Avançando com as áreas de figuras planas

Fascículo 3

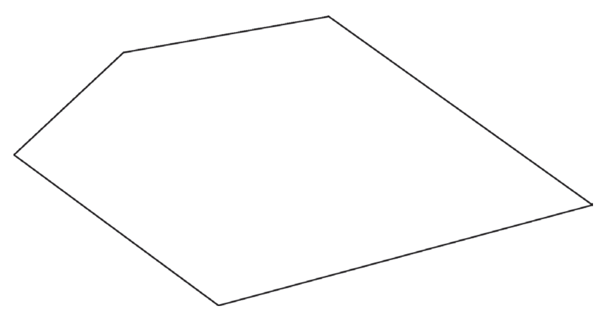
Unidade 8

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Avançando com as áreas de figuras planas

Para início de conversa...

Nem todos os polígonos possuem fórmulas específicas para cálculo da medida de sua área. Imagine, por exemplo, que você precisa calcular a área de um terreno e a única coisa que sabe é que a planta dele (desenho a seguir) foi feito na escala 1:100, ou seja, cada centímetro equivale a 1 metro.



E agora, quanto mede a área desse terreno?

Ao longo desta unidade, veremos como calcular áreas de polígonos irregulares como esse. Veremos ainda como calculamos áreas de círculos.

Vamos fazer essa e outras discussões.

Bons estudos!

Objetivos de aprendizagem

- Realizar o cálculo de área de polígonos irregulares, utilizando o método da triangulação.
- Calcular áreas de círculos.

Seção 1
Áreas irregulares

Situação problema 1

Observe o projeto de uma casa a seguir:

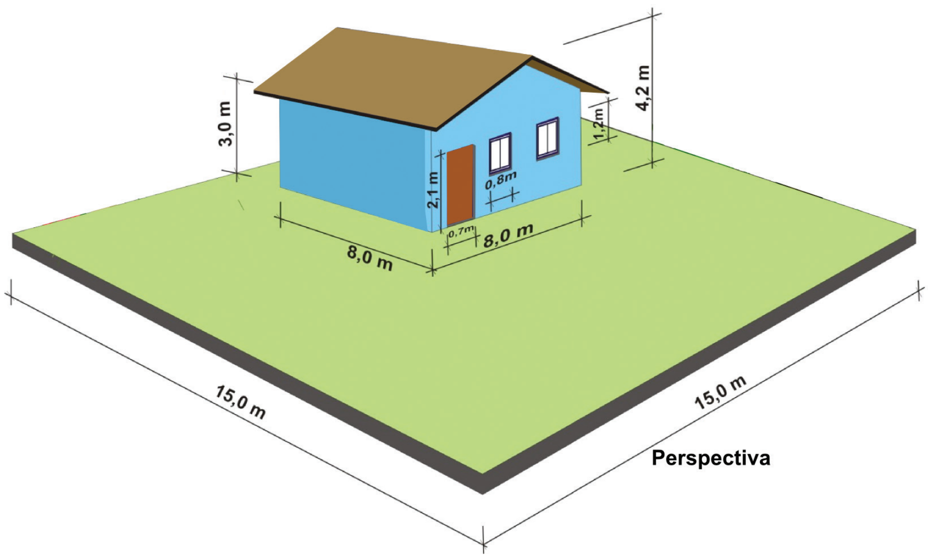


Figura 1: perspectiva da casa.

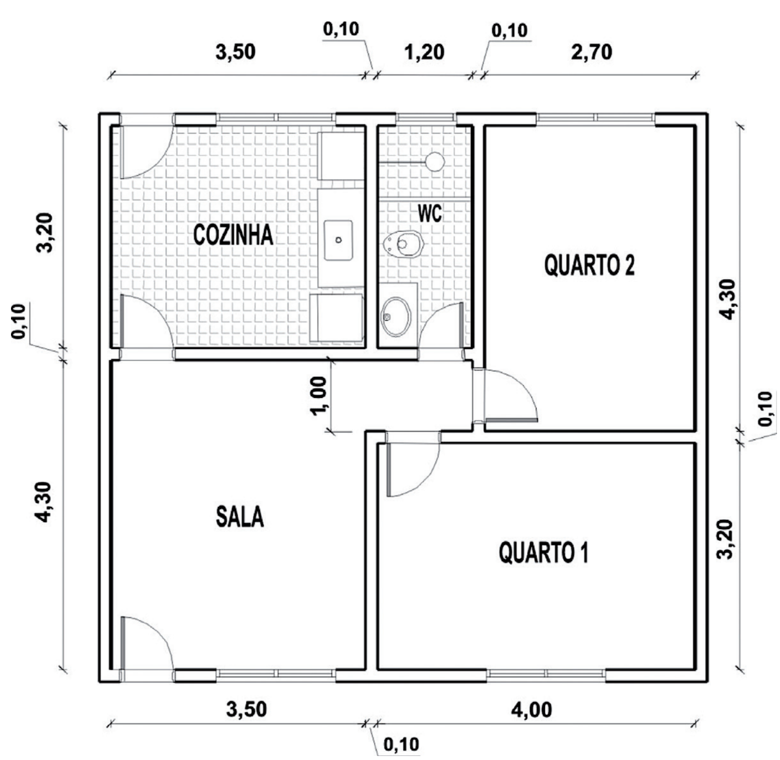


Figura 2: planta baixa da mesma casa.

Você deverá calcular as seguintes áreas:

a. Da casa.

b. Do quintal.

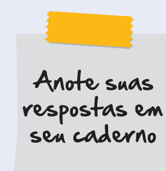
c. Das portas.

d. Das janelas.

e. Parede lateral externa descontando portas e janelas.

