



Fundação

CECIERJ

Consórcio **cederj**

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Fenômenos de Transporte

Volume Único

Alexandre Santos Francisco



GOVERNO DO ESTADO
RIO DE JANEIRO

Secretaria de Ciência, Tecnologia e Inovação

**UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL**

MINISTÉRIO DA
EDUCAÇÃO



PÁTRIA AMADA
BRASIL
GOVERNO FEDERAL

Apoio:



FAPERJ

Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

www.cederj.edu.br

Presidente

Carlos Eduardo Bielschowsky

Vice-presidente

Marilvia Dansa de Alencar

Coordenação do Curso de Engenharia de Produção

CEFET - Diego Carvalho

UFF - Cecília Toledo Hernández

Material Didático

Elaboração de Conteúdo

Alexandre Santos Francisco

Direção de Design Instrucional

Bruno José Peixoto

Coordenação de Design Instrucional

Flávia Busnardo da Cunha

Design Instrucional

Gabriel Ramos

Biblioteca

Simone da Cruz Correa de Souza

Vera Vani Alves de Pinho

Diretoria de Material Impresso

Ulisses Schnaider

Revisão Linguística

Rosane Lira

José Meyohas

Ilustração

André Dahmer

André Amaral

Capa

André Dahmer

Programação Visual

Mario Lima

Produção Gráfica

Fábio Rapello Alencar

Copyright © 2019, Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e/ou gravada, por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da Fundação.

F819f

Francisco, Alexandre Santos.

Fenômenos de transporte. Volume Único / Alexandre Santos Francisco. – Rio de Janeiro: Fundação Cecierj, 2018.

178p.; 19 x 26,5 cm.

ISBN: 978-85-458-0117-7

1. Física. 2. Fenômenos do transporte. I. Título.

CDD: 530

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.
Texto revisado segundo o novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa.

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador

Wilson Witzel

Secretário de Estado de Ciência, Tecnologia e Inovação

Leonardo Rodrigues

Instituições Consorciadas

CEFET/RJ - Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca

Diretor-geral: Carlos Henrique Figueiredo Alves

FAETEC - Fundação de Apoio à Escola Técnica

Presidente: Alexandre Sérgio Alves Vieira

IFF - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense

Reitor: Jefferson Manhães de Azevedo

UENF - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Reitor: Luis César Passoni

UERJ - Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Reitor: Ruy Garcia Marques

UFF - Universidade Federal Fluminense

Reitor: Antonio Claudio Lucas da Nóbrega

UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro

Reitor: Roberto Leher

UFRRJ - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Reitor: Ricardo Luiz Louro Berbara

UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

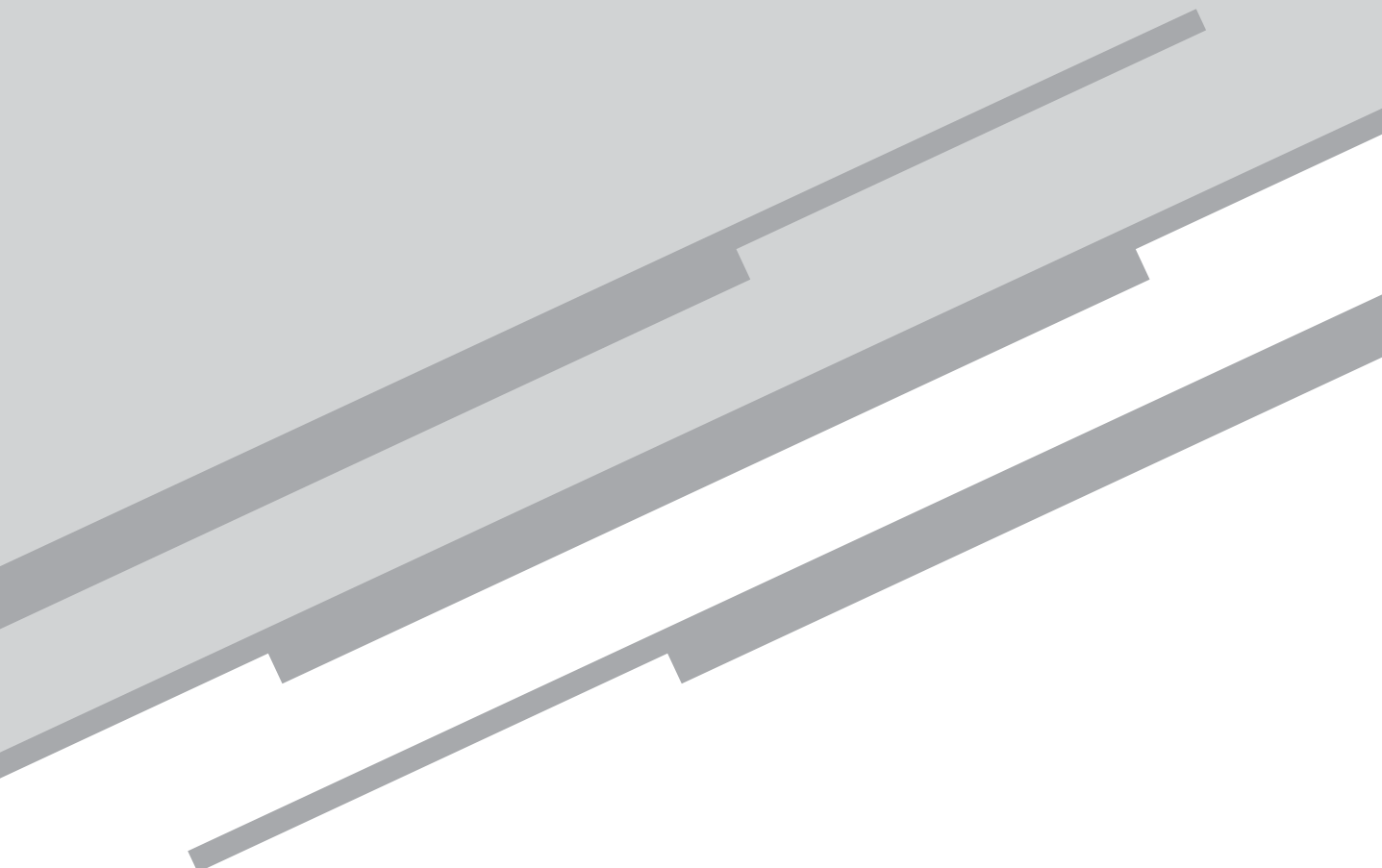
Reitor: Luiz Pedro San Gil Jutuca

Sumário

Aula 1 • Introdução aos fenômenos de transporte	7
<i>Alexandre Santos Francisco</i>	
Aula 2 • Caracterização das quantidades físicas.....	17
<i>Alexandre Santos Francisco</i>	
Aula 3 • Propriedades materiais relevantes.....	27
<i>Alexandre Santos Francisco</i>	
Aula 4 • Estática dos fluidos	37
<i>Alexandre Santos Francisco</i>	
Aula 5 • Cinemática dos fluidos	49
<i>Alexandre Santos Francisco</i>	
Aula 6 • Dinâmica dos fluidos.....	67
<i>Alexandre Santos Francisco</i>	
Aula 7 • Conservação de massa e energia nos fluidos	79
<i>Alexandre Santos Francisco</i>	
Aula 8 • Perda de carga dos fluidos.....	91
<i>Alexandre Santos Francisco</i>	
Aula 9 • Medidores de velocidade e vazão	105
<i>Alexandre Santos Francisco</i>	
Aula 10 • Fundamentos da transferência de calor.....	119
<i>Alexandre Santos Francisco</i>	
Aula 11 • Transferência de calor por convecção e radiação	133
<i>Alexandre Santos Francisco</i>	
Aula 12 • Transferência de massa	151
<i>Alexandre Santos Francisco</i>	
Aula 13 • Problemas	163
<i>Alexandre Santos Francisco</i>	

Aula 1

Introdução aos fenômenos de transporte



Alexandre Santos Francisco

Meta

Apresentar conceitos e quantidades físicas que estão relacionadas com os fenômenos de transporte e que serão fundamentais para o entendimento dos problemas envolvidos nesta disciplina, assim como para o desenvolvimento de formulações matemáticas e resoluções de tais problemas.

Objetivos

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. distinguir os três principais tipos de transporte: transferência de quantidade de movimento, transferência de calor e transferência de massa.

Introdução: tendência ao equilíbrio

A disciplina de fenômenos de transporte trata do estudo dos fenômenos físicos nos quais ocorre a transferência de certa quantidade física, tal como: quantidade de movimento, calor e massa. A transferência dessas quantidades físicas pode dar-se através de diversos meios materiais, sejam sólidos, líquidos ou gasosos. Os fenômenos de transporte apresentam, como característica comum, a tendência ao equilíbrio de uma quantidade física, em que a força motriz do fenômeno é sempre o gradiente de uma outra quantidade.



Força motriz é aquilo que impulsiona ou que faz mover. Nos fenômenos de transporte, o que induz o movimento de uma quantidade física é o gradiente de outra quantidade, que sempre está relacionada com a primeira. Entenda-se por gradiente a variação espacial da quantidade física. Assim, por exemplo, a principal força motriz para o escoamento de um fluido é o gradiente de pressão; para a transferência de calor, o gradiente de temperatura; e para a transferência de massa, o gradiente de concentração.

Poucos são os campos de aplicação da engenharia nos quais se deixa de utilizar os conhecimentos envolvidos na disciplina de fenômenos de transporte. Por exemplo, podemos citar: escoamentos em tubulações, máquinas hidráulicas, sistemas térmicos, aerodinâmica de veículos, refrigeração industrial, meteorologia, produção de petróleo, e muitas outras aplicações. Muitas vezes, desejamos saber qual é a intensidade da força de arraste, do escoamento de um fluido, exercida sobre um tubo. Ou também, qual é o diâmetro do tubo que proporciona determinada pressão na saída do tubo. A vazão de petróleo no poço de produção é bastante dependente da pressão no poço de injeção. O projeto adequado de equipamentos termo-hidráulicos tem estreita ligação com o comportamento dos fluidos envolvidos nos processos. Portanto, na compreensão correta dos fenômenos de transporte, a mecânica é importante para dar resposta aos problemas de engenharia.

Nesta introdução, são apresentados os principais tipos de transporte. O conhecimento da natureza física de cada transporte permite o desenvolvimento de formulações matemáticas específicas, e também a resolução dos respectivos problemas. Também são apresentadas as caracterizações das quantidades físicas e os modelos de abordagem de problemas de fenômenos de transporte.

Tipos de transporte

Nesta seção, são apresentados os tipos de transporte que estudaremos, a saber: transferência de quantidade de movimento, de calor e de massa. Existem campos específicos da ciência que são dedicados a cada um deles.

Transferência de quantidade de movimento

Em muitos problemas da engenharia, é necessário conhecer as relações entre um fluido e uma estrutura sólida. A mecânica dos fluidos é a ciência que estuda o comportamento físico dos fluidos, em movimento ou em repouso, assim como as leis que regem tal comportamento. Como a transferência de quantidade de movimento envolve o movimento de fluidos, neste tipo de transporte utilizam-se os mesmos conceitos físicos e definições da mecânica dos fluidos.

Quando se desliza uma placa plana sobre a superfície livre de um fluido, o fluido experimenta forças tangenciais. O deslocamento da placa produz um movimento do fluido na mesma direção e sentido, conforme a **Figura 1.1**. Isto é explicado considerando que as partículas do fluido, em contato com a placa, aderem perfeitamente à placa, segundo o princípio da aderência, no qual partículas do fluido adquirem a mesma velocidade da superfície da estrutura sólida em contato. Isto pode ser observado num filme de lubrificante que se encontra entre o pistão e a parede do cilindro do motor de um automóvel.



A definição de fluido é feita baseando-se em seu comportamento sob a ação de um esforço tangencial. Fluido é uma substância que

se deforma continuamente, sob a ação de esforços tangenciais constantes. Em geral, enquadram-se nesta definição as substâncias líquidas e gasosas. Os sólidos não são fluidos, pois a deformação sofrida por eles é limitada e estável.

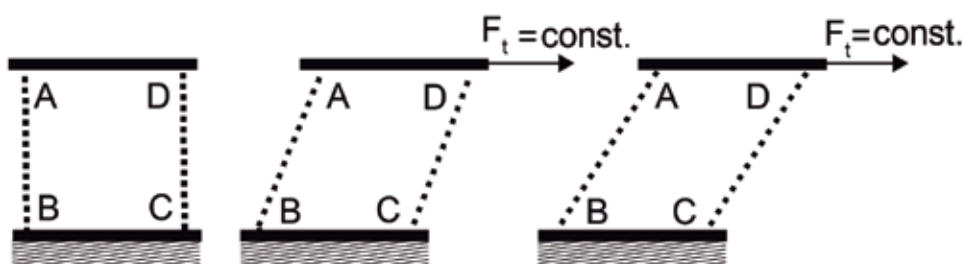


Figura 1.1: Fluido sob a ação de força tangencial, $F_t = \text{constante}$.

A determinação das forças trocadas entre o fluido e a superfície da estrutura sólida em contato com o escoamento depende do conhecimento do movimento do fluido; mais especificamente, da variação espacial da velocidade de escoamento. Em outros termos, a taxa na qual varia a quantidade de movimento do fluido depende do gradiente de velocidade no escoamento.

Transferência de calor

Em muitos sistemas físicos, a transferência de energia se dá por influência do calor. Calor é definido como a energia térmica em trânsito. Quando o interesse num determinado fenômeno está voltado para a energia térmica em trânsito, trata-se de um estudo de transferência de calor. Essa transferência ocorre como resultado da diferença de temperatura entre duas regiões. A partir do conhecimento das temperaturas das duas regiões, é possível determinar a taxa de transferência de calor entre elas. A **Figura 1.2** ilustra o calor transferido devido à diferença de temperatura das superfícies de uma parede.

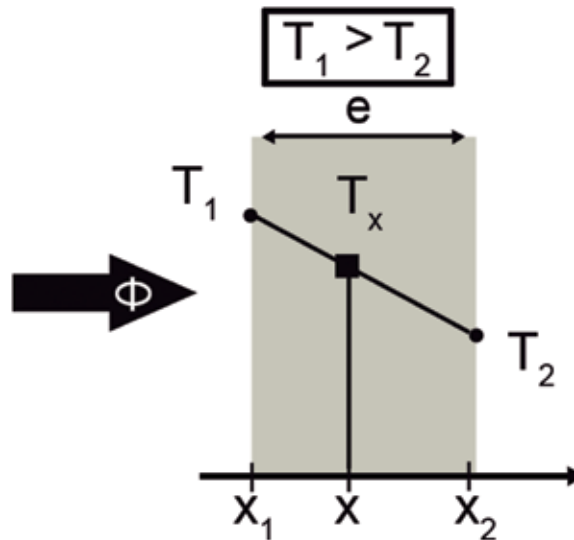


Figura 1.2: Calor transferido através de uma parede.

O calor pode ser transferido em sólidos, fluidos, ou vácuo, basicamente por efeitos de agitação molecular, movimento macroscópico de fluidos, ou emissão de fótons, respectivamente. O modo de transferência que ocorre em nível microscópico, pelo contato entre moléculas que estão vibrando, é chamado de *condução*. Quando a transferência depende da velocidade macroscópica do fluido em movimento, o modo de transferência é chamado de *convecção*. E, no caso da energia irradiada sob a forma de fótons, proveniente de matéria aquecida, o modo de transferência é chamado de *radiação*.

Apesar da transferência de calor ter estreita ligação com a termodinâmica, ela trabalha com sistemas que não estão em equilíbrio térmico. Esta situação é verificada na avaliação e dimensionamento de muitos sistemas de engenharia ou naturais. A análise de transferência de calor permite projetar equipamentos como trocadores de calor, caldeiras, condensadores, fornos, refrigeradores, coletores de energia solar, etc.

Transferência de massa

É importante, aqui, fazer a distinção entre transferência de massa e escoamento de fluido. No escoamento de fluido, a massa de fluido é transportada de uma região para outra em nível macroscópico, tendo como principal força motriz o gradiente de pressão. Já a transferência de massa diz respeito ao movimento de um soluto por diferença de con-

centração do soluto numa determinada mistura, que pode ser tanto sólida quanto fluida.

Considerando uma mistura na qual um determinado soluto está diluída, a concentração do soluto é definida pela quantidade de massa do soluto por unidade de volume da mistura. A taxa de transferência de massa do soluto é estabelecida na direção da região de maior concentração para a de menor concentração. O contrário vale para a massa do solvente, observado, por exemplo, no experimento da osmose com água, mostrado na **Figura 1.3**.

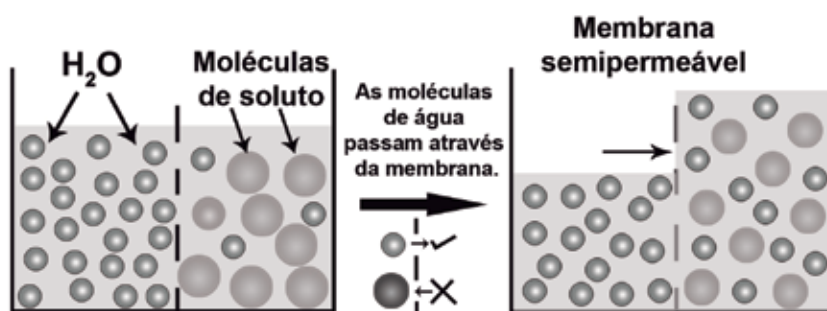


Figura 1.3: Experimento da osmose com água.

Existem diversas analogias entre a transferência de calor e de massa, uma vez que a massa é, em essência, também energia. Assim, os modos de transferência de massa também são condução e convecção, evidentemente, não havendo transferência de massa por radiação.

Os fenômenos de transferência de massa podem ser observados em muitos problemas de engenharia, tais como em processos metalúrgicos, reatores químicos, filtros, retardadores de vapor, etc.

Atividade 1

Atende ao objetivo 1

Numere as lacunas de acordo com a força motriz do fenômeno de transporte correspondente. Em seguida, diga o que há em comum na física dos fenômenos.

diferença de temperatura	() transferência de massa
diferença de concentração	() transferência de quantidade de movimento
diferença de pressão	() transferência de calor

Resposta comentada

As lacunas, de cima para baixo, devem receber 2, 3 e 1. Os fenômenos de transporte têm em comum o gradiente de uma propriedade física como sendo a força motriz.

Conclusão

A apresentação dos conceitos e definições presentes nos fenômenos de transporte é fundamental para o entendimento profundo das relações que se estabelecem entre as quantidades físicas de interesse nos problemas.

Percebe-se que, apesar de existirem diversas formas de transporte, as relações matemáticas dos fenômenos apresentam formulações comuns. Mais adiante, esse conhecimento será bastante útil para o desenvolvimento das formulação de cada problema e para sua posterior resolução.

Resumo

Os fenômenos de transporte correspondem aos processos de transferência de quantidade de movimento, calor e massa. Todos os tipos de transporte apresentam tendência ao equilíbrio, tendo como força motriz um gradiente de determinada quantidade física. É importante saber a forma com a qual as quantidades físicas se apresentam em cada problema de fenômenos de transporte: escalar, vetorial ou tensorial. A partir dos conceitos e definições, os problemas serão formulados relacionando-se as respectivas quantidades físicas, e utilizando-se um método de abordagem conveniente.

Referências

BRUNETTI, Franco. *Mecânica dos fluidos*. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

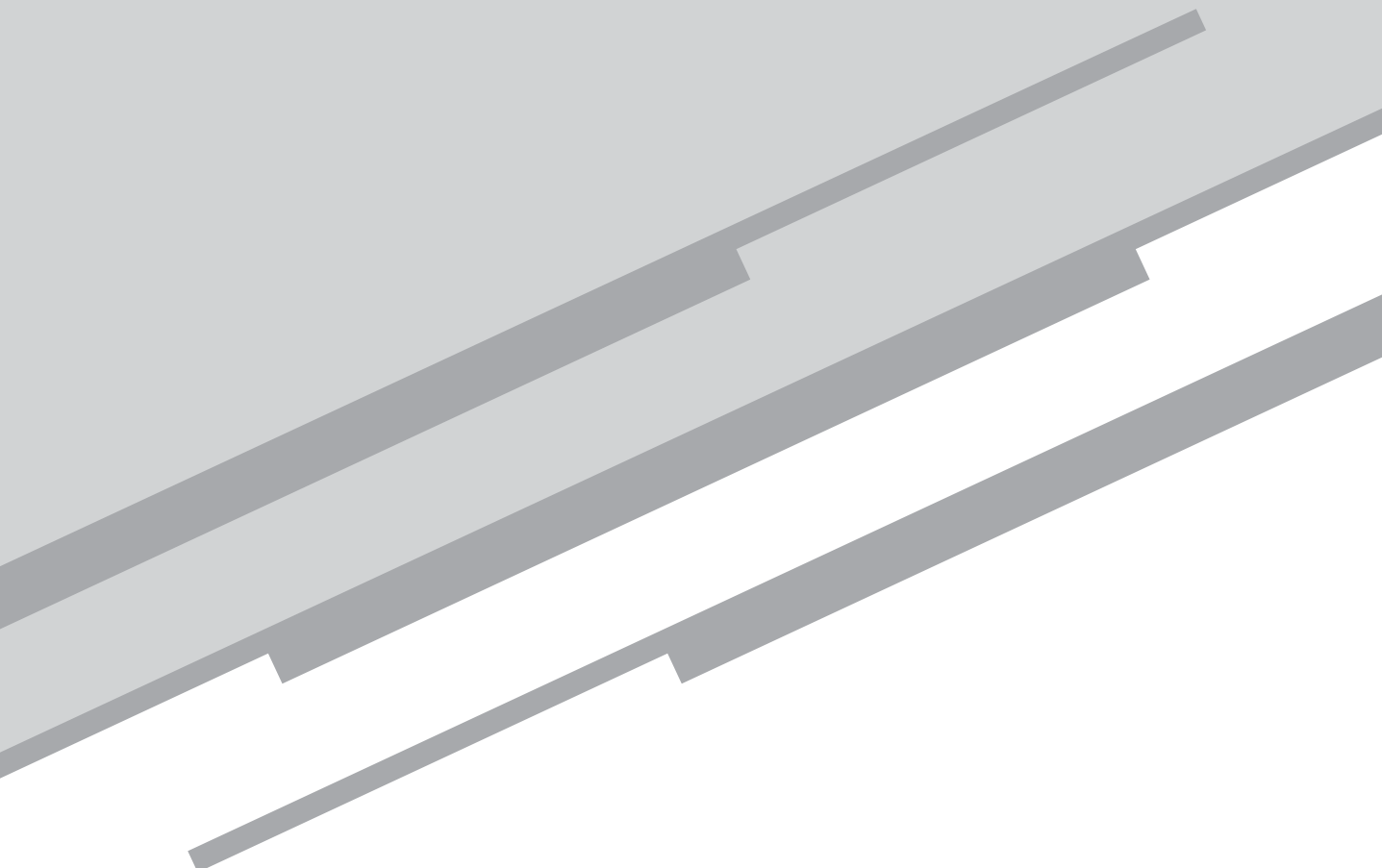
ÇENGEL, Yunus A.; GHAJAR, Afshin J. *Transferência de calor e massa: uma abordagem prática*. 4. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012.

FOX, Robert W.; MCDONALD, Alan T.; PRITCHARD, Philip J. *Introdução à mecânica dos fluidos*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

INCROPERA, Frank P et al. *Fundamentos de transferência de calor e de massa*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

Aula 2

Caracterização das quantidades físicas



Alexandre Santos Francisco

Meta

Apresentar conceitos e quantidades físicas – escalar, vetor e tensor - que estão relacionadas aos fenômenos de transporte e que serão fundamentais para o entendimento dos problemas envolvidos nesta disciplina, assim como para o desenvolvimento das formulações matemáticas e resoluções de tais problemas.

Objetivos

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. caracterizar uma quantidade física escalar;
2. caracterizar uma quantidade física vetorial; e
3. caracterizar uma quantidade física tensorial.

Introdução – em quantidades

No estudo dos fenômenos de transporte, é necessário identificar as naturezas matemática e física de algumas quantidades de interesse em seus problemas. As quantidades físicas encontradas nas formulações matemáticas podem ser caracterizadas como objetos matemáticos, classificados como escalar, vetor ou tensor.

Quantidade escalar

Escalar é uma quantidade física caracterizada unicamente pela intensidade de sua manifestação, independentemente de direção coordenada. Em consequência disso, a quantidade escalar deve possuir um único componente. A intensidade do escalar é invariável a qualquer direção coordenada considerada. Alguns exemplos de escalar encontrados em fenômenos de transporte são temperatura, concentração, massa específica, etc.



Uma direção coordenada corresponde a um dos eixos orientados do sistema de referência cartesiano, o qual possui uma origem e três eixos ortogonais (isto é, retas perpendiculares) entre si. Neste sistema, qualquer posição P pode ser completamente especificada através das coordenadas espaciais (x, y, z) , conforme mostrado na **Figura 2.1**.

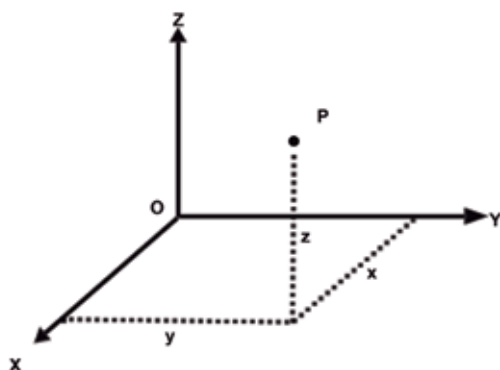


Figura 2.1: Sistema de coordenadas cartesiano.

A temperatura T é uma quantidade física escalar definida como a medida do estado de agitação das moléculas de uma substância material. A energia associada com a agitação das moléculas é chamada energia térmica. Além de agir como força motriz na transferência de calor, a temperatura é importante porque muitas das propriedades materiais dependem dela. Numa substância material, é importante conhecer o campo de temperatura expresso pela função geral:

$$T = T(x, y, z) \quad (2.1)$$

Soluto

Substância que pode ser dissolvida em outra, chamada de solvente. A substância formada pela união de soluto e solvente é chamada de mistura.

Numa mistura, define-se a quantidade física escalar concentração de um **soluto** C como a razão entre uma dada quantidade de soluto por unidade de volume da mistura. A massa de soluto é transportada de uma região onde sua concentração é elevada para outras de menor concentração. Na mistura, é importante conhecer o campo de concentração expresso pela função geral:

$$C = C(x, y, z) \quad (2.2)$$

A quantidade física caracterizada completamente pela intensidade, direção e sentido de sua manifestação, é definida como não escalar. Em consequência disso, a quantidade não escalar deve possuir três componentes coordenados, em geral.

Atividade 1

Atende ao objetivo 1

Leia a lista a seguir, contendo algumas quantidades físicas bastante conhecidas:

1. Altura de uma pessoa;
2. Volume de um reservatório;
3. Temperatura de um ambiente;
4. Área de um terreno;
5. Aceleração da gravidade terrestre;
6. Tempo de duração de um evento;

7. Distância percorrida por uma bicicleta;
8. Deslocamento de um veículo em uma rua; e
9. A velocidade máxima dos caminhões é de 90 km/h nesta rodovia.

Quais dessas quantidades físicas podem ser escalares? Justifique sua resposta.

Resposta comentada

Todas as quantidades físicas apresentadas são escalares, pois basta o conhecimento da intensidade delas para se caracterizar a respectiva quantidade física de interesse, uma vez que as situações físicas de cada quantidade física, tais como direção e sentido, já estavam especificadas.

Quantidade vetorial

Vetor é uma quantidade física não escalar, na qual os três componentes coordenados são escalares. O vetor pode ser representado geometricamente por uma seta orientada na direção de sua manifestação, com tamanho correspondente à sua intensidade. Alguns exemplos de quantidade vetorial são área, velocidade, força, etc.

Em fenômenos de transporte, é importante conhecer a taxa na qual se dá a transferência de uma quantidade física através de uma dada área. Para isso, devemos saber como essa área está orientada no espaço, ou seja, qual é a direção em que segue um eixo normal à própria área. Dessa forma, a área deve ficar caracterizada por uma intensidade (o valor de sua área), uma direção (a normal à área), e um sentido (saindo da área), ou seja, a área é um vetor com representação simbólica

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} \quad (2.3)$$

onde A_x, A_y, A_z são os componentes coordenados e $\check{i}, \check{j}, \check{k}$ são os vetores unitários, nas respectivas direções coordenadas x, y, z . Na **Figura 2.2**, está ilustrado um vetor de área de uma dada superfície.

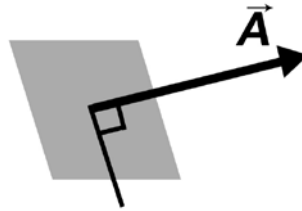


Figura 2.2: Vetor área de uma superfície.

No estudo de escoamentos de fluido, é fundamental o conhecimento da velocidade do escoamento \vec{v} em cada posição (x, y, z) do espaço. Esse campo de velocidade é expresso pela função geral:

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z) \quad (2.4)$$

A velocidade é uma quantidade física vetorial, podendo ser decomposta em componentes coordenados. A forma simbólica que representa o vetor de velocidade em termos de seus componentes é

$$\vec{v} = v_x \check{i} + v_y \check{j} + v_z \check{k} \quad (2.5)$$

onde v_x, v_y e v_z são os componentes coordenados nas respectivas direções x, y e z . Em geral, cada componente do vetor de velocidade também é uma função das coordenadas espaciais (x, y, z) .

Em muitos problemas de engenharia, temos uma estrutura sólida em contato com o escoamento de um fluido. Neste contato, forças de superfície são aplicadas sobre o fluido, modificando a velocidade do escoamento ou vice-versa. A força de superfície \vec{F} é uma quantidade física vetorial. Para se obter a resultante das forças de superfície, por exemplo, deve-se conhecer o campo de força expresso pela função geral:

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) \quad (2.6)$$

A força de superfície em uma dada posição pode ser decomposta em componentes coordenados ou, de outra forma, em componentes normal \vec{F}_n e tangencial \vec{F}_t , conforme mostrado na **Figura 2.3**.

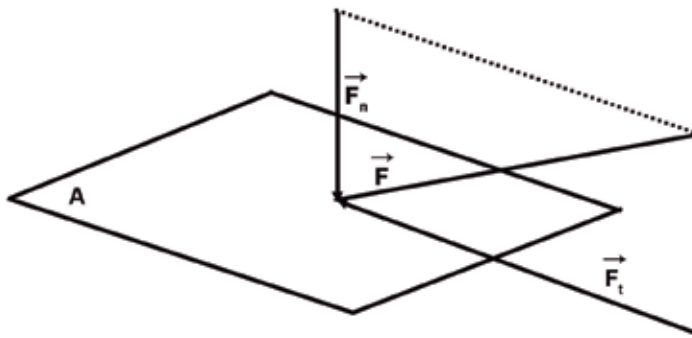


Figura 2.3: Componentes normal e tangencial da força sobre uma superfície.

Atividade 2

Atende ao objetivo 2

Uma quantidade física vetorial fica completamente caracterizada quando dela se conhecem:

- a) intensidade, desvio e unidade;
- b) intensidade, desvio e direção;
- c) intensidade, desvio e sentido;
- d) intensidade, direção e sentido; e
- e) desvio, direção e sentido.

Resposta comentada

A alternativa correta é a letra d, pois vetor fica completamente caracterizado por intensidade, direção e sentido.

Quantidade tensorial

Tensor é uma quantidade física não escalar, na qual os três componentes coordenados são vetores. Logo, o tensor possui nove componen-

tes escalares. O tensor funciona quando certas quantidades físicas são definidas como uma razão entre dois vetores.

Um exemplo típico de tensor é a quantidade física tensão $\underline{\underline{\sigma}}$, definida como a razão entre os vetores de força e de área. Considerando que força e área possuem três componentes escalares cada uma, resulta que teremos um conjunto de nove componentes escalares para a tensão. Por exemplo, a combinação do componente da força na direção x com o componente da área na direção y define o seguinte componente da tensão:

$$\sigma_{yx} = \frac{F_x}{A_y} \quad (2.7)$$

Observa-se que o primeiro índice desse componente da tensão se refere à direção do componente da área, e o segundo se refere a direção do componente da força. Se os índices são iguais, teremos tensões normais: se os índices são diferentes, teremos tensões tangenciais (cisalhantes).

Os componentes do tensor de tensão podem ser organizados numa representação matricial da seguinte forma:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Cada componente do tensor de tensão pode ser uma função das coordenadas espaciais (x, y, z) . Na **Figura 2.4**, pode-se ver uma ilustração da distribuição dos componentes do tensor em uma partícula fluida.

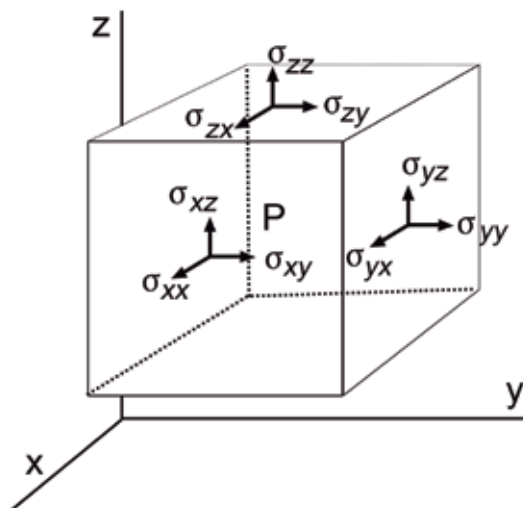


Figura 2.4: Componentes da tensão em uma partícula fluida.

Conclusão

A apresentação dos conceitos e quantidades físicas presentes nos fenômenos de transporte é fundamental para o entendimento profundo das relações que governam os problemas.

Percebe-se que, apesar de existirem diversos fenômenos de transporte, as naturezas matemáticas das quantidades físicas apresentam características comuns. Mais adiante, esse conhecimento será bastante útil para o desenvolvimento das formulações de cada problema e para sua posterior resolução.

Atividade final

Atende ao objetivo 3

Considerando que uma partícula fluida esteja sujeita a uma tensão dada por

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

indique os componentes da tensão que contribuem para esforços realizados na direção y .

Resposta comentada

Os componentes da tensão na partícula de fluido, que resultam em esforços na direção, são os seguintes: σ_{xy} , σ_{yy} e σ_{zy} . Observe que os índices que aparecem em segundo lugar referem-se a uma força aplicada na direção y .

Resumo

Os fenômenos de transporte correspondem aos processos de transferência de quantidade de movimento, calor e massa. Todos os tipos de trans-

porte apresentam tendência ao equilíbrio, tendo como força motriz um gradiente de determinada quantidade física. É importante saber da natureza matemática com a qual as quantidades físicas se manifestam em cada problema: escalar, vetorial ou tensorial. Considerando esse conhecimento, os problemas serão formulados relacionando-se as respectivas quantidades físicas, e utilizando-se um método de resolução adequado.

Referências

FOX, Robert W.; MCDONALD, Alan T.; PRITCHARD, Philip J. *Introdução à mecânica dos fluidos*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006. 798 p.

