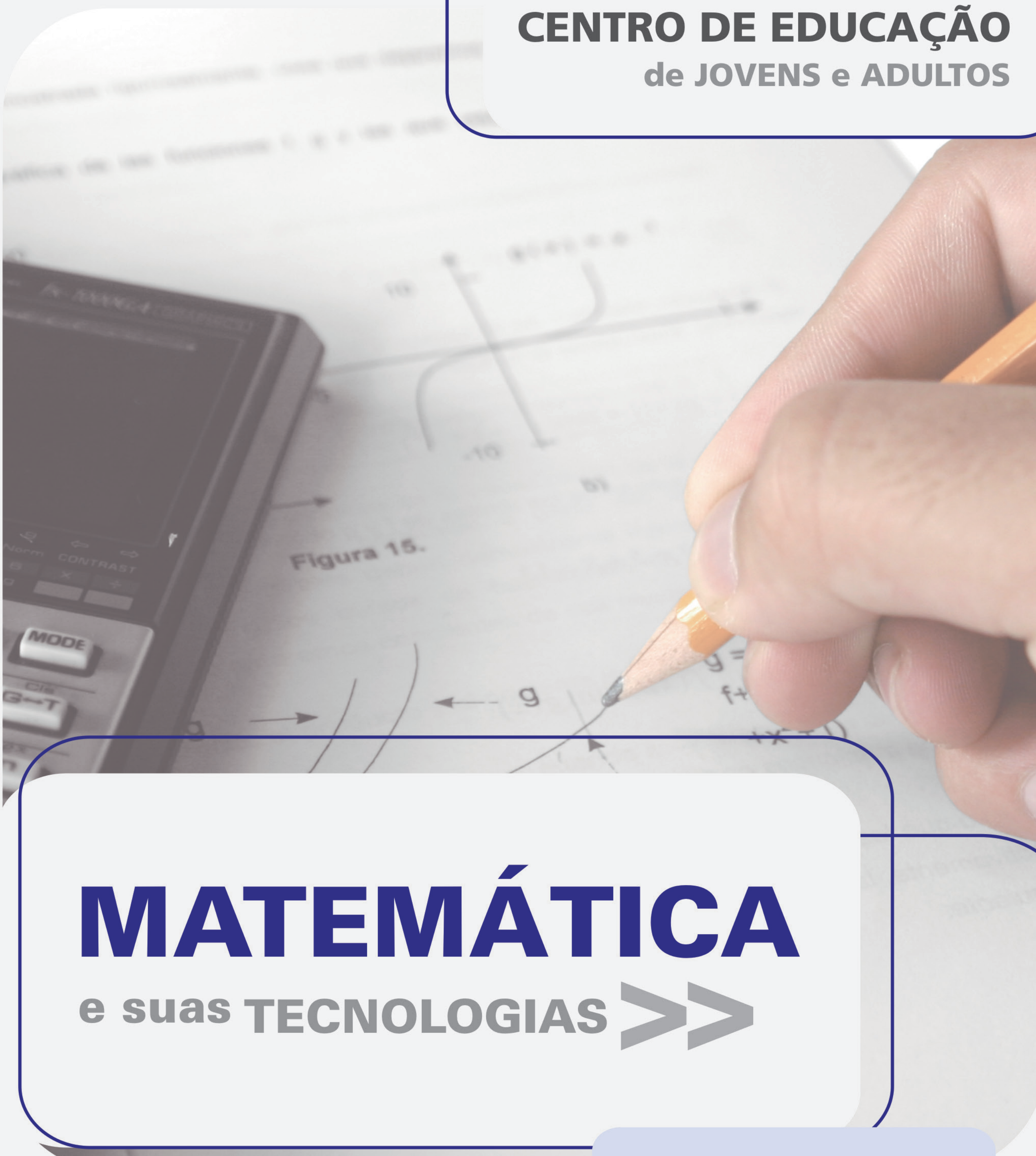
CEJA >>

CENTRO DE EDUCAÇÃO
de JOVENS e ADULTOS



MATEMÁTICA

e suas TECNOLOGIAS >>

Fascículo 10
Unidades 31, 32 e 33

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Governador
Wilson Witzel

Vice-Governador
Claudio Castro

SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO

Secretário de Estado
Leonardo Rodrigues

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO

Secretário de Estado
Pedro Fernandes

FUNDAÇÃO CECIERJ

Presidente
Gilson Rodrigues

PRODUÇÃO DO MATERIAL CEJA (CECIERJ)

Coordenação Geral de Design Instrucional
Cristine Costa Barreto

Coordenação de Matemática
Agnaldo da C. Esquincalha
Gisela M. da F. Pinto
Heitor B. L. de Oliveira

Revisão de conteúdo
José Roberto Julianelli
Luciana Getirana de Santana

Elaboração
Cléa Rubinstein
Daniel Portinha Alves
Heitor B. L. de Oliveira
Leonardo Andrade da Silva
Luciane de P. M. Coutinho
Maria Auxiliadora Vilela Paiva
Raphael Alcaires de Carvalho
Rony C. O. Freitas
Thiago Maciel de Oliveira

Atividade Extra
Benaia Sobreira de Jesus Lima
Carla Fernandes e Souza
Diego Mota Lima
Paula Andréa Prata Ferreira
Vanessa de Albuquerque

Coordenação de Design Instrucional
Flávia Busnardo
Paulo Miranda

Design Instrucional
Rommulo Barreiro
Letícia Terreri

Revisão de Língua Portuguesa
Paulo Cesar Alves

Coordenação de Produção
Fábio Rapello Alencar

Capa
André Guimarães de Souza

Projeto Gráfico
Andreia Villar

Imagem da Capa e da Abertura das Unidades
http://www.sxc.hu/photo/789420

Diagramação
Alessandra Nogueira
Alexandre Oliveira
Ronaldo d'Aguiar Silva

Ilustração
Bianca Giacomelli
Clara Gomes
Fernado Romeiro
Jefferson Caçador
Sami Souza

Produção Gráfica
Verônica Paranhos

Sumário

Prezado(a) Aluno(a),

Seja bem-vindo a uma nova etapa da sua formação. Estamos aqui para auxiliá-lo numa jornada rumo ao aprendizado e conhecimento.

Você está recebendo o material didático impresso para acompanhamento de seus estudos, contendo as informações necessárias para seu aprendizado e avaliação, exercício de desenvolvimento e fixação dos conteúdos.

Além dele, disponibilizamos também, na sala de disciplina do CEJA Virtual, outros materiais que podem auxiliar na sua aprendizagem.

O CEJA Virtual é o Ambiente virtual de aprendizagem (AVA) do CEJA. É um espaço disponibilizado em um site da internet onde é possível encontrar diversos tipos de materiais como vídeos, animações, textos, listas de exercício, exercícios interativos, simuladores, etc. Além disso, também existem algumas ferramentas de comunicação como chats, fóruns.

Você também pode postar as suas dúvidas nos fóruns de dúvida. Lembre-se que o fórum não é uma ferramenta síncrona, ou seja, seu professor pode não estar online no momento em que você postar seu questionamento, mas assim que possível irá retornar com uma resposta para você.

Para acessar o CEJA Virtual da sua unidade, basta digitar no seu navegador de internet o seguinte endereço: http://cejarj.cecierj.edu.br/ava

Utilize o seu número de matrícula da carteirinha do sistema de controle acadêmico para entrar no ambiente. Basta digitá-lo nos campos “nome de usuário” e “senha”.

Feito isso, clique no botão “Acesso”. Então, escolha a sala da disciplina que você está estudando. Atenção! Para algumas disciplinas, você precisará verificar o número do fascículo que tem em mãos e acessar a sala correspondente a ele.

Bons estudos!

Análise Combinatória 1

Fascículo 10

Unidade 31

Fundação CECIERJ

Análise Combinatória 1

Para início de conversa...

Uma das maiores alegrias que temos na vida são as nossas amizades. Alguns amigos são até mais próximos que um irmão ou irmã. Como é bom sair com os amigos para distrair, lancharmos juntos e bater um papo.

Você costuma fazer isso? Entrar em uma lanchonete, pedir um lanche bem gostoso e enquanto saboreia, conversa sobre várias coisas.

Figura 1: Interior de uma lanchonete.

Vamos imaginar esta cena, você com seus amigos, todos sentados em um grande banco da lanchonete. Olhando o menu, você observa que existem diferentes tipos de sanduiche, diferentes tipos de bebida e diferentes tipos de acompanhamento.

Fica aquela dúvida. O que comer? O que beber? Qual acompanhamento eu escolho? São tantas as possibilidades. A Matemática se preocupa com esta questão também. Você sabia que é possível calcular quantos tipos de lanche podemos formar?

Figura 2: Menu da lanchonete.

Para fazer estes cálculos foram criados mecanismos especiais, ou seja, no passado os matemáticos pesquisaram algumas maneiras de resolver estes problemas, reunindo todas as informações em mais um capítulo na História da Matemática. É a Análise Combinatória

E você? Imagine escolher seu lanche na seguinte condição: você pode escolher um sanduiche, um acompanhamento e uma bebida. De quantas formas você pode escolher seu lanche?

Objetivos de aprendizagem

- Calcular o fatorial de números naturais
- Utilizar o princípio fundamental da contagem
- Calcular permutação simples

Seção 1
Fatorial de um número

Como você poderá observar, a multiplicação é uma operação bastante utilizada nos cálculos referentes a análise combinatória.

No decorrer deste assunto, iremos encontrar diversas atividades onde a multiplicação de um número pelos seus antecessores se faz necessário. Para facilitar este tipo de operação, foi criada uma ferramenta de cálculo chamada FATORIAL. O fatorial de um número será de grande utilidade para o desenvolvimento das técnicas de contagem.

Então, a dúvida continua. O que é o fatorial?

Observe de forma prática abaixo.

Vamos considerar o conjunto dos números naturais, sem o zero, e tomar o número 5 como exemplo. Se efetuarmos o produto entre ele e seus antecessores vamos obter: 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120.

Podemos representar esta multiplicação como sendo 5!, ou seja, cinco fatorial.Toda vez que colocarmos um ponto de exclamação após o número, estamos requerendo o fatorial desse número, isto é, o produto entre esse número e todos os números naturais que o antecedem, até chegar ao número 1.

Vamos fazer o mesmo cálculo com o número 7, teremos

7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 5040, logo 7! = 5040.

Generalizando, podemos escrever o fatorial de um número n qualquer como n!, onde,

n! = n x (n-1) x (n-2) x ...x 2 x 1

Mas como calculamos 1! e 0!, qual é a resposta? Para respondermos a esta pergunta notemos que o fatorial de um número n é igual ao fatorial do número (n+1) dividido pelo número (n+1), por exemplo, o fatorial de 3 é igual ao fatorial de 4 dividido por 4, ou seja, $3! = \frac{4!}{4} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4} = 3 \cdot 2 \cdot 1$. Temos também que $2! = \frac{3!}{3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3} = 2 \cdot 1$. Usando este mesmo raciocínio, temos que $1! = \frac{2!}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$, e que $0! = \frac{1!}{1} = \frac{1}{1} = 1$. Chegamos a conclusão que 1! = 1 e 0! = 1.

Vejamos um exemplo, no qual queremos escrever a seguinte expressão numérica $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)}$ de forma simplificada. Note que a expressão possui muitos números, e todos eles são sequenciais. Em problemas de análise combinatória é muito comum encontrarmos situações desse tipo. Nesse caso, é possível usarmos uma notação compacta com a ajuda do fatorial. Essa expressão acima, por exemplo, pode ser representada da seguinte maneira: $\frac{7!}{5!\,2!}$, mas o que significa isto? Bem, como vimos, toda vez que colocamos um número seguido de um ponto de exclamação (lemos: fatorial deste número) isto significa que estamos multiplicando este número pelos seus antecessores até chegar ao número 1. Por exemplo, 4! (lemos: quatro fatorial) é igual a 24, pois $4! = 4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 = 24$ e assim temos, $3! = 3{\cdot}2{\cdot}1 = 6$, $2! = 2{\cdot}1 = 2$.

Multimídia

Neste endereço *você encontará uma interessante atividade para aplicação dos conhecimentos em analise combinatória. Vale a apena conferir.*

Clique no link http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnica.html?id=33140 e divirta-se!

É importante sabermos fazer simplificações com fatorial de números grandes. Por exemplo, como resolver $\frac{15!}{13!}$? O valor de 15! é muito alto e o de 13! também, então precisamos fazer simplificação, para isto devemos perceber que o fatorial de um número é igual a este número multiplicado pelo fatorial do seu antecessor. Vejamos alguns exemplos:

$5! = 5.4.3.2.1 = 5{\cdot}(4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1) = 5{\cdot}4!$

$4! = 4.3.2.1 = 4{\cdot}(3{\cdot}2{\cdot}1) = 4{\cdot}3!$

$3! = 3{\cdot}(2{\cdot}1) = 3{\cdot}2!$

E de maneira geral,

$$\boxed{n! = n{\cdot}\,(n-1)!\text{ , para qualquer número natural n maior que 0.}}$$

Podemos usar este recurso quantas vezes forem necessárias, por exemplo, temos que $5! = 5{\cdot}4!$, mas como $4! = 4{\cdot}3!$ então $5! = 5{\cdot}4{\cdot}3!$, ou ainda podemos dizer que $5! = 5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2!$

Vamos calcular então $\frac{15!}{13!}$, para isto usaremos que $15! = 15{\cdot}14{\cdot}13!$ e substituindo na expressão anterior temos $\frac{15!}{13!} = \frac{15\cdot 14\cdot 13!}{13!}$, simplificando, o 13! do numerador com o do denominador chegamos a conclusão que $\frac{15!}{13!} = 15\cdot 14 = 210$. Vamos resolver mais alguns exercícios.

Exemplo1: Calcule:

a) 7! b) 6! c) $\frac{8!}{4!}$ d) $\frac{9!}{6!\,3!}$

Solução:

a. $7! = 7{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 = 5040$

b. $6! = 6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 = 720$

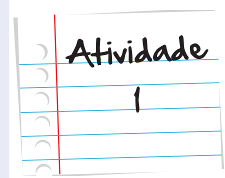
Poderíamos ter resolvido o item b primeiro e depois no item a fazer o seguinte $7! = 7{\cdot}\,6! = 7\cdot 720 = 5040$

c. Primeiro, devemos chamar a atenção que 8! Dividido por 4! Não é igual a 2!, ou seja, $\frac{8!}{4!} \uparrow 2!$ Para resolvermos, façamos o seguinte:

$\frac{8!}{4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!}$, simplificando o 4! do numerador com o 4! do denominador, temos que $\frac{8!}{4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} =$ $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$

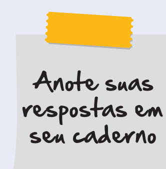
d. $\frac{9!}{6!\ 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!\ 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1}$, neste ponto é importante lembrarmo-nos das simplificações, podemos simplificar o 9 do numerador com o 3 do denominador e o 8 do numerador com o 2 do denominador, chegando ao seguinte resultado $\frac{9!}{6!\ 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!\ 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$.

Calculando o Fatorial



Calcule o valor das expressões a seguir:

a) $\frac{7!}{4!}$ b) $\frac{6!}{3!}$ c) $\frac{15!}{13!\ 2!}$ d) $\frac{4!}{3!\ 1!}$

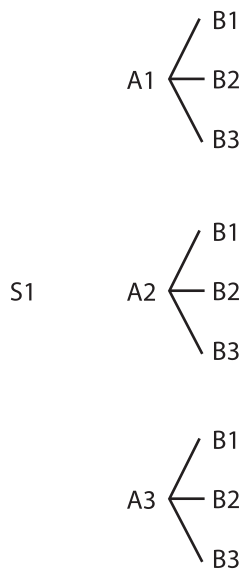


Seção 2
Princípio Fundamental da Contagem

A análise combinatória nos permite calcular o número de possibilidades de realização de determinadas tarefas. Como por exemplo a questão proposta na introdução. Já sabe a resposta?

Note que ao escolhermos o sanduiche podemos escolher qualquer acompanhamento. Vamos chamar os sanduiches de S1, S2, S3 e S4. Chamaremos os Acompanhamentos de A1, A2 e A3. Quanto às bebidas, vamos nomea-las por B1,B2 e B3.

Olhe como podemos escolher os lanches, considerando inicialmente o sanduíche S1:



Perceba que para cada um dos 3 acompanhamentos teremos 3 opções de bebidas, ou seja , escolhendo o acompanhamento e a bebida teremos 3 x 3 possibilidades, isto é, 9 ao todo para cada sanduiche. Todavia, são 4 tipos de sanduiche, assim podemos escrever que temos 4 x 9 = 36 possibilidades ao todo.

