Introdução à Geometria Espacial

Fascículo 7

Unidade 22

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Introdução à Geometria Espacial

Para início de conversa...

Em abril de 2012, o jornalista Ethevaldo Siqueira, do jornal O Estado de São Paulo, publicou em seu blog uma interessante reportagem sobre uma televisão que permite ao espectador ver imagens em 3D sem o auxílio de óculos especiais. A tela do televisor tem 200 polegadas (aproximadamente 5 metros) de diagonal e permite visualizar imagens 3D em alta definição e num ângulo de visão muito maior do que os sistemas anteriores. O monitor é tão grande que pode reproduzir a imagem de pessoas, de um carro inteiro e mesmo de um tubarão em tamanho natural.

Multimídia

Para ler a reportagem na íntegra, acesse o link http://blogs.estadao.com.br/ethevaldo-siqueira/2012/04/21/enfim-a-tv-3d-sem-oculos-especiais/.

Você já parou para pensar no que significa dizer que essa nova tecnologia de televisores, computadores e etc é 3D?

Basta pensar um pouco para entender: nós podemos nos movimentar de um lado para o outro, para frente e para trás e para cima e para baixo. Dê uma olhada na figura seguinte e veja se consegue perceber essas possibilidades de movimentação.

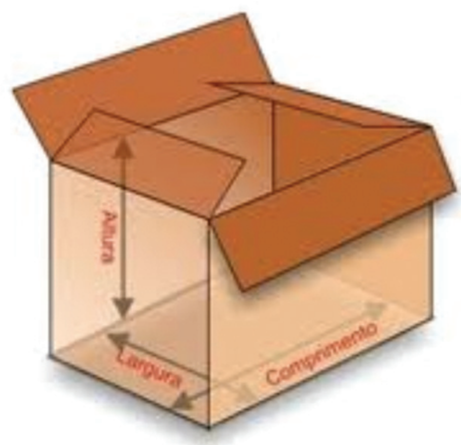


Figura 1: **Caixa com suas 3 dimensões destacadas: altura, largura e comprimento.**

Essa caixa, assim como a grande maioria dos objetos que conhecemos, tem 3 dimensões: altura, largura e comprimento. Assim, se nos movermos para cima e para baixo, estaremos acompanhando a altura da caixa. Nos movendo para frente e para trás, estaremos acompanhando seu comprimento. E, finalmente, nos movendo para um lado e para o outro, estaremos acompanhando sua largura. Conseguiu perceber as 3 possibilidades de movimentação agora?

A partir dessa explicação, fica mais fácil entender o significado da sigla 3D: ela faz referência ao fato de a grande maioria dos objetos que conhecemos terem três dimensões, por exemplo, comprimento, altura e largura. Um objeto cuja forma tem três dimensões é chamado de tridimensional.

O conceito de dimensão, além de constantemente utilizado por nós no dia a dia, é muito importante na Matemática. Na tecnologia disponível até então, nossos televisores e computadores reproduziam imagens tridimensionais em telas planas (com apenas duas dimensões).

O que se tenta fazer com essa nova tecnologia é projetar espacialmente imagens tridimensionais.

Agora repare à sua volta. Será que você consegue identificar objetos ou figuras com três dimensões (com altura, largura e comprimento)? O charmoso carro da imagem seguinte é um bom exemplo.

Figura 2: Um carro é um exemplo de objeto tridimensional.

E objetos bidimensionais, que têm apenas altura e largura?

O CD da próxima imagem é um bom exemplo!

Figura 3: CDs e DVDs são exemplos de objetos bidimensionais.

E objetos com apenas uma dimensão – somente largura, por exemplo – será que você consegue imaginá-los?

As linhas da estrada a seguir são bons exemplos!

Figura 4: As faixas de uma estrada são exemplos de objetos unidimensionais.

E objetos sem dimensão – será que existem?

Repare essas estrelas no céu, por exemplo!!

Figura 5: As estrelas do céu são exemplos de objetos sem dimensão.

E objetos com quatro dimensões, são mais difíceis de imaginar?

Certamente! Isto acontece porque vivemos em um mundo (aparentemente) com apenas três dimensões espaciais. Por isso, seria difícil enxergar dimensões superiores.

Então, que tal nos aprofundarmos mais nesses estudos? Vamos entender os conceitos e as formas que habitam nosso mundo a partir da habilidosa leitura feita pela matemática.

Uma dica bacana é o livro “Planolândia: um romance de muitas dimensões” (Flatland: A Romance of Many Dimensions) escrito por Edwin A. Abbott. *Nesse livro,* Abbott usou o mundo bidimensional fictício de Flatland para fazer reflexões sobre a sociedade e uma importante análise sobre as dimensões. A versão original, em inglês, está disponível para download, na íntegra e gratuitamente, no site Domínio Público, do Ministério da Educação. O link direto para o arquivo é http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/ph000007.pdf. A tradução para o português foi feita pela Editora Conrad, que também é responsável pela sua distribuição.

Saiba Mais

Objetivos de aprendizagem

- Entender o conceito de dimensão
- Entender os conceitos básicos de ponto, reta e plano
- Identificar posições relativas entre pontos, retas e planos
- Identificar poliedros e não poliedros, identificando os diferentes tipos.
- Identificar os elementos de um poliedro
- Reconhecer os poliedros de Platão.
- Aplicar a relação de Euler

Seção 1
Geometria espacial: conceitos básicos

A palavra Geometria vem do grego e significa medir a terra. Seu surgimento está ligado ao cotidiano das civilizações egípcia e babilônica, por volta do século XX a.C. Estava relacionada, por exemplo, ao plantio, construções e movimento dos Astros e era muito utilizada para o cálculo de áreas e volumes.

Já a palavra espacial não se refere ao espaço sideral ou a algo sofisticado, complexo e de difícil compreensão. Pelo contrário, ela se refere ao mundo em que vivemos, com suas três dimensões: altura, largura e comprimento. Também serve para marcar a diferença entre a geometria no mundo de três dimensões – ou, no "espaço" – e a geometria no mundo de duas dimensões – ou no "plano". Assim, geometria espacial e plana poderiam muito bem se chamar, respectivamente, geometria tridimensional (ou em 3 dimensões) e geometria bidimensional (ou em 2 dimensões).

Esclarecidos os termos principais, podemos utilizar os exemplos que vimos anteriormente para conhecer alguns objetos matemáticos importantes e que farão parte do nosso estudo ao longo de toda essa unidade. Vamos lá?

Se você imaginar o objeto representado a seguir, que possui apenas duas dimensões, se estendendo infinitamente em todas as direções, você visualizará o conceito matemático primitivo de plano.

Figura 6: O objeto representado, se estendido infinitamente para cima, para baixo e para os lados esquerdo e direito, permite visualizar o conceito de plano.

Agora, se você imaginar o objeto unidimensional como o representado aqui também estendendo-se infinitamente para ambos os lados você terá a noção do conceito matemático primitivo de reta.

Figura 7: O objeto representado, se estendido infinitamente para os dois lados, permite visualizar o conceito de reta.

E o objeto sem dimensão? Imaginou desta maneira?

Figura 8: O objeto representado, se abstraído de suas já pequenas altura e largura, permite visualizar o conceito de ponto.

Esse objeto primitivo matemático é conhecido como ponto.

Saiba Mais

Estes conceitos foram propostos pela primeira vez pelo matemático grego Euclides, que viveu na Alexandria na primeira metade do séc. III a.C. (a data e o local de seu nascimento não são precisos).

Euclides possivelmente adquiriu seus primeiros conhecimentos matemáticos dos discípulos de outro importante filósofo grego: Platão. A mais importante obra de Euclides foi "Os Elementos". São treze capítulos fundamentais para matemática sobre Aritmética, Geometria e Álgebra.

A obra "Os Elementos" já está em domínio público e pode ser baixada gratuitamente no portal Domínio Público, do Ministério da Educação. O link direto para o arquivo é http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/be00001a.pdf.

Nos Elementos, Euclides afirma que "ponto é o que não tem partes ou grandeza alguma", "linha é o que tem comprimento sem largura" e "superfície é o que tem comprimento e largura". Parecido com o que acabamos de ver? E olha que o livro já tem mais de dois mil anos!

É claro que pontos, retas e planos são conceitos e objetos matemáticos e, por isso, não são encontrados em situações cotidianas. No entanto, podemos fazer aproximações. Dê uma olhada na figura seguinte:

Figura 9: Imagem de uma praça e do prédio da prefeitura de uma cidade polonesa.

De acordo com os conceitos que acabamos de apresentar, um plano se estende infinitamente em duas direções. No entanto, o piso da praça, apesar de não se estender infinitamente, pode perfeitamente ser considerado representação de um plano. As fachadas das casas à direita da foto vão pelo mesmo caminho: não se estendem infinitamente para cima e para os lados, mas também podem representar a ideia que temos de um plano. O mesmo vale para a fachada das casas à esquerda da foto.

Estão vendo as linhas, feitas com pedras pequenas, que se cruzam no chão da praça? E as linhas que separam um prédio do outro, na fachada das casas à direita? Pois então, podemos usar a mesma argumentação do parágrafo anterior: não se estendem indefinidamente, mas podemos considera-las como representações de retas. Mesmo os postes, que têm um tamanho menor do que as linhas do chão e as separações das fachadas, também podem representar a ideia que temos de uma reta.

Finalmente, mantendo a linha de argumentação, poderíamos considerar as lâmpadas penduradas nos postes e as pedras menores do calçamento – aquelas, que estão nas retas que se cruzam – como representações de pontos. Se representássemos esses planos, retas e pontos na imagem anterior, teríamos a seguinte figura:

Figura 10: Imagem da praça, agora com planos, retas e pontos marcados.