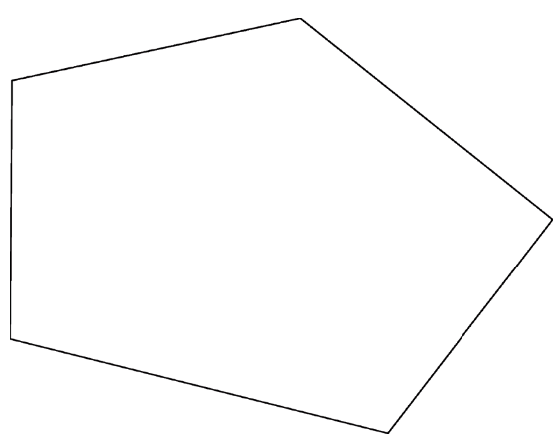
f. A parede interna do quarto 2, considerando um pé direito de 2,80 m. (Lembre-se que o "pé-direito" de uma casa é a altura que vai do solo até o início do telhado!)

Observação: Considere a báscula do banheiro com as medidas 40 cm x 40 cm e o beiral do telhado com 30 cm ao redor de toda casa.



Situação problema 2

Um fazendeiro comprou uma área, de formato irregular, para aumentar a sua plantação. Para verificar se a área que estava comprando era realmente o que estava no documento, contratou um **topógrafo** para realizar o projeto.



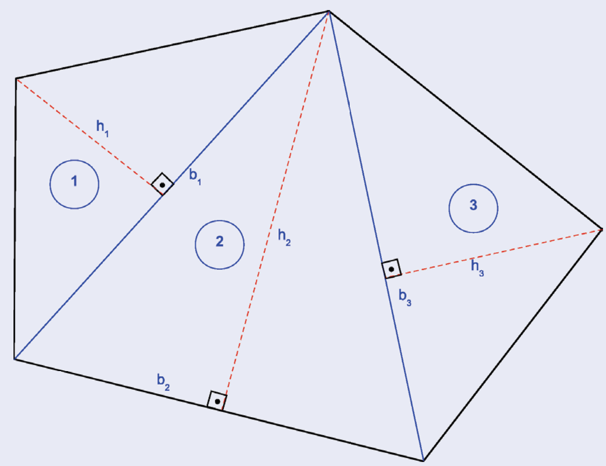
Topógrafo

Profissional que faz o estudo do terreno em relação as seus acidentes geográficos.

Atividade

Sabendo que o desenho foi feito na escala 1:500 (1 centímetro no desenho equivale a 500 centímetros ou 5 metros na medida real), qual a área total, em hectares (1 hectare equivale a 10.000 metros quadrados), do terreno?

Uma possibilidade de divisão da área em triângulos seria a seguinte:



Repare que dividimos a figura em três grandes triângulos. O triângulo 1 com base e altura próprios; o triângulo 2 com base e altura próprios e o triângulo 3 com base e altura próprios. Vamos, agora, calcular a área de cada um deles e descobrir, ao final, a área total da figura.

Relembrando que a área de um triângulo é calculada por meio da seguinte expressão: b. h /2, observe as medidas retiradas no desenho, complete a tabela e calcule a área para cada um dos triângulos.

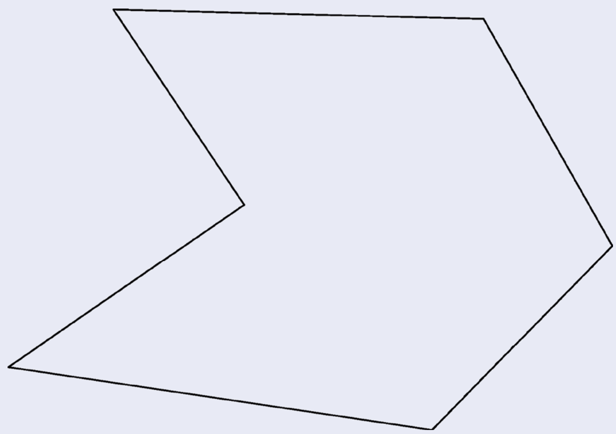
Triângulo	**Base (b)**	**Altura (h)**			**Área (A)**
	Desenho	Real	desenho	real	
1	12,0 cm	60 m	4,8 cm	24 m	1.440 m²
2	10,8 cm		10,6 cm		
3	11,8 cm		5,7 cm		
Total					

Obs. : as medidas apresentadas podem sofrer pequenas variações devido ao processo de editoração e impressão.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 1

Um fazendeiro comprou uma área para aumentar a sua plantação. Para verificar se a área que estava comprando era realmente o que estava no documento, contratou um topógrafo que fez o seguinte projeto:



Sabendo que o desenho foi feito na escala 1:1.000 (1 centímetro no desenho equivale a 1.000 centímetros ou 10 metros na medida real), qual a área total, em hectares (1 hectare equivale a 10.000 metros quadrados), do terreno?

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 2
A área do círculo

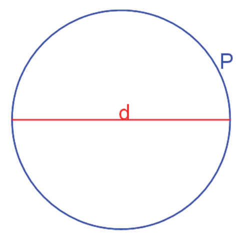
Atividade

Você sabe dizer o que é um círculo? E uma circunferência? Será que é a mesma coisa? Faça uma pequena pesquisa em livros ou na Internet e registre a seguir o seu resultado.

Anote suas respostas em seu caderno

Após a pesquisa, leia o texto a seguir:

O número π (lê-se número pi) é um número que tem atraído os matemáticos desde a Antiguidade. Quase todos os grandes nomes da Matemática dedicaram-lhe parte da sua atenção. O número π é o resultado da divisão entre o comprimento (perímetro) de uma circunferência e o seu diâmetro. Ele é uma constante para a razão entre o comprimento (P) e o diâmetro de quaisquer circunferências. Pode-se, portanto, escrever a relação:



$$\pi = \frac{P}{d}$$

Não se sabe exatamente como na Antiguidade se chegou a esta conclusão, mas muito provavelmente o interesse pelo número π terá tido a sua origem em problemas de determinação de áreas. Desde que o homem interessou-se por este número, iniciou-se um longo período de árduos esforços para que seu cálculo fosse mais preciso. Este período só viria a terminar no final do século passado. Depois de tanto esforço, sabe-se, por exemplo, que o π é um número irracional, ou seja, possui infinitas casas decimais e não podemos escrevê-lo em forma de fração.

