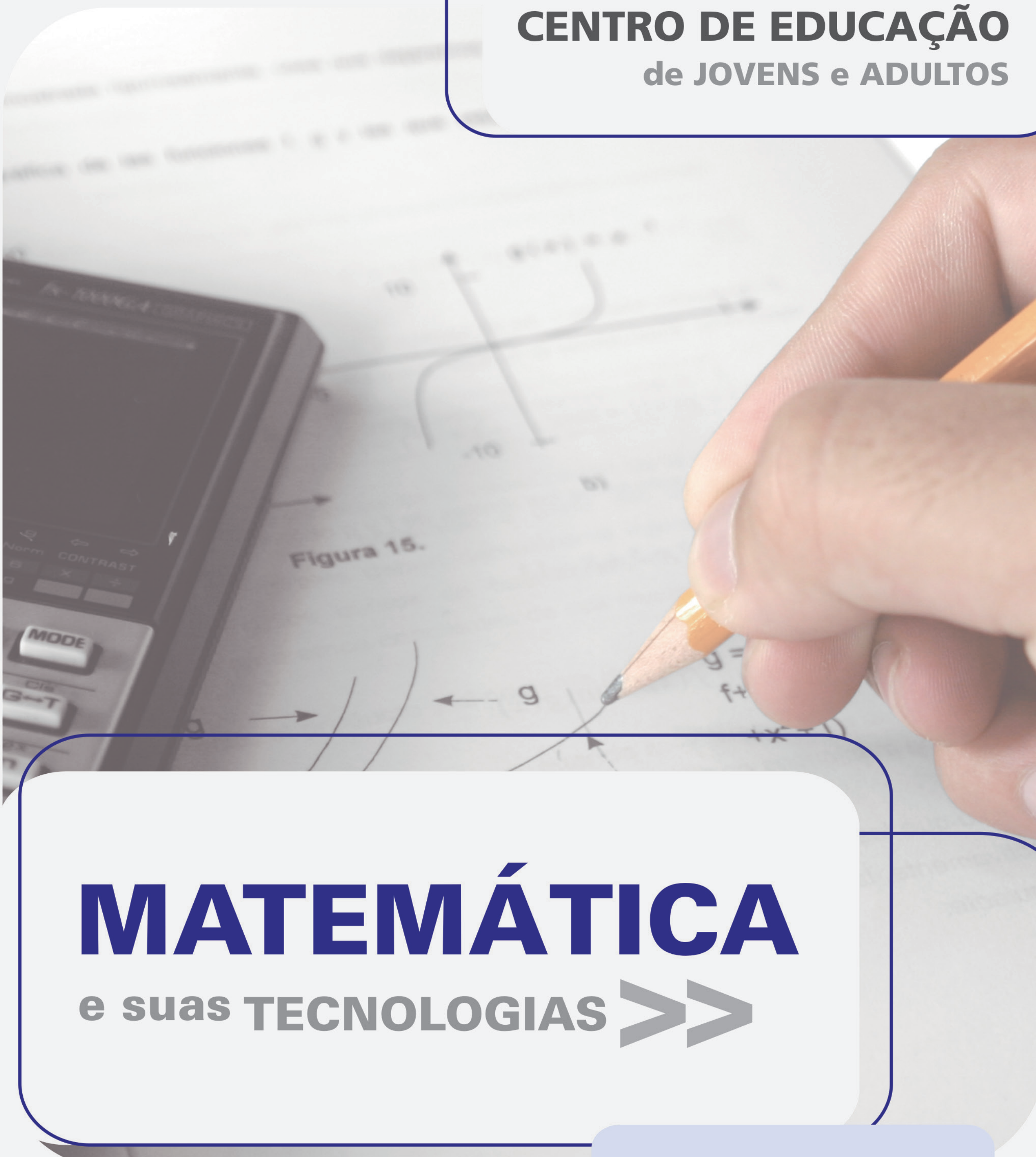
CEJA

CENTRO DE EDUCAÇÃO de JOVENS e ADULTOS



MATEMÁTICA

e suas TECNOLOGIAS

Fascículo 9

Unidades 27, 28, 29 e 30

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Governador
Wilson Witzel

Vice-Governador
Claudio Castro

SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO

Secretário de Estado
Leonardo Rodrigues

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO

Secretário de Estado
Pedro Fernandes

FUNDAÇÃO CECIERJ

Presidente
Gilson Rodrigues

PRODUÇÃO DO MATERIAL CEJA (CECIERJ)

Coordenação Geral de Design Instrucional
Cristine Costa Barreto

Coordenação de Matemática
Agnaldo da C. Esquincalha
Gisela M. da F. Pinto
Heitor B. L. de Oliveira

Revisão de conteúdo
José Roberto Julianelli
Luciana Getirana de Santana

Elaboração
Cléa Rubinstein
Daniel Portinha Alves
Heitor B. L. de Oliveira
Leonardo Andrade da Silva
Luciane de P. M. Coutinho
Maria Auxiliadora Vilela Paiva
Raphael Alcaires de Carvalho
Rony C. O. Freitas
Thiago Maciel de Oliveira

Atividade Extra
Benaia Sobreira de Jesus Lima
Carla Fernandes e Souza
Diego Mota Lima
Paula Andréa Prata Ferreira
Vanessa de Albuquerque

Coordenação de Design Instrucional
Flávia Busnardo
Paulo Miranda

Design Instrucional
Rommulo Barreiro
Letícia Terreri

Revisão de Língua Portuguesa
Paulo Cesar Alves

Coordenação de Produção
Fábio Rapello Alencar

Capa
André Guimarães de Souza

Projeto Gráfico
Andreia Villar

Imagem da Capa e da Abertura das Unidades
http://www.sxc.hu/
photo/789420

Diagramação
André Guimarães de Souza
Alessandra Nogueira
Alexandre Oliveira
Juliana Vieira

Ilustração
Bianca Giacomelli
Clara Gomes
Fernado Romeiro
Jefferson Caçador
Sami Souza

Produção Gráfica
Verônica Paranhos

Sumário

Prezado(a) Aluno(a),

Seja bem-vindo a uma nova etapa da sua formação. Estamos aqui para auxiliá-lo numa jornada rumo ao aprendizado e conhecimento.

Você está recebendo o material didático impresso para acompanhamento de seus estudos, contendo as informações necessárias para seu aprendizado e avaliação, exercício de desenvolvimento e fixação dos conteúdos.

Além dele, disponibilizamos também, na sala de disciplina do CEJA Virtual, outros materiais que podem auxiliar na sua aprendizagem.

O CEJA Virtual é o Ambiente virtual de aprendizagem (AVA) do CEJA. É um espaço disponibilizado em um site da internet onde é possível encontrar diversos tipos de materiais como vídeos, animações, textos, listas de exercício, exercícios interativos, simuladores, etc. Além disso, também existem algumas ferramentas de comunicação como chats, fóruns.

Você também pode postar as suas dúvidas nos fóruns de dúvida. Lembre-se que o fórum não é uma ferramenta síncrona, ou seja, seu professor pode não estar online no momento em que você postar seu questionamento, mas assim que possível irá retornar com uma resposta para você.

Para acessar o CEJA Virtual da sua unidade, basta digitar no seu navegador de internet o seguinte endereço: http://cejarj.cecierj.edu.br/ava

Utilize o seu número de matrícula da carteirinha do sistema de controle acadêmico para entrar no ambiente. Basta digitá-lo nos campos “nome de usuário” e “senha”.

Feito isso, clique no botão “Acesso”. Então, escolha a sala da disciplina que você está estudando. Atenção! Para algumas disciplinas, você precisará verificar o número do fascículo que tem em mãos e acessar a sala correspondente a ele.

Bons estudos!

Matemática Financeira

Fascículo 9

Unidade 27

Fundação CECIERJ

Matemática Financeira

Para início de conversa...

Fonte: http://www.sxc.hu/photo/1241539, http://www.sxc.hu/photo/1241540, http://www.sxc.hu/photo/1403392, http://www.sxc.hu/photo/784488

Novas regras da Caixa para financiamento da casa própria começam a valer hoje

A partir desta segunda-feira (11), passam a valer as novas regras da Caixa Econômica Federal para os financiamentos habitacionais. Pelo novo modelo, os mutuários terão mais cinco anos para quitar os empréstimos. A Caixa ampliou o prazo do crédito habitacional de 30 anos para 35.

Os empréstimos serão feitos com recursos do Sistema Brasileiro de Poupança e Empréstimo (SBPE). Os financiamentos do SBPE beneficiam apenas os mutuários que ganham mais de R$ 5.400 por mês ou que adquirirem imóveis de mais de R$ 170 mil.

A Caixa também reduziu as taxas de juros para essas modalidades. Para imóveis financiados pelo Sistema Financeiro da Habitação (SFH), as taxas caíram de 9% para 8,85% ao ano. Para os imóveis fora do SFH, os juros passaram de 10% para 9,9% ao ano.

Fonte: http://economia.uol.com.br/ultimas-noticias/redacao/2012/06/11/novas-regras-para-financiamento-da-casa-propria-comecam-a-valer-hoje.jhtm

Demanda das empresas por crédito sobe 7,9% em julho, aponta Serasa Alta é sobre junho; com relação ao mesmo mês de 2011 há queda de 3%. Micro e pequenas empresas expandiram a busca por crédito em 8,5% em julho sobre junho. Fonte: http://g1.globo.com/economia/noticia/2012/08/demanda-das-empresas-por-credito-sobe-79-em-julho-aponta-serasa.html	Faturamento do comércio da Grande SP sobe 5,2% no 1º semestre Dados foram divulgados nesta quinta-feira pela FecomercioSP. Só em junho, comércio faturou R$ 13,3 bilhões em junho, alta de 9,3%. Fonte: http://g1.globo.com/economia/noticia/2012/08/faturamento-do-comercio-da-grande-sp-sobe-52-no-1-semestre.html

Notícias como essas você deve ver todos os dias nos jornais, telejornais e também na internet.

Nessas e em outras situações relacionadas com problemas de ordem financeira, como financiamentos de moradias, compras a crédito, investimentos, empréstimos, são aplicados conhecimentos de Matemática Financeira.

Todos os problemas financeiros envolvem taxas de juros. Veja alguns exemplos:

- Quando fazemos uma compra a crédito, por exemplo, o pagamento é feito por prestações mensais acrescidas de juros.
- Quando aplicamos uma quantia em poupança, receberemos os juros dessa aplicação, que é acrescentado ao capital inicial.
- Você certamente já ouviu falar na palavra juros. O que são juros?
- Podemos dizer que juros são o valor que uma pessoa ou uma empresa paga pelo uso de uma quantia de dinheiro de outra pessoa ou de um banco durante certo período de tempo.

Nesta unidade vamos conhecer elementos da matemática financeira, bem como modelar e resolver situações-problema em diferentes contextos utilizando o conceito de porcentagem.

Objetivos de Aprendizagem

- Rever o conceito de porcentagem;
- Calcular porcentagem em diferentes situações;
- Calcular mentalmente porcentagem.
- Calcular aumentos e descontos;
- Calcular o lucro ou prejuízo em situações específicas;
- Calcular aumentos e descontos sucessivos.

Seção 1
Revendo porcentagens

Em diferentes momentos da nossa vida aparecem notícias e informações com dados em forma de porcentagem, por exemplo:

- O governo propôs um reajuste no salário dos servidores técnico-administrativos das Universidades Federais de 15,8%, em 3 anos, a partir de 2013.
- O preço do frango sofreu um aumento de 18% no último mês.
- A Bolsa de Valores subiu hoje 0,5%.

Fonte: http://www.sxc.hu/photo/983490

Essas situações envolvem uma razão especial chamada Porcentagem, tema que já foi estudado, mas que iremos rever nesta aula por ser muito importante para o estudo da Matemática Financeira e também para outros temas da Matemática.

> A expressão porcentagem tem origem na expressão latina per centum, que significa por cento ou por cem.
>
> Esse conceito foi criado para representar valores em relação a cem (100) e é atribuído aos gregos, apesar do nome latino.
>
> Saiba Mais

Você certamente já deve ter ouvido falar dos outros nomes usados para uma

Porcentagem, tais como: razão porcentual, índice ou taxa porcentual e percentil.

O símbolo % que aparece depois dos números deve ser lido por cento e representa uma fração de denominador 100.

Exemplos: $50\% = \frac{50}{100}$ $\qquad 19\% = \frac{19}{100}$ $\qquad 37\% = \frac{37}{100}$

Sendo uma fração centesimal, uma porcentagem também pode ser escrita como número decimal. Assim:

$25\% = \frac{25}{100} = 0{,}25$ $\qquad 7\% = \frac{7}{100} = 0{,}07$ $\qquad 15{,}8\% = \frac{15{,}8}{100} = 0{,}158$

Também podemos escrever algumas frações não centesimais como porcentagem. Para isso, determinamos a fração equivalente de denominador 100. Veja:

$$\frac{3}{4}=\frac{3\times 25}{4\times 25}=\frac{75}{100}=75\ \%$$

$$\frac{2}{5}=\frac{2\times 20}{5\times 20}=\frac{40}{100}=40\ \%$$

Porcentagem de um número

Podemos calcular porcentagem de um número de várias maneiras: uma delas é escrever a porcentagem na forma de número decimal e multiplicá-lo pelo número. Também podemos calcular porcentagem de um número trabalhando com fração ou usando a calculadora. Veja o exemplo:

Na eleição para prefeito de uma cidade com 425.212 eleitores, 25% votaram no candidato vencedor. Quantos votos ele recebeu?

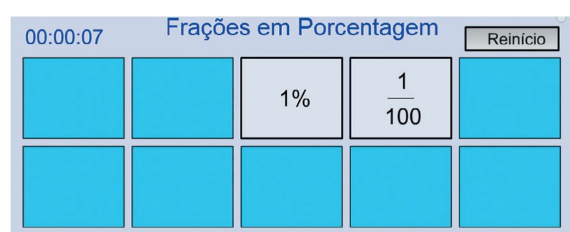
$25\% = \frac{25}{100} = 0{,}25$

25% de 425 212 = 0,25 de 425 212 = $0{,}25 \times 425\ 212 = 106\ 303$

Logo, o candidato vencedor recebeu 106.303 votos.

Fundação Roberto Marinho – Multicurso – Ensino médio-volume 2

Quer aprender um pouco mais sobre porcentagem jogando? Então acesse http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/handle/mec/10468 e divirta-se com um jogo de memória em flash, onde se propõe fazer relação entre as frações e suas correspondentes em porcentagem.



Usando a calculadora, é mais prático trabalhar com o número decimal, ou também podemos usar a tecla com o símbolo de % que quase todas as calculadoras possuem. Podemos fazer o mesmo cálculo anterior digitando as seguintes teclas e encontraremos o resultado 106.303. Experimente fazer

Veja o passo a passo de como calcular a porcentagem na calculadora. Você pode usar qualquer calculadora padrão ou a do Windows (clicando no botão Iniciar, Programas, Acessórios e Calculadora, exibir, padrão):

Fonte: http://www.sxc.hu/photo/1259850

Para calcular 40% de R$ 400,00, por exemplo, siga os três passos descritos adiante para calculadora padrão do Windows:

1. Ligue a calculadora (ON) e digite 40.
2. Pressione o sinal de multiplicação (X ou *).
3. Digite 400 e pressione a tecla %.

Siga os quatros passos a seguir para calculadora científica:

1. Ligue a calculadora (ON), digite 40.
2. Aperte no sinal de multiplicação (X ou *).
3. Digite 400, pressione a tecla 2ndF(shift), pressione a tecla %.
4. Pressione a tecla do sinal de igualdade (=).

Exercite!

Calculando mentalmente algumas porcentagens:

É muito útil sabermos calcular algumas porcentagens mentalmente (de cabeça), pois isso nos traz agilidade na hora de fazermos alguma compra ou calcularmos descontos ou multas.

Fonte: http://www.sxc.hu/photo/987763

1º) 50% de um número é a metade do número, pois

$50\% = \dfrac{50}{100}$ e simplificando essa fração temos

$\dfrac{50}{100} = \dfrac{1}{2}$. Logo, para calcular 50% de 96, por exemplo, basta dividi-lo por 2.

50% de 96 = 96 ÷ 2 = 48.

2º) 10% de um número é a décima parte do número, pois $10\% = \dfrac{10}{100} = \dfrac{1}{10}$. Logo, para calcular 10% de 360, por exemplo, basta dividi-lo por 10.

10% de 360 = 360 ÷ 10 = 36

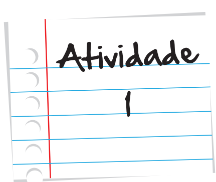
3º) 25% de um número é a quarta parte do número, pois 25% = $\frac{25}{100}$ e simplificando essa fração temos $\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$. Logo, para calcular 25% de 328, por exemplo, basta dividi-lo por 4.

25% de 328 = 328 ÷ 4 = 82

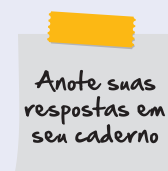
4º) 1% de um número é a centésima parte do número. Logo, para calcular 1% de 965, por exemplo, basta dividi-lo por 100.

1% de 965 = 965 ÷ 100 = 9,65

Utilizando-se esses resultados, podemos fazer outros cálculos mentalmente, tais como: 5%, que é a metade de 10%; 20%, que é o dobro de 10%; e outros.



Calcule mentalmente 15% de R$ 500,00 e explique como fez o cálculo.



Calculando a taxa de porcentagem

Em muitas situações necessitamos descobrir qual é a taxa de porcentagem que está sendo usada para calcular multas ou desconto. Assim poderemos fazer comparações entre taxas que nos são oferecidas como desconto ou como encargos e, se for possível, fazer as escolhas mais favoráveis ao nosso orçamento.

Isso pode ser resolvido por meio de uma equação algébrica do 1º grau onde a taxa de porcentagem, que chamaremos de p, é a incógnita da equação.

Exemplo:

Luana não pagou a fatura de seu cartão de crédito no valor de R$ 857,00 no dia do vencimento. No mês seguinte recebeu a cobrança de R$ 111,41 referente à multa pelo atraso. Que porcentagem do valor da fatura a multa representa?

Fonte: http://www.sxc.hu/photo/1316485

Escrevendo a equação para calcular a taxa de porcentagem(p), temos:

111,41 = p de 857,00

111,41 = p $\times$ 857, 00, sendo p a taxa de porcentagem.

Logo p = 111,41 $\div$ 857,00 e p = 0,13.

Logo, como $0{,}13 = \frac{13}{100}$, a taxa de porcentagem da multa foi de 13%.

Vânia recebeu no seu contracheque desse mês, além do salário de R$1.258,00, um aumento no valor de R$ 251,60. Qual foi a taxa de porcentagem do aumento que Vânia recebeu?

Atividade 2

Anote suas respostas em seu caderno

Calculando o número, conhecendo a porcentagem

No próximo exemplo, vamos apresentar uma situação em que são conhecidas a porcentagem e a respectiva taxa, e precisamos calcular o número sobre o qual foi calculada essa porcentagem. Isso também será resolvido por meio de uma equação do 1º grau.

Exemplo: Uma casa ocupa uma área de 121m^2 que representa 55% da área total do terreno. Qual é a área do terreno?

55% do terreno correspondem a 121 m^2.

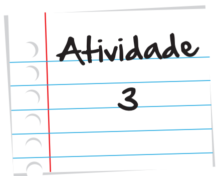
0,55 x A = 121, sendo A a área total do terreno.

A = 121$\div$ 0,55

A = 220

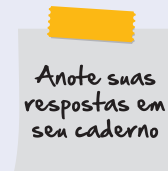
A área total do terreno é 220m^2.

Fonte: http://www.sxc.hu/photo/1387294



Em uma cidade, 53.100 habitantes têm menos de 18 anos, o que corresponde a 60% do total de habitantes da cidade. Quantos são os habitantes dessa cidade?

Fundação Roberto Marinho- Multicurso- Ensino médio -volume 2



Porcentagem de porcentagem

Em algumas situações, é necessário calcular a porcentagem de um número que já está relacionado à outra porcentagem.

No exemplo a seguir será mostrado que, para se fazer esse cálculo, as duas taxas serão multiplicadas entre si.

Exemplo:

Mauricio gastou 20% de sua mesada de R$ 250,00 comprando material escolar, sendo que 12% desse gasto foram para comprar uma caneta.

Qual o porcentual da mesada que corresponde ao preço da caneta?

O preço da caneta corresponde a 12 % de 20% de 250,00, ou seja,

$0{,}12 \times 0{,}20$ de $250 = 0{,}024 \times 250 = 6$.

O preço da caneta corresponde a 2,4% da mesada de Mauricio e seu custo é igual a R$ 6,00.

Fonte: http://www.sxc.hu/photo/1206626

Da população total do Brasil, 52% são mulheres. Além disso, 20% das mulheres possuem o ensino médio completo. Qual a porcentagem de mulheres que possuem o ensino médio completo em relação ao total da população brasileira?

Fundação Roberto Marinho- Multicurso- Ensino médio -volume 2

Atividade 3

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 2
Aumentos e descontos

É bastante comum precisarmos calcular um novo valor obtido após um aumento. Essa situação pode ser resolvida em duas etapas, calculando primeiramente o aumento para depois acrescentarmos esse aumento ao valor inicial.

Da mesma forma acontece quando precisamos calcular um novo valor obtido após um desconto. Calculamos em primeiro lugar o desconto para depois subtraí-lo do valor inicial. Veja nos exemplos a seguir de que forma aparece e como se soluciona esse tipo de problema muito comum em nosso cotidiano.

1 º Exemplo:

Marina se esqueceu de pagar a sua conta do condomínio na data do vencimento. Ela pagará uma multa de 5% do valor da conta, que é R$ 220,00.

Fonte: http://www.sxc.hu/photo/865433

Quanto Marina terá que pagar?

Calculando o valor da multa: 5% de 220,00 = $0,05 \times 220 = 11$.

Calculando o novo valor a ser pago: $220 + 11 = 231$.

Marina terá que pagar R$ 231,00.

2º Exemplo: No final do ano passado, uma livraria ofereceu desconto de 7% no preço de todos os livros. Fiz uma compra de alguns livros no valor de R$ 154,00. Quanto pagarei após o desconto?

Fonte: http://www.sxc.hu/photo/871147

Calculando o desconto: 7% de 154,00 = 0,07 × 154 = 10,78.

Calculando o novo valor a ser pago: 154 – 10,78 = 144,22.

Pagarei R$ 144,22 pela compra após o desconto.

Essas duas situações, que foram resolvidas em duas etapas, também poderiam ser resolvidas em apenas uma etapa, o que facilitaria no caso de você usar uma calculadora.

No 1º exemplo podemos calcular diretamente o novo valor fazendo:

$$\underbrace{100\%\,de\,220}_{valor\ da\ conta} + \underbrace{5\%\,de\,220}_{valor\ da\ multa} = \underbrace{105\%\,de\,220}_{valor\ a\ ser\ pago}$$

105% de 220 = 1,05 × 220 = 231. O novo valor é R$ 231,00.

Resumindo, você pode calcular o novo valor já com o aumento multiplicando o valor inicial por 1,05. O número 1,05 é chamado "fator de correção".

No 2º exemplo vamos calcular o novo valor após o desconto.

$$\underbrace{100\%\,de\,154}_{\text{valor da compra}} - \underbrace{7\%\,de\,154}_{desconto} = \underbrace{93\%\,de\,154}_{preço\ a\ pagar}$$

93% de 154 = 0,93 × 154 = 144,22. O novo valor é R$144,22.

Ou seja, para calcular o valor da compra com desconto, basta multiplicar o valor inicial por 0,93. Nesse caso, 0,93 é o fator de correção.

Atividade 5

O preço de um celular em certa loja é R$ 480,00. Se eu pagar à vista, a loja me oferece 15% de desconto. Quanto pagarei pelo celular se eu pagá-lo à vista?

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 3
Aumentos e descontos sucessivos

É bastante comum que sejam feitos aumentos sucessivos em salários ou descontos sucessivos em faturas ou preços de mercadorias. Por isso, é importante saber efetuar esse tipo de cálculo com a finalidade, entre outras, de controlar esses aumentos e descontos.

1º Exemplo: Uma pessoa teve um aumento de salário de 5% no mês de janeiro e outro aumento de 10% no mês seguinte. Como você calcularia a taxa total do aumento que essa pessoa recebeu nesses dois meses? Será que devemos somar as duas taxas de aumento?

Vamos fazer os cálculos para verificar.

Como não conhecemos o salário dessa pessoa sobre o qual vamos calcular os aumentos, vamos imaginar que este salário seja de R$ 100,00.

