CEJA

CENTRO DE EDUCAÇÃO
de JOVENS e ADULTOS

MATEMÁTICA

e suas TECNOLOGIAS

Fascículo 5
Unidades 14, 15, 16 e 17

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Governador

Wilson Witzel

Vice-Governador

Claudio Castro

SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO

Secretário de Estado

Leonardo Rodrigues

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO

Secretário de Estado

Pedro Fernandes

FUNDAÇÃO CECIERJ

Presidente

Gilson Rodrigues

PRODUÇÃO DO MATERIAL CEJA (CECIERJ)

Coordenação Geral de Design Instrucional

Cristine Costa Barreto

Coordenação de Matemática

Agnaldo da C. Esquincalha

Gisela M. da F. Pinto

Heitor B. L. de Oliveira

Revisão de conteúdo

José Roberto Julianelli

Luciana Getirana de Santana

Elaboração

Cléa Rubinstein

Daniel Portinha Alves

Heitor B. L. de Oliveira

Leonardo Andrade da Silva

Luciane de P. M. Coutinho

Maria Auxiliadora Vilela Paiva

Raphael Alcaires de Carvalho

Rony C. O. Freitas

Thiago Maciel de Oliveira

Atividade Extra

Benaia Sobreira de Jesus Lima

Carla Fernandes e Souza

Diego Mota Lima

Paula Andréa Prata Ferreira

Vanessa de Albuquerque

Coordenação de Design Instrucional

Flávia Busnardo

Paulo Miranda

Design Instrucional

Rommulo Barreiro

Letícia Terreri

Revisão de Língua Portuguesa

Paulo Cesar Alves

Coordenação de Produção

Fábio Rapello Alencar

Capa

André Guimarães de Souza

Projeto Gráfico

Andreia Villar

Imagem da Capa e da Abertura das Unidades

http://www.sxc.hu/

photo/789420

Diagramação

Alessandra Nogueira

Juliana Fernandes

Ricardo Polato

Ilustração

Bianca Giacomelli

Clara Gomes

Fernado Romeiro

Jefferson Caçador

Sami Souza

Produção Gráfica

Verônica Paranhos

Sumário

Prezado(a) Aluno(a),

Seja bem-vindo a uma nova etapa da sua formação. Estamos aqui para auxiliá-lo numa jornada rumo ao aprendizado e conhecimento.

Você está recebendo o material didático impresso para acompanhamento de seus estudos, contendo as informações necessárias para seu aprendizado e avaliação, exercício de desenvolvimento e fixação dos conteúdos.

Além dele, disponibilizamos também, na sala de disciplina do CEJA Virtual, outros materiais que podem auxiliar na sua aprendizagem.

O CEJA Virtual é o Ambiente virtual de aprendizagem (AVA) do CEJA. É um espaço disponibilizado em um site da internet onde é possível encontrar diversos tipos de materiais como vídeos, animações, textos, listas de exercício, exercícios interativos, simuladores, etc. Além disso, também existem algumas ferramentas de comunicação como chats, fóruns.

Você também pode postar as suas dúvidas nos fóruns de dúvida. Lembre-se que o fórum não é uma ferramenta síncrona, ou seja, seu professor pode não estar online no momento em que você postar seu questionamento, mas assim que possível irá retornar com uma resposta para você.

Para acessar o CEJA Virtual da sua unidade, basta digitar no seu navegador de internet o seguinte endereço: http://cejarj.cecierj.edu.br/ava

Utilize o seu número de matrícula da carteirinha do sistema de controle acadêmico para entrar no ambiente. Basta digitá-lo nos campos "nome de usuário" e "senha".

Feito isso, clique no botão "Acesso". Então, escolha a sala da disciplina que você está estudando. Atenção! Para algumas disciplinas, você precisará verificar o número do fascículo que tem em mãos e acessar a sala correspondente a ele.

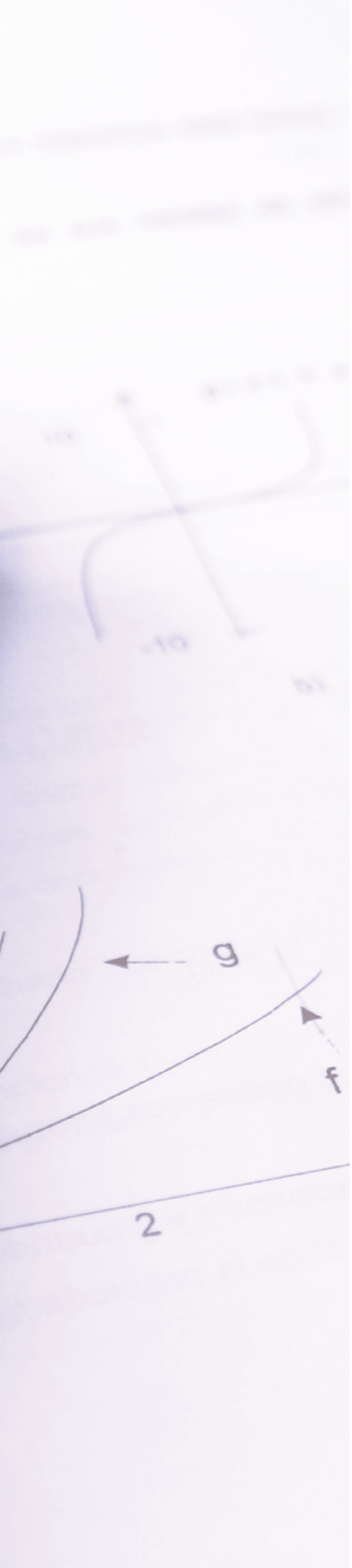
Bons estudos!

Função Polinomial do 1º grau – Parte 1

Fascículo 5

Unidade 14

Fundação CECIERJ



Função Polinomial do 1º grau – Parte 1

Para início de conversa...

Você sabe que, rotineiramente, usa conceitos matemáticos, mesmo que de forma intuitiva? Pois é isso mesmo! Conhecimentos formais da Matemática podem ajudar você a lidar com muitas situações com as quais se depara comumente. Quer ver alguns exemplos?

Você acha que é possível prever quanto gastarei para encher o tanque do meu carro sem precisar, de fato, enchê-lo? E será que o dinheiro que tenho é suficiente para contratar um *buffet* que cobra pela quantidade de convidados? Se eu sei o valor da **bandeirada** e a distância até o meu destino, será possível saber quanto custará a "corrida de táxi" até lá? E quantas unidades de um produto um vendedor precisa vender para que o salário recebido dê conta das suas despesas mensais?

Apesar de parecerem, à primeira vista, bastante distintos, estes problemas têm uma importante característica em comum: podem ser modelados e resolvidos mais facilmente por intermédio do conceito matemático de função afim, ou função polinomial do 1º grau. Vamos conhecê-lo?

Bandeirada
Valor fixo que se paga em uma corrida de táxi independente da distância percorrida.

Objetivos de aprendizagem

- Reconhecer uma função polinomial do 1º grau;
- Calcular um valor da função polinomial do 1º grau;
- Encontrar o zero ou a raiz da função afim;
- Reconhecer situações problemas que envolvam função afim.
- Modelar problemas do dia a dia através da função afim;
- Resolver problemas que envolvam grandezas proporcionais.

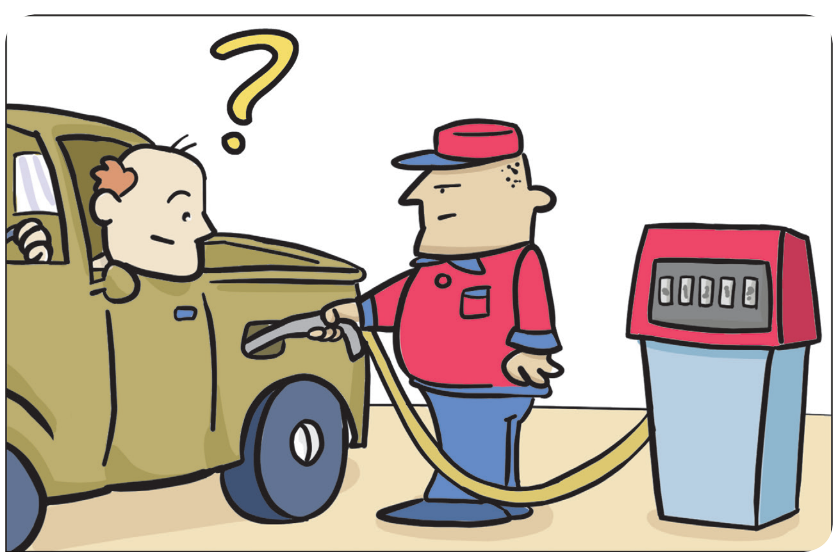
Seção 1
Reconhecendo a função afim

Vamos apresentar a seguir quatro problemas. É muito importante para o bom desenrolar desta aula que você tente resolvê-los do seu jeito – e quando falamos do seu jeito, realmente queremos dizer isso: procure encontrar a resposta para os problemas da mesma maneira que você faria, se tivesse de resolvê-los numa situação cotidiana. Convidamos você a só fazer a leitura da nossa solução depois de pensar bem direitinho em como faria a sua, ok?

São Leopoldo – Ontem, dependendo do posto de combustível selecionado para abastecer, alguns motoristas conseguiram economizar. No centro, em um posto localizado na BR-116, o preço da gasolina comum caiu de 2,65 para 2,59 reais, mesmo valor registrado por um outro posto da rodovia federal, na altura do bairro Rio dos Sinos.

(Retirado em: http://www.jornalvs.com.br/economia/379025/com-gasolina-em-queda-encher-o-tanque-fica-mais-barato.html)

Por exemplo, imagine que o litro da gasolina custe R$ 2,59. Será que é possível prever quanto custa encher o tanque de combustível completamente vazio do seu carro, sem precisar de fato enchê-lo? E, se for possível, como fazer para descobrir esse valor?



Pensou em como resolveria o problema do seu jeito? Pensou mesmo? Ótimo! Dê agora uma olhada nas nossas soluções. Esperamos que alguma delas - ou uma combinação delas – seja muito parecida com a sua.

Então, muito bem, a primeira coisa a saber seria a capacidade total, em litros, desse tanque. Desse ponto para frente, existem muitas soluções. Uma delas seria a multiplicação direta: se um litro custa R$ 2,59, o número de litros do tanque cheio vai custar 2,59 vezes esse número; então, se a capacidade total do tanque for de 30 litros, o custo total do tanque cheio vai ser 2,59 x 30; se tiver 40 litros, o custo total vai ser 2,59 x 40, e assim por diante desde que esse tanque esteja vazio.

É comum também abastecer o veículo, não a partir do número de litros de combustível, mas do valor a ser pago. É comum pedir ao frentista que "coloque 20 reais de combustível" ou "que complete o tanque". Enquanto no primeiro caso o valor em reais já estaria dado por você, a *priori*, no segundo caso você também poderia alegar – e aí com bastante razão – que 2,59 é um número bem desagradável de multiplicar, ainda mais nas situações em que você estivesse colocando 17 litros de gasolina, sem uma calculadora por perto. Vem daqui, então, uma outra solução para a questão: fazer uma tabela com os valores. Ela seria mais ou menos como a que está abaixo e iria de 1 litro até o valor do tanque cheio.

Litros	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**...**
Valor em reais	2,59	5,18 (2x2,59)	7,77 (3x2,59)	10,36 (4x2,59)	12,95 (5x2,59)	15,54 (6x2,59)	18,13 (7x2,59)	

Esse tipo de tabela é bastante comum em locais que trabalham com grande volume de vendas de uma mesma unidade – como lojas em que se fazem cópias xerox. Da próxima vez em que for a uma loja dessas, veja se encontra uma tabela dessas por lá. De qualquer forma, é importante destacar o processo de formação dessa tabela: um litro custa uma vez o valor do litro, dois litros custam duas vezes o valor do litro, três litros custam três vezes o valor do litro – e assim por diante. Mantenha isso em mente ao longo desta nossa conversa, ok?

Muito bem, vamos agora ao problema seguinte: Ana quer comemorar o aniversário de sua filha com um *buffet* que cobra por uma festa infantil R$ 500,00 fixos + R$ 30,00 por pessoa. Ana tem 80 convidados e fez uma reserva de R$ 3.200,00 para gastar com o buffet. Ana pode contratar esse *buffet*? Aliás, com esse valor, qual a quantidade máxima de pessoas que ela pode convidar? Novamente, vale aquela recomendação: faça do seu jeito, como se estivesse lidando com esse problema no seu dia-a-dia. Só depois dê uma olhada no que propomos como solução.

Podemos apresentar a solução? Muito bem! Uma maneira bastante comum de fazer o problema é simplesmente ir somando: como cada convidado custa 30 reais, 80 convidados custarão 80x30 = 2400 reais. Como o custo total é a soma do custo fixo (500 reais) com o custo dos convidados, teremos que o custo total da festa para os 80 convidados é de 500 + 2400 = 2900 reais. Como Ana tem 3200 reais guardados, poderá contratar o *buffet* e ainda sobrarão 300 reais.

Para responder à segunda parte da pergunta, poderíamos proceder de duas maneiras: a primeira seria descontar, do que ela tem reservado, os 500 reais do custo fixo (3200 – 500 = 2700) e, em seguida, dividir os 2700 reais que resultaram dessa operação pelo custo de cada convidado, 30 reais. Neste caso, teríamos 2700/30 = 90 convidados. A outra maneira seria ver que os 300 reais que sobrariam, caso Ana contratasse festa para 80 convidados, poderiam ser usados para contratar festa para mais convidados. Como cada convidado custa 30 reais, 300 reais seriam suficientes para chamar mais 10 convidados – além dos 80 contratados na primeira leva. Assim, seria possível contratar um máximo de 90 convidados.

Podemos expressar o valor P pago por Ana em função do número x de convidados: P = 30.x + 500.

Aqui, temos algumas ideias a destacar. A primeira delas é a de que o dinheiro guardado por Ana deu para contratar o *buffet* – o que teria acontecido, se Ana tivesse guardado, digamos, R$ 3210? Vá pensando nisso, que responderemos mais adiante. A outra ideia é a de que este problema tem algo muito importante em comum com o anterior: o custo total varia em função de uma determinada quantidade – e da mesma maneira. No caso do tanque, um litro custa R$ 2,59; dois litros custam duas vezes R$ 2,59, etc. No caso no *buffet*, um convidado custa R$ 30,00, dois convidados custam duas vezes R$ 30,00 etc. A diferença entre os exemplo está no fato de haver um custo fixo inicial para a festa e não haver um custo fixo inicial para o preenchimento do tanque. Uma festa para zero convidado custaria R$ 500, enquanto um tanque vazio custaria zero reais. Vá prestando atenção nisso ao longo da leitura dos próximos problemas, ok?

Agora observe os exemplos de Paulo e Sílvio e tente resolvê-los da sua maneira. Caso tenha dificuldades, uma boa dica é reler com atenção os exemplos anteriores.

Na cidade em que a irmã de Paulo, Patrícia, mora, a corrida de táxi é calculada da seguinte maneira: R$ 5,20 de bandeirada e R$ 1,05 por quilômetro rodado. Paulo chegou hoje à cidade para visitar sua irmã e desembarcou na rodoviária, que fica a 35 km da casa de Patrícia. Se Paulo pegar um táxi da rodoviária à casa de sua irmã, quanto ele vai gastar?

Você consegue ajudar Paulo a saber quanto ele vai gastar nesse trajeto? Pensou? Veja então se sua ideia foi mais ou menos como esta:

Como cada quilômetro custa R$ 1,05, temos que: 1 km custa R$ 1,05; 2 km custam R$ 2,10 (2x1,05); 3 km custam R$ 3,15 (3x1,05) e assim por diante. Como o trajeto de Paulo tem 35 km, temos que multiplicar 1,05 por 35 e encontraremos 36,75 (1,05x 35 = 36,75). Não podemos esquecer que ao entrar no táxi o passageiro paga, independente dos quilômetros rodados, um valor fixo, chamado bandeirada, nesse caso, no valor de R$ 5,20. Assim, o valor total do trajeto será de 36,75 (pelos quilômetros rodados) mais 5,20 (da bandeirada), que resulta em R$ 41,95.

Como expressar o valor V a ser pago em função da distância x percorrida em quilômetros? V = 1,05.x + 5,20.

Um outro problema é o Silvio que trabalha em uma loja, vendendo colchões. Todo mês, Silvio tem de fazer a seguinte conta para calcular seu salário: uma parte fixa de R$ 1.000,00 e R$ 60,00 por cada colchão vendido.

Nesse mês, a despesa mensal prevista por Sílvio será de R$ 3840,00. Quantos colchões, no mínimo, Sílvio deverá vender para que seu salário do mês cubra sua previsão de despesas?

E aí, descobriu qual a quantidade de colchões? Sim? Então observe como pensamos:

A despesa de Silvio, prevista nesse mês é de R$ 3840,00. Sabemos que ele ganha um salário fixo de R$ 1000,00. Assim, ainda faltam R$ 2840,00 (3840 – 1000) para que ele cubra suas despesas. Como ele ganha R$ 60,00 por colchão, uma maneira de descobrir quantos colchões ele deve vender para cobrir essa despesa é dividir o valor restante da despesa de R$2840 por 60 e encontraremos 47,333... (2480:60 = 47,333...). Como não é possível vender essa quantidade de colchão, podemos concluir que Silvio deverá vender, no mínimo, 48 colchões.

O salário S de Sílvio pode ser expresso em função da quantidade x de colchões vendidas por ele: S = 60.x + 1000.

Na próxima unidade, veremos como podemos representar esses problemas por meio de gráficos.

Será que você conseguiu perceber o que estes quatro problemas têm em comum? Ficou claro para você que um valor está sempre relacionado com outro? Ou melhor, que um valor varia sempre em função de outro?

Vamos relembrar: o valor gasto no posto ocorre em função da quantidade de combustível colocado, o valor do *buffet* varia em função do número de convidados, o valor a pagar na corrida do táxi se modifica em função dos quilômetros percorridos e o salário de Silvio varia em função da quantidade de colchões vendidos. Além disso, você percebeu que, em alguns casos, essa função pode ser composta de uma parte fixa mais um valor que varia sempre multiplicado por um número fixo?

Os exemplos apresentados podem ser modelados por expressões do tipo

$f(x) = ax + b$, em que a e b são números reais e o coeficiente a deve ser diferente de zero. Uma função desse tipo é chamada de *função polinomial do 1º grau ou função afim.*

Não esqueça que os chamados coeficientes são números reais; portanto, os exemplos abaixo representam funções polinomiais do 1º grau.

$f(x) = -3x - 8$ onde $a = -3$ e $b = -8$

$g(t) = 6t$ onde $a = 6$ e $b = 0$

$h(x) = \frac{3\times}{8} - 7{,}5$ onde $a = \frac{3}{8}$ e $b = -7{,}5$

$v(s) = s + \sqrt{3}$ onde $a = 1$ e $b = \sqrt{3}$

O coeficiente de x (nessa explicação, representado por *a*) é chamado de taxa de variação da função polinomial do 1º grau. Nos exemplos anteriores é fácil perceber que o coeficiente *a* determina como variam os valores da função: para cada novo convidado da festa de Ana, o valor do buffet aumenta R$30,00; para cada quilômetro rodado de táxi, o valor a ser pago aumenta R$1,05; para cada colchão vendido, o salário de Silvio aumenta R$60,00.

Saiba Mais

Identificando funções afim.

Analise se as funções abaixo são afins (do tipo $f(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$) e, em caso afirmativo, se os coeficientes estão nomeados corretamente.

Atividade 1

a) $f(x) = -1 + 6x$ $\quad a = -1$ $\quad b = 6$

b) $f(x) = \frac{-4\times}{7} -8$ $\quad a = \frac{-4}{7}$ $\quad b = -8$

c) $f(x) = 9$ $\quad a = 9$ $\quad b = 0$

d) $f(x) = 0{,}25x$ $\quad a = 0{,}25$ $\quad b = 0$

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 2

Modelando e encontrando os valores da função afim

Você já conseguiu perceber como essa Matemática mais formal se aplica aos problemas da primeira seção? Se já conseguiu perceber, ótimo! Leia as próximas páginas atentamente para verificar se sua percepção coincide com a nossa. Se não conseguiu perceber, não tem problema! Explicamos tudo nas páginas seguintes. Vamos lá?

Vamos começar pelo problema da Ana, que queria contratar o *buffet*, lembra?

Ana quer comemorar o aniversário de sua filha com um *buffet* que cobra por uma festa infantil R$ 500,00 fixos e R$ 30,00 por pessoa. Ana tem 80 convidados e fez uma reserva de R$ 3 200,00 para gastar com o *buffet*. Ana pode contratar esse *buffet*?

Vejamos:

f(x): valor cobrado

x: número de convidados

Como, por cada convidado, ela paga R$ 30, devemos multiplicar x por 30, então, *a* por ser o número que multiplica x, deve ser substituído por 30.

a = 30

Além de cobrar por pessoa, o *buffet* cobra um valor que não varia, ou seja, constante de R$ 500. Então, devemos substituir o valor constante, nesse caso b, por 500.

b = 500

Assim:

f(x) = 30 . x + 500

f(x) = a . x + b

O valor cobrado vai variar em função do número de convidados. Essa relação será uma função do tipo $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

Como Ana tem 80 convidados, substituiremos x por 80; logo:

f(80) = 30 . 80 + 500

f(80) = 2400 + 500

f(80) = 2900

Após realizar essas contas, você descobre que, se contratar esse buffet, Ana vai gastar R$ 2.900,00. Como Ana reservou R$ 3 200,00 para gastos com o *buffet*, ela poderá contratar esse serviço com tranquilidade.

Voltando ao problema do posto, vamos representar:

V(c) = valor a pagar (em Reais)

c = quantidade de combustível (em litros)

Como cada litro de combustível custa R$2,59, devemos multiplicar por 2,59 a quantidade de combustível, representada por c.

a = 2,59

Como não há um valor fixo, ou seja, só há cobrança se você colocar alguma quantidade de gasolina significa que não há um valor constante, sendo assim, o valor de b é zero.

b = 0

Desta maneira, nosso problema pode ser representado pela seguinte função:

V(c) =	2,59	.	c	+	0
f(x) =	a	.	x	+	b

Isto é, V(c) = 2,59.c

Lembra o problema do Paulo que tem de pegar o táxi da rodoviária até a casa da sua irmã? Então vamos modelá-lo:

Modelando:

O valor da corrida vai variar em função dos quilômetros rodados.

q: número de quilômetros rodados

V(q): valor da corrida

Como cada quilômetro custa R$1,05, devemos multiplicar **q** por 1,05.

Além de cobrar por quilômetro, o taxista cobra um valor que não varia, chamado bandeirada, que custa R$ 5,20.

Assim:

V(q) =	1,05	.	q	+	5,20
f(x) =	a	.	x	+	b

Após fazer essa correspondência, é possível perceber que essa situação pode ser modelada por uma função afim.

Como a distância da rodoviária a casa é de 35 km, substituiremos **q** por 35; logo:

$V(35) = 1{,}05 \cdot 35 + 5{,}20$

$V(35) = 36{,}75 + 5{,}20$

$V(35) = 41{,}95$

Então, Paulo vai gastar R$ 41,95 no trajeto de táxi da rodoviária até a casa de sua irmã.

Vamos retomar o problema do Silvio para modelá-lo:

Modelando:

O salário de Sílvio varia em função da quantidade de colchões vendidos.

c: o número de colchões vendidos

S(c): salário de Sílvio

Como Sílvio ganha R$ 60 por colchão vendido, devemos multiplicar **c** por 60.

Além da comissão com a venda dos colchões, Sílvio ganha 1000 reais fixos.

Logo:

$S(c) =$	60	.	c	+	1000
$f(x) =$	a	.	x	+	b

Após fazer essa correspondência, é possível perceber que essa situação também pode ser modelada por uma função afim.

Como Sílvio precisa de R$ 3.840 para cobrir suas despesas, substituiremos *S(c)* por 3840; logo:

$S(c) = 1000 + 60c$

$3840 = 1000 + 60c$

$3840 - 1000 = 60\,c$

$2840 = 60c$

$c = \dfrac{2840}{60}$

$c = 47{,}333...$

Uma vez que não é possível vender 47,333... colchões, Sílvio precisa então vender, pelo menos, 48 colchões.

E aqui já respondemos à pergunta que fizemos quando falamos do problema da Ana. Lembra qual era? Constatamos que o valor que ela tinha guardado, R$ 3200, era o valor exato para contratar uma festa para 90 pessoas. Perguntamos o que aconteceria se ela tivesse guardado 3210 reais. Com esse valor, ela poderia contratar uma quantidade fracionária de pessoas – o que não existe no mundo real. Assim, com 3210 reais, ela continuaria podendo contratar uma festa para, no máximo, 90 pessoas. A diferença é que sobrariam 10 reais. Se ela juntasse mais 20 reais a estes 10 que sobraram, poderia convidar mais uma pessoa – a de número 91 - para a festa.

Temperatura e função afim

Atividade 2

A temperatura é normalmente medida em duas escalas: graus Celsius (° C), como no Brasil, por exemplo, e graus Fahrenheit (° F), como nos países de língua inglesa.

Observe a reportagem a seguir:

Então, você saberia dizer em quantos graus Celsius ficou a temperatura em Nova Iorque, na madrugada passada?

Atividade 2

Importante

Você sabia que a relação entre as duas escalas também pode ser dada através da função afim?

$F = 1,8C + 32$, onde F é a medida da temperatura em graus Fahrenheit e C em graus Celsius.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 3

Alugando Carros com função afim

Em uma cidade turística, duas empresas de aluguel de carros praticam as seguintes taxas:

Empresa A – R$ 35,00 fixos e R$ 3,40 por quilômetro rodado

Empresa B – R$ 55,00 fixos e R$ 2,70 por quilômetro rodado

a. Encontre a função que representa o valor do aluguel da empresa A.

b. Encontre a função que representa o valor do aluguel da empresa B.

c. Se um cliente rodar 45 quilômetros, em qual das duas empresas ele vai pagar mais barato pelo aluguel do carro?

d. Existe alguma quilometragem em que é indiferente utilizar o serviço da empresa A ou da empresa B?

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 3
Zero ou Raiz da função afim

Há alguns meses, Carla abriu seu próprio negócio para vender salgadinhos. Logo no início, Carla vendeu uma média de 1200 salgadinhos por mês. Empolgada com o sucesso do negócio, pediu para seu irmão, Antônio, descobrir quantos salgadinhos ela deveria vender por mês para continuar tendo **lucro**.

Para resolver o problema, Antônio modelou o lucro da venda de salgados da sua irmã e obteve a função $L(s) = 4s - 2340$, onde $L(s)$ é o valor do lucro e s é a quantidade de salgadinho vendida.

Com a função que Antônio obteve, você consegue ajudar Carla a descobrir essa informação?

Lucro
Ganho, vantagem ou benefício que se obtém de alguma coisa,ou com uma atividade qualquer.

Antônio explicou à sua irmã as contas feitas para resolver o problema. Acompanhe a resolução e veja se seus pensamentos foram parecidos com os dele.

Ele explicou à Carla que ao descobrir a quantidade necessária que ela deve vender para cobrir seus custos, ou seja, não ter lucro nem **prejuízo**, toda venda a partir dessa quantidade será lucrativa. Lembrando que para não ter lucro nem prejuízo, o valor de L deve ser de zero Real. Assim, descobrindo a quantidade s de salgadinhos que precisam ser vendidos para que o "lucro" seja zero, L(s) = 0, ao vender qualquer quantidade maior que essa encontrada, ela terá lucro.

Prejuízo
Ato ou efeito de prejudicar, dano.

Retomando a função encontrada por ele: L(s) = 4s – 2340 e com a informação que L(s) deve ser zero, teremos:

$$L(s) = 4s - 2340$$

$$0 = 4s - 2340$$

$$4s = 2340$$

$$s = \frac{2340}{4}$$

$$s = 585$$

Dessa maneira, se Carla vender 585 salgadinhos, seu "lucro" é de 0 real. Sendo assim, se Carla vender qualquer quantidade superior a 585 salgadinhos, ela terá lucro.

Em linguagem Matemática, dizemos que nessa função $L(s) = 4s - 2340$, $s = 585$ é o zero ou a raiz da função, pois quando s é substituído por 585, L(s) = 0

Importante

O valor da variável que torna o valor da função f(x) igual a zero, é chamado de zero ou raiz da função.

Atividade 4

Encontrando a raiz

Determine os zeros das seguintes funções afins:

a. $f(r) = 5r - 9$

b. $g(x) = \frac{3}{4}x$

c. $h(t) = 6 + 4t$

d. $f(n) = \frac{n-1}{2}$

Anote suas respostas em seu caderno

Física e função afim

Em uma experiência, a posição (S) de uma partícula varia em função do tempo (t) e é expressa pela lei:

$S(t) = 20 + 5t$

a. Encontre o valor de t para que se tenha $S(t) = 0$.

b. Analise o resultado encontrado no item a e a situação problema proposta e veja se são compatíveis.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 5

Seção 4
Função linear, um caso particular

Celso é motorista de caminhão. Suponha que, em uma rodovia bem conservada, Celso consegue manter a velocidade constante de 85 km/h. Em quanto tempo Celso percorrerá os 510 km dessa rodovia?

Como a velocidade é constante, é possível montar a seguinte tabela:

Tempo (horas)	1	2	3	4	5	6
Distância (quilômetros)	85	170	255	340	425	510

Nesse caso, com o auxílio da tabela, você pode rapidamente identificar que Celso levará 6 horas para percorrer os 510 km da rodovia, a uma velocidade de 85 km/h. Mas, nem sempre esse resultado vem de maneira tão rápida.

Então, uma maneira de encontrar esse tempo sem o auxílio da tabela é modelar esse caso como uma função linear.

Importante

Função linear é um caso particular de função afim.

Função Linear $f(x) = ax + b$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $b = 0$, ou seja, $f(x) = ax$

No exemplo de Celso, o problema pode ser modelado da seguinte maneira:

A distância, em quilômetros, está em função do tempo decorrido: $f(x)$

Tempo, em horas, decorrido: x

Como a velocidade foi constante, de 85 km/h, significa que, a cada hora, Celso percorrerá 85 km.

Assim, podemos obter a função

$f(x) = 85x$

Como a distância é de 510 km, então $f(x) = 510$

$510 = 85x$

$$x = \frac{510}{85}$$

$x = 6$ h

Assim como na tabela, o tempo para que Celso percorra 510 km, a essa velocidade constante, é de 6 h.