Como o cálculo é feito com valores considerados pequenos, podemos até conferir todas essas possibilidades:

1 – S1, A1, B1	2 – S1, A1, B2	3 – S1, A1, B3	4 – S1, A2, B1
5 – S1, A2, B2	6 – S1, A2, B3	7 – S1, A3, B1	8 – s1, a3, b2
9 – s1, a3, b3	10 – S1, A1, B1	11 – S1, A1, B2	12 – S1, A1, B3
13 – S1, A2, B1	14 – S1, A2, B2	15 – S1, A2, B3	16 – S1, A3, B1
17 – s1, a3, b2	18 – s1, a3, b3	19 – S1, A1, B1	20 – S1, A1, B2
21 – S1, A1, B3	22 – S1, A2, B1	23 – S1, A2, B2	24 – S1, A2, B3
25 – S1, A3, B1	26 – s1, a3, b2	27 – s1, a3, b3	28 – S1, A1, B1
29 – S1, A1, B2	30 – S1, A1, B3	31 – S1, A2, B1	32 – S1, A2, B2
33 – S1, A2, B3	34 – S1, A3, B1	35 – s1, a3, b2	36 – s1, a3, b3

Importante

Chamamos esta disposição de árvore das possibilidades. Ele permite visualizar todas as possibilidades existentes dentro de uma determinada análise. Todavia, não é um recurso indicado para cálculos onde os valores são considerados grandes..

O que acabamos de fazer foi aplicar um principio conhecido na Matemática como Princípio Fundamental da Contagem – PFC. Neste princípio leva-se em conta as diferentes etapas e possibilidades de cada ação, e a partir do produto destas etapas, acha-se o total.

Podemos dizer que o problema anterior tinha 3 etapas: a primeira seria escolher um tipo de sanduíche (tendo 4 possibilidades de escolha), em seguida, para cada sanduíche escolhido, temos que escolher o acompanhamento, onde temos 3 opções, e finalmente, a terceira etapa seria a escolha de bebida, que possui 3 opções de escolha. Assim, teremos:

Total de sanduiches = 4

Total de acompanhamentos = 3

Total de bebidas = 3

4 x 3 x 3 = 36.

Existem infinitas questões a respeito de contagem de possibilidades. A análise combinatória trata exatamente deste assunto, ou seja, é uma parte da matemática que possui métodos para resolver problemas de contagem.

Os problemas de contagem fazem parte de nosso dia a dia. Você já parou para pensar nisso? Observe as placas dos carros. De acordo com as normas de trânsito vigentes, cada veiculo deve ter uma placa que o faça reconhecido. Esta placa deve ter sete dígitos, sendo 3 letras e 4 algarismos. Quantas placas é possível confeccionar?

Figura 3: **Placa de Automóvel.**

Já pensou nas possibilidades? Que tal fazer a árvore delas? Não?

Realmente, fica uma quantidade gigantesca de possibilidades.

Para resolver este problema, vamos dividi-lo em dois blocos. O bloco das letras e o bloco dos números.

_____ _____ _____   _____ _____ _____ _____

Letras   Algarismos

Note que para a primeira letra teremos 26 possibilidades (que é o número de letras de nosso alfabeto).

Como as placas permitem repetição de elementos(não foi feita nenhuma restrição!), podemos escrever que a segunda letra também contém 26 possibilidades, igualmente na terceira letra, assim teremos:

$26 \times 26 \times 26 = 26^3$ possibilidades.

Para os algarismos, no primeiro espaço teremos 10 possibilidades (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,), igualmente para os demais espaços. Isto nos dá 10^4 ou $10 \times 10 \times 10 \times 10$. E então, já fez as contas.

$26^3 = 17576$ grupos de 3 letras

$10^4 = 10000$ grupos de 4 algarismos.

Observe que cada grupo de letras irá formar uma placa com todos os grupos de algarismos, sendo assim, teremos: $17576 \times 10000 = 175.760.000$ possibilidades de placas.

Tente você resolver esta atividade.

Atividade 2

Melissa possui uma boneca e adora arrumá-la. Ela tem duas saias, duas blusas, 5 pares de calçado e 3 diferentes tipos de chapéu. De quantas formas Melissa pode arrumar sua boneca?

Anote suas respostas em seu caderno

Um dos primeiros problemas de Análise Combinatória de que se tem registro, pode ser encontrado no livro “Os Elementos” de Euclides, escrito mais ou menos em 300 a.C.

Figura 4 : Euclides.

Nele Euclides propõe o desenvolvimento do binômio $(1+x)^n$. Além disso, o matemático hindu Báskara (1114 – 1185) já sabia resolver problemas que envolviam métodos de contagem conhecidos como permutação, arranjo e combinação. Curiosamente, foi pela necessidade de entender os jogos de azar que Matemáticos como Blaise Pascal se aprofundaram no estudo da Análise Combinatória.

Importante

Todo problema de contagem pode, pelo menos teoricamente, ser resolvido por um processo de contagem como o que foi mostrado no exemplo da seção 1. Porém, na prática, a resolução de alguns desses problemas pode se tornar muito complicada. Dessa forma, existem técnicas de contagem que simplificam a resolução de muitos problemas como, por exemplo, arranjos, permutações e combinações.

A necessidade de resolução em problemas de contagem vem aumentando com o tempo e uma grande aplicação está em problemas de armazenamento de informações em bancos. Por exemplo, ao gerar as senhas para acesso a conta.

Observe a atividade a seguir:

Atividade 3

Tiago precisa cadastrar sua senha bancária. Para isto necessita criar um código contendo 4 dígitos. Como ela tem medo de esquecer a senha, associou sua senha a uma mudança de posição nas letras do seu nome. Quantas opções Tiago possui?

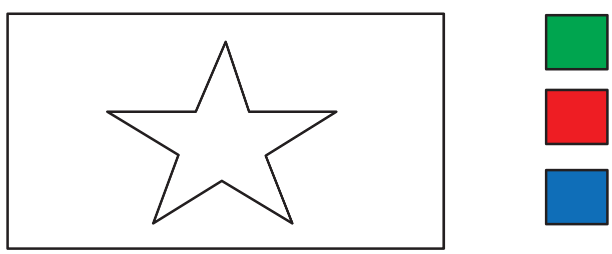
Anote suas respostas em seu caderno

Multimídia

Acabe com sua fome de estudar, veja clicando no link http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/21720/index.html?sequence=13 como estudar matemática pode ser simples como pedir um lanche! Mergulhe em uma simulação onde você pode combinar elementos do dia a dia e é desafiado em meio às combinações que realiza.

Outro exemplo:

O aluno Jair está participando de um concurso de desenhos de bandeiras. Ele está em dúvida de como deve pintar sua bandeira, e as cores disponíveis no concurso são verde, vermelha e azul. Veja o que ele fez e as cores disponíveis a seguir.



Sabendo que Jair deve usar uma cor para pintar o interior da estrela e outra cor para pintar a outra parte da bandeira, determine o número de bandeiras possíveis que podem ser feitas com estas cores.

Solução:

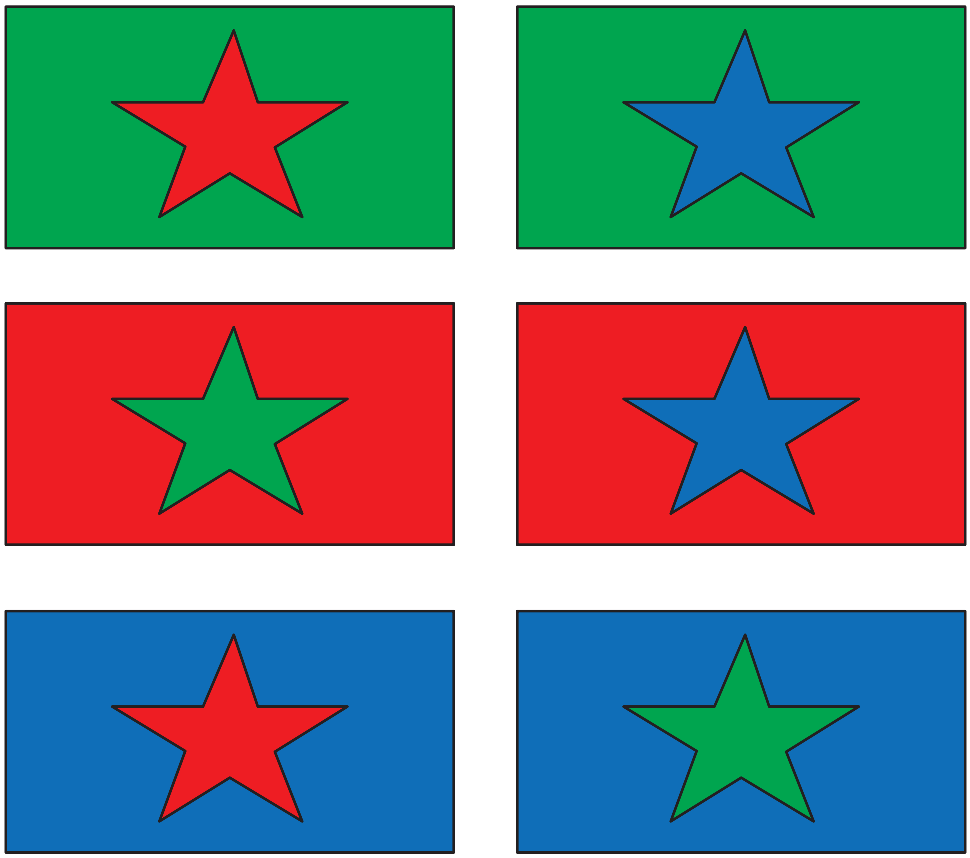
O primeiro passo para resolvermos esta questão é nos colocarmos na posição do Jair, ou seja, quais são as tarefas (etapas) que temos que cumprir para pintar a bandeira.

TAREFA 1: escolher qual cor usar para pintar o interior da estrela. Temos 3 possibilidades: verde, azul ou vermelha.

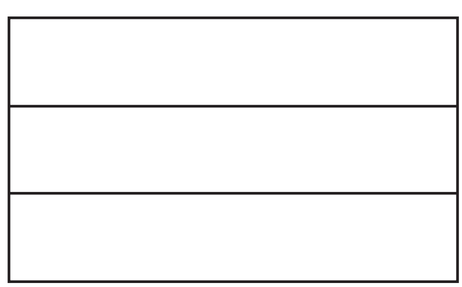
TAREFA 2: escolher qual cor usar para pintar a parte exterior da estrela. Temos 2 possibilidades, pois 1 cor já foi usada restando apenas 2 cores para escolher.

TAREFA 1	TAREFA 2
3	2

Pelo princípio multiplicativo temos $3 \cdot 2 = 6$ possibilidades de montar bandeiras distintas. A seguir mostramos as 6 bandeiras possíveis.



Exemplo 3: Existem 5 cores disponíveis para pintar a bandeira a seguir de modo que faixas adjacentes não possuam a mesma cor. De quantas maneiras distintas podemos pintar esta bandeira?



TAREFA 1: pintar a primeira faixa: 5 possibilidades, pois podemos usar qualquer uma das 5 cores.

TAREFA 2: pintar a segunda faixa: 4 possibilidades, pois não podemos usar a mesma cor usada na primeira faixa.

TAREFA 3: pintar a terceira faixa: 4 possibilidades, pois não podemos usar a mesma cor usada na segunda faixa.

Devemos observar que na terceira faixa a cor usada não precisa necessariamente ser diferente da cor usada na primeira faixa, mas apenas diferente da segunda faixa.

TAREFA 1	TAREFA 2	TAREFA 3
5	4	4

Pelo princípio multiplicativo, temos que o total de possibilidades de pintar a bandeira é igual a $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$.

Agora que você já conhece o Princípio Fundamental da Contagem, exercite resolvendo as atividades a seguir.

Atividade 4

O mapa abaixo é da América do Sul.

Fonte: http://n.i.uol.com.br/licaodecasa/ensfundamental/geografia/america/amsul_politico.gif

Tendo quatro cores para pintar os países da América do Sul, determine de quantas formas distintas podem ser pintados todos estes países, sabendo que países adjacentes não podem ter a mesma cor.

Anote suas respostas em seu caderno

Jogando dominó

Atividade 5

Em um jogo de dominó cada peça é formada de dois números de 0 a 6. Sabendo que uma peça pode conter dois números repetidos, determine quantas peças tem um dominó. E se cada peça tivesse dois números de 0 a 9, este jogo teria quantas peças?

Anote suas respostas em seu caderno

Gabaritando

Atividade 6

Quantos são os gabaritos possíveis de uma avaliação que possui 5 questões de múltipla-escolha, contendo 4 alternativas em cada questão?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 7

Só se for do seu lado

O casal Amanda e Diego e sua filha Maria Antônia vão para um cinema e devem escolher três lugares de uma única fila desocupada que possui 6 cadeiras. De quantas formas eles podem tomar esta decisão,sabendo que eles devem sentar em cadeiras adjacentes? E se Amanda e Diego quiserem sentar um ao lado do outro?

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 4
Permutação simples

Dentro da análise combinatória podemos generalizar algumas situações, conforme a distribuição dos elementos em um determinado agrupamento. Uma dessas formas é chamada de Permutação. Este tipo de organização diz respeito aos problemas envolvendo troca (permutação) de posições entre todos os elementos considerados no grupo.

Um exemplo claro é a escolha de uma senha bancária. Nós já vimos o exemplo do Tiago ao escolher a senha para sua conta. Se ele escolhesse TIGO, por exemplo, cada ordenação diferente obtida com essas letras será chamada de permutação com os elementos T, I, G e O, e serão consideradas senhas diferentes

Outro exemplo que podemos tomar para o estudo das permutações é este:

Em uma festa de criança o animador resolve colocar as 6 crianças, que estão participando de uma determinada brincadeira, em fila. Daí surge uma questão, de quantas formas diferentes é possível colocar estas 6 crianças em fila?

Para resolvermos este problema nos coloquemos na posição do animador de festa, ele terá que realizar 6 tarefas:

TAREFA 1: escolher uma criança para ser a primeira da fila: 6 possibilidades, pois pode escolher qualquer uma das crianças.

TAREFA 2: escolher uma criança para ser a segunda da fila: 5 possibilidades, pois pode escolher qualquer uma das crianças que sobrou após a escolha da primeira da fila.

TAREFA 3: escolher uma criança para ser a terceira da fila: 4 possibilidades, pois já escolhemos duas crianças e sobraram quatro.

TAREFA 4: escolher uma criança para ser a quarta da fila: 3 possibilidades, pois já escolhemos três crianças e sobraram três.

TAREFA 5: escolher uma criança para ser a quinta da fila: 2 possibilidades, pois já escolhemos quatro crianças e sobraram duas.

TAREFA 6: escolher uma criança para ser a última da fila: 1 possibilidade, pois já escolhemos cinco crianças e sobrou apenas uma.

Assim, temos:

TAREFA 1	TAREFA 2	TAREFA 3	TAREFA 4	TAREFA 5	TAREFA 6
6	5	4	3	2	1

Pelo princípio multiplicativo, temos que o total de possibilidades de colocar as 6 crianças em fila é igual a $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

É importante observarmos que o produto $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ é o que já estudamos e se chama fatorial de 6, ou seja, $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$

Notemos que, se ao invés de 6 crianças, o problema falasse em 5 crianças o resultado seria 5!, se fossem 4 crianças o resultado seria 4! e assim por diante. De forma geral, se fossem n crianças teríamos n!

Notemos que outra forma de olharmos para este problema seria pensarmos em trocar a ordem dos alunos na fila, ao fazermos todas as trocas possíveis de posição entre os alunos teríamos o resultado do problema.

De forma geral, trocar os objetos de posição entre si significar permutar estes objetos. Na análise combinatória chamamos estes tipo de resolução de permutação. E a permutação de n objetos é calculado como $P_n = n!$ (lemos: permutação de n objetos é igual a n fatorial).

É muito comum resolvermos problemas envolvendo anagramas. Sabe o que é um anagrama?

Anagrama

Anagrama é uma palavra formada pela transposição das letras de outra.

Exemplo 5: Quantos são os anagramas da palavra SEJA?

Solução:

Alguns exemplos de anagramas da palavra SEJA são SAJE, JESA e etc.

Para sabermos o total de anagramas basta trocarmos as posições das letras entre si, ou seja, é um caso de permutação simples. Então temos $P4 = 4! = 24$ anagramas.

Exemplo 6: Quantos são os anagramas da palavra LIVRO que:

a) começam com L

b) terminam com O

c) começam com L e terminam com O

d) começam com L ou terminam com O

Solução:

a) Temos 2 tarefas.

TAREFA 1: a primeira letra da palavra tem que ser L: 1 possibilidade

TAREFA 2: trocar a posição das outras letras (4 letras): $P4 = 4! = 24$

TAREFA 1	TAREFA 2
1	4!

Pelo Princípio Multiplicativo temos $1 \cdot 24 = 24$ anagramas.

b) Também temos 2 tarefas

TAREFA 1: a última letra da palavra tem que ser O: 1 possibilidade

TAREFA 2: trocar a posição das outras letras (4 letras): $P4 = 4! = 24$

TAREFA 1	TAREFA 2
1	4!

