

CEJA >>

CENTRO DE EDUCAÇÃO
de JOVENS e ADULTOS



MATEMÁTICA

e suas **TECNOLOGIAS** >>

Fascículo 12

Unidades 37, 38, 39 e 40

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Governador
Wilson Witzel

Vice-Governador
Claudio Castro

SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO

Secretário de Estado
Leonardo Rodrigues

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO

Secretário de Estado
Pedro Fernandes

FUNDAÇÃO CECIERJ

Presidente
Gilson Rodrigues

PRODUÇÃO DO MATERIAL CEJA (CECIERJ)

Coordenação Geral de
Design Instrucional

Cristine Costa Barreto

Coordenação de Matemática

Agnaldo da C. Esquinca

Gisela M. da F. Pinto

Heitor B. L. de Oliveira

Revisão de conteúdo

José Roberto Julianelli

Luciana Getirana de Santana

Elaboração

Aroaldo Veneu

Cléa Rubinstein

Daniel Portinha Alves

Heitor B. L. de Oliveira

Leonardo Andrade da Silva

Luciane de P. M. Coutinho

Maria Auxiliadora Vilela Paiva

Raphael Alcaires de Carvalho

Rony C. O. Freitas

Thiago Maciel de Oliveira

Atividade Extra

Benaia Sobreira de Jesus Lima

Carla Fernandes e Souza

Diego Mota Lima

Paula Andréa Prata Ferreira

Vanessa de Albuquerque

Coordenação de Design Instrucional

Flávia Busnardo

Paulo Miranda

Design Instrucional

Aroaldo Veneu

Revisão de Língua Portuguesa

Paulo Cesar Alves

Coordenação de Produção

Fábio Rapello Alencar

Capa

André Guimarães de Souza

Projeto Gráfico

Andreia Villar

Imagem da Capa e da Abertura das
Unidades

<http://www.sxc.hu/>

photo/789420

Diagramação

Alexandre Oliveira

Juliana Fernandes

Carlos Eduardo Vaz de Oliveira

Ilustração

Bianca Giacomelli

Clara Gomes

Fernando Romeiro

Jefferson Caçador

Sami Souza

Produção Gráfica

Verônica Paranhos

Sumário

Unidade 37 Polinômios e equações algébricas 1	5
Unidade 38 Polinômios e equações algébricas 2	37
Unidade 39 Geometria Analítica 1	69
Unidade 40 Geometria Analítica 2	103

Prezado(a) Aluno(a),

Seja bem-vindo a uma nova etapa da sua formação. Estamos aqui para auxiliá-lo numa jornada rumo ao aprendizado e conhecimento.

Você está recebendo o material didático impresso para acompanhamento de seus estudos, contendo as informações necessárias para seu aprendizado e avaliação, exercício de desenvolvimento e fixação dos conteúdos.

Além dele, disponibilizamos também, na sala de disciplina do CEJA Virtual, outros materiais que podem auxiliar na sua aprendizagem.

O CEJA Virtual é o Ambiente virtual de aprendizagem (AVA) do CEJA. É um espaço disponibilizado em um site da internet onde é possível encontrar diversos tipos de materiais como vídeos, animações, textos, listas de exercício, exercícios interativos, simuladores, etc. Além disso, também existem algumas ferramentas de comunicação como chats, fóruns.

Você também pode postar as suas dúvidas nos fóruns de dúvida. Lembre-se que o fórum não é uma ferramenta síncrona, ou seja, seu professor pode não estar online no momento em que você postar seu questionamento, mas assim que possível irá retornar com uma resposta para você.

Para acessar o CEJA Virtual da sua unidade, basta digitar no seu navegador de internet o seguinte endereço:
<http://cejarj.cecierj.edu.br/ava>

Utilize o seu número de matrícula da carteirinha do sistema de controle acadêmico para entrar no ambiente. Basta digitá-lo nos campos "nome de usuário" e "senha".

Feito isso, clique no botão "Acesso". Então, escolha a sala da disciplina que você está estudando. Atenção! Para algumas disciplinas, você precisará verificar o número do fascículo que tem em mãos e acessar a sala correspondente a ele.

Bons estudos!



Polinômios e equações algébricas 1

Fascículo 12
Unidade 37

Polinômios e equações algébricas 1

Para início de conversa...



Você saberia responder essa questão? Se desejar faça uma experiência construindo algumas caixas de tamanhos diferentes e calcule a capacidade de cada uma.

Veja a indicação de um vídeo mostrando essa experiência. <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1382>

Anote suas respostas em seu caderno



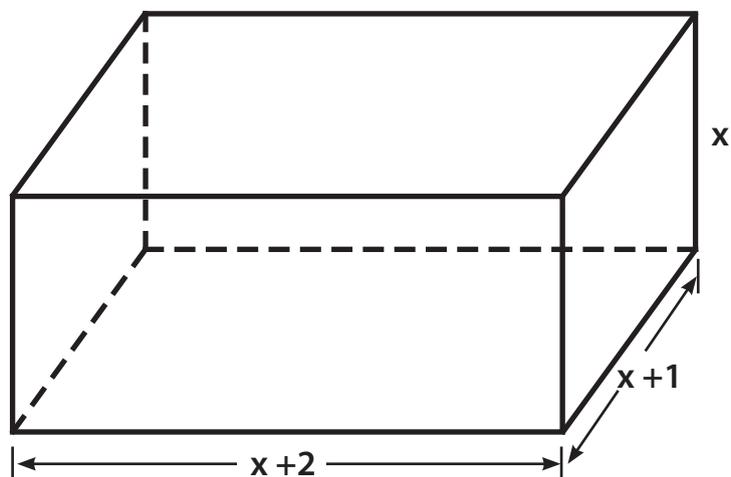


Figura 1: Caixa de papelão sem tampa, com lados iguais a x , $x+1$ e $x+2$.

Veja o desenho acima, que representa uma caixa de papelão sem tampa, com lados iguais a x , $x+1$ e $x+2$. Nós queremos calcular o volume e a área desta caixa. Você saberia escrever uma expressão que nos permitisse calcular a área desta caixa, em função da medida x ?

Uma dica: para resolver questões desse tipo estudaremos os polinômios. Este é um tema que já foi estudado antes, quando vimos, por exemplo, as expressões que representam uma função afim do tipo $y = ax + b$ ou as expressões que representam uma função quadrática do tipo $y = ax^2 + bx + c$.

Essas expressões são chamadas de expressões polinomiais ou simplesmente polinômios.

Objetivos de Aprendizagem

- Definir polinômios
- Compreender o significado e as aplicações de uma função polinomial,
- Calcular o valor numérico de um polinômio,
- Reconhecer as condições necessárias para que dois polinômios sejam iguais
- Compreender o significado de raiz de um polinômio e saber calculá-la.
- Efetuar as 4 operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) com polinômios.

Seção 1

O que é um polinômio?

Quando lemos e compreendemos o enunciado de um problema, podemos escrever expressões que nos permitirão analisá-lo e obter sua solução.

Podemos ter polinômios com apenas um termo, como por exemplo: $2x$, y , $4z$ (chamados de monômios). Mas podemos ter polinômios com um número maior de termos. De uma maneira geral podemos escrever um polinômio da seguinte forma:

$$a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

onde:

- $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$ são números reais chamados de coeficientes do polinômio.
- n (um número natural diferente de zero) é o grau do polinômio
- x é chamado de variável.

Veja os exemplos de polinômios.

- a. O polinômio $5x-1$ é de grau 1 e seus coeficientes são 5 e -1.
- b. O polinômio $2m^2+m+1$ é de grau 2 e seus coeficientes são 2, 1 e 1.
- c. O polinômio $y^3 + 4y^2 - 2y + 5$ é de grau 3 e seus coeficientes são 1, 4, -2 e 5.

Veja, agora, exemplos de expressões que não são polinômios:

- a. $2\sqrt{x} - x + 5$; a variável x não pode estar sob radical, pois isso significa que o expoente é fracionário.
- b. $\frac{2}{x^2} + x^3$; a variável x não pode estar no denominador, pois isso significa que o expoente é negativo.
- c. $m^{-3} + 3m^2 - 2m$; o expoente da variável não pode ser negativo.
- d. $y^{\frac{1}{2}} + 3y - 1$; o expoente da variável não pode ser fracionário.

Assim, para que a expressão seja um polinômio, o expoente das variáveis não pode ser negativo nem fracionário - o que equivale a dizer que a variável não pode estar sob raiz e/ou no denominador.

Atividade
2

Quais das expressões abaixo representam polinômios? Escreva os graus desses polinômios.

a. $5x^4 + 2x^3 + x^2 + x$

b. $\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x} - 4$

c. $5y^5 - 1$

d. $m^{-1} + 3m$

e. $\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x}$

f. $t^6 + t^{\frac{1}{3}}$

g. $k + 7$

h. $s^{-2} + 2s^{-1} + 3$

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 2

Funções polinomiais

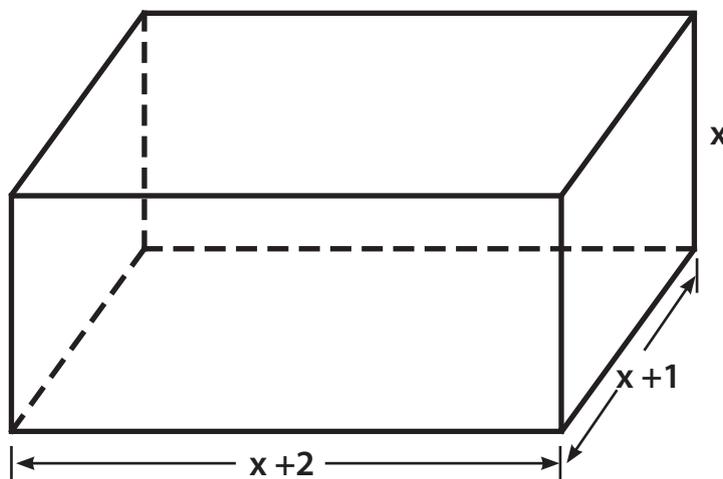


Figura 2: Caixa sem tampa, com dimensões x , $x+1$ e $x+2$.

Vamos retornar àquela pergunta da seção “Para início de conversa”? Tínhamos uma caixa sem tampa com dimensões x , $x+1$ e $x+2$ e estávamos interessados em encontrar uma expressão que nos permitisse calcular sua área e seu volume. Muito bem, para calcular a área total da caixa, devemos somar as áreas das suas faces, a saber: dois retângulos de lados x e $x+1$, dois retângulos de lado x e $x+2$ e um retângulo de lados $x+1$ e $x+2$. Contamos apenas um retângulo de lados $x+1$ e $x+2$ porque a caixa não tem tampa.

Então, vamos às contas:

$$A(x) = 2x \cdot (x+1) + 2 \cdot x \cdot (x+2) + (x+1)(x+2)$$

$$A(x) = 2x^2 + 2x + 2x^2 + 4x + x^2 + 2x + x + 2$$

$$A(x) = 5x^2 + 9x + 2$$

Assim, conseguimos encontrar a expressão que nos permite calcular o valor da área da caixa em função da aresta de medida x . Já para calcular o volume da caixa, devemos multiplicar as suas 3 dimensões.

$$V(x) = x(x+1)(x+2) = x(x^2 + 3x + 2)$$

$$V(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$$

Temos então aqui dois exemplos de funções polinomiais, que dão a área e volume da caixa, em função da medida x .

Apesar de não utilizarem as ferramentas algébricas que conhecemos hoje, vários povos antigos conseguiram encontrar maneiras de relacionar as áreas e volumes dos sólidos às suas dimensões. No papiro de Moscou, escrito pelos egípcios por volta de 1850 a. C. e comprado pelo Museu de Belas Artes de Moscou em 1917, podemos encontrar um problema em que os autores relacionam as medidas dos lados de uma pirâmide truncada com seu volume. Aliás, falamos mais detalhadamente sobre isso na aula 4 do módulo 3, lembra? Querendo refrescar sua memória, dê uma lida novamente neste material.



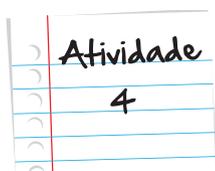
Lembre-se que quando um termo do polinômio não apresenta variável isso significa que o seu expoente é 0, pois $x^0 = 1$.





Dado o polinômio $P(x) = (a - 1)x^3 + ax^2 - 3$, qual ou quais devem ser os valores de a para que o polinômio $P(x)$ seja um polinômio de grau 2?

Anote suas respostas em seu caderno



Para que valores de a e b o polinômio $G(x) = 2bx^2 + (a - 2)x + 5$ será de grau 0?

Anote suas respostas em seu caderno

Conhecendo um pouco mais sobre polinômios

Valor numérico de um polinômio

Quando calculamos a área e o volume da caixa sem tampa encontramos dois polinômios de variável x .

$$A(x) = 5x^2 + 9x + 2$$

$$V(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$$

Agora, vamos substituir a variável x em cada um dos polinômios pelo número 5 - o que, em termos da nossa caixa, equivale a fazer com que o lado menor tenha tamanho 5.

$$A(5) = 5 \cdot 5^2 + 9 \cdot 5 + 2 = 125 + 45 + 2 = 172$$

$$V(5) = 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 = 125 + 75 + 10 = 210$$

Dizemos então que 172 é o valor numérico do polinômio $A(x)$ quando $x = 5$, e que 210 é o valor numérico de $V(x)$ quando $x = 5$. Um pouco mais formalmente – e generalizando - quando substituímos a variável de um polinômio por um número, e efetuamos as operações indicadas, encontramos um resultado numérico que é chamado de valor numérico do polinômio.

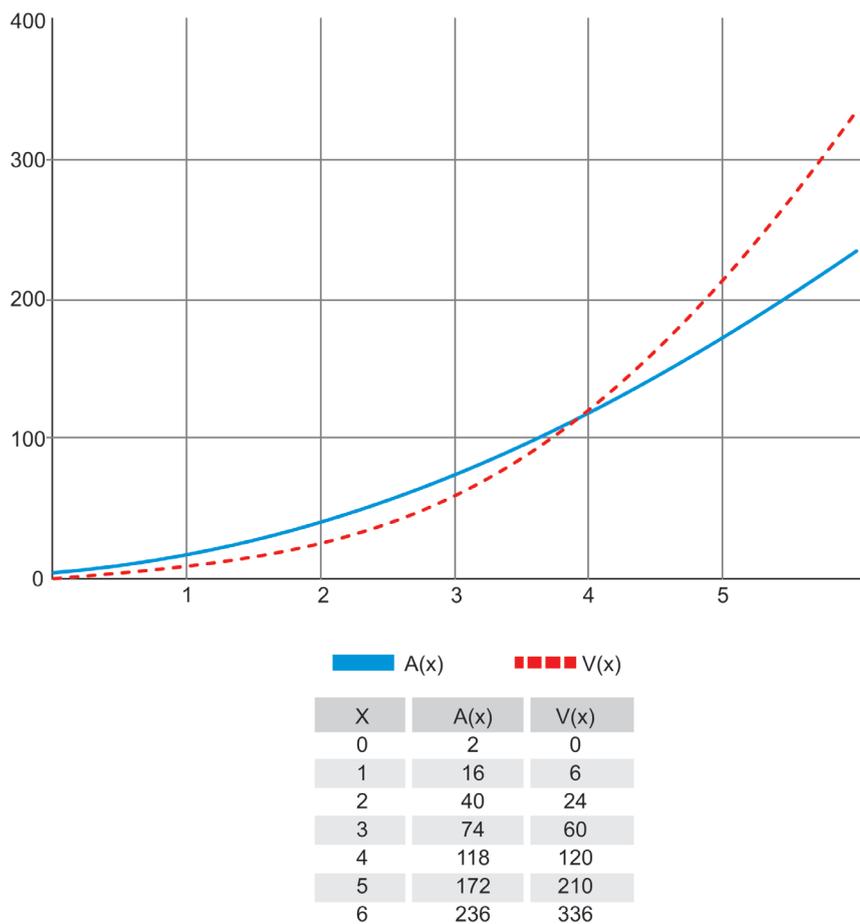
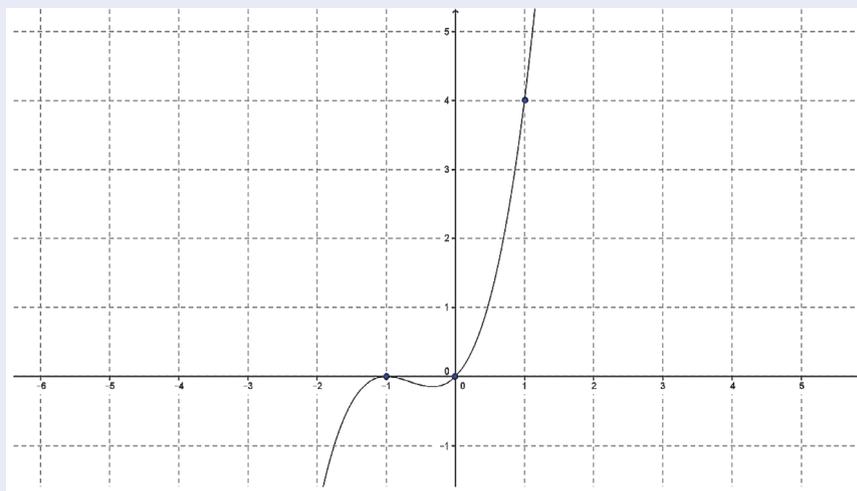


Figura 3: Gráficos de $A(x) = 5x^2 + 9x + 2$ e $V(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$

A figura 3 mostra uma representação gráfica das funções $A(x)$ e $V(x)$, feita a partir do que foi gerado pelo site Calculadora Online (<http://www.calculadoraonline.com.br/grafica>). Perceba que o site ainda fornece o valor numérico dos dois polinômios para valores inteiros de x . Perceba também que, apesar de a área e o volume aumentarem à medida que o valor do lado aumenta, existe um intervalo em que, para um determinado valor do lado, a área é maior que o volume e outro em que o volume é maior do que a área. Isso contraria aquela intuição muito comum de que o volume de uma caixa, por envolver a multiplicação de três números (e ser função de x ao cubo), seria sempre maior do que a área dessa caixa, que envolve a multiplicação destes números dois a dois (e é função de x ao quadrado). Interessante, não acha?

Atividade
5



A figura apresenta a representação de uma função $f(x) = ax^3 + 2x^2 + x$. Três pontos que pertencem a esse gráfico estão destacados na figura: $(1,4)$, $(0,0)$ e $(-1,0)$.

- Quais são os zeros dessa função polinomial?
- Baseado nas informações apresentadas no gráfico, determine o valor de a .
- Represente graficamente a função $f(x) = ax^3 + 2x^2 + x + 1$, sendo a o valor determinado no item anterior. Quantos zeros reais possui a função g ?

Anote suas respostas em seu caderno

Igualdade entre polinômios

Suponhamos os polinômios $P(x) = -5x^3 + 7x^2 - 3x + 10$ e $M(x) = mx^3 + nx^2 + px + q$. Dizemos que os dois polinômios são iguais quando os coeficientes dos termos de mesmo grau são respectivamente iguais.

Assim teremos que $P(x)$ é igual a $M(x)$ se e somente se $m = -5$; $n = 7$; $p = -3$; $q = 10$.

Muito importante aqui é diferenciar igualdade entre polinômios e igualdade entre valores numéricos de polinômios. Um bom exemplo está na figura 3. Perceba que existem dois pontos em que os gráficos dos polinômios $A(x)$

e $V(x)$ se encontram – o primeiro é o ponto $x=0$ e o segundo é um ponto entre $x=3$ e $x=4$. Viram lá? Para estes valores de x , os polinômios, apesar de serem completamente diferentes ($A(x) = 5x^2 + 9x + 2$ e $V(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$) têm o mesmo valor numérico.

- a. Dois polinômios de graus diferentes podem ser iguais?

Pense e explique.

- b. Considere dois polinômios $A(x)$ e $B(x)$. Determine o valor dos coeficientes desconhecidos para que estes dois polinômios sejam iguais. Os polinômios são:

$$A(x) = ax^2 - \frac{3}{4}x + b \text{ e } B(x) = -\frac{1}{2}x^2 + cx - 7.$$

Anote suas respostas em seu caderno



Determine os valores de a , b , c , e d para que os polinômios $f(x) = ax^3 + bx^2 - c$ e

$g(x) = x^2 + dx + 2$ sejam iguais.

Anote suas respostas em seu caderno



Raiz de um polinômio

Verifique o que acontece com o polinômio $P(x) = x^2 - x - 6$, quando calculamos seus valores numéricos para $x = 3$ e $x = -2$

$$P(3) = 3^2 - 3 - 6 = 9 - 3 - 6 = 0$$

$$P(-2) = (-2)^2 - (-2) - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$$

Dizemos, neste caso, que 3 e -2 são os zeros (ou raízes) do polinômio $P(x)$.

Um valor da variável para o qual o polinômio assume valor numérico igual a zero é chamado de zero ou raiz do polinômio.

Assim, para verificar se um determinado número, digamos $x = \frac{2}{3}$, é raiz de um polinômio, por exemplo, $Q(x) = x^2 - \frac{x}{3} - \frac{2}{9}$, basta substituímos x por $2/3$ em $Q(x)$:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{\frac{2}{3}}{3} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} = 0, \text{ donde concluímos que } 2/3 \text{ é, sim, raiz do polinômio } Q(x).$$


Figura 4: Cidade de Bolonha, na Itália, vista a partir das torres de Asinelli.

Se, por um lado, verificar se um número é raiz de um dado polinômio é um processo bastante simples, o problema inverso, encontrar as raízes de um polinômio dado, é uma tarefa bem mais complexa. Para que se tenha uma ideia, enquanto os gregos e os babilônios, apesar de não terem recursos formais, já conseguiam para encontrarem raízes de polinômios do segundo grau, as primeiras formas mais sistemáticas de encontrar raízes de polinômios do terceiro grau foram objeto de acirradas competições públicas de matemática feitas pela universidade de Bolonha, na Itália, no século XVI.



Niccolo Fontana (Tartaglia)



Girolamo Cardano

Saiba Mais

Durante a Renascença, no século XVI, a universidade italiana de Bolonha ficou conhecida por promover várias competições públicas na área de Matemática, muitas delas envolvendo técnicas para encontrar as raízes de polinômios de terceiro grau.

Uma destas disputas foi vencida pelo matemático italiano Niccolo Fontana, também conhecido como Tartaglia, que havia desenvolvido um método de resolução para vários tipos de equações do 3º grau – mas insistia em não publicá-lo.

Tartaglia foi convencido por Cardano, outro matemático italiano, a contar-lhe o método, sob o juramento de que não iria divulgá-lo até Tartaglia publicá-lo pessoalmente. No entanto, Cardano publicou o método sem a autorização de Tartaglia em seu livro *Ars Magna - A grande arte*. As fórmulas de Tartaglia terminaram conhecidas como fórmulas de Cardano e a desavença entre os dois seguiu até o final de suas vidas.

Operações com polinômios

Adição e subtração de polinômios

O que vamos mostrar nesta seção é, na verdade, uma revisão de conteúdos já vistos. Quando estudamos cálculo algébrico, vimos que podemos efetuar a adição e a subtração de polinômios somando ou subtraindo os **termos semelhantes** dos dois polinômios.

Termos semelhantes

São os termos do polinômio que possuem a mesma parte literal e só diferem em seus coeficientes.

Vamos ver alguns exemplos?

a) Qual é a soma dos polinômios $p(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 9$ e $q(x) = 2x^3 + x^2 - 4x - 5$?

A soma dos dois polinômios será outro polinômio que chamaremos de $S(x)$.

$$S(x) = (x^3 - 2x^2 + 5x + 9) + (2x^3 + x^2 - 4x - 5) = 3x^3 - x^2 + x + 4$$

Conferiram a soma dos termos semelhantes? $x^3 + 2x^3 = 3x^3$; $-2x^2 + x^2 = -x^2$; $5x + (-4x) = x$ e $9 + (-5) = 4$.

b) Qual é a soma dos polinômios $h(m) = 6m^4 - 5m^2 - m + 1$ e $g(m) = -2m^4 - m^3 + 2m$?

$$h(m) + g(m) = (6m^4 - 5m^2 - m + 1) + (-2m^4 - m^3 + 2m) = 4m^4 - m^3 + m + 1$$

c) Qual o resultado da diferença entre $f(x) = 5x^3 + 8x^2 - 3x + 2$ e $h(x) = 2x^3 + 5x^2 - 2x - 3$?

$$f(x) - h(x) = (5x^3 + 8x^2 - 3x + 2) - (2x^3 + 5x^2 - 2x - 3) = 3x^3 + 3x^2 - x + 5$$

d) Vamos subtrair os polinômios $g(y) = -3y^3 + 3y + 2$ e $l(y) = y^3 - 2y^2 + y - 5$

$$g(y) - l(y) = (-3y^3 + 3y + 2) - (y^3 - 2y^2 + y - 5) = -4y^3 + 2y^2 + 2y + 7$$

Multiplicação de polinômios

Para multiplicar dois polinômios, fazemos a multiplicação de todos os termos do 1º polinômio por todos os termos do 2º polinômio. Em seguida fazemos a redução dos termos semelhantes, ou seja, adicionamos os termos cuja variável tem o mesmo expoente.

Esse modo de efetuar a multiplicação é uma aplicação da **propriedade distributiva** da multiplicação em relação à adição e à subtração.

