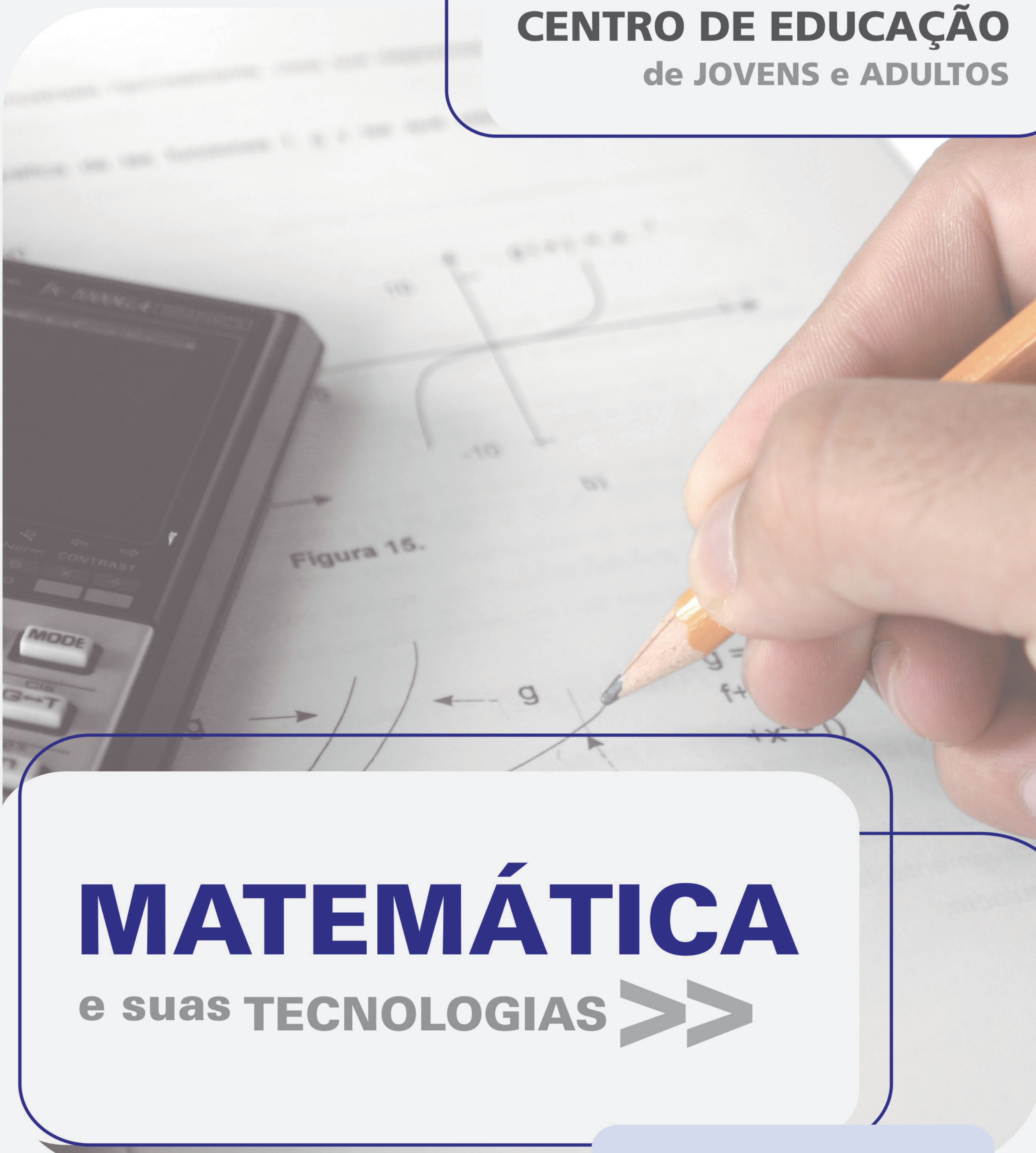
CEJA >>

CENTRO DE EDUCAÇÃO
de JOVENS e ADULTOS



MATEMÁTICA
e suas TECNOLOGIAS >>

Fascículo 6
Unidades 18, 19 e 20

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Governador
Wilson Witzel

Vice-Governador
Claudio Castro

SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO

Secretário de Estado
Leonardo Rodrigues

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO

Secretário de Estado
Pedro Fernandes

FUNDAÇÃO CECIERJ

Presidente
Gilson Rodrigues

PRODUÇÃO DO MATERIAL CEJA (CECIERJ)

Coordenação Geral de Design Instrucional
Cristine Costa Barreto

Coordenação de Matemática
Agnaldo da C. Esquincalha
Gisela M. da F. Pinto
Heitor B. L. de Oliveira

Revisão de conteúdo
José Roberto Julianelli
Luciana Getirana de Santana

Elaboração
Cléa Rubinstein
Daniel Portinha Alves
Heitor B. L. de Oliveira
Leonardo Andrade da Silva
Luciane de P. M. Coutinho
Maria Auxiliadora Vilela Paiva
Raphael Alcaires de Carvalho
Rony C. O. Freitas
Thiago Maciel de Oliveira

Atividade Extra
Benaia Sobreira de Jesus Lima
Carla Fernandes e Souza
Diego Mota Lima
Paula Andréa Prata Ferreira
Vanessa de Albuquerque

Coordenação de Design Instrucional
Flávia Busnardo
Paulo Miranda

Design Instrucional
Rommulo Barreiro
Letícia Terreri

Revisão de Língua Portuguesa
Paulo Cesar Alves

Coordenação de Produção
Fábio Rapello Alencar

Capa
André Guimarães de Souza

Projeto Gráfico
Andreia Villar

Imagem da Capa e da Abertura das Unidades
http://www.sxc.hu/
photo/789420

Diagramação
Juliana Fernandes
Juliana Vieira

Ilustração
Bianca Giacomelli
Clara Gomes
Fernado Romeiro
Jefferson Caçador
Sami Souza

Produção Gráfica
Verônica Paranhos

Sumário

Prezado(a) Aluno(a),

Seja bem-vindo a uma nova etapa da sua formação. Estamos aqui para auxiliá-lo numa jornada rumo ao aprendizado e conhecimento.

Você está recebendo o material didático impresso para acompanhamento de seus estudos, contendo as informações necessárias para seu aprendizado e avaliação, exercício de desenvolvimento e fixação dos conteúdos.

Além dele, disponibilizamos também, na sala de disciplina do CEJA Virtual, outros materiais que podem auxiliar na sua aprendizagem.

O CEJA Virtual é o Ambiente virtual de aprendizagem (AVA) do CEJA. É um espaço disponibilizado em um site da internet onde é possível encontrar diversos tipos de materiais como vídeos, animações, textos, listas de exercício, exercícios interativos, simuladores, etc. Além disso, também existem algumas ferramentas de comunicação como chats, fóruns.

Você também pode postar as suas dúvidas nos fóruns de dúvida. Lembre-se que o fórum não é uma ferramenta síncrona, ou seja, seu professor pode não estar online no momento em que você postar seu questionamento, mas assim que possível irá retornar com uma resposta para você.

Para acessar o CEJA Virtual da sua unidade, basta digitar no seu navegador de internet o seguinte endereço: http://cejarj.cecierj.edu.br/ava

Utilize o seu número de matrícula da carteirinha do sistema de controle acadêmico para entrar no ambiente. Basta digitá-lo nos campos “nome de usuário” e “senha”.

Feito isso, clique no botão “Acesso”. Então, escolha a sala da disciplina que você está estudando. Atenção! Para algumas disciplinas, você precisará verificar o número do fascículo que tem em mãos e acessar a sala correspondente a ele.

Bons estudos!

Vamos poupar dinheiro!

Fascículo 6

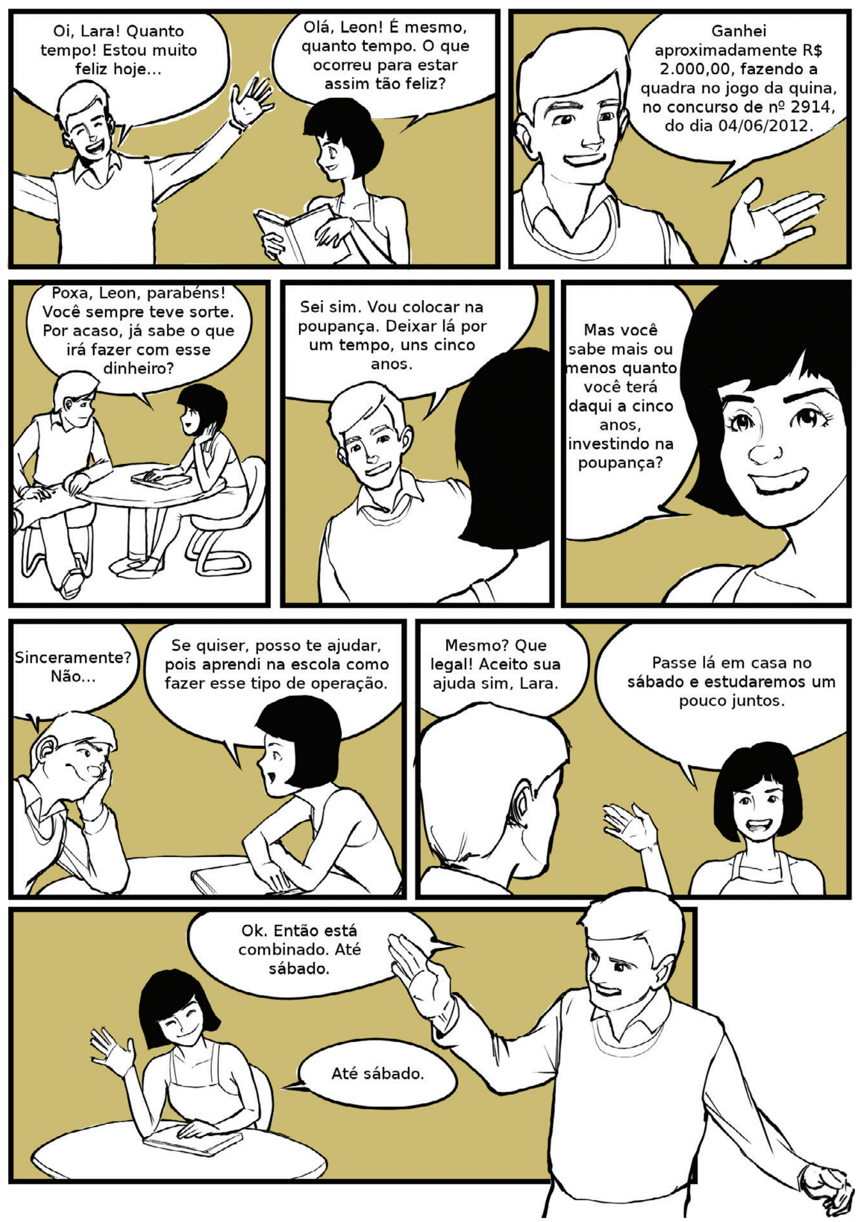
Unidade 18

Fundação CECIERJ

Vamos poupar dinheiro!

Para início de conversa...

Observe a história em quadrinho abaixo:



Todos nós sabemos que é muito bom guardar um dinheirinho na poupança, pois lá nosso dinheiro irá render, não é mesmo? Mas será que você saberia calcular o quanto renderá? Se colocarmos dois mil reais hoje, como fez Leon, você saberia dizer quanto teremos daqui a cinco anos? Ou, então, se depositarmos dez mil reais hoje, em quanto tempo, aproximadamente, teremos doze mil reais? Esses são alguns questionamentos que podem tanto auxiliar Leon quanto a nós mesmos.

Nesta unidade, vamos analisar esta e outras situações que envolvem o conhecimento do mesmo conceito matemático: o de função exponencial. Mas não fiquem assustados com esse nome! Esta função caracteriza-se pelo uso das potências. Vocês se lembram delas?

Fiquem tranquilos, pois, caso seja necessário relembrar alguma coisa, vocês verão aqui nesta aula mesmo.

E então, vamos lá?!

Objetivos de aprendizagem

- identificar fenômenos que podem ser modelados por uma função exponencial;
- identificar a representação algébrica, gráfica e as principais propriedades da função exponencial;
- resolver problemas, utilizando a função exponencial;
- resolver equações exponenciais simples.

Atividade

Você deve ter observado que não há números no texto. Em que aspectos você acha que a falta desses dados numéricos prejudicou a compreensão do texto? Você conseguiria apontar onde a falta de números mais prejudicou a compreensão? Por quê?

Registre a seguir suas reflexões.

Questionamentos como esses irão motivar as discussões que faremos nessa unidade.

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 1
Aprendendo um pouco sobre o cálculo de juros compostos

Leon foi à casa de Lara, que teve a maior paciência para explicar o que iria acontecer com o dinheiro que seu amigo depositou na poupança. Como Lara fez isso?

Inicialmente, vamos tentar entender como esse processo funciona. Quando depositamos um valor em uma poupança, o valor disponível (saldo) é alterado de mês em mês. O curioso é que este valor é alterado para cima, ou seja, ganhamos dinheiro sem fazer esforço. A taxa de ganho, a partir da qual é calculado o valor que ganhamos a cada mês, é o que chamamos de taxa de juros. Assim, ao encontrar Leon, Lara considerou algumas coisas importantes: o dinheiro que Leon estava investindo (capital) era de R$ 2.000,00 (dois mil reais) e a taxa de **juros** que a poupança praticava era de 6% ao ano. Isso significa que, ao longo de um ano inteirinho, o dinheiro lá depositado aumentará em 6%.

Juros,

Juro é uma noção utilizada na economia e nas finanças para mencionar a utilidade, o ganho, o valor ou o rendimento de algo.

Você se lembra de como se fazem os cálculos para se determinar 6% de um valor?

Vamos mostrar duas formas:

A primeira utiliza lápis e papel:

Seis por cento significam 6 a cada 100, ou seja, $\frac{6}{100}$. Sendo assim, 6% de algum valor é calcular, $\frac{6}{100} \times (\text{esse valor})$.

Exemplo: 6% de 120

$$\frac{6}{100} \text{x} 120 = \frac{720}{100} = 7{,}20$$

A segunda faz uso de uma calculadora:

Digite a quantia considerada (no caso de Leon, serão 2.000 reais), aperte o botão de multiplicação e em seguida o número decimal 0,06 (que representa seis centésimos, ou seja, 6%). Dessa forma, o número que aparecer no visor da calculadora será o valor desta porcentagem.

A seção de economia dos noticiários faz referência quase diária à Taxa Selic. Você sabe que taxa é essa? Para descobrir o que é, quem a define e qual a importância dessa taxa para a economia e o mercado financeiro, visite o *site* http://blog.investmania.com.br/2012/06/08/afinal-o-que-e-a-taxa-selic/.

Saiba Mais

Importante

Existem duas maneiras de se fazer o cálculo de juros. A primeira delas, que mostramos no exemplo da poupança, é chamada de juros compostos, porque o cálculo dos juros de um mês é feito sobre o valor atualizado, que incorpora os juros do mês anterior. Nesse tipo de cálculo, por assim dizer, são aplicados juros sobre juros. Na outra maneira, chamada de juros simples, os juros são calculados sempre sobre o valor inicial, não levando em conta as atualizações referentes aos juros dos meses anteriores.

Agora é com você! Faça as atividades para entender melhor como se calcula a porcentagem de algum número ou valor monetário.

Atividade 1

Uma pessoa pagará uma conta de 400 reais com atraso. Por essa razão, pagará de multa 2% do valor da conta. Qual o valor da multa? Qual o valor total a pagar?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 2

Vamos lembrar do caso de Leon. O valor de R$ 2.000,00 depositado na poupança irá render 6% de juros ao longo de um ano. Qual quantia estará disponível ao final desse período?

Anote suas respostas em seu caderno

Muito bem! Pelo que percebemos, estamos conseguindo calcular essas porcentagens. Mas, quando se trata de banco e vida financeira, a coisa não fica tão simples assim. O que esta discussão tem a ver com a função exponencial que mencionamos no início? Vamos ver isso logo, logo.

No caso de Leon, vimos que, após um ano, seu saldo na poupança deverá ser de R$ 2.120,00. Porém, se quisermos calcular o valor corrigido ao final do segundo ano, o processo irá se repetir – mas com um detalhe muito importante: não iremos mais calcular 6% de 2.000 reais, pois a taxa da poupança incidirá sobre o saldo corrigido, ou seja, 2.120 reais.

Assim, Leon terá R$ 2.120,00 mais 6% de R$ 2.120,00. Como 6% de R$ 2.120,00 = 0,06x2120= 127,20. Ao final do 2º ano, Leon terá 2120 + 127,20 = R$2247,20. Se quisermos calcular o valor que Leon terá no final do terceiro ano, repetiremos o procedimento, mas desta vez a partir dos R$ 2.247,20 que estavam na caderneta no final do segundo ano. Se quisermos calcular o valor que Leon terá no quarto ano, tomaremos como base o saldo final do terceiro ano, se quisermos calcular o valor do quinto ano, tomaremos como base o saldo do quarto ano e assim por diante.

Poderíamos descobrir o saldo de Leon no ano seguinte, simplesmente multiplicando-se o saldo do ano anterior por 1,06. Veja como isso é equivalente ao que fizemos anteriormente:

Ao final do 1º ano, o saldo era de 2000 acrescido de 6% de 2000, ou seja, 2000 + 0,06x2000. Essa expressão pode ser escrita da forma 2000x(1+0,06), isto é, 2000x1,06, cujo resultado é o mesmo encontrado anteriormente (2120 reais).

A mesma ideia pode ser aplicada para o 2º ano. Para descobrirmos o novo saldo, basta multiplicarmos 2120 por 1,06, obtendo R$2247,20.

Após **n** anos? Qual seria o saldo de Leon? Bastaríamos multiplicar o valor inicial de 2000 reais **n** vezes por 1,06, ou seja, 2000x1,06x1,06x...x1,06 = 2000x1,06n. No caso geral, um valor **C** aplicado por um tempo **n** a uma taxa de juros compostos **i** por unidade de tempo acumulará um montante **M** dado pela fórmula:

$$M = C.(1+i)^n$$

Nesta fórmula, **M** representa o montante (quantia final após a incidência dos juros), **C** é o capital (dinheiro) e a taxa de juros é representada pela letra **i** (vamos sempre utilizar na forma de número decimal). O tempo de investimento é representado pela letra **n**.

Vamos vê-la funcionando?

O capital investido por Leon foi de 2.000 reais e a taxa de juros ao ano foi de 6% = 0,06. O tempo de investimento será de 5 anos.

Dessa forma, temos os seguintes dados:

C = ____________________________

i = ______________________________

n = ____________________________

Aplicando na fórmula, temos:

$M = 2000 \cdot (1 + 0,06)^5$

(Vamos utilizar uma calculadora para facilitar na hora dos cálculos, ok?)

Com isso, temos:

$M = 2000 \,.\, 1,06^5 = 2000 \,.\, 1,33822 = 2676,44$

Viu?! Não é tão difícil! Podemos notar que, neste problema, o valor do montante depende claramente da taxa de juros aplicada, porém, mais importante que isso, da forma como essa taxa incide ao longo do tempo. Como o cálculo de juros de um mês leva em consideração o valor que incorpora os juros do mês anterior, acaba acontecendo um aumento do estilo "bola de neve", um acúmulo recursivo, o que, matematicamente, pode ser modelado pela exponenciação. Por isso, na fórmula que apresentamos, o tempo – representado pela variável **n** – é um expoente. É importante destacar que os juros compostos também são usados para calcular dívidas, como as do cartão de crédito e do cheque especial. O crescimento exponencial dessas dívidas, sempre calculadas sobre o valor atualizado e nunca sobre o valor original, termina surpreendendo os usuários que, de um mês para outro, passam a dever mais do que conseguem pagar. Olho vivo, portanto!

No exemplo anterior, vimos uma situação-problema de crescimento exponencial (o saldo de Leon aumentava com o tempo segundo uma lei que apresenta variável no expoente). Porém, existem situações que apresentam decrescimento exponencial. Veja o seguinte exemplo:

Em um campeonato com 64 clubes, em cada rodada, dois times se enfrentam e o perdedor é eliminado. Dessa forma, passam para a próxima etapa sempre a metade do número de clubes. Quantas rodadas são necessárias para que reste um único clube que receberá o troféu de campeão?

Vamos relacionar o número de clubes ao número de rodadas do campeonato através de uma tabela.

Rodada	Número de clubes
Início do campeonato (0 rodadas)	64
após 1 rodada	32
após 2 rodadas	16
após 3 rodadas	8
após 4 rodadas	4
após 5 rodadas	2
após 6 rodadas	1

A tabela nos mostra que após 6 rodadas teríamos definido o campeão desse torneio. Obtemos o número de clubes para a próxima rodada multiplicando o número de clubes da rodada anterior por 1/2.

Outro caso em que podemos aplicar a função exponencial é inspirado em um filme: *A Corrente do Bem* (*Pay It Forward*, 2000). Este filme conta a história de um menino, Trevor McKinney, que, incentivado por um desafio de seu professor de Estudos Sociais, cria um jogo chamado *A Corrente do Bem*.

Veja o pôster do filme:

Para assistir ao trailer do filme *A Corrente do Bem*, acesse http://mais.uol.com.br/view/57032.

A Corrente do Bem relata a história de alguém que ajuda três pessoas a realizar algo muito importante, mas que elas não podem fazer sozinhas. Em gratidão, a pessoa auxiliada deve retribuir a gentileza para outras três pessoas, que, por suas vezes, devem continuar retribuindo da mesma forma, infinitamente...

Vale muito a pena assistir a este filme. Mas também vale muito a pena perceber como essa corrente propaga-se rapidamente! Vejamos:

1ª etapa: Uma pessoa presta auxílio para outras três.

2ª etapa: Cada uma dessas três pessoas auxiliam outras três. Com isso, 3x3 = 9.

3ª etapa: Cada um dos 9 auxiliados da etapa anterior auxilia outras três pessoas. Isto é, 9 x 3 = 27.

E assim por diante.