Ou seja, sabemos hoje que um π vale aproximadamente 3,1415... Por hora, no entanto, não se preocupe em utilizar esse valor. Apenas considere o símbolo π.

Situação problema 3

Com os recursos computacionais cada vez mais avançados já se consegue escrever o π com muitas casas decimais, obtendo aproximações cada vez mais precisas. Para se ter ideia do que está sendo dito, em 1988, na Universidade de Tóquio, Yasumasa Kanada calculou π com 201.326.000 casas decimais, em 6 horas com um supercomputador construído pela Hitachi.

Adaptado de http://pubol.ipbeja.pt/Artigos/NumeroPi/Pi.htm

Se considerarmos que o diâmetro é o dobro do raio de uma circunferência **(d=2r)**, dessa relação podemos facilmente demonstrar a seguinte relação:

$$\pi = \frac{P}{d}$$

$$P = \pi . d$$

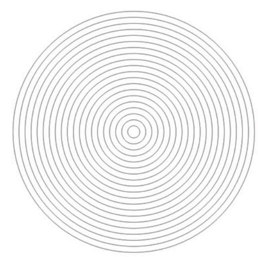
$$P = 2\pi r$$

Com essa fórmula, podemos facilmente calcular o comprimento de qualquer circunferência, basta, para isso, conhecermos o seu raio. Mas, e quanto à área do **círculo**? Como poderíamos encontrá-la? Acompanhe a ideia a seguir:

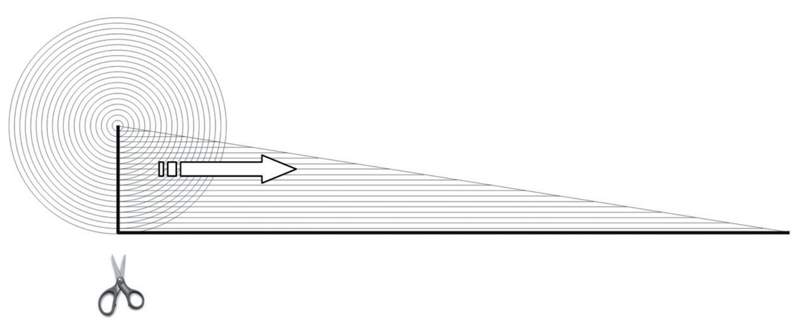
Círculo

É a região de um plano limitada por uma circunferência.

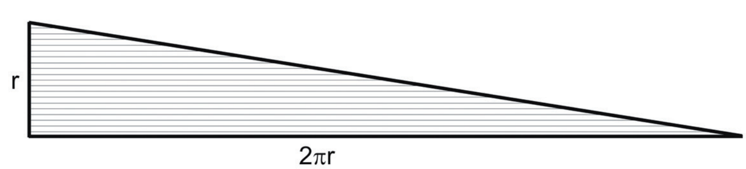
I. imagine que o círculo seja formado por várias circunferências concêntricas (com o mesmo centro), sem que houvesse espaço entre elas. A representação abaixo registra algumas dessas circunferências e podemos imaginar as demais.



II. Agora, imagine que possamos cortar essas circunferências e esticá-las.



III. Considerando que o triângulo foi preenchido ao esticar todas as circunferências que formam o círculo, perceba que a altura do triângulo é o raio r do círculo e a base mede , o perímetro desse círculo:



Atividades

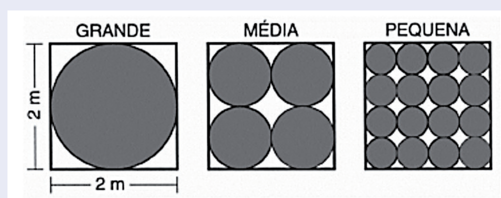
Qual seria, afinal a fórmula para calcular a área do círculo?

Anote suas respostas em seu caderno

Caso você tenha conseguido resolver, parabéns! Veja nas respostas o valor dessa área e compare com o que você fez.

Atividade 2

(Enem 2004 – adaptado) Uma empresa produz tampas circulares de alumínio para tanques cilíndricos a partir de chapas quadradas de 2 metros de lado, conforme a figura. Para 1 tampa grande, a empresa produz 4 tampas médias e 16 tampas pequenas.



As sobras de material da produção diária das tampas grandes, médias e pequenas dessa empresa são doadas, respectivamente, a três entidades: I, II e III, para efetuarem reciclagem do material. Qual entidade recebe mais material?

Para descobrir essa resposta, vamos analisar o problema por partes:

TAMPA GRANDE

Parte 1: Qual a área do quadrado?

Parte 2: Qual a medida do perímetro da tampa grande?

Parte 3: Qual a área do círculo?

Parte 4: Qual a medida que resta da área da chapa?

TAMPA MÉDIA

Parte 1: Qual a área do quadrado?

Parte 2: Qual a medida do perímetro da tampa média?

Parte 3: Qual a área do círculo?

Parte 4: Qual a medida que resta da área da chapa?

TAMPA PEQUENA

Parte 1: Qual a área do quadrado?

Parte 2: Qual a medida do perímetro da tampa pequena?

Parte 3: Qual a área do círculo?

Parte 4: Qual a medida que resta da área da chapa?

Agora volte a pergunta inicial: Qual das entidades I, II e III, citadas acima recebe mais material?

