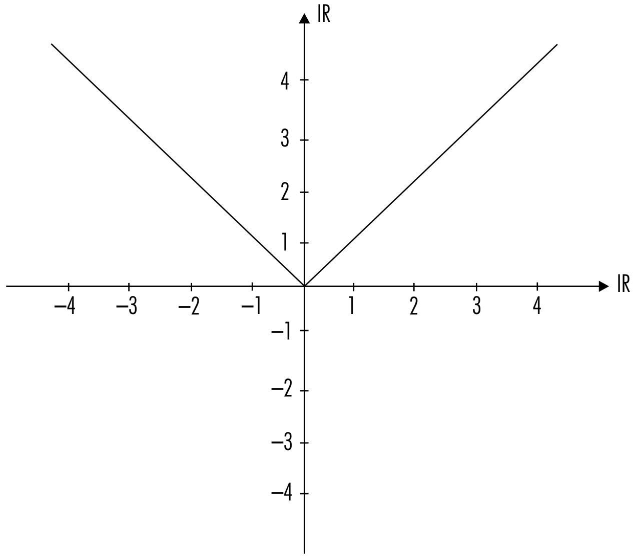
Exemplos

• Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ o conjunto formado pelos pontos (x,y) tais que $Y \geq x$.

Devemos representar todos os pontos do plano cartesiano cujas ordenadas são maiores ou iguais às respectivas abscissas.



• Seja K IR^2 o conjunto dos pontos (m,n) tais que $m \in$ IN e $n = m + 1$. Devemos representar todos os pontos com estas características.



Exercícios

10) Represente geometricamente no plano IR^2 os seguintes conjuntos:

a) dos pontos cuja coordenada horizontal é igual a 0.
b) dos pontos cuja coordenada vertical é igual a –1.
c) dos pontos (x,y) tais que $x = 2$.
d) dos pontos (x,y) tais que $x = y$.
e) dos pontos cuja coordenada vertical é positiva.
f) dos pontos cuja coordenada horizontal é menor ou igual a 1.
g) dos pontos (x,y) tais que $x \geq -1$.
h) dos pontos (x,y) tais que $y \geq x$.
i) dos pontos (x,y) tais que $x \cdot y = 0$.
j) dos pontos (x,y) tais que $x > y = 0$.

11) Determine uma condição algébrica que garanta que um ponto (x,y) esteja localizado:

a) No eixo horizontal.
b) No eixo vertical.
c) No primeiro quadrante.
d) No segundo quadrante.
e) No terceiro quadrante.
f) No quarto quadrante.
g) No primeiro ou no segundo quadrantes.
h) No primeiro ou no terceiro quadrantes.

12) O que podemos afirmar sobre a posição de um ponto $(x,y) \in$ IR^2 se:

a) $x > 0$

b) $x < 0$

c) $y > 0$

d) $x \geq 0$

e) $y \geq 0$

f) $x \cdot y \geq 0$

g) $x \cdot y < 0$

h) $x \cdot y = 0$

13) Em cada um dos itens abaixo, determine os valores reais de a e b tais que os pares ordenados dados sejam iguais.

a) $(2a - 1, b + 2)$ e $(3a + 2, 2b - 6)$

b) (a,b) e $(b + 1,2a)$

c) $(a, 4)$ e (b^2, a)

O Conceito de Função

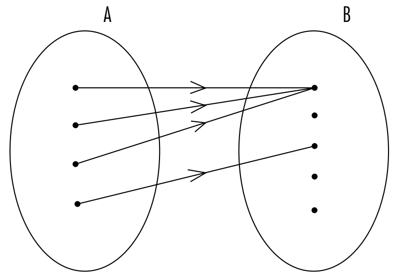
Como já observamos, uma função é uma maneira especial de associar elementos de dois conjuntos X e Y, que satisfaz duas condições fundamentais:

i) todo elemento de X está associado a um elemento de Y;
ii) nenhum elemento de X está associado a mais de um elemento de Y.

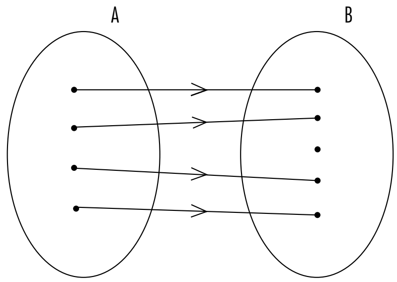
O conjunto X é chamado de domínio e o conjunto Y de contradomínio da função. De forma geral, podem ser quaisquer conjuntos, sem qualquer restrição, mas neste texto abordaremos funções cujo domínio e contradomínio são subconjuntos de IR.

Desta forma, uma função é uma relação entre elementos desses dois conjuntos em que cada elemento do domínio está associado a um e somente um elemento do contradomínio. Como já vimos, este tipo especial de relação é importante para estudar fenômenos de vários tipos, em diversas áreas do conhecimento, como física, biologia, economia, etc.

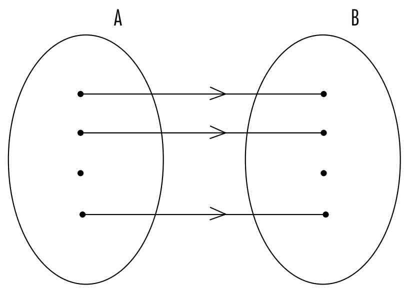
Os diagramas a seguir ilustram alguns exemplos de relações que são funções e outras que não são funções.



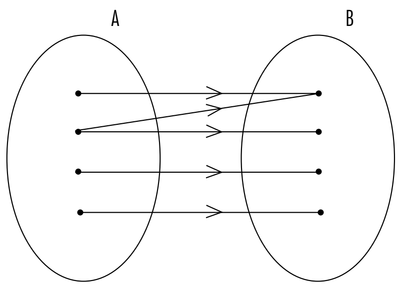
é função



é função



não é função, pois satisfaz a condição (ii),
mas não satisfaz a condição (i)



não é função, pois satisfaz a condição (i),
mas não satisfaz a condição (ii)

Consideremos uma função representada pela letra f, com X e contradomínio Y. Dado um elemento, o (único) elemento que está associado a x é chamado de imagem de x e representado por f(x). Assim, para cada x em X a função f associa um único elemento y = f(x) em Y.

O conjunto de todos os elementos do contradomínio Y que são imagem de algum elemento do domínio X é chamado de conjunto imagem de f, ou simplesmente imagem de f, e representado por Im(f). Assim: $Im(f) = \{y \in X \mid \exists x \in A, f(x) = y\} \subset Y$

A imagem de uma função pode ser menor que o seu contradomínio, pois pode haver elementos do contradomínio que não são imagem de nenhum elemento do domínio. Observe também que, uma função deve associar cada elemento do domínio a um elemento do contradomínio, mas não é preciso que todo elemento do contradomínio corresponda a algum elemento do domínio. Veremos exemplos de funções com estas propriedades nos exercícios a seguir.

Para representar uma função, em geral usamos a seguinte notação, que indica claramente o domínio, o contradomínio e a forma como seus elementos são associados:

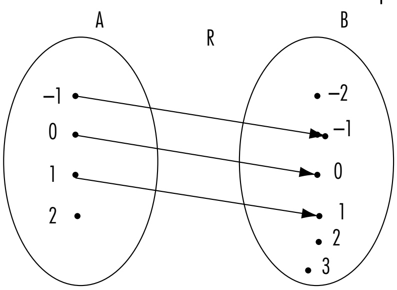
$$\begin{aligned} f:\ X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Entretanto, aqui em geral, usaremos a notação simplificada y = f(x).

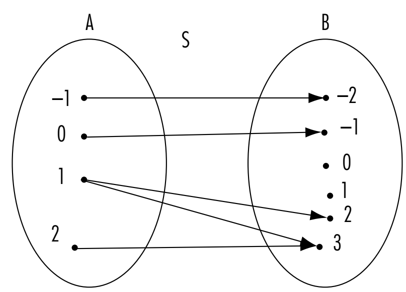
Exercícios

14) Cada um dos diagramas abaixo representa uma relação entre os conjuntos A = {–1, 0, 1, 2} e B = {–2,–1, 0, 1, 2, 3}. Determine quais deles representam funções com domínio em A e contradomínio em B. Justifique sua resposta.

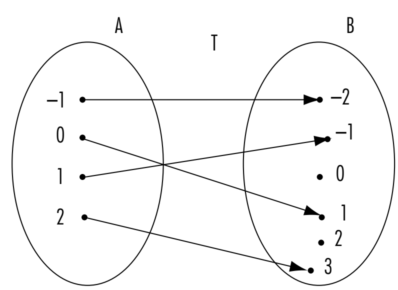
a)



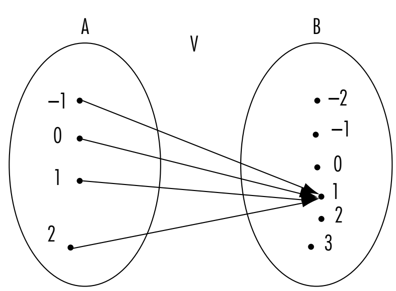
b)



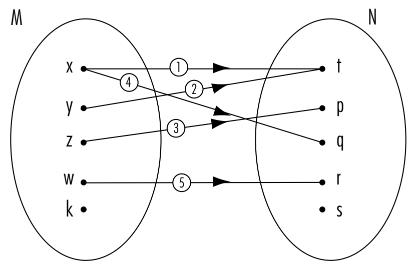
c)



d)



15) (UFF/1993) Considere a relação f de M em N, representada no diagrama abaixo.



Para que f seja função de M em N, basta:

a) Apagar a seta (1) e retirar o elemento s.

b) Apagar as setas (1) e (4) e retirar o elemento k.

c) Retirar os elementos k e s.

d) Apagar a seta (4) e retirar o elemento k.

e) Apagar a seta (2) e retirar o elemento k.

16) Considere a função f: IR $\rightarrow$ IR dada por $f(x) = x^2 - x$.

a) Determine $f(-2)$, $f(1/2)$, $f\left(\sqrt{2}\right)$ e $f\left(1-\sqrt{3}\right)$.

b) Determine todos os elementos de f: IR $\rightarrow$ IR cuja imagem por f vale 2.

17) Considere a função f: IR $\rightarrow$ IR definida por:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \quad \text{se} \quad x \geq 1 \\ f(x) &= x - 1 \quad \text{se} \quad x < 1 \end{aligned}$$

a) Determine f(0), f(1/2), f(1) e f(2).

b) Determine a imagem de f.

18) Considere a função f: [0, +∞ [$\rightarrow$ IR definida por $f = \dfrac{x^2 - x + 1}{x + 1}$. Determine f(0), f(1/2) e $f\left(\sqrt{2} - 1\right)$.

19) Como observamos acima, uma função é definida por três elementos: domínio, contradomínio e lei de associação. Nos itens abaixo, determine o maior subconjunto D $\subset$ IR tal que seja possível definir uma função f: D $\rightarrow$ IR, y = f(x), com a lei de formação dada.

a) $y = \dfrac{2x - 3}{x - 2}$

b) $y = \dfrac{x + 2}{x^2 - 1}$

c) $y = \sqrt{x + 2}$

20) (UFMG) A função f: IR $\rightarrow$ IR associa a cada número real x o menor inteiro maior que x. Determine os valores de f(–1), f(0), f(2), f(–3/2), f(1/3), f(5/4) e $f\left(\sqrt{2}\right)$.

21) (UFMG) A função f: IR $\rightarrow$ IR associa a cada número real x o menor inteiro maior que 2x. Determine o valor de f(–2) + f(–1/5) + f(2/3).

22) (FGV-SP) Considere a seguinte função de variável real:

f(x) = 1 se x é racional

f(x) = 0 se x é irracional

Podemos afirmar que:

(A) f(2,3) = 0

(B) f(3,1415) = 0

(C) $0 \leq f(a) + f(b) + f(c) \leq 3$

(D) f(f(a)) = 1

(E) f(0) + f(1) = 1

23) (FUVEST) Seja f uma função tal que $f(x + 3) = x^2$ para todo x real. Então é igual a:

(A) $x^2 - 2$

(B) $10 - 3x$

(C) $-3x^2 + 6x + 10$

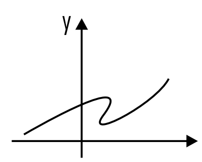
(D) $x^2 - 6x + 10$

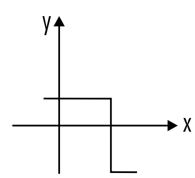
(D) $x^2 + 6x - 10$

Gráficos de Funções

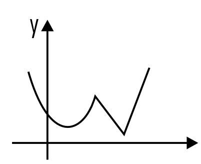
Com base na definição de função, podemos verificar que alguns subconjuntos do plano cartesiano podem representar gráfico de função e outros não. Para que isto seja possível, é preciso que a cada coordenada no eixo das abscissas só corresponda uma única coordenada no eixo das ordenadas. Observe os exemplos abaixo.

