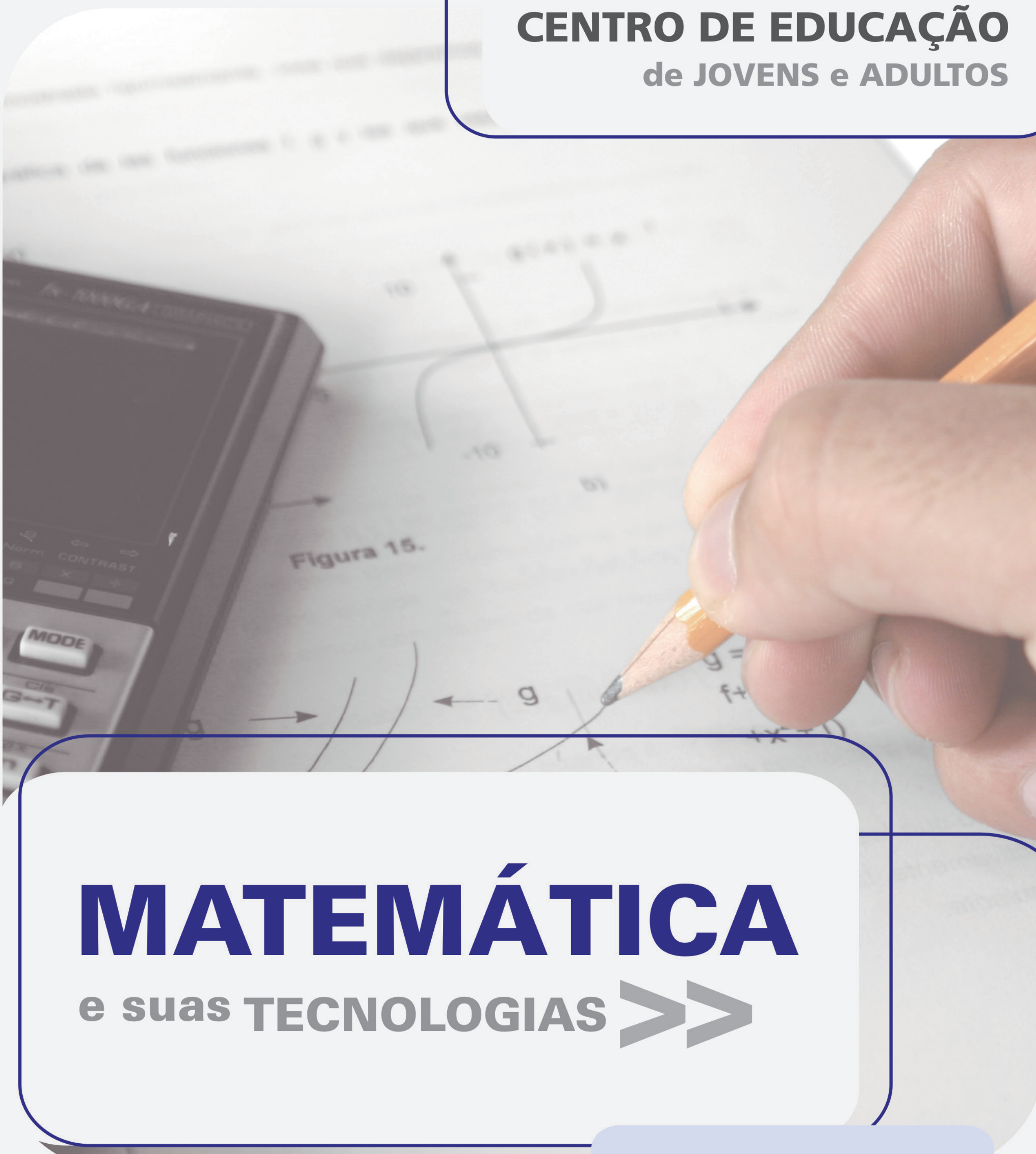
CEJA

CENTRO DE EDUCAÇÃO
de JOVENS e ADULTOS



MATEMÁTICA

e suas TECNOLOGIAS

Fascículo 2
Unidades 4, 5 e 6

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Governador
Wilson Witzel

Vice-Governador
Claudio Castro

SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO

Secretário de Estado
Leonardo Rodrigues

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO

Secretário de Estado
Pedro Fernandes

FUNDAÇÃO CECIERJ

Presidente
Gilson Rodrigues

PRODUÇÃO DO MATERIAL CEJA (CECIERJ)

Coordenação Geral de Design Instrucional
Cristine Costa Barreto

Coordenação de Matemática
Agnaldo da C. Esquincalha
Gisela M. da F. Pinto
Heitor B. L. de Oliveira

Revisão de conteúdo
José Roberto Julianelli
Luciana Getirana de Santana

Elaboração
Cléa Rubinstein
Daniel Portinha Alves
Heitor B. L. de Oliveira
Leonardo Andrade da Silva
Luciane de P. M. Coutinho
Maria Auxiliadora Vilela Paiva
Raphael Alcaires de Carvalho
Rony C. O. Freitas
Thiago Maciel de Oliveira

Atividade Extra
Benaia Sobreira de Jesus Lima
Carla Fernandes e Souza
Diego Mota Lima
Paula Andréa Prata Ferreira
Vanessa de Albuquerque

Coordenação de Design Instrucional
Flávia Busnardo
Paulo Miranda

Design Instrucional
Rommulo Barreiro
Letícia Terreri

Revisão de Língua Portuguesa
Paulo Cesar Alves

Coordenação de Produção
Fábio Rapello Alencar

Capa
André Guimarães de Souza

Projeto Gráfico
Andreia Villar

Imagem da Capa e da Abertura das Unidades
http://www.sxc.hu/photo/789420

Diagramação
Equipe Cederj

Ilustração
Bianca Giacomelli
Clara Gomes
Fernado Romeiro
Jefferson Caçador
Sami Souza

Produção Gráfica
Verônica Paranhos

Sumário

Prezado(a) Aluno(a),

Seja bem-vindo a uma nova etapa da sua formação. Estamos aqui para auxiliá-lo numa jornada rumo ao aprendizado e conhecimento.

Você está recebendo o material didático impresso para acompanhamento de seus estudos, contendo as informações necessárias para seu aprendizado e avaliação, exercício de desenvolvimento e fixação dos conteúdos.

Além dele, disponibilizamos também, na sala de disciplina do CEJA Virtual, outros materiais que podem auxiliar na sua aprendizagem.

O CEJA Virtual é o Ambiente virtual de aprendizagem (AVA) do CEJA. É um espaço disponibilizado em um site da internet onde é possível encontrar diversos tipos de materiais como vídeos, animações, textos, listas de exercício, exercícios interativos, simuladores, etc. Além disso, também existem algumas ferramentas de comunicação como chats, fóruns.

Você também pode postar as suas dúvidas nos fóruns de dúvida. Lembre-se que o fórum não é uma ferramenta síncrona, ou seja, seu professor pode não estar online no momento em que você postar seu questionamento, mas assim que possível irá retornar com uma resposta para você.

Para acessar o CEJA Virtual da sua unidade, basta digitar no seu navegador de internet o seguinte endereço: http://cejarj.cecierj.edu.br/ava

Utilize o seu número de matrícula da carteirinha do sistema de controle acadêmico para entrar no ambiente. Basta digitá-lo nos campos "nome de usuário" e "senha".

Feito isso, clique no botão "Acesso". Então, escolha a sala da disciplina que você está estudando. Atenção! Para algumas disciplinas, você precisará verificar o número do fascículo que tem em mãos e acessar a sala correspondente a ele.

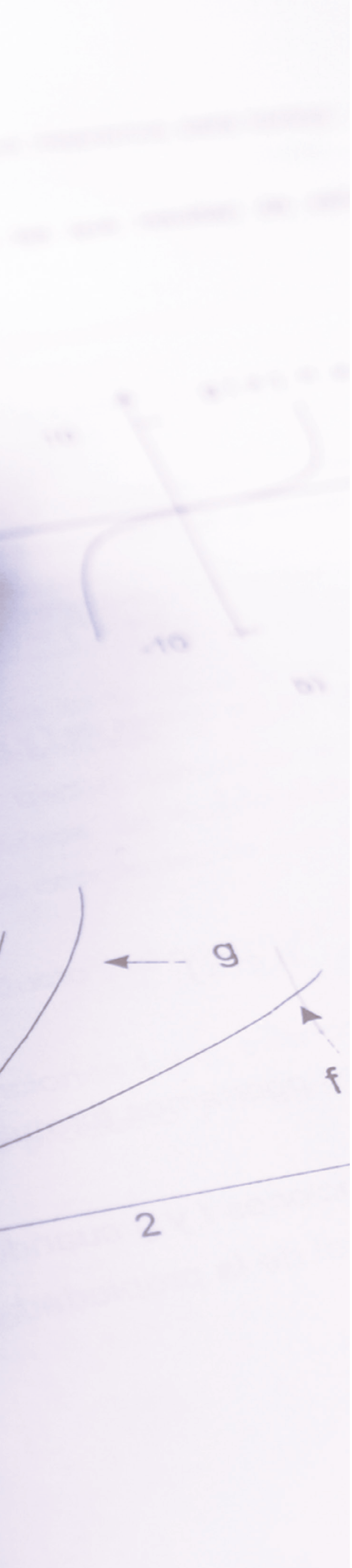
Bons estudos!

Equações do segundo grau

Fascículo 2

Unidade 4

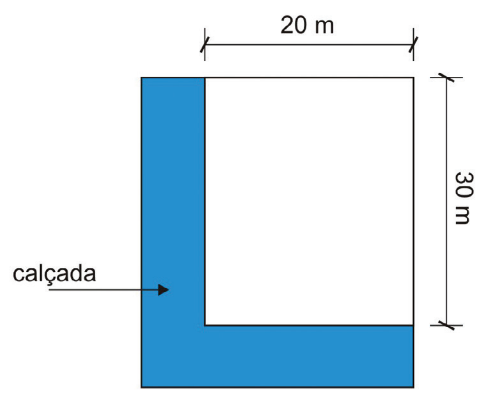
Fundação CECIERJ



Equações do segundo grau

Para início de conversa...

Nesta unidade, vamos avançar um pouco mais nas resoluções de equações. Na unidade anterior, você estudou sobre as equações de primeiro grau. Desta vez, vamos focar nas equações do segundo grau. Esses tipos de equações ajudarão a resolver problemas como este:

> Um operário foi contratado para construir uma calçada em volta de dois lados de um terreno retangular, como mostra a figura a seguir.
>
> 
>
>
> O terreno mede 20m por 30m e a calçada deve ter sempre a mesma largura em ambos os lados. Sabendo que o operário dispõe de $72m^2$ de lajotas para fazer a obra, qual deve ser a largura da calçada?

Perceba que, nesse caso, a primeira coisa que precisamos é organizar o problema de tal forma que possamos encontrar a medida procurada. A organização, desta vez, cairá em uma equação do segundo grau. Tente encontrar a equação e se você já sabe como resolvê-la, vá em frente. Se não souber, não se preocupe, ao final de unidade retornaremos a esse problema e você verá que não há segredos.

Objetivos de aprendizagem

- Reconhecer equações do segundo grau.
- Resolver equações do segundo grau completas e incompletas.
- Utilizar equações do segundo grau, para resolver problemas.

Seção 1
E agora? O x está elevado ao quadrado

As equações do segundo grau são aquelas que apresentam sua incógnita com grau (expoente) igual a 2. Elas podem aparecer de quatro formas:

1. $ax^2=0$

2. $ax^2+c=0$

3. $ax^2+bx=0$

4. $ax^2+bx+c=0$

Nessas equações, a, b e c representam números, denominados coeficientes da equação. Veja alguns exemplos de equações do segundo grau:

1. $2x^2=0$

2. $x^2-4=0$

3. $3x^2+3x=0$

4. $x^2-5x+6=0$

Inicialmente, vamos resolver equações do segundo grau, nas quais a letra **x** só aparece na forma $\mathbf{x^2}$, como nos casos 1 e 2 ($2x^2=0$ e $x^2-4=0$), mostrados acima. Utilizaremos a mesma ideia do princípio da igualdade, já vista anteriormente.

Para começar, considere a seguinte equação:

$x^2 - 25 = 0$

Somando 25 em ambos os lados da igualdade teremos:

$x^2 = 25$

Observe que o valor de x procurado é aquele que elevado ao quadrado tem como resultado 25. O primeiro número que nos vem à mente seria 5. Mas não podemos nos esquecer que $(-5)^2 = 25$; logo, – 5 também é um possível valor.

Assim, teríamos duas possíveis soluções: $x = 5$ e $x = -5$.

Poderíamos ainda utilizar o seguinte raciocínio:

$x^2 - 25 = 0$

Somando 25 em ambos os lados da igualdade teremos

$x^2 = 25$

Se estamos procurando um valor para x que elevado ao quadrado dá 25, podemos pensar que o valor procurado nada mais é do que a raiz quadrada de 25, que é 5. No entanto, temos de considerar que a raiz quadrada de um número ao quadrado é o **módulo** desse número. Assim:

$\sqrt{x^2} = \sqrt{25}$ e, como $\sqrt{x^2} = |x|$, temos que:

$|x| = \sqrt{25}$ (Lê-se módulo de x é igual a $\sqrt{25}$.)

$x = \pm\sqrt{25}$

ou

$x = \pm 5$

Logo, teríamos duas possíveis soluções: $x = 5$ e $x = -5$.

Módulo

O módulo de um número x é representado por $|x|$ e temos:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Por exemplo: $|5| = 5$ e $|-5| = -(-5) = 5$

Situação problema 1

Muitos povos antigos tinham um conhecimento matemático muito desenvolvido e estruturado. Esse era o caso dos egípcios. Alguns textos conhecidos dessa civilização mostram que eles resolviam equações do segundo grau para solucionar problemas do seu dia a dia, embora, pelo que se tem conhecimento só lidavam com equações do segundo grau bem simples.

Por exemplo, no **papiro de Moscou**, que data de aproximadamente 1850 a.C., é pedido para que se calcule a base de um retângulo de área igual a 12, cuja altura é ¾ de sua base.

Atividade

Como esse problema poderia ser escrito em linguagem matemática atual? Qual seria a sua solução?

Anote suas respostas em seu caderno

Papiro de Moscou

Os dois documentos mais importantes de que dispomos para o estudo da Matemática egípcia são: o papiro Rhind e o papiro de Moscou, este último de autoria desconhecida.

Atividade 1

Utilizando seus conhecimentos de potenciação, radiciação e equações do primeiro grau, resolva as equações.

a. $2x^2 - 200 = 0$

b. $5x^2 + 20 = 25$

c. $9x^2 - 18 = 0$

Importante

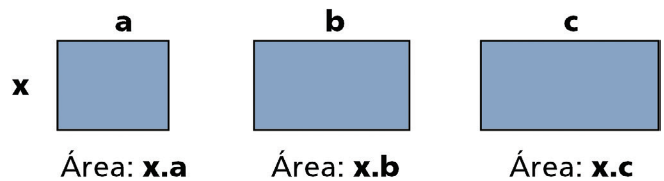
- Para realizar essa atividade, você pode utilizar sua calculadora para encontrar os valores aproximados das raízes quadradas.
- Perceba que nem todas as raízes terão como resultado números inteiros. Nesse caso, você poderá optar por deixar o resultado na forma de raiz mesmo.
- Raízes quadradas de números negativos não pertencem ao conjunto numérico que estamos considerando agora. Portanto, toda vez (aqui, nesse contexto) que isso ocorrer, considere a equação como insolúvel, ou seja, equação não tem solução. Isto é: não existem valores de x que satisfaçam a igualdade. Nesse caso, a equação é insolúvel no conjunto dos números Reais !!!

Anote suas respostas em seu caderno

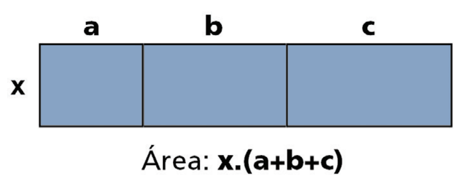
Seção 2

Resolvendo equações do segundo grau, colocando um fator comum em evidência

Observe os retângulos a seguir, suas medidas e suas áreas:



Agora observe os mesmos três retângulos dispostos de outra forma:



Podemos então dizer que $x.a + x.b + x.c = x.(a + b + c)$. O processo de passagem da primeira representação para a segunda é o que denominamos fatoração, ou seja, a escrita de uma expressão ou número em forma de multiplicação. No caso mostrado anteriormente, o processo de fatoração utilizado é denominado **fator comum em evidência**, que corresponde a multiplicar a expressão dada pelo fator comum, no caso, **x**.

Vamos agora utilizar este processo, para resolver algumas equações do segundo grau. Observe.

$x^2 - 6x = 0$

Vamos colocar o **x** em evidência:

$x \cdot (x - 6) = 0$

Observe que temos uma multiplicação de x por (x – 6). Essa multiplicação deve ter zero como resultado. Para que isso ocorra, temos duas possibilidades: ou x é igual a zero ou (x – 6) é igual a zero. Isso nos levará aos possíveis valores para x:

$x = 0$

Ou

$x - 6 = 0 \rightarrow x = 6$

Logo, temos duas possíveis soluções: x = 0 e x = 6.

Atividade 2

Vamos agora utilizar o fator comum em evidência, para resolver as equações do segundo grau a seguir:

a. $3x^2 - x = 0$

b. $2x^2 + 23x = 0$

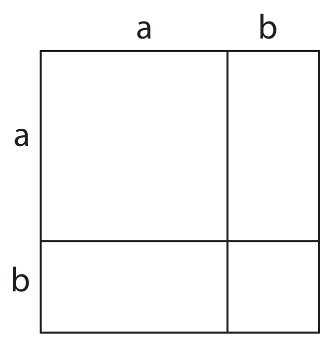
c. $5x^2 - 56x = 0$

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 3

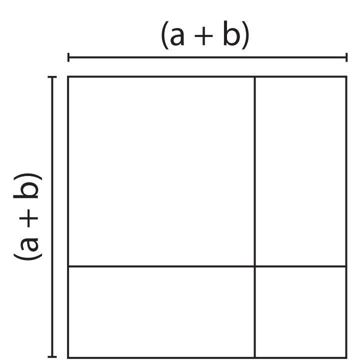
Resolvendo equações do segundo grau, utilizando outro caso de fatoração

Observe o quadrado a seguir:

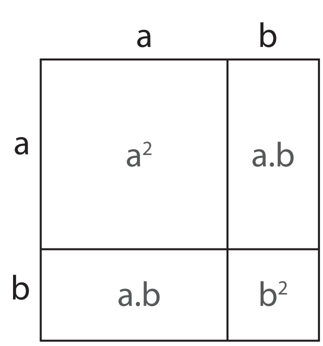


Há duas formas de representar sua área:

1. A primeira seria fazendo $(a + b) . (a + b)$. Ou seja, $(a + b)^2$.



2. A segunda seria a partir da soma das suas partes fazendo $a^2 + 2.ab. + b^2$.



Podemos então dizer que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ou $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$.

A primeira forma de escrita, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, é um **produto notável** conhecido com o nome de **quadrado da soma de dois termos**.

A segunda igualdade, $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$, é uma fatoração já que transforma uma expressão algébrica em um produto e leva o nome de **trinômio quadrado perfeito**.

Vamos começar resolvendo a seguinte equação:

$(x + 3)^2 = 0$

Para que a igualdade seja verdadeira, é necessário considerar que (x + 3) deve ser um valor que elevado ao quadrado tem zero como resultado. Ora, apenas o próprio zero satisfaz. Logo:

$x + 3 = 0$

Então,

$x = -3$

Portanto, neste caso, teríamos apenas um resultado possível para x.

Utilizando a ideia de produtos notáveis, podemos perceber que:

$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

Dessa forma, poderíamos resolver a equação:

$x^2 + 6x + 9 = 0$

Substituindo $x^2 + 6x + 9$ por $(x + 3)^2$, assim:

$(x + 3)^2 = 0$

O que nos levaria ao resultado $x = -3$, como calculado anteriormente.

