CEJA >>

CENTRO DE EDUCAÇÃO
de JOVENS e ADULTOS

MATEMÁTICA
e suas TECNOLOGIAS >>

Fascículo 11
Unidades 34, 35 e 36

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Governador
Wilson Witzel

Vice-Governador
Claudio Castro

SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO

Secretário de Estado
Leonardo Rodrigues

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO

Secretário de Estado
Pedro Fernandes

FUNDAÇÃO CECIERJ

Presidente
Gilson Rodrigues

PRODUÇÃO DO MATERIAL CEJA (CECIERJ)

Coordenação Geral de Design Instrucional
Cristine Costa Barreto

Coordenação de Matemática
Agnaldo da C. Esquincalha
Gisela M. da F. Pinto
Heitor B. L. de Oliveira

Revisão de conteúdo
José Roberto Julianelli
Luciana Getirana de Santana

Elaboração
Cléa Rubinstein
Daniel Portinha Alves
Heitor B. L. de Oliveira
Leonardo Andrade da Silva
Luciane de P. M. Coutinho
Maria Auxiliadora Vilela Paiva
Raphael Alcaires de Carvalho
Rony C. O. Freitas
Thiago Maciel de Oliveira

Atividade Extra
Benaia Sobreira de Jesus Lima
Carla Fernandes e Souza
Diego Mota Lima
Paula Andréa Prata Ferreira
Vanessa de Albuquerque

Coordenação de Design Instrucional
Flávia Busnardo
Paulo Miranda

Design Instrucional
Rommulo Barreiro
Letícia Terreri

Revisão de Língua Portuguesa
Paulo Cesar Alves

Coordenação de Produção
Fábio Rapello Alencar

Capa
André Guimarães de Souza

Projeto Gráfico
Andreia Villar

Imagem da Capa e da Abertura das Unidades
http://www.sxc.hu/photo/789420

Diagramação
Alessandra Nogueira
Carlos Eduardo Vaz de Oliveira
Juliana Fernandes

Ilustração
Bianca Giacomelli
Clara Gomes
Fernado Romeiro
Jefferson Caçador
Sami Souza

Produção Gráfica
Verônica Paranhos

Sumário

Prezado(a) Aluno(a),

Seja bem-vindo a uma nova etapa da sua formação. Estamos aqui para auxiliá-lo numa jornada rumo ao aprendizado e conhecimento.

Você está recebendo o material didático impresso para acompanhamento de seus estudos, contendo as informações necessárias para seu aprendizado e avaliação, exercício de desenvolvimento e fixação dos conteúdos.

Além dele, disponibilizamos também, na sala de disciplina do CEJA Virtual, outros materiais que podem auxiliar na sua aprendizagem.

O CEJA Virtual é o Ambiente virtual de aprendizagem (AVA) do CEJA. É um espaço disponibilizado em um site da internet onde é possível encontrar diversos tipos de materiais como vídeos, animações, textos, listas de exercício, exercícios interativos, simuladores, etc. Além disso, também existem algumas ferramentas de comunicação como chats, fóruns.

Você também pode postar as suas dúvidas nos fóruns de dúvida. Lembre-se que o fórum não é uma ferramenta síncrona, ou seja, seu professor pode não estar online no momento em que você postar seu questionamento, mas assim que possível irá retornar com uma resposta para você.

Para acessar o CEJA Virtual da sua unidade, basta digitar no seu navegador de internet o seguinte endereço: http://cejarj.cecierj.edu.br/ava

Utilize o seu número de matrícula da carteirinha do sistema de controle acadêmico para entrar no ambiente. Basta digitá-lo nos campos “nome de usuário” e “senha”.

Feito isso, clique no botão “Acesso”. Então, escolha a sala da disciplina que você está estudando. Atenção! Para algumas disciplinas, você precisará verificar o número do fascículo que tem em mãos e acessar a sala correspondente a ele.

Bons estudos!

Probabilidade 2

Fascículo 11

Unidade 34

Fundação CECIERJ

Probabilidade 2

Para início de conversa...

Na unidade anterior observamos uma introdução ao estudo das probabilidades. Como exemplos, utilizamos o lançamento de moedas e de dados dentro de um espaço amostral, que é uma situação comum em nosso cotidiano.

Uma atividade bastante também muito corriqueira em nosso dias é o jogo de cartas.

Figura 1: Cartas de um baralho.

Observe que nos exemplos e atividades resolvidos na unidade anterior não havia dependência entre as escolhas, isto é, foram feitas escolhas sobre a moeda lançada, sobre o dado lançado e assim por diante. São escolhas simples, onde uma decisão não depende da outra. Por exemplo, podemos verificar a probabilidade de escolher uma carta de naipe vermelho em um baralho.

Figura 2: Naipes de um baralho.

Como são 52 cartas e metade delas tem o naipe vermelho, teremos uma probabilidade de cinquenta por cento.

Todavia, existem algumas situações onde os acontecimentos ficam dependentes uns dos outros. Nesta unidade iremos estudar estes casos, ou seja, quando existe mais de uma condição a ser avaliada ao determinarmos a probabilidade de um evento acontecer.

Objetivos de aprendizagem

- Resolver problemas que envolvem probabilidade da união de eventos.
- Probabilidade de eventos complementares.
- Descrever o conceito de probabilidade Condicional.

Seção 1
Vamos lançar moedas e dados novamente e resolver alguns problemas diferentes?

Vimos na aula passada como é interessante pensar sobre probabilidades utilizando moedas e dados, não é verdade? Então, vamos continuar utilizando estes objetos como referência para o nosso aprendizado, além de cartas e outros problemas que não envolvam jogos também.

Probabilidade da união de dois eventos

Vamos resolver um problema que consiste em descobrir a probabilidade de, no lançamento de dois dados, ocorrer a soma dos números obtidos nas faces superiores ser igual a 6 **ou** ocorrer um múltiplo de 3 em cada uma das faces superiores.

Inicialmente poderíamos pensar que bastaria calcularmos a probabilidade de ocorrer a soma igual 6, que, como já vimos na aula anterior seria de $\frac{5}{36}$ e somar com a probabilidade de ocorrer um múltiplo de 3 em cada face superior, que seria de $\frac{4}{36}$ (visto que este evento: "ocorrer um múltiplo de 3 em cada face superior" têm 4 elementos: {(3,3), (3,6). (6,3). (6,6)} e o número de elementos do espaço amostral, como vimos na aula anterior é 36), encontrando $\frac{5}{36}+\frac{4}{36}=\frac{9}{36}$.

Mas, quando refletimos melhor sobre essa resposta, podemos observar que não é a solução correta, visto que utilizamos o “elemento” (3,3) em ambos os eventos, pois a soma dos números é igual a 6 e também cada um dos números é um múltiplo de 3. Portanto, a resposta correta seria $\frac{8}{36}$.

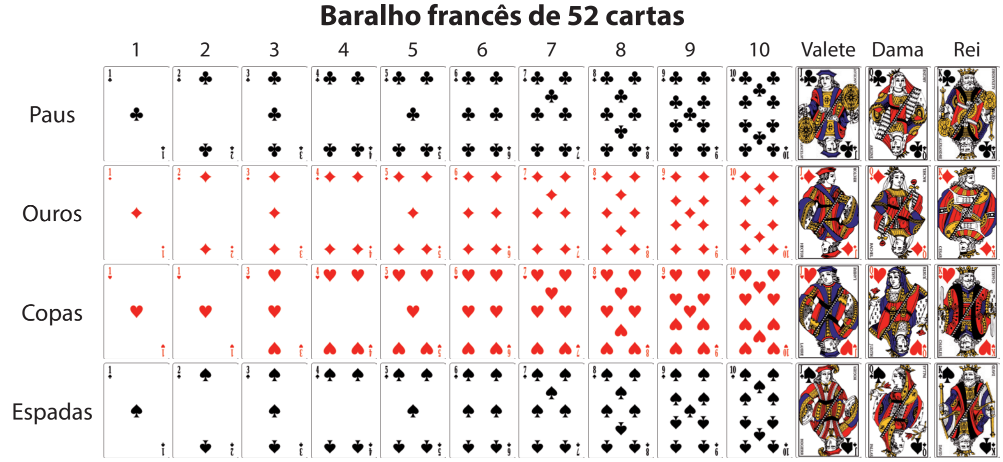
Na seção 2, veremos de uma forma um pouco mais formal, o porquê desta retirada.

CONHECENDO UM BARALHO

Baralho francês de 52 cartas

O principal baralho de 52 cartas em uso atualmente inclui 13 cartas de cada um dos quatro naipes franceses, paus (♣), ouros (♦), copas (♥) e espadas (♠), com cartas de figuras. Cada naipe inclui um ás, que descreve um único símbolo de seu naipe (muito grande, muitas vezes apenas o ás de espadas) um rei (representado pela letra K), uma rainha (representada pela letra Q), e um valete (representado pela letra J), cada um representado com um símbolo de seu naipe, com valores de dois a dez, com cada cartão mostrando o número de símbolos de seu naipe. Para além destas 52 cartas, baralhos comerciais geralmente incluem dois coringas. Em muitos jogos, os coringas não são usados. Os coringas são geralmente distinguidos pela cor.

Baralho francês de 52 cartas



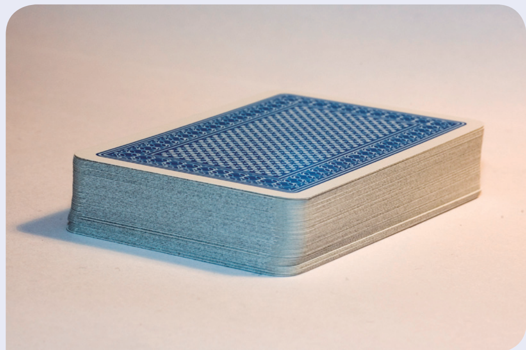
Este baralho é muito utilizado em problemas de probabilidades, assim como em diversos jogos, que podem utilizar probabilidade, como é o caso do poker.

Fonte: (retirado do site: http://pt.wikipedia.org/wiki/Baralho)

.

Probabilidade e baralho.

Atividade 1



De um baralho de 52 cartas, uma é extraída ao acaso. Qual é a probabilidade de sair:

a. Um valete de paus?

b. Um quatro?

c. Uma carta de copas?

d. Um rei ou uma carta de espadas?

Lembre-se: faça em uma folha à parte

Probabilidade de eventos complementares

Já estudamos anteriormente que um evento é qualquer subconjunto de um espaço amostral Ω. Por exemplo, se em uma urna há 10 fichas numeradas de 1 a 10, o experimento "retirar um número menor que 5" é dado por $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Chamamos de evento complementar de E àquele que ocorrerá somente quando E não ocorrer, neste caso, "o número retirado ser maior ou igual a 5". Representaremos por $E^c = \{6, 7, 8, 9, 10\}$. Observemos ainda que $E \cup E^c = \Omega$ e que $E \cap E^c = \phi$

Uma propriedade interessante de um espaço amostral finito e equiprovável Ω é que: Se E é um evento de Ω, e E^c é o evento complementar de E, então $P(E^c) = 1 - P(E)$.

Podemos verificar a veracidade desta afirmação de maneira simples! Como $E \cup E^c = \Omega$ e $E \cap E^c = \phi$, podemos escrever:

$$n(E) + n(E^c) = n(\Omega)$$

Dividindo os dois membros dessa igualdade por $n(\Omega) \neq 0$, temos:

$$\frac{n(E)}{n(\Omega)} + \frac{n(E^c)}{n(\Omega)} = \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(E) + P(E^c) = 1\,.$$

Daí, chegamos na afirmação desejada.

Exemplo: De um baralho com 52 cartas, retiramos ao acaso, uma carta. Qual é a probabilidade de não sair um valete?

Como há 4 valetes no baralho, sabemos que a probabilidade de retirarmos um valete, ao acaso, é de 4/52. Portanto, a probabilidade de não ocorrer um valete (evento complementar) é 1 – 4/52 = 48/52, simplificando temos 12/13.

Atividade 2

Retirando uma bola de uma urna

Uma urna contém 100 bolas numeradas de 1 a 100. Uma bola é extraída ao acaso da urna. Qual a probabilidade de ser sorteada uma bola com número menor ou igual a 99?

Lembre-se: faça em uma folha à parte

Probabilidade condicional

Condicional

1. Dependente de condição.
2. Que envolve condição, ou exprime circunstância de condição.
3. Gram Dizia-se do modo de verbo que enuncia o fato sob a dependência de uma condição; na N.G.B. desapareceu o modo condicional, que passou a denominar-se futuro do pretérito (simples e composto), enquadrado no modo indicativo.
4. Gram Qualificativo da conjunção subordinativa que liga exprimindo condição. sm 1 Condição. 2 Gram O modo condicional (V a acepção 3 do adj). sf Gram Conjunção subordinativa que introduz oração exprimindo uma hipótese ou condição necessária para que se realize ou não o que se expressa na principal: Se queres paz, defende-te. Eu não seria nada, caso você não existisse."

Fonte: http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/index.php?lingua=portugues-portugues&palavra=condicional)

Do verbete acima, podemos concluir que a probabilidade condicional é aquela que envolve algum tipo de condição. Geralmente pretendemos encontrar a probabilidade de um evento ocorrer "*sabendo que*" ou "*dado que*" já ocorreu algo. Por exemplo:

1. Um dado é lançado e sabe-se que a face superior tem um número ímpar. Qual é a probabilidade de que o número obtido seja primo?

Solução:

Lembrando que um número é primo quando possui apenas dois divisores distintos, (1 e o próprio número) temos que, se chamarmos de G o evento: "obter um nº primo", teremos que G = {3,5}, visto que o 1 não é primo por possuir um só divisor.

Observe que, neste caso, o espaço amostral quer iremos utilizar não é $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, pois já sabemos que na face superior tem um número ímpar, o que faz aumentar a nossa probabilidade, ou seja, utilizamos $\Omega' = \{1,3,5\}$ como o "novo" espaço amostral e, com isso, temos como resultado: $P(G) = \frac{n(G)}{n(\Omega)} = \frac{2}{3}$.

2. Uma família planejou ter 3 crianças. Qual é a probabilidade de que a família tenha 3 meninas, já que a primeira criança que nasceu é menina?

Considerando H como menino e M como menina, podemos considerar o espaço amostral relativo as possibilidades de nascimento como Ω = {HHH, HHM, HMH, HMM, MHH, MHM, MMH, MMM}. Mas como já sabemos que a primeira criança que nasceu é menina, o espaço amostral considerado deve ficar restrito às possibilidades onde o primeiro nascimento é menina, ou seja, Ω': {MHH, MHM, MMH, MMM}.

Como queremos encontrar a probabilidade de que a família tenha 3 meninas, o evento K: " nascer três meninas" : {MMM}.

Daí, P(K) = ¼.

Novamente, ressalto aqui, que na próxima seção aprenderemos uma fórmula para calcular a probabilidade condicional, mas fique a vontade para utilizá-la quando desejar ou então resolva os problemas sem ela como fizemos nestes dois exemplos.

Atividade 3

Lançando dados, novamente!

Jogam-se dois dados. Qual é a probabilidade de se obter 3 no primeiro dado, se a soma dos resultados é 6?

Lembre-se: faça em uma folha à parte

Seção 2
Vamos rever alguns problemas de uma maneira diferente?

Nesta seção veremos de uma forma um pouco diferente o que estudamos até agora nesta aula. Vamos lá!