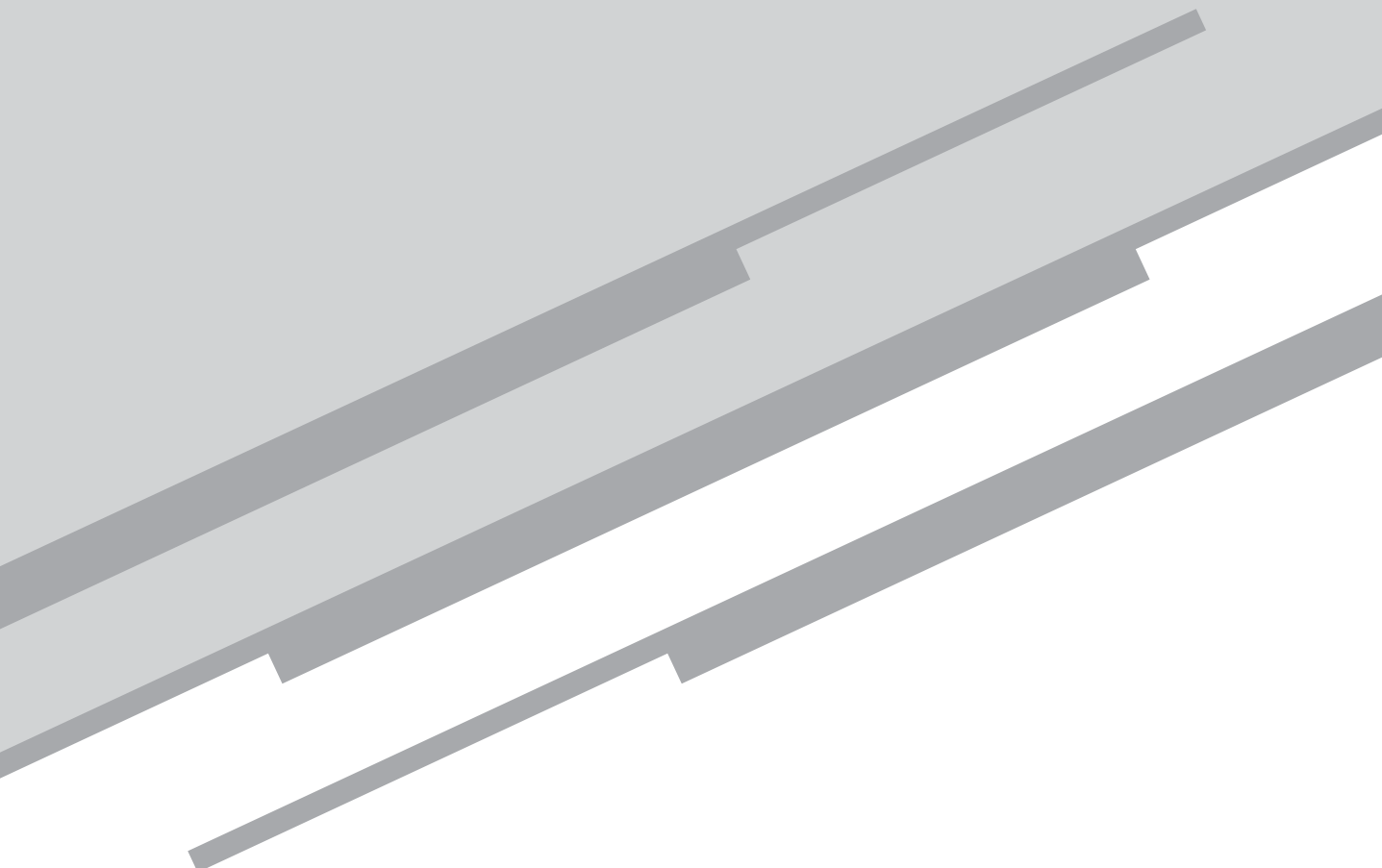
BRUNETTI, Franco. *Mecânica dos fluidos*. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008. 431 p.

INCROPERA, Frank P.; DEWITT, David P.; BERGMAN, Theodore L.; LAVINE, Adrienne S. *Fundamentos de transferência de calor e de massa*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008. 643 p.

ÇENGEL, Yunus A.; GHAJAR, Afshin J. *Transferência de calor e massa: uma abordagem prática*. 4. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012. 904 p.

Aula 3

Propriedades materiais relevantes



Alexandre Santos Francisco

Meta

Apresentar as propriedades materiais que têm grande impacto no comportamento físico dos diferentes fenômenos de transporte, uma vez que elas caracterizam o meio material no qual ocorre o fenômeno de transporte.

Objetivos

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. identificar o que é viscosidade na transferência de quantidade movimento;
2. identificar o que é massa específica na transferência de quantidade movimento;
3. identificar o que é condutividade térmica na transferência de calor;
4. identificar o que é calor específico na transferência de calor; e
5. identificar o que é difusividade mássica na transferência de massa.

Introdução: a importância dos meios sobre os fenômenos

Nos fenômenos de transporte, certas quantidades físicas são transferidas através de meios sólidos, líquidos ou gasosos. A característica do meio material tem efeito determinante sobre o comportamento físico do fenômeno. Um importante comportamento físico é mensurado pela taxa na qual ocorre a transferência de quantidade física. Essa taxa de transferência é proporcional ao gradiente de uma outra quantidade. Esta relação funcional é intermediada pela presença de um coeficiente de proporcionalidade, que pode atenuar ou exacerbar a relação. O coeficiente de proporcionalidade é uma característica do meio material, ou seja, uma propriedade material. Por exemplo: numa barra de metal cujas extremidades estão com temperaturas distintas, a taxa de calor induzida através da barra seria maior numa barra de cobre do que numa de aço.

Cada fenômeno de transporte conta com propriedades materiais relevantes para a determinação do seu comportamento físico. Assim, conclusões prévias podem ser feitas baseando-se no conhecimento das propriedades materiais. Portanto, é importante, no estudo dos fenômenos de transporte dedicarmos-nos inicialmente à apresentação de algumas propriedades materiais.

Propriedades materiais

No estudo dos fenômenos de transporte é importante conhecer as propriedades materiais e entender o papel desempenhado por elas no comportamento físico do fenômeno. Algumas propriedades materiais presentes nas formulações matemáticas que descrevem o fenômeno serão apresentadas a seguir.

Na transferência de quantidade de movimento

Na transferência de quantidade de movimento, temos como principais propriedades materiais a viscosidade e a massa específica. Elas estão descritas abaixo, com detalhes.

Viscosidade

Uma propriedade material importante no estudo da transferência de quantidade de movimento é a viscosidade. A viscosidade de um fluido é originada pela coesão entre suas moléculas e pelos choques entre elas. Podemos pensar na viscosidade como o grau da facilidade de escoamento do fluido.

Podemos constatar essa influência da viscosidade através do experimento hipotético no qual um fluido está contido entre duas placas: uma placa móvel submetida da uma força tangencial e outra placa fixa. Percebe-se que gradientes de velocidade, na direção transversal ao escoamento, se estabelecem no fluido. Os gradientes de velocidade nesta direção são chamados de *taxas de deformação*. Na **Figura 3.1**, podemos observar o perfil de velocidades estabelecido.

Gradiente de velocidade do fluido

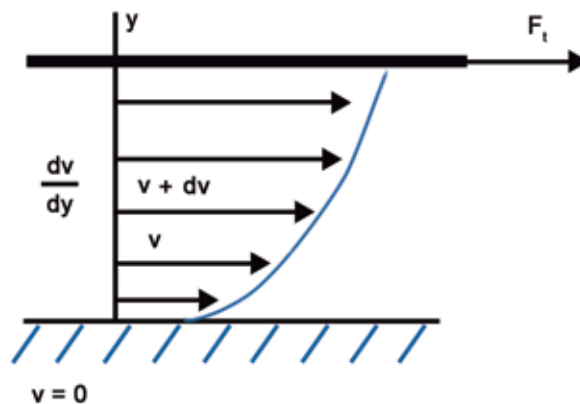


Figura 3.1: Gradiente de velocidade do fluido.

A tensão tangencial τ na direção do escoamento é proporcional ao gradiente de velocidade na direção transversal ao escoamento. Essa relação é expressa pela lei de Newton da viscosidade:

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dy} \quad (3.1)$$

onde μ é a viscosidade dinâmica, sendo o coeficiente de proporcionalidade da relação. No Sistema Internacional, a unidade de viscosidade dinâmica é dada por $[\mu] = N \cdot s \cdot m^{-2}$.

A relação acima é linear (a derivada tem expoente igual a um) e os fluidos que obedecem a ela são conhecidos como *newtonianos* (por exemplo: água, ar, óleo, etc.). Caso a relação seja não linear (a derivada tem expoente maior do que um), os fluidos são conhecidos como *não newtonianos* (por exemplo: tinta óleo, dentifrício, etc.).

A viscosidade de um fluido está sujeito a alterações de temperatura. Nos líquidos, ela diminui com o aumento da temperatura, enquanto nos gases ela aumenta, com o aumento da temperatura.

Num escoamento de fluido, onde o efeito da viscosidade não está presente, o escoamento é chamado de *invíscido* (ou *ideal*). Em termos práticos, a viscosidade é desprezível. Caso contrário, o escoamento é chamado de *viscoso* (ou *real*).

Massa específica

No estudo do escoamento de fluido, é importante que as substâncias fluidas sejam tratadas como um contínuo, isto é, a matéria deve estar distribuída continuamente num domínio físico de interesse. Tal hipótese permite definir a massa específica em cada posição no meio material.

Seguindo a hipótese do contínuo, define-se massa específica em uma posição como a relação:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (3.2)$$

onde Δm é a massa incremental contida num volume incremental ΔV que envolve uma dada posição no meio material. Quando $\Delta V \rightarrow 0$, a porção de substância de fluido é conhecida como *ponto material*.

A massa específica de um fluido pode estar sujeita a alterações de pressão. Se a pressão aumenta, há uma redução de volume e um aumento de massa específica. Quando a alteração de pressão não provoca uma mudança significativa da massa específica, o fluido pode ser considerado incompressível. Tal situação será verificada em todas as nossas aplicações. Os líquidos (água, gasolina, óleos diversos, etc.) são, por exemplo, considerados incompressíveis, pois não variam seu volume sob a ação de pressões. Para os gases (ar, gases industriais, vapores, etc.), a compressibilidade depende da situação.

Na transferência de calor

Para a transferência de calor, apresentaremos a condutividade térmica e o calor específico como as mais importantes propriedades materiais.

Condutividade térmica

A condutividade térmica é a propriedade material que representa o grau de facilidade de um meio material conduzir calor. Quando se diz que o ferro tem uma condutividade térmica maior do que a da água, isto significa que o ferro conduz calor mais rápido do que a água.

A taxa de fluxo de calor por condução \dot{q}'' , através de um meio material na direção x , é proporcional ao gradiente de temperatura nesta direção. Essa relação é expressa pela lei de Fourier da condução térmica:

$$\dot{q}'' = -k \frac{dT}{dx} \quad (3.3)$$

onde k é a condutividade térmica, sendo o coeficiente de proporcionalidade da relação. No Sistema Internacional, a unidade de condutividade térmica é dada por $[k] = J \cdot s^{-1} \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$.

A condutividade térmica dos meios materiais variam com a temperatura. A variação dentro de certas faixas de temperatura é insignificante para alguns meios materiais, mas significativa para outros. Na prática, é comum avaliar a condutividade térmica na temperatura média, e tratá-la como uma propriedade uniforme no meio material.

Calor específico

Um meio material pode conter várias formas de energia. A soma de todas as formas de energia associadas com a estrutura molecular e o com o grau de atividade molecular é chamada de energia interna. A parte dessa energia interna associada com a cinética das moléculas é denominada energia térmica. A medida da capacidade de um meio material armazenar energia térmica é representada pelo calor específico.

Define-se como calor específico a energia necessária para elevar a temperatura em um grau, de uma unidade de massa de dado meio material. Quando isto é feito com a pressão constante, tem-se o calor específico à pressão constante. Com o volume constante, tem-se o calor específico a volume constante. Para fluidos incompressíveis,

os valores de calores específicos, tanto à pressão quanto a volume constante, são iguais. O calor específico de fluidos incompressíveis depende apenas da temperatura. Em meios materiais que não sofrem alterações de fase, usam-se valores médios de calor específico nos cálculos.

Na transferência de massa

Para a transferência de massa, apresentaremos a difusividade mássica como a mais importante propriedade material.

Difusividade mássica

Os fenômenos de transferência de massa tratam do movimento microscópico de substâncias. Através de colisões de moléculas, as substâncias se espalham por um meio material, num processo chamado de *difusão de massa*. A difusividade mássica é uma propriedade material que representa o grau de facilidade com o qual uma substância é difundida através de um meio material. A difusividade do sal na água é muito maior do que no óleo, pois o sal se movimenta com mais facilidade na água.



Não dá para ver!

Nem adianta tentar misturar sal na água e sal no óleo em casa para tentar ver a diferença de difusividade em cada meio. Como eu mesmo disse, esse é um movimento microscópico, logo você precisaria observar isso em um laboratório através de instrumentos, ou então acreditar em mim!

O fluxo de massa por difusão de uma substância \dot{m} , através de um meio material na direção x , é proporcional ao gradiente de concentração da substância nesta direção. Essa relação é expressa pela lei de Fick da difusão:

$$\dot{m}'' = -D \frac{dC}{dx} \quad (3.4)$$

onde D é a difusividade mássica, sendo a constante de proporcionalidade da relação. No Sistema Internacional, a unidade de difusividade mássica é dada por $[D] = m^2 \cdot s^{-1}$.

A massa específica das substâncias também será uma importante propriedade material no estudo dos fenômenos de transferência de massa.

Conclusão

As propriedades materiais caracterizam o meio material no qual ocorre um fenômeno de transporte, exacerbando ou atenuando a intensidade do comportamento do fenômeno. Como vimos anteriormente, elas são expressas através de uma constante de proporcionalidade nas relações físicas que descrevem os fenômenos.

Em problemas de aplicação prática, as propriedades materiais variam espacialmente ao longo do meio, ou seja, o meio é heterogêneo. Mas, como referência, valores médios das propriedades materiais podem ser encontrados em tabelas, disponibilizadas nas literaturas.

Atividade final

Atende a todos os objetivos

Numere as lacunas de acordo com a propriedade material correspondente ao fenômeno de transporte. Qual é o papel desempenhado por essas propriedades nas leis físicas?

Transferência de quantidade de movimento	() difusividade de massa
Transferência de calor	() viscosidade
Transferência de massa	() condutividade térmica

Resposta comentada

As lacunas, de cima para baixo, devem receber 3, 1 e 2. As propriedades materiais correspondem a coeficientes de proporcionalidade nas leis físicas.

Resumo

Nas relações físicas que descrevem a transferência de quantidade de movimento, calor e massa existem coeficientes de proporcionalidade que impactam o comportamento dos fenômenos. Esses coeficientes de proporcionalidade são associados a propriedades que caracterizam o meio material onde ocorre o fenômeno. A saber, as propriedades materiais relevantes ao estudo dos fenômenos de transporte são: viscosidade, massa específica, condutividade térmica, calor específico e difusividade mássica. A viscosidade está ligada ao grau de facilidade da propagação de fluidos. A condutividade térmica está ligada ao grau de facilidade da propagação do calor. E a difusividade térmica está ligada ao grau de facilidade da propagação de substâncias em misturas. A massa específica e o calor específico são propriedades intrínsecas das substâncias, usadas nos diferentes fenômenos de transporte.

Referências

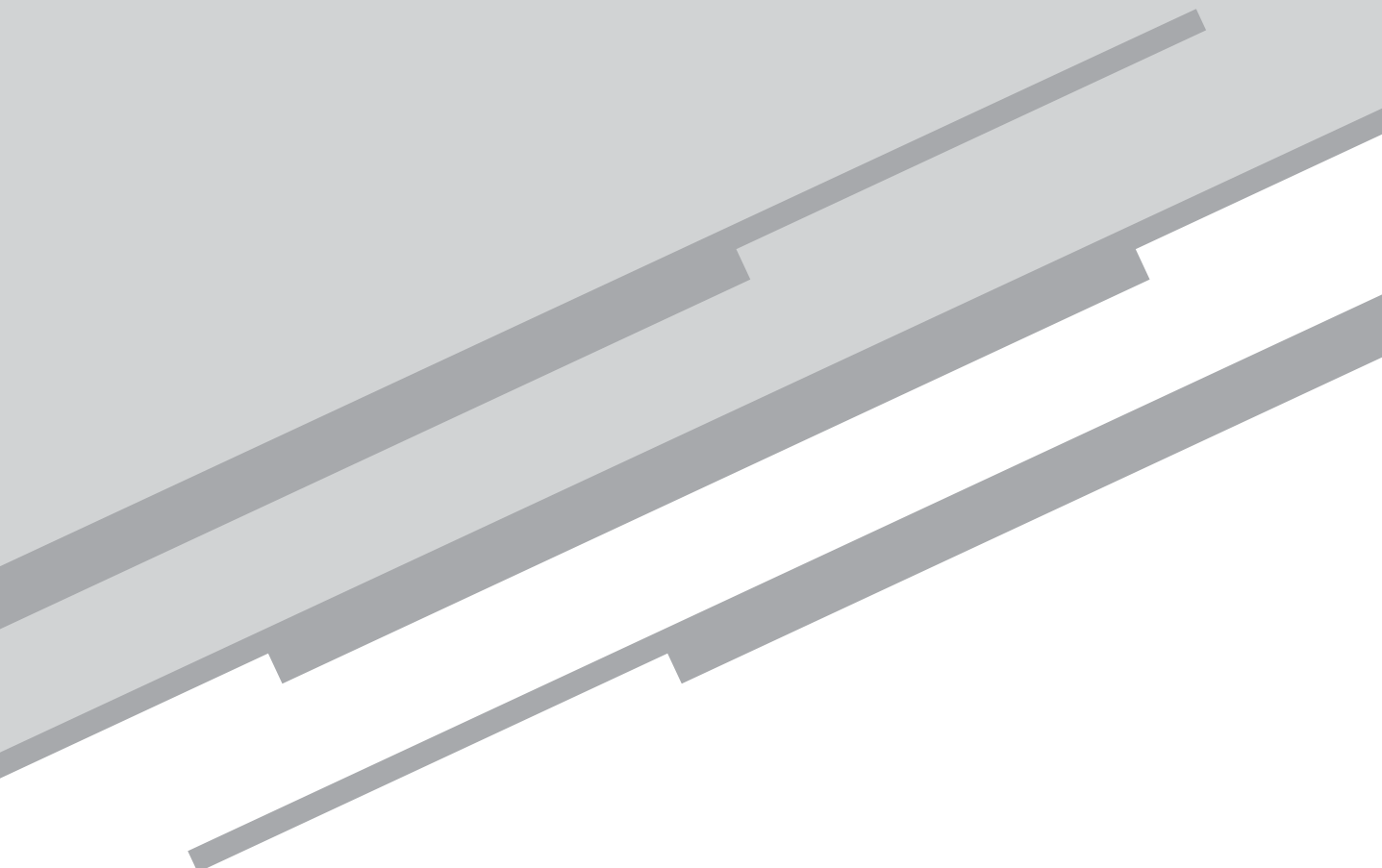
BRUNETTI, Franco. *Mecânica dos Fluidos*. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

INCROPERA, Frank P. et al. *Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008..

ÇENGEL, Yunus A.; GHAJAR, Afshin J.. *Transferência de Calor e Massa: uma abordagem prática*. 4. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012.

Aula 4

Estática dos fluidos



Alexandre Santos Francisco

Meta

Estudar o desenvolvimento do campo de pressões em um fluido sem movimento, e as forças resultantes sobre a superfície de estruturas sólidas submersas no fluido.

Objetivos

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. entender a natureza da pressão em um fluido;
2. desenvolver a equação básica da estática dos fluidos; e
3. calcular forças de pressão no fluido sobre a superfície de estruturas sólidas submersas no fluido.

Um fluido em repouso, mas sob pressão

A estática dos fluidos, em geral, visa estudar o comportamento de um fluido que se encontra em repouso, ou seja, quando ele não está escoando. Nessa situação, as partículas do fluido não experimentam movimentos relativos entre elas. Assim, não há o desenvolvimento de tensão cisalhante nas superfícies de contato entre partículas do fluido. E, portanto, os efeitos da viscosidade do fluido não se fazem presentes nos problemas.

Um fluido que se encontra em repouso tem somente o desenvolvimento de tensão normal, chamada de *pressão*, nas superfícies de contato entre partículas do fluido. O grande interesse nessa situação está em estabelecer a distribuição de pressão no fluido. A partir do conhecimento da distribuição de pressão, é possível determinar a resultante das forças de pressão do fluido sobre a superfície de uma estrutura sólida submersa no fluido. Um exemplo dessa situação é o da água empurrando a comporta de uma represa, conforme a **Figura 4.1**. Podemos determinar qual é a resultante das forças de pressão da água sobre a comporta e, conseqüentemente, fazer o projeto estrutural da comporta.



JJ Harrison

Figura 4.1: Barragem do Rio Gordon, na Austrália. A pressão sobre a comporta de uma represa é uma das aplicações da estática dos fluidos.

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Gordon_Dam.jpg

A pressão em uma posição de uma superfície é definida como a razão entre a força infinitesimal, compressiva e normal a superfície, e a área

infinitesimal da superfície em torno do ponto sobre a qual a força está agindo. Devido à ausência de tensão de cisalhamento, a pressão numa posição do fluido age igualmente em todas as direções. Se a pressão fosse diferente em alguma direção, a partícula de fluido que se encontrasse naquela posição sofreria um deslocamento.

Equação básica

Considere uma partícula fluida infinitesimal que se encontra na posição (x, y, z) , onde age uma pressão definida por p . A **Figura 4.2** mostra as forças que atuam na partícula fluida.

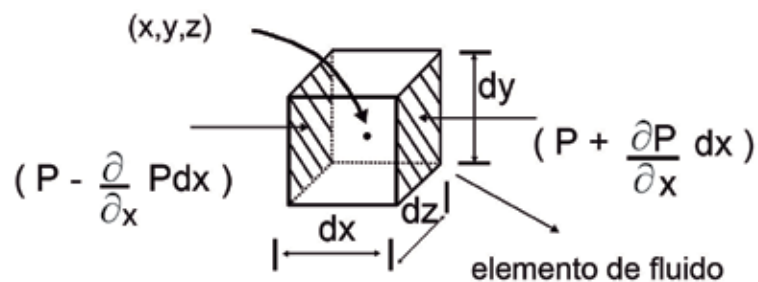


Figura 4.2: Forças de pressão sobre uma partícula fluida.

Da segunda lei de Newton da dinâmica, a resultante das forças de pressão sobre a partícula fluida é nula.

$$\vec{0} = d\vec{R} \quad (4.1)$$

A resultante pode ser decomposta em resultante das forças de superfície e resultante das forças de corpo:

$$d\vec{R} = d\vec{R}_c + d\vec{R}_s \quad (4.2)$$

onde

$$d\vec{R}_c = \vec{g}dm = (g_x\check{i} + g_y\check{j} + g_z\check{k})\rho dx dy dz \quad (4.3)$$

e

$$d\vec{R}_s = d\vec{R}_x + d\vec{R}_y + d\vec{R}_z = dR_x\check{i} + dR_y\check{j} + dR_z\check{k} \quad (4.4)$$

Investigando apenas a variação na direção x , a resultante das forças de superfície devido à pressão no fluido é

$$dR_x = p(x - dx/2, y, z)dydz - p(x + dx/2, y, z)dydz \quad (4.5)$$

Aproximações das diferenças de pressão na direção x , por exemplo, são obtidas por uma expansão por série de Taylor:

$$p(x + dx/2, y, z) - p(x - dx/2, y, z) = \frac{\partial p}{\partial x}(x, y, z)dx \quad (4.6)$$

Assim,

$$dR_x = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dA_x = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz \quad (4.7)$$

Analogamente, as respectivas resultantes nas direções y e z são:

$$dR_y = -\frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz \quad (4.8)$$

e

$$dR_z = -\frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz \quad (4.9)$$

Substituindo as resultantes determinadas acima na segunda lei de Newton da dinâmica:

$$\vec{0} = (g_x \check{i} + g_y \check{j} + g_z \check{k}) \rho dx dy dz - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \check{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \check{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \check{k} \right) dx dy dz \quad (4.10)$$

Ou simbolicamente,

$$\vec{0} = \rho \vec{g} - \nabla p \quad (4.11)$$

Essa é a equação básica da estática dos fluidos. A solução desta equação permite estabelecer o campo de pressão no fluido, ou seja, o valor de pressão em cada posição do fluido.

Obs.: considere a situação em que a direção e sentido da coordenada z é coincidente com a aceleração gravitacional, e a pressão atmosférica P_{atm} atua na superfície livre do fluido. A equação básica fica:

$$\vec{0} = [(0\check{i} + 0\check{j} - g\check{k})\rho - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \check{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \check{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \check{k} \right)] dx dy dz \quad (4.12)$$

Que resulta no sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \end{array} \right. \quad (4.13)$$

Como o diferencial de pressão é:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \quad (4.14)$$

Então:

$$dp = -\rho g dz \quad (4.15)$$

A integração em ambos os lados da relação acima:

$$\int_p^{p_{atm}} dp = -\int_0^z \rho g dz \quad (4.16)$$

resulta em:

$$p = p_{atm} + \rho g z \quad (4.17)$$

A pressão p é expressa em valor absoluto, isto é, uma pressão absoluta. A pressão é definida como pressão manométrica segundo a relação:

$$p_{manometrica} = p - p_{atm} = \rho g z \quad (4.18)$$

Obs.: $p_{atm} = 101,3 \text{ kPa}$, em condições de atmosfera padrão.

Atividade 1

Atende aos objetivos 1 e 2

Um tanque quadrangular sem tampa, conforme mostrado na **Figura 4.3**, contém água até a altura de $0,5 \text{ m}$. Mostre, numa vista lateral, os valores da pressão exercida pela água ao longo da parede lateral e do fundo do tanque. Dados: $\rho_{agua} = 1000 \text{ kg/m}^3$; $p_{atm} = 101,3 \text{ kPa}$; $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

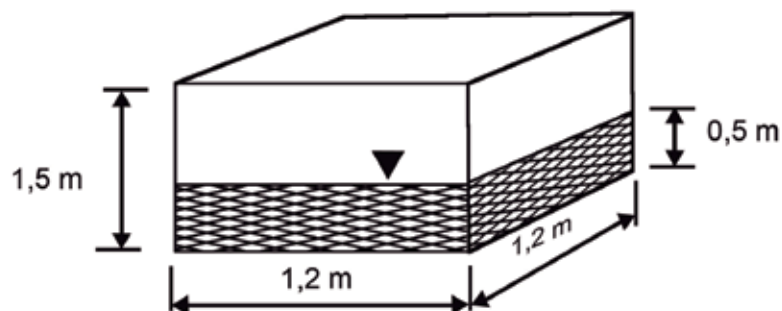


Figura 4.3: Tanque contendo água.

Resposta comentada

Como o tanque é quadrangular, as paredes laterais são idênticas entre si. Para o problema, consideremos que o eixo coordenado z tem o mesmo sentido da aceleração gravitacional e origem na superfície livre da água, conforme mostrado na **Figura 4.4**.

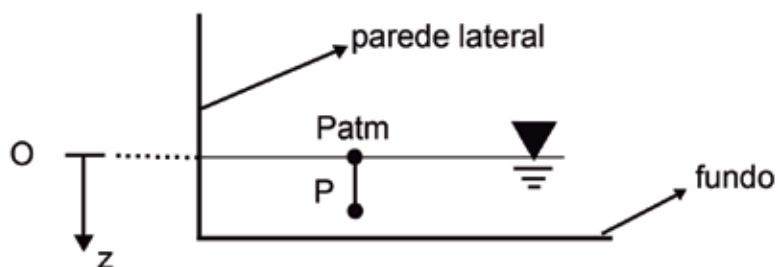


Figura 4.4: Vista lateral do tanque.

A pressão em uma posição no fluido, ao longo da direção z é dada por:

$$p = p_{atm} + \rho_{agua} g z$$

$$p = 101300 + 1000 \cdot 9,8 \cdot z$$

Ou seja, a pressão é uma função linear de z . Na superfície livre, $z = 0$; logo:

$$p_{superfície} = 101300 + 1000 \cdot 9,8 \cdot 0 = 101,3 \text{ kPa}$$

No fundo do tanque, $z = 0,5 \text{ m}$; logo:

$$p_{fundo} = 101300 + 1000 \cdot 9,8 \cdot 0,5 = 106,2 \text{ kPa}$$

Portanto, na parede lateral, a pressão varia linearmente da superfície livre até o fundo do tanque, apresentando um perfil triangular (veja a **Figura 4.5**).

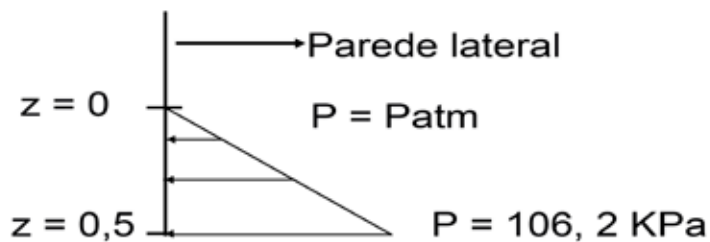


Figura 4.5: Perfil de pressão na parede lateral.

No fundo, a pressão é uniforme com um valor máximo, apresentando um perfil retangular (veja a **Figura 4.6**).

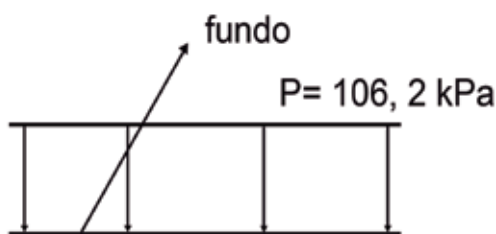


Figura 4.6: Perfil de pressão no fundo.

Resultante sobre superfícies submersas

Um corpo submerso está sob ação das forças de pressão do fluido que o envolve. Este comportamento pode ser observado em situações como represas, obstruções de escoamento, superfícies de navios e tanques de decompressão. Nessas situações, é importante determinar a resultante das forças de pressão sobre a superfície do corpo, ou mesmo a posição de aplicação da resultante.



O exemplo de Itaipu

O vídeo que estou recomendando (no *link* a seguir) é um documentário sobre a construção da Usina Hidrelétrica de Itaipu. Se você quiser, pode assisti-lo inteiro, mas a parte que nos interessa está entre os minutos 28:41 e 38:37. Nesse trecho, vemos sobre o momento crítico em que o reservatório de água se enche pela primeira vez, após a construção da usina e a tensão dos engenheiros com relação a pressão que a água exercerá sobre as paredes de concreto e as comportas.

<https://www.youtube.com/watch?v=t868kON5IYA>



Henri Bergius

Figura 4.7: Usina Hidrelétrica de Itaipu.

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Itaipu_Dam.jpg

A força de pressão em uma dada posição sobre uma superfície A é:

$$d\vec{F} = -pd\vec{A} \quad (4.19)$$

Assim, a resultante da força de pressão sobre toda a superfície é obtida por:

$$\vec{R} = \int_A d\vec{F} = -\int_A pd\vec{A} \quad (4.20)$$

O ponto de aplicação da resultante fica determinado estabelecendo-se a relação anterior, considerando o momento das forças, ou seja:

$$\vec{r}_R \times \vec{R} = \int_A \vec{r} \times d\vec{F} = -\int_A \vec{r} \times pd\vec{A} \quad (4.21)$$

onde \vec{r}_R e \vec{r} são vetores-posição da resultante das forças e de uma força qualquer, respectivamente. Para encontrar as coordenadas do ponto de aplicação, faz-se:

$$\begin{cases} \vec{r}_R \times \vec{R}_x = \int_A \vec{r} \times d\vec{F}_x = -\int_A \vec{r} \times pd\vec{A}_x \\ \vec{r}_R \times \vec{R}_y = \int_A \vec{r} \times d\vec{F}_y = -\int_A \vec{r} \times pd\vec{A}_y \\ \vec{r}_R \times \vec{R}_z = \int_A \vec{r} \times d\vec{F}_z = -\int_A \vec{r} \times pd\vec{A}_z \end{cases} \quad (4.22)$$

Conclusão

No estudo do comportamento do fluido em repouso, a pressão desempenha um importante papel para a determinação dos esforços sobre superfícies sólidas. A pressão fica distribuída no fluido, sem variação em direções horizontais e com variação linear na direção vertical coincidente com a aceleração gravitacional. A resultante das forças de pressão é a quantidade física de interesse em problemas que envolvem corpos submersos.

Usando os princípios da estática dos fluidos, podemos calcular forças sobre casco de submarinos ou outras paredes submersas (veja a **Figura 4.8**), calcular forças desenvolvidas por sistemas hidráulicos, como prensas industriais, ou freios de automóveis, desenvolver instrumentos para medir pressões etc.



Figura 4.8: *Delta-II class nuclear-powered ballistic missile submarine 2.* Usamos princípios de fluídoestática para calcular forças sobre cascos de, por exemplo, submarinos.

Fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Delta-II_class_nuclear-powered_ballistic_missile_submarine_2.jpg#/media/File:Delta-II_class_nuclear-powered_ballistic_missile_submarine_2.jpg

Atividade final

Atende aos objetivos 1 e 3

Considerando novamente a Atividade 1, calcule a resultante das forças de pressão exercida pela água sobre as paredes laterais e sobre o fundo do tanque.

Resposta comentada

Na parede lateral, a pressão é exercida numa única direção: a horizontal. Portanto, a resultante das forças de pressão exercida pela água sobre a parede lateral pode ser obtida pela seguinte forma escalar:

$$R_{parede} = \int_{A_{parede}} p dA$$

Como $p = p_{atm} + \rho_{agua}gz$,

$$R_{parede} = \int_{A_{parede}} (p_{atm} + \rho_{agua}gz) dA$$

Seja $w = 1,2m$ a largura da parede lateral. Um elemento infinitesimal de área na parede lateral pode ser definido como $dA = wdz$, logo:

$$R_{parede} = \int_{A_{parede}} (p_{atm} + \rho_{agua}gz) w dz$$

$$R_{parede} = \left[p_{atm} wz + \rho_{agua} g w \frac{z^2}{2} \right]_0^{0,5}$$

$$= [101300 \cdot 1,2 \cdot 0,5 + 1000 \cdot 9,8 \cdot 1,2 \cdot \frac{0,5^2}{2}] = 62,3 \text{ kN}$$

No fundo do tanque, a pressão é também exercida numa única direção: a vertical. Portanto, a resultante das forças de pressão exercida pela água sobre o fundo do tanque pode ser obtida pela seguinte forma escalar:

$$R_{fundo} = \int_{A_{fundo}} p dA$$

Como $p = \text{constante}$ no fundo,

$$R_{fundo} = p_{fundo} \int_{A_{fundo}} dA = p_{fundo} A_{fundo}$$

$$R_{fundo} = 106200 \cdot (1,2 \cdot 1,2) = 152,9 \text{ kN}$$

Resumo

A estática dos fluidos visa estudar o comportamento de um fluido que se encontra em repouso, ou seja, quando ele não está escoando.

Aplicando a segunda lei de Newton em uma partícula fluida, chega-se à equação básica da estática dos fluidos:

$$\vec{0} = \rho \vec{g} - \nabla p$$

Considerando a situação em que a direção e sentido da coordenada z é coincidente com a da aceleração gravitacional, e uma pressão atmosférica p_{atm} atua na superfície livre do fluido, o campo de pressão no fluido fica:

$$p = p_{atm} + \rho g z$$

Conhecendo-se a pressão no fluido em uma posição sobre uma superfície, a força aplicada naquela posição é determinada por:

$$d\vec{F} = -p d\vec{A}$$

E a resultante das forças de pressão sobre toda a superfície é obtida por:

$$\vec{R} = \int_A d\vec{F} = - \int_A p d\vec{A}$$

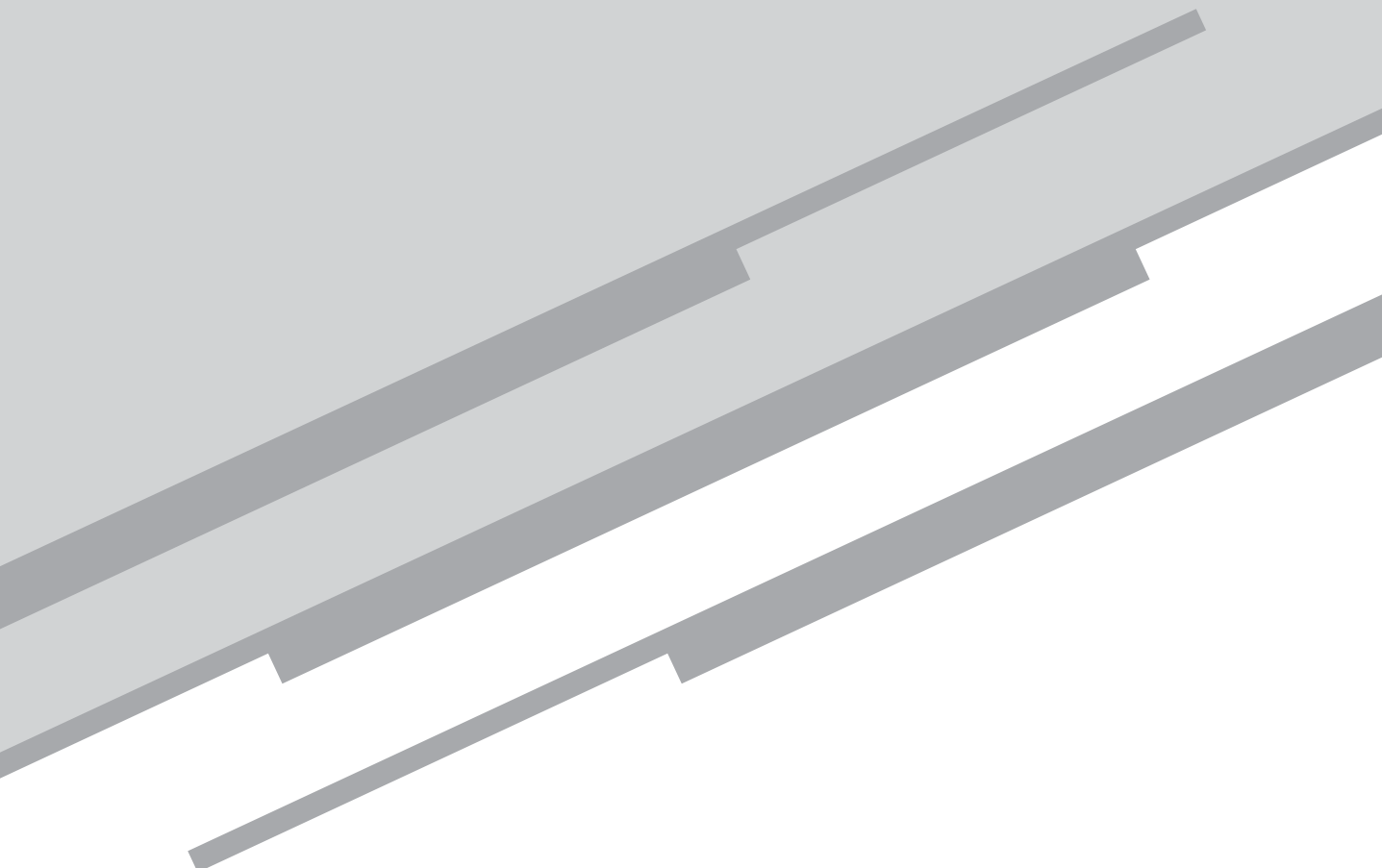
Referências

BRUNETTI, Franco. *Mecânica dos Fluidos*. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

FOX, Robert W.; McDonald, Alan T.; PRITCHARD, Philip J. *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

Aula 5

Cinemática dos fluidos



Alexandre Santos Francisco

Meta

Introduzir as descrições e classificações importantes dos escoamentos de fluidos, bem como determinar quantidades cinemáticas que serão importantes no estudo dos fluidos em movimento, presente em aulas posteriores.