No mês de janeiro ela recebeu 5% de aumento, então:

5% de 100 = $0{,}05 \times 100 = 5$.

Logo, o salário passou a ser R$ 105,00.

No mês seguinte ela recebeu 10% de aumento, então:

10% de 105 = $0{,}1 \times 105 = 10{,}5$.

O salário passou a ser $105 + 10{,}5 = 115{,}50$.

O aumento total foi $115{,}50 - 100 = 15{,}50$, ou seja, 15,5%.

Vimos que, quando temos dois aumentos sucessivos, não devemos somar as taxas para determinar o total do aumento. Esse raciocínio vale para o caso de mais de dois aumentos sucessivos.

Qual seria o fator de correção? Como encontrar esse fator?

2º Exemplo: Em uma liquidação, o preço de uma saia sofreu um desconto de 15%. Como não foi vendida, no mês seguinte sofreu mais um desconto de 12%. Qual foi a taxa total de desconto?

Considerando que a saia custe R$ 100,00, o primeiro desconto foi

$0{,}15 \times 100 = 15$, e o preço da saia caiu para R$ 85,00.

O segundo desconto foi de 12% de 85, ou seja, $0{,}12 \times 85 = 10{,}20$, e o preço da saia passou a ser $85 - 10{,}20 = 74{,}80$.

O desconto total do preço da saia foi 100 – 74,80 = 25,20.

Logo, a taxa total de desconto total foi de 25,20%.

Qual o fator de correção? E como encontrá-lo?

Atividade 6

Atividade 06- Uma empresa distribuidora oferece, sobre o valor de uma fatura, os descontos sucessivos de 10% e 4%. Sabendo que o valor da fatura é de R$ 6.000,00, qual o seu valor líquido?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 7

Atividade 07- Aumentos sucessivos de 20% e de 30% equivalem a um aumento único de que percentual? E descontos sucessivos de 20% e de 30% equivalem a um desconto único de que percentual? E um aumento de 20% seguido de um desconto de 30% equivalem a um único aumento ou desconto? De que percentual?

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 4
Lucro e Prejuízo

Fonte: http://www.sxc.hu/photo/958658

Esses são termos muito utilizados em atividades comerciais. Você com certeza os conhece.

Pense um pouco e escreva em uma folha as explicações. Dê exemplos.

Nos próximos exemplos vamos apresentar situações de lucro ou de prejuízo, muito comuns no nosso dia a dia, e mostrar como é feito o cálculo em cada situação.

1º Exemplo: Um comerciante pretende lucrar 20% na venda de uma mercadoria que lhe custou R$ 1.800,00. Por quanto deve vendê-la?

Calculando o lucro: 20 % de 1.800,00 = 0,20 × 1.800 = 360.

Calculando o preço de venda da mercadoria: 1.800 + 360 = 2.160.

Para lucrar 20%, o comerciante deve vender a mercadoria por R$ 2.160,00.

Atenção: O preço de venda da mercadoria também poderia ser calculado em uma só etapa, pois o preço de venda é a soma do preço de compra com o lucro. Logo:

$$\text{Preço de venda} = \underbrace{\text{preço de compra}}_{100\%} + \underbrace{\text{lucro}}_{20\%}$$

Preço de venda = 120% do preço de compra = 1,20 de 1.800,00.

Preço de venda = 1,20 × 1.800 = 2.160.

Preço de venda: R$ 2.160,00

Portanto, para calcular o preço de venda, basta multiplicar o preço de compra por 1,20 (1 + 0,20), onde 0,20 é a porcentagem do lucro.

2º Exemplo: Um relógio que custou R$ 950,00 foi vendido com um prejuízo de 17%. Por quanto foi vendido o relógio?

Fonte: http://www.sxc.hu/photo/1365362

Calculando o prejuízo: 17% de 950,00 = 0,17 × 950 = 161,50.

Calculando o preço de venda do relógio: 950,00 – 161,50 = 788,50.

O preço de venda do relógio foi de R$ 788,50.

Atenção: Da mesma forma podemos calcular o preço de venda em uma só etapa:

$$\text{Preço de venda} = \underbrace{\text{preço de compra}}_{100\%} - \underbrace{\text{prejuízo}}_{17\%}$$

Preço de venda = 83% do preço de compra = 0,83 de 950,00.

Preço de venda = 0,83 × 950 = 788,50.

Preço de venda: R$ 788,50.

Portanto, para calcular o preço de venda basta multiplicar o preço de compra por 0,83 (1 – 0,17), onde 0,17 é a porcentagem do prejuízo.

Saiba Mais

Existem outros termos usados em diferentes setores da economia, com o significado semelhante a lucro e prejuízo.

Em uma empresa, por exemplo, usa-se anotar o movimento de entrada e saída de dinheiro ou créditos e débitos.

Também é usual se falar em superávit ou saldo positivo em vez de lucro ou déficit e saldo negativo para prejuízo.

Saber calcular o lucro ou o prejuízo é importante, pois são conceitos fundamentais em transações financeiras. O primeiro diz respeito ao ganho obtido na compra e venda de determinada mercadoria. O segundo diz respeito à perda. Resumindo, podemos dizer que:

Lucro (L) = Preço de venda (V) – Preço de custo (C)

Prejuízo (P) = Preço de custo (C) – Preço de venda (V)

Faça as atividades a seguir e exercite a compreensão desses conceitos.

Atividade 8

Maria vendeu uma jóia por R$ 1.250,00 com prejuízo de 10,5% sobre o preço de compra. Qual foi o preço de compra da jóia de Maria?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 9

Se eu comprar um objeto por R$ 20.000,00 e vendê-lo por R$ 25.000,00 qual será a minha porcentagem de lucro sobre o preço de compra?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 10

Caso você multiplique o preço de uma mercadoria por 1,08, o resultado obtido será um preço com lucro ou com prejuízo? De quantos por cento em relação ao preço de custo?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 11

Para calcular o preço de venda de um objeto que foi vendido com prejuízo de 35%, por quanto devemos multiplicar o preço de custo do objeto?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 12

Quanto custou um relógio vendido por R$ 198,00, com um prejuízo de R$ 28,00 sobre o preço de custo?

Anote suas respostas em seu caderno

Conclusão

Os conceitos apresentados nesta aula podem já ser conhecidos. No entanto, é importante rever e organizar os conhecimentos adquiridos anteriormente visando a sua aplicação em diferentes situações da nossa vida financeira. Essa aula terá uma continuidade, quando serão estudados outros conceitos importantes da Matemática Financeira.

Resumo

O estudo de Matemática Financeira parte do conhecimento correto de porcentagem: seu conceito e os diversos tipos de cálculo que usamos para resolver situações envolvendo este conceito.

É importante que se desenvolva o cálculo mental de porcentagens, para permitir maior autonomia do indivíduo ao fazer uma compra, na hora de escolher uma forma de pagamento ou ainda na hora de escolher como investir o seu dinheiro.

O uso da calculadora também é valioso, já que essa ferramenta é usada amplamente no mercado e na vida cotidiana de todos nós. Portanto, torna-se importante conhecer todos os recursos que uma calculadora, mesmo do tipo simples, nos oferece.

Foram apresentadas também as primeiras noções de Lucro e Prejuízo e as maneiras de se fazer os cálculos para a determinação desses valores.

Os aumentos e descontos sucessivos são também parte do nosso cotidiano e é importante ressaltar que muitas pessoas pensam erroneamente a respeito desse cálculo, fazendo a soma das porcentagens sucessivas.

Foi mostrado que podemos considerar o valor desconhecido como 100. Isso facilita os cálculos, e, dessa forma, podemos calcular o primeiro aumento (ou desconto) e em seguida calcular os outros aumentos (ou descontos). No final saberemos qual foi o aumento (ou desconto) total aplicado sobre o valor 100.

Veja ainda

- http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/aplicacao-porcentagem-matematica-financeira.htm

Este site apresenta alguns exemplos de como o cálculo de porcentagem é importante no estudo da Matemática Financeira.

- http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1458-6.pdf.

Aqui é apresentado um trabalho da professora Ângela Regina da Silva com diversas atividades ilustradas que foram aplicadas no Colégio Estadual de Paraíso do Norte em 2008 para alunos do Ensino Médio.

Referências

Livros

- FUNDAÇÃO ROBERTO MARINHO. Multicurso – Ensino Médio. p. 73 a 84. v. 2.
- DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contextos e aplicações. Editora Ática, 2010, p. 196 a 208, volume único.

Imagens

 • http://www.sxc.hu/photo/475767

 • http://www.sxc.hu/photo/1241539

 • http://www.sxc.hu/photo/1241540

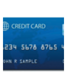
 • http://www.sxc.hu/photo/1403392

 • http://www.sxc.hu/photo/784488

 • http://www.sxc.hu/photo/983490

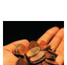
 • Fonte: http://www.sxc.hu/photo/1259850

 • Fonte: http://www.sxc.hu/photo/987763

 • Fonte: http://www.sxc.hu/photo/1316485

 • Fonte: http://www.sxc.hu/photo/1387294

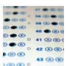
 • Fonte: http://www.sxc.hu/photo/1206626

 • Fonte: http://www.sxc.hu/photo/865433

- Fonte: http://www.sxc.hu/photo/871147

- **Fonte: http://www.sxc.hu/photo/958658**

- Fonte: http://www.sxc.hu/photo/1365362



- http://www.sxc.hu/photo/517386

Respostas das Atividades

Atividade 1

Exemplo de resposta:

10% de 400 = 50

5% de 500 é a metade de 10% de 500, logo, são 25.

15% de 500 = 50 + 25 =75

Resposta: R$ 75,00.

Atividade 2

Resposta: 20%

Atividade 3

0,6 x N = 53.100, onde N é o número de habitantes.

N = 53 100 ÷ 0,6 = 88.500.

Resposta: 88.500 habitantes.

Respostas das Atividades

Atividade 4

$52\% \times 20\% = 0{,}52 \times 0{,}20 = 0{,}104$

Resposta: 10,4%.

Atividade 5

$1 - 0{,}15 = 0{,}85$.

$0{,}85 \times 480 = 408$.

Resposta: R$ 408,00.

Atividade 6

10% de 6 000 = 600.

$6.000 - 600 = 5.400$.

4% de 5.400 = 216.

$5.400 - 216 = 5.184$.

Resposta: R$ 5.184,00.

Atividade 7

Resposta: 56% e 44%. Desconto de 14%.

Atividade 8

$1 - 0{,}105 = 0{,}895$.

$0{,}895\ x = 1.250\ x = 1.250 \div 0{,}895 = 1.396{,}64$.

Resposta :R$ 1.396,64.

Respostas das Atividades

Atividade 9

Esta atividade pode ser resolvida mentalmente.

O lucro foi de R$ 5.000,00 que representa a quarta parte do preço de compra, que foi de R$ 20.000,00.

Logo, o lucro foi de 25%.

Atividade 10

$100 \times 1{,}08 = 106.$

$108 - 100 = 8.$

Resposta: lucro de 8%.

Atividade 11

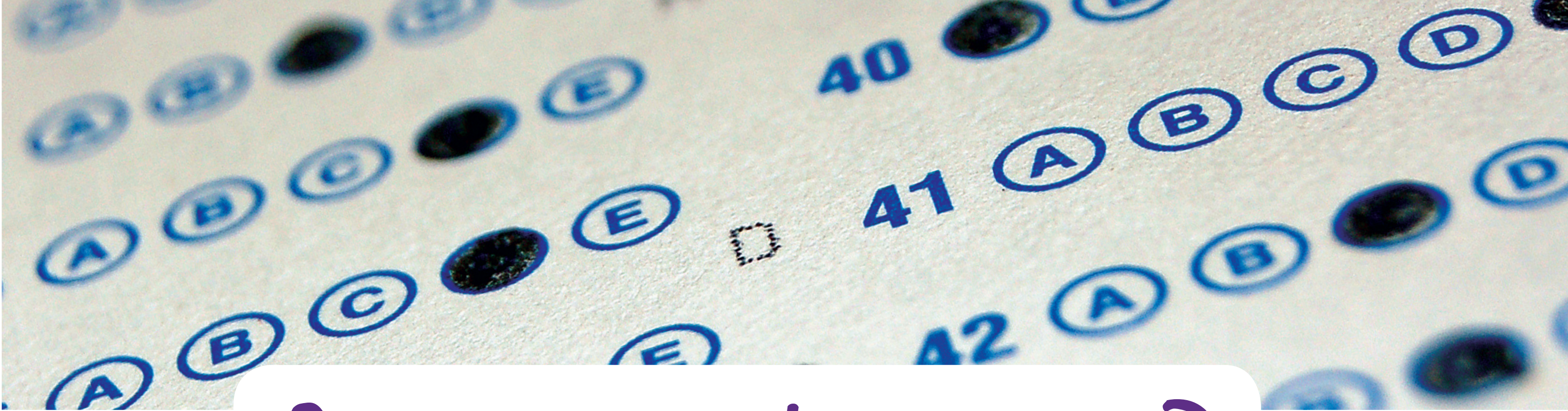
$1 - 0{,}35 = 0{,}65.$

Resposta: 0,65.

Atividade 12

$198 + 28 = 226.$

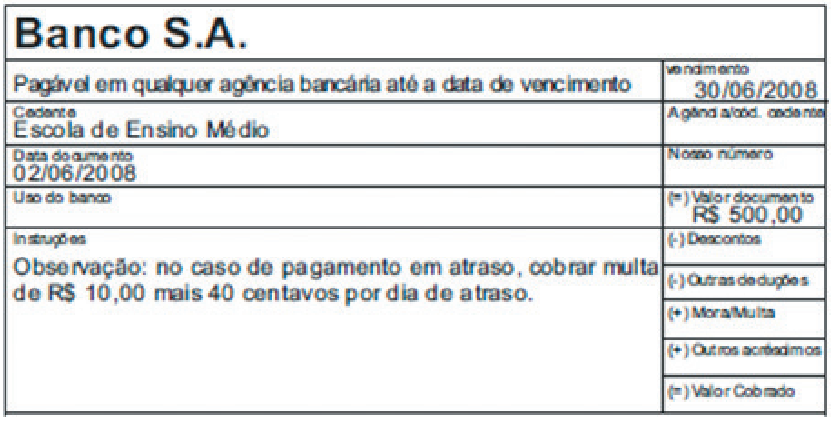
Resposta: R$ 226,00.



O que perguntam por aí?

Questão 1 (Prova 1- Amarela-ENEM 2008 – pag.10)

A figura abaixo representa o boleto de cobrança da mensalidade de uma escola, referente ao mês de junho de 2008.



Banco S.A.	
Pagável em qualquer agência bancária até a data de vencimento	vencimento 30/06/2008
Cedente Escola de Ensino Médio	Agência/cód. cedente
Data documento 02/06/2008	Nosso número
Uso do banco	(=) Valor documento R$ 500,00
Instruções Observação: no caso de pagamento em atraso, cobrar multa de R$ 10,00 mais 40 centavos por dia de atraso.	(-) Descontos
	(-) Outras deduções
	(+) Mora/Multa
	(+) Outros acréscimos
	(=) Valor Cobrado

Se M(x) é o valor, em reais, a mensalidade a ser paga, em que x é o número de dias em atraso, então

a. $M(x) = 500 + 0{,}4x$

b. $M(x) = 500 + 10x$

c. $M(x) = 510 + 0{,}4x$

d. $M(x) = 510 + 40x$

e. $M(x) = 500 + 10{,}4x$

Resposta: Letra C

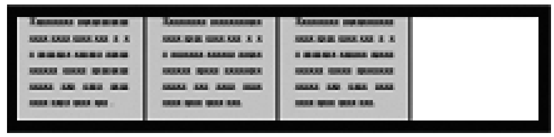
Comentário: Como é cobrada uma multa fixa de R$ 10,00 pelo pagamento em atraso, deve-se somar 500 + 10= 510.

Cada dia de atraso, representado por x deve ser multiplicado por 40 centavos, ou seja, 0,40.

Então teremos: $M(x) = 510 + 0{,}40x$

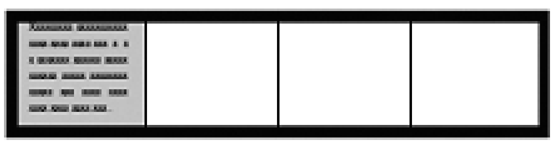
Questão 2 (Prova azul – caderno 7 – MT 2° dia – ENEM 2010 – pag. 20)

Um professor dividiu a lousa da sala de aula em quatro partes iguais. Em seguida, preencheu 75% dela com conceitos e explicações, conforme a figura seguinte.

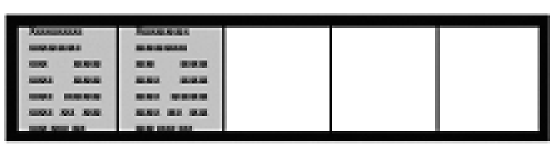


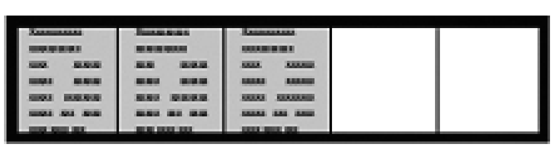
Algum tempo depois, o professor apagou a lousa por completo e, adotando um procedimento semelhante ao anterior, voltou a preenchê-la, mas dessa vez, utilizando 40% do espaço dela.

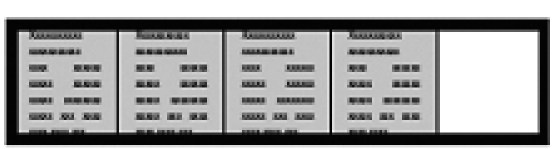
Uma representação possível para essa segunda situação é:

a. 

b. 

c. 

d. 

e. 

Resposta: Letra C

Comentário: $40\% = \frac{40}{100} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$

Portanto essa porcentagem está representada pela figura do item C, pois a lousa está dividida em 5 partes iguais e o professor usou 2 dessas partes.

Questão 3 (ENEM 2010 – MT – 2o dia - Caderno 7 – Azul - Página 28)

Um grupo de pacientes com Hepatite C foi submetido a um tratamento tradicional em que 40% desses pacientes foram completamente curados. Os pacientes que não pbtiveram cura foram distribuídos em dois grupos de mesma quantidade e submetidos a dois tratamentos inovadores. No primeiro tratamento inovador, 35% dos pacientes foram curados e, no segundo, 45%.

Em relação aos pacientes submetidos inicialmente, os tratamentos inovadores proporcionaram cura de:

a) 16% b) 24% c) 32% d) 48% e) 64%

Resposta: Letra B

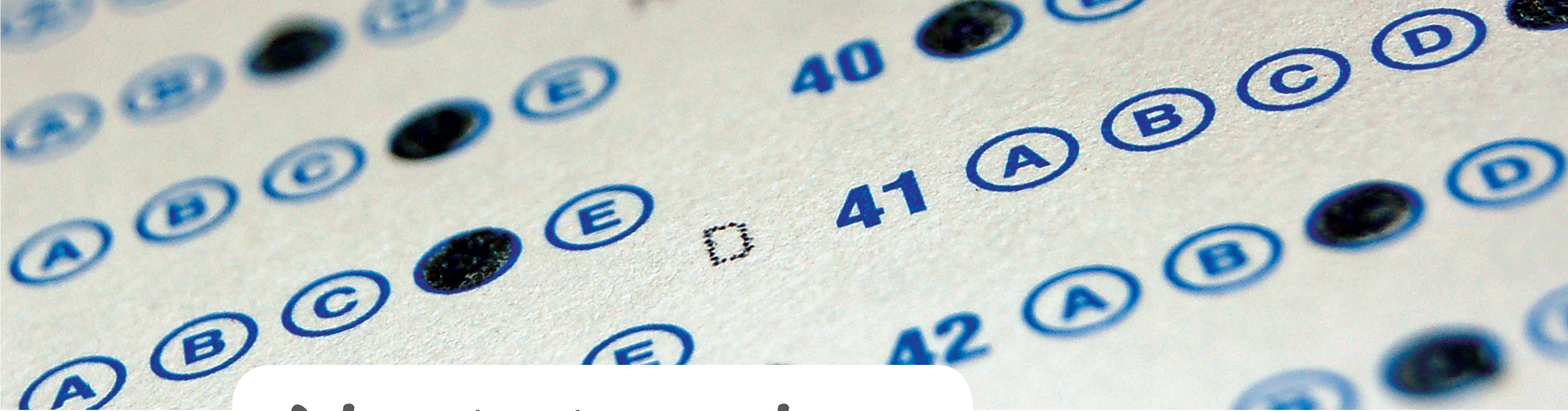
Comentário: 60% dos pacientes foram distribuídos em dois grupos de mesma quantidade, ou seja, 30% em cada um. No 1º tratamento inovador a cura foi de 35% dos pacientes.

35% de 30% = $0{,}35 \times 0{,}30 = 0{,}105$.

No 2º tratamento inovador a cura foi de 45% dos 30%.

45% de 30% = $0{,}45 \times 0{,}30 = 0{,}135$.

Somando-se os resultados dos dois tratamentos: $0{,}105 + 0{,}135 = 0{,}24$ = 24%.



Atividade extra

Exercício 1

Em uma loja de roupas, os preços foram remarcados com um aumento de 40%. O gerente percebeu a queda nas vendas após a remarcação e decidiu anunciar um desconto de 20% em todas as peças, o que aumentou as vendas. O que os clientes não sabem é que o preço de qualquer peça, após o desconto, ainda é maior do que o preço original antes do aumento. Em quantos por cento foi reajustado o preço das roupas?

(a)12%   (b) 15%   (c) 20%   (d) 60%

Exercício 2

Um lojista deu dois descontos sucessivos no preço dos eletrodomésticos do mostruário de sua loja. O primeiro de 15% e o segundo de 10% sobre todas as mercadorias. Após os descontos, João decidiu comprar um computador para a sua famíilia e pagou R$1071,00 à vista. Qual era o preço do computador antes dos descontos?

(a) R$1096,00   (b) R$1338,75   (c) R$1260,00   (d) R$1400,00

Exercício 3

No final do ano de 2012 o Brasil contava com aproximadamente 6,9 milhões de desempregados, que corresponde a uma taxa de aproximadamente 6% sobre a população brasileira economicamente ativa (pessoas que podem trabalhar). Quantos trabalhadores temos no país?

(a) 64.860.000   (b) 73.140.000   (c) 115.000.000   (d) 414.000.000

Exercício 4

Um saco de 1kg feijão, no ano de 2011, custava em média R$ 3,40. Em 2012 o preço médio do mesmo saco é R$ 4,76. De quanto foi o aumento do preço do feijão?

(a) 36% (b) 40% (c) 65% (d) 70%

Exercício 5

Uma concessionária obtém um lucro de 50% sobre o valor de cada carro vendido. O valor obtido na venda equivale a quantos por cento sobre o preço de custo?

(a) 25% (b) 50% (c) 75% (d) 100%

Exercício 6

Uma organização que arrecada fundos para a população carente, informou que após a recessão o valor das doações caiu 3% em relação ao ano anterior, sendo arrecadado somente 300 milhões de reais. Qual o valor aproximado, em milhões de reais, das doações no ano anterior?

(a) 306,0 (b) 307,4 (c) 308,9 (d)309,2

Exercício 7

Uma pessoa pode obter um desconto de R$1.100,00 no seu imposto de renda caso faça uma doação para um Hospital Infantil. Sem o desconto pagaria o imposto integral no valor de R$5.500,00. Fazendo a doação, de quanto será o desconto?

(a) 5% (b) 20% (c) 25% (d) 40%

Exercício 8

Uma loja está vendendo uma TV à R$1200,00 à vista ou à prazo, em 15 parcelas fixas de R$135,00. Um cliente decidiu comprar a TV à prazo. Que porcentagem da TV o cliente pagará a mais?

(a) 68,75% (b) 72,50% (c) 75,25% (d) 82,75%

Exercício 9

Maria deseja comprar um novo computador que custa, à vista, R$2200,00. Ela decide pagar parcelado, e calcula o valor em 10 parcelas fixas, com 35% sobre o valor do produto à vista. Que valor será pago em cada parcela?

(a) R$135,00 (b) R$220,00 (c) R$255,00 (d) R$297,00

Exercício 10

Um supermercado vende produtos prestes a perder o prazo de validade na promoção "leve 4 e pague 3". Quanto é o desconto na aquisição de 4 itens desse mesmo produto?