Acompanhe lá: o plano do piso da rua, chamamos de plano α. Já o plano das fachadas das casas à direita, chamamos de plano β, e o plano das fachadas à esquerda de plano γ. A reta r coincide com o poste, ao passo que as retas s, t e u – das linhas no piso do calçamento, lembra? – estão no plano do piso da rua, o plano α. No plano β, das fachadas das casas à direita, estão representadas as retas v, w e z, que separam uma casa da outra. O ponto A coincide com a lâmpada do poste, enquanto os pontos B, C e D coincidem com aquelas pequenas pedras do calçamento.

Conseguiu ver tudo? Se conseguiu, ótimo, parabéns! Se não conseguiu, tente novamente: olhe novamente as figuras e procure identificar os elementos que descrevemos. A visualização deles é muito importante e o tempo a mais que você investir nesta etapa certamente irá facilitar sua compreensão dos próximos tópicos.

Multimídia

A visualização é uma das competências mais importantes a serem desenvolvidas pelos que querem se sair bem no estudo de geometria espacial. No link http://www.uff.br/cdme/triplets/triplets-html/triplets-br.html você terá acesso a um jogo para exercitar a visualização em três dimensões em um trabalho interdisciplinar juntamente com Língua Portuguesa e Inglesa.

Antes de prosseguir, é preciso registrar a nomenclatura de pontos, retas e planos: planos são nomeados com letras gregas (α, β, γ, etc), as retas são nomeadas com letras minúsculas (r, s, t, etc) e os pontos são nomeados com letras maiúsculas (A, B, C, etc).

Atividade 1

Observe o prato representado na figura. Será que você consegue identificar elementos que possam ser um exemplo de ponto, reta e plano?

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 2

Continuando com pontos, retas e planos: posições relativas

Muito bem! A partir da nossa conversa inicial sobre dimensões e sobre os conceitos que trabalhamos com a imagem da praça e a Atividade 1, podemos pensar que moramos num mundo de três dimensões, povoado por objetos que podem ter três, duas, uma ou nenhuma dimensão – e que estes objetos ora se encontram, ora não.

Para a conversa não ficar muito abstrata, dê uma olhada naquela imagem da praça já com as marcações de pontos retas e planos, que reproduzimos aqui, para facilitar seu estudo.

Figura 11: Imagem da praça, agora com planos, retas e pontos marcados.

Pronto? Muito bem. Como exemplo de objeto de 3 dimensões temos as próprias pessoas que andam na praça. O chão e as fachadas à esquerda e à direita são exemplos de planos; as linhas do piso e as que separam as frentes das casas da fachada à direita são exemplos de retas; e a lâmpada do poste e as pedras pequenas do calçamento são exemplos de pontos.

Perceba agora que o poste (para nós, uma reta), se encontra com o piso (um plano) apesar de não se encontrar com as fachadas à esquerda e à direita (outros dois planos). A lâmpada (um ponto), não se encontra com o poste (uma reta) ao passo que as pedras pequenas do calçamento se encontram com as linhas do calçamento (retas) e com o piso (um plano). As mesmas pedras pequenas (pontos), no entanto, não se encontram com os planos das fachadas à esquerda e à direita – e por aí vai.

É justamente para poder lidar com essas questões de forma mais precisa que vamos trabalhar os conceitos de posição relativa entre ponto, reta e plano.

Ponto e reta, ponto e plano

No que diz respeito à posição relativa entre um ponto e uma reta, o assunto é bem simples: ou o ponto está sobre a reta ou o ponto não está sobre a reta. Mesma coisa vale para os planos: ou o ponto está sobre o plano ou o ponto não está sobre o plano. Dê uma olhada nas imagens seguintes.

Figura 12: Os fios de eletricidade e os pássaros neles pousados podem ser representados por retas e pontos respectivamente.

Nesta imagem, podemos considerar os fios como retas e os pássaros como pontos. Os pássaros que estiverem pousados num fio serão considerados como pontos daquela reta. Já o pássaro que está voando (você consegue encontra-lo na imagem?) será um ponto que não está sobre nenhuma das retas representadas.

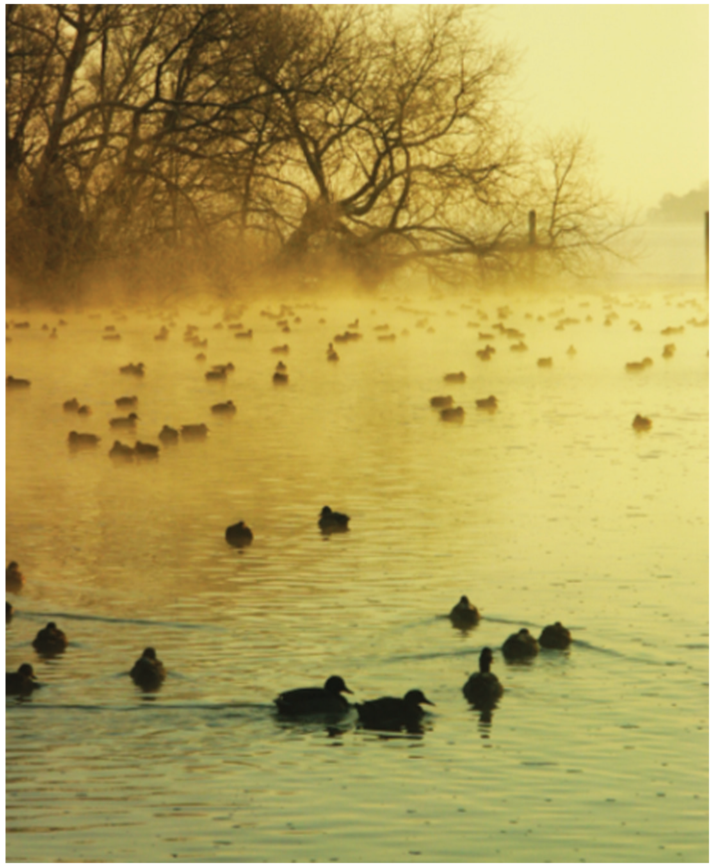


Figura 13: A superfície da lagoa e os patos desta imagem podem ser representados, respectivamente, por um plano e por pontos.

Já nesta imagem, podemos considerar a superfície da lagoa como um plano e os patos como pontos que estão situados sobre este plano. Caso houvesse algum pato voando, diríamos que ele seria um ponto que não estaria situado sobre o plano.

Antes de passarmos à notação matemática, cumpre falar dos pontos colineares - que, como você já pode ter adivinhado pelo nome, são aqueles que estão sobre a mesma reta. Olhando para a imagem dos pássaros pousados nos fios, você pode ver claramente que há uma grande quantidade de pontos colineares, uma vez que há muitos pássaros pousados sobre um único fio. Já na imagem da lagoa, o alinhamento dos patos não é muito claro – o máximo que conseguimos encontrar foram três patos alinhados. E vocês?

Finalizamos a seção, então, com a notação matemática:

- quando um ponto A está sobre uma reta r, dizemos que ele pertence a essa reta. Usando a notação convencional, diremos que $A \in r$.
- quando um ponto A não está sobre uma reta r, dizemos que ele não pertence a essa reta. Usando a notação convencional, dizemos que $A \notin r$.
- quando um ponto A está sobre um plano α, dizemos que $A \in \alpha$
- quando um ponto A não está sobre um plano α, dizemos que $A \notin \alpha$

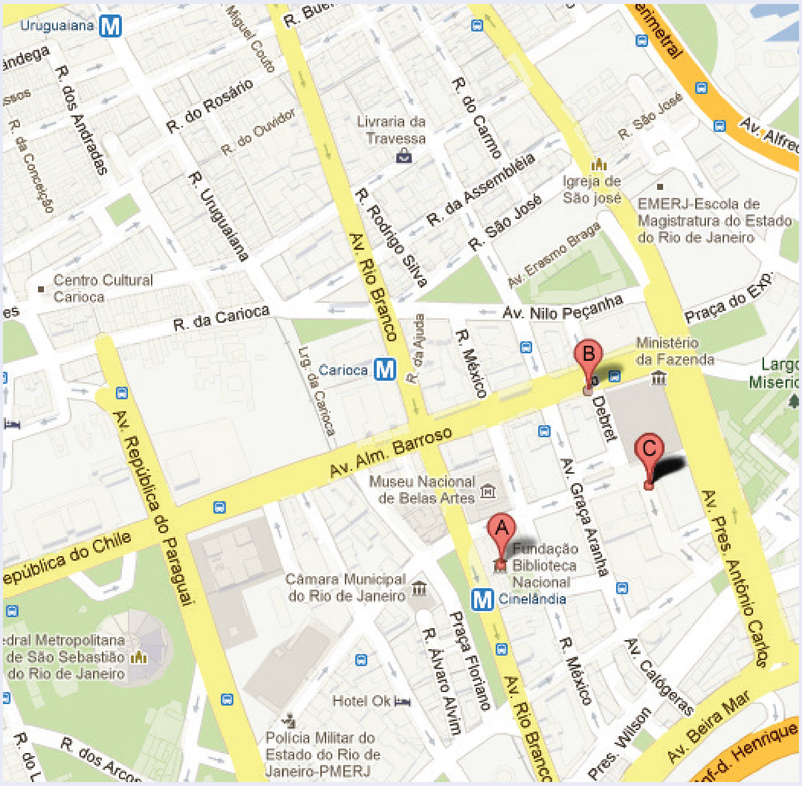
De posse deste conceitos, que tal fazer a próxima atividade?

Atividade 2

Suponha que você quer fazer uma visita à Biblioteca Nacional no Rio de Janeiro. Para conhecer melhor as cercanias, você acessou o Google Maps, digitou "Biblioteca Nacional" e clicou em Ok. O site apresentou um mapa com 3 endereços, todos no centro do Rio: o da Fundação Biblioteca Nacional, marcado como A no mapa; o da Biblioteca Nacional, marcado como B, no mapa e o do escritório de direitos autorais da Biblioteca Nacional, marcado como C no mapa.

