CEJA >>

CENTRO DE EDUCAÇÃO
de JOVENS e ADULTOS

MATEMÁTICA

e suas TECNOLOGIAS >>

Fascículo 8
Unidades 24, 25 e 26

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Governador
Wilson Witzel

Vice-Governador
Claudio Castro

SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO

Secretário de Estado
Leonardo Rodrigues

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO

Secretário de Estado
Pedro Fernandes

FUNDAÇÃO CECIERJ

Presidente
Gilson Rodrigues

PRODUÇÃO DO MATERIAL CEJA (CECIERJ)

Coordenação Geral de Design Instrucional
Cristine Costa Barreto

Coordenação de Matemática
Agnaldo da C. Esquincalha
Gisela M. da F. Pinto
Heitor B. L. de Oliveira

Revisão de conteúdo
José Roberto Julianelli
Luciana Getirana de Santana

Elaboração
Cléa Rubinstein
Daniel Portinha Alves
Heitor B. L. de Oliveira
Leonardo Andrade da Silva
Luciane de P. M. Coutinho
Maria Auxiliadora Vilela Paiva
Raphael Alcaires de Carvalho
Rony C. O. Freitas
Thiago Maciel de Oliveira

Atividade Extra
Benaia Sobreira de Jesus Lima
Carla Fernandes e Souza
Diego Mota Lima
Paula Andréa Prata Ferreira
Vanessa de Albuquerque

Coordenação de Design Instrucional
Flávia Busnardo
Paulo Miranda

Design Instrucional
Aroaldo Veneu

Revisão de Língua Portuguesa
Paulo Cesar Alves

Coordenação de Produção
Fábio Rapello Alencar

Capa
André Guimarães de Souza

Projeto Gráfico
Andreia Villar

Imagem da Capa e da Abertura das Unidades
http://www.sxc.hu/photo/789420

Diagramação
Alexandre Oliveira
Juliana Vieira
Ricardo Polato

Ilustração
Bianca Giacomelli
Clara Gomes
Fernado Romeiro
Jefferson Caçador
Sami Souza

Produção Gráfica
Verônica Paranhos

Sumário

Prezado(a) Aluno(a),

Seja bem-vindo a uma nova etapa da sua formação. Estamos aqui para auxiliá-lo numa jornada rumo ao aprendizado e conhecimento.

Você está recebendo o material didático impresso para acompanhamento de seus estudos, contendo as informações necessárias para seu aprendizado e avaliação, exercício de desenvolvimento e fixação dos conteúdos.

Além dele, disponibilizamos também, na sala de disciplina do CEJA Virtual, outros materiais que podem auxiliar na sua aprendizagem.

O CEJA Virtual é o Ambiente virtual de aprendizagem (AVA) do CEJA. É um espaço disponibilizado em um site da internet onde é possível encontrar diversos tipos de materiais como vídeos, animações, textos, listas de exercício, exercícios interativos, simuladores, etc. Além disso, também existem algumas ferramentas de comunicação como chats, fóruns.

Você também pode postar as suas dúvidas nos fóruns de dúvida. Lembre-se que o fórum não é uma ferramenta síncrona, ou seja, seu professor pode não estar online no momento em que você postar seu questionamento, mas assim que possível irá retornar com uma resposta para você.

Para acessar o CEJA Virtual da sua unidade, basta digitar no seu navegador de internet o seguinte endereço: http://cejarj.cecierj.edu.br/ava

Utilize o seu número de matrícula da carteirinha do sistema de controle acadêmico para entrar no ambiente. Basta digitá-lo nos campos "nome de usuário" e "senha".

Feito isso, clique no botão "Acesso". Então, escolha a sala da disciplina que você está estudando. Atenção! Para algumas disciplinas, você precisará verificar o número do fascículo que tem em mãos e acessar a sala correspondente a ele.

Bons estudos!

Geometria Espacial: pirâmides e cones

Fascículo 8

Unidade 24

Fundação CECIERJ

Geometria Espacial: pirâmides e cones

Para início de conversa...

A cidade de Gizé, também conhecida como Guizé ou Guiza, está localizada no Egito, na margem oeste do rio Nilo, distante cerca de 20 km a sudoeste da cidade de Cairo, capital do país. Gizé é famosa por abrigar um impressionante complexo monumental que remonta ao antigo Egito, atraindo turistas do mundo inteiro. Em seu território localizam-se as três grandes pirâmides e a esfinge, além de 80 pirâmides menores e vários templos.

Figura 1: Turistas visitando o planalto de Gizé. Em primeiro plano, a esfinge, ao fundo, uma pirâmide.

A esfinge é uma enorme escultura com corpo de leão e rosto humano, e os reais objetivos de sua construção continuam gerando muitas e acaloradas discussões na comunidade arqueológica. Já as pirâmides foram construídas com o objetivo de abrigar os túmulos dos reis, pois os egípcios acreditavam numa vida após a morte e essa vida dependia da conservação do corpo morto. Embalsamavam-se os corpos, e os objetos e valores do dia-a-dia eram colocados no túmulo para uso após a morte.

A maior de todas as pirâmides é a grande pirâmide de Gizé (2.600 a. C.), cuja construção envolveu processos muito desafiadores, tanto na área da matemática quanto da engenharia. Sua estrutura, por exemplo, contém mais de 2000000 de blocos de pedra, cada um com cerca de 2,5 toneladas de peso. Os tetos de certas estruturas internas da pirâmide são feitos de blocos de granito de 54 toneladas, medindo 8,2 m de comprimento por 1,2 m de largura, trazidos de uma pedreira situada a 960 quilômetros de distância e colocados a 60 m do solo.

Saiba Mais

Como trazer de tão longe e elevar pedras tão grandes e pesadas parece, a princípio, humanamente impossível, existem várias teorias de que a construção das pirâmides do Egito foi feita por – e seria prova da existência de – seres de outro planeta. A mesma argumentação se aplica aos monólitos de Stonehenge, na Inglaterra.

No entanto, o mestre de obras americano Wally Wallington afirmou ter conseguido construir sozinho – e usando apenas madeira, pedras e alavancas – um monumento análogo ao de Stonehenge, deslocando e levantando blocos de concreto com o peso na casa das toneladas. O programa "Fact or Faked", que investiga fenômenos pretensamente paranormais e extraterrestres gravou um interessante vídeo pondo à prova a declaração de Wally. O que será que aconteceu? Para descobrir, acesse o link abaixo.

http://www.syfy.com/videos/Fact%20or%20Faked%20Paranormal%20Files/vid:18692994

Porém, o interesse dos egípcios pelas pirâmides não era apenas religioso e arquitetônico: era também matemático. Mas afinal, matematicamente falando, o que é uma pirâmide? Quais são seus elementos principais? Como calcular a área e o volume de uma pirâmide? Nas próximas seções iremos responder a estas perguntas.

Objetivos de aprendizagem

- Identificar os principais elementos de uma pirâmide
- Calcular área e volume de uma pirâmide
- Identificar os principais elementos de um cone
- Calcular área e volume de um cone
- Reconhecer troncos de pirâmide e do cone

Seção 1
O que são pirâmides?

Matematicamente falando, uma pirâmide é um sólido formado pelo conjunto de segmentos em que uma das extremidades pertence a um polígono e a outra pertence a um ponto V exterior ao polígono. Ou seja, é a reunião dos segmentos VA, VB, VC, VD, VE, VF,... em que A, B, C, D, E, F,... são pontos pertencentes ao polígono e V o ponto que não pertence ao polígono ABCDEF... Espera aí, para tudo ! ! ! Complexo demais ? OK, concordamos!

Vamos fazer assim: dê uma olhada na figura seguinte e leia novamente o que está escrito nas linhas anteriores, procurando identificar nas figuras todos os elementos indicados. Combinado?

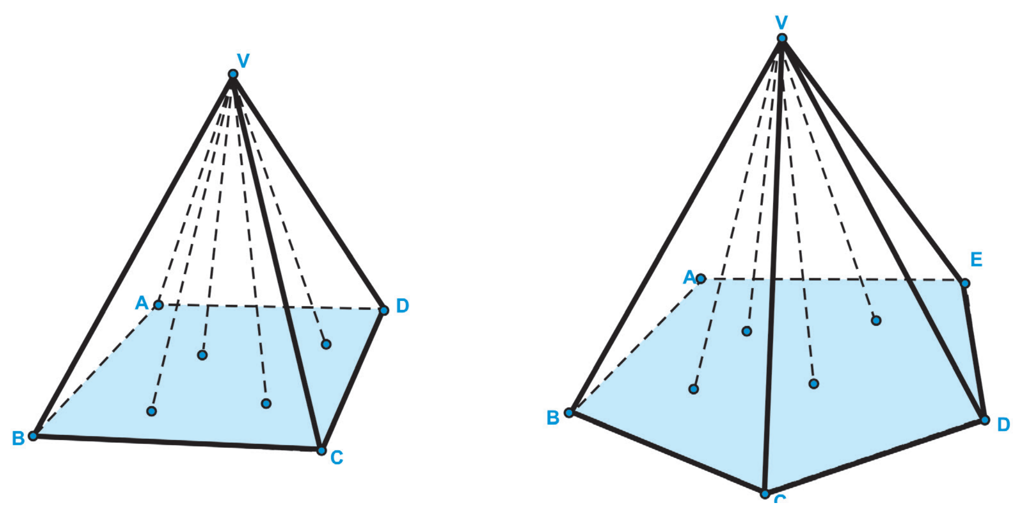


Figura 2: Pirâmides de base quadrangular (à esquerda) e pentagonal (à direita).

Então, primeiramente, conseguiram identificar os polígonos de base? Na pirâmide da esquerda ele é o quadrilátero ABCD e, na da direita, o pentágono ABCDE. E o ponto que é exterior ao polígono, acharam? Nas duas pirâmides ele é o ponto V, para onde convergem os segmentos VA, VB, VC e VD – na pirâmide de base quadrada, da esquerda – e os segmentos VA, VB, VC, VD e VE, na pirâmide de base pentagonal, da direita. A pirâmide é sólida, inteiriça. Assim, os segmentos que vão de pontos interiores ao polígono até o vértice também pertencem à pirâmide. Viram lá? Muito bem. Isto posto, passaremos a um detalhamento dos principais elementos de uma pirâmide.

Os elementos de uma pirâmide

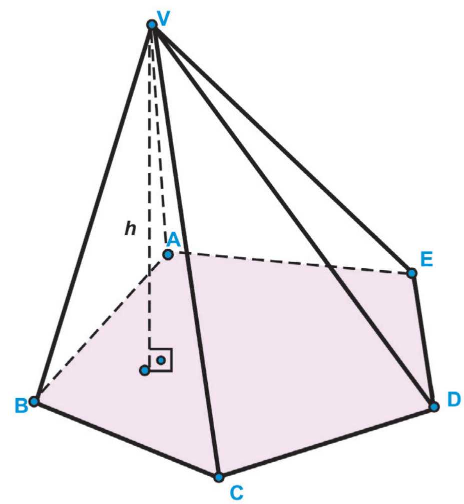


Figura 3: Pirâmide de base pentagonal com a altura destacada.

Para simplificar nosso trabalho na hora de falar das pirâmides, vamos identificar e nomear alguns de seus elementos. O ponto V,fora do polígono, será chamado de vértice da pirâmide.

- O polígono ABCDE será chamado de base da pirâmide.
- Os lados desse polígono (neste exemplo: AB, BC, CD, DE e EA) são as arestas da base
- Os segmentos que têm como uma das extremidades o vértice da pirâmide e cada vértice do polígono (neste exemplo: VA, VB, VC, VD e VE) são as arestas laterais.
- Os triângulos formados pelo vértice da pirâmide e por dois vértices consecutivos da base (neste exemplo: VAB, VBC, VCD, VDE e VEA) são as faces laterais. Importante: a base é considerada como sendo uma face da pirâmide.
- A distância de V ao plano da base é a altura h da pirâmide e esta altura é perpendicular a base.

Importante

Lembra o que é perpendicularidade?

Quando uma reta, ou semi reta ou segmento de reta se intercepta com um plano fazendo um ângulo de 90º dizemos que esta reta ou semi reta ou segmento é perpendicular ao plano.

As pirâmides podem ser classificadas em relação à sua base. Se o polígono possuir 3 lados teremos uma pirâmide triangular (conhecida também como tetraedro), se possuir 4 lados teremos uma pirâmide quadrangular, se possuir 5 lados teremos uma pirâmide pentagonal e assim por diante. Isto tudo posto, que tal fazermos um problema juntos?

A única informação que temos de uma determinada pirâmide é que esta possui 6 faces. A partir deste dado encontre a) a quantidade de faces laterais que ela possui, b) como podemos classificar essa pirâmide em relação à base, c) quantas arestas laterais possui? d) quantas arestas da base possui?

a. Quantas faces laterais possui?

Devemos notar que toda pirâmide tem uma base e faces laterais. Assim o número de faces laterais é sempre o número de faces menos 1 (base). Logo, o número de faces laterais desta pirâmide é igual a 6 – 1 = 5.

b. Como podemos classificar esta pirâmide em relação à base? (ou seja, qual é a natureza desta pirâmide?)

O número de faces laterais é igual ao número de arestas da base (veja as figuras anteriores), pois as faces laterais são triângulos que tem sempre uma aresta da base como um lado. Logo, a base é um polígono de 5 lados, ou seja, é uma pirâmide pentagonal.

c. Quantas arestas laterais possui?

Como já sabemos que é uma pirâmide pentagonal podemos desenhar ou imaginar esta pirâmide e contar o número de arestas laterais. Uma figura que representa esta pirâmide está mostrada a seguir.

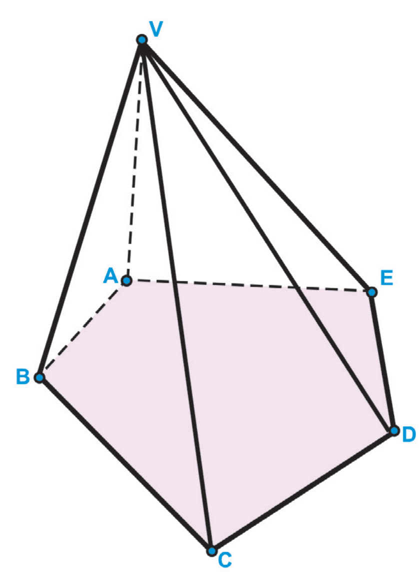


Figura 4: Pirâmide de base pentagonal.

As arestas laterais são VA, VB, VC, VD e VE, portanto são 5 arestas laterais.

É importante percebermos que o número de arestas laterais é sempre igual ao número de lados do polígono da base, pois de cada vértice do polígono “sai” uma aresta lateral.

d. Quantas arestas da base possui?

As arestas da base (ver figura) são AB, BC, CD, DE e EA, ou seja, são 5 arestas da base..

Será que você consegue fazer um problema parecido? Tente não gravar regras e sim fazer o desenho e tirar suas conclusões.

Atividade 1

A única informação que temos de uma determinada pirâmide é que esta possui 8 faces. A partir deste dado responda:

a. Quantas faces laterais possui?

b. Como podemos classificar esta pirâmide em relação à base – ou seja, qual é a natureza desta pirâmide?

c. Quantas arestas laterais possui?

d. Quantas arestas da base possui?

Anote suas respostas em seu caderno

E essa agora? É um pouco mais abstrata, mas tenho certeza de que você vai conseguir!

Atividade 2

A única informação que temos de uma determinada pirâmide é que esta possui *n* faces. A partir deste dado responda:

a. Quantas faces laterais possui?

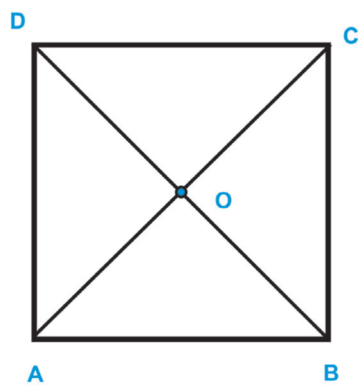
b. Quantas arestas laterais possui?

c. Quantas arestas da base possui?

Anote suas respostas em seu caderno

Pirâmides regulares

Retomando o assunto, vamos falar da pirâmide regular. Pirâmide regular é uma pirâmide cuja base é um polígono regular e as arestas laterais são congruentes entre si (isto é, têm a mesma medida!). Polígono regular, não custa lembrar, é aquele que possui todos os lados e todos os ângulos iguais. Uma característica bem interessante das pirâmides regulares é que, se a virmos de cima, o seu vértice parece ficar bem no meio do polígono que forma a sua base. Resulta disso que a altura h da pirâmide, que faz um ângulo de 90º com o plano em que está o polígono da base, passa exatamente pelo centro deste polígono. Veja na figura



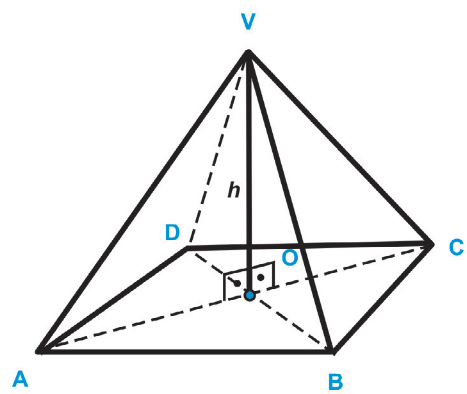


Figura 5: **Pirâmide regular de base quadrangular vista por cima (à esquerda) e de frente (à direita). Como a pirâmide é regular, o polígono da base é um quadrado e todas as arestas laterais são congruentes.**

Atividade inicial: se tiver muita dificuldade, peça ajuda ao seu professor!

Desenhe uma pirâmide de base quadrada, em que as medidas de todas as arestas sejam iguais a 4 cm e depois calcule:

4. A distância do centro da base a qualquer uma das aresta da base;
5. A distância do centro da base a qualquer um dos vértices da base;
6. A altura de cada triângulo – faces laterias – dessa pirâmide;
7. A altura da pirâmide.

E agora, vamos fazer um problema juntos? Muito bem! Lá vai: Um tetraedro regular é uma pirâmide triangular em que todas as arestas (tanto as da base quanto as laterais) são congruentes.

1. Faça um desenho representando esse tetraedro;
2. Trace a altura de uma face qualquer do tetraedro que você desenhou e tente calcular a sua medida. Lembre do que já estudamos sobre o teorema de Pitágoras;
3. Agora trace a altura desse tetraedro e tente calcular a medida dessa altura.
4. Qual é a altura de um tetraedro regular cuja aresta mede 1 cm?

Muito bem, a primeira providência é desenhar este tetraedro e marcar sua altura. Vejam na figura

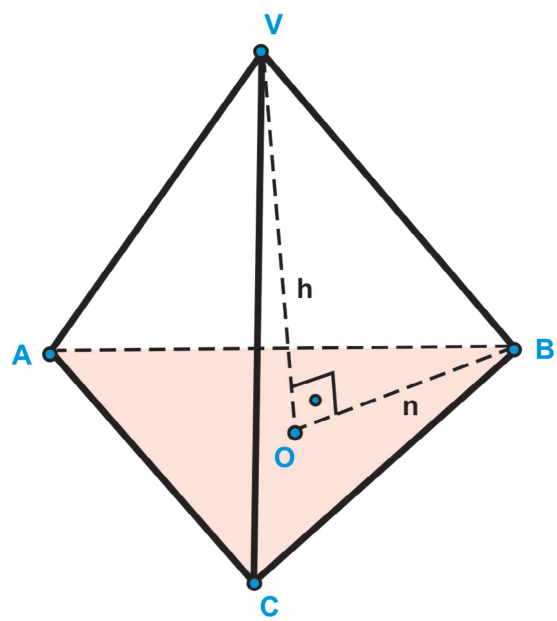


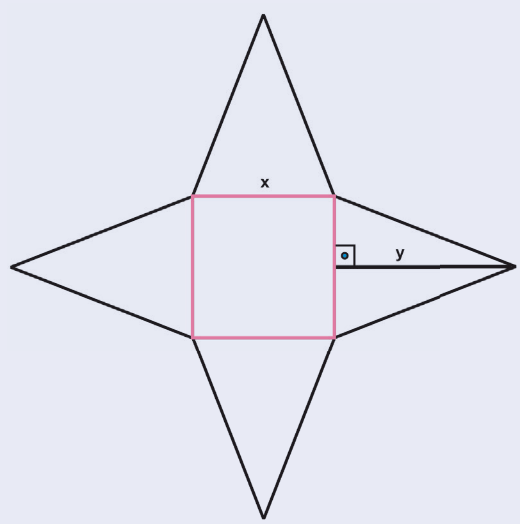
Figura 6: Tetraedro regular.

Acompanhe, então: temos que as arestas VA, VB, VC, AB, AC e BC são todas iguais entre si e de tamanho 1, confere? Muito bem! Isso faz com que as 4 faces do tetraedro sejam triângulos equiláteros, e também de lado 1, OK? Ótimo. Estão vendo o ponto O, no triângulo da base? Então, como o triângulo da base é equilátero e a pirâmide é regular, a altura *h* toca o plano justamente no centro do triângulo equilátero, o tal ponto O. E, relembrando nossa geometria plana, veremos que o centro de um triângulo equilátero está no ponto de encontro entre as alturas dos 3 lados. A distância desse ponto ao vértice vale 2/3 do valor da altura. Revirando mais um pouco o baú da geometria plana, encontramos que a altura de um triângulo equilátero é igual $l\frac{\sqrt{3}}{2}$, onde l é o lado do triângulo. Com tudo isto em mãos, partimos para aplicar um teorema de Pitágoras no triângulo VOB. Encontraram o dito cujo na figura? Então, em frente: $(VO)^2 + (BO)^2 = (VB)^2$. VO é justamente o que queremos calcular, ou seja, o valor de h, e VB é 1, justamente porque todas as arestas tem comprimento 1. Teremos assim que $h^2 + (OB)^2 = 1^2$. Faltaria calcular o valor de OB. A partir do que resgatamos da geometria plana, o valor de OB é justamente 2/3 da altura, que vale $l\,\frac{\sqrt{3}}{2}$. Assim, $OB = l\,\frac{\sqrt{3}}{3}$. Como $l = 1$, $OB = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Aí teremos $h^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1^2$, $h^2 + \frac{1}{3} = 1$, $h^2 = \frac{2}{3}$, $h = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $h = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

E que tal uma atividade por conta própria agora?

Atividade 3

Vilma resolveu construir uma pirâmide regular de madeira. Para tal, ela cortou uma tábua de madeira com o formato da figura mostrada a seguir. Sabendo que x = 80 cm e y = 50 cm, calcule a altura da pirâmide formada.



Anote suas respostas em seu caderno

Existe, nas pirâmides regulares, um elemento bastante importante: o apótema. Chamamos de apótema de uma pirâmide regular a altura de qualquer um dos triângulos que compõem as faces laterais da pirâmide. Geralmente atribuímos a ele a letra *g*.

Chamamos de apótema da base de uma pirâmide regular o segmento m que equivale à menor distância do centro da base até a cada um dos lados do polígono da base, ou seja, a menor distância entre o centro da base (projeção ortogonal do vértice sobre a base) e a aresta da base.

A figura seguinte nos mostra esses elementos.

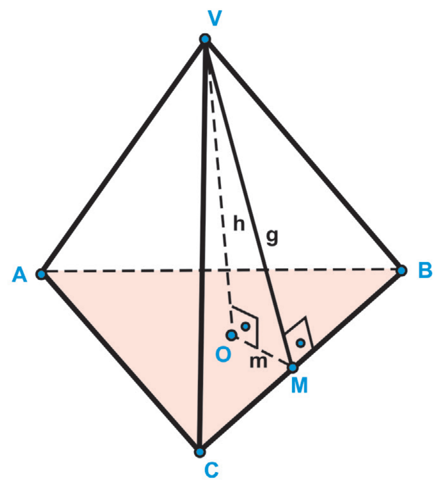


Figura 7: Tetraedro regular com apótema da base (*m*) e apótema lateral (*g*) destacados.

Observe que o triângulo VOM é um triângulo retângulo de catetos h e m, sendo g a hipotenusa. Com alguma contribuição do Teorema de Pitágoras, podemos tirar a seguinte relação: $g^2 = h^2 + m^2$

O teorema a seguir é atribuído ao matemático grego Pitágoras de Samos. Este teorema relaciona as medidas dos lados de um triângulo retângulo.

$a^2 = b^2 + c^2$, onde a é a hipotenusa (lado maior). b e c são os catetos.

Ou seja, o quadrado do apótema da pirâmide regular é igual a soma do quadrado da altura com o quadrado do apótema da base.

Seção 2
Como calcular área e volume de pirâmides?

Figura 8: Acampamento nos montes Pirineus, entre a França e a Espanha. Barracas de acampamento podem ter o formato de sólidos geométricos.

Um grupo de amigos foi acampar e levou uma barraca de lona que, depois de montada tinha um formato de pirâmide regular hexagonal. Um dos amigos decidiu medir a aresta da base e a altura chegando aos valores de 2 m e 3 m, respectivamente. A barraca também cobre o chão. A partir destas informações – e daquilo que já trabalhamos nesta aula – seria possível calcular quantos metros quadrados de lona possui esta barraca? A resposta, você já deve ter imaginado, é sim! Vamos às contas?

Muito bem, a primeira coisa importante a notar é que a pirâmide é regular. Isto significa que as arestas da base são iguais e as arestas laterais são iguais entre si. Vejamos a figura.

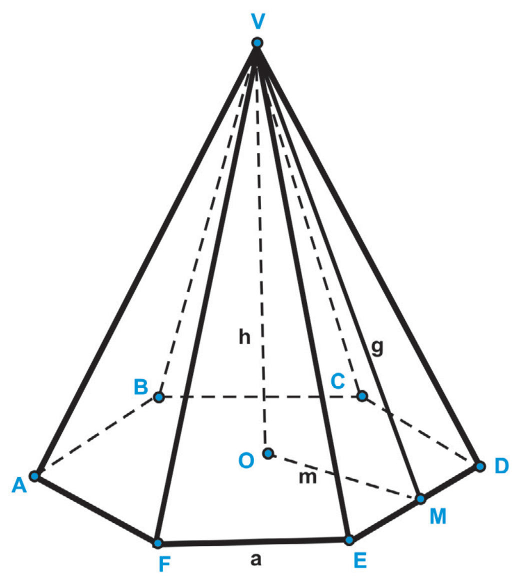


Figura 9: **Pirâmide de base hexagonal com altura *h*, apótema da base *m* e apótema da face *g* destacados.**

Na figura, ***h*** é altura da pirâmide, ***g*** é o apótema da pirâmide, ***m*** é o apótema da base e ***a*** é o lado do hexágono – que também serve de base aos triângulos da face. A área total da barraca seria, então, a soma da área da base com a área lateral. Para calcular a área da base precisaremos calcular a área do hexágono regular de lado a. Como as faces laterais são 6 triângulos isósceles congruentes, a área lateral será seis vezes o valor da área do triângulo de uma das faces. Acompanharam? Muito bem! Então vamos por partes, começando pela área lateral.

Para calcular a área de um triângulo, tomaremos o triângulo VED, veja na figura! Sua área é igual ao produto entre as medidas da base e da altura, tudo isso dividido por dois, lembra-se?, ou seja, $\frac{a \cdot g}{\;}$, confere? Assim, a área lateral é igual a $6\frac{a \cdot g}{2} = 3 \cdot a \cdot g$ como a = 2, substituindo temos: $Al = 6g$. Falta agora calcular o valor de g. Usando o teorema de Pitágoras no triângulo VOM, temos $g^2 = h^2 + m^2$ (*). Para calcular g precisamos calcular m. Para isto vamos destacar a base da pirâmide ABCDEF, veja a figura a seguir:

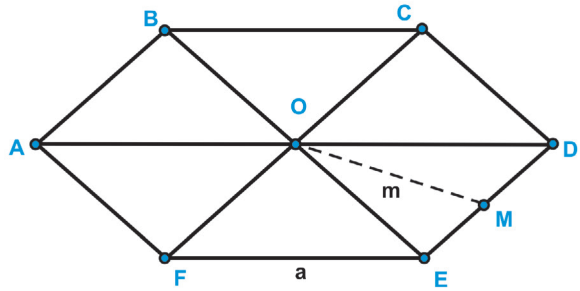


Figura 10: Hexágono que serve de base à pirâmide, com lado *a* e apótema *m* destacados.