(a) 25% b) 27% (c) 29% (d) 31%

Exercício 11

Um lojista com intuito de não obter prejuízo, sabe que o preço de venda de seus produtos deve ser no mínimo 40% superior ao preço de custo. Sendo assim, ele aumenta o preço de venda dos produtos em 75% em relação ao preço de custo, para agradar aos clientes que pedem desconto na hora da compra. Qual o maior desconto que ele pode conceder ao cliente, sobre o preço da tabela, de modo a não ter prejuízo?

Exercício 12

Uma piscina com capacidade de 6000 litros, estava cheia de água cujo índice de salinidade era de 12%. Após um dia de sol forte, uma parte da água evaporou e esse índice subiu para 23%. Quantos litros de água evaporaram nesse dia?

Exercício 13

Um guarda-roupa foi comprado à prazo, no valor de R$2.204,00. Sabe-se que foi obtido um desconto de 5% sobre o preço de etiqueta, mas se a compra tivesse sido à vista, o guarda-roupa teria saído pelo valor de R$1972,00. Qual teria sido o desconto se o pagamento fosse à vista?

Exercício 14

O Novo Código Florestal, aprovado pelo Congresso Nacional do Ano de 2012, prevê 80% de preservação da área localizada em florestas, 35% de área localizada em cerrados e 20% de área preservada em demais regiões e outros biomas. Uma madeireira possui uma área de 300km^2 na Floresta Amazônica. De acordo com o novo código, até quanto km^2 da área poderão ser explorados?

Exercício 15

Uma pessoa aplicou certa quantia no mercado de ações da Bolsa de Valores. Em um mês, ela perdeu 30% de tudo que investiu, mas no mês seguinte, recuperou 20% do que havia perdido. Passados os dois primeiros meses, ela decidiu vender suas ações, que valiam R$3.800,00. Qual foi o valor do investimento inicial?

Gabarito

Exercício 1

A B C D

● ○ ○ ○

Exercício 2

A B C D

○ ○ ○ ●

Exercício 3

A B C D

○ ○ ● ○

Exercício 4

A B C D

○ ● ○ ○

Exercício 5

A B C D

○ ● ○ ○

Exercício 6

A B C D

○ ○ ○ ●

Exercício 7

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 8

A	B	C	D
●	○	○	●

Exercício 9

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 10

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 11

Seja x o preço de custo e y o preço de venda de um produto dessa loja. O valor mínimo pelo qual o produto pode ser vendido é $y = 1,4x$, o lojista aumenta em 75% o preço de custo, então o preço de venda é $y = 1,75x$. O desconto máximo é de $0,35x$. Em porcentagem, usando regra de três tem-se

$$\frac{1,75x}{0,35x} = \frac{100\%}{D}$$

onde D é o desconto cedido pelo lojista. Realizando os cálculos chegamos a D = 20%.

Exercício 12

Seja x a quatidade de água após a evaporação, então

$$\frac{6000}{x} = \frac{88\% \text{ de água}}{77\% \text{ de água (após a evaporação)}}$$

Resolvendo

$$6000 \times 77 = 88x \Rightarrow x = \frac{462000}{88} = 5250$$

Portanto,há 5250 litros de água na piscina.

Logo, evaporaram 6000 – 5250 = 750 litros de água.

Exercício 13

Preço com desconto de 5% = 2.204,00, então esse valor equivale a 95% do preço. Sendo x o desconto para o pagamento à vista tem-se

$95\% \rightarrow 2.204{,}00$

$x \rightarrow 1.972$

Resolvendo para *x*

$$\frac{95}{x} = \frac{2204}{1972} \Rightarrow x = 85$$

Portanto o desconto para pagamento a vista é de 85%.

Exercício 14

Como a área está na Floresta Amazônica devem ser preservados 80%, logo podem ser explorados 20%. Então

$$20\% \text{ de } 300 = \frac{20}{100} \times 300 = 60$$

Portanto, podem ser explorados 60km^2.

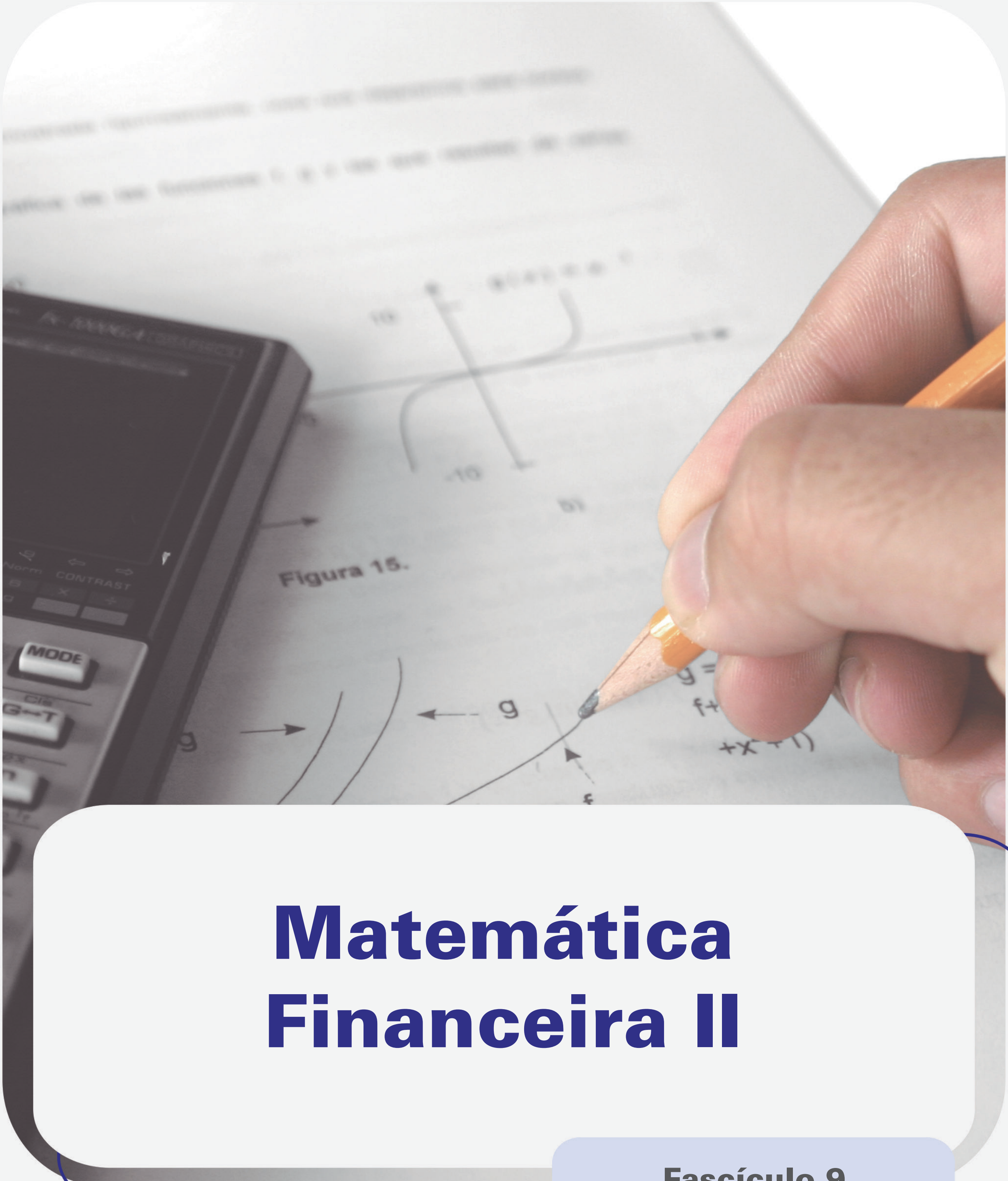
Exercício 15

Considere v o valor investido. A perda de 30% corresponde a $0{,}3v$. Como recuperou 20% do que perdeu, ganhou

$$20\% \text{ de } 0{,}3\text{v} = \frac{20}{100} \times 0{,}3v = 0{,}06v$$

Portanto, $v - 0{,}3v + 0{,}06v \Rightarrow 3.800 = 0{,}76v = 3.800 \Rightarrow v = 5.000$.

Portanto o investimento inicial foi de R$5.000.



Matemática Financeira II

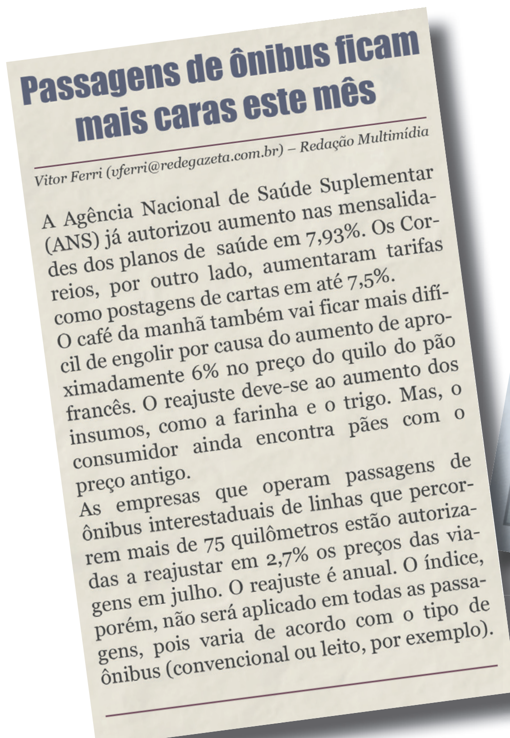
Fascículo 9

Unidade 28

Fundação CECIERJ

Matemática Financeira II

Para início de conversa...



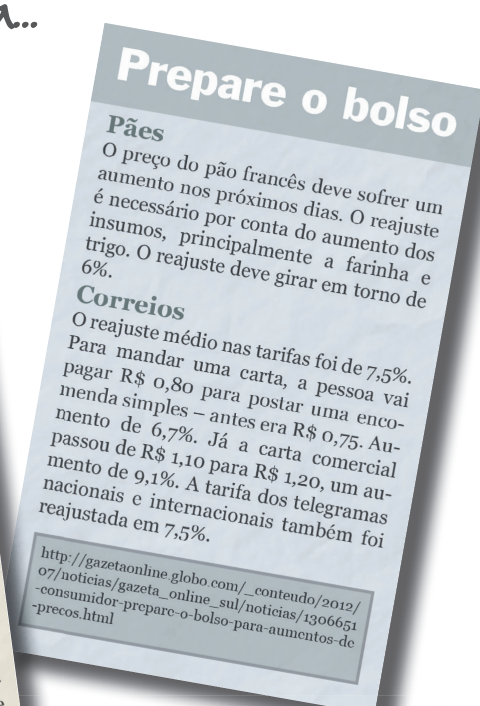
Passagens de ônibus ficam mais caras este mês

Vitor Ferri (vferri@redegazeta.com.br) – Redação Multimídia

A Agência Nacional de Saúde Suplementar (ANS) já autorizou aumento nas mensalidades dos planos de saúde em 7,93%. Os Correios, por outro lado, aumentaram tarifas como postagens de cartas em até 7,5%.

O café da manhã também vai ficar mais difícil de engolir por causa do aumento de aproximadamente 6% no preço do quilo do pão francês. O reajuste deve-se ao aumento dos insumos, como a farinha e o trigo. Mas, o consumidor ainda encontra pães com o preço antigo.

As empresas que operam passagens de ônibus interestaduais de linhas que percorrem mais de 75 quilômetros estão autorizadas a reajustar em 2,7% os preços das viagens em julho. O reajuste é anual. O índice, porém, não será aplicado em todas as passagens, pois varia de acordo com o tipo de ônibus (convencional ou leito, por exemplo).



Prepare o bolso

Pães

O preço do pão francês deve sofrer um aumento nos próximos dias. O reajuste é necessário por conta do aumento dos insumos, principalmente a farinha e trigo. O reajuste deve girar em torno de 6%.

Correios

O reajuste médio nas tarifas foi de 7,5%. Para mandar uma carta, a pessoa vai pagar R$ 0,80 para postar uma encomenda simples – antes era R$ 0,75. Aumento de 6,7%. Já a carta comercial passou de R$ 1,10 para R$ 1,20, um aumento de 9,1%. A tarifa dos telegramas nacionais e internacionais também foi reajustada em 7,5%.

http://gazetaonline.globo.com/_conteudo/2012/07/noticias/gazeta_online_sul/noticias/1306651-consumidor-prepare-o-bolso-para-aumentos-de-precos.html

Notícias como essas são encontradas em jornais com bastante frequência atualmente. Essas situações de aumentos e outras como financiamentos de carros, de moradias, empréstimos pessoais, rendimentos de poupança estão sempre relacionadas com a noção de juros.

Vamos continuar, nesta aula, a estudar mais alguns tópicos sobre Matemática Financeira. Nela vamos falar sobre situações que envolvem juros simples e compostos.

Objetivos de aprendizagem

- Resolver situações-problema que envolvem cobranças de juros simples.
- Resolver situações-problema que envolvem cobrança de juros compostos.
- Avaliar e comparar os dois tipos de situações.

Seção 1
Capital, juros e montante

Se uma pessoa pedir um empréstimo por determinado tempo, ela devolverá, no final do período, essa quantia, chamada de **Capital**, acrescida de um valor previamente combinado. Este valor chamado de juros é estabelecido por uma porcentagem, a **taxa de juros**.

O capital inicial, acrescido dos juros, é chamado de **Montante**.

Capital

Capital é a quantia emprestada ou investida sobre a qual serão calculados os juros.

Taxa de juros

Taxa de juros é o porcentual de juros cobrado em um empréstimo ou em um investimento. Ela pode ser cobrada ao dia, ao mês, ao ano etc.

Montante

Montante é a soma do Capital com os juros.

No exemplo a seguir vamos mostrar como se calculam juros, destacando depois os dados importantes da situação e suas nomenclaturas.

Exemplo 1

Janaína pediu emprestada a um amigo a quantia de R$ 950,00. Eles combinaram que ela devolveria o dinheiro com uma taxa de juros de 2% ao mês.

No final do 1º mês, Janaína teria que devolver:

950,00 + 2% de 950,00

$950 + 0{,}02 \times 950 = 950 + 19 = 969$

No final do 1º mês, Janaína teria que devolver a quantia de R$ 969,00.

Então, neste problema podemos destacar:

Capital (C): R$ 950,00

Tempo(t): 1 mês

Juros Simples

No cálculo dos juros podemos observar que há uma regularidade envolvendo o capital, o tempo e a taxa de juros. Veja o exemplo:

Léo emprestou R$ 500 a uma amiga à taxa de juros de 3% ao mês. Quanto ele pagará de juros ao final de 4 meses?

Juros de **1** mês : 500 x 0,03 x 1 = 15 x **1** = 15

Juros de **2** meses: 500 x 0,03 x 2 = 15 x **2** = 30

Juros de **3** meses: 500 x 0,03 x 3 = 15 x **3** = 45

Juros de **4** meses: 500 x 0,03 x 4 = 15 x **4** = 60

Juros de **t** meses: 500x 0,03 x **t** = 15 x **t**

Podemos, então, generalizar escrevendo a fórmula para o cálculo dos juros:

$$\boxed{j = c \times i \times t} \quad \text{ou} \quad \boxed{j = c.i.t}$$

sendo:

- j: total de juros;
- c: capital;
- i: taxa de juros;
- t: tempo de empréstimo.

Observe que a taxa de juros e o tempo devem estar na mesma unidade (meses, anos, etc.)

Neste exemplo, os juros não são acrescentados ao capital ao final de cada mês, por isso o capital permanece o mesmo a cada mês. Portanto, os juros pagos a cada mês são todos iguais, calculados sobre o mesmo valor inicial.

Dizemos, nesse caso, que se trata de *Juros simples*.

É interessante notar que os juros dependem do tempo a que se referem.

Se o tempo aumenta, os juros também aumentam na mesma proporção. No caso de o tempo diminuir, os juros também diminuirão na mesma proporção. Portanto, juros e tempo são grandezas diretamente proporcionais.

Saiba Mais

Regime de Capitalização Simples é o sistema de capitalização no qual os juros são sempre calculados tendo por base de cálculo o valor do capital original.

No regime de capitalização simples, a evolução dos juros ocorre de forma linear ao longo do tempo.

A aplicação dos juros simples tem utilização limitada nos dias atuais, pois que o mercado financeiro adota por critério os juros compostos (que veremos a seguir), limitando-se a utilização dos juros simples para operações financeiras de curto prazo.

Outro exemplo:

Cléber guardou R$ 16.000,00 por 3 anos e 2 meses, recebendo juros simples à taxa de 9% ao ano (a.a.). Verifique se o montante que Cléber acumulou nesse período permite que ele compre um carro de R$ 20.000,00.

Como, nesse caso, a taxa de juros se refere ao período de 1 ano e o tempo é dado em anos e meses, devemos fazer algumas transformações.

3 anos e 2 meses = $3\frac{1}{2}$ do ano = 38 meses.

9% ao ano = $\frac{9}{12}$% ao mês = 0,75% ao mês = 0,0075 ao mês.

O montante M pode ser calculado somando-se ao capital aplicado c os juros j obtidos na aplicação dados pela fórmula j=c.i.t. Assim, teremos que **M = c + c.i.t**, expressão que pode ser escrita na forma M = c(1+it). Substituindo-se as informações do enunciado nessa fórmula, temos:

$M = 16\,000(1 + 0{,}0075 \,.\, 38) = 16\,000(\,1 + 0{,}285) = 16\,000 \,.\, 1{,}285$

$M = 20\,560$

Cléber poderá comprar o carro com esse dinheiro e ainda sobrarão R$ 560,00.

Entendeu o raciocínio? Então faça as atividades a seguir para verificar seu aprendizado.

Atividade 1

Marcos pegou emprestado a quantia de R$ 15.000,00 durante 6 meses, com juros simples, e pagou no final desse período R$ 18.600,00. Qual foi a taxa de juros cobrada?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 2

Uma pessoa pegou emprestada a juros simples a quantia de R$ 3.500,00 e devolveu o montante de R$ 4025,00, sendo a taxa de juros igual a 1,5% ao mês.

Quantos meses durou o empréstimo?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 3

Se eu aplicar o meu capital a juros simples de 6% ao ano durante 5 meses, obterei um montante de R$ 7.687,50. Qual é o meu capital?

Anote suas respostas em seu caderno

Juros Compostos

Diferentes dos juros simples, os juros compostos são determinados sempre em função do montante acumulado no período anterior, e não com base no capital inicial. Veja a situação a seguir:

João pediu um empréstimo de R$ 5000,00 no banco pelo prazo de 3 meses, com taxa de 4% ao mês. Sabendo que os juros são compostos, qual será o valor dos juros a pagar após esse período?

Vamos fazer uma tabela, calculando os juros a cada mês.

Capital	Tempo	Juros pagos a cada mês	Juros acumulados
5000	1	4% de 5000 = 200	200
5200	2	4% de 5200 = 208	408
5408	3	4% de 5408 = 216,32	624,32

Neste caso, os juros calculados a cada mês são somados ao capital que vai ser usado para calcular os juros no mês seguinte.

João pagará de juros, no final dos 3 meses, a quantia de R$ 624,32.

Clique no link http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/19090/index.html?sequence=65 para simular a compra de uma moto usando os conceitos estudados nesta aula. Primeiramente será preciso guardar dinheiro na poupança e, depois, esse valor será dado como entrada na compra da moto. O restante do preço será *financiado*. Para facilitar os cálculos dessa aquisição, serão necessários alguns conceitos de juros compostos.

Fórmula para o cálculo de juros compostos

Você viu que, para calcular o Montante em um sistema de juros compostos, calculamos os juros no final de cada período, somamos esse valor ao capital e formamos um montante sobre o qual calculamos os juros do período seguinte.

Isto é o que chamamos de "juros sobre juros".

Este processo só é prático se o prazo não for longo. No caso de um prazo maior, devemos usar um processo mais prático para resolver este tipo de problema.

Vamos calcular, no sistema de juros compostos, qual será o montante(M) produzido por um capital (C) aplicado a uma taxa mensal (i) durante 4 meses.

	Capital	Juros	Montante no fim de cada período
1º mês	C	iC	$M_1 = C + iC = C(1 + i)$
2º mês	M_1	iM_1	$M_2 = M_1 + iM_1 = M_1(1 + i) =$ $= C(1 + i)(1 + i)$ $M_2 = C(1 + i)^2$
3º mês	M_2	iM_2	$M_3 = M_2 + iM_2 = M_2(1 + i) =$ $= C(1 + i)^2(1 + i)$ M3$= C(1 + i)^3$
4º mês	M_3	iM_3	$M_4 = M_3 + iM_3 = M_3(1+i) =$ $= C(1 + i)^3(1 + i)$ $M_4 = C(1 + i)^4$

Generalizando, podemos escrever a fórmula para o cálculo do Montante ao final de um tempo **t** a juros compostos.

$$\boxed{M = C(1 + i)^t}$$

Podemos observar que os valores de C, M_1, M_2, M_3,... são termos de uma Progressão Geométrica cuja razão é (1 + i).

Dica: Para resolver essas atividades, é mais prático usar uma calculadora.

Nas próximas atividades você irá aplicar a fórmula de cálculo de juros compostos.

Joana tomou um empréstimo no valor de R$ 200,00 a juros compostos de 8% ao mês, por um período de 4 meses. Qual será, ao final do período, a dívida de Joana?

Atividade 4

Anote suas respostas em seu caderno

O capital de R$ 1.000,00 aplicado a juros compostos rendeu R$ 82,50 após 4 meses. Qual foi a taxa de juros mensal?

Atividade 5

Anote suas respostas em seu caderno

Uma pessoa aplicou, a juros compostos, R$ 10.000,00 à taxa de 2% ao mês, gerando um montante de R$ 10.612,08. Por quanto tempo este capital ficou aplicado? Use: $\log 1{,}06 = 0{,}0258$ e $\log 1{,}02 = 0{,}0086$.

Fonte: Fundação Roberto Marinho – Multicurso – 2º grau – volume 2 – p. 93

Atividade 6

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 7

Qual o capital que, aplicado a juros compostos de 5% ao mês, gera um montante de R$ 55.330,00 no prazo de dois meses?

Fonte: Fundação Roberto Marinho – Multicurso – 2º grau – volume 2 – p. 93

Anote suas respostas em seu caderno

Multimídia

O simulador "Matemática Comercial e Financeira" é constituído por seis situações que, para serem resolvidas, utilizam conceitos de juros simples e compostos, descontos e amortizações. Este simulador funciona como um jogo, no qual progredir para a segunda situação implica resolver corretamente a primeira.

Clique no link http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/15899/index.html?sequence=4 e divirta-se.

Atividade 8

Quando minha filha nasceu, guardei na poupança R$ 500,00 com uma taxa de juros de 0,5% ao mês. Ao final de 1 ano, quanto ela terá aproximadamente na poupança?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 9

Um capital de R$ 2.000,00 aplicado a juros compostos rendeu, após 4 meses, o Montante de R$ 2.064,77. Qual foi, aproximadamente, a taxa de juros desse investimento?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 10

Para emprestar dinheiro, uma financeira cobra juros compostos de 15% ao mês (a.m.). Se uma pessoa pegar um empréstimo de R$ 4.300,00 por 2 meses, qual a quantia que ela deverá devolver à financeira?

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 2
Juros e funções

Vamos observar diferentes formas de aplicações de um capital de R$ 500,00 a uma taxa de 20% ao ano.

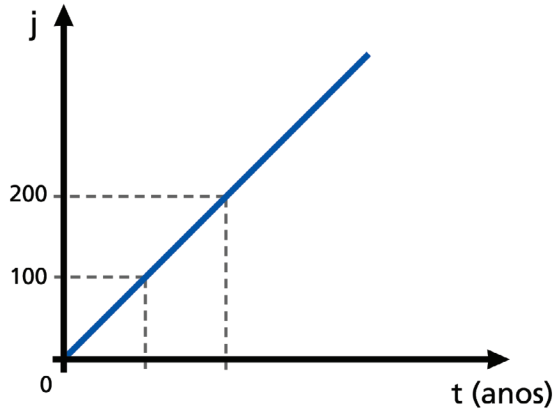
1º) Sistema de juros simples.