Objetivos

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. descrever analiticamente um campo de escoamento;
2. classificar os diversos tipos de escoamento; e
3. determinar velocidade, aceleração e vazão em escoamentos.

Introdução – Simplificando para compreender

Para resolver problemas de engenharia que envolvem escoamentos de fluidos, muitas vezes são usadas simplificações, para chegar-se a resultados razoáveis, de forma suficientemente rápida. Simplificações adequadas requerem uma boa compreensão da física subjacente ao fenômeno. A compreensão da física envolvida nos escoamentos de fluidos está intimamente ligada à descrição e classificação desses escoamentos. Com isto, certos padrões de escoamento podem ser identificados, permitindo seguir passos de simplificação mais adequados. Além disso, as quantidades físicas de interesse devem ser determinadas e manipuladas de forma a facilitar a descrição analítica dos escoamentos.

Na primeira seção desta aula, uma descrição dos escoamentos é feita a partir do conhecimento da distribuição de velocidade, o que permite expressar graficamente o comportamento físico dos escoamentos. Curvas geométricas, tais como linhas de corrente e linhas de trajetória, mostram importantes informações qualitativas dos escoamentos. Na segunda seção, são apresentadas diferentes situações de escoamento, que resultaram de simplificações de escoamentos reais. Na última seção, quantidades cinemáticas de interesse são determinadas de acordo com o sistema de coordenadas escolhido para a descrição do campo de escoamento.

As descrições, classificações e definições apresentadas nesta aula permitirão um entendimento e, conseqüentemente, o desenvolvimento mais simples das formulações matemáticas que descrevem os escoamentos de fluidos. Este entendimento será útil para se resolver os problemas nos quais ocorre conservação de quantidade de movimento, massa ou energia.

Descrição dos campos de escoamento

Nesta seção, é verificado como os valores das quantidades físicas de interesse podem estar distribuídos na região do escoamento. Através do conhecimento da distribuição de velocidade, por exemplo, é possível descrever analiticamente o escoamento, o que significa representar o movimento de cada partícula fluida ao longo do mesmo.

Campos de escoamento

A região de interesse onde se está observando o escoamento de um fluido é chamada de campo de escoamento. Nos problemas de escoamento

mento, é razoável considerar que um fluido está distribuído continuamente pelo campo de escoamento. Isto significa que o valor de uma quantidade de interesse pode ser definido em qualquer posição do campo de escoamento. Como este valor também pode variar de um instante a outro, uma representação completa ou de campo da quantidade de interesse é dada por uma relação funcional, cujos argumentos são as coordenadas espaciais e o tempo. Por exemplo, um campo de massa específica é expresso como uma função:

$$\rho = \rho(x, y, z, t) \quad (5.1)$$

Movimento de partículas fluidas

Uma partícula fluida é considerada como um elemento infinitesimal de fluido, para o qual são definidas quantidades físicas de interesse. O movimento de uma partícula fluida está conectado principalmente com o campo de velocidade do escoamento. Para descrever o movimento de partículas fluidas, existem dois métodos: descrição *lagrangiana* e descrição *euleriana*.

Descrição lagrangiana

Na descrição lagrangiana (ou material), estamos interessados em rastrear o movimento de uma partícula fluida individual. Isto é feito usando-se um sistema de referência que acompanha a própria partícula no escoamento. Assim, se a partícula ocupava inicialmente uma posição (x_0, y_0, z_0) , para este sistema de referência, a posição da partícula sempre terá as mesmas coordenadas, ou seja, as coordenadas (x_0, y_0, z_0) são uma identidade da partícula. Então, na descrição lagrangiana, quantidades físicas de interesse podem ser especificadas como funções da partícula e do instante, sem especificar posições. Por exemplo, a velocidade de uma partícula fluida fica expressa como uma função na forma:

$$\vec{v} = \vec{v}(x_0, y_0, z_0, t) \quad (5.2)$$

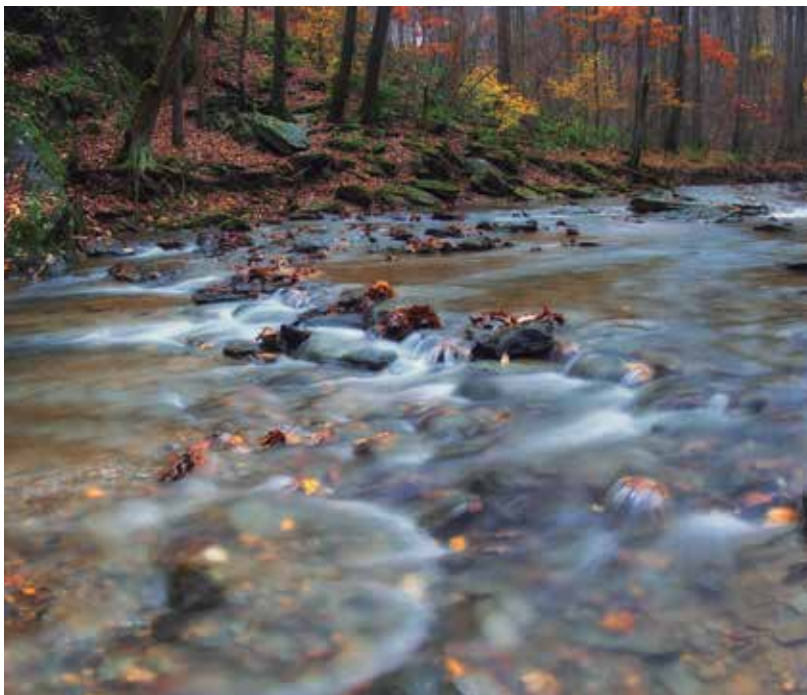
Uma abordagem lagrangiana seria equivalente a lançar diversas garrafas de água em um rio e estudar o movimento das águas do rio, através do estudo individual do movimento de cada garrafa de água.

Descrição euleriana

Na descrição euleriana (ou de campo), usamos um sistema de coordenadas que permanece numa posição inercial (geralmente, fixa). O interesse não está mais em uma partícula individual, mas em qualquer partícula que venha a ocupar uma dada posição do campo de escoamento, num dado instante. Então, quantidades físicas de interesse podem ser especificadas como funções da posição e do instante, sem especificar partículas. Por exemplo, a velocidade de uma partícula fluida fica expressa como uma função na forma:

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t) \quad (5.3)$$

Uma abordagem euleriana corresponderia à seleção de diversos pontos de um rio (veja a foto de um rio na **Figura 5.1**), onde se monitoraria o movimento das águas que por eles passam. O movimento das águas do rio seria descrito a partir dos estudos obtidos nesses pontos. A abordagem euleriana é a mais utilizada na mecânica dos fluidos, pois não há necessidade de se acompanhar individualmente milhões de partículas fluidas; tarefa que seria muito difícil de ser realizada.



Nicholas - originally posted to Flickr as Riffles, CC BY 2.0

Figura 5.1: Uma abordagem euleriana corresponderia a seleção de diversos pontos de um rio onde se monitoraria o movimento das águas que por eles passam.

Fonte: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=8313596>

Representação dos campos de escoamento

A visualização dos padrões de escoamento pode ser obtida com a representação gráfica dos campos de escoamento. Duas curvas geométricas ajudam a representar um campo de escoamento: a *linha de trajetória* e a *linha de corrente*.

Uma linha de trajetória é uma curva que une as posições ocupadas pela mesma partícula fluida, em diferentes instantes do tempo. Ela descreve o caminho traçado pela partícula no campo de escoamento. Esta visualização é útil para estudar, por exemplo, a trajetória de um poluente liberado em uma chaminé.

Uma linha de corrente é uma curva que possui a propriedade de tangenciar o vetor velocidade de diferentes partículas fluidas, no mesmo instante do tempo. Uma característica das linhas de corrente é, então, não admitir fluxos de fluido cruzando-as. A linha de corrente é utilizada para estudar, por exemplo, a aerodinâmica de um automóvel em túnel de vento (veja a **Figura 5.2**). Um feixe de linhas de corrente forma uma região tubular no espaço, chamada de *tubo de corrente*. Não existe passagem de massa de fluido através do tubo de corrente.



Túnel de vento

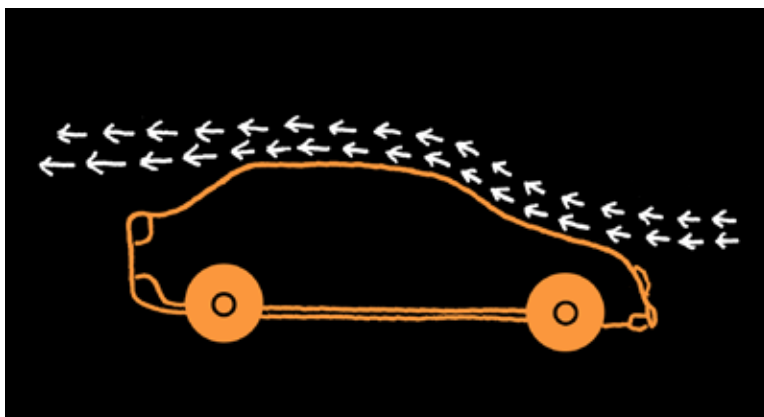


Figura 5.2: Túnel de vento.

No *link* a seguir, você pode assistir a um vídeo de um carro sendo testado em um túnel de vento. Você verá que feixes de fumaça acompanham a aerodinâmica do carro. Esses feixes de fumaça representam as linhas de corrente no escoamento do ar, dentro de um túnel de vento.

https://www.youtube.com/watch?v=sV_6E1Lh7yo

Atividade 1

Atende ao objetivo 1

Linhas de corrente e de trajetória descrevem analiticamente os campos de escoamento. Seja um campo de velocidade dado pela seguinte função: $\vec{v} = 0,3x\vec{i} - 0,3y\vec{j}$. Determine a equação da linha de corrente que passa pela posição $(x_0, y_0) = (2, 8)$ e a equação da linha de trajetória de uma partícula que passou pela posição $(x_0, y_0) = (2, 8)$, no instante $t = 0$.

Resposta comentada

Linhas de corrente são curvas tangentes ao campo de velocidade $\vec{v} = 0,3x\vec{i} - 0,3y\vec{j}$ de partículas distintas, no mesmo instante do tempo.

Consequentemente:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\text{linha de corrente}} = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-0,3y}{0,3x} = \frac{-y}{x}$$

Separando variáveis e integrando, obtemos:

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dx}{x}$$

Assim:

$$\ln y = -\ln x + c_1$$

Ou:

$$xy = c$$

Para a linha de corrente que passa pela posição $(x_0, y_0) = (2, 8)$, a constante c tem um valor de 16. Então, a equação dessa linha de corrente é:

$$xy = 16$$

Linhas de trajetória são curvas que descrevem as posições da mesma partícula, que passou por uma dada posição (x_0, y_0) no instante $t = 0$, em instantes distintos do tempo. Sabemos que, na direção x :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 0,3x$$

Separando as variáveis e integrando, obtemos:

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = \int_0^t 0,3 dt$$

Assim:

$$\ln \frac{x}{x_0} = 0,3t$$

Ou:

$$x = x_0 e^{0,3t}$$

Na direção y :

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -0,3x$$

Analogamente,

$$y = y_0 e^{-0,3t}$$

Então, a equação da linha de trajetória da partícula é expressa pelas equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = x_0 e^{0,3t} \\ y = y_0 e^{-0,3t} \end{cases}$$

Podemos expressar a linha de trajetória no plano Oxy eliminando o parâmetro t . Assim:

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y_0}{y} = e^{0,3t}$$

Ou:

$$xy = x_0 y_0 = 16$$

Podemos observar que a linha de corrente que passa pela posição $(2, 8)$ coincide com a linha de trajetória da partícula que passou pela posição, no instante $t = 0$.

Classificação dos escoamentos

Para melhor entendimento dos problemas de escoamento de fluidos, é importante dar uma visão geral dos padrões de escoamentos, assim como observar suas classificações.

Escoamentos uni, bi e tridimensionais

Um escoamento é classificado como uni, bi ou tridimensional de acordo com o número de coordenadas espaciais necessárias para descrever os campos de quantidades físicas.

Na descrição euleriana do movimento, o vetor velocidade, em geral, é dependente das três coordenadas espaciais, a saber: $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$. Embora a maioria dos escoamentos seja intrinsecamente tridimensional, muitas vezes um escoamento pode ser aproximado a um escoamento uni ou bidimensional. Por exemplo, o escoamento das águas do rio Amazonas pode ser tratado como bidimensional, se sua profundidade for desprezível em comparação com sua largura e extensão.

No escoamento bidimensional, o vetor velocidade depende apenas de duas coordenadas espaciais; por exemplo, $\vec{v} = \vec{v}(x, y)$. Em geral, o es-

coamento bidimensional apresenta variação de velocidade ao longo das direções transversal e longitudinal ao movimento preferencial do fluido.

Um escoamento unidimensional ocorre quando a velocidade depende apenas de uma coordenada espacial; por exemplo, $\vec{v} = \vec{v}(x)$. No escoamento unidimensional, a variação da velocidade ocorre ao longo da direção do movimento do fluido.

Num escoamento em que a velocidade é a mesma em qualquer posição do espaço, isto é, independentemente das coordenadas espaciais, diz-se que temos um escoamento uniforme. Se a velocidade é a mesma somente numa seção transversal ao escoamento, podendo variar de uma seção para outra ao longo da direção do movimento do fluido, diz-se que temos um *escoamento uniforme* nas seções.

Escoamentos estacionário e transiente

O regime de escoamento é classificado de acordo com a dependência das quantidades físicas de interesse com relação ao tempo.

Se as quantidades físicas não variam com o tempo em uma dada posição fixa do campo de escoamento, o escoamento ocorre em *regime estacionário ou permanente*. Por exemplo, considerando a quantidade velocidade, em regime estacionário verifica-se que:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 \quad (5.4)$$

O mesmo se verifica para qualquer quantidade física de interesse. Ainda assim, as quantidades físicas podem variar de uma posição para outra no campo de escoamento; nessa situação, a velocidade seria expressa por $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$.

Se as quantidades físicas variam com o instante do tempo em cada posição fixa, o escoamento ocorre em *regime transiente*.

Escoamentos laminar e turbulento

Padrões distintos de escoamento podem ser observados em função do balanço entre efeitos viscosos e efeitos dinâmicos, que estão presentes nos escoamentos. De acordo com a predominância de um dos efeitos, um escoamento pode ser classificado como *laminar* ou *turbulento*.

Escoamento laminar

Em um escoamento laminar, as partículas fluidas se deslocam em camadas lisas ou lâminas numa direção preferencial, não havendo mistura significativa das partículas no campo de escoamento. As quantidades físicas sofrem variações suaves ou quase nulas ao longo do espaço e do tempo. Isto ocorre pelo fato de os efeitos viscosos serem predominantes em relação aos efeitos dinâmicos. Esse escoamento pode ser observado, por exemplo, na fumaça de um cigarro sendo liberada inicialmente para o ambiente, num movimento rápido e coeso, bem próximo à ponta do cigarro.

Escoamento turbulento

Em um escoamento turbulento, as partículas fluidas realizam movimentos caóticos em todas as direções, promovendo uma mistura macroscópica dessas partículas ao longo do escoamento. Em razão disso, quantidades físicas apresentam flutuações aleatórias em seus valores em função de coordenadas espaciais e temporais. Como o escoamento turbulento é variado por natureza, as quantidades físicas são melhor descritas por valores médios. Nesse escoamento, os efeitos dinâmicos predominam sobre os viscosos. Como exemplo disso, temos a fumaça de um cigarro propagando-se pelo ambiente num movimento lento e dispersivo, já um pouco distante da ponta do cigarro.

Os escoamentos laminar e turbulento podem ser expressos por uma quantidade adimensional, chamada de número de Reynolds. Para um tubo, por exemplo, o número de Reynolds é definido por

$$Re = \frac{\rho \bar{v} D}{\mu} \quad (5.5)$$

onde \bar{v} é a velocidade média do escoamento, e D é o diâmetro do tubo. Se $Re \leq 2200$ o escoamento é laminar; caso contrário, o escoamento é turbulento.

Atividade 2

Atende ao objetivo 2

No escoamento de um fluido, o campo de velocidade é dado pela seguinte função: $\vec{v} = 0,3x\vec{i} - 0,3y\vec{j}$. Classifique esse escoamento em termos de estacionário ou transiente; e em termos de uni, bi ou tridimensional.

Resposta comentada

Considerando o campo de velocidade $\vec{v} = 0,3x\vec{i} - 0,3y\vec{j}$, observamos que:

$$v_x = 0,3x, \quad v_y = -0,3y \quad \text{e} \quad v_z = 0$$

Como existem componentes da velocidade somente nas direções x e y , o escoamento é bidimensional.

Nos componentes da velocidade não existe dependência do tempo, portanto o escoamento é estacionário.

Determinação de quantidades cinemáticas

Em fluidos em movimento é importante determinar quantidades cinemáticas que permitem descrever o escoamento. As principais quantidades cinemáticas são a velocidade e a aceleração das partículas fluidas, e a vazão.

Velocidade de uma partícula

Para se determinar a velocidade de uma partícula fluida, é necessário conhecer a posição da partícula em função do instante do tempo. Nessa relação funcional, a partícula é identificada pela sua posição inicial, ou seja, as coordenadas (x_0, y_0, z_0) , no instante $t = 0$. Essas coordenadas são constantes para a mesma partícula e, portanto, representam uma identidade para a partícula.

Seja $\vec{r} = x\check{i} + y\check{j} + z\check{k}$ o vetor posição no espaço, e $\vec{r} = \vec{r}(x_0, y_0, z_0, t)$ a relação funcional que mapeia o vetor posição, para uma partícula e um instante do tempo. Observa-se que a relação funcional é estabelecida segundo uma descrição lagrangiana. A velocidade de uma mesma partícula é definida pela taxa de variação temporal do vetor posição, ou seja:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Big|_{(x_0, y_0, z_0) = \text{const}} \quad (5.6)$$

cujos componentes são:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \Big|_{(x_0, y_0, z_0) = \text{const}}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} \Big|_{(x_0, y_0, z_0) = \text{const}} \quad \text{e} \quad v_z = \frac{dz}{dt} \Big|_{(x_0, y_0, z_0) = \text{const}} \quad (5.7)$$

Nesta situação onde estamos acompanhando a partícula, isto é, $(x_0, y_0, z_0) = \text{const}$, a taxa de variação temporal obtida é chamada de *derivada material* ou *substantiva*, e representada pelo seguinte símbolo:

$$\vec{v} = \frac{D\vec{r}}{Dt} \quad (5.8)$$

Aceleração de uma partícula

Para se obter a aceleração de uma partícula fluida, é necessário conhecer a expressão para a velocidade da partícula, à medida que se move num campo de escoamento. Geralmente, essa expressão para a velocidade está disponível segundo uma descrição euleriana.

Seja $\vec{v} = v_x\check{i} + v_y\check{j} + v_z\check{k}$ a velocidade de uma partícula fluida e $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$ o campo de velocidade no qual a partícula está sob a influência. Observa-se que esse campo é definido por uma descrição euleriana. A aceleração de uma partícula fluida é definida por:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{(x_0, y_0, z_0) = \text{const}} = \frac{D\vec{v}}{Dt} \quad (5.9)$$

Assim, vale a regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \\ &= v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Ou também:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{v} \bullet \nabla \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \quad (5.11)$$

O primeiro termo do lado direito corresponde à aceleração convectiva, que é responsável pelas variações de velocidade por simples mudança de posição da partícula, no campo de escoamento. Considere, por exemplo, água escoando em regime estacionário, através de um bocal. Em qualquer posição fixa do campo de escoamento, a velocidade do fluido é a mesma ao longo do tempo, mas de uma posição a outra, a velocidade varia (o diâmetro do bocal varia).

O segundo termo do lado direito corresponde à aceleração local, que provoca variações de velocidade ao longo do tempo numa mesma posição no campo de escoamento. Considere, por exemplo, água escoando em regime transiente, através de um tubo reto. Em qualquer instante do tempo, a velocidade do fluido é uniforme em todo o campo de escoamento, mas de um instante a outro, a velocidade varia em qualquer posição.

Obs.: Se o campo de velocidade estivesse disponível numa descrição lagrangiana $\vec{v} = \vec{v}(x_0, y_0, z_0, t)$, a aceleração da partícula fluida seria determinada por uma simples derivada ordinária:

$$\vec{a} = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{(x_0, y_0, z_0) = \text{const}} = \frac{D\vec{v}}{Dt} \quad (5.12)$$

Vazão

Uma quantidade cinemática de interesse é a vazão volumétrica, que diz respeito à rapidez com a qual um fluido preenche determinado volume. A vazão volumétrica é, então, definida como o volume de fluido que atravessa uma seção transversal ao escoamento (isto é, perpendicular à velocidade do fluido), por unidade de tempo.

Na prática, o valor da vazão volumétrica \dot{V} pode ser obtido fazendo-se o produto da velocidade média \bar{v} de um fluido, na seção transversal ao escoamento, pela área A dessa seção, ou seja:

$$\dot{V} = \bar{v}A \quad (5.13)$$

No Sistema Internacional, a unidade de vazão volumétrica é dada por $[\dot{V}] = m^3 \cdot s^{-1}$.

A velocidade média de um fluido na seção transversal ao escoamento é determinada pela seguinte expressão:

$$\bar{v} = \frac{1}{A} \int_A v dA \quad (5.14)$$

onde dA é um elemento infinitesimal de área na seção transversal ao escoamento. Logo, a vazão volumétrica do escoamento é determinada por:

$$\dot{V} = \int_A v dA \quad (5.15)$$

Outra quantidade cinemática de interesse é a vazão mássica, que diz respeito à rapidez na qual uma massa fluida atravessa uma determinada área. A vazão mássica é, então, definida como a massa de fluido que atravessa a seção transversal ao escoamento, por unidade de tempo.

Num escoamento incompressível ou uniforme, a vazão mássica \dot{m} pode ser obtida fazendo-se o produto da vazão volumétrica \dot{V} pela massa específica do fluido, ou seja:

$$\dot{m} = \rho \dot{V} \quad (5.16)$$

De forma geral, a vazão mássica é determinada por:

$$\dot{m} = \int_A \rho v dA \quad (5.17)$$

No Sistema Internacional, a unidade de vazão mássica é dada por $[\dot{m}] = \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

Conclusão

A identificação e descrição de um escoamento é fundamental para a resolução de problemas envolvendo fluidos em movimento. Ao identificarmos certos padrões de escoamento, podemos classificá-los para melhor descrever o escoamento em termos de expressões analíticas.

A manipulação dessas expressões analíticas permite que tenhamos uma representação gráfica do escoamento, obtendo uma valiosa visualização do movimento do fluido. O entendimento do movimento do fluido passa pela descrição do movimento das partículas do fluido.

Na descrição do movimento das partículas do fluido, certas quantidades cinemáticas estão envolvidas dentro das expressões analíticas, seja na forma de equações ou de relações funcionais.

Atividade final

Atende ao objetivo 3

No escoamento de um fluido, o campo de velocidade é dado pela seguinte função: $\vec{v} = 2xt\vec{i} - y^2t\vec{j}$. Determine a aceleração de uma partícula de fluido que passa na posição $(1,2)$, no instante $t = 5\text{ s}$.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Resposta comentada

Considerando o campo de velocidade $\vec{v} = 2xt\vec{i} - y^2t\vec{j}$, observamos que:

$$v_x = 2xt, \quad v_y = y^2t \quad \text{e} \quad v_z = 0$$

A aceleração de uma partícula no campo de escoamento é definida por:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{D\vec{v}}{Dt} \\ &= v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\end{aligned}$$

Ou seja, na direção x :

$$\begin{aligned} a_x &= v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial t} \\ &= 2xt(2t) + y^2t(0) + 0(0) + 2x \\ &= 4xt^2 + 2x \end{aligned}$$

Na direção y :

$$\begin{aligned} a_y &= v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_y}{\partial t} \\ &= 2xt(0) + y^2 t(2yt) + 0(0) + y^2 \\ &= 2y^3 t^2 + y^2 \end{aligned}$$

E na direção z :

$$a_z = v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$$

Assim, para a posição (1,2) no instante $t = 5s$:

$$a_x = 4.1.5^2 + 2.1 = 102$$

$$a_y = 2.2^3.5^2 + 2^2 = 404$$

$$a_z = 0$$

Logo, a aceleração é:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{102^2 + 404^2 + 0} = 416m/s^2$$

Resumo

Num campo de escoamento, certas quantidades de interesse podem ser descritas analiticamente por descrição lagrangiana ou descrição euleriana. Por exemplo, a velocidade de uma partícula na descrição lagrangiana é:

$$\vec{v} = \vec{v}(x_0, y_0, z_0, t)$$

E na descrição euleriana é:

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$$

A partir dessas descrições analíticas da velocidade, podemos representar graficamente os escoamentos através de linhas de trajetória ou linhas de corrente.

Importantes comportamentos dos escoamentos podem ser identificados pela visualização dessas linhas.

Além disso, os escoamentos podem ser classificados de acordo com certos padrões de comportamento. Assim, os escoamentos podem ser: uni,

bi ou tridimensionais; estacionários ou transientes; e laminares ou turbulentos. A partir dessas classificações, podemos simplificar a descrição analítica dos escoamentos.

Na descrição analítica dos escoamentos estão envolvidas quantidades cinemáticas, tais como velocidade, aceleração e vazão. A velocidade de uma partícula fluida é definida pela seguinte derivada material:

$$\vec{v} = \frac{D\vec{r}}{Dt}$$

A aceleração de uma partícula fluida é definida pela seguinte derivada material:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt}$$

A vazão volumétrica é determinada pela seguinte integral:

$$\dot{V} = \int_A v dA$$

E a vazão mássica é determinada pela seguinte integral:

$$\dot{m} = \int_A \rho v dA$$

Referências

FOX, Robert W.; MCDONALD, Alan T.; PRITCHARD, Philip J.. *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

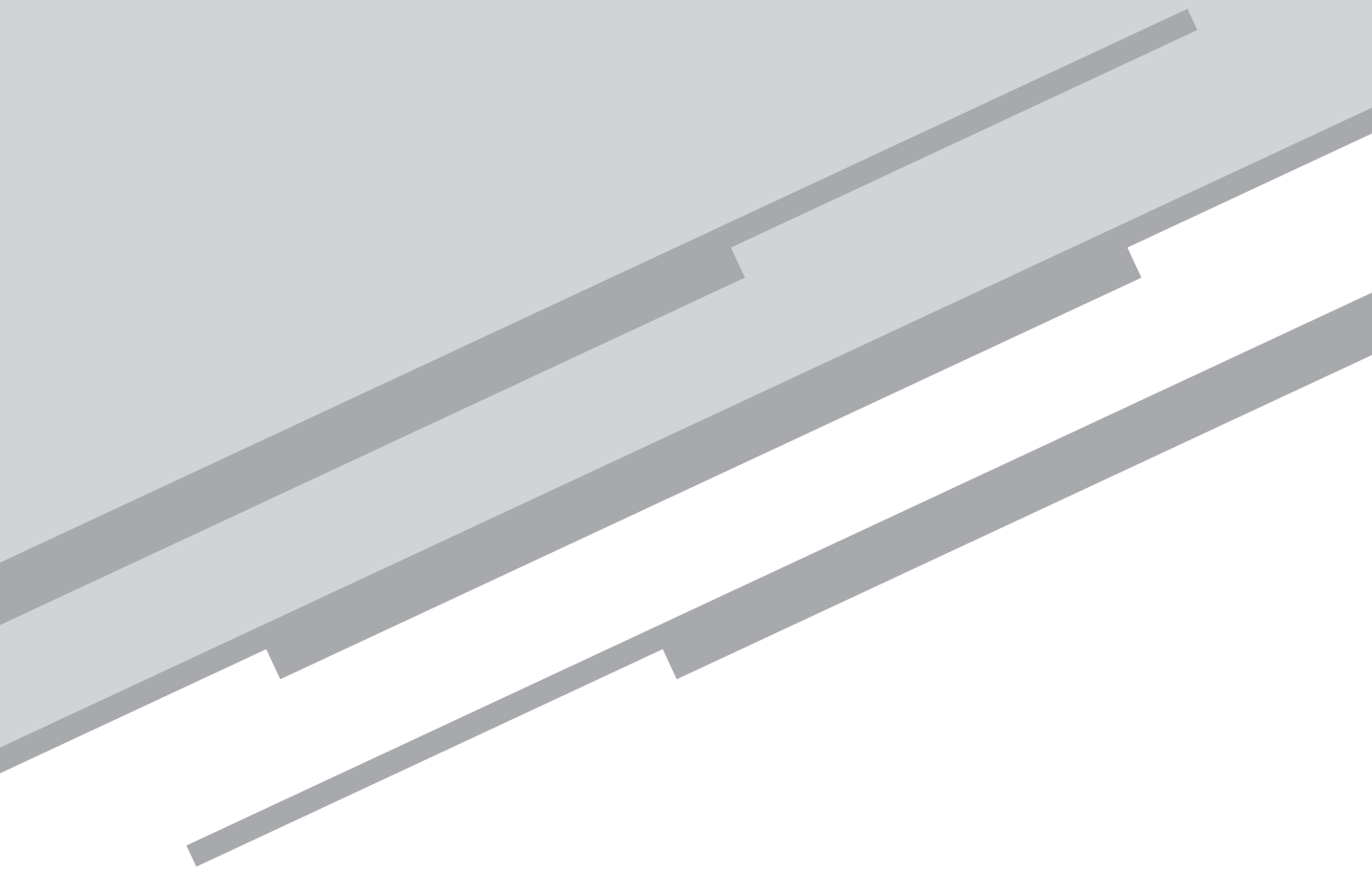
BRUNETTI, Franco. *Mecânica dos Fluidos*. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

INCROPERA, Frank P et al. *Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

ÇENGEL, Yunus A.; GHAJAR, Afshin J. *Transferência de Calor e Massa: uma abordagem prática*. 4. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012.

Aula 6

Dinâmica dos fluidos



Alexandre Santos Francisco

Meta

Resolver problemas de escoamento dos fluidos nos quais a quantidade de interesse pode ser a resultante das forças oriunda da interação existente entre um fluido e dispositivos em contato com o escoamento do fluido.

Objetivos

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. escolher o método de análise de um problema; e
2. determinar a resultante das forças trocadas entre um fluido e dispositivos em contato com o escoamento do fluido.

Introdução

Dentro da disciplina de fenômenos de transporte, a dinâmica dos fluidos é a área de conhecimento na qual a transferência de quantidade de movimento é observada com mais propriedade. Em muitos problemas de engenharia, o interesse está voltado para a determinação da resultante das forças agindo sobre dispositivos que estão em contato com o escoamento de um fluido. No escoamento de um fluido pode haver variações da velocidade do fluido, e, portanto, da quantidade de movimento.

A definição do método de análise do problema é uma etapa inicial da sua resolução. Essa definição pode ser feita levando-se em conta a identificação da massa do fluido em escoamento. Em outro método de análise, considera-se a escala de interesse na resolução do problema.

Uma vez definido o método de análise, formulações matemáticas apropriadas são derivadas para se determinar as quantidades de interesse. Na dinâmica dos fluidos, a quantidade de interesse é a resultante das forças, que está associada à transferência de quantidade de movimento.

Análise dos problemas

Ao estudar um problema de fenômenos de transporte, deve-se inicialmente escolher o método de análise do problema. Um dos métodos de análise trata da identificação da massa do fluido em escoamento entre duas situações: sistema ou volume de controle. O outro método de análise trata da escala de interesse no problema, que pode ser dividida em: global ou local.

Sistema e volume de controle

O objeto de investigação pode consistir de uma porção fixa e identificável da massa de fluido; ou seja, não há fluxo de massa de fluido através das fronteiras dessa porção. Essa porção de fluido é chamada de sistema. O volume de gás *freon* aprisionado no circuito de compressão de uma geladeira é considerado um sistema, por exemplo. Para um sistema é um possível se estabelecer leis físicas fundamentais que descrevem o problema investigado.



Nocivo para o planeta

O gás *freon* circula por um circuito dentro dos refrigeradores, e é responsável por manter as baixas temperaturas. Este gás é conhecido por causar danos à camada de ozônio da Terra e foi banido em 1987, em uma convenção internacional. A previsão é de que a utilização desse produto seja erradicada no Brasil até 2040.



E se você quiser entender como esse gás funciona em um refrigerador, acesse o seguinte link:

<http://www.omundodaquimica.com.br/curiosidade/geladeira>

Na mecânica dos fluidos, geralmente, é difícil identificar e seguir um sistema ao longo do tempo. Num bomba hidráulica, por exemplo, é difícil tomar uma porção fixa de fluido, e acompanhá-la da sucção à descarga da bomba. Seria mais interessante fixar a atenção numa porção do espaço por onde o fluido escoar (neste caso, a própria bomba hidráulica) e determinar as propriedades do fluido, quando ocupando esta região. Essa porção do espaço é chamada de *volume de controle*. O volume de controle é, então, uma região na qual pode haver fluxo de massa através de suas fronteiras.

Escala de interesse

Um problema de fenômeno de transporte pode ser tratado numa escala infinitesimal (microscópica) ou numa escala finita (macroscópica). A escala de interesse no problema está relacionada ao nível de detalhamento das informações requeridas do problema.

Quando desejamos conhecer o valor de quantidades físicas como informação local, ou seja, em cada posição do espaço, sistemas e volumes de controle são estabelecidos como porções infinitesimais. Assim, as formulações matemáticas derivadas dessa abordagem serão equações diferenciais. Por exemplo, esta abordagem seria aplicada quando se desejasse determinar o campo de pressão sobre asa de um avião, conforme ilustrado na **Figura 6.1**.

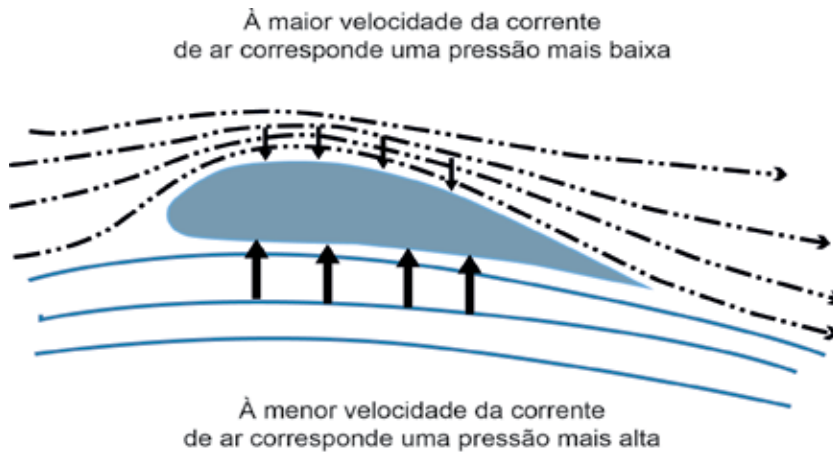
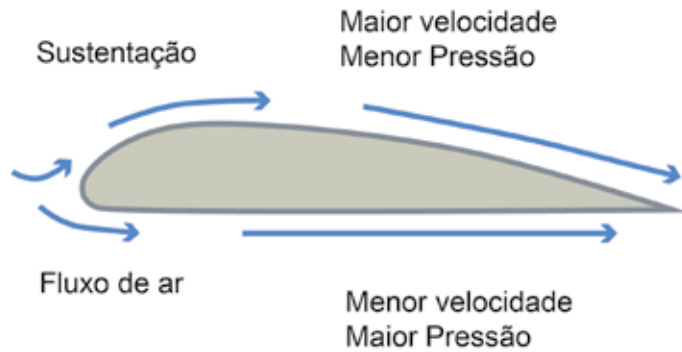


Figura 6.1: Pressão em torno de um perfil de asa.