Resumindo, nós teremos a seguinte configuração:

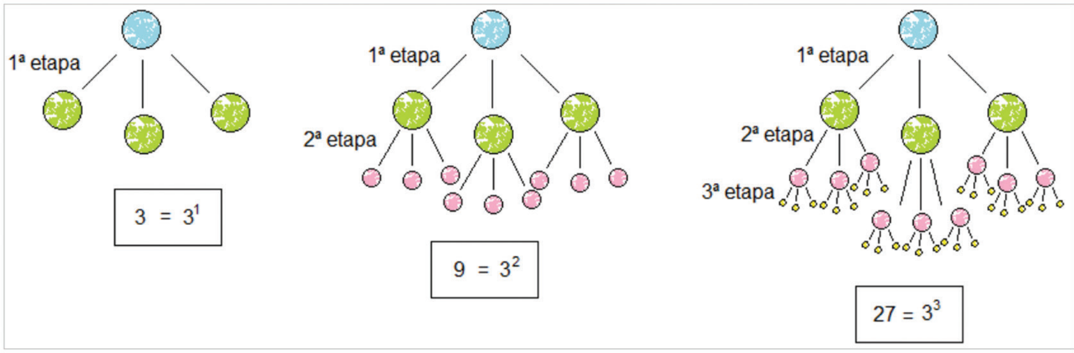


Figura 1: Podemos notar que na Corrente do Bem o número de pessoas auxiliadas a cada etapa aumenta rapidamente. Além disso, a quantidade de pessoas é sempre uma potência de 3.
Fonte: do autor

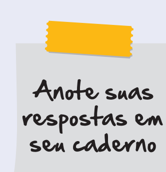
Vamos verificar essa situação, colocando as informações em uma tabela:

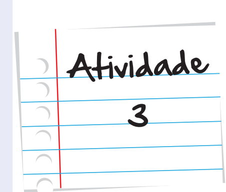
Etapa	Nº de pessoas auxiliadas nesta etapa
1	3
2	$3^2 = 9$
3	$3^3 = 27$
4	$3^4 = 81$
5	...
...	$3^{10} = 59.049$
n	...

Observe que o número de pessoas auxiliadas é igual a 3 elevado ao número da etapa. Dessa forma, numa etapa n qualquer teremos 3^n pessoas ajudadas.

Sendo assim:

Quantas pessoas serão auxiliadas na 7ª etapa da Corrente do Bem?





Atividade 4

Em uma etapa da Corrente do Bem foram auxiliadas 729 pessoas. Em que etapa isso ocorreu? Escreva a equação que representa o problema e resolva-a.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 5

Um casal resolveu encontrar uma maneira de calcular o número de ascendentes que tinham conjuntamente. Então, seguiram esta linha de raciocínio:

	Número de membros da geração
1ª geração: casal	$2 = 2^1$
(2 pais e 2 mães)	$4 = 2^2$
3ª geração: avôs + avós (4 avôs e 4 avós)	$8 = 2^3$

a. Qual o número de membros da 6ª geração?

b. Qual o número de membros da geração de número n?

c. Escreva a função exponencial que descreve o problema.

d. Em qual geração teremos 2.048 membros?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 6

A atividade anterior nos dá uma dica de como devemos resolver as equações exponenciais, que são equações que apresentam incógnita no expoente. Uma dica para resolver equações desse tipo é tentar escrever ambos os membros da equação como potências de mesma base. Para isso, usamos as propriedades das potências. Veja o seguinte exemplo:

Ex: Resolva, em IR, a equação $3^x = 81$.

Como $81 = 3^4$, temos $3^x = 3^4$. Desse modo, $x = 4$ é a solução dessa equação.

Agora é sua vez, resolva em IR, as seguintes equações:

a. $2^x = 256$

b. $5^x = 125$

c. $5.4^x = 80$

d. $5.2^x - 3.2^x = 32$

Anote suas respostas em seu caderno

Os exemplos apresentados até o momento relacionavam duas grandezas por uma expressão que apresenta variável no expoente. Definimos, então, a função exponencial:

Definição: Chama-se função exponencial toda função *f* de variável real dada por $f(x)= a^x$, em que a é um número real dado, tal que $a > 0$ e $a \neq 1$. Este número a é chamado de base.

Inicialmente, você poderia pensar: Mas por que o a tem de ser positivo e diferente de 1? A resposta a esta pergunta seria:

- Primeiro que, se $a < 0$, nem sempre a expressão a^x representaria um número real. Por exemplo, se $a = -5$ e

$x = \frac{1}{2}$, o número $(-5)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-5}$ não é real.

- Se $a = 0$, teríamos:

Quando $x > 0$, $y = 0^x = 0$ – Função constante.

Quando $x < 0$, não se define 0^x (por exemplo, $0^{-6} = \frac{1}{0^6} = \frac{1}{0}$).

Quando $x = 0$, $y = 0^0$. Indeterminado.

- Se $a = 1$, para todo $x \in R$, a função dada por $y = 1^x = 1$ é uma função constante.

Por estes motivos, apenas utilizamos em nossa definição $a > 0$ e $a \neq 1$. Além disso, a função exponencial só assume valores reais positivos. Dessa forma, o conjunto-imagem dessa função é R*+

Seção 2
Analisando gráficos

Uma parte importante no estudo de funções é o estudo e análise de seus respectivos gráficos. Como no momento estamos trabalhando com funções exponenciais, vamos construir dois gráficos e retirar algumas conclusões?

Construiremos os gráficos a seguir, localizando alguns pontos e ligando-os:

A primeira função cujo gráfico vamos traçar é a função $y = 2^x$. Vamos fazer uns cálculos?

Para $x = -3$, temos $y = 2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

Para $x = -2$, temos $y = 2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Para $x = -1$, temos $y = 2^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$

Para $x = 0$, temos $y = 2^0 = 1$

Para $x = 1$, temos $y = 2^1 = 2$

Para $x = 2$, temos $y = 2^2 = 4$

Para $x = 3$, temos $y = 2^3 = 8$

E, ligando os pontos, temos o seguinte gráfico:

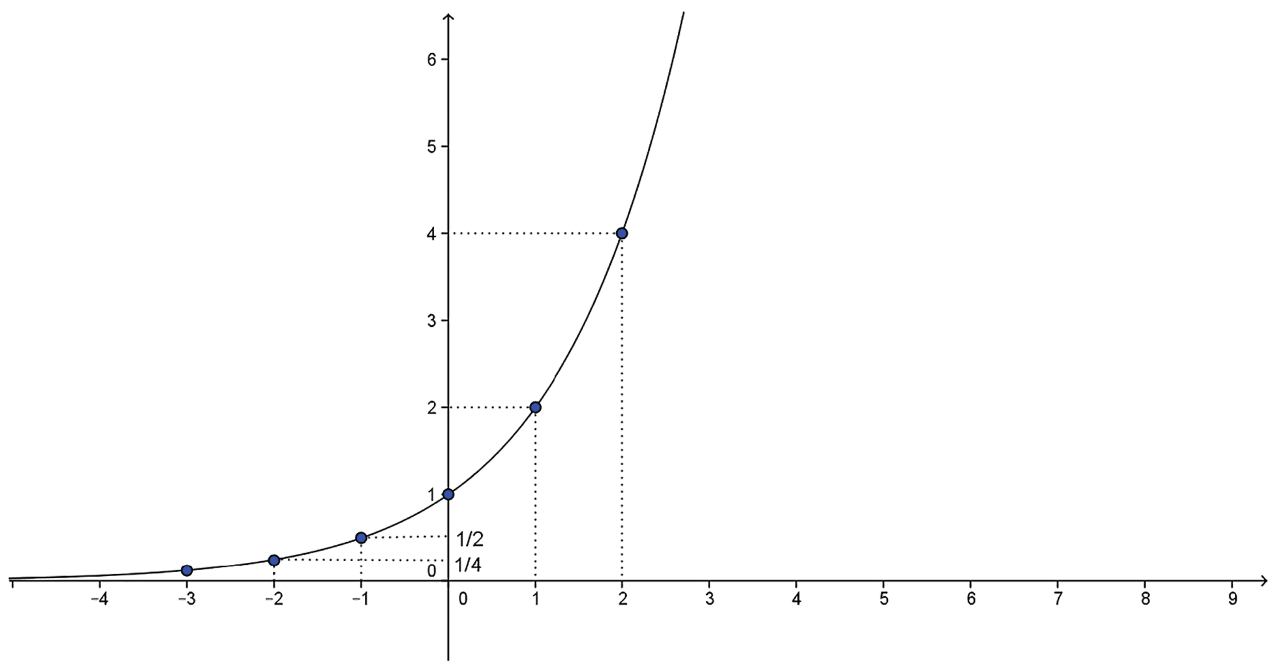


Gráfico 1: $y = 2^x$. Este gráfico foi feito por um computador. Podemos perceber que, à medida que os valores de x vão crescendo, o valor de y também cresce rapidamente. Essa função é crescente!

Vamos desenhar o gráfico de uma outra função, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ Faremos mais uns cálculos!

Para x = – 3, temos $y = 2^3 = 8$

Para x = – 2, temos $y = 2^2 = 4$

Para x = – 1, temos y = 2

Para x = 0, temos y = 1

Para x = 1, temos $y = \frac{1}{2}$

Para x = 2, temos $y = \frac{1}{4}$

Para x = 3, temos $y = \frac{1}{8}$

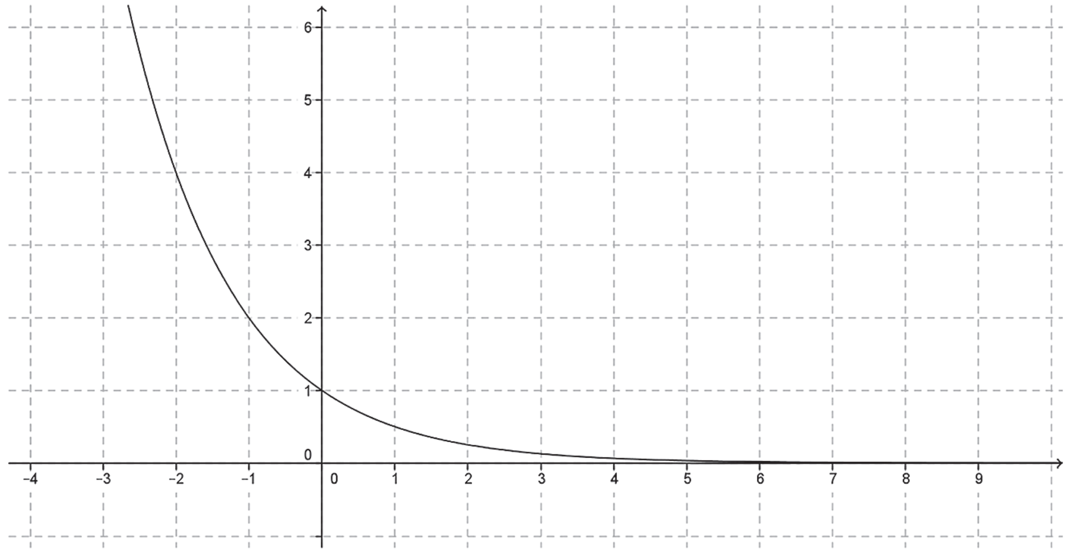


Gráfico 2: $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$. Este gráfico também foi feito por um computador. Podemos perceber da mesma forma que, à medida que os valores de x crescem, o valor de y vai caindo (a função é decrescente) rapidamente.

Vocês perceberam que, apesar de a primeira função ser crescente e a segunda ser decrescente, as duas curvas passam pelo ponto (0, 1)? Vocês saberiam explicar por qual motivo isso ocorre? É simples! Uma das propriedades de potências é que qualquer número (diferente de zero) elevado a zero é sempre igual a 1.

Outra propriedade interessante: vocês saberiam dizer o que faz com que a primeira função seja crescente e a segunda decrescente? Vou dar uma dica: as funções $y = \left(\dfrac{2}{7}\right)^x$, $y = \left(\dfrac{5}{16}\right)^x$ e $y = 0{,}1^x$ são todas decrescentes. Já as funções $y = \left(\dfrac{5}{2}\right)^x$, $y = \left(\dfrac{113}{9}\right)^x$ e $y = (11)^x$ são todas crescentes. Descobriu? Muito bem: se o número elevado ao expoente for maior que 1, a função será crescente. Já se este número estiver entre 0 e 1, a função será decrescente. Os motivos de ter falado "entre 0 e 1" e não "menor que 1", como seria de se esperar, ficarão mais claros a seguir.

Importante

Acesse o endereço (http://www.igm.mat.br/profweb/sala_de_aula/mat_computacional/alunos/neru/exponencial_1.htm) e, no applet que surgirá, faça variar o valor do número que será elevado ao expoente – no caso, chamado de "a". O que acontece quando ele é igual a 1?

Importante

Os dois gráficos que traçamos permitem-nos perceber, de maneira mais informal, o que seriam funções crescentes (à medida que x aumenta, y aumenta) e decrescentes (à medida que x aumenta, y diminui). Mais formalmente, uma função é dita crescente quando para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes ao domínio tais que $x_1 < x_2$, temos que $f(x_1) < f(x_2)$. E dizemos que uma função é decrescente quando, para quaisquer x_1 e x_2 pertencente ao domínio tais que $x_1 < x_2$, temos que $f(x_1) > f(x_2)$.

Resumo

- A função exponencial pode modelar situações importantes da nossa vida, como o cálculo de juros compostos e alguns tipos de crescimento populacional.
- Uma equação exponencial simples pode ser facilmente solucionada por meio da comparação entre as bases e os expoentes.
- Uma função exponencial possui um domínio real, porém um contradomínio real positivo. Além disso, a base deve ser positiva e, ao mesmo tempo, diferente de 1.
- Os gráficos de uma função exponencial podem ser crescentes se a base da função for maior que 1 ou decrescentes se a base estiver entre 0 e 1.

Veja ainda

Para quem gosta de brincar com números, visite o *blog* Matemática na Veia em http://matematica-na-veia.blogspot.com.br/2010/06/curiosidades-da-aritmetica-calendarios.html

Neste *site*, há uma discussão muito interessante sobre o uso das potências nos calendários e muitos outros truques divertidos que envolvem as potências. Divirtam-se!

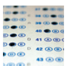
Referências

- http://matematica-na-veia.blogspot.com.br/2010/06/curiosidades-da-aritmetica-calendarios.html. Acesso em: 10 jul. 2012.
- ZAGO, Glaciete Jardim; Walter AntonioSciani. **Exponencial e Logaritmos**. 2ª ed. São Paulo: Érika. Estude e Use, 1996. 95p.

Imagens

- http://www.sxc.hu/photo/475767

- http://www.sxc.hu/photo/912245



- http://www.sxc.hu/photo/517386

- http://www.sxc.hu/985516_96035528

Respostas das Atividades

Atividade 1

O valor de 2% pode ser representado pelo número decimal 0,02. Com isso, podemos efetuar o seguinte cálculo para determinarmos o valor da multa:

400 x 0,02 = 8 reais.

Logo, o valor total a pagar é: 400 + 8 = 408 reais.

Atividade 2

Efetuamos o produto 2.000 x 0,06 = 120 reais. Adicionando os juros aos 2.000 reais iniciais, Leon terá 2.120 reais.

Atividade 3

A função que descreve a Corrente do Bem é $y = 3^x$, onde y representa a quantidade de pessoas auxiliadas por etapa e x representa as etapas.

Com isso, na 7ª etapa, teremos x = 7. Logo, $y = 3^7 = 2.187$ pessoas.

Atividade 4

Neste caso, temos que y = 729. Sendo assim, $3^x = 729$.

Sabemos, através da fatoração, que $729 = 3^6$. Com isso, $3^x = 3^6$.

Concluímos, portanto, que x = 6 (6ª etapa).

Atividade 5

Eles perceberam que a lei de formação do número de membros da geração (y) em função do número da geração (x) era: $y = 2^x$.

Poderíamos fazer perguntas do tipo: Em qual geração o número de ascendentes que o casal teve corresponde a 2048?

Para resolver este problema, bastaria descobrir x tal que $2^x = 2048$. Este tipo de equação que apresenta incógnita no expoente de pelo menos uma de suas potências é o que chamamos de equação exponencial.

Respostas das Atividades

Vamos ver agora como resolver uma equação exponencial. Bem, um método que utilizamos para resolver equações exponenciais consiste em reduzir ambos os membros da equação à potência de uma mesma base a ($0 < a \neq 1$) e, daí, aplicar a propriedade:

$$a^{x}{}_{1} = a^{x}{}_{2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Quando podemos aplicar isso, a equação exponencial é facilmente reduzida, ou seja, informalmente falando, basta colocarmos as potências na mesma base, pois, se as bases forem iguais, para que as potências sejam iguais, basta que os expoentes sejam iguais.

No exemplo das gerações, onde tínhamos que resolver a equação $2^x = 2048$, agora fica bem simples, pois para colocar as potências na mesma base basta escrevermos 2048 na base 2, mas como? Basta fatorar o 2048! Observe:

2048	2
1024	2
512	2
256	2
128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	$2.2.2.2.2.2.2.2.2.2.2 = 2^{11}$

Daí, temos que $2^x = 2^{11}$. Pelo método que comentamos anteriormente, concluímos que $x = 11$ e, portanto, 2048 corresponde a 11ª geração.

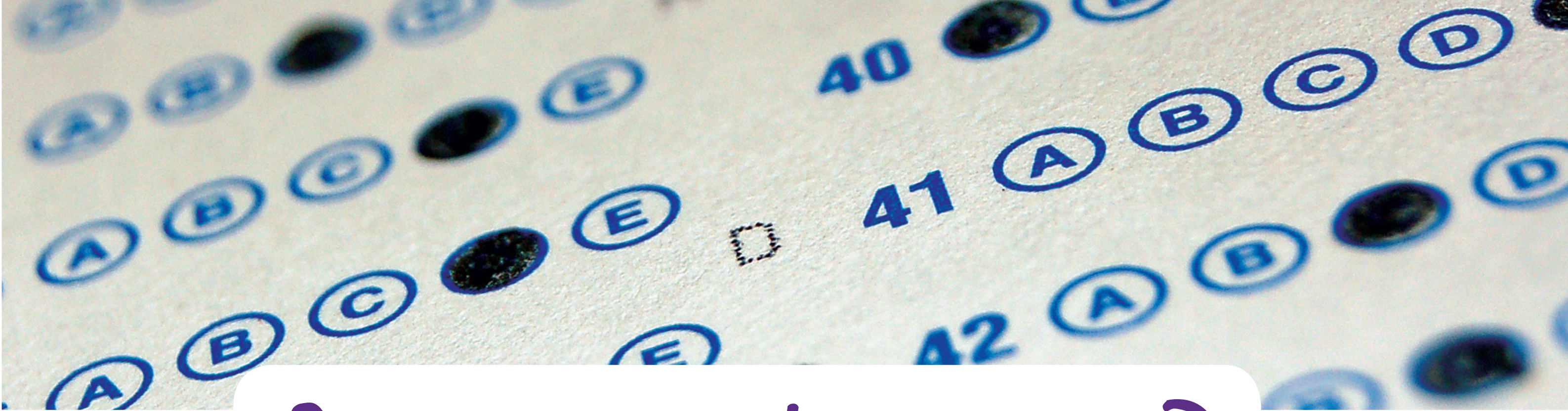
Atividade 6

a. $2^x = 256 \text{ -> } 2^x = 2^8 \text{ -> } x = 8$

b. $5^x = 125 \text{ -> } 5^x = 5^3 \text{ -> } x = 3$

c. $5.4^x = 80 \text{ -> } 4^x = 80/5 \text{ -> } 4^x = 16 \text{ -> } 4^x = 4^2 \text{ -> } x = 2$

d. $5.2^x - 3.2^x = 32 \text{ -> } 2.2^x = 32 \text{ -> } 2^{x+1} = 2^5 \text{ -> } x+1 = 5 \text{ -> } x = 4$



O que perguntam por aí?

Unesp – 2002

A trajetória de um salto de um golfinho nas proximidades de uma praia, do instante em que ele saiu da água ($t = 0$) até o instante em que mergulhou ($t = T$), foi descrita por um observador através do seguinte modelo matemático $h(t) = 4t - t \cdot 2^{0,2t}$, com t em segundos, $h(t)$ em metros e $0 \leq t \leq T$. O tempo, em segundos, em que o golfinho esteve fora da água durante este salto foi:

a. 1
b. 2
c. 4
d. 8
e. 10

Resposta: Letra E.

Comentário: O instante $t = 0$ é o momento em que o golfinho saiu da água, e o instante $t = T$ é o exato momento em que o golfinho retorna à água. Nesses dois momentos, a altura do golfinho em relação ao nível da água é igual a zero, pois não está nem sob e nem sobre a água. Com isso, temos que:

$$4t - t.2^{0,2t} = 0$$

$$t.(4 - 2^{0,2t}) = 0$$

Temos duas possibilidades:

1ª possibilidade: $t = 0$ (Já esperávamos por essa possibilidade, pois é o momento inicial em que o golfinho sai da água para efetuar o salto.)

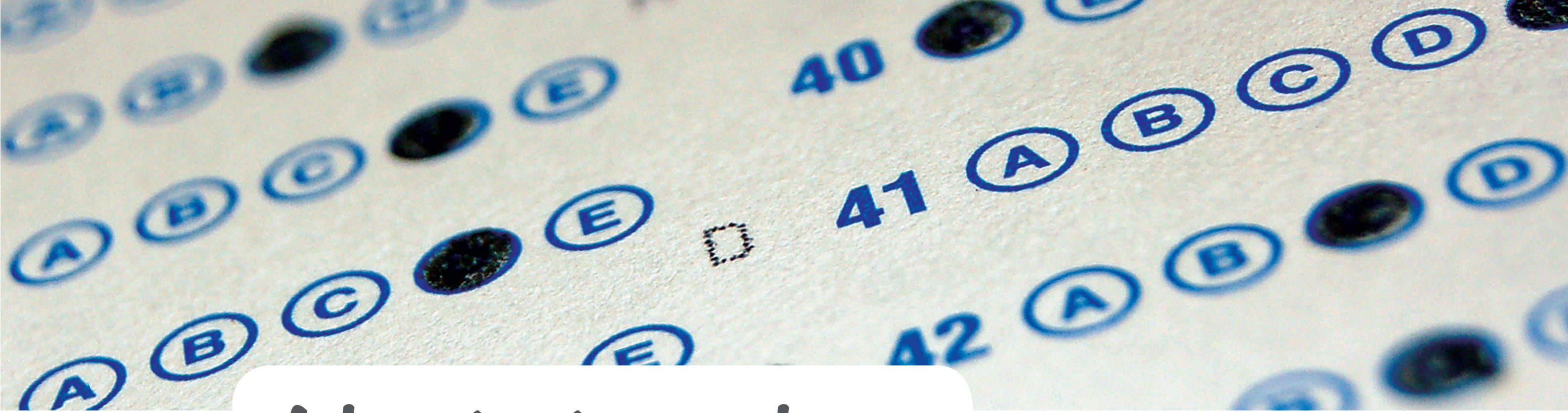
2ª possibilidade: $4 - 2^{0,2t} = 0$

Assim, $2^{0,2t} = 4$

$2^{0,2t} = 2^2$

Logo, $0,2t = 2$

Então, $t = \dfrac{2}{0,2} = 10$ segundos.



Atividade extra

Exercício 1

O capital de R$ 2.000,00 foi aplicado à taxa de 2% ao mês durante um ano.

Qual foi, em reais, o montante gerado por essa aplicação?

