Trigonometria na circunferência

Fascículo 6

Unidade 20

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Trigonometria na circunferência

Para início de conversa...

Figura 1: Reportagem do jornal O Globo da década de 1990 mostra o relógio da Central do Brasil, no Rio de Janeiro, sendo limpo por dois funcionários da CBTU (Companhia Brasileira de Trens Urbanos), devido a um ato de vandalismo que se difundia cada vez mais pela cidade: a pichação.

Sem dúvida, você já deve ter visto várias pichações nos mais diversos lugares. No início da década de 90, a moda era destacar-se dos demais pichadores pela ousadia, pichando em locais cada vez mais altos e arriscados. Hoje em dia, ainda há pichações, porém num movimento cada vez mais fraco. Mas a ousadia de pichar o relógio da Central do Brasil assusta bastante. Simplesmente, porque é muito alto!

Você sabe quantos metros de altura tem esse relógio?

São 110 metros de altura do nível da rua até o relógio que foi fabricado em 1943. Possui quatro faces quadradas de 10 metros de lado e ocupa exatamente cinco andares do prédio, do 22º ao 26º andar.

Realmente, é muita coragem!

E você? Teria coragem de subir até o relógio da Central para realizar o mesmo trabalho que os dois funcionários da foto realizaram?

Um dos funcionários presentes nesta foto está pisando a base do relógio, isto é, está a 110 metros de altura. Agora, observe na foto que o outro funcionário está agarrado no ponteiro das horas. Será que tem ideia da altura que se encontra? Como podemos calcular a que altura ele se encontra? Será que depende da posição do ponteiro no qual se segura?

Fique tranquilo. Estaremos juntos nesta unidade para discutir de que forma podemos determinar algumas distâncias dentro de um círculo. Para isso, tomaremos por base a Trigonometria que aprendemos na unidade anterior.

Objetivos de Aprendizagem

- Reconhecer a existência de fenômenos que se repetem de forma periódica;
- Identificar o radiano como unidade de medida de arco;
- Transformar a medida de um arco de grau para radiano e vice-versa;
- Representar o seno, o cosseno de um arco qualquer no ciclo trigonométrico;
- Resolver equações trigonométricas simples, com soluções na primeira volta.

Seção 1
Calculando distâncias na circunferência

Na unidade passada, aprendemos a calcular o comprimento de alguns segmentos, principalmente em triângulos, levando-se em consideração alguns ângulos. Isto é, usamos a Trigonometria para efetuar tais cálculos.

Será que podemos fazer uso novamente da Trigonometria para determinarmos distâncias em uma circunferência?

Vamos analisar a situação que nosso amigo, funcionário da CBTU, está passando. Para facilitar um pouco nossa análise, vamos considerar que ele está sobre o número 3 do relógio, conforme a figura.

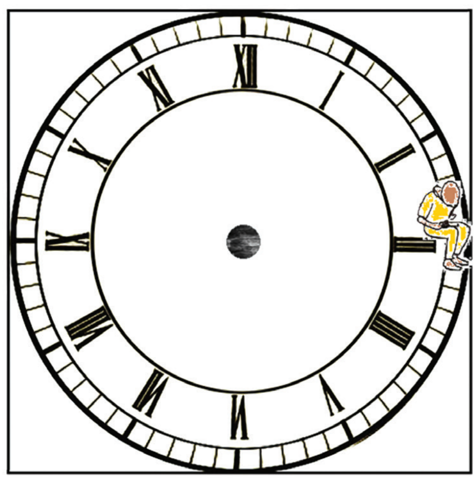


Figura 2: Representação do relógio da Central do Brasil com o funcionário da CBTU sentado junto ao número 3. Que tal darmos um pseudônimo ao nosso amigo? O que acham de João?

Vamos lembrar que esse relógio tem a forma de um quadrado com 10 metros de lado. Sendo assim, Sr. João está a uma altura que corresponde à metade da medida do lado do relógio, isto é, a 5 metros de altura. Contudo, não se esqueça de que o relógio encontra-se a 110 metros de altura do chão. Logo, Sr. João está a 115 metros de altitude. Essa foi fácil, não foi?!

Antes de prosseguir, uma pequena atividade:

Atividade 1

Sr. João também estaria a uma altura de 115 metros de tivesse sentado em um outro número do relógio. Que número é esse?

Anote suas respostas em seu caderno

Agora, vejamos outra situação: digamos que Sr. João esteja sentado sobre o número 2. Observe, então, a figura a seguir:

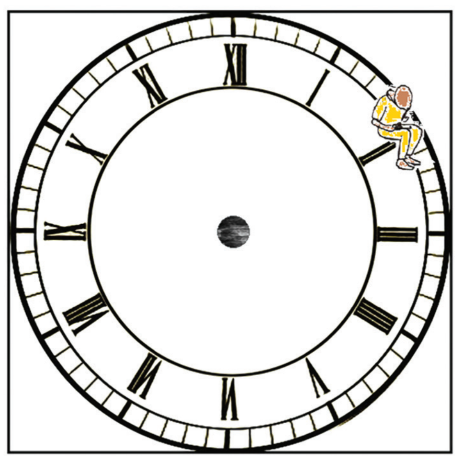


Figura 3: Sr. João está um pouco mais alto. Agora, está no número 2. Como poderemos calcular o quanto que o Sr. João subiu? Quer uma dica? Use a Trigonometria!

Ora, ora.... Como a Trigonometria vai nos ajudar a resolver este caso?

Vamos investigar!

Lembremos que toda volta completa em uma circunferência possui 360º (360 graus). Como em um relógio há 12 números igualmente separados ao longo da circunferência, podemos garantir que existe um ângulo de $360^\circ \div 12 = 30^\circ$ entre dois números. Isto é, Sr. João percorreu um **arco** de 30º, ao sair do número 3 e ir para o número 2.

Observe a figura a seguir. Nela, colocamos o ângulo de 30º entre os números 2 e 3. Perceba que a altura até o número 3 já foi calculada anteriormente. O que falta apenas é uma pequena distância que vamos chamá-la de x.

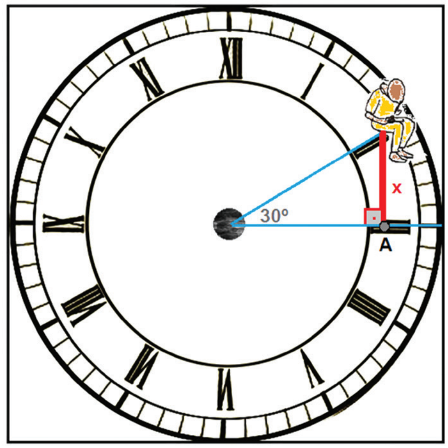
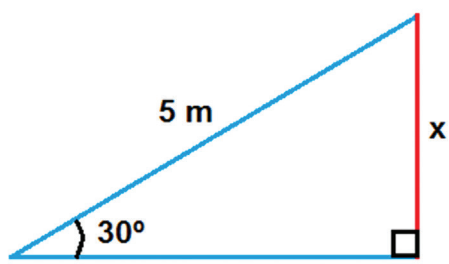


Figura 4: A distância x representa o quanto Sr. João deslocou-se verticalmente, quando estava no número 3. Repare que o centro do relógio, Sr. João e o ponto A formam um triângulo retângulo. Percebeu onde entra a Trigonometria?

Note bem este triângulo formado na figura. Conhecemos a medida do segmento que une o centro do relógio e o Sr. João: ele é o **raio da circunferência** do relógio, ou seja, tem 5 metros de comprimento.

Dessa forma, o triângulo fica assim:



Como vimos na unidade anterior, calculamos x através do seno de 30º.

Observe:

$$sen 30° = \frac{x}{5}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{x}{5}$$
$$x = 2{,}5 \, metros$$

Concluímos, portanto, que a altura do Sr. João sentado sobre o número 2 do relógio da Central do Brasil é de: 110m + 5m + 2,5m = 117,5 metros.

Vamos ver se estamos entendendo bem?

