Fundação
CECIERJ
Consórcio cederj
Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Álgebra Linear para Engenharia de Produção

Volume 2

Hernando Bedoya
Luiz Manoel Figueiredo
Marisa Ortegoza da Cunha
Ricardo Camelier

GOVERNO DO
Rio de Janeiro
SECRETARIA DE CIÊNCIA,
TECNOLOGIA E INOVAÇÃO

UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL

Ministério da
Educação

GOVERNO FEDERAL
BRASIL
PÁTRIA EDUCADORA

Apoio:

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj
Rua da Ajuda, 5 – Centro – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20040-000
Tel.: (21) 2333-1112 Fax: (21) 2333-1116

Material Didático

Elaboração de Conteúdo
Hernando Bedoya
Luiz Manoel Figueiredo
Marisa Ortegoza da Cunha
Ricardo Camelier

Revisão de Conteúdo
Maria Lucia Torres Villela

Coordenação Geral (Matemática)
Marcelo Corrêa

Biblioteca
Raquel Cristina da Silva Tiellet
Simone da Cruz Correa de Souza
Vera Vani Alves de Pinho

Coordenação de Equipe
Marcelo Freitas

Ilustração
Ronaldo d'Aguiar Silva

Programação Visual
Nilda Helena Lopes da Silva

Revisão Linguística e Tipográfica
Maria Lucia Torres Villela
Patrícia Paula

Coordenação de Produção
Fábio Rapello Alencar

Assistente de Produção
Bianca Giacomelli

Capa
Sami Souza

Produção Gráfica
Patrícia Esteves
Ulisses Schnaider

A394

Álgebra Linear para Engenharia de Produção : volume 2 / Hernando Bedoya ... [et al]. - Rio de Janeiro : Fundação Cecierj, 2015.

216p.; 19 x 26,5 cm.

ISBN: 978-85-458-0059-0

1. Álgebra linear. 2. Álgebra linear – Problemas, questões, exercícios. I. Hermando Bedoya. II. Figueiredo, Luiz Manoel. III. Cunha, Marisa Ortegoza da. IV. Ricardo Camelier. V. Título.

CDD: 512.5

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.
Texto revisado segundo o novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa.

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador
Luiz Fernando de Souza Pezão

Secretário de Estado de Ciência, Tecnologia e Inovação
Gustavo Tutuca

Instituições Consorciadas

CEFET/RJ - Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca
Diretor-geral: Carlos Henrique Figueiredo Alves

FAETEC - Fundação de Apoio à Escola Técnica
Presidente: Wagner Granja Victer

IFF - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense
Reitor: Luiz Augusto Caldas Pereira

UENF - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro
Reitor: Luis César Passoni

UERJ - Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Reitor: Ruy Garcia Marques

UFF - Universidade Federal Fluminense
Reitor: Sidney Luiz de Matos Mello

UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Reitor: Roberto Leher

UFRRJ - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Reitora: Ana Maria Dantas Soares

UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Reitor: Luiz Pedro San Gil Jutuca

Sumário

Aula 18

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. definir os conceitos de transformação matricial e linear;
2. apresentar vários exemplos de transformações lineares.

INTRODUÇÃO

Um dos conceitos centrais na Matemática é o de *função*. De modo geral, usa-se os termos função, aplicação e transformação como sinônimos.

Uma função é uma associação entre dois conjuntos A e B, envolvendo todos os elementos de A, mas não necessariamente todos os elementos de B, e que associa cada elemento de A à somente um elemento de B. Esta maneira de ver uma função somente como uma associação é uma visão essencialmente estática.

Uma outra maneira de ver o mesmo conceito, porém mais dinâmica, é que uma função é uma transformação, que ¨leva¨ elementos do conjunto A em elementos do conjunto B, ou seja, ¨transforma¨ elementos de A em elementos de B.

Na Álgebra Linear, usa-se mais o termo transformação do que função, especialmente no caso das transformações lineares, que definiremos nesta aula. Em resumo, uma transformação de um espaço vetorial V em um espaço vetorial W é simplesmente uma função de V em W.

Como observamos, são de interesse especial as transformações lineares. Vamos começar definindo transformações matriciais e, depois, as lineares. Veremos que para transformações de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$, os dois conceitos são equivalentes.

Transformações Matriciais

Uma transformação matricial é uma função dada por $T(x) = Ax$, onde A é uma matriz. Mais precisamente, seja A uma matriz $m \times n$. Então a aplicação $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por $x \to Ax$ é uma transformação matricial.

Exemplo 18.1.

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

então, A induz a transformação matricial $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, dada por $x \to Ax$.

Por exemplo, se $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, então

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

Em geral, se $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, então

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} .$$

Exemplo 18.2.

Se

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

e $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Encontre um $x \in \mathbb{R}^3$, tal que $Ax = b$.

Solução:

Seja $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, então $Ax = b$, leva a

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 & = & 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 & = & 2 - 2x_3 \\ 2x_1 + x_2 & = & 2 + x_3 \end{array} \right.$$

Somando as duas equações, obtemos

$$4x_1 = 4 - x_3 \Rightarrow x_1 = 1 - \frac{x_3}{4} \,.$$

Subtraindo as mesmas equações, obtemos

$$2x_2 = 0 + 3x_3 \ \Rightarrow x_2 = \frac{3x_3}{2} \,.$$

Portanto, todo vetor $x = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x_3}{4} \\ \frac{3x_3}{2} \\ x_3 \end{bmatrix}$, $x_3 \in \mathbb{R}$, é levado a b pela transformação matricial $T = Ax$.

Exemplo 18.3.

Seja $A = x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Determine a imagem de $T = Ax$.

Solução:

Temos que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Seja $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e seja $Tu = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$.

Então

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & a \\ 2x_1 + x_2 & = & b \\ x_1 - x_2 & = & c \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & a \\ -x_2 & = & b - 2a \\ -2x_2 & = & c - a \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x_1 &= b-a \\ x_2 &= 2a-b \\ 0 &= c-a-2b+4a \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 &= b-a \\ x_2 &= 2a-b \\ 0 &= 3a-2b+c \end{cases},$$

o que mostra que $Ax = b$ tem solução quando $3a-2b+c = 0$. Portanto, a aplicação dada pela matriz A leva $\mathbb{R}^2$ no plano $3x-2y+z = 0$.

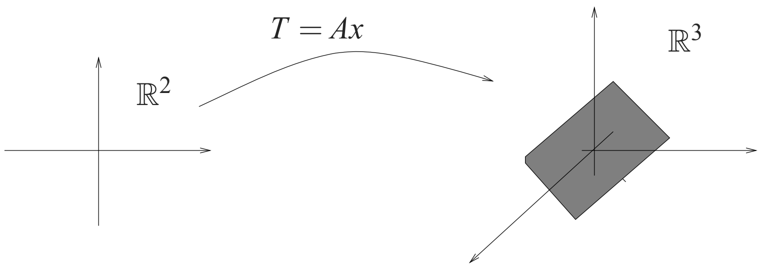


Figura 18.1: Aplicação T leva $\mathbb{R}^2$ no plano $3x-2y+z = 0$.

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Dada uma matrix $m \times n$ A, vetores $n \times 1$ u e v, e um escalar c, segue-se das propriedades da multiplicação de matrizes que

$$A(u+v) = Au+Av \quad \text{e} \quad A(cu) = cAu\,.$$

De maneira geral, quando uma função possui as duas propriedades acima, dizemos que ela é linear. Definiremos agora as transformações lineares.

Definição 18.1.

Uma transformação T é *linear* se:

1. $T(u+v) = Tu+tv$, para todos u e v no domínio de T.
2. $T(cv) = cT(v)$, para todo v e para todo escalar c.

Em outras palavras, podemos dizer que uma transformação é linear quando preserva a soma de vetores e o produto de vetores por escalares.

Preservar a soma de vetores quer dizer que se somarmos os vetores primeiro $(u+v)$ e, em seguida, aplicarmos T, obtendo $T(u+v)$, o resultado é o mesmo que aplicarmos T aos vetores e depois somarmos os resultados $(Tu + Tv)$, isto é $T(u+v) = Tu+Tv$.

Se A é uma matriz, u e v são vetores no domínio de $T = Ax$ e c é um escalar, então a propriedade $A(u+v) = Au+Av$ mostra que T preserva a soma de matrizes e a propriedade $A(cu) = cA(u)$ mostra que T preserva o produto por escalar. Portanto, *toda transformação matricial é linear*.

Por outro lado, nem toda transformação linear de espaços vetoriais é matricial. Veremos um exemplo deste tipo abaixo. Já as transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ são sempre matriciais. Provaremos este fato na Aula 23 onde tambem estudaremos em detalhes como obter a representação matricial de uma transformação linear.

Seja $T : V \to W$ uma transformação linear, onde V e W são espaços vetoriais, e seja $v \in V$. Então

$$T(0_V) = T(0.v) = 0.T(v) = 0_W ,$$

onde 0_V indica o vetor nulo do espaço vetorial v e 0_W indica o vetor nulo do espaço vetoria W. Mostramos então que uma transformação linear $T : V \to W$ leva o vetor nulo de V no vetor nulo de W.

Outra propriedade muito utilizada é a seguinte:

$$T(cv+du) = T(cv)+T(du) = cT(v)+dT(u) .$$

A dedução acima utiliza as duas propriedades que definem linearidade. Observe que esta propriedade, sozinha, implica em linearidade.

Isto é, se uma transformação T satisfaz

$$T(cv+du) = cT(u)+dT(v) ,$$

então ela é linear. Para ver isto, basta notar que fazendo $c = d = 1$ obtemos $T(u+v) = Tu+Tv$ (preservação da soma de vetores) e fazendo $c = 1$ e $d = 0$, obtemos $T(cu) = cT(u)$ (preservação do produto de vetores por escalares).

Aplicando sucessivamente o mesmo raciocínio acima, podemos mostrar que

$$T(c_1v_1 + \cdots + c_kv_k) = c_1T(v_1) + \cdots + c_kT(v_k) ,$$

onde $c_1, \cdots, c_k$ são escalares e $v_1, \cdots, v_k$ são vetores no domínio de T.

Exemplo 18.4.

A transformação $T: V \to W$ dada por $T(x) = 0_W$ é linear. Esta transformação, chamada transformação nula, leva todo vetor de V no vetor nulo de W.

Exemplo 18.5.

Seja V um espaço vetorial qualquer, a transformação $T: V \to V$ dada por $T(u) = u$ é linear. Esta transformação é chamada indentidade. Se $V = \mathbb{R}^n$, então a transformação linear dada pela matriz I_n, identidade de ordem n, é a transformação identidade de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 18.6.

Seja $r \in \mathbb{R}$. Mostre que a transformação $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $T(x) = rx$ é uma transformação linear.

Solução:

Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$ e c, d escalares. Então

$$T(cu+dv) = r(cu+dv) = rcu+rdv = c(ru)+d(rv) = cT(u)+dT(v).$$

Portanto T é uma transformação linear.

Se $r = 0$, então temos a transformação nula. Se $r = 1$, temos a transformação identidade. Se $0 \leq r < 1$, então dizemos que T é uma contração. Se $r > 1$, então dizemos que T é uma dilatação. A figura abaixo mostra a dilatação $T(x) = 2x$.

Exemplo 18.7.

A transformação $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x) = x + (1, 0)$ **não** é linear. Para ver isto, basta notar que ela não leva o vetor nulo no vetor nulo. Esta é uma translação de vetores no $\mathbb{R}^2$.

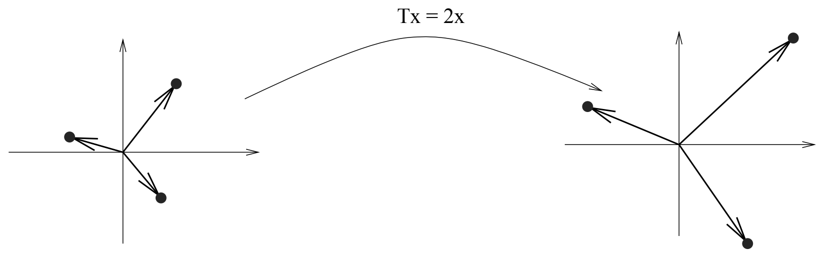


Figura 18.2: Dilatação $T(x) = 2x$.

Exemplo 18.8.

A transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada pela matriz $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, isto é

$$T(x) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} .$$

Como esta transformação é matricial, então ela é linear. Determinando a imagem de alguns vetores e representando em um gráfico esses vetores e suas imagens, podemos ver que esta transformação gira os vetores em torno da origem, no sentido anti-horário, de um ângulo de 90^0. Isto é verdade. Estudaremos com maiores detalhes transformações lineares especiais, como a rotação de um ângulo θ, nas aulas 25 e 26.

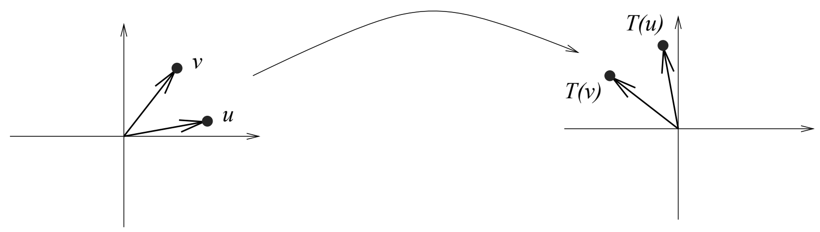


Figura 18.3: Rotação de um ângulo de 90^0.

Exemplo 18.9.

Seja $\mathbf{P}_n$ o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a n. Definimos o operador derivação $D\colon \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^{n-1}$ por

$$D(a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n) = a_1 + 2a_2 t + \cdots + n a_n t^{n-1} .$$

Isto é, D leva cada termo $a_k t^k$ em $k a_k t^{k-1}$.

É fácil ver que este operador é uma transformação linear. Note que ele é a derivação de funções no sentido usual, restrito ao espeço dos polinômios. Sabemos que para a derivação vale

$$D(cf_1 + df_2) = cD(f_1) + dD(f_2) \ ,$$

confirmando que D é uma transformação linear.

Note que esta transformação é linear, mas não é matricial. Não há uma matrix A tal que $D = Ax$. No entanto, veremos, na Aula 23, que toda transformação linear entre espaços de dimensão finita têm uma representação matricial. Há uma matriz A tal que se p é um polinômio e se $[p]_B$ é a representação deste polinômio em uma base B escolhida de $\mathbf{P}^n$, então $A[p]_B$ é a representação de Dp nesta base.

Exemplo 18.10.

Um banco de investimentos possui quatro tipos de investimentos, que chamaremos de investimentos A, B, C e D. Um cliente faz sua carteira distribuindo cada seu dinheiro entre as quatro opções do banco. Representamos a carteira de um cliente por um vetor 4×1. Assim uma carteira $x = \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix}$ indica x_A reais investidos na opção A, x_B reais investidos na opção B etc.

Se o investimento A resultou em y_A reais por real aplicado, B resultou em y_B reais por real aplicado etc, então o resultado total de cada cliente será calculado pela transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, dada por

$$\begin{aligned} T(x) &= \begin{bmatrix} y_A & y_B & y_C & y_D \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix} = \\ &= y_A x_A + y_B x_B + y_C x_C + y_D x_D \ . \end{aligned}$$

Resumo

Nesta aula, estudamos um dos conceitos fundamentais em Álgebra Linear, que é o de Transformação Linear.
Vimos, inicialmente, as transformações matriciais. Em seguida, definimos transformações lineares.
Vimos diversos exemplos de transformações lineares, inclusive uma aplicação à economia.

Exercício 18.1.

1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação definida por $Tx = Ax$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Encontre a imagem de

$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad u = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Quantas linhas e colunas deve ter uma matriz A para definir uma aplicação de $\mathbb{R}^4$ em $\mathbb{R}^6$ por $T(x) = Ax$.

3. Para os valores da matriz A e vetor b nos itens abaixo, encontre, se for possível, um vetor x tal que $Tx = b$.

   a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

   b. $A = \begin{bmatrix} 11 & -1 \\ 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

4. Encontre todos os valores de $x \in \mathbb{R}^4$ que são levados no vetor nulo pela transformação $x \to Ax$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. Nos itens abaixo, use um sistema de coordenadas para representar graficamente os vetores u = $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, v = $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, Tu e Tv. Faça uma descrição geométrica do efeito da aplicação de T nos vetores de $\mathbb{R}^2$.

a. $T(x) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

b. $T(x) = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}$.

c. $T(x) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

d. $T(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

6. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear. Se

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

determine $T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ e $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1. $\begin{bmatrix} -4 \\ -8 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

2. A deve ser uma matriz 6×4.

3. (a) $x = \begin{bmatrix} 2-c \\ c+1 \\ c \end{bmatrix}$, para todo $c \in \mathbb{R}$.

   (b) Não há valor de x tal que $Tx = b$.

4. O espaço gerado por $\{(-\frac{3}{2}, -1, \frac{3}{2}, 1)\}$ é levado no vetor nulo.

5. (a) Dilatação por um fator de 3.

   (b) Contração por uma fator de $0,5$.

   (c) Rotação de 180^0.

   (d) Projeção sobre o eixo-y.

Aula 19

PROPRIEDADES DAS TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Objetivo

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1 reconhecer e aplicar as propriedades das transformações lineares.

Propriedades das Transformações Lineares

Na Aula 18, conhecemos um tipo muito especial de função - as transformações lineares, que são funções definidas entre espaços vetoriais e com características que as tornam muito úteis, em uma gama imensa de problemas e situações da Matemática, Física, Engenharia e Computação, entre outras áreas de estudo e trabalho.

Nesta aula veremos várias propriedades das transformações lineares. Em especial, veremos um fato muito importante, que é o seguinte: para determinar uma transformação linear $T : V \to W$, basta conhecer seus valores em uma base qualquer de V.

Propriedades das Transformações Lineares

Sejam V e W espaços vetoriais e $T : V \to W$ uma transformação linear. Valem as seguintes propriedades:

i. $T(0_V) = 0_W$
Em palavras: uma transformação linear leva o vetor nulo do domínio ao vetor nulo do contra-domínio. Esta propriedade já foi demonstrada na Aula 18.

ii. $T(-v) = -T(v), \forall v \in V$
Em palavras: A imagem do vetor oposto é o oposto da imagem do vetor.
Como $T[(-1)v] = (-1)T(v)$, decorre que $T(-v) = -T(v)$.

iii. Se U é um subespaço de V então $T(U)$ é um subespaço de W.
Devemos mostrar que $0_W \in T(U)$ e que $T(U)$ é fechado para soma de vetores e multiplicação por escalar.
Como U um subespaço de V, então $0_V \in U$. Pela propriedade i. , $T(0_V) = 0_W \in T(U)$.
Sejam $x, y \in T(U)$. Existem $u, v \in U$ tais que $T(u) = x$ e $T(v) = y$. Como U é subespaço de V, então $u + v \in U$. De $T(u+v) \in T(U)$ resulta que

$$T(u+v) = T(u) + T(v) = x + y \in T(U) .$$

Finalmente, sejam $x \in T(U)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Existe $u \in U$ tal que $T(u) = x$. Como $\alpha u \in U$, então $T(\alpha u) \in T(U)$, o que resulta em

$$T(\alpha u) = \alpha T(u) = \alpha x \in T(U) \,,$$

e podemos concluir que $T(U)$ é subespaço de W.

iv. Dados $v_1, v_2, ..., v_n \in V$,

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + ... + \alpha_n T(v_n) \,.$$

Em palavras: A imagem de uma combinação linear de vetores de V é uma combinação linear das imagens desses vetores, com os mesmos coeficientes.

Esta propriedade já foi apresentada na Aula 18. Vamos dar aqui uma demonstração usando indução sobre n.

O caso $n = 1$ segue diretamente da definição de transformação linear, pois $T(\alpha_1 v_1) = \alpha_1 T(v_1)$. Vamos supor que a propriedade vale para $n = k$, isto é,

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_k v_k) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + ... + \alpha_k T(v_k) \,.$$

Vamos provar que vale para $n = k+1$:

$$\begin{aligned}
& T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1}) \\
& = T[(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_k v_k) + (\alpha_{k+1} v_{k+1})] \\
& \overset{T\ linear}{=} T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_k v_k) + T(\alpha_{k+1} v_{k+1}) \\
& \overset{hip.ind.}{=} \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + ... + \alpha_k T(v_k) + T(\alpha_{k+1} v_{k+1}) \\
& \overset{T\ linear}{=} \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + ... + \alpha_k T(v_k) + \alpha_{k+1} T(v_{k+1}) \,,
\end{aligned}$$

isto é, vale a propriedade para $n = k+1$, o que conclui a demonstração.

v. Se $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é um conjunto gerador de V então $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}$ é um conjunto gerador da imagem de T.

Demonstração

Seja $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ um conjunto gerador de V. Seja w um vetor na imagem de T, isto é, existe v em V tal que

$w = T(v)$. Então existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ tais que $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$. Podemos escrever:

$$\begin{aligned} w &= T(v) = \\ &= T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n) \stackrel{(iv)}{=} \\ &= \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + ... + \alpha_n T(v_n). \end{aligned}$$

Logo, os vetores $T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)$ geram a imagem de T.

vi. Se $T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n) \in W$ são LI, então os vetores $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ são LI.

Demonstração

Seja a combinação linear

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = o_V. \quad (1)$$

Vamos aplicar a transformação T a ambos os lados dessa igualdade:

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n) = T(0_V) \Rightarrow$$

$$\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + ... + \alpha_n T(v_n) = 0_W .$$

Como os vetores $T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)$ são LI, concluímos que $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. Ou seja, todos os coeficientes da combinação linear (1) são iguais a zero, o que implica que os vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ são LI.

Exemplo 19.1.

Sejam V um espaço vetorial e $u \in V$. A aplicação

$$\begin{array}{rccc} T_u: & V & \rightarrow & V \\ & v & \mapsto & v+u \end{array}$$

é chamada *translação definida por* u. É fácil verificar que, quando $u \neq 0_V$, essa aplicação não é linear, pois

$$T_u(0_V) = 0_V + u = u \neq 0_V,$$

violando a propriedade i. , acima. Por outro lado, quando $u = 0_V$, essa aplicação é o operador identidade de V, que é linear.

Exemplo 19.2.

A recíproca da propriedade (vi) não é verdadeira, isto é, é possível termos um conjunto de vetores de V que sejam LI, mas com suas imagens formando um conjunto LD em W. Considere, por exemplo, o operador projeção ortogonal sobre o eixo x, definido em $\mathbb{R}^2$, isto é, a transformação linear tal que $T(x,y) = (x,0)$, para todo vetor (x,y) do plano. Os vetores $v_1 = (3,1)$ e $v_2 = (3,4)$ são LI, mas suas imagens coincidem: $T(v_1) = T(v_2) = (3,0)$. Logo, o conjunto $\{T(v_1), T(v_2)\} \subset \mathbb{R}^2$ é LD. Essa situação é ilustrada na **Figura 19.1**.

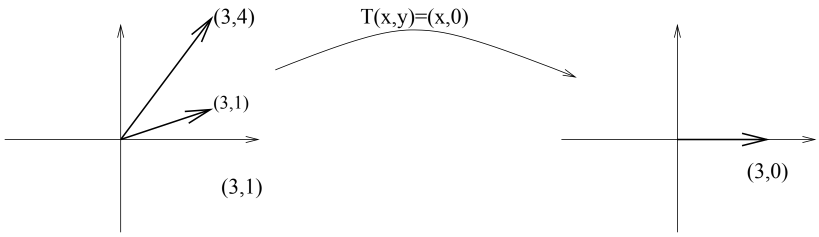


Figura 19.1: v_1 e v_2 são LI; $T(v_1)$ e $T(v_2)$ são LD.

Uma característica importante das transformaçõs lineares é que elas ficam completamente determinadas se as conhecemos nos vetores de uma base do domínio. Isto é, dada uma transformação linear $T : V \to W$, se conhecemos as imagens por T dos vetores de uma base de V, podemos obter a expressão de $T(v)$, para um vetor v genérico de V. O exemplo a seguir mostra esse procedimento:

Exemplo 19.3.

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, linear, tal que

$T(1,0,0) = (1,1,1)$;

$T(0,1,0) = (2,-1,1)$;

$T(0,0,1) = (1,0,2)$.

Vamos determinar $T(x,y,z)$, onde (x,y,z) é um vetor genérico de $\mathbb{R}^3$.

Os vetores $v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,0)$ e $v_3 = (0,0,1)$ formam a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Assim, um vetor $v = (x,y,z)$, genérico, de $\mathbb{R}^3$, se escreve $(x,y,z) = xv_1 + yv_2 + zv_3$. Aplicando a propriedade (iv), temos:

$$\begin{aligned} T(v) &= T(x,y,z) = \\ &= T(xv_1 + yv_2 + zv_3) = \\ &= xT(v_1) + yT(v_2) + zT(v_3) = \\ &= x(1,1,1) + y(2,-1,1) + z(1,0,2) = \\ &= (x+2y+z, x-y, x+y+2z). \end{aligned}$$

Logo, T é dada por $T(x,y,z) = (x+2y+z, x-y, x+y+2z)$.

Vamos ver como fazer no caso em que a base na qual a transformação linear é conhecida não seja a canônica:

Exemplo 19.4.

Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é tal que

$T(1,-1) = (1,1,2)$;

$T(2,0) = (2,-1,1)$.

Vamos determinar $T(x,y)$, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Primeiramente, verificamos que os vetores $v_1 = (1,-1)$ e $v_2 = (2,0)$ formam uma base de $\mathbb{R}^2$. Neste caso, como são dois vetores num espaço bi-dimensional, uma forma rápida de verificar que são LI é calcular o determinante formado pelas suas coordenadas e constatar que é diferente de zero. Deixamos isso com você, como exercício (!).

A seguir, escrevemos um vetor genérico do espaço como uma combinação linear dos vetores dessa base:

$$v = (x,y) = av_1 + bv_2 = a(1,-1) + b(2,0) \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = x \\ -a = y \end{cases} .$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = -y$ e $b = \frac{x+y}{2}$. Portanto,

$$(x,y) = -y(1,-1) + \frac{x+y}{2}(2,0)$$

Usando a linearidade de T, obtemos

$$\begin{aligned} T(v) &= T(x,y) = \\ &= T(-yv_1 + \tfrac{x+y}{2}v_2) = \\ &= -yT(v_1) + \tfrac{x+y}{2}T(v_2) = \\ &= -y(1,1,2) + \tfrac{x+y}{2}(2,-1,1) = \\ &= \left(x, \tfrac{-x-3y}{2}, \tfrac{x-3y}{2}\right). \end{aligned}.$$

Logo, T é dada por $T(x,y) = \left(x, \frac{-x-3y}{2}, \frac{x-3y}{2}\right)$.

Exemplo 19.5.

Em relação à transformação linear do Exemplo **??**.4, encontre $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(v) = (3,1,4)$.

Queremos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y) = (3,1,4)$.

$$\left(x, \frac{-x-3y}{2}, \frac{x-3y}{2}\right) = (3,1,4) \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \frac{-x-3y}{2} = 1 \\ \frac{x-3y}{2} = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ -x-3y = 2 \\ x-3y = 8 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema, obtemos $\begin{cases} x = 3 \\ y = -\frac{5}{3} \end{cases}$.

Logo, o vetor procurado é $(3,-5/3)$.

Exemplo 19.6.

Dado um espaço vetorial V, um *funcional linear* definido em V é uma transformação linear $f : V \to \mathbb{R}$. Considere o funcional linear f definido em $\mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1) = 2$ e $f(2,1) = 3$. Vamos determinar $f(x,y)$, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Note que o conjunto dos números reais é, ele mesmo, um espaço vetorial real.

Novamente, começamos conferindo que os vetores $(1,1)$ e $(2,1)$ formam uma base de $\mathbb{R}^2$. Escrevemos, então, um vetor genérico (x,y), como combinação linear dos vetores dados:

$(x,y) = a(1,1) + b(2,1)$. Resolvendo, obtemos

$$\begin{cases} a+2b &= x \\ a+b &= y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a &= -x+2y \\ b &= x-y \end{cases},$$

isto é, $(x,y) = (-x+2y)(1,1) + (x-y)(2,1)$.

Então

$$\begin{aligned} T(x,y) &= T((-x+2y)(1,1) + (x-y)(2,1)) = \\ &= (-x+2y)T(1,1) + (x-y)T(2,1) \\ &= (-x+2y).2 + (x-y).3 = x+y\,. \end{aligned}$$

Logo, T é dada por $T(x,y) = x+y$.

Exemplo 19.7.

Em relação ao funcional linear definido no exemplo anterior, vamos procurar os vetores v de $\mathbb{R}^2$ tais que $f(v) = 0$. Isto é, queremos (x,y) tal que $f(x,y) = x+y = 0$. Isso nos leva aos vetores do plano da forma $(x,-x)$. Logo, há infinitos vetores de $\mathbb{R}^2$ que são levados ao zero, pelo funcional f - a saber, todo vetor do conjunto $\{(x,-x)|x \in \mathbb{R}\}$.

Para finalizar, um exemplo no espaço dos polinômios:

Exemplo 19.8.

Seja T a transformação linear em $P_3(\mathbb{R})$ dada por

$T(1) = 1-t$;

$T(1+t) = t^3$;

$T(t+t^2) = 3-t^2$;

$T(t^2+t^3) = 1+t^2$.

Vamos determinar $T(x+yt+zt^2+wt^3)$, onde $x+yt+zt^2+wt^3$ é um polinômio qualquer de $P_3(\mathbb{R})$ e, a seguir, calcular $T(2-3t+4t^3)$.

Como nos exemplos anteriores, constatamos que $\{1, 1+t, t+t^2, t^2+t^3\}$ é uma base de $P_3(\mathbb{R})$.

A seguir, escrevemos o vetor genérico de $P_3(\mathbb{R})$ nessa base:

$$\begin{aligned} x+yt+zt^2+wt^3 &= a.1+b(1+t)+c(t+t^2)+d(t^2+t^3) = \\ &= (a+b)+(b+c)t+(c+d)t^2+dt^3. \end{aligned}$$

Obtemos, assim, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a+b=x \\ b+c=y \\ c+d=z \\ d=w \end{cases},$$

que, resolvido, fornece a solução:

$$\begin{cases} a=x-y+z-w \\ b=y-z+w \\ c=z-w \\ d=w \end{cases}.$$

Escrevemos, então:

$$\begin{aligned} x+yt+zt^2+wt^3 &= (x-y+z-w).1+(y-z+w)(1+t)+ \\ &\quad +(z-w)(t+t^2)+w(t^2+t^3)\ . \end{aligned}$$

Aplicamos a transformação T em ambos os lados dessa igualdade:

$$\begin{aligned} & T(x+yt+zt^2+wt^3) = \\ & T\big((x-y+z-w).1+(y-z+w)(1+t)+(z-w)(t+t^2)+ \\ & +\ w(t^2+t^3)\big) = \\ = \ & (x-y+z-w).T(1)+(y-z+w).T(1+t)+ \\ & +\ (z-w).T(t+t^2)+\ w.T(t^2+t^3) \\ = \ & (x-y+z-w).(1-t)+(y-z+w).t^3+(z-w).(3-t^2)+ \\ & +w.(1+t^2) \\ = \ & (x-y+4z-3w)+(-x+y-z+w)t+(-z+2w)t^2 \\ & +\ (y-z+w)t^3\ . \end{aligned}$$

Logo, a transformação procurada é dada por:

$$\begin{aligned} T(x+yt+zt^2+wt^3) &= (x-y+4z-3w)+(-x+y-z+w)t+ \\ &\quad +(-z+2w)t^2+(y-z+w)t^3\ . \end{aligned}$$

Vamos, agora, calcular $T(2-3t+4t^3)$. Temos $x=2$; $y=-3; z=0$ e $w=4$. Então

$$T(2-3t+4t^3) = -7-t+8t^2+t^3 \; .$$

Resumo

Nesta aula estudamos as propriedades das transformações lineares. O fato mais relevante é que podemos determinar uma transformação linear a partir da sua aplicação nos vetores de uma base, apenas. Assim, o número de informações necessárias a respeito de uma transformação linear, para que a conheçamos completamente, é igual à dimensão do espaço vetorial no qual ela é definida. Isso é uma especificidade das transformações lineares: nenhuma outra função permite uma manipulação tão simples. É por essa qualidade, em particular, que as transformações lineares são, por excelência, as funções usadas na Computação em geral.

Exercício 19.1.

1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a transformação linear para a qual $T(1,1) = 3$ e $T(0,1) = -2$. Encontre $T(x,y)$, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2. Um operador linear T, definido em $P_2(\mathbb{R})$, é tal que $T(1) = t^2, T(t) = 1-t$ e $T(t^2) = 1+t+t^2$.

   a. Determine $T(a+bt+ct^2)$, onde $a+bt+ct^2$ é um vetor genérico de $P_2(\mathbb{R})$.

   b. Determine $p \in P_2(\mathbb{R})$ tal que $T(p) = 3-t+t^2$.

3. Encontre $T(x,y)$ onde $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é definida por $T(1,2) = (3,-1,5)$ e $T(0,1) = (2,1,-1)$.

4. Determine $T(x,y,z)$ onde $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é dada por $T(1,1,1) = 3, T(0,1,-2) = 1$ e $T(0,0,1) = -2$.

Autoavaliação

Você deverá assimilar o significado de cada propriedade vista. A primeira delas é extremamente útil para rapidamente identificar algumas transformações que não são lineares, por não levarem o vetor nulo do domínio ao vetor nulo do contra-domínio. A translação é o exemplo mais importante disso. Além disso, você deve se familiarizar com a técnica de encontrar uma transformação linear a partir de seus valores nos vetores de uma base do domínio. Veja que os exercícios são repetitivos: mudam o espaço e a base considerada, mas a estrutura se repete. Caso você tenha alguma dúvida, entre em contato com o tutor da disciplina. E... vamos em frente!!

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1. $T(x,y) = 5x - 2y$
2. a. $T(a+bt+ct^2) = (b+c)+(-b+c)t+(a+c)t^2$
   b. $p = 2t+t^2$
3. $T(x,y) = (-x+2y, -3x+y, 7x-y)$
4. $T(x,y,z) = 8x-3y-2z$

Aula 20

Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. determinar o núcleo e a imagem de uma transformação linear;
2. identificar o núcleo de uma transformação linear como um subespaço do domínio;
3. identificar a imagem de uma transformação linear como um subespaço do contradomínio.