Pelo Princípio Multiplicativo temos $1 \cdot 24 = 24$ anagramas.

c) temos 3 tarefas

TAREFA 1: a primeira letra da palavra tem que ser L: 1 possibilidade

TAREFA 2: a última letra da palavra tem que ser O: 1 possibilidade

TAREFA 3: trocar a posição das outras letras (3 letras): $P3 = 3! = 6$

TAREFA 1	TAREFA 2	TAREFA 3
1	1	3!

Pelo Princípio Multiplicativo temos $1 \cdot 1 \cdot 6 = 6$ anagramas.

d) Como o anagrama pode começar com L ou terminar com O então podemos contar os anagramas que começam por L somar com os anagramas que terminam com O. No entanto, estaremos contando anagramas repetidos, como por exemplo, LIVRO, LVIRO e etc., ou seja, temos que retirar os anagramas que começam com L e terminam com O. Temos que somar os resultados dos itens A e B e subtrair o item C, isto é, 24 + 24 – 6 = 42 anagramas.

Flashs

Atividade 8

Joana deseja tirar foto dos seus 5 filhos um ao lado do outro, determine de quantas formas eles podem se organizar para a foto, sabendo que:

a. eles podem ficar em qualquer posição
b. o mais novo deve ficar em uma ponta e o mais velho na outra ponta (não há gêmeos)
c. os filhos Sergio e Carlos não tiram fotos juntos

Anote suas respostas em seu caderno

Resumindo

- Fatorial de um número n é dado por $n! = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1$
- Princípio Multiplicativo: se temos p1 possibilidades para a tarefa T1, p2 possibilidades para a tarefa T2 e assim sucessivamente até pn possibilidades para a tarefa Tn então o total de possibilidades é igual a $p1\cdot p2\cdot\ldots\cdot pn$.
- Permutação simples: permutar n objeto entre si é calcular $Pn = n!$

Veja Ainda

Para saciar sua curiosidade indicamos os seguintes sites:

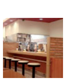
- http://www.rpm.org.br/conheca/57/contagem.pdf (artigo da RPM n° 57 de 2005 que trata da história da Análise combinatória)
- http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/pasca_l/biografia.htm(vida de Pascal)
- http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/pasca_l/pascal.htm(o que é triângulo de Pascal e suas propriedades)
- http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/pasca_l/curios.htm(curiosidades sobre o triângulo de Pascal)

Referências bibliográfcas

Livros

- Aaboe, A., *Episódios da História antiga da matemática*, SBM.
- Boyer C. B., *História da Matemática*, Ed. Edgard Blücher.
- Eves H., *Introdução a história da matemática*, Editora Unicamp.
- Iezzi, G., Dolce, O., Degenszajn, D., Périgo, R., de Almeida, N., *Matemática ciência e aplicações*, vol.2, Ed Saraiva.
- Morgado, A.C., Carvalho, J.B.P., Carvalho, P.C.P, Fernandez, P., *Análise Combinatória e Probabilidade*, SBM, 9ª Ed.2006.

Imagens



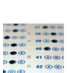
- http://t2.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcQy_

- http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Euklid-von-Alexandria_1.jpg

- http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/21720/index.html?sequence=13

- http://n.i.uol.com.br/licaodecasa/ensfundamental/geografia/america/amsul_politico.gif

- http://www.sxc.hu/photo/1368439



- http://www.sxc.hu/photo/517386

Respostas das Atividades

Atividade 1

a) 210 b) 120 c) 105 d) 4

Atividade 2

2 x 2 x 5 x 3 = 60 formas diferentes

Atividade 3

5 x 4 x 3 x 2 = 120 opções

Atividade 4

$4 \times 2^8 \times 3^2 = 2^{10} \times 3^2 = 9216$

Atividade 5

Cada número corresponde com os demais, assim,

0 – 0,1,2,3,4,5,6

1 – 1,2,3,4,5,6

2 – 2,3,4,5,6

3 – 3,4,5,6

4 – 4,5,6

5 – 5,6

6 – 6

Total 28 peças. Se os números forem de 0 a 9, de maneira análoga, teremos 55 peças

Atividade 6

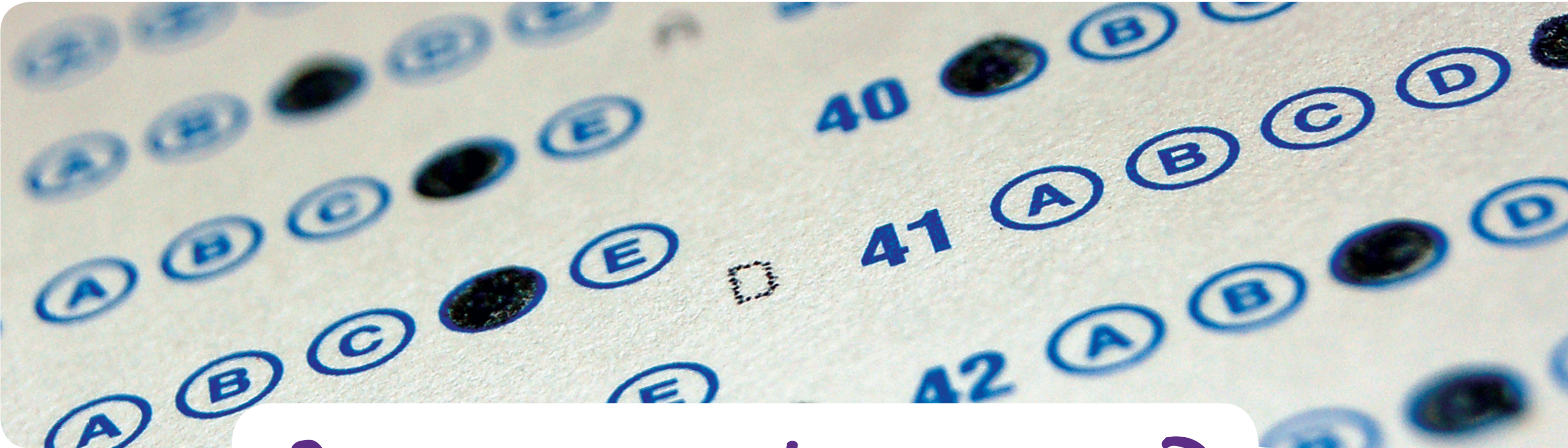
$4^5 = 1024$

Atividade 7

$4 \cdot 3! = 24$ E $4 \cdot 2! \cdot 2! = 16$

Atividade 8

a) $5! = 120$ b) $1 \cdot 3! \cdot 1 = 6$ c) $120 - 4! \cdot 2! = 72$



O que perguntam por aí?

Questão 1

O código de barras, contido na maior parte dos produtos industrializados, consiste num conjunto de várias barras que podem estar preenchidas com cor escura ou não. Quando um leitor óptico passa sobre essas barras, a leitura de uma barra c lara é convertida no número 0 e a de uma barra escura, no número 1. Observe abaixo um exemplo simplificado de um código em um sistema de código com 20 barras.

Se o leitor óptico for passado da esquerda para a direita irá ler: 01011010111010110001

Se o leitor óptico for passado da direita para a esquerda irá ler: 10001101011101011010

No sistema de código de barras, para se organizar o processo de leitura óptica de cada código, deve-se levar em consideração que alguns códigos podem ter leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, como o código 00000000111100000000, no sistema descrito acima.

Em um sistema de códigos que utilize apenas cinco barras, a quantidade de códigos com leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, desconsiderando-se todas as barras claras ou todas as escuras, é

(A) 14. (B) 12. (C) 8. (D) 6. (E) 4.

Resposta: Letra E

Comentário: Para a 1ª barra temos duas opções (clara ou escura) e para última 1 opção apenas, pois deve ser igual a primeira. Para a 2ª barra temos 2 opções(clara ou escura) e a penúltima barra apenas uma, pois deve ser igual a segunda. E para a 3ª barra temos 2 opções(clara ou escura).

Pelo princípio multiplicativo, temos $2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}1{\cdot}1 = 8$. No entanto nesta contagem estamos considerando todas as barras escuras e todas claras, então tirando estas duas possibilidades, temos um total de 6 códigos e assim a alternativa correta é a letra E.

Questão 2

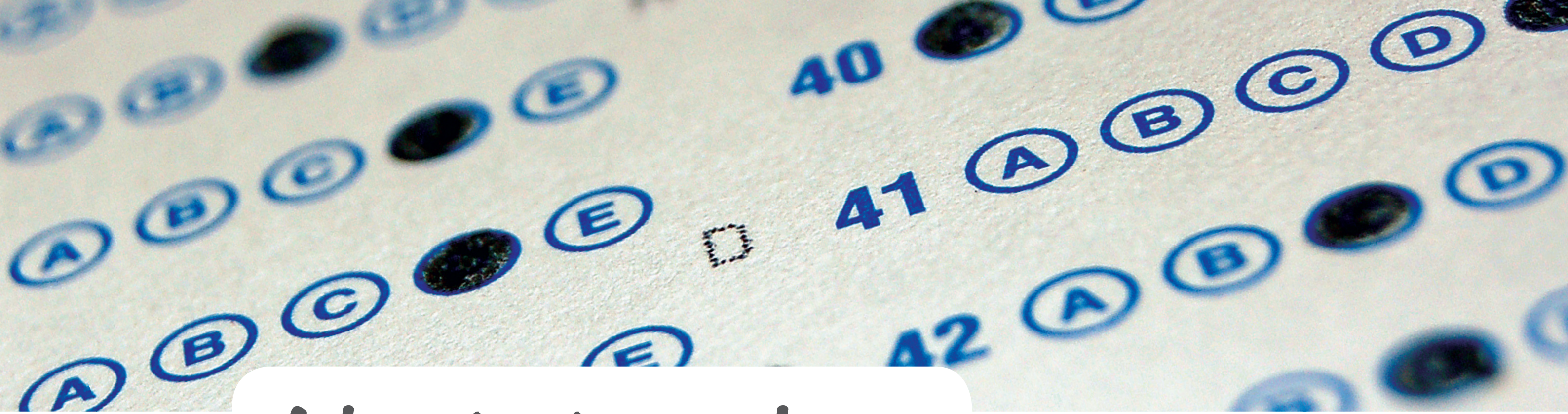
No Nordeste brasileiro, é comum encontrarmos peças de artesanato constituídas por garrafas preenchidas com areia de diferentes cores, formando desenhos. Um artesão deseja fazer peças com areia de cores cinza, azul, verde e amarela, mantendo o mesmo desenho, mas variando as cores da paisagem (casa, palmeira e fundo), conforme a figura.

O fundo pode ser representado nas cores azul ou cinza; a casa, nas cores azul, verde ou amarela; e a palmeira, nas cores cinza ou verde. Se o fundo não pode ter a mesma cor nem da casa nem da palmeira, por uma questão de contraste, então o número de variações que podem ser obtidas para a paisagem é:

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E)10

Resposta: Letra B

Comentário: Se o fundo for azul, temos 2 possibilidades para a casa e 2 para a palmeira, pelo princípio multiplicativo temos $1{\cdot}2{\cdot}2 = 4$ possibilidades. E se o fundo for cinza temos 3 possibilidades para a casa e 1 para a palmeira, pelo princípio multiplicativo temos $1{\cdot}3{\cdot}1 = 3$ possibilidades. O total de possibilidades é igual a 7, ou seja, a alternativa correta é a letra B.



Atividade extra

Exercício 1

Considere o produto dos números naturais ímpares, 19 • 17 • 15 • ... 3 • 1:

Como pode ser reescrito utilizando fatorial?

(a) 19! (b) $\frac{19!}{20!}$ (c) $\frac{19!}{18 \cdot 16 \cdot \ldots \cdot 2}$ (d) $\frac{19!}{20}$

Exercício 2

Seja a equação $\frac{(n+1)!+n!}{(n+2)!}=\frac{1}{7}$.

Para qual valor de *n* ela é verdadeira?

(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 9

Exercício 3

Uma entidade decidiu padronizar a disposição de pais e filhos em suas fotos oficiais, assim, determinou que os filhos devem ficar entre os pais e a esquerda da mãe.

Quantas são as possveis posições para a foto de uma família com três filhos?

(a) 1 (b) 6 (c) 24 (d) 120

Exercício 4

Muitos *sites* da internet exigem que suas senhas tenham números e letras, em qualquer ordem, para garantir a segurança dos dados. Maria decidiu criar uma senha com seis números distintos e duas das letras que compõem o seu nome, também sem repetição.

Quantas senhas podem ser criadas desta forma?

(a) $4 \cdot 5!$ (b) $4 \cdot 6!$ (c) $2 \cdot 9!$ (d) $5 \cdot 9!$

Exercício 5

Doze amigos vão se formar e desejam guardar de lembrança uma foto de formatura, com os seis menores na frente sentados, e os seis maiores atrás, ambas as fileiras em qualquer ordem.

De quantas maneiras os amigos podem se organizar para a foto?

(a) 6! (b) 2:6! (c) (6!)2 (d) 12!

Exercício 6

Deseja-se pintar uma bandeira com 8 faixas verticais, dispondo de 3 cores, sem que duas faixas consecutivas sejam da mesma cor.

De quantas maneiras é possível pintar essa bandeira?

(a) 24 (b) 11! (c) 384 (d) 38

Exercício 7

Uma secretária possui 6 camisas, 4 saias e 8 pares de sapatos. Ela deseja se arrumar usando 1 camisa, 1 saia e 1 dos seus pares de sapatos para ir a uma reunião de trabalho.

De quantas maneiras diferentes ela pode se vestir?

(a) 122 (b) 152 (c) 172 (d) 192

Exercício 8

Uma cidade possui 16 linhas diferentes de metrô. Uma pessoa está em uma estação A e deseja ir a estação C fazendo uma parada na estação B. Passando pelas estações A e B temos 4 linhas distintas e de B para C temos 3 linhas distintas.

De quantas maneiras uma pessoa pode tomar o metrô para fazer esse percurso?

(a) 7 (b) 12 (c) 16 (d) 60

Exercício 9

Deseja-se formar números de quatro algarismos distintos, múltiplos de 5, utilizando os algarismos 0; 2; 3; 4; 5; e 6.

Quantos números podemos formar?

(a) 108 (b) 120 (c) 130 (d) 140

Exercício 10

Considere A o conjunto dos números que possuem quatro algarismos distintos, entre de 5000 a 9999.

Quantos são os elementos A?

(a) 2500 (b) 2520 (c) 3600 (d) 4999

Exercício 11

Os atuais números de telefone celular no Estado do Rio de Janeiro, têm oito números e começam com 5; 6; 7; 8 ou 9. A partir de novembro será inserido o dígito 9 na frente do número de todos os usuários de telefonia móvel.

Quantos novos números de telefone celular poderão ser formados?

Exercício 12

As placas de todos os veiculos são formadas por 7 dígitos, 3 letras do alfabeto de A a Z, contando com as letras k, Y e W, e 4 números de 0 a 9. Porém o que muitos não sabem é que as placas obedecem também a um código de acordo com cada estado. No Rio de Janeiro as placas utilizam os códigos de KMF0001 até LVE 9999.

Quantas placas diferentes começam com a sequência KM no estado do Rio de Janeiro?

Exercício 13

Em uma festa há cem pessoas, os que chegam apertam as mãos dos que já estão na festa.

Quantos apertos de mão foram dados?

Exercício 14

Com as letras da palavra PERNAMBUCO foram formados anagramas com as letras PE juntas, nessa ordem, no início e as letras CO juntas nessa ordem.

Quantos anagramas podemos formar?

Exercício 15

De um grupo de 12 pessoas, 7 mulheres e 5 homens, deve ser formada uma comissão de 6 pessoas, composta pelo mesmo número de homens e de mulheres.

De quantas maneiras podemos formar essa comissão?

Gabarito

Exercício 1

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 2

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 3

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 4

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 5

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 6

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 7

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 8

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 9

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 10

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 11

Quantos números existem atualmente? São oito dígitos, onde o primeiro pode ser um numero de 6 a 9, logo são 4 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 = 40.000.000. Inserindo o 9 na frente do número, podemos ter como segundo dígito qualquer número de 0 a 5, pois de 6 a 9 já serão números existentes, temos então 5 • 10 • 10 • 10 • 10 •10 • 10 • 10 = 50.000.000 de números novos na telefonia móvel.

Exercício 12

Do F ao Z são 20 letras, de 0001 até 9999 são 9999 números, logo são possíveis 20 • 9999 tipos de placas, ou seja 199.980 placas distintas.

Exercício 13

Se cada pessoa apertou a mão de todas as outras pessoas, temos para cada convidado 99 apertos de mão, já que um convidado não aperta a sua própria mão. Porém o aperto de mão de A em B é o mesmo que de B em A, logo o total de apertos de mão é 100x99/2=4950 apertos de mão.

Exercício 14

PE junto no início não será contabilizado, pois não mudará de lugar. CO junto nessa posição contará apenas como uma letra que poderá se colocar em qualquer parte do anagrama. Logo devemos calcular a permutação de sete letras.

$7! = 5040$

Exercício 15

Escolha das mulheres: $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

Escolha dos homens: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

O total de comissões distintas é $210 \cdot 60 = 12600$ comissões.