Atividade 2

Existe um outro número no qual seu Sr. João pode se sentar e manter a mesma altura de 117,5m. Marque a opção correta:

a. IV

b. VIII

c. IX

d. X

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 3

Complete as lacunas:

Caso Sr. João queira ficar na mesma altura do número 5, basta se posicionar sobre o número ________.

Os números que estão a 30º do número 12 são __________ e _________. Com isso, podemos dizer que possuem alturas _____________ (iguais / diferentes).

Sr. João quer ficar na maior altura possível. Para isso, terá de se sentar sobre o número ________________. A altura neste número é de ____________ metros. Já o número __________ está na posição mais baixa, isto é, a ________ metros de altura.

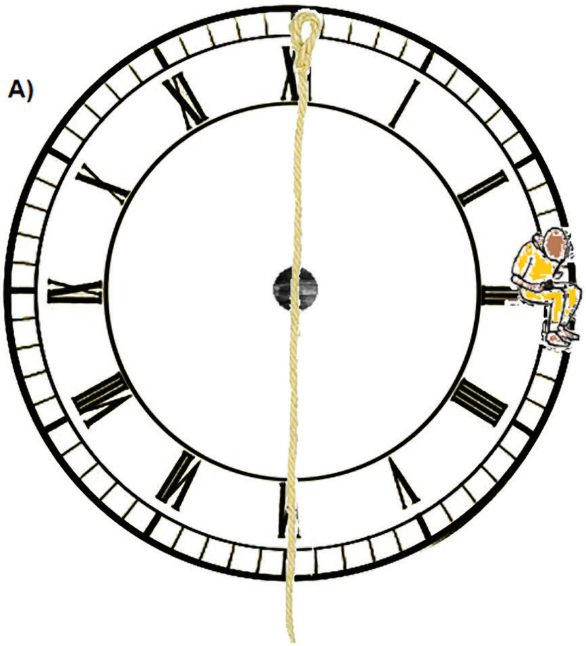
Anote suas respostas em seu caderno

Se considerarmos que Sr. João está agarrado ao ponteiro do relógio, percebemos que sua altura varia de acordo com a posição deste ponteiro. Sempre entre a máxima e a mínima que já calculamos. De tempos em tempos, as alturas repetem-se. A isso, damos o nome de *fenômeno periódico*.

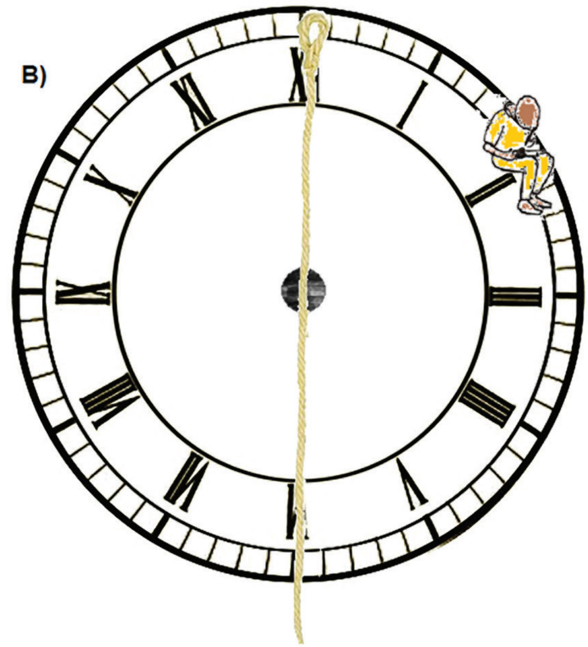
Sendo assim, conseguimos esclarecer quanto à altura em que Sr. João encontra-se. Para isso, utilizamos a Trigonometria. Esperamos, então, que nosso amigo convença-se de que está a uma altura muito grande e que desça o quanto antes desse relógio!

Falando em descer, vamos pendurar uma corda no número 12 que leva até a base do relógio. Nossa tarefa agora é determinar a distância de cada número à corda pendurada. Vamos ver a figura a seguir para responder à próxima atividade:

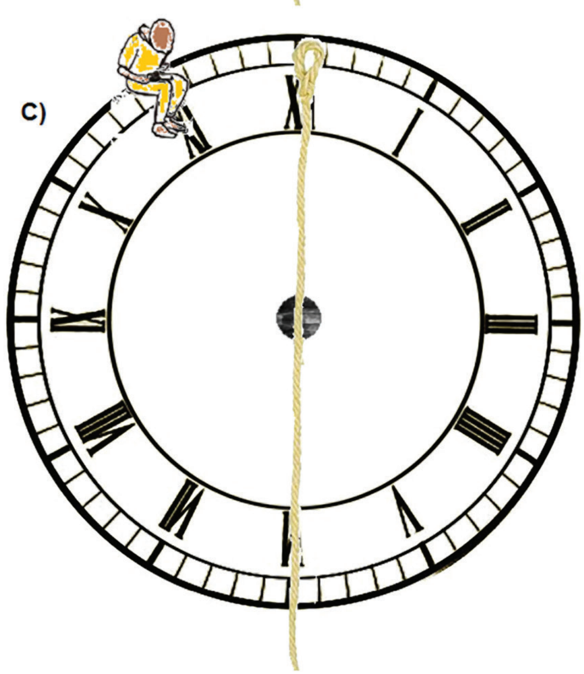
A)



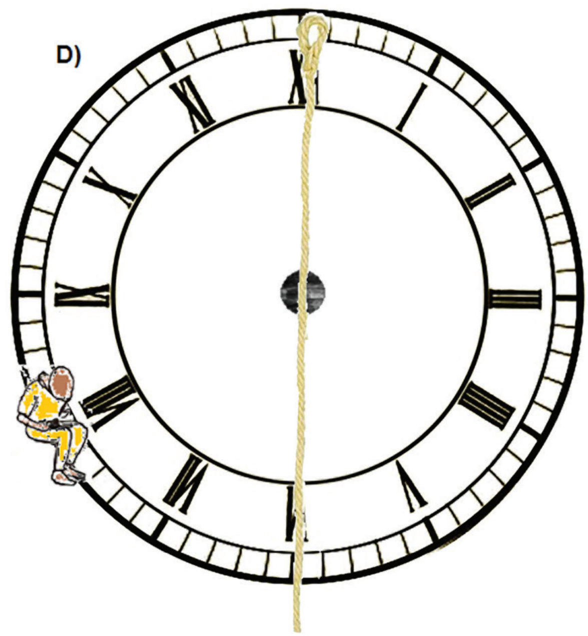
B)



C)



D)



Atividade 4

Responda às perguntas:

a. Em qual das opções, Sr. João está mais próximo da corda?

b. Qual a distância de Sr. João à corda na opção (A)? (Não se esqueça de que o raio deste relógio é de 5 metros).

c. Em duas situações, Sr. João está a uma mesma distância da corda. Quais são elas?

Anote suas respostas em seu caderno

Muito bem! Conseguimos responder à atividade sem precisar de cálculos (Veja na seção Resposta das atividades no final desta aula). Mas, como poderemos definir as distâncias do Sr. João à corda nas figuras B, C e D? Vamos analisar juntos?

Para calcularmos a distância de Sr. João à corda na situação descrita na letra B, temos de recapitular algumas informações sobre o relógio:

Sua circunferência tem raio igual a 5 metros e o arco determinado por dois números consecutivos possui 30º (trinta graus). Com isso, traçamos o raio do relógio (segmento que parte do centro do relógio até Sr. João) e a distância do nosso amigo até a corda. Vamos observar a figura a seguir. Ela ilustra tudo isso.

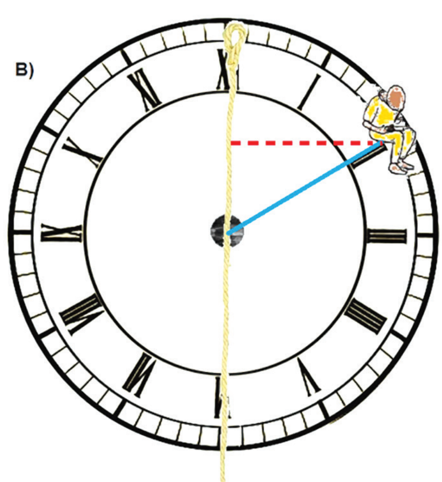


Figura 5: Esta figura mostra Sr. João sobre o número 2, o raio do relógio (em azul) e a distância dele à corda (em vermelho pontilhado). Repare que, neste desenho, não aparece um dado importante: o ângulo de 30º. Lembre-se de que isto é muito importante para resolvermos este problema através da Trigonometria.

