



Fundação

CECIERJ

Consórcio **cederj**

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Mecânica Geral

Volume Único

Jorge Alberto Rodriguez Duran



GOVERNO DO ESTADO
RIO DE JANEIRO

Secretaria de Ciência, Tecnologia e Inovação

**UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL**

MINISTÉRIO DA
EDUCAÇÃO



PÁTRIA AMADA
BRASIL
GOVERNO FEDERAL

Apoio:



FAPERJ

Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

www.cederj.edu.br

Presidente

Carlos Eduardo Bielschowsky

Vice-presidente

Marilvia Dansa de Alencar

Coordenação do Curso de Engenharia de Produção

CEFET - Diego Carvalho

UFF - Cecília Toledo Hernández

Material Didático

Elaboração de Conteúdo

Jorge Alberto Rodríguez Duran

Direção de Design Instrucional

Bruno José Peixoto

Coordenação de Design Instrucional

Flávia Busnardo da Cunha

Design Instrucional

Aroaldo Veneu

Biblioteca

Simone da Cruz Correa de Souza

Vera Vani Alves de Pinho

Diretoria de Material Impresso

Ulisses Schnaider

Revisão Linguística

Rosane Lira

Ilustração

André Dahmer

Capa

André Dahmer

Programação Visual

Mario Lima

Produção Gráfica

Fábio Rapello Alencar

Copyright © 2019, Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e/ou gravada, por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da Fundação.

D948

Duran, Jorge Alberto Rodriguez.

Mecânica geral. Volume único / Jorge Alberto Rodriguez Duran.
– Rio de Janeiro : Fundação Cecierj, 2019.

182p.; 19 x 26,5 cm.

ISBN: 978-85-458-0156-6

1. Mecânica. I. Título.

CDD: 531

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.
Texto revisado segundo o novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa.

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador

Wilson Witzel

Secretário de Estado de Ciência, Tecnologia, Inovação

Leonardo Rodrigues

Instituições Consorciadas

CEFET/RJ - Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca

Diretor-geral: Carlos Henrique Figueiredo Alves

FAETEC - Fundação de Apoio à Escola Técnica

Presidente: Alexandre Sérgio Alves Vieira

IFF - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense

Reitor: Jefferson Manhães de Azevedo

UENF - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Reitor: Luis César Passoni

UERJ - Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Reitor: Ruy Garcia Marques

UFF - Universidade Federal Fluminense

Reitor: Antonio Claudio Lucas da Nóbrega

UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro

Reitor: Roberto Leher

UFRRJ - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Reitor: Ricardo Luiz Louro Berbara

UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

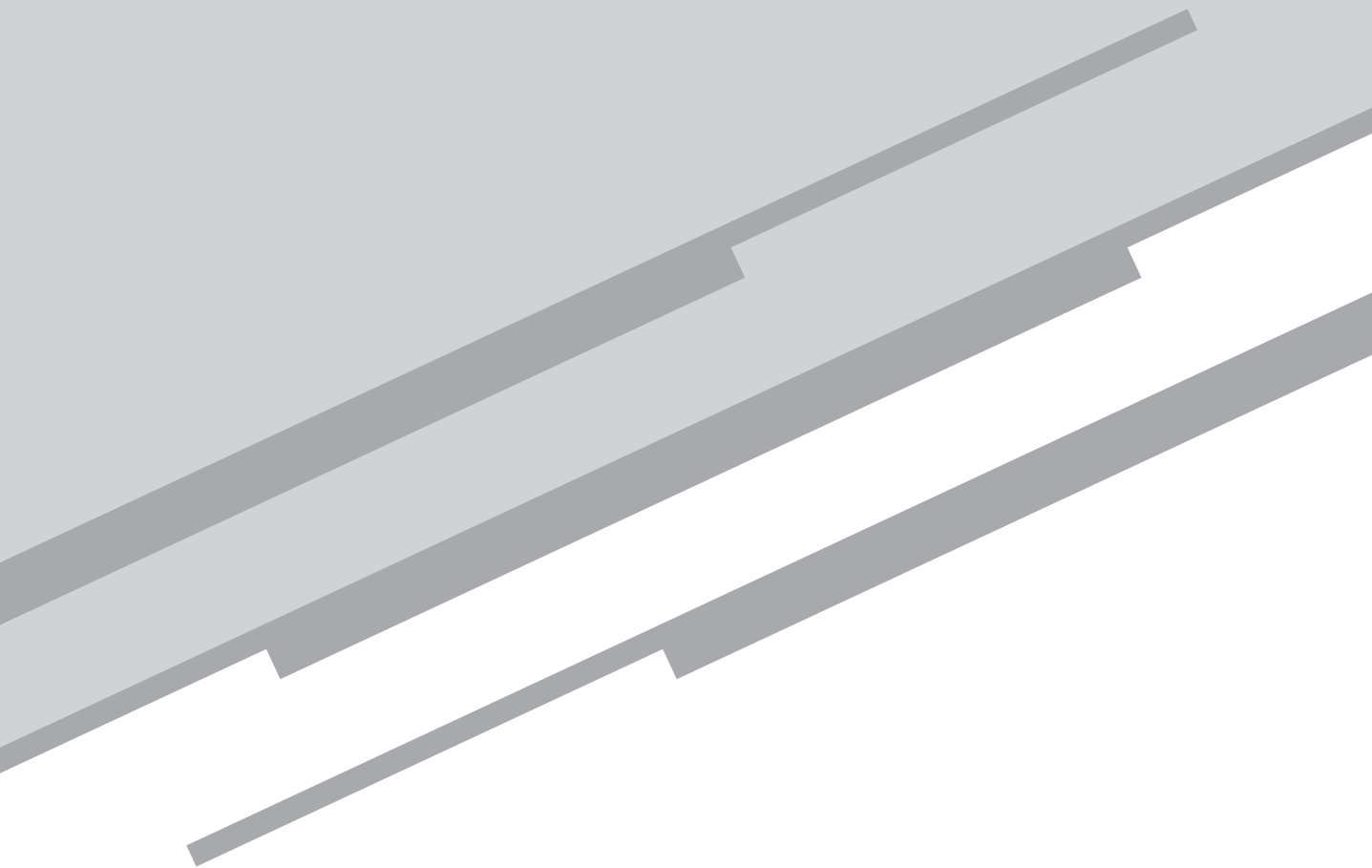
Reitor: Luiz Pedro San Gil Jutuca

Sumário

Aula 1 • Escalares, vetores e forças no plano	7
<i>Jorge Alberto Rodriguez Duran</i>	
Aula 2 • Forças no Espaço	29
<i>Jorge Alberto Rodriguez Duran</i>	
Aula 3 • Sistemas equivalentes de forças	45
<i>Jorge Alberto Rodriguez Duran</i>	
Aula 4 • Estática dos corpos rígidos em duas dimensões	63
<i>Jorge Alberto Rodriguez Duran</i>	
Aula 5 • Estática dos corpos rígidos em três dimensões.....	75
<i>Jorge Alberto Rodriguez Duran</i>	
Aula 6 • Forças distribuídas.....	87
<i>Jorge Alberto Rodriguez Duran</i>	
Aula 7 • Estruturas	103
<i>Jorge Alberto Rodriguez Duran</i>	
Aula 8 • Vigas.....	121
<i>Jorge Alberto Rodriguez Duran</i>	
Aula 9 • Cabos	133
<i>Jorge Alberto Rodriguez Duran</i>	
Aula 10 • Atrito.....	143
<i>Jorge Alberto Rodriguez Duran</i>	
Aula 11 • Momentos de Inércia de Superfícies Planas	157
<i>Jorge Alberto Rodriguez Duran</i>	

Aula 1

Escalares, vetores e forças no plano



Jorge Alberto Rodriguez Duran

Meta

Explicar a representação de forças no plano utilizando vetores cartesianos e como obter a resultante de um sistema de forças coplanares e concorrentes mediante a soma das componentes dos respectivos vetores de força.