Atividade 3

Resolva agora as seguintes equações do segundo grau:

a. $(x - 4)^2 = 0$

b. $(x + 5)^2 = 0$

c. $(x - 9)^2 = 0$

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 4

Desenvolva os seguintes produtos notáveis:

a. $(x - 4)^2 =$

b. $(x + 5)^2 =$

c. $(x - 8)^2 =$

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 5

Utilizando as fatorações vistas anteriormente, resolva as seguintes equações:

a. $x^2 - 8x + 16 = 0$

b. $x^2 + 10x + 25 = 0$

c. $x^2 - 16x + 64 = 0$

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 4
Uma fórmula para resolver equações do segundo grau

Os métodos que vimos anteriormente são maneiras rápidas de resolvermos equações do segundo grau que possuem características especiais. No entanto, há uma fórmula que nos auxilia na resolução de qualquer tipo de equação do segundo grau, inclusive as anteriormente citadas. A fórmula para equações do tipo $a.x^2 + b.x + c = 0$, é a seguinte:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

No Brasil, essa fórmula é conhecida como Fórmula de Báskara. Machado (2003), no entanto, afirma que essa denominação é exclusividade do Brasil. Em outros países, ela é conhecida simplesmente como a fórmula geral para resolução da equação do segundo grau, sem qualquer referência a Báskara, que foi um matemático indiano do século XII. A descoberta da fórmula costuma ser atribuída aos babilônios antigos e sua formalização ao matemático persa Al-Khowarizmi.

Saiba Mais

Uma demonstração dessa fórmula:

$$
\begin{aligned}
& ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow \\
& (4a)(ax^2+bx+c)=(4a).0 \Leftrightarrow \\
& 4a^2x^2+4abx+4ac=0 \Leftrightarrow \\
& (2ax)^2+2(2ax)b=-4ac \Leftrightarrow \\
& (2ax)^2+2(2ax)b+b^2=-4ac+b^2 \Leftrightarrow \\
& (2ax+b)^2=b^2-4ac \Leftrightarrow \\
& |2ax+b|=\sqrt{b^2-4ac}
\end{aligned}
$$

Pela definição de módulo, temos:

$$
\begin{aligned}
& 2ax+b=\sqrt{b^2-4ac} \Leftrightarrow \\
& 2ax=\sqrt{b^2-4ac}-b \Leftrightarrow \\
& x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
& 2ax+b=-\sqrt{b^2-4ac} \Leftrightarrow \\
& 2ax=-\sqrt{b^2-4ac}-b \Leftrightarrow \\
& x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
x=\begin{cases} x=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \rightarrow r1 \\ x=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \rightarrow r2 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}
$$

Vamos resolver uma equação, utilizando a Fórmula:

$x^2 - 5x + 6 = 0$

Considerando a representação $a.x^2+b.x+c=0$, temos, nesse caso, os seguintes valores: a = 1; b = –5; c = 6.

Substituindo esses valores na fórmula teremos:

$$
x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4.1.6}}{2.1}
$$

Resolvendo:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{5+1}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\[2ex] x_2 = \dfrac{5-1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \end{array} \right.$$

Logo, temos duas possíveis soluções: x = 3 e x = 2.

Situação problema 2

Os babilônios também tinham conhecimentos matemáticos aprimorados e, pelos que os estudiosos falam, superiores aos egípcios. Eles tinham um sistema de numeração próprio e deixaram muita coisa sobre o que faziam escrita em tabletes de argila, usando uma escrita, chamada cuneiforme, feita com estilete.

Um dos tabletes encontrados por arqueólogos mostra um problema relacionado às equações do segundo grau. Escrito em nossa linguagem, o problema diz o seguinte: ache o lado de um quadrado, se a sua área subtraída pelo seu lado é igual a 870.

Atividade

Escreva o problema em linguagem matemática atual. Qual é a sua solução?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 6

Resolva as seguintes equações, utilizando a fórmula resolutiva da equação do segundo grau.

a. $x^2 - x - 2 = 0$

x_1=

x_2=

Atividade 6

b. $x^2 + 9x + 8 = 0$

$x_1 =$

$x_2 =$

c. $x^2 - x - 20 = 0$

$x_1 =$

$x_2 =$

d. $x^2 - 8x + 7 = 0$

$x_1 =$

$x_2 =$

e. $x^2 - 3x - 4 = 0$

$x_1 =$

$x_2 =$

Anote suas respostas em seu caderno

Momento de reflexão

As equações do segundo grau são utilizadas em contextos diversos. A Física, por exemplo, faz uso delas no estudo no Movimento Uniformemente Variado.

É comum pensarmos que a compreensão desse tipo de equação passe simplesmente pela aplicação de uma fórmula. Nesta unidade, no entanto, pudemos ver que o mais importante é a compreensão de que o processo de resolução é uma consequência do princípio da igualdade estudada na unidade anterior e que a fórmula é decorrente desse processo.

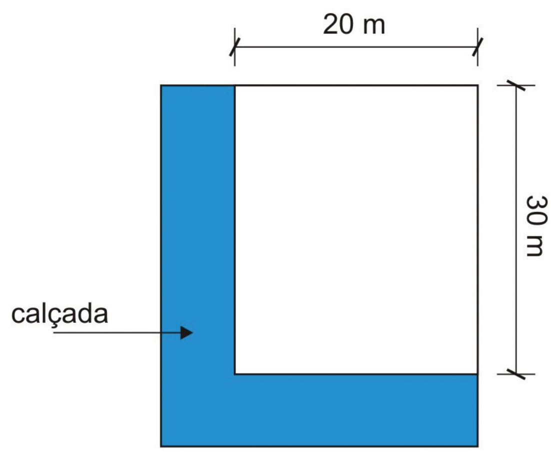
Releia os processos aqui trabalhados e refaça as equações que teve maiores dificuldades. Outra dica: refaça as Atividades 1, 2 e 5, utilizando a fórmula e compare com os resultados encontrados anteriormente. Não deixe de relatar por escrito o que percebeu, isso pode auxiliar os seus estudos posteriormente.

Anote suas respostas em seu caderno

Voltando à conversa inicial...

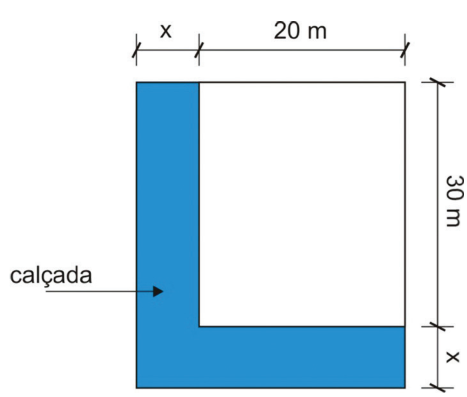
Agora que pudemos estudar um pouco sobre equações do segundo grau, podemos voltar ao nosso problema inicial para resolvê-lo.

Observe novamente o terreno e a calçada que deverá ser construída:

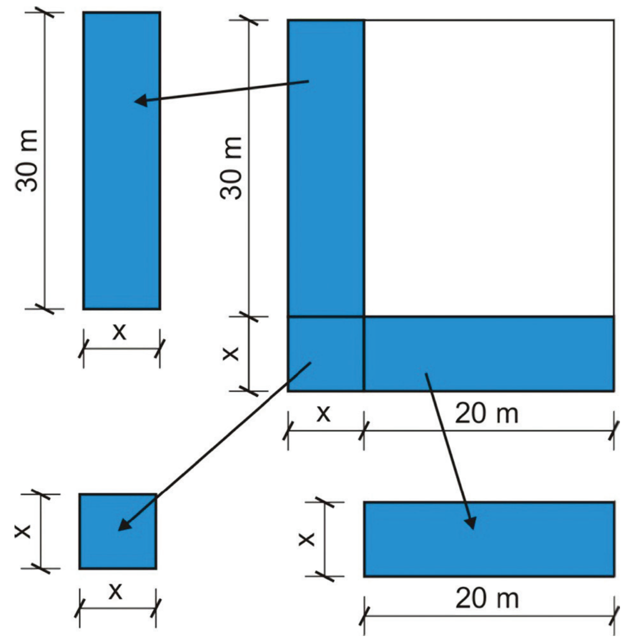


O problema menciona o fato de a calçada ter a mesma largura em ambos os lados. Vamos denominá-la de x.

Utilize a calculadora para encontrar um valor aproximado, uma vez que você se deparará com raiz quadrado não inteira.



A área da calçada é conhecida, pois coincide com a área de lajotas que o pedreiro pretende utilizar. Vamos, então, separar a calçada em retângulos para que possamos calcular tal medida.



São três retângulos, medidos em metro.

a. O primeiro possui medidas 30 e x;

b. O segundo x e x;

c. O terceiro x e 20.

As áreas são as seguintes:

a. Primeiro retângulo $\rightarrow$ 30x

b. Segundo retângulo $\rightarrow x^2$

c. Terceiro retângulo $\rightarrow$ 20x

A área total é a soma dessas três medidas; portanto,

$30x + x^2 + 20x = x^2 + 50x$

Essa medida deve ser igual à área das lajotas à disposição (72 m^2).

Assim:

$x^2 + 50x = 72$

O que origina a seguinte equação do segundo grau.

$x^2 + 50x - 72 = 0$

Logo,

a = 1

b = 50

c = – 72

Substituindo esses valores na fórmula, teremos:

$$x = \frac{-(50) \pm \sqrt{(50)^2 - 4.1.(-72)}}{2.1}$$

Resolvendo

$$x = \frac{-50 \pm \sqrt{2500 + 288}}{2}$$

$$x = \frac{-50 \pm \sqrt{2788}}{2}$$

$$x = \frac{-50 \pm 52,8}{2} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-50 + 52,8}{2} = \dfrac{2,8}{2} = 1,4 \\ x_2 = \dfrac{-50 - 52,8}{2} = \dfrac{-102,8}{2} = -51,4 \end{array} \right.$$

O valor procurado é, portanto, 1,4 m, uma vez que não há medida negativa.

Observação: a raiz quadrada de 2788 foi aproximada para 52,8 já que não é exata.

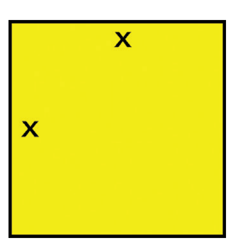
Veja ainda

Há um método bem interessante para resolver equações do segundo grau. O método é conhecido como "completar quadrados". Observe, a equação a seguir:

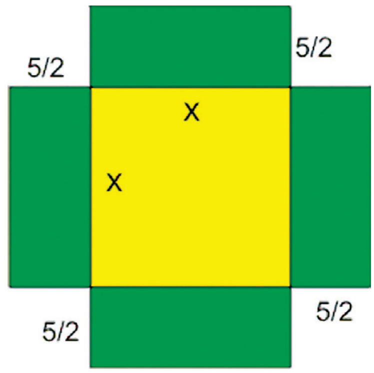
Vamos resolver, utilizando recursos geométricos, a equação do segundo grau:

$x^2 + 10x - 39 = 0$

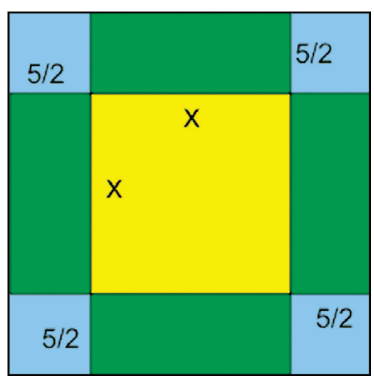
- Primeiro vamos reescrevê-la assim: $x^2 + 10x = 39$
- Representemos um quadrado de lado x; logo, com área x^2.



- Representemos, agora, quatro retângulos de lados x e $\frac{5}{2}$, de forma que sua área seja $\frac{5}{2}x$ e os quatro juntos tenham área 10x.



- Perceba que juntas as cinco figuras possuem área igual a $x^2 + 10x$, que é exatamente o que temos antes da igualdade da equação. Lembrem que essa área também é igual a 39, já que $x^2 + 10x = 39$. Completando a figura de forma que tenhamos um grande quadrado, teremos:



- Observem que:

1. esse novo quadrado possui área igual a $(x + 5)^2$, pois cada um de seus lados mede $(x + 5)$;
2. essa área é a anterior (39) acrescentada de 25 ($4 \times \left(\frac{5}{2}\right)^2$). Logo, podemos concluir que:

$$(x+5)^2 = 39+25$$
$$(x+5)^2 = 64$$
$$|x+5| = 8$$
$$x+5 = \pm\ 8$$
$$x_1 = 3$$
$$x_2 = -13$$

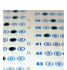
Referências

Livros

- MACHADO, F. et al. **Por que Báskhara?**. In: História e Educação Matemática, vol 2, no 2, jan/jun 2003, pp.119-166.
- PITOMBEIRA, J. B. **Revisitando uma velha conhecida.** Departamento de Matemática, PUC-Rio, 2004, pp. 1 – 41.
- REFATTI, L. R.; BISOGNIN, E. **Aspectos Históricos e Geométricos da Educação Quadrática**. Disc, Scientia. Série: ciências humanas e tecnológicas, s. Maria, vol 6, no 1, 2005, pp.79-95.

Imagens

- http://www.sxc.hu/photo/475767



- http://www.sxc.hu/photo/517386

Situação problema 1

Sabemos que: base x altura = área de um retângulo.

Logo, ao escrever o problema do papiro de Moscou em linguagem matemática atual, temos:

$$\frac{3}{4}x.x = 12$$
$$\frac{3}{4}x^2 = 12$$
$$\frac{3}{4}x^2.4 = 12.4$$
$$3x^2 = 48$$
$$\frac{3x^2}{3} = \frac{48}{3}$$
$$x^2 = 16$$
$$x = 4$$

Embora x = – 4 também seja uma solução possível para essa equação, não é uma resposta válida para o problema uma vez que não há medida negativa para a base de um retângulo. A solução é, portanto, apenas x = 4.

Atividade 1

Ao resolver as equações, você deve ter encontrado os seguintes resultados:

a. $2x^2 - 200 = 0$

$2x^2 = 200$

$x^2 = 200 / 2$

$x^2 = 100$

$x = 10$ ou $x = -10$

b. $5x^2 = 25 - 20$

$5x^2 = 5$

$x^2 = 5/5$

$x^2 = 1$

$x=1$ ou $x=-1$

Respostas das Atividades

c. $9x^2 - 18 = 0$

$9x^2 = 18$

$x^2 = 18/9$

$x^2 = 2$

$x = \sqrt{2}\ \ ou\ \ x = -\sqrt{2}$

Atividade 2

Ao resolver as equações, você deve ter encontrado os seguintes resultados:

a. $3x^2 - x = 0$

$x.(3x - 1) = 0$

Como o produto de dois números reais só dá zero se um deles for zero, teremos:

$x = 0$

ou

$3x\text{-}1 = 0 \rightarrow 3\ x = 1 \rightarrow x = 1/3$

b. $2x^2 + 23x = 0$

$x.(2x + 23) = 0$

$x = 0$

ou

$2x+23=0 \rightarrow 3x=-23 \rightarrow x=-23/3$

c. $5x^2 - 56x = 0$

$x.(5x - 56) = 0$

$x = 0$

ou

$5x\text{-}56 = 0 \rightarrow 5x = 56 \rightarrow x = 56/5$

Respostas das Atividades

Atividade 3

Ao resolver as equações, você deve ter encontrado os seguintes resultados:

a. $(x-4)^2 = 0$

$x - 4 = 0$

$x = 4$

b. $(x+5)^2 = 0$

$x + 5 = 0$

$x = -5$

c. $(x-9)^2 = 0$

$x - 9 = 0$

$x = 9$

Atividade 4

Você deve ter encontrado os seguintes produtos notáveis:

$(x-4)^2 = (x-4).(x-4) = x.x - 4.x + x.(-4) - 4.(-4) = x^2 - 4x - 4x + 16 = x^2 - 8x + 16$

$(x+5)^2 = (x+5).(x+5) = x.x - 5.x + x.5 + 5.5 = x^2 + 5x + 5x + 25 = x^2 + 10x + 25$

$(x-8)^2 = (x-8).(x-8) = x.x - 8.x + x.(-8) - 8.(-8) = x^2 - 8x - 8x + 64 = x^2 - 16x + 64$

Atividade 5

Utilizando as fatorações vistas anteriormente você deve ter encontrado os seguintes resultados:

$x^2 - 8x + 16 = 0$

$(x-4)^2 = 0$

$x = 4$

$x^2 + 10x + 25 = 0$

$(x + 5)^2 = 0$

$x = -5$

$x^2 - 16x + 64 = 0$

$(x - 8)^2 = 0$

$x = 8$

Situação problema 2

Escrevendo o problema "ache o lado de um quadrado se a sua área subtraída pelo seu lado é igual a 870" em linguagem matemática atual, temos:

A equação pode ser escrita assim:

$x^2 - x = 870$

Ou

$x^2 - x - 870 = 0$

Logo,

$a = 1$

$b = -1$

$c = -870$

Substituindo esses valores na fórmula temos:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-870)}}{2.1}$$

Resolvendo

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 3480}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{3481}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm 59}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{1+59}{2} = \dfrac{60}{2} = 30 \\ x_2 = \dfrac{1-59}{2} = \dfrac{-58}{2} = -24 \end{cases}$$

Como x é uma medida, apenas x = 30 pode ser solução para o problema.

Atividade 6

Utilizando a fórmula resolutiva da equação do segundo grau, você deve ter encontrado os seguintes resultados:

a. $x^2 - x - 2 = 0$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-2)}}{2.1}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2.1}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2.1}$$

$$x = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{1+3}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{1-3}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

$x_1 = 2$

$x_2 = -1$

b. $x^2 + 9x + 8 = 0$

$$x = \frac{-(9) \pm \sqrt{(9)^2 - 4.1.(8)}}{2.1}$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81-32}}{2.1}$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{49}}{2.1}$$

$$x = \frac{-9 \pm 7}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-9+7}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \\ x_2 = \dfrac{-9-7}{2} = \dfrac{-16}{2} = -8 \end{cases}$$

$x_1 = -1$

$x_2 = -8$

c. $x^2 - x - 20 = 0$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-20)}}{2.1}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2.1}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{81}}{2.1}$$

$$x = \frac{1 \pm 9}{2} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \frac{1+9}{2} = \frac{10}{2} = 5 \\ x_2 = \frac{1-9}{2} = \frac{-8}{2} = -4 \end{array} \right.$$

$x_1 = 5$

$x_2 = -4$

c. $x^2 - 8x + 7 = 0$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4.1.(7)}}{2.1}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2.1}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2.1}$$

$$x = \frac{8 \pm 6}{2} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \frac{8+6}{2} = \frac{14}{2} = 7 \\ x_2 = \frac{8-6}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{array} \right.$$

$x_1 = 1$

$x_2 = 7$

d. $x^2 - 3x - 4 = 0$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.1.(-4)}}{2.1}$$

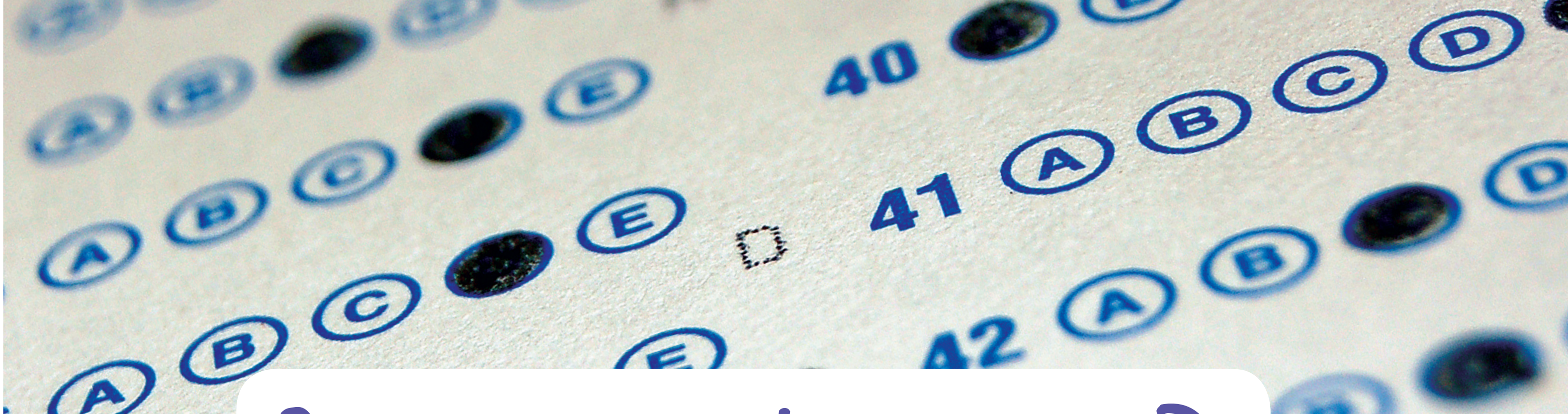
$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2.1}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2.1}$$

$$x = \frac{3 \pm 5}{2} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{array} \right.$$

$x_1 = 4$

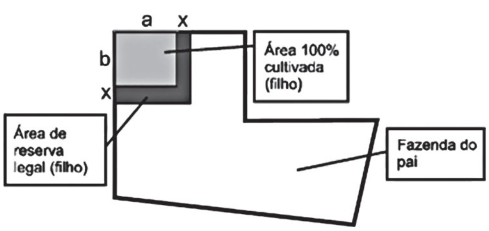
$x_2 = -1$



O que perguntam por aí?