Note que esse problema poderia ser resolvido de outra forma. Nesse caso, por se tratarem de grandezas diretamente proporcionais, a regra de 3 constituiria uma ferramenta para a solução do problema:

1 hora $\rightarrow$ 85 km

x horas $\rightarrow$ 510 km

Desse modo, $1/x = 85/510$, donde teremos que $x = 510/85 = 6$ horas.

Saiba Mais

Dizemos que a proporcionalidade é:

. Direta: enquanto uma grandeza é multiplicada por um fator k, a outra também é multiplicada pelo mesmo fator k;

. Inversa: enquanto uma grandeza é multiplicada por um fator k, a outra é multiplicada pelo inverso de k (ou seja, 1/k).

Quando temos situações que envolvem proporcionalidade direta, é sempre possível resolvê-las, modelando-as como função linear.

Um bom exemplo de modelagem por função linear é o nosso problema do posto. Veja só:

V(c) = 2,59 . c

onde:

V(c) = valor a pagar (em Reais)

c = quantidade de combustível (em litros)

Em geral, os tanques dos carros têm capacidade para 50 litros de combustível. Vamos supor que o tanque está vazio.

Assim, temos:

c = 50 litros

logo:

V(50) = 2,59 . 50

V(50) = 129,50 Reais

Para encher um tanque vazio com capacidade de 50 litros, com cada litro custando R$ 2,59, você vai precisar de R$ 129,50.

No salão de beleza

Ana é cabeleireira. Para realizar um tratamento em 5 clientes, com cabelos médios, ela gasta 3 potes de creme. Quantos potes desse mesmo creme ela vai gastar para fazer o tratamento em 8 clientes com cabelos médios?

Atividade 6

Anote suas respostas em seu caderno

Conclusão

- Como foi possível observar ao longo dessa unidade, tanto função afim como a função linear (caso particular de função afim) são grandes aliadas na modelagem de situações para resolução de inúmeros problemas do dia a dia. Após esse estudo, estamos prontos para calcular valores, muitas vezes encontrados de maneira intuitiva, de uma função afim o que nos permite de uma maneira mais formal encontrar e prever resultados importantes em diversas situações. Também vimos exemplos da utilização do zero da função afim e desta maneira foi possível entender sua aplicabilidade.
- Outros campos, além da Matemática, fazem uso da função afim, como a Física, a Economia, etc. Ou seja, esse é um tema interdisciplinar.
- Portanto, aproveite todas as ferramentas e os conhecimentos adquiridos nessa unidade para facilitar seu cotidiano e para, quem sabe, elaborar teorias ousadas.

Resumo

- Definição de função afim

$y = ax + b$ ou $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$

- Função linear

Caso particular da função afim em que o coeficiente linear é zero (b=0).

$f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b = 0$

- Valor da função

Basta substituir na função o valor da variável desejado (nesse caso, o x que está sendo utilizado como a letra que representa a variável, como definido no tópico acima)

- Zero ou Raiz da Função afim

Basta encontrar o valor de x, no qual $f(x) = 0$, ou seja:

$ax + b = 0$ $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

Veja Ainda

Uma opção interessante de atividade, envolvendo função afim, é essa sugestão de bingo dada por Ariana Costa Silva e Ana Paula Florencio Ferreira, em um artigo publicado no VI Encontro Paraibano de Educação Matemática, realizado em 2010. Você pode encontrar o passo a passo, as regras e os objetivos desse bingo diferente, acessando:

http://www.sbempb.com.br/anais/arquivos/trabalhos/re-17498113.pdf

Se você se interessa por matemática e física você pode acessar o site

http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/funcao-afim-aplicada-cinematica.htm e acompanhar um exemplo de aplicação de função afim (Matemática) na cinemática (Física).

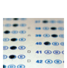
Referências

Livros

- ALMEIDA, Nilze de; DEGENSZAJN, David; DOLCE, Osvaldo; IEZZI, Gelson; PÉRIGO, Roberto. **Matemática Ciência e Aplicações 1**. Segunda Edição. São Paulo: Atual Editora, 2004.157p.
- BOYER, Carl B. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.
- CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; LIMA, Elon Lages; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. **Temas e Problemas**. Terceira Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. 193 p.
- ________________________. **A Matemática do Ensino Médio Volume 1**. Sétima Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. 237 p.
- DANTE, Luiz Roberto. **Matemática Contexo e Aplicações Volume 1**. Primeira Edição. São Paulo: Editora Ática, 2011. 240p.
- FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Novo Aurélio Século XXI: o dicionário da língua portuguesa**. Quinta Edição. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 1999. 2128 p.

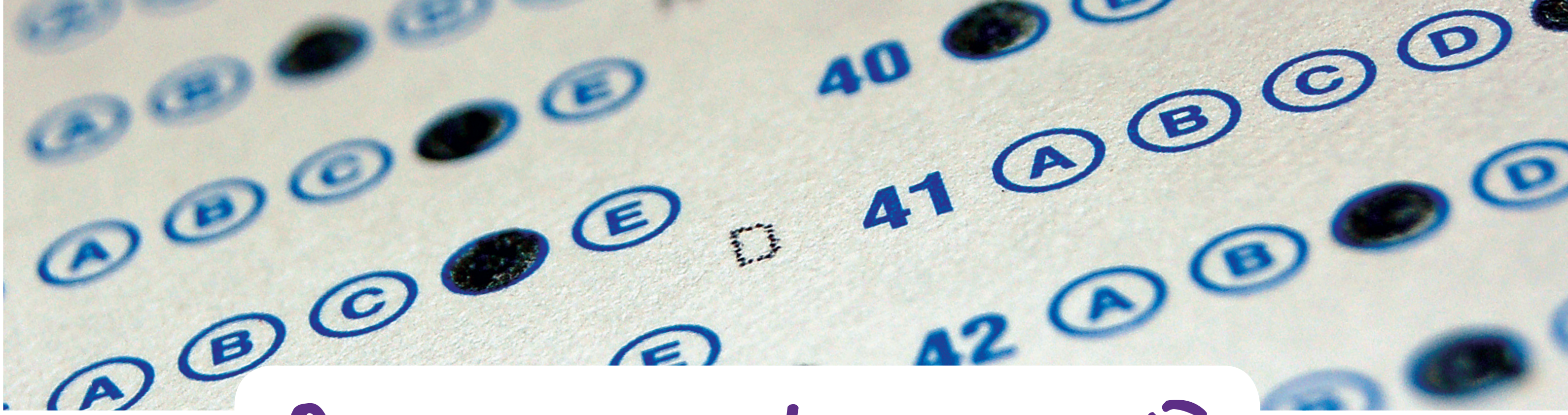
Imagens

- http://www.sxc.hu/photo/475767



- http://www.sxc.hu/photo/517386

- http://www.sxc.hu/985516_96035528



O que perguntam por aí?

(Enem 2004)

> **VENDEDORES JOVENS**
> **Fábrica de LONAS - Vendas no Atacado**
> 10 vagas para estudantes, 18 a 20 anos, sem experiência.
> Salário: R$ 300,00 fixo + comissão de R$ 0,50 por m^2 vendido.
> Contato: 0xx97-43421167 ou atacadista@lonaboa.com.br

Na seleção para as vagas deste anúncio, feita por telefone ou correio eletrônico, propunha-se aos candidatos uma questão a ser resolvida na hora. Deveriam calcular seu salário no primeiro mês, se vendessem 500m de tecido, com largura de 1,40 m, e, no segundo mês, se vendessem o dobro. Foram bem sucedidos os jovens que responderam, respectivamente,

a) R$ 300,00 e R$ 500,00.

b) R$ 550,00 e R$ 850,00.

c) R$ 650,00 e R$ 1000,00.

d) R$ 650,00 e R$ 1300,00.

e) R$ 950,00 e R$ 1900,00.

Resposta: Letra c

Comentários:

Para calcular quantos metros quadrados foram vendidos, devemos multiplicar a largura pelo comprimento:

$500. 1,4 = 700$

1º mês: venda -700 m^2

Salário: $300 + 0,5.700$

Salário: $300 + 350$

Salário: 650

2º mês: dobro de venda – $2 . 700 = 1400$ m^2

Salário: $300 + 0,5.1400$

Salário: $300 + 700$

Salário: 1000

Saiba Mais

Observe que, dobrando a venda, não dobramos o salário. Qual deveria ser a venda, então, para dobrar o salário do 1º mês?

Respostas das Atividades

Atividade 1

a) É função afim, contudo os coeficientes são $a = 6$ e $b = -1$

b) É função afim e coeficientes estão corretos.

c) Não é função afim, pois nesse caso $a= 0$.

d) É função afim e coeficientes estão corretos.

Atividade 2

Como a relação é

$F = 1{,}8C + 32$

e a temperatura em Nova Iorque foi de 8º F, temos:

$8 = 1{,}8C + 32$

$1{,}8C = 8 - 32$

$1{,}8C = -24$

$C = -13{,}333...$

Logo, a temperatura foi de aproximadamente -13,3º C.

Atividade 3

a) Modelando:

Valor cobrado pela empresa A:

$A(q) = 3{,}40q + 35$

b) Modelando:

Valor cobrado pela empresa B:

$B(q) = 2{,}70q + 55$

c) Calculando

$A(45) = 3{,}4.45 + 35$

$A(45) = 153 + 35$

$A(45) = 188$

$B(45) = 2{,}7.45 + 55$

$B(45) = 121{,}5 + 55$

B(45) 176,50

Ele pagará mais barato se contratar a empresa B.

d) Devemos procurar um valor q tal que A(q) = B(q). Temos

$3,40q + 35 = 2,70q + 55$

$0,70q = 20$

$q = 20/0,70 = 28,57$ (aproximadamente)

Atividade 4

a) $5r - 9 = 0$

$5r = 9$

$r = \frac{9}{5}$

b) $\frac{3}{4}x = 0$

$x = 0$

c)$6 + 4t = 0$

$4t = -6$

$t = \frac{-6}{4}$

e) $\frac{n-1}{2} = 0$

$n - 1 = 0.2$

$n - 1 = 0$

$n = 1$

Atividade 5

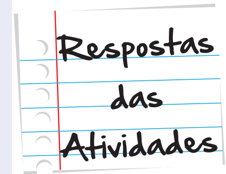
a) $20 + 5t = 0$

$5t = -20$

t = -20/5

t = -4

b) Como o zero da função é negativo, ele não é compatível com a situação problema, pois não é possível tempo negativo em situações cotidianas.



Atividade 6

Modelando o problema

$P(c) = \dfrac{3c}{5}$

p - representa o número de potes de creme

c - representa a quantidade de clientes

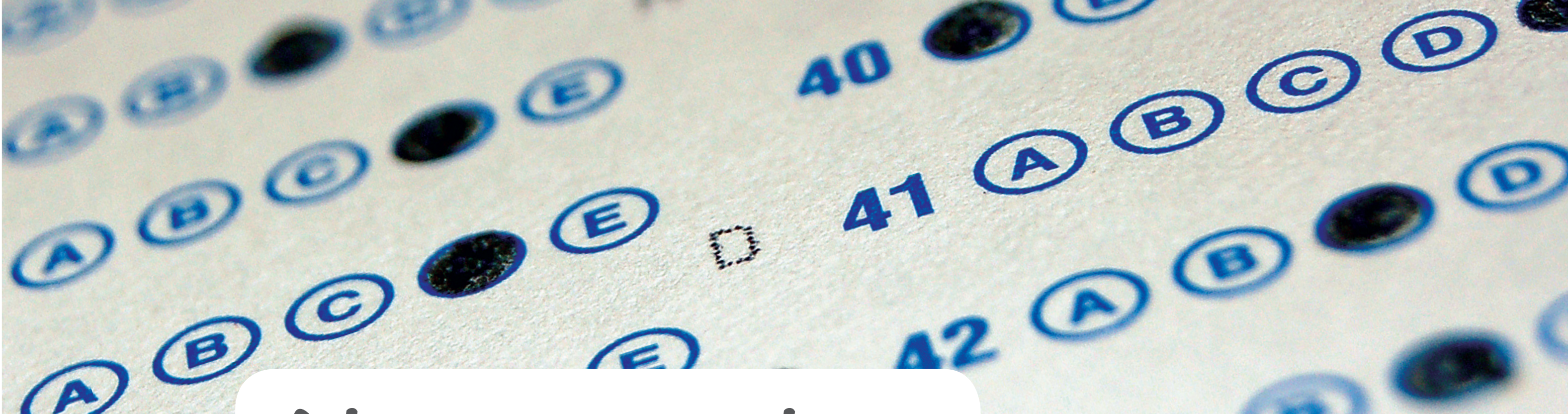
como são 8 clientes, temos:

$P(8) = \dfrac{3\ .\ 8}{5}$

P(8) = 24/5

P(8) = 4,8

Ou seja, Ana vai precisar de um pouco menos de 5 potes de creme.



Atividade extra

Exercício 1

Um vendedor possui um gasto mensal de R$ 550,00 e cada produto é vendido por R$ 5,00. Sua renda é variável dependendo de suas vendas no mês.

Que função representa o lucro desse vendedor em função da arrecadação x, em reais?

(a) $f(x) = 5x - 550$ (c) $f(x) = 500 - 5x$

(b) $f(x) = 5x + 550$ (d) $f(x) = 500 + 5x$

Exercício 2

O salário mensal dos empregados de uma empresa é constituído de uma parte fixa de R$ 700,00 e uma parte variável correspondente a produtividade.

Que função dá o salário dos funcionário dessa empresa?

(a) $f(x) = 700x$ (c) $f(x) = x + 700$

(b) $f(x) = x - 700$ (d) $f(x) = 10x + 700$

Exercício 3

A lucratividade de uma empresa é representada pela função $L(v) = 3v - 300$, sendo v o número de produtos vendidos.

Qual o número mínimo de produtos vendidos para que a empresa não tenha prejuízo?

(a) 50 (b) 100 (c) 150 (d) 200

Exercício 4

A posição de uma partícula é dada pela função $S(t) = 15 - 3t$, sendo t o tempo gasto dessa partícula em segundos. Quanto tempo a partícula gastará para chegar a posição zero?

(a) 3s (b) 4s (c) 5s (d) 6s

Exercício 5

A lucratividade de uma imobiliária é representado pela função $f(x) = 30x - 600$, sendo x o número de terrenos vendidos. Qual a quantidade mínima de terrenos que essa imobiliária tem que vender para ter lucro?

(a) 20 (b) 21 (c) 30 (d) 60

Exercício 6

Um veículo mantém uma velocidade constante de 105 km/h. Qual o tempo gasto por esse veículo após percorrer 525 km?

(a) 3 horas (b) 4 horas (c) 5 horas (d) 7 horas

Exercício 7

Um posto de combustível oferece um preço promocional de R$ 1,99 por litro, se o cliente abastecer a partir de 30 litros. Qual o valor pago por um cliente que abasteceu 50 litros de combustível?

(a) R$ 90,50 (b) R$ 50,00 (c) R$ 99,50 (d) R$ 199,00

Exercício 8

O proprietário de uma fábrica de chinelos verificou que, quando se produziam 600 pares de chinelos por mês, o custo total da empresa era de R$14000,00 e quando se produziam 900 pares o custo era de R$15.800,00. O gráfico que representa a relação entre o custo mensal (*C*) e o número de chinelos produzidos por mês (*x*) é formado por pontos de uma reta.

Qual o valor do custo máximo mensal, em reais, se a capacidade máxima de produção da empresa for de 1.200 chinelos/mês?

(a) 17.600 (b) 16.700 (c) 15.760 (d) 17.700

Exercício 9

Uma grande empresa recebeu 5750 currículos de profissionais interessados em participar do processo de seleção para preenchimento de vagas de estágios. O departamento de Recursos Humanos (RH) da empresa é capaz de, por meio de uma triagem, descartar 300 currículos por semana, até que sobrem 50 nomes de candidatos que participarão do processo de seleção.

Após quantas semanas serão conhecidos os nomes dos 50 candidatos?

(a) 17 (b) 18 (c) 19 (d) 20

Exercício 10

A um mês de uma competição, um atleta de 75 kg é submetido a um treinamento específico para aumento de massa muscular, em que se anunciam ganhos de 180 gramas por dia.

Qual será o "peso" desse atleta após uma semana desse treinamento?

(a) 76,16kg (b) 76,26kg (c) 76,62kg (d) 76, 21kg

Exercício 11

Em uma cidade, a empresa de telefone está promovendo a linha econômica. Sua assinatura é R$ 20,00, incluindo 100 minutos a serem gastos em ligações locais para telefone fixo. O tempo de ligação excedente é tarifado em R$ 0,10 por minuto. Qual a lei da função que representa o valor (*V*) mensal da conta?

Exercício 12

Uma locadora possui um custo mensal de R$ 540,00 e o preço do aluguel dos DVDs é de R$ 4,50. Quantos DVDs alugados serão necessários para que essa locadora não tenha prejuízo?

Exercício 13

O rendimento mensal, em reais, de uma aplicação financeira é expressada pela função $f(x) = 2x + 20$, sendo x a quantidade de meses da aplicação. Quantos meses serão necessários para que o rendimento seja igual a 36 reais?

Exercício 14

Os preços dos produtos de um mercado sofrerão aumentos de 2% nesse mês e mais R$ 0,14 no próximo mês.

Qual a expressão que representa os preços dos produtos ao final desse período?

Exercício 15

A lucratividade de uma empresa é dada pela função $L(x) = 750x - 10510$, sendo x a quantidade de meses.

Quantos meses, no mínimo, serão necessários para que essa empresa tenha lucro?

Gabarito

Exercício 1

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 2

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 3

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 4

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 5

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 6

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 7

A B C D

○ ○ ● ○

Exercício 8

A B C D

● ○ ○ ○

Exercício 9

A B C D

○ ○ ● ○

Exercício 10

A B C D

○ ● ○ ○

Exercício 11

$V(x) = 20 + 0{,}1x$.

Exercício 12

120 DVD's.

Exercício 13

8 meses.

Exercício 14

$f(x) = 1{,}02x + 0{,}14$

Exercício 15

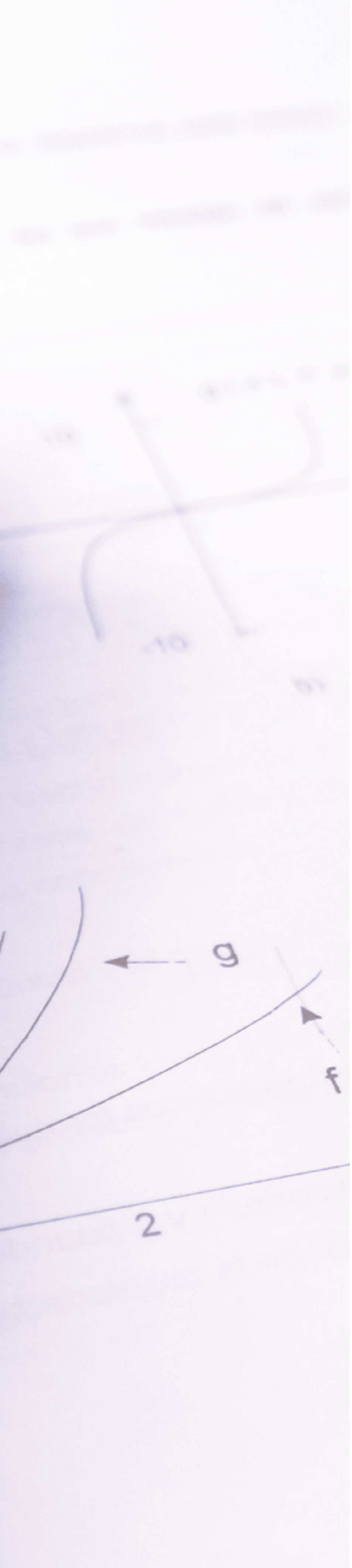
14 meses.

Função Polinomial do 1º grau – Parte 2

Fascículo 5

Unidade 15

Fundação CECIERJ



Função Polinomial do 1º grau – Parte 2

Para início de conversa...

Gráfico de jornal americano mostra como o mundo engordou nos últimos 30 anos

10 de fevereiro de 2011

O *site* do jornal americano The Washington Post publicou um **gráfico** interativo que revela como a população do planeta ganhou peso nos últimos 30 anos.

É possível inclusive ver a situação do Brasil. Basta selecionar o país numa lista que fica no canto direito. Homens e mulheres brasileiros hoje estão com sobrepeso.

Fonte: http://saude.abril.com.br/blogs/emagreca-com-saude/2011/02/10/grafico-de-jornal-americano-mostra-como-o-mundo-engordou-nos-ultimos-30-anos/

Você já reparou que todos os dias nos deparamos com inúmeras informações que envolvem gráficos?

Basta abrir um jornal, uma revista ou pesquisar na Internet que você perceberá que está imerso em um mundo rodeado de informações que são transmitidas através de gráficos.

Mas... você já parou para pensar o que representa um gráfico?

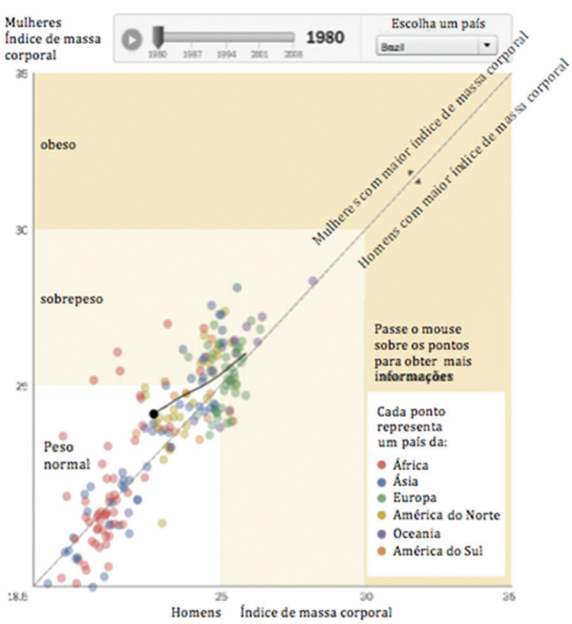
Gráfico

Expressa visualmente dados ou valores numéricos com objetivo de facilitar e dinamizar sua leitura.

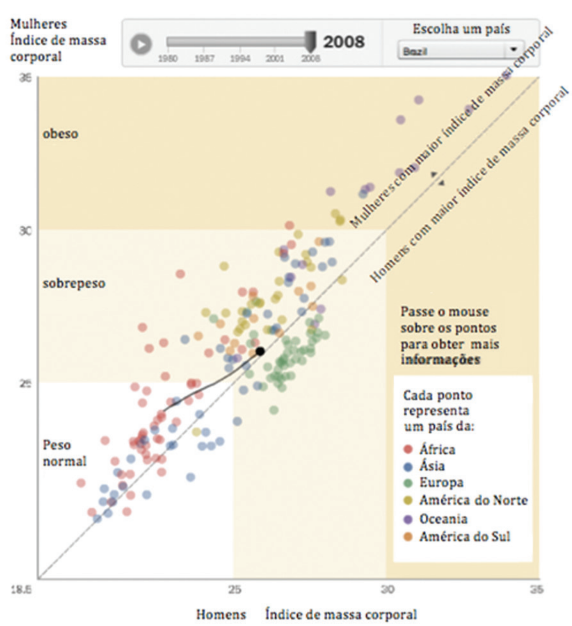
Na matéria do *site* que aparece no início desta unidade, ao clicar em gráfico interativo você pode fazer a simulação do índice de massa corporal de homens e mulheres do mundo inteiro de 1980 até 2008.

Vejamos a situação do Brasil:

Em 1980



Em 2008



IMC

(Índice de Massa Corporal) – fator para a avaliação do peso ideal dos indivíduos. É calculado através do quociente (divisão) entre a massa do indivíduo (em quilogramas) e o quadrado da sua altura (em metros). No site http://dab.saude.gov.br/nutricao/ , é possível calcular o seu IMC e saber se o seu peso é ou não ideal.

Atividade

Ao analisar esses dados, o que você pode concluir?

Anote suas respostas em seu caderno

Nesta unidade, continuaremos estudando as funções afins, entendendo como é possível representá-las por meio de gráficos.

Objetivos de Aprendizagem

- Interpretar gráficos de funções afins;
- Construir gráficos de funções afins;
- Resolver situações do dia a dia que envolvam gráficos de funções afins.

Seção 1
Funções em toda parte

No estudo das funções e da Matemática em geral, é sempre interessante que o estudante associe os conceitos estudados em sala com o seu cotidiano. A vivência de situações práticas constitui um importante apoio no processo ensino-aprendizagem, sendo facilitadora da assimilação de conteúdos. Por exemplo, imagine que você foi ao mercado comprar carne, que está em oferta, e decide comprar alcatra que está custando R$9,00 o quilo. Como determinar uma maneira de se calcular o valor a ser pago por uma quantidade qualquer de alcatra?

Como vimos na unidade anterior, esse tipo de problemática é resolvido através da função afim. Você já consegue facilmente perceber que ao multiplicarmos o preço da carne (R$9,00) pela quantidade de carne (em quilogramas) que queremos comprar, obteremos o valor total a ser pago, certo?

Desta maneira, podemos escrever $f(x) = 9x$ como a função que representa a situação descrita no problema: o valor total a ser pago $f(x)$ em função da quantidade x (em quilograma) de alcatra cujo quilograma custa 9 reais.

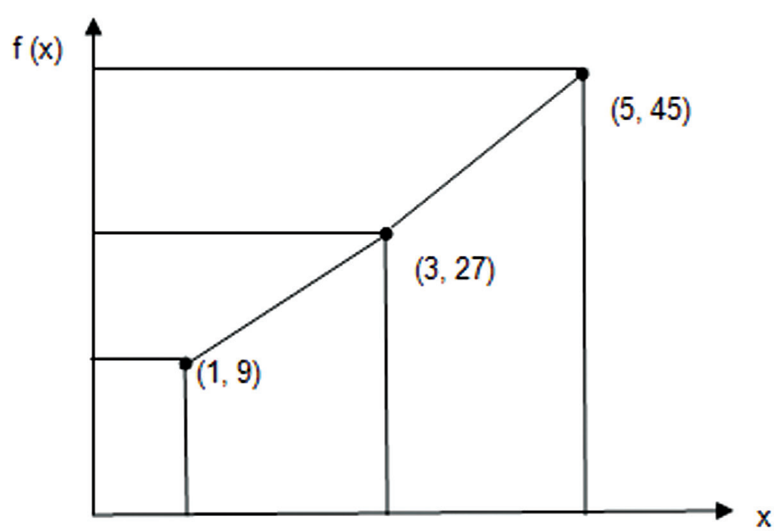
Você percebeu que estamos representando de duas formas distintas uma mesma situação real? Na primeira vez, descrevemos a situação em linguagem natural e na segunda, na forma de linguagem algébrica (através da função afim).

Além dessas duas maneiras, podemos também representar essa mesma situação, através da tabela de valores e através de gráfico.

x	f(x) = 9x
1 kg	R$ 9,00
3,5 kg	R$ 31,50
5,25 kg	R$ 47,25

Para construirmos uma tabela, basta escolhermos um valor para uma das variáveis (x ou f(x)) e determinarmos o valor da outra variável através da sua lei de formação (nesse caso f(x) = 9x). No nosso exemplo, analisando a 1ª linha temos: Se compramos 3,5 kg pagamos R$31,50 (9x3,5) pela carne ou, se pagamos R$31,50 pela carne significa que estamos comprando 3,5 kg (31,50÷9). Já se comprarmos 5,25 kg de carne, pagaremos R$ 47,25 (5,25x9) e assim por diante.

Podemos exibir as informações contidas na tabela acima no plano cartesiano, marcando pontos da forma (x,f(x)).



A escolha de outros valores para x implica em marcarmos novos pontos do plano cartesiano. Veremos mais adiante que os pontos da forma (x, f(x)), com f(x) = ax + b (uma função polinomial do 1º grau), estão alinhados.

No exemplo a seguir, vamos entender melhor como podemos interpretar dados em um gráfico.

Exemplo: O gráfico representado na Figura 1 demonstra a evolução de casos da influenza A (vírus H1N1).

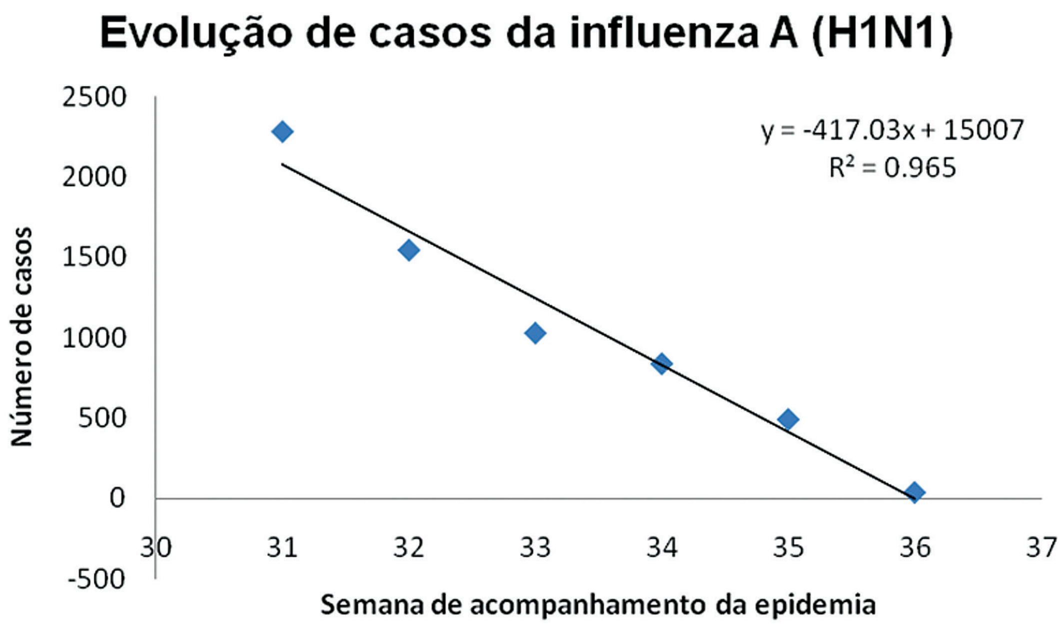
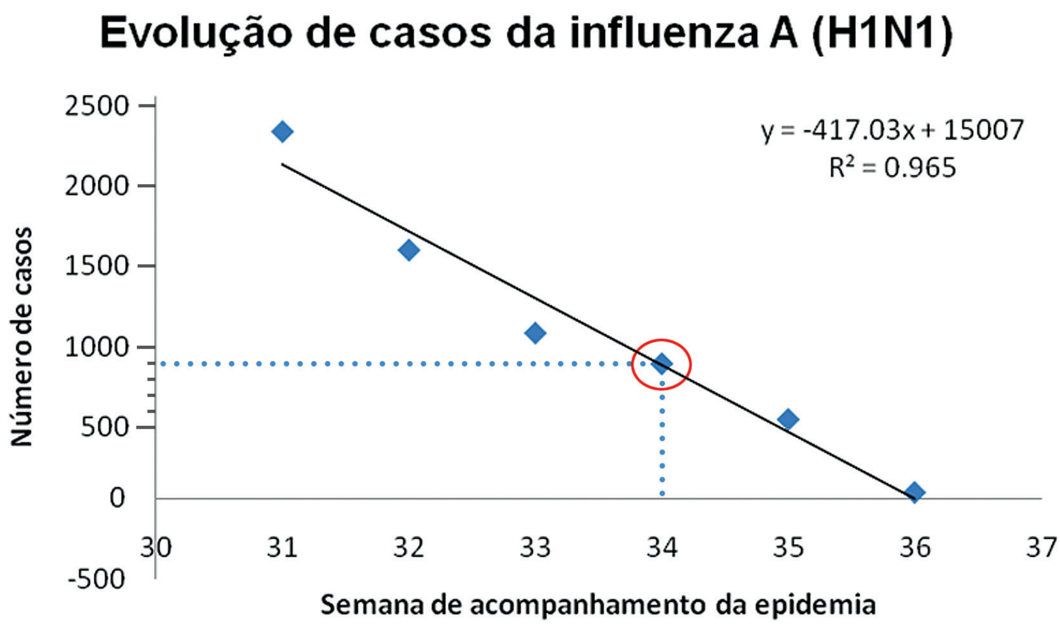


Figura 1: Gráfico do número de casos do vírus H1N1, ao longo das semanas de acompanhamento da epidemia. A representação foi aproximada pelo gráfico de uma função afim (observe que alguns pontos estão fora da reta).

