



Sistemas de equações lineares

Fascículo 3
Unidade 10

Sistemas de equações lineares

Para Início de conversa...

Já falamos anteriormente em funções. Dissemos que são relações entre variáveis independentes e dependentes. Às vezes, precisamos encontrar valores específicos para essas variáveis e dessa forma elas se tornam incógnitas. Vamos mais uma vez falar de planos de telefonia, para ilustrar o que queremos discutir. Existem dois planos de telefonia que são apresentados na tabela abaixo:

Plano	Custo fixo mensal	Custo adicional por minuto
A	R\$ 35,00	R\$ 0,50
B	R\$ 20,00	R\$ 0,80

Para que quantidade de minutos o valor a ser pago é o mesmo para os dois planos? Qual é esse valor?

Tente resolver a situação com o que já sabe sobre funções, equações ou simplesmente utilizando conhecimentos de aritmética. Fazer uma tabela pode ser uma boa alternativa. Se não conseguir, não se preocupe, mais à frente retornaremos com essa discussão.

Objetivos de aprendizagem

- Representar a relação entre duas grandezas por meio de gráficos.
- Utilizar sistemas de equações para calcular os valores de duas incógnitas.
- Resolver problemas que envolvam duas incógnitas.

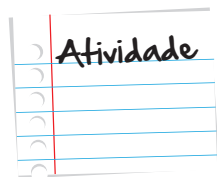
Seção 1

Representando a função no gráfico

Representações gráficas já foram abordadas em situações anteriores. Até agora vimos que os gráficos são utilizados para representar resultados de pesquisa, sendo uma forma interessante de apresentar dados de forma visual e agradável. Agora, vamos ver como construir gráficos com o intuito de representar a relação existente entre duas grandezas.

Situação problema 1

Paulo e Miguel, juntos, possuem R\$30,00. Miguel possui R\$3,00 a mais que o dobro do valor de Paulo. Quanto possui cada um deles?



Podemos representar as incógnitas da seguinte forma:

x = valor que Paulo possui.

y = valor que Miguel possui.

A partir daí, podemos representar a situação da seguinte maneira:

O valor que Paulo possui (x) somado ao valor que Miguel possui (y) é R\$30,00.

$$x + y = 30$$

Miguel (y) possui R\$3,00 a mais que o dobro do valor de Paulo ($2x + 3$).

$$y = 2x + 3$$

Teremos, então, duas equações, que denominamos sistema de equações, que pode ser representado assim:

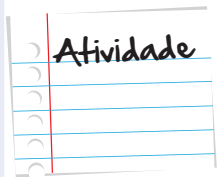
$$\begin{cases} x + y = 30 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$$

Separando as duas equações, vamos encontrar pares de valores (para x e y) que atendem a cada uma das equações.

Veja alguns exemplos e complete a tabela.

Há algum par comum às duas equações? Se encontrá-lo, este será a solução do problema.

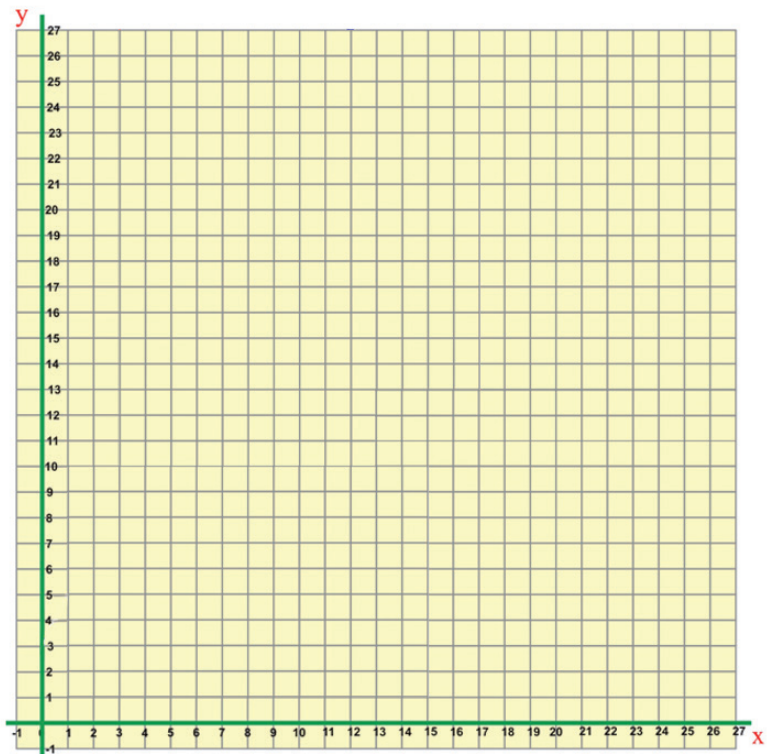
$x+y=30$	$y = 2x + 3$
(x, y)	(x, y)
(7, 23)	(7, 17)
(8,)	(8,)
(9,)	(9,)
(10,)	(10,)
(11,)	(11,)
(12,)	(12,)
(13,)	(13,)