Análise Combinatória 2

Fascículo 10

Unidade 32

Fundação CECIERJ

Análise Combinatória 2

Para início de conversa...

Como todo brasileiro, você deve ter seu time de futebol preferido. Ou se não gosta de futebol, deve torcer para uma equipe de basquete, voley ou outro esporte onde se faz necessário um grupo de atletas. Já parou para pensar na dor de cabeça que o técnico tem todas as vezes que precisar escalar seu time?

Obviamente, o técnico leva em conta as condições físicas, técnicas, em suma, a capacidade de cada atleta. Mas mesmo assim, são várias formações possíveis.

Geralmente uma equipe de futebol de salão consta de 7 atletas, sendo que apenas 5 entram em quadra. Quantas formações possíveis podemos fazer com esses atletas? Este é um problema comum na análise combinatória. Será que temos outros?

Por exemplo, olhe os seus colegas a sua volta na sala de aula. Caso resolvam eleger uma comissão representativa para a turma, sendo esta equipe formada por três alunos. Você consegue visualizar quantas comissões podem ser formadas?

E se essa comissão tiver funções distintas, por exemplo presidente, secretário e tesoureiro? O cálculo é o mesmo?

Obviamente, se montarmos a árvore de possibilidades, poderemos chegar ao resultado. Todavia, será que existe outra maneira de achar este mesmo resultado?

Na próxima seção veremos a partir de exemplos práticos como utilizar alguns métodos de contagem.

Objetivos de aprendizagem

- Identificar e resolver problemas que envolvam arranjo.
- Identificar e resolver problemas que envolvam combinação.
- Identificar e resolver problemas que envolvam permutação com repetição.
- Conhecer o triângulo de Pascal.

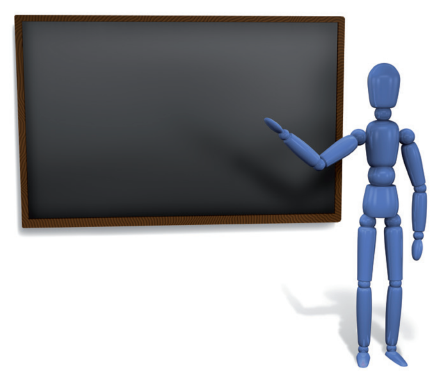
Seção 1
Arranjo e Combinação

Em nossa primeira aula de introdução da Análise Combinatória conhecemos o Princípio Fundamental da Contagem. Você lembra o que diz esse Princípio?

Como você sabe o Princípio Multiplicativo nos diz que sempre devemos multiplicar os números de possibilidades das tarefas a serem realizadas.

Nessa aula voltaremos a discutir sobre o princípio fundamental da contagem e a postura que devemos tomar para resolver exercícios de análise combinatória. Temos sempre que nos colocar no lugar da pessoa que tem que tomar as decisões em cada tarefa.

Vamos mostrar alguns exemplos de como podemos aplicar as técnicas de contagem em exemplos práticos. Além de mostrar possíveis erros. É possível percebemos nestes exemplos que a base para as técnicas utilizadas é o princípio fundamental da contagem.



Exemplo 1: Os alunos de uma determinada turma da escola ABC precisam eleger dois professores de sua turma, um para ser o representante da turma e o outro para ser o suplente. Eles resolvem tomar esta decisão de forma aleatória. Quantas possibilidades são possíveis para escolher estes dois professores, sabendo que esta turma possui 12 docentes?

Resolução:

Para resolvermos esta questão o primeiro passo é nos colocarmos na posição dos alunos que irão escolher estes professores. Os discentes terão duas tarefas a cumprir.

TAREFA 1: decidir qual professor será o representante: 12 possibilidades (pode escolher qualquer um dos 12 professores)

TAREFA 2: decidir qual professor será o suplente: 11 possibilidades (pode escolher qualquer um dos 11 restantes, já que 1 professor já foi escolhido para representante)

Temos então

$$\frac{\text{TAREFA 1}}{12} \quad \frac{\text{TAREFA 2}}{11}$$

Pelo Princípio Multiplicativo, temos: $12 \cdot 11 = 132$ possibilidades.

Logo são 132 possibilidades de escolhas de 1 representante e 1 suplente.

Observe que a posição ocupada pelo professor altera na resposta final, pois escolher os professores de Matemática e de Física pode trazer duas respostas possíveis:

Representante: Matematica e Suplente: Física

Ou ainda

Representante: Física e Suplente: Matemática.

Nestes casos onde a ordem altera o resultado, chamaremos de Arranjos.

Note que temos 12 elementos tomados 2 a 2.

Isto nos dá

12 . 11, mas se generalizarmos o problema. Se forem 12 professores selecionados em grupos de k elementos?

Teremos:

$$\underbrace{12 \,.\, (12-1) \,.\, (12-2) \,.\, \ldots\, (12-(k-1))}_{\text{Produto de k fatores}}$$

Queremos dizer o seguinte, se forem 3 professores teremos 12 . 11 . 10

Se forem 4 professores teremos 12.11.10.9. preste atenção sempre no último termo do produto para você entender a expressão acima.

E se generalizarmos mais ainda. Vamos fazer n professores separados em grupos de k professores. Teremos $n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))(n-k)!$ Dividindo toda a expressão por (n-k)! temos um arranjo $A_{n,k}$

$$A_{n,k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots(n-(k-1))(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}, \text{ logo,}$$

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Exemplo 2: O professor Euler precisa escolher 2 alunos de sua turma para pegar os livros que estão na biblioteca da escola. Sabendo que sua turma tem 15 alunos, de quantas maneiras Euler poderá fazer esta escolha?

Resolução:

Novamente temos que nos colocar na posição do professor que irá escolher os alunos. Temos assim 2 tarefas a realizar.

TAREFA 1: escolher o primeiro aluno que vai à biblioteca pegar os livros: 15 possibilidades (pode escolher qualquer um dos alunos)

TAREFA 2: escolher o segundo aluno que vai à biblioteca pegar os livros: 14 possibilidades (pode escolher qualquer um dos 14 alunos que ainda não foram escolhidos)

Pelo Princípio Multiplicativo temos $15 \cdot 14 = 210$ possibilidades.

No entanto esta resposta está errada! Você sabe responder por que? Onde está o erro?

Uma dica: Em problemas de contagem este erro é comum, pois a forma como resolvemos acima foi bastante intuitiva e não parece ter falha alguma.

O erro está em pensarmos que temos duas tarefas a realizar, pois quando pensamos desta forma estamos dizendo que tem uma ordem em que 1° tem que ser escolhido um aluno e depois tem que ser escolhido outro, quando na verdade isto não ocorre.

Para listar algumas possibilidades de escolha denominando os alunos pela letra A seguida do seu número de chamada, ou seja, A1, A2, A3,... até o A15:

1. A1 e A2
2. A1 e A3
3. A2 e A1
4. A3 e A1

Analisando a lista vemos que no primeiro caso escolhemos primeiro o aluno A1 e depois o aluno A2 e no terceiro caso escolhemos primeiro o aluno A2 e depois o aluno A1. Nesse caso, temos que a escolha 1) e a escolha 3) são as mesmas, pois os mesmos alunos foram escolhidos (os alunos A1 e A2). Assim, resolvendo da forma que fizemos, estamos contando cada possibilidade duas vezes. E este erro vem exatamente do fato de ter colocado uma ordem na escolha dos alunos, o que neste caso não é necessário. A mesma análise poderia ser feita com as escolhas 2) e 4).

Então como devemos resolver este problema? Uma forma de resolvermos é imaginarmos como se tivéssemos que escolher um e depois escolher outro como fizemos acima e depois "fazer um ajuste". Assim, pelo resultado que obtemos acima temos 210 possibilidades, no entanto, como já vimos acima, cada uma destas possibilidades foi contada duas vezes, ou seja, este resultado é o dobro da quantidade que queremos, assim devemos dividir este resultado por dois. Logo, temos $\frac{210}{2} = 105$, ou seja, a resposta final é que existem 105 possibilidades.

Entendeu? Vejamos mais um exemplo.

Exemplo 3: O professor Euler precisa escolher 3 alunos de sua turma para pegar os livros que estão na biblioteca da escola. Sabendo que sua turma tem 15 alunos, de quantas maneiras Euler poderá fazer esta escolha?

Resolução:

Podemos resolver como fizemos no exemplo anterior. Supondo inicialmente que temos 3 tarefas e que iremos escolher primeiro 1 aluno depois mais 1 aluno e por fim o último aluno. Temos assim, pelo Princípio Multiplicativo $15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730$ possibilidades, mas sabemos que esta não é a resposta correta. Vejamos alguns casos:

1. A1, A2 e A3
2. A1, A3 e A2
3. A2, A1 e A3
4. A2, A3 e A1
5. A3, A2 e A1
6. A3, A1 e A2

Devemos notar que estes 6 casos na verdade se resumem a apenas uma possibilidade, que é a dos alunos A1, A2 e A3, pois a ordem de escolha de cada um dos alunos não gera uma nova possibilidade.

O mesmo acontece se forem escolhidos os alunos A4, A5 e A6, por exemplo. Teremos 6 casos também:

1. A4, A5 e A6
2. A4, A6 e A5
3. A5, A4 e A6

4. A5, A6 e A4

5. A6, A5 e A4

6. A6, A4 e A5

Por que se repetem sempre de 6 em 6? Isto ocorre, pois estamos apenas mudando a ordem dos três alunos escolhidos e isto como vimos na aula passada é um caso de permutação simples, como são três elementos então temos $P_3 = 3! = 6$.

Portanto, devemos dividir o resultado anterior por 6, isto é, $\frac{2730}{6} = 455$ .Temos então 455 possibilidades de escolha.

E se fossem 4 alunos, o que teríamos que fazer? Teríamos:

$$\frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{4!}$$

Podemos continuar aumentando, com 5 alunos, com 6 e assim por diante.

Observe que no caso da escolha dos professores, a ordem de escolha influencia na resposta, pois estamos escolhendo com funções diferentes. Enquanto no caso da escolha dos alunos, independe de quem é o primeiro e quem é o segundo.

Neste caso onde a posição dentro do agrupamento não importa, temos as combinações que representaremos da seguinte forma:

$C_{n,k}$, isto é, combinação de n elementos tomados k a k.

Para determinarmos o número de combinações vamos lembrar que com k elementos distintos n1, n2, n3, nk podemos obter k! permutações. Lembra?

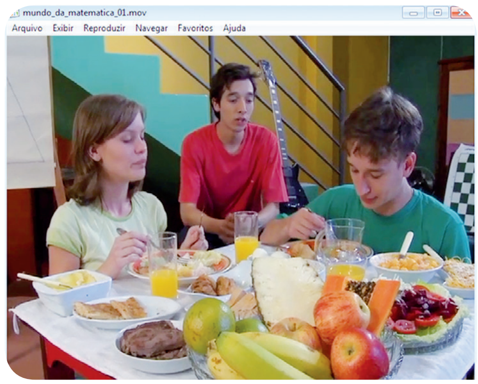
Basta trocar de posição cada elemento.

Isto significa que partindo de uma combinação obteremos k! arranjos dos n elementos separados k a k.

Qual será então o número de combinações? Bem, basta dividir o número de arranjos por k!. Assim:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Multimídia



Clique no link http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnica.html?id=30962 e conheça o áudio visual "Quatro mil possibilidades!",Nele você conhecerá Rafael e Julia que conversam sobre a composição de um "prato" considerado saudável, e que utilizam conceitos relacionados à análise combinatória. Com esse áudio visual você poderá determinar o número de possibilidades da ocorrência de um determinado acontecimento (evento), além de analisar uma situação do cotidiano por meio da análise combinatória.

Devemos tomar cuidado ao escolher as tarefas que temos que realizar, pois podemos errar a questão com uma escolha equivocada das tarefas. Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 4: De quantas maneiras podemos formar um casal (homem e mulher) dispondo de 4 homens e 4 mulheres?

Solução:

Podemos pensar em duas tarefas.

TAREFA 1: escolher 1 pessoa qualquer: 8 possibilidades.

TAREFA 2: escolher 1 pessoa do sexo diferente da escolhida na tarefa 1: 4 possibilidades.

Pelo Princípio Multiplicativo, temos $8 \cdot 4 = 32$. Logo, temos 32 possibilidades de formar um casal, certo? Errado! Você sabe onde está o erro?

O erro está na escolha das tarefas, pois na 1ª tarefa escolhemos qualquer uma das 8 pessoas. Vamos chamar de H1, H2, H3 e H4 os homens e as mulheres de M1, M2, M3 e M4. Vamos listar alguns casos possíveis:

1. H1 e M1
2. H1 e M2
3. M1 e H1
4. M2 e H1

Notemos que os casos 1) e 3) são iguais, pois formam o mesmo casal (o homem H1 e a mulher M1) e o mesmo ocorre nos casos 2) e 4). Assim, cada escolha está sendo contada duas vezes, temos que dividir o resultado por dois, ou seja, $32 \div 2 = 16$.

Logo temos 16 possibilidades de escolha de casal.

Mas poderíamos ter resolvido da seguinte forma, temos duas tarefas.

TAREFA 1: escolher 1 homem dentre os quatro homens: 4 possibilidades (H1, H2, H3 e H4)

TAREFA 2: escolher 1 mulher dentre as quatro mulheres: 4 possibilidades (M1, M2, M3 e M4)

Pelo Princípio Multiplicativo, temos 4·4 = 16. Logo temos 16 possibilidades de escolha de casal.

Exemplo 5: Em uma festa, cada pessoa cumprimentou todas as outras. Sabendo que nesta festa tinha 20 pessoas, foram dados quantos apertos de mão?

Solução: Neste exemplo a dificuldade está em determinar as tarefas a serem executadas pela pessoa que precisa contar o número de apertos de mão. Uma boa estratégia é utilizarmos letras para representar as pessoas, usemos as seguintes: P1, P2, ..., P20. Como temos que contar o número de apertos de mão então é necessário que entendamos como usar as letras (estou usando a palavra "letra" para representar P1, P2,.., P20 como sendo "letras" diferentes) para representar 1 aperto de mão, depois para representar 2 apertos de mão e assim sucessivamente. Um aperto de mão fica definido quando usamos duas letras, representando duas pessoas. Por exemplo, P1P20 significa que a pessoa P1 apertou a mão da pessoa P20, P1P10 significa que a pessoa P1 apertou a mão da pessoa P10. Então fazendo esta análise podemos perceber que cada aperto de mão pode ser contado ao escolhermos duas letras. Então nossa tarefa é determinar de quantas maneiras podemos escolher 2 letras, dispondo de 20 letras. Escolher 2 objetos de 20 caracteriza arranjo ou combinação, temos que verificar se quando alteramos a ordem das duas letras geramos um novo aperto de mão ou se continuamos contando o mesmo aperto de mão. Como P1P20 é o mesmo aperto de mão de P20P1 então este é um caso de combinação simples.

TAREFA: Escolher 2 pessoas dentre 20, em que a ordem nesta escolha não importa, ou seja, não gera uma nova contagem.

$$\frac{\text{TAREFA}}{C(20,2)}$$

Usando a fórmula de combinação, temos $C(20,2) = \frac{20!}{2!\,18!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18!}{2 \cdot 18!} = 190$

Logo, nesta festa teve 190 apertos de mão.

Exemplo 6: Em uma determinada Instituição de ensino trabalham 10 professores de Matemática, destes 4 trabalham no Ensino Superior e o restante no Ensino Médio. De quantas maneiras podemos formar uma comissão de 3 pessoas de modo que:

a. quaisquer uns dos 10 possam ser escolhidos

b. nenhum membro seja do Ensino Superior

c. haja exatamente 1 professor do Ensino Superior na comissão

d. pelo menos um seja do Ensino Superior

e. no máximo dois sejam do Ensino Médio

Solução:

a) Temos uma única tarefa para formar a comissão.

TAREFA: escolher 3 dentre 10 professores para formar uma comissão.

Novamente este exemplo caracteriza um problema de arranjo ou de combinação, temos então que verificar se a ordem é ou não importante, ou seja, se escolhermos os professores João, Clayton e Alessandra é uma comissão diferente da comissão formada por Alessandra, Clayton e João? A resposta é não. É a mesma comissão, isto significa que a ordem não importa, assim temos um caso de combinação. Usaremos assim a fórmula de combinação.

$$C(10,3) = \frac{10!}{3!\ 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{6 \cdot 7!} = 120$$

Logo, temos 120 comissões possíveis.

b) Nossa tarefa continua sendo escolher 3 professores, no entanto não podemos escolher professores do Ensino Superior, assim temos 6 professores para escolher.

TAREFA: escolher 3 dentre os 6 professores do Ensino Médio.

Da mesma forma do item a, temos um caso de combinação:

$$C(6,3) = \frac{6!}{3!\ 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{6 \cdot 3!} = 20$$

Logo, temos 20 comissões possíveis.

c) Neste item temos que dar atenção à palavra "exatamente", pois alguns alunos acabam errando a questão por não prestarem atenção nesta palavra. Como temos que escolher exatamente 1 professor do Ensino Superior então esta comissão será formada por **1 professor do Ensino Superior** e **2 professores do Ensino Médio**. Neste caso temos duas tarefas a realizar.