O que podemos dizer sobre os números de casos na 34ª semana?

Observe que são dois eixos: um vertical que descreve o número de casos e um horizontal que relata as semanas de acompanhamento da epidemia.

O gráfico relaciona, então, essas duas grandezas.



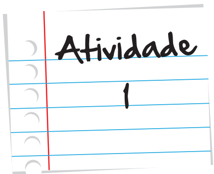
Analisando a 34ª semana, percebemos que o número de casos gira em torno de 900, ou seja,no acompanhamento da epidemia, na 34ª semana o número de casos foi de aproximadamente 900.

E quando o número de casos é praticamente zero?

Analisando novamente o gráfico da **Figura 1**, vemos que o número de casos é praticamente zero na 36ª semana.

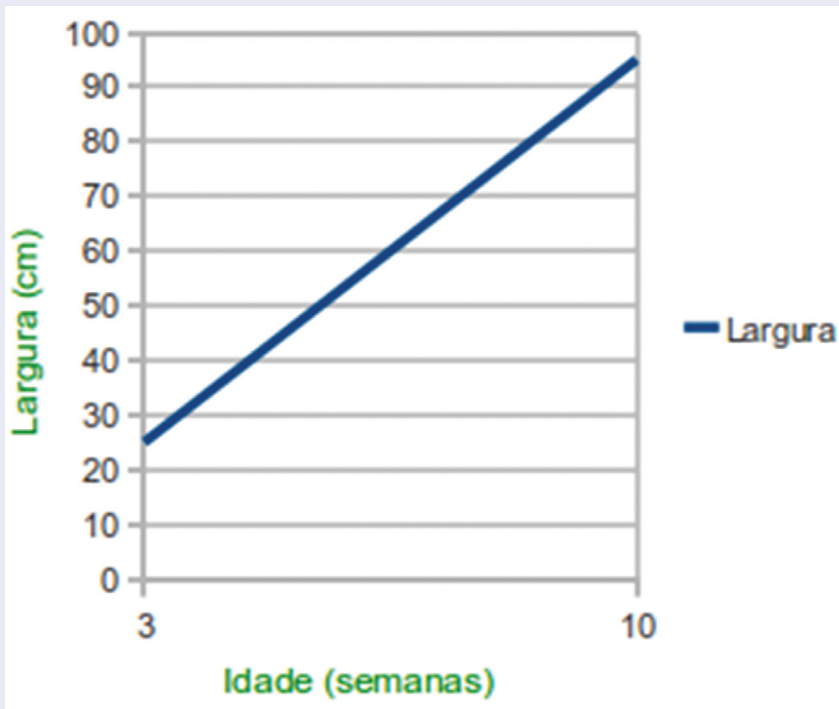
Agora é sua vez de interpretar as situações apresentadas a seguir.

Atividade 1



Observe o gráfico a seguir:

Relação entre idade e largura de um orgão.



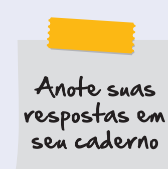
Analise as afirmativas como verdadeiras ou falsas:

a. O gráfico relaciona a idade em anos e a largura em centímetros de um órgão. ( )

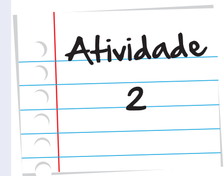
b. O eixo horizontal representa a idade e o vertical a largura. ( )

c. Com 3 semanas a largura do órgão mede menos de 30 cm. ( )

d. Com 10 semanas a largura do órgão mede exatamente 100 cm. ( )

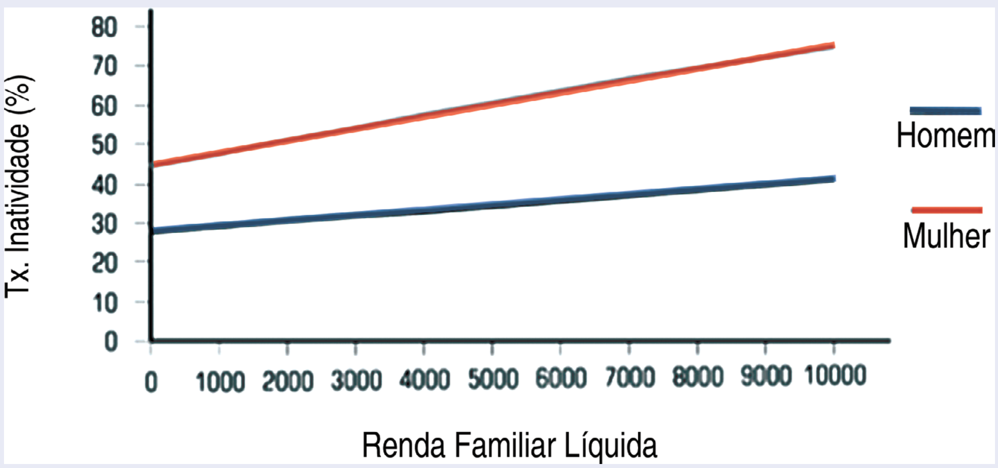


Atividade 2



O gráfico a seguir relaciona a taxa de inatividade (%) e a renda familiar (em Reais) entre homens e mulheres. Com base nas informações do gráfico, responda:

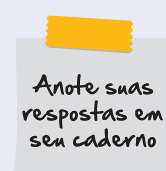
Relação entre a taxa de Inatividade e Renda Familiar



a. Em qual dos sexos, a taxa de inatividade é maior?

b. Com base em qual característica, podemos afirmar que os gráficos que descrevem a taxa de inatividade de homens e mulheres em função da renda representa uma função afim?

c. Quando a renda familiar é de 1000 reais, de quantos por cento é aproximadamente a taxa de inatividade de homens e mulheres?



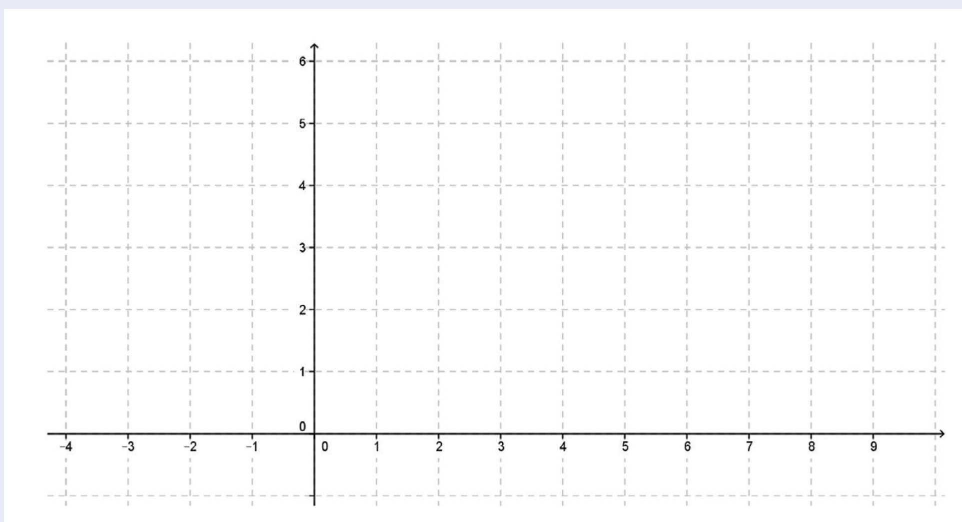
Atividade 3

Atividade 3

a. Considere uma função real dada por $f(x) = x + 2$. Vamos escolher três valores para x: 1, 2 e 3. Determine $f(1)$, $f(2)$ e $f(3)$. Preencha a seguinte tabela com esses valores:

Ponto	x	f(x)
A	1	
B	2	
C	3	

b. Marque no plano cartesiano os pontos A, B e C. A malha quadriculada abaixo facilitará sua construção.



Mostre que esses três pontos estão alinhados. Para isso, mostre que a distância de A até C é a soma das distâncias de A até B e de B até C.

Anote suas respostas em seu caderno

Saiba Mais

Será que foi uma coincidência os valores escolhidos na atividade anterior nos fornecerem pontos alinhados através da função? No link http://www.moodle.ufba.br/mod/book/view.php?id=131066&chapterid=30720 (Acesso em 17/02-13) você pode encontrar uma demonstração de que os pontos que pertencem ao gráfico de uma função polinomial do 1º grau estão alinhados.

Seção 2
Crescente ou decrescente?

Observe novamente os gráficos da seção anterior e tente descobrir alguma diferença entre eles.

Você notou a diferença nesses exemplos?

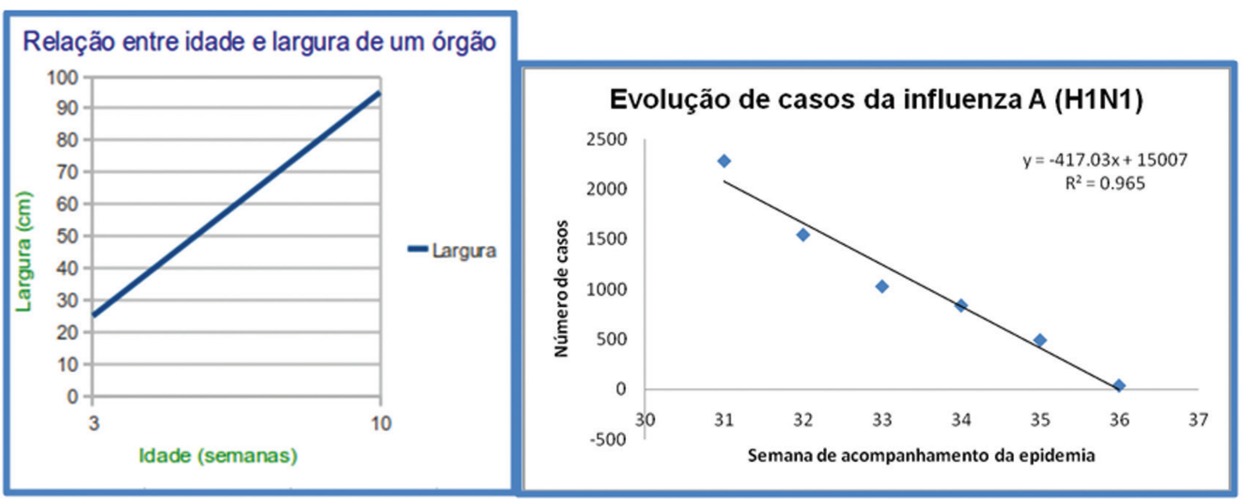


Figura 2: (a) Relação entre idade e largura de um órgão. (b) Relação entre semanas de acompanhamento da epidemia do vírus H1N1 e o número de casos.

A diferença existe porque alguns são gráficos de funções crescentes como no exemplo ao lado. Veja que à medida que o valor de x vai aumentando, o valor de y também aumenta.

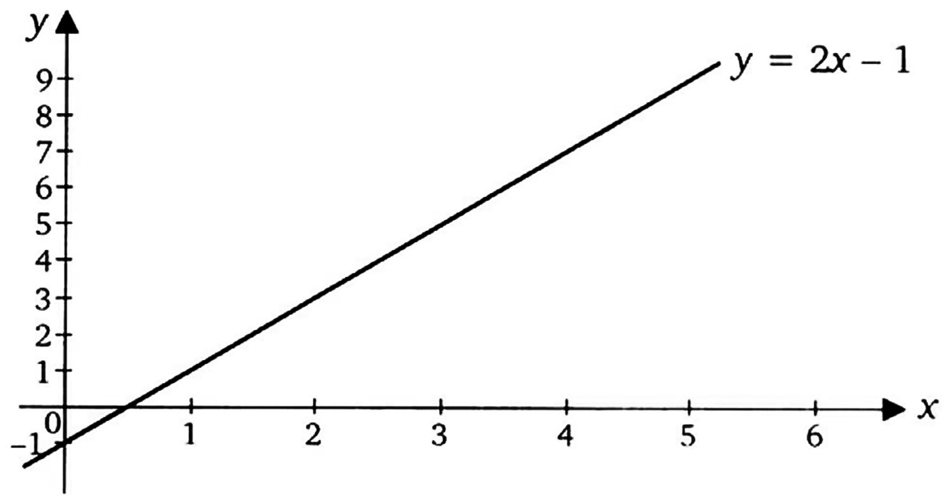


Figura 3: Gráfico de uma função crescente

E outros são gráficos de funções decrescentes, como o exemplo que segue:

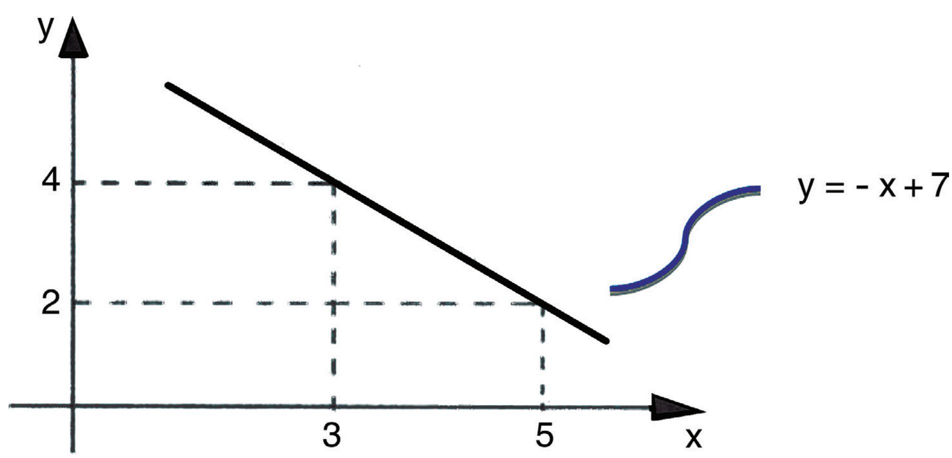
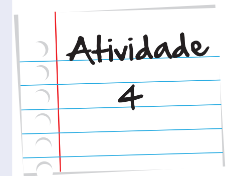


Figura 4: Gráfico de uma função decrescente

Note que no gráfico da **Figura 4** à medida que o valor de x aumenta, o valor de y vai diminuindo.

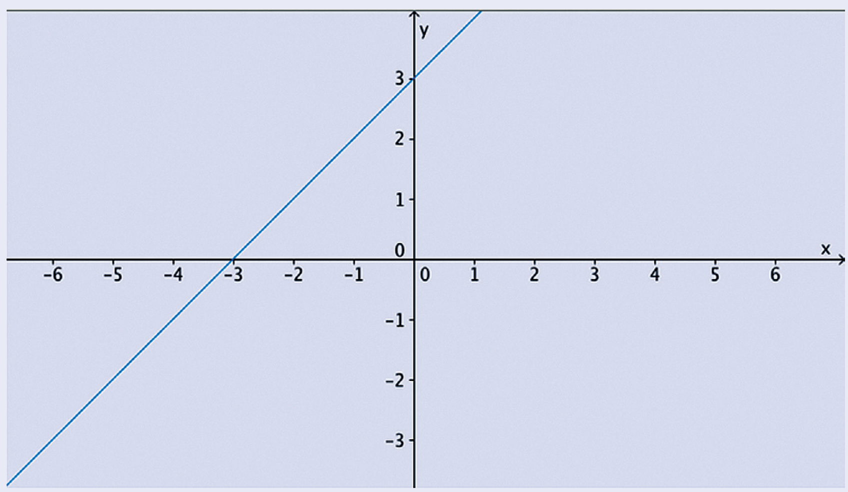
Será que você já pode dizer se as funções a seguir são crescentes ou decrescentes, apenas observando sua representação gráfica? Confira seu entendimento a esse respeito, fazendo a próxima atividade.

Atividade 4

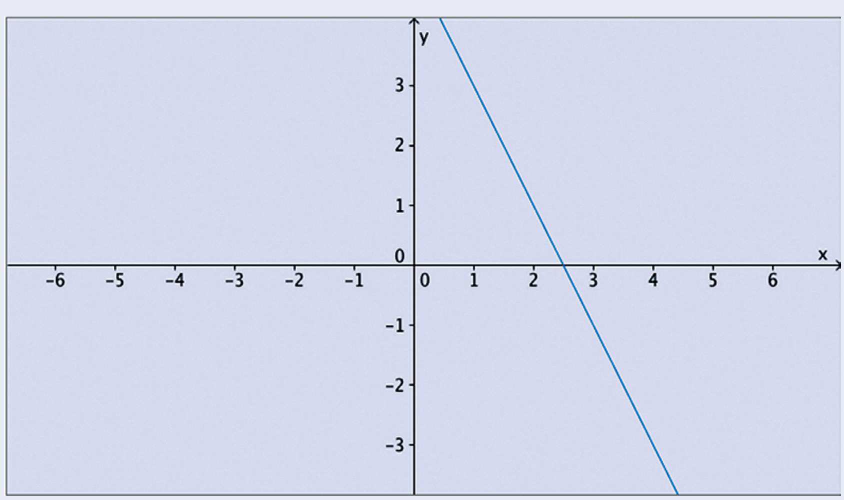


Analise os gráficos e diga se as funções abaixo são crescentes ou decrescentes.

a. $y = x + 3$

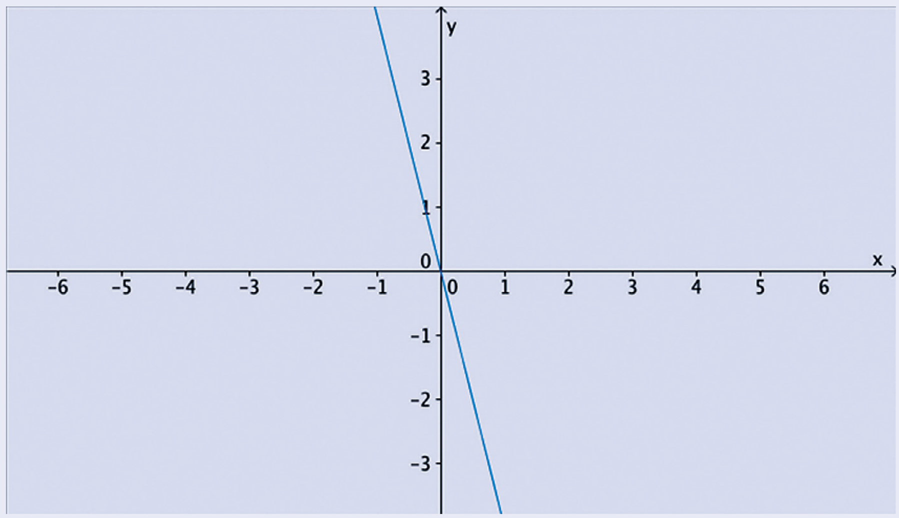


b. $y = -2x + 5$

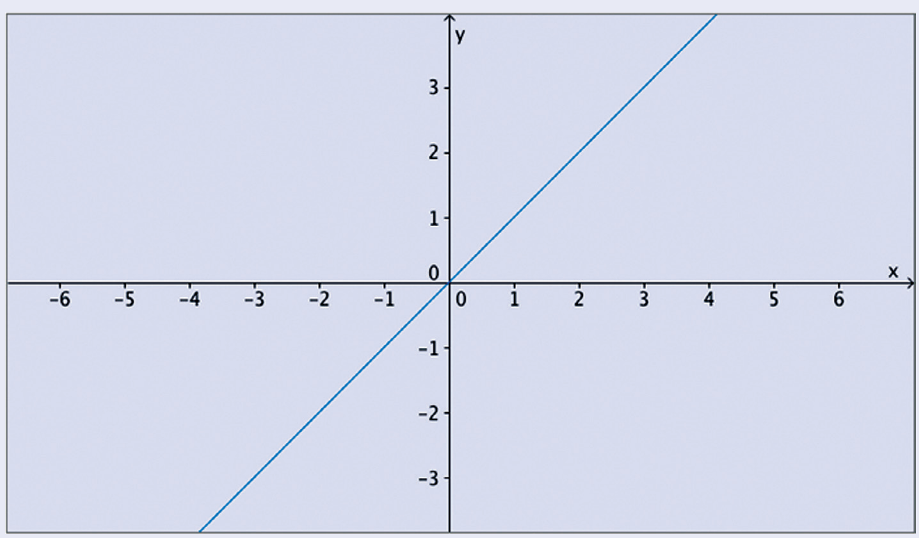


Atividade 4

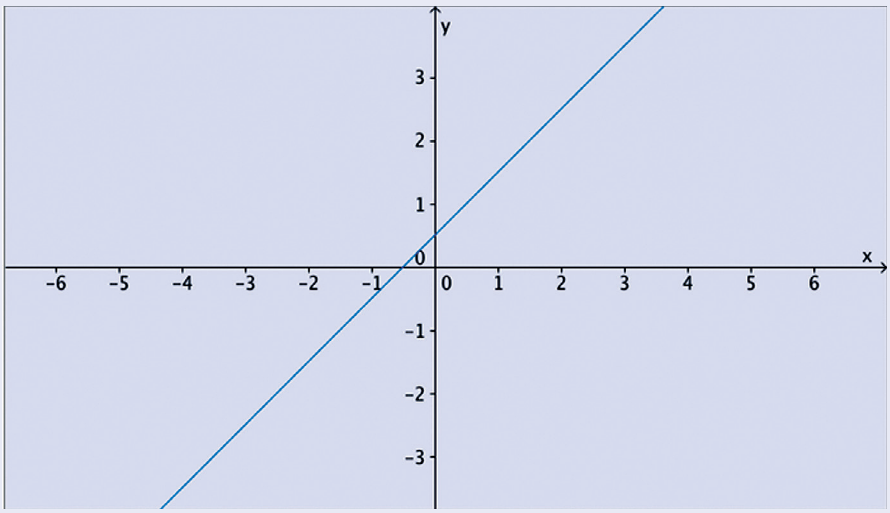
c. y = -4x



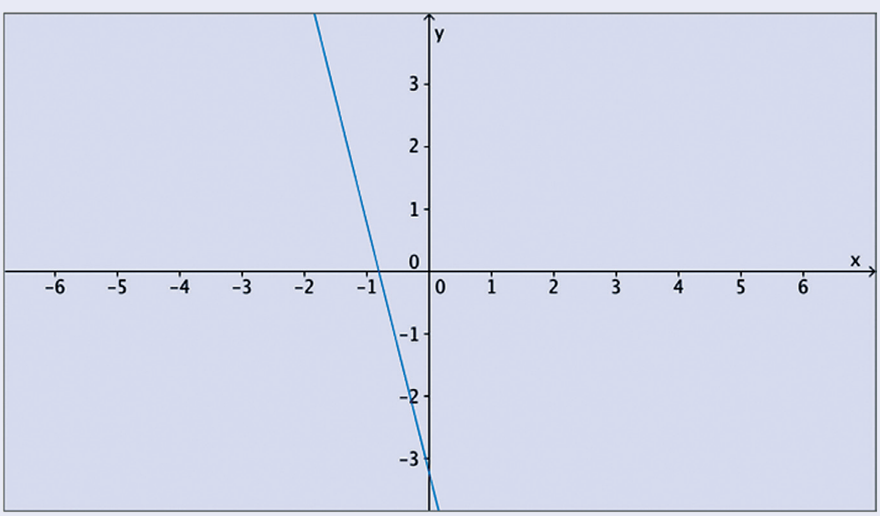
d. y = x

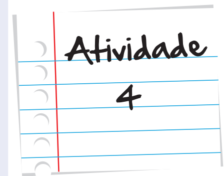


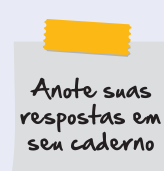
e. $y = x + 0{,}5$



f. $y = -4x - 3{,}2$

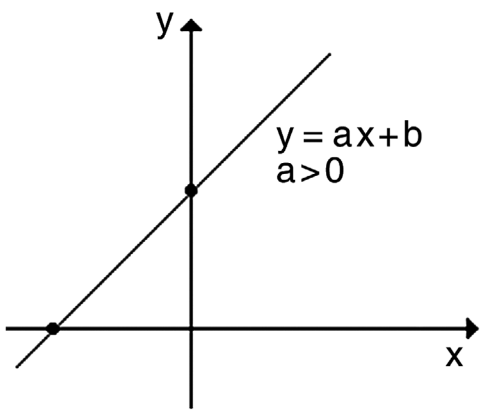




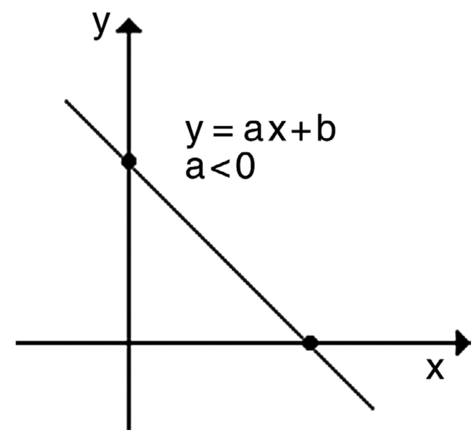


Percebeu que nas funções $y = ax + b$, quando $a > 0$, ou seja, positivo a função é crescente e quando $a < 0$, ou seja, negativo a função é decrescente?

Função Crescente



Função Decrescente



Importante

Uma função f é crescente se, dados dois valores x_1 e x_2 do seu domínio tais que $x_1 < x_2$, temos que $f(x_1) < f(x_2)$.

A função f será decrescente se, dados dois valores x_1 e x_2 do seu domínio tais que $x_1 < x_2$, temos que $f(x_1) > f(x_2)$.

Saiba Mais

Em certos problemas, estamos interessados em saber se uma função assume valores positivos ou negativos. Estudar o sinal de uma função significa dizer quais são os valores de x que tornam $f(x) > 0$, $f(x) = 0$ ou $f(x) < 0$.

Graficamente, é possível estudar o sinal de uma função. A parte do gráfico que se encontra acima do eixo x é formada por pontos cujas ordenadas são positivas, isto é, para valores de x que são abscissas de pontos situados acima do eixo x a função assume valores positivos. Analogamente, a parte do gráfico que se encontra abaixo do eixo x é formada por pontos cujas ordenadas são negativas.

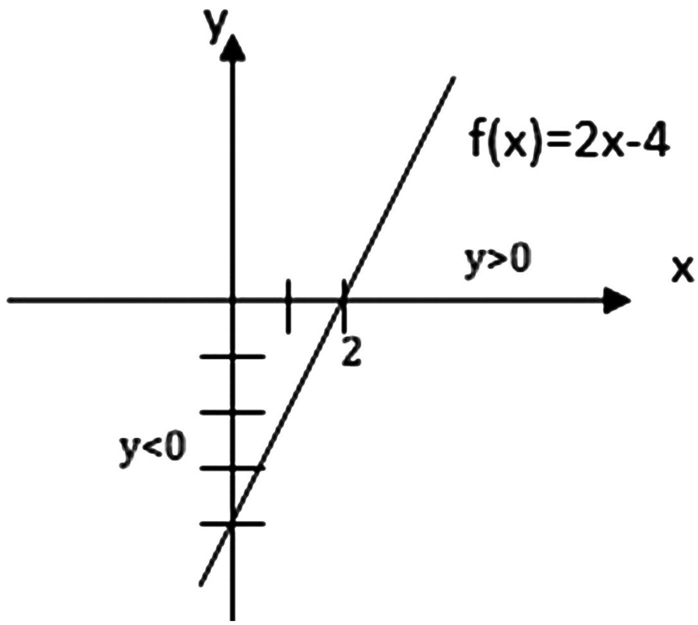
No exemplo a seguir, podemos identificar que:

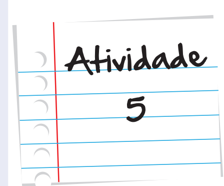
$y>0$, se $x>2$

$y=0$, se $x = 2$ (zero da função)

$y<0$, se $x<2$

Analisando o sinal da função, você consegue saber que valores são positivos, nulo ou negativos, o que pode auxiliá-lo a resolver muitos problemas principalmente os relacionados à inequação. Você vai estudar esse assunto mais adiante.

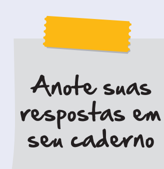




Estude o sinal das funções reais definidas por:

a. f(x) = 2x – 4

b. g(x) = -5x - 12



Seção 3
Mãos à obra!

Até agora, aprendemos a identificar, interpretar e determinar algumas características do gráfico da função afim.

Considere a função real definida por $f(x) = 3x – 6$. Vamos construir o seu gráfico, seguindo o seguinte roteiro:

PASSO 1: Analisar a taxa de variação e identificar se a função é crescente ou decrescente.

A função é $f(x) = 3x - 6$. Logo, a taxa de variação é igual a 3. Como o valor da taxa de variação é positivo, ou seja, maior que zero, podemos afirmar que a função é crescente.

