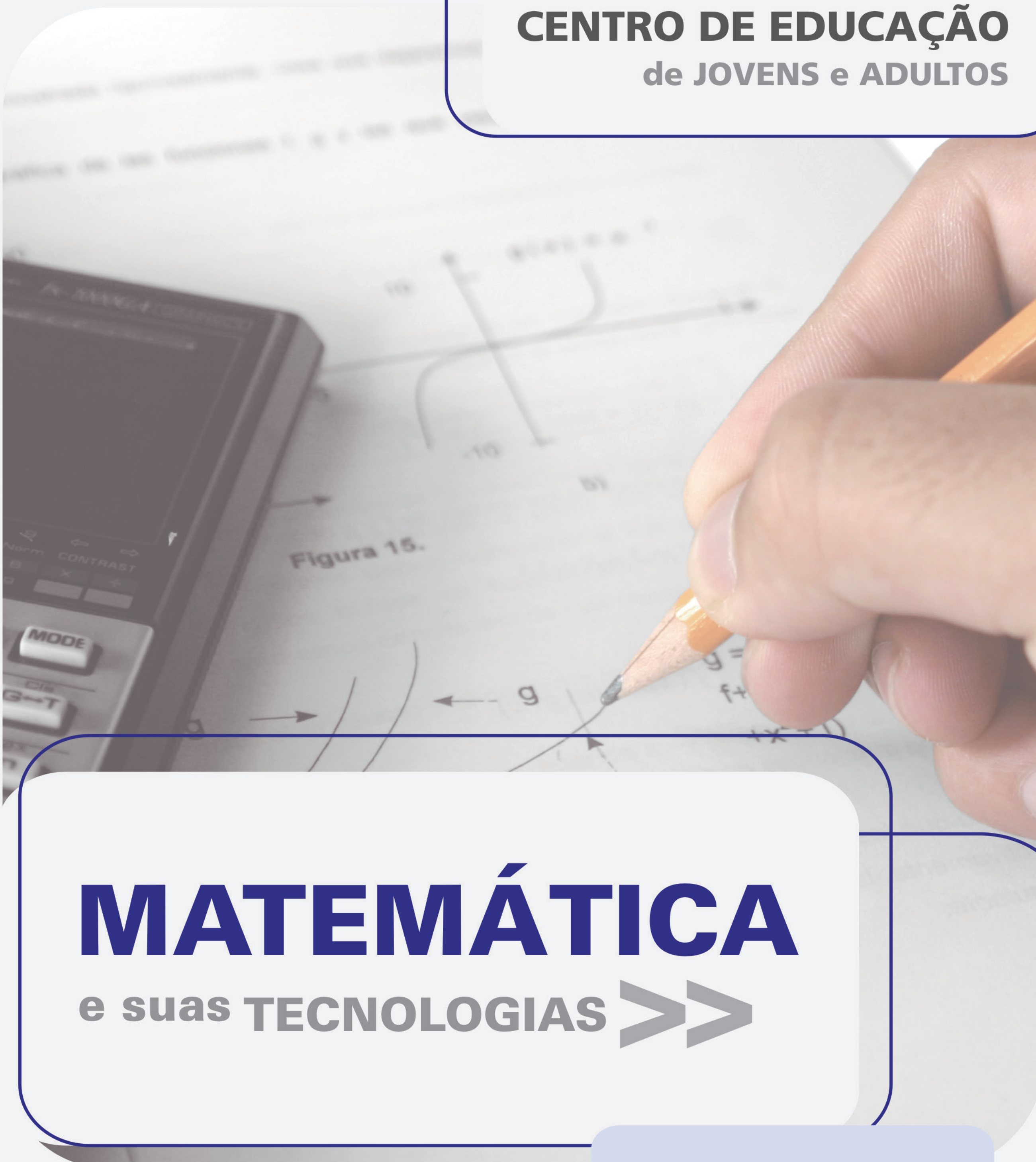
CEJA

CENTRO DE EDUCAÇÃO
de JOVENS e ADULTOS



MATEMÁTICA

e suas TECNOLOGIAS

Fascículo 7

Unidades 21, 22 e 23

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Governador
Wilson Witzel

Vice-Governador
Claudio Castro

SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO

Secretário de Estado
Leonardo Rodrigues

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO

Secretário de Estado
Pedro Fernandes

FUNDAÇÃO CECIERJ

Presidente
Gilson Rodrigues

PRODUÇÃO DO MATERIAL CEJA (CECIERJ)

Coordenação Geral de Design Instrucional
Cristine Costa Barreto

Coordenação de Matemática
Agnaldo da C. Esquincalha
Gisela M. da F. Pinto
Heitor B. L. de Oliveira

Revisão de conteúdo
José Roberto Julianelli
Luciana Getirana de Santana

Elaboração
Cléa Rubinstein
Daniel Portinha Alves
Heitor B. L. de Oliveira
Leonardo Andrade da Silva
Luciane de P. M. Coutinho
Maria Auxiliadora Vilela Paiva
Raphael Alcaires de Carvalho
Rony C. O. Freitas
Thiago Maciel de Oliveira

Atividade Extra
Benaia Sobreira de Jesus Lima
Carla Fernandes e Souza
Diego Mota Lima
Paula Andréa Prata Ferreira
Vanessa de Albuquerque

Coordenação de Design Instrucional
Flávia Busnardo
Paulo Miranda

Design Instrucional
Aroaldo Veneu

Revisão de Língua Portuguesa
Paulo Cesar Alves

Coordenação de Produção
Fábio Rapello Alencar

Capa
André Guimarães de Souza

Projeto Gráfico
Andreia Villar

Imagem da Capa e da Abertura das Unidades
http://www.sxc.hu/photo/789420

Diagramação
Alexandre Oliveira
Bianca Lima
Ronaldo d'Aguiar Silva

Ilustração
Bianca Giacomelli
Clara Gomes
Fernado Romeiro
Jefferson Caçador
Sami Souza

Produção Gráfica
Verônica Paranhos

Sumário

Prezado(a) Aluno(a),

Seja bem-vindo a uma nova etapa da sua formação. Estamos aqui para auxiliá-lo numa jornada rumo ao aprendizado e conhecimento.

Você está recebendo o material didático impresso para acompanhamento de seus estudos, contendo as informações necessárias para seu aprendizado e avaliação, exercício de desenvolvimento e fixação dos conteúdos.

Além dele, disponibilizamos também, na sala de disciplina do CEJA Virtual, outros materiais que podem auxiliar na sua aprendizagem.

O CEJA Virtual é o Ambiente virtual de aprendizagem (AVA) do CEJA. É um espaço disponibilizado em um site da internet onde é possível encontrar diversos tipos de materiais como vídeos, animações, textos, listas de exercício, exercícios interativos, simuladores, etc. Além disso, também existem algumas ferramentas de comunicação como chats, fóruns.

Você também pode postar as suas dúvidas nos fóruns de dúvida. Lembre-se que o fórum não é uma ferramenta síncrona, ou seja, seu professor pode não estar online no momento em que você postar seu questionamento, mas assim que possível irá retornar com uma resposta para você.

Para acessar o CEJA Virtual da sua unidade, basta digitar no seu navegador de internet o seguinte endereço: http://cejarj.cecierj.edu.br/ava

Utilize o seu número de matrícula da carteirinha do sistema de controle acadêmico para entrar no ambiente. Basta digitá-lo nos campos “nome de usuário” e “senha”.

Feito isso, clique no botão “Acesso”. Então, escolha a sala da disciplina que você está estudando. Atenção! Para algumas disciplinas, você precisará verificar o número do fascículo que tem em mãos e acessar a sala correspondente a ele.

Bons estudos!

Função Logarítmica

Fascículo 7

Unidade 21

Fundação CECIERJ

Função Logarítmica

Para início de conversa...

Vários países do mundo são regularmente atingidos por terremotos ou sofrem indiretamente – mas de forma igualmente devastadora – com as consequências destes fenômenos naturais. Em 2004, por exemplo, houve um terremoto de 9 graus na escala Richter na costa de Sumatra, na Indonésia. Além de destruir inúmeras casas, edifícios e vitimar diretamente milhares de pessoas, o terremoto provocou uma onda gigante, também chamada de tsunami, que atingiu outros 11 países. Ao todo, 288.800 pessoas perderam a vida.

Figura 1: Foto tirada logo após um terremoto na região de Kashmir, Índia. À direita os destroços da casas e, ao fundo, as barracas dos desabrigados.

Ainda bem que no Brasil não ocorrem terremotos, certo? Hum... a verdade não é bem essa. Aqui entre nós, você já sentiu algum tremor de terra ou pelo menos teve a sensação de algum?

Se você mora na parte urbana de uma cidade, deve ter notado que às vezes os prédios tremem quando passa um grande caminhão ou o metrô se aproxima... Esses são pequenos abalos que ocorrem no solo, porém não podem ser confundidos com um terremoto.

Um terremoto de verdade pode ser originado por falhas geológicas, vulcanismos e, principalmente, pelo encontro de placas tectônicas. Essas placas são porções gigantescas da crosta terrestre, formadas por parte do piso dos oceanos e por continentes inteiros – ou grande parte deles.

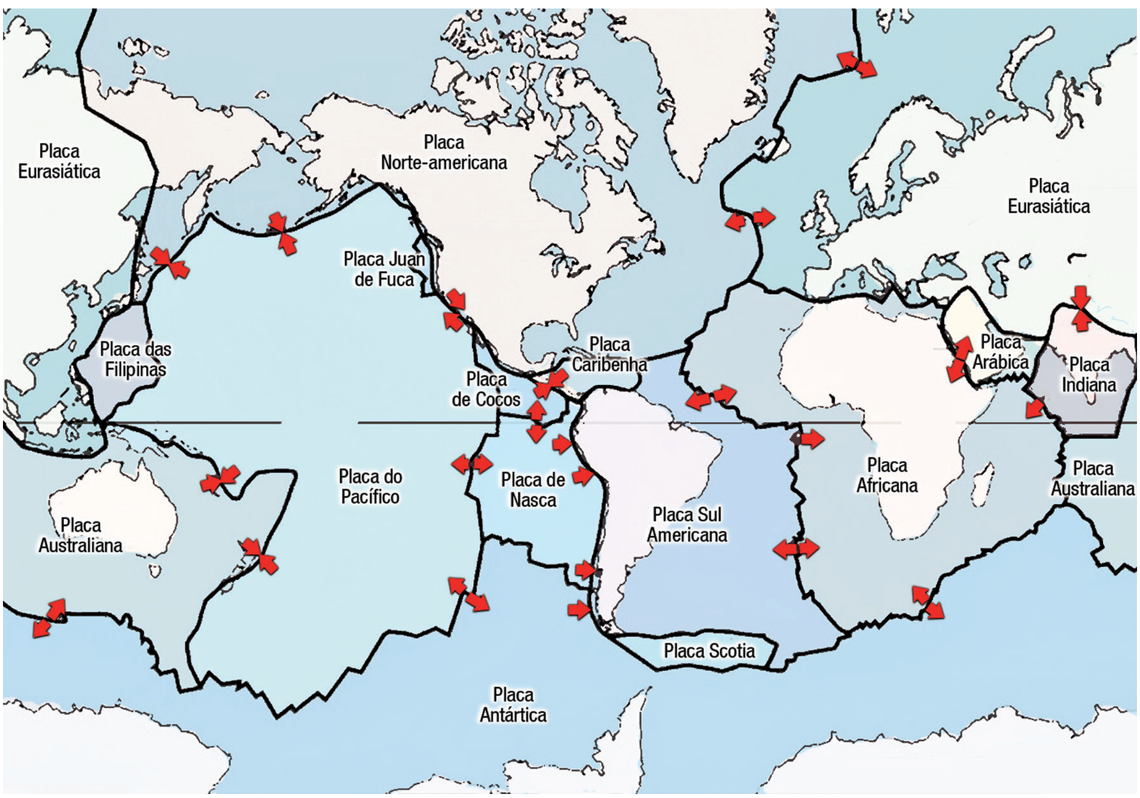


Figura 2: Mapa mundi com as principais placas tectônicas. As setas indicam o movimento das placas.

Quando duas destas placas se movem em sentidos contrários, geram tensão e instabilidade na área de contato entre elas. Essa instabilidade termina se convertendo em atividade vulcânica e em terremotos. Como o Brasil está localizado bem no centro da placa Sul-Americana, a gente quase não tem notícias sobre terremotos em nosso país.

Porém, (não fiquem assustados) segundo o Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo (USP), no século XX foram registrados mais de uma centena de terremotos no Brasil, o mais forte atingindo 6,6 pontos na escala Richter. Todavia, a maior parte desses abalos não passou de 4 graus.

Um destes tremores ocorreu no dia 13 de setembro de 2012 na cidade de Montes Claros, no estado de Minas Gerais. De acordo com o site de notícias R7, o tremor atingiu 2,9 pontos na escala Richter e, apesar de assustar a população, não causou vítimas ou danos materiais.

Para ler a matéria na íntegra, acesse o endereço http://noticias.r7.com/brasil/noticias/brasil-ja-registrou-mais-de-20-pequenos-terremotos-em-2012-20120914.html

Multimídia

É difícil prever a ocorrência de um terremoto. Pelo que pudemos perceber, conseguimos apenas medir sua intensidade. A escala Richter é utilizada como padrão para a comparação entre os terremotos. Esta escala foi desenvolvida pelos **sismólogos** Charles Francis Richter e Beno Gutenberg em 1935. Esta escala aumenta de forma logarítmica. Vamos entendê-la melhor? Para isso, precisamos aprender como trabalhar com os logaritmos. Estão preparados? Coragem! Não tem perigo...

Sismólogo

É o profissional que estuda os abalos sísmicos ocorridos na superfície do planeta Terra.

Objetivos desta unidade:

- Calcular o logaritmo de um número real positivo.
- Utilizar a definição de logaritmo na resolução de equações simples.
- Utilizar as propriedades operatórias do logaritmo na resolução de problemas.
- Identificar a função logarítmica como a inversa da função exponencial.

Seção 1
Os logaritmos, a escala Richter e os terremotos

Charles Richter e Beno Gutenberg desenvolveram a escala Richter, que mede a magnitude de um terremoto. Essa escala varia de 0 a 10, porém pode atingir valores ainda maiores, embora até hoje não se tenha notícia de registros de tais abalos. A tabela seguinte mostra a escala e os efeitos causados pelos terremotos.

Tabela 1: Magnitudes dos terremotos segundo a escala Richter, os efeitos causados e a frequência desses abalos.

Descrição	Magnitude	Efeitos	Frequência
Micro	<2,0	Micro tremor de terra, não se sente	Aproximadamente 8000 por dia
Muito pequeno	2,0-2,9	Geralmente não se sente, mas é detectado/registrado	Aproximadamente 1000 por dia
Pequeno	3,0-3,9	Frequentemente sentido, mas raramente causa danos	Aproximadamente 49000 por ano
Ligeiro	4,0-4,9	Tremor notório de objetos no interior de habitações, ruídos de choque entre objetos. Dificilmente causa danos significativos.	Aproximadamente 6200 por ano
Moderado	5,0-5,9	Pode causar danos maiores em edifícios mal concebidos e que estiverem próximo da origem do tremor. Provoca danos ligeiros em edifícios bem construídos	800 por ano
Forte	6,0-6,9	Pode ser destruidor em zonas habitadas num raio de até 180 quilômetros da origem do tremor	120 por ano
Grande	7,0-7,9	Pode provocar danos maiores em regiões mais vastas	18 por ano
Importante	8,0-8,9	Pode causar danos sérios em regiões num raio de centenas de quilômetros	1 por ano
Excepcional	9,0 – 9,9	Devasta regiões num raio de milhares de quilômetros	1 a cada 20 anos
Extremo	> 10,0	Nunca registrado	Desconhecida

A partir desta tabela, começamos a entender como é possível haver terremotos no Brasil. Veja que os terremotos com magnitude inferior a 2,0 – que ocorrem em torno de 8000 vezes por dia! – não podem ser percebidos por nós. A mesma coisa vale para os terremotos com magnitude entre 2,0 e 2,9, que ocorrem em torno de 1000 vezes por dia. Aliás, será que está acontecendo algum terremoto aqui no Brasil neste momento?

Para responder a essa pergunta, acesse o site do observatório sismológico da UnB, que tem o registro detalhado e atualizado de todos os terremotos que ocorreram recentemente no Brasil: http://www.obsis.unb.br/

Saiba Mais

Como podemos calcular a magnitude de um terremoto? Para isso, utilizamos a fórmula a seguir:

$$M_s = 3{,}30 + \log_{10}(A.f)$$

Nesta fórmula, M_S representa a magnitude local, A representa a amplitude máxima da onda registrada por um **sismógrafo** e f representa a frequência da onda.

Sismógrafo

Um sismógrafo é um aparelho que os cientistas usam para medir terremotos. O objetivo de um sismógrafo é gravar com exatidão o movimento do chão durante um terremoto. Ele contém uma agulha extremamente sensível a trepidações, que registra as vibrações do solo numa folha de papel contínua.

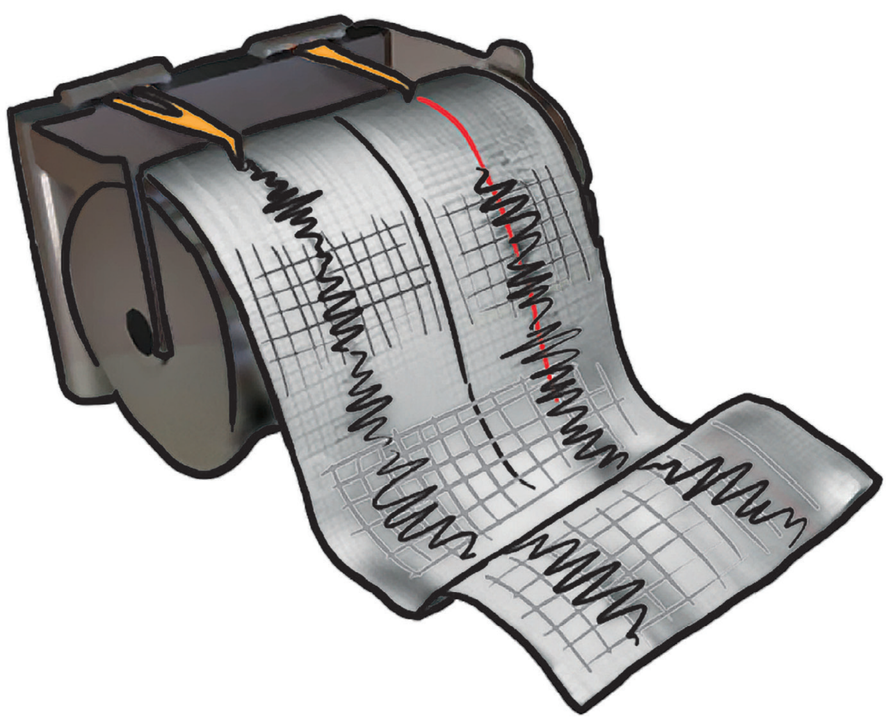


Figura 3: Um dos vários modelos de sismógrafos disponíveis no mercado.

Então, quando ligamos o sismógrafo, o rolo de papel começa a rodar e o papel começa a passar por baixo das agulhas. Quando a terra treme, ainda que de forma imperceptível, as agulhas do sismógrafo se movem, registrando no papel a imagem de uma onda. Essa onda corresponde às vibrações detectadas pelo aparelho. Para entendermos melhor o que é uma onda registrada pelo sismógrafo, vamos observar a figura seguinte.

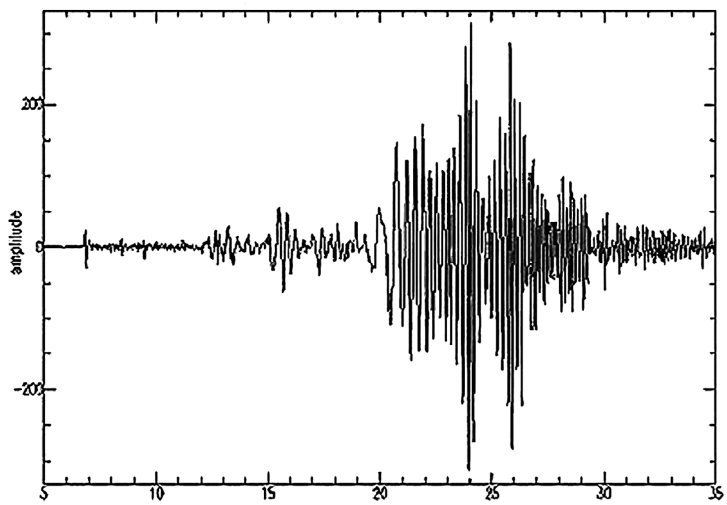


Figura 4: A figura representa um sismograma, que é uma folha de papel que contém essas ondas.

A variação dessas ondas denota a presença de um abalo sísmico. Quanto maior a amplitude dessas ondas, maior é a magnitude do terremoto. Amplitude, não custa lembrar, é a "altura" da onda, é a distância entre o eixo da onda e a crista. Quanto maior for a amplitude, maior será a quantidade de energia transportada – e mais forte o terremoto. Entenderam?

Muito bem! Agora já sabemos como obter os dados necessários para calcular a magnitude de um terremoto, não é mesmo? Mas, e aquele *log* que está sendo usado na fórmula? Como podemos trabalhar com ele?

Log é a abreviatura de Logaritmo. Veremos a seguir o que significa e como funcionam os logaritmos

Saiba Mais

A unidade utilizada para descrever a amplitude das ondas registradas pelo sismógrafo é o micrômetro (µm). Como o prefixo micro, neste caso, significa 10^{-6}, um micrômetro equivale a uma milionésima parte do metro (10^{-6} vezes um metro). A unidade utilizada para descrever as frequências – ou a quantidade de ocorrências do fenômeno por unidade de tempo – é o Hertz (Hz).

Os logaritmos

Nas aulas anteriores, estudamos as equações e funções exponenciais, aprendemos algumas de suas propriedades e efetuamos alguns cálculos. Como exemplo, nós temos:

$$2^3 = 8$$

Ou, em bom português, dois elevado à terceira potência vale oito.

No que diz respeito aos logaritmos, esta mesma expressão pode ser escrita assim:

$$\text{Log}_2 8 = 3$$

O que, em bom português, equivale a dizer que log na base dois de oito vale três.

A ideia é que estas expressões são equivalentes, ou seja

$$2^3 = 8 \Leftrightarrow \log_2 8 = 3$$

Isto significa dizer: se dois elevado à terceira potência vale oito, então log na base dois de oito vale três – e vice- versa.

Reparem que, nas duas sentenças acima os números mudam de lugar e, na sentença com o logaritmo, a ordem deles parece um pouco estranha. Não se preocupem, à primeira vista é estranho mesmo – mas já já vocês se acostumam. Antes de continuarmos a falar sobre essa expressão, vamos colocar mais alguns exemplos, para vocês se acostumarem:

$$5^2 = 25 \Leftrightarrow \log_5 25 = 2$$

$$3^3 = 27 \Leftrightarrow \log_3 27 = 3$$

$$10^4 = 10.000 \Leftrightarrow \log_{10} 10.000 = 4$$

E aí? Será que conseguimos perceber alguma coisa nessas correspondências? Está fácil perceber como os números ficam dispostos quando trabalhamos com logaritmo?

Você observou que o resultado do logaritmo é exatamente o expoente utilizado na igualdade da esquerda? Veja que, no primeiro caso, 2 é o expoente da base 5, para que o resultado seja 25; assim, podemos dizer que 2 é o logaritmo de 25 na base 5.

No terceiro exemplo, temos que 10 elevado a 4 é igual a 10.000; assim, podemos dizer que 4 (que é o expoente) é o logaritmo de 10.000 na base 4. Entendeu?

Se ainda não ficou, vamos dar uma olhada na correspondência abaixo, que define Logaritmo.

$$a^{\mathrm{b}} = c \Leftrightarrow \log_{\mathrm{a}} c = b$$

Veja: b é o expoente da potência de base a e o resultado desta expressão é c; então b é chamado de logaritmo de c na base a.

Importante

> Nesta expressão que está escrita à direita, a representa a base, b é o valor do logaritmo do número c, que é chamado de logaritmando ou antilogaritmo

Para deixar tudo o mais simples possível, vamos escrever essa sentença por extenso: se **a** elevado a **b** é igual a **c**, então log de **c** na base **a** é igual a **b** – e vice versa. Colocamos umas setas para ajudar, veja lá:

$$\log_a c = b \iff a^b = c$$

E, para simplificar ao máximo, escrevemos por extenso: se log de **c** na base **a** é igual a **b**, então **a** elevado a **b** é igual a **c** – e vice versa. Acompanhou as setas? Muito bem!

Todavia, é muito importante observarmos que existem algumas restrições para esses número, pois o valor de **c** necessariamente precisa ser real e positivo e o valor de **a** precisa ser real e positivo, porém diferente de 1. A seguir veremos estas restrições mais detalhadamente.

Agora vamos ver se conseguimos entender bem essa definição?

Atividade 1

Como já dissemos em outras unidades, este material será utilizado por outros colegas. Assim, pedimos que você não escreva nele! Copie as questões da atividade abaixo para o seu caderno e, aí sim, tente resolvê-las. Vamos lá? Muito bem, a atividade consiste em completar as lacunas dos itens a, b, c e d com os números que estão faltando:

a. $4^2 = 16 \Leftrightarrow \log_4 ... = 2$

b. $3^4 = ... \Leftrightarrow \log_{...} ... = ...$

c. $2^5 = 32 \Leftrightarrow \log ... ... = ...$

Anote suas respostas em seu caderno

Excelente! Agora, podemos caminhar um pouco mais. Que tal tentarmos calcular o valor de um logaritmo?

Atividade 2

Utilize a definição de logaritmo para calcular o valor das expressões abaixo conforme o modelo:

MODELO: $\log_3 9 = x$

(lembre-se: o logaritmo de um número é o valor do expoente que deve ser dado à base, para se obter o número que foi dado. No exemplo dado, temos que encontrar o expoente que deve ser dado à base 3, para se obter o número 9, vamos lá!)

Pela definição, $\log_3 9 = x \Leftrightarrow 3^x = 9$

Além disso, sabemos que $9 = 3^2$

Assim, $3^x = 3^2$

Usando os conhecimentos trabalhados na unidade de função exponencial, concluímos que:

$x = 2$, ou seja, $\log_3 9 = 2$

Atividade 2

Pronto? Copie os itens abaixo para o seu caderno e boa sorte com a resolução.

a. $\log_{10} 100 =$

b. $\log_{6} 216 =$

c. $\log_{8} 1 =$

d. $\log_{13} 13 =$

e. $\log_{2} (1/2) =$

Anote suas respostas em seu caderno

TERREMOTO

Atenção! Atenção! Acaba de ocorrer um terremoto. Os sismógrafos marcaram ondas com amplitude de 1000 μm e frequência de 0,1 Hz. Temos que calcular a magnitude deste terremoto. Com as atividades anteriores, já temos tudo o que precisamos para utilizar a fórmula, não é verdade?