Notemos que o hexágono regular é decomposto em 6 triângulos equiláteros, então m é a altura de um triângulo equilátero de lado a , ou seja, $m=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, substituindo a por 2, temos $m=\sqrt{3}$ (**). Sabemos também que $h = 3$ (***). Substituindo (**) e (***) em (*), temos: $g^2 = 3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2$, isto é, $g=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$. Como a área que queremos calcular é $Al = 6g$ então $Al = 12\sqrt{3}\ m^2$. O que nos fornece 20,4 m^2 aproximadamente de lona.

Para calcular a área da base, vamos aproveitar as considerações e contas do parágrafo anterior: o hexágono regular que serve de base à pirâmide é composto de seis triângulos equiláteros de lado a. Como a área do triângulo é igual à metade do produto da medida da base pela medida da altura – que, no parágrafo anterior, já vimos ser igual a $m=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ – teremos que a área de um dos seis triângulos que compõem o hexágono é $At=\frac{\frac{a.\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{a^2.\sqrt{3}}{4}$. Multiplicado por 6, teremos $\frac{6\ .\ a^2.\sqrt{3}}{4}=\frac{3\ a^2.\sqrt{3}}{2}=\frac{3.4\ \sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$. Se lembrarmos que a área lateral era de $12\sqrt{3}$ m^2 e equivalia a, aproximadamente, 20,4 m^2 de lona, teremos que a área da base, por ser igual a $6\sqrt{3}$ (metade da área lateral), equivalerá a, aproximadamente, 10,2 m^2 de lona. A quantidade total de lona na barraca seria, então, de 20,4 + 10,2 = 30,6 m^2. Acompanharam tudo? Excelente!

Vamos agora formalizar um pouco mais, dando os nomes matematicamente mais precisos aos elementos que vocês acabaram de conhecer:

A área da base A_b é a área do polígono da base – no nosso exemplo, o hexágono.

A área lateral *Al* é a área da superfície lateral (união das faces laterais) da pirâmide. Assim a área lateral é a soma das áreas dos triângulos correspondentes à faces laterais. No caso que abordamos, era igual à soma das áreas do seis triângulos.

A área total *At* é a soma da área da base com a área lateral. $At = Ab + Al$

Conseguiram associar? Ótimo! Vamos em frente.

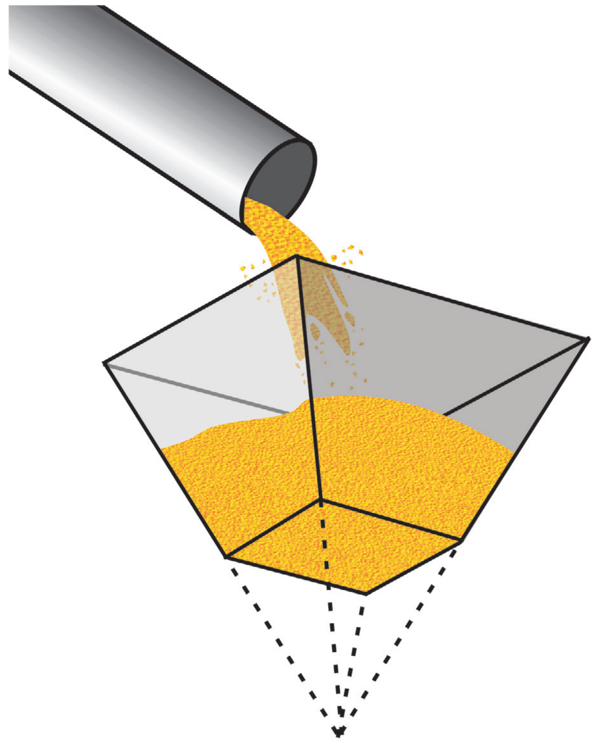


Figura 11: Um tronco de pirâmide que, se invertido como na figura, pode servir como estrutura para armazenamento de líquidos e grãos.

O fato é que os egípcios não usavam as pirâmides apenas para enterrar seus mortos. Em 1893, o egiptólogo russo V. S. Golenishchev comprou um papiro no Egito. O papiro, escrito por volta de 1850 a. C. e hoje conhecido como papiro de Moscou, contém 25 problemas resolvidos de Matemática, mas devido ao seu estado de degradação, era impossível interpretar muitos deles. No entanto, o problema 14, completamente legível, dizia respeito ao cálculo do volume de um tronco de pirâmide usado para armazenar grãos! O tronco de pirâmide é o sólido que obtemos quando "cortamos" o topo de uma pirâmide passando um plano paralelamente a sua base – veja na figura anterior.

Apesar de não apresentarem uma fórmula analítica para o volume do sólido – que só seria criada 3.300 anos depois – o problema no papiro deixa claro que os egípcios se interessavam e sabiam calcular corretamente o volume de um tronco de pirâmide de base quadrada.

Abordar as demonstrações das fórmulas do volume da pirâmide e do tronco da pirâmide seria muito interessante – mas faria com que nossa aula perdesse inevitavelmente seu rumo. Assim, combinamos da seguinte maneira: no que diz ao presente assunto, interessará o fato de o volume de uma pirâmide ser 1/3 do volume do prisma de mesma base e altura, ou seja,

$$\boxed{V = \frac{1}{3} A_b \cdot h}$$

onde *Ab* é a área da base e *h* é a altura da pirâmide. A demonstração dessa fórmula e da fórmula do volume do tronco de pirâmide estarão nos links do box seguinte.

A demonstração de que o volume de uma pirâmide é 1/3 do volume de um prisma de mesma base e altura pode ser feita sem recorrer à matemática avançada. Uma saída bem engenhosa está neste link, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, a UFRGS. http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/atividades_diversas/ativ_wingeo2/volpiramide.html

Já a fórmula do volume de um tronco de pirâmide é o assunto do interessante vídeo "A maldição da pirâmide" da coleção Matemática Multimidia, da Unicamp: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1132

Que tal agora fazermos uma atividade juntos? Então vamos lá: a água da chuva é recolhida em um recipiente em forma de pirâmide quadrangular regular. Sabendo que a água alcança uma altura de 9 cm e forma uma pequena pirâmide de 15 cm de aresta lateral, queremos saber quantos mililitros de água tem nesse recipiente. (dica: 1 dm^3 = 1l)

Bom, o primeiro passo é fazer a figura

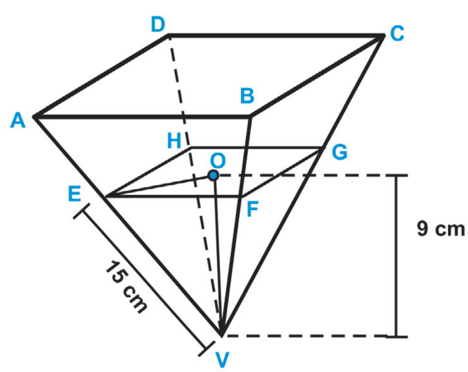


Figura 12: Recipiente para armazenamento de água da chuva em forma de pirâmide quadrangular regular. Água armazenada atinge a altura de 9cm e forma uma pirâmide de aresta lateral igual a 15 cm.

Desenhada a figura, podemos perceber que a água armazenada toma a forma de uma pirâmide invertida, cuja altura tem 9 cm e aresta lateral tem 15 cm. Viram? Muito bem! Como o volume de uma pirâmide é igual a 1/3 do produto da área da base pela altura – e já temos a altura – fica faltando só calcular a área da base, no caso, o quadrado EFGH. A área do quadrado, lembremos, é igual ao quadrado do valor do lado. Assim, se acharmos o tamanho do lado, bastará elevar este valor ao quadrado para acharmos o valor da área. Mas como faremos para achar o lado deste quadrado? Bom, a idéia aqui é perceber duas coisas: a primeira é que existe um triângulo retângulo EOV com dois lados conhecidos – OV é a altura da pirâmide, de 9 cm, e EV é a aresta lateral, de 15 cm. A segunda coisa a perceber é que o terceiro lado, OE, é justamente metade da diagonal do quadrado da base. Dê uma olhada na figura anterior e na seguinte, e veja se consegue enxergar isso.

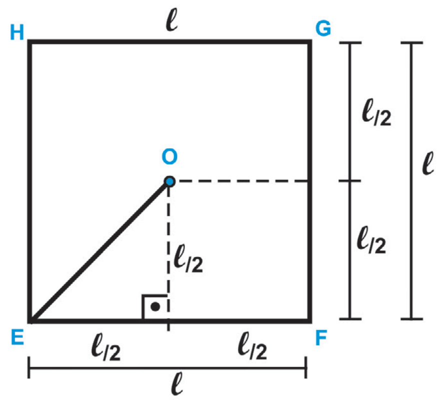


Figura 13: **Quadrado EFGH, de lado l, que é a base da pirâmide formada pela água da chuva no recipiente. O segmento OE, do triângulo retângulo VOE (ver figura 12), está destacado.**

Assim, faremos primeiramente um teorema de Pitágoras para achar o tamanho do segmento OE. Depois, a partir de OE, acharemos o valor do lado do quadrado da base da pirâmide – e, a partir do lado, calcularemos a área da base. Depois é só multiplicar essa área pela altura e dividir por 3. Vamos lá? Coragem, então! O teorema de Pitágoras para o triângulo VOE – veja lá na figura 12 – fica $OE^2 = OV^2 = VE^2$, $OE^2 + 9^2 = 15^2$, $OE^2 = 225 - 81$, $OE^2 = 144$, $OE = 12$. Sabendo o tamanho de OE, vamos à segunda parte.

O segmento OE é a hipotenusa de um triângulo retângulo que tem os dois catetos iguais a $l/2$ – veja lá na figura 13! Mas por que? Porque o ponto O é o centro do quadrado, o ponto E é um dos vértices e as perpendiculares baixadas do ponto O a cada um dos lados vai dividir esses lados, de tamanho l, no meio – daí o $l/2$. Viram? Aqui, o teorema de Pitágoras fica assim: $\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = OE^2$, $\frac{l^2}{2} + \frac{l^2}{2} = 12^2$, $2\frac{l^2}{2} = 144$, $l^2 = 288$ – e aqui paramos! Mas por que parou? Parou por quê? Paramos justamente porque lembramos que o valor da área de um quadrado de lado l é igual ao quadrado do valor do seu lado, l^2 – e que é exatamente esse o valor que encontramos na última etapa, vejam lá. Por isso, em vez de tirar a raiz quadrada para encontrar o lado e, em seguida, elevar ao quadrado para achar a área, vamos direto com o l^2, que é o que nos interessa!

Assim, fechamos o cálculo relembrando a expressão para o volume da pirâmide – $V = \frac{1}{3} . Ab . h$ – e entrando com os valores: $V = \frac{1}{3} . Ab . h$ $\frac{1}{3} . l^2 . 9 = \frac{1}{3} . 288.9 = 288.3 = 846\ cm^3$. Muito bem – mas e os tais mililitros, como ficam? Bom, aqui lembramos que $1dm^3 = 1000cm^3$ e que o mesmo $1dm^3 = 1l = 1000ml$. Assim temos que $1000cm^3 = 1000ml$ e, por conseguinte, $1cm^3 = 1ml$. Logo, $864\ cm^3 = 864\ ml$.

Que tal agora fazerem uma atividade por conta própria?

Atividade 4

Um peso maciço para papel é feito de vidro e tem a forma de um tetraedro regular cuja aresta mede 6 cm. Sabendo que a densidade do vidro é igual a 2,60 g/cm^3, qual é a massa desse peso de papel? (use $\sqrt{2} = 1{,}4$)

Anote suas respostas em seu caderno

E que tal mais essa?

Atividade 5

João vende em sua loja enfeites que possuem formato de uma pirâmide quadrangular cujas arestas laterais são congruentes entre si e as arestas da base medem 18 cm e 32 cm. A altura da pirâmide é de 12 cm. Em um dia João vendeu 100 enfeites deste. Quantos metros quadrado de papel de embrulho João precisou para embrulhar todos os 100 enfeites? (desconsidere as perdas de papel)

Anote suas respostas em seu caderno

Muito bem, pessoal, fechamos mais uma seção ! Esperamos que vocês tenham aprendido a calcular a área e volume de uma pirâmide – e que tenham aproveitado ao máximo o percurso que escolhemos. Tenham certeza que tentamos fazê-lo o mais agradável e interessante possível.

Seção 3
O que é um cone?

Imagine agora que a gente vai fazer uma "pirâmide diferente", substituindo o polígono da base por um círculo. Você consegue visualizar como ela seria? Veja a figura a seguir

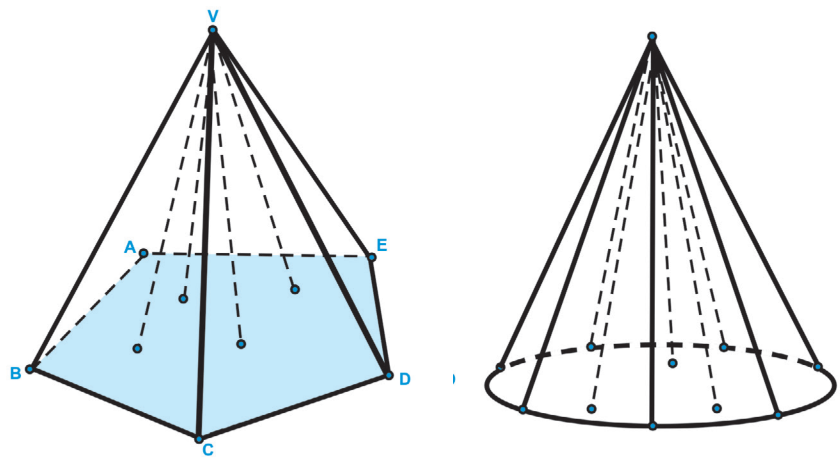


Figura 14: **Substituição da base da pirâmide: sai o polígono, entra um círculo.**

Conseguiram? Muito bem! Então, quando trocamos a base da pirâmide por um círculo, o sólido que obtemos é chamado de cone.

Elementos do cone

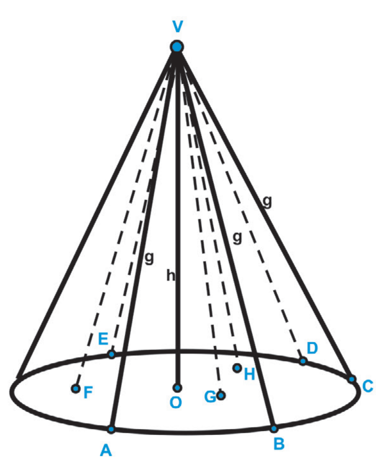


Figura 15: Cone.

Da mesma forma que fizemos com as pirâmides,

- O ponto **V** que está fora do plano da base é chamado de vértice.
- O círculo de centro **O** é a base do cone
- Cada segmento cujas extremidades são o vértice e um ponto da circunferência (não confundir com o círculo) é uma geratriz g do cone. VA, VB, VC, VD e VE são geratrizes. VF, VG, VH e VO não são geratrizes.
- A distância do vértice ao plano da base é chamada de altura h do cone. Na figura, ela é representada pelo segmento VO. Ela incide sobre o centro O do círculo que serve de base ao cone e faz um ângulo de 90º com o plano em que se encontra este círculo.

Um cone pode ser classificado como cone oblíquo ou cone reto. Cone oblíquo é aquele em que a reta que contém o vértice e o centro do círculo não forma um ângulo reto com a base. Cone reto é aquele em que a reta que contém o vértice e o centro do círculo forma um ângulo reto com a base. Veja na figura seguinte.

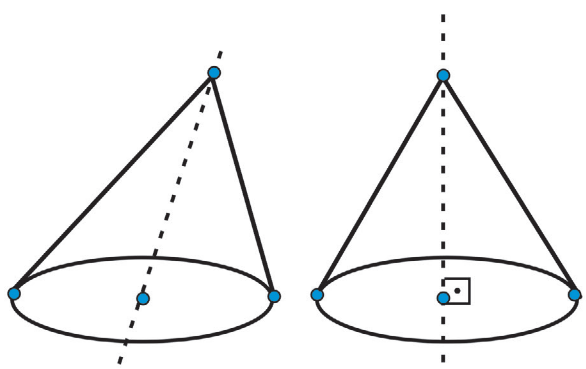


Figura 16: Um cone oblíquo (à esquerda) e um cone reto (à direita).

Seção 4
Como calcular a área e o volume do cone?

Para trabalhar estes conceitos, traremos, novamente, um problema concreto. Prontos? Então vamos lá. Durante as décadas de 1980 e 1990, um doce foi extremamente popular entre as crianças: o guarda chuva de chocolate!!! Ele consistia basicamente num cone de chocolate de aproximadamente 10 cm de altura, embrulhado num papel colorido e com uma pequena alça de plástico em sua base, simulando o cabo do guarda chuva.

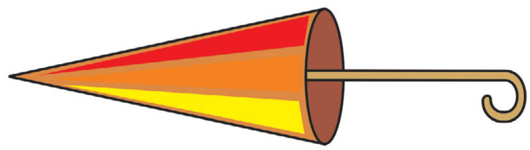


Figura 17: Guarda chuva de chocolate.

Um empresário deseja fazer uma versão atualizada destes doces, sofisticando o produto, tanto em termos de gosto – alterando os sabores do chocolate, fazendo modelos com licor, etc – quanto em termos de embalagem, usando um papel "ecologicamente amigável", mas que ainda mantenha as cores vibrantes das embalagens originais. Como em todo bom plano de negócios, ele precisa saber os custos de produção. Mais precisamente, ele precisa conhecer quantidade de papel necessária para embalar uma unidade e a quantidade de chocolate necessária para fazer uma unidade. Matematicamente, isso se converte em conhecer a área do cone – e, a partir do custo por unidade de área conhecer o gasto para embalar uma unidade – e em conhecer o volume do cone – e, a partir do custo por unidade de volume, geralmente em litros, conhecer o custo da quantidade de chocolate necessária para fazer uma unidade. O cone que será produzido tem altura de 6,5cm e raio da base de 2,5cm.

Pensando na área, o papel deverá cobrir tanto a base do cone quanto a sua superfície lateral, certo? Bom, a base do cone é um círculo, cuja área já conhecemos: $A_{base} = \pi r^2 = \pi(2,5)^2 = 6,25\,\pi\ \text{cm}^2$. Mas e a área da superfície lateral, como faremos?

Vejam na figura seguinte:

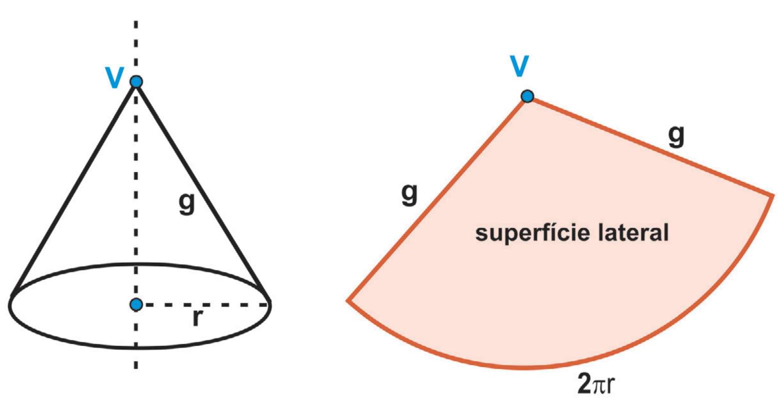


Figura 18: Cone e superfície lateral do cone. Geratriz *g* e raio *r* destacados.

A ideia é fazer um corte no cone seguindo justamente a geratriz ***g***, destacada no cone que está à esquerda da figura anterior. Depois desse corte, a superfície lateral terá o formato do setor circular, mostrado à direita da figura anterior. Nele, é importante observar duas coisas. A primeira delas é que o comprimento do arco subentendido por este setor circular é justamente o perímetro do círculo que serve de base ao cone. Como esse círculo tem raio r, o comprimento do arco é de $C = 2\pi r$. Acompanhem na figura anterior.

Outro ponto a perceber é que o raio deste setor circular formado é igual á geratriz g do cone. Viram? Ótimo! Não viram? Voltem lá e releiam as linhas anteriores até visualizar esta relação. Ela é importante para avançar na compreensão deste conceito. Pronto? Muito bom! Então, recapitulando e olhando para o setor circular: o comprimento do arco subentendido pelo setor é $C = 2\pi r$ e o raio desse setor é g. Isto posto, faremos uma regra de 3: um círculo de raio g subentende um arco de comprimento $C = 2\pi g$ e área $A = \pi g^2$. Já nosso setor circular tem comprimento $C = 2\pi r$ e terá uma área A_l – que é justamente o que nós queremos saber. Vejam só:

Área do setor – Comprimento do arco

πg^2 ––––– $2\pi g$

A_l –––––– $2\pi r$

Assim, teremos $A_l = 2\pi r \,.\, g = 2\pi r \,.\, \pi g^2$, $A_l = \pi rh$

Assim, para calcular a área lateral, precisaremos conhecer o valor r, – que já conhecemos: 2,5 cm – e o valor de g, ainda desconhecido. Para calcular o valor de g, aplicaremos um teorema de Pitágoras envolvendo a geratriz, o raio da base, r, e a altura do cone, h. Veja na figura:

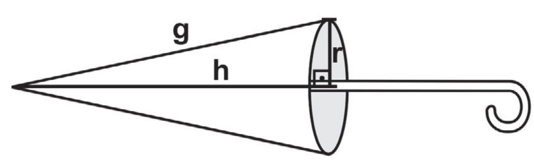


Figura 19: **Cone do guarda chuva de chocolate, com geratriz, raio da base e altura destacados.**

O teorema fica assim: $r^2 + h^2 = g^2$, confere? Substituindo os valores, teremos $(2,5)^2 + 6^2 = g^2$, $6,25 + 36 = g^2$, $42,25 = g^2$, $g = 6,5$ cm. Voltando à fórmula da área do setor circular – que, para lembrar, é área lateral do cone – teremos $A_l = \pi rg = \pi\ 2,5.6,5 = 16,25\ \pi$ cm². E, resgatando o que dissemos no início do problema, em cada guarda chuva de chocolate a embalagem irá cobrir a base e a área lateral. A área da base, já calculamos, é $A_{base} = 6,25\ \pi$ cm². A área lateral, acabamos de calcular, é $A_l = 16,25\ \pi$ cm². Assim, a área total será de $A_{total} = A_{base} + A_l = 6,25\ \pi + 16,25\ \pi$ cm². Se consideramos $\pi \cong 3,14$ teremos uma área total de aproximadamente 70,65 cm². De posse desse valor e do custo por centímetro quadrado de papel, o empresário poderá calcular o custo da embalagem de cada guarda chuva de chocolate.

Finda esta parte do problema, vamos para a parte seguinte: calcular o volume de cada um dos guarda chuvas de chocolate.

Aqui, poderíamos fazer uma analogia: como i) o volume da pirâmide é igual a 1/3 do volume do prisma que tem a mesma base e altura e ii) estamos considerando um cone como uma "pirâmide" de base circular, então o volume do cone também será 1/3 do volume do prisma de mesma base e altura. Logo,

$$\boxed{V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h}$$

onde A_{base} é a área da base e *h* é a altura.

No entanto, é muito importante fazer uma ressalva matemática a este tipo de raciocínio: por mais que uma analogia como essas pareça certa – e, como é o caso, até dê resultados certos – ela não é um método considerado confiável, justamente pela quantidade de vezes que nos leva a conclusões aparentemente verdadeiras mas que, ao fim, podem estar completamente erradas. Assim, matematicamente, valem mesmo as demonstrações – e repetimos aqui o que dissemos anteriormente: como tratar das demonstrações nos faria gastar muito tempo, ficamos com a fórmula e recomendamos aos interessados nos detalhes da demonstração que deem uma olhada no que indicamos no boxe a seguir.

Importante

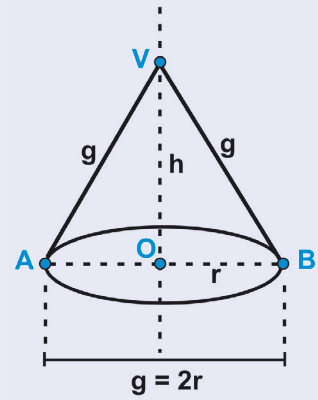
Uma maneira de chegar à fórmula do volume do cone é usando o cálculo diferencial e integral, recurso matemático ensino superior. Outra é estabelecendo uma interessante proporção entre os volumes do cilindro, da semi-esfera e do cone, que remonta ao século III antes de Cristo. O vídeo, da coleção Matemática Multimidia, da Unicamp, está disponível no link: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1040

Isto posto, a solução da segunda parte do problema – a saber, calcular o volume do cone do guarda chuva de chocolate – fica bem tranquila. Temos que $V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h$, onde A_{base} é a área da base e h é a altura. A altura, já sabemos, é de 6 cm. A área da base também foi calculada anteriormente e vale $V_{base} = 6{,}25\ \pi\ cm^2$. Assim, o volume do cone de chocolate é de $V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot 6{,}25 \cdot \pi \cdot 6 = 12{,}5\ \pi\ cm^3$. Se consideramos $\pi \cong 3{,}14$, teremos que o volume de um cone de chocolate é de aproximadamente 39,25 cm^3. Se lembrarmos que um centímetro cúbico é igual a um mililitro e tivermos o custo por litro de chocolate, poderemos calcular o custo de um cone.

E que tal algumas atividades?

Atividade 6

Cone equilátero é um cone reto cuja seção meridiana (plano que contém a reta que passa pelo vértice e pelo centro do círculo) é um triângulo equilátero, conforme mostra a figura a seguir.



Sabendo que o raio deste cone é de 1 cm determine:

a. A área da base do cone,

b. A área lateral do cone

c. A área total do cone

d. o volume do cone

Anote suas respostas em seu caderno

Muito bem, gente! Finalizamos mais uma aula. Desta vez, conversamos sobre os principais elementos, as áreas e os volumes de cones e pirâmides, assunto que tem interessado à humanidade desde o Egito antigo e da Grécia antiga – e olha que isso faz tempo!

Resumo

- Uma pirâmide é um sólido formado pelo conjunto de segmentos em que uma das extremidades pertence a um polígono e a outra pertence a um ponto V exterior ao polígono.
- O polígono é chamado de base da pirâmide e o ponto externo V de vértice da pirâmide.
- A área de uma pirâmide é dada pela soma da área da base com a área lateral: $A_{total} = A_{base} + A_l$.
- A área da base é a área do polígono e a área lateral é a soma das áreas dos triângulos que se formam conectando cada lado do polígono ao vértice.
- O volume de uma pirâmide é dado pela fórmula $V = \frac{1}{3} . A_{base} . h$.
- Um cone é um sólido formado pelo conjunto de segmentos em que uma das extremidades pertence a um círculo e a outra pertence a um ponto V exterior ao círculo.
- O círculo é chamado de base do cone e o ponto externo V de vértice da pirâmide.

- A área de um cone é dada pela soma da área da base com a área lateral: $A_{total} = A_{base} + A_l$

- A área da base é a área do círculo de raio r : $A_{base} = \pi r^2$

- A área lateral é calculada via regra de três:

  Área do setor – Comprimento do arco

  πg^2 – $2\pi g$

  A_l – $2\pi r$

  Onde g é a geratriz do cone.

- O volume de um cone é dado pela fórmula $V = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h$

Veja ainda

Para saciar sua curiosidade indicamos os seguintes endereços:

Em http://www.ime.usp.br/~pleite/pub/artigos/avila/rpm10.pdf podemos ver a reprodução do argumento original de Arquimedes para mostrar as relações entre o volume do cilindro, o do cone e o da esfera. É muito interessante, vale a visita

E em http://www.telecurso.org.br/matematica/?Ypage=2 – no site oficial do Telecurso 2000 – podemos encontrar as aulas de matemática do ensino médio. A aula 65 é exatamente sobre o volume de pirâmides, esferas e cones.