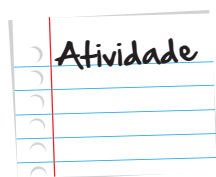


Anote suas
respostas em
seu caderno

Situação problema 2

Vamos representar, no diagrama a seguir, os pontos correspondentes a cada par ordenado encontrado, na situação problema anterior. Em seguida, una os pontos encontrados em cada equação com uma linha reta. Represente cada uma das retas, referentes a cada equação, com uma cor diferente.





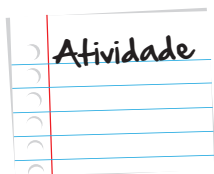
Agora responda:

- Onde as duas linhas retas se cruzam?
- O que tem a ver com a tabela anterior?

Anote suas
respostas em
seu caderno

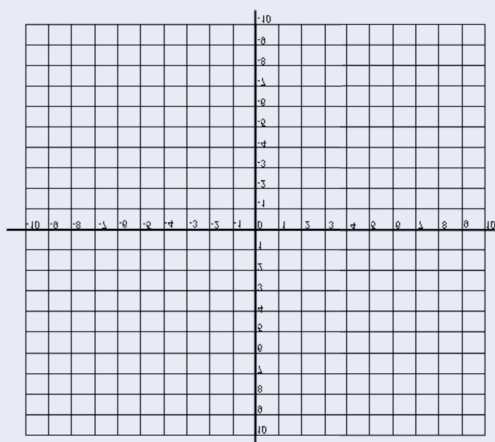
Situação problema 3

Você deve ter percebido que todos os pontos que atendem a cada uma das equações estão sobre a mesma linha reta. Será que conseguiríamos resolver um sistema, utilizando apenas dois pontos para cada equação? Tente fazer isto no sistema de equações a seguir. Não se esqueça de verificar se o resultado encontrado realmente atende às duas equações.



$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

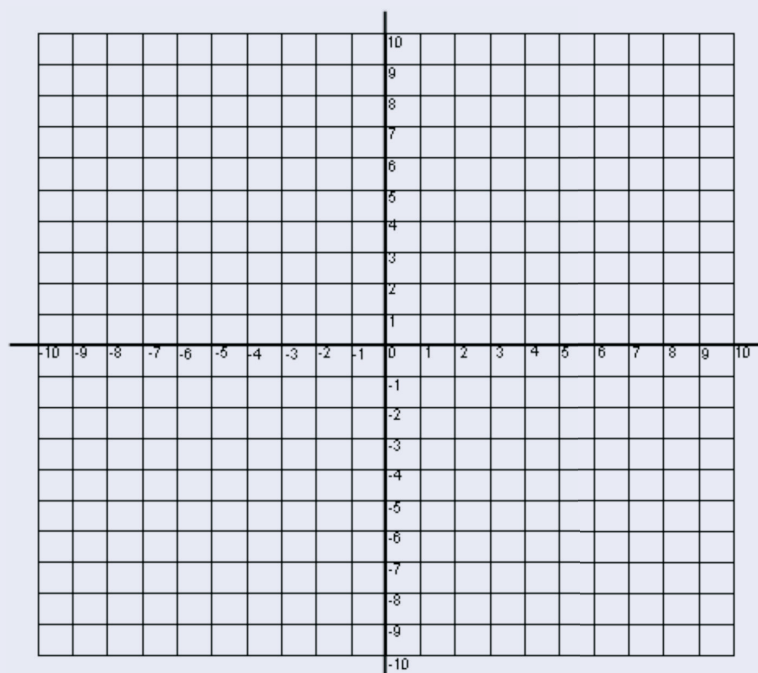
Equação	$x^2 = 25$	$\sqrt{x^2} =$
	(x, y)	(x, y)
Ponto 1	(1, 4)	(2, 1)
Ponto 2	(7, -2)	(5, 4)