Então vamos lá:

$M_s = 3{,}30 + \log_{10} (A.f)$

$M_s = 3{,}30 + \log_{10} (1000 \,.\, 0{,}1)$

$M_s = 3{,}30 + \log_{10} (100)$

Neste momento, já conseguimos calcular $\log_{10} (100)$. Segundo a definição, temos que $\log_{10} (100) = 2$, pois como sabemos, 2 é o expoente que devemos elevar a base 10, para obtermos 100) Com isso,

$M_s = 3{,}30 + 2$

$M_s = 5{,}30$

A partir das informações que constam da Tabela 1, este terremoto recebeu a classificação de Moderado.

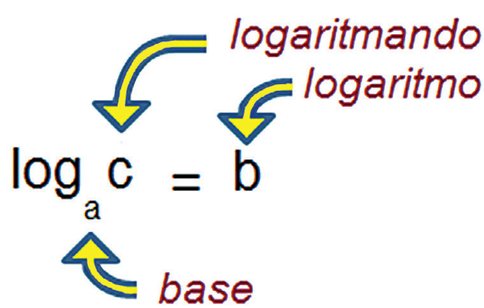
Muito bem! Conseguimos! Calculamos direitinho a magnitude do terremoto que acabou de ocorrer.

Propriedade dos logaritmos

Na seção anterior, vimos que existe uma equivalência entre os logaritmos e as potências. Para falar a verdade, a logaritmação (logaritmo) é a operação inversa da potenciação (exponencial) Ou seja, a função logarítmica é a inversa da função exponencial. Portanto, há muitas coisas em comum entre essas duas funções! Vamos investigá-las?

Na expressão $3^4 = 81$, o número 3 é chamado de base, o 4 de expoente e o 81 é a potência.

A expressão logarítmica equivalente a esta exponencial é $\log_3 81 = 4$. Nela, como já dissemos, o número 3 também é chamado de base, o 81 de logaritmando e o 4 de logaritmo. O esquema a seguir pode nos ajudar a entender isso.



Agora, uma propriedade importantíssima: na definição de logaritmo, a base deve sempre ser um número real, positivo e diferente de 1. Em consequência disso, o logaritmando será sempre um número real e positivo. No que diz respeito às bases – todas positivas e diferentes de 1 – a base 10 é a mais frequente. Assim, é comum representarmos um logaritmo decimal sem explicitarmos a base. Noutras palavras, representamos $\log_{10} x$ (lê-se log na base dez de x) como sendo log(x) (lê-se log de x).

Essa restrição quanto aos valores da base e do logaritmando é muito importante. Assim, aproveitamos este boxe para repeti-la: na definição de logaritmo, a base deve sempre ser um número real positivo e diferente de 1. Em consequência disso, o logaritmando será sempre um número real positivo.

Importante

Vimos na unidade anterior que as potências possuem propriedades. Será que os logaritmos também possuem? Vejamos:

Atividade 3

Copie as questões abaixo para o seu caderno e resolva-as:

a. $\log_2 8 =$

b. $\log_2 4 =$

c. $\log_2 8 + \log_2 4 =$

d. $\log_2 (8 \,.\, 4) =$

e. $\log_3 9 =$

f. $\log_2 81 =$

g. $\log_3 9 + \log_3 81 =$

h. $\log_3 (9 \,.\, 81) =$

i. $\log_{10} 1.000 =$

j. $\log_{10} 10.000 =$

k. $\log_{10} 1.000 + \log_{10} 10.000 =$

l. $\log_{10} (1.000 \,.\, 10.000) =$

Anote suas respostas em seu caderno

Muito bem! Agora, uma pergunta. Vocês repararam que o resultado do item d é igual ao resultado do item c (cinco) – que, por sua vez, é a soma dos valores dos itens a e b (três mais dois)? Repararam que a mesma coisa acontece tanto para os itens e, f, g e h quanto para os itens i, j, k e l?

A partir dessa observação, vamos fazer a seguinte generalização:

Se $\log_a b = c$ e $\log_a d = e$, podemos concluir que $\log_a (b \,.\, d) = \log_a b + \log_a d = c + e$. Em outras palavras, o logaritmo de um produto $\log_a (b \,.\, d)$ é igual à soma dos logaritmos de cada um dos fatores $\log_a b + \log_a d$.

Isso nos faz lembrar a propriedade das potências que tratava do produto de duas potências de mesma base. Nesta propriedade, vimos que, por exemplo:

$2^3 = 8$ e $2^2 = 4$ Além disso, $2^3 \,.\, 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32 = 8 \,.\, 4$

Da mesma forma, as potências têm a propriedade que trata da divisão de potências de mesma base. Porém, neste caso, devemos diminuir os expoentes. Pensando desta forma, os logaritmos possuem uma propriedade similar. O logaritmo de um quociente é igual a diferença dos logaritmos de cada fator. Sendo um pouco mais formais, teremos:

Se $\log_a b = c$ e $\log_a d = e$, podemos concluir que: $\log_a\left(\frac{b}{d}\right) = \log_a b - \log_a d = c - e$

Vejamos isso acontecer:

$\text{Log}_3 243 = 5$ e $\log_3 27 = 3$

Então, . $\log_3\left(\frac{243}{27}\right) = \log_3 243 - \log_3 27 = 5 - 3 = 2$

Agora, $\left(\frac{243}{27}\right) = 9$. Portanto, $\log_3 9 = 2$.

TERREMOTO

Outro terremoto ! ? ! ? ! Impressionante ! ! ! Os sismógrafos marcaram ondas com amplitude de 50.000 μm e frequência de 0,2 Hz. Temos que calcular a magnitude deste terremoto. Utilize a fórmula de magnitude a seguir. $M_s = 3{,}30 + \log_{10}(A.f)$

Será que você consegue, a partir da tabela 1, descobrir a classificação deste terremoto? Ufa! Essa foi por pouco... Vocês viram a magnitude deste terremoto? Esse não veio para brincadeira, não é?!

Bom, vamos a uma pequena aplicação das propriedades que acabamos de ver. Considerando que $\log_{10} 2 \cong 0{,}3$ e que $\log_{10} 3 \cong 0{,}4$ (esses valores são aproximados), como podemos calcular o valor de $\log_{10} 6$?

Pelo que aprendemos com as propriedades:

$\log_{10} 6 = \log_{10}(2.3) = \log_{10} 2 = \log_{10} 3$

Assim, $\log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}7$

Portanto, $\log_{10} 6 = 0,7$

Bem fácil, não é mesmo?

Importante

Nos tempos em que não havia internet, celular e as calculadoras científicas eram muito caras – acredite, esse tempo realmente existiu -, era possível calcular os valores dos logaritmos decimais (base 10) usando uma tábua de logaritmos. Quer saber um pouco mais a respeito? Acesse o site http://www.matematicadidatica.com.br/TabuaLogaritmosDecimais.aspx

Agora, que tal exercitarmos um pouquinho?

Atividade 4

Considere que $\log_{10} 2 \cong 0{,}30$ e que $\log_{10} 3 \cong 0{,}17$. Determine o valor dos logaritmos abaixo. Não se esqueça de utilizar a definição e as propriedades de logaritmos que aprendemos – e também de resolvê-los em seu caderno. Dessa maneira, os colegas que estudarem esta unidade depois de você poderão contar com um material novinho em folha.

a) $\log_{10} 4 =$

b) $\log_{10} 9 =$

c) $\log_{10} 12 =$

d) $\log_{10} 20 =$

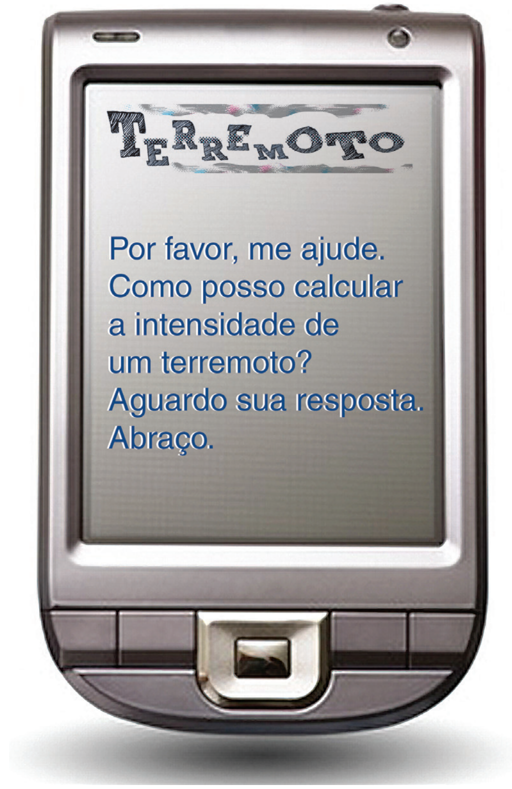
e) $\log_{10} \left(\frac{2}{3}\right) =$

f) $\log_{10} \left(\frac{3}{2}\right) =$

g) $\log_{10} 5 =$

h) $\log_{10} \left(\frac{10}{3}\right) =$

Anote suas respostas em seu caderno



Seu celular acabou de receber uma mensagem ! ! ! É um amigo telefonando para avisar que onde ele mora acabou de ocorrer um terremoto. Ele precisa calcular a intensidade deste terremoto e não sabe como. Sabedor da sua habilidade com os logaritmos, manda um torpedo para pedir uma ajuda. Os sismógrafos marcaram ondas com amplitude de 4000 μm e frequência de 0,1 Hz. Temos que calcular a magnitude deste terremoto. Utilizando a já conhecida fórmula de magnitude, $M_{10} = 3{,}30 + \log_{10} (A.f)$, os valores dos logaritmos da atividade anterior e os valores da tabela 1, perguntamos: qual a classificação deste terremoto?

Ei, nada mal! Nossa fama está circulando! Estamos quase virando sismólogos. O próximo, tenho a certeza de que vai ser moleza!

Agora, de volta à nossa discussão.

Existe uma propriedade dos logaritmos que deriva da primeira propriedade que estudamos. Vejam só:

Sabemos que $2^3 = 2 . 2 . 2$. Sendo assim,

$$\log_a 2^3 = \log_a (2 . 2 . 2)$$

Pela primeira propriedade que aprendemos, temos que:

$$\log_a 2^3 = \log_a (2 . 2 . 2) = \log_a 2 + \log_a 2 + \log_a 2 = 3 . \log_a 2$$

E, de uma forma geral, teremos que

$$\log_c 2^b = b \cdot \log_c a$$

Assim, podemos fazer mais uma atividade para reforçarmos este conhecimento.

Atividade 5

Maria está discutindo com João acerca de um cálculo envolvendo logaritmos. Ambos calcularam o valor de $\log_3 9^5$. Maria garante que o resultado é 32 e João insiste que o valor correto é 10. E aí, qual dos dois tem razão? Será que nenhum deles está correto? Dê sua opinião mostrando seus cálculos.

Anote suas respostas em seu caderno

Atenção! Atenção! Você acaba de receber uma mensagem eletrônica de um técnico da Defesa Civil de uma região distante. De acordo com a mensagem, os sismógrafos marcaram ondas com amplitude de 10^4 µm e frequência de 10^{-1} Hz. Temos que calcular a magnitude deste terremoto. Utilize a mesma fórmula de magnitude das vezes anteriores, $M_s = 3{,}30 + \log_{10}(A.f)$, e os valores dos logaritmos da atividade 3. Qual a classificação deste terremoto (ver tabela 1)?

Passou o susto, pessoal. Podemos retornar aos trabalhos.

Agora, vejamos esta situação em que minha amiga, Marina, me colocou ontem e que até agora não consegui resolver.

Marina lançou o seguinte desafio: com uma calculadora capaz apenas de calcular logaritmos na base 10, determine o valor de $\log_2 5$.

Parece um desafio simples, mas me intrigou muito, pois Marina queria que calculasse o logaritmo de base 2 e, naquele momento, só dispunha de uma calculadora capaz de me fornecer apenas logaritmos decimais (base 10). E agora? Será que é possível resolver esse desafio? Marina me garantiu que sim!

Bom, só nos resta discutir um pouco sobre as bases dos logaritmos. É a única forma que temos de resolver o desafio.

Vejamos:

Como já vimos no início desta unidade,

$\log_2 5 = x \Leftrightarrow 2^x = 5$

Além disso, a calculadora consegue nos dar a informação de que $\log_{10} 2 \cong 0{,}3 \Leftrightarrow 10^{0{,}3} \cong 2$

Portanto,

$2^x \cong (10^{0{,}3})^x$

$2^x \cong 10^{0{,}3x}$

Assim,

$10^{0{,}3x} = 5$

Calculando o logaritmo decimal em ambos os membros da equação, temos:

$\log_{10} 10^{0{,}3x} = \log_{10} 5$

Agora, é com vocês! A continuação dos cálculos será responsabilidade de vocês nesta próxima atividade.

Conclua os cálculos para descobrir o valor de x e resolver o desafio de Marina.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 6

Muito bem! O desafio foi feito.

De uma forma geral, os cálculos que fizemos nesta atividade tratam da propriedade conhecida como mudança de base, e podem ser generalizados da seguinte forma:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

Atividade 7

Sabendo que $\log_{10} 2 = 0{,}30$, calcule o $\log_2 10$

Anote suas respostas em seu caderno

E, já que estamos falando em bases, relembramos as restrições que vimos anteriormente para as bases e os logaritmandos: a base deve sempre ser um número real, positivo e diferente de 1 e o logaritmando deve ser sempre um número real e positivo.

Importante

Estudamos até aqui as seguintes propriedades dos logaritmos

Se $\log_a b = \mathrm{c}$ e $\log_a d = \mathrm{e}$, podemos concluir que:

- $\log_a (b \,.\, d) = \log_a b + \log_a d = c + e$
- $\log_a \left(\dfrac{b}{a}\right) = \log_a b - \log_a d = c - e$

Além disso,

- $\log_c a^b = b \,.\, \log_c a$
- $\log_b a = \log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$

Outras aplicações dos logaritmos

Vocês repararam que utilizamos o logaritmo como ferramenta para calcularmos a magnitude de terremotos. Mas será que é só para isso que serve um logaritmo? Certamente não! Sua aplicação prática se espalha por diversas áreas da atividade humana, chegando inclusive à sua saúde – quer ver?

O site do programa Bem Estar da Rede Globo exibe uma reportagem muito interessante sobre a saúde dos ouvidos, em que afirmam que a pressão alta e o colesterol alto podem acelerar o processo de perda de audição devido à diminuição da circulação sanguínea no único vaso do ouvido. Afirmam ainda que ouvir música alta com fones de ouvido também pode danificar sua audição

Vocês tomam cuidado com os ouvidos de vocês? Comparem o que vocês fazem regularmente com a reportagem do programa Bem Estar, disponível na íntegra no endereço http://g1.globo.com/bemestar/noticia/2012/06/escutar-som-muito-alto-pode-causar-perda-irreversivel-da-audicao.html

Saiba Mais

O que ouvimos e definimos como som são apenas ondas sonoras que se formam devido à pequenas vibrações de partículas do meio. Assim, quando uma pedra cai no chão, há uma vibração de moléculas de ar em volta da pedra que se propaga pelo ar. Essa vibração faz uma pressão sobre nosso sistema auditivo, que é convertida em impulso elétrico e enviada ao cérebro, que a interpreta como som.

A menor intensidade sonora – ou a menor pressão – que nossos ouvidos são capazes de captar é $1_a = 10^{-12}\ W/m^2$ (watt por metro quadrado). Por outro lado, se essa pressão for demasiadamente grande – ou seja, se o som for muito alto – poderá machucar nosso sistema auditivo.

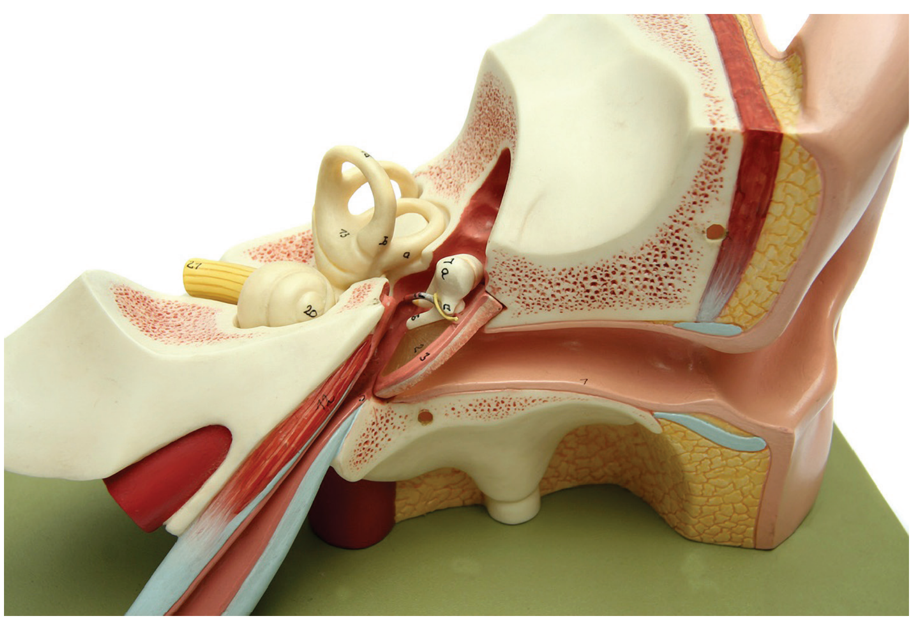


Figura 5: Um modelo das partes interna (no centro da imagem) e externa (à direita da imagem) do nosso delicado sistema auditivo.

O nível sonoro pode ser calculado através de uma expressão, de maneira análoga à que fizemos no cálculo da magnitude de um terremoto. O mais interessante de tudo é que esta fórmula também utiliza o logaritmo para os cálculos. A expressão está logo a seguir:

$$Ns = 10 \,.\, \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

O nível sonoro é medido em decibéis (dB).

Importante

Você gostaria de saber mais sobre a escala decibel? Acesse o site http://www.portalsaofrancisco.com.br/alfa/meio-ambiente-poluicao-sonora/decibeis.php e descubra essas e muitas outras informações importantes sobre o som, além de mais dicas sobre a saúde dos seus ouvidos.

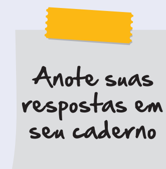
Vamos ver como isso funciona?

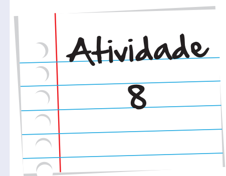
Pensem em algo muito barulhento... que tal uma britadeira?

Figura 6: Uma britadeira é usada para quebrar concreto, asfalto e outras tantas coisas bem duras. O barulho produzido por ela é altíssimo e sempre incomoda toda a vizinhança. Você já foi acordado pelo ruído de alguma?

Imaginemos que a britadeira produza um som com intensidade I – 1000 W/m^2. Qual o nível sonoro produzido por esta máquina?

Encontre o nível sonoro produzido pela britadeira utilizando os dados disponibilizados anteriormente.





Muito bom, pessoal ! ! ! Vamos aprender em seguida como os logaritmos podem nos auxiliar em equações exponenciais que, a princípio, parecem muito difíceis ou sem solução.

Seção 2
O logaritmos ajudam a resolver equações exponenciais

Algumas equações exponenciais são facilmente resolvidas através da comparação entre as bases. Um exemplo é a equação

$$2^x = 16$$

Como $16 = 2^4$, temos que: $2^x = 2^4$. Então, comparando-se as bases, concluímos que $x = 4$

Contudo, algumas equações tornam essa solução mais complicada. É o caso da equação:

$$2^x = 5$$

Aqui, não temos como comparar as bases das potências, pois são diferentes. E agora, o que faremos?

Para resolver essa situação, vamos utilizar a operação inversa, o logaritmo. Afinal, não podemos nos esquecer de que o logaritmo, por ser uma operação inversa, será capaz de desfazer a exponencial. Vejamos:

Inicialmente, calculamos o logaritmo em ambos os membros da equação:

$$\log_{10} 2^x = \log_{10} 5$$

Escolhemos a base 10, pois os valores podem ser consultados na tábua de logaritmos.

Aplicando a terceira propriedade, a propriedade das potências, temos que:

x . $\log_{10} 2 = \log_{10} 5$ Encontre o nível sonoro produzido pela britadeira utilizando os dados disponibilizados anteriormente.

Em seguida, identificamos na tábua de logaritmo os valores de $\log_{10} 2$ e $\log_{10} 5$.

$\log_{10} 2 \cong 0{,}301$

$\log_{10} 5 \cong 0{,}699$

Substituindo os valores na equação, temos:

$$x \,.\, 0{,}301 = 0{,}699$$

$$x - \frac{0{,}699}{0{,}301} \cong 2{,}322$$

Atenção! Atenção! Acaba de ocorrer outro terremoto. Segundo a reportagem exibida na televisão, os sismógrafos apresentaram um pequeno defeito. Não foi possível identificar a amplitude das ondas, mas a frequência foi de 0,5 Hz. Os jornais estão anunciando que o terremoto teve magnitude 7 na escala Richter. Como faremos para calcular a amplitude das ondas registradas pelos sismógrafos? Utilize a nossa fórmula de magnitude – $M_s = 3{,}30 + \log_{10} (A.f)$ e os valores dos logaritmos da atividade 3. Qual a classificação deste terremoto (ver tabela 1)?

Já ocorreram muitos terremotos nesta aula... As placas tectônicas estão bem agitadas ultimamente, não é?! Mas, não se preocupem. Parece que, de agora em diante, elas devem acalmar um pouquinho – e, com isso, nós também.

Acalmados todos, finalizamos a aula propondo que você resolva, usando logaritmos, uma situação muito interessante de que tratamos na aula de exponencial. Essa situação diz respeito a questões da Economia. Vamos conhecê-la!

Atividade 9

O cálculo do montante originado por um investimento a juros compostos é realizado através da fórmula:

$M = C \,.\, (1 + i)$

Um capital (C) de R$ 1.000,00 é aplicado em regime de juros compostos a uma taxa mensal (i) de 2%. Depois de quanto tempo este capital estará duplicado?

(Para facilitar)

Montante = dobro do capital = R$ 2.000,00

Capital = R$ 1.000,00

Taxa (i) = 2% = 0,02

$\log_{10} 2 = 0{,}30103$

$\log_{10} 1{,}02 = 0{,}0086$

Anote suas respostas em seu caderno

Resumo

- A função exponencial possui como inversa a função logarítmica;
- Os logaritmos possuem restrições nos valores das bases e do logaritmando: as bases devem ser reais, positivas e diferentes de 1 e os logaritmandos devem ser reais e positivos;
- O logaritmo do produto de dois números é igual à soma dos logaritmos de cada um desses números: $\log_a b \,.\, d = \log_a b + \log_a d$
- O logaritmo do quociente de dois números é igual à diferença do logaritmos desses números: $\log_a \left(\dfrac{b}{a}\right)$

$= \log_a b - \log_a d$

- O logaritmo de uma potência é igual ao produto do expoente dessa potência pelo valor do logaritmo da base: $\log_c a^b = b \cdot \log_c a$
- Podemos modificar as bases dos logaritmos de acordo com a propriedade $\log_b a = \left(\frac{\log_c a}{\log_c b}\right)$.
- Os logaritmos podem ser utilizados como ferramenta na resolução de equações exponenciais onde não é possível igualar as bases.

Veja ainda

Nesta unidade, falamos sobre o uso dos logaritmos nos cálculos das magnitudes dos terremotos. Para isso, citamos um aparelho chamado sismógrafo. Este aparelho consiste em registrar as ondas geradas pelos abalos sísmicos. Vocês sabiam que é possível fazer um sismógrafo em casa? Acesse este site "Feira de Ciências" e veja o passo-a-passo de como construir um aparelho desses. Sem dúvida, vai ser muito interessante.

http://www.feiradeciencias.com.br/sala19/texto41.asp

Referências

Livros

- ZAGO, Glaciete Jardim, Walter Antonio Sciani. *Exponencial e Logaritmos*. 2º edição. São Paulo: Editora Érika. Estude e Use, 1996.95p.
- TERREMOTOS no brasil. Disponivel em:

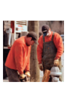
Sites

- http://cae.freeservers.com/geografia_tremores_no_Br.html. Acesso em: 05 jul. 2012.

Imagens

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=977158

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=753471



- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=565431

Respostas das Atividades

Atividade 1

a. $4^2 = 16 \Leftrightarrow \log_4 16 = 2$

b. $3^4 = 81 \Leftrightarrow \log_3 81 = 4$

c. $2^5 = 32 \Leftrightarrow \log_2 32 = 5$

d. $10^3 = 1000 \Leftrightarrow \log_{10} 1000 = 3$

Atividade 2

a. $\log_{10} 100 = 2$

b. $\log_6 216 = 3$

c. $\log_1 1 = 0$

d. $\log_{13} 13 = 1$

e. $\log_2 \left(\frac{1}{2}\right) = -1$

Atividade 3

a. $\log_2 8 = 3$

b. $\log_2 4 = 2$

c. $\log_2 8 + \log_2 4 = 3 + 2 = 5$

d. $\log_2 8 . 4 = \log_2 32 = 5$

e. $\log_3 9 = 2$

f. $\log_3 81 = 4$

g. $\log_3 9 + \log_3 81 = 2 + 4 = 6$

h. $\log_3 9 . 81 = \log_3 729 = 6$

i. $\log_{10} 1.000 = 3$

j. $\log_{10} 10.000 = 4$

k. $\log_{10} 1.000 + \log_{10} 10.000 = 3 + 4 = 7$

l. $\log_{10} 1.000 . 10.000 = \log_{10} 10.000.000 = 7$

TERREMOTO

$Ms = 3{,}30 + \log_{10} 50.000 . 0{,}2$

$Ms = 3{,}30 + \log_{10} 10.000$

$Ms = 3{,}30 + 4 = 7{,}30$

Este terremoto é classificado como GRANDE.

Respostas das Atividades

Atividade 4

a. $\log_{10} 4 = \log_{10} 2 \,.\, 2 = \log_{10} 2 + \log_{10} 2 = 0{,}3 + 0{,}3 = 0{,}6$

b. $\log_{10} 9 = \log_{10} 3 \,.\, 3 = \log_{10} 3 + \log_{10} 3 = 0{,}47 + 0{,}47 = 0{,}94$

c. $\log_{10} 12 = \log_{10} 4 \,.\, 3 = \log_{10} 4 + \log_{10} 3 = 0{,}6 + 0{,}47 = 1{,}07$

d. $\log_{10} 20 = \log_{10} 2 \,.\, 10 = \log_{10} 2 + \log_{10} 10 = 0{,}3 + 1 = 1{,}3$

e. $\log_{10} \left(\frac{2}{3}\right) = \log_{10} 2 - \log_{10} 3 = 0{,}3 - 0{,}47 = -\,0{,}17$

f. $\log_{10} \left(\frac{3}{2}\right) = \log_{10} 3 - \log_{10} 2 = 0{,}47 - 0{,}3 = 0{,}17$

g. $\log_{10} 5 = \log_{10} \left(\frac{10}{2}\right) = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

h. $\log_{10} \left(\frac{10}{3}\right) = \log_{10} 10 - \log_{10} 3 = 1 - 0{,}47 = 0{,}53$

TERREMOTO

$Ms = 3{,}30 + \log_{10} 4.000 \,.\, 0{,}1$

$Ms = 3{,}30 + \log_{10} 400$

$Ms = 3{,}30 + \log_{10} 4 \,.\, 100$

$Ms = 3{,}30 + \log_{10} 4 + \log_{10} 100$

$Ms = 3{,}30 + 0{,}6 + 2 = 5{,}90$

Este terremoto é classificado como MODERADO.