Referências

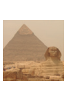
Livros

- Iezzi, G., Dolce, O., Degenszajn, D., Périgo, R., de Almeida, N., *Matemática ciência e aplicações*, vol.1, Ed Saraiva.

- Boyer, Carl B. *História da Matemática*, Ed. Edgard Blücher.

- Eves, Howard, *Introdução a história da matemática*, Ed. Unicamp.

Imagens



- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=787442

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1114076

Respostas das Atividades

Atividades 1

a. 7

b. pirâmide hepatagonal

c. 7

d. 7

Atividade 2

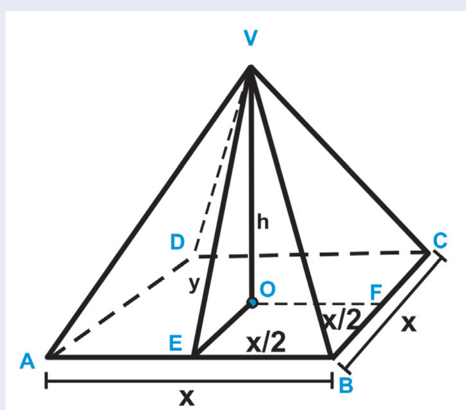
a. n – 1

b. n – 1

c. n – 1

Atividade 3

O segredo aqui está em montar e visualizar a pirâmide a partir do esquema. Vocês conseguiram? Esperamos que sim! Vejam aí:

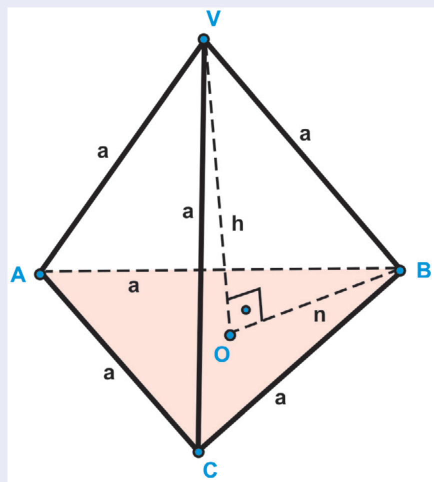


Como a pirâmide é regular, i) o polígono ABCD é um quadrado e O é seu centro ii) a altura h da pirâmide (segmento VO) passa justamente pelo centro O do quadrado e iii) a altura y do triângulo VAB (segmento VE) passa pelo meio do lado AB (ponto E). Segue daí que o triângulo VOE é retângulo. O tamanho do segmento VE é justamente o valor y, 50 cm. Já o tamanho do segmento OE é justamente x/2, ou seja, 40 cm (EOFB é um quadrado e BE é a metade do lado do quadrado da base, que vale x). Assim, aplicamos o teorema de Pitágoras e calculamos: $(VO)^2 + (OE)^2 = (VE)^2$; $h^2 + 40^2 = 50^2$; $h^2 + 1600 = 2500$; $h^2 = 2500 - 1600$; $h = \sqrt[2]{900}$; $h = 30$ cm.

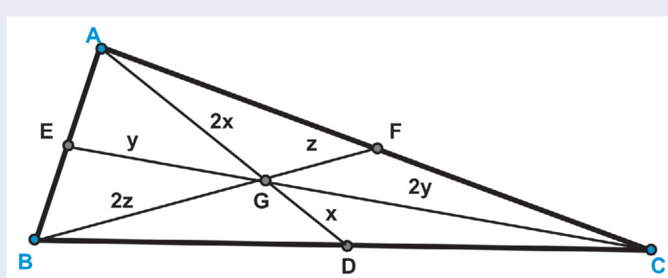
Respostas das Atividades

Atividade 4

Lembrando que um tetraedro regular é uma pirâmide triangular em que todas as arestas (tanto as da base quanto as laterais) são congruentes. Como foi dada a densidade para determinarmos a massa precisamos saber o valor do volume, lembrando que $d = \frac{m}{v}$, onde d é a densidade, m a massa e v o volume. Calculemos então o volume do tetraedro $V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$ (*), vejamos a figura:



Aqui, para o cálculo de *n*, uma pequena lembrança da Geometria Plana: em qualquer triângulo as medianas (segmento com um extremo em um vértice e o outro no ponto médio do lado oposto) cortam-se na razão de 1 para 2. Por exemplo, seja ABC um triângulo qualquer e AD, BF e CE suas medianas e G a interseção destas medianas.



A distância de G aos pontos médios é sempre um terço das respectivas medianas e a distância de G aos vértices é sempre dois terços das respectivas medianas. No caso particular do triângulo equilátero as medianas serão as alturas também.

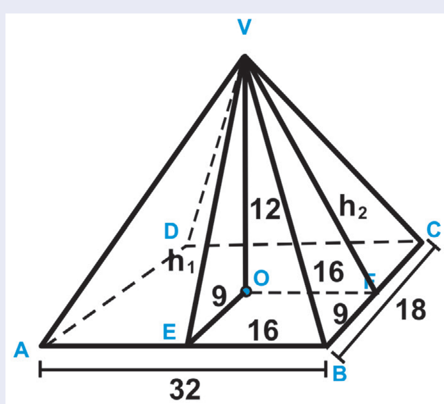
Como o triângulo ABC é equilátero, já vimos que $n = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ (dois terços da altura de um triângulo equilátero.

Usando o teorema de Pitágoras no triângulo VOB, temos: $a^2 = h^2 + n^2$, substituindo o valor de n temos:

$a^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2$, ou seja, $h^2 = a^2 - \frac{a^2}{3}$. Assim $h^2 = \frac{2a^2}{3}$, isto é, $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ (aliás, esta é a fórmula da altura de um tetraedro regular de aresta a). Como a = 6 cm então $h = 2\sqrt{6}$ cm (**). A área da base é a área de um triângulo equilátero de lado a, então $A_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, substituindo o valor de a, temos: $A_b = 9\sqrt{3}$ cm² (***). Substituindo (**) e (***) em (*), temos: $V = \frac{1}{3}\cdot 9\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{6}$, ou seja, $V = 18\sqrt{2}$, substituindo $\sqrt{2} = 1{,}4$, chegamos ao resultado V = 25,2 cm³. Para determinarmos a massa devemos multiplicar a densidade pelo volume, assim m = 2,60·25,2 . Logo, m = 65,62 g.

Atividade 5

Começamos com a figura



Sabemos que a área total da pirâmide é $A_{total} = A_{base} + A\iota$

A área da base é justamente o a área de um retângulo de 18 cm por 32 cm: $A_{base} = 18x32 = 576\ cm^2$. Como a base é retangular, a área lateral é a soma das áreas de dos triângulos VAB, VBC, VCD, VDA, iguais dois a dois. Os triângulos VAB e VCD têm base 32 e altura h_1. Já os triângulos VBC e VDA têm base 18 e altura h_2. Como a área de um triângulo é a metade do produto da sua base pela sua altura e já conhecemos os valor de todas as bases, precisamos agora conhecer os valores das alturas, h_1 e h_2. Para isso, aplicaremos o teorema de Pitágoras nos triângulos VOE e VOF. O triângulo VOE tem como hipotenusa h_1 – confira na figura – e como catetos a altura da pirâmide, 12 cm, e o segmento OE. Como as arestas laterais são congruentes, o segmento VO incide justamente sobre o centro do retângulo, e os segmentos OE e OF têm, respectivamente, metade do tamanho dos lados BC (idêntico a AD) e AB (idêntico a CD). Assim OE= 9 e OF = 16. Assim, para o triângulo VOE o teorema de Pitágoras se escreve

$OE^2 + VO^2 = h_1^2$, $9^2 + 12^2 = h_1^2$, $81 + 144 = h_1^2$, $h_1 = \sqrt{255}$ 15. Já para o triângulo VOF o teorema de Pitágoras se escreve $OF^2 + VO^2 = h_2^2$, $16^2 + 12^2 = h_2^2$, $256 + 144 = h_2^2$, $h_2 = \sqrt{400} = 20$

Assim, o triângulo VAB tem área de ½ x 32 x 15 = 240 cm². Mesma coisa para o triângulo VDC. Já o triângulo VBC tem área de ½ x 18 x 20 = 180. Mesma coisa para o triângulo VAD. Somando os quatro, teremos que $A_{lateral} = 2 \times 240 + 2 \times 180 = 480 + 360 = 840$. Como $A_{total} = A_{base} + A\iota$, teremos $A_{total} = 576 + 840 = 1416\ cm^2$. Multiplicado pelos 100 enfeites, teremos $141600\ cm^2 = 14{,}16\ m^2$.

Atividade 6

a. A área da base do cone

Como a base é um círculo, sua área é $A_b = \pi \cdot r^2$, ou seja, $A_b = \pi \cdot 1^2$. Portanto, $A_b = \pi\ cm^2$

b. A área lateral do cone

Usando a regra de três, sabendo que g = 2·1=2 cm, temos:

Área do setor	Comprimento do arco
$\pi \cdot 2^2$	$2 \cdot \pi \cdot 2$
A_l	$2 \cdot \pi \cdot 1$

Assim $A_\iota = \dfrac{4\pi \cdot 2\pi}{4\pi}$, logo $A_l = 2\pi\ cm^2$

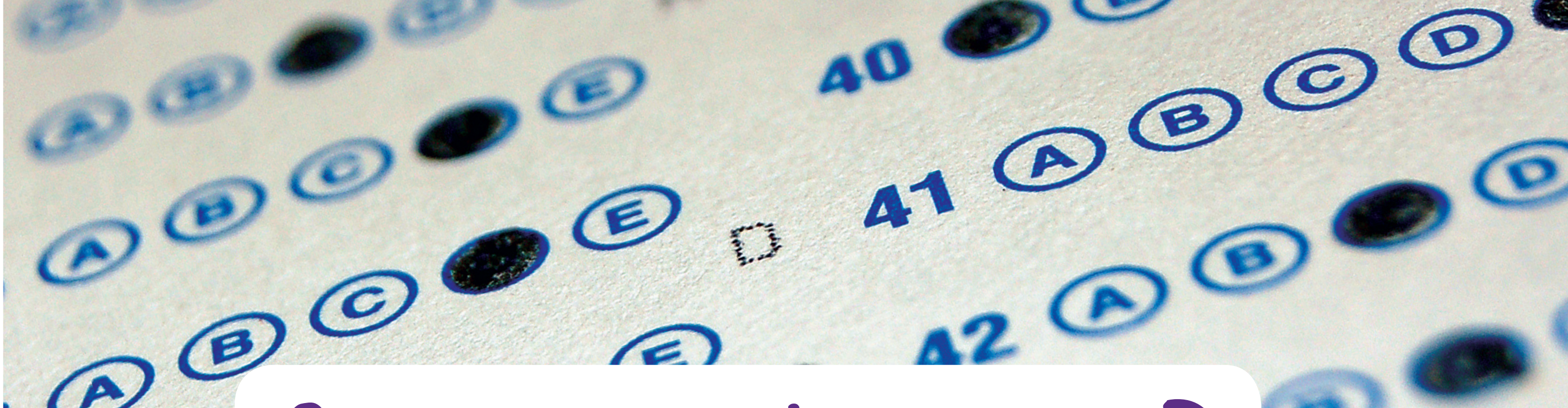
Respostas das Atividades

c. A área total do cone

A área total é $A_t = A_b + A_l$, ou seja, $A_t = \pi + 2\pi$. Logo, $A_t = 3\pi$ cm^2.

d. o volume do cone

O volume é calculado pela fórmula $V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$. A área da base já foi calculada, temos que calcular h, ou seja, a altura do cone. Como o cone é reto, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOB, temos: $h^2 = g^2 - r^2$. Substituindo os valores: $h^2 = 2^2 - 1$, ou seja, $h = \sqrt{3}$ cm. Temos o volume: $V = \frac{1}{3} \pi \cdot \sqrt{3}$. Logo o volume do cone é $V = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ cm^3.



O que perguntam por aí?

Questão 1 (Unirio – RJ)

Um engenheiro está construindo um obelisco de forma piramidal regular, onde cada aresta da base quadrangular mede 4 m e cada aresta lateral mede 6 m. A inclinação entre cada face lateral e a base do obelisco é um ângulo α, tal que:

Dicas:

I. O ângulo α é o ângulo entre o apótema da base e o apótema da pirâmide)

II. Quando aumentos os valores de um ângulo a tangente deste ângulo (entre 0° e 90°) sempre aumenta.)

a. $60° < \alpha < 90°$

b. $45° < \alpha < 60°$

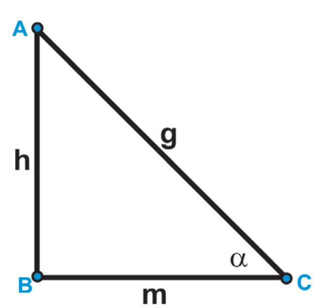
c. $30° < \alpha < 45°$

d. $15° < \alpha < 30°$

e. $0° < \alpha < 15°$

Resposta: Letra A.

Comentário: O ângulo α é o ângulo formado pelo apótema da pirâmide com o apótema da base, destacamos assim o triângulo que contém este ângulo.



Calculando h obtemos, $h = 2\sqrt{7}$, o apótema da base é m = 2, então $tg\alpha = \frac{2\sqrt{7}}{2} = \sqrt{7}$, como a tangente de um ângulo que está entre 0° e 90° sempre aumenta e como $tg60° = \sqrt{3}$ então α > 60°, alternativa A.

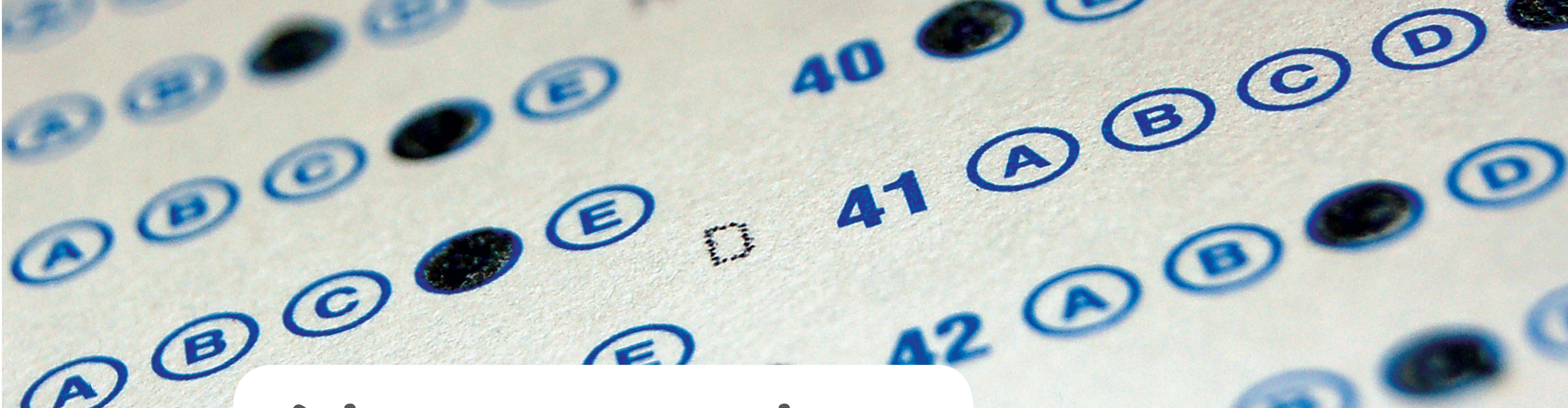
Questão 2 (Cesgranrio – RJ)

Uma folha de papel colorido, com a forma de um quadrado de 20 cm de lado, será usada para cobrir todas as faces e a base de uma pirâmide quadrangular regular com altura de 12 cm e apótema da base medindo 5 cm. Após ter concluído essa tarefa, e levando-se em conta que não houve desperdício de papel, a fração percentual que sobrará dessa folha de papel corresponde a:

a. 20%
b. 16%
c. 15%
d. 12%
e. 10%

Resposta: Letra E.

Comentário: Usando a fórmula $g^2 = h^2 + m^2$, obtemos g = 13 cm. A área da base é 100 cm^2 e a área lateral é 260 cm^2 assim temos que a área total é de 360 cm^2, sobrou portanto 40 cm^2 de papel o que corresponde a 40/400, ou seja 10/100, 10%, alternativa E.



Atividade extra

Exercício 1

Uma pirâmide quadrangular regular tem 4m de altura e a aresta da base mede 6m. Qual o volume dessa pirâmide?

(a) $24m^3$ (b) $38m^3$ (c) $42m^3$ (d) $48m^3$

Exercício 2

Considere uma pirâmide quadrangular regular tem 8cm de altura e a aresta da base mede 12cm. Qual a área total dessa pirâmide?

(a) $378cm^3$ (b) $384cm^3$ (c) $390cm^3$ (d) $396cm^3$

Exercício 3

Uma pirâmide triangular regular tem 5cm de altura e seu apótema da base mede 43cm. Qual o volume dessa pirâmide?

(a) $803cm^3$ (b) $903cm^3$ (c) $1003cm^3$ (d) $1103cm^3$

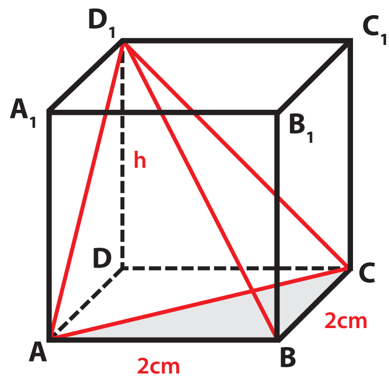
Exercício 4

Uma pirâmide quadrangular regular possui apótema da base 2cm. Qual o valor da área da base dessa pirâmide?

(a) $12cm^2$ (b) $14cm^2$ (c) $16cm^2$ (d) $18cm^2$

Exercício 5

A figura ilustra uma pirâmide inscrita em um cubo cuja aresta mede 2cm.



Qual o volume da pirâmide ABCD1?

(a) $4/3cm^3$ (b) $5/2cm^3$ (c) $2/3cm^3$ (d) $5/3cm^3$

Exercício 6

Uma casquinha de sorvete tem formato de cone reto com geratriz 10cm e raio 6cm. Qual volume dessa casquinha ?

(a) $46cm^3$ (b) $54cm^3$ (c) $96cm^3$ (d) $104cm^3$

Exercício 7

Uma árvore de natal em formato de cone reto possui raio da base 8m e tem 10m de geratriz. Qual a área total dessa árvore de natal?

(a) $132cm^2$ (b) $136cm^2$ (c) $140cm^2$ (d) $144cm^2$

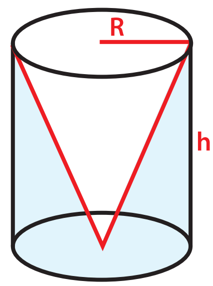
Exercício 8

Considere um cone circular reto cuja geratriz mede 25cm e o diâmetro da base mede14cm. Qual a altura desse cone?

(a) 12cm (b) 18cm (c) 24cm (d) 32cm

Exercício 9

Uma criança colocou uma casquinha de sorvete dentro de uma lata cilíndrica de mesma base, mesmo raio *R* e mesma altura *h* da casquinha.



Qual é o volume do sólido compreendido entre a lata e a casquinha de sorvete?

(a) $\frac{2R^2h}{3}cm^3$ (b) $\frac{R^2h}{2}cm^3$ (c) $\frac{4R^2h}{3}cm^3$ (d) $\frac{R^2h}{3}cm^3$

Exercício 10

Um copinho de sorvete em forma de cone tem diâmetro igual a 5cm e altura igual a 15cm. A empresa fabricante diminuiu o diâmetro para 4cm, mantendo a mesma altura. Em quantos por cento variou o volume?

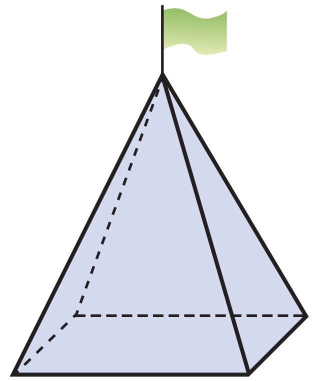
(a) 40% (b) 36% (c) 32% (d) 30%

Exercício 11

A base de uma pirâmide regular *ABCDE* é um quadrado *ABCD* de lado 6cm. A distância de vértice *E* da pirâ-mide ao plano que contém a base é 4cm. Qual o volume do tetraedro *ABDE*?

Exercício 12

O suporte de uma bandeira deve ter a forma de uma pirâmide de base quadrada, com altura 4m e aresta da base 3m, feita de concreto maciço, como mostra a figura.



Determine o volume de concreto (em m^3) necessário para a construção da pirâmide.

Exercício 13

Um cone reto possui diâmetro da base medindo 24cm, geratriz 20cm. Qual a área total desse cone?

Exercício 14

A casquinha de um sorvete tem a forma de um cone reto com raio da base medindo 3cm e a altura de 12cm. Qual é o volume da casquinha?

Exercício 15

A planificação da superfície lateral de um cone é um semicírculo de raio $10\sqrt{3}$ cm. Qual o volume desse cone?

Gabarito

Exercício 1

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 2

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 3

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 4

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 5

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 6

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 7

A B C D

○ ○ ○ ●

Exercício 8

A B C D

○ ○ ● ○

Exercício 9

A B C D

● ○ ○ ○

Exercício 10

A B C D

○ ● ○ ○

Exercício 11

Basta fazer um esboço para entender e aplicar a fórmula. A resposta é $24cm^3$.

Exercício 12

$12m^3$.

Exercício 13

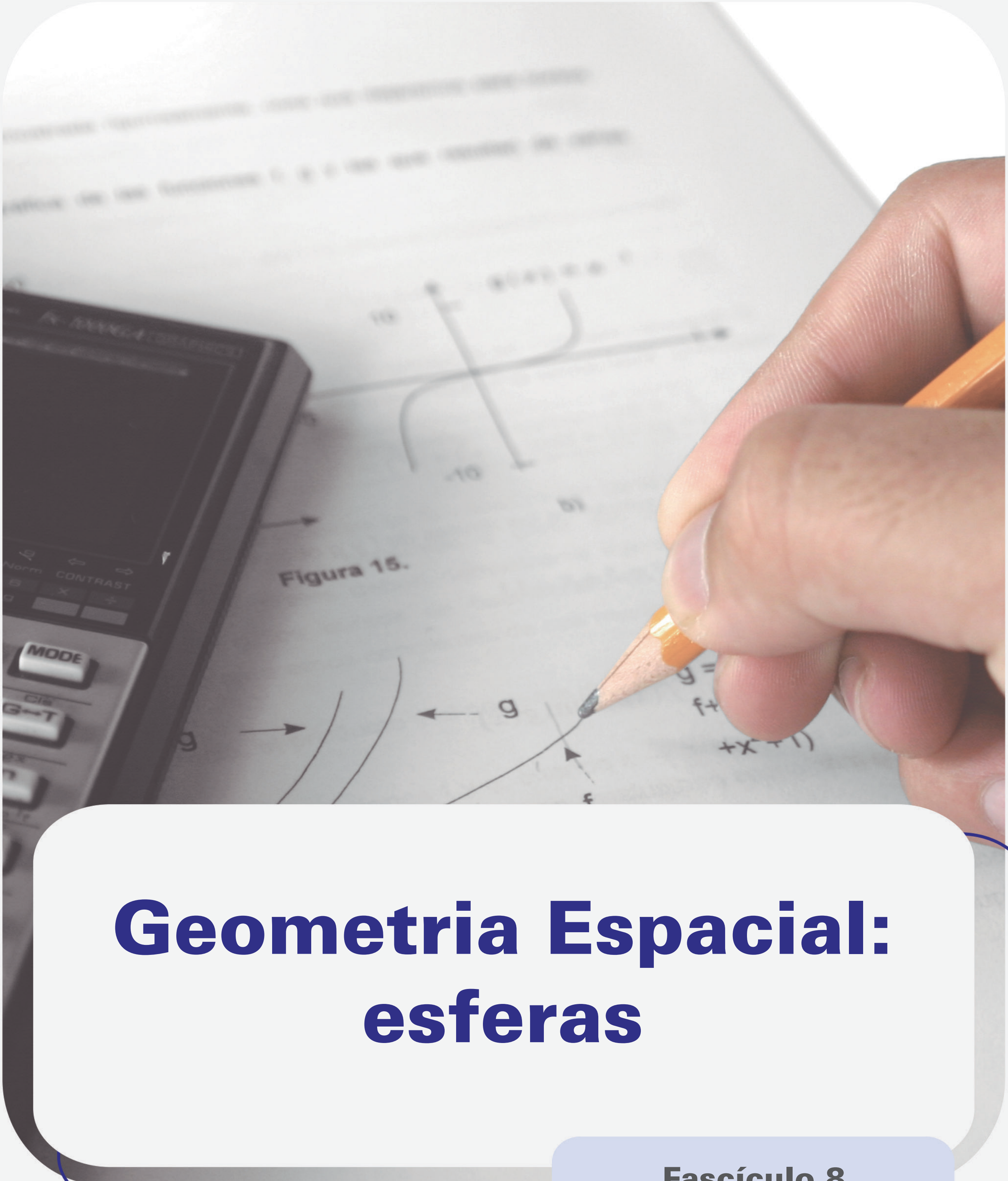
Determine o raio da base e aplique afórmula da área total. Resposta: $1.205{,}76cm^2$.

Exercício 14

Determine o raio da base e aplique a fórmula do volume. Resposta: 113,04cm³.

Exercício 15

Uma questão desafiadora, está aqui como estímulo de aprofundamento. Resposta: 375πcm³.



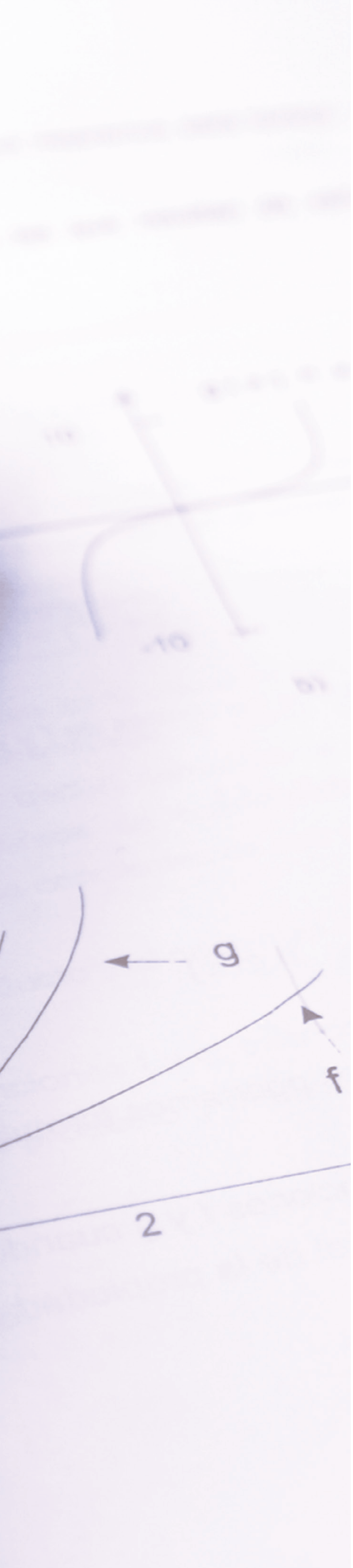
Geometria Espacial: esferas

Fascículo 8

Unidade 25

Fundação CECIERJ

Geometria Espacial: esferas



Para início de conversa...

Um dos mais populares esportes do mundo é o Futebol. Apesar de sua prática ter sido introduzida em nosso país por Charles Miller em 1894, existem registros da prática de atividades similares ao futebol moderno desde 3000 anos aC.

Conta-se que na China os soldados após as batalhas disputavam partidas utilizando as cabeças dos adversários mortos como bolas. Com o passar do tempo utilizaram bolas de couro revestidas de cabelo.

Você deve torcer para algum time, e vibra quando o atacante do seu time consegue fazer a bola transpor a meta adversária. Este ato, no futebol, se chama gol.

