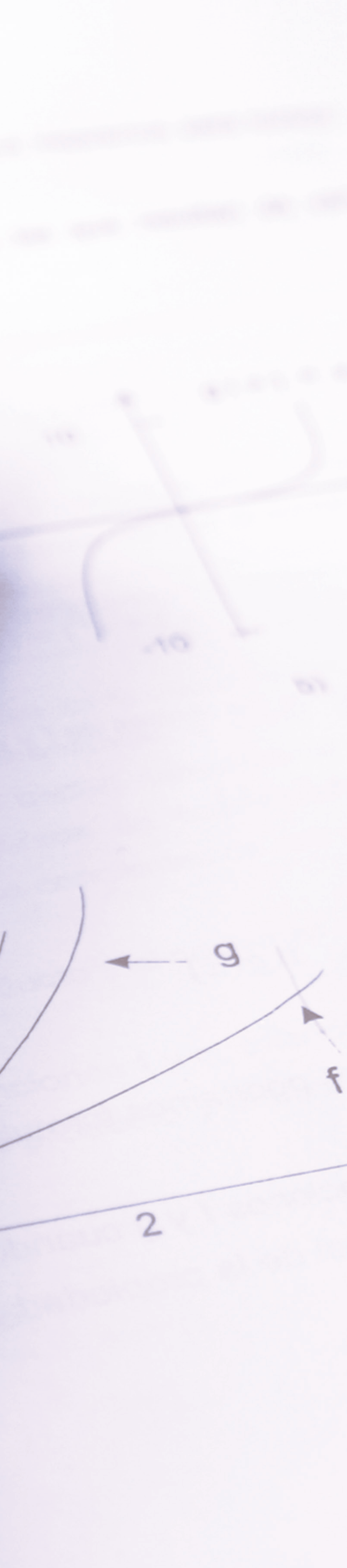
Matrizes e Determinantes

Fascículo 9

Unidade 29

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj



Matrizes e Determinantes

Para início de conversa...

Frequentemente em jornais, revistas e também na Internet encontramos informações numéricas organizadas na forma de tabelas, com linhas e colunas. Esta tabela numérica com linhas e colunas é o que chamaremos de Matriz. Vejamos alguns exemplos de tabelas comumente encontradas:

Tabela 1: Tabela anual IR 2012

Rendimento (R$)	Alíquota	Parcela a deduzir (R$)
Até 18.799,32	-	-
De 18.799,33 a 28.174,20	7,5%	1.409,95
De 28.174,21 a 37.566,12	15,0%	3,523,01
De 37.566,13 a 46.939,56	22,5%	6.340,47
Acima de 46.939,56	27,5%	8.687,45

Retirado do site: http://www.meubolsoemdia.com.br/dica/imposto-de-renda/tabela-anual-ir-2012

Tabela 2: Custo e lucro de alguns artigos de uma sapataria

Artigo	Bota	Sapato	Sandália
Custo R$	200	120	80
Lucro R$	75	25	20

Tabela 3: Quantidade de artigos vendidos dessa sapataria em alguns meses do ano

Mês	Março	Abril	Maio
Bota	10	15	35
Sapato	20	25	25
Sandália	30	20	05

(tabelas 2 e 3 retiradas do site: http://www.feg.unesp.br/extensao/teia/aulas/Ana26agosto-AtividadeExtra.pdf, que é uma atividade que adaptaremos para utilizarmos posteriormente nessa aula).

Quando trabalhamos com matrizes, em geral utilizamos apenas os números das tabelas, organizando-os em linhas e colunas, entre parênteses, colchetes ou entre duas barras (os dois primeiros são mais comuns). Veremos que esta representação utilizada facilitará nosso trabalho, quando estudarmos as operações com matrizes.

Observação: Utilizamos uma letra maiúscula para identificar matrizes.

Alguns exemplos de matrizes:

Chamando de A a matriz obtida pelos números da tabela 2 e B a matriz obtida pelos números da tabela 3, teremos então:

$$A = \begin{pmatrix} 200 & 120 & 80 \\ 75 & 25 & 20 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 35 \\ 20 & 25 & 25 \\ 30 & 20 & 5 \end{bmatrix}$$

Aprenderemos na seção 1 a reconhecer um elemento ou termo de uma matriz (um desses números que aparecem na matriz) dados a posição da linha e da coluna em que ele está.

Objetivos de aprendizagem

- Identificar e representar os diferentes tipos de matrizes.
- Efetuar cálculos, envolvendo as operações com matrizes.
- Resolver problemas, utilizando as operações com matrizes e a linguagem matricial.
- Calcular o determinante de matrizes quadradas de ordem 2 e 3 .

Seção 1
Conhecendo e construindo matrizes

Antes de qualquer coisa, procuremos compreender como identificar um elemento de uma matriz, utilizando a posição de sua linha e coluna.

Utilizando nossa Tabela 2, identificamos a seguir as linhas e colunas da matriz:

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 200 & 120 & 80 \\ 75 & 25 & 20 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \boxed{\text{1ª LINHA}} \\ \boxed{\text{2ª LINHA}} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 200 & 120 & 80 \\ 75 & 25 & 20 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \boxed{\text{1ª COLUNA}} & \boxed{\text{2ª COLUNA}} & \boxed{\text{3ª COLUNA}} \end{array} \end{array}$$

Então, esta matriz é formada por duas linhas e três colunas.

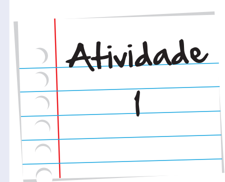
Agora que já sabemos reconhecer linhas e colunas de matrizes, podemos reconhecer seus elementos, utilizando essas informações. Por exemplo, podemos ver que o elemento que está na primeira linha e segunda coluna é o 120, pois:

$$\begin{pmatrix} 200 & 120 & 80 \\ 75 & 25 & 20 \end{pmatrix}$$

Visualmente falando o número que está na primeira linha e segunda coluna é o 120, pois ele é o elemento que está na interseção das cores.