(a) 2356,48 (b) 2463,84 (c) 2536,48 (d) 2563,48

Exercício 2

Uma dívida de R$ 750,00 foi paga 6 meses depois de contraída a uma taxa de 8% ao mês.

Qual o valor total pago, em reais?

(a) 1190,16 (b) 1090,51 (c) 1109,15 (d) 1090,15

Exercício 3

O valor de R$ 15.000,00 foi depositado em poupança a uma taxa de juro de 1,7% a.m. durante um ano.

Qual o valor, em reais, resgatado após esse ano?

(a) 16382,69 (b) 18362,96 (c) 17361,48 (d) 18632,62

Exercício 4

Um censo identificou que a quantidade de habitantes de uma cidade é dada por $P(r) = 3.2^{3r}$, onde r é o raio a partir do centro.

Qual o número de habitantes em um raio de 3 km do centro desta cidade?

(a) 1356 (b) 1336 (c) 1536 (d) 1365

Exercício 5

Em determinadas condições, o número de bactérias de uma cultura cresce em função do tempo, obedecendo à seguinte função $\beta(t) = 3^{\frac{t}{6}}$, sendo t o tempo medido em horas.

Qual a quantidade de bactérias nessa colônia após 2 dias?

(a) 6561 (b) 6516 (c) 5661 (d) 5561

Exercício 6

Suponhamos que a população de uma certa cidade seja estimada, para daqui a x anos, por $f(x) = 20000 - \frac{1}{2^x} . 1000$.

Qual a população referente ao terceiro ano?

(a) 18.975 (b) 19.775 (c) 18.675 (d) 19.875

Exercício 7

Uma população inicial de 8 bactérias duplica-se a cada hora. Qual função representa o crescimento do número de bactériasemfunção do tempo?

(a) $f(x) = 2^{3+x}$ (b) $f(x) = 2^{3x}$ (c) $f(x) = 2^{3-x}$ (d) $f(x) = 2^x$

Exercício 8 (Vunesp)

A lei $Q(t) = K2^{-0,5t}$ descreve comoumasubstância decompõe-se em função do tempo t em minutos, K é uma constante e $Q(t)$ indica a quantidade da substância, em gramas, no instante t. Os dados desse processo de decomposição são mostrados no gráfico.

Qual o instante de tempo que a quantidade de substância atinge a marca de 512 gramas?

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

Exercício 9

Considere um capital de R$ 10.000,00 aplicado a uma taxa de 12% ao ano durante 4 anos.

Qual seria o montante, em reais, ao final dessa aplicação?

(a) 10.735,20 (b) 13.335,20 (c) 15.375,20 (d) 15.735,19

Exercício 10

Uma população de coelhos cresce em função do tempo, obedecendo à função exponencial $f(t) = 2^{1+t}$, sendo t medido em semanas.

Em quantas semanas essa população será de 512 coelhos?

(a) 9 (b) 8 (c) 7 (d) 6

Exercício 11

Entre vários fatores que aumentam o risco de acidente de automóvel estão: as condições atmosféricas adversas, o mau estado do piso, o consumo de álcool, etc. Um fator importantíssimo é o número de horas no volante sem interrupção para descanso. Admita que a função $r(t) = 2^t - 1$ traduza, em %, o agravamento do risco, ou seja, da probabilidade de acidente depois de t horas a conduzir sem interrupção. Suponhamos que o domínio desta função é o intervalo [0, 6].

Qual o agravamento de risco de acidente ao fim de quatro horas a conduzir sem interrupção?

Exercício 12

Espera-se que o número de aparelhos vendidos de um novo modelo de telefone celular após x meses depois do lançamento em 1 de Janeiro de 2010, seja dado por: $v(x) = 3^{x+2} - 9$.

Quando deve ser atingida a venda de 6552 aparelhos?

Exercício 13

Uma colônia de bactérias cresce a um ritmo de 5% por hora e inicialmente a contagem era de 2.000 bactérias.

Qual função representa este crescimento?

Exercício 14

A função $f(x) = 300.2x - 300$ fornece o número de pessoas que já viram um certo anúncio x dias depois de sua primeira exibição na televisão.

Qual o número de dias necessários para que o anuncio seja visto por mais de 306.900 pessoas?

Exercício 15 (UFRS)

O patrimônio de uma empresa, em reais, em função de t anos é dado por: $f(t) = 36.000 \cdot 3^{t-1}$.

Qual o patrimônio dessa empresa após 4 anos?

Gabarito

Exercício 1

A B C D

○ ○ ● ○

Exercício 2

A B C D

● ○ ○ ○

Exercício 3

A B C D

○ ● ○ ○

Exercício 4

A B C D

○ ○ ● ○

Exercício 5

A B C D

● ○ ○ ○

Exercício 6

A B C D

○ ○ ○ ●

Exercício 7

A	B	C	D
●	○	●	○

Exercício 8

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 9

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 10

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 11

Basta calcular $r(4)$. Fazendo as contas obtém-se 15.

Exercício 12

Em julho.

Exercício 13

Como a colônia de bactérias cresce a uma taxa de 5%, seu crescimento é descrito por $(1 + 0,05)^t$. E como a população inicial era 2.000 a função que descreve o total de bactérias em função do tempo é: $f(t) = (1 + 0,05)^t$.

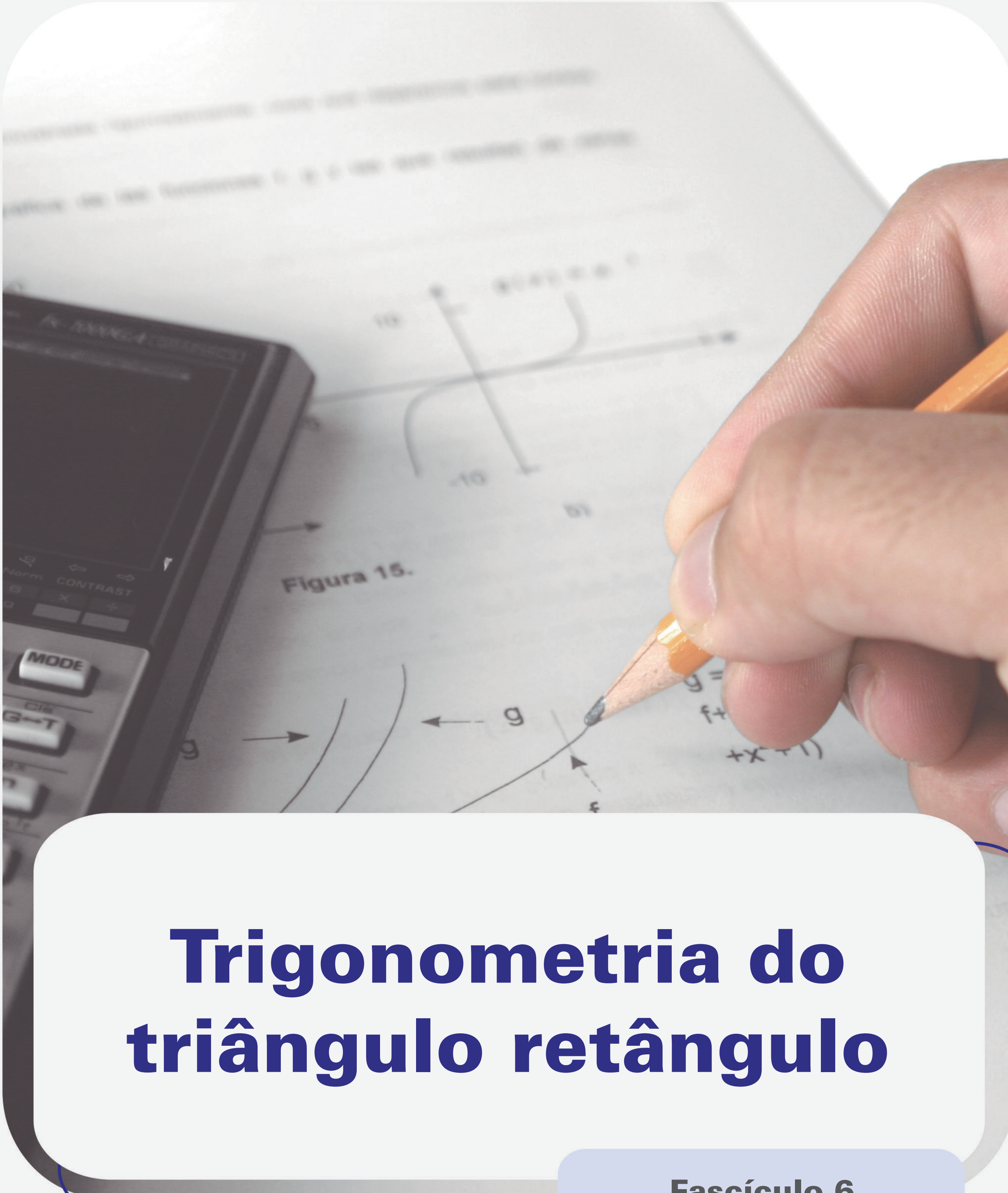
Exercício 14

Pelos dados do enunciado o número x de dias deve satisfazer f (x) = 306.900, ou seja, $300.2^x - 300 = 306.900$

Resolvendo obtém-se x = 10.

Exercício 15

Pelos dados do enunciado basta calcular $f(4)$. Assim, $f(4) = 36.000 \cdot 3^{4-1} = 36.000 \cdot 27$ Portanto o patrimônio da empresa será de x = 972.000,00.



Trigonometria do triângulo retângulo

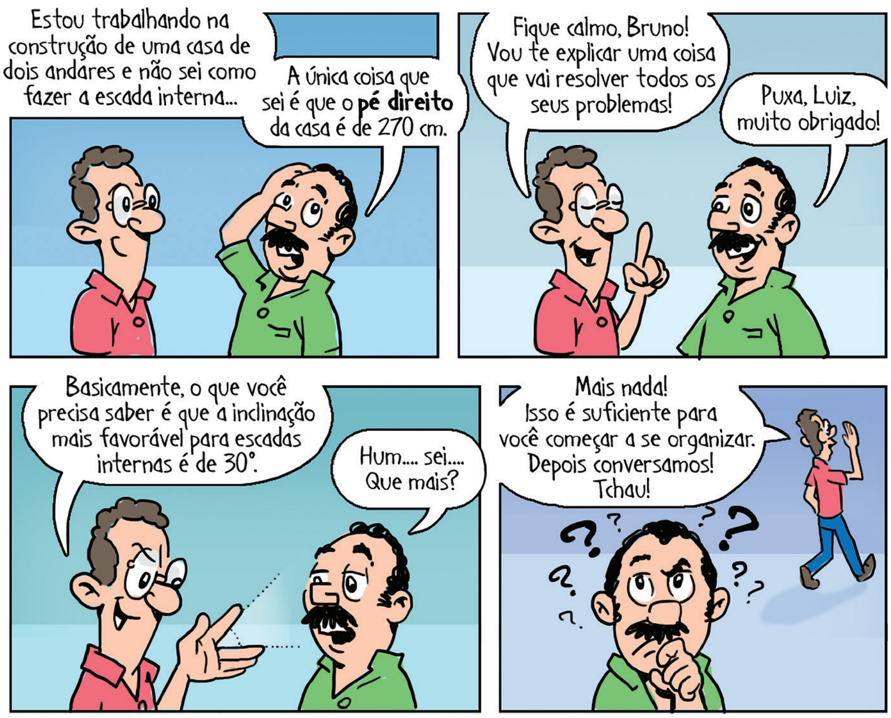
Fascículo 6

Unidade 19

Fundação CECIERJ

Trigonometria do triângulo retângulo

Para início de conversa...



Pé direito

É a altura entre os dois andares.

Você conhece alguém que já passou por esse problema? Será que Bruno tem, de fato, a informação de que precisa para solucionar o problema? Saber que a inclinação ideal para uma escada interna é de 30º e que o pé-direito da casa é de 270 cm, é suficiente para calcular o comprimento da escada?

Nesta unidade, você aprenderá a utilizar o triângulo retângulo para resolver problemas do cotidiano, trabalhar com as razões trigonométricas no triângulo retângulo e utilizará os teoremas do seno e cosseno em situações diversas.

Objetivos de aprendizagem

- Utilizar as razões trigonométricas para calcular o valor do seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60°
- Resolver problemas do cotidiano, envolvendo as razões trigonométricas.
- Utilizar os teoremas do seno e do cosseno, para resolver problemas variados.

Seção 1
O Triângulo Retângulo e as Razões Trigonométricas

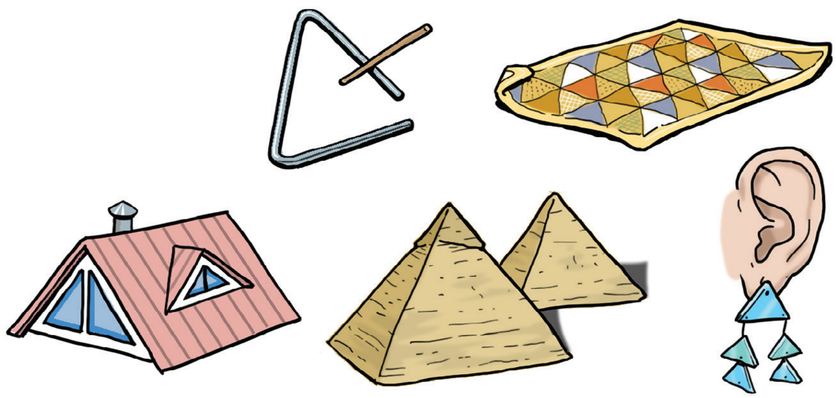
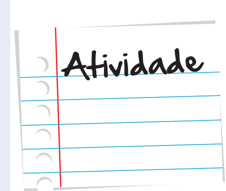


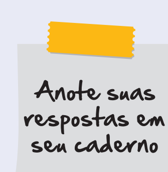
Figura 1: Alguns exemplos do uso de triângulos no nosso dia a dia. Podemos perceber que esta figura geométrica aparece em várias situações desde construções, maquetes a brincos e instrumentos musicais.

Se observarmos o ambiente a nossa volta neste momento, poderemos identificar várias formas geométricas, dentre elas, o triângulo. Vamos tentar?

Interrompa sua leitura nesse momento. Olhe ao redor. Se quiser, levante-se e dê uma volta pelo lugar onde você está. Quantos triângulos você consegue observar? Você poderia dizer que todos eles têm as mesmas características ou você identifica alguma diferença entre eles? Se quiser, copie a tabela a seguir em seu caderno ou em uma folha à parte, para ajudar em sua investigação.



Triângulo	Quantidade observada	Onde encontrei?	Característica
Tipo 1			
Tipo 2			



Agora veja a definição a seguir:

Um triângulo que possui um ângulo de 90º (reto) é chamado de Triângulo Retângulo.

Triângulos retângulos são figuras geométricas muito mais comuns no nosso dia a dia do que imaginamos. Eles estão presentes nas mais diferentes situações. A figura abaixo mostra algumas delas. Será que algum dos objetos mostrados é igual a um dos triângulos que você encontrou?

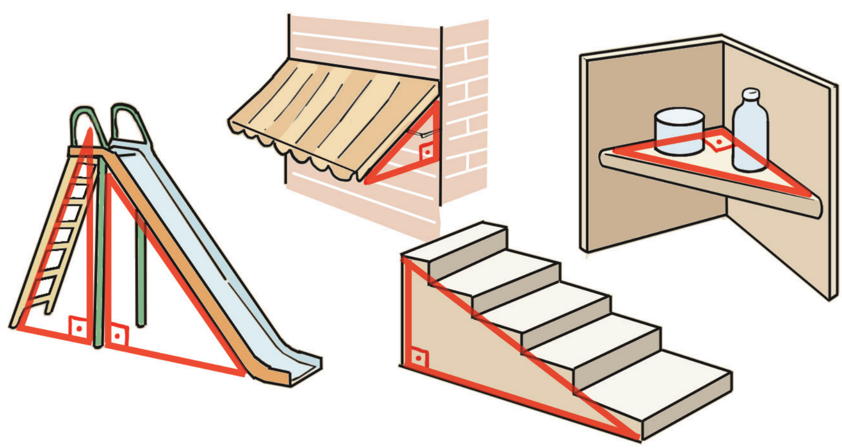
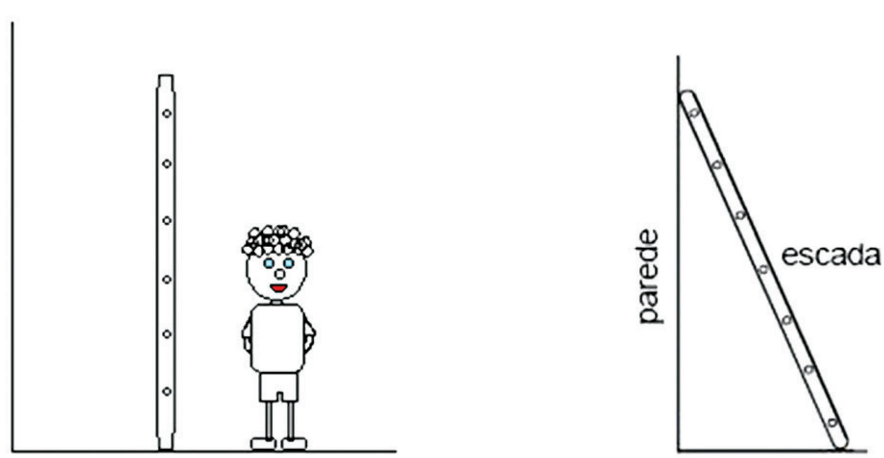


Figura 2: Alguns exemplos de objetos que possuem o formato ou que nos permitem enxergar triângulos retângulos. Você não acha que esses triângulos são muito mais comuns do que você imaginava?

Além de estarem presentes em nossas casas, nosso trabalho, em ambientes fechados e abertos, triângulos retângulos podem nos ajudar a resolver problemas importantes para nossa vida diária, tais como o do pedreiro Bruno.

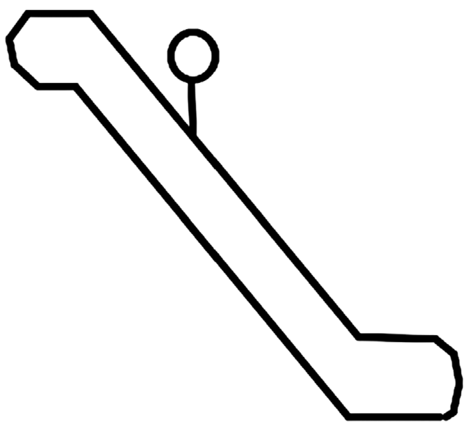
Mas de que forma isso poderia acontecer?

Observe a imagem a seguir. Na primeira figura, um homem irá apoiar uma escada de madeira em uma parede. A figura ao lado, mostra como a escada fica. Você nota a presença de alguma figura geométrica?



Você consegue observar a mesma figura nesta imagem?

E nesta representação de uma escada rolante? Ficou mais difícil?



Se prestarmos atenção aos triângulos retângulos, verificaremos que os ângulos de 30º, 45º e 60º são muito comuns.

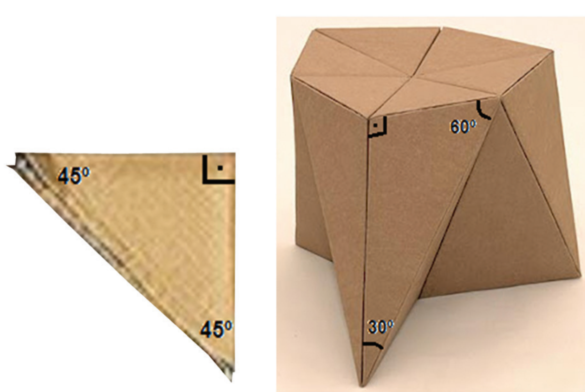


Figura 3: **Um guardanapo de pano, dobrado em quatro partes, determina um triângulo retângulo, contendo o ângulo de 45º. Da mesma forma, o origami exibe alguns triângulos. Em destaque, um triângulo retângulo com os ângulos de 30º e 60º.**

Tal como a atividade anterior, na figura a seguir, podemos perceber a presença de um triângulo retângulo que vai nos auxiliar a entender melhor como Bruno vai solucionar esse problema.

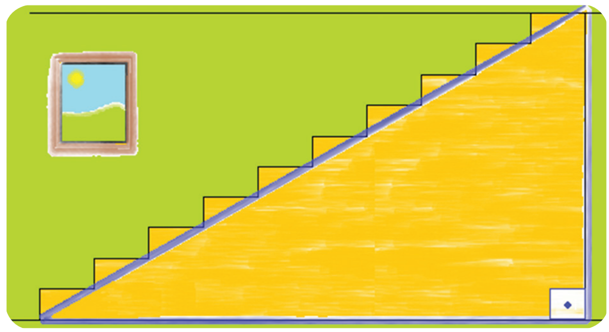


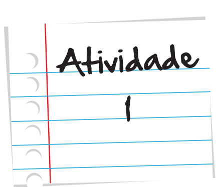
Figura 4: Com essa figura, fica fácil ver o triângulo retângulo, fica fácil ver que o pé-direito da casa é um dos lados do triângulo e que o comprimento da escada é o outro lado, certo? Mas ainda não ficou claro como essas informações vão ajudar Bruno a descobrir qual o tamanho da escada que deve construir!

Diante disso, vamos entender de que forma a **trigonometria** aplicada nesses casos pode nos ajudar a resolver o problema de Bruno.

Trigonometria

É um ramo da Matemática que estuda as relações entre os lados e os ângulos de um triângulo.

Para isso, vamos fazer a atividade a seguir.

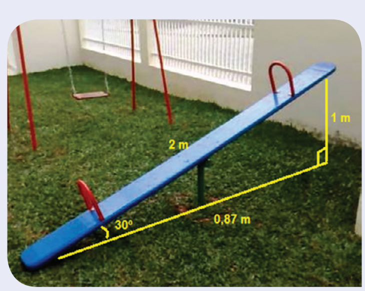


Observe os triângulos abaixo e faça o que se pede:

Todos são triângulos ________________, pois possuem um ângulo de 90º. Além disso, em todos há um ângulo de 30º.

Calcule o quociente entre a medida do lado oposto ao ângulo de 30º e a medida do oposto ao ângulo de 90º em cada um dos triângulos.

a.



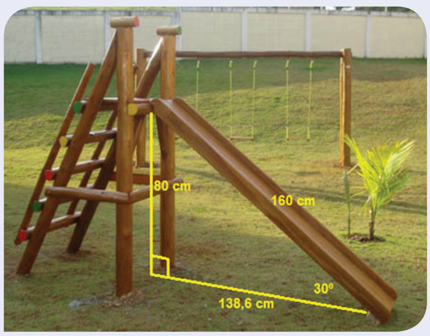
Atividade 1

O lado oposto ao ângulo de 30º mede ______________. Já o lado adjacente a este mesmo ângulo mede ______________. Não confunda com o lado oposto ao ângulo de 90º que mede ________________.