Objetivos

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. reconhecer a mecânica geral dentre as várias áreas da mecânica;
2. identificar as diferenças entre escalares e vetores;
3. representar forças no plano mediante notação escalar e vetores cartesianos;
4. calcular a resultante de vetores de forças concorrentes no plano.

Introdução

A mecânica é uma ciência aplicada que trata do comportamento de corpos quando submetidos a forças e deslocamentos. Os métodos de análise na mecânica se dividem em *vetoriais* e *variacionais*.

1. Métodos vetoriais: são formulados com base em grandezas vetoriais como forças e deslocamentos.
2. Métodos variacionais: são formulados com base em grandezas escalares como trabalho e energia.

As principais áreas da mecânica são:

1. mecânica dos corpos rígidos;
2. mecânica dos corpos deformáveis;
3. mecânica dos fluidos.

A mecânica dos corpos rígidos se divide em *estática* e *dinâmica*. A dinâmica analisa situações em que as acelerações provocadas pelas forças atuantes são diferentes de zero. Um caso particular da dinâmica ocorre quando as forças não aceleram o corpo. Este poderá estar em movimento, com velocidade constante ou em repouso. Por exemplo, um eixo de transmissão de potência é um exemplo de componente mecânico em movimento com velocidade constante, enquanto as estruturas de aço como pontes e prédios são exemplos de corpos em repouso.



Ibon San Martin

Figura 1.1: Ponte na ilha de Manhattan, Nova York, EUA. Pontes são um exemplo de corpo em repouso.

Fonte: <http://www.freeimages.com/photo/manhattan-bridge-1472657>

O ramo da mecânica dos corpos rígidos que trata deste caso particular, movimento com velocidade constante ou em repouso, é conhecido como *estática* e será o foco da presente disciplina.

Tanto na estática quanto na dinâmica, o equilíbrio ou movimento dos corpos se analisa de forma independente às deformações provocadas pela aplicação dos carregamentos. Note que esta observação está implícita no nome *mecânica dos corpos rígidos*. Qualquer sólido se deforma, quando carregado. Em alguns casos, os deslocamentos são visíveis (uma viga de pouca rigidez em balanço ou biapoada, por exemplo). Em outros, são bem menores, da ordem de micrômetros. Considerar o corpo rígido equivale a desprezar estes deslocamentos, independentemente do seu valor.

Já a *mecânica dos corpos deformáveis* trata da distribuição (intensidade) dos esforços internos através dos sólidos e, para isso, utiliza os conceitos de tensão e deformação. O caso mais elementar ocorre quando solicitamos uma barra em tração. Neste caso, a tensão normal desenvolvida na barra será igual à força aplicada dividida pela área da seção transversal da barra; enquanto a deformação normal será igual ao quociente da tensão normal pelo módulo de elasticidade do material. Quando da aplicação de métodos vetoriais para a solução de problemas de mecânica dos corpos deformáveis, é possível diferenciar as abordagens da mecânica dos materiais e da teoria da elasticidade.



A mecânica dos materiais permite obter soluções aproximadas ao assumir um determinado modo de deformação e comportamento do material. Já a teoria da elasticidade utiliza uma abordagem matemática mais profunda, visando a obtenção de soluções exatas. No entanto, estas duas abordagens fornecem resultados bem próximos para uma surpreendente gama de aplicações práticas.

No Brasil, a mecânica dos corpos deformáveis é tratada nas disciplinas de resistência dos materiais, que utilizam quase que exclusivamente, os métodos da mecânica dos materiais.

Por último, a mecânica dos fluidos envolve o estudo das forças nos fluidos e pode também ser dividida em estática e dinâmica dos fluidos. Mediante a mecânica dos fluidos podemos analisar a ação dos ventos em edificações, o equilíbrio de navios, realizar o projeto de máquinas hidráulicas, como bombas e turbinas, etc.

Agora que você já conhece um pouco mais sobre mecânica, vamos começar a estudar as diferenças entre escalares e vetores.

Escalares e Vetores

Os escalares e os vetores são utilizados para descrever e manipular as grandezas físicas envolvidas no estudo da mecânica. Para diferenciá-los, o presente texto utiliza a convenção mais comum que atribui caracteres em *itálico* aos escalares e em **negrito** aos vetores. O escalar pode ser definido completamente mediante sua intensidade. Por exemplo, um único valor numérico, juntamente com as unidades, permite descrever a temperatura em um determinado ponto do espaço interior de um veículo. O mesmo ocorre com quantidades tais como a massa, tempo e energia.

Outras grandezas exigem mais informação. Exemplos clássicos são a velocidade com que se movimenta um corpo ou a força que sobre ele atua. Nesses casos, não basta afirmar que o movimento ocorre, por exemplo, a uma velocidade de 3 m/s ou que a força exercida é de 20 N: é preciso especificar também as direções. O escalar não consegue carregar essa informação adicional e, para estes fins, são utilizados os vetores. Tanto os escalares quanto os vetores poderão mudar também com a posição espacial e com o tempo, mas estes parâmetros serão considerados fixos em todas as nossas análises.

Um vetor no plano nada mais é do que um par ordenado de números reais $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2]$. Em um sistema de coordenadas cartesiano, estes dois números representam um ponto no plano. O segmento de reta orientado desde a origem até o ponto v_1, v_2 fornece uma interpretação geométrica do vetor \mathbf{v} , como mostrado na **Figura 1.2**. Desta forma, o vetor terá intensidade (módulo), direção e sentido, tornando-o útil para descrever as grandezas físicas que requerem estas informações.

É importante perceber que o módulo ou intensidade do vetor será sempre uma quantidade positiva. Os escalares v_1 e v_2 são as componentes do vetor \mathbf{v} , no referencial mostrado na **Figura 1.2**. Estes dois escalares entre colchetes constituem a *representação escalar de vetores*.

Eles podem ser positivos ou negativos, dependendo da posição do referencial.