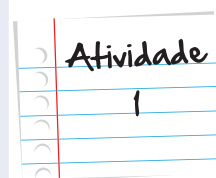
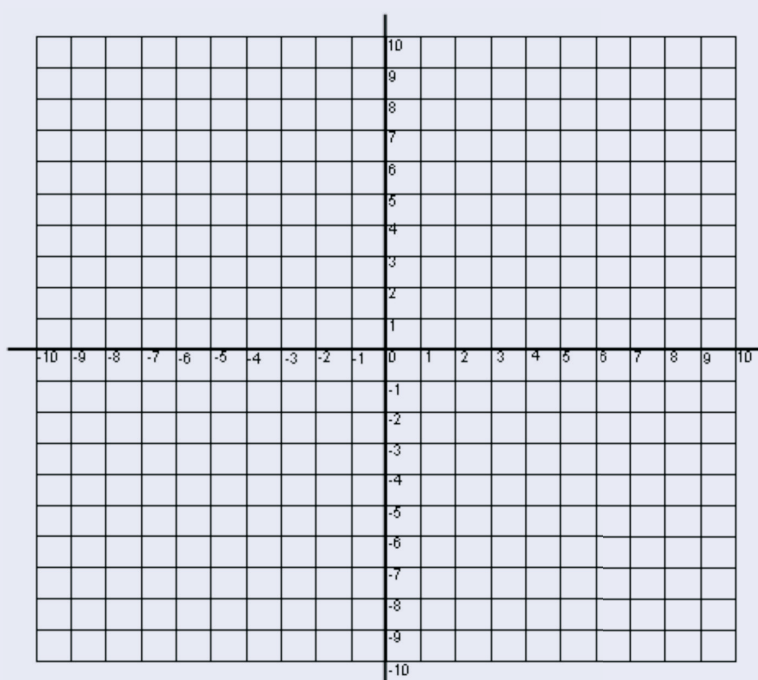
Anote suas
respostas em
seu caderno

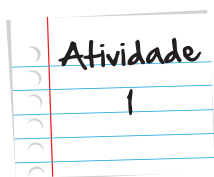
Resolva os seguintes sistemas de equações pelo processo gráfico:

a.
$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 8 \end{cases}$$

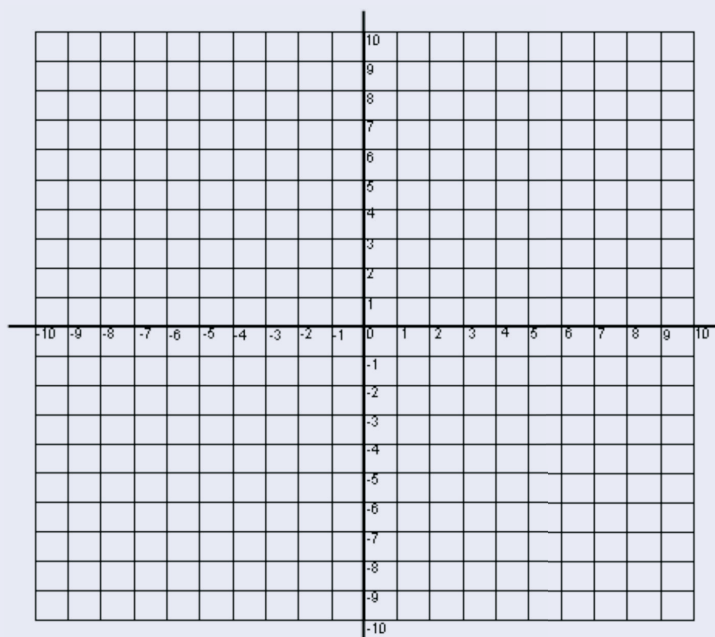


b.
$$\begin{cases} y = 3x \\ 2x + y = 15 \end{cases}$$





c.
$$\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ x + 3y = 15 \end{cases}$$



Anote suas
respostas em
seu caderno

Os sistemas de equações acima podem ser resolvidos por outros métodos. Vamos ver dois deles.