Vamos colocar o ângulo de 30º, nesta figura. Para isso, vamos colocar um eixo horizontal (em cinza) que passa pelo centro do relógio. Note que o segmento vermelho pode ser projetado sobre este eixo horizontal (para esta projeção, fizemos uso de um eixo vertical em preto). Dessa forma, construímos um triângulo retângulo que contém um ângulo de 30º, um lado (a hipotenusa) medindo 5 metros e a distância que queremos calcular. Podemos chamar essa distância de y. Vejamos a figura para entender tudo isso.

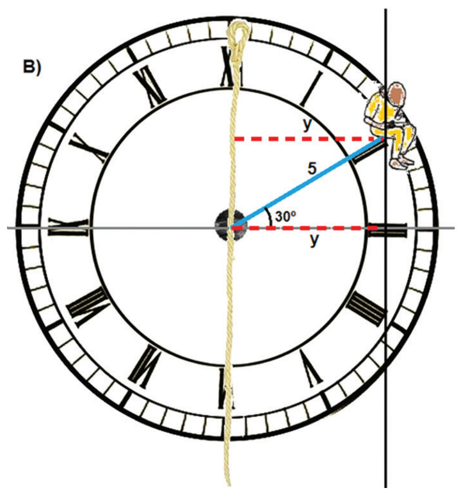
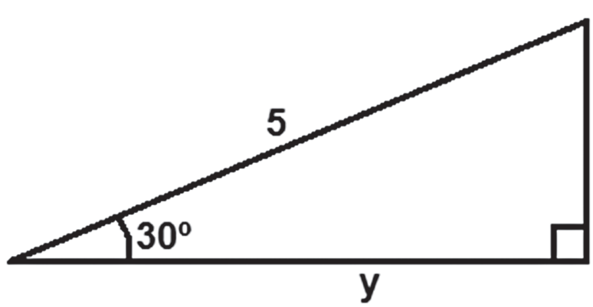


Figura 6: Com o raio de 5 metros em azul, a projeção da distância y em vermelho e o eixo vertical, formamos um triângulo retângulo que contém um ângulo de 30º. Com isso, temos que y representa um cateto adjacente a este ângulo e o raio, a hipotenusa.

Observem a figura a seguir que mostra apenas o triângulo que nos ajudará a resolver este problema:

Utilizando nossos conhecimentos de Trigonometria no triângulo retângulo que discutimos na unidade anterior, vemos que y é o cateto adjacente ao ângulo de 30º e 5 é a hipotenusa do triângulo.



Logo, faremos uso do cosseno do ângulo de 30º para determinarmos a medida do segmento y.

$$\cos 30^\circ = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{y}{5}$$

Como $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, temos que:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{5}$$

$$y = \frac{5\sqrt{3}}{2} \cong \frac{5 \cdot 1{,}7}{2} = 4{,}3\,metros$$

Para calcularmos as distâncias do Sr. João à corda nos demais casos, vamos utilizar uma linha de raciocínio similar. Quer tentar?

Atividade 5

Calcule as distâncias de Sr. João à corda nos casos das letras C e D.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 6

Complete as lacunas e verifique o que aprendemos:

Em todos os exercícios que fizemos, para calcularmos as distâncias verticais, sempre utilizamos a razão trigonométrica ________________ (seno / cosseno / tangente). Em todos esses exercícios, calculamos as distâncias horizontais sempre através do ______________ (seno / cosseno / tangente).

Aprendemos nesses exercícios que a distância de Sr. João até a corda depende da __________________ em que se encontra no relógio. Desta posição, sempre conseguimos determinar um ___________________ com o eixo horizontal que por sua vez passa pelo centro do relógio e pelos números ______ e ______.

Trabalhamos em todos os casos com este eixo horizontal. Ele é muito importante para o conhecimento que estamos desenvolvendo nesta unidade.

Anote suas respostas em seu caderno

Pessoal, após essa parte inicial desta unidade, verificamos que através da Trigonometria nos triângulos retângulos, podemos calcular distâncias em uma circunferência. Para isso, faremos algumas substituições: no lugar do relógio da Central do Brasil, colocaremos apenas uma circunferência de *raio igual a 1*. No lugar da corda, um eixo vertical. Manteremos em nossos desenhos o eixo horizontal.

Seção 2
Organizando os conceitos trabalhados

Observem na figura a seguir a circunferência de raio unitário, os eixos horizontal e vertical, e um pontinho A. Este pontinho A vai ser nosso principal referencial, um ponto de partida, um marco inicial, tal qual o número 3 do relógio da Central do Brasil.

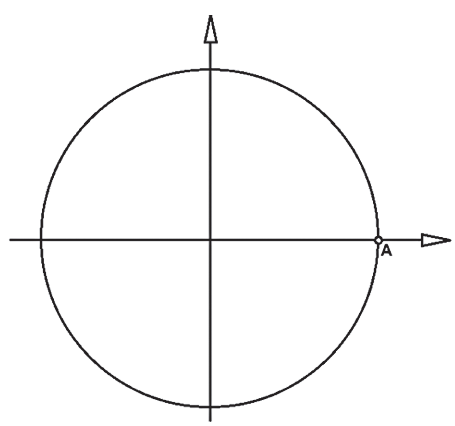


Figura 5: A circunferência acima possui raio unitário. O ponto A é o ponto de partida. Como se fosse o número 3 do relógio da Central do Brasil. Este ponto vai nos auxiliar a marcar os ângulos nesta circunferência, tal como fizemos no caso do Sr. João.

A estrutura que construímos na figura acima recebe um nome especial, devido à sua importância no desenvolvimento deste assunto. Seu nome é *Círculo Trigonométrico*. Vamos conhecê-lo melhor?

No círculo trigonométrico, podemos construir ângulos, conforme pudemos verificar ao longo desta unidade. Porém, não podemos nos esquecer de ter como ponto de partida o ponto A. Se percorremos a circunferência no sentido anti-horário (sentido contrário dos ponteiros do relógio), estaremos construindo ângulos positivos. Se percorremos no sentido horário, estaremos construindo ângulos negativos. Deem uma olhada no exemplo abaixo, em que percorremos dois arcos de medida igual a 45º.

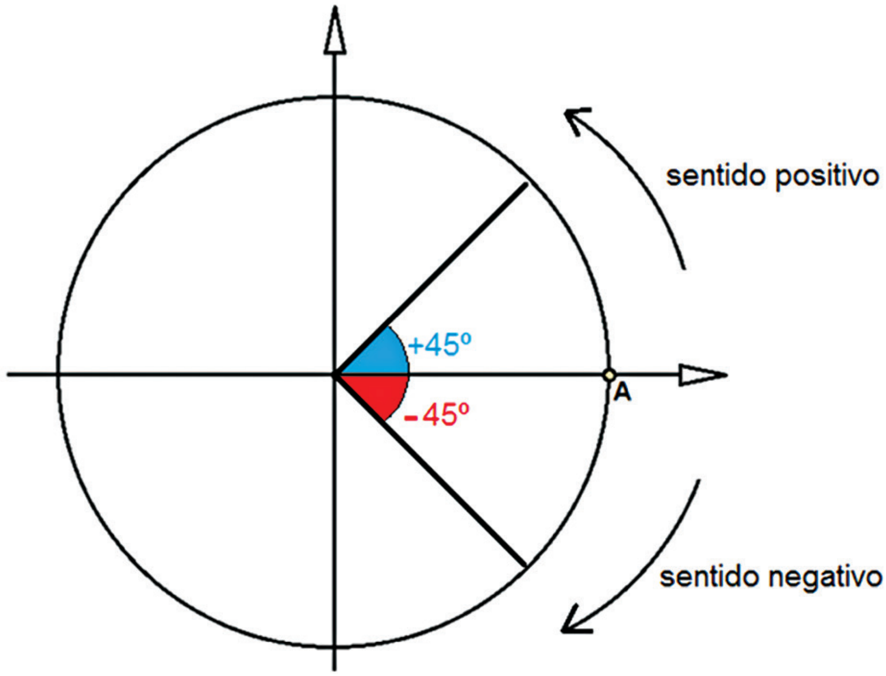


Figura 6: Círculo trigonométrico, contendo a marcação de dois ângulos de 45º. Contudo, um deles está no sentido negativo e o outro no positivo. Mas, você já se perguntou o porquê dos dois eixos na figura? Qual a função deles mesmo?