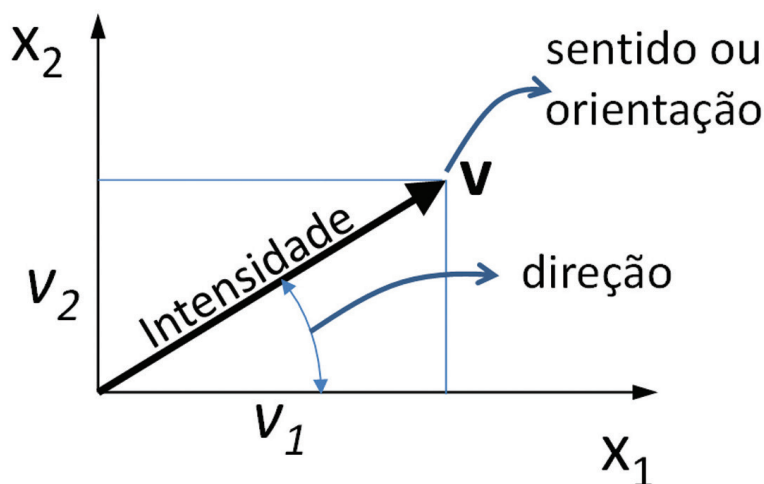


Figura 1.2: Interpretação geométrica do vetor \mathbf{v} com componentes escalares v_1 e v_2 no plano x_1x_2 .

Os vetores com significado físico têm que ser independentes do referencial. Isto significa que dois observadores em diferentes pontos do espaço poderão ter representações próprias (dependendo do referencial de cada um) do mesmo objeto matemático (vetor). O objeto, porém, permanecerá o mesmo. O referencial cartesiano será o único utilizado nesta disciplina e, por esse motivo, os vetores (no plano) terão a sua representação vetorial ou escalar definida em coordenadas x_1 e x_2 .

Operações com vetores

A soma (ou subtração) de vetores consiste simplesmente em somar (ou subtrair) as respectivas componentes na sua notação escalar. Geometricamente, esta operação se realiza utilizando a regra do paralelogramo, que consiste em traçar linhas desde a extremidade de cada vetor e paralelas ao outro, como você pode ver na **Figura 1.3**. Quando estas linhas se interceptam, formam, junto com os vetores originais, um paralelogramo. O vetor resultante será a diagonal deste paralelogramo. A intensidade e orientação do vetor resultante podem ser calculadas utilizando relações trigonométricas como a lei dos senos e dos cossenos. É possível realizar também a soma de vetores mediante a notação vetorial cartesiana, a ser discutida posteriormente.

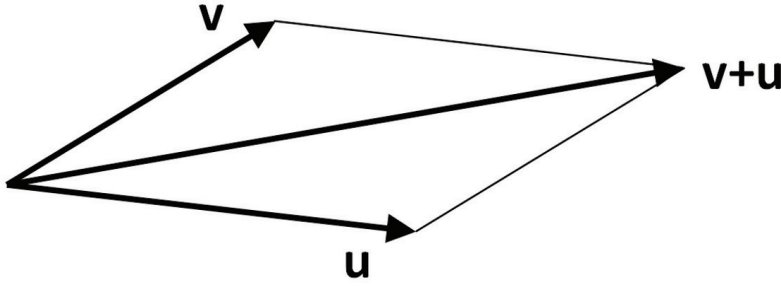


Figura 1.3: Ilustração da regra do paralelogramo para a soma gráfica de vetores \mathbf{v} e \mathbf{u} .

A multiplicação de um escalar por um vetor modifica a sua intensidade e sentido, deixando invariável a direção, como mostrado na **Figura 1.4**.

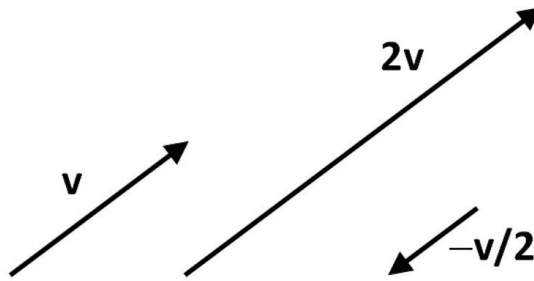


Figura 1.4: Exemplos de multiplicação e divisão de vetores por escalares.

Dois vetores podem ser multiplicados internamente resultando em um escalar. Esta operação é conhecida como *produto escalar* (ou *produto interno*) e pode ser definida por qualquer uma das duas operações a seguir.

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{v}| |\mathbf{u}| \cos \alpha = v_1 u_1 + v_2 u_2 \quad (1.1)$$

Onde α é o ângulo entre os vetores $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2]$ e $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2]$ (**Figura 1.5**), enquanto $|\mathbf{v}|$ e $|\mathbf{u}|$ são os módulos (comprimentos) dos vetores \mathbf{v} e \mathbf{u} , respectivamente. As componentes de cada vetor são apresentadas na **Figura 1.5**.

O produto escalar de vetores é comutativo, ou seja, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Note que, quando os vetores são ortogonais entre si, ou seja, quando $\alpha = \pi/2$, o produto interno deles é zero. Da mesma forma, o produto interno de

dois vetores colineares é o produto dos módulos, já que $\cos(0^\circ) = 1$. A componente escalar p do vetor \mathbf{v} , na direção do vetor \mathbf{u} , calcula-se como:

$$p = |\mathbf{v}| \cos \alpha \quad (1.2)$$

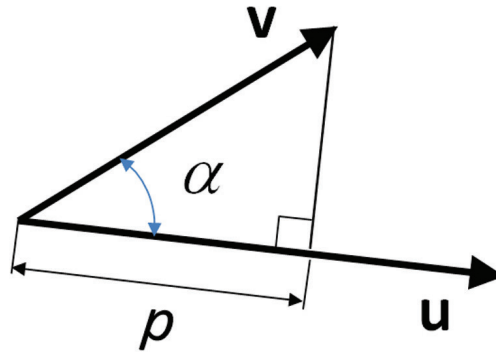


Figura 1.5: Componente escalar de \mathbf{v} na direção de \mathbf{u} .

A equação anterior não se altera quando se multiplica pelo quociente dos módulos de \mathbf{u} :

$$p = |\mathbf{v}| \cos \alpha \frac{|\mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \quad (1.3)$$

A última operação é o resultado de utilizar a definição da equação (1) em (3). Em particular, se o vetor \mathbf{u} for unitário (módulo 1), a projeção de \mathbf{v} em \mathbf{u} é simplesmente o produto escalar de ambos vetores.

$$p = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \quad (1.4)$$

Vetores cartesianos

A equação (4) motiva outro tipo de representação de vetores no plano, utilizando as suas projeções nos eixos cartesianos, como você pode observar na **Figura 1.6**. A direção e sentido dos semi-eixos positivos x_1 e x_2 é dada pelos vetores unitários \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 . Os semi-eixos negativos x_1 e x_2 serão dados por $-\mathbf{e}_1$ e $-\mathbf{e}_2$, respectivamente. As componentes de \mathbf{v} em cada eixo, de acordo com a equação (4), serão:

$$\begin{aligned} v_1 &= |\mathbf{v}| \cos \alpha \\ v_2 &= |\mathbf{v}| \cos \beta \end{aligned} \quad (1.5)$$

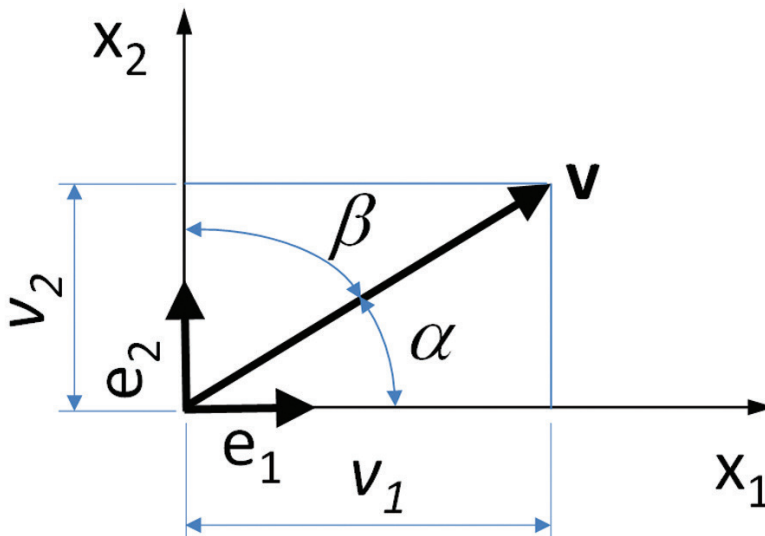


Figura 1.6: Componentes do vetor \mathbf{v} na direção dos eixos cartesianos.