O elemento que está na segunda linha e terceira coluna é o 20, pois:

$$\begin{pmatrix} 200 & 120 & 80 \\ 75 & 25 & 20 \end{pmatrix}$$



Reconhecendo elementos de uma matriz.

Agora é com você! Dada a matriz $B = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 35 \\ 20 & 25 & 25 \\ 30 & 20 & 5 \end{bmatrix}$. Identifique o elemento que está na:

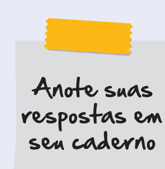
a. primeira linha e primeira coluna.

b. terceira linha e segunda coluna.

c. segunda linha e terceira coluna.

d. terceira linha e terceira coluna.

Dica: Se precisar, utilize a ideia de circular a linha e coluna respectiva e veja que o elemento procurado é exatamente o que estará na interseção.



Considerando uma matriz A com m linhas e n colunas, podemos identificar os elementos desta matriz por meio do símbolo a_{ij}, em que o índice i refere-se a linha em que se encontra tal elemento e o índice j refere-se à coluna em que se encontra o elemento. Como vimos anteriormente, convencionamos que as linhas são numeradas de cima para baixo e as colunas da esquerda para direita.

Observe que o índice i varia de 1 até m , enquanto o índice j varia de 1 até n.

Exemplo: Considerando a matriz A abaixo:

$$\begin{pmatrix} 200 & 120 & 80 \\ 75 & 25 & 20 \end{pmatrix}$$

Temos:

$a_{11} = 200$ (elemento que está na primeira linha e primeira coluna)

$a_{12} = 120$ (elemento que está na primeira linha e segunda coluna)

$a_{13} = 80$ (elemento que está na primeira linha e terceira coluna)

$a_{21} = 75$ (elemento que está na segunda linha e primeira coluna)

$a_{22} = 25$ (elemento que está na segunda linha e segunda coluna)

$a_{23} = 20$ (elemento que está na segunda linha e terceira coluna)

Multimídia

Preocupado com o impacto ambiental que a poluição pode causar à sua represa, um jovem procura a ajuda de um gestor ambiental, que sugere o uso do conceito de matrizes para determinar se o impacto ambiental é sustentável. Ficou curioso? Então acesse o link http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnica.html?id=33154 e surpreenda-se.

Identificando elementos de uma matriz

Atividade 2

Dada a matriz a seguir, identifique seus elementos:

$$\begin{pmatrix} -4 & \sqrt{2} \\ \dfrac{2}{3} & 100 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = ???$

$a_{12} = ???$

$a_{21} = ???$

$a_{22} = ???$

Anote suas respostas em seu caderno

Construindo uma matriz a partir de uma "regra de formação".

Podemos construir uma matriz a partir de uma regra de formação – que é uma expressão, envolvendo as variáveis i e j de um elemento geral a_{ij}. Calma! Não é algo difícil. Veja:

Dada uma matriz com 3 linhas e 2 colunas, por exemplo, e a regra de formação $a_{ij} = i + j$, poderíamos escrever todos os elementos dessa matriz. Mas como?

Primeiro, observamos que, como a matriz tem 3 linhas e 2 colunas, ela pode ser representada da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Após ter escrito os elementos desta forma (geral), utilizamos a regra dada e assim obtemos os elementos de forma numérica... Observe que a regra geral é $a_{ij} = i + j$, basta substituirmos as letras i e j pelos números que ali aparecem. Por exemplo, como encontrar o termo a_{11}?? Basta no lugar do i colocarmos o 1 e no lugar do j também colocarmos o 1 e assim encontraremos

$a_{11} = 1 + 1 = 2$. Encontrando os demais termos:

$a_{12} = 1 + 2 = 3$

$a_{21} = 2 + 1 = 3$

$a_{22} = 2 + 2 = 4$

$a_{31} = 3 + 1 = 4$

$a_{32} = 3 + 2 = 5$

Agora basta voltarmos a nossa matriz inicial e substituirmos as letras por números! Ela ficará assim então:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Observem que:

Dependendo da regra de formação podemos encontrar termos negativos, frações, números irracionais... Afinal, estamos trabalhando com números reais!

Utilizamos a_{ij} para o termo geral de uma matriz A, mas podemos utilizar também b_{ij}, c_{ij}, etc., porém o mais comum é utilizar o b_{ij} para uma matriz B, c_{ij} para uma matriz C etc...

Atividade 3

Vamos construir uma matriz?

a. Construa uma matriz com 2 linhas e 2 colunas, onde a regra geral é dada por $a_{ij} = i - j$.

Dizemos que uma matriz é **quadrada** se o número de linhas é igual ao número de colunas.

b. Os elementos a_{11}, a_{22}, a_{33}, ... compõem a **diagonal principal** de uma matriz quadrada. Construa a matriz 2 x 2 (ou seja, com 2 linhas e 2 colunas) dada por $a_{ij} = 3i + j$ e identifique os elementos da sua diagonal principal.

c. Construa a matriz com 3 linhas e 3 colunas dada por $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$.

A matriz quadrada em que os elementos da sua diagonal principal são iguais a 1 e os outros elementos são iguais a zero é chamada de matriz **identidade**.

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 2
Vamos operar com matrizes?

O objetivo desta seção é aprender a operar com matrizes. Vejamos um exemplo de problema em que podemos aplicar uma das operações:

Somando e Subtraindo matrizes

As tabelas a seguir representam as vendas de uma confeitaria, de dois tipos de bolos, tipo A e B, de acordo com o tamanho (pequeno, médio e grande), durante os dois primeiros meses de um ano:

JANEIRO

	Pequeno	Médio	Grande
A	35	40	23
B	40	35	32

FEVEREIRO

	Pequeno	Médio	Grande
A	31	25	30
B	25	40	35

Como poderíamos determinar as vendas de cada tipo (e tamanho) de bolo no primeiro bimestre desse ano?