Questão 1 (adaptada de ENEM 2009)

Questão 72



Um fazendeiro doa, como incentivo, uma área retangular de sua fazenda para seu filho, que está indicada na figura como 100% cultivada. De acordo com as leis, deve-se ter uma reserva legal de 20% de sua área total. Assim, o pai resolve doar mais uma parte para compor a reserva para o filho, conforme a figura.

De acordo com a figura acima, o novo terreno do filho cumpre a lei, após acrescentar uma faixa de largura x metros contornando o terreno cultivado, que se destinará à reserva legal (filho). O dobro da largura da faixa é aproximadamente:

Considere a = 300 m e b = 200 m.

a. 32 m

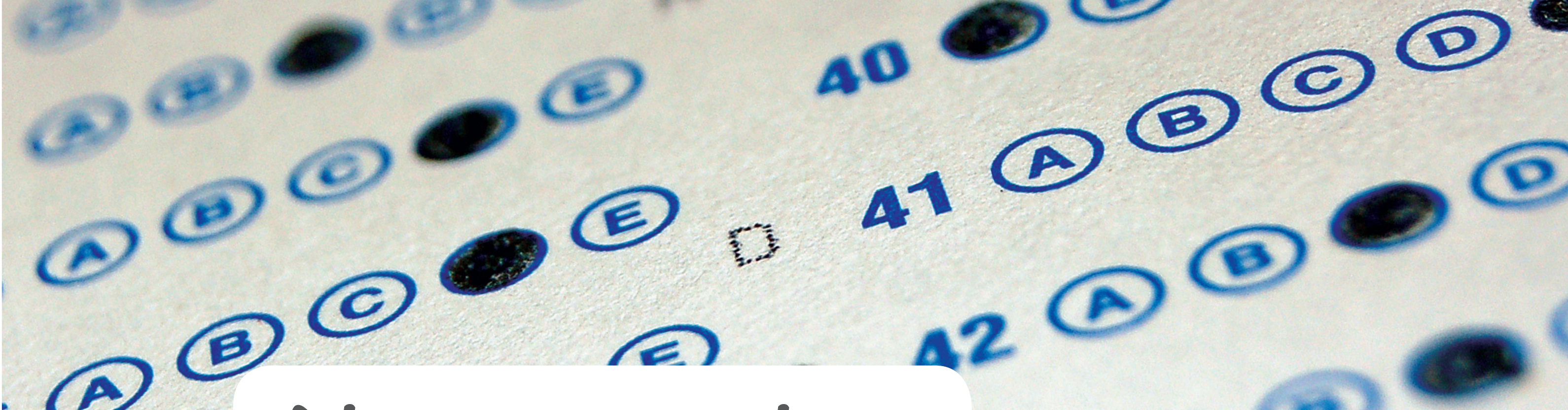
b. 40 m

c. 48 m

d. 56 m

e. 64 m

Resposta: Letra D



Atividade extra

Exercício 1

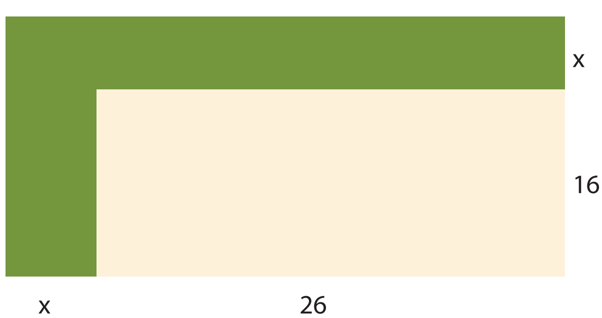
Em determinado retângulo que tem 54cm2 de área, o comprimento é expresso por (x – 1)cm, enquanto a largura é expressa por (x – 4)cm.

Qual o valor de x?

(a) 8 (b)10 (c) 12 (d) 15

Exercício 2

Um terreno retangular mede 26 m de comprimento e 16 m de largura. Conforme ilustra a figura, serão acrescentadas duas faixas de mesma largura. A área do terreno expandido é de 816 m^2.



Qual será a largura dessas faixas?

(a) 4 (b) 6 (c) 8 (d) 12

Exercício 3

Um grupo de amigos comprou um camarote no valor de R$ 1440, 00 para assistir a um *show*. Três dos amigos não puderam ir e o restante resolveu ratear o "prejuízo", pagando, cada um, R$ 40,00 a mais.

Quantas pessoas foram assistir o *show*?

(a) 6 (b) 9 (c) 10 (d) 12

Exercício 4

Uma mulher tinha 20 anos quando nasceu seu filho. Hoje, o produto das idades, menos a idade da mãe, é 100.

Qual a idade da mãe?

(a) 20 (b) 23 (c) 25 (d) 30

Exercício 5

A soma de um número negativo com seu quadrado é 2.

Que número é esse?

(a) –1 (b) –2 (c) –3 (d) –4

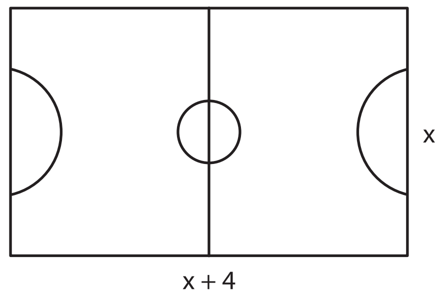
Exercício 6

Pai e filho tem hoje 45 e 15 anos, respectivamente. Há quantos anos a idade do pai era igual ao quadrado da idade do filho?

(a) 9 (b) 12 (c) 13 (d) 15

Exercício 7

A figura seguinte representa uma quadra retangular de futebol de salão. A área da quadra é de $117m^2$ e suas dimensões estão indicadas na figura. Deseja - se cercá-la com um alambrado que custa R$ 12,00 o metro linear.



Qual o custo do cercado?

(a) R$ 44,00 (b) R$ 88,00 (c) R$ 406,00 (d) R$ 528,00

Exercício 8

Um retângulo possui um perímetro de 50 cm e uma área de 150 cm^2. Quais são as dimensões desse retângulo?

(a) 15cm × 10cm (b) 20cm × 5cm (c) 12cm × 3cm (d) 10cm × 12cm

Exercício 9

Um homem quer construir uma casa de 8m por 10m. A legislação do município só permite construir, nesse loteamento em 20% da área do terreno. Todos os terrenos são quadrados.

Quais serão as medidas do terreno para construir a casa desejada?

(a) 20m × 20m (b) 40m × 40m (c) 25m × 25m (d) 30cm × 30m

Exercício 10

Um terreno retangular de área 875m^2 tem o comprimento excedendo em 10 metros a largura.

Qual a equação que representa o problema acima?

(a) $x^2 + 10x - 875 = 0$ (c) $x^2 - 10x + 875 = 0$

(b) $x^2 + 10x + 875 = 0$ (d) $x^2 + 875 - 10 = 0$

Exercício 11

Foram utilizados 2000 azulejos quadrados de lado x metros para revestir $45m^2$ de parede.

Qual é a medida do lado de cada azulejo?

Exercício 12

Um objeto foi lançado do topo de um edifício de 84m de altura. Sabe-se que a expressão matemática do 2 grau d(t) = 5t2 + 32t representa o movimento de queda livre do corpo.

Quanto tempo ele levou para chegar ao chão?

Exercício 13

O movimento de um projétil, lançado para cima verticalmente, é descrito pela equação $y(x) = -40x^2 + 200x$, onde y é a altura, em metros, atingida pelo projétil x segundos após o lançamento.

Qual tempo gasto por esse projétil ao atingir o solo?

Exercício 14

Uma mesa de sinuca de R$ 360,00 devia ser comprada por um grupo de rapazes que contribuíam em partes iguais. Como quatro deles desistiram, a quota de cada um dos outros ficou aumentada de R$ 15,00.

Quantos eram os rapazes?

Exercício 15

Duas torneiras enchem um tanque juntas, em 6 horas. A primeira gasta 5 horas mais do que a segunda para fazê-lo sozinha.

Quanto tempo gastará, isoladamente, a segunda para encher o tanque?

Gabarito

Exercício 1

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 2

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 3

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 4

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 5

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 6

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 7

A B C D
○ ○ ○ ●

Exercício 8

A B C D
● ○ ○ ○

Exercício 9

A B C D
● ○ ○ ○

Exercício 10

A B C D
● ○ ○ ○

Exercício 11

15 cm.

Exercício 12

2 segundos.

Exercício 13

5 segundos.

Exercício 14

12 rapazes.

Exercício 15

10 horas.

Polígonos: as faces dos poliedros

Fascículo 2

Unidade 5

Fundação CECIERJ

Polígonos: as faces dos poliedros

Para início de conversa...

Observe as imagens a seguir e tente perceber o que elas têm em comum:

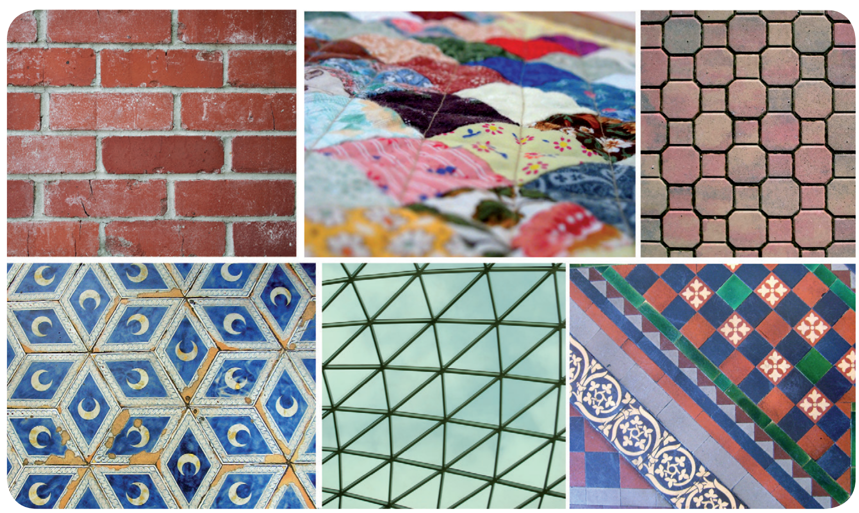


Figura 1: O que uma colcha de retalhos, ladrilhos diversos, tijolos e estruturas de construção têm em comum? Será que a Matemática está por trás disso?

As imagens apresentadas mostram diversas combinações de figuras que lembram retângulos, triângulos, quadrados entre outras. O uso dessas combinações ou padrões é um recurso empregado na construção civil, na decoração de pisos e paredes, no artesanato, na arte e em diversas outras situações da nossa vida cotidiana.

No entanto, pavimentar ou ladrilhar superfícies dessa maneira não é uma tarefa simples! Nem todas as combinações de polígonos prestam-se para encher uma superfície plana, sem que haja falhas ou superposições.

Observe, por exemplo, a tentativa de ladrilhamento feita com peças com oito lados.

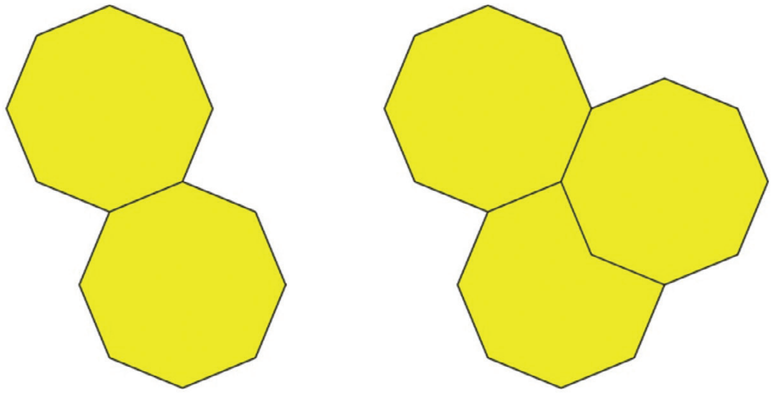
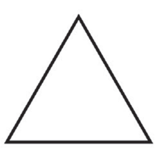
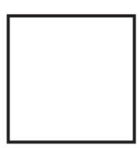
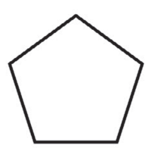
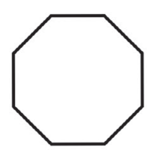
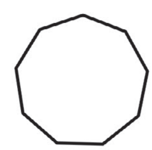


Figura 2: Seria possível ladrilhar um piso plano apenas com peças de oito lados?

Veja que as peças sobrepõem-se, ou seja, não é possível fazer-se ladrilhamentos, utilizando apenas esse tipo de peça.

Assim, temos um problema. Imagine que precisamos ladrilhar um piso e temos apenas peças octogonais (com oito lados). Se você fosse um arquiteto ou um construtor como procederia para resolver essa situação?

Uma alternativa seria utilizar outro formato de ladrilho para fazer o encaixe, em vez de deixar espaços vazios ou fazer sobreposições de peças. Veja, na tabela a seguir, outros tipos de ladrilhos, com diferentes formatos:

Nome	Triângulo	Quadrado	Pentágono	Hexágono	Octógono	Eneágono
Figura						

Qual deles você escolheria para realizar o encaixe junto aos ladrilhos octogonais? Por quê?

Nesta unidade, você estudará as propriedades dos polígonos e aprenderá como realizar essa tarefa com base em cálculos que facilitarão a escolha. Bons estudos!

Objetivos de Aprendizagem

- Reconhecer as principais propriedades dos polígonos e utilizá-las para resolver problemas.
- Identificar o ângulo interno de um polígono.
- Realizar a soma dos ângulos internos de um polígono.

Seção 1
Propriedades dos polígonos

Situação Problema 1

Os polígonos possuem propriedades importantes. Para poder falar um pouco delas, vamos fazer uma proposta. A seguir há duas sequências de figuras. Na primeira delas, todos são polígonos e na segunda não.

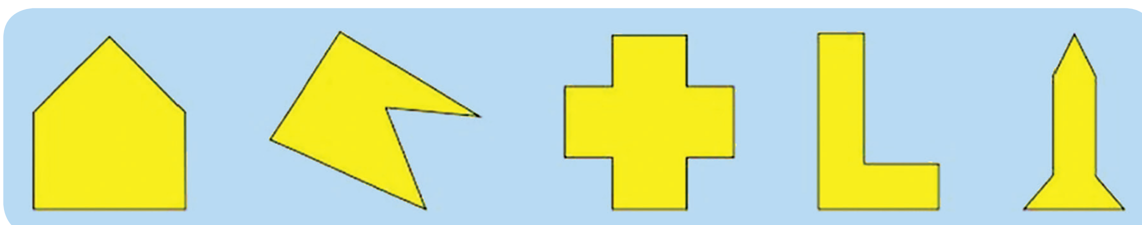


Figura 3: Exemplos de polígonos.

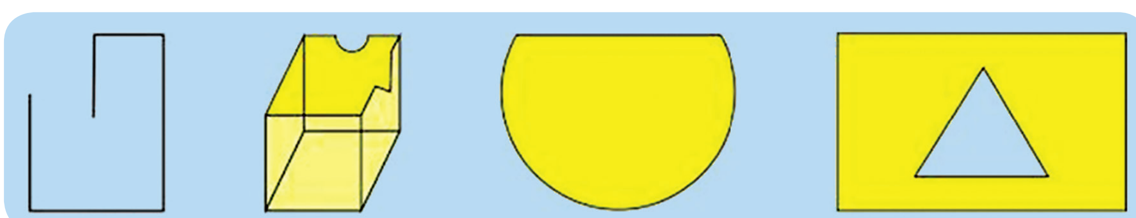


Figura 4: Exemplos de figuras que não são polígonos.

Atividade

Observe os desenhos acima, compare os dois quadros e escreva as características de uma figura geométrica para que ela possa ser considerada um polígono.

Anote suas respostas em seu caderno

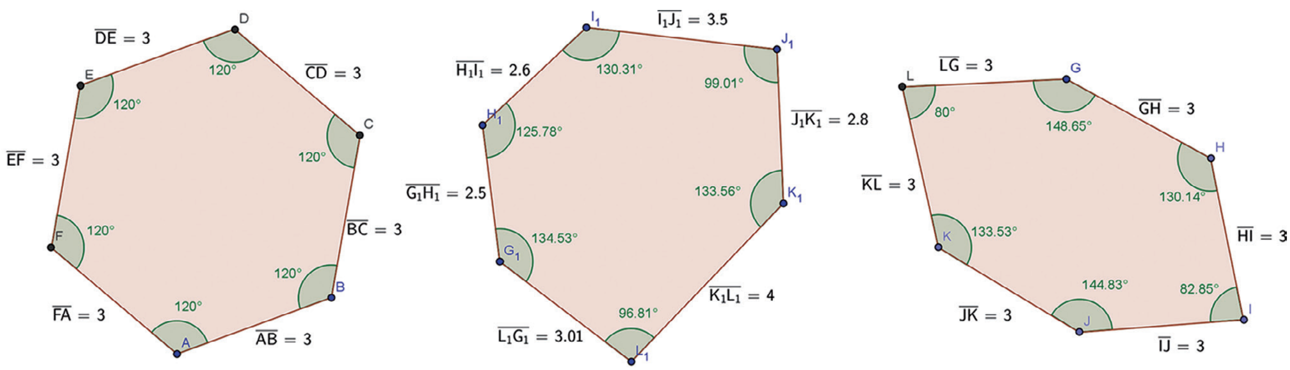
Como você pode, verificar por meio de sua observação:

Polígonos são figuras planas formadas por segmentos de retas sem interrupção.

Importante

Polígonos regulares são aqueles que possuem todos os lados com as mesmas medidas e todos os ângulos internos também com as mesmas medidas.

Observe os exemplos a seguir:

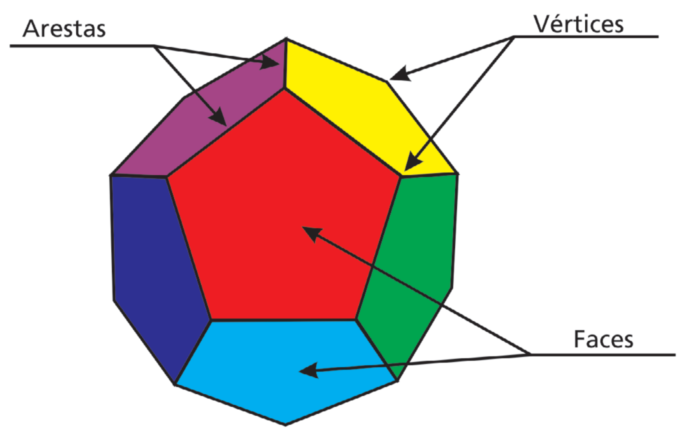


O primeiro polígono é regular, pois possui todos os lados com mesma medida (3) e todos os ângulos internos também com as mesmas medidas (120º). O segundo e o terceiro não são regulares, pois não atendem a essas características. Observe que o terceiro possui os lados com mesma medida, mas os seus ângulos internos são diferentes.

Saiba Mais

As faces de um poliedro

Poliedros são sólidos cujas faces são planas. Observe a seguir um exemplo de poliedro com os seus principais elementos assinalados:



Observe que as faces dos poliedros são polígonos, ou seja, figuras planas formadas por segmentos de retas sem interrupção.

Seção 2
Utilizando polígonos nas artes

Observe a imagem ao lado:

Pavimentar um plano é preenchê-lo completamente através do uso repetido de polígonos ou outras figuras, sem falhas nem sobreposições. Uma boa parte da obra de Escher é dedicada ao estudo das pavimentações de superfícies planas. Você consegue identificar as formas geométricas utilizadas pelo autor?

Figura 5: Essa é uma reprodução de uma litogravura famosa do artista Maurits Cornelis Escher. A obra chama-se *Répteis* e foi feita em 1943.