Propriedade distributiva

De acordo com propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração, multiplicar um número por uma soma ou diferença é equivalente a multiplicar este número por cada um dos fatores dessa soma ou diferença. Ou seja, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

Assim, o produto entre os polinômios $2x$ e $x^2 + 3x - 4$ é:

$$2x \cdot (x^2 + 3x - 4) = 2x \cdot x^2 + 2x \cdot 3x - 2x \cdot 4 = 2x^3 + 6x^2 - 8x.$$

Veamos outros exemplos.

a) Multiplique os polinômios $f(x) = x - 2$ e $g(x) = 2x^2 + x - 3$

$$f(x) \cdot g(x) = (x - 2) \cdot (2x^2 + x - 3) = x \cdot 2x^2 + x \cdot x - x \cdot 3 - 2 \cdot 2x^2 - 2 \cdot x - 2 \cdot (-3)$$

$$f(x) \cdot g(x) = 2x^3 + x^2 - 3x - 4x^2 - 2x + 6 = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 6$$

b) Multiplique os polinômios $p(x) = 4x^3 - 2x - 6$ e $q(x) = x - 1$

$$p(x) \cdot q(x) = (4x^3 - 2x^2 - 6) \cdot (x - 1) = 4x^4 - 4x^3 - 2x^3 + 2x^2 - 6x + 6$$

$$p(x) \cdot q(x) = 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 6x + 6$$

E para multiplicar um polinômio por um número real, como faríamos?

Isso pode ser feito da mesma forma: usando a distributividade.

$$-7 \cdot (-3x^3 + 2x^2 - x + 10) = 21x^3 - 14x^2 + 7x - 70$$

1- Considere os polinômios:

$$P(x) = x^2 - 3x + 5$$

$$Q(x) = -x + 5$$

$$R(x) = 3x^3 + 2x - 1$$

Calcule:

a. $P(x) + Q(x)$

c. $3 \cdot Q(x)$

b. $Q(x) - P(x)$

d. $P(x) \cdot Q(x)$

Anote suas
respostas em
seu caderno



Divisão de polinômios

Antes de tratarmos da divisão de polinômios, vamos buscar motivação no algoritmo da divisão para números inteiros. Em uma divisão, os seus termos dividendo (D), divisor (d), quociente (q) e resto (r) são tais que $D = d \cdot q + r$, com $0 \leq r < d$. Por exemplo, ao dividirmos 10 por 6, obtemos quociente 1 e resto 4, já que $10 = 6 \cdot 1 + 4$.

Da mesma forma, ao dividirmos o polinômio $P(x)$ pelo polinômio $S(x)$ obteremos dois polinômios $Q(x)$ e $R(x)$ tais que $P(x) = Q(x) \times S(x) + R(x)$.

O resto da divisão $R(x)$ é um polinômio cujo grau não pode ser igual nem maior que o grau do divisor $S(x)$.

Exemplo 1.

Vamos aplicar o mesmo algoritmo para fazer uma divisão com polinômios, dividindo o polinômio $x^3 + 2x^2 + x + 1$ pelo polinômio $x + 2$.

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 + x + 1 & x + 1 \\ -x^3 - x^2 & x^2 \\ \hline x^2 & \end{array}$$

- Dividimos x^3 por x encontrando x^2 no quociente.
- Multiplicamos x^2 pelo divisor.
- O resultado dessa multiplicação é subtraído do dividendo (é o mesmo que somar trocando o sinal do 2º polinômio).
- Encontramos x^2 como resto parcial.

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 + x + 1 & x + 1 \\ -x^3 - x^2 & x^2 + x \\ \hline x^2 + x + 1 & \\ -x^2 - x & \\ \hline 1 & \end{array}$$

- Para continuar a divisão, escrevemos $x + 1$ ao lado do resto e dividimos x^2 por x . Encontramos x no quociente.
- Multiplicamos x pelo divisor.
- O resultado dessa multiplicação é subtraído do dividendo.
- Encontramos 1 como resto, terminando assim a divisão

Podemos escrever:

$$x^3 + 2x^2 + x + 1 = (x + 1) \cdot (x^2 + x) + 1$$

Observando esta sentença vemos que:

- O grau do quociente (2) é a diferença entre os graus do dividendo (3) e o do divisor (1).
- O grau do resto é menor que o grau do divisor.
- Esta divisão não é exata, portanto o polinômio $x^3 + 2x^2 + x + 1$ não é divisível pelo polinômio $x + 1$.

Exemplo 2.

$$\begin{array}{r|l} x^4 - x^3 - 4x^2 + 5x - 1 & x - 1 \\ -x^4 + x^3 & \hline \hline -4x^2 + 5x - 1 & x^3 - 4x + 1 \\ +4x^2 - 4x & \\ \hline x - 1 & \\ -x + 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Podemos escrever:

$$x^4 - x^3 - 4x^2 + 5x - 1 = (x - 1) \cdot (x^3 - 4x + 1)$$

Portanto, como o resto é zero, a divisão é exata e o polinômio $x^4 - x^3 - 4x^2 + 5x - 1$

é divisível pelos polinômios $x - 1$ e $x^3 - 4x + 1$.

A relação acima nos permite verificar se a divisão foi feita corretamente.

Então, para sabermos se o resultado de uma divisão está correto, basta multiplicá-lo pelo divisor e somar o resultado ao resto, caso seja ele seja diferente de zero. Se encontrarmos o dividendo, significa que a divisão foi efetuada corretamente.

Quando no dividendo falta um termo (seu coeficiente é zero), sugerimos completar o dividendo com esse termo antes de iniciar a divisão.

$$\text{Ex: } 2x^3 + x - 1 = 2x^3 + 0x^2 + x - 1$$



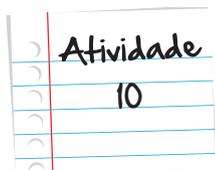
Encerramos a seção com duas atividades:



Efetue a divisão dos seguintes polinômios e determine o resto:

- $p(x) = 2x^3 - 6x^2 - 20x + 8$ por $q(x) = 2x^2 + 4x - 3$
- $p(x) = 2x^3 + x - 1$ por $q(x) = x - 1$

Anote suas respostas em seu caderno



Efetuada uma divisão entre polinômios encontramos para quociente $x - 1$ e para resto $2x - 1$. Sabendo que o divisor é $x^2 - 3x + 2$, calcule o dividendo.

Anote suas respostas em seu caderno

Conclusão

É importante perceber que o estudo dos polinômios, apesar de relacionado a questões mais teóricas da Matemática, tem um grande apelo prático, modelando, dentre muitas outras situações, o cálculo de áreas e volumes. Neste contexto, os conceitos de raiz, termo, grau, igualdade de polinômios, etc tem por objetivo principal facilitar a identificação dos elementos que usaremos no trabalho. Como muitos dos cálculos com polinômios já foram estudados em aulas anteriores, aproveitamos a oportunidade para explicitar a analogia entre as operações e cálculos com polinômios e as operações e cálculos com números. Ter essa analogia em mente facilitará muito o trabalho com os polinômios.

Resumo

- Um polinômio é uma expressão da forma $a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, onde x é a variável; $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$ são números reais chamados de coeficientes do polinômio e n é um número natural diferente de zero.
- O grau de um termo do polinômio é o valor do expoente da variável naquele termo.
- O grau de um polinômio é o valor do maior expoente dos seus termos.
- Quando substituímos a variável de um polinômio por um número, e efetuamos as operações indicadas, encontramos um resultado numérico que é chamado de valor numérico do polinômio.
- Dois polinômios são iguais quando os coeficientes dos termos de mesmo grau são respectivamente iguais.
- O valor da variável tal que o valor numérico do polinômio é zero é chamado de raiz do polinômio.
- Para efetuar a adição e a subtração de polinômios, somamos ou subtraímos os termos de mesmo grau.
- Para multiplicar polinômios usamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à soma e à subtração, multiplicando cada um dos termos de um polinômio por todos os termos do outro. Em seguida, adicionamos os termos de mesmo grau do polinômio que resultou da multiplicação.
- Para dividir polinômios, usamos o mesmo algoritmo que usamos para dividir números reais.

Veja ainda

http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_3_2.pdf

Uso de polinômios para surpreender.

Neste site você pode observar outras situações onde são usados polinômios.

Referências

- Dante, Luiz Roberto, *Matemática contexto e aplicações*, 3ª edição, São Paulo, Editora Ática, 2010, 736 páginas.
- Bordeaux, Ana Lúcia... (et al.), coordenação de João Bosco Pitombeira, *Matemática Ensino Médio*, 3ª série, Rio de Janeiro, Fundação Roberto Marinho, 2005, 440 páginas

Imagens



• <http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=153960>



• <http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=153960>



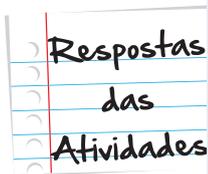
• <http://www.nndb.com/people/440/000098146/tartaglia-1.jpeg>



• <http://scienceworld.wolfram.com/biography/pics/Cardano.jpg>



• <http://www.sxc.hu/photo/517386>



Atividade 1

Tem maior volume a caixa 2 que tem a menor altura.

Atividade 2

São polinômios os itens:

a. de grau 4 c. de grau 5 g. de grau 1

As demais opções não são polinômios porque têm expoente negativo (d, e, h) ou fracionário (b, f)

Atividade 3

Muito bem, a primeira coisa é lembrar que o polinômio será de grau 2 se o termo de maior grau for aquele que estiver elevado ao quadrado. Como nossa expressão tem um termo elevado ao cubo, seu coeficiente deve ser zero, justamente para anular este termo. Assim, a primeira condição é que o coeficiente de x^3 - no caso, $a-1$ - deve ser zero. Então, teremos que $a-1=0$; $a=1$. Porém, isso não é tudo! Perceba que a também é coeficiente do termo de segundo grau - e, se for igual a zero, irá anular este termo! Assim, precisamos também que $a \neq 0$.

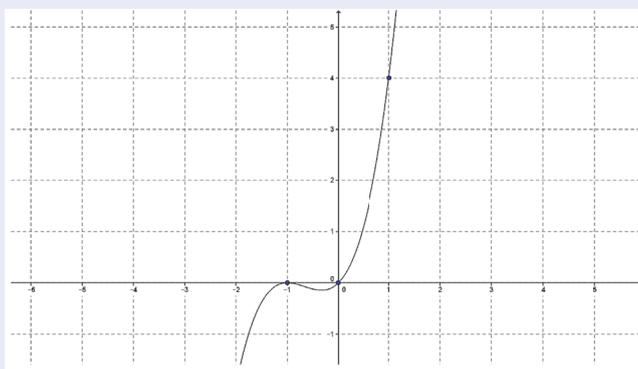
Querem fazer um por conta própria?

Atividade 4

$$b = 0, a = 2$$

Atividade 5

- 1 e 0
- $a = 1$
- g possui apenas um zero real.



Atividade 6

- Não poderiam ser iguais pelo seguinte motivo: se os polinômios têm graus diferentes, o grau de um é maior do que o grau do outro. No polinômio de grau maior – digamos N - o coeficiente do termo de grau N é diferente de zero. Já no polinômio de menor grau – digamos n , que é menor do que N - o coeficiente do termo de grau N é igual a zero. Como os coeficientes deste termo de mesmo grau são diferentes, os polinômios não podem ser iguais.
- Basta lembrar que, para que dois polinômios sejam iguais, é necessário que os coeficientes dos termos de mesmo grau sejam respectivamente iguais. Assim, o valor de a , que é o coeficiente de x^2 no polinômio $A(x)$, deve ser igual ao coeficiente de x^2 no polinômio $B(x)$, que é $-1/2$. Raciocínio análogo nos leva a concluir que $c = -3/4$ e $b = -7$.

Respostas
das
Atividades

Atividade 7

$$a=0, b=1, c=-2 \text{ e } d=0$$

Atividade 8

a. $x^2 - 4x + 10$

c. $-3x + 15$

b. $-x^2 + 2x$

d. $-x^3 + 8x^2 - 20x + 25$

Atividade 9

c. $x - 5$ e resto $3x - 7$

b. $2x^2 + 2x + 3$ e resto 4

Atividade 10

$$x^3 - 4x^2 + 7x - 3$$

O que perguntam por aí?

Questão 1 (Mack - SP)

Determine m para que o polinômio

$$p(x) = (m - 4)x^3 + (m^2 - 16)x^2 + (m + 4)x + 4 \text{ seja de grau 2.}$$

Resposta: Para que o polinômio seja de grau 2 o coeficiente do termo de grau 3 deve ser zero e o coeficiente do termo de grau 2 deve ser diferente de zero, logo:

$$m - 4 = 0; m = 4$$

$$m^2 - 16 \neq 0 \quad m \neq \pm 4$$

Não existe valor de m para que o polinômio seja de grau 2, pois, para isso ele teria que ser igual a 4 e diferente de 4 ao mesmo tempo o que é impossível.

Questão 2 (Faap - SP)

Calcule os valores de a, b, c para que o polinômio

$$p_1(x) = a(x+c)^3 + b(x+d) \text{ seja idêntico a } p_2(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 14.$$

$$P_1(x) = a(x^3 + 3cx^2 + 3c^2x + c^3) + bx + bd = ax^3 + 3acx^2 + 3ac^2x + ac^3 + bx + bd =$$

$$= ax^3 + 3acx^2 + (3ac^2 + b)x + ac^3 + bd$$

Para que este polinômio seja idêntico a $p_2(x)$, temos que ter:

$$a = 1$$

$$3ac = 6 \rightarrow 3 \cdot 1 \cdot c = 6 \rightarrow c = 2$$

$$3ac^2 + b = 15 \rightarrow 3 \cdot 1 \cdot 4 + b = 15 \rightarrow b = 15 - 12 \rightarrow b = 3$$

$$ac^3 + bd = 14 \rightarrow 1 \cdot 8 + 3d = 14 \rightarrow 3d = 14 - 8 \rightarrow 3d = 6 \rightarrow d = 2.$$

Resposta: $a = 1; b = 3; c = 2; d = 2$

Questão 3 (FEI - SP)

Seja $p(x) = ax^4 + bx^3 + c$ e $q(x) = ax^3 - bx - c$, determine os coeficientes a, b, c , sabendo que $p(0) = 0$, $p(1) = 0$ e $q(1) = 2$.

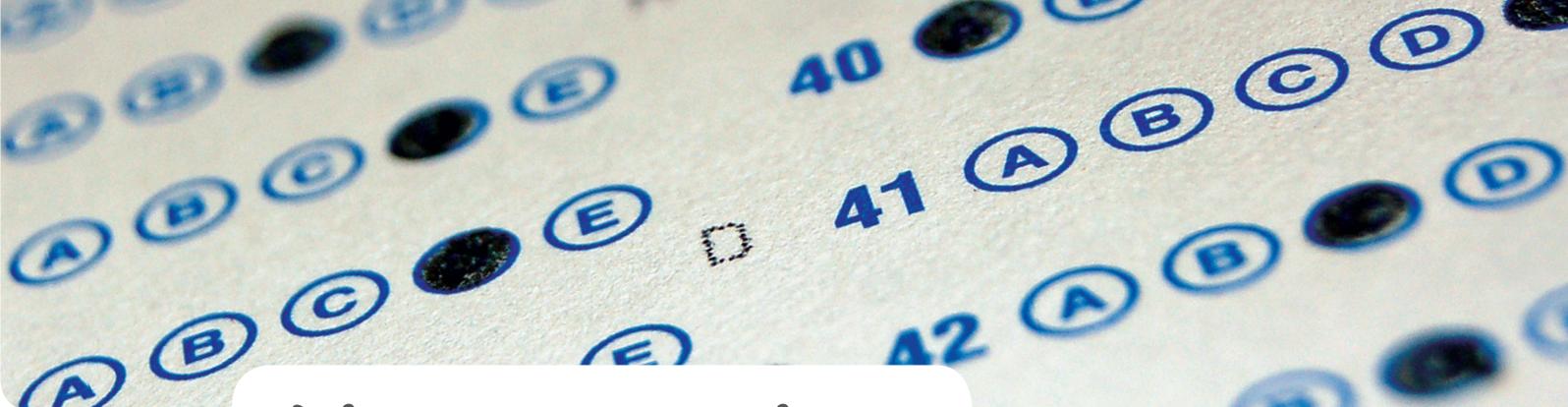
$$P(0) = c = 0$$

$$P(1) = a + b + c = 0$$

$$Q(1) = a - b - c = 2 \quad 2a = 2 \rightarrow a = 1$$

$$1 + b + 0 = 0 \rightarrow b = -1$$

Resposta: $a = 1; b = -1; c = 0$



Atividade extra

Exercício 1

Seja uma caixa, em forma de paralelepípedo retangular, na qual a medida da largura e o triplo da medida do comprimento, e a altura e quatro vezes maior que a largura da base.

Quais são os polinômios que nos dão a área e o volume dessa caixa?

- (a) $16x^3$ e $36x^3$ (c) $66x^2$ e $36x^3$
(b) $36x^2$ e $16x^3$ (d) $36x^2$ e $66x^3$

Exercício 2

Seja o polinômio $p(x) = (2m - 4)x^2(m + 4)x + 4$:

Quais devem ser os valores de m para que o polinômio seja do grau 2?

- (a) $m \neq 2$ (b) $m \neq 4$ (c) $m \neq 6$ (d) $m \neq 8$

Exercício 3

Seja o polinômio $q(x) = 2x^3 - kx^2 + 3x - 2k$ e considere $q(3) = 8$.

Qual é o valor de k ?

- (a) -5 (b) -3 (c) 3 (d) 5

Exercício 4

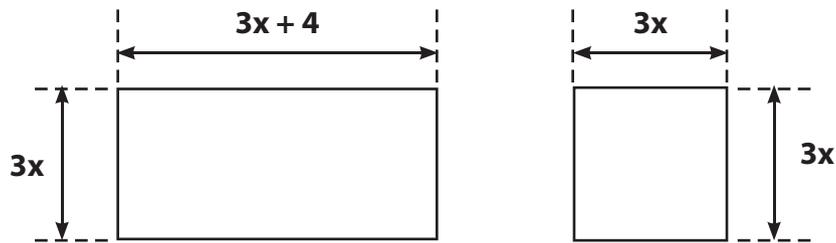
Sejam os polinômios $p_1(x) = x^2 - 5x + 6$ e $p_2(x) = x^2 - 7x + 10$ e sejam x_1 e x_2 as raízes de $p_1(x)$, e x_3 e x_4 as raízes de $p_2(x)$.

Qual é o valor de $(x_1 - x_2) + (x_3 - x_4)$?

- (a) -1 (b) -3 (c) -4 (d) 5

Exercício 5

Considere as áreas do retângulo e do quadrado ilustrados na figura.



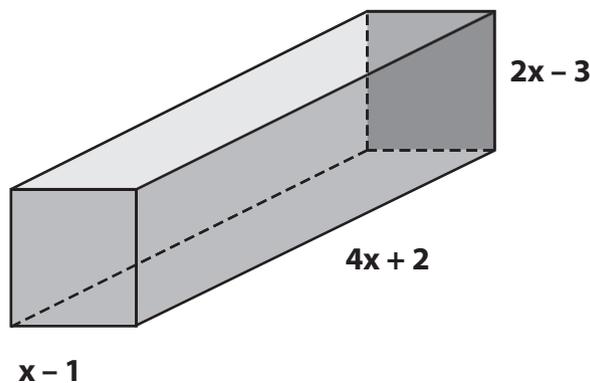
A diferença entre as áreas do primeiro e do segundo é de 60cm^2 .

Qual é o valor de x ?

- (a) 5 (b) 8 (c) 10 (d) 12

Exercício 6

A figura ilustra um paralelepípedo retangular cujas medidas estão expressas no desenho.



Seendo $V(x)$ o polinômio que representa o volume, e $A(x)$ o polinômio que representa a área total desse sólido.

Quais são os polinômios $A(x)$ e $V(x)$ relativos à área e ao volume desse sólido?

(a) $A(x) = 28x^2 - 30x - 10$ e $V(x) = 8x^3 - 16x^2 + 2x + 6$

(b) $A(x) = 8x^3 + 6$ e $V(x) = 7x$

(c) $A(x) = 8x^3 - 16x^2 + 2x + 6$ e $V(x) = 28x^2 - 30x - 10$

(d) $A(x) = 7x$ e $V(x) = 8x^3 + 6$

Exercício 7

Considere os polinômios $p(x) = 2x^3 + 3$ e $q(x) = 5x^4 - 2$.

Qual é o grau do quociente q/p ?

(a) 1

(b) 2

(c) 3

(d) 5

Exercício 8

O lucro L , em reais, de uma empresa é dado por $L(x) = 10(3 - x)(x - 8)$, em que x é a quantidade vendida do produto que a empresa produz.

Qual o polinômio reduzido que representa esse lucro?

(a) $L(x) = -10x^2 + 22x - 100$

(b) $L(x) = -10x^2 + 110x - 240$

(c) $L(x) = x^2 - 5x + 1$

(d) $L(x) = -10x^2 + 240$

Exercício 9

Seja o polinômio $p(x) = x^2 - mx + 6$ tal que 2 é raiz de $p(x)$.

Qual é o valor de m ?

(a) -5

(b) 2

(c) 5

(d) 10

Exercício 10

Sejam os polinômios $P(x) = x^{31} + 140x^8 + x - 20$; $D(x) = x$ e R a divisão de $P(x)$ por Dx :

Qual é o grau de $R(x)$?

- (a) 1 (b) 30 (c) 31 (d) 111

Exercício 11

Considere o polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + (b - 18)x + 1$ em que 1 é raiz e $p(2) = 25$.

Determine o valor de $a + b$.

Exercício 12

Se $P(x)$ é um polinômio de primeiro grau tal que $P(1) = 2$ e $P(3) = 8$.

Qual é o valor de $p(-2)$?

Exercício 13

Dados os polinômios $p(x) = 2(x - 1)(2x + 1)$; $q(x) = x - 2$ e $r(x)$ o resto da divisão de $p(x)$ por $q(x)$.

Que polinômio representa $r(x)$?

Exercício 14

Dados os polinômios $p(x) = 2x^4 - 7x^3 + 3x^2$, $q(x) = x - k$; $s(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x - 6$ e $r(x) = -12$, tal que

$$p(x) = q(x)s(x) + r(x).$$

Qual é o valor de k para o qual a igualdade é satisfeita?

Exercício 15

Os polinômios $p(x) = mx^2 + nx - 4$ e $q(x) = x^2 + mx + n$ são tais que $p(x + 1) = q(2x)$ para todo x real.

Qual é o Valor de $m + n$?

Gabarito

Exercício 1

A B C D

Exercício 2

A B C D

Exercício 3

A B C D

Exercício 4

A B C D

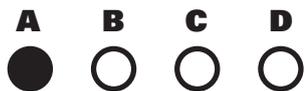
Exercício 5

A B C D

Exercício 6

A B C D

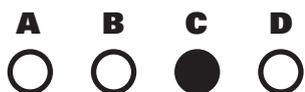
Exercício 7



Exercício 8



Exercício 9



Exercício 10



Exercício 11

Como 1 é raiz $p(1) = 0$, então

$$a + b = 16$$

Como $p(2) = 25$

$$2a + b = 26$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} a + b = 16 \\ 2a + b = 26 \end{cases}$$

tem-se $a = 10$ e $b = 6$.

Exercício 12

$p(x)$ e do primeiro grau então $p(x) = ax + b$. Como $p(1) = 2$ então $2a + b = 2$. Como $p(3) = 8$ então $3a + b = 8$ assim $a = 6$ e $b = -10$, então $p(x) = 6x - 10$. Assim $p(-2) = -22$.

Exercício 13

Dividindo $p(x)$ por $q(x)$ encontramos $4x + 8$ com $r(x) = 15$.

Exercício 14

Dividimos $p(x)$ por $s(x)$, e depois somando o resto, encontramos $k = 2$.

Exercício 15

Da igualdade $p(x+1) = q(2x)$ segue $m = 4$ e $n = 0$. Então $m + n = 4$.





Polinômios e equações algébricas 2

Fascículo 12
Unidade 38

Polinômios e equações algébricas 2

Para início de conversa...

Conforme vimos na unidade Geometria Espacial: pirâmides e cones, que tratava das pirâmides, os papiros encontrados por arqueólogos no início do século XX revelaram que há aproximadamente 4.000 anos os egípcios conheciam e tinham vários métodos para a solução de diversos problemas que, hoje, são modelados por equações algébricas.



Figura 1: *Cyperius papyrus*, planta a partir da qual se faz e cujo nome deu origem ao termo papiro.

Resolver uma equação algébrica é determinar valores para a sua incógnita de modo que se obtenha uma sentença matemática verdadeira. Exemplificando, 3 é solução da equação $2x - 6 = 0$ pois $2 \cdot 3 - 6 = 0$ é uma sentença matemática verdadeira, mas 5 não é solução da mesma equação pois $2 \cdot 5 - 6 = 0$ é uma sentença falsa.

Se tivermos uma equação $P(x) = ax + b$ e um determinado valor - digamos, x_1 - for o zero ou a solução da equação, podemos escrever que $P(x_1) = ax_1 + b = 0$.

Ao procurar os zeros de um polinômio do tipo

$p(x) = a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ encontra-se uma equação do tipo

$a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, que é chamada de equação algébrica ou equação polinomial.

Na busca de um tratamento mais sistemático para o problema, os matemáticos se fizeram duas perguntas:

1º) Essas equações têm sempre solução?

2º) Como calcular as soluções caso existam?



Figura 2: Carl Friedrich Gauss.

Foi apenas em 1799 que o astrônomo, matemático e físico alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) respondeu à primeira das perguntas. Em sua tese de doutorado, apresentou o famoso Teorema Fundamental da Álgebra, onde demonstra que toda equação polinomial tem ao menos uma solução no campo dos números complexos.

Outros matemáticos antes de Gauss apresentaram demonstrações desse teorema, mas todas continham falhas. Entre esses matemáticos podemos citar: Jean Le Rond d'Alembert, Leonhard Euler e Joseph Louis Lagrange.