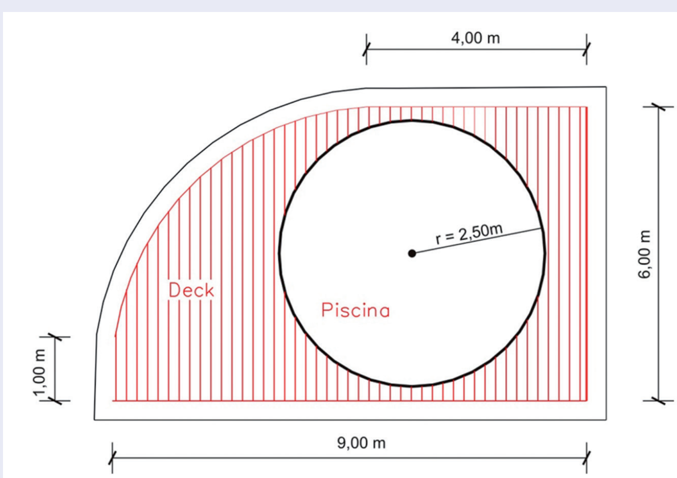
Atividade 2

Anote suas respostas em seu caderno

Calcule a medida da área do Deck da área de lazer a seguir.

Observe que há uma parte da figura que é arredondada, que você pode calcular como fração de um círculo, utilizando a fórmula da área do círculo ($A = \pi r^2$).

Atividade 3

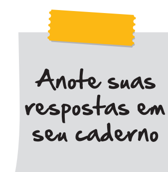


Anote suas respostas em seu caderno

Momento de reflexão

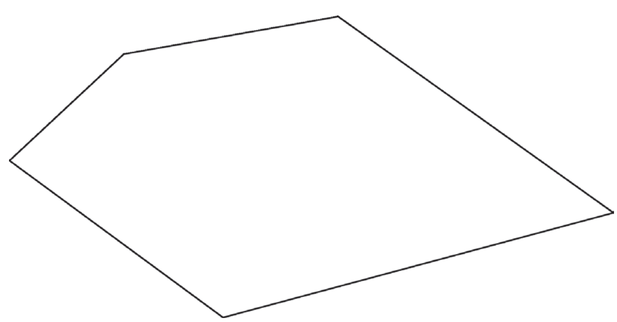
Na maioria das vezes, os terrenos que compramos ou que são utilizados no campo não são formados por figuras regulares. Achar sua área requer utilizar outras estratégias. Nesta unidade, você pode ver o uso da triangulação, ou seja, o método de dividir a figura em triângulos e calcular as áreas desses triângulos para obter a área total. Tente aplicar este método para calcular a área de outros polígonos irregulares. Por falar nisso, como você conseguiu calcular a área do problema inicial? Que tal tentar agora por triangulação?

Outra questão tratada nesta seção foi o cálculo do perímetro da Circunferência e área do Círculo. Volte a ler sobre esses novos conceitos e as fórmulas geradas para esses cálculos. Anote alguma outra situação em que você precisa calcular áreas de círculos.

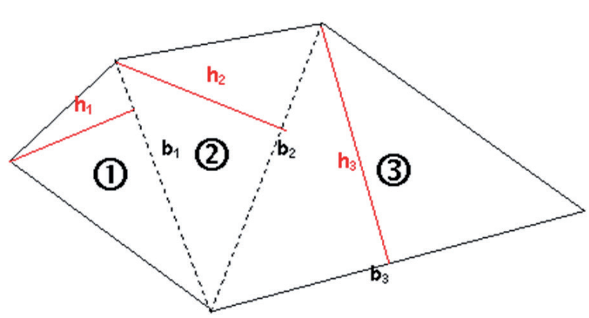


Voltando à conversa inicial...

Depois das atividades desenvolvidas e das discussões feitas, você teve muitas dificuldades de calcular a área do terreno apresentada no início desta unidade?



Como visto nesta unidade, o melhor caminho é utilizar um método chamado triangulação, pelo qual dividimos a figura em vários triângulos e, após calcular a área de cada um deles, somamos para descobrir a área total. Como a figura não está cotada, podemos utilizar a régua para efetuar as medidas e, com o auxílio da calculadora, descobrir a área do terreno. Uma forma de dividir é mostrada abaixo, não sendo esta, porém, a única.



Após a divisão em triângulos, calculamos a área de cada um deles, assim:

Figura	Base (b)	Altura (h)	Área (A)
1	4,9 m	2,4 m	5,88 m^2
2	5,6 m	3,3 m	9,24 m^2
3	7,0 m	4,5 m	157,50 m^2
Total			172,62 m^2

Obs.: As medidas apresentadas podem sofrer pequenas variações devido ao processo de editoração e impressão.

Veja Ainda...

A área de um triângulo é calculada, utilizando as dimensões da sua base e altura através da fórmula:

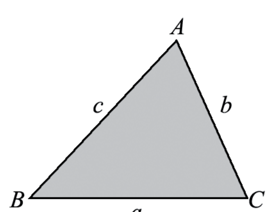
$$A = \frac{b \times h}{2}$$

Mas essa fórmula somente é aplicada nos triângulos em que se conhece a medida da altura. Para o cálculo da área de um triângulo qualquer, podemos utilizar outras fórmulas.

Por exemplo, a Fórmula de Heron de Alexandria, que tem por base o **semiperímetro** do triângulo:

Semiperímetro
É a metade da soma de todos os lados do triângulo onde a, b e c são as medidas dos lados do triângulo.

A fórmula de Heron deve ser usada nas situações em que se conhece o valor dos três lados do triângulo. Dado o triângulo ABC de lados a, b e c:



A área de um triângulo qualquer pode ser calculada, utilizando a seguinte fórmula:

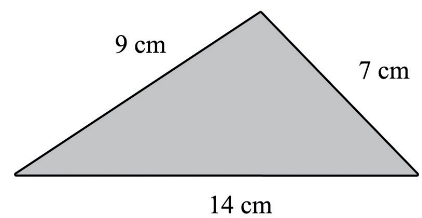
$$A = \sqrt{p \times (p-a) \times (p-b) \times (p-c)}$$

Onde os valores de a, b, c correspondem aos lados do triângulo e o valor de p é o valor do semiperímetro.

Um pouco de História: Heron de Alexandria viveu aproximadamente 100 d.C.(depois de Cristo), conhecido sobretudo pela fórmula da área do triângulo, dado seus lados. No entanto, os Àrabes contam-nos que a "Fórmula de

Heron" já era conhecida por Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.). A demonstração de Heron ficou perdida por muito tempo, até ser redescoberta em Constantinopla, em 1896.