TAREFA 1: escolher 1 professor do Ensino Superior dentre os 4 que trabalham no Ensino Superior.

TAREFA 2: escolher 2 professores do Ensino Médio dentre os 6 que trabalham no Ensino Médio.

Para resolvermos cada uma das tarefas temos que usar a fórmula da combinação pelo mesmo motivo dos itens *a* e *b*.

$$\frac{\text{TAREFA 1}}{C(4,1)} \quad \frac{\text{TAREFA 2}}{C(6,2)}$$

Cabe aqui uma observação: para resolvermos a tarefa 1não precisamos necessariamente usar combinação, pois temos que escolher 1 pessoa dentre 4 possíveis e isto pode ser feito de 4 maneiras já que qualquer um dos quatro professores podem ser escolhidos.

Pelo Princípio Multiplicativo, temos $C(4,1) \cdot C(6,2) = 4 \cdot 15 = 60$, pois

$$C(4,1) = \frac{4!}{1!\,3!} = \frac{4 \cdot 3!}{1 \cdot 3!} = 4 \text{ e } C(6,2) = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \cdot 4!} = 15$$

Logo temos 60 comissões possíveis.

d) Para que tenhamos pelo menos (devemos ter cuidado com a palavra pelo menos) 1 professor do Ensino superior as possibilidades são:

I) 1 professor Ensino Superior e 2 do Ensino Médio

II) 2 professores de Ensino Superior e 1 do Ensino Médio

III) 3 professores de Ensino Superior

Para todos os dois primeiros casos temos 2 tarefas: escolher professor(es) do Ensino Superior e escolher professor(es) do Ensino Médio. Já no caso III) temos uma única tarefa que é escolher três professores do Ensino Superior.

Usaremos o Princípio Multiplicativo nos dois primeiros casos:

I) $C(4,1) \cdot C(6,2) = 4 \cdot 15 = 60$

II) $C(4,2) \cdot C(6,1) = 6 \cdot 6 = 36$

III) $C(4,3) = 4$

Como podemos ter qualquer um dos três casos então devemos somar todas as possibilidades, ou seja, $60 + 36 + 4 = 100$ possibilidades.

Logo, são possíveis 100 comissões.

Podemos resolver este item de outra maneira: como tem que ter pelo menos 1 professor do Ensino Superior então a única escolha que não pode ocorrer é formar comissão com nenhum professor do Ensino Superior, então podemos tomar todas as comissões possíveis e retirar as que não apresentam nenhum professor do Ensino Superior (3 professores do Ensino Médio).

O número total de comissões possíveis foi calculado no item a) em que obtemos 120 comissões. E o número de comissões com 3 professores do Ensino Médio é $C(6,3) = 20$, calculado no item b). Logo o total de comissões é $120 - 20 = 100$.

e) Para termos no máximo dois professores do Ensino Médio analisemos os seguintes casos:

I) 2 do Ensino Médio e 1 professor Ensino Superior

II) 1 do Ensino Médio e 2 professores de Ensino Superior

III) 3 professores de Ensino Superior

Mas estes casos são os mesmos do item anterior. Logo temos 100 comissões possíveis.

Exemplo 7: Um estudante deseja organizar melhor seus livros na estante de sua casa. Para isto vai separar os livros de matemática, física e química, ou seja, não colocará nenhum livro de uma disciplina junto com livro de outra disciplina. Sabendo que ele possui 6 livros de Física, 7 de Química e 8 de Matemática, determine de quantos modos ele pode arrumar dentre os 21, 10 livros na estante, sendo 3 livros de Física, 3 de Química e 4 de Matemática.

Solução: este é um exemplo que envolve várias técnicas que já estudamos até agora. Primeiro passo é se colocar na posição do estudante que irá arrumar os livros na estante. As tarefas que ele terá que realizar são:

TAREFA 1: escolher a ordem das disciplinas na estante, ou seja, se primeiro colocará os livros de matemática ou de física ou de química e depois ver qual será a próxima disciplina até a última escolha.

Tarefa 2: escolher qual livro será colocado na estante para cada disciplina.

Na tarefa 1 temos que trocar a ordem das disciplinas, ou seja, permutar, isto caracteriza permutação e como são três disciplinas temos $P3 = 3! = 6$.

Na tarefa 2 temos três subtarefas:

SUBTAREFA 1: colocar 3 livros de Física na estante, dentre 6.

SUBTAREFA 2: colocar 3 livros de Química na estante, dentre 7.

SUBTAREFA 3: colocar 4 livros de Matemática na estante, dentre 8.

Todas as três subtarefas caracterizam ou arranjo ou combinação. Para decidirmos qual técnica de contagem usar devemos verificar se mudando a ordem na escolha dos livros estamos mudando a arrumação dos livros na estante, ou seja, colocar os livros de Física F1 F2 F3 nesta ordem na estante é o mesmo que colocar os livros F3 F2 F1 nesta ordem? A resposta é não, pois ao mudarmos a ordem dos livros obtemos uma nova arrumação na estante e assim temos um caso de arranjo. Temos assim:

SUBTAREFA 1	SUBTAREFA 2	SUBTAREFA 3
$6 \cdot 5 \cdot 4$	$7 \cdot 6 \cdot 5$	$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$

Temos assim:

TAREFA 1	TAREFA 2
6	$120 \cdot 210 \cdot 1680$

Pelo Princípio Multiplicativo o total de arrumações possíveis na estante é igual a 254.016.000 !!! É isso mesmo, o número de possibilidades é mais de 250 milhões!

Outra solução possível é realizarmos as seguintes tarefas:

TAREFA 1: escolher a ordem das disciplinas na estante, ou seja, se primeiro colocará os livros de matemática ou de física ou de química e depois ver qual será a próxima disciplina até a última escolha.

TAREFA 2: escolher os livros de cada disciplina que irão para a estante. Neste caso o objetivo é somente escolher os livros sem se preocupar com a ordem.

TAREFA 3: escolher a ordem que cada livro ocupará dentro de cada disciplina. Por exemplo dos 4 livros de Matemática escolhido em que ordem devo colocá-lo na estante? Para isto precisamos permutar estes livros.

Assim, teremos:

TAREFA 1	TAREFA 2	TAREFA 3
6	$C(6,3) \cdot C(7,3) \cdot C(8,4)$	$3! \cdot 3! \cdot 4!$

Ou seja,

TAREFA 1	TAREFA 2	TAREFA 3
6	$20 \cdot 35 \cdot 70$	$6 \cdot 6 \cdot 24$

Pelo Princípio Multiplicativo o total de arrumações possíveis na estante é igual a 254.016.000, o mesmo valor encontrado anteriormente.

Será que ficaram bem entendidas as técnicas de contagem e seus usos? Tente agora resolver estas próximas atividades sempre vendo qual(is) é(são) as tarefas a serem realizadas para só depois tentar aplicar as técnicas aprendidas.

Numa semifinal de um campeonato de basquete, 4 seleções estão disputando as medalhas de ouro, prata e bronze. De quantas formas diferentes pode ser definido o pódio?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 1

Atividade 2

Pedro decidiu reunir os colegas para comemorar seu aniversário. Ele tem que escolher 2 sabores de tortas para servir em sua festa. A confeitaria oferece 10 sabores diferentes. De quantas maneiras Pedro pode fazer esta escolha?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 3

Em uma reunião cada pessoa cumprimentou as outras com um aperto de mão. Sabendo que no total foram dados 105 apertos de mão, quantas pessoas estavam nesta reunião?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 4

Dona Gertrudes esqueceu a sua senha bancária de 4 dígitos ao realizar um saque. No entanto ela sabe que os algarismos são distintos, que o 1° algarismo não era número par e o último é nove. Para que dona Gertrudes realize o saque, determine o número máximo de tentativas que o banco deve permitir para a realização desta transação bancária.

Anote suas respostas em seu caderno

Uma turma de 40 formandos de uma Universidade contratou um profissional para que no dia da formatura, fotografasse somente um par de alunos com o paraninfo.

Atividade 5

Sem considerar a ordem dos três na foto, determine:

a. o número mínimo de fotos que o fotógrafo pode tirar.

b. o número máximo de fotos que o fotógrafo pode tirar.

Anote suas respostas em seu caderno

Em uma determinada lanchonete os clientes podem montar um sanduíche escolhendo:

Atividade 6

I) um dentre os dois tamanhos: 15 cm ou 30 cm

II) um dentre os cinco tipos de pão: italiano branco; integral; parmesão e orégano; três queijos; integral aveia e mel.

III) um dentre os 6 recheios: presunto; peito de peru; rosbife; frango; atum; almôndegas.

IV) um dentre os três tipos de queijo: suíço, prato; cheddar.

V) escolher três dentre os cinco tipos de vegetais: alface; tomate; cebola; pimentão; pepino

VI) dois dentre os quatro molhos: mostarda e mel; barbecue; mostarda; maionese.

Determine:

a. a) o número de sanduíches distintos que podem ser montados

b. b) o número de sanduíches distintos que um cliente pode montar sabendo que ele não gosta de pão de três queijos; não gosta de atum; e não gosta de maionese.

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 2
Permutação com repetição

Vimos na aula anterior que todo problema de contagem que envolve troca de posição de objetos distintos entre si caracteriza uma permutação simples. No entanto, tem problemas que envolvem troca de posição de objetos sendo algum destes repetidos. Qual técnica de contagem utilizar? Para responder a esta pergunta vamos a um exemplo.

Exemplo 8: Quantos são os anagramas da palavra MATEMÁTICA?

Solução: Se não tivéssemos letras repetidas resolveríamos utilizando permutação simples, no entanto as letras M e T se repetem duas vezes e a letra A se repete três vezes. Vejamos alguns exemplos de palavras obtidas ao se trocar a posição das letras. Para isto usemos $M_1A_1T_1EM_2A_2T_2ICA_3$

I) $A_1T_1EM_2A_2T_2ICA_3\ M_1$

II) $A_1T_1EM_1A_2T_2ICA_3\ M_2$

III) $A_1T_2EM_2A_2T_1ICA_3\ M_1$

IV) $A_1T_2EM_1A_2T_1ICA_3\ M_2$

Devemos notar que todos os 4 casos acima representam o mesmo anagrama que é ATEMATICAM, isto ocorreu porque trocar a posição de um "T" com a posição de outro "T" não gera um novo anagrama. Assim, se usarmos a permutação simples estaremos contando um mesmo anagrama várias vezes. Como podemos determinar o número de vezes que estaremos contando um mesmo anagrama? Para isto devemos tomar o exemplo dado acima e verificar quantas vezes podemos alterar a posição das letras repetidas. As letras M e T aparecem duas vezes temos portanto 2! = 2 maneiras de trocarmos estas letras entre si e a letra A se repete três vezes então temos 3! = 6 maneiras de trocar a posição do A entre si. Isto nos dá um total de 2·2·6 = 24 maneiras de formar um mesmo anagrama de ATEMATICAM, o mesmo ocorrerá com outros anagramas formados. Portanto ao usarmos a permutação simples estaremos encontrando um número 24 vezes maior do que o correto. Assim devemos dividir este resultado por 24. Temos então que o total de anagramas é $\frac{P10}{2!\ 2!\ 3!}=\frac{10!}{24}=151200$.

De maneira geral se temos permutação de n elementos com um elemento se repetindo k vezes, outro se repetindo w vezes e assim por diante até o último que se repete z vezes, então

$$P_n^{k,w,\ldots,z}=\frac{n!}{k!\cdot w!\cdot \ldots \cdot z!}$$

Esta fórmula se estende para quantidades maiores de elementos repetidos.

Exemplo 9: Uma pequena empresa resolveu desenvolver uma dinâmica de grupo com seus 10 funcionários, sendo 6 mulheres e 4 homens. Para isto pediu que eles ficassem em fila, sendo que as mulheres deveriam ficar em ordem crescente de altura entre si e os homens também. Sabendo que nenhum homem e nenhuma mulher tem a mesma altura, determine de quantas maneiras distintas esta fila pode ser formada.

Solução:

Para resolvermos esta questão, primeiro vamos resolver para o caso em que houvesse apenas dois homens e duas mulheres. Vamos chamar de M1 a mulher mais baixa e M2 a mais alta, H1 o homem mais baixo e H2 o homem mais alto. Assim teríamos seis possibilidades:

I) M1M2H1H2

II) M1H1M2H2

III) M1H1H2M2

IV) H1H2M1M2

V) H1M1H2M2

VI) H1M1M2H2

Veja os casos acima até se convencer que realmente só existem estas possibilidades, pois o M2 nunca pode vir antes do M1 e o H2 nunca pode vir antes do H1.

Poderíamos ter resolvido este problema percebendo que, por exemplo no caso I) não podemos trocar a posição de M1 com a do M2, ou seja, o caso M2M1H1H2 não é possível, ou poderia também imaginar M2M1H1H2 como sendo "o mesmo caso" de M1M2H1H2, assim estaríamos contando apenas uma única vez, isto é a mesma coisa que pensarmos em permutação com repetição. Pensando desta forma teríamos os seguintes casos:

I) MMHH

II) MHMH

III) MHHM

IV) HHMM

V) HMHM

VI) HMMH

Desta forma não haveria necessidade de listar todas estas possibilidades, pois poderíamos usar a fórmula para permutação com repetição que neste exemplo fica $P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!\ 2!} = 6$.

Agora já temos condições de resolver o nosso exemplo, como temos 6 mulheres e 4 homens então temos $P_{10}^{4,6} = \frac{10!}{4!\ 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$.

Logo, a fila pode ser formada de 210 maneiras diferentes.

Exemplo 10: Uma avaliação é composta de 20 questões, em que cada uma deve ser respondida com V caso seja verdadeira e F caso seja falsa a questão. Com base nestas informações responda:

Quantas sequências de respostas são possíveis?

b) Quantas sequências apresentam doze respostas V e oito respostas F?

Solução:

a) As sequências de respostas são formadas pelas letras V e F, as tarefas que teremos que realizar são: primeiro, se a primeira questão será V ou F, segundo se a segunda questão será V ou F e assim por diante até a questão 20, portanto temos 20 tarefas e cada tarefa tem 2 possibilidades de resposta, ou seja,

$$\frac{\text{TAREFA 1}}{2}\ \frac{\text{TAREFA 2}}{2}\ \ldots\ \frac{\text{TAREFA 20}}{2}$$

Pelo Princípio Multiplicativo temos: $2^{20} = 1.048.576$

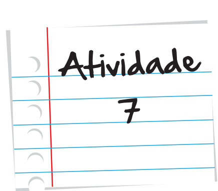
Logo temos 1.048.576 possibilidades de sequências!

Imagine você chutar todas as 20 questões e gabaritar esta prova! Você verá quando estudar probabilidade que isto é quase impossível acontecer.

b) Para sabermos quantas sequências tem 12V's e 8F's teremos que permutar a sequência VVVVVVVVVVVVFFFFFFFF, ou seja é um caso de permutação com repetição, usando a fórmula, temos:

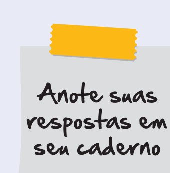
$$P_{20}^{12,8} = \frac{20!}{12!\,8!} = \frac{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13}{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 125.970$$

Logo temos 125.970 sequências possíveis.



Quantos são os anagramas da palavra COMBINATÓRIA:

a. sem restrição
b. que começam com a letra C
c. que terminam com a letra A
d. que começam com a letra C e terminam com a letra A
e. que começam com a letra C ou terminam com a letra A



Atividade 1

Uma funcionária de um loja de CDs foi encarregada de arrumar os CDs nas prateleiras. Na primeira prateleira ela deve arrumar 4 Cds (todos iguais) do Milton Nascimento, 5 CDs (todos iguais) do Gonzaguinha e 6 (todos iguais) do Chico Buarque. De quantas formas diferentes a funcionária pode arrumar estes CDs na primeira prateleira:

a. sem restrição

b. sabendo que os CDs de cada cantor devem permanecer juntos.