Como os ângulos α e β fornecem a direção de \mathbf{v} , os cossenos destes ângulos são conhecidos como *cossenos diretores*. É importante observar que os ângulos diretores se formam entre o vetor e a direção positiva dos eixos cartesianos. Eles estarão sempre entre 0 e 180°, independente da direção de \mathbf{v} . Por exemplo, a direção do vetor unitário \mathbf{e}_1 no sentido positivo do semi-eixo x_1 é dada por $\alpha = 0^\circ$ e $\beta = \pi/2$. Este vetor, na forma de componentes, é $\mathbf{e}_1 = [\cos(0) = 1 \ \cos(\pi/2) = 0]$. Já no sentido do semi-eixo negativo de x_1 , como $\alpha = \pi$ e $\beta = \pi/2$, as componentes são $\mathbf{e}_1 = [\cos(\pi) = -1 \ \cos(\pi/2) = 0]$. O círculo trigonométrico (**Figura 1.7**) será bastante útil para uma rápida determinação de senos e cossenos dos ângulos significativos, bem como dos sinais dos ângulos diretores nos diferentes quadrantes.

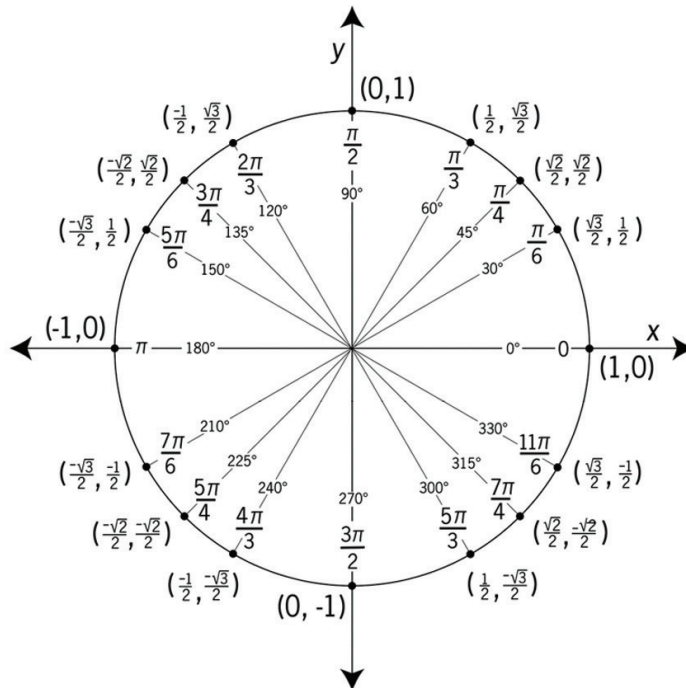


Figura 1.7: Círculo trigonométrico unitário, mostrando os valores do cosseno e seno (respectivamente e entre parênteses) para cada ângulo significativo (múltiplo de 30°)

Fonte: Open Study Disponível em: <http://assets.openstudy.com/updates/attachments/5525ab47e4b030ceb3f34e06-e.mccormick-1428533847304-unitcircle7_43215_lg.gif>. Acesso em: 22 jun. 2015.

Como vimos na **Figura 1.4**, a multiplicação de um vetor por um escalar modifica apenas o tamanho do vetor. Por isso, a multiplicação pelos escalares v_1 e v_2 modificará apenas o tamanho dos vetores unitários \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 . O vetor \mathbf{v} pode, então, ser expresso como a soma dos vetores $v_1 \mathbf{e}_1$ e $v_2 \mathbf{e}_2$, resultando em:

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 \quad (1.6)$$

A equação (6) é a *notação vetorial cartesiana* do vetor \mathbf{v} . Trata-se de uma representação muito conveniente de vetores, pois permite separar a intensidade (v_1 e v_2) e o sentido e orientação (\mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2) de cada componente. As componentes de \mathbf{v} permitem calcular sua intensidade (módulo) pelo conhecido teorema de Pitágoras:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \quad (1.7)$$

Uma relação entre os cossenos diretores de \mathbf{v} pode ser obtida substituindo a equação (1.5) em (1.7):

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(|\mathbf{v}|\cos\alpha)^2 + (|\mathbf{v}|\cos\beta)^2} = |\mathbf{v}|\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta}$$

$$\therefore \cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1 \quad (1.8)$$

Ou seja, os cossenos diretores não são independentes um do outro. Em particular se \mathbf{v} é um vetor unitário (módulo 1) a sua representação em notação vetorial cartesiana (equação 6) fornece diretamente os cossenos diretores de \mathbf{v} (ver equação 1.5).

Como sabemos, a representação geométrica de um vetor no plano é um segmento de reta orientado. A inclinação de qualquer reta é constante e pode ser representada por um triângulo retângulo como mostrado na **Figura 1.8**. Assim, em vez de usar os ângulos diretores α e β , a direção de \mathbf{v} pode ser dada pela relação entre os lados deste triângulo. A equação (1.5) pode, então, ser escrita da seguinte forma:

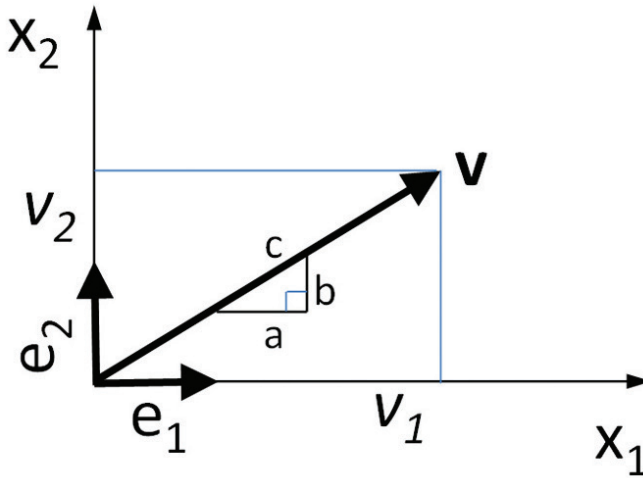


Figura 1.8: O triângulo de inclinação poderá ser utilizado para descrever a direção de \mathbf{v} .

$$\frac{|\mathbf{v}|}{c} = \frac{v_1}{a} \Rightarrow v_1 = \left(\frac{a}{c}\right)|\mathbf{v}|$$

$$\frac{|\mathbf{v}|}{c} = \frac{v_2}{b} \Rightarrow v_2 = \left(\frac{b}{c}\right)|\mathbf{v}| \quad (1.9)$$

Exemplo 1: Os vetores de torque \mathbf{T} e aceleração angular $\boldsymbol{\omega}$ que representam grandezas físicas entregues por um motor de combustão interna, tem a sua representação escalar dada por $\mathbf{T} = [0 \ 237,5] \text{ N.m}$ e $\boldsymbol{\omega} = [0 \ 314] \text{ rad/s}$. Calcule a potência do motor como o produto escalar de \mathbf{T} e $\boldsymbol{\omega}$.