Um pouco sobre Escher

Maurits Cornelis Escher, nasceu em Leeuwarden, na Holanda, em 1898, faleceu em 1970 e dedicou toda a sua vida às artes gráficas. Cursou arquitetura na Escola de Belas Artes de Haarlem onde conheceu as técnicas de desenho e deixou-se fascinar pela arte da gravura. Este fascínio foi tão forte que levou Maurits a abandonar a Arquitetura e a seguir as Artes Gráficas. Sua obra foi inspirada pela arte árabe, pela divisão regular do plano em figuras geométricas que se transfiguram, repetem-se e refletem, pelas pavimentações. Porém, no preenchimento de superfícies, Escher substituía as figuras abstrato-geométricas, usadas pelos árabes, por figuras concretas, perceptíveis e existentes na natureza, como pássaros, peixes, pessoas, répteis etc.

Saiba Mais

Veja nas imagens a seguir como é a lógica do encaixe das gravuras desenhadas por Escher:

Observe que há um polígono no qual ele desenha o corpo dos répteis.

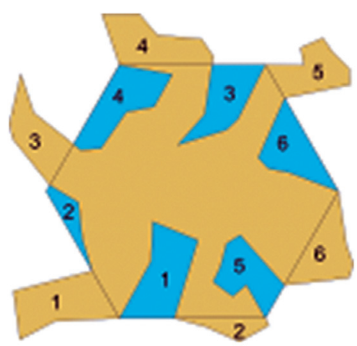


Figura 6: Polígono base para a composição da obra *Répteis*.

Veja como ficaria um ladrilhamento a partir do polígono base:

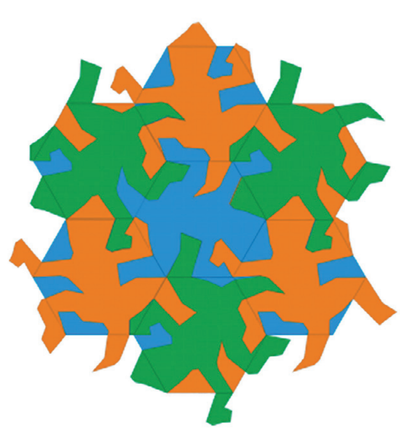


Figura 7: Ladrilhamento composto a partir do polígono base.

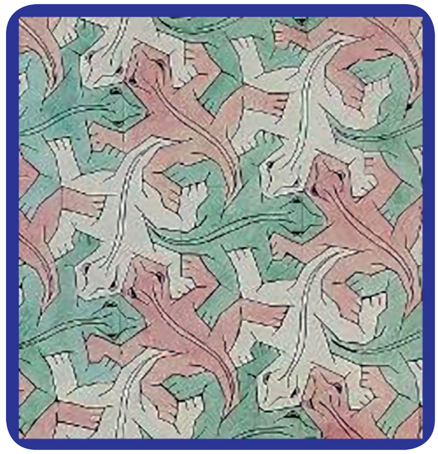


Figura 8: Após tratamento artístico, os polígonos deixam de ser percebidos.

Para compor os répteis, Escher opta por utilizar hexágonos regulares como ponto de partida. Mas por que hexágonos regulares? Por um simples motivo. Para criar um mosaico, feito exclusivamente com polígonos regulares, ele teria somente três opções: triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares, pois somente esses três polígonos permitem ladrilhamento ou pavimentação. Observe:

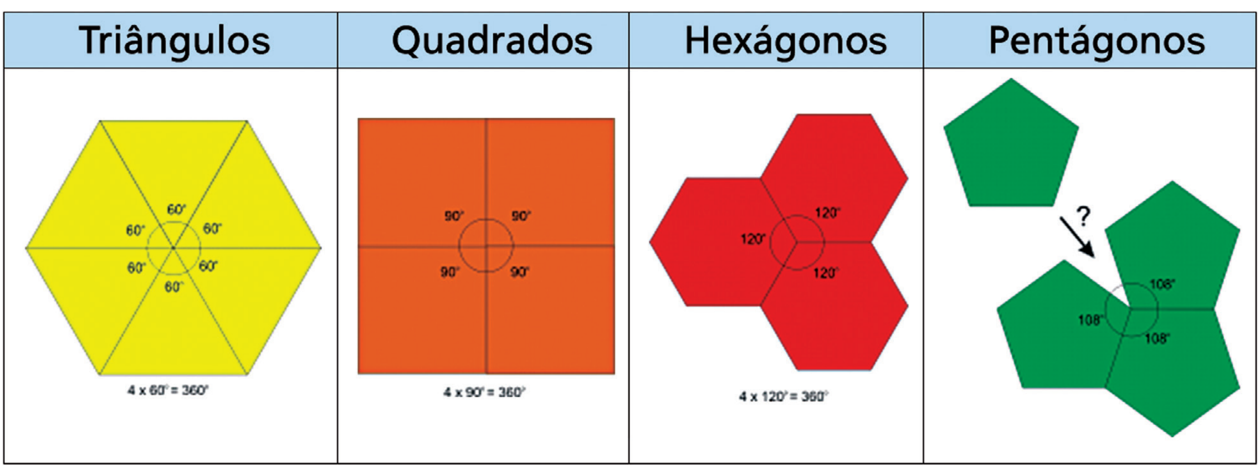


Figura 9: O triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular são os únicos polígonos regulares que permitem ladrilhamento, já que não há necessidade de encaixe de outros polígonos.

Veja que não é possível fazer pavimentações, utilizando somente pentágonos regulares. Isso ocorre porque a pavimentação só é possível quando os ângulos internos completam 360º ao se juntarem. Veja a tabela a seguir, construída a partir do quadro da Figura 9.

Figura	Ângulo interno	Na junção
Triângulo equilátero	60º	6 x 60º = 360º
Quadrado	90º	4 x 90º = 360º
Hexágono regular	120º	3 x 120º = 360º
Pentágono regular	108º	3 x 108º = 324º 4 x 108º = 432º

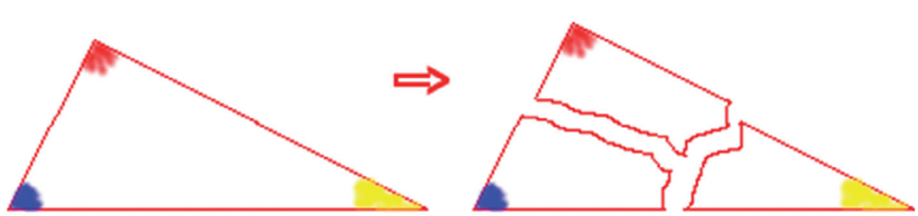
Seção 3
Calculando o ângulo interno de um polígono regular

Será que não conseguiríamos ladrilhar, usando heptágonos regulares (7 lados), octógonos regulares (oito lados), eneágonos regulares (9 lados) etc.? Para que possamos responder essa questão, precisamos saber qual a medida do ângulo interno de cada um desses polígonos. Vamos ver, passo a passo, uma estratégia para que possamos encontrar essas medidas.

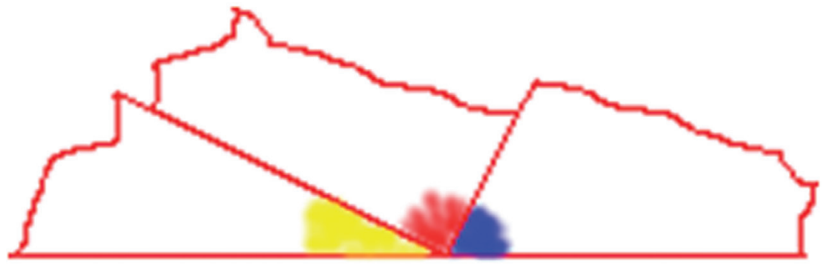
Passo 1

Vamos utilizar como referência o fato de que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo sempre é 180º. Não faremos uma demonstração matemática para tal afirmação, mas uma experiência simples poderá ajudá-lo a chegar a tal conclusão, intuitivamente.

Desenhe um triângulo qualquer e pinte os três ângulos com cores diferentes. Depois recorte o da seguinte forma:

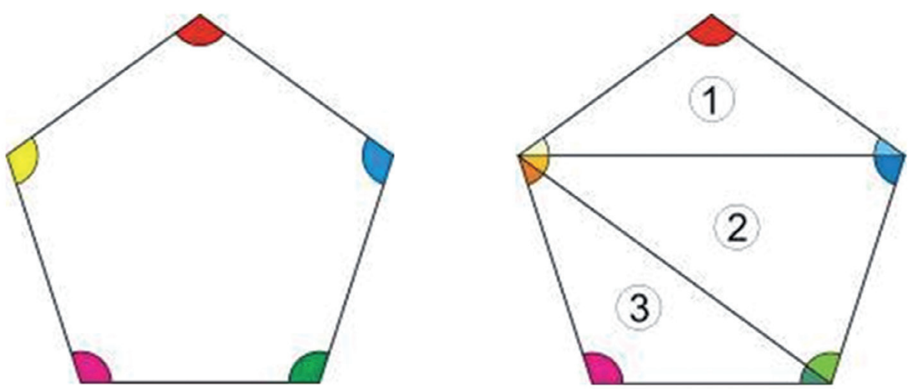


Agora junte os três ângulos. Você poderá observar que eles juntos formam um ângulo de medida igual a 180º (ângulo raso), como visto na Unidade 10 do Módulo 1.

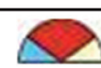


Passo 2

Vejamos agora o cálculo da soma dos ângulos internos de um polígono. Vamos tomar o pentágono regular como referência. Observe que podemos dividi-lo em três triângulos.



Cada um dos triângulos formados possui soma igual a 180º para os seus três ângulos.

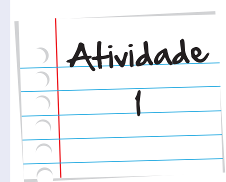
Triângulo 1	
Triângulo 2	
Triângulo 3	

Os dois desenhos mostram que todos os nove ângulos dos três triângulos, juntos, equivalem a todos os cinco ângulos internos do pentágono. Portanto, a soma desses ângulos é igual a 180º x 3 = 540º.

Como os cinco ângulos internos do pentágono têm mesma medida, podemos encontrar tal valor dividindo 540º por 5. Assim:

540º ÷ 5 = 108º.

Então, o valor do ângulo interno do pentágono regular é 108º, como havíamos dito antes. Logo, não é possível ladrilhar uma superfície plana apenas com o pentágono regular, pois suas combinações nunca resultariam em 360°.



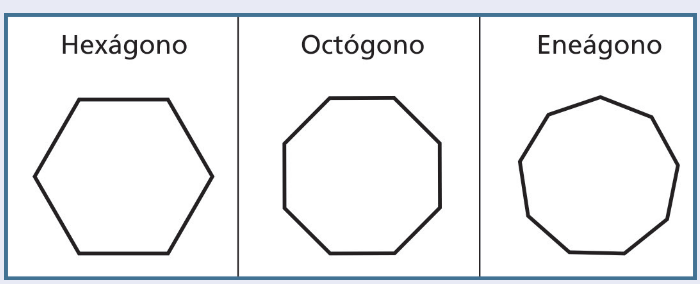
Agora que você já viu como calcular um ângulo interno de um polígono regular, a partir do exemplo do pentágono, faça o mesmo para os casos a seguir.

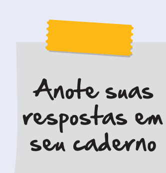
Dividindo os polígonos abaixo em triângulos, determine as medidas de seus ângulos internos.

a. Hexágono regular

b. Octógono regular

c. Eneágono regular



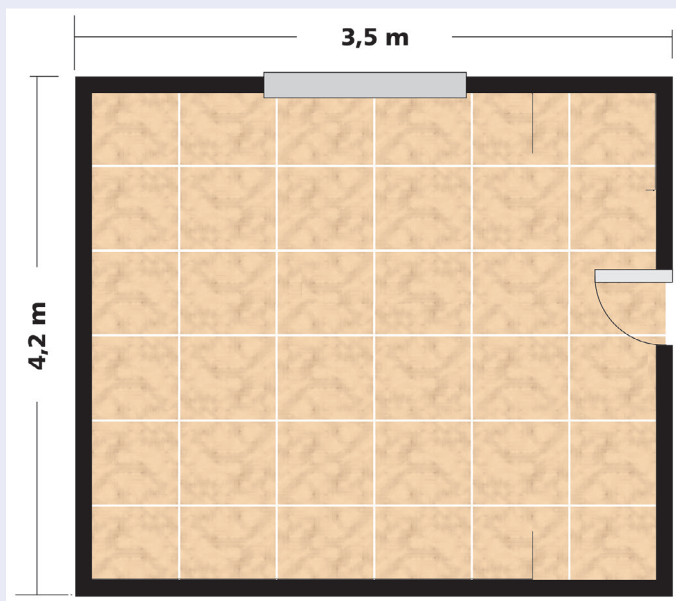


Seção 4
Calculando revestimentos com polígonos

Até então, trabalhamos com pavimentações, utilizando polígonos regulares. Vamos continuar falando em pavimentação, só que agora apresentaremos novas possibilidades com polígonos não regulares. Na Atividade 2, a ideia é fazer pavimentações com peças retangulares, enquanto que, na Atividade 3, as peças possuem um formato um tanto quanto diferentes e precisamos encontrar uma forma de encaixá-las da melhor maneira possível.

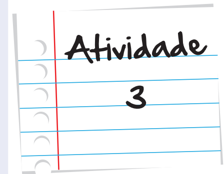
Atividade 2

Uma cozinha retangular possui medidas de 3,5m x 4,20m, conforme desenho abaixo:

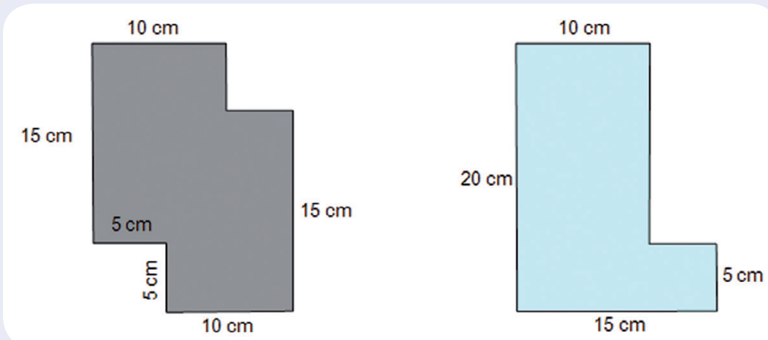


Um pedreiro pretende revestir o piso da cozinha, utilizando peças cerâmicas retangulares com medidas 20cmx30cm. Se descontarmos o rejuntamento, quantas peças serão necessárias?

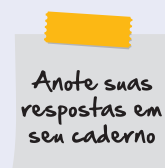
Anote suas respostas em seu caderno



Você precisa revestir o piso de um quarto e, para isso, escolheu cerâmicas com formatos um pouco diferentes. Além disso, você quer utilizar duas cores para fazer o revestimento. Veja as imagens das peças que você tem disponíveis:

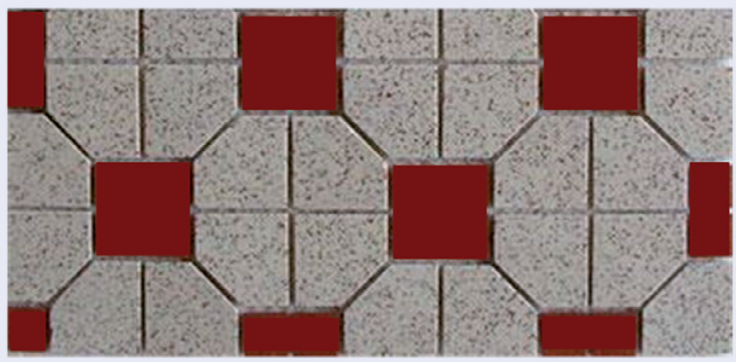


Sabendo que o quarto tem forma retangular com medidas 3,4m x 4,2m (É preciso dar os espaçamentos adequados aqui), calcule a quantidade mínima de peças de cada cor que de verão ser compradas para que não haja desperdício. Pedaços cortados não poderão ser reaproveitados.

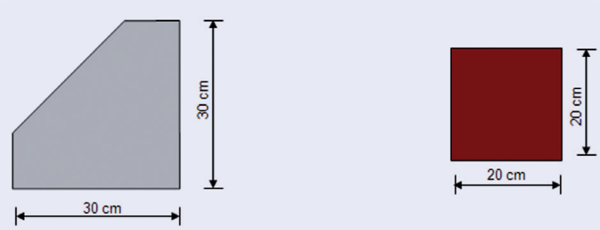


Atividade 4

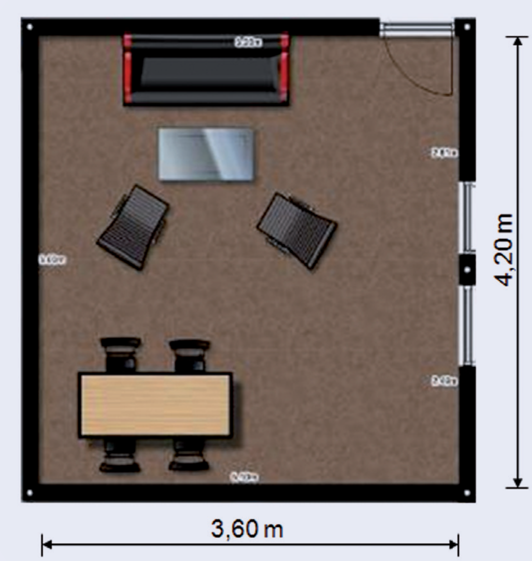
É muito comum a utilização de ladrilhos ou azulejos com a forma de polígonos para o revestimento de pisos ou paredes. Evidentemente, os mais comuns são aqueles que possuem formas retangulares. Entretanto, hoje em dia, é cada vez mais frequente encontrarmos cerâmicas com outras formas poligonais, o que ajuda arquitetos e decoradores a diversificar o ladrilhamento utilizado para os vários tipos de revestimentos. Observe, por exemplo, uma parte de um piso revestido com cerâmicas chinesas.



Perceba que há dois tipos de piso: um quadrado e outro pentagonal. Veja as medidas das peças:



O piso do cômodo a seguir será totalmente revestido, seguindo um mesmo padrão de composição dessas duas peças. Quantas peças de cada tipo serão gastas para que haja o menor desperdício possível? Considere que as partes cortadas das peças não poderão ser reaproveitadas e desconsidere o rejuntamento.



Atividade 4

Anote suas respostas em seu caderno

Momento de reflexão

Os polígonos foram o foco do estudo desta unidade. Você pôde estudar suas propriedades e, sobretudo, decisões sobre possibilidades de pavimentações ou ladrilhamentos, a partir do cálculo de ângulos internos de polígonos regulares. Tente refletir e escrever com suas palavras algumas propriedades de polígonos e como se calcula a medida de um ângulo interno de um polígono regular. Depois faça uma nova leitura da unidade, compare com o que escreveu e, se for necessário, reveja sua escrita. Quanto ao problema colocado inicialmente, está resolvido na próxima seção, mas, agora que já estudou sobre o assunto, tente resolvê-lo antes de passar para frente. Depois compare os resultados.

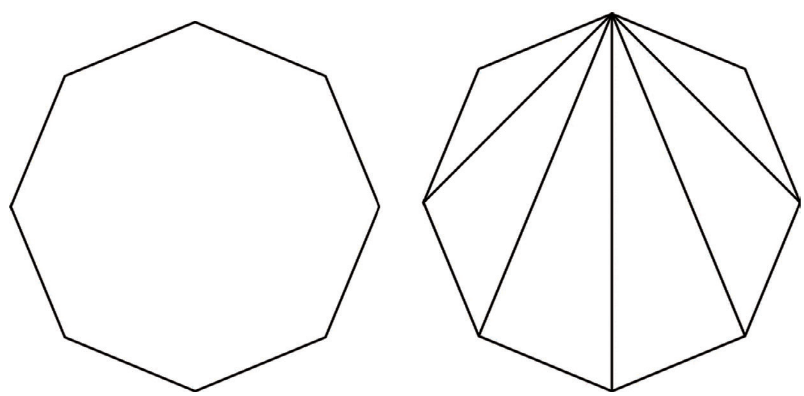
Anote suas respostas em seu caderno

Voltando à conversa inicial...

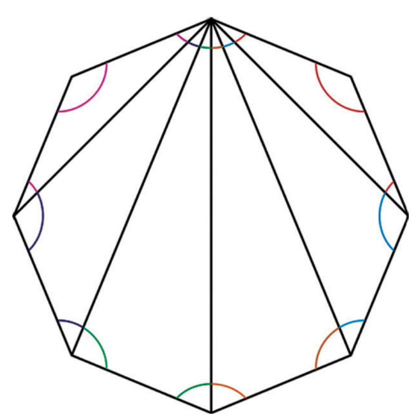
Se um arquiteto quer combinar um ladrilho octogonal com outro tipo de ladrilho, qual polígono ele deve escolher?