Nesse sistema, os juros são função do tempo de aplicação e podemos escrever:

$j = 500 \times 0{,}2.t \longrightarrow j = 100\,t$, que é uma função linear do tipo $y = ax$

Vamos construir o gráfico dessa função escolhendo alguns valores para t.

t(em anos)	j
0	0
1	100
2	200



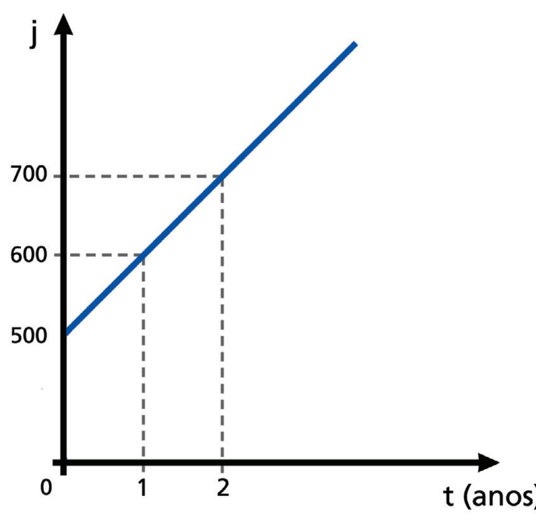
2º) Ainda no sistema de juros simples, vejamos agora o que acontece na mesma aplicação do item anterior quando queremos obter o Montante em função do tempo de aplicação.

Podemos escrever então a expressão matemática que representa uma função afim do tipo $y = ax + b$.

Lembrando que $M = C + C\,it$, temos: $M = 500 + 100t$.

Vamos construir o gráfico dessa função escolhendo alguns valores para t:

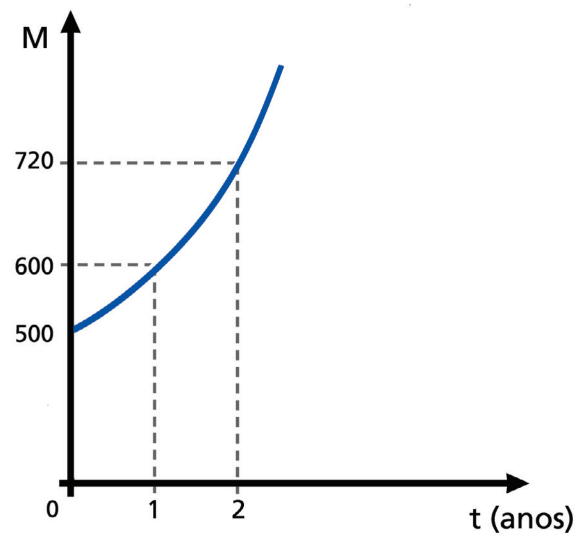
t(em anos)	M
0	500
1	600
2	700



3º) No sistema de juros compostos, o Montante será obtido em função do tempo, por meio da função $M = 500.1{,}2^t$, que é uma função exponencial.

Vamos construir o gráfico escolhendo alguns valores para t:

t(em anos)	M
0	500
1	600
2	720



Conclusão

O estudo de Matemática Financeira feito nesta aula se propõe a dar uma noção do assunto, principalmente no que se refere à diferença entre juros simples e compostos. Sabemos que juros compostos é o sistema mais aplicado na nossa vida real. Os bancos, os planos de crediário, os financiamentos de casa própria ou de carro, e também a dívida do cartão de crédito, todos usam o sistema de juros compostos. No entanto, para se resolver problemas envolvendo juros compostos, muitas vezes é necessário utilizar uma calculadora científica.

Resumo

Juros é um termo que vemos quase todos os dias em jornais, televisão ou internet. Outros termos associados a este, como taxa de juros, capital e Montante, também devem ser conhecidos de todos nós.

Consideramos que compreender bem a diferença entre juros simples, em que o capital é sempre o mesmo durante o período de rendimento, e juros compostos, em que os juros são acrescidos ao capital a cada intervalo de tempo, é essencial para poder fazer escolhas na hora de um financiamento ou de uma compra a prazo.

Com isso, o crescimento de um capital no sistema de juros simples é linear (proporcionalidade direta) e o crescimento de um capital no sistema de juros compostos é exponencial. Os termos que se apresentam em uma situação de juros compostos, como o capital e os diversos montantes, formam uma Progressão Geométrica de razão $(1 + i)^t$.

Os conteúdos de Matemática Financeira não foram esgotados nestas duas aulas. Eles são muitos extensos e, para serem aprofundados, seria necessário um curso mais completo dedicado ao tema.

Veja ainda

- http://www.infoescola.com/matematica/juros-simples-e-juros-compostos-matematica-financeira/
  Neste site você terá a oportunidade de rever os conceitos apresentados na aula e também resolver mais atividades relacionadas com o tema.

Referências

Livros

- DANTE, Luiz Roberto. *Matemática, contextos e aplicações*. 3ª ed. São Paulo: Ática, 2010. 736 p.
- Fundação Roberto Marinho. *Multicurso*: Ensino Médio. 2ª série. 1ª ed. Rio de Janeiro, 2005. 406 p.

Respostas das Atividades

Atividade 1

$M = c\,(1 + it)$

$18.600 = 15.000(1 + i\,.\,6) = 15.000 + 90.000\,i$

$18.600 - 15.000 = 90.000\,i \longrightarrow 3.600 = 90.000\,i \longrightarrow i = 3.600 : 90.000 = 0{,}04$

Resposta: A taxa de juros cobrada foi de 4% ao mês.

Atividade 2

$4025 = 3.500 + 3.500.\ 0{,}015.t = 3.500 + 52{,}5\,t$

$525 = 52{,}5\,t \qquad t = 525 : 52{,}5 = 10$

Resposta: O tempo do empréstimo foi de 10 meses.

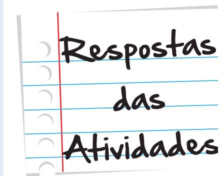
Atividade 3

6% ao ano $= \frac{6}{12}\%$ ao mês $= 0{,}5\%$ ao mês

$0{,}5\% = 0{,}005$

$7.687{,}50 = c(\,1 + 0{,}005.\,5) \longrightarrow 7687{,}50 = c.1{,}025 \longrightarrow c = 7687{,}50 : 1{,}025 \longrightarrow c = 7500$

Resposta: O meu capital é de R$ 7.500,00.



Atividade 4

$M = C(1 + i)^4$ $\quad$ $M = 200(1 + 0{,}08)^4$ $\quad$ $M = 200.\ 1{,}3604$

$M = 272{,}09$

Resposta: A dívida de Joana será de R$ 272,09.

Atividade 5

$N = 1.000 + 82{,}50 = 1.082{,}50$

$1.082{,}50 = 1.000(1 + i)^4$ $\quad$ $(1 + i)^4 = \dfrac{1.082{,}50}{1.000} = 1{,}0825$

$1 + i = \sqrt[4]{1{,}0825} = 1{,}020015$ $\quad$ $i = 1{,}020015 - 1 = 0{,}020015 = 2{,}0015\%$

Resposta: A taxa de juros foi de 2,0015% ao mês.

Atividade 6

$10.612{,}08 = 10.000(1 + 0{,}02)^t \longrightarrow (1 + 0{,}02)t \quad 1{,}06 \longrightarrow t.\ \log 1{,}02 = \log 1{,}06$

$t = \dfrac{\log 1{,}06}{\log 1{,}02} = \dfrac{0{,}0258}{0{,}0086} = 3$

Resposta: O capital ficou aplicado por 3 meses.

Atividade 7

$55.330 = C(1 + 0{,}05)^2$ $\quad$ $55.330 = C(1{,}05)^2$ $\quad$ $C = \dfrac{55.330}{1{,}1025} = 50.185{,}94$

Resposta: O capital é R$ 50.185,94.

Atividade 8

$M = 500(1 + 0{,}005)^{12} = 500(1{,}005)^{12} \longrightarrow M = 500\ .\ 1{,}0616 = 530{,}83$

Resposta: Ela terá aproximadamente R$ 530,83.

Atividade 9

$2.064{,}77 = 2.000(1 + i)^4 \longrightarrow (1+i)^4 = 1{,}03238 \longrightarrow 1 + i = \sqrt[4]{1{,}03238} \cong 1{,}007999$

$i = 0{,}007999$ $\quad$ $i = 0{,}7999\%$

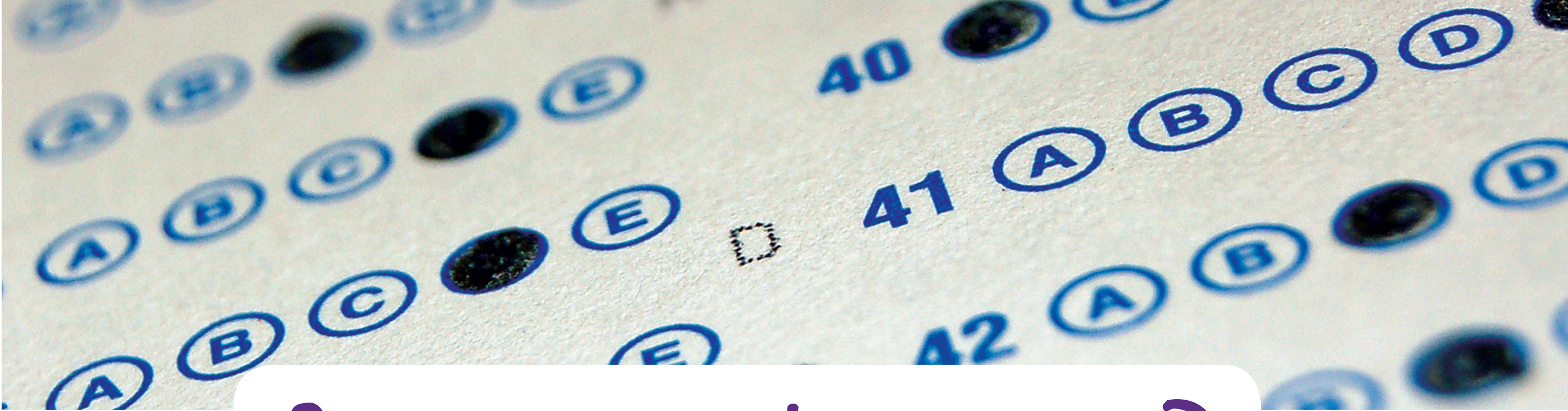
Resposta: A taxa é de aproximadamente 0,8% ao mês.

Respostas das Atividades

Atividade 10

$M = 4.300(1 + 0,15)^2$ $M = 4.300.\ 1,3225 = 5.686,75$

Resposta: Ela terá que devolver R$ 5.686,75.



O que perguntam por aí?

Questão 1 (FGV-SP)

A rede Corcovado de hipermercados promove a venda de uma máquina fotográfica digital pela seguinte oferta. "Leve agora e pague daqui a 3 meses". Caso o pagamento seja feito à vista, Corcovado oferece ao consumidor um desconto de 20%. Caso um consumidor prefira aproveitar a oferta, pagando no final do 3º mês após a compra, a taxa anual de juros simples que estará sendo aplicada no financiamento é:

a. 20%
b. 50%
c. 100%
d. 80%
e. 120%

Daqui a 3 meses o cliente pagará x reais.

O pagamento à vista é de 0,8x reais.

$0{,}2x = 0{,}8x \,.\, i \,.\, 3$ $\qquad 0{,}2x = 2{,}4i\,x$ $\qquad i = \frac{1}{12}$ ao mês

A taxa anual será $\frac{1}{12} \,.\, 12 = 1$. Ou seja, 100%.

Resposta: Letra c.

Questão 2 (Unicamp-SP)

Um capital de R$ 12.000,00 é aplicado a uma taxa anual de 8%, com juros capitalizados anualmente. Considerando que não foram feitas aplicações ou retiradas, encontre:

a. O capital acumulado após 2 anos.
b. O número inteiro mínimo de anos para que o capital acumulado seja maior que o dobro do capital inicial (se necessário, use log 2 = 0,301 e log 3 = 0,477).

Respostas:

a. $M = 12.000(1 + 0{,}08)^2 = 13.996{,}80$

O capital acumulado foi de R$ 13.996,80.

b. $M > 12\,000 \times 2$

$12.000(1 + 0{,}08)^t > 12.000 \times 2$

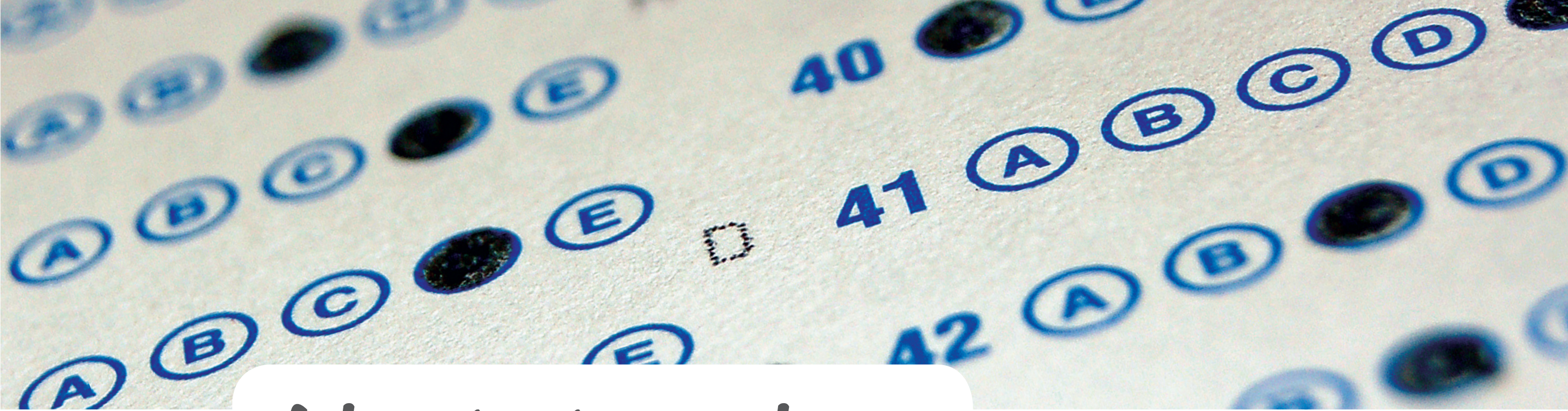
$1{,}08^t > 2 \longrightarrow t \log 1{,}08 > \log 2 \longrightarrow t \log \frac{108}{100} > \log 2$

$t\,(\log 108 - \log 100\,) > \log 2 \longrightarrow t\,\{\log(2^2 . 3^3) - 2 \log 10\} > \log 2$

$t\,\{2 \log 2 + 3 \log 3 - 2\} > \log 2$

$t.\ 0{,}033 > 0{,}301 \qquad t > 9{,}1212$

O número inteiro mínimo de anos é 10.



Atividade extra

Exercício 1

Comprado a prazo com taxa de 3%a.m, um computador custa R$ 4300,00, sendo R$1800,00 juros. Qual o número de prestações a serem pagas pelo computador?

(a) 12 (b) 18 (c) 24 (d)30

Exercício 2

A taxa de uma aplicação é de 150% ao ano. Através de capitalização simples pretende-se dobrar o capital aplicado. Quantos meses serão necessários para atingir esse objetivo?

(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 9

Exercício 3

Um taxista contraiu empréstimo de R$7.000,00 com taxa de juros simples de 2,64% a.m, para pagarem 220 dias. O montante, em reais, pago em juros por este empréstimo é de?

(a) 1355,20 (b) 1535,20 (c) 1335,20 (d) 1555,20

Exercício 4

Uma jóia custa R$ 7.700,00 à vista e R$ 9.825,20 à prazo, com taxa de juros de 4,6% a.m. Qual o período da compra a prazo?

(a) 4meses (b) 5meses (c) 6meses (d) 8meses

Exercício 5

Pedro pagou mensalmente, pelo período de 3 semestres, por um equipamento que custa R$ 5.300,0, a uma taxa de juros simples de 1,89% a.m. Qual o valor total pago, em reais?

(a) 7.103,06 (b) 7.106,03 (c) 7.203,03 (d) 7.209,06

Exercício 6

Um capital aplicado a juros simples durante 2 anos, com taxa de 5% ao mês, gerou um montante de R$ 26.950,00. Qual o valor, em reais, do capital aplicado?

(a) 12.550 (b) 12.250 (c) 10.250 (d) 10.550

Exercício 7

Uma instituição financeira oferece um tipo de aplicação tal que, após t meses, o montante relativo ao capital aplicado é dado por $M(t) = C \cdot 20{,}04 \cdot t$, onde $C > 0$. Qual o menor tempo possível para quadruplicar uma certa quantia aplicada nesse tipo de aplicação?

(a) 2anos e 6 meses (b) 3 anos e 5meses (c) 4 anos e 2 meses (d) 6 anos e 4 meses

Exercício 8

Maria pretende contratar um investimento que consiste em 12 depósitos mensais, iguais e postecipados, queserão resgatados em 3 saques mensais de R$ 500,00, sendo o primeiro saque realizado 1mês depois do último depósito. A taxa de remuneração composta do investimento é de 4% ao mês. Qual o valor de cada depósito, em reais, sem considerar os centavos?

(a) 83 (b) 92 (c) 107 (d) 120

Exercício 9

Um capital de R$ 4000,00, aplicado a juros compostos com capitalização semestral, produz, ao fim de 1 ano, o montante de R$ 5760,00. A taxa de juros nominal anual é:

(a) 20% (b) 21% (c) 22% (d) 40%

Exercício 10

OcapitalinicialdeR$2000,00foiaplicado,porumsemestre,`ataxadejuroscompostosnominalde20%aose-mestre,comcapitaliza¸c˜aotrimestral.Paraqueseobtenhaomesmolucroaplicandoocapitalinicialajurossimplesduranteosmesmos6meses,´enecess´arioqueataxadejurossimplesaobimestreseja:(a)5,0%(b)5,5%(c)6,0%(d)7,0%

Exercício 11

Um investidor aplicou a quantia de R$ 500,00 em um fundo de investimento que opera no regime de juros simples. Após 6 meses o investidor verificou que o montante era de R$ 560,00. Qual a taxa de juros desse fundo de investimento?

Exercício 12

Uma quantia foi aplicada a juros simples de 6% ao mês, durante 5 meses e, em seguida, o montante foi aplicado durante mais 5 meses, a juros simples de 4% ao mês. No final dos 10 meses, o novo montante foi de R$ 234,00.Qual o valor da quantia aplicada inicialmente?

Exercício 13

Determinado capital gerou, após 24 meses, um montante de R$ 15.000,00 com a taxa de juros de 2% a.m. Qual o valor desse capital?

Exercício 14

Um título de valor R$ 10.000,00 foi aplicado por 6 meses a uma taxa de juros simples de 3% a.m. Qual a taxa mensal para produzir o mesmo montante na modalidade de juros composto em uma aplicação com a mesma duração?

Exercício 15

Um carro é anunciado por R$ 16.000,00. Porém, numa promoção está sendo dado um desconto de 18% para pagamento à vista. Qual o preço para pagamento à vista desse carro?

Gabarito

Exercício 1

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 2

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 3

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 4

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 5

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 6

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 7

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 8

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 9

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 10

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 11

2%.

Exercício 12

R$ 150,00.

Exercício 13

R$ 9.325,82.

Exercício 14

2,79698% a.m.

Exercício 15

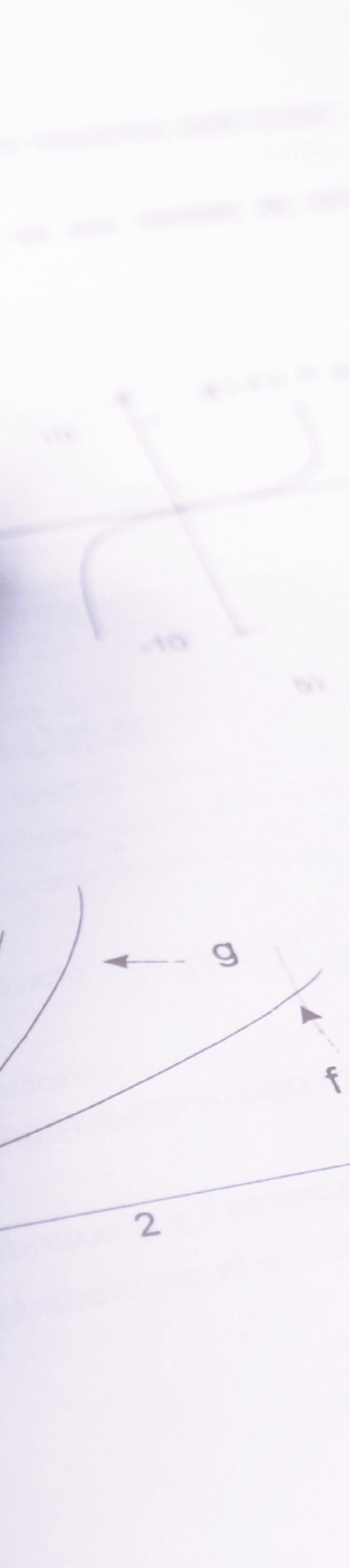
R$ 13.120,00.

Matrizes e Determinantes

Fascículo 9

Unidade 29

Fundação CECIERJ



Matrizes e Determinantes

Para início de conversa...

Frequentemente em jornais, revistas e também na Internet encontramos informações numéricas organizadas na forma de tabelas, com linhas e colunas. Esta tabela numérica com linhas e colunas é o que chamaremos de Matriz. Vejamos alguns exemplos de tabelas comumente encontradas:

Tabela 1: Tabela anual IR 2012

Rendimento (R$)	Alíquota	Parcela a deduzir (R$)
Até 18.799,32	-	-
De 18.799,33 a 28.174,20	7,5%	1.409,95
De 28.174,21 a 37.566,12	15,0%	3,523,01
De 37.566,13 a 46.939,56	22,5%	6.340,47
Acima de 46.939,56	27,5%	8.687,45

Retirado do site: http://www.meubolsoemdia.com.br/dica/imposto-de-renda/tabela-anual-ir-2012

Tabela 2: Custo e lucro de alguns artigos de uma sapataria

Artigo	Bota	Sapato	Sandália
Custo R$	200	120	80
Lucro R$	75	25	20

Tabela 3: Quantidade de artigos vendidos dessa sapataria em alguns meses do ano

Mês	Março	Abril	Maio
Bota	10	15	35
Sapato	20	25	25
Sandália	30	20	05

(tabelas 2 e 3 retiradas do site: http://www.feg.unesp.br/extensao/teia/aulas/Ana26agosto-AtividadeExtra.pdf, que é uma atividade que adaptaremos para utilizarmos posteriormente nessa aula).

Quando trabalhamos com matrizes, em geral utilizamos apenas os números das tabelas, organizando-os em linhas e colunas, entre parênteses, colchetes ou entre duas barras (os dois primeiros são mais comuns). Veremos que esta representação utilizada facilitará nosso trabalho, quando estudarmos as operações com matrizes.

Observação: Utilizamos uma letra maiúscula para identificar matrizes.

Alguns exemplos de matrizes:

Chamando de A a matriz obtida pelos números da tabela 2 e B a matriz obtida pelos números da tabela 3, teremos então:

$$A = \begin{pmatrix} 200 & 120 & 80 \\ 75 & 25 & 20 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 35 \\ 20 & 25 & 25 \\ 30 & 20 & 5 \end{bmatrix}$$

Aprenderemos na seção 1 a reconhecer um elemento ou termo de uma matriz (um desses números que aparecem na matriz) dados a posição da linha e da coluna em que ele está.

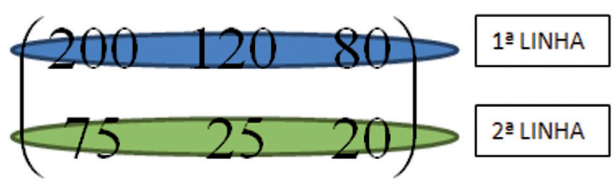
Objetivos de aprendizagem

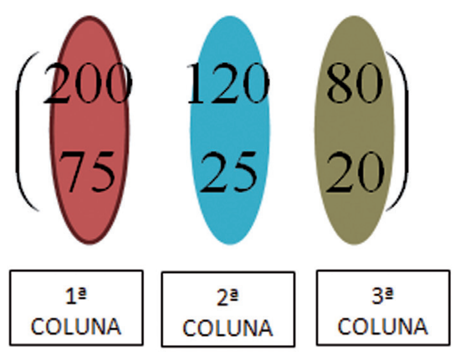
- Identificar e representar os diferentes tipos de matrizes.
- Efetuar cálculos, envolvendo as operações com matrizes.
- Resolver problemas, utilizando as operações com matrizes e a linguagem matricial.
- Calcular o determinante de matrizes quadradas de ordem 2 e 3 .

Seção 1
Conhecendo e construindo matrizes

Antes de qualquer coisa, procuremos compreender como identificar um elemento de uma matriz, utilizando a posição de sua linha e coluna.