Atividade 5

João tem a razão, uma vez que $\log_3 9^5 = 5 \,.\, \log_3 9 = 5 \,.\, 2 = 10$. O erro de Maria foi justamente confundir $\log_3 9^5$ com $(\log_3 9)^5$. Perceba a diferença entre os dois: o que se pediu – e o que João fez – foi o cálculo do logaritmo na base 3 de um determinado número. Este número era o número 9 à 5 potência. Já Maria entendeu, de forma equivocada, que o que se pedia era o cálculo de um determinado número elevado à quinta potência. Esse número seria o log na base 3 de 9, que é igual a 2. Esse 2, elevado à quinta potência, seria realmente o 32 encontrado. Atenção, portanto.

TERREMOTO

$Ms = 3{,}30 + \log_{10}(10^4 \, . \, 10^{-1})$

$Ms = 3{,}30 + \log_{10}(10^3)$

$Ms = 3{,}30 + 3\log_{10} 10$

$Ms = 3{,}30 + 3 \, . \, 1$

$Ms = 3{,}30 + 3 = 6{,}30$

Este terremoto é classificado como FORTE.

Atividade 6

$\log_{10} 10^{0{,}3x} = \log_{10} 5$

$0{,}3x \, . \log_{10} 10 = \log_{10} 5$

$0{,}3x \, . \, 1 = \log_{10}\left(\dfrac{10}{2}\right)$

$0{,}3x = \log_{10} 10 - \log_{10} 2$

$0{,}3x = 1 - 0{,}3$

$0{,}3x = 0{,}7$

$x = \dfrac{0{,}7}{0{,}3} = \dfrac{7}{3}$

Atividade 7

$\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$

$\dfrac{\log_{10} 10}{\log_{10} 2} = \dfrac{1}{0{,}3} = \dfrac{\frac{1}{3}}{10} = \dfrac{10}{3}$

Respostas das Atividades

Atividade 8

$100 = 10^3$

Usamos a fórmula de Nível Sonoro abaixo:

$Ns = 10 \,.\, \log_{10}\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$

$Ns = 10 \,.\, \log_{10}\left(\dfrac{10^3}{10^{-12}}\right)$

$Ns = 10 \,.\, \log_{10} 10^{15}$

$Ns = 10 \,.\, 15 \,.\, \log_{10} 10$

$Ns = 10 \,.\, 15 \,.1$

$\boldsymbol{Ns = 150\ dB}$

TERREMOTO

$Ms = 3{,}30 + \log_{10}(A \,.\, f)$

$7 = 3{,}30 + \log_{10}(A \,.\, 0{,}5)$

$7 = 3{,}30 + \log_{10} A + \log_{10} 0{,}5$

$3{,}70 = \log_{10} A + \log_{10} \dfrac{}{10}$

$3{,}70 = \log_{10} A + \log_{10} 5 - \log_{10} 10$

$3{,}70 = \log_{10} A + 0{,}7 - 1$

$3{,}70 - 0{,}7 + 1 = \log_{10} A$

$\log_{10} A = 4$

$A = 10^4$

$A = 10.000\mu m$

Este terremoto é classificado como GRANDE.

Respostas das Atividades

Atividade 9

Montante = dobro do capital = R$ 2.000,00

Capital = R$ 1.000,00

Taxa (i) = 2% = 0,02

$\log_{10} 2 = 0{,}30103$

$\log_{10} 1{,}02 = 0{,}0086$

$2.000 = 1.000 \, . \, (1 + 0{,}02)^n$

$$\frac{2.000}{1.000} = 1{,}02^n$$

$1{,}02^n = 2$

Calculando o logaritmo em ambos os membros da equação:

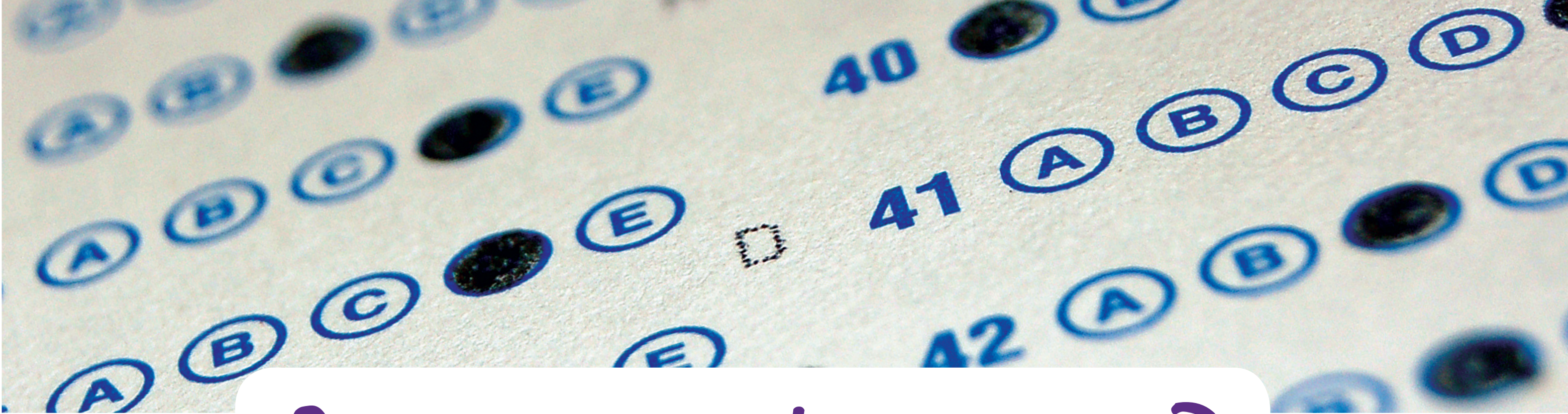
$\log_{10} 1{,}02^n = \log_{10} 2$

$n \, . \log_{10} 1{,}02 = \log_{10} 2$

$n \, . \, 0{,}0086 = 0{,}30103$

$$n = \frac{0{,}30103}{0{,}0086}$$

$n \cong 35$ meses.



O que perguntam por aí?

Questão 1 FGV (2008)

Adotando log2 = 0,301, a melhor aproximação de $\log_5 10$ representada por uma fração irredutível de denominador 7 é:

a. 8/7
b. 9/7
c. 10/7
d. 11/7
e. 12/7

Resposta: Letra C.

Comentário:

$$\log_5 10 = \frac{\log_{10} 10}{\log_{10} 5} = \frac{1}{\log_{10}\left(\frac{10}{2}\right)} = \frac{1}{\log_{10} 10 - \log_{10} 2} = \frac{1}{1-0{,}301} = \frac{1}{0{,}699}$$

Não se esqueçam de que o problema procura por uma aproximação. Portanto,

$$\frac{1}{0{,}699} \cong \frac{1}{0{,}7}$$

Logo,

$$\frac{1}{0{,}7} = \frac{1}{\frac{7}{10}} = \frac{10}{7}$$

Questão 2 (IBMEC – 2007)

Quando aumentamos em 60% um número real positivo b, seu logaritmo decimal aumenta em 20%. Considerando log2 = 0,30, podemos concluir que

a. b = 1
b. b = 2
c. b = 4
d. b = 8
e. b = 10

Resposta: Letra E.

Comentário:

Podemos representar o aumento de 60% de um número b assim:

$b + 0{,}6b = 1{,}6b$

Ao mesmo tempo, de acordo com o problema, temos que o logaritmo decimal de b aumenta em 20%. Isto é:

$\log_{10} 1{,}6b = 1{,}2 \,.\, \log_{10} b$ (Lembrem-se de que um aumento de 20% é o mesmo que 100% + 20% = 1 + 0,2 = 1,2)

$\log_{10} 1{,}6 + \log_{10} b = 1{,}2 \,.\, \log_{10} b$

$\log_{10} 1{,}6 = 1{,}2 \,.\, \log_{10} b - \log_{10} b$

$\log_{10} 1{,}6 = 0{,}2 \,.\, \log_{10} b$

$\log_{10} \left(\frac{16}{10}\right) = 0{,}2 \,.\, \log_{10} b$

$\log_{10} - \log_{10} 10 = 0{,}2 \,.\, \log_{10} b$

$\log_{10} 2^4 - \log_{10} 10 = 0{,}2 \,.\, \log_{10} b$

$4 \,.\, \log_{10} 2 - \log_{10} 10 = 0{,}2 \,.\, \log_{10} b$

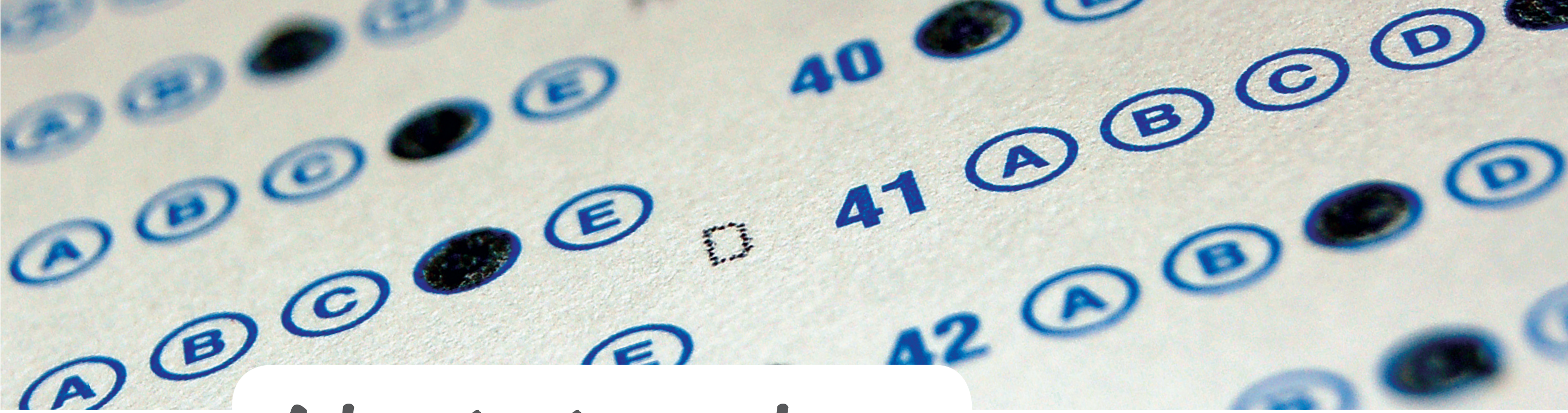
$4 \,.\, 0{,}3 - 10 = 0{,}2 \,.\, \log_{10} b$

$1{,}2 - 1 = 0{,}2 \,.\, \log_{10} b$

$\log_{10} b = 1$

Pela definição de logaritmo:

$b = 10$



Atividade extra

Exercício 1

Dado $\log_3 45 \cong 3{,}46$. Qual o valor aproximado de $\log_3 5$?

(a) 1,46 (b) 5,46 (c) 6,92 (d) 8,46

Exercício 2

Dados $\log_3 (7x-1) = 3$ e que $\log_5 (2y-7) = 1$. Qual o valor da expressão $x+y$?

(a) –10 (b) –2 (c) 2 (d) 10

Exercício 3 (UFMG – 2009 – Adaptada)

Ao se digitar um número positivo e apertar a tecla *log* de uma calculadora, é mostrado em seu visor o logaritmo decimal do número. Nessa calculador a foi digitado o número 100000 e em seguida apertada a tecla *log*. Qual número apareceu no visor?

(a) 1 (b) 5 (c) 6 (d) 10

Exercício 4

Dada a expressão $x = (log1) \cdot (log2) \cdot (log3) \ldots (log5)$. Qual o valor de x?

(a) 0 (b) 30 (c) 60 (d) 120

Exercício 5

Sejam log2 = 0,301, log3 = 0,477 e log7 = 0,845, qual o valor de log42?

(a) 0,067 (b) 0,121 (c) 1,021 (d) 1,623

Exercício 6

O valor (em reais) de um imóvel é dado em função do tempo d em décadas contando a partir da data em que foi terminada sua construção. O valor do imóvel será calculado através da fórmula $V(d) = 90000 \cdot 0{,}9d$. Qual é o valor, em reais, da perda do imóvel 20 anos após a construção?

(a) 9000 (b) 17100 (c) 72000 (d) 72900

Exercício 7

João aplicou R$ 800,00 em um fundo de investimento que rende 1% ao mês. O Montante dessa aplicação depois de t meses é dado por $M(t) = 800 \cdot (1{,}01)t$. Qual o valor dos juros obtidos após 6 meses?

(a) R$49,22 (b) R$52,58 (c) R$ 849,22 (d) R$ 5258,00

Exercício 8

Sejam $x = \log_2 8$, $y = \log_3 27$. Qual o valor de $\log_x y$?

(a) 0 (b) 1 (c) 3 (d)5

Exercício 9

Dada a equação $\log_x (5x-6) = 2$. Calcule seu conjunto solução.

(a) {2,3} (b) {–2,3} (c) {2,–3} (d) {–2,–3}

Exercício 10

A produção de uma fábrica vem diminuindo ano a ano. No ano de 2010 ela produziu dez mil unidades de seu principal produto. A partir daí, a produção anual passou a seguir a lei y(t) = 10000 . (0,9)t, tem anos. Após quantos anos a fábrica produziu 8100 unidades do seu principal produto?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

Exercício 11

Sejam x e y números inteiros positivos tais que

$$\begin{cases} \log x + \log y = 5 \\ \log x - \log y = 7 \end{cases}$$

Qual o valor de $x \cdot y$?

Exercício 12

O número de elementos de uma determinada espécie animal diminui à taxa de 10% ao ano, de acordo com a fórmula $P(t) = P_0 \cdot 0{,}9^t$, onde P_0 é a população inicial da espécie. Considere log3 = 0,4. Depois de quanto tempo a população será um décimo da população inicial?

Exercício 13

Dada a equação logarítmica $\log x + \log(x-5) = \log 36$. Quais são os valores de x que satisfazem tal equação?

Exercício 14

Um líquido com alto índice de evaporação diminui seu volume em 20% a cada hora. Considere log2 = 0,3. Depois de quanto tempo o volume inicial V_0 desse líquido será reduzido à metade?

Exercício 15

Considere o $\log 2 = a$, $\log 3 = b$ e as propriedades operatórias de logaritmos. Calcule log108 em função de a e b.

Gabarito

Exercício 1

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 2

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 3

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 4

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 5

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 6

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 7

A B C D

● ○ ○ ○

Exercício 8

A B C D

○ ● ○ ○

Exercício 9

A B C D

● ○ ○ ○

Exercício 10

A B C D

○ ● ○ ○

Exercício 11

Aplicando a propriedade de logaritmo de produto na primeira equação temos $\log xy = 5$.

Por fim, aplicando a definição de logaritmos temos $xy = 10^5$.

Exercício 12

Devemos ter $\frac{P_0}{10} = P_0 0,9^t$. Simplificando temos $\frac{1}{10} = 0,9^t \Rightarrow 10 \cdot 0,9^{t=1}$

Tomando logaritmo decimal e lembrando que log1 = 0 temos:

$1 + t\log 0,9 = 0 \Rightarrow t\log(3^2 10^{-1}) = -1$

Aplicando a propriedade de logaritmo do produtos temos:

$t(\log 3^2 + \log 10^{-1}) = -1 \Rightarrow t(2\log 3 - 1) = -1 \Rightarrow$

Daí

$t(2 \cdot 0,4 - 1) = -1 \Rightarrow t(0,8 - 1) = -1 \Rightarrow$

Portanto,

$t(-0,2) = -1 \Rightarrow t = \frac{-1}{-0,2} \Rightarrow t = 5.$

Exercício 13

Aplicando a propriedade de logaritmos de produto a $\log x + \log(x-5) = \log 36$ temos:

$$\log[x(x-5)] = \log 36.$$

Como as bases são iguais então temos uma igualdade entre logaritmandos, assim $x(x-5) = 36$ ou seja, $x^2 - 5x - 36 = 0$. Resolvendo a equação do segundo grau, encontramos as raízes $x_1 = 9$ e $x_2 = -4$. Porém, apenas a raiz $x = 9$ satisfaz as condições de existência de $\log x$, pois x deve ser maior que zero.

Exercício 14

Escrevemos $V = V_0 \cdot 0{,}20t$, como o volume deve ser a metade do inicial então, $V = V_0/2$. Daí vem:

$$\frac{V_0}{2} = V_0 \cdot 0{,}20^t \Rightarrow \frac{1}{2} = 0{,}20^t \Rightarrow 1 = 2 \cdot 0{,}20^t$$

Aplicando logaritmo decimal temos

$\log 1 \quad = \log(2 \cdot 0{,}20^t)$

$= \log 2 + \log 0{,}2^t$

$= \log 2 + t \log 0{,}2$

$= \log 2 + t \log(2 \cdot 10^{-1})$

$= \log 2 + t(\log 2 + \log 10^{-1})$

$= \log 2 + t(\log 2 - 1)$

$= 0{,}3 + t(0{,}3 - 1) = 0{,}3 + t(-0{,}7)$

$= 0{,}3 - 0{,}7\,t$

Então, como $\log 1 = 0$ temos:

$$0 = 0{,}3 - 0{,}7t \Rightarrow 0{,}7t = 0{,}3 \Rightarrow t = \frac{0{,}3}{0{,}7} \cong 0{,}43$$

Portanto, $t = 0{,}43$ horas. Assim, o tempo é de 25,8 minutos ou 25 minutos e 48 segundos.

Exercício 15

$\log 108 = \log 2^2 . 3^3 = \log 2^2 + \log 3^3 = 2 \log 2 + 3 \log 3 = 2a + 3b$.

Portanto, $\log 108 = 2a + 3b$.

Introdução à Geometria Espacial

Fascículo 7

Unidade 22

Fundação CECIERJ

Introdução à Geometria Espacial

Para início de conversa...

Em abril de 2012, o jornalista Ethevaldo Siqueira, do jornal O Estado de São Paulo, publicou em seu blog uma interessante reportagem sobre uma televisão que permite ao espectador ver imagens em 3D sem o auxílio de óculos especiais. A tela do televisor tem 200 polegadas (aproximadamente 5 metros) de diagonal e permite visualizar imagens 3D em alta definição e num ângulo de visão muito maior do que os sistemas anteriores. O monitor é tão grande que pode reproduzir a imagem de pessoas, de um carro inteiro e mesmo de um tubarão em tamanho natural.

Multimídia

Para ler a reportagem na íntegra, acesse o link http://blogs.estadao.com.br/ethevaldo-siqueira/2012/04/21/enfim-a-tv-3d-sem-oculos-especiais/.

Você já parou para pensar no que significa dizer que essa nova tecnologia de televisores, computadores e etc é 3D?

Basta pensar um pouco para entender: nós podemos nos movimentar de um lado para o outro, para frente e para trás e para cima e para baixo. Dê uma olhada na figura seguinte e veja se consegue perceber essas possibilidades de movimentação.

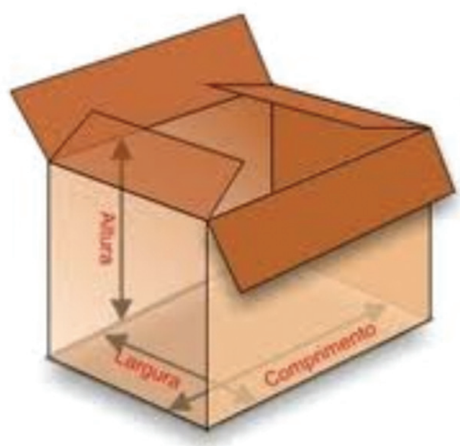


Figura 1: Caixa com suas 3 dimensões destacadas: altura, largura e comprimento.

Essa caixa, assim como a grande maioria dos objetos que conhecemos, tem 3 dimensões: altura, largura e comprimento. Assim, se nos movermos para cima e para baixo, estaremos acompanhando a altura da caixa. Nos movendo para frente e para trás, estaremos acompanhando seu comprimento. E, finalmente, nos movendo para um lado e para o outro, estaremos acompanhando sua largura. Conseguiu perceber as 3 possibilidades de movimentação agora?

A partir dessa explicação, fica mais fácil entender o significado da sigla 3D: ela faz referência ao fato de a grande maioria dos objetos que conhecemos terem três dimensões, por exemplo, comprimento, altura e largura. Um objeto cuja forma tem três dimensões é chamado de tridimensional.

O conceito de dimensão, além de constantemente utilizado por nós no dia a dia, é muito importante na Matemática. Na tecnologia disponível até então, nossos televisores e computadores reproduziam imagens tridimensionais em telas planas (com apenas duas dimensões).

O que se tenta fazer com essa nova tecnologia é projetar espacialmente imagens tridimensionais.

Agora repare à sua volta. Será que você consegue identificar objetos ou figuras com três dimensões (com altura, largura e comprimento)? O charmoso carro da imagem seguinte é um bom exemplo.

Figura 2: Um carro é um exemplo de objeto tridimensional.

E objetos bidimensionais, que têm apenas altura e largura?

O CD da próxima imagem é um bom exemplo!

Figura 3: CDs e DVDs são exemplos de objetos bidimensionais.

E objetos com apenas uma dimensão – somente largura, por exemplo – será que você consegue imaginá-los?

As linhas da estrada a seguir são bons exemplos!

Figura 4: **As faixas de uma estrada são exemplos de objetos unidimensionais.**

E objetos sem dimensão – será que existem?

Repare essas estrelas no céu, por exemplo!!

Figura 5: **As estrelas do céu são exemplos de objetos sem dimensão.**

E objetos com quatro dimensões, são mais difíceis de imaginar?

Certamente! Isto acontece porque vivemos em um mundo (aparentemente) com apenas três dimensões espaciais. Por isso, seria difícil enxergar dimensões superiores.

Então, que tal nos aprofundarmos mais nesses estudos? Vamos entender os conceitos e as formas que habitam nosso mundo a partir da habilidosa leitura feita pela matemática.

Uma dica bacana é o livro "Planolândia: um romance de muitas dimensões" (Flatland: A Romance of Many Dimensions) escrito por Edwin A. Abbott. *Nesse livro,* Abbott usou o mundo bidimensional fictício de Flatland para fazer reflexões sobre a sociedade e uma importante análise sobre as dimensões. A versão original, em inglês, está disponível para download, na íntegra e gratuitamente, no site Domínio Público, do Ministério da Educação. O link direto para o arquivo é http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/ph000007.pdf. A tradução para o português foi feita pela Editora Conrad, que também é responsável pela sua distribuição.

Saiba Mais

Objetivos de aprendizagem

- Entender o conceito de dimensão
- Entender os conceitos básicos de ponto, reta e plano
- Identificar posições relativas entre pontos, retas e planos
- Identificar poliedros e não poliedros, identificando os diferentes tipos.
- Identificar os elementos de um poliedro
- Reconhecer os poliedros de Platão.
- Aplicar a relação de Euler

Seção 1
Geometria espacial: conceitos básicos

A palavra Geometria vem do grego e significa medir a terra. Seu surgimento está ligado ao cotidiano das civilizações egípcia e babilônica, por volta do século XX a.C. Estava relacionada, por exemplo, ao plantio, construções e movimento dos Astros e era muito utilizada para o cálculo de áreas e volumes.

Já a palavra espacial não se refere ao espaço sideral ou a algo sofisticado, complexo e de difícil compreensão. Pelo contrário, ela se refere ao mundo em que vivemos, com suas três dimensões: altura, largura e comprimento. Também serve para marcar a diferença entre a geometria no mundo de três dimensões – ou, no "espaço" – e a geometria no mundo de duas dimensões – ou no "plano". Assim, geometria espacial e plana poderiam muito bem se chamar, respectivamente, geometria tridimensional (ou em 3 dimensões) e geometria bidimensional (ou em 2 dimensões).

Esclarecidos os termos principais, podemos utilizar os exemplos que vimos anteriormente para conhecer alguns objetos matemáticos importantes e que farão parte do nosso estudo ao longo de toda essa unidade. Vamos lá?

Se você imaginar o objeto representado a seguir, que possui apenas duas dimensões, se estendendo infinitamente em todas as direções, você visualizará o conceito matemático primitivo de plano.

Figura 6: O objeto representado, se estendido infinitamente para cima, para baixo e para os lados esquerdo e direito, permite visualizar o conceito de plano.

Agora, se você imaginar o objeto unidimensional como o representado aqui também estendendo-se infinitamente para ambos os lados você terá a noção do conceito matemático primitivo de reta.

Figura 7: O objeto representado, se estendido infinitamente para os dois lados, permite visualizar o conceito de reta.

E o objeto sem dimensão? Imaginou desta maneira?

Figura 8: O objeto representado, se abstraído de suas já pequenas altura e largura, permite visualizar o conceito de ponto.

Esse objeto primitivo matemático é conhecido como ponto.

Saiba Mais

Estes conceitos foram propostos pela primeira vez pelo matemático grego Euclides, que viveu na Alexandria na primeira metade do séc. III a.C. (a data e o local de seu nascimento não são precisos).

Euclides possivelmente adquiriu seus primeiros conhecimentos matemáticos dos discípulos de outro importante filósofo grego: Platão. A mais importante obra de Euclides foi "Os Elementos". São treze capítulos fundamentais para matemática sobre Aritmética, Geometria e Álgebra.

A obra "Os Elementos" já está em domínio público e pode ser baixada gratuitamente no portal Domínio Público, do Ministério da Educação. O link direto para o arquivo é http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/be00001a.pdf.

Nos Elementos, Euclides afirma que "ponto é o que não tem partes ou grandeza alguma", "linha é o que tem comprimento sem largura" e "superfície é o que tem comprimento e largura". Parecido com o que acabamos de ver? E olha que o livro já tem mais de dois mil anos!

É claro que pontos, retas e planos são conceitos e objetos matemáticos e, por isso, não são encontrados em situações cotidianas. No entanto, podemos fazer aproximações. Dê uma olhada na figura seguinte:

Figura 9: Imagem de uma praça e do prédio da prefeitura de uma cidade polonesa.

De acordo com os conceitos que acabamos de apresentar, um plano se estende infinitamente em duas direções. No entanto, o piso da praça, apesar de não se estender infinitamente, pode perfeitamente ser considerado representação de um plano. As fachadas das casas à direita da foto vão pelo mesmo caminho: não se estendem infinitamente para cima e para os lados, mas também podem representar a ideia que temos de um plano. O mesmo vale para a fachada das casas à esquerda da foto.