Antes de qualquer coisa, é necessário lembrar que conseguimos fazer pavimentações desde que a soma dos ângulos internos correspondentes aos vértices que se encontram seja 360º. Neste caso, a primeira tarefa seria calcular o ângulo interno de um octógono regular. Podemos proceder da seguinte forma:

- Criam-se todos os triângulos possíveis, sem que os segmentos se cruzem:



- Marcam-se os ângulos internos dos triângulos:



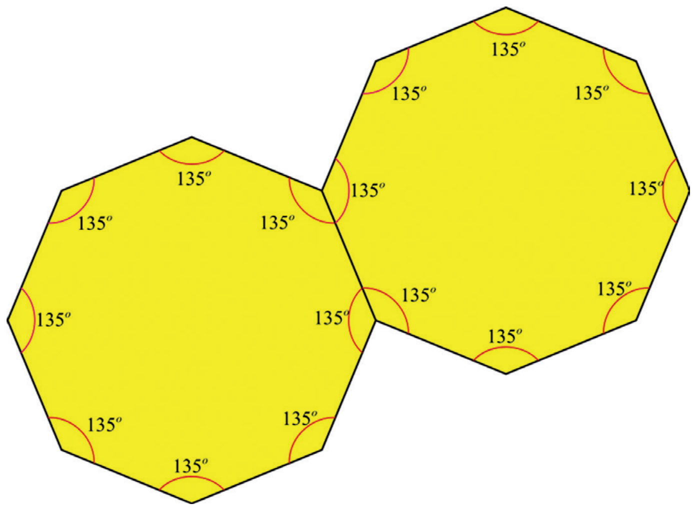
- Cada triângulo, como sabemos, possui soma de seus ângulos internos igual a 180º. E, como se pode perceber, todos os ângulos internos dos triângulos juntos formam os ângulos internos do octógono. Logo, a soma dos ângulos internos do octógono é igual à soma dos ângulos internos de 6 triângulos, o que nos leva a afirmar que:

  Soma dos ângulos internos do octógono = 6' 180° = 1080°

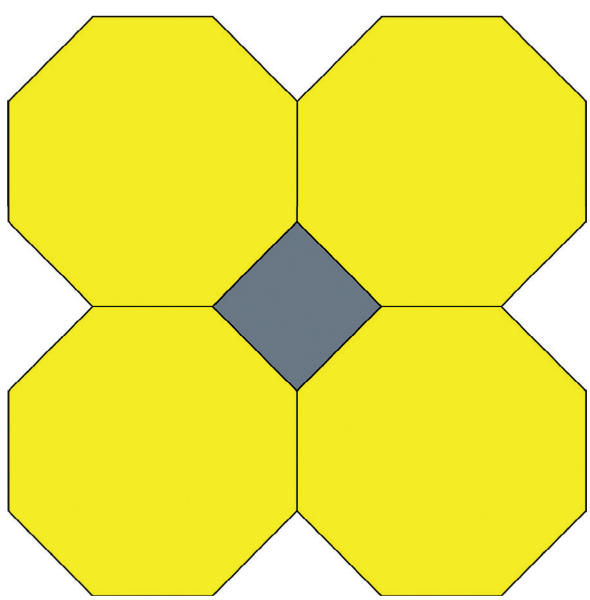
Como estamos falando de octógono regular, podemos dizer que:

Ângulo interno do octógono = $\frac{1080^\circ}{8} = 135^\circ$

Vamos, então, tentar ladrilhar octógonos:



Observem que ao juntarmos dois octógonos, nos vértices que se uniram, já se somam 270°. Evidentemente que não cabe mais um octógono, pois ultrapassaria os 360° pretendidos. Uma simples conta mostra-nos que faltam 90°, que é exatamente a medida do ângulo interno do quadrado, sendo esta, portanto, a forma do outro ladrilho a ser escolhido. Veja como ficaria este ladrilhamento:



Veja ainda

Observe como as abelhas fazem suas colmeias. A estrutura lembra muito um ladrilhamento com hexágonos, não é mesmo? Mas, sabe por que as abelhas usam formatos hexagonais para sua construção? Leia a história a seguir:

Afirma Maeterlinck, no seu famoso livro sobre as abelhas, que esses animais, na construção de seus alvéolos, resolvem um problema de alta Matemática.

Há nessa asserção certo exagero do escritor belga: o problema que as abelhas resolvem pode ser abordado, sem grande dificuldade, com os recursos da Matemática elementar.

Não nos importa, porém, saber se o problema é elementar ou transcendente; a verdade é que esses pequeninos e laboriosos insetos resolvem um interessantíssimo problema por um artifício que chega a deslumbrar a inteligência humana.

Todos sabem que a abelha constrói os seus alvéolos para neles depositar o mel que fabrica. Esses alvéolos são feitos de cera. A abelha procura, portanto, obter uma forma de alvéolos que seja a mais econômica possível, isto é, que apresente maior área para a menor porção de material empregado.

É preciso que a parede de um alvéolo sirva, também, ao alvéolo vizinho. Logo, o alvéolo não pode ter forma cilíndrica, pois, do contrário, cada parede só serviria a um alvéolo.

Procuraram as abelhas uma forma poligonal para os seus alvéolos. Os únicos polígonos regulares que podem ser justapostos sem deixar interstício são: o triangular (A), o quadrangular (B) e o hexagonal (C). Foi este último que as abelhas escolheram. E sabem por quê? Porque dos três polígonos regulares A, B e C construídos com porção igual de cera, o prisma hexagonal é o que apresenta maior área.

Adaptado do livro **Matemática Divertida e Curiosa.** Ed. Record, 2005 (Malba Tahan)

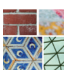
Referências

Livros

- IMENES, L. M. **Geometria dos mosaicos**. Coleção Vivendo a Matemática. São Paulo: Scipione, 1996.
- MACHADO, N. J. **Polígonos, Centopéias e outros Bichos**. Coleção Vivendo a Matemática. São Paulo: Scipione, 1988.
- SOUZA, J. C. de M. **Matemática divertida e curiosa**. Rio de Janeiro/São Paulo, Editora Record, 2001.

Imagens

- http://www.sxc.hu/photo/475767

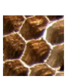


- http://www.sxc.hu/photo/1347965 (tijolos); http://www.sxc.hu/photo/905175 (Colcha de retalhos); http://www.sxc.hu/photo/942317 (ladrilhos vermelhos/marrons); http://www.sxc.hu/photo/832989 (ladrilhos coloridos); http://www.sxc.hu/photo/1061095 (estrutura de ferro); http://www.sxc.hu/photo/1110787 (ladrilhos azuis)

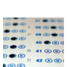
- http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/escher/repteis.html

- Rony Freitas • Acervo pessoal

- Rony Freitas • Acervo pessoal



- http://www.sxc.hu/photo/285730



- http://www.sxc.hu/photo/517386

Respostas das Atividades

Situação problema I

Por meio da observação das Figuras 3 e 4, é possível perceber as seguintes características de uma figura geométrica para que ela possa ser considerada um polígono:

1. É uma figura plana fechada.
2. É limitada apenas por linhas retas (segmentos de retas).

Atividade 1

Dividindo os polígonos desta atividade em triângulos, é possível encontrar os seguintes valores de seus ângulos internos:

a. Hexágono regular

Utilizando a mesma estratégia utilizada para o pentágono, podemos formar quatro triângulos.

A soma desses ângulos é igual a 180º x 4 = 720º.

Como são seis ângulos de mesma medida, podemos encontrar tal valor, dividindo 720º por 6. Assim:

$$720^\circ \div 6 = 120^\circ.$$

b. Octógono regular

Utilizando a mesma estratégia utilizada para o hexágono, podemos formar seis triângulos.

A soma desses ângulos é igual a 180º x 6 = 1.080º.

Como são oito ângulos de mesma medida, podemos encontrar tal valor dividindo 1080º por 8. Assim:

$$1080^\circ \div 8 = 135^\circ.$$

c. Eneágono regular

Utilizando a mesma estratégia utilizada para o octógono, podemos formar sete triângulos.

A soma desses ângulos é igual a 180º x 7 = 1.260º.

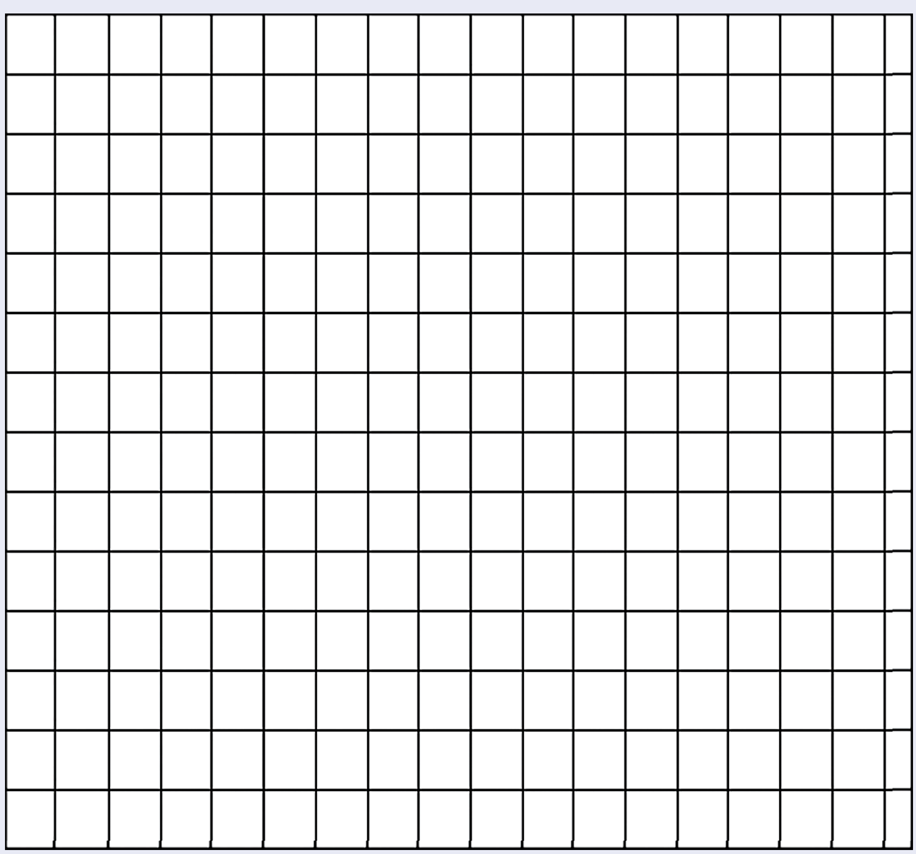
Como são nove ângulos de mesma medida, podemos encontrar tal valor, dividindo 1.260º por 9. Assim:

$$1.260^{\circ} \div 9 = 140^{\circ}.$$

Atividade 2

Para que o pedreiro possa revestir o piso da cozinha, utilizando peças cerâmicas retangulares com medidas 20 cmx30 cm, descontando o rejuntamento, ele precisará de 245 peças. Cabem 17,5 peças em um sentido e 14 peças no outro sentido.

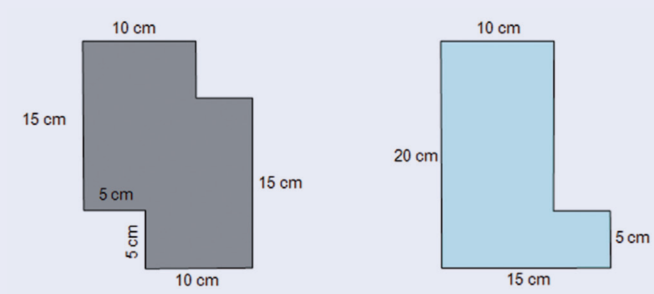
Assim:



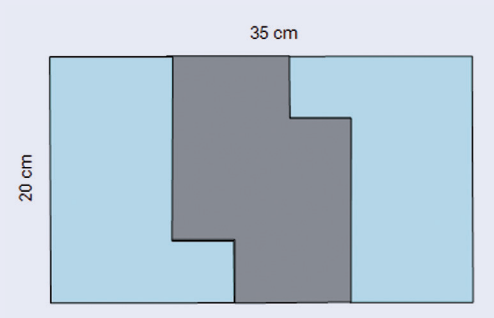
Respostas das Atividades

Atividade 3

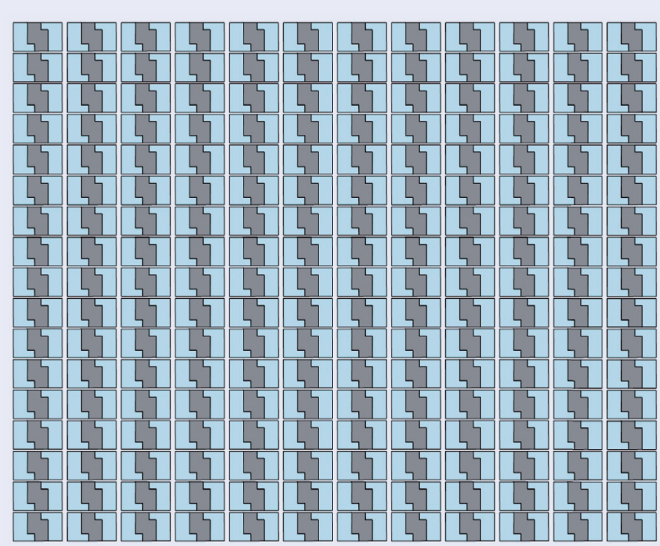
Para revestir o quarto com medidas 3,4m x 4,2m de forma regular, utilizando as cerâmicas abaixo, vamos ver primeiro como as peças poderiam ser montadas:



As peças poderão ser montadas da seguinte forma:



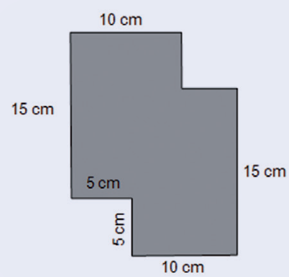
Seguindo as medidas do quarto, as peças poderiam ser organizadas da seguinte maneira:



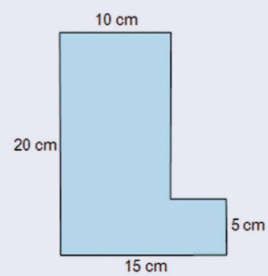
A quantidade total de cada um dos conjuntos pode ser encontrada fazendo:

12 (conjuntos na horizontal) x 17 (conjuntos na vertical) = 204 conjuntos no total.

Mas, cada conjunto tem uma peça cinza e duas azuis. A quantidade de cada uma delas é, portanto:



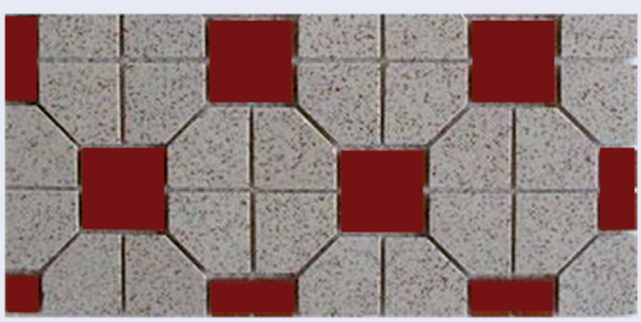
204



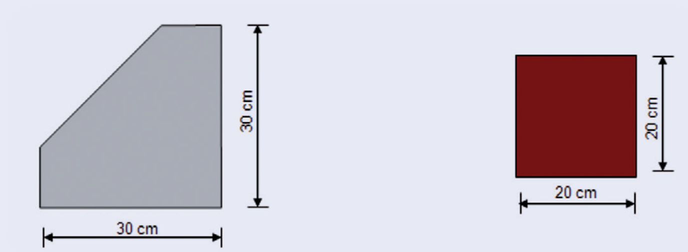
204 x 2 = 408

Atividade 4

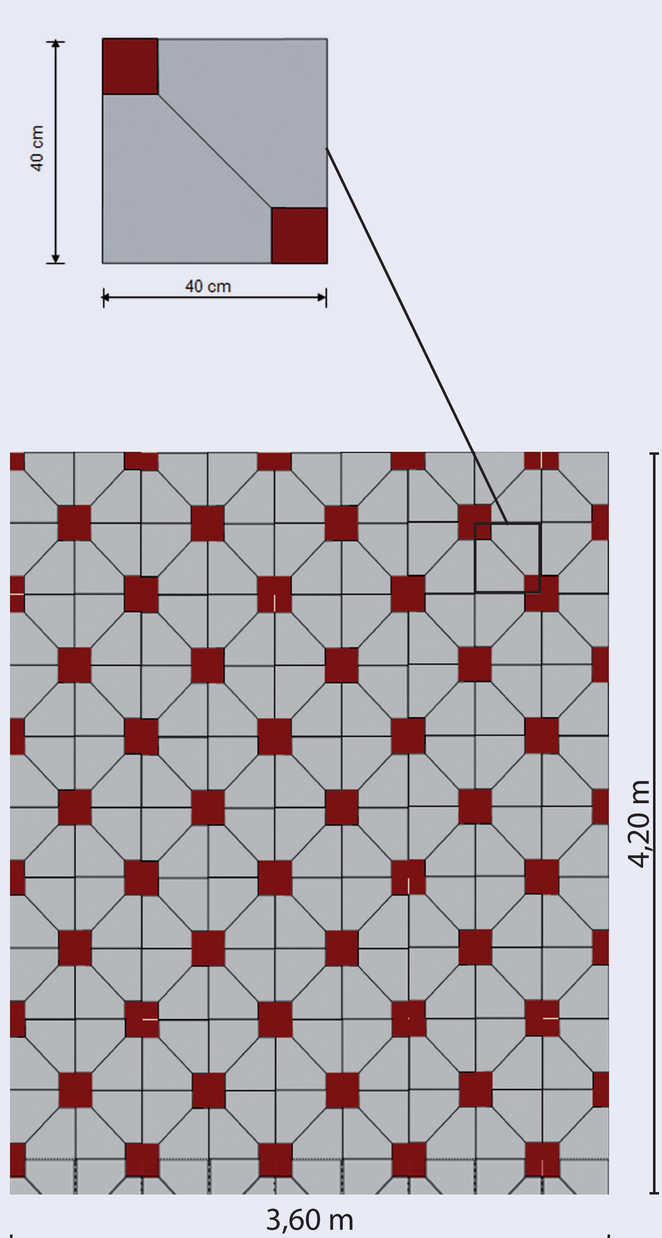
Para revestir o piso do cômodo de medidas 4,20 m x 3,60 m, com as cerâmicas chinesas a seguir:



É preciso levar em consideração que há dois tipos de piso: um quadrado e outro pentagonal.