Vamos agora calcular a área do triângulo, utilizando a fórmula de Heron.



$p = (9 + 7 + 14)/2 = 15$

$A^2 = p(p- a)(p – b) (p – c)$

$A^2 = 15(15 – 9)(15 – 7)(15- 14)$

$A^2 = 15 . 6 . 8 . 1= 720$

Logo $A = \sqrt{720} \approx 26,83$

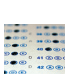
Referências

Livros

- BELLEMAIN, P. M. B, LIMA, P. F. **Um estudo da Noção de Grandezas e Medidas e Implicações no Ensino Fundamental**. Edição: John A. Fossa. Natal: Sbhmat, 2002.
- PAIVA, M. A. V.; FREITAS, R. C. O. **Matemática**. In: SALGADO, Maria Umbelina Caiafa; AMARAL, Ana Lúcia.. (Org.). ProJovem Urbano. Ed. Brasilia DF: Governo Federal/Programa Nacional de Inclusão de Jovens, 2008, v. 1,2,3,4,5,6.
- TROTA, IMENES, JAKUBOVIC. **Matemática Aplicada- 2º Grau**. São Paulo: Ed. Moderna,1979.

Imagens

- http://www.sxc.hu/photo/475767



- http://www.sxc.hu/photo/517386

Situação problema 1

Respostas das Atividades

- casa:

8 x 8 = 64m^2.

- quintal:

15 x 15 = 225

225 – 64 = 161 m^2.

- cada porta:

0,7 x 2,1 = 1.47 m^2.

- Cada janela;

0,8 x 1,2 = 0,96 m^2.

0,4 x 0,4 = 0,16 m^2.

- Parede externa, descontando portas e janelas:

Laterais $\rightarrow$ 8 x 3 = 24 m^2.

Frente e fundos $\rightarrow$ 8 x 3 + (8 x 1,2) / 2 = 28,8 m^2.

Total $\rightarrow$ 2 x 24 + 2 x 28,8 = 105,6 m^2.

Portas $\rightarrow$ 2 x 1,47 = 2,94 m^2.

Janelas $\rightarrow$ 4 x 0,96 = 3,84 m^2.

Báscula $\rightarrow$ 0,16 m^2.

Paredes externas menos portas e janelas $\rightarrow$ 105,6 – 2,94 – 3,84 – 0,16 = 98,66 m^2.

- Paredes internas do quarto 2, considerando um pé direito de 2,80m:

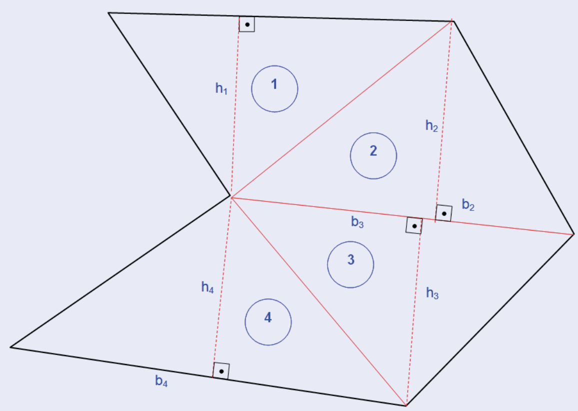
[2 x (4,30 + 2,70) x 2,80] = 39,20 m^2.

Situação problema 2

Triângulo	Base (b)		Altura (h)		Área (A)
	Desenho	Real	desenho	real	
1	12,0 cm	60 m	4,8 cm	24 m	1.440 m²
2	10,8 cm	54 m	10,6 cm	53 m	2.862 m²
3	11,8 cm	59 m	5,7 cm	28,5	1.61,5 m²
Total					5.983,50 m²

Obs.: As medidas apresentadas podem sofrer pequenas variações devido ao processo de editoração e impressão.

Atividade 1



Triângulo	Base (b)		Altura (h)		Área (A)
	Desenho	Real	desenho	real	
1	9,5 cm	95 m	5,0 cm	50 m	2.375,0 m²
2	9,5 cm	95 m	5,4 cm	54 m	2.565,0 m²
3	9,5 cm	95 m	5,2 cm	52 m	2.470,0 m²
4	11,0 cm	110 m	5,0 cm	50 m	2.750,0 m²
Total					10.160,0 m²

Situação problema 3

Para se calcular a área do círculo, temos a seguinte fórmula.

$$A = \frac{2\pi r.r}{2}$$

$$A = \pi r^2$$

Atividade 2

TAMPA GRANDE:

Parte 1: Qual a área do quadrado?

$4\ m^2$

Parte 2: Qual a medida do perímetro da tampa grande?

$2\ \pi m$

Parte 3: Qual a área do círculo?

πm^2

Parte 4: Qual a medida que resta da área da chapa?

$(4 - \pi)m^2$

TAMPA MÉDIA:

Parte 1: Qual a área do quadrado?

$4\ m^2$

Parte 2: Qual a medida do perímetro da tampa média?

πm

Parte 3: Qual a área do círculo?

$0{,}25\pi m^2$

Parte 4: Qual a medida que resta da área da chapa?

$(4 - 4 \times 0{,}25\ \pi) = (4 - \pi)m^2$

TAMPA PEQUENA:

Parte 1: Qual a área do quadrado?

$4\ m^2$

Parte 2: Qual a medida do perímetro da tampa pequena?

$0{,}5\pi m$

Parte 3: Qual a área do círculo?

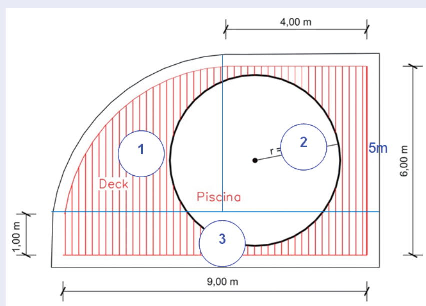
$0{,}0625\pi m^2$

Parte 4: Qual a medida que resta da área da chapa?