Ao longo do percurso, você aproveitou o trajeto para responder com verdadeiro ou falso algumas dúvidas de um amigo, sempre considerando as ruas e avenidas como retas e os endereços como pontos.

Atividade 2



a. O ponto A (Fundação Biblioteca Nacional) pertence à Av. Rio Branco.

b. O ponto C (escritório de direitos autorais da Biblioteca Nacional) não pertence à Av. Graça Aranha .

c. O ponto B (Biblioteca Nacional) pertence à Av. Almirante Barroso.

d. O ponto B (Biblioteca Nacional) pertence à rua Debret.

e. O Museu Nacional de Belas Artes (logo acima do ponto A) pertence à Avenida Rio Branco.

f. Os 3 endereços da Biblioteca Nacional (pontos A, B e C) são colineares.

g. A estação do metrô Uruguaiana (representada pela letra M) não pertence à rua Uruguaiana.

h. As estações do metrô Carioca e Cinelândia, representadas pelos pontos M no mapa, são colineares.

i. As estações do metrô Carioca, Cinelândia e Uruguaiana, representadas pelos pontos M no mapa, são colineares.

Lembre-se: faça em uma folha à parte

Retas

Temos uma pergunta para fazer. Você estranhou quando leu os itens b e c da Atividade 2 pela primeira vez? Pensou alguma coisa do tipo “ué, mas um lugar não pode estar em duas ruas ao mesmo tempo”? Pois é, esse pensamento é bastante comum nesse tipo de questão.

Depois, claro, refletindo mais um pouco, você lembrou que se as duas ruas se cruzarem, o lugar que estiver exatamente na esquina entre elas pertencerá às duas ruas ao mesmo tempo - certo? Se agora lembrarmos que, nessa atividade, os locais eram os pontos e as ruas eram as retas, teremos um bom critério para iniciar o estudo das posições relativas entre as retas – a saber, o fato de elas se encontrarem ou não.

Duas retas que se encontram são chamadas de retas concorrentes. Elas se cruzam num único ponto, que é comum a ambas. Esse ponto é comumente chamado de ponto de interseção. Em nosso exemplo, ele seria justamente a esquina entre as duas ruas.

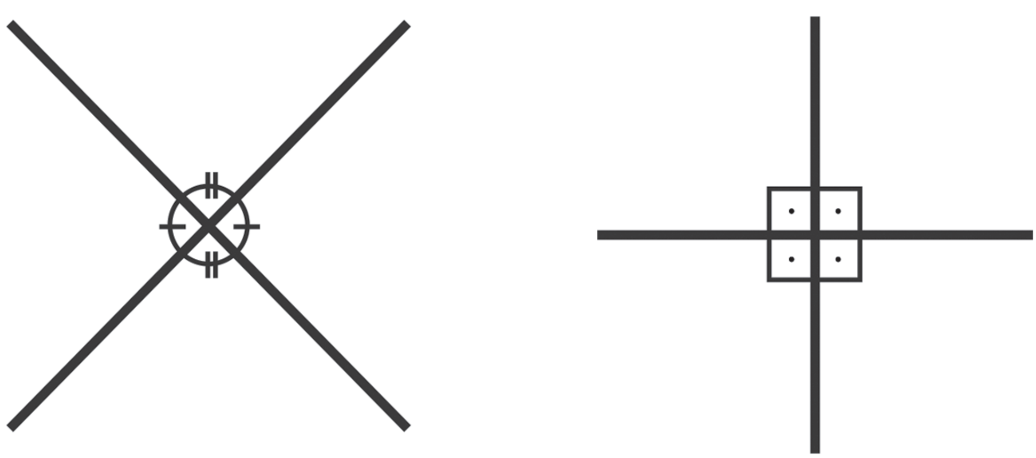


Figura 14: **As duas retas à esquerda são concorrentes e, no ponto em que se encontram, formam quatro ângulos, iguais dois a dois – e, nesta figura, identificados com um ou dois traços. Já as duas retas à direita são perpendiculares porque, além de se encontrarem (serem concorrentes), formam, no ponto em que se encontram, quatro ângulos de 90 graus.**

Duas retas, quando se encontram, formam quatro ângulos, iguais dois a dois. Veja na figura. Quando as retas se encontram formando um ângulo de 90º , são chamadas de perpendiculares – e, neste caso, os quatro ângulos formados são iguais. Veja na figura anterior. Para indicar que a reta r é perpendicular à reta s, escrevemos $r \perp s$.

Figura 15: Duas retas paralelas.

Encerrada a discussão sobre as retas que se encontram, vamos à discussão sobre as retas que não se encontram. Estas retas que não se encontram podem ser divididas em dois grupos. O primeiro deles é formado por retas que pertencem ao mesmo plano e nunca se encontram. As retas r e s, representadas na figura 15, são um bom exemplo disso. As retas que pertencem ao mesmo plano e nunca se encontram são chamadas de paralelas. Para indicar que a reta r é paralela à reta s, escrevemos $r \parallel s$.

O segundo grupo de retas que não se encontram é formado por retas que não pertencem ao mesmo plano e nunca se encontram. As retas r (do poste) e t (piso de pedras) da figura 10 são um bom exemplo disso. As retas que não pertencem ao mesmo plano e nunca se encontram são chamadas de reversas.

Saiba Mais

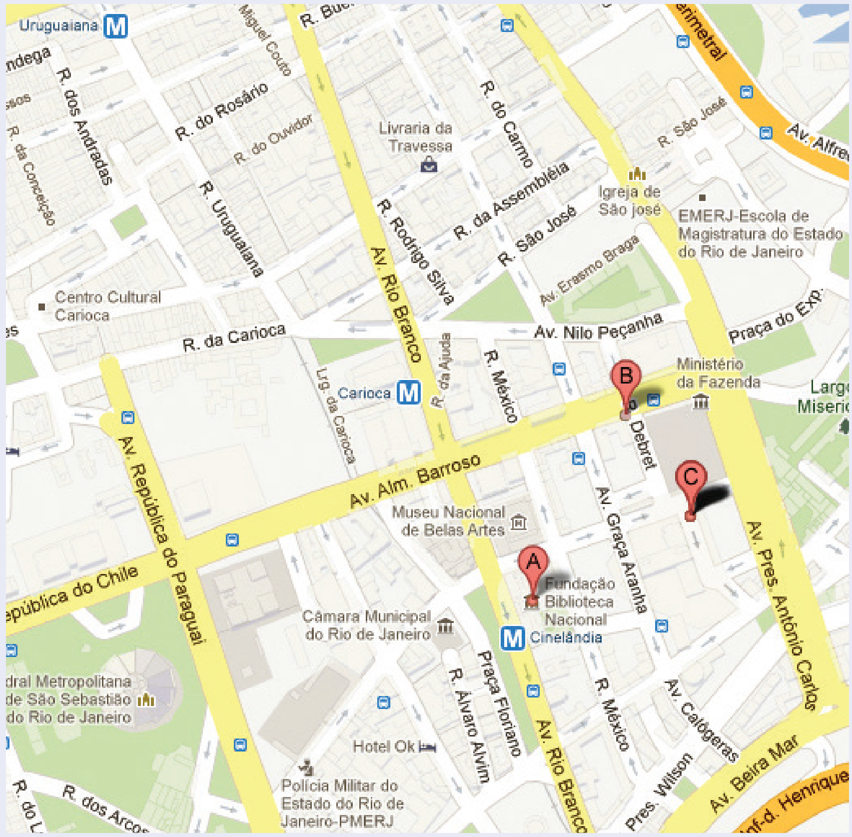
Uma grande crise na matemática está relacionada às retas paralelas, abordadas no 5º Postulado de Euclides. Esse postulado também consta do livro Elementos, a que nos referimos no início da nossa aula. Para tratar da Geometria, Euclides elaborou quatro axiomas (verdades iniciais do sistema que não necessitam ser demonstradas), postulou uma 5ª verdade e tentou demonstrá-la a partir das outras quatro.

O 5º postulado diz que dado um ponto P fora de uma reta r pode-se traçar uma única reta s paralela à reta r dada. Ele foi desafiador durante séculos. Na verdade, a existência da reta paralela era (e continua sendo) facilmente demonstrada. A unicidade das paralelas é que necessitava ser postulada.

A solução desse problema demorou cerca de dois mil anos para aparecer e somente em 1829 o matemático russo Nikolai Lobachevski (1793-1856) publicou Sobre os *Princípios da Geometria* onde apresentava uma nova geometria, baseada em um novo postulado que viria a substituir o 5º. Com essa nova geometria, era possível ter uma nova concepção de espaço, diferente daquela que tínhamos a partir da geometria euclidiana. Surgiam assim, as geometrias não euclidianas.

Dito isso, e aproveitando a familiaridade que já desenvolvemos com o mapa da Atividade 2 -, vamos trabalhar os conceitos de posição relativa entre retas na atividade a seguir.