A presença dos eixos perpendiculares no círculo trigonométrico permite-nos calcular algumas distâncias, tal qual fizemos no relógio da Central. Como discutimos em uma atividade anterior, para calcularmos distâncias horizontais no círculo, fazemos uso do cosseno. Com isso, vamos definir o eixo horizontal como sendo o Eixo dos Cossenos. Da mesma forma, como sempre utilizamos o seno para calcularmos as distâncias verticais, vamos definir o eixo vertical como o Eixo dos Senos.

Vocês podem estar se perguntando: esses eixos são iguais aos *eixos cartesianos* que aprendemos no módulo sobre o estudo das funções?

É verdade. Eles fazem lembrar os eixos cartesianos mesmo. Funcionam praticamente da mesma forma. Possuem a parte positiva, a parte negativa e a marcação das coordenadas é feita da mesma forma. A diferença é que os eixos cartesianos determinam pontos em todo o plano. Já os eixos trigonométricos determinam pontos apenas sobre a circunferência de raio unitário, nenhum na parte de dentro e nem na de fora, apenas sobre a linha.

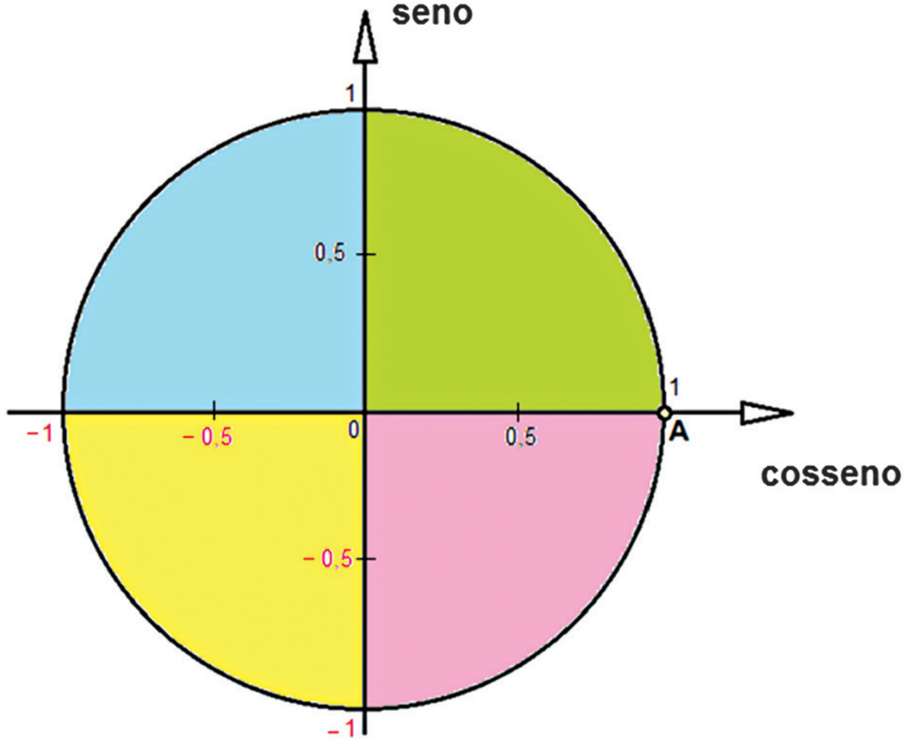


Figura 7: No círculo trigonométrico, os eixos variam de –1 até +1, pois funcionam apenas com a circunferência de raio unitário. Esses eixos dividem o círculo em quatro partes, chamadas de quadrantes. Como tudo começa pelo ponto A, girando no sentido anti-horário, teremos o 1º quadrante na cor verde, o 2º na cor azul, o 3º na cor amarela e o 4º na cor rosa.

A **Figura 7** mostra uma importante propriedade que podemos perceber: os valores no eixo dos senos e no eixo dos cossenos só variam de –1 a +1.

Agora, pessoal, sugiro explorar um pouquinho do círculo trigonométrico para que as demais propriedades e definições possam ser esclarecidas na prática.

Inicialmente, vamos colocar um ponto B na circunferência. Em seguida, traçamos a altura x deste ponto e o raio $\overline{OB}$. Perceba na Figura 8 a seguir que construímos, dessa forma, um triangulo retângulo, do mesmo jeito que fizemos com Sr. João, no relógio da Central do Brasil. Só que neste caso, o raio não é mais de 5 metros. O raio é unitário.

Como poderemos calcular a altura x do ponto B, sabendo que o ângulo AÔB vale 60º?

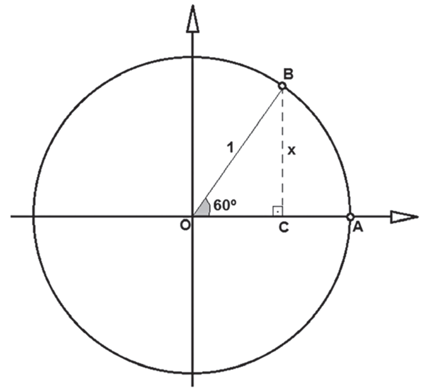


Figura 8: O ponto B sobre a circunferência possui uma altura x. Lembre-se da Trigonometria para calcular essa altura.

Como já fizemos antes, para determinar esta altura, utilizamos as razões trigonométricas. Nesse caso, mais especificamente, utilizaremos o seno do ângulo de 60º (distância vertical).

Este cálculo, deixamos por sua conta.

Atividade 7

Calcule a medida do segmento BC da **Figura 8** (altura do ponto B). Utilize uma estratégia semelhante para calcular a medida do segmento OC.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 8

Agora, marque um ponto D nesta circunferência, a partir de A, no sentido anti-horário, de modo que o arco considerado seja menor que 90º. Qual a altura deste ponto? Qual a distância desse ponto ao eixo vertical? É muito fácil! Tenho a certeza de que não vai errar.

Antes de encerrar esta atividade, onde estariam localizados na circunferência os seguintes pontos (sempre em relação ao ponto A)?

Ponto E → 180º
Ponto F → 270º
Ponto G → 360º
Ponto H → – 90º
Ponto I → – 180º

Ponto J → – 270º
Ponto K → 120º
Ponto L → 190º
Ponto M → 300º
Ponto N → 380º

Anote suas respostas em seu caderno

Estas últimas atividades levam-nos a entender que o raio unitário da circunferência permite-nos dizer que o eixo dos Senos revela-nos o valor do seno de cada ângulo. Da mesma forma que o eixo dos cossenos revela-nos o valor do cosseno de cada ângulo. E isso é muito importante, pois facilita em algumas coisas. Quer ver? Vamos lá!

É, pessoal. Rui parece não estar com sorte, mas nem tudo está perdido. Ele pode contar com nossa ajuda. Vamos entender um pouco o que Lia disse a ele:

Lia: quero a mesma quantidade que o número de soluções da equação $sen\,x = 0{,}5$.

Vamos recordar uma coisa: a solução de uma equação é o valor da incógnita, que neste caso é o x, que mantenha a igualdade da expressão. Também vamos considerar apenas os valores de x variando entre 0^0 e 360^0, isto porque em Trigonometria podemos considerar arcos com medidas maiores que 360^0, mas isto é um assunto para outro momento, não se preocupe agora! Vamos voltar ao problema que Rui precisa resolver...