$(4 - 16 \times 0{,}0625\ \pi) = (4 - \pi)m^2$

Resposta: As três entidades recebem a mesma quantidade de material.

Atividade 3



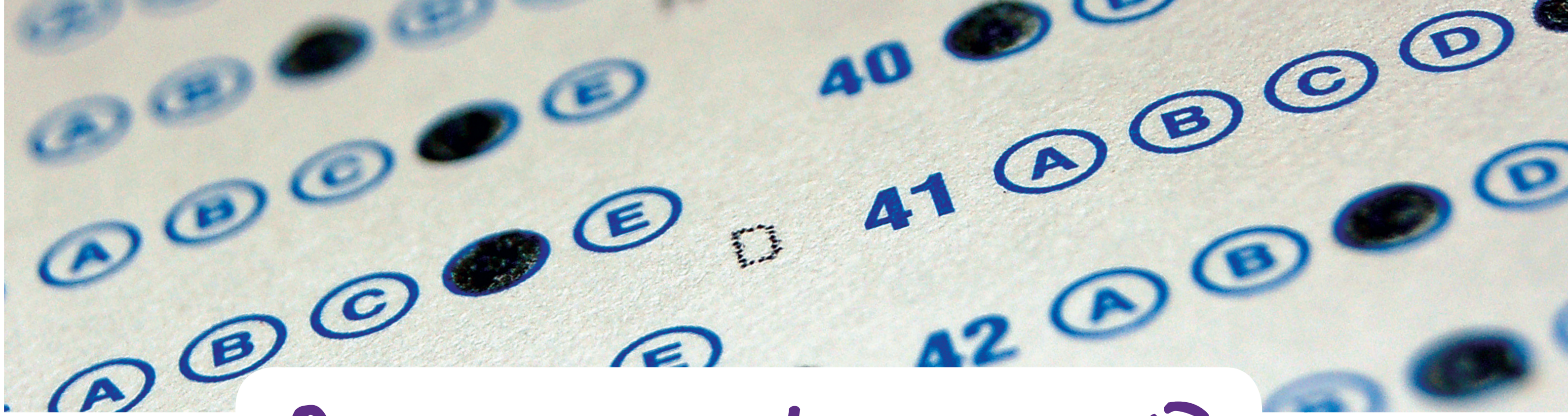
Cálculos feitos, utilizando o valor de π=3,14:

Área 1 $\longrightarrow$ $\dfrac{\pi 5^2}{4} = 19{,}625m$

Área 2 $\longrightarrow$ 4 x 5 = 20 m^2

Área 3 $\longrightarrow$ 1 x 9 = 9 m^2.

Área total = Area 1 + Área 2 + Área 3 = 45,625 m^2

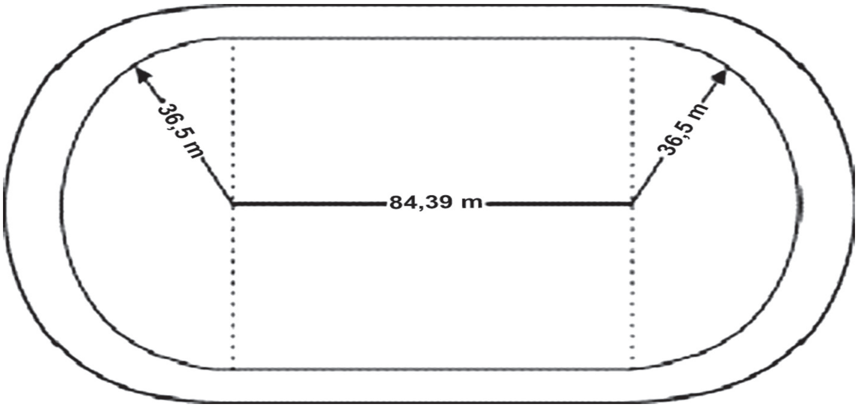


O que perguntam por aí?

Atividade 1 (ENEM 2011)

O atletismo é um dos esportes que mais se identificam com o espírito olímpico. A figura ilustra uma pista de atletismo. A pista é composta por oito raias e tem largura de 9,76m. As raias são numeradas do centro da pista para a extremidade e são construídas de segmentos de retas paralelas e arcos de circunferência.

Os dois semicírculos da pista são iguais.



Se os atletas partissem do mesmo ponto, dando uma volta completa, em qual das raias o corredor estaria sendo beneficiado?

a. 1

b. 4

c. 5

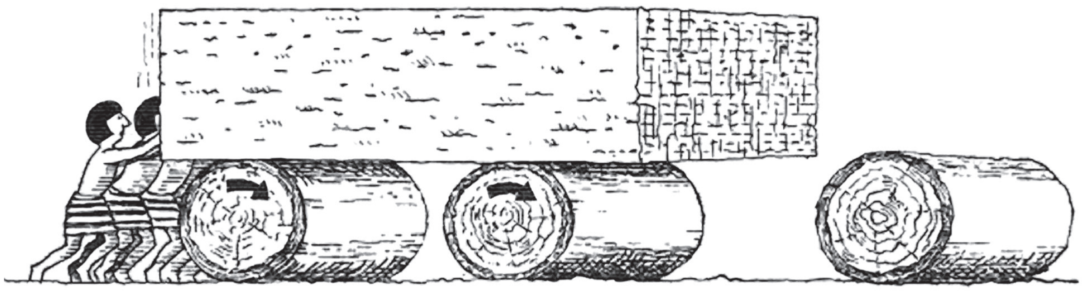
d. 7

e. 8

Resposta: Letra A

Atividade 2 (ENEM 2010)

A ideia de usar rolos circulares para deslocar objetos pesados provavelmente surgiu com os antigos egípcios ao construírem as pirâmides.



BOLT, Brian. Atividades matemáticas.