Vejamos que não é uma tarefa difícil, visto que, por exemplo, para encontrarmos a quantidade vendida de bolos pequenos do tipo A e pequeno nesse bimestre, basta somarmos as quantidades de bolos tipo A e pequeno do mês de Janeiro, que foram 35, com a quantidade de bolos tipo A e pequeno do mês de fevereiro, que foram 31, assim encontraremos $35 + 31 = 66$ bolos tipo A e pequeno vendidos nesse primeiro bimestre. Da mesma maneira, podemos fazer as demais somas, ou seja, basta somarmos os elementos correspondentes das tabelas. Utilizando a representação por matrizes, teremos:

$$\begin{pmatrix} 35 & 40 & 23 \\ 40 & 35 & 32 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 31 & 25 & 30 \\ 25 & 40 & 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35-31 & 40-25 & 23-30 \\ 40-25 & 35-40 & 32-35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 & 65 & 53 \\ 65 & 75 & 67 \end{pmatrix}$$

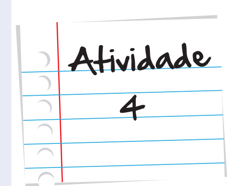
Viram como não é difícil? Observem que é bem simples retirar a informação desejada da matriz. Por exemplo, se estivéssemos desejando encontrar quantos bolos do tipo B, tamanho médio foram vendidos no bimestre, bastaríamos procurar o elemento que está na segunda linha e segunda coluna da última matriz, encontrando como resultado o número 75.

Poderíamos efetuar a subtração de matrizes, subtraindo-se os elementos da primeira pelos respectivos elementos da segunda. Veja o exemplo a seguir:

$$\begin{pmatrix} 35 & 40 & 23 \\ 40 & 35 & 32 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 31 & 25 & 30 \\ 25 & 40 & 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35-31 & 40-25 & 23-30 \\ 40-25 & 35-40 & 32-35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 15 & -7 \\ 15 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Outra observação é que só podemos somar matrizes com o mesmo número de linhas e colunas.

O problema das faltas



As tabelas a seguir indicam o número de faltas de três alunos (A, B e C) em três disciplinas (Física, Química e Matemática), nos meses de Outubro de Novembro.

OUTUBRO

	Física	Química	Matemática
Aluno A	3	2	3
Aluno B	4	1	2
Aluno C	2	0	1

NOVEMBRO

	Física	Química	Matemática
Aluno A	2	4	2
Aluno B	0	3	1
Aluno C	1	2	1

Atividade 4

a. Construa uma matriz que represente o número de faltas, neste bimestre, de cada aluno por matéria.

b. Neste bimestre, quem teve o maior número de faltas em Matemática? E o menor número de faltas em Física?

c. Construa uma matriz, fazendo a diferença entre o número de faltas do mês de Novembro e o número de faltas do mês de Outubro.

d. O que você pode concluir com estes elementos encontrados?.

Anote suas respostas em seu caderno

Multiplicando um número real por uma matriz

Para multiplicar um número real por uma matriz basta multiplicarmos cada um dos elementos da matriz por este número.

Observe o seguinte exemplo:

$$2 \text{ x} \begin{bmatrix} 10 & 15 & 35 \\ 20 & 25 & 25 \\ 30 & 20 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\ x\ 10 & 2\ x\ 15 & 2\ x\ 35 \\ 2\ x\ 20 & 2\ x\ 25 & 2\ x\ 25 \\ 2\ x\ 30 & 2\ x\ 20 & 2\ x\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 30 & 70 \\ 40 & 50 & 50 \\ 60 & 40 & 10 \end{bmatrix}$$

Multiplicando matrizes

Nós vimos que para somar matrizes, somamos os elementos respectivos e que para multiplicar um número real por uma matriz, basta que multipliquemos este número real por cada um dos elementos dessa matriz. Veremos agora como fazemos para multiplicar duas matrizes. Você poderia pensar: - Ah, deve ser multiplicando cada elemento respectivo... Mas nós veremos que não é dessa forma. Faça a atividade abaixo passo a passo e você verá que é capaz de multiplicar matrizes, quando possível, pois nem sempre podemos efetuar a multiplicação entre matrizes!

Atividade 5

O problema da sapataria

(atividade adaptada do site: http://www.feg.unesp.br/extensao/teia/aulas/Ana26agosto-AtividadeExtra.pdf)

Considere as duas tabelas a seguir que já estamos familiarizados nessa aula:

Artigo	Bota	Sapato	Sandália
Custo R$	200	120	80
Lucro R$	75	25	20

Tabela 2: Custo e lucro de alguns artigos de uma sapataria

Mês	Março	Abril	Maio
Bota	10	15	35
Sapato	20	25	25
Sandália	30	20	05

Tabela 3: Quantidade de artigos vendidos dessa sapataria em alguns meses do ano

A Tabela 2, como já vimos, apresenta-nos o custo e o lucro de alguns artigos de uma sapataria, enquanto que a tabela 3 apresenta-nos a quantidade dos artigos vendidos durante três meses do ano.

a. É possível criar uma tabela que nos apresente o custo total e o lucro total de cada um desses três meses. Construa-a! Vamos lá, você consegue.

Vou ajudar: Como será que faríamos para encontrar, por exemplo, o custo total no mês de Março? E aí, descobriu? Acho que sim, né! Para calcular o custo total no mês de Março é só calcularmos o custo da bota, do sapato, da sandália e depois somar para encontrar o custo final deste mês. Concorda? Então fica: 200 x 10 + 120 x 20 + 80 x 30 = 2000 + 2400 + 2400 = 6800 reais.

Como faríamos para calcular o lucro no mês de Março? De forma bem parecida, basta pegarmos os lucros de cada artigo, multiplicarmos pelas quantidades vendidas e, ao final, somar estes valores, encontrando então:75 x 10 + 25 x 20 + 20 x 30 = 750 + 500 + 600 = 1850 reais.