Como você deve saber, o maior jogador de todo os tempos é um brasileiro. Edson Arantes do Nascimento, o Pelé. Um mineiro nascido na cidade de Três Corações. Ele foi campeão do mundo aos 17 anos e é reconhecido como o atleta do século, o mais vitorioso e competente esportista de todos os tempos.

Certa, vez, em uma entrevista ele disse: "Se eu pudesse me chamaria Edson Arantes do Nascimento Bola. Seria a única maneira de agradecer o que ela fez por mim..." Mas por que ele enaltece tanto a bola? Bem, se você já viu uma partida de futebol, este esporte, capaz de mover milhões de pessoas, apaziguar nações e também provocar brigas acirradas, gira em torno de um único objeto. A bola.

Figura 1: Uma bola de futebol.

Agora imagine, o atacante de seu time, nos acréscimos do segundo tempo quando a partida está zero a zero. Corre livre de marcação para receber a bola e a bola não pode ser passada porque... ela não gira. Que tristeza. Ainda bem que não é assim.

A bola de futebol precisa ter uma característica fundamental. Ela deve girar sobre seu próprio eixo. Conseguem imaginar uma bola que não seja esférica.

Objetivos desta unidade:

- Reconhecer os elementos de uma esfera
- Calcular a área da superfície esférica e o volume da esfera.
- Calcular a área de um fuso esférico e o volume de uma cunha esférica

Seção 1
O que é uma esfera?

Você já ouviu o termo "esfera"? Sabe dizer exatamente ou, pelo menos, com mais precisão, o que é uma esfera? As figuras seguintes representam objetos muito comuns em nosso cotidiano cuja forma se assemelha ao que chamamos de esferas. Você sabe dizer o que eles têm em comum?

Figura 2: Um limão, uma lima e uma laranja; bolas de natal; bolas de boliche e bola de futebol.

E então, conseguiu descrever precisamente o que é uma esfera? Conseguiu identificar seus elementos principais? Aliás, você sabe como calcular a área e o volume de uma esfera? Nas próximas seções iremos responder a estas perguntas!

Vendo esferas onde não podia ver...

Vamos agora refletir um pouco sobre os objetos que vimos representados pelas figuras das páginas anteriores? O que eles têm em comum uns com os outros?

Bom, imagine se cortássemos ao meio todos estes “objetos”. O que veríamos na parte cortada? Um círculo, concordam? Vejam na figura seguinte.

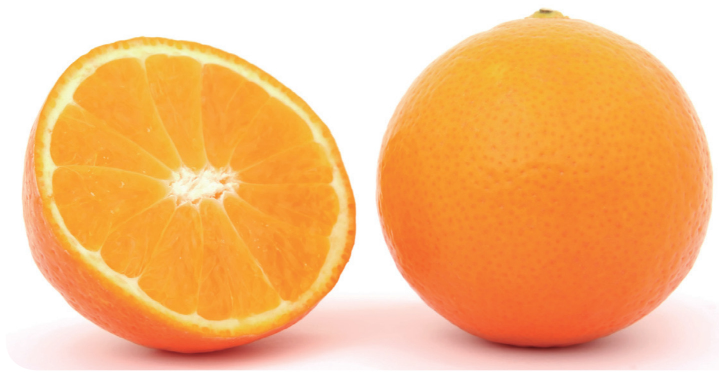


Figura 3: À direita, uma laranja inteira. À esquerda, a laranja cortada exatamente ao meio.

E se não cortarmos ao meio, se cortarmos em qualquer outra parte, o que veremos na seção cortada? São círculos também, só que menores que os que podemos ver quando imaginamos os cortes pelo meio. Vejam na figura seguinte:

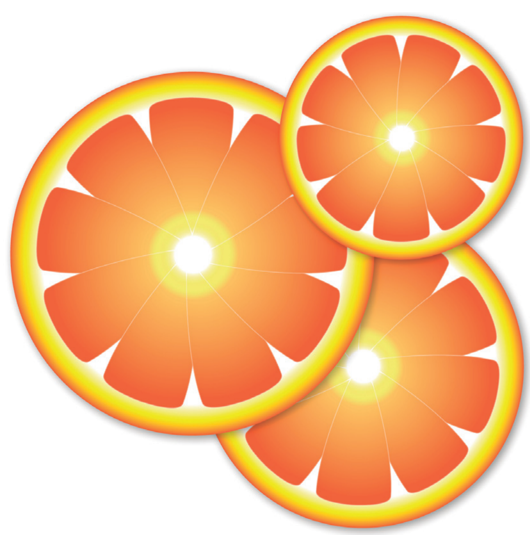


Figura 4: Seções produzidas quando cortamos uma laranja sem passar exatamente pelo seu centro.

Pois é isso o que todos têm em comum! Quando os cortamos com um plano em qualquer lugar, o que vemos são círculos!

Agora, vamos voltar ao assunto que é paixão nacional. O futebol. Abaixo, segue a imagem da bola de futebol que nos referimos no inicio. Assim, poderemos entender mais algumas coisas sobre a definição de esfera.

No passado a bola de futebol era construída com couro animal. Atualmente existem materiais diversos com os quais é possível fazer este objeto, o principal deles é o couro sintético. Elas são cheias de ar para que possam se manter infladas

Figura 5: **Outra bola de futebol, nos mesmos moldes da primeira: uma esfera de vidro contendo gás com baixa pressão e um eletrodo no centro.**

A capa de couro sintético constitui numa superfície curva, no formato de uma bola. Esta superfície recebe o nome de casca esférica. Sua função é a de limitar o ar necessário para manter o objeto inflado que vimos na figura anterior.

Se adicionarmos a capa de couro – que, repetimos, é apenas uma borda, uma casca – tudo aquilo que está em seu interior, teremos o que chamamos de esfera.

Importante

Casca esférica é apenas a borda – em nosso caso, a superfície curva de couro que tem o formato de uma bola. Esfera é o conjunto que contem a casca esférica e tudo que está em seu interior – em nosso caso, capa de couro mais o ar.

Podemos fazer uma analogia com uma laranja com formato redondo, esférico. A casca da laranja é a superfície esférica enquanto toda a laranja (casca mais gomos) é a esfera.

Uma propriedade muito importante é que, em toda a esfera, há sempre um ponto central, sua distância até a cada ponto da casca esférica (capa de couro) é constante.

Podemos formalizar um pouco os conceitos até agora discutidos da seguinte forma:

Dado um ponto O e uma distância r, chamamos de esfera ao conjunto de pontos cuja distância até o ponto O é menor ou igual ao raio r. Se essa distância for exatamente igual a r, chamamos o conjunto de pontos de superfície da esfera, pois, neste caso, estaremos tomando somente a "casca" da esfera (em cinza escuro). Se a distância for menor do que r, teremos apenas o "miolo" da esfera (em cinza claro). Vejam na figura seguinte

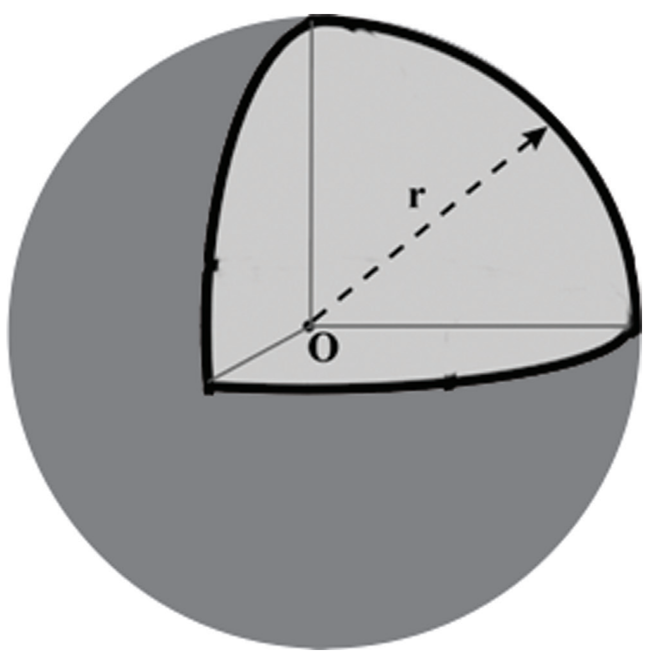


Figura 6: Esfera, com centro *O* e raio *r* destacados.

A superfície esférica e a esfera podem ser definidas também como superfície ou sólido de revolução, respectivamente. Se girarmos uma semicircunferência completamente – ou seja, 360º – em torno de um eixo que contém seu diâmetro obtemos uma superfície esférica.

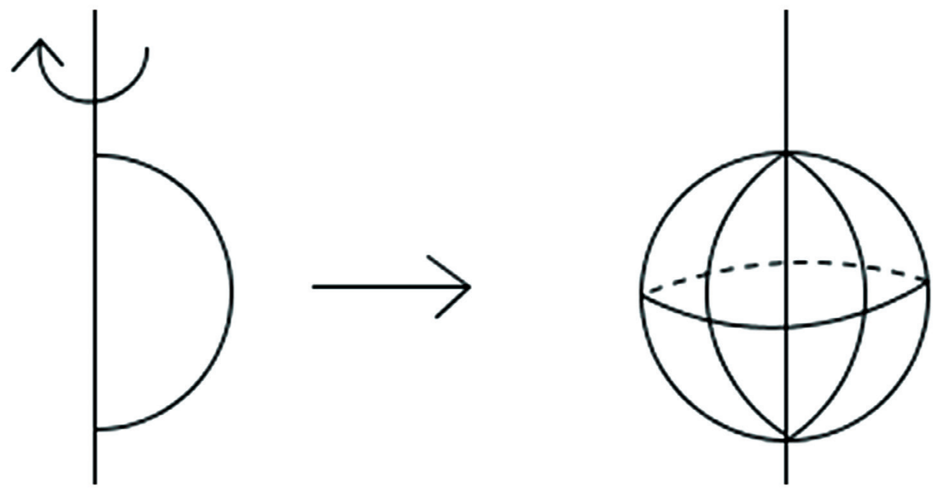


Figura 7: Superfície esférica gerada por rotação da semicircunferência em torno do eixo.

Vale relembrar aqui que a circunferência é, por assim dizer, apenas a borda do círculo – e que semicircunferência é metade de uma circunferência. Agora, se girarmos um semicírculo completamente – ou seja, 360º – em torno de um eixo que contém o seu diâmetro, obteremos uma esfera. Lembramos aqui que um semicírculo é a metade de um círculo – que é a figura completa, miolo mais borda.

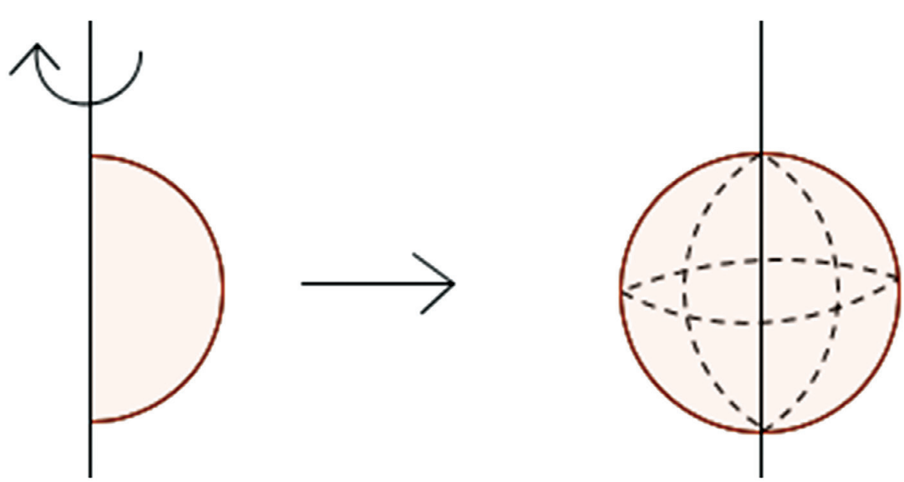


Figura 8: Esfera gerada por rotação do semicírculo em torno do eixo.

Atividade 1

Dê exemplos de objetos reais que podem ser considerados superfícies esféricas e outros que podem ser considerados esferas.

Anote suas respostas em seu caderno

Seção de uma esfera

Alguém quer um coco aí?

Figura 9: Também podemos considerar que um coco tem uma forma que se assemelha à de uma esfera.

O coco é uma fruta muito apreciada pelos frequentadores das praias de todo o nosso estado. Os vendedores de coco têm uma habilidade incrível para cortá-lo e deixa-lo tal como na imagem anterior

Se considerarmos um coco como uma esfera, o tampo retirado pelo vendedor para que a gente possa beber sua água é chamado de seção da esfera. Como havíamos comentado no início desta unidade, esta seção (sendo plana) deixa uma marca circular no coco. Será que a gente consegue saber mais informações sobre essa seção circular?

Vamos dar uma olhada no esquema a seguir:

Se tomarmos o coco como uma esfera de raio R e centro O e fizermos um corte (com o facão do vendedor, para abrir o coco), como mostra a figura abaixo, então a interseção deste plano com a esfera será um círculo de raio R' e centro O'.

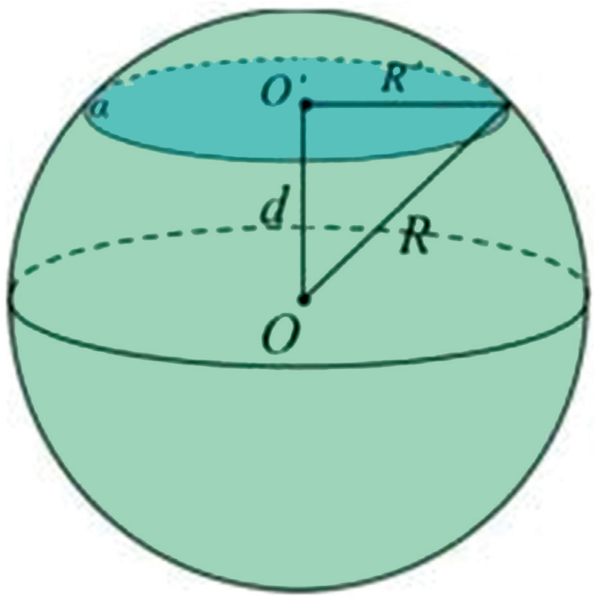
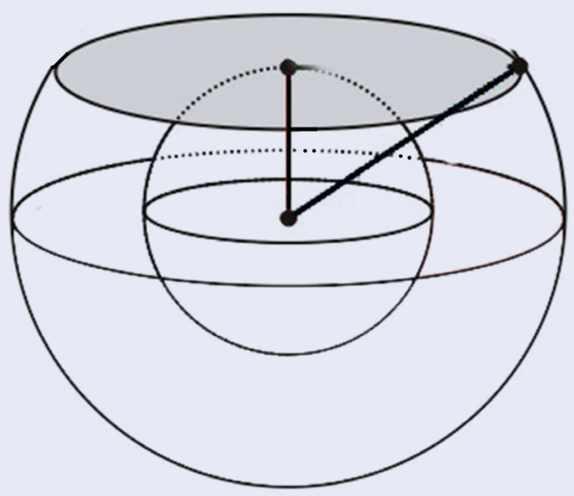


Figura 10: **Esfera com centro** ***O*****, raio R e seção** ***α*****, com centro** ***O'*** **e raio** ***R'*** **destacados.**

Desta figura podemos obter a seguinte relação: $R^2 = d^2 + R'^2$ (teorema de Pitágoras), onde d é a distância do ponto O ao ponto O'.

Atividade 2



Observe o coco representado na figura. Note que ele é constituído de uma parte exterior, uma parte interior e, bem no centro, há uma outra esfera onde fica a água. Vamos considerar que as duas esferas são concêntricas (têm o mesmo centro) e que a menor tem raio igual a 6 cm. Um vendedor passa um facão de forma plana e tangente à esfera menor. Na esfera maior, fica determinada uma seção – marcada em cinza – cuja área é igual a $64\pi cm^2$. Determine o raio *r* da esfera maior.

Anote suas respostas em seu caderno

Os elementos de uma esfera

Na seção 1.1, falamos um pouco sobre os elementos principais de uma esfera, a partir da bola de futebol que encanta tantos brasileiros. Agora, vamos dar uma olhada de uma maneira mais formal nestes elementos e aproveitar o ensejo para apresentar outros. Acompanhe na figura a seguir!

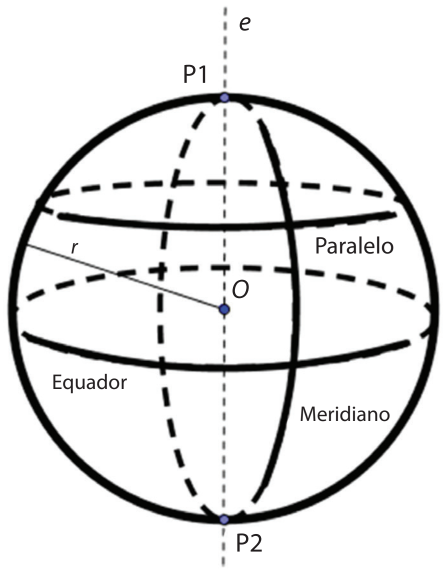


Figura 11: Esfera com os principais elementos destacados.

Considerando a esfera acima temos os seguintes elementos:

- O ponto **O** é o centro da esfera
- O raio ***r*** é a distância do ponto da superfície da esfera até o centro
- O eixo ***e*** é a reta que contém o diâmetro
- Pólos **P1** e **P2** são as interseções da superfície com o eixo
- Equador é a seção (circunferência) perpendicular ao eixo e que contém o centro da esfera.
- Paralelo é uma seção (circunferência) perpendicular ao eixo e que não contém o centro da esfera.
- Meridiano é uma seção (circunferência) que contém o eixo.

Seção 2
Como calcular área e volume de esferas?

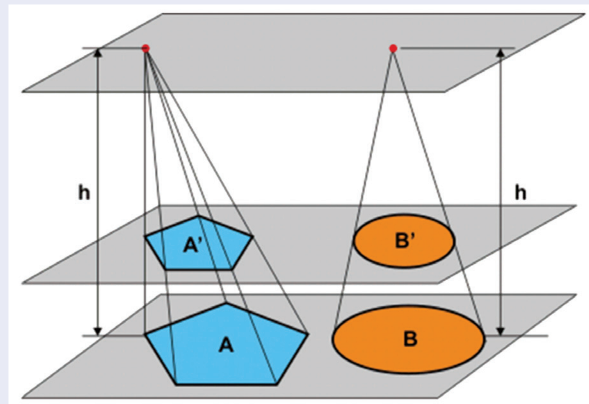
Volume da esfera

Qual seria a quantidade necessária de ar para que a bola de futebol fique inflada? Como podemos saber o quanto de gás pode ser colocado dentro da bola de futebol para mantê-la em condições de uso? Qual é essa capacidade? Para responder a essas perguntas, precisamos calcular o volume de uma esfera. Volume, convém lembrar, é a capacidade interna de um objeto, seja ele de que formato for.

Como a esfera é um corpo redondo, não podemos fazer aproximações por cubos como fazemos em um paralelepípedo. Então como podemos calcular seu volume? Uma forma de realizarmos este cálculo é usarmos o princípio de **Cavalieri** estudado anteriormente e compararmos as seções de uma esfera com as de uma anticlépsidra.

Cavalieri

O princípio de Cavalieri foi estabelecido no século XVII pelo matemático Italiano Bonaventura Cavalieri e, até os dias de hoje, serve como base para uma grande quantidade de estratégias de cálculo de volumes de sólidos. De acordo com esse princípio, sólidos que 1) tenham a mesma altura e 2) tenham a mesma área de seção transversal para todas as alturas intermediárias terão o mesmo volume. Na figura acima, como os dois sólidos têm a mesma altura h, basta que as áreas das seções A´e B´ sejam sempre iguais para que os sólidos tenham o mesmo volume.



Uma anticlépsidra, antes que você pergunte, é um sólido geométrico obtido retirando uma clépsidra de dentro de cilindro equilátero. E, antes que você diga que a explicação mais atrapalhou do que ajudou, lembramos a você que uma clépsidra é o sólido obtido com a união de dois cones invertidos. Lembramos também que um cilindro equilátero é aquele cujo diâmetro da base é igual à altura. Veja na figura

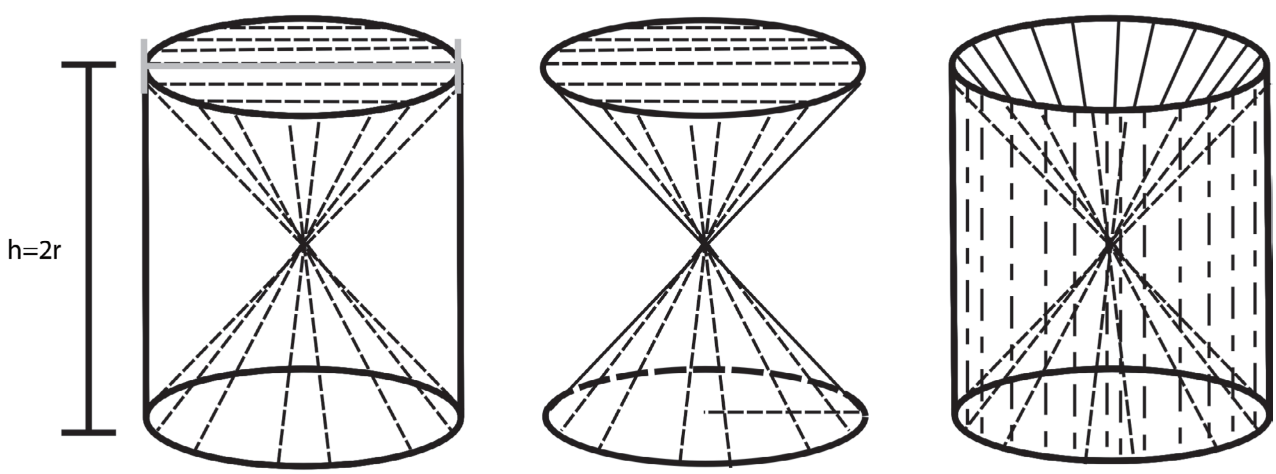


Figura 12: Cilindro equilátero, clepsidra e anticlépsidra.

Então vamos lá: o sólido à esquerda é um cilindro equilátero, cuja altura h é igual ao diâmetro 2r da circunferência da base. O sólido do centro é a clepsidra, união de dois cones invertidos, cujas bases coincidem com as do cilindro. E, se fizéssemos uma espécie de escultura no cilindro, removendo exatamente a parte da clepsidra, o sólido resultante seria a anticlépsidra, representada na direita da figura. Entenderam? Ótimo!

Agora, você pode estar se perguntando, e muito justamente, como é que nós vamos fazer para juntar uma esfera com uma anticlépsidra para usar o princípio de Cavalieri – afinal, são sólidos a princípio bem diferentes! Nossa resposta é franca: a forma de relacionar a esfera com a anticlépsidra nem é assim tão complexa, mas envolve umas contas que fariam com que nossa aula perdesse seu rumo.

Assim, vamos combinar o seguinte: para efeito da nossa aula, o importante é entender que, após alguns cálculos, podemos demonstrar que o volume de uma esfera é $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$. Caso você tenha curiosidade acerca da demonstração desta fórmula, consulte o boxe a seguir.

A interessante demonstração da fórmula do volume da esfera via princípio de Cavalieri tem por base o fato de que a área da seção transversal da anticlépsidra é sempre idêntica à área da seção transversal de uma esfera de mesma altura. Ela está bem detalhada no livro "Fundamentos da Matemática elementar, volume 10", escrito por Oswaldo Dolce e José Nicolau Pompeo e publicado pela Editora Atual. Outra boa dica é procurar o site http://alfaconnection.net/pag_avsm/geo1601.htm#GEO160102.

Saiba Mais

Vamos dar uma olhada nesta fórmula: o volume V da esfera vale 4/3 (uma constante) multiplicado por π (outra constante), multiplicado pelo valor do raio elevado ao cubo. Assim, podemos afirmar o volume de uma esfera depende exclusivamente da medida do seu raio. Isto é muito simples, não acham?! Vamos aqui pensar uns dois problemas e fazer umas contas para conferir.

O primeiro problema é o seguinte: se duplicarmos o raio de uma esfera, seu volume fica duplicado também? O que você acha? A resposta é sim?

Bom, a verdade é que a resposta é não. Acompanhe a gente aqui: se uma esfera tem raio R então seu volume é $V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$, ok? Então se duplicarmos o raio desta esfera teremos um novo volume $V' = \frac{4}{3}\pi \cdot (2R)^3$, ou seja, $V' = 8 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$.

Isto significa que o volume desta esfera fica multiplicado por 8.

O segundo problema é assim: três esferas de gelo, todas de raio 2cm, são derretidas. Julião comprou um recipiente com raio três vezes maior que as esferas de gelo para que, ao final da fusão, toda a água fosse despejada nele preenchendo-o completamente. Julião conseguiu o que pretendia?

Figura 13: Cuba de gelo.

Bom, acompanhe as contas aqui: o volume de cada esfera de gelo é $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$, ou seja, $v = \frac{32}{3} \cdot \pi$. Como temos 3 esferas de gelo então o volume total de água produzido foi de $v = 32\pi\ cm^3$. Por outro lado, o volume do recipiente comprado por Julião é $v = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6^3$, ou seja, $v = \frac{216}{3} \cdot \pi = 72.\pi\ \text{cm}^3$. Assim, o recipiente comprado por Julião não foi completamente preenchido – e, se lembramos que a metade de 72 é 36, poderíamos ainda dizer que a água resultante do derretimento das 3 esferas, de volume total igual a 32 π cm^3, não foi suficiente para preencher nem a metade dos 72 π cm^3 do recipiente comprado por Julião. Para calcular o raio do recipiente que seria completamente preenchido pela água advinda do derretimento das esferas, fazemos assim: para ser completamente preenchido, o recipiente precisaria ter 32π cm^3, certo? Então teríamos que $32\pi = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$, onde R é o raio do recipiente esférico. E, desenvolvendo, teríamos que $R = \sqrt[3]{24}$, ou seja,. $R \cong 2{,}89\ cm$

É importante ressaltarmos neste exemplo que ao juntarmos 3 esferas de raio 2 cm não obtemos uma esfera de raio 6cm, mas sim uma nova esfera de raio aproximadamente 2,89 cm. O que mostra que devemos tomar muito cuidado com as deduções precipitadas!

Área da esfera

E como poderíamos calcular a quantidade de couro, mesmo que de uma camada muito fina, necessário para fazer a bola de futebol? É como se quiséssemos calcular a área de toda a casca de uma laranja cortada. Em outras palavras, estamos querendo discutir sobre como podemos calcular a área de uma superfície esférica.

Aqui, seguiremos o mesmo caminho da seção sobre volume: apresentaremos uma ideia básica dessa demonstração, a fórmula – que nos interessa mais diretamente – e um box para os que se interessarem na demonstração em mais detalhes.

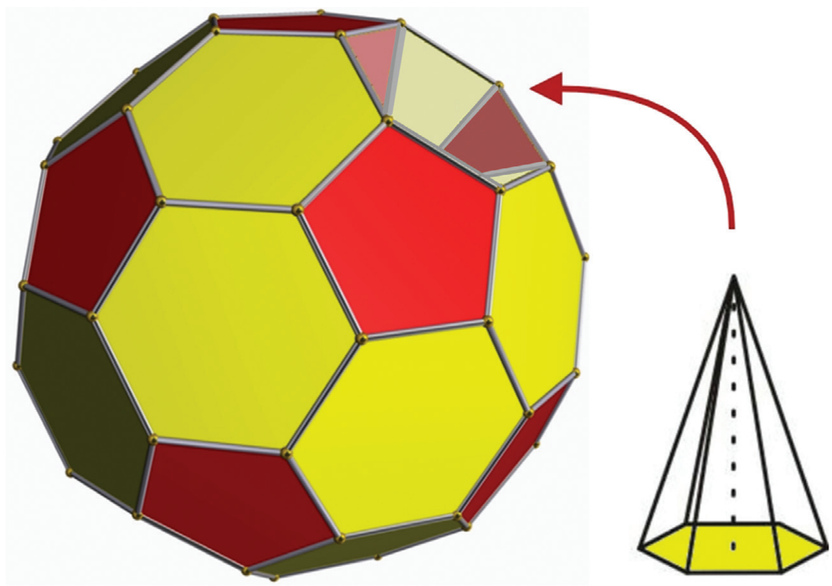


Figura 14: O icosaedro da figura pode representar uma das etapas da aproximação do volume de uma esfera pela soma dos volumes de pirâmides cujo vértice coincide com o centro da esfera e cuja base coincide com a superfície da esfera.

