Fundação Cecierj

Pré-Vestibular Social

Matemática

Augusto César de Oliveira Morgado

Fabio Henrique Teixeira de Souza

Celso José da Costa

Luiz Manoel Figueiredo

Victor Augusto Giraldo

5ª edição

revisada e ampliada

Módulo 2

2015

Governo do Rio de Janeiro

Secretaria de Ciência e Tecnologia

Fundação CECIERJ Consórcio cederj

Nova CEDAE

Material Didático

Elaboração de Conteúdo
Augusto César de Oliveira Morgado
Fabio Henrique Teixeira de Souza
Celso José da Costa
Luiz Manoel Figueiredo
Victor Augusto Giraldo

Revisão de Conteúdo
Fabio Henrique Teixeira de Souza
Victor Augusto Giraldo

Capa, Projeto Gráfico, Manipulação de Imagens e Editoração Eletrônica
Cristina Portella
Filipe Dutra
Maria Fernanda de Novaes

Foto de Capa
Gcpics - www.dreamstime.com

P922

Pré-vestibular social: matemática. v. 2 / Augusto César Morgado... [et al.]. – 5. ed. rev. ampl. – Rio de Janeiro: Fundação Cecierj, 2015.
128 p.; 20,0 x 27,5 cm.

ISBN: 978-85-458-0046-0

1. Matemática. 2.Funções exponenciais. 3. Logaritmo. 4. Geometria plana. 5.Geometria espacial. I. Souza, Fabio Henrique Teixeira de. II. Costa, Celso José da. III. Figueiredo, Luiz Manoel. IV. Giraldo, Victor augusto 1. Título.

CDD: 510

Sumário

Apresentação

Caro Aluno,

Este conjunto de apostilas foi elaborado de acordo com as necessidades e a lógica do projeto do Pré-Vestibular Social. Os conteúdos aqui apresentados foram desenvolvidos para embasar as aulas semanais presenciais que ocorrem nos polos. O material impresso por si só não causará o efeito desejado, portanto é imprescindível que você compareça regularmente às aulas e sessões de orientação acadêmica para obter o melhor resultado possível. Procure, também, a ajuda do atendimento 0800 colocado à sua disposição. A leitura antecipada dos capítulos permitirá que você participe mais ativamente das aulas expondo suas dúvidas o que aumentará as chances de entendimento dos conteúdos. Lembre-se que o aprendizado só acontece como via de mão dupla.

Aproveite este material da maneira adequada e terá mais chances de alcançar seus objetivos.

Bons estudos!

Equipe de Direção do PVS

1

Funções Exponenciais

POTENCIAÇÃO DE EXPOENTE REAL

Sabemos que a operação de potenciação para base $a \in IR$ e expoente $n \in IN$ é definida por meio de *multiplicações de fatores iguais*, isto é:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \quad vezes}$$

Para definir esta operação para $a \in IR$ e expoente $n \in Z$, isto é para estendê-la para expoentes negativos, não podemos usar esta mesma caracterização, pois não faz sentido dizer, por exemplo, que a^{-3} é igual ao número a multiplicado por si mesmo "– 3 vezes"! Então, observamos que o comportamento da potenciação de expoente $n \in IN$ apresenta uma regularidade. Observe o exemplo abaixo, para a base 2.

$$\begin{aligned} 2^4 &= 16 \\ 2^3 &= 8 \\ 2^2 &= 4 \\ 2^1 &= 2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\div 2 \\ &\div 2 \\ &\div 2 \end{aligned}$$

Isto é, cada vez que diminuímos uma unidade do expoente, dividimos por 2 o resultado da potenciação. Se continuarmos subtraindo uma unidade do expoente, chegaremos aos números negativos. Para manter a regularidade acima, devemos prosseguir dividindo por 2 o resultado da potenciação. Desta forma, obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} 2^4 &= 16 \\ 2^3 &= 8 \\ 2^2 &= 4 \\ 2^1 &= 2 \\ 2^0 &= 1 \\ 2^{-1} &= 1/2 \\ 2^{-2} &= 1/4 \\ 2^{-3} &= 1/8 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\div 2 \\ &\div 2 \\ &\div 2 \\ &\div 2 \\ &\div 2 \\ &\div 2 \\ &\div 2 \end{aligned}$$

Para uma base $a \in IR$ qualquer, temos:

$$\begin{aligned} a^4 &= a.\,a.\,a.\,a \\ a^3 &= a.\,a.\,a \\ a^2 &= a.\,a \\ a^1 &= a \\ a^0 &= 1 \\ a^{-1} &= 1/a \\ a^{-2} &= 1/(a.\,a) \\ a^{-3} &= 1/(a.\,a.\,a) \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\div a \\ &\div a \\ &\div a \\ &\div a \\ &\div a \\ &\div a \\ &\div a \end{aligned}$$

Assim, a única maneira de definir a potenciação para expoentes inteiros de forma que a regularidade da operação seja preservada é fazer:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \forall\ a \in IR^* \quad n \in IN$$

Se quisermos agora estender a operação para expoentes racionais, de forma que as propriedades conhecidas sejam preservadas, como devemos proceder? Observe o exemplo a seguir, para o expoente $1/2$:

$$a^{1/2} \cdot a^{1/2} = a^{1/2 + 1/2} = a^1 = a$$

Por definição de raiz quadrada, a única forma disto acontecer é se:

$$a^{1/2} = \sqrt{a}$$

De forma mais geral, para um expoente na forma $1/q$, com $q \in IN$, qualquer, devemos ter:

$$\overbrace{a^{1/q} \cdot a^{1/q} \ldots \cdot a^{1/q}}^{q \quad vezes} = a^{\overbrace{1/q + \ldots + 1/q}^{q \quad vezes}} = a^{q \cdot 1/q} = a^1 = a$$

Portanto:

$$a^{1/q} = \sqrt[q]{a}$$

Se tomamos um número racional p/q qualquer, respeitando as propriedades da potenciação, devemos ter:

$$a^{p/q} = a^{p \cdot 1/q} = \left(a^p\right)^{1/q} = \sqrt[q]{a^p}$$

Observe que agora não podemos mais tomar qualquer número $a \in IR$ como base, pois se a for negativo, a raiz pode não estar definida. Assim, devemos fazer a restrição $a > 0$. A definição da potenciação para expoente racional é portanto:

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} \quad \forall\ a > 0,\ p, q \in IN$$

A extensão da potenciação para um expoente $x \in IR$ qualquer é um pouco mais delicada, pois devemos ser capazes de definir a^x, para $a > 0$, no caso em que x é um número irracional. Por exemplo, como calculamos o valor de 2^{π}?

Para isto, devemos lembrar que π é um número irracional, portanto sua representação decimal é finita e não periódica: π = 3,14159265... Para fazer aproximações para o número π, em geral usamos truncamentos de sua representação decimal:

$$\begin{aligned} \pi &\cong p_1 = 3{,}1 \\ \pi &\cong p_2 = 3{,}14 \\ \pi &\cong p_3 = 3{,}141 \\ \pi &\cong p_4 = 3{,}1415 \\ \pi &\cong p_5 = 3{,}14159 \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

Observe que todos os números p_1, p_2, p_3, p_4,... são racionais (por quê?). Além disso, quanto maior o número de casas decimais do truncamento, melhor a aproximação de π. Ou seja, quanto maior o índice n, mais próximo de π está o número p_n. Se aumentarmos suficientemente o índice n, a distância entre p_n e π pode ficar tão pequena quanto queiramos. Assim, podemos dizer que os números p_n formam uma sequência que se aproxima indefinidamente de π, ou seja, tende a π. Este tipo de aproximação corresponde ao conceito matemático de limite. Usamos a seguinte notação: $p_n \to \pi$ ou $\lim p_n = \pi$

Podemos usar esta sequência tendendo a π para obter o valor de 2^x por aproximação:

p_n	2^{p_n}
$p_1 = 3{,}1$	$2^{p_1} = 2^{3{,}1} = 2^{31/10}$
$p_2 = 3{,}14$	$2^{p_2} = 2^{3{,}14} = 2^{314/100}$
$p_3 = 3{,}141$	$2^{p_3} = 2^{3{,}141} = 2^{3141/1000}$
$p_4 = 3{,}1415$	$2^{p_4} = 2^{3{,}1415} = 2^{31415/10^4}$
$p_5 = 3{,}14159$	$2^{p_5} = 2^{3{,}14159} = 2^{314159/10^5}$

Observando a tabela acima, vemos que, como p_n é um número racional, então os valores 2^{p_n} podem ser calculados por meio da definição de potenciação de expoente racional, que já conhecemos. Os valores da coluna da esquerda se aproximam de π, enquanto que os valores da coluna da direita se aproximam de um certo valor, que ainda não conhecemos. Este valor será definido como o valor da potência 2^π.

De forma mais geral, definimos:

Sejam a um número real positivo, x um número irracional e p_n uma sequência de números racionais tendendo a x. Então definimos $a^x = \lim a^{p_n}$.

Assim, a operação de potenciação fica definida para todo expoente real. A aproximação por limite garante-nos que as propriedades já conhecidas são preservadas:

(i) $a^{x+y} = a^x.a^y \ \forall\ a > 0,\ x, y \in IR$

(ii) $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y} \ \forall\ a > 0\ x, y \in IR$

(iii) $a^{x.y} = (a^x)^y \ \forall\ a > 0,\ x, y \in IR$

Exercícios

1) Use uma calculadora para fazer aproximações para 2^x, determinando os valores de 2^{p_n} na tabela acima.

2) Use o mesmo procedimento do exercício anterior para fazer aproximações para o valor do número $3^{\sqrt{2}}$.

3) Use as propriedades da potenciação para encontrar todos os valores de $x \in IR$ tais que $3^{x-1} + 3^{x+1} = 30$. Sugestão: ponha 3^x em evidência.

4) Use as propriedades da potenciação para resolver a equação $4^x - 3.\ 2^x - 4 = 0$, para $x \in IR$. Sugestão: faça $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2 = 0$.

5) (PUC-SP) O valor de $x \in IR$ que é solução de $4^{x+2} = 8^{-x+2}$ é:

(A) 0
(B) 1/5
(C) 1/2
(D) 2/5
(E) 4/3

6) (FESP) Se $\sqrt[x]{2} = 16^x$, então os valores de x são:

(A) 0 e 1/2
(B) 1/4 e –1/2
(C) 1/2 e –1/2
(D) 1/8 e –1/8
(E) 0 e 1

7) (FEI) Para que valor real de x temos $8^x - 8^{-x} = 3.\ (1 + 8^{-x})$?

(A) 4
(B) 1/2
(C) 2
(D) 1
(E) 2/3

8) (Mackenzie-SP) O valor de m, $m \in IR$, que satisfaz a equação $(8^{m+2})^3 = 2^{10}$ é:

(A) – 8/9
(B) 6
(C) – 4/3
(D) 8/9
(E) – 6

9) (PUC) A raiz da equação $2^{2x} - 15.2^x - 16 = 0$ é:

(A) 16
(B) 12
(C) 10
(D) 8
(E) 4

10) (CESGRANRIO) O número de raízes de $2^{2x^2 - 7x + 5} = 1$ é:

(A) 0 (B) 1 (C) 2
(D) 3 (E) maior que 3

11) (CESGRANRIO) Se (x, y) é solução do sistema $\begin{cases} 2^x + 3^y = 11 \\ 2^x - 3^y = 5 \end{cases}$ a soma x + y é:

(A) 11 (B) 3 (C) 6
(D) 4 (E) 5

A Função Exponencial

Uma vez definida a operação de potenciação para expoentes reais, somos capazes de definir a função exponencial com domínio em IR, com base $a > 0$:

$f: IR \rightarrow IR$

$x \mapsto a^x$

Observamos que, qualquer que seja a base $a > 0$, temos que $f(0) = a^0 = 1$ e que $f(x) > 0 \ \forall x \in IR$, sendo positivo ou negativo. O resultado de uma potenciação pode ser um número entre 0 e 1, mas nunca igual a 0 ou negativo. Assim, são propriedades imediatas das funções exponenciais de qualquer base:

- $f(0) = 1$
- $f(x) > 0 \ \forall x \in IR$

Por outro lado, as funções exponenciais apresentam comportamentos diferentes nos casos em que $a > 1$ e em que $0 < a < 1$ (o caso em que $a = 1$ é trivial, pois a função será constante igual a 1. Vejamos os exemplos a seguir, das funções definidas por $f_1(x) = 2^x$ e $f_2(x) = (1/2)^x$. Vamos construir tabelas de valores para estas funções, tomando valores positivos e negativos para x.

x	$f_1(x) = 2^x$	$f_2(x) = (1/2)^x$
–3	$2^{-3} = 1/2^3 = 1/8$	$(1/2)^{-3} = 2^3 = 8$
–2	$2^{-2} = 1/2^2 = 1/4$	$(1/2)^{-2} = 2^2 = 4$
–1	$2^{-1} = 1/2 = 1/4$	$(1/2)^{-1} = 2$
0	$2^0 = 1$	$(1/2)^0 = 1$
1	$2^1 = 2$	$(1/2)^1 = 1/2$
2	$2^2 = 4$	$(1/2)^2 = 1/4$
3	$2^3 = 8$	$(1/2)^3 = 1/8$

Observe que, no caso de $f_1(x) = 2^x$:

- cada vez que somamos uma unidade ao valor de x, o valor de y é multiplicado pela base 2;
- cada vez que subtraímos uma unidade do valor de x, o valor de y é dividido pela base 2.

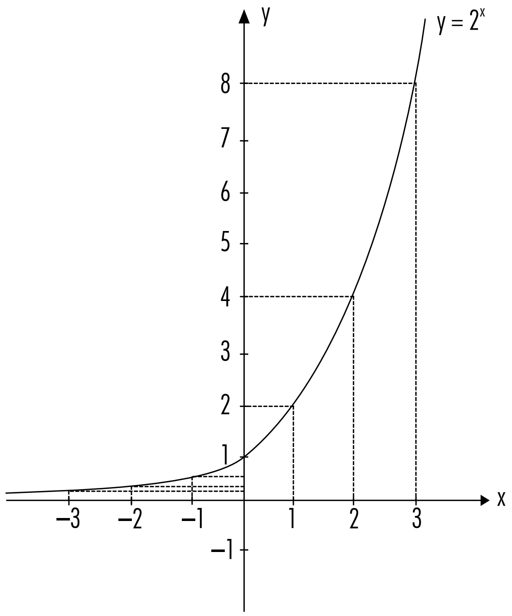
Assim, quando x cresce indefinidamente, tendendo a $+\infty$, y também tende a $+\infty$; e quando x decresce indefinidamente, tendendo a $-\infty$, y se aproxima de 0.

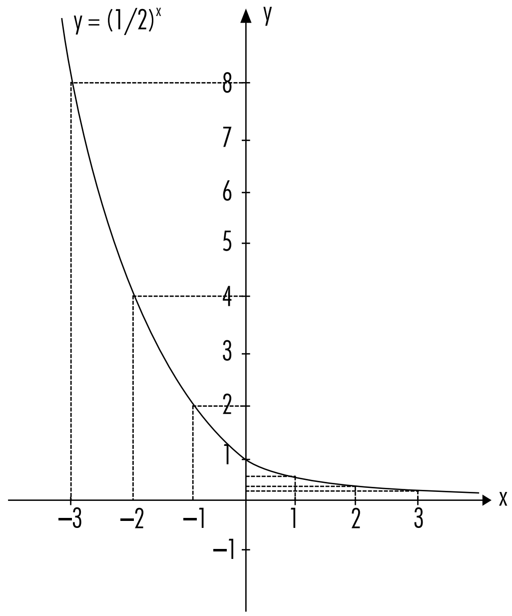
No caso de $f_2(x) = (1/2)^x$:

- cada vez que somamos uma unidade ao valor de x, o valor de y é multiplicado pela base 1/2, isto é, y é dividido por 2;
- cada vez que subtraímos uma unidade do valor de x, o valor de y é dividido pela base 1/2 , isto é, y é multiplicado por 2.

Portanto, quando x cresce indefinidamente, tendendo a $+\infty$, y tende a 0; e quando x decresce indefinidamente, tendendo a $-\infty$, y tende a $+\infty$.

Desta forma, os gráficos das funções f_1 e f_2 têm o seguinte aspecto:





O mesmo raciocínio vale para uma função exponencial de base $a > 0$ qualquer:

- cada vez que somamos uma unidade ao valor de x, o valor de y é multiplicado pela base a;
- cada vez que subtraímos uma unidade do valor de x, o valor de y é dividido pela base a.

Em resumo, são propriedades da função exponencial:

Se $a > 0$:	**Se** $0 < a < 1$:
$f(x) > 0 \ \forall x \in IR$	$f(x) > 0 \ \forall x \in IR$
$f(x) < 1$ para $x < 0$	$f(x) < 1$ para $x > 0$
$f(x) > 1$ para $x > 0$	$f(x) > 1$ para $x < 0$
$f(0) = 1$	$f(0) = 1$
$f(x) \to 0$ quando $x \to -\infty$	$f(x) \to +\infty$ quando $x \to -\infty$
$f(x) \to +\infty$ quando $x \to +\infty$	$f(x) \to 0$ quando $x \to +\infty$
f é estritamente crescente	f é estritamente decrescente
$Im(f) =]0, +\infty[$	$Im(f) =]0, +\infty[$

Exercícios

12) Considere a progressão aritmética $x_n = 3 + 2n$, com $n \in IN$, cujo termo inicial é 3 e a razão é 2. Considere ainda a função exponencial f: $IR \to IR$, definida por $f(x) = 5^x$. Seja y_n a sequência formada pelas imagens de x_n por f, isto é, $x_n = f(x_n)$. Verifique que y_n é uma progressão geométrica e identifique seu termo inicial e sua razão.

13) Sejam $x_n = x_0 + r \,.\, n$, com $n \in IN$, a progressão aritmética com termo inicial $x_0 \in IR$ e razão $r \in IR$ e f: $IR \to IR$ a função exponencial definida por $f(x) = a^x$, com $a > 0$. Seja y_n a sequência dada por $y_n = f(x_n)$. Verifique que y_n é uma progressão geométrica e identifique seu termo inicial e sua razão.

14) Esboce os gráficos das funções a seguir.

a) $f: \begin{array}{ccc} IR & \to & IR \\ x & \mapsto & 3^x - 1 \end{array}$

b) $f: \begin{array}{ccc} IR & \to & IR \\ x & \mapsto & |2^x - 2| \end{array}$

c) $f: \begin{array}{ccc} IR & \to & IR \\ x & \mapsto & 2^{-x} + 1 \end{array}$

d) $f: \begin{array}{ccc} IR & \to & IR \\ x & \mapsto & \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3 \end{array}$

e) $f: \begin{array}{ccc} IR & \to & IR \\ x & \mapsto & 2 \cdot 3^x \end{array}$

f) $f: \begin{array}{ccc} IR & \to & IR \\ x & \mapsto & -3 \cdot 2^{-x} \end{array}$

15) Seja $a \in IR$, $a > 0$. Qual é relação entre os gráficos das funções f_1 f_2: $IR \to IR$ definidas por $f_1(x) = a^x$ e $f_2(x) = (1/a)^x$? Justifique sua resposta.

16) Em cada item abaixo, determine o maior subconjunto $D \subset IR$ tal que seja possível definir uma função f: $D \to IR$, $y = f(x)$, com a lei de formação dada.

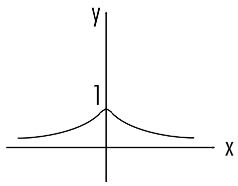
a. $y = \sqrt{x^2 - 1}$

b. $y = \sqrt{3^x - 1}$

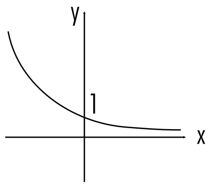
c. $y = \dfrac{1}{4^x - 2^x}$

17) (CESGRANRIO) O gráfico que melhor representa a função $f(x) = e^{2x}$ é:

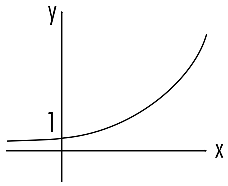
(A)



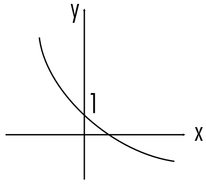
(B)



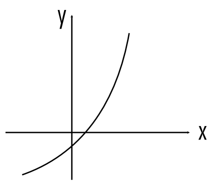
(C)



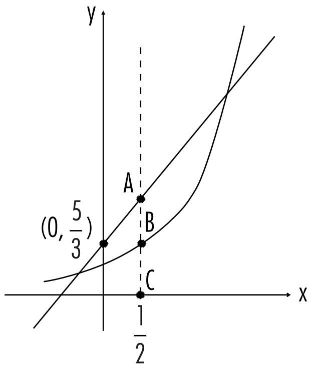
(D)



(E)



18) (UNESP/1994) A figura mostra os gráficos de uma função exponencial $y = a^x$ e da reta que passa pelo ponto (0, 5/13) e tem inclinação 10/7. Pelo ponto C = (1/2, 0) passou-se a perpendicular ao eixo x, que corta os gráficos, respectivamente, em B e A.



Supondo-se que B esteja entre A e C, conforme mostra a figura, e que a medida do segmento AB é dada por 8/21, determine o valor de a.

19) Esboce os gráficos de $y = 2^x - 1$ e $y = x$. Verifique se a equação $2^x - 1 = x$ tem solução.

20) (FUVEST/1999) A equação $2^x = -3x + 2$, com x real,
(A) não tem solução.
(B) tem uma única solução entre 0 e 2/3.
(C) tem uma única solução entre –2/3 e 0.
(D) tem duas soluções, sendo uma negativa e outra positiva.
(E) tem mais de duas soluções.

21) Encontre todos os valores de x tais que $2^x < 16$.

22) (UNIRIO/2000) O conjunto solução da inequação $0{,}5^{x^2-4x+3} < 0$, é:
(A) $]0,1[\cup]3, +\infty[$ (B) $\{x \in IR \mid 0 < x < 1\}$
(C) $[3, +\infty[$ (D) IR
(E) $\varnothing$

23) (FESP) A solução da inequação 5^{x^2-x} é:
(A) $x \leq 0$
(B) $x \geq 0$
(C) $x \leq -1$ ou $x \geq 1$
(D) $0 \leq x \leq 1$
(E) $x \geq 1/3$

24) (UFF/1995) Em uma cidade, a população de pessoas é dada por $P(t) = P_0 . 2^t$ e a população de ratos é dada por $R(t) = R_0 . 4^t$, sendo o tempo medido em anos. Se em 1992 havia 112.000 pessoas e 7.000 ratos, em que ano o número de ratos será igual ao de pessoas?

Exercícios de Vestibular

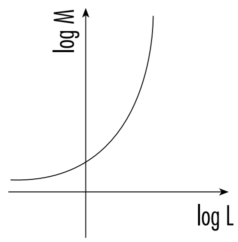
1) (UERJ/2006) Durante um período de oito horas, a quantidade de frutas na barraca de um feirante se reduz a cada hora, do seguinte modo:
- nas *t* primeiras horas, diminui sempre 20% em relação ao número de frutas da hora anterior;
- nas *8 – t* horas restantes, diminui 10% em relação ao número de frutas da hora anterior.

Calcule:
a. o percentual do número de frutas que resta ao final das duas primeiras horas de venda, suponto t = 2.

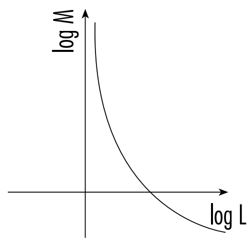
b. o valor de *t*, admitindo que, ao final do período de oito horas, há, na barraca, 32% das frutas que havia, inicialmente. Considere log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48.

2) (UERJ/2005) Um aluno, para calcular o pH da água, sabendo que seu produto iônico, a 25° C, corresponde a 10^{-14}, utilizou, por engano, a seguinte fórmula: $pH = -\log_{100} [H^+]$. O valor encontrado pelo aluno foi igual a:
(A) 1,4
(B) 3,5
(C) 7,0
(D) 10,0

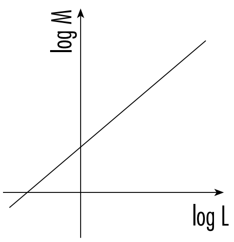
3) (UERJ/2005) Um pesquisador, interessado em estudar uma determinada espécie de cobras, verificou que, numa amostra de trezentas cobras, suas massas *M*, em gramas, eram proporcionais ao cubo de seus comprimentos *L*, em metros, ou seja M = a • L3, em que *a* é uma constante positiva. Observe os gráficos abaixo.



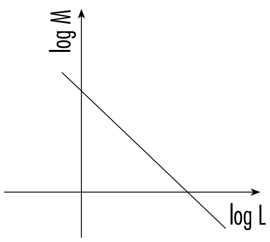
I



II



III



IV

Aquele que melhor representa log M e função de log L é o indicado pelo número:
(A) I
(B) II
(C) III
(D) IV

4) (UERJ/2004) Segundo a lei do resfriamento de Newton, a temperatura *T* de um corpo colocado num ambiente cuja temperatura é T_0 obedece à seguinte relação: $T = T_0 + Ke^{-ct}$. Nesta relação, *T* é medida na escala Celsius, *t* é o tempo medido em horas, a partir do instante em que o corpo foi colocado no ambiente, e *k* e *c* são constantes a serem determinadas. Considere uma xícara contendo café, inicialmente a 100° C, colocada numa sala de temperatura 20° C. Vinte minutos depois, a temperatura do café passa a ser de 40°C.

a. Calcule a temperatura do café 50 minutos após a xícara ter sido colocada na sala.

b. Considerando ln 2 = 0,7 e ln 3 = 1,1, estabeleça o tempo aproximado em que, depois de a xícara ter sido colocada na sala, a temperatura do café se reduziu à metade.

5) (UERJ / 2004) Seja β a altura de um som, medida em decibéis. Essa altura β está relacionada com a intensidade do som, *I*, pela expressão abaixo, na qual a intensidade padrão, I_0, é igual a 10^{-12} W/m².

$$\beta = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Observe a tabela a seguir. Nela os valores de *I* foram aferidos a distâncias idênticas das respectivas fontes de som.

Fonte de som	I (W/m²)
turbina	$1{,}0 \cdot 10^{2}$
amplificador de som	1,0
triturador de lixo	$1{,}0 \cdot 10^{-4}$
TV	$3{,}2 \cdot 10^{-5}$

Sabendo que há risco de danos ao ouvido médio a partir de 90 dB, o número de fontes da tabela cuja intensidade de emissão de sons está na faixa de risco é de:
(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4

6) (UERJ/2003) O logaritmo decimal do número positivo *x* é representado por log x. Então, a soma das raízes de $\log^2 x - \log x^3 = 0$ é igual a:
(A) 1
(B) 101
(C) 1000
(D) 1001

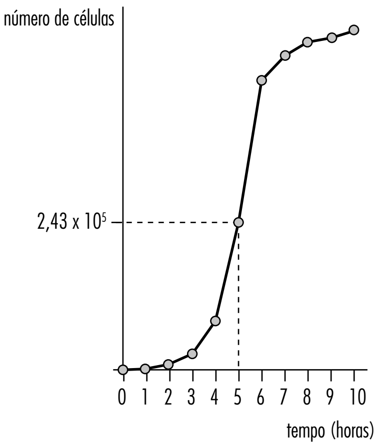
7) (UFRJ/2005) O número de bactérias em uma certa cultura dobra a cada hora. A partir da amostra inicial, são necessárias 24 horas para que o número de bactérias atinja uma certa quantidade *Q*. Calcule quantas horas são necessárias para que a quantidade de bactérias nessa cultura atinja a metade de *Q*.

8) (UFRJ/2005) Considere $a = \log\left(x - \frac{1}{x}\right)$ e $b = \log\left(x + \frac{1}{x} - 1\right)$, com $x > 1$. Determine $\log\left(x^2 - x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$ em função de *a* e *b*.

9) Em uma certa cultura, há 1000 bactérias num determinado instante. Após 10 minutos, existem 4000 bactérias. Quantas bactérias existirão em 1 h, sabendo que elas aumentam através da fórmula $P = P_0 \cdot e^{kt}$, em que P é o número de bactérias, t é o tempo e k a velocidade de crescimento. Determine também a velocidade de crescimento.

10) Quando se administra um remédio, sua concentração no organismo deve oscilar entre dois níveis, pois não pode ser tão baixa a ponto de não fazer efeito (Ce) e não pode ser tão alta a ponto de apresentar efeitos indesejáveis (toxicidade) ao paciente (Cp). Quando, após um certo tempo de ministrado o remédio, o nível de concentração no organismo atinge Ce, toma-se mais uma dose do mesmo, a fim de elevar o nível de concentração para Cp. Um veterinário deve realizar uma cirurgia em um cachorro com duração estimada em 1 h. O animal pesa vinte e um quilogramas e sabe-se que vinte miligramas do anestésico sódio pentobarbital por quilograma de peso corporal são necessários para manter o animal anestesiado. Em cachorros, a meia-vida desta droga é de 5 horas. Qual deve ser a dose inicial do anestésico para manter o animal dormindo enquanto a operação se realiza? Considere $\sqrt[5]{2} = 1{,}15$.

11) (UERJ/2008) Para analisar o crescimento de uma bactéria, foram inoculadas 1×10^3 células a um determinado volume de meio de cultura apropriado. Em seguida, durante 10 horas, em intervalos de 1 hora, era medido o número total de bactérias nessa cultura. Os resultados da pesquisa estão mostrados no gráfico abaixo.



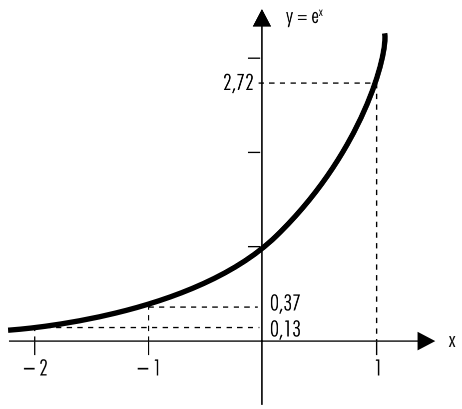
Nesse gráfico, o tempo 0 corresponde ao momento do inóculo bacteriano. Observe que a quantidade de bactérias presentes no meio, medida a cada hora, segue uma progressão geométrica até 5 horas, inclusive.
O número de bactérias encontrado no meio de cultura 3 horas após o inóculo, expresso em milhares, é igual a:
(A) 16
(B) 27
(C) 64
(D) 105

12) Em uma calculadora eletrônica foi digitado, nesta ordem, o 3 e o X. Em seguida, foi digitada a tecla 2 e a tecla X repetidas vezes até que o resultado no visor fosse 786432. Quantas vezes o 2 foi digitado?

13) O volume de um líquido volátil diminui 20% por hora. Após um tempo t, seu volume se reduz à metade. Qual o valor de t? Considere log2 = 0,3

14) Numa fábrica, o lucro originado pela produção de x peças é dado em milhares de reais pela função $L(x) = \log_{10}(100 + x) + k$. Sabendo que não havendo produção não há lucro, determine k. Qual o número necessário de peças para que o lucro seja igual a mil reais?

15) Uma empresa acompanha a produção diária de um funcionário recém-admitido, utilizando uma função f(d), cujo valor corresponde ao número mínimo de peças que a empresa espera que ele produza em cada dia (d), a partir da data de sua admissão. Considere o gráfico auxiliar abaixo, que representa a função $y = e^x$.



Utilizando $f(d) = 100 - 100 \cdot e^{-0,2d}$ e o gráfico acima, a empresa pode prever que o funcionário alcançará a produção de 87 peças num mesmo dia, quando d for igual a :
(A) 5
(B) 10
(C) 15
(D) 20

Gabarito :: Exercícios

1)

p_n	2^{p_n}
p_1	$\cong 8,574187700$
p_2	$\cong 8,815240927$
p_3	$\cong 8,821353305$
p_4	$\cong 8,824411082$
p_5	$\cong 8,824961595$

2)

y_n	2^{y_n}
$y_1 = 1,4$	$\cong 4,655536722$
$y_2 = 1,414$	$\cong 4,706965002$
$y_3 = 1,4142$	$\cong 4,727695035$
$y_4 = 1,4142$	$\cong 4,728733930$
$y_5 = 1,41421$	$\cong 4,728785881$

3) x = 2

4) x = 2

5) (D)

6) (C)

7) (E)

8) (A)

9) (E)

10) (C)

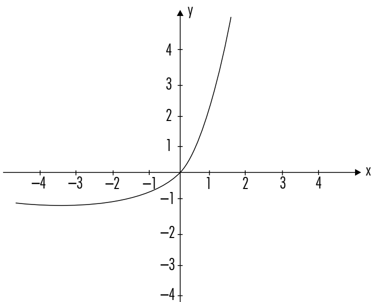
11) (D)

12) $y_n = 125 \,.\, 25^n$ é uma progressão geométrica de termo inicial 125 e razão 25

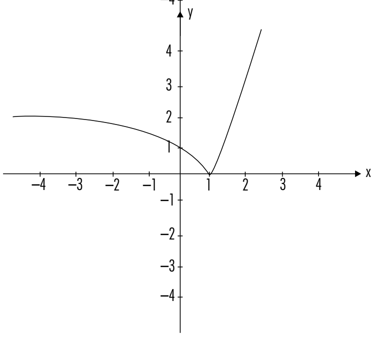
13) $y_n = a^{x_0} . (a^r)^n$ é uma progressão geométrica de termo inicial a^{x_0} e razão a^r

14)

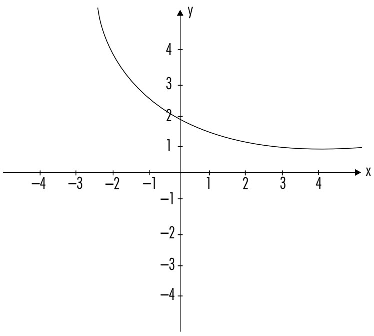
a.



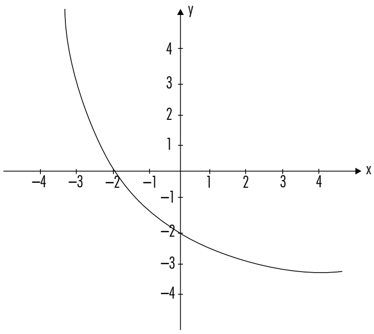
b.



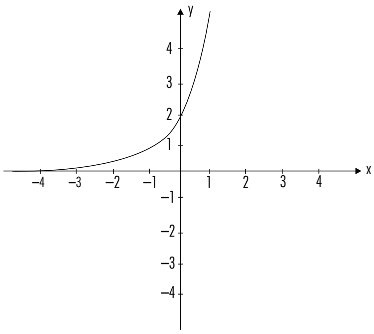
c.



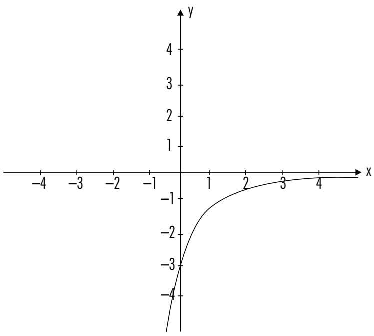
d.



e.



f.



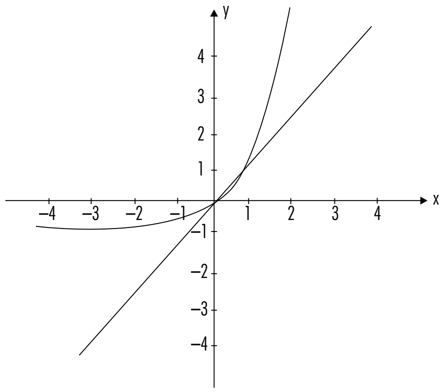
15) Os gráficos das funções são as imagens simétricas um do outro, em relação ao eixo vertical, pois $f_2(x) = 1/a^x = a^{-x} = f_1(-x)$.

16) a. $D =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$
b. $D = [0, +\infty[$
c. $D = \mathbb{R}^*$

17) (C)

18) $a = 4$

19)



A equação $2^x - 1 = x$ tem solução.

20) (B)

21) $x < 4$

22) (A)

23) (D)

24) 1996

Gabarito

Exercícios de Vestibular

1) **a.** 64%; **b.** 3 horas

2) B

3) C

4) **a.** 22,5°C; **b.** 5/21 h

5) B

6) D

7) 23h

8) a+b

9) 4096000

10) 483

11) B

12) 18

13) 3 horas

14) k = – 2900 peças

15) B

2

Logaritmo

DEFINIÇÃO DE LOGARITMO

Considere uma exponenciação x = ay, de base a > 0. Chamamos o expoente de logaritmo de x na base a, denotado por y = loga x, isto é: x = ay ⇔ y = loga x

Em outras palavras, o ***logaritmo de um número*** x ***na base*** a ***é o expoente*** y ***ao qual devemos elevar a base*** a ***para obter o resultado*** x.

Para entender o significado do logaritmo, bem como para deduzir propriedades e resolver exercícios envolvendo este conceito, é importante ter sempre em mente que a notação $y = \log_a x$ nada mais é que uma forma diferente de escrever uma exponenciação $x = a^y$. Assim, quando escrevemos $y = \log_a x$, devemos lembrar que os números envolvidos são termos de uma exponenciação: a é base, y é o expoente e x é o resultado.

Desta forma, as propriedades do logaritmo, que deduziremos a seguir, decorrem diretamente das propriedades da exponenciação. Antes disso, cabem duas observações importantes. Em primeiro lugar, se $y = \log_a x$, como x é o resultado de uma exponenciação, então x não pode ser negativo nem igual a 0. Logo, devemos ter $x > 0$. Em segundo lugar, tomando a base $a = 1$, se elevamos a a qualquer número $y \in IR$, obtemos sempre 1 como resultado. Neste caso, não é possível obter um resultado x qualquer. Logo, devemos restringir a base a: $a > 0$, $a \neq 1$.

Uma das propriedades da exponenciação diz o seguinte: $a^{y_1} . a^{y_2} = a^{y_1 + y_2}$

Isto é, o expoente de um produto é a soma dos expoentes dos fatores. Em linguagem de logaritmos, podemos dizer que o logaritmo de um produto é a soma dos logaritmos dos fatores. Podemos verificar algebricamente que esta propriedade de fato é válida.

Tomemos dois números reais positivos $x_1, x_2 > 0$ e consideremos seus logaritmos:

$y_1 = \log_a x_1$

$y_2 = \log_a x_2$

Então, pela definição de logaritmo, temos que:

$x_1 = a^{y_1} \quad x_2 = a^{y_2}$

Multiplicando as igualdades anteriores, temos: $x_1 . x_2 = a^{y_1} . a^{y_2} = a^{y_1 + y_2}$

Novamente pela definição de logaritmo, temos: $\log_a (x_1 . x_2) = y_1 + y_2$

Portanto: $\log_a (x_1 . x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$

Outra propriedade da exponenciação afirma que: $a^{k.y} = (a^y)^k$

Desta decorre mais uma propriedade de logaritmos. Tomemos um número real positivo $x > 0$ e consideremos seu logaritmo: $y = \log_a x$

Pela definição de logaritmo, temos: $x = a^y$

Elevando a igualdade acima a outro número real positivo $k > 0$, obtemos:

$x^k = (a^y)^k = a^{ky}$

Novamente pela definição de logaritmo, temos: $\log_a (x^k) = k . y$

Logo: $\log_a (x^k) = k \log_a x$

Outra propriedade importante é a chamada mudança de base de logaritmos. Tomemos um número real positivo $x > 0$ e consideremos seus logaritmos em relação a duas bases diferentes $a, b > 0$, $a,b \neq 1$:

Então, pela definição de logaritmo, temos que:

$y_1 = \log_a x$

$y_2 = \log_b x$

Logo:

$x = a^{y_1}$

$x = b^{y_2}$

Elevando a igualdade acima a $1/y_2$, obtemos:

$$\left(a^{y_1}\right)^{1/y_2} = \left(b^{y_2}\right)^{1/y_2}$$

$$a^{y_1/y_2} = b$$

Novamente pela definição de logaritmo, temos:

$$\log_a b = y_1/y_2$$

Então:

$$\log_a b = \frac{\log_a x}{\log_b x}$$

Em resumo, são propriedades dos logaritmos:

- $\log_a (x_1 . x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 \ \forall\ a > 0, a \neq 1, x_1, x_2 > 0$
- $\log_a (x^k) = k . \log_a x \ \forall\ a > 0, a \neq 1, x, k > 0$
- $\dfrac{\log_a x}{\log_b x} = \log_b a \ \forall\ a, b > 0, a, b „\ 1,\ x > 0$

Uma interpretação importante é a estreita relação entre o logaritmo de um número e a ordem de grandeza desse número. Na discussão a seguir, consideraremos o logaritmo de base 10, chamado ***logaritmo decimal***. Para o logaritmo decimal, omitimos o índice na notação, isto é, escrevemos simplesmente $\log_{10} x = \log x$. Diretamente da definição de logaritmo, segue que log 10 = 1, log 100 = 2, e assim por diante: $\log (10^k) = k$

Consideremos agora, por um exemplo, um número natural x com dois algarismos, isto é $10 \leq x < 100$. Como log 10 = 1 e log 100 = 2, temos que $1 \leq \log x < 2$, isto é, a parte inteira de log x é igual a 1.