Agora, calcule a razão (quociente) entre a medida do lado oposto ao ângulo de 30º e o oposto ao ângulo de 90º.

$$\frac{\textit{lado oposto ao ângulo de } 30^\circ}{\textit{lado oposto ao ângulo de } 90^\circ} = \_\_\_\_\_$$

b.



O lado oposto ao ângulo de 30º mede ___ ____. Já o lado adjacente a este mesmo ângulo mede _____. Não confunda com o lado oposto ao ângulo de 90º que mede _____.

Agora, calcule a razão (quociente) entre a medida do lado oposto ao ângulo de 30º e o oposto ao ângulo de 90º.

Com essa atividade, percebemos que a razão (quociente) entre o lado do triângulo oposto ao ângulo de 30º e o oposto ao de 90º tem sempre o mesmo valor. Esse valor é _______________.

Anote suas respostas em seu caderno

Observe a figura:

Você sabia que nos triângulos retângulos, o lado que se opõe ao ângulo de 90º (ângulo reto) é chamado de Hipotenusa e os demais lados são chamados de Catetos? Como há dois catetos no triângulo, um deles estará em uma posição oposta ao ângulo agudo x e, por isso, será chamado de cateto oposto e o outro será o cateto adjacente (vizinho) ao ângulo.

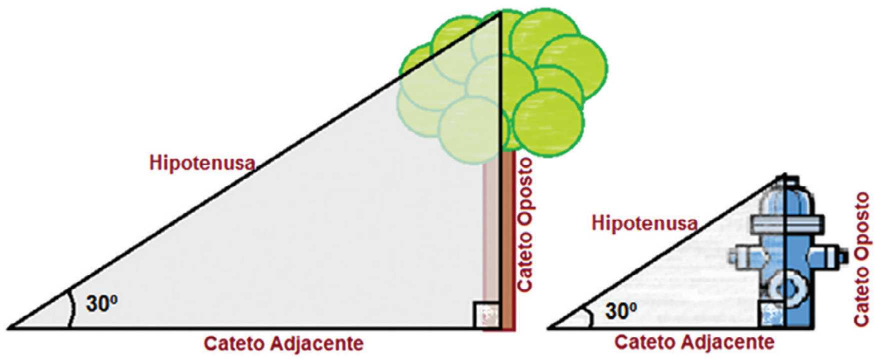


Figura 5: Representações de triângulos retângulos, seus catetos e a hipotenusa. Utilizamos nas duas figuras o ângulo de 30º, mas os nomes dos lados são usados em quaisquer triângulos retângulos.

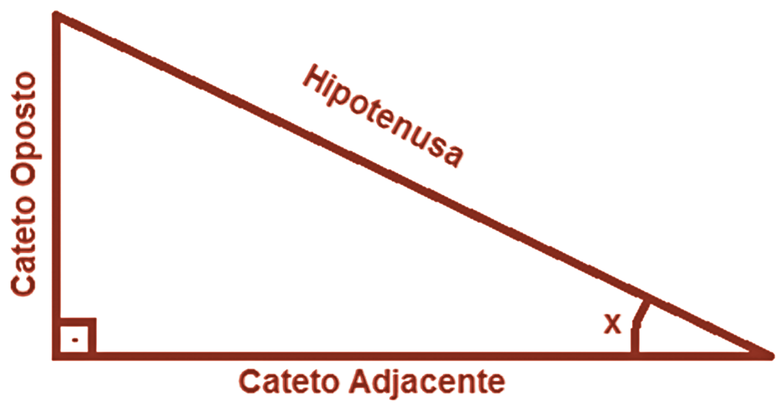


Figura 6: Triângulo retângulo, a hipotenusa e os catetos. O ângulo de 30º foi substituído pelo ângulo x que representa qualquer medida de ângulo.

Pessoal, acho que agora já temos todas as informações necessárias para auxiliar nosso amigo Bruno. Naquela ocasião, vimos que a escada deveria ter uma inclinação de 30º em relação ao solo e que o pé direito da casa (a altura entre os andares da casa) era de 270 cm. Sendo assim, temos a seguinte figura:

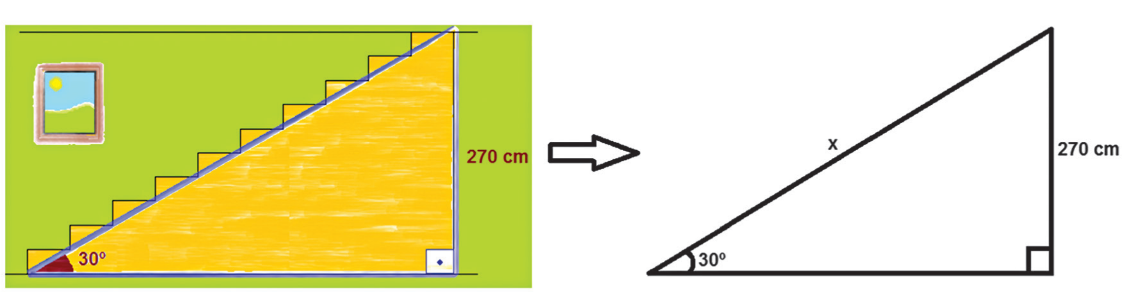


Figura 7: A escada a ser construída por Bruno, o pedreiro. Nesta figura, vemos um triângulo retângulo com o ângulo de 30º indicado, além do cateto oposto a ele com 270 cm de comprimento.

Podemos verificar que o cateto oposto ao ângulo de 30º é o 270. E o comprimento x é a hipotenusa do triângulo. Como poderemos calcular o comprimento x da escada?

Para resolvermos o problema de Bruno, vamos nos lembrar da atividade 1 onde pudemos trabalhar com triângulos semelhantes a este. Naquela ocasião, percebemos que a razão entre o cateto oposto ao ângulo de 30º e a hipotenusa (lado oposto ao ângulo de 90º) sempre vale $\frac{1}{2}$.

Vamos utilizar essa dica e as informações dadas no problema para calcularmos a medida x:

$$\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{270}{x}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{270}{x}$$

$$x = 270 \cdot 2$$

$$x = 540\,cm$$

Com isso, verificamos que a escada terá 540 cm de comprimento. Este valor será aproximadamente a medida do corrimão da escada. Além disso, se pensarmos que cada degrau tem 18 cm de altura, então a escada terá 270 ÷ 18 = 15 degraus.

Agora, desejamos um bom trabalho ao nosso amigo Bruno e vamos seguir o nosso caminho.

Vimos até o momento que a razão entre o cateto oposto ao ângulo de 30º e a hipotenusa é sempre igual a ½. Mas, não é só o ângulo de 30º que tem esse privilégio. Todos os ângulo**s agudos** possuem esta característica. Porém, cada um deles possui um valor diferente para esta razão.

Ângulo agudo

Um ângulo agudo é aquele que é menor que 90º.

Pelo que estamos vendo, isso é mais importante do que imaginávamos. E é verdade. Essa razão entre o cateto oposto e a hipotenusa é tão importante que recebe um nome específico para isso: *SENO*. Portanto, quando quisermos nos referir à razão entre o cateto oposto e a hipotenusa de um ângulo, estaremos fazendo referência ao SENO deste ângulo.

Sendo assim, vamos conhecer alguns valores desta razão. Que tal os senos dos ângulos de 45º e de 60º? Afinal, vocês se lembram que esses ângulos são muito comuns no nosso dia a dia, não é?!

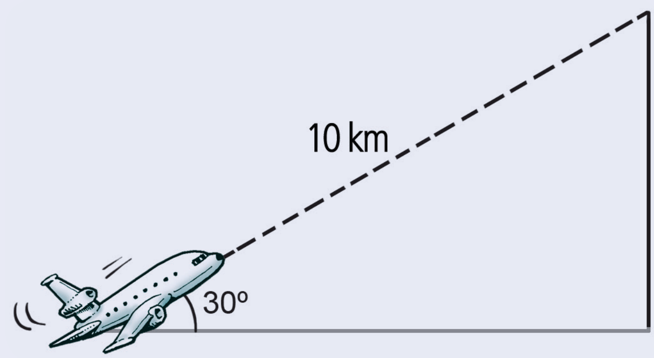
Ângulo	Seno
30º	$\frac{1}{2}$
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Tabela 1: Nesta tabela, vemos os valores dos senos de 30º, 45º e de 60º. Da mesma maneira que trabalhamos com o ângulo de 30º, podemos agir com os demais ângulos. Ou seja, a razão entre o cateto oposto ao ângulo de 45º, por exemplo, e a hipotenusa vale sempre $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **.**

Agora, é sua vez! Resolva os problemas a seguir, utilizando os conhecimentos que adquirimos até agora.

Atividade 2

Um avião levanta voo sob um ângulo de 30º. Depois de percorrer 10 km, a que altura se encontra este avião?



Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 3

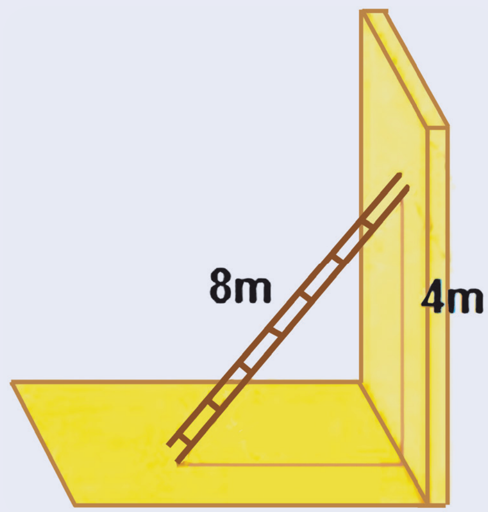
Uma escada de 8 metros de comprimento está apoiada em um ponto de uma parede a 4 metros de altura. Qual das opções abaixo traz o ângulo de inclinação da escada em relação ao chão?

(a) 30º

(b) 45º

(c) 60º

(d) 90º



Anote suas respostas em seu caderno

Muito bem! Estamos cada vez melhores!

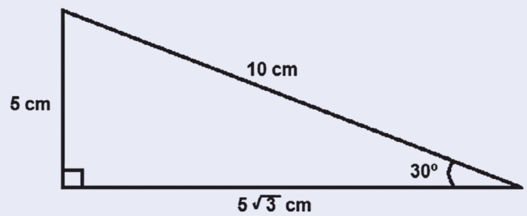
Mas uma curiosidade está aparecendo agora: será que existem outras razões nesses triângulos retângulos? Por exemplo, a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa? Ou a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente?

Vamos dar uma olhadinha nisso? Observe os triângulos abaixo e faça a atividade a seguir:

Atividade 4

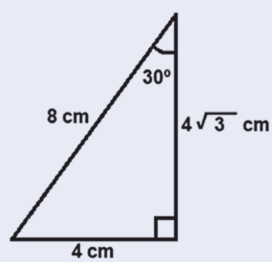
Complete as lacunas de acordo com cada figura.

a.



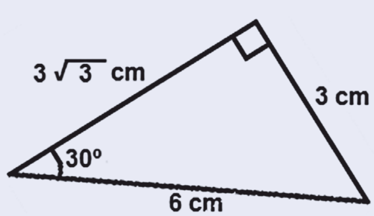
- Nesta figura, o cateto oposto ao ângulo de 30º mede ______________. O cateto adjacente a este ângulo mede ______________ e a hipotenusa mede _______________.
- A razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa pode ser representada através da fração ____________________.
- A razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo de 30º pode ser representado através da fração ______________________.

b.



- Nesta figura, o cateto oposto ao ângulo de 30º mede ______________. O cateto adjacente a este ângulo mede ______________ e a hipotenusa mede _______________.
- A razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa pode ser representada através da fração ____________________.
- A razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo de 30º pode ser representado através da fração ______________________.

c.



- Nesta figura, o cateto oposto ao ângulo de 30º mede ____________. O cateto adjacente a este ângulo mede ____________ e a hipotenusa mede ____________.
- A razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa pode ser representada através da fração _________________.
- A razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo de 30º pode ser representado através da fração ___________________.

Atividade 4

Anote suas respostas em seu caderno

Ora, ora... Pelo que estamos percebendo, esses valores também são recorrentes. E será que essas razões também possuem um nome especial? É claro que sim!

A razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa chama-se *COSSENO*. Já a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente chama-se *TANGENTE*.

Isto é:

Importante

$$\text{seno do ângulo } x = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cosseno do ângulo } x = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tangente do ângulo } x = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Além disso, assim como ocorre com o seno, os ângulos de 45º e 60º também possuem seus valores específicos. Veja no quadro a seguir:

	30º	**45º**	**60º**
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Tabela 2: Aqui são mostrados os valores de seno, cosseno e tangente. Esses valores são muito importantes. Tenha muita atenção!

Multimídia

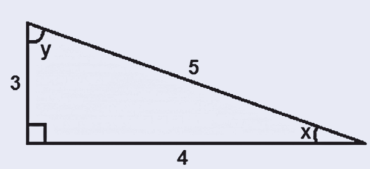
Clique neste *link* para assistir a um vídeo que mostra a demonstração matemática dos valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30º, 45º e 60º. Vale a pena conferir!

http://www.youtube.com/watch?v=AIlG-nig6qQ

Agora, vamos ver como podemos utilizar esses valores e o que aprendemos até agora para resolvermos as mais diversas atividades.

Atividade 5

Observe o triângulo abaixo e indique os valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos abaixo:



Seno de x =

Cosseno de x =

Tangente de x =

Seno de y =

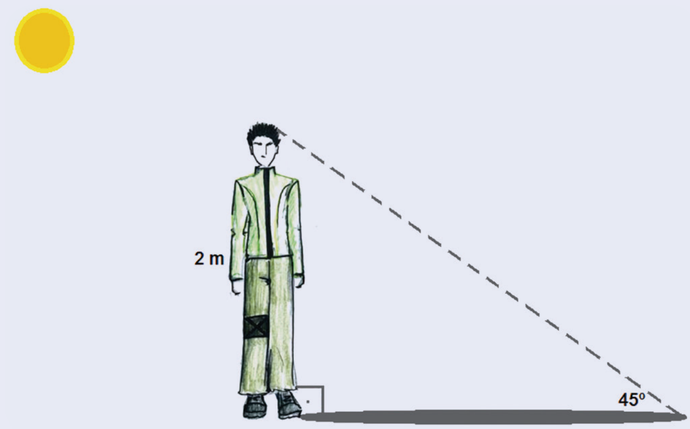
Cosseno de y =

Tangente de y =

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 6

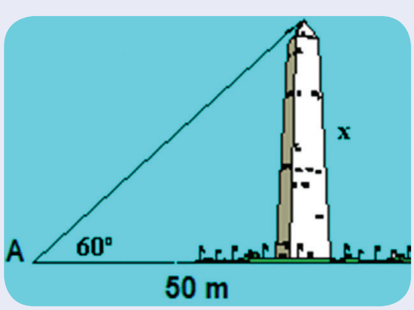
Uma pessoa de 2 metros de altura está exposta ao sol. Os raios solares incidem no solo sob um ângulo de 45º, como mostrado na figura. Qual a medida da sua sombra projetada no solo?



Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 7

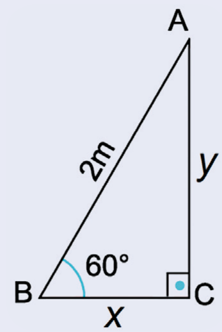
De um ponto A, a 50 metros de distância, uma pessoa enxerga o topo de um obelisco, segundo um ângulo de 60º. Qual é a altura desse obelisco?



Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 8

A figura a seguir possui duas medidas desconhecidas. Utilize as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) para determiná-las.



Anote suas respostas em seu caderno

Muito bem, pessoal. Verifiquem as respostas no final desta unidade.

Pelo visto, este assunto já está na ponta da língua. Mas se ainda não estiver, a sugestão é procurar fazer os exercícios da seção "O que perguntam por aí?".

Surge, agora, mais uma curiosidade: essas razões trigonométricas só podem ser usadas em triângulos retângulos? Seria muito interessante, se conseguíssemos trabalhar com a trigonometria em outros tipos de triângulos, não acham? Então, vamos seguir para a próxima seção onde falaremos exatamente deste assunto.

Seção 2
A Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos

Até agora, vimos como lidar com as razões trigonométricas em um triângulo retângulo. Mas será que só podemos trabalhar com a Trigonometria em triângulos deste tipo? Afinal, nem sempre estaremos diante de triângulos retângulos. Sendo assim, como faremos? Observe a situação a seguir:

Dona Clotilde quer vender o seu terreno, mas para isso, quero saber qual a sua área, pois isso influenciará diretamente no preço que cobrará por ele. Vejamos o terreno de Dona Clotilde.

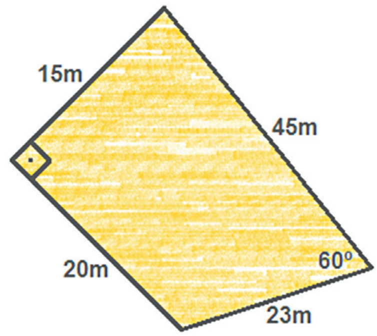


Figura 8: Terreno de Dona Clotilde em forma de um quadrilátero irregular. Podemos visualizar um ângulo reto e outro ângulo de 60º.

Para resolver o problema, Dona Clotilde dividiu seu terreno em duas partes. Vamos observar na figura a seguir que a área 1 é um triângulo retângulo e que, por isso, sua área pode ser calculada, multiplicando-se um cateto pelo outro e dividindo-se por 2. Assim:

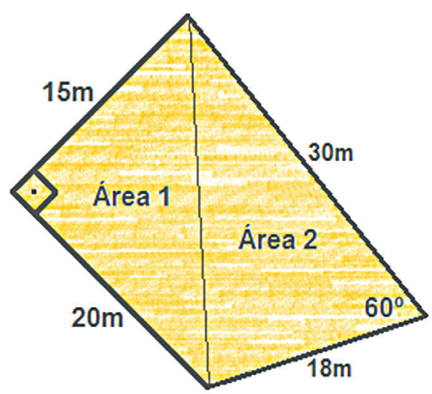


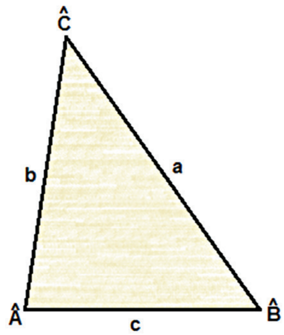
Figura 9: O terreno está dividido em duas áreas. Uma delas é um triângulo retângulo e o outro é um triângulo qualquer.

Cálculo da área 1:

$$\frac{20.15}{2} = \frac{300}{2} = 150m^2$$

Para o cálculo da área 2, Dona Clotilde utilizou uma fórmula um pouco diferente. Nesta fórmula, levamos em consideração dois lados do triângulo e o ângulo formado por eles. Ou seja, Área = ½ (b.c.sen Â). Com isso, bastou multiplicar 30 por 18 e pelo seno de 60º e, em seguida, dividir por 2 para obter a área 2 no valor aproximado de 234m². Totalizando, portanto, uma área de 150 + 234 = 384m².

A fórmula utilizada para resolver o problema de Dona Clotilde permite-nos calcular a área de um triângulo qualquer. Além disso, podemos utilizar qualquer um dos três ângulos para isso, desde que usemos os lados correspondentes do triângulo e o resultado será o mesmo! Vejamos:



$$área=\frac{1}{2}\,(b.c.sen\hat{A})$$

$$área=\frac{1}{2}\,(a.b.sen\hat{C})$$

$$área=\frac{1}{2}\,(a.b.sen\hat{B})$$

Figura 10: Um triângulo qualquer como seus respectivos lados e ângulos. Notemos que não há necessariamente a presença de um ângulo reto ou mesmo dos ângulos notáveis (30º, 45º ou 60º).

Em todos esses casos, a área tem o mesmo resultado. Portanto, podemos dizer que:

$$\frac{1}{2}\,(b.c.sen\hat{A})=\frac{1}{2}\,(a.b.sen\hat{C})$$

$$b.c.sen\hat{A}= a.b.sen\hat{C}$$

$$c.sen\hat{A}=a.sen\hat{C}$$

$$\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{c}{sen\hat{C}}$$

Se trabalharmos com a igualdade $\frac{1}{2}\,(b.c.sen\hat{A})=\frac{1}{2}\,(a.c.sen\hat{B})$, conseguiremos a expressão:

$$\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{b}{sen\hat{B}}$$

Sendo assim,

$$\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{b}{sen\hat{B}}=\frac{c}{sen\hat{C}}$$

Esta razão entre o lado e o seno do seu ângulo oposto é constante para todos os lados do triângulo. A esta igualdade, damos o nome de *Lei dos Senos*.

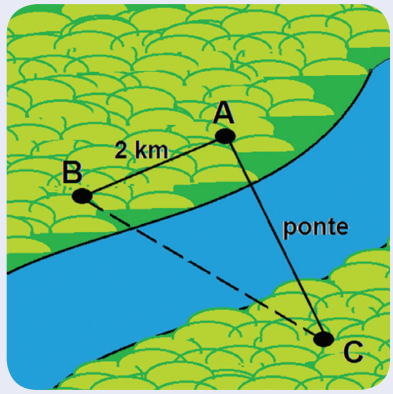
Vamos praticar um pouco?

Atividade 9

Uma contrutora quer colocar uma ponte ligando os pontos A e C do mapa abaixo. Mas, precisava calcular a distância entre esses pontos. Dispunha apenas de um **teodolito**. Do ponto A, caminhou até o ponto B, na mesma margem a 2 quilômetros de distância.

Teodolito

é um instrumento óptico, utilizado para medir ângulos verticais e horizontais.



Atividade 9

Com o teodolito, calculou o ângulo $C\hat{A}B = 75^o$ e $C\hat{B}A = 60^o$.

Utilize a Lei dos Senos para calcular a medida aproximada da ponte AC. (Considere $\sqrt{2} = 1{,}4$ e $\sqrt{3} = 1{,}7$)

Anote suas respostas em seu caderno

Multimídia

Que tal construirmos um Teodolito? Assim, poderemos entender melhor seu funcionamento, além de aprender mais sobre Trigonometria numa exepriência bem divertida. Acesse o site e assista ao vídeo explicativo.

http://www.youtube.com/watch?v=jivQJZlbCBY

Outra importante relação da Trigonometria é a *Lei dos Cossenos*. Essa lei relaciona os três lados de um triângulo e apenas um único ângulo.

Vamos tentar entender como ele funciona?

Se estivermos diante de um triângulo retângulo, poderemos utilizar o Teorema de Pitágoras para a relação entre os seus lados.