Muito basicamente, a ideia é tentar aproximar o volume da esfera pela soma do volume de várias pirâmides cujos vértices coincidam com o centro da esfera e cujas bases coincidam com a superfície da esfera. Evidente que, como a superfície da esfera é curva e a base da pirâmide é plana, sempre haverá uma diferença de volume. No entanto, na medida em que a quantidade de pirâmides for aumentando e sua base diminuindo, essa diferença de volume irá diminuindo. Quando a base de cada pirâmide for muito pequena – e eis o que nos interessa aqui – a área da esfera será $A = 4\pi \cdot r^2$. Curiosos em relação aos detalhes da demonstração? Vejam no boxe seguinte:

Importante

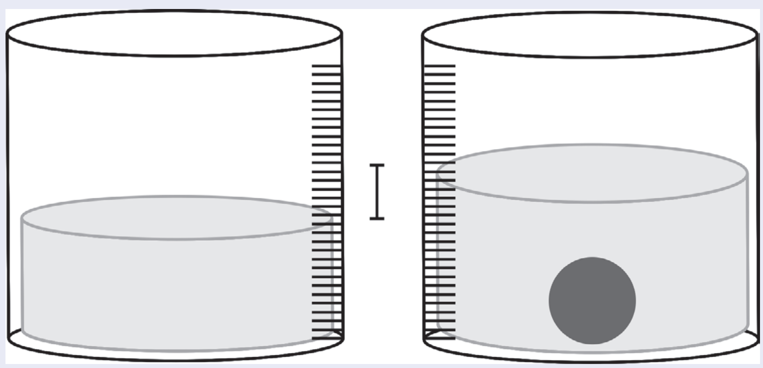
A dedução completa da fórmula da área da esfera a partir da aproximação com as pirâmides pode ser encontrada no livro "Matemática" do autor Luiz Roberto Dante, da editora Ática, volume único, na página 394 da 1ª edição. Caso queira conhece-la online, a sugestão é o site http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2011/09/area-da-superficie-esferica-partir-de.html.

Vamos fazer juntos um exemplo? Pois bem, a situação é a seguinte. Márcio está numa festa e deseja encher uma bola com água. Para isso precisa saber aproximadamente seu volume. No entanto, ele não consegue encontrar essa informação. A única coisa que ele sabe é o diâmetro da bola: 18 cm. Será que ele tem como calcular o volume a partir do diâmetro?

Bom, como você já deve estar imaginando a resposta é sim – afinal, não usaríamos como exemplo um problema sem solução! Então veja lá: como a bola possui 18 cm de diâmetro então seu raio mede 9 cm. Usando a fórmula de volume temos: $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 9^3$. Logo $V = 972 . p$. Logo, o volume é de 972.π cm^3. Se tomarmos o valor de π como aproximadamente 3,14, teremos que o volume total da bola é algo em torno de 3052 cm^3. Como 1000 cm^3 equivalem a 1 litro, a bola teria capacidade para aproximadamente 3 litros de líquido.

Entenderam? Ótimo! Que tal tentarem fazer uma atividade sozinhos agora?

Atividade 3

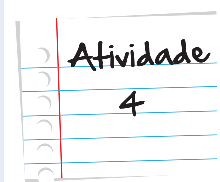


João deseja determinar o volume de um objeto de formato esférico, mas não sabe a medida do raio deste objeto e não possui nenhum instrumento para medi-lo. No entanto, ele possui um recipiente em formato cilíndrico que possui marcações de 1 em 1cm. Ele então teve a seguinte ideia: colocou água até que ela atingisse uma altura maior do que a do objeto. Depois, colocou o objeto dentro do recipiente e percebeu que, nesse instante, a superfície da água havia se deslocado 4 cm para cima. Sabendo que tal recipiente tem formato cilíndrico com raio igual a 4 cm, determine o raio do objeto esférico.

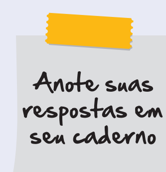
Anote suas respostas em seu caderno

Agora, imagine que em vez de saber o volume da bola, quisesse embrulhá-la? Seria possível saber a quantidade mínima de papel de que precisa? Bom, novamente a resposta é sim: se usarmos a fórmula de área temos: $A = 4 \cdot \pi \cdot 9^2$, ou seja, $V = 324\ \pi\ cm^2$, aproximadamente. Se tomarmos novamente o valor de π como 3,14, teremos que a área da superfície da esfera é de aproximadamente 1017 cm^2. Para termos uma ordem de grandeza da quantidade de papel que essa área representa, basta lembrar que a área de um quadrado com 32 cm de lado seria de 1024 cm^2. Assim, os 1017 cm^2 seriam equivalentes à área de um quadrado com um pouco menos de 32 cm de lado.

Para fechar a seção, convidamos vocês a fazerem a atividade 4.



Ao encher uma bola de aniversário, uma pessoa percebeu que esta tomou um formato esférico e, medindo com um determinado instrumento chegou a conclusão que o diâmetro da bola era de 20 cm. Determine a área da superfície desta bola.



Seção 3
Fuso e cunha

Os assuntos desta seção, trataremos a partir de uma suposição – a saber, a existência de melancias perfeitamente esféricas – e de um problema bastante concreto – a saber, os custos de um feirante. Prontos? Então vamos.

Figura 15: Melancias inteiras e cortadas.

Um problema prático

Vamos imaginar que um feirante vende melancias perfeitamente esféricas e dividiu uma delas em 10 partes rigorosamente iguais, como sugere a figura anterior. Suponha que essa melancia tem 40 cm de diâmetro. O feirante precisa saber o volume de cada parte e a quantidade aproximada de plástico necessária para embalar essa parte – mas não tem muita ideia de como fazer para encontrar estes valores. Quando soube que você está estudando matemática, veio pedir sua ajuda.

Enquanto você, educadamente, agradece, vai pensando numa maneira de sair da sinuca. Bom, a quantidade de plástico deve ser a área do sólido formado. Mas o volume...Hummm...Já sei, vou fazer uma regra de três! Aí pede papel, lápis e mais uns instantes ao amigo feirante. Diz, confiante, que já tem a solução e só vai organizar as ideias.

Para a regra de três, você lembra da rotação do semicírculo em torno do eixo, que vimos no início dessa aula. Se uma rotação de 360º vai dar um volume de $\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3$, então uma rotação de metade disso (180º) vai dar um volume que é justamente a metade desses $\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3$. Se a rotação for de um quarto do total (90°, que é um quarto dos 360°), o volume final será de um quarto do volume total (um quarto dos $\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3$) – e por aí vai !

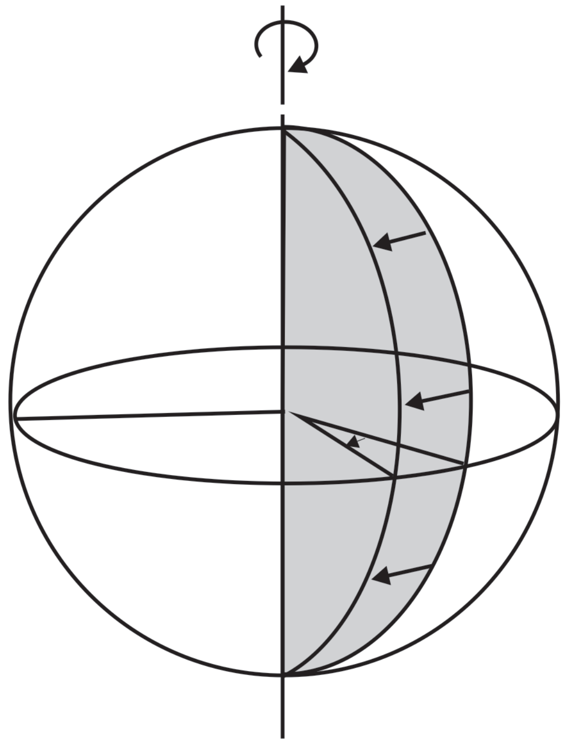


Figura 16: **sólido gerado por rotação de α graus de um semicírculo em torno de um eixo que passa pelo seu diâmetro.**

Assim, de uma maneira geral, para um ângulo α – veja na figura ! – teremos

Ângulo (em graus) ---------- Volume

360° --------------- $\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3$

α --------------- V

Neste caso, como a melancia tem 40 cm de diâmetro então R = 20 cm, e como foi dividida em 10 partes iguais então α = 36°.

Substituindo estes valores temos: $360\cdot V=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 20^3\cdot 36$ ou seja, $V=\frac{3200\pi}{3}$, tomando π como 3,14, temos o volume aproximado de: $V\cong 3349$ cm^3

Se lembramos que 1000 cm^3 equivalem a 1 litro, teremos um volume de aproximadamente 3,3 litros.

Vencido o desafio do volume, você parte para a questão da área. Para isso, olha mais atentamente para a parte da melancia que o feirante pretende embalar. Identifica, então, três áreas – veja na figura abaixo:

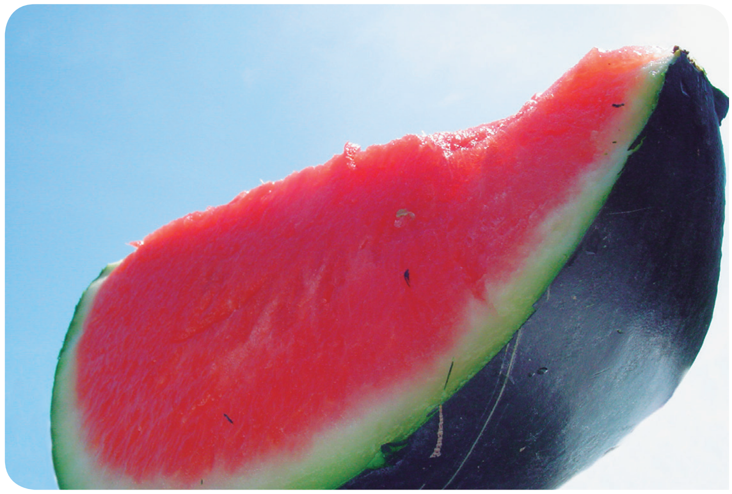


Figura 17: Fatia de melancia a ser embalada.

A primeira área é aquela vermelha e branca, do interior da melancia e que está em destaque na imagem. Fazendo aquela nossa correspondência, ela seria equivalente justamente ao semicírculo. A segunda área é aquela da casca – que, na melancia, é a parte externa, verde e branca. Já a terceira área é rigorosamente igual à primeira – parte interna da melancia, vermelha e branca. Na imagem, corresponderia, por assim dizer à parte de trás da fatia, idêntica à primeira mas oculta pelo ângulo da foto. Essa parte também corresponde a um semicírculo. Na figura seguinte, fizemos uma representação, já usando elementos matemáticos:

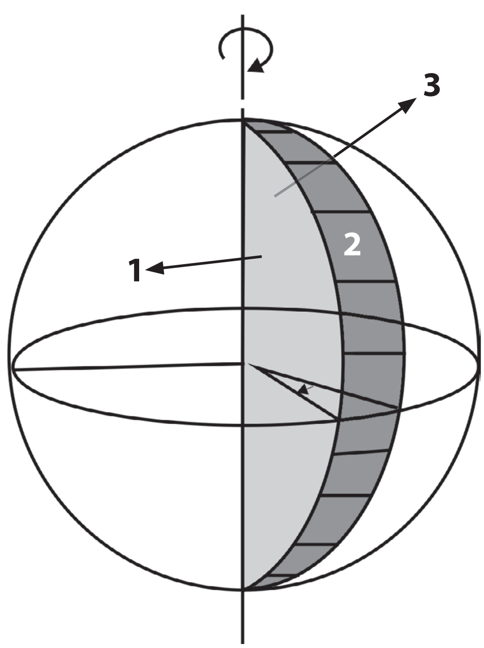


Figura 18: Sólido que representa a melancia a ser embalada: área 1, semicírculo da frente; área 2, parte da superfície da esfera e área 3 semicírculo de trás.

Então muito bem: nossa área total a ser embalada é a soma das áreas 1, 2 e 3 $A_{total} = A_1 + A_2 + A_3$

O primeiro movimento será o seguinte: as áreas A_1 e $A_{3,}$ são dois semicírculos idênticos. E, portanto, somadas, dão um círculo inteiro, de área total igual a πR^2 – onde R é o raio do círculo. A questão é justamente a área 2. Que fazer com ela? Você pensa mais um pouco e lembra, novamente, do início dessa aula. Só que, desta vez, lembra da rotação de que a casca esférica é obtida pela rotação de 360° de uma semicircunferência em torno do eixo que contém seu diâmetro. Novamente, uma regra de três !

Se uma rotação de 360° gera uma superfície de área igual a $4\pi R^2$, então uma rotação de 180° (metade da rotação total) vai gerar uma área de $2\pi R^2$ (metade da área total), uma rotação de 90° (um quarto da rotação total) vai gerar uma área de πR^2 (um quarto da área total) e assim sucessivamente. De uma maneira geral, uma rotação de α vai gerar uma área igual a A. Teremos então:

Ângulo (em graus) -------------- Área

360°- --------------- $4\pi R^2$

α --------------- A

Excelente! Agora é só inserir os valores!

$A_{total} = A_1 + A_2 + A_3$

$A_1 + A_{3\,=}$ círculo de raio R

Como a melancia tem 40cm de diâmetro, então R=20 cm. A área de um círculo de raio 20cm é $A_{círculo} = \pi \cdot 20^2 = 400.\ \pi \cdot cm^2$. Maravilha! Vamos à casca da melancia

$A_{2\,=}$ área da parte da superfície esférica

Ângulo (em graus) -------------- Área

360° --------------- $4\pi R^2$

α --------------- A

Como já vimos anteriormente, o valor de α é igual a 36° (melancia de 360° dividida em 10 partes iguais) e o valor de R é igual a 20cm (melancia esférica com diâmetro igual a 40 cm). Substituindo os valores, temos:

$360A = 4 \cdot \pi \cdot 20^2 \cdot 36$, ou seja, $A = 160\pi\ cm^2$

Assim,

$A_{total} = A_1 + A_2 + A_3$

$A_{total} = 160\ \pi\ cm^2 + 400.\ \pi \cdot cm^2$

$A_{total} = 560\ \pi\ cm^2$

Com $\pi = 3{,}14$ teremos que a área total a ser embalada é de aproximadamente 1758,4 cm^2 – área de um quadrado com aproximadamente 42 cm de lado.

Ufa! Quanta conta! Mas tenha certeza de que a informação que você levou ao feirante foi muito útil. Parabéns ! ! !

Conceituando

Vamos agora ver isso sob um ponto de vista mais formal? A ideia aqui é dar nomes e conceituações mais precisas aos elementos que usamos para resolver o problema anterior. O primeiro conceito é o de fuso esférico. Vamos lá?

Fuso esférico é uma parte da superfície esférica cujas extremidades estão nos pólos. Uma definição mais precisa, mais rigorosa, é a superfície obtida pela rotação de α graus ($0° < \alpha < 360°$) de uma semicircunferência em torno do eixo que contém seu diâmetro. Veja na figura

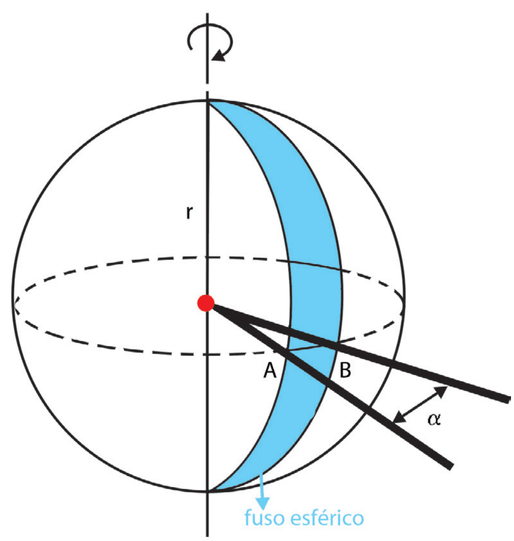


Figura 19: Esfera com fuso esférico destacado.

Para calcularmos a área do fuso esférico, devemos fazer uma regra de três que relaciona a área da superfície esférica com o ângulo da superfície esférica, ou seja, quando temos uma superfície esférica sua área é de $4\pi R^2$ e que corresponde a um ângulo de 360°, enquanto se tomarmos apenas uma parte da superfície esférica então teremos um certo ângulo α e portanto uma área A:

Área	Ângulo (em graus)	Área	Ângulo (em radianos)
$4\pi R^2$	360°	$4\pi R^2$	2π rad
A	α	A	α rad

No exemplo do feirante, o fuso esférico corresponde à casca da fatia de melancia a ser embalada. Conseguiram associar? Se não conseguiram, dêem uma olhadinha com calma nas figuras anteriores. É muito importante que vocês consigam identificar a casca da fatia com o fuso esférico. Pronto? Ótimo, vamos em frente! O próximo conceito é o de cunha esférica

Cunha esférica é uma parte da esfera cujas extremidades estão nos pólos. Percebam aqui a diferença: o fuso é uma parte da superfície, da casca esférica. Já a cunha é parte da esfera, do sólido. Para definirmos de forma mais rigorosa, podemos dizer que cunha esférica é o nome dado ao sólido obtido pela rotação de α graus (0° < α < 360°) de um semicírculo em torno do eixo que contém o seu diâmetro.

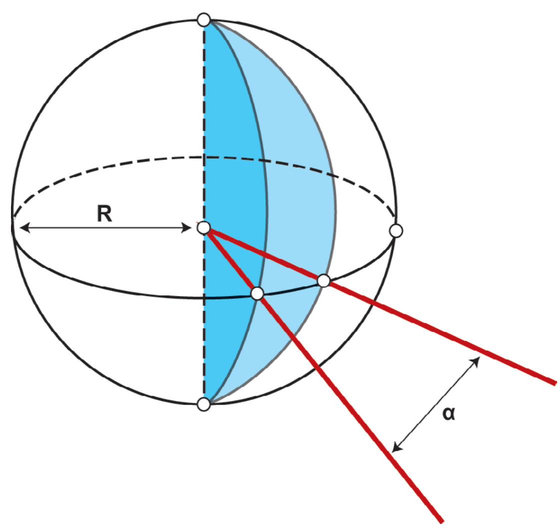


Figura 20: Esfera com cunha esférica destacada.

Para calcularmos o volume da cunha esférica devemos fazer uma regra de três que relaciona o volume da esfera com o ângulo da cunha, ou seja, quando temos uma esfera completa seu volume é de $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$ e que corresponde a um ângulo de 360°, enquanto se tomarmos apenas uma parte da esfera então teremos um certo ângulo α e portanto um volume V:

Volume	--------------	Ângulo (em graus)	Volume	--------------	Ângulo (em radianos)
$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$	--------------	360°	$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$	--------------	2π rad
V	--------------	α	V	--------------	α rad

No exemplo do feirante, a cunha era justamente a fatia de melancia inteira e seu o volume era, portanto, o volume da fatia. Conseguiram ver? Muito bem!

No caso da cunha esférica podemos também calcular sua área total. Para isto, primeiramente, devemos notar que uma cunha esférica é composta da união de um fuso esférico com dois semicírculos de raios igual ao raio da esfera. Portanto, a área total da cunha esférica é igual à soma da área do fuso esférico com a área de um círculo: Área(cunha) = Área(fuso) + Área(círculo).

E foi justamente essa área – a área da fatia de melancia (ou, mais formalmente, a da cunha esférica) – que calculamos na segunda parte do exemplo do feirante. Viram lá?

Muito bem! E, para finalizar a aula, deixamos vocês com a Atividade 5. Um abraço e até a próxima!

Atividade 5

Uma fruta de formato esférico foi cortada em partes iguais. Tomando uma parte, determine o ângulo da casca desta parte da fruta (fuso), sabendo que a área da superfície desta fruta é de 324π cm^2 e que a área da casca de uma das partes (fuso) é igual a 54π cm^2

Anote suas respostas em seu caderno

Resumo

- Esfera é o conjunto de pontos que estão a uma distância menor ou igual a uma distância r de um determinado ponto O.
- Superfície esférica é o conjunto de pontos que estão a uma distância igual a uma distância r de um determinado ponto O.
- O volume de uma esfera é dado pela fórmula $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$
- A área da superfície esférica é igual a $A = 4\pi \cdot r^2$
- Fuso esférico é a superfície obtida pela rotação de α graus (0° < α < 360°) de uma semicircunferência em torno do eixo que contém seu diâmetro
- Para calcular a área A do fuso de ângulo α, fazemos uma regra de três com a superfície total da esfera:

  Ângulo (em graus) -------------- Área

  360° --------------- $4\pi R^2$

  α --------------- A

- Cunha esférica é o nome dado ao sólido obtido pela rotação de α graus (0° < α < 360°) de um semicírculo em torno do eixo que contém o seu diâmetro.

- Para calcular o volume V da cunha esférica de ângulo α , fazemos uma regra de três com o volume total da esfera

  Ângulo (em graus) ---------- Volume

  360° --------------- $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$

  α --------------- V

- A área total da cunha esférica é igual à soma da área da fuso com a área de dois semicírculos de raios iguais ao raio da esfera.

Veja ainda

Um dos primeiros matemáticos a se interessarem pelo cálculo dos volumes e áreas de sólidos foi ninguém menos que o grande Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C). No link a seguir, você encontra um interessante artigo sobre a forma como ele encontrou a relação entre as áreas e os volumes do cilindro e da esfera. O resultado foi importante a ponto de o próprio Arquimedes pedir para que sua família e amigos o gravassem no seu túmulo, como epitáfio. http://www.ime.usp.br/~pleite/pub/artigos/avila/rpm10.pdf

Os conteúdos de geometria espacial, por tratarem de objetos tridimensionais, terminam ficando um pouco mais difíceis de enxergar no papel, que é bidimensional. Nessa hora, vídeos e animações podem nos ajudar bastante. O endereço abaixo traz um interessante vídeo sobre o princípio de Cavalieri. http://www.youtube.com/watch?v=mxpwmQaCu7A

Referências

Livros

- Dante, L.R., *Matemática*, volume único. São Paulo: Ática, 2008.
- Dolce, O. Pompeo, J.N. *Fundamentos da Matemática elementar*, Volume 10. 6ª edição. São Paulo: Atual, 1993.
- Eves H. *Introdução à história da matemática*. Campinas: Unicamp, 1995.
- Iezzi, G.; Dolce, O.; Degenszajn, D.; Périgo, R., de Almeida, N. *Matemática, ciência e aplicações*, vol.2. São Paulo: Atual, 2005.

Imagens

- Limão, lima e laranja – http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1097243

- Bola de futebol http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1274886

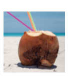
- Bola de natal, http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=299082

- Bola de boliche, http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=304914.

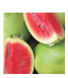
- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1097244

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1022180

- http://www.t7.com.br/uploads/fotos_produtos/fotos/bola-de-futebol-_4025.jpg

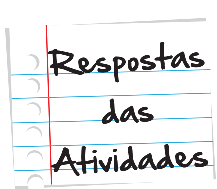


- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1212573



- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=140277

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=231399



Atividades 1

Bom, gente, aqui as respostas são muitas! O importante é que superfície esférica é apenas a “casca”, enquanto a esfera consiste no conjunto “casca e interior”. Assim, seriam exemplos de superfície esférica a bolha de sabão e a bola de frescobol, ambos vazios por dentro. As bolas de futebol e de basquete (se considerarmos que, no limite, a câmara de ar e a parte de couro praticamente coincidem) além daquelas bolas de natal que são ocas (porque há umas que são inteiriças) também seriam exemplo de superfície esférica. Seriam exemplos de esfera a bolinha de gude e a bola de sinuca, justamente pelo fato de ambas serem completamente sólidas. As bolas de natal inteiriças e as bolas de boliche também seriam exemplos de esferas pelo mesmíssimo motivo. Frutas que não sejam ocas – vocês lembram de alguma outra fruta oca que não seja o coco? – laranja, limão, etc. também são bons exemplos de esferas.

Respostas das Atividades

Atividade 2

Bom, começamos a resolução aplicando um teorema de Pitágoras ao triângulo OBC – conseguem vê-lo na figura? Um dos catetos é o raio da esfera pequena, que mede 6cm. Já o outro cateto é o raio do círculo, marcado em cinza na figura, que se forma com o corte da "tampa" do coco. Esse raio chamaremos de R. A hipotenusa é o raio r da esfera maior, que queremos descobrir.

O teorema de Pitágoras fica então $6^2 + R^2 = r^2$. Como temos uma equação e duas incógnitas, precisaríamos do valor de uma para encontrar o valor de outra. Como queremos encontrar o valor de r, precisaremos encontrar o valor de R. Do enunciado, vemos que a área do círculo formado – marcado em cinza na figura – é de $64\pi\ cm^2$. Como sabemos que a área do círculo é πR^2, igualamos: $64\pi = \pi R^2$. Segue que $R^2 = 64$ e $R = 8$.

Aí, voltamos ao teorema de Pitágoras com o valor de R: $6^2 + R^2 = r^2$; $36 + 64 = r^2$; $100 = r^2$; $r = 10$. Assim, o raio r da esfera maior é de 10 cm.

Atividade 3

Aqui fazemos assim: o volume da água que "subiu" no recipiente é justamente igual ao volume inserido – ou seja, o volume da esfera. Noutras palavras, $V_{subiu} = V_{esfera.}$ Agora, o volume que do líquido que subiu é justamente o volume de cilindro de raio de base igual a 4 cm e de altura igual a 4 cm. E assim, temos $\pi r^2 h = \frac{4}{3} \pi R^3$. Note aqui que o raio *r* do cilindro é diferente do raio *R* da esfera. Seguimos com $\pi r^2 h = \frac{4}{3} \pi R^3$; $\pi 4^2 . 4 = \frac{4}{3} \pi R^3$. Dividindo por 4π dos dois lados, teremos $4^2 = \frac{1}{3} R^3$; $16.3 = R^3$; $R^3 = 48$; $R\sqrt[3]{48}$; $R = \sqrt[3]{2^3.6}$; $R = 2\sqrt[3]{6}$. Assim, o raio tem medida igual a $2\sqrt[3]{6} \cong 10{,}9\ cm$

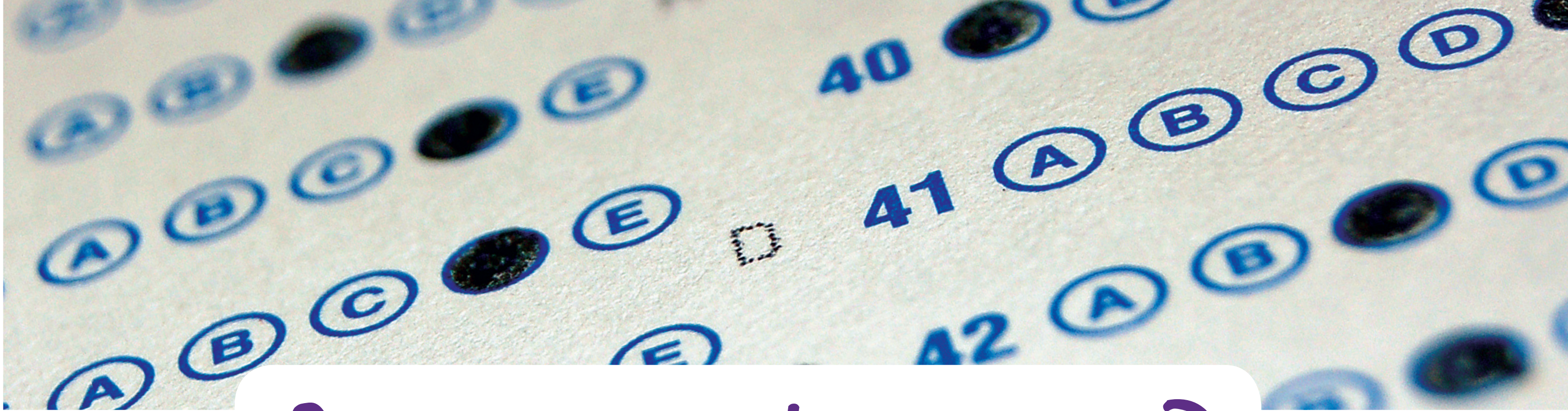
Atividade 4

Como o diâmetro é de 20 cm, então o raio mede 10 cm. Usando a fórmula de área de superfície esférica, temos que $S = 4 \cdot \pi \cdot 10^2$, ou seja, a área da superfície é de $400\pi\ cm^2$, ou aproximadamente $1256\ cm^2$.