Sobre a probabilidade da união de dois eventos:

Sejam A e B eventos de um mesmo espaço amostral Ω finito, não vazio e equiprovável (se esqueceu o que é, volta na aula anterior, encontre e releia! Isso é sempre uma boa atividade). Vamos encontrar uma expressão para a probabilidade de ocorrer o evento A ou o evento B, ou seja, a probabilidade de ocorrer o evento $A \cup B$. (observem que o operador ***ou*** está relacionado a união $\cup$, assim como o operador ***e*** está relacionado com a intersecção $\cap$.)

Vimos na teoria dos conjuntos que $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

Lembrando que como é um evento equiprovável, teremos $n(\Omega) \neq \phi$, assim podemos dividir toda a expressão acima por $n(\Omega)$, o que nos permite achar a equação

$$\frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}$$

Sabemos que a probabilidade de um evento é determinada pela razão entre o número de possibilidades do evento e o espaço amostral. Assim teremos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Caso esta interseção $(A \cap B)$ seja vazia, teremos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Bem, definida esta equação, voltemos ao problema que já resolvemos na seção 1.1: descobrir a probabilidade de no lançamento de dois dados ocorrer a soma dos números obtidos nas faces superiores ser igual a 6 ou ocorrer um múltiplo de 3 em cada uma das faces superiores.

Seja A o evento "ocorrer a soma 6" e o evento B: "ocorrer um múltiplo de 3 em cada uma das faces". Queremos descobrir $P(A \cup B)$.

Temos que A:{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2) e (5,1)} >>> n(A)=5

B:{(3,3), (3,6), (6,3),(6,6)} >>>>>>>>>>n(B)=4

$A \cap B$: {(3,3)} >>>>>>>>>>>>>>>>>>>>$n(A \cap B)=1$

Como estamos trabalhando com o lançamento de dois dados, sabemos que o total de possibilidades é $n(\Omega)=36$.

Como, acabamos de ver que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, calculando as probabilidades temos que:

$P(A) = n(A)/ n(\Omega) = 5/36$

$P(B) = n(B)/ n(\Omega) = 4/36$

$P(A \cap B)= n(A \cap B)/ n(\Omega) = 1/36$

Daí, $P(A \cup B) = 5/36 + 4/36 - 1/36 = 8/36$, que é a resposta que encontramos anteriormente.

Sobre a probabilidade condicional:

Definição: Sejam A e B eventos de um espaço amostral Ω, finito e não vazio. A probabilidade condicional do evento A, sabendo que ocorreu o evento B, é indicada por P(A|B) e é dada por:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

Ou seja, a probabilidade condicional do evento A, sabendo que ocorreu o evento B é igual ao número de elementos da interseção de A com B dividido pelo número de elementos de B.

Podemos chegar numa expressão equivalente a esta dividindo o numerador e o denominador do 2º membro por n(Ω):

$$P(A|B) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(B)}{n(\Omega)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Voltemos ao problema "1) Um dado é lançado e sabe-se que a face superior tem um número ímpar. Qual é a probabilidade de que o número obtido seja primo?" e resolvamos com a fórmula obtida.

Chamando de evento A: "o número obtido deve ser primo" e o evento B: "o número da face superior é impar". Queremos encontrar P(A|B), visto que queremos encontrar a probabilidade do número ser primo sabendo que o nº da face superior é impar, correto? Sim! Então vamos continuar...

Ω={1,2,3,4,5,6} >>>> n(Ω)=6

A={2,3,5}

B={1,3,5} >>>>>>>>>n(B)=3

$A \cap B$={3,5}>>>>>>>>>n($A \cap B$)=2

Daí, temos que:

$P(A \cap B) = n(A \cap B) / n(\Omega) = 2/6$

$P(B) = n(B) / n(\Omega) = 3/6$

Portanto, $P(A|B) = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{6} \cdot \frac{6}{3} = \frac{2}{3}$

Que foi a mesma resposta que encontramos fazendo sem a fórmula.

Sobre o sexo dos filhos...

Refaça a atividade: "Uma família planejou ter 3 crianças. Qual é a probabilidade de que a família tenha 3 meninas, já que a primeira criança que nasceu é menina?", utilizando a fórmula.

Atividade 4

Anote suas respostas em seu caderno

Conclusão

Como observamos, algumas probabilidades são encontradas de forma simples, enquanto em outras há a presença da condicionalidade. Nestes casos é preciso verificar cada situação a parte.

Podemos utilizar as fórmulas definidas nesta unidade, todavia a resolução pode ser feita de maneira analítica, sem a preocupação em decorar estas equações pré determinadas.

Resumo

- A soma das probabilidades de um evento com seu complementar é igual a um. $P(E) + P(E^c) = 1$
- Na probabilidade da união de dois eventos temos:

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Caso a interseção de A e B seja vazia, teremos $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Na probabilidade condicional temos $P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$.

Veja ainda

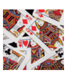
No site http://www.youtube.com/watch?v=YP9ogKGvk4w é possível acompanhar uma aula de probabilidade condicional com a resolução de exercícios.

Referências

Livros

- IEZZI, Gelso, et al. *Matemática Ciência e Aplicações.* 6ª edição, vol2. São Paulo, 2010. 320 páginas.
- MORGADO, Augusto Cesar de Oliveira. *Análise Combinatória e Probabilidade*, 2ª edição, Rio de Janeiro, 2001.

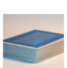
Imagens


- http://t1.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcSqxRAUe0SL5PCvqGPBp_8w2bA1oGH0TzKytxT2j9SKOYommPFn


- http://t1.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcSkURlN_uKjmBJZqc89g9hsEdmJ8xHh-CJC8Sv0LqsNGGdA549g

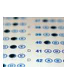

- http://www.sxc.hu/photo/1256359


- http://pt.wikipedia.org/wiki/Baralho


- http://www.sxc.hu/photo/739150


- http://www.sxc.hu/photo/799819


- http://www.sxc.hu/photo/1394373


- http://www.sxc.hu/photo/517386

Respostas das Atividades

Atividade 1

Observem que $n(\Omega) = 52$, visto que é o nº total de cartas de um baralho. Daí:

a. Sendo A o evento: "sair um valete de paus", teríamos n(A)=1, visto que só há um valete de paus e, portanto, $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{52} \cong 1{,}9\%$

b. Sendo B o evento: "sair um quatro", teríamos n(B)=4, visto que temos 4 naipes e um quatro de cada naipe. Portanto $\frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{4}{52} \cong 7{,}6\%$.

c. Sendo C o evento: "sair uma carta de copas", teríamos n(C)=13, visto que temos 13 cartas de cada um dos 4 naipes e, portanto, $\frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{13}{52} = 25\%$.

Sabemos que a probabilidade de sair um rei é a mesma de ocorrer um quatro, ou seja, 4/52, e a probabilidade de sair uma carta de espadas é a mesma de sair uma carta de copas, ou seja, é de, 13/52. Somando essas duas probabilidades temos, 17/52, mas temos que retirar a probabilidade de sair um rei de espadas, pois o contamos duas vezes, ou seja, temos que retirar 1/52, encontrando como resposta 16/52.

Atividade 2

Se considerarmos o evento L: "sortear uma bola com número menor ou igual a 99", vemos claramente que é mais simples encontrar o seu evento complementar L^c: "sortear uma bola com número maior que 99", visto que $n(L^c)=1$, pois só temos o 100 maior que 99 na urna. Como $n(\Omega)=100$. Temos que $P(L) = 1 - P(L^c)$, ou seja $P(L) = 1 - 1/100 = 99/100$.

Atividade 3

Jogam-se dois dados. Qual é a probabilidade de se obter 3 no primeiro dado, se a soma dos resultados é 6?

Sabemos que a soma dos resultados é igual a 6. Portanto nosso $\Omega' = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$. Bem, nosso evento F: "obter 3 no primeiro resultado": $\{(3,3)\}$ e portanto a probabilidade procurada é $P(F) = n(F)/n(\Omega) = 1/5$.

Respostas das Atividades

Atividade 4

Temos que Ω={HHH, HHM, HMH, HMM, MHH, MHM, MMH, MMM} , n(Ω) = 8

Chamando de A: “ família ter 3 meninas” e B: “ a primeira criança que nasceu é menina”, temos:

A={MMM}

B={MHH, MHM, MMH, MMM}>>>>>n(B)=4

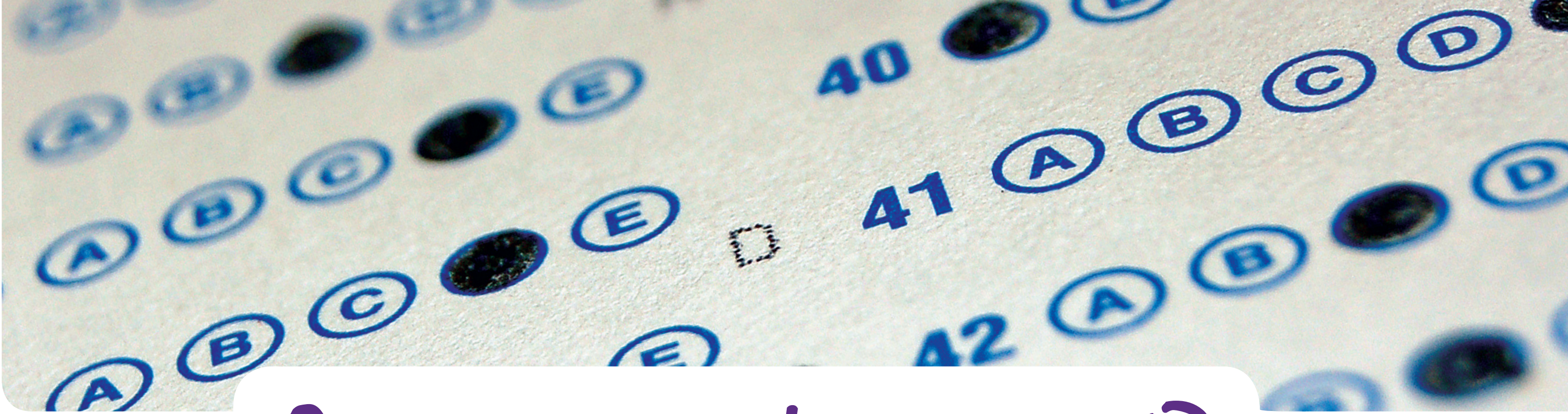
A ∩ B={MMM}>>>>>>>>>>>>>>>>>n(A ∩ B)=1

Daí, temos que:

P(A ∩ B) = n(A ∩ B) / n(Ω) = 1/8

P(B) = n(B) / n(Ω) = 4/8

Portanto, $P(A|B) = \dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{4}{8}} = \dfrac{1}{8}.\dfrac{8}{4} = \dfrac{1}{4} = 25\%$



O que perguntam por aí?

(ENEM -2012)

José, Paulo e Antônio estão jogando dados não viciados, nos quais, em cada uma das seis faces, há um número de 1 a 6. Cada um deles jogará dois dados simultaneamente. José acredita que, após jogar seus dados, os números das faces voltadas para cima lhe darão uma soma igual a 7. Já Paulo acredita que sua soma será igual a 4 e Antônio acredita que sua soma será igual a 8.

Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de acertar sua respectiva soma é

a. Antônio, já que sua soma é a maior de todas as escolhidas.

b. José e Antônio, já que há 6 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 4 possibilidades para a escolha de Paulo.

c. José e Antônio, há que há 3 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 2 possibilidades para a escolha de Paulo.

d. José, já que há 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades parar formar a soma de Paulo.

e. Paulo, já que sua soma é a menor de todas.

Resposta: Letra D.

Comentário:

Vimos na aula passada, o quadro do lançamento de dois dados:

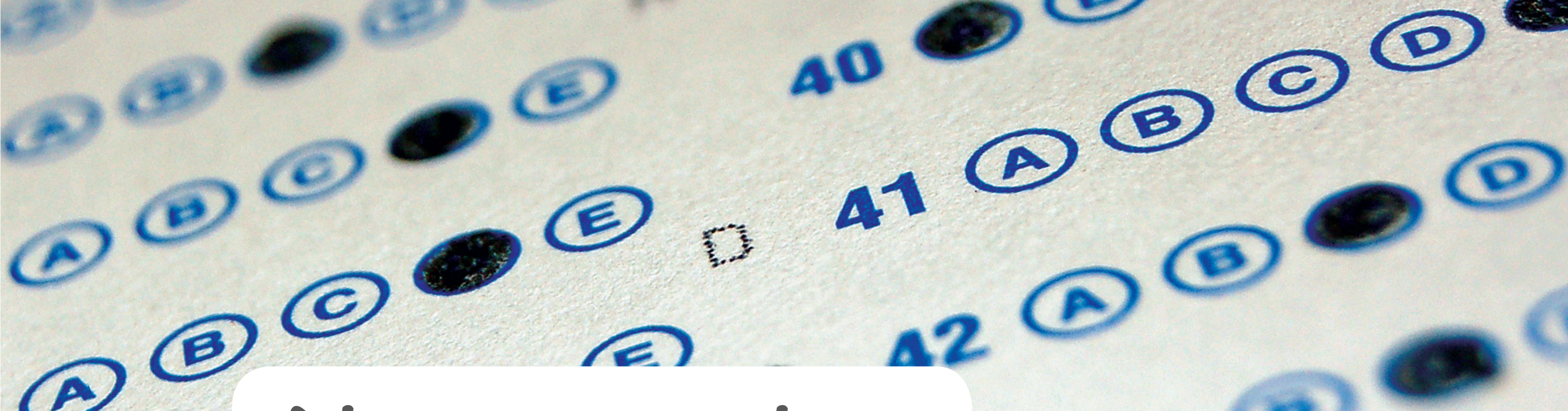
	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)

4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Que fazendo a soma dos números que aparecem na face superior, gerou o quadro:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Onde podemos observar, facilmente, que a soma 7 aparece 6 vezes, a soma 4 aparece apenas 3 vezes e a soma 8 aparece 5 vezes. Portanto quem tem a maior possibilidade de acertar é José, pois a soma 7 é a que aparece maior número de vezes no nosso quadro da soma.



Atividade extra

Exercício 1

Um teste de múltipla escolha e composto de 12 questões, com 5 alternativas de resposta, sendo que somente uma, é correta.

Qual a probabilidade de uma pessoa, marcando aleatoriamente as 12 questões, acertar metade das respostas?

(a) 1,55% (b) 1,35% (c) 1,25% (d) 1,05%

Exercício 2

Lançando dois dados perfeitos, pergunta-se:

Qual a probabilidade de que a soma dos resultados obtidos seja igual a 6?

(a) 15,86% (b) 13,88% (c) 12,68% (d) 10,88%

Exercício 3

Em uma urna existem bolas enumeradas de 1 a 15. Qualquer uma delas possui a mesma chance de ser retirada.

Qual a probabilidade de se retirar uma bola com número par?

(a) 40,3% (b) 38,4% (c) 43,6% (d) 46,6%

Exercício 4

Em uma urna há 5 bolas verdes, numeradas de 1 a 5, e 6 bolas brancas, numeradas de 1 a 6. Dessa urna retiram-se, sucessivamente e sem reposição, duas bolas.

Quantas são as extrações nas quais a primeira bola sacada é verde e a segunda contém um número par?

(a) 15 (b) 20 (c) 23 (d) 25

Exercício 5

Em uma mesa, estão espalhados 50 pares de cartas. As duas cartas de cada par são iguais e cartas de pares distintos são diferentes. Suponha que duas dessas cartas são retiradas da mesa ao acaso.

Qual a probabilidade dessas duas cartas serem iguais?

(a) 1/100 (b) 1/99 (c) 1/50 (d) 1/49

Exercício 6

Considere uma prova constituda de quatro questões cada uma com quatro alternativas, das quais apenas uma é correta. Um candidato decide fazer essa prova escolhendo, aleatoriamente, uma alternativa em cada questão.