Por outro lado, quando se está interessado numa informação global oriunda do escoamento de um fluido sobre dispositivos, sistemas ou volumes de controle são estabelecidos como porções finitas, que envolvem inteiramente os dispositivos. As formulações matemáticas resultantes são expressas por equações integrais. Por exemplo, caberia esta abordagem quando se desejasse determinar a força de sustentação agindo sobre a asa de um avião, conforme ilustrado na **Figura 6.2**.



Força de sustentação sobre um perfil de asa

Figura 6.2: Força de sustentação sobre um perfil de asa.

Atividade 1

Atende ao objetivo 1

Num estudo de aerodinâmica da asa de um avião, se desejarmos determinar a força de sustentação sobre a asa, qual seria o melhor método de análise do problema? Justifique a resposta.

Resposta comentada

A força de sustentação é um efeito global da passagem do ar em torno da superfície da asa do avião. Portanto, O interesse está numa escala global. Quanto ao objeto de investigação, a melhor abordagem neste caso seria pelo volume de controle, pois não convém seguir o ar, e sim conhecer o efeito do escoamento do ar agindo sobre a região específica da asa do avião.

Formulação global para volume de controle

Em alguns problemas de escoamento de fluido é desejável conhecer uma informação global, que surge do contato do escoamento de um fluido com o dispositivo. Para obter esta informação global, precisamos derivar equações integrais, cujos limites de integração envolvem todo o dispositivo.

Seja N uma quantidade extensiva (global) de interesse de um sistema. A quantidade intensiva (local) será a quantidade N por unidade de massa, denotada por n . Uma vez conhecida o campo de quantidade local n ,

$$n = n(x, y, z) \quad (6.1)$$

A quantidade global N dentro de um volume VC é determinada por

$$N = \int_{VC} n \rho dV \quad (6.2)$$

Numa abordagem de sistema, que corresponde a uma descrição lagrangiana, ou seja, a massa identificada dentro do sistema é fixa, a taxa de variação da quantidade N dentro do sistema S é dada por

$$\dot{N}_S = \frac{DN_S}{Dt} \quad (6.3)$$

Por outro lado, numa abordagem de volume de controle, que corresponde a uma descrição euleriana, a taxa de variação da quantidade N dentro do volume de controle VC é dada por

$$\dot{N}_{VC} = \frac{\partial N_{VC}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} n \rho dV \quad (6.4)$$

Pois, se o volume de controle mudar de posição, a quantidade associada à massa, que se encontra dentro do volume de controle, também muda. O fluxo da massa, atravessando a fronteira do volume de controle (chamada de superfície de controle SC), transporta a quantidade N , cuja taxa de variação através da superfície de controle é dada por

$$\dot{N}_{SC} = \int_{SC} n \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (6.5)$$

onde $d\vec{S}$ é um elemento de área da superfície de controle.

Considerando, então, um volume de controle no qual o escoamento de um fluido atravessa a superfície de controle através de entradas e saídas, em diferentes taxas, podemos estabelecer o seguinte balanço global da quantidade N para o volume de controle:

$$\dot{N}_s = \dot{N}_{VC} + \dot{N}_{SAI} - \dot{N}_{ENT} \quad (6.6)$$

Ou seja,

$$\frac{DN_s}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} n \rho dV + \int_{SC} n \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (6.7)$$

onde a segunda integral contempla ambos os termos de fluxo na entrada e na saída, sendo que o sinal do respectivo termo fica determinado pelo produto escalar – escoamentos para fora são positivos, escoamentos para dentro são negativos.

Balanço global da quantidade de movimento linear

Na dinâmica dos fluidos, muitas vezes nosso interesse está voltado para a determinação da resultante das forças agindo sobre dispositivos que estão em contato com o escoamento dos fluidos. A resultante das forças está associada à transferência de quantidade de movimento linear. Portanto, a quantidade de interesse na dinâmica dos fluidos é a quantidade de movimento linear.

Seja $N = \vec{P}$ a quantidade de movimento linear extensiva do fluido em escoamento, logo

$$n = \frac{\vec{P}}{m} = \frac{m\vec{v}}{m} = \vec{v}$$

é a quantidade de movimento linear intensiva. Substituindo N e n na equação (6.7), o balanço global da quantidade de movimento linear para volume de controle fica da seguinte forma:

$$\frac{D\vec{P}_s}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{v} \rho dV + \int_{SC} \vec{v} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (6.8)$$

Da segunda lei de Newton do movimento, a resultante das forças é igual a taxa de variação da quantidade de movimento linear do sistema, isto é,

$$\frac{D\vec{P}_s}{Dt} = \vec{R} \quad (6.9)$$

Assim,

$$\vec{R} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{v} \rho dV + \int_{SC} \vec{v} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (6.10)$$

Esta equação estabelece que a resultante das forças agindo sobre um

volume de controle, em repouso ou movimento retilíneo uniforme, é igual a soma da taxa de variação da quantidade de movimento linear dentro do volume de controle, com a taxa líquida de fluxo da quantidade de movimento linear através da superfície de controle.

Vale lembrar que a resultante das forças pode incluir forças de campo e de superfície, ou seja,

$$\vec{R} = \vec{R}^C + \vec{R}^S \quad (6.11)$$

E também vale mencionar que todas as velocidades \vec{v} presentes nas integrais são medidas em relação a um sistema de coordenadas preso ao volume de controle.

Atividade 2

Atende ao objetivo 2

Um ventilador sopra ar ambiente a 40 m/s por uma saída de 0,38 m de diâmetro, coletando ar em repouso por uma saída de 0,44 m de diâmetro, conforme mostrado na figura abaixo. Determine a força horizontal no suporte do ventilador. ($\rho_{ar} = 1,23 \text{ kg/m}^3$)

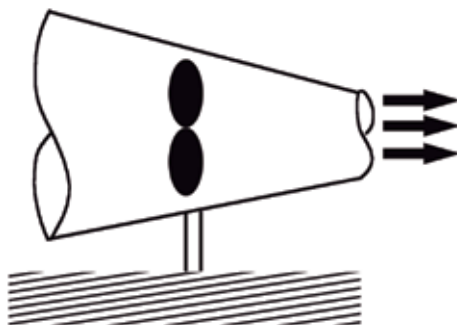


Figura 6.3

Resposta comentada

Em primeiro lugar, devemos definir um sistema de coordenadas. Como o enunciado pede uma informação na horizontal, é natural escolhermos um eixo horizontal como direção x e outro vertical como direção y . Em segundo lugar, devemos escolher um volume de controle adequado. Nosso volume de controle é a região que envolve todo o ventilador, contemplando a entrada e a saída de ar. Em terceiro lugar, devemos elencar considerações para o problema:

- (1) regime estacionário (sem variações no tempo);
- (2) fluido incompressível (número de Mach menor do que 0,3);
- (3) escoamento uniforme na entrada e saída; e
- (4) velocidade desprezível na entrada (ar em repouso).

O balanço global da quantidade de movimento linear para o volume de controle é

$$\vec{R} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{v} \rho dV + \int_{SC} \vec{v} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Para regime estacionário,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{v} \rho dV = 0$$

Assim,

$$\vec{R} = \int_{SC} \vec{v} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Cuja componente na direção horizontal é

$$R_x = \int_{SC} v_x \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

A superfície de controle é constituída de entrada e saída, logo

$$R_x = \int_{SAI} v_x \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} + \int_{ENT} v_x \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Realizando o produto escalar,

$$R_x = \int_{SAI} v_x \rho v dS \cos 0^\circ + \int_{ENT} v_x \rho v dS \cos 180^\circ$$

Para escoamento uniforme na entrada e na saída,

$$R_x = v_{xSAI} \rho_{SAI} v_{SAI} \int_{SAI} dS - v_{xENT} \rho_{ENT} v_{ENT} \int_{ENT} dS$$

Para fluido incompressível ($\rho = \rho_{ENT} = \rho_{SAI}$),

$$R_x = v_{xSAI} \rho v_{SAI} \int_{SAI} dS - v_{xENT} \rho v_{ENT} \int_{ENT} dS$$

Como as velocidades são horizontais,

$$v = v_x$$

Dai, segue que

$$R_x = \rho v_{SAI}^2 S_{SAI} - \rho v_{ENT}^2 S_{ENT}$$

Para velocidade desprezível na entrada,

$$R_x = \rho v_{SAI}^2 S_{SAI}$$

Do diagrama de corpo livre do volume de controle,

$$R_x = p_{ENT} S_{ENT} - p_{SAI} S_{SAI} + F_x$$

Onde F_x é a força horizontal no suporte do ventilador, e p é a pressão do ar na entrada e na saída do ventilador. Como as pressões são ambientes tanto na entrada quanto na saída, então

$$R_x = p_{atm} (S_{ENT} - S_{SAI}) + F_x$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} F_x &= \rho v_{SAI}^2 S_{SAI} - p_{atm} (S_{ENT} - S_{SAI}) \\ &= 1,23.80^2 \frac{\pi.0,38^2}{4} - 101300 \left(\frac{\pi.0,44^2}{4} - \frac{\pi.0,38^2}{4} \right) = 2,3kN \end{aligned}$$

Note que a resultante das forças sobre o volume de controle depende somente das informações na entrada e na saída do volume de controle.

Conclusão

Balanços globais de massa são bastante úteis em problemas práticos de escoamentos de fluidos nos quais se deseja determinar vazões ou velocidades dos fluidos através de dispositivos sólidos.

Resumo

Ao estudar um problema dos fenômenos de transporte, deve-se inicialmente escolher o método de análise do problema. Uma escolha pode recair sobre sistema ou volume de controle de acordo com a identificação da massa, que pode ou não atravessar as fronteiras do problema. Outra escolha recai sobre formulação integral e diferencial se há interesse em determinar informação global ou local, respectivamente.

Existem problemas nos quais o interesse está voltado para a determinação da resultante das forças agindo sobre dispositivos que estão em contato com o escoamento dos fluidos. Neste caso é adequado formular um balanço global da quantidade de movimento linear da seguinte forma:

$$\vec{R} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \vec{v} \rho dV + \int_{sc} \vec{v} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Referências

FOX, R. W.; MCDONALD, A. T.; PRITCHARD, P. J.. *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

BRUNETTI, F. *Mecânica dos Fluidos*. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

INCROPERA, F. P. et al. *Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

ÇENGEL, Y. A.; GHAJAR, A. J. *Transferência de Calor e Massa: uma abordagem prática*. 4. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012.

Aula 7

Conservação de massa e
energia nos fluidos

Meta

Demonstrar a resolução de problemas de escoamento dos fluidos nos quais a quantidade de interesse pode ser a taxa de massa ou de certa energia que se estabelece em escoamentos através de dispositivos.

Objetivos

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. determinar a taxa de massa de um fluido através de dispositivos; e
2. determinar a taxa de calor ou de trabalho existente em escoamentos através de dispositivos.

Introdução

Em muitos problemas de engenharia, o interesse está voltado para a determinação da taxa de massa ou de energia que ocorre no escoamento de um fluido através de dispositivos. Por exemplo, existem problemas em que o interesse pode estar na determinação da potência de bombas hidráulicas ou turbinas, determinação de perdas de carga em escoamentos, transformação de energia, vazão em dutos etc. O engenheiro que faz um cálculo errado da potência de uma bomba hidráulica corre o risco de não conseguir levar água até o alto de uma caixa d'água.

Como as quantidades de interesse relacionadas à taxa de massa e de energia são efeitos globais do escoamento do fluido através de dispositivos, o método de análise empregado neste capítulo é o da formulação global para volume de controle. Este método permite desenvolver equações integrais de conservação de massa ou de energia, cujos integrandos são fornecidos ou podem ser simplificados. Do capítulo anterior, lembramos a seguinte equação integral para volume de controle:

$$\frac{DN_s}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} n \rho dV + \int_{sc} n \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}, \quad (7.1)$$

onde N é uma quantidade extensiva de interesse e n é a quantidade intensiva.

Neste capítulo, desenvolveremos os balanços globais da massa e da energia para volume de controle e os aplicaremos em alguns problemas práticos.

Balanço global da massa

Nesta seção, nosso interesse está voltado para a determinação de quantidades relacionadas à taxa de massa de fluido através de dispositivos.

Seja $N = m$ a massa extensiva do fluido em escoamento, logo

$$n = \frac{m}{m} = 1$$

é a massa intensiva. Substituindo N e n na equação (7.1), o balanço global da massa para volume de controle fica da seguinte forma:

$$\frac{Dm_s}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho dV + \int_{sc} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (7.2)$$

Do princípio da conservação de massa, a massa de fluido como um sistema permanece constante, ou seja,

$$\frac{Dm_s}{Dt} = 0 \quad (7.3)$$

Assim,

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (7.4)$$

Esta equação estabelece que a taxa de variação da massa dentro do volume de controle é igual à taxa líquida de fluxo da massa através da superfície de controle.

Atividade 1

Atende ao objetivo 1

Um gás escoa em regime estacionário através de um trecho de tubulação, conforme a figura abaixo. Na seção de entrada, a área é de 20 cm², a massa específica é de 4 kg/m³ e a velocidade é de 30 m/s. Na seção de saída, a área é de 10 cm² e a massa específica é de 12 kg/m³. Qual é a velocidade do gás na saída? Qual é a vazão mássica de gás através da tubulação?

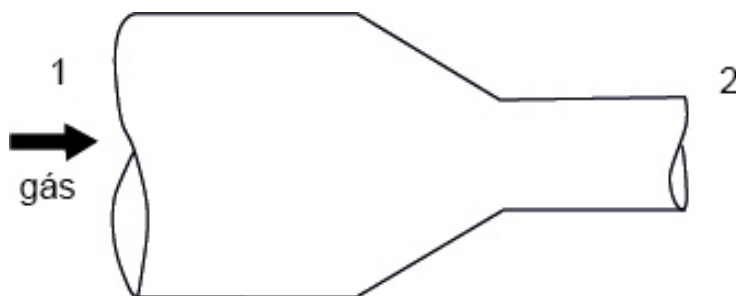


Figura 7.1

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Resposta comentada

Como o balanço da massa é uma equação escalar, não há necessidade de se definir um sistema de coordenadas. Mas devemos escolher um volume de controle adequado. Nosso volume de controle é a região que envolve todo dispositivo tubulação, contemplando a entrada e a saída de gás. E devermos elencar considerações para o problema:

1. regime estacionário (sem variações no tempo); e
2. escoamento uniforme na entrada e saída.

O balanço global da massa para o volume de controle é

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \vec{v} \bullet d\vec{S}$$

Para regime estacionário,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV = 0$$

Assim,

$$0 = \int_{SC} \rho \vec{v} \bullet d\vec{S}$$

A superfície de controle é constituída de entrada e saída, logo

$$0 = \int_{SAI} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} + \int_{ENT} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Realizando o produto escalar,

$$0 = \int_{SAI} \rho v dS \cos 0^\circ + \int_{ENT} \rho v dS \cos 180^\circ$$

Para escoamento uniforme,

$$0 = \rho_{SAI} v_{SAI} \int_{SAI} dS - \rho_{ENT} v_{ENT} \int_{ENT} dS$$

Dai, segue que

$$\rho_{ENT} v_{ENT} S_{ENT} = \rho_{SAI} v_{SAI} S_{SAI}$$

Ou seja, a vazão mássica na entrada é igual a vazão mássica na saída.

Logo,

$$v_{SAI} = \frac{\rho_{ENT} v_{ENT} S_{ENT}}{\rho_{SAI} S_{SAI}} = \frac{4 \times 30 \times 0,0002}{12 \times 0,0001} = 20 \text{ m/s}$$

E a vazão mássica,

$$\dot{m} = \rho_{ENT} v_{ENT} S_{ENT} = 4 \times 30 \times 0,0002 = 0,024 \text{ kg/s}$$

Balanco global da energia

Nesta seção, nosso interesse está voltado para a determinação de quantidades relacionadas a taxa de energia através de dispositivos.

Seja $N = E$ a energia extensiva envolvida no escoamento, logo

$$n = \frac{E}{m} = e$$

é a energia intensiva. Substituindo N e n na equação (6.1), o balanço global da energia para volume de controle fica da seguinte forma:

$$\frac{DE_s}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e \rho dV + \int_{SC} e \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (7.5)$$

Da primeira lei da termodinâmica, a diferença entre a taxa de calor e a taxa de trabalho num sistema é igual a taxa de variação da energia, isto é,

$$\frac{DE_s}{Dt} = \dot{Q} - \dot{W} \quad (7.6)$$

onde \dot{Q} é a taxa de calor, e \dot{W} é a taxa de trabalho. Assim,

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e \rho dV + \int_{SC} e \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (7.7)$$

Esta equação estabelece que a diferença entre taxas de calor e trabalho em um volume de controle é igual à soma da taxa de variação da energia dentro do volume de controle com a taxa líquida de fluxo da energia através da superfície de controle.

A taxa de trabalho pode ser decomposta como

$$\dot{W} = \dot{W}_{EIXO} + \dot{W}_{SC} \quad (7.8)$$

onde \dot{W}_{EIXO} é a taxa de trabalho transmitida por eixos, e \dot{W}_{SC} é a taxa de trabalho realizada pela resultante das forças de pressão do fluido sobre a superfície de controle. Da estática dos fluidos, sabemos que essa resultante das forças de pressão pode ser dada por:

$$\vec{R}^{SC} = - \int_{SC} p d\vec{S} \quad (7.9)$$

A taxa de trabalho associada a essa resultante é obtida do produto escalar dela pela velocidade,

$$\dot{W}_{SC} = \vec{v} \cdot \vec{R}^{SC} = - \int_{SC} p \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (7.10)$$

Considerando que esse trabalho é feito sobre o volume de controle, por convenção a taxa de trabalho é introduzida na equação (6.7) com sinal negativo. Assim, substituindo as supracitadas taxas de trabalho, a equação (6.7) fica

$$\dot{Q} - (\dot{W}_{EIXO} + \int_{SC} p \vec{v} \cdot d\vec{S}) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e \rho dV + \int_{SC} e \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (7.11)$$

Após manipulações algébricas,

$$\dot{Q} - \dot{W}_{EIXO} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e \rho dV + \int_{SC} (e + \frac{p}{\rho}) \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (7.12)$$



Vale lembrar que, por convenção, a taxa de calor é negativa quando o volume de controle perde calor e positiva, em caso contrário. A taxa de trabalho também é negativa quando o volume de controle recebe trabalho e positiva, em caso contrário.

Posteriormente, a energia intensiva pode ser decomposta como

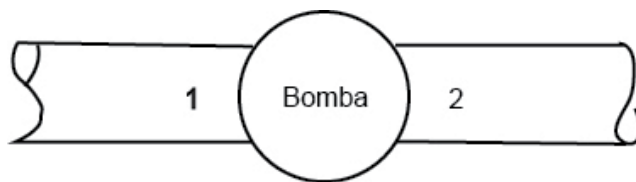
$$e = u + \frac{v^2}{2} + gy \quad (7.13)$$

onde u é a energia interna, $\frac{v^2}{2}$ é a energia cinética, e gy é a energia potencial.

Atividade 2

Atende ao objetivo 2

Na bomba hidráulica mostrada na figura abaixo, são dados: velocidade de 4 m/s e área de 0,52 m² na entrada 1; velocidade de 5,2 m/s e área de 0,4 m² na saída 2; e pressão ambiente tanto na entrada quanto na saída. A potência fornecida à água pela bomba é de 10 kW, e a taxa de calor perdida para o exterior é de 0,98 kW. Considerando escoamento isotérmico, qual é a vazão mássica através da bomba?

**Figura 7.2**This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

[illegible]

Resposta comentada

Como o balanço da energia é uma equação escalar, não há necessidade de se definir um sistema de coordenadas. Mas devemos escolher um volume de controle adequado. Nosso volume de controle é a região que envolve todo o dispositivo bomba hidráulica, contemplando a entrada e a saída de água. E devermos elencar considerações para o problema:

1. regime estacionário;
2. escoamento uniforme na entrada e saída; e
3. escoamento isotérmico.

O balanço global da energia para o volume de controle é

$$\dot{Q} - \dot{W}_{EIXO} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e \rho dV + \int_{SC} (e + \frac{p}{\rho}) \rho \vec{v} \bullet d\vec{S}$$

Para regime estacionário,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{vc}} e \rho dV = 0$$

Assim,

$$\dot{Q} - \dot{W}_{EIXO} = \int_{SC} (e + \frac{p}{\rho}) \rho \vec{v} \bullet d\vec{S}$$

A superfície de controle é constituída de entrada e saída, logo

$$\dot{Q} - \dot{W}_{EIXO} = \int_{SAI} (e + \frac{p}{\rho}) \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} + \int_{ENT} (e + \frac{p}{\rho}) \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Realizando o produto escalar,

$$\dot{Q} - \dot{W}_{EIXO} = \int_{SAI} \left(e + \frac{p}{\rho}\right) \rho v dS \cos 0^\circ + \int_{ENT} \left(e + \frac{p}{\rho}\right) \rho v dS \cos 180^\circ$$

Para escoamento uniforme na entrada e na saída,

$$\dot{Q} - \dot{W}_{EIXO} = \left(e + \frac{p}{\rho}\right)_{SAI} \int_{SAI} \rho v dS - \left(e + \frac{p}{\rho}\right)_{ENT} \int_{ENT} \rho v dS$$

O balanço global da massa para o volume de controle é

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Para regime estacionário,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV = 0$$

Assim,

$$0 = \int_{SC} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

A superfície de controle é constituída de entrada e saída, logo

$$0 = \int_{SAI} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} + \int_{ENT} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Realizando o produto escalar,

$$0 = \int_{SAI} \rho v dS \cos 0^\circ + \int_{ENT} \rho v dS \cos 180^\circ$$

Daí, segue que

$$0 = \int_{SAI} \rho v dS - \int_{ENT} \rho v dS$$

E finalmente,

$$\int_{ENT} \rho v dS = \int_{SAI} \rho v dS = \dot{m}$$

Retornando ao balanço da energia,

$$\dot{Q} - \dot{W}_{EIXO} = \left(e + \frac{p}{\rho}\right)_{SAI} \dot{m} - \left(e + \frac{p}{\rho}\right)_{ENT} \dot{m}$$

Mas $e = u + \frac{v^2}{2} + gy$, logo

$$\dot{Q} - \dot{W}_{EIXO} = \left(u + \frac{v^2}{2} + gy + \frac{p}{\rho}\right)_{SAI} \dot{m} - \left(u + \frac{v^2}{2} + gy + \frac{p}{\rho}\right)_{ENT} \dot{m}$$

Para escoamento isotérmico, pressões na entrada e saída iguais, e elevações na entrada e saída iguais,

$$\dot{Q} - \dot{W}_{EIXO} = \dot{m} \left(\frac{v_{SAI}^2}{2} - \frac{v_{ENT}^2}{2} \right)$$

Assim, calculamos a vazão mássica

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \frac{\dot{Q} - \dot{W}_{EIXO}}{\frac{v_{SAI}^2}{2} - \frac{v_{ENT}^2}{2}} \\ &= \frac{-980 - (-10000)}{\frac{5,2^2}{2} - \frac{4^2}{2}} = 1634 \text{ kg / s} \end{aligned}$$

Conclusão

As equações integrais para volume de controle apresentam similaridades quando estabelecidas para descrever a conservação da massa, quantidade de movimento, ou energia. Esses balanços globais são bastante úteis em problemas práticos de escoamento de fluidos nos quais se deseja obter alguma informação global do problema.

Resumo

Existem problemas nos quais o interesse está voltado para a determinação de taxa de massa ou de taxas de energia, que ocorrem no escoamento dos fluidos através de dispositivos. Em situações onde o interesse está relacionado com a taxa de massa, é adequado formular um balanço global da massa:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Se o interesse está relacionado com taxas de calor ou trabalho, devemos formular um balanço global da energia:

$$\dot{Q} - \dot{W}_{EIXO} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e \rho dV + \int_{SC} \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Referências

FOX, R.W.; MCDONALD, A. T.; PRITCHARD, P. J.. *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

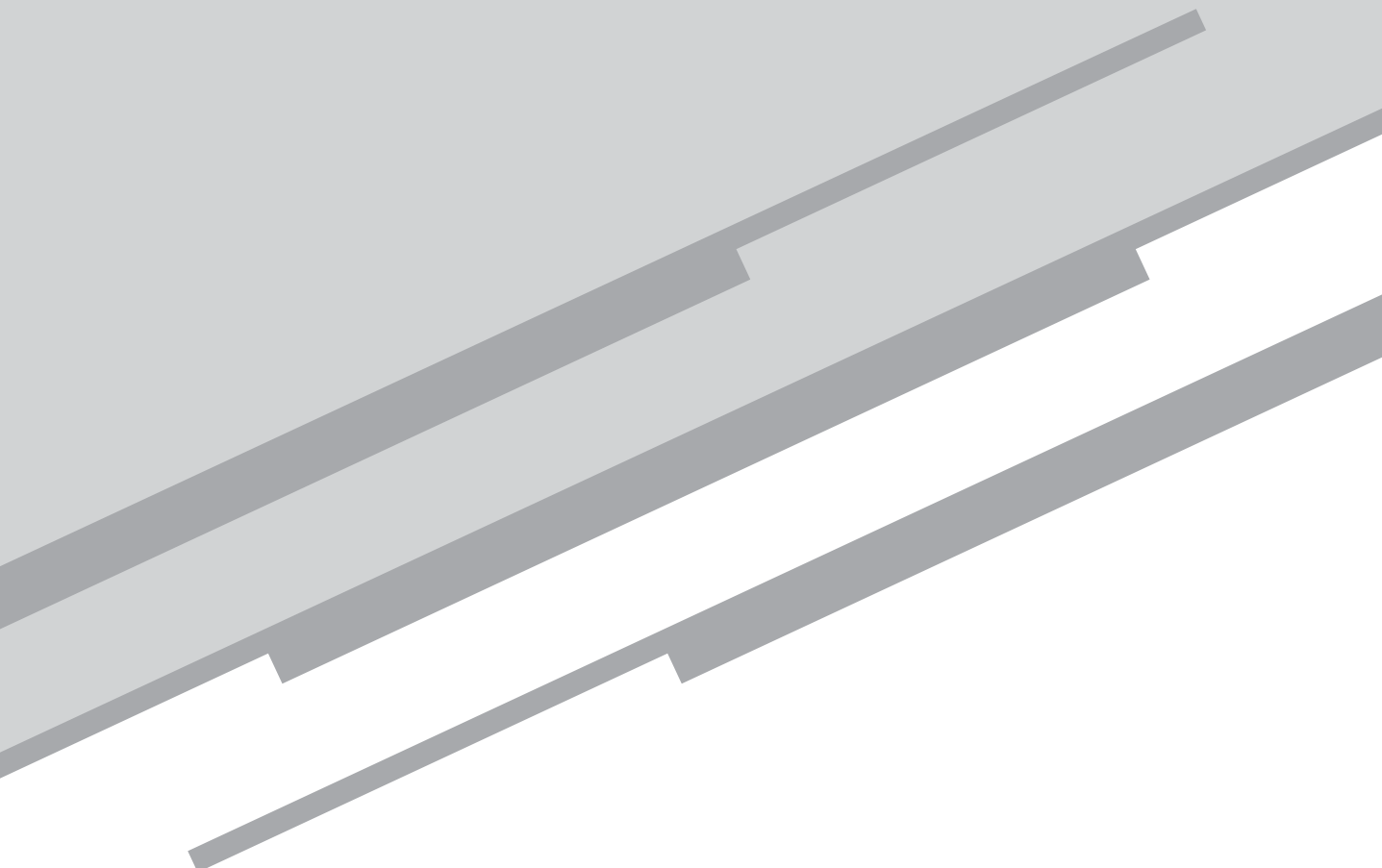
F. BRUNETTI. *Mecânica dos Fluidos*. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

INCROPERA, F. P. et al. *Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

ÇENGEL, Yunus A.; GHAJAR, A. J. *Transferência de Calor e Massa: uma abordagem prática*. 4. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012.

Aula 8

Perda de carga dos fluidos



Alexandre Santos Francisco

Meta

Desenvolver equações que permitem determinar a perda de carga no escoamento de um fluido através de tubos.

Objetivos

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. definir o que é carga em escoamento dos fluidos;
2. determinar a perda de carga no escoamento de um fluido através de tubos; e
3. determinar a carga de bombas e turbinas.

Introdução – adentrando em tubos

No escoamento de um fluido real, verificamos que algumas formas de energia sofrem mudanças, devido principalmente ao efeito da viscosidade. A viscosidade é a propriedade física responsável pela resistência ao escoamento do fluido, que causa atritos internos e, posteriormente, transferências de calor. Quando parcela da energia é dissipada para o ambiente em forma de calor, um balanço global da energia mostra que está havendo uma perda de energia mecânica no escoamento. Isso, por exemplo, ocorre no escoamento da água através de um tubo, onde a pressão ou a vazão da água podem chegar à saída do tubo com um valor inferior ao previsto idealmente. Para evitar ou compensar essa queda de pressão ou de vazão, torna-se importante avaliar o montante da energia dissipada, que é formalmente chamada de perda de carga.

Define-se *carga* como a quantidade de energia por unidade de peso ou massa de um fluido. Em geral, as formas de energia mecânica presentes em um fluido são as seguintes: cinética, potencial e de pressão. A relação entre as cargas de energia mecânica é estabelecida através do balanço global da energia.

Ao se introduzir uma bomba ou turbina no escoamento, podemos respectivamente fornecer ou retirar carga de energia do escoamento. Essa carga de energia também é computada no balanço global da energia.

Portanto, nesse capítulo, estamos interessados em estudar a perda de energia em termos da carga, no escoamento de um fluido.

Carga em escoamento dos fluidos

Nesta seção, apresentamos a definição de carga de energia e identificamos as cargas presentes no escoamento de um fluido.

A carga é definida como uma determinada energia por unidade de massa de uma partícula de fluido. Portanto, a unidade da carga no Sistema Internacional é o *Joule por quilograma* (J/kg). No escoamento de um fluido, encontramos, portanto, a carga de pressão, cinética, e potencial. A soma das três cargas constitui a chamada carga mecânica. Denotando a carga por h , podemos escrever as expressões para cada uma das cargas:

1. carga de pressão:

$$h_p = \frac{p}{\rho} \quad (8.1)$$

2. carga cinética:

$$h_v = \frac{v^2}{2} \quad (8.2)$$

3. carga potencial:

$$h_g = gy \quad (8.3)$$

Assim, a carga mecânica de uma partícula de fluido é obtida por

$$h_m = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gy \quad (8.4)$$

A carga também pode ser definida como a energia por unidade de peso. Dessa forma, a unidade da carga no Sistema Internacional é o *Joule por Newton* ($J/N = m$). Denotando essa carga por H , temos que

$$H = \frac{h}{g} \quad (8.5)$$

Atividade 1

Atende ao objetivo 1

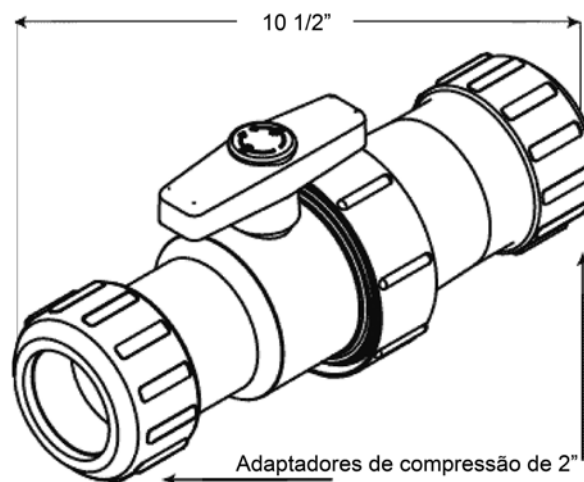


Figura 8.1: Água escoando através de um tubo.

Água escoar através de um tubo, conforme a **Figura 8.1**. Num determinado instante, uma partícula de água se encontra a 10 m de elevação média do solo, com velocidade de 30 m/s e sob pressão de 2 MPa. Determine a carga mecânica da partícula de água.

Resposta comentada

A carga mecânica da partícula de fluido é obtida pela soma da carga de pressão, cinética, e potencial, isto é,

$$h_m = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gy = \frac{2 \times 10^6}{1000} + \frac{30^2}{2} + 9,8 \cdot 10 = 2,5 \text{ kJ/kg}$$

Se esse valor de carga mecânica estiver reduzido noutra posição adiante do tubo, é evidente que houve uma perda de carga devido aos efeitos viscosos.

Perda de carga em tubos

No escoamento de um fluido real através de tubos, os efeitos da viscosidade são significativos. Em consequência disso, parcela da energia mecânica no escoamento é dissipada para o ambiente na forma de calor. Essa energia dissipada, conhecida como perda de carga, pode ser determinada através de um balanço global da energia.

Consideremos o escoamento de um fluido através de um trecho de tubo, no qual vale as seguintes considerações:

1. regime estacionário;
2. fluido incompressível;
3. escoamento uniforme na entrada e na saída; e
4. não há bombas nem turbinas.

Aplicando o balanço global da energia para um volume de controle envolvendo a região tomada pelo tubo, temos que

$$\dot{Q} - \dot{W}_{EIXO} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e \rho dV + \int_{SC} \left(e + \frac{p}{\rho}\right) \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (8.6)$$

Para regime estacionário,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e \rho dV = 0 \quad (8.7)$$

E ausência de bombas ou turbinas,

$$\dot{W}_{EIXO} = 0 \quad (8.8)$$

Assim,

$$\dot{Q} = \int_{SC} \left(e + \frac{p}{\rho}\right) \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (8.9)$$

Para escoamento uniforme na entrada e na saída,

$$\dot{Q} = \left(e + \frac{p}{\rho}\right)_{SAI} \int_{SAI} \rho v dS - \left(e + \frac{p}{\rho}\right)_{ENT} \int_{ENT} \rho v dS \quad (8.10)$$

Do balanço global da massa,

$$\int_{ENT} \rho v dS = \int_{SAI} \rho v dS = \dot{m} \quad (8.11)$$

Retornando ao balanço global da energia,

$$\dot{Q} = \left(e + \frac{p}{\rho}\right)_{SAI} \dot{m} - \left(e + \frac{p}{\rho}\right)_{ENT} \dot{m} \quad (8.12)$$

Mas $e = u + \frac{v^2}{2} + gy$, logo

$$\dot{Q} = \left(u + \frac{v^2}{2} + gy + \frac{p}{\rho}\right)_{SAI} \dot{m} - \left(u + \frac{v^2}{2} + gy + \frac{p}{\rho}\right)_{ENT} \dot{m} \quad (8.13)$$

Ou também,

$$\left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gy\right)_{ENT} - \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gy\right)_{SAI} = (u_{SAI} - u_{ENT}) - \frac{\dot{Q}}{\dot{m}} \quad (8.14)$$

Na qual se estabelece que a diferença entre cargas mecânicas na entrada e na saída é igual à perda de carga, que fica definida por

$$h_l = (u_{SAI} - u_{ENT}) - \frac{\dot{Q}}{\dot{m}} \quad (8.15)$$

Finalmente, podemos escrever

$$\left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gy\right)_{ENT} - \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gy\right)_{SAI} = h_l \quad (8.16)$$

A perda de carga pode ser decomposta em perdas distribuídas e perdas localizadas da seguinte maneira:

$$h_l = h_{l,D} + h_{l,L} \quad (8.17)$$

A perda de carga distribuída é aquela que ocorre ao longo do trecho reto dos tubos de seção constante, na ausência de acessórios. Independentemente da orientação dos tubos, a perda de carga distribuída é determinada por

$$h_{l,D} = f \frac{L}{D} \frac{\bar{v}^2}{2} \quad (8.18)$$

onde f é um parâmetro conhecido como *fator de atrito*, L é o comprimento do tubo, D é o diâmetro do tubo, e \bar{v} é a velocidade média do escoamento do fluido. O valor do fator de atrito pode ser obtido através do diagrama de Moody, apresentado na **Figura 8.2**.