De forma mais geral, consideremos um número natural x com k algarismos. Então, $10^{k-1} \leq x < 10^k$. Como log10 = 1 e log 100 = 2, temos que $1 \leq \log x < 2$, isto é, a parte inteira de logx é igual a k – 1. Desta forma, o logaritmo de um número natural nos dá a informação de quantos algarismos esse número possui, isto é, sua ordem de grandeza no sistema de numeração decimal.

Evidentemente, podemos generalizar este fato para um número real positivo x. Se x é um número real positivo cuja parte inteira tem k algarismos, isto é $10^{k-1} \le x < 10^k$, então $k - 1 \le \log x < k$. Logo, a parte inteira de log x é igual a k −1.

Assim:

Se a parte inteira de um número real positivo x tem k algarismos, então a parte inteira de log x é igual a k − 1.

EXERCÍCIOS

1) Calcule:

a. $\log_3 \left(\frac{1}{27}\right)$

b. $\log_{25} 125$

c. $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt[3]{64}$

d. $\log_{13} 13 \cdot \log_{15} 1$

e. $\log_{0,01} 10$

f. $\log_{0,04} 125$

2) Considere x, y ∈ IN dois números, com m e n algarismos, respectivamente. O que se pode afirmar sobre o número de algarismos do produto x . y ? Justifique sua resposta com base nas propriedades do conceito de logaritmo.

3) Se x é um número real tal que log x = 4,329, quantos algarismos tem a parte inteira de x?

4) Quantos algarismos tem o número 2^{50}? Use $\log 2 \cong 0,301$

5) Quantos algarismos tem o número 9^{25}? Use $\log 3 \cong 0,477$

6) Use as aproximações $\log 2 \cong 0,301$, $\log 3 \cong 0,477$ e $\log 5 \cong 0,699$ para obter uma aproximação para

a. log 9

b. log 200

c. log 40

d. log 3000

e. log 0,003

f. log 0,81

7) Seja a ∈ IN. Considere a decomposição em fatores primos $a = p_1^{k_1} \ldots p_n^{k_n}$. Determine uma relação entre o logaritmo de a e os logaritmos de seus fatores primos:

8) Seja x um número real positivo e seja $y = 10^k x$, com k ∈ IN.

a. Mostre que log y − log x = k.

b. Do item anterior, conclua que log x e log y possuem a mesma representação decimal depois da vírgula.

9) Resolva as equações para x ∈ IR:

a. $\log_2 (4x - 4) = 2$

b. $\log_3 (2x - 1) - \log_3 (5x + 3) = -1$

10) (UERJ/1992) O valor de $4^{\log_2 9}$ é

(A) 81
(B) 64
(C) 48
(D) 36
(E) 9

11) (UNIRIO/1993) Se $x = \log_3 2$, então $3^x + 3^{-x}$ é igual a:

(A) 8/7
(B) 5/2
(C) 4
(D) 6
(E) 9

12) (PUC / 1990) Se log a + log b = p, então o valor de log (1/a) + log (1/b) é:

(A) 1/p
(B) – p

(C) p
(D) p – 1
(E) p + 1

13) Se $a = \log_8 225$ e $b = \log_8 15$, então:
(A) 2a = b
(B) 3a = 2b
(C) a = b
(D) 2b = a
(E) 3b = 2a

14) (UFF/1995) Sejam x, y e p, números reais positivos $p \neq 1$. Se $\log_p (x + y) = m$ e $\log_p (x) + \log_p (y) = n$, então $\log_p \left(\dfrac{x+y}{xy}\right)$ é igual a:
(A) m^n
(B) m/n
(C) m . n
(D) m + n
(E) m – n

15) (UNICAMP/1993) Calcule o valor da expressão $\log_n \left(\log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}\right)$, onde n é um número inteiro, $n \geq 2$. Ao fazer o cálculo, você verá que esse valor é um número que não depende de n.

16) Se $\log_a x = 4$ e $\log_{a/3} x = 8$, determine x e a.

A Função Logarítmica

Para definir a função logarítmica de base $a > 0$, $a \neq 1$, devemos observar que só podemos calcular o logaritmo de números positivos (como já comentamos). Portanto, esta função deve ser definida no domínio $]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} g:\ ]0, +\infty[&\rightarrow IR \\ x &\mapsto \log_a x \end{aligned}$$

A função logarítmica $g(x) = \log_a x$ é a função inversa da exponencial $f: IR \rightarrow IR$, $f(x) = a^x$. De fato, como por definição, $\log_a x$ é o expoente ao qual se deve elevar a base a para obter o resultado x, temos que:

$f(g(x)) = a^{\log_a x} = x$

$g(f(x)) = \log_a (a^x) = x$

Qualquer que seja a base a, temos que $f(1) = \log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$, e que $f(a) = \log_a a = 1$, pois $a^1 = a$.

Observemos as diferenças de comportamento das funções logarítmicas para bases $a > 1$ e $0 < a < 1$. Consideremos os exemplos das funções $g_1, g_2 : IR \rightarrow IR$ definidas por $g_1(x) = \log_2 x$ e $g_2(x) = \log_{1/2} x$ e vamos construir tabelas de valores.

x	**$g_1(x) = \log_2 x$**	**$g_2(x) = \log_{1/2} x$**
$2^{-3} = 1/8$	$\log_2 (2^{-3}) = -3$	$\log_{1/2} (2^{-3}) = \log_{1/2} ((1/2)^3) = 3$
$2^{-2} = 1/4$	$\log_2 (2^{-2}) = -2$	$\log_{1/2} (2^{-2}) = \log_{1/2} ((1/2)^2) = 2$
$2^{-1} = 1/2$	$\log_2 (2^{-1}) = -1$	$\log_{1/2} (2^{-1}) = \log_{1/2} (1/2) = 1$
$2^0 = 1$	$\log_2 (1) = 0$	$\log_{1/2} (1) = 0$
$2^1 = 2$	$\log_2 (2) = 1$	$\log_{1/2} (2) = \log_{1/2} ((1/2)^{-1}) = -1$
$2^2 = 4$	$\log_2 (2^2) = 2$	$\log_{1/2} (2^2) = \log_{1/2} ((1/2)^{-2}) = -2$
$2^3 = 8$	$\log_2 (2^3) = 3$	$\log_{1/2} (2^3) = \log_{1/2} ((1/2)^{-3}) = -3$

No caso de $g_1(x) = \log_2 x$, temos:

• cada vez que multiplicamos pela base 2 o valor de x, somamos uma unidade ao valor de y;

• cada vez que dividimos pela base 2 o valor de x, subtraímos uma unidade do valor de y.

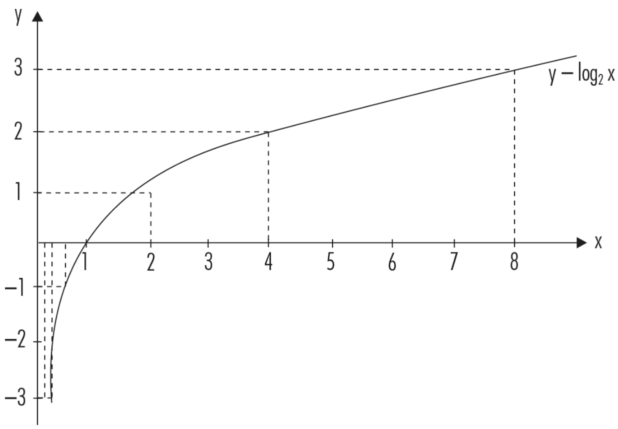
Assim, quando x cresce indefinidamente, tendendo a $+\infty$, y também tende a $+\infty$; e quando x tende a 0, y tende a $-\infty$.

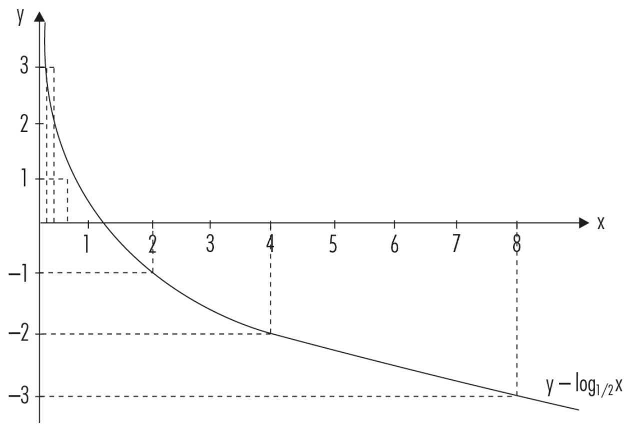
No caso de $g_2(x) = \log_{1/2} x$:

• cada vez que multiplicamos pela base 1/2 o valor de x (isto é, que dividimos x por 2), subtraímos uma unidade ao valor de y;

• cada vez que dividimos pela base 1/2 o valor de x (isto é, que multiplicamos x por 2), somamos uma unidade do valor de y.

Logo, quando x tende a $+\infty$, y tende a $-\infty$; e quando x tende a 0, y tende a $+\infty$. Desta forma, os gráficos das funções g_1 e g_2 têm o seguinte aspecto:





O mesmo raciocínio vale para uma função logarítmica de base a > 0 qualquer:

• cada vez multiplicamos pela base a o valor de x, somamos uma unidade ao valor de y;

• cada vez que dividimos pela base a o valor de x, subtraímos uma unidade do valor de y.

Em resumo, são propriedades da função logarítmica:

Se a > 0:	**Se 0 < a < 1:**
$g(x) < 0$ para $0 < x < 1$	$f(x) > 1$ para $x > 0$
$g(x) > 0$ para $x > 1$	$f(x) < 1$ para $x > 0$
$g(1) = 0$	$g(1) = 0$
$g(a) = 1$	$g(a) = 1$
$g(x) \to -\infty$ quando $x \to 0$	$g(x) \to +\infty$ quando $x \to 0$
$g(x) \to +\infty$ quando $x \to +\infty$	$g(x) \to -\infty$ quando $x \to +\infty$
g é estritamente crescente	g é estritamente decrescente
$Im(g) = IR$	$Im(g) = IR$

Exercícios

17) Considere a progressão geométrica $x_n = 3 \cdot 2^n$ com $n \in IN$, cujo termo inicial é 3 e a razão é 2. Considere ainda a função logarítmica $g: IR \to IR$, definida por $g(x) = \log_5 x$. Seja y_n a sequência formada pelas imagens de x_n por g, isto é, $y_n = g(x_n)$. Verifique que y_n é uma progressão aritmética e identifique seu termo inicial e sua razão.

18) Sejam $x_n = x_0 \cdot r^n$, com $n \in IN$, a progressão geométrica com termo inicial $x_0 \in IN$ e razão $r \in IN$ e $g: IR \to IR$ a função exponencial definida por $g(x) = \log_a x$, com $a > 0$, $a \neq 1$. Seja y_n a sequência dada por $y_n = g(x_n)$. Verifique que y_n é uma progressão aritmética e identifique seu termo inicial e sua razão.

19) Considere as funções f, g: $]0, +\infty[\to IR$ definidas por $f(x) = 3^n$ e $g(x) = \log_4 x$. Calcule $f(g(2))$.

20) Determine o maior subconjunto $D \subset IR$ tal que seja possível definir uma função $f: D \to IR$, $y = f(x)$, com a lei de formação $y = \log_3 (x^2 - 3x + 2)$.

21) O pH de uma solução é o logaritmo decimal do inverso da concentração de H^+. Qual o pH de uma solução cuja concentração de H^+ é $3,16 \times 10^{-5}$ mol/L? Dado: $\sqrt{10} \cong 3,16$

22) Um aluno, para calcular o pH da água, sabendo que seu produto iônico, a 25°C, corresponde a 10^{-14}, utilizou, por engano, a seguinte fórmula:
$pH = -\log_{100} (H^+)$

O valor encontrado pelo aluno foi igual a:
(A) 1,4
(B) 3,5
(C) 7,0
(D) 10,0

23) (UNIRIO/94) Um explorador descobriu, na selva amazônica, uma espécie nova de planta e, pesquisando-a durante anos, comprovou que o seu crescimento médio variava de acordo com a fórmula $A = 40 \cdot (1,1)^t$, onde a altura média A é medida em centímetros e o tempo t em anos. Sabendo-se que $\log 2 \cong 0,30$ e $\log 11 \cong 1,04$, determine:

a. a altura média, em centímetros, de uma planta dessa espécie aos 3 anos de vida;

b. a idade, em anos, na qual a planta tem uma altura média de 1,6 m.

24) (UERJ/2008) Admita que, em um determinado lago, a cada 40 cm de profundidade, a intensidade de luz é reduzida em 20%, de acordo com a equação $I = I_0 \cdot 0,8^{k/40}$. I é a intensidade da luz em uma profundidade h, em centímetros, e I_0 é a intensidade na superfície. Um nadador verificou, ao mergulhar nesse lago, que a intensidade da luz, em um ponto P, é de 32% daquela observada na superfície. A profundidade do ponto P, em metros, considerando $\log 2 \cong 0,3$, equivale a:
(A) 0,64
(B) 1,8
(C) 2,0
(D) 3,2

25) O acidente do reator nuclear de Chernobyl, URSS, em 1986, lançou na atmosfera grande quantidade do isótopo radioativo estrôncio-90, cuja meia-vida é de vinte e oito anos. Supondo ser este isótopo a única contaminação radioativa e sabendo que o local poderá ser considerado seguro quando a quantidade de estrôncio-90 se reduzir, por desintegração, a 1/16 da quantidade inicialmente presente, em que ano o local poderá ser habitado novamente?

26) Pelos programas de controle de tuberculose, sabe-se que o risco de infecção R depende do tempo t, em anos, do seguinte modo: $R = R_0\, e^{-kt}$, em que R_0 é o risco de infecção no início da contagem do tempo t e k é o coeficiente de declínio. O risco de infecção atual em Salvador foi estimado em 2%. Suponha que, com a implantação de um programa nesta cidade, fosse obtida uma redução no risco de 10% ao ano, isto é, k = 10%. Use a tabela abaixo para os cálculos necessários:

x =	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
$e^x \cong$	8,2	9,0	10,0	11,0	12,2

Qual é o tempo em anos para que o risco de infecção se torne inferior a 0,2%?

27) O corpo de uma vítima de assassinato foi encontrado às 22 horas. Às 22h30min, o médico da polícia chegou e imediatamente tomou a temperatura do cadáver, que era de 32,5°C. Uma hora mais tarde, tomou a temperatura outra vez e encontrou 31,5°C. A temperatura do ambiente foi mantida constante a 16,5°C. Admita que a temperatura normal de uma pessoa viva seja 36,5°C e suponha que a lei matemática que descreve o resfriamento do corpo é dada por: $D(t) = D_0\, 2^{-2\alpha t}$. Em que t é o tempo em horas, D_0 é a diferença de temperatura do cadáver com o meio ambiente no instante t = 0, D(t) é a diferença de temperatura do cadáver com o meio ambiente num instante t qualquer e α é uma constante positiva. Os dados obtidos pelo médico foram colocados na tabela seguinte:

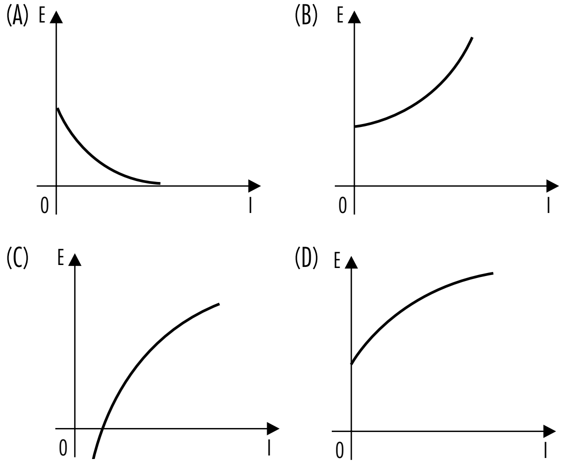
	Hora	Temperatura do corpo	Temperatura do quarto	Diferença de temperatura
t = ?	morte	36,5°	16,5°	20,0°
t = 0	22h30min	32,5°	16,5°	16,0°
t = 1	23h30min	31,5°	16,5°	15,0°

Considerando os valores aproximados $\log_2 3 \cong 1,6$ e $\log_2 5 \cong 2,3$, determine a hora em que a pessoa morreu.

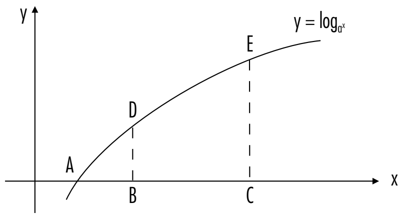
28) (UERJ / 2006) A intensidade I de um terremoto, medida pela escala Richter, é definida pela equação abaixo, na qual E representa a energia liberada em kWh.

$$I = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

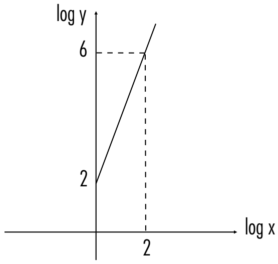
O gráfico que melhor representa a energia E, em função da intensidade I, sendo $E_0 = 10^{-3}$ kWh, está indicado em:



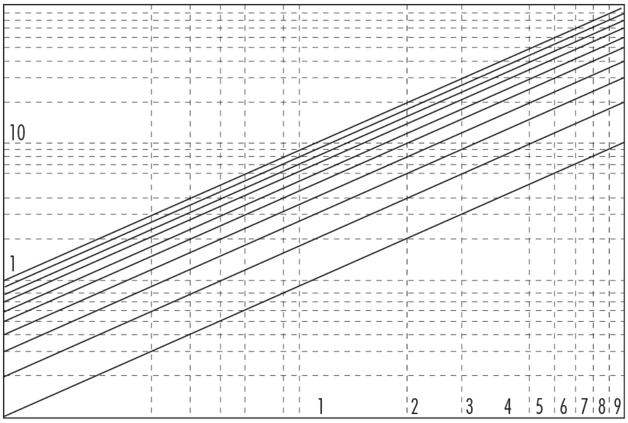
29) (UNESP/92) A curva da figura representa o gráfico da função $y = \log_a x$ $(a > 0)$. Dos pontos B = (2, 0) e C = (4, 0) saem perpendiculares ao eixo das abscissas, as quais interceptam a curva em D e E, respectivamente. Se a área do trapézio retangular BCED vale 3, provar que a área do triângulo ABD, onde A = (1,0), vale 1/2.

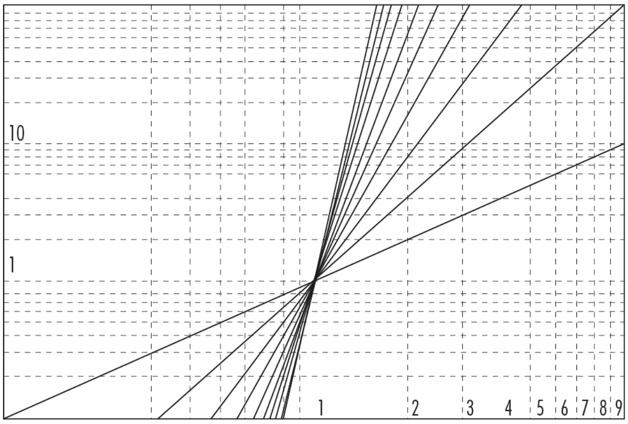


30) (UFRJ/1998) Sejam x e y duas quantidades. O gráfico abaixo expressa a variação de log y em função de log x, onde log é o logaritmo na base decimal. Determine uma relação entre x e y que não envolva a função logaritmo.



31) Os gráficos a seguir foram desenhados por um programa de computador, em eixos x'y' com escalas logarítmicas decimais. Isto é, se xy é o sistema de coordenadas cartesianas convencional, então $x' = \log x$ e $y' = \log y$. A janela gráfica é $0{,}1 \leq x \leq 100$ e $0{,}1 \leq y \leq 100$.





a. O gráfico acima à esquerda representada a família $y = k \cdot x$, em que $k \in \mathbb{N}$ varia de 1 a 10. Explique por que as curvas têm este aspecto.

b. O gráfico acima à direita representada a família $y = x^k$, em que $k \in \mathbb{N}$ varia de 1 a 10. Explique por que as curvas têm este aspecto.

c. Observe que os intervalos escolhidos para ambos os eixos nessa escala começam em 0,1. Como você justificaria essa escolha? Faria sentido começar os eixos em 0?

d. Nesses eixos, cada unidade linear corresponde a uma multiplicação por 10. Explique essa afirmação.

e. Pesquise situações em que o uso de eixos em escalas logarítmicas é útil.

Gabarito

Exercícios

1)
a. -3 **b.)** $3/2$ **c.** -1 **d.** 0 **e.** $-1/2$ **f.** $-1{,}5$

2) Considere x tem m algarismos e y tem n algarismos, então $10^{m-1} \leq x \leq 10^m$ e $10^{n-1} \leq y \leq 10^n$. Então $m - 1 \leq \log x < m$ e $n - 1 \leq \log y < n$. Logo:
$m + n - 2 \leq \log x + \log y < m + n$
$m + n - 2 \leq \log (x \cdot y) < m + n$
$10^{m+n-2} \leq x \cdot y < 10^{m+n}$
Portanto, $x \cdot y$ tem $m + n - 1$ ou $m + n$.

3) 5

4) 16

5) 24

6) Observação: se as aproximações dadas forem usadas de forma diferente, os valores obtidos abaixo podem variar.
a. $\log 9 \cong 0{,}954$
b. $\log 200 \cong 2{,}0301$
c. $\log 40 \cong 1{,}602$
d. $\log 3000 \cong 3{,}477$
e. $\log 0{,}003 \cong -2{,}523$
f. $\log 0{,}81 \cong 0{,}092$

7) $\log a = k_1 \log p_1 + \ldots + k_n \log p_n = \sum_{i=1}^{n} k_i \log p_i$

8)
a. $\log y = \log (10^k x) = \log (10^k) + \log(x) = k + \log(x) \Rightarrow \log y - \log(x) = k$
b. Como a diferença entre log x e log y é um número natural, então log x e log y possuem a mesma representação decimal depois da vírgula.

9)
a. $x = 2$
b. $x = 6$

10) (A)

11) (B)

12) (B)

13) (D)

14) (E)

15) $\log_n \left(\log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}\right) = -2$

16) $x = 9^4 = 6561$ e $a = 9$.

17) $y_n = \log_5 3 + n\log_5 2$ é uma progressão aritmética de termo inicial $\log_5 3$ e razão $\log_5 2$.

18) $y_n = \log_a x_0 + n\log_a r$ é uma progressão aritmética de termo inicial $\log_a x_0$ e razão $\log_a r$

19) $f(g(2)) = \sqrt{3}$

20) $D =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$

21) $5 - \log(3{,}16) \cong 4{,}5$

22) (C)

23)
a. 53,24 cm

b. $\dfrac{2\log 2}{\log 11 - 1} \cong 15$ (em anos)

24) (C)

25) Depois de 2098.

26) Aproximadamente 23 anos.

27) Aproximadamente, 3 horas antes das 22h30min, isto é, às 19h30min.

28) (B)

29) Como B = (2, 0) e C = (4, 0), então B = $(2, \log_a 2)$ e C = $(4, \log_a 4)$. Logo, a área BCED é dada por $S_1 = 1/2 \cdot 2(\log_a 4 + \log_a 2) = 2 \cdot \log_a 2 + \log_a 2 = 3 \cdot \log_a 2$. Como $S_1 = 3$, então $\log_a 2 = 1$, portanto, $a = 2$. Segue que a área de ABD é dada por $1/2\,(2 - 1)\log_2 2$

30) $y = 100 \cdot x^2$

31)
a. Se $y = k \cdot x$, então $\log y = \log(k \cdot x) = \log x + \log k$. Portanto $\log y' = x' + \log k$. Por isso as curvas têm este aspecto no sistema x'y'.
b. Se $y = x^k$, então $\log y = \log(x^k)$. Portanto $y' = k \cdot x'$. Por isso as curvas têm este aspecto no sistema.
c. Os eixos não podem começar em 0 pois o logaritmo não estaria definido.
d. Seja x_0' um ponto fixado sobre o eixo x' e seja $x_1' = x_0' + 1$. Se x_0 e x_1 são os pontos correspondentes a x_0' e x_1' no sistema cartesiano, então $\log x_1 = \log x_0 + 1$. Então, $\log x_1 = \log(10 \cdot x)$, e $x_1 = 10.x$
e. Resposta variável.

3

Geometria Plana

Introdução

No estudo da Geometria Plana, o ponto de partida são os elementos primitivos e os postulados (ou axiomas).

Elementos primitivos são objetos que fazem parte de nossa intuição, como pontos, retas, planos.

Postulados são enunciados envolvendo os elementos primitivos que aceitamos como verdadeiros, sem discussão em virtude de suas evidências.

Usaremos as letras minúsculas r, s, t,... para representar retas, letras maiúsculas A, B, C... para representar pontos e a letra grega α para representar o plano. Na figura 3.1, no plano α, estão representados pontos pertencentes a uma reta r e pontos fora de r.

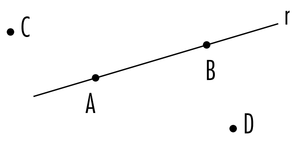


Figura 3.1: O plano, reta e pontos.

Para produzir a figura 3.1 usamos um dos postulados básicos da Geometria: "Dois pontos do plano definem uma única reta."

Notação: Dados dois pontos A e C do plano, representamos por $\overleftrightarrow{AC}$ a única reta que passa por estes pontos.

Segmento de reta

Dois pontos A e B de um plano definem um segmento de reta cuja notação é AB. O segmento AB é o conjunto de todos os pontos da reta $\overleftrightarrow{AB}$ que estão entre A e B.

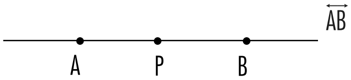


Figura 3.2: P é um ponto do segmento AB.

Medida de um segmento

Para medir segmentos, tomamos um segmento como unidade e a partir daí, podemos medir qualquer outro segmento. Veja na figura 3.3, as medidas dos segmentos AB e CD, usando um segmento unitário.

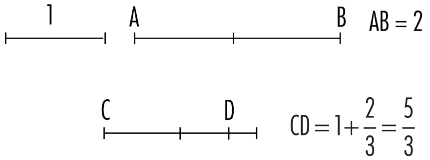


Figura 3.3: Medidas de segmentos.

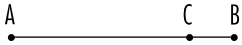
Nota Importante: Neste texto usamos a notação CD tanto para representar o segmento de reta cujos extremos são os pontos C e D, quanto para representar a medida do segmento. Veja a figura 3.3.

Congruência de segmentos

Dois segmentos de reta AB e CD são congruentes se possuem a mesma medida. A notação rigorosa para representar congruência é $AB \equiv CD$. No entanto, comumente escrevemos simplesmente AB = CD.

Notas

1) Se um ponto C pertence a um segmento AB, em termos de medidas resulta que,



AC + CB = AB

Figura 3.4: Aditividade da medida.

2) Escolhendo uma reta r e dois pontos O e A, de modo que OA = 1, podemos fazer uma correspondência entre pontos da reta r e o conjunto dos números reais R. Veja a figura 3.5. A todo ponto de r corresponde um único número real e a todo número real corresponde um único ponto da reta r. Acompanhe por meio de dois exemplos como associar aos pontos da reta números reais. Por exemplo, sobre o ponto B assimilamos o número real π porque a medida do segmento OB é igual a π. Sobre o ponto C associamos o número -2, porque a medida do segmento OC é igual a 2. Isto é, para pontos da reta situados à esquerda do ponto O (origem), associamos números reais negativos e para pontos situados à direita de O, associamos números reais positivos. Note que tem comprimento 1 qualquer segmento em cujos extremos estão marcados dois inteiros consecutivos.

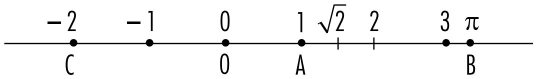


Figura 3.5: A reta e os números reais.

Semirretas

Um ponto A sobre uma reta r define duas semirretas com origem comum neste ponto. Escolha agora dois novos pontos B e C sobre a reta, sendo um ponto em cada semirreta. Veja a figura 3.6. As semirretas então podem ser denotadas por $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}$, respectivamente.

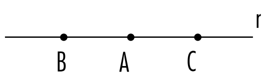


Figura 3.6: Semirretas com origem comum.

Nota: Como conjuntos $\overrightarrow{AC} \cup \overrightarrow{AB} = r$ e $\overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{AB} = \{A\}$. Observe também que o ponto A pertence ao segmento BC. Esta última propriedade é importante. Observe as seguintes propriedades:

1) se dois pontos B e C distintos de A estão em semirretas distintas, então o segmento BC definido por estes dois pontos contém o ponto A. Em símbolos, $A \in BC$.

2) se dois pontos B e D distintos de A estão na mesma semirreta, então o segmento BD definido por estes dois pontos não contém o ponto A. Em símbolos, $A \notin BD$.

Semiplanos

Uma reta r contida no plano α divide o plano em dois semiplanos α_1 e α_2 (α_1 e α_2 são os "lados do plano definidos por r"). Veja a figura 3.7.

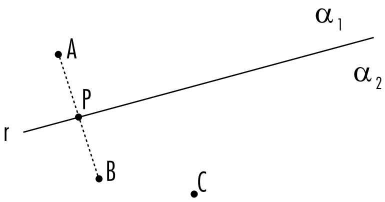


Figura 3.7: Semiplanos.

Podemos fazer três importantes afirmações:

1) Como conjuntos: $\alpha_1 \cup \alpha_2 = \alpha$ e $\alpha_1 \cap \alpha_2 = r$.

2) Se dois pontos A e B estão fora da reta e situados em semiplanos distintos então o segmento AB definido pelos pontos intersecta r (veja a figura 3.7 onde $AB \cap r = \{ P \}$)

3) Se dois pontos B e C fora de r estão no mesmo semiplano então o segmento definido não intersecta r (exemplo $BC \cap r = \emptyset$, figura 3.7).

Ângulos

Ângulo é a figura formada no plano por duas semirretas de mesma origem. Veja a figura 3.8.

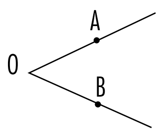


Figura 3.8: Ângulo de vértice O.

O ponto O é o vértice do ângulo e as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ os lados do ângulo. Usamos a notação AÔB para representar o ângulo. Às vezes é comum também o uso de letras gregas α, β,... para representar ângulos.

Interior do ângulo AÔB

É o conjunto do plano obtido pela interseção de dois semiplanos: o primeiro sendo o semiplano definido pela reta $\overleftrightarrow{OA}$ e que contém o ponto B e o segundo sendo o semiplano definido pela reta $\overleftrightarrow{OB}$ e que contém o ponto A.

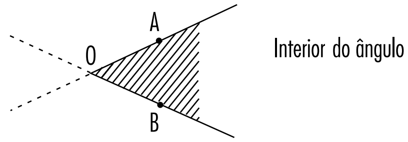


Figura 3.9: Interior de um ângulo.

Ângulos Adjacentes

São ângulos que possuem um lado comum e este lado comum está no interior do ângulo formado pelos dois outros lados. Na figura 3.10, AÔB = α, BÔC = β, EÔF = γ e EÔG = θ.

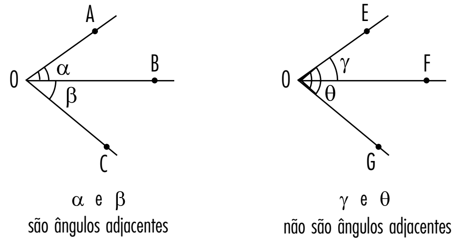


Figura 3.10: Ângulos adjacentes e não adjacentes.

Medida e congruência de ângulos

Todo ângulo tem uma medida em graus que é um número compreendido entre 0 e 360º. O ângulo formado por duas semirretas coincidentes mede zero grau e o ângulo formado por duas semirretas opostas mede 180º. O ângulo de 180º é dito ângulo raso e o ângulo de 0º é dito ângulo nulo.

Congruência de ângulos

Dois ângulos α e β são congruentes se possuem a mesma medida. Usamos a notação $\alpha \equiv \beta$ ou simplesmente, $\alpha = \beta$.

Perpendicularismo e distância

Duas retas r e t concorrentes são perpendiculares se os ângulos formados pela interseção são todos iguais. Nesta situação, os ângulos medem 90º. Veja a Figura 3.11.

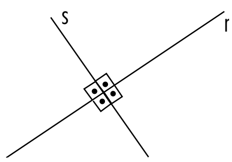


Figura 3.11: Retas perpendiculares.

A distância de um ponto P a uma reta r é dada pelo comprimento do segmento PE onde E é um ponto de r e as retas r e $\overleftrightarrow{PE}$ são perpendiculares. Veja a figura 3.12.

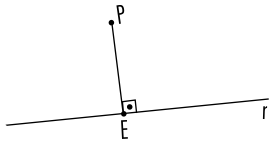


Figura 3.12: Distância de ponto a reta.

Portanto, PE é a distância de P a r.

Bissetriz de um ângulo

É a semirreta que divide um ângulo em dois ângulos adjacentes congruentes.

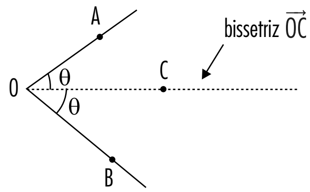


Figura 3.13: Bissetriz.

Nota: Se um ponto P está sobre a bissetriz de um ângulo, P equidista dos lados do ângulo. O contrário (ou recíproca) também é verdadeiro: se um ponto equidista dos lados de um ângulo, o ponto pertence à bissetriz. Este resultado será melhor compreendido quando estudarmos congruência de triângulos.

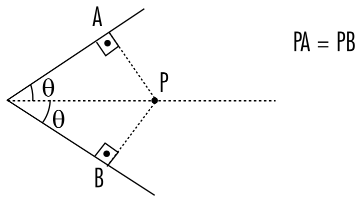


Figura 3.14: Bissetriz e equidistância.

Mediatriz de um segmento

A mediatriz do segmento AB é a reta perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AB}$ passando pelo ponto médio do segmento AB. O ponto médio M de AB é o ponto tal que AM = MB. Veja a figura 3.15, onde um ponto P é representado sobre a mediatriz.

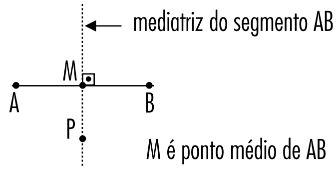


Figura 3.15: Mediatriz do segmento.

Nota: Se P é um ponto qualquer da mediatriz então PA = PB (a distância de P até A e até B coincidem). A recíproca é também verdadeira: se um ponto é equidistante de A e B então o ponto pertence à mediatriz. Estes resultados serão melhor compreendidos no estudo de congruência de triângulos.

Ângulos agudo, reto e obtuso

Segundo suas medidas um ângulo é classificado como:
- ângulo agudo se sua medida é menor que 90º;
- ângulo reto se sua medida é 90º;
- ângulo obtuso se sua medida é maior que 90º.

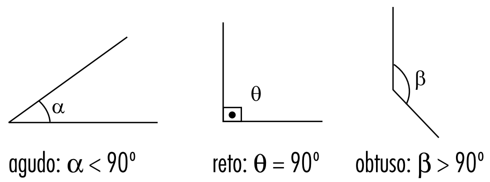
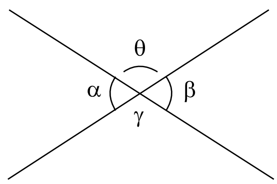


Figura 3.16: Classificação de ângulos.

Ângulos opostos pelo vértice

São aqueles ângulos cujos lados são definidos por semirretas opostas duas a duas. Veja a figura 3.17.



α e β são opostos pelo vértice
θ e γ são opostos pelo vértice

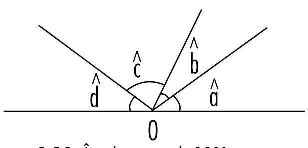
$\alpha = \beta$, $\theta = \gamma$
$\alpha + \theta = 180°$
$\beta + \gamma = 180°$

Figura 3.17: Propriedade do ângulo oposto.

Propriedades importantes

I) Ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

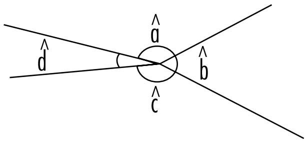
II) A soma de ângulos consecutivos que se podem formar do mesmo lado de uma reta com um mesmo vértice é 180º.



$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \hat{d} = 180°$

Figura 3.18: Ângulos somando 180º.

III) A soma de ângulos consecutivos que se pode formar ao redor de um ponto é 360º.



$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \hat{d} = 360º$

Figura 3.19: Ângulos somando 360º.

Ângulos complementares

São dois ângulos cuja soma das medidas é 90º. Dizemos que um dos ângulos é complemento do outro. Note que não é exigido que os ângulos sejam adjacentes. A figura 3.20 mostra ângulos complementares adjacentes. Temos que $\alpha + \theta = 90º$ e o complemento de $\theta = 90º - \theta = \alpha$.

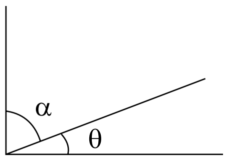


Figura 3.20: Ângulos complementares adjacentes.

Ângulos suplementares

São dois ângulos cuja soma das medidas é 180º. Cada um deles é o suplemento do outro. Note que a definição não exige que os ângulos sejam adjacentes. Na figura 3.21 estão representados ângulos suplementares adjacentes. Temos que $\alpha + \theta = 180º$.

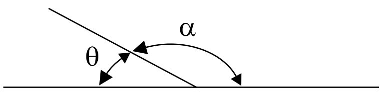


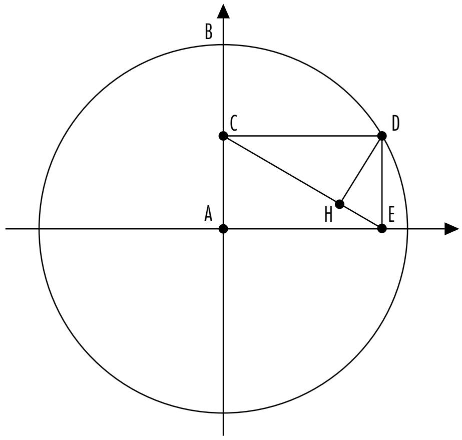
Figura 3.21: Ângulos suplementares.

Exercícios

1) Se $(x + 10)º$ e $(3x - 10)º$ são medidas de dois ângulos complementares, calcule suas medidas.

2) Pelo vértice O de um ângulo AÔB de 100º traça-se uma semirreta s com origem no vértice do ângulo e no interior do ângulo. Considere as bissetrizes r e t dos ângulos cujos lados são, respectivamente, formados por $\overrightarrow{AO}$ e s e por $\overrightarrow{OB}$ e s. Calcule o ângulo cujos lados são r e t.

3) (CEDERJ/2006-2) A figura a seguir apresenta uma circunferência de raio 2 cm, um triângulo CDE retângulo com hipotenusa CE e altura DH relativa à hipotenusa.