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 3
Triângulo de Pascal – LEITURA OPCIONAL

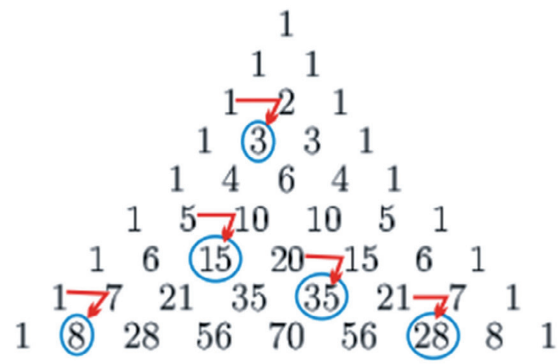
Blaise Pascal foi um matemático francês nascido no ano de 1623. Destacou-se no estudo das probabilidades e uma de suas maiores descobertas é chamada até hoje de triângulo de pascal. Neste triângulo aritmético são representados números cujo valor é a soma dos dois diretamente acima dele. O triângulo demonstra muitas propriedades matemáticas, além de mostrar os coeficientes binomiais, **que nada mais são que os resultados de combinações**

Podemos dispor números de linha em linha formando um triângulo com a seguinte propriedade em cada linha começamos com 1 e terminamos com 1 (com exceção da linha 0 que terá só o número 1) e da linha 2 em diante começamos com 1 somamos os elementos da linha anterior e terminamos com 1, e continuamos com esta regra para as linhas seguintes. Veja o triângulo:

Linha 0	1										
Linha 1	1	1									
Linha 2	1	2	1								
Linha 3	1	3	3	1							
Linha 4	1	4	6	4	1						
Linha 5	1	5	10	10	5	1					
Linha 6	1	6	15	20	15	6	1				
Linha 7	1	7	21	35	35	21	7	1			
Linha 8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
Linha 9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
Linha 10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Fonte: http://www.mundoeducacao.com.br/upload/conteudo/Untitled-4(40).jpg

Por exemplo, a linha 4 foi formada assim 1 (1+3) (3+3) (3+1) 1. Veja alguns exemplos no triângulo abaixo.



Fonte: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/97/Pascal3.png

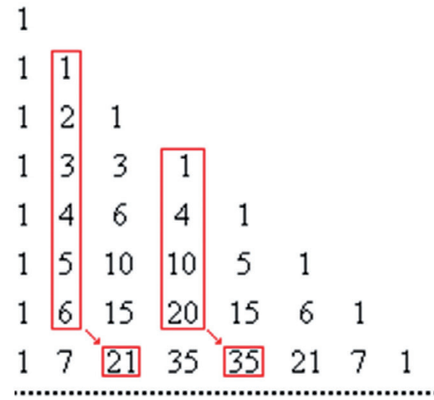
Este “triângulo” é conhecido como triângulo de Pascal. Veremos duas propriedades importantes deste triângulo.

Propriedade das linhas: A soma dos elementos de uma linha é igual ao número 2 elevado ao número da linha correspondente. Por exemplo, tomemos a linha 3, que é formada pelos números 1 3 3 1 (lembremos que a primeira linha é a linha zero), temos nesta linha a soma $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$. De forma geral, a soma dos elementos da linha n é igual a 2^n.

1							$2^0 = 1$
1	1						$2^1 = 2$
1	2	1					$2^2 = 4$
1	3	3	1				$2^3 = 8$
1	4	6	4	1			$2^4 = 16$
1	5	10	10	5	1		$2^5 = 32$
1	6	15	20	15	6	1	$2^6 = 64$

Fonte: http://upload.wikimedia.org/math/6/4/d/64d37a3311d35a03f675ce04a63d7291.png

Propriedade das colunas: Se somarmos os elementos de uma determinada coluna começando do primeiro elemento desta coluna e indo até um elemento de uma determinada linha então a soma será igual ao número que se encontra na linha seguinte da próxima coluna. Veja a figura a seguir.



Fonte: http://www.somatematica.com.br/emedio/binomio/binomio36.gif

Nos exemplos da figura acima temos que 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21. E que 1 + 4 + 10 + 20 = 35.

Faça o desenho do Triângulo de Pascal até a linha 10 e verifique as propriedades da linha e da coluna.

Veja no boxe saiba mais que o *triângulo de Pascal* já era conhecido por pelo menos três séculos antes da existência de Pascal.

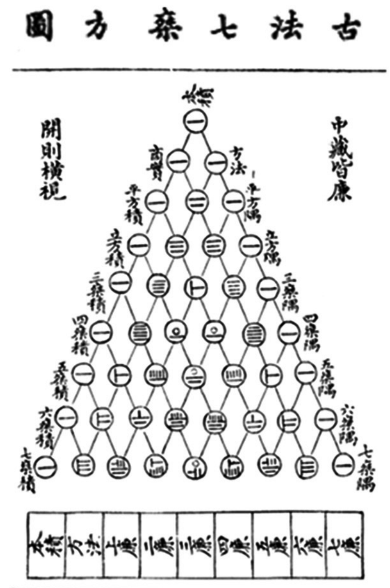
Durante a dinastia Tang reuniu-se uma coleção dos mais importante livros de matemática disponíveis, para uso oficial nos exames imperiais. A imprensa se inaugurou no século VIII, mas o primeiro livro de matemática impresso de que se tem notícia só apareceu em 1804.

O período que vai da última parte da dinastia Sung até a parte inicial da dinastia Yüan marca o pináculo da matemática chinesa antiga. Muitos matemáticos importantes despontaram e muitos livros de matemática valiosos apareceram. Dentre os matemáticos estavam Ch'in Kiu-shao (cujo livro é de 1724), Li Yeh (com livros datados de 1248 e 1259), Yang Hui (com livros datados de 1261 e 1275) e, o maior de todos, Chu Shï-kié (cujos livros datam de 1299 e 1303).

Yang Hui, cujos livros são uma espécie de extensão dos *Nove Capítulos* sobre a *Arte da Matemática*, trabalhou habilmente com frações decimais; em essência seu método era o mesmo que se usa hoje. Devemos a ele também a mais antiga apresentação preservada do chamado *Triângulo aritmético de Pascal*. Há uma outra manifestação do triângulo num livro posterior escrito por Chu Shï-kié em 1303; é interessante que Chu fala do triângulo como algo já antigo em seu tempo. É possível então que o teorema do binômio já fosse conhecido na China de longa data.

Fonte: Introdução a História da Matemática, Howard Eves. Pp.245 e 246.

Saiba Mais



Triângulo de Pascal, da maneira como foi desenhado em 1303 por Chu Shï-kié

Mais adiante no mesmo livro Eves descreve o mesmo triângulo em que aparece no trabalho de outro matemático, o francês Blaise Pascal, devemos notar que Pascal é do século XVII, portanto 3 séculos depois de Chu Shï-kié.

O *Traité Du Triangle Arithmétique* de Pascal foi escrito em 1653 mas só foi publicado em 1665.


TRAITE
DV TRIANGLE
ARITHMETIQVE.
AVEC QVELQVES AVTRES
PETITS TRAITEZ SVR LA
MESME MATIERE.
Par Monsieur PASCAL.
A PARIS,
Chez GVILLAVME DESPREZ, ruë saint Iacques,
à Saint Prosper.
M. DC. LXV.

Página da monografia de Blaise Pascal.

Saiba Mais

Pascal construía seu "triângulo aritmético" conforme mostra a figura abaixo. Obtém-se qualquer elemento (da segunda linha em diante) como soma de todos os elementos da linha precedente situados exatamente acima ou à esquerda do elemento desejado. Assim, na quarta linha,

$$35 = 15 + 10 + 6 + 3 + 1.$$

1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	...
1	3	6	10	15	...
1	4	10	20	35	...
1	5	15	35	70	...

Fonte: http://www.matematica.br/historia/imagens/triang_pascal.gif

A determinação dos coeficientes binomiais era uma das aplicações que Pascal fazia do seu triângulo. Ele também o usava, particularmente em suas discussões sobre probabilidade, para determinar o número de combinações de *n* objetos tomados *r* de cada vez. Há muitas relações envolvendo os números do triângulo aritmético, várias delas desenvolvidas por Pascal. Ele não foi o primeiro a mostrar o triângulo como vimos anteriormente, mas como Pascal foi por longo tempo (até 1935) o primeiro descobridor conhecido do triângulo no mundo ocidental e devido ao desenvolvimento e aplicações que fez de muitas propriedades do triângulo, este tornou-se conhecido como *triângulo de Pascal*.

Resumindo

- Arranjo e combinação são caracterizados pela escolha de p elementos distintos dentre n elementos distintos (n > p). O primeiro quando a ordem é importante e o segundo quando não é.
- Fórmula da combinação é $C(n,k) = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
- Fórmula da permutação com elementos repetidos é $P_n^{k,w,\ldots,z} = \dfrac{n!}{k!\cdot w!\cdot \ldots \cdot z!}$

Veja Ainda

Para saciar sua curiosidade indicamos o seguinte site:

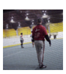
- http://www.youtube.com/watch?v=h_bXJcQgkPM (vídeo que fala sobre o problema dos pontos)

Referências

Livros

- Boyer C. B., *História da Matemática*, Ed. Edgard Blücher.
- Eves H., *Introdução a história da matemática*, Editora Unicamp.
- Iezzi, G., Dolce, O., Degenszajn, D., Périgo, R., de Almeida, N., *Matemática ciência e aplicações*, vol.2, Ed Saraiva.
- Morgado, A.C., Carvalho, J.B.P., Carvalho, P.C.P, Fernandez, P., *Análise Combinatória e Probabilidade*, SBM, 9ª Ed.2006.

Imagens


- http://www.freeimages.com/photo/1314


- http://www.freeimages.com/photo/1193228


- http://www.sxc.hu/photo/1094969


- http://www.sxc.hu/photo/1171500


- http://www.sxc.hu/photo/1408766


- http://www.sxc.hu/photo/1078182


- http://www.sxc.hu/photo/1191195


- http://www.sxc.hu/photo/1192915


- http://www.sxc.hu/photo/1182264


- http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnica.html?id=30962

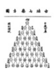

- http://www.sxc.hu/photo/1396243

- http://www.sxc.hu/photo/1027447

- http://www.sxc.hu/photo/774415

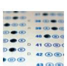
- http://www.freeimages.com/photo/1335487

- http://www.freeimages.com/photo/1356218



- http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/ea/Yanghui_triangle.gif/300px-Yanghui_triangle.gif

- http://lh4.ggpht.com/_j5kbeGgXcbo/S3YNeLUhOiI/AAAAAAAAB_Y/xvRiWPDTzGU/%5BUNSET%5D.gif



- http://www.sxc.hu/photo/517386

Respostas das Atividades

Atividade 1

24

Atividade 2

45

Atividade 3

15

Atividade 4

224

Atividade 5

a. 20

b. 780

Respostas das Atividades

Atividade 6

a. 10800

b. 3600

Atividade 7

a. 59875200

b. 4989600

c. 9979200

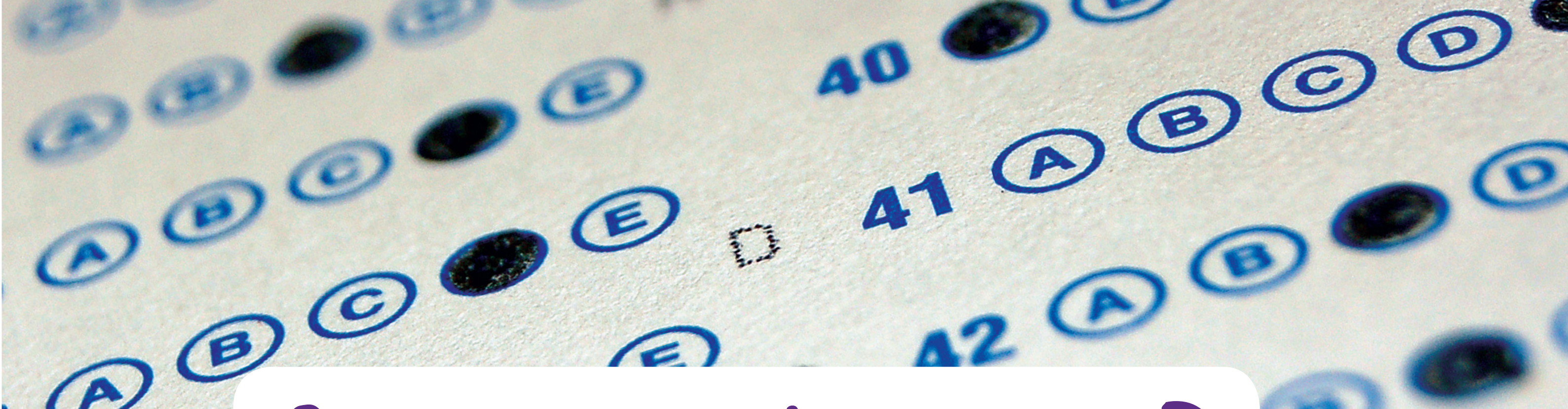
d. 907200

e. 14061600

Atividade 8

a. 630630

b. 6



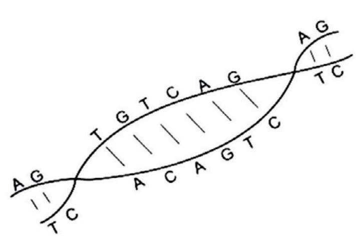
O que perguntam por aí?

Questão 1 (UFF – 2001)

O estudo da genética estabelece que, com as bases adenina (A), timina (T), citosina (C) e guanina (G), podem-se formar, apenas, quatro tipos de pares: A – T, T – A, C – G e G – C.

Certo cientista deseja sintetizar um fragmento de DNA com dez desses pares, de modo que:

- dois pares consecutivos não sejam iguais;
- um par *A – T* não seja seguido por um par *T – A* e vice-versa;
- um par *C – G* não seja seguido por um par *G – C* e vice-versa.



Sabe-se que dois fragmentos de DNA são idênticos se constituídos por pares iguais dispostos na mesma ordem.

Logo, o número de maneiras distintas que o cientista pode formar esse fragmento de DNA é:

a. 2^{11}

b. 2^{20}

c. 2×10

d. 2^{10}

e. $2^2 \times 10$

Resposta: Letra A

Comentário: Tarefa 1 podemos escolher qualquer um dos quatro pares possíveis para as outras 9 tarefas temos 2 possibilidades para cada uma delas. Pelo Princípio Multiplicativo temos $4 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2 = 4 \cdot 29 = 22 \cdot 29 = 211$.

Questão 2 (Unifesp – SP – 2002)

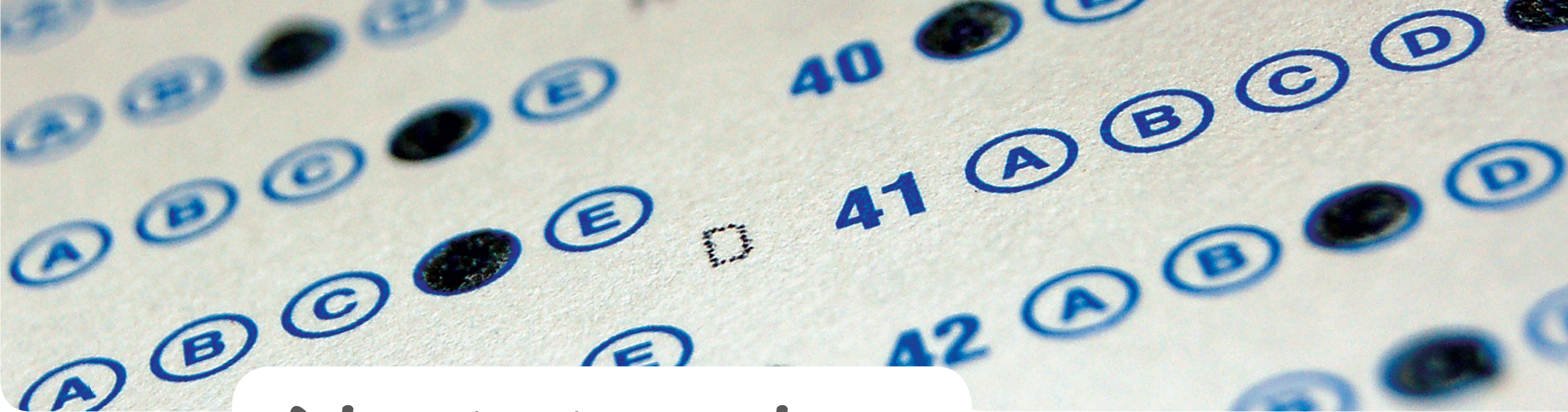
Em um edifício residencial de São Paulo, os moradores foram convocados para uma reunião, com a finalidade de escolher um síndico e quatro membros do conselho fiscal, sendo proibida a acumulação de cargos. A escolha deverá ser feita entre dez moradores. De quantas maneiras diferentes será possível fazer estas escolhas?

a) 64 b) 126 c) 252 d) 640 e) 1260

Resposta: Letra E

Comentário:

A primeira tarefa é escolher um dos dez para ser o síndico e a segunda tarefa é escolher quatro dentre os nove restantes para serem membros do conselho fiscal. Na primeira tarefa temos 10 possibilidades e na segunda $C(9, 4) = 126$. Pelo Princípio Multiplicativo temos $10 \cdot 126 = 1260$ possibilidades. Logo a alternativa correta é a letra e).



Atividade extra

Exercício 1

Oito pessoas irão acampar e levarão quarto barracas. Em cada barraca dormirão duas pessoas. Quantas são as opções de duplas nas barracas?

(a) 2500 (b) 2020 (c) 2520 (d) 2320

Exercício 2

Em um refeitório há 8 tipos de doces e 7 tipos de salgados. Cada pessoa receberá um recipiente com 3 doces e apenas 2 salgados.