Qual a probabilidade desse candidato acertar exatamente uma questão?

(a) 27/64 (b) 27/256 (c) 9/64 (d) 9/256

Exercício 7

Em um jogo de bingo são sorteadas, sem reposição, bolas numeradas de 1 a 75, e um participante concorre com a cartela reproduzida abaixo.

Bingo				
5	18	33	48	64
12	21	31	51	68
14	30		60	71
13	16	44	46	61
11	27	41	49	73

Qual é a probabilidade de que os três primeiros números sorteados estejam nessa cartela?

(a) 1% (b) 2% (c) 3% (d) 4%

Exercício 8

Em uma empresa, o risco de alguém se acidentar é dado pela razão 1 em 30.

Qual a probabilidade de 3 funcionários se acidentarem?

(a) 0,0037% (b) 0,0011% (c) 0,0017% (d) 0,0027%

Exercício 9

Dois dados são lançados simultaneamente.

Qual a probabilidade de que a soma seja 7?

(a) 18,84% (b) 16,66% (c) 14,22% (d) 12,88%

Exercício 10

Ao retirarmos uma bola de uma urna que contém 20 bolas numeradas de 1 a 20.

Qual a probabilidade de a bola ser um número múltiplo de 3 ou ser primo?

(a) 13/20 (b) 26/21 (c) 13/10 (d) 7/10

Exercício 11

Necessita-se organizar 3 livros de matemática, 2 de física e 4 de português em uma prateleira.

De quantas maneiras podemos ordená-los de modo que os livros da mesma área de conhecimento fiquem sempre juntos?

Exercício 12

Numa pesquisa sobre preferência entre dois refrigerantes, Coca-Cola e guaraná, obtivemos o seguinte resultado: 20 tomam guaraná, 15 tomam Coca- Cola, 08 tomam os dois e 03 não tomam nenhum dos dois.

Qual a probabilidade de uma pessoa, que participou da pesquisa, tomar guaraná ou Coca-Cola?

Exercício 13

Um aluno prestou vestibular em apenas duas universidades. Suponha que, em uma delas, a probabilidade de que ele seja aprovadoé de 30%, enquanto na outra, pelo fato de a prova ter sido mais fácil, a probabilidade de sua aprovação sobe para 40%.

Qual a probabilidade desse aluno ser aprovado em pelo menos uma dessas universidades?

Exercício 14

O quadro funcional de uma empresa é composto de 35 pessoas efetivas e 15 pessoas prestadoras de serviços. Do pessoal efetivo 20 são homens e do pessoal prestador de serviço e 5 são mulheres.

Qual a probabilidade de uma pessoa ser homem ou prestar serviço?

Exercício 15

Em uma população de aves, a probabilidade de um animal estar doente é 1/25. Quando uma ave está doente, a probabilidade de ser devorada por predadores é 1/4, e, quando não está doente, a probabilidade de ser devorada por predadores é 1/40.

Escolhida uma ave aleatoriamente, qual a probabilidade de ela ser devorada por predadores?

Gabarito

Exercício 1

A ● B ○ C ○ D ○

Exercício 2

A ○ B ● C ○ D ○

Exercício 3

A ○ B ○ C ○ D ●

Exercício 4

A ○ B ○ C ● D ○

Exercício 5

A ○ B ● C ○ D ○

Exercício 6

A ● B ○ C ○ D ○

Exercício 7

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 8

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 9

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 10

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 11

1728.

Exercício 12

5/6.

Exercício 13

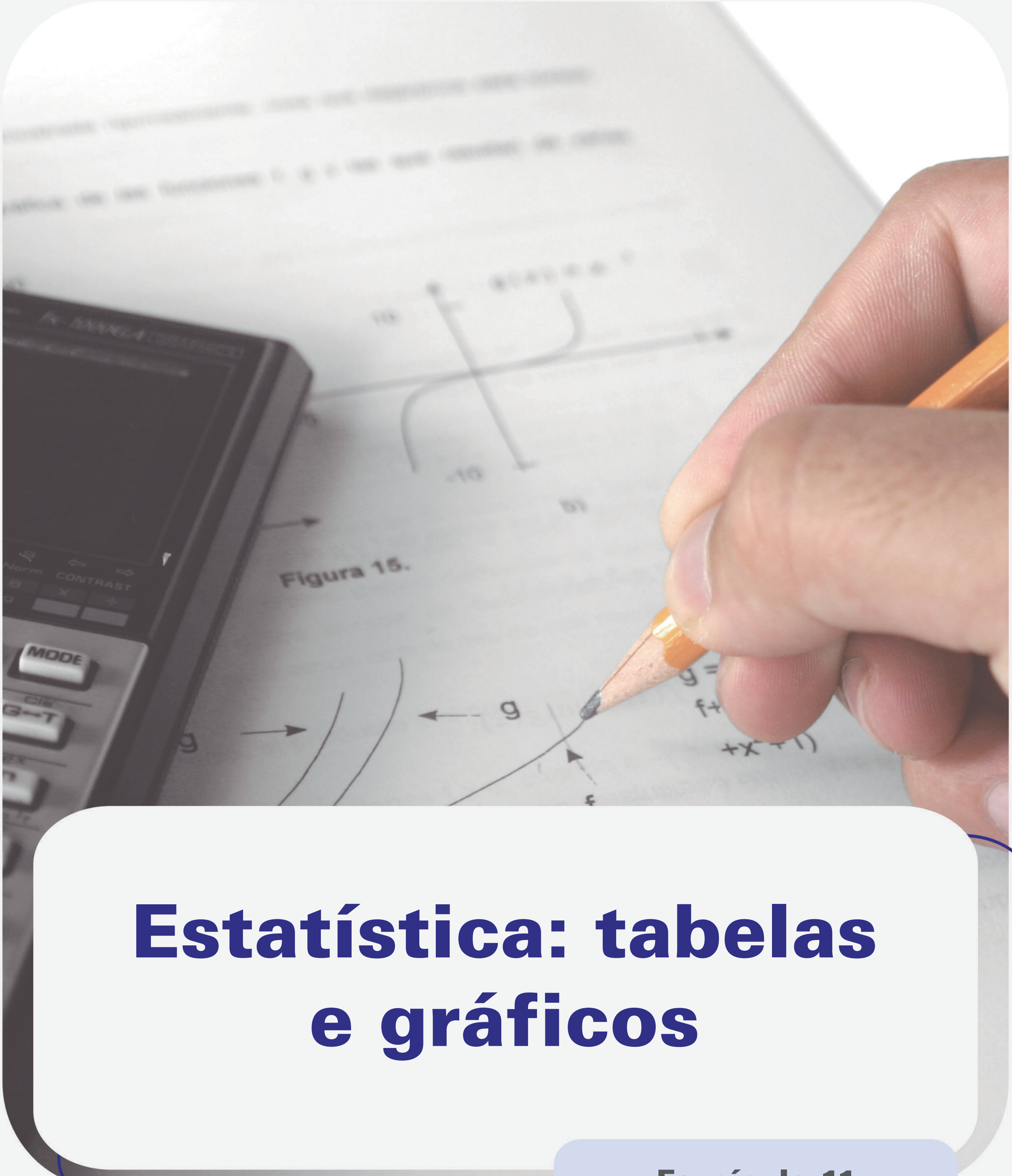
58%.

Exercício 14

7/10.

Exercício 15

3/4%.



Estatística: tabelas e gráficos

Fascículo 11

Unidade 35

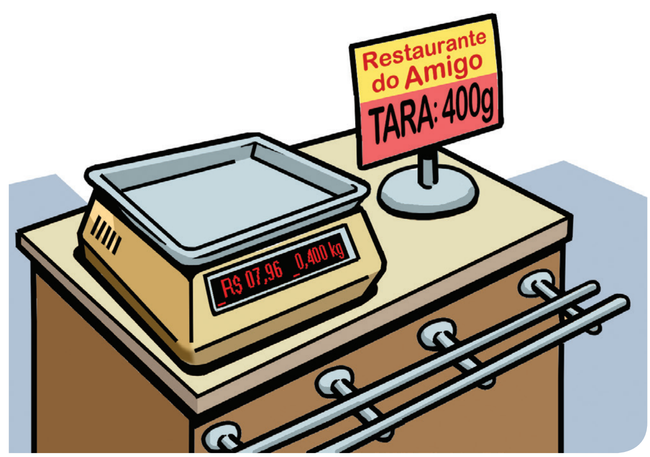
Fundação CECIERJ

Estatística: tabelas e gráficos

Para início de conversa...

"S. Limoeiro, o pão duro encrenqueiro"

S. Limoeiro vai a um restaurante a quilo para almoçar. Lá dentro, há uma fila de pessoas se servindo.



– Será que o prato está correspondendo ao valor da **tara**? – Puxa assunto com o penúltimo da fila.

– Acredito que sim, senhor. – Educadamente responde o jovem cliente da frente.

– Mas, e se não estiver correto? Eu não quero pagar um centavo sequer a mais sem ter necessidade!

Sem dar muita bola, o rapaz desdenha:

– Não se preocupe. E se estiver errado? É tão pouca a diferença...

– Você só pode estar brincando! Eu não posso aceitar isso! Seu dinheiro é capim? Não, o meu não é! Como, nos dias de hoje, podemos desperdiçar dinheiro?! E o nosso futuro, como fica?

O jovem rapaz ouve assustado tão veemente discurso, o que o deixa com uma pulga atrás da orelha. Assim, retruca:

– E o que o senhor sugere que façamos?

– Não me restam dúvidas! Vamos pesar nossos pratos antes de nos servirmos.

Um pouco envergonhado, o rapaz se amedronta:

– Nós?! Vai o senhor primeiro.... er.... quer dizer....

– Frouxo! Eu vou lá!

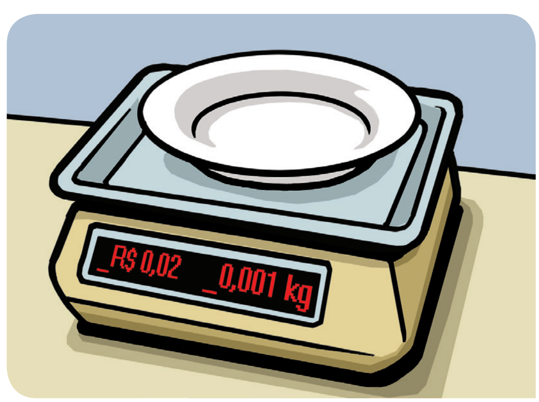
S. Limoeiro foi até o atendente que estava na balança e inquiriu:

– Boa tarde, meu amigo! Eu gostaria de verificar se a tara desta balança está correta. Poderia pesar o meu prato?!

O atendente, já acostumado com essa situação, responde:

– Tenha a bondade, senhor. Pode colocar o seu prato aqui.

Ao colocar o prato, qual não foi a surpresa de S. Limoeiro!



O tempo fechou! S. Limoeiro já preparava aquela confusão. Imagine só, tirando dele 2 centavos! Era o fim do mundo para o nosso amigo encrenqueiro!

O rapaz que havia conversado com ele na fila foi conferir o seu prato também, o que chamou a atenção dos demais clientes que ainda esperavam para se servir. E não deu outra: TODOS vieram conferir também.

O banzé estava armado!

Plácido, o gerente, vendo esta situação de longe, se aproxima e, calmamente, vai conversar com os clientes.

– Boa tarde, pessoal. Meu nome é Plácido. Sou o gerente do restaurante. Percebo que estão preocupados com o valor da tara que informamos neste cartaz. Para não deixar dúvidas, faço questão de que todos coloquem seus pratos na balança para que verifiquem que a tara está correta.

Um por um, os pratos das pessoas que vieram até a balança foram sendo pesados.

402 g	401 g	399 g	404 g	400 g
397 g	400 g	400 g	401 g	396 g

S. Limoeiro não entendeu mais nada.

– Mas isso é um verdadeiro disparate! Como que algumas pessoas pagam mais pelo prato e outras pagam menos?! Isso é uma loucura!

– Tenha calma, senhor. – o gerente tenta conversar.

– Não! Jamais! Já sei o que eu vou fazer!

"Ai, meu Deus! O que será que esse homem vai fazer? Será que vai chamar a polícia?" Pensa Plácido tentando manter um semblante calmo ao mesmo tempo em que todos os demais clientes, com os olhos esbugalhados, esperavam a decisão de S. Limoeiro.

– E o que o se-senhor va-vai fazer? – Gagueja Plácido.

– Não tem jeito! Vou denunciar! Mas, antes...

– Antes...?

– Vou trocar de prato!

* * * * *

Quanta confusão! Nosso amigo S. Limoeiro causou um grande furdunço no restaurante por causa das diferenças entre a tara e os pesos dos pratos.

E vocês? O que acham deste assunto? Vocês já estiveram num restaurante a quilo? Já passaram por essa situação?

Nesta unidade, vamos discutir um pouco mais sobre essa situação com base em alguns conceitos da Estatística. Vamos buscar ferramentas matemáticas que nos permitam argumentar sobre este caso. Será que o restaurante infringiu a lei? Será que S. Limoeiro exagerou? Devemos usar o bom senso numa situação como essa?

Essas e outras perguntas serão respondidas nesta unidade. E, aí? Estão preparados? Então, vamos lá!

Objetivos de aprendizagem

- Determinar os termos de uma pesquisa estatística
- Construir representações gráficas como forma de representação de dados estatísticos
- Conhecer e efetuar cálculos envolvendo Frequência absoluta, relativa e acumulada
- Calcular, analisar e interpretar as Medidas de tendência central (médias, medianas e modas)

Tara

Abatimento no peso de mercadorias, atendendo-se ao vaso ou envoltório onde estão acondicionados.

Seção 1
Amostra, População e variáveis

Nesta seção, iremos tratar de alguns conceitos fundamentais no trabalho com a Estatística como o de Amostra e População, além do conceito estatístico para variáveis. Em ambos os casos, a permanência de dúvidas sobre as definições que serão tratadas nessa unidade pode tornar o processo de aprendizagem muito mais complicado e menos produtivo. Portanto, explore bastante esta seção. Aproveite!

Amostra x População

Na história apresentada anteriormente, nosso amigo encrenqueiro, S. Limoeiro, faz um grande reboliço no restaurante por causa das diferenças existentes entre os pesos dos pratos. Será que ele tinha a razão em fazer isso? Será que ele estava errado? Indiquem as suas opiniões. Discutam com amigos e familiares sobre esta questão.

Porém, para auxiliá-los nesta discussão, vamos colocar algumas informações para vocês. Afinal, buscamos sempre ter o máximo de conhecimento possível para poder argumentar de forma justa e imparcial, não acham?

Em primeiro lugar, segundo a Portaria 97/2000 do Inmetro, o peso dos pratos com tara superior a 200g (que é o nosso caso) pode ter uma variação de até 5g para mais ou para menos. Esta informação tira totalmente a razão de S. Limoeiro.

Por outro lado, nem todos os pratos foram pesados. Apenas daquelas pessoas que ainda estavam na fila. Portanto, será que havia algum prato com um peso fora do intervalo de tolerância dado pelo Inmetro?

É, meus amigos, vocês já estão munidos de algumas informações que precisam ser levadas em consideração ou mesmo investigadas. Se levarmos em conta a portaria do Inmetro, S. Limoeiro não tem razão em reclamar, pois todos os pratos ficaram dentro da margem de tolerância. Afinal, o mais leve pesou 396g e o mais pesado, 404g.

O segundo argumento, é mais complexo do que imaginamos. S. Limoeiro pesou apenas 10 pratos e tirou suas conclusões a partir deles. Mas, em um restaurante, certamente existem muito mais do que 10 pratos. O que na verdade aconteceu foi que S. Limoeiro verificou apenas uma **AMOSTRA** dos pratos do restaurante. Isto é, uma parte da quantidade total de pratos.