A demonstração feita por Gauss era perfeita e, no decorrer de sua vida, apresentou mais três demonstrações do mesmo teorema.

Resta responder à 2ª pergunta. Como achar essas raízes?

Por volta de 1550, já se conheciam fórmulas gerais para resolver equações do 1º, 2º, 3º e 4º graus, mas nenhuma fórmula havia sido obtida para resolver equações de grau maior que 4.

Em 1824, um jovem matemático norueguês, Niels Hendrich Abel (1802-1829), demonstrou que não existem fórmulas gerais para resolver equações de grau maior que 4. Isso também foi demonstrado pelo matemático francês Évariste Galois (1811-1832) e pelo italiano Ruffini.

Portanto, podemos resumir assim as conclusões:

- Toda equação algébrica de grau maior que zero tem solução.
- Existem processos algébricos para determinar as soluções de equações dos 1º, 2º, 3º e 4º graus.
- Não é possível encontrar soluções para equações de graus maior que 4 por processos algébricos, a não ser em casos específicos.

Sugerimos ver, no endereço a seguir, mais informações históricas sobre o desenvolvimento e as descobertas sobre polinômios. É um artigo que, além de apresentar os fatos históricos, também desenvolve o conteúdo relativo ao tema que estamos estudando.

<http://www.inf.unioeste.br/~rogerio/02d-Estudo-analitico-polinomios.pdf>



Objetivos de Aprendizagem

- Utilizar o teorema do resto para resolver problemas.
- Utilizar o dispositivo prático de Briot-Ruffini na divisão de polinômios.
- Resolver equações polinomiais utilizando o teorema fundamental da álgebra.
- Utilizar as Relações de Girard para resolver equações polinomiais.

Seção 1

Divisão de um polinômio e cálculo do resto.

Estudaremos agora o resultado de uma divisão de um polinômio por um binômio do tipo $(x - a)$, revendo a divisão de polinômios já feita na aula anterior. Vamos dividir $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 4$ por $d(x) = x - 2$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 3x^2 + x - 4 & x - 2 \\ -2x^3 + 4x^2 & \hline \hline x^2 + x & \\ -x^2 + 2x & \hline \hline 3x - 4 & \\ -3x + 6 & \hline \hline 2 & \end{array}$$

Encontramos o quociente da divisão que é o polinômio de grau 2, $q(x) = 2x^2 + x + 3$ e o resto que podemos chamar de $r(x) = 2$.



Observe que o grau do quociente (no caso, 2) é a diferença entre os graus do dividendo (no caso, 3) e o do divisor (no caso, 1).

Veja que o resto da divisão é um polinômio de grau zero, menor que o grau do binômio $d(x)$ que tem grau 1. Você já sabe que a divisão de um polinômio $p(x)$ por um binômio $(x - a)$ determina os polinômios $q(x)$ e $r(x)$ de tal forma que $p(x) = (x - a) \cdot q(x) + r(x)$. Lembre-se da analogia que fizemos na unidade anterior com os números. Da mesma forma que $\text{dividendo} = \text{divisor} \cdot \text{quociente} + \text{resto}$, $p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$. No caso, nosso $d(x)$ é justamente o $x - a$.

Como o grau polinômio divisor $d(x)$ é 1 (porque estamos estudando a divisão por $x - a$), o grau de $r(x)$ será sempre zero. Noutras palavras, o polinômio $r(x)$, resto da divisão, será sempre um número. Fazendo $x = a$ na expressão $p(x) = (x - a) \cdot q(x) + r(x)$, teremos:

$$p(a) = (a - a) \cdot q(a) + r$$

$$p(a) = 0 \cdot q(a) + r = 0 + r$$

$$p(a) = r$$

Assim, dado um polinômio qualquer $p(x)$, seu valor numérico para $x=a$ é justamente igual ao resto da divisão desse polinômio por $(x - a)$. O valor numérico de um polinômio para $x=2$, por exemplo, é justamente o resto da divisão desse polinômio por $x-2$. Já o valor desse mesmo polinômio para $x = -10$ é o resto da divisão dele por $x + 10$, e assim por diante.

O valor numérico do polinômio $p(x)$ para $x = a$ – ou seja, $p(a)$ – é igual ao resto da divisão desse polinômio por $(x - a)$.



Podemos pensar agora em uma importante consequência desse resultado. O que acontece se o valor numérico de $p(a)$ for igual a zero? O que podemos concluir em relação aos polinômios $p(x)$ e $x - a$? Ora, se $p(a)$ for igual a zero, temos que o resto da divisão de $p(x)$ por $x - a$ é zero e, conseqüentemente, $p(x)$ é divisível por $x - a$.

Se $p(a) = 0$, podemos concluir, pela definição de raiz, que o valor a , além de ser raiz do polinômio $x - a$, também é raiz do polinômio $p(x)$. Vejamos algumas aplicações desse resultado.

Vamos determinar o valor de m de modo que o polinômio $p(x) = x^3 - 2x^2 + mx - 2$ seja divisível por $d(x) = x + 2$.

Ora, se $p(x)$ é divisível por $d(x)$, o resto da divisão de um pelo outro é igual a zero. Esse resto também é igual ao valor de $p(a)$. Falta descobrir o valor de a , o que faremos comparando $x+2$ com $x-a$. Chegaremos à conclusão de que $2 = -a$; $a = -2$.

$$\text{Logo, } p(-2) = r = 0$$

$$p(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 + m(-2) - 2 = -8 - 8 - 2m - 2 = -18 - 2m$$

$$-18 - 2m = 0$$

$$-2m = 18$$

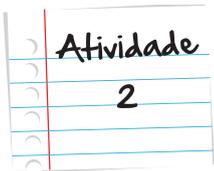
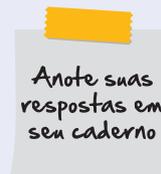
$$m = -9$$

Logo, o valor de m que torna o polinômio $p(x)$ divisível por $d(x)$ é -9 .

Outra maneira é pensar que se $p(x)$ é divisível por $d(x)$, a raiz de $d(x)$ também é raiz de $p(x)$. A raiz de $d(x)$ é o valor de x que faz com que $d(x)$ seja zero, no caso, -2 . Como esse valor também é raiz de $p(x)$, teremos que $p(-2) = 0$ – e caímos na mesma equação anterior.



Qual o resto da divisão de $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ por $d(x) = x + 3$?



Se $p(x) = 3x^3 - cx^2 + 4x + 2c$ divisível por $x + 1$, quanto vale c ? Explique sua resposta.



Dispositivo prático para dividir um polinômio

Você já conhece o algoritmo para a divisão de polinômios, que é análogo ao algoritmo usado para se dividir números. No entanto, existe um dispositivo para se efetuar uma divisão de um polinômio por um binômio do tipo $x - a$, de maneira mais simples e rápida. Este dispositivo é conhecido como dispositivo de Briot – Ruffini, em referência aos matemáticos Charles Briot (1817-1882), francês e Paolo Ruffini (1765-1822), italiano.

Vamos iniciar apresentando a seguinte disposição gráfica.

	Coeficientes de x do dividendo $p(x)$	Termo constante do dividendo $p(x)$
Raiz de $d(x)$	Coeficientes do quociente $q(x)$	Resto da divisão $r(x)$

Para dar um exemplo do uso deste dispositivo, repetiremos a primeira divisão de polinômios que fizemos nesta aula, logo no início da seção “Divisão de polinômios e cálculo de resto”. Os polinômios são $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 4$, dividendo, e $d(x) = x - 2$, divisor. Neles, é possível identificar que:

- a raiz de $d(x)$ é $x - 2 = 0$; $x = 2$.
- os coeficientes da variável de $p(x)$ são: 2, -3 e 1
- o coeficiente do termo independente da variável de $p(x)$ é -4.

De posse dos elementos, é hora de coloca-los no dispositivo.

1ª etapa: Coloca-se a raiz na 1ª coluna com 2ª linha, os coeficientes de x na 1ª linha, separando o coeficiente do termo independente de x .

	2	-3	1	-4
2				

2ª etapa: "baixar" o primeiro coeficiente de $p(x)$

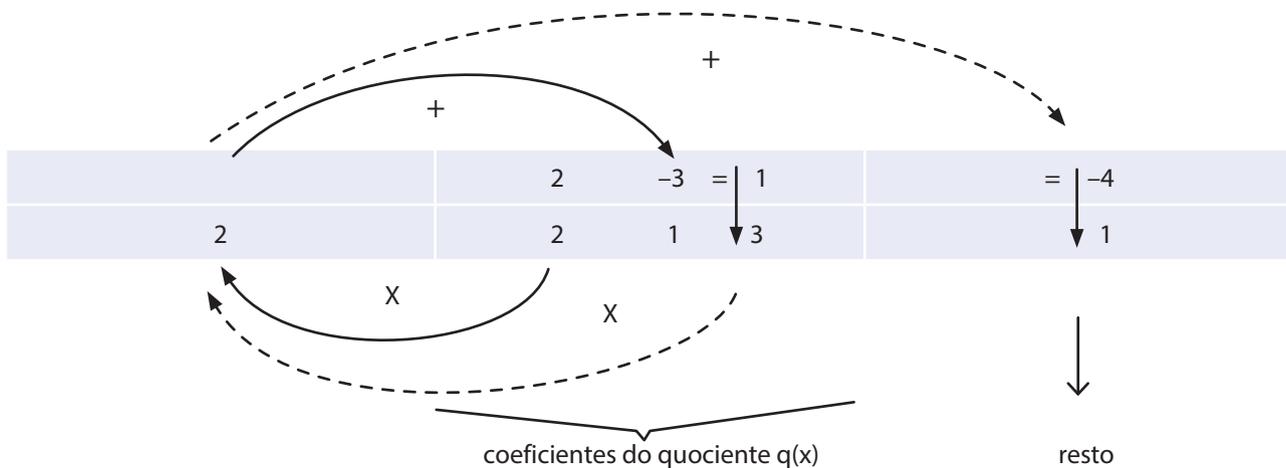
	2	-3	1	-4
2	2			

3ª etapa: Multiplica-se o primeiro coeficiente (2) pela raiz do divisor e soma-se o produto obtido com o coeficiente seguinte, ou seja, $2 \times 2 + (-3) = 1$. Este resultado é colocado abaixo do 2º coeficiente de $p(x)$. Acompanhe o movimento das setas!

	2	-3	1	-4
2	2	1		

4ª etapa: Repetem-se as mesmas operações para se obter o resultado final.

$1 \times 2 + 1 = 3$ (seta cheia) e $3 \times 2 - 4 = 2$ (seta tracejada).



Como dividimos um polinômio de grau 3 por um polinômio de grau 1, o polinômio que resultará dessa divisão terá grau 2. Os coeficientes deste polinômio serão exatamente aqueles que encontramos na parte inferior central do dispositivo, ordenados da maior para a menor potência. Assim, o resultado da divisão de $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 4$ por $d(x) = x - 2$ é $q(x) = 2x^2 + x + 3$ com resto $r(x) = 2$.



Compare esse processo de divisão com aquele que fizemos no início da aula e responda: foi mais fácil fazer assim? Foi mais difícil? Qualquer que seja a sua resposta, o que precisa ficar muito claro para você é que ela está 100% correta! Ambas as formas de fazer a divisão são válidas e a sensação de facilidade de cada uma varia de pessoa para pessoa. Assim, no que diz respeito a estas duas maneiras, não existe forma melhor ou pior e sim mais fácil ou mais trabalhosa para cada um de nós.

Vamos aplicar o dispositivo de Briot- Ruffini para efetuar a divisão de $p(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$ por $d(x) = x - 2$, em seguida, verificar se é possível escrever $p(x)$ como um produto de dois fatores.

Aplicando o dispositivo, teremos:

	1	1	-10		8
2	1	3	-4		0

Note que o resto da divisão é 0. Dessa forma, $p(x)$ é divisível por $x - 2$, o que também implica dizer que 2 é raiz de $p(x)$. É possível escrever $p(x)$ como um produto de dois fatores pois se $p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$ e $r(x)$ é zero, $p(x) = d(x) \cdot q(x)$. No caso dos polinômios em questão, isso quer dizer $x^3 + x^2 - 10x + 8 = (x - 2)(x^2 + 3x - 4)$.

Fatore o polinômio $p(x) = x^3 - 4x^2 + x - 4$, sabendo-se que $h(x) = x - 4$ é um dos fatores de $p(x)$.

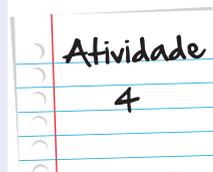
Anote suas respostas em seu caderno



Verifique se o polinômio $p(x) = x^2 - x - 5$ é divisível por $d(x) = x - 5$.

Justifique sua resposta.

Anote suas respostas em seu caderno



Seção 2

Raízes de polinômios

Na aula anterior, foi feita uma revisão do conceito de raiz de um polinômio e recordamos que o valor da variável tal que o polinômio assume o valor zero é chamado de raiz do polinômio.

Para descobrir as raízes de um polinômio, podemos proceder de duas maneiras. A primeira delas é fazer uma verificação, onde inserimos um determinado valor, que achamos ser a raiz, e vemos se ele de fato faz com que a expressão dê zero. A outra maneira é calcular a raiz diretamente. Vamos ver isso em quatro exemplos.

Primeiro exemplo: queremos saber se $x = 4$ é raiz do polinômio $2x - 8$.

a. podemos fazer isso via verificação, substituindo a variável x da equação por 4, e teremos:

$$2 \cdot 4 - 8 = 0;$$

Como o valor $x = 4$ é tal que o polinômio $2x - 8$ assume valor zero, concluímos que 4 é sua raiz.

- b. Uma outra forma de determinar a raiz de um polinômio é resolver a equação $p(x) = 0$. No caso de $p(x) = 2x - 8$, temos:

$$2x - 8 = 0$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

Segundo exemplo: queremos saber se $x = 1$ é raiz do polinômio $x^2 + 2x - 3$.

- a. vamos determinar o valor numérico desse polinômio para $x = 1$.

$$1^2 + 2 \cdot 1 - 3 = 1 + 2 - 3 = 0.$$

Logo, $x = 1$ é raiz do polinômio.

- b. Podemos também verificar se $x = 1$ é raiz do polinômio resolvendo-se a equação $p(x) = 0$. No caso do polinômio $x^2 + 2x - 3$, temos que resolver a equação do 2º grau $x^2 + 2x - 3 = 0$. Uma forma de resolvê-la é utilizar a fórmula de Bhaskara.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$x = \frac{-2 + 4}{2} = 1$

$x = \frac{-2 - 4}{2} = -3$

Vimos, então que o polinômio, além da raiz $x = 1$, tem também como raiz $x = -3$.

Multimídia

Bhaskara Acharya (1114-1185) foi um importante matemático da Índia medieval. Dentre seus livros, destacam-se o Siddhanta-siromani, dedicado à Astronomia e o Bijaganita, sobre Álgebra, em que trata da resolução de vários tipos de equações. No entanto, a fórmula para cálculo das raízes da equação do segundo grau -e que, apenas no Brasil, leva seu nome - não é de sua autoria. Quer saber mais? Veja "Esse tal de Bhaskara", interessante vídeo da coleção matemática multimídia, da Unicamp. Eis o link: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1097>

Terceiro exemplo: Queremos encontrar as raízes do polinômio $x^3 - 2x^2 - x + 2$. Apesar de existir uma fórmula para a determinação de raízes de polinômios do 3º grau, vamos indicar outro caminho. É possível ter um palpite sobre uma raiz? Verifique que 2 é uma raiz desse polinômio. De fato, $2^3 - 2 \cdot 2^2 - 2 + 2 = 0$. Pelo que estudamos nas seções anteriores, o polinômio $x^3 - 2x^2 - x + 2$ pode ser escrito como o produto $(x - 2) \cdot p(x)$, sendo $p(x)$ um polinômio de grau 2. É possível determinar $p(x)$ aplicando-se o dispositivo de Briot-Ruffini. Tente determinar $p(x)$ e as outras raízes desse polinômio.

Aqui, recordamos o que já vimos anteriormente: um polinômio $P(x)$ pode ser escrito como $P(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$ – onde $d(x)$ é o divisor, $q(x)$ é o quociente e $r(x)$ é o resto. E, se a é raiz do polinômio, o resto da divisão por $x - a$ é zero. Nestes casos, como $r(x) = 0$, o polinômio pode ser escrito como produto de dois fatores: $d(x)$ (o divisor, $x - a$) e $q(x)$ (o quociente, resultado da divisão por $x - a$).



Vamos dividir o polinômio $x^3 - 2x^2 - x + 2$ por $x - 2$ usando o dispositivo prático, para encontrar outros fatores.

	1	-2	-1		2
2	1	0	-1		0

$x^3 - 2x^2 - x + 2$ pode ser escrito como $(x - 2)(x^2 - 1)$. Vemos então que as outras raízes do polinômio do 3º grau (além de $x = 2$) são as raízes do polinômio $x^2 - 1$. Resolvendo-se a equação $x^2 - 1 = 0$, temos que $x = 1$ ou $x = -1$.

Assim, calculamos as raízes do polinômio $x^3 - 2x^2 - x + 2$ que são: 2, 1 e -1.



Figura 4: Calculando as raízes de um polinômio e construindo seu gráfico.

Retomando o terceiro exemplo da seção anterior, poderemos escrever que $(x^2 - 1)$ como o produto $(x+1) \cdot (x - 1)$ uma vez que $(a^2 - b^2) = (a + b) \cdot (a - b)$. Nosso polinômio $x^3 - 2x^2 - x + 2$ poderá ser escrito, então, da seguinte maneira:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 2) \cdot (x^2 - 1) = (x - 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$$

E aí, a gente pode pensar assim: a equação algébrica do primeiro grau tem uma raiz; a do segundo tem duas - e o polinômio pode ser escrito como o produto de dois polinômios do primeiro grau; já a equação do terceiro grau tem 3 raízes - e o polinômio pode ser escrito como o produto de três polinômios do primeiro grau. Será que toda equação algébrica do n-ésimo grau tem n raízes? Afinal, qual a relação entre o grau de uma equação algébrica e a quantidade de raízes que ela tem?

Como já vimos na seção "Para início de conversa", a resposta a este problema foi perseguida por muitos anos, até ser finalmente encontrada por Gauss, em 1799. A resposta é justamente o teorema fundamental da álgebra, que afirma o seguinte: Toda equação algébrica $p(x) = 0$, de grau n maior ou igual a 1, possui n raízes não necessariamente distintas.



Saiba Mais

A demonstração do teorema Fundamental da Álgebra, devido a sua complexidade, está evidentemente fora do escopo do nosso curso. Assim, para efeitos da nossa presente conversa, aceitaremos sem demonstração o que foi provado por Gauss. No entanto, conhecer um pouco mais sobre a relação entre polinômios, raízes e este teorema é bem importante. Vocês estão convidados a fazê-lo em <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1051>



- Resolva a equação $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0$, sabendo que uma das raízes é $x = 3$
- Determine as soluções da equação $x^3 - 6x^2 + 32 = 0$, sabendo que -2 é uma de suas raízes.

Anote suas respostas em seu caderno

Determine as raízes da equação $x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30 = 0$, sabendo que -1 e 2 são duas de suas raízes.

Anote suas
respostas em
seu caderno



Seção 3

Relações de Girard



Figura 5: O matemático francês Albert Girard.

Como já estudado na unidade sobre equações do 2º grau, se x_1 e x_2 são raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, então:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ e } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Vejam um exemplo:

Determine a soma e o produto das raízes da equação $4x^2 - 4x - 3 = 0$

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$S = -\frac{(-4)}{4} = 1 \qquad P = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$$

A soma das raízes é 1 e o produto das raízes é $-\frac{3}{4}$

O interessante é que estas relações entre coeficientes e raízes de uma equação podem ser estabelecidas para todas as equações algébricas. Vamos ver como isso ocorre na equação do 3º grau?

Suponha que x_1, x_2, x_3 são as raízes, não necessariamente distintas, da função polinomial dada por $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Como já vimos, podemos escrever a equação de forma fatorada, assim:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Efetuada os produtos, temos:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a \left[x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 \right]$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = ax^3 - (x_1 + x_2 + x_3)ax^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)ax - (x_1x_2x_3)a$$

Fazendo-se uma analogia com as relações entre raízes e coeficientes da equação do 2º grau:

$$\text{Como } b = -(x_1 + x_2 + x_3)a \longrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$\text{Como } c = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)a \longrightarrow x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$$

$$\text{Como } d = -(x_1x_2x_3)a \longrightarrow x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$$

Estas são as chamadas relações de Girard para a equação do 3º grau.

De forma análoga, podemos estabelecer essas relações para outras equações de graus maiores que 3.



Caso você esteja se indagando da utilidade dos polinômios de grau maior do que 3, eis uma aplicação interessante: em 2010, Caroline Viesel e Gilcilene de Paulo se propuseram a determinar o tempo ideal de abate de perus e, para isso, fizeram a modelagem...usando um polinômio do quarto grau! O trabalho foi publicado nos anais do XXXIII Congresso de Matemática Computacional e Aplicada. O link está aqui: http://www.sb-mac.org.br/eventos/cnmac/xxxiii_cnmac/pdf/561.pdf

Saiba Mais

Vamos fazer uns exemplos juntos?

Primeiro exemplo - Escreva as relações de Girard para a equação $x^3 + 7x^2 - 3x + 5 = 0$, considerando como raízes da equação x_1 , x_2 , e x_3 .

Observando a equação vemos que: $a = 1$; $b = 7$; $c = -3$ e $d = 5$.

Então, podemos escrever:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = \frac{-7}{1} = -7$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} = \frac{-3}{1} = -3$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} = \frac{-5}{1} = -5$$

Segundo exemplo - Considerando a equação $2x^3 + mx^2 + nx + p = 0$ e suas raízes sendo -1, 2 e 1, determine m , n e p e escreva a equação.

$$x_1 + x_2 + x_3 = -1 + 2 + 1 = 2 = -\frac{m}{2}; m = -4$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -1 \cdot 2 + -1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = -1 = \frac{n}{2}; n = -2$$

$$x_1x_2x_3 = -1 \cdot 2 \cdot 1 = -2 = -\frac{p}{2}; p = 4$$

Logo a equação é $2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$

Para finalizar nosso conteúdo, convidamos vocês a fazerem mais duas atividades.

Atividade
7

As dimensões de um paralelepípedo retângulo são dadas pelas raízes do polinômio $3x^3 - 13x^2 + 7x - 1$. Determine a razão entre os números que expressam a área total e o volume do paralelepípedo.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade
8

Quais os valores de p e q para os quais a equação $\frac{x^3}{3} - 2x^2 + px + q = 0$ admite uma raiz de multiplicidade 3. Chamamos de raiz de multiplicidade 3, quando a equação tem as 3 raízes iguais.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade
9

Vamos resolver alguns exercícios de aplicação das relações de Girard:

- a. Calcule o valor de k na equação $(k + 2) \cdot x^2 - 5x + 3 = 0$ de modo que o produto das raízes seja igual a $3/8$.
- b. Se m , n e p são as raízes da equação $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$, determine o valor de $1/m + 1/n + 1/p$.

Anote suas respostas em seu caderno

Conclusão

Os polinômios são utilizados para resolver situações-problema de diferentes áreas e são uma valiosa ferramenta da Matemática. Conhecer um pouco da história do tema que estamos estudando é sempre interessante, pois pode auxiliar a compreender a importância e a construção histórica dos resultados encontrados.

O dispositivo de Briot- Ruffini para resolução de uma divisão de polinômio por um binômio do tipo $x - a$ é bastante prático e simples, permitindo resolver problemas que exigem fatoração de polinômios e de determinação de suas raízes.

Da mesma forma, as relações entre os coeficientes das equações e suas raízes, chamadas de Relações de Girard, possibilitam a resolução de problemas diversos envolvendo pesquisas de raízes de um polinômio.

Resumo

- O valor numérico do polinômio $p(x)$ para $x = a$, ou seja, $p(a)$, é igual ao resto da divisão desse polinômio por $(x - a)$.
- Se $p(a)$ for igual a zero, o resto da divisão do polinômio por $x - a$ será zero, o que quer dizer que o polinômio é divisível por $x - a$ e a é uma raiz do polinômio.
- Se $p(a)$ for igual a zero, o polinômio $p(x)$ pode ser escrito como um produto de dois fatores.
- Para dividir polinômios por $x - a$ usamos o dispositivo prático de Briot-Ruffini.
- Raiz de um polinômio é o valor da variável que torna o polinômio nulo. Portanto, quando temos um polinômio $p(x)$ e fazemos $p(x) = 0$, queremos obter os valores de x que anulam a função.
- As raízes de um polinômio podem ser encontradas via verificação (substituição) ou via cálculo direto.
- O cálculo direto da raiz dos polinômios do primeiro grau é feito resolvendo diretamente a equação $ax + b = 0$
- O cálculo direto da raiz dos polinômios de segundo grau é feita usando a fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- As relações de Girard relacionam os coeficientes dos polinômios com suas raízes
- As relações de Girard para equações do segundo grau são: se x_1 e x_2 são raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, então: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$
- As relações de Girard para equações do terceiro grau são: se x_1, x_2, x_3 são as raízes, não necessariamente distintas, da função polinomial dada por $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, então: $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$; $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$; $x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$

Veja Ainda

<http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap111s4.html>

Neste site, você poderá estudar e conhecer um pouco mais sobre Polinômios, praticando mais o cálculo e resolução de equações polinomiais.