Solução: o referencial cartesiano foi convenientemente ajustado a estes vetores, de maneira que não há componentes na direção x_1 , como pode ser deduzido da sua representação escalar ($\mathbf{T} = [t_1 \ t_2] = [0 \ 237,5]$; $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1 \ \omega_2] = [0 \ 314]$). Isto significa que os vetores são colineares. A colinearidade de \mathbf{T} e $\boldsymbol{\omega}$ implica em: 1) $\beta = 0 \Rightarrow \cos(\beta) = 1$, e 2) as componentes na direção x_2 correspondem aos respectivos módulos dos vetores. De acordo com a equação (1), o produto escalar será simplesmente o produto dos módulos:

$$Pot = \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\omega} = [237,5 \ 0] \cdot [314 \ 0] = 237,5 \cdot 314 = 74,6 \text{ KW}$$

Exemplo 2: Um vetor de força \mathbf{F} , de intensidade 30 N, faz um ângulo de 30° , com a direção x_1 de um referencial cartesiano, coincidente com o ponto de aplicação de \mathbf{F} . Obtenha a representação vetorial cartesiana de \mathbf{F} .

Solução: em problemas planos e no primeiro quadrante não é necessário saber os dois ângulos diretores, já que eles são complementares: $\beta = \pi/2 - \alpha$ e, portanto, $\alpha = 30^\circ$ e $\beta = 60^\circ$. Dentre outras várias formas, é possível também chegar a esta conclusão utilizando a equação (8). Lembrando da identidade trigonométrica $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, em que φ é um ângulo qualquer, tem-se:

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta &= 1 \Rightarrow \cos^2 \beta = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha \\ \therefore \cos \beta &= \sin \alpha \end{aligned}$$

As componentes cartesianas de \mathbf{F} serão:

$$\begin{aligned} F_1 &= |\mathbf{F}| \cos \alpha = 30 \cdot \cos \frac{\pi}{6} = 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3} \cong 26 \text{ N} \\ F_2 &= |\mathbf{F}| \cos \beta = 30 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 15 \text{ N} \end{aligned}$$

Por último, pode-se representar \mathbf{F} , mediante a notação vetorial cartesiana, utilizando a equação (6) e plotar o vetor em escala (**Figura 1.9**).

$$\mathbf{F} = F_1 \mathbf{e}_1 + F_2 \mathbf{e}_2 = 15\sqrt{3} \mathbf{e}_1 + 15 \mathbf{e}_2 \quad \text{N}$$

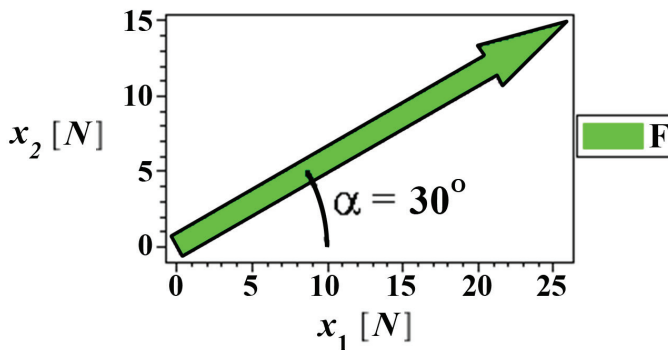


Figura 1.9: Representação em escala do vetor **F** no plano cartesiano x_1 x_2 .

Atividade 1

Atende ao objetivo 3

Repita todos os passos do exemplo anterior para um força **Q** de 100 KN, que faz um ângulo de 60° com a direção positiva do eixo x_2 .

Resposta comentada

Neste caso e de acordo com a definição de ângulos diretores, $\alpha = 90 + 60 = 150 = 5/6$ e $\beta = 60 = \pi/3$. Os cossenos destes ângulos podem ser lidos diretamente na **Figura 1.7** como $\cos(5\pi/6) = -\sqrt{3}/2$ e $\cos(\pi/3) = 1/2$. Como resultado, $Q = [-50\sqrt{3} \ 50] \cong [-86,6 \ 50]$. O vetor **Q** em escala se mostra, na figura a seguir:

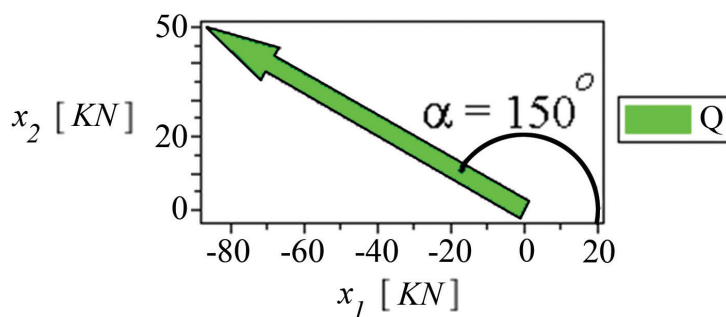


Figura 1.10: Representação gráfica em escala do vetor de força **Q** no referencial cartesiano x_1 x_2 .

Resultante de Forças no Plano

Tanto a notação vetorial cartesiana quanto a escalar de vetores podem ser utilizadas para encontrar a resultante de forças no plano. Contudo, para problemas simples em duas dimensões, a notação escalar é mais eficiente. Já o uso de vetores cartesianos facilita muito a solução de problemas tridimensionais. Considere o sistema de forças coplanares concorrentes \mathbf{w} e \mathbf{q} (Figura 1.11).

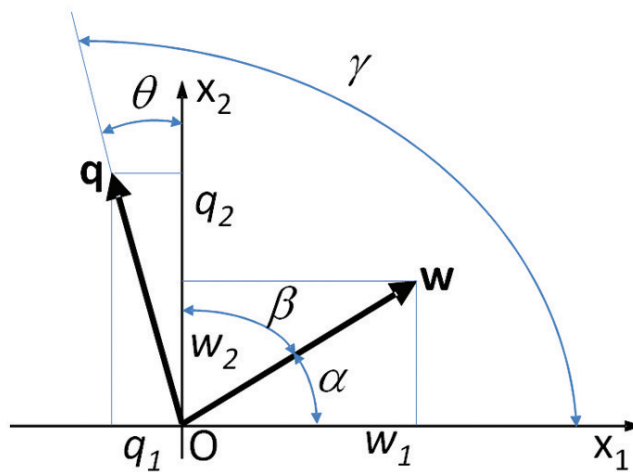


Figura 1.11: Vetores de forças concorrentes e coplanares \mathbf{w} e \mathbf{q} . Os ângulos diretores do vetor \mathbf{w} são α e β , enquanto que os de \mathbf{q} são γ e θ .