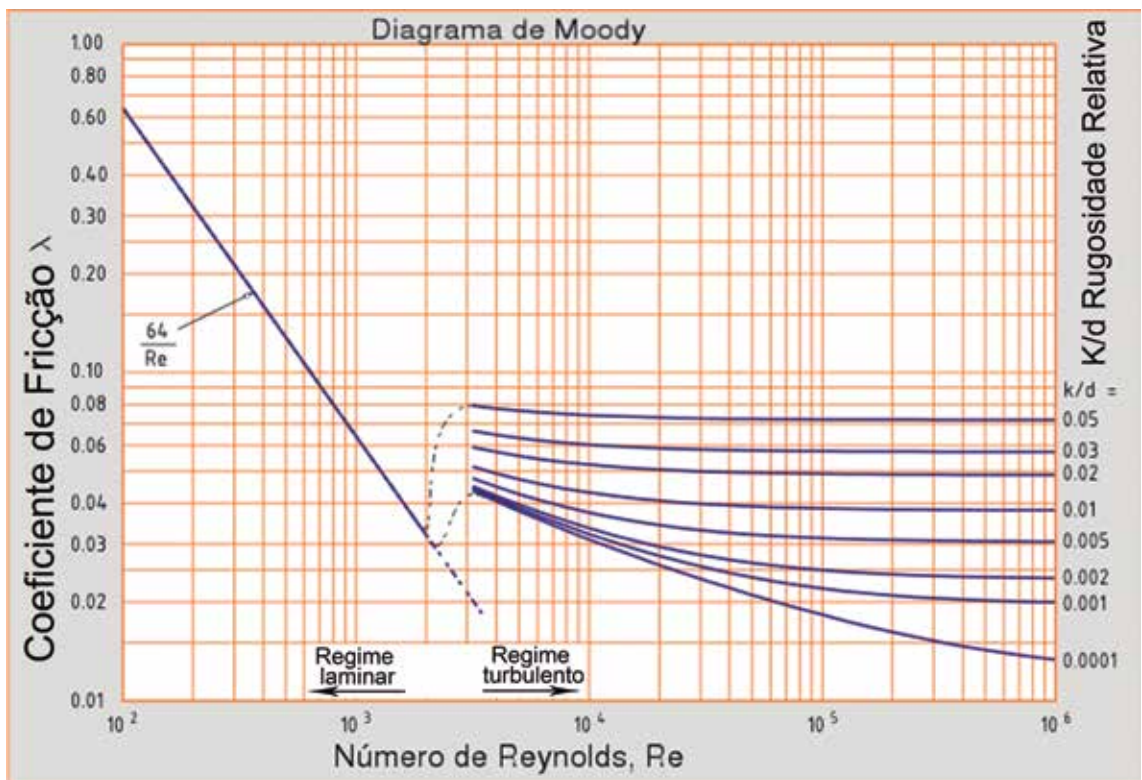


Figura 8.2: Diagrama de Moody.

A perda de carga localizada é aquela que ocorre em acessórios do tubo (válvulas, instrumentos etc.) ou em mudanças de geometria do

tubo (curvas, cotovelos, entradas etc.). Em geral, as perdas localizadas são bem menores do que as perdas distribuídas. A perda de carga localizada é determinada por

$$h_{l,L} = K \frac{\bar{v}^2}{2} \quad (8.19)$$

onde K é um parâmetro conhecido como *coeficiente de perda*. O valor do coeficiente de perda pode ser obtido a partir de tabelas, considerando os diversos tipos de acessórios e geometrias de tubos.

Observação: no caso de não valer a consideração de velocidade uniforme nas seções, isto é, a velocidade varia ao longo das seções de escoamento, devemos usar a velocidade média nas equações acima e introduzir um coeficiente de correção. Esse coeficiente, chamado de fator de correção da energia cinética, é definido pela seguinte expressão:

$$\alpha = \frac{\int v^2 \rho v dS}{\bar{v}^2 \dot{m}} \quad (8.20)$$

Nesse caso, somente a energia interna e a pressão são uniformes nas seções. E o balanço global da energia, considerando distribuições de velocidade não-uniformes, é reescrito da seguinte forma:

$$\left(\frac{p}{\rho} + \alpha \frac{\bar{v}^2}{2} + gy \right)_{ENT} - \left(\frac{p}{\rho} + \alpha \frac{\bar{v}^2}{2} + gy \right)_{SAI} = h_l \quad (8.21)$$

O fator de correção de energia cinética α é igual a 1, para escoamentos turbulentos; e 2, para escoamentos laminares.

===== **Atividade 2** =====

Atende ao objetivo 2

Um sistema de proteção contra incêndio com alcance de 50 m é suprido por uma torre de água. Um tubo liso com diâmetro interno de 75 mm foi instalado no sistema. O sistema deve jorrar uma vazão de água de 0,01 m³/s. Determine a elevação H que produz essa vazão de água. Despreze as perdas localizadas e a perda de carga no trecho vertical.

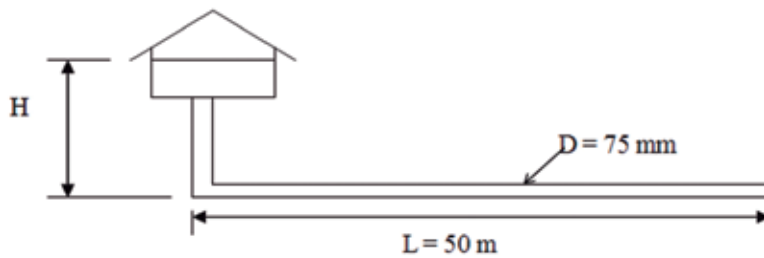


Figura 8.3: Sistema de proteção contra incêndio.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Resposta comentada

Nosso volume de controle é a região que envolve toda a torre de água, contemplando desde a superfície livre no alto da torre até a saída de água no tubo. Valem as seguintes considerações para o problema:

1. regime estacionário;
2. fluido incompressível;

3. energia interna e pressão uniformes nas seções;
4. perdas localizadas desprezíveis; e
5. perda de carga no trecho vertical do tubo desprezível.

A equação do balanço global da energia para o volume de controle é

$$\left(\frac{p}{\rho} + \alpha \frac{\bar{v}^2}{2} + gy\right)_{ENT} - \left(\frac{p}{\rho} + \alpha \frac{\bar{v}^2}{2} + gy\right)_{SAI} = h_l$$

Como $p_{ENT} = p_{SAI} = p_{atm}$, $\bar{v}_{ENT} \cong 0$ e $y_{ENT} - y_{SAI} = H$, então

$$H = \frac{h_l}{g} + \alpha \frac{\bar{v}_{SAI}^2}{2g}$$

Para perdas localizadas e perda de carga no trecho vertical desprezíveis,

$$h_l = f \frac{L}{D} \frac{\bar{v}^2}{2}$$

Do balanço global da massa, verificamos que a velocidade média é a mesma ao longo do tubo, ou seja, $\bar{v}_{SAI} = \bar{v}$. Assim,

$$H = \frac{\bar{v}^2}{2g} \left(f \frac{L}{D} + \alpha \right)$$

A velocidade média é

$$\bar{v} = \frac{\dot{V}}{S} = \frac{\dot{V}}{\pi D^2/4} = \frac{0,014}{\pi \cdot 0,075^2} = 2,3 \text{ m/s}$$

E o número de Reynolds é, então,

$$Re = \frac{\rho \bar{v} D}{\mu} = \frac{1000 \cdot 2,3 \cdot 0,075}{1 \times 10^{-3}} = 1,7 \times 10^5$$

Que evidencia um escoamento turbulento ($\alpha = 1$). Para tubos lisos e $Re = 1,7 \times 10^5$, encontramos no diagrama de Moody $f = 0,0155$.

Finalmente, a elevação que produz a vazão requerida é

$$H = \frac{2,3^2}{2 \cdot 9,8} \left(0,0155 \frac{50}{0,075} + 1 \right) = 3,0 \text{ m}$$

Carga em bombas e turbinas

No escoamento de um fluido através de tubos, dispositivos podem ser instalados para adicionar ou retirar carga de energia. Bombas ou centrífugas são exemplos de equipamentos mecânicos que adicionam carga de energia ao escoamento. Como resultado, podemos ter aumento

de pressão, velocidade ou elevação do fluido. Por outro lado, turbinas são equipamentos mecânicos que retiram carga de energia do escoamento.

Denotando a carga da bomba ou centrífuga por h_B , temos que a carga recebida da bomba ou centrífuga é

$$\frac{\dot{W}_{EIXO,B}}{\dot{m}} = -h_B \quad (8.22)$$

Denotando a carga da turbina por h_T , temos que a carga fornecida a turbina é

$$\frac{\dot{W}_{EIXO,T}}{\dot{m}} = h_T \quad (8.23)$$

Então, para o caso de se encontrar uma bomba e uma turbina no trecho de tubo, a equação do balanço global da energia fica

$$\left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gy\right)_{ENT} + h_B - \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gy\right)_{SAI} - h_T = h_l \quad (8.24)$$

Atividade final

Atende ao objetivo 3

Uma turbina é alimentada com 0,6 m³/s de água por meio de um tubo com 0,3 m de diâmetro; o tubo de descarga tem diâmetro de 0,4 m. Determine a queda de pressão através da turbina se ela fornece 60 kW.

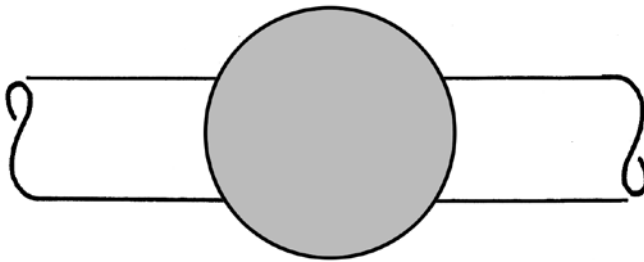


Figura 8.4: Trecho de uma turbina a água.

$$\left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}\right)_{ENT} - \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}\right)_{SAI} - h_T = 0$$

Ou seja,

$$p_{ENT} - p_{SAI} = \rho \left(h_T + \frac{v_{SAI}^2}{2} - \frac{v_{ENT}^2}{2} \right)$$

Mas $\frac{\dot{W}_{ELXO,T}}{\dot{m}} = h_T$, logo

$$p_{ENT} - p_{SAI} = \rho \left(\frac{\dot{W}_{ELXO,T}}{\dot{m}} + \frac{v_{SAI}^2}{2} - \frac{v_{ENT}^2}{2} \right)$$

A vazão mássica da água é

$$\dot{m} = \rho \dot{V} = 1000 \cdot 0,6 = 600 \text{ kg/s}$$

As velocidades da água na admissão e na descarga são respectivamente

$$v_{ENT} = \frac{\dot{V}}{S_{ENT}} = \frac{\dot{V}}{\pi D_{ENT}^2 / 4} = \frac{0,64}{\pi \cdot 0,3^2} = 8,5 \text{ m/s}$$

E

$$v_{SAI} = \frac{\dot{V}}{S_{SAI}} = \frac{\dot{V}}{\pi D_{SAI}^2 / 4} = \frac{0,64}{\pi \cdot 0,4^2} = 4,8 \text{ m/s}$$

Finalmente, a queda de pressão na turbina é

$$p_{ENT} - p_{SAI} = 1000 \left(\frac{60 \cdot 1000}{600} + \frac{4,8^2}{2} - \frac{8,5^2}{2} \right) = 580 \text{ kPa}$$

Conclusão

A definição de carga de energia permite fazer um balanço de energia bastante simples entre a entrada e a saída de fluidos através de dispositivos. Em geral, dispositivos, tais como bombas, apresentam ganho de carga de energia, expressa pela potência da bomba. Por outro lado, turbinas e tubulação ensejam uma perda de carga de energia, cuja determinação torna-se importante para se ter um escoamento satisfatório do fluido.

Resumo

No escoamento de um fluido através de tubos, a energia mecânica contida no fluido pode aumentar ou diminuir. A energia por unidade de massa do fluido é definida como *carga*. Então, podemos encontrar num fluido, carga de pressão, cinética e potencial.

Devido a efeitos da viscosidade, em escoamento de fluidos reais ocorre perda de energia em forma de calor. Essa energia dissipada é identificada como a perda de carga h_l , sendo definida pela seguinte expressão:

$$h_l = (u_{SAI} - u_{ENT}) - \frac{\dot{Q}}{\dot{m}}$$

Dada a dificuldade de se mensurar variações de energia interna e taxas de calor ao longo de um tubo, resultados experimentais são usados para determinar a perda de carga. A perda de carga pode ser decomposta em perda de carga distribuída e perda de carga localizada da seguinte maneira:

$$h_l = h_{l,D} + h_{l,L} = f \frac{L}{D} \frac{\bar{v}^2}{2} + K \frac{\bar{v}^2}{2}$$

Finalmente, considerando bombas ou centrifugas e turbinas no trecho de interesse de um tubo, a equação de balanço global da energia pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gy\right)_{ENT} + h_B - \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gy\right)_{SAI} - h_T = h_l$$

Referências

BRUNETTI, Franco. *Mecânica dos fluidos*. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

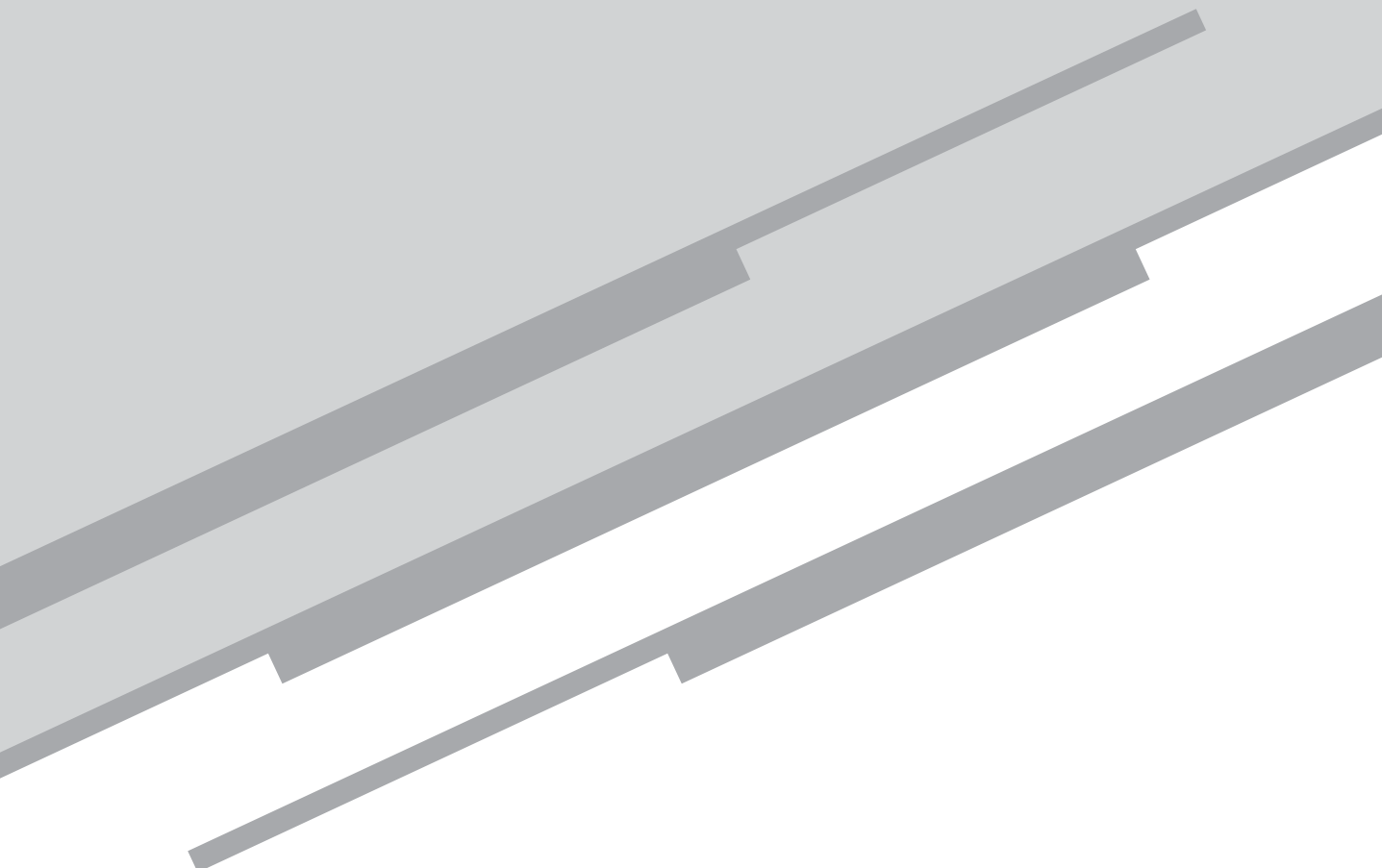
ÇENGEL, Yunus A.; GHAJAR, Afshin J. *Transferência de calor e massa: uma abordagem prática*. 4. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012.

FOX, Robert W.; MCDONALD, Alan T.; PRITCHARD, Philip J. *Introdução à mecânica dos fluidos*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

INCROPERA, Frank P. et al. *Fundamentos de transferência de calor e de massa*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

Aula 9

Medidores de velocidade e vazão



Alexandre Santos Francisco

Meta

Apresentar os princípios do funcionamento de instrumentos usados para a medição da velocidade e da vazão de escoamento de um fluido.

Objetivos

Após o estudo do conteúdo desta aula, você deverá ser capaz de:

1. Aplicar a Equação de Bernoulli;
2. Entender o funcionamento de medidores de velocidade; e
3. Entender o funcionamento de medidores de vazão.

Introdução

A finalidade desta aula é apresentar os princípios físicos envolvidos nas técnicas aplicadas aos instrumentos de medição de certos parâmetros de escoamento de um fluido. Entre os parâmetros de interesse para o engenheiro, estão velocidade e vazão de escoamento.

Em alguns instrumentos de medida, a técnica empregada serve-se da chamada Equação de **Bernoulli** como princípio físico para obter o valor da medida. Embora esta Equação seja útil, parâmetros de correção são adicionados a ela para ajustá-la à situação real do escoamento nos instrumentos.

Existem diversos tipos de instrumentos de medida de velocidade e vazão adequados para cada situação de escoamento; todavia, nesta aula, ficaremos limitados aos instrumentos comumente usados no ensino de mecânica dos fluidos.

Equação de bernoulli

A Equação de Bernoulli é usada em escoamentos ideais, nos quais se considera que os efeitos da viscosidade do fluido sejam desprezíveis. Embora essa situação física não seja encontrada na realidade prática, esse **modelo matemático** de Bernoulli permite obter informações estimadas de quantidades físicas de interesse.

Nos escoamentos de um fluido incompressível e com efeitos da viscosidade desprezíveis, as variações de energia interna e a taxa de transferência de calor se anulam ou ambas são nulas, resultando em escoamentos sem perda de carga. Nesta situação, vamos proceder a um balanço global da energia.

Consideremos um escoamento dentro de um tubo de corrente de diâmetro infinitesimal. Nosso volume de controle é a região limitada pelo tubo de corrente. Podemos elencar as seguintes considerações para o problema:

- (1) regime estacionário;
- (2) fluido incompressível;
- (3) efeitos da viscosidade desprezíveis; e
- (4) escoamento uniforme nas seções transversais do tubo de corrente.

O balanço global da energia para o volume de controle é



Daniel Bernoulli
(1700-1782)

Matemático suíço importante por suas formulações a respeito da mecânica de fluidos e foi um dos primeiros a entender *pressão atmosférica* em termos moleculares. A Equação de Bernoulli foi apresentada por ele em sua obra *Hidrodinâmica*, de 1738

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Daniel_Bernoulli#/media/File:Daniel_Bernoulli_001.jpg.

Modelo matemático

Idealização em forma de Equação, na qual são usadas técnicas de construção lógica, não necessariamente naturais e, certamente, não completas. Deve-se ter em mente que os sistemas físicos reais são, em geral, complexos, e que, criando um modelo matemático, simplifica-se o sistema, podendo analisá-lo com mais facilidade.

$$\dot{Q} - \dot{W}_{EIXO} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e \rho dV + \int_{SC} (e + \frac{p}{\rho}) \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (9.1)$$

Para regime estacionário,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e \rho dV = 0 \quad (9.2)$$

e ausência de bombas ou turbinas,

$$\dot{W}_{EIXO} = 0 \quad (9.3)$$

Assim,

$$\dot{Q} = \int_{SC} (e + \frac{p}{\rho}) \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (9.4)$$

Para escoamento uniforme na entrada e saída do tubo de corrente,

$$\dot{Q} = (e + \frac{p}{\rho})_{SAI} \int_{SAI} \rho v dS - (e + \frac{p}{\rho})_{ENT} \int_{ENT} \rho v dS \quad (9.5)$$

Do balanço global da massa,

$$\int_{ENT} \rho v dS = \int_{SAI} \rho v dS = \dot{m} \quad (9.6)$$

Retornando ao balanço global da energia,

$$\dot{Q} = (e + \frac{p}{\rho})_{SAI} \dot{m} - (e + \frac{p}{\rho})_{ENT} \dot{m} \quad (9.7)$$

Mas $e = u + \frac{v^2}{2} + gy$; logo,

$$\dot{Q} = (u + \frac{v^2}{2} + gy + \frac{p}{\rho})_{SAI} \dot{m} - (u + \frac{v^2}{2} + gy + \frac{p}{\rho})_{ENT} \dot{m} \quad (9.8)$$

Ou, também,

$$(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gy)_{ENT} - (\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gy)_{SAI} = (u_{SAI} - u_{ENT}) - \frac{\dot{Q}}{\dot{m}} \quad (9.9)$$

Para fluido incompressível e efeitos de viscosidade desprezíveis,

$$(u_{SAI} - u_{ENT}) - \frac{\dot{Q}}{\dot{m}} = 0 \quad (9.10)$$

Finalmente, podemos escrever que

$$(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gy)_{ENT} = (\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gy)_{SAI} \quad (9.11)$$

A Equação (9.11) é conhecida como a Equação de Bernoulli, a qual expressa a conservação da energia mecânica ao longo de uma linha de corrente no escoamento.

Atividade 1

Atende ao objetivo 1

Água escoar sob uma comporta de um grande reservatório, conforme a **Figura 9.1**. A velocidade da água **a jusante** da comporta é considerada uniforme nas seções transversais. Expresse essa velocidade em termos das alturas H e h . Despreze os efeitos de viscosidade da água.

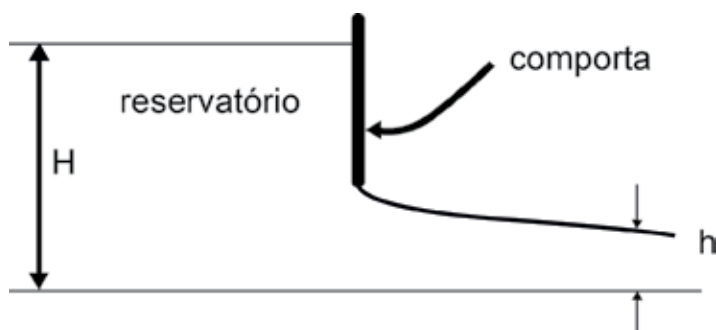


Figura 9.1: Escoamento sob uma comporta.

A jusante

Posição que se encontra no lado do destino do escoamento. Ao contrário, uma posição que se encontra no lado da origem do escoamento é considerada **a montante**.

Resposta comentada

Neste problema, devemos escolher uma linha de corrente que segue de montante a jusante da comporta. Escolhemos, então, a linha de corrente que passa ao longo da superfície livre em ambos os lados da comporta. Valem as seguintes considerações para o problema:

- (1) regime estacionário;
- (2) fluido incompressível;
- (3) efeitos de viscosidade desprezíveis; e
- (4) escoamento ao longo da linha de corrente.

Assim, da Equação de Bernoulli,

$$\left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gy\right)_{ENT} = \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gy\right)_{SAI}$$

A montante (ENT) e a jusante (SAI) da comporta, encontramos os seguintes valores para cada termo:

$$\frac{p_{atm}}{\rho} + \frac{v_{ENT}^2}{2} + gH = \frac{p_{atm}}{\rho} + \frac{v_{SAI}^2}{2} + gh$$

ou

$$\frac{v_{ENT}^2}{2} + gH = \frac{v_{SAI}^2}{2} + gh$$

Resolvendo para a velocidade,

$$v_{SAI} = \sqrt{2g(H-h) + v_{ENT}^2}$$

Para grandes reservatórios,

$$v_{ENT}^2 \cong 0$$

Logo,

$$v_{SAI} = \sqrt{2g(H-h)}$$

Medição de velocidade

A velocidade é uma importante propriedade do escoamento, e, portanto, sua medição torna-se necessária em muitos casos. A medida de

velocidade permite determinar a vazão de escoamentos em tubulações, construir perfis de velocidade em torno de uma aeronave, etc.

Sonda pitot-estática

Um instrumento comum de medida de velocidade é a sonda pitot-estática. Esta sonda é basicamente constituída por dois tubos concêntricos que possui dois orifícios, conforme ilustração mostrada na Figura 9.1. Um orifício posicionado na ponta da sonda e em sentido oposto ao escoamento permite medir a pressão total (ou de estagnação). Outro orifício posicionado na lateral da sonda e na direção transversal ao escoamento permite medir a pressão estática.

Para fluidos incompressíveis e efeitos de viscosidade desprezíveis, a Equação de Bernoulli pode ser usada para relacionar variações da velocidade e da pressão junto à sonda pitot-estática, em regime estacionário. No escoamento mostrado na **Figura 9.2**, escrevendo a Equação de Bernoulli para uma linha de corrente passando pelos pontos 1 e 2, temos que

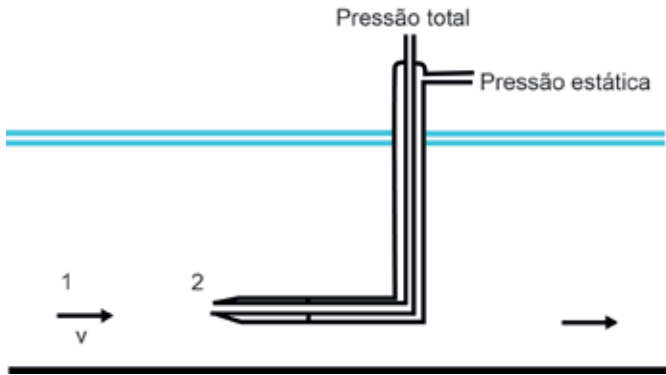


Figura 9.2: Sonda pitot-estática

$$\left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gy\right)_1 = \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gy\right)_2 \quad (9.12)$$

Se a pressão estática é p_E no ponto 1, no qual a velocidade do escoamento é v , e a pressão total é p_T no ponto 2, no qual a velocidade é zero, a equação fica

$$\frac{p_E}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \frac{p_T}{\rho} \quad (9.13)$$

Resolvendo a equação para a velocidade do escoamento,

$$v = \sqrt{\frac{2(p_T - p_E)}{\rho}} \quad (9.14)$$

A equação anterior permite, conhecidos os fluidos, determinar a velocidade do escoamento na posição onde a sonda pitot-estática está localizada. Medindo-se a velocidade em diversas posições de uma seção transversal ao escoamento, é possível construir um perfil de velocidade.

Atividade 2

Atende ao objetivo 2

Água escoar através de um tubo no qual foi instalada uma sonda pitot-estática de forma a medir a velocidade do escoamento no eixo central do tubo. Essa sonda está medindo uma pressão estática de $5,0 \times 10^2$ Pa e uma pressão de estagnação de $6,8 \times 10^3$ Pa. Determine a velocidade do escoamento da água.

Resposta comentada

Neste problema, devemos escolher uma linha de corrente que passa pelo eixo central do tubo. Valem as seguintes considerações para o problema:

- (1) regime estacionário;
- (2) fluido incompressível;
- (3) efeitos de viscosidade desprezíveis; e
- (4) escoamento ao longo da linha de corrente.

Assim, da Equação de Bernoulli, a velocidade do escoamento é dada por

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2(p_T - p_E)}{\rho}} \\ &= \sqrt{\frac{2(6,8 \times 10^3 - 5,0 \times 10^2)}{1000}} = 3,55 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Medição de vazão

A vazão volumétrica (ou simplesmente vazão) é um dos parâmetros mais comumente medidos em escoamento de fluidos. A medição da vazão de fluidos, por exemplo, nas indústrias de agricultura, petróleo, química, bebidas e abastecimento de água tem grande importância em aspectos materiais e financeiros.



Metrologia



Thiagonegris

Figura 9.3: Sonda pitot-estática.

Fonte: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=15584614>

A metrologia na indústria do petróleo está presente mesmo antes da definição do local onde será perfurado o poço (veja a **Figura 9.3**). Durante a perfuração de cada poço, a cada metro perfurado e a cada tubo adicionado, as medições são realizadas e considerações são feitas acerca da quantidade de fluido que está sendo circulado, da pressão, do peso da coluna de tubos e, então, programas são redesenhados conforme os resultados das medições dos parâmetros. Após a perfuração, vários testes são realizados para possibilitar o conhecimento do potencial de produção da rocha-reservatório. Também

neste estágio, são obtidos dados de profundidade, vazões e volumes dos líquidos e gases oriundos do reservatório etc.

Medidor de pressão diferencial

Medidores de pressão diferencial são comumente usados em aplicações industriais pela sua simplicidade, confiabilidade, robustez e baixo custo. Seu funcionamento baseia-se no princípio de uma restrição do escoamento no qual uma variação na velocidade leva a uma variação na pressão. A medição da pressão diferencial, juntamente com o uso de correlações experimentais, permite determinar a vazão.

Consideremos um escoamento de um fluido num duto circular, encontrando uma restrição na forma de uma placa de orifício, conforme mostrado na **Figura 9.4**. Devido a efeitos de inércia do movimento do fluido, a corrente de escoamento é acelerada ao passar pela restrição. Isso faz com que a área da seção transversal da corrente principal a jusante da restrição (**vena contracta**) seja menor do que a área do orifício.

Vena contracta (veia contraída)

Região de um escoamento de fluido na qual a área da seção transversal do escoamento fica menor do que a própria área do orifício por onde o fluido tenha passado. Como a vazão mássica permanece constante, o aumento de velocidade do escoamento é compensado pela redução da área da seção transversal do escoamento.

Para um problema de escoamento ideal, podemos elencar as seguintes considerações:

- (1) regime estacionário;
- (2) fluido incompressível;
- (3) efeitos da viscosidade desprezíveis;
- (4) escoamento ao longo da linha de corrente central do duto; e
- (5) escoamento uniforme nas seções transversais.

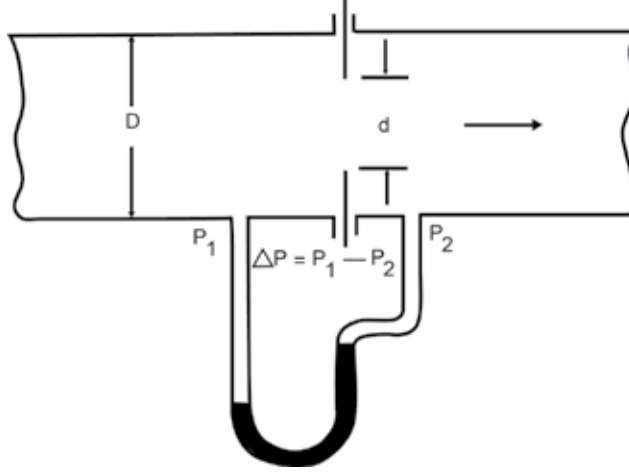


Figura 9.4: Restrição ao escoamento com placa de orifício.

Assim, da Equação de Bernoulli entre pontos a montante e a jusante da restrição,

$$\left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gy\right)_1 = \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gy\right)_2 \quad (9.15)$$

Resolvendo para a velocidade a jusante da restrição,

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho[1 - (v_1/v_2)^2]}} \quad (9.16)$$

Do balanço global da massa para um volume de controle envolvendo as seções transversais da corrente a montante e a jusante da restrição,

$$\dot{V} = v_1 A_1 = v_2 A_2 \quad (9.17)$$

Logo,

$$(v_1/v_2)^2 = (A_2/A_1)^2 \quad (9.18)$$

Então,

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho[1 - (A_2/A_1)^2]}} \quad (9.19)$$

A vazão ideal é dada, então, por

$$\dot{V}_{ideal} = \frac{A_2}{\sqrt{1 - (A_2/A_1)^2}} \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} \quad (9.20)$$

Para determinar a vazão real, ajustamos a vazão ideal por um coeficiente de descarga, ou seja,

$$\dot{V}_{real} = C_d \dot{V}_{ideal} \quad (9.21)$$

na qual a área da seção a jusante da restrição A_2 (*vena contracta*) é aproximada pela área do orifício A_o . Assim,

$$\dot{V}_{real} = \frac{C_d A_o}{\sqrt{1 - (A_o/A_1)^2}} \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} \quad (9.22)$$

Fazendo a razão entre os diâmetros do orifício e do duto $\beta = d/D$, então

$$(A_o/A_1)^2 = \beta^4 \quad (9.23)$$

Definindo o coeficiente de vazão como

$$K = \frac{C_d}{\sqrt{1 - \beta^4}} \quad (9.24)$$

Finalmente, a vazão real fica expressa por

$$\dot{V}_{real} = K A_o \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} \quad (9.25)$$

O coeficiente de vazão é um parâmetro adimensional que depende do número de Reynolds e da razão de diâmetros. Essa relação é apresentada na forma de um diagrama encontrado em literaturas técnicas especializadas.

Conclusão

Em instrumentos de medição de velocidade e vazão, encontramos situações de escoamento real. Entretanto, o funcionamento desses instrumentos de medição baseia-se na aplicação de princípios físicos a situações de escoamento ideal. Uma maneira conveniente de chegar-se a resultados de medida mais realísticos é aplicando fatores de correção aos resultados ideais.

Atividade final

Atende ao objetivo 3

Água escoar através de um tubo com 10 cm de diâmetro no qual foi instalado um medidor de pressão diferencial, cujo orifício da restrição

possui 5 cm de diâmetro. A queda de pressão registrada no medidor é de 1×10^3 Pa. Considerando um coeficiente de vazão igual a 0,624, determine a vazão real do escoamento.

Resposta comentada

Neste problema, valem as seguintes considerações:

- (1) regime estacionário;
- (2) fluido incompressível;
- (3) efeitos da viscosidade desprezíveis;
- (4) escoamento ao longo da linha de corrente central do duto; e
- (5) escoamento uniforme nas seções transversais.

Assim, a vazão real do escoamento é dada por

$$\begin{aligned}\dot{V}_{real} &= K A_o \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} \\ &= 0,645 \cdot \frac{\pi \cdot 5^2 \times 10^{-4}}{4} \sqrt{\frac{2 \cdot 1 \times 10^3}{1000}} = 1,73 \times 10^{-3} \text{ m}^3 / \text{s}\end{aligned}$$

Resumo

A Equação de Bernoulli é usada em escoamentos em regime estacionário, nos quais se considera que o fluido é incompressível e efeitos da viscosidade do fluido são desprezíveis. Nesse caso, para pontos 1 e 2 de uma linha de corrente qualquer, podemos escrever que

$$\left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gy\right)_1 = \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gy\right)_2$$

Um instrumento comum de medida de velocidade é a sonda pitot-estática. Conhecidos o fluido e as pressões estática p_E e total p_T , a velocidade do escoamento fica determinada por

$$v = \sqrt{\frac{2(p_T - p_E)}{\rho}}$$

A medição da pressão diferencial a montante p_1 e a jusante p_2 a uma placa de orifício com área A_o , juntamente com o uso de correlações

experimentais, permite determinar a vazão do escoamento de acordo com a expressão

$$\dot{V}_{real} = KA_o \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}$$

Referências

FOX, Robert W.; MCDONALD, Alan T.; PRITCHARD, Philip J. *Introdução à mecânica dos fluidos*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006. 798 p.