Sabendo que C é o ponto médio de AB e que CD é paralelo a AE, pode-se afirmar que sen(EDH) vale:

(A) $\frac{\sqrt{6}}{4}$

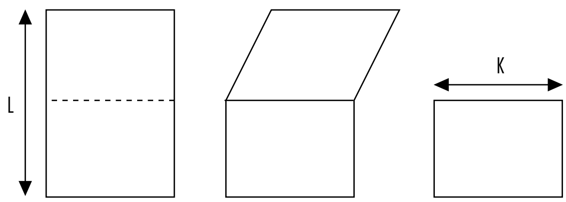
(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(D) $\frac{1}{2}$

(E) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

4) (CEDERJ/2008-2) Ao dobrarmos ao meio uma folha de papel A4 (figura abaixo) obtemos um retângulo semelhante à folha inteira.



Se L e K indicam, respectivamente, a medida do maior lado da folha de papel A4 e a medida do maior lado do retângulo obtido por meio da dobra, pode-se concluir que L/K é igual a:

(A) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

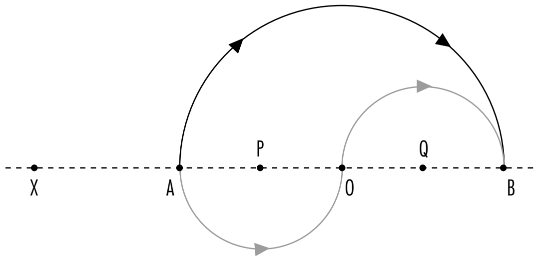
(B) 2

(C) $\frac{3}{2}$

(D) $\sqrt{2}$

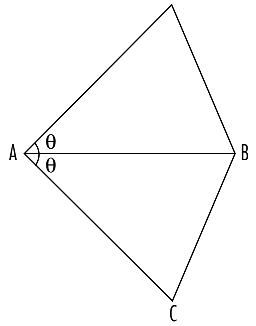
(E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

5) (UERJ/2006)



No esquema acima estão representadas as trajetórias de dois atletas que, partindo do ponto X, passam simultaneamente pelo ponto A e rumam para o ponto B por caminhos diferentes, com velocidades iguais e constantes. Um deles segue a trajetória de uma semicircunferência de centro O e raio 2R. O outro percorre duas semicircunferências cujos centros são P e Q. Considerando $\sqrt{2}$ = 1,4, quando um dos atletas tiver percorrido 3/4 do seu trajeto de A para B, a distância entre eles será igual a:
(A) 0,4 R
(B) 0,6 R
(C) 0,8 R
(D) 1,0 R

6) (UERJ/2007) O esquema abaixo representa a vela da asa-delta, que consiste em dois triângulos isósceles ABC e ABD congruentes, com AC = AB = AD. A medida de AB corresponde ao comprimento da quilha. Quando esticada em um plano, essa vela forma um ângulo CÂD = 2Θ.



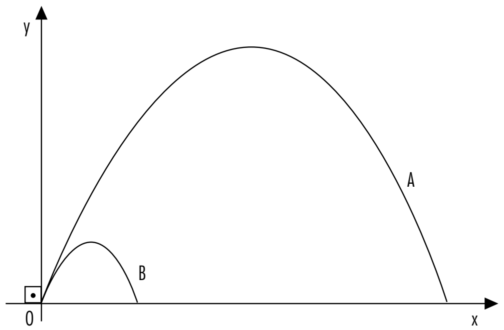
Suponha que, para planar, a relação ideal seja de 10 dm² de vela para cada 0,5 kg de massa total. Considere, agora, uma asa-delta de 15 kg que planará com uma pessoa de 75 kg. De acordo com a relação ideal, o comprimento da quilha, em metros, é igual à raiz quadrada de:
(A) 9 cos θ

(B) 18 sen θ

(C) $\frac{9}{\cos\theta}$

(D) $\frac{18}{\text{sen}\theta}$

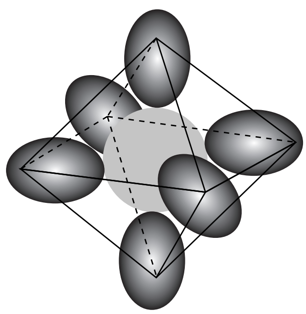
7) (UERJ/2007) As trajetórias A e B de duas partículas lançadas em um plano vertical xOy estão representadas abaixo.



Suas equações são, respectivamente, $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$ e $y = -\frac{1}{2}x^2 + x$

nas quais x e y estão em uma mesma unidade u. Essas partículas atingem, em um mesmo instante t, o ponto mais alto de suas trajetórias. A distância entre as partículas, nesse instante t, na mesma unidade u, equivale a:
(A) $\sqrt{6}$
(B) $\sqrt{8}$
(C) $\sqrt{10}$
(D) $\sqrt{20}$

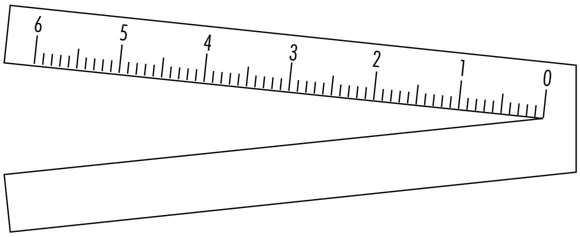
8) (UERJ/2007) A molécula do hexafluoreto de enxofre (SF_6) tem a forma geométrica de um octaedro regular. Os centros dos átomos de flúor correspondem aos vértices do octaedro, e o centro do átomo de enxofre corresponde ao centro desse sólido, como ilustra a figura abaixo.



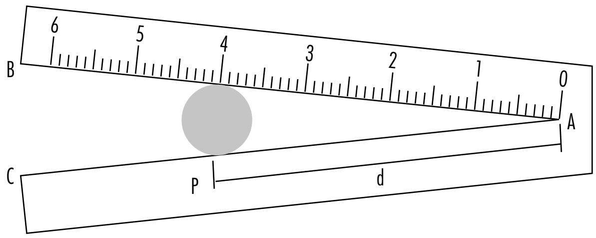
Considere que a distância entre o centro de um átomo de flúor e o centro do átomo de enxofre seja igual a 1,53 Å. Assim, a medida da aresta desse octaedro, em Å, é aproximadamente igual a:

(A) 1,53
(B) 1,79
(C) 2,16
(D) 2,62

9) (UERJ / 2008) A ilustração abaixo mostra um instrumento, em forma de V, usado para medir o diâmetro de fios elétricos.



Para efetuar a medida, basta inserir um fio na parte interna do V e observar o ponto da escala que indica a tangência entre esse fio e o instrumento. Nesse ponto, lê-se o diâmetro do fio, em milímetros. Considere, agora, a ilustração a seguir, que mostra a seção reta de um fio de 4 mm de diâmetro inserido no instrumento.



Se o ângulo BÂC do instrumento mede 12°, a distância d, em milímetros, do ponto A ao ponto de tangência P é igual a:

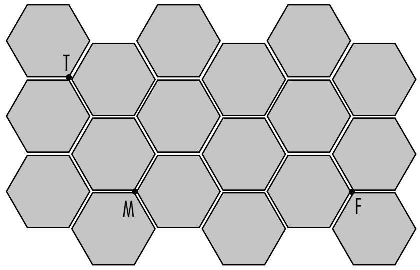
(A) $\dfrac{2}{\cos 12°}$

(B) $\dfrac{6}{\operatorname{sen} 12°}$

(C) $\dfrac{6}{\cos 6°}$

(D) $\dfrac{2}{\tan 6°}$

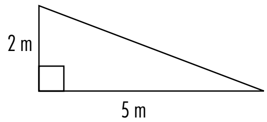
10) (UERJ/2009) Um piso plano é revestido de hexágonos regulares congruentes cujo lado mede 10 cm. Na ilustração de parte desse piso, T, M e F são vértices comuns a três hexágonos e representam os pontos nos quais se encontram, respectivamente, um torrão de açúcar, uma mosca e uma formiga.



Ao perceber o açúcar, os dois insetos partem no mesmo instante, com velocidades constantes, para alcançá-lo. Admita que a mosca leve 10 segundos para atingir o ponto T. Despreze o espaçamento entre os hexágonos e as dimensões dos animais. A menor velocidade, em centímetros por segundo, necessária para que a formiga chegue ao ponto T no mesmo instante em que a mosca, é igual a:

(A) 3,5
(B) 5,0
(C) 5,5
(D) 7,0

11) (UEZO/2006) Após um terremoto foi preciso reconstruir uma rampa nas condições definidas na figura abaixo.



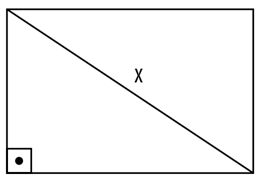
O comprimento da rampa, em metros, equivale, aproximadamente, a:

(A) 5,11
(B) 5,38
(C) 5,50
(D) 5,89

12) (UEZO/2006) O campo de futebol tem a forma de um retângulo. As suas medidas oficiais podem ser 120 m de comprimento e 90 m de largura. Em cada um dos quatro cantos do campo é fincada uma bandeirinha. A medida do perímetro desse campo, em metros, é igual a:

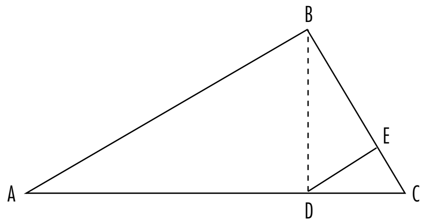
(A) 210
(B) 420
(C) 5400
(D) 10800

13) Com relação ao enunciado da questão 12, a distância x entre duas bandeirinhas, diametralmente opostas é, em metros, igual a:

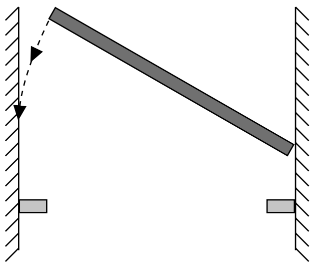


(A) 30
(B) 40
(C) 60
(D) 150

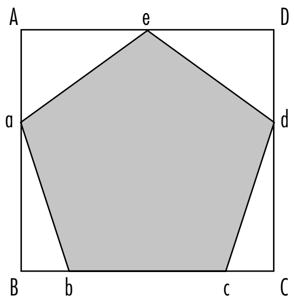
14) (UFRJ/2009) O triângulo ABC da figura a seguir tem ângulo reto em B. O segmento BD é a altura relativa a AC. Os segmentos AD e DC medem 12 cm e 4 cm, respectivamente. O ponto E pertence ao lado BC e BC = 4EC. Determine o comprimento do segmento DE.



15) (UFRJ/2008) Uma prateleira de um metro de comprimento e 4,4 cm de espessura deve ser encaixada entre duas paredes planas e paralelas. Por razões operacionais, a prateleira deve ser colocada enviesada (inclinada), para depois ser girada até a posição final, como indica a figura. Se a distância entre as paredes é de um metro e um milímetro, é possível encaixar a prateleira?



16) (UFRJ/2008) Seja abcde o pentágono regular inscrito no retângulo ABCD, como mostra a figura a seguir.



ABCD é um quadrado?

GABARITO

1) 22,5º

2) 50º

3) D

4) D

5) B

6) D

7) D

8) C

9) D

10) D

11) B

12) B

13) D

14) $2\sqrt{3}$

15) Concluímos que $h^2 = 1{,}002001$, logo d < h. Portanto, é possível colocar a prateleira corretamente.

16) Como os segmentos ad e AD são paralelos, têm o mesmo comprimento. Logo, não pode ser um quadrado, visto que AD = ad = ec > BC

4

Congruência de triângulos

Introdução

Um triângulo $\triangle ABC$ é definido por três pontos não alinhados A, B e C do plano. O triângulo $\triangle ABC$ é a união dos segmentos AB, AC e BC. Os ângulos $\hat{A} = B\hat{A}C$, $\hat{B} = A\hat{B}C$ e $\hat{C} = A\hat{C}B$ são os ângulos internos do triângulo. Veja a figura 4.1.

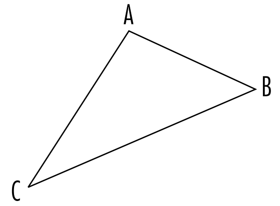


Figura 4.1: AB, AC e BC são os lados do triângulo.

Classificação

• **Quanto aos lados, os triângulos são classificados como:**

- equilátero se possuem os três lados congruentes;
- isósceles: se possuem dois lados congruentes;
- escaleno: se possuem os três lados diferentes.

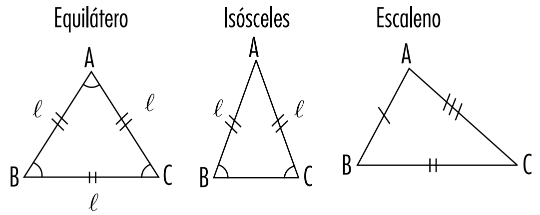


Figura 4.2: Classificação de triângulos quanto aos lados.

Nota: Os pequenos traços cortando os lados, que aparecem na figura 4.2, servem para identificar lados de mesmo comprimento.

• **Quanto aos ângulos, os triângulos são classificados como:**

- retângulos quando possuem um ângulo reto;
- acutângulos quando possuem os três ângulos agudos;
- obtusângulos quando possuem um ângulo obtuso.

Na figura 4.3 estão representados, respectivamente, triângulos retângulo, acutângulo e obtusângulo.

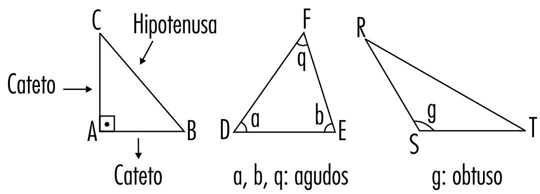


Figura 4.3: Classificação de triângulos quanto aos ângulos.

Na figura 4.3, aproveitamos para identificar num triângulo retângulo (desenho mais à esquerda) a hipotenusa como o lado oposto ao ângulo reto e aos outros dois lados reservamos a denominação de catetos.

Desigualdades importantes

Vamos admitir como verdadeiras três importantes propriedades elementares dos triângulos.

Propriedade1:

O maior lado de um triângulo opõe-se sempre ao maior ângulo;

Propriedade 2:

O maior ângulo de um triângulo opõe-se sempre ao maior lado;

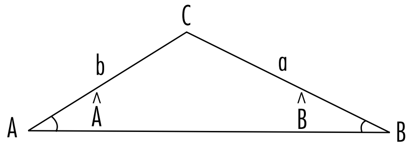


Figura 4.4: Lados e ângulos num triângulo.

Na figura 4.4 temos que

(I) Se $a > b \Rightarrow \hat{A} > \hat{B}$

(II) Se $\hat{A} > \hat{B} \Rightarrow a > b$

Propriedade 3:

Desigualdade triangular: Em todo triângulo cada lado fixado é menor que a soma dos outros dois lados. Veja estas relações explicitadas à esquerda da figura 4.5.

$a < b + c$
$b < a + c$
$c < a + b$

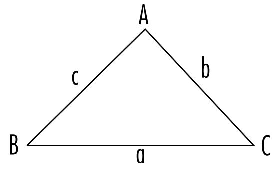


Figura 4.5: Comparação de lados de um triângulo.

Para um lado fixado do triângulo, por exemplo, o lado cuja medida é a, as relações entre os lados de um triângulo identificadas na propriedade 3 podem ser resumidas como: $a < b + c$ e $|b - c| < a$.

Veja por quê. As desigualdades triangulares implicam que,

$$\left.\begin{array}{l} b < a + c \Leftrightarrow b - c < a \\ c < a + b \Leftrightarrow c - b < a \end{array}\right\} \Leftrightarrow |b - c| < a$$

Em resumo, se dois lados de um triângulo são b e c, a medida do terceiro lado x deve ser tal que, $|b - c| < x < b + c$

Nota: Esta última desigualdade é uma equação de compatibilidade para que 3 segmentos possam ser lados de u m triângulo. Por exemplo, três segmentos a, b e c cujas medidas são a = 6 cm, b = 3 cm e c = 2 cm não podem ser lados de um triângulo. De fato, não vale a desigualdade $|b - a| < c < a + b$

Retas paralelas e retas concorrentes

Duas retas r e s do plano são paralelas se não possuem nenhum ponto em comum.

$$r \cap s = \emptyset$$

Duas retas r e s são concorrentes se sua interseção é exatamente um ponto P.

$$r \cap s = \{P\}$$

Retas paralelas cortadas por transversal

Quando duas retas paralelas r e s são cortadas por uma transversal t, damos nomes particulares aos pares de ângulos formados. Na figura 4.6, identificamos como alternos internos os pares de ângulos(c, e) e (d, f), como alternos externos os pares de ângulos(a, g) e (b, h) e como correspondentes os pares(a, e), (d, h), (b, f) e (c, g).

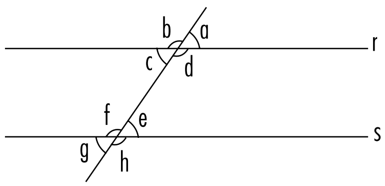


Figura 4.6: Ângulos alternos e correspondentes.

Propriedade 1: Ângulos correspondentes são congruentes.

Propriedade 2: Ângulos alternos são congruentes.

Teorema 1 (Teorema de Tales)

"A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°."

Prova: Considere o $\triangle ABC$, a reta s que contém BC, a reta r paralela a s passando por A e os ângulos indicados na figura.

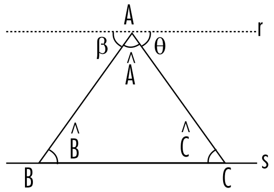


Figura 4.7: Teorema de Tales.

Como r || s, usando que ângulos alternos são iguais, temos que $\hat{B} = \beta$ e $\hat{C} = \theta$. Como $\beta + \hat{A} + \theta = 180°$, encontramos que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$.

Ângulos externos de um triângulo $\triangle ABC$

São ângulos cujos vértices coincidem com os vértices do triângulo. Cada vértice do triângulo dá origem a dois ângulos externos congruentes. Por exemplo, os ângulos externos do $\triangle ABC$ com origem em A são os ângulos formados por $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AE}$ ($\overrightarrow{AE}$ é semirreta oposta a $\overrightarrow{AC}$) e por $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AF}$ ($\overrightarrow{AF}$ é semirreta oposta a $\overrightarrow{AB}$). Estes ângulos são indicados, respectivamente, por β e α, na figura 4.8.

De modo semelhante se definem os outros ângulos externos. Veja a figura 4.8.

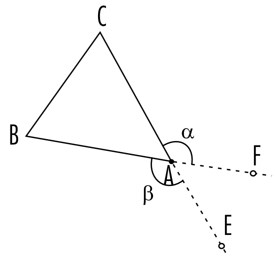


Figura 4.8: Ângulos externos.

Note que $\alpha = \beta$ (opostos pelo vértice). Devido a esta igualdade, denominamos simplesmente por e_A o ângulo externo ao vértice A.

Note que $\alpha + C\hat{A}B = \alpha + \hat{A} = 180° \Rightarrow e_A + \hat{A} = 180°$. Como $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$, a diferença entre as duas últimas igualdades mostra que $e_A - (\hat{B} + \hat{C}) = 0 \Rightarrow e_A = \hat{B} + \hat{C}$.

Do mesmo modo vale que $e_B = \hat{A} + \hat{C}$ e $e_C = \hat{A} + \hat{B}$.

As últimas igualdades provam a seguinte proposição:

Proposição 1: A medida de um ângulo externo é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes.

Também podemos provar outra proposição:

Proposição 2: A soma dos ângulos externos de um triângulo é 360°.

Prova: Considere um triângulo $\triangle ABC$, onde e_A , e_B e e_C são medidas dos ângulos externos aos vértices A, B e C, respectivamente. Então

$$e_A = \hat{B} + \hat{C},\ e_B = \hat{A} + \hat{C},\ e_C = \hat{A} + \hat{B}.$$

Portanto, $e_A + e_B + e_C = 2(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) = 360°$.

Congruência

Antes de definir congruência de triângulos, vamos revisar congruência de segmentos e ângulos.

Segmentos

Dois segmentos AB e CD do plano são congruentes se possuem a mesma medida (mesmo comprimento).

Ângulos

Dois ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{D}E$ são congruentes se possuírem a mesma medida (mesma abertura).

Triângulos

Dois triângulos são ditos congruentes, se for possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de tal modo que os pares de lados correspondentes sejam congruentes, e os pares de ângulos correspondentes sejam congruentes. Por exemplo, na congruência representada na figura 4.9, a correspondência entre os vértices é $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$ e $C \leftrightarrow C'$.

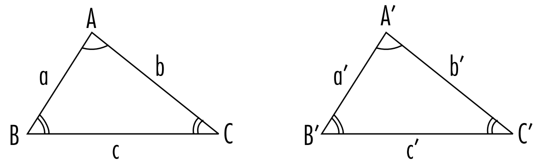


Figura 4.9: Triângulos congruentes.

Portanto, a congruência garante que

$$\begin{array}{ll} AB = A'B' & \hat{A} = \hat{A}' \\ BC = B'C' & \hat{B} = \hat{B}' \\ AC = A'C' & \hat{C} = \hat{C}' \end{array}$$

Usamos a notação $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ ou a notação simplificada $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ para representar que os triângulos são congruentes.

Da definição anterior, observamos que para verificarmos a congruência de dois triângulos necessitamos verificar três igualdades relativas a ângulos e três igualdades relativas a lados. No entanto, para garantir congruência de triângulos, basta termos apenas 3 igualdades bem especificadas. São os casos de congruência:

1º Caso: LAL (lado, ângulo, lado)

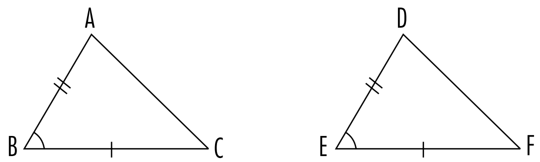


Figura 4.10: Congruência de triângulos - Caso LAL.

$$\text{Se} \quad \begin{array}{ll} AB = DE & (L) \\ \hat{B} = \hat{E} & (A) \\ BC = EF & (L) \end{array} \quad \Rightarrow \triangle ABC = \triangle DEF$$

2º Caso: ALA (ângulo, lado, ângulo)

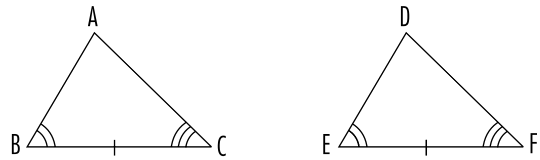


Figura 4.11: Congruência de triângulos - Caso ALA.

$$\text{Se} \quad \begin{array}{ll} \hat{B} = \hat{E} & (A) \\ BC = EF & (L) \\ \hat{C} = \hat{F} & (A) \end{array} \quad \Rightarrow \triangle ABC = \triangle DEF$$

3º Caso: LLL (lado, lado, lado)

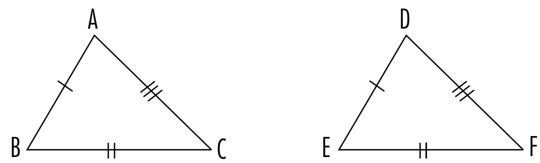


Figura 4.12: Congruência de triângulos - Caso LLL.

$$\text{Se} \quad \begin{array}{ll} AB = DE & (L) \\ BC = EF & (L) \\ AC = DF & (L) \end{array} \quad \Rightarrow \triangle ABC = \triangle DEF$$

4º Caso: LAA_o (lado, ângulo, ângulo oposto)

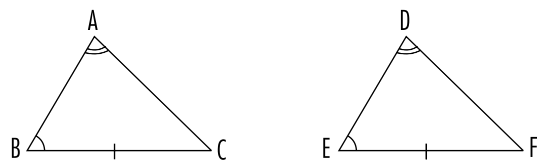


Figura 4.13: Congruência de triângulos - Caso LAA_o.

$$\text{Se} \quad \begin{array}{ll} \overline{BC} = \overline{EF} & (L) \\ \hat{B} = \hat{E} & (A) \\ \hat{A} = \hat{D} & (A_o) \end{array} \quad \Rightarrow \triangle ABC = \triangle DEF$$

Observações

1) O caso LAA_o é consequência do caso ALA, pois se dois ângulos são congruentes, o terceiro também será (note que a soma dos ângulos é 180º).

2) Usando que a soma dos ângulos de um triângulo é 180º e que $a^2 = b^2 + c^2$ em um triângulo retângulo, temos dois casos particulares de congruência de triângulos retângulos:

I) Mesma hipotenusa e um dos ângulos agudos iguais.

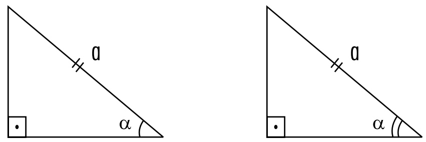


Figura 4.14: Congruência de triângulos retângulos - Caso 1

II) Mesma hipotenusa e um dos catetos iguais.

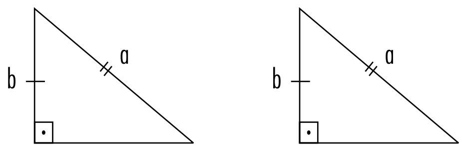


Figura 4.15: Congruência de triângulos retângulos - Caso 2

3) O Teorema de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$ será tratado mais tarde.

Pontos Notáveis de um Triângulo

Ortocentro

O ortocentro H de um triângulo é o ponto de encontro das três retas suportes das alturas relativas aos lados do triângulo.

Sua posição varia de acordo com o triângulo. Veja, na figura 4.16, as posições do ortocentro H em triângulos $\triangle ABC$ genéricos:

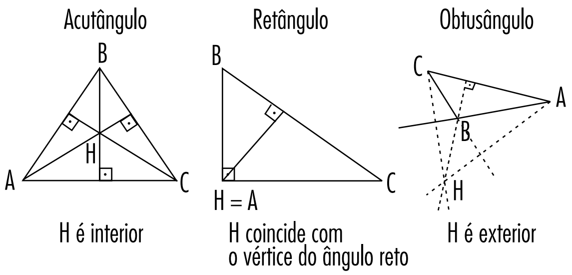


Figura 4.16: Ortocentro de um triângulo.

Incentro

O incentro de um triângulo é o ponto I de encontro das 3 bissetrizes internas de um triângulo. O ponto I é o centro de um círculo inscrito no triângulo. Isto porque as bissetrizes são equidistantes dos lados.

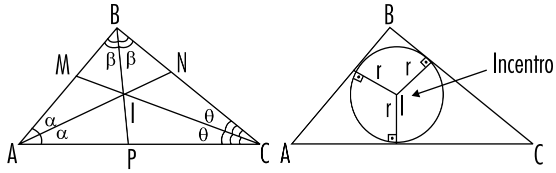


Figura 4.17: Incentro de um triângulo.

Circuncentro

O circuncentro de um triângulo é o ponto O de encontro das três mediatrizes dos lados de um triângulo. O ponto O é o centro do círculo que circunscreve o triângulo, uma vez que todo ponto da mediatriz de um lado de um triângulo equidista dos vértices deste lado.

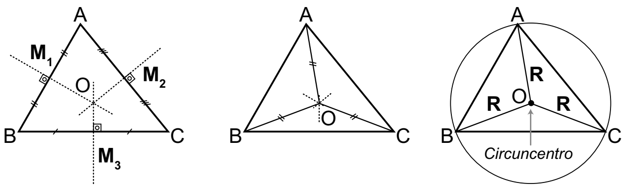


Figura 4.18: Circuncentro de um triângulo.

Lembramos que mediatriz de um segmento AB, por exemplo, é a reta que passa pelo ponto médio de AB e é perpendicular a este segmento.

Baricentro

O baricentro G de um triângulo $\triangle ABC$ é o ponto de encontro das medianas. Lembramos que mediana é o segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto.

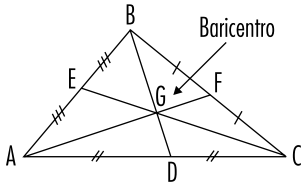


Figura 4.19: Baricentro de um triângulo.

Nota: É um fato excepcional que as medianas de um triângulo se encontrem num único ponto G. Outro fato importante é que as medianas ficam divididas por G numa proporção de 2 para 1. Veja a figura e as conclusões

$$GF = \frac{1}{3}\cdot AF,\ GD = \frac{1}{3}\cdot BD \text{ e } GE = \frac{1}{3}\cdot EC$$

Base Média de um Triângulo

Base média de um triângulo é todo segmento de reta que liga dois pontos médios dos lados de um triângulo. É possível provar que toda base média é paralela a um dos lados e mede a metade do lado.

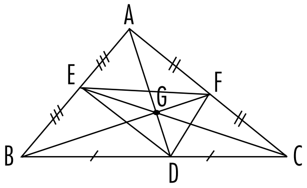


Figura 4.20: Base média.

Examine a figura 4.20. Sendo E, F e D pontos médios dos lados AB, AC e BC respectivamente, temos que:

- $EF \,||\, BC \Rightarrow EF = \dfrac{BC}{2}$
- $ED \,||\, AC \Rightarrow ED = \dfrac{AC}{2}$
- $FD \,||\, AB \Rightarrow FD = \dfrac{AB}{2}$

Exercícios

1) (PUC / 98) Considere o triângulo ABC em que BC = 1. Seja D o ponto médio de AC, e E o ponto médio de AB. O comprimento de DE vale:

(A) $\dfrac{1}{3}$

(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

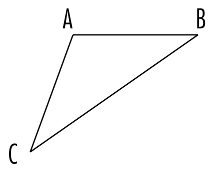
(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(D) $\dfrac{1}{2}$

(E) $\dfrac{1}{4}$

2) No triângulo ABC, o ângulo Â mede 110°. Qual é a medida do ângulo agudo formado pelas retas que fornecem as alturas relativas aos vértices B e C?

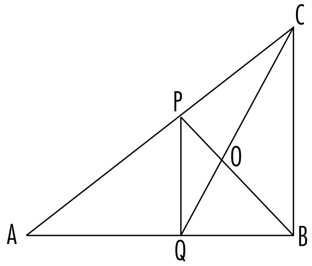
(A) 60°
(B)80°
(C)70°
(D) 75°
(E)65°



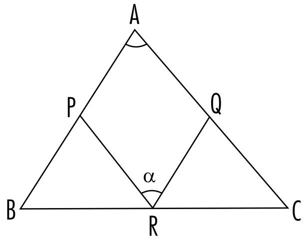
3) (UNIFICADO/98) A, B e C são três casas, que não estão na mesma reta, construídas em uma área plana de u m condomínio. Um posto policial estará localizado num ponto P situado à mesma distância das três casas. Em Geometria, o ponto P é conhecido com o nome de:

(A) Baricentro
(B) Ortocentro
(C) Circuncentro
(D) Incentro
(E) Ex-incentro

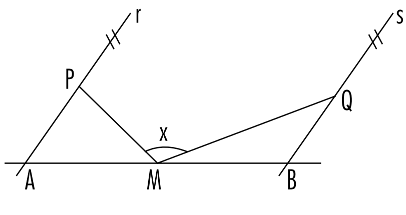
4) Na figura abaixo, Q é o ponto médio de AB. QP é paralelo a BC. Sendo AC = 30 cm, determine PQ e PO.
Dado: BC = 20 cm.



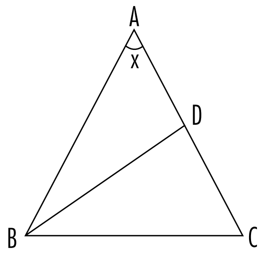
5) Da figura sabe-se que PB = PR e QC = QR. Prove que α = Â.



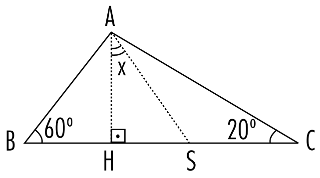
6) Da figura, sabe-se que: r || s, AM = AP e BM = BQ. Calcule x.



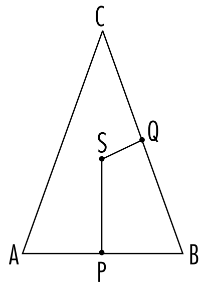
7) Na figura, tem-se AB = AC e AD = BD = BC. Calcule x.



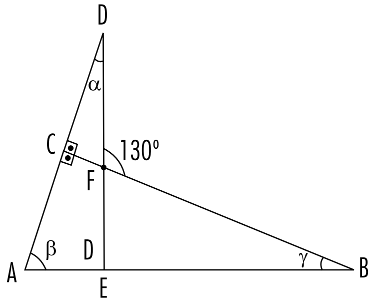
8) No triângulo ABC da figura abaixo, $\hat{B} = 60^\circ$ e $\hat{C} = 20^\circ$. O valor do ângulo $H\hat{A}S$ formado pela altura AH e a bissetriz AS é:



9) Num triângulo isósceles ABC de base AB, o ângulo $\hat{B}$ é igual a 2/3 do ângulo $\hat{S}$, formado pelas mediatrizes QS e PS. Calcule os ângulos desse triângulo.

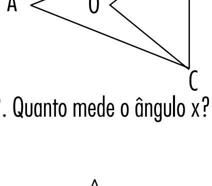


10) Na figura, determine a medida de α, β e γ.



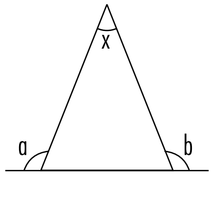
11) (FUVEST) Na figura abaixo, AB = AC. O é o ponto de encontro das bissetrizes do triângulo ABC,e o ângulo $B\hat{O}C$ é o triplo do ângulo $\hat{A}$. Então a medida de $\hat{A}$ é:

(A) 18°
(B) 12°
(C) 24°
(D) 36°
(E) 15°



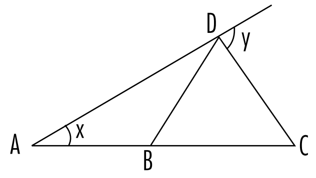
12) (PUC-SP) Na figura abaixo a = 100° e b = 110°. Quanto mede o ângulo x?

(A) 30°
(B) 50°
(C) 80°
(D) 100°
(E) 220°

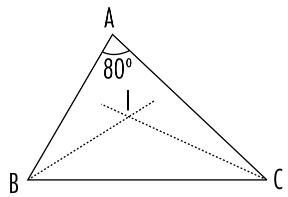


13) (FUVEST) Na figura AB = BD = CD. Então:

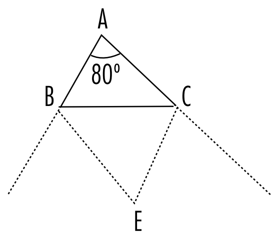
(A) y = 3x
(B) y = 2x
(C) x + y = 180°
(D) x = y
(E) 3x = 2y



14) Calcule o menor ângulo formado pelas bissetrizes internas BI e CI do triângulo ABC da figura.



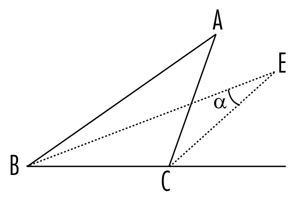
15) Calcule o menor ângulo formado pelas bissetrizes externas BE e CE do triângulo ABC da figura.



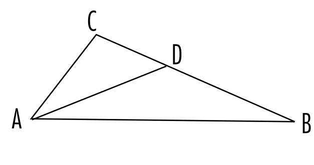
16) Em um triângulo ABC, a altura traçada do vértice A forma com a bissetriz de A um ângulo de 19°. O ângulo formado pelas bissetrizes internas de B e C mede 131°. Calcule os ângulos do triângulo.

17) Na figura, BE é bissetriz interna do ângulo B e CE, bissetriz externa do ângulo C.

Prove que $\alpha = \dfrac{\hat{A}}{2}$



18) O triângulo ACD da figura é isósceles de base AD. Sendo 12° a medida do ângulo $B\hat{A}D$ e 20° a medida do $A\hat{B}C$, calcule a medida do ângulo $A\hat{C}D$.



19) O triângulo ABC é isósceles, com AB = AC. Nele está inscrito um triângulo DEF, equilátero. Designando o ângulo $B\hat{F}D$ por a, o ângulo $A\hat{D}E$ por b, e o ângulo $F\hat{E}C$ por c, temos:

(A) $b = \frac{a+c}{2}$

(B) $b = \frac{a-c}{2}$

(C) $a = \frac{b-c}{2}$

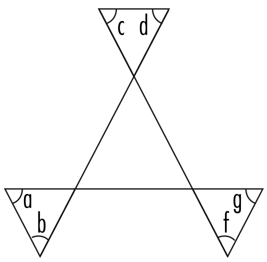
(D) $c = \frac{a+b}{2}$

(E) $a = \frac{b+c}{2}$

20) (UFRJ/2000 - 2ª Fase) Na figura a seguir, cada um dos sete quadros contém a medida de um ângulo expresso em graus. Em quaisquer três quadros consecutivos temos os três ângulos internos de um triângulo. Determine o valor de x.

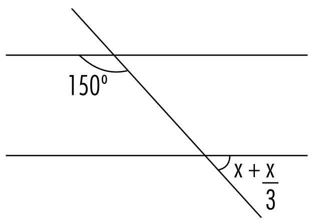
100º
x
65º

21) Na figura abaixo ache a soma dos ângulos assinalados.

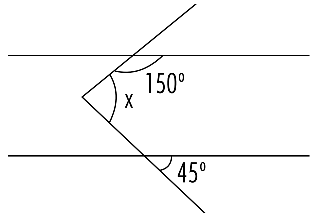


22) Sendo r e s retas paralelas, calcule x nas figuras:

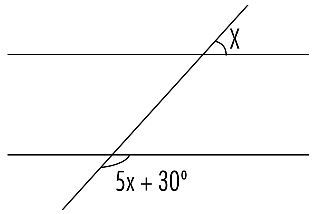
a.



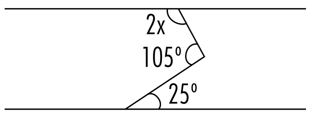
b.



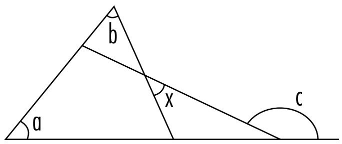
c.



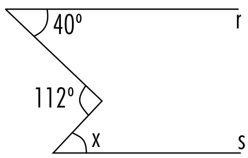
d.



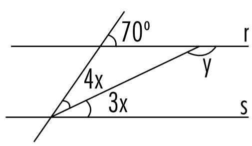
23) Na figura abaixo, exprimir o ângulo $\hat{x}$ em função dos ângulos $\hat{a}$, $\hat{b}$ e $\hat{c}$.



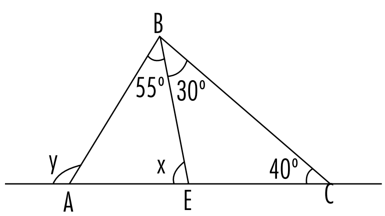
24) Determine o valor de x, sendo r//s.



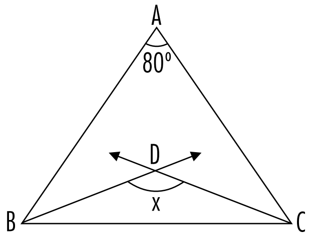
25) Calcule o valor de x e y, sendo r//s.



26) Calcule x e y indicados na figura a seguir.

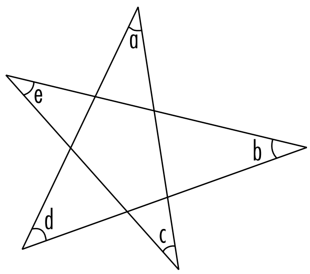


27) A figura mostra um triângulo ABC, isósceles de base BC. Sendo BD a bissetriz de $A\hat{B}C$ e CD a bissetriz de $A\hat{C}B$, calcule o valor de x.



28) Num triângulo ABC, o ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$, oposto a BC, é o quíntuplo do ângulo $\hat{A}$. Determine a medida do ângulo $\hat{A}$.

29) Na figura, calcular a soma $S = \hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \hat{d} + \hat{e}$.



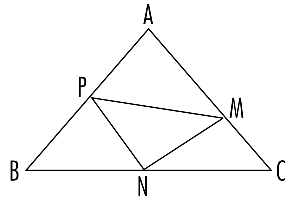
30) As bissetrizes de dois ângulos adjacentes de um triângulo formam um ângulo de 80º. Calcule esses dois ângulos, sabendo que a medida de um deles é igual a 3/5 do outro.

31) Com os segmentos 8 cm, 9 cm e 18 cm pode-se construir um triângulo? Por quê?

32) Dois lados AB e BC de um triângulo ABC medem respectivamente 8 cm e 21 cm. Quanto poderá medir o terceiro lado, sabendo que é múltiplo de 6?