NÚCLEO E IMAGEM DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Na Aula 19, mencionamos a imagem de uma transformação linear. Nesta aula, vamos definir o núcleo de uma transformação linear e mostraremos que, tanto o núcleo, como a imagem, possuem estrutura de espaço vetorial.

NÚCLEO DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Sejam V e W espaços vetoriais e $T : V \to W$ uma transformação linear. Chamamos de *núcleo* de T, representado por $N(T)$, o seguinte conjunto:

Alguns textos usam a notação $ker(T)$, pois núcleo, em inglês, é *kernel*.

$$N(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0_W\} .$$

Em palavras: o núcleo de uma transformação linear é o subconjunto do domínio formado pelos vetores que são levados ao vetor nulo do contradomínio.

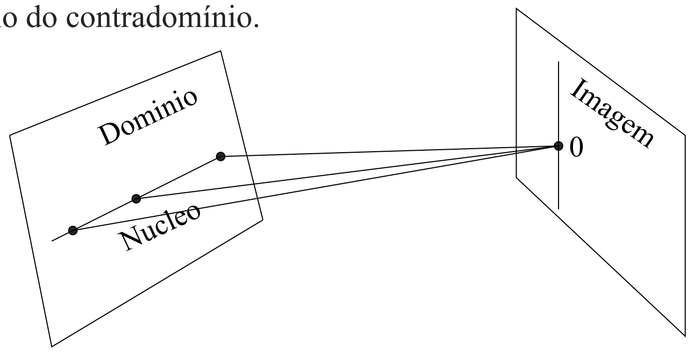


Figura 20.1

Exemplo 20.1.

a. Seja $T : V \to W$ a transformação linear nula, isto é, a transformação tal que $T(v) = 0_W, \forall v \in V$. É fácil ver que seu núcleo é todo o espaço V.

b. O núcleo da transformação identidade, definida no espaço vetorial V, é o conjunto formado apenas pelo vetor nulo de V.

c. A projeção ortogonal sobre o eixo dos x, em $\mathbb{R}^2$, é uma transformação linear cujo núcleo é o eixo dos y.

Exemplo 20.2.

O núcleo da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x,y) = (x+y, x-y, x-2y)$$

é o conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid T(x,y) = (0,0,0)\}$, isto é

$$(x+y, x-y, x-2y) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \\ x-2y=0 \end{cases}.$$

Esse sistema tem solução $x = 0$ e $y = 0$. Logo, $N(T) = \{(0,0)\}$.

Exemplo 20.3.

Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por

$$T(x,y,z,t) = (2x, x+2y-z, x-y+z+t)\,.$$

Então, $N(T) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid T(x,y,z,t) = (0,0,0)\}$. Isto é, um vetor (x,y,z,t) de $\mathbb{R}^4$ pertence ao núcleo de T se, e somente se,

$$(2x, x+2y-z, x-y+z+t) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ x+2y-z=0 \\ x-y+z+t=0 \end{cases}.$$

Esse sistema tem conjunto-solução $\{(0,k,2k,-k); k \in \mathbb{R}\}$, que é o núcleo de T.

Imagem de uma Transformação Linear

Sejam V e W espaços vetoriais e $T : V \to W$ uma transformação linear. A *imagem* de T, representado por $Im(T)$, é o conjunto de todos os vetores de W da forma $T(v)$, para algum $v \in V$, isto é

$$Im(T) = \{w \in W \mid w = T(v), \text{ para algum } v \in V\}.$$

Exemplo 20.4.

a. Se $T : V \to W$ é a transformação linear nula, isto é, tal que $T(v) = 0_W, \forall v \in V$, sua imagem é o conjunto formado apenas pelo vetor nulo de W.

b. A imagem da transformação identidade, definida no espaço vetorial V, é o espaço V.

c. A projeção ortogonal sobre o eixo dos x, em $\mathbb{R}^2$ é uma transformação linear cuja imagem é o eixo dos x.

Exemplo 20.5.

Vamos determinar a imagem da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x,y) = (x+y, x-y, x-2y) \ .$$

Queremos encontrar os vetores $w = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ para os quais existe $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(v) = w$, isto é, queremos que a equação

$$T(x,y) = (x+y, x-y, x-2y) = (a,b,c)$$

tenha solução. Isso equivale a analisar as condições para que o sistema

$$\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \\ x-2y=c \end{cases}$$

admita solução. Escalonando, obtemos o seguinte sistema equivalente:

$$\begin{cases} x+y=a \\ y=(a-b)/2 \\ 0=(a-3b+2c)/2 \end{cases} \quad ,$$

que admite solução se, e somente se, $a-3b+2c=0$.

Logo,

$$Im(T) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 | a-3b+2c=0\} \ .$$

Note que a representação geométrica de $Im(T)$ é um plano passando pela origem. Você se lembra? Os subespaços de $\mathbb{R}^3$ são as retas e os planos passando pela origem, além do subespaço nulo e do próprio $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 20.6.

Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por

$$T(x,y,z,t) = (2x, x+2y-z, x-y+z+t)\ .$$

Queremos determinar as condições para que um vetor (a,b,c), de $\mathbb{R}^3$ seja a imagem, por T, de algum vetor de $\mathbb{R}^4$. Como no exemplo anterior, queremos que o sistema

$$\begin{cases} 2x = a \\ x+2y-z = b \\ x-y+z+t = c \end{cases}$$

admita solução. Escalonando, chegamos ao sistema equivalente

$$\begin{cases} x-y+z+t = c \\ y+t = b+c-a \\ -z-2t = (3a-2b-4c)/2 \end{cases} ,$$

que é compatível para quaisquer valores de a,b e c. Logo, todo vetor $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ pertence à imagem de T, ou seja, $Im(T) = \mathbb{R}^3$.

Você já deve ter se dado conta de que as transformações lineares possuem propriedades realmente especiais, que não encontramos nas demais funções. O núcleo e a imagem de uma transformação linear não são apenas conjuntos: ambos apresentam estrutura de espaço vetorial, como mostraremos nos resultados a seguir.

Teorema 20.1.

Sejam V e W espaços vetoriais e $T : V \to W$ uma transformação linear. O núcleo de T é subespaço vetorial de V.

Demonstração

Primeiramente, vemos que $0_V \in N(T)$, uma vez que $T(0_V) = 0_W$. Portanto $N(T) \neq \emptyset$.

Sejam v_1, v_2 vetores no núcleo de T. Isto é, $T(v_1) = T(v_2) = 0_W$, então $T(v_1+v_2) = T(v_1)+T(v_2) = 0_W + 0_W = 0_W$. Logo, $(v_1+v_2) \in N(T)$. Portanto, o núcleo é fechado para a soma.

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in N(T)$. Isto é, $T(v) = 0_W$, então $T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha 0_W = 0_W$. Logo, $(\alpha v) \in N(T)$, o que mostra que o núcleo é fechado para o produto por escalar.

Teorema 20.2.

Sejam V e W espaços vetoriais e $T : V \to W$ uma transformação linear. A imagem de T é subespaço vetorial de W.

Demonstração

A imagem de T não é vazia, pois 0_W é a imagem de 0_V.

Sejam w_1, w_2 vetores na imagem de T. Isso significa que existem vetores v_1 e v_2 em V, tais que $T(v_1) = w_1$ e $T(v_2) = w_2$. Então o vetor $(w_1 + w_2)$ pertence à imagem de T, pois é a imagem do vetor $(v_1 + v_2)$. De fato, temos:

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + t(v_2) = w_1 + w_2.$$

Finalmente, sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $w \in Im(T)$. Isto é, existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$. Então, como $T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha w$, temos que $(\alpha w) \in Im(T)$.

Uma vez provado que o núcleo e a imagem são subespaços vetoriais, o próximo passo é determinar a dimensão e obter uma base para cada um. É o que faremos nos exemplos seguintes.

Exemplo 20.7.

Dada a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x,y,z) = (x+y, x-z, y+z) \ ,$$

determine uma base e a dimensão de seu núcleo e de sua imagem.

Vamos determinar o núcleo de T. Queremos encontrar os vetores (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ tais que

$$T(x,y,z) = (x+y, x-z, y+z) = (0,0,0) \ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y=0 \\ x-z=0 \\ y+z=0 \end{array} \right. \ ,$$

cujo conjunto-solução é

$$\{(k,-k,k); k \in \mathbb{R}\} = \{k(1,-1,1); k \in \mathbb{R}\}.$$

Logo, o núcleo de T é gerado pelo vetor $(1,-1,1)$. Então temos que $\dim N(T) = 1$ e uma base de $N(T)$ é $\{(1,-1,1)\}$.

Vamos, agora, determinar a imagem de T. Queremos estabelecer as condições que um vetor (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$ deve satisfazer para que exista um vetor (x,y,z), em $\mathbb{R}^3$, tal que $T(x,y,z) = (x+y, x-z, y+z) = (a,b,c)$. Essa igualdade leva a um sistema linear que, escalonado, fornece

$$\begin{cases} x+y = a \\ y+z = a-b \\ 0 = a-b-c \end{cases}.$$

Para que existam soluções, devemos ter $a-b-c=0$, que é a equação que caracteriza os vetores da imagem de T. Como $a = b+c$, um vetor da imagem pode ser escrito $(b+c,b,c) = b(1,1,0)+c(1,0,1)$. Logo, a imagem possui dimensão 2 e uma base para ela é $\{(1,1,0),(1,0,1)\}$.

Os dois próximos exemplos "invertem"o processo: vamos determinar uma transformação linear (ela não será única) a partir do seu núcleo ou de sua imagem.

Exemplo 20.8.

Encontrar uma transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cuja imagem é gerada pelos vetores $(1,2,3)$ e $(1,1,1)$.

Vimos, na aula passada, que uma transformação linear fica completamente determinada se a conhecemos nos vetores de uma base de seu domínio. Consideremos, por simplicidade, a base canônica de $\mathbb{R}^3$ e vamos determinar as imagens dos vetores dessa base, por T:

$$T(1,0,0) = (1,2,3)$$

$$T(0,1,0) = (1,1,1)$$

$$T(0,0,1) = (0,0,0)$$

Note que o terceiro vetor deve ser levado a um que forme,

Note que a escolha de T neste exemplo não é de forma alguma única. Poderíamos, por exemplo, ter escolhido $T(1,0,0) = (1,1,1)$, $T(0,1,0) = (1,1,1)$ e $T(0,0,1) = (1,2,3)$.

com os dois vetores dados no enunciado, um conjunto LD, uma vez que a dimensão da imagem é 2. Então, como $(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$, temos

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= xT(1,0,0) + yT(0,1,0) + zT(0,0,1) = \\ &= x(1,2,3) + y(1,1,1) + z(0,0,0) = \\ &= (x+y, 2x+y, 3x+y), \end{aligned}$$

que é a lei que define a transformação T.

Exemplo 20.9.

Encontrar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cujo núcleo é gerado pelos vetores $(1,2,3)$ e $(1,1,1)$.

Aqui, também, vamos definir uma transformação linear numa base de $\mathbb{R}^3$, mas esta base deve conter os vetores dados. Isto é, vamos completar o conjunto $\{(1,2,3),(1,1,1)\}$ para que se torne uma base de $\mathbb{R}^3$. Para isso, devemos escolher um vetor (x,y,z) tal que o conjunto $\{(1,2,3),(1,1,1),(x,y,z)\}$ seja LI. Em outras palavras, basta que seja um vetor tal que o determinante formado pelas coordenadas dos três vetores do conjunto seja diferente de zero. Isto é:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow z \neq -x + 2y\ .$$

Podemos considerar, por exemplo, o vetor $(1,0,0)$. Temos, então, uma base de $\mathbb{R}^3$ em cujos vetores iremos definir a transformação:

$T(1,2,3) = (0,0,0)$

$T(1,1,1) = (0,0,0)$

$T(1,0,0) = (1,0,0)$ (por exemplo)

Observe que a dimensão do núcleo é 2; logo, o terceiro vetor da base deve estar fora do núcleo, ou seja, ter imagem não nula.

Para finalizar, temos que escrever um vetor genérico do $\mathbb{R}^3$ como combinação linear dos vetores da base considerada e, enfim, determinar a expressão de T:

$$\begin{aligned}(x,y,z) &= a(1,2,3)+b(1,1,1)+c(1,0,0) \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=x \\ 2a+b=y \\ 3a+b=z \end{cases} \\ &\Rightarrow a=-y+z; b=3y-2z; c=x-2y+z\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}T(x,y,z) &= aT(1,2,3)+bT(1,1,1)+cT(1,0,0)= \\ &= (-y+z)(0,0,0)+(3y-2z)(0,0,0)+ \\ &\quad +(x-2y+z)(1,0,0)\end{aligned}.$$

Assim, uma possível resposta é $T(x,y,z)=(x-2y+z,0,0)$.

Resumo

Nesta aula definimos o núcleo e a imagem de uma transformação linear T. Vimos que ambos são subespaços vetoriais: o núcleo, do domínio de T e a imagem, do contra-domínio de T. Os exemplos visaram ajudar na assimilação da técnica para caracterizar o núcleo e a imagem, determinar suas dimensões e encontrar uma base para cada. Na próxima aula veremos um resultado importante que relaciona as dimensões do núcleo, da imagem e do domínio de uma transformação linear.

Exercício 20.1.

1. Verifique se o vetor $v \in V$ pertence ao núcleo da transformação linear $T: V \to W$, em cada caso:

   (a) $V = R^3$; $W = \mathbb{R}^2$; $T(x,y) = (x+y-z, 3y+z)$; $v=(4,-1,3)$

   (b) $V = R^3$; $W = \mathbb{R}^2$; $T(x,y) = (x+y-z, 3y+z)$; $v=(1,-1,2)$

   (c) $V = M_2(\mathbb{R})$; $W=\mathbb{R}$;

   $$T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = a_{11}+a_{12}+2a_{21}+2a_{22};$$

   $$v=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2\end{bmatrix}$$

(d) $V = M_2(\mathbb{R})$; $W = \mathbb{R}$;

$$T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{12} + 2a_{21} + 2a_{22};$$

$$v = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

2. Seja $T : P_2 \to P_3$ a transformação linear definida por $T(p(t)) = tp(t)$. Quais dos seguintes vetores estão na imagem de T?

   (a) t^2

   (b) 0

   (c) $t+1$

   (d) $t^2 - 2t$

3. Determine a dimensão e uma base do núcleo, a dimensão e uma base da imagem da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por
$$T(x,y,z) = (y-2z, x-y-z).$$

4. Seja T a transformação linear definida em M_2 tal que $T(v) = Av$, para $v \in M_2$, onde $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Determine a dimensão e encontre uma base da imagem, determine a dimensão e encontre uma base do núcleo de T.

5. A transformação $T : P_3 \to P_2$ que associa cada polinômio $p(t)$ ao polinômio obtido pela derivação, isto é: $T(p(t)) = p'(t)$, é linear. Descreva o núcleo de T.

6. Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ cuja imagem seja gerada pelos vetores $(1,0,2,3)$ e $(1,0,-1,5)$.

7. Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja gerado pelo vetor $(1,0,3)$.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1. (a) pertence

   (b) não pertence

   (c) não pertence

(d) pertence

2. a); b); d)

3. $dim\, N(T) = 1$; uma base de $N(T) : \{(3,2,1)\}$ (Há infinitas bases.)

   $dim\, Im(T) = 2$ $(Im(T) = \mathbb{R}^2)$; uma base de $Im(T) : \{(1,0),(0,1)\}$ (Há infinitas bases.)

4. $N(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$; $dim\, N(T) = 0$; $Im\,(T) = M_2$; uma base para a imagem de $T : \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

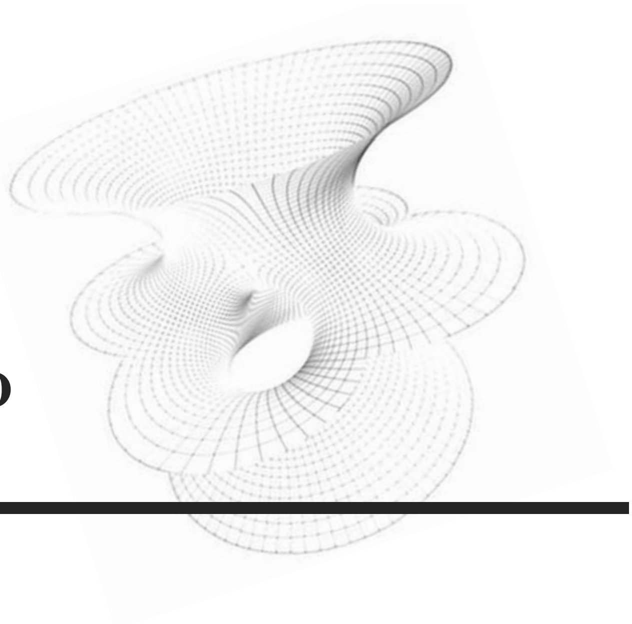
5. O núcleo de T é formado pelos polinômios constantes de P_3.

6. Há infinitas soluções.

7. Há infinitas soluções.

Aula 21

TEOREMA DO NÚCLEO E DA IMAGEM



Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. apresentar o teorema do núcleo e da imagem, algumas consequências e exemplos.

TEOREMA DO NÚCLEO E DA IMAGEM

Na aula passada, vimos que, se $T : V \to W$ é uma transformação linear, o núcleo $N(T)$ é um subespaço vetorial de V e a imagem $Im(T)$ é um subespaço vetorial de W.

Nesta aula apresentaremos o teorema do núcleo e da imagem, que relaciona as dimensão de V, $N(T)$ e $Im(T)$.

Teorema 21.1.

Sejam V e W espaços vetoriais de dimewnsão finita. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear, então

$$\dim V = \dim N(T) + \dim Im(T) \; .$$

Demonstração

Seja $p = \dim Im(T)$ e $q = \dim N(T)$. Sejam $\{v_1, \ldots, v_q\}$ uma base de $N(T)$ e $\{w_1, w_2, \ldots, w_p\}$ uma base de $Im(T)$.

Existem $\{u_1, \ldots, u_p\} \subset V$ tais que

$$w_1 = T(u_1), w_2 = T(u_2), \ldots, w_p = T(u_p).$$

Vamos mostrar que o conjunto

$$\{v_1, \ldots, v_q, u_1, \ldots, u_p\}$$

é uma base de V, o que demonstra o teorema, pois então temos

$$\dim V = q + p = \dim N(T) + \dim Im(T) \; .$$

Vamos iniciar provando que o conjunto $\{v_1, \ldots, v_q, u_1, \ldots, u_p\}$ é LI. Suponha que

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_q v_q = 0 \quad (1) \; ,$$

onde os α´s e β´s são escalares. Aplicando o operator T, temos

$$\alpha_1 T(u_1) + \cdots + \alpha_p T(u_p) + \beta_1 T(v_1) + \cdots + \beta_q T(v_q) = T(0) = 0 \; .$$

Como $T(u_i) = w_i, i = 1, \ldots, p$ e $T(v_i) = 0, i = 1, \ldots, q$, resulta

que
$$\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_p w_p = 0 \ .$$

Mas $\{w_1, \ldots, w_p\}$ é um conjunto L.I. (sendo base de $Im(T)$), portanto $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0$. Substituindo na equação (1), resulta
$$\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_q v_q = 0 \ .$$

Como $\{v_1, \ldots, v_q\}$ é uma base de $N(T)$, então é um conjunto LI, o que implica em $\beta_1 = \cdots = \beta_q = 0$.

Concluímos que $\{v_1, \ldots, v_q, u_1, \ldots, u_p\}$ é LI.

Vamos agora mostrar que esse conjunto gera V. Seja $v \in V$ um vetor qualquer. Como $T(v) \in Im(T)$, então existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ tais que
$$T(v) = \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_p w_p = \alpha_1 T(u_1) + \ldots + \alpha_p T(u_p) \ .$$

Podemos escrever esta equação como
$$T(v - \alpha_1 u_1 - \ldots - \alpha_p u_p) = 0 \Rightarrow v - \alpha_1 u_1 - \ldots - \alpha_p u_p \in N(T) \ .$$

Como $\{v_1, \ldots, v_q\}$ é uma base de $N(T)$, existem $\beta_1, \ldots, \beta_q$ tais que
$$v - \alpha_1 u_1 - \ldots - \alpha_p u_p = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_q v_q \ ,$$

ou seja
$$v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_p u_p + \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_q v_q$$

Isto mostra que $\{v_1, \ldots, v_q, u_1, \ldots, u_p\}$ gera o espaço V.

CQD

Exemplo 21.1.

A projeção ortogonal sobre o eixo-x é a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (x,0)$.

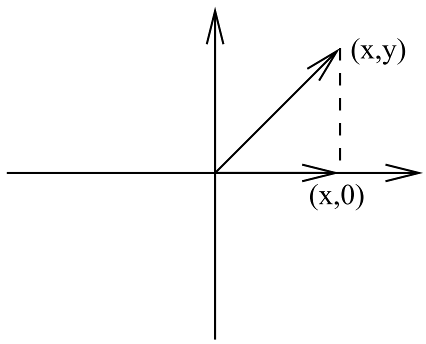


Figura 21.1: Projeção ortogonal sobre o eixo-x.

Temos que o núcleo de T é formado pelos (x,y) tais que

$$T(x,y) = (x,0) = (0,0) \Rightarrow x = 0 \; .$$

Ou seja, $N(T) = \{(0,y)\}$ que é gerado por $\{(0,1)\}$. Portanto $\dim N(T) = 1$.

A imagem de T é

$$ImT = T(x,y) = (x,0) \; ,$$

que é um espaço gerado por $\{(0,1)\}$. Portanto, $\dim Im(T) = 1$.

Os valores de $\dim(T)$ e $Im(T)$ confirmam o teorema do núcleo e da imagem, pois

$$2 = \dim \mathbb{R}^2 = \dim N(T) + \dim Im(T) = 1 + 1 = 2 \; .$$

Exemplo 21.2.

A transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x,y) = (x+y, x-y, x-2y) \; .$$

Vimos, no Exemplo 20.2 da Aula 20, que $N(T) = \{(0,0)\}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{R}^2 = \dim N(T) + \dim\ Im(T) &\Rightarrow 2 = 0 + \dim\ Im(T) \\ &\Rightarrow \dim\ Im(T) = 2 \; . \end{aligned}$$

Para confirmar isto, vamos calcular $Im(T)$. Seja $(a,b,c) \in Im(T)$. Então

$$T(x,y) = (x+y, x-y, x-2y) = (a,b,c) \Rightarrow \begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \\ x-2y=c \end{cases}$$

Reduzindo este sistema, obtemos

$$\begin{array}{l} x = \frac{a+b}{2} \\ y = \frac{a-b}{2} \\ 0 = c - \frac{3b}{2} + \frac{a}{2} \end{array}$$

Exemplo 21.3.

No Exemplo 20.3, da Aula 20, vimos que a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x,y,z,t) = (2x, x+2y-z, x-y+z+t)$$

tem núcleo $N(T) = \{0,k,2k,-k)\}$ que é gerado por $\{(0,1,2,-1\}$. Portanto $\dim N(t) = 1$. Aplicando o teorema do núcleo e da imagem, obtemos

$$\dim \mathbb{R}^4 = \dim N(T) + \dim Im(T) \Rightarrow \dim Im(T) = 4-1 = 3\ .$$

De fato, se $(a,b,c) \in Im(T)$ então,

$$(2x, x+2y-z, x-y+z+t) = (a,b,c) \Rightarrow \begin{cases} 2x = a \\ x+2y-z=b \\ x-y+z+t=c \end{cases} .$$

Não é difícil verificar que este sistema tem solução para qualquer valor de (a,b,c), o que demonstra que $\dim Im(T) = 3$.

Na próxima seção veremos algumas aplicações do teorema que acabamos de provar para transformações injetoras e sobrejetoras.

Transformações Injetoras e Sobrejetoras

Vamos recordar algumas definições. Uma transformação $T: V \to W$ é sobrejetora quando $Im(T) = W$. Como $Im(T)$ é subespaço de W, então, se W tem dimensão finita, temos que T é sobrejetora quando $\dim Im(T) = \dim W$.

Uma transformação é injetora quando

$$T(v_1) = T(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2 \Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \ .$$

No caso de transformações lineares, podemos dar outra caracterização.

Proposição 21.2.

Uma transformação linear T é injetora se, e somente se, vale o seguinte

$$T(v) = 0 \Rightarrow v = 0 \ .$$

Demonstração

Se T é injetora, então claramente vale a propriedade acima, pois $T(v) = 0$ e $T(0) = 0$ implica $v = 0$ pela propriedade injetiva.

Se vale a propriedade acima, temos que

$$T(v_1) = T(v_2) \Rightarrow T(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 \ .$$

CQD

Assim, entre as tranformações lineares, as injetoras são aquelas em que apenas o vetor nulo é levado no vetor nulo, isto é T é injetora quando $N(T) = \{0_v\}$.

Resumindo, em termos dos subespaços $Im(T)$ e $N(T)$, temos o seguinte:

- T é sobrejetora quando $Im(T) = W$.
- T é injetora quando $N(T) = \{0_v\}$.

Vamos agora provar uma consequência muito interessante do teorema do núcleo e da imagem.

Teorema 21.3.

Uma transformação linear entre espaços vetoriais de mesma dimensão finita é injetora se, e somente se, é sobrejetora.

Demonstração

Isto é verdade porque, se $T : V \to W$ e $n = \dim V = \dim W$, então, como pelo teorema do núcleo e da imagem, $n = \dim N(T) + \dim Im(T)$, temos

$$N(T) = \{0_V\} \Leftrightarrow \dim N(T) = 0 \Leftrightarrow \dim Im(T) = n \Leftrightarrow Im(T) = W\ .$$

Em geral, se U é subespaço de W e $\dim U = \dim W$ então $U = W$.

A última equivalência é consequência do fato de que

$$n = \dim Im(T) = \dim W \Rightarrow Im(T) = W\ .$$

CQD

Uma característica importante das transformações lineares bijetoras é que levam uma base em uma base. Mais precisamente:

Teorema 21.4.

Seja $T : V \to W$ uma transformação linear entre os espaços V e W. Então T é bijetora se, e somente se, T leva uma base de V em uma base de W.

Demonstração

Suponha que T leve uma base de V em uma base de W. Seja $n = \dim V$ e $\{v_1, \cdots, v_n\}$ uma base de V. Então $\{T(v_1), \cdots, T(v_n)\}$ é uma base de W, logo V e W têm a mesma dimensão n. Alem disso, se $w \in W$ então existem $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tais que

$$w = \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_n T(v_n) = T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) \Rightarrow w \in ImT\ .$$

Portanto, T é sobrejetora.

Pelo teorema anterior, como T é uma transformação linear sobrejetora entre espaços de mesma dimensão, então T é bijetora.

Suponha agora que T seja uma transformação linear bijetora. Seja $\{v_1, \cdots, v_n\}$ uma base de V. Queremos mostrar que $\{T(v_1), \cdots, T(v_n)\}$ é uma base de W.

Se existem $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tais que

$$\alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_n T(v_n) = 0$$

então

$$T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = 0 \ .$$

Como T é injetora então

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \ .$$

Já que $\{v_1, \cdots, v_n\}$ é base, então $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, o que mostra que $\{T(v_1), \cdots, T(v_n)\}$ é um conjunto L.I.

Resta apenas mostrar $\{T(v_1), \cdots, T(v_n)\}$ gera W. Seja $w \in W$. Como T é sobrejetora, então existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$. Como $\{v_1, \cdots, v_n\}$ é uma base de V, então existem $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tais que $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$. Portanto,

$$w = T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_n T(v_n) \ .$$

CQD

Isomorfismos e Automorfismos

Um isomorfismo dos espaços vetorias V em W é uma aplicação linear $T : V \to W$ que é bijetora. Dizemos que dois espaços vetoriais V e W são *isomorfos* quando existe algum isomorfismo $T : V \to W$.

Vimos, no Teorema 21.4, que, se T é um isomorfismo entre V e W, então T leva uma base de V em uma base de W. Consequentemente, V e W têm a mesma dimensão. Isto é, espaços vetoriais isomorfos têm a mesma dimensão.

Um isomorfismo $T : V \to V$ é chamado *automorfismo* de V.

Exemplo 21.4.

1. O operador identidade $I \colon V \to V$ é um automorfismo de V, para qualquer espaço vetorial V.
2. O operador $T : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ dado por $T(x_1, x_2) = x_1 + x_2 X$ é um isomorfismo de $\mathbb{R}^2$ no espaço $P_1(\mathbb{R})$ dos polinômios de grau menor ou igual a 1 e coeficientes reais.

   A verificação de que T é linear e é bijetora é muito simples e será deixada como exercícios.

Resumo

O resultado mais importante desta aula é o teorema do núcleo e da imagem (Teorema 21.1).
Provamos, como consequência do Teorema 21.1, que uma transformação entre espaços de mesma dimensão é injetora se, e somente se, é sobrejetora.
Provamos tambem que as transformações lineares bijetoras são caracterizadas pela propriedade de levarem base em base.

Exercício 21.1.

1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por $T(x, y, z) = (x + y, 2x - z)$.
   a. Determine o núcleo de T.
   b. Determine a imagem de T.
2. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por $T(x, y, z) = (x, y, 0)$.
   a. Determine o núcleo de T.
   b. Determine a imagem de T.
3. Mostre que a aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z) = (x + z, y + z, x + 2z)$$

   é um automorfismo de $\mathbb{R}^3$.

4. Determine uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que ImT seja o espaço gerado por $\{(1,1,0,1),(2,0,1,1)\}$.

5. Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja gerado por $\{(1,0,1)\}$.

6. Mostre que a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to P_2(\mathbb{R})$ dada por $T(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2X + x_3X^2$ é um isomorfismo.

7. Prove que o espaço $\mathbb{R}^2$ é isomorfo ao espaço

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\} \ .$$

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1. a. $N(T)$ é o espaço gerado por $\{(1,-1,2)\}$.
   b. $ImT = \mathbb{R}^2$.

2. a. $N(T)$ é o espaço gerado por $\{(0,0,1)\}$.
   b. ImT é o espaço gerado por $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$.

3. Vamos determinar $N(T)$.

$$T(x,y,z) = (0,0,0) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+z & = & 0 \\ y+z & = & 0 \\ x+2z & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow x = y = z = 0$$

Portanto T é transformação linear injetora entre espaços de mesma dimensão, o que implica que é bijetora.

4. Partindo da base $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, base canônica do $\mathbb{R}^3$, vamos definir uma transformação linear por
$(1,0,0) \to (1,1,0,1) \quad (0,1,0) \to (2,0,1,1)$
$(0,0,1) \to (0,0,0,0)$
A transformação é

$$\begin{array}{rcl} T(x,y,z) & = & xT(1,0,0)+yT(0,1,0)+zT(0,0,1) \\ & = & x(1,1,0,1)+y(2,0,1,1)+z(0,0,0,0) \\ & = & (x+2y,x,y,x+y) \ . \end{array}$$

5. Vamos iniciar determinando uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua o vetor $(1,0,1)$. Por exemplo, $\{(1,0,0),(0,1,0),(1,0,1)\}$ é

base de $\mathbb{R}^3$ (verifique!). Agora definimos uma transformação linear por

$$(1,0,0) \to (1,0) \quad (0,1,0) \to (0,1) \quad (1,0,1) \to (0,0)\ .$$

Um vetor (x,y,z) se escreve nesta base como

$$(x,y,z) = (x-z)(1,0,0) + y(1,0,0) + z(1,0,1)$$

Portanto,

$$T(x,y,z) = (x-z)(1,0) + y(1,0) + z(0,0) = (x-z,y)\ .$$

6. Como $\dim \mathbb{R}^3 = \dim P_2(\mathbb{R}) = 3$, basta mostrar que T é injetora (ou que T é sobrejetora).

$$T(x_1,x_2,x_3) = 0 \Rightarrow x_1 + x_2X + x_3X^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

7. Um isomorfismo é dado por $T(x,y) = (x,y,0)$.

Aula 22

REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. determinar a representação matricial de uma transformação linear;
2. determinar uma transformação linear a partir de sua representação matricial.

Representação Matricial de uma Transformação Linear

Na Aula 18, dissemos que faríamos isso na Aula 23, mas resolvemos adiantar esse tópico!!

Na Aula 18, vimos que toda transformação matricial é linear. Num sentido inverso, mostraremos agora que toda transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita é matricial, isto é, pode ser representada por uma matriz, de modo que sua aplicação a um vetor do domínio se resuma a multiplicar essa matriz pelo vetor. Veremos que os elementos dessa matriz dependem das bases escolhidas, tanto para o domínio quanto para o contradomínio, como obtê-la e como aplicá-la em exercícios.

A ideia:

Dados V e W, espaços vetoriais, e $T: V \to W$, linear, queremos determinar uma matriz M que nos possibilite escrever:

$$T(v) = Mv,$$

para todo $v \in V$.

Sejam:

V: espaço vetorial, de dimensão n;

W: espaço vetorial, de dimensão m;

$A = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, base de V;

$B = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$, base de W;

$T: V \to W$, uma transformação linear;

$v \in V$.