De quantas formas o recipiente pode ser preenchido?

(a) 1176 (b) 1067 (c) 1076 (d) 1167

Exercício 3

Um certo número de pessoas pode ser agrupado de duas em duas pessoas, resultando em 10 diferentes possibilidades de agrupamento.

Quantas pessoas fazem parte desse grupo?

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7

Exercício 4

Há 10 pessoas em um local, sendo 3 com camisas verdes, 3 com camisas amarelas, 2 com camisas azuis e 2 com camisas brancas.

De quantos modos podem ser perfiladas mantendo juntos os grupos com as camisas de mesma cor?

(a) 3278 (b) 3546 (c) 3456 (d) 3256

Exercício 5

Existem 10 jogadores de futebol de salão, entre eles há somente um que joga como goleiro.

Quantos times de 5 pessoas podem ser escalados?

(a) 100 (b) 125 (c) 126 (d) 130

Exercício 6

Um químico possui dez tipos de substâncias e duas dessas não podem ser juntadas porque produzem misturas explosivas.

De quantos modos pode associar seis substâncias?

(a) 110 (b) 120 (c) 130 (d) 140

Exercício 7

Um grupo possui 20 pessoas, das quais 5 matemáticos. Há interesse em formar comissões de 10 pessoas sendo cinco matemáticos.

Quantas comissões podem ser formadas?

(a) 3003 (b) 3022 (c) 3033 (d) 2303

Exercício 8

Um homem tem 8 pares de meias distintas. De quantas formas ele pode selecionar 2 meias sem que elas sejam o mesmo par?

(a) 102 (b) 112 (c) 114 (d) 124

Exercício 9

Um lote contém 50 peças boas e 10 defeituosas. Extrai-se 8 peças (sem reposição) não levando em conta a ordem das mesmas.

De quantas formas podemos obter 4 peças boas e 4 defeituosas?

(a) 4.836.300 (b) 4.863.030 (c) 4.835.200 (d) 4.853.300

Exercício 10

A diretoria de uma firma é constituída por 7 diretores brasileiros e 4 japoneses.

Quantas comissões de 3 brasileiros e 3 japoneses podem ser formados?

(a) 100 (b) 120 (c) 134 (d) 140

Exercício 11

Os atuais números de telefone celular no Estado do Rio de Janeiro, tem oito números e começam com 5, 6, 7, 8 ou 9. A partir de novembro será inserido o dígito 9 na frente do número de todos os usuários de telefonia móvel.

Quantos novos números de telefone celular poderão ser formados?

Exercício 12

As placas de todos os veículos são formadas por 7 dígitos, 3 letras do alfabeto de A a Z, contando com as letras k, Y e W, e 4 números de 0 a 9. Porém o que muitos não sabem e que as placas obedecem também a um código de acordo com cada estado. No Rio de Janeiro as placas utilizam os códigos de KMF0001 ate LVE 9999.

Quantas placas diferentes começam com a sequência KM no estado do Rio de Janeiro?

Exercício 13

Em uma festa há cem pessoas, os que chegam apertam as mãos dos que já estão na festa.

Quantos apertos de mão foram dados?

Exercício 14

Com as letras da palavra PERNAMBUCO foram formados anagramas que com as letras PE juntas, nessa ordem, no início e as letras CO juntas nessa ordem.

Quantos anagramas podemos formar?

Exercício 15

De um grupo de 12 pessoas, 7 mulheres e 5 homens, deve ser formada uma comissão de 6 pessoas, composta pelo mesmo número de homens e de mulheres.

De quantas maneiras podemos formar essa comissão?

Gabarito

Exercício 1

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 2

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 3

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 4

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 5

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 6

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 7

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 8

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 9

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 10

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 11

420 anagramas.

Exercício 12

4060 equipes.

Exercício 13

12 maneiras diferentes.

Exercício 14

90 modos diferentes.

Exercício 15

630 comissões.

Probabilidade 1

Fascículo 10

Unidade 33

Fundação CECIERJ

Probabilidade 1

Para início de conversa...

Nesta unidade iremos aprender um pouco sobre Probabilidade. Mas, o que é probabilidade? Onde utilizar? Veremos algumas aplicações interessantes nesta aula e esperamos que gostem, pois este conceito pode ajudá-los muito, principalmente a tomar decisão em alguns problemas de sua vida. Então vamos lá?

Falemos um pouco de jogos, ditos de azar. Mas o que são jogos de azar? Segundo o site Wikipédia: "jogos de azar são jogos nos quais a possibilidade de ganhar ou perder não dependem da habilidade do jogador, mas sim exclusivamente da sorte ou do azar do apostador.

A essência do jogo de azar é a tomada de decisão sob condições de risco. Assim, a maioria deles são jogos de apostas cujos prêmios estão determinados pela probabilidade estatística de acerto e a combinação escolhida. Quanto menor é a probabilidade de se obter a combinação correta, maior é o prêmio."

Figura 1: A las Vegas Boulevard, mais conhecida como "STRIP". Nesta avenida ficam localizados os maiores cassinos da cidade.

Aqui no Brasil, os cassinos são proibidos, mas podemos encontrar diversos jogos de azar nas lotéricas de todo o país. No site http://www1.caixa.gov.br/loterias/loterias/ encontramos os jogos disponibilizados: Mega-Sena, Quina, Lotomania, Loto fácil, dentre outros...

Veremos nessa aula quais são suas chances de ganhar o maior prêmio da Mega-Sena fazendo apenas um jogo simples (o mais barato), por exemplo.

Saiba Mais

No endereço http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm98/icm42/historia.htm é possível ler um pouco mais sobre a história da Matemática a respeito da teoria das probabilidades..

Objetivos de aprendizagem

- Reconhecer o Espaço amostral de um evento.
- Calcular probabilidades simples.
- Utilizar a análise combinatória em cálculos do número de elementos de espaços amostrais e evento.
- Fazer a distinção entre evento certo e improvável.

Seção 1
Lançando moedas e dados.

Alguns problemas que são muito utilizados para cálculo de probabilidades são os problemas relacionados com lançamentos de moedas e dados. Por exemplo: Ao lançar uma moeda honesta (aquela que possui apenas uma cara e uma coroa, onde cada uma tem a mesma chance de ocorrer) e observar a face obtida, sabemos que pode ocorrer: {cara, coroa}.

A esse conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório (experimento cujo resultado não pode ser previsto com certeza) chamamos de *espaço amostral* e é indicado pela letra grega Ω (lê-se "ômega"). No caso do lançamento de uma moeda, temos que Ω: {cara, coroa}.

Se o nosso experimento fosse o de lançar um dado com 6 faces e observar o número que aparece na face voltada para cima, teríamos $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, certo? Sim!

Poderíamos descrever alguns subconjuntos de Ω, por exemplo, A: "o número observado na face do dado voltada para cima é ímpar", teríamos $A=\{1,3,5\}$. Mas agora, se tivéssemos B: " o número observado na face do dado voltada para cima é um múltiplo de 3", teríamos $B=\{3,6\}$. A qualquer subconjunto do espaço amostral Ω de um experimento aleatório chamamos de *evento*.

Faça agora as atividades a seguir:

Atividade 1

Lançando moedas...

Suponhamos que uma moeda seja lançada duas vezes, sucessivamente, e seja observada a sequência de números obtidos nas faces voltadas para cima.

a. Descreva o espaço amostral Ω.

b. Qual é o evento H: "ocorrer uma cara e uma coroa"?

c. Qual é o evento V: "ocorrer duas caras"?

d. Roberto disse que ao lançar duas moedas é mais provável que ocorra uma cara e uma coroa do que duas caras. Você concorda? Justifique sua resposta.

Anote suas respostas em seu caderno

Lançando dados...

Atividade 2

Suponhamos que um dado de 6 faces seja lançado duas vezes, sucessivamente, e seja observada a sequência de números obtidos nas faces voltadas para cima.

a. Descreva o espaço amostral Ω.

b. Encontre o número de elementos de Ω, utilizando o princípio fundamental da contagem.

c. Qual é o evento W: "a soma dos pontos obtidos é maior que 9"?

d. Descreva o evento M: " ocorrer no primeiro lançamento o número 2".

Anote suas respostas em seu caderno

Saiba Mais

Existem outros dados sem ser o mais comum, o de 6 faces. No site: http://pt.wikipedia.org/wiki/Geometria_dos_dados podemos encontrar diversos dados , que são utilizados, por exemplo, para jogar RPG. Abaixo segue alguns: D4, D6, D8, D12, D20 e dois D10.

Seção 2
Afinal, quais as minhas chances de vencer?

Voltemos ao problema simples do lançamento de uma moeda duas vezes, que vimos na atividade 1. Chegamos a conclusão que Roberto estava certo (vide respostas das atividades) ao afirmar que é mais provável ocorrer uma cara e uma coroa do que duas caras, visto que as chances de ocorrer uma cara e uma coroa são de 2 para 4, ou seja, a probabilidade é $\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$ enquanto as chances de ocorrer duas caras são de 1 para 4, ou seja, a probabilidade é $\frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$.

Podemos observar então que (em um espaço amostral equiprovável – vide Box importante a seguir) a probabilidade de ocorrer um evento é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis (número de elementos do evento que nos interessa) e o número de casos possíveis (número total de elementos).

Vimos que a probabilidade pode ser escrita de 3 formas: na forma de fração, na forma de um número decimal ou também em porcentagem.

Importante

Dizemos Ω que um espaço amostral é equiprovável quando os eventos unitários de Ω têm a mesma chance de ocorrer.

Ao lançar um dado e observar o número em sua face superior, temos que cada um dos eventos: {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6} tem a mesma probabilidade (uma em seis) de ocorrer, que representamos pela fração $\frac{1}{6}$.

Utilizemos agora como exemplo o experimento aleatório: lançar dois dados simultaneamente e efetuar a soma dos números obtidos nas faces voltadas para cima. A ideia deste jogo é você escolher e acertar qual será a tal soma dos números observados.

Lara, Leon e Miguel vão jogar esse jogo. Lara escolheu o 3, Leon o 7 e Miguel o 6. Quem será que terá mais chances de vencer o jogo, levando em consideração que se a soma não for um dos números escolhidos continuarão lançando até que apareça algum número escolhido?

Talvez você possa ter pensado: Tanto faz! Mas veremos que não é bem assim...

Encontramos na resposta da atividade 2, item a, uma tabela do espaço amostral do lançamento de um dado duas vezes (que é análogo ao lançamento de dois dados):

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Desta tabela podemos construir uma tabela representando a soma dos valores:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Desta tabela, com 36 números, observamos que a soma igual a 3, poderia acontecer apenas de 2 maneiras (ocorrendo (1,2) ou (1,2)), enquanto a soma igual 7 teremos 6 maneiras e para a soma igual a 6 teremos 5 maneiras. Calculando as probabilidades, teríamos:

$$P(\text{ocorrer soma } 3) = \frac{3}{36} \cong 8{,}3\%$$

$$P(\text{ocorrer soma } 7)= \frac{6}{36} \cong 16{,}7\%$$

$$P(\text{ocorrer soma } 6)= \frac{5}{36} \cong 13{,}9\%$$

Observem que apesar de Leon ter mais chances (maior probabilidade) de vencer dentre os 3 que estão jogando, se fosse contra uma banca (contra o cassino), ele estaria com uma enorme desvantagem, visto que como a probabilidade total é de 100% e ele tem 16,7% aproximadamente de vencer, a banca terá mais de 80% de ganhar, ou seja, 4 vezes mais chances de vencer o jogo. Entenderam?

Multimídia

Um filme muito interessante que podemos ver claramente a utilização de probabilidades em jogos é o filme: Quebrando a banca. Recomendamos a todos que assistam a esse belo filme em que um professor e alguns de seus mais brilhantes alunos se reúnem para ganhar dinheiro em cassinos e encaram uma trama muito interessante:

Importante

Quando o evento coincide com o espaço amostral, ele é chamado de *evento certo*.

Quando o evento é o conjunto vazio, ele é chamado de *evento improvável*.

Saiba Mais

Seja Ω um espaço amostral finito equiprovável, correspondente a um experimento aleatório. Temos que:

1. A probabilidade do evento certo é igual a 1.

Para chegar a tal conclusão basta observarmos que se E (evento) = Ω , temos n(E) (número de elementos do evento E) = n(Ω), daí p(E)=   =1.

2. A probabilidade do evento improvável é igual a 0.

Basta observarmos que se E= Æ, n(E)=0 e portanto, p(E)=0.

3. Se E é um evento de Ω, diferente do evento improvável e também do evento certo, temos que 0<p(E)<1.

Como 0<n(E)<n(Ω), dividindo todos os termos da desigualdade por n(Ω)>0:

$$\frac{0}{n(\Omega)} < \frac{n(E)}{n(\Omega)} < \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)}$$

Concluindo que 0<p(E)<1.

Lançando moedas novamente!!!!

Atividade 3

Suponhamos que uma moeda seja lançada três vezes, sucessivamente, e sejam observadas as ocorrências nas faces voltadas para cima.

a. Descreva o espaço amostral Ω.

b. Calcule a probabilidade de ocorrer o evento A: "ocorrer exatamente duas caras".

c. Calcule a probabilidade de ocorrer o evento B: "ocorrer pelo menos duas caras".

Anote suas respostas em seu caderno

O problema das urnas.

Atividade 4

Uma urna contém 20 bolas numeradas de 1 a 20. Uma bola é extraída ao acaso da urna. Qual a probabilidade de ser sorteada:

a. A bola de número 25?

b. Uma bola com número de 1 a 20?

c. Uma bola com número maior que 15?

Uma bola com número múltiplo de 3?

Anote suas respostas em seu caderno

Saiba Mais

As chances da Mega-Sena

A Mega-Sena é um dos jogos mais conhecidos da loteria, visto seus prêmios milionários. Bem, um volante da Mega-Sena contém 60 números, de 1 a 60. Para concorrer, pode-se apostar em seis números (aposta mínima), sete,..., até quinze números (aposta máxima). Quanto maior a quantidade de números marcados, mais caro fica a aposta, claro. A cada "rodada", são sorteados seis números dentre os 60. Há prêmios para quem acerta 4, 5 e 6 números.

Mas, fazendo uma aposta mínima (que custa 2 reais), quais as chances de ganhar?

O resultado de um sorteio pode ocorrer C60,6=50063860 modos distintos, pois a ideia é selecionar 6 números aleatoriamente dentre os 60.

Alguém acertará a sena se os seis números apostados coincidirem com os seis números sorteados, ou seja, apenas um caso favorável.

Daí, a probabilidade de alguém acertar a sena fazendo uma aposta mínima será de $\frac{1}{50063860} \cong 0{,}000002\%$. Quem acerta a sena fazendo apenas uma aposta mínima é um sortudo mesmo, não?

Concluindo....

Podemos observar que a teoria das probabilidades nos ajuda muito na tomada de uma decisão. Todavia, isto não quer dizer que a maior probabilidade implica na certeza do acontecimento. Por exemplo, ao lançar uma moeda ficou claro que há 50% de chaces de sair cara. Entretanto, é possível que alguém jogue uma moeda 10 vezes e sempre tenhamos a face coroa como resultado.

Resumo

- Chamamos de ESPAÇO AMOSTRAL ao conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento;
- Chamamos de EVENTO a qualquer subconjunto do espaço amostral de um experimento aleatório;
- espaço amostral é *equiprovável* quando os eventos unitários de um espaço amostral têm a mesma chance de ocorrer;
- A probabilidade do evento certo é igual a 1.
- A probabilidade do evento improvável é igual a 0.
- Se E é um evento de Ω, diferente do evento improvável e também do evento certo, temos que 0<p(E)<1.
- Como 0 < n(E) < n(Ω), dividindo todos os termos da desigualdade por n(Ω) > 0:

$$\frac{0}{n(\Omega)} < \frac{n(E)}{n(\Omega)} < \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)}$$

Concluindo que 0 < p(E) < 1.

Veja Ainda

No site http://www.somatematica.com.br/emedio/probabilidade.php podemos encontrar material explicativo, bem como alguns exercícios resolvidos;

No endereço http://www.youtube.com/watch?v=WLr17iKfA-k é possível visualizar uma aula do telecurso sobre Probabilidades. Vale a pena conferir.

Referências bibliográfcas

Livros

- IEZZI, Gelso, et al. *Matemática Ciência e Aplicações. 6ª edição, vol2. São Paulo, 2010. 320 páginas.*
- MORGADO, Augusto Cesar de Oliveira, ET ali, *Análise Combinatória e Probabilidade*, 2ª edição, Rio de Janeiro, 2001.