Respostas das Atividades

Atividade 5

Aqui, resolvemos com a regra de três! Se $324\pi cm^2$ correspondem a 360°, $54\pi cm^2$ corresponderão a *x*. Então, $x = \frac{360 \; . \; 54\pi}{324\pi} = 60$. O ângulo então é de 60°.



O que perguntam por aí?

Questão 1 (UFRRJ)

Na famosa cidade de Sucupira, foi feito um monumento de concreto com pedestal em forma de uma esfera de raio igual a 5 m, em homenagem ao anti-herói "Zeca Diabo".

O cidadão "Nezinho do Jegue" foi informado de que, apesar de o preço do metro cúbico do concreto ser 260 reais, o custo total do concreto do pedestal, feito com dinheiro público, foi de 500 mil reais. Nezinho do Jegue verificou, então, que houve um superfaturamento:

a. menor que 50 mil reais

b. entre 50 e 200 mil reais

c. entre 200 e 300 mil reais

d. entre 300 e 400 mil reais

e. acima de 400 mil reais

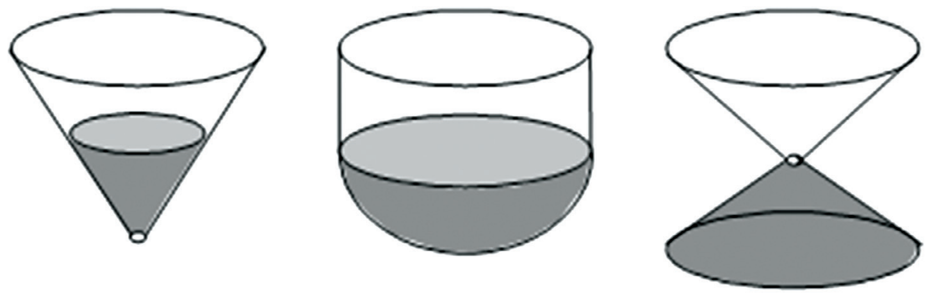
Observação: Considere $\pi = 3{,}14$.

Resposta: Letra D

Comentário: O volume do pedestal é $V = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 125$, ou seja, $V = 523{,}3\ m^3$. Como o m^3 custa 260 reais então 523,3 m^3 custa R$ 136058,00. Tendo assim um superfaturamento de 500000 – 136058, ou seja, entre 330 e 400 mil reais.

Questão 2

Os três recipientes da figura têm formas diferentes, mas a mesma altura e o mesmo diâmetro da boca. Neles são colocados líquidos até a metade de sua altura, conforme indicado nas figuras. O recipiente V_1 é um cone, a parte inferior do recipiente V_2 é uma semi esfera e a parte superior cilíndrica, e o recipiente V_3 é (uma clepsidra?). Representando por V_1, V_2 e V_3 o volume de líquido em cada um dos recipientes, tem-se:



a. $V_1 = V_2 = V_3$

b. $V_1 < V_3 < V_2$

c. $V_1 = V_3 < V_2$

d. $V_3 < V_1 < V_2$

e. $V_1 < V_2 = V_3$

Resposta: Letra B.

Comentário:

A Letra correta é a B, pois nos três recipientes, a altura é a mesma, mas em V_1, a base é menor do que em V_2 e em V_3. Já comparando V_2 e em V_3, temos que a altura do cone é igual ao raio da semiesfera, as bases são iguais, mas a área de V_2 é calculada por $\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2} \cong \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot R^3}{3} \cong 2{,}09 \cdot R^3$.

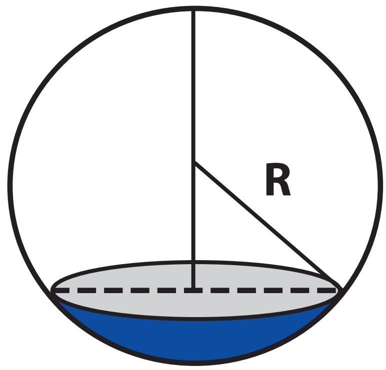
Já o volume de V_3 é calculado por $\frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R \cong \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot R^3 \cong 1{,}05 \cdot R^3$.

(altura é igual a R).

Portanto, $V_1 < V_3 < V_{2.}$

Exercício 3

Uma secção feita numa esfera por um plano alfa é um círculo de perímetro 2cm. A distância do centro da esfera ao plano alfa é 22cm.



Qual é a medida *r* do raio da esfera?

(a) 1 (b) $\sqrt{2}$ (c) 2 (d) 3

Exercício 4

No mapa-múndi o Brasil possui aproximadamente a largura de três fusos esféricos, cada um com 15º. Considere que a superfície do planeta Terra seja perfeitamente esférica, e que o seu raio mede, aproximadamente, 6.400km. Qual é o volume aproximado, em km^3, da cunha esférica onde está localizado o Brasil?

(a) $8{,}32\times10^{11}$ (b) $3{,}73\times10^{11}$ (c) $1{,}37\times10^{11}$ (d) $1{,}07\times10^{11}$

Exercício 5

O volume *V* de uma bola de raio *r* é dado pela fórmula $V = \frac{4\pi r^3}{3}$. Calcule o volume de uma bola de raio *r* = 3/4cm. Para facilitar os cálculos use = 22/7.

(a) 1,87cm^3 (b) 1,77cm^3 (c) 1,67cm^3 (d) 1,57cm^3

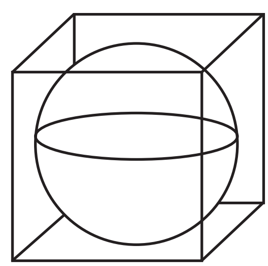
Exercício 6

A Terra é um planeta cuja superfície é coberta em 75% por oceanos, e o restante pelos continentes. Considere o planeta perfeitamente esférico, cujo raio mede aproximadamente 6.400km. Qual a área do planeta, em km^2, ocupada pelos continentes?

(a) 32153600 (b) 96460800 (c) 128614400 (d) 307200000

Exercício 7

Um lustre de vidro em formato esférico está acondicionado de maneira que sua superfície toque as seis faces de uma caixa em formato de cubo, cuja aresta mede 20cm, tal como ilustra a figura.



Qual a área da superfície desse lustre, em cm^2?

(a) 314 (b) 628 (c) 952 (d) 1256

Exercício 8

Uma cunha esférica com ângulo de 10º tem volume igual a $1.078m^3$. Use $\pi = 22/7$. Qual é a área total dessa cunha esférica, em m^2?

(a) 1.540 (b) 1.600 (c) 1.640 (d) 1.700

Exercício 9

Considere uma laranja como uma esfera composta de 12 gomos exatamente iguais, com 6cm de diâmetro aproximadamente. Qual é o volume de cada gomo em cm^3?

(a) 9,84 (b) 9,42 (c) 8,93 (d) 8,34

Exercício 10

Duas esferas de chumbo, com 3cm e 6cm de raio respectivamente, são fundidas e moldadas no formato de outra esfera. Qual a área da nova esfera, em cm^2?

(a)$135{,}73\pi$ (b) $145{,}74\pi$ (c) $155{,}75\pi$ (d) $165{,}76\pi$

Exercício 11

Duas esferas de raios 2cm e 3cm foram postas dentro de um cilindro reto cuja base tem diâmetro 9cm. Qual volume de água deve ser adicionado ao cilindro para cobrir as duas esferas?

Exercício 12

Qual deve ser o raio de uma esfera para que a medida de sua área seja igual a medida de seu volume?

Exercício 13

Desejo embrulhar uma bola de futebol de raio 11cm com apenas uma folha de papel de presente. Qual deve ser a área mínima da folha de papel?

Exercício 14

A América é o segundo maior continente do mundo, constituído de 35 países independentes e 11 fusos horários diferentes, correspondentes aos fusos esféricos que ocupam. Considere a Terra com um raio de aproximadamente 6400km e 24 fusos esféricos. Qual é a área aproximada em km^2 dos fusos esféricos relativos ao continente Americano?

Exercício 15

Uma esfera tem seu volume três vezes maior que o valor da sua área. Qual o valor do raio em cm dessa esfera?

Gabarito

Exercício 1

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 2

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 3

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 4

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 5

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 6

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 7

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 8

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 9

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 10

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 11

A questão é descobrir a altura do cilindro, fica aqui a informação, a altura é 8cm calcule-a. De posse dessa altura a solução é: volume do cilindro menos a soma dos volumes das esferas. Então,

$$V_C = \pi \cdot (4{,}5)^2 \cdot 8 = 162\pi$$

$$V_{E3} = \frac{4\pi . 3^3}{3} = 36\pi$$

$$V_{E2} = \frac{4\pi . 2^3}{3} = 10{,}67\pi$$

$$V = 162\pi - 36\pi - 10{,}67\pi$$

Portanto, $V = 115{,}33\text{cm}^3$

Exercício 12

Basta igualar o volume à área, tem-se $V_E = A_E \Rightarrow \dfrac{4\pi.r^3}{3} = 4\pi.r^2$

Simplificando vem $\dfrac{r}{3} = 1 \;\Rightarrow\; r = 3$. Portanto, $r = 3$.

Exercício 13

Como a bola tem 11cm de raio, sua área é $4\pi \,.\, 11^1 = 1519,76$. Portanto a folha deve ter no mínimo $1519,76\text{cm}^2$ de área.

Exercício 14

Um fuso corresponde a 1/24 da superfície terrestre que mede $4\pi(6400)^2$. Como queremos descobrir a área relativa a 11 fusos esféricos faremos:

$$\frac{4\pi(6400)^2.11}{24} = \frac{11\pi.40960000}{6}\,.$$

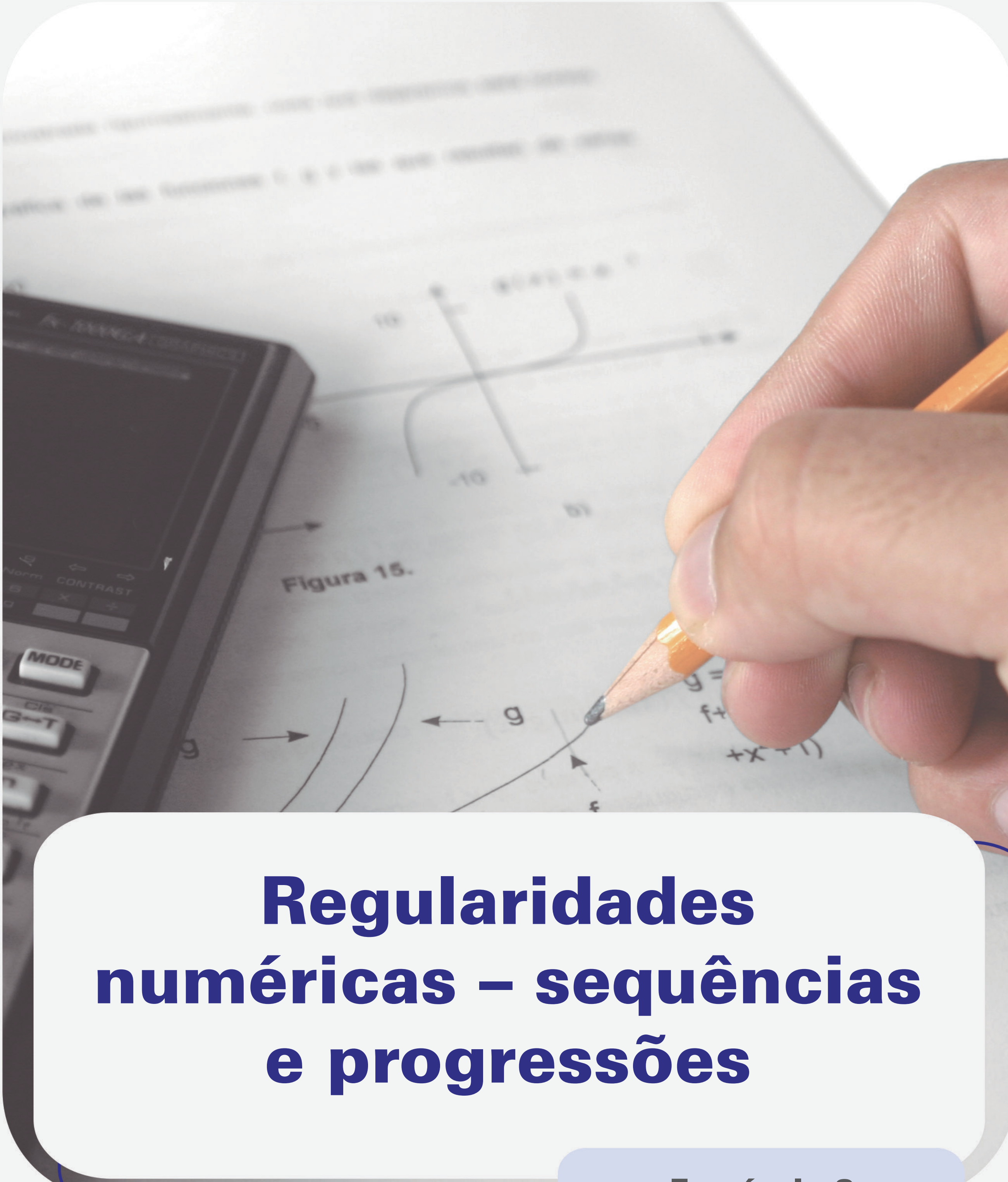
Portanto, 235793067 km^2.

Exercício 15

Volume da esfera = 3 × área da esfera. Então

$$\frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = 3 \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

Simplificando a equação encontramos $r = 9\text{cm}$.

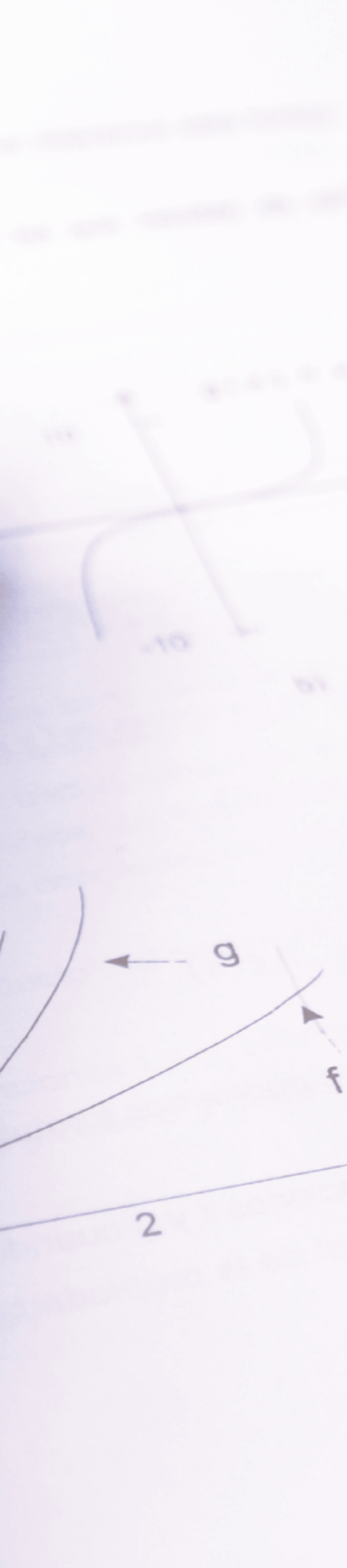


Regularidades numéricas – sequências e progressões

Fascículo 8

Unidade 26

Fundação CECIERJ



Regularidades numéricas – sequências e progressões

Para início de conversa...

Você já assistiu o filme O Código da Vinci (The Da Vinci Code) de 2006? Ou mesmo já leu o livro de mesmo nome? Pois esta interessante história mostra um simbologista de Harvard, Robert Langdon, tentando desvendar o mistério da morte do curador do museu do Louvre. Ao lado do corpo da vítima, havia uma mensagem cifrada:

13 – 3 – 2 – 21 – 1 – 1 – 8 – 5

Sophie Neveu, especialista em criptografia, verificou que se tratava de uma sucessão numérica muito famosa, porém fora de ordem: a Sequência de Fibonacci.

1 – 1 – 2 – 3 – 5 – 8 – 13 – 21

Vocês já ouviram falar desta sequência? O que será que ela tem de interessante para ser tão famosa? Essas e outras informações a respeito das sequências serão discutidas por nós nesta unidade. Veremos como as sequências numéricas fazem parte do nosso dia-a-dia e aprenderemos a perceber algumas regularidades para tentarmos buscar algumas generalizações.

Multimídia

Assista a cenas de O Código Da Vinci acessando o site oficial do filme, disponível em http://www.sony-pictures.com/homevideo/thedavincicode/index.html

E aí, estão preparados?

Então, vamos dar *sequência* a esta unidade mostrando seus objetivos.

Objetivos de aprendizagem

- Identificar sequências numéricas e obter, quando existir, a expressão algébrica do seu termo geral;
- Utilizar o conceito de sequência numérica para resolver problemas;
- Diferenciar Progressão Aritmética (P.A.) de Progressão Geométrica(P.G.);
- Utilizar as fórmulas do termo geral e da soma dos termos da P.A. e da P.G. na resolução de problemas.

Seção 1
As sequências, regularidades e generalizações

Quando falamos de sequências, nem sempre estamos nos referindo às sequências numéricas. Uma sequência é uma lista ordenada de objetos, números ou elementos. Um exemplo muito simples é a lista de sucessão de todos os Presidentes do Brasil.

Tabela 1 – Lista com todos os presidentes do Brasil desde 1889.

1889 - 1891	Marechal deodoro da Fonseca
1891 - 1894	Marechal Floriano Peixoto
1894 - 1898	Prudente de Morais
1898 - 1902	Campos Sales
1902 - 1906	Rodrigues Alves
1906 - 1909	Afonso Penna
1909 - 1910	Nilo Peçanha
1910 - 1914	Marechal Hermes da Fonseca
1914 - 1918	Wenceslau Brás
1918 - 1919	Delfim Moreira
1919 - 1922	Epitácio Pessoa
1922 - 1926	Arthur Bernardes
1926 - 1930	Washington Luís
1930	Junta governativa: Gen. Tasso Fragoso, Gen. João de Deus Mena Barreto e Almirante Isaías de Noronha
1930 - 1945	Getúlio Vargas
1946 - 1951	General Eurico Dutra
1951 - 1954	Getúlio Vargas
1954 - 1955	Café Filho
1956 - 1961	Juscelino Kubitschek
1961 - 1961	Jânio Quadros
1961 - 1964	João Goulart - Jango
1964 - 1967	Marechal Castello Branco
1967 - 1969	Costa e Silva
1969 - 1974	General Medici
1974 - 1979	Ernesto Geisel
1979 - 1985	General João Figueiredo
1985 - 1990	José Sarney
1990 - 1992	Fernando Collor
1992 - 1995	Itamar Franco
1995 - 2002	Fernando Henrique Cardoso
2003 - 2010	Luiz Inácio Lula da Silva
2011	Dilma Rousseff

Ou, ainda, uma sucessão de figuras geométricas:

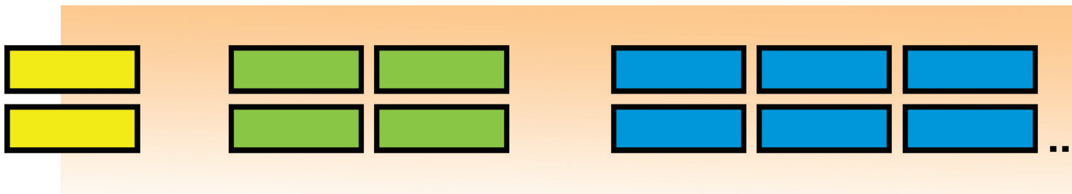


Figura 1: Sucessão de retângulos.

Em algumas sequências, podemos notar certo padrão, isto é, alguma informação ou característica que nos leve a entender como esta sucessão é construída e, sobretudo, nos permita determinar os elementos seguintes. Vejamos isso através dos exemplos dados.

Na sucessão de Presidentes do Brasil, é possível verificarmos alguma regularidade de elementos? Ou, ainda, é possível determinarmos quem será o próximo Presidente do nosso país? Bom, se fosse possível, não seriam necessários tantos investimentos em campanhas, não é mesmo?

Contudo, na sequência de retângulos que acabamos de mostrar, podemos perceber certa caraterística. Será que você consegue identificá-la? Para visualizarmos melhor essa sucessão, vamos fazer a primeira atividade?

Atividade 1

Veja a tabela a seguir, criada com base na sucessão de retângulos apresentada na figura anterior:

Posição do elemento na sequência	Número de retângulos
1	2
2	4
3	6
4	...
5	...
10	...
28	...
...	100

Anote esta tabela no seu caderno e termine de preenchê-la. Conseguiu estabelecer a relação entre o número de retângulos e a sua posição na sequência? Ótimo! Dê um pulo na seção de respostas e verifique se acertou.

Lembre-se: faça em uma folha à parte

Pudemos notar nesta sequência que há uma sucessão numérica que respeita uma regra, que podemos chamar de "lei de formação". Conhecendo esta regra, somos capazes de escrever todos os elementos desta sequência. Certamente, vocês devem estar se perguntando: "Todos? E se a sequência for infinita? Como podemos escrever infinitos números? Não íamos terminar nunca!". Tenham calma! Tem um jeito! Vamos utilizar para isso uma ferramenta algébrica que conhecemos: as variáveis.

Figura 2: **Pirâmides de um painel na Secretaria de Relações Exteriores do Governo do México. Imagine conta-las uma a uma! As variáveis nos ajudam a lidar, dentre outras coisas, com quantidades muito grandes ou infinitas.**

Mas o que são exatamente as variáveis? Bom, matematicamente falando, variável é uma representação, geralmente feita por letras – aquelas nossas conhecidas: x, y, z, a, b, etc - de diferentes valores ou quantidades em uma expressão algébrica ou em uma fórmula.

Como havíamos discutido na Atividade 1, o número de retângulos é sempre o dobro do número referente à posição do elemento na sequência. Isto é, o segundo elemento da sequência possui quatro retângulos, o terceiro possui seis retângulos. Então, o quarto terá oito, e assim por diante... Dessa forma, o número de retângulos presentes na posição n da sequência será o dobro desse número, ou seja, 2n.

Portanto, através da utilização de variáveis, conseguimos escrever todos os elementos da sequência, mesmo que seja infinita. Vejamos agora outro tipo de regularidade.

Atividade 2

Observe a sequência de figuras abaixo e responda:

a. Qual o próximo elemento da sequência?

b. Qual o 12º elemento da sequência?

c. Qual o 15º elemento da sequência?

d. Qual o 18º elemento da sequência?

e. Qual o 21º elemento da sequência?

f. Qual o 232º elemento da sequência? Anote em seu caderno o raciocínio que você utilizou para encontrar o resultado.

Lembre-se: faça em uma folha à parte

Nesta sequência, podemos perceber uma regularidade na disposição das figuras geométricas. Esta regularidade nos auxilia a responder às perguntas da atividade sem que haja a necessidade de desenharmos todos os elementos dela. Imaginem só ter que desenhar 232 elementos para apenas responder à questão (f)! Isto seria loucura!

As duas atividades anteriores mostram alguns exemplos de sucessões ora numéricas, ora não. Nesta unidade, vamos nos concentrar mais sobre as sucessões numéricas, como a **sequência de Fibonacci**.

Sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci foi criada no século XIII pelo matemático Leonardo de Pisa, cujo apelido era Fibonacci. Ele criou a sequência para resolver um problema de crescimento populacional, que propôs em seu livro Liber Abaci, publicado pela primeira vez em 1202. O surpreendente é que a sequência de Fibonacci pode ser encontrada em muitas outras situações e padrões naturais, a princípio bastante distintos do crescimento de populações, como proporções do corpo humano, conchas do mar e nas sementes de girassol.

Conforme vimos na introdução, a sequência de Fibonacci é 1-1-2-3-5-8-13-21-... Vamos entender como a sequência é definida? Muito bem, ela se inicia por dois números 1. O que acontece se somarmos esses elementos? O resultado é 2, o terceiro elemento da sequência. Agora, o que acontece se somarmos o segundo e o terceiro elementos?

Ora, 1 + 2 = 3 é o quarto elemento da sequência. Somaremos agora o terceiro termo com o quarto: 2 + 3. Isso dá 5, que é o quinto elemento. Portanto, esta sequência é construída somando-se dois termos consecutivos da sequência e obtém-se o termo seguinte.

Isto é:

1+1=2

1+2=3

2+3=5

3+5=8

5+8=13

8+13=21

13+21=...

E assim, teremos a tão famosa sequência 1-1-2-3-5-8-13-21-...

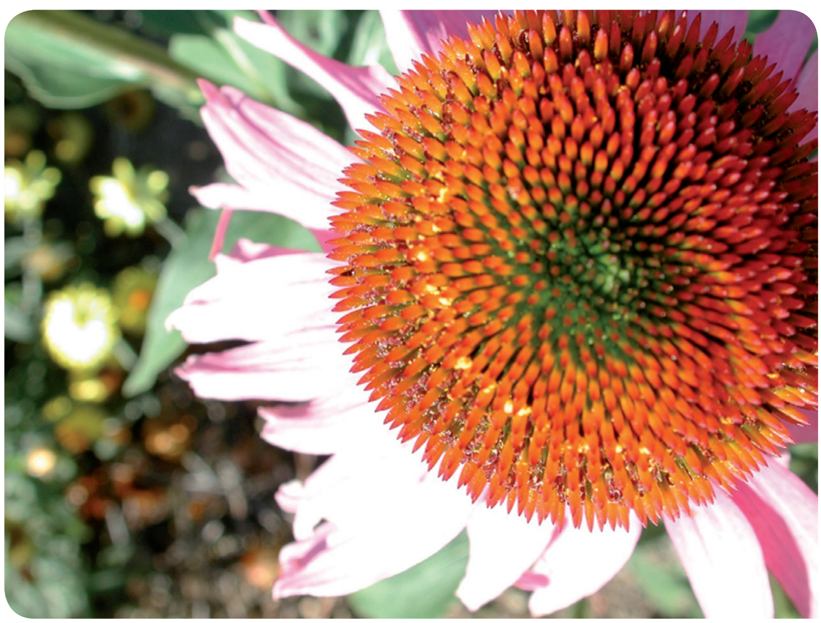


Figura 3: **A distribuição das sementes de girassol e das pequenas pétalas que estão em primeiro plano na imagem também obedecem à sequência de Fibonacci.**

A sequência de Fibonacci é mesmo fantástica! Mas existem outras sequências menos famosas que podem também fazer parte do nosso estudo. O nosso trabalho agora é tentar escrever expressões algébricas que representem determinadas situações. Vamos dar uma olhada nisso?

Quando falamos em expressões algébricas, estamos nos referindo ao uso de variáveis na escrita matemática. O uso dessa ferramenta nos permite generalizar as relações numéricas, isto é, nos ajuda a escrever fórmulas, o que, na matemática chamamos de **modelagem ou Modelo Matemático**.

Modelagem ou Modelo Matemático

Modelo matemático é uma estrutura Matemática que descreve aproximadamente as características de um fenômeno em questão. (SWETZ, 1992, p. 65, GERTNER).