Os vetores cartesianos de cada força serão:

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= w_1 \mathbf{e}_1 + w_2 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{q} &= -q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2\end{aligned}\tag{1.10}$$

Se os ângulos diretores de cada força são conhecidos, as componentes se obtêm pela equação (5). A componente q_1 aponta no sentido negativo do eixo x_1 , logo, estará associada ao vetor \mathbf{e}_1 . É possível verificar também o sinal desta componente, observando que o cosseno do ângulo γ , que pertence ao segundo quadrante, é negativo (Figura 1.7).

A resultante das forças que atuam no ponto O será a soma vetorial dos vetores cartesianos \mathbf{w} e \mathbf{q} . As componentes do vetor \mathbf{FR} são o resultado de somar as respectivas componentes escalares de cada vetor. O mesmo resultado seria obtido utilizando a lei do paralelogramo.

$$\begin{aligned}\mathbf{FR} &= (w_1 - q_1) \mathbf{e}_1 + (w_2 + q_2) \mathbf{e}_2 \\ FR_1 &= w_1 - q_1 \\ FR_2 &= w_2 + q_2\end{aligned}\tag{1.11}$$

A orientação do vetor resultante $\mathbf{FR} = [FR_1 \ FR_2] = [w_1 - q_1 \ w_2 + q_2]$, com relação ao eixo x_1 , pode ser obtida como o ângulo cuja tangente é o quociente das componentes, como se observa na **Figura 1.12**.

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{w_2 + q_2}{w_1 - q_1} \right| = \tan^{-1} \left| \frac{FR_2}{FR_1} \right| \quad (1.12)$$

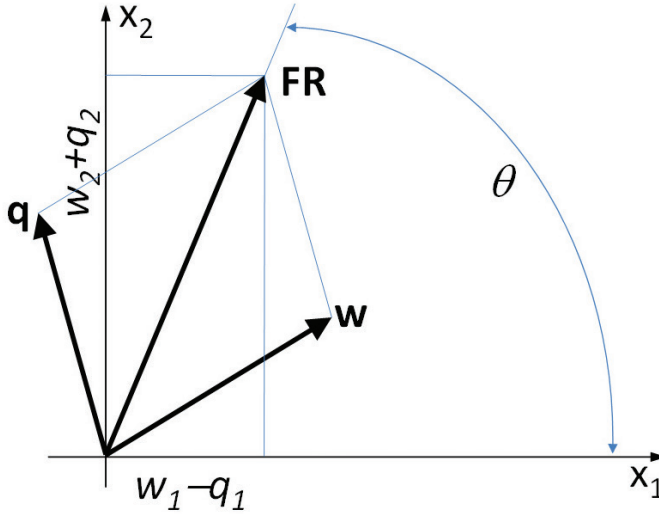


Figura 1.12: Resultante e orientação da resultante \mathbf{FR} das forças \mathbf{w} e \mathbf{q} .

Observe que este ângulo não necessariamente será um dos ângulos diretores, de acordo com a definição dada anteriormente. Isto ocorre, por exemplo, quando \mathbf{FR} está no segundo ou terceiro quadrantes. Os ângulos diretores, no entanto, poderão ser facilmente estimados a partir de θ .

Em geral, a intensidade e orientação da resultante de qualquer sistema de forças no plano, no referencial cartesiano $x_1 x_2$, em notação escalar, será:

$$\begin{aligned} FR_1 &= \sum F_{x1} \\ FR_2 &= \sum F_{x2} \\ FR &= \sqrt{FR_1^2 + FR_2^2} \\ \theta &= \tan^{-1} \frac{FR_2}{FR_1} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Exemplos

Considere um sistema de forças coplanares e concorrentes em O, como na **Figura 1.13**. Os vetores não estão desenhados em escala. Os dados numéricos para cada um dos exemplos a seguir se mostram na **Tabela 1.1**. Os dois primeiros exemplos serão resolvidos. Após, vamos propor uma atividade para que você possa praticar.

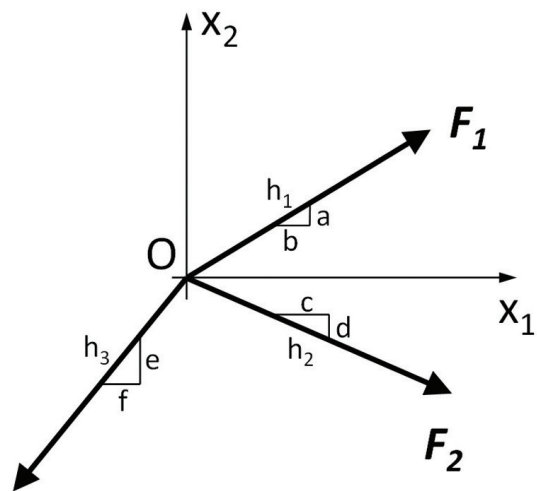


Figura 1.13: Sistema de forças coplanares e concorrentes a ser utilizado nos exemplos.

Tabela 1.1: Dados numéricos para os exemplos 3 e 4 e atividade 2.

Dados correspondem a:	F_1 , N	F_2 , N	F_3 , N	a	b	c	d	e	f
Exemplo 3	160	300	200	1	2	3	2	4	1
Exemplo 4	600	–	350	3	5	–	–	5	1
Atividade 2	–	800	1200	–	–	3	1	2	1

Exemplo 3: Calcule a intensidade e orientação da força resultante.

Solução: a orientação dos vetores de força é dada pelos triângulos de inclinação. Não é necessário fornecer as hipotenusas de cada triângulo (h_i), já que elas podem ser calculadas pelo teorema de Pitágoras. Por exemplo, $h_1^2 = a^2 + b^2$. As componentes de cada vetor serão obtidas pela equação (9). O somatório de forças nas direções x_1 e x_2 fornece as forças resultantes em cada eixo.

$$FR_1 = \sum F_{x_1} = F_1 \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} + F_2 \frac{c}{\sqrt{c^2 + d^2}} - F_3 \frac{f}{\sqrt{e^2 + f^2}} = 344 \text{ N}$$

$$FR_2 = \sum F_{x_2} = F_1 \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} - F_2 \frac{d}{\sqrt{c^2 + d^2}} - F_3 \frac{e}{\sqrt{e^2 + f^2}} = -289 \text{ N}$$

Observe que a resultante destas componentes só poderá estar no 4 quadrante. Para calcular a intensidade e orientação do vetor resultante de forças, FR e θ , respectivamente, utiliza-se a equação (13).

$$FR = \sqrt{FR_1^2 + FR_2^2} = 449 \text{ N}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{FR_2}{FR_1} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{-289}{344} \right) = \tan^{-1} (-0,84) = -0.69 \text{ rad} = -40^\circ$$

O sinal negativo do ângulo θ indica um giro horário em relação ao eixo x_1 . O outro ângulo diretor se forma entre FR e a direção positiva de x_2 e será $40 + 90 = 130^\circ$. O $\cos(130^\circ)$ é negativo (**Figura 1.7**), o que confirma que a componente FR_2 é negativa. Os resultados gráficos (intensidade, direção e sentido, em escala, de FR e das suas componentes) se mostram na **Figura 1.14**.