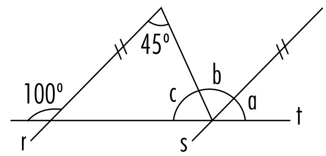
33) Determine o intervalo de variação de x sabendo que os lados do triângulo são expressos por x + 10, 2x + 4 e 20 – 2x.

34) Demonstre que o perímetro do triângulo MNP é menor que o perímetro do triângulo ABC na figura abaixo.



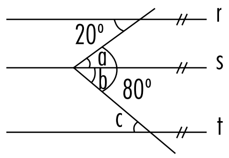
35) Calcule a medida dos ângulos a, b e c das figuras:

a.



r // s

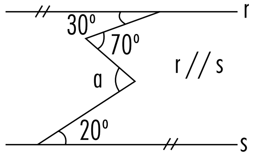
b.



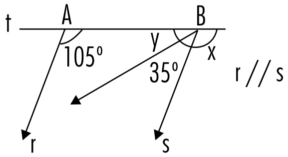
r // s // t

36) Encontre a medida dos ângulos α, x e y nas figuras abaixo.

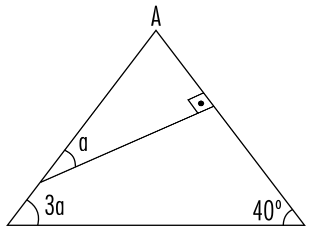
a.



b.



37) Determine o valor do ângulo $\hat{a}$.



Gabarito

1) D

2) C

3) C

4) PQ = 10 cm   PO = 5 cm

5) Demonstração

6) $x = 90°$

7) $x = 36°$

8) 20°

9) 36°, 72°, 72°

10) 40°, 50°, 40°

11) D

12) A

13) A

14) 50°

15) 50°

16) 82°, 68°, 30°

17) Demonstração

18) 116°

19) E

20) 15°

21) 360°

22) **a.** $x = 22{,}5°$ **b.** $x = 75°$ **c.** $x = 25°$ **d.** $x = 50°$

23) $x = c - a - b$

24) $x = 72°$

25) $x = 10°$ e $y = 150°$

26) $x = 70°$ e $y = 125°$

27) $x = 130°$

28) 20°

29) $S = 180°$

30) 60° e 100°

31) Não, pois $18 > 9 + 8$

32) 18 ou 24

33)

34) Demonstração

35) **a.** $a = 80°$, $b = 45°$, $c = 55°$ **b.** $a = 20°$, $b = 60°$, $c = 60°$

36) $\alpha = 60°$, $x = 105°$, $y = 40°$

37) $a = 25°$

5

Semelhanças de triângulos

Nosso objetivo neste capítulo é estudar semelhança de triângulos. A ferramenta fundamental neste estudo é o célebre Teorema de Tales, que relaciona o comprimento dos segmentos determinados sobre retas transversais a um feixe de retas paralelas.

Teorema de Tales

Vamos enunciar diretamente o Teorema de Tales e em seguida explicar seu significado.

Teorema de Tales: "Um feixe de paralelas determina sobre duas retas transversais segmentos com medidas respectivamente proporcionais".

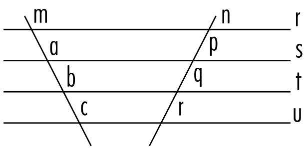


Figura 5.1: Feixe de paralelas e transversais.

Vamos às explicações. Na figura 5.1, as retas r, s, t e u pertencem a um feixe de paralelas. As retas transversais são m e n. Temos que r || s || t || u. O Teorema de Tales garante que:

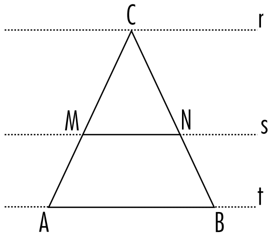
$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = \frac{a+b}{p+q} = \frac{a+b+c}{p+q+r}$$

Como consequência, é possível escrever outras igualdades, como:

$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$, $\frac{b}{c} = \frac{q}{r}$, etc.

Propriedade 1:

Num triângulo $\triangle ABC$, se o segmento $\overline{MN}$ é paralelo a $\overline{AB}$, então



$$\frac{CM}{CN} = \frac{AM}{NB} = \frac{AC}{BC}$$

r || s || t

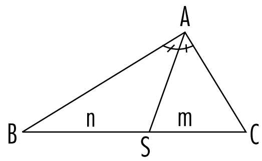
Figura 5.2: Triângulos e Teorema de Tales.

Justificativa:

Na figura 5.2, a reta r é paralela a s e t. Portanto r || s || t e é possível aplicar o Teorema de Tales com as retas transversais $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$.

Teorema da bissetriz interna

A bissetriz interna de um ângulo de um triângulo determina sobre o lado oposto segmentos proporcionais aos dois outros lados. Isto é, no $\triangle ABC$ apresentado na figura 5.3, onde AS é bissetriz, tem-se que



$$\frac{AB}{n} = \frac{AC}{m}$$

Figura 5.3: Propriedade métrica da bissetriz.

Demonstração: A partir da figura 5.3, trace CD || AS, onde D está no prolongamento de AB. Veja a figura 5.4.

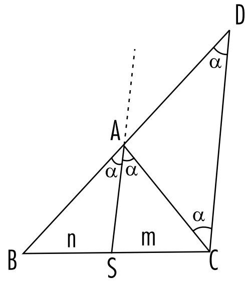


Figura 5.4: Teorema da bissetriz

Então $A\hat{C}D = C\hat{A}S = \alpha$ (ângulos alternos internos) e $A\hat{D}C = B\hat{A}S = \alpha$ (ângulos correspondentes). Então $\triangle ADC$ é isósceles com base CD. Portanto, AD = AC.

No $\triangle BDC$, tomando DC como base e SA como base paralela e usando o Teorema de Tales encontramos que $\frac{AB}{BS} = \frac{AD}{SC} \Rightarrow \frac{AB}{n} = \frac{AC}{m}$, que é a propriedade enunciada.

Semelhança

O estudo de semelhança é muito importante em Geometria. Mas o que são figuras semelhantes de modo geral?

Duas figuras F_1 e F_2 do plano são semelhantes se possuem a mesma forma (apesar de, em geral, serem de tamanhos diferentes).

Duas figuras semelhantes podem ser entendidas como sendo uma ampliação da outra. Por exemplo, quando olhamos em um microscópio ou binóculo, a figura observada é uma ampliação da figura original. Portanto, a figura observada é semelhante à figura original.

Apesar de a semelhança ser uma noção aplicável a quaisquer figuras do plano, vamos nos fixar no estudo de semelhanças de triângulos.

Semelhança de triângulos

Dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que se correspondam ângulos iguais e lados proporcionais. Isto é, os triângulos $\triangle ABC$ e os $\triangle EFG$ são semelhantes se:

$$\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{E}\\ \hat{B}=\hat{F}\\ \hat{C}=\hat{G}\end{array} \quad e \quad \frac{AB}{EF}=\frac{AC}{EG}=\frac{BC}{FG}=k$$

onde k é constante de semelhança ou de proporcionalidade. Usamos a notação $\triangle ABC \sim \triangle EFG$, para expressar a semelhança. Veja na figura 5.5, triângulos semelhantes.

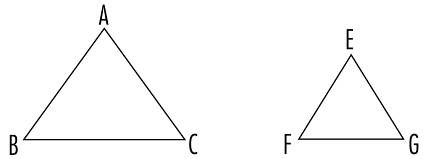


Figura 5.5: Triângulos semelhantes.

Se a constante de semelhança é unitária (k =1), os triângulos são congruentes. Portanto, "a congruência é um caso especial de semelhança".

Casos de semelhança de triângulos

Destacaremos três casos básicos de semelhança de triângulos. Estes resultados podem ser provados usando o Teorema de Tales e o que já conhecemos de congruência de triângulos. Para não precisar fazer sempre a verificação de seis elementos geométricos (três ângulos e três lados) de dois triângulos a fim de determinar se são semelhantes, estabeleceram-se os casos de semelhança, em que a verificação de alguns desses elementos (dois ou três) já permitem garantir a semelhança dos triângulos em questão. São três os principais casos de semelhança: AA, LAL e LLL.

1º Caso (Caso AA)

Se dois triângulos possuem dois ângulos respectivamente congruentes então os triângulos são semelhantes. Veja a figura 5.6 e o esquema em seguida.

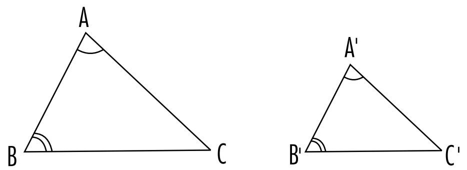


Figura 5.6: Caso de semelhança AA.

Outra aplicação do Teorema de Tales

"Toda reta paralela a um lado de um triângulo que intercepta os outros lados, determina um triângulo semelhante ao primeiro."

Acompanhe na figura 5.6, a justificativa da propriedade enunciada. Entre os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle AMN$, temos em comum o ângulo $\hat{A}$. Também MN || BC, $\hat{B}=\alpha$ e $\hat{C}=\beta$. Então o Teorema de Tales implica que:

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

Portanto, $\triangle ABC \sim \triangle AMN$, como enunciado.

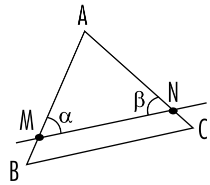


Figura 5.7: Bases paralelas.

$$\text{Se}\begin{cases}\hat{B}=\hat{B}'\\ \hat{A}=\hat{A}'\end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

2º Caso (Caso LAL de semelhança)

Suponha que em dois triângulos é possível escolher dois lados, em cada um dos triângulos, de modo que, colocados em correspondência, tenham a mesma proporção e, além disso, os ângulos entre os lados definam ângulos congruentes. Nesta situação, os triângulos são semelhantes. Veja a figura 5.8 e as conclusões em seguida.

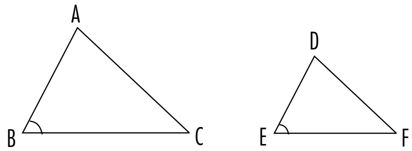


Figura 5.8: Caso de semelhança LAL .

$$\text{Se}\begin{cases}\hat{B}=\hat{E}\\ \dfrac{AB}{DE}=\dfrac{BC}{EF}\end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

Exemplo

Na figura 5.9 estão representados triângulos semelhantes como consequência do caso LAL. Faça o quociente entre os lados respectivos para verificar isso.

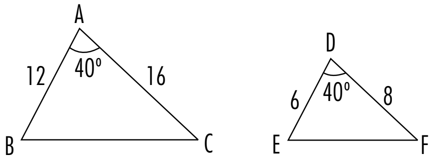


Figura 5.9: Triângulos semelhantes

3º Caso (Caso LLL de semelhança)

Se em dois triângulos existe uma correspondência entre seus lados, de modo que as medidas tenham a mesma proporcionalidade, então os triângulos são semelhantes. Veja a figura 5.10 e as conclusões a seguir.

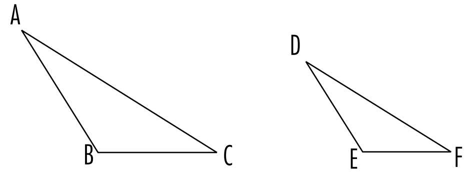


Figura 5.10: Caso de semelhança LLL .

$$\text{Se } \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

Exemplo

Na figura 5.11, os triângulos representados são semelhantes. Faça o quociente entre os lados para verificar isso.

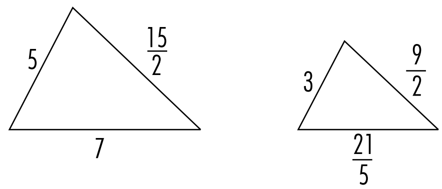


Figura 5.11: Triângulos semelhantes.

Os três casos expostos de semelhança de triângulos implicam as seguintes propriedades:

a) Dois triângulos semelhantes a um terceiro são semelhantes entre si.

b) Dois triângulos retângulos que possuem um ângulo agudo congruente são semelhantes.

c) Dois triângulos isósceles que possuem o ângulo oposto à base congruentes, são semelhantes.

d) Dois triângulos isósceles que possuem os ângulos das bases congruentes são semelhantes.

e) Dois triângulos retângulos isósceles são semelhantes.

f) Dois triângulos retângulos que têm os catetos respectivamente proporcionais são semelhantes.

g) Dois triângulos equiláteros são sempre semelhantes.

Exercícios

1) (UNESP/98 - 1ª Fase) Na figura, o triângulo ABD é reto em $\hat{B}$, e AC é a bissetriz de $B\hat{A}D$. Se AB = 2.BC, fazendo BC = b e CD = d, então:

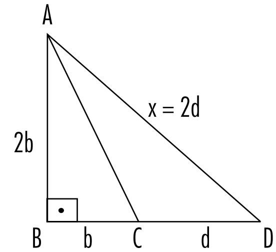
(A) d = b

(B) $\text{Se} \begin{cases} \hat{B} = \hat{E} \\ \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \end{cases} \Rightarrow \Delta$

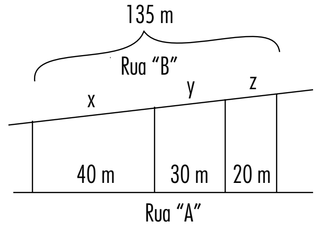
(C) $d = \left(\frac{5}{3}\right)b$

(D) $d = \left(\frac{6}{5}\right)b$

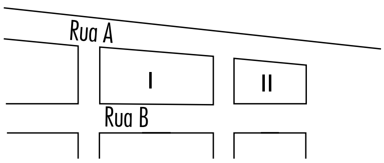
(E) $d = \left(\frac{5}{4}\right)b$



2) Três terrenos têm frente para a rua "A"e fundos para a rua "B", como na figura. As divisas laterais são perpendiculares à rua "A".
Quais as medidas de x, y e z, sabendo que o comprimento total para a rua B é 135 m?



3) (UNI-RIO/97 - 1ª Fase)



No desenho acima apresentado, as frentes para a rua A dos quarteirões I e II medem, respectivamente, 250 m e 200 m, e a frente do quarteirão I para a rua B mede 40 m a mais do que a frente do quarteirão II para a mesma rua. Sendo assim, pode-se afirmar que a medida, em metros, da frente do menor dos dois quarteirões para a rua B é:

(A) 160
(B) 180
(C) 200
(D) 220
(E) 240

4) Um triângulo tem lados medindo 4 cm, 5 cm e 7 cm. Um segundo triângulo, semelhante ao primeiro, tem perímetro 128 cm. Determine as medidas dos lados do segundo triângulo.

5) Um triângulo isósceles tem lados medindo 10 cm, 10 cm e 12 cm. A altura relativa ao maior lado mede 8 cm. Ache o raio do círculo inscrito a esse triângulo.

6) (UNICAMP/94 - 2ª fase) Uma rampa de inclinação constante, como a que dá acesso ao Palácio do Planalto em Brasília, tem 4 metros de altura na sua parte mais alta. Uma pessoa, tendo começado a subi-la, nota que após caminhar 12,3 metros sobre a rampa está a 1,5 metros de altura em relação ao solo.

a. Faça uma figura ilustrativa da situação descrita.

b. Calcule quantos metros a pessoa ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa.

7) Num eclipse do sol, o disco lunar cobre exatamente o disco solar, o que comprova que o ângulo sob o qual vemos o sol é o mesmo sob o qual vemos a lua. Considerando que o raio da lua é de 1738 km e que a distância da lua ao sol é 400 vezes a da Terra à lua, calcule o raio do sol.

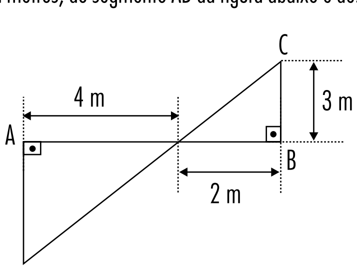
8) O perímetro de um triângulo ABC é 100 cm. Sabendo que a bissetriz do ângulo interno A divide o lado oposto BC em dois segmentos de 13,5 cm e 22,5 cm, determine as medidas dos lados desse triângulo.

9) (FUVEST/82) A sombra de um poste vertical, projetada pelo sol sobre um chão plano, mede 12 m. Nesse mesmo instante. a sombra de um bastão vertical de 1 m de altura mede 0,6 m. A altura do poste é:

(A) 6 m
(B) 7,2 m
(C) 12 m
(D) 20 m
(E) 72 m

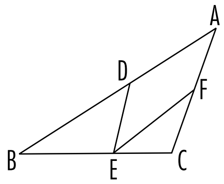
10) (U.C.MG /82) A medida, em metros, do segmento AD da figura abaixo é de:

(A) 4
(B) 5
(C) 6
(D) 8
(E) 10

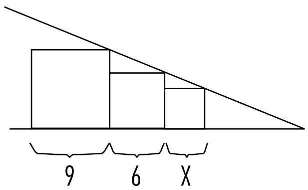


11) (CESGRANRIO/79) O losango ADEF está inscrito no triângulo ABC, como mostra a figura. Se AB =12 m, BC = 8 m e AC = 6 m, o lado do losango mede:

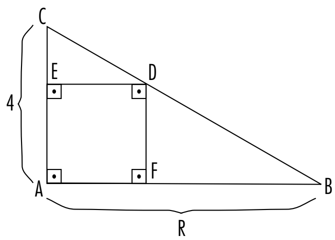
(A) 5 m
(B) 3 m
(C) 2 m
(D) 4 m
(E) 8 m



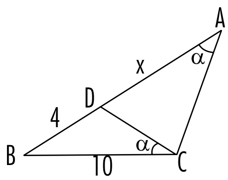
12) Na figura abaixo, consideremos os quadrados de lados x, 6 e 9. Determine o perímetro do quadrado de lado x.



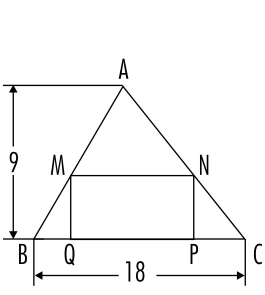
13) Determine a medida R do lado AB da figura abaixo, onde AEDF é um quadrado de lado igual a 3.



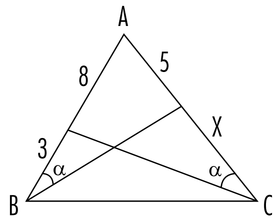
14) Considere a figura abaixo, onde os pontos B, D e A são alinhados. Calcule a medida x.



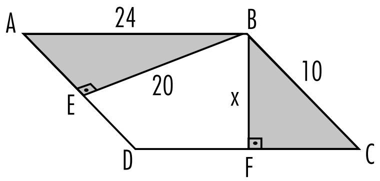
15) Calcule a medida do lado MN do retângulo inscrito no triângulo ABC da figura, sabendo que MN = 2MQ.



16) Calcule a medida x na figura construída abaixo:



17) (MACK/74) No paralelogramo ABCD da figura abaixo, calcule a medida do segmento x.



Gabarito

1) C

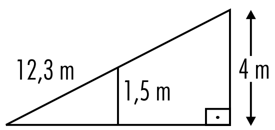
2) 60 m, 45 m e 30 m, respectivamente.

3) A

4) 32 cm, 40 cm, 56 cm

5) r = 3

6) a.



b. 20,5 m

7) 696 938 km

8) 36 cm, 24 cm e 40 cm

9) D

10) C

11) 4 m

12) 16

13) 12

14) x = 21

15) 9

16) 12,6

17) $\frac{25}{3}$

6

Relações métricas no triângulo retângulo

O objetivo deste capítulo é aplicar os resultados que obtivemos no estudo de semelhança de triângulos, para estabelecer relações métricas num triângulo retângulo. Em particular, podemos provar o famoso Teorema de Pitágoras. Para iniciar vamos recordar os elementos principais de um triângulo retângulo.

Relações métricas num triângulo retângulo

Elementos

O que caracteriza um triângulo retângulo $\triangle ABC$ é a existência de um ângulo reto. Na figura 6.1 apresentamos um triângulo retângulo $\triangle ABC$, onde $\hat{A} = 90°$. Em seguida listamos seus elementos principais.

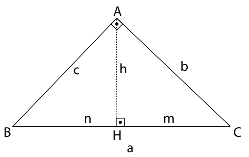


Figura 6.1: Triângulo retângulo.

a = hipotenusa
b e c = catetos
m = projeção ortogonal do cateto b sobre hipotenusa
n = projeção ortogonal do cateto c sobre hipotenusa
h = altura relativa à hipotenusa

Relações métricas

a) $a^2 = b^2 + c^2$ (Teorema de Pitágoras)
b) $bc = ah$
c) $b^2 = am$
d) $c^2 = an$
e) $h^2 = mn$
f) $a = m + n$

As relações anteriores são todas provadas usando semelhança de triângulos que aparecem na figura 6.1. Vamos provar a penúltima $h^2 = mn$ como exemplo. Acompanhe os argumentos. Afirmamos que $\triangle ABH \sim \triangle CAH$. Veja por quê. Temos que:

$$\begin{cases} C\hat{A}H + \hat{C} = 90° \\ \hat{B} + \hat{C} = 90° \end{cases} \Rightarrow \hat{B} = C\hat{A}H$$

Como os dois triângulos possuem um ângulo reto, e ainda a congruência de dois outros ângulos, como tirado anteriormente, então dois ângulos correspondentes são congruentes. Portanto, pelo caso de semelhança AA, temos que os triângulos são semelhantes. Assim:

$$\frac{AB}{CA} = \frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH} \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{h}{n} = \frac{m}{h}$$

As duas últimas igualdades resultam $h^2 = mn$, que é a propriedade (e).

Aplicações imediatas do Teorema de Pitágoras

a) Relação entre os comprimentos do lado ℓ e da altura h de um triângulo equilátero.

Num triângulo equilátero como o representado na figura 6.2, vale $h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$

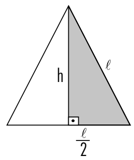


Figura 6.2: Triângulo equilátero.

Prova

Examine na figura 6.2 o triângulo retângulo sombreado. Usando o Teorema de Pitágoras encontramos que:

$$h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2 \Rightarrow h^2 = \ell^2 - \left(\frac{\ell}{4}\right)^2 \Rightarrow h^2 = h \left(\frac{3\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

b) Medida da diagonal do quadrado.

Num quadrado as medidas ℓ do lado e d da diagonal satisfazem $d = \ell\sqrt{2}$

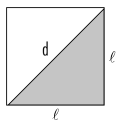


Figura 6.3: Quadrado.

Prova

Examine na figura 6.3 o triângulo retângulo sombreado. Usando o Teorema de Pitágoras encontramos que, $d^2 = \ell^2 + \ell^2 \Rightarrow d^2 = 2\ell^2 \Rightarrow d = \ell\sqrt{2}$

c) Apótema do hexágono regular.

Num hexágono regular inscrito num círculo de raio R as medidas ℓ do lado e a do apótema satisfazem $a_6 = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$

Justificativa

Examine na figura 6.4 o triângulo retângulo sombreado. Usando o Teorema de Pitágoras encontramos a igualdade desejada que é:

$$R^2 = a_6^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow \ell^2 = a_6^2 + \frac{\ell^2}{4} \Rightarrow a_6^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow a_6 = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

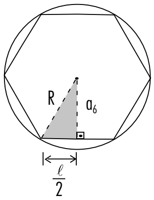


Figura 6.4: Apótema do hexágono.

Relações trigonométricas num triângulo retângulo

Num triângulo retângulo $\triangle ABC$, onde $\hat{A} = 90°$, $b = AC$, $c = AB$ e $a = BC$, valem as seguintes igualdades: $b = a \operatorname{sen} \hat{B}$, $c = a \operatorname{sen} \hat{C}$, $b = a \cos \hat{C}$, $c = a \cos \hat{B}$

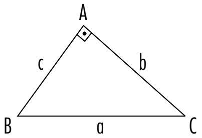


Figura 6.5: Triângulo retângulo.

Por que valem estas fórmulas? Vamos verificar as duas primeiras.

Convido-o a recordar a definição de seno e cosseno no círculo trigonométrico unitário e relacionar com o triângulo retângulo $\triangle ABC$. Veja a figura 6.6, onde o círculo representado tem raio de medida 1. Isto é, $OE = 1$.

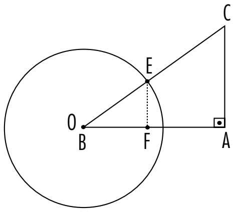


Figura 6.6: Seno de um ângulo.

Desenhamos o $\triangle ABC$ numa posição adequada, onde B coincide com o centro O do círculo. Por definição, $\operatorname{sen} \hat{B} = EF$, $\cos \hat{B} = BF$ e $EB = 1$, onde EF é um segmento ortogonal a AB.Portanto, $EF \parallel AC$.

Com estes dados podemos concluir que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle FBE$ são semelhantes. Então:

$$\frac{AB}{BF} = \frac{AC}{EF} = \frac{BC}{EB} \Rightarrow \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{a}{1} \quad \text{e} \quad \frac{c}{\cos \hat{B}} = \frac{a}{1}$$

Portanto, $b = a \operatorname{sen} \hat{B}$, como queríamos provar.

As outras fórmulas se verificam de maneira muito parecida.

Relações métricas num triângulo qualquer

Lei dos senos

Num triângulo $\triangle ABC$, arbitrário e inscrito num círculo de raio R, vale as seguintes igualdades:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} = 2R$$

onde $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ e R é o raio do círculo que circunscreve o triângulo.

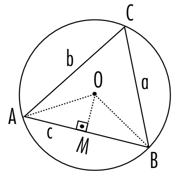


Figura 6.7: Lei dos senos.

Veja a figura 6.7 e vamos tentar encontrar as razões para a validade da lei dos senos. Escolhendo o lado AB, arbitrariamente, note que a perpendicular pelo ponto médio M de AB, passa pelo centro O do círculo e o ângulo $A\hat{O}B$ é um ângulo central correspondente ao ângulo inscrito $\hat{C}$. Então:

$$\hat{C} = \frac{1}{2} A\hat{O}B \Rightarrow \hat{C} = A\hat{O}M$$

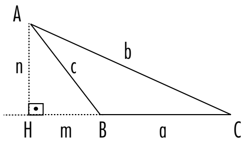
Aplicando os resultados sobre relações trigonométricas no triângulo retângulo AOM encontramos que:

$$AM = OA \,.\operatorname{sen} A\hat{O}M \Rightarrow \frac{c}{2} = R \,.\operatorname{sen} \hat{C} \Rightarrow c = 2R \operatorname{sen} \hat{C} \Rightarrow \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} = 2R$$

Do mesmo modo, escolhendo o lado AC ou o lado BC e trabalhando de modo inteiramente similar verificaríamos as outras fórmulas.

Lei dos cossenos

Num triângulo qualquer ABC, onde $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$, valem as seguintes igualdades:



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$,
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$,
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.

Figura 6.8: Lei dos cossenos.

Vamos verificar como funciona a demonstração destas fórmulas. Veja a figura 6.8, onde está representado um triângulo $\triangle ABC$ e a altura n do triângulo em relação ao lado BC. Considere os triângulos retângulos $\triangle AHB$ e $\triangle AHC$. Podemos escrever usando o Teorema de Pitágoras que:

$$\begin{cases} b^2 = n^2 + (m+a)^2 \\ c^2 = n^2 + m^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = n^2 + m^2 + a^2 + 2am \\ c^2 = n^2 + m^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 = c^2 + a^2 + 2am(*)$$

No triângulo retângulo $\triangle AHB$, encontramos m = c • cos ($A\hat{B}H$) = c cos (180° – $\hat{B}$).

Como cos α = – cos (180° – α), para qualquer ângulo α, achamos que m = – c cos $\hat{B}$.

Este resultado, junto à equação (*), mostra que $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos \hat{B}$.

As outras fórmulas são demonstradas de maneira inteiramente análoga.

Consequência da lei dos senos e dos cossenos

Num triângulo genérico $\triangle ABC$, usando a lei dos senos pode-se provar que:

(i) Ao maior lado de um triângulo opõe-se o maior ângulo.

Enquanto que usando a lei dos cossenos podemos mostrar que

ii) $a^2 < b^2 + c^2$: Triângulo acutângulo ($\cos \hat{A} > 0$)

$a^2 = b^2 + c^2$: Triângulo retângulo ($\cos \hat{A} = 0$)

$a^2 > b^2 + c^2$: Triângulo obtusângulo ($\cos \hat{A} < 0$)

Exercícios

1) (UFRJ/2001) Os ponteiros de um relógio circular medem, do centro às extremidades, 2 m, o dos minutos, e 1 m, o das horas. Determine a distância entre as extremidades dos ponteiros quando o relógio marca 4 horas.

2) (UNIFICADO/1993) Os lados de um triângulo são 3, 4 e 6. Calcule o valor do cosseno do maior ângulo interno desse triângulo.

3) (UERJ/1993 -1ª Fase) O triângulo ABC está inscrito em um círculo de raio R. Se cos A = $\frac{3}{5}$, o comprimento do lado BC é:

(A) $\frac{2R}{5}$

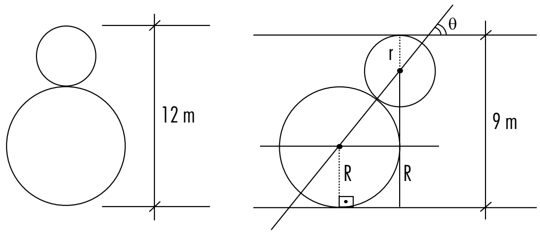
(B) $\frac{3R}{5}$

(C) $\frac{4R}{6}$

(D) $\frac{6R}{5}$

(E) $\frac{8R}{5}$

4) (UFRJ/1995) A grande sensação da última Expo-Arte foi a escultura "O.I.T.O" de 12 metros de altura, composta por duas circunferências, que reproduzimos abaixo, com exclusividade.



Para poder passar por um corredor de apenas 9 metros de altura e chegar ao centro do Salão Principal, ela teve de ser inclinada. A escultura atravessou o corredor tangenciando o chão e o teto, como mostra a figura a seguir.

Determine o ângulo de inclinação θ indicado na figura.

5) (Uni-Rio/1999) Numa circunferência de 16 cm de diâmetro, uma corda AB é projetada ortogonalmente sobre o diâmetro BC. Sabendo que a referida projeção mede 4 cm, a medida de AB, em cm, é igual a:

(a) 6

(b) 8

(c) 10

(d) 12

(e) 14

6) (Uni-Rio) Dado um triângulo retângulo cujos lados medem 2 cm. Construímos um segundo triângulo retângulo onde um dos catetos está apoiado na hipotenusa do primeiro e o outro cateto mede 2 cm. Construímos um terceiro triângulo com um dos catetos medindo 2 cm e o outro apoiado na hipotenusa do segundo triângulo. Se continuarmos a construir triângulos sempre da mesma forma, a hipotenusa do décimo quinto triângulo medirá:

(A) 15 cm

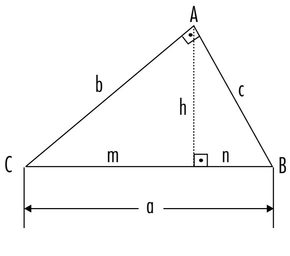
(B) $15\sqrt{2}$

(C) 14 cm

(D) 8 cm

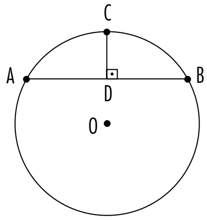
(E) $8\sqrt{2}$

7) Na figura são dados: b = 12 e c = 9. Calcular: a, h, m e n.

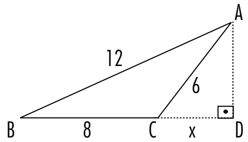


8) Calcular o perímetro de um triângulo isósceles de 8 m de base e 3 m de altura.

9) Na figura abaixo, são dados: AB = 15 cm; CD = 3 cm; DA = DB. Calcule o raio do círculo.



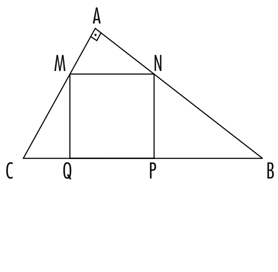
10) Calcule "x" na figura abaixo:



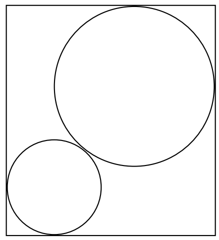
11) Se os lados de um triângulo retângulo estão em progressão geométrica crescente, calcule a razão desta progressão.

12) A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 10 e a altura a ela relativa mede 3. O menor cateto desse triângulo mede:
(A) $2\sqrt{5}$
(B) $2\sqrt{2}$
(C) $3\sqrt{2}$
(D) $\sqrt{10}$
(E) $5\sqrt{2}$

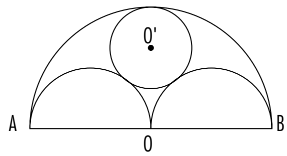
13) Calcular o lado do quadrado inscrito no triângulo retângulo ABC da figura sendo dado os catetos: $\overline{AB}$ = 12 cm e $\overline{AC}$ = 5 cm.



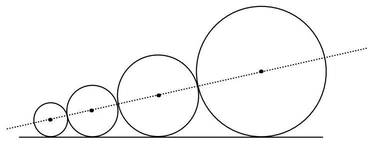
14) Os círculos da figura têm raios 3 cm e 2 cm e são tangentes entre si aos lados do quadrado. Ache o lado do quadrado.
(A) 5 cm
(B) $\frac{3}{2}\left(2+\sqrt{2}\right)$ cm
(C) $4\left(2+\sqrt{2}\right)$ cm
(D) $5\left(2+\sqrt{2}\right)$ cm
(E) $\frac{5}{2}\left(2+\sqrt{2}\right)$ cm



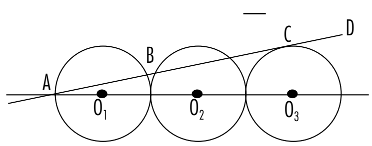
15) Os semicírculos de diâmetros $\overline{AO}$, $\overline{OB}$ e $\overline{AB}$ têm centro sobre a reta $\overline{AB}$. O círculo de centro O' lhes é tangente. Se $\overline{AB}$ = 12 cm, ache r, raio do círculo de centro O'. O é médio de $\overline{AB}$
(A) 1 cm
(B) 2 cm
(C) 3 cm
(D) 4 cm
(E) 5 cm



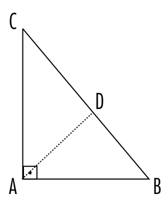
16) (FGV/1992 - 2ª Fase) As quatro circunferências da figura são tangentes duas a duas tangentes a reta r. Sabendo-se que os raios das duas menores medem 1 cm e $\sqrt{5}$ cm, determine o raio da maior.



17) (PUC/1995 - Específica) Sejam C_1, C_2 e C_3 três círculos de mesmo raio R e cujos centros O_1, O_2 e O_3 estão sobre uma mesma reta. Além disso, C_1 é tangente a C_2, e C_2 é tangente a C_3. Considere a reta D que passa por A e é tangente ao círculo C_3 (ver figura). Expresse o comprimento da corda BC, determinada por D em C_2, em função de R.

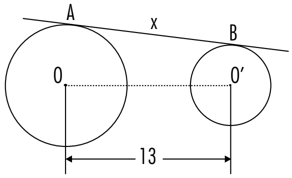


18) No triângulo retângulo da figura, $\overline{AD}$ é bissetriz do ângulo Â e mede $\sqrt{2}$. Sabendo que um dos catetos mede 3, calcule a hipotenusa.



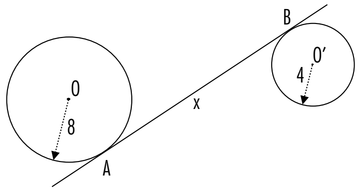
19) O perímetro de um triângulo retângulo é 12 e a altura relativa à hipotenusa mede 2. Calcule a medida da hipotenusa do triângulo.

20) Na figura abaixo tem-se dois círculos exteriores cujos raios medem respectivamente 7 e 2. Calcule o comprimento do segmento $\overline{AB}$ da tangente externa comum aos dois círculos.

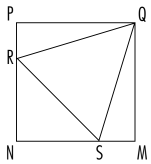


21) Na figura abaixo, x é a medida do segmento $\overline{AB}$ da tangente interna comum aos dois círculos. Calcule a medida de x.

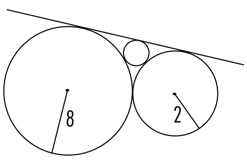
OO' = 20



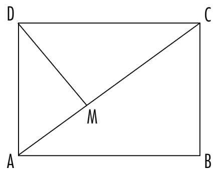
22) (UFF/1994 - 1ª Fase) Na figura a seguir, o triângulo QRS é equilátero e está inscrito no quadrado MNPQ, de lado L. Calcule a medida do lado do triângulo.



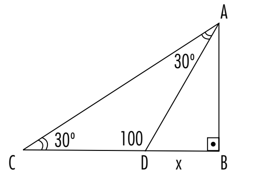
23) Na figura, os círculos maiores tem raio de 8 cm e 2 cm. Calcule a medida do círculo menor.



24) (CESGRANRIO/1977) No triângulo ABCD de lados $\overline{AB} = 4$ e $\overline{BC} = 3$, o segmento $\overline{DM}$ é perpendicular à diagonal $\overline{AC}$. Calcule o comprimento do segmento $\overline{AM}$.



25) (CESCEM/1973) Calcule o valor de x na figura:



26) (FUVEST/1977) A seção transversal de um maço de cigarros é um retângulo que acomoda exatamente os cigarros como na figura. Se o raio dos cigarros é "r", as dimensões do retângulo são:

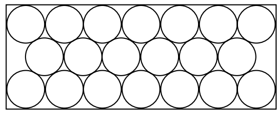
(A) 14r e $2r\left(1+\sqrt{3}\right)$

(B) 7r e 3r

(C) 14r e 6r

(D) 14r e 3r

(E) $2+3\sqrt{3})$ e $2r\sqrt{3}$



Gabarito

1) $\sqrt{7}$ m

2) $-\dfrac{11}{24}$

3) E

4) $\theta = 30°$

5) B

6) D

7) a =15; m = 9,6; h = 7,2; n = 5,4

8) 18 m

9) $\dfrac{87}{8}$ cm

10) $\dfrac{11}{4}$

11) $\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

12) D

13) $\dfrac{780}{220}$ cm

14) E

15) B

16) $5\sqrt{5}$ cm

17) $\frac{8R}{5}$

18) $3\frac{\sqrt{5}}{2}$

19) $\frac{36}{7}$

20) $x = 12$

21) $x = 16$

22) $\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)L$

23) $\frac{8}{9}$

24) $\frac{9}{5}$

25) $x = 50$

26) A

7

Trigonometria no Triângulo Retângulo

Escolha, sobre o ciclo trigonométrico, um arco α qualquer. Por comodidade, vamos considerar α um *ângulo agudo*. Trace o segmento que vai do centro do ciclo até a marca correspondente ao arco escolhido. Esse segmento denomina-se raio e que mede 1. Esse mesmo raio forma, com o *semieixo horizontal positivo*, um ângulo que vale α. Note que as projeções horizontal e vertical desse raio formam com o próprio raio um triângulo retângulo (figura 7.1).

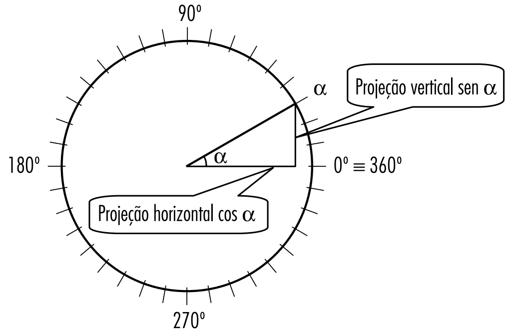


Figura 7.1: Projeções horizontal e vertical de α formando um triângulo retângulo.

Nesse triângulo retângulo, percebemos que:

• o comprimento do *cateto* horizontal corresponde ao comprimento da projeção horizontal do raio, ou seja:

cateto horizontal = cos α

• o comprimento do cateto vertical corresponde ao comprimento da projeção vertical do raio, ou seja:

cateto vertical = sen α

• a *hipotenusa* corresponde ao raio, portanto:

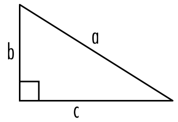
hipotenusa = 1

Aplicando o Teorema de Pitágoras nesse triângulo, temos:

$$\mathbf{(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1^2 = 1}$$

Vale a pena observar que a relação acima vale sempre, qualquer que seja o valor de α.