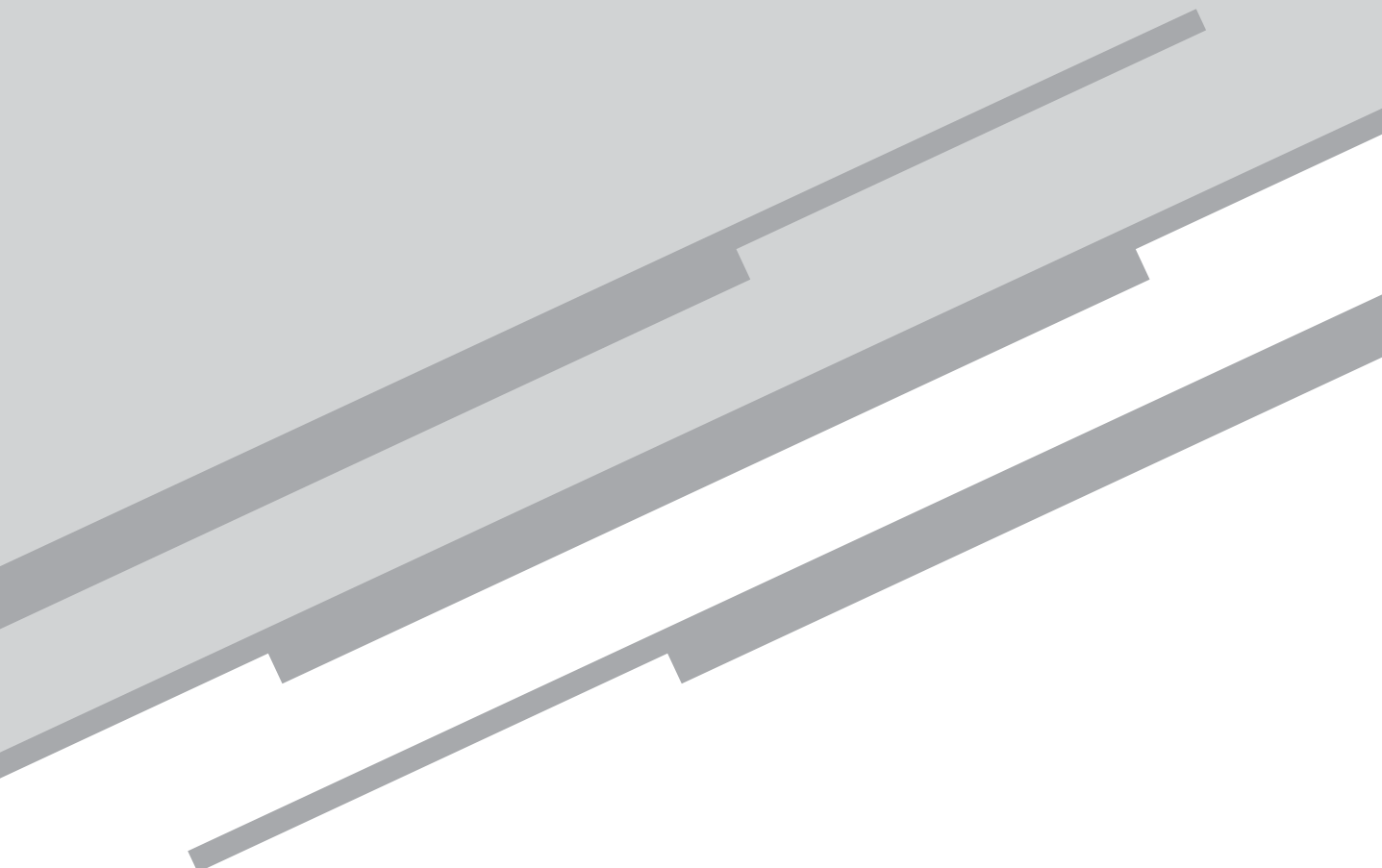
BRUNETTI, Franco. *Mecânica dos fluidos*. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008. 431 p.

INCROPERA, Frank P.; DEWITT, David P.; BERGMAN, Theodore L.; LAVINE, Adrienne S. *Fundamentos de transferência de calor e de massa*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008. 643 p.

ÇENGEL, Yunus A.; GHAJAR, Afshin J. *Transferência de calor e massa: uma abordagem prática*. 4. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012. 904 p.

Aula 10

Fundamentos da transferência de calor



Alexandre Santos Francisco

Meta

Apresentar os princípios fundamentais e as quantidades físicas da transferência de calor por condução necessários para o desenvolvimento de formulações matemáticas e para a resolução de problemas práticos.

Objetivos

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. aplicar a Lei de Fourier da condução;
2. desenvolver a equação da difusão de calor; e
3. resolver problemas de condução em regime estacionário.

Introdução – conduzindo calor

Quando o interesse num determinado problema está voltado para a energia térmica em trânsito, estamos diante de um problema de transferência de calor. A transferência de calor está associada à ocorrência de determinados mecanismos físicos. A ação desses mecanismos físicos determina diferentes modos de transferência de calor. Esses conhecimentos nos permitirão compreender por que resfriamos melhor uma sopa com nosso sopro de ar; como podemos manter coisas mais geladas por mais tempo dentro de uma caixa de isopor do que de uma caixa de cobre.

Nesta aula, trataremos de um modo de transferência de calor chamado de condução. A partir de uma relação constitutiva conhecida como Lei de Fourier, derivaremos a equação governante para a condução em geral. Aplicaremos esta equação básica a problemas de condução em sistemas de paredes planas, nos quais a transferência de calor se dá em regime estacionário.

Fundamentos da transferência de calor

A força motriz para a transferência de calor é a existência de um gradiente de temperatura em um determinado meio. Sempre que houver duas superfícies a diferentes temperaturas, ocorrerá transferência de calor através do meio interposto entre elas. A **Figura 10.1** ilustra o calor que segue na direção da maior temperatura para a menor temperatura.

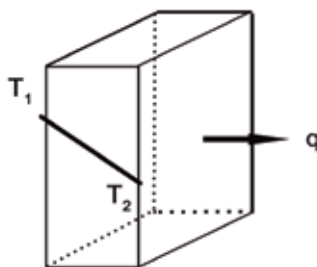


Figura 10.1: Transferência de calor entre superfícies.

O meio interposto entre duas superfícies através do qual ocorre a transferência de calor pode ser um sólido, fluido ou vácuo. Em cada meio, mecanismos físicos, tais como agitação atômica ou molecular,

movimento global de fluidos ou emissão de fótons vêm a efeito, caracterizando o modo de transferência de calor. O mecanismo que ocorre em nível local, pela agitação atômica ou molecular de um meio material, é chamado de difusão. Quando a transferência está associada ao movimento global de um meio material, o mecanismo de transferência é chamado de advecção. No caso do calor transferido sob a forma de fótons através de um meio a vácuo, o mecanismo de transferência é chamado de radiação. Vamos tratar de cada um deles mais adiante.

Apesar de a transferência de calor ter estreita ligação com a termodinâmica, ela é própria de sistemas físicos que não estão em equilíbrio térmico. Esta situação pode ser observada em problemas de avaliação e dimensionamento de sistemas da engenharia ou naturais. Portanto, o estudo da transferência de calor, e não o da termodinâmica, permite projetar equipamentos importantes, tais como: trocadores de calor, caldeiras, fornos, coletores de energia solar, etc.



Se Dona Maria, ao colocar a massa de bolo dentro de um forno, utilizasse apenas os conhecimentos da termodinâmica, ela saberia apenas a quantidade de calor necessária para o bolo ficar pronto, mas não teria ideia do tempo que levaria para assar o bolo. E correria risco de ter um “bolo solado”!



Transferência de calor por condução

Define-se como condução o modo de transferência de calor em que a difusão é o único mecanismo físico atuante. Isto pode ocorrer em meios sólidos ou em meios líquidos em repouso.

A lei de fourier

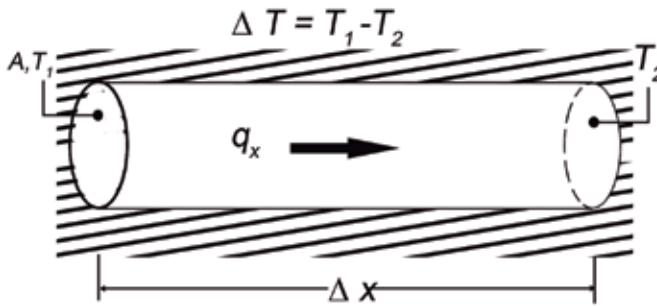


Figura 10.2: Transferência de calor através de uma barra.

A Lei de Fourier é uma equação constitutiva obtida a partir de observações experimentais. Esta equação relaciona a taxa de calor com o gradiente de temperatura. Considere uma barra cujas extremidades estão a diferentes temperaturas. Observou-se experimentalmente que a taxa de calor estabelecida na barra é diretamente proporcional à diferença de temperatura e à área da seção transversal da barra, conforme ilustrado na **Figura 10.2**. Assim, na direção x coincidente com o eixo da barra no sentido da queda de temperatura, a taxa de calor é dada por

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = kA \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (10.1)$$

onde q é a quantidade de calor, A é a área da seção transversal da barra, ΔT é a diferença entre a maior temperatura e a menor temperatura, Δx é o comprimento da barra, e k é a condutividade térmica. Quando $\Delta x \rightarrow 0$, obtemos a taxa de calor

$$\dot{q}_x = -kA \frac{dT}{dx} \quad (10.2)$$

Define-se $\dot{q}'' = \frac{\dot{q}}{A}$ como fluxo de calor. A direção do fluxo de calor

é sempre normal à área da seção transversal; portanto, o fluxo de calor é uma grandeza direcional. E, generalizando para problemas tridimensionais, podemos reescrever

$$\vec{q}'' = -k\nabla T \quad (10.3)$$

Atividade 1

Atende ao objetivo 1

A distribuição de temperatura ao longo de uma barra com comprimento $L = 1 \text{ m}$ e área de seção transversal $A = 0,01 \text{ m}^2$, em um certo instante de tempo, é dada por $T(x) = a + bx + cx^2$, na qual a temperatura está em graus Celsius e x em metros, onde $a = 900^\circ\text{C}$, $b = -300^\circ\text{C/m}$ e $c = -50^\circ\text{C/m}^2$. O material da barra possui as seguintes propriedades: $\rho = 1600 \text{ kg/m}^3$, $k = 40 \text{ W/(m.K)}$ e $c_p = 4 \text{ kJ/(kg.K)}$. Determine a taxa de calor em $x = 1 \text{ m}$.

Resposta comentada

Da Lei de Fourier,

$$\begin{aligned} \dot{q}\big|_{x=1\text{m}} &= -kA \frac{dT}{dx}\bigg|_{x=1\text{m}} = -kA(b + 2cx)\bigg|_{x=1\text{m}} \\ &= -40 \cdot 0,01 \cdot (-300 + 2 \cdot (-50) \cdot 1) = 16 \text{ kW} \end{aligned}$$

Equação da difusão de calor

Em problemas de transferência de calor por condução, é importante conhecer o campo de temperatura, para, posteriormente, determinar-se o fluxo de calor através da Lei de Fourier. O campo de temperatura pode ser obtido como solução da equação governante da condução.

Do balanço global da energia para um volume de controle,

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e \rho dV + \int_{SC} e \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (10.4)$$

ou, também,

$$\int_{VC} \frac{\delta \dot{Q}}{dV} dV - \int_{VC} \frac{\delta \dot{W}}{dV} dV = \int_{VC} \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} dV + \int_{VC} \nabla \cdot (\rho e \vec{v}) dV \quad (10.5)$$

onde se aplicou o **teorema da divergência de Gauss** ao último termo. Podemos reunir todos os termos numa integral única.

$$\int_{VC} \left[\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \vec{v}) - \frac{\delta \dot{Q}}{dV} + \frac{\delta \dot{W}}{dV} \right] dV = 0 \quad (10.6)$$

Para um volume controle diferencial, isto é, quando $VC \rightarrow 0$,

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \vec{v}) = \frac{\delta \dot{Q}}{dV} - \frac{\delta \dot{W}}{dV} \quad (10.7)$$

A taxa de calor no elemento diferencial é decomposta da seguinte forma:

$$\delta \dot{Q} = \delta \dot{Q}_x + \delta \dot{Q}_y + \delta \dot{Q}_z + \dot{q}''' dV \quad (10.8)$$

onde \dot{q}''' é a taxa volumétrica de geração de calor.

Observando apenas a direção x , a taxa de calor através do elemento diferencial (por convenção, o calor que sai do sistema recebe sinal negativo, e sinal positivo em caso contrário) é obtida por

$$\delta \dot{Q}_x = -\dot{q}_x''(x+dx, y, z) dA_x + \dot{q}_x''(x, y, z) dA_x \quad (10.9)$$

Uma aproximação da diferença entre os fluxos de calor na direção x é obtida por uma expansão em série de Taylor,

$$\dot{q}_x''(x+dx, y, z) = \dot{q}_x''(x, y, z) + \frac{\partial \dot{q}_x''}{\partial x}(x, y, z) dx \quad (10.10)$$

Assim, a taxa de calor na direção x assume a forma

$$\delta \dot{Q}_x = -\frac{\partial \dot{q}_x''}{\partial x}(x, y, z) dx dy dz \quad (10.11)$$

Logo,

$$\delta \dot{Q} = -\frac{\partial \dot{q}_x''}{\partial x} dx dy dz - \frac{\partial \dot{q}_y''}{\partial y} dx dy dz - \frac{\partial \dot{q}_z''}{\partial z} dx dy dz + \dot{q}''' dV = -(\nabla \cdot \dot{\vec{q}}'') dV + \dot{q}''' dV \quad (10.12)$$

Teorema da divergência de Gauss

Relação entre uma integral de volume de um dado domínio e uma integral de superfície na sua fronteira. Esse teorema é um instrumento poderoso para os modelos matemáticos que descrevem alguns fenômenos físicos importantes.

Substituindo a expressão da taxa de calor na equação 10.7, obtemos

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \bullet (\rho e \vec{v}) = -(\nabla \bullet \dot{\vec{q}}'') + \dot{q}''' - \frac{\delta \dot{W}}{dV} \quad (10.13)$$

Considerando propriedades constantes, meio material em repouso e ausência de trabalho, resulta

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} = -(\nabla \bullet \dot{\vec{q}}'') + \dot{q}''' \quad (10.14)$$

Na ausência de mudança de fase ($e = c_p T$) e usando a Lei de Fourier,

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \bullet (k \nabla T) + \dot{q}''' \quad (10.15)$$

Essa equação é chamada de equação da difusão de calor, cuja solução permite determinar o campo de temperatura.

Atividade 2

Atende ao objetivo 2

Para o mesmo problema da Atividade 1, determine a taxa de variação da temperatura em relação ao tempo em $x = 1 \text{ m}$.

Resposta comentada

Considerando para este problema as seguintes situações:

- (1) propriedades uniformes;
- (2) ausência de geração de calor; e
- (3) condução unidimensional.

A equação da difusão de calor

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \bullet (k \nabla T) + \dot{q}'''$$

fica

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{x=1m} &= \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x=1m} = \frac{k}{\rho c_p} (2c) \Big|_{x=1m} \\ &= \frac{40}{1600.4} (2 \cdot (-50)) = -6,25 \times 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C/s} \end{aligned}$$

Condução unidimensional em regime estacionário

Em muitos problemas práticos, a equação da difusão de calor é usada numa forma simplificada. Podemos encontrar tal situação em problemas de condução de calor através de paredes de equipamentos ou construções, por exemplo.

Para condições de regime estacionário, a equação da difusão de calor fica

$$\nabla \bullet (k \nabla T) + \dot{q}''' = 0 \quad (10.16)$$

E na ausência de geração de calor,

$$\nabla \bullet (k \nabla T) = 0 \quad (10.17)$$

A solução da equação para um problema particular requer que se estabeleçam duas condições de contorno para cada coordenada espacial.

Parede plana simples

Considere uma parede plana mostrada na **Figura 10.3**, cujas superfícies se encontram a temperatura T_1 e T_2 nas posições x_1 e x_2 , respectivamente. Sob este gradiente de temperatura, uma taxa de transferência de calor por condução é estabelecida através da parede.

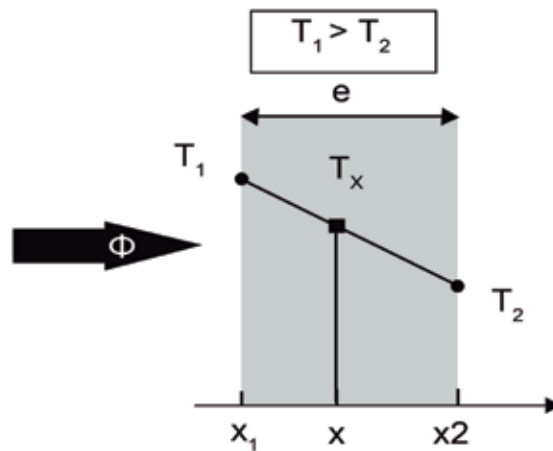


Figura 10.3: Condução através de uma parede simples.

Considerando:

- (1) regime estacionário;
- (2) propriedades uniformes;
- (3) ausência de geração de calor; e
- (4) condução unidimensional.

A equação da difusão de calor fica

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (10.18)$$

com condições de contorno dadas por

$$T(x_1) = T_1 \text{ e } T(x_2) = T_2$$

Podemos concluir da equação (10.18) que o fluxo de calor é uma constante, independente de x . Integrando duas vezes a equação, obtemos a solução geral

$$T(x) = C_1 x + C_2 \quad (10.19)$$

Substituindo as condições de contorno na equação (10.19), obtemos a solução particular, ou seja, o campo de temperatura

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} x + T_1 \quad (10.20)$$

Observa que, neste caso, a temperatura é uma função linear, decrescente de x .

Parede plana composta

A parede plana composta é uma parede constituída pela justaposição de paredes simples, de materiais distintos, ou seja, com condutividades térmicas diferentes.

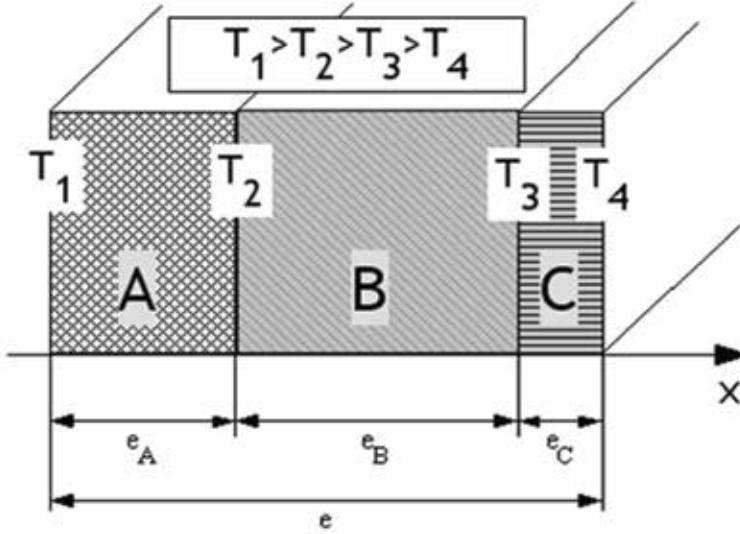


Figura 10.4: Condução através de uma parede composta em série.

Quando o fluxo de calor é normal às superfícies de interface entre as paredes simples, temos uma parede composta em série. Na **Figura 10.4**, está ilustrada uma parede composta em série por três camadas distintas.

Seja e_A a espessura da parede simples A, igual à diferença $x_2 - x_1$. Da linearidade do campo de temperatura numa parede,

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_2 - T_1}{e_A} \quad (10.21)$$

Assim, a taxa de calor é

$$\dot{q} = k_A A \frac{T_1 - T_2}{e_A} \quad (10.22)$$

Definimos resistência térmica de condução da parede simples A por

$$R_A = \frac{T_1 - T_2}{\dot{q}} = \frac{e_A}{k_A A} \quad (10.23)$$

A resistência térmica de condução expressa o grau de dificuldade da transferência de calor por condução através de uma parede.

A resistência térmica de condução da parede composta pode ser obtida fazendo-se uma analogia com a resistência equivalente de sistemas elétricos. Assim, a resistência térmica equivalente de uma parede composta em série é obtida por

$$R_{eq} = \sum_i R_i = \sum_i \frac{e_i}{k_i A}, \quad (10.24)$$

com $i = A, B, C$.

Conclusão

A transferência de calor por condução é governada pela Lei de Fourier, na qual a taxa de calor é determinada a partir do campo de temperatura. Para se conhecer o campo de temperatura, derivamos a chamada equação da difusão de calor a partir de um balanço local da energia térmica. A aplicação desta equação a diversas configurações de superfícies permite obter modelos de solução para problemas práticos, por exemplo: o tempo necessário para se assar o bolo da Dona Maria, num forno.



Atividade final

Atende ao objetivo 3

A parede de um forno possui duas camadas de espessuras de $0,20 \text{ m}$ de tijolo refratário e $0,13 \text{ m}$ de tijolo isolante, com $k_1 = 1,2 \text{ kcal}/(\text{h.m.}^\circ\text{C})$ e

$k_2 = 0,15 \text{ kcal}/(\text{h.m.}^\circ\text{C})$, respectivamente. A temperatura da superfície interna do refratário é 1675°C e a temperatura da superfície externa do isolante é 145°C . Desprezando a resistência térmica das juntas de argamassa, determine o fluxo de calor perdido pela parede do forno.

Resposta comentada

A resistência térmica equivalente da parede do forno é dada por

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^2 \frac{e_i}{k_i A} = \frac{e_1}{k_1 A} + \frac{e_2}{k_2 A}$$

E a taxa de calor através da parede,

$$\dot{q} = \frac{T_1^{\text{int}} - T_2^{\text{ext}}}{R_{eq}} = \frac{T_1^{\text{int}} - T_2^{\text{ext}}}{\frac{e_1}{k_1 A} + \frac{e_2}{k_2 A}}$$

Logo, o fluxo de calor é obtido por

$$\dot{q}'' = \dot{q}A = \frac{T_1^{\text{int}} - T_2^{\text{ext}}}{\frac{e_1}{k_1} + \frac{e_2}{k_2}} = \frac{1675 - 145}{\frac{0,20}{1,2} + \frac{0,13}{0,15}} = 1480 \text{ kcal}/(\text{h.m}^2)$$

Resumo

Existem três mecanismos de transferência de calor, a saber: difusão, advecção e radiação. Quando a difusão é o mecanismo predominante, o modo de transmissão de calor é chamado de condução.

O fluxo de calor por condução é quantificado a partir de uma equação constitutiva, conhecida como Lei de Fourier,

$$\vec{q}'' = -k \nabla T$$

O campo de temperatura resultante da condução é determinado a partir de uma equação governante, conhecida como equação da difusão de calor,

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{q}'''$$

Numa parede plana simples de espessura L , cujas superfícies se encontram a temperaturas decrescentes T_1 e T_2 , considerando regime estacionário, propriedades uniformes e ausência de geração de calor, o campo de temperatura é dado por

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$$

Definimos resistência térmica de condução de uma parede simples por

$$R = \frac{T_1 - T_2}{\dot{q}} = \frac{L}{kA}$$

E a resistência térmica equivalente de uma parede composta em série é obtida por

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n \frac{L_i}{k_i A}$$

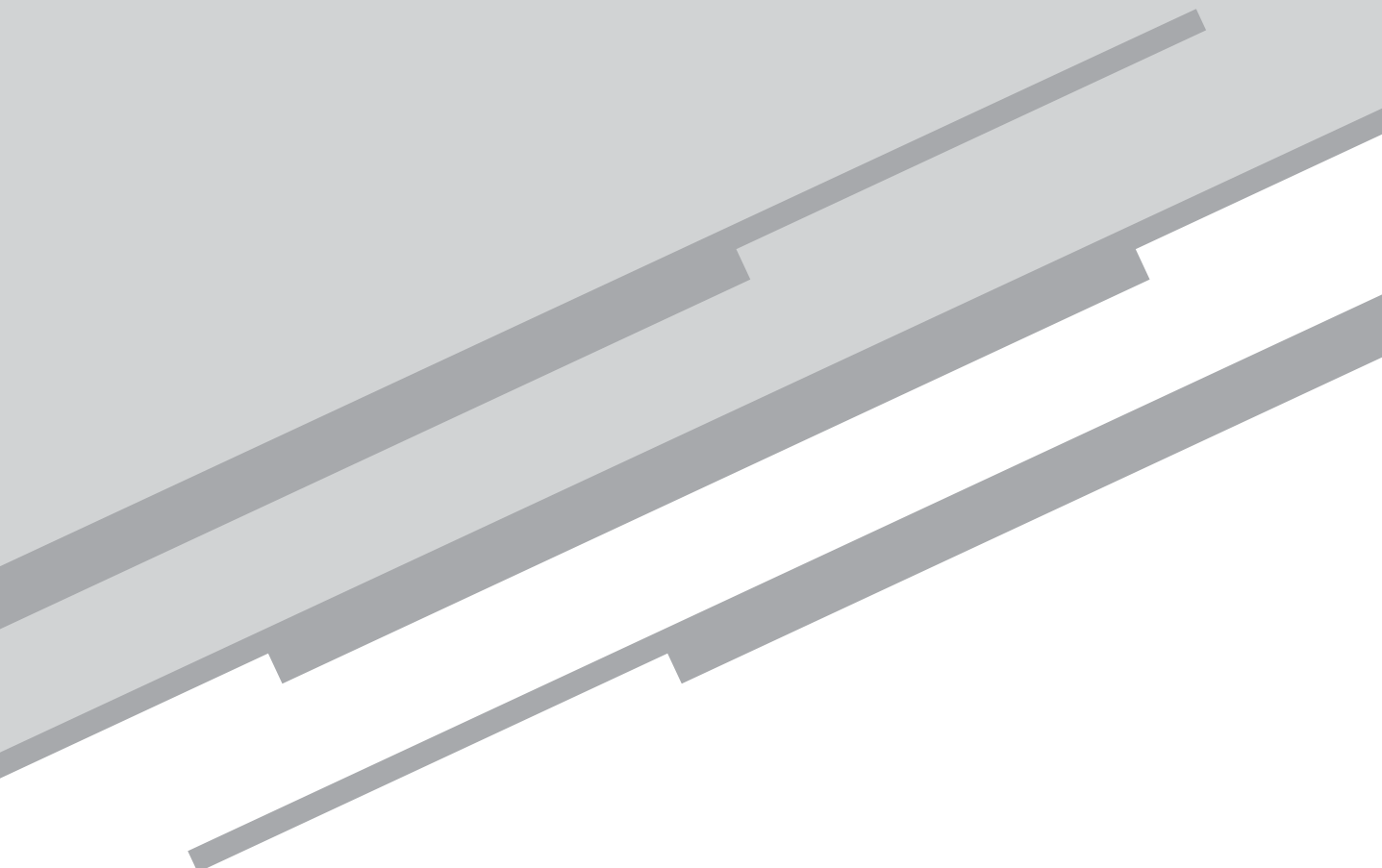
Referências

INCROPERA, Frank P.; DEWITT, David P.; BERGMAN, Theodore L.; LAVINE, Adrienne S. *Fundamentos de transferência de calor e de massa*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008. 643 p.

ÇENGEL, Yunus A.; GHAJAR, Afshin J. *Transferência de calor e massa: uma abordagem prática*. 4. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012. 904 p.

Aula 11

Transferência de calor por
convecção e radiação



Meta

Apresentar os princípios fundamentais e as quantidades físicas da transferência de calor por convecção e radiação necessários para o desenvolvimento de formulações matemáticas e para a resolução de problemas práticos.

Objetivos

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. aplicar a Lei de Newton do resfriamento para a convecção; e
2. aplicar a Lei de Stefan-Boltzmann para a radiação.

Introdução – leis de newton e de stefan-boltzmann

Nesta aula, trataremos de dois outros modos de transferência de calor: convecção e radiação. Esses modos de transferência também são governados por equações constitutivas que relacionam a taxa de calor com o gradiente de temperatura. A convecção é governada pela chamada Lei de Newton do resfriamento, e a radiação, pela chamada Lei de Stefan-Boltzmann.

Tanto a convecção quanto a radiação podem ser observadas em alguns sistemas da engenharia e naturais importantes. O desempenho de equipamentos como trocadores de calor, que são encontrados em inúmeras plantas fabris, depende fundamentalmente da convecção. Outros equipamentos importantes são os fornos e caldeiras, que funcionam basicamente por radiação (veja a **Figura 11.1**).



Figura 11.1: Caldeira com funcionamento por radiação.

Fonte: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=5031385>

A seguir, veremos os princípios fundamentais e as quantidades físicas da convecção e radiação, assim como as formulações matemáticas necessárias para a resolução de problemas práticos.

Transferência de calor por convecção

Já vimos, na aula passada, que quando a transferência está associada ao movimento global de um fluido, esse mecanismo físico de transferência é chamado de advecção. Define-se como convecção o modo de transferência de calor em que o mecanismo de advecção é predominante em relação ao de difusão. A transmissão de calor por convecção ocorre entre uma superfície sólida e um fluido em movimento, os quais se encontram a temperaturas diferentes.

A lei de newton do resfriamento



Figura 11.2: Isaac Newton

Fonte: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=37337>

A Lei de Newton do resfriamento, formulada por Isaac Newton (Figura 11.2), é uma equação constitutiva obtida a partir de observações experimentais. Esta equação relaciona a taxa de calor com a diferença de temperatura entre uma superfície sólida e um fluido em movimento. Segundo a Lei de Newton do resfriamento, a taxa de calor é obtida por

$$\dot{q}'' = h(T_s - T_\infty) \quad (11.1)$$

onde T_s é a temperatura da superfície, T_∞ é a temperatura do fluido em corrente livre, e h é um parâmetro chamado de coeficiente de transferência de calor por convecção.

O coeficiente h desempenha um papel fundamental no comportamento da convecção. O seu valor depende da geometria da superfície

sólida, da condição do escoamento do fluido e de uma série de propriedades térmicas e mecânicas do fluido. Essa dependência se manifesta fortemente numa região do fluido muito próxima à superfície. Tal região do fluido é denominada camada-limite. O estudo dos fenômenos relacionados com a camada-limite é fundamental para a compreensão da transferência de calor por convecção. Vamos ver sobre isso agora mesmo.

Escoamento na camada-limite

Considere o escoamento de um fluido à velocidade u_∞ e temperatura T_∞ sobre uma superfície sólida à temperatura T_s . Pelo princípio do não deslizamento, a velocidade de partículas do fluido que estão junto à superfície é nula ($u = 0$). E pelo equilíbrio térmico, essas partículas adquirem a temperatura da superfície. A **Figura 11.3** mostra a situação do escoamento junto à superfície.

Nesta situação, observamos o desenvolvimento de uma região do escoamento através da qual a velocidade varia de zero ao valor u_∞ , e a temperatura varia de T_s a T_∞ . Essa região onde há variação de velocidade e temperatura é conhecida por camada-limite. Na **Figura 11.3**, uma camada-limite tanto de velocidade quanto de temperatura é representada sobre uma placa plana aquecida. A espessura da camada-limite tende a crescer à medida que o escoamento avança mais sobre a superfície. No interior de uma camada-limite, o calor é arrastado na direção do escoamento do fluido, sendo posteriormente transferido para a porção do fluido que ainda se encontra em corrente livre.

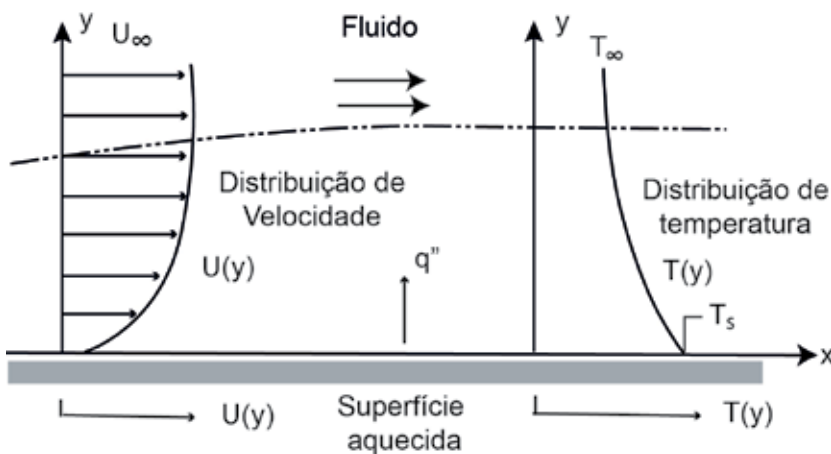


Figura 11.3: Distribuição de velocidade e de temperatura na camada-limite.

Uma vez que, junto à superfície da placa plana, a difusão é o mecanismo dominante de transferência de calor, o fluxo local de calor pode ser obtido utilizando-se a Lei de Fourier (vista na aula passada), em $y = 0$,

$$\dot{q}'' = -k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (11.2)$$

Combinando essa equação com a equação 11.1, obtemos o coeficiente convectivo local

$$h_x = \frac{-k \partial T / \partial y \Big|_{y=0}}{T_s - T_\infty} \quad (11.3)$$

Na direção x do escoamento, a espessura da camada-limite tende a crescer, tornando a distribuição de temperatura mais suave; em consequência, o gradiente de temperatura na superfície $\partial T / \partial y \Big|_{y=0}$ diminui. Da equação 11.3, concluímos que o coeficiente convectivo local também diminui com o aumento de x .

Para toda a superfície de área A_s , podemos definir o coeficiente convectivo global da seguinte forma:

$$\bar{h} = \frac{1}{A_s} \int_{A_s} h_x dA \quad (11.4)$$

A taxa global de calor para toda a superfície pode ser obtida por

$$\dot{q} = \int_{A_s} \dot{q}'' dA = \int_{A_s} h_x (T_s - T_\infty) dA \quad (11.5)$$

Considerando que a superfície se encontra a uma temperatura uniforme,

$$\dot{q} = (T_s - T_\infty) \int_{A_s} h_x dA \quad (11.6)$$

Finalmente, a taxa global de calor pode ser escrita na forma

$$\dot{q} = \bar{h} A_s (T_s - T_\infty) \quad (11.7)$$

O coeficiente convectivo local também pode variar com a condição do escoamento na camada-limite. No desenvolvimento de uma camada-limite, coexistem as condições de escoamento laminar e turbulento, com a seção laminar precedendo à turbulenta. Numa camada-limite laminar, o escoamento é altamente ordenado, favorecendo distribuições de temperatura mais suaves; em consequência, gradientes de temperatura na superfície $\partial T / \partial y \Big|_{y=0}$ baixos. Numa camada-limite turbulenta, o escoamento é altamente irregular, proporcionando grande mistura de

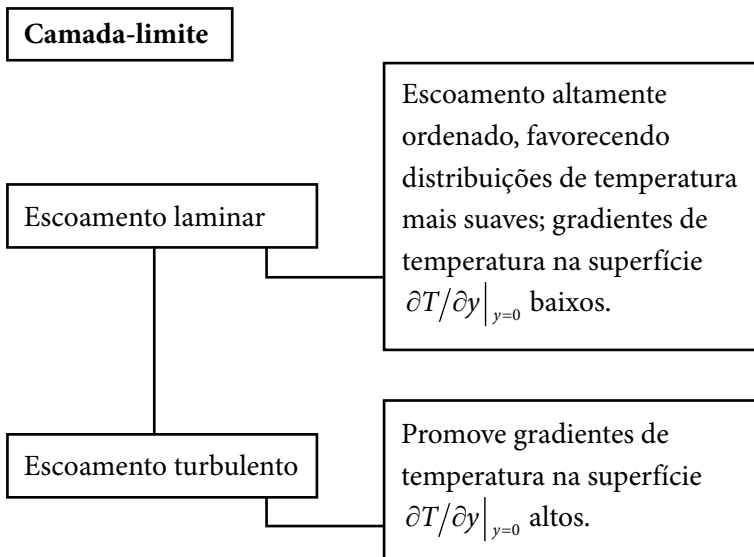
fluido dentro da camada-limite. A mistura turbulenta promove gradientes de temperatura na superfície $\partial T/\partial y|_{y=0}$ altos. Ou seja, apesar de o coeficiente convectivo local diminuir com o aumento de x , ele experimenta um aumento abrupto na transição da condição laminar para a turbulenta. Isto evidencia a forte influência da natureza do escoamento na transferência de calor por convecção.

Também exerce forte influência na convecção o processo que causa o escoamento. Situações nas quais o escoamento é causado por meios externos, tais como um ventilador, uma bomba ou ventos atmosféricos, são conhecidas por convecção forçada. Quando o escoamento é induzido por diferenças de massa específica, referimo-nos à convecção natural.

Outro processo físico que influencia a convecção diz respeito ao tipo de energia transferida. Tipicamente, a energia é transferida na forma de calor sensível. Contudo, a energia pode ser transferida na forma de calor latente, geralmente associada à mudança de fase do fluido.



Recapitulando...



Parâmetros de similaridade da camada-limite

O comportamento de uma camada-limite pode ser determinado por equações diferenciais para a velocidade e a temperatura, que governam as condições convectivas. Essas equações são provenientes de balanços locais de quantidade de movimento e energia aplicados à camada-limite. Tais equações apresentam formas similares: um termo advectivo e outro difusivo. E quando elas são adimensionalizadas, apresentam parâmetros de similaridade.

Condições convectivas podem variar, por exemplo, com a natureza do fluido, com a condição do escoamento e com a geometria da superfície. Parâmetros de similaridade são importantes, pois nos permitem a utilização de soluções das equações diferenciais, obtidas em uma superfície submetida a um dado conjunto de condições convectivas a outras superfícies submetidas a condições inteiramente diferentes.

Na transferência de calor por convecção, existem três parâmetros de similaridade importantes, que serão mostradas nos tópicos adiante. Eles possuem interpretações físicas relacionadas às condições convectivas.

Número de Reynolds

O Número de Reynolds pode ser interpretado como a razão entre as forças de inércia e as forças viscosas, presentes no escoamento de um fluido. As forças de inércia estão associadas a um aumento da quantidade de movimento do fluido; as forças viscosas estão associadas ao grau de coesão do fluido. O Número de Reynolds é assim chamado em homenagem a Osborne Reynolds (**Figura 11.4**).



Figura 11.4: Osborne Reynolds.