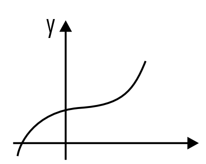
Podem representar gráficos de funções:





Podem representar gráficos de funções:

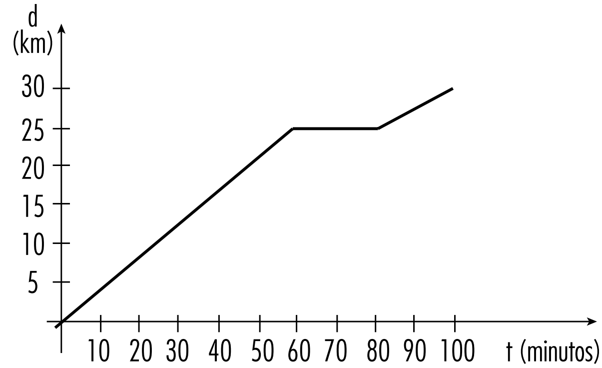




Existem várias técnicas para traçar gráficos de funções, quando são dadas as fórmulas algébricas. Em alguns casos, a construção de uma tabela de valores convenientemente escolhidos pode ajudar. Veremos alguns exemplos nos exercícios a seguir.

EXERCÍCIOS

24) A figura abaixo representa graficamente a distância percorrida em função do tempo num passeio de bicicleta.

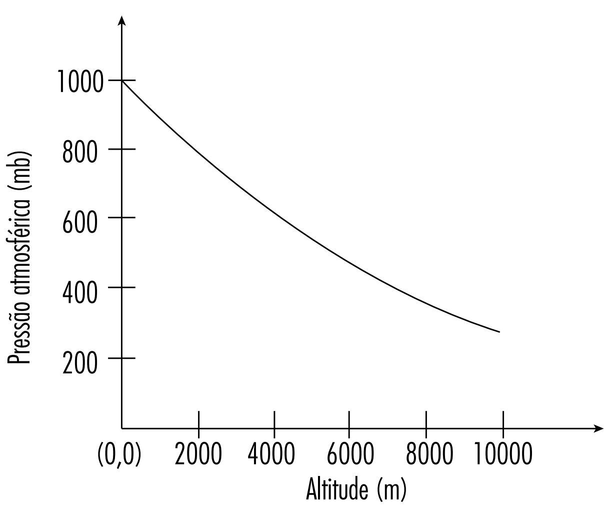


a) Quanto tempo durou o passeio?

b) A certa altura o ciclista parou para descansar. Quanto tempo durou essa parada?

c) O ciclista foi mais rápido antes ou depois da parada? Você é capaz de dizer qual a sua velocidade em cada uma das duas partes do passeio?

25) A pressão atmosférica diminui à medida que a altitude aumenta. O gráfico seguinte traduz, de modo aproximado, essa variação, estando a pressão atmosférica indicada em milibares e a altitude em metros.



Retirado da Revista *Educação e Matemática*, nº 23

a) Qual é a pressão atmosférica a uma altitude de 2000 m? E de 4000 m?

b) A partir de que altitude a pressão se torna inferior a 700 mb? E a 400 mb?

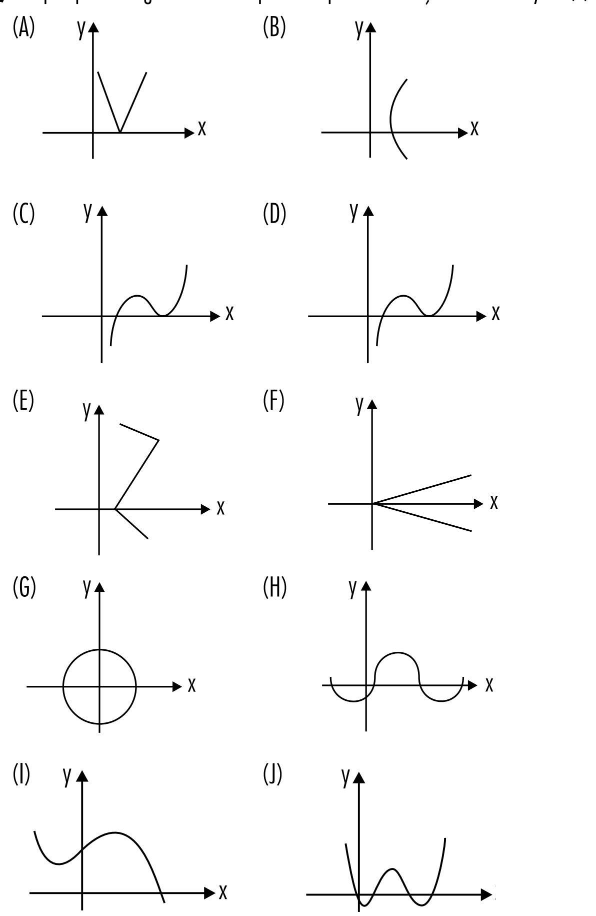
c) Descreva, em poucas linhas, com suas próprias palavras, a variação de pressão atmosférica em relação à altitude.

26) Esboce o gráfico correspondente à função que você determinou no exercício (1).

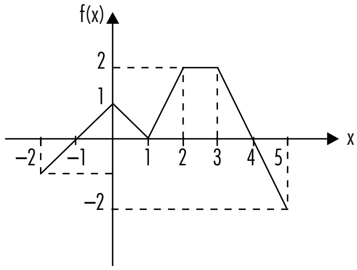
27) Esboce o gráfico correspondente à função que você determinou no exercício (2). Neste exemplo faz sentido ligar os pontos? Justifique sua resposta.

28) Esboce o gráfico correspondente à função que você determinou no exercício (4).

29) Indique quais dos gráficos abaixo podem representar funções da forma $y = f(x)$.



30) (UFRJ / 1993) Uma função f tem o seguinte gráfico:



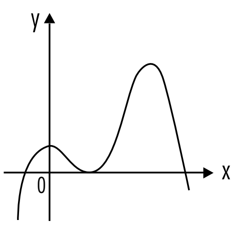
Considere uma nova função definida por $g(x) = f(x + 1)$.

a) Determine as raízes da equação $g(x) = 0$.

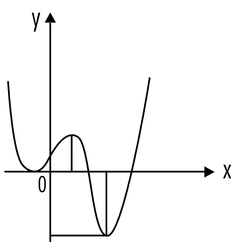
b) Determine os intervalos do domínio de g nos quais esta função é estritamente crescente.

31) (UFF / 1994) O gráfico que melhor representa a função polinomial $p(x) = (x-1)^2(x-4)\left(x+\frac{4}{9}\right)$ é:

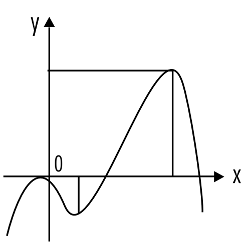
(A)



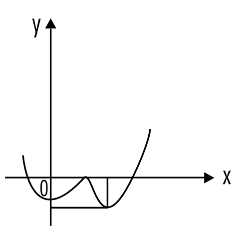
(B)



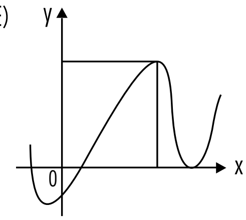
(C)



(D)



(E)



32) Nos itens a seguir, as expressões dadas representam funções cujos domínios são subconjuntos de IR. Em cada um deles, determine um conjunto compatível para ser o domínio da função e esboce o gráfico da função:

a) $f(x) = 1 - x$
b) $f(x) = x - 2$
c) $f(x) = |x|$
d) $f(x) = |2x| + 1$
e) $f(x) = |x - 1|$
f) $f(x) = x^2$
g) $f(x) = x^2 - 1$
h) $f(x) = |x^2 - 1|$
i) $f(x) = x^3$
j) $f(x) = x(x-1)$
k) $f(x) = x\,(x^2 - 1)$
l) $f(x) = x^2 \cdot (x - 1)$
m) $f(x) = \sqrt[3]{x}$
n) $f(x) = 1/x$

Aprofundamentos (Leitura Opcional)

Funções Injetoras e Sobrejetoras

Dois tipos de função são particularmente importantes em matemática. Sabemos que, para que uma relação seja uma função, é preciso que todo elemento $x \in A$ do domínio esteja associado a um, e não mais que um, elemento $x \in B$ do contradomínio. Entretanto, como vimos nos exemplos anteriores, pode acontecer que um elemento $y \in B$ do contradomínio não corresponda a nenhum elemento do domínio, ou então a mais de um elemento do domínio. Se uma função satisfaz a uma destas condições para os elementos do contradomínio, então a classificamos pela definição a seguir.

Seja $f: A \to B$ uma função.

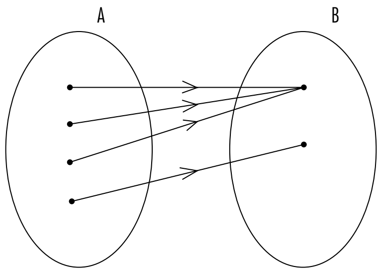
(i) Se todo elemento de B corresponde a pelo menos um elemento de A, dizemos que f é ***sobrejetora***.

(ii) Se nenhum elemento de B corresponde a mais de um elemento de A, dizemos que f é ***injetora***.

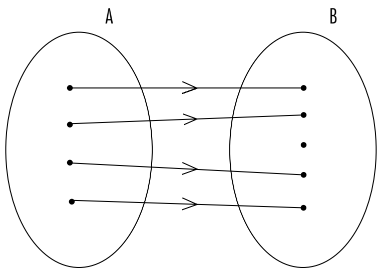
(iii) Se cada elemento de B corresponde a um, e não mais que um, elemento de A (isto é, se f é, ao mesmo tempo sobrejetora e injetora), dizemos que f é ***bijetora***.

Os diagramas abaixo ilustram estas propriedades. Se $f: A \to B$ é sobrejetora, então todo elemento do contradomínio B recebe pelo menos um, mas pode receber mais elementos do domínio A. Se $f: A \to B$ é injetora, então nenhum elemento do contradomínio B pode receber mais de um elemento do domínio A, mas algum elemento de B pode não receber nenhum elemento de A.

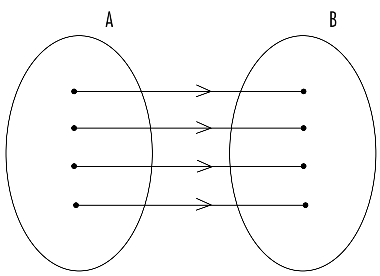
Assim, se f: $A \to B$ é sobrejetora e injetora ao mesmo tempo, então cada elemento do contradomínio B recebe um único elemento do domínio. Neste caso dizemos que f é bijetora, e podemos definir a função inversa de f, denotada por f^{-1}. A inversa de f é a função f^{-1}: $B \to A$, cujo domínio é o contradomínio de f, cujo contradomínio é o domínio de f, e cuja lei de formação "reverte" a lei de formação de f.



é sobrejetora, mas não é injetora



é injetora, mas não é sobrejetora



é injetora e sobrejetora, portanto é bijetora

Exercícios

33) Em cada um dos itens abaixo, verifique se a função dada é sobrejetora, injetora ou bijetora. Caso a função seja bijetora, defina a sua inversa.

a) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [0,+\infty[\\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

b) $f: \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

c) $f: \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & [0,+\infty[\\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

d) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array}$

e) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+3 \end{array}$

f) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+3 \end{array}$

g) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n^2 \end{array}$

h) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \{0,1,2,3,4\} \\ n & \mapsto & \text{resto da divisão } n \div 5 \end{array}$

34) Dê outros exemplos de funções que sejam injetoras e não sobrejetoras e de funções que sejam sobrejetoras e não injetoras.

35) Considere f: $A \to B$. Responda as perguntas a seguir.

Sugestão: observe os diagramas acima.

a) Se f é sobrejetora e A tem 5 elementos, o que se pode afirmar sobre o número de elementos de B?

b) Se f é injetora e A tem 5 elementos, o que se pode afirmar sobre o número de elementos de B?

c) Se f é bijetora e A tem 5 elementos, o que se pode afirmar sobre o número de elementos de B?