PASSO 2: Como o gráfico da função afim é uma reta, precisamos descobrir apenas dois pontos, uma vez que dois pontos distintos determinam uma única reta.

Então vamos encontrar dois pontos que pertençam ao gráfico da função.

Neste exemplo, vamos encontrar o valor da função para $x = 0$ e para $x = 2$. Você poderia escolher outros valores.

Considerando $x = 0$, temos que $f(0) = 3(0) - 6 = -6$.

Para $x= 2$, temos que $f(2) = 3.(2) - 6 = 0$.

PASSO 3: Construindo o gráfico

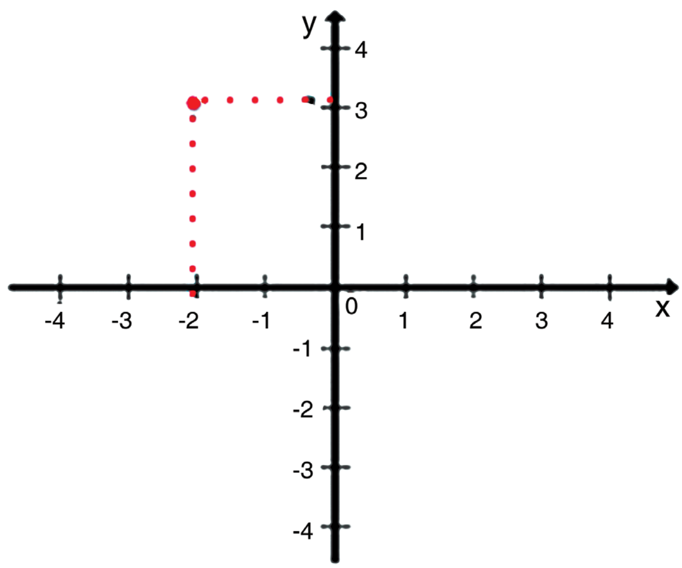
Dos passos anteriores, sabemos que:

1. A função é crescente
2. Os pontos (0, -6) e (2,0) pertencem ao gráfico da função f.

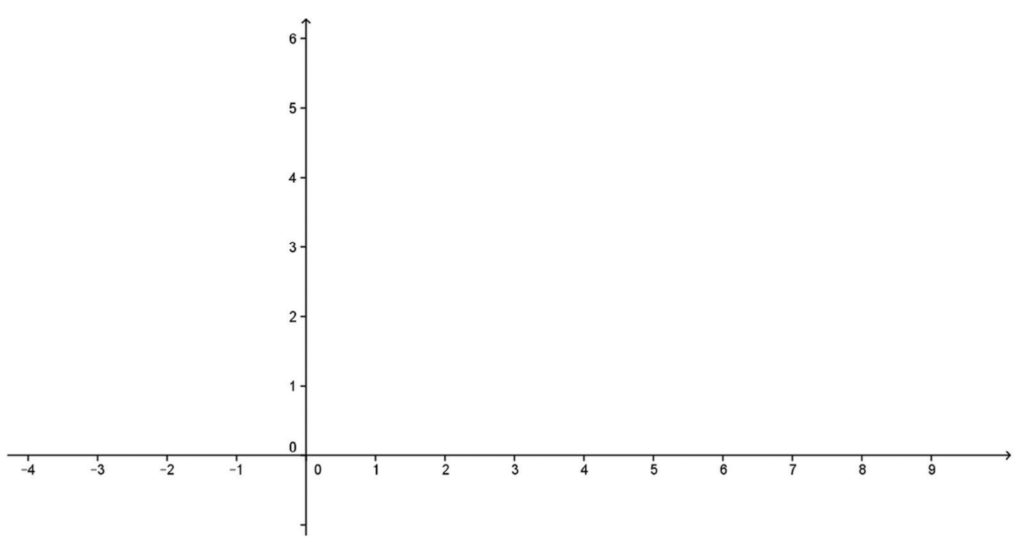
No plano cartesiano, cada ponto do plano está associado a dois números reais. O primeiro representará o valor do eixo das abscissas (x) e o segundo, o valor do eixo das ordenadas (y), determinando, dessa forma, um ponto nesse plano.

Assim o ponto ilustrado no gráfico ao lado é a representação do par ordenado (-2,3).

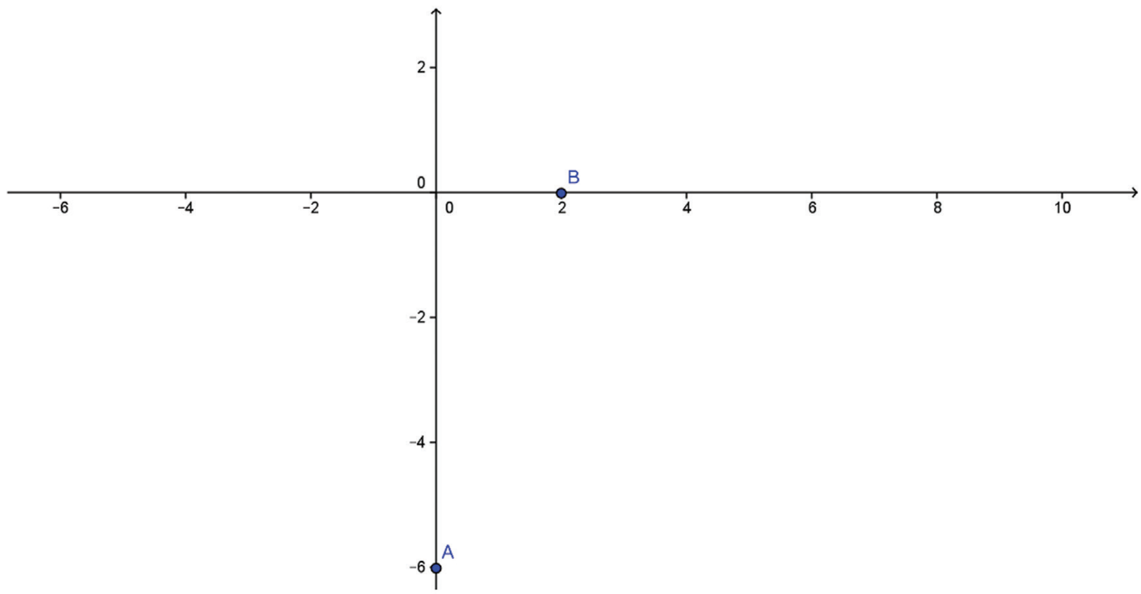
Saiba Mais



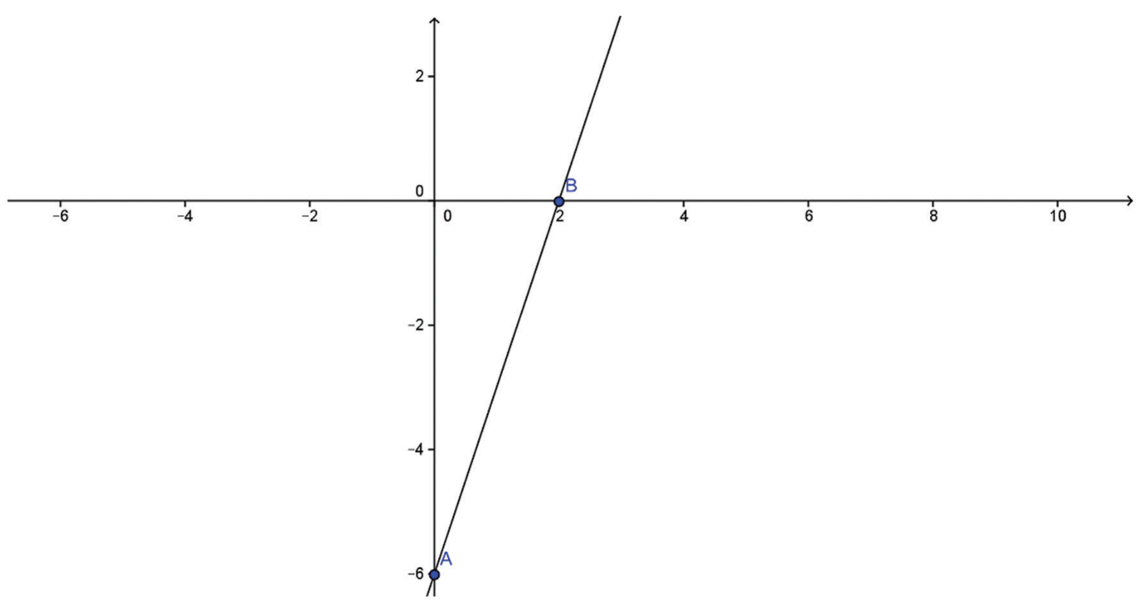
PASSO 4: Para construímos a representação gráfica de uma função, primeiro devemos traçar os eixos das abscissas e das ordenadas.



PASSO 5: Agora basta marcamos os pontos encontrados no passo 2, ou seja, (0,-6) e (2,0).



PASSO 6: E para finalizar unimos os pontos marcados, construindo uma reta que passa por eles.



Mas será que sempre devemos traçar uma reta ligando os dois pontos? Depende da situação-problema proposta.

Para avançamos em nosso estudo de gráficos, convido você a relembrar um exemplo que vimos na unidade anterior a essa. O Buffet que Ana contratou para o aniversário de sua filha. Relembre o caso conosco.

Ana quer comemorar o aniversário de sua filha com um buffet que cobra por uma festa infantil R$ 500,00 fixos e R$ 30,00 por pessoa. Ana tem 80 convidados e fez uma reserva de R$ 3.200,00 para gastar com o buffet. Ana pode contratar esse buffet? Aliás, com esse valor, qual a quantidade máxima de pessoas que ela pode convidar? (...)

Imagine, então, que você é dono desse buffet e para facilitar a visualização de seus clientes, você resolve construir um gráfico que mostra como o orçamento da festa varia de acordo com a quantidade de pessoas. Como você faria essa construção?

Vamos construir o gráfico da função $f(x) = 30x + 500$, que representa, como já vimos, o valor da festa infantil, cobrada por esse *buffet*, em função do número de convidados.

A função é $f(x) = 30x + 500$. Logo, a taxa de variação: é igual a 30. Como o valor da taxa de variação é positivo, ou seja, maior que zero, podemos afirmar que a função é crescente.

Neste exemplo, vamos encontrar o valor da função, quando $x = 0$ e quando $x = 80$ que são valores importantes para o problema. Vamos entender agora o porquê da escolha desses valores.

Considerando x = 0, temos que f(0) = 30(0) + 500 = 500. Esse resultado mostra que o valor fixo cobrado pelo *buffet* é de R$ 500,00.

Quando x= 80 (número de convidados de Ana), temos que f(80) = 30(80) + 500 = 2.900. Com esse resultado, podemos concluir que o *buffet* cobra R$ 2.900,00 para realizar uma festa infantil para 80 convidados.

Agora basta marcamos os pontos (0,500) e (80,2900).

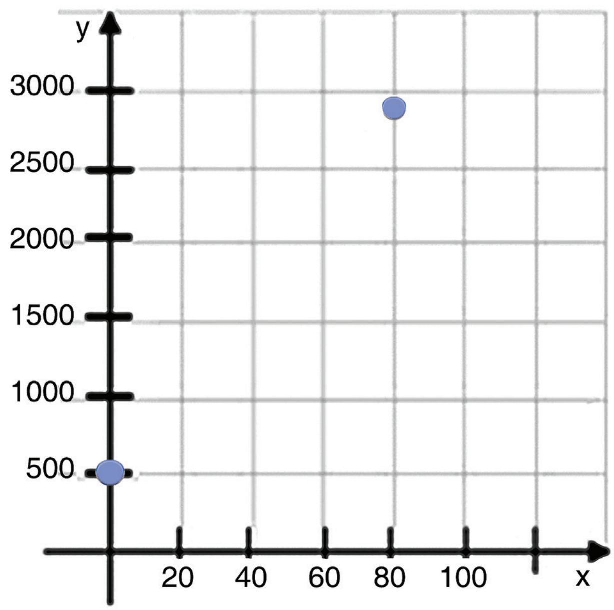


Figura 7: Marcação dos pares ordenador (0,500) e (80, 2900).

Note que, nesse exemplo, x assume somente valores inteiros maiores ou iguais a zero, uma vez que representa o número de convidados. Nesse caso, teríamos um conjunto discreto de pontos alinhados. Não teríamos uma reta como no nosso primeiro exemplo.

Os pontos que fazem parte do gráfico dessa função seriam: (0,500), (1,530), (2,560), (3,590), ...

Dessa forma, vemos que observar o conjunto de valores que x pode assumir é importante para a construção do gráfico de uma função.

Dispondo dessa representação gráfica, você como dono do *buffet*, pode auxiliar seus clientes de modo rápido e prático a calcular o custo de cada festa em função do número de convidados.

Agora é sua vez de construir o gráfico de um outro problema, visto na unidade anterior. Mãos à obra!

Atividade 6

Lembra-se do Silvio que conhecemos na unidade anterior? O vendedor de uma loja de colchões e cujo salário é de 1000 reais fixos mais uma comissão de 60 reais por colchão vendido?

Imagine que você é gerente do Sílvio e quer construir o gráfico que representa o salário de Silvio para incentivá-lo a vender mais. Lembre-se o salário de Sílvio é dado por $S(c) = 1000 + 60c$, e que o número de colchões vendidos deverá ser representado por um número inteiro, maior ou igual a zero, e por isso, os pontos obtidos não poderão ser ligados!

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 4
Observando gráficos. Enxergando funções.

Nesta seção, vamos percorrer o sentido inverso ao que tomamos durante as seções anteriores, onde partimos da função afim para a interpretação, classificação e construção de seu gráfico. Agora vamos verificar que a partir da análise cuidadosa das informações apresentadas em um gráfico, é possível chegar a várias conclusões. Uma delas é encontrar a função que descreve aquela representação gráfica.

Para trabalharmos esse novo olhar, suponha que você pegou um empréstimo de 100 reais no banco. Ao retirar o dinheiro, seu gerente entregou um gráfico (**Figura 9**), representando o valor devido ao longo dos meses que o dinheiro permanecerá emprestado.

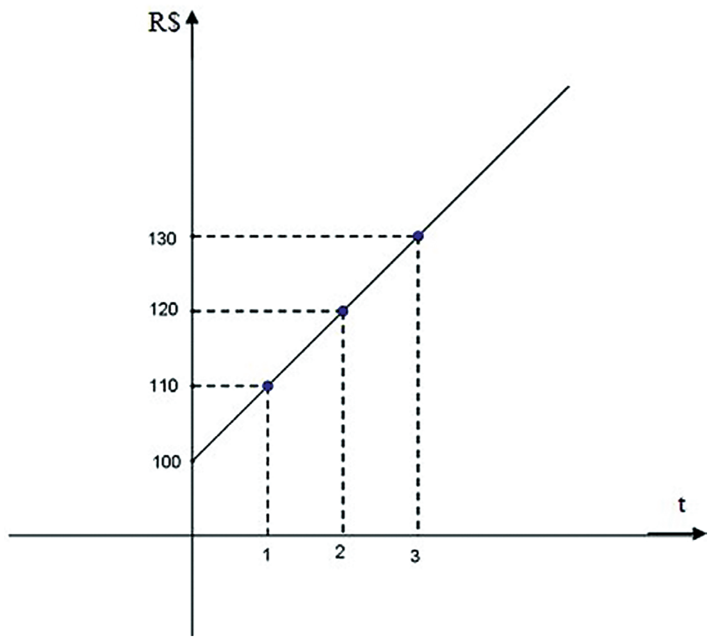
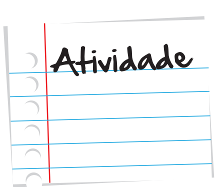
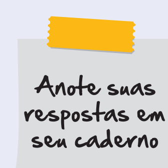


Figura 9: Valor da dívida (em R$) em função do tempo (t em meses).



De quanto será a dívida se você permanecer com o dinheiro durante 8 meses?



Uma maneira para resolver esse problema, é descobrir a função que determina esse gráfico. Veja o passo a passo de como podemos fazer isso.

PASSO 1: Identificar dois pontos que pertençam ao gráfico e por consequência à função que o determina:

1º ponto: Tempo = 0, Valor = 100

2º ponto: Tempo = 1, Valor = 110

Importante

Basta encontrar dois pontos, pois assim teremos apenas duas incógnitas para encontrar.

Substituindo os valores dos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) encontrados no gráfico, teremos de encontrar os valores de a e b, para determinar a função afim $f(x) = ax + b$.

PASSO 2: Montar um sistema de equações, substituindo os valores dos pontos na função, ou seja, em $f(x) = ax + b$.

Considerando o primeiro ponto que identificamos no gráfico, temos que, quando o tempo é zero (ou seja, antes de completar 1 mês de empréstimo), o valor do empréstimo é de 100 reais (valor inicial). Substituindo os valores de x e y na função concluímos que:

$f(x) = ax + b,$

$f(0) = a(0) + b$

$100 = a(0) + b$

Da mesma forma, considerando o segundo ponto que reconhecemos no gráfico, temos que quando o tempo é igual a 1 mês o valor cobrado pelo empréstimo passa a ser igual a 110 reais. Substituindo os valores de x e y na função concluímos que:

$f(x) = ax + b,$

$f(1) = a(1) + b$

$100 = a(1) + b$

Reescrevendo as funções encontradas, temos o seguinte sistema de equações:

1ª equação $\rightarrow 100 = 0a + b$

2ª equação $\rightarrow 110 = 1.a + b$

PASSO 3: Resolvendo o sistema, temos:

$100 = 0.a + b$

então:

$100 = 0 + b$

$b = 100$

Importante

Com esse resultado, encontramos o valor do coeficiente linear da função (b). Esse coeficiente representa o valor numérico por onde a reta passa no eixo das ordenadas.

Substituindo o valor de b na 2ª equação:

$110 = 1.a + b$

$110 = 1.a + 100$

$110 = a + 100$

$110 - 100 = a$

$a = 10$

Descobrindo o valor do coeficiente a, encontramos,na verdade, a taxa de variação da função.

PASSO 4: Montar a função que representa a variação do valor empréstimo (f(t)) em relação ao tempo (t).

$f(t) = at + b$

Substituindo os valores de *a* e *b,* encontrados no passo 3, encontramos a função representada no gráfico da **Figura 9**.

$f(t) = 10t + 100$

Agora que conseguimos descrever a função que fundamenta o gráfico, podemos responder à pergunta feita inicialmente: "De quanto será a dívida, se você permanecer com o dinheiro durante 8 meses?"

PASSO 5: Para encontrar o valor que será cobrado pelo empréstimo, após 8 meses, basta substituirmos o valor da variável tempo na função $f(t) = 10t + 100$. Nesse caso, $t = 8$.

f(t) = 10t + 100

f(8) = 10.(8) + 100

f(8) = 80 + 100 = 180

Com auxílio desses passos, você pode concluir que no 8º mês a dívida será de 180 Reais.

Pesquise um gráfico de uma função afim em jornais, Internet, revista e descubra a função que o gráfico representa.

Atividade 7

Anote suas respostas em seu caderno

Como vimos, o gráfico é um recurso muito utilizado em jornais, revistas e Internet.

Agora, para terminarmos, algumas perguntinhas para você sobre a reportagem do início da unidade:

O gráfico do início da unidade representa uma função afim?

Conseguiu perceber que a população no Brasil estava com peso normal em 1980 e em 2008 a população estava acima do peso?

Resumo

- O gráfico que representa a função afim é uma reta.
- Na função f(x) = ax + b, o gráfico é crescente se a>0 e decrescente se a<0.
- Seguindo apenas cinco passos simples, podemos construir o gráfico de uma função afim. Veja a seguir.

  PASSO 1: Analisar a taxa de variação (valor do coeficiente a) e identificar se a função é crescente ou decrescente;

  PASSO 2: Encontrar dois pontos que pertençam à função;

  PASSO 3: Construímos os eixos das abscissas e das ordenadas;

  PASSO 4: Marcamos os pontos;

PASSO 5: Unimos os pontos marcados, construindo uma reta.

- Veja a seguir o passo a passo para determinar a lei que determina o gráfico de uma função afim.

  PASSO 1: Identificar dois pontos que pertençam ao gráfico e por consequência à função que o determina;

  PASSO 2: Montar um sistema de equações, substituindo os valores dos pontos;

  PASSO 3: Resolver o sistema;

  PASSO 4: Montar a função.

Veja ainda

Acessando o site http://math.exeter.edu/rparris/peanut/Explorando%20Winplot%20-%20Vol%201.pdf, você tem um passo a passo para a construção de gráficos, utilizando o software Winplot.

O winplot é uma ferramenta importante e pode ser útil quando você precisar construir gráficos e puder utilizar o computador.

Referências

Livros

ALMEIDA, Nilze de; DEGENSZAJN, David; DOLCE, Osvaldo; IEZZI, Gelson; PÉRIGO, Roberto. **Matemática Ciência e Aplicações 1**. Segunda Edição. São Paulo: Atual Editora, 2004.157p.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.

CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; LIMA, Elon Lages; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. **Temas e Problemas**. Terceira Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. 193 p

________**A Matemática do Ensino Médio Volume 1**. Sétima Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. 237 p.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática Contexo e Aplicações Volume 1**. Primeira Edição. São Paulo: Editora Ática, 2011. 240p.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Novo Aurélio Século XXI: o dicionário da língua portuguesa**. Quinta Edição. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 1999. 2128 p.

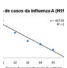
Imagens

- http://www.sxc.hu/photo/475767.

- http://www.sxc.hu/photo/1094969.

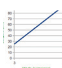
- http://www.sxc.hu/photo/737301.

- http://www.sxc.hu/photo/801548.

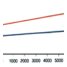


- http://h1n1bioestatufrj.blogspot.com.br/2010/12/h1n1-no-brasil.html

- http://www.sxc.hu/photo/958658.



- http://www.cultura.ufpa.br/dicas/open/calc-ret1.htm

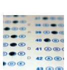


- http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0103-63512009000200004&script=sci_arttext

- http://www.sxc.hu/photo/13202

- http://www.sxc.hu/photo/937589

- http://www.sxc.hu/photo/59943



- http://www.sxc.hu/photo/517386

- http://www.sxc.hu/985516_96035528

Respostas das Atividades

Atividade 1

a. Falso. A largura é em centímetros, mas a idade em semanas e não em anos.

b. Verdadeiro

c. Verdadeiro

d. Falso. A largura é menor que 100 cm.

Atividade 2

a. Feminino

b. Os gráficos são representados por retas.

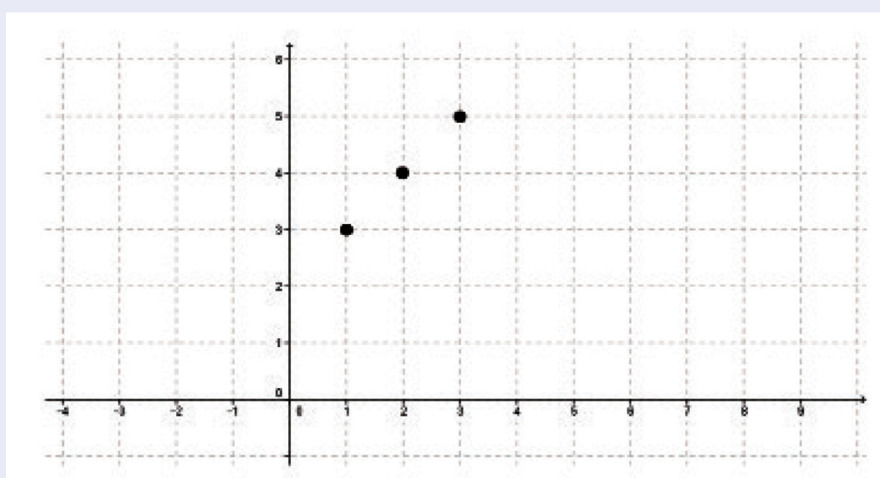
c. Homens 30% e mulheres 50% aproximadamente

Atividade 3

a.

Ponto	X	f(x)
A	1	3
B	2	4
C	3	5

b.



Respostas das Atividades

Atividade 4

a. crescente

b. decrescente

c. decrescente

d. crescente

e. crescente

f. decrescente

Atividade 5

a. $f(x) > 0 \rightarrow 2x - 4 > 0 \rightarrow x > 2$

$f(x) = 0 \rightarrow 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2$

$f(x) < 0 \rightarrow 2x - 4 < 0 \rightarrow x < 2$

b. $g(x) > 0 \rightarrow -5x - 12 > 0 \rightarrow x < -12/5$

$g(x) = 0 \rightarrow -5x - 12 = 0 \rightarrow x = -12/5$

$g(x) < 0 \rightarrow -5x - 12 < 0 \rightarrow x > -12/5$

Atividade 6

Construir o gráfico da função $S(c) = 1000 + 60c$

PASSO 1:

A função é $S(c) = 60c + 1000$

Taxa de variação: 60

Como $60>0$, ou seja, é positivo, podemos afirmar que a função é crescente.

Respostas das Atividades

PASSO 2:

Escolheremos os pontos onde c = 0 e c = 10

C	S(c)
0	60.0 + 1000 = 0 + 1000 = 1000
10	60.10 + 1000 = 600 + 1000 = 1600

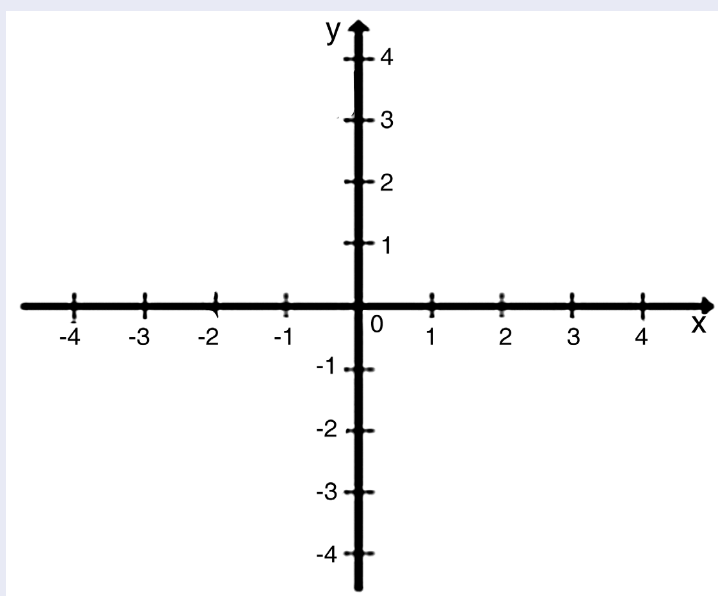
PASSO 3:

Dos passos anteriores, sabemos que:

A função é crescente

Os pontos c =0, y = 1000 e c = 10, y = 1600 pertencem à função e por consequência ao gráfico.

PASSO 4:

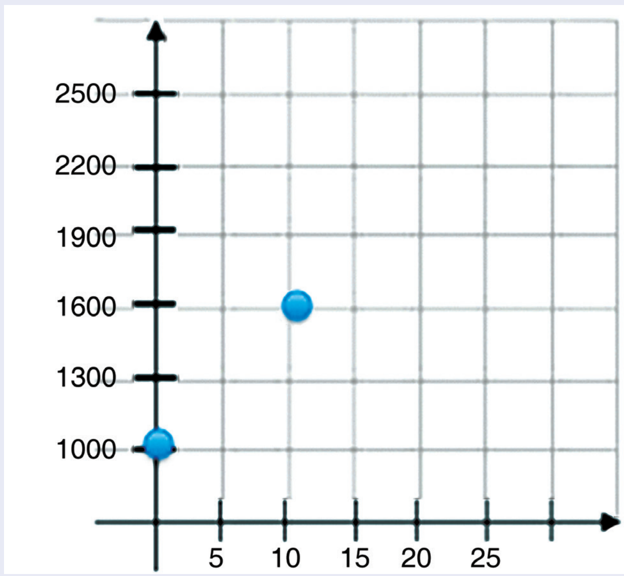


Respostas das Atividades

PASSO 5:

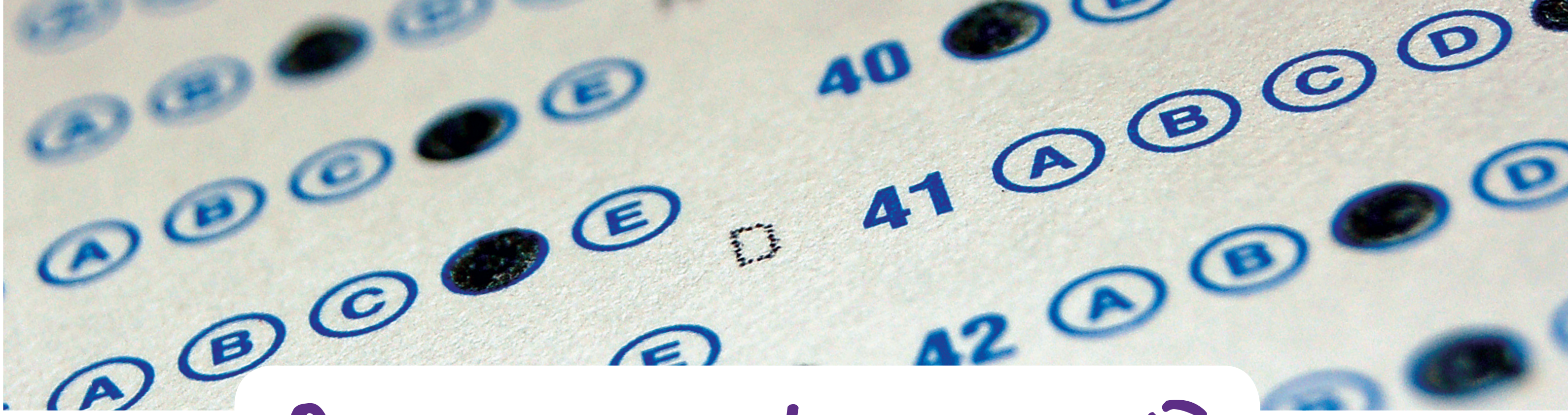
Marcamos os pontos

(0,1000) e (10,1600)



Atividade 7

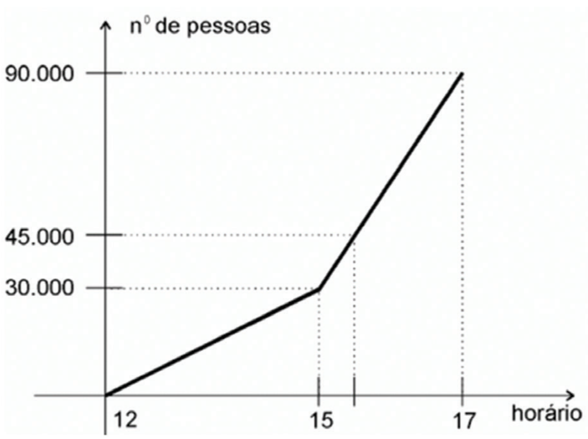
Resposta pessoal



O que perguntam por aí?