Imagens

- http://www.sxc.hu/photo/1126780, http://www.sxc.hu/photo/944643, http://www.sxc.hu/photo/1024895, http://www.sxc.hu/photo/872885

- https://encrypted- tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcQzrs5XSvmd9j6QsGvfX6k-sqpsk6SJtoR6P swVJ58spOCTTP4O9g

- http://www.sxc.hu/photo/1398688

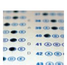
- http://www.sxc.hu/photo/522105

- http://www.sxc.hu/photo/1134318

- http://pt.wikipedia.org/wiki/Geometria_dos_dados

- http://www.sxc.hu/photo/710064

- http://www.sxc.hu/photo/1134743



- http://www.sxc.hu/photo/517386

Respostas das Atividades

Atividade 1

a. Ω={(cara,cara), (cara, coroa), (coroa, cara), (coroa, coroa)}. Poderíamos também introduzir uma notação, por exemplo, C=cara e K= coroa e assim teríamos Ω= {(C,C),(C,K), (K,C), (K,K)}.

b. H={(C,K), (K,C)}

c. V={(C,C)}

d. Sim é verdade, visto que temos 2 chances em 4 de ocorrer cara e coroa enquanto teríamos apenas 1 chance em 4 de ocorrer duas caras.

Atividade 2

a. Ω={

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

b. Observe que utilizando o princípio fundamental da contagem temos: 6.6= 36 elementos, que estão representados no item a.

b. W={(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)}

c. M={(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)}

Atividade 3

a. Chamando C=cara , K= coroa , temos:

Ω={CCC, CCK, CKC, CKK, KCC, KCK, KKC, KKK}

b. A={CCK, CKC, KCC} . Daí, temos: n(A)=3 e p(A) = $\frac{n(A)}{n(')} = \frac{3}{8} \cong 37{,}5\%$

c. B={CCC, CCK, CKC, KCC}. Daí, temos: n(B)=4 e p(B) = $\frac{n(B)}{n(')} = \frac{4}{8} \cong 50\%$

Respostas das Atividades

Atividade 4

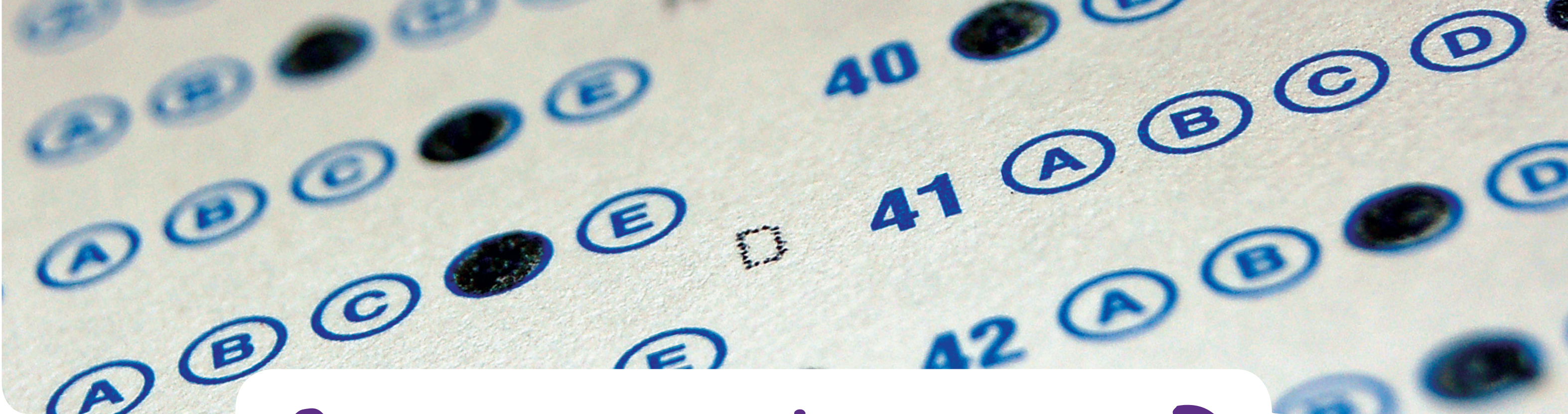
Observe que para calcular a probabilidade necessitamos da quantidade de elementos do espaço amostral e não de quais são seus elementos. Utilizamos muitas técnicas, principalmente os conceitos de análise combinatória: permutação, arranjo, combinação, etc... para deduzir tais valores, mas nesse caso é um pouco mais simples, pois sabemos que de 1 a 20 temos 20 números e portanto 20 é o número de elementos do espaço amostral. Daí:

a. O número de elementos desse evento é 0, visto que não temos o número 25, ou seja o evento é o próprio conjunto vazio. Daí a probabilidade procurada é: $\frac{0}{20}$ =0. Ou seja, esse é um caso de um evento improvável.

b. A probabilidade de ser sorteada uma bola com número de 1 a 20 será 100%, visto que este evento coincide com o espaço amostral, e, como vimos, esta probabilidade é igual a 1.

c. Como queremos calcular a probabilidade de sortear uma bola com número maior que 15, temos como evento o conjunto: {16, 17, 18, 19, 20} e, portanto, este evento possui 5 elementos. Daí a probabilidade de sortearmos uma bola com número maior que 15 será: $\frac{5}{20} = 0,40 = 40\%$.

Os múltiplos de 3 de um a 20 são {3, 6, 9, 12, 15, 18} e portanto são 6 possibilidades. Daí, a probabilidade procurada será: $\frac{6}{20} = 0,30 = 30\%$.



O que perguntam por aí?

Questão 1 (ENEM 2008)

O jogo-da-velha é um jogo popular, originado na Inglaterra. O nome "velha" surgiu do fato de esse jogo ser praticado, à época em que foi criado, por senhoras idosas que tinham dificuldades de visão e não conseguiam mais bordar. Esse jogo consiste na disputa de dois adversários que, em um tabuleiro 3×3, devem conseguir alinhar verticalmente, horizontalmente ou na diagonal, 3 peças de formato idêntico. Cada jogador, após escolher o formato da peça com a qual irá jogar, coloca uma peça por vez, em qualquer casa do tabuleiro, e passa a vez para o adversário. Vence o primeiro que alinhar 3 peças.

No tabuleiro representado ao lado, estão registradas as jogadas de dois adversários em um dado momento. Observe que uma das peças tem formato de círculo e a outra tem a forma de um xis. Considere as regras do jogo-da-velha e o fato de que, neste momento, é a vez do jogador que utiliza os círculos. Para garantir a vitória na sua próxima jogada, esse jogador pode posicionar a peça no tabuleiro de:

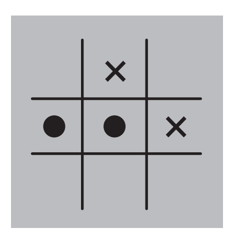
a. uma só maneira.

b. duas maneiras distintas.

c. três maneiras distintas.

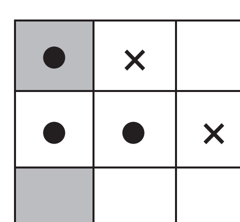
d. quatro maneiras distintas.

e. cinco maneiras distintas



Resposta: Letra B

Comentário:



1. Posicionando a peça na primeira linha e na primeira coluna, como indicado na figura, o jogador que utiliza os círculos assegurará a vitória na próxima jogada, pois alinhará 3 círculos na vertical ou na diagonal.

2. Posicionado a peça na terceira linha e na primeira coluna, o jogador que utiliza círculos também assegurará, pelos mesmos motivos, vitória na próxima jogada.

3. Nas demais posições, o jogador não poderá assegurar vitória na próxima jogada.

Questão 2

Ao retirarmos uma bola de uma urna que contém 20 bolas numeradas de 1 a 20, qual a **probabilidade** de a bola ser um número múltiplo de 3 ou ser primo?

a. 13/20

b. 26/21

c. 13/10

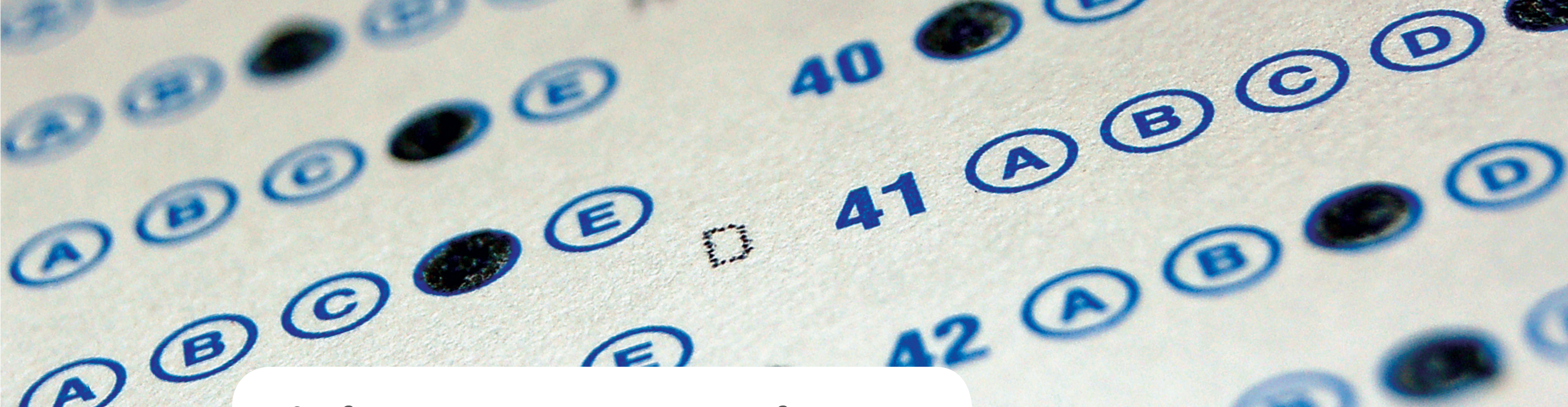
d. 7/10

e. 16/10

Resposta: Letra A

Comentário: Opções: 2,3,5,6,7,9,11,12,13,15,17,18,19, ou seja 13 opções.

Como são 20 números, teremos que a probabilidade é 13/20, letra A.



Atividade extra

Exercício 1

João queria sair de casa, mas não sabia qual era a previsão do tempo. Ao ligar a TV no canal do tempo, a jornalista anunciou que existia a possibilidade de chuva no fim da tarde era de 87%.

Qual a probabilidade de não ter chuva nesse dia?

(a) 0,1 (b) 0,13 (c) 0,5 (d) 0,87

Exercício 2

Em uma fábrica de pregos, a cada 40 pregos produzidos 5 são defeituosos. Pedro comprou um saco com 120 pregos produzidos nessa fabrica para construção de um telhado. Ao retirar o primeiro prego do saco, Pedro o observou para saber qual era a condição do mesmo.

Qual a probabilidade desse prego ser defeituoso?

(a) 0,125 (b) 0,15 (c) 0,4 (d) 0,5

Exercício 3

Apóos a semana de provas, a professora de matemática resolveu apresentar os resultados aos alunos em forma de tabela, como ilustrado na tabela.

Alunos	Desempenho
4	Muito bom
9	Bom
18	Regular
9	Insuficiente

Escolhendo um aluno ao acaso, qual a probabilidade de que o desempenho dele tenha sido muito bom?

(a) 0,04 (b) 0,10 (c) 0,16 (d) 0,40

Exercício 4

Em certo jogo de dados ganha aquele que, ao jogar os dados distintos, consegue tirar dois numeros cuja soma seja maior do que a soma dos dados do adversário. Pedro jogou os dados e na soma de ambos alcançou 8 pontos.

Qual a probabilidade de Paulo perder para Pedro?

(a) $\frac{4}{36}$ (b) $\frac{10}{36}$ (c) $\frac{18}{36}$ (d) $\frac{20}{36}$

Exercício 5

Em uma prova com cinco questões objetivas, cada questão constava de 4 alternativas de resposta. João sabia a resposta das quatro primeiras questões porém, na última ficou em dúvida e escolheu aleatoriamente a resposta.

Qual a probabilidade de João ter acertado a questão?

(a) 0,20 (b) 0,25 (c) 0,50 (d) 0,75

Exercício 6

Um atirador de elite tem 80% de aproveitamento em seus testes de tiro. Em um teste ele dá apenas três tiros e pede para observar se acertou ou não.

Qual a probabilidade de que tenha errado os três tiros?

(a) 0,008 (b) 0,108 (c) 0,208 (d) 0,608

Exercício 7

No Grande Prêmio Brasil de Turfe, temos dez cavalos no páreo, mas apenas três (A, B e C) com chances reais de chegar em primeiro lugar. O Cavalo A e o Cavalo B têm duas vezes mais chance de vencer que o Cavalo C.

Qual a probabilidade do cavalo C chegar em primeiro lugar?

(a) 0,20 (b) 0,25 (c) 0,33 (d) 0,50

Exercício 8

O sistema de emplacamento brasileiro consiste de três letras das 26 do alfabeto e mais quatro algarismos escolhidos de 0 a 9. Escolhemos uma placa ao acaso e vericamos que a sequência numérica representa um número par.

Qual a probabilidade da placa do carro ter como último dígito o número oito?

(a) 0,20 (b) 0,26 (c) 0,5 (d) 0,9

Exercício 9

Em uma turma o professor resolve testar os conhecimentos matemáticos de seus alunos. Ele coloca em sua mesa uma caixa com 25 bolas, 17 azuis e 8 pretas. Maria é escolhida para retirar uma bola da caixa, anotar a cor e recolocar na caixa. Logo depois o professor pede a um aluno que adivinhe a cor da bola.

Qual a probabilidade desse aluno acertar?

(a) $\frac{17}{25}$ (b) $\frac{8}{25}$ (c) $\frac{25}{50}$ (d) $\frac{17}{50}$

Exercício 10

Uma pessoa escreve todos os anagramas da palavra AMOR em pedaços de papel iguais, dobrados e os coloca em um saco. Logo em seguida ela retira um pedaço de papel.

Qual a probabilidade de que seja retirado um anagrama que comece com a letra R?

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{5}$

Exercício 11

Em uma escola constatou-se que 60% dos alunos não usam nenhuma joia, enquanto 20% usam anéis e 30% usam colares. Escolhendo um aluno ao acaso, qual a probabilidade de que ele use ambas as jóias?

Exercício 12

Uma urna contém 30 bolinhas numeradas de 1 a 30. Retiramos ao acaso uma bolinha dessa urna.

Qual a probabilidade de que essa bolinha seja um número múltiplo de 4 e 3?

Exercício 13

Em uma garrafa opaca fechada existem 10 bolinhas, distribuídas entre as cores azul e branca. Não é possível ver as bolinhas dentro da garrafa, exceto se virarmos a garrafa de ponta-cabeça, quando uma das bolinhas vai para o gargalo e é possível ver sua cor. Ao longo de vários dias, repetiu-se 2000 vezes a seguinte operação: chacoalhava-se e tombava-se a garrafa para então anotar a cor da bolinha que aparecia no gargalo. Foi observada a ocorrência da cor azul 624 vezes, enquanto a cor branca ocorreu 1376 vezes, no dia seguinte a operação se repetiu.

Qual a probabilidade de que tenha sido uma bola de cor azul?

Exercício 14

Em uma cidade existem apenas três jornais A, B e C, mas nem todos os habitantes são leitores assíduos. A porcentagem de habitantes que lê cada jornal segue na tabela abaixo.

Jornal	% de leitores
A	10
B	30
C	5
A e B	8
A e C	2
B e C	4
A, B e C	1

Escolhendo um habitante por acaso, qual a probabilidade de que ele não leia nenhum jornal?

Exercício 15

Um jogo de Dominó é composto de peças retangulares formadas pela junção de dois quadrados. Em cada quadrado há a indicação de um número, representado por uma certa quantidade de bolinhas, que variam de nenhuma a seis. O número total de combinações possíveis é de 28 peças diferentes. Escolhendo uma peça ao acaso, qual a probabilidade de que ela contenha o numero 3?

Gabarito

Exercício 1

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 2

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 3

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 4

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 5

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 6

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 7

A B C D

● ○ ○ ○

Exercício 8

A B C D

● ○ ○ ○

Exercício 9

A B C D

○ ○ ● ○

Exercício 10

A B C D

○ ○ ● ○

Exercício 11

Se 60% não usam jóias, então 40% usam jóias, somando os que usam anéis com os que usam colares temos 50%, logo existem 10% que estão sendo contados duas vezes, pois usam os dois tipos de jóias.

Logo a probabilidade de usar ambas as jóias é 10% ou 0,1.

Exercício 12

Espaço amostral: $n(S) = 30$

Eventos múltiplos de 4:

$M_4 = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\} \rightarrow n(M_4) = 7$

$M_3 = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\} \rightarrow n(M_3) = 10$

Eventos múltiplos de 4 e 3:

$M_4 \cap M_3 = \{12, 24\}$

$n(M_4 \cap M_3) = 2$ e $P(M_4 \cap M_3) = 2/30$

Exercício 13

$\frac{624}{2000} = 0{,}312$ ou 31,2% de chance de sair uma bola na cor azul.

Exercício 14

Monte o diagrama de Veem para compreender. Resposta: 68%.

Exercício 15

As peças que contêm o numero três são (3; 0); (3; 1); (3; 2); (3; 3); (3; 4); (3; 5) e (3; 6), de um total de 28 peças. Logo a probabilidade é $\frac{7}{8} = \frac{1}{4} = 25\%$