Estão vendo as linhas, feitas com pedras pequenas, que se cruzam no chão da praça? E as linhas que separam um prédio do outro, na fachada das casas à direita? Pois então, podemos usar a mesma argumentação do parágrafo anterior: não se estendem indefinidamente, mas podemos considera-las como representações de retas. Mesmo os postes, que têm um tamanho menor do que as linhas do chão e as separações das fachadas, também podem representar a ideia que temos de uma reta.

Finalmente, mantendo a linha de argumentação, poderíamos considerar as lâmpadas penduradas nos postes e as pedras menores do calçamento – aquelas, que estão nas retas que se cruzam – como representações de pontos. Se representássemos esses planos, retas e pontos na imagem anterior, teríamos a seguinte figura:

Figura 10: Imagem da praça, agora com planos, retas e pontos marcados.

Acompanhe lá: o plano do piso da rua, chamamos de plano α. Já o plano das fachadas das casas à direita, chamamos de plano β, e o plano das fachadas à esquerda de plano γ. A reta r coincide com o poste, ao passo que as retas s, t e u – das linhas no piso do calçamento, lembra? – estão no plano do piso da rua, o plano α. No plano β, das fachadas das casas à direita, estão representadas as retas v, w e z, que separam uma casa da outra. O ponto A coincide com a lâmpada do poste, enquanto os pontos B, C e D coincidem com aquelas pequenas pedras do calçamento.

Conseguiu ver tudo? Se conseguiu, ótimo, parabéns! Se não conseguiu, tente novamente: olhe novamente as figuras e procure identificar os elementos que descrevemos. A visualização deles é muito importante e o tempo a mais que você investir nesta etapa certamente irá facilitar sua compreensão dos próximos tópicos.

Multimídia

A visualização é uma das competências mais importantes a serem desenvolvidas pelos que querem se sair bem no estudo de geometria espacial. No link http://www.uff.br/cdme/triplets/triplets-html/triplets-br.html você terá acesso a um jogo para exercitar a visualização em três dimensões em um trabalho interdisciplinar juntamente com Língua Portuguesa e Inglesa.

Antes de prosseguir, é preciso registrar a nomenclatura de pontos, retas e planos: planos são nomeados com letras gregas (α, β, γ, etc), as retas são nomeadas com letras minúsculas (r, s, t, etc) e os pontos são nomeados com letras maiúsculas (A, B, C, etc).

Atividade 1

Observe o prato representado na figura. Será que você consegue identificar elementos que possam ser um exemplo de ponto, reta e plano?

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 2

Continuando com pontos, retas e planos: posições relativas

Muito bem! A partir da nossa conversa inicial sobre dimensões e sobre os conceitos que trabalhamos com a imagem da praça e a Atividade 1, podemos pensar que moramos num mundo de três dimensões, povoado por objetos que podem ter três, duas, uma ou nenhuma dimensão – e que estes objetos ora se encontram, ora não.

Para a conversa não ficar muito abstrata, dê uma olhada naquela imagem da praça já com as marcações de pontos retas e planos, que reproduzimos aqui, para facilitar seu estudo.

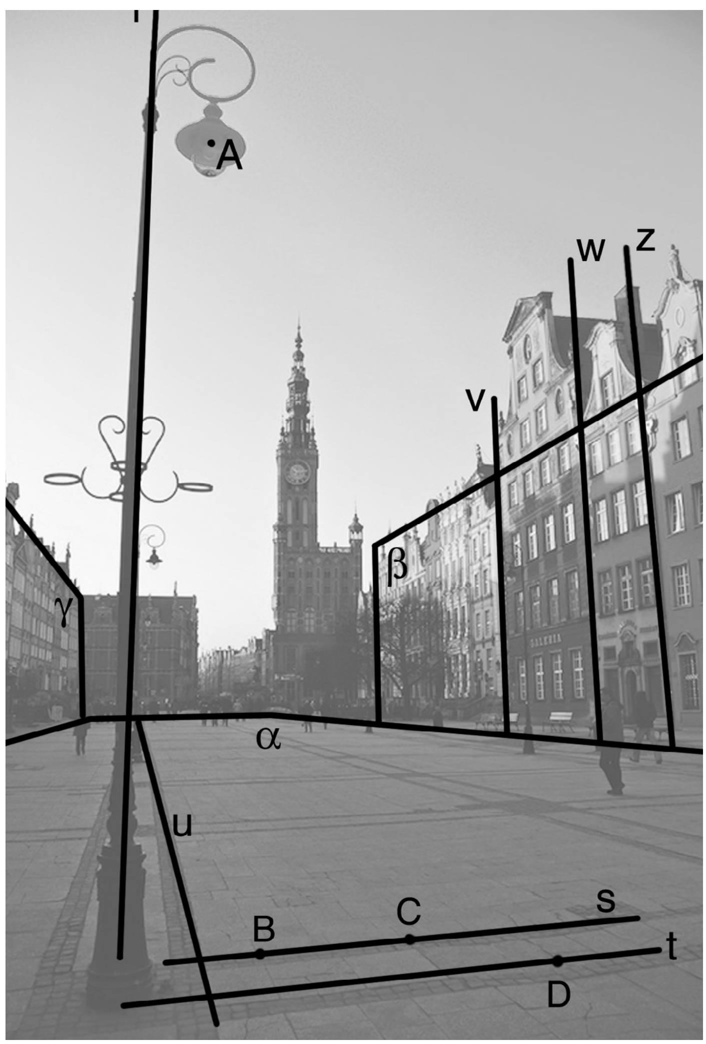


Figura 11: Imagem da praça, agora com planos, retas e pontos marcados.

Pronto? Muito bem. Como exemplo de objeto de 3 dimensões temos as próprias pessoas que andam na praça. O chão e as fachadas à esquerda e à direita são exemplos de planos; as linhas do piso e as que separam as frentes das casas da fachada à direita são exemplos de retas; e a lâmpada do poste e as pedras pequenas do calçamento são exemplos de pontos.

Perceba agora que o poste (para nós, uma reta), se encontra com o piso (um plano) apesar de não se encontrar com as fachadas à esquerda e à direita (outros dois planos). A lâmpada (um ponto), não se encontra com o poste (uma reta) ao passo que as pedras pequenas do calçamento se encontram com as linhas do calçamento (retas) e com o piso (um plano). As mesmas pedras pequenas (pontos), no entanto, não se encontram com os planos das fachadas à esquerda e à direita – e por aí vai.

É justamente para poder lidar com essas questões de forma mais precisa que vamos trabalhar os conceitos de posição relativa entre ponto, reta e plano.

Ponto e reta, ponto e plano

No que diz respeito à posição relativa entre um ponto e uma reta, o assunto é bem simples: ou o ponto está sobre a reta ou o ponto não está sobre a reta. Mesma coisa vale para os planos: ou o ponto está sobre o plano ou o ponto não está sobre o plano. Dê uma olhada nas imagens seguintes.

Figura 12: Os fios de eletricidade e os pássaros neles pousados podem ser representados por retas e pontos respectivamente.

Nesta imagem, podemos considerar os fios como retas e os pássaros como pontos. Os pássaros que estiverem pousados num fio serão considerados como pontos daquela reta. Já o pássaro que está voando (você consegue encontra-lo na imagem?) será um ponto que não está sobre nenhuma das retas representadas.

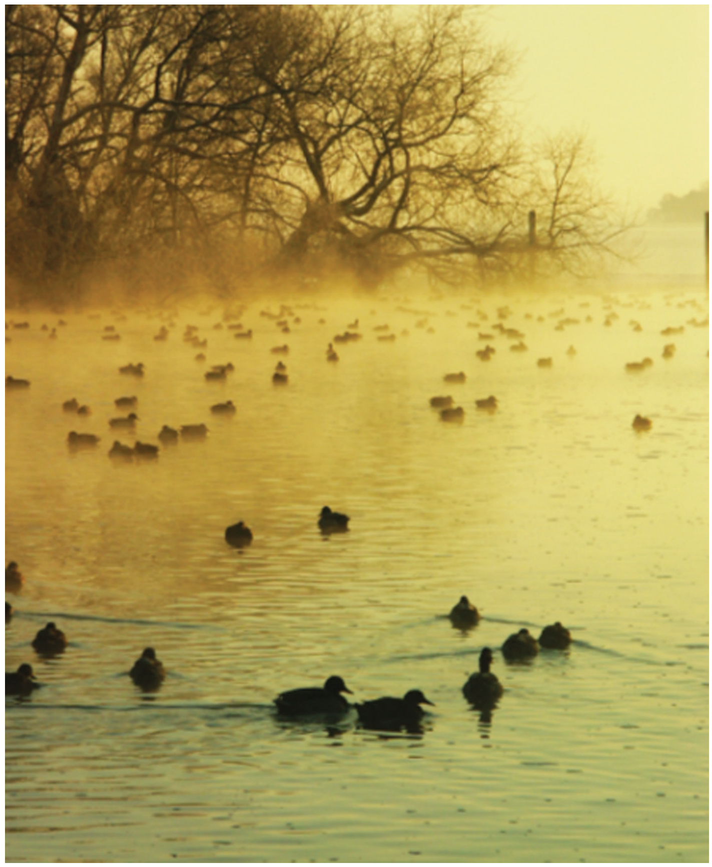


Figura 13: A superfície da lagoa e os patos desta imagem podem ser representados, respectivamente, por um plano e por pontos.

Já nesta imagem, podemos considerar a superfície da lagoa como um plano e os patos como pontos que estão situados sobre este plano. Caso houvesse algum pato voando, diríamos que ele seria um ponto que não estaria situado sobre o plano.

Antes de passarmos à notação matemática, cumpre falar dos pontos colineares - que, como você já pode ter adivinhado pelo nome, são aqueles que estão sobre a mesma reta. Olhando para a imagem dos pássaros pousados nos fios, você pode ver claramente que há uma grande quantidade de pontos colineares, uma vez que há muitos pássaros pousados sobre um único fio. Já na imagem da lagoa, o alinhamento dos patos não é muito claro – o máximo que conseguimos encontrar foram três patos alinhados. E vocês?

Finalizamos a seção, então, com a notação matemática:

- quando um ponto A está sobre uma reta r, dizemos que ele pertence a essa reta. Usando a notação convencional, diremos que $A \in r$.
- quando um ponto A não está sobre uma reta r, dizemos que ele não pertence a essa reta. Usando a notação convencional, dizemos que $A \notin r$.
- quando um ponto A está sobre um plano α, dizemos que $A \in \alpha$
- quando um ponto A não está sobre um plano α, dizemos que $A \notin \alpha$

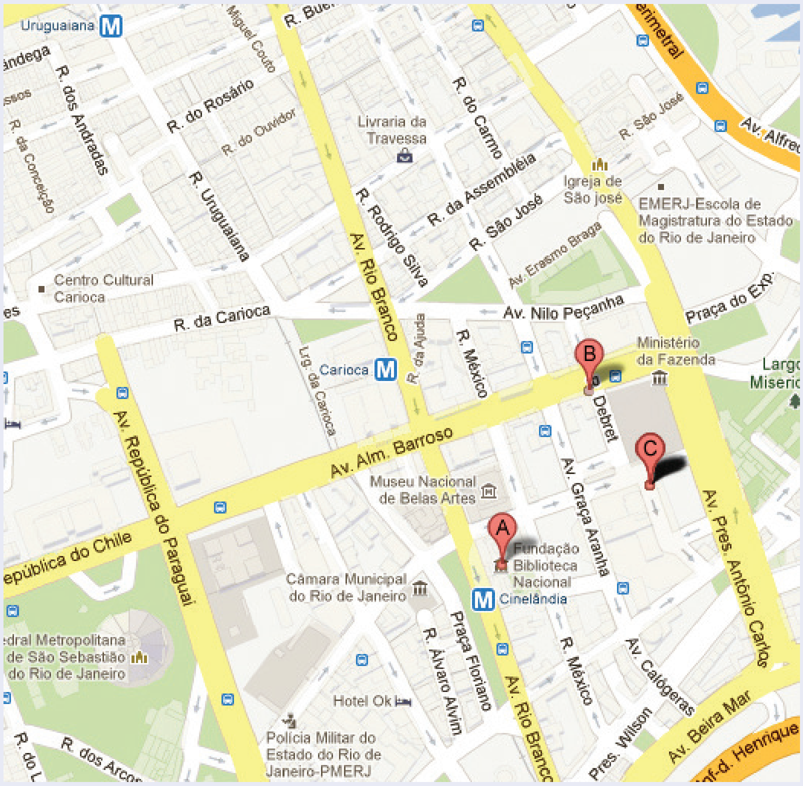
De posse deste conceitos, que tal fazer a próxima atividade?

Atividade 2

Suponha que você quer fazer uma visita à Biblioteca Nacional no Rio de Janeiro. Para conhecer melhor as cercanias, você acessou o Google Maps, digitou "Biblioteca Nacional" e clicou em Ok. O site apresentou um mapa com 3 endereços, todos no centro do Rio: o da Fundação Biblioteca Nacional, marcado como A no mapa; o da Biblioteca Nacional, marcado como B, no mapa e o do escritório de direitos autorais da Biblioteca Nacional, marcado como C no mapa.

Ao longo do percurso, você aproveitou o trajeto para responder com verdadeiro ou falso algumas dúvidas de um amigo, sempre considerando as ruas e avenidas como retas e os endereços como pontos.

Atividade 2



a. O ponto A (Fundação Biblioteca Nacional) pertence à Av. Rio Branco.

b. O ponto C (escritório de direitos autorais da Biblioteca Nacional) não pertence à Av. Graça Aranha .

c. O ponto B (Biblioteca Nacional) pertence à Av. Almirante Barroso.

d. O ponto B (Biblioteca Nacional) pertence à rua Debret.

e. O Museu Nacional de Belas Artes (logo acima do ponto A) pertence à Avenida Rio Branco.

f. Os 3 endereços da Biblioteca Nacional (pontos A, B e C) são colineares.

g. A estação do metrô Uruguaiana (representada pela letra M) não pertence à rua Uruguaiana.

h. As estações do metrô Carioca e Cinelândia, representadas pelos pontos M no mapa, são colineares.

i. As estações do metrô Carioca, Cinelândia e Uruguaiana, representadas pelos pontos M no mapa, são colineares.

Lembre-se: faça em uma folha à parte

Retas

Temos uma pergunta para fazer. Você estranhou quando leu os itens b e c da Atividade 2 pela primeira vez? Pensou alguma coisa do tipo "ué, mas um lugar não pode estar em duas ruas ao mesmo tempo"? Pois é, esse pensamento é bastante comum nesse tipo de questão.

Depois, claro, refletindo mais um pouco, você lembrou que se as duas ruas se cruzarem, o lugar que estiver exatamente na esquina entre elas pertencerá às duas ruas ao mesmo tempo - certo? Se agora lembrarmos que, nessa atividade, os locais eram os pontos e as ruas eram as retas, teremos um bom critério para iniciar o estudo das posições relativas entre as retas – a saber, o fato de elas se encontrarem ou não.

Duas retas que se encontram são chamadas de retas concorrentes. Elas se cruzam num único ponto, que é comum a ambas. Esse ponto é comumente chamado de ponto de interseção. Em nosso exemplo, ele seria justamente a esquina entre as duas ruas.

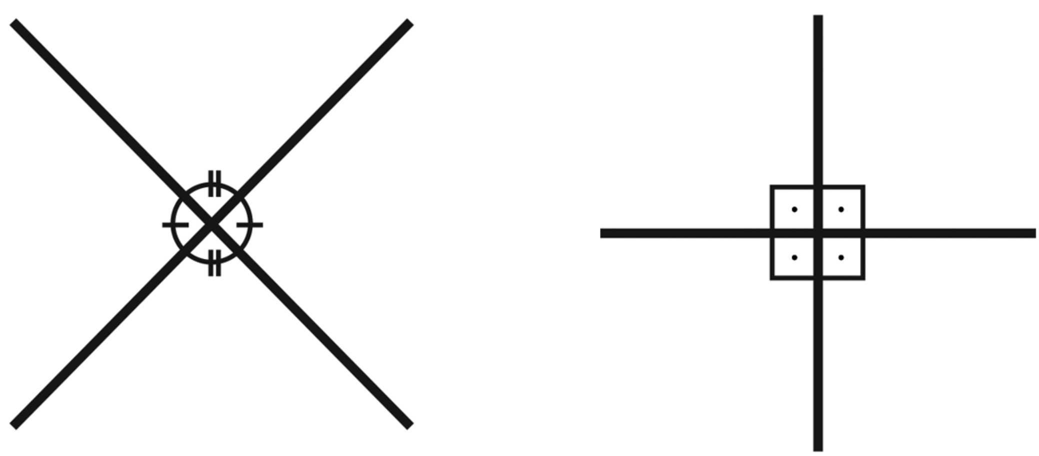


Figura 14: As duas retas à esquerda são concorrentes e, no ponto em que se encontram, formam quatro ângulos, iguais dois a dois – e, nesta figura, identificados com um ou dois traços. Já as duas retas à direita são perpendiculares porque, além de se encontrarem (serem concorrentes), formam, no ponto em que se encontram, quatro ângulos de 90 graus.

Duas retas, quando se encontram, formam quatro ângulos, iguais dois a dois. Veja na figura. Quando as retas se encontram formando um ângulo de 90º , são chamadas de perpendiculares – e, neste caso, os quatro ângulos formados são iguais. Veja na figura anterior. Para indicar que a reta r é perpendicular à reta s, escrevemos $r \perp s$.

Figura 15: Duas retas paralelas.

Encerrada a discussão sobre as retas que se encontram, vamos à discussão sobre as retas que não se encontram. Estas retas que não se encontram podem ser divididas em dois grupos. O primeiro deles é formado por retas que pertencem ao mesmo plano e nunca se encontram. As retas r e s, representadas na figura 15, são um bom exemplo disso. As retas que pertencem ao mesmo plano e nunca se encontram são chamadas de paralelas. Para indicar que a reta r é paralela à reta s, escrevemos $r \parallel s$.

O segundo grupo de retas que não se encontram é formado por retas que não pertencem ao mesmo plano e nunca se encontram. As retas r (do poste) e t (piso de pedras) da figura 10 são um bom exemplo disso. As retas que não pertencem ao mesmo plano e nunca se encontram são chamadas de reversas.

Saiba Mais

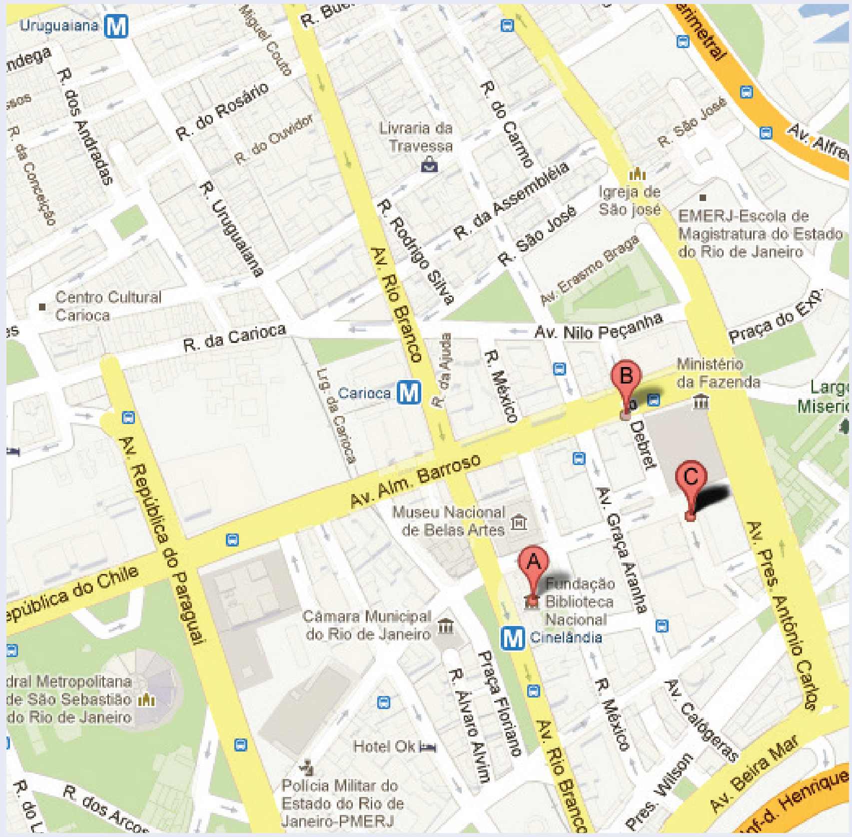
Uma grande crise na matemática está relacionada às retas paralelas, abordadas no 5º Postulado de Euclides. Esse postulado também consta do livro Elementos, a que nos referimos no início da nossa aula. Para tratar da Geometria, Euclides elaborou quatro axiomas (verdades iniciais do sistema que não necessitam ser demonstradas), postulou uma 5ª verdade e tentou demonstrá-la a partir das outras quatro.

O 5º postulado diz que dado um ponto P fora de uma reta r pode-se traçar uma única reta s paralela à reta r dada. Ele foi desafiador durante séculos. Na verdade, a existência da reta paralela era (e continua sendo) facilmente demonstrada. A unicidade das paralelas é que necessitava ser postulada.

A solução desse problema demorou cerca de dois mil anos para aparecer e somente em 1829 o matemático russo Nikolai Lobachevski (1793-1856) publicou Sobre os *Princípios da Geometria* onde apresentava uma nova geometria, baseada em um novo postulado que viria a substituir o 5º. Com essa nova geometria, era possível ter uma nova concepção de espaço, diferente daquela que tínhamos a partir da geometria euclidiana. Surgiam assim, as geometrias não euclidianas.

Dito isso, e aproveitando a familiaridade que já desenvolvemos com o mapa da Atividade 2 -, vamos trabalhar os conceitos de posição relativa entre retas na atividade a seguir.

Atividade 3



Eis novamente o mapa da região do centro do Rio de Janeiro. Só que, desta vez, as perguntas dizem respeito à posição relativa das ruas. Note que as ruas e avenidas continuam representando retas e os endereços representam os pontos. Diga se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas.

a. A Av. Almirante Barroso é perpendicular a Av. Rio Branco

b. A Rua Debret e a Rua México são concorrentes

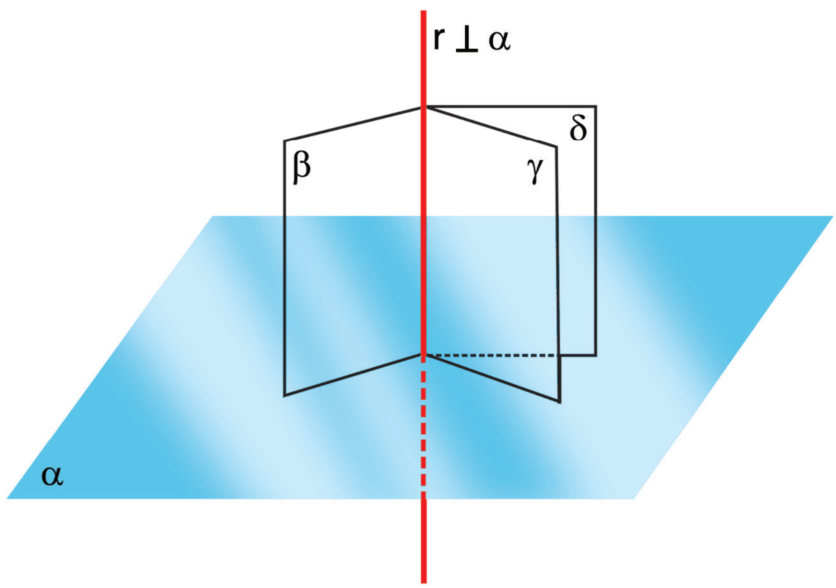
c. A Av. Graça Aranha, a rua México e a Av. Rio Branco são paralelas

d. A rua São José e a Av. Nilo Peçanha não são concorrentes

e. A rua do Carmo é perpendicular à rua da Assembléia

Anote suas respostas em seu caderno

Finalizamos esta seção dizendo que o mesmo estudo que fizemos da posição relativa entre retas pode ser estendido às retas e planos e ainda aos planos entre si. Teríamos assim retas e planos perpendiculares a outros planos, retas e planos paralelos a planos, planos secantes e muitas outras situações de posicionamento relativo, com interessantes implicações matemáticas.



Saiba Mais

• Para conhecer as várias situações e implicações matemáticas do posicionamentos relativos entre retas e planos e entre vários planos, acesse o site http://www.colegioweb.com.br/matematica/perpendicularismo.html

Seção 3
Sólidos Geométricos

Que tal uma casquinha de sorvete com uma bola de sorvete de flocos?

Ou um suco bem gelado de laranja?

Ou ainda um delicioso chocolate?

E uma viagem para conhecer as pirâmides do Egito?

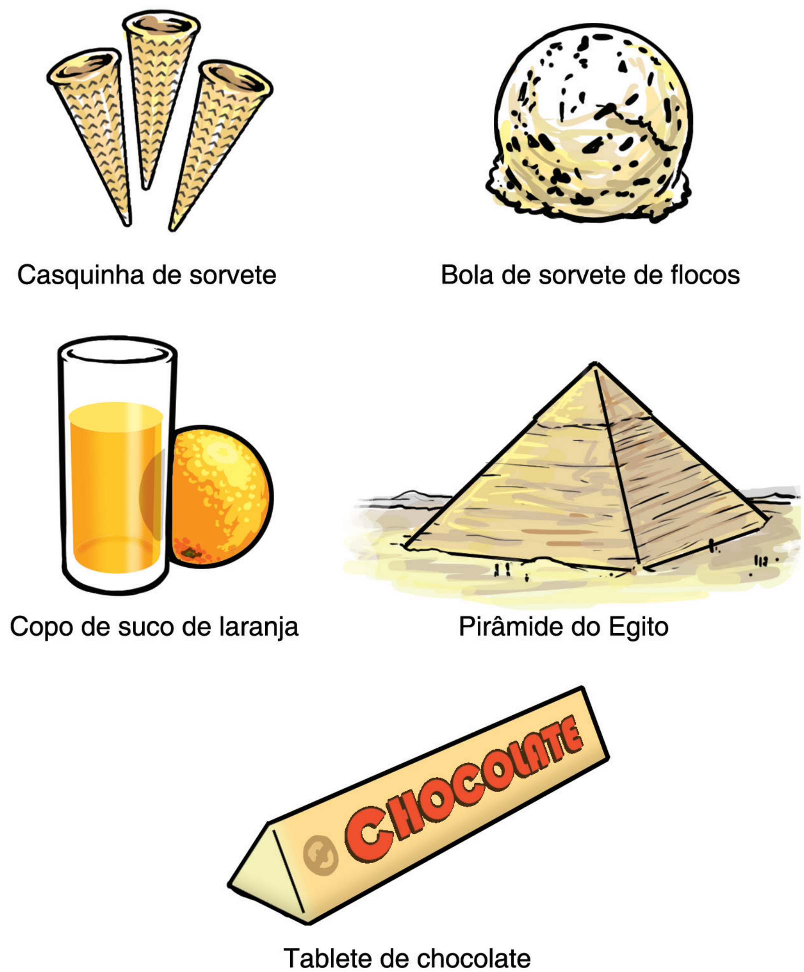
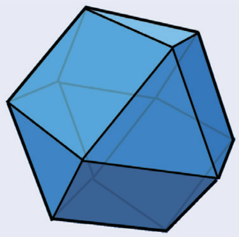


Figura 16: **Objetos e locais da vida real em que podemos encontrar representações de sólidos geométricos.**

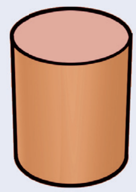
Em todas essas deliciosas opções temos representações do que chamamos em matemática de sólidos geométricos. Esses sólidos podem ser classificados como poliedros ou não poliedros. Mas qual seria a diferença entre um poliedro e um não poliedro? É justamente esse o tema da nossa próxima atividade.