Atividade 3



Eis novamente o mapa da região do centro do Rio de Janeiro. Só que, desta vez, as perguntas dizem respeito à posição relativa das ruas. Note que as ruas e avenidas continuam representando retas e os endereços representam os pontos. Diga se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas.

a. A Av. Almirante Barroso é perpendicular a Av. Rio Branco

b. A Rua Debret e a Rua México são concorrentes

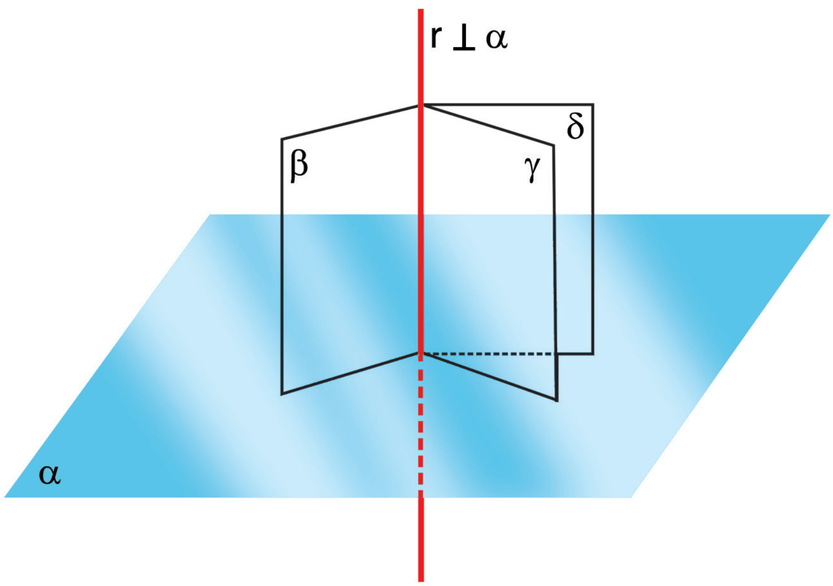
c. A Av. Graça Aranha, a rua México e a Av. Rio Branco são paralelas

d. A rua São José e a Av. Nilo Peçanha não são concorrentes

e. A rua do Carmo é perpendicular à rua da Assembléia

Anote suas respostas em seu caderno

Finalizamos esta seção dizendo que o mesmo estudo que fizemos da posição relativa entre retas pode ser estendido às retas e planos e ainda aos planos entre si. Teríamos assim retas e planos perpendiculares a outros planos, retas e planos paralelos a planos, planos secantes e muitas outras situações de posicionamento relativo, com interessantes implicações matemáticas.



Saiba Mais

• Para conhecer as várias situações e implicações matemáticas do posicionamentos relativos entre retas e planos e entre vários planos, acesse o site http://www.colegioweb.com.br/matematica/perpendicularismo.html

Seção 3
Sólidos Geométricos

Que tal uma casquinha de sorvete com uma bola de sorvete de flocos?

Ou um suco bem gelado de laranja?

Ou ainda um delicioso chocolate?

E uma viagem para conhecer as pirâmides do Egito?

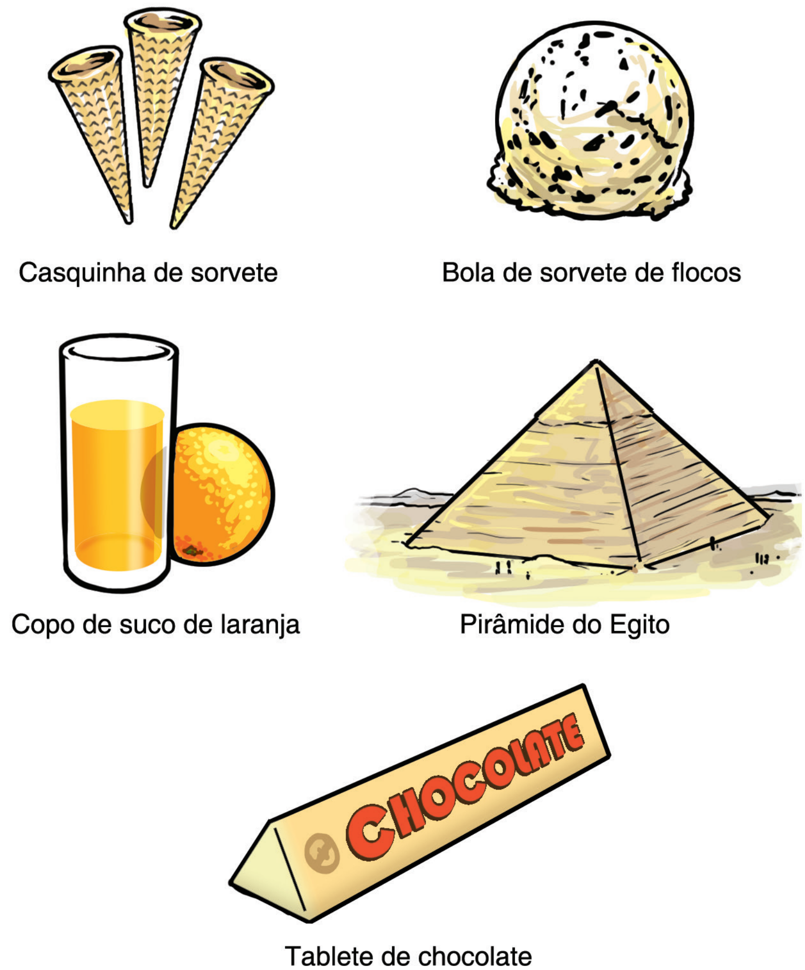
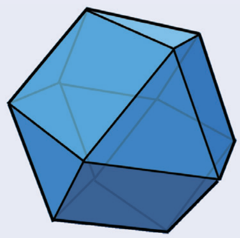


Figura 16: **Objetos e locais da vida real em que podemos encontrar representações de sólidos geométricos.**

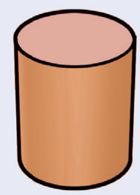
Em todas essas deliciosas opções temos representações do que chamamos em matemática de sólidos geométricos. Esses sólidos podem ser classificados como poliedros ou não poliedros. Mas qual seria a diferença entre um poliedro e um não poliedro? É justamente esse o tema da nossa próxima atividade.

Atividade 4

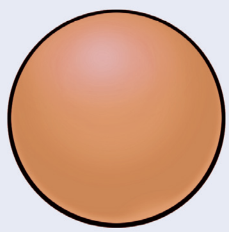
Aqui faremos assim: nós vamos apresentar a vocês vários sólidos, dizendo quais são poliedros e quais não são poliedros. A ideia é que você identifique as características que permitem diferenciar um de outro e responda: qual (ou quais) a(s) diferença(s) entre um poliedro e um não poliedro?



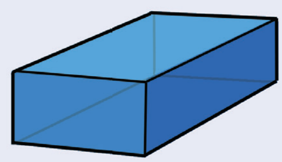
Exemplo de poliedro



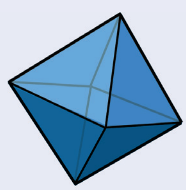
Exemplo de não poliedro



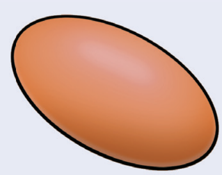
Exemplo de não poliedro



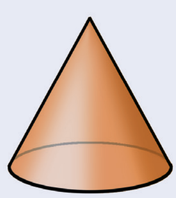
Exemplo de poliedro



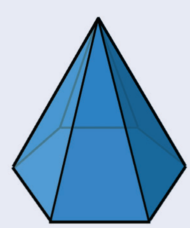
Exemplo de poliedro



Exemplo de não poliedro



Exemplo de não poliedro



Exemplo de poliedro

Anote suas respostas em seu caderno

Poliedros e a relação de Euler

Retomando a resposta da Atividade 4, denominamos de poliedro o sólido limitado por regiões poligonais planas, certo? Muito bem: essas regiões são chamadas de faces e têm, duas a duas, um lado comum, chamado de aresta. Vértice é o ponto comum a três ou mais arestas. Veja na figura seguinte:

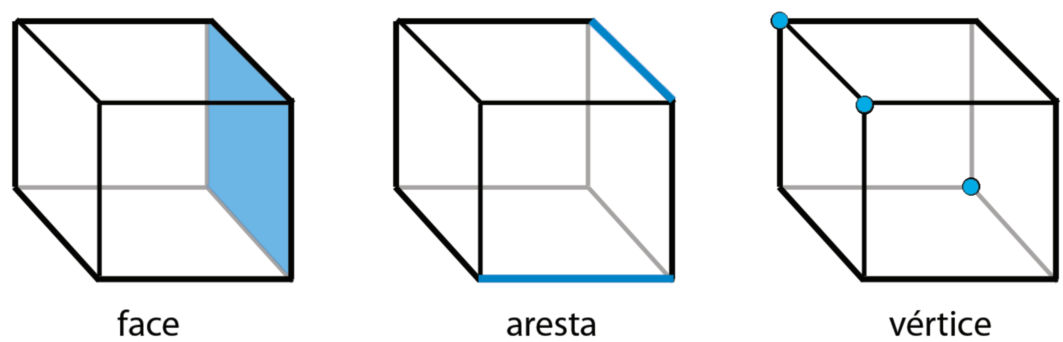
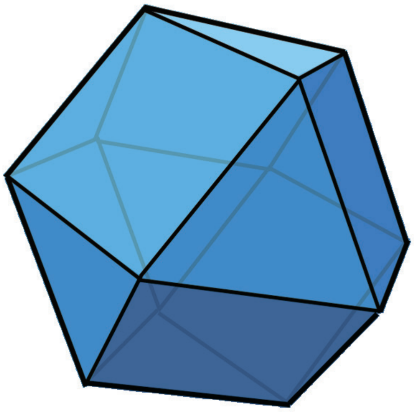


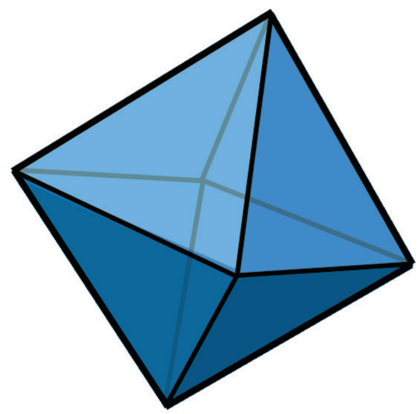
Figura 17: **Elementos de um poliedro. No poliedro da esquerda, está destacada a face lateral direita. No poliedro do centro, estão destacadas duas arestas. No poliedro da direita, estão destacados três vértices.**

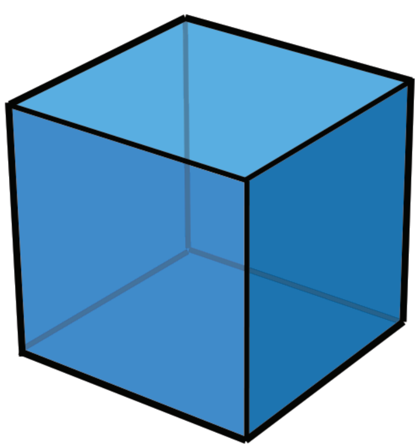
Assim como o interesse pelos fundamentos da Geometria, o interesse pelos poliedros remonta à Grécia antiga: o filósofo Platão (século IV a.C.) descreveu a construção do Universo a partir dos elementos Água, Ar, Terra e Fogo, representados da seguinte maneira.