(UERJ)

Em uma partida, Vasco e Flamengo levaram ao Maracanã 90.000 torcedores. Três portões foram abertos às 12 horas e até às 15 horas entrou um número constante de pessoas por minuto. A partir desse horário, abriram-se mais 3 portões e o fluxo constante de pessoas aumentou. Os pontos que definem o número de pessoas dentro do estádio em função do horário de entrada estão contidos no gráfico abaixo:



Quando o número de torcedores atingiu 45.000, o relógio estava marcando 15 horas e:

(A) 20 min

(B) 30 min

(C) 40 min

(D) 50 min

Resposta: Letra B

Comentário: Até 15 horas e depois das 15 horas a entrada de torcedores é dada através de funções afim crescentes. Antes das 15h, a função cresce com menor rapidez e após as 15h com maior rapidez.

PASSO 1:

1º ponto: Tempo = 15, Torcedores = 30000

2º ponto: Tempo = 17, Valor = 90000

PASSO 2:

1ª equação →30000 = 15.a+ b

2ª equação →90000 = 17.a + b

PASSO 3:

90.000 = 17a+ b

-30.000 = 15a - b

então, utilizando o método da adição, temos:

60000 = 2a

a = 30000

substituindo o valor de a na segunda equação, temos:

30000 = 15.30000 + b

30000 = 450000 + b

b = 30000 – 450000

b = - 420000

PASSO 4:

f(x) = ax + b

f(x) = 30000x - 420000

PASSO 5:

Encontrar o valor quando y = 45000

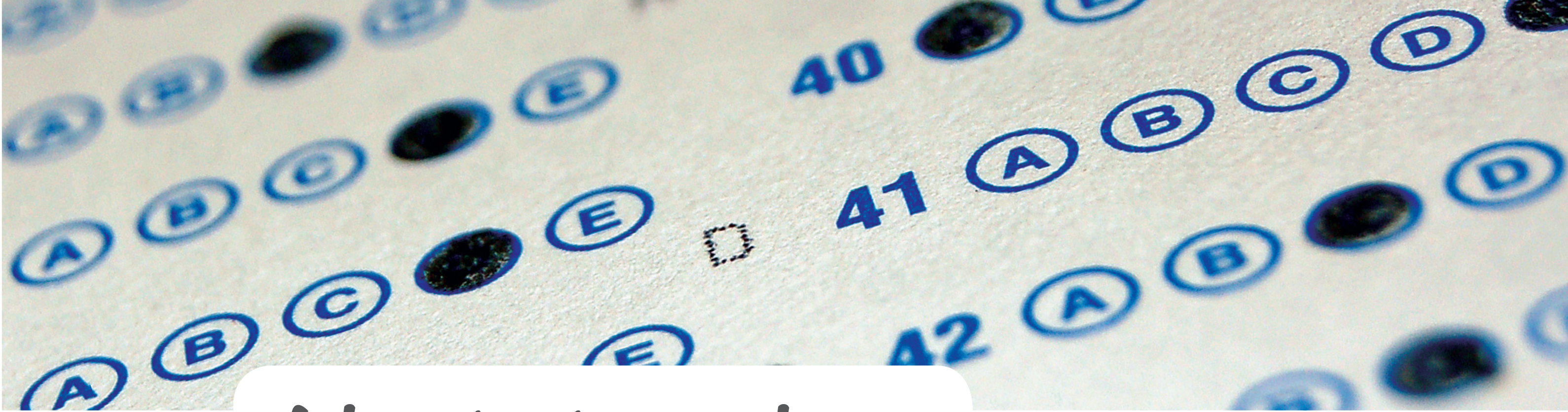
45000 = 30000x - 420000

45000 + 420000 = 30000x

465000 = 30000x

x = 15,5

O número de torcedores atingiu 45000, quando o relógio atingiu 15,5h (15h + 0,5h), ou seja, 15 e 30 minut0s.



Atividade extra

Exercício 1

O preço do litro da gasolina no Estado do Rio de Janeiro custa, em média R$ 2,90. Uma pessoa deseja abastecer seu carro, em um posto no Rio de Janeiro, com 40 reais.

Com quantos litros completos abastecerá o carro?

(a) 12 (b) 13 (c) 14 (d) 15

Exercício 2

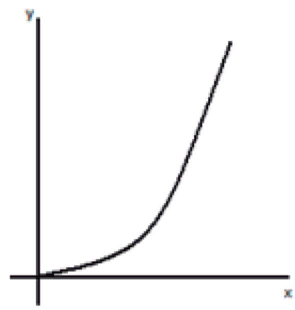
Em janeiro de 2013 João estava recebendo um salário de R$ 650,00. Pediu um aumento ao seu patrão e o mesmo disse que poderia aumentar, todo mês durante, dois anos, R$ 15,00 no salário de João.

No mês de julho de 2015 qual o valor do salário de João, em reais?

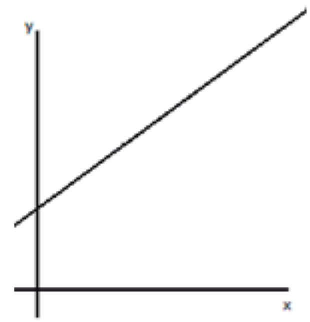
(a) 1010,00 (b) 740,00 (c) 675,00 (d) 920,00

Exercício 3

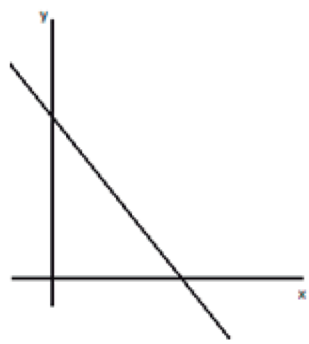
Em qual dos gráficos abaixo verificamos uma função afim crescente?



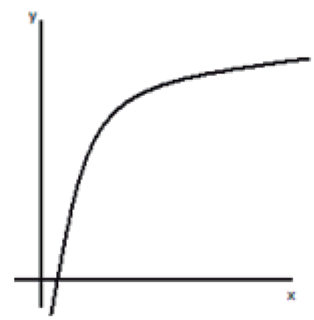
(a)



(c)



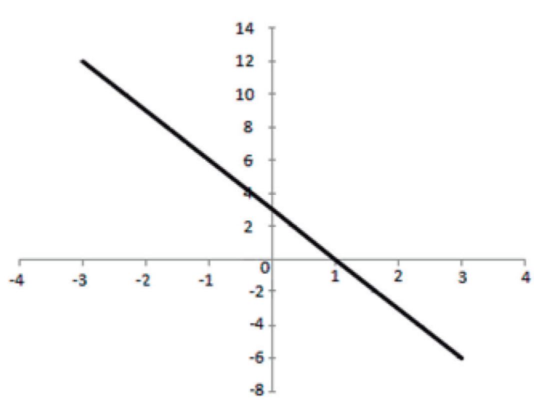
(b)



(d)

Exercício 4

A figura representa o gráfico de uma função afim.



A lei de formação de representa essa função é:

(a) $f(x) = 3x + 3$ (b) $f(x) = -x + 3$ (c) $f(x) = 3x + 1$ (d) $f(x) = -3x + 3$

Exercício 5

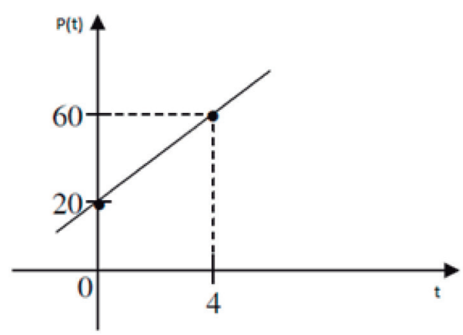
Dadas as funções $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, definidas pelas leis de formação $f(x) = -4x - 2$ e $g(x) = 2x + 4$.

Para qual valor de x a função f é estritamente maior que a função g?

(a) $(-\infty, -1]$ (b) $(-\infty, -1)$ (c) $[-1, \infty)$ (d) $(-1, \infty)$

Exercício 6

O gráfico a seguir representa a posição *p(t)* de um carro em movimento numa estrada, com velocidade constante, em função do tempo (*t*) em horas.



Determine a posição do carro quando $t = 8$h

(a) 90km (b) 100km (c) 110km (d) 120km

Exercício 7

Um estudo identificou que o consumo de energia elétrica de uma fábrica é dado pela equação $C(t) = 400t$, onde $C(t)$ é o consumo em KWh em função do tempo t, em dias.

Quantos dias são necessários para que o consumo atinja 6000 KWh?

a) 12 (b) 14 (c) 13 (d) 15

Exercício 8

Um comerciante teve uma despesa de R$ 460,00 na compra de 1000 unidades de uma certa mercadoria. Como vai vender cada unidade por R$ 10,00 o lucro final $L(x)$ será dado em função das x unidades vendidas, cuja equação é $L(x) = 10x - 460$.

Qual o número mínimo de unidades devem ser vendidas para que a função lucro seja maior do que zero?

(a) 46 (b) 47 (c) 460 (d) 1000

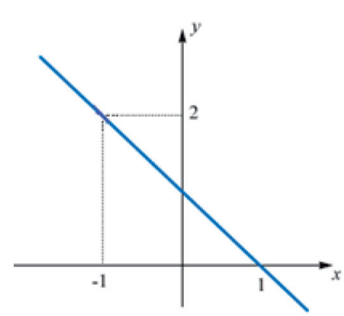
Exercício 9

O preço do pão francês em uma padaria custa R$ 0,50 a unidade. Relacionando o preço pago *(P)* por uma quantidade x de pães, obtemos a relação $P(x) = 0{,}50x$. Um cliente gastou R$ 7,00 na compra dos pães. Quantos pães ele comprou?

(a) 13 (b) 14 (c) 15 (d) 16

Exercício 10

O gráfico abaixo representa o conjunto de pontos de uma função afim.



A lei de formação dessa função afim é dada por:

(a) $f(x) = -x + 1$ (b) $f(x) = -x - 1$ (c) $f(x) = x + 1$ (d) $f(x) = x - 1$

Exercício 11

Dados os pontos (0, 3), (2, 5) e (9, 17).

Verifique se esses pontos pertencem à mesma função do primeiro grau. Justifique suas respostas.

Exercício 12

Dois carros partem de pontos diferentes de uma estrada e seguem no mesmo sentido. O carro *A* parte do Km 100 e segue com velocidade constante de 80 km/h. O carro *B* parte do km 50 estrada e segue com velocidade constante de 90 km/h. A posição de ambos os automóveis é dada por uma função linear, dependente do tempo.

Depois de quanto tempo o carro *B* alcançará o carro *A*?

Exercício 13

Considere a função $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\dfrac{-3x+2}{5}$.

Desenhe o gráfico dessa função.

Exercício 14

O valor de um carro popular decresce linearmente com o tempo, devido ao desgaste. Sabendo-se que o preço de fábrica é R$ 20.500,00 e que, depois de 6 anos de uso, é R$ 14.500,00.

Qual seu valor, em reais, desse carro popular após 4 anos de uso?

Exercício 15

Uma fábrica produz peças para automóveis para montadoras de motores automotivos. A empresa possui um custo fixo mensal de R$ 2950,00 que inclui conta de energia elétrica, de água, impostos, salários e etc. Existe também um custo variável que depende da quantidade de peças produzidas, sendo a unidade R$ 41,00. O valor de cada uma dessas peças no mercado é equivalente a R$ 120,00. A Função Custo total mensal da fábrica é dado pela lei de formação $C(x) = 2950 + 41x$. A Função Receita que determina o valor arrecadado pela fábrica com a venda das peças é dada pela lei de formação $R(x) = 120x$.

Para que valores de x a Função Receita é maior do que a Função Custo?

Gabarito

Exercício 1

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 2

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 3

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 4

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 5

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 6

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 7

A B C D

○ ○ ○ ●

Exercício 8

A B C D

○ ● ○ ○

Exercício 9

A B C D

○ ● ○ ○

Exercício 10

A B C D

● ○ ○ ○

Exercício 11

Primeiro calculemos a equação da reta que passa pelos pontos (0, 3) e (2, 5).

$$\begin{cases} 0a + b = 3 \\ 2a + b = 5 \end{cases}$$

Da primeira equação obtem-se $b = 3$. Substituindo esse valor na segunda, tem-se $2a + 3 = 5$, daí $2a = 2$, logo $a = 1$. Portanto, os pontos (0, 3) e (2, 5) pertencem a função cuja lei de formação é $f(x) = x + 3$. Vamos verificar se o ponto (9, 17) pertence a essa função.

$f(9) = 9 + 3 = 12 \Rightarrow f(9) = 12$.

Como $f(9) = 12 \neq 17$, os três pontos não pertencem a mesma função.

Exercício 12

Como o movimento é uma função linear do tempo então as funções que determinam a posição dos mesmos de acordo com o tempo é

$FA(t) = 100 + 80t$

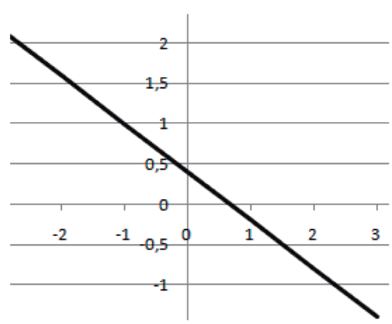
$FB(t) = 50 + 90t$

O carro *B* alcançará o carro *A* quando $FA = FB$. Assim, temos $100 + 80t = 50 + 90t \Rightarrow 50 = 10t$.

Portanto, $t = 5$, logo, depois de 5 horas o carro *B* alcançará o carro *A*.

Exercício 13

Basta escolher dois valores para x, calcular os correspondentes valores para y, marcar os pontos resultates no plano cartesiano e traçar uma reta por esses pontos. O resultado é o gráfico solicitado.



Exercício 14

Como a função tem decrescimento linear, basta achar a expressão da função linear que passa pelos pontos (0, 20.500) e (6; 14.500) e calcular *f* (4), esse valor é a resposta. Considerando a lei de formação de uma função linear $f(x) = ax + b$, logo $20500 = 0a + b$, $14500 = 6a + b$

Daí $b = 20500$. Subtraindo temos $14500 = 6a + 20500 \Rightarrow a = -1000$

Logo, $f(x) = -1000x + 20500$. Logo $f(4) = -4 \cdot 1000 + 20500$. Portanto o preço do carro após quatro anos de uso é de R$ 16500,00.

Exercício 15

Basta impor o que é pedido no enunciado. Assim temos

$120x > 2950 + 41x \Rightarrow$

$120x - 41x > 2950 \Rightarrow$

$79x > 2950 \Rightarrow$

$x > 2950/79$

Portanto, x maior ou igual a 38.

Função Polinomial do 2º grau – Parte 1

Fascículo 5

Unidade 16

Fundação CECIERJ

Função Polinomial do 2° grau – Parte 1

Para início de conversa...

A função é um grande instrumento de modelagem de fenômenos físicos e situações cotidianas como foi visto em unidades anteriores. Um tipo de função muito usada é a função polinomial do 2° grau com a qual trabalharemos nesta unidade.

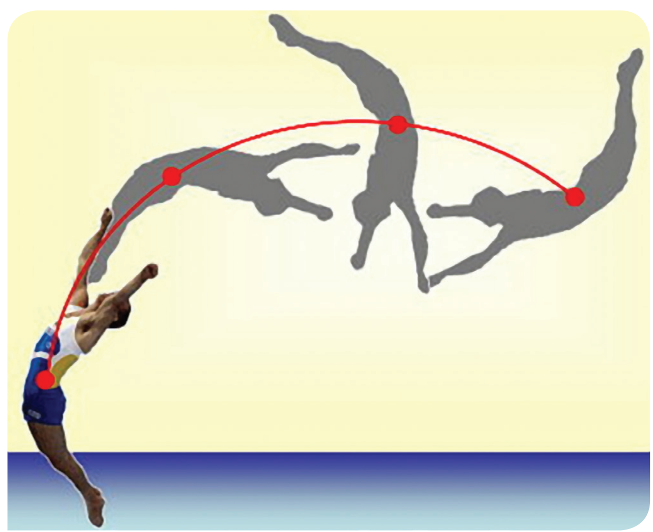


Figura 1: Em muitos movimentos da ginástica de solo, o atleta descreve uma trajetória parabólica.

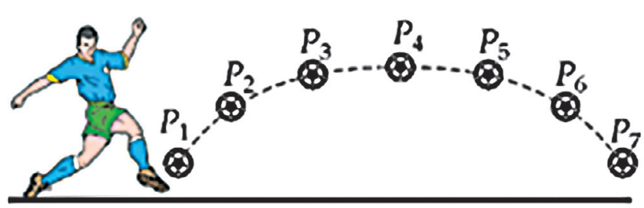


Figura 2: Em vários lances de uma partida de futebol, a trajetória do movimento da bola é uma parábola.

Figura 3: **A antena parabólica possui um formato de um paraboloide de revolução, este obtido pela rotação de uma** **parábola** **em torno de seu eixo.**

Objetivos de aprendizagem

- Consolidar conhecimentos obtidos no Ensino Fundamental II, como resolver equações do 2° grau.
- Conceituar função polinomial do 2° grau.
- Determinar a lei de formação de uma função polinomial do 2° grau.
- Determinar a imagem de elementos do domínio de uma função polinomial do 2° grau
- Utilizar a função polinomial do 2° grau para resolver problemas
- Avaliar proposta de intervenção na realidade, utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Seção 1
Modelando um problema

É importante para uma indústria, empresa, fábrica etc. saber modelar alguns problemas que lhes informem sobre custo mínimo, receita máxima, lucro máximo, formato de objetos que devem ser produzidos, dentre outras questões. Vejamos um exemplo de situação-problema que envolve cálculo de áreas.

Situação Problema

Marlise possui uma fábrica que produz molduras para várias lojas. Após uma análise, descobriu-se que para utilizar o máximo das ripas de madeira, sem ter cortes desnecessários, era melhor fazer quadros de formatos quadrados. Ela precisa dessas ripas para fazer molduras para quadros de medidas iguais a: 10x10 cm, 15x15 cm, 20x20 cm, 25x25 cm, 30x30 cm e 35x35 cm. Além disso, ela deseja que as molduras tenham 2 cm de largura, ou seja, quer que as ripas de madeira tenham 2 cm de largura. Quais devem ser os comprimentos destas ripas? Após alguns cálculos, Marlise chegou a seguinte conclusão: "As ripas de madeira devem ter os seguintes comprimentos: 50 cm, 70 cm, 90 cm, 110 cm, 130 cm e 150 cm, respectivamente".

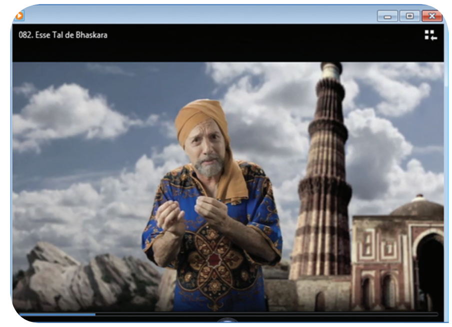
Mas como Marlise chegou a esta conclusão? Ficou curioso? Resolveremos este problema mais tarde. Antes precisamos trabalhar alguns conceitos importantes.

Seção 2
Revendo equações do 2° grau

É importante lembrarmos como se determinam as raízes de uma equação do 2° grau, ou seja, uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$.

Está confuso com tantas letras? Vamos dar um exemplo, para você entender.

Geralmente, usamos a fórmula de determinação das raízes de uma equação do 2° grau, conhecida pelo nome de Fórmula de Bhaskara: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, em que $\Delta = b^2 - 4ac$.



Exemplo 2.1: $x^2 - 8x + 15 = 0$

Como $a = 1$, $b = -8$ e $c = 15$, temos $\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 64 - 60 = 4$, substituindo estes valores na Fórmula de Bhaskara, temos:

$x = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 2}{2}$, ou seja, as raízes são $x_1 = 5$ e $x_2 = 3$.

Exemplo 2.2: $x^2 + 3x + 1 = 0$

Como $a = 1$, $b = 3$ e $c = 1$, temos $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 9 - 4 = 5$, substituindo estes valores na Fórmula de Bhaskara, temos:

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$, ou seja, as raízes são $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$ e $x_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$.

As equações anteriores, que apresentam os coeficientes b e c diferentes de zero são chamadas de equações do 2º grau completas.

No entanto, algumas equações do 2° grau são da forma incompleta, ou seja, apresentam o coeficiente $b = 0$ ou o coeficiente $c = 0$. Neste caso, podemos resolver estas equações sem utilizar a fórmula descrita anteriormente. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.3: $x^2 - 5x = 0$

Colocando x em evidência, temos:

$x(x - 5) = 0$

Repare que conseguimos reescrever o primeiro membro como produto de dois fatores (o fator x está multiplicando o fator $x-5$). Como este produto é igual a zero, isto significa que o 1° fator é zero ou o 2° fator é zero. Assim temos:

$x = 0$ ou $x - 5 = 0$

Logo, as raízes são $x_1=0$ ou $x_2=5$.

Observação: Devemos tomar muito cuidado ao resolver esta equação, pois não podemos proceder da seguinte forma:

$x^2=5x$ ("isolar o termo x^2");

$x=5$ ("dividir ambos os membros da equação por x").

Ao dividirmos os membros por x, estamos dividindo os membros dessa equação por zero (já que zero é uma das soluções), o que não é possível.

Exemplo 2.4: $x^2-4=0$

Notemos que neste caso o que queremos descobrir é um número x tal que seu quadrado menos quatro unidades é igual a zero. Primeiro, qual é o número x^2 que subtraído de quatro unidades é igual a zero? Este número é quatro, ou seja, $x^2=4$. Agora devemos encontrar o número x que elevado ao quadrado é igual a quatro. Temos duas possibilidades para x, são elas: $x_1=2$ ou $x_2=-2$.

Poderíamos resolver de outra forma. A equação $x^2-4=0$ poderia ser escrita da forma $(x-2)(x+2)=0$ (fatoramos o polinômio do 1º membro). Dessa forma, repetindo o raciocínio do exemplo 2.3, chegamos às mesmas raízes $x_1=2$ ou $x_2=-2$.

Vejamos mais alguns exemplos de equações em que não precisamos usar a Fórmula de Bhaskara:

Exemplo 2.5: $(x-5)^2=(2x-3)^2$

Uma pessoa que olhasse apressadamente para esta equação, desenvolveria a diferença de dois quadrados nos dois lados da equação e obteria a equação

$x^2-10x+25=4x^2-12x+9$,

que pode ser reduzida à forma

$3x^2-2x-16=0$.

Dessa forma, poderíamos resolvê-la usando a Fórmula de Bhaskara.

Como $a=3$, $b=-2$ e $c=-16$, temos que $\Delta=4-4\cdot3\cdot(-16)=196$. Assim,

$x=\dfrac{2\pm\sqrt{196}}{2\cdot3}=\dfrac{2\pm14}{6}$, isto é, as raízes são $x_1=\dfrac{8}{3}$ e $x_2=-2$.

Essa resolução está correta. No entanto, não precisamos de fórmula para resolver esta equação. De maneira geral, os quadrados de dois números são iguais, quando estes dois números são iguais ou quando estes números são simétricos. Veja um exemplo: $(2)^2=(-2)^2$, pois tanto o quadrado de 2 quanto o quadrado de -2 são iguais a 4. Além disso, é evidente que $(2)^2=(2)^2$.

Assim, para resolver a equação $(x-5)^2=(2x-3)^2$, temos que considerar duas possibilidades:

1ª possibilidade: as expressões que estão elevadas ao quadrado representam números que são iguais. Logo:

$x-5=2x-3$

Resolvendo, temos $x=-2$

2ª possibilidade: as expressões que estão elevadas ao quadrado representam números que são simétricos. Assim, escrevemos:

$$x-5=-(2x-3)\Rightarrow x-5=-2x+3\Rightarrow x+2x=3+5\Rightarrow 3x=8\Rightarrow x=\frac{8}{3}.$$

Concluímos que as raízes desta equação são $x_1=\frac{8}{3}$ e $x_1=-2$.

Observação: Alguém poderia tentar extrair a raiz quadrada dos dois lados da equação, mas $\sqrt{x^2}=x$ só é verdadeira para $x\geq 0$. Fazendo desta forma (errada) encontraríamos $x-5=2x-3$, o que resulta em $x=-2$. Ou seja, encontraríamos apenas uma das raízes.

Exemplo 2.6: $(x-3)^2(x-5)=0$

Repare que se desenvolvermos o quadrado da diferença de dois termos e depois aplicarmos a propriedade distributiva, isto resultaria em uma equação de 3° grau. Poderíamos usar o mesmo raciocínio empregado no Exemplo 2.3, isto é, o produto de dois números é zero, quando pelo menos um dos fatores é igual a zero. Assim, temos duas possibilidades:

1ª possibilidade

$(x-3)^2=0$

O único número cujo quadrado é zero é o próprio zero, ou seja

$x-3=0.$

Assim, uma das raízes é $x=3$.

2ª possibilidade:

$x-5=0$

A outra raiz é $x=5$.

Exemplo 2.7: $(3x-5)^2=36$

Neste caso, não precisamos desenvolver o produto notável. Existem dois números cujo quadrado é 36: 6 e -6. Assim, temos que

$$3x-5=6 \quad \text{ou} \quad 3x-5=-6$$
$$x=\frac{11}{3} \qquad\qquad x=-\frac{1}{3}$$

Logo, as raízes são: $x=\frac{11}{3}$ e $x=-\frac{1}{3}$.

Agora é sua vez! Tente resolver os exercícios a seguir.

Atividade 1

Resolva as equações:

a. $(2x-4)^2=(7x+17)^2$

b. $2x^2-3x=0$

c. $(x-7)(3x+6)^2=0$

d. $x^2+4x+1=0$

e. $(7-2x)^2=25$

f. $x^2-6x+10=0$

g. $4x^2-25=0$

h. $(5x+2)^2=9$

i. $x^2+6x+9=0$

j. $x(x+3)(2x-3)^2=0$

k. $3x^2+12=0$

l. $(x+5)^2(3x-4)^2=0$

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 3
Fórmulas de função do 2° grau no cotidiano

Num campeonato de futebol, 20 clubes enfrentam-se em turno e returno, ou seja, todos jogam contra todos em dois turnos. Você sabe quantos jogos são realizados neste campeonato? Para respondermos a esta pergunta, podemos pensar da seguinte maneira: sejam C1, C2, ..., C19 e C20 os clubes participantes, para cada par de letras temos 1 jogo. Por exemplo, C1C2 representa o jogo entre estes dois clubes em que o C1 está jogando em casa e C2 é o desafiante. Já C2C1 significa que neste jogo C1 é o visitante e C2 é o clube da casa. Assim, para determinar o número de jogos, temos de decidir quem será o time da casa e quem será o time desafiante. Para o time da casa, temos 20 escolhas possíveis, escolhido o time da casa agora temos de escolher o time visitante, o que podemos fazer de 19 maneiras. Logo, o total de jogos é igual a 20 x 19 = 380.

E se quisermos calcular o número de jogos y de um campeonato com x clubes em que todos se enfrentam em dois turnos, de que forma podemos fazer isto? Usaremos o mesmo raciocínio utilizado no exemplo anterior. Para determinar o número de jogos, temos de decidir quem será o time da casa e quem será o time desafiante. Para o time da casa, temos x escolhas possíveis. Escolhido o time da casa, agora temos de escolher o time visitante, o que podemos fazer de $(x - 1)$ maneiras. Logo, o total de jogos é $y = x(x - 1)$. Ou seja, o número de jogos é obtido a partir da lei da função do 2° grau $y = x^2 - x$.

De maneira geral, uma função polinomial do 2° grau é toda função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

Atividade 2

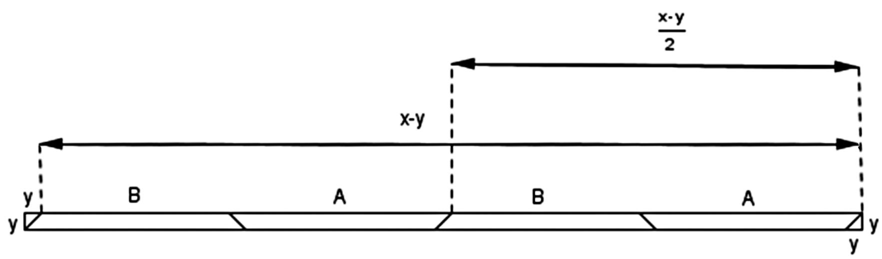
1. Suponha que um campeonato siga as regras dadas no exemplo anterior.
   a. Determine o número de jogos, se o campeonato for disputado por 12 times.
   b. Determine quantos times estão disputando um determinado campeonato (diferente do item a), sabendo que 90 jogos foram realizados.
2. Com uma corda de 100 metros, deseja-se demarcar no chão uma região retangular.
   a. Se uma das dimensões desse retângulo é de 20 metros, qual é a outra?
   b. Quais são as dimensões do retângulo que tem área 600 metros quadrados?
   c. Expresse a área y do retângulo em função do seu comprimento x.

Anote suas respostas em seu caderno

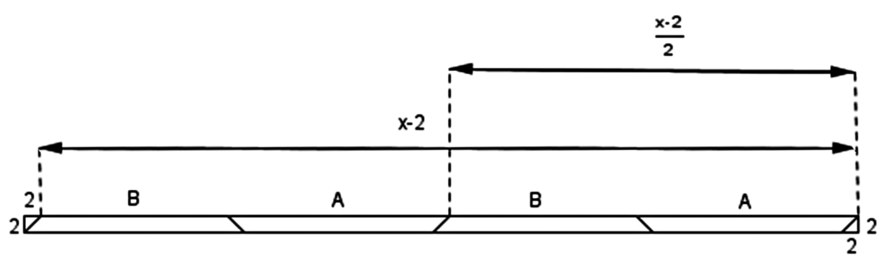
Voltando ao problema da seção 1:

Na seção 1, tínhamos a seguinte situação problema: "Marlise precisa de ripas para fazer molduras para quadros de medidas iguais a: 10x10 cm, 15x15 cm, 20x20 cm, 25x25 cm, 30x30 cm e 35x35 cm. Além disso, ela deseja que as molduras tenham 2 cm de largura, ou seja, quer que as ripas de madeira tenham 2 cm de largura. Quais devem ser os comprimentos das ripas para cada tipo de moldura?