Primeiramente, como $v \in V$, e A é base de V, podemos escrever v como combinação linear dos vetores de A, isto é, existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ tais que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n. \quad (1)$$

Usando (1) e a linearidade de T, podemos escrever:

$$\begin{aligned} T(v) &= T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n) = \\ &= \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + ... + \alpha_n T(v_n). \quad (2) \end{aligned}$$

Cada vetor $T(v_i), i = 1,2,...,n$, presente em (2), pertence a W; logo, pode ser expresso como combinação linear dos vetores da base B. Ou seja, para cada vetor $v_i, i = 1,2,...,n$, de A, existem escalares $a_{1i}, a_{2i}, ..., a_{mi}$ tais que

$$T(v_i) = a_{1i}w_1 + a_{2i}w_2 + ... + a_{mi}w_m.$$

Detalhando mais, temos:

$$T(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + ... + a_{m1}w_m$$

$$T(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + ... + a_{m2}w_m$$

$$\vdots$$

$$T(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + ... + a_{mn}w_m$$

Substituindo essas expressões em (2), temos:

$$\begin{aligned} T(v) &= \alpha_1(a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + ... + a_{m1}w_m) \\ &\quad +\alpha_2(a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + ... + a_{m2}w_m) \\ &\quad +... \\ &\quad +\alpha_n(a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + ... + a_{mn}w_m) = \\ &= (\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + ... + \alpha_n a_{1n})w_1 \\ &\quad +(\alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + ... + \alpha_n a_{2n})w_2 \\ &\quad +... \\ &\quad +(\alpha_1 a_{m1} + \alpha_2 a_{m2} + ... + \alpha_n a_{mn})w_m \qquad (3) \end{aligned}$$

O vetor $T(v)$, por sua vez, está em W. Logo, pode ser escrito em relação à base B, isto é, existem escalares $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ tais que

$$T(v) = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + ... + \beta_m w_m. \qquad (4)$$

Comparando as expressões (3) e (4), concluímos que:

$$\beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + ... + a_{1n}\alpha_n$$

$$\beta_2 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + ... + a_{2n}\alpha_n$$

$$\vdots$$

$$\beta_m = a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + ... + a_{mn}\alpha_n$$

As igualdades acima podem ser representadas na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Observe que os vetores-coluna que aparecem nessa igualdade são os vetores-coordenadas dos vetores v e $T(v)$, em relação às bases A e B, respectivamente. Representando a matriz $m \times n$ por $[T]_{A,B}$, podemos escrever a igualdade (5) na forma:

$$[T]_{A,B}[v]_A = [T(v)]_B$$

Dizemos que a matriz $[T]_{A,B}$ é a *matriz de T (ou matriz associada a T) em relação às bases A e B*.

OBTENDO A MATRIZ ASSOCIADA A UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Você não terá que repetir todo esse procedimento para obter a matriz associada a uma transformação linear. Primeiramente, note que, se $\dim V = n$ e $\dim W = m$, então a matriz associada a uma transformação linear de V em W é $m \times n$ e é tal que:

- a primeira coluna é formada pelos elementos do vetor-coordenadas de $T(v_1)$ em relação à base B, ou seja, é $[T(v_1)]_B$;
- a segunda coluna é formada pelos elementos do vetor-coordenadas de $T(v_2)$ em relação à base B, ou seja, é $[T(v_2)]_B$;
- de modo geral, a i-ésima coluna da matriz é a imagem do i-ésimo vetor da base A, escrito na base B.

Essa ideia está ilustrada na **Figura 22.1**.

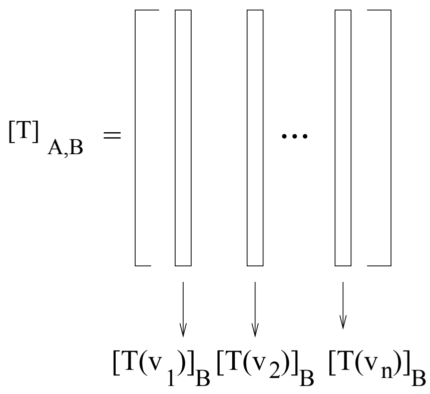


Figura 22.1: A matriz $[T]_{A,B}$, onde $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$.

✍ Quando as bases consideradas são as canônicas, dizemos que a matriz obtida é a matriz canônica da transformação linear. Além disso, quando lidamos com operadores lineares, ou seja, com transformações lineares em que o domínio e o contradomínio coincidem, se consideramos uma única base para representar, tanto os vetores de entrada quanto suas imagens, podemos simplificar a notação. Por exemplo, sendo A a base escolhida, representamos $[T]_{A,A}$ por $[T]_A$.

Exemplo 22.1.

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por $T(x,y) = (x+y, 2x, x-3y)$. Vamos determinar a matriz associada a T, relativamente às bases $A = \{(2,1), (-1,0)\}$ e $B = \{(1,2,1), (0,1,1), (0,0,3)\}$.

Sabemos que $[T]_{A,B}$ é do tipo 3×2 e que cada coluna é a imagem do respectivo vetor da base A, escrita na base B. Vamos proceder aos seguintes passos:

a. Aplicar T aos vetores da base A:

   $T(2,1) = (3,4,-1)$

   $T(-1,0) = (-1,-2,-1)$

b. Explicitar como a base B gera $\mathbb{R}^3$, isto é, determinar como um vetor genérico de $\mathbb{R}^3$ se decompõe como combinação linear dos vetores de B:

$$(x,y,z) = a(1,2,1) + b(0,1,1) + c(0,0,3) \Rightarrow \begin{cases} a = x \\ b = y - 2x \\ c = \frac{x-y+z}{3} \end{cases}.$$

Assim, o vetor-coordenada de (x,y,z), em relação à base B, é $\begin{bmatrix} x \\ y-2x \\ \frac{x-y+z}{3} \end{bmatrix}$.

c. Obter os vetores-coordenadas dos vetores do item *a*.:

$[(3,4,-1)]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ e $[(-1,-2,-1)]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

d. Escrever a matriz:

$$[T]_{A,B} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

No Exemplo 22.1, dada uma transformação e fixadas duas bases, obtivemos a matriz associada. No próximo exemplo seguiremos o percurso inverso: vamos determinar a transformação, a partir da matriz.

Exemplo 22.2.

Sejam $A = \{(1,1,0),(0,1,0),(0,0,2)\}$ e $B = \{(1,1),(2,0)\}$, bases, respectivamente, de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, transformação linear com matriz associada $[T]_{A,B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$. Vamos determinar a transformação T, isto é, a expressão de $T(x,y,z)$, para $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Pela definição de matriz associada, temos que

$T(1,1,0) = 1.(1,1) + 0.(2,0) = (1,1)$

$T(0,1,0) = 1.(1,1) + 3.(2,0) = (7,1)$

$T(0,0,2) = 2.(1,1) + 0.(2,0) = (2,2)$

Agora, vamos escrever $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ em relação à base A:

$$(x,y,z) = a.(1,1,0) + b(0,1,0) + c(0,0,2) = (a, a+b, 2c).$$

Daí, temos $a = x; b = y - x$ e $c = \frac{z}{2}$.

Então,

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= x.T(1,1,0) + (y-x)T(0,1,0) + \frac{z}{2}T(0,0,2) \\ &= x(1,1) + (y-x)(7,1) + \frac{z}{2}(2,2) \\ &= (-6x+7y+z, y+z). \end{aligned}$$

Exemplo 22.3.

Seja T o operador linear definido em P_3 tal que $T(a+bx+cx^2+dx^3) = (2a+b)+(2b+c)x+(2c+d)x^2+2dx^3$. Determine a matriz canônica de T.

A base canônica de P_3 é $C = \{1, x, x^2, x^3\}$. Vamos aplicar T em cada um dos vetores de C:

$$T(1) = 2 \Rightarrow [T(1)]_C = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$T(x) = 1 + 2x \Rightarrow [T(x)]_C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$T(x^2) = x + 2x^2 \Rightarrow [T(x^2)]_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$T(x^3) = x^2 + 2x^3 \Rightarrow [T(x^3)]_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix};$$

Logo, $[T]_C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Resumo

Nesta aula vimos como determinar a matriz associada a uma transformação linear. Essa matriz depende das bases de saída e de chegada, fixadas. A representação matricial é privilégio das transformações lineares e possibilita, entre outras aplicações importantes, um tratamento computacional: armazenando a matriz, a própria transformação linear está armazenada, pronta para ser aplicada a quantidade de vezes que se fizer necessária. Nas próximas aulas veremos que, à medida que operamos com transformações lineares, operações análogas podem ser realizadas com as matrizes dessas transformações.

Exercício 22.1.

1. Determine a matriz $[T]_{A,B}$, sendo $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por $T(x,y,z) = (2x+y-z, x+2y)$, $A = \{(1,0,0),(2,-1,0),(0,1,1)\}$ e $B = \{(-1,1),(0,1)\}$.

2. Determine o operador linear T, definido em $\mathbb{R}^2$, sabendo que sua matriz em relação à base $A = \{1,1),(1,2)\}$ é
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Seja $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $[T]_{A,B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, sendo $A = \{(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1)\}$ e $B = \{(-1,0),(0,-1)\}$, bases do $\mathbb{R}^3$ e do $\mathbb{R}^2$, respectivamente.

   a. Encontre a expressão de $T(x,y,z)$.

   b. Determine o núcleo de T.

   c. Determine a imagem de T.

   d. T é injetora? É sobrejetora?

4. Seja T a transformação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y,z) = (2x+y-z, x+2y)$. Fixadas as bases $A = \{(1,0,0),(2,-1,0),(0,1,1)\}$ e $B = \{(-1,1),(0,1)\}$, de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente, e considerando $v = (1,2,0) \in \mathbb{R}^3$,

   a. Dê o vetor-coordenadas de v em relação à base A.

   b. Calcule $T(v)$.

c. Determine o vetor-coordenadas de $T(v)$ em relação à base B.

d. Obtenha a matriz $[T]_{A,B}$.

e. Calcule o vetor-coordenadas de $T(v0$ em relação à base B, usando a matriz obtida no item d) (isto é, calcule $[T]_{A,B}[v]_A)$ e compare com o item c)).

5. A transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tem matriz

$$[T]_{A,B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

em relação às bases $A = \{(-1,1),(1,0)\}$, do $\mathbb{R}^2$, e $B = \{(1,1,-1),(2,1,0),(3,0,1)\}$, do $\mathbb{R}^3$. Determine:

a. A expressão de $T(x,y)$.

b. A matriz canônica de T.

6. Sejam $A = \{(1,-1),(0,2)\}$ e $B = \{(1,0,-1),(0,1,2),(1,2,0)\}$, bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente, e $[T]_{A,B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

a. Determine T.

b. Ache uma base C de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T]_{A,C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

7. Considere o operador identidade I, definido em $\mathbb{R}^2$, isto é, o operador linear tal que $I(x,y) = (x,y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Considere as bases $A = \{(1,1),(0,-1)\}$ e $B = \{(2,-3),(-3,5)\}$, de $\mathbb{R}^2$. Encontre a matriz $[I]_{A,B}$.

Autoavaliação

Basicamente, vimos duas técnicas: *obter* e *aplicar* a matriz associada a uma transformação linear. Você deverá estar familiarizado com os passos que levam à obtenção dessa matriz e, além disso, ter sempre em mente que a matriz $[T]_{A,B}$ só pode ser multiplicada por vetores representados na base A, e que o produto é a imagem do vetor, escrita em relaçao à base B. Caso você tenha alguma dúvida, entre em contato com o tutor da disciplina.

Respostas dos Exercícios

1. $[T]_{A,B} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

2. $T(x,y) = 2x, 2x+y)$

3. a. $T(x,y,z) = (z-2y, -x+y)$
   b. $Im\,T = \mathbb{R}^2$
   c. $N(T) = [(1,1,2)]$ (subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelo vetor $(1,1,2)$).
   d. T não é injetora; T é sobrejetora.

4. a. $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$
   b. $(4,5)$
   c. $\begin{bmatrix} -4 \\ 9 \end{bmatrix}$
   d. $\begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

5. a. $T(x,y) = (8x+18y, 6x+11y, -2x-4y)$
   b. $[T] = \begin{bmatrix} 8 & 18 \\ 6 & 11 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

6. a. $T(x,y) = \left(\frac{x-y}{2}, \frac{x-y}{2}, 2x+y\right)$
   b. $C = \{(1,1,1), (0,1,0), (-1,-1,2)\}$.

7. $\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

Aula 23

A ÁLGEBRA DAS TRANSFORMAÇÕES

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. operar algebricamente com as transformaçõs lineares;
2. reconhecer as analogia entre as operações efetuadas com transformações lineares e as efetuadas com suas matrizes associadas;
3. reconhecer a estrutura de espaço vetorial no conjunto das transformações lineares.

A ÁLGEBRA DAS TRANSFORMAÇÕES

Na aula anterior, vimos que toda transformação linear entre espaços de dimensão finita são matriciais. Por outro lado, nas Aulas 2 e 3, do Módulo I, aprendemos a somar matrizes, a multiplicar uma matriz por um número real e a multiplicar duas matrizes. Pois bem: nesta aula, iremos unir os conceitos de operações com matrizes e com transformações lineares matriciais. Definiremos operações que nos possibilitarão combinar transformações lineares, de modo a obter novas transformações lineares. Veremos, também, que, com essas operações, o conjunto de todas as transformações lineares definidas entre dois espaços fixados é, ele próprio, um espaço vetorial.

ADIÇÃO DE TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Sejam V e W espaços vetoriais, $T : V \to W$, $S : V \to W$ transformações lineares. Definimos a transformação *soma* de T e S como sendo:

$$\begin{aligned} (T+S): \quad & V \to W \\ & v \mapsto T(v)+S(v) \end{aligned}$$

Vamos mostrar que a soma de transformações lineares é uma transformação linear. Para isso, sejam $u, v \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

- $(T+S)(u+v) = T(u+v)+S(u+v) =$
  $= T(u)+T(v)+S(u)+S(v) = T(u)+S(u)+T(v)+S(v) =$
  $= (T+S)(u)+(T+S)(v)$.
- $(T+S)(\alpha v) = T(\alpha v)+S(\alpha v) = \alpha T(v)+\alpha S(v) =$
  $= \alpha[T(v)+S(v)] = \alpha(T+S)(v)$.

MULTIPLICAÇÃO DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR POR UM NÚMERO REAL

Sejam V um espaço vetorial, $T : V \to W$, uma transformação linear e $k \in \mathbb{R}$. Definimos a transformação *produto* de k por T como sendo:

$$\begin{aligned} (kT): \quad & V \to W \\ & v \mapsto kT(v) \end{aligned}$$

Vamos mostrar que o produto de transformação linear por escalar é uma transformação linear. Para isso, sejam $u, v \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

- $(kT)(u+v) = kT(u+v) = k(T(u)+T(v)) =$
  $= kT(u) + kT(v) = (kT)(u) + (kT)(v)$.
- $(kT)(\alpha v) = kT(\alpha v) = k\alpha T(v) = \alpha[kT(v)] = \alpha(kT)(v)$.

Podemos afirmar o seguinte resultado:

Sejam V e W espaços vetoriais. Com as operações de adição e multiplicação por escalar vistas acima, o conjunto de todas as transformações lineares de V em W formam um espaço vetorial. Representaremos esse espaço por $L(V,W)$. Além disso, se $dim\, V = n$ e $dim\, W = m$, temos que $dim\, L(V,W) = mn$. No caso particular de $V = W$, o espaço vetorial de todos os operadores lineares definidos em V será representado por $L(V)$.

Você poderá encontrar uma demonstração desse resultado no livro de Álgebra Linear, de Seymour Lipschutz, da Coleção Schaum.

Exemplo 23.1.

Sejam $T, S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ as transformações lineares dadas por $T(x,y,z) = (x+y, x-y+z)$ e $S(x,y,z) = (x,y)$. Então:

- $(T+S)(x,y,z) = T(x,y,z) + S(x,y,z) = (2x+y, x+z)$.
- $(3T)(x,y,z) = 3(x+y, x-y+z) = (3x+3y, 3x-3y+3z)$.
- $(2T - 5S)(x,y,z) = 2(x+y, x-y+z) - 5(x,y) =$
  $= (-3x+2y, 2x-7y+2z)$.

Composição de Tansformações Lineares

Sejam V, U, W espaços vetoriais, $T : V \to U$ e $S : U \to W$ transformações lineares. Definimos a transformação *composta* $S \circ T$ como sendo:

$$\begin{aligned} S \circ T :\ & V \to W \\ & v \mapsto S(T(v)) \end{aligned}$$

A **Figura 23.1** ilustra essa ideia:

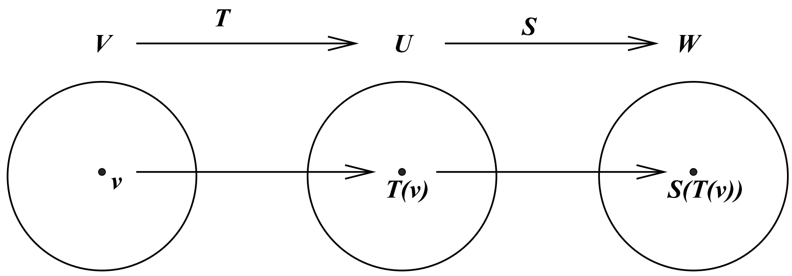


Figura 23.1: A transformação composta $S \circ T$.

Vamos mostrar que a composta de transformações lineares é uma transformação linear. Para isso, sejam $u, v \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

- $(S \circ T)(u+v) = S[T(u+v)] = S[T(u)+T(v)] =$
  $= S(T(u)) + S(T(v)) = (S \circ T)(u) + (S \circ T)(v)$.
- $(S \circ T)(\alpha v) = S[T(\alpha v)) = S[\alpha T(v)] = \alpha S(T(v)) =$
  $= \alpha(S \circ T)(v)$.

Exemplo 23.2.

Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y) = (x+y, 3x, x-2y)$ e $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por $S(x,y,z) = (x+y, x-y, 0, x+y+z)$. A transformação composta $S \circ T$, de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^4$, é dada por:

$$\begin{aligned}(S \circ T)(x,y) = S(T(x,y)) &= S(x+y, 3x, x-2y) = \\ &= (4x+y, -2x+y, 0, 5x-y).\end{aligned}$$

As Operações Análogas com as Matrizes Associadas

Sendo V e W espaços vetoriais de dimensão finita, vimos, na Aula 22, que, fixadas bases em V e em W, cada transformação linear definida entre esses espaços está associada a uma matriz. Ora, qual será a matriz associada à soma de duas transformações lineares? E ao produto de uma transformação linear por um escalar? E à composta de duas transformações lineares? Fazendo os cálculos que levam à obtenção da matriz associada, chegamos às seguintes conclusões:

- A matriz associada à soma de duas transformações lineares é a soma das matrizes associadas a essas transformações.
- A matriz associada ao produto de uma transformação linear por um escalar é o produto da matriz associada à transformação pelo mesmo escalar.
- A matriz associada à composta de duas transformações lineares é o produto (numa determinada ordem) das matrizes associadas às transformações.

Mais formalmente, o que temos é:

- Se T e S são transformações lineares de V em W; A é base de V; B é base de W, então
  $[T+S]_{A,B} = [T]_{A,B} + [S]_{A,B}$
- Se T é transformação linear de V em W; A é base de V; B é base de W e $k \in \mathbb{R}$, então
  $[kT]_{A,B} = k[T]_{A,B}$
- Se T é transformação linear de V em U; S é transformação linear de U em W; A é base de V, B é base de U e C é base de W, então
  $[S \circ T]_{A,C} = [S]_{B,C} \cdot [T]_{A,B}$

Exemplo 23.3.

Vamos retomar as transformações do Exemplo 23.1: $T,S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, dadas por $T(x,y,z) = (x+y, x-y+z)$ e $S(x,y,z) = (x,y)$. As matrizes canônicas de T e S são:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad [S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então (em cada caso, você pode obter a matriz diretamente e comparar os resultados!!):

- $[T+S] = [T]+[S] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$
- $[3T] = 3[T] = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$

- $[2T-5S]=2[T]-5[S]=2\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$
  $= \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -7 & 2 \end{bmatrix}.$

Exemplo 23.4.

Consideremos, novamente, as transformações dadas no Exemplo 23.2: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, com $T(x,y)=(x+y,3x,x-2y)$ e $S(x,y,z)=(x+y,x-y,0,x+y+z)$. Vamos aplicar essas transformações aos vetores das bases canônicas dos espaços envolvidos:

$T(1,0)=(1,3,1)$

$T(0,1)=(1,0,-2)$

$S(1,0,0)=(1,1,0,1)$

$S(0,1,0)=(1,-1,0,1)$

$S(0,0,1)=(0,0,0,1)$.

Logo, $[T]=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ e $[S]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Daí,

$$[S\circ T]=[S].[T]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 23.5.

Considere o operador linear T, definido em $\mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y)=(2x,x+3y)$. Representamos por T^2 a composta $T\circ T$. Vamos determinar a matriz (canônica) de T, a expressão de T^2 e a matriz de T^2.

Como $T(1,0)=(2,1)$ e $T(0,1)=(0,3)$, temos

$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Agora, $T^2(x,y) = T(T(x,y)) = T(2x, x+3y) = (4x, 5x+9y)$.

Temos duas maneiras de obter a matriz de T^2:

1. Pela construção da matriz associada:

   $T^2(1,0) = (4,5)$

   $T^2(0,1) = (0,9)$

   Logo, $[T^2] = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$.

2. Usando o fato de que a matriz de $T \circ T$ é o produto da matriz de T por ela mesma:

   $[T^2] = [T].[T] = [T]^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$,

   como já havíamos obtido.

Resumo

Nesta aula aprendemos a obter novas transformações lineares, através de operações algébricas e de composição de transformações lineares. Vimos, também, como as matrizes associadas das transformações lineares envolvidas nas operações se relacionam entre si. Nas próximas aulas estudaremos, em detalhes, as principais transformações lineares geométricas (aquelas definidas em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$) e exploraremos bastante a praticidade de se trabalhar com composição de transformações e suas matrizes associadas.

Exercício 23.1.

1. Sejam T e S transformações lineares de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$ definidas por $T(x,y,z) = (3x, y-z)$ e $S(x,y,z) = (x-z, x+y+z)$. Encontre fórmulas para as transformações $T+S$, $4T$ e $3T-2S$.

2. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dadas por $T(x,y) = (5x, x-y, 3y)$ e $S(x,y,z) = (x+3z, 2y-z)$. Deduza fórmulas para as compostas $S \circ T$ e $T \circ S$.

3. Na Aula 18, Exercício 18.1, item 5, você descreveu, geometricamente, o efeito de cada aplicação dada, nos vetores de $\mathbb{R}^2$. As transformações dadas foram:

$$T_1(v) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad T_2(v) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T_3(v) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad T_4(v) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Faça uma descrição geométrica do efeito da aplicação de cada transformação linear abaixo, nos vetores de $\mathbb{R}^2$:

   a. $T_3 \circ T_1$

   b. $T_1 \circ T_2$

   c. $T_4 \circ T_2$

4. Sejam F e T operadores lineares em $\mathbb{R}^2$ definidos por $F(x,y) = (y,x)$ e $T(x,y) = (0,x)$. Estabeleça fórmulas que definam os operadores $F+T$, $2F-3T$ e $F \circ T$.

5. Seja $C = \{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Seja $T \in L(\mathbb{R}^3)$ o operador dado por $T(e_1) = e_2; T(e_2) = e_3$ e $T(e_3) = e_1$.

   a. Determine $T(x,y,z)$.

   b. Mostre que $T^3 = I$.
   (Obs.: $T^3 = T \circ T \circ T$; I indica o operador identidade.)

6. Sejam $T, F \in L(V)$ tais que $T \circ F = F \circ T$. Mostre que:

   a. $(T+F)^2 = T^2 + 2(T \circ F) + F^2$

   b. $(T+F) \circ (T-F) = T^2 - F^2$

7. Dizemos que um operador $T \in L(V)$ é *idempotente* quando $T^2 = T$. Dizemos que um operador $T \in L(V)$ é *nilpotente* quando $T^n = 0$ (operador nulo), para algum número n natural.

   Determine se os seguintes operadores lineares são idempotentes, nilpotentes, ou nenhuma das duas coisas:

   a. $T \in L(\mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y) = (0,x)$.

   b. O operador derivação $D \in L(P_n)$.

   c. $T \in L(\mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y,z) = (-x,-y,-z)$

d. $F \in L(\mathbb{R}^2$ dado por $F(x,y) = (x,0)$

e. $T \in L(\mathbb{R}^3)$ tal que $T(x,y,z) = (z,x,y)$

8. **Desafio:** Suponha $T : V \to U$ e $S : U \to W$, transformações lineares. Demonstre o seguinte:

   a. Se T e S são injetoras, então $S \circ T$ é injetora.

   b. Se T e S são sobrejetoras, então $S \circ T$ é sobrejetora.

   c. Se $S \circ T$ é injetora, então T é injetora.

   d. Se $S \circ T$ é sobrejetora, então S é sobrejetora.

Autoavaliação

Esta aula reuniu conceitos que você talvez já conhecesse, como soma e composição de funções, e operações com matrizes. O interessante é reunir essas ideias e verificar como as operações entre transformações lineares são análogas ao que ocorre com as matrizes associadas. Além disso, o fato de que o conjunto das transformações lineares seja um espaço vetorial nos dá a visão de como poderíamos construir novos espaços, num processo infinito: o próximo passo seria considerar o conjunto das transformações lineares definidas entre espaços de transformações lineares!! Se você tiver sentido qualquer dificuldade na resolução dos exercícios, ou na compreensão dos exemplos, peça ajuda ao tutor da disciplina. As próximas duas aulas serão de aplicação desses conceitos às principais transformações geométricas.

Respostas dos Exercícios

1. $(T+S)(x,y,z) = (4x-z, x+2y)$

   $(4T)(x,y,z) = (12x, 4y-4z)$

   $(3T-2S)(x,y,z) = (7x+2z, -2x+y-5z)$

2. $(S \circ T)(x,y) = S(5x, x-y, 3y) = (5x+9y, 2x-5y)$.

$$\begin{aligned}(T \circ S)(x,y,z) &= T(x+3z, 2y-z) = \\ &= (5x+15z, x-2y+4z, 6y-3z).\end{aligned}$$

3. a. Dilatação por um fator de 3 e rotação, no sentido anti-horário, de 180^o.

b. Dilatação por um fator de 3/2.

c. Contração por um fator de 1/2 e projeção sobre o eixo y.

4. $(F+T)(x,y) = (y,2x)$; $(2F-3T)(x,y) = (2y,-x)$; $(F\circ T)(x,y) = (x,0)$

5. $T(x,y,z) = (z,x,y)$

6. a. Seja $v \in V$. Então

$$\begin{aligned}
(T+F)^2(v) &= [(T+F)\circ(T+F)](v)\\
&= (T+F)[(T+F)(v)] =\\
&= (T+F)[T(v)+F(v)] =\\
&= T[T(v)+F(v)]+\\
&\quad +F[T(v)+F(v)] =\\
&= T(T(v))+T(F(v))+F(T(v))+\\
&\quad +F(F(v)) =\\
&= (T\circ T)(v)+(T\circ F)(v)+\\
&\quad +(F\circ T)(v)+(F\circ F)(v).
\end{aligned}$$

Como $T\circ F = F\circ T$, temos:

$$\begin{aligned}
(T+F)^2(v) &= (T\circ T)(v)+\\
&\quad +2(T\circ F)(v)+(F\circ F)(v) =\\
&= T^2(v)+2(T\circ F)(v)+\\
&\quad +F^2(v)
\end{aligned}.$$

Como essa igualdade se verifica para qualquer $v \in V$, temos que

$(T+F)^2 = T^2+2(T\circ F)+F^2$.

b. Seja $v \in V$.

$$\begin{aligned}
[(T+F)\circ(T-F)](v) &= (T+F)[(T-F)(v)] =\\
&= (T+F)[T(v)-F(v)] =\\
&= T(T(v)-F(v))+\\
&\quad +F(T(v)-F(v)) =\\
&= T(T(v))-T(F(v))+\\
&\quad +F(T(v))-F(F(v))
\end{aligned}.$$

Como $T\circ F = F\circ T$, temos:

$$\begin{aligned}
[(T+F)\circ(T-F)](v) &= T(T(v))-F(F(v)) =\\
&= T^2(v)-F^2(v).
\end{aligned}$$

Como essa igualdade se verifica para qualquer $v \in V$,

temos que
$(T+F)\circ(T-F)=T^2-F^2$.

7. a. nilpotente ($T^2=0$)

   b. nilpotente (A derivada de ordem $n+1$ de um polinômio de grau menor ou igual a n é o polinômio nulo.)

   c. idempotente

   d. idempotente

   e. nenhuma das duas coisas

8. a. Vamos supor que existem u e v em V tais que $(S\circ T)(u)=(S\circ T)(v)$. Então $S(T(u))=S(T(v))$. Como S é injetora, $T(u)=T(v)$. Como T é injetora, $u=v$. Logo, se $(S\circ T)(u)=(S\circ T)(v)$, então $u=v$, o que prova que $S\circ T$ é injetora.

   b. Seja $w\in W$. Como S é sobrejetora, existe $u\in U$ tal que $S(u)=w$. Como T é sobrejetora, existe v em V para o qual $T(v)=u$. Assim, $(S\circ T)(v)=S(T(v))=S(u)=w$. Logo, $S\circ T$ é sobrejetora.

   c. Suponhamos T não injetora. Então, existem vetores distintos, v_1,v_2, em V, para os quais $T(v_1)=T(v_2)$. Assim, $(S\circ T)(v_1)=S(T(v_1))=S(T(v_2))=(S\circ T)(v_2)$; logo, $S\circ T$ não é injetora, o que contraria a nossa hipótese. Portanto, T é injetora.

   d. Se $v\in V$, então $(S\circ T)(v)=S(T(v))\in Im\,S$. Isto é, $Im(S\circ T)\subset Im\,S$. Vamos supor que S não é sobrejetora. Então $Im\,S$ está propriamente contida em W.

   Logo, $Im(S\circ T)$ está propriamente contida em W. Assim, $S\circ T$ não é sobrejetora, o que nega a nossa hipótese. Logo, S é sobrejetora.

Lembrando: Uma função $f:A\to B$ é sobrejetora quando $Im(f)=B$. Logo, quando f não é sobrejetora, sua imagem é um subconjunto próprio do contradomínio B.

Aula 24

TRANSFORMAÇÕES ESPECIAIS NO $\mathbb{R}^2$

Objetivo

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. estudar alguns tipos de transformações do $\mathbb{R}^2$: rotação, reflexão, escala e cisalhamento.

TRANSFORMAÇÕES ESPECIAIS NO $\mathbb{R}^2$

Nesta aula estudaremos algumas transformações especiais no $\mathbb{R}^2$. Vamos começar pela transformação de escala.

TRANSFORMAÇÃO DE ESCALA

Dado um escalar k, a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x) = kx$$

é chamada *transformação de escala*. Também chamamos esta transformação de *contração* quando $0 \leq k < 1$ e de *dilatação* quando $k > 1$.

Este tipo de transformação mantém a direção e sentido de cada vetor de $\mathbb{R}^2$, multiplicando o módulo do vetor pelo escalar k, como mostra a figura a seguir.

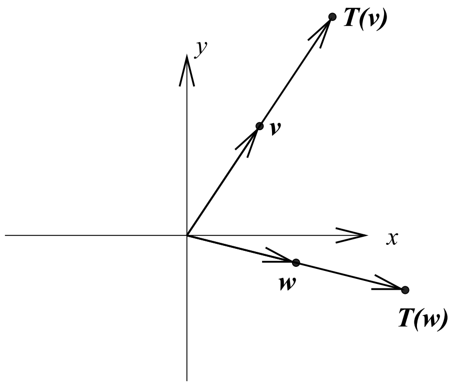


Figura 24.1: Transformação de escala.

Quando estudamos uma transformação linear, muitas vezes é interessante observar sua ação sobre uma certa região do plano. Por exemplo, observar como ela transforma o quadrado unitário

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}$$

ou o círculo unitário

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} .$$

Vejamos a ação da dilatação $T(x) = 1,5x$ nestes dois casos:

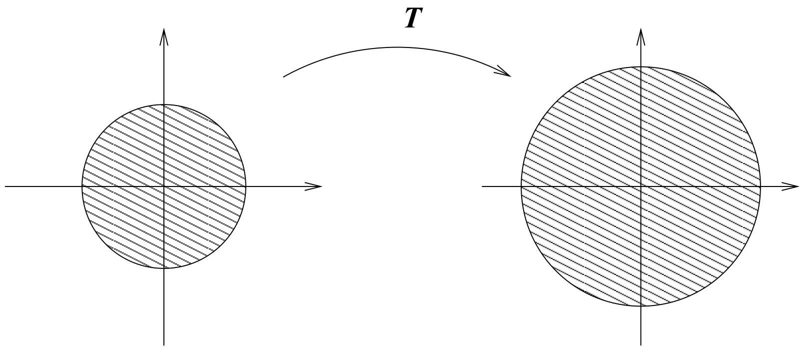


Figura 24.2: Ação de $T(x) = 1,5x$ em um círculo.

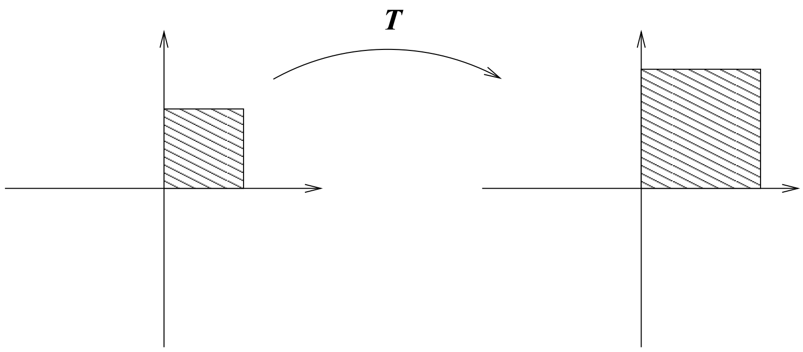


Figura 24.3: Ação de $T(x) = 1,5x$ em um quadrado.

CISALHAMENTO

Uma transformação de cisalhamento é uma transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada pela matriz $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ou pela matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$, onde k é um número real não-nulo.

A transformação dada por $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, isto é

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+ky \\ y \end{bmatrix}$$

é chamada *cisalhamento horizontal*. Observe, na figura a seguir, o efeito desta transformação dada por $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sobre o quadrado unitário.

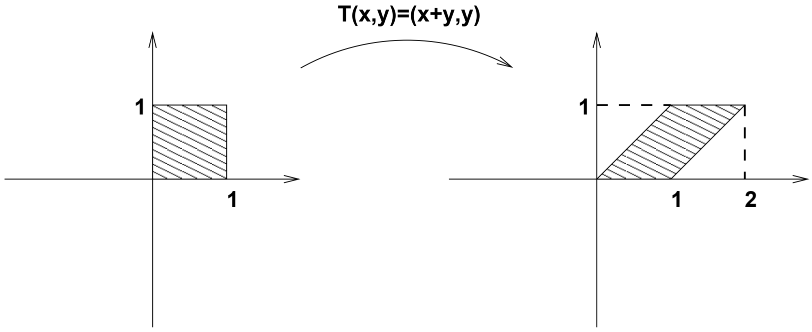


Figura 24.4: Cisalhamento horizontal.