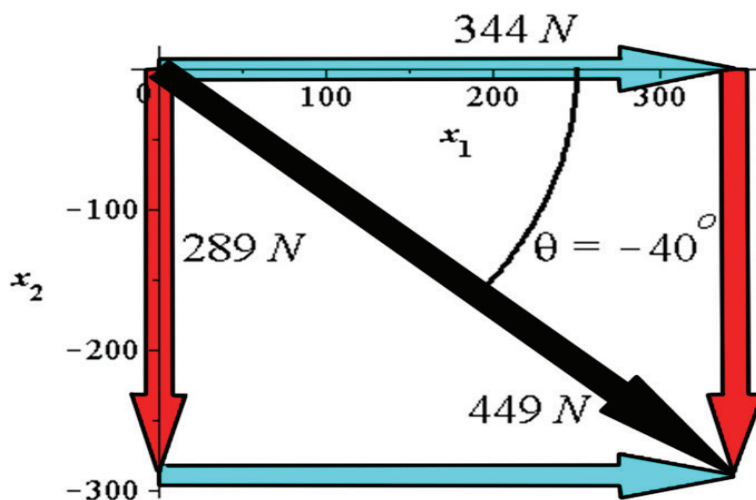


Figura 1.14: Solução gráfica do exemplo 3.



A visualização da representação gráfica dos vetores e de sua soma é importante para a aprendizagem dos conceitos de soma e subtração. Para lembrar ou mesmo aprender, acesse o site: <http://tube.geogebra.org/student/m143402>.

Exemplo 4: calcule a intensidade e orientação da força F_2 para que a resultante do sistema de forças seja $\mathbf{FR} = [-450 \ 245] \text{ N}$.

Solução: primeiramente identificamos, como na **Figura 1.6**, os ângulos diretores do vetor de força F_2 como α e β . Neste caso, as resultantes do somatório de forças nas direções x_1 x_2 são conhecidas, enquanto a intensidade F_2 e a sua direção são as incógnitas:

$$FR_1 = \sum F_{x_1} = F_1 \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} + F_2 \cos \alpha - F_3 \frac{f}{\sqrt{e^2 + f^2}} = -450 \text{ N}$$

$$FR_2 = \sum F_{x_2} = F_1 \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + F_2 \cos \beta - F_3 \frac{e}{\sqrt{e^2 + f^2}} = 245 \text{ N}$$

Isolando o termo desconhecido em cada equação tem-se:

$$F_2 \cos \alpha = -450 \text{ N} - F_1 \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} + F_3 \frac{f}{\sqrt{e^2 + f^2}} = -896 \text{ N}$$

$$F_2 \cos \beta = 245 \text{ N} - F_1 \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + F_3 \frac{e}{\sqrt{e^2 + f^2}} = 280 \text{ N}$$

Pelas componentes de F_2 , já é possível saber que esta força estará no segundo quadrante. Anteriormente, foi demonstrado que, no plano, os ângulos diretores se relacionam de forma que $\cos \beta = \sin \alpha$. A equação anterior pode, então, ser reescrita em função de qualquer um dos ângulos diretores:

$$F_2 \cos \alpha = -450 \text{ N} - F_1 \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} + F_3 \frac{f}{\sqrt{e^2 + f^2}} = -896 \text{ N}$$

$$F_2 \sin \alpha = 245 \text{ N} - F_1 \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + F_3 \frac{e}{\sqrt{e^2 + f^2}} = 280 \text{ N}$$

Dividindo uma equação pela outra, pode-se calcular o ângulo e consequentemente a intensidade F_2 da força \mathbf{F}_2 :

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{280}{-896}\right) = \tan^{-1}(-0,3125) = 2,8387 = 162,65^\circ$$

$$F_2 = \frac{280}{\sin(162,65)} = \frac{|-896|}{\cos(162,65)} = 939 \text{ N}$$

O mesmo resultado para a intensidade de \mathbf{F}_2 teria sido obtido aplicando o teorema de Pitágoras às componentes $\mathbf{F}_2 = [-896 \ 280]$. Observe que foi necessário acrescentar 180° ao resultado da função $\tan^{-1}(280/-896) = -17,35^\circ$ para obter o ângulo diretor formado entre o vetor de força e a direção positiva de x_1 . A **Figura 1.15** mostra, em escala, a intensidade, direção e sentido de \mathbf{F}_2 e de suas componentes.

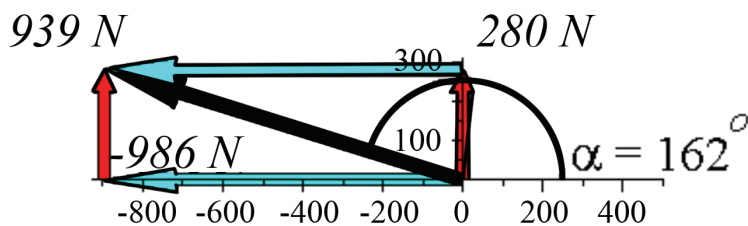


Figura 1.15: Solução gráfica do exemplo 4.

Atividade 2

Atende ao objetivo 4

Calcule a intensidade e orientação da força \mathbf{F}_1 , para que a resultante do sistema de forças seja $\mathbf{FR} = [750 \ -900] \text{ N}$.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Resposta comentada

O procedimento a seguir é o mesmo do exemplo 4. O somatório de forças na direção x_1 e x_2 fornece as componentes do vetor $\mathbf{F}_1 = [528 \ 426] \text{ N}$, necessárias para que $\mathbf{FR} = [750 \ 900] \text{ N}$. Como as duas componentes de \mathbf{F}_1 são positivas, esta força está no primeiro quadrante. A função $\tan^{-1}(426/528) = 0,68 \text{ rad} = 39^\circ$ retorna, portanto, o ângulo diretor α e, consequentemente, $\beta = 51^\circ$. A intensidade de \mathbf{F}_1 , por Pitágoras ou usando os ângulos diretores é 678 N. A **Figura 1.16** mostra o vetor \mathbf{F}_1 e as suas componentes, em escala.

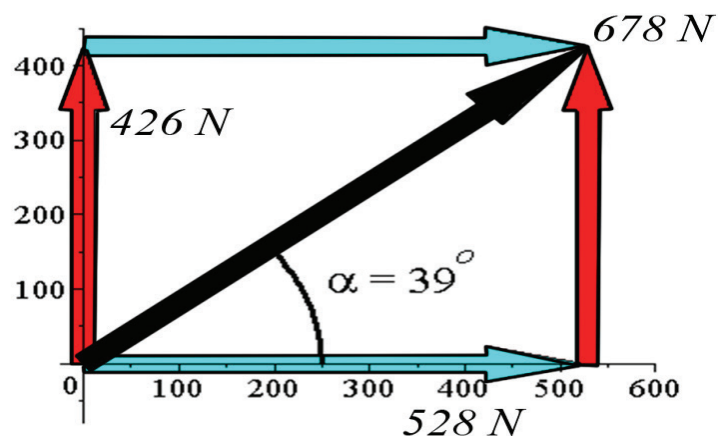


Figura 1.16: Solução gráfica da atividade.