Complete a matriz com os valores que faltam:

$$\begin{pmatrix} 6800 & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ 1850 & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \end{pmatrix}$$

Atividade 5

b. Quantas linhas e quantas colunas de dados numéricos você obteve na sua matriz?

c. Se na Tabela 2 existisse também coluna para o item "chinelo", ainda seria possível criar uma tabela que apresentasse custo total e lucro total?

d. Se na Tabela 2 existisse também uma linha para o item "Gastos com Funcionários", seria possível criar uma tabela que apresentasse custo total, lucro total e gasto total com funcionários?

e. Se na Tabela 3 existisse também colunas para os meses de Junho, Julho e Agosto, ainda seria possível criar uma tabela que apresentasse custo total e lucro total?

f. Se na Tabela 3 existisse também uma linha para o item "tênis", ainda seria possível criar uma tabela que apresentasse custo total e lucro total?

g. Qual a condição necessária para que possamos relacionar as duas tabelas?

Anote suas respostas em seu caderno

E aí, conseguiu descobrir, quando é possível fazer a multiplicação entre matrizes? Conseguiu entender como se faz a multiplicação entre matrizes? Acredito que sim, então agora estudaremos um pouco de determinante!

Determinantes

Antes de sabermos como se encontra o determinante de uma matriz, é importante observarmos alguns itens:

1. Somente definimos determinante de uma matriz quadrada, então precisamos saber o que é uma matriz quadrada, certo? Uma matriz quadrada nada mais é que uma matriz que tem o número de linhas igual ao número de colunas.

Exemplos:

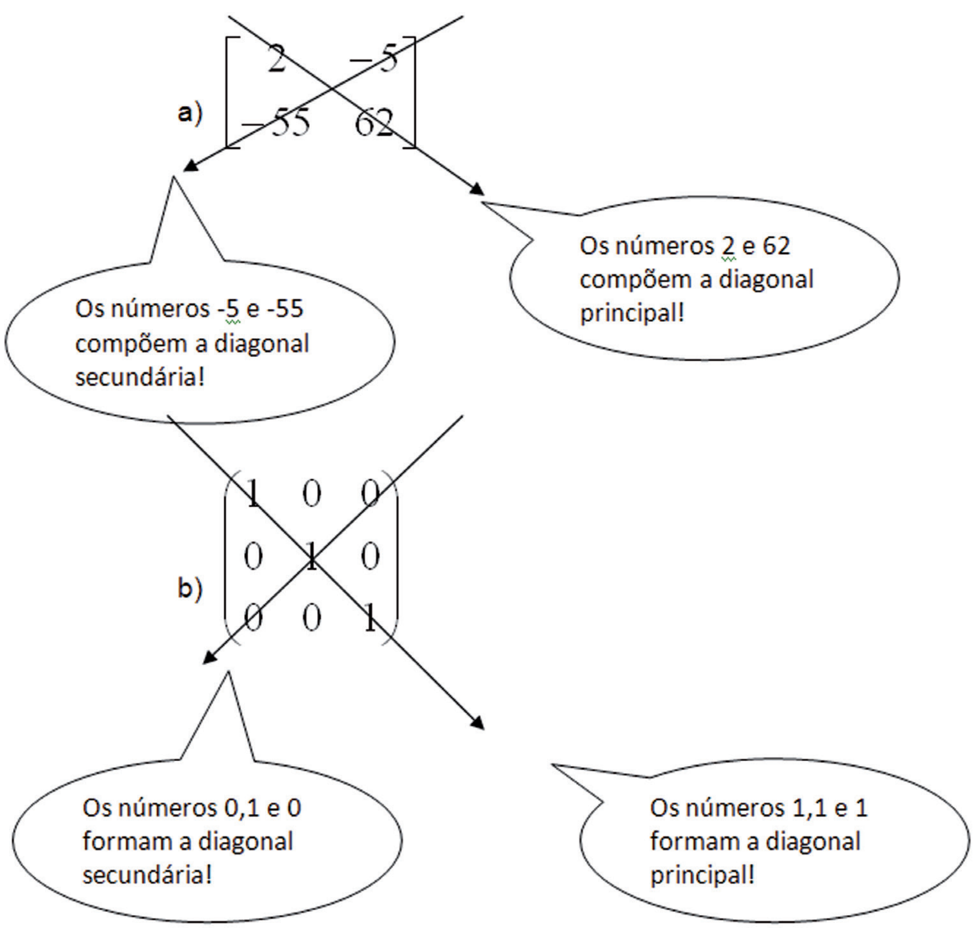
a. (3) – Matriz com uma linha e uma coluna.

b. $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -55 & 62 \end{bmatrix}$ - Matriz com duas linhas e duas colunas.

c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - Matriz com 3 linhas e 3 colunas.

d. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ - Matriz com 4 linhas e 4 colunas.

2. Precisamos reconhecer a diagonal principal e diagonal secundária de uma matriz quadrada – utilizaremos principalmente esta ideia quando formos encontrar o determinante de uma matriz com duas linhas e duas colunas. Observe a seguir nos exemplos, os elementos que compõe a diagonal principal e secundária de uma matriz.



Bem, acho que agora podemos ver o que é o determinante de uma matriz. Vamos lá!

Dada uma matriz quadrada A qualquer, dizemos que o determinante da matriz A, que indicamos por det A é o número obtido a partir de operações com os elementos de A. Observe que, como dizemos "o determinante!" já podemos imaginar com razão que ele é único. Nós aprenderemos aqui a encontrar o determinante de matrizes um por um (uma linha e uma coluna) ou simplesmente ordem 1 (quando a matriz é quadrada ela possui o mesmo número de linhas e colunas e para simplificações dizemos apenas ordem tal), também veremos por meio de atividades como encontrar determinante de matrizes de ordem 2 e 3.

- O determinante de uma matriz A de ordem 1 é o próprio elemento de A.

Exemplos:

a. A = (7) è det A = 7

b. B= (-6) è det B = -6

- O determinante de uma matriz A de ordem 2 é igual a diferença do produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária. Num primeiro momento pode aparentar ser difícil, mas veremos que se fizermos passo a passo não é complicado não! Exemplo:

Dada a matriz de ordem 2: $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$, façamos passo a passo o que se pede e encontraremos o determinante dela.