A transformação dada por $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$, ou seja,

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ kx+y \end{bmatrix}$$

é chamada *cisalhamento vertical*. Observe, na figura a seguir, o efeito desta transformação dada por $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ sobre o quadrado unitário.

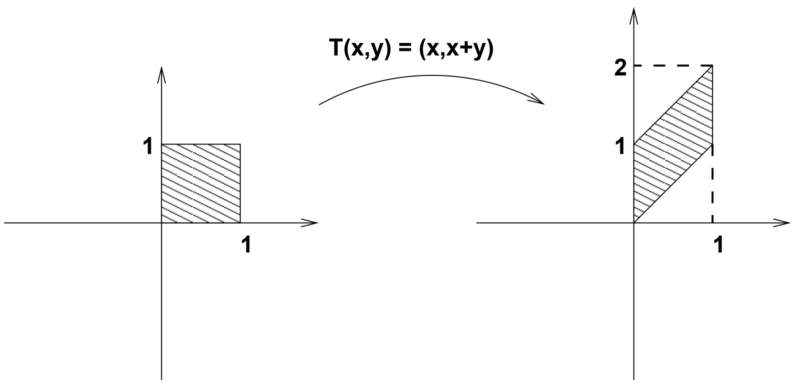


Figura 24.5: Cisalhamento horizontal.

Para mostrar que uma transformação de cisalhamento leva o quadrado unitário em um paralelogramo, basta notar que uma transformação deste tipo leva segmentos de reta em segmentos de reta. A reta $ax+by=c$ é levada pela transformação $T(x,y)=(x+ky,y)$, por exemplo, na reta

$$a(x+ky)+by=c \;\Rightarrow\; ax+(ak+b)y=c\,.$$

Além disso, retas paralelas $ax+by=c$ e $ax+by=c'$ são claramente levadas em retas paralelas. Portanto, os vértices do quadrado unitário são levados em vértices de um paralelogramo.

Rotação no Plano

Seja $v=(x,y)$ um vetor no plano. Suponha que este vetor faça um ângulo θ com o eixo-x. Seja $v'=(x',y')$ o vetor obtido rodando v de um ângulo ϕ, no sentido anti-horário, como mostra a figura abaixo.

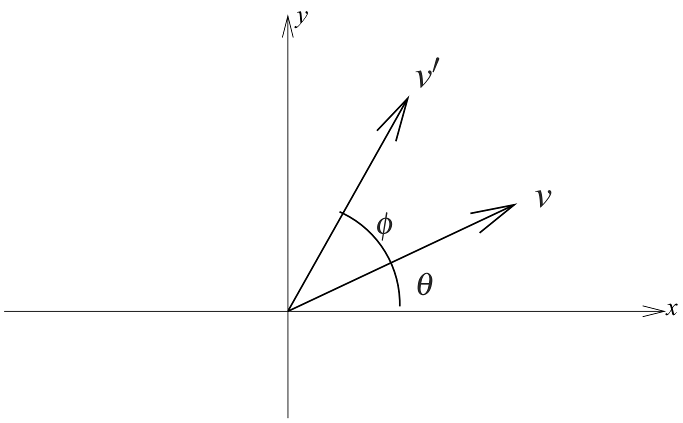


Figura 24.6: Rotação no plano.

Vamos determinar a transformação linear que realiza a rotação de um determinado ângulo. Se um vetor v faz um ângulo θ com o eixo-x, as coordenadas deste vetor são $(\|v\|\cos\theta, \|v\|\operatorname{sen}\theta)$, como mostra a figura abaixo.

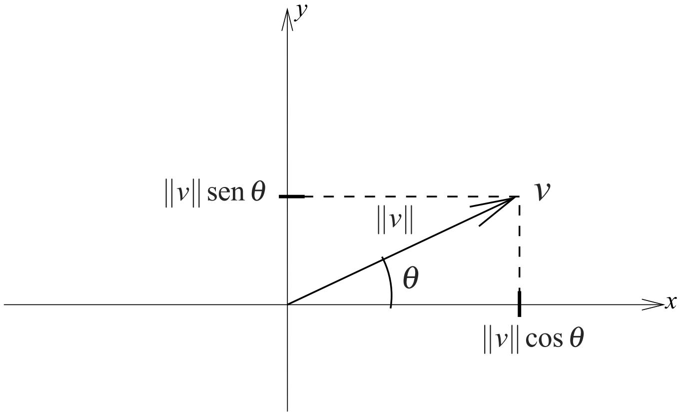


Figura 24.7: Coordenadas do vetor v

Portanto, podemos escrever

$$v = (x,y) = (\|v\|\cos\theta, \|v\|\operatorname{sen}\theta).$$

Observando que $\|v'\| = \|v\|$ e que v' faz um ângulo $\theta+\phi$ com o eixo-x, podemos escrever

$$v' = (x',y') = (\|v\|\cos(\theta+\phi), \|v\|\operatorname{sen}(\theta+\phi)).$$

Logo,

$$\begin{aligned} x' = \|v\|\cos(\theta+\phi) &= \|v\|(\cos\theta\cos\phi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi) \\ &= (\|v\|\cos\theta)\cos\phi - (\|v\|\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\phi \\ &= x\cos\phi - y\operatorname{sen}\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' = \|v\|\operatorname{sen}(\theta+\phi) &= \|v\|(\operatorname{sen}\theta\cos\phi + \cos\theta\operatorname{sen}\phi) \\ &= (\|v\|\operatorname{sen}\theta)\cos\phi + (\|v\|\cos\theta)\operatorname{sen}\phi \\ &= x\operatorname{sen}\phi + y\cos\phi \end{aligned}$$

As fórmulas para o cosseno e o seno da soma de dois ângulo são $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \operatorname{sen} a\operatorname{sen} b$ e $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a\cos b + \operatorname{sen} b\cos a$

Isto é

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\phi - y\operatorname{sen}\phi \\ x\operatorname{sen}\phi + y\cos\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Assim, a transformação linear dada pela matriz $\begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$ tem, em termos geométricos, o efeito de fazer uma rotação, no sentido anti-horário, de um ângulo ϕ.

Aplicando a transformação de rotação de um ângulo ϕ aos vetores $(1,0)$ e $(0,1)$, obtemos (observe a **Figura 24.8**).

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi \\ \operatorname{sen}\phi \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\phi \\ \cos\phi \end{bmatrix}$$

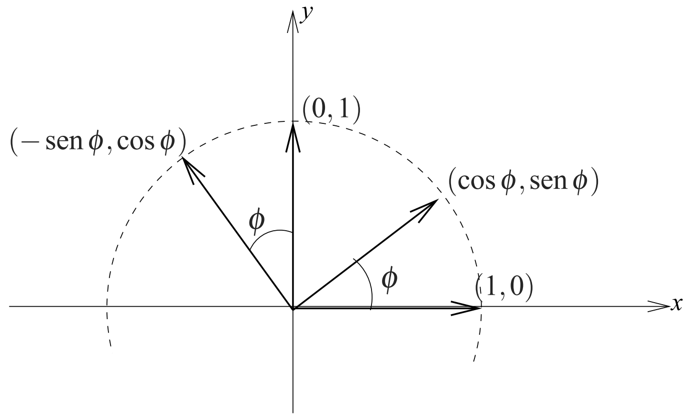


Figura 24.8: Rotação de um ângulo ϕ aplicada aos vetores $(1,0)$ e $(0,1)$.

Exemplo 24.1.

A matriz da transformação linear que tem o efeito geométrico de uma rotação de 45^0, no sentido anti-horário é a matriz

$$\begin{bmatrix} \cos 45^0 & -\operatorname{sen} 45^0 \\ \operatorname{sen} 45^0 & \cos 45^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Reflexões

A transformação $T(x,y) = (-x,-y)$ é chamada reflexão na origem. Este nome é devido ao fato de que os pontos (x,y) e $(-x,-y)$ são simétricos em relação à origem, isto é, a origem é ponto médio do segmento de reta ligando estes dois pontos. Veja, na figura a seguir, a ação desta transformação no quadrado unitário.

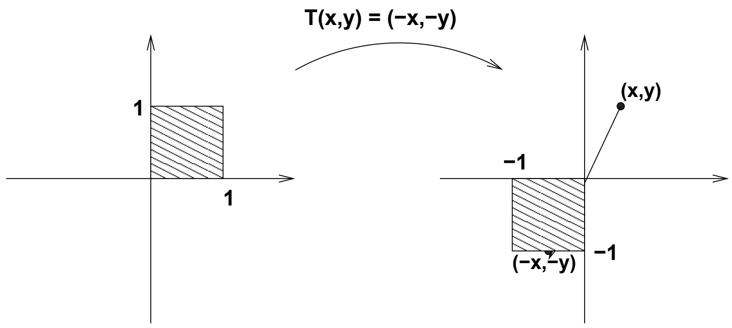


Figura 24.9: Reflexão na origem.

A *mediatriz* a um segmento AB é a reta que é perpendicular ao segmento AB e o corta no ponto médio.

Dois pontos são ditos simétricos em relação a uma reta quando esta reta é a mediatriz do segmento que liga estes pontos.

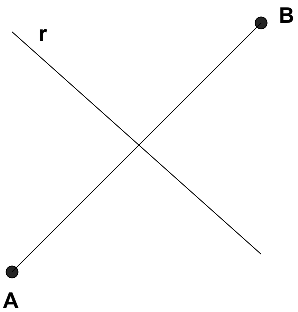


Figura 24.10: Os pontos A e B são simétricos em relação à reta r.

Uma transformação T é uma *reflexão na reta r*, quando o ponto $T(x,y)$ é o simétrico, em relação a r, do ponto (x,y). Alguns exemplos de reflexões em relação a retas são os seguintes.

1. A reflexão no eixo x e dada pela matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, ou seja, é dada por $T(x,y) = (x,-y)$.

2. A reflexão no eixo y e dada pela matriz $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, ou seja, é dada por $T(x,y) = (-x,y)$.

3. A reflexão na reta $y = -x$ é dada pela matriz $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, ou seja, é dada por $T(x,y) = (-y,-x)$.

As figuras a seguir ilustram estas três reflexões.

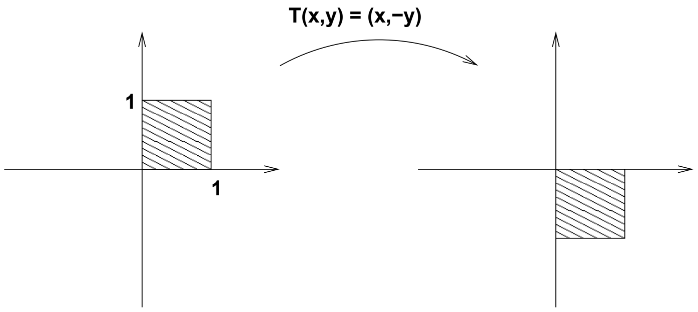


Figura 24.11: Reflexão no eixo x.

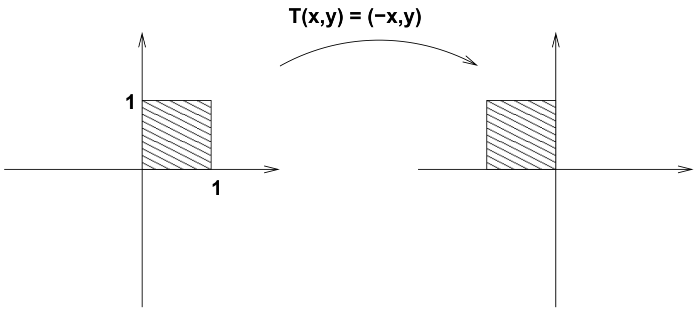


Figura 24.12: Reflexão no eixo y.

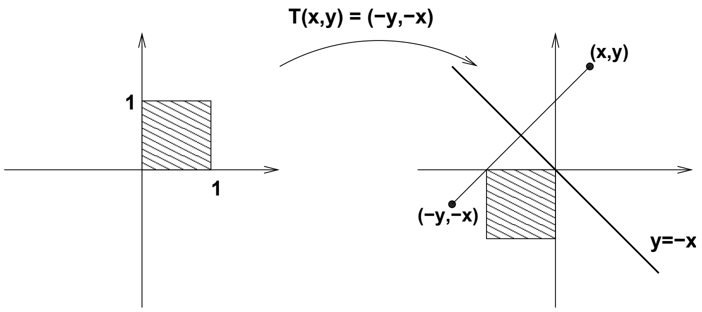


Figura 24.13: Reflexão na reta $y = -x$.

PROJEÇÃO

A *projeção* de um ponto A sobre uma reta r é um ponto $P \in r$ tal que AP é perpendicular à reta.

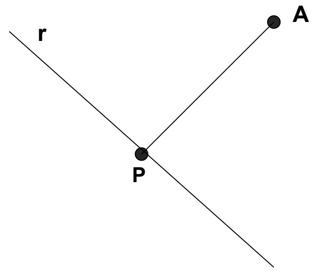


Figura 24.14: Projeção do ponto A sobre a reta r.

A transformação de projeção na reta r leva cada ponto em sua projeção na reta r, isto é, o ponto $T(x,y)$ é a projeção do ponto (x,y) na reta r.

São exemplos de projeção:

1. A projeção sobre o eixo x é dada pela matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, ou seja, é dada por $T(x,y) = (x,0)$.
2. A projeção sobre o eixo y é dada pela matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, ou seja, é dada por $T(x,y) = (0,y)$.

As figuras a seguir ilustram estas duas projeções.

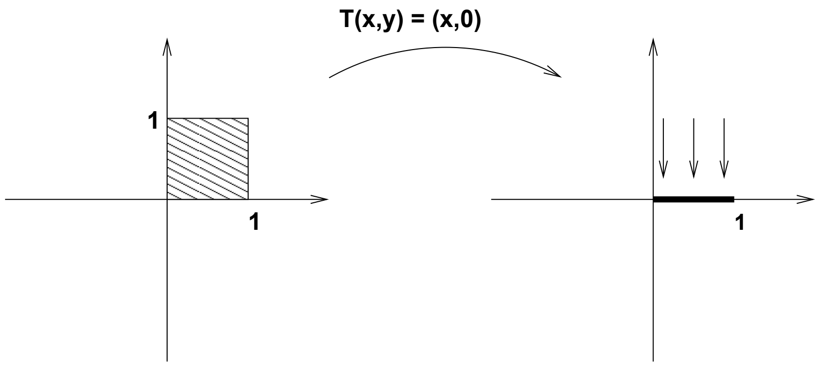


Figura 24.15: Projeção no eixo *x*.

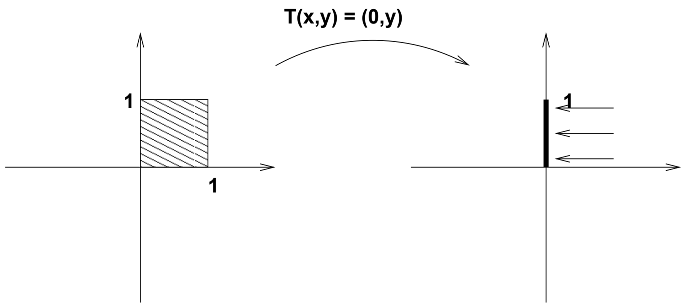


Figura 24.16: Projeção no eixo *y*.

Resumo

Nesta aula estudamos algumas transformações lineares $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de especial importância.
Outras transformações lineares podem ser construídas por composicão de duas ou mais das transformações apresentadas nesta aula. Observe que a composição de transformações lineares é uma transformação linear.

Exercício 24.1.

1. Indique o efeito sobre o quadrado unitário das transformações dadas pelas seguintes matrizes:

   a. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

2. Determine a matriz da transformação de rotação de um ângulo de 45^0.

3. Determine a matriz da transformação linear que leva a uma reflexão na origem seguida de uma rotação de 30^0.

4. Determine a núcleo da projeção sobre o eixo x.

5. Determine a núcleo da transformação de rotação de 60^0, seguida de projeção sobre o eixo y.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1. a. dilatação

   b. cisalhamento horizontal

   c. cisalhamento vertical

2. Considerando a rotação no sentido anti-horário:

$$\begin{bmatrix} \cos 45^0 & -\operatorname{sen} 45^0 \\ \operatorname{sen} 45^0 & \cos 45^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

3. $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

4. A transformação é dada por $T(x,y) = (x,0)$. Logo,

$$N(T) = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

5. A matriz canônica é obtida por

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

assim, a transformação é dada por $T(x,y) = \left(0, \dfrac{\sqrt{3}x + y}{2}\right)$.

Logo, $N(T) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = -\sqrt{3}x\}$

Aula 25

TRANSFORMAÇÕES ESPECIAIS NO $\mathbb{R}^3$

Objetivo

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. ver alguns exemplos de transformações lineares no $\mathbb{R}^3$.

TRANSFORMAÇÕES ESPECIAIS NO $\mathbb{R}^3$

Há muito mais transformações lineares básicas no $\mathbb{R}^3$ do que no $\mathbb{R}^2$. Por exemplo, no $\mathbb{R}^2$, vimos as projeções nos eixos x e y. Já no $\mathbb{R}^3$ temos as projeções nos três eixos coordenados (eixos x, y e z), mais as projeções nos três planos coordenados (planos xy, xz e yz). Em vez de fazer um estudo completo de todas essas transformações lineares que poderiam ser consideradas básicas, veremos, nesta aula, uma série de exemplos de transformações lineares no $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 25.1.

Transformações de escala.

As transformações $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dadas por $T(x,y,z) = \lambda(x,y,z)$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$ e $\lambda \neq 1$, são chamadas transformações de escala. Elas têm o efeito de dilatar (se $\lambda > 1$) ou contrair (se $0 \leq \lambda < 1$) um objeto no $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 25.2.

Projeções nos eixos coordenados.

A transformação $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x,y,z) = (x,0,0)$ é chamada projeção sobre o eixo x. As transformações dadas por $T(x,y,z) = (0,y,0)$ e $T(x,y,z) = (0,0,z)$ são as projeções sobre os eixos y e z, respectivamente.

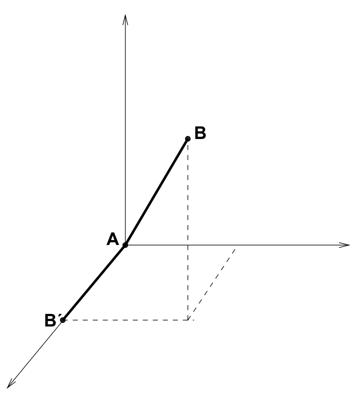


Figura 25.1: O segmento AB' é a projeção no eixo x do segmento AB.

Vamos estudar agora alguns exemplos que envolvem rotações.

Exemplo 25.3.

Determine a matriz da transformação linear que tem o efeito geométrico de uma rotação de 30^o em torno do eixo z.

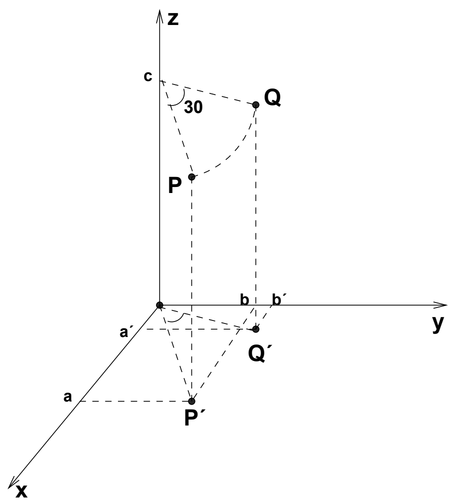


Figura 25.2: O ponto Q é obtido do ponto P por rotação de 30^o em torno do eixo z.

Seja $P=(a,b,c)$ e seja Q o ponto obtido por rotação de 30^o em torno do eixo z. Então Q possui a mesma coordenada em z que o ponto P. Podemos escrever $Q=(a',b',c)$.

Seja P' e Q' as projeções dos pontos P e Q sobre o plano cartesiano xy. Então,

$$P'=(a,b,0) \quad \text{e} \quad Q'=(a',b',0)$$

e temos que Q' é obtido de P' por uma rotação de 30^o.

Lembrando que a rotação de um ângulo θ no plano é dada por

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

temos que

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^o & -\operatorname{sen} 30^o \\ \operatorname{sen} 30^o & \cos 30^o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$Q = \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Assim, a matriz $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz da transformação linear rotação de 30^o em torno do eixo z.

Note que a rotação em torno de uma reta qualquer passando pela origem é uma transformação linear, mas a rotação em torno de uma reta que **não** passa pela origem **não** é uma transformação linear. Basta notar que, neste último caso, a origem seria levada para outro ponto que não a própria origem.

A figura abaixo representa uma rotação em torno do eixo y.

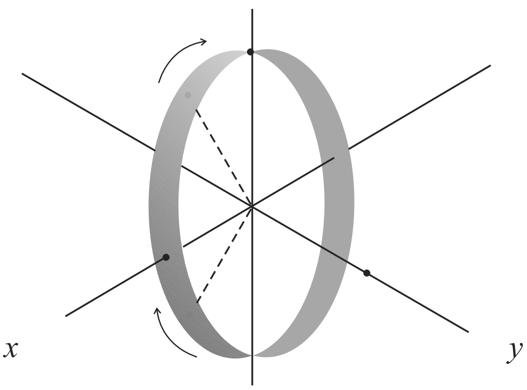


Figura 25.3: Rotação em torno do eixo y.

Exemplo 25.4.

Calcule a matriz da transformação linear obtida por uma rotação de 30^o em torno do eixo z, seguido de uma rotação de 45^o em torno do eixo y e de uma dilatação de um fator $\sqrt{2}$.

Neste exemplo, temos uma transformação composta, que é a composição de três transformações.

A primeira delas, rotação de 30^o em torno do eixo z, foi estudada no exemplo anterior. Vimos que tem matriz $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Vamos agora calcular a matriz da segunda transformação.

Uma rotação em torno do eixo y preserva a coordenada y e faz uma rotação nas coordenadas x e z. A matriz de uma rotação no plano de 45^o é

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 45^o & -\operatorname{sen} 45^o \\ \operatorname{sen} 45^o & \cos 45^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Assim, a matriz da transformação rotação de 45^o em torno do eixo y é

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Com relação à terceira transformação, a matriz de dilatação de um fator de $\sqrt{2}$ é

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Finalmente, a transformação linear que é a composta destas três transformações é dada pelo produto das três matrizes (observe a ordem):

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Aplicações em Computação Gráfica

A computação gráfica é uma área da Matemática que estuda a representação em um computador de imagens e movimentos. É um campo que tem inúmeras aplicações, que vão desde as simulações de carros e aviões em túneis de vento aos efeitos especiais nos filmes de cinema e à modelagem molecular e realidade virtual.

Basicamente, uma imagem consiste em uma certa quantidade de pontos e retas ou curvas ligando estes pontos e, muitas vezes, em informações de como preencher a área limitada por estas retas e curvas.

Quando o objeto é representado por segmentos de reta, algumas transformações usuais em computação gráfica levam segmentos de retas em outros segmentos de reta. Várias destas transformações podem ser representadas por transformações lineares. Assim, a matemática envolvida na computação gráfica muitas vezes consiste na multiplicação de matrizes representando transformações lineares por matrizes que representam objetos.

A molécula ao lado é de uma proteína chamada crambin, encontrada em algumas sementes. Ela possui 327 átomos.

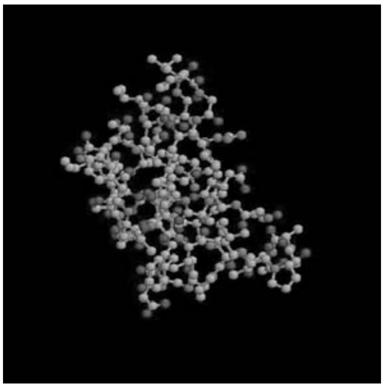


Figura 25.4: Modelagem da molécula de uma proteína.

Coordenadas Homogêneas

Vimos anteriormente que a translação não é uma transformação linear. Isto cria uma dificuldade pois, o movimento de arrastar um objeto, por exemplo, que seria naturalmente uma translação, não pode ser representado matematicamente por um produto de matrizes.

Uma maneira de evitar este problema é utilizar coordenadas homogêneas, que definiremos a seguir. Cada ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ é identificado com o ponto $(x,y,1) \in \mathbb{R}^3$. Dizemos que $(x,y,1)$ são as coordenadas homogêneas do ponto (x,y). Desta forma, identificamos o plano $\mathbb{R}^2$ com o plano $z = 1$.

Não podemos somar coordenadas homogêneas ou multiplicá-las por escalar, pois, por exemplo, $2*(x,y,1) = (2x,2y,2)$. Como este último ponto não tem $z-$coordenada 1, foge a identificação que fizemos $((x,y) \leftrightarrow (x,y,1))$.

De qualquer forma, a multiplicação de um ponto $(x,y,1)$ por uma matriz do tipo $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, onde A é uma matriz 2×2, leva a um ponto da forma $(x',y',1)$, que pode ser identificado com $(x',y') \in \mathbb{R}^2$.

Uma translação da forma $(x,y) \to (x+a, y+b)$ não é linear, logo não pode ser escrita como produto por uma matriz 2×2. No entanto, em coordenadas homogêneas, esta mesma translação é descrita como

$$(x,y,1) \to (x+a, y+b, 1)\ .$$

Esta transformação pode ser calculada como produto de matrizes na forma a seguir:

$$\begin{bmatrix} x+a \\ y+b \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Desta forma, descrevemos a translação como produto de matrizes.

Há uma área da Matemática chamada Geometria Algébrica, onde as coordenadas homogêneas têm um papel fundamental, mas não exatamente pela razão exposta acima. Nela, as coordenadas homogêneas são representadas pelo símbolo $(x\colon y\colon z)$, onde x, y e z não podem ser todos nulos, e fazemos a identificação

$$(x\colon y\colon z) = (x'\colon y'\colon z')$$

se existe $\lambda \neq 0$ tal que

$$x = \lambda x', y = \lambda y', \text{ e } z = \lambda z' .$$

O conjunto dos pontos dados por coordenadas homogêneos é chamado Espaço Projetivo, que é, por assim dizer, o espaço onde atua a geometria algébrica.

Resumo

Nesta aula vimos alguns exemplos de transformações lineares no $\mathbb{R}^3$, em especial a rotação em torno de um dos eixos coordenados.
Tocamos, de uma forma muito inicial, o imenso campo das aplicações da Álgebra Linear, examinando um pouco da representação de objetos e seus movimentos.
Por fim, falamos um pouco das coordenadas homogêneas, que têm uma aplicação interessante na computação gráfica e um papel fundamental na Geometria Algébrica.

Exercício 25.1.

1. Determine as seguintes transformações lineares:
   (a) Projeção sobre o eixo z;
   (b) Projeção sobre o plano yz;
2. Encontre a matriz da transformação de rotação de um ângulo de 45^o, em torno do eixo x.
3. Encontre a tranformação linear que tem o efeito de uma rotação de 30^o em torno do eixo y, seguido de uma projeção sobre o plano yz.
4. Determine a tranformação que leva a uma rotação de 30^o em torno do eixo z, seguida de uma rotação de 30^o em torno do eixo y.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1. a. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 45^o & -\operatorname{sen} 45^o \\ 0 & \operatorname{sen} 45^o & \cos 45^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -1/2 \\ 1/2 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -1/4 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

Aula 26

OPERADORES LINEARES INVERSÍVEIS

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. identificar operadores lineares inversíveis;
2. obter o inverso de operadores lineares inversíveis.

OPERADORES LINEARES INVERSÍVEIS

Pré-requisito:
Aulas 4, 18 a 25.

Nesta aula iremos identificar operadores lineares inversíveis. O conceito é o mesmo de função inversa, vista em Matemática elementar, e já estudada em pré-cálculo: uma função é inversível quando existe uma outra que, composta com ela, resulta na função identidade. Você também já estudou que uma função é inversível se, e somente se, é injetora e bijetora. Por outro lado, na Aula 4, Módulo 1, vimos o método de escalonamento para inverter matrizes. Nesta aula, uniremos as duas idéias e aprenderemos a decidir se um operador linear é ou não inversível e, quando o for, obter a expressão e a matriz associada do operador linear inverso.

É claro que as matrizes associadas a operadores lineares são quadradas.

Definição 26.1.

Um operador linear $T \in L(V)$ é *inversível* se existe $T^{-1} \in L(V)$ tal que $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I$ (operador identidade definido em V).

Na Aula 21, vimos o Teorema do núcleo e da imagem, válido em espaços vetoriais de dimensões finitas. Recordando:

Dada uma transformação linear $T : V \to W$, tem-se

$$dim V = dim N(T) + dim Im(T).$$

Como consequências desse teorema, vimos, também, que:

i. T é injetora se, e somente se, $N(T) = \{o_V\}$.

ii. T é sobrejetora se, e somente, se $dim Im(T) = dim W$.

iii. Se $dim V = dim W$, então T é injetora se, e somente se, é sobrejetora.

Podemos concluir, então, que para que um operador linear $T \in L(V)$ seja inversível, é suficiente que seja injetor (ou sobrejetor). Em outras palavras: ou um operador é inversível (injetor **e** sobrejetor) ou não é nem injetor, nem sobrejetor. Isto é, as duas condições são satisfeitas ou nenhuma da duas é satisfeita.

Pela observação *i.*, acima, para decidir se um operador linear é ou não inversível, basta determinar o seu núcleo, pois:

$$T \text{ é inversível } \Leftrightarrow N(T) = \{o_V\}.$$

✍ Um operador linear inversível, definido no espaço vetorial V, é chamado um *automorfismo* de V.

Exemplo 26.1.

Consideremos o operador linear definido em $\mathbb{R}^3$ dado por $T(x,\ y,\ z) = (x-y,\ 2x,\ y+z)$. O núcleo de T é $\{(0,\ 0,\ 0)\}$. Logo, T é injetor e, pelo que foi dito anteriormente, inversível. Vamos encontrar uma fórmula para T^{-1}. Suponhamos que $T(x,\ y,\ z) = (a,\ b,\ c)$. Então $T^{-1}(a,b,c) = (x,\ y,\ z)$. Isto é:

$$T(x,\ y,\ z) = (x-y,\ 2x,\ y+z) = (a,\ b,\ c).$$

Precisamos expressar x, y e z em função de a, b e c:

$$\begin{cases} x-y=a \\ 2x=b \\ y+z=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=b/2 \\ y=-a+b/2 \\ z=a-b/2+c \end{cases}$$

Logo, $T^{-1}(a,b,c) = (b/2, -a+b/2, a-b/2+c)$.

Matriz Associada ao Operador Inverso

Suponhamos que o operador $T: V \to V$ seja inversível. Então existe $T^{-1} \in L(V)$ tal que

$$T \circ T^{-1} = I. \quad (1)$$

Sejam $[T]$ e $[T^{-1}]$ as matrizes canônicas de T e de seu operador inverso, respectivamente. Na Aula 23, vimos que a matriz associada à composta de duas transformações lineares é o produto das matrizes associadas às transformações. Então, podemos escrever

$$[T \circ T^{-1}] = [T].[T^{-1}]. \quad (2)$$

A letra I indica tanto o operador quanto a matriz identidade.

Como a matriz canônica do operador identidade é a identidade, em (1), temos:

$$[T \circ T^{-1}] = I. \quad (3)$$

De (2) e (3), temos:

$$[T].[T^{-1}] = I. \quad (4)$$

A expressão (4) nos diz que:

- Se o operador T é inversível, então sua matriz associada também é inversível.
- A matriz associada ao operador inverso de T é a inversa da matriz associada a T.

A partir disso, para verificar se um operador linear é inversível, podemos verificar se sua matriz associada é inversível, pelo método do escalonamento: se o procedimento for bem-sucedido, além de concluir que o operador é inversível, já teremos a matriz do seu inverso. Caso contrário (a matriz não ser inversível), o operador em questão não será inversível.

Além disso, se estivermos interessados apenas em saber se o operador é ou não inversível, sem a preocupação de obter uma fórmula para o seu inverso, podemos calcular o determinante de sua matriz associada, pois:

O operador linear T é inversível se, e somente se, $det\,[T] \neq 0$.

✍ Como dito acima, estamos nos referindo, aqui, à matriz canônica do operador T. Veremos, na próxima aula, que o determinante da matriz associada a um operador linear é uma constante, isto é, independe da base escolhida para a representação do operador. Pode-se, inclusive, fazer referência ao *determinante do operador*. Logo, os mesmos resultados vistos nesta aula se aplicam às matrizes de T relativas a outras bases, que não a canônica.

Exemplo 26.2.

Seja $T \in L(\mathbb{R}^3)$ dado por

$$T(x,y,z) = (3x - y + 4z, x + 2z, 2x + 3y - 5z).$$

Vamos escrever sua matriz canônica e aplicar o método de inversão por escalonamento:

$$[T] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \end{array} \quad \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \quad \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -L_2 \end{array} \quad \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array} \quad \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & 3 & -11 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_3 \leftarrow -\frac{1}{15} L_3 \end{array} \quad \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & 11/15 & -1/15 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{array} \quad \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/15 & -7/15 & 2/15 \\ 0 & 1 & 0 & -3/5 & 23/15 & 2/15 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & 11/15 & -1/15 \end{array}\right].$$

Logo, a matriz $[T]$ é invertível e

$$[T]^{-1} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 2 & -7 & 2 \\ -9 & 23 & 2 \\ -3 & 11 & -1 \end{bmatrix}.$$

Concluímos, então, que o operador T é invertível e

$$T^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{2x-7y+2z}{15}, \frac{-9x+23y+2z}{15}, \frac{-3x+11y-z}{15} \right).$$

Exemplo 26.3.

Vamos verificar se o operador $T \in L(\mathbb{R}^4)$ dado por $T(x,y,z,t) = (x+2y, y-2z-t, x+y+z, x+3z+t)$ é inversível e, caso seja, encontrar seu inverso.

Vamos aplicar à matriz $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ o método de inversão por escalonamento:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2 \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 4 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow -L_3 \\ \\ \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 4 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Como a quarta linha se anulou, concluímos que a matriz não é inversível. Logo, o operador T não é inversível.

Uma outra propriedade importante dos operadores inversíveis afirma que

!

Um operador $T \in L(V)$, inversível, transforma base em base, isto é: se B é uma base de V, então $T(B)$ também é base de V.

Exemplo 26.4.