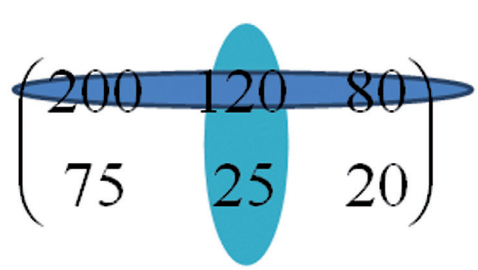
Utilizando nossa Tabela 2, identificamos a seguir as linhas e colunas da matriz:





Então, esta matriz é formada por duas linhas e três colunas.

Agora que já sabemos reconhecer linhas e colunas de matrizes, podemos reconhecer seus elementos, utilizando essas informações. Por exemplo, podemos ver que o elemento que está na primeira linha e segunda coluna é o 120, pois:



Visualmente falando o número que está na primeira linha e segunda coluna é o 120, pois ele é o elemento que está na interseção das cores.

O elemento que está na segunda linha e terceira coluna é o 20, pois:

$$\begin{pmatrix} 200 & 120 & 80 \\ 75 & 25 & 20 \end{pmatrix}$$

Atividade 1

Reconhecendo elementos de uma matriz.

Agora é com você! Dada a matriz B = $\begin{bmatrix} 10 & 15 & 35 \\ 20 & 25 & 25 \\ 30 & 20 & 5 \end{bmatrix}$. Identifique o elemento que está na:

a. primeira linha e primeira coluna.

b. terceira linha e segunda coluna.

c. segunda linha e terceira coluna.

d. terceira linha e terceira coluna.

Dica: Se precisar, utilize a ideia de circular a linha e coluna respectiva e veja que o elemento procurado é exatamente o que estará na interseção.

Anote suas respostas em seu caderno

Considerando uma matriz A com m linhas e n colunas, podemos identificar os elementos desta matriz por meio do símbolo a_{ij}, em que o índice i refere-se a linha em que se encontra tal elemento e o índice j refere-se à coluna em que se encontra o elemento. Como vimos anteriormente, convencionamos que as linhas são numeradas de cima para baixo e as colunas da esquerda para direita.

Observe que o índice i varia de 1 até m , enquanto o índice j varia de 1 até n.

Exemplo: Considerando a matriz A abaixo:

$$\begin{pmatrix} 200 & 120 & 80 \\ 75 & 25 & 20 \end{pmatrix}$$

Temos:

$a_{11} = 200$ (elemento que está na primeira linha e primeira coluna)

$a_{12} = 120$ (elemento que está na primeira linha e segunda coluna)

$a_{13} = 80$ (elemento que está na primeira linha e terceira coluna)

$a_{21} = 75$ (elemento que está na segunda linha e primeira coluna)

$a_{22} = 25$ (elemento que está na segunda linha e segunda coluna)

$a_{23} = 20$ (elemento que está na segunda linha e terceira coluna)

Multimídia

Preocupado com o impacto ambiental que a poluição pode causar à sua represa, um jovem procura a ajuda de um gestor ambiental, que sugere o uso do conceito de matrizes para determinar se o impacto ambiental é sustentável. Ficou curioso? Então acesse o link http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnica.html?id=33154 e surpreenda-se.

Atividade 2

Identificando elementos de uma matriz

Dada a matriz a seguir, identifique seus elementos:

$$\begin{pmatrix} -4 & \sqrt{2} \\ \frac{2}{3} & 100 \end{pmatrix}$$

a_{11} = ???

a_{12} = ???

a_{21} = ???

a_{22} = ???

Anote suas respostas em seu caderno

Construindo uma matriz a partir de uma "regra de formação".

Podemos construir uma matriz a partir de uma regra de formação – que é uma expressão, envolvendo as variáveis i e j de um elemento geral a_{ij}. Calma! Não é algo difícil. Veja:

Dada uma matriz com 3 linhas e 2 colunas, por exemplo, e a regra de formação $a_{ij} = i + j$, poderíamos escrever todos os elementos dessa matriz. Mas como?

Primeiro, observamos que, como a matriz tem 3 linhas e 2 colunas, ela pode ser representada da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Após ter escrito os elementos desta forma (geral), utilizamos a regra dada e assim obtemos os elementos de forma numérica... Observe que a regra geral é $a_{ij} = i + j$, basta substituirmos as letras i e j pelos números que ali aparecem. Por exemplo, como encontrar o termo a_{11}?? Basta no lugar do i colocarmos o 1 e no lugar do j também colocarmos o 1 e assim encontraremos

$a_{11} = 1 + 1 = 2$. Encontrando os demais termos:

$a_{12} = 1 + 2 = 3$

$a_{21} = 2 + 1 = 3$

$a_{22} = 2 + 2 = 4$

$a_{31} = 3 + 1 = 4$

$a_{32} = 3 + 2 = 5$

Agora basta voltarmos a nossa matriz inicial e substituirmos as letras por números! Ela ficará assim então:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Observem que:

Dependendo da regra de formação podemos encontrar termos negativos, frações, números irracionais... Afinal, estamos trabalhando com números reais!

Utilizamos a_{ij} para o termo geral de uma matriz A, mas podemos utilizar também b_{ij}, c_{ij}, etc., porém o mais comum é utilizar o b_{ij} para uma matriz B, c_{ij} para uma matriz C etc...

Vamos construir uma matriz?

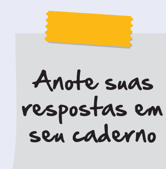
a. Construa uma matriz com 2 linhas e 2 colunas, onde a regra geral é dada por $a_{ij} = i - j$.

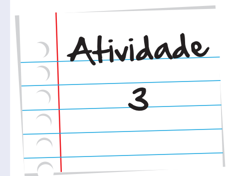
Dizemos que uma matriz é **quadrada** se o número de linhas é igual ao número de colunas.

b. Os elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$ compõem a **diagonal principal** de uma matriz quadrada. Construa a matriz 2 x 2 (ou seja, com 2 linhas e 2 colunas) dada por $a_{ij} = 3i + j$ e identifique os elementos da sua diagonal principal.

c. Construa a matriz com 3 linhas e 3 colunas dada por $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$.

A matriz quadrada em que os elementos da sua diagonal principal são iguais a 1 e os outros elementos são iguais a zero é chamada de matriz **identidade**.





Seção 2
Vamos operar com matrizes?

O objetivo desta seção é aprender a operar com matrizes. Vejamos um exemplo de problema em que podemos aplicar uma das operações:

Somando e Subtraindo matrizes

As tabelas a seguir representam as vendas de uma confeitaria, de dois tipos de bolos, tipo A e B, de acordo com o tamanho (pequeno, médio e grande), durante os dois primeiros meses de um ano:

JANEIRO

	Pequeno	Médio	Grande
A	35	40	23
B	40	35	32

FEVEREIRO

	Pequeno	Médio	Grande
A	31	25	30
B	25	40	35

Como poderíamos determinar as vendas de cada tipo (e tamanho) de bolo no primeiro bimestre desse ano?

Vejamos que não é uma tarefa difícil, visto que, por exemplo, para encontrarmos a quantidade vendida de bolos pequenos do tipo A e pequeno nesse bimestre, basta somarmos as quantidades de bolos tipo A e pequeno do mês de Janeiro, que foram 35, com a quantidade de bolos tipo A e pequeno do mês de fevereiro, que foram 31, assim encontraremos 35 + 31 = 66 bolos tipo A e pequeno vendidos nesse primeiro bimestre. Da mesma maneira, podemos fazer as demais somas, ou seja, basta somarmos os elementos correspondentes das tabelas. Utilizando a representação por matrizes, teremos:

$$\begin{pmatrix} 35 & 40 & 23 \\ 40 & 35 & 32 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 31 & 25 & 30 \\ 25 & 40 & 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35-31 & 40-25 & 23-30 \\ 40-25 & 35-40 & 32-35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 & 65 & 53 \\ 65 & 75 & 67 \end{pmatrix}$$

Viram como não é difícil? Observem que é bem simples retirar a informação desejada da matriz. Por exemplo, se estivéssemos desejando encontrar quantos bolos do tipo B, tamanho médio foram vendidos no bimestre, bastaríamos procurar o elemento que está na segunda linha e segunda coluna da última matriz, encontrando como resultado o número 75.

Poderíamos efetuar a subtração de matrizes, subtraindo-se os elementos da primeira pelos respectivos elementos da segunda. Veja o exemplo a seguir:

$$\begin{pmatrix} 35 & 40 & 23 \\ 40 & 35 & 32 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 31 & 25 & 30 \\ 25 & 40 & 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35-31 & 40-25 & 23-30 \\ 40-25 & 35-40 & 32-35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 15 & -7 \\ 15 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Outra observação é que só podemos somar matrizes com o mesmo número de linhas e colunas.

O problema das faltas

Atividade 4

As tabelas a seguir indicam o número de faltas de três alunos (A, B e C) em três disciplinas (Física, Química e Matemática), nos meses de Outubro de Novembro.

OUTUBRO

	Física	Química	Matemática
Aluno A	3	2	3
Aluno B	4	1	2
Aluno C	2	0	1

NOVEMBRO

	Física	Química	Matemática
Aluno A	2	4	2
Aluno B	0	3	1
Aluno C	1	2	1

Atividade 4

a. Construa uma matriz que represente o número de faltas, neste bimestre, de cada aluno por matéria.

b. Neste bimestre, quem teve o maior número de faltas em Matemática? E o menor número de faltas em Física?

c. Construa uma matriz, fazendo a diferença entre o número de faltas do mês de Novembro e o número de faltas do mês de Outubro.

d. O que você pode concluir com estes elementos encontrados?.

Anote suas respostas em seu caderno

Multiplicando um número real por uma matriz

Para multiplicar um número real por uma matriz basta multiplicarmos cada um dos elementos da matriz por este número.

Observe o seguinte exemplo:

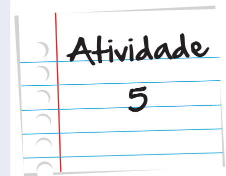
$$2 \text{ x } \begin{bmatrix} 10 & 15 & 35 \\ 20 & 25 & 25 \\ 30 & 20 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 10 & 2 \times 15 & 2 \times 35 \\ 2 \times 20 & 2 \times 25 & 2 \times 25 \\ 2 \times 30 & 2 \times 20 & 2 \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 30 & 70 \\ 40 & 50 & 50 \\ 60 & 40 & 10 \end{bmatrix}$$

Multiplicando matrizes

Nós vimos que para somar matrizes, somamos os elementos respectivos e que para multiplicar um número real por uma matriz, basta que multipliquemos este número real por cada um dos elementos dessa matriz. Veremos agora como fazemos para multiplicar duas matrizes. Você poderia pensar: - Ah, deve ser multiplicando cada elemento respectivo... Mas nós veremos que não é dessa forma. Faça a atividade abaixo passo a passo e você verá que é capaz de multiplicar matrizes, quando possível, pois nem sempre podemos efetuar a multiplicação entre matrizes!

O problema da sapataria

(atividade adaptada do site: http://www.feg.unesp.br/extensao/teia/aulas/Ana26agosto-AtividadeExtra.pdf)



Considere as duas tabelas a seguir que já estamos familiarizados nessa aula:

Artigo	Bota	Sapato	Sandália
Custo R$	200	120	80
Lucro R$	75	25	20

Tabela 2: Custo e lucro de alguns artigos de uma sapataria

Mês	Março	Abril	Maio
Bota	10	15	35
Sapato	20	25	25
Sandália	30	20	05

Tabela 3: Quantidade de artigos vendidos dessa sapataria em alguns meses do ano

A Tabela 2, como já vimos, apresenta-nos o custo e o lucro de alguns artigos de uma sapataria, enquanto que a tabela 3 apresenta-nos a quantidade dos artigos vendidos durante três meses do ano.

a. É possível criar uma tabela que nos apresente o custo total e o lucro total de cada um desses três meses. Construa-a! Vamos lá, você consegue.

Vou ajudar: Como será que faríamos para encontrar, por exemplo, o custo total no mês de Março? E aí, descobriu? Acho que sim, né! Para calcular o custo total no mês de Março é só calcularmos o custo da bota, do sapato, da sandália e depois somar para encontrar o custo final deste mês. Concorda? Então fica: 200 x 10 + 120 x 20 + 80 x 30 = 2000 + 2400 + 2400 = 6800 reais.

Como faríamos para calcular o lucro no mês de Março? De forma bem parecida, basta pegarmos os lucros de cada artigo, multiplicarmos pelas quantidades vendidas e, ao final, somar estes valores, encontrando então:75 x 10 + 25 x 20 + 20 x 30 = 750 + 500 + 600 = 1850 reais.

Complete a matriz com os valores que faltam:

$$\begin{pmatrix} 6800 & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ 1850 & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \end{pmatrix}$$

Atividade 5

b. Quantas linhas e quantas colunas de dados numéricos você obteve na sua matriz?

c. Se na Tabela 2 existisse também coluna para o item "chinelo", ainda seria possível criar uma tabela que apresentasse custo total e lucro total?

d. Se na Tabela 2 existisse também uma linha para o item "Gastos com Funcionários", seria possível criar uma tabela que apresentasse custo total, lucro total e gasto total com funcionários?

e. Se na Tabela 3 existisse também colunas para os meses de Junho, Julho e Agosto, ainda seria possível criar uma tabela que apresentasse custo total e lucro total?

f. Se na Tabela 3 existisse também uma linha para o item "tênis", ainda seria possível criar uma tabela que apresentasse custo total e lucro total?

g. Qual a condição necessária para que possamos relacionar as duas tabelas?

Anote suas respostas em seu caderno

E aí, conseguiu descobrir, quando é possível fazer a multiplicação entre matrizes? Conseguiu entender como se faz a multiplicação entre matrizes? Acredito que sim, então agora estudaremos um pouco de determinante!

Determinantes

Antes de sabermos como se encontra o determinante de uma matriz, é importante observarmos alguns itens:

1. Somente definimos determinante de uma matriz quadrada, então precisamos saber o que é uma matriz quadrada, certo? Uma matriz quadrada nada mais é que uma matriz que tem o número de linhas igual ao número de colunas.

Exemplos:

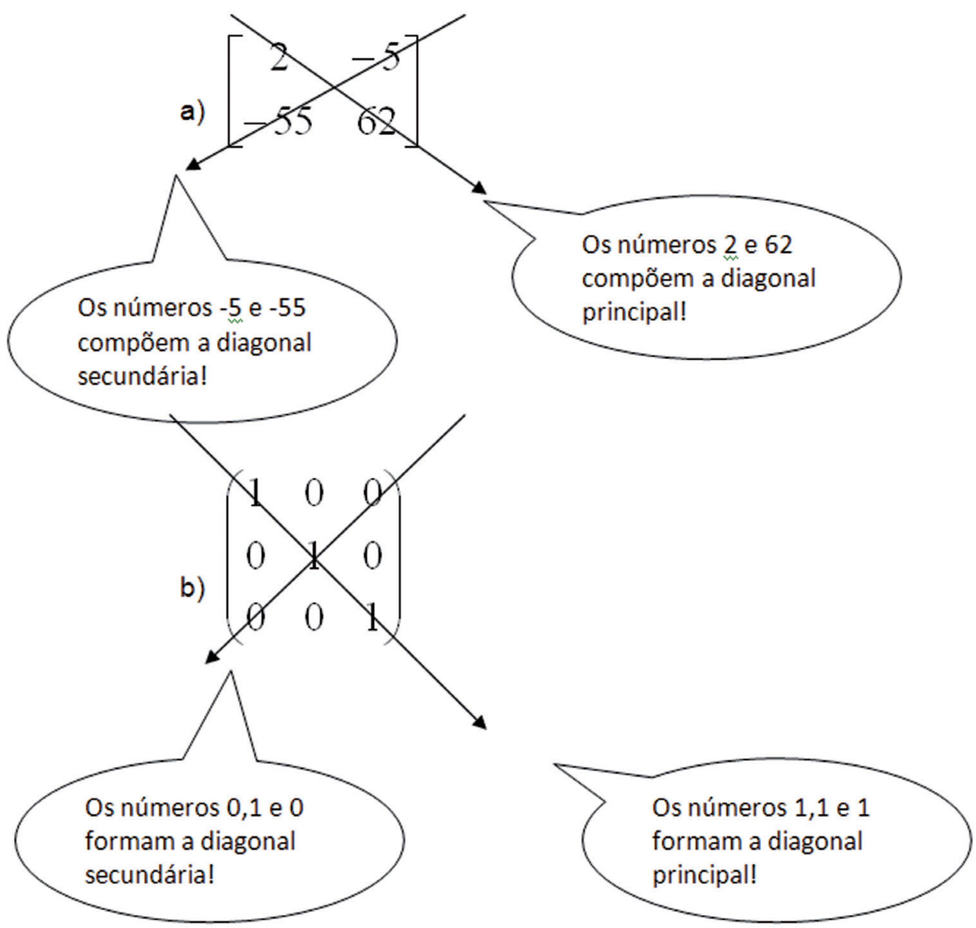
a. (3) – Matriz com uma linha e uma coluna.

b. $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -55 & 62 \end{bmatrix}$ - Matriz com duas linhas e duas colunas.

c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - Matriz com 3 linhas e 3 colunas.

d. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ - Matriz com 4 linhas e 4 colunas.

2. Precisamos reconhecer a diagonal principal e diagonal secundária de uma matriz quadrada – utilizaremos principalmente esta ideia quando formos encontrar o determinante de uma matriz com duas linhas e duas colunas. Observe a seguir nos exemplos, os elementos que compõe a diagonal principal e secundária de uma matriz.



Bem, acho que agora podemos ver o que é o determinante de uma matriz. Vamos lá!

Dada uma matriz quadrada A qualquer, dizemos que o determinante da matriz A, que indicamos por det A é o número obtido a partir de operações com os elementos de A. Observe que, como dizemos "o determinante!" já podemos imaginar com razão que ele é único. Nós aprenderemos aqui a encontrar o determinante de matrizes um por um (uma linha e uma coluna) ou simplesmente ordem 1 (quando a matriz é quadrada ela possui o mesmo número de linhas e colunas e para simplificações dizemos apenas ordem tal), também veremos por meio de atividades como encontrar determinante de matrizes de ordem 2 e 3.

- O determinante de uma matriz A de ordem 1 é o próprio elemento de A.

Exemplos:

a. A = (7) è det A = 7

b. B= (-6) è det B = -6

- O determinante de uma matriz A de ordem 2 é igual a diferença do produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária. Num primeiro momento pode aparentar ser difícil, mas veremos que se fizermos passo a passo não é complicado não! Exemplo:

Dada a matriz de ordem 2: $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$, façamos passo a passo o que se pede e encontraremos o determinante dela.

1. Os elementos que formam a diagonal principal da matriz A são: 2 e 10.
2. O produto dos elementos da diagonal principal é igual a: 2 x10 = 20
3. Os elementos da diagonal secundária são: 5 e 3.
4. O produto dos elementos da diagonal secundária é igual a: 5 x 3 = 15
5. A diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal de A e o produto dos elementos de sua diagonal secundária é igual a: 20 – 15 = 5

Portanto, det A = 5.

- Para encontrarmos o determinante de uma matriz de ordem 3, utilizaremos um procedimento conhecido por "Regra de Sarrus". A ideia é a seguinte:

1º) Copiamos ao lado direito da matriz A as suas duas primeiras colunas.

2º) Multiplicamos os elementos da diagonal principal de A. Seguindo a direção da diagonal principal, multiplicamos separadamente os elementos das outras duas "diagonais" (paralelas à diagonal principal).

3º) Multiplicamos os elementos da diagonal secundária de A, trocando o sinal do produto obtido. Seguindo a direção da diagonal secundária, multiplicamos, separadamente, os elementos das outras duas "diagonais", também trocando o sinal dos produtos.

4º) Somamos todos os resultados obtidos no 2º e 3º passos.

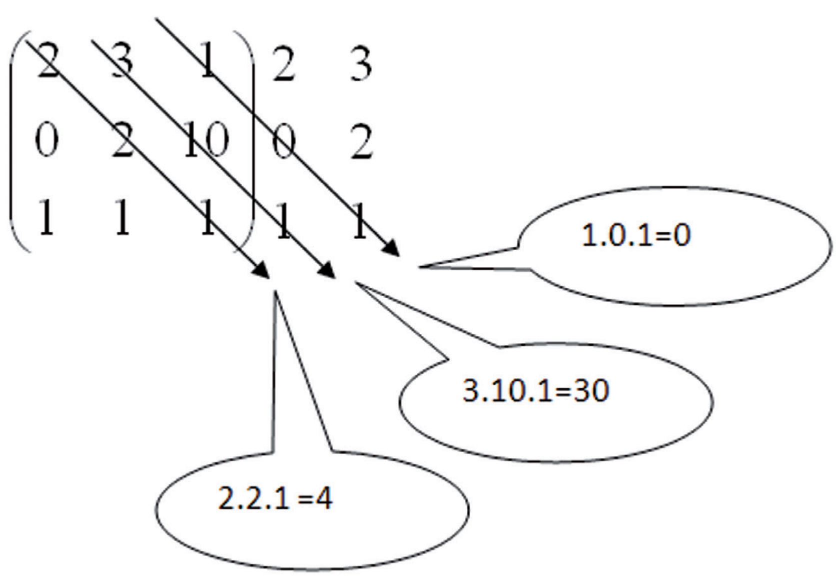
Façamos um exemplo, passo a passo, para você compreender melhor como encontrar o determinante de uma matriz de ordem 3.

Exemplo: Encontrar o determinante da matriz $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

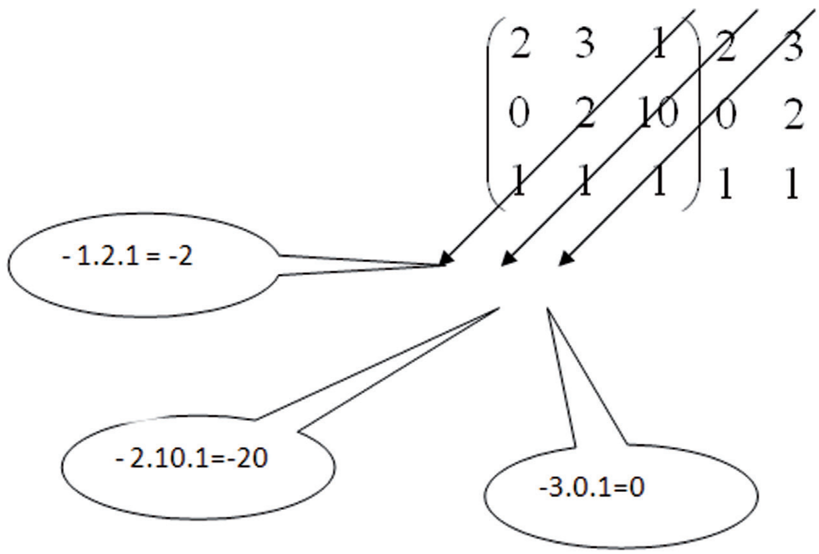
Vamos lá então! O primeiro passo é copiar as duas primeiras colunas ao lado direito da matrriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

Agora façamos o passo 2: Multipliquemos os elementos da diagonal principal e suas duas "paralelas":



Agora o passo três: Multipliquemos os elementos da diagonal secundária, também os elementos de suas "paralelas" não esquecendo de TROCAR os sinais de seus resultados:



Para terminar, pelo passo 4, basta somarmos os resultados encontrados, e daí encontraremos det D = 4 + 30 + 0 + (-2) + (-20) + 0 = 4 + 30 – 2 – 20 = 34 – 22 = 12.

Saiba Mais

Existem algumas matrizes que recebem um nome especial, como é o caso da matriz quadrada que já vimos, onde o número de linhas é igual ao número de colunas.

Bem agora falaremos de mais uma matriz com nome especial que é a matriz identidade. Uma matriz quadrada de ordem n é dita identidade quando os elementos da diagonal principal são todos iguais a 1 e os demais elementos dessa matriz são iguais a 0. Por exemplo:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E assim por diante, independente da ordem da matriz quadrada...

Encontrando o determinante de uma matriz.

Atividade 6

Encontre, utilizando o conhecimento adquirido nesta seção, qual o determinante das matrizes identidade I_2 e I_3. Será que você se arriscaria dizer qual o determinante da matriz identidade I_4 sem fazer contas? Por quê?

Anote suas respostas em seu caderno

Multimídia

No site a seguir, vocês poderão baixar uma calculadora bem legal que vocês poderão calcular determinantes. Divirtam-se!

Baixem do site: http://www.baixaki.com.br/site/dwnld46266.htm

Instale e abra a calculadora.