Vejamos agora um exemplo de modelagem matemática. Neste caso, vamos analisar a relação existente entre as idades de dois irmãos: Pedro e Paulo. Quando Pedro tinha 4 anos, Paulo tinha 1 ano. Já quando Pedro tinha 8 anos, Paulo tinha 5. Quando Pedro tinha 12 anos, Paulo tinha 9. A pergunta é: quantos anos Paulo terá quando Pedro tiver 25?

Podemos perceber que Pedro é mais velho que Paulo. Além disso, é mais velho 3 anos. Com isso, podemos garantir que quando Pedro tiver 25 anos, Paulo terá 3 anos a menos, ou seja, 22 anos.

Mas, se Pedro tem x anos, quantos anos Paulo tem?

Reparem que, neste caso, a idade não está definida como um número e sim como uma variável (x). Isto significa que a idade de Pedro é representada por um número natural qualquer. Para descobrirmos a idade de Paulo, é necessário que levemos em consideração a idade de Pedro. Ou seja, é importante utilizarmos a informação de que Pedro tem 3 anos a mais, ou então, que Paulo tem 3 anos a menos.

Dessa forma, como Pedro possui x anos e Paulo 3 anos a menos, Paulo possui, $x - 3$ anos.

Note que como não sabemos quantos anos Pedro tem, pois sua idade está representada por uma variável, fica impossível sabermos a idade exata de Paulo. Apenas somos capazes de gerarmos uma expressão, no caso $x - 3$, capaz de relacionar as idades dos irmãos. Quando quisermos escolher um valor para x, encontraremos as idades deles sem a menor dificuldade. Querem ver?

Se escolhermos, por exemplo, o valor 30 para x, temos que:

Pedro: x anos = 30 anos

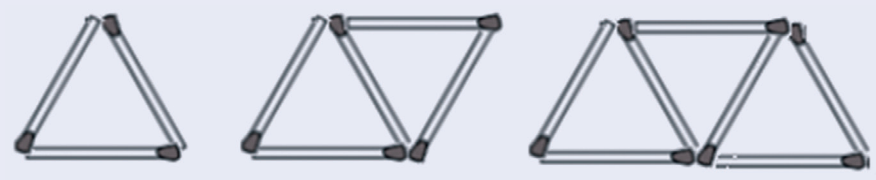
Paulo: $x - 3$ anos = $30 - 3$ anos = 27 anos.

Viram como é simples e prático?

Muito bem! Que tal praticar o que você já aprendeu na

Atividade 3

Observe a sequência de palitos



a. Pegue uma folha de seu caderno e desenhe como seria a próxima figura da sequência de triângulos com palitos.

b. Quantos palitos serão usados para fazer 5 triângulos?

c. Quantos palitos serão usados para fazer 6 triângulos?

d. Quantos palitos serão usados para fazer 10 triângulos?

e. Quantos palitos serão usados para fazer 36 triângulos?

f. Copie para o seu caderno a tabela seguinte e procure completa-la com os dados obtidos anteriormente:

Nº de triângulos	Nº de palitos
1	3
2	5
3	7
4	
5	
6	
10	
36	

g. Você descobriu qual a regra matemática que relaciona o número de triângulos com o número de palitos? Caso já tenha encontrado, escreva com suas palavras esta regra matemática.

h. Escreva, agora, a expressão algébrica descrita no item anterior. Isto é, escreva a quantidade P de palitos necessária para fazer N triângulos.

Anote suas respostas em seu caderno

Muito bem, pessoal! Essa atividade foi desafiadora, não é mesmo?! Em geral, escrever uma expressão algébrica que descreva alguma situação não é uma tarefa muito simples. Apesar disso, é muito importante enfrentarmos essas dificuldades. Então, que tal se déssemos uma olhada na próxima atividade?

Atividade 4

Dona Maria lavou as camisas do time de futebol de seu neto Lulu e vai colocá-las para secar da seguinte maneira:

- cada camisa é presa por 2 pregadores;
- cada camisa é ligada à seguinte por um pregador.

a. Quantos pregadores D. Maria usará para pendurar 3 camisas? E 4 camisas? E 8 camisas?

b. E 10 camisas? E 11 camisas?

c. D. Maria comprou duas cartelas de 12 pregadores cada. Esse número de pregadores será suficiente para prender as camisas de 22 jogadores? Justifique sua resposta.

d. Com base nos resultados acima, construa uma tabela colocando na primeira coluna o número de camisas (C) e na segunda, o número de pregadores utilizados (P).

e. Escreva uma expressão algébrica que represente o número P de pregadores necessário para pendurar um número C qualquer de camisas.

Lembre-se: faça em uma folha à parte

Nada mal, pessoal! Como poderíamos imaginar que até estender roupas no varal pudesse ter matemática no meio?! E tem! Assim como diversas outras situações do nosso cotidiano. Neste momento, vamos dar novamente uma olhadinha na sequência gerada pelo número de pregadores da atividade anterior:

Tabela 2 – Quantidade de camisas a serem penduradas e quantidade de pregadores necessários para prendê-las.

Nº de Camisas	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nº de Pregadores	2	3	4	5	6	7	8	9	10

2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10 – ...Esta sequência possui algumas características que podemos explorar. Por exemplo, qual será o próximo elemento desta sequência? Certamente não houve dificuldades em descobrir que é o 11. Mas, vamos analisar o motivo que nos levou a definir que o próximo elemento era de fato o 11. Reparem que, nesta sucessão, para chegarmos ao termo seguinte, estamos sempre somando uma unidade ao termo anterior, não é mesmo?

2+1=3

31+2=4

4+1=5

E assim por diante.

Essas sucessões em que obtemos o elemento seguinte somando uma quantidade fixa – que, no caso do exemplo, foi o número 1 – ao elemento anterior são chamadas de progressão aritmética.

Vamos à próxima seção desta unidade para conhecermos melhor esta progressão.

Seção 2
As Progressões Aritméticas

Como havíamos dito anteriormente, as progressões aritméticas possuem a característica de que para "saltarmos" de um termo para o seguinte precisamos adicionar a ele sempre o mesmo valor numérico (no nosso exemplo, esse valor é 1).

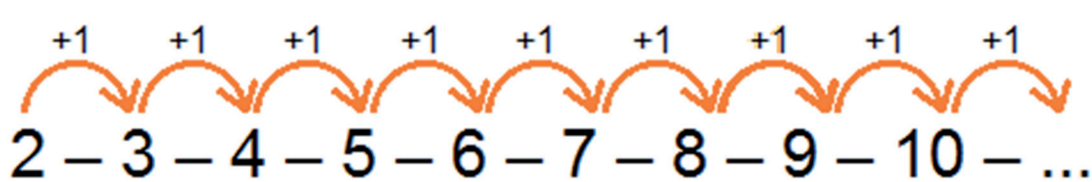


Figura 4: Progressão aritmética.

Lembre-se de que adicionar um número não significa apenas aumentar as quantidades. Podemos adicionar um número negativo, o que faz os números seguintes diminuírem. Por exemplo, um termo da sequência (12, 10, 8, ...) é obtido somando-se (-2) ao termo anterior.

Importante

Observe esse outro exemplo. Na sequencia (3, 7, 11, 15, ...), o valor que está sendo somado é o 4. A este número que sempre é adicionado daremos o nome de razão. Agora, observem a sequência dos números ímpares: 1 – 3 – 5 – 7 – 9 – 11 – .... Nesta sequência, podemos identificar sua razão?

É claro que sim! Pois, sempre que quisermos escrever o termo seguinte desta sucessão, devemos somar o número 2. Dessa forma, a razão é 2 e ainda podemos dizer que estamos lidando com uma progressão aritmética. Se você teve alguma dificuldade de descobrir o valor da razão, aí vai uma dica muito boa: podemos calcular a razão, r , subtraindo um termo pelo seu anterior. Ou seja, $r = 3 - 1 = 2$, ou ainda, $r = 9 - 7 = 2$, ou então $r = 11 - 9 = 2$. Outra dica importantíssima: a progressão aritmética é carinhosamente chamada pelos matemáticos de P.A.

Atividade 5

Observe a sequência abaixo, verifique se é uma progressão aritmética e calcule o valor da razão.

30 – 26 – 22 – 18 – 14 – ...

Lembre-se: faça em uma folha à parte

Suponham agora que quiséssemos descobrir o 10º termo da P.A. exibida na atividade anterior. Como faríamos? Bom, temos duas opções para solucionarmos esse problema:

1ª opção: Continuamos a escrever os números desta sucessão até chegarmos no décimo termo.

Assim: 30; 26; 22; 18; 14; (e entram os termos novos) **10; 6; 2; –2; –6**

Sendo assim, o décimo termo é – 6.

2ª opção: Podemos analisar de forma mais aprofundada o comportamento da P.A. Observem:

Vamos chamar cada termo desta sequência pela letra $\boldsymbol{a}$. Com isso, o termo $\boldsymbol{a}_1$ representará o primeiro elemento da P.A., o $\boldsymbol{a}_2$ será o segundo e assim por diante. E a razão, vamos chamar de *r*. Então, podemos dizer que a P.A. se desenvolve da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & a_1 \\ & a_2 = a_1 + 1.r \\ & a_3 = a_1 + 2.r \\ & a_4 = a_1 + 3.r \\ & a_5 = a_1 + 4.r \\ & a_6 = a_1 + 5.r \\ & a_7 = a_1 + 6.r \end{aligned}$$

Ou, como mostra a figura seguinte,

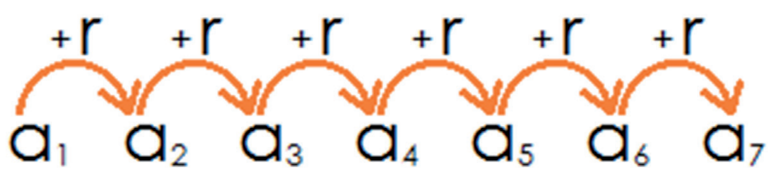


Figura 5: **Progressão aritmética com de termos a_n e razão *r*.**

Observe que temos que somar a razão 6 vezes para sairmos do 1º termo e chegarmos ao 7º. E se quisermos chegar ao 20º termo, partindo do 1º? E ao 51º?

E aí? Perceberam alguma característica nesta sequência de termos? Qual seria, então, o termo $\boldsymbol{a_n}$, mais conhecido como termo geral da P.A.?

E se partimos do 8º para chegar ao 13º? Quantas vezes a razão deverá ser adicionada? Reparem que a quantidade de razões somadas para cada elemento a partir do primeiro é uma unidade a menos do que o número n referente à posição do termo. Ou seja, para chegarmos ao quarto termo, somamos 3 razões ao primeiro termo. Para atingirmos o 7º termo, somaremos 6 razões ao primeiro termo. E assim, sucessivamente.

Portanto, para chegarmos ao termo n, deveremos somar $n - 1$ razões. E assim chegamos à importante fórmula do termo geral da P.A.

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Assista ao vídeo disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1150. Esse vídeo é a respeito de um jovem atleta, que está preocupado com a distribuição de água ao logo da corrida. A questão enfrentada pelo atleta está diretamente relacionada aos conhecimentos que acabamos de adquirir sobre progressão aritmética.

Multimídia

Muito bem! Vamos a mais uma atividade?

Observe esta sequência numérica e responda as perguntas:

2 – 5 – 8 – 11 – 14 – 17 – ...

Responda:

a. Esta sequência é uma progressão aritmética? Justifique.

b. Qual será o 12º termo da sequência?

c. Qual será o 100º termo da sequência?

d. Qual o termo geral (a_n) da sucessão?

Atividade 6

Lembre-se: faça em uma folha à parte

Essas progressões são realmente interessantes, não é?! Podemos descobrir quaisquer termos delas sem muitos problemas.

Falando em problemas, uma história muito interessante é aquela de um menino que surpreendeu seu professor ao resolver em poucos minutos um problema apresentado envolvendo sequencias numéricas. Estamos falando do alemão Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855). Vamos ver o que aconteceu?

Conheça um pouco mais a vida de Carl Friedrich Gauss, um importante personagem da história da matemática, acessando o endereço http://pt.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss.

Saiba Mais

O professor de Gauss havia ficado chateado com a turma e aplicou uma tarefa muito demorada como castigo: os alunos deveriam encontrar o valor da seguinte soma sob a pena de ficarem depois da hora em sala de aula. A soma era:

1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100.

O professor tinha a certeza de que os alunos demorariam longos minutos resolvendo a questão, garantindo assim a aplicação do castigo. Porém, acabou sendo surpreendido por Gauss que resolveu este problema em aproximadamente cinco minutos. Até mesmo para nós, que possuímos calculadoras eletrônicas, instrumento inexistente naquela época, resolver em cinco minutos seria espantoso. Então, vamos dar uma olhada no que ele fez?

Gauss percebeu que a sequência numérica 1, 2, 3 ... , 100 possuía uma característica interessante: a soma do primeiro termo com o último termo dava 101, assim como a soma do segundo termo e o penúltimo (2 + 99 = 101). E assim por diante. Dessa forma, ele teria 50 pares de números cuja soma é 101, e respondeu que a soma pedida era 50x101 = 5050.

Foi um sucesso! Não só porque ele soube responder rapidamente como, sem querer, descobriu uma maneira de somar os termos de uma progressão aritmética.

Notaram que esta progressão é uma P.A. de razão 1? Viram também que a soma dos termos desta P.A. foi obtida somando-se o primeiro termo com o último, em seguida multiplicando-se pela quantidade de termos desta sequência e, por fim, dividindo-se o resultado por 2? Muito bom! Então, vamos fazer uma generalização e propor a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma P.A. Vejam só:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

Em que S_n representa a soma dos n primeiros termos da sequência, a_1 é o primeiro termo, a_n o último considerado e n o número de termos da PA.

Vamos tentar fazer uma atividade para pôr este conhecimento em prática?

Atividade 7

Observe a sequência 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80. Determine o valor da soma dos termos desta sequência. Como este material será utilizado pelos colegas dos anos seguintes, peço que você não escreva nele! Copie o problema abaixo para o seu caderno e, aí sim, complete as lacunas e utilize a expressão que acabamos de estudar, OK?

$a_1 =$ ______________________________

$a_n =$ ______________________________

$n =$ ______________________________

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2} = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

Lembre-se: faça em uma folha à parte

Atividade 8

a. Em uma PA de razão 3, se o primeiro termo é 5, qual será o décimo termo?

b. O primeiro termo de uma PA é 5 e o quarto termo é -10. Qual é a razão?

c. São conhecidos o 5º e o 13º termos de uma PA. Se eles são, respectivamente, 2 e 10, qual será o primeiro termo dessa sequência?

Lembre-se: faça em uma folha à parte

Estamos caminhando muito bem! Nossos conhecimentos estão cada vez mais apurados. Talvez possamos usá-los para dar uma passadinha no escritório do Osvaldo, pois está ocorrendo uma discussão séria a respeito de uma obra que sua empresa fará. Quem sabe, podemos ajudar! Vamos lá?!

Figura 6: As passarelas são importantes recursos para a segurança e a circulação de pedestres tanto em ruas quanto em estradas.

Osvaldo, dono de uma empresa de engenharia está discutindo com seu engenheiro chefe, Ítalo, sobre a construção de uma rodovia de 300 quilômetros que liga as cidades de Miracema e Rio de Janeiro. Osvaldo comenta que é preciso colocar passarelas a partir do 3º quilômetro distantes entre si 0,6 km. Ítalo rebate a opinião argumentando que, mesmo iniciando as passarelas a partir do terceiro quilômetro, só há material disponível para a construção de 100 passarelas.

E agora, o que fazer? Como poderemos ajudar os dois cavalheiros, que se encontram em uma situação complicada?

Vamos analisar cada caso:

A proposta de Osvaldo é colocar uma passarela a cada 600 metros a partir do 3º quilômetro. Então, vejamos:

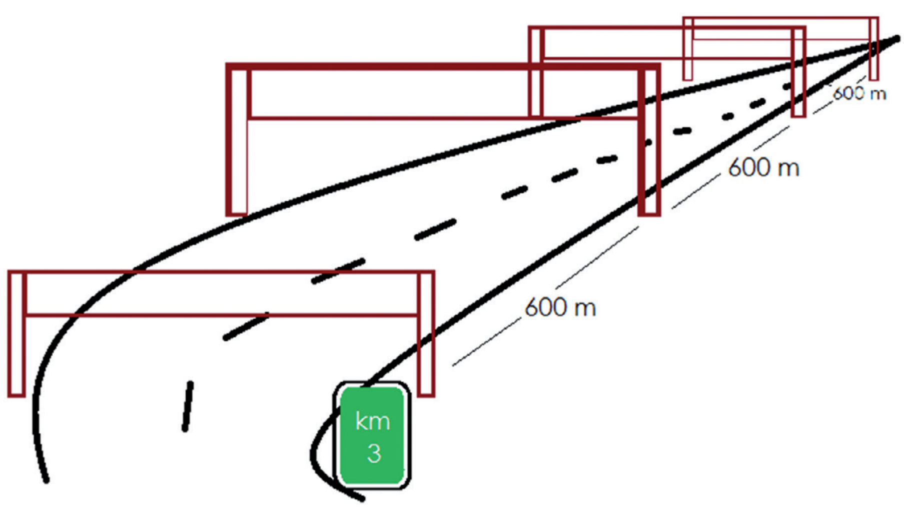


Figura 7: Esboço da estrada com passarelas a cada 600m.

No quilômetro 3, teremos uma passarela. A seguinte será colocada a 3,6 km. Em seguida, a 4,2km. Depois, a 4,8km. Sendo assim, a sequência que conseguimos é:

3; 3,6; 4,2; 4,8; 5,4; 6; ... ; 300

Neste caso, podemos verificar que estamos diante de uma progressão aritmética, pois para conhecermos o termo seguinte, somamos sempre a mesma quantidade (0,6 quilômetros). Então, podemos esquematizar da seguinte forma:

$$a_1 = 3km$$
$$a_n = 300km$$
$$r = 0,6km$$
$$n = ?$$

Nesta situação, não sabemos quantas passarelas Osvaldo planeja construir. Mas, para descobrirmos, vamos utilizar a fórmula do termo geral da P.A.

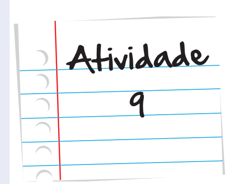
$$a_n = a_1 + (n-1).r$$

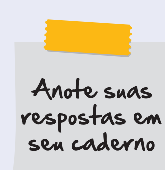
Substituindo os valores, temos:

$$300 = 3 + 0,6n - 0,6$$
$$300 - 3 + 0,6 = 0,6n$$
$$0,6n = 297,6km$$
$$n = \frac{297,6}{0,6} = 496 \text{ } passarelas$$

A proposta de Ítalo ressalta que só há material para construírem 100 passarelas. Assim, teremos uma P.A. de 100 termos, onde $a_1 = 3$, $n = 100$ e $a_n = 300$. Só nos resta saber a razão desta progressão que representará a distância constante entre as passarelas. Dessa forma, as passarelas deverão ser construídas a que distâncias uma das outras?

(Dica: utilize a fórmula de termo geral para encontrar a razão)





Diante da solução dessas atividades e levando em consideração que se cada passarela tem um custo de 500 mil reais, talvez Ítalo tenha razão: Por um lado, temos passarelas demais e por outro temos passarelas distantes demais entre si. Fazer muitas passarelas sai caro demais, porém é necessário dar acesso e segurança às pessoas. E para vocês? O que é melhor? Pensem. Reflitam sobre o assunto e verão que ele dá uma boa discussão.

Atividade 10

Vejamos outras situações que envolvem progressões aritméticas:

a. Os anos bissextos possuem 366 dias e ocorrem a cada quatro anos. 2012 foi um ano bissexto; o próximo será 2016! Qual foi o primeiro ano bissexto do século 21? Qual será o vigésimo ano bissexto desse século?

b. Um medicamento deve ser tomado da seguinte forma: duas pílulas no 1º dia, quatro no 2º, seis no 3º, e assim por diante. Após quantos dias um paciente tomas as 72 pílulas contidas em um vidro desse medicamento?

Lembre-se: faça em uma folha à parte

Agora, pessoal, vamos conhecer mais um tipo de progressão. Da mesma forma que as sequências numéricas que estamos estudando nesta unidade, este novo tipo de progressão possui uma característica peculiar. Vamos dar uma olhada?

Seção 3
Progressões Geométricas

Para entendermos melhor esta progressão, vamos acompanhar a seguinte situação:

Um programa de televisão de perguntas e respostas dá prêmios em dinheiro. Se o candidato acertar a primeira pergunta, recebe o prêmio de R$ 10,00. Se quiser continuar respondendo, a cada acerto o seu prêmio dobra. Isto é:

1ª pergunta: 10 reais

2ª pergunta: 20 reais

3ª pergunta: 40 reais

4ª pergunta: 80 reais

...

Esta sequência é uma progressão aritmética?

Reparem que não há um número constante, razão, que possa ser somada a cada elemento dessa sequência para se obter o seguinte. Todavia, a partir de cada termo desta sequência, há um número que pode ser multiplicado para se obter o seguinte. Neste caso, o número é o 2. Observem.

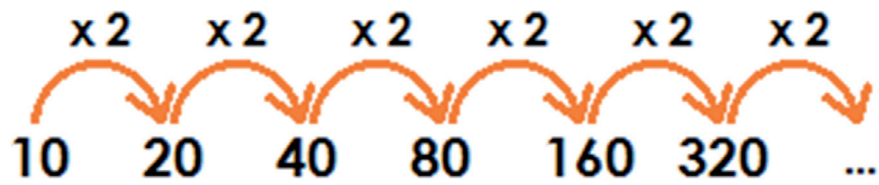
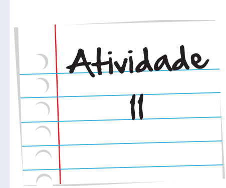


Figura 8: Progressão geométrica.

Diferentemente de uma progressão aritmética, esta sequência é formada pela multiplicação de um mesmo número para se obter o seguinte. Este número também recebe o nome de razão e esta progressão é conhecida por progressão geométrica, ou simplesmente, P.G.

Vamos analisar melhor esta sequência.

Consideremos que um candidato, Joaquim, esteja participando deste programa de TV. Seu prêmio vai depender da quantidade de perguntas que acertar. Responda às perguntas a seguir, sempre atento ao comportamento desta P.G.



Joaquim está muito empolgado para começar o jogo. Estudou muito durante duas semanas, pois quer ganhar um prêmio bastante alto. De acordo com as regras do programa, acertando a primeira pergunta, receberá 10 reais de prêmio. Acertando as perguntas seguintes, seu prêmio irá dobrando. Diante disso, Joaquim precisa de algumas informações para ficar mais calmo e, assim, atingir seus objetivos.

a. A sequência formada pelos prêmios dados pelo programa é uma progressão geométrica. Qual a razão desta progressão?

b. Após ganhar 320 reais, qual o prêmio que Joaquim irá receber caso acerte a pergunta seguinte?

c. Quantas perguntas deverá acertar para ganhar 2.560 reais?

d. Como já disse anteriormente, este material será utilizado pelos colegas dos anos seguintes e, por isso, é importante que você não escreva nele! Por isso, peço que copie a tabela abaixo para o seu caderno e complete as lacunas:

Atividade 11

Questões respondidas corretamente	Cálculo do prêmio	Valor do prêmio
1	10	R$ 10,00
2	10×2^{1}	R$ 20,00
3	$10 \times 2 \times 2 = 10 \times 2^{2}$	R$ 40,00
4	$10 \times 2 \times 2 \times 2 = 10 \times 2^{3}$	R$ 80,00
5	$10 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 10 \times 2^{4}$	R$ 160,00
6		R$...
10		R$...
n		

Lembre-se: faça em uma folha à parte

Muito bom ganhar prêmios, não é, pessoal? Ainda mais aprendendo. E nesta última atividade, aprendemos a expressão que gera todos os termos de uma P.G., ou seja, a expressão do termo geral da P.G. Note que

- para obtermos o 2º termo, multiplicamos o 1º termo uma vez pela razão (aqui denominada de *q*);
- para obtermos o 3º termo, multiplicamos o 1º termo pela razão q multiplicada duas vezes por si mesma;
- dessa forma, o *n*-ésimo termo será obtido, multiplicando-se o 1º termo pela razão *q* multiplicada *n* –1 vezes por por si mesma. Essa conclusão pode ser escrita da seguinte forma:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Em que a_n representa o termo geral na posição *n* da sequência, a_1 é o primeiro termo, *q* é a razão e *n* é o número referente à posição do termo na sequência.

Que tal se fizéssemos a próxima atividade para verificarmos o nosso aprendizado?

Atividade 12

Observe a sequência 1, 3, 9, 27, ...

a. Determine se esta sequência é uma P.A. ou uma P.G.

b. Determine sua razão.

c. Encontre o 8º elemento da sequência.

d. O número 19.683 aparece nesta sequência em que posição?

e. Qual é a fórmula do termo geral dessa sequencia?

Lembre-se: faça em uma folha à parte

Esta atividade, além de nos ajudar a trabalhar os conceitos que aprendemos, permitiu ver que em uma progressão geométrica, os números podem crescer rapidamente. Porém, há outras possibilidades. Vejam:

Observe a sequência: 1000; 500; 250; 125; 62,5;.... Note que os números decrescem o tempo todo. Podemos dizer, então, que esta P.G. é decrescente. Vocês conseguem calcular a razão desta P.G.? Utilizemos uma dica: se cada termo é obtido multiplicando-se a razão pelo termo anterior, então o quociente entre um termo e seu antecedente nos dá o valor da razão, não é mesmo?! Observem:

Se $a_2 = a_1.q$, então: $\frac{a_2}{a_1} = q$

Portanto, no caso da sequência deste último exemplo, $q = \frac{1}{2}$.

Já na sequência 2; –4; 8; –16; ..., vemos que seus termos ficam alternando entre os positivos e os negativos. Não podemos dizer que é uma sequência crescente e nem decrescente, pois a cada momento, os números vão ficando cada vez maiores e, em seguida, cada vez menores. Verifique que se trata de uma PG de razão -2.

Legal! O estudo das sequências numéricas é mesmo muito rico em informações. Podemos explorar muitas situações e vermos o quanto esses conhecimentos podem ajudar, como no caso do laboratório do Dr. Loucus.

No laboratório químico do Dr. Loucus, está ocorrendo um experimento. Há um recipiente de vidro vazio que, no primeiro dia do mês, receberá 3 gotas de um elemento químico. No dia seguinte, observadas as possíveis reações, Dr. Loucus pinga 9 gotas. No terceiro dia, 27 gotas e assim por diante. No dia em que recebeu 2187 gotas, o recipiente ficou completamente cheio. Precisamos descobrir quantas gotas foram despejadas para encher este frasco.

Para isso, vamos observar a sequência formada pela quantidade de gotas:

3; 9; 27; 81; ...; 2187

Podemos verificar que esta sequência é uma P.G. cuja razão é 3. Conseguiu verificar? Muito bem. Não conseguiu? Tudo certo, também. Para identificar a razão de uma P.G., basta dividir um termo pelo seu antecessor : 81/27=3; 27/9=3; 9/3=3.

Contudo, ainda não sabemos quantos termos tem essa P.G.

Vamos calcular?

$$
\begin{aligned}
&a_n = a_1.q^{n-1}\\
&2187 = 3.3^{n-1}\\
&\frac{2187}{3} = 3^{n-1}\\
&729 = 3^{n-1}\\
&3^6 = 3^{n-1}\\
&n-1 = 6\\
&n = 7
\end{aligned}
$$

Portanto, sabemos que a experiência terminou em 7 dias. Mas, ainda estamos longe de saber o total de pingos despejados no recipiente de vidro.

Precisamos encontrar um jeito de somar todos esses números sem ter que escrevê-los. Isto é, algum jeito mais simples de calcular a soma dos termos desta P.G. Será que é possível?

É sim! Da mesma forma que na progressão aritmética, existe uma fórmula que calcula a soma dos seus n primeiros termos.

Está fórmula é:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$$

Pelo que podemos observar nesta fórmula, para calcularmos a soma dos n primeiros termos de uma P.G., precisamos utilizar apenas o valor do primeiro termo, a razão e o número de termos que estamos somando.