:: Teorema de pitágoras ::
Em um triângulo retângulo, vale sempre a relação:



$a^2 = b^2 + c^2$

Passemos agora a uma outra construção importante. Imagine um eixo vertical que:

• é ilimitado em ambos os sentidos;

• toca o ciclo (figura 7.2) apenas na marca correspondente ao 0º, ou seja, é uma reta tangente ao círculo.

A seguir, prolongue o raio até que esse prolongamento intersecte o tal eixo. Fica assim determinado um segmento sobre o eixo (figura 7.3). O tamanho desse segmento é a tangente do ângulo α.

Usa-se a notação tan α

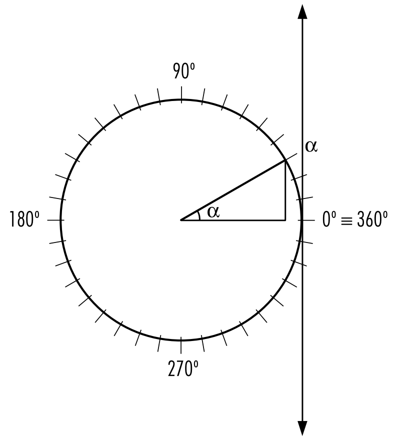


Figura 7.2: Ciclo trigonométrico com reta tangente.

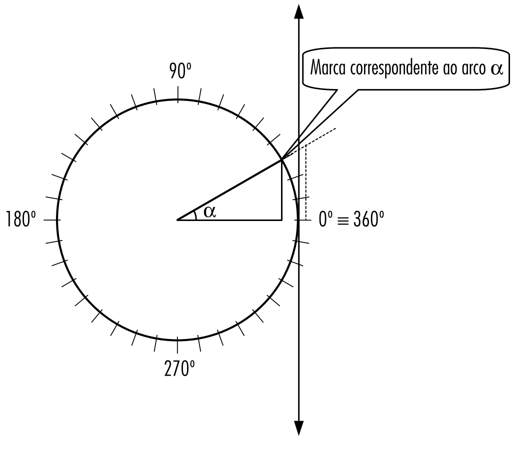


Figura 7.3: Segmento sobre a reta tangente.

Nesse ponto, é possível perceber, dentro do ciclo, dois triângulos retângulos semelhantes (figura 7.4):

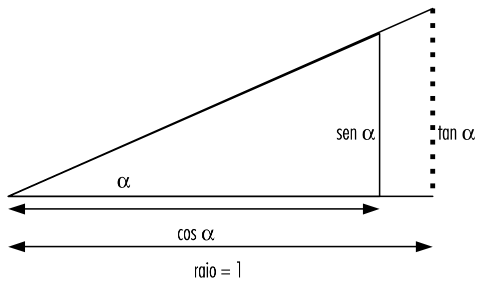


Figura 7.4: Ampliação dos triângulos construídos no ciclo.

Devido à semelhança, pode-se afirmar que: $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\tan\alpha}{1}$

Já que, $\tan\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, a conhecida tabela de senos e cossenos pode ser estendida para a tangente.

	Senos	Cossenos	Tangente
0º	0	1	$\frac{0}{1}=0$
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1$
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$
90º	1	0	$\frac{1}{0}$ não existe

Vamos agora escolher um arco β no segundo quadrante. Trace o segmento que vai do centro do ciclo até a marca correspondente ao arco escolhido. Esse segmento denomina-se raio, mede 1 e forma, com o semieixo horizontal positivo, um ângulo que vale β (figura 7.5). Prolongue o raio até que esse prolongamento intersecte o eixo, determinando um segmento sobre o mesmo.

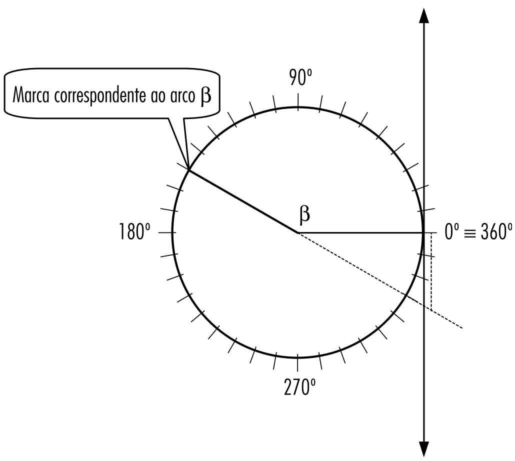


Figura 7.5: Arco no 2º quadrante.

Entendeu a construção? Você percebeu que, nesse caso, a tan β é negativa? Isso ocorre porque o prolongamento intersecta a parte inferior do eixo.

Podemos tirar as seguintes conclusões:

- no 1º e no 3º quadrantes, os arcos têm tangentes positivas;
- no 2º e no 4º quadrantes, os arcos têm tangentes negativas.

Voltando ao ciclo trigonométrico, tomemos o arco de 30º. Trace o segmento que vai do centro do ciclo até a marca correspondente ao arco escolhido. Você já sabe que esse segmento denomina-se raio e mede 1. Sabe também que esse mesmo raio forma, com o semieixo horizontal positivo, um ângulo que vale 30º. As projeções horizontal e vertical desse raio formam, juntamente com o raio, um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 1 (figura 7.6).

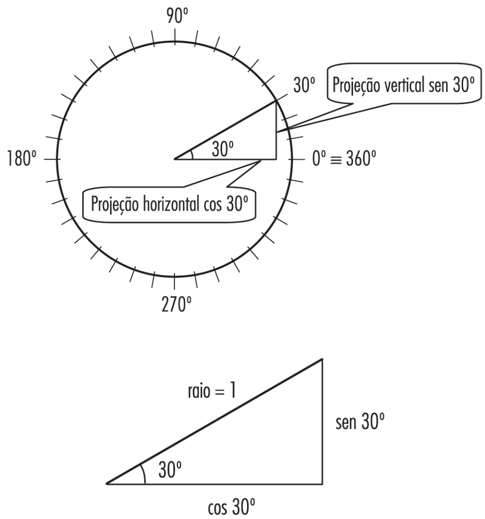


Figura 7.6: Projeções horizontal e vertical de 30º formando um triângulo retângulo.

Considere outro triângulo retângulo tal que um de seus ângulos valha 30º e a hipotenusa meça 2. Esse triângulo deverá possuir os mesmos ângulos do triângulo da figura 7.6. Logo eles serão semelhantes (figura 7.7). O que podemos concluir a respeito dos catetos desse novo triângulo?

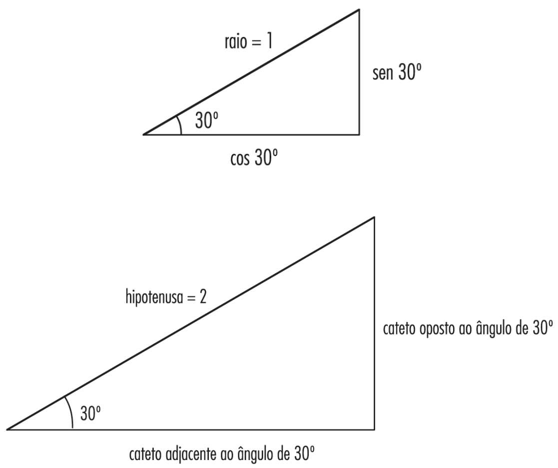
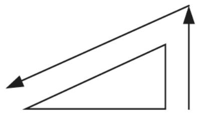


Figura 7.7: Triângulos retângulos semelhantes.

Antes de qualquer conclusão, vou dar nomes a esses catetos. Chamarei o cateto vertical de cateto oposto ao ângulo de 30º – isso porque usaremos esse ângulo como referência. Analogamente, chamarei o cateto horizontal de cateto *adjacente* ao ângulo de 30º.

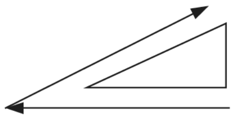
Observando que os triângulos são semelhantes, podemos dizer que:

$$\frac{\text{cateto oposto}}{2} = \frac{\text{sen } 30^\circ}{1} = \frac{1}{2}$$



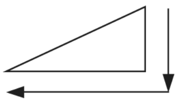
Isso significa que qualquer que seja o tamanho de um triângulo retângulo, se ele tiver um ângulo de 30º, a *razão* entre o cateto oposto ao ângulo de 30º e a hipotenusa valerá ½.

$$\frac{\text{cateto adjacente}}{2} = \frac{\cos 30^\circ}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Isso significa que qualquer que seja o tamanho do triângulo retângulo, se ele tiver um ângulo de 30º, a razão entre o cateto adjacente ao ângulo de 30º e a hipotenusa valerá $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{\text{sen } 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



Isso significa que qualquer que seja o tamanho do triângulo retângulo, se ele tiver um ângulo de 30º, a razão entre o cateto oposto ao ângulo de 30º e o cateto adjacente ao ângulo de 30º valerá $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Vamos generalizar essa ideia. Voltemos ao ciclo trigonométrico e tomemos um arco θ agudo. Trace o segmento que vai do centro do ciclo até a marca correspondente ao arco escolhido. Já sabemos que esse segmento denomina-se raio e mede 1. Sabemos, ainda, que esse mesmo raio forma, com o semieixo horizontal positivo, um ângulo que vale θ. As projeções horizontal e vertical desse raio formam, com o próprio raio, um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 1 (figura 7.8).

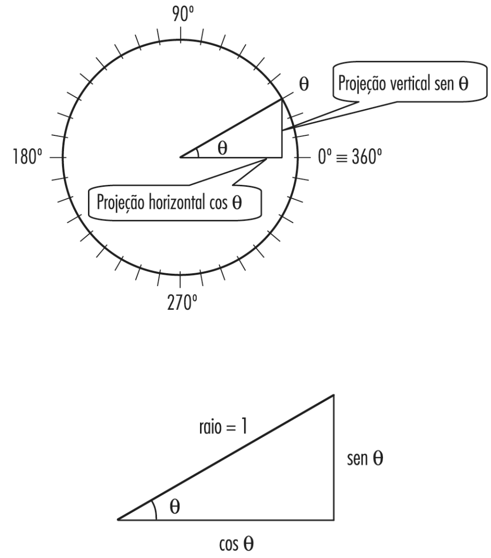


Figura 7.8: Triângulo retângulo no ciclo trigonométrico.

Considere outro triângulo retângulo, tal que um de seus ângulos valha θ e a hipotenusa meça h. Esse triângulo deverá possuir os mesmos ângulos do triângulo da figura 7.8. Logo, eles são semelhantes (figura 7.9). O que podemos concluir a respeito dos catetos desse novo triângulo?

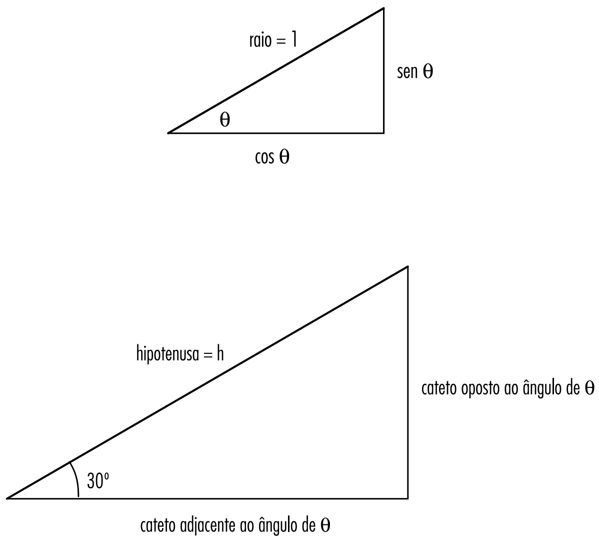
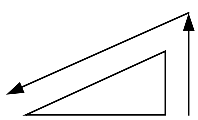


Figura 7.9: Triângulos retângulos semelhantes.

Chamarei o cateto vertical de cateto oposto ao ângulo de θ, porque usaremos esse ângulo como referência. Analogamente, chamarei o cateto horizontal de cateto adjacente ao ângulo de θ. Observando que os triângulos são semelhantes, podemos dizer que:

(I)

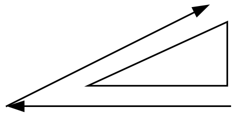
$$\frac{\text{cateto oposto}}{h} = \frac{\text{sen } \theta}{1}$$



Isso significa que qualquer que seja o tamanho de um triângulo retângulo, se ele tiver um ângulo de θ, a razão entre o cateto oposto ao ângulo de θ e a hipotenusa valerá sen θ.

(II)

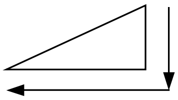
$$\frac{\text{cateto adjacente}}{h} = \frac{\cos\theta}{1}$$



Isso significa que qualquer que seja o tamanho do triângulo retângulo, se ele tiver um ângulo de θ, a razão entre o cateto adjacente ao ângulo de θ e a hipotenusa valerá cos θ.

(III)

$$\frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$



Isso significa que qualquer que seja o tamanho do triângulo retângulo, se ele tiver um ângulo de θ, a razão entre o cateto oposto ao ângulo de θ e o cateto adjacente ao ângulo de θ valerá tan θ.

senθ, cosθ e tanθ correspondem a fatores de proporção.

Tais fatores de proporção surgem da semelhança entre triângulos retângulos em que um deles tem hipotenusa medindo 1.

Glossário

Ângulo agudo: ângulo que mede menos do que 90º.

Semieixo horizontal positivo: metade do eixo horizontal que começa no zero e se estende pelos valores positivos.

Hipotenusa: maior lado de um triângulo retângulo.

Cateto: qualquer lado de um triângulo retângulo que não seja a hipotenusa.

Reta tangente: reta que toca alguma figura em um único ponto.

Intersectar: cortar, cruzar.

Exercícios

1) Qual o maior valor possível para a tangente de um ângulo?

2) Qual o menor valor possível para a tangente de um ângulo?

3) Quais as tangentes de 0º, 45º, 90º, 180º e 270º?

4) Qual(is) o(s) ângulo(s) positivo(s) menor(es) do que uma volta cuja(s) tangente(s) vale(m) 1?

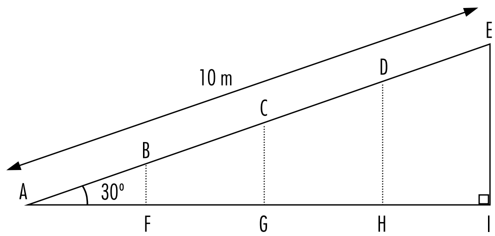
5) Qual o outro ângulo positivo menor do que uma volta cuja tangente é igual à tangente de 30º?

6) Qual o outro ângulo positivo menor do que uma volta cuja tangente é igual à tangente de 123º?

7) Quais os ângulos cujas tangentes valem $\sqrt{3}$?

8) Quais os ângulos cujas tangentes valem $-\sqrt{3}$?

9) A figura abaixo mostra uma rampa apoiada no chão com 10 metros de comprimento.



Considerando que os pontos A, B, C, D e E estão igualmente espaçados, responda às perguntas a seguir:

a. Quanto mede a distância AB?

b. A que altura do chão está o ponto E?

c. A que altura do chão está o ponto B?

d. Complete a tabela

Ponto	Distância de A	Altura
A	0 m	0 m
B	2,5 m	1,25 m
C		
D		
E	10 m	5 m

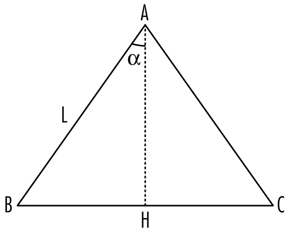
e. A que distância de A está o ponto I?

f. A que distância de A está o ponto F?

g. Complete a tabela

Ponto	Distância de A
A	0 m
F	
G	
H	
I	

10) A figura mostra um triângulo equilátero ABC cujos lados medem L unidades de comprimento. O segmento AH representa a altura do mesmo.



É muito comum que, em certos problemas, as informações não sejam numéricas, e sim literais, ou seja, letras representam valores. Nesses casos, as respostas são dadas por expressões que envolvam essas letras. Dizemos, então, que essas expressões são literais.

a. Quanto mede, em função de L, BH?

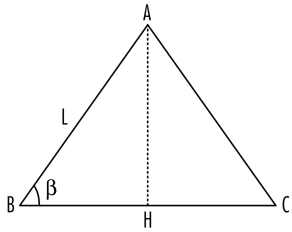
b. Utilize o Teorema de Pitágoras para calcular, em função de L, a altura AH.

c. Quanto vale o ângulo α?

d. Utilize o triângulo retângulo ABH para calcular sen α.

e. Utilize o triângulo retângulo ABH para calcular cos α.

11) A figura mostra o mesmo triângulo ABC do exercício 2.

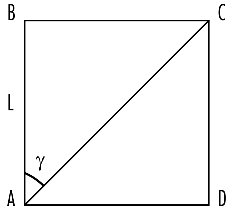


a. Quanto vale o ângulo β?

b. Utilize o triângulo retângulo ABH para calcular sen β.

c. Utilize o triângulo retângulo ABH para calcular cos β.

12) A figura mostra um quadrado cujos lados medem L unidades de comprimento. O segmento AC é a diagonal do mesmo.



a. Quanto mede BC?

b. Utilize o Teorema de Pitágoras para calcular a diagonal AC.

c. Quanto vale o ângulo γ?

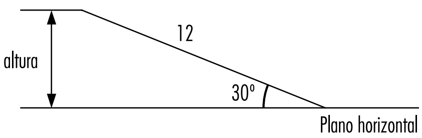
d. Utilize o triângulo retângulo ABC para calcular sen γ.

e. Utilize o triângulo retângulo ABC para calcular cos γ.

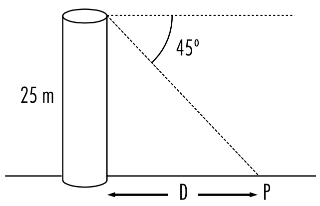
13) Utilize os resultados dos exercícios 2, 3 e 4 para preencher a tabela a seguir.

	30º	45º	60º
sen			
cos			

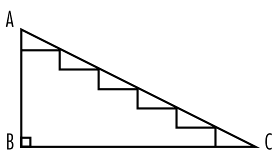
14) Uma rampa lisa de 12 m de comprimento faz ângulo de 30º com o plano horizontal. Uma pessoa que sobe essa rampa inteira eleva-se verticalmente em quantos metros?



15) Do alto de uma torre de 25 m de altura, uma pessoa vê um ponto P sob ângulo de depressão de 45º. Qual a distância D entre o pé da torre e o ponto observado?



16) A figura representa o perfil de uma escada cujos degraus têm todos a mesma extensão, além de mesma altura. Se AB = 2m e $B\hat{C}A$ mede 30°, então a medida da extensão de cada degrau é:



(A) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ m

(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ m

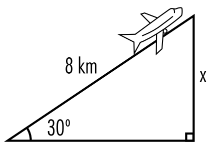
(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ m

(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ m

(E) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ m

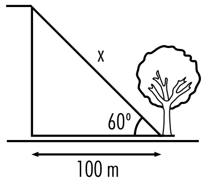
17) Um avião levanta voo sob um ângulo de 30°. Depois de percorrer 8 km, o avião se encontra a uma altura de:

(A) 2 km
(B) 3 km
(C) 4 km
(D) 5 km
(E) 6 km

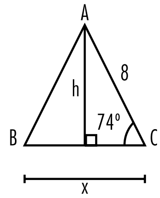


18) O ângulo de elevação do pé de uma árvore ao topo de uma encosta é de 60°. Sabendo-se que a árvore está distante 100m da base da encosta, que medida deve ter um cabo de aço para ligar a base da árvore ao topo da encosta?

(A) 50 m
(B) 100 m
(C) 200 m
(D) 300 m
(E) 400 m



19) Num triângulo isósceles ABC, cada ângulo da base mede 74° e cada lado congruente 8 cm.



Ângulo	**Seno**	**Cosseno**	**Tangente**
30º			
45º			1
60º			
74º	0,961	0,276	3,487

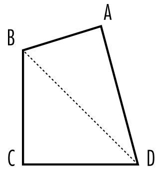
Nessas condições determine:

a. a medida da altura h;

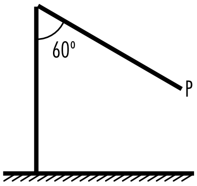
b. a medida x da base do triângulo.

20) Do quadrilátero ABCD da figura a seguir, sabe-se que: os ângulos internos de vértices A e C são retos; os ângulos $C\hat{D}B$ e $A\hat{D}B$ medem, respectivamente, 45° e 30°; o lado CD mede 2 dm. Então, os lados AD e AB medem, respectivamente, em dm:

(A) $\sqrt{6}$ e $\sqrt{3}$
(B) $\sqrt{5}$ e $\sqrt{3}$
(C) $\sqrt{6}$ e $\sqrt{2}$
(D) $\sqrt{6}$ e $\sqrt{5}$
(E) $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$



21) Uma vara de bambu de 2 m de altura estava perfeitamente na vertical até que um forte vento quebrou-a exatamente ao meio. No entanto, a metade superior da vara ficou ainda pendurada na metade inferior formando 60º, como mostra a figura. Desta forma, o ponto mais alto da vara de bambu, antes da ventania, agora está mais próximo do chão. Qual a distância de P ao chão?



22) Um barco, navegando em linha reta, passa sucessivamente pelos pontos A e B. O comandante, quando o navio está no ponto A, observa um farol num ponto C e calcula o ângulo $A\hat{C}B$ = 30°. Sabendo-se que o ângulo $A\hat{B}C$ é reto e que a distância entre os pontos A e B é de 6 milhas, determine a distância (em milhas) entre o farol e o ponto B.

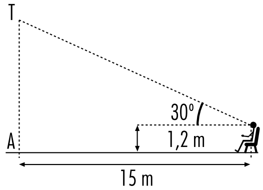
(A) $18\sqrt{3}$
(B) $6\sqrt{3}$
(C) $5\sqrt{3}$
(D) $3\sqrt{3}$
(E) $2\sqrt{3}$

23) A rampa de acesso à garagem de um edifício sobre um terreno plano tem forma retangular e faz um ângulo de 60° com o solo. Sabendo-se que ao meio-dia a sombra da rampa tem área igual a 36 m^2, calcule a área da rampa.

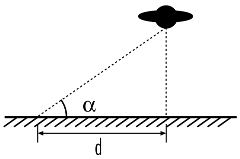
24) A seguir está representado um esquema de uma sala de cinema com o piso horizontal. De quanto deve ser a medida de AT para que um espectador sentado a 15 metros da tela, com os olhos 1,2 metros acima do piso, veja o ponto mais alto da tela, que é T, a 30° da horizontal?

Dados: sen 30° = cos 60º = 0,50; sen 60° = cos 30º = 0,87;
tan 30º = 0,58 e tan 60º = 1,73

(A) 15,0 m
(B) 12,36 m
(C) 9,90 m
(D) 8,66 m
(E) 4,58 m



25) Um disco voador é avistado numa região plana a uma certa altitude, parado no ar. Em certo instante, algo se desprende da nave e cai em queda livre, conforme mostra a figura. A que altitude se encontra esse disco voador?



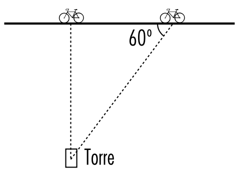
Considere as afirmativas:
I - a distância d é conhecida;
II - a medida do ângulo α e a tan α do mesmo ângulo são conhecidas.
Então, tem-se que:

(A) a I sozinha é suficiente para responder à pergunta, mas a II, sozinha, não.
(B) a II sozinha é suficiente para responder à pergunta, mas a I, sozinha, não.
(C) I e II, juntas, são suficientes para responder à pergunta, mas nenhuma delas, sozinha, é:
(D) ambas são, sozinhas, suficientes para responder à pergunta.
(E) a pergunta não pode ser respondida por falta de dados.

26) Trafegando num trecho plano e reto de uma estrada, um ciclista observa uma torre. No instante em que o ângulo entre a estrada e a linha de visão do ciclista é 60°, o marcador de quilometragem da bicicleta acusa 103,50 km. Quando o ângulo descrito passa a ser 90°, o marcador de quilometragem acusa 104,03 km. Qual é, aproximadamente, a distância da torre à estrada?

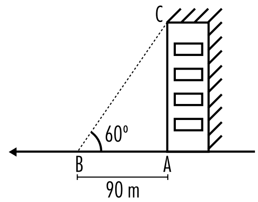
(Se necessitar, use $\sqrt{2}$ = 1,41; $\sqrt{3}$ = 1,73; $\sqrt{6}$ = 2,45)

(A) 463,4 m
(B) 535,8 m
(C) 755,4 m
(D) 916,9 m
(E) 1071,6 m



27) Uma pessoa encontra-se num ponto A, localizado na base de um prédio, conforme mostra a figura. Se ela caminhar 90 metros em linha reta, chegará a um ponto B, de onde poderá ver o topo C do prédio sob um ângulo de 60°. Quantos metros ela deverá se afastar do ponto A, andando em linha reta no sentido de A para B, para que possa enxergar o topo do prédio sob um ângulo de 30°?

(A) 150
(B) 180
(C) 270
(D) 300
(E) 310



28) Para atravessar um rio, um barco parte de A em direção a B. Essa direção forma um ângulo de 120° com a margem do rio. Sendo a largura do rio 60 m, a distância, em metros, percorrida pelo barco foi de:

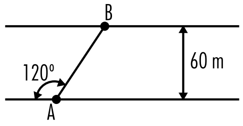
(A)

(B)

(C)

(D)

(E)



29) Um barco está preso por uma corda (AC) ao cais, através de um mastro (AB) de comprimento 3 m, como mostra a figura. A distância, em m, da proa do barco até o cais (BC) é igual a:

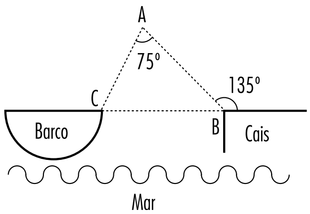
(A) $\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

(B) $\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

(C) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

(D) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

(E) $\sqrt{6}$



30) A figura a seguir é um prisma reto, cuja base é um triângulo equilátero de $10\sqrt{2}$ cm de lado e cuja altura mede 5 cm.

Se M é o ponto médio da aresta DF, o seno do ângulo $B\hat{M}E$ é:

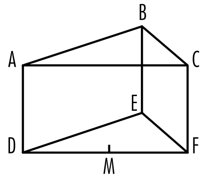
(A) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

(B) $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(D) $\dfrac{1}{4}$

(E) $\dfrac{2}{5}$



31) A figura a seguir é um corte vertical de uma peça usada em certo tipo de máquina. No corte aparecem dois círculos, com raios de 3 cm e 4 cm, um suporte vertical e um apoio horizontal. A partir das medidas indicadas na figura, conclui-se que a altura do suporte é:

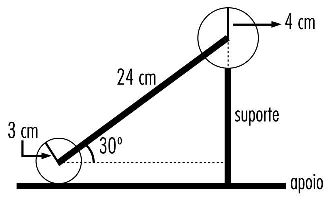
(A) 7 cm

(B) 11 cm

(C) 12 cm

(D) 14 cm

(E) 16 cm



32) O círculo da figura tem centro O e raio R. Sabendo-se que MP mede $\dfrac{5R}{12}$ e é tangente ao círculo no ponto P, o valor de sen α é:

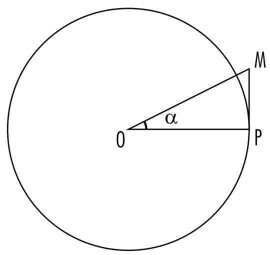
(A) $\dfrac{12}{13}$

(B) $\dfrac{5R}{13}$

(C) $\dfrac{5R}{12}$

(D) $\dfrac{5}{12}$

(E) $\dfrac{5}{13}$



33) Na figura ao lado, ABCD é um trapézio retângulo com AB ≡ AD, BC – AB = 1 cm e CD = 7 cm. Então:

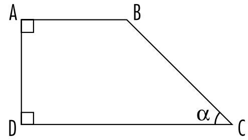
(A) sen $\alpha = \dfrac{1}{3}$

(B) sen $\alpha = \dfrac{3}{5}$

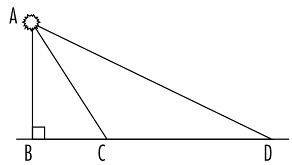
(C) cos $\alpha = \dfrac{4}{5}$

(D) tan $\alpha = \dfrac{3}{4}$

(E) tan $\alpha = \dfrac{4}{3}$



34) Um holofote está situado no ponto A, a 30 metros de altura, no alto de uma torre perpendicular ao plano do chão. Ele ilumina, em movimento de vaivém, uma parte desse chão, do ponto C ao ponto D, alinhados à base B, conforme demonstra a figura ao lado: Se o ponto B dista 20 metros de C e 150 metros de D, a medida do ângulo CÂD corresponde a:



35) Dados dois ângulos, α e β, prove que:

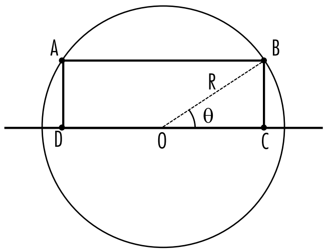
a. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \operatorname{sen}\beta.\operatorname{sen}\alpha$

b. $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha.\cos\beta + \operatorname{sen}\beta.\cos\alpha$

c. $\cos 2\alpha = \cos2\alpha - \operatorname{sen}2\alpha$

d. sen $2\alpha = 2.\text{sen}\alpha.\cos\alpha$

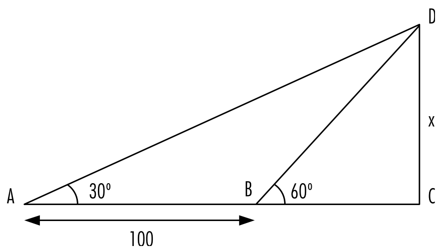
36) Na figura dada temos um semicírculo de raio R e centro O. O ângulo entre o raio OB e o lado DC é θ.



a. Calcule os lados do retângulo ABCD em função de R e θ.

b. Mostre que a área do retângulo ABCD é máxima para $\theta = 45°$.

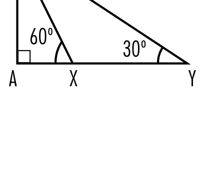
37) Calcule a medida x indicada na figura.



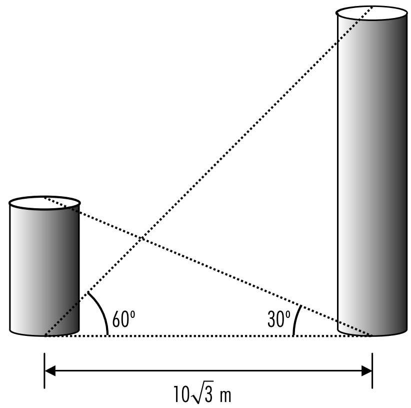
38) Em uma rua plana, uma torre AT é vista por dois observadores X e Y sob ângulos de 30° e 60° com a horizontal, como mostra a figura. Se a distância entre os observadores for de 40 m, qual será, aproximadamente, a altura da torre?

(Se necessário, utilize $\sqrt{2} = 1,4$ e $\sqrt{3} = 1,7$).

(A) 30 m
(B) 32 m
(C) 34 m
(D) 36 m
(E) 38 m



39) A figura mostra duas torres. Calcule a distância entre seus topos.



40) Caminhando em linha reta ao longo de uma praia, um banhista caminha de um ponto A a um ponto B, percorrendo uma distância AB = 1200 metros. Quando está em A, ele avista um navio parado em N, de tal maneira que o ângulo $N\hat{A}B$ é de 60°; e, quando está em B, verifica que o ângulo $N\hat{B}A$ é de 45°. Calcule a distância a que se encontra o navio da praia.

41) Um balão meteorológico encontra-se preso ao solo por dois cabos, supostos retilíneos, e inclinados de 60º e 45º com a horizontal. A distância entre os pontos de fixação dos cabos no solo é de 1000 m. Qual a altura aproximada do balão?

Encerramento

Problema

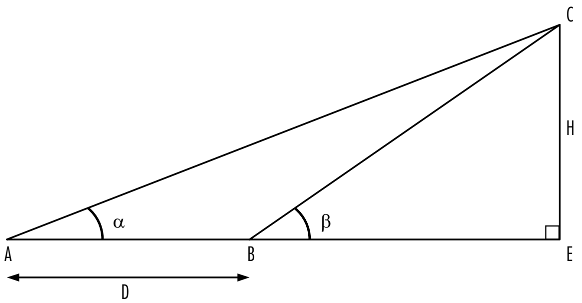
Na cidade do Rio de Janeiro, encontra-se um dos mais famosos pontos turísticos mundiais: o Cristo Redentor. Esta estátua, de 38 m, repousa sobre o morro do Corcovado. Como fazer para medir a altura do morro do Corcovado?

Em primeiro lugar, para que possamos realizar as medidas, é preciso que haja um lugar plano nas imediações, de onde o morro seja avistado. No caso particular do Corcovado, há o Aterro do Flamengo.

Escolha um ponto no Aterro do Flamengo (representado pela letra A). Neste local, com o auxílio do teodolito, meça o ângulo de elevação do cume do morro (na figura, α).

A seguir, mova-se na direção do morro até um outro ponto arbitrário ainda no Aterro do Flamengo (na figura, B). Dessa nova posição, repita o procedimento com o teodolito a fim de medir o ângulo de elevação (na figura, representado por β).

É fundamental que, de alguma forma, a distância entre A e B seja conhecida. Para esse fim, utilize a trena. Na figura, tal distância é representada por D.



Após as medições de α, β e D, passe aos cálculos. No gabarito, consulte a 2ª solução do exercício 29.

Mesmo assim, vou repetir.

No triângulo ACE:

$$\tan\,\alpha = \frac{H}{D + \overline{BE}}.\quad \text{(I)}$$

Note que temos uma equação com duas incógnitas (dois valores desconhecidos). Precisamos de outra equação, obviamente diferente dessa, envolvendo H e $\overline{BE}$.

Em BCE,

$$\tan\,\beta = \frac{H}{\overline{BE}}.\ \text{(II)}$$

Como queremos calcular H, faremos com que $\overline{BE}$ desapareça. Basta tirar o valor de $\overline{BE}$ em uma das equações e substituí-lo na outra equação.

Perceba que está mais fácil tirar o valor de $\overline{BE}$ em (II). Então:

$$\overline{BE} = \frac{H}{\tan\,\beta}.$$

Substituindo o valor de $\overline{BE}$ em (I), teremos:

$$\tan\,\alpha = \frac{H}{D + \dfrac{H}{\tan\,\beta}} \rightarrow \tan\,\alpha = \frac{H}{\dfrac{D\cdot\tan\,\beta + H}{\tan\,\beta}} \rightarrow \tan\,\alpha = \frac{H\cdot\tan\,\beta}{D\cdot\tan\,\beta + H}$$

$$D\cdot\tan\,\alpha\cdot\tan\,\beta + H\cdot\tan\,\alpha = H\cdot\tan\,\beta$$

$$D\cdot\tan\,\alpha\cdot\tan\,\beta = H\cdot\tan\,\beta - H\cdot\tan\,\alpha$$

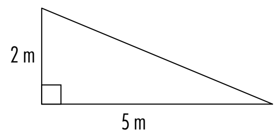
$$D\cdot\tan\,\alpha\cdot\tan\,\beta = H\,(\tan\,\beta - \tan\,\alpha)$$

$$\frac{D\cdot\tan\,\alpha\cdot\tan\,\beta}{\tan\,\beta - \tan\,\alpha} = H$$

EXERCÍCIOS DE VESTIBULAR

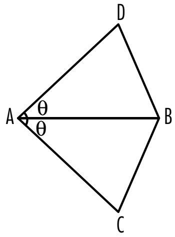
1) (UEZO/2006) Após um terremoto foi preciso reconstruir uma rampa nas condições definidas pela figura abaixo. O comprimento da rampa, em metros, equivale aproximadamente, a:

(A) 5,11
(B) 5,38
(C) 5,50
(D) 5,89

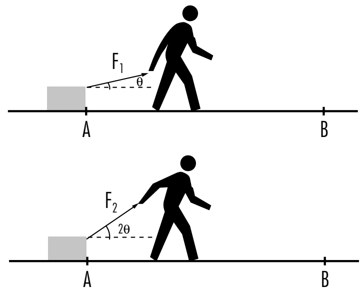


2) (UERJ / 2007) O esquema abaixo representa a vela da asa-delta, que consiste em dois triângulos isósceles ABC e ABD congruentes, com AC = AB = AD. A medida de AB corresponde ao comprimento da quilha. Quando esticada em um plano, essa vela forma um ângulo CÂD = 2θ. Suponha que, para planar, a relação ideal seja de 10 dm² de vela para cada 0,5 kg de massa total. Considere, agora, uma asa-delta de 15 kg que planará com uma pessoa de 75 kg. De acordo com a relação ideal, o comprimento da quilha, em metros, é igual à raiz quadrada de:

(A) 9 cosθ
(B) 18 senθ
(C) 9/cosθ
(D) 18/senθ



3) (UERJ / 2006) Observe as situações abaixo, nas quais um homem desloca uma caixa ao longo de um trajeto AB de 2,5 m.



As forças F_1 e F_2, exercidas pelo homem nas duas situações, têm o mesmo módulo igual a 0,4 N e os ângulos entre suas direções e os respectivos deslocamentos medem θ e 2 θ. Se k é o trabalho realizado, em joules, por F_1, o trabalho realizado por F_2 corresponde a:

(A) 2k
(B) k/2
(C) $(k^2 + 1)/2$
(D) $2k^2 - 1$

GABARITO :: EXERCÍCIOS

1) Não existe um valor máximo para a tangente.

2) Não existe um valor mínimo para a tangente.

3) 0, 1, não existe, 0 e não existe.

4) 45° e 225°

5) 210°

6) 303°

7) ..., -300°, -120°, 60°, 240°, 420°,...

8) ..., -240°, -60°, 120°, 300°, 480°,...

9)

a. Considerando que os pontos estão igualmente espaçados, basta dividir o segmento, que mede 10 metros, por 4. Logo AB mede 2,5 metros.

b. Observe que você conhece o comprimento de AE e deseja calcular a sua altura (comprimento de EI). Em outras palavras, você conhece a HIPOTENUSA e pretende calcular o CATETO OPOSTO AO ÂNGULO DE 30°. Entre as relações sen 30°, cos 30° e tan 30°, aquela que relaciona a hipotenusa com o cateto oposto é o seno. Portanto,

$$\text{sen } 30° = \frac{\text{altura do ponto E}}{\text{AE}} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\text{altura do ponto E}}{10} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{altura do ponto E} = 5 \text{ m.}$$

A ideia é a mesma:

$$\text{sen } 30° = \frac{\text{altura do ponto B}}{\text{AB}} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\text{altura do ponto B}}{2{,}5} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{altura do ponto B} = 1{,}25 \text{ m.}$$

c. Repita o procedimento acima para os pontos C e D.

Ponto	Distância de A	Altura
A	0 m	0 m
B	2,5 m	1,25 m
C	5 m	2,5 m
D	7,5 m	3,75 m
E	10 m	5 m

Observe que você conhece o comprimento da hipotenusa AE e deseja calcular a o CATETO ADJACENTE AO ÂNGULO DE 30°. Entre as relações sen 30°, cos 30° e tan 30°, aquela que associa a hipotenusa com o cateto adjacente é o cosseno. Portanto,

$$\cos 30° = \frac{\text{AI}}{\text{AE}} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\text{AI}}{10} \rightarrow \text{AI} = 5\sqrt{3} \text{ m.}$$

d. A ideia é a mesma:

$$\cos 30° = \frac{\text{AF}}{\text{AB}} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\text{AF}}{2{,}5} \rightarrow \text{AF} = 1{,}25\sqrt{3} \text{ m.}$$

e. Repita o procedimento acima para os pontos C e D.