Caso tivesse resolvido pesar TODOS os pratos do restaurante, diríamos que S. Limoeiro verificou a **POPULAÇÃO** de pratos.

Vamos ver se entendemos bem essa diferença entre esses dois conceitos?

Quando S. Limoeiro pesou apenas 10 dos pratos do restaurante, ele selecionou uma amostra. Se tivesse pesado todos os pratos, teria trabalhado com a população dos pratos. Assim, vamos à primeira atividade.

Atividade 1

Amostra x População

Escreva com suas palavras o que você entende por:

a. Amostra:

b. População:

Anote suas respostas em seu caderno

Muito bem, pessoal. A diferenciação entre esses conceitos embora pareça bem simples é de extrema importância para o desenvolvimento do raciocínio estatístico. Agora, vamos verificar se vocês conseguem identificar a diferença entre amostra e população nos casos a seguir:

O que é ? O que é?

Atividade 2

Classifique como amostra ou população cada caso abaixo:

a. Para avaliar a eficácia de uma campanha de vacinação no Estado de São Paulo, mães de recém-nascidos durante o primeiro semestre de 2005, foram perguntadas a respeito da última vez que vacinaram seus filhos;

b. Para verificar a audiência de um programa de TV no Brasil, moradores da zona sul foram entrevistados com relação ao canal em que estavam sintonizados;

c. A fim de avaliar a intenção de voto para presidente do Brasil, 2.004 pessoas foram entrevistadas em todas as cidades brasileiras.

d. O IBGE entrevistou todos os moradores do meu prédio para saber quantos carros cada família que mora neste prédio possui.

e. As 10 últimas ligações não atendidas registradas no meu celular são de números desconhecidos.

Lembre-se: faça em uma folha à parte

Maravilha, pessoal. Reparem que discernir entre uma amostra e uma população realmente não é uma tarefa tão simples quanto parece. Podemos fazer confusões que podem gerar problemas em futuras resoluções.

Mas, antes de comentar a respeito de cálculos, vamos conversar um pouco mais sobre as amostras e a população. Voltando ao caso do S. Limoeiro, gostaria de levantar uma questão:

Quem nos garante que a amostra utilizada por S. Limoeiro para a realização das pesagens não era tendenciosa?

Esta pergunta é muito importante, pois mostra um pouco a fragilidade existente no trabalho com amostras. É preciso garantir que não haja tendências, ou seja, que não seja uma amostra viciada. Mas o que significa tudo isso?

Imaginem só o que aconteceria se S. Limoeiro descobrisse que os pratos que estão sendo lavados, por exemplo, pesam 408g? Ou seja, fora da margem de tolerância.

Daí, surgem as primeiras perguntas:

- Como ter a certeza de que isso não ocorre?
- Como podemos concluir algo nos baseando apenas nas amostras?

- Em muitos casos, é impossível trabalharmos com a população. Como avaliar se nossa amostra é ou não tendenciosa?

Essas e outras dúvidas e questionamentos podem ser levantados no estudo da estatística. A discussão sobre todas essas questões serão feitas na próxima unidade.

Os tipos de variáveis

Que tipo de pesquisa podemos fazer? Eis algumas sugestões:

- Pesquisa sobre o estado civil das pessoas.
- Pesquisa sobre o número de filhos de cada família.
- Pesquisa sobre a intenção de voto nas eleições.
- Pesquisa sobre o que mais te incomoda no seu bairro.
- Pesquisa sobre o valor do salário das pessoas.
- Entre muitas outras.

Esses vários tipos de pesquisa nos levam a observar que nem sempre as respostas são numéricas. Alguns dados são formados por adjetivos, locais, nomes próprios sem que haja um valor numérico atrelado a eles. A esses tipos de respostas damos o nome de **VARIÁVEL ou DADO**. E essas variáveis podem ser classificadas de duas formas:

Variável Qualitativa – aquela que não pode ser medida. Essas variáveis são muito comuns em pesquisas sobre o sexo das pessoas (masculino ou feminino), o estado civil (solteiro, casado, viúvo, ...). Reparem que nesses casos, as respostas não são formadas por números e não há como medi-las.

Variável Quantitativa – aquela que pode ser medida. Essas variáveis são muito comuns em pesquisas sobre o número de filhos que uma família possui, a quantidade de carros que uma pessoa já teve, a nota que tirou na prova passada, entre outras. Reparem que o valor numérico é a característica principal dessas variáveis.

Porém, vale a pena levantar uma questão.

Qualitativa ou quantitativa?

Atividade 3

Reflitam e me digam que tipo de variável pode ser encontrada como resposta à pesquisa abaixo:

"Qual o número que você mais gosta?"

Respostas:

Clarisse: 2

Ana Maria: 10

Josué: 8

Bia: 5

E aí, pessoal? Podemos dizer que essas variáveis são qualitativas ou quantitativas? Pensem e discutam com seus colegas, amigos e familiares.

Lembre-se: faça em uma folha à parte

De uma forma ou de outra, todas as pesquisas ou coleções de dados, sejam qualitativos ou quantitativos, podem ser arrumados ou disponibilizados de forma a auxiliar em possíveis interpretações. Neste momento, vamos nos concentrar em organizar essas informações de diversas formas. Dentre elas, temos as tabelas e gráficos. Vamos lá?!

Tabulando os dados amostrais

Uma das formas mais comuns de organizarmos os dados de uma pesquisa é colocando-os numa tabela. Vamos ver algumas maneiras de compilar esses dados?

Voltando ao problema do S. Limoeiro, como podemos colocar as medições realizadas em uma tabela? Vejam, em primeiro lugar devemos escolher as colunas. Em seguida, vamos arrumar os dados em cada coluna.

Para o caso do S. Limoeiro, podemos reservar a primeira coluna para a identificação dos clientes. A segunda coluna para a indicação dos pesos dos pratos. Assim:

Clientes	Pesos
S. Limoeiro	402 g
O rapaz da frente	401 g
Cliente 3	399 g
Cliente 4	404 g
Cliente 5	400 g
Cliente 6	397 g
Cliente 7	400 g
Cliente 8	400 g
Cliente 9	401 g
Cliente 10	396 g

Muito simples, não acham?

Contudo, podemos compilar essas informações de outras formas em busca de permitir possíveis interpretações. Vejamos:

Na primeira coluna, colocaremos o peso encontrado.

Na segunda coluna, colocaremos a quantidade de vezes que aquele peso apareceu nas medições. A isto damos o nome de **FREQUÊNCIA ABSOLUTA**.

Na terceira coluna, colocaremos a **FREQUÊNCIA RELATIVA**. Isto é, a razão entre a quantidade de vezes que aquela medição aparece e o total de medições. Esse valor pode ser dado na forma de frações ou de porcentagens.

Pesos	**Frequência Absoluta (fa)**	**Frequência Relativa (fr)**
396 g	1	1/10 = 10%
397 g	1	1/10 = 10%
399 g	1	1/10 = 10%
400 g	3	3/10 = 30%
401 g	2	2/10 = 20%
402 g	1	1/10 = 10%
404 g	1	1/10 = 10%
TOTAL	10	10/10 = 100%

Podemos perceber que a construção desta tabela necessitou de alguns conceitos que permitem uma interpretação mais clara da situação encontrada. Por exemplo: 400 g foi a medição mais encontrada, com 30% das medições realizadas.

Vamos ver isso na prática?

O tempo com o estudo

Atividade 4

Uma pesquisa mostra a quantidade de horas por semana que alunos de uma escola do Rio de Janeiro estudam.

9, 8, 5, 4, 5, 6, 2, 2, 4, 3, 4, 7, 9, 5, 6, 7, 1, 4, 7, 2, 4, 6, 3, 5, 7, 9, 5, 1, 4, 8, 2, 9

a. Coloque esses números em ordem crescente.

b. Construa uma tabela com três colunas: a primeira representando a quantidade de horas, a segunda indicando a frequência absoluta e a terceira a frequência relativa..

Lembre-se: faça em uma folha à parte

Lançando as notas das provas

Atividade 5

A tabela a seguir mostra a compilação das notas obtidas por 25 alunos da 3ª série do Ensino Médio na prova de Matemática.

x_i	f_i	F_r (%)
3,0	1	1/25 = 4%
4,0	3	3/25 = 12%
5,0	4	4/25 = 16%
6,0	6	6/25 = 24%
7,0	5	5/25 = 20%
8,0	4	4/25 = 16%
9,0	2	2/25 = 8%

Atividade 5

Classifique em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações, justificando quando forem falsas:

a. 20% dos alunos obtiveram nota cima de 7,0

b. 56% dos alunos obtiveram nota inferior a 7,0.

c. 92% dos alunos obtiveram nota inferior a 9,0.

d. 16% dos alunos obtiveram nota 5,0.

e. Nenhum aluno conseguiu acertar ou errar a prova toda.

Lembre-se: faça em uma folha à parte

É isso aí, pessoal. Estamos aprendendo muito nesta unidade. Mas, não podemos deixar de comentar a respeito de outra forma de representação dos dados: os gráficos.

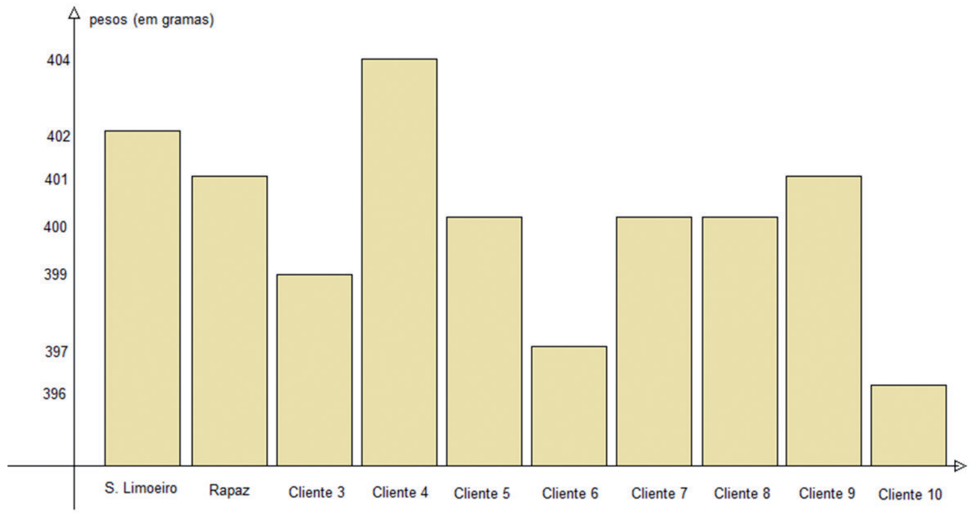
Quais são os tipos de gráficos que você conhece?

Há o gráfico de barras, gráfico de setor (carinhosamente conhecido como gráfico de pizza), gráficos de segmentos, entre outros. Nem sempre podemos usar qualquer gráfico para representar uma situação. As vezes, a utilização de certos gráficos impedem qualquer tipo de interpretação. Vamos dar uma olhada nisso?

Que tal representarmos em um gráfico de barras os dados obtidos com as pesagens realizadas com o S. Limoeiro no início dessa unidade?

Para isso, definimos o eixo vertical como o eixo que representa os valores numéricos nos pesos de cada prato.

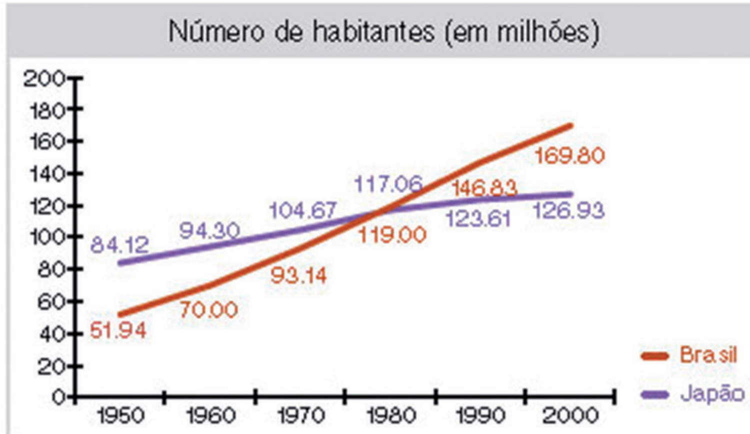
Definimos o eixo horizontal como a representação de cada cliente. Vamos ver como fica?



O gráfico de setor pode representar as frequências de cada pesagem.

Reparem que neste gráfico, a comparação entre cada quantidade e o total (o círculo completo) é o seu grande diferencial. Os ângulos de cada setor circular devem ser proporcionais às frequências relativas. Ou seja, quanto maior a frequência, maior é o ângulo central do setor.

Veja o gráfico de segmentos a seguir:



Disponível em: http://www.klickeducacao.com.br/2006/conteudo/pagina/0,6313,POR-1024-6945,00.html

Este gráfico é muito utilizado quando queremos representar a evolução ou involução de determinados tipos de dados. Por exemplo, no caso apresentado, a comparação entre a evolução da população no Brasil e no Japão.

Segundo este gráfico, apesar de existirem muito mais japoneses que brasileiros em 1950, a população do Brasil cresceu muito rápido, ultrapassando a do Japão em 1980. Podemos ver também que o ritmo de crescimento diminuiu nos dois países, mas que o ritmo de crescimento dos japoneses diminuiu muito mais, principalmente depois de 1980.

Vocês conseguiriam imaginar a representação das medições dos pratos do Restaurante do Amigo feito pelo S. Limoeiro em um gráfico de segmentos? Notem que não há uma evolução ou involução nos dados. As medições são independentes umas das outras.

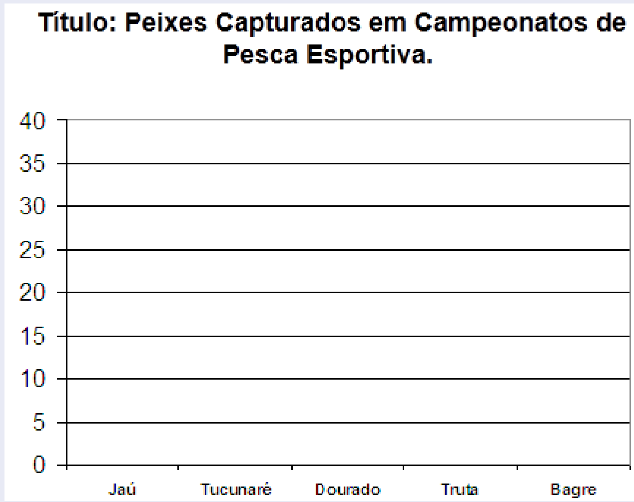
Vamos colocar isso em prática? Fiquem tranquilos. Vai ser bem fácil!

Atividade 6

Competição de pescaria

Leia a história a seguir e represente os dados em um gráfico de barras.

Numa competição de pesca esportiva, os seguintes peixes foram pescados: 15 Jaús, 20 Tucunarés, 35 Dourados, 20 Trutas, 10 Bagres.