Então, se relembrarmos a unidade anterior, quando aprendemos os valores dos senos de alguns ângulos, veremos que 0,5, ou ½ , era o valor do seno do ângulo de 30º. Já temos, portanto, a primeira solução. Será que existem mais? Vamos dar um pulinho no círculo trigonométrico!

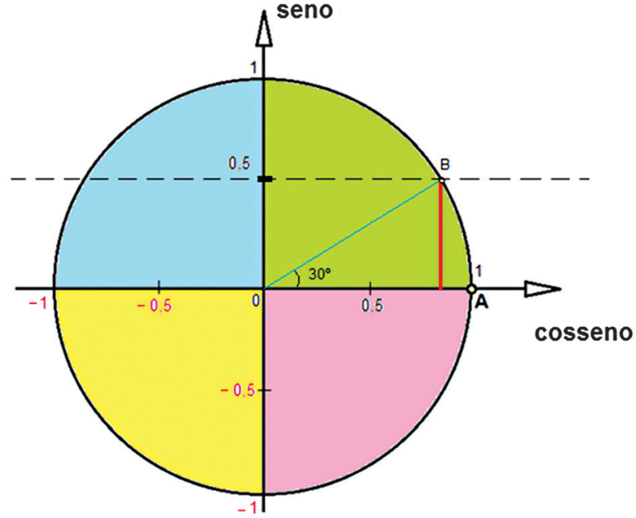
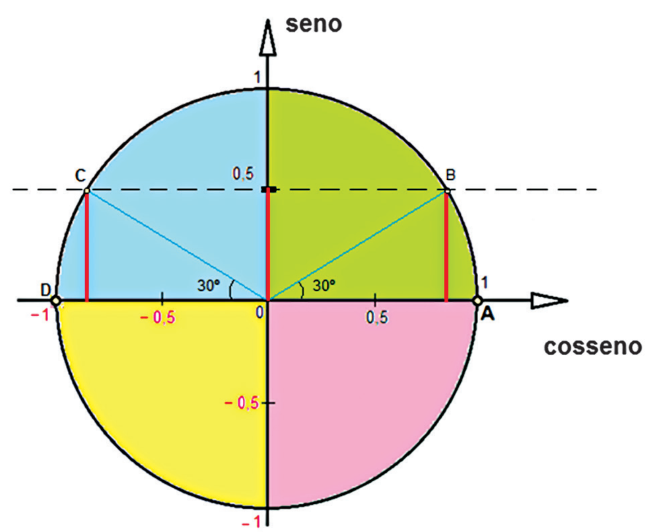


Figura 9: O ponto B, a 30º de A, é uma das soluções da equação, pois o seno de 30º (a distância vertical, a altura do ponto) é igual a 0,5. Repare, porém, que a linha pontilhada que determina essa altura, cruza o círculo trigonométrico em outro lugar. Para saber qual é esse ponto, vamos lembrar que na atividade 3 vimos que sempre havia duas posições no relógio em que Sr. João podia ocupar e manter a mesma altura. Note que algo similar ocorre aqui.

Se seguirmos o mesmo raciocínio que nas atividades com Sr. João, veremos que o outro ponto, do outro lado do eixo dos senos faz o mesmo ângulo com o eixo horizontal. Vamos visualizar isso na figura a seguir:



Sendo assim, como o ponto D faz 180º (meia volta) com o ponto A, então o ponto C está a 180º – 30º = 150º em relação ao ponto inicial A.

Importante

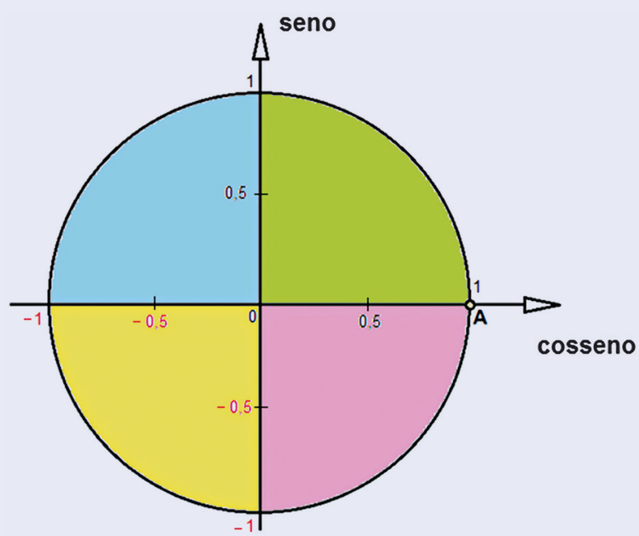
Giramos de A a D (sentido anti-horário, positivo) para determinar o ângulo de 180º. Giramos de D a C (sentido horário, negativo) para determinar os 30º.

Então, vamos correr para avisar ao Rui que a equação que Lia lhe propôs, possui duas soluções: 30º e 150º. Sendo assim, deverá comprar para ela dois bombons e, assim, impressioná-la mais um pouco para quem sabe conquistar o seu coração.

Agora, é com você! Resolva a atividade proposta, relacionada ao que acabamos de realizar. Quem sabe dá sorte no amor também!

Atividade 9

Determine as soluções da equação $\cos x = \frac{1}{2}$. Colocamos um círculo trigonométrico aqui para te auxiliar.



Anote suas respostas em seu caderno

Ao longo desta unidade, trabalhamos com diversos ângulos. E, como toda medida, foi necessário utilizarmos uma unidade, o grau. Porém, o Sistema Internacional de Unidades determina que a unidade padrão para ângulos é o RADIANO. Mas, antes de definirmos o radiano como uma unidade de medida de ângulo, vamos trabalhar um pouco com comprimentos de arcos de circunferência.

Saiba Mais

Duas circunferências distintas são figuras semelhantes. Dessa forma, a razão entre duas linhas homólogas é constante. Se, por exemplo, dividirmos a medida do diâmetro de qualquer circunferência pela medida do seu raio, obteremos 2 como resultado. Se dividirmos o comprimento de qualquer circunferência pela medida do seu diâmetro, também obteremos um valor constante, que chamaremos de π.

Mas que número é esse?

No link http://educador.brasilescola.com/estrategias-ensino/calculo-valor-pi.htm é apresentado o método utilizado por Arquimedes para a determinação de uma aproximação para esse número.

Como foi dito anteriormente, ao dividirmos o comprimento de qualquer circunferência pela medida do seu diâmetro, obteremos um valor constante (π). Podemos dizer que $\frac{C}{2r}=\pi$ (C indica o comprimento da circunferência e r a medida do seu raio), de onde obtém-se a fórmula para o cálculo do comprimento de uma circunferência: $C=2\pi r$.

Atividade 10

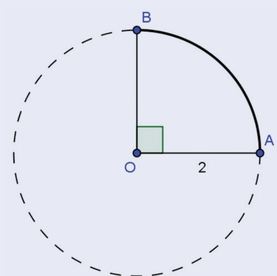
Quais os comprimentos das circunferências cujos raios medem 2 cm, 1 cm, 3.5 cm, respectivamente?

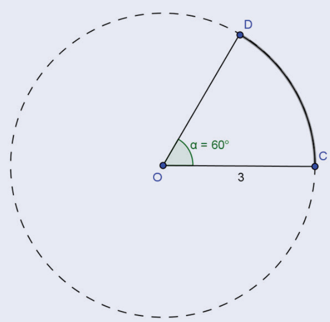
Anote suas respostas em seu caderno

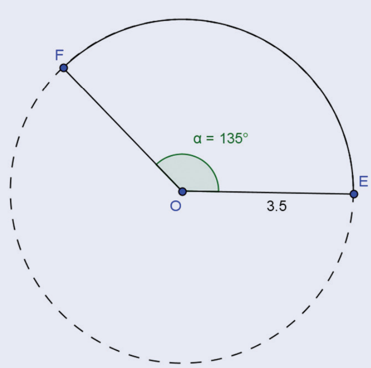
Atividade 11

Com a atividade anterior, calculamos comprimentos de circunferências. Como podemos calcular o comprimento de certas partes da circunferência? É fácil perceber que o comprimento de uma semicircunferência é πr (a metade do comprimento total, que é $2\pi r$).