Atividade 4

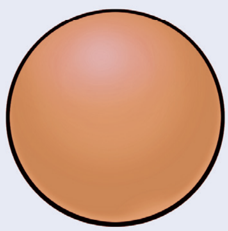
Aqui faremos assim: nós vamos apresentar a vocês vários sólidos, dizendo quais são poliedros e quais não são poliedros. A ideia é que você identifique as características que permitem diferenciar um de outro e responda: qual (ou quais) a(s) diferença(s) entre um poliedro e um não poliedro?



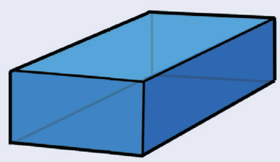
Exemplo de poliedro



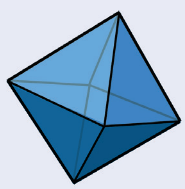
Exemplo de não poliedro



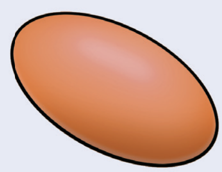
Exemplo de não poliedro



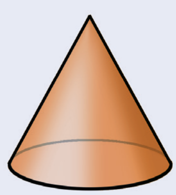
Exemplo de poliedro



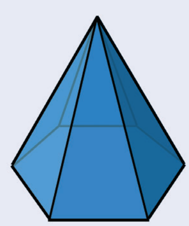
Exemplo de poliedro



Exemplo de não poliedro



Exemplo de não poliedro



Exemplo de poliedro

Anote suas respostas em seu caderno

Poliedros e a relação de Euler

Retomando a resposta da Atividade 4, denominamos de poliedro o sólido limitado por regiões poligonais planas, certo? Muito bem: essas regiões são chamadas de faces e têm, duas a duas, um lado comum, chamado de aresta. Vértice é o ponto comum a três ou mais arestas. Veja na figura seguinte:

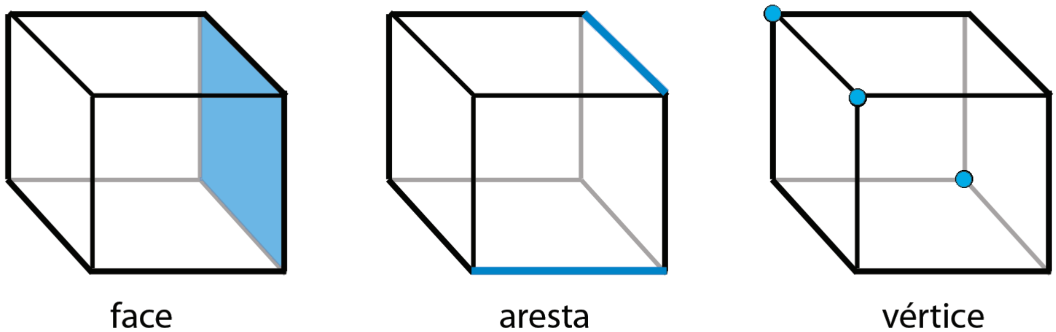
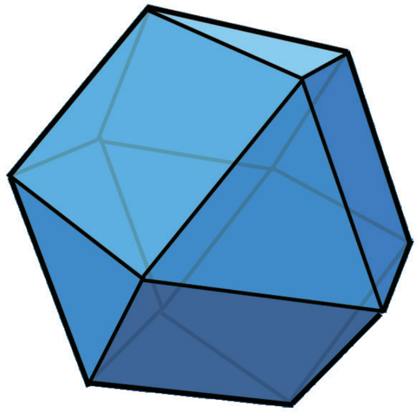


Figura 17: Elementos de um poliedro. No poliedro da esquerda, está destacada a face lateral direita. No poliedro do centro, estão destacadas duas arestas. No poliedro da direita, estão destacados três vértices.

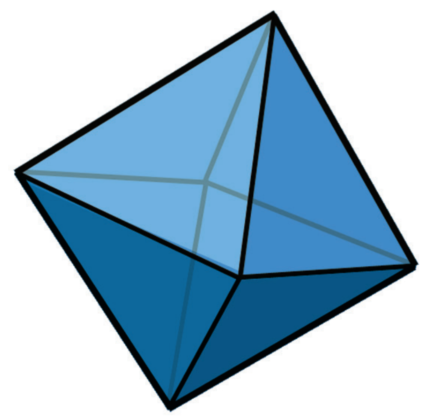
Assim como o interesse pelos fundamentos da Geometria, o interesse pelos poliedros remonta à Grécia antiga: o filósofo Platão (século IV a.C.) descreveu a construção do Universo a partir dos elementos Água, Ar, Terra e Fogo, representados da seguinte maneira.



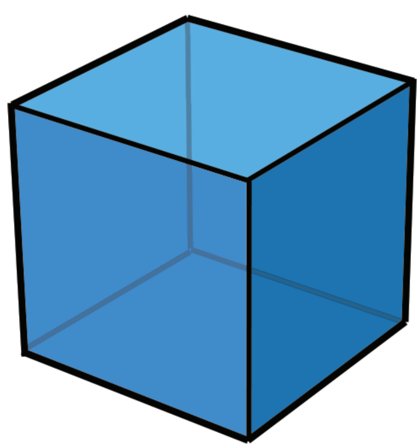
Icosaedro

O elemento água era representado pelo poliedro denominado Icosaedro, que possui um total de vinte faces. Daí o prefixo “ico”, que vem da palavra grega “eikosi” (vinte). Todas as vinte faces são triangulares.

O elemento ar era representado pelo poliedro denominado Octaedro, que possui um total de oito faces, daí o prefixo “octa”. Todas as faces do octaedro são triangulares.



Octaedro



Hexaedro

O elemento terra era representado pelo poliedro denominado Hexaedro, que possui um total de seis faces, daí o prefixo “hexa”. Todas as faces do hexaedro de Platão são quadradas. Imaginamos que você tenha reparado que este hexaedro em particular é o nosso já conhecido e tão querido cubo.

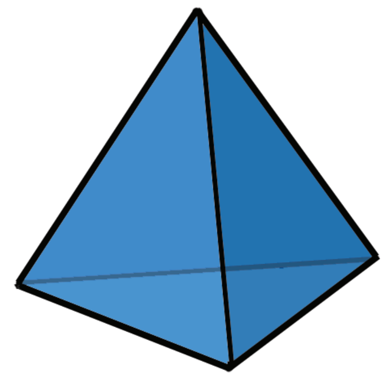
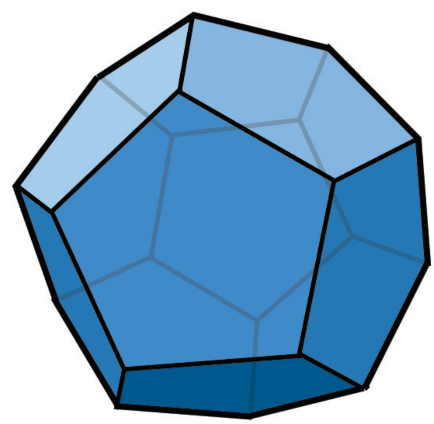
O elemento fogo era representado pelo poliedro denominado Tetraedro, que possui um total de quatro faces. Daí o prefixo tetra. Todas as faces do tetraedro são triangulares.	 Tetraedro
Além destes sólidos que representavam os elementos, dentre os sólidos de Platão existe ainda o dodecaedro. Um poliedro de 12 faces pentagonais que era associado ao Universo.	 Dodecaedro

Figura 18: Poliedros de Platão.

Os poliedros que Platão utilizou para representar os elementos são regulares. Isto é: suas faces são regiões poligonais regulares congruentes e em todo vértice do poliedro converge o mesmo número de arestas. É importante ressaltar aqui que um sólido, para ser chamado de icosaedro, octaedro, hexaedro ou tetraedro não precisa ser regular – basta ter as respectivas vinte, oito, seis ou quatro faces. Um bom exemplo é o hexaedro que representamos na figura seguinte.

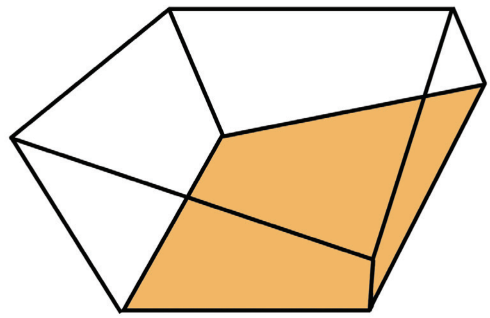
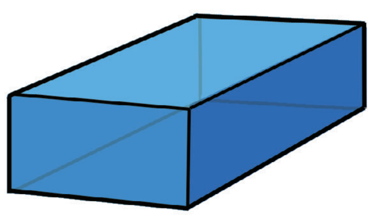


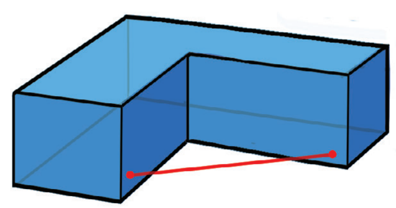
Figura 19: Hexaedro.

O grande matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) conseguiu estabelecer uma interessante relação entre o número de vértices (V), o número de arestas (A) e número de faces (F) de um **poliedro convexo**.

Um poliedro é convexo se o segmento que liga dois de seus pontos está sempre contido no poliedro.



Exemplo de poliedro convexo



Exemplo de poliedro não convexo

De acordo com essa relação, conhecida como relação de Euler, em todo poliedro convexo, o número de arestas (A) mais 2 é igual ao número de vértices (V) mais o número de faces (F). Ou, numericamente

$A + 2 = V + F$ ou ainda $V - A + F = 2$

Interessante, não? De posse dessa relação, convidamos você a fazer a atividade a seguir.

Atividade 5

Descubra quantos vértices e arestas têm cada um dos poliedros de Platão apresentados anteriormente:

a. Tetraedro

b. Hexaedro

c. Octaedro

d. Icosaedro

Anote suas respostas em seu caderno

Prismas e pirâmides?

Os prismas e as pirâmides são poliedros convexos muito comuns em nosso dia a dia. Os prismas são poliedros convexos que têm duas faces paralelas e congruentes (chamadas bases) e as demais faces em forma de paralelogramos (chamadas faces laterais).

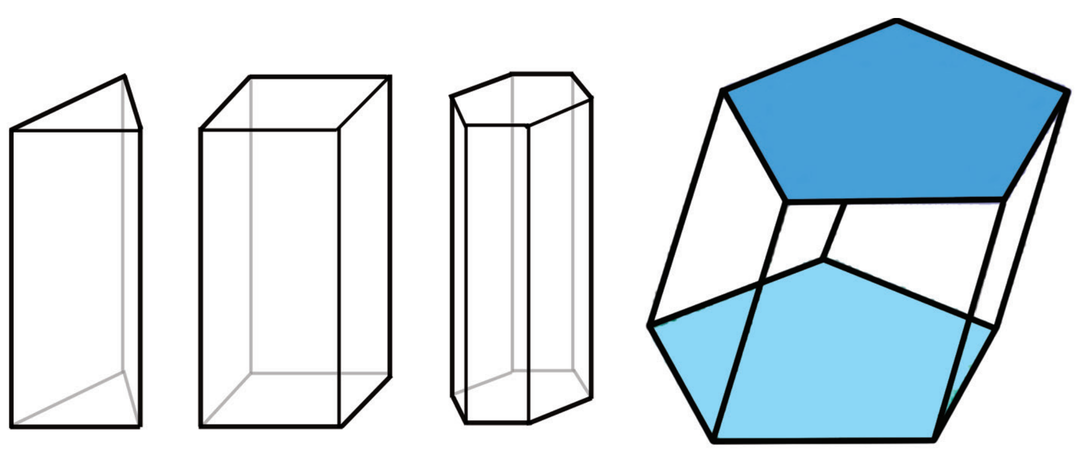


Figura 20: Prismas de base triangular, quadrada, hexagonal e pentagonal respectivamente. O prisma à direita, de base pentagonal, tem suas duas bases destacadas.

Já as pirâmides são poliedros cuja base é uma região poligonal e as faces laterais são regiões triangulares.

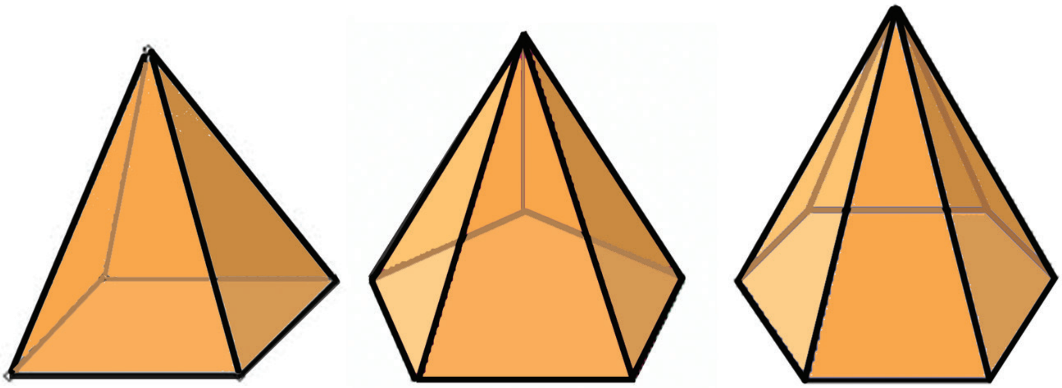


Figura 21: Pirâmides de base quadrada, pentagonal e hexagonal respectivamente.

Apesar de a palavra prisma não estar entre as mais corriqueiras da nossa língua, os prismas são muito comuns em nosso dia a dia – os prédios e casas em que moramos, a maioria das embalagens dos produtos que compramos, e por aí vai. Já as pirâmides frequentam nossos livros de história, nossos filmes e até mesmo os roteiros de viagem dos que tem um pouco mais de condição financeira. Mas...e um deltoedro pentagonal, o que seria?

Multimídia

O deltoedro pentagonal é um dos muito poliedros que aguardam você no software de geometria dinâmica Poly, que é gratuito e que pode ser baixado diretamente do site da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, a UFRGS.

O link para o programa é: http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/softwares/soft_geometria.php#poly

Nesse programa, você encontra sólidos bem tradicionais, como os de Platão e de Arquimedes, bem como outros tipos de poliedros mais, digamos, alternativos – como o nosso deltoedro.

Como é um deltoedro pentagonal? Ah, dê um pulinho lá, baixe o Poly e descubra!

Não poliedros

Como vimos na Atividade 4, os sólidos que não são limitados por regiões poligonais planas são chamados de não poliedros. Muitos deles também são bastante comuns em nosso dia-a-dia. Dentre estes, destacamos o cone, o cilindro e a esfera. Como retornaremos a eles mais detalhadamente nas aulas seguintes, faremos agora uma apresentação mais sintética.

Lembram dos prismas? Pois então, se substituíssemos as bases poligonais por bases circulares – e conectássemos essas bases– nosso prisma se "transformaria" num cilindro. E das pirâmides, lembra? Então, se substituíssemos a base poligonal por uma circular – e ligássemos essa base ao vértice, nossa pirâmide se "transformaria" num cone. Veja a figura!

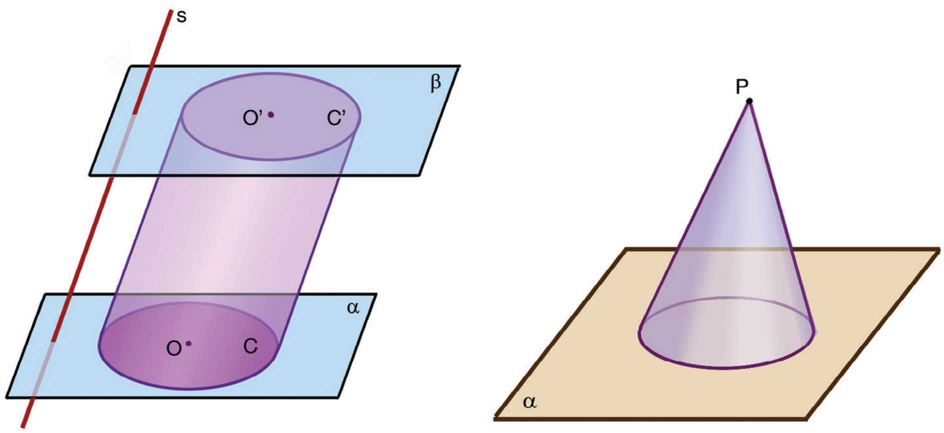


Figura 22: Um cilindro (à esquerda) e um cone (à direita).

Mais formalmente, o cilindro seria o sólido obtido por meio da união de todos os segmentos de retas pararelos a reta s que unem um ponto do cículo C (pertencente a α) a um ponto de β. O cone seria o sólido obtido por meio da reunião de todos os segmentos que ligam cada ponto da região circular C (pertencente a α) ao ponto P (que não pertence a α). E, aproveitando o formalismo, a esfera é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão a uma distância menor ou igual a R (RAIO) de um outro ponto O, chamado de centro. Muito formalismo junto? Não se preocupe, ao longo das próximas aulas vamos explicar todos os detalhes destes enunciados mais formais. Por ora, vá lendo, se acostumando e vendo o que consegue perceber deles. Veja, por exemplo, se na figura seguinte você consegue perceber, ainda que intuitivamente, o que foi dito mais formalmente acerca da esfera.

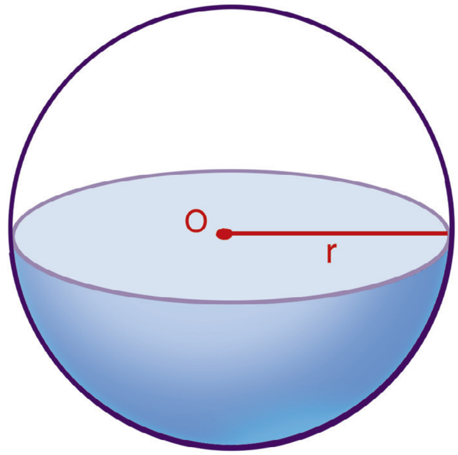
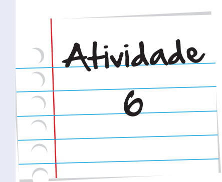


Figura 23: Esfera.



Retorne ao início da seção e diga quais sólidos geométricos os objetos representam:

a. Bola de sorvete

b. Pirâmide do Egito

c. Laranja

d. Casquinha de sorvete

e. Copo de suco

f. Caixa de chocolate

Anote suas respostas em seu caderno

Resumo

- Dimensões; ponto, reta e plano.
- O mundo que nos cerca tem três dimensões: altura, largura e comprimento.
- Ponto, reta e plano são conceitos matemáticos primitivos.

- O ponto é um objeto matemático sem dimensão.
- A reta é um objeto matemático com apenas uma dimensão. A reta se estende infinitamente ao longo desta dimensão.
- O plano é um objeto matemático com apenas duas dimensões. O plano se estende infinitamente ao longo destas duas dimensões.
- O ponto A pertence à reta r ($A \in r$) quando se situa sobre ela.
- O ponto A não pertence à reta r ($A \notin r$) quando não se situa sobre ela.
- O ponto A pertence a um plano α ($A \in \alpha$) quando se situa sobre este plano.
- O ponto A não pertence a uma plano α ($A \notin \alpha$) quando não se situa sobre este plano.
- Dois ou mais pontos são chamados colineares quando pertencem a uma mesma reta.
- Retas são concorrentes quando têm um único ponto em comum.
- Retas são perpendiculares quando são concorrentes e determinam ângulos de 90°.
- Retas são paralelas quando pertencem ao mesmo plano e não têm ponto em comum.
- Retas são reversas quando não pertencem ao mesmo plano e não têm ponto em comum.
- Planos são paralelos quando não têm ponto em comum.
- Planos são secantes quando são planos distintos com uma reta em comum.
- Planos são perpendiculares quando um dos planos contêm uma reta perpendicular ao outro.
- Planos são oblíquos quando são secantes e não são perpendiculares.
- Uma reta está contida em um plano quando todos os pontos da reta pertencem ao plano.
- Uma reta e um plano são concorrentes quando têm um único ponto em comum.
- Uma reta e um plano são paralelos quando não têm ponto comum.
- Uma reta concorrente a um plano em um determinado ponto é perpendicular a ele se ela é perpendicular a todas as retas do plano que passam pelo ponto.

Sólidos Geométricos

- Poliedro é o sólido limitado por regiões poligonais planas, chamadas de faces que têm, duas a duas, um lado comum, chamado de aresta.
- Vértice é um ponto comum a três ou mais arestas.
- Relação de Euler $A + 2 = V + F$ (A número de arestas, V número de vértices, F número de faces).
- Um poliedro é convexo se o segmento que liga dois de seus pontos está sempre contido no poliedro.

- Prismas são poliedros convexos que têm duas faces paralelas e congruentes (chamadas bases) e as demais faces em forma de paralelogramos (chamadas faces laterais).
- Pirâmides são poliedros cuja base é uma região poligonal e as faces laterais são regiões triangulares.
- Cilindro é o sólido obtido por meio da união de todos os segmentos de retas pararelos a reta s que unem um ponto do cículo C (pertencente a α) a um ponto de β. O cilindro é um sólido mas não é um poliedro.
- Cone é o sólido obtido por meio da reunião de todos os segmentos que ligam cada ponto da região circular C (petencente a α) ao ponto P (que não pertence a α). O cone é um sólido mas não é um poliedro.
- Esfera é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão a uma distância menor ou igual a R de um centro O. A esfera é um sólido mas não é um poliedro.

Conclusão

Fizemos um grande passeio pelo mundo que nos cerca e analisamos de uma maneira matemática as formas que compõem os objetos do nosso cotidiano. Refletimos sobre dimensões, ponto, reta e plano. Também nos dedicamos a analisar os sólidos geométricos e entendemos a diferenciação entre poliedros e não poliedros. Alguns sólidos chamaram nossa atenção como os prismas, as pirâmides, o cilindro, cone e a esfera.

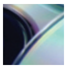
Referências

Livros

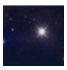
- ALMEIDA, Nilze de; DEGENSZAJN, David; DOLCE, Osvaldo; IEZZI, Gelson; PÉRIGO, Roberto. *Matemática Ciência e Aplicações 1*. Segunda Edição. São Paulo: Atual Editora, 2004.157p.
- BOYER, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.
- CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; LIMA, Elon Lages; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. *Temas e Problemas*. Terceira Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. 193 p.
- ________________________. *A Matemática do Ensino Médio Volume 1*. Sétima Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. 237 p.
- DANTE, Luiz Roberto. *Matemática Contexo e Aplicações Volume 1*. Primeira Edição. São Paulo: Editora Ática, 2011. 240p.
- FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. Novo Aurélio Século XXI: o dicionário da língua portuguesa. Quinta Edição. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 1999. 2128 p.

Imagens

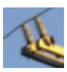

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1242172


- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=916550


- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1397088


- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1005288

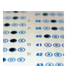

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1149358


- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1353848


- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=718564

- http://goo.gl/maps/irvmp


- http://www.sxc.hu/photo/475767


- http://www.sxc.hu/photo/517386

Veja ainda

Acesse o link http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1369 e descubra o que acontece nesse experimento ao tentar violar a Relação de Euler V – A + F = 2, onde V é o número de vértices, A o número de arestas e F é o número de faces do sólido.

Respostas das Atividades

Atividade 1

A primeira coisa a levar em consideração é aquele nosso comentário de que pontos, retas e planos são entes matemáticos e seu uso para representar objetos do dia-a-dia sempre implica alguma espécie de aproximação. Isso posto, podemos dizer que os pontinhos de salsinha podem ser considerados exemplos de pontos, justamente por "não terem" – e eis aqui nossa aproximação – altura, comprimento ou largura.

Como retas, poderíamos considerar tanto as bordas do prato quanto os próprios talheres situados ao lado do prato – lembrando, novamente, que as retas se estendem indefinidamente, enquanto tanto os lados do prato quanto os talheres tem comprimento limitado. Finalmente, mantendo as ressalvas usadas para os pontos e retas, dois exemplos de plano seriam o prato e o tampo da mesa.

Atividade 2

a. Se levarmos em consideração aquelas aproximações, diremos que a afirmativa é verdadeira – afinal, o prédio representado pelo ponto, está na Avenida Rio Branco, representada pela reta. Agora, se você levou o conceito ao extremo e argumentou que o balão não está posicionado exatamente sobre a linha da rua – e, por isso, a afirmativa é falsa – tudo certo também. O importante aqui é você visualizar a relação de pertencimento entre reta e ponto.

b. A afirmativa é verdadeira: de acordo com o mapa, o escritório (ponto C) fica no outro quarteirão.

c. A afirmativa é verdadeira: tanto o balão usado pelo Google Maps para representar o endereço (o ponto B) quanto o prédio em si estão situados sob a reta da Av. Almirante Barroso.

d. A afirmativa é verdadeira também: tanto o balão usado pelo Google Maps para representar o endereço (o ponto B) quanto o prédio em si estão situados sob a reta da rua Debret.

e. Vale aqui um argumento muito parecido com o da resposta do item a. A afirmativa é verdadeira porque o prédio representado pelo ponto se situa sobre a rua representada pela reta. Se você levar a precisão ao limite, argumentando que o desenho do museu não está posicionado exatamente sobre a rua – e, por isso, a afirmativa é falsa – vale também. O importante é você visualizar a relação de pertencimento entre reta e ponto.

f. A afirmativa é falsa. Não é possível achar uma única linha que ligue os 3 pontos. É possível, no entanto, conectá-los dois a dois por uma linha reta. Importante ressaltar que essa linha não seria uma rua e passaria por cima de vários prédios.

g. A afirmativa é falsa. O quadrado com a letra M está perfeitamente sobre a reta que representa a rua Uruguaiana.

h. A afirmativa é verdadeira: ambas estão na Avenida Rio Branco.

i. A afirmativa é falsa: não existe uma reta que ligue as três estações ao mesmo tempo.