1. Os elementos que formam a diagonal principal da matriz A são: 2 e 10.
2. O produto dos elementos da diagonal principal é igual a: 2 x10 = 20
3. Os elementos da diagonal secundária são: 5 e 3.
4. O produto dos elementos da diagonal secundária é igual a: 5 x 3 = 15
5. A diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal de A e o produto dos elementos de sua diagonal secundária é igual a: 20 – 15 = 5

Portanto, det A = 5.

- Para encontrarmos o determinante de uma matriz de ordem 3, utilizaremos um procedimento conhecido por "Regra de Sarrus". A ideia é a seguinte:

1º) Copiamos ao lado direito da matriz A as suas duas primeiras colunas.

2º) Multiplicamos os elementos da diagonal principal de A. Seguindo a direção da diagonal principal, multiplicamos separadamente os elementos das outras duas "diagonais" (paralelas à diagonal principal).

3º) Multiplicamos os elementos da diagonal secundária de A, trocando o sinal do produto obtido. Seguindo a direção da diagonal secundária, multiplicamos, separadamente, os elementos das outras duas "diagonais", também trocando o sinal dos produtos.

4º) Somamos todos os resultados obtidos no 2º e 3º passos.

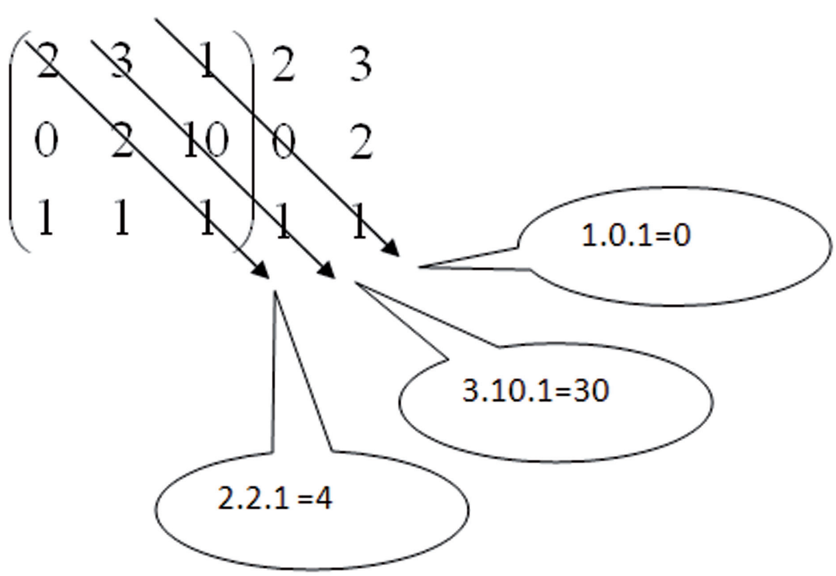
Façamos um exemplo, passo a passo, para você compreender melhor como encontrar o determinante de uma matriz de ordem 3.

Exemplo: Encontrar o determinante da matriz $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

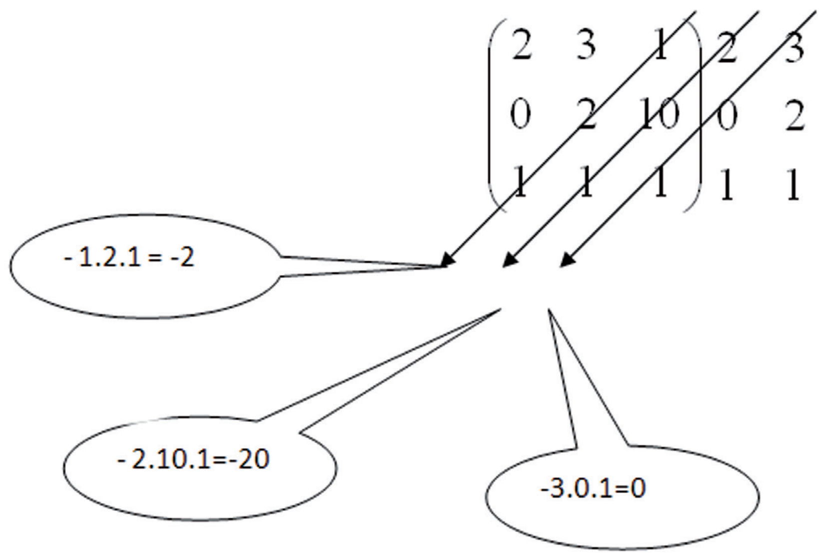
Vamos lá então! O primeiro passo é copiar as duas primeiras colunas ao lado direito da matrriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

Agora façamos o passo 2: Multipliquemos os elementos da diagonal principal e suas duas "paralelas":



Agora o passo três: Multipliquemos os elementos da diagonal secundária, também os elementos de suas “paralelas” não esquecendo de TROCAR os sinais de seus resultados:



Para terminar, pelo passo 4, basta somarmos os resultados encontrados, e daí encontraremos det D = 4 + 30 + 0 + (-2) + (-20) + 0 = 4 + 30 – 2 – 20 = 34 – 22 = 12.

Saiba Mais

Existem algumas matrizes que recebem um nome especial, como é o caso da matriz quadrada que já vimos, onde o número de linhas é igual ao número de colunas.

Bem agora falaremos de mais uma matriz com nome especial que é a matriz identidade. Uma matriz quadrada de ordem n é dita identidade quando os elementos da diagonal principal são todos iguais a 1 e os demais elementos dessa matriz são iguais a 0. Por exemplo:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E assim por diante, independente da ordem da matriz quadrada...

Encontrando o determinante de uma matriz.

Atividade 6

Encontre, utilizando o conhecimento adquirido nesta seção, qual o determinante das matrizes identidade I_2 e I_3. Será que você se arriscaria dizer qual o determinante da matriz identidade I_4 sem fazer contas? Por quê?

Anote suas respostas em seu caderno

Multimídia

No site a seguir, vocês poderão baixar uma calculadora bem legal que vocês poderão calcular determinantes. Divirtam-se!

Baixem do site: http://www.baixaki.com.br/site/dwnld46266.htm

Instale e abra a calculadora.