Fonte: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=5827209>

O Número de Reynolds local é definido por

$$Re_x = \frac{\rho v_\infty x}{\mu} \quad (11.8)$$

onde x é um comprimento característico da superfície; numa placa plana, por exemplo, é a distância a partir da borda frontal. Se o Número de Reynolds é pequeno, as forças viscosas são dominantes e o escoamento se dá em condição laminar ($Re < 5 \times 10^5$). Se o Número de Reynolds é grande, as forças de inércia são dominantes e o escoamento se dá em condição turbulenta ($Re \geq 5 \times 10^5$).

Número de Prandtl

O Número de Prandtl pode ser interpretado como a razão entre a difusividade de quantidade de movimento e a difusividade térmica. O Número de Prandtl é assim chamado em homenagem ao físico alemão Ludwig Prandtl (**Figura 11.5**).



Figura 11.5: Ludwig Prandtl.

Fonte: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3620095>

O Número de Prandtl é definido por

$$Pr = \frac{c_p \mu}{k} \quad (11.9)$$

Quando o Número de Prandtl é próximo da unidade, significa que as transferências de quantidade de movimento e calor pelo mecanismo de difusão são equivalentes (isto ocorre com gases, por exemplo). Se $Pr \ll 1$, a taxa de difusão de calor é muito superior à de quantidade de

movimento (caso de metais líquidos, por exemplo). O caso contrário, $Pr \gg 1$, ocorre com óleos, por exemplo.

Número de Nusselt

O Número de Nusselt é um parâmetro adimensional que fornece uma medida da transferência de calor por convecção que ocorre na superfície sólida. O Número de Nusselt pode ser interpretado como a razão entre as transferências de calor por convecção e por condução. O Número de Nusselt foi batizado em honra ao engenheiro alemão Wilhelm Nusselt (**Figura 11.6**).



Figura 11.6: Wilhelm Nusselt.

Fonte: <http://www.me.utexas.edu/~me339/Bios/nusselt.gif>

O Número de Nusselt local é definido por

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k} \quad (11.10)$$

onde x é um comprimento característico da superfície. Para uma placa plana de comprimento L , o Número de Nusselt médio pode ser obtido por

$$\overline{Nu_L} = \frac{\bar{h}L}{k} \quad (11.11)$$

O Número de Nusselt médio apresenta uma dependência funcional dos dois parâmetros anteriores. Se a função for conhecida, ela pode ser usada para calcular o Número de Nusselt para diferentes fluidos, condições de escoamentos e geometrias de superfícies. Essa dependência

funcional é representada pela seguinte correlação empírica genérica:

$$\overline{Nu}_L = C Re_L^m Pr^n \quad (11.12)$$

na qual o coeficiente C , e os expoentes m e n variam com a geometria da superfície e a condição do escoamento, mas são independentes da natureza do fluido. Embora as propriedades do fluido variem com a temperatura, podemos calcular o Número de Nusselt a uma temperatura média da camada-limite, chamada de temperatura do filme,

$$T_f = \frac{T_s + T_\infty}{2} \quad (11.13)$$

Para um escoamento paralelo sobre uma placa plana cuja superfície se encontra a uma temperatura uniforme, o Número de Nusselt médio é obtido pela seguinte correlação:

condição laminar ($Pr > 0,6$):

$$\overline{Nu}_L = 0,664 Re_L^{0,5} Pr^{1/3} \quad (11.14)$$

condição turbulenta ($0,6 \leq Pr < 60$):

$$\overline{Nu}_L = 0,037 Re_L^{0,8} Pr^{1/3} \quad (11.15)$$

Atividade 1

Atende ao objetivo 1

Ar escoa com uma velocidade de 10 m/s e à temperatura de 300 °C sobre uma placa plana com 0,5 m de comprimento. Determine a taxa de resfriamento, por unidade de largura da placa, necessária para mantê-la com uma temperatura superficial de 27 °C. Propriedades do ar: $\nu = 5,21 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$, $k = 36,4 \times 10^{-3} \text{ W}/(\text{m.K})$ e $Pr = 0,687$.

Resposta comentada

Considerando para o problema:

(1) regime estacionário;

(2) radiação desprezível.

A taxa de calor por convecção na placa é dada por

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \bar{h}A_s(T_s - T_\infty) \\ &= \bar{h}(wL)(T_s - T_\infty)\end{aligned}$$

O Número de Reynolds é

$$Re_L = \frac{\rho v_\infty L}{\mu}$$

com $v = \mu/\rho = 5,21 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$, logo

$$Re_L = \frac{v_\infty L}{\nu} = \frac{10,0,5}{5,21 \times 10^{-4}} = 9597$$

Como o escoamento é laminar, a correlação apropriada é

$$\overline{Nu}_L = 0,664 Re_L^{0,5} Pr^{1/3} = 0,664 (9597)^{0,5} (0,687)^{1/3} = 57,4$$

Assim, o coeficiente convectivo médio é obtido por

$$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}L}{k} \Rightarrow \bar{h} = \frac{57,4 \cdot 0,0364}{0,5} = 4,18 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$$

Finalmente, a taxa de resfriamento por unidade de largura é

$$\dot{q}/w = 4,18 \cdot 0,5 \cdot (300 - 27) = 570 \text{ W}/\text{m}$$

Transferência de calor por radiação

Radiação é um mecanismo físico no qual energia é propagada sob a forma de onda eletromagnética (também conhecida como fóton). Este mecanismo caracteriza o modo de transferência de calor por radiação. A radiação térmica é a energia emitida pela matéria que se encontra a uma temperatura não-nula. Assim, uma transferência líquida de calor por radiação pode ocorrer entre duas superfícies que se encontram a temperaturas distintas e estão interpostas por um meio material ou vácuo.

A radiação térmica pode sair de ou chegar a uma superfície. Definimos como *emissão* o fluxo no qual a radiação térmica é emitida pela superfície. Por outro lado, definimos como *irradiação* o fluxo no qual

a radiação térmica incide sobre a superfície. Tanto a emissão quanto a irradiação são dependentes da direção, do comprimento da onda eletromagnética e da temperatura da superfície.

Lei de stefan-boltzmann

A quantidade de radiação térmica emitida por uma superfície a uma dada temperatura é conhecida por poder emissivo. O valor máximo de poder emissivo de uma matéria é determinado pela Lei de Stefan-Boltzmann

$$E = \sigma T_s^4 \quad (11.16)$$

onde T_s é a temperatura absoluta da superfície, e σ é a constante de Stefan-Boltzmann ($\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$). O poder emissivo máximo seria encontrado numa matéria ideal, denominada de *corpo negro*. Assim, nenhuma superfície real pode emitir mais radiação do que um corpo negro à mesma temperatura.

A Lei de Stefan-Boltzmann foi criada a partir dos feitos de Jožef Stefan e Ludwig Boltzmann (**Figura 11.7**).



Figura 11.7: Jožef Stefan e Ludwig Boltzmann.

Fontes: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=139404>
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=302323>

Propriedades radiantes

As propriedades radiantes caracterizam os materiais quanto ao comportamento real dos processos de radiação térmica.

Uma superfície real emite menos radiação térmica do que um corpo negro. Então, definimos *emissividade* como a razão entre a radiação emitida pela superfície e a radiação emitida por um corpo negro à mes-

ma temperatura. Assim, o fluxo de calor liberado por radiação de uma superfície é obtido por

$$\dot{q}'' = \varepsilon E \quad (11.17)$$

onde ε é a emissividade.

A radiação incidente interage com a matéria, podendo dividir-se em processos de reflexão, absorção e transmissão. Portanto, uma superfície real não absorve toda a radiação incidente. Um corpo negro absorve toda a radiação incidente. Seja G a radiação incidente, então o fluxo de calor absorvido por radiação sobre uma superfície é obtido por

$$\dot{q}'' = \alpha G \quad (11.18)$$

onde α é a absortividade.

Enquanto a radiação emitida e a absorvida aumenta e reduz, respectivamente, a energia térmica da matéria, a radiação refletida e a transmitida não têm efeito nessa energia.

Radiação em superfícies reais

Para muitos problemas de engenharia, é razoável considerar condições simplificadoras. Apesar de a radiação térmica ser um fenômeno volumétrico, pois a radiação que emerge da matéria corresponde ao efeito integrado de todo o volume, na maioria dos sólidos e líquidos, podemos considerá-la como um fenômeno superficial.

Uma superfície na qual a emissividade e a absortividade são consideradas independentes da direção é denominada de superfície difusa. E se a emissividade e a absortividade são independentes do comprimento de onda eletromagnética, superfície cinza. Para a condição de superfície cinza difusa, vale a seguinte igualdade:

$$\varepsilon = \alpha \quad (11.19)$$

A mesma igualdade acima pode ser observada em casos em que um grande recinto isotérmico à temperatura T_{viz} envolve completamente uma pequena superfície à T_s . Isto ocorre, por exemplo, no interior de um forno. Para tal situação, a irradiação sobre a pequena superfície pode ser aproximada pela emissão de um corpo negro a T_{viz} , ou seja,

$$G = \sigma T_{viz}^4 \quad (11.20)$$

Assim, a taxa líquida de fluxo de calor por radiação saindo da pequena superfície é obtida por

$$\dot{q}'' = \alpha G - \varepsilon E = \alpha \sigma T_{viz}^4 - \varepsilon \sigma T_s^4 \quad (11.21)$$

Considerando a pequena superfície cinza difusa,

$$\dot{q} = \varepsilon \sigma A_s (T_{viz}^4 - T_s^4) \quad (11.22)$$

Conclusão

A transferência de calor por radiação é governada pela Lei de Stefan-Boltzmann, que determina o poder emissivo de um material ideal. Em problemas reais, condições são consideradas para simplificar as formulações matemáticas e, assim, encontrar mais facilmente as soluções de taxa de calor.

Atividade final

Atende ao objetivo 2

Uma sala é aquecida por um sistema de tubulação de vapor d'água sem isolante. As paredes da sala se encontram a 25°C . O diâmetro externo do tubo é de 70 mm , a temperatura de sua superfície é de 200°C e esta superfície tem emissividade igual a 0,8. Qual é a taxa de calor perdida pela superfície do tubo por unidade de comprimento do tubo? (Despreze a convecção.)

Resposta comentada

Considerando para o problema:

- (1) regime estacionário;
- (2) grande recinto isotérmico;
- (3) superfície cinza difusa.

A taxa líquida de calor perdida por radiação saindo da superfície é obtida por

$$\dot{q} = \varepsilon \sigma A_s (T_{viz}^4 - T_s^4)$$

Por unidade de comprimento,

$$\dot{q}/L = \varepsilon \sigma (\pi D) (T_{viz}^4 - T_s^4)$$

$$= 0,85,67 \times 10^{-8} (\pi \cdot 0,07) (473^4 - 298^4) = 421 \text{ W/m}$$

Resumo

Quando a advecção é o mecanismo predominante, o modo de transmissão de calor é chamado de convecção.

O fluxo de calor por convecção entre uma superfície sólida à T_s e um fluido em movimento à T_∞ é quantificado a partir de uma equação constitutiva conhecida como Lei de Newton do resfriamento

$$\dot{q}'' = h(T_s - T_\infty)$$

onde h é o coeficiente de transferência de calor por convecção. A taxa global de calor pode ser obtida por

$$\dot{q} = \bar{h} A_s (T_s - T_\infty)$$

onde \bar{h} é o coeficiente médio de transferência de calor por convecção.

Considere o escoamento de um fluido à velocidade V_∞ e temperatura T_∞ sobre uma superfície sólida à temperatura T_s . Nesta situação, observamos o desenvolvimento de uma região no fluido onde há variação de velocidade e temperatura, conhecida por camada-limite.

Na transferência de calor por convecção, existem três parâmetros de similaridade importantes. Para uma placa plana de comprimento L , o Número de Reynolds é definido por

$$Re_L = \frac{\rho V_\infty L}{\mu}$$

O Número de Prandtl é definido por

$$Pr = \frac{c_p \mu}{k}$$

E o Número de Nusselt médio é definido por

$$\overline{Nu_L} = \frac{\bar{h}L}{k}$$

e pode ser obtido pela seguinte correlação:

condição laminar ($Pr > 0,6$):

$$\overline{Nu_L} = 0,664 Re_L^{0,5} Pr^{1/3}$$

condição turbulenta ($0,6 \leq Pr < 60$):

$$\overline{Nu_L} = 0,037 Re_L^{0,8} Pr^{1/3}$$

O valor máximo de poder emissivo de uma matéria é determinado pela Lei de Stefan-Boltzmann

$$E = \sigma T_s^4$$

onde T_s é a temperatura absoluta da superfície, e σ é a constante de Stefan-Boltzmann ($\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$).

O fluxo de calor liberado por radiação de uma superfície é obtido por

$$\dot{q}'' = \varepsilon E$$

onde ε é a emissividade. O fluxo de calor absorvido por radiação sobre uma superfície é obtido por

$$\dot{q}'' = \alpha G$$

onde α é a absorptividade.

Em casos onde um grande recinto isotérmico à temperatura T_{viz} envolve completamente uma pequena superfície à T_s , a taxa líquida de fluxo de calor por radiação saindo da pequena superfície é obtida por

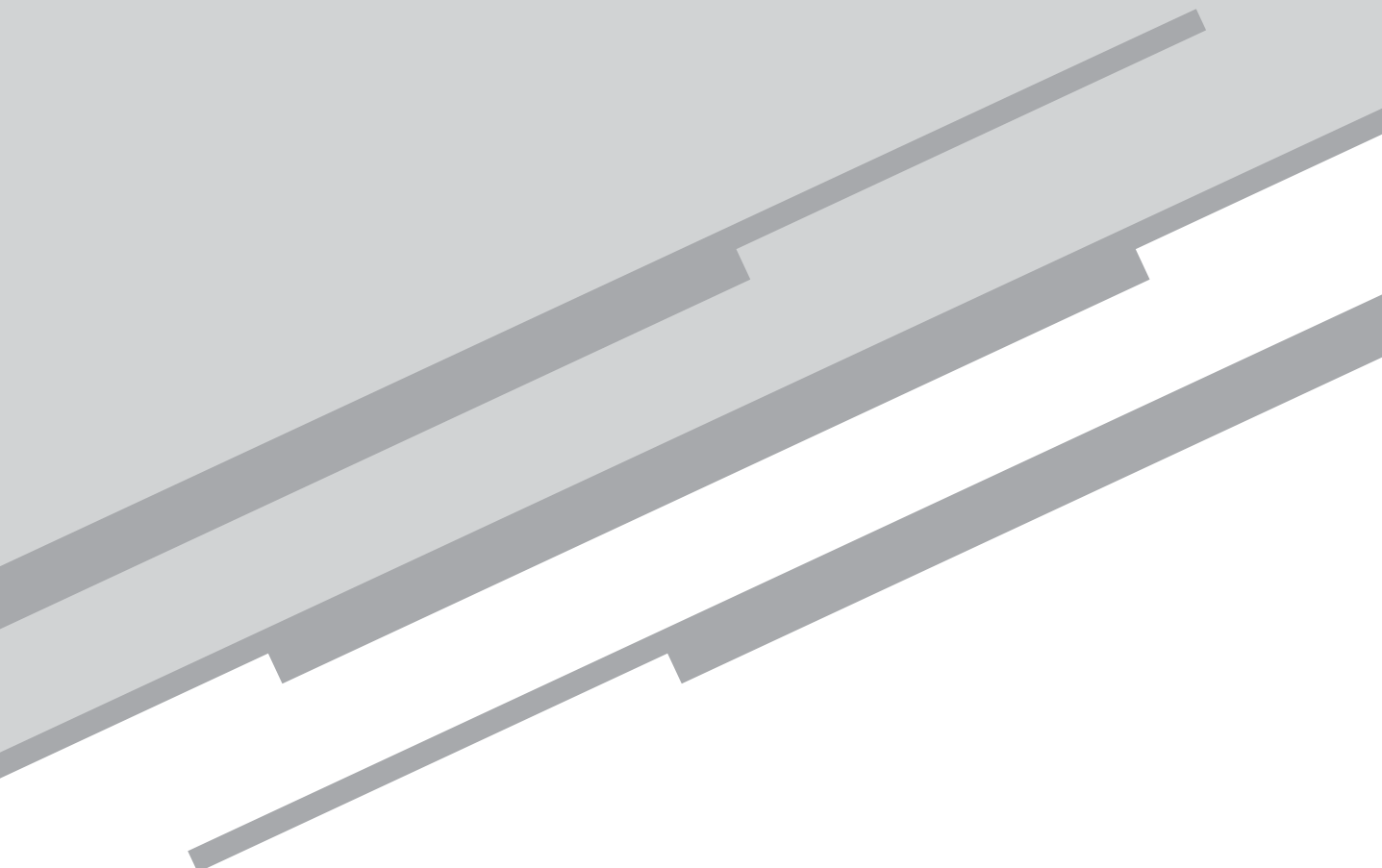
$$\dot{q}'' = \varepsilon \sigma (T_{viz}^4 - T_s^4)$$

Referências

- INCROPERA, Frank P.; DEWITT, David P.; BERGMAN, Theodore L.; LAVINE, Adrienne S. *Fundamentos de transferência de calor e de massa*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008. 643 p.
- ÇENGEL, Yunus A.; GHAJAR, Afshin J. *Transferência de calor e massa: uma abordagem prática*. 4. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012. 904 p.

Aula 12

Transferência de massa



Alexandre Santos Francisco

Meta

Apresentar os princípios fundamentais e as quantidades físicas da transferência de massa necessários para o desenvolvimento de formulações matemáticas e para a resolução de problemas práticos envolvendo espécies químicas.

Objetivos

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. aplicar a Lei de Fick da difusão;
2. desenvolver a equação da difusão mássica em regime estacionário; e
3. resolver problemas de difusão mássica em regime transiente.

Introdução

Nesta aula, estudamos principalmente o modo de transferência de massa por difusão. Esse modo de transferência tem como força motriz uma diferença de concentração, analogamente à transferência de calor por condução com uma diferença de temperatura.

A transferência de massa é governada por uma equação constitutiva, conhecida por Lei de **Fick** da difusão, que relaciona a taxa de transferência de massa com um gradiente de concentração de uma mistura. Uma mistura é um sistema formado por duas ou mais substâncias puras, chamadas de espécies químicas.

O termo transferência de massa não é empregado para descrever o movimento global de uma mistura, mas para estudar o transporte de espécies químicas diluídas em uma mistura. Este fenômeno pode ocorrer em gases, líquidos e sólidos. Por exemplo: moléculas de água do mar difundem-se para a atmosfera; em paredes de concreto, ocorre migração de vapor d'água por difusão; há difusão de carbono no ferro durante o processo de solidificação em moldes; etc.

A seguir, veremos os princípios fundamentais e as quantidades físicas da difusão mássica de espécies químicas em uma mistura, assim como as formulações matemáticas necessárias para a resolução de problemas práticos.



**Adolf Eugen Fick
(1829-1901)**

Médico alemão. Além da Lei de Fick, ele também formulou uma forma de medição da pressão interna do globo ocular, a Tonometria.

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Adolf_Eugen_Fick#/media/File:Adolf_Fick_8bit_korr_klein1.jpg

Difusão de massa

O mecanismo físico da transferência de massa por difusão consiste do movimento local e aleatório de uma espécie química em uma mistura. Entretanto, concentrações diferentes da espécie química resultam em movimentos de quantidades diferentes, causando um movimento global que se traduz em transferência líquida da espécie através da mistura.

Considere uma mistura constituída por duas ou mais espécies químicas. Seja ρ_i a massa específica de uma espécie química i . Define-se concentração mássica pela seguinte razão:

$$c_i = \frac{\rho_i}{\rho} \quad (12.1)$$

onde ρ é a massa específica da mistura.

Considerando a mistura como um meio não estacionário, ou seja, a mistura possui uma velocidade mássica média \vec{v} . Uma espécie química

i a uma velocidade \vec{v}_i tem um fluxo mássico absoluto definido por

$$\vec{j}_{i,abs} = \rho_i \vec{v}_i \quad (12.2)$$

e um fluxo mássico relativo (ou por difusão),

$$\vec{j}_i = \rho_i (\vec{v}_i - \vec{v}) \quad (12.3)$$

No caso de meio estacionário ($\vec{v} = \vec{0}$),

$$\vec{j}_i = \vec{j}_{i,abs} = \rho_i \vec{v}_i \quad (12.4)$$

A lei de fick da difusão

A Lei de Fick da difusão é uma equação constitutiva, ou seja, uma equação obtida a partir de observações experimentais, e não puramente teórica. Esta equação relaciona o fluxo mássico por difusão com a diferença de concentração de uma espécie química. Segundo a Lei de Fick da difusão, o fluxo mássico por difusão de uma espécie química i é obtido por

$$\vec{j}_i = -\rho D_i \nabla c_i \quad (12.5)$$

onde D_i é o coeficiente de difusão da espécie química i na mistura. O coeficiente de difusão é uma importante propriedade de transporte, dependente da temperatura e da pressão na mistura.

Atividade 1

Atende ao objetivo 1

Uma embalagem *blister* possui uma folha de cobertura plana de material polimérico com espessura $e = 50 \mu\text{m}$ e área de seção transversal $A = 0,004 \text{ m}^2$. O coeficiente de difusão do vapor d'água no polímero é $D = 6 \times 10^{-14} \text{ m}^2/\text{s}$. Para massas específicas de vapor d'água no polímero nas superfícies externa e interna de $\rho_1 = 4,5 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3$ e $\rho_2 = 0,5 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3$, respectivamente, determine a taxa de transferência de massa de vapor d'água através da folha de cobertura.



Blister é o nome da embalagem no formato de cartela (veja um blister na **Figura 12.1**). Composta por um papel cartão ou filme plástico que serve de base para a fixação do produto dentro de uma bolha plástica (o blister) normalmente com o formato dos contornos do produto. Essa bolha é moldada pelos processos de termoformagem, utilizando filmes plásticos de PVC ou PET com espessuras que variam de 0,15 mm a 0,60 mm. Esses dois materiais oferecem melhor transparência do que os demais plásticos. Utiliza-se blister para embalar produtos como escovas dentais, pilhas de rádio, brinquedos de pequeno porte, componentes elétricos e eletrônicos e uma infinidade de outros produtos.



Figura 12.1: Embalagem do tipo *blister*.

Resposta comentada

Da Lei de Fick, considerando difusão unidimensional, o fluxo mássico do vapor d'água é

$$j_i = -\rho D_i \frac{dc_i}{dx}$$

A taxa mássica é, então,

$$\dot{m}_i = j_i A = -\rho D_i A \frac{dc_i}{dx}$$

Para massa específica do polímero ρ constante,

$$\begin{aligned}\dot{m}_i &= -D_i A \frac{d\rho_i}{dx} = D_i A \frac{\rho_1 - \rho_2}{e} \\ &= 6 \times 10^{-14} \cdot 0,004 \frac{4,5 \times 10^{-3} - 0,5 \times 10^{-3}}{50 \times 10^{-6}} = 0,32 \times 10^{-15} \text{ kg/s}\end{aligned}$$

Equação da difusão mássica

Em problemas de transferência de massa por difusão, é importante conhecer o campo de concentração de uma espécie química, para, posteriormente, determinar seu fluxo mássico através da Lei de Fick. O campo de concentração pode ser obtido como solução da equação governante da difusão.

Do balanço global da massa da espécie química i , para um volume de controle, considerando um meio estacionário e com geração de massa,

$$\dot{M}_i = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho_i dV + \int_{SC} \rho_i \vec{v}_i \cdot d\vec{S} \quad (12.6)$$

na qual a geração de massa é obtida por

$$\dot{M}_i = \int_{VC} \dot{m}_i''' dV \quad (12.7)$$

onde \dot{m}_i''' é a taxa volumétrica de geração de massa da espécie química i .

Assim,

$$\int_{VC} \dot{m}_i''' dV = \int_{VC} \frac{\partial(\rho_i)}{\partial t} dV + \int_{VC} \nabla \cdot (\rho_i \vec{v}_i) dV \quad (12.8)$$

onde se aplicou o Teorema da divergência de Gauss ao último termo. Podemos reunir todos os termos numa integral única,

$$\int_{VC} \left[\frac{\partial(\rho_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \vec{v}_i) - \dot{m}_i''' \right] dV = 0 \quad (12.9)$$

Para um volume controle diferencial, isto é, quando $VC \rightarrow 0$,

$$\frac{\partial(\rho_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \vec{v}_i) = \dot{m}_i''' \quad (12.10)$$

Ou, também,

$$\frac{\partial(\rho_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{j}_i) = \dot{m}_i''' \quad (12.11)$$

Usando a equação (12.1) e a Lei de Fick,

$$\frac{\partial(\rho c_i)}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho D_i \nabla c_i) + \dot{m}_i''' \quad (12.12)$$

Essa equação é conhecida como equação da difusão mássica, cuja solução permite determinar o campo de concentração de uma espécie química. A solução particular dessa equação requer que se estabeleçam adicionalmente condições de contorno e condição inicial para o problema em questão.

Difusão de massa em regime estacionário

Considere uma parede plana, cujas concentrações de uma espécie química i são $c_{i,1}$ e $c_{i,2}$ nas posições x_1 e x_2 , respectivamente. Sob este gradiente de concentração, uma taxa de transferência de massa por difusão é estabelecida através da parede.

Considerando:

- (1) regime estacionário;
- (2) propriedades uniformes;
- (3) ausência de geração de massa; e
- (4) difusão unidimensional.

A equação da difusão mássica fica

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dc_i}{dx} \right) = 0 \quad (12.13)$$

com condições de contorno dadas por

$$c_i(x_1) = c_{i,1} \text{ e } c_i(x_2) = c_{i,2}$$

Podemos concluir da equação (12.13) que o fluxo mássico é uma constante, independente de x . Integrando duas vezes a equação, obtemos a solução geral

$$c_i(x) = C_1 x + C_2 \quad (12.14)$$

Substituindo as condições de contorno na equação (12.14), obtemos a solução particular, ou seja, o campo de concentração

$$c_i(x) = \frac{c_{i,2} - c_{i,1}}{x_2 - x_1} x + c_{i,1} \quad (12.15)$$

Observe-se que, nesse caso, a concentração é uma função linear, decrescente de x .

Seja A a área de seção transversal da parede plana. Da linearidade do campo de concentração numa parede,

$$\frac{dc_i}{dx} = \frac{c_{i,2} - c_{i,1}}{x_2 - x_1} \quad (12.16)$$

a taxa mássica da espécie química i é

$$\dot{m}_i = -\rho D_i A \frac{c_{i,2} - c_{i,1}}{x_2 - x_1} \quad (12.17)$$

Atividade 2

Atende ao objetivo 2

Considere uma placa de aço macio com espessura de 0,5 mm que separa um material carbonoso em duas regiões com diferentes concentrações de carbono. Em um lado da placa, a concentração do carbono é 1,2 % e, do outro, 1,0%. Determine a taxa de transferência de carbono através da placa de aço, por unidade de área.

Resposta comentada

Considerando para o problema:

(1) regime estacionário;

- (2) propriedades uniformes;
- (3) ausência de geração de massa;
- (4) difusão unidimensional ao longo da espessura.

Da equação da difusão mássica de carbono através da placa de aço, a distribuição de carbono é dada por

$$c_{\text{carbono}}(x) = \frac{c_{\text{carbono},2} - c_{\text{carbono},1}}{x_2 - x_1} x + c_{\text{carbono},1}$$

Substituindo os valores,

$$\begin{aligned} c_{\text{carbono}}(x) &= \frac{0,01 - 0,012}{0,0005} x + 0,012 \\ &= -4x + 0,012 \end{aligned}$$

Ou seja, a concentração de carbono é uma função linear, decrescente ao longo da espessura.

Difusão de massa em regime transiente

Considere a difusão mássica de uma espécie química i através de um meio estacionário semi-infinito. Seja $c_{i,0}$ a concentração inicial da espécie química no interior do meio e $c_{i,s}$ a concentração de equilíbrio na superfície externa do meio.

Considerando:

- (1) propriedades uniformes;
- (2) ausência de geração de massa; e
- (3) difusão unidimensional.

A equação da difusão mássica fica

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} = D_i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial c_i}{\partial x} \right) \quad (12.18)$$

Utilizando-se a abordagem de semelhança ou a técnica da transformada de Laplace, uma solução analítica pode ser obtida com o seguinte resultado:

$$\frac{c_i(x,t) - c_{i,0}}{c_{i,s} - c_{i,0}} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{D_i t}}\right) \quad (12.19)$$

onde $\operatorname{erfc}(\cdot)$ é a função erro complementar.

Conclusão

A transferência de massa por difusão é governada pela Lei de Fick, na qual o fluxo mássico de uma espécie química é determinado a partir do seu campo de concentração. Para se conhecer o campo de concentração, derivamos a chamada equação da difusão mássica a partir de um balanço local da massa da espécie química. A aplicação desta equação, considerando as devidas condições, permite obter a solução para problemas de interesse prático.

Atividade final

Atende ao objetivo 3

Considere uma peça de aço macio imerso em um material carbonoso em um forno a alta temperatura. A concentração inicial da peça é 0,15%. O coeficiente de difusão do carbono em aço na temperatura do forno é $4,8 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$ e a concentração de equilíbrio do carbono no aço na interface é 1,2%. Determine por quanto tempo a peça de aço deverá ser mantida no forno para que a concentração de massa de carbono em 0,5 mm abaixo da superfície chegue a 1%.

[illegible]

Resposta comentada

Considerando:

- (1) propriedades uniformes;
- (2) ausência de geração de massa; e

(3) difusão unidimensional.

A equação da difusão mássica fica

$$\frac{c_i(x,t) - c_{i,0}}{c_{i,s} - c_{i,0}} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{D_i t}}\right)$$

Substituindo os valores,

$$\frac{0,01 - 0,0015}{0,012 - 0,0015} = 0,81 = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{D_i t}}\right)$$

Ou seja,

$$\frac{x}{2\sqrt{D_i t}} = 0,17$$

Resolvendo para o tempo,

$$t = \frac{x^2}{4D_i \cdot 0,17^2} = \frac{0,0005^2}{4,4,8 \times 10^{-10} \cdot 0,17^2} = 4,505s$$

Resumo

Existem dois mecanismos de transferência de massa, a saber: difusão e advecção. Em geral, a difusão é o mecanismo predominante nos fenômenos da engenharia e naturais.

O fluxo mássico por difusão é quantificado a partir de uma equação constitutiva conhecida como Lei de Fick,

$$\vec{j}_i = -\rho D_i \nabla c_i$$

O campo de concentração resultante da difusão é determinado a partir de uma equação governante conhecida como equação da difusão de calor,

$$\frac{\partial(\rho c_i)}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho D_i \nabla c_i) + \dot{m}_i'''$$

Na difusão mássica de uma espécie química i através de uma parede plana de espessura e , cujas concentrações nas superfícies laterais da parede são $c_{i,1}$ e $c_{i,2}$, considerando regime estacionário, propriedades uniformes e ausência de geração de massa, o campo de concentração é dado por

$$c_i(x) = \frac{c_{i,2} - c_{i,1}}{e} x + c_{i,1}$$

Na difusão mássica de uma espécie química i através de um meio estacionário semi-infinito, cuja concentração na superfície é $c_{i,s}$ e a concentração inicial no meio é $c_{i,0}$, considerando propriedades uniformes e ausência de geração de massa, o campo de concentração é dada por

$$\frac{c_i(x,t) - c_{i,0}}{c_{i,s} - c_{i,0}} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{D_i t}}\right)$$

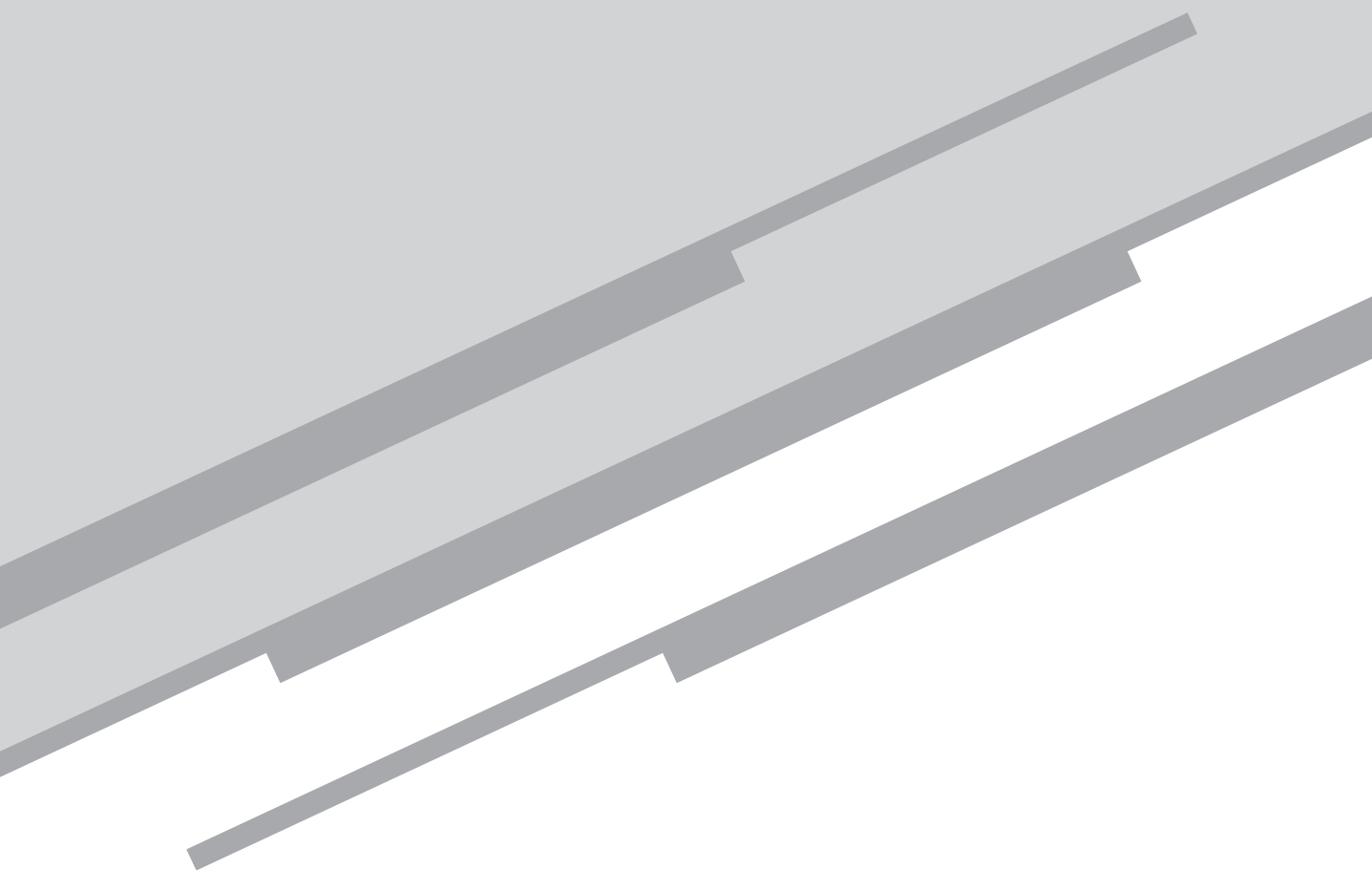
Referências

INCROPERA, Frank P.; DEWITT, David P.; BERGMAN, Theodore L.; LAVINE, Adrienne S. *Fundamentos de transferência de calor e de massa*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008. 643 p.

ÇENGEL, Yunus A.; GHAJAR, Afshin J. *Transferência de calor e massa: uma abordagem prática*. 4. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012. 904 p.

Aula 13

Problemas



Alexandre Santos Francisco

Aula 1

1.1 A “força motriz” que promove o equilíbrio de certas quantidades físicas, nos diversos fenômenos de transporte, é o gradiente de outras quantidades físicas. Qual é o significado de o gradiente de outras quantidades físicas?

1.2 Na transferência de quantidade de movimento, qual é a “força motriz” responsável pelo fenômeno do transporte?

1.3 Na transferência de calor, qual é a “força motriz” responsável pelo fenômeno do transporte?

1.4 Na transferência de massa, qual é a “força motriz” responsável pelo fenômeno do transporte?

Aula 2

2.1 Quantas componentes possui, em geral, uma grandeza vetorial? Explique a convenção de duplo índice para tensões normais e cisalhantes.

2.2 A área de uma superfície é tratada como uma grandeza vetorial. Como se define a direção e o sentido de tal vetor?

2.3 Como se define a quantidade física chamada tensor tensão? Quantas componentes possui, em geral, o tensor tensão? Explique a convenção de duplo índice para tensões normais e cisalhantes.