Atividade 6

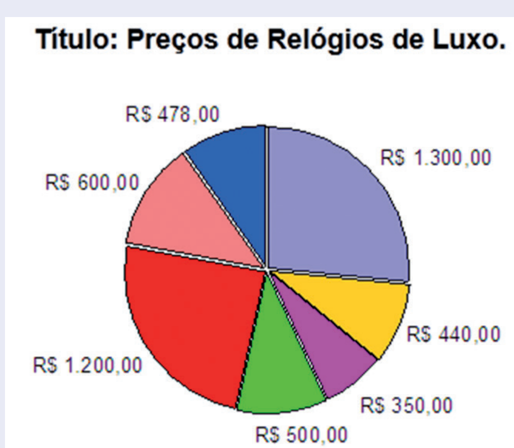
Lembre-se: faça em uma folha à parte

Os preços dos relógios

Atividade 7

O gráfico abaixo mostra os preços de seis relógios de luxo comercializados em uma famosa joalheria da capital paulistana. Estes relógios possuem variação no preço em virtude das suas funcionalidades e acabamento, sendo que o mais caro possui detalhes em ouro.

Analise atentamente este gráfico circular, também conhecido como gráfico tipo "pizza", e responda as perguntas:



Disponível em: http://www.estudamos.com.br/graficos/grafico_exercicio_on_line_15.php

Atividade 7

a. Qual é o valor do segundo relógio mais caro representado neste gráfico?

b. A área total do gráfico equivale a que percentual?

c. Que cor representa o relógio mais barato no gráfico?

d. Caso alguém queira comprar o relógio mais caro e o relógio mais barato, quanto terá de desembolsar?

e. Qual é a soma de todos os preços dos relógios?

Lembre-se: faça em uma folha à parte

É isso aí, pessoal. Já podemos ver que a interpretação e a construção de gráficos já virou a maior moleza!

Agora, vamos voltar mais uma vez ao caso do S. Limoeiro. Até o momento, já explicitamos muitos argumentos prós e contras. Porém, ainda faltam alguns que vale a pena serem comentados. É o que veremos na seção a seguir.

Seção 2

Medidas de Centralidade – médias, modas e medianas

Conforme dissemos anteriormente, há alguns argumentos que ainda precisam ser colocados para que possamos tomar nossa decisão sobre quem tem a razão na história do S. Limoeiro.

Vejamos:

A seguir, estão as medições realizadas no restaurante. Vale lembrar que a tara marcada pelo estabelecimento era de 400 gramas.

402 g	401 g	399 g	404 g	400 g
397 g	400 g	400 g	401 g	396 g

Observemos o seguinte:

$$\frac{402+401+399+404+400+397+400+400+401+396}{10}=\frac{4000}{10}=400 \text{ gramas}$$

Em outras palavras, a **MÉDIA ARITMÉTICA** das medições feitas dá exatamente 400 gramas.

Antes de prosseguirmos, vamos analisar bem como encontramos esse resultado.

O cálculo da média aritmética é feito através da soma de todos os valores e, em seguida, dividindo-se o resultado pela quantidade de parcelas.

No exemplo do S. Limoeiro, somamos as 10 parcelas (as 10 medições realizadas), o que gerou o valor de 4000 gramas. Então, esta soma (4000 g) foi dividida por 10 (o número de medições que entraram no cálculo desta média).

Simples, não é?!

Mais um conceito que podemos expor aqui é o que chamamos de MODA. A **MODA** deste conjunto de dados é 400 gramas.

Certamente vocês devem estar se perguntando: "O que é moda?"

A resposta é muito simples e vocês sabem responder. Vejam:

Quando nos referimos, em geral, à palavra MODA, fazemos uma associação às tendências de vestuário. Então, quando uma peça de roupa ou um estilo de roupa está na MODA, significa dizer que é a peça ou o estilo de roupa que deve ser copiado por todos e se tornar, consequentemente, o mais usado.

A MODA na estatística é a mesma coisa. Dissemos que 400 g é a MODA desta amostra, pois é a medida que mais apareceu em todas as medições feitas. Lembre-se da tabela de frequências absolutas. Ela vai te auxiliar na determinação da MODA.

O último conceito que iremos expor para vocês agora é o que chamamos de **MEDIANA**. Se colocarmos todos os valores das medições em ordem crescente, a MEDIANA será o termo central desta arrumação. Quando não houver um termo central (número par de termos), a mediana será igual à média aritmética entre os dois termos centrais. No nosso exemplo, as medições em ordem crescente:

396	397	399	400	400	400	401	401	402	404

Como temos 10 termos, podemos organizar os dados da seguinte forma

396 397 399 400 400 | 400 401 401 402 404

5 termos à esquerda | 5 termos à direita

MEDIANA = 400 g

Como não há um termo central, a mediana será igual à média aritmética entre os dois termos centrais, nesse caso, iguais a 400.

Portanto, este é mais um argumento a favor do restaurante. É, pelo visto, o S. Limoeiro exagerou no escândalo. O que vocês acham?

Por enquanto, vamos fazer mais essa atividade.

Atividade 8

Uma empresa de informática possui 10 vendedores e cada um deles trabalha com diferentes cargas horárias. As cargas horárias dos vendedores são dadas abaixo:

5	4	8	8	8	6	6	8	8	12

Calcule a média, a mediana e a moda das cargas horárias desses vendedores.

Lembre-se: faça em uma folha à parte

Muito bem, pessoal. Estamos chegando ao fim de mais uma unidade. A introdução aos conceitos estatísticos nos permitirá trabalhar de forma mais segura com fórmulas e estratégias que serão abordadas na próxima unidade.

Fiquem ligados, ainda, nas demais seções desta unidade.

Resumo

- Definimos amostra como uma coleção de dados referente à parte de um total. Este total recebe o nome de população.
- Os dados podem ser compilados em tabelas e gráficos. Cada gráfico possui sua funcionalidade. Nem sem um gráfico pode ser utilizado em qualquer situação.
- Média, Moda e Mediana são medidas de centralidade. Média é o quociente entre a soma de todas as parcelas e o número de parcelas. A Moda é o termo que mais aparece na amostra e Mediana é o termo central da amostra quando colocada em ordem crescente.

Veja ainda

Se vocês gostaram de interpretar e construir gráficos, este blog indica vários sites que nos auxiliam na construção de gráficos sem o uso do Excel. São diversos tipos de gráficos em várias opções de sites. É muito interessante. Clique no link abaixo e veja a lista de opções.

http://blogueigoo.blogspot.com.br/2009/11/sites-para-fazer-graficos-sem-usar.html

Referências

Livros

- MORETTIN, P. A. & BUSSAB, W. O. (2010) *Estatística Básica*. 6a ed. São Paulo: Saraiva.
- CRESPO, A. A. (2009) *Estatística Fácil*. 19a ed. São Paulo: Saraiva.
- MILONE, Giuseppe. (2003) *Estatística Geral e Aplicada*. 1a ed. São Paulo: Cengage Learning.

Imagens

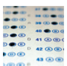
- http://www.sxc.hu/photo/475767

- http://www.sxc.hu/photo/1339588

- http://www.sxc.hu/photo/875413

• http://www.sxc.hu/photo/1396218

• http://www.sxc.hu/photo/1212912



• http://www.sxc.hu/photo/517386

Respostas das Atividades

Atividade 1

a. Amostra: parte de um todo

b. População: o total de dados

Atividade 2

a. Amostra

b. Amostra

c. Amostra

d. População

e. Amostra

Atividade 3

São variáveis qualitativas, pois não se referem a uma medição e sim a eleição de algo que mais gostam, só que , neste caso, são números.

Atividade 4

Uma pesquisa mostra a quantidade de horas por semana que alunos de uma escola do Rio de Janeiro estudam.

a. 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 9

Respostas das Atividades

b.

Quantidade de horas	Frequência absoluta	Frequência relativa
1	2	2/32 = 6,25%
2	4	4/32 = 12,5%
3	2	2/32 = 6,25%
4	6	6/32 = 18,75%
5	5	5/32 = 15, 625%
6	3	3/32 = 9,375%
7	4	4/32 = 12,5%
8	2	2/32 = 6,25%
9	4	4/32 = 12,5%

Atividade 5

a. Falso. 20% dos alunos obtiveram notas iguais a 7,0. Acima de 7,0, foram 24% dos alunos.

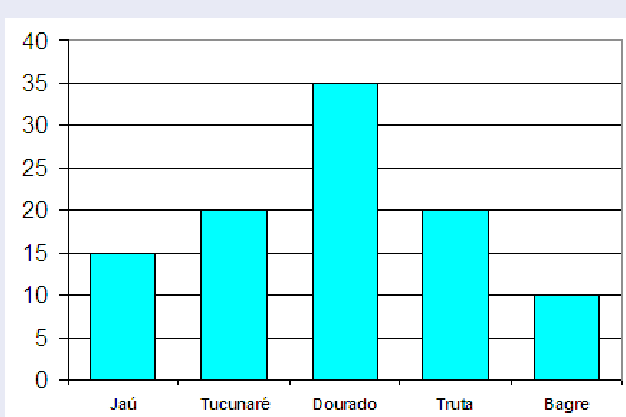
b. Verdadeiro

c. Verdadeiro

d. Verdadeiro

e. Verdadeiro

Atividade 6



Respostas das Atividades

Atividade 7

a. R$ 1.200,00

b. 100%

c. Violeta ou roxo

d. 1300 + 350 = 1650 reais

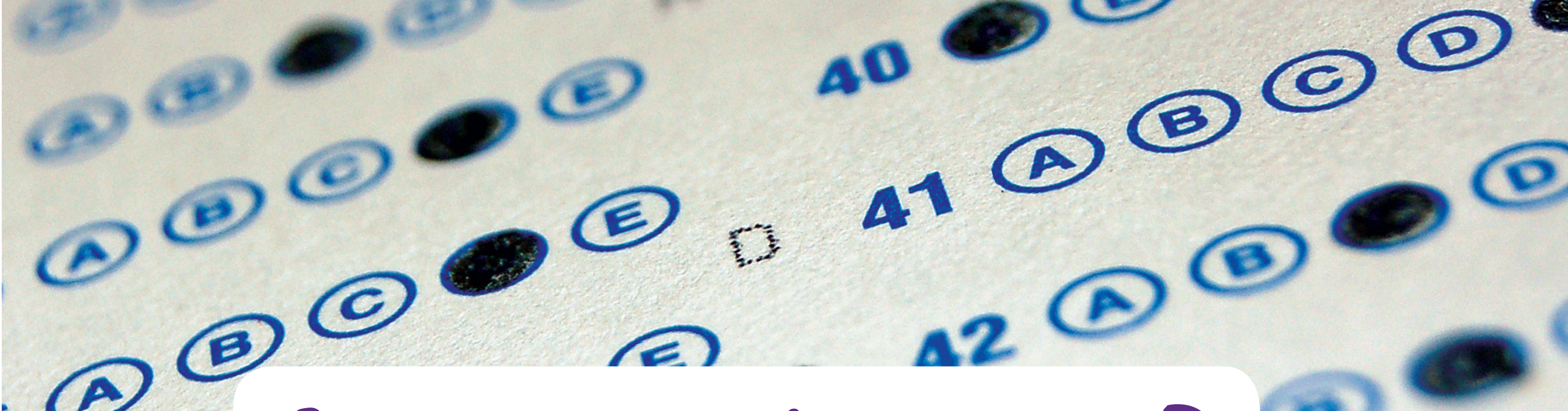
e. 4868 reais

Atividade 8

Média: 7,3

Moda: 8

Mediana: 8



O que perguntam por aí?

Questão 1 (UFPR 2009 – ADAPTADA)

Uma determinada região apresentou, nos últimos cinco meses, os seguintes valores (fornecidos em mm) para a precipitação pluviométrica média:

jun	jul	ago	set	out
32	34	27	29	28

A média e a mediana do conjunto de valores acima são, respectivamente:

a. 30, 27

b. 27, 30

c. 30, 29

d. 29, 30

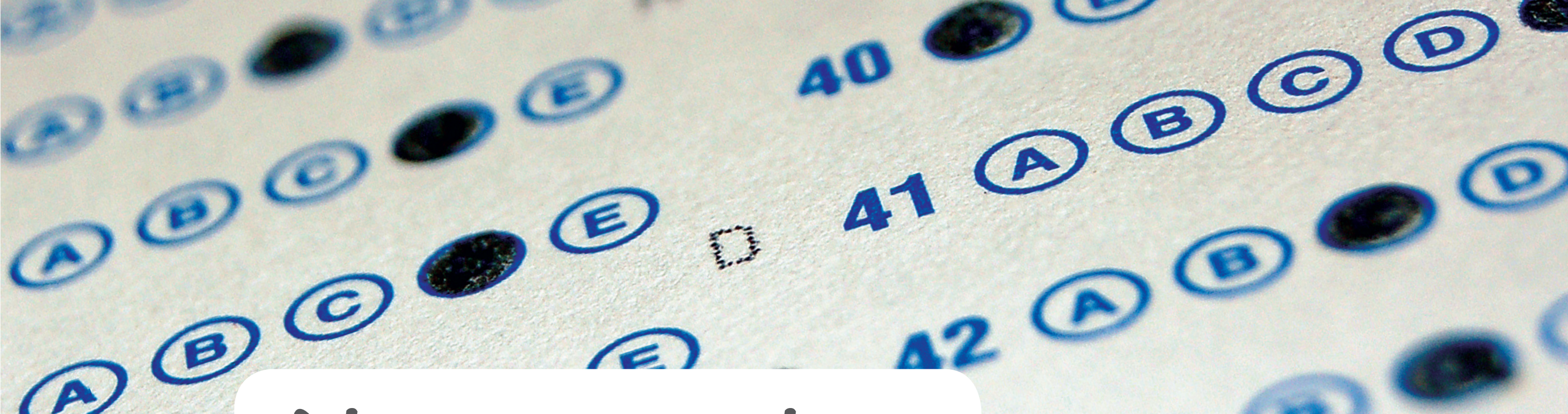
e. 30, 29

Resposta: Letra C.

Comentário: A média das precipitações é calculada por: $\frac{32+34+27+29+28}{5}=\frac{150}{5}=30$

A mediana é feita colocando-se os valores em ordem crescente:

27, 28, 29, 32, 34. O termo central é o terceiro termo. Ele separa a amostra em dois grupos de igual quantidade. Portanto, o número 29 é a mediana.



Atividade extra

Exercício 1

Os dados referem-se ao numero de pessoas por casa, de domicílios localizados em uma rua, de um bairro do Rio de Janeiro.

2 3 4 4 5 3 4
5 6 5 3 1 5 5
1 3 4 5 5 5 3
2 2 5 4 4 2 3
5 4 5 4 2 4 9

Qual é a moda do número de habitantes por domicílio?

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

Exercício 2

Os dados apresentados na tabela referem-se ao nível de glicose de 60 crianças diabéticas internadas em um hospital:

56	61	57	77	62	75	63	55	64	60
60	57	61	57	67	62	69	67	68	59
65	72	65	61	68	73	65	62	75	80
66	61	69	76	72	57	75	68	83	64
69	64	66	74	65	76	65	58	65	64
65	60	65	80	66	80	68	55	66	71

Tabela: Nível de glicose

Qual é a mediana do nível de glicose dessas crianças?

(a) 65,0 (b) 65,5 (c) 66,0 (d) 66,8

Exercício 3

Uma amostra de cariocas foi investigada quanto ao consumo de sal diário em suas refeições, obtendo-se os dados apresentados na tabela:

Carioca	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Consumo (g)	10	13	17	9	8	11	13	7	8	10

Tabela: Consumo de sal

Comparamos a media (M), a mediana(Me) e a moda (Mo) relacionadas aos dados dessa tabela.

Qual a opção correta ao compararmos essas três medidas de dispersão?

(a) Me = Mo < M

(c) M < Mo < Me

(b) M = Me < Mo

(d) Me < M < Mo

Exercício 4

Uma empresa tem sua distribuição salarial de acordo com a tabela:

Salários (R$)	Funcionários
700	10
1200	5
1500	6
2000	15
5000	7
10500	x

Tabela: Salários dos funcionários

Qual é o valor de x para que a média salarial seja de R$ 2400,00?