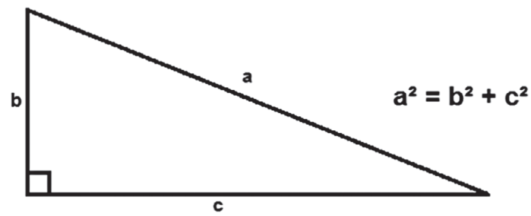


Figura 13: O triângulo retângulo, seus lados e o Teorema de Pitágoras

Porém, se o ângulo reto der lugar a um ângulo agudo, certamente a hipotenusa sofrerá uma redução e, a partir desse momento, o Teorema de Pitágoras não funcionará mais. Diante disso, precisaremos fazer uma pequena "correção" no Teorema de Pitágoras, ajustando-o para que possamos relacionar os lados corretamente.

Esse ajuste leva em consideração o ângulo que ficou no lugar do ângulo reto. Da seguinte forma:

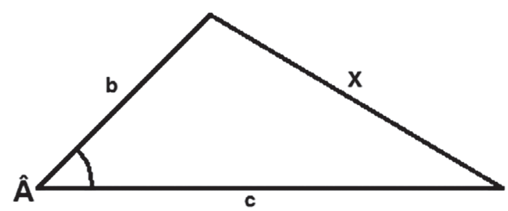


Figura 14: O ângulo reto foi reduzido a um ângulo agudo e o lado a também diminuiu de tamanho, tornando-se o lado x.

A relação que podemos criar entre os lados é:

$$x^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A}$$

Podemos notar que a expressão "$- 2.b.c.\cos\hat{A}$" é o fator de correção que havíamos comentado anteriormente. Essa relação recebe o nome de **Lei dos Cossenos**.

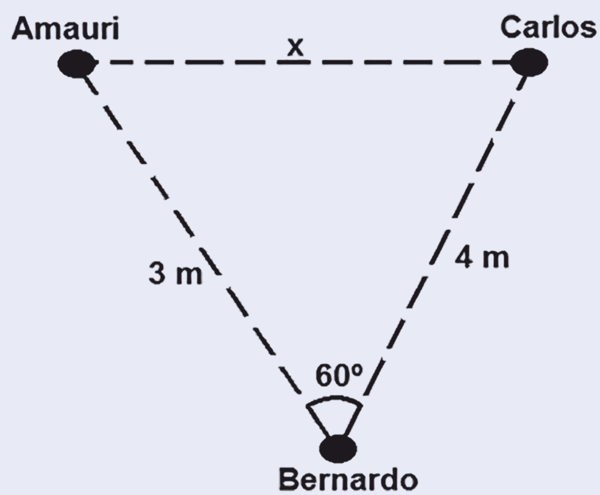
Multimídia

Você quer saber como fizemos para deduzir esta fórmula? Acesse o *link* a seguir para entender como chegamos a essa relação. Nele, você vai encontrar um vídeo com todo o passo a passo. Veja!

http://www.youtube.com/watch?v=3gUhDWlqOB8

Atividade 10

Três amigos estão sentados em um campo. Bernardo está a 3 metros de distância de Amauri e a 4 metros de distância de Carlos. Além disso, consegue observá-los sob um ângulo de 60º. (Observe a figura)



Como poderemos determinar a distância entre Amauri e Carlos?

Anote suas respostas em seu caderno

Resumo...

Nesta aula, estudamos sobre as razões trigonométricas no triângulo retângulo. Estas são relações que são muito importantes em todas as ações matemáticas que você vai vivenciar daqui por diante. Por isso, não deixe de realizar cuidadosamente todas as atividades que propusemos. Avalie com cuidado o seu aprendizado e, se necessário, busque auxílio.

- As razões trigonométricas seno, cosseno e tangente são formas de relacionar lados e ângulos de um triângulo retângulo.
- Os ângulos de 30º, 45º e 60º são os mais comuns e, por isso, procuramos sempre nos lembrar dos seus respectivos valores de seno, cosseno e tangente. Esses valores estão nesta tabela:

	Seno	Co-seno	Tangente
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

- A Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos possibilitam relacionar lados e ângulos de um triângulo qualquer, isto é, sem a necessidade de trabalharmos com triângulos retângulos.
- A Lei dos Senos é definida por . $\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}}$
- A Lei dos Cossenos é definida por: $x^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.cos\hat{A}$.

Veja ainda

Para quem é curioso e gosta de conhecer aplicações diferentes dos assuntos que aprendemos nesta unidade, temos algumas sugestões que podem enriquecer nosso aprendizado.

Os vídeos do Novo Telecurso são muito interessantes, pois trazem situações práticas e discutem inclusive a demonstração das fórmulas aqui apresentadas. Acesse os vídeos e saiba mais!

Trigonometria no triângulo retângulo:

- http://www.youtube.com/watch?v=nT2A4Ehf1kU

Lei dos Senos

- http://www.youtube.com/watch?v=-rSvHD1DYXo

Lei dos Cossenos

- http://www.youtube.com/watch?v=v5_CXEI4TLs&feature=plcp

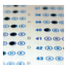
Referências

Livros

- IMENES, L.M., TROTTA, F., JAKUBOVIC, J. **Matemática Aplicada – 2º grau**, Ed. Moderna.
- LOBO DA COSTA, N.M. **Funções Seno e Cosseno***:* Uma Sequência de Ensino a Partir dos Contextos do Mundo Experimental.e do Computador. Dissertação de Mestrado, PUC/SP, 1997.

Imagens

- http://www.sxc.hu/photo/475767



- http://www.sxc.hu/photo/517386

Resposta: Letra C

Respostas das Atividades

Atividade 1

Todos são triângulos retângulos, pois possuem um ângulo de 90º. Além disso, em todos há um ângulo de 30º.

O lado oposto ao ângulo de 30º mede 1 metro. Já o lado adjacente a este mesmo ângulo mede 0,87 m. Não confunda com o lado oposto ao ângulo de 90º que mede 2 metros.

Agora, calcule a razão (quociente) entre a medida do lado oposto ao ângulo de 30º e o oposto ao ângulo de 90º.

$$\frac{lado\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ de\ 30^0}{lado\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ de\ 90^0} = \frac{1}{2}$$

O lado oposto ao ângulo de 30º mede 80 cm. Já o lado adjacente a este mesmo ângulo mede 138,6 cm. Não confunda com o lado oposto ao ângulo de 90º que mede 160 cm.

Agora, calcule a razão (quociente) entre a medida do lado oposto ao ângulo de 30º e o oposto ao ângulo de 90º.

$$\frac{lado\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ de\ 30^0}{lado\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ de\ 90^0} = \frac{80}{160} = \frac{1}{2}$$

Atividade 2

Segundo a figura do problema, a trajetória retilínea do avião faz um ângulo de 30º com a horizontal. Sendo assim, formamos um triângulo retângulo, formado pela trajetória, a altura do avião e a horizontal com este ângulo de 30º.

Dessa forma, a trajetória de 10 quilômetros representa a hipotenusa deste triângulo e a altura funciona como cateto oposto ao ângulo de 30º. Portanto, podemos usar o seno do ângulo de 30º para calcular essa altura.

Logo,

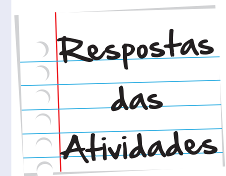
$$sen30 \quad \frac{}{10}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{h}{10} \qquad 2h = 10 \Rightarrow h = 5$$

h= 5km ou 5000 metros

Atividade 3

Neste problema, o triângulo formado pela escada, a parede e o chão possui como hipotenusa comprimento da escada (8 metros). O ângulo solicitado pelo problema encontra-se na parte inferior do triângulo, isto é, o ângulo formado pela escada e o chão.



Como a escada encosta na parede em um ponto a 4 metros de altura, esta medida representará o cateto oposto ao ângulo requisitado. Então, se temos a hipotenusa e o cateto oposto, poderemos trabalhar com o Seno.

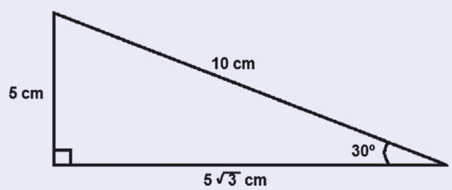
Com isso,

$$senX = \frac{altura\,do\,muro}{comprimento\,da\,escada} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Percebemos, portanto, que o seno do ângulo X vale ½. Imediatamente, vamos consultar nossa tabela para verificar qual ângulo possui este valor para o seu seno. E este ângulo é o de 30º.

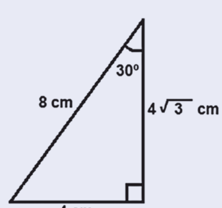
Atividade 4

a.



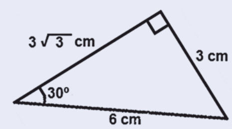
- Nesta figura, o cateto oposto ao ângulo de 30º mede ___5cm___. O cateto adjacente a este ângulo mede _5√3 cm_____ e a hipotenusa mede __10 cm____.
- A razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa pode ser representada através da fração $\frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. .
- A razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo de 30º pode ser representado através da fração $\frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (racionalizando o denominador).

b.



- Nesta figura, o cateto oposto ao ângulo de 30º mede 4 cm. O cateto adjacente a este ângulo mede $4\sqrt{3}$ cm e a hipotenusa mede 8cm.
- A razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa pode ser representada através da fração $\frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- A razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo de 30º pode ser representado através da fração $\frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (racionalizando o denominador).

c.



- Nesta figura, o cateto oposto ao ângulo de 30º mede 3 cm. O cateto adjacente a este ângulo mede $3\sqrt{3}$ cm e a hipotenusa mede 6 cm.
- A razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa pode ser representada através da fração $\frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- A razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo de 30º pode ser representado através da fração $\frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (racionalizando o denominador).

Atividade 5

Seno de x = 3/5 Seno de y = 4/5

Cosseno de x = 4/5 Cosseno de y = 3/5

Tangente de x = 3/4 Tangente de y = 4/3

Atividade 6

O triângulo formado pela situação descrita no problema nos mostra um ângulo de 45º, onde a altura da pessoa representa o cateto oposto e a projeção da sombra o cateto adjacente a este ângulo. Dessa forma, a tangente, razão trigonométrica que relaciona estes dois lados do triângulo é a mais indicada para solucionar este problema.

Com isso,

$$tg45^\circ = \frac{\textit{altura da pessoa}}{\textit{sombra}} = \frac{2}{x}$$

$$1 = \frac{2}{x}$$

$$x = 2 \textit{ metros}$$

Atividade 7

Quando falamos em altura do obelisco, entendemos que é uma medida que faz 90º com o solo. Portanto, um triângulo retângulo com um ângulo de 60º. A altura é o cateto oposto ao ângulo de 60º e a distância de 50 m representa o cateto adjacente ao mesmo ângulo.

Logo, utilizaremos a tangente de 60º para resolver esse problema.

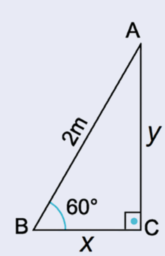
$$tg60^\circ = \frac{\textit{altura do obelisco}}{\textit{distância da pessoa}} = \frac{x}{50}$$

$$\sqrt{3} = \frac{x}{50}$$

$$x = 50\sqrt{3} \textit{ metros de altura}$$

Se você utilizar a calculadora, verá que esse valor é aproximadamente 86,6 metros de altura.

Atividade 8



Segundo esta figura, o lado x é o cateto adjacente e o lado y é cateto oposto ao ângulo de 60º. Já o lado AB, que mede 2 metros, é a hipotenusa deste triângulo.

Logo, para encontrar o valor de x, iremos utilizar a razão cosseno.

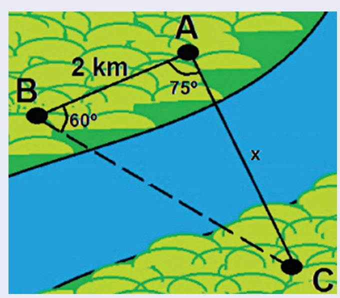
$$\cos 60^\circ = \frac{x}{2}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{x}{2}$$
$$x = 1$$

Para calcularmos o valor de y, iremos utilizar a razão seno.

$$\text{sen}60^\circ = \frac{y}{2}$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{2}$$
$$y = \sqrt{3}$$

Atividade 9

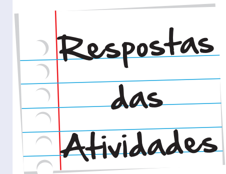
Neste problema, a situação pode ser descrita pela seguinte figura:



Notamos que há dois lados e os seus respectivos ângulos opostos. Essas informações são necessárias e suficientes para utilizarmos a Lei dos Senos. Vamos ver como fica:

$$\frac{x}{\text{sen}60^\circ} = \frac{2}{\text{sen}45^\circ}$$
$$\frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$
$$\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$
$$x = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot 1,7}{1,4} = \frac{3,4}{1,4} \cong 2,43km$$

Atividade 10



Neste problema, devemos estar atentos para os dados que são fornecidos: dois lados e o ângulo formado por eles. Essas informações permitem-nos utilizar a Lei dos Cossenos para encontrarmos a distância entre Amauri e Carlos. Vamos lá:

A distância entre eles será chamada de x; portanto,

$$x^2 = 3^2 + 4^2 - 2x3x4xcos30^\circ$$

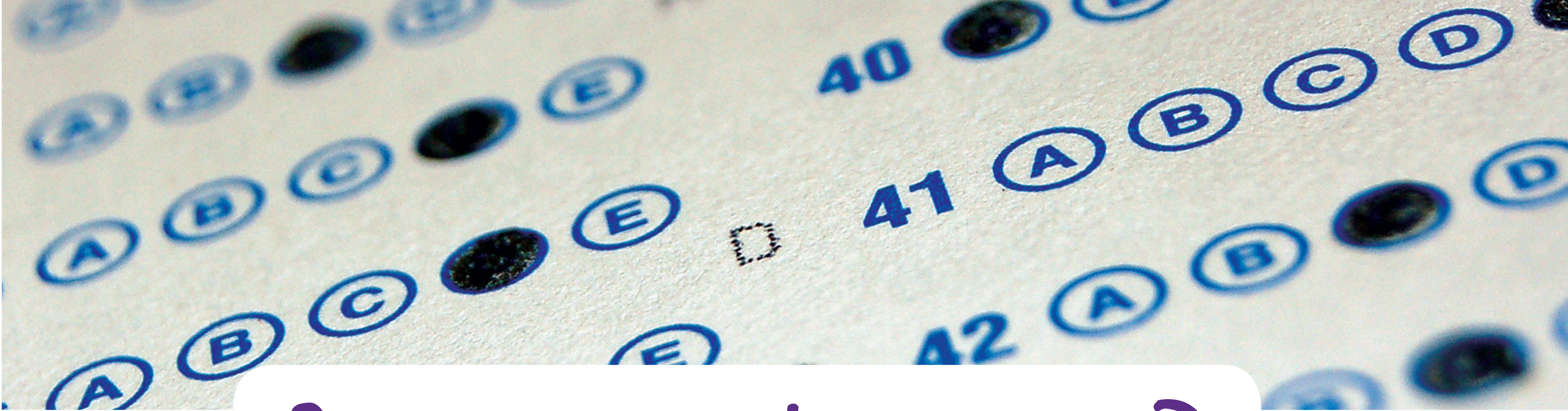
$$x^2 = 9 + 16 - 24\frac{1}{2}$$

$$x^2 = 25 - 12$$

$$x^2 = 13$$

$$x = \sqrt{13}\ metros \cong 3{,}60m$$

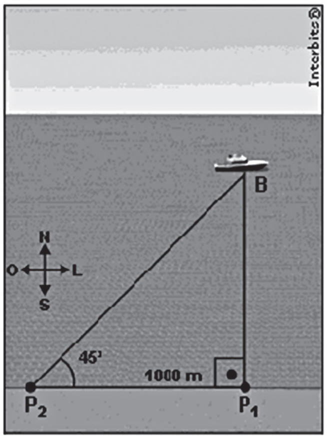
Atenção: Lembre-se de que devemos efetuar as multiplicações antes das adições e subtrações.



O que perguntam por aí?

Questão 1 (UEL – 2011)

Um indivíduo em férias na praia observa, a partir da posição P_1, um barco ancorado no horizonte norte na posição B. Nesta posição P_1, o ângulo de visão do barco, em relação à praia, é de 90°, como mostrado na figura a seguir.



Ele corre aproximadamente 1000 metros na direção oeste e observa novamente o barco a partir da posição P_2. Neste novo ponto de observação P_2, o ângulo de visão do barco, em relação à praia, é de 45°.

Qual a distância P_2B aproximadamente?

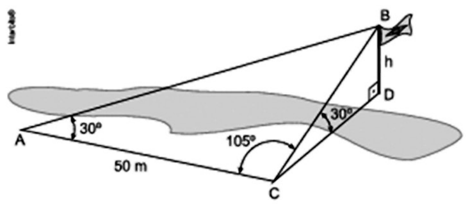
a) 1000 metros
b) 1014 metros
c) 1414 metros
d) 1714 metros
e) 2414 metros

Resposta: Letra C

Comentário: A distância P_2B é a hipotenusa do triângulo. Com isso, usando cos 45º, temos que a medida P_2B vale $1000\sqrt{2}$. Como $\sqrt{2} \cong 1,414$, temos que $1000\sqrt{2} = 1414$ metros.

Questão 2 (Unesp – 2011)

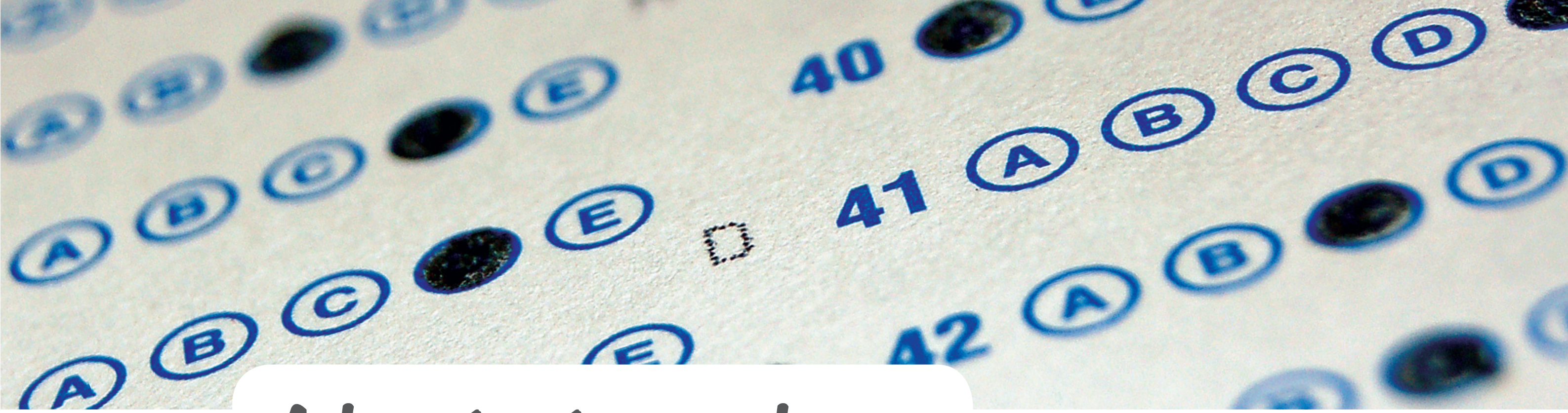
Uma pessoa se encontra no ponto A de uma planície, às margens de um rio e vê, do outro lado do rio, o topo do mastro de uma bandeira, ponto B. Com o objetivo de determinar a altura h do mastro, ela anda, em linha reta, 50 m para a direita do ponto em que se encontrava e marca o ponto C. Sendo D o pé do mastro, avalia que os ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{C}D$ valem 30º, e o $A\hat{C}B$ vale 105º, como mostra a figura:



a) 12,5.
b) $12{,}5\sqrt{2}$.
c) 25,0.
d) $25{,}0\sqrt{2}$.
e) 35,0.

Resposta: Letra B

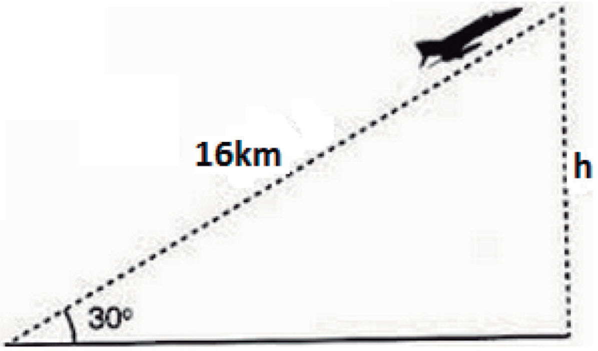
Comentário: O ângulo $A\hat{B}C$ vale 45º, pois a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo e sempre igual a 180º. Utilizando a Lei dos Senos, conseguimos calcular a medida do segmento BC que é igual a $25\sqrt{2}$ m. Como h é o cateto oposto ao ângulo de 30º e BC é a hipotenusa, usamos o seno de 30º para calcularmos h. Com isso, encontramos $12{,}5\sqrt{2}$ m.



Atividade extra

Exercício 1

Um avião levanta vôo sob um ângulo de 30 percorrendo 16 km em linha reta, tal como ilustra a figura:

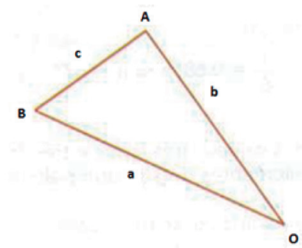


Qual a altura do avião, em km, com relação ao solo, ao final da subida?

(a) 8 (b) 9 (c) 10 (d) 12

Exercício 2

No triângulo ilustrado na figura são dados $a = 4$, $b = 3\sqrt{2}$, e o ângulo AÔB = 45°.

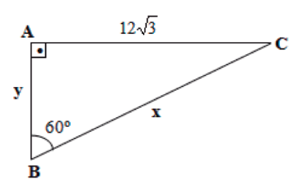


Qual é o valor do lado c do triângulo *ABC*?

(a) $2\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{10}$ (c) $2\sqrt{3}$ (d) $\sqrt{14}$

Exercício 3

Um terreno tem a forma de um triângulo retângulo e algumas de suas medidas, em metros, estão indicadas na figura.

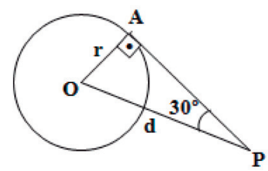


Quanto vale x – y?

(a) 8 (b) 10 (c) 12 (d) 14

Exercício 4

Na figura mostra um círculo de raio r e uma segmento de reta PA = 24 cm, que é tangente ao círculo no ponto A.