Aula 3

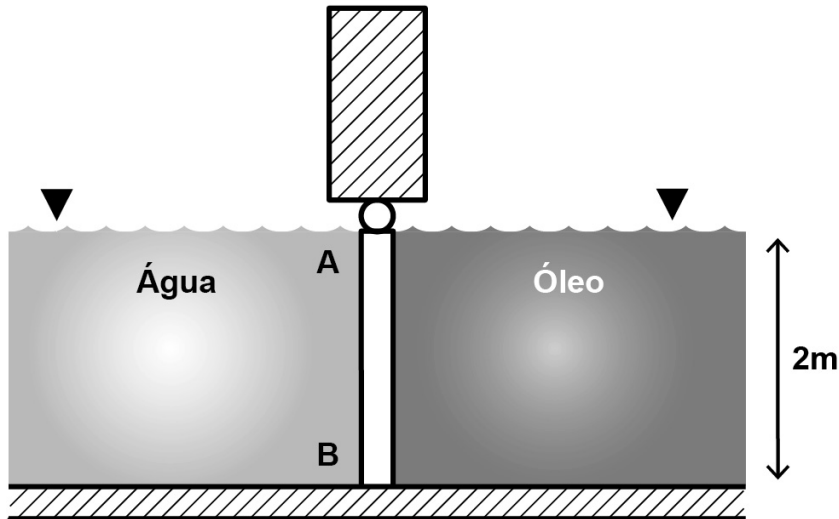
3.1 As transferências de quantidade de movimento, calor e massa num meio material qualquer são descritas pela lei de Newton da viscosidade, de Fourier, e de Fick, respectivamente. Quais são as propriedades físicas do meio material que estão presentes nessas leis?

3.2 Qual é a quantidade física que está ligada à incompressibilidade de um fluido? Descreva o comportamento físico que caracteriza um fluido incompressível.

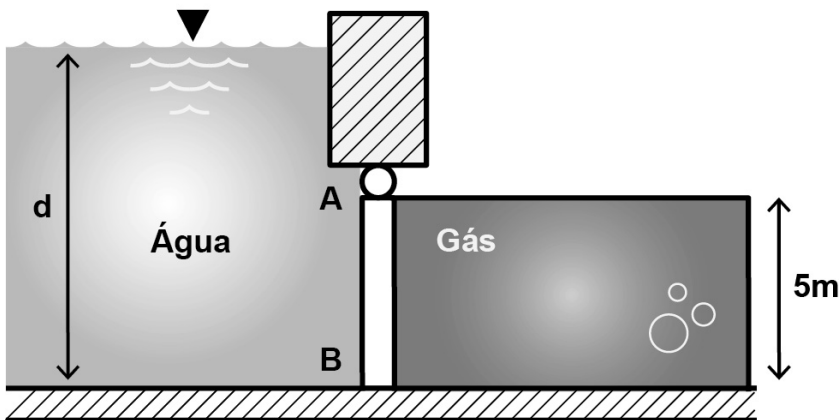
Aula 4

4.1 Uma comporta AB tem 1,5 m de largura, e pode girar em torno do ponto A. No tanque à esquerda há água ($\rho_{\text{água}} = 1000 \text{ kg/m}^3$) e à direita,

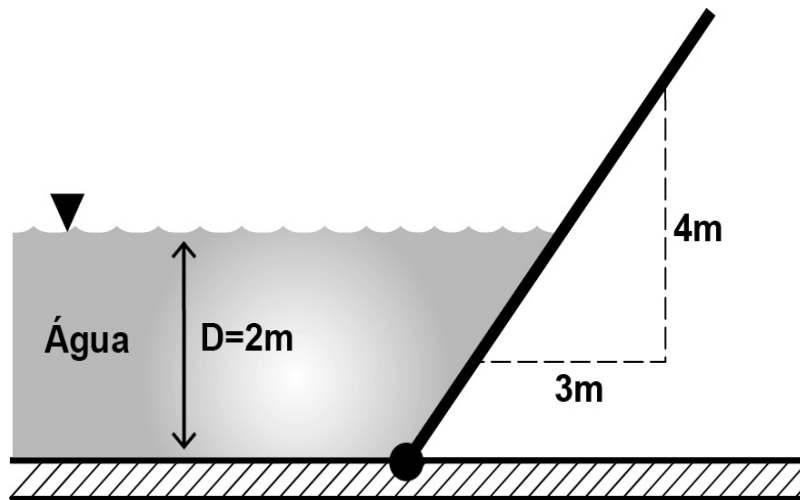
óleo ($\rho_{\text{óleo}} = 750 \text{ kg/m}^3$). Qual é a força horizontal aplicada no ponto B, necessária para manter a comporta na posição mostrada, e o seu sentido (para esquerda ou direita)?



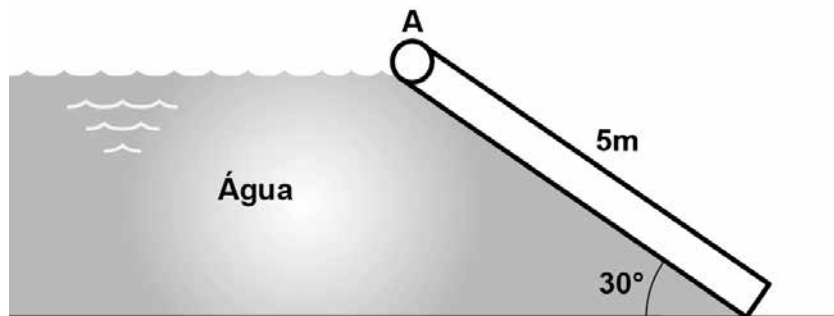
4.2 Determine o mínimo valor de d para o qual a comporta AB, que pode girar em torno do ponto A, é mantida na posição mostrada. A comporta é retangular, e tem largura de 2 m. O gás está num recipiente fechado cuja pressão é 46 kPa.



4.3 Uma comporta inclinada está fixa na posição mostrada. A comporta tem 2 m de largura. Determine a resultante das forças de pressão que a água exerce sobre a comporta, e o seu ponto de aplicação.

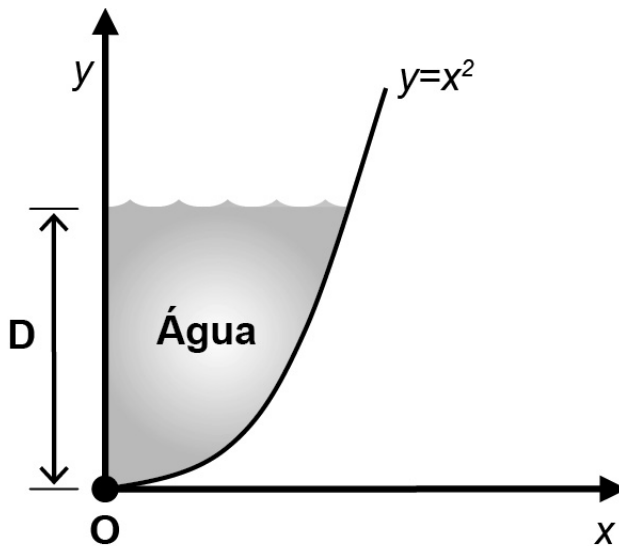


4.4 Uma comporta plana, inclinada está fixa no ponto A. Essa comporta tem largura constante de 4 m, contendo um reservatório de água conforme a figura abaixo. Determine a resultante das forças de pressão da água sobre a comporta e o seu ponto de aplicação em relação ao ponto A.

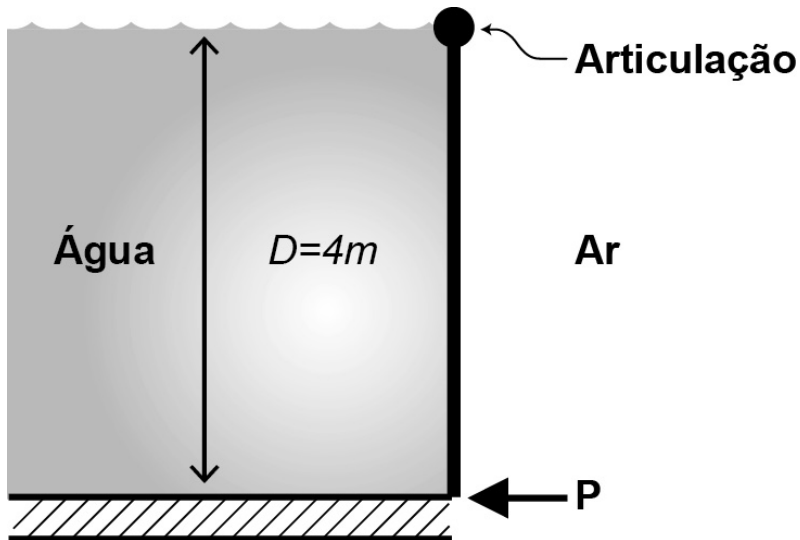


4.5 Uma barragem de água em forma de curva tem 2 m de largura, e é articulada em O. Considerando $D = 2$ m, determine:

- a componente vertical da resultante das forças de pressão de água sobre a barragem; e
- a linha de ação desta componente vertical.



4.6 A comporta plana retangular da figura abaixo tem 6 m de largura. Determine a força P necessária para segurar a comporta na posição mostrada.



Aula 5

5.1 Ar padrão entra em um tubo de 250 mm de diâmetro. Determine a vazão volumétrica mínima na qual o escoamento tornar-se-ia turbulento. ($\rho_{ar} = 1,23 \text{ kg/m}^3$ e $\mu_{ar} = 1,8 \times 10^{-5} \text{ kg/(m.s)}$)

5.2 Explique a diferença entre uma linha de corrente e uma linha de trajetória na representação gráfica de um escoamento de fluido.

5.3 Ao abrir a válvula, um tubo de 5 cm de diâmetro admite água num tanque com capacidade de 1 m³, a uma vazão mássica de 1 kg/s. Determine a velocidade média do escoamento da água e o tempo necessário para encher o tanque.

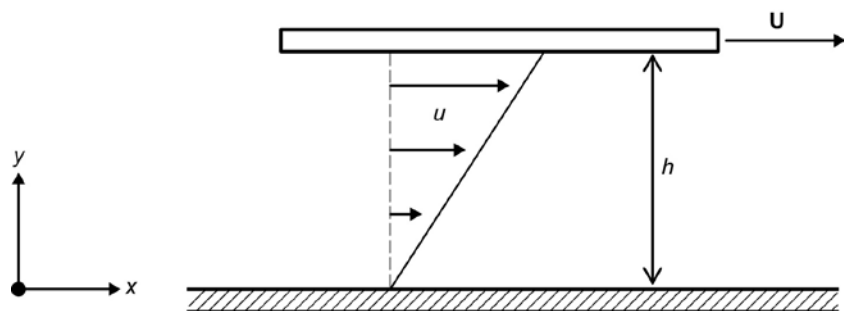
5.4 O campo de velocidade num escoamento estacionário e bidimensional de fluido é dado por $\vec{v} = 3x\vec{i} - 3y\vec{j}$. Determine:

a) a equação da linha de trajetória da partícula fluida localizada no ponto (1,2) no instante inicial; e b) a equação da linha de corrente que passa no ponto (1,2).

5.5 O campo de velocidade num escoamento estacionário e bidimensional de fluido é dado por $\vec{v} = 2x\vec{i} - 2y\vec{j}$. Determine:

a) a equação da linha de trajetória da partícula fluida localizada no ponto (2,8) em $t = 0$; e b) a aceleração da partícula fluida localizada no ponto (2,8).

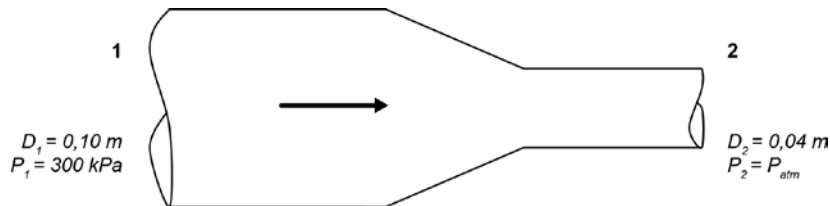
5.6 Uma placa de comprimento infinito e largura w , move-se em relação a outra fixa, havendo entre elas um fluido de massa específica ρ . Obtenha as expressões para vazão volumétrica e vazão mássica do fluido através de uma seção transversal ao escoamento.



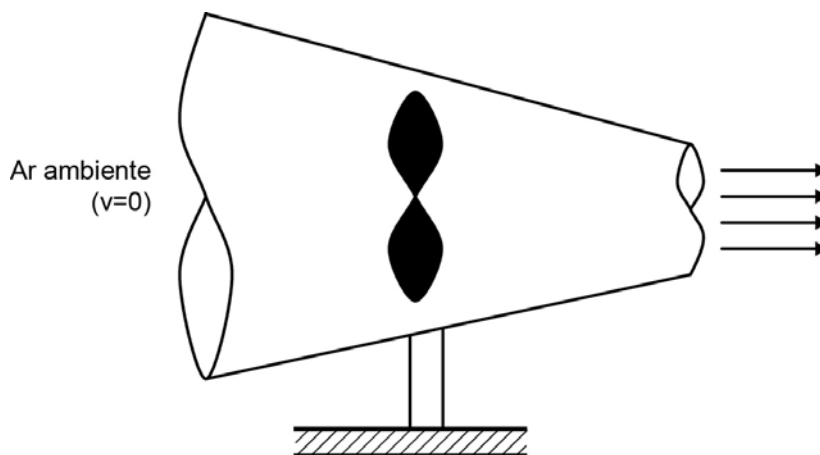
5.7 Para um escoamento permanente, laminar, completamente desenvolvido de um fluido em um tubo de comprimento L e raio R , o perfil de velocidade é dado por $u = u_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$, onde r é uma posição radial qualquer. Avalie a magnitude da velocidade média e da vazão em volume numa seção transversal do tubo.

Aula 6

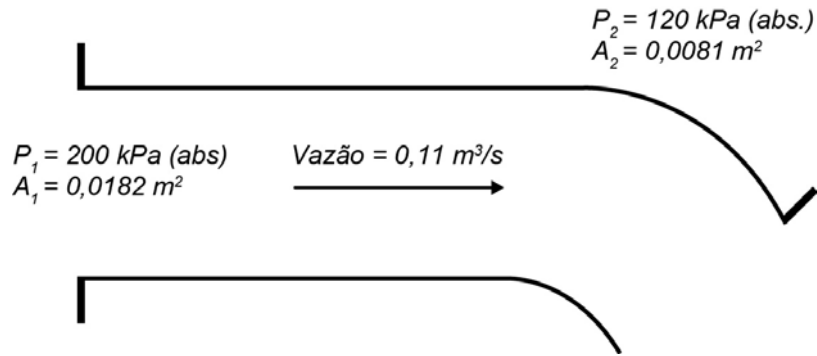
6.1 Água escoia através de um tubo-redutor. Sabendo que a vazão mássica no tubo é de $25,4 \text{ kg/s}$, determine a força horizontal necessária para manter o tubo na posição mostrada. ($p_{\text{atm}} = 101,3 \text{ kPa}$)



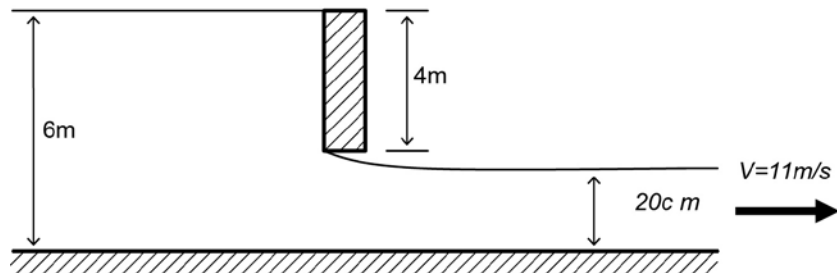
6.2 Um ventilador sopra ar ambiente a 30 m/s por uma saída de $0,38 \text{ m}$ de diâmetro. Determine a força horizontal sobre o suporte do ventilador. ($\rho_{\text{ar}} = 1,3 \text{ kg/m}^3$)



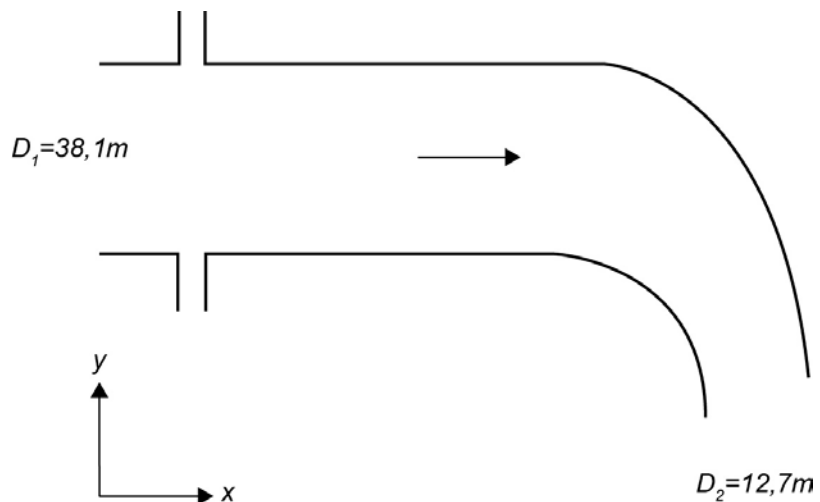
6.3 Água escoia através de um cotovelo-redutor. Avalie as componentes vertical e horizontal da resultante das forças de reação que prendem o cotovelo-redutor à tubulação adjacente, para mantê-lo na posição mostrada.



6.4 Determine a força horizontal sobre a comporta de largura 5m, num grande reservatório de água. Considere a velocidade desprezível a montante da comporta.



6.5 Água é descarregada para a atmosfera com vazão mássica de $1,27 \text{ kg/s}$ através de um joelho. Desprezando-se efeitos de fricção, efeitos gravitacionais, e a diferença entre elevações de entrada e de saída, determine as componentes horizontal e vertical da força de reação que mantém o joelho na posição.



Aula 7

7.1 Considere um escoamento de um fluido incompressível, em regime estacionário. Mostre através do balanço global de massa que conclusões podem-se obter a respeito das vazões mássica e volumétrica.

7.2 Num reservatório admite-se água com vazão de 20 litros/s e óleo com vazão de 10 litros/s. A mistura homogênea é descarregada por uma área de 30 cm². Determine a massa específica e a velocidade da mistura. ($\rho_{\text{água}} = 1000 \text{ kg/m}^3$ e $\rho_{\text{óleo}} = 750 \text{ kg/m}^3$)



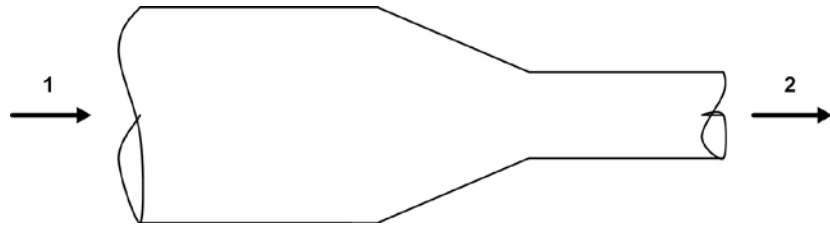
7.3 Considere o escoamento de um fluido por um tubo de seção transversal constante, no qual valem as hipóteses: 1) regime estacionário, 2) fluido incompressível, e 3) escoamento uniforme nas aberturas. Simplifique a equação de balanço de massa para um volume de controle, explicando a aplicação de cada hipótese.

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

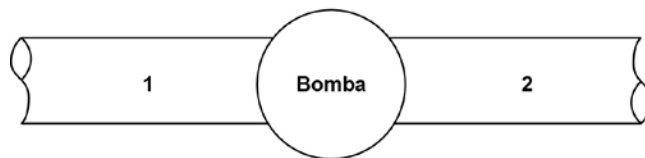
7.4 Ar escoa através de um bocal. A área da seção de entrada é 20 cm² e a da seção de saída, 10 cm². A massa específica do ar na seção de entrada é 1,2 kg/m³, e na seção de saída é 0,9 kg/m³. Sendo 10 m/s a velocidade na entrada, determine a velocidade na saída e a vazão mássica do ar. Justifique a afirmação de que a vazão mássica é igual em ambas as seções.

7.5 Água flui em escoamento permanente para dentro de um bocal que tem seu diâmetro reduzido de $R_1 = 5 \text{ cm}$ para $R_2 = 1 \text{ cm}$. Calcule a velocidade média da água que sai pelo bocal, sabendo-se que na entrada a

velocidade é expressa por $V(r) = 6 \left[1 - \left(\frac{r}{R_1} \right)^2 \right]$, onde r é uma posição radial no bocal, e que na saída a velocidade é uniforme.



$0,4 \text{ m}^2$; $p_1 = p_2 = 0,1 \text{ MPa}$. O escoamento é isotérmico, a potência fornecida ao fluido compressível pela bomba é 10 kW e a taxa de calor perdido para o exterior é $0,98 \text{ kW}$. Qual é a vazão mássica através da bomba?



7.6 O ar entra em um compressor com velocidade desprezível, a 85 kPa de pressão e 300 K de temperatura. Deixa o compressor com velocidade de 200 m/s , a 600 kPa de pressão. Calcule a temperatura de saída a uma vazão mássica de 5 kg/s , se a potência requerida é de 1500 kW . ($\Delta u = 0,205\Delta T$ e $\rho_{\text{ar}} = 1,204 \text{ kg/m}^3$)

7.7 Uma bomba movimenta um fluido incompressível fornecendo uma potência de $9,8 \text{ kW}$ ao fluido. A perda de calor na bomba é de 978 W . Considerando que o escoamento é isotérmico, determine a vazão mássica do fluido. Despreze variações de elevação.

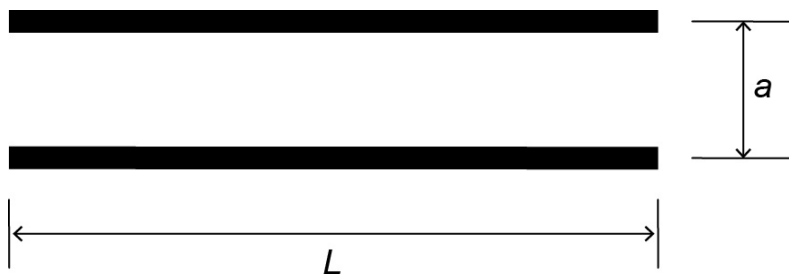
Aula 8

8.1 Num sistema de ar condicionado, o ar esco a uma vazão de $0,21 \text{ m}^3/\text{s}$ através de um duto circular, horizontal e liso, de 500 m de comprimento e $27,5 \text{ cm}$ de diâmetro. Desprezando-se as perdas menores, determine a pressão requerida na entrada, se o ar é descarregado para a atmosfera. ($\mu_{\text{ar}} = 1,81 \times 10^{-5} \text{ kg/m.s}$; $\rho_{\text{ar}} = 1,23 \text{ kg/m}^3$)

8.2 Óleo esco a através de um tubo liso, horizontal de diâmetro 20 cm , apresentando um número de Reynolds de 1500 . Determine o comprimento do tubo de forma que a queda de pressão no tubo não exceda a 20 kPa . ($\mu_{\text{óleo}} = 0,018 \text{ kg/m.s}$ e $\rho_{\text{óleo}} = 980 \text{ kg/m}^3$)

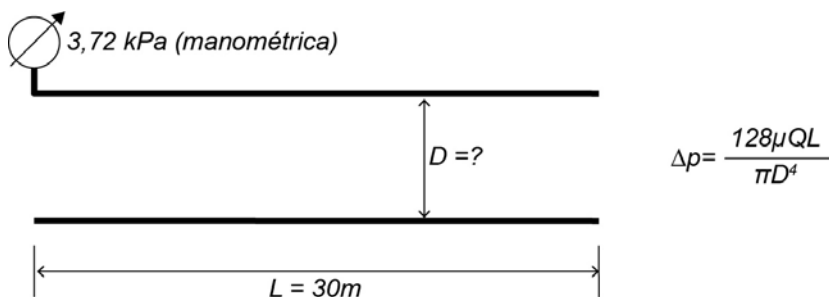
8.3 Determine a perda de carga por quilômetro de comprimento de uma tubulação de aço comercial ($e = 0,045$ mm), de diâmetro 45 cm. O fluido transportado é óleo a uma vazão volumétrica de 190 litro/s. ($\mu/\rho = 1,06 \times 10^{-5}$ m²/s)

8.4 Óleo ($\mu = 0,018$ kg/(m.s) e $\rho = 980$ kg/m³) escoar em regime permanente e completamente desenvolvido através de placas horizontais com espaçamento $a = 5$ cm de largura $b = 20$ cm, apresentando um número de Reynolds de 1500. Calcule a queda de pressão sobre o comprimento $L = 10$ m.



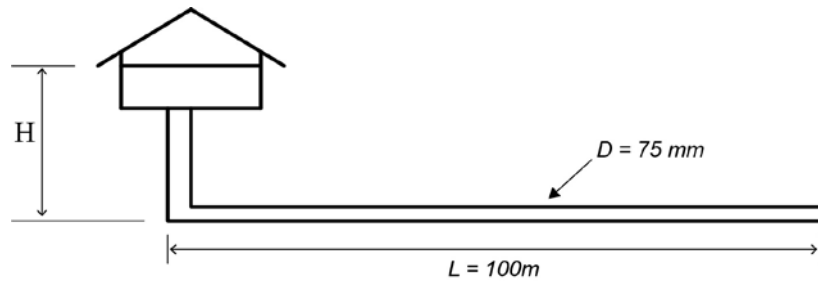
8.5 Água é transportada por um tubo liso de 150 mm de diâmetro e 10 m de comprimento, a uma vazão de 0,1 m³/s. Calcule a queda de pressão sobre todo o comprimento do tubo. (viscosidade da água: $\mu = 1 \times 10^{-3}$ kg/(m.s)).

8.6 Água escoar em regime permanente, escoamento laminar e completamente desenvolvido, através de um tubo circular liso. A água é descarregada para a atmosfera. Determine o diâmetro do tubo que produz a queda de pressão da figura abaixo. ($\mu = 0,5$ kg/(m.s) e $\rho = 1000$ kg/m³)

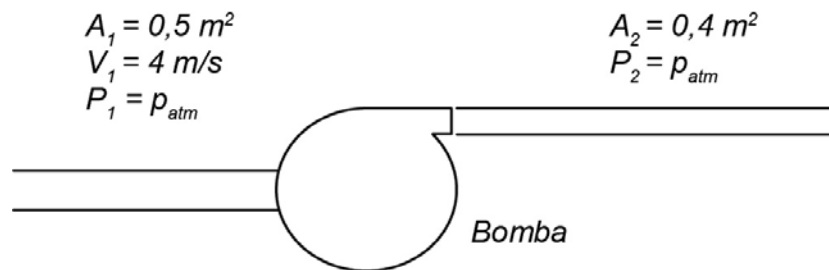


8.7 Um sistema de proteção contra incêndio é suprido por uma torre de água. Um tubo liso horizontal, com 100 m de comprimento e 75 mm de diâmetro interno, deve ser conectado ao sistema para produzir uma

vazão de água de $0,01 \text{ m}^3/\text{s}$. Determine a elevação H que mantém essa vazão de água.

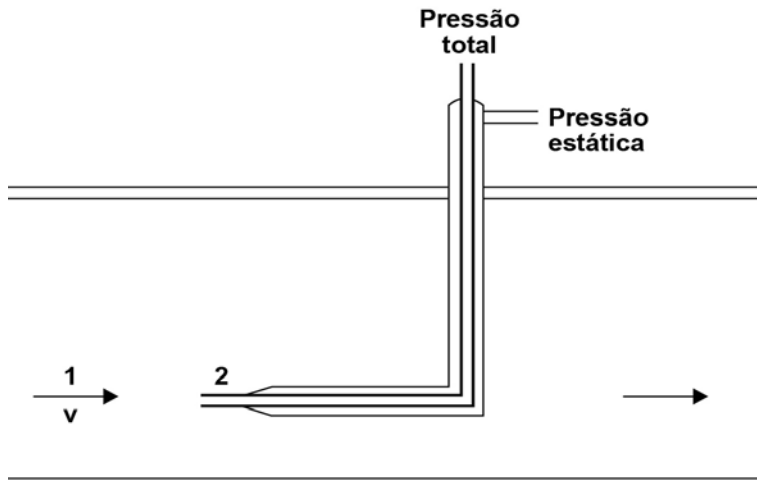


8.8 Um reservatório de grandes dimensões é drenado usando-se uma mangueira. A mangueira tem 20 mm de diâmetro interno, 0,2 mm de rugosidade absoluta e 30 m de comprimento. A extremidade livre da mangueira está localizada a 3 m abaixo do fundo do reservatório. A velocidade média na descarga da mangueira é 1,2 m/s. Estime a profundidade do reservatório, desprezando-se perdas de carga secundárias. ($\rho_{\text{água}} = 1000 \text{ kg/m}^3$ e $\mu_{\text{água}} = 1,0 \times 10^{-3} \text{ kg/(m.s)}$)



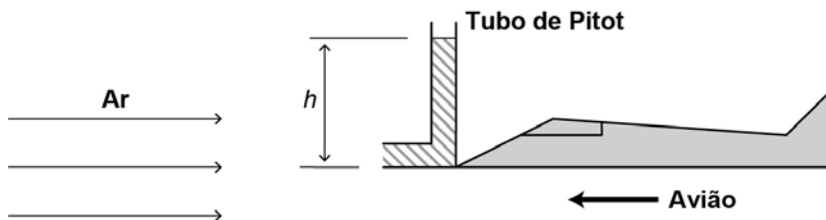
Aula 9

9.1 Um gás incompressível, invíscido escoar através de um tubo em regime estacionário. No escoamento foi inserido um tubo de Pitot, conforme a figura abaixo, onde se mediu a pressão total p_T e a pressão estática p_E . Cite as considerações necessárias para se aplicar a equação de Bernoulli, e a partir dessa equação determine a velocidade de escoamento.



9.2 Uma corrente de ar em ambiente aberto escoar com velocidade de 3 m/s. Se posicionarmos um tubo de Pitot contra o escoamento, qual seria a pressão de estagnação registrada. Considere um escoamento não-viscoso. ($\rho_{\text{ar}} = 1,23 \text{ kg/m}^3$)

9.3 A velocidade de um avião pode ser medida através de um tubo de Pitot, conforme a figura abaixo. Se o tubo está indicando uma pressão de estagnação correspondente a $h = 8 \text{ m}$ de coluna de água, qual deve ser a velocidade do avião? ($\rho_{\text{ar}} = 1,23 \text{ kg/m}^3$)



Aula 10

10.1 A distribuição de temperaturas, em regime estacionário, em uma parede plana com geração de calor, condutividade térmica k , e espessura L tem a forma $T(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Desenvolva as expressões para a taxa de geração de calor por unidade de volume e os fluxos de calor em suas duas superfícies ($x = 0, L$).

10.2 Considere as seguintes equações de balanço de energia:

$$\left. \frac{dE}{dt} \right|_{acu} = \dot{E}_{ent} - \dot{E}_{sai} + \dot{E}_g$$

e

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{q}'' + \dot{q}'''$$

que descrevem a condução de calor em um material sólido. Em quais contextos são usadas essas equações? Qual é a correspondência que existe entre os termos das equações?

10.3 As paredes de uma geladeira são tipicamente construídas com uma camada de isolante entre dois painéis de metal. Considere o isolante com condutividade térmica igual a $0,046 \text{ W/(m.K)}$ e espessura de 50 mm , e painéis de metal com condutividade térmica igual a 60 W/(m.K) e espessura de 3 mm . Com as paredes separando ar refrigerado a 4°C do ar ambiente a 25°C , determine o ganho de calor da geladeira por unidade de área superficial. Os coeficientes de transferência de calor por convecção nas superfícies interna e externa podem ser aproximados por $5 \text{ W/(m}^2\text{.K)}$.

10.4 Um tubo horizontal é sustentado por barras verticais de um material, cuja condutividade térmica é de 25 W/(m.K) . Cada barra tem comprimento de 1 m entre o tubo e o solo. Em condições normais de operação, sabe-se que a distribuição de temperaturas na direção longitudinal da barra é descrita por $T(x) = 10x^2 - 150x + 200$. As variações de temperatura na seção transversal da barra são desprezíveis. Cite três considerações necessárias para se obter uma distribuição linear de temperatura ao longo da barra. Determine o fluxo de calor na junção tubo-barra ($x = 0$) e na junção solo-barra ($x = 1 \text{ m}$). Explique a diferença encontrada entre os fluxos de calor obtidos nas duas posições.

10.5 A parede de um forno é constituída de um material isolante entre folhas finas de metal. O isolante possui uma condutividade térmica de $0,05 \text{ W/(m.K)}$. O ar no interior do forno está a uma temperatura de

300°C e o coeficiente convectivo correspondente é de 30 W/(m².K). A superfície interna da parede absorve um fluxo de calor por radiação de 100 W/m² vindo de objetos quentes no interior do forno. A temperatura no ambiente externo do forno é de 25°C e o coeficiente convectivo correspondente é de 10 W/(m².K). Qual espessura da parede é necessária para manter sua superfície externa a uma temperatura de 40°C?

Aula 11

11.1 Uma placa cerâmica a 600°C e condutividade térmica igual a 1,9 W/(m.K) tem sua superfície interna isolada termicamente, enquanto sua superfície externa é resfriada pela passagem de ar de tal forma que o coeficiente de transferência de calor por convecção seja de 5 W/(m².K). Para prevenir o aparecimento de fissuras, é sabido que o gradiente de temperatura em qualquer ponto da placa não pode exceder aos 15°C/mm. Qual é a menor temperatura do ar que pode ser usada no resfriamento? (Despreze a radiação térmica.)

11.2 Ar escoar em escoamento cruzado sobre uma barra circular com diâmetro de 10mm, que é aquecida por uma resistência elétrica. O ar se encontra a uma temperatura de 27°C e a uma velocidade de 10 m/s. Desprezando a radiação térmica, determine a temperatura superficial da barra em regime estacionário, considerando que a potência elétrica dissipada na barra é de 1000 W/m. (Propriedades do ar: viscosidade cinemática $\nu = 5,21 \times 10^{-4}$ m²/s; condutividade térmica $k = 5,21 \times 10^{-4}$ W/(m.K); número de Prandtl $Pr = 0,687$)

$$\overline{Nu_D} = 0,027 Re^{0,3} Pr^{1/3} \quad (\text{a temperatura } T_\infty)$$

11.3 Ar sob pressão de 6 kN/m² e temperatura de 300°C escoar a uma velocidade de 10 m/s sobre uma placa plana de 0,6 m de comprimento e 2 m de largura. Estime a taxa de resfriamento da placa necessária para manter sua superfície numa temperatura constante de 27°C. (Propriedades do ar: viscosidade cinemática $\nu = 5,21 \times 10^{-4}$ m²/s; condutividade térmica $k = 5,21 \times 10^{-4}$ W/(m.K); número de Prandtl $Pr = 0,687$)

11.4 Um coletor solar plano, com cobertura de vidro possui uma superfície de absorção seletiva com absorvidade solar de 0,95 e emissividade de 0,1. Em uma determinada hora do dia, a temperatura da placa solar é 120°C, quando a radiação solar é 750 W/m², a temperatura efetiva do céu é -10°C. Considerando o céu como uma superfície cinza,

determine a taxa de absorção de calor solar e a taxa de emissão de calor irradiado pelo coletor. (Constante de Stefan-Boltzmann: $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}^4)$)

Aula 12

12.1 Um efluente gasoso é liberado para o ambiente por uma chaminé, onde se encontra um filtro purificador. O filtro tem 50 cm de altura e 1 m de diâmetro. A concentração mássica do gás no interior da chaminé é de $2 \times 10^{-3} \text{ kg}/\text{m}^3$, e desprezível no ambiente. Sendo a difusividade mássica do gás no filtro igual a $0,2 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$, determine a taxa mássica na qual o gás é liberado para o ambiente.

12.2 Uma placa delgada de aço macio com espessura de 0,5 mm separa duas misturas do aço fundido com distintas concentrações de carbono de 0,15% e 1,0%. O coeficiente de difusão do carbono em aço macio é $4,8 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$. Determine o fluxo difusivo de massa de carbono através da placa de aço.

12.3 Um filtro de papel com espessura $e = 50$ micrometro e área de seção transversal $A = 0,004 \text{ m}^2$, separa duas soluções de água e sal em diferentes concentrações. O coeficiente de difusão do sal na água é $D = 6 \times 10^{-14} \text{ m}^2/\text{s}$. Para frações mássicas do sal nas superfícies opostas do filtro de 4,5% e 0,5%, determine a taxa de transferência de massa do sal através do filtro. (Massa específica da solução: $\rho = 2,0 \times 10^{-3} \text{ kg}/\text{m}^3$)

12.4 A partir da equação de difusão mássica, $\frac{\partial(\rho c_i)}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho D_i \nabla c_i) + \dot{m}_i'''$, considerando: (1) regime estacionário; (2) propriedades uniformes; (3) ausência de geração de massa; e (4) difusão unidimensional; desenvolva a expressão para o campo de fração mássica.