(a) 2 (b) 5 (c) 8 (d) 10

Exercício 5

Antes de comprar um vestido Maria resolveu fazer uma pesquisa de preço e obteve os dados apresentados na tabela, em que a segunda linha representa quantas lojas praticam o preço correspondente.

Preço (R$)	50	51	52	53	54
Lojas	2	4	5	6	1

Tabela: Preços

Qual é a média de preço (em reais) do item escolhido por Maria?

(a) 50 (b) 51 (c) 52 (d) 53

Exercício 6

A equipe de basquete de uma escola possui 38 jogadoras, cuja distribuição com relação ao peso esta ilustrada na figura.

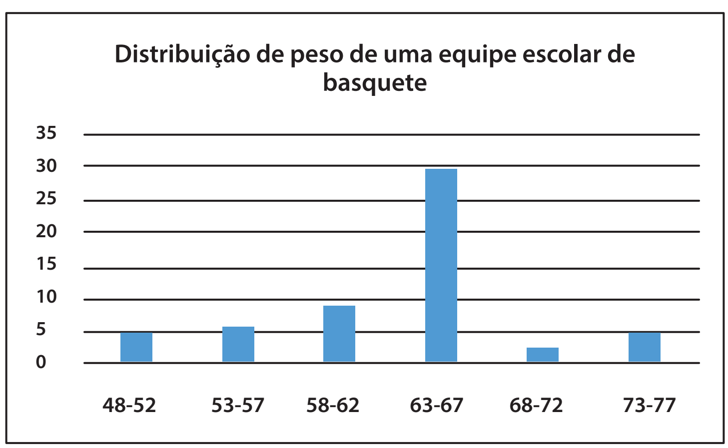


Figura: Distribuição de peso

Considere as jogadoras que possuem peso na faixa entre 53kg a 57kg ou entre 63kg a 67kg.

Qual a frequência (aproximada) das jogadoras que estão nessa faixa de peso?

(a) 15,7% (b) 26,3% (c) 42,1% (d) 57,9%

Exercício 7

Durante as eleições do ano de 2012, um mesário verificou que, para votar, cinco eleitores demoraram, respectivamente, 3min 38s, 3min 18s, 2min 46s, 2min 57s e 3min 26s.

Qual foi a média do tempo de votação (em minutos e segundos) desses eleitores?

(a) 2min 57s

(b) 3min 13s

(c) 3min 33s

(d) 4min 37s

Exercício 8

Com objetivo de identificar o perfil de primigestas (mulheres que têm a sua primeira gravidez) atendidas em um serviço pré-natal, foi realizada uma pesquisa exploratória-descritiva em um município do estado do Rio de Janeiro. Foram entrevistadas 180 primigestas e a tabela mostra a faixa etária destas.

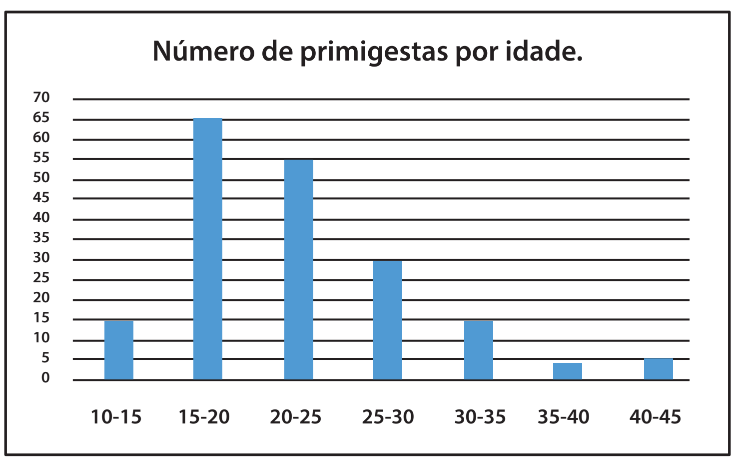


Figura: Distribuição de peso.

A recomendação dos médicos é que a primeira gravidez ocorra até os 35 anos de idade, e a partir dessa idade a gravidez passa a ser de risco.

Qual a frequência (aproximada) das mulheres que estão na faixa de risco?

(a) 6%

(b) 8%

(c) 14%

(d) 30%

Exercício 9

Na Câmara dos vereadores de um determinado município, um projeto de lei foi votado pelos membros presentes na casa, obtendo os resultados apresentados na tabela.

Posicionamento	% de votos	Total de votos
A favor	26	
Contra	24	
Abstenções	22	
Não compareceram		196

Tabela: Vereadores

Quantos votos a favor o projeto de lei obteve?

(a) 26 (b) 72 (c) 182 (d) 700

Exercício 10

Considere a distribuição de frequência apresentada na tabela correspondente aos diferentes preços de um determinado produto em 20 lojas pesquisadas.

Preço (R$)	50	51	52	53	54
N. de Lojas	2	5	6	6	1

Tabela: Preços

Quais são, respectivamente, a moda, a média e a mediana de preços desse produto?

(a) 52; 52 e 51,95

(b) 53; 51, 95 e 52

(c) 52 e 53; 53 e 51; 95

(d) 52 e 53; 51,95 e 52

Exercício 11

Na tabela observamos a produção diária de barris de petróleo de 1982 até 1986.

Período	1000 barris / dia
1982	268
1983	339
1984	474
1985	563
1986	593

Tabela: Produção de petróleo

Qual a média de barris produzidos de 1982 até 1986?

Exercício 12

A tabela mostra o preço dos aluguéis em áreas urbanas e rurais em um certo município do estado do Rio de Janeiro.

Preço do aluguel (R$)	Número de residências	
	Urbana	Rural
200 - 300	10	30
300 - 500	40	50
500 - 700	80	15
700 - 1000	50	5
1000 - 1500	20	0

Tabela: Produção de petróleo

Qual a frequência de residências com aluguel entre R$ 300,00 e R$ 700,00?

Exercício 13

Uma pesquisa, realizada dois anos após as eleições, perguntou qual era a opinião dos cidadãos sobre a nova administração municipal. Os entrevistados foram classicados de acordo com o grau de escolaridade, como ilustrado na tabela.

Grau de escolaridade	Opinião sobre a administração		
	Aprova	Indiferente	Desaprova
Ensino Fundamental	6	7	10
Ensino médio	12	10	8
Graduação	20	10	7

Tabela: Administração municipal.

Qual a frequência das pessoas que desaprovam a atual administração?

Exercício 14

Um dado foi lançado 100 vezes, a frequência com que cada número apareceu nos lançamentos está ilustrada na tabela.

Resultado	Frequência
1	14
2	18
3	16
4	14
5	18
6	20

Tabela: Lançamento de dados.

Com que frequência os números pares saíram nos lançamentos?

Exercício 15

A tabela ilustra a quantidade de vitórias (V), empates (E), derrotas (D), quantidade de gols feitos (G) e saldo de gols (S) de quatro times (A, B, C e D) de um campeonato de futebol, depois de 16 rodadas.

	V	E	D	G	S
A	8	5	3	27	8
B	5	5	6	23	-4
C	4	7	5	17	0
D	5	3	8	19	-3

Tabela: Campeonato

Qual é a média de gols desses quatro times?

Gabarito

Exercício 1

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 2

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 3

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 4

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 5

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 6

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 7

A ● B ○ C ○ D ○

Exercício 8

A ○ B ● C ○ D ○

Exercício 9

A ○ B ○ C ● D ○

Exercício 10

A ○ B ○ C ○ D ●

Exercício 11

$$\frac{268000 + 339000 + 474000 + 563000 + 593000}{5}$$

Portanto 447400 barris por dia.

Exercício 12

Consideramos o total de residências urbanas e rurais, que é 300 residências. Desse total temos 185 residências com aluguel entre R$ 300,00 e R$ 700,00. Assim a frequência será $\frac{185}{300}$ = 61,66% ou 0,6166.

Exercício 13

Ao todo são 10 + 8 + 7 pessoas que desaprovam a administração, um total de 25 pessoas. Foram entrevistadas 90 pessoas (somando todas as entradas da tabela). Para calcular a frequência calculamos $\frac{25}{90}$ = 0,277% ou 27,7.

Exercício 14

O total foram 100 lançamentos, desses (18 + 14 + 20) = 52 foram números pares, logo a frequência será

$\frac{52}{100}$ = 0,52 ou 52%.

Exercício 15

A média de gols dos quatro times será a soma de todos os gols feitos divididos pela quantidade jogos.

$\frac{27 + 23 + 17 + 19}{16}$ = 6,5625 gols por partida.

Estatística: medidas de centralidade e de dispersão

Fascículo 11

Unidade 36

Fundação CECIERJ

Estatística: medidas de centralidade e de dispersão

Para início de conversa...

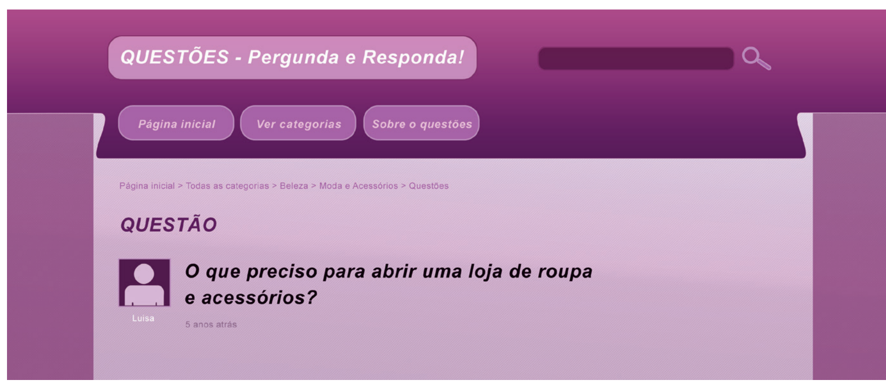


Figura 1: Site de perguntas e respostas.

Você já viu esses sites de perguntas e respostas? Em geral, as pessoas colocam suas dúvidas e aguardam as respostas de outras pessoas. Abaixo, podemos ver uma resposta dada à pergunta da Luísa.

Zeca: "Pesquisar o ponto comercial. Investigue todos os concorrentes da região. Investigue também os negócios que funcionaram neste mesmo ponto comercial antes de você se instalar, para ter uma visão mais ampla das suas possiblidades.

EX: Eu tenho uma loja alugada, o primeiro inquilino era um restaurante que "quebrou" porque o ponto não é para esse tipo de negócio. O segundo inquilino, instalou adivinha o que? Um restaurante... Não deu outra, "quebrou" igual o primeiro. Se tivesse pesquisado, provavelmente não teria quebrado.Enfim, isso é só uma das dicas que posso te dar."

A resposta dada por Zeca, apesar de simples, mostra uma preocupação muito importante que Luísa precisa ter: fazer o que chamamos de *Pesquisa de Mercado*. É claro que Luísa precisa ainda de muitas outras coisas como toda a parte de documentação, ***capital de giro***, entre outros...

Capital de Giro

Capital de giro é o capital necessário para financiar a continuidade das operações da empresa, como recursos para financiamento aos clientes (nas vendas a prazo), manter estoques e pagamento aos fornecedores, pagamento de impostos, salários e demais custos e despesas operacionais.

Diante desta opinião, Luísa preparou e realizou uma pesquisa com 200 pessoas, sendo 100 homens e 100 mulheres. Que tal observarmos e analisarmos os resultados obtidos? É o que faremos nesta unidade. Vamos aprender a analisar os dados de uma pesquisa através do cálculo de médias, medianas, modas, entre outros. A partir dos resultados dessa análise, poderemos ajudar Luísa a tomar as decisões mais acertadas em relação à loja. Vocês vão curtir, podem ter certeza! Vamos lá!

Objetivos de aprendizagem

- Aprofundar o conhecimento sobre as medidas de tendência central (média, mediana e moda).
- Resolver problemas envolvendo medidas de tendência central
- Conhecer os conceitos de desvio padrão e de coeficiente de variação
- Resolver problemas envolvendo cálculo de desvio-padrão e coeficiente de variação

Seção 1
Analisando os dados de uma pesquisa: Medidas de tendência central

Na unidade anterior, vimos como podemos efetuar os cálculos para determinarmos o valor da média, moda e mediana. Nesta unidade, vamos aprender a interpretar esses resultados, verificando como eles podem nos auxiliar nas tomadas de decisão.

Tomando decisões – média, moda e mediana.

Abrir uma empresa não é uma tarefa simples. Mesmo no caso de uma empresa pequena, como o restaurante de Luísa, é preciso pesquisar muito. É necessário, por exemplo, verificar se o ponto é bom, ou seja, se na vizinhança há muita concorrência com outras lojas do mesmo ramo, se há um número adequado de pessoas circulando no local, etc. E essa é a primeira de muitas pesquisas! Contar o mínimo possível com a sorte é muito importante para o sucesso do seu negócio.

Pensando nisso e diante da resposta dada por Zeca, Luísa resolveu iniciar suas pesquisas, entrevistando 100 homens e 100 mulheres que circulavam nas proximidades do local onde planejava abrir a loja. A primeira pergunta de sua pesquisa foi sobre o que as pessoas geralmente procuram comprar em uma loja de roupas. As respostas foram registradas na tabela seguinte. Observem:

Tabela 1: Divisão dos entrevistados por gênero e por peça de roupa que costumam procurar em uma loja.

Que tipo de roupa costuma procurar em uma loja?		
	Homens	Mulheres
Peças íntimas	9	16
Blusas e camisetas	16	35
Bermudas	34	6
Calças	26	28
Vestidos	1	15
Ternos	14	0

Atividade 1

Vamos relembrar uma definição da unidade anterior: moda é a resposta que mais apareceu na pesquisa. Levando em consideração as respostas dadas à primeira pergunta de Luísa, determine a moda:

a. Entre os homens e entre as mulheres, separadamente.

b. Com relação ao total de respostas (independente do sexo do entrevistado).

c. Explique porque, nesse caso, não podemos calcular as outras medidas de tendência central estudadas na unidade anterior (média e mediana).

Lembre-se: faça em uma folha à parte

Muito bem, pessoal. A primeira informação que pudemos tirar da pesquisa feita por Luísa é que os homens têm, em geral, uma preferência maior por bermudas enquanto as mulheres preferem blusas e camisetas. Contudo, ter um departamento exclusivo para calças é muito importante, pois no âmbito geral das pesquisas, a moda indicou que as mesmas são o item de maior preferência entre as pessoas que circulam no entorno do local escolhido para a loja.

A segunda pergunta feita por Luísa era sobre o valor que as pessoas, geralmente, se dispunham a pagar por uma peça de roupa. Vejam as respostas na tabela a seguir:

Tabela 2: Divisão dos entrevistados por gênero e por valor que estão dispostos a pagar por uma peça de roupa.

Quanto pagariam por uma peça de roupas?		
	Homens	Mulheres
R$ 10,00	8	7
R$ 30,00	25	13
R$ 50,00	30	9
R$ 100,00	29	10
R$ 150,00	7	29
R$ 200,00	1	31
R$ 3.000,00	0	1

Nessa tabela, vemos que, entre os homens entrevistados, 8 pagariam R$ 10,00 por uma peça de roupa enquanto apenas 1 pagaria R$ 200,00 pela mesma peça. Já entre as mulheres, 13 delas pagariam R$ 30,00 por uma peça de roupa e 31 pagariam R$ 200,00 pela mesma peça. Como essas informações ajudam Luísa a determinar o preço médio de uma peça de roupa?