36) Seja f uma função de Z em Z, definida por:

$f(x) = 0$ se x é par $\qquad$ $f(x) = 1$ se x é ímpar

Podemos afirmar que:

(A) f é injetora e não sobrejetora
(B) f é sobrejetora e injetora
(C) $f(-5).\,f(2) = 1$
(D) $f(f(x)) = 0 \ \forall\, x \in \mathbb{Z}$
(E) A imagem de f é o conjunto $\{0,1\}$

37) (PUC / 1993) Entre as funções T: $IR^2 \rightarrow IR^2$ abaixo, não é injetora a definida por:
(A) T(x, y) = (x, 0)
(B) T(x, y) = (y, x)
(C) T(x, y) = (2x, 2y)
(D) T(x,y) = (–y, x)
(E) T (x, y) = (x + 1, y + 1)

38) (UFF / 1996) Para a função T: IN* $\rightarrow$ IN*, que a cada número natural não nulo associa o seu número de divisores, considere as afirmativas:
I) Existe um número natural não nulo tal que f(n) = n.
II) f é crescente.
III) f é não injetiva.

Assinale as opções que contém a(s) afirmativa(s) corretas:
(A) apenas II (B) apenas I e II
(C) I, II e III (D) apenas I
(E) apenas I e II

Exercícios de Vestibular

1) Considere a função f: IN $\rightarrow$ IN definida da seguinte forma:

$$f(0)=1$$
$$f(n)=2^{f(n\ \ 1)} \quad \forall n \geq 1$$

Calcule f(3).

2) (CESGRANRIO) Seja f a função que associa, a cada número real x, o menor dos números x + 1 e 5 – x. Então, o valor máximo de f(x) é:
(A) 1 (B) 3
(C) 4 (D) 5
(E) 7

3) Chama-se ponto fixo de uma função f: D $\subset$ IR IR um número real x tal que f(x) = x. Os pontos fixos da função f: IR* $\rightarrow$ IR definida por f (x) 1 + 1/x são:
(A) $x = \pm 1$
(B) $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
(C) f não tem pontos fixos
(D) f tem infinitos pontos fixos

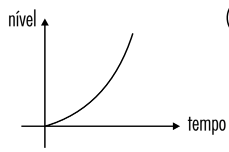
4) (IBMEC / 1998) Considere a função f, de IR em IR, tal que f(x + 1) = f(x) + 2 e f(2) = 3. Então, f(50) é igual:
(A) 105 (B) 103
(C) 101 (D) 99
(E) 97

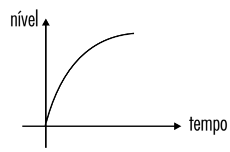
5) Se, $f(n+1) = f(n) + \frac{1}{2}, \forall\ n \in IN$ e $f(1) = 2$ então, f(101) é igual:
(A) 49
(B) 50
(C) 53
(D) 52
(E) 51

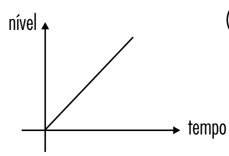
6) (FUVEST / 1982) Uma função de variável real satisfaz à condição f(x + 1) = f(x) + f(1), qualquer que seja o valor da variável x. Sabendo que f(2) = 1, podemos concluir que f(5) é igual a:
(A)1/2
(B) 1
(C) 5/2
(D) 5
(E) 10

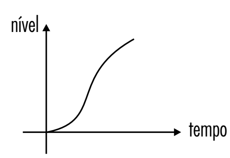
7) (FUVEST / 1983) Um número real é solução das equações f(x) = 0 e g(x) = 0 se e somente se é raiz da equação:
(A) f(x) + g(x) = 0
(B) $[\ f(x)\ ]^2 + [\ g(x)]^2 = 0$
(C) f(x). g(x) = 0
(D) $[\ f(x)\ ]^2 - [\ g(x)]^2 = 0$
(E) f(x) – g(x) = 0

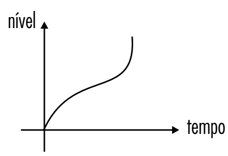
8) (PUC / 1992) Um reservatório tem a forma de um cone de revolução de eixo vertical e vértice para baixo. Enche-se o reservatório por intermédio de uma torneira de vazão constante. O gráfico que melhor representa o nível da água em função do tempo, contado a partir do instante em que a torneira foi aberta é:

(A)


(B)


(C)


(D)


(E)


Gabarito

Exercícios
1) a) 5 km b) 10 km c) d = 5.t
2) a) y = 3x b) 35 c) 50
3) a) p=0,5q b) R$ 60,00 c) 80 kwh

4) a) $y = 0{,}5.t+30$ b) R$ 30,00 c) R$ 40,00 d) 140 minutos

5) a) $y = 0{,}1x$ se $0 \leq x < 1000$

$0{,}05$ se $1000 \leq x$

b) 2000 cópias c) 500 ou 1000 cópias d) 4000 cópias

6) a)

1	4
2	7
3	10
4	13
5	16
6	19

b) 151 palitos

c) $n = 3k+1$

7) a) Não b) B3. Não.

c) Para que as jogadas possam ser comunicadas entre os jogadores de forma que não haja ambiguidades.

8) a) Aproximadamente (15S,47W). Não.

b) O ponto fica no mar, ao sul do continente africano. Não.

9) Os pontos podem ser localizados sem ambiguidade, isto é, cada par de coordenadas corresponde a um único ponto, e cada ponto está associado a um único par de coordenadas.

10) a) Eixo vertical.

b) Reta horizontal $y = -1$.

c) Reta vertical $x = 2$.

d) Diagonal do 1º e do 3º quadrantes.

e) 1º e 2º quadrantes (excluído o eixo vertical).

f) Região situada à esquerda da reta vertical $x = -1$.

g) Região situada à direita ou sobre a reta vertical $x = -1$.

h) Região situada acima ou sobre a diagonal do 1º e do 3º quadrantes.

i) Eixos horizontal e vertical.

j) 1º e 3º quadrantes.

11) a) $y = 0$

b) $x = 0$

c) $x > 0$ e $y > 0$

d) $x < 0$ e $y > 0$

e) $x < 0$ e $y < 0$

f) $x > 0$ e $y < 0$

g) $y > 0$

h) $x \cdot y > 0$

12) a) (x,y) está no 1º ou no 4º quadrantes

b) (x,y) está no 2º ou no 3º quadrantes

c) (x,y) está no 3º ou no 4º quadrantes

d) (x,y) está no 1º ou no 4º quadrantes, ou sobre o eixo vertical

e) (x,y) está no 1º ou no 2º quadrantes, ou sobre o eixo horizontal

f) (x,y) está no 1º ou no 3º quadrantes, sobre o eixo horizontal ou sobre o eixo vertical

g) (x,y) está no 2º ou no 4º quadrantes

h) (x,y) está sobre um dos dois eixos

13) a) $a = -3$ e $b = 8$

b) $a = -1$ e $b = -2$

c) $a = 4$ e $b = -2$; ou $a = 4$ e $b = 2$

14) a) Não é função, pois não satisfaz a condição (i) da definição.

b) Não é função, pois não satisfaz a condição (ii) da definição.

c) É função, pois satisfaz ambas as condições da definição.

d) É função, pois satisfaz ambas as condições da definição.

15) D

16) a) $f(-2) = 6$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$, $f\left(\sqrt{2}\right) = 2 - \sqrt{2}$ e $f\left(1 - \sqrt{3}\right) = 3 - \sqrt{3}$

b) -1 e 2.

17) a) $f(0) = -1$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$, $f(1) = 1$ e $f(2) = 4$

b) $]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$

18) $f(0) = 1$, $f(1/2) = 1/2$ e

19) a) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$ $f\left(\sqrt{2} - 1\right) = \frac{5\sqrt{2} - 6}{2}$

b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1, x \neq 1\}$

c) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$

20) $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$, $f(2) = 3$, $f(-3/2) = -1$, $f(1/3)$, $f(5/4 = 2)$ e $f\left(\sqrt{2}\right) = 2$

21) $f(-2) + f(-1/5) + f(2/3) = 5$

22) São verdadeiras apenas as afirmações C, D e E.

23) D

24) a) 100 minutos

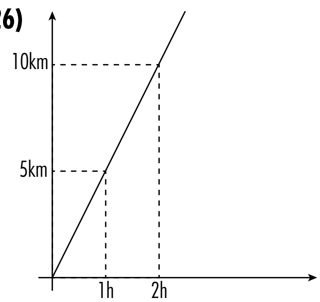
b) 20 minutos

c) Antes: aproximadamente 0,42 km/min. Depois: 0,25 km/min.

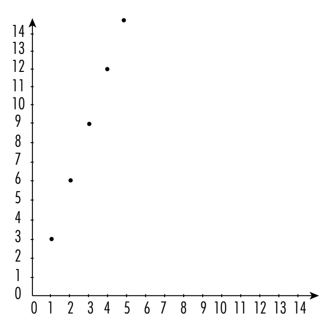
25) a) Aproximadamente 800 mb e aproximadamente 600 mb

b) Aproximadamente 3000 m e aproximadamente 7000 m.

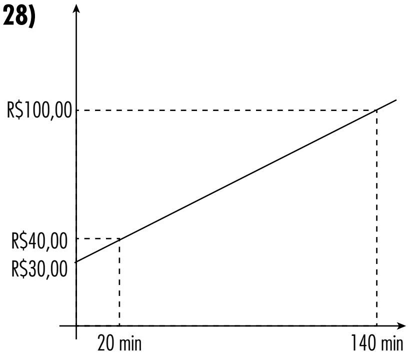
26)



27) Neste caso, não faz sentido ligar os pontos, pois não podemos comprar uma quantidade não inteira de cadernos.



28)

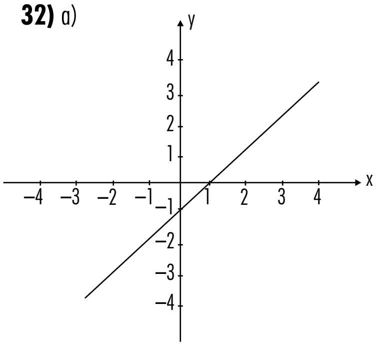


29) Itens: A, C, D, H, I, J.

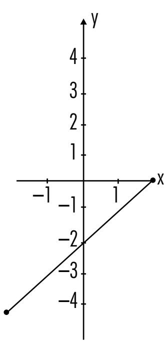
30) a) −2, 0 e 3 b) [−3,1] e [0,1]

31) D

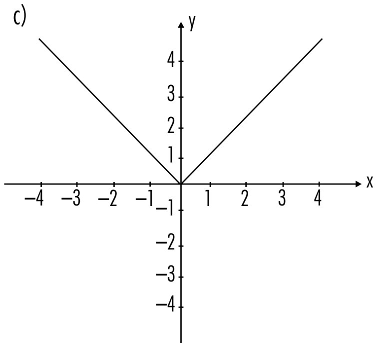
32) a)



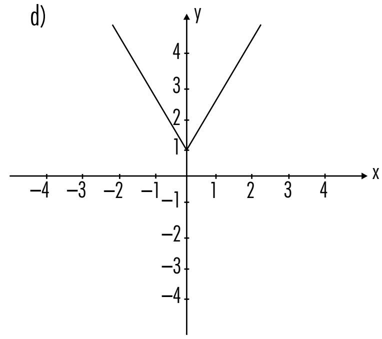
b)



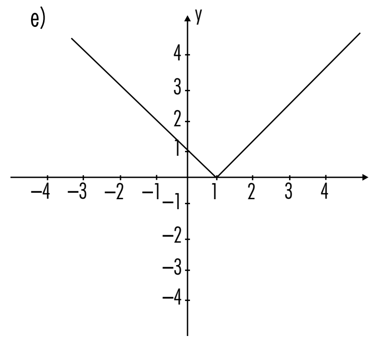
c)



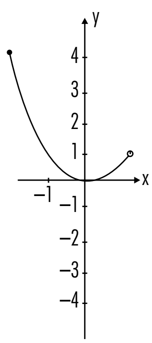
d)



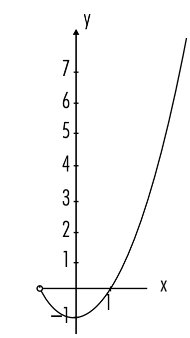
e)



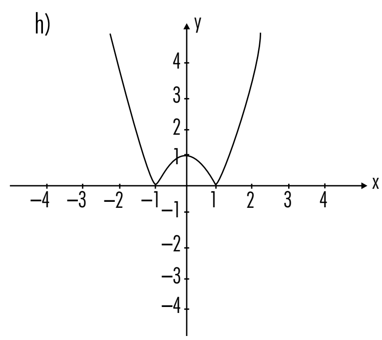
f)



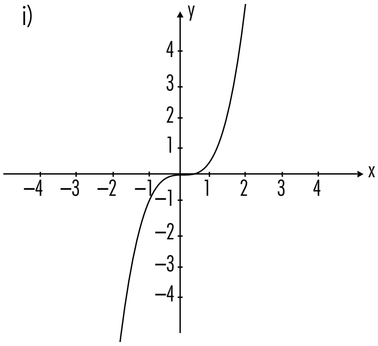
g)