Atividade 3

a. A afirmativa é verdadeira: as ruas se cruzam e fazem entre si um ângulo (na verdade, quatro ângulos) de 90º. Se porventura você argumentou que as ruas eram concorrentes mas não havia elementos para determinar se elas eram perpendiculares (afinal, não havia informação explícita neste sentido), também está ok.

b. A afirmativa é falsa: as ruas não se cruzam e, por isso, não podem ser concorrentes.

c. A afirmativa é verdadeira. Veja que, basicamente, trata-se da mesma situação que representamos na figura 15 – acrescida de uma terceira reta!

d. A afirmativa é falsa – as ruas se encontram um pouco acima do metrô da Carioca, por isso são concorrentes.

e. Aqui, uma argumentação muito parecida com a do item a . As ruas se cruzam e, portanto, são concorrentes. Se você entendeu que o ângulo é de 90º, as ruas são perpendiculares e a afirmativa é verdadeira. Se entendeu que não havia elementos suficientes para determinar se o ângulo era de 90º, então as ruas são apenas concorrentes.

Atividade 4

Imaginamos que você tenha conseguido perceber o que diferencia um poliedro de um não poliedro. Mais difícil, no entanto, seria colocar essa percepção em palavras, não é? Assim, vamos dar uma ajuda – e veja se a diferença que você encontrou entre poliedros e não poliedros pode ser expressa assim: um poliedro é delimitado por regiões poligonais planas. A mesma coisa não pode ser dita acerca dos não poliedros. Os não poliedros ou bem que não são delimitados por nenhuma superfície plana ou bem que são parcialmente delimitados por superfícies planas. Essas superfícies, no entanto, não são poligonais. Daí a nossa proposta de diferenciação. Convidamos você a ler novamente – e com calma – a nossa proposta e ver como ela se aplica nos exemplos que apresentamos, ok?

Respostas das Atividades

Atividade 5

a) Sabemos que o tetraedro tem quatro faces, todas triangulares certo? Então, se cada triângulo tem 3 lados, teremos um total de 4x3=12 lados. No entanto, cada um desses lados é comum a dois triângulos (duas faces) e, por isso, é contado duas vezes. Assim, teremos um total de 12/2=6 arestas. Usando a relação de Euler, teremos que V+F=A+2; V+4=6+2; V+4=8; V=4. Assim o tetraedro tem 4 vértices. Quer dar uma olhada na figura e contar para conferir? Ah, você já resolveu contando? Está ok – mas, neste caso, é muito importante que você faça também as contas, até porque, para determinados poliedros a contagem pode ser bem problemática – quando não é completamente impossível.

b) Mesmo raciocínio aqui: o hexaedro tem seis faces quadradas. Com 4 lados por face (quadrado), temos 6x4=24 lados. Como cada lado é contado duas vezes (por ser comum a duas faces), teremos um total de 24/2=12 arestas. Usando a relação de Euler, teremos que V+F=A+2, V+6=12+2, V+6=14, V=8. Assim, o hexaedro em questão tem 8 vértices. Quer contar para conferir? Ah, você já resolveu contando? Mas de novo? Ok, ok– mas, vale o aviso anterior: é muito importante que você faça também as contas, até porque, para determinados poliedros a contagem pode ser bem problemática – quando não é completamente impossível.

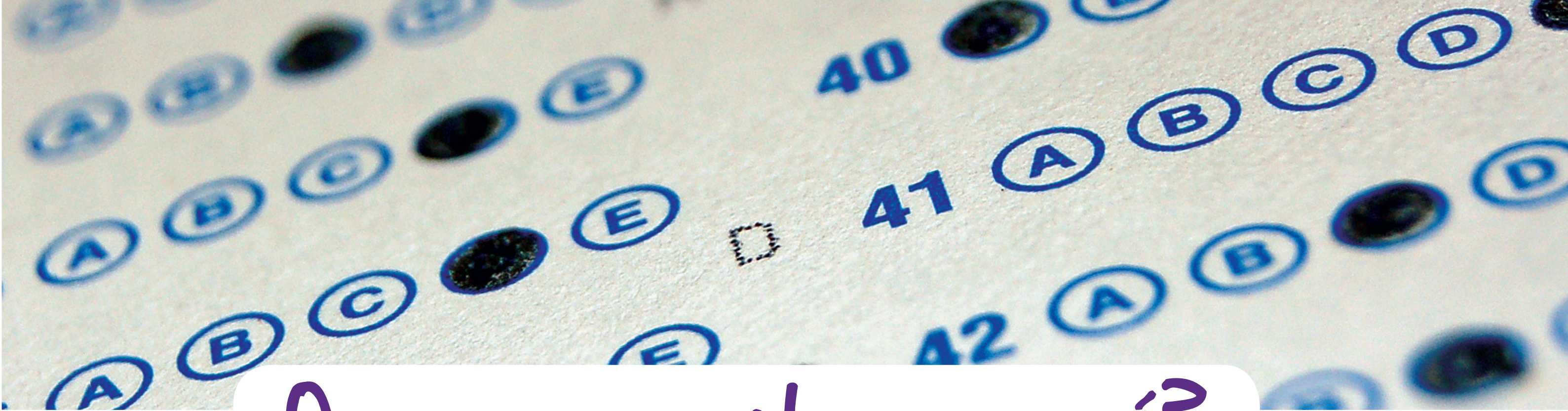
c) Novamente: temos oito faces triangulares, com 8x3=24 lados. Cada lado é comum a duas faces, o que nos deixa com 12 arestas. Aplicando a relação de Euler, teremos que V+F=A+2, V+8=12+2, V+8=14, V=6. Assim, o octaedro tem 6 vértices. Resolveu contando? Ah, foi? Bom, valem as considerações das respostas dos itens a e b.

d) O icosaedro em questão tem 20 faces triangulares, o que nos dá 20x3=60 lados. Como cada lado é comum a duas faces, será contado duas vezes e por isso dividimos o numero de lados por dois para encontrar o número de arestas: 60/2=30. Vamos agora à relação de Euler: V+F=A+2, V+20=30+2, V+20=32, V=12. Esse é muito mais difícil de resolver contando diretamente na figura, não é mesmo?

Respostas das Atividades

Atividade 6

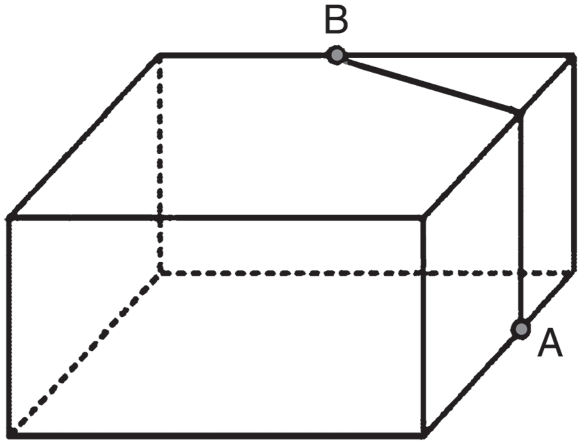
Casquinha de sorvete pode ser considerada um cone, por assim dizer invertido, com a base para cima, justamente para receber a bola de sorvete – que, juntamente com a laranja, são exemplos de esferas. O copo de suco pode ser considerado um cilindro – conseguiu ver? A caixa de chocolate pode ser considerada um prisma, e a pirâmide do Egito – essa foi fácil, hein? – uma pirâmide.



O que perguntam por aí?

ENEM - 2010

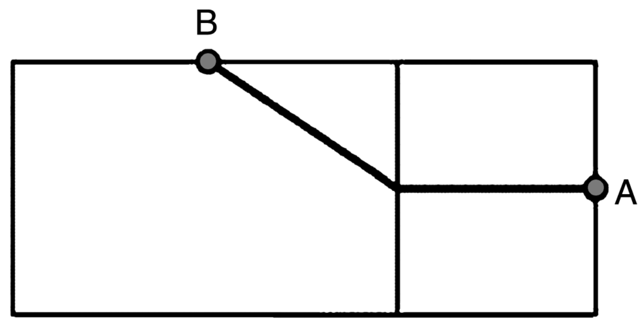
A figura seguinte representa um salão de um clube onde estão destacados os pontos A e B.



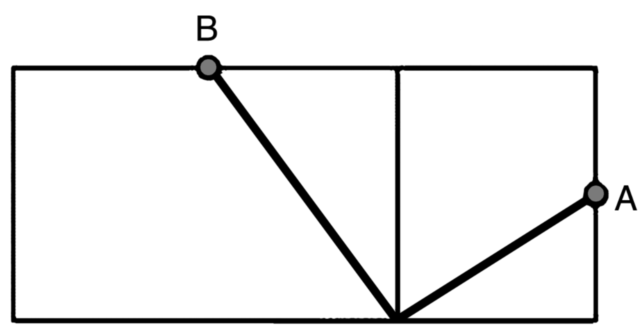
Nesse salão, o ponto em que chega o sinal da TV a cabo fica situado em A. A fim de instalar um telão para a transmissão dos jogos de futebol da Copa do Mundo, esse sinal deverá ser levado até o ponto B por meio de um cabeamento que seguirá na parte interna da parede e do teto.

O menor comprimento que esse cabo deverá ter para ligar os pontos A e B poderá ser obtido por meio da seguinte representação no plano:

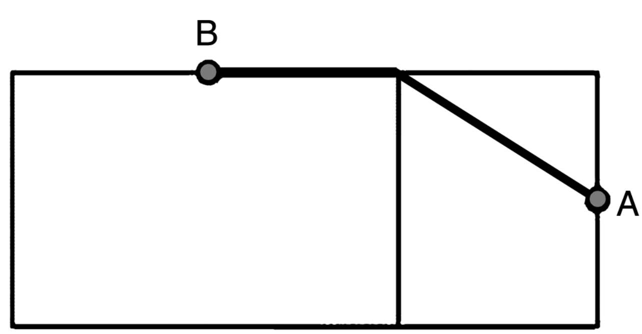
A)



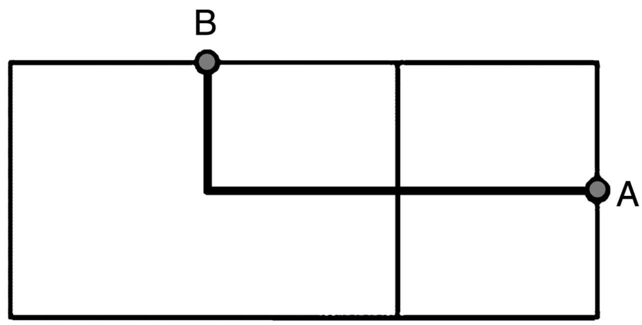
B)



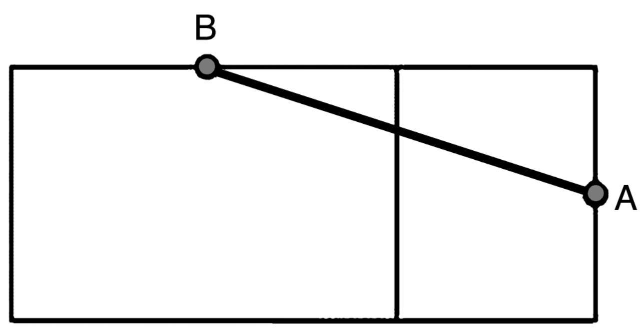
C)



D)

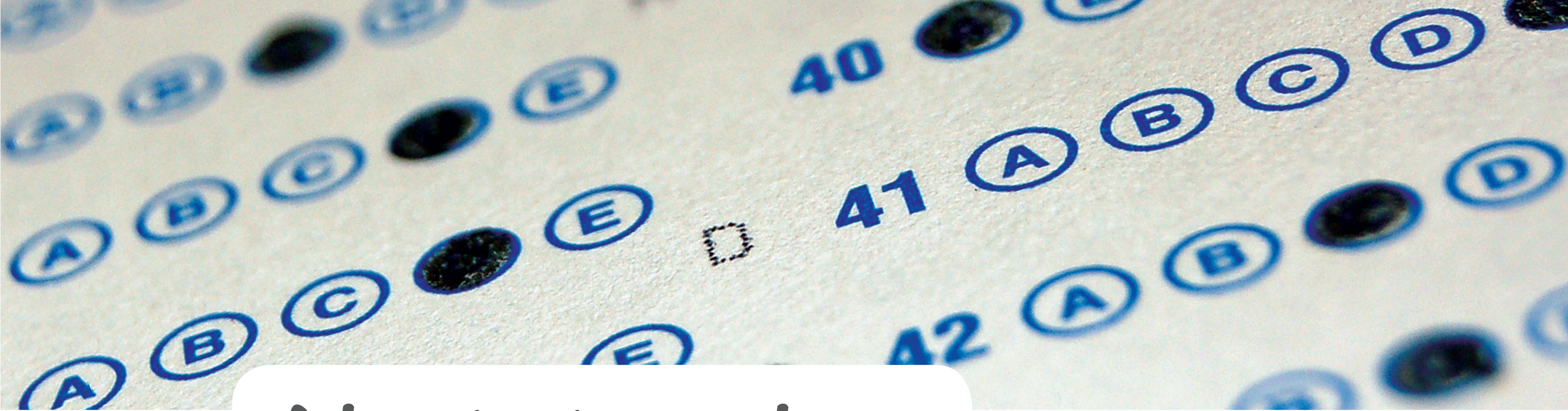


E)



Resposta: Letra E.

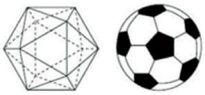
Comentário: Perceba o seguinte: o retângulo em que se situa o ponto B é o teto da sala e o retângulo em que se situa o ponto A é uma das paredes. Conseguiu ver? Muito bem. Então, num primeiro momento, podemos afirmar que os pontos estão em planos diferentes e, neste caso, um fio que percorresse o caminho mais curto entre A e B passaria pelo meio da sala. No entanto, o fato de o fio "correr" por dentro da parede faz com que as coisas mudem de figura: podemos considerar que os planos do teto e da parede são, na verdade, um plano contínuo. Dessa maneira, os pontos A e B estarão no mesmo plano e a menor distância entre eles será o tamanho da linha reta que os une. Assim, a resposta é letra E.



Atividade extra

Exercício 1

Arquimedes descobriu um poliedro convexo formado por 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais, todas regulares. Esse poliedro inspirou a fabricação da bola de futebol que apareceu pela primeira vez na Copa do Mundo de 1970.



Quantos vertices possui esse poliedro?

(a) 12 (b) 54 (c) 60 (d) 72

Exercício 2

Um poliedro convexo tem 6 faces quadrangulares e 4 faces triangulares.

Qual o numero de arestas desse poliedro?

(a) 10 (b) 12 (c) 16 (d) 18

Exercício 3

Um poliedro convexo tem cinco faces triangulares e três pentagonais.

Qual o numero de arestas deste poliedro?

(a) 30 (b) 24 (c) 8 (d) 15

Exercício 4

Um poliedro convexo tem 3 faces triangulares, 4 faces quadrangulares e 5 pentagonais.

Qual o numero de vertices desse poliedro?

(a) 25 (b) 12 (c) 15 (d) 9

Exercício 5

Um poliedro tem 6 arestas e o número de faces e igual ao seu número de vértices.

Quantas faces possui esse poliedro?

(a) 4 (b) 6 (c) 8 (d) 10

Exercício 6

Quantas arestas tem um poliedro que possui 12 faces e 20 vértices?

(a) 24 (b) 30 (c) 32 (d) 38

Exercício 7

Um poliedro e formado por cinco faces quadrangulares e seis faces triangulares.

Quantas arestas tem esse poliedro? $x \in A$ e os elementos $y \in B$?

(a) 15 (b) 16 (c) 19 (d) 22

Exercício 8

Um poliedro convexo e constitudo por 2 faces pentagonais e 5 faces quadrangulares. Quantos vértices tem o poliedro?

(a) 8 (b) 10 (c) 12 (d) 15

Exercício 9

O icosaedro tem 20 faces triangulares.

Quantas arestas tem esse poliedro?

(a) 30 (b) 32 (c) 36 (d) 38

Exercício 10

Quantas arestas tem uma pirâmide de base hexagonal?

(a) 6 (b) 8 (c) 10 (d) 12

Exercício 11

Existe um poliedro convexo constituído por 15 faces, 12 vértices e 18 arestas?

Exercício 12

Quantos vértices tem um poliedro convexo constituído por 10 faces quadrangulares e 2 pentagonais?

Exercício 13

Num poliedro o numero de vértices é igual ao dobro do número de faces.

Quantas faces tem esse poliedro se ele tem 16 arestas?

Exercício 14

Num poliedro convexo, o número de arestas excede o número de vértices em 6 unidades.

Qual o número de faces desse poliedro?

Exercício 15

Um poliedro tem 6 faces triangulares, 4 faces pentagonais e 5 faces quadrangulares. Qual o número de arestas desse poliedro?

Gabarito

Exercício 1

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 2

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 3

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 4

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 5

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 6

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 7

A B C D

○ ○ ● ○

Exercício 8

A B C D

○ ● ○ ○

Exercício 9

A B C D

● ○ ○ ○

Exercício 10

A B C D

○ ○ ○ ●

Exercício 11

Não, pois $12 - 18 + 15 \neq 2$, ou seja, o teorema de Euler não é satisfeito.

Exercício 12

15 vértices.

Exercício 13

6 faces.

Exercício 14

8 faces.

Exercício 15

29 arestas.

Geometria Espacial: prismas e cilindros

Fascículo 7

Unidade 23

Fundação CECIERJ

Geometria Espacial: prismas e cilindros

Para início de conversa...

Figura 1: De cima para baixo e da esquerda para a direita: caixa de presente, comida japonesa, rolo de feno, dados, prédio triangular em Berlim, Alemanha e um rolo de filme.

Cilindros e prismas, esses serão os nossos companheiros dessa unidade. A esta altura, você já deve ter imaginado que muitos objetos do dia a dia podem ser considerados exemplos de prismas e cilindros – dê uma olhada nos que trouxemos nesta primeira imagem! Mas além de serem importantes para o dia a dia, essas formas geométricas são muito importantes também na Física.

Em 1974, Frank Tipler, da Universidade Tulane, investigando a possibilidade de viagem no tempo, calculou que um cilindro maciço, infinitamente comprido, girando em torno do seu eixo em velocidades próximas à da luz, permitiria visões do passado, mais uma vez porque a luz seria puxada em torno do cilindro, formando um círculo.

Já em 2002, a revista Physics World realizou uma enquete junto aos físicos, pedindo que elegessem os 10 mais belos experimentos da Física. O quarto experimento mais votado foi justamente o da decomposição da luz solar, realizada por Newton, no século XVII. A experiência é extraordinariamente simples, necessitando apenas de luz solar e de um prisma de vidro. Como ilustra a figura a seguir. Ao passar por um prisma, a luz solar, que é branca, se decompõe nas cores do arco-íris.

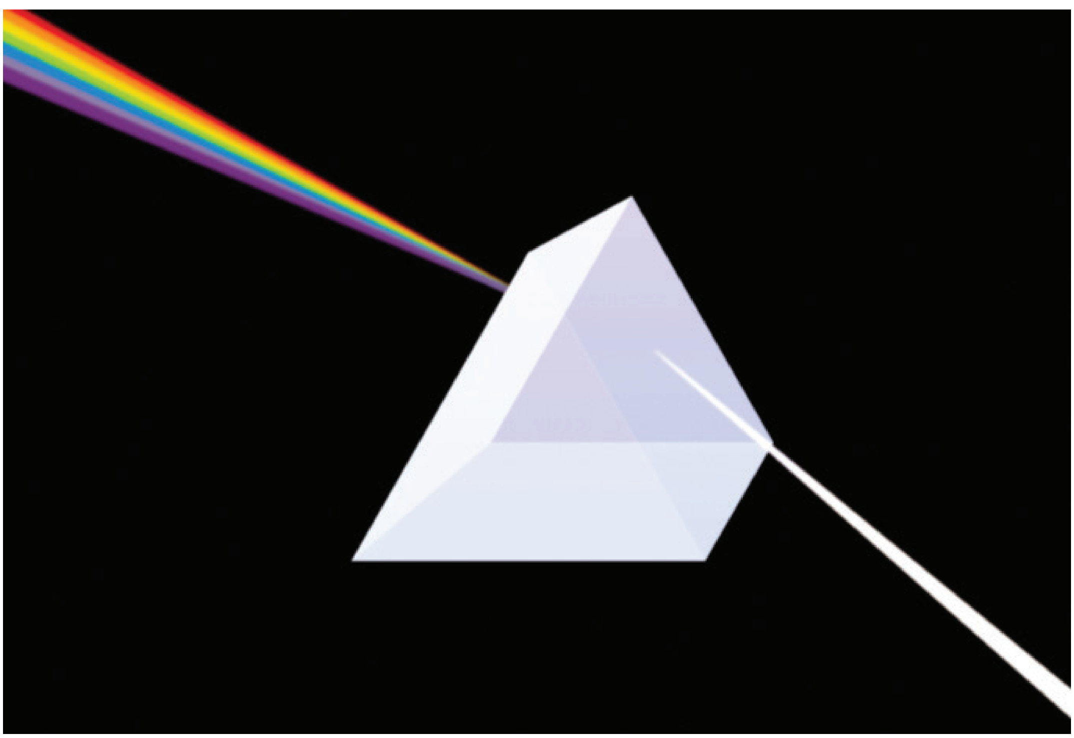


Figura 2: Decomposição da luz branca por um prisma de vidro.

No caso do arco-íris, são as gotículas de água que fazem o papel do prisma. Newton demonstrou que combinando adequadamente dois ou mais prismas, é possível decompor e recompor a luz branca. A separação é possível porque cada cor tem um índice de refração diferente. Isto é, apresenta um desvio diferente quando passa de um meio (ar) para outro (vidro).

Para conhecer melhor as investigações teóricas sobre viagem no tempo, acesso o link

http://www2.uol.com.br/sciam/reportagens/como_construir_uma_maquina_do_tempo_5.html

Já para conhecer melhor o experimento de Newton sobre a decomposição da luz, acesse o link http://www.if.ufrgs.br/historia/newton.html

Saiba Mais

Então, vamos conhecer melhor cilindros e prismas? Mãos a obra!

Objetivos de aprendizagem

- Identificar e diferenciar prismas e seus elementos
- Identificar e diferenciar cilindros e seus elementos
- Calcular diagonal do prisma e da face de um prisma.
- Conhecer o princípio de Cavalieri
- Calcular a área lateral, total e o volume de um prisma.
- Calcular a área lateral, total e o volume de um cilindro.

Seção 1
Os elementos

Todos os objetos do dia a dia que apresentamos na Figura 1 são exemplos de prismas ou de cilindros. Assim, começamos nossa aula já com uma atividade, em que convidamos você a tentar apontar as diferenças e semelhanças entre eles – o que é importantíssimo para a identificação de ambos. Para ajudar um pouco, damos uma dica: os dados, a caixa de presente e o edifício são exemplos de prismas. Já os rolos de filme, de feno e de comida japonesa, são exemplos de cilindro. Vamos à atividade?

Atividade 1

Veja os objetos representados na Figura 1: os dados, a caixa de presente e o edifício são exemplos de prismas. Os rolos de filme, de feno e de comida japonesa, são exemplos de cilindro. Agora observe atentamente estes objetos e procure identificar as principais semelhanças e diferenças entre cilindros e prismas.

Anote suas respostas em seu caderno

No início da unidade, vimos a experiência de Newton sobre decomposição da luz utilizando um prisma. Agora que já temos uma boa noção das principais características dos prismas, é hora de formalizarmos mais um pouco a nomenclatura dos elementos do prisma, sempre com o intuito de facilitar a identificação destes elementos e a comunicação entre nós.

É importante relembrar que os prismas são poliedros convexos que têm duas faces paralelas e congruentes (chamadas bases) e as demais faces em forma de paralelogramos (chamadas faces laterais). Dele, podemos destacar alguns elementos tais como as arestas e a altura. Os prismas podem ser retos ou oblíquos. Quando ele for reto, a altura será igual à aresta lateral. Veja na figura seguinte o exemplo de um prisma reto:

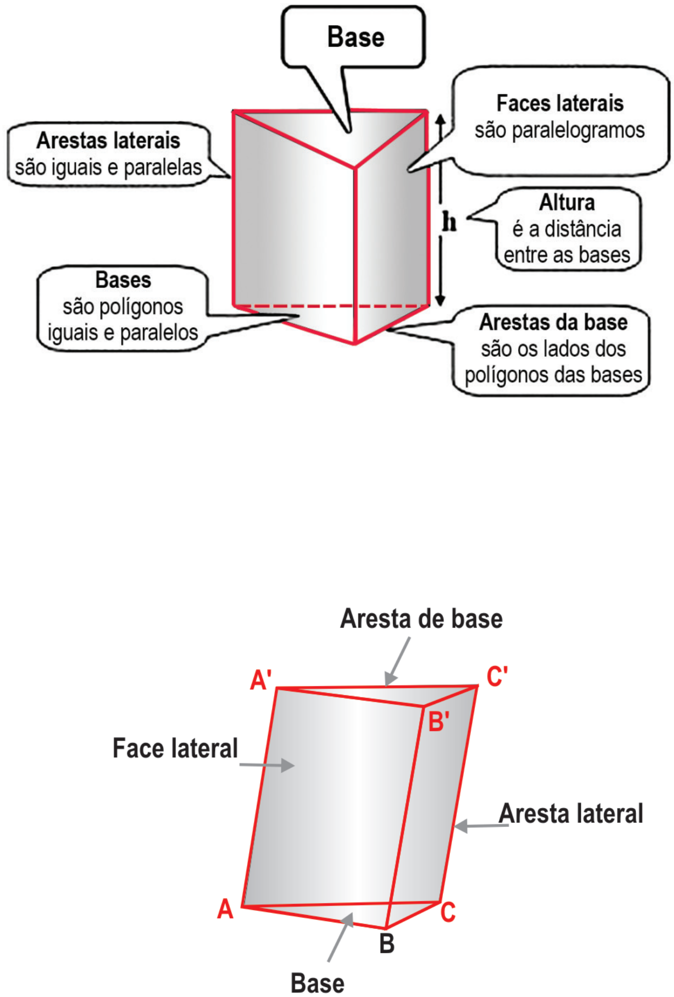
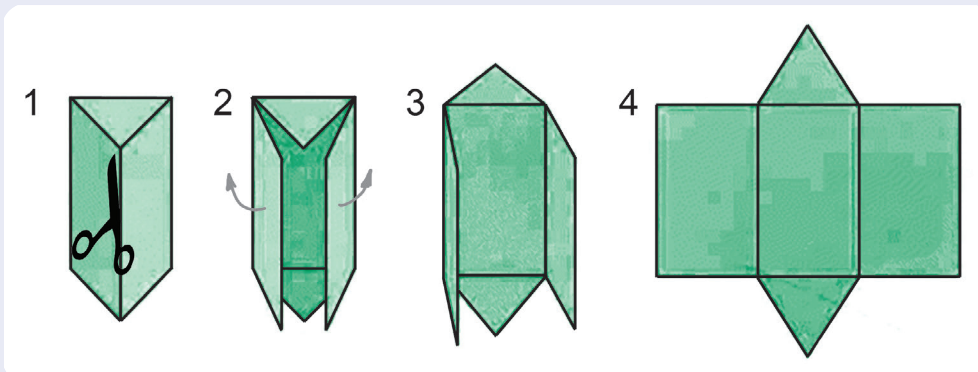


Figura 3: Prismas reto e obliquo de base triangular com principais elementos destacados.