É comum calcularmos simplesmente a média aritmética entre os valores apresentados na primeira coluna: (10+30+50+100+150+200+3000)/7. Contudo, a quantidade de homens que pagariam R$50,00 por uma peça de roupa é maior que a quantidade de homens que pagariam R$10,00 pela mesma peça. Notamos que, entre homens e mulheres, os pesos atribuídos a cada preço são diferentes.

De acordo com a tabela, levando-se em consideração apenas os homens, 8 disseram que pagam 10 reais por uma peça de roupa, 25 disseram que pagam 30 reais, 30 disseram que pagam 50 reais, 29 disseram que pagam 100 reais, 7 disseram que pagam 150 reais, 1 homem disse que paga 200 reais e ninguém disse que paga 3000 reais. Dessa forma, teremos:

8 homens disseram que pagam 10 reais. Logo, fazemos: 8 x 10 = 80

25 homens disseram que pagam 30 reais. Logo, fazemos: 25 x 30 = 750

30 homens disseram que pagam 50 reais. Logo, fazemos: 30 x 50 = 1500

29 homens disseram que pagam 100 reais. Logo, fazemos: 29 x 100 = 2900

7 homens disseram que pagam 150 reais. Logo, fazemos: 7 x 150 = 1050

1 homem disse que paga 200 reais. Logo, fazemos: 1 x 200 = 200

0 homem disse que paga 3000 reais. Logo, fazemos: 0 x 3000 = 0

Somamos todas as parcelas e dividimos pelo total de participantes homens da pesquisa.

$$\frac{80 + 750 + 1500 + 2900 + 1050 + 200 + 0}{100} = \frac{6480}{100} = 64,80$$

Com isso, vemos que, em média, os homens aceitariam gastar R$ 64,80. Esse valor coincide com a média aritmética dos valores envolvidos na pesquisa? Como foram atribuídos pesos diferentes aos valores da primeira coluna da tabela 2, calculamos a **média ponderada** desses valores.

Média ponderada

Chamamos de média ponderada ao cálculo da média de valores onde cada um possui determinado "peso". Veja exemplos em: http://www.colegioweb.com.br/matematica/media-aritmetica-ponderada.html

Atividade 2

Amostra x População

Calcule o valor médio pago pelas mulheres que responderam a esta pesquisa. Lembre-se que se trata de uma média ponderada.

Lembre-se: faça em uma folha à parte

Para refletir um pouco: com base nesses resultados poderíamos afirmar que as mulheres gastam muito mais dinheiro com roupas do que os homens? Será que um resultado obtido em um grupo de 100 mulheres reflete a realidade desta situação?

A pesquisa mostrou que O que podemos afirmar é que as mulheres que participaram da pesquisa gastam, em média, mais que os homens que participaram da pesquisa. Isso deixa claro que é perfeitamente possível encontrar vários homens que se disponham a gastar mais dinheiro do que várias mulheres.

Existe ainda uma coisa nesta amostra que merece comentários. Veja o que Luísa nos falou: *"Eu até agora não sei se a pessoa que respondeu que gastaria até 3.000 reais estava brincando ou não."*

Brincando ou não, essa única pessoa influenciou bastante no resultado da média, pois os 3000 aumentaram o valor da média. Calculem a média ponderada do valor pago pelas 99 mulheres que pagariam até R$200,00 por uma peça de roupa e comparem o resultado com aquele obtido na Atividade 1.

Atividade 3

A mediana é uma medida de tendência central que separa um conjunto de dados ordenados em dois conjuntos com o mesmo número de elementos.

Em um conjunto com 7 dados ordenados, por exemplo, a mediana é o 4º termo, pois este determina dois conjuntos com o mesmo número de elementos: três maiores e três menores.

Agora, se o conjunto possui 10 dados ordenados, a mediada é a média aritmética entre o 5º e o 6º elementos.

Atividade 3

As informações obtidas na pesquisa foram colocadas em ordem crescente, como podemos ver abaixo.

Homens											Mulheres									
10	10	10	10	10	10	10	10				10	10	10	10	10	10	10			
											30									
																			200	200
											200	200	200	200	200	200	200	200	200	200
											200	200	200	200	200	200	200	200	200	200
									200		200	200	200	200	200	200	200	200	200	

a. Determine a mediana das amostras referente aos homens e referente às mulheres.

b. Determine a mediana referente a todas as amostras obtidas na pesquisa. (Colocamos aqui a tabela com os valores em ordem crescente devido ao grande número de variáveis presentes nesta pesquisa.)

10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10					
							200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200
200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	

Lembre-se: faça em uma folha à parte

Excelente, pessoal! Pelo que estamos percebendo, os valores médios que os homens em geral – com destaque para a expressão "em geral" – se propõem a pagar por uma peça de roupas fica entre 50 reais (mediana) e 64,80 (média). Isto é, se Luísa quiser vender roupas masculinas, deve possuir peças cujos preços fiquem por essa margem. Em relação às mulheres, os valores médios giram em torno de 124,60 (média) a 150 reais (mediana).

Resumindo as análises feitas com os dados obtidos por Luísa, vemos que as mulheres procuram bastante por blusas e camisetas e que chegam a pagar mais de 120 reais por uma peça de roupa. Já os homens gostam mais das bermudas, mas só chegam a pagar entre 50 reais e 65 reais por uma peça de roupa. Entretanto, em sua loja também deve vender calças, pois homens e mulheres procuram bastante, conforme a pesquisa.

Figura 4: Calça jeans com etiqueta de preço.

Luísa já sabe com que valor preencher as etiquetas de preço, como as da **Figura 4**. Também conseguimos perceber o quanto esse tipo de pesquisa e as análises desses dados são importantes para uma tomada de decisão.

Mas de que forma Luísa fez essa pesquisa? Com quem ela falou? Será que abordou pessoas aleatoriamente ou fez algum tipo de seleção?

Essas e outras perguntas surgem quando queremos verificar se a amostra que utilizamos em nossa pesquisa é confiável ou não. Esta confiabilidade está associada ao grau de certeza sobre nossas análises.

Certamente, vocês já devem ter visto algumas pesquisas que mostram uma margem de erro – aquelas sobre intenção de votos nas eleições, por exemplo. Vejam na Figura 5. O primeiro candidato, por exemplo, conta, em 04/10, com 47% das intenções de voto dos pesquisados, com uma margem de erro de 4% para mais ou para menos. Isso quer dizer que ele conta com um valor entre 43% e 51% das intenções de voto do eleitorado total.

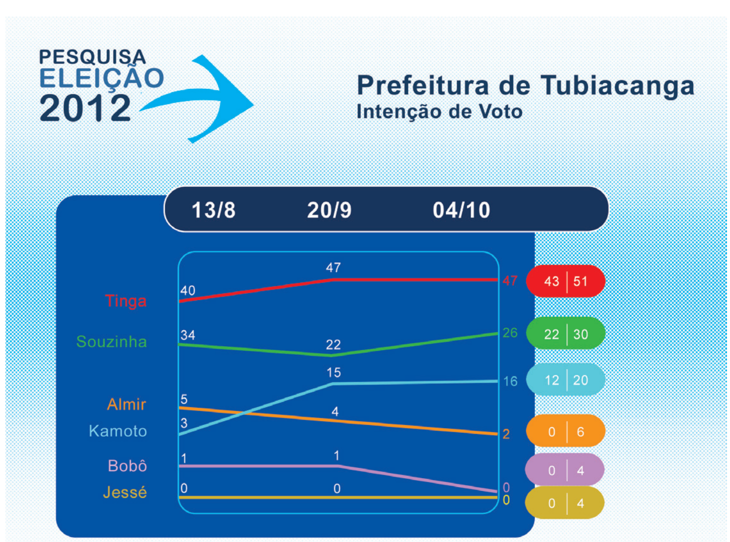


Figura 5: Pesquisa de intenção de voto, com margem de erro explicitada.

Então, essa margem de erro é calculada e dá um pouco mais de segurança sobre os dados apresentados, pois não temos como garantir com absoluta certeza de que as pessoas entrevistadas refletem a realidade de toda a população.

Analisando os dados de uma pesquisa: Desvio-padrão

Até agora, calculamos a média dos valores que as pessoas se propõem a pagar por uma peça de roupa. Mas, se duas pessoas forem comer uma macarronada e apenas uma delas comer todo o macarrão, diremos que, em média, cada uma comeu a metade da macarronada. Outro exemplo interessante é o de um grupo de 30 pessoas cuja média de idade é de 20 anos. Apenas com essa informação, tanto poderemos ter um grupo com 30 pessoas de 20 anos – uma turma do EJA, por exemplo – ou um grupo com 15 pessoas de 5 anos e 15 pessoas de 35 anos – pais ou mães com seus filhos numa reunião da escola, por exemplo. Veja uma situação semelhante na **Figura 6**.


Figura 6: À esquerda, gêmeos; à direita, pai e filho.

Assim, percebemos que, em algumas situações, a média aritmética não nos permite tirar conclusões muito confiáveis, não é mesmo? Para conhecermos melhor o grupo(ou as variáveis) sobre o qual estamos trabalhando, a fim de fazer uma investigação mais detalhada acerca dos valores obtidos numa pesquisa, podemos utilizar o que chamamos de "grau de dispersão" dessas variáveis. Vamos chamar isso de desvio-padrão.

O desvio-padrão é utilizado para determinar o grau de dispersão das variáveis em relação à média (ou o termo central). É dado pela expressão: $D_p = \sqrt{\dfrac{(x_1 - Média)^2 + (x_2 - Média)^2 + ... + (x_n - Média)^2}{n}}$, em que x_i é o valor de cada elemento e a diferença (x_i – Média) é o valor do desvio em relação à média.

Por exemplo, para calcular o desvio-padrão das idades em um grupo de 5 pessoas cujas idades são 5, 7, 12, 15 e 6 procedemos do seguinte modo:

1. Calculamos a Média Aritmética das idades: $(5 + 7 + 12 + 15 + 6) : 5 \Rightarrow 45 : 5 = 9$

2. Calculamos os Desvios em relação à média:

   $5 - 9 = -4$

   $7 - 9 = -2$

   $12 - 9 = 3$

   $15 - 9 = 6$

   $6 - 9 = -3$

Observe uma propriedade interessante: a soma desses desvios é sempre igual a zero.

De fato, $(-4) + (-2) + 3 + 6 + (-3) = 0$

3. Calculamos a média entre os quadrados desses desvios: $(16 + 4 + 9 + 36 + 9) : 5 = 14{,}8$

4. Agora é só calcular a raiz quadrada desse valor, obtendo aproximadamente 3,85.

Devemos observar que, quanto menor for o valor do desvio-padrão, mais homogênea é a distribuição dos dados considerados,

Faça como exemplo o desvio-padrão entre as idades de um grupo com cinco pessoas, cujas idades são 8, 9, 8, 10 e 9 anos.

Seção 2
Revendo conceitos trabalhados

Medidas de tendência central

Ao longo desta unidade, discutimos sobre o caso de Luísa, que precisou realizar e interpretar as informações contidas em uma pesquisa. Para isso, efetuamos os cálculos da média, moda, mediana, desvio-padrão e coeficiente de variação.

Vimos também, por intermédio destes cálculos, que o valor médio que os homens, por exemplo, se propõem a pagar por uma peça de roupa fica entre 50 e 65 reais, aproximadamente. Vamos ver como podemos usar esses cálculos em situações diferentes da apresentada anteriormente?

Importante

Relembrando: o cálculo de uma média aritmética é dado pela expressão abaixo:

$$M_a = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}$$

Já uma média ponderada leva em consideração a quantidade de vezes que uma variável aparece no cálculo. Ou, em outras palavras, o peso dado a cada uma das variáveis.

$$M_p = \frac{a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 + ... + n \cdot x_n}{a + b + c + ... + n}$$

Vamos começar resolvendo uma juntos. Prontos? Lá vai!

Uma seleção para um emprego em uma grande empresa é constituído de 3 etapas e mais uma entrevista. Cada candidato é avaliado nas três etapas iniciais. Caso consiga nota geral maior ou igual a 7, o candidato é classificado para a etapa final, a entrevista. Vale lembrar ainda que todas as etapas geram uma nota de 0 a 10 e que a 1ª etapa tem peso 1, a 2ª tem peso 2 e a 3ª etapa tem peso 3. Celso obteve 8,0 na primeira etapa, 5,0 na segunda etapa e 7,5 na terceira etapa. A pergunta é: ele foi classificado para a entrevista?

Bom, do enunciado, está claro que o cálculo que gera a nota de Celso é o de uma média ponderada, justamente porque cada etapa tem um peso diferente. Isto posto, vamos às contas:

$$\frac{1 \times 8{,}0 + 2 \times 5{,}0 + 3 \times 7{,}5}{1 + 2 + 3} = \frac{40{,}5}{6} = 6{,}75$$

Infelizmente, Celso não foi aprovado para a segunda etapa da seleção.

Que tal fazerem uma agora por conta própria?

Atividade 4

A produção diária de parafusos da Indústria Catatau Ltda. é de 20 lotes, contendo cada um 100.000 unidades. Ao escolher uma amostra de oito lotes, o controle de qualidade verificou o número seguinte de parafusos com defeitos em cada lote:

Amostra	A	B	C	D	E	F	G	H
Defeitos	300	550	480	980	1050	350	450	870

Atividade 4

Pede-se projetar o número médio de parafusos com defeitos em um dia de trabalho.

(Dica: calcule o número médio de parafusos com defeito em cada lote e expanda o resultado para os 20 lotes diários)

Lembre-se: faça em uma folha à parte

Atividade 5

Uma pesquisa realizada por um famoso Instituto Estatístico sobre o número de portadores de deficiência no Brasil revela os seguintes dados, exibidos na tabela abaixo:

Tipos de deficiência	Número de portadores
Cegueira	145852
Surdez	173582
Hemiplegia	208565
Paraplegia	201617
Tetraplegia	46989
Falta de membro (s) ou parte dele (s)	145181
Mental	658915

Determine a moda desta distribuição apresentada.

Lembre-se: faça em uma folha à parte

É isso aí, pessoal! Estamos conseguindo constatar que o uso dessas medidas de tendência central são muito importantes em diversas situações.

Resumo

- Utilizamos a moda com variáveis qualitativas a fim de determinarmos a mais comum.

- Definimos média como a razão entre o somatório e o número total de variáveis existentes em uma amostra.

- O cálculo de uma média aritmética é dado pela expressão $M_a = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}$

- O cálculo de uma média ponderada leva em consideração a quantidade de vezes que uma variável aparece no cálculo (os pesos de cada uma) e é dado pela expressão: $M_p = \dfrac{a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 + ... + n \cdot x_n}{a + b + c + ... + n}$.

- Como foi citado, o desvio-padrão é utilizado para determinar o grau de dispersão das variáveis em relação à média (ou o termo central). É dado pela expressão: $D_p = \sqrt{\dfrac{(x_1 - Média)^2 + (x_2 - Média)^2 + ... + (x_n - Média)^2}{n}}$, em que x_i é o valor de cada elemento e a diferença (x_i – Média) é o valor do desvio em relação à média.

Veja ainda

Se você quiser saber mais sobre os conceitos de média e desvio-padrão associados ao futebol, acesse o link abaixo do vídeo "Atleticano x Rio-Grandense". Neste vídeo, podemos verificar como podemos introduzir os elementos da análise estatística, além de trabalhar com os gráficos para analisar as tendências das amostras. Vale a pena conferir!

- http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1052

Referências

Livros

- Morettin,L.G. (2000), *Estatística Básica*, Volume 2 (Inferência), Makron Books, São Paulo.

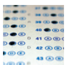
- Bussab,W., Morettin,P. (2005), *Estatística Básica*, Editora Saraiva, São Paulo.