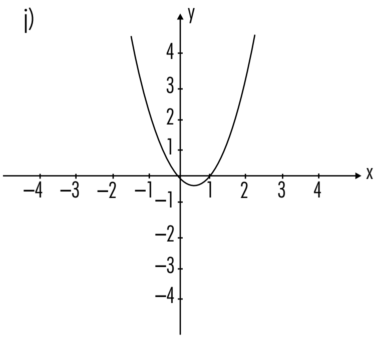
h)



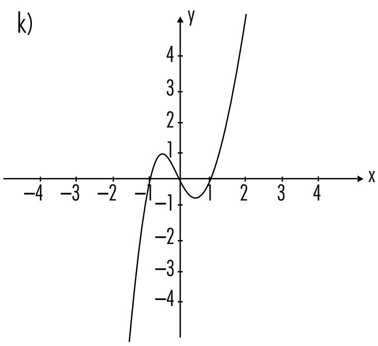
i)



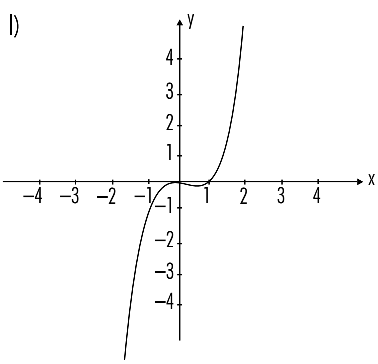
j)



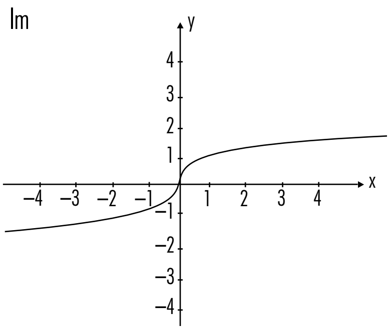
k)



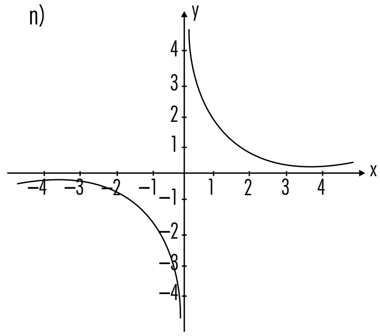
l)



lm



n)



33) a) Sobrejetora e não injetora. Portanto, não bijetora.
b) Não sobrejetora e injetora. Portanto, não bijetora.
c) Sobrejetora e injetora. Portanto, bijetora. Inversa:

$$\begin{array}{llcl} g: & [0,+\infty[& \rightarrow & [0,+\infty[\\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

d) Não sobrejetora e injetora. Portanto, não bijetora.
e) Não sobrejetora e injetora. Portanto, não bijetora.
f) Sobrejetora e injetora. Portanto, bijetora. Inversa:

$$\begin{array}{llcl} g: & \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ & n & \mapsto & n-3 \end{array}$$

g) Não sobrejetora e não injetora. Portanto, não bijetora.
h) Sobrejetora e não injetora. Portanto, não bijetora.
34) Resposta variável.
35) a) B tem no máximo 5 elementos
b) B tem no mínimo 5 elementos
c) B tem exatamente 5 elementos
36) E **37)** A **38)** B

Exercícios de Vestibular

1) f(3) = 16 **2)** B **3)** B **4)** B **5)** D **6)** C **7)** B **8)** B

9

Funções Afins

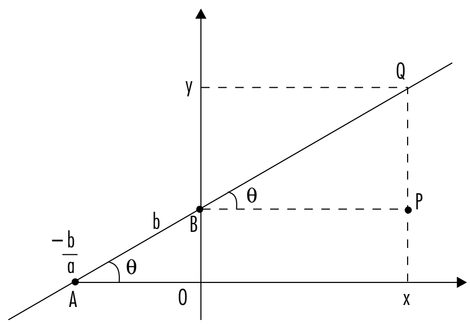
Definição

Uma função $f : R \longrightarrow R$ dada por $f(x) = ax+b$, onde a e b são números reais e $a \neq 0$, é chamada de função polinomial do 1º grau (ou função afim am). O número a é chamado coeficiente angular e b coeficiente linear da função.

Representação gráfica

Seja $y = f(x) = ax + b$.

Então $x = 0 \rightarrow y = b \Rightarrow x = \left(-\frac{b}{a}, 0\right) \rightarrow y = 0$ e os pontos (0, b) e $-\frac{b}{a}$, 0 definem uma reta no plano. Esta reta é o gráfico de f. Suponha para a representação abaixo que $a > 0$ e $b > 0$.



Observe na figura os triângulos retângulos AOB e BPQ, ambos com ângulo agudo θ. Nós ainda não revisamos trigonometria, mas provavelmente você sabe que podemos calcular a tangente do ângulo θ usando os triângulos.

Assim $\text{tg}\ \theta = \frac{Ob}{OA}$ e $\text{tg}\ \theta = \frac{QP}{bP}$.

Isto é, $\text{tg}\ \theta = \frac{b}{\frac{b}{a}} = a$ e $\text{tg}\ \theta = \frac{y-b}{x}$.

Juntando as equações, vemos que $a = \frac{y-b}{x} \Rightarrow y = ax + b$.

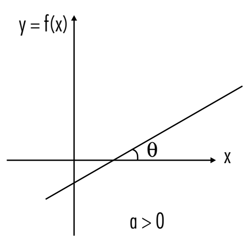
Nota:

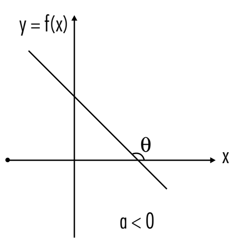
(i) Segundo o gráfico da função afim $f(x) = ax + b$, o coeficiente linear b da reta gráfico de f é o valor da ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo Oy.

(ii) O valor a dá origem à equação $a = \text{tg}\ \theta$, onde θ é a inclinação do gráfico de f. Temos dois casos a considerar:

a) $0 < \theta < 90 \Rightarrow \text{tg}\ \theta > 0$, ou seja, $a > 0$ logo f é função crescente.

b) $90^o < \theta < 180^o \Rightarrow \text{tg}\ \theta < 0$, ou seja, $a < 0$ logo f é função decrescente.





Exercícios resolvidos

(i) Construa o gráfico da função afim $f(x) = -x + 3$.

Solução:

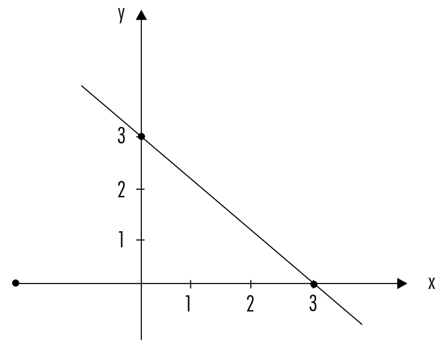
Precisamos determinar apenas dois pontos (x, y) do gráfico

$y = f(x) = -x + 3$

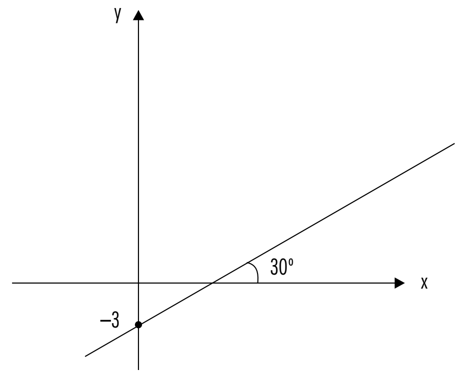
$x = 0 \Rightarrow y = 3$

$x = 3 \Rightarrow y = 0$

Então (0,3) e (3,0) são pontos do gráfico.



(ii) Determine a equação da reta $y = ax+b$ cujo gráfico está abaixo.



Solução:

Como tg 30º = $\frac{\sqrt{3}}{3}$, este é o valor de a. Logo, $y = f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b$.

Para achar b, usamos que (0, – 3) é ponto do gráfico.

Então $-3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 0 + b$ e $b = -3$.

Logo $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 3$.

Estudo do sinal de y = f(x) = ax+b

Queremos estudar a variação do sinal de $y = f(x) = ax+b$ quando x varia. Vamos dividir em dois casos.

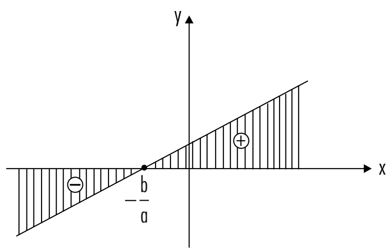
Caso 1: a > 0

$y = ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{a}$

$y = ax + b > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{b}{a}$

$y = ax + b < 0 \Leftrightarrow x < -\dfrac{b}{a}$

O gráfico a seguir mostra que para $x > -\dfrac{b}{a}$ o valor $y = f(x)$ é positivo e para $x < -b/a$ "o valor" $y = f(x) < -\dfrac{b}{a}$, $y = f(x)$ é negativo.



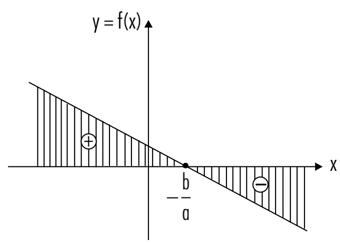
Caso 2: a < 0

$y = ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{a}$

$y = ax + b > 0 \Leftrightarrow x < -\dfrac{b}{a}$

$y = ax + b < 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{b}{a}$

O gráfico a seguir mostra $y = f(x) = ax + b$, mostra que para $x < -\dfrac{b}{a}$ o valor $y = f(x)$ é positivo e para $x > -\dfrac{b}{a}$ o valor $y = f(x)$ é negativo.



Exercícios resolvidos

Resolva as inequações abaixo:

a) $3x - 2 < 0$

b) $-x + 1 > 0$

c) $(3x + 6)(-2x + 8) < 0$

d) $\dfrac{x+3}{2x+1} \geq 2$

Solução:

(a) $3x - 2 < 0 \Leftrightarrow 3x < 2$, $x < \dfrac{2}{3}$

O conjunto solução $S = \left\{x \in R \mid x < \dfrac{2}{3}\right\} = \left(-\infty, \dfrac{2}{3}\right)$

(b) $-x + 1 > 0 \Leftrightarrow -x > -1 \Leftrightarrow x < 1$.

O conjunto solução é $S = \{x \in R \mid x < 1\} = (-\infty, 1)$.

(c) A inequação é um produto e para resolvê-la é eficiente fazer uma tabela. Primeiro encontramos as raízes de $y = 3x+6$ (raiz: $x = 2$) e de $y = -2x+8$ (raiz: $x = 4$). Em seguida, construímos a tabela de estudo do sinal de cada fator do produto:

$y = -2x + 8 \longrightarrow$ raiz $x = 4$

	-2	4	
$3x + 6$	−	+	+
$-2x + 8$	+	+	−
$(3x + 6)(-2x + 8)$	−	+	−

$3x + 6 > 0 \Leftrightarrow x > -2$

$3x + 6 < 0 \Leftrightarrow x < -2$

$-2x + 8 > 0 \Leftrightarrow x < 4$

$-2x + 8 < 0 \Leftrightarrow x > 4$

Com os dados anteriores, e usando que o produto de números de mesmo sinal é positivo e o produto de números de sinais contrários é negativo, completamos a tabela.

Logo o conjunto solução $S = (-\infty, -2) \cup (4, \infty)$

(d) Antes de resolver temos que reduzir o segundo membro a zero:

$$\frac{x+3}{2x+1} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+3-2(2x+1)}{2x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-3x+1}{2x+1} \geq 0$$

Esta última inequação é equivalente à inequação proposta inicialmente e tem forma própria para resolvermos como no item anterior. Construindo a tabela:

$-3x + 1 > 0 \Leftrightarrow -3x > -1 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{3}$

$-3x + 1 < 0 \Leftrightarrow -3x < -1 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{3}$

$2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{2}$

$2x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -\dfrac{1}{2}$

	$-1/2$	$1/3$	
$-3x + 1$	+	+	−
$2x + 1$	−	+	+
$\dfrac{-3x+1}{2x+1}$	−	+	−

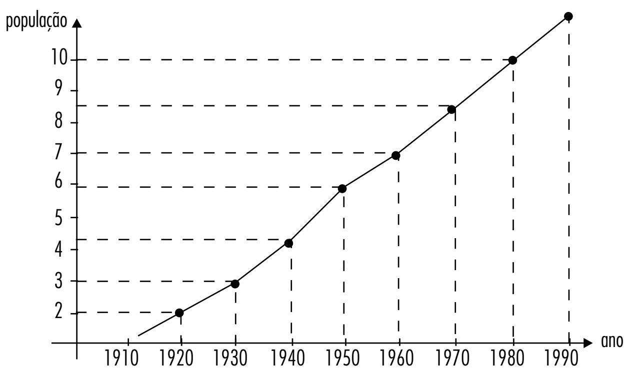
Na inequação quociente $\dfrac{-3x+1}{2x+1} \geq 0$ procuramos os valores de x que tornam o primeiro membro positivo ou nulo. O conjunto solução é $S = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\right]$.