Ponto	Distância de A
A	0 m
F	$1{,}25\sqrt{3}$ m
G	$2{,}5\sqrt{3}$ m
H	$3{,}75\sqrt{3}$ m
I	$5\sqrt{3}$ m

10)

a. $\frac{L}{2}$

b. $L^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + AH^2 \rightarrow L^2 = \frac{L^2}{4} + AH^2 \rightarrow L^2 - \frac{L^2}{4} = AH^2$

$$\rightarrow L^2 - \frac{L^2}{4} = AH^2 \rightarrow \frac{3L^2}{4} = AH^2 \rightarrow AH = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

c. Como o triângulo é EQUILÁTERO, por coincidir com a bissetriz, a altura divide o ângulo ao meio. Logo $\alpha = 30°$.

d. $\text{sen } \alpha = \frac{BH}{L} \rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{L/2}{L} \rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{L} \rightarrow$

$$\boxed{\text{sen } \alpha = \frac{1}{2}}$$

e. $\cos \alpha = \frac{AH}{L} \rightarrow \cos \alpha = \frac{L\sqrt{3}/2}{L} \rightarrow \cos \alpha = \frac{L\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{L}$

$$\rightarrow \boxed{\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

11)

a. Em um triângulo equilátero, os ângulos medem 60°.
Portanto, $\beta = 60°$

b. $\text{sen } \beta = \frac{AH}{L} \rightarrow \text{sen } \beta = \frac{L\sqrt{3}/2}{L} \rightarrow \text{sen } \beta = \frac{L\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{L}$

$$\rightarrow \boxed{\text{sen } \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

c. $\cos \beta = \frac{BH}{L} \rightarrow \cos \beta = \frac{L/2}{L} \rightarrow \cos \beta = \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{L} \rightarrow$

$\rightarrow \boxed{\cos\ \beta = \frac{1}{2}}$

12)

a. Como BC é lado do quadrado, então BC = L.

b. $AC^2 = L^2 + L^2 \rightarrow AC^2 = 2L^2 \rightarrow AC = L\sqrt{2}$

c. Como trata-se de um quadrado, a diagonal divide o ângulo ao meio. Logo, $\gamma = 45°$.

d. $\text{sen}\ \gamma = \frac{BC}{AC} \rightarrow \text{sen}\ \gamma = \frac{L}{L\sqrt{2}} \rightarrow \text{sen}\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow$

$\boxed{\text{sen}\ \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

e. $\cos\gamma = \frac{AB}{AC} \rightarrow \cos\gamma = \frac{L}{L\sqrt{2}} \rightarrow \cos\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow$

$\boxed{\cos\ \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

13)

	30°	45°	60°
sen	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
cos	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$

Obs.: Se dois ângulos somam 90°, eles são ditos COMPLEMENTARES. Nesse caso, o seno de um deles é igual ao cosseno do outro.

14) Sabemos quanto mede a hipotenusa e queremos saber o cateto oposto ao ângulo de 30°. A relação trigonométrica que associa a hipotenusa com o cateto oposto é o seno.

$\text{sen}\ 30° = \frac{h}{12} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{12} \rightarrow h = 6\ \text{m}$

15) Sabemos quanto mede o cateto adjacente ao ângulo de 45° e queremos calcular o cateto oposto ao mesmo ângulo. A relação trigonométrica que associa cateto oposto com cateto adjacente é a tangente.

$\tan 45° = \frac{D}{25} \rightarrow 1 = \frac{D}{25} \rightarrow D = 25\ \text{m}$

16) E

17) C

18) C

19) h = 7,7 cm e x = 4,4 cm

20) C

21) 0,5 m

22) B

23) 72 m^2

24) C

25) C

26) D

27) C

28) B

29) A

30) B

31) B

32) No triângulo OMP, temos $\text{sen}\ \alpha = \frac{MP}{OM} \rightarrow \text{sen}\ \alpha = \frac{5R/12}{OM}$.

No entanto, falta saber algo sobre OM. Utilizando-se o Teorema de Pitágoras,

$OM^2 = MP^2 + OP^2 \rightarrow OM^2 = \left(\frac{5R}{12}\right)^2 + R^2 \rightarrow OM^2 = \frac{25R^2}{144} + R^2 \rightarrow$

$\rightarrow OM^2 = \frac{25R^2 + 144R^2}{144} \rightarrow OM^2 = \frac{169R^2}{144} \rightarrow OM = \frac{13R}{12}$

Voltando ao seno:

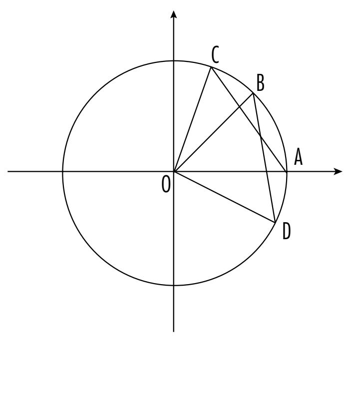
$\text{sen}\ \alpha = \frac{5R/12}{OM} = \frac{5R/12}{13R/12} = \frac{5}{13}$

33) E

34) 45°

35)

a. Na figura a seguir, considere α = AOB e β = AOC = AOD.



Logo, os pontos A, B, C e D têm as seguintes coordenadas:
$A = (1,0)$
$B = (\cos(\alpha), \text{sen}(\alpha))$
$C = (\cos(\alpha + \beta), \text{sen}(\alpha + \beta))$
$D = (\cos(\beta), -\text{sen}(\beta))$
Então, pela fórmula da distância entre pontos no plano, temos:

$AC^2 = (\cos(\alpha + \beta) - 1)^2 + \text{sen}(\alpha + \beta) = \cos(\alpha + \beta)^2 - 2\cos(\alpha + \beta) + 1 + \text{sen}^2(\alpha + \beta) = 2 - 2\cos(\alpha + \beta)$

$BD^2 = (\cos(\alpha) - \cos(\beta))^2 + (\text{sen}(\alpha) + \text{sen}(\beta))^2 = \cos^2(\alpha) - 2\cos(\alpha)\ 2\cos(\beta) + \cos^2(\beta) + \text{sen}^2(\alpha) + 2\,\text{sen}(\alpha)\,\text{sen}(\beta) + \text{sen}^2(\beta) = 2 - 2\cos(\alpha)\cos(\beta) + 2\,\text{sen}(\alpha)\,\text{sen}(\beta)$

Como os triângulos OAC e OBD são congruentes (pelo caso LAL), temos que AB.
Logo: $2 - 2\cos(\alpha + \beta) = 2 - 2\cos(\alpha) + 2\,\text{sen}(\alpha)\,\text{sen}(\beta)$
Portanto: $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + 2\,\text{sen}(\alpha)\,\text{sen}(\beta)$

b. Usando os fatos $\cos(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $\text{sen}(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, e fórmula do item anterior, temos:

Logo:

$$\text{sen}(\alpha+\beta) = \cos\left(\alpha+\beta-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\alpha+\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$
$$\cos(\alpha)\cos\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right) - \text{sen}(\alpha)\,\text{sen}\left(-\left(-\beta+\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$
$$\cos(\alpha)\,\text{sen}(\beta) + \text{sen}(\alpha)\,\text{sen}\left(-\beta+\frac{\pi}{2}\right) =$$
$$\cos(\alpha)\,\text{sen}(\beta) + \text{sen}(\alpha)\,\text{sen}\left(-\beta+\frac{\pi}{2}\right) =$$
$$\cos(\alpha)\,\text{sen}(\beta) + \text{sen}(\alpha)\cos(-\beta) =$$
$$\cos(\alpha)\,\text{sen}(\beta) + \text{sen}(\alpha)\cos(\beta)$$

c. Substituindo $\alpha = \beta$ no item (a), temos:
$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha + \alpha) = \cos(\alpha)\cos(\alpha) - \text{sen}(\alpha)\,\text{sen}(\alpha) = \cos^2(\alpha) - \text{sen}^2(\alpha)$

d. Substituindo $\alpha = \beta$ no item (b), temos:
$\text{sen}(2\alpha) = \text{sen}(\alpha + \alpha) = \cos(\alpha)\,\text{sen}(\alpha) + \text{sen}(\alpha)\cos(\alpha) = 2\,\text{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$

36)
a. $BC = R\text{sen}\theta$ e $AB = 2R\cos\theta$
b. $S = R^2\,\text{sen}\,2\theta$ e $2\theta = 90°$

37) **1ª solução:**
O ângulo $D\hat{B}C = 60°$. Logo $D\hat{B}A = 120°$.
Se $D\hat{B}A = 120°$ e $D\hat{A}B = 30°$, então $A\hat{D}B = 30°$. Assim, o triângulo ABD é isósceles e $BD = AB = 100$.
Passe agora a trabalhar no triângulo BCD.
Sabemos que a hipotenusa mede 100 e queremos calcular o cateto oposto ao ângulo de 60°. Logo, devemos usar o seno.

$$\text{sen}\,60° = \frac{x}{100} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{100} \rightarrow x = 50\sqrt{3}$$

Obs.: note que essa solução utiliza o fato de que o triângulo ABD é isósceles. Isso só é verdade porque o ângulo DAB é a metade do ângulo DBC! Se esse fato não ocorrer, não será possível utilizar a solução 1. Nesse caso, lançaremos mão da solução 2.

2ª solução:
Essa é a solução padrão para esse tipo de problema. Nessa solução, utilizaremos a tangente duas vezes: primeiro no triângulo ACD e, a seguir, no triângulo BCD. Outro fato importante é que, inevitavelmente, o tamanho BC fará parte dos nossos cálculos, ainda que não saibamos quanto ele vale. Finalmente, você não deve julgar que uma questão é difícil porque possui muitos cálculos. Aprenda a separar as partes intelectual e computacional da questão. Nessa solução, em particular, a parte intelectual é extremamente simples: utilizar duas vezes a relação da tangente. A parte computacional é que dá certo trabalho. Não deixe a questão de lado por esse motivo. Leia com calma e, principalmente, paciência. Acompanhe a solução escrevendo. Faça você mesmo os cálculos enquanto lê. Se necessário, leia tudo outra vez. Preparado? Então vamos lá!

$$\text{Em ACD, } \tan 30° = \frac{x}{100 + BC} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{100 + BC} \quad \text{(I)}.$$

Note que temos uma equação com duas incógnitas (dois valores desconhecidos). Precisamos de outra equação, obviamente diferente dessa, envolvendo x e BC.

$$\text{Em BCD, } \tan 60° = \frac{x}{BC} \rightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{BC} \quad \text{(II)}.$$

Afinal de contas, o que queremos calcular: x ou BC?
Queremos calcular x! Então vamos fazer com que o BC desapareça. Como isso pode ser feito? Simples. Basta tirar o valor de BC em uma das equações e substituí-lo na outra equação.
Perceba que está mais fácil tirar o valor de BC em (II). Então: $BC = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

Não perca o seu tempo racionalizando frações no meio da solução. Deixe para fazê-lo na hora em que for apresentar a resposta final.

Substituindo o valor de BC em (I) teremos: $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{100 + \frac{x}{\sqrt{3}}}$ (III)

Concentre-se apenas no denominador da segunda fração. Vamos igualar os denominadores em $100 + \frac{x}{\sqrt{3}}$.

$$100 + \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{100\sqrt{3} + x}{\sqrt{3}}$$

Dessa forma, a expressão (III) fica: $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{\frac{100\sqrt{3} + x}{\sqrt{3}}}$

Vamos melhorar a aparência da última fração "mantendo o numerador e multiplicando-o pelo inverso do denominador".

$$\frac{\frac{x}{100\sqrt{3}+x}}{\sqrt{3}} = x \cdot \frac{\sqrt{3}}{100\sqrt{3}+x}$$

Logo, a expressão (III) se transforma em: $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x \cdot \sqrt{3}}{100\sqrt{3}+x}$

Simplifique-a, dividindo ambos os termos por $\sqrt{3}$ (lembre-se de que, numa igualdade, isso sempre poderá ser feito desde que se tenha a certeza que o divisor não é zero).

$$\frac{1}{3} = \frac{x}{100\sqrt{3}+x}$$

Multiplique cruzado:

$$3x = 100\sqrt{3} + x$$
$$2x = 100\sqrt{3}$$
$$x = 50\sqrt{3}$$

Não adianta reclamar! Nesse tipo de problema, se um ângulo não for o dobro do outro, só vai lhe restar essa saída. Além disso, esse problema é clássico e aparece com frequência.

38) C

39) $\tan 30° = \frac{\text{altura da torre menor}}{10\sqrt{3}} \to \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\text{altura da torre menor}}{10\sqrt{3}}$

$\to$ altura da torre menor = 10 m

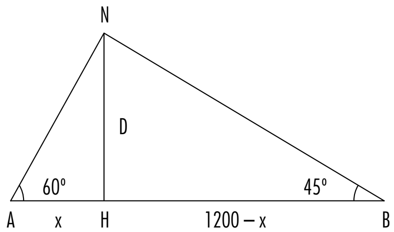
$\tan 60° = \frac{\text{altura da torre maior}}{10\sqrt{3}} \to \sqrt{3} = \frac{\text{altura da torre maior}}{10\sqrt{3}}$

$\to$ altura da torre maior = 30 m

Forme um triângulo retângulo tal que a hipotenusa seja o segmento que liga os topos das torres. Dessa forma, você terá um triângulo retângulo com:
cateto horizontal = $10\sqrt{3}$ e cateto vertical = 30 – 10 = 20. Logo, aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$\text{distância}^2 = (10\sqrt{3})^2 + 20^2$$
$$\text{distância}^2 = 700$$
$$\text{distância} = 10\sqrt{7}\text{m}$$

40) A figura ilustra a situação.



Assim como na questão 29, utilizaremos a tangente duas vezes: primeiro no triângulo ANH e, a seguir, no triângulo BNH. Inevitavelmente, AH e BH farão parte dos nossos cálculos, ainda que não saibamos quanto valem. Por isso chamei AH de x e, como AH + BH = 1200, então BH = 1200 – x.
Usando a tangente em ANH:

$$\tan 60° = \frac{D}{x} \to \sqrt{3} = \frac{D}{x} \quad \text{(I)}$$

Note que temos uma equação com duas incógnitas (dois valores desconhecidos). Precisamos de outra equação, obviamente diferente dessa, envolvendo x e D.

Em BNH, $\tan 45° = \frac{D}{1200-x} \to 1 = \frac{D}{1200-x}$ (II).

Como queremos calcular D, vamos fazer com que o x desapareça. Isso pode ser feito tirando o valor de x em uma das equações e substituindo esse valor na outra equação. Olhando para (I), concluímos que:

$$x = \frac{D}{\sqrt{3}}.$$

Substituindo o valor de x em (II) teremos:

$$1 = \frac{D}{1200 - \frac{D}{\sqrt{3}}} \to 1 = \frac{D}{\frac{1200\sqrt{3}-D}{\sqrt{3}}} \to$$

$$1 = \frac{D\sqrt{3}}{1200\sqrt{3}-D} \to 1200\sqrt{3} - D = D\sqrt{3}$$

$$1200\sqrt{3} = D + D\sqrt{3} \to 1200\sqrt{3} = D(1+\sqrt{3})$$

$$\to \frac{1200\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = D$$

Agora falta racionalizar o resultado.

$$D = \frac{1200\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \to D = \frac{1200\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)\cdot(\sqrt{3}-1)} \to$$

$$D = \frac{3600 - 1200\sqrt{3}}{3-1} \to D = \frac{1200\cdot(3-\sqrt{3})}{2} \to$$

$$D = 600\ .\ (3-\sqrt{3})\ \text{m}$$

41) 635 m

Gabarito :: Exercícios de vestibular

1) B

2) D

3) D

8

Polígonos regulares

Introdução

Uma linha poligonal é uma sequência finita de segmentos de reta encadeados continuamente que se cruzam apenas nos extremos. Além disso, os pontos de cruzamento pertencem a exatamente dois segmentos. Uma linha poligonal é fechada quando todas as extremidades dos segmentos pertencem a cruzamentos. Uma linha poligonal fechada é um polígono. Finalmente, os segmentos são denominados lados da poligonal ou do polígono.

Veja na figura 8.1 exemplos de linhas poligonais, onde apenas uma é polígono.

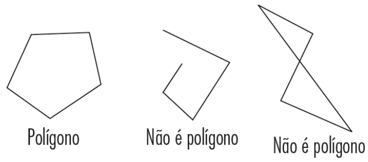


Figura 8.1: Linhas poligonais

Polígono convexo

É o polígono que tem a seguinte propriedade: "qualquer reta do plano que não contém nenhum lado do polígono intercepta o polígono em no máximo 2 pontos". Na figura 8.2 o polígono à esquerda é convexo e o da direita é não convexo.

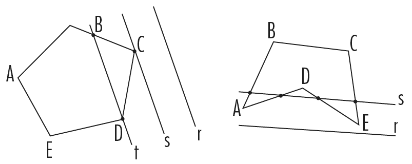


Figura 8.2: Polígonos convexos e não convexos

Na figura 8.3 apresentamos os principais elementos de um polígono convexo. São eles:

a_i, b_i, c_i ... são os ângulos internos, a_e, b_e, c_e ... são os ângulos externos;

A, B, C, D ... são os vértices e AB, BC, CD ... são os lados.

Veja que em um polígono de n lados temos n vértices, n ângulos internos e n ângulos externos.

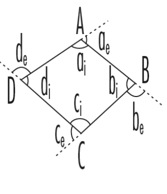


Figura 8.3: Elementos de um polígono

Uma diagonal de um polígono convexo é qualquer segmento de reta que une dois vértices não consecutivos. Veja no polígono da figura 8.4 todas as diagonais representadas.

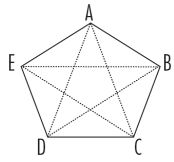


Figura 8.4: Diagonais de um polígono

De acordo com o número n de lados, os polígonos convexos recebem nomes especiais. Veja a seguir as correspondências:

n = 3 – triângulo – 3 lados
n = 4 – quadrilátero – 4 lados
n = 5 – pentágono – 5 lados
n = 6 – hexágono – 6 lados
n = 7 – heptágono – 7 lados
n = 8 – octógono – 8 lados
n = 9 – eneágono – 9 lados
n = 10 – decágono – 10 lados
n = 11 – undecágono – 11 lados
n = 12 – dodecágono – 12 lados
n = 15 – pentadecágono – 15 lados
n = 20 – icoságono – 20 lados

Soma dos ângulos internos de um polígono convexo

Proposição 1

A soma S_i dos ângulos internos de um polígono convexo, de n lados é dada por $S_i = 180° (n - 2)$.

Demonstração:

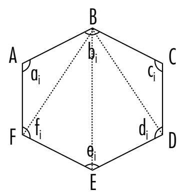


Figura 8.5: Soma dos ângulos internos

De um vértice qualquer tracemos todas as diagonais que têm esse vértice como extremo. O polígono fica dividido em (n – 2) triângulos. Como a soma dos ângulos de cada triângulo é 180°, então, $S_i = 180° (n - 2)$.

Soma dos ângulos externos de um polígono convexo

A soma S_e das medidas dos ângulos externos de um polígono convexo é sempre 360°.

Demonstração:

Observe um polígono convexo como na figura 8.6, onde estão indicados ângulos internos e externos. Note que:

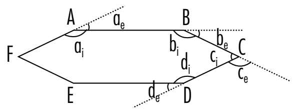


Figura 8.6: Ângulos num polígono

$a_i + a_e = 180°$
$b_i + b_e = 180°$
$c_i + c_e = 180°$
$d_i + d_e = 180°$
...
...

Somando as expressões, encontraremos que: $S_i + S_e = 180°n$.
Como $S_i = 180°\ (n - 2)$, temos que $S_e = 2 \times 180° = 360°$

Observação

Se o polígono é regular, então os ângulos externos têm a mesma medida.

Portanto, tem medida $a_e = \dfrac{360°}{n}$

Número de diagonais de um polígono convexo

Proposição 2

O número de diagonais d de um polígono convexo de n lados é $d = \dfrac{n(n-3)}{2}$

Prova

Vamos examinar um caso particular de um polígono de 5 lados, para aprender. Este exemplo particular vai indicar como se consegue a fórmula geral para o número de diagonais d. Veja a figura 8.7.

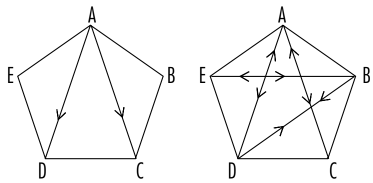


Figura 8.7: Diagonais de um polígono

Na figura 8.7, à esquerda, temos duas diagonais saindo do vértice A. O número de vértices é n = 5. Temos n – 3 = 5 – 3 = 2 diagonais saindo do ponto A. Agora olhando na figura 8.7, à direita, vemos que saem de cada um dos vértices também exatamente n – 3 = 2 diagonais. Logo o total de diagonais que saem de todos os vértices é n(n – 3) = 5 × 2 = 10 diagonais. No entanto, estas diagonais são contadas em dobro.

Logo, $d = \dfrac{n(n-3)}{2} = \dfrac{5 \cdot 2}{2} = 5$ é o número total de diagonais.

Agora vamos tratar do caso geral. Considere um polígono de n lados (e, portanto, n vértices). Ao traçar as diagonais a partir de um vértice fixado, por exemplo, o vértice A, teremos um total de n – 3 diagonais.

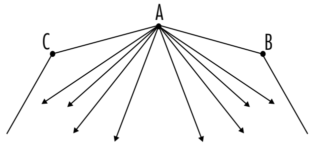


Figura 8.8: Diagonais a partir de um vértice

Veja que na figura 8.8, partem do vértice A diagonais para todos os outros vértices, menos para os vértices B e C (que são consecutivos a A) e para o próprio vértice A. Temos então (n – 3) diagonais partindo de A.

Como temos n vértices contaremos deste modo n (n – 3) diagonais. Mas, observe que por este processo, cada diagonal está sendo contada duas vezes. Logo, o número total d de diagonais é:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

Polígonos regulares

Um polígono é regular quando a medida de todos os lados são iguais (equilátero) e a medida de todos os ângulos internos iguais (equiângulo). Observe na figura 8.9, alguns exemplos de polígonos regulares.

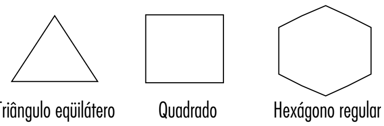


Figura 8.9: Polígonos regulares

Num polígono regular todos os ângulos têm a mesma medida. A proposição a seguir especifica este valor.

Proposição 3

Se um polígono é regular, cada um de seus ângulos internos é dado por:

$$a_i = \frac{180°(n-2)}{n}$$

Prova

Note que a soma S_i de todos os ângulos internos é $S_i = 180°\ (n - 2)$. Além disso, temos n ângulos todos iguais. Portanto, a medida a_i de cada ângulo é dada pela fórmula da proposição.

Propriedades

(i) Todo polígono regular é inscritível em uma circunferência. Isto é, os vértices de um polígono regular pertencem todos a uma mesma circunferência. Veja a figura 8.10, representando respectivamente um triângulo equilátero e um octógono inscritos. O centro da circunferência é chamado centro do polígono.

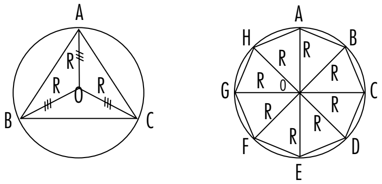


Figura 8.10: Inscrição e circunscrição de polígonos

R é o raio do círculo circunscrito ao polígono

(ii) Um polígono regular de n lados pode ser dividido em n triângulos isósceles com vértice no centro do polígono e cujos lados congruentes são raios do círculo circunscrito ao polígono. Examine esta propriedade na figura 8.10.

(iii) Todo polígono regular é circunscritível a uma circunferência. Nesta situação, todos os lados do polígono regular são tangentes à circunferência. Veja a figura 8.11.

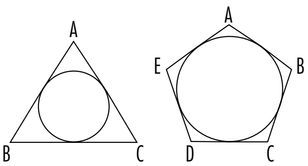


Figura 8.11: Polígonos circunscritos

Elementos notáveis de um polígono regular

(i) O centro de um polígono regular é o centro comum das circunferências inscrita e circunscrita.

(ii) Apótema de um polígono regular é a distância do centro do polígono regular a um dos lados. Esta distância é igual ao comprimento do segmento que une o centro ao ponto médio de um lado. Também, essa distância equivale ao raio do círculo inscrito.

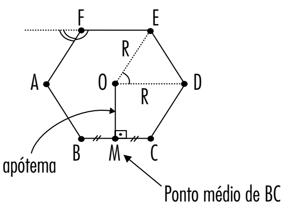


Figura 8.12: Apótema

Relação entre o lado e o raio de um polígono regular

Nesta seção pretendemos estabelecer relações entre os comprimentos do lado, o apótema e o raio de importantes polígonos regulares. Para fixar notação, vamos indicar por l_n a medida do lado do polígono regular de n lados e por a_n a medida do apótema do polígono regular de n lados e por R o raio da circunferência circunscrita ao polígono.

Triângulo equilátero (n = 3)

Vamos obter o lado (l_3) e o apótema (a_3) do triângulo equilátero, em função do raio R do círculo circunscrito.

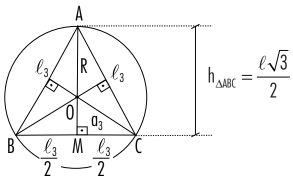


Figura 8.13: Triângulo inscrito

Observe na figura 8.13 que AM é a altura h do triângulo equilátero $\triangle ABC$. Como o $\triangle ABM$ é retângulo e M é o ponto médio de BC, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras para concluir que:

$$h^2 + \left(\frac{l_3}{2}\right)^2 = l_3^2 \Rightarrow h = \frac{l_2\sqrt{3}}{2}$$

Por outro lado, observe mais uma vez a figura 8.13 e conclua que o encontro das alturas ocorre no ponto O, centro da circunferência. De fato, as alturas também são medianas e todas tem o mesmo comprimento.

Como o encontro das medianas de um triângulo ocorre a 2/3 do vértice então OA = OB = OC e este é o motivo porque O é o centro da circunferência. Portanto,

$$OA = R = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}\frac{l_3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow l_3 = R\sqrt{3}$$

$$OM = a_3 = \frac{1}{2}OA \Rightarrow a_3 = \frac{R}{2}$$

Quadrado (n = 4)

Na figura 8.14 o triângulo ADB é retângulo (Â = 90º). Aplicando o Teorema de Pitágoras, encontramos que $d = l_4^2 + l_4^2 \rightarrow d = l_4\sqrt{2}$, onde d é o comprimento da diagonal.

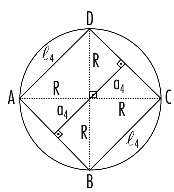


Figura 8.14: Quadrado inscrito

Note ainda da figura 8.14 que d = 2R. Portanto, $l_4\sqrt{2}=2R \Rightarrow l_4 = R\sqrt{2}$

Observe, ainda, que $a_4 = \dfrac{l_4}{2} \Rightarrow a_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$

Hexágono regular (n = 6)

Observe na figura 8.15 que o hexágono regular pode ser dividido em 6 triângulos equiláteros congruentes, onde o apótema a_6 é a altura comum destes triângulos.

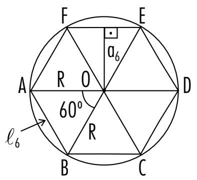


Figura 8.15: Hexágono regular inscrito

Veja por que isto acontece. No $\triangle AOB$, temos que

$$A\hat{O}B = \frac{360°}{6} = 60°; \;\; OA = OB = R$$

Então $\hat{A} = \hat{B} = 60 \Rightarrow \hat{O} = \hat{A} = \hat{B} = 60°$. Portanto o triângulo $\triangle AOB$ é equilátero. Isto permite concluir que:

$$l_6 = R \quad e \quad a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Resumo

No quadro representado na figura 8.16 apresentamos o lado e o apótema do triângulo, quadrado e hexágono regular em função do raio R da circunferência circunscrita.

	n = 3	n = 4	n = 6
Lado (l)	$R\sqrt{3}$	$R\sqrt{2}$	R
Apótema (a)	$\dfrac{R}{2}$	$\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Figura 8.16: Relações de medidas nos polígonos regulares

Quadriláteros

Todo polígono que possui 4 lados é denominado um quadrilátero. Na figura 8.17, apresentamos à esquerda um quadrilátero convexo e à direita um quadrilátero não convexo.

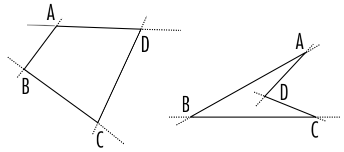


Figura 8.17: Quadriláteros

Em nosso estudo, vamos nos concentrar nos quadriláteros convexos.

Propriedades dos quadriláteros convexos

(i) Possuem sempre 2 diagonais;
(ii) A soma dos ângulos internos vale 360°;
(iii) A soma dos ângulos externos vale 360°.

Veja por que valem as propriedades. Se d é o número de diagonais, como temos quatro lados, então:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}; n = 4 \Rightarrow d = \frac{4(4-3)}{2} = 2$$

$S_i = 180° \,(n - 2); \; n = 4 \Rightarrow S_i = 180° \,(4 - 2) = 360°$

Quadriláteros especiais

Paralelogramo

Um paralelogramo é um quadrilátero onde os lados opostos são paralelos.

Veja a figura 8.18, onde usamos o fato que AB || DC e AD || BC, para identificar igualdades entre ângulos. Note a partir disto a seguinte congruência de triângulos: $\triangle BDA \equiv \triangle DBC$. Isto implica que DC = BA e DA = BC, justificando a figura 8.18.

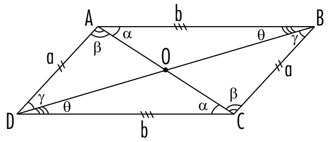


Figura 8.18: Paralelogramo

Vamos resumir as importantes propriedades que surgem examinando a figura 8.18.

Propriedades

1) Os ângulos opostos são iguais.
2) Os ângulos consecutivos são suplementares.

3) Os lados opostos tem o mesmo comprimento.

4) As diagonais se cortam no ponto médio.

Dentre as propriedades acima a quarta merece uma justificativa. Examine de novo a figura 8.18. A congruência de triângulos, $\triangle DOC \equiv \triangle BOA$ e $\triangle DAO \equiv BCO$, garante a quarta propriedade.

Losango

O losango é um paralelogramo que possui todos os lados iguais (equilátero).

Na figura 8.19 está representado um losango ABCD, onde o comprimento do lado é a. Isto é, AB = BC = CD = DA = a.

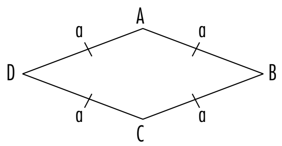


Figura 8.19: Losango

Propriedade

As diagonais de um losango são perpendiculares entre si.

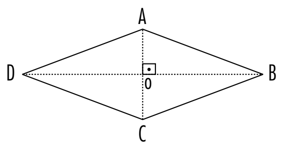


Figura 8.20: Diagonais do losango

Veja, em seguida, como se justifica esta propriedade. Recorde que a mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao segmento que passa pelo ponto médio do segmento. Um ponto pertence à mediatriz se e somente se é equidistante dos extremos do segmento. Então, veja que:

AB = AD $\Rightarrow$ A pertence à mediatriz de BD

CB = CD $\Rightarrow$ C pertence à mediatriz de BD

Logo, AC é a mediatriz de BD $\Rightarrow$ AC $\perp$ BD

Retângulo

É o paralelogramo que possui todos os ângulos internos iguais (equiângulo). Como a soma dos ângulos internos de todo paralelogramo é 360º encontramos que:

$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90°$

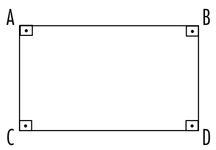


Figura 8.21: Retângulo

Propriedade

As diagonais de um retângulo têm a mesma medida.

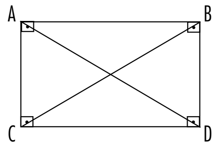


Figura 8.22: Diagonais do retângulo

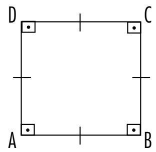
Veja como se justifica esta propriedade. Na figura 8.22 os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle BAC$ são congruentes (caso LAL). Portanto,

AB = BA
AD = BC
e A = B = 90º

Logo, BD = AC.

Quadrado

É o paralelogramo que possui todos os lados iguais (mesma medida) e todos os ângulos iguais (mesma medida).



AB = BC = CD = DA

A = B = C = D = 90º

Figura 8.23: Quadrado

Nota

Todo quadrado é um losango e é também um retângulo.

Trapézio

É um quadrilátero convexo que possui dois lados opostos paralelos. Os lados paralelos são denominados bases. Como estes lados tem comprimentos diferentes, temos uma base menor e uma base maior. Veja a figura.

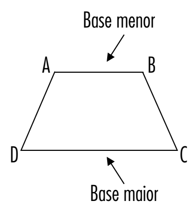
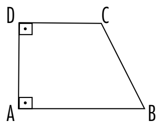


Figura 8.24: Trapézio e bases

Classificação dos trapézios

Trapézio retângulo

É o trapézio que apresenta dois ângulos retos (um dos lados não paralelos é perpendicular às bases). Veja a figura 8.25.

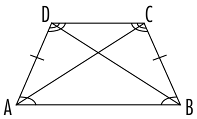


$A = D = 90°$

Figura 8.25: Trapézio retângulo

Trapézio isósceles

É todo trapézio onde os lados não paralelos são congruentes.



$AD = BC$

Figura 8.26: Trapézio isósceles

Propriedades

Num trapézio isósceles ABCD, onde AD = BC, (veja a figura 8.26), valem as seguintes propriedades:

1) Os lados não paralelos formam com a mesma base ângulos congruentes.
$\hat{A} = \hat{B}$ e $\hat{C} = \hat{D}$

2) As diagonais são congruentes.
$AC = BD$

Trapézio escaleno

Um trapézio é dito escaleno, quando os lados não paralelos não são congruentes.

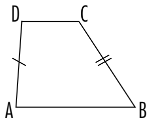


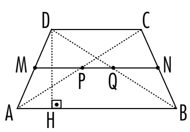
Figura 8.27: Trapézio escaleno

Observação

Em particular, um trapézio retângulo é também escaleno.

Observações gerais sobre um trapézio ABCD

Considere um trapézio ABCD, como na figura 8.28, onde M e N são pontos médios dos lados não paralelos AD e BC, respectivamente. Considere ainda notação introduzida à direita da figura 8.28.



AB = base maior = B
DC = base menor = b
MN = base média = bm
(DM = MA, CN = NB)
PQ = mediana de Euler = m_E

Figura 8.28: Trapézio genérico

Nesta situação, podemos concluir que $bm = \dfrac{B+b}{2}$, $m_E = \dfrac{B-b}{2}$

Demonstração

Como MN || AB || DC,temos as implicações:

$$\triangle ADC \Rightarrow MP = \frac{b}{2}$$

$$\triangle CAB \Rightarrow PN = \frac{B}{2}$$

$$\triangle BCD \Rightarrow QN = \frac{b}{2}$$

Isto permite concluir que $bm = MN = MP + PN = \dfrac{B+b}{2}$

Finalmente, temos que $MP + QN = \dfrac{b}{2} + \dfrac{b}{2} \Rightarrow m_E = PQ = \dfrac{B-b}{2}$

Diagrama de veen

É instrutivo recordar, através de um diagrama de veen, a relação de inclusão dos conjuntos especiais de quadriláteros introduzidos. Para isto denote por:

U o conjunto dos quadriláteros convexos,
P o conjunto dos paralelogramos,
T o conjunto dos trapézios,
R o conjunto dos retângulos,
L o conjunto dos losangos,
Q o conjunto dos quadrados.

Em primeiro lugar observe que o conjunto T dos trapézios é um subconjunto do conjunto U dos quadriláteros convexos. Isto é, $T \subset U$. Para os demais conjuntos, valem $P \subset T$, $R \subset P$, $L \subset P$ e $Q \subset (R \cap L)$.

Estas propriedades podem ser representadas num único diagrama de Veen.

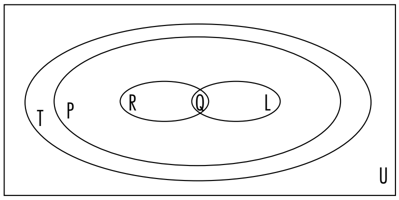


Figura 8.29: Diagrama de Veen

Exercícios

1) Qual o número de diagonais que se pode traçar a partir de um vértice de um icoságono?

2) Determine o número de lados de um polígono que tem 44 diagonais.

3) Calcule o número de diagonais de um polígono regular cujo ângulo interno é o triplo do ângulo externo.

4) Calcule a medida do ângulo interno de um polígono regular que tem 54 diagonais.

5) A medida do ângulo interno de um polígono regular é 140°. Sabendo que o lado desse polígono mede 3 cm, quanto mede o seu perímetro?

6) Determine o número de lados de um polígono cujo número de diagonais excede de 25 o número de lados.

7) A diferença entre os números de lados de dois polígonos é 3. O total de diagonais desses polígonos é 9. Um desses polígonos é:

(A) eneágono
(B) pentágono
(C) quadrilátero
(D) octógono
(E) triângulo

8) Num polígono regular os vértices A, B e C são consecutivos. Suponha que a diagonal $\overline{AC}$ forma com o lado $\overline{BC}$ um ângulo de 30°. Calcular o número de lados e de diagonais do polígono.

9) Num polígono regular A, B e C são vértices consecutivos. Determinar o número de lados do polígono sabendo que as bissetrizes de $\overline{AP}$ e $\overline{CP}$ dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ formam um ângulo que vale 2/9 do seu ângulo interno.

10) As mediatrizes de dois lados consecutivos AB e BC de um polígono regular formam um ângulo de 24°. Veja a figura 8.30. Determine o número de lados desse polígono.

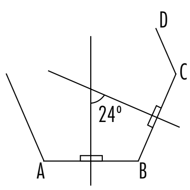
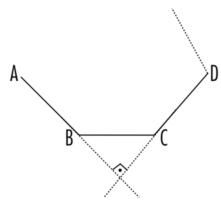


Figura 8.30: Polígono regular

11) Quando variamos o número de lados de um polígono convexo permanece constante:

(A) o perímetro;
(B) a soma dos ângulos internos;
(C) a soma dos ângulos externos;
(D) o número de diagonais;
(E) nada podemos afirmar.

12) Na Figura está representado um polígono regular. Os prolongamentos dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ formam um ângulo reto. Determinar o número de lados do polígono.



13) Duas bissetrizes internas de dois ângulos consecutivos de um polígono regular de n lados formam um ângulo dado por:

(A) $\dfrac{180°}{n}$

(B) $\dfrac{360°}{n}$

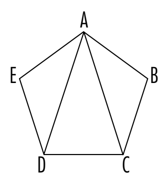
(C) $\dfrac{180°(n-2)}{n}$

(D) $\dfrac{90°(n-2)}{n}$

(E) $\dfrac{90°}{n}$

14) Qual a diferença entre o número de diagonais de um polígono de (k – 1) lados e de um outro polígono de (k – 2) lados.

15) (CESGRANRIO) Na figura ABCDE é um polígono regular. Determine a medida do ângulo CÂD.



16) (UFF / 1997 - 1ª fase) A razão entre o lado do quadrado inscrito e o lado do quadrado circunscrito a um círculo de raio R é:

(A) $\dfrac{1}{3}$

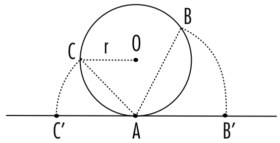
(B) $\dfrac{1}{2}$

(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(E) $\sqrt{2}$

17) (UERJ / 1996 -1ª Fase) Na figura abaixo, AB e AC são, respectivamente, lados do triângulo equilátero e do quadrado inscritos na circunferência de raio r. Com centro em A, traçam-se os arcos de circunferência BB′ e CC′, que interceptam a reta t em B′ e C′.



A medida que está mais próxima do comprimento do segmento BC. é:

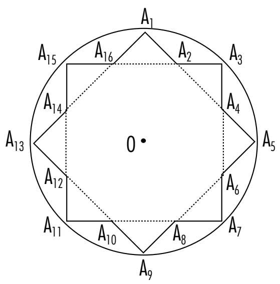
(A) o perímetro do quadrado de lado AC.

(B) o comprimento da semicircunferência de raio r.

(C) o dobro do diâmetro da circunferência de raio r.

(D) o semiperímetro do triângulo equilátero de AB.