Referências

Livros

- Dante, Luiz Roberto. *Matemática: contexto e aplicações*, 3ª edição, São Paulo, Editora Ática, 2010, 736 páginas.
- Bordeaux, Ana Lúcia. (et al.), coordenação de João Bosco Pitombeira. *Matemática Ensino Médio*, 3ª série, Rio de Janeiro, Fundação Roberto Marinho, 2005, 440 páginas

Imagens



- <http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=153960>



- <http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1393676>



- http://pt.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss#mediaviewer/File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg



- <http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=475768>



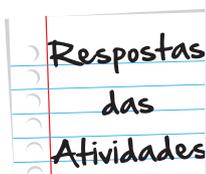
- http://fr.wikipedia.org/wiki/Albert_Girard#mediaviewer/File:Jodocus_Hondius.jpg



- <http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=992677>



- <http://www.sxc.hu/photo/517386>



Atividade 1

$$p(-3) = (-3)^3 - 3(-3)^2 + 4 = -27 - 27 + 4 = -50$$

O resto da divisão é -50 .

Atividade 2

Se $p(x)$ é divisível por $x + 1$, o resto é zero. Para calcular o valor de c devemos calcular $p(-1) = 3(-1)^3 - c(-1)^2 + 4(-1) + 2c = 0$

$$-3 - c - 4 + 2c = 0 \quad -7 + c = 0 \quad c = 7$$

Atividade 3

	1	-4	1	-4
4	1	0	1	0

$$x^3 - 4x^2 + x - 4 = (x - 4)(x^2 + 1)$$

Atividade 4

$$p(x) = x^2 - x - 5$$

$$d(x) = x - 5$$

$$p(5) = 25 - 5 - 5 = 15$$

Sendo $p(5) \neq 0$ o resto é igual a 15, logo $p(x)$ não é divisível por $d(x)$.

Outra solução:

Fazer a divisão usando o dispositivo e encontrar resto igual a 15.

Atividade 5

- a. Começamos com a verificação, certo? Vamos verificar se $x = 3$ é raiz da equação, fazendo a substituição da variável.

$$2 \cdot 3^3 - 5 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 0$$

$$54 - 45 - 12 + 3 = 0$$

$$0 = 0$$

Respostas
das
Atividades

Respostas
das
Atividades

Verificamos, assim, que 3 é raiz da equação e $p(x)$ é divisível por $(x - 3)$. Aplicando o dispositivo prático, vamos fazer a divisão de $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$ por $x - 3$.

	2	-5	-4	3
3	2	1	-1	0

A partir dos coeficientes que encontramos no dispositivo, verificamos que o quociente dessa divisão é o polinômio $q(x) = 2x^2 + x - 1$.

Resolvendo a equação $2x^2 + x - 1 = 0$, encontraremos as demais raízes.

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{-4}{4} = -1 \end{cases}$$

O polinômio $p(x)$, então, pode ser escrito de forma fatorada, da seguinte maneira:

$$2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = (x - 3) \left(x - \frac{1}{2}\right) (x + 1).$$

b.

	1	-6	0	32
-2	1	-8	16	0

$$(x + 2)(x^2 - 8x + 16) = (x + 2)(x - 4)(x - 4)$$

As raízes são: -2, 4 e 4

Atividade 6

	1	3	-15	19	30
-1	1	4	-11	30	0
2	1	-2	-15	0	

$$(x + 1)(x - 2)(x^2 - 2x - 15) = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau, encontramos mais duas raízes

$$(x + 1)(x - 2)(x + 3)(x - 5)$$



Atividade 7

$$\text{Volume do paralelepípedo: } x_1 x_2 x_3 = \frac{1}{3}$$

$$\text{Área total do paralelepípedo: } 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) = 2 \cdot \frac{7}{3} = \frac{14}{3}$$

$$\text{Razão entre a área e o volume: } \frac{14}{3} : \frac{1}{3} = \frac{14}{3} \times 3 = 14$$

Atividade 8

Eliminando os denominadores a equação pode ser escrita assim:

$$x^3 - 6x^2 + 3px + 3q = 0$$

Vamos aplicar as relações de Girard, considerando a raiz de multiplicidade 3 como a.

$$a + a + a = 6 \quad a = 2$$

$$a \cdot a \cdot a = -3q \rightarrow -3q = 8 \rightarrow q = -\frac{8}{3}$$

$$ab + ac + bc = 3p$$

$$a^2 + a^2 + a^2 = 3p \rightarrow 3a^2 = 3p \rightarrow 12 = 3p \rightarrow p = 4$$

Atividade 9

- a. O produto das raízes da equação $(k + 2) \cdot x^2 - 5x + 3 = 0$ é dado pela expressão c/a , sendo $a = k + 2$ e $c = 3$. Assim, temos que

$$c/a = 3/8$$

$$3/(k+2) = 3/8$$

$$k = 6$$

Respostas
das
Atividades

- b. Se m , n e p são as raízes da equação $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$, determine o valor de $1/m + 1/n + 1/p$.

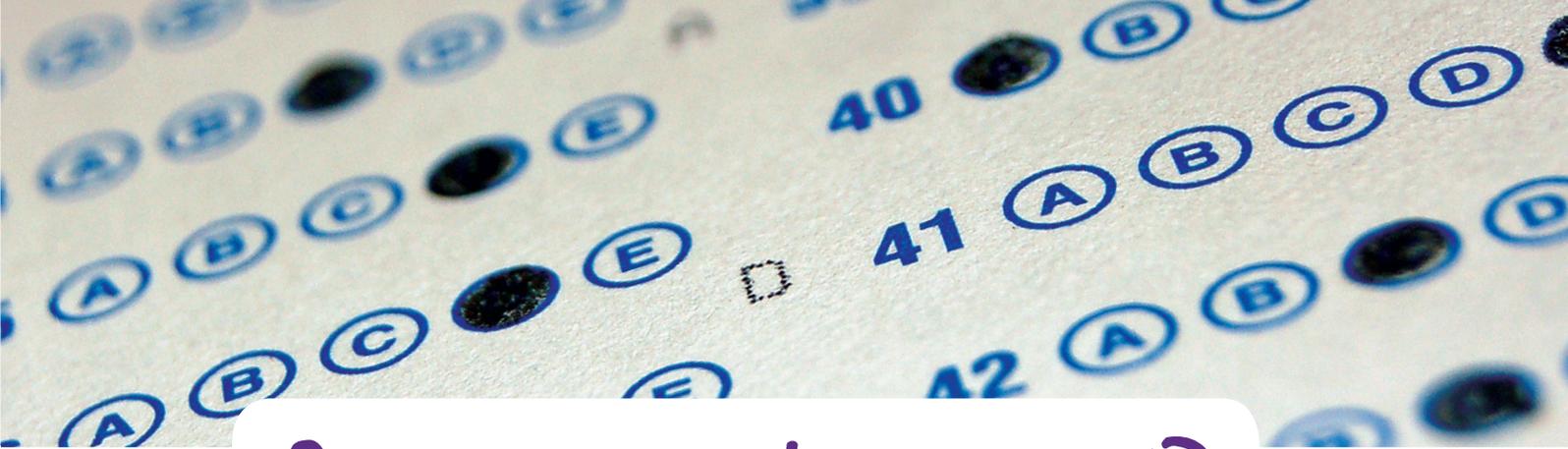
Primeiramente, temos que $1/m + 1/n + 1/p = (np + mp + mn)/mnp$.

Como $np + mp + mn = c/a$ e $mnp = -d/a$ (sendo $a = 1$, $c = 3$ e $d = 4$), teremos que $np + mp + mn = 3/1 = 3$

$$mnp = -4/1 = -4$$

e assim

$$1/m + 1/n + 1/p = (np + mp + mn)/mnp = 3/-4 = -3/4.$$



O que perguntam por aí?

Questão 1 (EEM – SP)

Determine as raízes da equação $x^3 - 3x - 2 = 0$, sabendo-se que uma delas é dupla.

Uma das raízes, determinada por tentativa é 2.

Resposta: $x = -1$ (raiz dupla) e $x = 2$.

Comentário:

$$2^3 - 3 \cdot 2 - 2 = 0$$

Dividindo o polinômio por $(x - 2)$ encontramos $x^2 + 2x + 1 = 0$

$x = -1$ é a raiz dupla

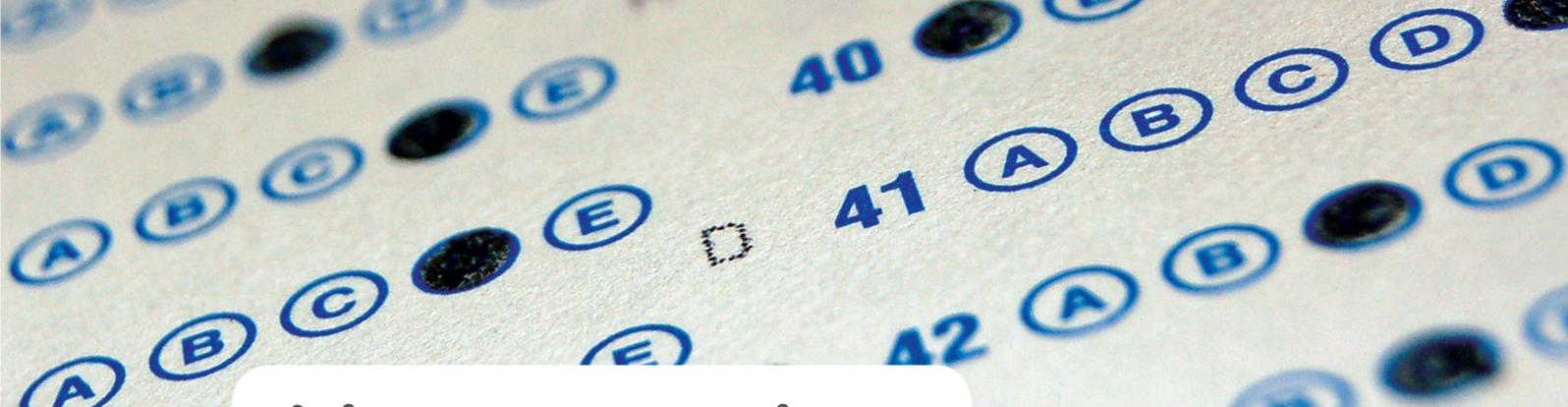
Questão 2 (Faap – SP)

Calcule os valores de a, b, c para que o polinômio

$p_1(x) = a(x + c)^3 + b(x + d)$ seja idêntico a $p_2(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 14$.

Resposta: $a = 1, b = 3, c = 2$ e $d = 2$

Sugestão: desenvolver os produtos, escrever na forma geral do polinômio e igualar os coeficientes de $p_1(x)$ com os de $p_2(x)$. Lembrando que $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.



Atividade extra

Exercício 1

Qual o resto da divisão $12x^2 - 8x$ por $2x$?

- (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

Exercício 2

Qual o quociente da divisão $x^2 + 5x + 6$ por $x + 2$?

- (a) $x - 2$ (b) $x - 3$ (c) $x - 1$ (d) x

Exercício 3

Qual o quociente da divisão de $x^2 - 7x + 10$ por $x - 2$?

- (a) $x - 2$ (b) $x - 1$ (c) $x - 5$ (d) x

Exercício 4

Qual o resto da divisão de $p(x) = (2x - 3)(2x - 2)(2x + 2)$ por $d(x) = x - 1$?

- (a) 12 (b) $2x$ (c) 3 (d) 0

Exercício 5

Qual o resto da divisão de $p(x) = (2x - 3)(2x - 2)(2x + 2)$ por $d(x) = x$?

- (a) 12 (b) $2x$ (c) 3 (d) 2

Exercício 6

Quais são os valores de a e b , respectivamente, considerando o $p(x) = -4x^3 + ax^2 + bx - 18$, onde 2 é raiz de $p(x)$ e $p(-1) = -18$?

- (a) 6 e 8 (b) 7 e 11 (c) 5 e 8 (d) 8 e 10

Exercício 7

Quais são os valores de a e b , respectivamente, considerando $p(x) = x^3 + ax^2 + (b - 18)x + 1$, e que 1 é raiz de $p(x)$ e $p(2) = 25$?

- (a) 10 e 6 (b) 8 e 5 (c) 10 e 5 (d) 8 e 6

Exercício 8

O polinômio $p(x) = 2x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 28x - 12$ admite 2 e -2 como raízes.

Quais as outras raízes desse polinômio?

- (a) 3 e 2 (b) $1=2$ e 3 (c) 1 e 3 (d) 1 e 2

Exercício 9

Qual a soma das raízes do polinômio $p(x) = x^2 - 4x + 4$?

- (a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

Exercício 10

Qual a soma das raízes do polinômio $p(x) = x^4 - 2x^3 - 37x^2 + 4x + 70$?

- (a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) 2

Exercício 11

Qual o resto da divisão de $p(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$ por $d(x) = x$?

Exercício 12

Qual o resto da divisão de $p(x) = x^{31} + 140x^{80} + x - 20$ por $d(x) = x$?

Exercício 13

Qual o quociente da divisão $10x^2 - 43x + 40$ por $2x - 3$?

Exercício 14

Quais as raízes do polinômio $p(x) = x^4 - 9x^2 + 8$?

Exercício 15

Utilizando as relações de Girard, quais as raízes do polinômio $p(x) = x^2 - 3x + 2$?

Gabarito

Exercício 1

A B C D

Exercício 2

A B C D

Exercício 3

A B C D

Exercício 4

A B C D

Exercício 5

A B C D

Exercício 6

A B C D

Exercício 7

A B C D

Exercício 8

A B C D

Exercício 9

A B C D

Exercício 10

A B C D

Exercício 11

-1.

Exercício 12

-20.

Exercício 13

$5x - 9$.

Exercício 14

$1, -1, 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}$.

Exercício 15

1 e 2.





Geometria Analítica 1

Fascículo 12
Unidade 39

Geometria Analítica 1

Para Início de Conversa..

Você sabe o que significa geometria analítica? E plano diretor de uma cidade? E o que essas duas coisas têm em comum?

Vamos à primeira pergunta:

Geometria analítica nada mais é que o estudo da Geometria utilizando a Álgebra. Com essa ferramenta é possível associar equações e outros recursos algébricos às formas geométricas (pontos, retas e outras curvas planas).

Já o plano diretor é um instrumento do planejamento municipal para a implantação da política de desenvolvimento urbano. E por que fizemos essas duas perguntas a você no início dessa unidade? É simples!

Você acaba de ser convidado para ajudar a desenvolver o plano diretor da sua cidade, conhecida como cidade A. Sabemos que uma das especificidades da sua cidade é que a grande maioria de seus habitantes trabalha na cidade C, gastando uma parte significativa do dia num trânsito bastante engarrafado. A mesma coisa vale para os habitantes da cidade vizinha, a cidade B.

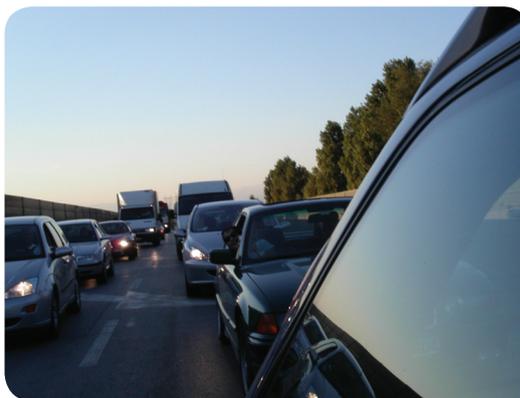


Figura 1: Engarrafamento.

Recentemente, o governo do estado construiu uma ferrovia ligando a cidade C à malha ferroviária nacional. Como a ferrovia passava perto da sua cidade, a atual gestão pensou em construir uma estação para facilitar o acesso dos moradores ao local de trabalho. O prefeito da cidade vizinha, sabendo disso, se ofereceu para dividir os custos da estação, visto que ela também beneficiaria os habitantes da cidade B. Fechado o acordo nestes termos – 50% dos custos para cada uma das prefeituras - nada mais justo que a distância da estação a cada uma das cidades fosse a mesma!



Figura 2: Mapa das cidades A e B, com indicação do trilho da ferrovia.

E aí? Como resolver esse problema?



Esse problema foi inspirado no problema apresentado em <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1015>

Objetivos de aprendizagem

- Identificar e utilizar o Sistema Cartesiano ortogonal
- Calcular Distância entre dois pontos
- Identificar a posição relativa de duas retas no plano
- Conhecer a equação da reta na sua forma reduzida, fundamental e paramétrica.
- Determinar a equação de uma reta que passe por dois pontos ou que passe por um ponto e que possua uma determinada inclinação.

Seção 1

Plano Cartesiano

O problema apresentado é bem interessante, não acha?! Vamos resolvê-lo ao longo dessa unidade? Ótimo! Para isso, precisamos estabelecer alguns conceitos. O primeiro deles é o de plano cartesiano.

Existem diversos sistemas de representação que auxiliam na localização de pontos sobre determinadas superfícies. As latitudes e longitudes, por exemplo, permitem a localização na superfície do globo terrestre.

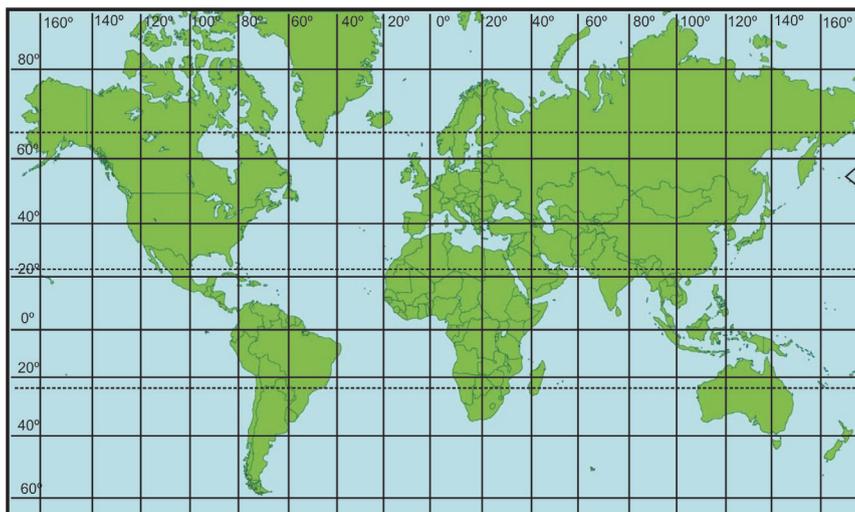


Figura 3: Mapa mundi planificado.

O plano cartesiano permite a localização de pontos do plano. São utilizadas duas retas numéricas perpendiculares que se intersectam em suas origens e, aos pontos do plano, associamos dois valores: um no eixo horizontal e outro no eixo vertical, conforme a ilustração a seguir.

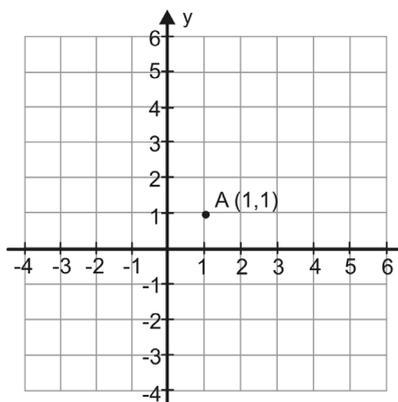
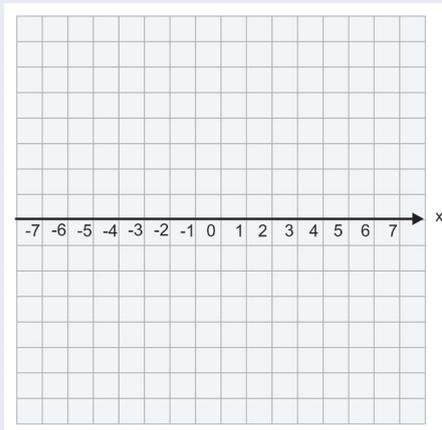
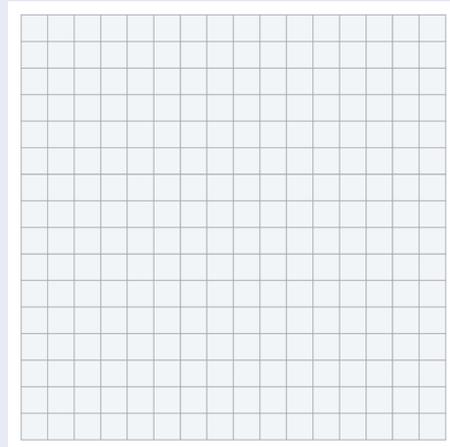


Figura 4: Plano cartesiano com o ponto A(1,1) destacado.

Apresentamos a seguir um passo a passo. Acompanhe, é bem fácil de entender!

Passo 1

Obtendo o plano em uma malha quadriculada. A malha é apenas para facilitar, é perfeitamente possível construir o plano sem ela.



Passo 2

Traçando o eixo das abscissas. Esse é um eixo horizontal numerado representado pela letra x . Na figura, estão marcados alguns números inteiros, mas qualquer número real pode ser localizado nessa reta.

Passo 3

Traçando o eixo das ordenadas. Esse é um eixo vertical numerado representado pela letra y .

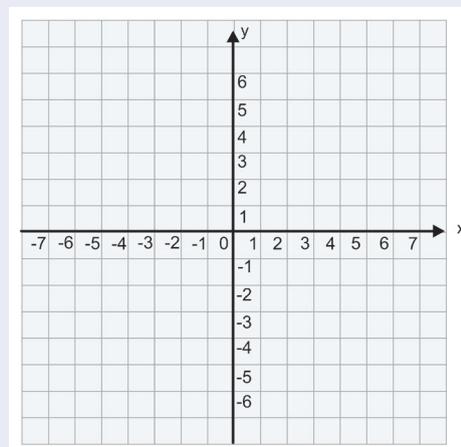


Figura 5: Passo a passo para a construção do plano cartesiano.

Muito bem, de posse do plano cartesiano, você pode identificar o ponto A –veja na figura - da seguinte maneira:

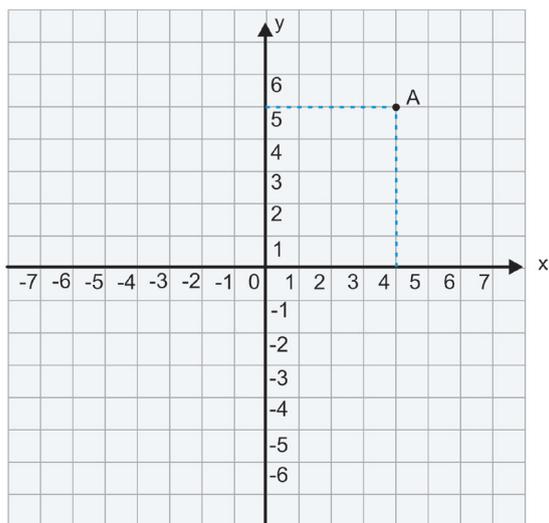


Figura 6: Plano cartesiano com o ponto A destacado.

O pé da perpendicular ao eixo x traçada pelo ponto A coincide com o ponto associado ao número 4. De maneira análoga, o pé da perpendicular ao eixo y traçada por A está associado ao número 5. Dessa forma, diremos que o ponto A será representado pelo par ordenado (4,5). Ao identificarmos um ponto, sempre escreveremos primeiro o valor de sua posição no eixo das abscissas(eixo x) e, em seguida, sua posição no eixo das ordenadas(eixo y). Resumindo: o par é dado por (x, y).

Repare que o ponto (5,4) é um ponto diferente de A, porque $x = 5$ e $y = 4$. O ponto (5,4) está representado por B. Vejam só:

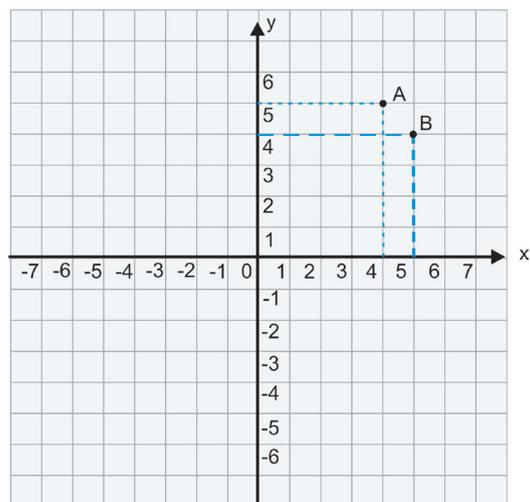
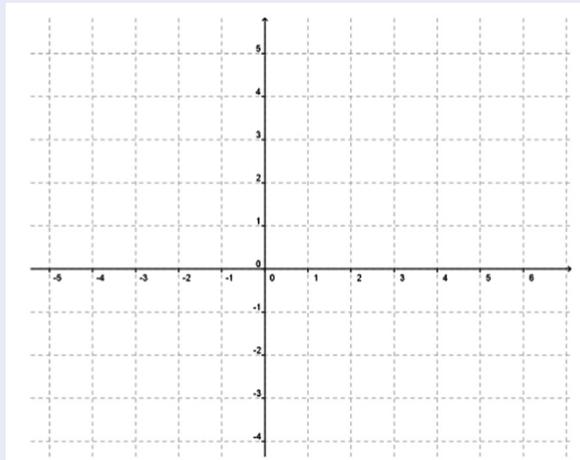


Figura 7: Plano cartesiano com os pontos A e B destacados.