Nota:

O valor $x = \frac{1}{3}$ anula o numerador e é solução. O valor $x = -\frac{1}{2}$ anula o denominador. Como o denominador nunca pode ser zero, este valor deve ser excluído do conjunto solução.

Exercícios

1) (UFRJ / 1998) O gráfico a seguir descreve o crescimento populacional de certo vilarejo desde 1910 até 1990. No eixo das ordenadas, a população é dada em milhares de habitantes.



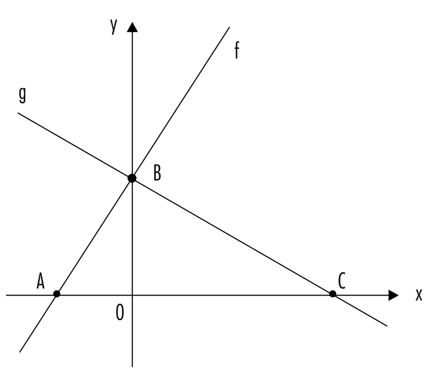
a) Determine em que década a população atingiu a marca de 5.000 habitantes.

b) Observe que a partir de 1960 o crescimento da população em cada década tem se mantido constante. Suponha que esta taxa se mantenha no futuro. Determine em que década o vilarejo terá 20.000 habitantes.

2) Determinar o valor de m para que o gráfico da função $y = f(x) = \frac{1}{3}(2x+m)$ passe pelo ponto $(-2, 1)$.

3) (IBMEC / 2001) Na figura abaixo, estão representadas as funções reais:

$f(x) = ax + 2$ e $g(x) = -\frac{2}{3}x + b$

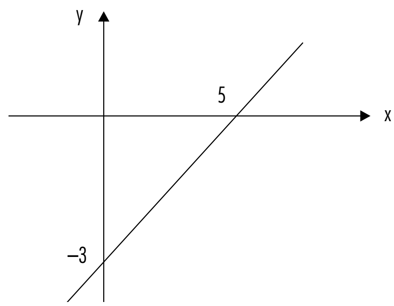


Sabendo que AC x OB = 8, então a reta que representa a função f passa pelo ponto:

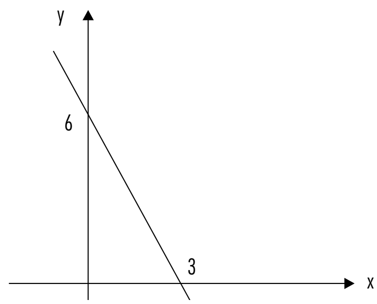
(A) (1, 3)
(B) (– 2, – 2)
(C) (– 1, 4)
(D) (2, 4)
(E) (3, 6)

4) Determine f(x), dado o gráfico:

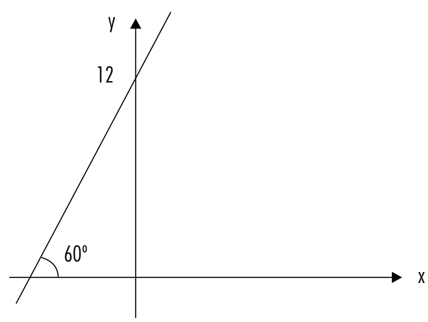
a)



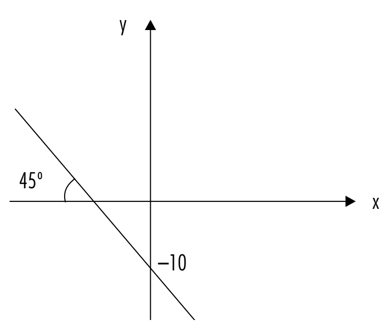
b)



c)



d)



5) Resolva as inequações do 1º grau:

a) $4x + 40 > 0$

b) $12 - 6x \geq 0$

c) $2x + 3 < 13$

d) $x + 1 < 2x$

e) $1 + 2x < 1 - 2x$

f) $2(x - 1) \geq 1 - 3(1 - x)$

6) (UERJ / 1993) O conjunto solução da inequação $\frac{2x-3}{3x-2} \geq 1$ é o seguinte intervalo:

(A) $(-\infty, -1)$

(B) $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right]$

(C) $\left[-1, \frac{2}{3}\right)$

(D) $[-1, \infty)$

(E) $\left(\frac{2}{3}, 1\right]$

7) (CESGRANRIO) O conjunto de todos os números reais $x < 1$ que satisfazem a inequação $\frac{2}{x-1} < 1$ é:

(A) }0}

(B) {0, ½}

(C) $\{x \in R \mid -1 < x < 1\}$

(D) $\{x \in R \mid x < 0\}$

(E) $\{x \in R \mid x < 1\}$

8) (FUVEST-SP) A função que representa o valor a ser pago após um desconto de 3% sobre o valor x de uma mercadoria é:

(A) $f(x) = x - 3$

(B) $f(x) = 0{,}97x$

(C) $f(x) = 1{,}3x$

(D) $f(x) = -3x$

(E) $f(x) = 1{,}03x$

9) (CESGRANRIO) Os valores positivos de x, para os quais $(x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) < 0$, constituem o intervalo aberto:

(A) (1, 3)

(B) (2, 3)

(C) (0, 3)

(D) (0, 1)

(E) (1, 2)

10) (UFSC) Seja $f(x) = ax + b$ uma função afim. Sabe-se que $f(-1) = 4$ e $f(2) = 7$. O valor de $f(8)$ é:

(A) 0

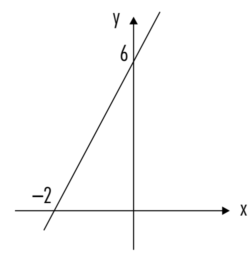
(B) 3

(C) 13

(D) 23

(E) 33

11) (UFF / 1993) A soma do coeficiente angular com o coeficiente linear da reta representada no gráfico a seguir é:



(A) – 3

(B) – 3

(C) 3

(D) 4

(E) 9

12) (PUC / 1991) A raiz da equação $\frac{x-3}{7} = \frac{x-1}{4}$ é:

(A) $-\frac{5}{3}$

(B) $-\frac{3}{5}$

(C) $\frac{5}{3}$

(D) $\frac{3}{5}$

(E) $\frac{2}{5}$

13) (UNIFOR-CE) Seja a função f de R em R, definida por $f(x) = 3x - 2$. A raiz da equação $f(f(x)) = 0$ satisfaz:

(A) $x \leq 0$

(B) $0 < x \leq \frac{1}{3}$

(C) $< x \leq 1$

(D) $1 < x < \frac{8}{3}$

(E) $x > \frac{8}{3}$

14) (PUC-RJ - Adaptado) Uma encomenda, para ser enviada pelo correio, tem um custo C de 10 reais para um peso P de até 1 kg. Para cada quilograma adicional, ou fração de quilograma, o custo aumenta 30 centavos. A função que representa o custo de uma encomenda de peso $P \geq 1$ kg é:

(A) $C = 10 + 3P$
(B) $C = 10P + 0,3$
(C) $C = 10 + 0,3(P - 1)$
(D) $C = 9 + 3P$
(E) $C = 10P - 7$

15) (PUC) Em uma certa cidade, os taxímetros marcam, nos percursos sem parada, uma quantia inicial de 4 UT (Unidade Taximétrica) e mais 0,2 UT por quilometro rodado. Se, ao final de um percurso sem paradas, o taxímetro registrava 8,2 UT, o total de quilômetros percorridos foi:

(A) 15,5
(B) 21
(C) 25,5
(D) 27
(E) 32,5

16) Seja a função $f : R \longrightarrow R$, tal que $f(x) = ax + b$. Se os pontos $(0, -3)$ e $(2, 0)$ pertencem ao gráfico de f, então $a + b$ é igual a:

(A) $\frac{9}{2}$
(B) 3
(C) $\frac{2}{3}$
(D) $-\frac{3}{2}$
(E) -1

17) (UNICAMP / 1992) Calcule a e b positivos na equação da reta $ax+by = 6$ de modo que ela passe pelo ponto (3, 1) e forme com os eixos coordenados um triângulo de área igual a 6.

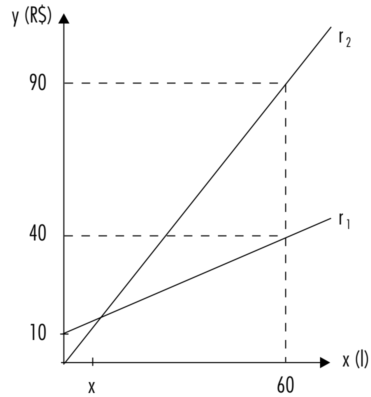
18) (UFRJ / 1991 - Adaptado) Suponha que as ligações telefônicas em uma cidade sejam apenas locais e que a tarifa telefônica seja cobrada do seguinte modo:

1º) uma parte fixa, que é assinatura;

2º) uma parte variável, dependendo do número de pulsos que excede 90 pulsos mensais. Assim, uma pessoa que tem registrados 150 pulsos na conta mensal de seu telefone pagará somente $150 - 90 = 60$ pulsos, além da assinatura.

Em certo mês, o preço de cada pulso excedente era R$ 2,00 e o da assinatura era R$ 125,00. Um usuário gastou nesse mês 220 pulsos. Qual o valor cobrado na conta telefônica?

19) (UFRJ / 1995) Uma fábrica produz óleo de soja sob encomenda, de modo que toda a produção é comercializada. O custo de produção é composto de duas parcelas. Uma parcela fixa, independente do volume produzido, corresponde a gastos com aluguel, manutenção de equipamentos, salários, etc., a outra parcela é variável, dependente da quantidade de óleo fabricado. No gráfico abaixo, a reta r_1 representa o custo de produção e a reta r_2 descreve o faturamento da empresa, ambos em função do número de litros comercializados. A escala é tal que uma unidade representa R$ 1.000,00 (mil reais) no eixo das ordenadas e 1000 L / (mil litros) no eixo das abscissas.



a) Determine, em reais, o custo correspondente à parcela fixa.

b) Determine o volume mínimo de óleo a ser produzido para que a empresa não tenha prejuízo.

20) Resolva as seguintes desigualdades:

a) $(x - 1)(2x + 1) < 2x(x - 3)$

b)
$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} > 0$$

c)
$$\frac{t^2-1}{2} - \frac{1}{4} \leq \frac{t}{2}(t-1)$$

21) (UFPI) Se m, n e p são os números inteiros do domínio da função real $f(x) = \sqrt{(3-2x)\times(2x+3)}$, então $m^2 + n^2 + p^2$ é igual a:

(A) 2
(B) 5
(C) 6
(D) 8
(E) 9

22) (CESGRANRIO) Dada a inequação $(3x-2)^3(x-5)^2(2-x)\,x>0$ tem-se que a solução é:

(A) $\left\{x \mid x<\frac{2}{3} \text{ ou } 2<x<5\right\}$

(B) $\left\{x \mid \frac{2}{3}<x<2 \text{ ou } x<0\right\}$

(C) $\frac{2}{3}\le x\le 2$

(D) $\frac{2}{3}<x<5$

(E) diferente das quatro anteriores

23) (PUC - RS - Adaptado) O domínio da função real dada por $f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{x-4}}$ é:

(A) {x ∈ R | x > − 1 e x < 4}
(B) {x ∈ R | x < -1 ou x >= 4}
(C) {x ∈ R | x >= -1 e x <= 4}
(D) {x ∈ R | x ≤ − 1 ou x > 4}
(E) {x "pertence a" R | x >= -1 e x < 4}

24) (UNICAMP) Duas torneiras são abertas juntas, a 1ª enchendo um tanque em 5 horas, a 2ª enchendo outro tanque de igual volume em 4 horas. No fim de quanto tempo, a partir do momento em que as torneiras são abertas, o volume que falta para encher o 2º tanque é 1/4 do volume que falta para encher o 1º tanque?

25) (ESPM-SP) Uma empresa de bicicletas possui um custo unitário de produção de US$ 28,00 e pretende que este valor represente 80% do preço de venda ao lojista. Esta, por sua vez, deseja que o valor pago ao fabricante seja apenas 70% do total que custará ao consumidor final. Quanto o consumidor final deverá pagar por uma bicicleta?

26) (PUC-MG) Seja $f: R \to R$ uma função definida por $f(x)=\frac{2x-3}{5}$. O valor de x na equação $f^{-1}(x)=\frac{7}{2}$ é:

(A) $\frac{3}{8}$

(B) $\frac{4}{5}$

(C) $\frac{2}{7}$

(D) $-\frac{4}{5}$

(E) $-\frac{3}{8}$

EXERCÍCIOS DE VESTIBULAR

1) (UFRJ / 2004) Um vídeo-clube propõe a seus clientes três opções de pagamento:

Opção I: R$ 40,00 de taxa de adesão anual, mais R$ 1,20 por DVD alugado.