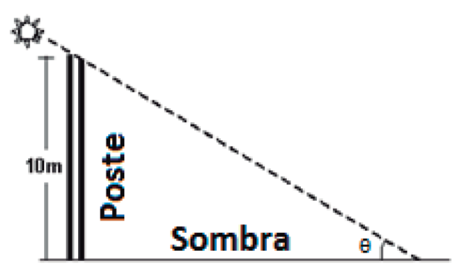


Qual a distância do ponto P ao centro do círculo?

(a) $10\sqrt{3}$ (b) $12\sqrt{3}$ (c) $14\sqrt{3}$ (d) $16\sqrt{3}$

Exercício 5

Um poste de 10 m de altura projeta uma sombra que faz um ângulo θ tal que sen $\theta = 0{,}6$. Conforme ilustra a figura.



Qual o valor, em metros, do comprimento da sombra?

(a) $\frac{10}{6}$ (b) $\frac{40}{3}$ (c) $\frac{10}{8}$ (d) 20

Exercício 6

Dois lados consecutivos de um paralelogramo medem 8cm e 12cm e formam um ângulo de 60º entre si.

Qual é o comprimento, em centímetros, da maior diagonal desse paralelogramo?

(a) $10 - 4\sqrt{3}$ (b) 10 (c) $4\sqrt{7}$ (d) $4\sqrt{19}$

Exercício 7

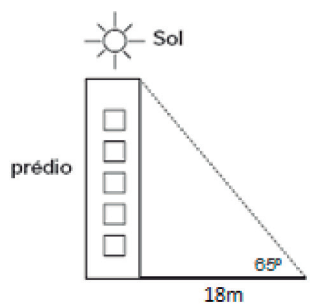
Em um paralelogramo *ABCD*, os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ medem, respectivamente, $x\sqrt{2}$ cm e *x*cm e θ é o ângulo obtuso formado por esses lados. A diagonal maior mede 2xcm.

Então, o ângulo θ é tal que cos θ vale:

(a) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $-\frac{\sqrt{14}}{4}$

Exercício 8

A figura mostra o ângulo de elevação do Sol em relação ao solo quando a sombra de um prédio mede 18m.



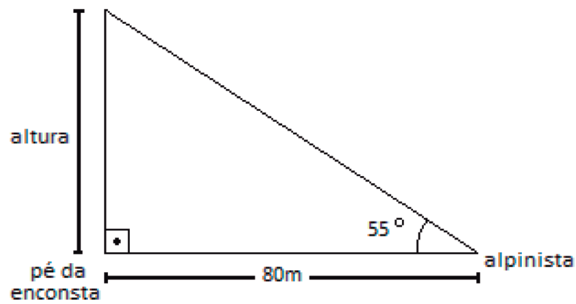
Dados: sen65º = 0, 9063, cos 65º = 0, 4226 e tg65ºº = 2, 1445.

Qual a altura, em metros, do prédio?

(a) 38,601 (b) 37,313 (c) 36,393 (d) 35, 908

Exercício 9

Um alpinista deseja calcular a altura de uma encosta que vai escalar. Para isso, afasta-se, horizontalmente, 80m do pé da encosta e visualiza o topo sob um ângulo de 55º com o plano horizontal, tal como na figura abaixo.



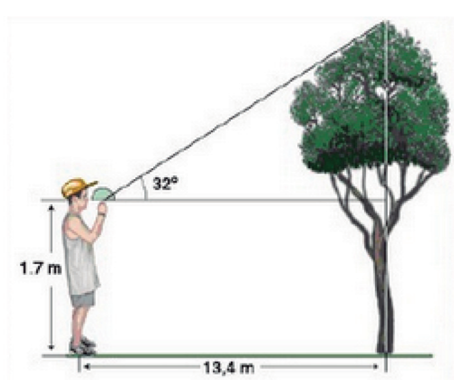
Dados: sen55º = 0,81, cos 65º = 0,57 e tg65º = 1,42 (desconsidere a altura do alpinista).

Qual a altura, em metros, da encosta?

(a) 116, 6 (b) 115,3 (c) 114,8 (d) 113,6

Exercício 10

Uma árvore está com cupim em sua base e deverá ser derrubada. Com receio que a queda da árvore atinja casas vizinhas, os bombeiros decidiram calcular a altura da árvore e anotaram os dados que seguem na figura abaixo:



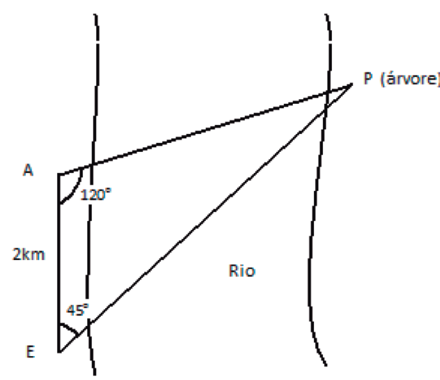
Dados: sen32º = 0,52, cos 32º = 0,84 e tg32º = 0,62.

Qual é a altura, em metros, da árvore?

(a) 9,708 (b) 9,968 (c) 10,008 (d) 11,156

Exercício 11

Um observador está no ponto A e quer saber a distância entre o ponto onde ele está e uma árvore situada do outro lado do rio. O observador se locomove do ponto *A* para o ponto *E*, de onde avista a mesma árvore (no ponto *P*). A distância de *A* até *E* é de 2km, a medida do ângulo EÂP é igual a 120º e a medida do ângulo AÊP é igual a 45º, tal como apresenta a na ilustração:



Considere sen15º = 0,258, cos 15º = 0,965 e $\sqrt{2} = 1,41$.

Qual é a distância, em metros, do ponto *A* ao ponto *P*?

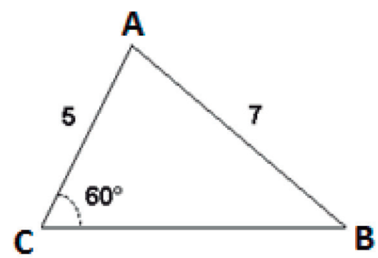
Exercício 12

Em um triângulo *ABC* os lados *AB* e *AC* medem, respectivamente, 8cm e 6cm e o ângulo A vale 60º.

Calcule a medida do terceiro lado deste triângulo.

Exercício 13

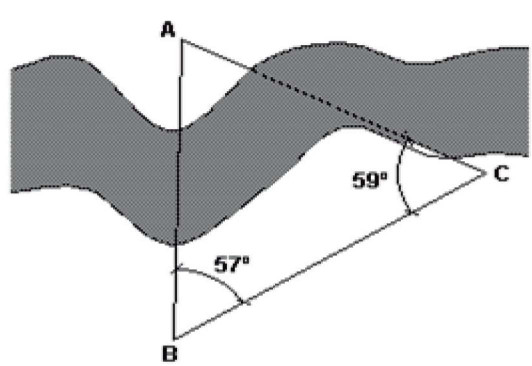
Dado um triângulo *ABC* tal como o da figura abaixo.



Calcule o perímetro desse triângulo.

Exercício 14

Uma ponte deve ser construída sobre um rio, unindo os pontos *A* e *B*, como ilustrado na figura abaixo. Para calcular o comprimento *AB*, escolhe-se um ponto *C*, na mesma margem em que *B* está, e medem-se os ângulos $C\hat{B}A = 57^o$ e $A\hat{C}B = 59^o$. A distância $\overline{BC}$ mede 30m.

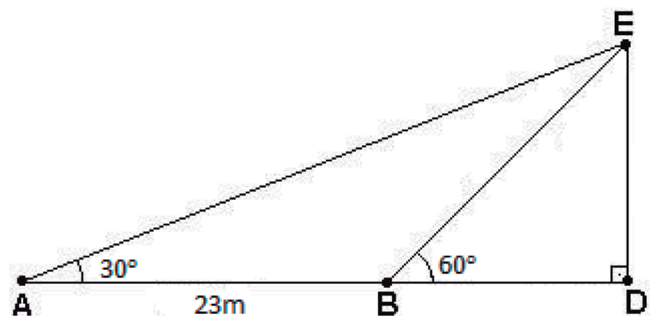


(Dados: use as aproximações: $sen59^o \approx 0{,}87$ e $sen64^o \approx 0{,}90$)

Quanto mede a distância $\overline{AB}$, em metros?

Exercício 15

A partir de um ponto *A*, observa-se o topo *E* deumprédio sob um ângulo de 30º. Caminha-se 23m em direção ao prédio e atinge-se outro ponto (ponto B), onde se vê o topo do prédio segundo um ângulo de 60º, conforme a figura abaixo.



Desprezando a altura do observador, calcule, em metros, a altura do prédio.

Gabarito

Exercício 1

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 2

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 3

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 4

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 5

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 6

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 7

A B C D

● ○ ○ ○

Exercício 8

A B C D

● ○ ○ ○

Exercício 9

A B C D

○ ○ ○ ●

Exercício 10

A B C D

○ ○ ● ○

Exercício 11

5,465km.

Exercício 12

$2\sqrt{13}$

Exercício 13

20.

Exercício 14

29.

Exercício 15

$$\frac{23\sqrt{3}}{2}$$

Trigonometria na circunferência

Fascículo 6

Unidade 20

Fundação CECIERJ

Trigonometria na circunferência

Para início de conversa...

Figura 1: Reportagem do jornal O Globo da década de 1990 mostra o relógio da Central do Brasil, no Rio de Janeiro, sendo limpo por dois funcionários da CBTU (Companhia Brasileira de Trens Urbanos), devido a um ato de vandalismo que se difundia cada vez mais pela cidade: a pichação.

Sem dúvida, você já deve ter visto várias pichações nos mais diversos lugares. No início da década de 90, a moda era destacar-se dos demais pichadores pela ousadia, pichando em locais cada vez mais altos e arriscados. Hoje em dia, ainda há pichações, porém num movimento cada vez mais fraco. Mas a ousadia de pichar o relógio da Central do Brasil assusta bastante. Simplesmente, porque é muito alto!

Você sabe quantos metros de altura tem esse relógio?

São 110 metros de altura do nível da rua até o relógio que foi fabricado em 1943. Possui quatro faces quadradas de 10 metros de lado e ocupa exatamente cinco andares do prédio, do 22º ao 26º andar.

Realmente, é muita coragem!

E você? Teria coragem de subir até o relógio da Central para realizar o mesmo trabalho que os dois funcionários da foto realizaram?

Um dos funcionários presentes nesta foto está pisando a base do relógio, isto é, está a 110 metros de altura. Agora, observe na foto que o outro funcionário está agarrado no ponteiro das horas. Será que tem ideia da altura que se encontra? Como podemos calcular a que altura ele se encontra? Será que depende da posição do ponteiro no qual se segura?

Fique tranquilo. Estaremos juntos nesta unidade para discutir de que forma podemos determinar algumas distâncias dentro de um círculo. Para isso, tomaremos por base a Trigonometria que aprendemos na unidade anterior.

Objetivos de Aprendizagem

- Reconhecer a existência de fenômenos que se repetem de forma periódica;
- Identificar o radiano como unidade de medida de arco;
- Transformar a medida de um arco de grau para radiano e vice-versa;
- Representar o seno, o cosseno de um arco qualquer no ciclo trigonométrico;
- Resolver equações trigonométricas simples, com soluções na primeira volta.

Seção 1
Calculando distâncias na circunferência

Na unidade passada, aprendemos a calcular o comprimento de alguns segmentos, principalmente em triângulos, levando-se em consideração alguns ângulos. Isto é, usamos a Trigonometria para efetuar tais cálculos.

Será que podemos fazer uso novamente da Trigonometria para determinarmos distâncias em uma circunferência?

Vamos analisar a situação que nosso amigo, funcionário da CBTU, está passando. Para facilitar um pouco nossa análise, vamos considerar que ele está sobre o número 3 do relógio, conforme a figura.

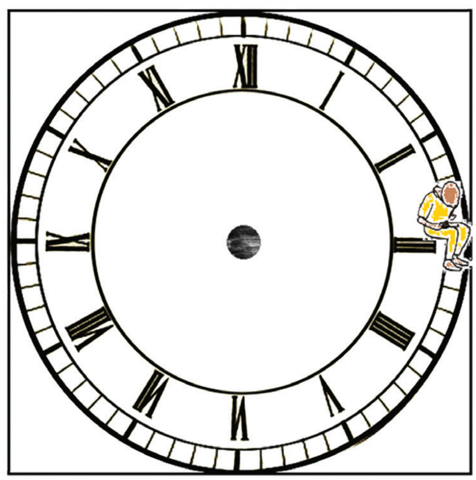


Figura 2: Representação do relógio da Central do Brasil com o funcionário da CBTU sentado junto ao número 3. Que tal darmos um pseudônimo ao nosso amigo? O que acham de João?

Vamos lembrar que esse relógio tem a forma de um quadrado com 10 metros de lado. Sendo assim, Sr. João está a uma altura que corresponde à metade da medida do lado do relógio, isto é, a 5 metros de altura. Contudo, não se esqueça de que o relógio encontra-se a 110 metros de altura do chão. Logo, Sr. João está a 115 metros de altitude. Essa foi fácil, não foi?!

Antes de prosseguir, uma pequena atividade:

Atividade 1

Sr. João também estaria a uma altura de 115 metros de tivesse sentado em um outro número do relógio. Que número é esse?

Anote suas respostas em seu caderno

Agora, vejamos outra situação: digamos que Sr. João esteja sentado sobre o número 2. Observe, então, a figura a seguir:

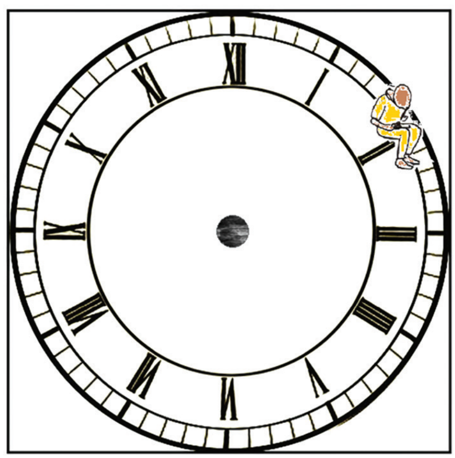


Figura 3: Sr. João está um pouco mais alto. Agora, está no número 2. Como poderemos calcular o quanto que o Sr. João subiu? Quer uma dica? Use a Trigonometria!

Ora, ora.... Como a Trigonometria vai nos ajudar a resolver este caso?

Vamos investigar!

Lembremos que toda volta completa em uma circunferência possui 360º (360 graus). Como em um relógio há 12 números igualmente separados ao longo da circunferência, podemos garantir que existe um ângulo de $360^\circ \div 12 = 30^\circ$ entre dois números. Isto é, Sr. João percorreu um **arco** de 30º, ao sair do número 3 e ir para o número 2.

Observe a figura a seguir. Nela, colocamos o ângulo de 30º entre os números 2 e 3. Perceba que a altura até o número 3 já foi calculada anteriormente. O que falta apenas é uma pequena distância que vamos chamá-la de x.

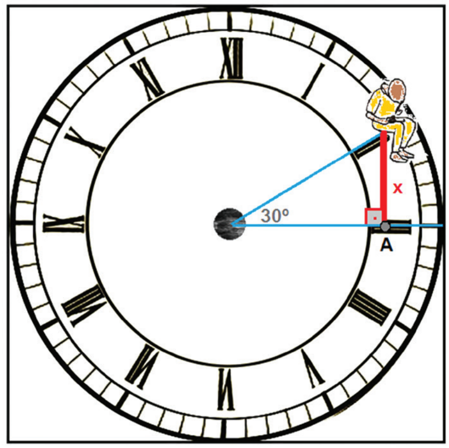
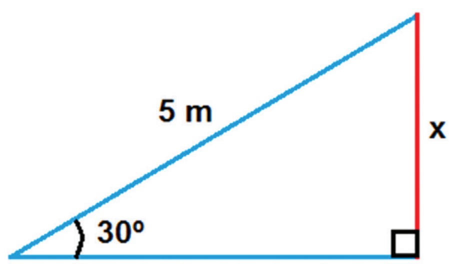


Figura 4: A distância x representa o quanto Sr. João deslocou-se verticalmente, quando estava no número 3. Repare que o centro do relógio, Sr. João e o ponto A formam um triângulo retângulo. Percebeu onde entra a Trigonometria?

Note bem este triângulo formado na figura. Conhecemos a medida do segmento que une o centro do relógio e o Sr. João: ele é o **raio da circunferência** do relógio, ou seja, tem 5 metros de comprimento.

Dessa forma, o triângulo fica assim:



Como vimos na unidade anterior, calculamos x através do seno de 30º.

Observe:

$$sen 30° = \frac{x}{5}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{5}$$

$$x = 2{,}5 metros$$

Concluímos, portanto, que a altura do Sr. João sentado sobre o número 2 do relógio da Central do Brasil é de: 110m + 5m + 2,5m = 117,5 metros.

Vamos ver se estamos entendendo bem?

Atividade 2

Existe um outro número no qual seu Sr. João pode se sentar e manter a mesma altura de 117,5m. Marque a opção correta:

a. IV

b. VIII

c. IX

d. X

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 3

Complete as lacunas:

Caso Sr. João queira ficar na mesma altura do número 5, basta se posicionar sobre o número ________.

Os números que estão a 30º do número 12 são __________ e _________. Com isso, podemos dizer que possuem alturas _____________ (iguais / diferentes).

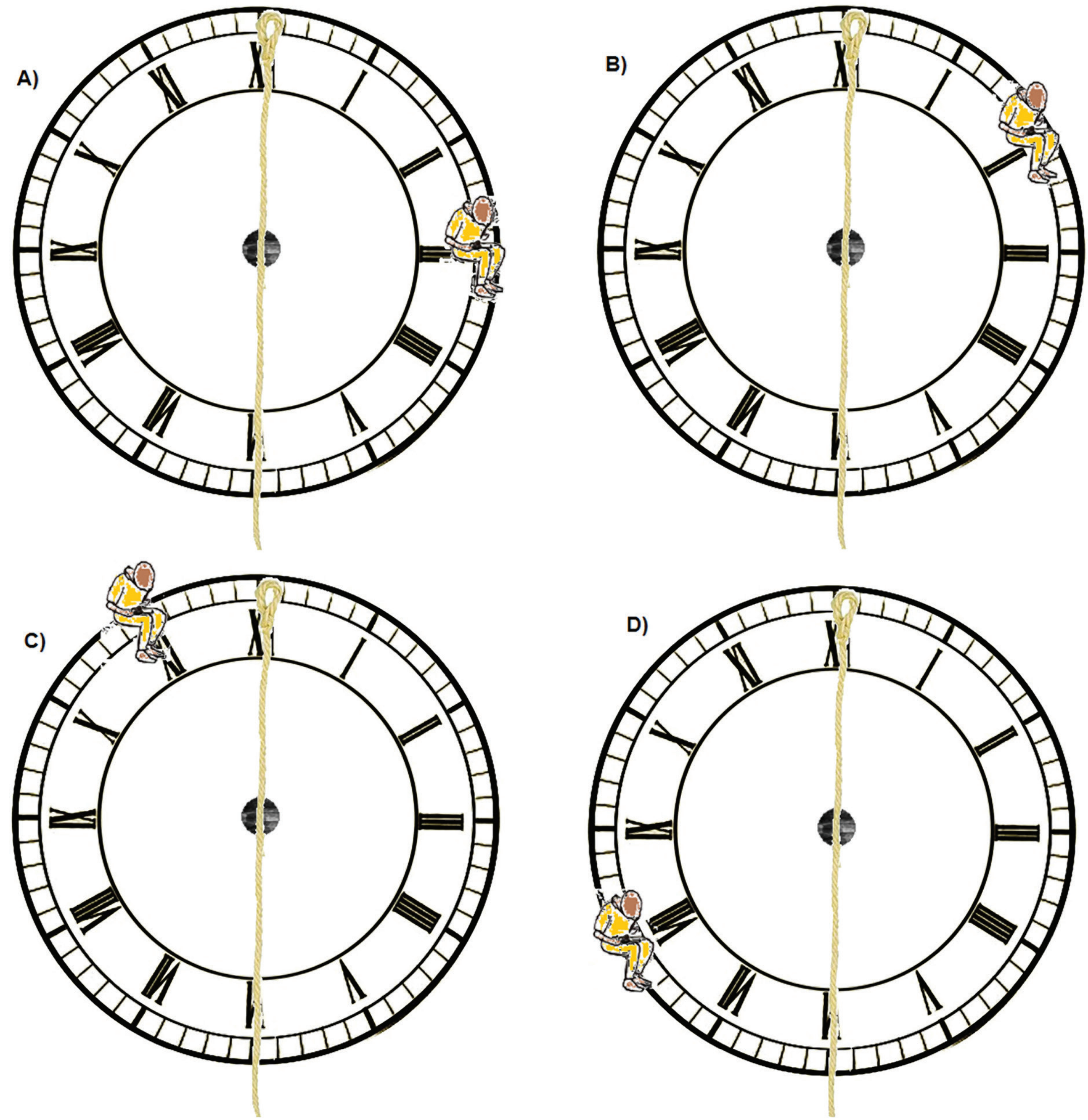
Sr. João quer ficar na maior altura possível. Para isso, terá de se sentar sobre o número _______________. A altura neste número é de ____________ metros. Já o número __________ está na posição mais baixa, isto é, a ________ metros de altura.

Anote suas respostas em seu caderno

Se considerarmos que Sr. João está agarrado ao ponteiro do relógio, percebemos que sua altura varia de acordo com a posição deste ponteiro. Sempre entre a máxima e a mínima que já calculamos. De tempos em tempos, as alturas repetem-se. A isso, damos o nome de *fenômeno periódico*.

Sendo assim, conseguimos esclarecer quanto à altura em que Sr. João encontra-se. Para isso, utilizamos a Trigonometria. Esperamos, então, que nosso amigo convença-se de que está a uma altura muito grande e que desça o quanto antes desse relógio!

Falando em descer, vamos pendurar uma corda no número 12 que leva até a base do relógio. Nossa tarefa agora é determinar a distância de cada número à corda pendurada. Vamos ver a figura a seguir para responder à próxima atividade:



Atividade 4

Responda às perguntas:

a. Em qual das opções, Sr. João está mais próximo da corda?

b. Qual a distância de Sr. João à corda na opção (A)? (Não se esqueça de que o raio deste relógio é de 5 metros).

c. Em duas situações, Sr. João está a uma mesma distância da corda. Quais são elas?

Anote suas respostas em seu caderno

Muito bem! Conseguimos responder à atividade sem precisar de cálculos (Veja na seção Resposta das atividades no final desta aula). Mas, como poderemos definir as distâncias do Sr. João à corda nas figuras B, C e D? Vamos analisar juntos?