Saiba Mais

Curiosos para saber como chegamos nesta fórmula? Ótimo! Acessem o link http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/soma-dos-termos-uma-pg-finita.htm. Como vocês sabem, tudo na matemática tem uma justificativa e a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica também tem.

Portanto, vamos calcular o total de gotas despejadas no recipiente por Dr. Loucus.

Para isso, temos que:

$a_1 = 3$
$n = 7$
$q = 3$

Então,

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{3(3^7 - 1)}{7 - 1} = \frac{3.(2187 - 1)}{6} = \frac{3.2186}{6} = \frac{6558}{6} = 1093$$

Assim, descobrimos que foi colocado um total de 1.093 gotas neste recipiente. Fácil, não é mesmo?!

Uma propriedade bem interessante da PG – e da soma de seus termos – é que ambas crescem muito rápido de um passo para outro. Lembram da Atividade 11? Pois então! Uma das lendas a respeito da criação do jogo de xadrez envolve essa propriedade das P.Gs e da soma de seus termos.

Figura 9: Tabuleiro de xadrez.

De acordo com a história, o xadrez foi criado na Índia Antiga e seu criador, assim que terminou de fazer sua primeira versão completa do jogo foi mostrá-lo ao imperador. Depois de aprender a jogar, o imperador, felicíssimo, decidiu recompensar o inventor, que poderia escolher o que quisesse – jóias, cavalos, palácios, etc, oferecendo a ele o que ele quisesse.

O inventor agradeceu muito, mas disse queria receber o pagamento em grãos de arroz, de acordo com uma regra feita a partir do desenho do tabuleiro. Na primeira casa do tabuleiro, o imperador colocaria um grão. Na segunda casa, dois grãos. Na terceira, 4 grãos, na quarta oito grãos e assim até a 64ª casa. O imperador ficou um pouco surpreso e achou o preço por demasiado barato, mas aceitou o pedido e ordenou ao tesoureiro que fizesse as contas e pagasse o criador do jogo. Uma semana depois, o tesoureiro voltou dizendo que passara todo o tempo trabalhando e que, ao terminar a conta, verificou que não haveria no império riqueza suficiente para pagar o que foi pedido. Aqui as lendas variam: em umas o inventor do xadrez vira imperador, em outras é punido – e até morto - por ele. Sabem quantos grãos de arroz haveria ao todo no tabuleiro? 18.446.744.073.709.551.615 grãos, o que pesaria em torno de 461.168.602.000 toneladas e seria aproximadamente 1000 vezes mais pesado do que a produção mundial de arroz...no ano de 2010 ! ! !

Atividade 13

As situações-problema a seguir envolvem progressões geométricas. Vamos resolvê-las?

a. Uma empresa de cartão de crédito cobra juros de 10% ao mês. Uma pessoa adquiriu uma dívida de 1000 reais no cartão de ficou 5 meses sem pagá-lo. Qual é sua dívida após esses 5 meses?

b. De 2001 a 2010, uma empresa dobrou seu patrimônio a cada ano. Em que ano ela tinha a metade do seu patrimônio em 2008? Se em 2010 a empresa acumulava um patrimônio de 1 milhão de reais, qual era seu patrimônio em 2005?

Lembre-se: faça em uma folha à parte

Veja ainda

Para quem é curioso e quer conhecer algumas histórias famosas que envolvem o conceito de sequências numéricas, indicamos conhecer o Paradoxo de Zenão. Ou, mais precisamente, o paradoxo de Aquiles e a Tartaruga.

Acesse o endereço eletrônico abaixo e se divirta conhecendo esse paradoxo muito interessante que deixou o mundo intrigado por muitos e muitos séculos.

http://educacao.uol.com.br/filosofia/paradoxo-zenao-e-os-argumento-logicos-que-levam-a-conclusao-falsa.jhtm

Os paradoxos de Zenão motivam o estudo de sequencias cujos termos diminuem muito, assumindo valores cada vez mais próximos de zero. Ainda falando sobre a soma dos termos, embora pareça muito estranho, é possível somarmos os elementos de uma P.G. infinita, mas com uma condição: esta progressão precisa ser decrescente, isto é, uma razão maior que –1 e menor que 1.

Por exemplo:

A progressão 1000; 500; 250; ... que vimos anteriormente é um exemplo de P.G. decrescente. Apesar de parecer muito estranho, mesmo tendo infinitos termos, conseguimos calcular a soma desses infinitos números.

Para nos ajudar a encontrar essa soma, ou esse limite, utilizamos a fórmula abaixo:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

Repare que levamos em consideração nesta fórmula apenas o valor do primeiro termo da sequência e a razão. O número de termos não é utilizado, pois estamos somando infinitos termos.

Então, vamos utilizá-la para determinarmos a soma dos termos da sequência dada no exemplo anterior.

Na sequência dada anteriormente, temos que:

$$a_1 = 1000$$

$$q = \frac{1}{2} = 0,5$$

Então,

$$S_\infty = \frac{1000}{0,5} = 2000$$

Podemos garantir que, mesmo tendo infinitos termos, a soma de todos os elementos dessa P.G. não ultrapassa o número 2000. Interessante, não é mesmo?! Então vamos colocar isso em prática!

Atividade 14

Vocês conhecem uma dízima periódica, não é?! Por exemplo, temos o número 0,333333....

Considerando que 0,33333..... = 0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + ..., escreva os termos dessa soma em sua forma fracionária e determine a soma desses números fracionários. Dessa forma, você descobrirá que essa dízima periódica pode ser escrita como uma fração, chamada de *fração geratriz* desta dízima.

Lembre-se: faça em uma folha à parte

Muito bem, pessoal! Pudemos perceber que é possível organizar os números em sequências numéricas e que essas podem ter diversas características. As progressões aritméticas e as geométricas nos permitem maior exploração matemática e aplicação em situações do dia-a-dia tal como os exemplos e atividades trabalhados nesta unidade.

É muito importante que vocês estudem bastante este assunto, pois é rico em informações e, devido a sua grande aplicabilidade, pode se tornar uma grande ferramenta para diversos outros temas.

Contudo, em relação a esta unidade, nosso trabalho está cumprido! Parabéns a todos nós e até a próxima!

Resumo

- Uma sequencia numérica em que um termo é obtido somando-se um fator constante ao termo anterior é chamada de progressão aritmética (PA).
- O termo geral de uma P.A. é dado por $a_n = a_1 + (n-1).r$.
- A soma dos n primeiros termos de uma P.A. é dado por é dado por $S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$.
- Uma sequencia numérica em que um termo é obtido multiplicando-se o termo anterior por um fator constante é chamada de progressão geométrica (PG).
- O termo geral de uma P.G. é dado por $a_n = a_1.q^{n-1}$.

- A soma dos n primeiros termos de uma P.G. finita é $S_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

- A soma dos termos uma P.G. infinita é dada por $S_\infty = \dfrac{a_1}{1 - q}$

Referências

Livros

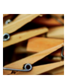
- SOUZA & DINIZ (1994), *Álgebra: das Variáveis às Equações e Funções*. São Paulo: CAEM/IME-USP, p. 18.
- SOUZA & DINIZ (1994), *Álgebra: das Variáveis às Equações e Funções*. São Paulo: CAEM/IME-USP, p. 24.
- SOUZA & DINIZ (1994), *Álgebra: das Variáveis às Equações e Funções*. São Paulo: CAEM/IME-USP, Pp. 56 – 57
- TINOCO (2002), *Construindo o Conceito de Função*. 4. Ed. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, p. 33.

Imagens

- http://www.sxc.hu/photo/475767

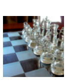
- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=630098

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=118870

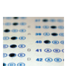


- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=847256

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=730723



- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=477365



- http://www.sxc.hu/photo/517386

Respostas das Atividades

Atividade 1

Posição do elemento na sequência	Número de retângulos
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
10	20
28	56
50	100

Através do preenchimento da tabela, podemos notar que o número de retângulos é sempre igual ao dobro do número referente à posição do elemento na sequência.

Atividade 2

a. triângulo

b. quadrado

c. quadrado

d. quadrado

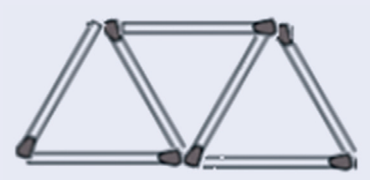
e. quadrado

f. Como, através das perguntas anteriores, percebemos que as posições múltiplas de 3 são sempre ocupadas por um quadrado, descobre-se que 231 é múltiplo de 3, ou seja, um quadrado. Logo, 232 é o seguinte, um triângulo. Ou ainda, como a sequência mostrada possui 9 elementos, podemos calcular quantas vezes essa sequência irá se repetir até encontrarmos o 232º elemento. Para isso, fazemos $232 \div 9 = 25$, resto 7. Portanto, a sequência se repete 25 vezes e ainda “pula” mais sete elementos, cuja figura que ocupa esta posição é o triângulo.

Respostas das Atividades

Atividade 3

a.



b. 11

c. 13

d. 21

e. 73

f.

Nº de triângulos	Nº de palitos
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
6	13
10	21
36	73

g. O número de palitos é o dobro do número de triângulos mais uma unidade.

h. $P = 2N + 1$

Atividade 4

a. 4. 5. 9 pregadores.

b. 11 e 12 pregadores.

c. Sim, pois usará 23 pregadores, quando há disponíveis 24.

Atividade 4

d.

Nº de camisas	Nº de pregadores
1	2
2	3
3	4
4	5
5	6
6	7

Atividade 5

A sequência ***30 – 26 – 22 – 18 – 14 –*** ... é uma progressão aritmética, pois para obtermos cada elemento, devemos somar – 4 ao termo anterior. O valor da razão é exatamente – 4, pois $r = a_2 - a_1 = 26 - 30 = -4$.

Atividade 6

2 – 5 – 8 – 11 – 14 – 17 –

a. Esta sequência é uma progressão aritmética, pois a partir do primeiro termo, somamos 3 unidades para obter o seguinte.

b. $a_{12} = a_1 + 11.r = 2 + 11.3 = 2 + 33 = 35$

c. $a_{100} = a_1 + 99.r = 2 + 99.3 = 2 + 297 = 299$

d. $a_n = a_1 + (n-1).r = 2 + (n-1).3 = 2 + 3n - 3 = -1 + 3n$

Atividade 7

$a_1 = 10$

$a_n = a_8 = 80$

$n = 8$

$$S_n = \frac{(10+80).8}{2} = \frac{90.8}{2} = 360$$

Respostas das Atividades

Atividade 8

a. Se $r = 3$ e $a_1 = 5$, $a_{10} = 5 + 9 \cdot 3 = 32$

b. Sabemos que $a_1 = 5$ e $a_4 = -10$. Como $a_4 = a_1 + 3r$, temos que

$-10 = 5 + 3r$

$-15 = 3r$

$r = -5$

c. Sabemos que $a_5 = 2$ e $a_{13} = 10$. Como, partindo do quinto termo, devemos somar a razão 8 vezes para obter o décimo terceiro termo, temos que $a_{13} = a_5 + 8r$

$10 = 2 + 8r$

$8 = 8r$

$r = 1$

Agora, para obtermos o 1º termo da sequencia, basta observarmos que

$a_5 = a_1 + 4r$

$2 = a_1 + 4 \cdot 1$

$2 = a_1 + 4$

$a_1 = -2$

Atividade 9

$300 = 3 + (100 - 1).r$

$300 = 3 + 99.r$

$99r = 300 - 3$

$99r = 297$

$r = \dfrac{297}{99} = 3\ \textit{quilômetros}$

Atividade 10

Vejamos outras situações que envolvem progressões aritméticas:

a. Se 2012 foi um ano bissexto, foram bissextos os anos 2008, 2004, 2000, ... Logo, o primeiro ano bissexto desse século foi 2004. Esse problema pode ser modelado por uma PA em que $a_1 = 2004$ e $r = 4$. O vigésimo bissexto será $a_{20} = a_1 + 19r = 2004 + 19 \cdot 4 = 2080$.

b. Note que, a cada dia, o número de pílulas a ser tomado é aumentado em duas. Esse problema pode ser modelado por uma PA em que $a_1 = 2$ e $r = 2$. Contudo, deseja-se saber, após quantos dias o total de remédios tomados (a soma dos remédios tomados em todos os dias) é 72. Como $a_n = 2 + (n - 1) \cdot 2 = 2 + 2n - 2 = 2n$ e $Sn = 72$, temos que

$S_n = (a_1+an) \cdot n/2$

$72 = (2 + 2n) \cdot n/2$

$72 = (1 + n)\ n$

$n2 + n - 72 = 0$

$(n + 9)\ (n - 8) = 0$

Dessa forma, $n = -9$ ou $n = 8$. Como n deve ser positivo, o número de dias é 8.

Atividade 11

a. Esta progressão tem razão igual a 2.

b. R$ 320,00 x 2 = R$ 640,00.

c. 2.560 = 10 x 2^8. Logo, terá que acertar 9 perguntas, afinal, uma para ganhar 10 reais e outras 8 para que seu prêmio dobre 8 vezes (2^8).

d.

Questões respondidas corretamente	Cálculo do prêmio	Valor do prêmio
1	10	R$ 10,00
2	10 x 2^1	R$ 20,00
3	10 x 2 x 2 = 10 x 2^2	R$ 40,00
4	10 x 2 x 2 x 2 = 10 x 2^3	R$ 80,00
5	10 x 2 x 2 x 2 x 2 = 10 x 2^4	R$ 160,00
6	10 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 = 10 x 2^5	R$ 320,00
10	10 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 = 10 x 2^9	R$ 5.120,00
n	10 x 2^{n-1}	10 x 2^{n-1}

Atividade 12

a. Esta sequência é uma P.G., pois $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_2}{a_3}$

b. A razão é igual a $r = \frac{a_2}{a_1} = 3$

c. $a_8 = a_1.q^{8-1} = 1.3^7 = 2.187$

d. $a_n = 1.3^{n-1} = 19683$

$3^{n-1} = 3^9$

$n = 10$

e. $a_n = 1.3^{n-1}$

Atividade 13

a. O problema pode ser modelado por uma PG em que $a_1 = 1000$ e $q = 1{,}10$. Assim, a dívida será dada por $a_5 = a_1 \cdot q^4 = 1000.1{,}10^4 = 1464{,}1$ reais.

b. Ela tinha a metade do seu patrimônio em 2007. O problema pode ser modelado por uma PG em que $a1_0$ (o patrimônio em 2010) é igual a 1000000 e $q = 2$. Para saber o seu patrimônio em 2005 (a_5), temos que

$a_{10} = a_5 \,.\, q^4$

$1000000 = a_5 \cdot 2^4$

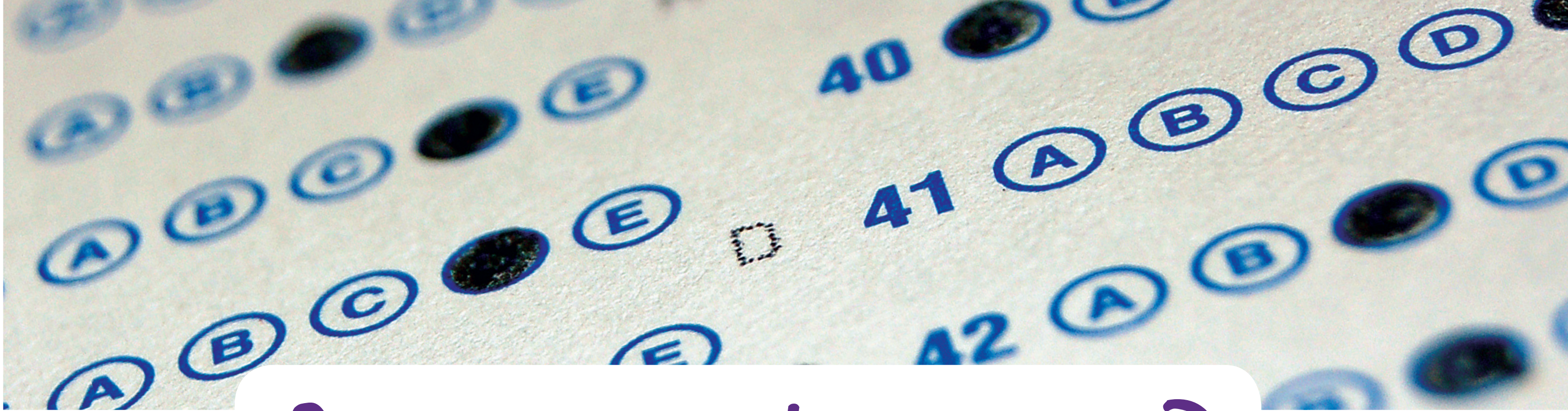
$1000000 = a_5 \cdot 16$

$a_5 = 1000000/16 = 62500$ reais

Atividade 14

Com isso, temos que é a soma dos termos da P.G. ao lado, onde a_1 e a razão é 0,1. Logo, estamos diante de uma razão infinita. Portanto, a soma dos termos dessa razão é:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0{,}3}{1-0{,}1} = \frac{0{,}3}{0{,}9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$



O que perguntam por aí?

Questão 1 (PUC-SP/2003)

Os termos da seqüência (10; 8; 11; 9; 12; 10; 13; …) obedecem a uma lei de formação. Se a_n, em que n pertence a N*, é o termo de ordem n dessa seqüência, então $a_{30} + a_{55}$ é igual a:

a) 58

b) 59

c) 60

d) 61

e) 62

Resposta: Letra B

Comentário: Primeiro, observem que os termos de ordem ímpar da sequência formam uma PA de razão 1 e primeiro termo 10 – (10; 11; 12; 13; …). Da mesma forma, os termos de ordem par formam uma PA de razão 1 e primeiro termo igual a 8 – (8; 9; 10; 11; …) . Assim, as duas PA têm como termo geral o seguinte formato:

(1) $a_i = a_1 + (i - 1) \cdot 1 = a_1 + \mathrm{i} - 1$

Para determinar $a_{30} + a_{55}$ precisamos estabelecer a regra geral de formação da sequência, que está intrinsicamente relacionada às duas progressões da seguinte forma:

- Se n (índice da sucessão) é impar temos que $n = 2i - 1$, ou seja, $i = (n + 1)/2$;
- Se n é par temos $n = 2i$ ou $i = n/2$.

Daqui e de (1) obtemos que:

$a_n = 10 + [(n + 1)/2] - 1$ se ***n*** é ímpar

$a_n = 8 + (n/2) - 1$ se n é par

Logo:

$a_{30} = 8 + (30/2) - 1 = 8 + 15 - 1 = 22$

e

$a_{55} = 10 + [(55 + 1)/2] - 1 = 37$

E portanto:

$a_{30} + a_{55} = 22 + 37 = 59$

Questão 2 (UFLA – 99)

A soma dos elementos da sequência numérica infinita (3; 0,9; 0,09; 0,009; …) é:

a) 3,1

b) 3,9

c) 3,99

d) 3,999

e) 4

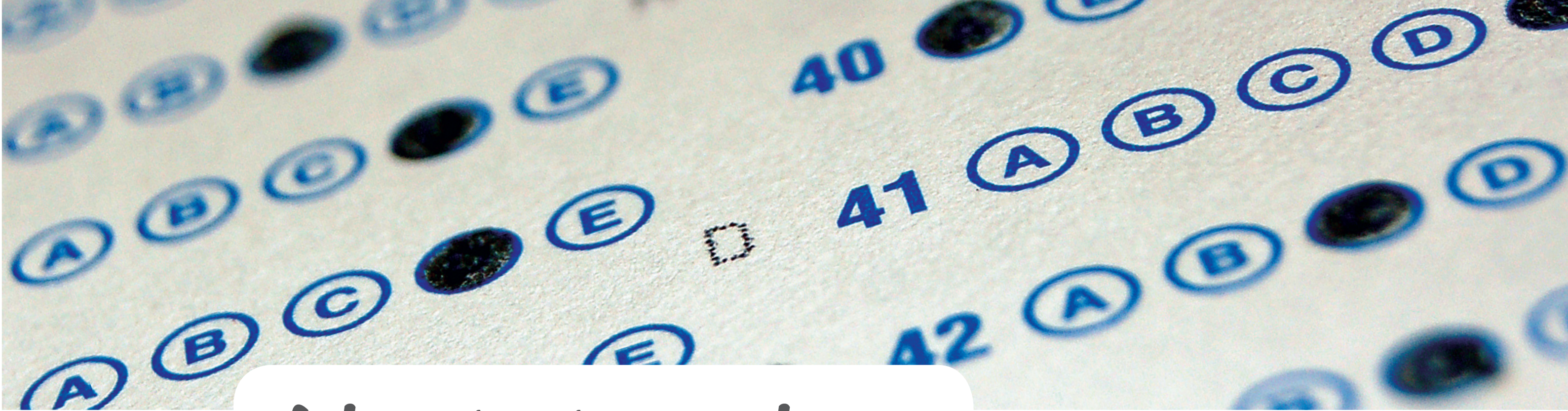
Resposta: Letra E

Comentário: Sejam ***S*** a soma dos elementos da sequência e $\boldsymbol{S_1}$ a soma da PG infinita (0,9; 0,09; 0,009; …) de razão $q = 10^{-1} = 0{,}1$. Assim:

$S = 3 + S_1$

Como $-1 < q < 1$ podemos aplicar a fórmula da soma de uma PG infinita para obter S_1:

$S_1 = 0{,}9/(1 - 0{,}1) = 0{,}9/0{,}9 = 1 \Rightarrow S = 3 + 1 = 4$.



Atividade extra

Exercício 1

Dois ciclistas estão em fases distintas de preparação. O técnico desses atletas elabora um planejamento de treinamento para ambos, estabelecendo o seguinte esquema:

Ciclista 1: iniciar o treinamento com 4 km de percurso e aumentar, a cada dia, 3 km a mais para serem percorridos;

Ciclista 2: iniciar o treinamento com 25 km de percurso e aumentar, a cada dia, 2 km a mais para serem percorridos.

Eles iniciam os treinamentos no mesmo dia e continuam até que os atletas percorrem a mesma distância em um mesmo dia.

Quantos quilômetros o ciclista 1 percorre?

(a) 781 (b) 714 (c) 848 (d) 915

Exercício 2

Considere uma colônia de coelhos que se inicia com um único casal de coelhos adultos e denote por a_n o número de casais adultos desta colônia ao final de n meses. Considere:

$a_1 = 1$; $a_2 = 1$ e, para $n \geq 2$; $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$:

Qual o número de casais de coelhos ao final do 5º mês?

(a) 13 (b) 8 (c) 6 (d) 5

Exercício 3

Um garoto dentro de um carro em movimento, observa a numeração das casas do outro lado da rua, começando por 2, 4, 6, 8. De repente passa um ônibus em sentido contrário, obstruindo a visão do garoto de forma que quando ele voltou a ver a numeração, esta já está em 22.

Quantos números o garoto deixou de ver?

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7

Exercício 4

Um operador de máquina chegou 30 minutos atrasado no seu posto de trabalho, mas como a máquina que ele monitora é automática, começou a trabalhar na hora programada. A máquina produz 4 peças por minuto, onde n é o número de minutos.

Quantas peças a máquina produziu até a chegada do operador?

(a) 100 (b) 120 (c) 144 (d) 160

Exercício 5

Um carro percorre 40 km na primeira hora, 34 km na segunda hora, e assim por diante, formando uma progressão aritmética.

Quantos quilômetros percorrerá em 6 horas?

(a) 120 (b) 130 (c) 140 (d) 150

Exercício 6

Ao financiar uma casa no total de 20 anos, Carlos fechou o seguinte contrato com a financeira: para cada ano, o

valor das 12 prestações deve ser igual e o valor da prestação mensal em um determinado ano é R$ 50,00 a mais que o valor pago, mensalmente, no ano anterior. O valor da prestação no primeiro ano é de R$ 150,00.

Qual o valor, em reais, da prestação no último ano?

(a) 1.100,00 (b) 1.120,00 (c) 1.135,00 (d) 1.115,00

Exercício 7

Um carro, cujo preço à vista é R$ 24.000,00, pode ser adquirido dando-se uma entrada e o restante em 5 parcelas que se encontram em progressão geométrica. Um cliente que optou por esse plano, ao pagar a entrada, foi informado que a segunda parcela seria de R$ 4000,00 e a quarta parcela de R$ 1.000,00.

Quanto esse cliente pagou de entrada na aquisição desse carro?

(a) R$ 8.000,00

(b) R$ 8.250,00

(c) R$ 8.500,00

(d) R$ 8.850,00

Exercício 8

Varias tábuas iguais estão em uma madeireira. Elas deverão ser empilhadas respeitando a seguinte ordem: uma tábua na primeira vez e, em cada uma das vezes seguintes, tantas quantas já estejam na pilha. Por exemplo

1ª pilha	2ª pilha	3ª pilha	4ª pilha
uma tábua	duas tábuas	três tábuas	quatro tábuas

Qual a quantidade de tábuas empilhadas na 12ª pilha?

(a) 1024 (b) 1448 (c) 2024 (d) 2048

Exercício 9

As medidas do lado, do perímetro e da área de um quadrado estão em progressão geométrica, nessa ordem.

Qual a área desse quadrado?

(a) 256 (b) 64 (c) 16 (d) 243

Exercício 10

Thomas Malthus (1766-1834) assegurava que, se a população não fosse de algum modo contida, dobraria de 25 em 25 anos, crescendo em progressão geométrica, ao passo que, dadas as condições médias da terra disponíveis em seu tempo, os meios de subsistência só poderiam aumentar, no máximo, em progressão aritmética. Considerando os dois primeiros termos de uma sequência são $x_1 = 6$ e $x_2 = 12$. Qual será o quinto termo?

(a) $x_5 = 16$ se for uma PA e $x_5 = 24$ se for uma PG.

(b) $x_5 = 24$ se for uma PA e $x_5 = 96$ se for uma PG.

(c) $x_5 = 30$ se for uma PA e $x_5 = 30$ se for uma PG.

(d) $x_5 = 30$ se for uma PA e $x5 = 96$ se for uma PG.

Exercício 11

Uma família marcou um churrasco, com amigos e parentes no dia 13 de fevereiro de um certo ano. A dona da

casa esta preocupada, pois o açougueiro entrega carne de três em três dias. Sabendo-se que ele entregou carne no dia 13 de janeiro, será que ele entregará carne no dia 13 de fevereiro?

Exercício 12

Um surto epidêmico ocorrido em certa cidade com 10.000 habitantes, cada indivíduo infectado contaminava 10 outros indivíduos no período de uma semana. Supondo-se que a epidemia tenha prosseguido nesse ritmo a partir da contaminação do primeiro indivíduo.

Quantos dias, aproximadamente, toda a população dessa cidade ficou contaminada?

Exercício 13

Considere as seguintes sequências de números:

I: 3, 7, 11, ...

II: 2, 6, 18, ...

III: 2, 5, 10, 17, ...

Qual o número que continua cada uma das sequências?

Exercício 14

Qual a soma dos 6 primeiros termos da P.G. : (2, 6, 18, ...)?

Considere q diferente de 1.

Exercício 15

Qual a razão da P.A. (a_1, a_2, a_3, ...) em que $a_1 = 2$ e $a_8 = 3$?

Gabarito

Exercício 1

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 2

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 3

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 4

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 5

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 6

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 7

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 8

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 9

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 10

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 11

$a_1 = 0$	Primeiro dia
$a_2 = 3$	Terceiro dia
$a_3 = 3$ x 2	Sexto dia
$a_4 = 3$ x 3	Nono dia
...	
$a_n = 3$ x ($_n$ – 1)	

Seja a_1 o dia em que o açougueiro passou, $a_1 = 0$. Como ele passa de 3 em 3 dias os elementos da sequência serão:

Do dia 13/01 ao dia 13/02 temos 31 dias.

$a_{11} = 3$ x 10 => trigésimo dia (um dia antes).

$a_{12} = 3$ x 11 => trigésimo terceiro dia (dois dias depois)

Exercício 12

28 dias.

Exercício 13

15, 54 e 26.

Exercício 14

728.

Exercício 15

$r = 1/7$.