Para resolvermos este problema, primeiro devemos notar que as ripas devem ser cortadas em formas de trapézio (de base maior A e base menor B), e, para que aproveitemos o máximo da madeira, devemos fazer cortes de 45° como mostrado na figura abaixo, onde x é a medida do comprimento de cada ripa e y a medida da largura (2 cm no caso).



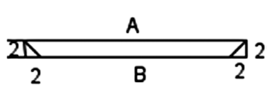
No nosso exemplo, as ripas têm 2 cm de largura, assim temos a seguinte figura:



Desta figura, temos:

$$A + B = \frac{x-2}{2} (*)$$

Destacando um dos trapézios, temos:

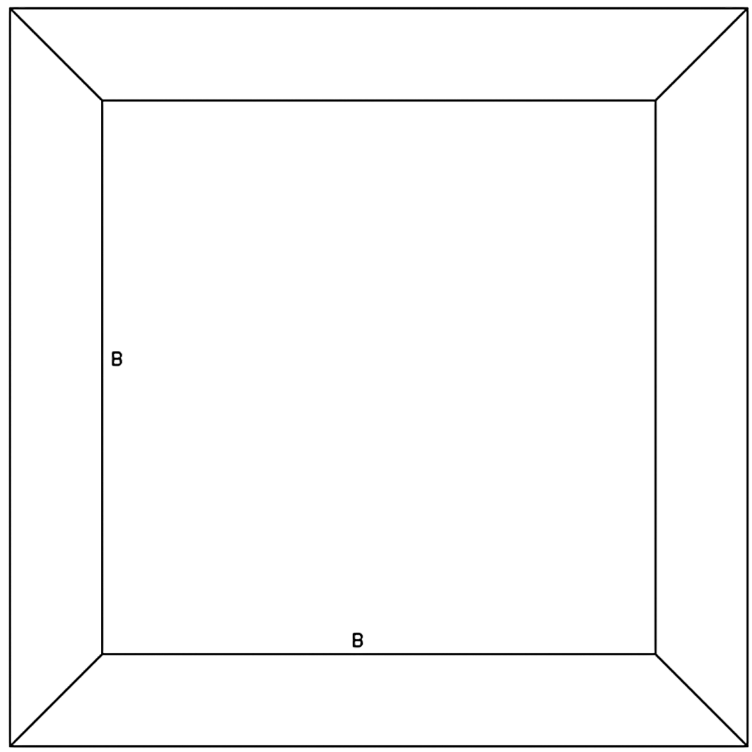


$A - B = 4$ (**)

Resolvendo o sistema formado pelas equações (*) e (**), chegamos aos seguintes resultados:

$$A = \frac{x+6}{4} \text{ e } B = \frac{x-10}{4}$$

A moldura ficará com formato como mostrado na figura a seguir:



Assim, o quadro de formato quadrado construído com uma ripa de comprimento x possui área igual a:

$$S = \left(\frac{x-10}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{25}{4} \quad \text{(função do 2º grau)}$$

Dessa forma, se for pedido à Marlise uma moldura para um quadro 10 cm x 10 cm, ela terá de substituir *S* por 100 na função acima, pois é a área de um quadrado de lado 10. Substituindo, temos:

$$\left(\frac{x-10}{4}\right)^2 = 100$$

Lembra como resolvemos este tipo de equação? Queremos calcular um "número" que elevado ao quadrado dê 100. Que número é este? Os possíveis números são 10 e –10. Assim, temos:

$$\frac{x-10}{4} = 10 \qquad \text{ou} \qquad \frac{x-10}{4} = -10$$

$$x = 50 \qquad\qquad x = -30 \ \text{(não serve)}$$

Logo, a ripa deve ter 50 cm de comprimento. E aí, o que achou? Tente fazer o mesmo para quadros de tamanhos 15x15 cm, 20x20 cm, 25x25 cm, 30x30 cm e 35x35 cm.

Saiba Mais

Você sabia que os Antigos Babilônios já sabiam resolver equações do 2° grau há mais de 4 mil anos? É verdade! Eles usavam um sistema sexagesimal e não o nosso sistema atual que é decimal. Eis um exemplo (no nosso sistema decimal) que data de 1800 a.C., aproximadamente, encontrado numa tábula de Strasburgo: "Uma área A, que consiste na soma de dois quadrados, é 1000. O lado de um dos quadrados é 10 a menos que 2/3 do lado do outro quadrado. Quais os lados dos quadrados?" Fica este exercício como desafio para você resolver.

Fonte: EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Ed Unicamp.

Atividade 3

Um grupo deseja fretar um ônibus para fazer uma excursão. O ônibus possui 40 assentos e o preço da passagem para cada pessoa do grupo é de 50 reais acrescidos de 2 reais por assento vazio.

a. Se o grupo possui 30 pessoas, qual o preço da passagem para essa excursão?

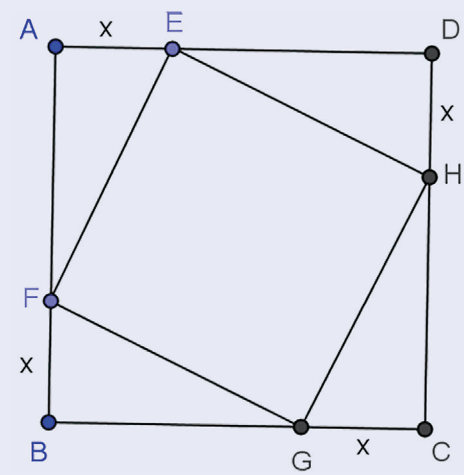
b. Expresse o valor V total pago pelo grupo em função da quantidade x de assentos vazios nesse ônibus.

c. Um grupo que pagou 2100 reais pelo passeio deixou quantos lugares vazios no ônibus.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 4

Em um quadrado ABCD de lado 10 cm, inscreve-se outro quadrado EFGH como mostra a figura abaixo. Note que os segmentos AE, BF, CG e DH têm comprimento x.



a. Subtraindo-se da área do quadrado ABCD, as áreas dos 4 triângulos retângulos da figura, pode-se determinar a área S do quadrado EFGH. Determine S quando x = 2 cm. (Dica: a área de um triângulo é determinada pela metade do produto entre a medida da base pela medida da altura desse triângulo)

b. Expresse, em função de x, a área y de um dos triângulos da figura e a área Y do quadrado EFGH.

c. Determine o valor de x para que o quadrado EFGH tenha área 50 metros quadrados.

Anote suas respostas em seu caderno

Resumo

- Função polinomial do 2° grau é toda função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que $a \neq 0$.
- A forma tradicional de resolver uma equação do segundo grau é usando a Fórmula de Bhaskara:

  $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Muitas equações do segundo grau podem ser resolvidas sem recorrer a esta fórmula. Como, por exemplo, as equações do segundo grau que têm c=0 ou b = 0.

Veja ainda

Para saciar sua curiosidade, indicamos os seguintes sites:

- http://www.somatematica.com.br
- http://www.passeiospelamatematica.net/dia-a-dia/matdi.htm

Referências

Livros

- Lima, E.L., Carvalho, P.C.P., Wagner, E., Morgado, A.C. **A matemática do Ensino médio**, vol.1, SBM.
- Iezzi, G., Dolce, O., Degenszajn, D., Périgo, R., de Almeida, N. **Matemática ciência e aplicações**, vol.1, Ed Saraiva.
- Lozada, Cláudia de Oliveira; Araújo, Mauro Sérgio Teixeira de; Morrone Wagner; Amaral, Luiz Henrique, Universidade Cruzeiro do Sul (UNICSUL), SP. **A modelagem matemática aplicada ao ensino de Física no Ensino Médio**, Revista Logos, n° 14, 2006.

Imagens

 • http://www.sxc.hu/photo/475767.

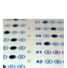
 • http://fisicamoderna.blog.uol.com.br/images/diego_hyp_corpo.jpg.

 • http://www.vestibulandoweb.com.br/fisica/teoria/fundamentos-cinematica-8.gif.

 • http://www.electrospace.com.br/vitrine/Antenas/slides/Antenas%20Parabolicas%2001.jpg.

 • http://www.viladoartesao.com.br/blog/wp-content/uploads/2011/02/corte_ripas.jpg.

 • http://www.sxc.hu/photo/1295183.

 • http://www.sxc.hu/photo/517386

 • http://www.sxc.hu/985516_96035528

 • http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1024076

Respostas das Atividades

Atividade 1

a. $x = -\frac{21}{5}$ e $x = -\frac{13}{9}$

b. $x = 0$ e $x = \frac{3}{2}$

c. $x = 7$ e $x = -2$

d. $x = -2 + \sqrt{3}$ e $x = -2 - \sqrt{3}$

e. $x = 1$ e $x = 6$

f. Não existe raiz real

g. $x = -\frac{5}{2}$ e $x = -\frac{5}{2}$

h. $x = \frac{1}{2}$ e $x = -1$

i. $x = 3$ (raiz dupla)

j. $x = 0$, $x = \frac{3}{2}$ e $x = -3$

k. Não existe raiz real

l. $x = -5$ e $x = \frac{4}{3}$

Atividade 2

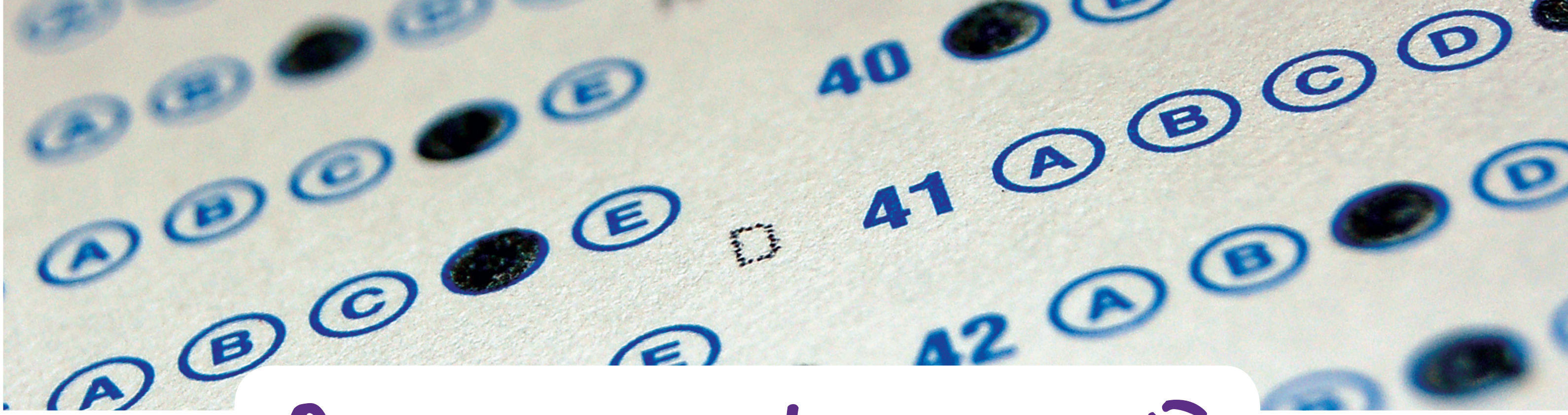
1. a. 132 jogos b. 10 times
2. a. 30 b. 20mx30m c. y=20 . x

Atividade 3

a. 70 reais.

b $V = -2x^2 + 30x + 2000$

c. 5 ou 10.



O que perguntam por aí?

(ENEM – 2009)

Um posto de combustível vende 10.000 litros de álcool por dia a R$ 1,50 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do álcool foi R$ 1,48, foram vendidos 10.200 litros. Considerando x o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro, e V o valor, em R$, arrecadado por dia com a venda do álcool, então a expressão que relaciona V e x é:

a. $V = 10.000 + 50x - x^2$

b. $V = 10.000 + 50x + x^2$

c. $V = 15.000 - 50x - x^2$

d. $V = 15.000 + 50x - x^2$

e. $V = 15.000 - 50x + x^2$

Solução:

Primeiro notemos a tabela a seguir:

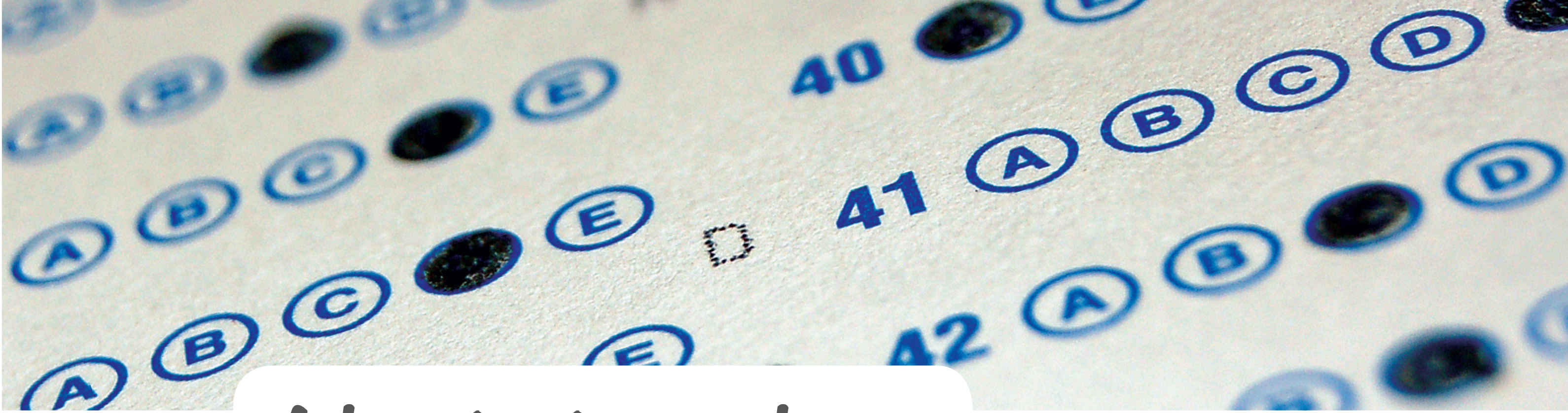
Quantidade de álcool (em litros)	10.000	10.000 + $1 \cdot 100$	10.000 + $2 \cdot 100$	......	10.000 + $x \cdot 100$
Preço por litro (em reais)	1,50	1,50 – $1 \cdot 0{,}01$	1,50 – $2 \cdot 0{,}01$	......	1,50 – $x \cdot 0{,}01$

Assim, temos:

Valor arrecadado/dia = (quantidade de álcool/dia)·(preço do litro de álcool)

$V = (10000 + 100x) \cdot (1{,}5 - 0{,}01x)$

Logo, a resposta é $V = 15.000 + 50x - x^2$, ou seja, a alternativa D.



Atividade extra

Exercício 1 (FAAP-SP)

Uma indústria produz, por dia, x unidades de determinado produto, e pode vender sua produção a um preço de R$100,00 a unidade. O custo total, em reais, da produção diária é igual a $x^2 + 20x + 700$.

Qual deve ser o número de unidades produzidas e vendidas por dia para que a indústria tenha lucro diário de R$ 900,00?

(a) 30 (b) 35 (c) 40 (d) 45

Exercício 2 (PUC-SP)

Uma bola é largada do alto de um edifício e cai em direção ao solo. Sua altura *h* em relação ao solo, *t* segundos após o lançamento, é dada pela expressão $h = -25t^2 + 625$.

Quantos segundos após o lançamento a bola atingirá o solo?

(a) 2s (b) 3s (c) 4s (d) 5s

Exercício 3

Um fabricante vende mensalmente *c* unidades de um determinado artigo por $V(x) = x^2 - x$, sendo o custo da produção dado por $C(x) = 2x^2 - 7x + 8$.

Quantas unidades devem ser vendidas mensalmente, de modo que se obtenha o lucro máximo?

(a) 2 (b) 3 (c) 5 (d) 6

Exercício 4 (PUC-SP)

A trajetória de um projétil foi representada no plano cartesiano por $y = -\frac{x^2}{64} + \frac{x}{16}$, com uma unidade representando um quilômetro.

Qual a altura máxima que o projétil atingiu?

(a) 62,5m (b) 65,2m (c) 64,5m (d) 66,2m

Exercício 5 (ENEM – 2009 – Adaptado)

Um posto de combustível vende 10.000 litros de álcool por dia a R$ 1,50 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do álcool foi R$ 1,48, foram vendidos 10.200 litros.

Qual a expressão que representa as vendas V em função do valor x, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro?

(a) $V = 15000 + 50x - x^2$

(b) $V = 15000 - 50 - x^2$

(c) $V = 15000 + 50 + x^2$

(d) $V = 15000 - 50 + x^2$

Exercício 6

Uma loja de departamentos compra cartuchos para uma determinada impressora jato de tinta a R$ 28,00 a unidade e prevê que, se cada cartucho for vendido a x reais, serão vendidos $200 - 2x$ cartuchos por mês.

Qual deve ser o preço de venda x de cada cartucho para que o lucro seja máximo?

(a) R$ 64 (b) R$ 60 (c) R$ 56 (d) R$ 52

Exercício 7

Um vidraceiro tem um pedaço de espelho, na forma de um triângulo retângulo cujos lados medem 60cm, 80cm e 1m e quer cortar um espelho retangular cujo tamanho seja o maior possível. Para ganhar tempo, ele quer que os dois lados do retângulo estejam sobre os lados do triângulo.

Quais as medidas desses dois lados do retângulo que o vidraceiro deverá cortar?

(a) 20cm e 40cm (b) 30cm e 40cm (c) 20 cm e 30 cm (d) 30 cm e 30 cm

Exercício 8

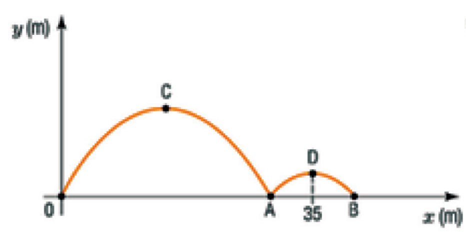
Uma bola é lançada verticalmente para cima com uma velocidade inicial de 35m/s, a partir do solo. Sendo a aceleração da gravidade $-10 m/s^2$.

Em quanto tempo, em segundos, a bola atinge a altura maxima?

(a) 3,1 (b) 3,3 (c) 3,5 d) 3, 7

Exercício 9

Uma bola de futebol é lançada de um ponto 0 e, em seguida, toca o solo nos pontos *A* e *B*, conforme representado no sistema de eixos ortogonais:



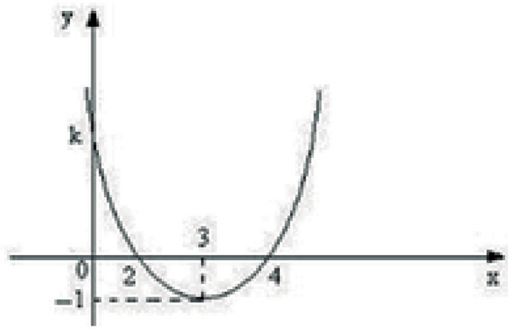
Durante sua trajetória, a bola descreve duas parábolas com vértices *C* e *D*. A equação de uma dessas parábolas é $y(x) = -\frac{x^2}{75} + \frac{2x}{5}$

Qual a distância do ponto 0 ao ponto B, em metros?

(a) 38 (b) 40 (c) 45 (d) 50

Exercício 10

Considere a parábola no gráfico mostrado na imagem



Qual é o valor de *k*.

(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 9

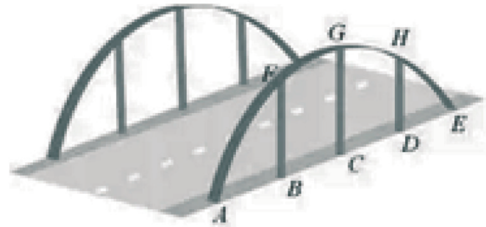
Exercício 11

Uma projétil é lançada ao ar. Sua altura *h*, em metros, *t* segundos após o lançamento é h $=-t^2 + 4t + 5$.

Quantos segundos depois do lançamento o projétil toca o solo?

Exercício 12

A figura ilustra uma ponte suspensa por estruturas metálicas em forma de arco de parábola.



Os pontos *A*, *B*, *C*, *D* e *E* estão nomesmonível da estrada e a distância entre quaisquer dois consecutivos é 25m. Os elementos de sustentação são todos perpendiculares ao plano da estrada e a altura do elemento central *CG* é 20m.

Qual o valor da altura de *DH* em metros?

Exercício 13

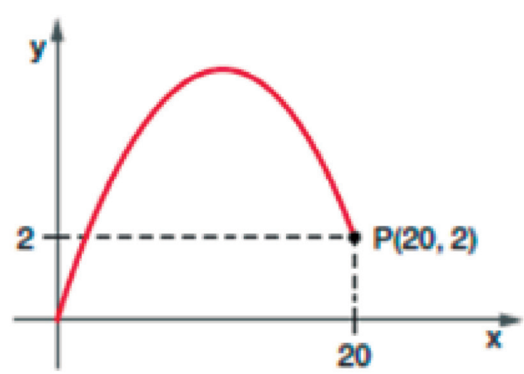
Um pequeno pomar com 40 árvores plantadas produz 25 cestas de frutas por árvores. Devido à disputa de nutrientes no solo, a cada árvore que é plantada a mais, cada uma das árvores produz 1/4 de cestas a menos.

Qual o número de árvores que devem estar no pomar para que a produção seja máxima?

Exercício 14

Um jogador de futebol se encontra a uma distância de 20m da trave do gol adversário, quando chuta uma bola que vai bater exatamente sobre essa trave, de altura 2 m. A equação da trajetória da bola em relação ao sistema de coordenadas indicado na figura é:

$$y = ax^2 + (1 - 2a)x$$



Qual a altura máxima atingida pela bola?

Exercício 15

Uma indústria de refrigerantes tem sua produção diária *P*, em garrafas, variando com o número de operadores em serviço *n*, de acordo com a função $P(n) = n^2 + 50n + 20000$. Qual o número de operadores necessários para produzir 21400 garrafas de refrigerantes em um dia?

Gabarito

Exercício 1

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 2

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 3

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 4

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 5

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 6

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 7

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 8

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 9

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 10

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 11

5 segundos.

Exercício 12

15 m.

Exercício 13

70 arvores.

Exercício 14

6,05 m.

Exercício 15

70 operadores.

Função Polinomial do 2º grau – Parte 2

Fascículo 5

Unidade 17

Fundação CECIERJ

Função Polinomial do 2º grau – Parte 2

Para início de conversa...

Imagine você sentado em um ônibus, indo para a escola, jogando uma caneta para cima e pegando de volta na mão.

Embora para você a caneta só vá para cima e para baixo, quem está de fora do ônibus consegue ver a caneta fazer um movimento de parábola, com concavidade para baixo. Nessa situação, temos dois movimentos distintos, pois, além de a caneta ir para cima, o ônibus movimenta-se para frente. Esse exemplo simples mostra como as funções do 2º grau fazem parte do nosso cotidiano e muitas vezes nem percebemos.

Elas possuem várias aplicações no dia a dia, principalmente em situações relacionadas à Física, envolvendo lançamento oblíquo, movimento uniformemente variado etc.; na Biologia, estudando o processo de fotossíntese das plantas, entre outros.

Nessa unidade continuaremos estudando as funções polinomiais do 2° grau (estudo iniciado na unidade anterior a esta), mas agora trabalharemos com os conceitos de zeros ou raízes, máximo e mínimo de uma função do 2° grau, construiremos seus gráficos e analisaremos suas aplicações.

Objetivos de aprendizagem

- Consolidar conhecimentos obtidos na resolução de equações do 2° grau;
- Conceituar função polinomial do 2° grau;
- Determinar a lei de formação de uma função polinomial do 2° grau;
- Determinar a imagem de elementos do domínio de uma função polinomial do 2° grau;
- Construir, ler e analisar os gráficos de funções polinomiais do 2° grau;
- Identificar a concavidade e outros elementos da parábola;
- Identificar o crescimento e decrescimento de uma função polinomial do 2° grau;
- Resolver problemas de máximos e mínimos associados a função polinomial do 2° grau;
- Compreender os significados dos coeficientes da função do 2° grau;
- Utilizar a função polinomial do 2° grau para resolver problemas.

Seção 1
Entendendo as parábolas

A parábola é o gráfico da função polinomial do 2° grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que $a \neq 0$. Isso significa que a união de todos os pontos $(x\ ,\ f(x))$ formam uma figura chamada de parábola, o que vale para toda função do 2° grau. Os elementos principais de uma parábola são a concavidade, os pontos onde cortam os eixos coordenados e o vértice. Convidamos você a identificar esses elementos em uma representação gráfica.

Veja a figura a seguir:

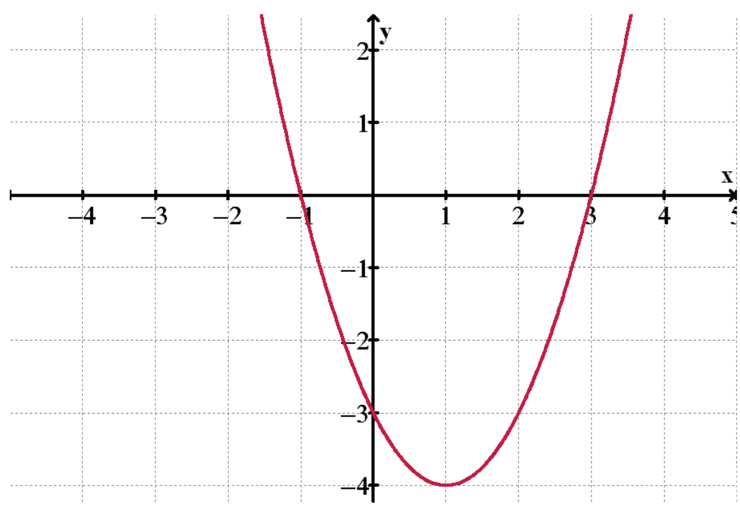


Figura 1: Gráfico de uma função do 2° grau: Parábola.

Os pontos $(-1, 0)$ e $(3,0)$ são os pontos de interseção com o eixo x. O ponto $(0, -3)$ é o ponto de interseção com o eixo y. E o ponto $(1, -4)$ é chamado vértice da parábola. O vértice é o ponto em que a parábola começa a mudar sua direção. Note que até $x = 1$ a função é decrescente e após $x = 1$ esta passa a ser crescente. A concavidade desta parábola está voltada para cima. Neste caso, dizemos que a parábola tem um ponto de mínimo (vértice), pois nenhum outro ponto da parábola possui um valor para a ordenada (coordenada y do ponto) menor que -4.

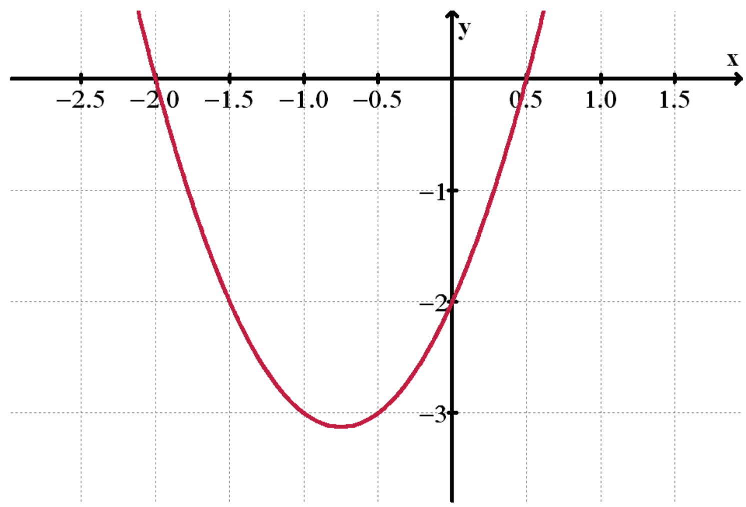
Como você pode ver, podemos retirar muitas informações de um gráfico que representa uma função quadrática (ou função do 2º grau), não é verdade?

Vamos começar falando a respeito da concavidade. Ela ora está voltada para cima, ora está voltada para baixo. Mas o que determina a orientação dessa concavidade?

A concavidade da parábola

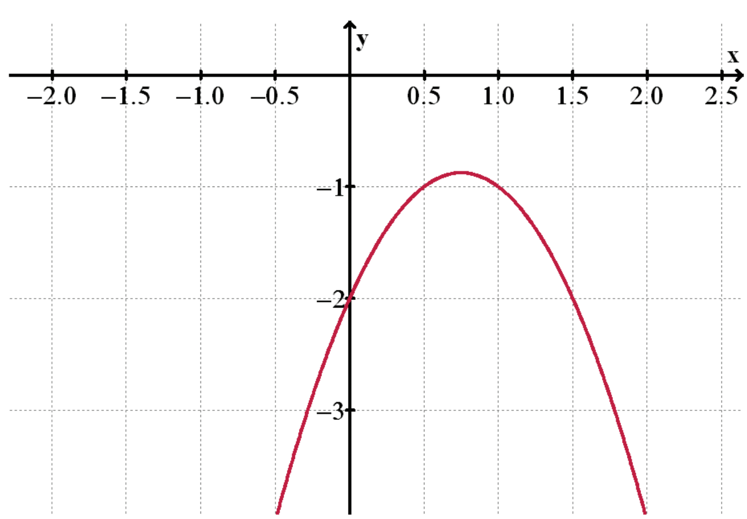
A concavidade da parábola será voltada para cima, se o valor do coeficiente *a* for positivo e será voltada para baixo, se o valor de *a* for negativo.

Exemplo 1: $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$

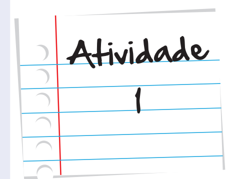


Como o valor do coeficiente *a* é positivo ($a = 2$), a concavidade da parábola está voltada para cima. Podemos concluir também que a parábola possui um valor mínimo, sem precisarmos olhar o gráfico, já que a concavidade da parábola está voltada para cima ($a>0$).

Exemplo 2: $g(x) = -2x^2 + 3x - 2$



Como o valor do coeficiente *a* é negativo (*a* = –2), a concavidade da parábola está voltada para baixo. Podemos concluir também que a parábola possui um valor máximo, sem precisarmos olhar o gráfico, já que a concavidade da parábola está voltada para baixo ($a < 0$).