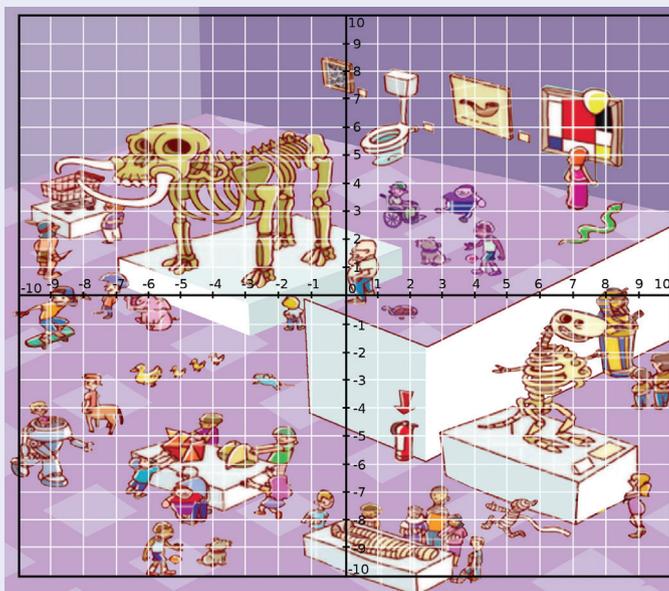
Vamos representar mais alguns pontos? Represente no plano cartesiano a seguir os pontos C (-1,-3), D(0,4), E(-2,0), F(2, -4), G(3, 3) e H(-2, 1).

Atividade
1



Anote suas
respostas em
seu caderno

Atividade
2



Diga quais objetos estão nos pontos:

(2,-5)

(-8, 4)

(7, 6)



Anote suas
respostas em
seu caderno

Seção 2

Distância entre dois pontos

Você se lembra do nosso problema inicial da estação de trem? Então, vamos pensar juntos! Imagine que as cidades e o ponto onde ficará a estação sejam os vértices de um triângulo.

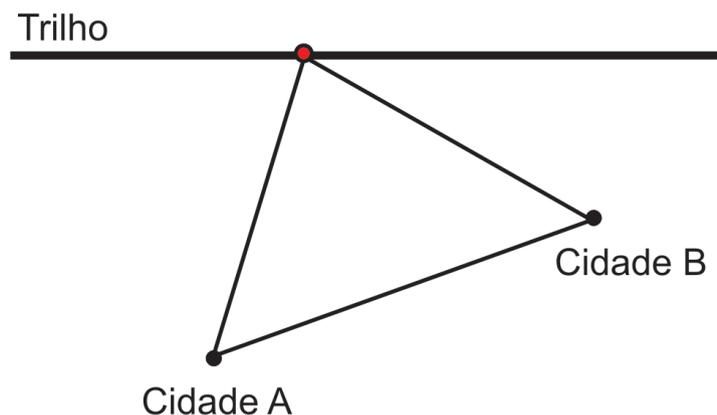


Figura 9: Representação das cidades A e B e do trilho de trem.

Vocês lembram da condição do nosso problema? Isso, essa mesmo: a distância entre a estação e cada uma das cidades deve ser a mesma – afinal, os custos de construção serão divididos igualmente entre as prefeituras.

Então, como o valor da distância entre a cidade A e a estação é idêntico ao valor da distância entre a cidade B e a estação podemos dizer o seguinte: o triângulo formado pelos pontos A, B e pela estação é isósceles!

E, resgatando nossa geometria plana, se o triângulo tem dois lados iguais, também tem dois ângulos iguais. Além disso, a bissetriz do ângulo cujo vértice é o ponto procurado coincide com a mediana e com a altura traçada a partir desse vértice. Vejam na figura

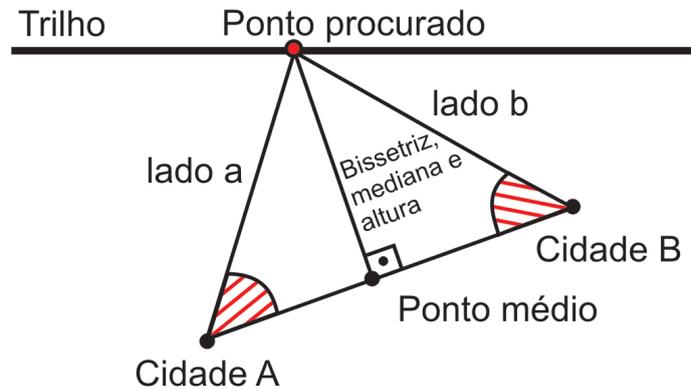


Figura 10: Representação do triângulo formado pela estação e as cidades A e B, com lados, ângulos, medianas e bissetriz destacados.

Desta maneira, basta encontrar a metade da distância entre as cidades A e B e, do ponto encontrado, traçar uma reta perpendicular ao segmento AB (será a mediana / bissetriz / altura, certo?) até que ela encontre o trilho de trem. Nessa intersecção estará o ponto procurado.

Depois dessas considerações, nosso problema se resumiu a encontrar a metade da distância entre as cidades A e B. Vamos entender como podemos encontrar a distância entre dois pontos? Muito bem, vamos lá!

Sejam os pontos A e B representados no plano cartesiano a seguir:

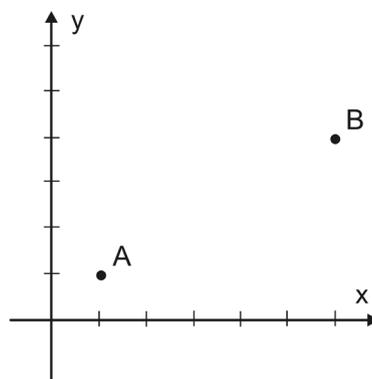


Figura 11: Plano cartesiano com eixos e os pontos A e B destacados.

Como A e B estão representados no plano cartesiano, vamos considerar as coordenadas de A por x_A e y_A e as coordenadas de B por x_B e y_B . Vamos também designar a distância entre esses pontos por d_{AB} . Acompanhem na figura:

Conseguimos assim obter um triângulo retângulo cujos catetos são x_Ax_B cuja medida é $(x_B - x_A)$ e y_Ay_B cuja medida é $(y_B - y_A)$ e cuja hipotenusa é a distância d_{AB} entre os pontos. As medidas dos lados de um triângulo retângulo estão relacionadas pelo Teorema de Pitágoras: em um triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

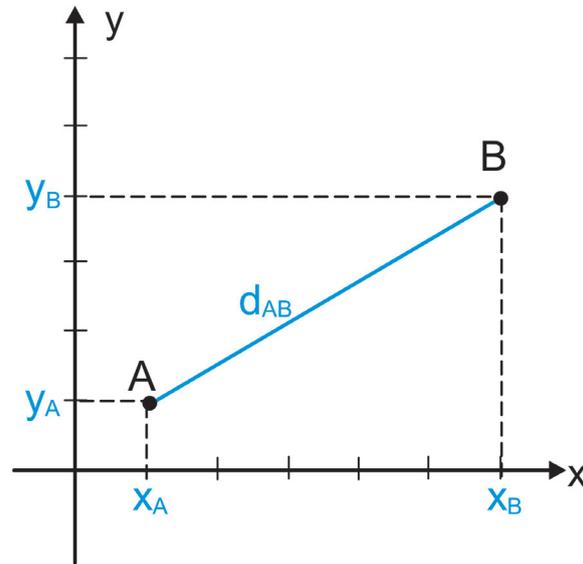


Figura 12: Plano cartesiano com eixos e os pontos A e B destacados.

Utilizando Teorema de Pitágoras temos:

$$d_{AB}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$
$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

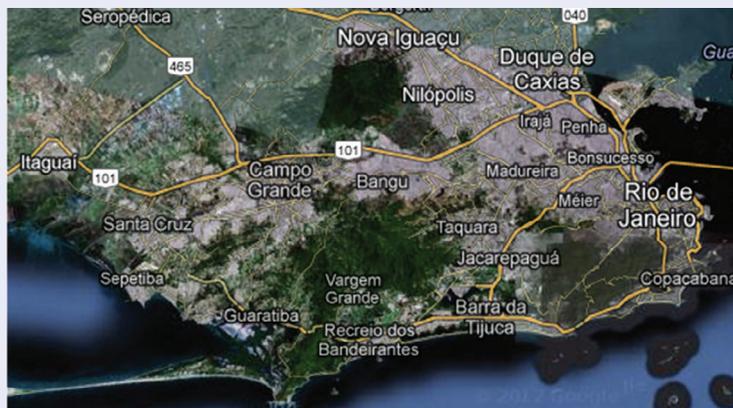
A partir daí, sabendo as coordenadas das cidades A e B fica fácil encontrar a distância entre elas.

E que tal uma atividade?

Atividade

3

Carla mora em Campo Grande e arrumou um novo emprego no Méier. Pelo mapa, Carla observou que as coordenadas de Campo Grande e do Méier são (30, 27) e (60,24) respectivamente



Determine a distância (em linha reta) entre Campo Grande e o Méier.

Anote suas respostas em seu caderno

Encerramos esta seção com uma interessante sugestão: o site da Anatel tem um aplicativo que permite calcular a distância entre dois municípios ou entre dois pontos quaisquer, via latitude e longitude. Aliás, será que o site encontrou o mesmo valor que a gente? Dê um pulinho por lá e descubra! Para Campo Grande, latitude e longitude são $22^{\circ} 52' 47''$ S e $43^{\circ} 33' 43''$ O. Para o Méier $22^{\circ} 53' 56''$ S e $43^{\circ} 16' 58''$ O.

Página do site da Anatel que permite calcular a distância entre dois municípios:

http://sistemas.anatel.gov.br/apoio_sitarweb/Tabelas/Municipio/DistanciaDoisPontos/Tela.asp. Uma dica: para inserir a latitude, atente para a caixa de seleção Norte/Sul. Já no caso da longitude, como todo o território brasileiro está a Oeste de Greenwich, não há caixa de seleção.



Seção 3

Retas

Posições relativas entre duas retas no plano

O arquiteto responsável pelo projeto da estação enviou um email a todos os envolvidos na construção. O email continha algumas das diretrizes a serem seguidas na realização da obra:

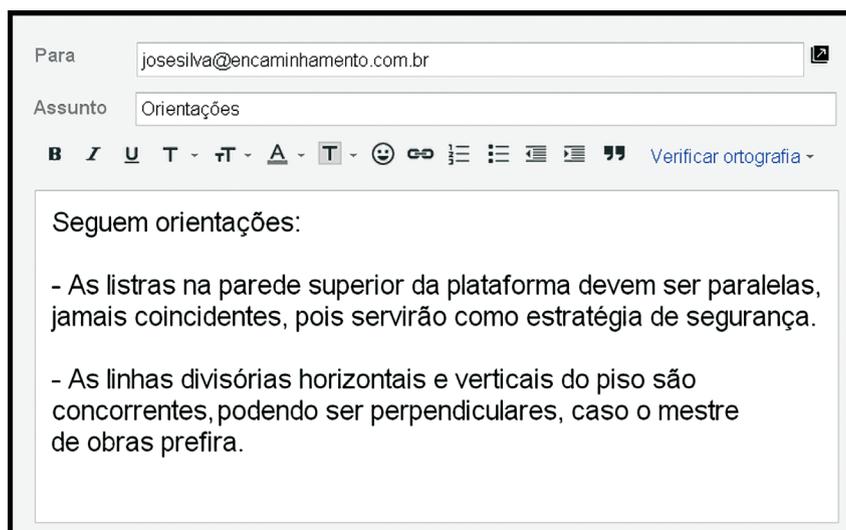


Figura 13: Email enviado pelo arquiteto responsável pelo projeto da estação com diretrizes para a obra.

Como algumas pessoas tiveram dificuldades em entender o que o arquiteto deu como instrução, ele enviou um novo email com as seguintes definições:

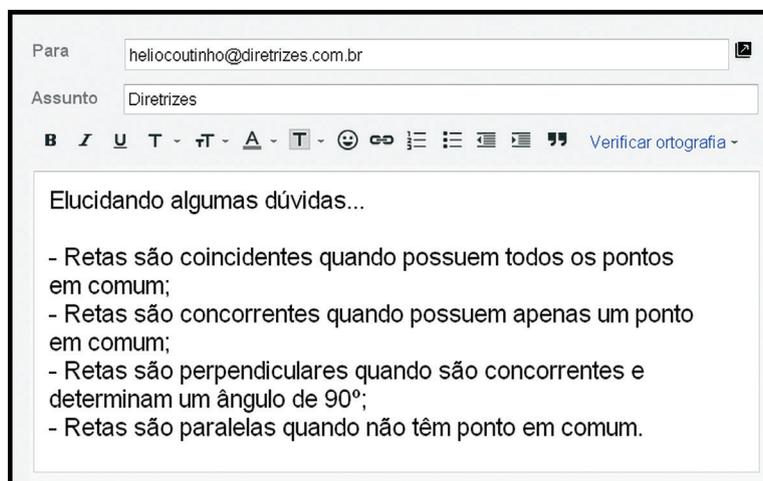


Figura 14: Email enviado pelo arquiteto responsável pelo projeto da estação com esclarecimento acerca das diretrizes.



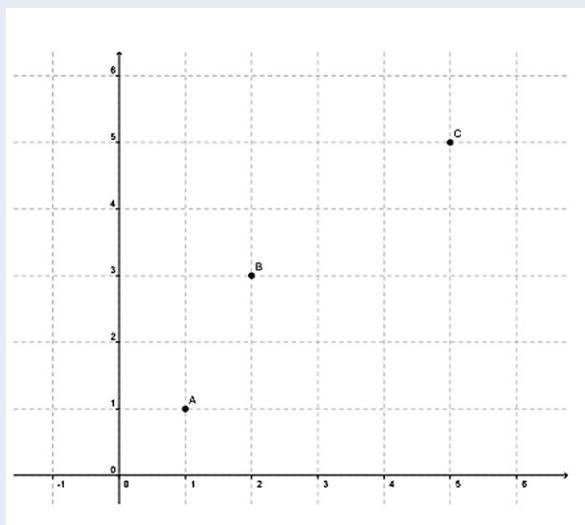
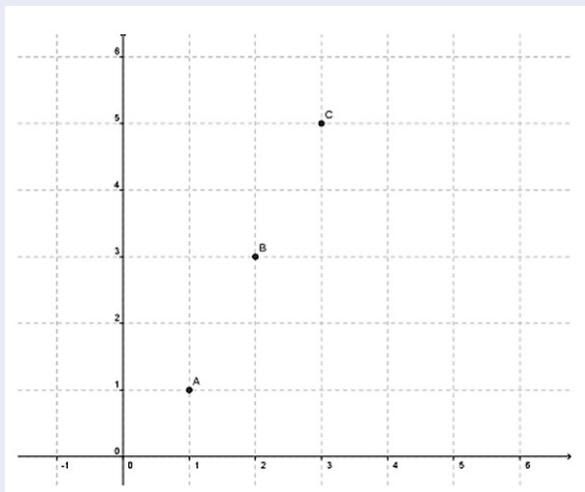
No link abaixo, você encontra uma coleção de atividades desenvolvidas com software Geogebra. Dentre elas, destacamos a atividade 7, referente às posições relativas de duas retas no plano

<http://mandrake.mat.ufrgs.br/~mat01074/20072/grupos/ditafafran/geogebra/geo.html>

Equações da reta

Já vimos nas seções anteriores como representar pontos no plano cartesiano. Pretende-se agora estudar a reta através dos recursos algébricos fornecidos pela Geometria Analítica. Mostraremos que a equação de uma reta será da forma $y = ax + b$. Em outras palavras, os pontos do plano tais que a segunda coordenada y é dada em função da primeira coordenada x segundo a fórmula anterior é um conjunto de pontos alinhados.

Atividade
4



- a. Observe as duas figuras anteriores e diga em qual delas os pontos A, B e C estão alinhados. Sua resposta, a princípio, pode ser dada de forma intuitiva. Tente explicar sua conclusão através de ferramentas matemáticas.

Dica: uma forma de mostrar que A, B e C estão alinhados é mostrar que a distância de A à C é igual à soma das distâncias de A à B e de B à C.

- b. Mostre que no primeiro caso, o três pontos A, B e C satisfazem à equação $y = 2x - 1$, enquanto, no segundo caso, isto não acontece.

Anote suas
respostas em
seu caderno

Equação reduzida

Como determinar a equação da reta que passa por dois pontos conhecidos? Digamos, por exemplo, que queiramos obter a equação reduzida (ou, seja, na forma $y = ax+b$) da reta que passa pelos pontos A(2,1) e B(6,5).

Ora, se A e B pertencem a uma mesma reta, os valores de suas ordenadas e abscissas satisfazem à equação desta reta. Por isso, podemos fazer a substituição dos valores de x_A e y_A (e também dos valores de x_B e y_B) na equação $y=ax+b$. Acompanhem:

No ponto A (2,1)

$$y=ax+b \quad (x=2, y=1)$$

$$1 = 2a + b$$

No ponto B (6,5)

$$y=ax+b \quad (x=6, y=5)$$

$$5 = 6a + b$$

Com duas equações e duas incógnitas, a saída é montar um sistema:

$$\begin{cases} 5 = 6a + b \\ 1 = 2a + b \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{array}{r} 5 = 6a + b \\ - \quad 1 = 2a + b \\ \hline 4 = 4a \end{array}$$

Então, $a = 4/4 = 1$

Substituindo o valor de a em uma das equações você obtém:

$$1 = 2a + b$$

$$1 = 2 \cdot 1 + b$$

$$1 = 2 + b$$

$$b = 1 - 2$$

$$b = -1$$

Assim, a equação da reta que passa pelos pontos A e B é dada por:

$$y=ax+b \quad (a=1, b=-1)$$

$$y = 1 \cdot x - 1$$

$$y = x - 1$$

Há uma outra maneira de encontrar os valores de a e b da equação reduzida da reta: calcular o valor de a diretamente a partir da equação $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, e em seguida, substituí-lo, juntamente com os valores de (x_A, y_A) ou (x_B, y_B) na equação $y = ax + b$. É bem mais simples do que parece, veja só

Temos A(2,1) e B(6,5). Então

$$a = \operatorname{tg}\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - 1}{6 - 2} = 1$$

Para determinar o valor de b, basta tomar as coordenadas de um desses pontos, digamos A, e substituir na equação $y = 1 \cdot x + b$ (já que $a = 1$):

$$1 = 1 \cdot 2 + b$$

$$1 = 2 + b$$

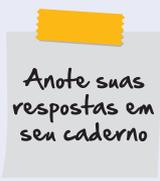
$$b = -1$$

Equação reduzida: $y = 1 \cdot x - 1 = x - 1$

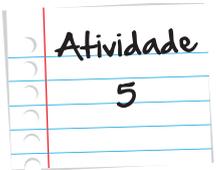


Saiba Mais

Encontre a equação reduzida da reta que passa pelos pontos A(1,3) e B(3,4)



Anote suas respostas em seu caderno



Atividade
5

Equação fundamental

O que é muito fácil também é encontrar a equação da reta caso você tenha o ângulo de inclinação e um ponto pertencente a essa reta. Novamente, apresentamos um passo a passo:

1º) Calcular a tangente do ângulo de inclinação da reta:

2º) Substituir a tangente e o ponto na equação da reta. Para esse problema não utilizaremos mais a equação reduzida ($y = ax + b$, certo?) e sim a equação fundamental:

$$(y - y_0) = m (x - x_0)$$

onde (x_0, y_0) são as coordenadas do ponto e m a tangente do ângulo de inclinação da reta

Vamos entender melhor com um exemplo!

Encontrar a equação da reta que passa pelo ponto $(4,-3)$ e cujo ângulo de inclinação é 45° .

1º Passo) Encontrar tangente do ângulo de inclinação

$$\text{tg}45^\circ = 1$$

2º Passo) Substituir a tangente e o ponto na equação da reta:

$$y - (-3) = 1 \cdot (x - 4)$$

$$y + 3 = x - 4$$

$$y = x - 4 - 3$$

$$y = x - 7$$



Encontre a equação da reta que possui o mesmo ângulo de inclinação da reta $y = x - 7$, mas que passa pelo ponto $(-3, 4)$

Anote suas respostas em seu caderno

Equação paramétrica

Além de definir a reta pelo par ordenado (x,y) , podemos relacionar o par ordenado a uma outra variável que vamos chamar de t conhecida como parâmetro.

Vamos exemplificar:

Sejam os pares ordenados (x,y) definidos pelas equações chamadas paramétricas:

$$x = t - 2$$

$$y = 3t + 4$$

Quando t vale, por exemplo, 6 teremos o par ordenado:

$$x = 6 - 2 = 4$$

$$y = 3 \cdot 6 + 4 = 22$$

(4,22)

Podemos também determinar a equação da reta definida pelas equações paramétricas da seguinte maneira:

$$x = t - 2$$

$$\text{Então, } t = x + 2$$

Substituindo na outra equação paramétrica teremos:

$$y = 3 \cdot (x + 2) + 4$$

$$y = 3x + 6 + 4$$

$$y = 3x + 10$$

Considere a seguinte reta, descrita de forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = 2 \cdot t + 3 \\ y = 1 - 4 \cdot t \end{cases}$$

Quais as coordenadas do ponto que tem abscissa igual a 4?

Qual a equação reduzida desta reta?

Anote suas
respostas em
seu caderno



Conclusão

Nessa unidade, fizemos uma viagem por uma parte do mundo da geometria analítica cuja invenção foi muito significativa e importante para a Matemática por fazer uma associação eficiente entre geometria e álgebra. Ficamos sabendo um pouco mais sobre coordenadas cartesianas, pontos e retas – além de conhecermos três formas de representar a reta: usando a equação reduzida, a fundamental e a paramétrica.

Resumo

- No plano cartesiano, cada ponto do plano é identificado por um par de números ordenados obtidos nos eixos x (horizontal) e y (vertical).
- O eixo vertical é chamado eixo das ordenadas e é representado por y .
- O eixo horizontal é chamado eixo das abscissas e é representado por x .
- O par ordenado referente ao ponto P é representado por (x_p, y_p) .
- A distância entre dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ é dada pela expressão

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

- Retas são coincidentes quando possuem todos os pontos em comum.
- Retas são concorrentes quando têm um único ponto em comum.
- Retas são perpendiculares quando são concorrentes e determinam um ângulo de 90° .
- Retas são paralelas quando são coplanares e não têm ponto em comum.
- Equação reduzida da reta: $y = ax + b$, onde a é o coeficiente angular (valor da tangente do ângulo que a reta faz com o eixo dos x) e b é o coeficiente linear (valor da ordenada do ponto em que a reta corta o eixo dos y).
- Equação fundamental da reta: $(y - y_o) = m (x - x_o)$

onde (x_o, y_o) são as coordenadas do ponto e m a tangente do ângulo de inclinação da reta

- Equação paramétrica da reta

$$x = c.t + d$$

$$y = e.t + f$$

Onde **c**, **d**, **e** e **f** são números reais.

Veja ainda

Quer estudar um pouco mais distância entre dois pontos? Então, acesse o site

<http://www.matheducation.ca/iMathEducation.php?v=1.0&f=4713&i=242>

e assista a esse vídeo que dá exemplos de cálculos de distâncias entre pontos de maneira bem fácil.

Referências

Livros

- ALMEIDA, Nilze de; DEGENSZAJN, David; DOLCE, Osvaldo; IEZZI, Gelson; PÉRIGO, Roberto. *Matemática Ciência e Aplicações 1*. Segunda Edição. São Paulo: Atual Editora, 2004. 157p.
- BOYER, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.
- CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; LIMA, Elon Lages; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. *Temas e Problemas*. Terceira Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. 193 p.
- _____ . *A Matemática do Ensino Médio Volume 1*. Sétima Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. 237 p.
- DANTE, Luiz Roberto. *Matemática Contexto e Aplicações Volume 1*. Primeira Edição. São Paulo: Editora Ática, 2011. 240p.
- FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. *Novo Aurélio Século XXI: o dicionário da língua portuguesa*. Quinta Edição. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 1999. 2128 p.