Opção II: R$ 20,00 de taxa de adesão anual, mais R$ 2,00 por DVD alugado.

Opção III: R$ 3,00 por DVD alugado, sem taxa de adesão.

Um cliente escolheu a opção II e gastou R$ 56,00 no ano. Esse cliente escolheu a melhor opção de pagamento para o seu caso? Justifique sua resposta.

2) (UERJ / 2005) Sabe-se que, nos pulmões, o ar atinge a temperatura do corpo e que, ao ser exalado, tem temperatura inferior à do corpo, já que é resfriado nas paredes do nariz. Através de medições realizadas em um laboratório foi obtida a função $T_A = 8{,}5 + 0{,}75.T_B$, $12° \le T_B \le 30°$ em que T_A e T_B representam, respectivamente, a temperatura do ar exalado e a do ambiente. Calcule:

a) a temperatura do ambiente quando $T_A = 25°C$;

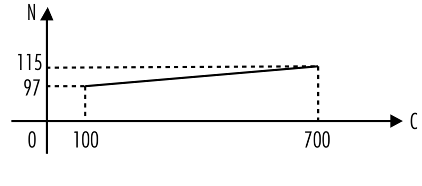
b) o maior valor que pode ser obtido para T_A

3) (UFF / 2004) Um reservatório, contendo inicialmente 400 litros de água, começa a receber água a uma razão constante de 3 litros por segundo, ao mesmo tempo que uma torneira deixa escoar água desse reservatório a uma razão, também constante, de 1 litro por segundo. Considerando o instante inicial (t = 0) como o instante em que o reservatório começou a receber água, determine:

a) o volume de água no reservatório decorridos dez segundos (t = 10) a partir do instante inicial;

b) uma expressão para o volume (V), em litro, de água no reservatório em função do tempo decorrido (t), em segundo, a partir do instante inicial.

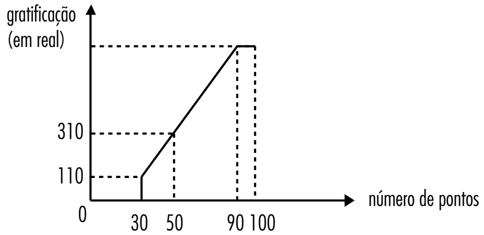
4) (UFF / 2004) Um grande poluente produzido pela queima de combustíveis fósseis é o SO_2 (dióxido de enxofre). Uma pesquisa realizada na Noruega e publicada na revista "Science" em 1972 concluiu que o número (N) de mortes por semana, causadas pela inalação de SO_2, estava relacionado com a concentração média (C), em mg/m^3, do SO_2 conforme o gráfico a seguir: os pontos (C, N) dessa relação estão sobre o segmento de reta da figura.



Com base nos dados apresentados, a relação entre N e C ($100 \leq C \leq 700$) pode ser dada por:

(A) N = 100 – 700.C
(B) N = 94 + 0,03.C
(C) N = 97 + 0,03.C
(D) N = 115 – 94.C
(E) N = 97 + 600.C

5) (UFF / 2002) A Cerâmica Marajó concede uma gratificação mensal a seus funcionários em função da produtividade de cada um convertida em pontos; a relação entre a gratificação e o número de pontos está representada no gráfico a seguir.

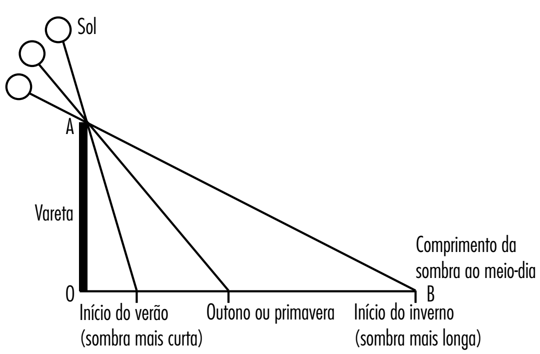


Observando que, entre 30 e 90 pontos, a variação da gratificação é proporcional à variação do número de pontos, determine a gratificação que um funcionário receberá no mês em que obtiver 100 pontos.

6) (UERJ / 2002) Lea o texto a seguir:

Há mais de 5.000 anos os egípcios observaram que a sombra no chão provocada pela incidência dos raios solares sobre um gnômon (um tipo de vareta) variava de tamanho e de direção. Com medidas feitas sempre ao meio dia, notaram que a sombra, com o passar dos dias, aumentava de tamanho. Depois de chegar a um comprimento máximo, ela recuava até perto da vareta. As sombras mais longas coincidiam com dias frios. E as mais curtas, com dias quentes.

(Adaptado de Revista *Galileu*, janeiro de 2001.)



Um estudante fez uma experiência semelhante à descrita no texto, utilizando uma vareta $\overline{OA}$ de 2 de comprimento. No início do inverno, mediu o comprimento da sombra $\overline{OB}$, encontrando 8. Utilizou, para representar sua experiência, um sistema de coordenadas cartesianas, no qual o eixo das ordenadas (y) e o eixo das abscissas (x) continham, respectivamente, os segmentos de reta que representavam a vareta e a sombra que ela determinava no chão. Esse estudante pôde, assim, escrever a seguinte equação da reta que contém o segmento $\overline{AB}$:

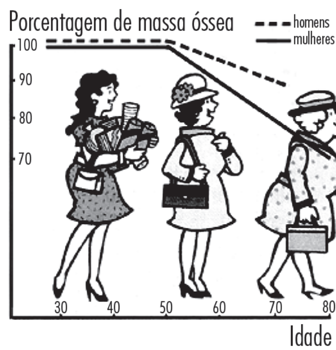
(A) y = 8 – 4x
(B) x = 6 – 3y
(C) x = 8 – 4y
(D) y = 6 – 3x

7) (UERJ / 2001) O balanço de cálcio é a diferença entre a quantidade de cálcio ingerida e a quantidade excretada na urina e nas fezes. É usualmente positivo durante o crescimento e a gravidez e negativo na menopausa, quando pode ocorrer a osteoporose, uma doença caracterizada pela diminuição da absorção de cálcio pelo organismo.

A baixa concentração de íon cálcio (Ca^{++}) no sangue estimula as glândulas paratireoides a produzirem hormônio paratireoideo (HP). Nesta situação, o hormônio pode promover a remoção de cálcio dos ossos, aumentar sua absorção pelo intestino e reduzir sua excreção pelos rins.

(Adaptado de ALBERTS, B. et al.. *Biologia Molecular da Célula*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.)

Admita que, a partir dos cinquenta anos, a perda da massa óssea ocorra de forma linear conforme mostra o gráfico abaixo.



A taxa de perda óssea é maior entre as mulheres.

(Adaptado de *Galileu*, janeiro de 1999.)

Aos 60 e aos 80 anos, as mulheres têm, respectivamente, 90% e 70% da massa óssea que tinham aos 30 anos. O percentual de massa óssea que as mulheres já perderam aos 76 anos, em relação à massa aos 30 anos, é igual a:

(A) 14
(B) 18
(C) 22
(D) 26

Gabarito

Exercícios

1) a) a década de 40 b) $2040 < A < 2050$

2) $m = 7$

3) B

4) a) $f(x) = (3/5)\,x - 3$
b) $f(x) = -2x + 6$
c) $f(x) = \sqrt{3}x + 12$
d) $f(x) = -x - 10$

5) a) $S = \{x \in R \mid x > -10\} = (-10, \infty)$
b) $\{x \in R \mid x \leq 2\} = (-\infty, 2]$
c) $\{x \in R \mid x < 5\} = (-\infty, 5)$
d) $\{x \in R \mid x > 1\} = (1, \infty)$
e) $\{x \in R \mid x < 0\} = (-\infty, 0)$
f) $\{x \in R \mid x \leq 0\} = (-\infty, 0]$

6) C

7) E

8) B

9) E

10) C

11) E

12) A

13) C

14) C

15) B

16) D

17) $a = 1$, $b = 3$

18) R$ 385,00

19) a) R$ 10.000,00
b) 10000 litros

20) a) $\left\{x \in R \mid x < \frac{1}{5}\right\} = \left(-\infty, \frac{1}{5}\right)$
b) $\left\{x \in R \mid x > -\frac{7}{5}\right\} = \left(-\frac{7}{5}, \infty\right)$
c) $\left\{t \in R \mid t \leq \frac{3}{2}\right\} = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$

21) A

22) B

23) D

24) 3h45min

25) US$50,00

26) B

Gabarito

Exercícios de Vestibular

1) Não, pois a melhor opção para este cliente seria a opção III. A opção feita corresponde ao aluguel de 18 DVDs mais R$ 20,00 de taxa. Nestas condições, na opção I, o cliente gastaria 40 + 1,2 . 18 = R$ 61,60 e, na opção III, 3 . 18 = R$ 54,00.

2) a) $T_B = 22°C$ b) T_A = 31°C

3) a) 420 litros b) $V(t) = 400 + 2t$

4) B

5) R$ 710,00

6) C

7) D

10

Funções do 2º grau

Definição

Dados os números reais a, b e c (com $a \neq 0$), a função $f : R \longrightarrow R$, $x \mapsto y = ax^2 + bx + c$, é chamada função quadrática ou função polinomial de grau dois.

Gráfico no sistema cartesiano

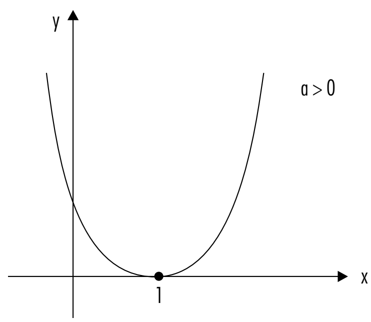
Toda função quadrática é representada graficamente por uma parábola. Temos duas observações importantes:

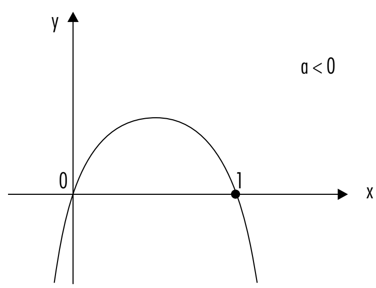
(i) As parábolas, que são gráficos de funções quadráticas, têm eixo paralelo ao eixo vertical Oy

(ii) Se $a > 0$, a concavidade da parábola é para cima. Se $a < 0$, a concavidade é para baixo.

Exemplos

Abaixo temos os gráficos de $f(x) = x^2 - 2x+1$ e $g(x) = -x^2 + x$, respectivamente.





Interseção com os eixos coordenados

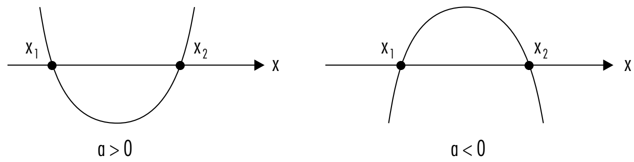
(I) Interseção com $\overrightarrow{Ox}$.

Os gráficos anteriores mostram exemplos em que as parábolas interceptam, uma ou duas vezes, o eixo $\overrightarrow{Ox}$. No caso de apenas um ponto de interseção, a parábola é tangente ao eixo $\overrightarrow{Ox}$.

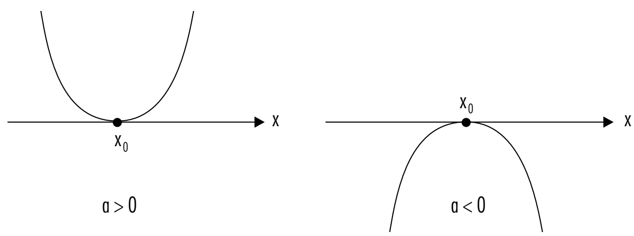
Para encontrar genericamente os pontos de interseção com $\overrightarrow{Ox}$, fazemos $ax^2 + bx + c = 0$:

As soluções dessa equação são $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, $\Delta = b^2 - 4ac$ (*)

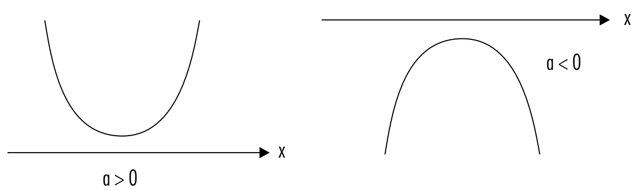
a) Se $\Delta > 0 \Rightarrow$ temos duas raízes x_1 e x_2 distintas em (*) $\Longrightarrow$ o gráfico corta o eixo $\overrightarrow{Ox}$ nesses pontos.



b) Se $\Delta = 0 \Rightarrow$ temos apenas uma raiz x_0 em (*) $\Longrightarrow$ o gráfico tangencia o eixo $\overrightarrow{Ox}$.



c) Se $\Delta < 0 \Longrightarrow$ não existe solução para (*). Neste caso a parábola não corta o eixo $\overrightarrow{Ox}$.