Método da adição

Vamos começar, observando duas operações aritméticas:

$$\begin{cases} 12 + 7 = 19 \\ 10 - 6 = 4 \end{cases}$$

Observe o que acontece, quando fazemos operações entre as duas, respeitando as posições dos números:

$$\begin{cases} 12 + 7 = 19 \\ 10 - 6 = 4 \\ \hline 22 + 1 = 23 \end{cases}$$

A igualdade continua verdadeira. É exatamente esse processo que utilizamos para resolver o sistema de equações. Veja:

$$\begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{l} x + y = 12 \\ x - y = 8 \end{array} \right. \\ \hline 2x + 0 = 20 \\ 2x = 20 \\ x = 10 \end{array}$$

Agora que já conhecemos o valor de x , é fácil encontrar o valor de y . Basta escolher uma das duas equações.

Vamos utilizar a primeira:

$$x + y = 12$$

$$10 + y = 12$$

$$y = 2$$

Logo, os dois valores procurados são: $x = 10$ e $y = 2$.

Método da substituição

Vamos tomar o mesmo sistema como referência.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 12 \\ x - y = 8 \end{array} \right.$$

Pegamos uma das duas equações e isolem uma das incógnitas. Vamos utilizar a segunda equação:

$$x - y = 8$$

$$x = 8 + y$$

Pegamos a outra equação e substituímos o valor de x isolado.

$$x + y = 12$$

$$(8 + y) + y = 12$$

$$8 + y + y = 12$$

$$8 + 2y = 12$$

$$2y = 12 - 8$$

$$2y = 4$$

$$y = 2$$

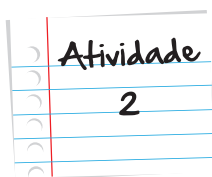
Após esta etapa, voltamos à primeira equação e substituímos o valor de y encontrado.

$$x = 8 + y$$

$$x = 8 + 2$$

$$x = 10$$

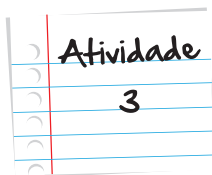
Os valores procurados são $x = 10$ e $y = 2$, exatamente os mesmos encontrados pelo outro método.



Junior e Aline têm, juntos, 100 livros. Se tirarem 25 livros de Junior e derem a Aline, eles ficarão com o mesmo número de livros. Quantos livros tem cada um?



Anote suas
respostas em
seu caderno



Um pai tem hoje 45 anos e seu filho, 9. Daqui a quantos anos a idade do pai será o quádruplo da idade do filho?

Anote suas
respostas em
seu caderno

O tio de Bernardo gosta de lhe dar desafios para responder. No último domingo, Bernardo foi visitar seu tio.

Você sabe quais são os números inteiros? Perguntou-lhe o tio.

A seguir, deu-lhe o seguinte problema para resolver:

Sejam dois números inteiros. O quádruplo de um deles somado ao dobro do outro dá 520 e a soma de ambos é 80. Quais são esses números?

Anote suas
respostas em
seu caderno

Atividade
4

Bernardo na mesma hora retrucou, dando-lhe também um para resolver, mas com a condição de que o fizesse mentalmente.

A soma de dois números é 72 e sua diferença é 24. Quais são os números?

Anote suas
respostas em
seu caderno

Atividade
5



Jackson, aluno do SEJA, trabalha numa marcenaria e resolveu organizar melhor a oficina de trabalho. Para isso, comprou uma caixa de ferramentas com 12 repartições. Em cada uma podem ser arrumadas 4 ferramentas. Logo, todas as repartições ficaram ocupadas, algumas com 4 e outras com 2 ferramentas. Dessa maneira Jackson contou 34 ferramentas. Quantas ainda podem ser guardadas na caixa de ferramentas?

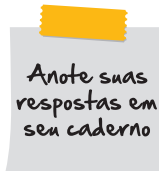
Anote suas
respostas em
seu caderno

Atividade
6

Momento de reflexão

Encontrar os valores de incógnitas dadas por duas equações do primeiro grau, ou seja, por meio de sistemas de duas equações com duas incógnitas, foi o objetivo desta unidade. Para tal, foram utilizados recursos gráficos e algébricos. Reveja as soluções gráficas e algébricas apresentadas e refaça as que você ficou em dúvida.