Icosaedro

O elemento água era representado pelo poliedro denominado Icosaedro, que possui um total de vinte faces. Daí o prefixo "ico", que vem da palavra grega "eikosi" (vinte). Todas as vinte faces são triangulares.

O elemento ar era representado pelo poliedro denominado Octaedro, que possui um total de oito faces, daí o prefixo "octa". Todas as faces do octaedro são triangulares.


Octaedro


Hexaedro

O elemento terra era representado pelo poliedro denominado Hexaedro, que possui um total de seis faces, daí o prefixo "hexa". Todas as faces do hexaedro de Platão são quadradas. Imaginamos que você tenha reparado que este hexaedro em particular é o nosso já conhecido e tão querido cubo.

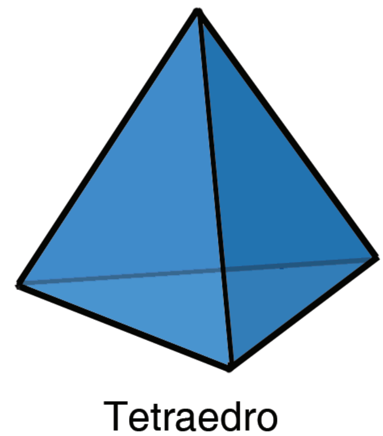
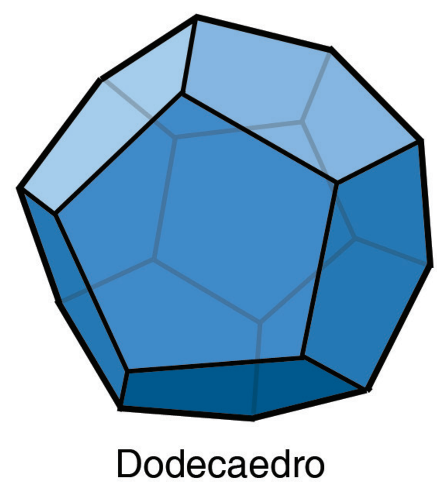
O elemento fogo era representado pelo poliedro denominado Tetraedro, que possui um total de quatro faces. Daí o prefixo tetra. Todas as faces do tetraedro são triangulares.	
Além destes sólidos que representavam os elementos, dentre os sólidos de Platão existe ainda o dodecaedro. Um poliedro de 12 faces pentagonais que era associado ao Universo.	

Figura 18: Poliedros de Platão.

Os poliedros que Platão utilizou para representar os elementos são regulares. Isto é: suas faces são regiões poligonais regulares congruentes e em todo vértice do poliedro converge o mesmo número de arestas. É importante ressaltar aqui que um sólido, para ser chamado de icosaedro, octaedro, hexaedro ou tetraedro não precisa ser regular – basta ter as respectivas vinte, oito, seis ou quatro faces. Um bom exemplo é o hexaedro que representamos na figura seguinte.

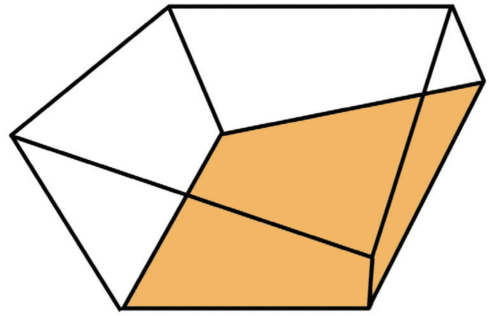
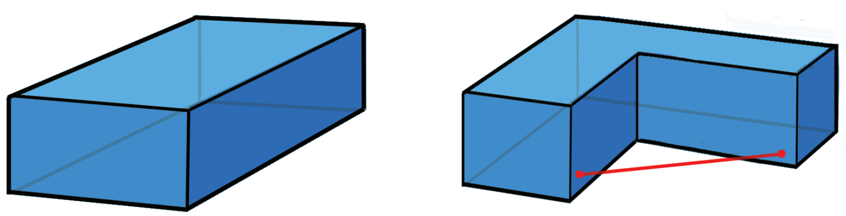


Figura 19: Hexaedro.

O grande matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) conseguiu estabelecer uma interessante relação entre o número de vértices (V), o número de arestas (A) e número de faces (F) de um **poliedro convexo**.

Um poliedro é convexo se o segmento que liga dois de seus pontos está sempre contido no poliedro.



Exemplo de poliedro convexo

Exemplo de poliedro não convexo

De acordo com essa relação, conhecida como relação de Euler, em todo poliedro convexo, o número de arestas (A) mais 2 é igual ao número de vértices (V) mais o número de faces (F). Ou, numericamente

$A + 2 = V + F$ ou ainda $V - A + F = 2$

Interessante, não? De posse dessa relação, convidamos você a fazer a atividade a seguir.

Atividade 5

Descubra quantos vértices e arestas têm cada um dos poliedros de Platão apresentados anteriormente:

a. Tetraedro

b. Hexaedro

c. Octaedro

d. Icosaedro

Anote suas respostas em seu caderno

Prismas e pirâmides?

Os prismas e as pirâmides são poliedros convexos muito comuns em nosso dia a dia. Os prismas são poliedros convexos que têm duas faces paralelas e congruentes (chamadas bases) e as demais faces em forma de paralelogramos (chamadas faces laterais).

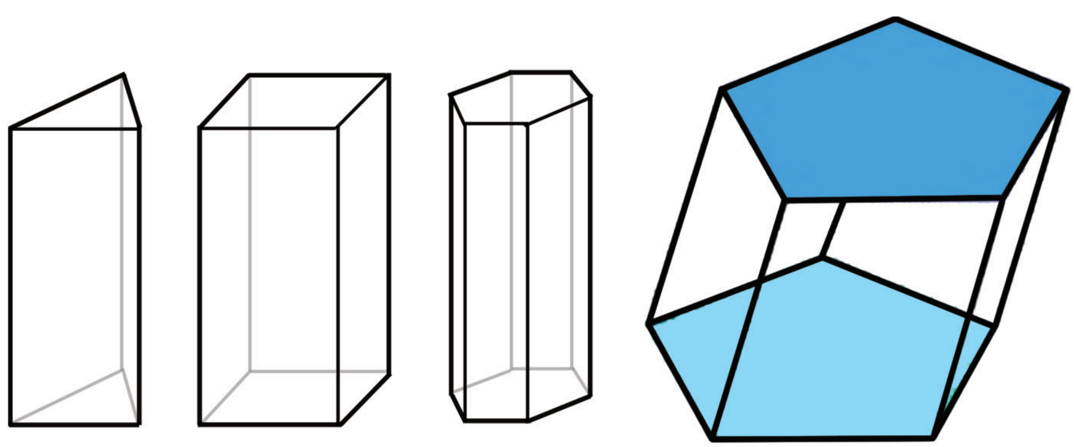


Figura 20: Prismas de base triangular, quadrada, hexagonal e pentagonal respectivamente. O prisma à direita, de base pentagonal, tem suas duas bases destacadas.

Já as pirâmides são poliedros cuja base é uma região poligonal e as faces laterais são regiões triangulares.

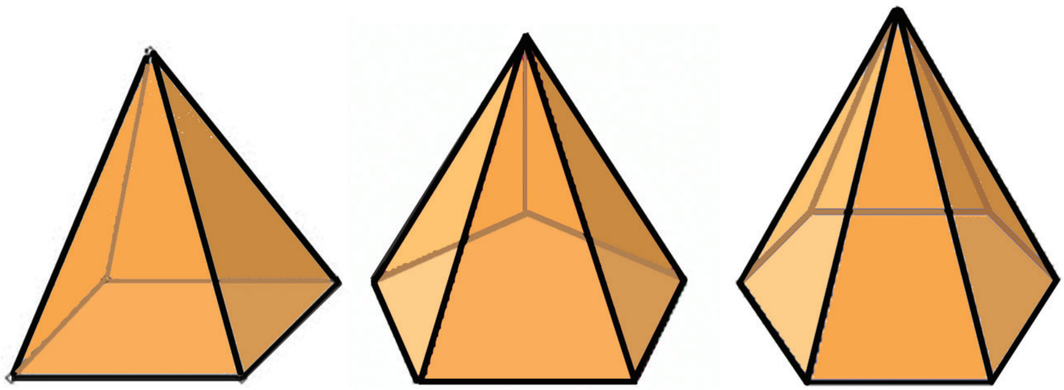


Figura 21: Pirâmides de base quadrada, pentagonal e hexagonal respectivamente.

Apesar de a palavra prisma não estar entre as mais corriqueiras da nossa língua, os prismas são muito comuns em nosso dia a dia – os prédios e casas em que moramos, a maioria das embalagens dos produtos que compramos, e por aí vai. Já as pirâmides frequentam nossos livros de história, nossos filmes e até mesmo os roteiros de viagem dos que tem um pouco mais de condição financeira. Mas...e um deltoedro pentagonal, o que seria?

O deltoedro pentagonal é um dos muito poliedros que aguardam você no software de geometria dinâmica Poly, que é gratuito e que pode ser baixado diretamente do site da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, a UFRGS.

O link para o programa é: http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/softwares/soft_geometria.php#poly

Nesse programa, você encontra sólidos bem tradicionais, como os de Platão e de Arquimedes, bem como outros tipos de poliedros mais, digamos, alternativos – como o nosso deltoedro.

Como é um deltoedro pentagonal? Ah, dê um pulinho lá, baixe o Poly e descubra!