Calcule os comprimentos dos arcos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$ determinados por ângulos centrais nas circunferências a seguir.







Anote suas respostas em seu caderno

Um ângulo que mede 1 Radiano determina um arco de mesma medida que o raio da circunferência.

Como visto anteriormente, o comprimento de uma circunferência é $C=2\pi r$. Pela definição de radiano apresentada acima, uma volta completa possui 2π radianos. Dessa forma, podemos associar graus e radiano assim:

$360^\circ = 2\pi$ rad

Então, segue que:

$180^\circ = \pi$ rad

$90^\circ = \pi/2$ rad , e por aí vai...

Saiba Mais

A letra grega π representa na Matemática o número irracional 3,14159265.... Em geral, aproximamos esse valor ora para 3,14, ora para 3,1, ora para 3 dependendo do caso. Visite o site http://pt.wikipedia.org/wiki/Pi e conheça algumas curiosidades deste número.

Atividade 12

Complete a tabela de modo que a coluna à direita contenha a medida em radianos dos arcos medidos em graus da coluna da esquerda.

Medidas em graus	Medidas em radianos
30º	
	π/4 rad
60º	
	3π/2 rad
300º	
	2 rad

Anote suas respostas em seu caderno

Resumindo...

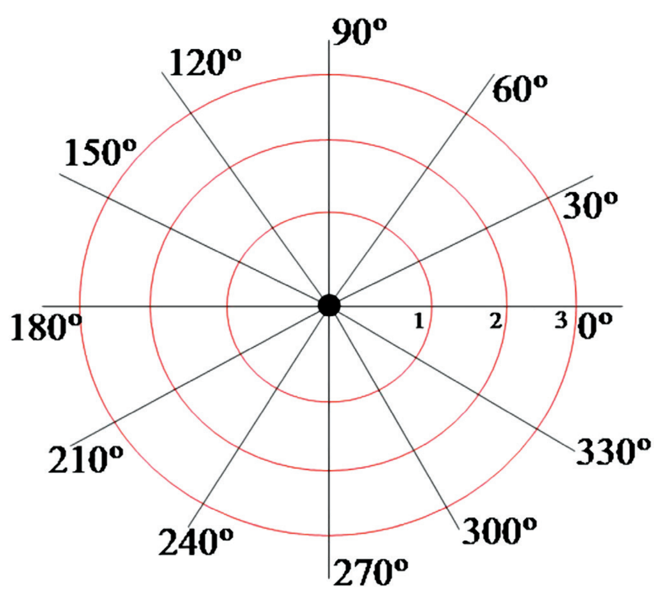
- No círculo trigonométrico, podemos encontrar os valores de seno e cosseno dos ângulos. Esses valores auxiliam no cálculo de algumas distâncias (medida de segmentos).
- O eixo vertical é conhecido como eixo dos senos.
- O eixo horizontal é conhecido como eixo dos cossenos.
- Os valores de seno e cosseno variam de –1 a +1.
- Uma volta determina um ângulo de 2 π radianos ou 360º.

Veja ainda

Início

1. Quer se divertir, utilizando os conceitos aprendidos nesta unidade?

Então acesse http://educador.brasilescola.com/estrategias-ensino/batalha-naval-no-circulo-trigonometrico.htm. Chame um colega para jogar essa batalha naval diferente com você!!!!



Tabuleiro da batalha naval

2. Você pode fazer download no software gratuito Trigonometria 1.1 (que é um arquivo executável) no site http://www.baixaki.com.br/download/trigonometria.htm

O programa é fácil de usar, basta digitar o valor de um ângulo, em graus ou radianos e clicar em Iniciar ou Mostrar e o programa gera os valores das funções seno, cosseno e tangente.

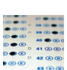
Referências

Livros

- Dante, L. Roberto. Matemática: **Contexto e aplicações**. Volume 1. Ed. 3. Impressão 1. Editora Ática. São Paulo. 2003.
- Iezzi, Gelson (e outros). **Fundamentos de Matemática Elementa**r. Volume 3. Ed Atual. São Paulo. 1995.

Imagens


- http://www.sxc.hu/photo/475767


- http://www.sxc.hu/photo/517386


- http://www.sxc.hu/985516_96035528

Respostas das Atividades

Atividade 1

João estaria na mesma altura se estivesse sentado no número IX, ou seja, 9.

Atividade 2

Resposta letra d.

Atividade 3

Caso Sr. João queira ficar na mesma altura do número 5, basta se posicionar sobre o número sete.

Os números que estão a 30º do número 12 são onze e um. Com isso, podemos dizer que possuem alturas iguais (iguais / diferentes).

Sr. João quer ficar na maior altura possível. Para isso, terá de se sentar sobre o número doze. A altura neste número é de 120 metros. Já o número seis está na posição mais baixa, isto é, a 110 metros de altura.

Atividade 4

a. Opção c.

b. 5 metros

c. Opções b e d

Atividade 5

Letra d mesma distância da encontrada na letra b.

Letra c

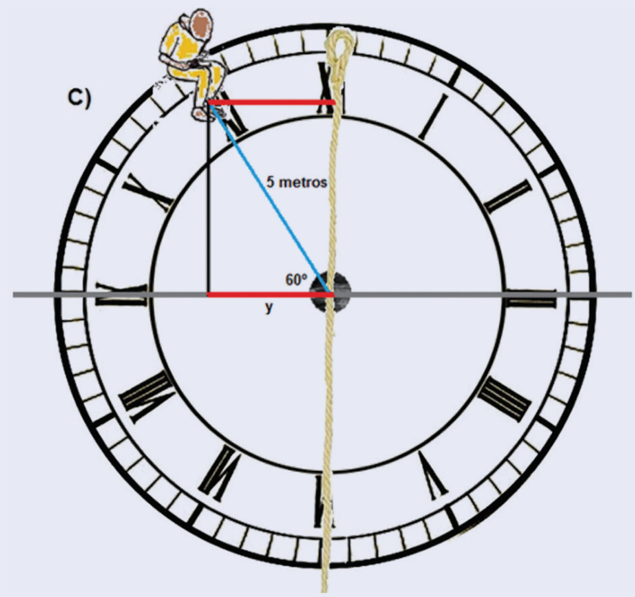
$$\cos 60° = \frac{cateto\,adjacente}{hipotenusa} = \frac{y}{5}$$

Respostas das Atividades

Como cos $60° = \frac{1}{2}$, temos que:

$$\frac{1}{2} = \frac{y}{5}$$

$$y = \frac{5}{2} = 2{,}5\,metros$$



Atividade 6

Em todos os exercícios que fizemos, para calcularmos as distâncias verticais, sempre utilizamos a razão trigonométrica seno (seno / co-seno / tangente). Ao passo que, em todos esses exercícios, calculamos as distâncias horizontais sempre através do cosseno (seno / cosseno / tangente).

Aprendemos nesses exercícios que a distância de Sr. João até a corda depende da posição em que se encontra no relógio. Desta posição sempre conseguimos determinar um ângulo com o eixo horizontal que por sua vez passa pelo centro do relógio e pelos números três e nove. Trabalhamos em todos os casos com este eixo. Ele é muito importante para o conhecimento que estamos desenvolvendo nesta unidade.

Atividade 7

$$sen60° = \frac{x}{1}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{1}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong \frac{1,7}{2} = 0,85$$

Para calcularmos OC, precisamos do cosseno de 60º.