Imagens

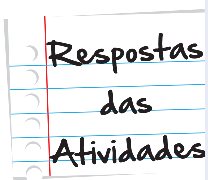
- http://www.sxc.hu/photo/475767

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1210461

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=328371



- http://www.sxc.hu/photo/517386



Atividade 1

Dentre as respostas dadas à primeira pergunta de Luísa, determine a moda:a) Entre os homens: bermudas: 34% dos votos.

a. Entre as mulheres: blusas e camisetas: 35% dos votos

b. No total dos entrevistados, o item calças foi o mais escolhido com 54 dos 200 votos, ou seja, 27% dos entrevistados.

c. Como não se tratam de variáveis quantitativas, não é possível ordenar os valores associados a elas e obter a mediana e, também, não é possível obter a média desses valores.

Atividade 2

De acordo com a tabela:

7 mulheres disseram que pagam até 10 reais. Logo, fazemos: 7 x 10 = 70

13 mulheres disseram que pagam até 30 reais. Logo, fazemos: 13 x 30 = 390

9 mulheres disseram que pagam até 50 reais. Logo, fazemos: 9 x 50 = 450

10 mulheres disseram que pagam até 100 reais. Logo, fazemos: 10 x 100 = 1000

29 mulheres disseram que pagam até 150 reais. Logo, fazemos: 29 x 150 = 4350

31 mulheres disseram que pagam até 200 reais. Logo, fazemos: 31 x 200 = 6200

1 mulher disse que paga até 1000 reais. Logo, fazemos: 1 x 3000 = 3000

Assim, somamos todas as parcelas e dividimos pelo total de participantes mulheres da pesquisa.

$$\frac{70+390+450+1000+4350+6200+3000}{100}=\frac{15460}{100}=154{,}60$$

Atividade 3

Homens									
10	10	10	10	10	10	10	10		
									200

Mulheres									
10	10	10	10	10	10	10			
30	30	30							
50	50								
100									
								200	200
200	200	200	200	200	200	200	200	200	200
200	200	200	200	200	200	200	200	200	200
200	200	200	200	200	200	200	200	200	

a. A mediana referente à pesquisa com os mulheres é 50 reais. Afinal, a mediana é o valor que ocupa a posição central em uma amostra numérica disposta em ordem crescente. Assim, 100 ÷ 2 = 50. Ou seja, a mediana ocupa a posição 50 na tabela acima que é representada pelo valor 50 reais. A mediana referente à pesquisa com as mulheres é 150 reais. Afinal, a mediana é o valor que ocupa a posição central em uma amostra numérica disposta em ordem crescente. Assim, 100 ÷ 2 = 50. Ou seja, a mediana ocupa a posição 50 na tabela acima que é representada pelo valor 150 reais.

b. Considerando os 200 valores pertencentes à pesquisa, independentemente do sexo do participante, a mediana ocupa a posição de número 200 ÷ 2 = 100. Coincidentemente, o valor que ocupa a 100ª posição é 100 reais. Logo, existe uma tendência em gastar 100 reais numa loja de roupas.

Atividade 4

Amostra	A	B	C	D	E	F	G	H
Defeitos	300	550	480	980	1050	350	450	870

A média de parafusos com defeito por lote é de:

$$M = \frac{300+550+480+980+1050+350+450+870}{8} = 628{,}75$$

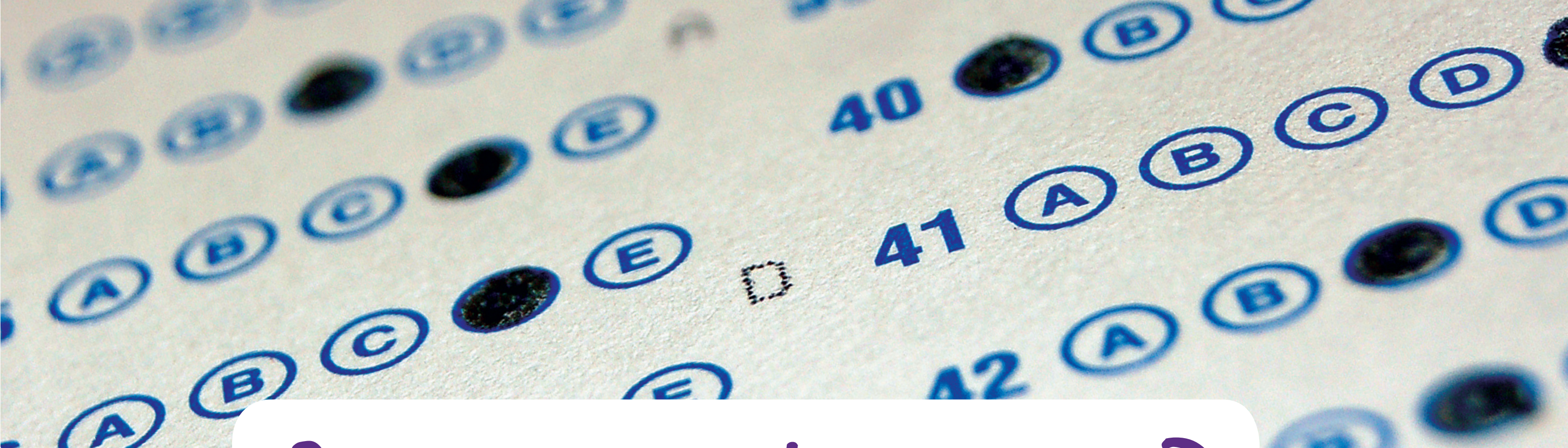
Para os 20 lotes de produção diária, temos:

$628{,}75 \times 20 = 12.575$ parafusos diariamente.

Respostas das Atividades

Atividade 5

A moda é a variável que mais aparece na pesquisa. Neste caso, a moda é Deficiência Mental com 658.915 portadores no Brasil.



O que perguntam por aí?

(ENEM 2009)

Na tabela, são apresentados dados da cotação mensal do ovo extra branco vendido no atacado, em Brasília, em reais, por caixa de 30 dúzias de ovos, em alguns meses dos anos 2007 e 2008.

Mês	Cotação (R$)	Ano
Outubro	83,00	2007
Novembro	73,10	2007
Dezembro	81,60	2007
Janeiro	82,00	2008
Fevereiro	85,30	2008
Março	84,00	2008
Abril	84,60	2008

De acordo com esses dados, o valor da mediana das cotações mensais do ovo extra branco nesse período era igual a:

a. R$ 73,10.

b. R$ 81,50.

c. R$ 82,00.

d. R$ 83,00.

e. R$ 85,30.

Então, os valores são 83,00; 73,10; 81,60; 82,00; 85,30; 84,00 e 84,60. Colocados em ordem crescente, teremos

(73,10; 81,60; 82,00; 83,00; 84,00; 84,60; 85,30). Como temos um número ímpar de valores, o valor intermediário – é justamente o quarto valor: 83,00. Assim, nossa mediana é R$ 83,00, letra D.

(ENEM 2010)

Marco e Paulo foram classificados em um concurso. Para classificação no concurso o candidato deveria obter média aritmética na pontuação igual ou superior a 14. Em caso de empate na média, o desempate seria em favor da pontuação mais regular. No quadro a seguir são apresentados os pontos obtidos nas provas de Matemática, Português e Conhecimentos Gerais, a média, a mediana e o desvio padrão dos dois candidatos.

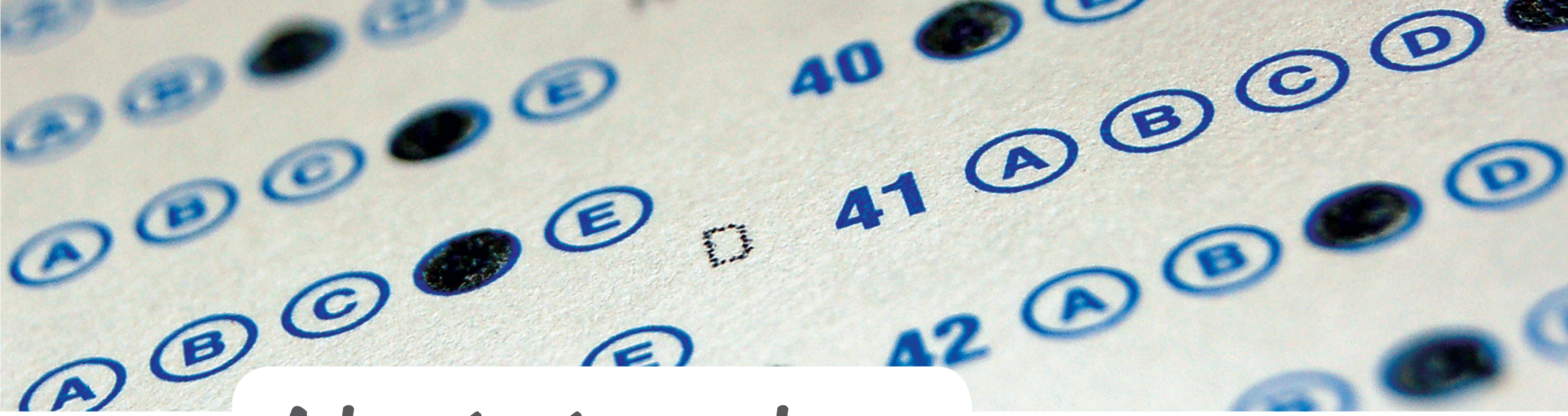
Dados dos candidatos no concurso:

	Matemática	Português	Conhecimento Gerais	Média	Mediana	Desvio Padrão
Marco	14	15	16	15	15	0,32
Paulo	8	19	18	15	18	4,97

O candidato com pontuação mais regular, portanto mais bem classificado no concurso, é:

a. Marco, pois a média e a mediana são iguais.
b. Marco, pois obteve menor desvio padrão.
c. Paulo, pois obteve a maior pontuação da tabela, 19 em Português.
d. Paulo, pois obteve maior mediana.
e. Paulo, pois obteve maior desvio padrão.

Vocês lembram que o desvio padrão mede a distância entre os valores e a média? Muito bem! Então, podemos dizer que, quanto maior o desvio padrão, maior a distância entre os dados e a média. E – eis a parte central da questão! – quanto maior o afastamento da média, maior a irregularidade. Veja que as notas de Marco estão bem juntas e variam muito pouco: 14, 15 e 16. Já as de Paulo oscilam muito: a menor é 9, a maior é 19 e ainda tem um 18 ali por perto. Logo, o desvio padrão das notas de Paulo deve ser (e veja que o cálculo confirma isso) bem maior que o desvio padrão das notas de Marco. Como o critério de desempate é a regularidade, o mais bem classificado no concurso é Marco, justamente porque seu conjunto de notas têm o menor desvio padrão. Letra B, portanto.



Atividade extra

Exercício 1

As idades dos jogadores de uma equipe de futebol são: 22, 24, 27, 27, 25, 25, 25, 23, 24, 32, 28.

Qual a média das idades?

(a) 26,2 (b) 22, 6 (c) 25,6 (d) 23,2

Exercício 2

As análises dos níveis de colesterol HDL ("colesterol bom"), medidos no sangue de cinco pacientes foi de 29, 55, 58, 61 e 63 mg/dL de sangue.

Qual a média aritmética dos níveis observados?

(a) 53,2 (b) 50,2 (c) 52,3 (d) 50,3

Exercício 3

A contagem de bactérias de uma certa cultura apresentou na primeira mostragem 1000 bacterias, na segunda 2500 e na terceira 3500.

Qual a média de crescimento dessa cultura?

(a) 1000 (b) 1250 (c) 1350 (d) 1500

Exercício 4

A tabela representa a distribuição de frequência dos salários de um grupo de 50 empregados de uma empresa, em certo mês:

Salários (R$)	N. de Empregados
1000 → 2000	20
2000 → 3000	18
3000 → 4000	9
4000 → 5000	3

Tabela: Salários dos funcionários

Qual o salário médio desses empregados ?

(a) R$ 2637,00 (b) R$ 2520,00 (c) R$ 2500,00 (d) R$ 2400,00

Exercício 5

Para votar, cinco eleitores demoraram, respectivamente, 3min e 38s, 3min e 18s, 2min e 46s, 2min e 57s, 3min e 26s.

Qual foi o tempo médio de votação (em minutos e segundos)?

(a) 3 min e 13 seg (b) 3 min e 23 seg (c) 2 min e 56 seg (d) 2 min e 36 seg

Exercício 6

Um grupo de pessoas apresenta as idades de 10, 13, 15 e 17 anos. Uma pessoa de 12 anos se juntou ao grupo.

Qual a média de idade do grupo com mais esse novo componente?

(a) 13,4 ((b) 12,6 ((c) 13,8 ((d) 12,2

Exercício 7

Uma avaliação com seis testes foi realizada com os empregados de uma pequena industria. Os resultados foram tabulados e apresentados em uma tabela. Observe:

N. Acertos	Frequência
0	2
1	5
2	6
3	25
4	9
5	12
6	3

Tabela: Salários

Qual a média de acertos aproximadamente?

(a) 3,3 (b) 4,3 (c) 5,2 (d) 6,7

Exercício 8

Observe os valores das frequências das faixas salariais numa pequena empresa, dispostos na tabela.

Salários	Frequência
00 → 500	14
500 → 1000	4
1000 → 1500	2
1500 → 2000	2
2000 → 2500	6

Qual a média dos salários?

(a) 908,47 (b) 938,07 (c) 928,57 (d) 918,37

Exercício 9

Em uma classe de 50 alunos, as notas obtidas formaram a seguinte distribuição:

Notas	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº de alunos	1	3	6	10	13	8	5	3	1

Qual a moda das notas?

(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8

Exercício 10

Uma determinada editora pesquisou o número de páginas das revistas mais vendidas de uma cidade. Sendo fornecida a distribuição de frequência de número de páginas.

Revistas	A	B	C	D	E	F
Nº de páginas	62	90	88	92	110	86

Qual o valor do desvio padrão, aproximadamente?

(a) 14 (b) 18 (c) 15 (d) 17

Exercício 11

A distribuição de salários de uma empresa é fornecida pela tabela:

Salários (R$)	Funcionários
500	10
1000	5
1500	6
2000	15
5000	8
10000	2

Qual a média salarial dessa empresa?

Exercício 12

Medidas as estaturas de 1.017 cearenses, obtivemos a estatura média = 162,2 cm e o desvio padrão = 8,01 cm. O peso médio desses mesmos indivíduos é 52 kg, com um desvio padrão de 2,3 kg.

Qual a maior variabilidade, em estatura ou em peso?

Exercício 13

O modelo A de uma marca de televisão tem um consumo mês de 120 kw com desvio de 3,7 kw, enquanto o modelo B, da concorr^encia, tem um consumo mês de 115 kw com desvio de 5,2 kw.

Qual modelo é menos econômico?

Exercício 14

Suponha que parafusos a serem utilizados em tomadas elétricas são embaladas em caixas rotuladas. Em uma construção, 10 caixas de um lote tiveram o número de parafusos contados, fornecendo os valores 98, 102, 100, 100, 99, 97, 96, 95, 99 e 100.

Qual a mediana do número de parafusos por caixa?

Exercício 15

Os tempos despendidos por 12 alunos, em segundos, para percorrer certo trajeto, sem barreira, foram 16, 17, 16, 20, 18, 16, 17, 19, 21, 22, 16, 23.

Qual o valor, sem agrupar os dados, do coeficiente de variação?

Gabarito

Exercício 1

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 2

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 3

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 4

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 5

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 6

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 7

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 8

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 9

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 10

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 11

R$ 2369,56.

Exercício 12

Estatura.

Exercício 13

O segundo.

Exercício 14

99.

Exercício 15

13,06%.