Representando por R o raio da base dos rolos cilíndricos, em metros, a expressão do deslocamento horizontal y do bloco de pedra em função de R, após o rolo ter dado uma volta completa sem deslizar, é:

f. $Y = R$

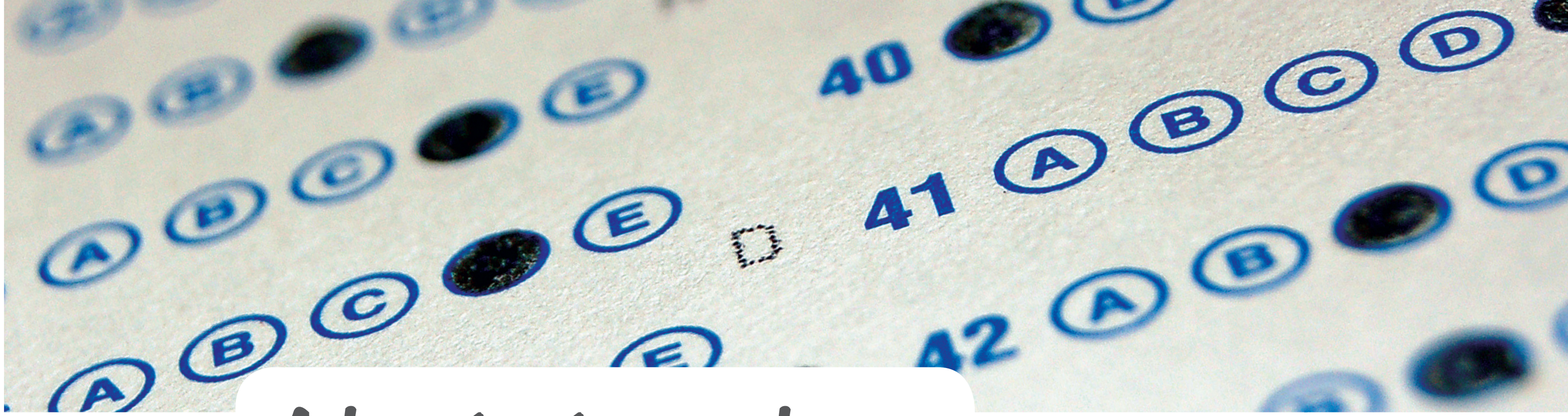
g. $Y = 2R$

h. $Y = \pi R$

i. $Y = 2\pi R$

j. $Y = 4\pi R$

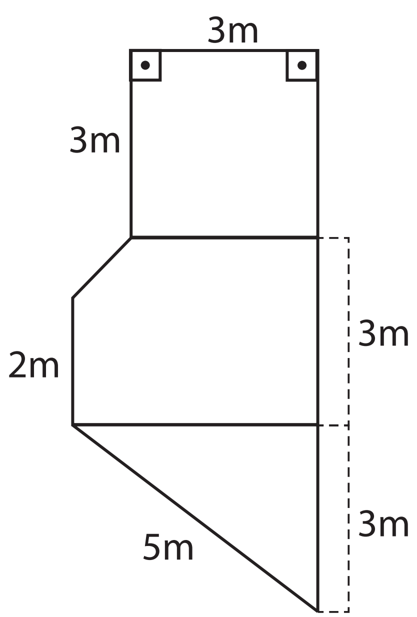
Resposta: Letra E



Atividade extra

Exercício 1

A planta baixa de uma sala está representada na figura abaixo.

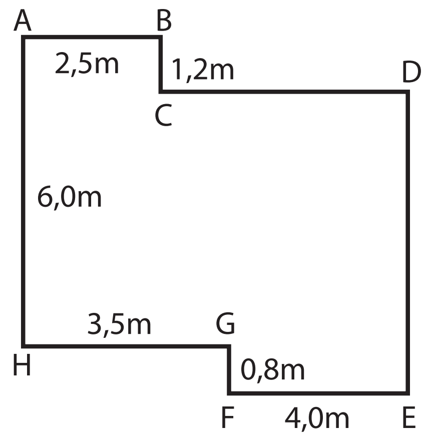


Qual a área total dessa sala?

(a) $30m^2$ (b) $28m^2$ (c) $26,5m^2$ (d) $24m^2$

Exercício 2

A figura adiante mostra a planta baixa da sala de estar de um apartamento.



Sabe-se que duas paredes contíguas quaisquer incidem uma na outra perpendicularmente Qual a área total dessa sala?

(a) 36,8m² (b) 38,6m² (c) 40,2m² (d) 42,2m²

Exercício 3

Dois pedaços de arame de mesmo comprimento e espessura despresível foram usados para formar círculos. Um deles formou um círculo (figura I) e o outro formou três círculos iguais (figura II).

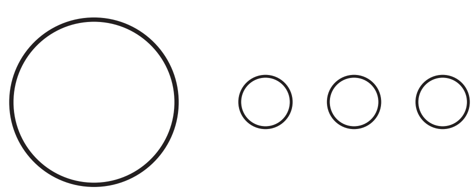


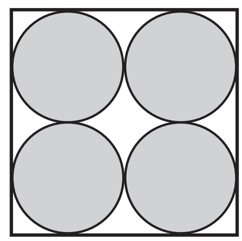
Figura I Figura II

Se S é a área do círculo maior e s é a área de um dos círculos menores, qual a razão $\frac{S}{s}$?

(a) 15 (b) 9 (c) 3 (d) 1

Exercício 4

De uma chapa quadrada de papelão recortam-se 4 discos, conforme indicado na figura e a medida do diâmetro dos círculos é 10cm.



Qual a área não aproveitada da chapa?

(a) $400 - 2\pi$ cm^2

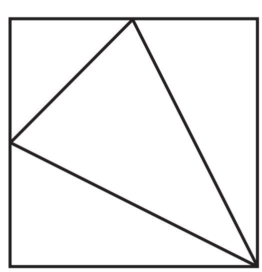
(b) $400 - 10\pi$ cm^2

(c) $400 - 20\pi$ cm^2

(d) $400 - 100\pi$ cm^2

Exercício 5

Para fazer um modelo de ladrilho, certo desenhista une um dos vértices de um quadrado aos pontos médios dos lados que não contém esse vértice, obtendo um triângulo isósceles.