Atividade 2

Podemos, mais informalmente, dizer que a planificação de um sólido geométrico consistiria em "passar uma tesoura" por algumas de suas arestas de maneira a produzir uma figura plana. Essa figura plana, uma vez remontada, daria origem novamente ao sólido. Vejam na figura:



Nessa planificação que acabamos de mostrar, identifique as bases, as faces laterais e as arestas do prisma planificado – que, cumpre observar, é similar ao usado no experimento de refração da luz.

Anote suas respostas em seu caderno

Na primeira figura desta aula, vimos três exemplos de objetos que podem ser considerados prismas: o edifício triangular de Berlim, de base triangular, um dado e uma caixa de presente, ambos de base quadrangular. É importante dizer aqui que não há restrições quanto ao número de lados do polígono que serve de base ao prisma: assim, poderemos ter prismas pentagonais (cujas bases são pentágonos), hexagonais (cujas bases são hexágonos), dodecagonais, e assim por diante. É importante também destacar que, entre os prismas quadrangulares, os prismas retos cujas bases são retângulos recebem o nome de paralelepípedos retângulos. Já os prismas retos que têm bases quadradas e arestas laterais com o mesmo tamanho dos lados da base (o que termina acarretando que todas as suas arestas sejam iguais) são chamados de cubos. Veja na figura.

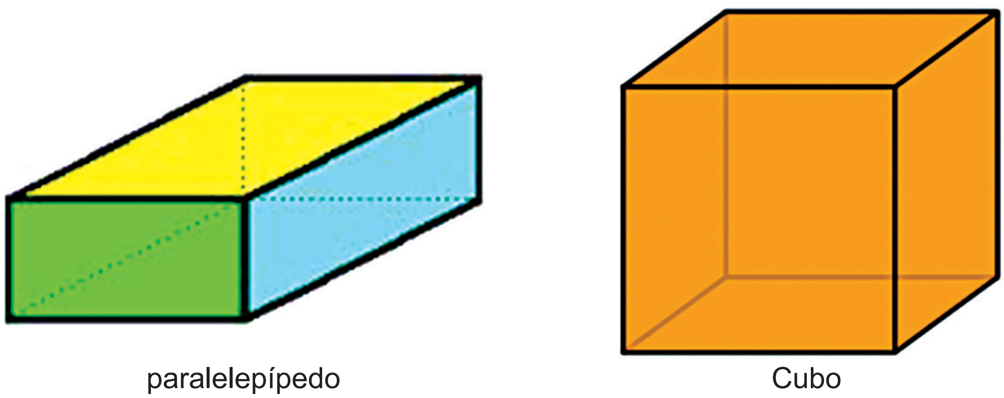
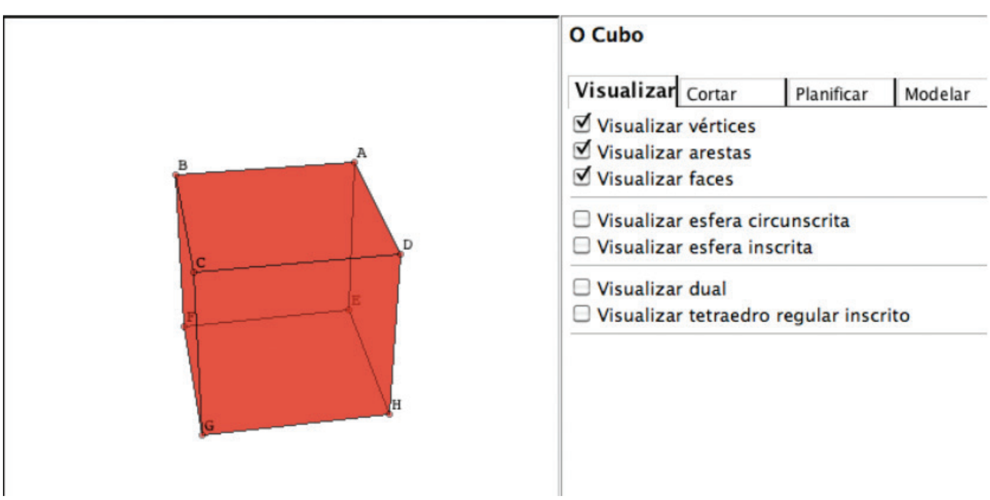


Figura 4: Paralelepípedo (à esquerda) e cubo (à direita).

Outra ideia interessante: como o quadrado é um caso especial de retângulo, podemos dizer que o cubo é um caso particular de paralelepípedo. Muito bem? Então está, vamos em frente!

Multimídia

Que tal explorar mais os cubos? Acessando esse interessante link - http://www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/cubo-br.html, você pode visualizar os elementos, cortar, planificar e modelar o cubo.



Retomando o assunto da Atividade 1 – ou seja, as diferenças e semelhanças entre prismas e cilindros – hora de falarmos mais formalmente dos cilindros. O cilindro é o sólido obtido por meio da união de todos os segmentos de retas paralelos a reta s que unem um ponto do círculo C (pertencente a α) a um ponto de β.

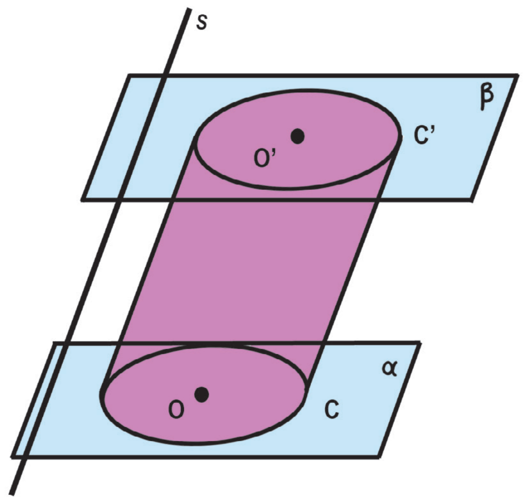


Figura 5: Cilindro.

A altura h do cilindro é dada por meio da distância entre os planos das bases.

A reta r que passa pelo centro das bases (pontos O e O´) é chamada eixo do cilindro. As geratrizes são segmentos paralelos ao eixo cujas extremidades são pontos da circunferência.

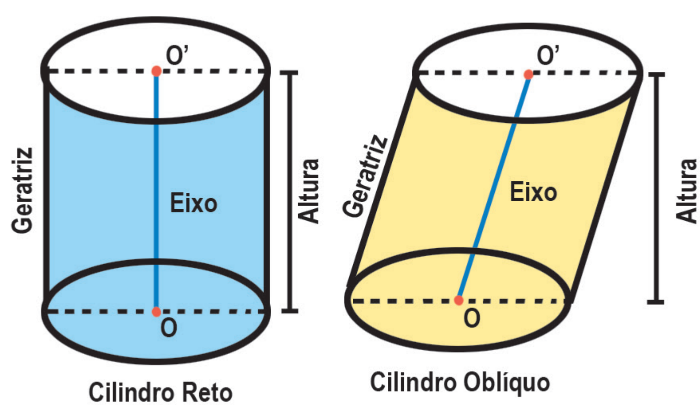


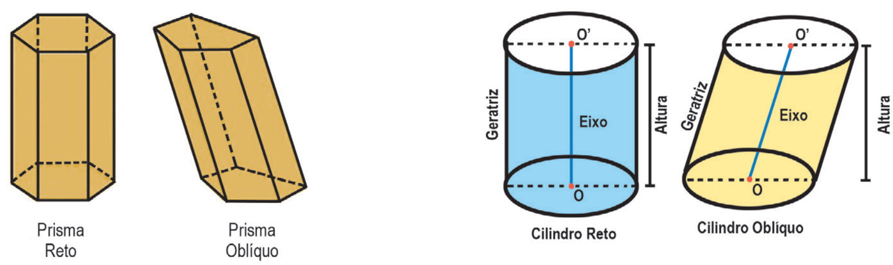
Figura 6: Cilindro cujo eixo é perpendicular ao plano da base (à esquerda) e cilindro cujo eixo não é perpendicular ao plano da base (à direita).

Como podemos observar nos exemplos, no cilindro em que o eixo é perpendicular ao plano da base, a geratriz tem o mesmo tamanho da altura. Já nos cilindros em que o eixo não faz noventa graus com o plano da base, o tamanho da geratriz é maior do que o tamanho da altura.

Saiba Mais

Outro ponto em comum entre prismas e cilindros é a classificação em retos e oblíquos. Prismas retos são aqueles cujas arestas laterais são perpendiculares ao plano da base, enquanto cilindros retos são aqueles em que as geratrizes são perpendiculares aos planos da base.

Já os prismas e cilindros cujas arestas e geratrizes são oblíquas ao plano da base são chamados de prismas e cilindros oblíquos.



No que diz respeito à superfície de prismas e cilindros, há novos pontos em comum e divergências. A parte em comum é que a área da superfície total de ambos é a soma das áreas das bases com a da superfície lateral. Como as bases são congruentes, a superfície total é duas vezes a área da base mais a área da superfície lateral. No prisma a base é um polígono, no cilindro a base é um círculo. A diferença está justamente na área lateral: enquanto no prisma a área lateral é formada pelas várias faces (veja a planificação da Atividade 1, por exemplo), no cilindro a área lateral é contínua e tem a forma de um retângulo. Uma maneira simples de ilustrar a área lateral é destacar o rótulo de uma lata de leite. A superfície ocupada pelo rótulo de papel é a área lateral. Veja na planificação a seguir.

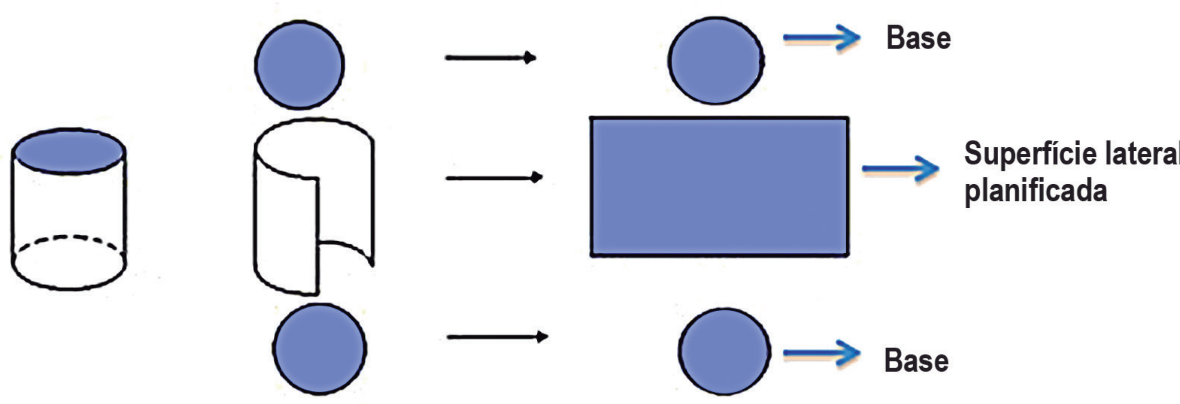


Figura 7: Planificação de um cilindro.

Muito bem, gente! Finalizamos aqui a primeira seção desta aula. Nas seções seguintes estudaremos áreas e volumes dos prismas, o interessante princípio de Cavalieri e áreas e volumes dos cilindros. Vamos lá?

Seção 2
Área e volume do paralelepípedo

Figura 8: Piscina na beira da praia. O cartaz convida os usuários a tomarem banho e tirarem a areia antes de entrar na água.

Vamos tratar os conceitos de área e volume do prisma, a partir de uma situação concreta e bastante agradável: a construção de uma piscina! Vamos supor que o modelo de piscina da Figura 8 foi escolhido por você e pela sua família para ser construído na casa nova para onde estão se mudando. Ela terá 2 metros de profundidade, 4 metros de largura e 6 metros de comprimento.

Para realizar essa empreitada, você vai precisar de duas importantes informações: a primeira é a quantidade de material necessária para a realização da obra. Como por exemplo, quantos metros quadrados de azulejo serão necessários para ladrilhar a piscina. A segunda é a quantidade de água necessária para encher a piscina.

Para descobrir a primeira informação, vamos planificar o modelo da piscina escolhido por vocês. Esse modelo é um prisma de base retangular que, como já vimos anteriormente, é chamado de paralelepípedo.

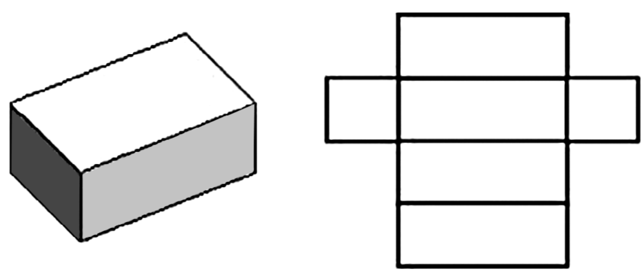


Figura 9: **À esquerda, o paralelepípedo que modela a piscina. À direita o mesmo paralelepípedo planificado.**

O azulejo será colocado justamente nas faces do paralelepípedo. Para saber quantos metros quadrados de azulejo serão necessários, basta saber a área de cada um dos retângulos. Vale aqui relembrar que a área do retângulo é dada pela multiplicação da medida da base pela medida da altura

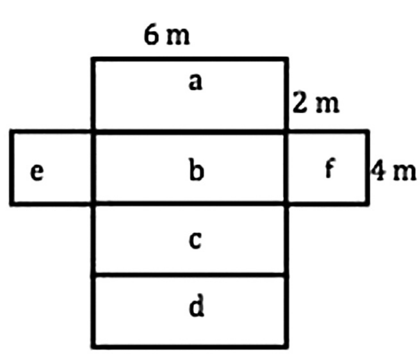


Figura 10: **Paralelepípedo planificado e já com as medidas da piscina.**

Assim, como podemos perceber da figura 10, os pares de retângulos **a** com **c** e **b** com **d** têm a mesma área.

Os retângulos **a** e **c** têm área 6 x 2 = 12 m^2, enquanto os retângulos **b** e **d** têm área 6 x 4 = 24 m^2. Viram? Muito bem! E os retângulos **e** e **f** têm a mesma área 4 x 2 = 8 m^2. Conseguiram perceber também? Ótimo!

Agora, existe aqui uma pequena diferença entre o modelo e a piscina: enquanto o paralelepípedo tem duas bases, a piscina é aberta e, por isso, sua parte de cima não será azulejada. Assim, o cálculo da metragem de azulejos será dado pela área lateral e a área de uma base apenas:

Metragem = 2 x 12 + 1 x 24 + 2 x 8

Metragem = 24 + 24 + 16 = 64 m^2

Agora, sempre que formos calcular a área do prisma propriamente dito, devemos calcular sua área lateral total e a área total das suas bases – com duas bases, e não uma, como fizemos no caso da piscina. Um pouco mais matematicamente, teremos:

Área Total Superfície Prisma = Área Lateral + 2 × Área da Base. Vejam só:

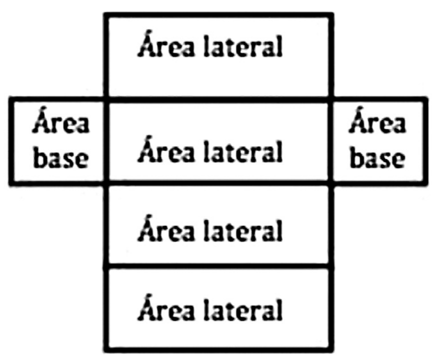


Figura 11: **Paralelepípedo planificado e com indicação das faces que compõem a área lateral e a área da base.**

Lembra qual era a segunda informação importante para a construção da piscina? Exatamente: o volume de água necessário para enchê-la. Para isso, primeiramente temos que entender o que significa volume. Volume nada mais é que o espaço ocupado por um corpo. Logo, calcular o volume da piscina é encontrar o "tamanho" do espaço que a piscina ocupa.

Uma unidade de medida muito utilizada para medir volume é o metro cúbico, que corresponde ao volume de um cubo de um metro de lado. Veja na figura a seguir.

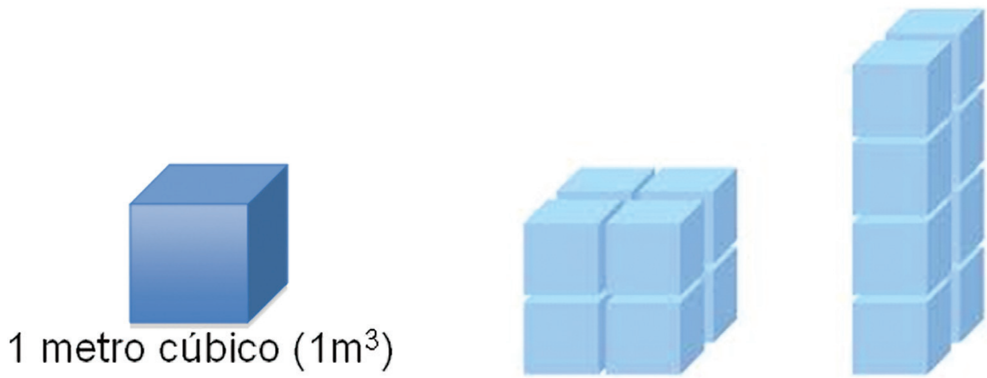


Figura 12: À esquerda, vemos a representação de um cubo com um metro de aresta. Ao centro, um cubo formado por oito cubos de um metro de aresta. À direita, um paralelepípedo formado por oito cubos de um metro de aresta.

O fato interessante é que as duas pilhas da figura, apesar de terem formas diferentes, têm 8 m^3 de volume, uma vez que são formadas oito cubinhos de $1m^3$. Assim, para calcular o volume de um cubo ou de um paralelepípedo, precisaríamos contar quantos cubos de $1m^3$ de lado cabem dentro desse cubo ou paralelepípedo – o que, dependendo da situação, pode se tornar muito cansativo ou mesmo inviável. Por isso, apresentamos a seguinte sugestão de cálculo:

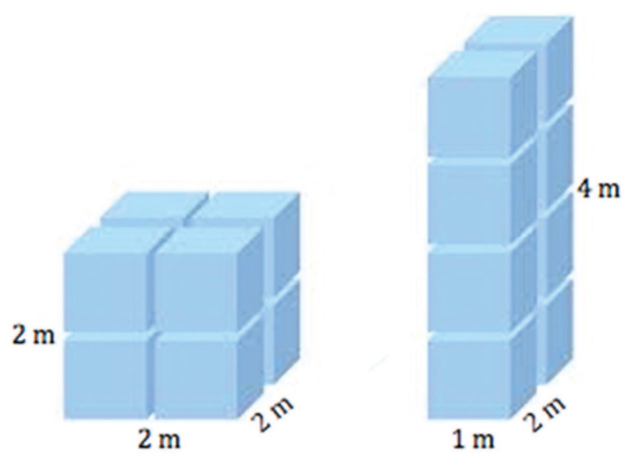


Figura 13: À direita, cubo formado por oito cubos de um metro de lado, com tamanho da aresta indicado. À direita, um paralelepípedo formado por oito cubos de um metro de lado, com tamanho das arestas indicado.

No caso do cubo, temos dois andares com "dois cubos" de comprimento e "dois cubos" de largura, certo? Mais matematicamente, teremos que o volume do cubo = 2 x 2 x 2 = $8m^3$. No caso do paralelepípedo, teremos 4 andares de "um cubo" de comprimento e "dois cubos" de largura. Mais matematicamente, teremos que o volume do paralelepípedo é de 2 x 1 x 4 = $8m^3$.

E, a partir desse exemplo, podemos generalizar e propor que o volume de um paralelepípedo é igual ao produto de sua largura pelo seu comprimento (ou seja, sua área da base) pela sua altura. Ou seja,

> Volume paralelepípedo = Largura x Comprimento x Altura ou
>
> Volume Paralelepípedo = Área da base x Altura.

Assim, e finalmente, podemos calcular o volume da piscina: V = 2 x 4 x 6 = 48m^3. Ou seja, a capacidade de água da piscina é de 48m^3.

Importante

A palavra capacidade, quando utilizada para referência ao volume de um recipiente, na maioria das vezes está ligada a ideia de litro.

O litro é representado pelo l (minúsculo).

Sabemos que 1m^3 = 1000 dm^3 e 1 dm^3 = 1l, assim, 1m^3 = 1000l.

Um reservatório (caixa d´água) de água com 1 metro de largura, 1 metro de altura e 1 metro de comprimento, tem capacidade para armazenar 1000 litros.

Ao tomarmos algum medicamento em dosagens de ml, por exemplo, ao ingerir 5 ml de xarope, estamos ingerindo 5 milésimos de 1 litro.

1ml = 1/1000 l ou 1ml = 0,001 l

Antes de finalizarmos a seção, um comentário sobre o volume do cubo. Recordando que ele é um caso particular de paralelepípedo e levando em consideração a fórmula do parágrafo anterior, para calcular o volume de um cubo, basta multiplicar o valor da medida da aresta por ela mesmo 3 vezes. Ou seja,

> Volume do cubo: medida da aresta x medida da aresta x medida da aresta.

Assim: Volume do cubo = (medida da aresta)^3

Seção 3

Princípio de Cavalieri e volume dos sólidos em geral

Nesse exemplo da piscina foi fácil entender o cálculo do volume do paralelepípedo. Vamos agora entender melhor o cálculo do volume dos sólidos em geral? Muito bem! Nosso ponto de partida são aqueles "montinhos" com moedas e com papéis, que a gente está tão acostumado a fazer. Vejam na figura seguinte

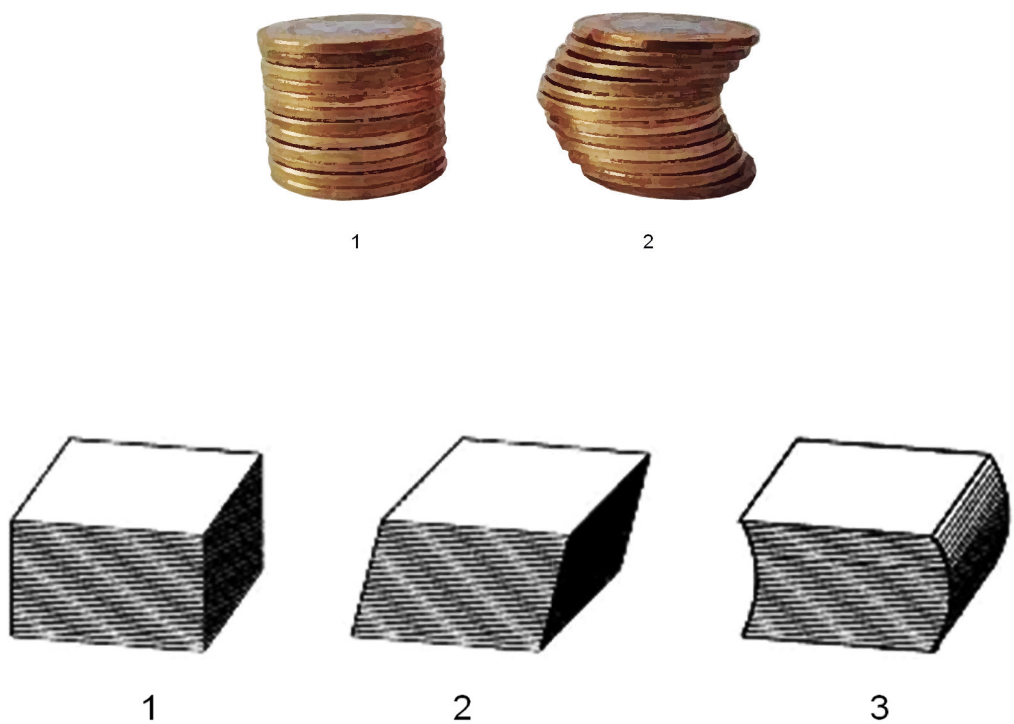


Figura 14: Montes com moedas (na parte superior da imagem) e montes com papéis (na parte inferior da imagem).

Observe que as moedas são idênticas e, por isso, a superfície de cada uma delas têm a mesma área. O fato de as moedas serem idênticas também faz com que as pilhas tenham a mesma altura, apesar de terem formatos distintos – afinal, todas as moedas têm a mesma altura. O mesmo acontece com os papéis: eles são idênticos e por consequência a superfície de cada uma das folhas tem a mesma área. As pilhas também têm a mesma altura, apesar de estarem dispostas de maneiras distintas.

Isso nos permite concluir que essa diferença no formato final das pilhas não influencia o espaço ocupado por elas. Assim, lembrando o que volume de um corpo nada mais é do que o espaço que esse corpo ocupa, podemos ver que a pilha de moedas 1 "ocupa o mesmo espaço", ou seja, tem o mesmo volume da pilha 2. Da mesma maneira, as pilhas de papel 1, 2 e 3 "ocupam o mesmo espaço", isto é, têm o mesmo volume.

A conclusão a que acabamos de chegar é o significado do princípio de Cavalieri, que diz o seguinte:

Sejam dois sólidos A e B apoiados em um plano α horizontal. Se qualquer outro plano β paralelo a α que seccionar os dois sólidos, determinar duas regiões planas de mesma área, então podemos concluir que os sólidos A e B têm o mesmo volume. Veja na figura:

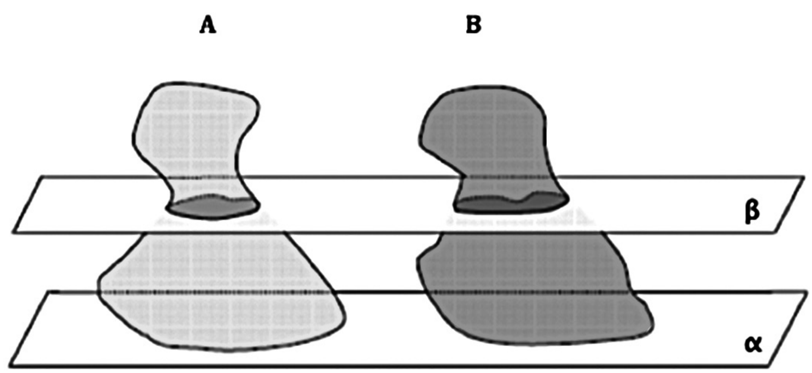


Figura 15: **Dois sólidos de formatos diferentes apoiados sobre um plano α e cortados por um plano β, paralelo a α.**

Conseguiram acompanhar? Quando passamos pelos dois sólidos um plano paralelo ao plano da base, delimitamos neste plano duas áreas, uma referente ao sólido da esquerda e outra referente ao sólido da direita. Elas estão marcadas em cinza escuro na figura 15. Viram? A ideia é: se estas áreas forem idênticas para todos os planos que forem paralelos à base e passarem pelos sólidos, então os dois sólidos têm o mesmo volume. Pense nas pilhas de moedas:

Saiba Mais

Bonaventura Francesco Cavalieri, nasceu na Itália em 1598. Foi discípulo de Galileu e publicou em 1635 a Teoria do indivisível, que hoje é conhecida como princípio de Cavalieri. Na época, sua teoria foi amplamente criticada mas esse princípio foi uma base importante para o desenvolvimento do cálculo integral.