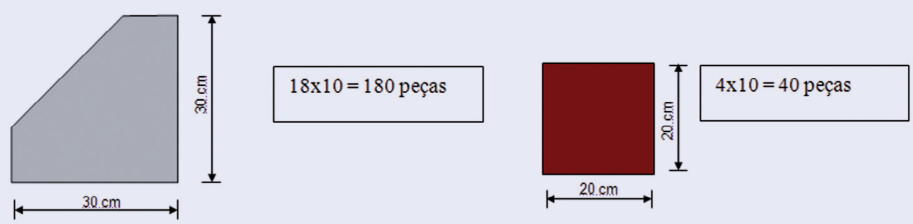
Para decidir quantas peças de cada tipo de cerâmica serão gastas e para efeito de cálculo, podemos pensar em montar as peças da seguinte forma:



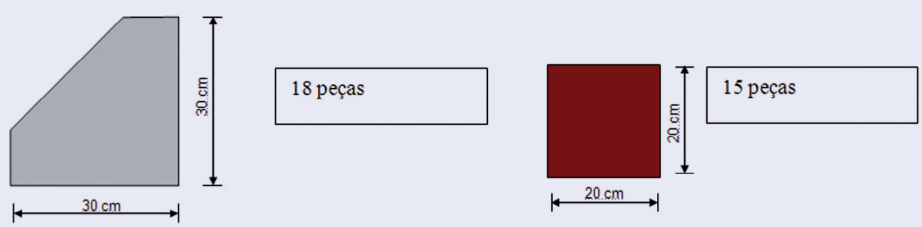
Respostas das Atividades

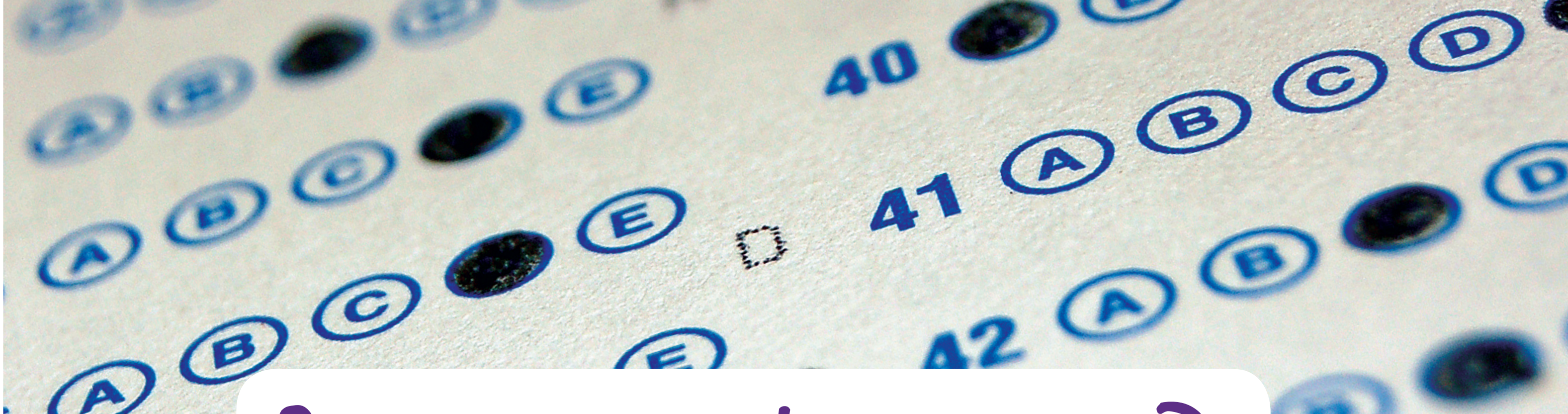
No desenho podemos, então, contar:

Peças inteiras:



Peças cortadas:



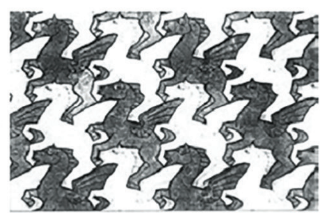


O que perguntam por aí?

Atividade 1 (ENEM 2009)

Questão 78

Uma das expressões artísticas mais famosas associada aos conceitos de simetria e congruência é, talvez, a obra de Maurits Cornelis Escher, artista holandês cujo trabalho é amplamente difundido. A figura apresentada, de sua autoria, mostra a pavimentação do plano com cavalos claros e cavalos escuros, que são congruentes e se encaixam sem deixar espaços vazios.



Realizando procedimentos análogos aos feitos por Escher, entre as figuras abaixo, aquela que poderia pavimentar um plano, utilizando-se peças congruentes de tonalidades claras e escuras é

(A) 

(B) 

(C) 

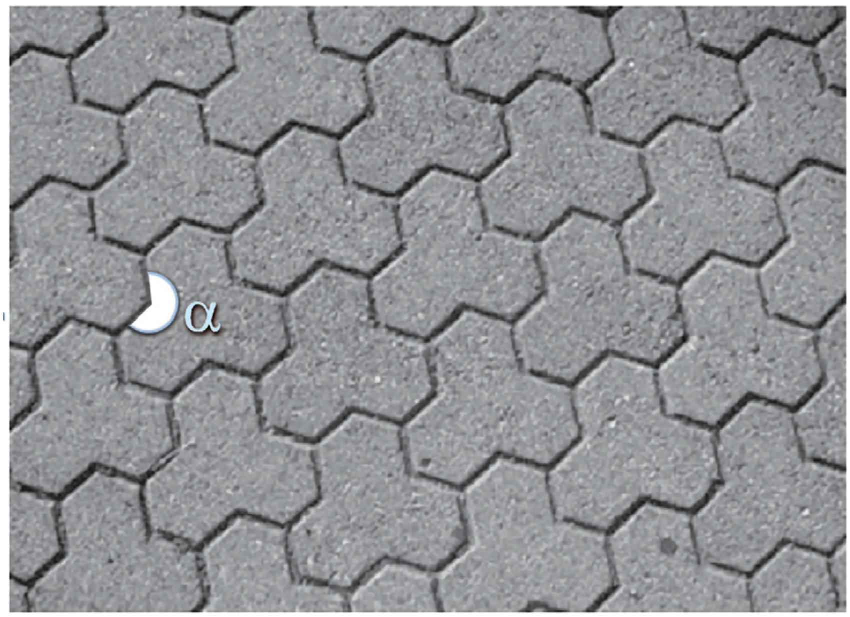
(D) 

(E) 

Resposta: Letra D

Atividade 2 (adaptada de ENEM 2011)

QUESTÃO 154



Disponível em: http://www.diaadia.pr.gov.br. Acesso em: 28 abr. 2010.

Qual a medida do ângulo α?

a. 30º

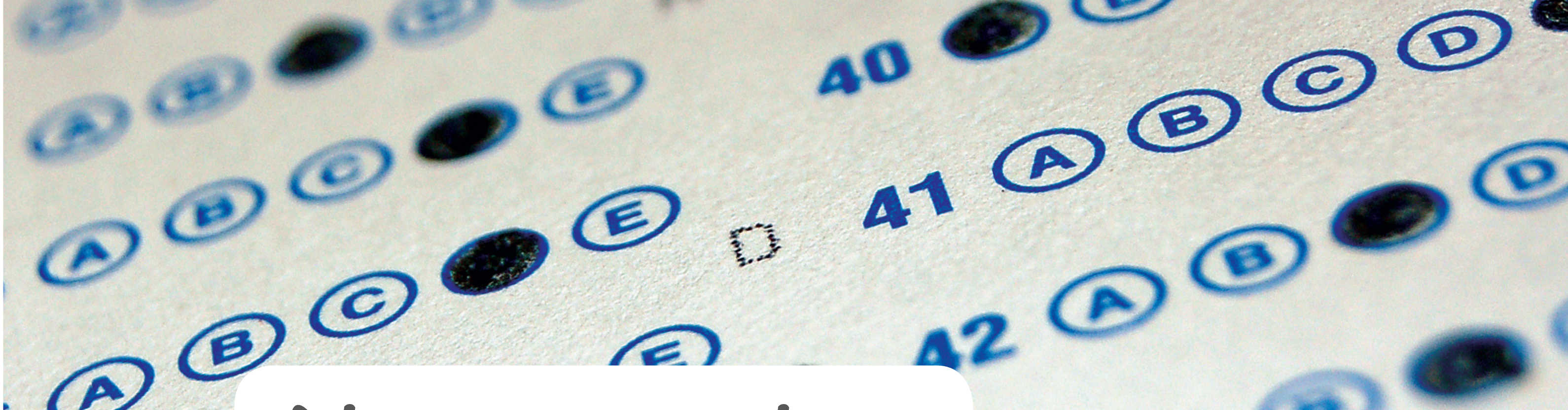
b. 60º

c. 90º

d. 120º

e. 240º

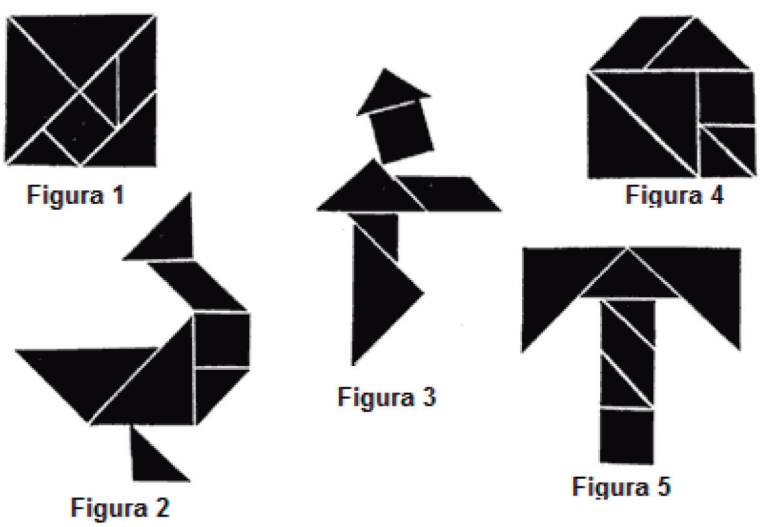
Resposta: Letra E



Atividade extra

Exercício 1

O Tangram é um quebra cabeças com 7 peças de diferentes tamanhos, e com elas podemos montar mais de 1400 figuras, como exemplos, temos as figuras abaixo.



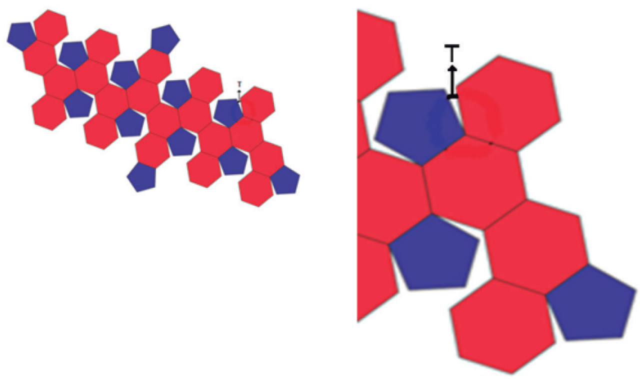
Fonte: fundacaobunge.org.br

Que figura possui área diferente da figura 1.

(a) Figura 2 (b) Figura 3 (c) Figura 4 (d) Figura 5

Exercício 2

O icosaedro truncado, ou bola de futebol, é um poliedro formado por 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais. Na figura abaixo apresentamos a planificação desse poliedro.



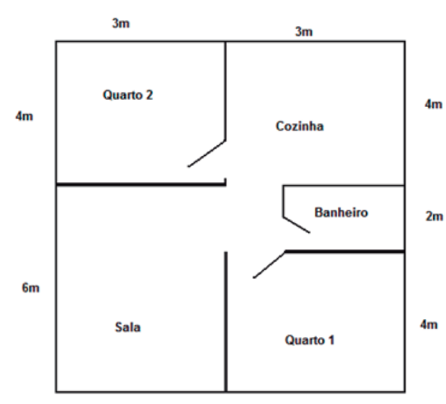
Fonte: www.iffmauricio.pbworks.com (adaptada)

Qual o valor, em graus, do ângulo T?

(a) 20 (b) 18 (c) 14 (d) 12

Exercício 3

João decidiu trocar o piso de todos os cômodos de sua casa por lajotas de 20cm x 30cm. Esta consta de dois quartos, sala, uma cozinha e um banheiro, tal como na figura abaixo.



Descontando as perdas da construção, quantas lajotas deverão ser compradas?

(a) 1000 (b) 1100 (c) 1200 (d) 1300

Exercício 4

Um comerciante deseja pintar as paredes externas do seu prédio que tem as seguintes dimensões: 3m de largura, 4m de comprimento e 8m de altura. Pesquisando descobriu que:

- Um litro pinta 10m2
- Um galão de 3, 6 litros pinta 40m2
- Uma lata de 18 litros pinta 200m2

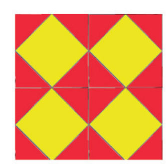
Comprando a menor quantidade possível de latas e minimizando o desperdício de tintas, qual das opções abaixo corresponde a quantidade de tinta comprada?

(a) Uma lata de 18L (c) 2 galões e 4 latas de 1 litro

(b) 3 galões de tinta (d) 12 latas de 1 litro

Exercício 5

Desejo colocar na minha varanda uma faixa de azulejos decorativos como no molde indicado na figura, formado por quatro azulejos. Cada azulejo é um quadrado de lado igual a 10cm, e a faixa terá 20cm de largura e 6m de comprimento.



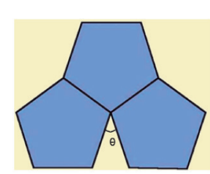
Descontando as perdas da construção, quantos azulejos serão necessários para construir essa faixa?

(a) 60 (b) 80 (c) 100 (d) 120

Exercício 6

O pentágono regular é um polígono que não pode ser utilizado como pavimento, pois 3 pentágonos não se encaixam perfeitamente sobrando sempre uma pequena área entre eles, como mostra a figura abaixo.

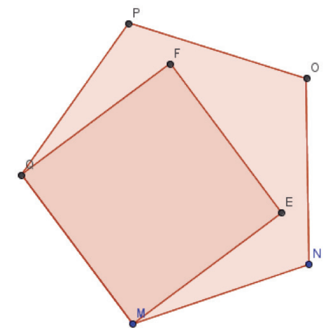
Qual o valor do ângulo formando pelos lados dos pentágonos que não se encontram?



(a) 18 (b) 36 (c) 45 (d) 60

Exercício 7

O pentágono MNOPQ e o quadrilátero MEFQ são regulares e possuem um lado (MQ) em comum.

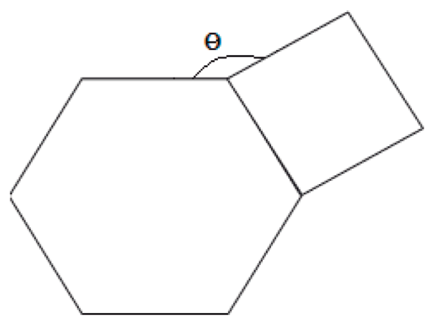


Qual o valor, em graus, do ângulo PQF?

(a) 108 (b) 36 (c) 18 (d) 9

Exercício 8

Na figura abaixo são apresentados um quadrado e um hexágono regular, que possuem um lado comum.

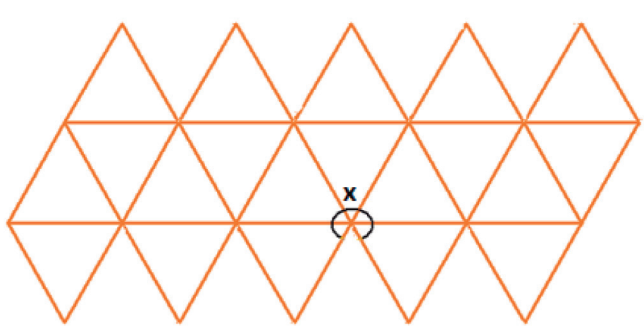


Qual o valor do ângulo θ indicado na figura?

(a) 90 (b) 110 (c) 120 (d) 150

Exercício 9

O icosaedro é um poliedro de Platão, pois todas as faces são polígonos congruentes (iguais). Esse poliedro é formado por 20 faces triangulares, e a planificação do mesmo pode ser observada na figura abaixo.



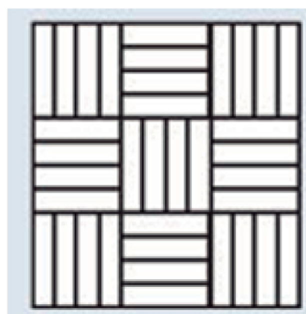
Qual o valor do ângulo indicado na figura?

(a) 300 (b) 240 (c) 180 (d) 120

Exercício 10

Em construções residenciais, por volta de 1950, o taco de madeira foi amplamente utilizado como revestimento para o piso das casas. Feito de madeira, com 5cm de largura e 20cm de comprimento, pela sua falta de praticidade na hora da limpeza foi substituído por pisos laminados, de mais fácil colocação e manutenção.

Abaixo observamos um dos padrões de colocação do taco de madeira.



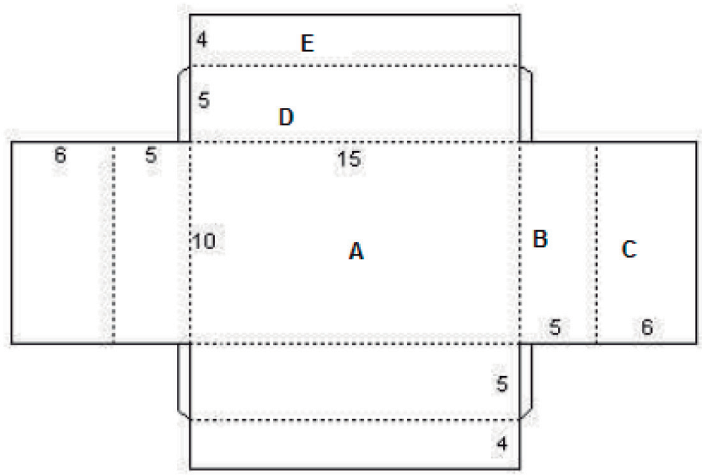
Fonte: paulacaldeiradesign.blogspot.com (adaptado)

Para cobrir uma sala de 4 metros de largura por 5 metros de comprimento, seriam necessários quantos tacos de madeira?

(a) 3600 (b) 2000 (c) 1500 (d) 1000

Exercício 11 (ENEM 2001 – adaptada)

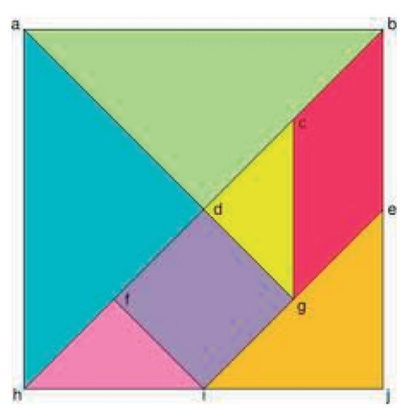
Um fabricante de brinquedos recebeu o projeto de uma caixa que deverá conter cinco pequenos sólidos, colocados na caixa por uma abertura em sua tampa. A figura representa a planificação da caixa, com as medidas dadas em centímetros.



Qual a soma das áreas dos polígonos A, B, C, D e E?

Exercício 12

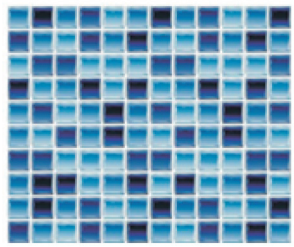
Tangram é um quebra-cabeça chinês formado por 7 peças (5 triângulos, 1 quadrado e 1 paralelogramo). Com essas peças podemos formar várias figuras, utilizando todas elas sem sobrepô-las.



Calcule os ângulos internos de cada polígono que compõem o Tangram.

Exercício 13

Para revestir uma piscina de $54m^2$ utilizarei placas de 10cm de altura e 12cm de largura, formadas por 120 pastilhas como mostra a figura abaixo.



Fonte: artetecta.blogspot.com

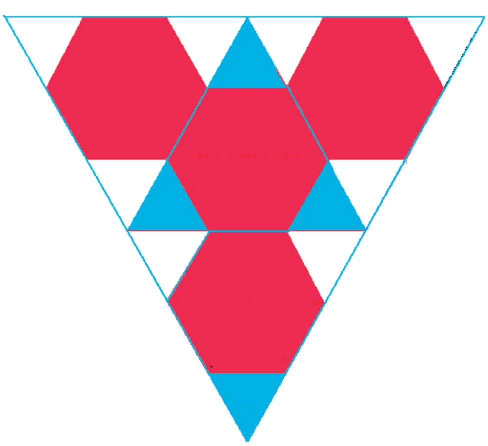
Quantas pastilhas, no mínimo, serão utilizadas no revestimento da piscina?

Exercício 14

Explique porque é possível criar mosaicos com triângulos, quadriláteros e hexágonos regulares, mas não com outros polígonos regulares.

Exercício 15

A figura abaixo é um triângulo equilátero.



Considerando que os triângulos azuis e o hexágono também são regulares, quantos triângulos azuis serão necessários para cobrir toda a área dessa figura?

Gabarito

Exercício 1

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 2

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 3

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 4

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 5

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 6

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 7

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 8

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 9

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 10

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 11

$A = 10 \times 15 \quad \Rightarrow \quad A = 150$

$B = 5 \times 10 \quad \Rightarrow \quad B = 50$

$C = 6 \times 10 \quad \Rightarrow \quad C = 60$

$D = 5 \times 15 \quad \Rightarrow \quad D = 75$

$E = 4 \times 15 \quad \Rightarrow \quad E = 60$

Soma 395

Exercício 12

Pela figura, bh é diagonal do quadrado, logo é bissetriz também, então o ângulo menor do paralelogramo é 45° e o maior 135°. Decorre daí que todos os triângulos são isósceles e seu menor ângulo interno é 45°.

Exercício 13

540000 pastilhas.