Clique em “Equações – Polinômios” e a calculadora abrirá uma nova tela. Lá em cima, clique na aba “Determinantes” e pronto, você poderá saber o valor de determinantes até ordem 4, apenas colocando os valores dos elementos.

Vimos neste módulo quão importante as matrizes são importantes para a nossa vida. Organizamos dados, visualizamos de maneira rápida, extraindo informações facilmente. Vimos também como operar com matrizes.

Resumo

Aprendemos neste módulo:

- Identificar e representar os diferentes tipos de matrizes: vimos que a partir de uma tabela de dados, ou de uma regra de formação, sabendo o número de linhas e de colunas, podemos construir uma matriz.
- Efetuar cálculos envolvendo as operações com matrizes: vimos que é bem natural efetuar algumas das operações entre matrizes, como a soma, que basta somar os elementos correspondentes. Temos de ter uma atenção especial com o produto de matrizes, pois ela é especial, não basta multiplicar os termos correspondentes.

- Calcular o determinante de matrizes quadradas de ordem 2 e 3 : por fim aprendemos a calcular determinantes, que quando a matriz é de ordem 2, fazemos a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal pelo produto dos elementos da diagonal secundária, quando a matriz é de ordem 3, utilizamos a regra de Sarrus.

Veja ainda

Calculando determinante por escalonamento:

- http://www.youtube.com/watch?v=qCYvugOqQAo
- Neste vídeo, você aprenderá como calcular um determinante de uma maneira diferente da que estudamos. Não deixem de conferir!

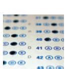
Referência

Livros

- IEZZI, Gelso, et al. *Matemática Ciência e Aplicações.* 6ª edição, vol2. São Paulo, 2010. 320 páginas.

Imagens

- http://www.sxc.hu/photo/475767



- http://www.sxc.hu/photo/517386

- http://www.sxc.hu/photo/1289957

Respostas das Atividades

ATIVIDADE 1

a. 10

b. 20

c. 25

d. 5

ATIVIDADE 2

a_{11} = -4 (elemento que está na primeira linha e primeira coluna)

$a_{12} = \sqrt{2}$ (elemento que está na primeira linha e segunda coluna)

$a_{21} = \frac{2}{3}$ (elemento que está na segunda linha e primeira coluna)

a_{22} = 100 (elemento que está na segunda linha e segunda coluna)

ATIVIDADE 3

a. Como queremos construir uma matriz com duas linhas e duas colunas, sabemos que ela é da forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Daí, como a regra de formação é $a_{ij} = i - j$, teremos:

$a_{11} = 1 - 1 = 0$ (substituímos o i por 1 e o j também por 1)

$a_{12} = 1 - 2 = -1$ (substituímos o i por 1 e o j por 2)

$a_{21} = 2 - 1 = 1$ (substituímos o i por 2 e o j por 1)

$a_{22} = 2 - 2 = 0$ (substituímos o i por 2 e o j também por 2)

Logo, a matriz procurada é:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b.

$a_{11} = 3.1 + 1 = 4$ (substituímos o i por 1 e o j também por 1)

$a_{12} = 3.1 + 2 = 5$ (substituímos o i por 1 e o j por 2)

$a_{21} = 3.2 + 1 = 7$ (substituímos o i por 2 e o j por 1)

$a_{22} = 3.2 + 2 = 8$ (substituímos o i por 2 e o j também por 2)

Logo, a matriz procurada é:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Os elementos da diagonal principal são 4 e 8.

c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ATIVIDADE 4

a. Para encontrar a matriz de faltas do bimestre, temos de fazer a soma das matrizes de faltas dos meses Outubro e Novembro:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 4 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

b. Para descobrir quem teve o maior número de faltas em Matemática, basta encontrar o maior número da última coluna, onde vemos que foi o aluno A, com cinco falta. O menor número de faltas em Física foi 3 (basta olhar para a primeira coluna) e assim o aluno C teve o menor número de faltas.

c.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 & 4-2 & 2-3 \\ 0-4 & 3-1 & 1-2 \\ 1-2 & 2-0 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d. Podemos concluir, por exemplo, que o aluno C teve o mesmo número de faltas em Outubro e Novembro em Matemática, visto que o elemento que aparece na terceira linha e terceira coluna é 0. Podemos concluir que todos os alunos tiveram mais faltas em Novembro do que em Outubro em Química, pois os números da segunda coluna são todos positivos.

ATIVIDADE 5

a. Calculando os demais elementos:

$$\begin{pmatrix} 6800 & 200 \times 15 + 120 \times 25 + 80 \times 20 & 200 \times 35 + 120 \times 25 + 80 \times 5 \\ 1850 & 75 \times 15 + 25 \times 25 + 20 \times 20 & 75 \times 35 + 25 \times 25 + 20 \times 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6800 & 3000+3000+1600 & 7000+3000+400 \\ 1850 & 1125+625+400 & 2625+625+100 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6800 & 7600 & 10400 \\ 1850 & 2150 & 3350 \end{pmatrix}$$

b. Duas linhas e três colunas.

c. Não daria, pois sem a quantidade de chinelos vendidos, não conseguiríamos efetuar os cálculos.

d. Sim daria, pois bastaria multiplicarmos como fizemos com os itens custo e lucro e encontraríamos assim uma matriz com três linhas e três colunas.

e. Sim, pois ainda assim teríamos como multiplicar (3 produtos) e fazer a soma no fim.

f. Não. Pois sem ter na tabela 2 seu custo e lucro, não teríamos como fazer as contas. (observe que não teríamos alguém da tabela 2 para multiplicar com os valores da tabela 3...)

g. O número de colunas da primeira tabela tem que ser igual ao número de linhas da segunda tabela. Esta é a condição de existência do produto entre duas matrizes.