Seja T o operador linear definido em $\mathbb{R}^3$ tal que $T(1,\ 1,\ 1) = (1,\ 0,\ 0)), T(-2,\ 1,\ 0) = (0,\ -1,\ 0)$ e $T(1,\ 3,\ 2) = (0,\ -1,\ 1)$. Vamos verificar se T é inversível e, caso seja, determinar $T^{-1}(x,\ y,\ z)$.

Notemos, primeiramente, que o conjunto $B = \{(1,1,1),(-2,1,0),(1,3,2)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$. Assim, T está bem definido. Se aplicarmos o método do escalonamento à matriz $[T]_B$, obteremos, caso T seja inversível, a matriz $[T^{-1}]_B$, mas queremos a expressão de T^{-1} em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$ e ainda não sabemos como migrar de uma base para outra (veremos como fazer isso, na próxima aula). Neste caso, então, vamos usar a definição e a condição de linearidade do operador inverso. Como vimos acima, $T(B) = \{(1,0,0),(0,-1,0),(0,-1,1)\}$ também é base de $\mathbb{R}^3$. Vamos expressar um vetor (x,y,z), genérico, de $\mathbb{R}^3$, em relação à base $T(B)$:

$$(x,y,z) = a(1,0,0) + b(0,-1,0)) + c(0,-1,1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = x \\ -b-c = y \\ c = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = x \\ b = -y-z \\ c = z \end{cases}.$$

Assim, podemos escrever:

$$\begin{aligned} T^{-1}(x,y,z) &= T^{-1}\big(x(1,0,0) + (-y-z)(0,-1,0)) + \\ &\qquad +z(0,-1,1)\big) = \\ &= xT^{-1}(1,0,0) + (-y-z)T^{-1}(0,-1,0) + \\ &\qquad +zT^{-1}(0,-1,1) = \\ &= x(1,1,1) + (-y-z)(-2,1,0) + z(1,3,2) = \\ &= (x+2y+3z, x-y+2z, x+2z). \end{aligned}$$

Resumo

Nesta aula destacamos os operadores lineares que admitem um inverso. Relacionamos diretamente a condição de inversibilidade dos operadores com a inversibilidade das matrizes associadas a eles. Dado um operador linear, aprendemos a descobrir se é ou não inversível – seja pela determinação de seu núcleo, seja pelo cálculo do determinante de uma sua matriz associada, ou ainda pela busca de seu operador inverso, pela definição ou pela tentativa de inversão de sua matriz associada.

Exercício 26.1.

1. Verifique, em cada caso, se o operador $T \in L(V)$ é inversível. Caso seja, encontre uma fórmula para o seu inverso.

   a. $V = \mathbb{R}^2$; $T(x,y) = (3x+5y, 2x+3y)$.

   b. $V = \mathbb{R}^3$; $T(x,y,z) = (x, 2x-y+3z, 4x+y+8z)$.

   c. $V = \mathbb{R}^3$; $T(x,y,z) = (6x+3y-4z, -4x+y-6z, x+2y-5z)$.

2. A transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

   $T(1,0,0) = (1,1,0)$,

   $T(0,1,0) = (0,0,1)$ e

   $T(0,0,1) = (1,-1,2)$

   é um automorfismo?

3. Considere as seguintes transformações lineares planas:

   T_1: reflexão em torno da reta $y = x$;

   T_2: um cisalhamento horizontal de fator 2;

   T_3: uma rotação de 90^0 no sentido anti-horário.

   a. Determine a expressão e a matriz da transformação linear $T = T_3 \circ T_2 \circ T_1$.

b. Determine a expressão e a matriz da transformação linear inversa de T.

4. Mostre que, se os operadores lineares T e S são inversíveis, então o operador linear $T \circ S$ também é inversível e $(T \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ T^{-1}$.

5. Mostre que a rotação anti-horária de um ângulo θ é um operador inversível em $\mathbb{R}^2$ e que seu inverso é a rotação horária do mesmo ângulo.

Autoavaliação

Esta aula analisou as condições para que um operador linear seja inversível e como obter, caso exista, o operador inverso. Caso você tenha sentido alguma dificuldade na resolução dos exercícios ou na compreensão dos exemplos, faça contato com o tutor da disciplina.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1. a. $T^{-1}(x,y) = (-3x+5y, 2x-3y)$

   b. $T^{-1}(x,y,z) = \left(x, \dfrac{4x-8y+3z}{11}, \dfrac{-6x+y+z}{11} \right)$.

   c. T não é inversível

2. Sim. Pode-se verificar isso determinando o núcleo de T ou escalonando sua matriz associada e mostrando que é inversível.

3. a. $[T] = [T_3].[T_2].[T_1] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$ $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; $T(x,y) = (-x, 2x+y)$.

   b. $[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e

   $T^{-1}(x,y) = (-x, 2x+y)$. (Note que $T^{-1} = T$.)

Aula 27

MUDANÇA DE BASE

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. determinar a matriz de mudança de uma base para outra;
2. relacionar as matrizes associadas a uma transformação linear, relativas a diferentes bases.

Mudança de Base

Pré-requisitos:
Aulas 18 a 26.

Nesta aula, vamos nos utilizar de um operador linear especial – o operador identidade, para obter uma matriz que irá funcionar como uma "tradutora" de uma base para outra, num espaço vetorial. A ideia é poder migrar de uma para outra base, relacionando as coordenadas de um mesmo vetor ou as matrizes associadas a um mesmo operador linear.

Dado um espaço vetorial V, o operador identidade, I, definido em V, é trivialmente linear. Assim, dadas duas bases, A e B, de V, e $v \in V$, a matriz de I, em relação às bases A e B (representada por $[I]_{A,B}$), é tal que

$$[I]_{A,B}.[v]_A = [v]_B \ .$$

Como vimos, na Aula 22, essa matriz é construída de tal forma que a i-ésima coluna é formada pelas coordenadas do i-ésimo vetor de A, em relação à base B.

Como o operador identidade não altera o vetor, a única ação da multiplicação da matriz $[I]_{A,B}$ pelo vetor-coordenadas $[v]_A$ é reescrevê-lo em relação à base B.

Definição 27.1.

A matriz $[I]_{A,B}$ é chamada *matriz mudança* (ou *matriz de transição*) da base A para a base B.

O papel da matriz $[I]_{A,B}$ é transformar as coordenadas de um vetor v na base A em coordenadas do mesmo vetor v na base B.

Exemplo 27.1.

Em $\mathbb{R}^2$, sejam as base $A = \{(1,1),(0,2)\}$ e $B = \{(1,-1),(1,0)\}$. Vamos construir a matriz $[I]_{A,B}$.

A matriz $[I]_{A,B}$ é 2×2; sua primeira coluna é o vetor-coordenadas de $I(1,1) = (1,1)$ em relação à base B; sua segunda coluna é o vetor-coordenadas de $I(0,2) = (0,2)$ em relação à base B. Vamos, então, descobrir como a base B gera $\mathbb{R}^2$, isto é, qual o vetor-coordenadas de um vetor genérico (x,y), em relação à base B:

$$(x,y) = a(1,-1) + b(1,0) \Rightarrow \begin{cases} a+b = x \\ -a = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -y \\ b = x+y \end{cases}.$$

Logo, $[(x,y)]_B = \begin{bmatrix} -y \\ x+y \end{bmatrix}$.

Usando essa fórmula, temos:

$[(1,1)]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $[(0,2)]_B = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Logo, $[I]_{A,B} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

O operador identidade é inversível; logo, a matriz mudança de base (que nada mais é do que uma matriz associada ao operador identidade) é inversível: a inversa da matriz de transição da base A para a base B é a matriz de transição da base B para a base A, isto é:

$$[I]_{A,B}.[I]_{B,A} = I.$$

Exemplo 27.2.

Vamos obter a matriz mudança da base B para a base A, do Exemplo 27.1. Suas colunas são os vetores-coordenadas dos vetores da base B, em relação à base A. Vamos, então, determinar como um vetor genérico de $\mathbb{R}^2$ se escreve na base A:

$$(x,y) = a(1,1) + b(0,2) \Rightarrow \begin{cases} a = x \\ b = \frac{y-x}{2} \end{cases} \Rightarrow [(x,y)]_A = \begin{bmatrix} x \\ \frac{y-x}{2} \end{bmatrix}.$$

Aplicando essa fórmula aos vetores da base B, temos:

$$[(1,-1)]_A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad [(1,0)]_A = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Logo, $[I]_{B,A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Então, vemos que:

$$[I]_{A,B}.[I]_{B,A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Exemplo 27.3.

Consideremos as bases A e B do Exemplo 27.1. Seja $v = (3,4) \in I\!R^2$. Usando as fórmulas dos vetores-coordenadas em relação às bases A e B, já obtidas, temos:

$[v]_A = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ e $[v]_B = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}$.

Notemos que

$$[I]_{A,B}.[v]_A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix} = [v]_B.$$

Exemplo 27.4.

Consideremos, em $I\!R^2$, as bases $A = \{(2,-1),(-1,1)\}$ e $B = \{(1,0),(2,1)\}$. Seja $v \in I\!R^2$ tal que $[v]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$. Vamos obter $[v]_A$, usando a matriz de transição de A para B, de dois modos.

Primeiramente, aplicando o procedimento de construção da matriz mudança de base, obtemos $[I]_{A,B} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

1^o modo:

Sabemos que $[v]_B = [I]_{A,B}.[v]_A$. Seja $[v]_A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$. Então:

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x_A - 3y_A = 2 \\ -x_A + y_A = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = -10 \\ y_A = -14 \end{cases}.$$

Então $[v]_A = \begin{bmatrix} -10 \\ -14 \end{bmatrix}$.

2^o modo:

Vamos inverter a matriz $[I]_{A,B}$, por escalonamento, obtendo $[I]_{B,A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Agora, temos:

$$[v]_A = [I]_{B,A}.[v]_B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -14 \end{bmatrix}.$$

Já vimos:

- Todo operador linear pode ser representado por uma matriz, uma vez fixada uma base.

- Podemos "traduzir" o vetor-coordenadas de um vetor, de uma base para outra.

A questão, agora, é: como mudar a representação do operador, se escolhemos outra base, ou:

Como traduzir a matriz de representação de um operador, de uma base para outra?

A resposta é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 27.1.

Sejam $T \in L(V)$, A e B bases de V. Então

$$[I]_{A,B}.[T]_A.[I]_{B,A} = [T]_B.$$

Demonstração

Seja $v \in V$. Temos:

$$\begin{aligned} \left([I]_{A,B}.[T]_A.[I]_{B,A}\right)[v]_B &= \left([I]_{A,B}.[T]_A\right)\left([I]_{B,A}[v]_B\right) = \\ &= \left([I]_{A,B}[T]_A\right)[v]_A = \\ &= [I]_{A,B}\left([T]_A[v]_A\right) = \\ &= [I]_{A,B}\left([T(v)]_A\right) = \\ &= [T(v)]_B. \end{aligned}$$

Logo, $[I]_{A,B}.[T]_A.[I]_{B,A} = [T]_B$.

CQD

A expressão envolvendo as matrizes de T referentes a duas bases distintas é uma importante relação definida no conjunto das matrizes quadradas de uma determinada ordem. A seguir, definimos, formalmente, essa relação.

Definição 27.2 (Semelhança de Matrizes)**.**

Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Dizemos que B *é semelhante a* A quando existe uma matriz P, em $M_n(\mathbb{R})$, inversível, tal que

$$B = P^{-1}.A.P$$

Teorema 27.2.

A relação de semelhança, definida em $M_n(\mathbb{R})$, é uma relação de equivalência em $M_n(\mathbb{R})$.

Demonstração

i. A matriz $I \in M_n(\mathbb{R})$ é inversível, com $I^{-1} = I$. Como $A = I^{-1}AI$, temos que A é semelhante a A e a relação de semelhança é reflexiva.

ii. Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, com B semelhante a A. Então existe $Q \in M_n(\mathbb{R})$, inversível, tal que $B = Q^{-1}AQ$. Multiplicando ambos os lados, à esquerda, por Q, temos $QB = AQ$. Multiplicando, agora, os dois lados por Q^{-1}, à direita, obtemos $QBQ^{-1} = A$. Sendo $P = Q^{-1}$, podemos escrever $A = P^{-1}BP$, ou seja, A é semelhante a B e a relação de semelhança é simétrica.

iii. Sejam $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$, com B semelhante a A e C semelhante a B. Então existem matrizes Q e P, em $M_n(\mathbb{R})$, inversíveis, tais que $B = Q^{-1}AQ$ e $C = P^{-1}BP$. Substituindo a expressão de B na segunda igualdade, temos $C = P^{-1}(Q^{-1}AQ)P = (P^{-1}Q^{-1})A(QP) = (QP)^{-1}A(QP)$. Como a matriz QP está em $M_n(\mathbb{R})$ e é inversível, concluímos que C é semelhante a A e a relação de semelhança é transitiva.

De i., ii. e iii. concluímos que a relação de semelhança é uma relação de equivalência.

✍ i. Devido ao Teorema 27.2, se B é semelhante a A, também podemos dizer que A é semelhante a B ou, simplesmente, que as matrizes A e B são semelhantes.

ii. Sendo $T \in L(V)$, A e B bases de V, as matrizes $[T]_A$ e $[T]_B$ são semelhantes.

iii Todas as representações matriciais do operador linear T formam uma classe de equivalência de matrizes semelhantes.

A relação de semelhança ainda implica uma igualdade de determinantes, como prova o teorema a seguir.

Teorema 27.3.

Matrizes semelhantes possuem o mesmo determinante.

Demonstração

Sejam $B, A \in M_n(I\!R)$ semelhantes. Então $B = P^{-1}AP$, para alguma matriz $P \in M_n(I\!R)$, inversível. Usando a propriedade do determinante da matriz inversa, vista na Aula 5, podemos escrever:

$$\begin{aligned} det\,B &= det\,(P^{-1}AP) = \\ &= det\,P^{-1}.det\,A.det\,P = \\ &= (det\,P)^{-1}.det\,A.det\,P = \\ &= [(det\,P)^{-1}.det\,P].det\,A = \\ &= 1.det\,A = \\ &= det\,A. \end{aligned}$$

Do Teorema 27.3, podemos concluir que todas as matrizes que representam um mesmo operador linear T têm o mesmo determinante. Podemos, assim, definir o *determinante de um operador linear T*, como sendo o determinante de qualquer matriz associada a T. Além disso, a condição de T ser inversível pode, agora, ser dada na forma:

$$T \text{ é inversível} \Leftrightarrow det\,T \neq 0.$$

✍ Há uma outra maneira de obtermos a matriz de mudança de base. Sendo A, B, C bases do espaço vetorial V, vale a igualdade:

$$[I]_{A,B} = [I]_{C,B}.[I]_{A,C}.$$

Note que, na igualdade anterior, a base C funciona como uma "intermediária"entre a base inicial A e a final, B. Podemos adotar esse processo, supondo que a base intermediária é a canônica. O exemplo a seguir ilustra como isso se dá.

Exemplo 27.5.

Vamos retomar as bases do Exemplo 27.1 e escrever as matrizes de mudança da base A para a canônica e da base canônica para a base B. Temos:

Note que, para construir a matriz de transição de A para a canônica, basta escrever as coordenadas dos vetores da base A como as colunas da matriz.

$[I]_{A,C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$;

$[I]_{C,B} = ([I]_{B,C})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Logo,

$$[I]_{A,B} = [I]_{C,B}.[I]_{A,C} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Resumo

Nesta aula estudamos uma matriz muito importante, que é a que possibilita mudar a base de representação, tanto de um vetor quanto de um operador linear. Com o conteúdo desta aula, encerramos nosso curso de Álgebra Linear I. A Aula 28 – a última – constará de exercícios relativos a todo o segundo módulo, com resolução ao final.

Exercício 27.1.

1. Em $\mathbb{R}^3$, considere as bases
   $A = \{(-3,0,-3),(-3,2,-1),(1,-6,-1)\}$ e
   $B = \{(-6,-6,0),(-2,-6,4),(-2,-3,7)\}$.

   i. Determine a matriz de transição da base A para a base B.

   ii. Calcule $[v]_A$, dado $v = (-5,8,-5)$.

   iii. Escreva $[v]_B$, usando a matriz obtida no item i.

2. Em $\mathbb{R}^2$, sejam as base $A = \{(1,1),(1,-1)\}$, $B = \{(2,1),(1,0)\}$ e C, a canônica. Obtenha as matrizes $[I]_{C,A}$, $[I]_{B,C}$ e $[I]_{B,A}$.

3. Dada a matriz de transição $[I]_{A,B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, determine a base B, sabendo que $A = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,1,1)\}$.

4. Dada a matriz de transição $[I]_{A,B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, determine a base A, sabendo que $B = \{(1,1,0),(1,1,1),(0,1,1)\}$.

5. A matriz de mudança da base $A = \{1+t, 1-t^2\}$ para uma base B, ambas de $P_2(\mathbb{R})$, é $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Determine B.

6. Sendo $B = \{(1,0),(0,1)\}$ e $B' = \{(1,1),(2,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$, determine:

   i. a matriz de mudança da base B' para a base B;

   ii. $[v]_{B'}$, sabendo que $[v]_B = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Autoavaliação

Com esta aula, concluímos o conteúdo desta disciplina. Você deverá estar familiarizado com a técnica de obtenção de matrizes de transição e com as aplicações dela em exercícios. A matriz de mudança de base será importante em aulas futuras. Certifique-se de que apreendeu bem o conteúdo desta aula. Caso tenha qualquer dúvida, contate o tutor da disciplina. A próxima aula fecha o módulo e apresenta uma lista de exercícios gerais sobre a teoria apresentada no segundo módulo. Bom término de curso, boas férias e até as aulas de Álgebra Linear II!!!!

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1. i. $\begin{bmatrix} 3/4 & 3/4 & -5/12 \\ -3/4 & -17/12 & 25/12 \\ 0 & 2/3 & -4/3 \end{bmatrix}$ ii. $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$

   iii. $\begin{bmatrix} 19/12 \\ -43/12 \\ 4/3 \end{bmatrix}$

2. $[I]_{C,A} = ([I]_{A,C})^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$; $[I]_{B,C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;

   $[I]_{B,A} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

3. **Solução:** Seja $B = \{v_1, v_2, v_3\}$. Pela definição da matriz de transição, os elementos da i-ésima coluna são os coeficientes da combinação linear que representa o i-ésimo vetor da base A em relação à base B, isto é:

   $$\begin{cases} (1,0,0) = 1v_1 + 0v_2 + 1v_3 \\ (0,1,0) = 0v_1 + 1v_2 + 1v_3 \\ (0,1,1)) = 1v_1 + 1v_2 + 1v_3 \end{cases}$$

   $\Rightarrow B = \{(0,0,1), (-1,1,1), (1,0,-1)\}$.

4. **Solução:** Sendo $A = \{v_1, v_2, v_3\}$, temos:

   $v_1 = 2(1,1,0) + 1(1,1,1) + 1(0,1,1) = (3,4,2)$

   $v_2 = 0(1,1,0) + 1(1,1,1) + 3(0,1,1) = (1,4,4)$

   $v_3 = -1(1,1,0) + 2(1,1,1) + 0(0,1,1) = (1,1,2)$

5. $B = \{(2/3 + t/3 - t^2/3, 1/3 + 2t/3 + t^2/3\}$

6. (a) $[I]_{B',B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $[v]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$

Aula 28

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO MÓDULO 2

Objetivo

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1 aplicar a teoria estudada no Módulo 2 em exercícios gerais.

Exercícios de Revisão do Módulo 2

Tente resolver os exercícios propostos nesta aula, antes de consultar a resolução, ao final da lista. Caso sinta alguma dificuldade, recorra à aula relativa ao assunto, releia com atenção e... tente de novo!

Exercício 28.1.

1. Provão - MEC - 1998
   Seja P a transformação de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$, definida por $P(x,y,z) = (x,y,0)$. Se a imagem de uma reta r, por P, é um ponto, então:

   a. esta reta r é paralela a OX

   b. esta reta r é paralela a OY

   c. esta reta r é paralela a OZ

   d. esta reta r necessariamente contém a origem

   e. não existe tal reta r

2. Provão - MEC - 1998
   Chama-se <u>núcleo</u> de uma transformação linear T o conjunto dos pontos cuja imagem por T é nula. O núcleo da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z) = (z, x-y, -z)$, é o subespaço do $\mathbb{R}^3$ gerado por:

   a. $\{(0,0,0)\}$

   b. $\{(0,1,0)\}$

   c. $\{(1,0,-1)\}$

   d. $\{(1,1,0)\}$

   e. $\{(1,0,1),(0,1,0)\}$

3. A seguir são dados operadores lineares em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$. Verifique quais são inversíveis e, nos casos afirmativos, determine uma fórmula para T^{-1}.

   a. $T \in L(\mathbb{R}^2)$; $\quad T(x,y) = (3x-4y, x+3y)$

   b. $T \in L(\mathbb{R}^2)$; $\quad T(x,y) = (x+y, x-y)$

   c. $T \in L(\mathbb{R}^3)$; $\quad T(x,y,z) = (x+z, x+y, 2x+y+z)$

d. $T \in L(\mathbb{R}^3)$; $\quad T(x,y,z) = (x, x-z, x-y-z)$

4. Seja o operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   a. Mostre que T é um isomorfismo.

   b. Determine a lei que define o operador T^{-1}.

   c. Encontre o vetor $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (-1,-5,-3)$

Um isomorfismo é uma transformação linear bijetora e, portanto, inversível.

5. Mostre que o operador linear, no $\mathbb{R}^3$, com matriz canônica $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ não é inversível.

   Determine $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (2,3,5)$.

6. Dadas $[I]_{A,B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ e $A = \{(1,2),(1,-1)\}$, determine a base B.

7. Dadas $[I]_{A,B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ e $B = \{(1,2),(1,-1)\}$, determine a base A.

8. Se $[I]_{A,B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \end{bmatrix}$, determine $[v]_A$, sabendo que $[v]_B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

9. Seja o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y) = (x+y, x-y)$.

   a. Determine $[T]_B$, onde $B = \{(1,2),(0,1)\}$.

   b. Use a matriz encontrada em (a) para calcular $[T(v)]_B$, dado $v = (5,3)$.

10. Determine a matriz da transformação linear plana que equivale à seguinte sequência de transformações:

   a. uma rotação anti-horária de $\pi/2$ rd, seguida de

b. uma contração de fator 1/4, seguida de

c. uma reflexão em torno da reta $y = x$, seguida de

d. um cisalhamento na direção y, de um fator 3.

11. Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(e_1) = (0,0,1), T(e_2) = (1,2,1), T(e_3) = (-2,1,-1)$ e $T(e_4) = (1,1,1)$, onde $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^4$. Determine:

    a. $T(x,y,z,t)$, para $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

    b. Determine o núcleo de T.

    c. Determine a imagem de T.

    d. Determine $u \in \mathbb{R}^4$ tal que $T(u) = (1,0,1)$

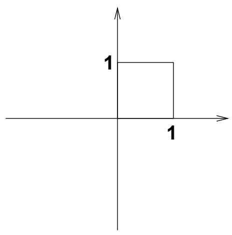
12. Sejam as transformações $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ e $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dadas por $T(x,y,z,t) = (x, t+z, y)$ e $F(x,y,z) = (x-z, 2y)$, determine, em relação à transformação $F \circ T$:

    a. O núcleo.

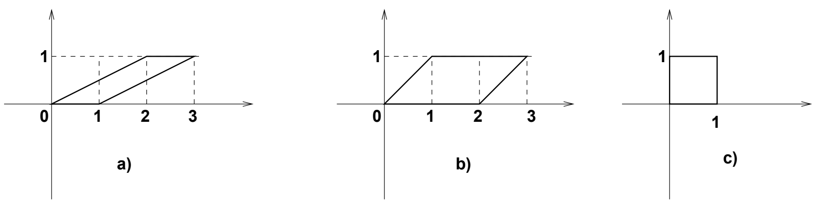
    b. A imagem.

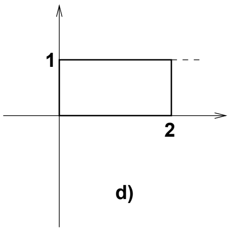
    c. A matriz de representação.

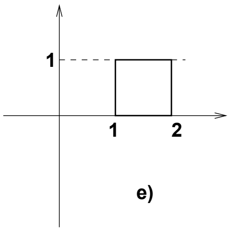
13. Provão - MEC - 1998



A transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é definida por $T(x,y) = (x+2y, y)$. A imagem, por T, do quadrado representado na figura acima é:







14. Determine $T \in L(\mathbb{R}^2$ tal que $T(1,1) = (1,5)$ e $T(1,2) = (0,1)$.

15. Sejam $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ as transformações lineares definidas por $T(x,y,z) = (z, x+y)$ e $F(x,y) = 3x - y$. Determine uma fórmula para a transformação $F \circ T$.

16. Seja $v = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. Quais das aplicações abaixo são operadores lineares do $\mathbb{R}^4$?

    a. $T(x,y,z,t) = (0,0,0,0)$
    b. $T(x,y,z,t) = (1,1,1,1)$
    c. $T(x,y,z,t) = (x,y,z,t) + (1,2,3,4)$
    d. $T(x,y,z,t) = (x+y, y-z, x+t, z-t)$

17. Representar graficamente a reta $r : y = x$ e a imagem de r pela transformação linear do $\mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (-x+y, x+y)$.

18. Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$ e $T \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(e_1) = e_2$; $T(e_2) = e_1 + e_3$; $T(e_3) = e_2 + e_3$. Determine:

    a. $T(e_1 + e_2 + e_3)$
    b. $T(2e_1 - 3e_2 + e_3)$

19. A matriz $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ representa um operador linear $T \in \mathbb{R}^3$. Determine:

    a. $T(1,1,1)$
    b. $T(x,y,z)$

20. Dada a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ de uma transformação linear T, do $\mathbb{R}^2$, representar num gráfico o vetor $v = (2,3)$ e sua imagem por T.

Resolução dos Exercícios

1. A transformação de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$, definida por $P(x,y,z) = (x,y,0)$ é a projeção sobre o plano xy, paralela ao eixo Oz. Se a imagem de uma reta r, por P, é um ponto, então é porque essa reta é paralela ao eixo Oz. A alternativa correta é a letra (c.).

2. O núcleo da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z) = (z,x-y,-z)$, é o conjunto $N(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; T(x,y,z) = (0,0,0)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ (z,x-y,-z) = (0,0,0)\}$. Isso nos leva ao sistema linear homogêneo $\begin{cases} z = 0 \\ x-y = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$, cuja solução é $\{(x,x,0); x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,1,0); x \in \mathbb{R}\} = [(1,1,0)]$. Logo, a alternativa correta é (d.).

3. Neste exercício também poderíamos verificar se o núcleo de T é ou não o subespaço nulo.

   a. $[T] = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow det\,[T] = 9+4 = 13 \neq 0 \Rightarrow [T]$ é inversível. Logo, o operador T é inversível e

   $$[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/13 & 4/13 \\ -1/13 & 3/13 \end{bmatrix}.$$

   Então $T^{-1}(x,y) = (3x/13+4y/13, -x/13+3y/13)$.

   b.

   $$\begin{aligned}[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow det\,[T] &= -1-1 = \\ &= -2 \neq 0 \Rightarrow [T]\end{aligned}$$

   é inversível. Logo, o operador T é inversível e

   $$[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

   Então $T^{-1}(x,y) = (x/2+y/2, x/2-y/2)$.

   c. $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow det\,[T] = 0 \Rightarrow [T]$ não é inversível. Logo, o operador T não é inversível.

d. $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow det\,[T] = -1 \neq 0 \Rightarrow [T]$ é inversível. Logo, o operador T é inversível e $[T^{-1}] = [T]^{-1}$. Invertendo a matriz $[T]$, por escalonamento, obtemos $[T]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Então $T^{-1}(x,y,z) = (x, y-z, x-y)$.

4. a. $det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow T$ é um isoformismo.

b.

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \\ = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow T^{-1}(x,y,z) = (-x/2 + 3z/2, x/2 - z/2, -x - y - z/2)$.

c. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} x + z = -1 \\ 3x - 2y + z = -5 \\ -y = -3 \end{cases} \Rightarrow \Rightarrow x = 1; y = 3; z = -2.$

Logo, $v = (1, 3, -2)$.

5. $det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} = 0$. Logo, T não é inversível.

Seja $v = (x,y,z)$ tal que $T(v) = (2,3,5)$.
Então

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 3 \\ 3x + 5y + 7z = 5 \end{cases} \Rightarrow v$$

pode ser qualquer vetor da forma $(k, 1-2k, k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

6. Seja $B=\{v_1,v_2\}$. Então

$$\begin{cases}(1,2)=-1v_1+2v_2\\(1,-1)=3v_1+7v_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v_1=(-5/13,-16/13)\\v_2=(4/13,5/13)\end{cases}$$

Logo, $B=\{(-5/13,-16/13),(4/13,5/13)\}$.

7. Seja $A=\{v_1,v_2\}$. Então:
$v_1=-1(1,2)+2(1,-1)=(1,-4)$
$v_2=3(1,2)+7(1,-1)=(10,-1)$
Logo, $A=\{(1,-4),(10,-1)\}$.

8.

$$\begin{aligned}[v]_A &= [I]_{B,A}[v]_B=\left([I]_{A,B}\right)^{-1}[v]_B=\\ &= \begin{bmatrix}1&1&1\\2&3&1\\4&9&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-2\\3\\5\end{bmatrix}=\\ &= \begin{bmatrix}-3&4&-1\\1&-3/2&1/2\\3&-5/2&1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\3\\5\end{bmatrix}=\\ &= \begin{bmatrix}13\\-4\\-11\end{bmatrix}\end{aligned}$$

.

9. a. $T(1,2)=(3,-1)$; $T(0,1)=(1,-1)$ $(x,y)=a(1,2)+b(0,1)\Rightarrow a=x$ e $b=y-2x\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}_B=\begin{bmatrix}x\\y-2x\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}_B=\begin{bmatrix}3\\-7\end{bmatrix}$$

e $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}_B=\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}$. Logo, $[T]_B=\begin{bmatrix}3&1\\-7&-3\end{bmatrix}$.

b. Primeiramente, vamos obter as coordenadas de $v=(5,3)$ em relação à base B, usando a fórmula já obtida no item anterior: $[v]_B=\begin{bmatrix}5\\-7\end{bmatrix}$. Então

$$\begin{aligned}[T(v)]_B=[T]_B[v]_B &= \begin{bmatrix}3&1\\-7&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\-7\end{bmatrix}=\\ &= \begin{bmatrix}8\\-14\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

10. Rotação anti-horária de $\pi/2$ rd: $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;

contração de fator 1/4: $\begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}$;

reflexão em torno da reta $y = x$: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;

cisalhamento na direção y, de um fator 3: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$;

A matriz procurada é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 3/4 & -1/4 \end{bmatrix}.$$

11. Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(e_1) = (0,0,1), T(e_2) = (1,2,1), T(e_3) = (-2,1,-1)$ e $T(e_4) = (1,1,1)$, onde $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^4$. Determine:

   a. $T(x,y,z,t) = (y - 2z + t, 2y + z + t, x + y - z + t)$

   b. $N(T) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; T(x,y,z,t) = (0,0,0)\} \Rightarrow$ $\begin{cases} y - 2z + t = 0 \\ 2y + z + t = 0 \\ x + y - z + t = 0 \end{cases}$. O conjunto-solução desse sistema é $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; x = -z, y = -3z, t = 5z\}$. Daí, uma possível maneira de caracterizar o núcleo de T é escrevendo

   $$N(T) = \{(-k, -3k, k, 5k); k \in \mathbb{R}\} = [(-1,-3,1,5)].$$

   Obs.: O vetor $(-1,-3,1,5)$ é um gerador do núcleo de T, mas qualquer outro múltiplo desse vetor, não nulo, também é gerador.

   c. Pelo teorema do núcleo e da imagem, $dim\,\mathbb{R}^4 = dim\,N(T) + dim\,Im(T)$. No item (b.), vimos que o núcleo de T é gerado por apenas 1 vetor. Logo, $dim\,N(T) = 1$. Daí,

   $$4 = 1 + dim\,Im(T) \Rightarrow dim\,Im(T) = 3.$$

   Como T está definida de $\mathbb{R}^4$ em $\mathbb{R}^3$, concluimos que $Im(T) = \mathbb{R}^3$. (Isto é, T é sobrejetora.)

d. Seja $u = (x,y,z,t)$. Então

$$\begin{array}{rcl} T(u) & = & T(x,y,z,t) = \\ & = & (y-2z+t, 2y+z+t, x+y-z+t) = \\ & = & (1,0,1) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y-2z+t=1 \\ 2y+z+t=0 \\ x+y-z+t=1 \end{array} \right. \end{array}$$

$\Rightarrow u$ é qualquer vetor de $I\!R^4$ da forma
$(-k, -1-3k, k, 2+5k, k \in I\!R$.

12. Vamos obter a fórmula da composta $F \circ T$:
$(F \circ T) : I\!R^4 \to I\!R^2$ é dada por

$$\begin{array}{rcl} (F \circ T)(x,y,z,t) & = & F(T(x,y,z,t) = F(x,t+z,y) = \\ & = & (x-y, 2t+2z). \end{array}$$

a. $N(F \circ T) = \{(x,y,z,t) \in I\!R^4; (x-y, 2t+2z) = (0,0)\}$
$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-y=0 \\ 2t+2z=0 \end{array} \right.$ Então

$$\begin{array}{rcl} N(F \circ T) & = & \{(x,y,z,t) \in I\!R^4; x=y \text{ e } z=-t\} = \\ & = & \{(x,x,-t,t); x,t \in I\!R\} = \\ & = & \{x(1,1,0,0)+t(0,0,-1,1)\} = \\ & = & [(1,1,0,0),[0,0,-1,1)]. \end{array}$$

b. Pelo teorema do núcleo e da imagem, temos: $dim\, I\!R^4 = dim\, N(F \circ T) + dim\, Im(F \circ T)$. Pelo item (b.), $dim\, N(F \circ T) = 2$. Logo, $dim\, Im(F \circ T) = 2$, que é a dimensão do contradomínio ($I\!R^2$). Logo, $Im\,(F \circ T) = I\!R^2$ (isto é, $F \circ T$ é sobrejetora.)

c. Como
$(F \circ T)(1,0,0,0) = (1,0)$
$(F \circ T)(0,1,0,0) = (-1,0)$
$(F \circ T)(0,0,1,0) = (0,2)$
$(F \circ T)(0,0,0,1) = (0,2)$,
temos que $[F \circ T] = \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right]$.