Exercício 14

O ângulo interno do triângulo regular ou eqüilátero é 60°, com seis temos um ângulo de 360°. O quadrilátero regular, ou quadrado tem um ângulo interno reto, quatro quadrados formam um ângulo de 360°. O hexágono regular tem um ângulo interno de 360°, logo três hexágonos formam um ângulo de 360°. Com outros polígonos regulares não é possível pois seus ângulos internos não são valores que dividem um ângulo de 360°.

Exercício 15

36.

Introdução ao conceito de função

Fascículo 2

Unidade 6

Fundação CECIERJ

Introdução ao conceito de função

Para início de conversa...

Você já prestou atenção à sua conta de água? Entender as diversas contas que chegam às nossas casas é importante para nos informarmos a respeito de desperdícios e mau uso dos diversos serviços públicos que nos são prestados. Além disso, temos o direito e o dever de verificar se o que está sendo cobrado condiz com o consumo feito em nossas casas. Na maioria dessas contas, é bastante presente a comunicação matemática. Nelas podemos notar a presença de operações simples como adição e multiplicação, mas também, cálculos de porcentagens e, em alguns casos, gráficos ou tabelas com o histórico do consumo residencial. Neste módulo, vamos utilizar a conta de água para introduzirmos um conceito muito importante para a Matemática: as funções.

O mais importante é que consigamos reconhecer funções como relação entre duas grandezas e que possamos resolver problemas como o mostrado a seguir, extraído da prova do ENEM 2008.

A figura a seguir representa o boleto de cobrança da mensalidade de uma escola, referente ao mês de junho de 2008.

Banco S.A.	
Pagável em qualquer agência bancária até a data de vencimento	Vencimento 30/06/2008
Cedente Escola de Ensino Médio	Agência/cód. cedente
Data documento 02/06/2008	Nosso número
Uso do banco	(=) Valor documento R$ 500,00
Instruções Observação: no caso de pagamento em atraso, cobrar multa de R$ 10,00 mais 40 centavos por dia de atraso.	(-) Descontos
	(-) Outras deduções
	(+) Mora/Multa
	(+) Outros acréscimos
	(=) Valor Cobrado

Se $M(x)$ é o valor, em reais, da mensalidade a ser paga, em que x é o número de dias em atraso, então:

A) $M(x) = 500 + 0,4x$.
B) $M(x) = 500 + 10x$.
C) $M(x) = 510 + 0,4x$.
D) $M(x) = 510 + 40x$.
E) $M(x) = 500 + 10,4x$.

Ao final desta unidade, retornaremos a esse exercício!

Objetivos de Aprendizagem

- Ler e interpretar dados de uma conta de água, telefone, luz ou gás.
- Compreender elementos importantes para o conceito de função.

Situação problema 1
Conhecendo uma conta d'água

Diferente da energia elétrica e da telefonia, o fornecimento de água e esgoto tratado continua sendo um serviço prestado pelo Estado. Sendo assim, são estatais que fornecem e cobram a água que chega às nossas residências, não havendo, portanto, órgão que regulamente esta prática. Aproveite os seus estudos aqui nesta unidade para discutir os vários aspectos relacionados ao uso da água. Procure, sempre que possível, vincular as novas informações que serão trabalhadas aqui com o que já conhece, promovendo debates com seus colegas.

Você sabia?

que o consumo médio de água dos brasileiros é muito alto? Temos a cultura da fartura e hábitos como longos banhos diários que nos tornam grandes consumidores. Mas há que distinguir entre perda e desperdício. A perda é definida em função do volume de água vendida sobre o volume de água produzida. Você está pagando por toda água que entra pelo seu hidrômetro.

Quanto mais consome, mais paga. Consumo excessivo passa a ser uma questão econômica e de conscientização ambiental. Lavar a calçada com jato d´água, como ainda se vê muito por aí, vai acabar ficando caro. Outra coisa é o desperdício. No Brasil, é de 46%, em média. Um absurdo! Imagina só: metade de toda a água tratada fornecida pelas companhias de abastecimento fica pelo meio do caminho. Sai através de tubos e canos mal conservados que se rompem, ou é desviada de outras formas. Isso é descaso.

FONTE: semanact2005.mct.gov.br

Veja a seguir um modelo de conta de água emitido pela CESAN (Companhia Espírito Santense de Saneamento).

CESAN Qualidade em Saneamento

Companhia Espírito Santense de Saneamento
CNPJ: 28.151.363/0001-47 - Inscr. Estadual: 080.247.318
Atendimento ao Cliente: 115

www.cesan.com.br

FATURA

Mês/Ano	Matrícula
02/2011	014125-0

Cliente: PEDRO VASCONCELOS DE MILETO	CPF/CNPJ:	
Endereço: RUA DOS ENCANTOS TORTOS	Nº: 300	CEP: 29000-000
Bairro: NOVA MACEDÔNIA	Localidade: VITÓRIA	Complemento:
Classificação: 1.23123.000	Hidrômetro: H18D111888	Ciclo/Sequência: 10/0000000000

Leitura Anterior	197
Leitura Atual	223
Consumo Medido	26
Ocorrência Leitura	0 0
Data da Leitura	28/02/2011
Dias de Consumo/Venda	33/33
Média Diária	0.849

Histórico	Consumo	/		OL
01 / 2011	29.0	00	00	MDD
12 / 2010	28.0	00	00	MDD
11 / 2010	24.0	00	00	MDD
10 / 2010	29.0	00	00	MDD
09 / 2010	30.0	10	10	MDD
08 / 2010	12.0	00	00	MDD

1113-ÁGUA RESIDENCIAL	MEDIDO	26,0	56,17

VENCIMENTO 12/03/2011 — TOTAL A PAGAR R$ 56,17

Previsão da Próxima Leitura em: 28/03/2011

CONHEÇA A QUALIDADE DA ÁGUA QUE VOCÊ RECEBE.
ACESSE WWW.CESAN.COM.BR

Atendimento ao Cliente
RUA CABO AILSON SIMOES, 952 TEL - 115 8h às 16h

Qualidade da Água

Parâmetro	Cor (UH)	Turbidez (UT)	pH	Flúor (mg/L)	Cloro Residual (mg/L)	Coliformes Totais amostras positivas
Resultados Média mês ant.	8,7	2,8	6,9	0,8	1,3	3,0
Padrão Qualidade*	Máx. 15	Máx. 5	6,0 a 9,0	Máx. 1,5	Mín. 0,2	(**)

Observações no verso

82000000000-0 50000000000-0 13000000000-0 0000000000-0

CESAN Qualidade em Saneamento
CNPJ: 28.151.363/0001-47

Matrícula		Vencimento
014125-0		12/03/2011
Mês/Ano: 02/2011	Origem: 01	Total a pagar R$: 56,17

Atividades

Vamos levantar algumas questões a respeito da conta apresentada:

a. Qual o valor a ser pago pelo consumidor?

b. Qual o mês em que foi consumida a água cobrada na conta?

c. Qual a data de vencimento da conta?

d. Quantos m^3 (metros cúbicos) foram consumidos no mês em questão?

e. Em que data foi feita a medição?

f. Em relação ao mês anterior, houve aumento ou redução do consumo? Quanto?

g. Entre os meses apresentados no histórico de consumo, qual foi o que teve o maior e o menor consumo? Quais foram esses consumos?

h. Considerando os meses citados na conta, qual é a média mensal de consumo do Sr. Pedro Vasconcelos de Mileto?

A CESAN, assim como as demais concessionárias de água e esgoto do Brasil, efetua suas cobranças de acordo com o consumo em metros cúbicos. Veja as tarifas de consumo de água, cobradas pela concessionária em questão, para uma das categorias:

TABELA DE TARIFA

SISTEMAS E CATEGORIAS	**CONSUMO MÍNIMO FATURÁVEL (M^3)**	**SERV. ÁGUA (R$ / M^3)**		
		FAIXAS DE CONSUMO		
		0 - 15	16 - 30	> 30
SETOR RESIDENCIAL				
Social	10	0,77	2.69	3.85
Popular	10	1,50	3,54	4,27
Padrão	10	1,93	3,83	4,27
Padrão Superior	10	2,16	4,07	4,27
SETOR NÃO RESIDENCIAL				
Comércio Peq. A	10	3,06	4,71	4,71
Comércio – Outros	10	4,91	5,23	5,23
Indústria	10	4,91	5,46	5,46
Pública	10	3,20	4,60	4,60

Fonte: www.cesan.com.br – Agosto de 2010.

Saiba Mais

O consumo mínimo faturável indica que, mesmo que se consuma uma quantidade menor, será cobrado um valor correspondente a 10 m^3.

• Assim, se o consumo de uma pessoa é de 8m3 no setor residencial padrão, isto significa que a pessoa deverá pagar 10 x 1,93 = 19,30 reais pelos metros cúbicos de água consumida. Isto, é R$19,30 pelos m^3 de água consumida no período, pois 10 é o consumo mínimo faturável.

• Se foram consumidos 35 m^3 no setor Padroo Superior, a pessoa pagará:

35 x 4,27 = 149,45, isto é R$149,45 pelos metro cúbicos consumidos.

Atividade 1

Agora responda:

a. Preencha a tabela a seguir de acordo com o consumo e a categoria. (caso queira, utilize a calculadora para os cálculos).

Categorias	Consumo m^3	Cálculo	Valor a ser cobrado (R$)
Residencial Social	7		
Residencial Padrão	7		
Comércio Peq. A	7		
Residencial Social	12		
Residencial Padrão	12		
Comércio Peq. A	12		
Residencial Padrão	25		
Comércio Peq. A	25		
Residencial Padrão	47		
Comércio Peq. A	47		

b. Se a CESAN oferecesse um desconto de R$ 10,00 nas contas, como poderíamos representar o valor a ser pago em função do consumo x para cada residência padrão situada na faixa (16 – 30)?

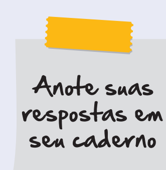
Anote suas respostas em seu caderno

Situação problema 2
Noção intuitiva de Função

Nas atividades resolvidas anteriormente, observe que há uma clara relação de dependência entre o valor a ser pago e o consumo em m^3. Neste caso, dizemos que o valor depende do consumo ou ainda que o valor a ser pago é função do consumo. Escreva nas linhas a seguir cinco outros casos que aconteçam na sua vida cotidiana que, à semelhança com esse, apresentem situação onde um valor dependa de alguma outra medida.

Algumas possibilidades:

Situação	Relação de dependência		
	Coluna A		Coluna B
Conta de energia elétrica	*Valor a ser pago no final de um mês*	depende do(a)	*Quantidade de energia elétrica consumida no mês*
Conta de água	*Valor a ser pago no final de um mês*	depende do(a)	*Quantidade de água consumida no mês*
		depende do(a)	
		depende do(a)	
		depende do(a)	
		depende do(a)	



Observe agora a tabela como você preencheu. Os termos, palavras ou expressões que você escreveu na coluna da direita (B) são denominados Variáveis Independentes, já as da coluna (A) são as Variáveis Dependentes.

Importante

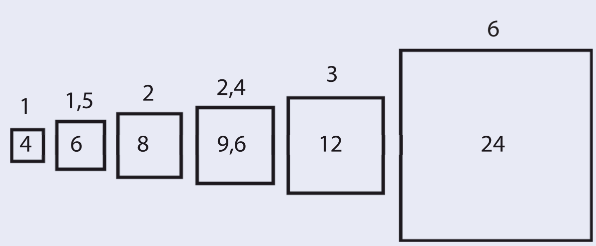
Atividade 2

Uma função pode ser representada essencialmente por uma tabela, um gráfico ou uma fórmula matemática. Observe, por exemplo, a tabela a seguir, contendo a medida do lado (em centímetros) de um quadrado e o seu perímetro (em centímetros) correspondente:

Importante

Lembre-se que perímetro é a soma da medida dos lados de um quadrado!

Lado (cm)	1	1,5	2	2,4	3	6
Perímetro (cm)	4	6	8	9,6	12	24



Perceba que lado e perímetro são duas variáveis, e que para cada valor do lado há apenas um valor correspondente para o perímetro. Responda às questões:

1. É possível haver dois quadrados que tenham diferentes medidas de lados entre si, mas que possuam o mesmo perímetro? Justifique.
2. Qual variável é dada em função da outra?
3. Qual é a variável dependente?

Atividade 2

4. E a variável independente?

5. Qual é a fórmula matemática que associa a medida do lado (ℓ) com o perímetro (p)?

6. Qual é o perímetro de um quadrado de lado igual a 8 cm?

7. Qual é a medida do lado do quadrado cujo perímetro é de 28 cm?

8. Assinale os valores que poderiam ser a medida do lado de um quadrado:

☐ 3 ☐ -4 ☐ $\frac{2}{5}$ ☐ 2,3 ☐ -10,6 ☐ 0 ☐ 1,333 ☐ $\sqrt{5}$

Importante

Os valores assinalados no item anterior pertencem ao domínio da função que relaciona um quadrado ao seu lado. O Domínio da função pode, então, ser definidio como o conjunto de todos os valores possíveis de serem atribuídos à variável independente de uma função.

9 Escreva como você falaria para alguém qual o domínio da função que relaciona o lado do quadrado a seu perímetro.

10. Dos valores assinalados no item VIII, qual seria o valor do perímetro do quadrado associado a cada um deles?

Lado	Perímetro

Atividade 2

Como não é possível obter o valor do perímetro sem antes conhecer o valor do lado do quadrado, dizemos que o valor do perímetro é uma variável dependente porque depende que conheçamos primeiro o valor do lado do quadrado.

O conjunto dos valores do perímetro, calculados no item anterior, é denominado de imagem da função. Portanto, imagem é o conjunto de todos os valores possíveis de serem atribuídos à variável dependente.

Importante

A variável independente é, usualmente, representada pela letra x, enquanto a variável dependente é representada pela letra y. Ou seja, y é o valor que não conhecemos que depende de x. Portanto, normalmente é possível escrever que y é função de x ou, simplesmente, $y = f(x)$.

Retomando a tabela anterior que relaciona o lado e perímetro de um quadrado, veja como ela poderia ser reescrita, considerando x a medida do lado do quadrado e y o perímetro:

x	y	
1	4	$f(1)=4$
1,5	6	$f(1{,}5)=6$
2	8	$f(2)=8$
2,4	9,6	$f(2{,}4)=9{,}6$
3	12	$f(3)=12$
6	24	$f(6)=24$

11. Agora, calcule:

a. $f(3{,}5) =$

b. $f(10) =$

c. $f \ =$

Anote suas respostas em seu caderno

Você sabia que o cálculo de uma corrida de táxi, sem levar em conta os quilômetros parados, é dado por uma função do primeiro grau?

Vejamos as tarifas de táxi da cidade do Rio de Janeiro.

Evento	Valor
Bandeirada (valor mínimo)	R$ 4,30
Quilômetro rodado Tarifa I	R$ 1,40
Quilômetro rodado Tarifa II	R$ 1,68
Hora parada ou de espera	R$ 17,64
Para cada mala ou pacote medindo mais de 60 cm X 30 cm	R$ 1,40

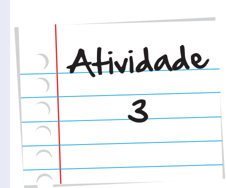
Observação: A tarifa I é vigente das 6h às 21h, nos dias úteis (segunda-feira a sábado). A tarifa II é praticada no período noturno de segunda-feira a sábado, das 21h às 6h e nos domingos e feriados, sem discriminação horária, e nas subidas íngremes, sem discriminação horária. Esses dados são fornecidos pela Secretaria de Transporte do Rio de Janeiro.

Isto significa que toda corrida de táxi sempre começa a contar a partir de R$ 4,30 (quatro reais e trinta centavos). Este valor é chamado de bandeirada. A partir deste valor são adicionados valores por quilômetro rodado. Cada quilômetro (km) rodado na tarifa I será adicionado um valor de R$ 1,40 (um real e quarenta centavos) e para a tarifa II o valor de R$ 1,68 (um real e sessenta e oito centavos) por km rodado.

Mas a corrida sempre dará um valor um pouco maior, porque toda a vez que o táxi para num semáforo ou fica preso no trânsito ou outras situações em que o carro fica parado, é acrescido um valor proporcional à hora parada. O valor de uma hora parada é de R$ 17,64. Isto significa que se durante a corrida o carro ficar parado por 5 minutos a corrida será acrescida em R$ 1,47 (um real e quarenta e sete centavos).

Com base nesses dados responda às perguntas a seguir:

1. Se você fizer uma corrida de 8 km em um dia útil antes das 21 horas, quanto ela custará?
2. Se durante esta corrida de 8 Km, o carro ficou parado por 5 minutos e o passageiro transportava uma maleta cuja menor face media mais que 60cm x 30cm, de quanto foi o valor pago ao taxista?



Atividade 3

3. Quais das expressões abaixo representariam a situação de um táxi que rodou x quilômetros, sendo P(x) o valor a ser pago em reais e durante a tarifa I. Sem considerar que o táxi ficou parado em algum momento.

   a. $P(x) = 1,40 . x$

   b. $P(x) = 4,30 . x$

   c. $P(x) = 4,30 + 1,40 . x$

   d. $P(x) = 1,40 + 4,30 . x$

4. Se você fizer uma corrida de 6 km num dia útil, depois das 21 horas, quanto ela lhe custará?

5. Se durante a situação acima, na tarifa II, o carro ficar parado por 12 minutos, a corrida será acrescida de quanto?

Anote suas respostas em seu caderno

Saiba Mais

Nem toda relação entre duas variáveis é uma função. Para que seja uma função, é necessário que haja apenas um valor (imagem) relacionado com cada um dos elementos do domínio. Ou seja, cada valor do domínio aponta apenas para um caminho ou relação possível. Vamos a um exemplo. A hora do dia depende da posição dos ponteiros do relógio.

1º Caso: Utilizando relógio que marque 24 horas.

Cada posição dos ponteiros aponta para apenas uma hora do dia. Portanto, neste caso, podemos afirmar que a hora do dia é função da posição dos ponteiros do relógio.

2º Caso: Utilizando relógio que marque 12 horas.

Cada posição dos ponteiros aponta para duas possibilidades de horas do dia. A posição da figura, por exemplo, pode estar apontando tanto para 1h47min quanto para 13h47min. Portanto, neste caso, não temos uma função.

Momento de reflexão

Nesta Unidade, iniciamos o estudo de Funções. Como você pode perceber, não basta duas variáveis terem alguma relação estabelecida para configurar uma função. Reflita sobre as situações que vivenciamos na unidade e pense nisto.

Liste algumas relações entre variáveis que você conheça e diga em qual das situações as relações apresentadas constituem funções entre duas variáveis. Por quê?

Anote suas respostas em seu caderno

Voltando à conversa inicial

Nesta Unidade, você viu que duas variáveis podem se relacionar de maneira que esta relação seja uma função. As representações dessas situações foram apresentadas por meio de tabelas ou fórmulas, mas podemos representá-las também a partir de um gráfico.

Vimos que o Domínio da Função é o conjunto dos valores possíveis de serem atribuídos à variável independente e o conjunto de valores possíveis para a variável dependente é denominado Imagem da Função. Para que seja realmente uma função, todo elemento do domínio tem de ter uma e somente uma imagem. Isto é, uma relação entre duas variáveis é uma função, se cada valor da variável independente determina um, e somente um, valor da variável dependente.

Voltando agora ao problema inicial

A figura a seguir representa o boleto de cobrança da mensalidade de uma escola, referente ao mês de junho de 2008.

Banco S.A.	
Pagável em qualquer agência bancária até a data de vencimento	vencimento 30/06/2008
Cedente Escola de Ensino Médio	Agência/cód. cedente
Data documento 02/06/2008	Nosso número
Uso do banco	(=) Valor documento R$ 500,00
Instruções Observação: no caso de pagamento em atraso, cobrar multa de R$ 10,00 mais 40 centavos por dia de atraso.	(-) Descontos
	(-) Outras deduções
	(+) Mora/Multa
	(+) Outros acréscimos
	(=) Valor Cobrado

Se M(x) é o valor, em reais, da mensalidade a ser paga, em que x é o número de dias em atraso, então:

- A $M(x) = 500 + 0{,}4x$.
- B $M(x) = 500 + 10x$.
- C $M(x) = 510 + 0{,}4x$.
- D $M(x) = 510 + 40x$.
- E $M(x) = 500 + 10{,}4x$.

Observe que há um valor fixo, R$500,00 que, caso haja atraso é acrescido de R$10,00 mais 40 centavos por dia, dessa forma a expressão que melhor representa a função é $M(x)=510 + 0{,}4x$, que corresponde à letra C.