Respostas das Atividades

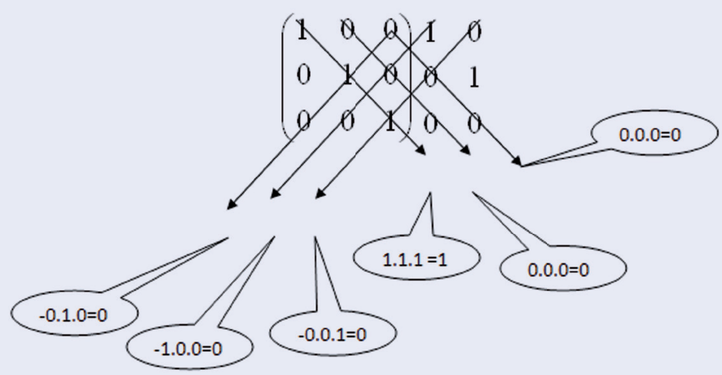
ATIVIDADE 6

Encontrando o determinante da matriz I_2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

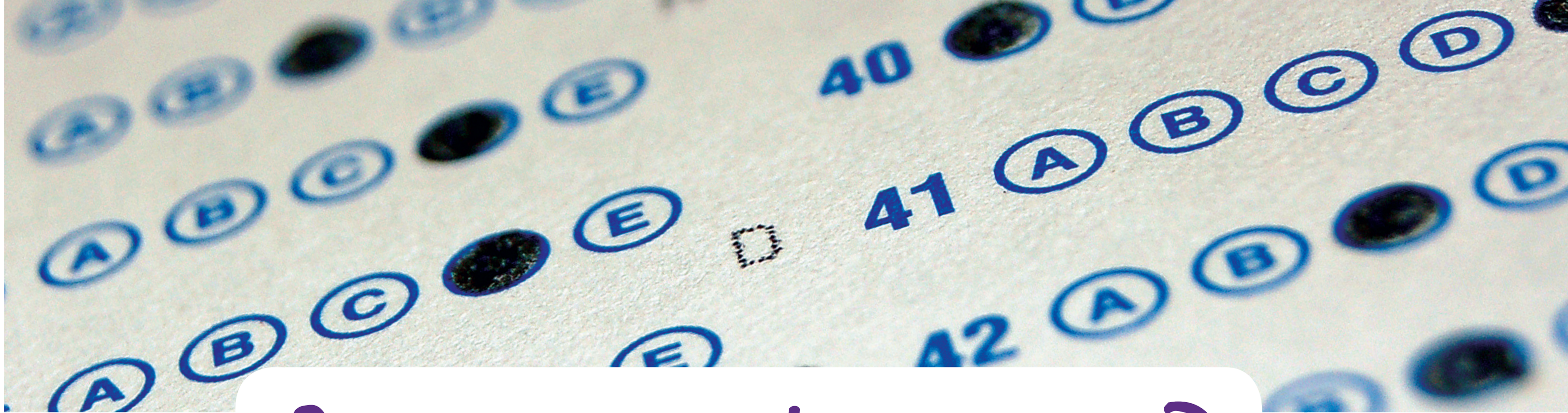
Temos que a diferença do produto dos elementos da diagonal e o produto dos elementos da diagonal secundária será: 1.1 – 0.0 = 1

Encontrando o determinante da matriz I_3 :



Somando todos os resultados encontraremos: 0+0+0+1+0+0=1

Bem, quando ao determinante de I_4 podemos esperar que também seja igual a 1, visto que encontramos os outros determinantes anteriores iguais a 1, mas teríamos de demonstrar de alguma forma, que no momento, com as ferramentas que possuímos não é possível...



O que perguntam por aí?

Questão ENEM 2012

Um aluno registrou as notas bimestrais de algumas de suas disciplinas numa tabela. Ele observou que as entradas numéricas da tabela formavam uma matriz 4x4, e que poderia calcular as médias anuais dessas disciplinas usando o produto de matrizes, Todas as provas possuíam o mesmo peso, e a tabela que ele conseguiu é mostrada a seguir.

	1º bimestre	2º bimestre	3º bimestre	4º bimestre
Matemática	5,9	6,2	4,5	5,5
Português	6,6	7,1	6,5	8,4
Geografia	8,6	6,8	7,8	9,0
História	6,2	5,6	5,9	7,7

Para obter essas médias, ele multiplicou a matriz obtida a partir da tabela por:

a. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

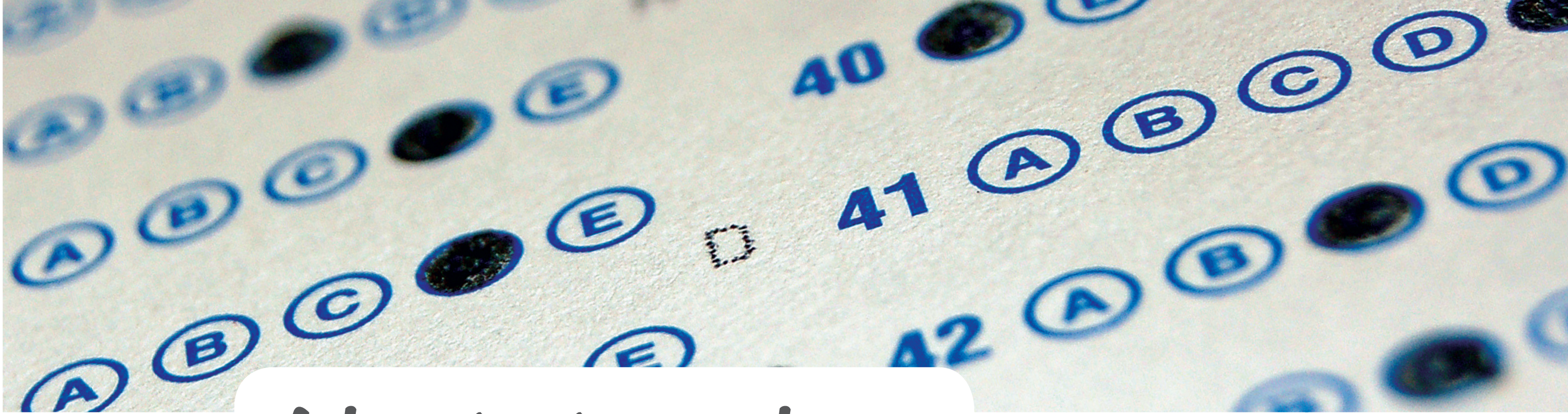
b. $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

Como para encontrar a média bastaria somar as 4 notas bimestrais de uma determinada disciplina e dividir por 4, que é o mesmo que multiplicar cada uma das notas por ¼ e depois somar, temos que para encontrar as médias, bastaria multiplicar a matriz obtida da tabela pela matriz coluna em que todos os elementos são iguais a ¼. Portanto, letra e. Obs: Façam as contas e confirmem o fato!