Determinando o volume do prisma

Vamos agora considerar um paralelepípedo e um prisma pentagonal que possuem a mesma área da base e mesma altura, apoiados em um plano horizontal β. Como qualquer plano horizontal que seccione os prismas vai gerar regiões como áreas iguais, o volume do prisma será o mesmo do paralelepípedo retângulo. Por isso, poderemos calculá-lo da mesma maneira.

Volume prisma = área da base x altura

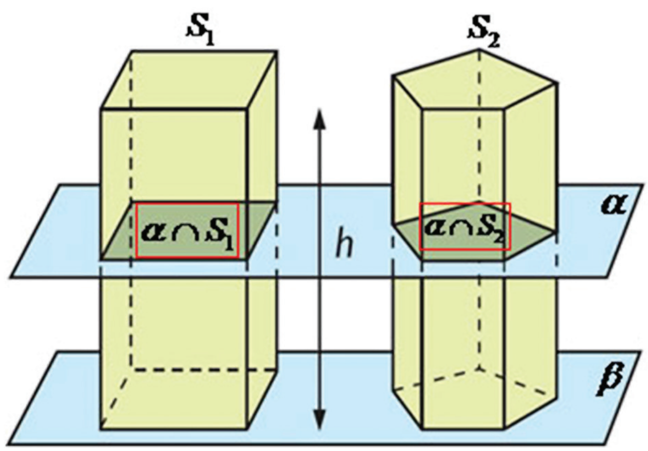
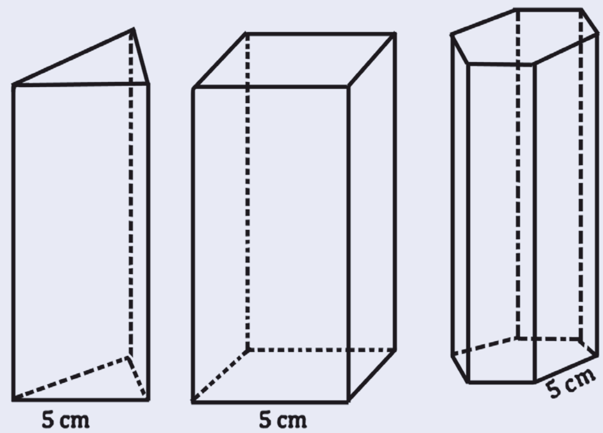


Figura 16: Paralelepípedo e prisma de base pentagonal que, ao serem seccionados pelo plano α, delimitam figuras de mesma área.

Atividade 3

Você está desenvolvendo uma nova embalagem para o produto da empresa que você trabalha. Você desenhou três opções:



Todas têm a mesma altura e as bases são polígonos regulares. Em qual das embalagens cabe mais produto, ou seja, tem maior volume?

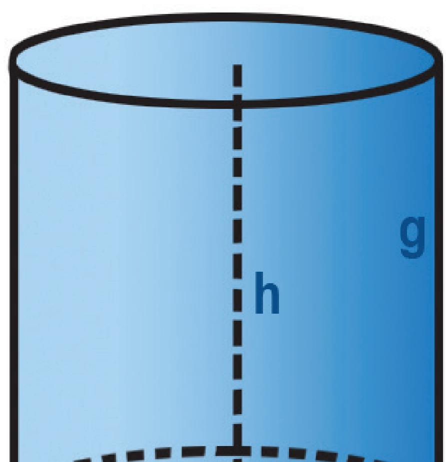
Anote suas respostas em seu caderno

Seção 4
Área e volume do cilindro

Todos adoraram a ideia de construir a piscina, mas você ficou pensando se não seria muito melhor construir uma piscina diferente, como a da figura seguinte:

Figura 17: Piscina com borda circular.

O raio da piscina é de 2,75m e sua profundidade de 2m. Como no caso anterior, você quis descobrir a quantidade de azulejo para revestir a piscina e a quantidade de água necessária para enchê-la (o volume). Primeiramente você desenhou um modelo para a piscina - um cilindro, certo?



raio (r) = 2,75 m

altura (h) = geratriz (g) = 2 m

Figura 18: Cilindro utilizado para modelar a piscina.

Na verdade, você concluiu que ambas eram bem similares, a única diferença é que nesse caso as bases da piscina são circulares e não poligonais. Isso fez com que a piscina tivesse o formato de um cilindro, enquanto no modelo anterior, a piscina era um prisma de base retangular.

Para encontrar a metragem necessária de azulejo, será necessário encontrar a área lateral e a área de uma das bases do cilindro.

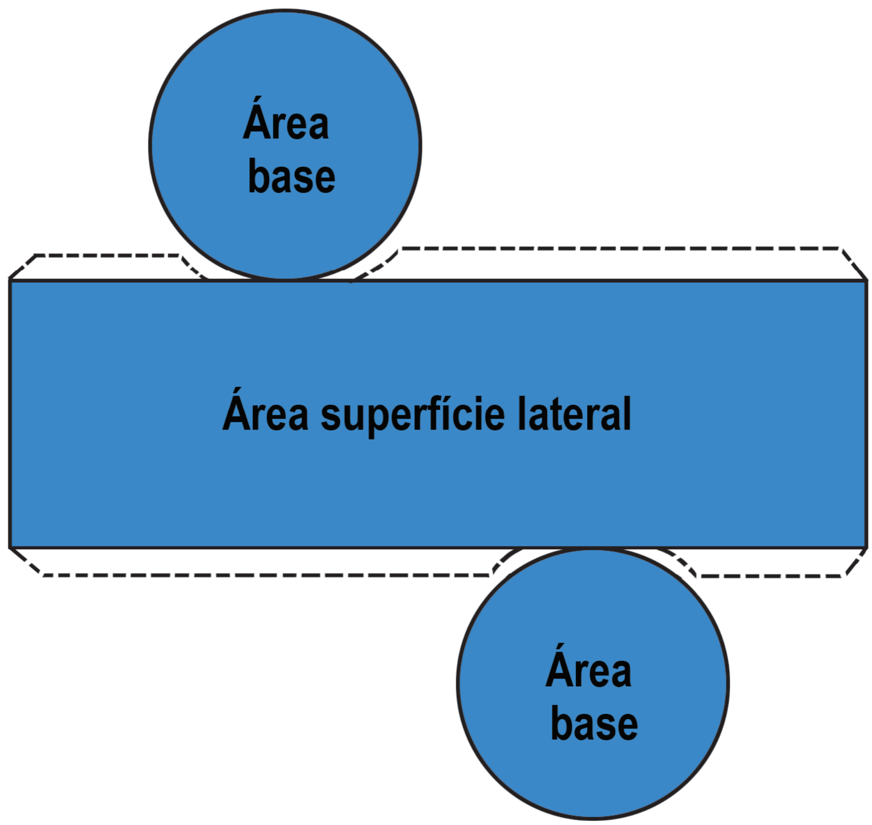


Figura 19: Cilindro utilizado para modelar a piscina planificado e com indicações da área da base e da área lateral.

Como a base é um círculo, o calculo de sua área, como já sabemos, é dado por $A = \pi r^2$. Já a superfície lateral é um retângulo e a área é dada pela multiplicação da medida da base desse retângulo pela medida de sua altura. Se analisarmos a planificação do cilindro, vamos perceber que a base do retângulo é o comprimento da circunferência. Você conseguiu ver isso? Olhe para a base do retângulo na figura 19 e se imagine montando o cilindro. (Imagine tirar o rótulo de uma lata de leite) Procure perceber que a base do retângulo vai acompanhar toda a circunferência. Viu essa? Muito bem! Lembre-se ainda que o comprimento de uma circunferência é dado pela fórmula $C = 2\pi r$, em que r é a medida do raio da circunferência. Outra coisa importante a perceber é que a altura h do retângulo será justamente a altura do cilindro. Imaginar a montagem do cilindro a partir da planificação, novamente, ajuda muito a visualizar esta relação.

Então, a área da superfície lateral do cilindro será dada por: $A = 2\pi rh$, onde r é o raio da circunferência da base.

Importante

Resgatando nossos conhecimentos de Geometria Plana, lembramos que o comprimento C de uma circunferência de raio r é dado por $C = 2\pi r$.

Como a parte de cima também não será azulejada, a área da piscina que determina a quantidade de azulejo é

$A = \pi(2{,}75)^2 + 2 . \pi . 2{,}75 . 2$

$A = 7{,}5625\ \pi + 11\pi$

Considerando $\pi = 3{,}14$, teremos:

$A = 7{,}5625 \times 3{,}14 + 11 \times 3{,}14$

A metragem de azulejo necessária será de aproximadamente $A \cong 58{,}29\ m^2$. Vale fazer o mesmo lembrete que fizemos para a piscina em forma de prisma: enquanto o sólido geométrico tem duas bases, a piscina tem uma base só, visto que sua parte superior será aberta. Ou seja, se quisermos calcular a área do cilindro, deveremos contar as duas bases de área πr^2. A área total do cilindro será dada então por:

Área Total = 2 x Área Base + Área Superfície Lateral

$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

Para encontrar a quantidade necessária de água, vamos calcular o volume do cilindro que é dado da mesma maneira que o volume do prisma, ok?

Volume Cilindro = Área Base x Altura

$V = \pi\, r^2 h$

Desta maneira, o volume dessa nova piscina será de:

$V = \pi . (2{,}75)^2 . 2$

A quantidade de água necessária para encher a piscina será de aproximadamente:

$V \cong 47{,}49\ m^3$ o que equivale a $47.490\ dm^3$ = 47.490 litros

Atividade 4

Levando em consideração a quantidade de azulejo necessária para revestir a piscina e o volume de cada um dos modelos, qual dos modelos você acha mais vantajoso escolher: a piscina em forma de prisma com base retangular ou de cilindro?

Anote suas respostas em seu caderno

Resumo

- Prismas são poliedros convexos que têm duas faces paralelas e congruentes (chamadas bases) e as demais faces em forma de paralelogramos (chamadas faces laterais).
- Quando o prisma for reto, a altura é dada pela distância entre as bases.
- As arestas são os lados dos polígonos das bases e das faces laterais.
- Área Superfície Prisma = Área Lateral + 2 × Área da Base
- Volume prisma = área da base × altura
- Princípio de Cavalieri: sejam dois sólidos A e B apoiados em um plano α horizontal. Se qualquer outro plano β paralelo a α que seccionar os dois sólidos, determinar duas regiões planas de mesma área, então podemos concluir que os sólidos A e B têm o mesmo volume.
- Todo objeto tridimensional composto pela sobreposição de infinitos círculos de mesmo diâmetro e com os centros pertencentes a uma mesma reta é denominado cilindro.
- A altura do cilindro é dada por meio da distância entre os planos das bases. A reta que passa pelo centro das bases é chamada eixo do cilindro.
- As geratrizes são segmentos paralelos ao eixo cujas extremidades são pontos da circunferência.
- .A superfície do cilindro é composta pelas bases e pela superfície lateral
- Área Total = 2 X Área Base + Área Lateral

  $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

- Volume Cilindro = Área Base × Altura

  $V = \pi r^2 h$

Conclusão

Partimos dos experimentos da física sobre viagem no tempo e da decomposição da luz para discutir os conceitos, elementos e classificar prismas e cilindros. Em seguida, mergulhamos em uma situação bem prática da construção da piscina para o lazer da sua família para discutir área e volume do prisma e do cilindro. Além disso, vimos algumas semelhanças entre prismas e cilindros, que diferem um do outro pela questão da base. No prisma, as bases são regiões poligonais, enquanto no cilindro as bases são circulares.

É muito importante ressaltar que esses sólidos são amplamente utilizados tanto para questões para modelagem da ciência como para questões do dia a dia.

Referências

Livros

- ALMEIDA, Nilze de; DEGENSZAJN, David; DOLCE, Osvaldo; IEZZI, Gelson; PÉRIGO, Roberto. *Matemática Ciência e Aplicações 1*. Segunda Edição. São Paulo: Atual Editora, 2004.157p.
- BOYER, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.
- CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; LIMA, Elon Lages; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. *Temas e Problemas*. Terceira Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. 193 p.
- ________________________. *A Matemática do Ensino Médio Volume 1*. Sétima Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. 237 p.
- DANTE, Luiz Roberto. *Matemática Contexo e Aplicações Volume 1*. Primeira Edição. São Paulo: Editora Ática, 2011. 240p.
- FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. Novo Aurélio Século XXI: o dicionário da língua portuguesa. Quinta Edição. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 1999. 2128 p.

Imagens

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=933240

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=194975

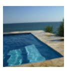
- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1023311

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1256359

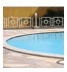
- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1357259

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=887805

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=967833



- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1097480



- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=424289

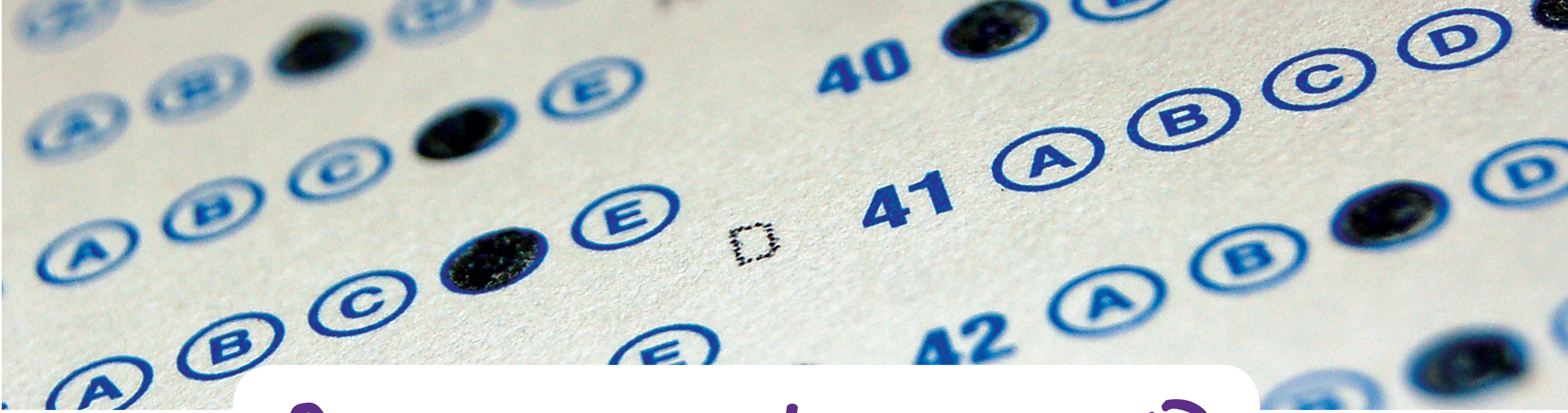
- http://www.sxc.hu/photo/475767

- http://www.sxc.hu/photo/517386

Veja ainda

Assista ao vídeo em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1042 e descubra com Caio, assistindo ao programa Animais Curiosos apresentado por James Calafrio, um pouco mais sobre as abelhas e seus alvéolos hexagonais. Não esqueça-se de usar seus conhecimentos matemáticos.

Assista ao programa sobre o Princípio de Cavalieri disponível no link http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1040 e ajude Carol que recebe misteriosas instruções, juntamente com a estudante de arquitetura Rita, a resolver três enigmas.



O que perguntam por aí?

Questão 1 (UFMG – 2008)

Considere um reservatório, em forma de paralelepípedo retângulo, cujas medidas são 8 m de comprimento, 5 m de largura e 120 cm de profundidade. Bombeia-se água para dentro desse reservatório, inicialmente vazio, a uma taxa de 2 litros por segundo. Com base nessas informações, é CORRETO afirmar que, para se encher completamente esse reservatório, serão necessários.

A) 40 min.

B) 240 min.

C) 400 min.

D) 480 min.

Resposta: Letra C.

Comentários:

Primeiramente vamos transformar as medidas do reservatório em decímetro. Pois como sabemos 1 litro corresponde a 1 decímetro cúbico.

Então:

8 m = 80 dm

5 m = 50 dm

120 cm = 12 dm

O volume do paralelepípedo pode ser calculado da seguinte maneira:

V = altura x largura x comprimento

Assim, temos

$V = 80 \times 50 \times 12$

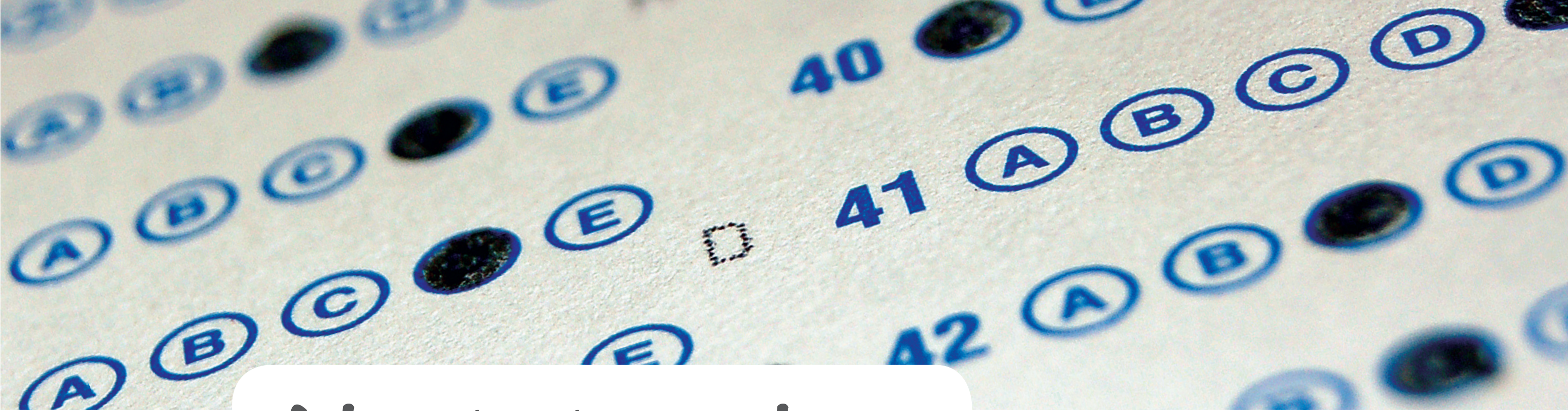
$V = 48\,000\ dm^3$

$V = 48\,000\ l$

Como bombeia-se água a uma taxa de 2 l por segundo, temos que:

$48\,000 \div 2 = 24\,000\ s$

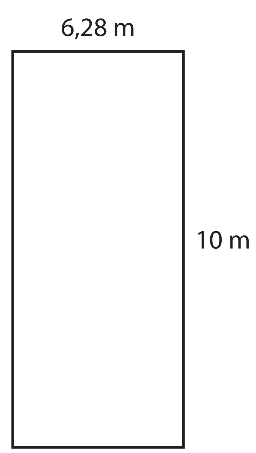
$24\,000 \div 60 = 400\ min$



Atividade extra

Exercício 1

A figura ilustra a planificação da superfície lateral de um cilindro reto de 10 metros de altura. Considere $\pi = 3,14$. Qual o valor da área total desse cilindro, em metros quadrados?



(a) 62,8 (b) 69,08 (c) 75,36 (d) 76,32

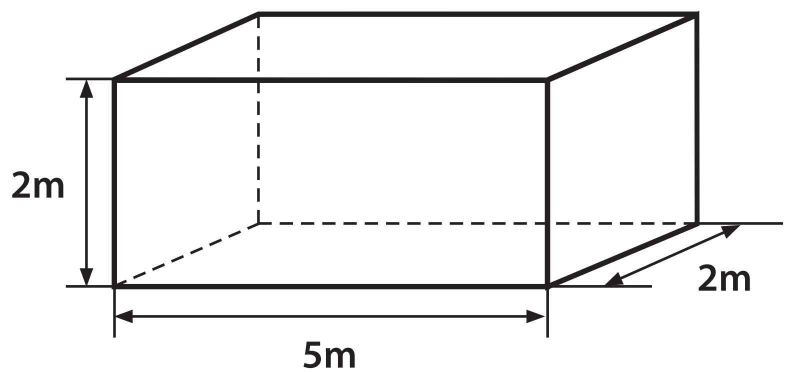
Exercício 2

Uma caneta esferográfica possui um tubo de 0,2cm de diâmetro e 12cm de comprimento. A tinta para escrever fica acondicionada dentro desse tubo. Considere $\pi = 3,14$. Que volume de tinta, em cm^3, poderá ser acondicionado no tubo?

(a) 0,3768 (b) 1,5072 (c) 3,7680 (d) 7,5360

Exercício 3

Um caminhão pipa carrega 9,42 mil litros de água quando está com sua capacidade máxima. Desejamos encher um tanque em formato de paralelepípedo, como ilustrado na figura.

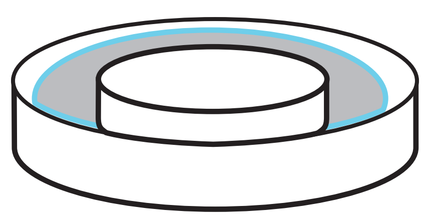


Lembre que $1m^3 = 1000$ litros. Quantos caminhões, com a capacidade máxima de água, serão necessários para encher o tanque?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

Exercício 4

Um profissional de Arquitetura e Urbanismo projetou uma fonte para ser colocada na praça de sua cidade. O tanque da fonte é tal como ilustra a figura.



O tanque tem o formato de dois cilindros de mesmo centro, com altura igual a 0,8m e de raios iguais a 2m e 3m, respectivamente. Qual a capacidade de água do tanque da fonte em m^3?

(a) 2,5120 (b) 10,048 (c) 12,560 (d) 22,608

Exercício 5

Para fazer uma caixa sem tampa com apenas um pedaço retangular de papelão, de medidas 12cm de largura por 25cm de comprimento, foram retirados de cada um dos cantos do retângulo um quadrado de mesma área. Em seguida, dobra-se as quatro bordas para cima formando a caixa desejada. A caixa assim produzida utiliza 236cm^2 de papelão. Quanto deve ser, em cm, o lado do quadrado a ser retirado de cada canto do papelão?

(a) 2 (b) 4 (c) 6 (d) 8

Exercício 6

Um cubo de lado 10 teve a medida da aresta aumentada em uma unidade. Qual o percentual de aumento no volume?

(a) 20,1% (b) 26,1% (c) 33,1% (d)37,1%

Exercício 7 (UFGO – Adaptada)

Um pedaço de cano com 30cm de comprimento e 10cm de diâmetro interno, encontra-se na posição vertical e tem a parte inferior vedada. Consideremos que 1dm^3 = 1litro. O que acontece com a água ao colocarmos exatamente 3 litros dessa substância no cano?

(a) transborda

(b) não chega ao meio do cano

(c) enche o cano até a borda

(d) atinge exatamente o meio do cano

Exercício 8

Considere um prisma reto de base quadrada, cuja altura mede 3m e que tem área total de 54m^2. Quanto mede (em metros) o lado da base do prisma?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

Exercício 9

Dois blocos de alumínio, em forma de cubo, com arestas medindo 20cm e 12cm, são derretidos e em seguida o alumínio líquido é moldado como um paralelepípedo reto de base quadrada de lado 16cm e altura desconhecida. Qual é o valor da altura do paralelepípedo, em centímetros?

(a) 34 (b) 36 (c) 37 (d) 38

Exercício 10

Um fabricante de embalagens de papelão quer construir uma caixa em forma de prisma triangular regular. A altura da caixa deve ser de 12cm e o lado do triângulo da base deve medir 10cm. Na construção de cada caixa, o fabricante perde, em média 10% do material utilizado. Considere $\sqrt{3} = 1{,}73$. Quantos cm^2 de papelão são gastos na fabricação de cada caixa?

(a) 446,51 (b) 491,15 (c) 519,16 (d) 570,92

Exercício 11

Uma olaria (fábrica de tijolos) recebeu uma encomenda para produzir 5000 tijolos compactos, com dimensões de $18cm \times 9cm \times 6cm$. Qual o volume dessa encomenda?

Exercício 12

Um tanque tem a forma de paralelepípedo de lados 0,8m e 1,2m e está parcialmente cheio de água. Um objeto é colocado no tanque e fica completamente imerso, fazendo o nível da água subir em 0,09m. Qual o volume desse objeto?

Exercício 13

Um galpão tem a forma de um paralelepípedo com 30m de comprimento, 72m de largura e 6m de altura. Deseja-se armazenar neste galpão caixas cúbicas com 3m de lado. Quantas caixas é possível armazenar nesse galpão?

Exercício 14

Uma caixa d´água tem forma cúbica com 1 metro de aresta. Retira-se dessa caixa d’água 1 litro de água. Quantos centímetros descerá o nível da água?

Exercício15

Uma caixa de papelão será fabricada por uma indústria com as seguintes medidas: 40cm de comprimento, 20cm de largura e 15cm de altura. Essa caixa irá armazenar doces na forma de um prisma com as dimensões medindo 8cm de comprimento, 4cm de largura e 3cm de altura. Qual o número de doces necessários para o preenchimento total da caixa fabricada?

Gabarito

Exercício 1

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 2

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 3

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 4

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 5

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 6

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 7

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 8

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 9

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 10

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 11

O volume da encomenda será $18 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 5000 = 4860000\ cm^3$ ou $4{,}86m^3$.

Exercício 12

O volume do objeto é igual ao volume de um paralelepípedo de lados 0,8m e 1,2m e altura 0,09m, pois ao ser colocado no tanque o objeto eleva o nível da água em 0,09m. Assim, denotando por V_0 o volume do objeto temos $V_0 = 0{,}8 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}09 = 0{,}0864$.

Portanto, $V0 = 0{,}0864m^3$.

Exercício 13

Como a caixa tem 3m de lado pode-se enfileirar $30/3 = 10$ caixas no lado de comprimento 30m, $72/3 = 24$ caixas no lado de comprimento 72m e empilhar $6/3 = 2$ caixas uma sobre a outras. Portanto, podem ser armazemadas

$$10 \cdot 24 \cdot 2 = 480 \text{ caixas.}$$

Exercício 14

Como $1\text{m}^3 = 1000$ litros, então 1 litro $= 0{,}001\text{m}^3$. Se h é a medida em que o nível da água desceu temos

$$1 \times 1 \times h = 0{,}001$$

Então $h = 0{,}001\text{m}$, que equivale a 0,1cm ou 1mm.

Exercício 15

Volume da caixa $= 40 \times 20 \times 15 = 12000\text{cm}^3$. Volume do doce $= 8 \times 4 \times 3 = 96\text{cm}^3$.

$$\frac{\text{Volume da caixa}}{\text{Volume do doce}} = \frac{12000}{96} = 125$$

Cabem 125 doces dentro da caixa.