Você deve ter percebido que em algumas situações é bem fácil utilizar o recurso gráfico, mas dependendo dos valores fica complicado determinar os valores das incógnitas. Nessa hora, os métodos algébricos são os melhores. Pratique as técnicas aprendidas para que se sinta mais autônomo ao resolver sistemas, já que os utilizará em várias situações.



Anote suas
respostas em
seu caderno

Voltando à conversa inicial

Você pôde verificar que são várias as estratégias para resolver problemas, envolvendo mais de uma incógnita, ou seja, mais de um valor não conhecido. Exatamente como o problema trazido no início deste capítulo. Naquela situação não conhecíamos a quantidade de minutos nem o valor que seria pago nos dois planos. Vamos retomá-lo agora que já sabemos um pouco mais sobre o assunto?

1. Para resolver o problema, vamos seguir alguns passos, exatamente como temos feito até agora:

Identificar as incógnitas

x = quantidade de minutos

y = valor a ser pago

2. Escrever as equações

Para o plano A $\rightarrow y = 35 + 0,50x$

Para o plano B $\rightarrow y = 20 + 0,80x$

3. Organizar o sistema

$$\begin{cases} y = 35 + 0,50x \\ y = 20 + 0,80x \end{cases}$$

Poderíamos reorganizar o sistema de várias formas, dependendo da estratégia que escolhermos, para resolvê-lo. Da forma que está, poderemos utilizar direto o Método da Substituição, basta pegar o valor de y da segunda equação e substituí-lo na primeira, assim:

$$20 + 0,80x = 35 + 0,50x$$

Agora é só resolver a equação e encontra o valor de x.

$$0,80x - 0,50x = 35 - 20$$

$$0,30x = 15$$

$$x = 15 / 0,30$$

$$x = 50$$

Para encontrar o valor de y, basta substituir o valor de x encontrado em qualquer uma das duas equações.

Vamos utilizar a primeira.

$$y = 35 + 0,50x$$

$$y = 35 + 0,50.50$$

$$y = 35 + 25$$

$$y = 60$$

Logo, a quantidade de minutos para a qual o valor a ser pago é o mesmo é 50. O valor a ser pago é R\$ 60,00.

Veja ainda

Você sabia que a utilização de sistemas de equações para resolver problemas é muito antiga? Para você ter ideia, os babilônios estudavam problemas que conduziam a equações, há muitos anos. Um exemplo disso foi encontrado em um bloco de barro que data cerca de 300 a.C. , contendo o seguinte problema:

*Dois campos têm área total de 1.800 **jardas** quadradas. Um produz grãos em $\frac{2}{3}$ de um alqueire por jarda quadrada, enquanto o outro produz grãos em $\frac{1}{2}$ de um **alqueire** por jarda quadrada. Se o lucro total é de 1.100 alqueires.*

Qual o tamanho de cada campo?

Jarda

A Jarda (yd) é uma medida inglesa que equivale a 91 centímetros, ou seja 0,91 metros. Portanto, 1m² é igual a 1,1959900463011 jardas quadradas.

Alqueire

Designava, originalmente, uma das bolsas ou cestas de carga que eram colocadas sobre o dorso dos animais de carga. Logo, o conteúdo daquelas cestas foi tomado como medida de grãos e depois acabaram designando a área de terra necessária para o plantio de todas as sementes nelas contidas.

Uma das formas de resolver o problema babilônico é utilizar um sistema de equações, da seguinte forma:

1. Denominemos o tamanho de um campo de x e o tamanho do outro de y .
2. Isso nos ajuda a chegar à primeira equação: $x + y = 1.800$
3. O primeiro campo produz grãos em $\frac{2}{3}$ de alqueires a cada jarda quadrada. Logo, a sua produção é de $\frac{2}{3}x$ alqueires.
4. O segundo campo produz grãos em $\frac{1}{2}$ de alqueires a cada jarda quadrada. Logo, a sua produção é de $\frac{1}{2}y$ alqueires.
5. Como o total produzido é de 1.100 alqueires, chegamos à segunda equação: $\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = 1.100$.
6. O sistema a ser resolvido é, portanto:

$$\begin{cases} x + y = 1800 \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = 1100 \end{cases}$$

E aí? Qual é o tamanho de cada campo?

O maior tem 1.200 jardas quadradas e o menor tem 600 jardas quadradas.

Referências

Imagens



• <http://www.sxc.hu/photo/475767>



• <http://www.sxc.hu/photo/290552>



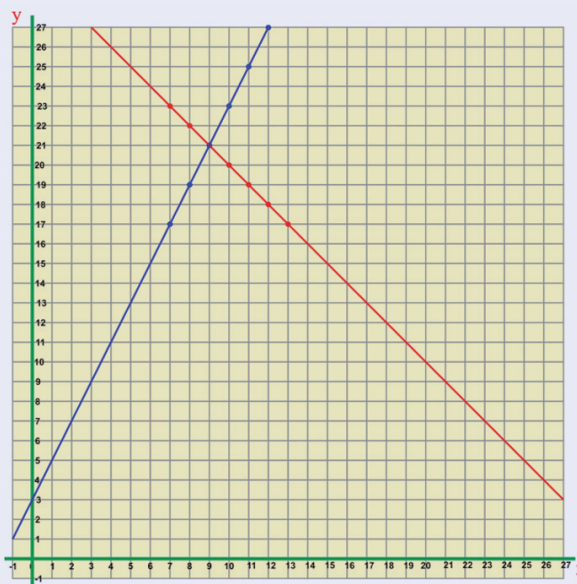
• <http://www.sxc.hu/photo/1284421>

Situação problema 1

$x + y = 30$	$y = 2x + 3$
(x, y)	(x, y)
(7, 23)	(7, 17)
(8, 22)	(8, 19)
(9, 21)	(9, 21)
(10, 20)	(10, 23)
(11, 19)	(11, 25)
(12, 18)	(12, 27)
(13, 17)	(13, 29)

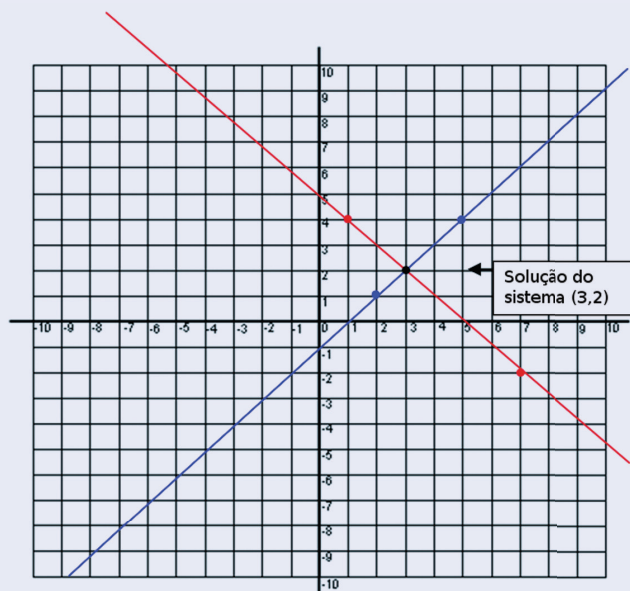
Respostas
das
Atividades

Situação problema 2



- No ponto com coordenadas 9 para x e 21 para y.
- Os dois resolvem o sistema de equações.