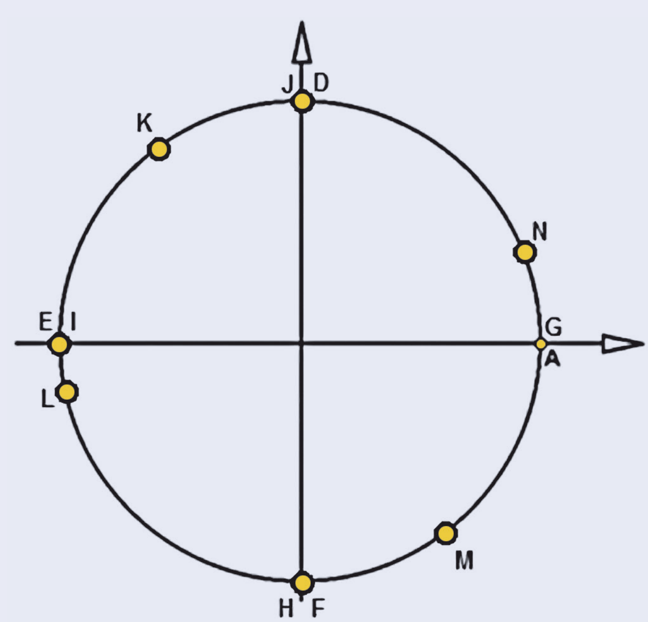
$$\cos 60° = \frac{OC}{1}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{OC}{1}$$

$$OC = \frac{1}{2} = 0,5$$

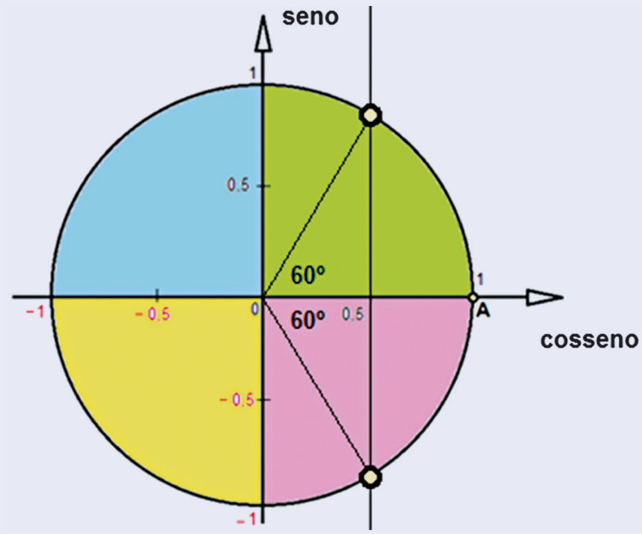
Atividade 8

A distância do ponto D ao eixo horizontal é igual ao raio da circunferência, ou seja, 1 unidade.



Respostas das Atividades

Atividade 9



Percebemos que a primeira solução é ângulo de 60º e que a segunda solução é o ângulo que está a 60º de A no sentido horário. Logo, 360º – 60º = 300º.

Atividade 10

4π cm, 2π cm, 7π cm respectivamente.

Atividade 11

$\overline{AB}$ tem comprimento igual à quarta parte do comprimento da circunferência de raio 2, ou seja, $AB = \dfrac{2\pi \cdot 2}{4} = \pi$.

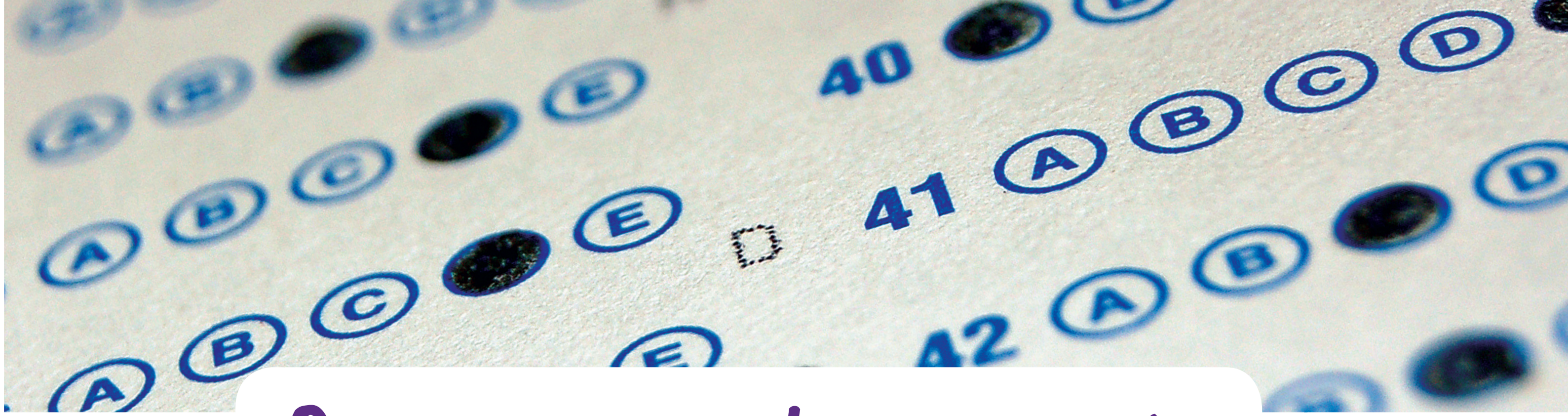
$\overline{CD}$ tem comprimento igual à sexta parte do comprimento da circunferência de raio 3, ou seja, $CD = \dfrac{2\pi \cdot 3}{6} = \pi$.

$\overline{EF}$ tem comprimento igual à três oitavos do comprimento da circunferência de raio 3.5, ou seja, $EF = \dfrac{3}{8} \cdot 2\pi \cdot 3{,}5 = \dfrac{21\pi}{8}$.

Respostas das Atividades

Atividade 12

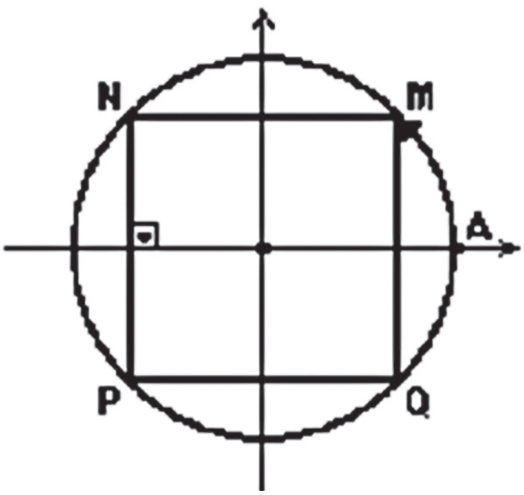
Medidas em graus	Medidas em radianos
30º	π/6 rad
45º	π/4 rad
60º	π/3 rad
270º	3π/2 rad
300º	5π/3 rad
360º/ π	2 rad



O que perguntam por aí...

Unifravas – 2000

A figura MNPQ é um retângulo inscrito em um círculo. Se a medida do arco AM é π/4 rad, as medidas dos arcos AN e AP, em radianos, respectivamente, são:



a. 3π/4 e 5π/4

b. π e 3π/2

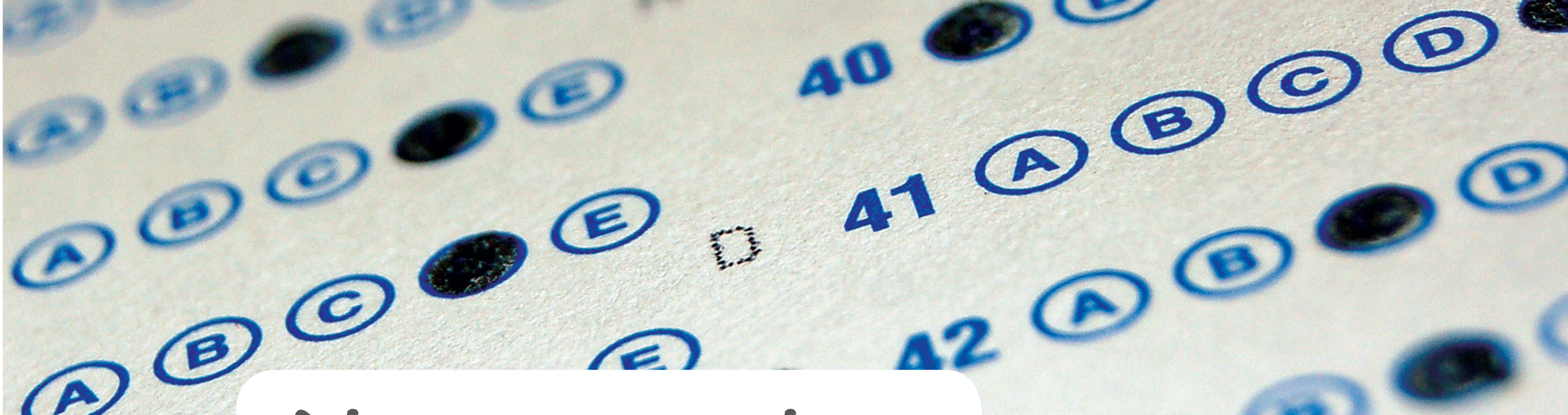
c. 3π/4 e 2 π

d. π/2 e 5π/4

e. 3π/4 e 5π/8

Resposta: Letra A

Sendo π rad = 180º, $\frac{\pi}{4}=\frac{180^\circ}{4}=45^\circ \pi / 4\,rad=180^\circ / 4=45^\circ$. Logo, o arco AM mede 45º. Como o retângulo da figura mostra que o ponto N tem a mesma altura que o ponto M, então N está a 45º da horizontal, ou seja, 180º – 45º = 135º que, em radianos vale 3π/4 rad. Já o ponto P está a 45º depois do eixo horizontal, pois devido às propriedades do retângulo P está a uma mesma distância deste eixo que o ponto N. Logo, P está a 180º + 45º = 225º que, em radianos vale 5π/4 rad.



Atividade extra

Exercício 1

Qual o valor, em radianos, de um ângulo que mede 150º?

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{2\pi}{3}$ (c) $\frac{5\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{3}$

Exercício 2

Qual o valor, em graus, de um ângulo que mede $\frac{7\pi}{6}$ rad?

(a) 210 (b) 230 (c) 270 (d) 290

Exercício 3 (UNIRIO)

Qual a soma de todas as soluções reais da equação sen2x = cos x no intervalo [0, 2 π]?

(a) π (b) 2 π (c) 3 π (d) 4 π

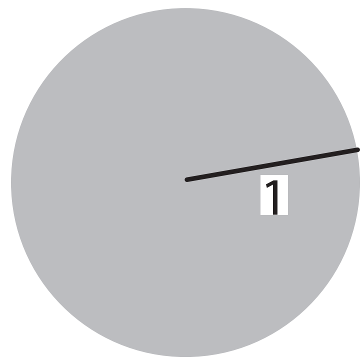
Exercício 4

Qual a solução da equação $\cos x = \frac{1}{2}$ no intervalo [0, π]?

(a) π (b) $\frac{2\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi}{3}$

Exercício 5

Para evitar desperdício deseja-se determinar, aproximadamente, quantos metros de cerca são necessários para cercar completamente o jardim ilustrado na figura.



Qual o comprimento, em metros, desta cerca? Use $\pi = 3{,}14$.

(a) 6,14 (b) 6,28 (c) 6,41 (d) 6,59

Exercício 6

Um agrimensor enxerga o topo *T* de um morro sobe um ângulo de 45° a uma distância de 200m do mesmo.

Qual a altura aproximada, em metros, do morro?

a) 191 (b) 200 (c) 205 (d) 210

Exercício 7

Um avião levanta voo sob um ângulo constante de 30°. Após percorrer 2.000 metros em linha reta.

Qual será a altura atingida, em metros, pelo avião, aproximadamente?

(a) 500 (b) 850 (c) 1.000 (d) 1.250

Exercício 8

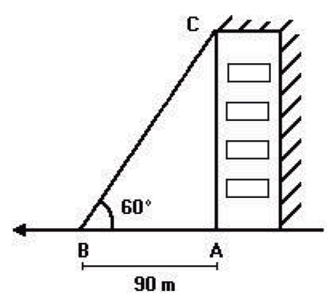
A Rua Tenório Quadros e a Avenida Teófilo Silva, ambas retilíneas, cruzam-se conforme um ângulo de 30°. O posto de gasolina Estrela do Sul encontra-se na Avenida Teófilo Silva a 4km do cruzamento citado.

Qual a distância, em quilômetros, entre o posto de gasolina Estrela do Sul e a rua Tenório Quadros?

(a) 1,7 (b) 1,8 (c) 1,9 (d) 2, 0

Exercício 9 (PUC-SP)

Uma pessoa encontra-se num ponto *A*, localizado na base de um prédio, conforme mostra a figura adiante. Se ela caminhar 90 metros em linha reta, chegará a um ponto *B*, de onde poderá ver o topo *C* do prédio, sob um ângulo de 60°.

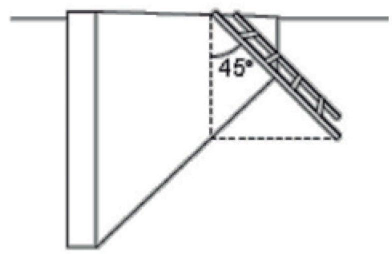


Quantos metros ela deverá se afastar do ponto *A*, andando em linha reta no sentido de *A* para *B*, para que possa enxergar o topo do prédio sob um ângulo de 30°?

(a) 150 (b) 180 (c) 270 (d) 300

Exercício 10

Uma escada está apoiada em um muro de 2m de altura, formando um ângulo de 45°.



Qual é o comprimento, em metros, da escada?

(a) 2,72 (b) 2,79 (c) 2,83 (d) 2, 85

Exercício 11

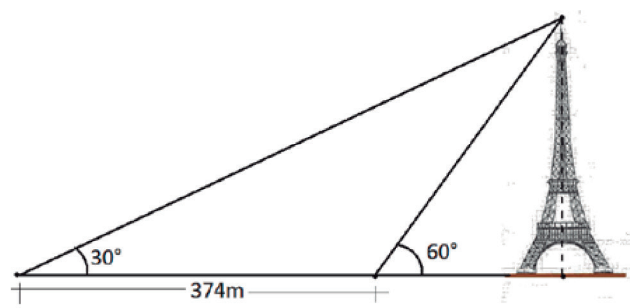
Uma pequena esfera é abandonada no ponto A de uma rampa que está a 80cm do solo e com uma inclinação de 60°. Qual a distância, em centímetros, que a esfera deverá percorrer até chegar ao solo?

Exercício 12

Em certa hora do dia, os raios do Sol incidem sobre um local plano com uma inclinação de 60° em relação à horizontal. Qual o comprimento, em metros, da sombra de uma construção de 6m de altura aproximadamente?

Exercício 13

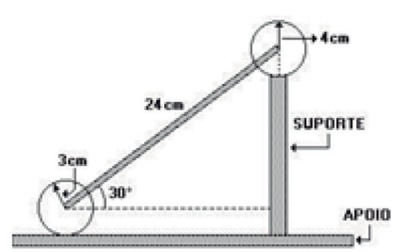
Um turista vê o topo de uma torre construída em um terreno plano, sob um ângulo de 30°. Aproximando-se da torre mais 374m, passa a vê-la sob um ângulo de 60° e a base da torre está no mesmo nível do olho do turista.



Qual a altura, aproximada, da torre?

Exercício 14

A figura a seguir é um corte vertical de uma peça usada em certo tipo de máquina. No corte aparecem dois círculos, com raios de 3cm e 4cm, um suporte vertical e um apoio horizontal.



Qual a altura, em centímetros, do suporte?

Exercício 15 (UFRS)

Um barco parte de A para atravessar o rio. A direção de seu deslocamento forma um ângulo de 120° com a margem do rio. Sendo a largura do rio 60m, a distância, em metros, percorrida pelo barco foi de:

Gabarito

Exercício 1

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 2

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 3

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 4

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 5

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 6

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 7

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 8

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 9

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 10

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 11

92,38cm.

Exercício 12

$2\sqrt{3} \simeq 3,46$

Exercício 13

$187\sqrt{3} \simeq 324$

Exercício 14

11.

Exercício 15

$40\sqrt{3}$