Imagens



- <http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=153960>



- <http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=59308>

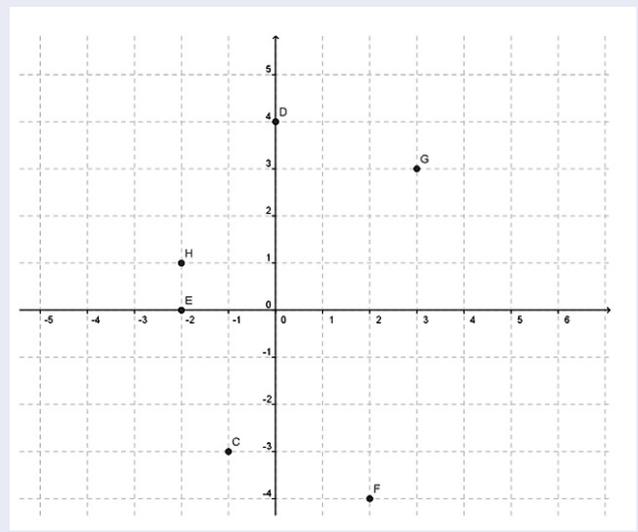


- googlemaps.com



- <http://www.sxc.hu/photo/517386>

Atividade 1



Atividade 2

- a. Extintor de incêndio
- b. Carrinho de supermercado
- c. Quadro

Atividade 3

As coordenadas dos bairros são dadas por:

Campo Grande (30, 27)

Méier (60,24)

A distância d_{CGM} de Campo Grande ao Méier é dada por:

$$d_{CGM}^2 = (60 - 30)^2 + (24 - 27)^2$$

$$d_{CGM}^2 = 30^2 + (-3)^2$$

$$d_{\text{CGM}}^2 = 909$$

$$d_{\text{CGM}} = \sqrt{909}$$

$$d_{\text{CGM}} \cong 30,15 \text{ km}$$

Atividade 5

O objetivo é encontrar a equação reduzida da reta que passa pelos pontos A(1,3) e B(3,4)

$$a = \text{tg}\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 3}{3 - 1} = \frac{1}{2}$$

Usando o valor de a (1/2) e as coordenadas de B (3, 4) em $y=ax+b$, temos

$$y = \frac{1}{2}x + b$$

$$4 = \frac{1}{2} \cdot 3 + b$$

$$b = 4 - \frac{3}{2}$$

$$b = \frac{5}{2}$$

E a equação da reta fica

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

Atividade 6

1º Passo) Encontrar tangente do ângulo de inclinação, que é o mesmo da reta $y = x - 7$

$$\text{tg}45^\circ = 1$$

2º Passo) Substituir a tangente e o ponto na equação da reta:

$$y - 4 = 1 \cdot (x - (-3))$$

$$y - 4 = x + 3$$

$$y = x + 3 + 4$$

$$y = x + 7$$



Atividade 7

A descrição paramétrica da reta é

$$\begin{cases} x = 2.t + 3 \\ y = 1 - 4.t \end{cases}$$

Para saber as coordenadas do ponto que tem $x=4$, vamos na primeira equação, achamos o valor de t e substituímos na segunda equação.

$$4 = 2.t + 3$$

$$4 - 3 = 2.t$$

$$t = \frac{1}{2}$$

Indo para a outra equação, teremos

$$y = 1 - 4.t$$

$$y = 1 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 1 - 2 = -1$$

As coordenadas do ponto, então, são $(4, -1)$

Para achar a equação reduzida da reta, achamos o valor de t em uma equação e inserimos na outra.

$$x = 2.t + 3$$

$$x - 3 = 2.t$$

$$t = \frac{x - 3}{2}$$

Entrando na outra equação, teremos

$$y = 1 - 4.t$$

$$y = 1 - 4 \cdot \left(\frac{x - 3}{2} \right)$$

$$y = 1 - 2 \cdot (x - 3)$$

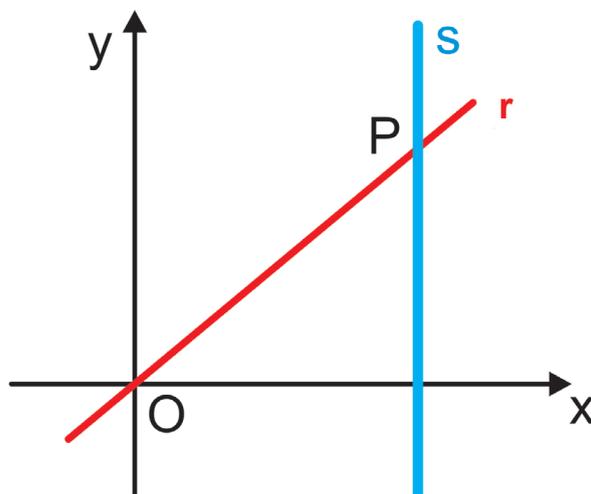
$$y = 1 - 2x + 6$$

$$y = -2x + 7$$

O que perguntam por aí

(UFF - 00)

Na figura a seguir estão representadas as retas r e s :



Sabendo que a equação da reta s é $x = 3$ e que OP mede 5 cm a equação de r é:

- a. $y = 3/4x$
- b. $y = 4/3x$
- c. $y = 5/3x$
- d. $y = 3x$
- e. $y = 5x$

Resposta: Letra B

Comentário:

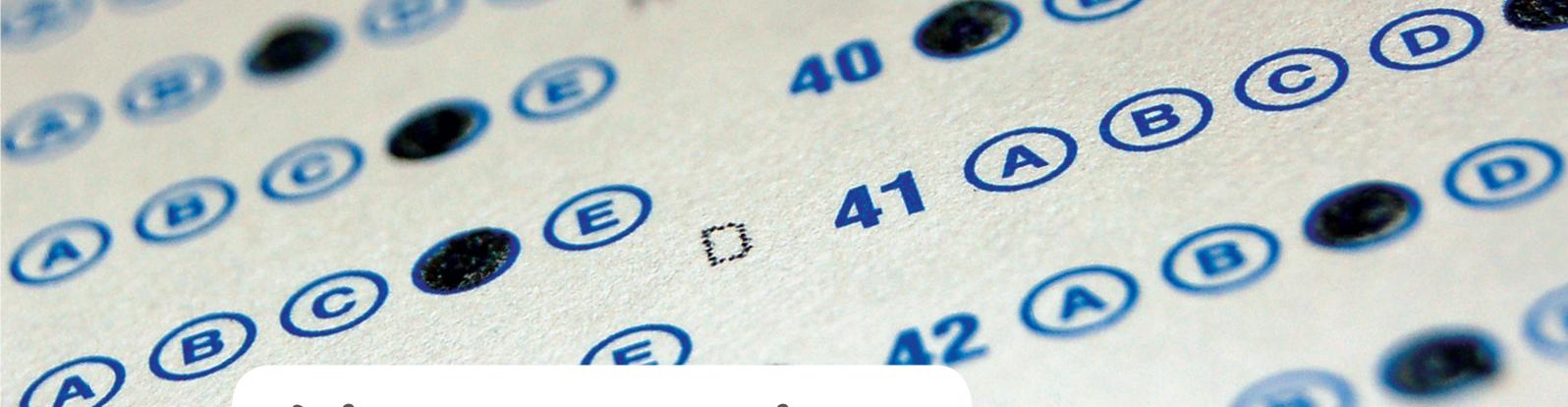
Como o triângulo formado pelas retas r e s é retângulo, podemos utilizar o teorema de Pitágoras.

Um dos catetos mede 3 cm (reta s é $x = 3$) e a hipotenusa mede 5 cm (é dado no enunciado que OP mede 5 cm), temos por Pitágoras que a altura do triângulo, ou seja, o outro cateto mede 4 cm.

Sendo a equação reduzida da reta $y = ax + b$, como r passa pela origem

$b = 0$ e $a =$ coeficiente angular = tangente do ângulo de inclinação da reta = $4/3$.

Logo, a equação de r é $y = 4/3x$



Atividade extra

Exercício 1

O ponto A tem coordenadas $(m+3; n-1)$ pertence a reta que passa pelos pontos $(0; 0)$ e $(1; 1)$.

Qual o valor de $m - n$?

- (a) -2 (b) 0 (c) 1 (d) 2

Exercício 2

Um triângulo possui os vértices sobre os pontos $A = (4; 3)$, $B = (0; 3)$ e C que pertence ao eixo OX. Sabemos que a distância entre os vértices A e C é igual a distância entre os vertices B e C.

Quais as coordenadas do ponto C?

- (a) $(0, 2)$ (b) $(0, -2)$ (c) $(2, 0)$ (d) $(-2, 0)$

Exercício 3

As retas $r: ax + y - 4 = 0$ e $s: 3x + 3y - 7 = 0$ são paralelas.

Qual é o valor de a?

- (a) -3 (b) -1 (c) 1 (d) 3

Exercício 4

O ponto P, cujas coordenadas são $(k, -2)$, satisfaz a relação $x + 2y - 10 = 0$.

Qual o valor de k^2 ?

- (a) 36 (b) 144 (c) 196 (d) 200

Exercício 5

Três pontos A, B e C formam um triângulo, tal que o ponto A pertence ao semi-eixo positivo das ordenadas, os pontos B e C tem coordenadas $(2, 3)$ e $(-4, 1)$. Sabe-se que do ponto A vê-se o segmento BC sob um ângulo de 90° .

Quais as coordenadas do ponto A?

- (a) $(-1, 5)$ (b) $(-1, 0)$ (c) $(5, 1)$ (d) $(0, 5)$

Exercício 6

No plano cartesiano, um ponto P pertence a reta de equação $y = x$ e é equidistante (está a mesma distância) dos pontos $A(-1; 3)$ e $B(5; 7)$.

Qual a ordenada do ponto P?

- (a) $34/10$ (b) $27/10$ (c) $27/5$ (d) $34/5$

Exercício 7

Os pontos A e B de coordenadas $(m-2, 2m-n)$ e $(2m, n-2)$ representam o mesmo ponto no plano cartesiano. Qual é o valor de $m - n$?

- (a) -3 (b) -2 (c) 1 (d) 2

Exercício 8

Seja $y = mx+n$ a equação reduzida da reta r que passa pelos pontos $A = (2, -5)$ e $B = (-4, 3)$.

Qual o valor de $m + n$?

- (a) $-13/3$ (b) $-11/3$ (c) $11/3$ (d) $13/3$

Exercício 9

Uma reta passa pelo ponto de interseção das retas $x - 3y + 1 = 0$ e $2x + 5y - 9 = 0$ e pelo ponto $(-3, -5)$.

Qual a equação geral dessa reta?

- (a) $2x - y + 7 = 0$ (c) $5x - 6y + 7 = 0$
(b) $6x - 5y - 7 = 0$ (d) $2x + y - 7 = 0$

Exercício 10

Os pontos A, B, C e D são os vértices de um paralelogramo. Os pontos A, B e C têm coordenadas iguais a $(2, 1)$; $(1, 2)$ e $(2, 3)$ respectivamente.

Quais devem ser as coordenadas do ponto D para que ABCD seja um quadrado?

- (a) $(4, 2)$ (b) $(1, 3)$ (c) $(3, 2)$ (d) $(2, 3)$

Exercício 11

Seja um triângulo cujos vértices estão sobre os pontos $A(1, -2)$, $B(2, 0)$ e $C(0, -1)$ e considere M a mediana relativa ao lado AC desse mesmo triângulo.

Qual o comprimento da mediana M?

Exercício 12

Seja uma reta s que é paralela a reta $r: 2x + y = 0$ e que define com os eixos um triângulo cuja área é 16.

Qual a equação geral da reta s ?

Exercício 13

Seja o segmento AB determinado pelos pontos $A(-3, 1)$ e $B(5, 7)$, e a reta s que é paralela à mediatriz desse segmento e passa pelo ponto A.

Qual é a equação geral dessa reta?

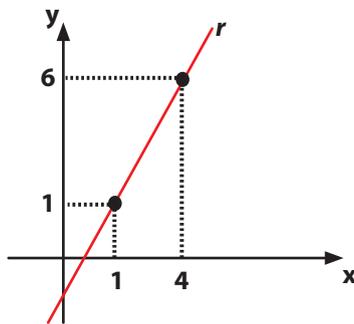
Exercício 14

Seja o ponto L cujas coordenadas são $(3p-1, 4p+1)$, o ponto L não pertence a reta de equação $2x + 3y - 19 = 0$.

Quais são os valores possíveis para p ?

Exercício 15

Seja a reta r , ilustrada na figura e seja o triângulo formado pela reta r , pelo eixo x e pela reta perpendicular ao eixo x que passa pelo ponto $(4, 0)$.



Qual é a área desse triângulo?

Gabarito

Exercício 1

A B C D

Exercício 2

A B C D

Exercício 3

A B C D

Exercício 4

A B C D

Exercício 5

A B C D

Exercício 6

A B C D

Exercício 7



Exercício 8



Exercício 9



Exercício 10



Exercício 11

Calculamos o ponto médio do segmento AC que é $D = \left(\frac{1+0}{2}, \frac{-2-1}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{-3}{2} \right)$.

A medida da mediana é a distância do ponto D ao ponto B, utilizando a fórmula da distância tem-se $m = \frac{\sqrt{26}}{2}$

Exercício 12

A equação reduzida da reta s é igual a $y = mx + n$, como s e r são paralelas $m = -2$, então a reta s será igual a $y = -2x + n$. A reta s toca os eixos OX e OY nos pontos $(n/2, 0)$ e $(0, n)$. A área do triângulo formado será dada por

$\frac{n \cdot n}{2} = 16 \Rightarrow n^2 = 64 \Rightarrow n = 8$. Então a equação reduzida da reta e $y = -2x + 8$ é a equação geral e $2x + y - 8 = 0$.

Exercício 13

Reta que passa pelos pontos A e B $\begin{cases} -3a + b = 1 \\ 5a + b = 7 \end{cases}$.

Então $-8a = -6$, $a = 3/4$ e $b = 13/4$ então a mediatriz tem equação

$$y = -4x/3 + n$$

como a reta passa por A, o ponto na equação da reta temos $1 = -4 + n$, então $n = 5$.

A equação geral da reta é $4x - 3y + 15 = 0$.

Exercício 14

Se p pertencesse a reta então obedeceria a equação $2(3p - 1) + 3(4p + 1) - 19 = 0 \Rightarrow 6p - 2 + 12p + 3 - 19 = 0$

$$\Rightarrow 18p - 18 = 0 \Rightarrow p = 1.$$

Logo o ponto não pertencerá a reta se p for diferente de 1.

Exercício 15

Seja $y = ax + b$ a reta r , impondo as condições tem-se $\begin{cases} a + b = 1 \\ 4a + b = 6 \end{cases}$

A equação da reta r é $y = 5x/3 - 2/3$. Quando $y = 0$ tem-se o ponto de interseção entre a reta r e o eixo OX .

$$5x/3 - 2/3 = 0 \Rightarrow 5x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2/5.$$

Logo a base do triângulo terá comprimento $4 - 2/5 = 18/5$. A área será $A = \frac{18 \cdot 6}{2 \cdot 5} = 10,8$





Geometria Analítica 2

Fascículo 12
Unidade 40

Geometria Analítica 2

Para início de conversa...

Você já olhou para o céu hoje? Já pensou nas inúmeras teorias que foram desenvolvidas para tentar entender esse grande mistério que está acima de nossas cabeças? Alguns cientistas deram grandes contribuições para o melhor entendimento dos planetas que habitam essa imensidão.

O italiano Galileu Galilei, por exemplo, foi responsável por aprimorar e utilizar a luneta, importantíssima para as observações das posições dos planetas. Já o alemão Johannes Kepler desenvolveu modelos para as órbitas dos planetas, afirmando que eles descreveriam órbitas elípticas, e que o Sol ocuparia um dos focos desta elipse. Mais tarde, o inglês Isaac Newton mostrou, a partir da sua teoria da gravitação, que os planetas e cometas descreveriam órbitas circulares, elípticas, parabólicas ou hiperbólicas – desde que estivessem exclusivamente sob a ação da atração gravitacional do Sol.



Figura 1: Planetas se movendo no espaço.

A partir das formas das órbitas previstas pela teoria da gravitação de Newton, foi possível fazer previsões fascinantes: o astrônomo inglês Edmond Halley concluiu que os cometas avistados em 1456, 1531, 1607 e 1682 era, na verdade, um mesmo cometa que, por estar em órbita do sol, passava perto da terra a cada 76 anos aproximadamente. A comprovação da previsão de que o cometa voltaria em 1758, coroou a tese de Halley e fez com que o cometa fosse batizado com seu nome. Já o matemático alemão Carl Friedrich Gauss conseguiu calcular a trajetória do asteroide Ceres, determinando quando e em que lugar do céu ele poderia ser visto novamente, depois de ter ficado muito tempo fora do campo de visão dos astrônomos. Impressionante, não é mesmo?

Agora, existe algo ainda mais impressionante do que estas previsões: as formas das trajetórias dos planetas - círculos, elipses, hipérbolas, etc - tem uma coisa muito importante em comum com os problemas que resolvemos na aula passada.

Objetivos de aprendizagem

- Identificar retas paralelas e retas perpendiculares a partir de suas equações.
- Calcular as coordenadas do ponto de interseção entre retas.
- Determinar a equação da circunferência na forma reduzida, dados o centro e o raio.
- Conhecer as cônicas

Seção 1

Retas

Iniciamos esta seção relembrando o problema que perpassou a aula anterior: as prefeituras de duas cidades, A e B, combinaram de construir uma estação de trem numa ferrovia do governo estadual que passava próxima a estas cidades. Isto serviria para aumentar a qualidade de vida dos moradores de ambas as cidades, que perdiam uma parte importante do dia nos engarrafamentos para ir e vir do trabalho. Como o custo foi dividido igualmente, a estação deveria ficar a uma mesma distância de ambas as cidades. Dessa forma, demos início ao estudo da Geometria Analítica.



Figura 2: Estação de trem de Liverpool, na Inglaterra. Uma das mais movimentadas do Reino Unido.

Felipe é morador de um bairro da cidade A. Porém, as ruas deste bairro não são nomeadas da maneira com que estamos acostumados. O bairro foi concebido a partir do plano cartesiano e, por isso, muitas de suas ruas são retas desse plano. Essas ruas foram nomeadas com a equação da reta que as representa. Muitas casas, também, são numeradas com um par ordenado, de acordo com sua localização no plano cartesiano.

Sandro, amigo de infância de Felipe, foi conhecer o bairro em que o amigo está morando. Sexta à noite, resolveram se divertir indo ao cinema. Como Felipe iria para o cinema direto do trabalho, deu a Sandro o nome da rua, para que ele o encontrasse diretamente no local do cinema.

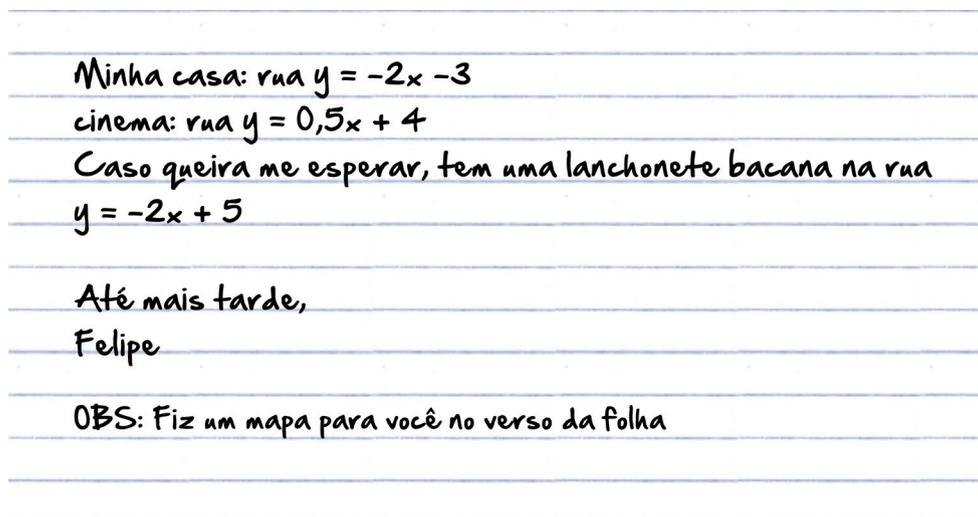


Figura 3: Bilhete de Felipe para Sandro.

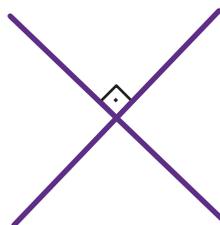
Sandro aceitou a sugestão de Felipe e resolveu ir à lanchonete. Antes mesmo de sair de casa ou olhar o mapa, Sandro rapidamente percebeu que a lanchonete ficava em uma rua paralela à da casa de Felipe, ao passo que o cinema ficava em uma rua perpendicular à da casa do amigo.



Vale lembrar que retas paralelas são retas que não têm pontos em comum, como na figura



e retas perpendiculares possuem um ponto em comum e formam um ângulo de 90° , como representada a seguir



Sandro rapidamente foi conferir no mapa se realmente estava correto e se ainda recordava-se dos conceitos matemáticos que havia utilizado para chegar a essa conclusão. Olhando o mapa que Felipe deixou....

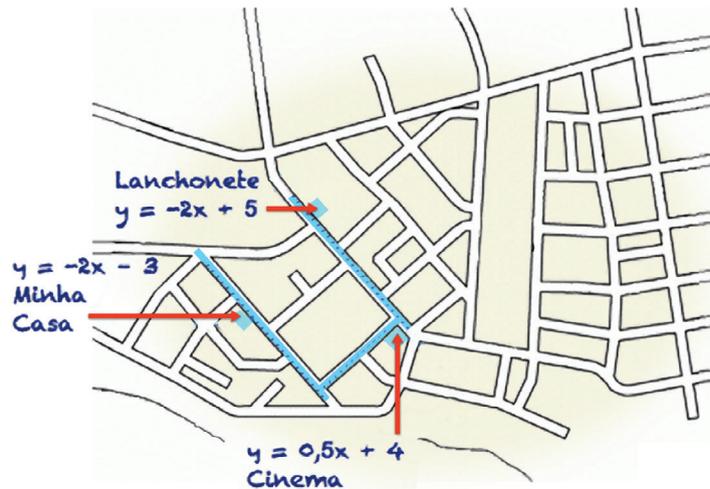


Figura 4: Mapa que Felipe entregou para Sandro.

E não é que Sandro realmente estava certo! Mas como será que ele fez para acertar a posição relativa entre as ruas sem olhar o mapa?

Retas paralelas e perpendiculares

Vamos pensar juntos: o que faz com que duas retas sejam paralelas? E como será que isso pode ser percebido nas equações destas retas?

No plano cartesiano, podemos perceber que se duas retas são paralelas, necessariamente elas farão o mesmo ângulo com o eixo das abscissas! Veja na figura esses ângulo representados por a_1 e a_2 :

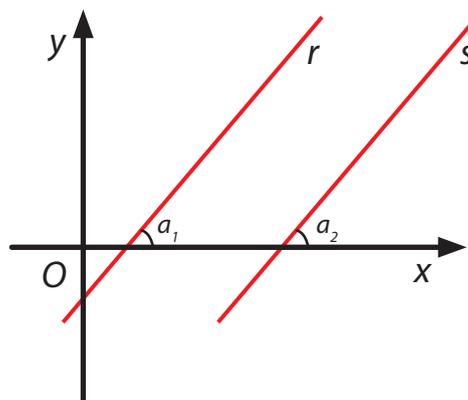


Figura 5: Duas retas paralelas, r e s, cortadas por duas transversais, os eixos x e y.

Como as retas fazem o mesmo ângulo com o eixo dos x , o valor da tangente destes ângulos será o mesmo e, por conseguinte, o coeficiente angular das retas também será o mesmo. Dessa forma ficou fácil para Sandro perceber que a casa de Felipe situada na rua $y = -2x - 3$ ficava na rua paralela a rua da lanchonete situada na rua $y = -2x + 5$, uma vez que seus coeficientes angulares são iguais: -2 .

Para concluir que as ruas da casa de Felipe e da lanchonete eram perpendiculares a rua do cinema $y = 0,5x + 4$, Sandro lembrou da aula da professora Carmem, em que ela chegava a seguinte conclusão:

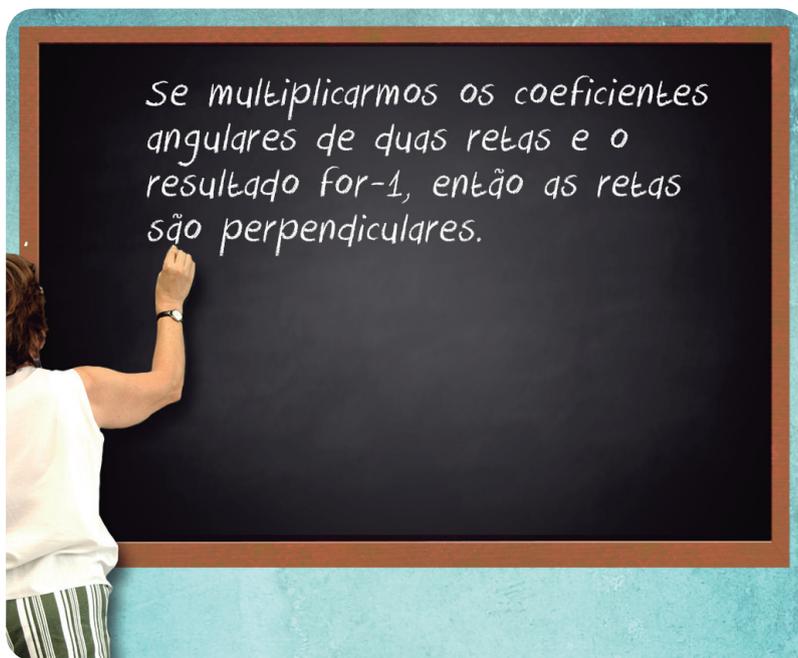


Figura 6: Professora Carmem falando sobre as relação entre os coeficientes angulares de duas retas tangentes.

Então, Sandro pensou: o coeficiente angular das retas que representam as ruas da casa de Felipe e da lanchonete é -2 ; o coeficiente angular da rua $y = 0,5x + 4$ que representa o cinema é $0,5$; -2 vezes $0,5$ é igual a -1 . As retas são perpendiculares!

Construa no plano cartesiano os gráficos das retas r_1 e r_2 de equações $y = 2x$ e $y = -x + 2$, respectivamente.

- Qual o ângulo formado por essas retas com o eixo x ?
- Na figura construída, é possível identificar um triângulo? Classifique-o quanto a medida dos seus ângulos internos.



Lembre-se:
faça em uma
folha à parte

A demonstração de que o produto dos coeficientes angulares de duas retas perpendiculares é -1 é bastante interessante – e até acessível ao nosso nível. No entanto, como temos ainda muita aula pela frente, fazemos assim: se você quiser vê-la na íntegra, acesse o site do Instituto de Matemática da UFRJ: <http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap41s4.html>. Do contrário, siga direto adiante na leitura da aula. Combinado?



Agora, chegou a sua vez de praticar, se localizando no bairro de Felipe!

Verifique se as ruas da escola e do parque são perpendiculares ou paralelas a rua da casa de Felipe.