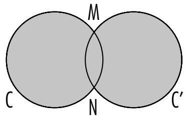
18) (UFF / 1992 - 2ª fase) Um senhor aposentado, que possui um jardim circular cercado de arame, deseja modificar-lhe a forma de estrela, deverá ser obtido marcando-se 8 pontos no contorno original, de modo a formar um octógono regular. A partir dele, será construída a estrela, com todos os 16 lados iguais, conforme a figura a seguir:



Não dispondo de recursos para comprar mais arame, este senhor quer saber se o arame originalmente usado é suficiente para cercar o novo jardim.

Diga se isto é possível, justificando a sua resposta.

19) (UFF / 1997 - 1ª fase) A figura abaixo representa duas circunferência C e C′ de mesmo raio r.



Se MN é o lado comum de hexágonos regulares inscritos em C e C′, então o perímetro da região sombreada é:

(A) $\dfrac{10\neq r}{3}$

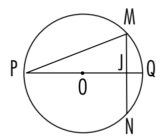
(B) $\dfrac{\neq r}{3}$

(C) $\dfrac{2\neq r}{3}$

(D) $4\pi r$

(E) $2\pi r$

20) (UFF / 1992 - 1ª fase) A figura abaixo representa uma circunferência de centro O e diâmetro $\overline{PQ} = 4\sqrt{3}$ cm



Se $\overline{MN}$ é o lado do hexágono regular inscrito na circunferência e $\overline{MN}$ é perpendicular a $\overline{PQ}$, a medida do segmento $\overline{PM}$, em cm é:

(A) $2\sqrt{3(2+\sqrt{3})}$

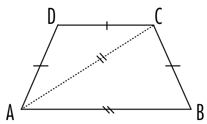
(B) $2\sqrt{3(2-\sqrt{3})}$

(C) $\sqrt{\sqrt{3}(12-\sqrt{3})}$

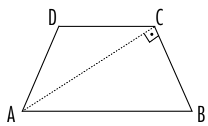
(D) $\sqrt{\sqrt{3}(12+\sqrt{3})}$

(E) $\sqrt{2(\sqrt{3}+12)}$

21) No trapézio $A\hat{B}CD$ da figura tem-se, AD = DC = CB e AC = AB. Determine a medida do ângulo B.

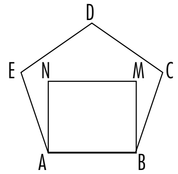


22) Do trapézio ABCD da figura sabe-se que $\hat{A} = \hat{B} = 60°$; AB = 10 cm. AC $\perp$ BC. Calcule o perímetro do trapézio.

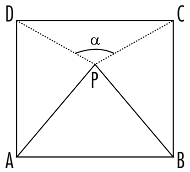


23) Do trapézio ABCD sabe-seque: $\hat{A} = \hat{B} = 60°$; AD = 10 cm; CD =8 cm. Calcule a base maior do trapézio.

24) ABCDE é um pentágono regular e ABMN é um quadrado. Determine a medida dos $C\hat{B}M$ e $D\hat{B}N$.

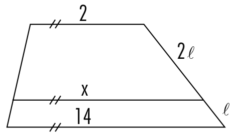


25) Na figura, determine o valor de α, sabendo que ABCD é um quadrado e ABP é um triângulo equilátero.

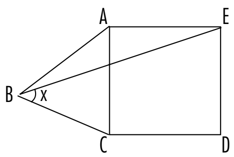


26) As diagonais de um trapézio retângulo medem respectivamente 9 cm e 12 cm. Calcule o perímetro do quadrilátero convexo cujos vértices são os pontos médios dos lados do trapézio.

27) Calcule o valor de x no trapézio abaixo.



28) Na figura abaixo, ABC é um triângulo isósceles de base $\overline{BC}$ e ACDE um quadrado. Calcule a medida do ângulo x.



29) (UNI-RIO / 1993 -1ª fase) Q, T, P, L, R e D denotam, respectivamente o conjunto dos quadriláteros, dos trapézios, dos paralelogramos, dos losangos, dos retângulos e dos quadrados. De acordo com a relação de inclusão entre esses conjuntos, a alternativa verdadeira é:

(A) $D \subset R \subset L \subset P$
(B) $D \subset L \subset P \subset Q$
(C) $Q \subset P \subset L \subset D$
(D) $T \subset P \subset Q \subset R \subset D$
(E) $Q \subset T \subset P \subset L \subset R \subset C$

30) (UNICAMP / 1990 - 2ª fase) Mostre que em qualquer quadrilátero convexo o quociente do perímetro pela soma das diagonais é maior que 1 e menor que 2.

31) (CESGRANRIO) Assinale a alternativa que contém a propriedade diferenciadora do quadrado em relação aos demais quadriláteros.

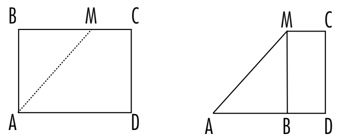
(A) Todos os ângulos são retos.
(B) Os lados são todos iguais.
(C) As diagonais são iguais e perpendiculares entre si.
(D) As diagonais se cortam ao meio.
(E) Os lados opostos são paralelos e iguais.

32) (UNESP / 1991) Seja ABCD um retângulo cujo lados tem as seguintes medidas: $\overline{AB} = \overline{CD} = 6$ cm e $\overline{AC} = \overline{BD} = 1{,}2$ cm. Se M é o ponto médio de $\overline{AB}$, então o raio da circunferência determinada pelos pontos C, M e D mede:

(A) 4,35 cm
(B) 5,35 cm
(C) 3,35 cm
(D) 5,34 cm
(E) 4,45 cm

33) (IBMEC / 1995) Uma folha de papel retangular ABCD tem $\overline{AD} = 1$ m. Dobrando-se a folha no segmento $\overline{AM}$, os pontos A, B e D ficam colineares, como se verifica abaixo:

Se os retângulos ABCD e MCDB são semelhantes, a medida do lado $\overline{CD}$, em metros, é igual a:



(A) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$
(B) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$
(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
(D) $\dfrac{1}{2}$
(E) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

34) (UFF / 1996 - 1ª Fase) Sendo Q um quadrilátero, pode-se afirmar que:

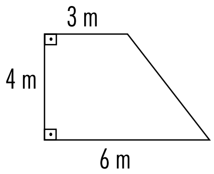
(A) Q é um retângulo e um losango.
(B) Q é um retângulo ou um losango.
(C) Se Q é um losango então Q é um quadrado.
(D) Se Q é um quadrado então Q é um retângulo.
(E) Se Q é um retângulo então Q é um quadrado.

35) (UNICAMP / 1988 - 2ª fase) Sejam L e l o comprimento e a altura, respectivamente, de um retângulo que possui a seguinte propriedade: eliminando-se desse retângulo um quadrado de lado igual à largura l, resulta um novo retângulo semelhante ao primeiro.

Demonstre que a razão $\frac{l}{L}$ é o número $\sigma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ chamado "Razão Áurea".

36) (UNIFICADO) O perímetro do trapézio retângulo da figura é:

(A) 17 m
(B) 18 m
(C) 20 m
(D) 21 m
(E) 22 m



Gabarito

1) 17

2) 11

3) 20

4) 150°

5) 27cm

6) n = 10

7) E

8) 6 lados e 9 diagonais.

9) 20 lados

10) 15

11) C

12) 8

13) B

14) k – 3

15) 36°

16) D

17) B

18) demonstração

19) A

20) A

21) 72°

22) 25 cm

23) 13 cm

24) 18° e 27°

25) α = 150°

26) 21 cm

27) x = 10

28) x = 45°

29) B

30) demonstração

31) C

32) A

33) B

34) D

35) demonstração

36) B

9

O CÍRCULO

Neste capítulo estudaremos uma das mais importantes curvas do plano: o círculo. Para começar, precisamos de algumas definições.

Definições

Circunferência

O conjunto de todos os pontos do plano que estão a uma dada distância de um ponto fixo é chamado de circunferência. O ponto fixo é chamado centro e a dada distância chamada de raio da circunferência. Veja esses elementos na figura 9.1.

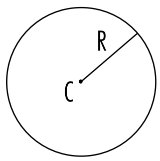


Figura 9.1: Circunferência de centro C e raio R.

Cordas de uma circunferência

Todo segmento que une dois pontos distintos de uma circunferência é uma corda. Uma corda que contém o centro da circunferência é chamada diâmetro. O diâmetro tem comprimento máximo entre as cordas. Veja exemplos de cordas na figura 9.2, onde ED é um diâmetro.

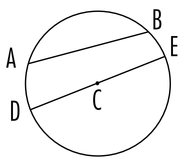


Figura 9.2: Cordas AB e DE.

Comprimento de uma circunferência

Uma circunferência de raio R tem comprimento C, dado por $C = 2\pi R$, onde π é o número irracional, π =3,141592...

Arco de circunferência

Dados dois pontos A e B num círculo Γ, ficam definidos dois arcos: os arcos $\widehat{AXB}$ e $\widehat{AYB}$. Veja a figura 9.3.

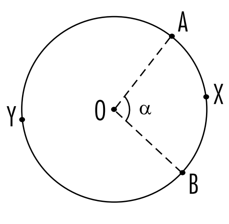


Figura 9.3: Arcos do círculo Γ.

Medida de Ângulos

Vamos definir uma nova unidade para medir ângulos. Já conhecemos o grau (o ângulo reto mede 90º). Agora vamos introduzir o radiano (símbolo rad). Vamos usar a figura 9.3. O ângulo AÔB tem por medida 1 rad se o comprimento do arco $\widehat{AXB}$ for igual ao raio do círculo Γ. Isto é, comprimento de $\widehat{AXB} = R$. Podemos também definir a "medida angular do arco $\widehat{AXB}$ " como a medida do ângulo central. No caso da figura 9.3, ângulo $\widehat{AXB} = \alpha$.

Propriedades do arco

(1) Se o comprimento $\widehat{AXB} = R$, então o ângulo $\widehat{AXB} = 1$ rad.
(2) A medida angular de um círculo é 360º.

A propriedade (2) provoca uma pergunta: qual é a medida angular de um círculo expressa em radianos?

Veja a resposta. Note que o comprimento do círculo é $2\pi R$ (R é raio do círculo). Com isto, forçando um pouco a linguagem podemos imaginar que com 2π arcos cada um com comprimento igual ao raio R podemos cobrir o círculo. Logo a medida angular do círculo é 2π rad.

Conclusão

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad} \quad \text{e } 1 \text{ rad} = \left(\frac{360^\circ}{\pi}\right)$$

Exemplo

Quantos radianos mede um ângulo reto? Se x é a medida do ângulo reto, então,

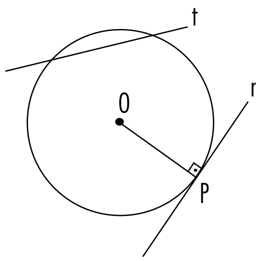
2π rad $\rightarrow$ 360º
x $\rightarrow$ 90º
Logo, $360x = 2\pi \times 90$ e $x = \dfrac{\pi}{2}$ rad

Reta Tangente

É toda reta que intersecta a circunferência em apenas um ponto. Neste ponto a reta é perpendicular ao segmento que une o ponto de contato ao centro da circunferência. Veja a reta r tangente à circunferência representado na figura 9.4. Neste caso, P é o ponto de tangência, ou de contato.

Reta secante

É toda reta que corta a circunferência em dois pontos. Veja a reta t secante à circunferência na figura 9.4.

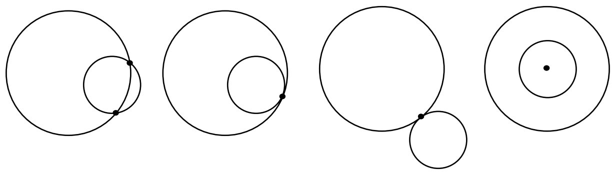


P é o ponto de tangência
r é a reta tangente
t é a reta secante

Figura 9.4: Retas tangente e secante.

Posição relativa

Duas circunferências Γ e Γ' são disjuntas quando não têm ponto em comum; tangentes quando possuem um ponto comum; secantes quando possuem dois pontos em comum; concêntricas quando têm o mesmo centro.

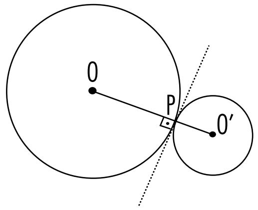


Secantes　　Tangentes　　Tangentes　　Concêntricos

Figura 9.5: Posição relativa de circunferências.

Nota importante

Se duas circunferências são tangentes, então os centros e o ponto de tangência estão numa mesma reta. Esta reta é perpendicular à reta tangente comum às duas circunferências. Neste caso a distância entre os centros é a soma dos raios R e r das circunferências. Veja a figura 9.6.



$$OO' = R + r$$

Figura 9.6: Circunferências tangentes.

Algumas Relações Métricas

I. Propriedade da tangente

Considere um ponto P no exterior de uma circunferência e as duas retas tangentes à circunferência passando por P. Se A e B são os pontos de contato com a circunferência e O é o centro da circunferência, então

i) PA = PB

ii) é bissetriz de APB.

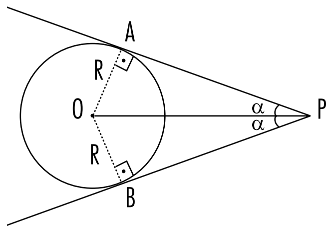


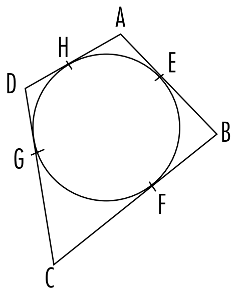
Figura 9.7: Tangentes à circunferência por um ponto.

Justificativa

Examine a figura 9.7 que ilustra a situação. Temos que os triângulos $\triangle OAP$ e $\triangle OBP$ são retângulos. Como nestes triângulos a hipotenusa e um cateto possuem medidas iguais, então o outro cateto também coincide em medida. Logo, temos a congruência $\triangle OAP \equiv \triangle OBP$ (caso LLL), a qual implica as propriedades (i) e (ii).

II. Quadriláteros circunscritos

Considere um quadrilátero ABCD circunscrito a uma circunferência. Nestas condições AB + CD = AD + BC.



AB + CD = AD + BC

Figura 9.8: Quadrilátero circunscrito.

Justificativa

Na figura 9.8 que representa a situação, temos E, F, G e H como pontos de tangências dos lados do quadrilátero circunscrito. Agora usando as propriedades deduzidas no item I, anterior e percorrendo o quadrilátero no sentido ABCD, a partir do ponto H, escrevemos HA = AE, BE = BF, CG = CF, DG = DH.

Então, AB + CD = AE + EB + CG + DG = AH + BF + CF + DH = AD + BC, que é a propriedade enunciada.

III. Potência de um ponto

Considere um ponto P que está fora de uma circunferência Γ e uma reta r contendo P e secante à circunferência. Temos três situações relativas a considerar, de acordo com a posição do ponto P, dentro ou fora da circunferência. Veja a figura 9.9 ilustrando a situação.

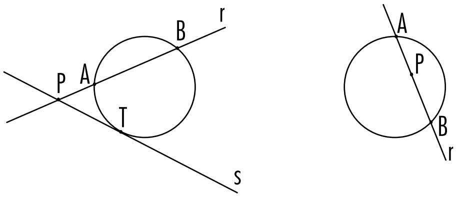


Figura 9.9: Potência de um ponto.

Definimos a potência de P em relação a Γ como pot(P) = PA • PB ou pot(P) = PT^2.

É um fato surpreendente que a potência depende só da posição do ponto em relação à circunferência e não da posição da reta que passa pelo ponto. Isto é, quaisquer que sejam A e B, vale a propriedade PA • PB = PT^2.

Ângulo Inscrito

Temos duas posições gerais para ângulos inscritos em circunferências. Em qualquer situação o vértice do ângulo é um ponto da circunferência. As duas posições dependem dos lados dos ângulos e são descritas em I) e II) abaixo:

I) Os lados dos ângulos são duas cordas da circunferência.

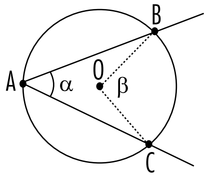


Figura 9.10: Ângulo inscrito.

Neste caso, A é o vértice do ângulo inscrito, $B\hat{A}C = \alpha$ é o ângulo inscrito e $B\hat{O}C = \beta$ é o ângulo central correspondente. Veja a figura 9.10.

II) Os lados do ângulo são uma corda da circunferência e uma semirreta tangente.

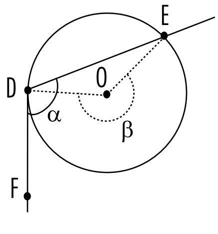


Figura 9.11: Ângulo inscrito.

Neste caso, D é o vértice do ângulo, $E\hat{D}F = \alpha$ é o ângulo inscrito e β o ângulo central correspondente (cuidado com o sentido descrito na figura para o ângulo central). Veja a figura 9.11.

Resultado Importante

"Todo ângulo inscrito tem por medida a metade do ângulo central correspondente." Isto é: $\beta = 2\alpha$

Vamos mostrar como este resultado pode ser verificado em um caso bem particular. Veja a figura 9.12.

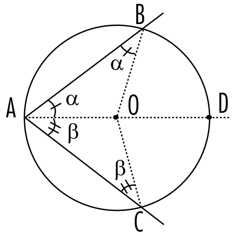


Figura 9.12: Ângulo inscrito.

Queremos mostrar que $B\hat{A}C = \frac{1}{2} B\hat{O}C$

Trace o diâmetro AD. Os triângulos $\triangle OAB$ e $\triangle OAC$ são isósceles (OA = OB = OC = raio do círculo). Então usando que a medida do ângulo externo é a soma da medida dos ângulos internos não adjacentes, concluímos que

$\triangle OAB \Rightarrow B\hat{O}D = \alpha + \alpha = 2\alpha$

$\triangle OAC \Rightarrow D\hat{O}C = \beta + \beta = 2\beta$

Então $B\hat{O}C = B\hat{O}D + D\hat{O}C = 2(\alpha + \beta) = 2\hat{A}$

Ou seja, $\hat{A} = \frac{1}{2} B\hat{O}C$

CONSEQUÊNCIAS IMPORTANTES

1. Se um triângulo está inscrito numa circunferência e um dos lados é o diâmetro, então o triângulo é retângulo e o diâmetro a hipotenusa. Veja a figura 9.13. De fato, temos:

$$\hat{A} = \frac{1}{2} B\hat{O}C = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$$

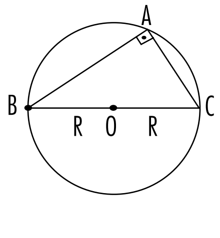


Figura 9.13: Triângulo retângulo inscrito.

2. Um quadrilátero inscritível numa circunferência possui ângulos opostos suplementares. Veja a figura 9.14, ilustrando a situação.

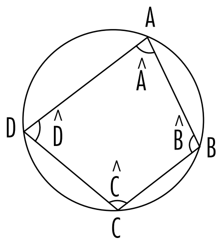


Figura 9.14: Quadrilátero inscrito.

De fato, veja por exemplo que $\hat{A} = \frac{1}{2} D\overset{\frown}{C}B$ e $\hat{C} = \frac{1}{2} D\overset{\frown}{A}B$

Como $D\overset{\frown}{C}B + D\overset{\frown}{A}B = 360°$, então $\hat{A} + \hat{C} = 180°$. Do mesmo modo se comprova que $\hat{B} + \hat{D} = 180°$.

3. Se duas cordas se cortam no interior da circunferência, veja a figura 9.15, então:

$$\beta = \frac{C\overset{\frown}{X}D + A\overset{\frown}{Y}B}{2}$$

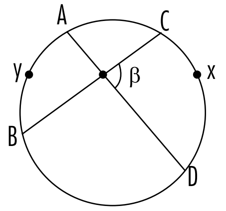


Figura 9.15: Cordas secantes.

Vamos verificar este resultado. Traçando o segmento BD vem que $\beta = \theta + \alpha$ (ângulo externo).

$$\theta = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2}, \alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

Assim, $\beta = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} + \frac{\overset{\frown}{CD}}{2}$

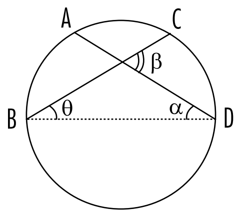
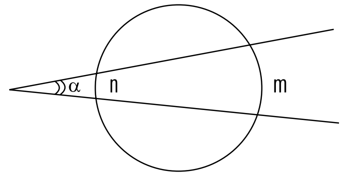


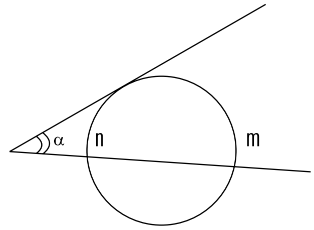
Figura 9.16: Cordas secantes.

4. Ângulos de vértice exterior à circunferência cujos lados encontram a circunferência. Temos as seguintes possibilidades:

a.



b)



c)

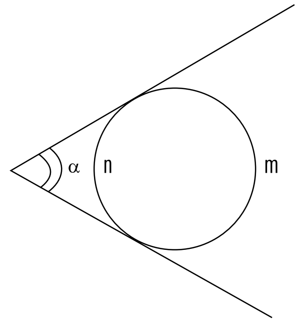


Figura 9.17: Ângulos exteriores.

Nas figuras, m e n representam medidas dos arcos de circunferência correspondentes. Em quaisquer dos casos

$$\alpha = \frac{m-n}{2}$$

Justificativa

Vamos justificar o caso (b), os outros são similares. Redesenhando a figura 9.19.b e acrescentando linhas e pontos auxiliares, encontramos a figura 9.18.

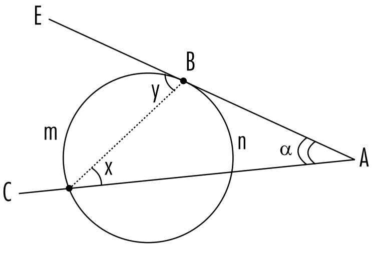


Figura 9.18: Ângulo exterior.

Note que $E\hat{B}C = y$ é ângulo inscrito. Logo, $y = \frac{m}{2}$

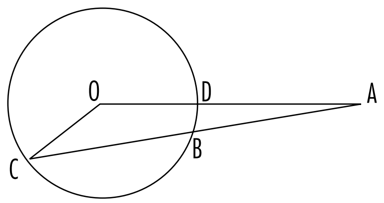
Também, $B\hat{C}A = x$ é ângulo inscrito e então

Por outro lado, como y é ângulo externo ao ΔABC, encontramos que $y = x + \alpha$.

Juntando as igualdades, concluímos que, $\alpha = y - x = \frac{m-n}{2}$, que é a propriedade procurada.

Exercícios

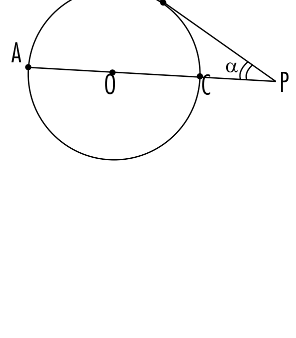
1) (UNIFICADO/97)



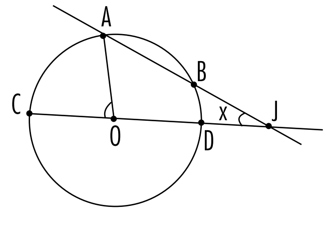
Na figura acima, AB = 8 cm, BC = 10 cm, AD = 4 cm e o ponto O é o centro da circunferência. O perímetro do triângulo AOC mede em cm:
(A) 36
(B) 45
(C) 48
(D) 50
(E) 54

2) (RURAL) O raio de um círculo mede 6 m. Por um ponto P, distante 10 m do centro, traça-se uma tangente. O comprimento da tangente entre P e o ponto de contato é:
(A) 14 m
(B) 6 m
(C) 8 m
(D) 10 m
(E) 12 m

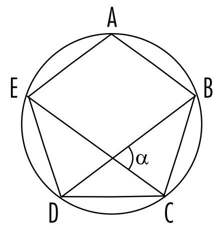
3) Na figura, o arco $\overset{\frown}{AB}$ é o triplo do arco $\overset{\frown}{BC}$ e t é reta tangente. Determine, em graus, a medida do ângulo α.



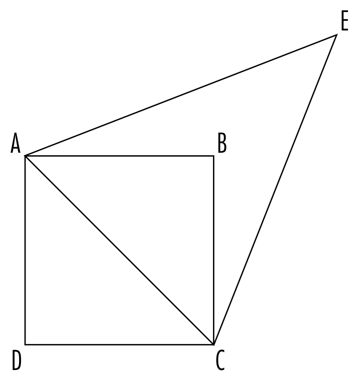
4) Na figura BJ = raio. Calcule $A\hat{O}C$, para x = 20°.



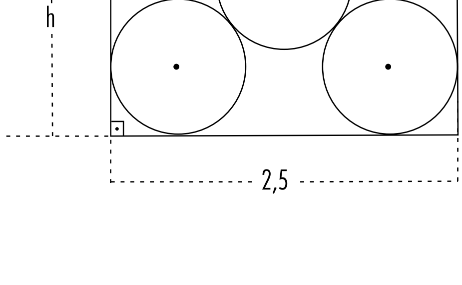
5) Na figura ABCDE é um pentágono regular. Calcule o ângulo α.



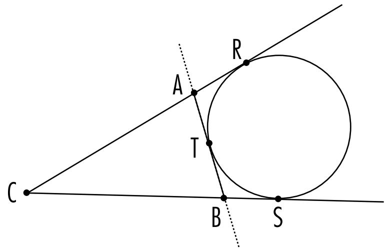
6) (UFRJ/99 - Específica) Na figura, o triângulo ACE é equilátero e ABCD é um quadrado de lado 2 cm. Calcule a distância BE.



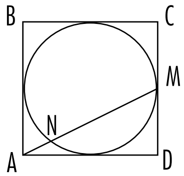
7) (FUVEST/2001) Um lenhador empilhou 3 troncos de madeira num caminhão de largura 2,5 m, conforme a figura abaixo. Cada tronco é um cilindro reto, cujo raio da base mede 0,5 m. Calcule a altura h em metros.



8) As retas representadas são tangentes ao círculo. Se AB = 12 cm, AC = 14 cm e BC = 18 cm, calcule as medidas de AR e BS.

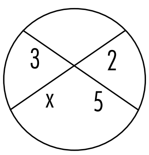


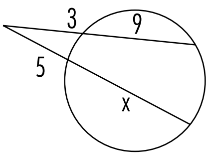
9) Na figura ABCD é um quadrado de lado 20 cm e M é ponto médio de CD. Ache a medida de AN, sabendo que AM = $10\sqrt{5}$.

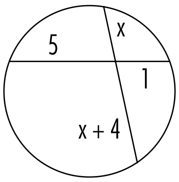


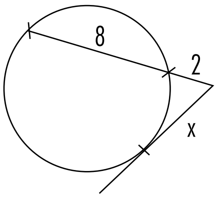
10) A menor distância de um ponto a uma circunferência é 6 cm, e o segmento da tangente à circunferência é 10 cm. O raio da circunferência, em cm, mede:
(A) 5
(B) 16/3
(C) 9/2
(D) 28/5
(E) 17/4

11) Nas figuras seguintes, encontre a medida x.

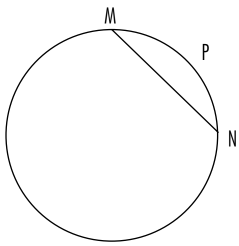
a.


b.


c.


d.


12) (CEDERJ/2007-2) A fim de elaborar um elemento de sua obra de arte, um escultor usa um pedaço de arame e constrói uma circunferência, conforme mostra a figura.



Em seguida, usando outro pedaço de arame, liga os pontos M e N, de modo que o arco MPN seja igual a 1/4 da circunferência. Considerando L a medida do segmento MN e R a medida do raio da circunferência, pode-se concluir que a razão L / 2R é igual a:

(A) $\frac{1}{4}$

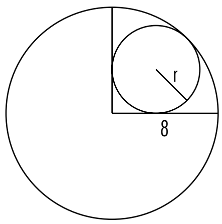
(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(E) $\frac{3}{4}$

13) (FGV / 2008) Um círculo de raio r está inscrito num setor circular de 90º e 8 cm de raio, conforme mostra a figura abaixo.



Assim sendo, a medida do raio r é:
(A) 8 ($\sqrt{2}$ + 1)cm
(B) 8 ($\sqrt{2}$ –1)cm
(C) 8 ($\sqrt{3}$ – 2)cm
(D) 8 ($\sqrt{3}$ – $\sqrt{2}$)cm
(E) 4cm

Gabarito

1) E

2) C

3) 45°

4) $\alpha = 60°$

5) 72°

6) $\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$ cm

7) $\left(1+\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)$ cm

8) AR = 8 cm, BS = 4 cm

9) $2\sqrt{5}$

10) B

11)

a. $\dfrac{15}{2}$

b. $\dfrac{11}{5}$

c. 1

d. $2\sqrt{5}$

12) B

13) B

10

Áreas

Introdução

Para muitos subconjuntos do plano, é possível calcular a área. Exemplo são os interiores de polígonos, de círculos, elipses etc. Apresentamos, na figura 10.1, alguns objetos para os quais é possível medir a área.

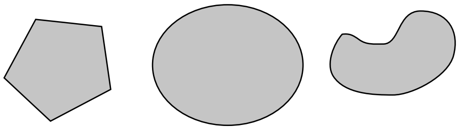


Figura 10.1: Figuras no plano.

Mas, como calcular a área?

Vamos começar fazendo uma comparação entre comprimento e área. Para medir comprimento de segmentos usamos um segmento unitário padrão (a unidade de comprimento). A medida de um segmento será dada pelo número de vezes que a unidade e partes de unidade cabem no segmento.

Por exemplo, escolhendo AB como segmento unitário, acompanhe pela figura 10.2, a medida do segmento CD. Veja que em CD cabem 3 vezes o segmento AB, consecutivamente e ainda mais a quinta parte deste segmento.

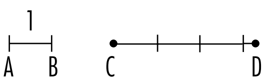


Figura 10.2: Medidas de segmentos.

Portanto, a medida do segmento é, $CD = 3 + \frac{1}{5} = \frac{16}{5}$

Neste momento, precisamos fazer um comentário. Uma vez escolhido um segmento AB como unidade, existem segmentos que não podem ser medidos do modo como estipulamos. Considere, por exemplo, um quadrado ABCD onde um dos lados é o segmento unitário AB.

Portanto o quadrado tem todos os lados medindo 1. No entanto, a diagonal AD não pode ser medida pelo processo que estamos utilizando. Nesta situação, o segmento AD é dito incomensurável com o segmento AB. É preciso desenvolver outras técnicas como a expansão decimal, o que leva a teoria de somas com infinitos números de parcelas, para se conferir uma medida ao segmento AD, diagonal. Veja a figura 10.3.

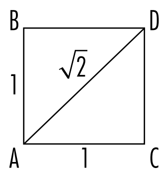


Figura 10.3: Segmentos incomensuráveis.

Para medir áreas de figuras planas escolhemos um quadrado como unidade de área (os lados do quadrado medem 1). A área de uma figura é dada pelo número de vezes que o quadrado unidade e partes dele cabem na figura. A seguir apresentamos, na figura 10.4, um quadrado de lado AB representando a unidade e seu uso para medir a área de um retângulo.

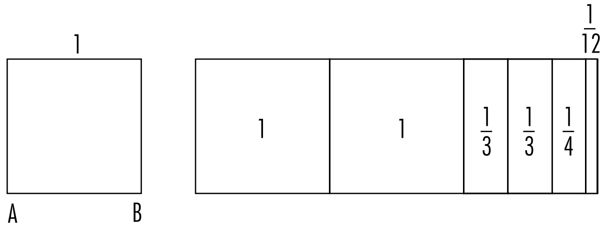


Figura 10.4

Nesta situação encontramos que Área (retângulo) = $2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = 3$

Os mesmos comentários que fizemos sobre a existência de segmentos incomensuráveis são pertinentes no cálculo de áreas. Isto é, o processo de medir áreas como introduzido não é exato.

Os princípios ou postulados que orientam a teoria sobre área de figuras planas são:

(I) Duas figuras planas congruentes possuem a mesma área.

(II) Se uma figura A é obtida pela união disjunta de duas figuras B e C, então área(A) = área(B) + área(C).

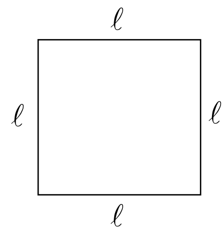
Notas

(1) Estamos trabalhando apenas com figuras para as quais é possível medir a área.

(2) Falamos sobre congruência de figuras. Grosseiramente, duas figuras congruentes são aquelas que podem ser superpostas uma sobre a outra com coincidência total.

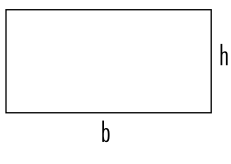
Fórmulas principais

Quadrado



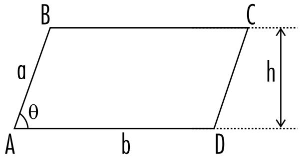
$S = l^2$

Retângulo



$S = b \bullet h$

Paralelogramo

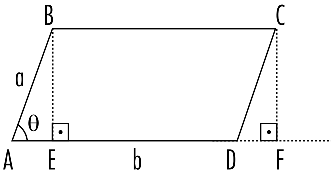


$S_{par} = b \bullet h$

$S_{par} = a \bullet b \bullet \text{sen}\ \theta$

Justificativa

Para a figura particular representada, notamos a seguinte congruência de triângulos:

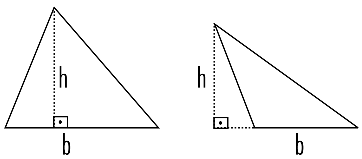


$\triangle ABE \equiv \triangle CDF$, os quais possuem a mesma área. A congruência implica que AE = DF e então EF = b.

S_{par} = área ($\triangle$ABE) + área (EBCD) = área ($\triangle$CDF) + área (EBCD) = área (EBCF) = EFh = bh.

Por outro lado, no triângulo retângulo $\triangle$BEA, temos que BE = a sen $\theta \Rightarrow$ S_{par} = ab sen θ.

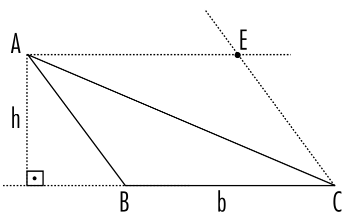
Triângulo



$$S_{tri} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Justificativa

Tome um triângulo $\triangle$ABC qualquer e construa paralelas como indicado, na figura abaixo. Isto é, EC || AB.

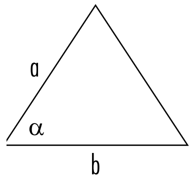


$$S_{tri} = \frac{1}{2}\text{área(AEBC)} = \frac{1}{2} b \cdot h$$

Podemos escrever a fórmula acima justificada pela congruência $\triangle ABC \equiv \triangle CEA$.

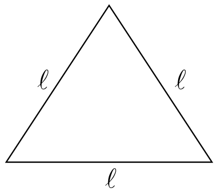
Outras expressões para área do triângulo

i) a, b (lados) e α (ângulo entre os lados a e b)



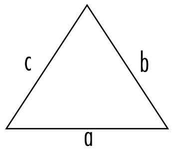
$$S = \frac{ab\text{sen}\alpha}{2}$$

ii) triângulo equilátero



$$S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

iii) a, b e c (medida dos lados do triângulo) e p o semiperímetro

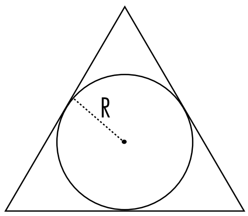


$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ onde: } p = \frac{a+b+c}{2}$$

Nota

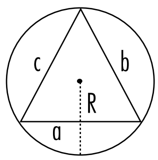
p é dito semiperímetro.

iv) a, b, c medida dos lados e r (raio do círculo inscrito)



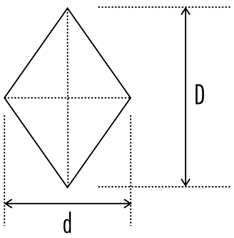
$S = p \bullet r$

v) a, b,c medida dos lados e R (raio do círculo circunscrito)



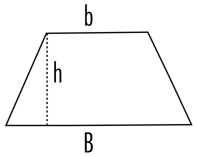
$$S = \frac{abc}{4R}$$

Losango



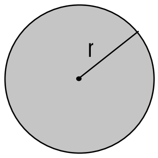
$$S_{los} = \frac{dD}{2}$$

Trapézio



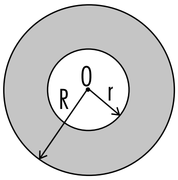
$$S_{trap} = \frac{(b+B)h}{2}$$

Círculo



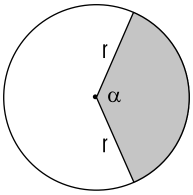
$$S_c = \pi r^2$$

Coroa circular



$$S = \pi R^2 - \pi r^2$$

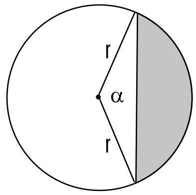
Setor circular



360º	...	πr^2
α	...	S_{setor}

$$S_{setor} = \frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{360º}$$

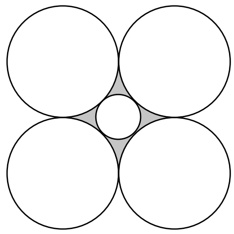
Segmento circular



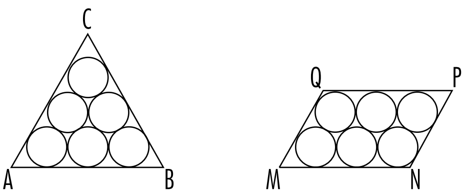
$$S_{seg} = S_{setor} - S_{tri}$$

EXERCÍCIOS DE VESTIBULAR

1) (UFRJ/2001 - Não específica) As cinco circunferências da figura são tais que a interior tangencia as outras quatro e cada uma das exteriores também tangencia duas das demais exteriores.
Sabendo que as circunferências exteriores têm todas raio 1, calcule a área da região sombreada situada entre as cinco circunferências.



2) (UNICAMP / 2002) Seis círculos, todos de raio1 cm, são dispostos no plano conforme mostram as figuras a seguir.

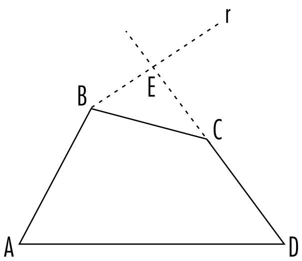


a. Calcule a ângulo ABC.

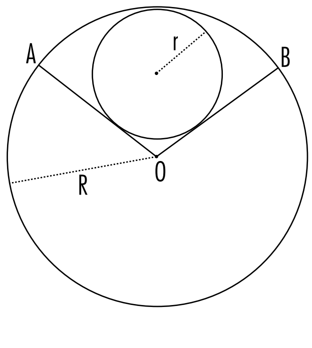
b. Calcule a área do paralelogramo MNPQ e compare-a com a área do triângulo ABC.

3) (FUVEST / 2001 - 1ª fase) Na figura abaixo, a reta r é paralela ao segmento AC, sendo E o ponto de intersecção de r com a reta determinada por D e C. Se as áreas dos triângulos ACE e ADC são4 e 10, respectivamente, e a área do quadrilátero ABED é 21, então a área do triângulo BCE é:

(A) 6
(B) 7
(C) 8
(D) 9
(E) 10



4) (UFRJ/2002) A figura abaixo mostra duas circunferências que se tangenciam interiormente. A circunferência maior tem centro em O. A menor tem raio r = 5 cm e é tangente a OA e a OB. Sabendo-se que o ângulo AÔB mede 60º, calcule a medida do raio R da circunferência maior.