Determine se as funções a seguir possuem gráficos cujas concavidades estão voltadas para baixo ou para cima e determine se possui um valor máximo ou mínimo.

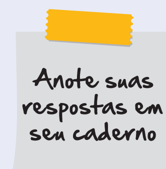
a. $f(x) = x^2 + 3x + 6$

b. $g(x) = -x^2 + 5x$

c. $h(x) = 1{,}3x - 2x^2$

d. $m(x) = -5 + 0{,}2x^2$

e. $n(x) = 2 + x^2 - 3x$



Pontos onde o gráfico intersecta os eixos coordenados

Podemos destacar, em uma parábola, pontos notáveis, com os quais poderemos construir com mais facilidade o gráfico de uma função quadrática. Eles se dividem em:

a. Ponto(s) de interseção da parábola com o eixo das abscissas;

b. Ponto de interseção da parábola com o eixo das ordenadas;

c. Vértice da parábola.

Zeros (ou raízes) de uma função e o eixo das abscissas.

Os zeros ou raízes de uma função são os valores de x tais que $f(x) = 0$, isto é, são os valores de x cuja imagem é igual a zero. Graficamente, isso significa que são os valores das coordenadas x dos pontos de interseção da parábola com o eixo x (lembre-se de que todos os pontos que pertencem ao eixo x têm ordenada igual a zero, ou seja, $y = 0$). Para ajudá-lo a identificar as raízes de uma função do 2º grau, desenvolvemos três bons exemplos. Eles mostram que uma função do 2º grau pode ter duas raízes reais, apenas 1 raiz real ou até mesmo há casos em que ela não possui nenhuma raiz real. Ao fazermos f(x) = 0, recaímos em uma equação do 2° grau que, como vimos na unidade anterior, pode ser resolvida, dentre outras formas, utilizando a fórmula conhecida como "Fórmula de Bhaskara". Vejamos essas possibilidades.

Saiba Mais

O hábito de dar o nome de *Bhaskara* para a fórmula de resolução da equação do segundo grau estabeleceu-se no Brasil, por volta de 1960. Esse costume, aparentemente só brasileiro (não se encontra o nome *Bhaskara* para essa fórmula na literatura internacional), não é adequado, pois:

- Problemas que recaem em uma equação do segundo grau já apareciam, há quase quatro mil anos, em textos escritos pelos babilônios. Nesses textos, o que se tinha era uma receita (escrita, sem uso de símbolos) que ensinava como proceder para determinar as raízes em exemplos concretos com coeficientes numéricos.
- *Bhaskara* nasceu na Índia, em 1114, e viveu até cerca de 1185. Foi um dos mais importantes matemáticos do século XII. As duas coleções de seus trabalhos mais conhecidas são Lilavati ("bela") e Vijaganita ("extração de raízes"), que tratam de Aritmética e Álgebra, respectivamente, e contêm numerosos problemas sobre equações lineares e quadráticas (resolvidas também com receita sem prosa), progressões aritméticas e geométricas, radicais, tríadas pitagóricas e outros.
- Até o fim do século XVI não se usava uma fórmula para obter as raízes de uma equação do segundo grau, simplesmente porque não se representavam por letras os coeficientes de uma equação. Isso começou a ser feito com François Viète, matemático francês que viveu de 1540 a 1603.

Embora não se deva negar a importância e a riqueza da obra de *Bhaskara*, não é correto atribuir a ele a conhecida fórmula de resolução da equação do 2º grau.

Fonte: *Revista do Professor de Matemática* (RPM), 39, p. 54.

Exemplo 1: $f(x) = x^2 - 3x + 2$

Vamos identificar os coeficientes a, b e c de f: $a = 1$, $b = -3$ e $c = 2$. Dessa forma, temos que:

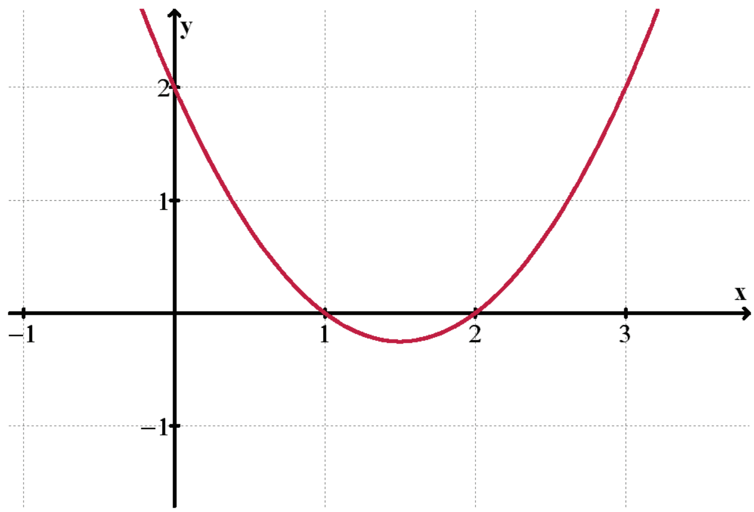
i. O gráfico de f é uma parábola com a concavidade voltada para cima (pois o coeficiente a é positivo);

ii. Um ponto sobre o eixo y tem coordenada $x = 0$. Dessa forma, o ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo y é $(0, f(0))$. No exemplo apresentado, o gráfico intersecta o eixo y no ponto de coordenadas (0,2);

iii. As raízes de f são obtidas resolvendo-se a equação $x^2 - 3x + 2 = 0$

Utilizando a Fórmula de Bhaskara teremos que $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$, e $x = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1}$, donde teremos que $x_1 = \dfrac{3-1}{2} = 1$ e $x_2 = \dfrac{3+1}{2} = 2$.

O gráfico de f é mostrado a seguir. Observe nele as informações que acabamos de obter através da lei da função.



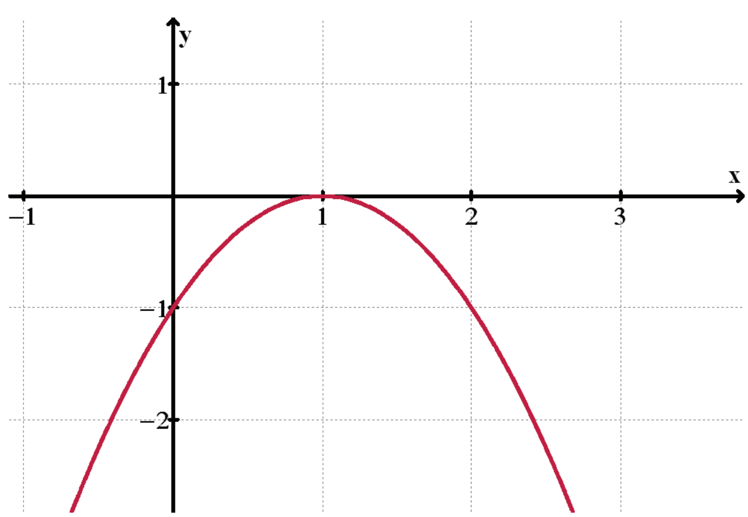
Exemplo 2: $g(x) = -x^2 + 2x - 1$

Procedendo da mesma forma como no exemplo 1, temos:

i. Os coeficientes dessa função são $a = -1$, $b = 2$ e $c = -1$. Assim, o gráfico de g é uma parábola com a concavidade voltada para baixo (pois o coeficiente a é negativo);

i. O gráfico de g corta o eixo y no ponto de coordenadas $(0, -1)$;

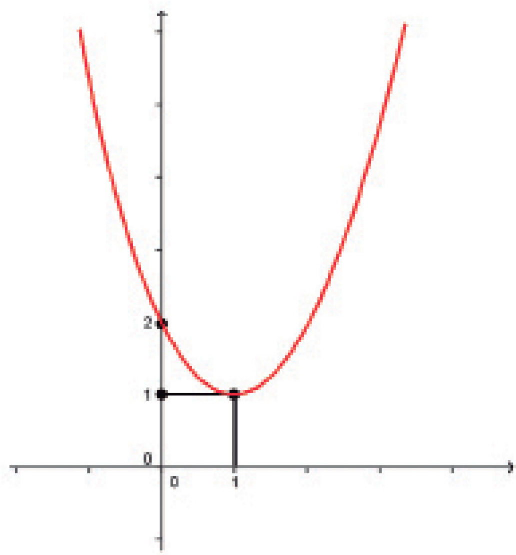
i. Resolvendo-se a equação $-x^2 + 2x - 1 = 0$, temos que $\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = 4 - 4 = 0$, e $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (-1)}$. Como $\Delta = 0$, g possui uma única raiz real ($x = 1$). Veja o gráfico de g a seguir. Note que a parábola tangencia o eixo x apenas no ponto cuja abscissa é 1.



Exemplo 3: $h(x) = x^2 - 2x + 2$

Nesse caso, o gráfico de *h* é uma parábola com concavidade voltada para cima e passa pelo ponto (0,2). Contudo, ao resolvermos a equação $x^2 - 2x + 2=0$ para encontrarmos as raízes de *h*, temos que $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$.

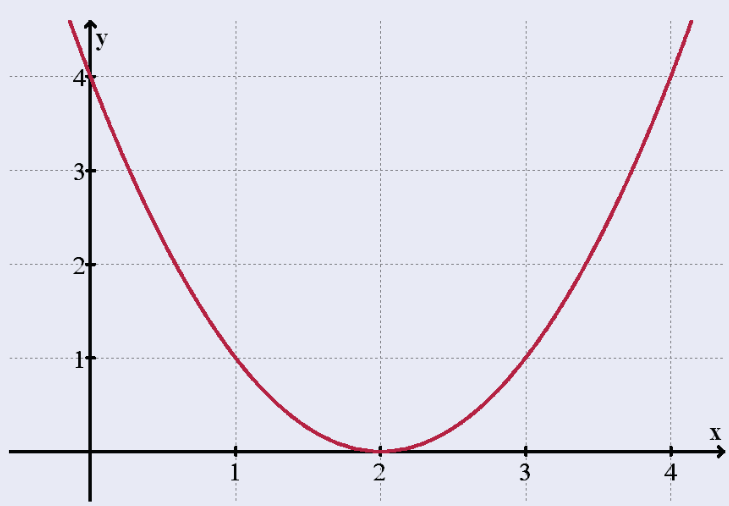
Como $\Delta < 0$, as raízes obtidas pela Fórmula de Bhaskara não são números reais. Neste caso, o gráfico da função *h* não intersecta o eixo *x*. Veja a representação gráfica de *h* a seguir.



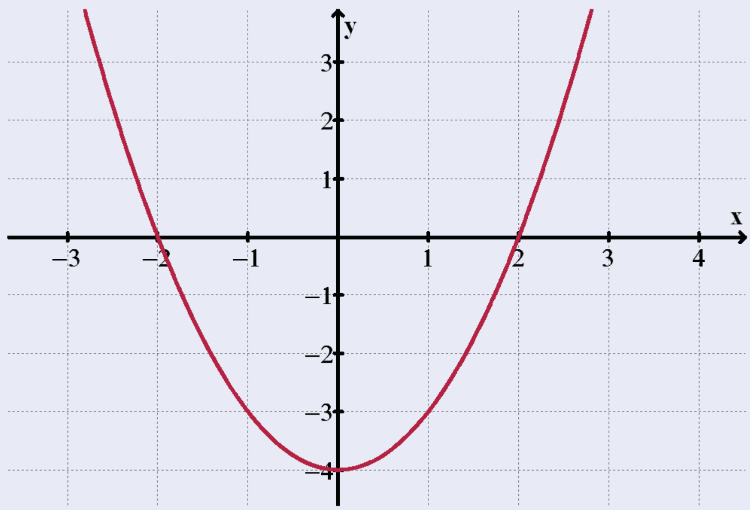
Atividade 2

Determine, caso existam, as raízes reais das seguintes funções:

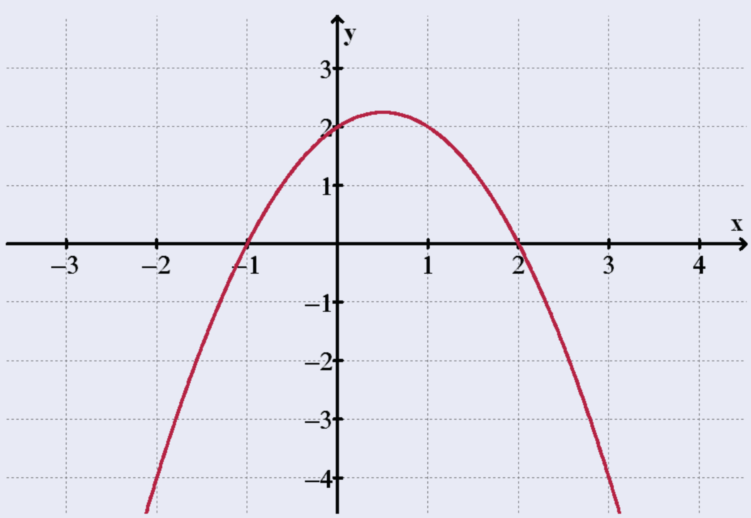
a. $f(x) = x^2 - 4x + 4$

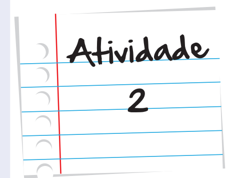


b. $g(x) = x^2 - 4$



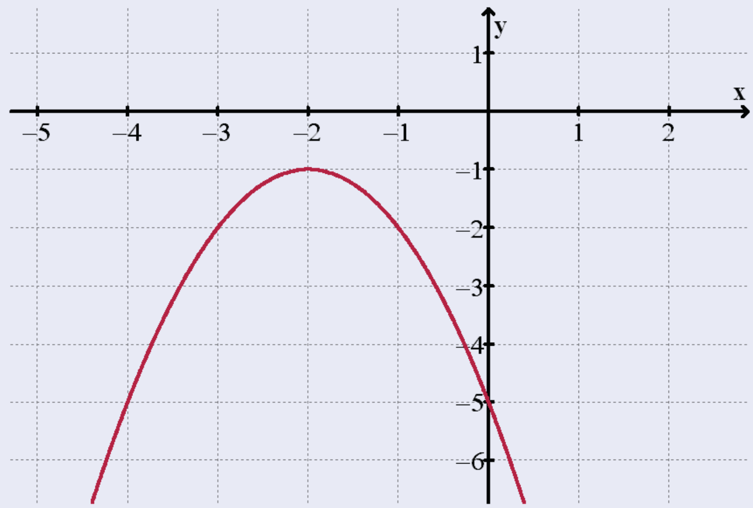
c. $h(x) = -x^2 + x + 2$



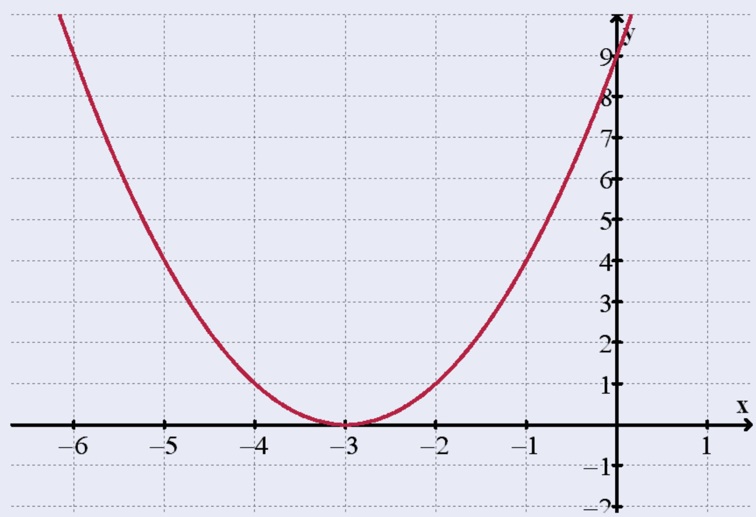


Atividade
2

d. $q(x) = -x^2 - 4x - 5$



e. $r(x) = x^2 + 6x + 9$



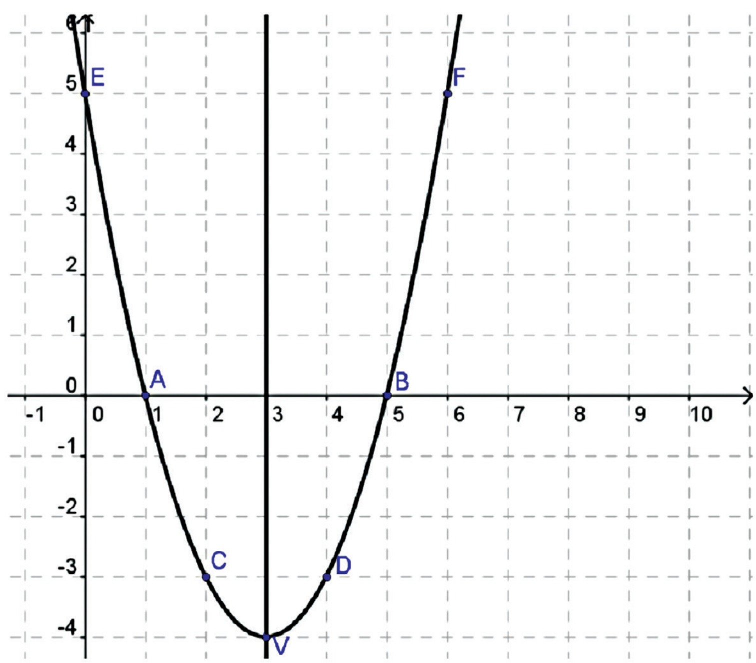
Anote suas respostas em seu caderno

O vértice de uma parábola

O vértice de uma parábola é o ponto desta em que a função assume seu valor máximo ou mínimo, dependendo da direção de sua concavidade. A reta paralela ao eixo y e que passa pelo vértice da parábola é chamada de eixo de **simetria** da parábola, pois os pontos da parábola são simétricos em relação a esta reta, ou seja, a distância de um ponto da parábola até o eixo de simetria é a mesma do seu ponto simétrico (em relação a esta reta) até o eixo de simetria. Para melhor entendimento, vejamos o gráfico a seguir, que mostra uma parábola, seu vértice e seu eixo de simetria.

Simetria

Correspondência, em grandeza, forma e posição relativa, de partes situadas em lados opostos de uma linha ou ponto médio (Holanda Ferreira, 2000).



Repare que V(3, – 4) é o vértice da parábola e a reta, que passa por este ponto e é paralela ao eixo y, é o eixo de simetria. Os pontos A e B são simétricos em relação ao eixo de simetria, ou seja, a distância do ponto A até o eixo é igual à distância do ponto B até o eixo. Neste caso, a distância é igual a 2. O mesmo ocorre para os pontos C e D: são simétricos em relação ao eixo de simetria e neste caso a distância é 1. Podemos ainda notar que os pontos E e F também estão a uma mesma distância do eixo de simetria da parábola, que neste caso é igual 3.

Importante

É importante destacar que, pelo gráfico, vemos que a coordenada x do vértice (x_v) é igual a 3, e este número pode ser obtido, sempre fazendo a média aritmética das raízes (neste exemplo, as raízes são 1 e 5) ou quaisquer outros dois valores de x desde que sejam abscissas de pontos simétricos em relação ao eixo de simetria da parábola, isto é, $x_v = (1+5)/2 = (2+4)/2 = (0+6)/2 = 3$.

Seção 2

Como construir o gráfico de uma função do 2° grau?

Vimos como identificar os elementos do gráfico da função do 2° grau, mas como podemos construí-lo? Para responder a esta pergunta, precisamos aprender a calcular cada um dos elementos da parábola, vistos na seção anterior. Veja o passo a passo a seguir. Começaremos, calculando as raízes da função.

Passo 1: Zeros (ou raízes) da função

Como você já sabe, as raízes da função do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c,\ \ a \neq 0$, são os números reais x que obtemos ao tomarmos $f(x) = 0$. Elas são as soluções da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, as quais são dadas pela Fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Importante

A quantidade de raízes reais de uma função do 2º grau depende do valor obtido para o radicando $\Delta = b^2 - 4ac$, chamado discriminante, a saber:

- Quando Δ é positivo, há duas raízes reais e distintas;
- Quando Δ é zero, há só uma raiz real;
- Quando Δ é negativo, não há raiz real.

Passo 2: Coordenadas do vértice

Para calcularmos as coordenadas do vértice $V(x_v, y_v)$ da parábola, usaremos as fórmulas

$$x_v = -\frac{\quad}{2a} \text{ e } y_v = -\frac{\quad}{4a}, \text{ em que } \Delta = b \quad - 4ac.$$

Também podemos obter a coordenada x do vértice calculando a média aritmética das raízes. De fato, as raízes dadas pela Fórmula de Bhaskara são $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, cuja média aritmética é $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}{2} = \frac{\frac{-2b}{2a}}{2} = -\frac{b}{2a}$.

Também podemos obter a coordenada y do vértice, calculando a imagem de $x = -\frac{b}{2a}$ pela função f.

Vejamos:

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}$$

> Vale lembrar que o vértice indica o valor mínimo (se a > 0) ou máximo (se a< 0) da parábola e que a reta que passa pelo vértice e é paralela ao eixo dos y é o eixo de simetria da parábola.
>
> Saiba Mais

Passo 3: Ponto em que o gráfico intersecta o eixo y

Para sabermos qual é o ponto em que o gráfico intersecta o eixo y, basta anularmos a coordenada x.

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$; logo, para $x = 0$, temos:

$f(0) = a \cdot (0)^2 + b \cdot (0) + c = c$

Então, o par ordenado $(0, c)$ é o ponto em que a parábola intersecta o eixo dos y.

Passo 4: Concavidade da parábola

Antes de construirmos o gráfico de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, além do cálculo das raízes, das coordenadas do vértice e do ponto de intersecção com o eixo y, é necessário sempre estar atento à concavidade da parábola. Para isso, basta considerar que:

- se $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima;
- se $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo;

Resumindo...

Para construir o gráfico de uma função quadrática sem montar a tabela de pares ordenados (*x*,*y*), basta levar em consideração as cinco informações a seguir.

1. Os zeros definem os pontos em que a parábola intercepta o eixo dos *x*.
2. O vértice $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ indica o ponto de mínimo (se $a > 0$) ou máximo ($a < 0$).
3. A reta que passa por *V* e é paralela ao eixo dos *y* é o eixo de simetria da parábola.
4. $(0,c)$ é o ponto em que a parábola corta o eixo dos *y*.
5. O valor do coeficiente *a* define a concavidade da parábola.

Exemplo:

Para construir o gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x - 3$, temos de determinar o seguinte:

1. As raízes da função

Para determinar as raízes, façamos $f(x) = 0$, ou seja, $x^2 - 2x - 3 = 0$. Podemos resolver esta equação, usando a forma de resolução de uma equação do 2° grau,

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)$, $\Delta = 16$.

$X = (2 \pm 4)/2$, logo $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$.

Outra maneira de encontrar as raízes é usando soma e produto das raízes. A fórmula da soma das raízes é $S = -b/a$, e o produto das raízes é $P = c/a$. Assim, devemos pensar em dois números cuja soma $S = 2$ e o produto é $P = -3$. Estes números são -1 e 3. Logo, as raízes de $f(x)$ são $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$.

2. As coordenadas do vértice $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

Calculando a coordenada *x* do vértice, temos $x_v = -\frac{(-2)}{2 \cdot 1} = 1$. Neste caso, poderíamos calcular x_v através da média aritmética das raízes: $x_v = \frac{-1+3}{2} = 1$.

Calculando a coordenada *y* do vértice, temos $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$ e, assim, $y_v = -\frac{16}{4 \cdot 1} = -4$.

Poderíamos determinar o valor de y_v calculando a imagem de x_v pela função *f*, isto é, $y_v = f(x_v) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$.

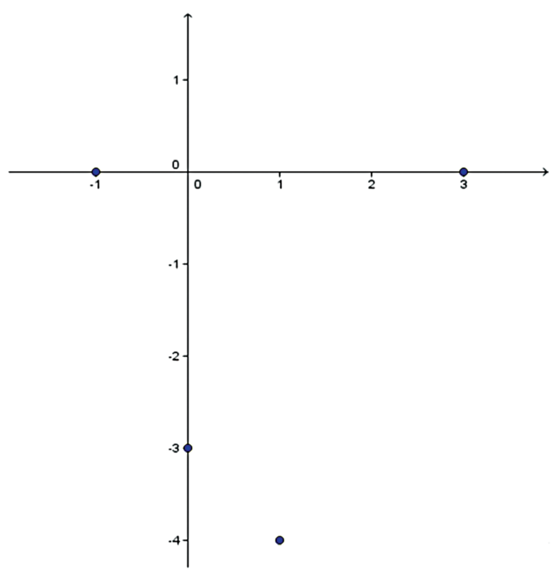
Logo, o vértice é o ponto *V* (1, – 4).

3. O ponto onde a parábola intersecta o eixo *y*

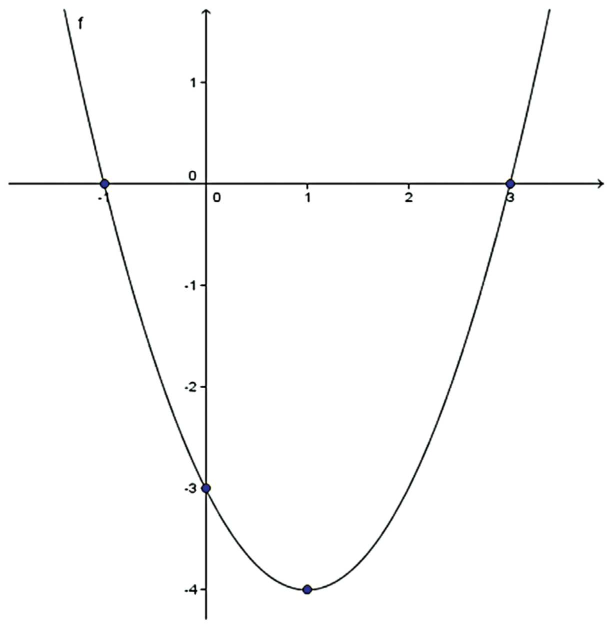
Para isso, usamos o valor de *c*, que neste caso é – 3. Logo, o ponto é (0,– 3).

4. A concavidade da parábola

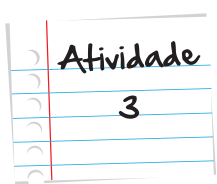
A concavidade está voltada para cima, pois $a = 1$, ou seja, é positivo. Portanto, o vértice será um ponto de mínimo. Agora marcamos os pontos obtidos, como mostra a figura a seguir:



Como sabemos que a concavidade está voltada para cima, devemos unir os pontos desenhando uma parábola, como mostra a figura a seguir:



Agora é com você. Faça a atividade 3 e confira seu aprendizado.

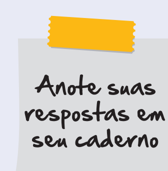


Construa o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 8$

b) $g(x) = -x^2 - 2x - 1$

c) $h(x) = x^2 + 2x + 3$



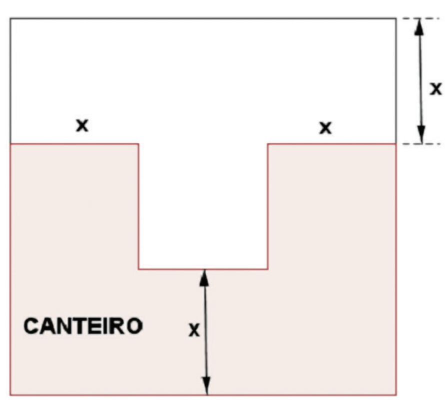
Seção 3
Aplicações da função quadrática

Veremos agora algumas aplicações da função quadrática e como todos esses conceitos que acabamos de estudar podem ser utilizados para resolvermos problemas práticos. Para isso, apresentaremos três exemplos com suas respectivas resoluções.

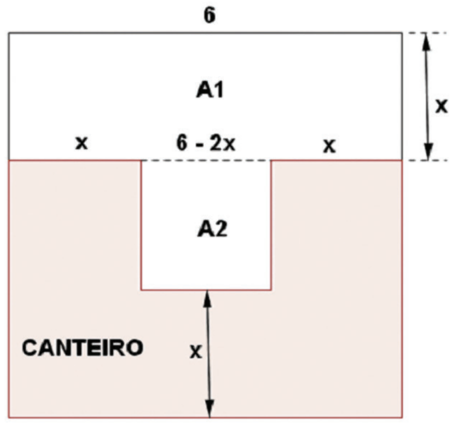
Exemplo 1:

Desejamos construir um canteiro, para plantações, em um grande jardim de formato quadrado de 36 m^2 de área, como mostra a figura a seguir, com $0 < x < 3$.

1. Se $x = 2$, qual será a área do canteiro?
2. Mostre que a área do canteiro depende do valor de x.
3. Para que valor de x esse canteiro terá a maior área possível?
4. Qual é o valor dessa área?
5. É possível observar graficamente a variação dessa área em função de x. Construa um gráfico que dá a área do canteiro (no eixo y) em função do valor de x.



Como o jardim tem formato quadrado de área 36 m^2, temos que o lado deste é igual a 6 m. Para calcularmos a área do canteiro (A), devemos subtrair da área do jardim as áreas dos retângulos A1 e A2 indicadas na figura a seguir.



Temos:

A = 36 – A1 – A2, como A1 = 6x e A2 = $(6 - 2x)^2$, então

A = $36 - 6x - (6 - 2x)^2 = 36 - 6x - (36 - 24x + 4x^2) = 36 - 6x - 36 + 24x - 4x^2$,

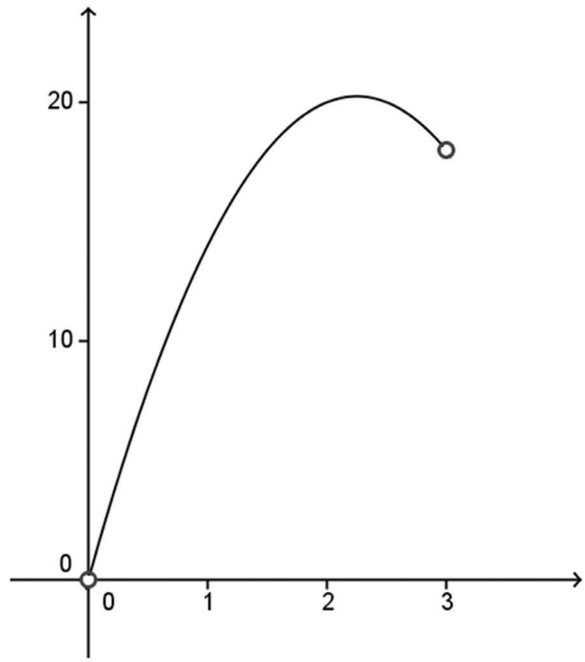
ou seja,

$A = -4x^2 + 18x$

Logo, a área desse canteiro é expressa por uma função do 2º grau. Vamos responder aos itens do enunciado desse exemplo.