II) Interseção com o eixo $\overrightarrow{Oy}$

Fazendo $x = 0$, temos que $y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$. Logo $y = c$. Portanto, $(0, c)$ é o ponto de interseção com o eixo y.

Exemplos:

Determine o valor de m para que a função quadrática $f(x) = x^2 - 4x + m$ possua apenas uma raiz.

Solução:

Devemos ter $\Delta = b^2 - 4ac = 0$.

$4^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = 0 \Longleftrightarrow 16 - 4m = 0$, $m = 4$.

Determinação das raízes

Para $ax^2 + bx + c = 0, x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Ou seja $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ são as raízes.

(I) Soma e produto das raízes

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b}{2a} - \frac{b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b+\sqrt{\Delta})(-b-\sqrt{\Delta})}{4a^2} =$$

$$\frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \;\; x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Nota:
Se $f(x) = y = ax^2 + bx + c \Longrightarrow y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$

Então chamando de S a soma das raízes e de P o produto das raízes, encontramos $y = a(x^2 - Sx + P)$:

(II) Fatoração da função quadrática

Afirmamos que $y = f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. De fato, $a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2] = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = ax^2 + bx + c$

(III) Pontos de máximo ($a > 0$) ou de mínimo ($a < 0$) para uma função quadrática.

Vamos denotar por (x_v, y_v), as coordenadas do ponto máximo ($a > 0$) ou ponto mínimo ($a < 0$) da parábola.

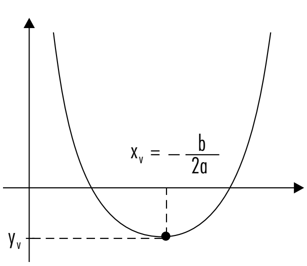
(a) Identificação da coordenada x_v.

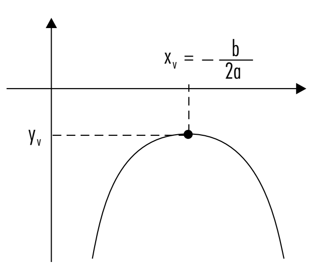
Devido à simetria da parábola, no caso em que $\Delta \geq 0$, o ponto médio x_v do segmento cujos extremos são os pontos x_1 e x_2 (raízes da equação) é onde ocorre o valor mínimo da função.

Como $x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$, encontramos $x_v = -\frac{b}{2a}$.

No caso em que $\Delta < 0$, é possível provar que $x_v = -\frac{b}{a}$ é ainda o ponto onde ocorre o máximo ou mínimo.

Portanto nesse ponto, ocorre o valor y_v mínimo para y (caso $a > 0$) e o valor y_v máximo para y (caso $a < 0$). Veja, a seguir, os gráficos das duas situações.



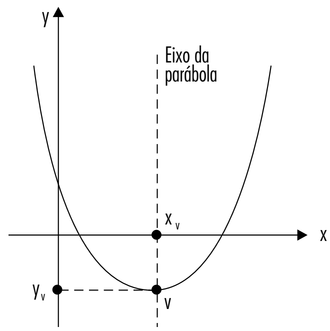


Nota:

Conforme dito, quando $\Delta \geq 0$, o valor x_v que fornece o mínimo representa a média aritmética das raízes x_1 e x_2, $x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b}{2a}$.

(b) Cálculo de y_v

O ponto $V = (x_v, y_v)$ identifica o vértice da parábola:



$$y_v = ax_v^2 + bx_v + c = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c =$$

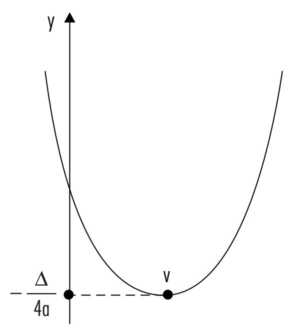
$$\frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \Rightarrow y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

c) Domínio e conjunto imagem

O domínio $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ é toda a reta real R.

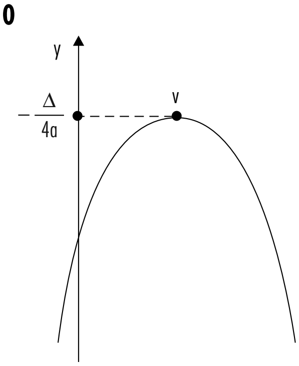
O conjunto imagem depende do sinal do coeficiente a.

1º caso: a > 0



$$Im(f) = \left\{ y \in R \mid y \geq -\frac{\Delta}{4a} \right\}$$

2º caso: a < 0



$$Im(f) = \left\{ y \in R \mid y \leq -\frac{\Delta}{4a} \right\}$$

Exemplos

1) Determinar as raízes da função definida pela equação $y = x^2 - 2x - 8$ e fazer um esboço do gráfico.

Solução:

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-2)^2 - 4(1) \cdot (-8) = 4 + 32 = 36$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

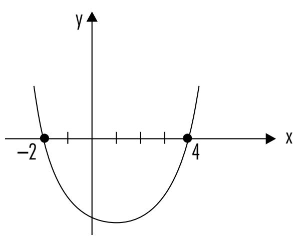
$$x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{2+6}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{-(-2) - \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{2-6}{2} = -2$$

Gráfico da Parábola

$a = 1 > 0 \Longrightarrow$ concavidade voltada para cima

$\Delta = 36 > 0 \Longrightarrow$ a parábola intersecta o eixo x em dois pontos.



2) Determinar as raízes da função definida pela equação $y = -x^2 + x - 4$ e fazer um esboço do gráfico.

Solução:

$-x^2 + x - 4 = 0$

$x^2 - x + 4 = 0$

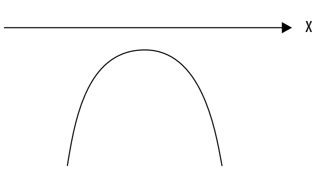
$\Delta = (-1)^2 - 4(1) \cdot (4) = 1 - 16 = -15,$

$\Delta < 0$ (não tem raízes reais).

Gráfico da Parábola

$a = -1 < 0 \Longrightarrow$ concavidade voltada para baixo

$\Delta = -15 < 0 \Longrightarrow$ não intersecta o eixo x



3) Dada a equação $y = x^2 - x - 6$, determinar o vértice da parábola e construir o seu gráfico.

Solução:

$y = x^2 - x - 6$

$x^2 - x - 6 = 0$

$\Delta = 1 + 24 = 25$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{1+5}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{1-5}{2} = -2$$

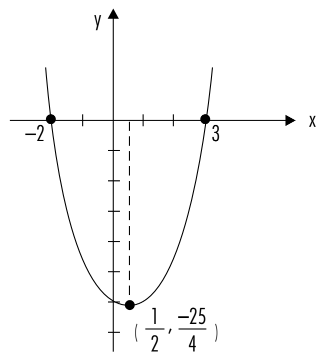
Raízes: 3 e -2

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{-25}{4}\right)$$

Gráfico da Parábola

$a = 1 \Longrightarrow a > 0 \Longrightarrow$ concavidade para cima

$\Delta = 25 \Longrightarrow \Delta > 0 \Longrightarrow$ intersecta o eixo $\overrightarrow{Ox}$ em dois pontos



Estudo do sinal da função quadrática

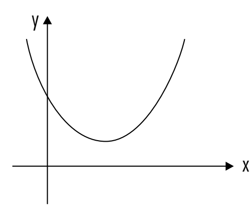
No estudo do sinal da função $y = ax^2 + bx + c$, temos 6 casos a considerar.

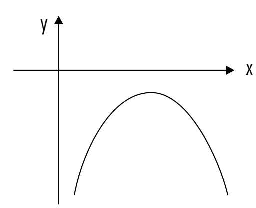
Caso 1: $\Delta < 0$ e $a > 0$

Caso 2: $\Delta < 0$ e $a < 0$

Os gráficos das parábolas nesses casos não intersectam o eixo $\overrightarrow{Ox}$.

Então $y > 0$ no caso 1 e $y < 0$ no caso 2.

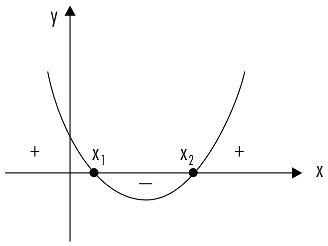




Caso 3: $\Delta > 0$ e $a > 0$

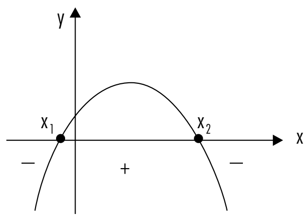
Caso 4: $\Delta > 0$ e $a < 0$

Os gráficos das parábolas nesses casos interceptam o eixo $\overrightarrow{Ox}$ em dois pontos (as raízes x_1 e x_2)



y é positivo para $x \in (\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$

y é negativo para $x \in (x_1, x_2)$

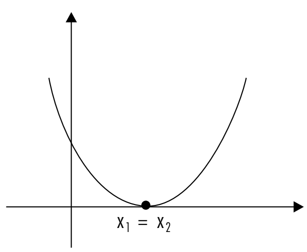


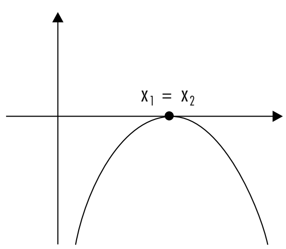
y é negativo para $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$

y é positivo para $x \in (x_1, x_2)$

Caso 5: $\Delta = 0$, $a > 0$

Caso 6: $\Delta = 0$, $a < 0$





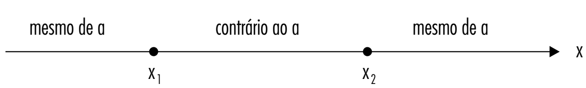
Então y é positivo para todo $x \neq x_1$ no caso 5 e y é negativo para todo $x \neq x_1$ no caso 6.

Regra síntese para a questão do sinal

(i) Se $\Delta < 0$ o sinal de y é o mesmo de a

(ii) Se $\Delta = 0$ o sinal de y é o mesmo de a (exceto para $x = x_1 = x_2$, quando $y = 0$)

(iii) Se $\Delta > 0$.



O sinal de y nos intervalos (∞, x_1), (x_1, x_2) e (x_2, ∞) obedecem o esquema acima.

Exemplos

1) Resolva a inequação $5x^2 - 3x - 2 > 0$

Solução:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 9 - (4 \cdot 5 \cdot -2)$

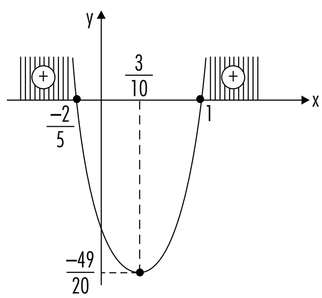
$\Delta = 49 > 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{3 \pm 7}{10} \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = \frac{-2}{5}$$

$$x_{vertice} = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{10}$$

$$y_{vertice} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{49}{20}$$

Conjunto solução $S = \left\{ x \in R \mid x > 1 \text{ ou } x < -\frac{2}{5} \right\}$



2) Sendo $y = x^2 - 4x + 4$, determine o conjunto $S = \{x \in R \mid y > 0\}$

Solução:

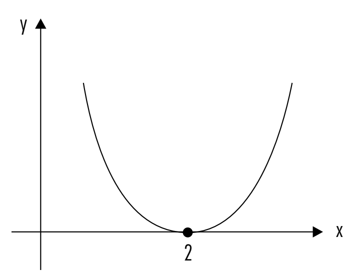
$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot (4) \cdot (1)$

$\Delta = 16 - 16 = 0$

$\Delta = 0$

$$x = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2$$

O conjunto solução é: $S = \{x \in R \mid x \neq 2\}$



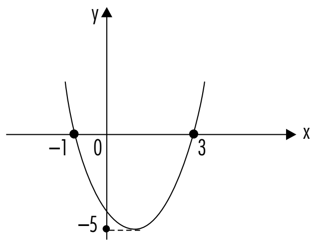
Exercícios

1) Determinar m, de modo que a parábola definida pela função:

a) $f(x) = (-2m + 3)x^2 + 3x - 2$ tenha concavidade voltada para baixo

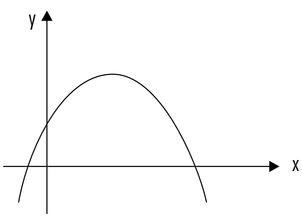
b) $y = (5 - 3m)x^2 + 16$ tenha concavidade voltada para cima

2) Determine a função quadrática cujo gráfico é:

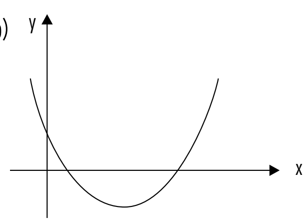


3) Determine em cada caso os sinais de a, b, c e Δ.