Veja ainda

As funções são utilizadas em várias áreas. No comércio, sua utilização dá-se no cálculo de demanda, oferta, custos, lucro etc. Vejamos um exemplo:

Uma indústria fabrica um único tipo de produto e sempre vende tudo o que produz.

O custo total para fabricar uma quantidade q de produtos é dado por uma função, que comumente representamos pela letra C, enquanto que o faturamento que a empresa obtém com a venda da quantidade q é também uma função, que podemos representar pela letra F. O lucro total L, obtido pela venda da quantidade q de produtos, é dado pela expressão $L(q) = F(q) – C(q)$, isto é, pela diferença entre o faturamento e o custo de fabricação.

Dadas as funções $F = 6q$, por exemplo, e $C= 2q + 12$, podemos calcular a quantidade mínima de produtos que a indústria terá de fabricar para não ter prejuízo.

Como $L(q) = F(q) – C(q)$

Temos que $L(q) = 6q – (4q + 12) = 4q – 12$

Para que não haja prejuízo, este valor tem de ser maior que zero.

Observando, verificamos que isto ocorre se **q for maior que 3**, pois 3 x 4 =12.

Referências

Livros

- TINOCO, L. A. A. **Álgebra**: Estudo e Ensino. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática, (2008). (Projeto Fundão)
- TINOCO, L. A. A. **Construindo o conceito de função**. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática, (2009). (Projeto Fundão)

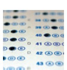
Sites

- Site: www.rio.rj.gov.br/smtu/smtu/smtu_tarif_tax.htm , acesso em 05/04/2012.
- Site: WWW. MEC.inep.br

Imagens

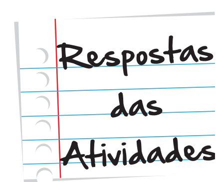
- http://www.sxc.hu/photo/475767

- http://www.sxc.hu/photo/1379263.



- http://www.sxc.hu/photo/517386 • David Hartman.

Situação problema 1



a. R$ 56,17.

b. Fevereiro de 2010.

c. 12/03/2010.

d. 26 m^3.

e. 28/02/2010.

f. Houve redução de 29 m^3 para 26 m^3.

g. Maior – setembro de 2006. 30 m^3. Menor – agosto de 2006. 12 m^3.

h. 25,4 m^3, considerando os consumos de agosto de 2009 até fevereiro de 2010.

Respostas das Atividades

Atividade 1

a.

Categorias	Consumo m^3	Cálculo	Valor a ser cobrado (R$)
Residencial Social	7	10 x 0,77	7,70
Residencial Padrão	7	10 x 1,93	19,30
Comércio Peq. A	7	10 x 3,06	30,60
Residencial Social	12	12 x 0,77	9,24
Residencial Padrão	12	12 x 1,93	23,16
Comércio Peq. A	12	12 x 3,06	36,72
Residencial Padrão	25	25 x 3,83	95,75
Comércio Peq. A	25	25 x 4,71	117,75
Residencial Padrão	47	47 x 4,27	200,69
Comércio Peq. A	47	47 x 4,71	221,37

b. O valor a ser pago em função do consumo x para cada residência padrão situada na faixa (16 – 30) poderia ser representado por 3,83x – 10

Situação problema 2

Situação	Relação de dependência		
	Coluna A		Coluna B
Conta de energia elétrica	*Valor a ser pago no final de um mês*	depende do(a)	*Quantidade de energia elétrica consumida no mês*
Conta de água	*Valor a ser pago no final de um mês*	depende do(a)	*Quantidade de água consumida no mês*
Corrida de táxi	*Valor a ser pago no final da corrida*	depende do(a)	*Quantidade de quilômetros rodados*
Consumo de combustível	*Quantidade de combustível consumido*	depende do(a)	*Quantidade de quilômetros rodados pelo veículo*
Tinta da impressora	*Quantidade de tinta utilizada*	depende do(a)	*Quantidade de páginas impressas*
Músicas armazenadas no MP3	*Quantidade de músicas armazenadas*	depende do(a)	*Quantidade de memória disponível*

Respostas das Atividades

Atividade 2

1. Não. Pois se o perímetro de um quadrado é a soma da medida dos lados e se os lados dos quadrados têm medidas distintas, os perímetros serão diferentes.
2. O perímetro é dado em função do lado.
3. Perímetro
4. Tamanho do lado
5. p = 4l.
6. 32 cm
7. 7 cm
8. $\boxed{X}$ 3 $\boxed{}$ -4 $\boxed{X}$ $\frac{2}{5}$ $\boxed{X}$ 2,3 $\boxed{}$ -10,6 $\boxed{}$ 0 $\boxed{X}$ 1,333 $\boxed{X}$ $\sqrt{5}$
9. Poderíamos dizer que o perímetro da função que relaciona o lado do quadrado a seu perímetro é formado por todos os valores positivos.
10.

Lado	Perímetro
3 cm	12 cm
2/5 cm	8/5 cm
2,3 cm	9,2 cm
1,333 cm	5,332 cm
cm	4 cm

11.
    a. f (3,5) = 14
    b. f (10) = 40
    c. f = 5

Respostas das Atividades

Atividade 3

1. Se você fizer uma corrida de 8 km em um dia útil, antes das 21 horas, quanto ela custará?

   P(x) = 4,30 + 1,40 .8 = 15,50

   A corrida custará R$15,50.

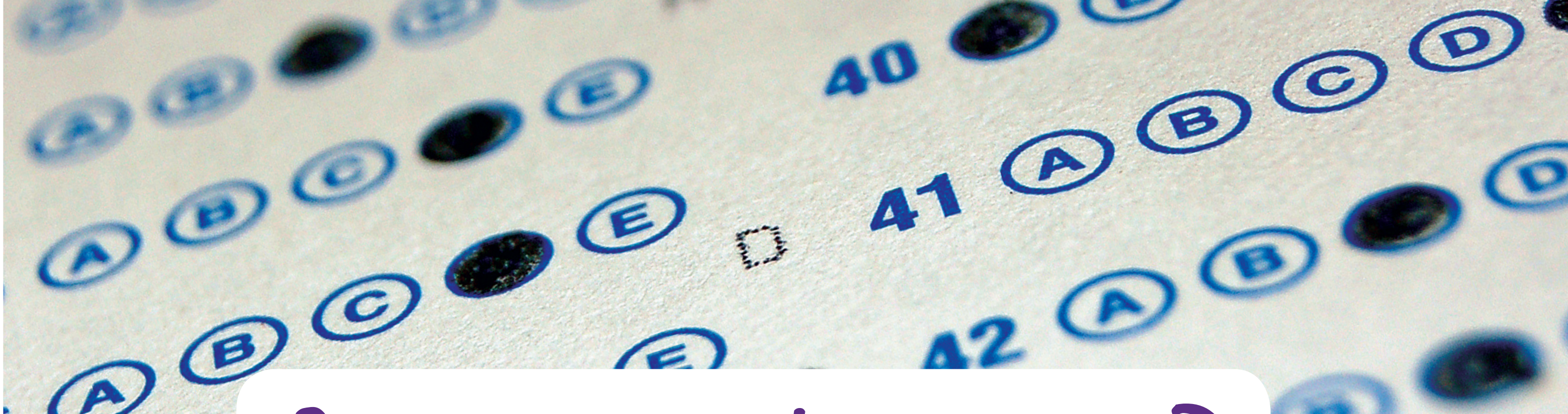
2. Se durante esta corrida de 8 Km o carro ficou parado por 5 minutos e o passageiro transportava uma maleta cuja menor face media mais que 60cm x 30cm, de quanto foi o valor pago ao taxista?

   P(x) = R$15,50 + R1,47 + R$1,40 = R$18,37

3. A resposta certa é a letra c). P(x) = 4,30 + 1,40 . x

4. P(x) = 4,30 + 1,68 . 6 = R$14,34

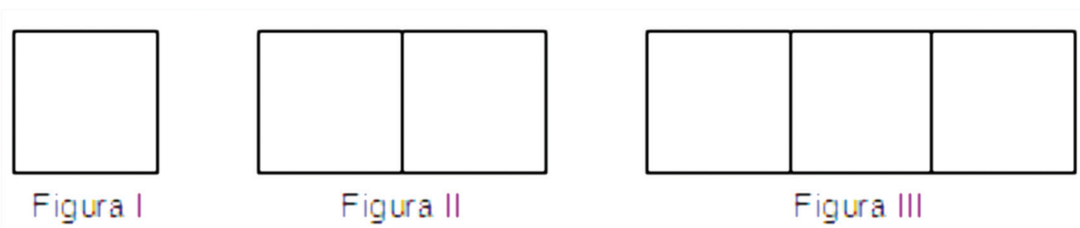
5. Se uma hora parada custa R$17,64, então 12 minutos custará R$3,53, com aproximação.



O que perguntam por aí?

Atividade 1 (ENEM, 2010, questão 14)

Uma professora realizou uma atividade com seus alunos, utilizando canudos de refrigerante para montar figuras, onde cada lado foi representado por um canudo. A quantidade de canudos (C) de cada figura depende da quantidade de quadrados (Q) que formam cada figura. A estrutura de formação das figuras está representada a seguir.



Que expressão fornece a quantidade de canudos em função da quantidade de quadrados de cada figura?

a. $C = 4Q$

b. $C = 3Q + 1$

c. $C = 4Q - 1$

d. $C = Q + 3$

e. $C = 4Q – 2$

Resposta: Letra B.

Comentário: Na primeira figura há 1 quadrado, assim $C = 3 \text{ x}1 + 1 = 4$ palitos;

Na segunda há 2 quadrados, C = 3 x 2 + 1 = 7 palitos;

Na terceira há 3 quadrados e C = 3 x 3 + 1 = 10 palitos,

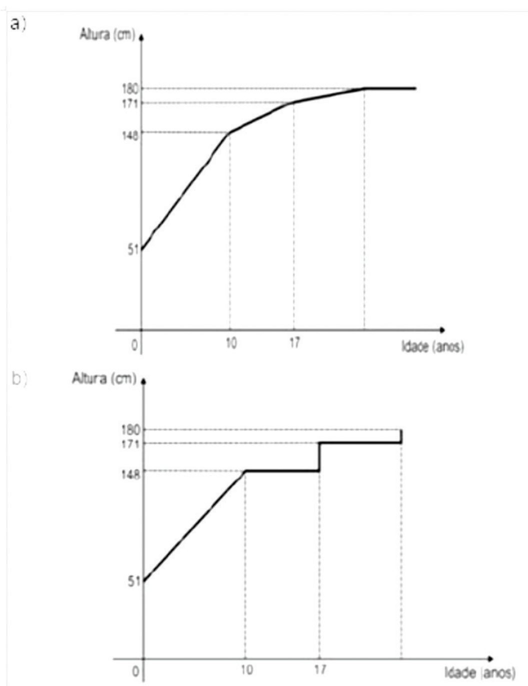
Continuando este raciocínio na quarta figura teríamos 4 quadrados e C = 3 x 4 + 1 = 13 palitos. Quando tivermos um número qualquer de quadrados, por exemplo Q, teremos:

C = 3 x Q + 1

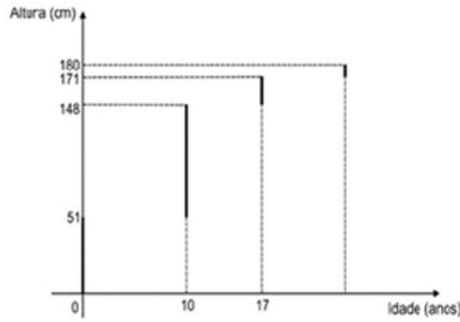
Atividade 2 (ENEM, 2010, questão 7)

Acompanhando o crescimento do filho, um casal constatou que, de 0 a 10 anos, a variação da sua altura dava-se de forma mais rápida do que dos 10 aos 17 anos e, a partir de 17 anos, essa variação passava a ser cada vez menor, até se tornar imperceptível. Para ilustrar essa situação, esse casal fez um gráfico, relacionando as alturas do filho nas idades consideradas.

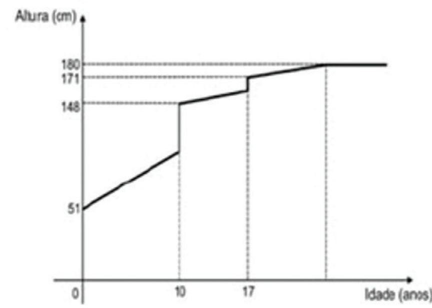
Que gráfico melhor representa a altura do filho desse casal em função da idade?



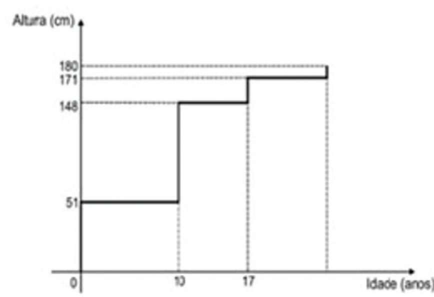
c)



d)

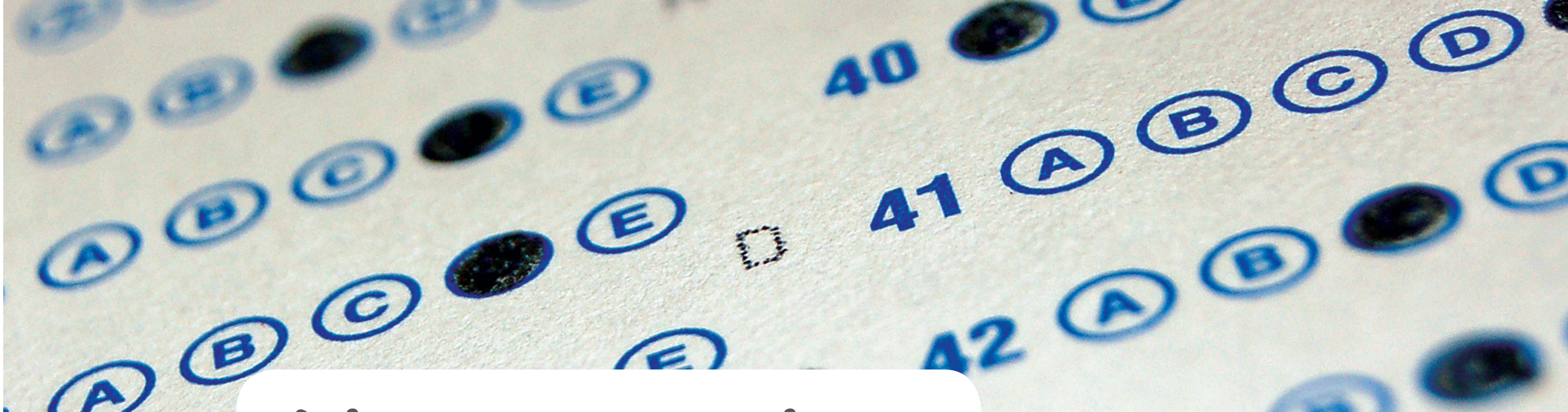


e)



Resposta: Letra A.

Comentário: O gráfico A é o que retrata bem a variação da altura conforme relatada, com um crescimento maior de 0 a 10 anos, depois um pouco menor até os 17 anos, depois ficava menor até ficar quase imperceptível, isto é a linha do gráfico praticamente tendendo a ficar paralela ao eixo x.



Atividade extra

Exercício 1

Uma indústria de brinquedos possui um custo mensal de produção equivalente a R$ 5.000,00 mais R$ 3,00 por brinquedo produzido.

A expressão matemática representa o custo $C(p)$ de p unidades produzidas é?

(a) $C(p) = 5000p + 3$

(b) $C(p) = 5000 - 3p$

(c) $C(p) = 5000 + 3p$

(d) $C(p) = 5000 + p$

Exercício 2

Utilizando a questão anterior, qual o valor, em reais, do custo na produção de 2000 peças?

(a) 15.000 (b) 11.000 (c) 5.000 (d) 1.500

Exercício 3

O preço do litro de gasolina de um posto de combustível é R$ 2,50. Qual expressão representa o preço $y(x)$ a pagar por x litros.

(a) $y(x) = 2{,}5x$

(b) $y(x) = 2{,}5 + x$

(c) $y(x) = 2{,}5 - x$

(d) $y(x) = 2{,}5x + 1$

Exercício 4

Utilizando a questão anterior, qual o preço a pagar no abastecimento de 8 litros ?

(a) R$ 30,00 (b) R$ 25,00 (c) R$ 20,00 (d) R$ 15, 00

Exercício 5

Numa viagem, um automóvel mantém uma velocidade constante de 60km/h.

Qual expressão representa a distância percorrida d(t), em km, em função do tempo t, em horas?

(a) $d(t) = 6.t$ (b) $d(t) = 60 + t$ (c) $d(t) = 60t + t$ (d) $d(t) = 60.t$

Exercício 6

Um objeto é colocado no refrigerador por um período de 5 horas. A queda de temperatura desse objeto, em graus Celsius, é dada pela função $f(x) = 3,2x$, sendo x a quantidade de horas que objeto permanece no refrigerador.

Qual a queda de temperatura desse objeto após 3 horas e meia?

(a) 6,7° (b) 7,8° (c) 11,2° (d) 13,5°

Exercício 7

Uma livraria obtém lucro de R$ 5,00 por livro vendido. As despesas mensais são de R$ 5000,00 mensais.

Qual expressão representa o lucro mensal L(x) desta livraria ao vender x livros?

(a) $L(x) = 5000x + 5$ (c) $L(x) = 5000x - 5$

(b) $L(x) = 5x + 5000$ (d) $L(x) = 5x - 5000$

Exercício 8

Uma usina elétrica necessita conduzir tubulações até as casas da cidade vizinha. O custo da operação é de R$ 150,00 por metro, além do valor fixo de R$ 300,00 referente ao aluguel dos equipamentos.

Qual a expressão que representa o custo $C(x)$ da usina por x metros?

(a) $C(x) = 300x + 150$

(b) $C(x) = 150x + 300$

(c) $C(x) = 450x$

(d) $C(x) = 15x + 30$

Exercício 9

O valor de um boleto bancário é de R$ 300,00 com juros de R$ 7,00 por dia após o vencimento.

Qual expressão representa o valor $P(x)$ a ser pago após x dias do vencimento?

(a) $P(x) = 307 + x$

(b) $P(x) = 300 + x$

(c) $P(x) = 300 + 7x$

(d) $P(x) = 307 + 7x$

Exercício 10

Uma empresa possui um gasto de R$ 30.000,00 referente aos salários dos funcionários e R$ 2.500,00 referente ao custo mensal com os materiais de divulgação. Para o próximo ano, a empresa planeja um aumento acumulativo de R$ 300,00 por mês no custo com os materiais de divulgação.

Nessa situação, qual a expressão que representa o gasto mensal da empresa?

(a) $G(x) = 30000 + 2800x$

(b) $G(x) = 30300 + 2500x$

(c) $G(x) = 30000 + 2500x$

(d) $G(x) = 32500 + 300x$

Exercício 11

Uma manicure cobra R$ 12,00 para clientes com hora marcada e R$ 10,00 para clientes sem hora marcada. Ela atende por dia um número fixo de 6 clientes com hora marcada e um número variável x de clientes sem hora marcada.

Qual expressão representa a quantia $Q(x)$ arrecadada por dia?

Exercício 12

Para um boleto de R$ 680,00 o banco cobra 4% de juros por dia após o vencimento mais R$ 10,00 de multa.

Qual expressão fornece o valor total da mensalidade $M(x)$ em x dias de atraso?

Exercício 13

Utilizando a questão anterior, qual o valor da mensalidade após 12 dias de atraso?

Exercício 14

O crescimento da população de uma cidade, x anos após 1950 é dado pela função $f(x) = 2x + 300$.

Qual foi o crescimento da população dessa cidade até 1986?

Exercício 15

Uma fábrica produz $f(x) = 500x + 6000$ refrigerantes em x meses de produção.

Quantos meses serão necessários para produzir 10.000 refrigerantes?

Gabarito

Exercício 1

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 2

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 3

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 4

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 5

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 6

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 7

A ○ B ○ C ○ D ●

Exercício 8

A ○ B ● C ○ D ○

Exercício 9

A ○ B ○ C ● D ○

Exercício 10

A ○ B ○ C ○ D ●

Exercício 11

$Q(x) = 72 + 10x$

Exercício 12

$M(x) = 690 + 27{,}2x$

Exercício 13

R$ 1016,40.

Exercício 14

372.

Exercício 15

8 meses.