Não poliedros

Como vimos na Atividade 4, os sólidos que não são limitados por regiões poligonais planas são chamados de não poliedros. Muitos deles também são bastante comuns em nosso dia-a-dia. Dentre estes, destacamos o cone, o cilindro e a esfera. Como retornaremos a eles mais detalhadamente nas aulas seguintes, faremos agora uma apresentação mais sintética.

Lembram dos prismas? Pois então, se substituíssemos as bases poligonais por bases circulares – e conectássemos essas bases– nosso prisma se "transformaria" num cilindro. E das pirâmides, lembra? Então, se substituíssemos a base poligonal por uma circular – e ligássemos essa base ao vértice, nossa pirâmide se "transformaria" num cone. Veja a figura!

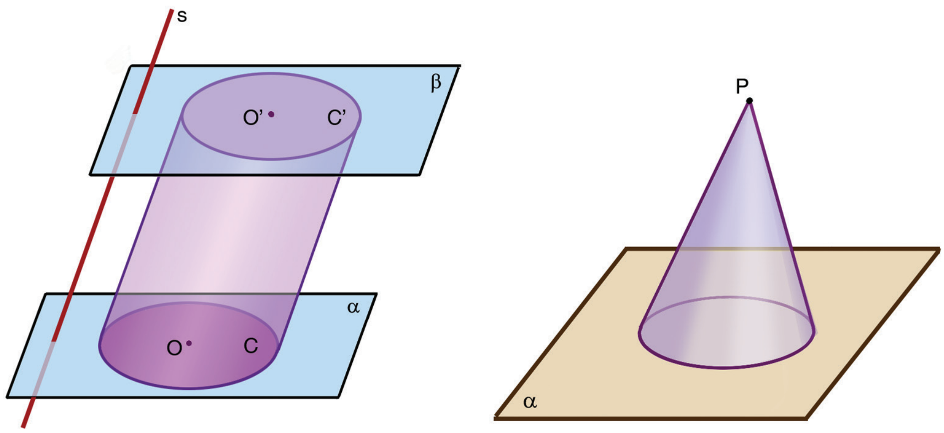


Figura 22: Um cilindro (à esquerda) e um cone (à direita).

Mais formalmente, o cilindro seria o sólido obtido por meio da união de todos os segmentos de retas pararelos a reta s que unem um ponto do cículo C (pertencente a α) a um ponto de β. O cone seria o sólido obtido por meio da reunião de todos os segmentos que ligam cada ponto da região circular C (pertencente a α) ao ponto P (que não pertence a α). E, aproveitando o formalismo, a esfera é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão a uma distância menor ou igual a R (RAIO) de um outro ponto O, chamado de centro. Muito formalismo junto? Não se preocupe, ao longo das próximas aulas vamos explicar todos os detalhes destes enunciados mais formais. Por ora, vá lendo, se acostumando e vendo o que consegue perceber deles. Veja, por exemplo, se na figura seguinte você consegue perceber, ainda que intuitivamente, o que foi dito mais formalmente acerca da esfera.

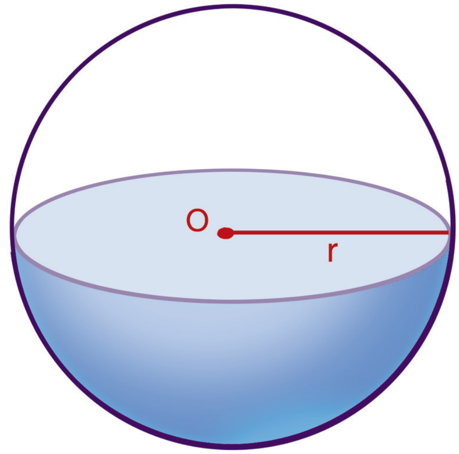
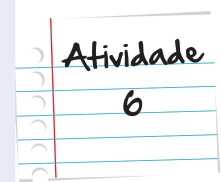


Figura 23: Esfera.



Retorne ao início da seção e diga quais sólidos geométricos os objetos representam:

a. Bola de sorvete
b. Pirâmide do Egito
c. Laranja
d. Casquinha de sorvete
e. Copo de suco
f. Caixa de chocolate

Anote suas respostas em seu caderno

Resumo

- Dimensões; ponto, reta e plano.
- O mundo que nos cerca tem três dimensões: altura, largura e comprimento.
- Ponto, reta e plano são conceitos matemáticos primitivos.

- O ponto é um objeto matemático sem dimensão.
- A reta é um objeto matemático com apenas uma dimensão. A reta se estende infinitamente ao longo desta dimensão.
- O plano é um objeto matemático com apenas duas dimensões. O plano se estende infinitamente ao longo destas duas dimensões.
- O ponto A pertence à reta r ($A \in r$) quando se situa sobre ela.
- O ponto A não pertence à reta r ($A \notin r$) quando não se situa sobre ela.
- O ponto A pertence a um plano α ($A \in \alpha$) quando se situa sobre este plano.
- O ponto A não pertence a uma plano α ($A \notin \alpha$) quando não se situa sobre este plano.
- Dois ou mais pontos são chamados colineares quando pertencem a uma mesma reta.
- Retas são concorrentes quando têm um único ponto em comum.
- Retas são perpendiculares quando são concorrentes e determinam ângulos de 90°.
- Retas são paralelas quando pertencem ao mesmo plano e não têm ponto em comum.
- Retas são reversas quando não pertencem ao mesmo plano e não têm ponto em comum.
- Planos são paralelos quando não têm ponto em comum.
- Planos são secantes quando são planos distintos com uma reta em comum.
- Planos são perpendiculares quando um dos planos contêm uma reta perpendicular ao outro.
- Planos são oblíquos quando são secantes e não são perpendiculares.
- Uma reta está contida em um plano quando todos os pontos da reta pertencem ao plano.
- Uma reta e um plano são concorrentes quando têm um único ponto em comum.
- Uma reta e um plano são paralelos quando não têm ponto comum.
- Uma reta concorrente a um plano em um determinado ponto é perpendicular a ele se ela é perpendicular a todas as retas do plano que passam pelo ponto.

Sólidos Geométricos

- Poliedro é o sólido limitado por regiões poligonais planas, chamadas de faces que têm, duas a duas, um lado comum, chamado de aresta.
- Vértice é um ponto comum a três ou mais arestas.
- Relação de Euler $A + 2 = V + F$ (A número de arestas, V número de vértices, F número de faces).
- Um poliedro é convexo se o segmento que liga dois de seus pontos está sempre contido no poliedro.

- Prismas são poliedros convexos que têm duas faces paralelas e congruentes (chamadas bases) e as demais faces em forma de paralelogramos (chamadas faces laterais).
- Pirâmides são poliedros cuja base é uma região poligonal e as faces laterais são regiões triangulares.
- Cilindro é o sólido obtido por meio da união de todos os segmentos de retas pararelos a reta s que unem um ponto do cículo C (pertencente a α) a um ponto de β. O cilindro é um sólido mas não é um poliedro.
- Cone é o sólido obtido por meio da reunião de todos os segmentos que ligam cada ponto da região circular C (petencente a α) ao ponto P (que não pertence a α). O cone é um sólido mas não é um poliedro.
- Esfera é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão a uma distância menor ou igual a R de um centro O. A esfera é um sólido mas não é um poliedro.

Conclusão

Fizemos um grande passeio pelo mundo que nos cerca e analisamos de uma maneira matemática as formas que compõem os objetos do nosso cotidiano. Refletimos sobre dimensões, ponto, reta e plano. Também nos dedicamos a analisar os sólidos geométricos e entendemos a diferenciação entre poliedros e não poliedros. Alguns sólidos chamaram nossa atenção como os prismas, as pirâmides, o cilindro, cone e a esfera.

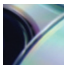
Referências

Livros

- ALMEIDA, Nilze de; DEGENSZAJN, David; DOLCE, Osvaldo; IEZZI, Gelson; PÉRIGO, Roberto. *Matemática Ciência e Aplicações 1*. Segunda Edição. São Paulo: Atual Editora, 2004.157p.
- BOYER, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.
- CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; LIMA, Elon Lages; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. *Temas e Problemas*. Terceira Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. 193 p.
- ________________________. *A Matemática do Ensino Médio Volume 1*. Sétima Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. 237 p.
- DANTE, Luiz Roberto. *Matemática Contexo e Aplicações Volume 1*. Primeira Edição. São Paulo: Editora Ática, 2011. 240p.
- FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. Novo Aurélio Século XXI: o dicionário da língua portuguesa. Quinta Edição. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 1999. 2128 p.

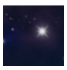
Imagens

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1242172



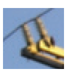
- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=916550

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1397088



- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1005288

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1149358

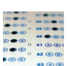


- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1353848

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=718564

- http://goo.gl/maps/irvmp

- http://www.sxc.hu/photo/475767



- http://www.sxc.hu/photo/517386

Veja ainda

Acesse o link http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1369 e descubra o que acontece nesse experimento ao tentar violar a Relação de Euler $V - A + F = 2$, onde V é o número de vértices, A o número de arestas e F é o número de faces do sólido.

Respostas das Atividades

Atividade 1

A primeira coisa a levar em consideração é aquele nosso comentário de que pontos, retas e planos são entes matemáticos e seu uso para representar objetos do dia-a-dia sempre implica alguma espécie de aproximação. Isso posto, podemos dizer que os pontinhos de salsinha podem ser considerados exemplos de pontos, justamente por "não terem" – e eis aqui nossa aproximação – altura, comprimento ou largura.

Como retas, poderíamos considerar tanto as bordas do prato quanto os próprios talheres situados ao lado do prato – lembrando, novamente, que as retas se estendem indefinidamente, enquanto tanto os lados do prato quanto os talheres tem comprimento limitado. Finalmente, mantendo as ressalvas usadas para os pontos e retas, dois exemplos de plano seriam o prato e o tampo da mesa.