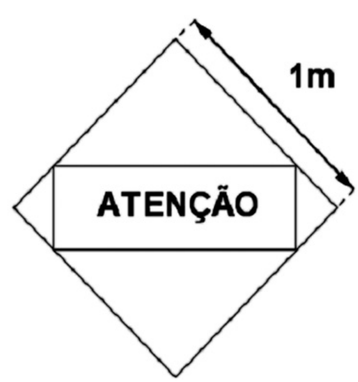
1. Se x = 2, a área do canteiro é $A = -4(2)^2 + 18(2) = -16 + 36 = 20\ m^2$.
2. A expressão $A = -4x^2 + 18x$ mostra que o valor de A depende do valor de x, isto é, ao variarmos o valor de x, variamos também do valor de A.
3. Note que a função quadrática que dá o valor de A em função de x possui coeficiente a negativo. Dessa forma, A possui um valor máximo dado pela fórmula $-\frac{\Delta}{4a}$ e o valor de x para que tal fato ocorra é dado pela fórmula $-\frac{b}{2a}$. Assim, $x_{max} = \frac{-18}{-8} = 2{,}25$.

   Logo, o valor de x é 2,25 m.
4. Utilizando a fórmula $-\frac{\Delta}{4a}$, temos que $\Delta = 324 - 4 \cdot (-4) \cdot 0 = 324$ e que a área máxima do canteiro é $A_{max} = \frac{-324}{-16} = 20{,}25 m^2$.
5. Vamos construir o gráfico que dá a variação da área em função do comprimento x. Note que x não pode assumir qualquer valor real, mas apenas valores entre 0 e 3.



Exemplo 2 (adaptado da U.F. Santa Maria – RS):

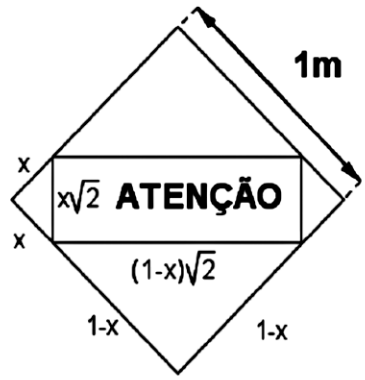
Algumas placas de advertência para o trânsito têm a forma de um quadrado de lado 1m, que possui no seu interior retângulos destinados a mensagens, como mostra a figura a seguir.



Dentre os possíveis retângulos, determine aquele que tem a maior área.

Solução:

Os lados do retângulo são $x\sqrt{2}$ e $(1-x)\sqrt{2}$, pois são hipotenusas dos triângulos retângulos isósceles, como mostra a figura:



Assim, a área do retângulo é dada pela função $A(x) = (1-x)\sqrt{2}x\sqrt{2})$, ou seja, $A(x) = -2x^2 + 2x$. A área máxima é obtida pela fórmula $-\frac{\Delta}{4a}$, e o comprimento *x* que dá o retângulo de área máxima é obtido pela fórmula $-\frac{b}{2a}$. Assim,

$$x = -\frac{2}{2\cdot(-2)} = 0{,}5$$

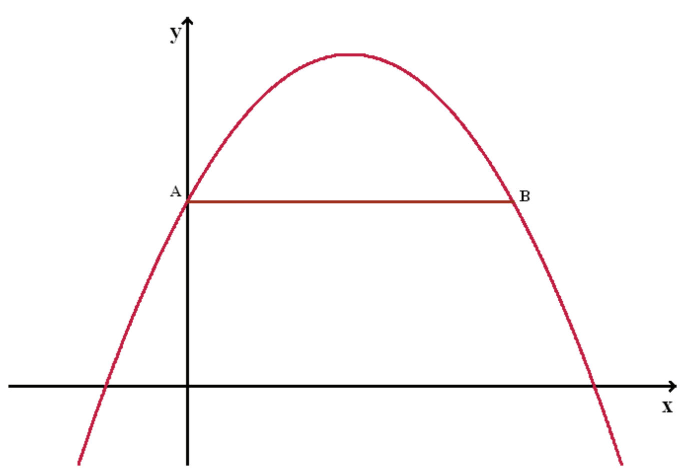
$$\Delta = 2^2 - 4\cdot(-2)\cdot 0 = 4$$

e $A_{max} = -\frac{4}{4\cdot(-2)} = 0{,}5$

Logo, todos os lados do retângulo medem $0{,}5\sqrt{2}$ m e a área máxima do retângulo é de 0,5 m^2.

Exemplo 3 (adaptado da UF-MG)**:**

Na figura a seguir, os pontos A e B estão sobre o gráfico da função do 2° grau f(x) = ax^2 +bx + c. O ponto A é o ponto de interseção da parábola com o eixo y, e o segmento AB é paralelo ao eixo x.



Determine o comprimento do segmento AB.

Solução:

Como a distância do ponto A até o eixo de simetria é igual à distância do ponto B até o eixo de simetria, então o comprimento do segmento AB é o dobro desta distância. Sabemos que a distância do ponto A até o eixo de simetria é igual à coordenada x do vértice da parábola, ou seja, $-\frac{b}{2a}$. Logo, o comprimento do segmento AB é igual a $2 \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b}{a}$.

Agora, sugerimos duas atividades, relacionadas a problemas reais. Para isso, apresentaremos situação-problema, envolvendo variação de grandezas como recurso para a construção de argumentos.

Um modesto hotel tem 50 quartos individuais e cobra R$ 40,00 pela diária. Com o aumento da procura, devido ao evento “Rio+20”, o dono do hotel resolveu aumentar o preço da diária para lucrar mais. Mas percebeu que para cada R$ 2,00 de aumento na diária ele perdia um hóspede. Dessa forma, quanto ele deve cobrar pela diária para que sua receita (produto do preço da diária pela quantidade de hóspedes) seja a maior possível?

Atividade 4

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 5

PUC-MG

Uma pedra é atirada para cima e sua altura h, em metros, é dada pela função $h(t) = at^2 + 12t$, em que t é medido em segundos. Se a pedra atingiu a altura máxima no instante t = 2s, pode-se afirmar que o valor de a é:

a. – 3

b. – 2

c. 2

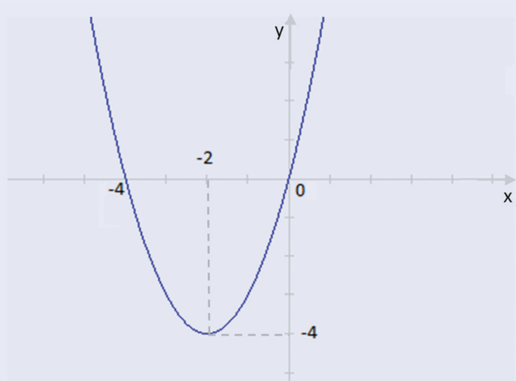
d. 3

Anote suas respostas em seu caderno

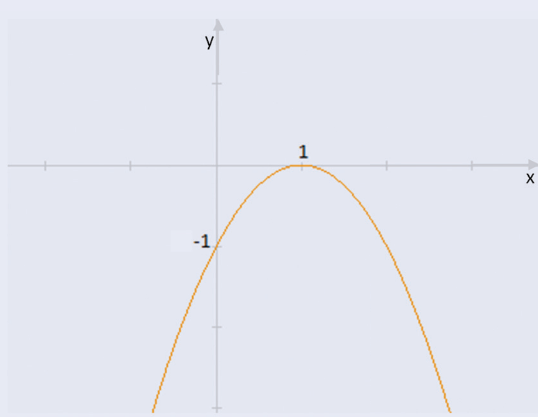
Atividade 6

Determine os coeficientes a, b e c de cada uma das funções do 2º grau representadas graficamente abaixo.

a.

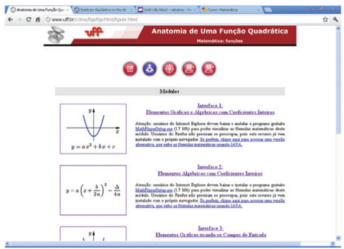


b.



Anote suas respostas em seu caderno

Multimídia



Página da UFF de conteúdos digitais para ensino e aprendizagem de Matemática e Estatística. Explore os elementos gráficos de uma função do 2° grau na "Anatomia de uma função quadrática".

Visite: http://www.uff.br/cdme/fqa/fqa-html/fqa-br.html

Nesta unidade, vimos a importância do estudo de funções polinomiais do 2° grau e foram apresentadas várias aplicações práticas. Entendemos também que podemos tomar decisões importantes por meio de um estudo detalhado, obtido pela análise da lei de formação de funções do 2° grau. Além disso, aprendemos a fazer uma leitura e interpretar gráficos de funções do 2° grau.

Resumo

- Função polinomial do 2º grau (também chamada de função quadrática) é toda função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que $a \neq 0$.
- O gráfico de uma função do 2º grau é uma parábola. Essa curva tem concavidade voltada para cima, quando $a>0$ e para baixo, quando $a < 0$.
- O vértice $V(x_v, y_v)$ da parábola é obtido pelas fórmulas $x_v = -b/2a$ e $y_v = -\Delta/4a$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.
- O vértice de uma parábola será um ponto de máximo, quando a concavidade estiver voltada para baixo, e será um ponto de mínimo, quando estiver voltada para cima.
- Os zeros ou raízes da função do 2° grau são obtidos ao tomarmos $f(x) = 0$ e podem ser calculados pela fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Veja Ainda

Para entender como se demonstram as fórmulas contidas nesta unidade e para conhecer um pouco mais sobre este assunto, indicamos os seguintes sites:

- http://matematizando-gabriel.blogspot.com.br/2011/05/aqui-esta-deducao-da-formula-da.html (dedução da fórmula das coordenadas do vértice).
- http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/bhaka.html (a fórmula de resolução de equação do 2° grau não é de Bhaskara).
- http://www.mais.mat.br/wiki/Fun%C3%A7%C3%A3o_quadr%C3%A1tica (aplicações).

Referências

Livros

- HOLANDA FERREIRA, A. B. de. **Minidicionário da língua portuguesa**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2000.
- IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. de. **Matemática**: ciência e aplicações, Saraiva, vol.1.
- LIMA, E.L.; CARVALHO, P.C.P.; WAGNER, E.; MORGADO, A.C. **A matemática do Ensino Médio**, vol.1, SBM.
- Revista do Professor de Matemática (RPM) 39, p. 54.

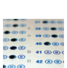
Imagens

- http://www.sxc.hu/photo/475767

- http://www.sxc.hu/photo/1118070

- http://www.sxc.hu/photo/1341162

- http://www.sxc.hu/photo/1382166



- http://www.sxc.hu/photo/517386

Respostas das Atividades

Atividade 1

a. para cima e ponto de mínimo

b. para baixo e ponto de máximo

c. para baixo e ponto de máximo

d. para cima e ponto de mínimo

e. para cima e ponto de mínimo

Atividade 2

a. A raiz é 2

b. As raízes são –2 e 2

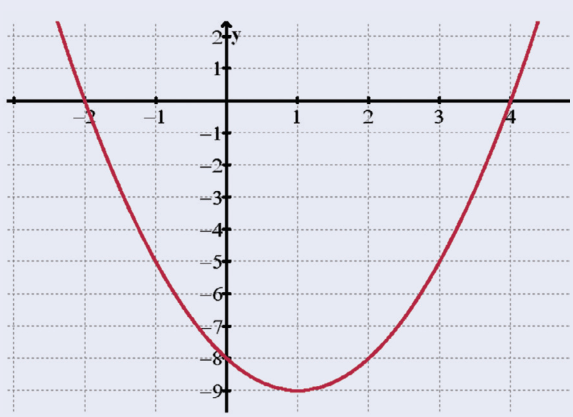
c. As raízes são –1 e 2

d. Não tem raiz real

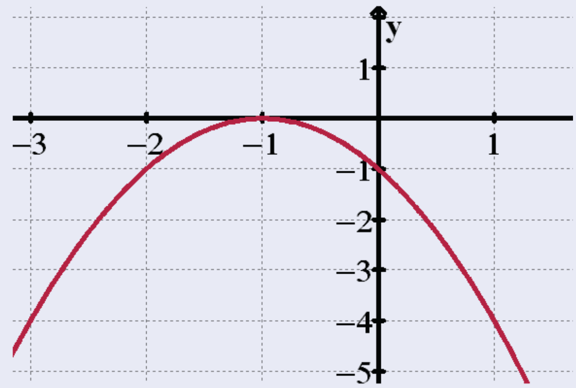
e. A raiz é –3

Atividade 3

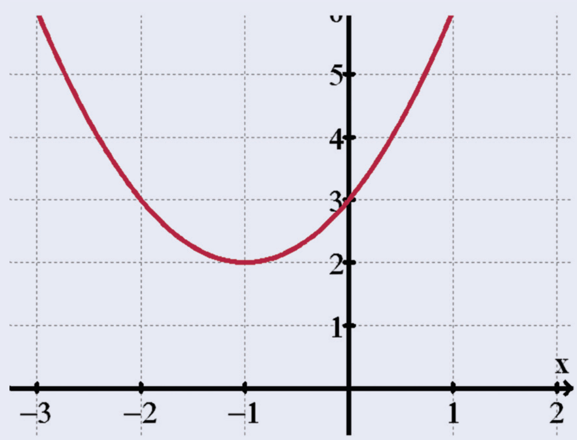
a.



b.



c.



Atividade 4

A receita é dada pela fórmula $R(x) = -2x^2 + 60x + 2000$. Logo, o preço para que a receita seja máxima será igual a $p = 70$. Tomar cuidado que $p \neq x$.

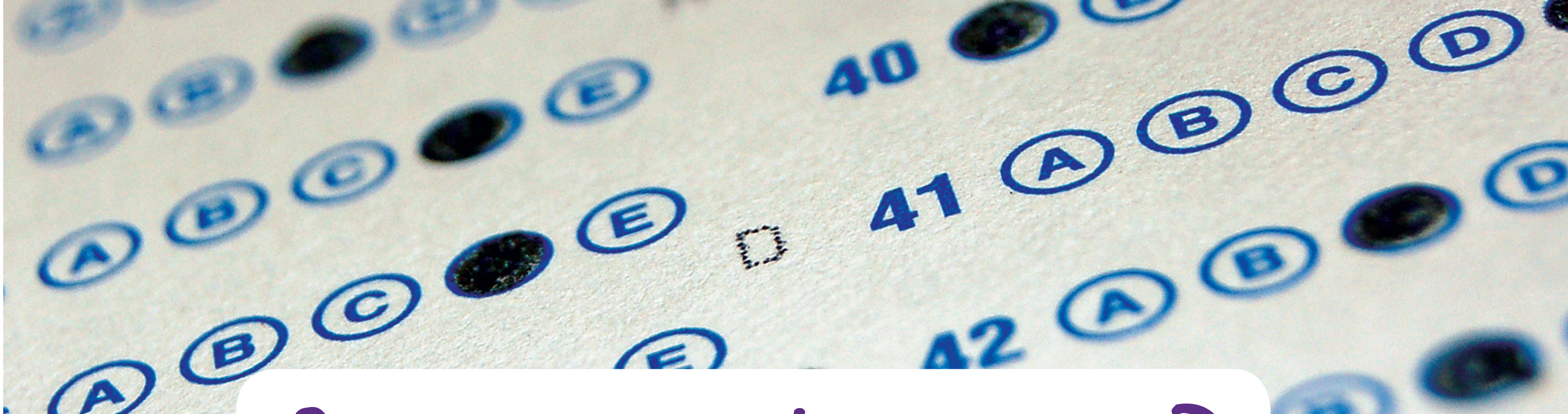
Atividade 5

Usando a fórmula do x_v, temos que $a = -3$. Logo, a alternativa correta é a letra *a*.

Atividade 6

a. $f(x)=x^2+4x$

b. $f(x)=-x^2+2x-1$



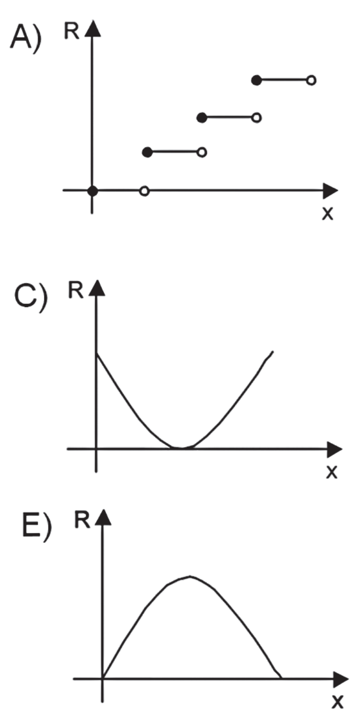
O que perguntam por aí?

AQuestão 1 (ENEM 2000)

Um boato tem um público-alvo e alastra-se com determinada rapidez. Em geral, essa rapidez é diretamente proporcional ao número de pessoas desse público que conhecem o boato e diretamente proporcional também ao número de pessoas que não o conhecem. Em outras palavras, sendo R a rapidez de propagação, P o público-alvo e x o número de pessoas que conhecem o boato, tem-se:

$R(x) = k.x.(P-x)$, onde k é uma constante positiva característica do boato.

O gráfico cartesiano que melhor representa a função R(x), para x real, é:



Resposta: Letra E

Comentário: A rapidez de propagação de um boato é dada pela função do 2° grau R(x) = k.x.(P – x), ou seja, R(x) = kPx – kx^2 . Como uma função do 2° grau é descrita como f(x) = ax^2 + bx +c, podemos dizer que, neste caso, a = –k, b = kP e c = 0. Como k é positivo, então o valor de a é negativo, podemos então afirmar que a concavidade da parábola está voltada para baixo. Como a única alternativa em que a parábola tem concavidade voltada para baixo é a letra E, então esta é a alternativa correta. Observe ainda que quando x = 0, R = 0 também, o que confere com o gráfico.

Questão 2

Considerando o modelo acima descrito, se o público-alvo é de 44.000 pessoas, então a máxima rapidez de propagação ocorrerá quando o boato for conhecido por um número de pessoas igual a:

a. 11.000

b. 22.000

c. 33.000

d. 38.000

e. 44.000

Resposta: Letra B

Comentário: A máxima rapidez de propagação (R_{max}) ocorre quando o número de pessoas que conhece o boato for máxima (x_{max}). Devemos, assim, calcular o x do vértice (x_v) da parábola, mostrada anteriormente. Para isso, usaremos a fórmula x_v = – b/2a. Temos, então, x_v = –kP/2·(– k). Como o público-alvo é de 44.000 pessoas, temos que P = 44000. Substituindo na fórmula do x do vértice, temos: x_v = 44000/2, ou seja, x_v = 22000. Logo, a alternativa correta é a letra b.

Questão 3 (Faap-SP)

Uma companhia estima que pode vender mensalmente *q* milhares de unidades de seu produto ao preço de *p* reais por unidade. A receita mensal das vendas é igual ao produto do preço pela quantidade vendida. Supondo p= –0,5q + 10, quantos milhares de unidades deve vender mensalmente para que a receita seja a máxima possível?

a. 18

b. 20

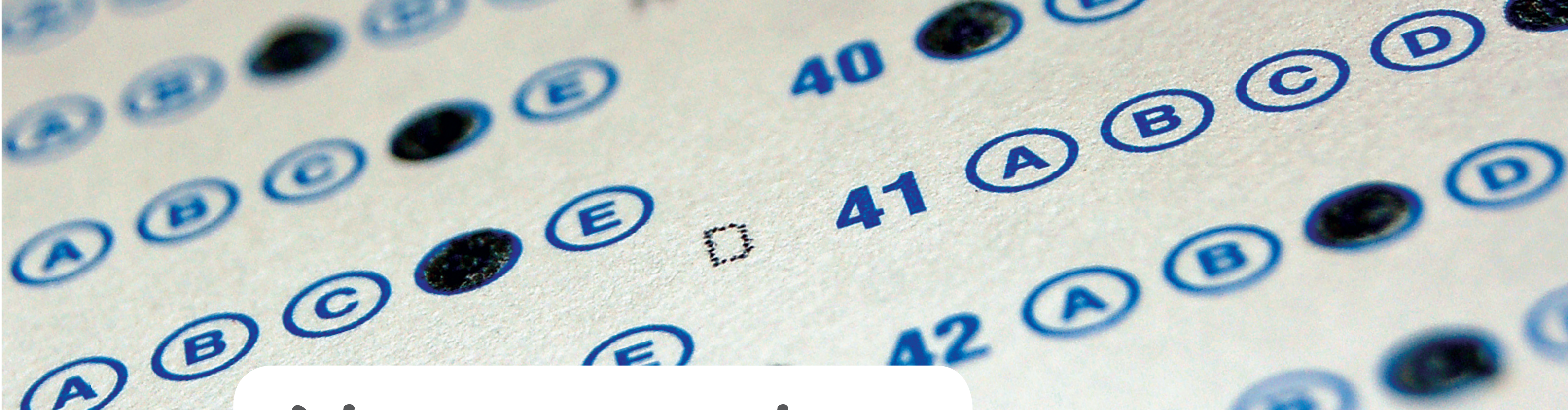
c. 5

d. 10

e. 7

Resposta: Letra D

Comentário: Como a receita mensal das vendas é o produto do preço pela quantidade vendida, então se chamamos de R a receita, temos: $R = p \cdot q$, e substituindo p pela expressão fornecida na questão, obtemos $R = (-0,5q + 10)q$. Assim, chegamos à função do 2° grau $R = -0,5q^2 + 10q$. Para determinarmos quantos milhares de unidades deve vender mensalmente para que a receita seja a máxima possível, devemos determinar o valor de q dado pela fórmula $-b/2a$. Logo, $q_{max} = -10/2\cdot(-0,5) = -10/-1 = 10$. Logo, deve vender 10 mil unidades para que a receita seja máxima. A resposta é a alternativa d.



Atividade extra

Exercício 1

Uma bola quando chutada por um jogador de futebol descreve uma parábola de equação $h(t) = -40t2 + 200t$, onde $h(t)$ é a altura da bola em função do tempo (t) em segundos.

Quanto tempo após o chute a bola alcança o chão novamente?

(a) 2s (b) 3s (c) 4s (d) 5s

Exercício 2

Em uma empresa o custo $c(x)$ para produzir x unidades de um determinado produto, é dado pela equação $C(x) = x^2 - 80x + 3000$.

Determine o custo mínimo e a quantidade de unidades correspondente.

(a) (0,3000) (b) (40,1400) (c) (20,1800) (d) (30,1500)

Exercício 3

O gráfico da função $f(x) = x^2 + x + 7$ é uma parábola que:

(a) Toca o eixo x em apenas um ponto, pois possui duas raízes reais e iguais.

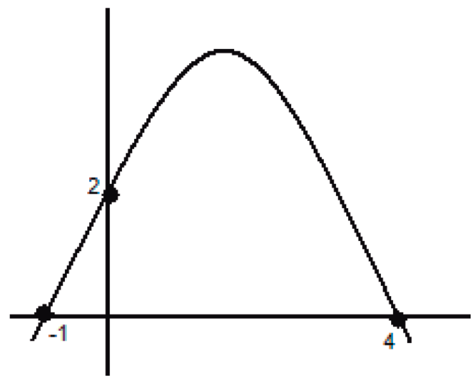
(b) Toca o eixo x em dois pontos distintos, pois possui duas raízes reais e diferentes.

(c) Não toca o eixo x, pois não tem raízes reais.

(d) Toca o eixo x em dois pontos distintos, pois tem duas raízes reais e iguais.

Exercício 4

O gráfico representa uma função do segundo grau.



Qual a lei de formação dessa função?

(a) $f(x) = -\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{6x}{2} + 3$

(b) $f(x) = -2x^2 + 6x + 8$

(c) $f(x) = x^2 - 3x - 4$

(d) $f(x) = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3x}{2} + 2$

Exercício 5

A função $h(t) = -t^2 + 16t + 24$, nos dá a altura de uma pedra $h(t)$ quando lançada, em função do tempo (t) em segundos.

Quanto tempo após o lançamento a pedra atingirá sua altura máxima?

(a) 8s (b) 88s (c) 6s (d) 216s

Exercício 6

Dada a função $f(x) = x^2 - 9x + 20$.

Quais são as raízes dessa função?

(a) $x = 4$ e $x = -5$ (c) $x = 4$ e $x = 5$

(b) $x = -4$ e $x = 5$ (d) $x = -4$ e $x = -5$

Exercício 7

Um automóvel tem a sua posição $p(t)$ (em metros) em função do tempo (t) dada pela função $p(t) = 3t^2 + 10t + 3$.

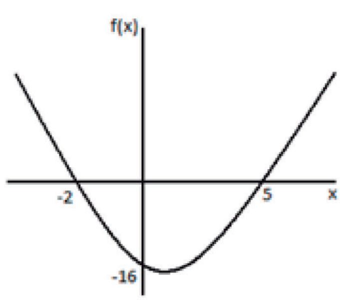
Qual a posição deste automóvel no tempo $t = 12$ segundos?

(a) 555 metros (b) 595 metros (c) 575 metros (d) 587 metros

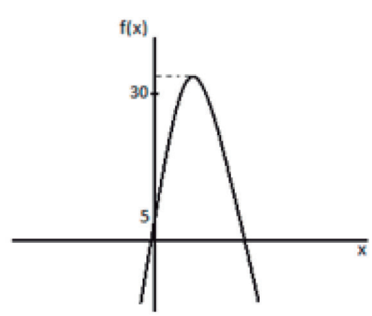
Exercício 8

Dada a função $f(x) = -2x^2 + 16x + 5$.

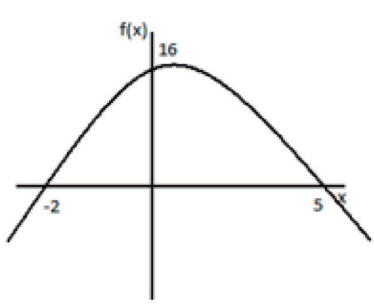
O gráfico que representa essa função é:



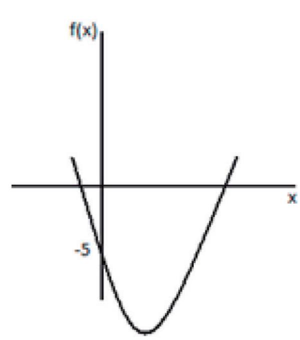
(a)



(c)



(b)



(d)

Exercício 9

O transporte aéreo de pessoas entre duas cidades A e B é feito por uma única companhia aérea, em um único vôo diário. Oavião utilizado tem 180 lugares, e o preço da passagem $p(x)$ relaciona-se com o número x de passageiros por dia pela relação $p(x) = 300 - 0{,}75x$. A função receita, que é o valor arrecadado de acordo com o número x de passageiros que compraram a passagem é dada, em reais, por $R(x) = x \cdot p(x)$

Qual a receita máxima possível por viagem?

(a) R$ 30000,00 (b) R$ 29700,00 (c) R$ 29900,00 (d) R$ 29600,00

Exercício 10

A área de um quadrado é 1024cm^2.

Qual o valor do lado desse quadrado?

(a) 256 cm^2 (b) 32 cm^2 (c) 512 cm^2 (d) 64 cm^2

Exercício 11

Considere a função do segundo grau $f(x) = x^2 + 5x + 6$. Esboce seu gráfico e identifique nele as raízes da função.

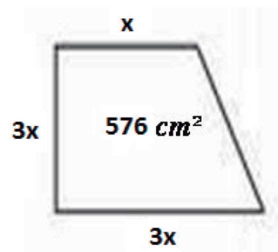
Exercício 12

O lucro $L(x)$, em reais, de uma fábrica na venda de determinado produto é dado pela função $L(x) = -5x^2+100x-80$, onde x representa o número de produtos vendidos.

Quantos produtos precisam ser vendidos para obtenção do lucro máximo?

Exercício 13

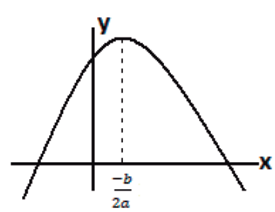
Um trapézio possui área medindo 576 cm^2. Temos que a medida da altura é o triplo da medida da base menor, e que a base maior possui a mesma medida da altura.



Determine o comprimento das bases e altura deste trapézio.

Exercício 14

O gráfico representa os pontos que obedecem à uma função do segundo grau, cuja lei de formação é do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$.



Quais são os sinais de a, b e c?

Exercício 15

Um motorista está viajando de carro em uma estrada a uma velocidade constante, quando percebe um cavalo a sua frente e resolve frear. A velocidade $v(t)$ do carro após o acionamento dos freios é dada pela função $v(t) = -5t^2 + 50t$, sendo t o tempo em segundos.

Depois de acionados os freios, quanto tempo o carro leva para parar?

Gabarito

Exercício 1

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 2

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 3

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 4

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 5

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 6

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 7

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 8

A	B	C	D
○	○	●	○

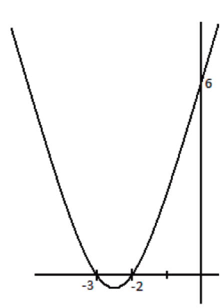
Exercício 9

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 10

A	B	C	D
●	●	○	○

Exercício 11



Exercício 12

Como o lucro é dado por uma função do segundo grau o valor máximo é o vértice da parábola descrita por esta função. Neste caso sabemos que o valor máximo ocorre em $x = -\dfrac{b}{2a}$. Logo $x = -\dfrac{100}{2.(-5)} \Rightarrow x = 10$.

Portanto, devem ser vendidos 10 para obtenção do lucro máximo.

Exercício 13

Sabemos que

$$A = \frac{(B+b)h}{2} \text{ e } A = 576 \Rightarrow$$
$$\frac{(3x+x)3x}{2} = 576 \Rightarrow x = 4\sqrt{6}$$

Exercício 14

Como a parábola tem concavidade para baixo a < 0. No gráfico dado, o termo $\dfrac{-b}{2a}$ está a direita do eixo y, logo é positivo, portanto, $\dfrac{-b}{2a}$ > 0. Como a < 0, então –b < 0, logo, b > 0. O gráfico intercepta o eixo y acima do eixo x, logo c > 0.

Exercício 15

O carro parar quando $v(t) = 0$. Então $-5t^2 + 50t = 0$

t = 0 ou t = 10.

Portanto, o carro parar 10 segundos após o acionamento dos freios.