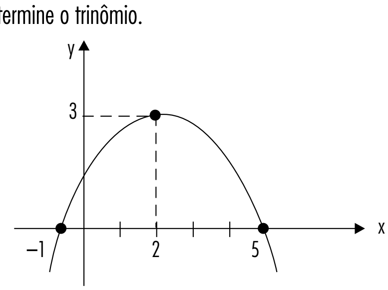
a)



b)



4) (UFRJ / 1992) A figura abaixo é o gráfico de um trinômio do segundo grau. Determine o trinômio.



5) Resolver as seguintes inequações:

a) $x^2 + 2x - 3 > 0$

b) $-4x^2 + 11x - 6 \leq 0$

c) $9x^2 - 6x + 1 > 0$

d) $x^2 - 5x < 0$

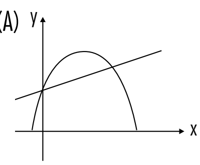
e) $x(x + 4) > -4(x + 4)$

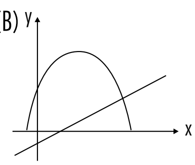
f) $(x - 1)^2 \geq 3 - x$

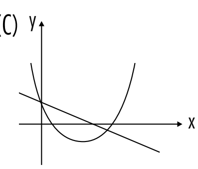
6) (PUC / 1990) O número de pontos de interseção da parábola $y = -4x^2 + 3x + 1$ com a reta $y = 5x - 2$ é:

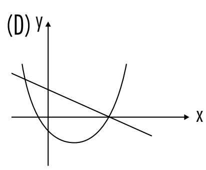
(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

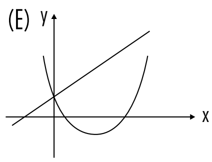
7) (UFF / 1995) Considere m, n e p números reais e as funções reais f e g de variável real, definidas por $f(x) = mx^2 + nx + p$ e $g(x) = mx + p$. A alternativa que melhor representa os gráficos de f e g é:

(A)


(B)


(C)


(D)


(E)


8) (PUC-RIO / 1999) O número de pontos de interseção das duas parábolas $y = x^2$ e $y = 2x^2 - 1$ é:

(A) 0
(B) 1

(C) 2
(D) 3
(E) 4

9) (VEST-RIO / 1993) O valor mínimo da função real $f(x) = x^2 + x + 1$ é:
(A) – 1
(B) 0
(C) $\frac{1}{2}$
(D) $\frac{2}{3}$
(E) $\frac{3}{4}$

10) (UFF) Para que a curva representativa da equação dada por $y = px^2 - 4x + 2$ tangencie o eixo dos x, o valor da constante p deve ser igual a:
(A) – 6
(B) – 2
(C) 0
(D) 2
(E) 6

11) (UNIFICADO / 1993) O vértice da parábola $y = x^2 + x$ é o ponto:
(A) (– 1, 0)
(B) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$
(C) (0,0)
(D) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$
(E) (1, 2)

12) (PUC / 1991) O mínimo valor da função $f(x) = x^2 - 6x + 10$ ocorre quando x vale:
(A) 6
(B) – 6
(C) 3
(D) – 3
(E) $-\frac{5}{3}$

13) (FUVEST-SP)

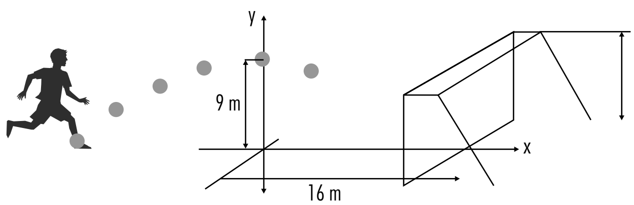
a) Se $x + \frac{1}{x} = b$, calcule $x^2 + \frac{1}{x^2}$

b) Resolva a equação $x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

14) (UFF / 1995) Determine o domínio da função real f(x) definida por:

$$f(x) = \sqrt{x - \frac{900}{x}}$$

15) (UERJ / 1997) Numa partida de futebol, no instante em que os raios solares incidiam perpendicularmente sobre o gramado, o jogador Chorão chutou a bola em direção ao gol, de 2,30 m de altura interna. A sombra da bola descreveu uma reta que cruzou a linha do gol. A bola descreveu uma parábola e quando começou a cair da altura máxima de 9 metros, sua sombra se encontrava a 16 metros da linha do gol. Após o chute de Chorão, nenhum jogador conseguiu tocar na bola em movimento. A representação gráfica do lance em um plano cartesiano está sugerida na figura a seguir:



A equação da parábola era do tipo: $Y = -\frac{x^2}{36} + C$

O ponto onde a bola tocou o gramado pela primeira vez foi:
(A) na baliza
(B) atrás do gol
(C) dentro do gol
(D) antes da linha do gol

16) (UFF / 1990) Duas funções f e g definidas por $f(x) = x^2 + ax + b$ e $g(x) = cx^2 + 3x + d$ interceptam-se nos pontos (0, – 2) e (1,0). Determine os valores de a, b, c, e d.

17) (PUC / 1991) Se $1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} = 0$, então $\frac{2}{x}$ vale:
(A) 1/2
(B) 1/4
(C) 1
(D) 2
(E) – 1 ou 2

18) (PUC / 1988) Um quadrado e um retângulo, cujo comprimento é o triplo da largura, são construídos usando-se todo um arame de 28 cm. Determine as dimensões do quadrado e do retângulo de forma que a soma de suas áreas seja a menor possível.

19) (UFRJ / 1990) Resolva a inequação $x^4 - 9x^2 + 8 < 0$.

Exercícios de Vestibular

1) (UFF / 2005 - adaptada) A relação entre o preço p de determinado produto e a quantidade q disponível no mercado obedece à seguinte lei: $5q = p^2 + 2p - 3$, sendo p e q quantidades positivas e $q \in [1, 9]$. Determine uma expressão que defina p em função de q;

2) (UERJ / 2005) Considere as seguintes funções, relativas a uma ninhada de pássaros:

$C = 5 + 10n$;

C = custo mensal, em reais, para a manutenção de n pássaros.

$V = -5n^2 + 100n - 320$;

V = valor arrecadado, em reais, com a venda de n pássaros, $4 \leq n \leq 16$.

Sabe-se que o lucro mensal obtido é determinado pela diferença entre os valores de venda V e custo C.

a) Determine os possíveis valores de n, para que haja lucro nas vendas.

b) Calcule o valor de n que proporciona o maior lucro possível e o valor, em reais, desse lucro.

3) (UFRJ / 2004) Para quantos números reais x, o número y, sendo $y = -x^2 + 6x - 1$, é um número pertencente ao conjunto IN = {1, 2, 3, 4, ...}?

4) (UFRJ / 2004) Cíntia, Paulo e Paula leram a seguinte informação numa revista: conhece-se, há mais de um século, uma fórmula para expressar o peso ideal do corpo humano adulto em função da altura: $P = (h - 100) - [(h - 150)/k]$ sendo P o peso, em quilos, h a altura, em centímetros, k = 4, para homens, e k = 2, para mulheres.

a) Cíntia, que pesa 54 quilos, fez rapidamente as contas com k = 2 e constatou que, segundo a fórmula, estava 3 quilos abaixo do seu peso ideal. Calcule a altura de Cíntia.

b) Paulo e Paula têm a mesma altura e ficaram felizes em saber que estavam ambos exatamente com seu peso ideal; segundo a informação da revista. Sabendo que Paulo pesa 2 quilos a mais do que Paula, determine o peso de cada um deles.

5) (UERJ / 2004) Três corredores, A, B e C, treinam sobre uma pista retilínea. As posições ocupadas por eles, medidas a partir de um mesmo referencial fixo, são descritas pelas funções $S_A = 5t + 3$, $S_B = 2t + 9$ e $S_C = t^2 - 2t + 9$. Nestas funções, a posição S é medida em metros e o tempo t é medido em segundos. Durante a corrida, o número de vezes em que a distância entre os corredores A e B é igual à distância entre os corredores B e C corresponde a:

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4

6) (UFRJ / 2003) Seja f a função real dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a > 0. Determine a, b e c sabendo que as raízes da equação $| f(x) | = 12$ são -2, 1, 2 e 5. Justifique.

7) (UFF / 2002) Um muro, com 6 metros de comprimento, será aproveitado como PARTE de um dos lados do cercado retangular que certo criador precisa construir. Para completar o contorno desse cercado o criador usará 34 metros de cerca. Determine as dimensões do cercado retangular de maior área possível que o criador poderá construir.

8) (UERJ / 2002) Um fruticultor, no primeiro dia da colheita de sua safra anual, vende cada fruta por R$ 2,00. A partir daí, o preço de cada fruta decresce R$ 0,02 por dia. Considere que esse fruticultor colheu 80 frutas no primeiro dia e a colheita aumenta uma fruta por dia.

a) Expresse o ganho do fruticultor com a venda das frutas como função do dia de colheita.

b) Determine o dia da colheita de maior ganho para o fruticultor.

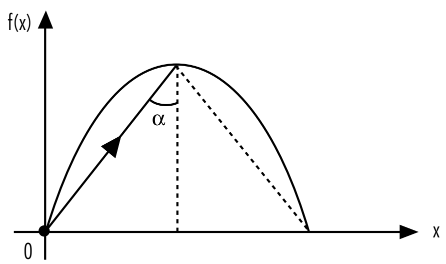
9) (UFRJ / 2001) Um grupo de 40 moradores de uma cidade decidiu decorar uma árvore de Natal gigante. Ficou combinado que cada um terá um número n de 1 a 40 e que os enfeites serão colocados na árvore durante os 40 dias que precedem o Natal da seguinte forma: o morador número 1 colocará 1 enfeite por dia a partir do 1º dia; o morador número 2 colocará 2 enfeites por dia a partir do 2º dia e assim sucessivamente (o morador número n colocará n enfeites por dia a partir do n-ésimo dia).

a) Quantos enfeites terá colocado ao final dos 40 dias o morador número 13?

b) A Sra. X terá colocado, ao final dos 40 dias, um total de m enfeites. Sabendo que nenhum morador colocará mais enfeites do que a Sra. X, determine m.

10) (UERJ / 2001) A figura a seguir mostra um anteparo parabólico que é representado pela função:

$$f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + 2\sqrt{3}x$$



Uma bolinha de aço é lançada da origem e segue uma trajetória retilínea. Ao incidir no vértice do anteparo é refletida e a nova trajetória é simétrica à inicial, em relação ao eixo da parábola.

O valor do ângulo de incidência α corresponde a:

(A) 30°
(B) 45°
(C) 60°
(D) 75°

Gabarito

Exercícios

1) a) $m > \frac{3}{2}$, $m < \frac{5}{3}$

2) $y = \frac{5}{4}(x^2 - 2x - 3)$

3) a) $a < 0, b > 0, c > 0, \Delta > 0$. b) $a > 0, b < 0, c > 0, \Delta > 0$

4) $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$

5) a) $\{x \in R \mid x < -3 \text{ ou } x > 1\}$

b) $\left\{x \in R \mid x \leq \frac{3}{4} \text{ ou } \geq 2\right\}$

c) $\left\{x \in R \mid x \neq \frac{1}{3}\right\}$

d) $\{x \in R \mid 0 < x < 5\}$

e) $\{x \in R \mid x \neq -4\}$

f) $\{x \in R \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 2\}$

6) C

7) C

8) C

9) E

10) D

11) B

12) C

13) a) $b^2 - 2$ b) $\left\{1, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$

14) $D(f) = \{x \in R \mid -30 \leq x < 0 \text{ ou } x \geq 30\}$

15) C

16) $a = 1, b = -2, c = -1, d = -2$

17) C

18) lado quadrado = 3, retângulo: altura = 2, comprimento = 6

19) $-2\sqrt{2} < x < -1$ ou $1 < x < 2\sqrt{2}$

Gabarito

Exercícios de Vestibular

1) a) $p = -1 + \sqrt{4 + 5q}$, com $q \in [1, 9]$

2) a) $n \in Z$ tal que $5 < n < 13$

b) 9 filhotes gerando 80 reais de lucro.

3) 15

4) a) A altura de Cíntia é 164 cm.

b) Paulo pesa 56 quilos e Paula 54 quilos

5) C

6) 9

7) 10m

8) a) $160 + 0{,}4n - 002n^2$

b) 10º dia

9) a) $P_{13} = 364$

b) m = 420

10) A

Anotações

Anotações

Anotações

Anotações