13. A transformação dada é um cisalhamento, na direção do eixo x, de um fator 2. O gráfico que espelha a imagem do quadrado dado é o da letra (a.).

14. Os vetores $(1,1)$ e $(1,2)$ formam um base de $\mathbb{R}^2$. Vamos expressar (x,y) nessa base:

$$(x,y)=a(1,1)+b(1,2)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}a+b=x\\a+2b=y\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}a=2x-y\\b=y-x\end{array}\right.$$

Então

$$\begin{aligned}T(x,y) &= T\left((2x-y)(1,1)+(y-x)(1,2)\right)=\\&= (2x-y)T(1,1)+(y-x)T(1,2)=\\&= (2x-y)(1,5)+(y-x)(0,1)\\&\Rightarrow T(x,y)=(2x-y,9x-4y).\end{aligned}$$

15.

$$\begin{aligned}(F\circ T)(x,y,z) &= F(T(x,y,z))=F(z,x+y)=\\&= 3z-(x+y)=-x-y+3z.\end{aligned}$$

16. Resposta: (a.), (d.)

17. a.

$$\begin{aligned}T(e_1+e_2+e_3) &= T(e_1)+T(e_2)+T(e_3)=\\&= e_2+e_1+e_3+e_2+e_3=\\&= e_1+2e_2+2e_3.\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}T(2e_1-3e_2+e_3) &= 2T(e_1)-3T(e_2)+T(e_3=\\&= 2e_2-3e_1-3e_3+e_2+e_3=\\&= -3e_1+3e_2-2e_3.\end{aligned}$$

18. a.

$$[T(1,1,1)]=\begin{bmatrix}1&-2&0\\3&-1&2\\-1&0&-2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\4\\-3\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow T(1,1,1)=(-1,4,-3).$$

b.

$$
\begin{aligned}
[T(x,y,z)] &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} x-2y \\ 3x-y+2z \\ -x-2z \end{bmatrix} \\
&\Rightarrow \; T(x,y,z) = (x-2y, 3x-y+2z, -x-2z).
\end{aligned}
$$

Aula 29

AUTOVETORES E AUTOVALORES DE MATRIZES

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. compreender os conceitos de autovalor e autovetor;
2. reconhecer um escalar como autovalor de uma matriz;
3. reconhecer um vetor como autovetor de uma matriz.

AUTOVETORES E AUTOVALORES DE MATRIZES

Bem-vindo ao seu próximo curso de Álgebra Linear. Ele se desenvolverá em torno de conceitos fundamentais como autovalor e autovetor de uma matriz. Esses conceitos são de fundamental importância na Matemática pura e aplicada e aparecem em situações muito mais gerais que as consideradas aqui. Os conceitos de autovalor e autovetor também são usados no estudo das equações diferenciais e sistemas dinâmicos: eles fornecem informações críticas em projetos de Engenharia e surgem de forma natural em áreas como a Física e a Química.

Lembre que $M_n(\mathbb{R})$ denota o conjunto das matrizes quadradas de ordem n com elementos reais.

Neste módulo vamos continuar os estudos iniciados no curso de Álgebra Linear I, sobre as matrizes quadradas $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ e as transformações lineares definidas pela matriz A.

O objetivo principal desta aula é apresentar os conceitos fundamentais de autovalor e autovetor de uma matriz A.

Definição 29.1.

Dada uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$, o número real λ é chamado *autovalor* de A se existe um vetor não-nulo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}. \tag{29.1}$$

Todo vetor não-nulo $\mathbf{v}$ que satisfaça (29.1) é chamado um *autovetor associado* (ou *correspondente*) ao autovalor λ. Os autovalores também são chamados *valores próprios* ou *valores característicos*, e os autovetores são chamados *vetores próprios* ou *vetores característicos*. Verifica-se que para todo vetor $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{v}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, temos $A\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$, isto é, qualquer múltiplo escalar não-nulo de $\mathbf{v}$ também é um autovetor de A associado ao autovalor λ. De fato,

$$A\mathbf{w} = A(\alpha\mathbf{v}) = \alpha A(\mathbf{v}) = \alpha(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(\alpha\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{w}.$$

Vale também observar que na equação (29.1) estaremos sempre considerando o vetor $\mathbf{v}$ na forma de uma matriz coluna $n \times 1$.

É fácil determinar se um vetor é autovetor de uma matriz e também é fácil decidir se um escalar é autovalor de uma matriz. Vejamos como isso é feito nos seguintes exemplos.

Exemplo 29.1.

Se I é a matriz identidade $n \times n$, então o único autovalor é $\lambda = 1$. Qualquer vetor não-nulo $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$ é um autovetor de A associado ao autovalor $\lambda = 1$, pois

$$I\mathbf{v} = \mathbf{v} = 1\,\mathbf{v}.$$

Exemplo 29.2.

Vamos verificar se os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são autovetores de A, onde
$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Solução:

Para identificarmos se $\mathbf{u}$ é autovetor de A devemos verificar se existe um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$. Temos que

$$A\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2\mathbf{u}.$$

Assim, $\mathbf{u} = (1,1)$ é autovetor de A com autovalor correspondente $\lambda = -2$.

No caso do vetor $\mathbf{v}$, temos

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Assim, não existe escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ e, consequentemente, $\mathbf{v} = (1,2)$ não é um autovetor da matriz A.

Na **Figura 29.1**, podemos ver os vetores $\mathbf{u} = (1,1)$, $\mathbf{v} = (1,2)$ e a ação geométrica da transformação $w \mapsto Aw$ em cada um deles, onde $w = (x,y)$.

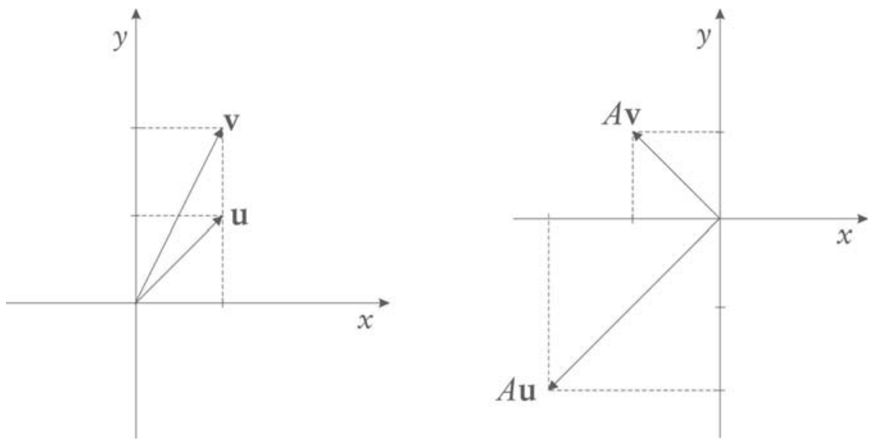


Figura 29.1: Ação geométrica da transformação $w \mapsto Aw$.

Exemplo 29.3.

Verifique se o escalar 5 é um autovalor para a matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e determine os autovetores associados a esse autovalor.

Solução:

Usando diretamente a definição de autovetor e autovalor de uma matriz, temos que o escalar 5 é autovalor de A se e somente se a equação

$$A\mathbf{v} = 5\mathbf{v} \tag{29.2}$$

possui uma solução não-nula $\mathbf{v} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Mas a equação (29.2) é equivalente à equação

$$A\mathbf{v} - 5I\mathbf{v} = (A - 5I)\mathbf{v} = 0. \tag{29.3}$$

Assim, precisamos achar uma solução não-nula para esse sistema linear homogêneo. Primeiramente, calculemos a matriz

$$A - 5I = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-5 & 0 \\ 2 & 1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Portanto, o sistema linear homogêneo (29.3) pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{29.4}$$

Para resolver esse sistema linear, use as técnicas de escalonamento de matrizes desenvolvidas no curso de Álgebra Linear I. Escreva a matriz ampliada do sistema linear (29.4)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}. \tag{29.5}$$

Aplicando as operações elementares em linhas, vemos que a matriz escalonada correspondente à matriz (29.5) é

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{29.6}$$

e o sistema linear homogêneo correspondente a essa matriz é

$$x - 2y = 0. \tag{29.7}$$

Como todo vetor da forma $(2t,t) \in \mathbb{R}^2$, com $t \in \mathbb{R}$, é uma solução para o sistema (29.7), temos que esse sistema possui infinitas soluções e, assim, é possível e indeterminado. Portanto, todo vetor da forma $\mathbf{v} = (2t,t) \in \mathbb{R}^2$, com $t \in \mathbb{R}^*$, é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 5$. De fato, verifica-se que

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10t \\ 5t \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} = 5\mathbf{v}$$

para todo $t \in \mathbb{R}^*$.

No exemplo anterior, podemos observar que a equivalência entre as equações (29.2) e (29.3) vale, claramente, para qualquer escalar λ no lugar de $\lambda = 5$ e para qualquer matriz A. Assim, $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor da matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ se e somente se o sistema linear homogêneo

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0 \tag{29.8}$$

possui uma solução não-nula $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. O conjunto de todas as soluções do sistema (29.8) é o núcleo (ou espaço-nulo) da matriz $A - \lambda I$. Portanto, pelo visto no curso de Álgebra Linear I, este conjunto solução é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ chamado *autoespaço* da matriz A associado ao autovalor λ, denotado por E(λ).

No caso da matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ do Exemplo 29.3, o autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 5$ é a reta formada por todos os múltiplos escalares do autovetor $\mathbf{v} = (2,1)$. Geometricamente, esse autoespaço é a reta que passa por (2, 1) e pela origem. No Exemplo 29.2, vemos que o autoespaço associado ao autovalor $\lambda = -2$ é a reta que passa por $(1,1)$ e pela origem, como mostra a **Figura 29.2**.

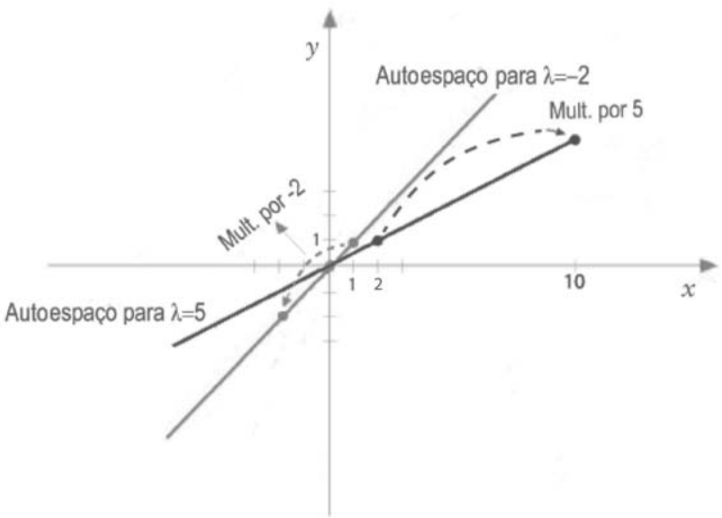


Figura 29.2: Autoespaços para $\lambda = 5$ e $\lambda = -2$.

Exemplo 29.4.

Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$. Verifique que $\lambda = 3$ é um autovalor de A e determine uma base para o autoespaço associado.

Solução:

Para verificar que $\lambda = 3$ é um autovalor de A, devemos encontrar uma solução não-nula $\mathbf{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ do sistema linear homogêneo

$$(A - 3I)\mathbf{v} = 0. \qquad (29.9)$$

Para ver isso, consideremos primeiramente a matriz

$$A - 3I \quad = \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assim, o sistema (29.9) pode ser escrito como

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ -x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - 4y - 6z = 0 \end{cases} \tag{29.10}$$

Novamente, resolvemos este sistema linear usando os métodos e as técnicas estudados na Aula 7 do curso de Álgebra Linear I. A matriz ampliada do sistema linear (29.10) é

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

e é fácil ver que a matriz escalonada equivalente a essa matriz ampliada é

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cujo sistema linear homogêneo é dado por

$$x - 2y - 3z = 0. \tag{29.11}$$

Sabemos que as soluções dos sistemas (29.10) e (29.11) são as mesmas. Vemos que o sistema (29.11) possui duas variáveis livres, logo, possui infinitas soluções e, portanto, $\lambda = 3$ é um autovalor da matriz A. Expressando x em termos das variáveis y e z obtemos que

$$x = 2y + 3z.$$

Escrevendo $y = k \in \mathbb{R}$ e $z = t \in \mathbb{R}$, temos que todo vetor não nulo na forma

$$(2k + 3t, k, t) \text{ com } k,\, t \in \mathbb{R}$$

é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 3$. Assim, o conjunto

$$S = \{(2k + 3t, k, t); k,\, t \in \mathbb{R}\} = \{k\,(2,1,0) + t\,(3,0,1); k,\, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

é o autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 3$. Vemos que esse subespaço é gerado pelos vetores

$$\mathbf{u} = (2,1,0) \text{ e } \mathbf{v} = (3,0,1)$$

e, sendo linearmente independentes, formam uma base para o subespaço S. Geometricamente, o subespaço S representa o plano do $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem e é gerado pelos dois autovetores $\mathbf{u} = (2,1,0)$ e $\mathbf{v} = (3,0,1)$.

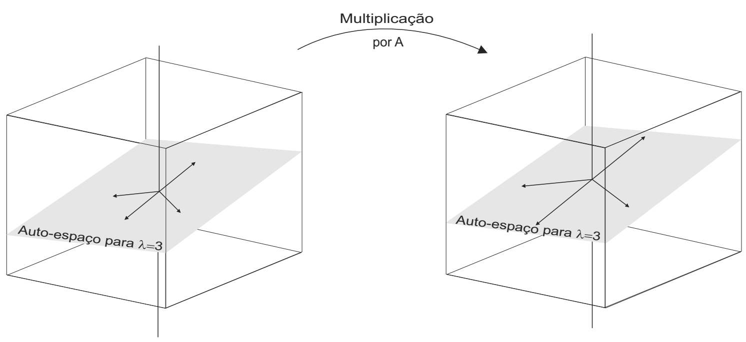


Figura 29.3: A age como uma expansão no autoespaço S.

Observe, neste exemplo, que a imagem de qualquer elemento não-nulo $w \in S$ pela ação da matriz A é novamente um elemento do autoespaço S, isto é, um autovetor de A associado ao autovalor $\lambda = 3$. De fato, sendo $\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$ base do autoespaço S, temos que existem escalares $a,\ b \in \mathbb{R}$ tais que

$$\mathbf{w} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$$

Como $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são autovalores de S, associados ao autovalor $\lambda = 3$, temos

$$\begin{array}{rcl} Aw & = & A(a\mathbf{u}+b\mathbf{v}) = A(a\mathbf{u}) + A(b\mathbf{v}) \\ & = & aA(\mathbf{u}) + bA(\mathbf{v}) = 3a\mathbf{u} + 3b\mathbf{v} \\ & = & 3(a\mathbf{u}+b\mathbf{v}) = 3\mathbf{w} \in S. \end{array}$$

Como $A\mathbf{w} \in S$ para todo $\mathbf{w} \in S$, diz-se que o autoespaço S é um *autoespaço invariante* pela ação da matriz A.

Exercício 29.1.

1. Verifique se $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ são autovetores da matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determine os autovalores correspondentes. Este exercício mostra que, apesar de o vetor nulo não poder ser autovetor, é possível ter autovalor igual a zero.

2. Verifique se $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ é autovetor da matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$. Caso seja, determine o autovalor correspondente.

3. Verifique se $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ é autovetor da matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Caso seja, determine o autovalor correspondente.

4. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$ com autovalor $\lambda = 10$, determine uma base para o autoespaço associado a esse autovalor.

5. Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$. Verifique se $\lambda = 2$ é um autovalor de A e determine uma base para o autoespaço associado a esse autovalor.

6. Mostre que se λ é um autovalor correspondente ao autovetor $\mathbf{v}$, então ele é único, isto é, não existe escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \lambda$, tal que $A\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v}$.

Aula 30

Autovetores e Autovalores de Matrizes – Casos Especiais

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. reconhecer casos especiais de autovalores;
2. caracterizar a existência de autovalor zero;
3. familiarizar-se com demonstrações envolvendo autovalores e autovetores.

AUTOVETORES E AUTOVALORES DE MATRIZES – CASOS ESPECIAIS

Na Aula 1, vimos os conceitos de autovalor, autovetor e autoespaço. Nesta aula, vamos continuar a explorar essa conceituação em exemplos e casos particulares muito importantes.

No primeiro exemplo, a matriz A é triangular superior e veremos que os autovalores são facilmente calculados.

Exemplo 30.1.

Calcule os autovalores da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Novamente, pela definição, temos que o escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor da matriz A se e somente se o sistema linear homogêneo

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0 \qquad (30.1)$$

possui uma solução não-nula $\mathbf{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. O sistema linear (30.1) pode ser rescrito como

$$\begin{cases} (1-\lambda)x + 6y + 2z = 0 \\ (2-\lambda)y + z = 0 \\ (3-\lambda)z = 0\ . \end{cases} \qquad (30.2)$$

Sabemos que o sistema (30.2) possui uma solução não-nula $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se e somente se existe uma variável livre. É fácil ver que isso acontece se e somente se pelo menos um dos coeficientes contendo λ é igual a zero (um dos elementos da diagonal principal da matriz associada é zero). E isso, por sua vez, acontece se e somente se λ for igual a 1, 2 ou 3, que são exatamente os valores da diagonal principal da matriz A.

Na verdade, este procedimento também é válido no caso em que a matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ é matriz triangular inferior. Assim, temos o seguinte teorema:

Teorema 30.1.

Os autovalores de uma matriz triangular (superior ou inferior) são os elementos de sua diagonal principal.

No próximo teorema, veremos em que condições uma matriz possui algum autovalor igual a zero.

Teorema 30.2.

Uma matriz A de ordem n tem autovalor igual a zero se e somente se A é uma matriz não-inversível.

Demonstração

Usando as definições de autovalor e autovetor, sabemos que 0 é um autovalor da matriz A se e somente se existe um vetor não-nulo $\mathbf{v}$ tal que

$$A\mathbf{v} = 0\mathbf{v}. \tag{30.3}$$

O sistema linear (30.3) é claramente equivalente ao sistema homogêneo $n \times n$

$$A\mathbf{v} = 0. \tag{30.4}$$

Do curso de Álgebra Linear I, o sistema (30.4) possui solução não-nula se e somente se $\det(A) = 0$. E $\det(A) = 0$ se e somente se a matriz A é não-inversível.

Lembre que $\det(A)$ denota o determinante da matriz A.

Exemplo 30.2.

Calcule os autovalores da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Solução:

Pelo Teorema 30.1, os autovalores de A são os elementos da diagonal principal, ou seja, os autovalores são 0, 1 e 5. Observe também que, sendo 0 um autovalor de A, pelo Teorema 30.2 a matriz A é não-inversível.

Teorema 30.3.

Se λ é um autovalor de uma matriz A, então λ^k é autovalor da matriz A^k para todo $k \in \mathbb{N}^*$.

Demonstração

Pela definição, se λ é autovalor da matriz A, então existe vetor não-nulo v tal que

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}. \tag{30.5}$$

Multiplicando a equação (30.5) por A, temos

$$A(A\mathbf{v}) = A(\lambda\mathbf{v}),$$

o que nos dá

$$A^2\mathbf{v} = \lambda A\mathbf{v} = \lambda(\lambda\mathbf{v}) = \lambda^2\mathbf{v},$$

ou seja,

$$A^2\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v}. \tag{30.6}$$

Obtemos, assim, que λ^2 é um autovalor da matriz A^2 com autovetor correspondente $\mathbf{v}$. Analogamente, de (30.6), obtemos que

$$A^3\mathbf{v} = \lambda^3\mathbf{v},$$

e isso significa que λ^3 é autovalor da matriz A^3 com autovetor correspondente $\mathbf{v}$. Continuando esse procedimento, obtemos que

$$A^k\mathbf{v} = \lambda^k\mathbf{v} \text{ para todo } k \in \mathbb{N}^*.$$

Assim, λ^k é autovalor da matriz A^k com o mesmo autovetor associado $\mathbf{v}$.

Exemplo 30.3.

Calcule os autovalores de uma matriz A que satisfaz $A^2 = 0$, isto é, A^2 é a matriz nula.

Solução:

Se λ é um autovalor da matriz A, então, pelo Teorema 30.3, λ^2 é um autovalor da matriz A^2 e, portanto, existe vetor não-nulo $\mathbf{v}$ tal que $A^2\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v}$. Mas $A^2 = 0$ é a matriz nula, então

$$\lambda^2\mathbf{v} = 0,$$

e, como $\mathbf{v}$ é um vetor não-nulo, então é necessário que $\lambda^2 = 0$ e, portanto, $\lambda = 0$. Assim, obtivemos o resultado que afirma que, se uma matriz A é tal que $A^2 = 0$, então seu único autovalor é $\lambda = 0$.

Uma das propriedades mais importantes dos autovalores é apresentada no próximo teorema e sua demonstração ilustra um cálculo que é típico de autovalores e autovetores.

Teorema 30.4.

Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ autovetores de uma matriz A, associados aos autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, respectivamente. Então, o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ é linearmente independente.

Este teorema será empregado em outras aulas mais à frente.

Demonstração

Sendo $\mathbf{v}_1$ vetor não-nulo, é claro que o conjunto unitário $\{\mathbf{v}_1\}$ é linearmente independente. Vamos estabelecer que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ também é linearmente independente. Sejam c_1 e c_2 constantes tais que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = 0. \qquad (30.7)$$

Vamos mostrar que $c_1 = c_2 = 0$ e, consequentemente, que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ é um conjunto de vetores linearmente independentes.

Multiplicando a equação (30.7) por λ_2, obtemos

$$c_1\lambda_2\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{v}_2 = 0. \qquad (30.8)$$

Multiplicando também a equação (30.7) por A, e usando que $A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1$ e $A\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2$, obtemos, para o lado esquerdo da equação, que

$$\begin{aligned} A(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) &= A(c_1\mathbf{v}_1) + A(c_2\mathbf{v}_2) \\ &= c_1A(\mathbf{v}_1) + c_2A(\mathbf{v}_2) \\ &= c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{v}_2\,, \end{aligned}$$

enquanto para o lado direito, temos $A0 = 0$. Assim, o resultado de se multiplicar a equação (30.7) por A é

$$c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{v}_2 = 0. \tag{30.9}$$

Subtraindo a equação (30.9) da equação (30.8), vemos que as segundas parcelas se cancelam, sobrando

$$c_1(\lambda_2 - \lambda_1)\mathbf{v}_1 = 0.$$

Como $\mathbf{v}_1$ é vetor não-nulo, então é necessário que $c_1(\lambda_2 - \lambda_1) = 0$. E como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, segue que $c_1 = 0$. Substituindo esse valor de volta na equação (30.7), obtemos $c_2\mathbf{v}_2 = 0$ e, como $\mathbf{v}_2$ também é vetor não-nulo, então é necessário que $c_2 = 0$. Assim, concluímos que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ é linearmente independente.

Vamos agora dar o passo seguinte, isto é, estabelecer que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é conjunto linearmente independente. Sejam c_1 , c_2 e c_3 constantes tais que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = 0. \tag{30.10}$$

Se mostrarmos que $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, concluímos que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é conjunto de vetores linearmente independentes.

Multiplicando a equação (30.10) por λ_3, obtemos

$$c_1\lambda_3\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_3\mathbf{v}_2 + c_3\lambda_3\mathbf{v}_3 = 0. \tag{30.11}$$

Multiplicando a equação (30.10) também por A, e usando que
$A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1$, $A\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2$ e $A\mathbf{v}_3 = \lambda_3\mathbf{v}_3$, obtemos, para o lado esquerdo da equação, que

$$\begin{aligned} A(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3) &= A(c_1\mathbf{v}_1) + A(c_2\mathbf{v}_2) + A(c_3\mathbf{v}_3) \\ &= c_1A(\mathbf{v}_1) + c_2A(\mathbf{v}_2) + c_3A(\mathbf{v}_3) \\ &= c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + c_3\lambda_3\mathbf{v}_3\,, \end{aligned}$$

enquanto para o lado direito temos $A0 = 0$. Assim, o resultado de se multiplicar a equação (30.10) por A é

$$c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + c_3\lambda_3\mathbf{v}_3 = 0. \tag{30.12}$$

Subtraindo a equação (30.12) da equação (30.11), vemos que as terceiras parcelas se cancelam, sobrando

$$c_1(\lambda_3-\lambda_1)\mathbf{v}_1+c_2(\lambda_3-\lambda_2)\mathbf{v}_2=0.$$

Como $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são linearmente independentes, então é necessário que $c_1(\lambda_3-\lambda_1)=0$ e $c_2(\lambda_3-\lambda_2)=0$. E como $\lambda_3\neq\lambda_1$ e $\lambda_3\neq\lambda_2$, segue que $c_1=c_2=0$. Substituindo esses valores de volta na equação (30.10), obtemos $c_3\mathbf{v}_3=0$ e, como $\mathbf{v}_3$ também é vetor não-nulo, então é necessário que $c_3=0$. Assim, concluímos que $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ é linearmente independente.

Assim, sabendo que $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ é linearmente independente, vamos mostrar, da mesma forma como foi feito nos casos anteriores, que $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1}\}$ também é linearmente independente. Sejam $c_1,\ldots,c_n,c_{n+1}$ constantes tais que

$$c_1\mathbf{v}_1+\ldots+c_n\mathbf{v}_n+c_{n+1}\mathbf{v}_{n+1}=0. \tag{30.13}$$

Multiplicando a equação (30.13) por λ_{n+1}, obtemos

$$c_1\lambda_{n+1}\mathbf{v}_1+\ldots+c_n\lambda_{n+1}\mathbf{v}_n+c_{n+1}\lambda_{n+1}\mathbf{v}_{n+1}=0. \tag{30.14}$$

Multiplicando a equação (30.13) também por A, e usando que $A\mathbf{v}_1=\lambda_1\mathbf{v}_1,\ldots,A\mathbf{v}_{n+1}=\lambda_{n+1}\mathbf{v}_{n+1}$, obtemos, para o lado esquerdo da equação, que

$$\begin{aligned} A(c_1\mathbf{v}_1+\ldots+c_n\mathbf{v}_n+c_{n+1}\mathbf{v}_{n+1}) &= A(c_1\mathbf{v}_1)+\ldots+\\ &\quad +A(c_n\mathbf{v}_n)+A(c_{n+1}\mathbf{v}_{n+1})\\ &= c_1A(\mathbf{v}_1)+\ldots+\\ &\quad +c_nA(\mathbf{v}_n)+c_{n+1}A(\mathbf{v}_{n+1})\\ &= c_1\lambda_1\mathbf{v}_1+\ldots+\\ &\quad +c_n\lambda_n\mathbf{v}_n+c_{n+1}\lambda_{n+1}\mathbf{v}_{n+1}, \end{aligned}$$

enquanto para o lado direito temos $A0=0$. Assim, o resultado de se multiplicar a equação (30.13) por A é

$$c_1\lambda_1\mathbf{v}_1+\ldots+c_n\lambda_n\mathbf{v}_n+c_{n+1}\lambda_{n+1}\mathbf{v}_{n+1}=0. \tag{30.15}$$

Subtraindo a equação (30.15) da equação (30.14), vemos que as últimas parcelas se cancelam, sobrando

$$c_1(\lambda_{n+1}-\lambda_1)\mathbf{v}_1+\ldots+c_n(\lambda_{n+1}-\lambda_n)\mathbf{v}_n=0.$$

Como $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ são linearmente independentes, então é necessário que $c_1(\lambda_{n+1}-\lambda_1)=0,\ldots,c_n(\lambda_{n+1}-\lambda_n)=0$. E como $\lambda_{n+1}\neq\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1}\neq\lambda_n$, segue que $c_1=\ldots=c_n=0$. Substituindo esses valores de volta na equação (30.13), obtemos $c_{n+1}\mathbf{v}_{n+1}=0$ e, como $\mathbf{v}_{n+1}$ também é vetor não-nulo, então é necessário que $c_{n+1}=0$. Assim, concluímos que $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1}\}$ é linearmente independente.

Exercício 30.1.

1. Dada a matriz $A=\begin{pmatrix}5&0\\2&1\end{pmatrix}$, determine seus autovalores e uma base para o autoespaço associado a cada autovalor.
2. Dada a matriz $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\4&-7&1\end{pmatrix}$, determine seus autovalores e uma base para o autoespaço associado a cada autovalor.
3. Dada a matriz $A=\begin{pmatrix}-1&3&5\\0&2&4\\0&0&1\end{pmatrix}$, calcule os autovalores das matrizes A^2 e A^3.
4. Mostre que A e A^t têm os mesmos autovalores.
5. Dada a matriz A, $n\times n$, mostre que se λ^2 é um autovalor não-negativo de A^2, então λ ou $-\lambda$ é um autovalor para A.

Aula 31

POLINÔMIO CARACTERÍSTICO

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. compreender o conceito de polinômio característico de uma matriz;
2. compreender a relação entre as raízes do polinômio característico e os autovalores de uma matriz;
3. desenvolver habilidades para calcular autoespaços associados a autovalores de uma matriz.

POLINÔMIO CARACTERÍSTICO

Pré-requisito
Sistema linear homogêneo (Álgebra Linear I).

Nesta aula, apresentaremos uma fórmula sistemática de calcular os autovalores de uma matriz quadrada de ordem n. A cada matriz
$A \in M_n(\mathbb{R})$ associaremos um polinômio que tem a propriedade de suas raízes serem exatamente os autovalores de A. Antes de apresentarmos formalmente esse polinômio, vejamos, através de um exemplo, como ele surge naturalmente.

Exemplo 31.1.

Determinar os autovalores de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ e seus respectivos autovetores associados.

Solução:

Queremos encontrar os números reais λ e todos os vetores não-nulos
$\mathbf{v} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo a equação

$$A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}, \tag{31.1}$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{31.2}$$

A equação (31.2) representa o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \lambda x_1 \\ -2x_1 + 4x_2 = \lambda x_2, \end{cases}$$

ou ainda,

$$\begin{cases} (\lambda - 1)x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + (\lambda - 4)x_2 = 0\,. \end{cases} \tag{31.3}$$

As equações anteriores (31.3) formam um sistema linear homogêneo de duas equações e duas incógnitas. Como já foi visto no curso de Álgebra Linear I, o sistema linear homogêneo (31.3) possui solução não-nula (x_1, x_2) se e somente se o determinante de sua matriz associada for nulo, ou seja, se e somente se

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0. \tag{31.4}$$

Isto significa que

$$(\lambda-1)(\lambda-4)+2=0,$$

ou ainda,

$$\lambda^2-5\lambda+6=0, \tag{31.5}$$

ou também,

$$(\lambda-2)(\lambda-3)=0.$$

Portanto, quando esta última equação é satisfeita λ assume os valores 2 ou 3. Assim, $\lambda_1=2$ e $\lambda_2=3$ são os autovalores da matriz A.

Para encontrarmos os autovetores $\mathbf{v}=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ associados ao autovalor $\lambda_1=2$, formamos o sistema

$$A\mathbf{v}=2\mathbf{v},$$

ou

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

o que nos dá o sistema linear

$$\begin{cases} x_1+x_2=2x_1 \\ -2x_1+4x_2=2x_2 \end{cases}$$

ou ainda,

$$\begin{cases} x_1-x_2=0 \\ 2x_1-2x_2=0\,. \end{cases} \tag{31.6}$$

Observe que poderíamos ter obtido este último sistema linear homogêneo substituindo simplesmente $\lambda=2$ na equação (31.3). Escalonando o sistema, obtemos que as soluções do sistema homogêneo (31.6) são

$$x_1=x_2 \ \text{ e } x_2=t, \text{ sendo } t \text{ qualquer valor real.}$$

Portanto, todos os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1=2$ são dados por $\mathbf{v}=(t,t)$, sendo t um número real não nulo qualquer. Assim, todos esses autovetores são múltiplos do vetor (1, 1). Em particular, $\mathbf{v}_1=(1,1)$ é um autovetor associado a $\lambda_1=2$.

Analogamente, para encontrarmos os autovetores associados com o autovalor $\lambda_2=3$ obtemos, de (31.3), o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} (3-1)x_1-x_2=0 \\ 2x_1+(3-4)x_2=0 \end{cases}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0\,. \end{cases} \tag{31.7}$$

Todas as soluções deste sistema linear homogêneo são dadas por

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2 \ \text{ e } x_2 = t \text{ qualquer valor real.}$$

Portanto, os autovetores de A associados ao autovetor $\lambda_2 = 3$ são dados por $\left(\frac{t}{2}, t\right)$ sendo t um número real não nulo qualquer. Assim, todos esses autovetores são múltiplos do vetor (1, 2). Em particular, $\mathbf{v}_2 = (1,2)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 3$.

Observe que o determinante (31.4), do exemplo anterior, transformou a equação matricial $(\lambda I - A)\mathbf{v} = 0$, que contém duas incógnitas, λ e v, na equação polinomial $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, que tem uma variável só. Nos exemplos apresentados na aula anterior, calculamos os autovalores de uma matriz por inspeção, enquanto no exemplo acima procedemos de uma forma mais sistemática. Usaremos o processo apresentado neste exemplo como o método padrão para determinar os autovalores de uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Definição 31.1.

Seja $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. O determinante

$$p(x) = \det(xI_n - A) = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & x - a_{nn} \end{vmatrix} \tag{31.8}$$

é chamado de *polinômio característico* da matriz A.

No Exemplo 31.1, o polinômio característico da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ é

$$p(x) = \det(xI_2 - A) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ 2 & x-4 \end{vmatrix} = x^2 - 5x + 6.$$

Como $p(x) = (x-2)(x-3)$, vemos que 2 e 3 são as raízes do polinômio característico e, também, os autovalores da matriz A.

Exemplo 31.2.