Clique em "Equações – Polinômios" e a calculadora abrirá uma nova tela. Lá em cima, clique na aba "Determinantes" e pronto, você poderá saber o valor de determinantes até ordem 4, apenas colocando os valores dos elementos.

Vimos neste módulo quão importante as matrizes são importantes para a nossa vida. Organizamos dados, visualizamos de maneira rápida, extraindo informações facilmente. Vimos também como operar com matrizes.

Resumo

Aprendemos neste módulo:

- Identificar e representar os diferentes tipos de matrizes: vimos que a partir de uma tabela de dados, ou de uma regra de formação, sabendo o número de linhas e de colunas, podemos construir uma matriz.
- Efetuar cálculos envolvendo as operações com matrizes: vimos que é bem natural efetuar algumas das operações entre matrizes, como a soma, que basta somar os elementos correspondentes. Temos de ter uma atenção especial com o produto de matrizes, pois ela é especial, não basta multiplicar os termos correspondentes.

- Calcular o determinante de matrizes quadradas de ordem 2 e 3 : por fim aprendemos a calcular determinantes, que quando a matriz é de ordem 2, fazemos a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal pelo produto dos elementos da diagonal secundária, quando a matriz é de ordem 3, utilizamos a regra de Sarrus.

Veja ainda

Calculando determinante por escalonamento:

- http://www.youtube.com/watch?v=qCYvugOqQAo
- Neste vídeo, você aprenderá como calcular um determinante de uma maneira diferente da que estudamos. Não deixem de conferir!

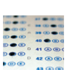
Referência

Livros

- IEZZI, Gelso, et al. *Matemática Ciência e Aplicações*. 6ª edição, vol2. São Paulo, 2010. 320 páginas.

Imagens

- http://www.sxc.hu/photo/475767



- http://www.sxc.hu/photo/517386

- http://www.sxc.hu/photo/1289957

Respostas das Atividades

ATIVIDADE 1

a. 10

b. 20

c. 25

d. 5

ATIVIDADE 2

$a_{11} = -4$ (elemento que está na primeira linha e primeira coluna)

$a_{12} = \sqrt{2}$ (elemento que está na primeira linha e segunda coluna)

$a_{21} = \frac{2}{3}$ (elemento que está na segunda linha e primeira coluna)

$a_{22} = 100$ (elemento que está na segunda linha e segunda coluna)

ATIVIDADE 3

a. Como queremos construir uma matriz com duas linhas e duas colunas, sabemos que ela é da forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Daí, como a regra de formação é $a_{ij} = i - j$, teremos:

$a_{11} = 1 - 1 = 0$ (substituímos o *i* por 1 e o *j* também por 1)

$a_{12} = 1 - 2 = -1$ (substituímos o *i* por 1 e o *j* por 2)

$a_{21} = 2 - 1 = 1$ (substituímos o *i* por 2 e o *j* por 1)

$a_{22} = 2 - 2 = 0$ (substituímos o *i* por 2 e o *j* também por 2)

Logo, a matriz procurada é:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b.

$a_{11} = 3.1 + 1 = 4$ (substituímos o i por 1 e o j também por 1)

$a_{12} = 3.1 + 2 = 5$ (substituímos o i por 1 e o j por 2)

$a_{21} = 3.2 + 1 = 7$ (substituímos o i por 2 e o j por 1)

$a_{22} = 3.2 + 2 = 8$ (substituímos o i por 2 e o j também por 2)

Logo, a matriz procurada é:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Os elementos da diagonal principal são 4 e 8.

c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ATIVIDADE 4

a. Para encontrar a matriz de faltas do bimestre, temos de fazer a soma das matrizes de faltas dos meses Outubro e Novembro:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 4 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

b. Para descobrir quem teve o maior número de faltas em Matemática, basta encontrar o maior número da última coluna, onde vemos que foi o aluno A, com cinco falta. O menor número de faltas em Física foi 3 (basta olhar para a primeira coluna) e assim o aluno C teve o menor número de faltas.

c.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 & 4-2 & 2-3 \\ 0-4 & 3-1 & 1-2 \\ 1-2 & 2-0 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d. Podemos concluir, por exemplo, que o aluno C teve o mesmo número de faltas em Outubro e Novembro em Matemática, visto que o elemento que aparece na terceira linha e terceira coluna é 0. Podemos concluir que todos os alunos tiveram mais faltas em Novembro do que em Outubro em Química, pois os números da segunda coluna são todos positivos.

ATIVIDADE 5

a. Calculando os demais elementos:

$$\begin{pmatrix} 6800 & 200 \times 15 + 120 \times 25 + 80 \times 20 & 200 \times 35 + 120 \times 25 + 80 \times 5 \\ 1850 & 75 \times 15 + 25 \times 25 + 20 \times 20 & 75 \times 35 + 25 \times 25 + 20 \times 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6800 & 3000+3000+1600 & 7000+3000+400 \\ 1850 & 1125+625+400 & 2625+625+100 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6800 & 7600 & 10400 \\ 1850 & 2150 & 3350 \end{pmatrix}$$

b. Duas linhas e três colunas.

c. Não daria, pois sem a quantidade de chinelos vendidos, não conseguiríamos efetuar os cálculos.

d. Sim daria, pois bastaria multiplicarmos como fizemos com os itens custo e lucro e encontraríamos assim uma matriz com três linhas e três colunas.

e. Sim, pois ainda assim teríamos como multiplicar (3 produtos) e fazer a soma no fim.

f. Não. Pois sem ter na tabela 2 seu custo e lucro, não teríamos como fazer as contas. (observe que não teríamos alguém da tabela 2 para multiplicar com os valores da tabela 3...)

g. O número de colunas da primeira tabela tem que ser igual ao número de linhas da segunda tabela. Esta é a condição de existência do produto entre duas matrizes.

Respostas das Atividades

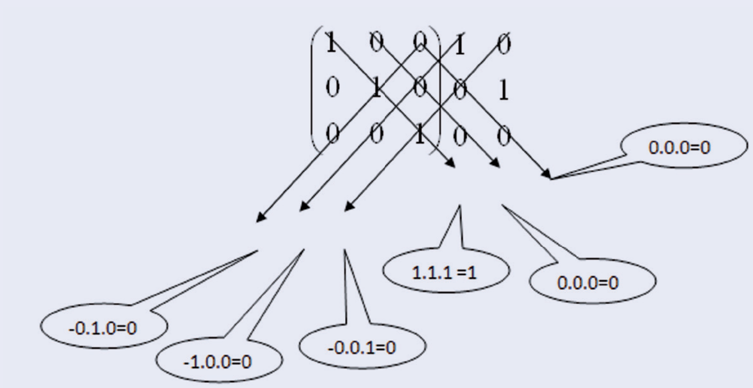
ATIVIDADE 6

Encontrando o determinante da matriz I_2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

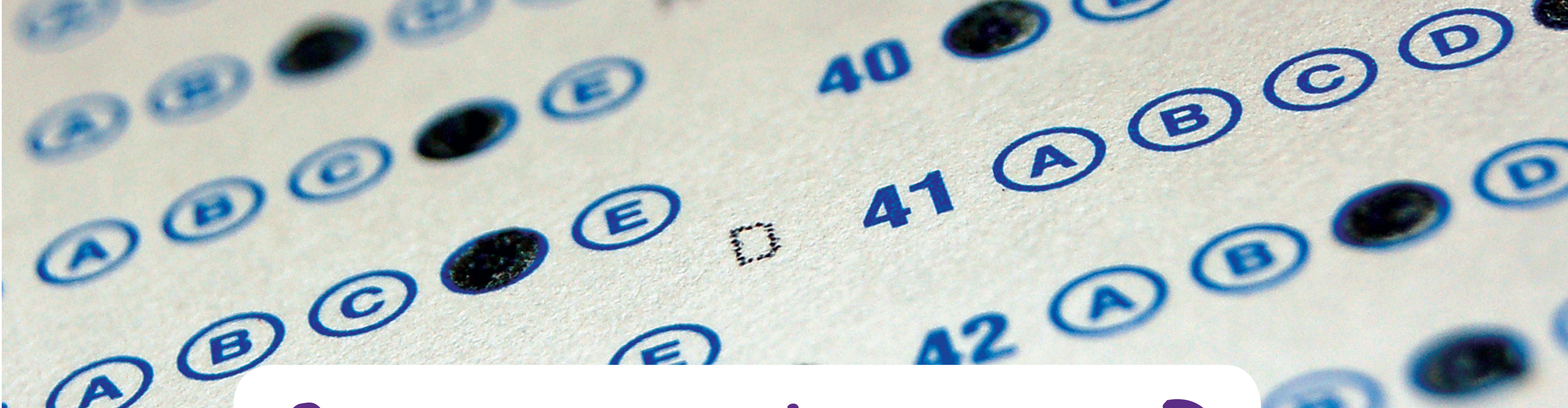
Temos que a diferença do produto dos elementos da diagonal e o produto dos elementos da diagonal secundária será: 1.1 – 0.0 = 1

Encontrando o determinante da matriz I_3 :



Somando todos os resultados encontraremos: 0+0+0+1+0+0=1

Bem, quando ao determinante de I_4 podemos esperar que também seja igual a 1, visto que encontramos os outros determinantes anteriores iguais a 1, mas teríamos de demonstrar de alguma forma, que no momento, com as ferramentas que possuímos não é possível...



O que perguntam por aí?

Questão ENEM 2012

Um aluno registrou as notas bimestrais de algumas de suas disciplinas numa tabela. Ele observou que as entradas numéricas da tabela formavam uma matriz 4x4, e que poderia calcular as médias anuais dessas disciplinas usando o produto de matrizes, Todas as provas possuíam o mesmo peso, e a tabela que ele conseguiu é mostrada a seguir.

	1º bimestre	2º bimestre	3º bimestre	4º bimestre
Matemática	5,9	6,2	4,5	5,5
Português	6,6	7,1	6,5	8,4
Geografia	8,6	6,8	7,8	9,0
História	6,2	5,6	5,9	7,7

Para obter essas médias, ele multiplicou a matriz obtida a partir da tabela por:

a. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

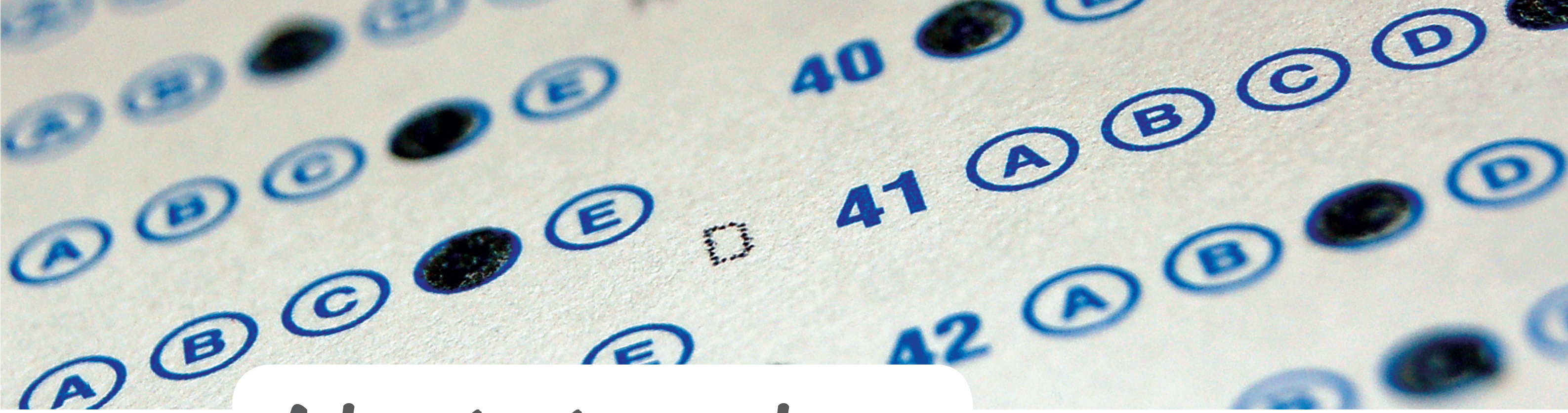
b. $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

Como para encontrar a média bastaria somar as 4 notas bimestrais de uma determinada disciplina e dividir por 4, que é o mesmo que multiplicar cada uma das notas por ¼ e depois somar, temos que para encontrar as médias, bastaria multiplicar a matriz obtida da tabela pela matriz coluna em que todos os elementos são iguais a ¼. Portanto, letra e. Obs: Façam as contas e confirmem o fato!



Atividade extra

Exercício 1

As matrizes 1 e 2 apresentam, respectivamente, a produção nos meses de janeiro e fevereiro, em milhões de automóveis, de acordo com o modelo e a cor.

	Modelo I	Modelo II
Azul	200	190
Verde	180	150
Branco	120	100

Tabela 1: Produção do mês de janeiro

	Modelo I	Modelo II
Azul	220	205
Verde	210	150
Branco	130	110

Tabela 2: Produção do mês de fevereiro

Quantos carros azuis foram fabricados nos meses de janeiro e fevereiro?

(a) 200 (b) 390 (c) 425 (d) 815

Exercício 2

Na confecção de três modelos de camisas (A, B e C) são usados botões grandes (G) e pequenos (P). O número de botões por modelos é dado pela tabela 3:

	A	B	C
P	2	3	1
G	4	6	3

Tabela 3: Botões por modelo

O número de camisas fabricadas, de cada modelo, nos meses de maio e junho de 2013, é dado pela tabela 4.

	Maio	Junho
A	100	50
B	50	100
C	50	50

Tabela 4: Camisetas por modelo

Qual matriz nos dá o total de botões usados em cada tipo de camisa, nos meses de maio e junho?

a. $\begin{pmatrix} 400 & 450 \\ 850 & 950 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 450 & 850 \\ 400 & 950 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 300 & 750 & 200 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 300 \\ 750 \\ 200 \end{pmatrix}$

Exercício 3

Em uma indústria têxtil, diferentes fios são utilizados para fabricar um tecido. Na matriz de demanda apresentada os elementos a_{ij} representam quantos rolos de fio *j* serão empregados para fabricar uma peça de tecido tipo *i*.

	Fio 1	Fio 2	Fio 3
Tecido 1	5	0	2
Tecido 2	0	1	3
Tecido 3	4	2	1

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7

Exercício 4

Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$. Determine a matriz X tal que $AX = B$.

a. $X = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

b. $X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$

c. $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

d. $X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$

Exercício 5

A matriz $A = (a_{ij})\ 2 \times 2$ é tal que $a_{ij} = 2i - 3j$, e a matriz $B = (b_{ij})_{2\times 2}$ é tal que $b_{ij} = i^2 - j^2$. Seja a matriz $C = (c_{ij})_{2\times 2}$ tal que $C = -A + 2B$. Que opção representa a matriz C?

a. $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} -1 & -10 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ -10 & -2 \end{bmatrix}$

Exercício 6

As matrizes $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $M_2 = \begin{bmatrix} p & q \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $M = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ satisfazem $M = M_1 \cdot M_2 - M_2 \cdot M_1$. Qual é o valor de $p + q$?

(a) –5 (b) –4 (c) –3 (d)–1

Exercício 7

Considere a matriz $A = (a_{ij})_{3\times 3}$, tal que $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i > j \\ 0, \text{ se } i \le j \end{cases}$ e $B = (b_{ij})_{2\times 2}$, tal que $b_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i = j \\ 1, \text{ se } i \ne j \end{cases}$.

Qual é o valor de det (A) – det (B)?

(a) –1 (b) 0 (c) 1 (d) 2

Exercício 8

As matrizes $A = \begin{bmatrix} 4-3x & 7-x \\ 0 & -10 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} x & x+1 \\ 1 & x-1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 10 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ satisfazem $D = A + BC$.

Qual é o valor de x.

(a) –2 (b) –1 (c) 1 (d) 2

Exercício 9

Considere $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix}$. Qual é o det (AB)?

(a) –24 (b) 24 (c) 10 (d) –10

Exercício 10

Considere $A=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 3 & -3\end{bmatrix}$ e $C=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. Qual é o valor do produto dos elementos da diagonal principal de $-2A+B-3C$?

(a) -2 (b) 0 (c) 2 (d) 6

Exercício 11

Sejam as matrizes $A=(a_{ij})_{4\times 3}$, $a_{ij}=3i-j$ e $B=(b_{ij})_{3\times 4}$, $b_{ij}=j^2+i^2$. Seja C a matriz resultante do produto entre A e B. Quem é elemento c_{23} da matriz C?

Exercício 12

A matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & x\end{bmatrix}$ é tal que o det $(A)=10$. Qual é o valor de x?

Exercício 13

Sejam as matrizes $M=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & 3 & 7\\ -3 & 2 & -1\end{bmatrix}$, $N=\begin{bmatrix}3 & 5 & -3\\ 3 & -2 & 1\\ -1 & 1 & -2\end{bmatrix}$ e $P=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ -1 & -2 & -1\end{bmatrix}$. Quanto vale det $(2M-N+3P)$?

Exercício 14

A matriz quadrada identidade é uma matriz tal que todos os valores de sua diagonal principal são iguais à 1, e os demais são iguais a zero. Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}1 & b\\ b & 1\end{bmatrix}$.

Sabe-se que $A\cdot B=I_{2\times 2}$. Quais são os valores de a e b?

Exercício 15

Seja a matriz A = (aij) 2×3 tal que aij = i + j e a matriz $B=\begin{bmatrix}m+n & 3 & 4\\ n-1 & m-2p & 5\end{bmatrix}$ tal que A e B são iguais. Quais são os valores de m, n e p?

Gabarito

Exercício 1

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 2

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 3

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 4

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 5

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 6

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 7

A B C D

○ ○ ● ○

Exercício 8

A B C D

○ ● ○ ○

Exercício 9

A B C D

○ ○ ○ ●

Exercício 10

A B C D

○ ○ ○ ●

Exercício 11

2%.

Exercício 12

R$ 150,00.

Exercício 13

R$ 9.325,82.

Exercício 14

2,79698% a.m.

Exercício 15

R$ 13.120,00.

Sistemas Lineares

Fascículo 9

Unidade 30

Fundação CECIERJ

Sistemas Lineares

Para início de conversa...

Diversos problemas interessantes em matemática são resolvidos utilizando sistemas lineares. A seguir, encontraremos exemplos de alguns desses problemas:

1. O problema da população: a população de uma cidade A é quatro vezes maior que a população da cidade B. Somando a população das duas cidades, temos o total de 250.000 habitantes. Qual a população da cidade B?

Observação: A população de uma cidade é a quantidade de habitantes daquela cidade.

2. O problema do pagamento com notas específicas: Roberto utilizou apenas notas de R$ 10,00 e de R$ 50,00 para fazer um pagamento de R$ 350,00. Quantas notas de cada tipo ele utilizou, sabendo que no total foram 15 notas?
3. O problema do teste: um professor de matemática aplicou um teste com 20 questões, e cada questão que o aluno acertasse receberia 5 pontos e cada questão que ele errasse perderia 3 pontos. Sabendo que Emília conseguiu 60 pontos nesse teste, quantas questões ela errou?
4. O problema da pontuação de cada medalha:

Três escolas participaram de um torneio esportivo em que provas de dez modalidades foram disputadas. Aos vencedores de cada prova foram atribuídas medalhas de ouro, de prata ou de bronze, respectivamente aos 1º, 2º e 3º lugares. A quantidade de medalhas de cada escola, ao final da competição, bem como a pontuação geral das mesmas, são apresentadas na tabela a seguir:

Escolas	Medalhas			
	Ouro	Prata	Bronze	Pontuação final
A	4	2	2	46
B	5	3	1	57
C	4	3	3	53

Quantos pontos valem cada medalha de ouro, prata e bronze?

Todos esses problemas apresentados podem ser traduzidos para uma linguagem algébrica, escritos na forma do que chamamos de sistemas lineares, e então resolvidos por alguns métodos que aprenderemos mais adiante. Voltaremos a resolver os problemas anteriores no decorrer desta aula. Fiquem tranquilos e diminuam a ansiedade!

Objetivos de aprendizagem

- Identificar uma equação linear.
- Aprender a encontrar a solução de uma equação linear.
- Identificar um sistema linear.
- Identificar sistemas possíveis e impossíveis.
- Identificar um sistema na forma escalonada.
- Resolver um sistema por escalonamento.

Seção 1
Problemas envolvendo equação linear

Diversos problemas da vida cotidiana podem ser traduzidos para a linguagem algébrica na forma do que chamamos de equação linear. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo: Miguel foi sacar R$ 70,00 em um caixa eletrônico que tinha apenas notas de R$ 10,00 e de R$ 20,00. Quantas notas de cada ele pode ter recebido do caixa eletrônico?

Vamos resolver este problema?

Primeiramente observamos que, como o problema trabalha com a quantidade de notas concluímos que estamos lidando com números naturais (1, 2, 3,...), afinal, não faz sentido falar em "um terço de nota" ou "raiz quadrada de três notas", certo?

Bem, para facilitar nossa vida, utilizamos letras para representar os números que procuramos, traduzindo o problema inicial para uma linguagem algébrica... Calma, não é algo difícil! Veja só! O que estamos interessados em descobrir? Isso mesmo! A quantidade de notas de 10 reais e de 20 reais que Miguel pode ter recebido. Essas serão as nossas variáveis (letras)...

Podemos utilizar duas letras quaisquer para representar essas quantidades. Vamos escolher, então, x para representar o número de notas de R$ 10,00 e y para o número de notas de R$ 20,00. Traduzindo o nosso problema, encontraremos a nossa equação linear $10 . x + 20 . y = 70$, ou podemos apenas escrever $10x + 20y = 70$, afinal, já aprendemos que quando vemos um número e uma letra juntas a operação que estamos utilizando é a multiplicação.

E por que escrevemos 10x e 20y? Como x representa a quantidade de notas de 10 reais que o caixa eletrônico liberou, 10x representa a quantia em reais com notas de 10 reais, ou seja, se o caixa eletrônico liberar três notas de 10 reais e duas notas de 20 reais, por exemplo, isso quer dizer que Miguel recebeu $10.3 = 30$ reais em notas de dez reais e $20.2 = 40$ reais em notas de 20 reais, totalizando $30 + 40 = 70$ reais, que fora o valor solicitado por Miguel. Mas observe que esta não é a única possibilidade! Vamos construir uma tabela com todas as possibilidades? Sim!!!

Uma das maneiras de encontrarmos todas as soluções de uma equação desse tipo é atribuirmos valores a uma de nossas incógnitas para encontrarmos o valor da outra, encontrando assim o que chamamos de solução da equação. Observe que já conhecemos uma solução, $x = 3$ e $y = 2$, que representaremos pelo par ordenado (3,2), pois quando substituímos esses valores na equação $10x + 20y = 70$ encontramos uma sentença verdadeira. Encontremos as outras possíveis soluções:

Para x = 0, temos: $10x + 20y = 70 \rightarrow 10.0 + 20y = 70 \rightarrow 0 + 20y = 70 \rightarrow y = \frac{70}{20} = 3{,}5$ --- o que é impossível, pois não podemos ter esta quantidade de notas (três notas e meia???).

Para x = 1, temos que $10.1 + 20y = 70$. Resolvendo essa equação, temos: $10 + 20y = 70 \rightarrow 20y = 70\text{-}10 \rightarrow 20y = 60 \rightarrow y = \frac{60}{20} = 3$. Portanto, (1,3) é solução da equação linear.

Para x = 2, temos: $10.2 + 20y = 70 \rightarrow 20 + 20y = 70 \rightarrow 20y = 70\text{-}20 \rightarrow 20y = 50 \rightarrow y = \frac{50}{20} = 2{,}5$ --- impossível novamente!

Para x = 3, temos: $10.3 + 20y = 70 \rightarrow 30 + 20y = 70 \rightarrow 20y = 70\text{-}30 \rightarrow 20y = 40 \rightarrow y = \frac{40}{20} = 2$. Portanto, (3,2) é solução da equação linear conforme já havíamos visto!

Para x = 4, temos: $10.4 + 20y = 70 \rightarrow 40 + 20y = 70 \rightarrow 20y = 70\text{-}40 \rightarrow 20y = 30 \rightarrow y = \frac{30}{20} = 1{,}5$ --- impossível novamente.

Para x = 5, temos: $10.5 + 20y = 70 \rightarrow 50 + 20y = 70 \rightarrow 20y = 70\text{-}50 \rightarrow 20y = 20 \rightarrow y = \frac{20}{20} = 1$. Portanto, (5,1) é solução da equação linear.