Rua da Escola: $y = 2x - 1$

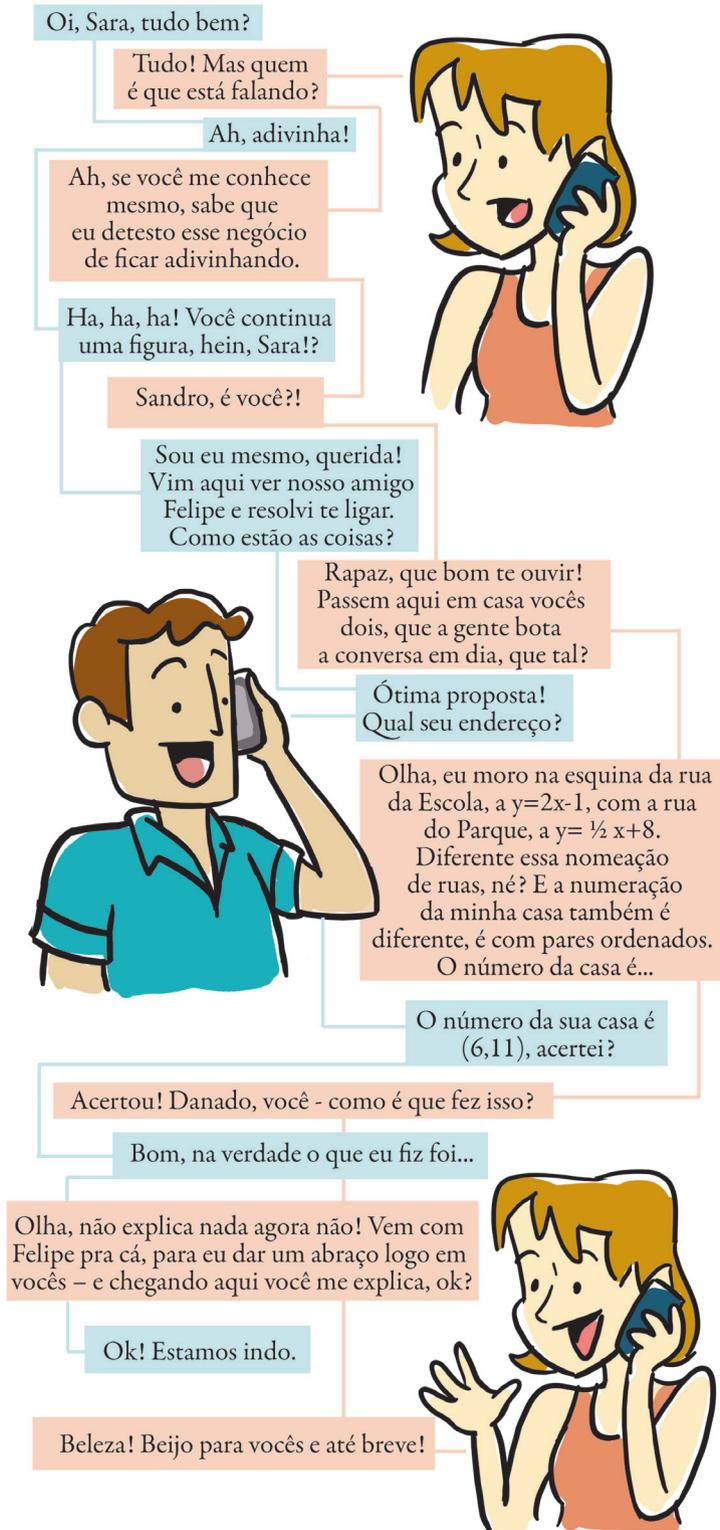
Rua do Parque: $y = \frac{1}{2}x + 8$



Lembre-se:
faça em uma
folha à parte

Interseção entre retas

Depois do cinema, Sandro resolveu ligar para Sara, que também não o via há tempos.



Oi, Sara, tudo bem?

Tudo! Mas quem é que está falando?

Ah, adivinha!

Ah, se você me conhece mesmo, sabe que eu detesto esse negócio de ficar adivinhando.

Ha, ha, ha! Você continua uma figura, hein, Sara!?

Sandro, é você?!

Sou eu mesmo, querida! Vim aqui ver nosso amigo Felipe e resolvi te ligar. Como estão as coisas?

Rapaz, que bom te ouvir! Passem aqui em casa vocês dois, que a gente bota a conversa em dia, que tal?

Ótima proposta! Qual seu endereço?

Olha, eu moro na esquina da rua da Escola, a $y=2x-1$, com a rua do Parque, a $y= \frac{1}{2}x+8$. Diferente essa nomeação de ruas, né? E a numeração da minha casa também é diferente, é com pares ordenados. O número da casa é...

O número da sua casa é $(6,11)$, acertei?

Acertou! Danado, você - como é que fez isso?

Bom, na verdade o que eu fiz foi...

Olha, não explica nada agora não! Vem com Felipe pra cá, para eu dar um abraço logo em vocês - e chegando aqui você me explica, ok?

Ok! Estamos indo.

Beleza! Beijo para vocês e até breve!

A Sara falou que mora numa esquina, certo? Pois então, a primeira coisa a se pensar é que uma esquina é o ponto de encontro entre duas ruas. E, se as ruas estão representadas pelas retas, a esquina é justamente o ponto de encontro entre estas retas. Entenderam? Ótimo, vamos adiante.

A segunda coisa a pensar é que o ponto de encontro entre duas retas pertence a ambas as retas e, por isso, suas coordenadas satisfazem tanto à equação de uma reta quanto à equação de outra reta. Noutras palavras, o ponto de interseção entre duas retas é o ponto em que as equações das duas retas são iguais. Se representarmos uma reta por $y_1 = a_1 x_1 + b_1$ e a outra por $y_2 = a_2 x_2 + b_2$, o ponto de interseção $P_1(x_1, y_1)$ será aquele em que $y_1 = y_2$. Veja na figura.

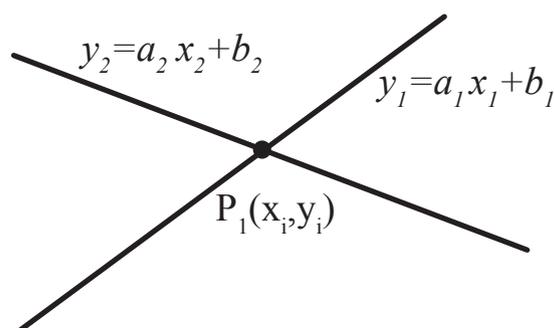


Figura 7: Retas y_1 e y_2 e seu ponto de interseção P_i .

Assim, Sandro pensou o seguinte: a equação da rua da Escola é $y = 2x - 1$; a equação da rua do Parque é $y = \frac{1}{2}x + 8$; Sara mora na esquina das duas, ou seja, no lugar em que $2x - 1 = \frac{1}{2}x + 8$. Desenvolvendo, vem

$$2x - \frac{1}{2}x = 8 + 1$$

$$1,5x = 9$$

$$x = 6$$

Para obtermos o valor correspondente para y , basta substituímos o valor de x encontrado em uma das equações anteriores.

$$y = 2(6) - 1$$

$$y = 12 - 1 = 11$$

Assim, Sara mora na casa (6,11).

Observação: Sabemos que existem 4 esquinas no cruzamento de duas ruas, porém, no nosso exemplo, vamos considerar que todas levam a mesma numeração, ok?

Novamente, hora de vocês se orientarem no bairro de Sara e Felipe.

Atividade
2

Encontre as coordenadas cartesianas da esquina das ruas do cinema ($y=0,5x + 4$) e da lanchonete ($y = -2x + 5$). Depois, encontre as coordenadas cartesianas da esquina da rua do cinema ($y=0,5x + 4$) com a rua da casa do Felipe ($y = -2x - 3$)

Lembre-se:
faça em uma
folha à parte

Articulando os conceitos: o problema da estação

Nesta seção, vamos juntar tudo o que vimos até agora – inclusive conceitos da aula anterior – para resolver um problema maior, mais complexo. Nosso objetivo é mostrar que a geometria analítica pode nos levar muito, mas muito longe na resolução problemas bastante concretos. O problema escolhido é aquele já conhecido de vocês da aula anterior: o de encontrar a localização da estação de trem.

Na aula anterior, tínhamos usado este problema como um mote para calcular o ponto médio da distância entre as duas cidades. Agora vamos mostrar que, a partir daí – e do que acabamos de ver nas seções anteriores – é perfeitamente possível calcular o ponto exato da linha do trem em que deve ser construída a estação. Vamos lá? Acompanhe na figura, então:

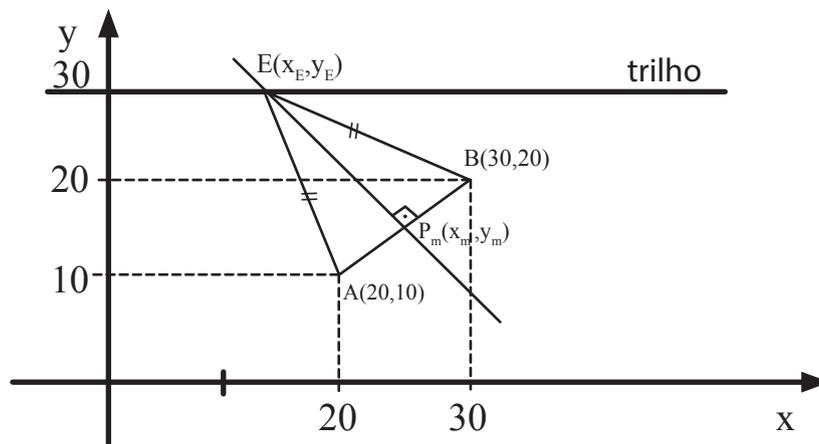


Figura 8: Cidades A e B, estação E, ponto médio P_m entre A e B e trilho do trem representados no plano cartesiano.

Vemos então que, o ponto a ser determinado deve estar contido na mediatriz do segmento AB, uma reta perpendicular a esse segmento e que passa pelo seu ponto médio. Dessa forma, nossa solução está dividida então em 3 partes:

1. encontrar o ponto médio P_M do segmento AB,
2. encontrar a equação da reta perpendicular ao segmento AB e que passa pelo ponto P_M
3. encontrar a interseção desta reta com a reta que representa o trilho do trem

Solução, parte 1

Para a primeira parte da solução, vamos usar muito do que já vimos na aula anterior, vejamos só:

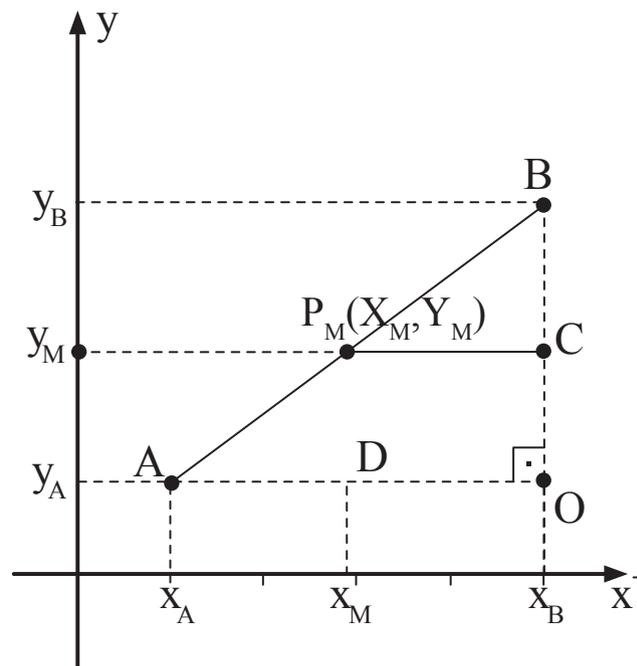


Figura 9: Cidades $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ e ponto médio $P_M(x_M, y_M)$ representados no plano cartesiano.

Na figura anterior, os triângulos ABP_M e AOB são semelhantes e a razão de semelhança é $\frac{1}{2}$ (já que P_M é, por hipótese, ponto médio de AB). Dessa forma, teremos que D é ponto médio de AO e, analogamente, C é ponto médio de BO. Assim, $x_M = (x_A + x_B)/2$ e $y_M = (y_A + y_B)/2$. No nosso caso, como $A(20, 10)$ e $B(30, 20)$, $x_M = 25$ e $y_M = 15$.

Solução, parte 2

Encontrando o ponto médio, vamos ao segundo passo: encontrar a equação da reta perpendicular ao segmento AB e que passa por P_M . Lembramos aqui que, na aula anterior, já fizemos atividades em que encontrávamos a equação de uma reta que passava por um determinado ponto e que tinha uma determinada inclinação, certo? Então, o ponto já temos: é o ponto $P_M(25, 15)$. Falta agora encontrar a inclinação da reta perpendicular ao segmento AB.

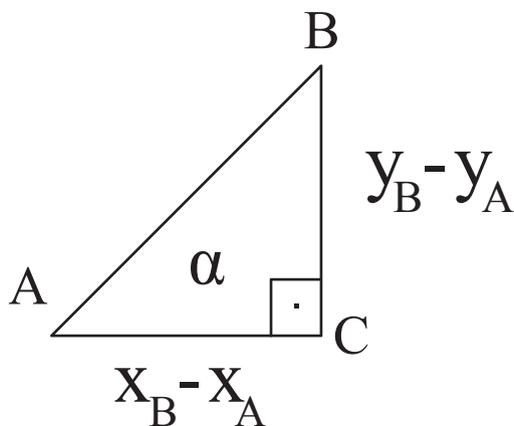


Figura 10: Triângulo retângulo ABC, com ângulo α e medidas dos lados AC e BC destacados.

Sabemos que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha}$$

Logo:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

O valor encontrado é justamente o do coeficiente angular da reta que dá suporte ao segmento AB. Se usarmos a equação reduzida da reta, ele será o valor de a na expressão $y = ax + b$. Se usarmos a fundamental, ele será o valor de m na expressão $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Aí ficou fácil! Já temos os valores de x_A, y_A, x_B, y_B – basta substituir na expressão. Vamos lá?

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{20 - 10}{30 - 20}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{10}{10} = 1$$

Achado o valor do coeficiente angular desta reta, entrar com ele na expressão $m_p = -1/m_{AB}$ (que vem daquela propriedade apresentada pela professora Carmem, certo?)

$$m_p = -1/m_{AB}$$

$$m_p = -1/1$$

$$m_p = -1$$

Opa! Uma beleza! Já temos o ponto, $P_M(25, 15)$ e a inclinação da reta, -1. Vamos agora achar a equação da reta na forma reduzida (poderíamos perfeitamente encontrar essa equação na forma fundamental, ok?)

$$y = ax + b; a = -1, P_M(25, 15)$$

$$y = -1 \cdot x + b$$

$$15 = -1 \cdot (25) + b$$

$$15 + 25 = b$$

$$b = 40$$

$$\text{Equação da reta: } y = -x + 40$$

Ufa! Por um lado, é trabalhoso, não é verdade? Mas veja que, por outro, não estamos trazendo conceitos novos: tudo o que utilizamos até aqui já foi discutido nesta aula e na aula anterior. A novidade está justamente na articulação dos conceitos, que pode nos levar a resolver problemas muito mais complexos do que imaginamos a princípio. Tomaram fôlego? Ótimo, estamos quase lá!

Solução, parte 3

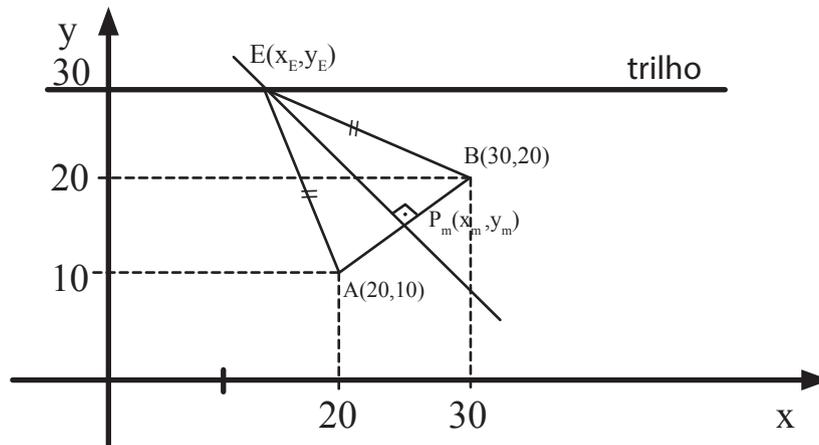


Figura 10: Desenho base do problema com etapas da solução destacadas.

Muito bem, vamos dar uma olhada na figura e recapitular o que já fizemos até agora: na primeira etapa da solução, achamos o ponto médio P_M do segmento AB. Na segunda, encontramos a reta perpendicular a AB e que passa por este ponto médio. Agora, na etapa final, vamos encontrar o ponto de interseção entre esta reta e a reta que representa o trilho do trem. A equação da reta perpendicular ao segmento AB e que passa por P_M , já temos: $y = -x + 40$. Falta achar a equação da reta que representa o trilho do trem e encontrar a interseção entre ambas, igualando as duas equações. Lembramos que foi exatamente isso que fizemos na Atividade 2 desta aula – e na explicação que a antecedeu, certo?

A reta que representa o trilho do trem é uma reta paralela ao eixo dos x e que corta o eixo dos y no ponto 30 – o tal ponto (0,30) do plano cartesiano. Assim, se a gente achar mais um ponto da reta, já poderemos descobrir sua equação. Como essa reta é paralela ao eixo dos x na altura 30, todos os seus pontos têm $y=30$ – dêem uma conferida no gráfico, se quiserem: o ponto com $x=1$, tem $y=30$, o ponto com $x=-2$ tem $y=30$, o ponto com $x=1512$ tem $y=30$ e assim por diante, para todos os pontos. Vamos então escolher um ponto qualquer – com $x=15$, digamos. Esse ponto terá – adivinhem?! – $y=30$! Então já sabemos que o ponto (15,30) também pertence a esta reta. Temos então dois pontos e queremos achar a equação da reta que passa por eles.

Se a gente pensar na equação reduzida, $y=ax+b$, só faltaria só achar o valor de a e proceder às substituições. Esse valor, como vimos na aula anterior e resgatamos nesta aula, é o valor da tangente do ângulo que a reta faz com o eixo dos x, dada pela expressão $tg\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, onde x_A, y_A, x_B e y_B são, respectivamente, ordenadas e abscissas dos pontos A e B, pertencentes à reta. Como já temos os valores, é só substituir:

$$y = ax + b; A(0,30); B(15,30)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{30 - 30}{15 - 0} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{0}{15} = 0 \end{aligned}$$

$$a = 0$$

Fazendo a substituição com B(15,30), temos

$$30 = 0.15 + b$$

$$30 = 0 + b$$

$$b = 30$$

e a equação da reta fica $y = 0 \cdot x + 30; y = 30$

Você deve estar se perguntando: $y=30$? Ué, mas cadê o x ? Isso está certo mesmo? Ao que responderemos, é $y=30$ mesmo, não tem x e está certíssimo. Veja que o fato de a equação “não ter x ” corresponde justamente àquela situação que descrevemos anteriormente: para qualquer valor de x , teremos $y=30$.

Mais precisamente, retas paralelas ao eixo dos x têm $a=0$, justamente porque, na expressão da tangente ($\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$), que vai dar o valor de a , o termo $y_B - y_A$ sempre se anula (se a reta é paralela ao eixo dos x , $y_A = y_B = y_C = \dots$). Assim, estas retas terminam representadas na forma $y=b$, visto que o primeiro termo, ax , é sempre nulo, em consequência de $0 \cdot x$ ser sempre igual a zero.



Chegamos então à reta final: encontrar a interseção entre a reta $y=30$ e a reta $y = -x+40$. Como já vimos na Atividade 2, vamos igualar as duas equações:

$$y = 30; y = -x + 40$$

$$30 = -x + 40$$

$$x = 40 - 30$$

$$x = 10.$$

Substituindo em qualquer uma das duas equações – $y=30$ é bem mais fácil – teremos que, para $x=10$, $y=30$

A estação, então, ficará situada no ponto $(10, 30)$!!!

Seção 2

Circunferência



Figura 11: Estação de trem de Atocha, em Madri, Espanha.

A notícia de que as cidades iriam fazer uma parceria para construir a estação de trem teve grande repercussão! A população ficou muito motivada e várias instituições decidiram colaborar com o processo. O escritório de arquitetura mais famoso da cidade A, por exemplo, sugeriu que a estação fosse construída no mesmo espírito da estação de Atocha, em Madri, na Espanha. Essa estação é mais do que um simples lugar embarque e desembarque de passageiros, oferecendo cafés, restaurantes, praça de alimentação e um excelente espaço de convivência para as pessoas que estão em trânsito – veja na figura. O escritório sugeriu ainda que fosse construído um parque ao redor da estação, ideia que foi muito bem recebida pela população e pelas prefeituras.

Outra instituição que decidiu colaborar foi a associação de comerciantes da cidade A, que entrou em contato com a associação de comerciantes da cidade B para que, juntas financiassem o parque. A ideia era dividir o custo em 100 cotas iguais e oferecê-las a 100 comerciantes, 50 de cada cidade. O comerciante que comprasse a

cota poderia construir um quiosque no parque. Depois de vendidas as cotas – o que aconteceu muito rapidamente – todos os comerciantes que compraram as cotas queriam ficar exatamente na entrada da estação, lugar em que teriam a melhor chance de vender aos passageiros. Como a construção de 100 quiosques todos juntos seria impossível – ou, na melhor das hipóteses, comprometeria inapelavelmente os projetos arquitetônicos da estação e do parque – as prefeituras se viram diante de um problema: como fazer para que todos os comerciantes tivessem a mesma chance de acessar os passageiros?

Depois de muitas reuniões, as prefeituras decidiram estabelecer que todos os 100 quiosques deveriam estar a uma mesma distância da entrada/saída da estação. Assim, todos teriam, pelo menos teoricamente, a mesma chance de ser visitados por um cliente. Seu amigo José, estagiário no escritório de arquitetura, foi designado para fazer a planta da área em que vão ficar os quiosques. Marcou boa parte deles, todos à mesma distância da estação, e chegou à seguinte figura:

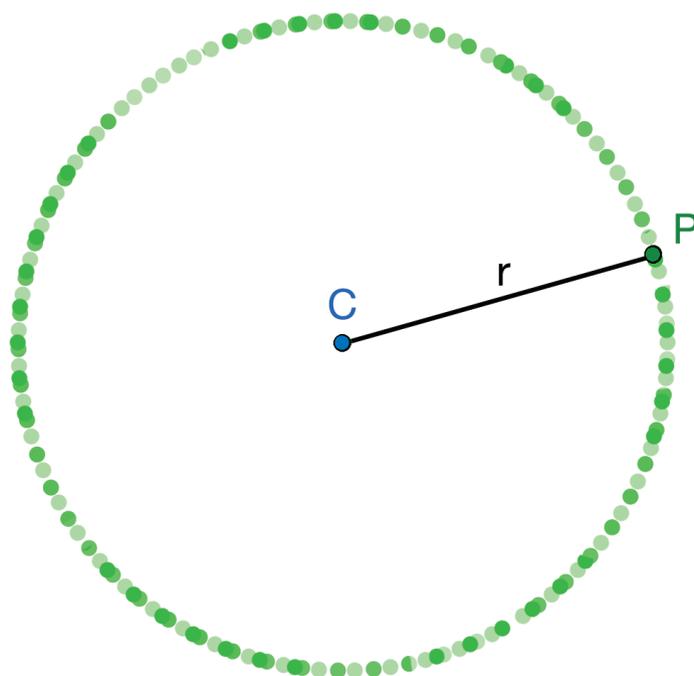


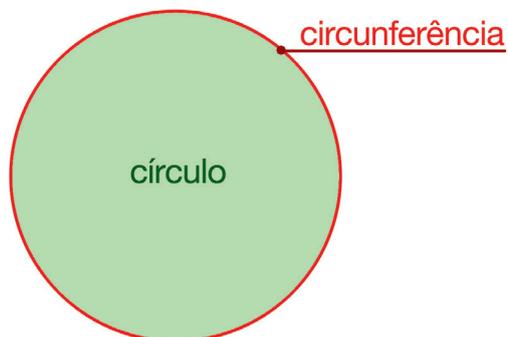
Figura 12: Distribuição dos quiosques em torno da estação, representada pelo ponto C.

Ah, é um círculo! disse José – ou será que é uma circunferência? Ih, que dúvida! Existe diferença entre uma e outra ou será que as duas palavras querem dizer a mesma coisa? Como será que eu faço para saber isso, hein?

Para dar aquela resposta caprichada ao prezado José, dê uma olhadinha no box seguinte.



É muito comum a confusão entre circunferência e círculo. Vamos aproveitar para sanar essa dúvida logo no início. Circunferência é a linha de contorno, enquanto o círculo é a figura plana delimitada pela circunferência.



Circunferência é lugar geométrico dos pontos (x,y) de um plano que estão a uma mesma distância – chamada de raio, R – de um ponto fixo desse plano, denominado centro $C(x_c, y_c)$. Veja na figura seguinte

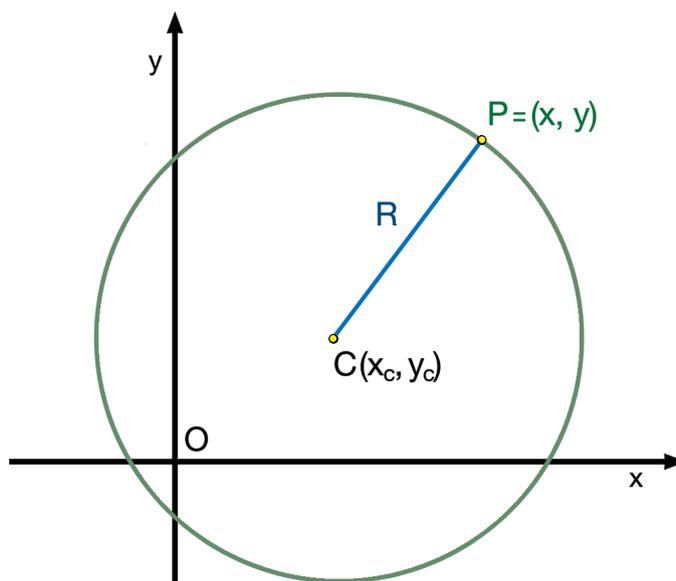


Figura 13: Circunferência de raio R e centro em C .