Atividade extra

Exercício 1

As matrizes 1 e 2 apresentam, respectivamente, a produção nos meses de janeiro e fevereiro, em milhões de automóveis, de acordo com o modelo e a cor.

	Modelo I	Modelo II
Azul	200	190
Verde	180	150
Branco	120	100

Tabela 1: Produção do mês de janeiro

	Modelo I	Modelo II
Azul	220	205
Verde	210	150
Branco	130	110

Tabela 2: Produção do mês de fevereiro

Quantos carros azuis foram fabricados nos meses de janeiro e fevereiro?

(a) 200 (b) 390 (c) 425 (d) 815

Exercício 2

Na confecção de três modelos de camisas (A, B e C) são usados botões grandes (G) e pequenos (P). O número de botões por modelos é dado pela tabela 3:

	A	B	C
P	2	3	1
G	4	6	3

Tabela 3: Botões por modelo

O número de camisas fabricadas, de cada modelo, nos meses de maio e junho de 2013, é dado pela tabela 4.

	Maio	Junho
A	100	50
B	50	100
C	50	50

Tabela 4: Camisetas por modelo

Qual matriz nos dá o total de botões usados em cada tipo de camisa, nos meses de maio e junho?

a. $\begin{pmatrix} 400 & 450 \\ 850 & 950 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 450 & 850 \\ 400 & 950 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 300 & 750 & 200 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 300 \\ 750 \\ 200 \end{pmatrix}$

Exercício 3

Em uma indústria têxtil, diferentes fios são utilizados para fabricar um tecido. Na matriz de demanda apresentada os elementos a_{ij} representam quantos rolos de fio j serão empregados para fabricar uma peça de tecido tipo i.

	Fio 1	Fio 2	Fio 3
Tecido 1	5	0	2
Tecido 2	0	1	3
Tecido 3	4	2	1

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7

Exercício 4

Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$. Determine a matriz X tal que $AX = B$.

a. $X = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

c. $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b. $X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$

d. $X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$

Exercício 5

A matriz $A = (a_{ij})$ 2×2 é tal que $a_{ij} = 2i - 3j$, e a matriz $B = (b_{ij})_{2\times 2}$ é tal que $b_{ij} = i^2 - j^2$. Seja a matriz $C = (c_{ij})_{2\times 2}$ tal que $C = -A + 2B$. Que opção representa a matriz C?

a. $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} -1 & -10 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ -10 & -2 \end{bmatrix}$

Exercício 6

As matrizes $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $M_2 = \begin{bmatrix} p & q \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $M = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ satisfazem $M = M_1 \cdot M_2 - M_2 \cdot M_1$. Qual é o valor de $p + q$?

(a) –5 (b) –4 (c) –3 (d)–1

Exercício 7

Considere a matriz $A = (a_{ij})_{3\times 3}$, tal que $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i > j \\ 0, \text{ se } i \leq j \end{cases}$ e $B = (b_{ij})_{2\times 2}$, tal que $b_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i = j \\ 1, \text{ se } i \neq j \end{cases}$.

Qual é o valor de det (A) – det (B)?

(a) –1 (b) 0 (c) 1 (d) 2

Exercício 8

As matrizes $A = \begin{bmatrix} 4-3x & 7-x \\ 0 & -10 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} x & x+1 \\ 1 & x-1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 10 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ satisfazem $D = A + BC$.

Qual é o valor de x.

(a) –2 (b) –1 (c) 1 (d) 2

Exercício 9

Considere $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix}$. Qual é o det (AB)?

(a) –24 (b) 24 (c) 10 (d) –10

Exercício 10

Considere $A=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 3 & -3\end{bmatrix}$ e $C=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. Qual é o valor do produto dos elementos da diagonal principal de $-2A+B-3C$?

(a) -2 (b) 0 (c) 2 (d) 6

Exercício 11

Sejam as matrizes $A=(a_{ij})_{4\times 3}$, $a_{ij}=3i-j$ e $B=(b_{ij})_{3\times 4}$, $b_{ij}=j^2+i^2$. Seja C a matriz resultante do produto entre A e B. Quem é elemento c_{23} da matriz C?

Exercício 12

A matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & x\end{bmatrix}$ é tal que o det $(A)=10$. Qual é o valor de x?

Exercício 13

Sejam as matrizes $M=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & 3 & 7\\ -3 & 2 & -1\end{bmatrix}$, $N=\begin{bmatrix}3 & 5 & -3\\ 3 & -2 & 1\\ -1 & 1 & -2\end{bmatrix}$ e $P=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ -1 & -2 & -1\end{bmatrix}$. Quanto vale det $(2M-N+3P)$?

Exercício 14

A matriz quadrada identidade é uma matriz tal que todos os valores de sua diagonal principal são iguais à 1, e os demais são iguais a zero. Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}1 & b\\ b & 1\end{bmatrix}$.

Sabe-se que $A\cdot B=I_{2\times 2}$. Quais são os valores de a e b?

Exercício 15

Seja a matriz A = (aij) 2×3 tal que aij = i + j e a matriz $B=\begin{bmatrix}m+n & 3 & 4\\ n-1 & m-2p & 5\end{bmatrix}$ tal que A e B são iguais. Quais são os valores de m, n e p?

Gabarito

Exercício 1

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 2

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 3

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 4

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 5

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 6

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 7

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 8

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 9

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 10

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 11

2%.

Exercício 12

R$ 150,00.

Exercício 13

R$ 9.325,82.

Exercício 14

2,79698% a.m.

Exercício 15

R$ 13.120,00.