5) (FUVEST/2001) Um lenhador empilhou 3 troncos de madeira num caminhão de largura 2,5 m, conforme a figura abaixo. Cada tronco é um cilindro reto, cujo raio da base mede 0,5 m. Logo, a altura h, em metros, é:

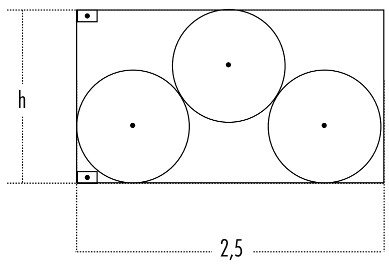
(A) $\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$

(B) $\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}$

(C) $\dfrac{1+\sqrt{7}}{4}$

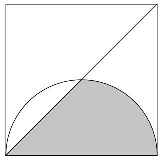
(D) $1+\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

(E) $1+\dfrac{\sqrt{7}}{4}$



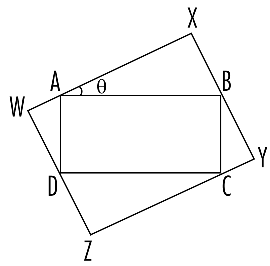
6) (FUVEST/2000) Na figura seguinte, estão representados um quadrado de lado 4, uma de suas diagonais e uma semicircunferência de raio 2. Então a área da região hachurada é:

(A) $\dfrac{\pi}{2}+2$
(B) $\pi + 2$
(C) $\pi + 3$
(D) $\pi + 4$
(E) $2\pi + 1$

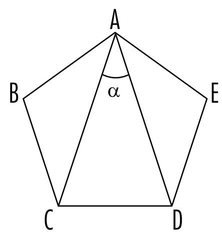


7) (Fuvest/2000) Um trapézio retangular tem bases 5 e 2 e altura 4. O perímetro desse trapézio é:
(A) 13
(B) 14
(C) 15
(D) 16
(E) 17

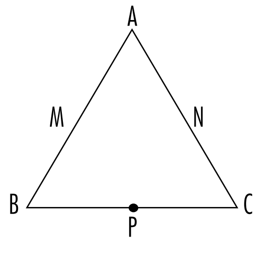
8) (UFRJ/2001) O retângulo está inscrito no retângulo WXYZ, como mostra a figura. Sabendo que AB = 2 e AD = 1, determine o ângulo Θ para que a área de WXY Z seja a maior possível.



9) (FUVEST/2000) Na figura a seguir, ABCDE é um pentágono regular. A medida, em graus, do ângulo α é:
(A) 32º
(B) 34º
(C) 36º
(D) 38º
(E) 40º

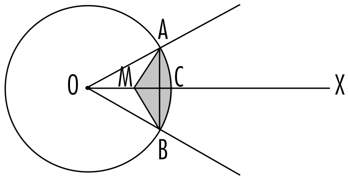


10) (FEI/1993) Na figura abaixo, ABC é um triângulo equilátero com área de 16 cm^2. M, N e P são pontos médios dos lados deste triângulo. A área, em cm^2, do quadrilátero AMPN é:
(A) 4
(B) 6
(C) 8
(D) 10
(E) 12

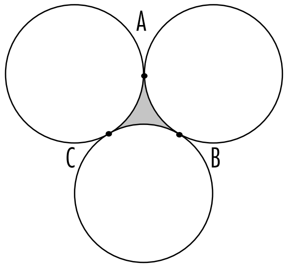


11) (UNICAMP/1991) Na planta de um edifício em construção, cuja escala é 1:50 as dimensões de uma sala retangular são 10 cm e 8 cm. Calcule a área real da sala projetada.

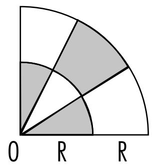
12) (UNESP / 1992) O ângulo central AÔB referente ao círculo da figura mede 60º e $\overrightarrow{OX}$ é sua bissetriz. Se M é o ponto médio do raio OC e $\overline{OC} = \sqrt{5}$ cm , calcular a área da figura hachurada.



13) (UERJ/1991) Na figura abaixo, os três círculos têm raio 1 e são tangentes dois a dois. Calcule a área delimitada pelos arcos AB, BC, CA.



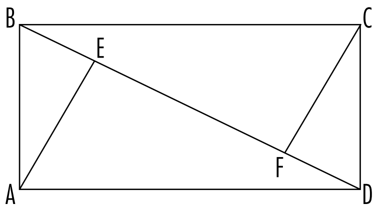
14) (UFRJ/1988) A figura abaixo mostra dois arcos de circunferência de centro O, raios R e 2R, e três ângulos iguais. Calcule a razão entre as áreas das regiões hachurada e não hachurada.



15) (PUC/1993) Dois lados de um triângulo medem, respectivamente, 5 cm e 6 cm. O valor máximo que pode ter a área desse triângulo é de:

(A) 11 cm^2
(B) 15 cm^2
(C) 20 cm^2
(D) 25 cm^2
(E) 30 cm^2

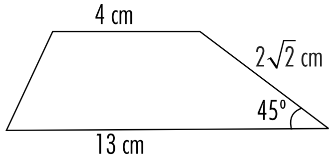
16) (UNI-RIO / 1994) Na figura abaixo, ABCD é um retângulo. AB = 6 e AD = 8



a. Qual a medida do segmento EF?

b. Qual o ângulo $A\hat{E}D$?

17) (UFRJ/1992 - Não Específica)



Para o trapézio representado na figura acima, calcule:

a. a altura;

b. á área.

18) (UNICAMP/1998) Os lados de um triângulo medem 5, 12 e 13 cm.

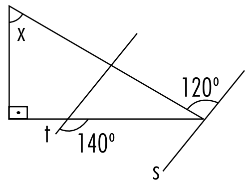
a. Calcule a área desse triângulo.

b. Encontre o raio da circunferência inscrita nesse triângulo.

19) (FUVEST/1998) Dois ângulos internos de um polígono convexo medem 130º cada um e os demais ângulos internos medem 128º cada um. O número de lados do polígono é:

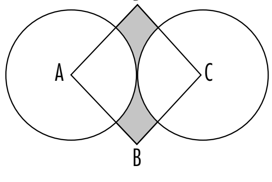
(A) 6
(B) 7
(C) 13
(D) 16
(E) 17

20) (FUVEST/1998) As retas t e s são paralelas. A medida do ângulo x, em graus, é



(A) 30
(B) 40
(C) 50
(D) 60
(E) 70

21) (UNI-RIO / 1994) A área da região hachurada, na figura abaixo, onde ABCD é um quadrado e o raio de cada circunferência mede 5 cm, é igual a:



(A) $\dfrac{25(4-\pi)}{2}$ cm^2

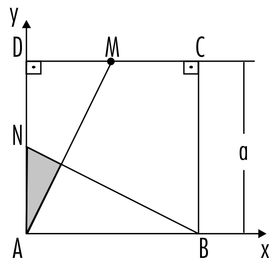
(B) $25(\pi - 2)$ cm^2

(C) $25(\pi - p)$ cm^2

(D) $\dfrac{25(\pi-2)}{2}cm^2$

(E) $\dfrac{5(4-\pi)}{4}cm^2$

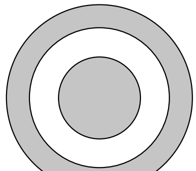
22) (UERJ/1994) Observe a figura abaixo (ABCD), que sugere um quadrado de lado a, onde M e N são, respectivamente, os pontos médios dos segmentos CD e AD,e F a interseção dos segmentos AM e BN. Utilizando esses dados, resolva os itens a eb.



a. Demonstre que o ângulo AFN é reto.

b. Calcule a área do triângulo AFN em função de a.

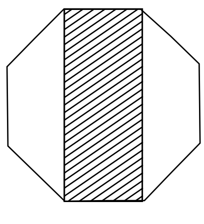
23) (UFF/1993) Os raios (em cm) dos três círculos concêntricos da figura são números naturais e consecutivos.
Sabendo que as áreas assinaladas são iguais, pode-se afirmar que a soma dos três raios é:



(A) 6 cm
(B) 9 cm
(C) 12 cm
(D) 15 cm
(E) 18 cm

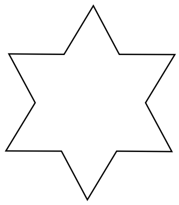
24) (UFF/1989) Cortando-se pedaços quadrados iguais nos vértices de uma cartolina retangular de 80 cm de comprimento por 60 cm de largura, obtém-se uma figura em forma de cruz. Se a área da cruz for a terça parte da área retangular original o tamanho do lado de cada quadrado é igual a:
(A) $5\sqrt{2}$ cm
(B) $10\sqrt{2}$ cm
(C) $15\sqrt{2}$ cm
(D) $20\sqrt{2}$ cm
(E) $25\sqrt{2}$ cm

25) (UNIFICADO/1986) Seja $\sqrt{3}$ a medida do lado do octógono regular da figura. Então, a área da região hachurada é:



(A) $3(\sqrt{3}-1)$
(B) $4(\sqrt{3}-1)$
(C) $3(1+\sqrt{2})$
(D) $2(1+\sqrt{3})$ c
(E) $2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

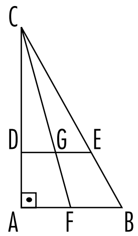
26) (UNIFICADO/1994)



O polígono acima, em forma de estrela, tem todos os lados iguais a 1 cm e todos os ângulos iguais a 60° ou 240°. Sua área é:
(A) 3 cm^2
(B) $3\sqrt{3}$ cm^2
(C) 6 cm^2
(D) $6\sqrt{3}$ cm^2
(E) 9 cm^2

27) (PUC/1996) Duplicando-se o raio de um círculo.
(A) A área e o comprimento ficam ambos duplicados.
(B) A área fica duplicada e o comprimento fica quadruplicado.
(C) O comprimento fica multiplicado por 2π.
(D) A área fica multiplicada por 4π.
(E) A área fica quadruplicada e o comprimento fica duplicado.

28) (FUVEST/2000) Na figura, ABC é um triângulo retângulo de catetos AB = 4 e AC = 5. O segmento DE é paralelo a AB, F é um ponto de AB e o segmento CF intercepta DE no ponto G, com CG = 4 e GF = 2. Assim a área do triângulo CDE é:



(A) $\dfrac{16}{3}$

(B) $\dfrac{35}{6}$

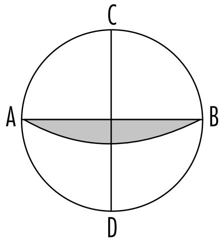
(C) $\dfrac{39}{8}$

(D) $\dfrac{40}{9}$

(E) $\dfrac{70}{9}$

29) (UNIFICADO/1988) Se as duas diagonais de um losango medem, respectivamente, 6 cm e 8 cm então a área do losango é:
(A) 18 cm^2
(B) 24 cm^2
(C) 30 cm^2
(D) 36 cm^2
(E) 48 cm^2

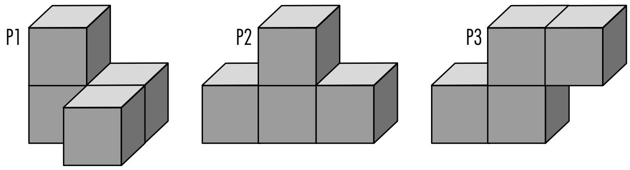
30) (UFF/1995) A circunferência representada abaixo tem raio 2 cm e os diâmetros AB e CD, perpendiculares. Como centro em C e raio CA foi traçado o arco $\widehat{AB}$. Determine a área da região assinalada.



31) (UNIFICADO/1987) De uma placa circular de raio 3, recorta-se um triângulo retângulo de maior área possível. A área do restante da placa vale:

(A) $9\pi - 9$
(B) $6\pi - 9$
(C) $9\pi - 10$
(D) $9\pi - 12$
(E) $6\pi - 6$

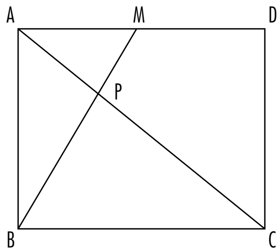
32) (CEDERJ / 2008-2) O cubo soma é um quebra-cabeça criado pelo poeta e matemático dinamarquês Piet Hein. Três das peças que formam o quebra-cabeça estão mostradas a seguir:



As peças P1, P2 e P3 são formadas por quatro cubos idênticos. Se A1, A2 e A3 representam, respectivamente, as áreas totais das superfícies das peças P1, P2 e P3, então:

(A) A1 > A2 = A3;
(B) A1 > A2 > A3;
(C) A1 = A2 = A3;
(D) A1 = A2 < A3;
(E) A1 < A2 < A3.

33) (FGV / 2008) No retângulo ABCD da figura abaixo, M é ponto médio de AD, e os segmentos AC e BM se cortam em P.



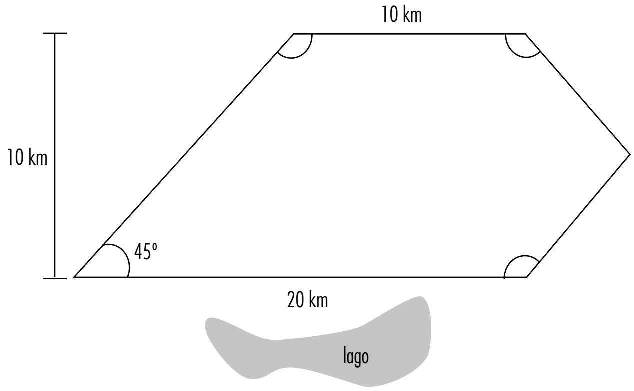
Sendo S a área do retângulo, a área do triângulo APM é:

(A) S/5
(B) S/10
(C) S/6
(D) S/8
(E) S/12

34) (FGV / 2008) Os lados do triângulo ABC medem, respectivamente, 9 cm, 12 cm e 15 cm. Então, a área do triângulo NPQ, de 12 cm de perímetro e semelhante ao triângulo ABC, é igual a:

(A) 27 cm^2
(B) 9 cm^2
(C) 6 cm^2
(D) 36 cm^2
(E) 18 cm^2

35) (UERJ / 2006) Uma área agrícola, próxima a um lago, precisa ser adubada antes do início do plantio de hortaliças. O esquema abaixo indica as medidas do terreno a ser plantado. Os dois lados paralelos distam 10 km e os três ângulos obtusos indicados são congruentes.



A área do terreno a ser plantada é, em km^2, igual a:

(A) 160
(B) 165
(C) 170
(D) 175

36) (UEZO / 2006)

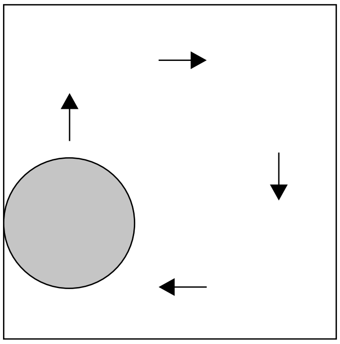
Terremoto danifica estação de tratamento de água

O último tremor de ontem danificou um dos reservatórios de água da Estação Sul de tratamento de água. Será necessário construir outro. O novo reservatório terá a forma de um bloco retangular (paralelepípedo) com 12m de comprimento, 4m de largura e 3m de profundidade. A base desse reservatório tem a seguinte área em metros quadrados:

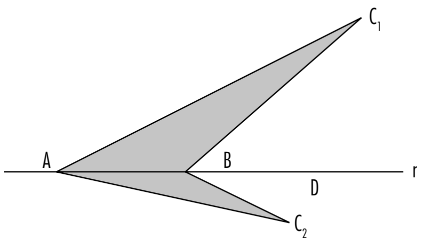
(A) 18
(B) 24
(C) 42
(D) 48

37) (UEZO / 2006) O campo de futebol tem a forma de um retângulo. As suas medidas oficiais podem ser 120m de comprimento e 90m de largura. Em cada um dos quatro cantos do campo é fincada uma bandeirinha. A área do campo, em metros quadrados, vale:
(A) 1080
(B) 4545
(C) 9090
(D) 10800

38) (UFRJ / 2009) Um disco se desloca no interior de um quadrado, sempre tangenciando pelo menos um dos seus lados. Uma volta completa do disco ao longo dos quatro lados divide o interior do quadrado em duas regiões: a região A dos pontos que foram encobertos pela passagem do disco e a região B dos pontos que não foram encobertos. O raio do disco mede 2cm e o lado do quadrado mede 10cm. Determine a área da região B.



39) (UFRJ / 2008) A, B e D são pontos sobre a reta r e C_1 e C_2 são pontos não pertencentes a r tais que C_1 , C_2 e D são colineares, como indica a figura a seguir.



Se S_1 indica a área do triângulo ABC_1 e S_2 , a área do triângulo ABC_2 , e sabendo que $DC_1 = 7$, $C_1C_2 = 9$ e $S_2 = 4$, determine S_1.

Gabarito

1) $A = 4 - 4\pi + 2\sqrt{2}\pi$

2) a) $(7\sqrt{3}+12)$ cm² b) $A_{MNPQ} = \frac{20\sqrt{3}}{3} + 12 < A_{ABC} = (7\sqrt{3}+12)$

3) B

4) 15 cm

5) E

6) B

7) D

8) $\theta = 45°$

9) C

10) C

11) 20 m²

12) $S = \frac{5}{12}(2\pi - 3)$

13) $S = \sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$

14) $\frac{5}{7}$

15) B

16) a) 2,8 cm b) 8,64 cm²

17) a) 2 cm b) 17 cm²

18) a) 30 cm² b) 2 cm

19) B

20) E

21) A

22) a) Demonstração b) $\frac{a^2}{20}$ u.a.

23) C

24) D

25) C

26) B

27) E

28) D

29) B

30) $S = (2\pi - 4)\ cm^2$

31) A

32) C

33) E

34) E

35) D

36) D

37) A

38) $4(5 - \pi)\ cm^2$

39) 14

11

Geometria espacial

POLIEDROS

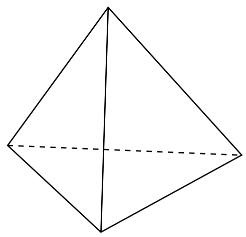
Grosso modo, são sólidos geométricos limitados polígonos.

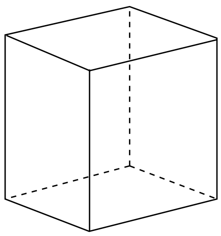
Relação de Euler: $v - a + f = 2$, em que $\begin{cases} v = n^{\circ} \text{ de vértices} \\ a = n^{\circ} \text{ de arestas} \\ f = n^{\circ} \text{ de faces} \end{cases}$

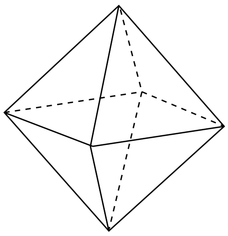
Soma dos ângulos das faces: $S_{\text{âng. faces}} = (v - 2) \cdot 360^{\circ}$, em que v = nº de vértices

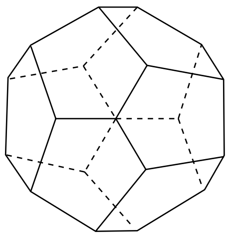
Poliedros de Platão

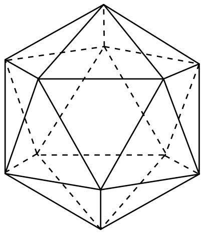
POLIEDRO	f	v	a
Tetraedro	4	4	6
Hexaedro	6	8	12
Octaedro	8	6	12
Dodecaedro	12	20	30
Icosaedro	20	12	30


tetraedro regular


hexaedro regular


octaedro regular


dodecaedro regular


icosaedro regular

Exemplo:

Um poliedro convexo tem 14 vértices. Em 6 desses vértices concorrem 4 arestas, em 4 desses vértices concorrem 3 arestas e, nos demais vértices, concorrem 5 arestas. Determine:

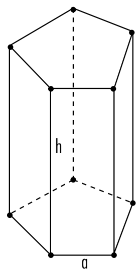
a) o número de faces desse poliedro.

b) o número de diagonais desse poliedro.

Solução: (caderno)

PRISMAS

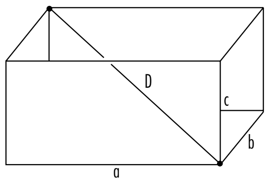
Grosso modo, sólidos que têm duas bases paralelas e iguais e retângulos como faces laterais (prisma reto).



$$\begin{cases} A_{lat.} = 2p_{base} \cdot h \\ A_{total} = A_{lat.} + 2 \cdot A_{base} \\ V = A_{base} \cdot h \end{cases}$$

Observação:

O paralelepípedo retângulo (ou ortoedro) é o prisma cujas bases são retângulos; um ortoedro é definido por suas dimensões (comprimento, largura e altura) geralmente indicadas por a, b e c; o cubo é o paralelepípedo cujas dimensões são iguais (as faces são seis quadrados congruentes).



$$D_{bloco} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow D_{cubo} = a \cdot \sqrt{3}$$

$$A_{bloco} = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) \Rightarrow A_{cubo} = 6 \cdot a^2$$

$$V_{bloco} = a \cdot b \cdot c \Rightarrow V_{cubo} = a^3$$

Exemplos:

1º) As dimensões de um paralelepípedo retângulo são proporcionais a 2, 3 e 5. Sabendo-se que o volume do paralelepípedo é $240 m^3$, calcular as medidas de sua diagonal e de sua área total.

Solução: (caderno)

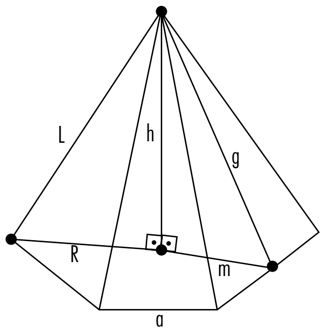
2º) Uma empresa produz embalagens para cosméticos. A embalagem deve ter a forma cúbica com volume de 68,94 centímetros cúbicos. Determine a dimensão das arestas da embalagem (em cm).

Dados: log 68,94 = 1,838 e $10^{0,613} = 4,1$.

Solução: (caderno)

Pirâmides

Grosso modo, sólidos que têm uma base e um vértice fora do plano desta base; pirâmides regulares são retas e a base é um polígono regular; nestas, chama-se APÓTEMA DA PIRÂMIDE (g), a altura de qualquer face lateral.



$$\begin{cases} m^2 + h^2 = g^2 \\ A_{lat.} = p_{base} \cdot g \\ A_{total} = A_{lat.} + A_{base} \\ V = \dfrac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h \end{cases}$$

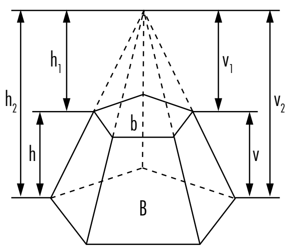
Exemplo:

Uma pirâmide regular de base hexagonal é tal que a altura mede 8cm e a aresta da base mede $2\sqrt{3}$ cm. Determine o volume dessa pirâmide.

Solução: (caderno)

Observação:

A intersecção não vazia de um plano paralelo à base de uma pirâmide decompõe esta em dois sólidos – um deles é uma pirâmide semelhante (razão k) à pirâmide original, enquanto o outro é denominado TRONCO de pirâmide.



$$\begin{cases} h_2 : \text{altura da pirâmide de base B} \\ v_2 : \text{volume da pirâmide de base B} \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_1 : \text{altura da pirâmide de base B} \\ v_1 : \text{volume da pirâmide de base B} \end{cases}$$

A razão entre dois elementos lineares correspondentes de mesmo nome é k.

A razão entre duas áreas de mesmo nome é k^2.

A razão entre os volumes é k^3.

Exemplo:

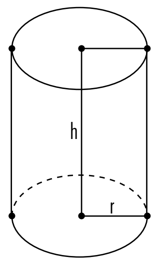
Uma pirâmide regular tem altura 6 e lado da base quadrada igual a 4. Ela deve ser cortada por um plano paralelo à base, a uma distância d dessa base, de forma a determinar dois sólidos de mesmo volume. Calcule a medida da distância d.

Solução: (caderno)

Sólidos de revolução

• Cilindro circular reto

É obtido através da rotação completa de um retângulo em torno de um eixo que contém um de seus lados; quando h = 2r, o cilindro é dito equilátero.



$$\begin{cases} A_{lat.} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \\ A_{total} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r + h) \\ V = \pi \cdot r^2 \cdot h \end{cases}$$

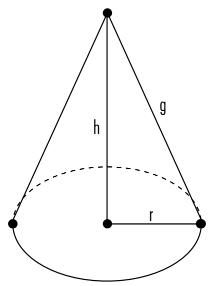
Exemplo:

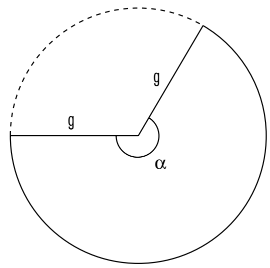
Seja um cilindro de revolução obtido da rotação de um quadrado, cujo lado está apoiado no eixo de rotação. Determine a medida deste lado (sem unidade), de modo que a área total do cilindro seja igual ao seu volume.

Solução: (caderno)

• Cone circular reto

É obtido através da rotação completa de um triângulo retângulo em torno de um eixo que contém um de seus catetos; quando g = 2r, o cone é dito equilátero.

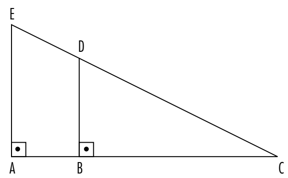




$$\begin{cases} h^2 + g^2 = r^2 \\ A_{lat.} = \pi \cdot r \cdot g \\ A_{total} = \pi \cdot r \cdot (g + r) \\ \alpha \cdot g = 2 \cdot \pi \cdot r \ \ (\alpha \text{ medido em radianos}) \\ V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \end{cases}$$

Exemplo:

Observe a figura.



Nessa figura, AB = 1, BC = 3 e BD = 9/4. Calcule o volume do sólido obtido girando de 360°, em torno da reta AE, a região do plano cujo contorno é

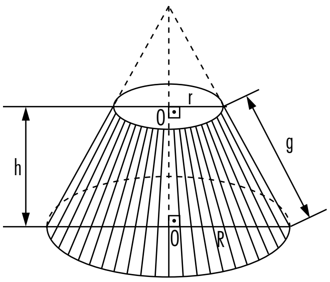
a) o triângulo ACE.

b) o triângulo BCD.

Solução: (caderno)

Observação:

A interseção não vazia de um plano paralelo à base de um cone decompõe este em dois sólidos – um deles é um cone semelhante (razão k) ao cone original, enquanto o outro é denominado TRONCO de cone.



- A razão entre dois elementos lineares correspondentes de mesmo nome é k.
- A razão entre duas áreas de mesmo nome é k^2.
- A razão entre os volumes é k^3.

Exemplo:

As bases de um tronco de cone circular reto são círculos de raio 6cm e 3cm. Sabendo-se que a área lateral do tronco é igual à soma das áreas das bases, calcule:

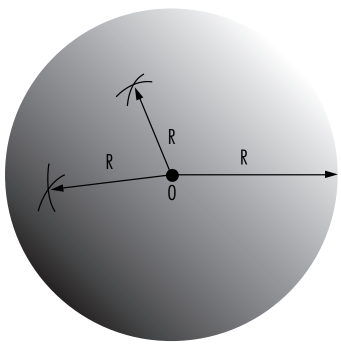
a) a altura do tronco de cone.

b) o volume do tronco de cone

Solução: (caderno)

• Esfera

É obtida através da rotação completa de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro.



$$\begin{cases} A_{sup.esf.} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \\ V = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \end{cases}$$

Exemplo:

a) Calcule o volume de uma bola de raio r = 3/4cm. Para facilitar os cálculos você deve substituir π pelo número 22/7.

b) Se uma bola de raio r = 3/4cm é feita com um material cuja densidade volumétrica é de 5,6g/cm^3, qual será a sua massa?

Solução: (caderno)

Exercícios de fixação

1) Ao serem retirados 128 litros de água de uma caixa d'água de forma cúbica, o nível da água baixa 20 centímetros.

a) Calcule o comprimento das arestas da referida caixa.

b) Calcule sua capacidade em litros (1 litro equivale a 1 decímetro cúbico).

2) Dado um prisma hexagonal regular, sabe-se que sua altura mede 3cm e que sua área lateral é o dobro da área de sua base. O volume deste prisma, em cm^3, é:

(A) $27\sqrt{3}$

(B) $13\sqrt{2}$

(C) 12

(D) $54\sqrt{3}$

(E) $17\sqrt{5}$

3) Dois blocos de alumínio, em forma de cubo, com arestas medindo 10cm e 6cm são levados juntos à fusão e em seguida o alumínio líquido é moldado como um paralelepípedo reto de arestas 8cm, 8cm e xcm. O valor de x é:

(A) 16

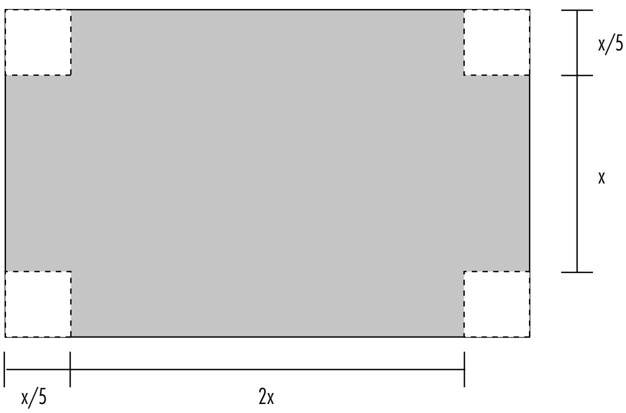
(B) 17

(C) 18

(D) 19

(E) 20

4) A figura a seguir é planificação de uma caixa sem tampa:



a) Encontre o valor de x, em centímetros, de modo que a capacidade dessa caixa seja de 50 litros.

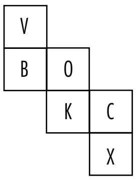
b) Se o material utilizado custa R$10,00 por metro quadrado, qual é o custo de uma dessas caixas de 50 litros considerando-se apenas o custo da folha retangular plana?

5) Uma piscina tem a forma de um prisma reto, cuja base é um retângulo de dimensões 15m e 10m. A quantidade necessária de litros de água para que o nível de água da piscina suba 10cm é:

(A) 0,15 L
(B) 1,5 L
(C) 150 L
(D) 1.500 L
(E) 15.000 L

6) Dobrando-se a planificação a seguir, reconstruímos o cubo que a originou. A letra que fica na face oposta à que tem um X é:

(A) V
(B) O
(C) B
(D) K



7) Considere um paralelepípedo retangular com lados 2, 3 e 6 cm. A distância máxima entre dois vértices deste paralelepípedo é:

(A) 7 cm
(B) 8 cm
(C) 9 cm
(D) 10 cm
(E) 11 cm

8) Um prisma reto é tal que sua base é um triângulo equilátero cujo lado mede $4\sqrt{3}$ cm e o seu volume é igual ao volume de um cubo de aresta medindo $4\sqrt{3}$ cm. A área total desse prisma, em centímetros quadrados, é

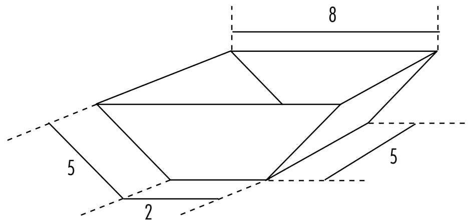
(A) $24\sqrt{3}$
(B) $192\sqrt{3}$
(C) $204\sqrt{3}$
(D) $216\sqrt{3}$
(E) $228\sqrt{3}$

9) A base de uma pirâmide é um triângulo equilátero de lado L = 6cm e arestas laterais das faces A = 4cm.

a) Calcule a altura da pirâmide.

b) Qual é o raio da esfera circunscrita à pirâmide?

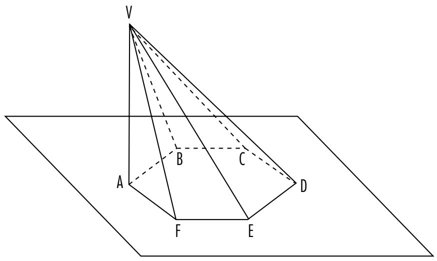
10) Um tanque de uso industrial tem a forma de um prisma cuja base é um trapézio isósceles. Na figura a seguir, são dadas as dimensões, em metros, do prisma:



O volume desse tanque, em metros cúbicos, é

(A) 50
(B) 60
(C) 80
(D) 100
(E) 120

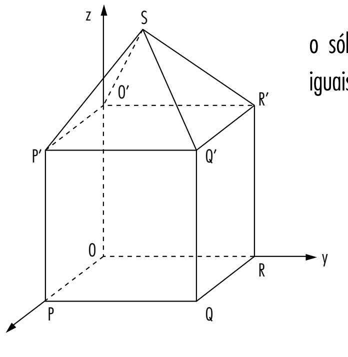
11) O hexágono regular ABCDEF é base da pirâmide VABCDEF, conforme a figura.



A aresta VA é perpendicular ao plano da base e tem a mesma medida do segmento AD. O segmento AB mede 6cm. Determine o volume da pirâmide VACD.

12) O sólido representado na figura é formado por um cubo e uma pirâmide quadrangular regular cuja base coincide com a face superior do cubo. O vértice O do cubo é a origem do sistema ortogonal de coordenadas cartesianas Oxyz. Os vértices P, R e O′ pertencem respectivamente aos semieixos positivos Ox, Oy e Oz. O vértice S tem coordenadas (2,2,8).

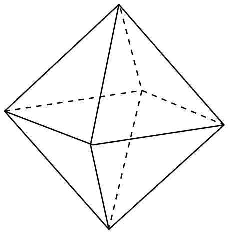
Considere o plano z = k que divide o sólido em duas partes de volumes iguais. Determine o valor de k.



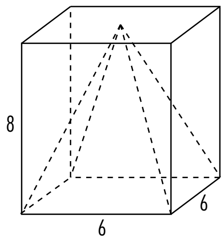
Considere o plano z = k que divide o sólido em duas partes de volumes iguais. Determine o valor de k.

13) Um octaedro regular é um poliedro constituído por 8 faces triangulares congruentes entre si e ângulos poliédricos congruentes entre si, conforme mostra a figura a seguir.
Se o volume desse poliedro é $72\sqrt{2}$ cm^3, a medida de sua aresta, em centímetros, é:

(A) $\sqrt{2}$
(B) 3
(C) $3\sqrt{2}$
(D) 6
(E) $6\sqrt{2}$



14) Considere uma caixa sem tampa com a forma de um paralelepípedo reto de altura 8 m e base quadrada de lado 6 m. Apoiada na base, encontra-se uma pirâmide sólida reta de altura 8m e base quadrada com lado 6 m. O espaço interior à caixa e exterior à pirâmide é preenchido com água, até uma altura h, a partir da base $(h \leq 8)$. Determine o volume da água para um valor arbitrário de h, $0 \leq h \leq 8$.

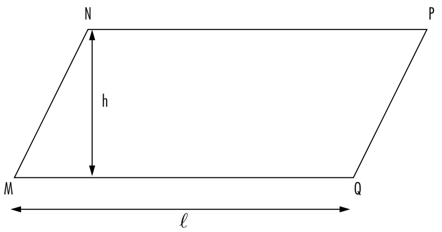


15) Considere uma lata cilíndrica de raio r e altura h completamente cheia de um determinado líquido. Este líquido deve ser distribuído totalmente em copos também cilíndricos, cuja altura é um quarto da altura da lata e cujo raio é dois terços do raio da lata. Determine:

a) os volumes da lata e do copo, em função de r e h;

b) o número de copos necessários, considerando que os copos serão totalmente cheios com o líquido.

16) A figura a seguir representa o paralelogramo MNPQ.



O volume do sólido obtido pela rotação do paralelogramo em torno da reta suporte do lado MQ é dado por:

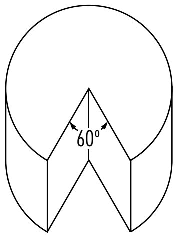
(A) $\pi \cdot h^2 \cdot (L + h)/2$
(B) $\pi \cdot h^2 \cdot L/2$
(C) $\pi \cdot h^2 \cdot (L + h)$
(D) $\pi \cdot h \cdot (L + h)^2$
(E) $\pi \cdot h^2 \cdot L$

17) Um produto é embalado em recipiente com formato de cilindros retos. O cilindro A tem altura 20cm e raio da base 5cm. O cilindro B tem altura 10cm e raio da base de 10cm

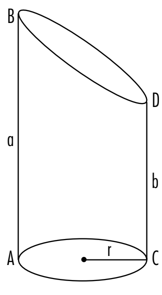
a) Em qual das duas embalagens gasta-se menos material?

b) O produto embalado no cilindro A é vendido a R$4,00 a unidade, e o do cilindro B a R$7,00 a unidade. Para o consumidor, qual a embalagem mais vantajosa?

18) Um queijo tem a forma de um cilindro circular reto com 40cm de raio e 30cm de altura. Retira-se do mesmo uma fatia, através de dois cortes planos contendo o eixo do cilindro e formando um ângulo de 60°. Se V é o volume, em cm^3, do que restou do queijo (veja a figura a seguir), determine $\dfrac{V}{10^3 \neq}$.



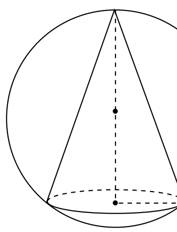
19) Um cilindro circular reto é cortado por um plano não paralelo à sua base, resultando no sólido ilustrado na figura a seguir. Calcule o volume desse sólido em termos do raio da base r, da altura máxima AB=a e da altura mínima CD = b.



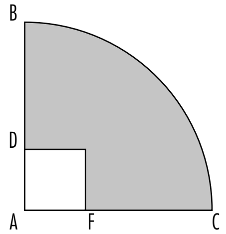
20) Um cone circular reto, cujo raio da base é 3cm, está inscrito em uma esfera de raio 5cm, conforme mostra a figura a seguir.

O volume do cone corresponde a que porcentagem do volume da esfera?

(A) 26,4 %
(B) 21,4 %
(C) 19,5 %
(D) 18,6 %
(E) 16,2 %

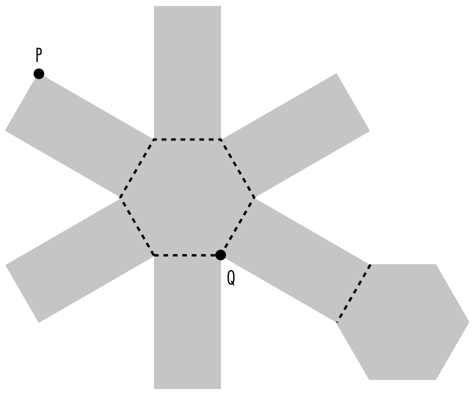


21) Na figura, ABC é um quadrante de círculo de raio 3cm e ADEF é um quadrado, cujo lado mede 1cm. Considere o sólido gerado pela rotação de 360°, em torno da reta AB, da região hachurada na figura. Assim sendo, esse sólido tem um volume de



(A) 14π cm³
(B) 15π cm³
(C) 16π cm³
(D) 17π cm³

22) (CEDERJ / 2006) A figura plana, constituída por um hexágono regular cujos lados medem 1cm e seis retângulos cujos lados medem 2cm, será recortada no seu contorno e dobrada nas linhas pontilhadas, formando um prisma regular.



Construído o prisma regular, os pontos P e Q serão dois dos seus vértices. Pode-se afirmar que o comprimento da diagonal PQ do prisma, em cm, é igual a:

(A) $\sqrt{5}$
(B) $2\sqrt{2}$
(C) 3
(D) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$
(E) 4

23) (UEZO / 2006) O último tremor de ontem danificou um dos reservatórios de água da Estação Sul de tratamento de água. Será necessário construir outro. O novo reservatório terá a forma de um bloco retangular (paralelepípedo) com 12m de comprimento, 4m de largura e 3m de profundidade. O volume desse reservatório, em metros cúbicos, será igual a:

(A) 48
(B) 64
(C) 144
(D) 178

24) Considerando o valor aproximado de π igual a 3,14, se o raio de uma bola de futebol for igual a 10cm, o seu volume, em cm³, será aproximadamente:

(A) 3.140
(B) 1.046,6
(C) 4.186,6
(D) 12.560

GABARITO

1) a) a = 8 dm   b) V = 512 litros

2) D

3) D

4) a) 50 cm   b) R$ 8,4

5) E

6) B

7) A

8) D

9) a) 2 cm   b) 4 cm

10) D

11) $72\sqrt{3}$ cm³

12) 8/3

13) D

14) $\frac{3}{16}(8-h)^3+36h-96$ m³

15) a) $V_{(lata)} = \pi \cdot r^2 \cdot h$ e $V(copo) = (\pi \cdot r^2 \cdot h)/9$ b) 9 copos

16) E

17) a) Na embalagem A   b) É a embalagem B

18) 40 cm³

19) $V=\frac{\pi \cdot r^2 \cdot (a+b)}{2}$

20) E

21) D

22) B

23) C

24) C

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES