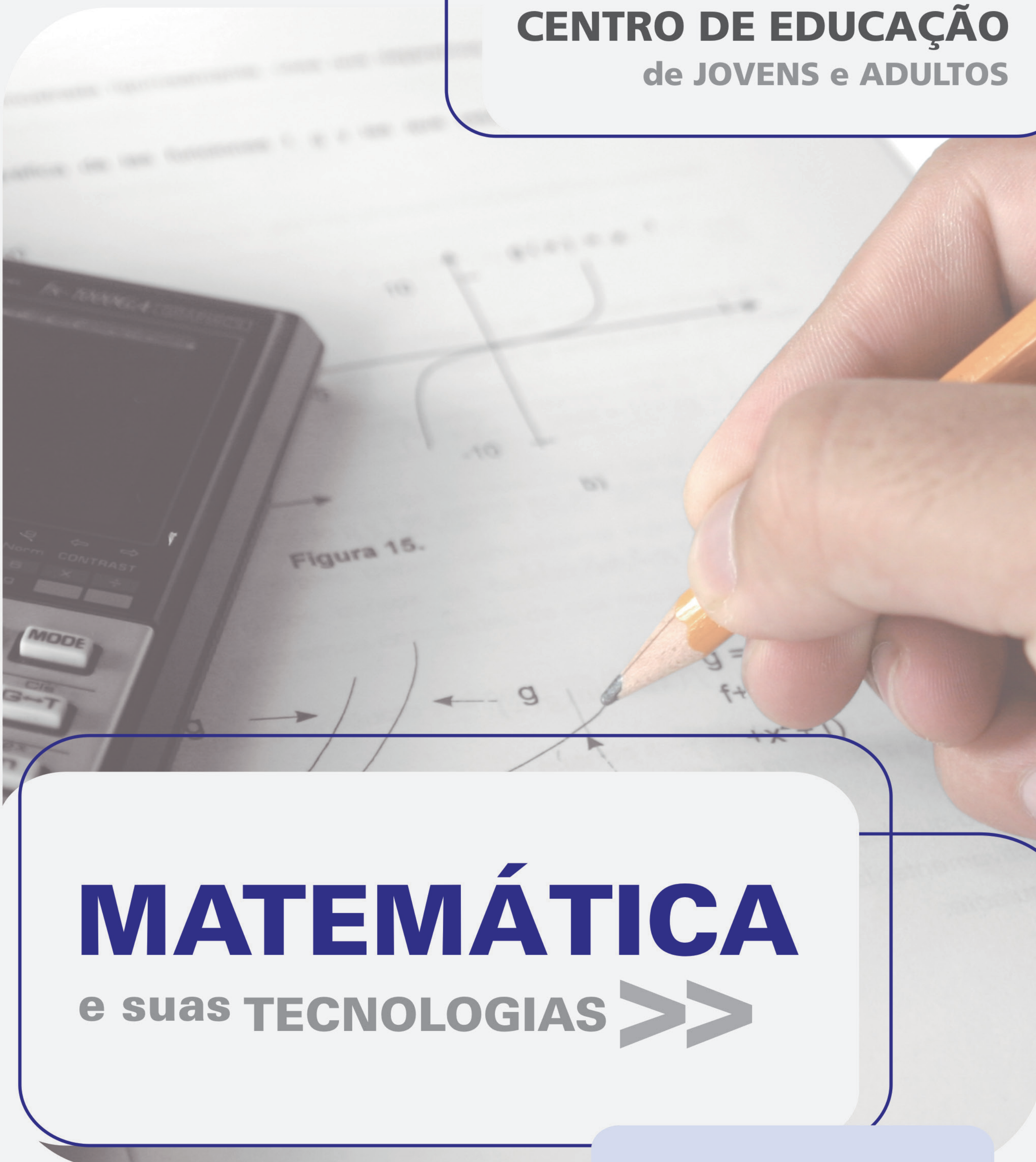
CEJA >>

CENTRO DE EDUCAÇÃO
de JOVENS e ADULTOS



MATEMÁTICA

e suas TECNOLOGIAS >>

Fascículo 4
Unidades 11, 12 e 13

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Governador
Wilson Witzel

Vice-Governador
Claudio Castro

SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO

Secretário de Estado
Leonardo Rodrigues

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO

Secretário de Estado
Pedro Fernandes

FUNDAÇÃO CECIERJ

Presidente
Gilson Rodrigues

PRODUÇÃO DO MATERIAL CEJA (CECIERJ)

Coordenação Geral de Design Instrucional
Cristine Costa Barreto

Coordenação de Matemática
Agnaldo da C. Esquincalha
Gisela M. da F. Pinto
Heitor B. L. de Oliveira

Revisão de conteúdo
José Roberto Julianelli
Luciana Getirana de Santana

Elaboração
Cléa Rubinstein
Daniel Portinha Alves
Heitor B. L. de Oliveira
Leonardo Andrade da Silva
Luciane de P. M. Coutinho
Maria Auxiliadora Vilela Paiva
Raphael Alcaires de Carvalho
Rony C. O. Freitas
Thiago Maciel de Oliveira

Atividade Extra
Benaia Sobreira de Jesus Lima
Carla Fernandes e Souza
Diego Mota Lima
Paula Andréa Prata Ferreira
Vanessa de Albuquerque

Coordenação de Design Instrucional
Flávia Busnardo
Paulo Miranda

Design Instrucional
Rommulo Barreiro
Letícia Terreri

Revisão de Língua Portuguesa
Paulo Cesar Alves

Coordenação de Produção
Fábio Rapello Alencar

Capa
André Guimarães de Souza

Projeto Gráfico
Andreia Villar

Imagem da Capa e da Abertura das Unidades
http://www.sxc.hu/
photo/789420

Diagramação
Equipe Cederj

Ilustração
Bianca Giacomelli
Clara Gomes
Fernado Romeiro
Jefferson Caçador
Sami Souza

Produção Gráfica
Verônica Paranhos

Sumário

Prezado(a) Aluno(a),

Seja bem-vindo a uma nova etapa da sua formação. Estamos aqui para auxiliá-lo numa jornada rumo ao aprendizado e conhecimento.

Você está recebendo o material didático impresso para acompanhamento de seus estudos, contendo as informações necessárias para seu aprendizado e avaliação, exercício de desenvolvimento e fixação dos conteúdos.

Além dele, disponibilizamos também, na sala de disciplina do CEJA Virtual, outros materiais que podem auxiliar na sua aprendizagem.

O CEJA Virtual é o Ambiente virtual de aprendizagem (AVA) do CEJA. É um espaço disponibilizado em um site da internet onde é possível encontrar diversos tipos de materiais como vídeos, animações, textos, listas de exercício, exercícios interativos, simuladores, etc. Além disso, também existem algumas ferramentas de comunicação como chats, fóruns.

Você também pode postar as suas dúvidas nos fóruns de dúvida. Lembre-se que o fórum não é uma ferramenta síncrona, ou seja, seu professor pode não estar online no momento em que você postar seu questionamento, mas assim que possível irá retornar com uma resposta para você.

Para acessar o CEJA Virtual da sua unidade, basta digitar no seu navegador de internet o seguinte endereço: http://cejarj.cecierj.edu.br/ava

Utilize o seu número de matrícula da carteirinha do sistema de controle acadêmico para entrar no ambiente. Basta digitá-lo nos campos "nome de usuário" e "senha".

Feito isso, clique no botão "Acesso". Então, escolha a sala da disciplina que você está estudando. Atenção! Para algumas disciplinas, você precisará verificar o número do fascículo que tem em mãos e acessar a sala correspondente a ele.

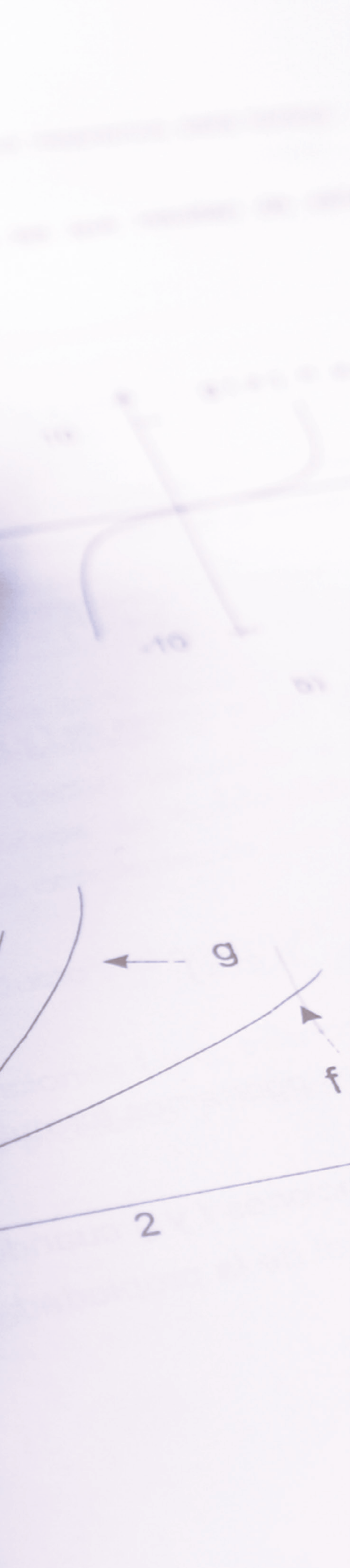
Bons estudos!

Conjuntos

Fascículo 4

Unidade 11

Fundação CECIERJ



Conjuntos

Para início de conversa...

Na canção Oração ao tempo, o compositor e cantor baiano Caetano Veloso conversa com o tempo, negociando com ele melhores formas de aproveitamento do tempo e pedindo auxílio para não gastar tempo sem que este gasto retorne em benefícios, alegrias e prazeres. Você conhece essa música? Não? Então aproveite: por ocasião dos seus 70 anos, comemorados em 2012, Caetano Veloso disponibilizou todas as suas canções em seu site oficial, http://www.caetanoveloso.com.br/discografia.php.

Ah, o tempo... Você tem a sensação de que os dias têm passado cada vez mais rápido? Os meses parecem quinzenas, as quinzenas parecem semanas, as semanas passam com uma velocidade assustadora! Hoje é sexta-feira e temos a sensação de que ontem foi... segunda-feira! O que estaria acontecendo? Estariam os relógios realmente acelerando seus ponteiros?

Saiba Mais

Alguns cientistas estudam e debatem sobre esse tema... No link http://super.abril.com.br/cotidiano/tempo-cada-vez-mais-acelerado-445560.shtml, você vai encontrar alguns comentários muito interessantes sobre isso, se puder, acesse e leia, vale a pena!

Bem, provavelmente, esta sensação de aceleração do tempo deve-se à grande quantidade de atribuições e encargos a que temos tido nos últimos tempos. Temos agora de encontrar tempo para gerenciar emprego, família, para retomar os estudos e, é claro, também para algum tipo de lazer. Antigamente, não era assim. Nossos avós dividiam-se unicamente entre um emprego – normalmente suficiente – e a família.

Para sobrevivermos no meio do corre-corre do mundo moderno, em um mar de apetrechos tecnológicos irresistíveis, precisamos aprender a nos organizar, agrupando atividades que possam ser feitas mais ou menos ao mesmo tempo. Um dos segredos para conseguirmos isso, consiste na organização das tarefas, dividindo-as ao longo do nosso dia, por exemplo: tarefas de trabalho, tarefas domésticas, tarefas sociais e tarefas de estudo.

Figura 1: Representação de atividades cotidianas.

Analise sua vida diária e observe que muitas atividades podem ser feitas juntas. Por exemplo. Vamos observar a seguinte lista de compras descrita abaixo:

Inicialmente é necessário produzir a lista de produtos. Assim, ordenadamente, verificamos em casa quais produtos são necessários e os ordenamos obedecendo uma sequencia, por exemplo: carnes, cereais, frios, artigos de hortifruti, material de limpeza, material de higiene pessoal, etc.

Lista de compras

Refrigerante
Detergente
Sabão em pó
Atum sólido
Leite em caixa
Inseticida em spray
Óleo de soja
Creolina
Leite em pó
Leite de soja com fruta
Sabão líquido
Iogurte 1l

É fácil perceber que os supermercados disponibilizam os produtos dividindo-os por setor, ou seja, para efetuarmos a compra de maneira ordenada, basta buscar em cada setor o grupo de produtos de uma única vez, isto é, os elementos que são comuns a cada setor. Por exemplo, ao comprarmos iogurte iremos diretamente na sessão de laticínio. Ao finalizarmos as compras, também podemos arrumar os produtos em sacolas de forma a facilitar a arrumação ao chegarmos em casa. Uma bolsa para os produtos de geladeira, outra para bebidas e assim por diante.

Assim como em nosso cotidiano, em Matemática, há muitas coisas para serem estudadas... Para facilitar esse estudo e para organizar os seus objetos, ela também é organizada dessa mesma forma: em categorias e buscando as relações entre elas. Nesta aula, vamos estudar exatamente isso!

Objetivos de Aprendizagem

- Reconhecer conjuntos e elementos, e definir relações de pertinência e inclusão.
- Resolver problemas envolvendo propriedades e operações com conjuntos.
- Representar subconjuntos dos números reais e realizar operações com eles.

Seção 1
Conjuntos e elementos

Está ou não está? PERTENCE OU NÃO PERTENCE ?

Figura 2: Situações onde se expressa a presença de conjunto.

Alunos em uma sala de aula, as frutas em um cesto, livros em uma biblioteca... Podemos identificar nestas imagens situações onde elementos estão organizados em conjuntos: os alunos são elementos do conjunto turma; as frutas são elementos do conjunto cesto; os livros são elementos do conjunto biblioteca.

Os elementos matemáticos (como números ou figuras) são agrupados, segundo características que eles têm de parecidos uns com os outros, formando também conjuntos.

Mas como podemos identificar esses conjuntos em nossas anotações? Faça isso em seu caderno! Como você organizou esses conjuntos?

Se conversar com os seus companheiros de estudo, você provavelmente vai perceber que cada um representou esses conjuntos de uma forma diferente. Para padronizar estes registros, existem algumas regras que seguimos. Veja!

Importante

Quando vamos dar nome a um conjunto em Matemática, usamos uma letra maiúscula do nosso alfabeto, pois dessa forma torna-se mais simples nos referirmos a ele. Também para representar elementos dos conjuntos, quando estes não são numéricos, utilizamos letras minúsculas do nosso alfabeto.

Agora pode ficar mais fácil. Podemos então, se retomarmos as imagens que iniciam esta seção, falar do conjunto T dos alunos da turma, do conjunto L dos livros de uma biblioteca e do conjunto F das frutas contidas no cesto.

Vamos nos concentrar no conjunto F. Que frutas você vê em F? Há bananas? E abacates? E uvas? Bem, pelo que visualizamos não há abacates em F, mas banana e uva sim. Podemos dizer então que banana pertence ao conjunto F, assim como uva pertence ao conjunto F, mas por outro lado, abacate não pertence ao conjunto F. Na Matemática utilizamos uma linguagem própria para estas representações. Observe a seguir!

Importante

Na Matemática utilizamos o símbolo $\in$ para indicar que um elemento está em um conjunto. Lemos como **pertence**. Se um elemento não está em um conjunto, então dizemos que ele **não pertence** ao conjunto e representamos matematicamente esta ideia com o símbolo $\notin$.

Desta forma, representando a fruta banana pela letra b, podemos escrever que a banana pertence ao conjunto das frutas como $b \in F$, de mesma forma, representando a fruta abacate pela letra a, teremos $a \notin F$.

Se chamarmos de B ao conjunto biblioteca, teremos cada livro como um elemento deste conjunto. Podemos chamar o livro de história de h, assim, $h \in B$.

Vamos aplicar essas ideias ao que conversamos anteriormente? Utilizando os símbolos $\in$ e $\notin$, vamos relacionar os elementos a, b, u e h com os conjuntos F, B, T.

Atividade 1

Vamos reescrever o que dissemos anteriormente, mas agora utilizando os símbolos $\in$ e $\notin$ e a notação matemática de letras maiúsculas para conjuntos e minúsciulas para elementos.

a. a______F

b. u______T

c. h______B

d. b______F

e. u______F

f. u ______B

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 2

Agora vamos fazer o contrário. A partir da linguagem simbólica da matemática, você deve escrever a sentença na linguagem coloquial.

a. $h \in B$

b. $a \notin T$

c. $u \notin T$

d. $b \in F$

Anote suas respostas em seu caderno

Imagine agora que três amigos desejam utilizar as frutas para fazer diferentes tipos de suco. Cada um prefere um sabor diferente e para isso, pode ser feita uma combinação de frutas. Por exemplo, Bianca quer um suco de laranja com morangos, já Guilherme prefere um suco de abacaxi, laranja e maçã; Melissa no entanto, prefere de laranja, morango e banana. É possível atender a todos os pedidos?

Obviamente a resposta é não. Bianca vai conseguir tomar o seu suco, pois as frutas que ela deseja são elementos do conjunto F. Melissa também vai ter o seu desejo atendido, porque laranja e banana também são elementos de F. Entretanto, Guilherme terá de escolher outro sabor, visto que não há abacaxi na cesta!

Podemos pensar nos desejos dos amigos como conjuntos também. Se chamarmos de B o conjunto das frutas desejadas por Bianca em seu suco, G o conjunto das frutas desejadas por Guilherme e M o de Melissa, então ficamos com B = {morango, laranja}, G = {laranja, abacaxi, maça} e M = {banana, laranja, morango}. Como podemos observar, nem todos os elementos dos conjuntos de frutas utilizados para fazer os sucos serão elementos do conjunto frutas.

A seguir, veremos uma forma simples de escrevermos isso...

Importante

O símbolo matemático $\subset$ é usado para indicar que TODOS os elementos de um conjunto também são elementos do outro conjunto. Lemos como **está contido**. Se pelo menos um elemento do primeiro conjunto considerado não está no segundo conjunto, então dizemos que o primeiro conjunto **não está contido** no segundo conjunto, e representamos matematicamente esta ideia com o símbolo $\not\subset$.

Atividade 3

Vamos utilizar os símbolos $\subset$ e $\not\subset$ para dizer se um conjunto tem ou não tem todos os seus elementos pertencentes a outro conjunto.

a. B______F

b. M ______ F

c. G ______ F

d. B_____M

e. G ______ M

f. B ______G

Anote suas respostas em seu caderno

Uma parte ou um subconjunto de um conjunto dado, é outro conjunto que tem todos os seus elementos pertencentes ao primeiro conjunto. Isso significa que quando usamos o símbolos $\subset$ para associar dois conjuntos, estamos afirmando ao mesmo tempo que o primeiro conjunto é subconjunto (ou é uma parte) do segundo conjunto, pois tem todos os seus elementos pertencentes ao segundo.

Importante

Usando estas ideias com os sucos das meninas, podemos dizer que $B \subset F$ e $M \subset F$, mas $G \subset F$. Ou ainda, de outra forma, B e M são subconjuntos de F, mas G não é.

Atividade 4

Na estante de uma biblioteca se encontram livros de História, Matemática, Geografia, Língua Portuguesa, Química e Biologia. Os alunos formam grupos de estudos de acordo com a distribuição.

Grupo A estudará Química , Física e Biologia

Grupo B estudará Língua Portuguesa, Matemática, História

Grupo C estudará Geografia, Matemática

Sendo o conjunto dos livros da Estante da Biblioteca denominado por U, verifique as afirmações a seguir colocando V para Verdadeiro ou F para Falso. Justifique cada decisão:

a. $A \not\subset U$ (   )

b. $B \subset U$ (   )

c. $C \subset B$ (   )

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 5

Em uma lanchonete o painel demonstrativo apresenta 4 tipos de sanduíches, duas opções de bebida e duas de acompanhamento. Construa conjuntos relacionando todos os tipos possíveis de lanches, levando em conta que cada escolha obrigatoriamente terá um sanduíche, uma bebida e uma opção de acompanhamento. Todos os lanches deverão ser formados pelos elementos contidos nas opções apresentadas no painel da lanchonete.

Anote suas respostas em seu caderno

Como escrever conjuntos?

Já conversamos sobre as ideias de conjuntos e sobre alguns símbolos que utilizamos para representar mais facilmente estas ideias. Muitas vezes, precisamos escrever um conjunto. É claro que podemos sempre usar os recursos utilizados até agora nesta aula, entretanto, nem sempre é assim algo tão simples.

Utilizar figuras é um recurso muitas vezes interessante para visualizar, principalmente, as relações entre os conjuntos – que conjuntos estão inteiramente ou parcialmente dentro de outros. Para isto, utilizamos uma representação por diagrama.

Um diagrama representa um conjunto em Matemática, quando ele é uma região fechada simples, delimitada por uma linha, em um plano considerado. Dentro dessa região estão os elementos do conjunto representado; fora dela, estão os elementos que não pertencem a este conjunto.

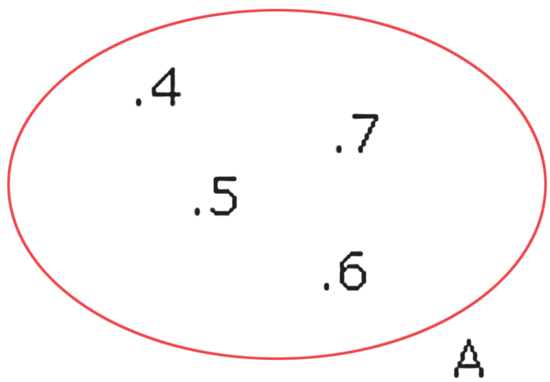
Importante

É comum haver situações em que a utilização de diagramas não seja a forma mais prática de representação. As relações entre conjuntos eventualmente tornam-se mais difíceis de serem representadas por desenhos.

Para auxiliar nessa tarefa, há outras duas formas de representação de conjuntos, que utilizam o símbolo matemático, conhecido como chaves – { }. As chaves trazem entre si todos os elementos do conjunto que representam.

Estes elementos podem vir descritos um a um (ou indicados) ou ainda podemos destacar uma propriedade que seja comum a todos os elementos que pertencem ao conjunto.

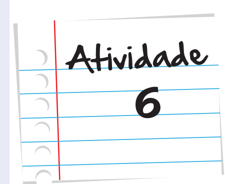
Pense no conjunto A dos números naturais maiores que 3 e menores que 8, podemos representar assim esse conjunto:



A = {4, 5, 6, 7}

A = {Números naturais entre 3 e 8}

Vamos ver outro exemplo?



Vamos representar por chaves, descrevendo os elementos dos conjuntos?

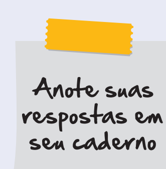
a. Conjunto A das letras da palavra MATE

b. Conjunto B das letras da palavra CONJUNTO

c. Conjunto C dos números naturais menores que 10 e maiores que 1

d. Conjunto D dos números naturais maiores que 10

e. Conjunto E dos números negativos compreendidos entre 2 e 4



Quantos elementos possui cada um dos conjuntos que você escreveu na Atividade 7? Bem, o primeiro conjunto tem 4 elementos, que são as letras m, a, t, e. E o segundo conjunto, quantos elementos tem? Podem surgir dúvidas entre 8 ou 6 elementos... E sabe o que vai nos auxiliar nesta tarefa? A informação de que: Não repetimos elementos iguais em um conjunto.

Importante

Nos conjuntos os elementos iguais não se repetem.

Ah, agora ficou fácil. Isso quer dizer que o conjunto B é formado pelos elementos c, o, n, j, u e t, ou seja, ele tem 6 elementos.

E o conjunto C, quantos elementos tem? Você saberia responder? Sem problemas, são os números 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, ou seja, são 8 elementos. Entretanto, o conjunto D, quantos elementos tem? Sabemos que ele tem o 11, o 12, o 13, o 200, o 1000... Mas quantos elementos ele tem?

Ah, não foi possível contar, não é mesmo? E sabe por que não conseguimos contar quantos elementos existem no conjunto D? Porque ele é um conjunto que contém uma quantidade infinita de elementos. Os conjuntos que tem esta característica são chamados de **conjuntos infinitos**.

E o conjunto E, quantos elementos ele tem? Responder a essa pergunta significa pensar em quantos são os números negativos que existem entre 2 e 4. Mas... há números negativos entre 2 e 4? Não! Ora, então esse conjunto não tem elementos! Esse conjunto é chamado **de vazio**!

Importante

Um conjunto é vazio, quando não possui elementos. Podemos representar o conjunto vazio pela simbologia { }. Isso mesmo, chaves sem elemento algum, ou ainda através do símbol Ø.

Nunca escreva E={Ø}, esse conjunto não é vazio, pois é um conjunto que possui como único elemento um outro conjunto, que por sua vez é vazio.

Esse conceito (de conjunto infinito) é bastante difícil... Mas para nós, basta sabermos reconhecer quando o conjunto é infinito ou não. Quer ver um exemplo? Pense nos conjuntos M dos números naturais entre 2 e 10000 e o conjunto N dos números naturais maiores que 2. Vamos escrevê-los entre chaves.

M = {3, 4, 5, 6, 7, ..., 9998, 9999}

N = {3, 4, 5, 6, 7, ...}

Vamos pegar um subconjunto de M, por exemplo M1 = {4,5,6,7,...,9999}. Note que se fizermos uma correspondência entre os elementos dos dois conjuntos, teremos M1 com um elemento a menos que M. Isto não acontece com N. Se tomarmos N1 = {4,5,6,7,...}, poderemos relacionar os elementos de ambos os conjuntos e teremos uma correspondência para todos os elementos. Isto caracteriza um conjunto infinito.

Quer saber mais sobre o infinito? Acesse o Youtube e assista ao vídeo "Os Infinitos de Cantor", da série da Unicamp, intitulada Matemática Multimídia. Você poderá encontrá-lo, acessando a Internet com o link http://www.youtube.com/watch?v=f1Ak-6vMVpg em seu navegador. Assista, vale a pena!

Saiba Mais

Falamos bastante em quantidade de elementos de um conjunto. Como fazer esta representação. Bem, podemos utilizar duas formas para isto. Vamos utilizar exemplos da atividade 6.

Conjunto A das letras da palavra MATE. Este conjunto pode ser escrito como A = {m,a,t,e}, logo o número de elementos pode ser representado por #A = 4 ou n(A) = 4

Conjunto B das letras da palavra CONJUNTO. Teremos B={c,o,n,j,u,t}, assim, #B = 6 ou n(B) = 6

Conjunto E dos números negativos compreendidos entre 2 e 4, teremos #E = 0 ou n(E) = 0

No caso do conjunto ser infinito, não é possível definir sua cardinalidade, ou seja, o seu número de elementos.

Ainda sobre os conjuntos, é preciso destacar a ideia de subconjuntos de um conjunto.

O conjunto das partes de um conjunto dado é o conjunto formado por todos os possíveis subconjuntos do conjunto considerado.

Importante

Vamos tomar como exemplo o conjunto A da atividade 6. A={m,a,t,e}. A partir deste conjunto, podemos formar vários subconjuntos. Coloquemos em ordem:

Subconjunto com zero elementos: { }

Subconjuntos com 1 elemento: {m}, {a}, {t}, {e}

Subconjuntos com 2 elementos: (m,a}, {m,t}, {m,e}, {a,t}, {a,e}, {t,e}

Subconjuntos com 3 elementos: (m,a,t}, {m,a,e}, {m,t,e}, {a,t,e}

Subconjunto com 4 elementos: (m,a,t,e}

Se juntarmos todos estes subconjuntos, formaremos um conjunto denominado conjunto das partes de A. Vamos fazer sua representação da seguinte forma:

P(A)={{ }, {m}, {a}, {t}, {e}, (m,a}, {m,t}, {m,e}, {a,t}, {a,e}, {t,e}, (m,a,t}, {m,a,e}, {m,t,e}, {a,t,e}, {m,a,t,e}}

O número de partes de um conjunto é dado por 2^n, onde n é o número de elementos do conjunto.

Observe que nesse exemplo, o conjunto A tem 4 elementos, e o conjunto das partes de A possui $2^4 = 16$ elementos, que são todos os possíveis subconjuntos de A!

Importante

O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.
Todo conjunto é subconjunto de si próprio.

Atividade 7

No conjunto M das letras da palavra PAI, qual o conjunto das partes de M? Relacione todos os subconjuntos.

Anote suas respostas em seu caderno

Operações com Conjuntos

Você lembra da nossa lista de compras utilizada inicialmente? Vamos usá-la como exemplo para darmos continuidade ao nosso estudo. Vamos aprender sobre as operações que podem ser realizadas entre conjuntos.

Quando arrumamos as compras na despensa é preciso organização. Não podemos guardar alimentos com produtos de limpeza, cada produto tem seu local certo para ser armazenado. É preciso então uma maneira que facilite o trabalho. Fica muito mais fácil encontrar as coisas, quando elas estão bem organizadas...

Pois é, nessa organização podemos agrupar os itens conforme características que eles têm, seja quanto ao tipo de embalagem, seja quanto ao tipo de produto contido nestas embalagens. Por exemplo, quanto ao tipo de embalagem, podemos estabelecer algumas categorias, como latas ou caixas; em relação aos tipos de produtos comprados, podemos organizar em alimentos ou limpeza.

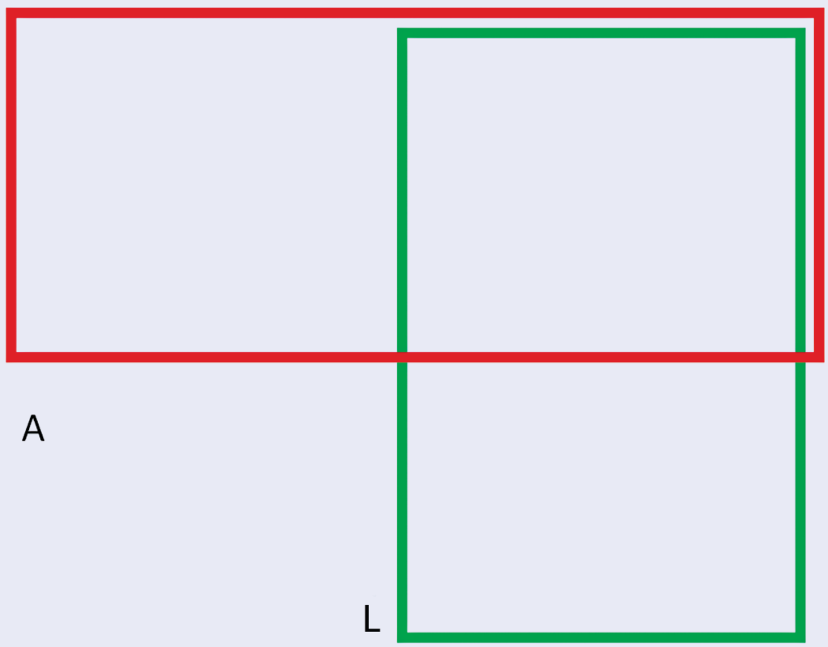
Vamos lembrar os itens das últimas compras:

Lista de compras

Refrigerante 2L
Detergente
Sabão em pó
Atum sólido
Leite em caixa
Inseticida em spray
Óleo de soja
Creolina
Leite em pó
Leite de soja com fruta
Sabão líquido
Iogurte 1L

Atividade 8

A imagem abaixo representa uma prateleira da despensa onde serão colocados os artigos adquiridos na última compra. Na região de cor vermelha (A), vamos colocar apenas os alimentos comprados no supermercado e na região de cor verde, arrumaremos os produtos embalados em lata (T). Reproduza esta figura no seu caderno e arrume os produtos comprados. A seguir, responda às perguntas propostas abaixo, também em seu caderno!



a. Você conseguiu arrumar todas as compras nestas prateleiras?

b. Que produtos ficaram na prateleira A dos alimentos?

c. Que produtos ficaram na prateleira L das latas?

d. Que produtos ficaram nas duas prateleiras juntas?

e. Que produtos ficaram de fora dessas prateleiras?

Anote suas respostas em seu caderno

Vamos organizar as compras da seguinte forma: no conjunto A dos alimentos, L de limpeza, C dos produtos embalados em caixas e T dos produtos embalados em latas. Escreva no seu caderno os conjuntos A, L, C e T, representando seus elementos entre chaves.

Depois de ter feito isso, responda também em seu caderno às perguntas propostas abaixo. Atenção, não escreva neste material!

Atividade 9

a. Se juntarmos os produtos dos conjuntos A e C, que produtos teremos?

b. Há produtos que estejam ao mesmo tempo em A e C? Quais são eles?

c. Juntando L e C, que produtos encontramos?

d. Há produtos que estejam ao mesmo tempo em L e T?

e. Juntando A e L, que produtos obtemos?

f. Há produtos que estejam em C e T simultaneamente?

Anote suas respostas em seu caderno

Importante

Usamos o símbolo de $\cup$ (união) para representar o ato de juntar os elementos de dois conjuntos. Assim, se temos dois conjuntos A e B, o conjunto $A \cup B$ é o conjunto formado pelos elementos que estão em A ou estão em B.

O símbolo $\cap$ (intersecção) é usado para representar os elementos que estão ao mesmo tempo em dois conjuntos. Isso quer dizer que, se temos dois conjuntos A e B, o conjunto $A \cap B$ é o conjunto formado pelos elementos que estão em A e também estão em B.

Vamos fazer mais uma atividade envolvendo as operações entre conjuntos em que utilizaremos os símbolos $\cup$ e $\cap$?

Atividade 10

Você se lembra da copa do mundo de 2006? Que países participaram dessa copa? Nossa, não tem muito tempo, mas já ficou tão distante!

A seguir, colocamos uma tabela identificando esses países.

Equipes participantes			
Alemanha	Costa Rica	Irã	República Checa
Angola	Croácia	Itália	Sérvia e Montenegro
Arábia Saudita	Equador	Japão	Suécia
Argentina	Espanha	México	Suíça
Austrália	Estados Unidos	Holanda	Trinidad e Tobago
Brasil	França	Paraguai	Togo
Coreia do Sul	Gana	Polônia	Tunísia
Costa do Marfim	Inglaterra	Portugal	Ucrânia

Figura 5: países participantes da Copa da FIFA 2006.

E em 2010? Está mais recente! Vamos ver quais foram os países?

África do Sul	Austrália	Argélia	Dinamarca
Brasil	Japão	Camarões	França
Espanha	Coreia do Norte	Costa do Marfim	Grécia
Países Baixos	Coreia do Sul	Gana	Portugal
Itália	Honduras	Nigéria	Sérvia
Alemanha	México	Chile	Eslováquia
Argentina	Estados Unidos	Paraguai	Eslovénia
Inglaterra	Nova Zelândia	Uruguai	Suíça

Figura 6: países participantes da Copa da FIFA 2010.

Atividade 10

Pense em dois conjuntos: o conjunto S (de seis), com as seleções sul-americanas que participaram da copa de 2006 e o conjunto D (de dez) com as seleções sul-americanas, participantes da copa de 2010. Atenção, não escreva neste material!

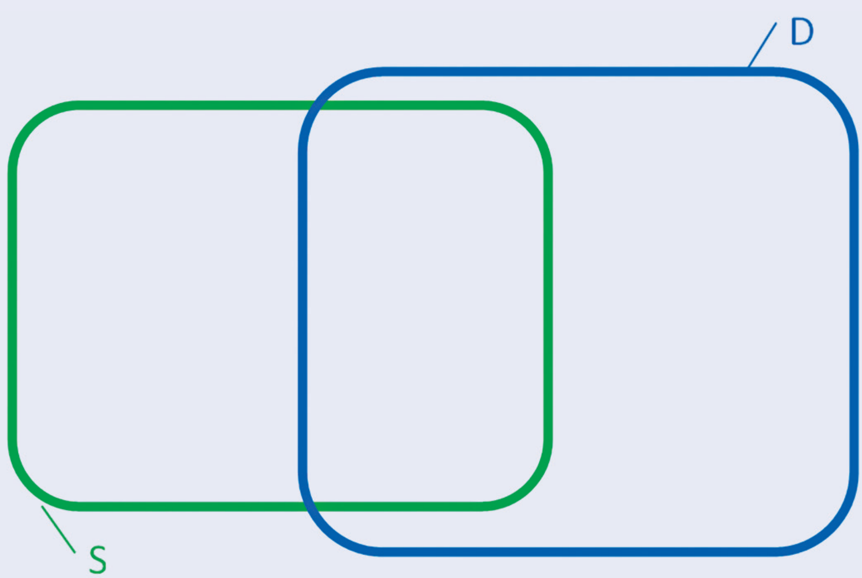
a. Quantas seleções existem no conjunto S? E no conjunto D?

b. Que seleções sul-americanas participaram das duas edições da copa do mundo de 2006 e de 2010? Represente esse conjunto (vamos chamá-lo de E) como uma operação entre os conjuntos S e D. Quantos elementos existem em E?

c. Quando listarmos as seleções sul-americanas que participaram de pelo menos uma das duas últimas copas do mundo, que seleções seriam estas? Escreva-as no conjunto T.

d. Represente T como uma operação entre os conjuntos S e D. Quantos elementos há em T?

e. Agora, copie o diagrama abaixo em seu caderno e represente essas seleções no seu diagrama.



Anote suas respostas em seu caderno

Importante

A diferença entre dois conjuntos é a operação que resulta nos elementos que pertencem ao primeiro conjunto e não pertencem ao segundo conjunto. Representaremos a diferença entre dois conjuntos utilizando o sinal de menos (-). Assim, se tomarmos dois conjuntos A e B, A-B será o conjunto dos elementos que estão em A e não estão em B.

Atividade 11

Vamos retomar a atividade 11 e responder alguns itens adicionais! Anote as respostas em seu caderno.

a. Quais seriam as seleções que integrariam o conjunto S - D?

b. Que seleções estão no conjunto D – S?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 12

Vamos usar novamente os conjuntos A dos alimentos, L de limpeza, C dos produtos embalados em caixas e T dos produtos embalados em latas que vimos na atividade 9? Com base no que você fez naquela atividade, responda em seu caderno aos itens propostos abaixo!

a. Que elementos estão no conjunto resultante de A – L?

b. Que elementos estão no conjunto resultante de L – A?

c. Que elementos estão no conjunto resultante de C – A?

d. Usando a operação diferença entre conjuntos, represente o conjunto que contém os produtos de limpeza que não estão acondicionados em latas.

e. Novamente, usando a operação diferença entre conjuntos, represente o conjunto que contém os produtos acondicionados em caixas que não podem ser ingeridos como alimentos.

Anote suas respostas em seu caderno

Vamos praticar mais um pouco?

Atividade 13

Foi feita uma entrevista com alunos de uma determinada escola. Descobriu-se que o número de alunos que leem jornal é 40 e que 45 alunos leem revistas, sendo que 25 leem jornal e revista. Sabe-se ainda que 24 alunos não leem nem jornal e nem revista. Qual o total de alunos entrevistados?

Anote suas respostas em seu caderno

Conjuntos Numéricos

Quantos números você conhece? Pra que a gente estuda Matemática? Números só existem pra complicar a vida do aluno na escola? Quem foi que inventou a Matemática? Não tinha nada melhor pra fazer?

Quantas vezes você já pensou nisso? Aposto que muitas... Mas você quer ter uma ideia da importância dos números na nossa vida cotidiana? Sua carteira de identidade é um número, seu título de eleitor é um número. Para ser motorista é necessária uma carteira com número – e carro tem chapa, que é número, também! Sua casa, seu prédio, seu apartamento, seu celular, sua certidão de nascimento, seu CPF, seu registro no Imposto de Renda – e, se for empresário, vai pelo mesmo caminho: o CNPJ, o alvará de localização, o faturamento - tudo é número! Estas situações – e muitas outras – foram retiradas da crônica "Você é um número", (disponível em http://matematicacalculoetc.blogspot.com.br/2012/03/voce-e-um-numero-voce-e-um-numero.html) uma das muitas que a escritora Clarice Lispector escreveu para o Jornal do Brasil, entre os anos de 1967 e 1973. Estas crônicas foram reunidas e publicadas no livro "A descoberta do mundo", publicado em 1984 pela editora Rocco. O argumento da autora é que os números estão tão presentes na nossa vida que se você não tomar cuidado, vira um número até para si mesmo.

Importante

Clarice Lispector é uma das escritoras de maior expressão em nosso país. Autora de obras variadas, como A Hora da Estrela ou Felicidade Clandestina, dedicou-se à escrita e à publicação de obras literárias também voltadas para o público infantil e adolescente. Quer saber mais? Acesse: http://matematicacalculoetc.blogspot.com.br/2012/03/voce-e-um-numero-voce-e-um-numero.html

Você concorda com a sua afirmação de que somos números? Como você se posiciona em relação a isso? Isso é bom ou ruim? Por que os números são usados para rotular pessoas, como a autora afirma?

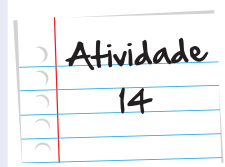
Tente pensar em sua vida sem os números. Seu dia a dia ficaria mais simples? Como você compraria pão, por exemplo? Como você pediria ao atendente na padaria? E como o padeiro poderia fazer sempre o mesmo pão, fresquinho, crocante por fora e macio por dentro, ficando o mesmo tempo no forno para não queimar... Isso é difícil!

A organização em conjuntos também foi proposta aos números para que pudessem ser agrupados segundo propriedades que pudessem atender às operações de adição e de multiplicação, realizadas entre eles. As categorias de números são nossas velhas conhecidas: naturais, inteiros, racionais e irracionais e, englobando todos, os números reais e os complexos, que somente ao final deste curso você irá estudar.

Números Naturais

Os números naturais são aqueles que representam quantidades, atendendo a uma necessidade humana de contar objetos. Especificamente, os números naturais são os que resultam de um processo de contagem: 1, 2, 3... E esse é um processo que nunca acaba e sobre o qual desde crianças sempre refletimos, quando fazemos o questionamento: qual é o maior de todos os números?

Muitas vezes, para as crianças, esta é uma pergunta cuja resposta é simples: 100, 100000 ou ainda 10000000000 seriam possivelmente algumas das respostas dadas por elas. Mas não é difícil convencer mesmo uma criança de que "o maior de todos os números" na verdade não existe. Mesmo o 10000000000, quando somamos a ele 1 unidade, obtemos 10000000001, que é maior que 10000000000... Não conseguimos então pensar ou responder qual é o maior de todos os números.



O conjunto dos números naturais tem infinitos elementos, que é o que chamamos de infinito contável. Dentro do conjunto dos números naturais, podemos encontrar vários subconjuntos infinitos também. Observe a tabela abaixo. Ela mostra alguns desses subconjuntos.

Tabela: Subconjuntos infinitos dos números naturais

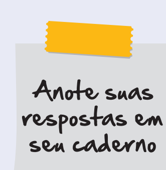
N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
2n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	...
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	...
n^n	1	4	27	256	3125	46656	823543	16777216	387420489	10000000000	285311670611	...

Agora responda em seu caderno às seguintes questões:

a. Que elementos estão representados na primeira linha da tabela? E na segunda linha? E na terceira? E na quarta?

b. Se prosseguirmos na primeira linha desta tabela infinitamente, seguindo todos os números naturais, ela terá mais ou menos elementos que as linhas que estão abaixo dela?

c. Qual das linhas terá, seguindo-as infinitamente, mais elementos?



Importante

O conjunto dos Números Naturais é representado pela letra N. Veja:

ℕ={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,..., 12528, 12529, 12530, ..., 9547258, 9547259, ...}

Números Inteiros

Com o passar dos anos, após o surgimento das relações comerciais e bancárias, o homem viu a necessidade de representar valores monetários de forma oposta, ou seja, o lucro e o prejuízo. Por exemplo, não bastava escrever 5 moedas de ouro, é necessário saber se o comerciante receberia as 5 moedas, ou faria o oposto, pagaria estas 5 moedas. Essa e outras situações dão origem a um novo número: o número negativo.

O conjunto dos números inteiros é uma expansão dos números naturais e englobam todos os números naturais e os **simétricos** ou opostos a eles.

Simétricos

Números simétricos ou opostos são números que têm o mesmo valor absoluto, mas sinais opostos. Por exemplo, -4 e +4 são números simétricos ou opostos.

O conjunto dos números inteiros é representado pela letra Z e compreende os números naturais, os seus simétricos e o zero. Veja:

ℤ = {..., -12547, -12546, ..., -108, -107, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., 107, 108, ... 12546, 12547, ...}

Uma coisa interessante que vale a pena observarmos aqui é que o conjunto dos números naturais é um subconjunto do conjunto dos números inteiros. Ou ainda, simbolicamente, podemos representar isso por $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Importante

A presença do símbolo * (asterisco) ao lado superior direito da letra que simboliza o conjunto, representa que o elemento zero não pertence ao conjunto.

Por exemplo, o conjunto $\mathbb{Z}^*$ não tem o elemento zero.

Números racionais

Os números racionais são todos os números que podem ser escritos na forma de fração. Vamos ver que números são esses?

- Todos os números inteiros podem ser escritos como fração, basta pensarmos em $3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = ... = \frac{36}{12} = ...$ ou em $-7 = \frac{-7}{1} = \frac{-14}{2} = \frac{-21}{3} = ... = \frac{-63}{9} = ...$

- Todos os números decimais com quantidade finita de casas decimais (chamados também de decimais exatos) podem ser escritos como fração. Veja: $0,56 = \frac{56}{100} = \frac{14}{25}$ ou então $13,2 = \frac{132}{10} = \frac{66}{5}$ ou ainda $-0,0053 = -\frac{53}{10000}$

- Todos os decimais com quantidade infinita de casas decimais, mas periódicos (também conhecidos como dízimas periódicas). Vamos lembrar?

a) $0,\overline{2} = 0,22222... = \frac{2}{9}$

b) $-0,\overline{45} = -0,454545... = -\frac{45}{99} = -\frac{5}{11}$

c) $-0,43\overline{2} = -0,43222... = -\frac{389}{90}$

d) $3,2\overline{91} = 3,2919191... = 3 + 0,2919191... = 3 + \frac{289}{990} = \frac{3259}{990}$

O conjunto dos números racionais é representado pela letra $\mathbb{Q}$ e contém todos os números que podem ser escritos como fração. Simbolicamente, esse conjunto pode ser representado dessa forma:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b},\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Vamos compreender isso?

Bem, $\mathbb{Q}$ é a representação para o conjunto dos números racionais. $\frac{a}{b}$ representa uma fração qualquer, com numerador *a* e denominador *b*, portanto, $a \in \mathbb{Z}$ indica que a, ou seja, o numerador da fração, pode ser qualquer número inteiro. Entretanto, $b \in \mathbb{Z}^*$ destaca o fato de que b também pode assumir o valor de qualquer número inteiro que não seja zero.

Importante

É interessante ver que todos os naturais e todos os inteiros também são números racionais. Isso pode ser escrito assim:

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}}$$

Mas será que todos os números podem ser escritos como fração? A resposta é não. E o conjunto dos números que não podem ser escritos como fração, ou seja, dos números que não são racionais, é chamado de conjunto dos números irracionais, que é o que vamos ver no item abaixo.

Números Irracionais

O conjunto dos números irracionais é o conjunto formado por todos os números que não podem ser escritos sob a forma de fração. Sabemos então dizer quais números não são irracionais:

- Nenhum inteiro ou natural é irracional;
- Nenhum decimal exato é irracional;
- Nenhum decimal infinito periódico (dízimas periódicas) é irracional.

Os números irracionais são então números decimais com uma quantidade infinita de casas decimais e sem caráter periódico.

Alguns números irracionais que são muito conhecidos por nós são o π e as raízes não exatas, como $\sqrt{2}$, $-\sqrt[3]{5}$ ou $\sqrt[5]{-10}$. Mas existem outros, por exemplo: 1,01001000100001...; 2,321432517000018526...

O conjunto dos números irracionais é representado por $\overline{Q}$ (em alguns livros, o conjunto dos irracionais é representado por **I**) e pode ser escrito simbolicamente como

$$\overline{\mathbb{Q}} = \{x,\ x \notin \mathbb{Q}\}$$

Essa notação quer dizer exatamente o que escrevemos acima: é irracional o número que não é racional.

Observe que, diferente dos naturais, inteiros e racionais que mantêm entre si uma relação de um estar dentro do outro, para os irracionais isso não acontece. E sabe por quê? Porque $\mathbb{N} \not\subset \overline{Q}$, $\mathbb{Z} \not\subset \overline{Q}$ e $\mathbb{Q} \not\subset \overline{Q}$.

Mas o que significa essa barrinha acima do Q que colocamos para representar os irracionais? Vamos entender isso melhor? Para isso, vamos ver os números reais!

Números Reais

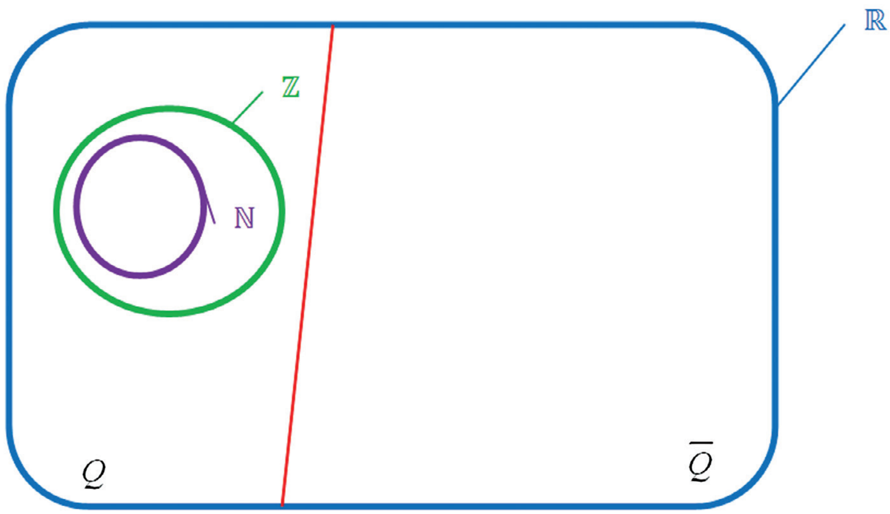
O conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) é o conjunto que reúne todos os conjuntos que vimos até agora: naturais, inteiros, racionais e irracionais. Ele não lança exatamente um tipo diferente de número: na verdade, ele cria uma categoria de números, que são os números que são racionais ou irracionais.

Simbolicamente então, representamos o conjunto dos números reais assim:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \overline{\mathbb{Q}}$$

A barrinha que fica acima do $\mathbb{Q}$ quando vamos indicar o conjunto dos números irracionais significa que o conjunto $\overline{\mathbb{Q}}$ é o que falta ao conjunto $\mathbb{Q}$ para se tornar igual ao conjunto $\mathbb{R}$. O conjunto que contém a barrinha é conhecido como conjunto complementar. No nosso caso, podemos dizer que $\overline{\mathbb{Q}}$ é o complementar de $\mathbb{Q}$ em relação a $\mathbb{R}$.

A representação em diagramas dos números reais é bem interessante. Veja!



Vamos compreender bem o que esse diagrama representa? Todos os números que você já estudou até agora são números reais e estão dentro da linha azul no diagrama acima. O conjunto dos números reais, delimitado pela linha azul, está organizado em dois grandes grupos: o dos números racionais e o dos números irracionais. Por sua vez, há alguns tipos interessantes de números racionais que são os números inteiros. Os números inteiros que não são negativos são chamados de números naturais.

E você sabe que números não são reais? Os números que resultariam de contas que não têm resposta, ou seja, que são impossíveis de serem realizadas, como as divisões por zero ou as raízes de índice par, para radicandos negativos (como $\sqrt{-4}$ ou $\sqrt[8]{-1}$, por exemplo).

Uma forma interessante de apresentar os números é a reta numérica. Você já a conhece! Vamos retomá-la?

As atividades que apresentamos a seguir abordam os números, de todos os tipos que vimos acima. Atenção: responda sempre em seu caderno, não escreva nesse material!

Atividade 15

Você conhece o papel quadriculado? Pegue uma folha desse papel e trace um segmento de reta de tamanho igual a 30 lados de quadrado e marque os números 0 e 1 em seus extremos. Agora , marque neste segmento as frações:

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{4}{6}, \frac{3}{10}, \frac{5}{10}, \frac{12}{18}, \frac{6}{8}$$

a. Dentre as frações listadas, há mais do que uma associada a um mesmo ponto na reta? Quais são elas?

b. Por que isso aconteceu?

Anote suas respostas em seu caderno

Defina abaixo, entre quais valores inteiros consecutivos se localiza cada fração:

Atividade 16

a. $\frac{2}{3}$

b. $\frac{1}{2}$

c. $\frac{-4}{5}$

d. $\frac{7}{2}$

Anote suas respostas em seu caderno

Usando uma calculadora simples, realize as seguintes atividades:

Atividade 17

Digite a sequência de teclas 1+ = = = ... e observe os resultados.

a. Que número apareceu no visor da calculadora após o 8º sinal = pressionado? E após o 9º ? E depois do 10º ?

b. Reinicie o mesmo processo a partir de 0,1 e não de 1, digitando na calculadora 0.1 + = = = ... e observando o resultado. Prossiga, registrando os números mostrados no visor, até o sétimo sinal = pressionado. Sem continuar a pressionar a tecla = , escreva quais os três próximos resultados, indo a seguir na calculadora. Por que isso aconteceu?

c. Agora, sem usar a calculadora: se você começar no 0,01, qual o resultado que deverá aparecer no visor da calculadora depois do 9º pressionar da tecla =?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 18

Vamos pensar no número decimal 3,004.

a. Este número está mais próximo de 3 ou de 4? Por quê?

b. Está mais próximo de 3 ou de 3,1? Por quê?

c. Está mais próximo de 3 ou de 3,01? Por quê?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 19

Dê exemplos de 10 números racionais entre $\frac{17}{3}$ e $\frac{41}{5}$.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 20

Quem é o maior? Vamos arrumar em ordem crescente? Você pode usar uma calculadora para facilitar seus cálculos se quiser.

a. $\frac{23}{9}; 3,6; \frac{17}{6}$

b. Raiz quadrada de $3; 1,732; 1,733$

c. $\frac{-5}{12}$; raiz quadrada de 4; menos raiz cúbica de 8

d. $1\frac{3}{5}; 1,4; \frac{4}{5}; 1,333...; 1,334$

Anote suas respostas em seu caderno

Subconjuntos da reta real: os intervalos

O conjunto dos números reais é infinito também, assim como o conjunto dos naturais também é. Mas são tipos de infinito diferentes, é como se o conjunto dos reais fosse "mais infinito" que o conjunto dos números naturais. Vamos ver por quê?

Quantos números naturais existem entre 2 e 4? Apenas o 3, concorda? E quantos números inteiros existem entre 2 e 4? Também só o 3. Agora, pense mais um pouco e responda: quantos números racionais existem entre 2 e 4? Será também só o 3?

A resposta é NÃO! Por exemplo, 2,1 é um número racional e está entre 2 e 4. A fração $\frac{19}{5}$ também é um número racional e está entre 2 e 4. 2,000001; 3,8703; 3,44444..., entre infinitos outros, também são números racionais existentes entre 2 e 4. Mesmo que tomemos intervalos bem pequenos, sempre conseguimos encontrar outros racionais entre os extremos do intervalo. Quer ver mais um exemplo?

Que racionais podem existir entre 2 e 3? Bom, podemos pensar em 2,1; 2,2; 2,3; etc. E entre 2,2 e 2,3 temos o 2,21; 2,22; 2,23; entre 2,21 e 2,22 temos o 2,211, 2,212, 2,213 etc. e isso num processo infinito! Nunca acaba! A quantidade de racionais existentes entre dois racionais quaisquer é infinita!

Quer saber mais sobre isso? Acesse o link http://www.uff.br/cdme/edn/edn-html/edn-pos-br.html, nele você vai encontrar uma atividade interativa muito interessante e que o ajudará muito a visualizar o que estamos falando agora.

Saiba Mais

E com os irracionais, será que ocorre o mesmo que com os racionais? Novamente a resposta é SIM! Há infinitos irracionais entre dois irracionais quaisquer! Quer ver um exemplo? Entre $\sqrt{2}$ e π, por exemplo, podemos destacar $2\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\frac{\pi}{2}$ (lembre-se que 1,41 e 3,14 são aproximações decimais para $\sqrt{2}$ e π), entre infinitos outros.

Esse tipo de infinito que também diferencia os números naturais e inteiros dos racionais, irracionais e reais, podem complicar bastante para escrever subconjuntos dos números reais. Por exemplo, se quisermos escrever o conjunto $A = \{x \in \mathbb{Z} / -3 < x < 5\}$, podemos escrever A = {-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}, ou ainda, o conjunto $B = \{x \in \mathbb{Z} / x < 5\}$, ele poderá ser escrito assim: B = {..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}. Entretanto, se o conjunto for $C = \{x \in \mathbb{R} / -3 < x < 5\}$, ou seja, o conjunto formado por todos os números reais entre -3 e 5, como poderíamos escrever esse conjunto? Ou o conjunto $D = \{x \in \mathbb{R} / x < 5\}$, que engloba todos os números reais menores que 5, como ficaria? Difícil isso, concorda?

A solução para esse problema é usar o que conhecemos como intervalos reais.

Importante

Um intervalo real é um segmento de reta na reta numérica, ou seja, é um subconjunto sem interrupções intermediárias do conjunto dos números reais.

Já vimos que não conseguiremos escrever todos os seus elementos... A saída é usarmos um instrumento poderoso: a reta numérica! Quer ver como fazemos isso?

Como exemplo, vamos representar o conjunto $C = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -3 < x < 5\}$?

Prático, não? O uso da reta numérica indica que, no trecho em vermelho, estão todos os números entre -3 e 5.

Mas há ainda um problema aqui...Quer ver qual é? Observe o seguinte intervalo:

$C_1 = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -3 \leq x < 5\}$. Vamos representá-lo na reta?

Qual a diferença entre a representação na reta numérica de C e de C_1? Somente olhando a representação na reta, você consegue perceber qual a diferença entre os intervalos C e C_1?

Bem, olhando para os intervalos representados na reta numérica, não há diferença alguma! Mas quando olhamos para a representação na notação de conjunto, vemos que $-3 \in C_1$ mas $-3 \notin C$, uma vez que em C temos $-3 < x < 5$ e em C_1 temos $-3 \leq x < 5$.

Nosso problema agora é pensar em uma maneira que nos permita, simplesmente olhando a representação do intervalo na reta numérica, fazer a distinção entre C e C1. A estratégia que utilizaremos para resolver essa questão é associar uma bolinha fechada (•) ao elemento que queremos incluir na representação na reta numérica ou uma bolinha aberta (O) ao elemento que não pertence ao intervalo, mas apenas o limita. Veja abaixo como essa estratégia mostra-se excelente para resolver esta questão!

Prático, concorda?

Veja agora, no geral, como representamos os intervalos reais!

Representação Geométrica	Representação por Notação de Conjunto	Representação por Notação de Intervalo
	$\{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$	$]a,b]$ ou $(a,b]$
	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$	$[a,b[$ ou $[a,b)$
	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$	$[a,b]$
	$\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$	$]a,b[$ ou (a,b)
	$\{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$	$]-\infty,a]$ ou $(-\infty,a]$
	$\{x \in \mathbb{R} / x < a\}$	$]-\infty,a[$ ou $(-\infty,a)$
	$\{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$	$[a,+\infty[$ ou $[a,+\infty)$
	$\{x \in \mathbb{R} / x > a\}$	$]a,+\infty[$ ou $(a,+\infty)$

Algumas associações que podemos fazer são as seguintes:

a. Em um intervalo com extremo pertencente ao conjunto, usamos os sinais de desigualdade com o igual $\leq$ ou $\geq$ na notação de conjunto. Na reta numérica, a inclusão do extremo é feita por meio de uma bolinha fechada •. Na notação de intervalo, os colchetes voltados para dentro indicam a inclusão do extremo ao qual estão associados [ou].

b. Em um intervalo com extremo não pertencente ao conjunto, usamos os sinais de desigualdade sem o igual < ou > na notação de conjunto. Na reta numérica, a inclusão do extremo é feita por meio de uma bolinha aberta ○. Na notação de intervalo, os colchetes voltados para fora] , [ou os parênteses (,) indicam que o extremo ao qual estão associados não pertencem ao conjunto.

c. Um símbolo novo também está sendo apresentado a você agora: o símbolo do infinito, que é um 8 deitado: ∞ . Este símbolo pode ser associado ao sinal +, gerando $+\infty$, que representa o infinito positivo, no sentido para a direita na reta real, ou ao sinal de -, gerando $-\infty$. representando o infinito negativo, no sentido para a esquerda na reta real. O símbolo ∞ é usado na representação dos intervalos por notação de intervalo, que podemos visualizar na terceira coluna da tabela acima.

Vamos ver alguns exemplos?

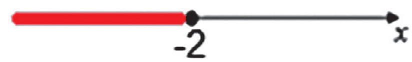
1. O intervalo, representado abaixo, contém todos os números reais compreendidos entre 1 e 3, incluindo o 3. Podemos escrevê-lo como $\{x \in \mathbb{R} / 1 < x \leq 3\}$, usando notação de conjunto, ou $]1; 3]$ ou ainda $(1; 3]$, usando notação de intervalo.

2. O intervalo, representado abaixo, contém todos os números reais compreendidos entre -3 e 0, incluindo o -3. Podemos escrevê-lo como $\{x \in \mathbb{R} / -3 \leq x < 0\}$, usando notação de conjunto, ou $[-3, 0[$ ou ainda $[-3, 0)$, usando notação de intervalo.

3. O intervalo, representado abaixo, contém todos os números reais compreendidos entre -1 e 2, incluindo os dois extremos. Podemos escrevê-lo como $\{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 2\}$, usando notação de conjunto, ou $[-1; 2]$, usando notação de intervalo.

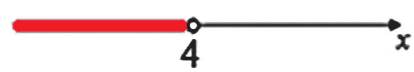
4. O intervalo, representado abaixo, contém todos os números reais compreendidos entre -6 e -1, mas sem incluir nenhum dos dois extremos. Podemos escrevê-lo como $\{x \in \mathbb{R} / -6 < x < -1\}$, usando notação de conjunto, ou $]-6; -1[$ ou ainda $(-6; -1)$, usando notação de intervalo.

5. O intervalo, representado abaixo, contém todos os números reais que são menores que -2, incluindo o -2. Podemos escrevê-lo como $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq -2\}$, usando notação de conjunto, ou $\left]-\infty; -2\right]$ ou ainda $(-\infty; -2]$, usando notação de intervalo.



6. O intervalo, representado abaixo, contém todos os números reais que são maiores que -3, incluindo o -3. Podemos escrevê-lo como $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq -3\}$, usando notação de conjunto, ou $\left[-3; +\infty\right[$ ou ainda $[-3; +\infty)$, usando notação de intervalo.

7. O intervalo, representado abaixo, contém todos os números reais que são menores que 4, sem incluir o 4. Podemos escrevê-lo como $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x < 4\}$, usando notação de conjunto, ou $\left]-\infty; 4\right[$ ou ainda $(-\infty; 4)$, usando notação de intervalo.

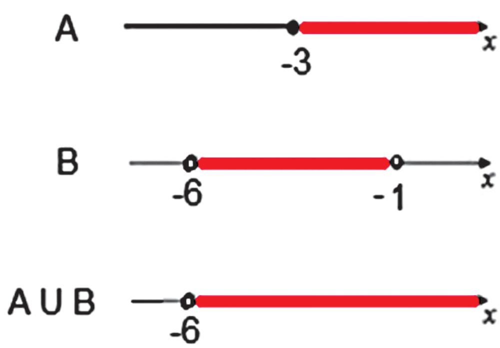


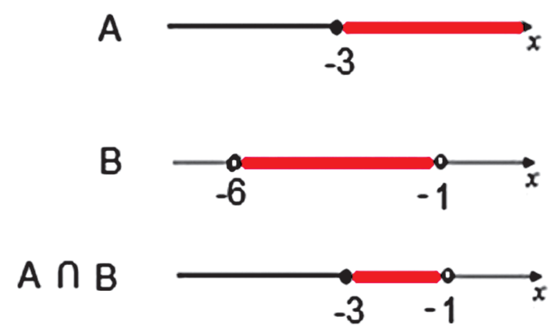
8. O intervalo, representado abaixo, contém todos os números reais que são maiores que 10, sem incluir o 10. Podemos escrevê-lo como $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 10\}$, usando notação de conjunto, ou $\left]10; +\infty\right[$ ou ainda $(10; +\infty)$, usando notação de intervalo.

Operações com Intervalos Reais

Como os intervalos numéricos são conjuntos, as operações de união (∪) e interseção (∩) podem ser realizadas entre eles. A lógica é exatamente a mesma: quando unimos dois intervalos, juntamos todos os elementos dos dois intervalos em um só; quando fazemos a interseção entre dois intervalos, buscamos o que há de comum nos dois. Vamos ver como isso funciona?

Vamos fazer juntos, como exemplo, a união e a interseção dos intervalos $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq -3\}$ e $B = \left]-6; -1\right[$. Uma sugestão que ajuda muito é fazer a representação na reta numérica para visualizar melhor as operações.



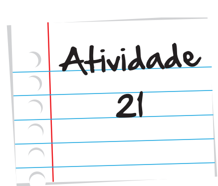


A ideia, na união, é de juntar os dois intervalos em um só, como se as duas representações na reta numérica se sobrepusessem e demarcássemos na união tudo que ficou pintado em um só dos conjuntos ou nos dois. Para a interseção, a ideia é a mesma, a de sobreposição, mas aí vamos marcar apenas o "pedaço" que ficou pintado nos dois intervalos ao mesmo tempo. E como respondemos então? Simples, retomando a representação em notação de conjunto e/ou em notação de intervalo para A ∪ B e para A ∩ B. Veja!

$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > -6\}$ ou $A \cup B =]-6;+\infty[\ = (-6;+\infty)$

$A \cap B = \{\mathbb{R} \in \mathbb{R} \ / \ -3 \le \mathbb{R} < 1\}$ ou $A \cap B = [-3;-1\{= \{-3;-1)$ ou $A \cap B = [-3;-1[=[-3;-1)$

Vamos praticar isso um pouco para finalizar esta aula? Agora é com você!



Vamos fazer a união e a interseção dos intervalos A e B, apresentados em cada item que se segue? Use o seu caderno!

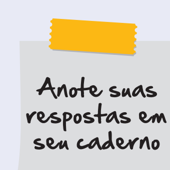
a. $A = \{x \in \mathbb{R} \ / -2 < x \le 5\}$ e $B =]-\infty, 0[$

b. $A = [3, 5[$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 2 \le x \le 10\}$

c. $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \le -5\}$ e $B = [-6; 0[$

d. $A =]-\infty, 1[$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \ge -1\}$

e. $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x < -4\}$ e $B = [2; +\infty)$



Nesta aula, nós estudamos alguns conceitos que são fundamentais para o prosseguimento nos estudos do Ensino Médio. Toda a Matemática está estruturada, tomando como suporte o Estudo dos Conjuntos, que é o que permite dar à Matemática o seu caráter filosófico de precisão. Por essa razão, damos início ao estudo de Matemática no Ensino Médio, justamente estudando os Conjuntos.

Além da estrutura de conjuntos, vimos também os conjuntos numéricos – este é um momento em que podemos amadurecer tudo que já estudamos até hoje sobre números e operações com números. A organização dos números em conjuntos que os agrupam por suas semelhanças é primordial para que possamos estruturar as operações que realizamos entre eles. Este estudo também nos permite visualizar um pouco de alguns ramos extremamente importantes em Matemática, que são a Teoria dos Números e a Álgebra, além de nos apresentar uma nova estrutura de representação de subconjuntos contínuos dos números reais, que são os intervalos reais. Particularmente, a representação e as operações com Intervalos ainda serão muito usadas nas aulas seguintes. Então, não se permita concluir esta aula com dúvidas, retome o estudo, consulte seu professor e a Internet, certo?

Um abraço e até a próxima!

Resumo

- Conjuntos são objetos matemáticos que relacionam elementos de acordo com o que eles têm de semelhança ou de regularidade.
- Um elemento pode pertencer ($\in$) ou não pertencer ($\notin$) a um conjunto.
- Um conjunto pode estar contido ($\subset$) ou não estar contido ($\not\subset$) em outro conjunto.
- Uma parte ou um subconjunto de um conjunto dado é outro conjunto que tem todos os seus elementos pertencentes ao primeiro conjunto.
- A União ($\cup$) entre dois conjuntos é o conjunto formado por todos os elementos que estão nos dois conjuntos ao mesmo tempo ou em apenas um deles.
- A intersecção ($\cap$) entre dois conjuntos é o conjunto formado por todos os elementos que estão nos dois conjuntos simultaneamente.
- O conjunto dos números naturais (N) é formado pelos números que resultam de contagem, como 1, 2, 3, 4, 5, etc.
- O conjunto dos números inteiros (Z) é formado por todos os números naturais e os seus simétricos -1, -2, -3, etc.
- O conjunto dos números racionais (Q) é formado por todos os números que podem ser escritos na forma de fração, ou seja, todos os naturais, os inteiros, os decimais exatos ou periódicos e as frações propriamente ditas.

- O conjunto dos números irracionais (I ou $\overline{\mathbb{Q}}$) é formado por todos os números que não podem ser escritos como fração. Estes números têm a forma de números decimais que são infinitos e não são periódicos, como o número π ou os resultados de raízes não exatas.

- O conjunto dos números reais (R) é o conjunto que representa a união entre racionais e irracionais.

Veja Ainda

- Procure na Internet sobre a vida e a obra de Georg Cantor, onde nasceu, período em que viveu. Ele teve uma importância enorme no estudo dos conjuntos. Algumas sugestões de sites na Internet onde você pode saber mais sobre Cantor seguem abaixo:
  - http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/cantor/vidacantor.htm
  - http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/conteudo/veiculos_de_comunicacao/RPM/RPM43/RPM43_02.PDF
  - http://www.seara.ufc.br/especiais/matematica/transfinitos/transfinitos5.htm

- Existem outras constantes matemáticas também incomensuráveis com a unidade. Aqui falamos do π. Procure saber do *e* e do φ. O número *e*, em homenagem a Euler, aparecerá no estudo das funções exponenciais e logarítmicas. Já o número φ é conhecido como número de ouro. O site http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-br.html apresenta algumas atividades muito boas sobre o número de ouro e o retângulo áureo.

- O Laboratório Virtual de Matemática da UNIJUÍ – Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul – localizada em Ijuí, RS, oferece algumas atividades muito interessantes sobre os temas que estudamos nessa aula. Vale a pena experimentar! Acesse os links:
  - Operações com Conjuntos:

    http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/principal/medio/conj_func/encomendas/opera_conjuntos/index.html
  - Conjuntos Numéricos

    http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/principal/medio/conj_func/encomendas/conj_num.htm
  - Operações com Intervalos Reais

    http://projetos.unijui.edu.br/matematica/medio/index.html

- Há alguns vídeos no Youtube que podem ser bastante interessantes para aprofundar e ampliar o conhecimento sobre os números. Um deles é http://www.youtube.com/watch?v=f1Ak-6vMVpg, que trata do infinito. Vale a pena conferir!

Referências

Livros

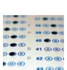
- BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Georgetown: Edgard Blucher, 1991. 479 páginas.
- IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos da Matemática Elementar 1 – Conjuntos e funções**. São Paulo: Atual Editora Ltda, 1977. 316 páginas.
- LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio** – Volume 1. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1999. 237 páginas.

Imagens

- http://www.sxc.hu/photo/475767

- http://pt.wikipedia.org/wiki/Anexo:Lista_de_sele%C3%A7%C3%B5es_participantes_da_Copa_do_Mundo_FIFA_de_2006

- http://pt.wikipedia.org/wiki/Copa_do_Mundo_FIFA_de_2010



- http://www.sxc.hu/photo/517386

Respostas das Atividades

Atividade 1

Ainda refletindo sobre o que comentamos na correção da atividade 3, vemos que:

a. ($\notin$) Abacate não pertence ao conjunto de frutas representado pela cesta

b. ($\notin$) uva não pertence ao conjunto T representado pela turma.

c. ($\in$) O livro de história pertence ao conjunto B de Biblioteca.

d. ($\in$) A fruta banana pertence ao conjunto F de frutas representado pela cesta.

e. ($\in$) A fruta uva pertence ao conjunto F de frutas representado pela cesta

f. ($\notin$) A fruta uva não pertence ao conjunto B de Biblioteca.

Atividade 2

a. O livro de história pertence ao conjunto Biblioteca

b. Abacate não pertence ao conjunto Turma

c. Uva não pertence ao conjunto Turma

d. Banana pertence ao conjunto Frutas

Atividade 3

a. $B \subset F$

b. $M \subset F$

c. $G \not\subset F$

d. $B \subset M$

e. $G \not\subset M$

f. $B \not\subset G$

Respostas das Atividades

Atividade 4

a. V, pois o elemento f (física) não pertence a U

b. V, todos os elementos de B pertencem a U

c. F, o livro de geografia não pertence ao conjunto B

Atividade 5

Vamos associar os sanduíches aos símbolos s1, s2, s3 e s4

Vamos associar as bebidas aos símbolos b1 e b2

Vamos associar os acompanhamentos com a1 e a2. Teremos:

{s1,r1,a1}; {s1,r1,a2}; {s1,r2,a1}; {s1,r2, a2}

{s2,r1,a1}; {s2,r1,a2}; {s2,r2,a1}; {s2,r2, a2}

{s3,r1,a1}; {s3,r1,a2}; {s3,r2,a1}; {s3,r2, a2}

Atividade 6

a. {M, A, T, E}

b. {C, O, N, J, U, T} – observe que não colocamos as letras repetidas no conjunto B.

c. {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

d. {11, 12, 13, 14, 15, ...} – esse é um conjunto que tem infinitos elementos.

e. { } ou E = Ø - não há números negativos entre 2 e 4. Isso quer dizer que esse é um conjunto vazio!

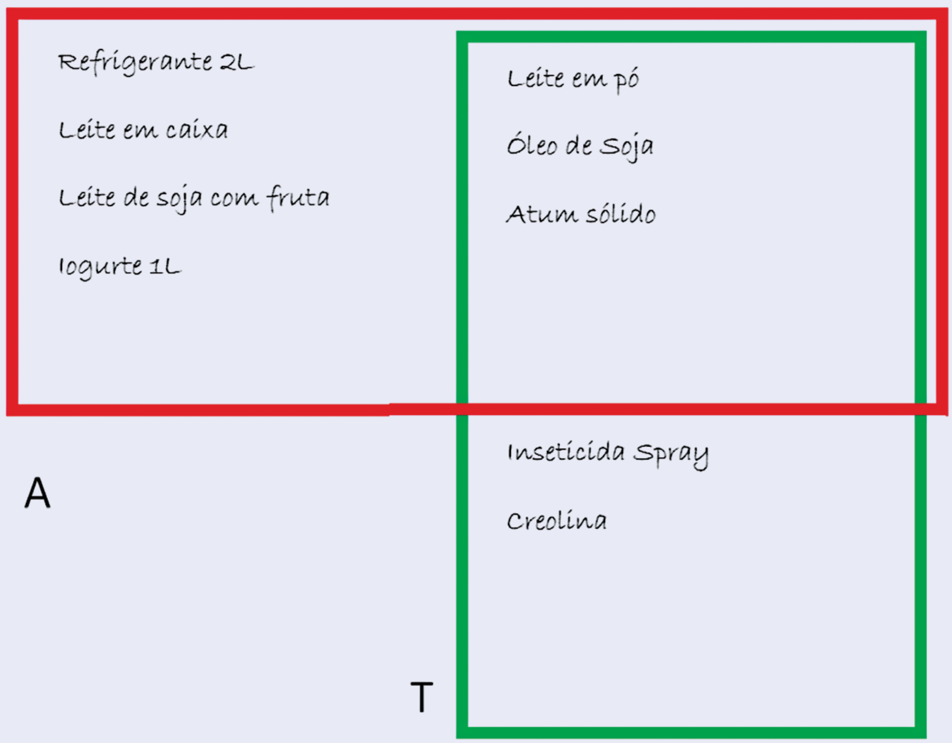
Atividade 7

P(M)={{ }, {p}, {a}, {i}, {p,a}, (p,i}, {a, i}, {p,a,i}}

Respostas das Atividades

Atividade 8

Refrigerante 2L	*Detergente*	*Sabão em pó*	*Atum sólido*
Leite em caixa	*Inseticida em Spray*	*Óleo de Soja*	*Creolina*
Leite em pó	*Leite de soja com fruta*	*Sabão líquido*	*Iogurte 1L*



a. Não.

b. Ver na figura acima. (refrigerante 2L, Leite em caixa, leite de soja com fruta, iogurte 1L, leite em pó, óleo de soja e atum sólido)

c. Ver na figura acima. (leite em pó, óleo de soja, atum sólido, inseticida em spray e creolina)

d. Ver na figura acima – leite em pó, óleo de soja, atum sólido.

e. Sabão líquido, sabão em pó e o detergente.

Respostas das Atividades

Atividade 9

A={refrigerante 2L, Leite em caixa, leite em pó, leite de soja com fruta, óleo de soja, atum sólido, iogurte 1L}

C={leite em caixa, leite de soja com fruta, sabão em pó}

T={leite em pó, inseticida spray, óleo de soja, atum sólido, creolina}

L={detergente, inseticida spray, sabão em pó, sabão líquido, creolina}

a. Os produtos alimentícios ou produtos que são embalados em caixas. Podemos representar como $A \cup C$.

b. São somente os alimentos que são embalados em caixas. Podemos representar como $A \cap C$.

c. Produtos de limpeza ou produtos que são acondicionados em caixas. Podemos representar como $L \cup C$.

d. Sim, pois há produtos de limpeza embalados em latas. Podemos representar como $L \cap T$={inseticida em spray e creolina}.

e. Produtos alimentícios ou produtos de limpeza, ou seja, a lista toda de D. Sônia. Podemos representar como $A \cup L$.

f. Não, são os produtos embalados em caixas não estão embalados em latas. Podemos representar como $C \cap T = \emptyset$.

Atividade 10

S = {Argentina, Brasil, Equador, Paraguai}

D = {Brasil, Argentina, Chile, Paraguai, Uruguai}

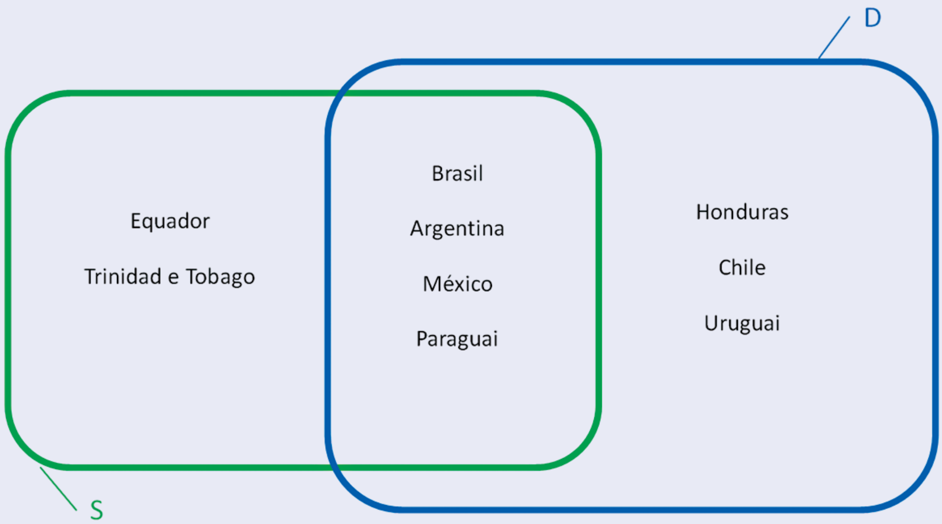
a. O conjunto S tem 6 elementos e o conjunto D tem 7 elementos.

b. $E = S \cap D$ = {Brasil, Argentina, Paraguai}. O conjunto E tem 4 elementos.

c. $T = S \cup D$ = {Argentina, Brasil, Equador, México, Paraguai, Uruguai}.

d. A operação é de união entre S e D. O conjunto T tem 8 elementos.

e. Veja no diagrama abaixo:



Atividade 11

a. S – D {Equador, Trinidad e Tobago}

b. D – S = {Honduras, Chile, Uruguai}

Atividade 12

a. A – L= A, pois não há produtos alimentícios que possam estar no conjunto dos produtos de Limpeza;

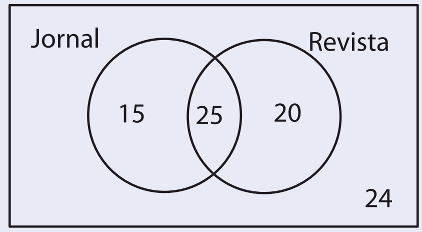
b. L – A = L, pois não há produtos de limpeza que possam estar no conjunto dos produtos alimentícios.

c. São os produtos que são embalados em caixas, mas não são alimentícios. C – A = {sabão em pó}

d. L - T

e. C - A

Atividade 13



Leem jornal – 40

Leem revista - 45

Leem os dois – 25

Note que estes 25 alunos são contados duas vezes (para os que leem jornal e para os que leem revista), logo teremos:

40 – 25 = 15

45 – 25 = 20

Podemos concluir que o total de entrevistados é: 15 (jornal) + 20 (revista) + 25 (jornal e revista) + 24 (nenhum) = 84 alunos entrevistados

Atividade 14

a. Na primeira linha da tabela, estão todos os números naturais não nulos; na segunda linha, os números pares; na terceira linha, todos os resultados das potências de base 2 para expoente não nulo e na quarta linha encontramos os resultados de todas as potências de naturais do tipo n^n, para n não nulo.

b. Terá nem mais nem menos elementos, porque as linhas 2, 3 e 4 são determinadas a partir dos elementos escritos na primeira linha. Logo, para cada elemento da linha 1 há um elemento correspondente em cada uma das outras linhas.

c. Todas as linhas terão a mesma quantidade de elementos.

Atividade 15

a. Neste exercício, a localização dos números será:

15 quadradinhos – ½, 5/10

22,5 quadradinhos – ¾ , 6/8

20 quadradinhos - 2/3, 4/6, 12/18

12 quadradinhos – 2/5

9 quadradinhos – 3/10

b. As frações que ficam no mesmo lugar são as frações equivalentes

Atividade 16

a. Entre 0 e 1

b. Entre 0 e 1

c. Entre 0 e -1

d. Entre 3 e 4

Atividade 17

a. Na 8ª vez que pressionarmos a tecla =, obtemos 9; na 9ª vez, 10 e na 10ª vez 11.

b. 0.2; 0.3; 0.4; 0.5; 0.6; 0.7; 0.8. Os próximos serão 0.9; 1.0 e 1.1

c. Vai aparecer 0.1, porque quando pressionamos 9 vezes o sinal =, acumulamos 10 vezes o número 0.01 e 10 vezes 0.01 resulta em 0.1.

Atividade 18

a. 3,004 está mais próximo de 3 que de 4, pois se dividirmos o espaço de 3 a 4 (na reta numérica) em 1000 partes iguais, o 3,004 vai estar na 4ª marcação após o 3, o que é antes da metade do total das marcas.

b. 3,004 está mais próximo de 3 que de 3,01, porque se dividirmos o espaço de 3 a 3,1 em 100 partes iguais, o 3,004 estará na 4ª marcação após o 3, o que é antes da metade do total de marcas.

c. 3,004 está mais próximo de 3, porque se dividirmos o espaço de e a 3,01 em 10 partes iguais, o 3,004 estará na 4ª posição após o três, o que é antes da metade do total das marcas.

Atividade 19

Vamos tomar uma aproximação decimal para estes racionais? 17/3 é aproximadamente igual a 5,7 e 41/5 é aproximadamente igual a 8,2. Podemos então escrever os decimais 5,8; 5,9; 6; 6,1; 6,2; 6,3; 6,4; 6,5; 6,6 e 6,7, por exemplo. Há infinitas possibilidades de resposta, essas são apenas algumas delas. O importante é que todos os números que você escrever estejam entre 5,7 e 8,2.

Atividade 20

Basta tomarmos uma aproximação decimal para cada um deles.

a. $\frac{23}{9}; \frac{17}{6}; 3,6$

b. $1,732$; raiz quadrada de $3; 1,733...$

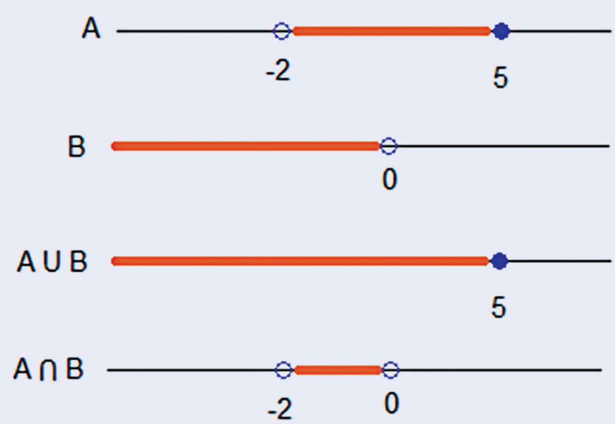
c. Menos raiz cúbica de oito; $\frac{-5}{12}$; raiz quadrada de 4

d. $\frac{4}{5}; 1,333...; 1,334; 1,4; 1\frac{3}{5}$

Respostas das Atividades

Atividade 21

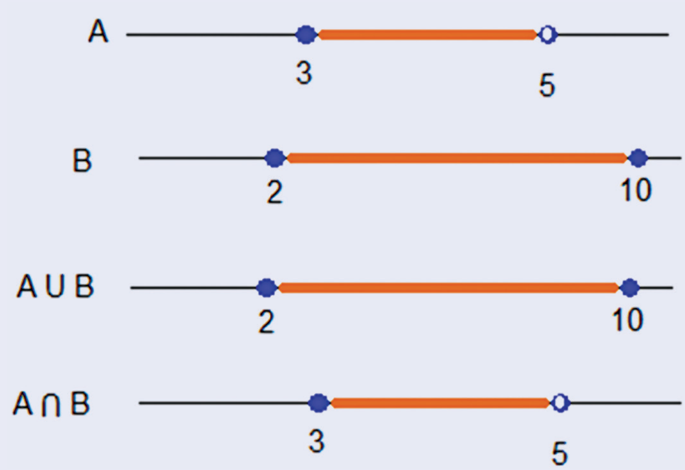
a. $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -2 < x \leq 5\}$ e $B =]-\infty, 0[$



$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq -5\} =]-\infty, -5]$

$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -2 < x < 0\} =]-2, 0[$

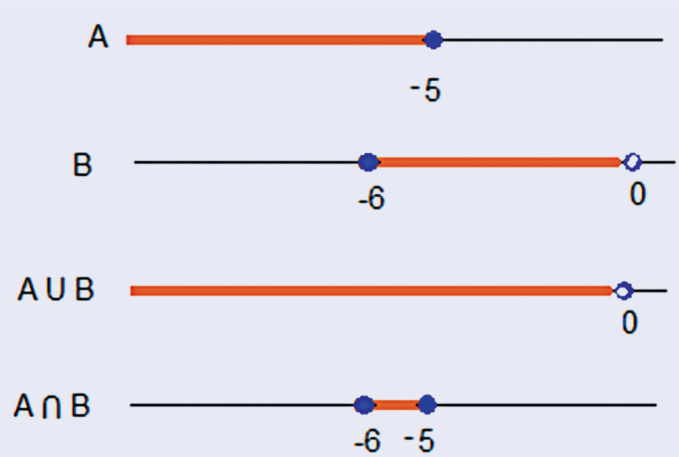
b. $A = [3, 5[$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2 \leq x \leq 10\}$



$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2 \leq x \leq 10\}$

$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 3 \leq x < 5\}$

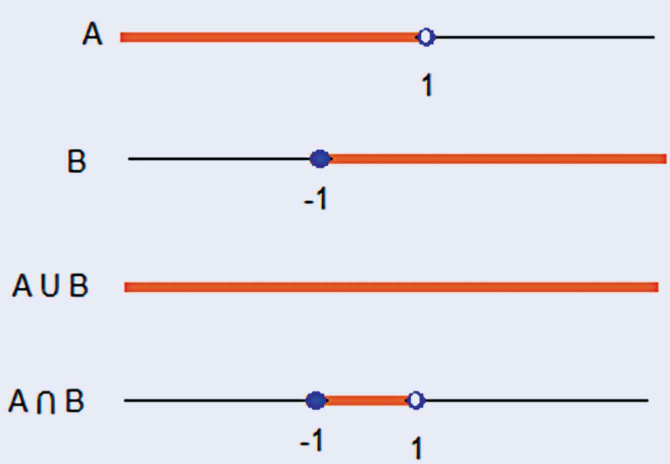
c. $A = \{x \in \mathbb{R} \mathbin{/} x \le -5\}$ e $B = [-6; 0[$



$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mathbin{/} x < 0\} =]-\infty, 0[$

$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mathbin{/} -6 \le x < -5\} = [-6, 5[$

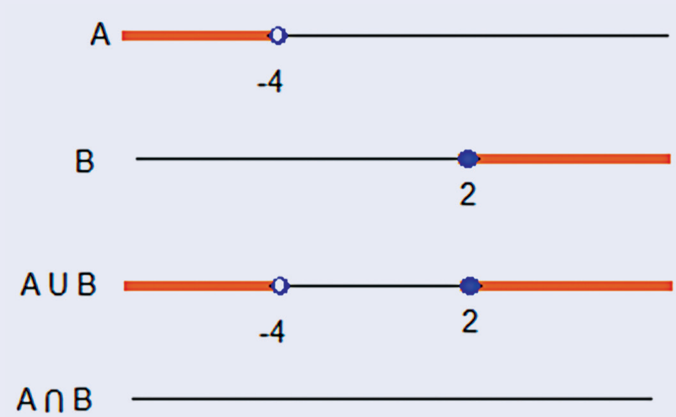
d. $A =]-\infty, 1[$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mathbin{/} x \ge -1\}$



$A \cup B =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

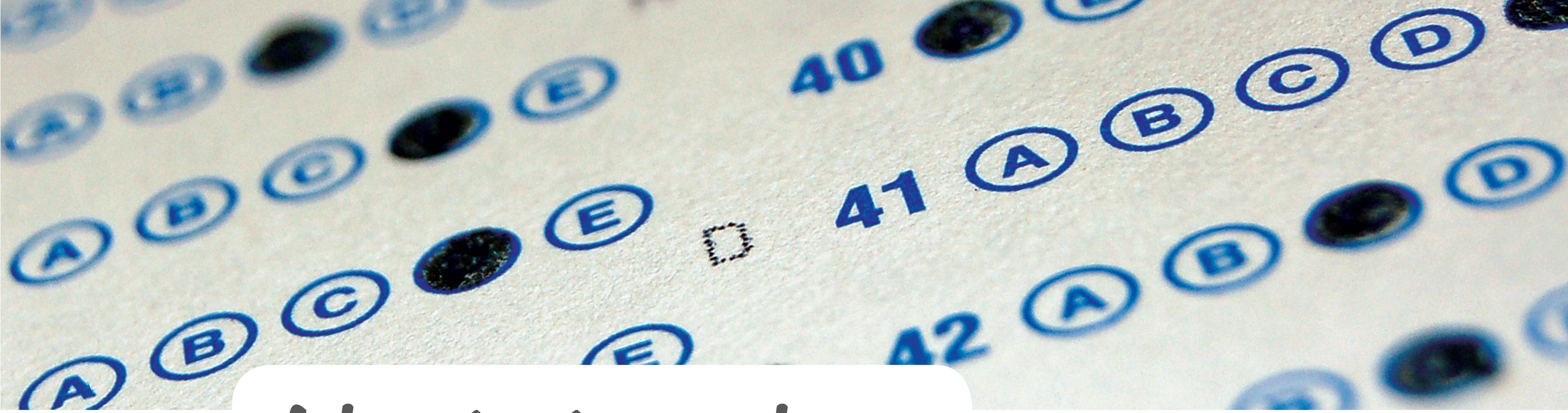
$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mathbin{/} -1 \le x < 1\} = [-1, 1[$

e. $A = \{x \in \mathbb{R} / x < -4\}$ e $B = [2; +\infty)$



$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} / x < -4 \text{ ou } x \geq 2\} =]-\infty, -4[\cup [2, +\infty[$

$A \cap B = \varnothing$



Atividade extra

Exercício 1

Sejam os conjuntos $A = \{a, 7, 0\}$ e $B = \{0, 1, b\}$, tal que os conjuntos A e B sejam iguais.

Qual é a relação entre a e b?

(a) $a = b$ (b) $a + b = 8$ (c) $2a = b$ (d) $a = 2b$

Exercício 2

Dado que $A = \{x \in \mathbb{N} | 4 < x < 16\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} | 10 < x < 30\}$

Que conjunto representa $A \cap B$?

(a) { } (b) {10, . . . , 16} (c) {10, . . . , 29} (d) {11, . . . , 15}

Exercício 3

Em preparação para as Olimpíadas de 2016 no Rio de janeiro, 350 crianças praticam alguns esportes. Desse total, 220 jogam vôlei, 170 nadam e 80 jogam vôlei e nadam.

Quantas crianças praticam outros esportes?

(a) 20 (b) 40 (c) 230 (d) 470

Exercício 4

De 979 estudantes entrevistados, 527 são fluentes em inglês, 251 são fluentes em francês e 321 não falam nenhum desses idiomas.

Quantos estudantes são fluentes em língua inglesa e francesa?

(a) 778 (b) 658 (c) 131 (d) 120

Exercício 5

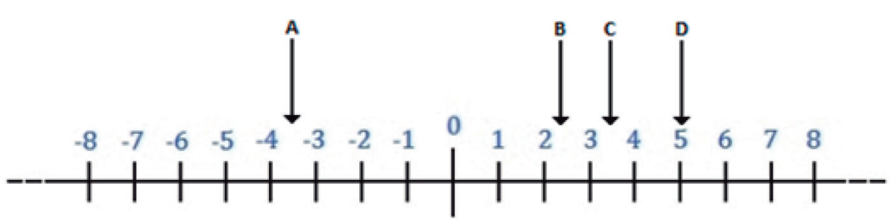
Considere o número $x = (1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})$ e os conjuntos: X = números Irracionais, Y = números Naturais, Z = números Inteiros não positivos e W = números Inteiros não negativos.

A qual desses conjunto x pertence?

(a) *X* (b) *Y* (c) *Z* (d) *W*

Exercício 6

Considere o número $\sqrt{10}$ e os pontos A, B, C e D representados na reta numérica.



Qual deles melhor representa a posição do número $\sqrt{10}$?

(a) *A* (b) *B* (c) *C* (d) *D*

Exercício 7

Sejam os conjuntos A = {0, 1, 2, 3} e B = {2, 4, 5}, denotamos por n(P(A)) o número de elementos do conjunto das partes de A e n(P(B)) o número de elementos do conjunto das partes de B.

Qual o valor de n(P(A)) + n(P(B))?

(a) 128 (b) 64 (c) 32 (d) 24

Exercício 8

Sejam x = 0, 343434 . . . e y = 0, 999 . . ..

Qual o valor da expressão $x + y$?

(a) $1,\overline{34}$ (b) 1,342434 (c) 1,34 (d) $\frac{43}{9}$

Exercício 9

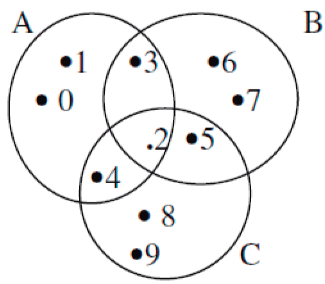
Sejam A e B doisconjuntos não vazios tais que: $A \cup B$ = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8}, A – B = {1; 3; 6; 7} e B – A = {4; 8}.

Qual conjunto representa $A \cap B$?

(a) {1; 4} (b) {2; 5} (c) {6; 7; 8} (d) {1; 3; 4; 8}

Exercício 10

Observe os conjuntos A, B e C no diagrama.



Que opção representa o conjunto $(A \cup B) - C$?

(a) {3} (b) {2, 3} (c) {0, 1, 3, 6, 7} (d) {2, 4, 5}

Exercício 11

Seja *A* um subconjunto do conjunto dos números racionais e *B* um subconjunto do conjunto dos irracionais.

Justifique por que a intersecção destes conjuntos não pode ter infinitos elementos.

Exercício 12

Considere *T* o conjunto de todos os triângulos, T_i o conjunto dos triângulos isósceles (triângulos com dois lados iguais) e T_e o conjunto dos triângulos equiláteros (triângulos com três lados iguais).

Faça o diagrama de Venn que represente esses três conjuntos.

Exercício 13

As marcas de refrigerante mais consumidas em um bar, numa certa noite, foram os refrigerantes A, B e C. Os garçons constataram que o consumo se deu de acordo com a tabela.

Marcas consumidas	Nº de consumidores
A	150
B	120
C	80
A e B	60
A e C	20
B e C	40
A, B e C	15

Quantos consumidores compraram exatamente duas dessas marcas naquela noite?

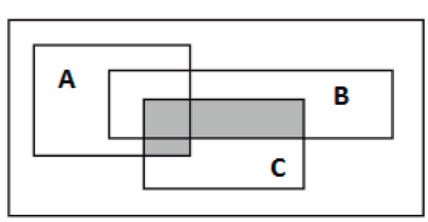
Exercício 14

Uma empresa produz quatro tipos distintos de bolas. Uma grande loja de departamentos deseja vender essas bolas em separadamente, e também em kits, com duas, três e quatro bolas distintas.

Quantos kits diferentes essa empresa fabricará?

Exercício 15

Observe o diagrama acerca dos conjuntos *A*, *B* e *C*.



Como podemos representar, utilizando as operações entre conjuntos, á área hachurada do diagrama?

Gabarito

Exercício 1

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 2

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 3

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 4

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 5

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 6

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 7

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 8

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 9

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 10

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 11

Como A é subconjunto do conjunto dos números racionais e B é subconjunto do conjunto dos irracionais, sua interseção é vazia, pois não há número que seja racional e irracional.

Portanto, a intersecção não pode ter infinitos elementos.

Exercício 12

Deixamos aqui um incentivo para procurar seu professor e discutir sua solução.

Exercício 13

Basta fazer o diagrama de Venn com o cuidado de começar a distribuição dos valores pela intersecção de *A*, *B* e *C*. A resposta é a soma dos valores das inrtesecções, exceto a tripla.

Assim a resposta é: 45+25+5 = 75 consumidores.

Exercício 14

São quatro bolas, o número de subconjuntos possíveis é 24 – 1, pois o kit correspondente ao conjunto vazio não será comercializado. Logo, serão 15 kits.

Exercício 15

$C \cap (A \cup B)$ Existem outras formas.

Estudo de funções
Parte 1

Fascículo 4

Unidade 12

Fundação CECIERJ

Estudo de funções – Parte 1

Para início de conversa...

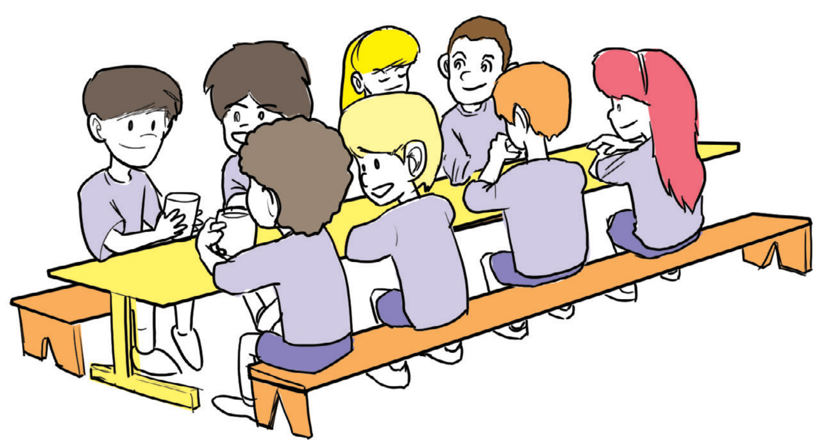
A ideia de função é muito utilizada na Matemática e em outras áreas como Biologia, Física, Química, assim como em diferentes situações do nosso dia a dia.

Veja alguns exemplos:

Num posto de gasolina

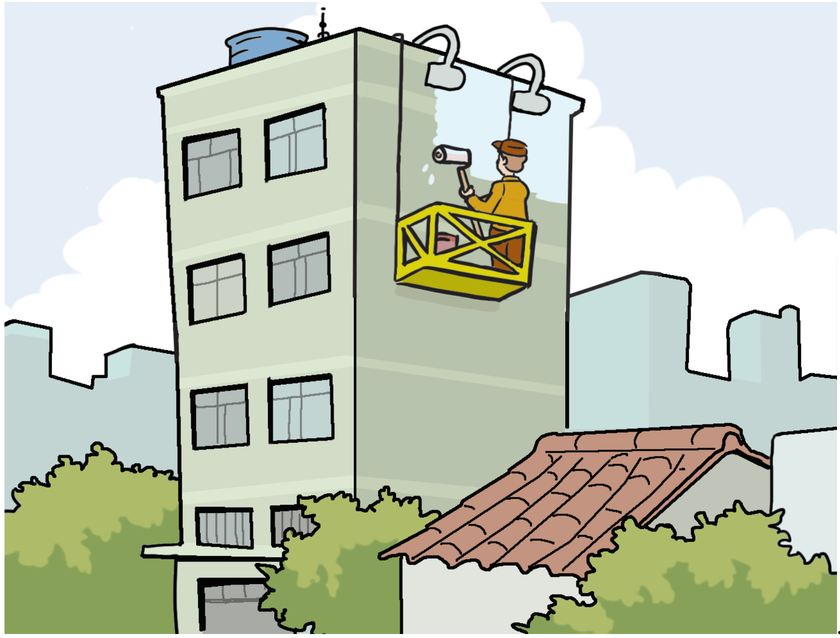
O preço a pagar depende da quantidade de gasolina colocada.

Numa Escola



A quantidade de merenda depende da quantidade de crianças.

Numa Escola



A quantidade de tinta consumida depende da área a ser pintada.

Em cada um destes exemplos foram destacadas duas grandezas que variam, de maneira que a variação de uma depende da variação da outra.

Este fato é importante para a compreensão do conceito de **função** que vamos estudar a seguir.

Numa função há duas variáveis: a variável **independente**, que pode assumir qualquer valor em um conjunto determinado e a variável **dependente**, cujos valores são calculados a partir da 1ª variável.

Objetivos de aprendizagem

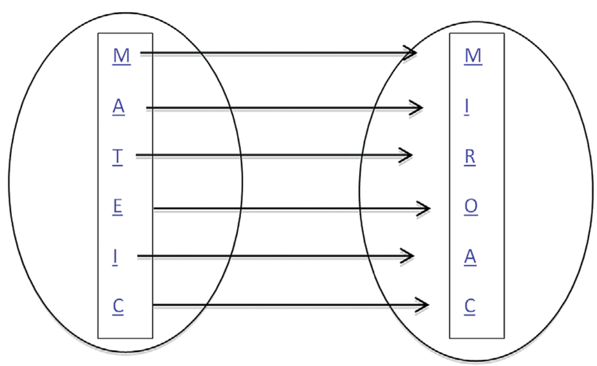
- Construir a ideia de função utilizando situações-problema da aritmética, geometria e álgebra.
- Reconhecer as noções de variáveis, dependência, regularidade.
- Escrever a expressão algébrica que representa uma relação entre duas grandezas que apresenta regularidade, ou seja, um padrão de comportamento.
- Reconhecer que, toda vez que duas grandezas variam proporcionalmente, a relação entre elas é uma função.

Seção 1
Relações e funções

No decorrer das guerras, os códigos para a transmissão de mensagens secretas foram fator importante nas conquistas de várias batalhas.

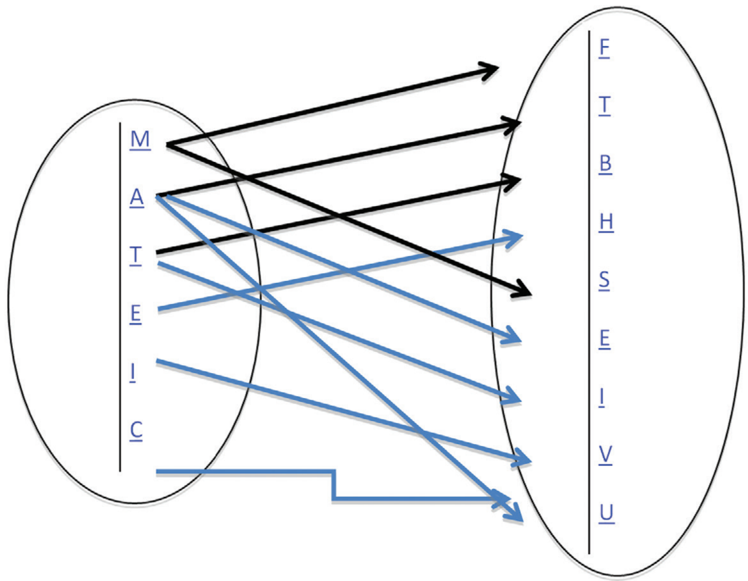
Um código muito conhecido é o chamado sistema "ZENIT-POLAR", que consiste, basicamente, em substituir as letras das palavras a serem cifradas de acordo com a regra estabelecída no nome do sistema: trocamos todos os Zs por Ps– e vice versa, todos os Es por Os – e vice versa, todos os Ns por Ls – e vice-versa, e assim até o final. As letras que não constam do nome do sistema, como o M, J, K, etc permaneceriam inalteradas.

Baseado neste código, a querida Matemática resulta em uma criptografia transformada em Miromiraci. Lembrando a aula de teoria dos conjuntos, a gente poderia representar a transformação de Matemática em Miromiraci assim:



No conjunto à esquerda estão as letras da palavra matemática e no conjunto da direita as letras da palavra miromiraci. O sistema de criptografia Zenit-Polar faria justamente essa ponte, estabeleceria essa relação entre os elementos de um conjunto e os de outro.

Durante a Segunda Guerra Mundial, os militares alemães, por exemplo, usavam uma sofisticada máquina chamada Enigma para encriptar suas mensagens. A máquina continha até oito tambores articulados e que se moviam durante a digitação – o que, a muito grosso modo, fazia com que a tabela de correspondência mudasse a cada letra digitada. Assim, uma palavra seria codificada de uma quantidade gigantesca de maneiras diferentes, mesmo quando digitada repetidas vezes numa mesma mensagem! Quer experimentar? Dê um pulo em http://enigmaco.de/enigma/enigma.html, para acessar a versão online da máquina Enigma de três tambores. Foi nessa mesma máquina que entramos com a palavra matemática e obtivemos ftbhseivvu. Vamos representar essa relação no diagrama?



E aqui, apontamos uma diferença significativa entre essa relação e anterior: enquanto na relação do Zenit-Polar cada elemento do conjunto da esquerda estava relacionado a um único elemento do conjunto da direita, na relação da máquina Enigma há elementos do conjunto da esquerda que estão associados a mais de um elemento do conjunto da direita: o M está associado a dois elementos (o F e o S), o A está associado a três elementos (o T, o E e o U) e o T está associado dois elementos (o B e o I). Por isso, repetindo, quando cada elemento do conjunto da esquerda está associado a um único elemento do conjunto da direita, como no primeiro caso, dizemos que a relação do Zenit-Polar é uma função. E, como na relação da Enigma há pelo menos um elemento do conjunto da esquerda associado a mais de um elemento do conjunto da direita, dizemos que essa relação não é uma função. Veja: a relação existe – tanto que a mensagem podia ser decodificada – e é determinada pela combinação das inúmeras chaves e tambores da máquina. Ela só não é uma função.

Seção 2
Mais sobre a noção de função

Exemplos de funções

Na seção anterior você observou exemplos de relações entre dois conjuntos. No exemplo do sistema criptográfico Zenit-Polar, a relação estabelece uma correspondência entre os elementos dos dois conjuntos de letras em que a cada letra do 1º conjunto corresponde apenas a uma letra no 2º conjunto. Esta relação é uma função. Já no outro sistema criptográfico, mais complexo, isto não acontece. Nesse caso a relação não é uma função.

Vamos apresentar agora alguns exemplos de funções determinando, quando possível, a expressão matemática que representa cada uma. No entanto, é preciso ter em mente que para determinar a expressão Matemática é necessário identificar o padrão de comportamento ou regularidade.

1º) Um litro de gasolina está custando R$ 2,83 em um posto de combustível da minha cidade. Veja a tabela que mostra os valores a pagar para se colocar gasolina no tanque de um carro.

Litros	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**...**	**30**
Preço a pagar (R$)	2,83	5,66	8,49	11,32	14,15	16,98	...	84,90

O que mostra essa tabela?

O preço (**VARIÁVEL DEPENDENTE**) a pagar depende da quantidade de litros de gasolina (**VARIÁVEL INDEPENDENTE**) que forem colocados no tanque, ou seja, o preço será igual à quantidade de litros multiplicada pelo preço de 1 litro de gasolina que é R$ 2,83. Neste caso, dizemos que o preço a pagar é função da quantidade de litros colocados no tanque. Será que você consegue escrever uma expressão matemática que represente essa função?

2º) Um professor resolveu brincar com a turma de "adivinhe a regra". Ele dizia um número para um aluno e ele respondia outro número de acordo com uma regra previamente combinada. Vamos adivinhar qual é essa regra?

Veja a tabela com alguns números escolhidos pelo professor e os números que o aluno respondeu.

Número escolhido	1	3	4	6	8
Número respondido	1	5	7	11	15

Conseguiu descobrir a regra? Parabéns! Mas se não conseguiu, não tem problema, vamos contar para você: os números respondidos pelo colega são iguais ao dobro do número escolhido pelo professor menos 1. Neste caso, também dizemos que o número respondido é função do número escolhido. Será que você consegue escrever uma expressão matemática que represente essa função? Veja nossa resposta logo depois do terceiro exemplo.

3º) Na bula de um remédio pediátrico está indicado a posologia (modo de usar) da seguinte maneira: *2 gotas a cada kg de peso*

Peso em kg (P)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nº de gotas (G)	2	4	6	8	10	12	14	16	18

O número de gotas de remédio (**VARIÁVEL DEPENDENTE**) a serem administradas, depende do peso da criança (**VARIÁVEL INDEPENDENTE**) e podemos escrever a seguinte expressão matemática: G = 2 P.

Dizemos que **G é função de P**.

Vamos ver agora como ficam as expressões matemáticas dos outros exemplos.

No caso do exemplo 1, se representarmos por P o valor a ser pago e por L a quantidade de litros colocados, podemos escrever que $P = 2{,}83 \times L$. Como o preço a pagar é função da quantidade de litros colocados no tanque,dizemos que **P é função de L**.

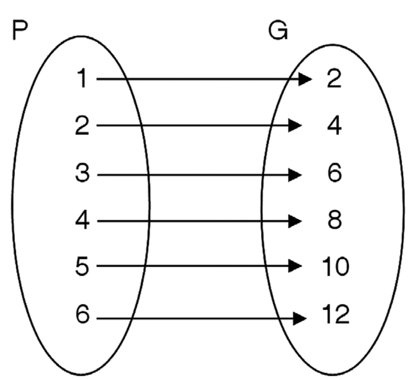
No exemplo 2, se chamarmos de R o número respondido pelo aluno e n é o número escolhido pelo professor, podemos dizer que a expressão que representa essa regra é: $R = 2n - 1$. Como o número respondido é função do número escolhido, dizemos que **R é função de n**.

Representação de uma função por diagrama

Além da representação por tabela, podemos também representar uma função por diagramas usando conjuntos e flechas para indicar a relação de correspondência entre as grandezas.

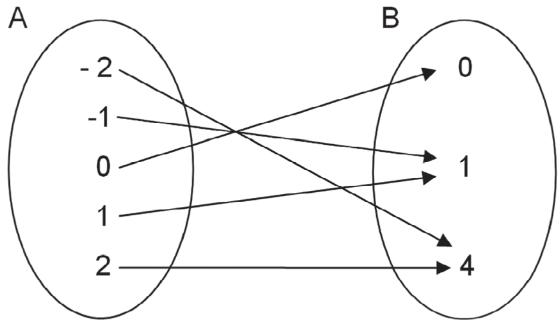
1º) Veja a representação da função do 3º exemplo.

Chamamos de P o conjunto de alguns valores que indicam os pesos e G o conjunto dos valores que indicam a quantidade de gotas correspondentes.



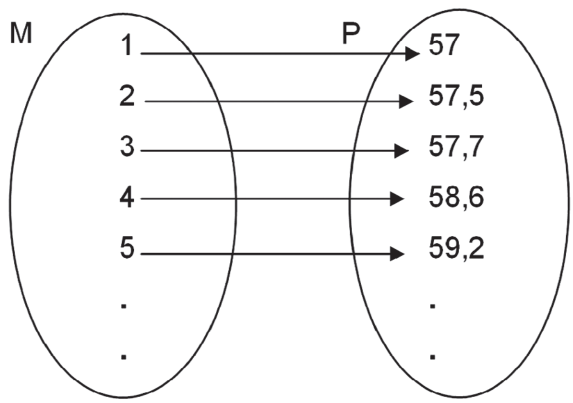
Podemos observar que **a cada valor que indica o peso**, corresponde **um único valor** que indica a quantidade de gotas do remédio

2º) Temos A = {-2, -1, 0,1,2} e B = {0, 1 4} e a expressão matemática que representa essa correspondência é $y = x^2$, onde x é elemento de A e y é elemento de B.



Neste diagrama, vemos que cada valor do conjunto A tem **um único** valor correspondente no conjunto B, portanto o diagrama está representando uma função de A em B.

3º) Observe o diagrama que mostra a relação entre tempo de gravidez M (em meses) e o peso de uma gestante P (em kg).



O peso da gestante é **função** do tempo de gestação, pois a cada mês a gestante terá apenas um peso. No entanto, neste caso não é possível determinar uma expressão matemática para indicar esta dependência. Além da variação do peso não seguir nenhum padrão, ela também muda de acordo com a gestante.

Situação Problema 1

Manuel e Solange resolveram brincar de "adivinhe a regra". Solange dizia um número e Manuel respondia outro. O objetivo do jogo é, depois de alguns exemplos, descobrir qual regra Manuel estava aplicando. Para ajudar a descobrir, Solange construiu uma tabela com os números que ela disse em uma coluna e o número que Manuel respondeu, em cada caso, em outra coluna. Veja como ficou a tabela:

Número dito por Solange (s)	Número respondido por Manuel (m)
0	-1
2	3
-1	-3
1	1
4	7

a. Descubra a regra que Manuel usou.

b. O número respondido por Manuel depende do número dito por Solange?

c. Podemos dizer que o número respondido por Manuel (m) é função do número dito por Solange(s)? Por quê?

Situação Problema 2

Uma pessoa está dirigindo em uma estrada, com uma velocidade constante de 80km/h.

a. Construa uma tabela usando t para representar o tempo (em horas) que a pessoa dirigiu, e d para representar a distância percorrida (em km).

b. Existe uma função entre essas duas grandezas? Por quê?

c. Escreva a sentença matemática que representa essa função.

Situação Problema 3

Temos A = { 0, 1, 4, 9} e B = { 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3} e a expressão matemática que representa uma correspondência entre A e B é $y = \sqrt{x}$, onde x é elemento de A e y é elemento de B.

Faça um diagrama que represente essa correspondência e verifique se ela é uma função de A em B, justificando a resposta. Todos os elementos de B recebem flechas vindas de A?

Importante

> Raiz quadrada de um número real não negativo (x) é um valor também real e não negativo que, se multiplicado por si mesmo, é igual a x.
>
> Por exemplo: A raiz quadrada de 9 é 3, porque 3 . 3 = 9. Observe que definimos a raiz quadrada de um número real não negativo como sendo um número real não negativo. Portanto, mesmo sabendo que (- 3) . (- 3) = 9, não podemos dizer que – 3 também seja uma raiz quadrada de 9.

Situação Problema 4

Em um estacionamento, são cobradas as seguintes tarifas:

1 hora: R$3,00

Após a 1ª hora: R$2,00 por hora excedente.

a. Faça uma tabela apresentando o número de horas que um carro permaneceu no estacionamento (h) e o valor a pagar em reais(r).

b. O valor a pagar é função do número de horas que o carro permanecerá no estacionamento? Explique.

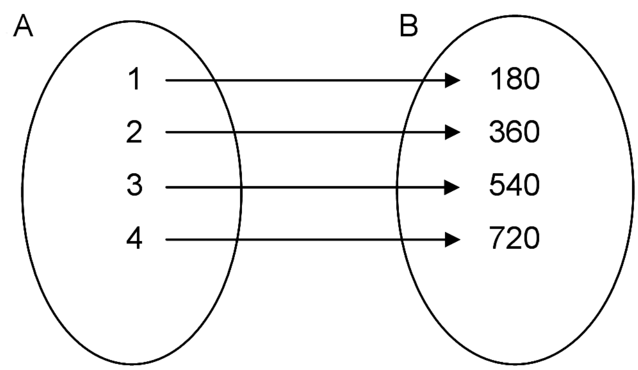
c. Escreva uma expressão matemática que represente o valor a pagar.

Notação de uma função

Como já foi visto nos exemplos anteriores, usamos letras para representar grandezas variáveis. Também já vimos que numa função há duas variáveis: a variável **independente**, que pode assumir qualquer valor em um conjunto determinado e a variável **dependente**, cujos valores são calculados a partir da 1ª variável.

Veja o seguinte exemplo:

O valor que um pintor vai cobrar para pintar as casas de um conjunto habitacional vai depender do número de cômodos da casa. Para cada cômodo ele cobrará R$ 180,00. Usando a representação com conjuntos e setas que vimos anteriormente, chegamos no diagrama a seguir:



Como o preço do trabalho depende do número de cômodos a serem pintados, podemos dizer que a variável preço é dependente da variável número de cômodos. Assim, a variável preço seria a variável dependente e o número de cômodos a variável independente. Matematicamente falando, se representarmos o número de cômodos pela variável x e o preço do trabalho pela variável y, a variável x será a variável independente, a variável y será a variável dependente.

$y = f(x)$, que se lê: y é função de x

Se lembrarmos que todos os valores do número de cômodos – a variável x, ok? – são elementos do conjunto A e que todos os preços – a variável y – são elementos de B, podemos escrever, ainda, que:

$$f: A \longrightarrow B$$

$$y = 180.x$$

Ou, em linguagem corrente, f é uma função definida de A em B, representada pela expressão

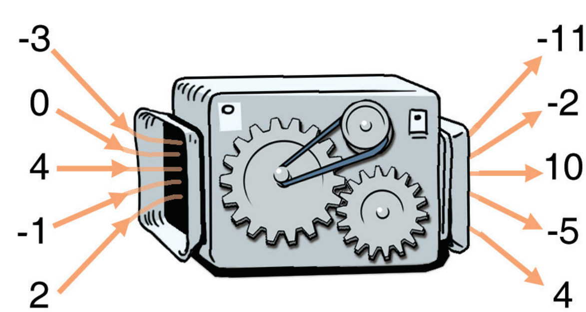
$$y = 180.x \text{ ou ainda } f(x) = 180.x$$

Domínio e Imagem

No exemplo anterior, o conjunto A cujos elementos são os números de cômodos de cada casa é chamado **Domínio da função(D)** e o conjunto B cujos elementos são os valores da pintura é chamado **Imagem da função (Im).**

Exemplo:

Veja a "máquina de números" que faz o seguinte: para cada número que entra na máquina, ela triplica e subtrai 2 do resultado. A cada número que entra, sai apenas um número da máquina, portanto essa relação obtida pela máquina é uma função.



A função dessa máquina é representada pela expressão $y = 3x - 2$, sendo **y** o número que sai da máquina e **x** é o número que entra.

O domínio dessa função é D = {-3, 0, 4, -1,2} e a Imagem é Im= {-11, -2, 10, -5, 4}

Situação Problema 5

O salário mensal de um vendedor é composto de duas partes: uma é fixa no valor de R$ 700,00 e a outra é variável sendo igual a 1% do total que ele vende no mês.

Atividade

Chamando de **v** o total de vendas e de **s** o salário final do vendedor, podemos escrever que $s = f(v)$ é a função que associa o total de vendas com o salário do vendedor.

Escreva a expressão algébrica que represente essa situação.

Importante

Lembre-se que para calcular 1% de uma quantia basta dividi-la por 100 ou ainda multiplicá-la por 0,01.

Desafio 1:

Se aquele vendedor recebeu de salário R$ 735,20, quanto vendeu neste mês?

Anote suas respostas em seu caderno

Proporcionalidade e função

A proporcionalidade é um exemplo importante de função matemática que está presente no dia a dia das pessoas em diferentes situações, vejamos alguns exemplos:

- Determinar o preço de 6 lápis conhecendo o preço de 1 lápis.
- Calcular a quantidade de carne necessária para um churrasco sabendo-se que, em média, cada convidado come 200g de carne.
- Determinar o preço de um imóvel em certa região, conhecendo o preço de $1m^2$ de construção naquele local.

Exemplos:

1º) Em locais onde se faz cópias xerox, é comum haver uma tabela, para facilitar o trabalho, que relaciona o número de cópias tiradas com o total a pagar.

Número de cópias	Total a pagar
1	0,25
2	0,50
3	0,75
4	1,00
5	1,25
:	:

Observando a tabela, vemos que quando multiplicamos por 2 o número de cópias, o total a pagar também fica multiplicado por 2; e quando multiplicamos por 3 o número de cópias, o total a pagar também fica multiplicado por 3, e assim por diante. Portanto, podemos concluir que o valor a pagar é **diretamente proporcional** ao número de cópias tiradas.

Por outro lado, o valor a pagar **é função** da quantidade de cópias tiradas, pois a cada quantidade de cópias há apenas um valor a pagar.

Considerando x a quantidade de cópias tiradas e y o valor a pagar, podemos escrever:

$$\frac{x}{y}=\frac{1}{0,25}=\frac{2}{0,50}=\frac{3}{0,75}=\frac{4}{1}=\ldots\ldots$$

Logo, a expressão matemática que representa esta função é

$$y=0,25\cdot x$$

2º) Para fazer um passeio à uma cidade histórica um grupo de amigos resolveu alugar um ônibus. A despesa será rateada entre os participantes do passeio, de acordo com a tabela a seguir:

Número de participantes	Quantia a pagar(R$)
10	54,00
36	15,00
20	27,00
25	21,60
30	18,00
18	30,00

Observando a tabela, vemos que ao **multiplicar por 2** o número de participantes, por exemplo $10 \times 2 = 20$, a quantia correspondente **fica dividida por 2** ($54 \div 2 = 27$). Neste caso, a quantia a pagar é **inversamente proporcional** ao número de participantes do passeio.

Por outro lado, a quantia a pagar é **função** do número de participantes e a expressão que representa esta função pode ser escrita assim:

$y = \dfrac{540}{x}$, onde x é o número de participantes e y é a quantia a pagar.

Importante

Sempre que duas grandezas são proporcionais, DIRETAMENTE OU INVERSAMENTE, existe uma função entre elas. No entanto, nem toda função é uma proporção, pois as grandezas podem aumentar ou diminuir ao mesmo tempo sem que haja uma proporcionalidade entre seus valores.

Desafio 2:

Dê um exemplo de uma função entre duas grandezas sem que essas grandezas sejam proporcionais. Pode utilizar uma tabela ou um diagrama.

1. Uma companhia telefônica oferece aos consumidores dois tipos de contrato:

1º tipo: Assinatura mensal: R$ 45,00

Tarifa por minuto: R$ 0,38

2º tipo: Assinatura mensal: isenta

Tarifa por minuto: R$ 1,80

Responda:

a. Quais são as sentenças matemáticas que expressam o total a ser pago no final do mês em cada um dos dois tipos de contrato?

b. As opções de contrato apresentam proporcionalidade entre as grandezas envolvidas? Justifique.

2. Um carro consome 1 litro de combustível em média a cada 9km.

a. Faça uma tabela relacionando as grandezas distância (D) em km e consumo (L) em litros.

b. O consumo do carro é função da distância percorrida? Por quê?

c. O consumo do carro é proporcional à distância percorrida? Explique.

d. Escreva uma expressão matemática que represente a relação entre o consumo do carro e a distância percorrida pelo carro.

Importante

O consumo de um carro é medido pelo número de quilômetros que ele percorre gastando 1 litro de combustível. Este consumo depende, entre outros fatores, da velocidade com que ele anda.

3. Um pintor foi contratado para pintar uma parede cuja área é de $240m^2$.

A tabela a seguir mostra o quanto ainda falta ser pintado no final de cada dia.

Dia	Área a ser pintada (m^2)
0	240
1	200
2	150
3	120
4	60
5	60
6	30
7	0

Responda:

a. A área (y) da parede a ser pintada é função do dia (x)?

b. Quando o valor de x (dia) cresce o que acontece com o valor de y (área a ser pintada)?

c. A relação entre a área a ser pintada e o dia trabalhado apresenta proporcionalidade? Por quê?

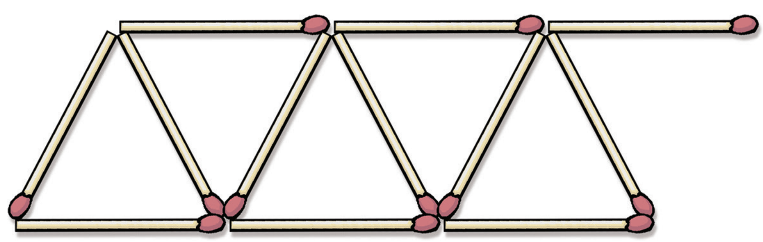
d. Quantos dias o pintor levou para terminar o serviço?

e. O que pode ter acontecido no 5º dia, que a área a ser pintada permaneceu a mesma que a do dia anterior?

4. Considere a função $f: x \longrightarrow y$ definida por $y = 4x + 1$.

Se $D = \{\frac{1}{4}; \frac{1}{3}; 0{,}15\}$ Determine o conjunto Imagem da função.

5. Daniel arrumou palitos de fósforos como mostra o desenho a seguir:



Se Daniel continuar formando triângulos seguindo esse modelo, quantos palitos Daniel usará para formar:

a. 4 triângulos?

b. 40 triângulos?

c. *t* triângulos?

d. Escreva a expressão que representa o total de palitos (p) em função do número de triângulos (*t*).

6. A bandeirada na corrida de táxi em uma cidade é R$ 4,30 e o valor por quilômetro rodado é R$ 1,40 durante o dia.

a. Escreva uma expressão que indica o valor total de uma corrida (C) em função do número de quilômetros rodados (km).

b. Qual o valor de uma corrida de 9,5km?

Conclusão

A noção de função é muito importante em Matemática, pois ela é aplicada em vários campos de estudo da própria Matemática e também em outras áreas do conhecimento.

O estudo de funções não se esgota nessa unidade e terá uma continuação em várias outras unidades, aprofundando o estudo e apresentando diferentes funções em diferentes campos da Matemática. É importante que você termine esta unidade dominando a linguagem e o simbolismo utilizado no tratamento das funções.

Na próxima aula continuaremos trabalhando a noção de função, aprofundando a representação por meio de gráficos, sua interpretação e sua construção.

Resumo

- A noção de função é muito utilizada em diferentes áreas do conhecimento e também no nosso dia a dia.
- É importante reconhecer que quando dois conjuntos apresentam uma correspondência tal que cada elemento do 1º conjunto está associado a apenas um elemento do 2º conjunto, esta correspondência é uma função.
- Uma função pode ser apresentada utilizando-se tabelas e diagramas. É importante fazer uma articulação entre as diferentes formas de apresentar uma função que foram trabalhadas nesta unidade: a tabela, o diagrama e a expressão matemática que representa a função, além dos gráficos.
- O conjunto cujos elementos são valores da variável independente é o Domínio da função, enquanto o conjunto cujos elementos são os valores da variável dependente é a Imagem da função. Simplificando, podemos dizer que o Domínio da função é o conjunto de onde partem as setas no diagrama e a Imagem é o conjunto formado pelos elementos onde chegam as setas. Observemos que pode haver casos em que sobrem elementos nesse conjunto.

  OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: Caso sobrem elementos no conjunto onde chegam as flechas, esse conjunto será chamado de contra-domínio da função, e a imagem da função será um subconjunto desse contra-domínio, ou seja, será o conjunto formado apenas pelos elementos que recebem as flechas.
- A notação matemática de função usualmente é $f: A \longrightarrow B$
  $y = f(x)$

  Onde A é o domínio da função, B é o contra-domínio da função e f(x) é a expressão matemática que representa a função. Podemos ler, usando a notação assim:
  f de A em B sendo $y = f(x)$.
- Uma função que destacamos pela sua importância tanto na Matemática como no cotidiano é a proporcionalidade. Toda proporção, seja direta ou inversa, é uma função, no entanto nem toda função apresenta proporcionalidade.

Veja Ainda

No site a seguir você irá encontrar atividades interativas em forma de jogo utilizando a noção de função e desenvolvendo a capacidade de descobrir a "regra" ou lei de formação das variáveis de uma função de maneira curiosa e divertida: http://www.uff.br/cdme/c1d/c1d-html/c1d-br.

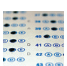
Referências

Livros

- Multicurso – Ensino médio –1ª série – Fundação Roberto Marinho – 2ª edição, 2005.
- BORDEAUX , Ana Lucia e outros. **Conexão Matemática**. Editora do Brasil – 9º ano, 2012.

Imagens

- http://www.sxc.hu/photo/475767



- http://www.sxc.hu/photo/517386

Respostas das Atividades

Situação Problema 1

a. A regra é: multiplica o número por 2 e subtrai 1 do resultado. Podemos escrever uma sentença matemática indicando essa regra da seguinte maneira: $m = 2s - 1$, sendo M o número que Manuel respondeu e s o número que Solange falou.

b. Sim, Manuel só pode responder dependendo do número que Solange disser.

c. Sim, é função porque para cada número que Solange diz, Manuel só responde um número.

Situação Problema 2

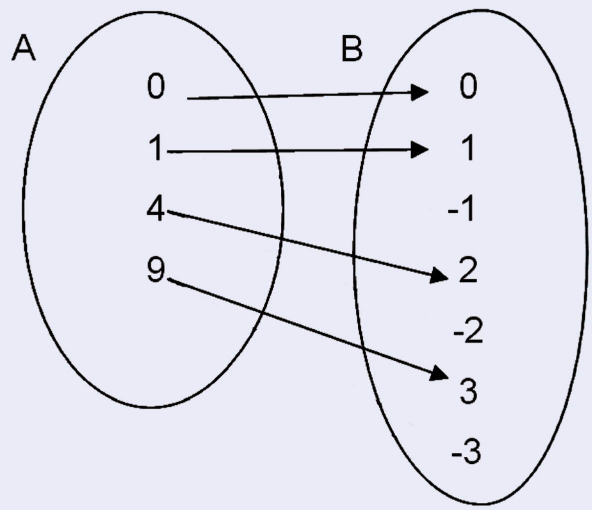
a.

t (horas)	d (km)
1	80
2	160
3	240
4	320
5	400

b. A cada hora corresponde um valor para a distância percorrida em quilômetros.

c. $d = 80t$, sendo d a distância percorrida em km e t o tempo gasto no percurso em horas.

Situação Problema 3



A relação é uma função, pois todos os elementos do conjunto A têm um único correspondente no conjunto B e ainda, não sobram elementos no conjunto A.

Nesse caso, sobram elementos no conjunto B. A imagem dessa função não corresponde ao conjunto B todo. Assim, B é o contra-domínio da função, enquanto Im(f) = {0, 1, 2, 3}.

Situação Problema 4

a.

h	r
1	3
2	5
3	7
4	9

b. Sim, pois a cada valor para o tempo em horas corresponde apenas um valor total a pagar em reais.

c. $r = 3 + 2h$, sendo h o número de horas excedentes que o carro permaneceu no estacionamento e r o valor total a pagar.

Respostas das Atividades

Situação Problema 5

s = 700 + 0,01.v

Desafio 1

Como o vendedor recebeu R$ 35,20 a mais que R$ 700,00 e este valor é 1% do que ele vendeu, basta multiplicar por 100 e concluímos que ele vendeu R$ 3.520,00 neste mês.

Desafio 2

Exemplo de resposta: A função que relaciona o peso de uma pessoa a cada mês.

1.

a. 1º) 45 + 0,38.t

2º) 1,80.t

b. Só o 2º tipo de contrato apresenta proporcionalidade entre as grandezas, pois dobrando o tempo de uso do telefone, por exemplo, dobrará também o valor da conta.

2.

a.

L (litros)	D (em km)
1	9
2	18
3	27
4	36

b. Sim, a cada quantidade de litros gastos está associada apenas a uma distância percorrida em km.

c. A relação entre as grandezas apresenta proporcionalidade. Ao dobrar a quantidade de combustível, por exemplo, a distância percorrida também dobra.

d. D=9L

3.

a. Sim, a cada dia de pintura corresponde um único valor para a área que falta pintar.

b. Decresce ou fica constante (no 5º dia).

c. Não. Quando se duplica o número de dias a área a ser pintada não fica reduzida à metade, por exemplo.

d. 7 dias

e. Há várias possibilidades para que a parede não fosse pintada nesse dia. O pintor pode ter faltado, a tinta pode ter acabado, a pintura pode não ter secado devido ao mau tempo. Esses são alguns exemplos.

4. $\mathrm{Im} = \left\{ 2; \frac{7}{3}; 1{,}60 \right\}$

5.

a. 9 palitos.

b. 81 palitos.

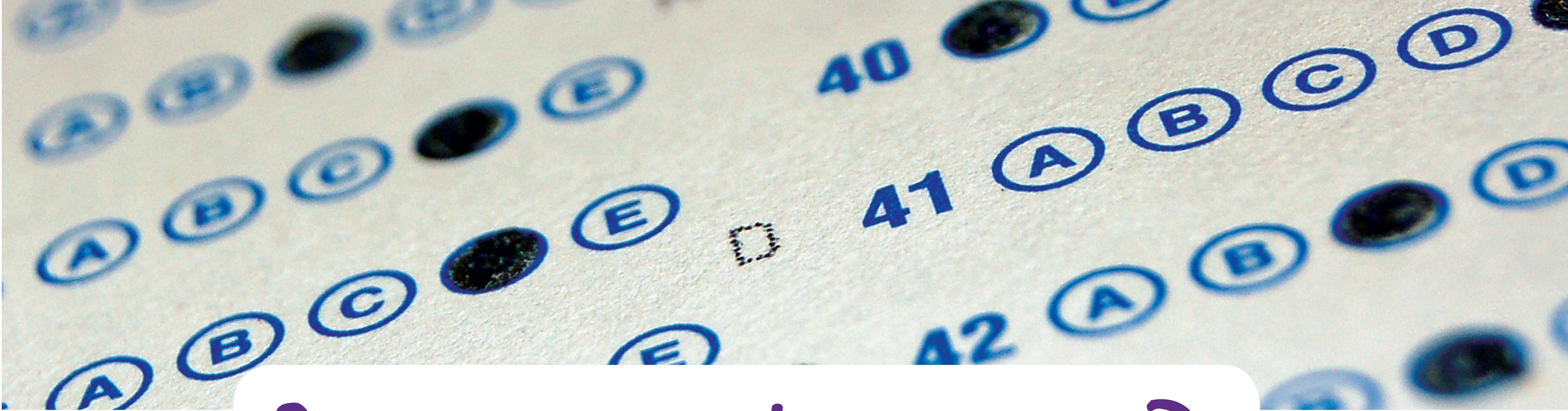
c. p = 3 + 2(t-1) = 2t +1

d. p = 3 + 2(t - 1) = 2t + 1, onde t é o número de triângulos e p o número de palitos de fósforos usados.

6.

a. C= 4,30 + 1,40k

b. R$ 17,60



O que perguntam por aí?

Atividade 1

QUESTÃO 155

O saldo de contratações no mercado formal no setor varejista da região metropolitana de São Paulo registrou alta. Comparando as contratações deste setor no mês de fevereiro com as de janeiro deste ano, houve incremento de 4 300 vagas no setor, totalizando 880 605 trabalhadores com carteira assinada.

Disponível em: http://www.folha.uol.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

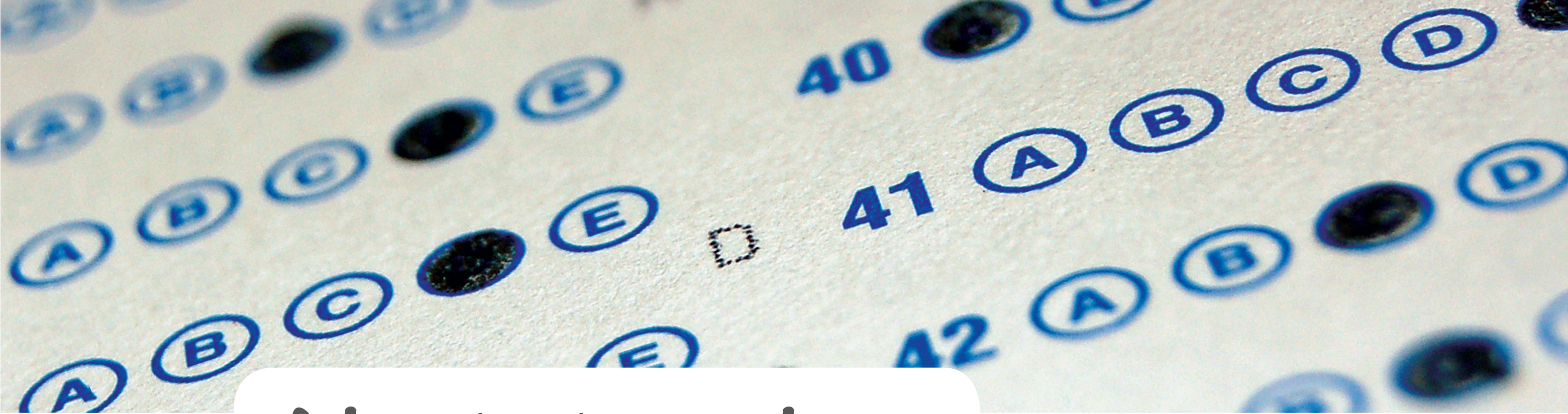
Suponha que o incremento de trabalhadores no setor varejista seja sempre o mesmo nos seis primeiros meses do ano.

Considerando-se que y e x representam, respectivamente, as quantidades de trabalhadores no setor varejista e os meses, janeiro sendo o primeiro, fevereiro, o segundo, e assim por diante, a expressão algébrica que relaciona essas quantidades nesses meses é

Ⓐ $y = 4\ 300x$
Ⓑ $y = 884\ 905x$
Ⓒ $y = 872\ 005 + 4\ 300x$
Ⓓ $y = 876\ 305 + 4\ 300x$
Ⓔ $y = 880\ 605 + 4\ 300x$

Resposta: Letra C

Comentário: O total de trabalhadores com carteira assinada nesses dois meses (janeiro e fevereiro) foi de 880.605. Subtraindo-se desse total 2 vezes o incremento havido no setor, ou seja, 2 vezes 4.300 vagas encontramos 872.005 que é a quantidade de trabalhadores antes de Janeiro. Como há um incremento de 4.300 vagas a cada mês, a expressão que relaciona as quantidades nesses meses será a expressão do item C.



Atividade extra

Exercício 1

Um carro consome, em média, 20 litros de combustível a cada 250 km. Qual expressão representa a relação entre o consumo de combustível - C e a distância - d percorrida?

(a) $C = 20d$ (b) $C = 12,5d$ (c) $C = d/12,5$ (d) $C = d/20$

Exercício 2

Certo estacionamento cobra uma taxa de R$5,00 para a primeira hora e R$1,50 por hora excedente.

Qual expressão representa o valor (V) a pagar, em função do tempo (t) de permanência do veículo no estacionamento?

(a) $V(t) = 5 + 1,5(t - 1)$

(c) $V(t) = 5 + 1,5t$

(b) $V(t) = 5 + 1,5(t + 1)$

(d) $V(t) = 5 - 1,5t$

Exercício 3

O valor do metro quadrado dos imóveis de um bairro é R$1500,00. Que expressão representa o preço dos imóveis desse bairro?

(a) $V(x) = 1500x$ (b) $V(x) = 3000x$ (c) $V(x) = 150x$ (d) $V(x) = 300x$

Exercício 4

Uma papelaria vende uma caneta por R$ 3,00. Seu gerente decide vender caixas com 4 unidades dessa caneta.

Qual expressão representa o valor das vendas (V) em função da quantidade x de caixas vendidas?

(a) $V(x) = 3x$ (b) $V(x) = 4x$ (c) $V(x) = 10x$ (d) $V(x) = 12x$

Exercício 5

Uma costureira faz um vestido a cada três dias. Qual expressão representa a produção dessa costureira em x dias?

(a) $f(x) = 3x$ (b) $f(x) = x$ (c) $f(x) = x/3$ (d) $f(x) = x^3$

Exercício 6

Um motorista dirige com uma velocidade constante de 90km/h. Que função representa essa situação?

(a) $d(t) = 90t$ (b) $d(t) = 45t$ (c) $t(d) = 90d$ (d) $t(d) = 45d$

Exercício 7

Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 6, 9, 12\}$.

Qual expressão representa a correspondência entre os elementos $x \in A$ e os elementos $y \in B$?

(a) $y = x$ (b) $y = 2x$ (c) $y = 3x$ (d) $y = 4x$

Exercício 8

Considere os conjuntos A = {2, 5, 7, 12} e B = {6, 9, 11, 16}. Qual expressão representa a correspondência entre os elementos $x \in A$ e os elementos $y \in B$?

(a) $y = x + 4$ (b) $y = 3x$ (c) $y = 4x$ (d) $y = x + 3$

Exercício 9

Considere os conjuntos A = f{3, 6, 9} e B = {7, 13, 19}. Qual expressão representa a correspondência entre os elementos $x \in A$ e os elementos $y \in B$?

(a) $y = 2x - 1$ (b) $y = 2x + 1$ (c) $y = 3x - 2$ (d) $y = 3x - 5$

Exercício 10

Considere os conjuntos A = {6, 8, 10} e B = {5, 6, 7{. Qual expressão representa a correspondência entre os elementos $x \in A$ e os elementos $y \in B$?

(a) $y = x - 1$ (b) $y = 2x + 2$ (c) $y = x/2 + 2$ (d) $y = x - 2$

Exercício 11

Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = 3x + 2$.

Determine a Imagem da função.

Exercício 12

Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = -5x + 4$.

Qual o conjunto Imagem da função?

Exercício 13

Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 5/x$.

Qual o Domínio da função?

Exercício 14

Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por f (x) = $\sqrt{x}$

Determine o domínio de f (x)?

Exercício 15

O salário mensal de um empregado é dado por uma parte fixa de R$ 890,00 e outra variável sendo igual a 0, 5% do lucro da empresa. Nesse mês o empregado recebeu R$1040,00.

Qual o lucro da empresa nesse mês?

Gabarito

Exercício 1

A B C D

○ ○ ● ○

Exercício 2

A B C D

● ○ ○ ○

Exercício 3

A B C D

● ○ ○ ○

Exercício 4

A B C D

○ ○ ○ ●

Exercício 5

A B C D

○ ○ ● ○

Exercício 6

A B C D

● ○ ○ ○

Exercício 7

A B C D

○ ○ ● ○

Exercício 8

A B C D

● ○ ○ ○

Exercício 9

A B C D

○ ● ○ ○

Exercício 10

A B C D

○ ○ ● ○

Exercício 11

$\mathbb{R}$.

Exercício 12

$\mathbb{R}$.

Exercício 13

$\mathbb{R}^*$.

Exercício 14

$\mathbb{R}^+$.

Exercício 15

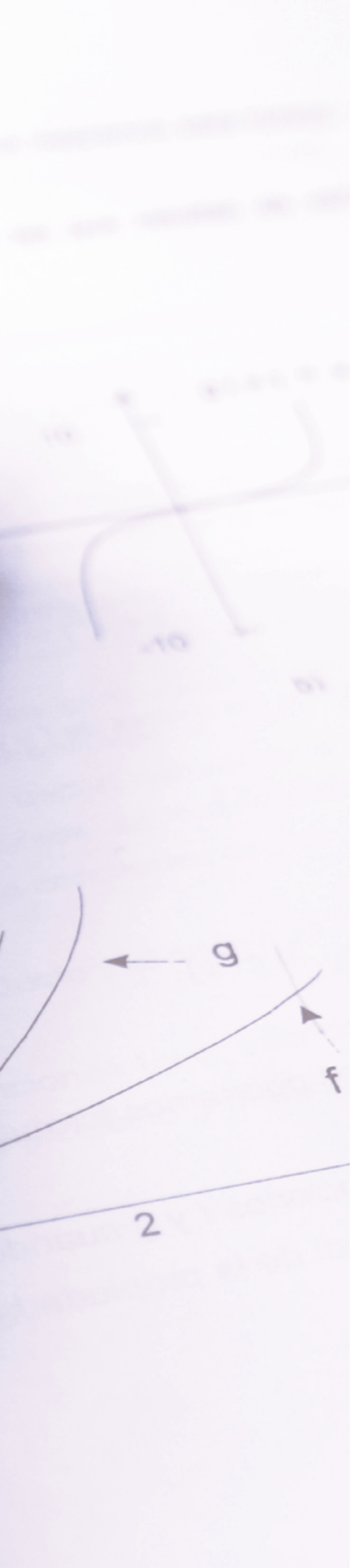
R$ 30.000,00.

Estudo de funções
Parte 2

Fascículo 4

Unidade 13

Fundação CECIERJ



Estudo de funções – Parte 2

Para início de conversa...

Taxa de desemprego no Brasil cai a 5,8% em maio

A taxa de desempregados no Brasil caiu para 5,8% em maio, depois de registrar 6% em abril, segundo informações do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), divulgadas nesta quinta-feira. Trata-se da menor taxa para meses de maio desde 2002, quando iniciou a série histórica.

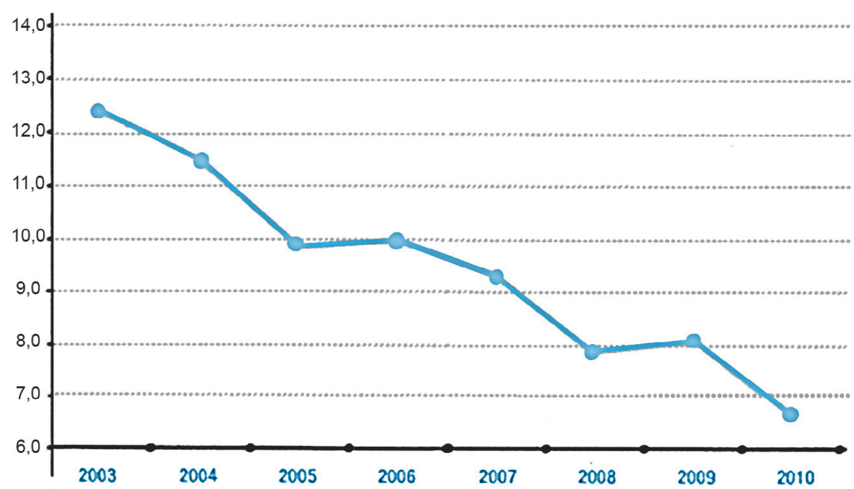
"O resultado do rendimento veio de uma estabilidade ocorrida por conta de movimentos em Porto Alegre e Salvador. São primeiros sinais e temos de ver os próximos meses", destacou o gerente da pesquisa, Cimar Azeredo.

Em comparação com maio do ano passado, a taxa recuou 0,6 pontos percentuais, já que estava a 6,4%. As expectativas de analistas giravam em torno de 5,9% a 6,2% para o índice.

http://veja.abril.com.br/noticia/economia/taxa-de-desemprego-no-brasil-cai-a-5-8-em-maio. 21/06/2012 - 09:06

A taxa de desemprego no Brasil, descrita na reportagem que você acabou de ler, é analisada pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), através da Pesquisa Mensal do Emprego.

O gráfico ao lado apresenta a variação da taxa de desemprego no Brasil em porcentagens nos anos de 2003 a 2010. Podemos observá-lo e tirar conclusões sobre a variação da taxa de desemprego no país nesse período, mesmo sem conhecer exatamente os valores dessa taxa, já que nem todos estão assinalados no gráfico. Por exemplo, que grandezas estão relacionadas no gráfico? Em que ano o percentual de desemprego foi o mais baixo? E o mais alto? Há algum período em que a taxa aumentou? Qual?



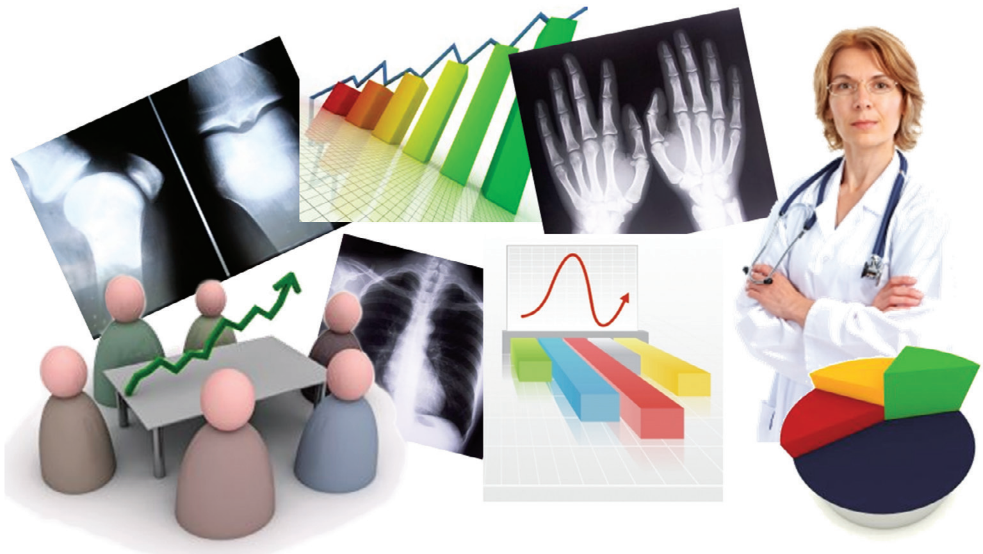
Perguntas como estas mostram a importância do estudo de gráficos. Os meios de comunicação (revistas, jornais, televisão) utilizam frequentemente este recurso para veicular de maneira clara, simples e objetiva vários tipos de informação.

Nesta unidade, você conhecerá um instrumento importante em Matemática que é o gráfico de uma função. Aprenderá a construir um gráfico e terá oportunidade para praticar formas de ler, interpretar e analisar as informações, utilizando os dados do gráfico para resolver problemas.

Objetivos de Aprendizagem

- Ler e interpretar gráficos
- Construir gráficos de funções, utilizando tabelas de pares ordenados;
- Reconhecer se um gráfico representa uma função;
- Determinar o Domínio e Imagem de uma função pela análise de um gráfico;
- Ler e interpretar gráficos de função.

Seção 1
Gráficos: O uso de gráficos



Mesmo uma simples tarefa diária como a leitura de um jornal ou revista nos remete a visualização de gráficos. Seja a evolução da moeda, estatísticas sobre moda masculina ou feminina, esportes ou também dados referentes a eleições, todas estas informações podem ser apresentadas através de representações gráficas.

Quer sejam em barras, colunas, em forma de disco ou revestidos de desenhos, todos os gráficos são utilizados no intuito de apresentar informações que não seriam tão claras se fossem apresentadas simplesmente na forma escrita.

Nesta seção mostraremos como construir e interpretar o gráfico de uma função. Mãos à obra!

Seção 2
Construção de um gráfico cartesiano

Considere a função de A em B

a. $f: A \rightarrow B$

sendo $A = \{-2, -1, 0, 2, 3\}$ e $B = \{-4, -2, 0, 4, 6\}$ e $y = 2x$ a sentença que define essa função.

1º) Construção da tabela de pares ordenados.

Construa uma tabela com os valores de x na 1ª coluna, os valores correspondentes de y numa 2ª coluna e na 3ª coluna os pares ordenados que foram encontrados.

Lembre-se que os valores de x são os elementos do conjunto A e que os valores de y precisam ser calculados, usando a sentença matemática que define a função (y = 2x)

Observe que cada valor de x corresponde a um único valor de y.

X	Y= 2x	(x, y)
-2	y = - 2.2 = - 4	(-2, -4)
-1	y = -1.2= - 2	(-1, -2)
0	y = 0.2= 0	(0, 0)
2	y = 2.2 = 4	(2,4)
3	Y = 2.3 = 6	(3, 6)

Quando dizemos que f(x) é uma função de A em B, podemos também dizer que para cada valor do conjunto A existe um único valor no conjunto B que corresponde a ele.

2º) Construção do gráfico

Marque em um plano cartesiano os pares ordenados encontrados na tabela.

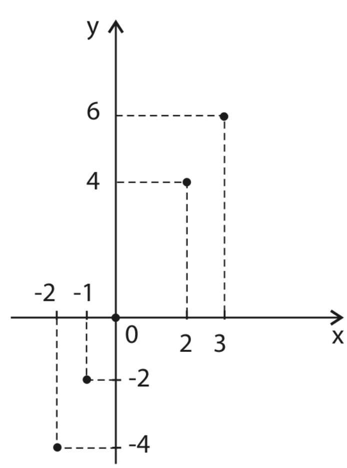


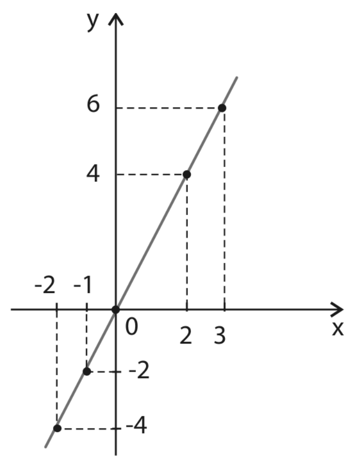
Figura 1: Gráfico da função de A em B.

O gráfico tem apenas 5 pontos que correspondem aos 5 pares ordenados encontrados.

O que acontece, quando o domínio e a Imagem da mesma função mudam?

Para responder a essa pergunta,, vamos construir o gráfico da *mesma função* do exemplo anterior, porém agora considerando o A = $\mathbb{R}$ e B= $\mathbb{R}$.

Nesse caso, podemos usar os mesmos valores da tabela anterior, porém observando que muitos outros valores poderiam ser usados para a variável x, inclusive números racionais, e até mesmo irracionais. Desta forma, o gráfico ficará assim:



Lembre-se: O conjunto dos números reais é o conjunto que contém todos os outros conjuntos numéricos: números naturais, números inteiros, números racionais e números irracionais.

O gráfico da função será uma linha reta, ligando todos os pontos que representam os pares ordenados encontrados na tabela, pois entre dois desses pontos existe uma infinidade de outros pontos, também pertencentes ao gráfico da função.

Atividade 1

Seja a função de A= {-2, -1, 0, 1, 2} em $\mathbb{Z}$ (conjunto dos números inteiros). A expressão que representa essa função é y = 2x + 3. Construa o gráfico da função.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 2

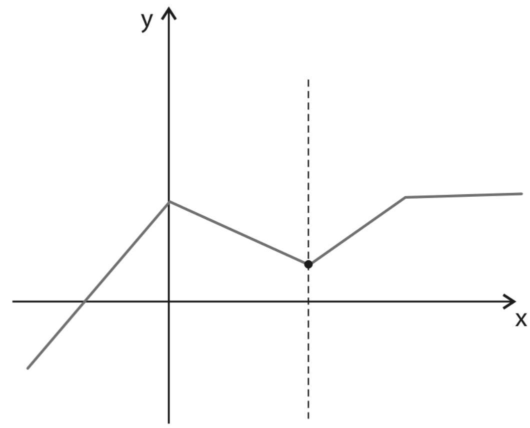
Dado L o lado de um de um quadrado, escreva a função de $\mathbb{R}_+$ em $\mathbb{R}_+$ que representa o perímetro desse quadrado. Em seguida, faça o gráfico da função.

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 3
Reconhecer uma função pelo seu gráfico cartesiano

Para reconhecer se um gráfico representa uma função, é importante lembrar que em uma função cada elemento x do domínio deve estar ,associado a um único elemento y do Conjunto Imagem

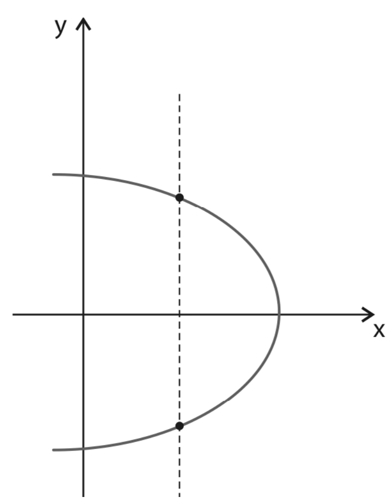
O gráfico a seguir, por exemplo, representa uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, pois cada x do conjunto dos números reais tem um único valor de y, correspondente no conjunto dos números reais. Veja:



A linha pontilhada vertical mostra que para um determinado valor de x do domínio da função só existe um valor correspondente para y. O mesmo poderá ser observado com qualquer outro valor de x.

Você pode traçar outras retas verticais para verificar este fato.

O gráfico a seguir não representa uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, pois existem valores de x que possuem mais de um valor correspondente y. Veja:



Aqui, neste gráfico, a reta pontilhada vertical mostra-nos que um determinado valor de x possui mais de um correspondente y.

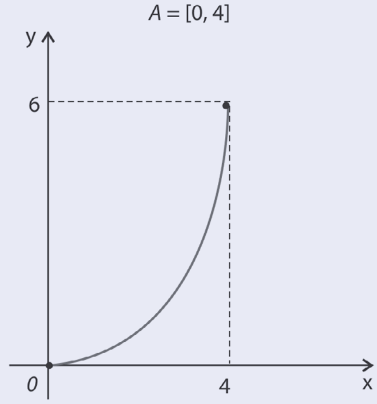
O mesmo poderá ser observado com outros valores de x.

Experimente traçar outra reta vertical diferente desta e verifique o que acontece.

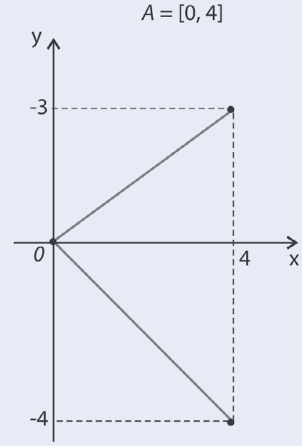
Atividade 3

Verifique quais dos gráficos a seguir representam funções de A em $\mathbb{R}$, justificando a resposta.

a) $A = [0, 4]$



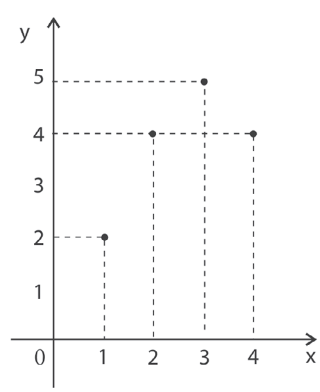
b) $A = [0, 4]$



Anote suas respostas em seu caderno

Uma vez que já sabemos quando um gráfico representa uma função, como fazer para determinar seu Domínio e Imagem? É simples! Vamos observar os valores assinalados no eixo horizontal (eixo das abscissas) para determinar o Domínio da função e, em seguida, verificar quais os valores assinalados no eixo vertical (eixo das ordenadas), para determinar a Imagem da função.

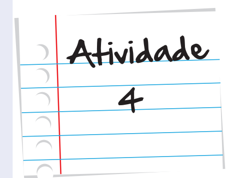
Exemplo:



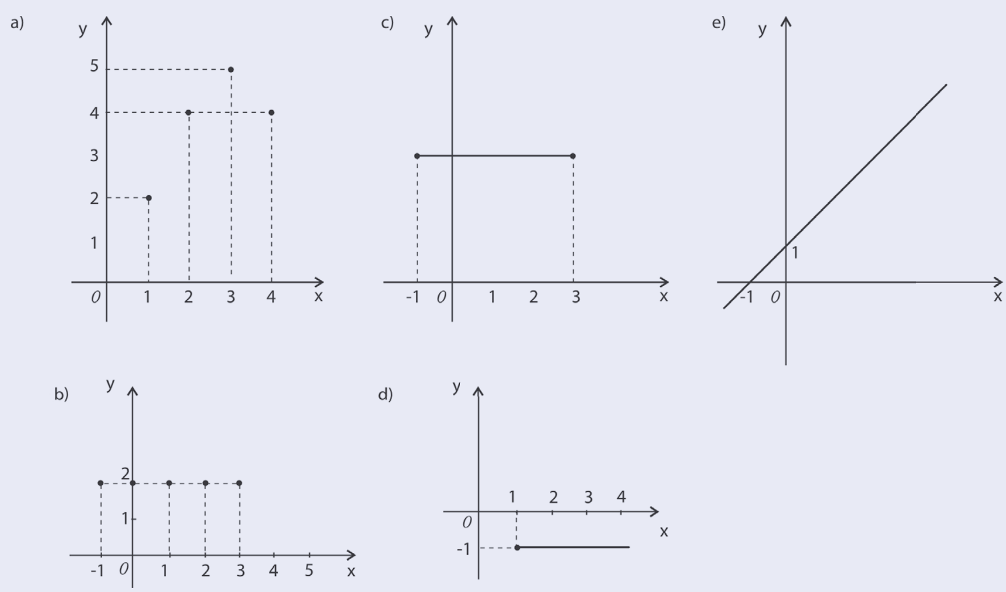
Neste exemplo, o Domínio da função é o conjunto {1, 2, 3, 4}, pois são esses os valores de x que estão assinalados no eixo das abscissas (horizontal).

O conjunto Imagem da função {2, 4, 5}, pois são esses os valores de y que estão assinalados no eixo das ordenadas(vertical). Podemos escrever assim:

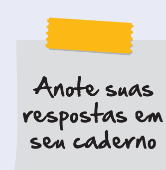
F(1) = 2; f(2) = 4 f(3)=5; f(4) = 4



Os gráficos a seguir representam funções de A em B. Em cada caso, determine o conjunto A (que será domínio da função):



Ao olharmos um gráfico, é importante que seja feita, sua leitura e interpretação, para que possamos compreender e utilizar os resultados apresentados.



Seção 4
Interpretação de um gráfico

O gráfico a seguir representa a variação das médias mensais de uma turma em Matemática

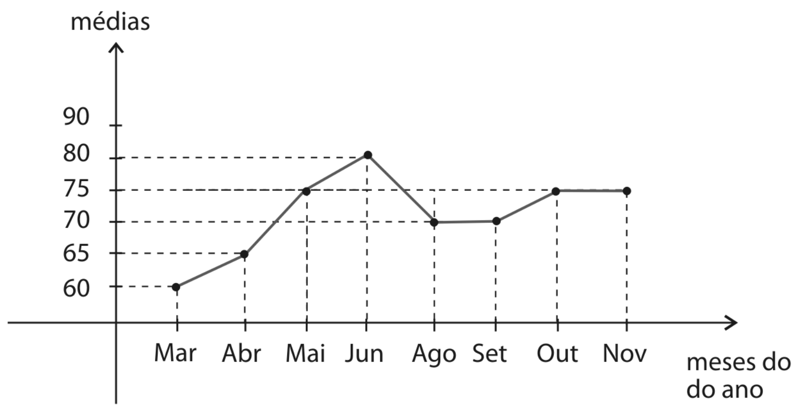


Figura 2: O gráfico mostra a flutuação das médias dos alunos ao longo do ano.

Neste gráfico, os pontos foram ligados por segmentos de reta, apesar de o domínio ser um conjunto com um número finito de elementos (os meses do ano). Isso se faz, quando se pretende ter uma melhor visualização dos dados da situação. Assim, podemos ver melhor como foi a variação das médias de um mês para outro.

É possível definir em qual mês houve maior média? E menor média? Ao observar esse gráfico, a que conclusões você chega?

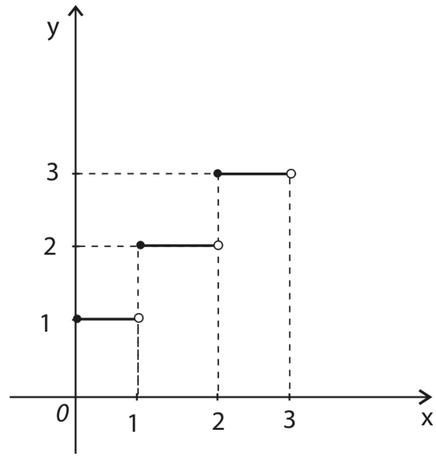
Podemos retirar desse gráfico três importantes conclusões:

1. Do mês de março até o mês de junho, as médias aumentaram. Dizemos que nesse intervalo de tempo a função é *crescente*.

2. Do mês de junho para o mês de agosto, a média diminuiu. A função nesse intervalo é *decrescente*.

3. De agosto a setembro, inclusive, as médias permaneceram iguais, assim como de outubro a novembro. Nesses casos, dizemos que a função é *constante* nesses dois intervalos.

Veja outro exemplo:



Podemos concluir que

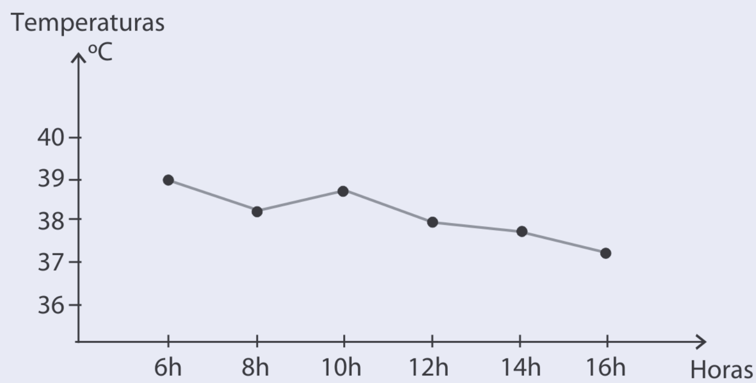
- quando x = 0 o valor correspondente é y= 1, isto é, f(0)=1
- Para valores de x entre 0 e 1 o valor de y permanece igual (constante).
- Quando x = 1 o valor correspondente é y = 2, ou seja, f(1) = 2
- Para valores de x entre 1 e 2 o valor correspondente é y = 2, também constante.

E assim por diante. Ou seja, essa função é constante para determinados intervalos de x.

Note que o domínio desta função está no intervalo [0,3[e que entre dois inteiros dentro deste intervalo, a função é sempre constante. Ou seja, no intervalo [0,1[o valor da imagem é sempre 1. No intervalo [1,2[a imagem é sempre 2 e no intervalo [2,3[a imagem sempre será 3.

Atividade 5

Lucas está adoentado e com febre. Ele mediu e anotou a sua temperatura a cada duas horas e fez o seguinte gráfico:



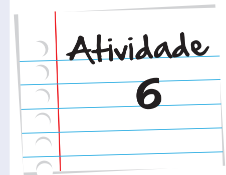
Responda:

a. Ao final do dia, sua temperatura diminuiu ou aumentou?

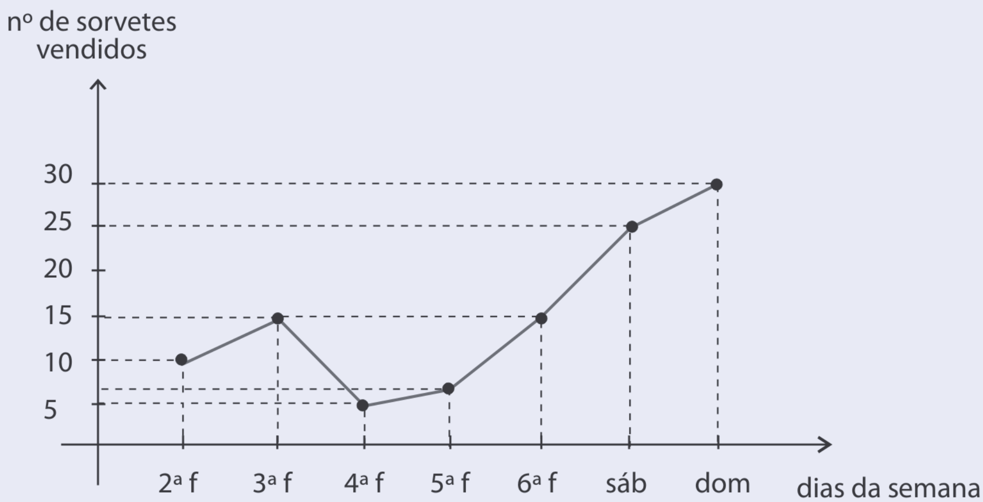
b. Entre que horas, a temperatura permaneceu a mesma?

c. De quanto era a sua temperatura às 12h?

Anote suas respostas em seu caderno



Seu José resolveu registrar em um gráfico a quantidade de sorvetes vendidos em sua lanchonete, durante uma semana.

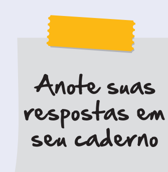


a. Em qual dia, ele vendeu mais sorvetes?

b. Em qual dia, ele vendeu menos?

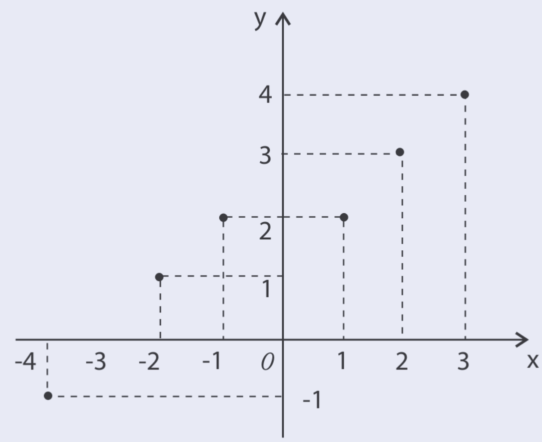
c. Quantos sorvetes ele vendeu no sábado?

d. Em quais dias, ele vendeu a mesma quantidade?



Atividade 7

Dada a função f , representada no gráfico abaixo, responda:



a. Quais são os pares ordenados de f?

b. Qual é o Domínio de f?

c. Qual o valor de x para f(x) = 2?

d. 2 é imagem de que valores de x?

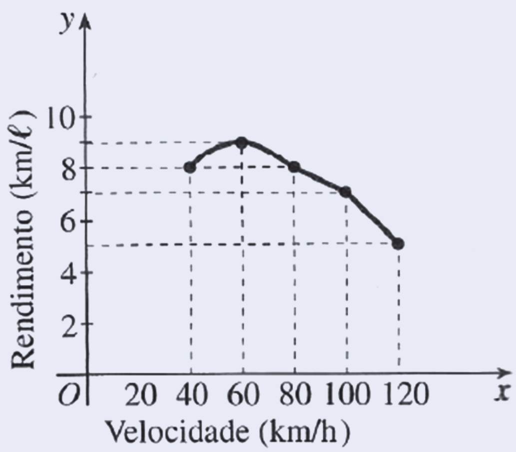
e. Qual é o conjunto Imagem de f?

f. Para que valores de x, teremos valores de y menores que zero?

Atividade 8

Observe o gráfico que representa o consumo de um automóvel.

Vamos supor que o consumo foi registrado instante a instante, ou seja, a cada pequena variação de velocidade o consumo de gasolina foi observado.



a. Quando a velocidade é constante e igual a 80km/h, qual o rendimento desse automóvel, em quilômetros por litro?

b. E se a velocidade for constante e igual a 100 km/h?

c. Qual é a velocidade mais econômica?

d. Entre quais valores do Domínio da função o rendimento aumenta?

e. Entre quais valores do Domínio da função há decrescimento nos rendimentos?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 9

Dada a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 1$, ache quatro pares dessa função:

a. Faça o gráfico cartesiano dessa função.

b. Complete os pares seguintes de forma que eles pertençam a f: $(..., 0)$, $\left(\frac{3}{2}, \quad\right)$

c. O par (150, 299) pertence a f?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 10

Sendo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 1$, calcule:

a. $f(-2)$.

b. O valor de x para que $f(x) = 3$.

c. A imagem de $\frac{2}{3}$.

d. O número cuja imagem é 7.

e. O valor de x que é igual à sua imagem.

Anote suas respostas em seu caderno

Resumo

Iniciamos a unidade, apresentando um gráfico cartesiano que mostra a diminuição da taxa de desemprego no Brasil, entre os anos de 2003 e 2010. A taxa está representada em porcentagem e não indica os valores exatos a cada ano, no entanto, é possível verificar e concluir quais são os períodos de decréscimo da taxa e os períodos de taxas constantes.

Em seguida, é mostrado o passo a passo da construção de um gráfico cartesiano, levando em conta que já são conhecidos os eixos cartesianos e a representação de pontos no gráfico, a partir dos pares ordenados correspondentes.

A identificação de uma função pelo seu gráfico é mostrada, utilizando-se de uma reta vertical auxiliar que facilita a visualização dos pares de uma função. Essa identificação já foi feita em aula anterior por meio de diagrama.

Utilizando-se exemplos de gráficos, foram apresentados casos de funções crescentes, decrescentes e constantes em um determinado intervalo.

Veja ainda

Site uff – objetos educacionais: função.

Este *site* apresenta diversos objetos educacionais interativos que estimulam o aprendizado de forma interessante e lúdica.

http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm28/

Este *site* oferece mais exemplos contextualizados de função, permitindo que você aprenda mais sobre o tema. Apresenta também exercícios e questões para serem resolvidos e assim enriquecer o aprendizado.

Referências

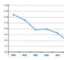
Livros

- Telecurso 2000 2º grau – **Matemática** – Fundação Roberto Marinho.
- Multicurso Ensino Médio - Fundação Roberto Marinho.
- Marcondes, Gentil Sérgio.. **Matemática – Novo Ensino Médio**. volume único - Editora Ática.

Imagens

- http://www.sxc.hu/photo/475767

- Fonte: http://www.sxc.hu/photo/1046511

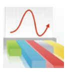


- http://www.sxc.hu/photo/293217

- http://www.sxc.hu/photo/262066

- http://www.sxc.hu/photo/262068

- http://www.sxc.hu/photo/1314903

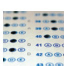


- http://www.sxc.hu/photo/1392340

- http://www.sxc.hu/photo/1239216

- http://www.sxc.hu/photo/1189105

- http://www.sxc.hu/photo/1131288

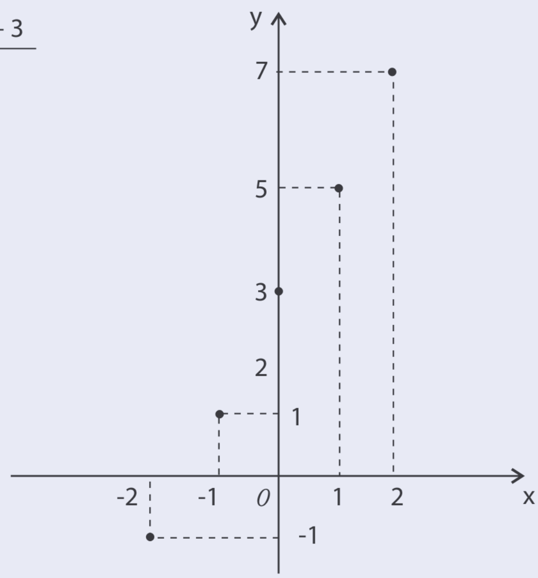


- http://www.sxc.hu/photo/517386

Respostas das Atividades

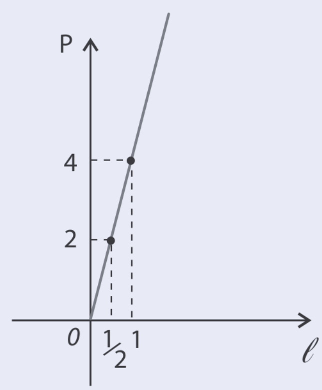
1.

x	y = 2x + 3
-2	-1
-1	1
0	3
1	5
2	7



2. $P = 4\ell$

ℓ	$P = 4\ell$
1	4
2	8
1/2	2



3.

a. Este gráfico representa uma função, pois a cada valor de x do eixo das abscissas corresponde apenas um valor de y do eixo das ordenadas.

Traçando uma reta vertical qualquer cortando o gráfico, podemos ver que ela só intercepta o gráfico em um único ponto.

b. Este gráfico não representa uma função, pois existem elementos do eixo horizontal que corresponde a mais de um valor do eixo vertical. Traçando uma reta vertical podemos verificar que ela intercepta o gráfico em mais de um ponto.

Respostas das Atividades

4.

a. $A=\{1,2,3,4\}$, o gráfico é um conjunto de pontos, portanto o Domínio é um conjunto finito de pontos.

b. $A=[-1,3]$,o gráfico é um segmento de reta, portanto seu Domínio é um subconjunto dos números reais compreendidos entre 1 e 3 inclusive os extremos.

c. A = $\mathbb{R}$ O gráfico é uma reta; portanto, o Domínio é o conjunto dos números reais.

d. $A=\{-1,0,1,2,3\}$

e. $A=[1,\infty[$, o gráfico é uma semirreta, portanto o Domínio é o conjunto dos números reais maiores ou iguais a 1 e podemos representá-lo na forma de intervalo.

5.

a. Diminui.

b. Não permaneceu a mesma em nenhum intervalo de tempo.

c. 38 graus.

6.

a. Domingo.

b. quarta-feira.

c. 25.

d. terça-feira e sexta-feira.

7.

a. (-4,-1), (-2,1), (-1,2),(1.2),(2,3),(3,4)

b. $D=\{-4,-2,-1,1,2,3\}$

c. x = -1 e x = 1

d. x = -1 e x = 1

e. Im = {–1, 1, 2, 3, 4}

f. Quando x = -4, temos y = -1

Respostas das Atividades

8.

a. 8 quilômetros por litro.

b. 7 quilômetros por litro

c. 60 km\ h

d. Crescente de 40km\h a 60km\h.

e. Decrescente de 60km\h a 120km\h.

9. (0,1); (-1,1);(-2,-3); (2,5).

a. Gráfico da função

b. $-\frac{1}{2};4$

c. não.

10.

a. f(-2) = -6 + 1 = -5

b. $3x + 1 = 3$

$3x = 2$

$x = \frac{2}{3}$

c. $3.\frac{2}{3} = 2$

d. $3x + 1 = 7$

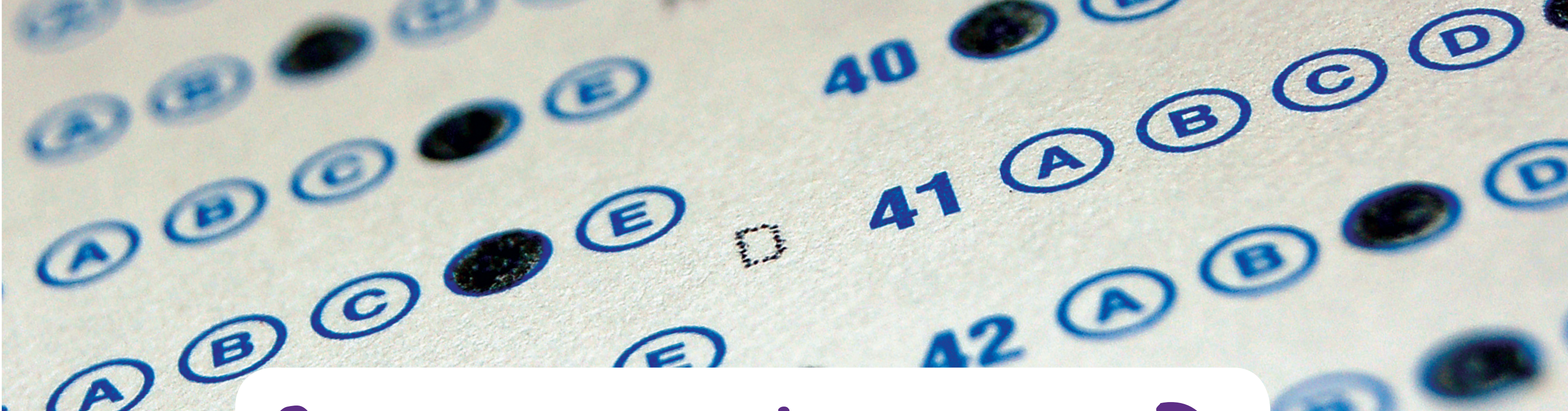
$3x = 6$

$x = 2$

e. $3x + 1 = x$

$2x = -1$

$x = \frac{1}{2}$

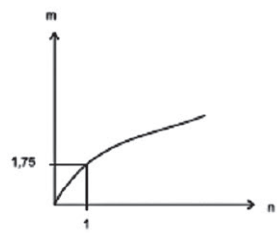


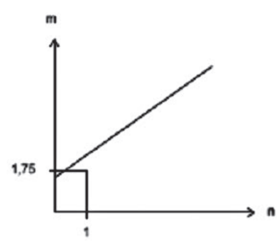
O que perguntam por aí?

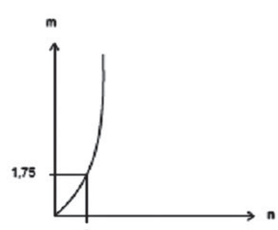
QUESTÃO 151

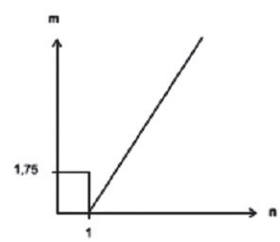
As frutas que antes se compravam por dúzias, hoje em dia, podem ser compradas por quilogramas, existindo também a variação dos preços de acordo com a época de produção. Considere que, independente da época ou variação de preço, certa fruta custa R$ 1,75 o quilograma.

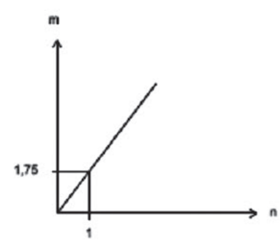
Dos gráficos a seguir, o que representa o preço m pago em reais pela compra de n quilogramas desse produto é

A


B


C


D


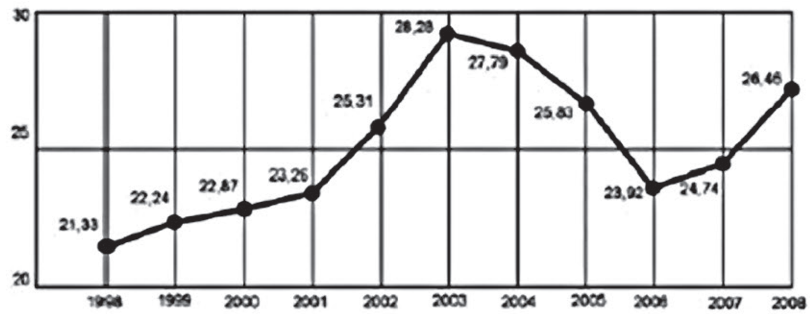
E


MT - 2º dia | Caderno 5 - AMARELO - Página 23

QUESTÃO 176

O termo agronegócio não se refere apenas à agricultura e à pecuária, pois as atividades ligadas a essa produção incluem fornecedores de equipamentos, serviços para a zona rural, industrialização e comercialização dos produtos.

O gráfico seguinte mostra a participação percentual do agronegócio no PIB brasileiro:



Centro de Estudos Avançados em Economia Aplicada (CEPEA). **Almanaque abril 2010**. São Paulo: Abril, ano 36 (adaptado).

Esse gráfico foi usado em uma palestra na qual o orador ressaltou uma queda da participação do agronegócio no PIB brasileiro e a posterior recuperação dessa participação, em termos percentuais.

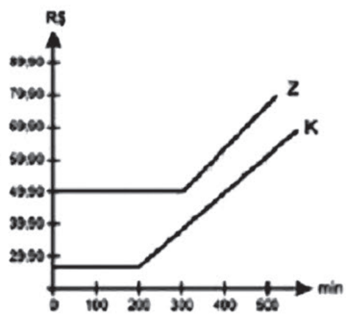
Segundo o gráfico, o período de queda ocorreu entre os anos de

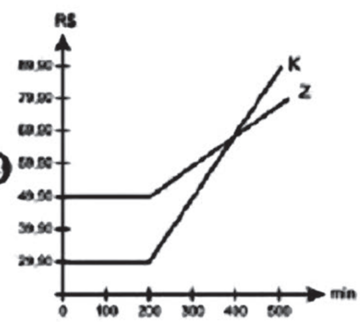
- A 1998 e 2001.
- B 2001 e 2003.
- C 2003 e 2006.
- D 2003 e 2007.
- E 2003 e 2008.

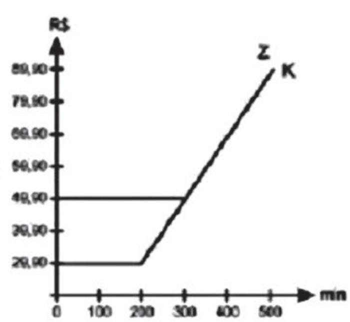
QUESTÃO 180

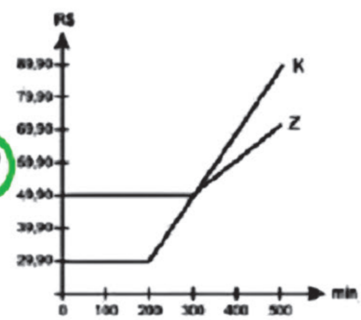
Uma empresa de telefonia fixa oferece dois planos aos seus clientes: no plano K, o cliente paga R$ 29,90 por 200 minutos mensais e R$ 0,20 por cada minuto excedente; no plano Z, paga R$ 49,90 por 300 minutos mensais e R$ 0,10 por cada minuto excedente.

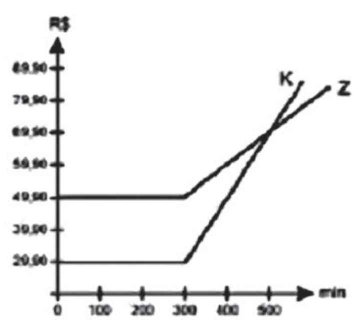
O gráfico que representa o valor pago, em reais, nos dois planos em função dos minutos utilizados é

A


B


C


D


E


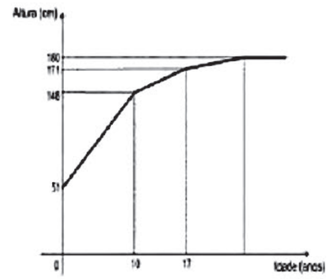
MT - 2º dia | Caderno 5 - AMARELO - Página 30

Questão 142

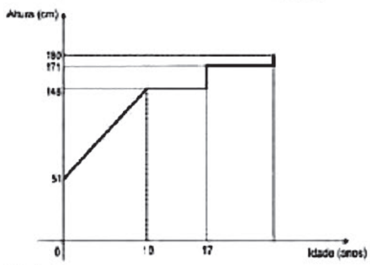
Acompanhando o crescimento do filho, um casal constatou que, de 0 a 10 anos, a variação da sua altura se dava de forma mais rápida do que dos 10 aos 17 anos e, a partir de 17 anos, essa variação passava a ser cada vez menor, até se tornar imperceptível. Para ilustrar essa situação, esse casal fez um gráfico relacionando as alturas do filho nas idades consideradas.

Que gráfico melhor representa a altura do filho desse casal em função da idade?

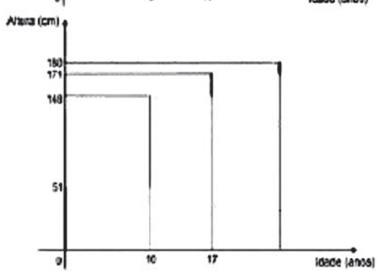
A



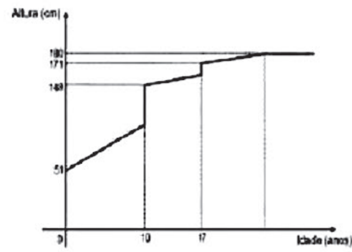
B



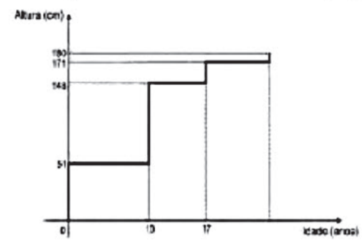
C

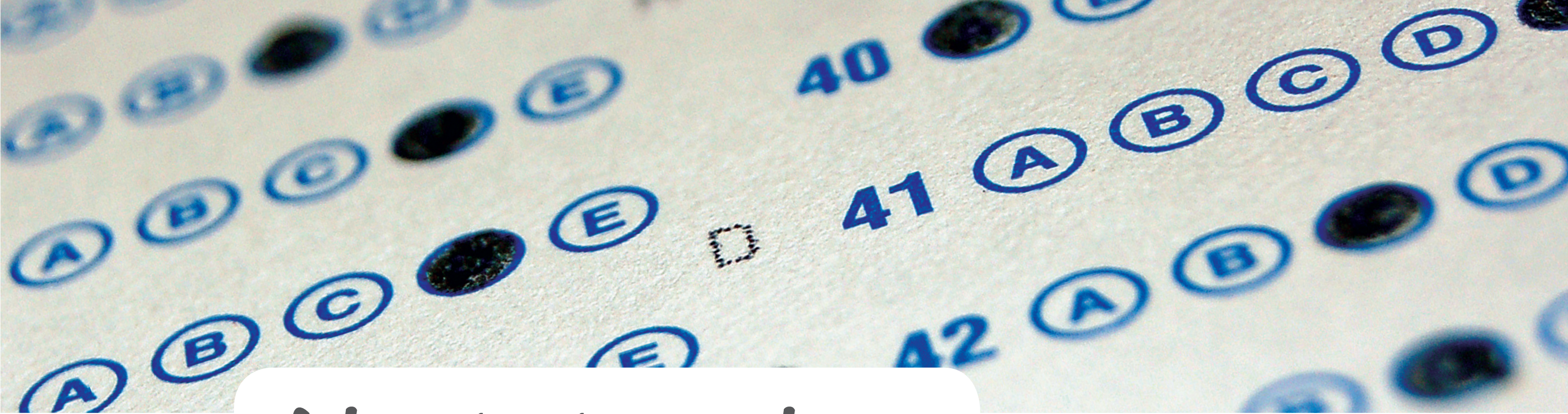


D



E

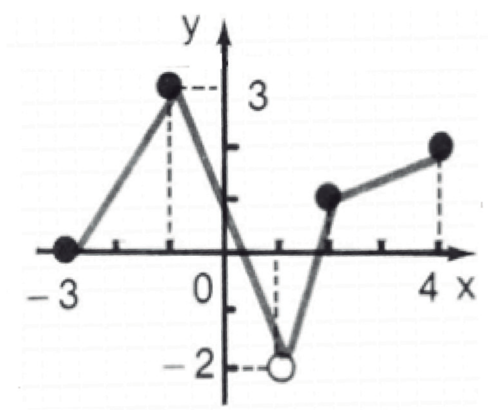




Atividade extra

Exercício 1

A figura representa o gráfico de uma função.



Fonte:http://www.pucrs.br/famat/mbotin/matematica/Modificacao_funcoes20072.pdf

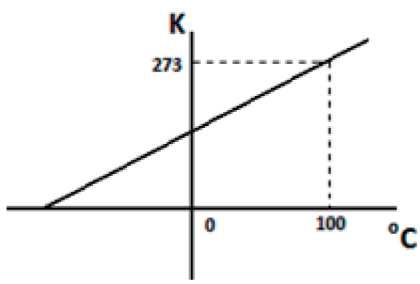
Qual conjunto representa o domínio dessa função?

(a) (–3, 4) – {1}   (b) [–3, 4) – {1}   (c) (–3, 4]– {1}   (d) [–3, 4] – {1}

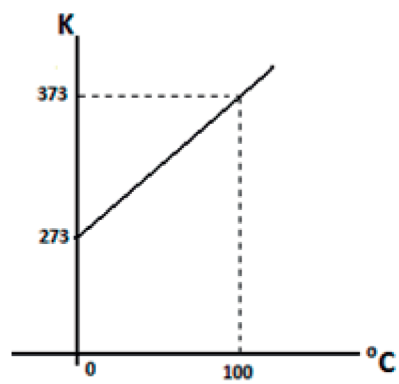
Exercício 2

Existem vários tipos de escalas termométricas para medir temperaturas. No Brasil usamos a escala Celsius, enquanto em alguns outros países usam a escala Kelvin. Na escala Celsius os ponto de congelamento e ebulição acontecem sob as temperaturas de 0° C e 100° C, respectivamente, enquanto na escala Kelvin tais eventos ocorrem sob as temperaturas de 273K e 373K. Considerando os pontos de congelamento (0, 273) e ebulição (100, 373) em cada escala de temperatura estabelecemos a relação $k(c) = c + 273$, que dá a temperatura em Kelvin de acordo com a temperatura em graus Celsius.

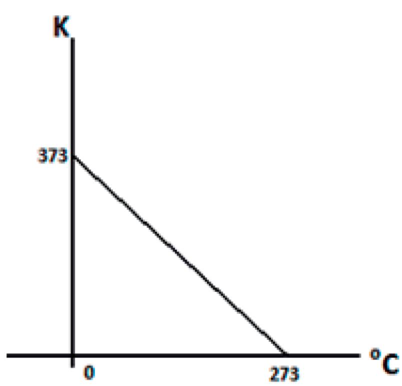
Qual gráfico representa essa relação entre as temperaturas?



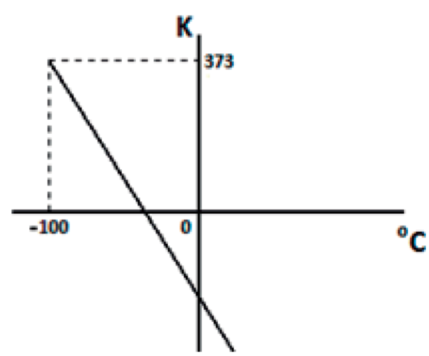
(a)



(c)



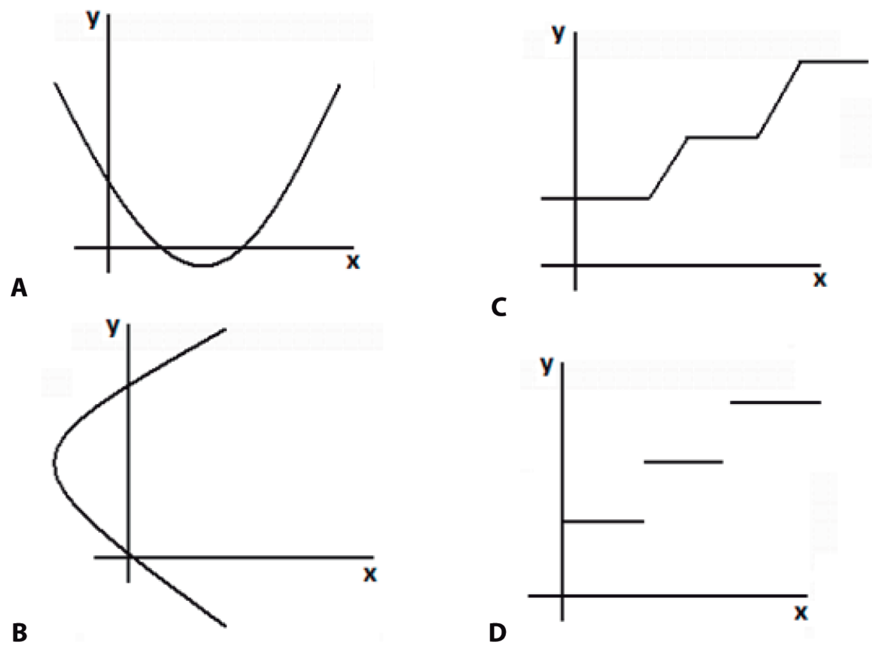
(b)



(d)

Exercício 3

A figura mostra diferentes gráficos que relacionam as coordenadas *x* e *y*.



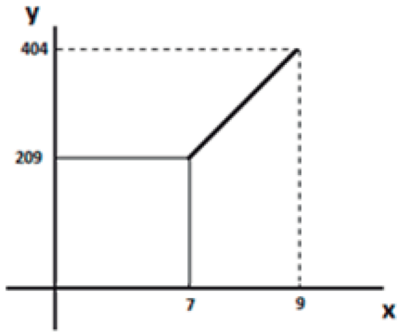
Qual deles não representa uma função $y = f(x)$?

(a) A (b) B (c) C (d) D

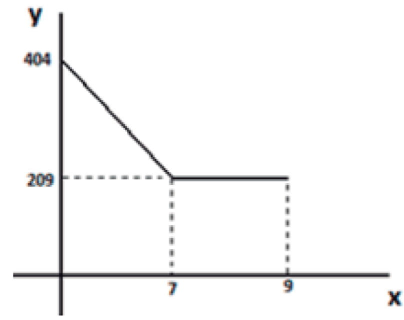
Exercício 4

Uma família em viagem sai do Rio de Janeiro e segue para a cidade de São Paulo. Eles chegam à Rodovia Presidente Dutra, na altura do município de Seropédica (km 209), às 7h da manhã e duas horas depois fazem uma parada na cidade de Guaratinguetá (km 404). Considerando a posição do carro na rodovia de acordo com o tempo, temos os pontos (7, 209) e (9, 404). De acordo com os pontos dados, qual gráfico melhor representa a posição do carro na rodovia Presidente Dutra, de acordo com o tempo?

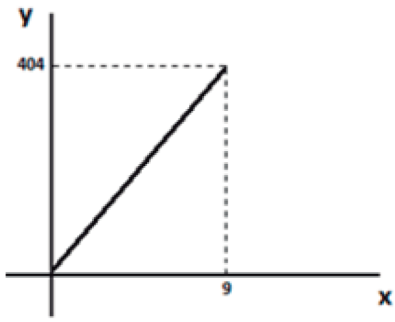
(a)



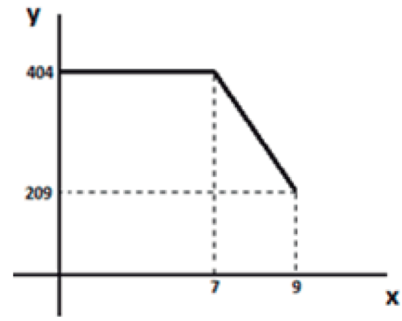
(c)



(b)

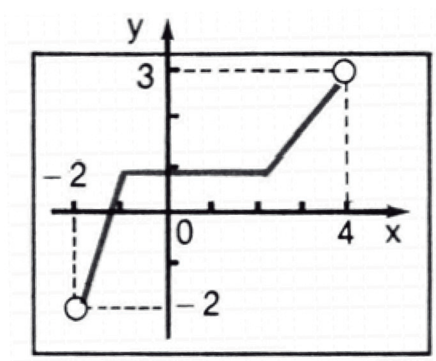


(d)



Exercício 5

A figura representa o gráfico de uma função.



Fonte:http://www.pucrs.br/famat/mbotin/matematica/Modificacao_funcoes20072.pdf

Qual conjunto representa a imagem dessa função?

(a) [–2, 3] (b) [–2, 3) (c) (–2, 3] (d) (–2, 3)

Exercício 6

A área de um retângulo pode ser calculada por meio da multiplicação das suas medidas, Área = comprimento largura. Suponha que um retângulo tenha largura fixa de 10cm e comprimento variável (c).

Qual é a lei de formação que dá a área do retângulo em função do comprimento?

(a) $A(c) = 10c$ (b) $A(c) = 5c$ (c) $A(c) = 10 + c$ (d) $A(c) = c - 10$

Exercício 7

Uma empresa de cobrança emite boletos para o Condomínio Viver Bem no valor de R$100,00. Caso o condômino atrase o pagamento é cobrada uma taxa de R$ 0,20 por dia. Se algum condômino quiser calcular o valor P a pagar, de acordo com os dias (d) atrasados após o vencimento da conta, deverá utilizar a fórmula $P(d) = 100 + 0{,}2d$.

Para um atraso de 15 dias, o valor da conta é:

(a) R$ 100,30 (b) R$ 130,00 (c) R$ 103,00 (d) R$ 135,00

Exercício 8

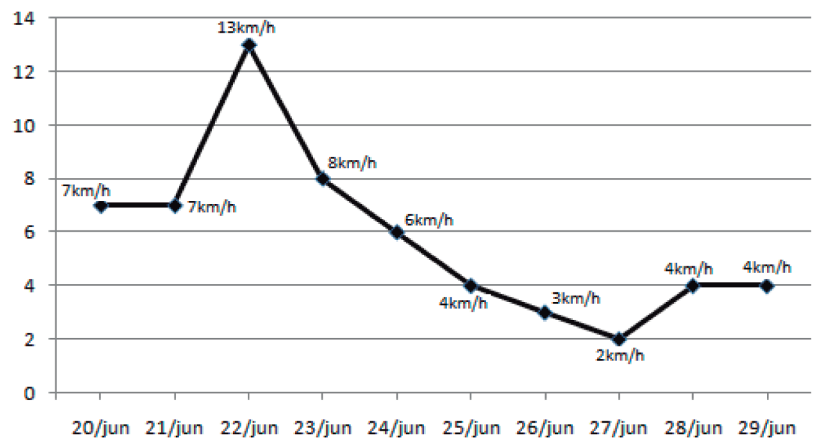
Uma pedra é lançada verticalmente e seu movimento é descrito por uma parábola de equação $y = -40t^2 + 200t$, que fornece a altura (y)emmetrosemfunção do tempo (t), em segundos, após o lançamento da pedra.

Quantos segundo após o lançamento a pedra cai no chão?

(a) 2s (b) 3s (c) 4s (d) 5s

Exercício 9

O gráfico mostra a variação da velocidade do vento na cidade do Rio de Janeiro no período de 20 à 29 de junho de 2013.



Fonte:http://www.climatempo.com.br/graficos/cidade/321/riodejaneiro-rj

Os períodos em que essa variação foi constante são:

(a) 20 à 21/jun e de 28 à 29/jun.

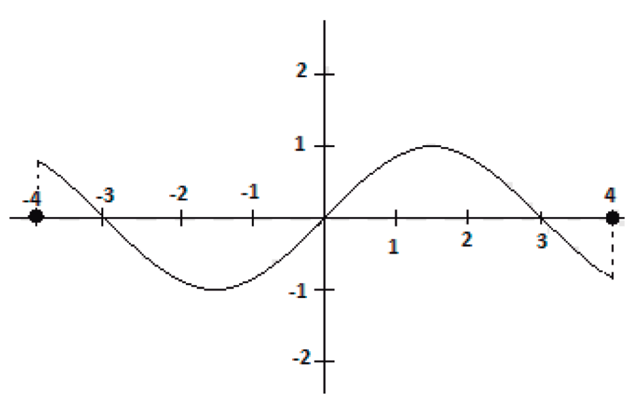
(b) 22 à 24/jun e de 25 a 27/jun

(c) 21 a 22/jun e de 27 a 28/jun

d) 20 a 22/jun e de 23 a 24/jun

Exercício 10

Observe a função descrita no g ráfico.



Para que intervalos de x essa função é negativa?

(a) [–3, 0] e [3, 4] (b) (–3, 0) e [3, 4) (c) [–3, 0) e (3, 4] (d) (–3, 0) e (3, 4]

Exercício 11

Um automóvel percorre a Rodovia Presidente Dutra, que liga o Estado do Rio de Janeiro ao Estado de São Paulo, obedecendo aos dados da tabela abaixo, que indica a posição do mesmo de acordo com o tempo. Considere que esse automóvel partiu do km 101 da Rodovia, sentido São Paulo.

Tempo	Posição
1 hora	Km 204
2 horas	Km 297
3 horas	Km 400

Construa um gráfico que representa a posição do automóvel na Rodovia de acordo com os dados da tabela.

Exercício 12

A área de um quadrado é dada em função do comprimento do seu lado e pode ser calculada por meio da lei A(L) = L2, onde L é o comprimento do lado do quadrado.

Preencha a tabela abaixo com valores para o lado e para a área relacionada, em seguida construa um gráfico com esses valores.

Tempo	Área

Exercício 13

Duas operadoras de telefonia móvel oferecem planos de pagamento de acordo com a quantidade de minutos usados.

- A empresa Fale Bem cobra R$ 50,00 por duzentos minutos em ligações para qualquer telefone, e mais R$ 0,25 por minutos excedentes. O custo C da utilização mensal do telefone em função dos minutos gastos (M) é $C(M) = 50 + 0,25(M - 200)$;
- A empresa Fale Mais cobra R$ 40,00 por duzentos minutos em ligações para qualquer telefone e mais R$ 0,35 centavos por minutos excedentes. O custo C da utilização mensal do telefone em função dos minutos gastos (M) é $C(M) = 40 + 0,35(M - 200)$.

No mesmo plano cartesiano, faça o gráfico representando o custo da utilização mensal para cada uma das empresas e, determine para quantos minutos esse custo tem o mesmo valor para as duas empresas.

Exercício 14

Dada uma função cujo domínio e imagem é o conjunto dos números reais, dada pela lei de formação $f(x) = -5x + 3$. Qual o valor da expressão $\frac{f(0) - f(2)}{f(-1)}$?

Exercício 15

Dada a função definida pelas sentenças $f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{se } x > 3 \\ 5, & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \\ -x - 2, & \text{se } x < 1 \end{cases}$ com domínio no conjunto dos reais.

Construa o gráfico de f (x).

Gabarito

Exercício 1

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 2

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 3

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 4

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 5

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 6

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 7

A B C D

○ ○ ● ○

Exercício 8

A B C D

○ ○ ○ ●

Exercício 9

A B C D

● ○ ○ ○

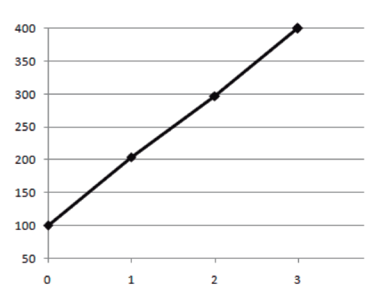
Exercício 10

A B C D

○ ○ ○ ●

Exercício 11

O gráfico é um segmento de reta. Segue uma ilustração.



Observação: Devido a ordem de grandeza dos valores do gráfico, a posição dos pontos (0, 100) e (0, 101) é indistinguível aos olhos. Contudo, o enunciado é claro ao afirmar que o carro parte do km 101, portanto, o gráfico começa no ponto (0, 101).

Exercício 12

Escolha quaisquer cinco valores, não-negativos, e calcule a área do quadrado para cadaumdos valores escolhidos, colocando todos os dados na tabela.

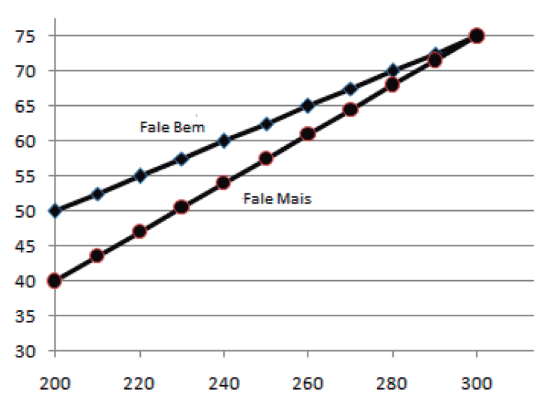
Por exemplo:

Para L = 3 $\Rightarrow$ Área = $3^2 = 9$.

Para L = 5 $\Rightarrow$ Área = $5^2 = 25$.

Exercício 13

Construa, no mesmo plano cartesiano, o gráfico de cada uma das expressões da definição da função, o resultado será o gráfico da função dada. O valor de x em que ambas são iguais é 300.



Exercício 14

Substitua os valores x = −1, x = 0, x = 2 na expressão de f (x), então f (−1) = 8, f (0) = 3, f (2) = −7. Substituindo esses valores em $\frac{f(0)-f(2)}{f(-1)}$ tem-se:

$$\frac{f(0)-f(2)}{f(-1)}=\frac{3+7}{8}=\frac{10}{8}=1{,}25$$

Exercício 15

Construa, no mesmo plano cartesiano, o gráfico de cada uma das expressões da definição da função, o resultado será o gráfico da função dada.