Destacamos aqui a semelhança entre esta situação e a distribuição dos quiosques na figura 12: da mesma forma que todos os 100 quiosques estão a uma determinada distância da estação do trem, todos os pontos P da circunferência estão a uma distância R do centro C . Ok?

Outro elemento conhecido da circunferência é o diâmetro. O diâmetro é uma corda, ou seja, um segmento que une dois pontos distintos da circunferência. Mas por passar pelo centro, o diâmetro é uma corda especial. O diâmetro tem o dobro da medida do raio (que já definimos anteriormente).

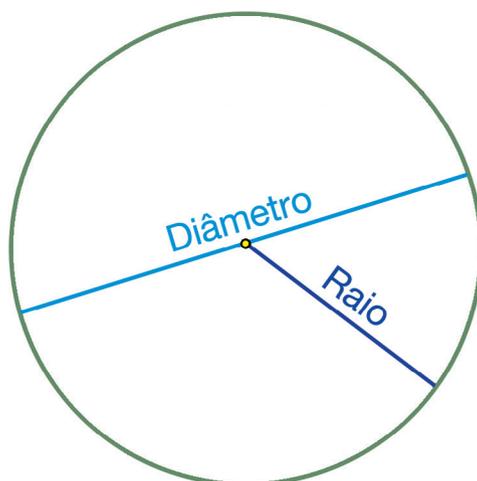


Figura 14: Circunferência com diâmetro e raio marcados.

Muito bem! Diâmetro, raio, centro, todos os pontos a uma mesma distância... será que a gente consegue construir uma equação para a circunferência? A resposta, vocês já devem ter adivinhado, é sim, claro! E olha que é até bem simples a idéia. Vamos retomar a figura 13, com algumas alterações:

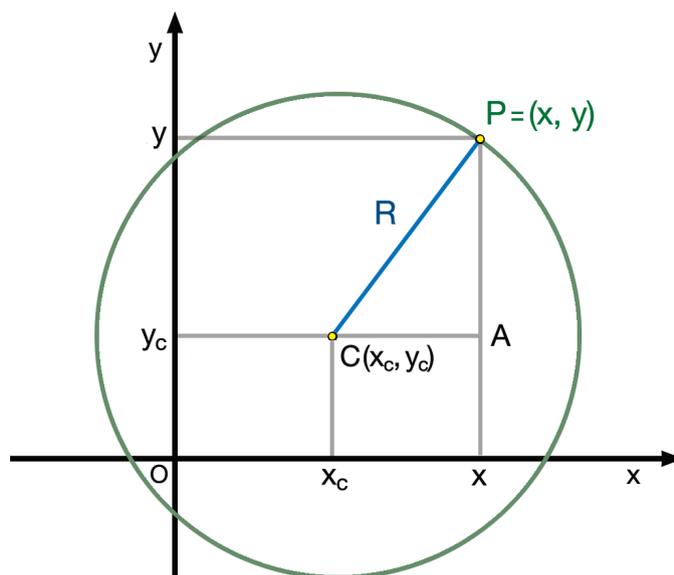


Figura 15: Circunferência de raio R e centro em $C(x_c, y_c)$, com ponto $P(x, y)$ destacado.

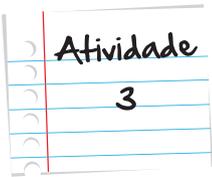
A ideia central é que a distância entre os pontos P e C permanece constante e igual a R. Ora, se nos lembramos da aula anterior, veremos que uma das primeiras coisas que fizemos foi encontrar uma expressão para a distância entre dois pontos. Lembraram dela?

$$d_{AB}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

Vamos agora substituir os valores de acordo com a figura 15. Vejam lá:

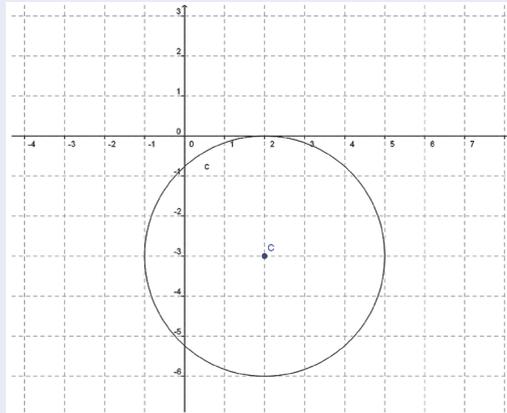
$$R^2 = (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2$$

Essa é a *equação reduzida* da circunferência, dada em função da medida do raio da circunferência e das coordenadas do seu centro.

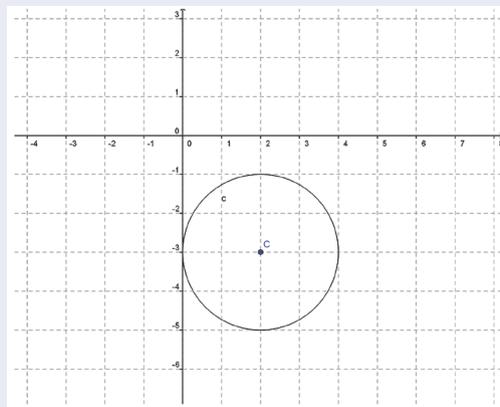


Qual dos desenhos abaixo representa a planta do bairro A e qual representa a planta do bairro B, sendo A uma circunferência de centro (2,-3) e raio 3 e B uma circunferência de centro (3,3) e raio 3?

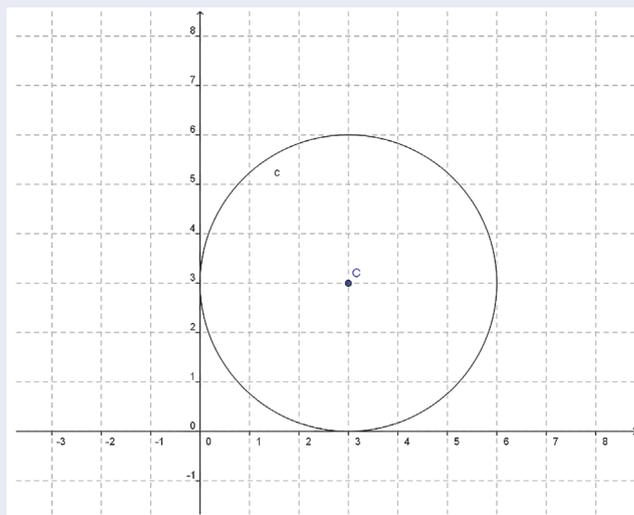
1.



2.

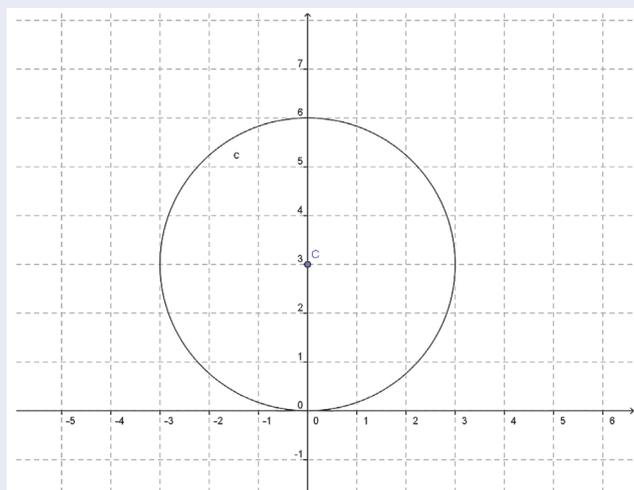


3.



Atividade
3

4.



Lembre-se:
faça em uma
folha à parte



Lembram da nossa estação? Aquela que ficava no ponto (10, 30) e que estaria rodeada pelos quiosques dos comerciantes que financiaram a construção do parque? Então, levando em consideração que as distâncias estão em quilômetros e que a distância entre os quiosques e a estação deve ser de 100m, escreva a equação reduzida da circunferência formada pelos quiosques.

Lembre-se:
faça em uma
folha à parte

Seção 3

As cônicas

Na seção “Para início de conversa”, falamos que os primeiros modelos para o nosso sistema solar presumiam que os planetas descreviam órbitas circulares e que, mais tarde, a partir da teoria newtoniana, verificou-se que estas órbitas eram, de fato, elípticas. No entanto, é importante deixar claro que é perfeitamente possível para um corpo celeste descrever uma trajetória circular em torno de um outro corpo – muitos satélites que usamos para comunicação, por exemplo, descrevem órbitas circulares em torno da Terra.



Figura 16: Antena para transmissão via satélite situada no teto de um caminhão de TV.

Um das características fascinantes acerca da teoria newtoniana da gravitação é que as órbitas previstas por ela – circunferência, elipse, parábola e hipérbole – podem ser obtidas “cortando” um cone de folha dupla com um plano. Vejam a figura seguinte:

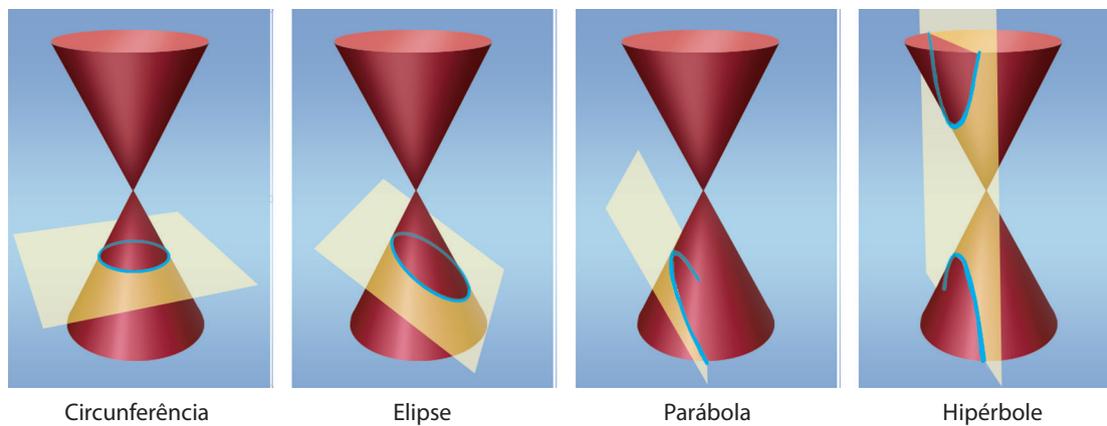


Figura 17: Secção de um cone de folha dupla por um plano, gerando, da esquerda para a direita, uma circunferência, uma elipse, uma parábola e uma hipérbole.

Atentem para o movimento do plano: quando ele está paralelo à base, o corte – ou seção, para usar o termo mais apropriado – gera um círculo. Quando o plano começa a rodar, estando mais alto na parte esquerda do que na direita, ele gera uma elipse. Quando a rotação se acentua, ele corta apenas uma parte de uma das folhas do cone, gerando a parábola. Finalmente, quando o plano gira ainda mais e começa a tocar as duas folhas do cone, a curva é a hipérbole. E sabem o que é melhor? Todas – e repetimos – todas estas curvas podem ser descritas por equações semelhantes à da circunferência. Assim, encontrar a trajetória de um satélite, ou encontrar o ponto exato em que a trajetória de um determinado cometa cruza a órbita de um planeta termina se resumindo a um problema de álgebra – às vezes com um pouco mais de contas, às vezes com um pouco menos, mas sempre um problema de álgebra.

Cumprimos assim a promessa da seção “Para início de conversa”: as retas que modelam as ruas e trilhos da cidade; as circunferências que modelaram a distribuição dos quiosques e modelam as órbitas dos satélites; as elipses hipérbolas e parábolas que modelam as órbitas dos cometas e dos planetas – todas essas retas e curvas, sem exceção – podem ser representadas e trabalhadas pela geometria analítica, muito à maneira do que fizemos no problema de encontrar a posição da estação de trem. Já pensou nas possibilidades que isso pode abrir? Enquanto estiver pensando nelas, ou, até, para expandi-las ainda mais, convidamos você a ver o vídeo do link seguinte – e nos despedimos.



Multimídia

Para saber mais sobre a relação entre a Astronomia e a Geometria Analítica, acesse o vídeo “Na cauda do cometa” no link: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1137>.

Resumo

- Retas são paralelas se, e somente se, possuem a mesma declividade. Isto é:
- A reta r com declividade m_r é paralela a reta s com declividade m_s se, e somente se, $m_r = m_s$.
- Retas são perpendiculares se, e somente se, a multiplicação de suas declividades é -1 . Isto é:
- A reta r com declividade m_r é perpendicular a reta s com declividade m_s se e somente se $m_r \cdot m_s = -1$.
- Para achar o ponto de encontro entre a reta y_1 e a reta y_2 basta fazer $y_1 = y_2$, encontrar o valor de x e, em seguida, substituir em qualquer uma das duas equações.
- Circunferência é lugar geométrico dos pontos (x,y) de um plano que estão a uma mesma distância - chamada de raio, R - de um ponto fixo denominado centro $C(x_c, y_c)$
- Equação reduzida da circunferência: $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$

Veja ainda

Acesse o link http://www.cienciamao.usp.br/tudo/exibir.php?midia=pru&cod=_geometriaanalitica e tenha acesso ao um texto interessante sobre geometria analítica que além de resgatar as técnicas básicas e as equações de curvas enfoca suas aplicações.

Referências

Livros

- ALMEIDA, Nilze de; DEGENSZAJN, David; DOLCE, Osvaldo; IEZZI, Gelson; PÉRIGO, Roberto. *Matemática Ciência e Aplicações 1*. Segunda Edição. São Paulo: Atual Editora, 2004.157p.
- BOYER, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.
- CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; LIMA, Elon Lages; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. *Temas e*

Problemas. Terceira Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. 193 p.

- _____ . *A Matemática do Ensino Médio Volume 1*. Sétima Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. 237 p.
- DANTE, Luiz Roberto. *Matemática Contexto e Aplicações Volume 1*. Primeira Edição. São Paulo: Editora Ática, 2011. 240p.
- FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. *Novo Aurélio Século XXI: o dicionário da língua portuguesa*. Quinta Edição. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 1999. 2128 p.

Imagens



- <http://www.sxc.hu/photo/475767>



- <http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1354144>



- <http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=188608>



- <http://www.sxc.hu/photo/347706> ; http://www.sxc.hu/photo/987819_17827363



- <http://www.sxc.hu/photo/908651>



- <http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1222796>



- <http://www.sxc.hu/photo/517386>

Atividade 1

A rua da escola não é nem perpendicular nem paralela a rua da casa de Felipe, as ruas da casa de Felipe e da escola são apenas concorrentes (se interceptam em um único ponto).

Já a rua do parque é perpendicular. Observe os cálculos:

Declividade da rua de Felipe -2

Declividade da rua do parque $\frac{1}{2}$

$$-2 \cdot \frac{1}{2} = -1$$

Atividade 2

Interseção entre a rua do cinema, $y = 0,5x + 4$ e a rua da lanchonete, $y = -2x + 5$

$$0,5x + 4 = -2x + 5$$

$$0,5x + 2x = 5 - 4$$

$$2,5x = 1$$

$$5/2x = 1$$

$$x = 1/(5/2) = 2/5 = 0,4$$

Substituindo na equação $y = -2x + 5$ (poderia ter sido na outra, ok?), teremos

$$y = -2(0,4) + 5 = -0,8 + 5 = 4,2$$

Assim, as coordenadas da interseção são $(0,4; 4,2)$

Interseção entre a rua do cinema $y = 0,5x + 4$ e a rua da casa de Felipe, $y = -2x - 3$

$$0,5x + 4 = -2x - 3$$

$$0,5x + 2x = -3 - 4$$

$$2,5x = -7$$

$$x = -7/2,5 = -2,8$$

Substituindo na equação $y = 0,5x + 4$ (poderia ter sido na outra, ok?), teremos

$$y = 0,5 \cdot (-2,8) + 4$$

$$y = -1,4 + 4$$

$$y = 2,6$$

As coordenadas da interseção são $(-2,8 ; 2,6)$



Atividade 3

O desenho 1 representa c1 A. Já o desenho 3 representa c2.

Atividade 4

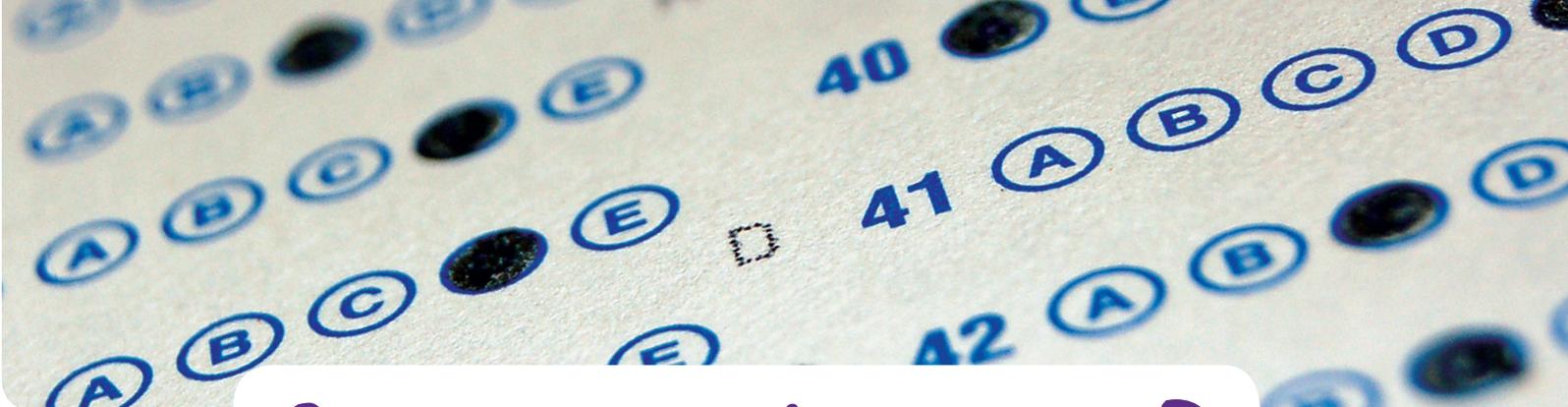
A equação reduzida da circunferência é $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$

No caso, $x_c = 10$ e $y_c = 30$ e $R = 0,1$ (100m = 0,1Km, certo?)

A equação então fica

$$(x - 10)^2 + (y - 30)^2 = (0,1)^2$$

$$(x - 10)^2 + (y - 30)^2 = 0,01$$



O que perguntam por aí?

QUESTÃO 1 (USP)

A equação da reta passando pela origem e paralela à reta determinada pelos pontos $A(2,3)$ e $B(1, -4)$ é:

- a. $y = x$
- b. $y = 3x - 4$
- c. $x = 7y$
- d. $y = 7x$

Resolução

A reta que passa pelos pontos A e B é descrita pela seguinte equação $y = ax + b$

substituindo o ponto A

$$3 = 2a + b$$

substituindo o ponto B

$$-4 = 1a + b$$

então, temos:

$$\begin{array}{r} 3 = 2a + b \\ -(-4) = -a - b \\ \hline 7 = a \end{array}$$

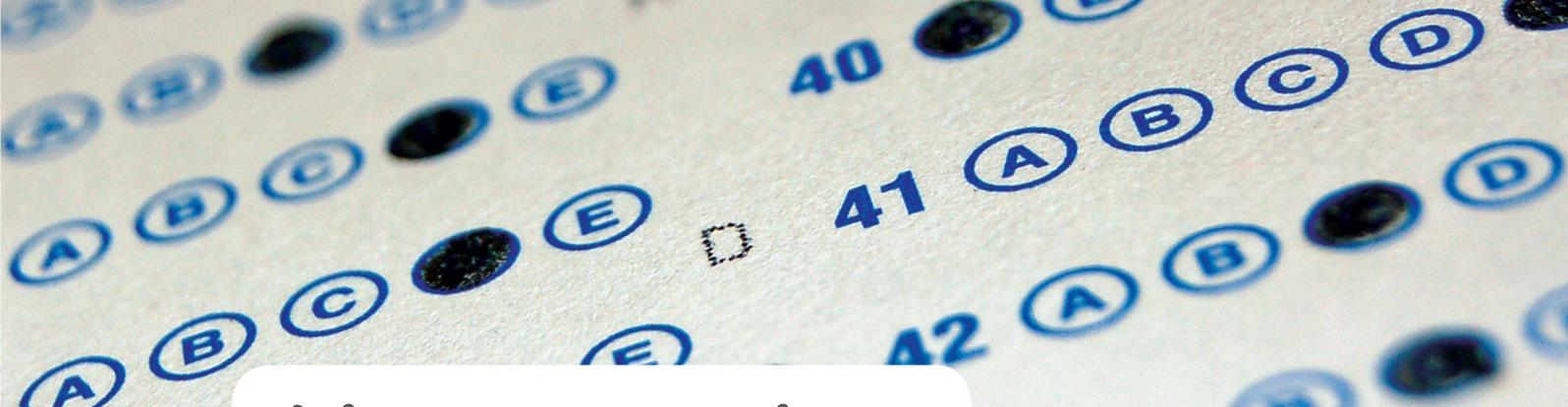
Não é necessário encontrar o valor de b . O valor de a é suficiente para resolver o problema.

Como a reta é paralela a reta que passa por A e B, ambas têm a mesma inclinação, logo o coeficiente angular dessa reta também é 7.

Como a reta passa pela origem $b = 0$.

Assim, a equação da reta que estamos procurando é $y = 7x$

Resposta: Letra D



Atividade extra

Exercício 1

As retas r e s são concorrentes

$$r: 3x + 2y - 8 = 0 \text{ e } s: 4x + 5y - 13 = 0$$

Qual o ponto de intersecção?

- (a) (1, 2) (b) (2, 1) (c) (0, 1) (d) (1, 0)

Exercício 2

Considere as retas $2x - 5y - 2 = 0$ e $3x + 5y - 28 = 0$

Em que ponto elas são concorrentes?

- (a) (6, 2) (b) (2, 6) (c) (3, 5) (d) (5, 3)

Exercício 3

Considere as retas $r: x + 7y - 10 = 0$ e $s: y = 7x + 3$

Quanto vale o produto de seu coeficientes angulares?

- (a) -7 (b) 7 (c) 1 (d) -1

Exercício 4

Qual a equação geral da circunferência de centro $C(3, 2)$ e raio $r = 7$?

(a) $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 18 = 0$

(c) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 36 = 0$

(b) $x^2 + y^2 - 3x - 2y - 18 = 0$

(d) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 36 = 0$

Exercício 5

Qual a equação geral da circunferência de centro $C(-3, 4)$ e raio $r = 3$?

(a) $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 18 = 0$

(c) $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 16 = 0$

(b) $x^2 + y^2 - 3x - 2y - 18 = 0$

(d) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 36 = 0$

Exercício 6

Qual a equação reduzida da circunferência de centro $C(2, 5)$ e raio $r = 3$?

(a) $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 9$

(c) $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 3$

(b) $(x - 4)^2 + (y - 10)^2 = 9$

(d) $(x - 4)^2 + (y - 10)^2 = 3$

Exercício 7

Qual o centro e o raio da circunferência da equação $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 9$?

(a) $C = (4, 5)$ e $r = 9$

(c) $C = (4, 5)$ e $r = 3$

(b) $C = (2, 5)$ e $r = 9$

(d) $C = (2, 5)$ e $r = 3$

Exercício 8

Qual o centro e o raio da circunferência da equação $x^2 + y^2 = 2$?

(a) $C = (0, 0)$ e $r = \sqrt{2}$

(c) $C = (0, 0)$ e $r = 2$

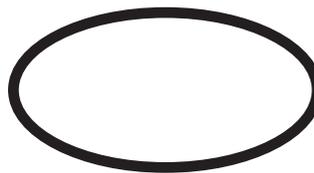
(b) $C = (1, 1)$ e $r = 2$

(d) $C = (1, 1)$ e $r = \sqrt{2}$

Exercício 9

Qual cônica a figura ao lado representa?

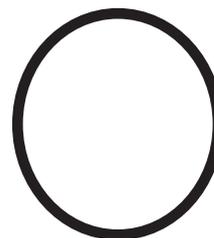
- (a) Hipérbole (c) Circunferência
(b) Elipse (d) Parábola



Exercício 10

Qual cônica a figura ao lado representa?

- (a) Hipérbole (c) Circunferência
(b) Elipse (d) Parábola



Exercício 11

As retas $r: 6x + 7y + 3 = 0$ e $s: 12x + 14y - 21 = 0$ são paralelas?

Exercício 12

As retas $r: 5x + 3y - 10 = 0$ e $s: 5x - 10y - 10 = 0$ são paralelas?

Exercício 13

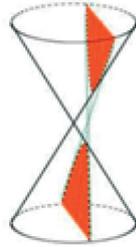
As retas $r: x - y + 7 = 0$ e $s: 2x + 5y - 7 = 0$ são perpendiculares?

Exercício 14

Qual a equação reduzida da circunferência de centro $C = (-1, 4)$ e raio $r = 2$?

Exercício 15

Qual cônica a figura ao lado representa?



Gabarito

Exercício 1

A B C D

Exercício 2

A B C D

Exercício 3

A B C D

Exercício 4

A B C D

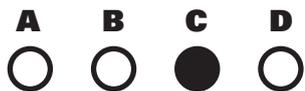
Exercício 5

A B C D

Exercício 6

A B C D

Exercício 7



Exercício 8



Exercício 9



Exercício 10



Exercício 11

Sim, pois tem o mesmo coeficiente angular, $m = -6 = 7$.

Exercício 12

Não. Coeficientes angulares distintos.

Exercício 13

Não. Por quê?

Exercício 14

$$(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 4.$$

Exercício 15

Hipérbole. Por quê?