Para x = 6, temos: $10.6 + 20y = 70 \rightarrow 60 + 20y = 70 \rightarrow 20y = 70\text{-}60 \rightarrow 20y = 10 \rightarrow y = \frac{10}{20} = 0{,}5$ ---impossível novamente.

Para x = 7, temos: $10.7 + 20y = 70 \rightarrow 70 + 20y = 70 \rightarrow 20y = 70\text{-}70 \rightarrow 20y = 0 \rightarrow y = \frac{0}{20} = 0$. Portanto, (7,0) é solução da equação linear.

O que aconteceria se pensássemos em x = 8? Faça as contas e conclua porque nós paramos no x = 7 ...

Podemos, então, construir a tabela das possibilidades que atendem às condições do problema:

x **(nº de notas de R$ 10,00)**	**y** **(nº de notas de R$ 20,00)**
1	3
3	2
5	1
7	0

Assim, os pares ordenados (1,3), (3,2), (5,1) e (7,0) são as soluções do problema.

Esta equação que encontramos, $10x + 20y = 70$, que representa nosso problema, é chamada de equação linear, pois todas as variáveis (x e y neste caso) têm o expoente igual a 1. Por exemplo, a equação $x^2 + 4y + z = 0$ não é uma equação linear, pois o expoente da variável x não é igual a 1.

Além disso, não chamamos de lineares as equações com termo misto (que contém produto de duas ou mais variáveis). Por exemplo, as equações $xy + 3 = 0$ e $a + b + cd = 23$ não são equações lineares, pois possuem termo misto.

Verificando a solução de uma equação linear e encontrando algumas soluções

Atividade 1

Dada a equação linear $2x + 3y = 11$, faça o que se pede.

a. Verifique se (2,3) é solução da equação.

b. Encontre a solução da equação que temos $x = -1$.

c. Encontre a solução da equação que temos $y = 5$.

d. Encontre outra solução qualquer diferente das encontradas no item b e c.

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 2

Aprendendo um pouco de Sistemas lineares 2 x 2

O objetivo desta seção é aprender a reconhecer um sistema linear e resolvê-lo, sempre traduzindo um problema para a linguagem algébrica.

Sistemas lineares 2x2 – aprendendo a resolver...

Voltemos ao problema 1, do início de nossa aula – O problema da população: a população de uma cidade A é quatro vezes maior que a população da cidade B. Somando a população das duas cidades, temos o total de 250.000 habitantes. Qual a população da cidade B?

Vamos resolver este problema!? Bem, observemos que temos duas equações lineares neste problema e o conjunto dessas duas equações será o que chamamos de sistema linear 2x2.

Inicialmente o problema diz que: "A população de uma cidade A é quatro vezes maior que a população da cidade B"; chamando de x a população da cidade A e de y a população da cidade B, podemos escrever da afirmação entre aspas: x = 4y.

Temos outra afirmação no problema de onde podemos escrever outra equação linear: "Somando a população das duas cidades, temos o total de 250.000 habitantes". Desta afirmação podemos escrever que x + y = 250.000.

Podemos então escrever uma equação em baixo da outra utilizando o símbolo chaves da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x = 4y \\ x + y = 250000 \end{cases}$$

Esta forma de representar é o que chamamos de sistema de equações (no caso, equações lineares). O que seria resolver esse sistema linear? Seria encontrar valor de x e de y que satisfaça tanto a equação x = 4y quanto a equação x + y = 250.000. Observe que podemos encontrar solução para uma equação que não satisfaça a outra. Por exemplo, (4,1) é solução da equação x = 4y, visto que 4 = 4.1, mas (4,1) não satisfaz a equação x + y = 250.000, pois 4 + 1 é diferente de 250.000. Portanto, (4,1) não é solução do sistema.

Bem, como encontrar, então, a solução deste sistema? Existem alguns métodos para resolver um sistema linear 2x2. Vamos utilizar o método da substituição para resolver este nosso problema. Outros métodos serão apresentados em um Box Saiba Mais posteriormente.

No que consiste o método da substituição? Consiste em isolar uma das variáveis e então substituir seu valor respectivo na outra equação.

No caso do nosso sistema $\begin{cases} x = 4y \\ x + y = 250000 \end{cases}$ a variável x da equação de cima já está isolada em função do y. Então, no lugar do x da equação de baixo, basta colocar 4y no lugar do x. Entendeu? Vamos lá então...

Temos a equação x + y = 250.000, substituindo encontraremos:

4y + y = 250.000. Agora basta resolvermos a equação do primeiro grau e encontrar o valor de y...

5y = 250.000 → y = $\frac{250000}{5}$ = 50.000 habitantes. Como queríamos descobrir a população da cidade B, o problema foi resolvido, visto que encontramos y = 50.000, que é a população da cidade B. Mas e se quiséssemos encontrar a população da cidade A? Bastaria voltarmos a qualquer uma das equações e substituir y por 50.000. Voltando à equação x = 4y, teríamos: x = 4 . 50.000 = 200.000 habitantes. Vamos representar esta solução pelo par ordenado (200000, 50000). Simples, não é mesmo?

Um sistema linear 2 x 2, é um conjunto de duas equações lineares com duas variáveis.

- Resolvendo um sistema 2x2 pelo método da adição:

Explicaremos agora como resolver um sistema pelo método da adição. Para tal, utilizaremos o mesmo sistema que resolvemos pelo método da substituição, verificando assim a mesma solução. O sistema que resolveremos então é este aqui:

$$\begin{cases} x = 4y \\ x + y = 250000 \end{cases}$$

Pelo método da adição: o método da adição consiste em somar as equações de forma que uma das variáveis desapareça, resultando, assim, numa equação com uma única variável, que será facilmente solucionável. Lembrando que podemos multiplicar uma equação por qualquer número real e ela será uma equação equivalente (possuirá as mesmas soluções), resolvemos facilmente o sistema.

Organizando melhor nosso sistema, "passando o y para o primeiro membro" (somando -4y a ambos os membros) na equação x = 4y, teremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x - 4y = 0 \\ x + y = 250000 \end{cases}$$

Vamos agora multiplicar a primeira equação (a equação de cima) por (-1). Mas por que professor? Porque assim, como temos x na segunda equação (a equação de baixo), quando somarmos (-x) com x, irá desaparecer o x e encontraremos uma equação apenas com a incógnita y, ficando assim simples de encontrar o valor de y... Observe:

$$\begin{cases} x - 4y = 0 \quad .(-1) \\ x + y = 250000 \end{cases}$$

Ficamos com:

$$\begin{cases} -x + 4y = 0 \\ x + y = 250000 \end{cases}$$

Somando as duas equações do último sistema, encontramos a equação:

-x + x + 4y + y = 250.000 → 5y = 250.000 → y = 50.000 habitantes. Substituindo o valor de y em qualquer uma das duas equações, encontraremos o valor de x. Por exemplo, substituindo na segunda equação, teremos: x + 50.000 = 250.000 → x = 250.000-50.000 = 200.000 habitantes, que é a mesma solução que encontramos anteriormente. Simples, não é?

- Resolvendo um sistema 2x2 pelo método da comparação:

Explicaremos agora como resolver um sistema pelo método da comparação. Para tal, utilizaremos o mesmo sistema (novamente) que resolvemos pelo método da substituição e da adição, verificando assim que possuirá a mesma solução. O sistema que resolveremos é este aqui:

$$\begin{cases} x = 4y \\ x + y = 250000 \end{cases}$$

Para resolver um sistema pelo método da comparação, devemos isolar a mesma variável nas duas equações (qualquer uma das duas) no primeiro membro e então igualar o segundo membro das equações, desta maneira encontrando o valor de uma das variáveis. Vejamos como fica:

Observe que na primeira equação (x = 4y) o x já está isolado. Isolando o x na segunda equação, encontramos x = 250.000-y, ficando com o seguinte sistema em que ambas as equações expressão o valor de x:

$$\begin{cases} x = 4y \\ x = 250000 - y \end{cases}$$

Daí, podemos escrever a seguinte equação comparando essas duas: 4y = 250.000-y, que resolvendo temos:

4y + y = 250.000 → 5y = 250.000 → y = 50.000. Substituindo em qualquer uma das duas equações, encontramos o valor de x. Por exemplo, utilizando a segunda equação, temos: x = 250.000-50.000 = 200.000 habitantes. Simples, não?

Atividade 2

O problema do pagamento com notas específicas

Resolva o problema do pagamento com notas específicas, do início da aula, utilizando um dos três métodos de solução de sistema 2x2. O enunciado do problema é: Roberto utilizou apenas notas de R$ 10,00 e de R$ 50,00 para fazer um pagamento de R$ 350,00. Quantas notas de cada tipo ele utilizou, sabendo que no total foram 15 notas?

Anote suas respostas em seu caderno

O problema do teste

Atividade 3

Resolva o problema do teste do início da aula utilizando um dos três métodos de solução de sistema 2x2. O enunciado do problema é: Um professor de matemática aplicou um teste com 20 questões, e cada questão que o aluno acertasse receberia 5 pontos e cada questão que ele errasse perderia 3 pontos. Sabendo que Emília conseguiu 60 pontos nesse teste, quantas questões ela errou?

Anote suas respostas em seu caderno

Interpretação geométrica e classificação de um sistema linear 2 x 2

Podemos resolver um sistema linear 2x2 graficamente. Como? Basta lembrar que uma equação com duas variáveis pode ser "vista" como a lei de formação de uma função polinomial do 1º grau cujo gráfico é uma reta, como já estudamos.

Vejamos alguns exemplos:

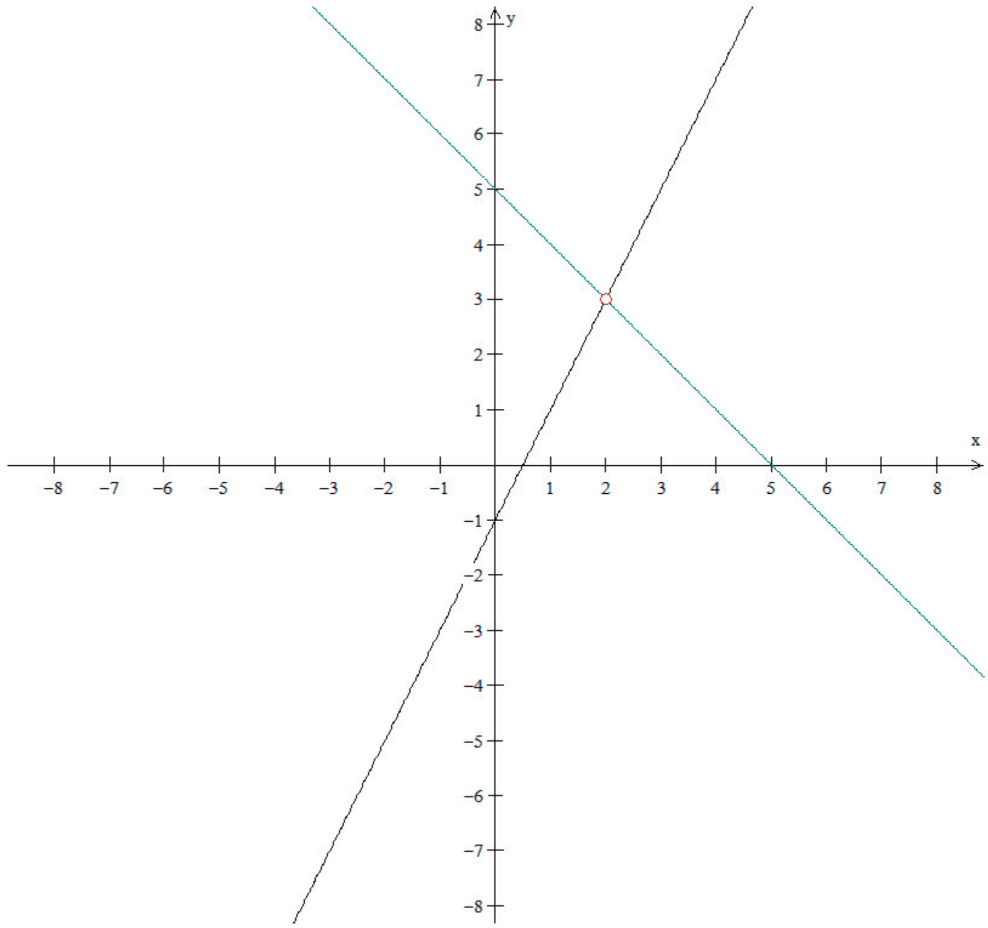
1. Observe o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Aplicando o método da adição na resolução desse sistema, teríamos x + y + 2x – y = 5 + 1. Cancelando os termos simétricos, teríamos 3x = 6, donde concluímos que x = 2. Substituindo esse valor na primeira equação teríamos que y = 3. Essa solução possui uma interpretação gráfica.

Observem que a equação linear x + y = 5 é equivalente a y = 5-x, que é a lei de uma função polinomial do 1º grau, cujo gráfico é uma reta e passa pelos pontos (0,5) e (5,0), e podemos ver seu gráfico a seguir, assim como a equação 2x-y = 1 é equivalente a y = 2x-1, cujo gráfico também se encontra a seguir.

Construindo os gráficos das funções, encontramos:



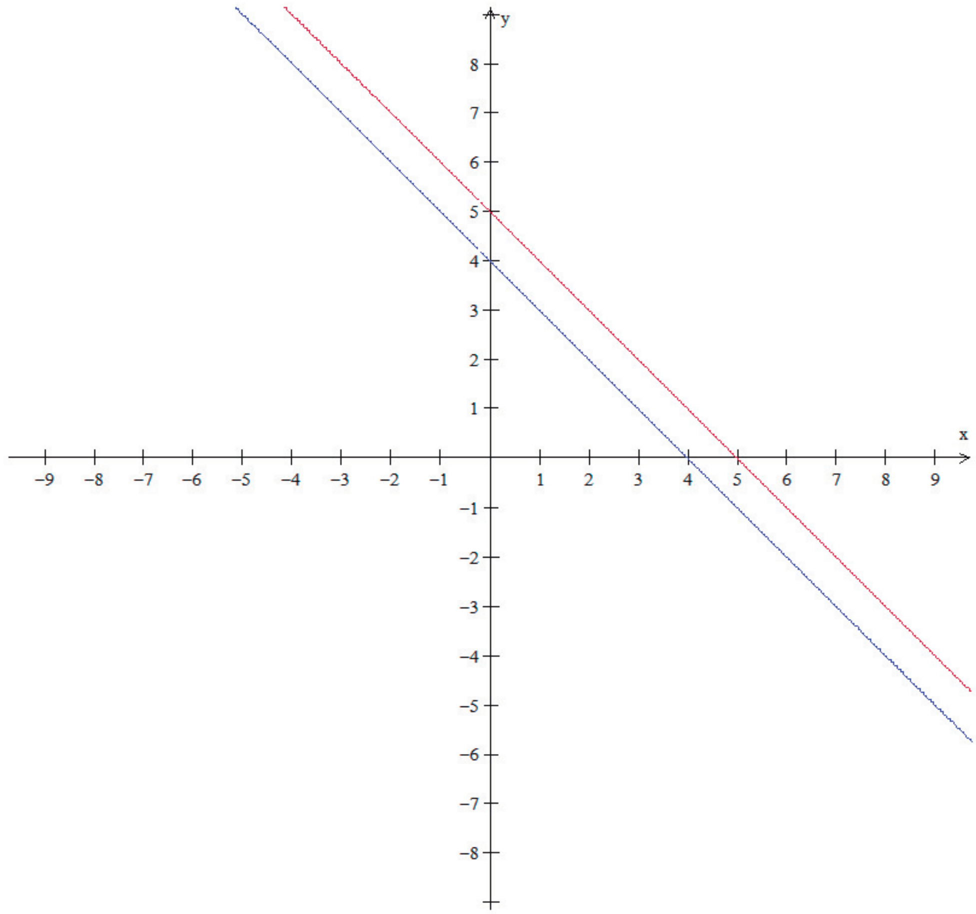
Observem que estas retas possuem um único ponto, (2,3), como ponto de intersecção, que é a solução procurada do sistema linear. Como o sistema possui uma única solução S = {(2,3)}, ele é chamado de sistema possível e determinado.

2. Observe o sistema

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Esse sistema é equivalente ao sistema de equações y = -x + 5 e y = -x + 4. Ora, se aplicamos o método da comparação em sua resolução, concluímos que –x + 5 = -x + 4, ou seja, 5 = 4. Isso é impossível! Vamos ver a interpretação gráfica dessa situação?

Da mesma maneira que no exemplo 1, construindo os gráficos das funções, encontramos:



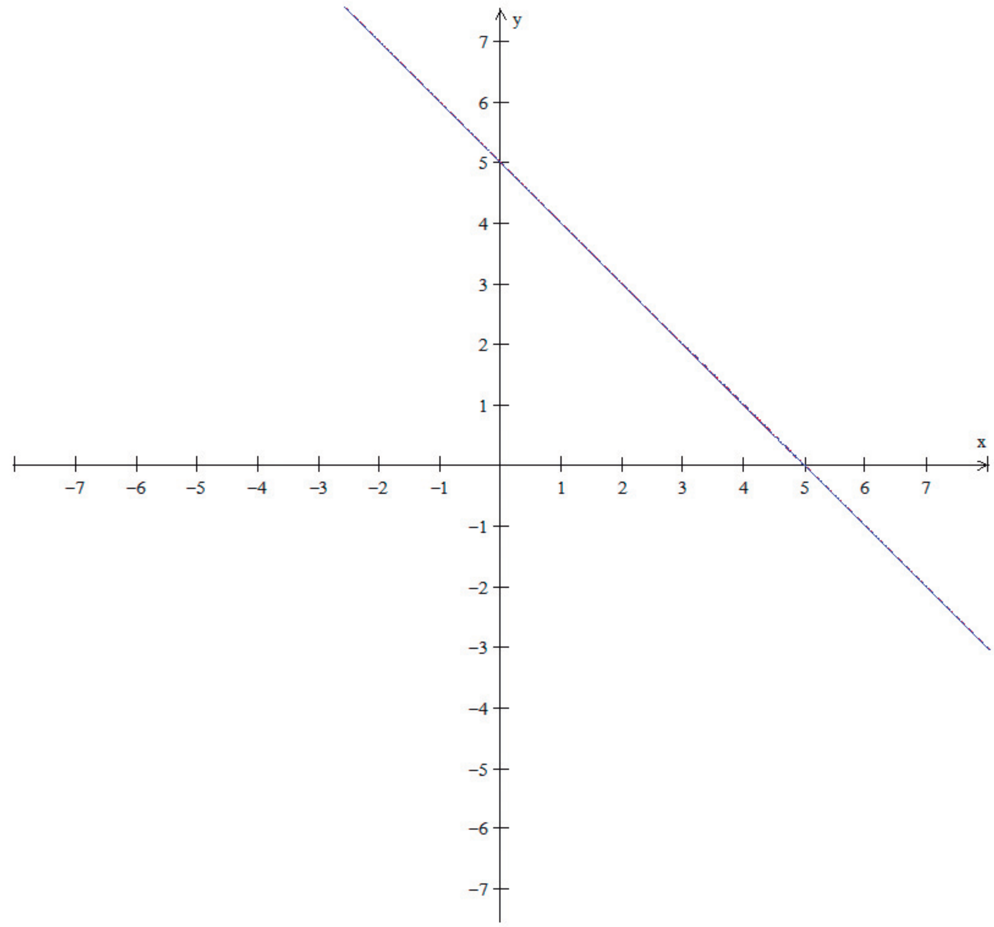
Podemos observar que as retas são paralelas, ou seja, não possuem ponto em comum. Nesse caso, dizemos que o sistema é impossível! A solução é o conjunto vazio: S = ∅.

3. Observe o sistema.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 4x + 4y = 20 \end{cases}$$

A primeira equação é equivalente a y = -x + 5. A segunda equação pode ser simplificada (todos os termos podem ser divididos por 4), de modo que teríamos x + y = 5. Da mesma forma, essa segunda equação é equivalente a y = – x + 5. Ora, se usamos o método da comparação, teríamos que –x + 5 = -x + 5. Tal fato é verdadeiro para qualquer valor de x. Vamos à interpretação gráfica dessa situação.

Da mesma maneira que nos exemplos anteriores, construiremos os gráficos das funções:



Podemos observar que as retas são coincidentes e, portanto, o sistema será possível e indeterminado, visto que ele admitirá infinitas soluções.

Assim, vemos que os sistemas podem ser classificados a partir da interpretação gráfica.

1. As retas são concorrentes: Quando isso ocorrer, haverá um ponto apenas em comum e diremos que o sistema é possível e determinado (SPD), visto que só existirá uma única solução.

2. As retas são paralelas (distintas): Quando isso ocorrer, as retas não terão pontos em comum e diremos que o sistema é impossível (SI), visto que não haverá soluções para ambas as equações ao mesmo tempo.

3. As retas são coincidentes: Quando isso ocorrer, as retas terão infinitos pontos em comum e diremos que o sistema é possível e indeterminado (SPI), visto que existirão soluções (possível), porém infinitas (indeterminado).

Seção 3

Aprendendo um pouco sobre sistemas lineares m x n

Nesta seção aprenderemos a resolver alguns sistemas lineares com mais equações e mais incógnitas que no sistema linear 2x2 que possuía apenas duas equações e duas incógnitas.

O que é um sistema linear m x n?

Bem, um sistema linear m x n nada mais é do que um sistema linear com **m** equações e **n** incógnitas. Por exemplo:

a. O sistema linear $\begin{cases} x+y-z=5 \\ 2x-y=1 \\ x-5y+4z=0 \end{cases}$ é um sistema linear com três equações e três incógnitas.

b. O sistema linear $\begin{cases} a+b=5 \\ a-c=-10 \\ b+c+d=10 \\ a-2e=\dfrac{4}{3} \end{cases}$ é um sistema linear com quatro equações e cinco incógnitas (a, b, c, d, e)

c. O sistema linear $\begin{cases} x+2y-3z+w=k \\ 10x-y+7k-4w=0 \end{cases}$ é um sistema linear com duas equações e cinco incógnitas.

Solução de um Sistema linear

Uma solução de um sistema linear é uma sequência de números reais quando é solução de cada uma das equações do sistema. Por exemplo, no sistema linear $\begin{cases} x+y-z=4 \\ 2x-y=3 \\ x-5y+4z=-7 \end{cases}$ temos que (2, 1, -1) é uma solução, pois se fizermos x = 2, y = 1 e z = -1 em cada equação do sistema encontraremos sentenças verdadeiras: 2 + 1 - (-1) = 4; 2 . 2 -1 = 3; 2 -5 . 1 + 4. (-1) = -7.

Sistemas escalonados

Observemos alguns exemplos de sistemas escalonados:

a. $\begin{cases} x+y-z=5 \\ \quad y-z=1 \\ \qquad 2z=4 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x-y+z=5 \\ \quad y-3z=0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 4a+b-3c+4d-e=6 \\ \qquad c+2d-5e=-1 \\ \qquad\qquad d+e=10 \end{cases}$

Mas por que o chamamos de escalonados? É simples, basta observar que o nº de coeficientes (números reais que acompanham as variáveis) não nulos, antes do 1º coeficiente não nulo, aumenta de equação para equação.

Resolução de um sistema escalonado

Para resolvermos um sistema escalonado, temos que separá-los em dois tipos:

1º) Sistema com número de equações igual ao número de variáveis:

Para resolver um sistema linear escalonado, em que o número de equações é igual ao número de variáveis, basta encontrar o valor de uma das variáveis (geralmente situada na última equação) e ir substituindo nas outras equações de cima para encontrar o valor das outras variáveis.

Por exemplo, no sistema $\begin{cases} x+y-z=5 \\ \quad y-z=1 \\ \qquad 2z=4 \end{cases}$ temos:

$2z = 4 \rightarrow z = 2$. Substituindo na equação de cima, teremos:

$y-2 = 1 \rightarrow y = 1 + 2 = 3$, que finalmente, substituindo na primeira equação, encontraremos: $x + 3-2 = 5 \rightarrow x = 5-1 = 4$. Portanto, a solução do sistema é (4,3,2).

Importante

Quando um sistema escalonado apresenta número de equações igual ao número de variáveis, ele é possível e determinado, ou seja, ele terá uma única solução.