Determine o polinômio característico e os autovalores da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solução:

Temos que o polinômio característico de A é dado por

$$p(x) = \det(xI_4 - A) = \begin{vmatrix} x-5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-5 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & x-3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & x-3 \end{vmatrix}.$$

Como a matriz $xI_4 - A$ é triangular superior, sabemos que seu determinante é igual a

$$p(x) = (x-5)(x-5)(x-3)(x-3) = (x-3)^2(x-5)^2.$$

Portanto, as raízes do polinômio característico de A são 3, 3, 5 e 5, que são exatamente os autovalores da matriz A. Dizemos, nesse caso, que o autovalor 5 tem *multiplicidade algébrica* 2, pois o fator $(x-5)$ aparece duas vezes como fator do polinômio $p(x)$. Analogamente para o autovalor $\lambda = 3$.

Definição 31.2.

Seja A uma matriz de ordem n com autovalor λ.

1. A *multiplicidade algébrica* do autovalor λ é a sua multiplicidade como raiz do polinômio característico $p(x) = \det(xI_n - A)$.

2. O *autoespaço* associado ao autovalor λ, denotado por $E(\lambda)$, é o subespaço gerado por todos os autovetores associados a λ.

3. A *multiplicidade geométrica* do autovalor λ é a dimensão do autoespaço $E(\lambda)$.

No Exemplo 31.1, vimos que o polinômio característico de uma matriz 2×2 é um polinômio de grau 2 e, no Exemplo 31.2, o polinômio característico de uma matriz 4×4 é um polinômio de grau 4. Em geral, é verdade que para uma matriz de ordem n o polinômio característico tem grau n. Vemos isso facilmente quando desenvolvemos o determinante (31.8); observe que o termo do polinômio característico de A contendo x^n provém do produto dos elementos da diagonal principal, ou seja, de

$$(x - a_{11})(x - a_{22}) \ldots (x - a_{nn}).$$

Observe que o coeficiente do termo de mais alto grau, aquele contendo x^n, é igual a 1 e, por isso, dizemos que o polinômio é *mônico*.

Pela forma como foi definido o polinômio característico, podemos concluir o resultado a seguir.

Teorema 31.1.

Um escalar λ é autovalor de uma matriz A de ordem n se e somente se λ é uma raiz do polinômio característico de A, isto é, se e somente se λ satisfaz a equação $\det(\lambda I_n - A) = 0$.

Sendo assim, para encontrarmos os autovalores de uma matriz A devemos encontrar as raízes do seu polinômio característico. E, como no Exemplo 31.1, os autovetores correspondentes são obtidos substituindo o valor de λ na equação $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ e resolvendo o sistema linear homogêneo

$$(\lambda I_n - A)\mathbf{v} = 0.$$

Exemplo 31.3.

Determine bases para os autoespaços da matriz A do Exemplo 31.2, e obtenha a multiplicidade geométrica de cada autovalor.

Solução:

Vimos que o polinômio característico da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

é dado por

$$p(x) = (x-5)^2(x-3)^2.$$

Portanto, os autovalores de A são $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 3$ e $\lambda_4 = 3$. Neste caso, os dois autovalores distintos têm multiplicidade algébrica 2. Vamos determinar os autovetores associados a cada um deles.

Para obter os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 5$, resolvemos o sistema linear homogêneo

$$(5I_4 - A)\mathbf{v} = 0.$$

Considerando $\mathbf{v} = (x, y, z, t)$, o sistema anterior pode ser reescrito como

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Escalonando a matriz ampliada do sistema, obtemos o sistema linear equivalente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e a solução geral deste sistema é dada pelos vetores da forma

$$\mathbf{v} = (-z-2t, z+t, z, t) \text{ com } z,\, t \in \mathbb{R}.$$

Observe que, neste caso, o autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 5$ tem duas variáveis livres, z e t, e, portanto, tem dimensão 2. Considerando $z = -1$ e $t = 0$ e, depois, $z = 0$ e $t = -1$, vemos que os vetores $\mathbf{v}_1 = (1,-1,-1,0)$ e $\mathbf{v}_2 = (2,-1,0,-1)$ pertencem ao autoespaço associado a $\lambda = 5$ e, como são linearmente independentes, formam uma base para esse autoespaço. Assim, a multiplicidade geométrica do autovalor $\lambda = 5$ também é igual a 2, ou seja, igual à multiplicidade algébrica.

Agora, para determinarmos os autovetores $\mathbf{v} = (x,y,z,t)$ associados ao autovalor $\lambda = 3$, devemos resolver o sistema homogêneo

$$(3I_4 - A)\mathbf{v} = 0.$$

Novamente, este sistema homogêneo é equivalente ao sistema

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e, escalonando a matriz ampliada desse sistema, obtemos o sistema linear equivalente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Vemos, facilmente, que a solução geral deste sistema é dada pelos vetores da forma

$$\mathbf{v} = (0,0,z,t) \;\; \text{com } z,\, t \in \mathbb{R}.$$

Outra vez, o autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 3$ tem dimensão 2. Os autovetores

$$\mathbf{v}_3 = (0,0,1,0) \text{ e } \mathbf{v}_4 = (0,0,0,1)$$

são linearmente independentes e, portanto, formam uma base do autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 3$. Logo, a multiplicidade geométrica de $\lambda = 3$ também é igual a 2, coincidindo mais uma vez com a multiplicidade geométrica.

Exercício 31.1.

1. Determine os autovalores e bases para os autoespaços correspondentes da matriz $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Determine os autovalores e bases para os autoespaços correspondentes da matriz $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a. Determine os autovalores e bases para os autoespaços correspondentes da matriz A.

   b. Determine as multiplicidades algébrica e geométrica de cada autovalor.

4. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   a. Determine os autovalores e bases para os autoespaços correspondentes da matriz A.

   b. Determine as multiplicidades algébrica e geométrica de cada autovalor.

5. Determine os valores de a, b, c, d, e e f, de modo que $\mathbf{v}_1 = (1,1,1), \mathbf{v}_2 = (1,0,-1)$ e $\mathbf{v}_3 = (1,-1,0)$ sejam autovetores da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$, e dê os autovalores associados a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$.

Aula 32

CÁLCULO DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. obter autovalores a partir do polinômio característico;
2. observar que nem sempre a multiplicidade algébrica de um autovalor coincide com sua multiplicidade geométrica e que, geralmente, a multiplicidade geométrica é menor ou igual à multiplicidade algébrica;
3. observar que existem matrizes que não possuem autovalores nem autovetores.

Cálculo de Autovalores e Autovetores

Pré-requisito
Aula 3; Teorema 30.4 da Aula 2.

No Exemplo 31.3, da Aula 3, vimos o caso de autovalores com multiplicidade algébrica igual à multiplicidade geométrica, isto é, o número de vezes que o autovalor comparece como raiz do polinômio característico é igual à dimensão do autoespaço correspondente. Consequentemente como a multiplicidade algébrica e a multiplicidade geométrica eram iguais a 2, pudemos obter, em cada um dos dois casos, dois autovetores linearmente independentes, formando uma base do autoespaço correspondente. Infelizmente, isso nem sempre é possível, como mostra o próximo exemplo.

Exemplo 32.1.

Determine os autovalores e os autovetores da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifique a relação entre a multiplicidade algébrica e a multiplicidade geométrica para cada autovalor.

Solução:

Como a matriz é triangular, vimos que seus autovalores são exatamente os elementos da diagonal principal ou, analogamente, observe que o polinômio característico de A é

$$p(x) = \det(xI_4 - A) = \begin{vmatrix} x-5 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & x-3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & x-5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix},$$

ou seja,

$$p(x) = x(x-3)(x-5)^2.$$

Portanto, os autovalores da matriz A são 0, 3, 5 e 5. Os autovalores 0 e 3 têm multiplicidade algébrica 1 enquanto o autovalor 5 aparece com multiplicidade algébrica 2. Vamos, agora, calcular os autovetores associados em cada caso.

Para o autovalor $\lambda = 0$, temos que os autovetores associados $\mathbf{v} = (x,\ y,\ z,\ t)$ satisfazem o sistema linear

$$(0I_4 - A)\mathbf{v} = 0.$$

Escalonando a matriz desse sistema, obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 0$ são da forma

$$\mathbf{v} = \left(\frac{-t}{5},\ t,\ t,\ t \right),\ \text{com}\ t \in \mathbb{R}^*.$$

Logo, o autoespaço associado a $\lambda = 0$ tem dimensão 1, sendo gerado pelo autovetor $\mathbf{v}_1 = \left(\frac{-1}{5},\ 1,\ 1,\ 1\right)$. Ou seja, a multiplicidade geométrica também é igual a 1.

Analogamente, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 3$ satisfazem o sistema homogêneo

$$(3I_4 - A)\mathbf{v} = 0,$$

que é equivalente ao sistema linear homogêneo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cujas soluções são da forma

$$\mathbf{v} = (x,\ x,\ 0,\ 0),\ \text{com}\ x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, o autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 3$ tem dimensão 1 e é gerado pelo autovetor $\mathbf{v}_2 = (1,\ 1,\ 0,\ 0)$. Aqui, também, a multiplicidade geométrica é igual a 1, coincidindo com o valor da multiplicidade algébrica.

Finalmente, resolvendo o sistema linear homogêneo

$$(5I_4 - A)\mathbf{v} = 0,$$

obtemos os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 5$. É fácil ver que este sistema é equivalente a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de onde obtemos soluções da forma

$$\mathbf{v} = (x,\ 0,\ 0,\ 0),\ \text{com}\ x \in \mathbb{R}.$$

Assim, o autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 5$ tem dimensão 1, sendo gerado pelo autovetor $\mathbf{v}_3 = (1,\ 0,\ 0,\ 0)$. Portanto, embora o autovalor $\lambda = 5$ tenha multiplicidade algébrica 2, sua multiplicidade geométrica é 1. **A multiplicidade geométrica de um autovalor é sempre menor ou igual à sua multiplicidade algébrica**.

Observe que os autovetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$, associados aos autovalores 0, 3 e 5, respectivamente, são linearmente independentes, como afirma o Teorema 30.4 da Aula 2.

Vimos que para obtermos os autovalores de uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ precisamos encontrar as raízes do seu polinômio característico. O problema de encontrar raízes de um polinômio de grau n não é um problema fácil. Existem muitos métodos para se obter aproximações numéricas das raízes reais de um polinômio, alguns deles mais eficientes do que outros.

Enunciaremos dois resultados gerais a respeito de raízes reais de polinômios.

Teorema 32.1.

Dado o polinômio $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$, podemos afirmar que:

1. A soma das raízes de $p(x)$ é igual a $-a_{n-1}$ e o seu produto é igual a $(-1)^n a_0$.
2. Se $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$, então toda raiz racional do polinômio $p(x)$ é inteira. Mais ainda, se r é uma raiz inteira de $p(x)$ então r é divisor de a_0.

Assim, para encontrarmos as possíveis raízes racionais de um polinômio mônico $p(x)$ com coeficientes inteiros, é suficiente procurar entre os divisores inteiros do termo constante a_0.

É claro que $p(x)$ pode muito bem ter apenas raízes irracionais ou complexas. No entanto, como este é um primeiro curso sobre autovalores, todos os polinômios característicos considerados terão apenas coeficientes inteiros e suas raízes reais, quando existirem, serão inteiras. Portanto, cada uma dessas raízes será um divisor do termo constante de $p(x)$.

Exemplo 32.2.

Determine os autovalores de uma matriz A, de ordem 3, cujo polinômio característico é $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

Solução:

Sabemos que os autovalores de A são as raízes de $p(x)$. Mas, pelo que vimos, os candidatos a raízes inteiras, ou mesmo racionais, de $p(x)$ são os divisores do termo constante, que é -6, ou seja, são ± 1, ± 2, ± 3 e ± 6. Agora, é preciso testá-las para saber quais de fato são raízes. Como $p(-1) = -24 \neq 0$, então -1 não é raiz de $p(x)$. Como $p(1) = 0$, temos que 1 é raiz de $p(x)$ e, portanto, o polinômio $(x-1)$ divide $p(x)$. Efetuando a divisão de $p(x)$ por $(x-1)$, obtemos

$$p(x) = (x-1)(x^2 - 5x + 6).$$

As outras duas raízes de $p(x)$ são as raízes do polinômio quadrático $x^2 - 5x + 6$, a saber, 2 e 3. Observe que são mais dois divisores de -6. Assim, 1, 2 e 3 são as raízes de $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ e, portanto, são os autovalores da matriz A.

Exemplo 32.3.

Determine os autovalores e uma base de autovetores para cada autoespaço correspondente da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Verifique, também, para cada autovalor, se a multiplicidade algébrica é igual à geométrica.

Solução:

Primeiramente, obtemos o polinômio característico da matriz A:

$$p(x) = \det(xI_3 - A) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & -1 \\ 0 & x-3 & 1 \\ -2 & -1 & x-3 \end{vmatrix} = x^3 - 8x^2 + 20x - 16.$$

Os candidatos à raiz inteira, ou mesmo racional, desse polinômio são os divisores de -16: ± 1, ± 2, ± 4, ± 8 e ± 16. Agora, para saber se algum desses valores é raiz do polinômio característico, é preciso testá-los. Como $p(-1) = -45$, então -1 não é raiz de $p(x)$. Como $p(1) = -3$, então 1 também não é raiz. Agora, $p(2) = 0$, logo 2 é raiz do polinômio característico. Dividindo $p(x)$ por $(x-2)$, obtemos

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-2)(x^2 - 6x + 8) \\ &= (x-2)(x-2)(x-4) \\ &= (x-2)^2(x-4)\ . \end{aligned}$$

Portanto, os autovalores da matriz A são 2, 2 e 4. O autovalor 4 tem multiplicidade algébrica 1, enquanto o autovalor 2 tem multiplicidade algébrica 2. Vamos, agora, calcular os autovetores associados em cada caso.

Para o autovalor $\lambda = 4$, temos que os autovetores associados $v = (x,\ y,\ z)$ satisfazem o sistema linear

$$(4I_3 - A)\mathbf{v} = 0.$$

Escalonando a matriz desse sistema, obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 4$ são da forma

$$\mathbf{v} = (z,\ -z,\ z),\ \text{com}\ z \in \mathbb{R}^*.$$

Logo, o autoespaço associado a $\lambda = 4$ tem dimensão 1, sendo gerado pelo autovetor $\mathbf{v}_1 = (1,\ -1,\ 1)$. Ou seja, a multiplicidade geométrica também é igual a 1.

Analogamente, para o autovalor $\lambda = 2$, temos que os autovetores associados $\mathbf{v} = (x,\ y,\ z)$ satisfazem o sistema linear

$$(2I_3 - A)\mathbf{v} = 0.$$

Escalonando a matriz desse sistema, obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 2$ são da forma

$$\mathbf{v} = (-z,\ z,\ z), \text{ com } z \in \mathbb{R}^*.$$

Logo, o autoespaço associado a $\lambda = 2$ tem dimensão 1, sendo gerado pelo autovetor $\mathbf{v}_2 = (1,\ -1,\ -1)$. Portanto, a multiplicidade geométrica desse autovalor é igual a 1, ou seja, menor que sua multiplicidade algébrica.

No entanto, observe que os autovetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são linearmente independentes.

Exemplo 32.4.

Determine os autovalores e uma base de autovetores para cada autoespaço correspondente da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Verifique, também, se as multiplicidades algébricas e geométricas coincidem.

Solução:

Primeiramente, obtemos o polinômio característico da matriz A:

$$p(x) = \det(xI_3 - A) = \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 1 \\ 2 & x+3 & -1 \\ -2 & -2 & x+2 \end{vmatrix} = x^3 + 4x^2 + 5x + 2.$$

Os candidatos à raiz inteira, ou mesmo racional, desse polinômio são os divisores de 2: ± 1 e ± 2. Como os coeficientes de $p(x)$ são todos positivos, podemos descartar os candidatos positivos 1 e 2. Agora, é fácil verificar que $p(-1) = 0$, ou seja, -1 é raiz de $p(x)$. Dividindo $p(x)$ por $(x+1)$, obtemos

$$\begin{aligned} p(x) &= (x+1)(x^2+3x+2) \\ &= (x+1)(x+1)(x+2) \\ &= (x+1)^2(x+2)\ . \end{aligned}$$

Portanto, os autovalores da matriz A são -1, -1 e -2. O autovalor -2 tem multiplicidade algébrica 1 enquanto o autovalor -1 tem multiplicidade algébrica 2. Vamos, agora, calcular os autovetores associados em cada caso.

Para o autovalor $\lambda = -2$, temos que os autovetores associados $\mathbf{v} = (x,\ y,\ z)$ satisfazem o sistema linear

$$(-2I_3 - A)\mathbf{v} = 0.$$

Escalonando a matriz desse sistema, obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = -2$ são da forma

$$\mathbf{v} = (z,\ -z,\ z) \text{ com } z \in \mathbb{R}^*.$$

Logo, o autoespaço associado a $\lambda = -2$ tem dimensão 1, sendo gerado pelo autovetor $\mathbf{v}_1 = (1,\ -1,\ 1)$. Ou seja, a multiplicidade geométrica também é igual a 1.

Analogamente, para o autovalor $\lambda = -1$, temos que os autovetores associados $\mathbf{v} = (x,\ y,\ z)$ satisfazem o sistema linear

$$(-1I_3 - A)\mathbf{v} = 0.$$

Escalonando a matriz desse sistema, obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = -1$ são da forma

$$\mathbf{v} = (x,\ y,\ 2x+2y) \text{ com } x \in \mathbb{R}^* \text{ ou } y \in \mathbb{R}^*.$$

Logo, o autoespaço associado a $\lambda = -1$ tem dimensão 2, sendo gerado pelos autovetores $\mathbf{v}_2 = (1,\ 0,\ 2)$ e $\mathbf{v}_3 = (0,\ 1,\ 2)$. Portanto, a multiplicidade geométrica desse autovalor é igual a 2, ou seja, igual à sua multiplicidade algébrica.

Observe que os autovetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ são, mais uma vez, linearmente independentes.

Também é interessante observar que uma matriz não precisa ter nenhum autovalor (real) e, consequentemente, nenhum autovetor. Veja o próximo exemplo.

Exemplo 32.5.

Verifique que a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ não possui autovalores.

Solução:

O polinômio característico dessa matriz é

$$p(x) = \det(xI_2 - A) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x^2 + 1.$$

Como o polinômio $p(x) = x^2 + 1$ não possui raízes reais (suas raízes são i e -i), então, pelo Teorema 31.1 da Aula 3, segue que a matriz A não possui autovalores. Não havendo autovalores, então não há também autovetores. Porém, se considerarmos o conjunto dos escalares como sendo os números complexos, então esta matriz teria dois autovalores complexos, a saber, i e -i. No entanto, não trataremos de autovalores complexos neste curso introdutório.

Exercício 32.1.

1. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a. Determine os autovalores e bases para os autoespaços correspondentes da matriz A.

   b. Determine as multiplicidades algébrica e geométrica de cada autovalor.

2. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$.

   a. Determine os autovalores e bases para os autoespaços correspondentes da matriz A.

   b. Determine as multiplicidades algébrica e geométrica de cada autovalor.

3. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$.

   a. Determine os autovalores e bases para os autoespaços correspondentes da matriz A.

   b. Determine as multiplicidades algébrica e geométrica de cada autovalor.

4. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix}$.

   a. Determine os autovalores e bases para os autoespaços correspondentes da matriz A.

   b. Determine as multiplicidades algébrica e geométrica de cada autovalor.

5. Seja A uma matriz de ordem n. Prove que A e sua transposta A^t têm o mesmo polinômio característico.

Aula 33

DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. compreender a conceituação de matrizes semelhantes;
2. compreender a conceituação de matriz diagonalizável;
3. observar a relação entre matriz diagonalizável, autovalores e autovetores.

DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES

Pré-requisitos
Matriz mudança de base (de Álgebra linear I); Teorema 30.4, da Aula 2; Teorema 32.1, da Aula 4.

Existe uma relação entre matrizes que é muito importante no estudo de operadores lineares e que, também, se torna importante no estudo de autovalores. Trata-se da relação de semelhança de matrizes.

Definição 33.1.

Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. As matrizes A e B são *semelhantes* se existe uma terceira matriz inversível $P \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $B = P^{-1}AP$ ou $A = P^{-1}BP$.

Exemplo 33.1.

Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = P^{-1}AP$. Determine o polinômio característico, os autovalores e os autovetores das matrizes A e B.

Solução:

Inicialmente, observe que A e B são matrizes semelhantes. Para a matriz A, temos

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \det(xI_2 - A) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ 2 & x-4 \end{vmatrix} = (x-1)(x-4)+2 = \\ &= x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)\,. \end{aligned}$$

Portanto, a matriz A possui dois autovalores distintos: 2 e 3.

Para o autovalor $\lambda = 2$, temos que os autovetores associados $\mathbf{v} = (x,\, y)$ satisfazem o sistema linear

$$(2I_2 - A)\mathbf{v} = 0.$$

Escalonando a matriz desse sistema, obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 2$ são da forma

$$\mathbf{v} = (x,\ x) \text{ com } x \in \mathbb{R}^*.$$

Logo, o autoespaço associado a $\lambda = 2$ tem dimensão 1, sendo gerado pelo autovetor $\mathbf{v}_1 = (1,1)$.

Para o autovalor $\lambda = 3$, temos que os autovetores associados $\mathbf{v} = (x,\ y)$ satisfazem o sistema linear

$$(3I_2 - A)\mathbf{v} = 0.$$

Escalonando a matriz desse sistema, obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 3$ são da forma

$$\mathbf{v} = (x,\ 2x) \text{ com } x \in \mathbb{R}^*.$$

Logo, o autoespaço associado a $\lambda = 3$ tem dimensão 1, sendo gerado pelo autovetor $\mathbf{v}_2 = (1,\ 2)$.

Quanto à matriz B, temos

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sendo B uma matriz triangular inferior, seus autovalores são os elementos da diagonal principal, a saber, 2 e 3. Seu polinômio característico é dado por

$$\begin{aligned} p_B(x) &= \det(xI_2 - B) = \begin{vmatrix} x-3 & 0 \\ 3 & x-2 \end{vmatrix} \\ &= (x-3)(x-2) \\ &= x^2 - 5x + 6\,. \end{aligned}$$

Para o autovalor $\lambda = 2$, temos que os autovetores associados $\mathbf{v} = (x,\ y)$ satisfazem o sistema linear

$$(2I_2 - B)\mathbf{v} = 0.$$

Escalonando a matriz desse sistema, obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 2$ são da forma

$$\mathbf{v} = (0,\ y) \text{ com } y \in \mathbb{R}^*.$$

Logo, o autoespaço associado a $\lambda = 2$ tem dimensão 1, sendo gerado pelo autovetor $\mathbf{v}_1 = (0,\ 1)$.

Para o autovalor $\lambda = 3$, temos que os autovetores associados $\mathbf{v} = (x,\ y)$ satisfazem o sistema linear

$$(3I_2 - B)\mathbf{v} = 0.$$

Escalonando a matriz desse sistema, obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 3$ são da forma

$$\mathbf{v} = (x,\ -3x) \text{ com } x \in \mathbb{R}^*.$$

Logo, o autoespaço associado a $\lambda = 3$ tem dimensão 1, sendo gerado pelo autovetor $\mathbf{v}_2 = (1,\ -3)$.

Observe que as duas matrizes, A e B, têm os mesmos autovalores e o mesmo polinômio característico. Isto é uma propriedade geral de matrizes semelhantes. No entanto, os autoespaços não precisam coincidir, como este exemplo mostra.

Teorema 33.1.

Sejam A e B matrizes semelhantes. Então A e B têm o mesmo polinômio característico e, consequentemente, os mesmos autovalores.

Demonstração

Sendo A e B matrizes semelhantes, existe uma matriz inversível P tal que $B = P^{-1}AP$. Assim,

$$\begin{array}{rcl} p_B(x) & = & \det(xI - B) \\ & = & \det(xP^{-1}IP - P^{-1}AP) \\ & = & \det(P^{-1}(xI - A)P) \\ & = & \det(P^{-1})\det(xI - A)\det(P) \\ & = & \det(xI - A) \\ & = & p_A(x)\,. \end{array}$$

Sendo os polinômios característicos iguais e como os autovalores são as raízes desse polinômio, segue que A e B têm os mesmos autovalores.

Vejamos, agora, o conceito de diagonalização de matrizes.

Definição 33.2.

Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ é dita *diagonalizável* se for semelhante a uma matriz diagonal. Nesse caso, também dizemos que a matriz A pode ser diagonalizada.

Exemplo 33.2.

Mostre que a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ do Exemplo 33.1 é diagonalizável.

Solução:

Vimos que a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ tem como autovetores $\mathbf{v}_1 = (1,1)$, associado ao autovalor $\lambda = 2$, e $\mathbf{v}_2 = (1,2)$, associado ao autovalor $\lambda = 3$. Como os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são linearmente independentes, veja o Teorema 30.4 da Aula 2, eles formam uma base de autovetores do $\mathbb{R}^2$. Considere a base canônica, $\mathbf{e}_1 = (1,0)$ e $\mathbf{e}_2 = (0,1)$, e observe que

$$\begin{array}{l} \mathbf{v}_1 = (1,1) = 1 \cdot \mathbf{e}_1 + 1 \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{v}_2 = (1,2) = 1 \cdot \mathbf{e}_1 + 2 \cdot \mathbf{e}_2\,, \end{array}$$

ou seja, a matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

É hora de rever a matriz mudança de base, do curso de Álgebra Linear I.

cujas colunas são formadas pelas componentes de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, é a matriz mudança de base, da base de autovetores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ para a base canônica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

Agora, temos que a matriz

$$\begin{aligned} D &= P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

é uma matriz diagonal semelhante à matriz A, isto é, a matriz A é diagonalizável. Veja que a matriz diagonal D obtida tem os autovalores da matriz A em sua diagonal principal.

Observe que também podemos expressar a matriz A em função da matriz diagonal D. Multiplicando a equação $D = P^{-1}AP$ por P^{-1} do lado direito, obtemos

$$DP^{-1} = P^{-1}A(PP^{-1}) = P^{-1}AI = P^{-1}A,$$

e multiplicando $DP^{-1} = P^{-1}A$ por P à esquerda, obtemos

$$\begin{aligned} (PP^{-1})A &= PDP^{-1} \\ IA &= PDP^{-1} \\ A &= PDP^{-1}. \end{aligned}$$

Uma das vantagens de termos uma matriz A semelhante a uma matriz diagonal D é que as potências de A se tornam mais fáceis de serem calculadas. De fato, da equação $A = PDP^{-1}$ obtida anteriormente, temos

$$\begin{aligned} A^2 &= (PDP^{-1})^2 \\ &= (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \\ &= PD(P^{-1}P)DP^{-1} \\ &= PD^2P^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2A \\ &= (PD^2P^{-1})(PDP^{-1}) \\ &= PD^2(P^{-1}P)DP^{-1} \\ &= PD^3P^{-1}. \end{aligned}$$

De um modo geral, temos $A^k = PD^kP^{-1}$ para qualquer inteiro positivo k. E sendo a matriz diagonal D dada por

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

temos que

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

O teorema a seguir fornece condições suficientes para que uma matriz A seja diagonalizável.

Teorema 33.2.

Se uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ tem n autovalores distintos, então ela é diagonalizável.

No Teorema 33.2, a matriz diagonal D, semelhante a A, é formada pelos autovalores de A em sua diagonal principal,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

sendo cada autovalor λ_k associado ao k-ésimo vetor $\mathbf{v}_k$ da base de autovetores $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$. A matriz P, em $D = P^{-1}AP$ ou $A = PAP^{-1}$, é a matriz que realiza a mudança de base, da base de autovetores $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ para a base canônica do $\mathbb{R}^n$, e cujas colunas são formadas pelas componentes dos autovetores, ou seja, a k-ésima coluna de P é formada pelas componentes do k-ésimo autovetor $\mathbf{v}_k$ dessa base. Denotamos essa relação entre a matriz P e os vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ por

$$P = [\ \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n\ ].$$

É muito importante observar que a ordem dos vetores da base de autovetores $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ determina a ordem das colunas da matriz P e a ordem dos elementos da diagonal da matriz D.

Exemplo 33.3.

Mostre que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 9 & 4 & 6 \\ -8 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável. Determine uma matriz diagonal D e uma matriz P tais que $D = P^{-1}AP$.

Solução:

Vamos verificar se a matriz A tem três autovalores distintos, o que garante, pelo Teorema 2, que A é diagonalizável. Seu polinômio característico é dado por

$$p(x) = \det(xI_3 - A) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 \\ -9 & x-4 & -6 \\ 8 & 0 & x+3 \end{vmatrix} = x^3 - 3x^2 - x + 3.$$

Pelo Teorema 32.1 da Aula 4, os candidatos a raízes racionais de $p(x)$ são os divisores de -3: ± 1 e ± 3. Verificamos rapidamente que $p(-1) = p(1) = p(3) = 0$, isto é,

$$p(x) = (x+1)(x-1)(x-3),$$

ou seja, os autovalores da matriz A são –1, 1 e 3. Portanto, pelo teorema anterior, a matriz A é diagonalizável e semelhante à matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Para obter uma matriz P tal que $D = P^{-1}AP$, precisamos encontrar uma base de autovetores. Para o autovalor $\lambda_1 = -1$, temos que os autovetores associados $\mathbf{v} = (x,\ y,\ z)$ satisfazem o sistema linear

$$(-1I_3 - A)\mathbf{v} = 0.$$

Escalonando a matriz desse sistema, obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cujas soluções são da forma

$$\mathbf{v} = (x,\ 3x,\ -4x),\ \text{com}\ x \in \mathbb{R}.$$

Logo, um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = -1$ é $\mathbf{v}_1 = (1,\ 3,\ -4)$.

Para o autovalor $\lambda_2 = 1$, temos que os autovetores associados $\mathbf{v} = (x,\ y,\ z)$ satisfazem o sistema linear

$$(1I_3 - A)\mathbf{v} = 0.$$

Escalonando a matriz desse sistema, obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cujas soluções são da forma

$$\mathbf{v} = (x,\ x,\ -2x),\ \text{com}\ x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, um autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 1$ é $\mathbf{v}_2 = (1,\ 1,\ -2)$.

Finalmente, para o autovalor $\lambda_3 = 3$, os autovetores associados $\mathbf{v}_3 = (x,\ y,\ z)$ satisfazem o sistema linear

$$(3I_3 - A)\mathbf{v} = 0.$$

Escalonando a matriz desse sistema, obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cujas soluções são da forma

$$\mathbf{v} = (x,\ -x,\ -4x/3),\ \text{com}\ x \in \mathbb{R}.$$

Logo, um autovetor associado ao autovalor $\lambda_3 = 3$ é $\mathbf{v}_3 = (3,\ -3,\ -4)$.

Como foi observado antes deste exemplo, a matriz P é obtida posicionando em suas colunas os autovetores $\mathbf{v}_1 = (1, 3, -4)$, $\mathbf{v}_2 = (1,\ 1,\ -2)$ e $\mathbf{v}_3 = (3,\ -3,\ -4)$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Exercício 33.1.

1. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

   a. Mostre que a matriz A é diagonalizável e determine uma matriz diagonal D correspondente.

   b. Determine uma matriz P tal que $D = P^{-1}AP$.

2. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   a. Mostre que a matriz A é diagonalizável e determine uma matriz diagonal D correspondente.

   b. Determine uma matriz P tal que $D = P^{-1}AP$.

3. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

   a. Mostre que a matriz A é diagonalizável e determine uma matriz diagonal D correspondente.

   b. Determine uma matriz P tal que $D = P^{-1}AP$.

4. Mostre que se A e B são matrizes semelhantes, então $\det(A) = \det(B)$.

Aula 34

Cálculo de Matrizes Diagonalizáveis

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. apresentar um critério geral de diagonalização de matrizes;
2. observar a existência de matrizes diagonalizáveis com autovalores repetidos;
3. observar a existência de matrizes não diagonalizáveis com autovalores reais.

CÁLCULO DE MATRIZES DIAGONALIZÁVEIS

Nos exemplos da Aula 5, tratamos de matrizes diagonalizáveis
$A \in M_n(\mathbb{R})$ que apresentavam n autovalores distintos. Nesta aula, vamos considerar matrizes $A \in M_n(\mathbb{R})$ com autovalores repetidos. No caso de a matriz A apresentar n autovetores linearmente independentes, então a matriz continuará sendo diagonalizável. Caso contrário, a matriz A não será diagonalizável. É o que afirma o próximo teorema.

Teorema 34.1.

Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ é diagonalizável se e somente se a matriz A tem n autovetores linearmente independentes.

Neste teorema, a matriz diagonal D, semelhante a A, é formada pelos autovalores de A em sua diagonal principal,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

sendo cada autovalor λ_k associado ao k-ésimo vetor $\mathbf{v}_k$ da base de autovetores $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$. A matriz P, em $D = P^{-1}AP$ ou $A = PDP^{-1}$, é a matriz que realiza a mudança de base, da base de autovetores $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ para a base canônica do $\mathbb{R}^n$, cujas colunas são formadas pelos autovetores $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$, ou seja, a k-ésima coluna de P é formada pelas componentes do k-ésimo autovetor $\mathbf{v}_k$ dessa base. Denotamos essa relação entre a matriz P e os vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ por

$$P = [\ \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n\ ]$$

É muito importante observar que a ordem dos vetores da base de autovetores $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ determina a ordem das colunas da matriz P e a ordem dos elementos da diagonal da matriz D.

Observe, no Teorema 34.1, que a existência dos n autovetores linearmente independentes é equivalente à existência de uma base de autovetores para o $\mathbb{R}^n$. Observe, também, que o Teorema 34.1 afirma que, caso a matriz A não admita uma base de autovetores, ou seja, não possua n autovetores linearmente independentes, então a matriz A **não** será diagonalizável.

Exemplo 34.1.

Verifique que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável. Determine uma matriz diagonal D e uma matriz P tais que $D = P^{-1}AP$.

Solução:

Primeiramente, devemos calcular o polinômio característico de A. Esse polinômio característico é dado por

$$\begin{aligned} p(x) &= \det(xI_3 - A) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)\begin{vmatrix} x & -1 \\ 0 & x-1 \end{vmatrix} \\ &= x(x-1)^2, \end{aligned}$$

ou seja, o polinômio característico da matriz A é

$$p(x) = x(x-1)^2,$$

e, portanto, seus autovalores são 0 e 1, o primeiro com multiplicidade algébrica 1 e o segundo com multiplicidade algébrica 2. Contando as multiplicidades, seus três autovalores são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Para concluir que a matriz A é diagonalizável, precisamos verificar se existem três autovetores linearmente independentes, ou seja, se existe uma base de autovetores para $\mathbb{R}^3$.