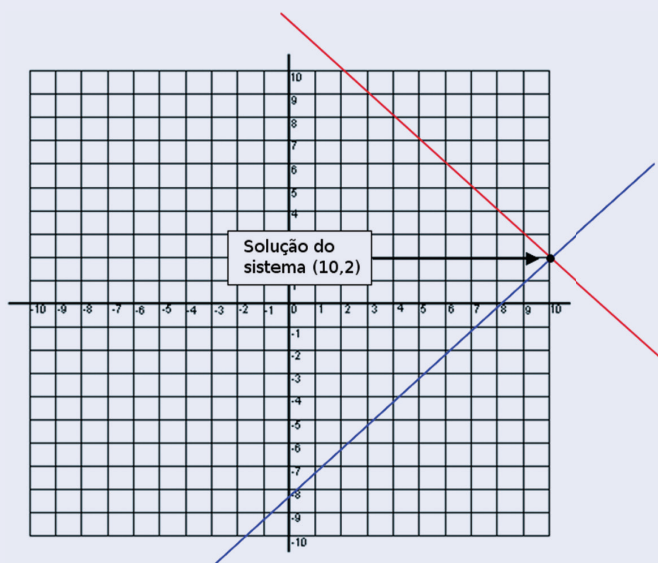
Situação problema 3



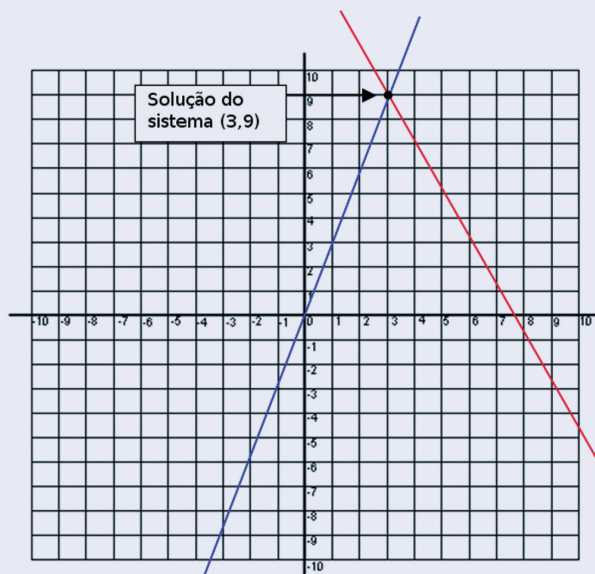
Resposta: $x = 3$ e $y = 2$

Atividade 1

a.

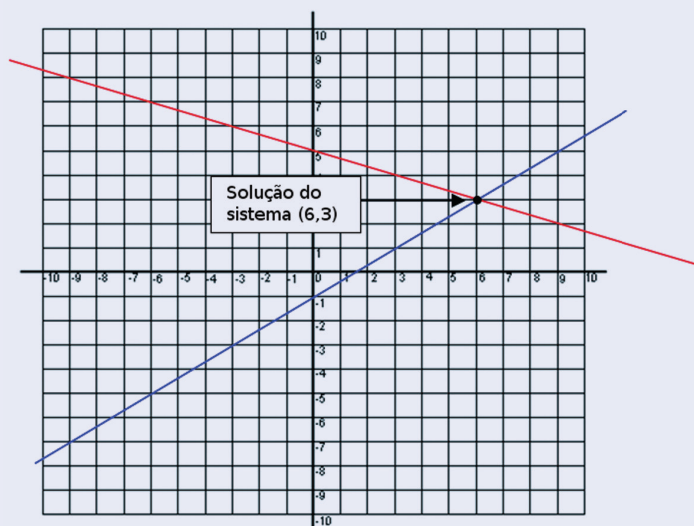


b.



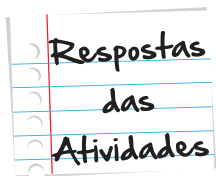
Respostas
das
Atividades

c.



Atividade 6

R. : Júnior tem 75 livros e Aline tem 25 livros.



Atividade 7

R. : Daqui a três anos, o pai terá 48 anos e o filho 12 anos.

Atividade 8

R. : Um número é 120 e o outro – 40.

Atividade 9

R. : Um número é 48 e o outro 24.

Atividade 10

R. : Há 5 repartições com quatro ferramentas e 7 com duas ferramentas.



Atividade extra

Exercício 1

A população de uma cidade A é três vezes maior que a população da cidade B. Somando a população das duas cidades temos o total de 200.000 habitantes.

Qual a população da cidade A?

- (a) 50.000 (b) 75.000 (c) 100.000 (d) 150.000

Exercício 2

Num aquário há 8 peixes, entre pequenos e grandes. Se os pequenos fossem mais um, seria o dobro dos grandes.

Quantos são os pequenos?

- (a) 5 (b) 4 (c) 3 (d) 2

Exercício 3

Um pagamento de R\$ 140,00 foi realizado em notas de R\$ 5,00 e de R\$ 20,00, no total foram 10 notas.

Quantas notas de cada tipo foram usadas?

- (a) 5 notas de 20 reais e 5 notas de 5 reais
(b) 6 notas de 20 reais e 4 notas de 5 reais
(c) 7 notas de 20 reais e 3 notas de 5 reais
(d) 4 notas de 20 reais e 6 notas de 5 reais

Exercício 4

Um par de sapatos e um par de sandálias custam R\$ 30,00. O preço do par de sapatos é de R\$ 2,00 a mais que o preço de três sandálias.

Quanto custa um par de sandálias?