2º) Sistema com número de equações menor que o número de variáveis:

Para resolver um sistema linear escalonado, onde o número de equações é menor que o número de variáveis, colocaremos uma ou mais variáveis em função de um número real qualquer (outra variável). Parece difícil, mas não é. Observe o exemplo a seguir atentamente:

$$\begin{cases} x - y + z = 5 \\ \quad y - 3z = 0 \end{cases}$$

Observe que temos duas equações e três variáveis e, portanto, estamos neste tipo de sistema escalonado. Da última equação temos que, se y-3z = 0, então y = 3z, certo? Então, façamos z = α. Daí, y = 3α. Finalmente utilizando a primeira equação, teremos que, se x-y + z = 5, então x = 5 + y-z = 5 + 3α – α = 5 + 2α.

Portanto, teremos a solução geral (5 + 2α,3 α, α), onde $\alpha \in$ R.

Observe que para cada valor de α real teremos uma solução do sistema. Por exemplo, para α = 0, teremos (5 + 2.0,3.0,0) = (5,0,0); para α = 10, teríamos como solução (5 + 2.10,3.10,10) = (25,30,10). Logo, o sistema será possível e indeterminado.

Quando um sistema escalonado apresenta número de equações menor do que o número de variáveis, ele é possível e indeterminado, ou seja, ele terá infinitas soluções.

Importante

Escalonando um sistema e resolvendo-o

Para escalonar um sistema, utilizamos as seguintes "propriedades":

1. Podemos multiplicar ambos os membros de uma equação qualquer por um número real k, diferente de zero.
2. Podemos substituir uma equação do sistema pela soma dela, membro a membro, com alguma outra equação.
3. Podemos trocar a posição de duas equações do sistema.

Qual a ideia para encontrarmos um sistema escalonado? A ideia é:

- Escolher para a primeira equação aquela em que o coeficiente da 1ª variável seja não nulo. Se possível, fazer a escolha de tal coeficiente igual a 1 para facilitar os cálculos.
- Anulamos o coeficiente da 1ª variável das demais equações, utilizando a "propriedade" II.
- Utilizar a segunda equação para anular o coeficiente da 2ª variável das demais equações. (Não fazer na primeira equação.)
- Repetir o processo até a última equação.

Exemplo: Escalonar e resolver o sistema:

$$\begin{cases} x+y+2z=4 \\ 2x+y+z=0 \\ 5x+2y-z=2 \end{cases}$$

Como o coeficiente da variável x é igual a 1, basta partirmos para anular o coeficiente das outras equações. Para tal, basta substituirmos a 2ª equação pela soma dela com a 1ª equação multiplicada por -2:

$$\begin{array}{r} -2x-2y-4z=-8 \\ 2x+y+z=0 \\ \hline -y-3z=-8 \end{array} +$$

Do mesmo modo, substituímos a 3ª equação pela soma dela com a 1ª, multiplicada por (-5):

$$\begin{array}{r} -5x-5y-10z=-20 \\ 5x+2y-z=2 \\ \hline -3y-11z=-18 \end{array} +$$

Ficamos, então, com o sistema assim:

$$\begin{cases} x+y+2z=4 \\ -y-3z=-8 \\ -3y-11z=-18 \end{cases}$$

Para ficar mais simples de fazer os cálculos, multipliquemos a segunda e a terceira equações por (-1):

$$\begin{cases} x+y+2z=4 \\ y+3z=8 \\ 3y+11z=18 \end{cases}$$

Agora basta substituirmos a 3ª equação pela soma dela com a 2ª multiplicada por -3:

$$\begin{array}{r} -3y-9z=-24 \\ 3y+11z=18 \\ \hline 2z=-6 \end{array} +$$

Encontramos, então, o sistema escalonado:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ \quad\; y + 3z = 8 \\ \qquad\; 2z = -6 \end{cases}$$

Como o sistema possui 3 equações e 3 variáveis, sabemos que este sistema é possível e determinado. Resolvendo...

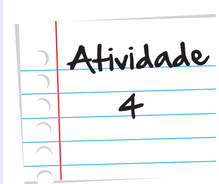
$2z = -6$

$z = -3$

Substituindo na segunda equação: $y + 3.(-3) = 8 \rightarrow y-9 = 8 \rightarrow y = 8 + 9 = 17$, que substituindo na primeira equação: $x + 17 + 2.(-3) = 4 \rightarrow x = 4-17 + 6 = -7$.

Portanto, a solução procurada é (-7,17,-3).

O problema da pontuação de cada medalha

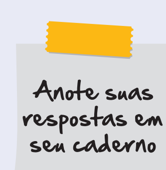


Resolva o problema do início da aula sobre a pontuação de cada medalha:

Três escolas participaram de um torneio esportivo em que provas de dez modalidades foram disputadas. Aos vencedores de cada prova foram atribuídas medalhas de ouro, de prata ou de bronze, respectivamente aos 1º, 2º e 3º lugares. A quantidade de medalhas de cada escola, ao final da competição, bem como a pontuação geral das mesmas, são apresentadas na tabela a seguir:

Escolas	Medalhas			
	Ouro	Prata	Bronze	Pontuação final
A	4	2	2	46
B	5	3	1	57
C	4	3	3	53

Quantos pontos valem cada medalha de ouro, prata e bronze?



Como vocês viram, é muito interessante o estudo de sistemas lineares, principalmente para resolução de problemas envolvendo situações reais, como foi o caso do problema do caixa eletrônico e do problema das medalhas.

Esperamos que vocês utilizem o conhecimento desta aula para facilitar a resolução de seus problemas, não somente utilizando a Aritmética substituindo valores, mas também utilizando a Álgebra.

Resumo

Nesta aula pudemos estudar principalmente:

- Equações lineares – vimos que estas são equações nas quais as variáveis têm expoentes iguais a 1 e não têm termos mistos. Por exemplo, $x + 3k + 9e = 3$ é uma equação linear, mas $x^2 + 4y = 0$ não é uma equação linear.
- Sistemas lineares – aprendemos a identificar um sistema linear e a reconhecer quando ele é:

  Possível – Quando há solução. Dividimos em dois:

  - Possível e Determinado: quando há apenas uma única solução; quando trabalhamos com sistemas 2x2, vimos que geometricamente representamos por duas retas concorrentes.
  - Possível e Indeterminado: o sistema possui infinitas soluções e quando trabalhamos com sistemas 2x2 vimos que geometricamente representamos por duas retas coincidentes.
- Finalmente, quando o Sistema é Impossível é porque não há solução e no sistema 2x2 representamos por retas paralelas.

Veja ainda

Recomendamos um vídeo do youtube para aprenderem a resolver de outra maneira um sistema linear, por uma regra conhecida como "regra de Cramer". O link é http://www.youtube.com/watch?v = 3FpN8wsOsi8&feature = fvst.

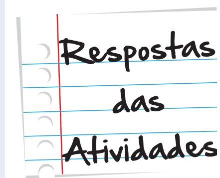
Referências

Livros

- IEZZI, Gelso, et al. **Matemática Ciência e Aplicações**. 6ª ed., vol. 2. São Paulo, 2010. 320 p.

Imagens

- Imagem retirada do Google



Atividade 1

a. Para verificar se (2,3) é solução da equação, nós substituímos x por 2 e y por 3 na equação, verificando assim se a sentença é verdadeira ou não. No caso, temos: 2.2 + 3.3 = 4 + 9 = 13 e, portanto, (2,3) não é solução, pois não encontramos 11 e sim 13.

b. Substituindo x por -1 na equação, teremos: 2 . (-1) + 3y = 11, daí
-2 + 3y = 11, então 3y = 11 + 2 >> 3y = 13>> y = $\frac{13}{3}$. Portanto, a solução procurada é (-1, $\frac{13}{3}$).

c. Substituindo y por 5 na equação, teremos que: 2x + 3.5 = 11 >> 2x + 15 = 11. Daí, 2x = 11-15 => 2x = -4 => x = $\frac{-4}{2}$ = -2. Portanto, a solução procurada é (-2,5).

d. Para encontrar outra solução qualquer, basta atribuirmos algum valor para x e encontrar o correspondente para y. Por exemplo, se fizermos x = 2, teremos: 2.2 + 3y = 11 => 4 + 3y = 11=> 3y = 11-4 => 3y = 7 => y = $\frac{7}{3}$. Portanto, uma solução será (2, $\frac{7}{3}$).

Atividade 2

Se chamarmos de x o número de notas de R$ 10,00 e y o número de notas de R$ 50,00, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 10x + 50y = 350 \\ x + y = 15 \end{cases}$$

Resolvamos pelo método da adição. Multiplicando a segunda equação por -10, encontramos: -10x-10y = -150. Somando as equações, teremos:

40y = 200 $\rightarrow$ y = 5. Substituindo o valor de y na primeira equação, encontramos o valor de x: 10x + 50. 5 = 350 $\rightarrow$ 10x + 250 = 350 $\rightarrow$ 10x = 350-250 = 100 $\rightarrow$ x = 10.

Portanto, Roberto utilizou 10 notas de R$ 10,00 e 5 notas de R$ 50,00.

Atividade 3

Chamemos de x o nº de questões que Emília acertou e de y o nº de questões que ela errou. Daí, encontramos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 60 \\ x + y = 20 \end{cases}$$

Resolveremos desta vez por substituição. Isolando a variável x da segunda equação, encontraremos: $x = 20 - y$. Substituindo na primeira equação para encontrar o valor de y, temos: $5\,(20 - y) - 3y = 60 \rightarrow 100 - 5y - 3y = 60 \rightarrow -8y = 60 - 100 \rightarrow -8y = -40 \rightarrow y = 5$.

Portanto, Emília errou 5 questões.

Atividade 4

Chamemos de x a quantidade de pontos que vale cada medalha de ouro, de y a quantidade de pontos que vale cada medalha de prata e de z a quantidade de pontos que vale cada medalha de bronze.

Traduzindo o problema, utilizando a tabela, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 4x + 2y + 2z = 46 \\ 5x + 3y + z = 57 \\ 4x + 3y + 3z = 53 \end{cases}$$

Vamos escalonar esse sistema: Substituímos a 2ª equação pela soma dela com 3ª equação multiplicada por (-1):

$$\begin{cases} 4x + 2y + 2z = 46 \\ x - 2z = 4 \\ 4x + 3y + 3z = 53 \end{cases}$$

Trocamos de posição a primeira e a segunda equações:

$$\begin{cases} x - 2z = 4 \\ 4x + 2y + 2z = 46 \\ 4x + 3y + 3z = 53 \end{cases}$$

Substituímos a 2ª equação pela soma dela com a 1ª multiplicada por (-4) e substituímos a 3ª equação pela soma dela com a 1ª multiplicada por (-4):

$$\begin{cases} x - 2z = 4 \\ 2y + 10z = 30 \\ 3y + 11z = 37 \end{cases}$$

Multiplicamos a segunda equação por $\frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} x - 2z = 4 \\ y + 5z = 15 \\ 3y + 11z = 37 \end{cases}$$

Substituímos a 3ª equação pela soma dela com a 2ª multiplicada por (-3):

$$\begin{cases} x - 2z = 4 \\ y + 5z = 15 \\ -4z = -8 \end{cases}$$

Agora com o sistema escalonado, basta encontrarmos a solução:

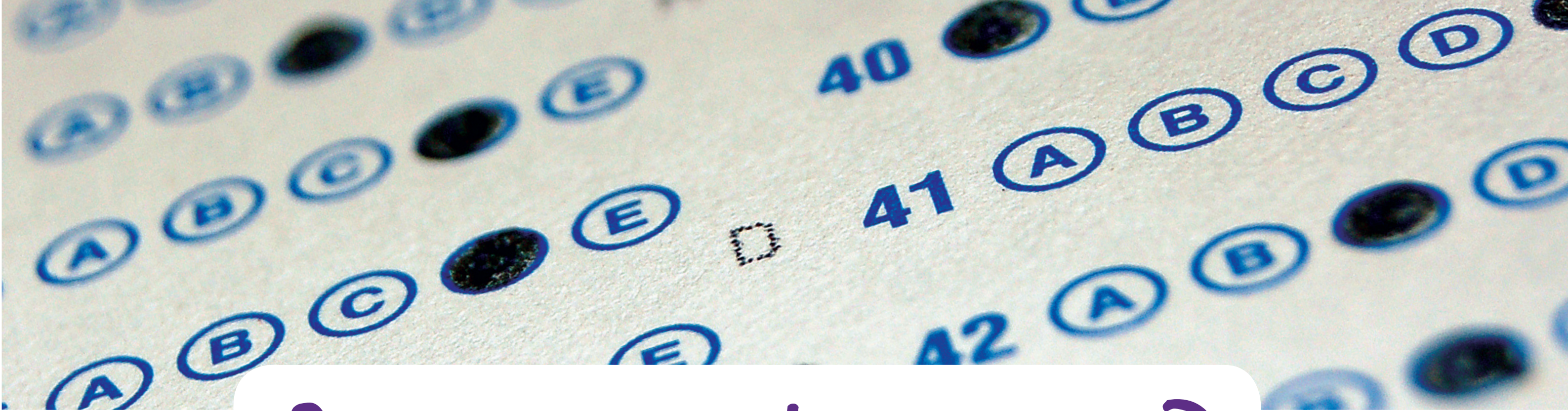
$-4z = -8 \Rightarrow z = 2$

Substituindo na segunda equação: $y + 5 . 2 = 15 \Rightarrow y = 15 - 10 = 5$.

Substindo na primeira equação: $x - 2 . 2 = 4 \Rightarrow x = 4 + 4 = 8$.

Portanto, a medalha de:

- ouro vale 8 pontos.
- prata vale 5 pontos.
- bronze vale 2 pontos.



O que perguntam por aí?

Questão 1 (UENF)

Para preencher sua necessidade diária de 300g de carboidratos, um adulto ingere um tipo de alimentação mista que consiste em batatas e soja.

Admita que 100g de batata e 100g de soja contêm, respectivamente, 19g e 35g de carboidratos, e que x e y representam as quantidades diárias, em gramas, que esse adulto irá consumir, respectivamente, de batatas e soja.

Considerando a necessidade diária de carboidratos desse adulto:

a. Calcule a quantidade de soja, em gramas, que ele deverá ingerir num determinado dia em que tenha consumido 400g de batata;

b. Estabeleça uma equação que relacione as variáveis x e y.

Resposta:

a. Se ele consumiu 400g de batata e a cada 100g ele ingere 19g de carboidratos, foram ingeridos 4x19 = 76g de carboidratos. Para atender à necessidade diária de 300g, restam 224g de carboidratos. Assim, a quantidade de soja a ser ingerida deve ser (224:35)x100 = 640g.

b. A equação é 0,19x + 0,35y = 300.

Questão 2 (UNI-Rio)

Um laboratório farmacêutico fabrica 3 tipos de remédios utilizando diferentes compostos. Considere a matriz $A = (a_{ij})$ dada a seguir, onde a_{ij} representa quantas unidades do composto j serão utilizadas para fabricar uma unidade do remédio do tipo i.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Quantas unidades do composto 2 serão necessárias para fabricar 3 remédios do tipo 1; 2 remédios do tipo 2 e 5 remédios do tipo 3?

a. 19

b. 21

c. 24

d. 27

e. 30

Resposta: O número de unidades do composto 2 para fazer o remédio do tipo 1 é o elemento a_{12}, ou seja, 2.

O número de unidades do composto 2 para fazer o remédio do tipo 2 é o elemento a_{22}, ou seja, 5.

O número de unidades do composto 2 para fazer o remédio do tipo 3 é o elemento a_{32}, ou seja, 1.

Logo, a resposta é 3 x 2 + 2 x 5 + 5 x 1 = 21.

Questão 3 (UFF)

Na perfumaria XEROBOM, o xampu, o condicionador e a loção de sua fabricação estão sendo apresentados aos clientes em três tipos de conjuntos:

Conjunto	y (nº de notas de R$ 20,00)
2 loções e 3 xampus	R$ 38,00
4 xampus e 2 condicionadores 3	R$ 26,00
2 loções e 1 condicionado	R$ 31,00

Determine o preço de cada um desses produtos, considerando que o preço individual de cada produto é o mesmo, independente do conjunto ao qual pertence.

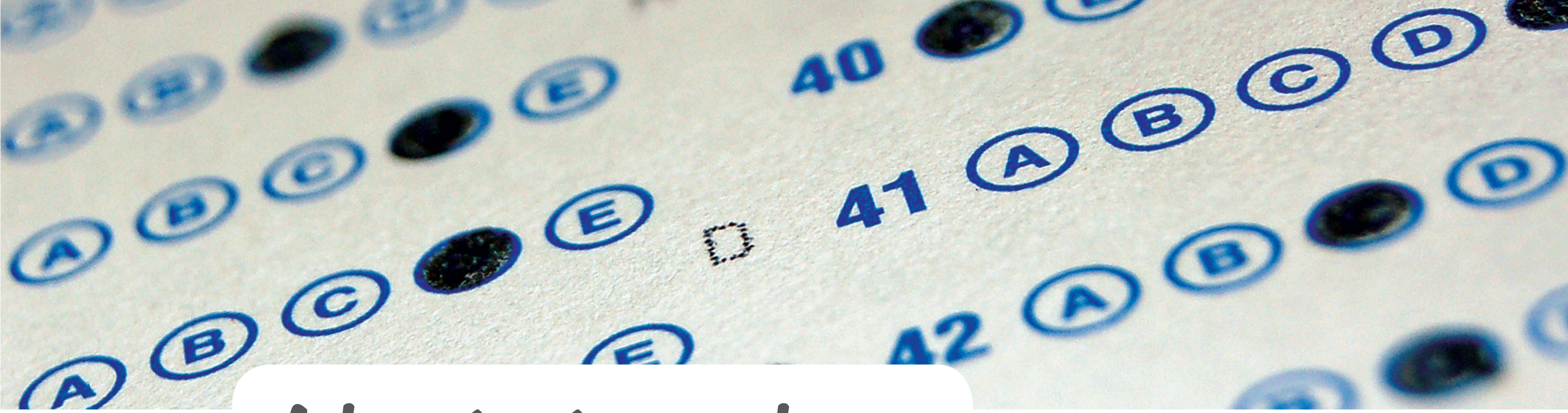
Resposta: Se x, y e z são respectivamente os preços individuais do xampu, do condicionador e da loção, temos as seguintes equações para a situação-problema proposta:

$3x + 2z = 38$

$4x + 2y = 26$

$y + 2z = 31$

Na terceira equação, temos que $y = 31 - 2z$. Substituindo y por $31 - 2z$ na 2ª equação, teremos $4x + 2(31 - 2z) = 26 \rightarrow 4x + 62 - 4z = 26 \rightarrow 4x + 36 = 4z$, que é equivalente a $x + 9 = z$. Substituindo z por $x + 9$ na 1ª equação temos $3x + 2(x + 9) = 38$ è $3x + 2x + 18 = 38 \rightarrow 5x = 20 \rightarrow x = 4$. Como $z = x + 9$, $z = 13$. Como $y = 31 - 2z$, $y = 5$.



Atividade extra

Exercício 1

Um casal pagou R$ 5,40 por 2 latas de refrigerante e uma porção de batatas fritas, enquanto um segundo pagou R$ 9,60 por 3 latas de refrigerante e 2 porções de batatas fritas. Qual a diferença entre o preço de uma porção de batatas fritas e o preço de uma lata de refrigerante?

(a) R$ 2,00 (b) R$ 1,80 (c) R$ 1,75 (d) R$ 1,50

Exercício 2

A empresa Brinque Muito fez uma doação de brinquedos para um orfanato. Essa doação compreendeu: 535, entre bolas e bonecas; 370, entre bonecas e carrinhos e 455, entre bolas e carrinhos. Qual o número de carrinhos doados pela empresa?

(a) 135 (b) 145 (c) 155 (d) 170

Exercício 3

Em uma sala, havia certo número de jovens. Quando Paulo chegou, o número de rapazes presentes na sala ficou o triplo do número de garotas. Se Alice tivesse entrado na sala o número de garotas ficaria a metade do número de rapazes. Qual o número de jovens que estavam inicialmente na sala?

(a) 11 (b) 9 (c) 8 (d) 6

Exercício 4

O diretor de uma empresa convocou todos os seus funcionários para uma reunião. Com a chegada do diretor à sala de reuniões, o número de homens presentes na sala ficou quatro vezes maior que o número de mulheres também presentes na sala. Se o diretor não fosse à reunião e enviasse sua secretária, o número de mulheres ficaria a terça parte do número de homens. Qual a quantidade de pessoas na sala aguardando o diretor?

(a) 20 (b) 19 (c) 18 (d) 15

Exercício 5

Em dado instante de uma festa 31 mulheres se retiraram e restaram convidados na razão de 2 homens para cada mulher. Um pouco mais tarde, 55 homens se retiraram e restaram convidados na razão de 3 mulheres para cada homem. Qual o número de pessoas presentes inicialmente na festa?

(a) 100 (b) 105 (c) 115 (d) 130

Exercício 6

Uma loja vende: uma faca, duas colheres e três garfos por R$ 23,50; duas facas, cinco colheres e seis garfos por R$ 50,00; duas facas, três colheres e quatro garfos por R$ 36,00. Qual seria o valor pago por meia dúzia de cada?

(a) R$65,00 (b) R$75,00 (c) R$85,00 (d) R$95,00

Exercício 7

Para pesar 3 maçãs, dispomos de um peso de 100g e de uma balança de pratos iguais. O peso da maçã maior é igual ao peso das duas outras juntas. O peso da menor mais 100g iguala ao peso das outras. A maior mais a menor pesam 100g. Qual o peso das três?

(a) 125g (b) 150g (c) 175g (d) 200g

Exercício 8

Um teste é composto por 50 questões. Na correção, uma questão vale 3 pontos e uma errada –2 pontos. Ao terminar essa prova alguém atingiu 75 pontos. Quantas questões essa pessoa acertou?

(a) 25 (b) 30 (c) 35 (d)40

Exercício 9

A soma das idades da Ana, do José e da Sara é 60 anos. A Ana é mais velha que o José pelo mesmo número de anos que o José é mais velho que a Sara. Quando o José tiver a idade que a Ana tem hoje, a Ana terá três vezes a idade que a Sara tem hoje. Qual a idade de Sara?

(a) 10 (b) 12 (c) 14 (d) 15

Exercício 10

Um pacote tem 48 balas: algumas de hortelã e as demais de laranja. A terça parte do dobro do número de balas de hortelã excede a metade do número de balas de laranjas em 4 unidades. Qual o número de balas de hortelã?

(a) 20 (b) 22 (c) 24 (d) 28

Exercício 11

Uma florista vende arranjos de flores com rosas, margaridas e cravos nos tamanhos pequeno, médio e grande. Cada arranjo pequeno contém uma rosa, três margaridas e três cravos. Cada arranjo médio contém duas rosas, quatro margaridas e seis cravos. Cada arranjo grande contém quatro rosas, oito margaridas e seis cravos. Um dia, a florista notou que havia usado um total de 24 rosas, 50 margaridas e 48 cravos ao preparar as encomendas desses três tipos de arranjos. Quantos arranjos grandes fez a florista?

Exercício 12

Carlos e sua irmã Andreia foram com seu cachorro Bidu à farmácia e lá encontraram uma velha balança com defeito, que só indicava corretamente pesos superiores a 60kg. Assim, pesaram-se dois a dois e obtiveram as seguintes marcas:

- Carlos e o cão pesam juntos 87kg;
- Carlos e Andreia pesam 123kg;
- Andreia e Bidu pesam 66kg.

Qual o peso de cada um deles?

Exercício 13

Um clube promoveu um show de música popular brasileira ao qual compareceram 200 pessoas, entre sócios e não sócios. No total, o valor arrecadado foi de R$ 1.400,00 e todas as pessoas pagaram ingresso. O preço do ingresso foi R$ 10,00 e cada sócio pagou meia entrada. Qual o número de sócios e não sócios que compareceram ao show?

Exercício 14

Uma prova de múltipla escolha com 60 questões foi corrigida da seguinte forma: o aluno ganhava 5 pontos por questão que acertava e perdia 1 ponto por questão que errava ou deixava em branco. Um aluno totalizou 210 pontos. Qual o número de questões que ele acertou?

Exercício 15

Quando um sistema linear tem mais variáveis que equações a solução não é única, então dizemos que tal sistema tem grau / graus de liberdade. Pesquise e exiba dois exemplos de situações práticas que correspondem a um sistema assim.

Gabarito

Exercício 1

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 2

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 3

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 4

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 5

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 6

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 7

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 8

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 9

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 10

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 11

4 arranjos.

Exercício 12

Andreia pesa 51kg, Bidu 15kg e Carlos 72kg.

Exercício 13

120 sócios e 80 não sócios.

Exercício 14

45 questões.

Exercício 15

Caro aluno! O incentivamos a pesquisar e discutir sua proposta de solução com um professor de sua unidade ceja.