Atividade 2

a. Se levarmos em consideração aquelas aproximações, diremos que a afirmativa é verdadeira – afinal, o prédio representado pelo ponto, está na Avenida Rio Branco, representada pela reta. Agora, se você levou o conceito ao extremo e argumentou que o balão não está posicionado exatamente sobre a linha da rua – e, por isso, a afirmativa é falsa – tudo certo também. O importante aqui é você visualizar a relação de pertencimento entre reta e ponto.

b. A afirmativa é verdadeira: de acordo com o mapa, o escritório (ponto C) fica no outro quarteirão.

c. A afirmativa é verdadeira: tanto o balão usado pelo Google Maps para representar o endereço (o ponto B) quanto o prédio em si estão situados sob a reta da Av. Almirante Barroso.

d. A afirmativa é verdadeira também: tanto o balão usado pelo Google Maps para representar o endereço (o ponto B) quanto o prédio em si estão situados sob a reta da rua Debret.

e. Vale aqui um argumento muito parecido com o da resposta do item a. A afirmativa é verdadeira porque o prédio representado pelo ponto se situa sobre a rua representada pela reta. Se você levar a precisão ao limite, argumentando que o desenho do museu não está posicionado exatamente sobre a rua – e, por isso, a afirmativa é falsa – vale também. O importante é você visualizar a relação de pertencimento entre reta e ponto.

f. A afirmativa é falsa. Não é possível achar uma única linha que ligue os 3 pontos. É possível, no entanto, conectá-los dois a dois por uma linha reta. Importante ressaltar que essa linha não seria uma rua e passaria por cima de vários prédios.

g. A afirmativa é falsa. O quadrado com a letra M está perfeitamente sobre a reta que representa a rua Uruguaiana.

h. A afirmativa é verdadeira: ambas estão na Avenida Rio Branco.

i. A afirmativa é falsa: não existe uma reta que ligue as três estações ao mesmo tempo.

Atividade 3

a. A afirmativa é verdadeira: as ruas se cruzam e fazem entre si um ângulo (na verdade, quatro ângulos) de 90º. Se porventura você argumentou que as ruas eram concorrentes mas não havia elementos para determinar se elas eram perpendiculares (afinal, não havia informação explícita neste sentido), também está ok.

b. A afirmativa é falsa: as ruas não se cruzam e, por isso, não podem ser concorrentes.

c. A afirmativa é verdadeira. Veja que, basicamente, trata-se da mesma situação que representamos na figura 15 – acrescida de uma terceira reta!

d. A afirmativa é falsa – as ruas se encontram um pouco acima do metrô da Carioca, por isso são concorrentes.

e. Aqui, uma argumentação muito parecida com a do item a . As ruas se cruzam e, portanto, são concorrentes. Se você entendeu que o ângulo é de 90º, as ruas são perpendiculares e a afirmativa é verdadeira. Se entendeu que não havia elementos suficientes para determinar se o ângulo era de 90º, então as ruas são apenas concorrentes.

Atividade 4

Imaginamos que você tenha conseguido perceber o que diferencia um poliedro de um não poliedro. Mais difícil, no entanto, seria colocar essa percepção em palavras, não é? Assim, vamos dar uma ajuda – e veja se a diferença que você encontrou entre poliedros e não poliedros pode ser expressa assim: um poliedro é delimitado por regiões poligonais planas. A mesma coisa não pode ser dita acerca dos não poliedros. Os não poliedros ou bem que não são delimitados por nenhuma superfície plana ou bem que são parcialmente delimitados por superfícies planas. Essas superfícies, no entanto, não são poligonais. Daí a nossa proposta de diferenciação. Convidamos você a ler novamente – e com calma – a nossa proposta e ver como ela se aplica nos exemplos que apresentamos, ok?

Respostas das Atividades

Atividade 5

a) Sabemos que o tetraedro tem quatro faces, todas triangulares certo? Então, se cada triângulo tem 3 lados, teremos um total de $4 \times 3 = 12$ lados. No entanto, cada um desses lados é comum a dois triângulos (duas faces) e, por isso, é contado duas vezes. Assim, teremos um total de $12/2 = 6$ arestas. Usando a relação de Euler, teremos que $V+F=A+2$; $V+4=6+2$; $V+4=8$; $V=4$. Assim o tetraedro tem 4 vértices. Quer dar uma olhada na figura e contar para conferir? Ah, você já resolveu contando? Está ok – mas, neste caso, é muito importante que você faça também as contas, até porque, para determinados poliedros a contagem pode ser bem problemática – quando não é completamente impossível.

b) Mesmo raciocínio aqui: o hexaedro tem seis faces quadradas. Com 4 lados por face (quadrado), temos $6 \times 4 = 24$ lados. Como cada lado é contado duas vezes (por ser comum a duas faces), teremos um total de $24/2 = 12$ arestas. Usando a relação de Euler, teremos que $V+F=A+2$, $V+6=12+2$, $V+6=14$, $V=8$. Assim, o hexaedro em questão tem 8 vértices. Quer contar para conferir? Ah, você já resolveu contando? Mas de novo? Ok, ok– mas, vale o aviso anterior: é muito importante que você faça também as contas, até porque, para determinados poliedros a contagem pode ser bem problemática – quando não é completamente impossível.

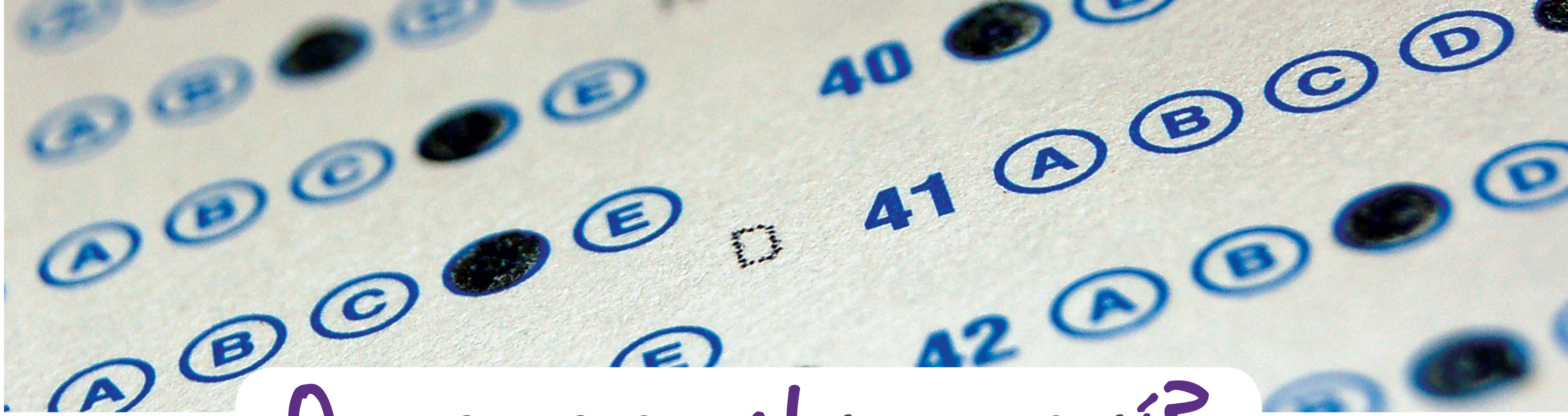
c) Novamente: temos oito faces triangulares, com $8 \times 3 = 24$ lados. Cada lado é comum a duas faces, o que nos deixa com 12 arestas. Aplicando a relação de Euler, teremos que $V+F=A+2$, $V+8=12+2$, $V+8=14$, $V=6$. Assim, o octaedro tem 6 vértices. Resolveu contando? Ah, foi? Bom, valem as considerações das respostas dos itens a e b.

d) O icosaedro em questão tem 20 faces triangulares, o que nos dá $20 \times 3 = 60$ lados. Como cada lado é comum a duas faces, será contado duas vezes e por isso dividimos o numero de lados por dois para encontrar o número de arestas: $60/2 = 30$. Vamos agora à relação de Euler: $V+F=A+2$, $V+20=30+2$, $V+20=32$, $V=12$. Esse é muito mais difícil de resolver contando diretamente na figura, não é mesmo?

Respostas das Atividades

Atividade 6

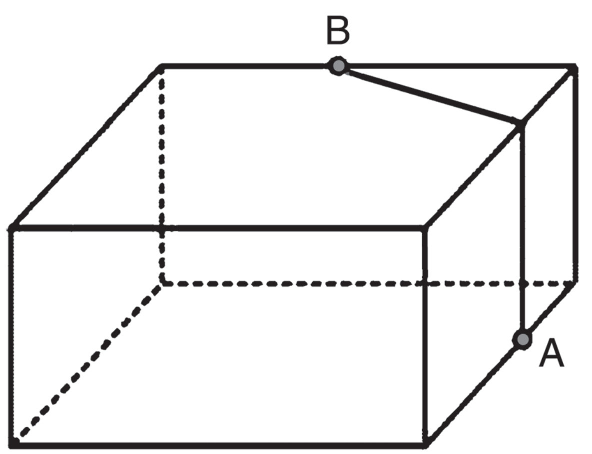
Casquinha de sorvete pode ser considerada um cone, por assim dizer invertido, com a base para cima, justamente para receber a bola de sorvete – que, juntamente com a laranja, são exemplos de esferas. O copo de suco pode ser considerado um cilindro – conseguiu ver? A caixa de chocolate pode ser considerada um prisma, e a pirâmide do Egito – essa foi fácil, hein? – uma pirâmide.



O que perguntam por aí?