- (a) R\$ 23,00 (b) R\$ 17,00 (c) R\$ 13,00 (d) R\$ 7,00

Exercício 5

Em um terreiro há galinhas e coelhos, num total de 13 animais e 46 pés.

Quantas galinhas e quantos coelhos há nesse terreno?

- (a) 10 galinhas e 3 coelhos
(b) 3 galinhas e 10 coelhos
(c) 4 galinhas e 9 coelhos
(d) 5 galinhas e 8 coelhos

Exercício 6

A soma das idades de Mariana e Felipe é 18 anos. Há 3 anos atrás, a diferença destas idades era de 2 anos.

Qual a idade de Felipe, sabendo que Mariana é a mais velha?

- (a) 13 anos (b) 11 anos (c) 9 anos (d) 8 anos

Exercício 7

Na geladeira de Ana há 15 litros de refrigerante, dispostos tanto em garrafas de um litro e meio, quanto de 600ml, no total de 13 garrafas.

Qual é a quantidade de garrafas de 600ml?

- (a) 3 garrafas (b) 4 garrafas (c) 5 garrafas (d) 8 garrafas

Exercício 8

Margarida comprou arroz a R\$ 2,00/kg e o feijão a R\$ 3,00/kg em um supermercado, pagando R\$ 13,00. Na feirinha do seu Joaquim o arroz teria custado R\$ 3,00/kg e o feijão R\$ 2,00/kg, pagando R\$ 17,00 no total.

Quantos quilogramas foram comprados?

- (a) 6kg (b) 7kg (c) 8kg (d) 9kg

Exercício 9

Um tomate e um pepino pesam juntos 150g. Para fazer o equilíbrio da balança é preciso colocar 2 tomates de um lado e um pepino do outro.

Quantos quilogramas possui um tomate?

- (a) 65g (b) 60g (c) 55g (d) 50g

Exercício 10

Um motorista quer fazer uma viagem de 780 km em duas etapas, de modo que na primeira etapa percorra 60km a mais que na segunda.

Quantos quilômetros ele deverá percorrer na segunda etapa?

- (a) 360km (b) 380km (c) 400km (d) 420km

Exercício 11

Duas vacas e um touro foram trocados por oito porcos. Em outra ocasião, uma vaca foi trocada por um touro e um porco. De acordo com a regra desses dois "negócios", uma vaca deve ser trocada por quantos porcos?

Exercício 12

Ao organizar uma festa Paulinho decidiu organizar os convidados em mesas com 3 e 4 cadeiras. Na festa tinham 50 pessoas e foram ocupadas 15 mesas. Qual o número de pessoas que ocuparam mesas com 3 cadeiras?

Exercício 13

Júnior e Luís jogam no mesmo time de futebol de areia. No último campeonato, os dois juntos marcaram 52 gols. Júnior marcou 10 gols a mais que Luís. Quantos gols Júnior marcou nesse campeonato?

Exercício 14

A Adriana é a irmã mais velha do Claudio. A diferença entre as idades dos dois irmãos é de 5 anos e a sua soma é 35 anos. Qual a idade do Claudio?

Exercício 15

Numa colônia de férias há quartos de 4 e 8 camas. O número de quartos é 80 e o de camas é 360. Qual o número de quartos há de cada tipo?

Gabarito

Exercício 1

A **B** **C** **D**
☐ ☐ ☐ ☒

Exercício 2

A **B** **C** **D**
☒ ☐ ☐ ☐

Exercício 3

A **B** **C** **D**
☐ ☒ ☐ ☐

Exercício 4

A **B** **C** **D**
☐ ☐ ☐ ☒

Exercício 5

A **B** **C** **D**
☐ ☒ ☐ ☐

Exercício 6

A **B** **C** **D**
☐ ☐ ☐ ☒

Exercício 7

A **B** **C** **D**
☐ ☐ ☒ ☐

Exercício 8

A **B** **C** **D**
☒ ☐ ☐ ☐

Exercício 9

A **B** **C** **D**
☐ ☐ ☐ ☒

Exercício 10

A **B** **C** **D**
☒ ☐ ☐ ☐

Exercício 11

Uma vaca pode ser trocada por 3 porcos.

Exercício 12

30 pessoas.

Exercício 13

31 gols.

Exercício 14

15 anos.

Exercício 15

70 quartos de 4 camas e 10 quartos de 8 camas