Para o autovalor $\lambda_1 = 0$, não é difícil ver que o sistema linear

$$(0I_3 - A)\mathbf{v} = 0, \qquad (34.1)$$

com $\mathbf{v} = (x,\ y,\ z)$ é equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} y = 0 \\ x - z = 0\,. \end{cases}$$

Assim, todas as soluções do sistema (34.1) são da forma

$$(x,\ 0,\ x) = x(1,\ 0,\ 1),\ \text{com}\ x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, $\mathbf{v}_1 = (1,\ 0,\ 1)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 0$. Em particular, a multiplicidade geométrica desse autovalor é igual a 1, ou seja, igual à sua multiplicidade algébrica.

Analogamente, para o autovalor $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, o sistema linear

$$(1I_3 - A)\mathbf{v} = 0 \tag{34.2}$$

é equivalente ao sistema

$$x - y = 0$$

Assim, todas as soluções do sistema (34.2) são da forma

$$(x, x,\ z) = x(1,\ 1,\ 0) + z(0,\ 0,\ 1),\ \text{para todo}\ x, z \in \mathbb{R}.$$

Portanto, $\mathbf{v}_2 = (1,\ 1,\ 0)$ e $\mathbf{v}_3 = (0,\ 0,\ 1)$ são dois autovetores linearmente independentes associados ao autovalor $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Aqui, também, a multiplicidade geométrica do autovalor 1 é igual à sua multiplicidade algébrica, ou seja, igual a 2.

Pelo Teorema 30.4 da Aula 2, autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes. Daí, concluímos que o conjunto de autovetores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ tem que ser linearmente independente, garantindo que a matriz A é, de fato, diagonalizável. Observe que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores da matriz A.

A matriz diagonal D, semelhante a A, é dada por

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

enquanto uma matriz P tal que $D = P^{-1}AP$ é dada por

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observe que os elementos da diagonal principal de D são os autovalores da matriz A e que as colunas de P são os autovetores associados $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$. Observe, também, que a ordem em que autovalores e autovetores aparecem está correta: a primeira coluna de P é o autovetor correspondente ao autovalor $\lambda_1 = 0$, enquanto as duas últimas colunas de P são os autovetores correspondentes ao autovalor $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Vejamos, agora, um exemplo de matriz não diagonalizável.

Exemplo 34.2.

Verifique que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

não é diagonalizável.

Solução:

Como a matriz A é matriz triangular superior, seus autovalores são os elementos da diagonal principal, ou seja, 0, 1 e 1. Para o autovalor $\lambda_1 = 0$, temos que os autovetores associados $\mathbf{v} = (x, y, z)$ satisfazem o sistema linear

$$(0I_3 - A)\mathbf{v} = 0.$$

Escalonando a matriz desse sistema, obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

portanto, os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 0$ são da forma

$$\mathbf{v} = (x,\ 0,\ 0),\ \text{com } x \in \mathbb{R}^*.$$

Logo, um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 0$ é $\mathbf{v}_1 = (1,\ 0,\ 0)$. Observe que a multiplicidade geométrica do autovalor $\lambda_1 = 0$ é igual à sua multiplicidade algébrica, que é igual a 1.

No caso do autovalor $\lambda_2 = 1$, temos que os autovetores associados $\mathbf{v} = (x,\ y,\ z)$ satisfazem o sistema linear

$$(1I_3 - A)\mathbf{v} = 0.$$

Escalonando a matriz desse sistema, obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

portanto, os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 1$ são da forma

$$\mathbf{v} = (0,\ y,\ 0),\ \text{com}\ y \in \mathbb{R}^*.$$

Em particular, $\mathbf{v}_2 = (0,\ 1,\ 0)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 1$. Observe, também, que a multiplicidade geométrica do autovalor $\lambda_2 = 1$ é igual a 1, enquanto sua multiplicidade algébrica é igual a 2.

Como a multiplicidade geométrica do autovalor $\lambda_2 = 1$ é igual a 1, não existem dois autovetores linearmente independentes associados a esse autovalor. Podemos obter, no máximo, dois autovetores da matriz A que são linearmente independentes: um associado ao autovalor $\lambda_1 = 0$ e outro associado ao autovalor $\lambda_2 = 1$, por exemplo, os autovetores $\mathbf{v}_1 = (1,\ 0,\ 0)$ e $\mathbf{v}_2 = (0,\ 1,\ 0)$, respectivamente. Logo, não é possível formar uma base de autovetores para $\mathbb{R}^3$. Portanto, pelo Teorema 34.1, a matriz A não é diagonalizável.

Vejamos mais um exemplo do caso de matriz diagonalizável.

Exemplo 34.3.

Verifique que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável. Determine uma matriz diagonal D e uma matriz P tais que $D = P^{-1}AP$.

Solução:

Primeiramente, devemos calcular o polinômio característico de A. Este polinômio característico é dado por

$$p(x) = \det(xI_4 - A) = \begin{vmatrix} x-4 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & x-3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & x-2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & x-5 \end{vmatrix}.$$

Resolvendo o determinante acima, temos

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-2)\begin{vmatrix} x-4 & -1 & 0 \\ -2 & x-3 & 0 \\ -1 & 1 & x-5 \end{vmatrix} \\ &= (x-2)(x-5)\begin{vmatrix} x-4 & -1 \\ -2 & x-3 \end{vmatrix} \\ &= (x-2)(x-5)[(x-4)(x-3)-2] \\ &= (x-2)(x-5)(x^2-7x+10) \\ &= (x-2)(x-5)(x-2)(x-5). \end{aligned}$$

Assim, o polinômio característico da matriz A é

$$p(x) = (x-2)^2(x-5)^2,$$

e, portanto, seus autovalores são 2 e 5, ambos com multiplicidade algébrica 2. Contando as multiplicidades, seus quatro autovalores são $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = \lambda_4 = 5$.

Para concluir que a matriz A é diagonalizável, precisamos verificar se existem quatro autovetores linearmente independentes, ou seja, se existe uma base de autovetores para $\mathbb{R}^4$.

Para o autovalor $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, temos que os autovetores associados $\mathbf{v} = (x,\ y,\ z,\ t)$ satisfazem o sistema linear

$$(2I_4 - A)\mathbf{v} = 0, \tag{34.3}$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x+t=0 \\ y-2t=0. \end{cases}$$

Assim, todas as soluções do sistema (34.3) são da forma

$$(-t,\ 2t,\ z,\ t) = t\,(-1,\ 2,\ 0,\ 1) + z\,(0,\ 0,\ 1,\ 0), \text{ para todo } t, z \in \mathbb{R}.$$

Portanto, $\mathbf{v}_1 = (-1,\ 2,\ 0,\ 1)$ e $\mathbf{v}_2 = (0,\ 0,\ 1,\ 0)$ são dois autovetores linearmente independentes associados ao autovalor $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Em particular, a multiplicidade geométrica desse autovalor é igual a 2, ou seja, igual à sua multiplicidade algébrica.

Analogamente, para o autovalor $\lambda_3 = \lambda_4 = 5$, os autovetores associados $\mathbf{v} = (x,\ y,\ z,\ t)$ satisfazem o sistema linear

$$(5I_4 - A)\mathbf{v} = 0, \tag{34.4}$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z + t = 0\,. \end{cases}$$

Assim, todas as soluções do sistema (34.4) são da forma

$$(x,\ x,\ z,\ -z) = x(1,\ 1,\ 0,\ 0) + z(0,\ 0,\ 1,\ -1),\ \text{para todo } x, z \in \mathbb{R}.$$

Portanto, $\mathbf{v}_3 = (1,\ 1,\ 0,\ 0)$ e $\mathbf{v}_4 = (0,\ 0,\ 1,\ -1)$ são dois autovetores linearmente independentes associados ao autovalor $\lambda_3 = \lambda_4 = 5$. Aqui, também, a multiplicidade geométrica do autovalor 5 é igual a 2, novamente coincidindo com o valor de sua multiplicidade algébrica.

Pelo Teorema 30.4 da Aula 2, autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes. Daí, concluímos que o conjunto de autovetores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ tem que ser linearmente independente, garantindo que a matriz A é, de fato, diagonalizável. Observe que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$ formada por autovetores da matriz A.

A matriz diagonal D, semelhante a A, é dada por

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

enquanto uma matriz P tal que $D = P^{-1}AP$ é dada por

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Observe que os elementos da diagonal principal de D são os autovalores da matriz A e que as colunas de P são os autovetores associados $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_4$. Observe, também, que a ordem em que autovalores e autovetores aparecem está correta: as primeiras duas colunas de P são os autovetores correspondentes ao autovalor $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, enquanto as duas últimas colunas de P são os autovetores correspondentes ao autovalor $\lambda_3 = \lambda_4 = 5$.

Exercício 34.1.

1. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   a. Determine se a matriz A é diagonalizável e, caso seja, determine uma matriz diagonal D semelhante a A.

   b. Determine uma matriz P tal que $D = P^{-1}AP$.

2. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

   a. Determine se a matriz A é diagonalizável e, caso seja, determine uma matriz diagonal D semelhante a A.

   b. Determine uma matriz P tal que $D = P^{-1}AP$.

3. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Determine se a matriz A é diagonalizável e, caso seja, determine uma matriz diagonal D semelhante a A.

Aula 35

Processo de Diagonalização de Matrizes

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. descrever o processo de diagonalização de uma matriz através de um procedimento formal;
2. aplicar o procedimento de diagonalização de matrizes apresentado.

PROCESSO DE DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES

Pré-requisitos
Determinantes de matriz (Álgebra linear I); Teorema 34.1 da Aula 6; Teorema 32.1 da Aula 4; Teorema 30.4 da Aula 2.

Durante as Aulas 5 e 6, desenvolvemos um processo de diagonalização de matrizes que queremos, agora, formalizar. As condições exigidas devem satisfazer as condições do Teorema 34.1 da Aula 6, ou seja, consideremos uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ com n autovetores linearmente independentes. Então, sabemos que a matriz A é diagonalizável.

O processo de diagonalizar uma matriz A consiste em encontrar uma *matriz diagonalizada* D, semelhante a A, $D = P^{-1}AP$, e a *matriz diagonalizante* P. Descrevemos esse processo nos quatro passos seguintes.

Passo 1: *Determinar os autovalores da matriz A.*

Verifique se a matriz A é uma matriz triangular. Caso seja, então seus autovalores já são os elementos de sua diagonal principal.

Se a matriz A não é triangular, então precisamos calcular seu polinômio característico, que é dado por

$$p(x) = \det(xI_n - A),$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n. Para o cálculo do polinômio característico, é preciso lembrar do processo de cálculo de determinante de matriz visto no curso de Álgebra Linear I.

Como já sabemos, os autovalores de A são exatamente as raízes do polinômio característico, ou seja, as soluções da equação

$$p(x) = \det(xI_n - A) = 0.$$

Como já foi observado anteriormente, o cálculo das raízes de um polinômio é muito difícil se o grau do polinômio for maior que dois. É preciso salientar que esse método de obter os autovalores de uma matriz, por meio das raízes do seu polinômio característico, não é muito prático devido à necessidade de se calcular um determinante e devido à dificuldade de obter as raízes de um polinômio de grau $n > 2$. No entanto, no decorrer deste curso, todos os polinômios característicos encontrados terão coeficientes inteiros e, na maioria das vezes, suas raízes serão racionais ou mesmo inteiras. Em particular, poderemos aplicar o Teorema 32.1 da Aula 4 para ajudar a encontrar as raízes do polinômio característico.

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ os n autovalores da matriz A, ou seja, as n raízes do polinômio característico. Cada autovalor λ comparece nesta relação tantas vezes quanto for sua multiplicidade algébrica, isto é, o número máximo de vezes que o fator $(x-\lambda)$ aparece na fatoração do polinômio característico $p(x)$.

Passo 2: *Determinar uma base de autovetores da matriz A.*

Para cada autovalor λ_k, de multiplicidade n_k, $n_k \leq n$, devemos obter uma base de autovetores para seu autoespaço $E(\lambda_k)$ que, como já foi visto, coincide com o espaço-solução do sistema linear homogêneo

$$(\lambda_k I_n - A)\mathbf{v} = 0.$$

Devemos, assim, obter n_k autovetores linearmente independentes associados ao autovalor λ_k. Observe que a dimensão deste subespaço deve ser igual a n_k, isto é, a multiplicidade geométrica do autovalor λ_k deve ser igual à sua multiplicidade algébrica. Lembre que, se não existirem n_k autovetores linearmente independentes associados ao autovalor λ_k, então a matriz A não é diagonalizável.

Procedendo dessa forma, obtemos uma base de autovetores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ para o $\mathbb{R}^n$, onde cada autovetor $\mathbf{v}_k$ está associado ao autovalor λ_k.

Passo 3: *Montar a matriz diagonalizada D.*

A matriz D é uma matriz diagonal e sua diagonal principal consiste exatamente dos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ da matriz A,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Passo 4: *Montar a matriz diagonalizante P.*

A matriz P, que satisfaz $D = P^{-1}AP$, é a matriz que realiza a mudança de base, da base de autovetores $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ para a base canônica de $\mathbb{R}^n$, e cujas colunas são formadas pelas componentes dos autovetores $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$, ou seja, a k-ésima coluna de P é formada pelas componentes do k-ésimo autovetor $\mathbf{v}_k$ dessa base. Denotamos essa relação entre a matriz P e os vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ por

$$P = [\ \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n\ ].$$

É muito importante observar que a ordem dos vetores da base de autovetores $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ determina a ordem das colunas da matriz P e a ordem dos elementos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ da diagonal principal da matriz D.

Exemplo 35.1.

Verifique que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável. Determine uma matriz diagonalizada D e uma matriz P tais que $D = P^{-1}AP$.

Solução:

Vamos detalhar cada um dos passos sugeridos anteriormente.

Passo 1: *Determinar os autovalores da matriz A.*

Como a matriz A não é matriz triangular, devemos calcular seu polinômio característico para obter os autovalores de A. O polinômio característico da matriz A é dado por

$$p(x) = \det(xI_3 - A) = \begin{vmatrix} x-1 & -3 & -3 \\ 3 & x+5 & 3 \\ -3 & -3 & x-1 \end{vmatrix},$$

cujo cálculo nos leva a

$$p(x) = x^3 + 3x^2 - 4.$$

Observe que, pelo Teorema 32.1 da Aula 4, os candidatos a raízes racionais do polinômio $p(x)$ são os divisores de -4: ± 1, ± 2 e ± 4. Verificamos rapidamente que $p(1) = 0$, logo, o polinômio $(x-1)$ divide $p(x)$. Efetuando a divisão polinomial, obtemos

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-1)(x^2+4x+4) \\ &= (x-1)(x+2)^2. \end{aligned}$$

Portanto, os autovalores da matriz A são 1 e –2, o primeiro com multiplicidade algébrica 1 e o segundo com multiplicidade algébrica 2. Contando as multiplicidades algébricas, seus três autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$.

Passo 2: *Determinar uma base de autovetores da matriz A.*

Para o autovalor $\lambda_1 = 1$, temos que os autovetores associados $v = (x,y,z)$ satisfazem o sistema linear

$$(1I_3 - A)\mathbf{v} = 0,$$

ou seja, o sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 3 & 6 & 3 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Este sistema é equivalente ao sistema escalonado

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, ao sistema

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0\,. \end{cases}$$

Todas as soluções desse sistema são da forma

$$(x, -x, x) = x(1, -1, 1), \text{ com } x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 1)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$, logo, uma base do autoespaço correspondente. Em particular, a multiplicidade geométrica desse autovalor é igual a 1, ou seja, igual à sua multiplicidade algébrica.

Analogamente, para o autovalor $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$, os autovetores associados $\mathbf{v} = (x, y, z)$ satisfazem o sistema linear

$$(-2I_3 - A)\mathbf{v} = 0$$

ou seja, o sistema

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Este sistema é equivalente ao sistema escalonado

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, ao sistema

$$x + y + z = 0.$$

Assim, todas as soluções desse sistema são da forma

$$(x, y, -x-y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1), \text{ com } x, y \in \mathbb{R}.$$

Portanto, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, -1)$ e $\mathbf{v}_3 = (0, 1, -1)$ são dois autovetores linearmente independentes associados ao autovalor $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$, formando uma base do autoespaço correspondente. Assim, a multiplicidade geométrica do autovalor $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$ é igual à sua multiplicidade algébrica, ou seja, igual a 2.

Pelo Teorema 30.4 da Aula 2, autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes. Daí, concluímos que o conjunto de autovetores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ tem que ser linearmente independente, garantindo que a matriz A é, de fato, diagonalizável. Observe que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores da matriz A.

Passo 3: *Montar a matriz diagonalizada D.*

A matriz diagonal D, semelhante a A, é dada por

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Observe que os elementos da diagonal principal de D são os autovalores da matriz A.

Passo 4: *Montar a matriz diagonalizante P.*

A matriz P tal que $D = P^{-1}AP$ é dada por

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Observe que as colunas de P são os autovetores associados $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$. Observe, também, que a ordem em que autovalores e autovetores aparecem está correta: a primeira coluna de P é o autovetor correspondente ao autovalor $\lambda_1 = 1$, enquanto as duas últimas colunas de P são os autovetores correspondentes ao autovalor $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$.

Aula 36

Diagonalização de Operadores Lineares

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. compreender os conceitos de autovalor e autovetor de um operador linear;
2. compreender o conceito de operador linear diagonalizável;
3. reconhecer quando um operador linear é diagonalizável.

Diagonalização de Operadores Lineares

Pré-requisito
Aula 5.

Vamos começar lembrando alguns conceitos do curso de Álgebra Linear I. Uma *transformação linear* de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ é uma função
$T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que satisfaz

$$T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2)$$

para todo $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ e todo $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$.

Chamamos *operador linear* uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$, $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Observe que, neste caso, tanto o domínio quanto o contra-domímio têm a mesma dimensão n. Lembre que, fixando a base canônica de $\mathbb{R}^n$, o operador linear $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ fica representado pela matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, chamada *matriz canônica*, através de multiplicação de matrizes da seguinte forma:

$$\mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v},$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v_2} \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{pmatrix},$$

onde $\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v_2} \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{pmatrix}$ é o vetor $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2, \ldots,\ \mathbf{v}_n)$ descrito na base canônica. Denotando esta base por $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, então as colunas da matriz A são as componentes dos vetores $T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2), \ldots, T(\mathbf{e}_n)$ na base canônica:

Lembre que a base canônica de $\mathbb{R}^n$ é composta pelos vetores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ onde cada $\mathbf{e}_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ tem como única componente não-nula a k-ésima componente com valor 1.

$$A = [\ T(\mathbf{e}_1)\quad T(\mathbf{e}_2)\quad \ldots\quad T(\mathbf{e}_n)\ ].$$

Vamos trocar a base canônica de $\mathbb{R}^n$ para uma outra base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$. Seja $P \in M_n(\mathbb{R})$ a matriz que realiza a mudança da nova base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ para a base canônica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Lembre que a matriz P é obtida de modo que suas colunas são as componentes de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ com respeito à base canônica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$:

$$P = [\ \mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{u}_n\ ].$$

Sabemos também que, com respeito à nova base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, o operador linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ fica representado pela matriz $B \in M_n(\mathbb{R})$ através de multiplicação de matrizes da seguinte forma: para cada vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, escreva $\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \ldots + a_n\mathbf{u}_n$, então $[\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ é o vetor $\mathbf{v}$ descrito na base $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ e

$$[\mathbf{v}]_\beta \mapsto B[\mathbf{v}]_\beta,$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Lembre também que as colunas da matriz B são as componentes dos vetores $T(\mathbf{u}_1), T(\mathbf{u}_2), \ldots, T(\mathbf{u}_n)$ com respeito à base β:

$$B = [\ T(\mathbf{u}_1) \quad T(\mathbf{u}_2) \quad \cdots \quad T(\mathbf{u}_n)\ ].$$

Por fim, também sabemos que a relação entre as matrizes A e B, que representam o operador linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ na base canônica
$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ e na nova base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, é dada por:

$$B = P^{-1}AP,$$

ou seja, as matrizes A e B são semelhantes.

Exemplo 36.1.

Em $\mathbb{R}^2$, consideremos as seguintes bases:

$\alpha = \{\mathbf{e}_1 = (1,0), \mathbf{e}_2 = (0,1)\}$ e $\beta = \{\mathbf{u}_1 = (1,-2), \mathbf{u}_2 = (2,-5)\}$,

e o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$T(x,y) = (2x - 3y, 4x + y).$$

Determine as matrizes A e B, que representam o operador linear T, com respeito às bases α e β, respectivamente.

Solução:

Para obtermos a matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ que representa o operador linear T na base canônica, calculamos:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_1) &= T(1,0) = (2,4) = 2\,\mathbf{e}_1 + 4\,\mathbf{e}_2 \\ T(\mathbf{e}_2) &= T(0,1) = (-3,1) = -3\,\mathbf{e}_1 + 1\,\mathbf{e}_2; \end{aligned}$$

portanto, a matriz A, tendo como colunas $T(\mathbf{e}_1)$ e $T(\mathbf{e}_2)$, é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

As colunas da matriz P são os vetores $\mathbf{u}_1 = (1,-2)$ e $\mathbf{u}_2 = (2,-5)$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Lembre que, se a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é inversível com determinante $\det A = ad - bc$, então sua matriz inversa é dada por $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Daí, obtemos facilmente que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$

e, portanto, a matriz B, que representa o operador linear T na base β, é dada por

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 & 101 \\ -18 & -41 \end{pmatrix}.$$

Temos o seguinte resultado geral.

Teorema 36.1.

Duas matrizes $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ definem o mesmo operador linear
$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se e somente se A e B são matrizes semelhantes, isto é, se e somente se existe matriz inversível P tal que $B = P^{-1}AP$.

Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é a matriz canônica do operador $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, isto é, a matriz que representa este operador com respeito à base canônica, então, pelo Teorema 33.1 da Aula 5, toda matriz B, semelhante a A, tem o mesmo polinômio característico e os mesmos autovalores que A. E em vista do Teorema 36.1 acima, como todas as matrizes B, semelhantes a A, representam o mesmo operador linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, podemos considerar as seguintes definições de polinômio característico e autovalor do operador linear T:

Definição 36.1.

1. Um número real λ é chamado um *autovalor* do operador linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se existe um vetor não-nulo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tal que
$$T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}. \tag{36.1}$$
Todo vetor não-nulo $\mathbf{v}$ que satisfaça (36.1) é chamado *autovetor associado* (ou *correspondente*) ao autovalor λ. Os autovalores também são chamados *valores próprios* ou *valores característicos*, e os autovetores são chamados *vetores próprios* ou *vetores característicos*. Observe que, se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é a matriz que representa o operador T numa base qualquer de $\mathbb{R}^n$, isso equivale a dizer que λ é autovalor da matriz A, pois
$$T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

2. Chamamos *autoespaço* do operador linear T, associado ao autovalor λ, ao subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ gerado por todos os autovetores de T associados a λ. Denotamos este autoespaço por
$$E(\lambda) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}\}.$$

3. O *polinômio característico* do operador linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é o polinômio característico de qualquer matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ que representa o operador linear T com respeito a uma base qualquer de $\mathbb{R}^n$.

4. O operador linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é *diagonalizável* se existe uma base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ com respeito à qual o operador T é representado por uma matriz diagonal $D \in M_n(\mathbb{R})$.

Temos agora os seguintes resultados, consequências dos resultados análogos vistos para o caso de matrizes.

Teorema 36.2.

1. Sejam $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \ldots,\ \mathbf{v}_m$ autovetores do operador linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ associados aos autovalores distintos $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_m$, respectivamente, então os autovetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ são linearmente independentes.

2. O escalar λ é um autovalor do operador linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se e somente se λ é uma raiz do polinômio característico de T.

3. O operador linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é diagonalizável se e somente se existe base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ formada por autovetores de T. Nesse caso, se a matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

representa o operador T com respeito à base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, então $T(\mathbf{u}_k) = \lambda_k\, \mathbf{u}_k$ para todo $k = 1, \ldots, n$, ou seja, os elementos da diagonal principal da matriz D são os autovalores do operador T.

4. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ a matriz que representa o operador linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ numa base qualquer de $\mathbb{R}^n$. Então o operador linear T é diagonalizável se e somente se a matriz A é diagonalizável.

Esse último resultado reduz a investigação da diagonalização de operadores lineares $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ao estudo da diagonalização de matrizes $A \in M_n(\mathbb{R})$, que foi discutido em detalhes nas aulas anteriores. Vejamos mais alguns exemplos.

Exemplo 36.2.

Determine todos os autovalores e autovetores do operador linear
$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$T(x,y) = (6x - y, 3x + 2y).$$

Determine se o operador T é diagonalizável e, caso seja, determine uma representação diagonal, ou seja, uma matriz diagonal $D \in M_2(\mathbb{R})$ que representa o operador T.

Solução:

Primeiramente, vamos calcular a matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ que representa o operador T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Como

$$\begin{array}{l} T(\mathbf{e}_1) = T(1,0) = (6,3) = 6\,\mathbf{e}_1 + 3\,\mathbf{e}_2 \\ T(\mathbf{e}_2) = T(0,1) = (-1,2) = -1\,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2\,, \end{array}$$

a matriz A, tendo como colunas $T(\mathbf{e}_1)$ e $T(\mathbf{e}_2)$, é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico de T será o polinômio característico da matriz A que é dado por

$$\begin{array}{rcl} p(x) & = & \det(xI_2 - A) \\ & = & \begin{vmatrix} x-6 & 1 \\ -3 & x-2 \end{vmatrix} \\ & = & x^2 - 8x + 15 \\ & = & (x-3)(x-5). \end{array}$$

Assim, os autovalores de T são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 5$. A essa altura, já podemos concluir que o operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é diagonalizável, pois, como ele tem dois autovalores distintos, então, pelo Teorema 36.2, qualquer par de autovetores correspondentes é linearmente independente e, portanto, forma base de autovetores para o $\mathbb{R}^2$.

Vamos determinar os autovetores. Para o autovalor $\lambda_1 = 3$, temos que os autovetores associados $\mathbf{v} = (x,y)$ satisfazem o sistema linear

$$(3I_2 - A)\mathbf{v} = 0.$$

Escalonando a matriz desse sistema, obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, os autovetores de T associados ao autovalor $\lambda_1 = 3$ são da forma

$$\mathbf{v} = (x, 3x) \text{ com } x \in \mathbb{R}^*.$$

Em particular, $\mathbf{v}_1 = (1,3)$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_1 = 3$.

Analogamente, os autovetores $\mathbf{v} = (x,y)$, associados ao autovalor $\lambda_2 = 5$, satisfazem o sistema linear

$$(5I_2 - A)\mathbf{v} = 0.$$

Escalonando a matriz desse sistema, obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, os autovetores de T associados ao autovalor $\lambda_2 = 5$ são da forma

$$\mathbf{v} = (x, x) \text{ com } x \in \mathbb{R}^*.$$

Em particular, $\mathbf{v}_2 = (1,1)$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_2 = 5$. Assim, $\beta = \{v_1, v_2\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de T, e a representação diagonal de T é a matriz diagonal de ordem 2 cuja diagonal principal é formada pelos autovalores $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 5$:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 36.3.

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear que reflete pontos com respeito à reta pela origem $y = kx$, onde $k \in \mathbb{R}$. Veja a **Figura 36.1**.

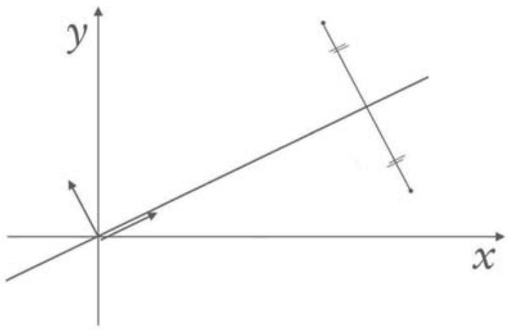


Figura 36.1: Reflexão com respeito à reta $y = kx$.

Mostre que:

a) $\mathbf{v}_1 = (1, k)$ e $\mathbf{v}_2 = (-k, 1)$ são autovetores de T;

b) T é diagonalizável e encontre uma representação diagonal D de T.

Solução:

a) Como não conhecemos as equações que definem a transformação T, procedemos geometricamente como segue.

Observe que o vetor $\mathbf{v}_1 = (1, k)$ pertence à reta $y = kx$, logo ele é mantido fixo pela ação do operador T, isto é, $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1$. Assim, $\mathbf{v}_1$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$.

Por outro lado, observamos que o vetor $\mathbf{v}_2 = (-k, 1)$ é ortogonal ao vetor $\mathbf{v}_1$, pois

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 1 \cdot (-k) + k \cdot 1 = 0,$$

e, consequentemente, $\mathbf{v}_2$ é perpendicular à reta $y = kx$. Assim, o operador T transforma o vetor $\mathbf{v}_2$ em seu negativo $-\mathbf{v}_2$, isto é, $T(\mathbf{v}_2) = -\mathbf{v}_2$. Logo, $\mathbf{v}_2$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_2 = -1$.

b) Como os vetores $\mathbf{v}_1 = (1, k)$ e $\mathbf{v}_2 = (-k, 1)$ são linearmente independentes, temos que $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de T. Portanto, o operador T é diagonalizável com representação diagonal dada por

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 36.4.

Determine todos os autovalores e autovetores do operador linear
$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$T(x,y,z) = (2x+y, y-z, 2y+4z).$$

Determine se o operador T é diagonalizável e, caso seja, determine uma representação diagonal, ou seja, a matriz diagonal $D \in M_3(\mathbb{R})$ que representa o operador T e a base de autovetores correspondente.

Solução:

O procedimento é semelhante ao do Exemplo 36.2. Primeiramente, vamos calcular a matriz $A \in M_3(\mathbb{R})$ que representa o operador T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^3$. Como

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{e}_1) &= T(1,0,0) = (2,0,0) = 2\,\mathbf{e}_1 + 0\,\mathbf{e}_2 + 0\,\mathbf{e}_3 \\
T(\mathbf{e}_2) &= T(0,1,0) = (1,1,2) = 1\,\mathbf{e}_1 + 1\,\mathbf{e}_2 + 2\,\mathbf{e}_3 \\
T(\mathbf{e}_3) &= T(0,0,1) = (0,-1,4) = 0\,\mathbf{e}_1 + (-1)\,\mathbf{e}_2 + 4\,\mathbf{e}_3,
\end{aligned}$$

a matriz A, tendo como colunas $T(\mathbf{e}_1)$, $T(\mathbf{e}_2)$ e $T(\mathbf{e}_3)$, é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico de T será o polinômio característico da matriz A que é dado por

$$\begin{aligned}
p(x) &= \det(xI_3 - A) \\
&= \begin{vmatrix} x-2 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 1 \\ 0 & -2 & x-4 \end{vmatrix} \\
&= (x-2)\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ -2 & x-4 \end{vmatrix} \\
&= (x-2)[(x-1)(x-4)+2] \\
&= (x-2)(x^2-5x+6) \\
&= (x-2)(x-2)(x-3) \\
&= (x-2)^2(x-3).
\end{aligned}$$

Assim, os autovalores de T são $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 3$. Como temos apenas dois autovalores distintos, ainda não podemos decidir se T é diagonalizável. Vamos, primeiramente, determinar uma base do autoespaço

$$E(2) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid T(\mathbf{v}) = 2\,\mathbf{v}\}$$

associado ao autovalor $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Sabemos que um vetor $\mathbf{v} = (x, y, z)$ pertence ao autoespaço $E(2)$ se e somente se ele é solução do sistema linear

$$(2I_3 - A)\mathbf{v} = 0,$$

isto é, de

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Escalonando a matriz associada desse sistema, obtemos o sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cujas soluções são $\mathbf{v} = (x, 0, 0)$, $x \in \mathbb{R}$. Como a solução geral depende apenas de uma variável independente, então o autoespaço $E(2)$ é unidimensional. Temos que $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_1 = 2$ e, portanto, forma uma base de $E(2)$.

Vamos agora procurar uma base do autoespaço

$$E(3) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid T(\mathbf{v}) = 3\,\mathbf{v}\},$$

associado ao autovalor $\lambda_3 = 3$. Sabemos que um vetor $\mathbf{v} = (x, y, z)$ pertence ao autoespaço $E(3)$ se e somente se ele é solução do sistema linear

$$(3I_3 - A)\mathbf{v} = 0,$$

isto é, do sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Escalonando a matriz associada desse sistema, obtemos o sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cujas soluções são $\mathbf{v} = (-z, -z, 2z)$, $z \in \mathbb{R}$. Como a solução geral depende, novamente, apenas de uma variável independente, então o autoespaço $E(3)$ também é unidimensional. Nesse caso, $\mathbf{v}_2 = (-1,-1,2)$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_3 = 3$ e, portanto, forma uma base de $E(3)$.

Como T possui apenas dois autovetores linearmente independentes, então não existe base de autovetores de T para o $\mathbb{R}^3$ e, portanto, pelo Teorema 36.2, o operador linear T não é diagonalizável.

Autoavaliação

Terminamos o primeiro módulo do curso de Álgebra Linear II. Não deixe de fazer uma boa revisão dos conceitos vistos neste primeiro módulo antes de iniciar o segundo. Faça os exercícios desta aula e reveja os das aulas anteriores. Se você ficar com alguma dúvida, procure o tutor no seu polo.

Exercício 36.1.

1. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ e defina $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $T(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}$. Mostre que $\mathbf{v}_1 = (1,1)$ é autovetor de T e que o operador linear T não é diagonalizável.

2. Verifique se o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$T(x,y,z) = (z,y,x)$$

   é diagonalizável e, caso seja, determine uma representação diagonal, ou seja, uma matriz diagonal $D \in M_3(\mathbb{R})$ que representa o operador T e uma base de autovetores correspondente.

3. Verifique se o operador linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dado por

$$T(x,y,z,t) = (3x-4z, 3y+5z, -z, -t)$$

   é diagonalizável e, caso seja, determine uma representação diagonal, ou seja, uma matriz diagonal $D \in M_4(\mathbb{R})$ que representa o operador T e uma base de autovetores correspondente.

4. Mostre que 0 é autovalor do operador $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se e somente se T é não-inversível.