Para calcularmos a distância de Sr. João à corda na situação descrita na letra B, temos de recapitular algumas informações sobre o relógio:

Sua circunferência tem raio igual a 5 metros e o arco determinado por dois números consecutivos possui 30º (trinta graus). Com isso, traçamos o raio do relógio (segmento que parte do centro do relógio até Sr. João) e a distância do nosso amigo até a corda. Vamos observar a figura a seguir. Ela ilustra tudo isso.

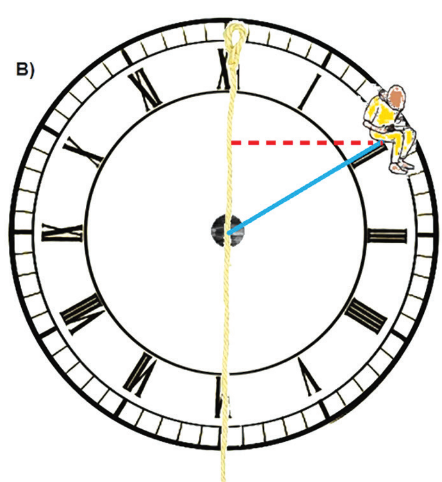


Figura 5: Esta figura mostra Sr. João sobre o número 2, o raio do relógio (em azul) e a distância dele à corda (em vermelho pontilhado). Repare que, neste desenho, não aparece um dado importante: o ângulo de 30º. Lembre-se de que isto é muito importante para resolvermos este problema através da Trigonometria.

Vamos colocar o ângulo de 30º, nesta figura. Para isso, vamos colocar um eixo horizontal (em cinza) que passa pelo centro do relógio. Note que o segmento vermelho pode ser projetado sobre este eixo horizontal (para esta projeção, fizemos uso de um eixo vertical em preto). Dessa forma, construímos um triângulo retângulo que contém um ângulo de 30º, um lado (a hipotenusa) medindo 5 metros e a distância que queremos calcular. Podemos chamar essa distância de y. Vejamos a figura para entender tudo isso.

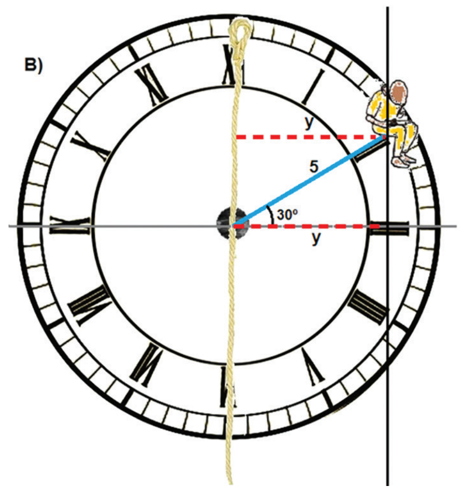
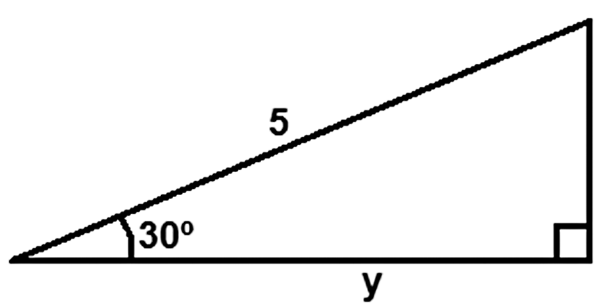


Figura 6: Com o raio de 5 metros em azul, a projeção da distância y em vermelho e o eixo vertical, formamos um triângulo retângulo que contém um ângulo de 30º. Com isso, temos que y representa um cateto adjacente a este ângulo e o raio, a hipotenusa.

Observem a figura a seguir que mostra apenas o triângulo que nos ajudará a resolver este problema:

Utilizando nossos conhecimentos de Trigonometria no triângulo retângulo que discutimos na unidade anterior, vemos que y é o cateto adjacente ao ângulo de 30º e 5 é a hipotenusa do triângulo.



Logo, faremos uso do cosseno do ângulo de 30º para determinarmos a medida do segmento y.

$$\cos 30° = \frac{cateto\, adjacente}{hipotenusa} = \frac{y}{5}$$

Como cos $30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, temos que:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{5}$$

$$y = \frac{5\sqrt{3}}{2} \cong \frac{5 \cdot 1{,}7}{2} = 4{,}3\,metros$$

Para calcularmos as distâncias do Sr. João à corda nos demais casos, vamos utilizar uma linha de raciocínio similar. Quer tentar?

Atividade 5

Calcule as distâncias de Sr. João à corda nos casos das letras C e D.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 6

Complete as lacunas e verifique o que aprendemos:

Em todos os exercícios que fizemos, para calcularmos as distâncias verticais, sempre utilizamos a razão trigonométrica ________________ (seno / cosseno / tangente). Em todos esses exercícios, calculamos as distâncias horizontais sempre através do ______________ (seno / cosseno / tangente).

Aprendemos nesses exercícios que a distância de Sr. João até a corda depende da __________________ em que se encontra no relógio. Desta posição, sempre conseguimos determinar um ___________________ com o eixo horizontal que por sua vez passa pelo centro do relógio e pelos números ______ e ______.

Trabalhamos em todos os casos com este eixo horizontal. Ele é muito importante para o conhecimento que estamos desenvolvendo nesta unidade.

Anote suas respostas em seu caderno

Pessoal, após essa parte inicial desta unidade, verificamos que através da Trigonometria nos triângulos retângulos, podemos calcular distâncias em uma circunferência. Para isso, faremos algumas substituições: no lugar do relógio da Central do Brasil, colocaremos apenas uma circunferência de *raio igual a 1*. No lugar da corda, um eixo vertical. Manteremos em nossos desenhos o eixo horizontal.

Seção 2
Organizando os conceitos trabalhados

Observem na figura a seguir a circunferência de raio unitário, os eixos horizontal e vertical, e um pontinho A. Este pontinho A vai ser nosso principal referencial, um ponto de partida, um marco inicial, tal qual o número 3 do relógio da Central do Brasil.

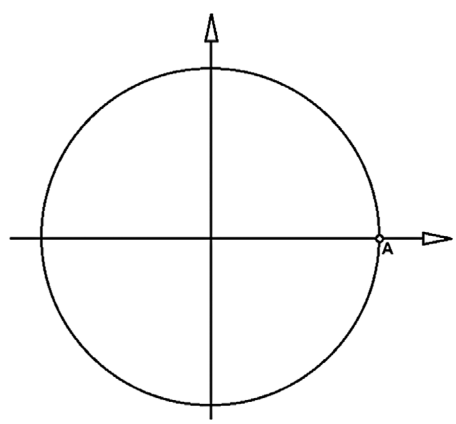


Figura 5: A circunferência acima possui raio unitário. O ponto A é o ponto de partida. Como se fosse o número 3 do relógio da Central do Brasil. Este ponto vai nos auxiliar a marcar os ângulos nesta circunferência, tal como fizemos no caso do Sr. João.

A estrutura que construímos na figura acima recebe um nome especial, devido à sua importância no desenvolvimento deste assunto. Seu nome é *Círculo Trigonométrico*. Vamos conhecê-lo melhor?

No círculo trigonométrico, podemos construir ângulos, conforme pudemos verificar ao longo desta unidade. Porém, não podemos nos esquecer de ter como ponto de partida o ponto A. Se percorremos a circunferência no sentido anti-horário (sentido contrário dos ponteiros do relógio), estaremos construindo ângulos positivos. Se percorremos no sentido horário, estaremos construindo ângulos negativos. Deem uma olhada no exemplo abaixo, em que percorremos dois arcos de medida igual a 45º.

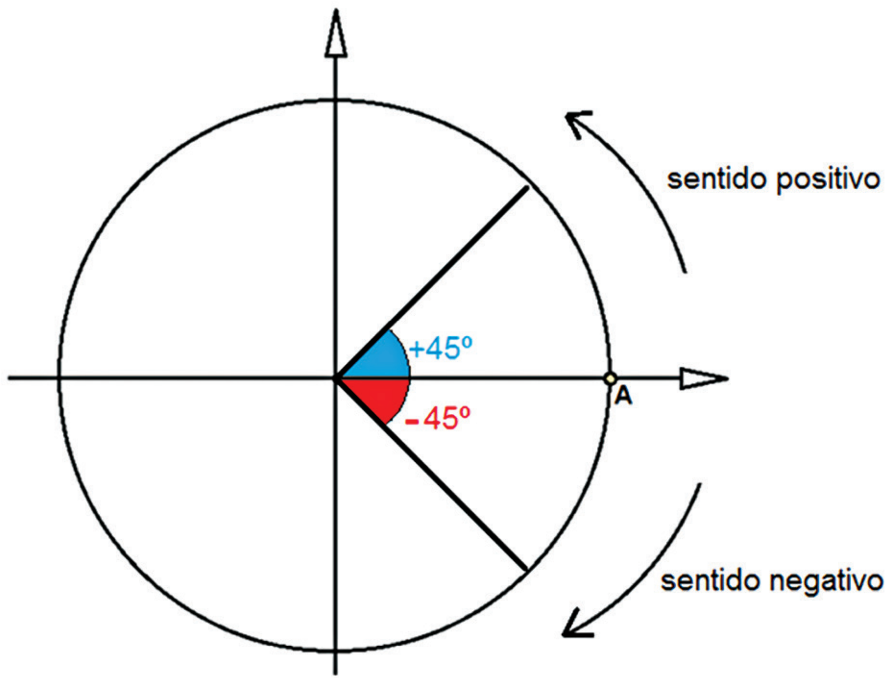


Figura 6: Círculo trigonométrico, contendo a marcação de dois ângulos de 45º. Contudo, um deles está no sentido negativo e o outro no positivo. Mas, você já se perguntou o porquê dos dois eixos na figura? Qual a função deles mesmo?

A presença dos eixos perpendiculares no círculo trigonométrico permite-nos calcular algumas distâncias, tal qual fizemos no relógio da Central. Como discutimos em uma atividade anterior, para calcularmos distâncias horizontais no círculo, fazemos uso do cosseno. Com isso, vamos definir o eixo horizontal como sendo o Eixo dos Cossenos. Da mesma forma, como sempre utilizamos o seno para calcularmos as distâncias verticais, vamos definir o eixo vertical como o Eixo dos Senos.

Vocês podem estar se perguntando: esses eixos são iguais aos *eixos cartesianos* que aprendemos no módulo sobre o estudo das funções?

É verdade. Eles fazem lembrar os eixos cartesianos mesmo. Funcionam praticamente da mesma forma. Possuem a parte positiva, a parte negativa e a marcação das coordenadas é feita da mesma forma. A diferença é que os eixos cartesianos determinam pontos em todo o plano. Já os eixos trigonométricos determinam pontos apenas sobre a circunferência de raio unitário, nenhum na parte de dentro e nem na de fora, apenas sobre a linha.

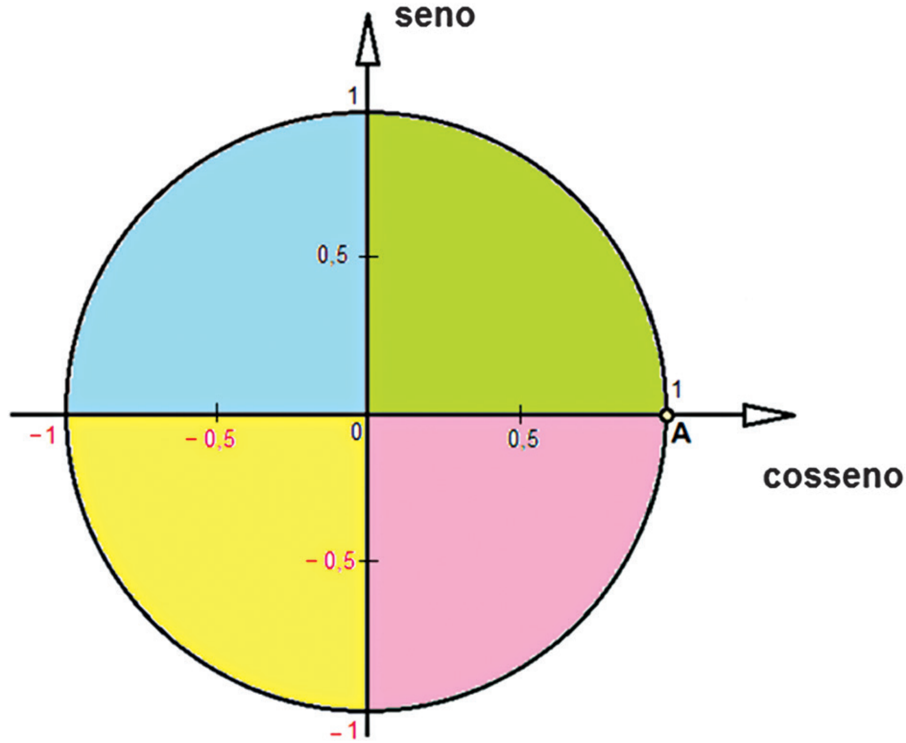


Figura 7: No círculo trigonométrico, os eixos variam de –1 até +1, pois funcionam apenas com a circunferência de raio unitário. Esses eixos dividem o círculo em quatro partes, chamadas de quadrantes. Como tudo começa pelo ponto A, girando no sentido anti-horário, teremos o 1º quadrante na cor verde, o 2º na cor azul, o 3º na cor amarela e o 4º na cor rosa.

A **Figura 7** mostra uma importante propriedade que podemos perceber: os valores no eixo dos senos e no eixo dos cossenos só variam de –1 a +1.

Agora, pessoal, sugiro explorar um pouquinho do círculo trigonométrico para que as demais propriedades e definições possam ser esclarecidas na prática.

Inicialmente, vamos colocar um ponto B na circunferência. Em seguida, traçamos a altura x deste ponto e o raio $\overline{OB}$. Perceba na Figura 8 a seguir que construímos, dessa forma, um triangulo retângulo, do mesmo jeito que fizemos com Sr. João, no relógio da Central do Brasil. Só que neste caso, o raio não é mais de 5 metros. O raio é unitário.

Como poderemos calcular a altura x do ponto B, sabendo que o ângulo AÔB vale 60º?

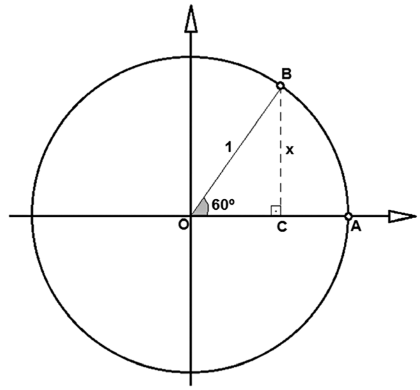


Figura 8: O ponto B sobre a circunferência possui uma altura x. Lembre-se da Trigonometria para calcular essa altura.

Como já fizemos antes, para determinar esta altura, utilizamos as razões trigonométricas. Nesse caso, mais especificamente, utilizaremos o seno do ângulo de 60º (distância vertical).

Este cálculo, deixamos por sua conta.

Atividade 7

Calcule a medida do segmento BC da **Figura 8** (altura do ponto B). Utilize uma estratégia semelhante para calcular a medida do segmento OC.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 8

Agora, marque um ponto D nesta circunferência, a partir de A, no sentido anti-horário, de modo que o arco considerado seja menor que 90º. Qual a altura deste ponto? Qual a distância desse ponto ao eixo vertical? É muito fácil! Tenho a certeza de que não vai errar.

Antes de encerrar esta atividade, onde estariam localizados na circunferência os seguintes pontos (sempre em relação ao ponto A)?

Ponto E → 180º
Ponto F → 270º
Ponto G → 360º
Ponto H → – 90º
Ponto I → – 180º

Ponto J → – 270º
Ponto K → 120º
Ponto L → 190º
Ponto M → 300º
Ponto N → 380º

Anote suas respostas em seu caderno

Estas últimas atividades levam-nos a entender que o raio unitário da circunferência permite-nos dizer que o eixo dos Senos revela-nos o valor do seno de cada ângulo. Da mesma forma que o eixo dos cossenos revela-nos o valor do cosseno de cada ângulo. E isso é muito importante, pois facilita em algumas coisas. Quer ver? Vamos lá!

É, pessoal. Rui parece não estar com sorte, mas nem tudo está perdido. Ele pode contar com nossa ajuda. Vamos entender um pouco o que Lia disse a ele:

Lia: quero a mesma quantidade que o número de soluções da equação $sen\,x = 0{,}5$.

Vamos recordar uma coisa: a solução de uma equação é o valor da incógnita, que neste caso é o x, que mantenha a igualdade da expressão. Também vamos considerar apenas os valores de x variando entre 0^0 e 360^0, isto porque em Trigonometria podemos considerar arcos com medidas maiores que 360^0, mas isto é um assunto para outro momento, não se preocupe agora! Vamos voltar ao problema que Rui precisa resolver...

Então, se relembrarmos a unidade anterior, quando aprendemos os valores dos senos de alguns ângulos, veremos que 0,5, ou ½ , era o valor do seno do ângulo de 30º. Já temos, portanto, a primeira solução. Será que existem mais? Vamos dar um pulinho no círculo trigonométrico!

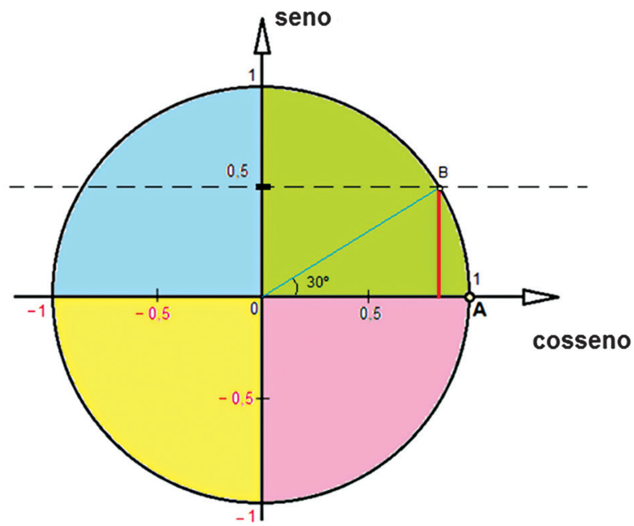
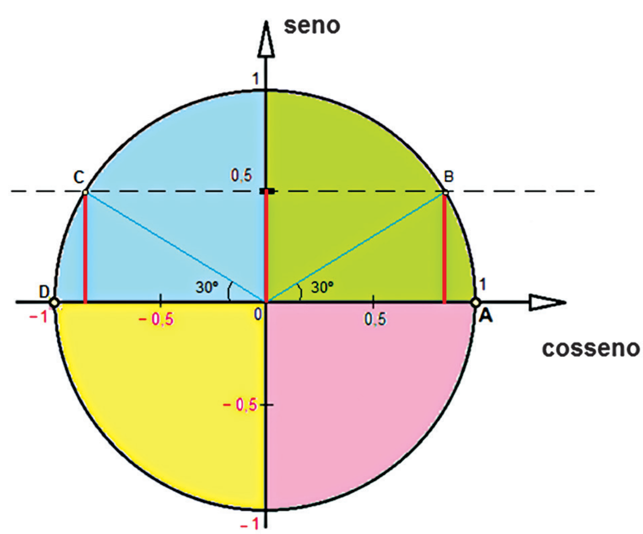


Figura 9: O ponto B, a 30º de A, é uma das soluções da equação, pois o seno de 30º (a distância vertical, a altura do ponto) é igual a 0,5. Repare, porém, que a linha pontilhada que determina essa altura, cruza o círculo trigonométrico em outro lugar. Para saber qual é esse ponto, vamos lembrar que na atividade 3 vimos que sempre havia duas posições no relógio em que Sr. João podia ocupar e manter a mesma altura. Note que algo similar ocorre aqui.

Se seguirmos o mesmo raciocínio que nas atividades com Sr. João, veremos que o outro ponto, do outro lado do eixo dos senos faz o mesmo ângulo com o eixo horizontal. Vamos visualizar isso na figura a seguir:



Sendo assim, como o ponto D faz 180º (meia volta) com o ponto A, então o ponto C está a 180º – 30º = 150º em relação ao ponto inicial A.

Importante

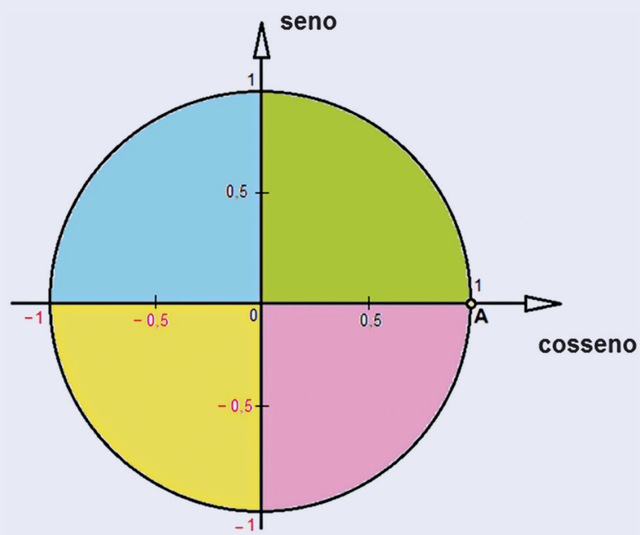
Giramos de A a D (sentido anti-horário, positivo) para determinar o ângulo de 180º. Giramos de D a C (sentido horário, negativo) para determinar os 30º.

Então, vamos correr para avisar ao Rui que a equação que Lia lhe propôs, possui duas soluções: 30º e 150º. Sendo assim, deverá comprar para ela dois bombons e, assim, impressioná-la mais um pouco para quem sabe conquistar o seu coração.

Agora, é com você! Resolva a atividade proposta, relacionada ao que acabamos de realizar. Quem sabe dá sorte no amor também!

Atividade 9

Determine as soluções da equação $\cos x = \frac{1}{2}$. Colocamos um círculo trigonométrico aqui para te auxiliar.



Anote suas respostas em seu caderno

Ao longo desta unidade, trabalhamos com diversos ângulos. E, como toda medida, foi necessário utilizarmos uma unidade, o grau. Porém, o Sistema Internacional de Unidades determina que a unidade padrão para ângulos é o RADIANO. Mas, antes de definirmos o radiano como uma unidade de medida de ângulo, vamos trabalhar um pouco com comprimentos de arcos de circunferência.

Saiba Mais

Duas circunferências distintas são figuras semelhantes. Dessa forma, a razão entre duas linhas homólogas é constante. Se, por exemplo, dividirmos a medida do diâmetro de qualquer circunferência pela medida do seu raio, obteremos 2 como resultado. Se dividirmos o comprimento de qualquer circunferência pela medida do seu diâmetro, também obteremos um valor constante, que chamaremos de π.

Mas que número é esse?

No link http://educador.brasilescola.com/estrategias-ensino/calculo-valor-pi.htm é apresentado o método utilizado por Arquimedes para a determinação de uma aproximação para esse número.