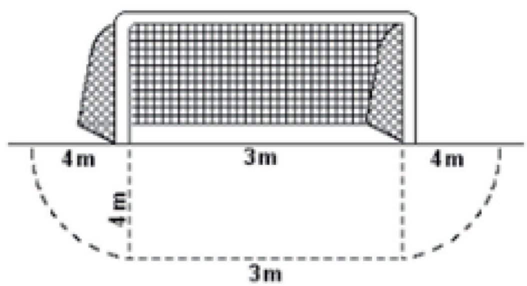


Qual a razão entre a medida da área desse triângulo e a medida da área desse quadrado?

(a) 0, 350 (b) 0, 375 (c) 0, 380 (d) 0, 385

Exercício 6

No futebol de salão, a área de meta, representada na figura abaixo, é delimitada por dois segmentos retos (11m e 3m) e dois quadrantes de círculos (de raio 4m).



Qual a superfície da área da meta, aproximadamente? Use $\pi = 3{,}14$

(a) $34m^2$ (b) $36m^2$ (c) $37m^2$ (d) $39m^2$

Exercício 7

É necessário um certo número de pisos de 25cm $\times$ 25cm para cobrir o piso de uma cozinha com 5m de comprimento por 4m de largura. Cada caixa tem 20 pisos.

Quantas caixas são necessárias para cobrir o piso da cozinha?

(a) 9 (b) 12 (c) 16 (d) 25

Exercício 8

Quantos metros de tecido, no mínimo, são necessários para fazer uma toalha para uma mesa que mede 300cm de comprimento por 230cm de largura?

(a) $0{,}69m^2$ (b) $6{,}90m^2$ (c) $69m^2$ (d) $690m^2$

Exercício 9

Uma sala de aula, o piso é coberto com pisos sintéticos que medem 30cm × 30cm. Para cobrir o piso são necessários são 220 lajotas.

Qual a área dessa sala?

(a) $198m^2$ (b) $90m^2$ (c) $19{,}8m^2$ (d) $18m^2$

Exercício 10

Um pintor foi contratado para pintar uma sala retangular que mede 5,5m × 7m. Para evitar que a tinta respingue no chão ele vai forrar a sala com folhas de jornal.

Quantos metros de folha de jornal ele vai precisar?

(a) $38{,}50m^2$ (b) $38m^2$ (c) $35{,}50m^2$ (d) $32{,}50m^2$

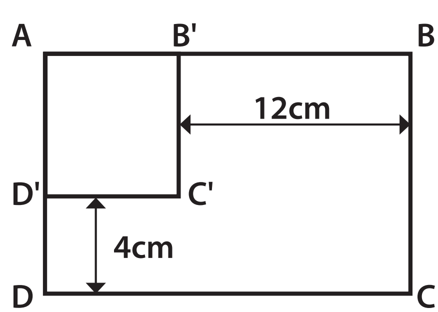
Exercício 11

Em um restaurante, uma família pediu uma pizza grande, de 44cm de diâmetro, e outra família pediu duas médias, de 30cm de diâmetro.

Qual família comeu mais pizza?

Exercício 12

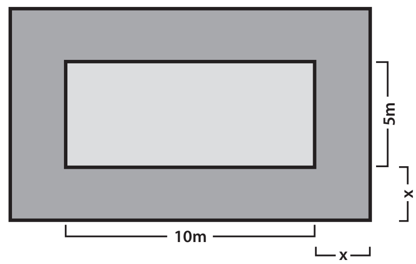
A figura a seguir o retângulo tem área igual $153cm^2$.



Quanto mede o lado do quadrado AB'C'D'?

Exercício 13

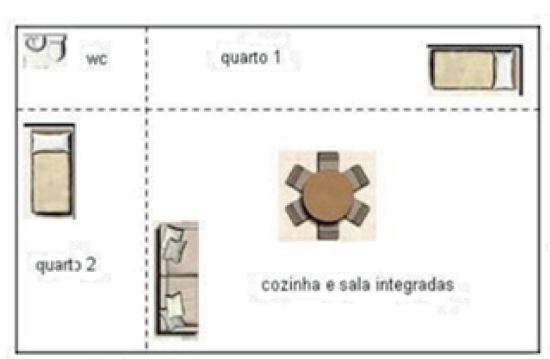
Ao redor de uma piscina retangular será construído um revestimento de madeira com x metros de largura, representado na figura a seguir. Existe $54m^2$ de madeira para revestimento.



Qual o valor de x para que toda madeira seja aproveitada?

Exercício 14

O projeto de uma casa é apresentado em forma retangular e dividido em quatro cômodos, conforme ilustra a figura. O banheiro (WC) quadrado possui área igual a $4m^2$ e os quartos 1 e 2 retangulares possuem áreas, respectivamente, iguais a $10m^2$ e $8m^2$.



Qual a área total da casa?

Exercício 15

Um engenheiro deseja construir uma praça circular com uma área de 100 m^2.

Qual deve ser o diâmetro da praça?

Gabarito

Exercício 1

A B C D

○ ○ ● ○

Exercício 2

A B C D

○ ○ ○ ●

Exercício 3

A B C D

○ ● ○ ○

Exercício 4

A B C D

○ ○ ○ ●

Exercício 5

A B C D

○ ● ○ ○

Exercício 6

A B C D

○ ○ ● ○

Exercício 7

A B C D

○ ○ ● ○

Exercício 8

A B C D

○ ● ○ ○

Exercício 9

A B C D

○ ○ ● ○

Exercício 10

A B C D

● ○ ○ ○

Exercício 11

A família que pediu a pizza grande.

Exercício 12

5.

Exercício 13

1,5.

Exercício 14

42m^2.

Exercício 15

20.