ENEM - 2010

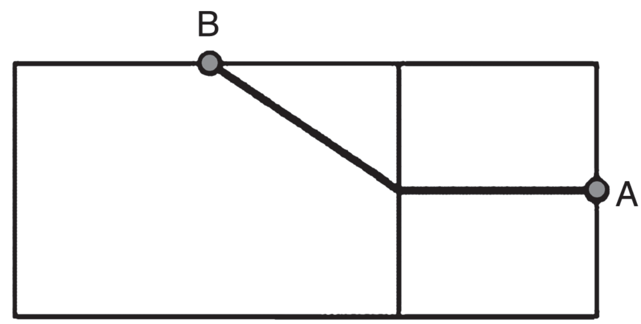
A figura seguinte representa um salão de um clube onde estão destacados os pontos A e B.



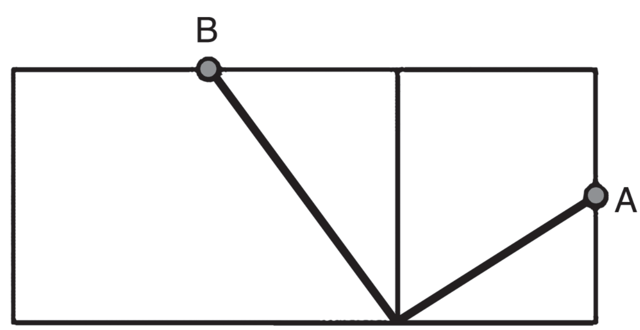
Nesse salão, o ponto em que chega o sinal da TV a cabo fica situado em A. A fim de instalar um telão para a transmissão dos jogos de futebol da Copa do Mundo, esse sinal deverá ser levado até o ponto B por meio de um cabeamento que seguirá na parte interna da parede e do teto.

O menor comprimento que esse cabo deverá ter para ligar os pontos A e B poderá ser obtido por meio da seguinte representação no plano:

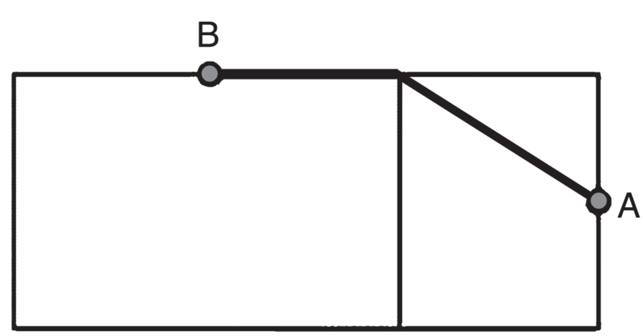
A)



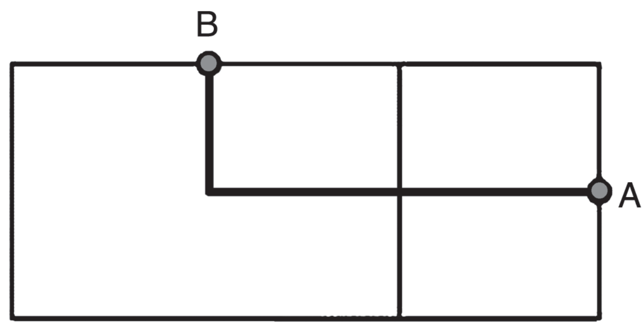
B)



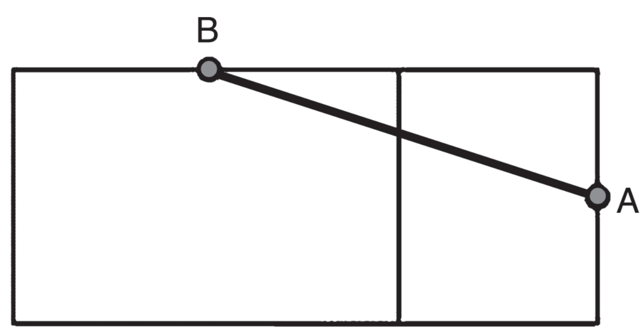
C)



D)

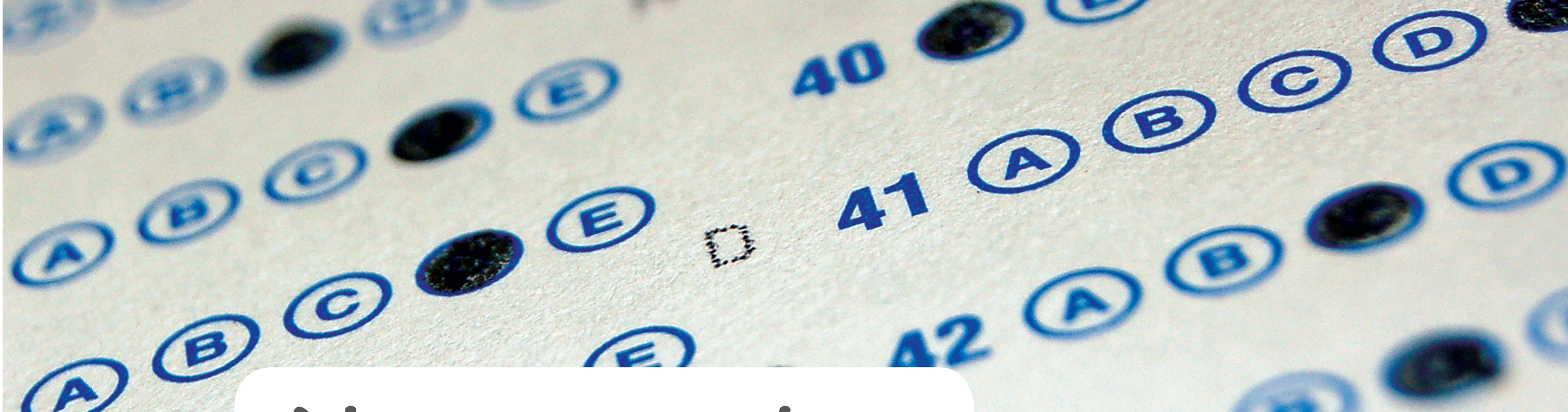


E)



Resposta: Letra E.

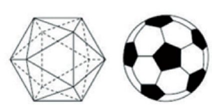
Comentário: Perceba o seguinte: o retângulo em que se situa o ponto B é o teto da sala e o retângulo em que se situa o ponto A é uma das paredes. Conseguiu ver? Muito bem. Então, num primeiro momento, podemos afirmar que os pontos estão em planos diferentes e, neste caso, um fio que percorresse o caminho mais curto entre A e B passaria pelo meio da sala. No entanto, o fato de o fio "correr" por dentro da parede faz com que as coisas mudem de figura: podemos considerar que os planos do teto e da parede são, na verdade, um plano contínuo. Dessa maneira, os pontos A e B estarão no mesmo plano e a menor distância entre eles será o tamanho da linha reta que os une. Assim, a resposta é letra E.



Atividade extra

Exercício 1

Arquimedes descobriu um poliedro convexo formado por 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais, todas regulares. Esse poliedro inspirou a fabricação da bola de futebol que apareceu pela primeira vez na Copa do Mundo de 1970.



Quantos vertices possui esse poliedro?

(a) 12 (b) 54 (c) 60 (d) 72

Exercício 2

Um poliedro convexo tem 6 faces quadrangulares e 4 faces triangulares.

Qual o numero de arestas desse poliedro?

(a) 10 (b) 12 (c) 16 (d) 18

Exercício 3

Um poliedro convexo tem cinco faces triangulares e três pentagonais.

Qual o numero de arestas deste poliedro?

(a) 30 (b) 24 (c) 8 (d) 15

Exercício 4

Um poliedro convexo tem 3 faces triangulares, 4 faces quadrangulares e 5 pentagonais.

Qual o numero de vertices desse poliedro?

(a) 25 (b) 12 (c) 15 (d) 9

Exercício 5

Um poliedro tem 6 arestas e o número de faces e igual ao seu número de vértices.

Quantas faces possui esse poliedro?

(a) 4 (b) 6 (c) 8 (d) 10

Exercício 6

Quantas arestas tem um poliedro que possui 12 faces e 20 vértices?

(a) 24 (b) 30 (c) 32 (d) 38

Exercício 7

Um poliedro e formado por cinco faces quadrangulares e seis faces triangulares.

Quantas arestas tem esse poliedro? $x \in A$ e os elementos $y \in B$?

(a) 15 (b) 16 (c) 19 (d) 22

Exercício 8

Um poliedro convexo e constitudo por 2 faces pentagonais e 5 faces quadrangulares. Quantos vértices tem o poliedro?

(a) 8 (b) 10 (c) 12 (d) 15

Exercício 9

O icosaedro tem 20 faces triangulares.

Quantas arestas tem esse poliedro?

(a) 30 (b) 32 (c) 36 (d) 38

Exercício 10

Quantas arestas tem uma pirâmide de base hexagonal?

(a) 6 (b) 8 (c) 10 (d) 12

Exercício 11

Existe um poliedro convexo constituído por 15 faces, 12 vértices e 18 arestas?

Exercício 12

Quantos vértices tem um poliedro convexo constituído por 10 faces quadrangulares e 2 pentagonais?

Exercício 13

Num poliedro o numero de vértices é igual ao dobro do número de faces.

Quantas faces tem esse poliedro se ele tem 16 arestas?

Exercício 14

Num poliedro convexo, o número de arestas excede o número de vértices em 6 unidades.

Qual o número de faces desse poliedro?

Exercício 15

Um poliedro tem 6 faces triangulares, 4 faces pentagonais e 5 faces quadrangulares. Qual o número de arestas desse poliedro?

Gabarito

Exercício 1

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 2

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 3

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 4

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 5

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 6

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 7

A B C D

○ ○ ● ○

Exercício 8

A B C D

○ ● ○ ○

Exercício 9

A B C D

● ○ ○ ○

Exercício 10

A B C D

○ ○ ○ ●

Exercício 11

Não, pois $12 - 18 + 15 \neq 2$, ou seja, o teorema de Euler não é satisfeito.

Exercício 12

15 vértices.

Exercício 13

6 faces.

Exercício 14

8 faces.

Exercício 15

29 arestas.