Como foi dito anteriormente, ao dividirmos o comprimento de qualquer circunferência pela medida do seu diâmetro, obteremos um valor constante (π). Podemos dizer que $\frac{C}{2r}=\pi$ (C indica o comprimento da circunferência e r a medida do seu raio), de onde obtém-se a fórmula para o cálculo do comprimento de uma circunferência: $C=2\pi r$.

Atividade 10

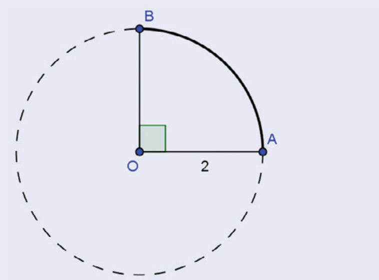
Quais os comprimentos das circunferências cujos raios medem 2 cm, 1 cm, 3.5 cm, respectivamente?

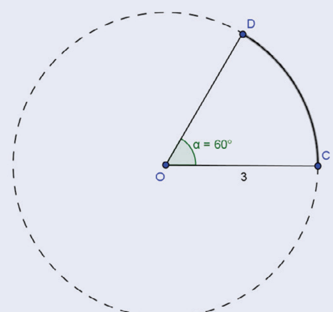
Anote suas respostas em seu caderno

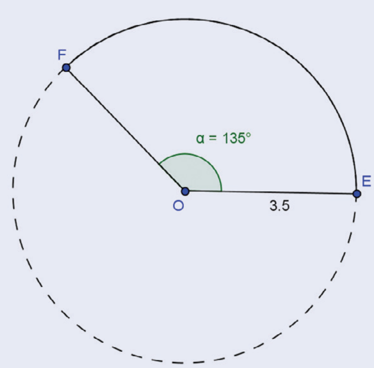
Atividade 11

Com a atividade anterior, calculamos comprimentos de circunferências. Como podemos calcular o comprimento de certas partes da circunferência? É fácil perceber que o comprimento de uma semicircunferência é πr (a metade do comprimento total, que é $2\pi r$).

Calcule os comprimentos dos arcos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$ determinados por ângulos centrais nas circunferências a seguir.







Anote suas respostas em seu caderno

Um ângulo que mede 1 Radiano determina um arco de mesma medida que o raio da circunferência.

Como visto anteriormente, o comprimento de uma circunferência é $C=2\pi r$. Pela definição de radiano apresentada acima, uma volta completa possui 2π radianos. Dessa forma, podemos associar graus e radiano assim:

$360^\circ = 2\pi$ rad

Então, segue que:

$180^\circ = \pi$ rad

$90^\circ = \pi/2$ rad , e por aí vai...

Saiba Mais

A letra grega π representa na Matemática o número irracional 3,14159265.... Em geral, aproximamos esse valor ora para 3,14, ora para 3,1, ora para 3 dependendo do caso. Visite o site http://pt.wikipedia.org/wiki/Pi e conheça algumas curiosidades deste número.

Atividade 12

Complete a tabela de modo que a coluna à direita contenha a medida em radianos dos arcos medidos em graus da coluna da esquerda.

Medidas em graus	Medidas em radianos
30º	
	π/4 rad
60º	
	3π/2 rad
300º	
	2 rad

Anote suas respostas em seu caderno

Resumindo...

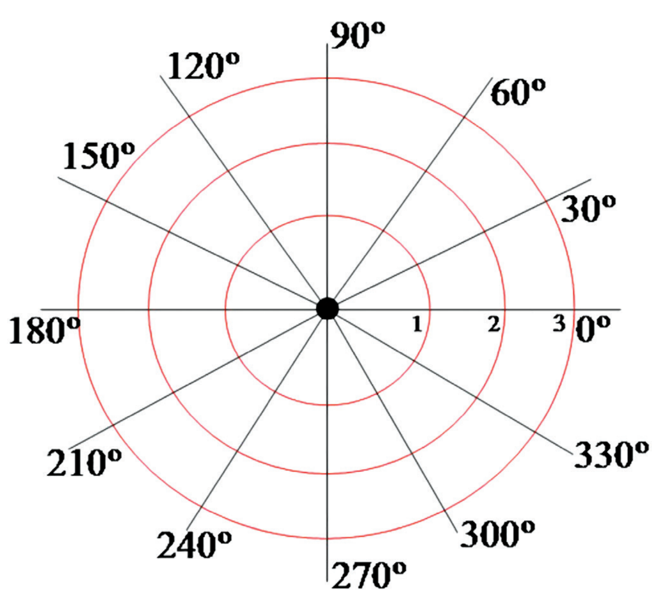
- No círculo trigonométrico, podemos encontrar os valores de seno e cosseno dos ângulos. Esses valores auxiliam no cálculo de algumas distâncias (medida de segmentos).
- O eixo vertical é conhecido como eixo dos senos.
- O eixo horizontal é conhecido como eixo dos cossenos.
- Os valores de seno e cosseno variam de –1 a +1.
- Uma volta determina um ângulo de 2 π radianos ou 360º.

Veja ainda

Início

1. Quer se divertir, utilizando os conceitos aprendidos nesta unidade?

Então acesse http://educador.brasilescola.com/estrategias-ensino/batalha-naval-no-circulo-trigonometrico.htm. Chame um colega para jogar essa batalha naval diferente com você!!!!



Tabuleiro da batalha naval

2. Você pode fazer download no software gratuito Trigonometria 1.1 (que é um arquivo executável) no site http://www.baixaki.com.br/download/trigonometria.htm

O programa é fácil de usar, basta digitar o valor de um ângulo, em graus ou radianos e clicar em Iniciar ou Mostrar e o programa gera os valores das funções seno, cosseno e tangente.

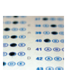
Referências

Livros

- Dante, L. Roberto. Matemática: **Contexto e aplicações**. Volume 1. Ed. 3. Impressão 1. Editora Ática. São Paulo. 2003.
- Iezzi, Gelson (e outros). **Fundamentos de Matemática Elementa**r. Volume 3. Ed Atual. São Paulo. 1995.

Imagens

- http://www.sxc.hu/photo/475767



- http://www.sxc.hu/photo/517386

- http://www.sxc.hu/985516_96035528

Atividade 1

João estaria na mesma altura se estivesse sentado no número IX, ou seja, 9.

Atividade 2

Resposta letra d.

Atividade 3

Caso Sr. João queira ficar na mesma altura do número 5, basta se posicionar sobre o número sete.

Os números que estão a 30º do número 12 são onze e um. Com isso, podemos dizer que possuem alturas iguais (iguais / diferentes).

Sr. João quer ficar na maior altura possível. Para isso, terá de se sentar sobre o número doze. A altura neste número é de 120 metros. Já o número seis está na posição mais baixa, isto é, a 110 metros de altura.

Atividade 4

a. Opção c.
b. 5 metros
c. Opções b e d

Atividade 5

Letra d mesma distância da encontrada na letra b.

Letra c

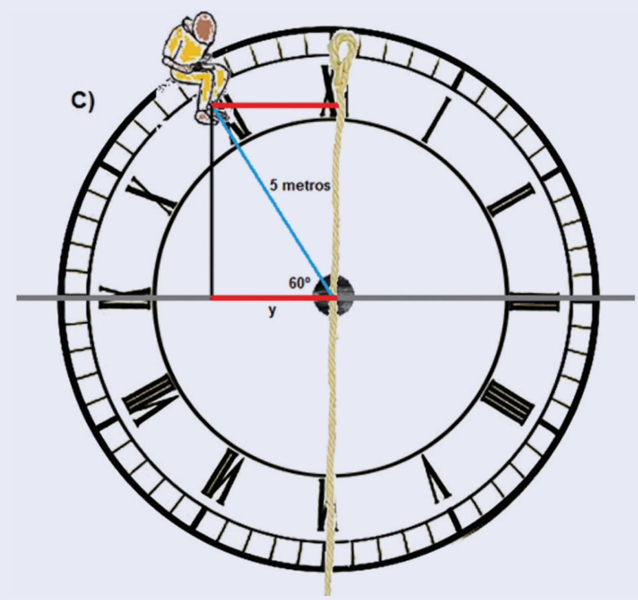
$$\cos 60^\circ = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{y}{5}$$

Respostas das Atividades

Como cos $60° = \frac{1}{2}$, temos que:

$$\frac{1}{2} = \frac{y}{5}$$

$$y = \frac{5}{2} = 2{,}5\,metros$$



Atividade 6

Em todos os exercícios que fizemos, para calcularmos as distâncias verticais, sempre utilizamos a razão trigonométrica seno (seno / co-seno / tangente). Ao passo que, em todos esses exercícios, calculamos as distâncias horizontais sempre através do cosseno (seno / cosseno / tangente).

Aprendemos nesses exercícios que a distância de Sr. João até a corda depende da posição em que se encontra no relógio. Desta posição sempre conseguimos determinar um ângulo com o eixo horizontal que por sua vez passa pelo centro do relógio e pelos números três e nove. Trabalhamos em todos os casos com este eixo. Ele é muito importante para o conhecimento que estamos desenvolvendo nesta unidade.

Respostas das Atividades

Atividade 7

$$sen60° = \frac{x}{1}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{1}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong \frac{1,7}{2} = 0,85$$

Para calcularmos OC, precisamos do cosseno de 60º.

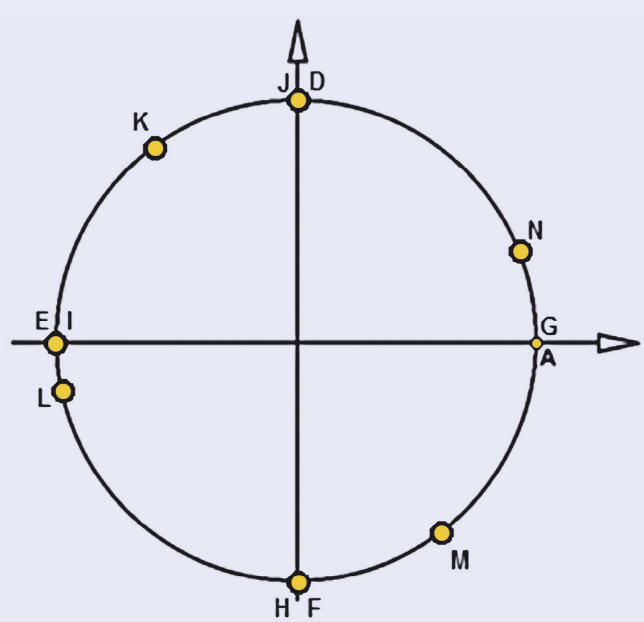
$$\cos 60° = \frac{OC}{1}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{OC}{1}$$

$$OC = \frac{1}{2} = 0,5$$

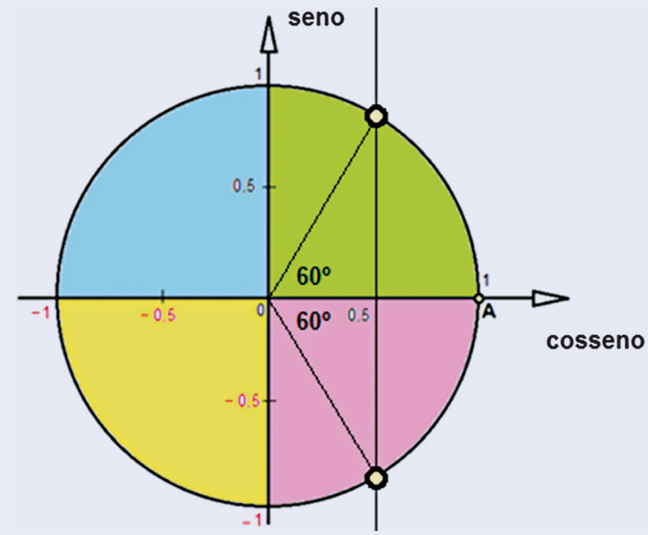
Atividade 8

A distância do ponto D ao eixo horizontal é igual ao raio da circunferência, ou seja, 1 unidade.



Respostas das Atividades

Atividade 9



Percebemos que a primeira solução é ângulo de 60º e que a segunda solução é o ângulo que está a 60º de A no sentido horário. Logo, 360º – 60º = 300º.

Atividade 10

4π cm, 2π cm, 7π cm respectivamente.

Atividade 11

$\overline{AB}$ tem comprimento igual à quarta parte do comprimento da circunferência de raio 2, ou seja, $AB = \frac{2\pi \cdot 2}{4} = \pi$.

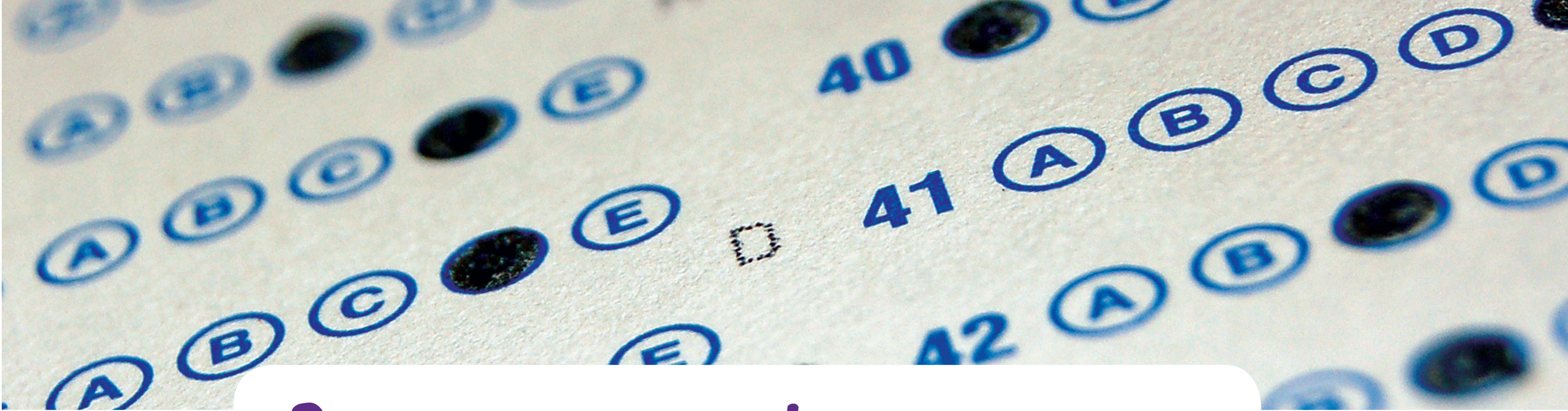
$\overline{CD}$ tem comprimento igual à sexta parte do comprimento da circunferência de raio 3, ou seja, $CD = \frac{2\pi \cdot 3}{6} = \pi$.

$\overline{EF}$ tem comprimento igual à três oitavos do comprimento da circunferência de raio 3.5, ou seja, $EF = \frac{3}{8} \cdot 2\pi \cdot 3{,}5 = \frac{21\pi}{8}$.

Respostas das Atividades

Atividade 12

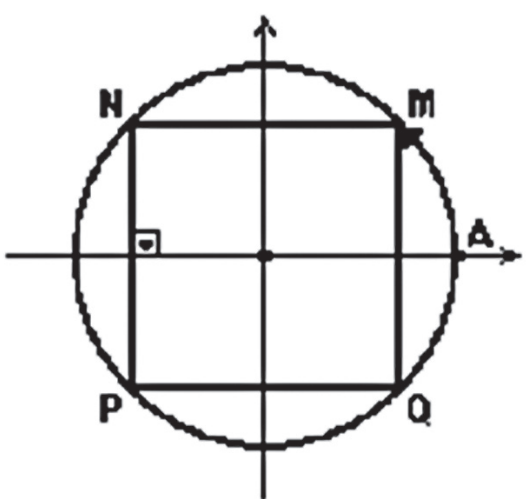
Medidas em graus	Medidas em radianos
30º	π/6 rad
45º	π/4 rad
60º	π/3 rad
270º	3π/2 rad
300º	5π/3 rad
360º/ π	2 rad



O que perguntam por aí...

Unifravas – 2000

A figura MNPQ é um retângulo inscrito em um círculo. Se a medida do arco AM é $\pi/4$ rad, as medidas dos arcos AN e AP, em radianos, respectivamente, são:



a. 3π/4 e 5π/4

b. π e 3π/2

c. 3π/4 e 2 π

d. π/2 e 5π/4

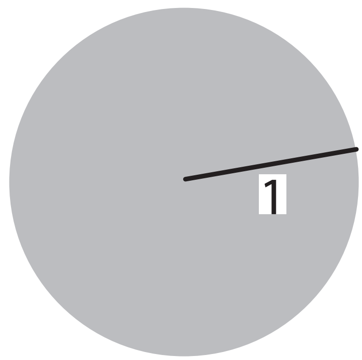
e. 3π/4 e 5π/8

Resposta: Letra A

Sendo π rad = 180º, $\frac{\pi}{4}=\frac{180^\circ}{4}=45^\circ \pi/4\,rad=180^\circ/4=45^\circ$. Logo, o arco AM mede 45º. Como o retângulo da figura mostra que o ponto N tem a mesma altura que o ponto M, então N está a 45º da horizontal, ou seja, 180º – 45º = 135º que, em radianos vale 3π/4 rad. Já o ponto P está a 45º depois do eixo horizontal, pois devido às propriedades do retângulo P está a uma mesma distância deste eixo que o ponto N. Logo, P está a 180º + 45º = 225º que, em radianos vale 5π/4 rad.

Exercício 5

Para evitar desperdício deseja-se determinar, aproximadamente, quantos metros de cerca são necessários para cercar completamente o jardim ilustrado na figura.



Qual o comprimento, em metros, desta cerca? Use $\pi = 3{,}14$.

(a) 6,14 (b) 6,28 (c) 6,41 (d) 6,59

Exercício 6

Um agrimensor enxerga o topo *T* de um morro sobe um ângulo de 45° a uma distância de 200m do mesmo.

Qual a altura aproximada, em metros, do morro?

a) 191 (b) 200 (c) 205 (d) 210

Exercício 7

Um avião levanta voo sob um ângulo constante de 30°. Após percorrer 2.000 metros em linha reta.

Qual será a altura atingida, em metros, pelo avião, aproximadamente?

(a) 500 (b) 850 (c) 1.000 (d) 1.250

Exercício 8

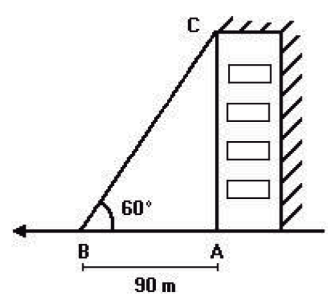
A Rua Tenório Quadros e a Avenida Teófilo Silva, ambas retilíneas, cruzam-se conforme um ângulo de 30°. O posto de gasolina Estrela do Sul encontra-se na Avenida Teófilo Silva a 4km do cruzamento citado.

Qual a distância, em quilômetros, entre o posto de gasolina Estrela do Sul e a rua Tenório Quadros?

(a) 1,7 (b) 1,8 (c) 1,9 (d) 2, 0

Exercício 9 (PUC-SP)

Uma pessoa encontra-se num ponto *A*, localizado na base de um prédio, conforme mostra a figura adiante. Se ela caminhar 90 metros em linha reta, chegará a um ponto *B*, de onde poderá ver o topo *C* do prédio, sob um ângulo de 60°.

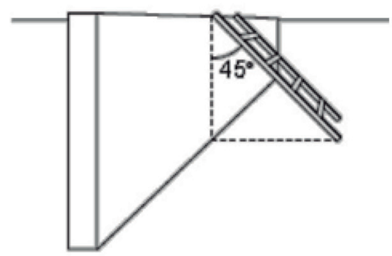


Quantos metros ela deverá se afastar do ponto *A*, andando em linha reta no sentido de *A* para *B*, para que possa enxergar o topo do prédio sob um ângulo de 30°?

(a) 150 (b) 180 (c) 270 (d) 300

Exercício 10

Uma escada está apoiada em um muro de 2m de altura, formando um ângulo de 45°.



Qual é o comprimento, em metros, da escada?

(a) 2,72 (b) 2,79 (c) 2,83 (d) 2, 85

Exercício 11

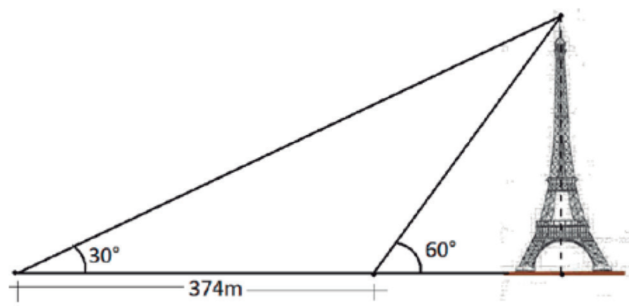
Uma pequena esfera é abandonada no ponto A de uma rampa que está a 80cm do solo e com uma inclinação de 60°. Qual a distância, em centímetros, que a esfera deverá percorrer até chegar ao solo?

Exercício 12

Em certa hora do dia, os raios do Sol incidem sobre um local plano com uma inclinação de 60° em relação à horizontal. Qual o comprimento, em metros, da sombra de uma construção de 6m de altura aproximadamente?

Exercício 13

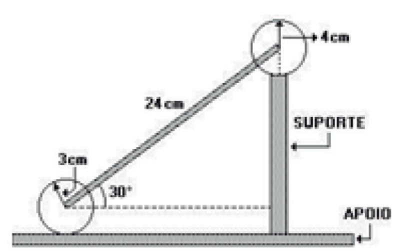
Um turista vê o topo de uma torre construída em um terreno plano, sob um ângulo de 30°. Aproximando-se da torre mais 374m, passa a vê-la sob um ângulo de 60° e a base da torre está no mesmo nível do olho do turista.



Qual a altura, aproximada, da torre?

Exercício 14

A figura a seguir é um corte vertical de uma peça usada em certo tipo de máquina. No corte aparecem dois círculos, com raios de 3cm e 4cm, um suporte vertical e um apoio horizontal.



Qual a altura, em centímetros, do suporte?

Exercício 15 (UFRS)

Um barco parte de A para atravessar o rio. A direção de seu deslocamento forma um ângulo de 120° com a margem do rio. Sendo a largura do rio 60m, a distância, em metros, percorrida pelo barco foi de:

Gabarito

Exercício 1

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 2

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 3

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 4

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 5

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 6

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 7

A B C D

○ ○ ● ○

Exercício 8

A B C D

○ ○ ○ ●

Exercício 9

A B C D

○ ● ○ ○

Exercício 10

A B C D

○ ○ ● ○

Exercício 11

92,38cm.

Exercício 12

$2\sqrt{3} \simeq 3,46$

Exercício 13

$187\sqrt{3} \simeq 324$

Exercício 14

11.

Exercício 15

$40\sqrt{3}$