Conclusão

Casos de forças concorrentes e coplanares são comuns na prática. Por exemplo, um grande mastro sendo equilibrado por cabos de aço, uma embarcação ancorada por várias cordas, estruturas de treliças etc. Em todos os casos, é importante substituir os efeitos de todas as forças por uma única, resultante de intensidade e direção conhecidas. **As duas notações estudadas nesta aula - a notação vetorial cartesiana e a escalar - podem ser utilizadas com esta finalidade.**

Resumo

Vetores são entidades matemáticas utilizadas para representar forças no plano e no espaço porque, diferentemente dos escalares, permitem carregar informações tais como a intensidade e direção da força.

Eles podem ser representados utilizando a representação escalar ou a notação vetorial.

Para fazer a representação escalar de um vetor \mathbf{v} , colocamos entre colchetes suas componentes, em relação às direções perpendiculares x_1 (componente v_1) e x_2 (componente v_2) do plano cartesiano: $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2]$. Essas componentes são escalares e podem ser positivas ou negativas, dependendo da posição do referencial.

Para somar usando a representação escalar, fazemos a soma algébrica das componentes separadamente por eixo. Essas somas serão as componentes, em cada eixo, do vetor resultante. Se $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2]$ e $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2]$, $\mathbf{v} + \mathbf{u} = [v_1 + u_1 \ v_2 + u_2]$. A representação escalar dos vetores é particularmente útil para o caso da soma de vetores no mesmo plano.

Na representação vetorial cartesiana, o vetor é representado como uma soma de outros vetores. Cada um destes vetores é o produto do vetor unitário em uma dada direção, vezes a componente do vetor nessa direção. Por exemplo um vetor \mathbf{v} com componentes v_1 e v_2 nas direções x_1 e x_2 , cujos vetores unitários nestas direções sejam, \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 respectivamente, terá a sua representação vetorial cartesiana dada por $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2$.

A soma de vetores usando esta notação também consiste em somar as respectivas componentes. Enquanto a soma usando a notação escalar é melhor para soma de forças concorrentes, no mesmo plano, a soma usando notação vetorial é mais útil para problemas tridimensionais.

É importante observar que os ângulos diretores se formam entre o vetor e a direção positiva dos eixos cartesianos. Eles estarão sempre entre 0 e 180° , independentemente da direção do vetor.

Em particular, se u é um vetor unitário, a sua representação em notação vetorial cartesiana fornece diretamente os seus cossenos diretores.

Referências

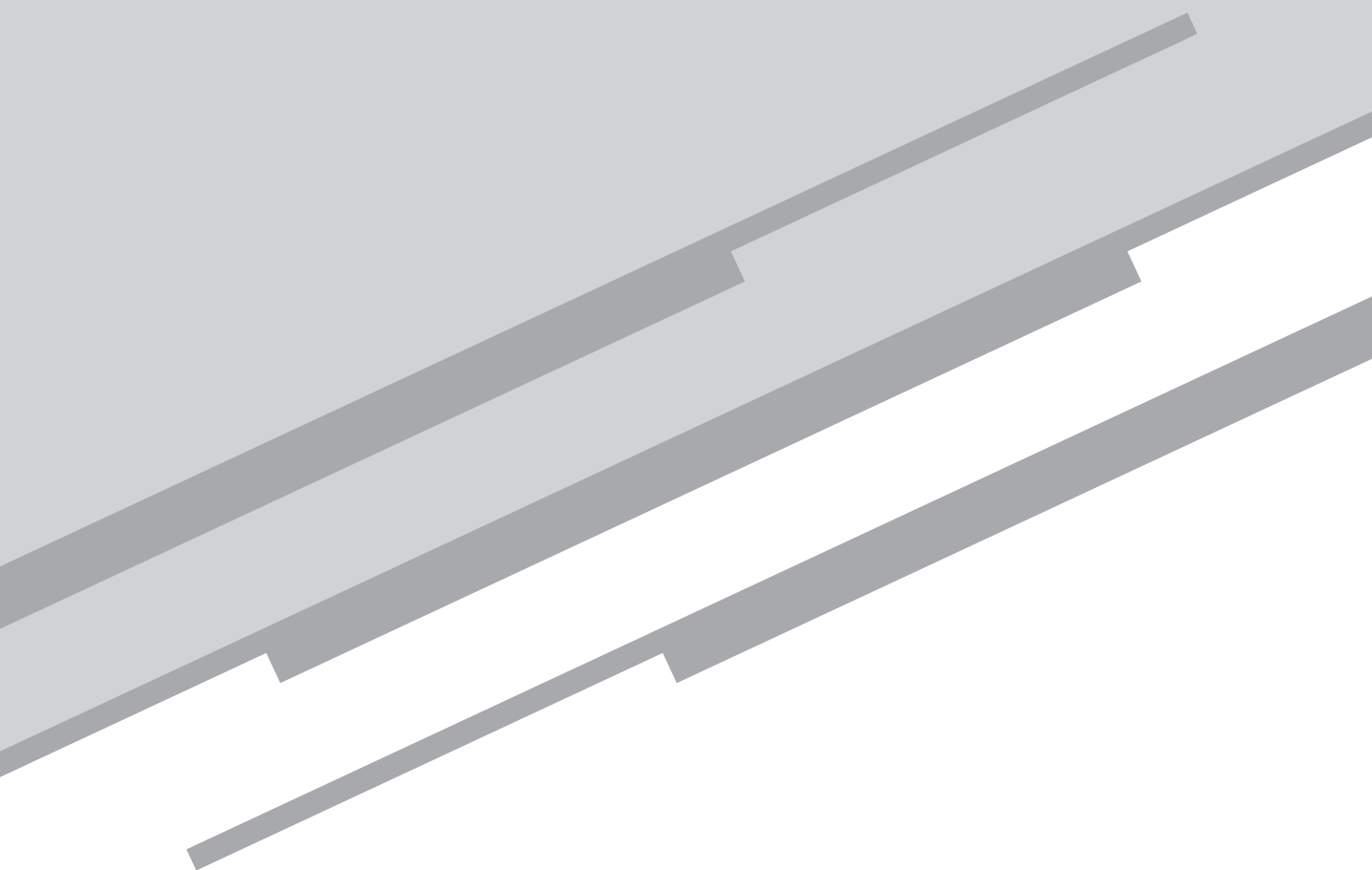
UGURAL, A. C.; FENSTER, S. K. *Advanced mechanics of materials and applied elasticity*. 5. ed. New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2011.

HIBBELER, R. C. *Estática mecânica para engenharia*. 12. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

SHIFRIN, T.; ADAMS, M. R. *Algebra linear: uma abordagem geométrica*. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2013.

Aula 2

Forças no Espaço



Jorge Alberto Rodriguez Duran

Meta

Utilização da notação vetorial cartesiana para representar forças no espaço.

Objetivos

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. representar forças no espaço mediante vetores cartesianos e encontrar a resultante de um sistema de forças concorrentes;
2. posicionar um ponto no espaço com relação a outro mediante o vetor de posição e representar forças no espaço que atuam na direção de um vetor de posição.

Introdução

A primeira aula deste curso foi dedicada à representação de forças no plano. Foi visto que as forças podem ser representadas por vetores que carregam, além da intensidade, informações referentes à direção e sentido das mesmas. As análises foram limitadas ao caso de forças concorrentes e no plano. Foram estudadas duas formas básicas de representar vetores: a escalar e a cartesiana. Na primeira, o vetor se representa por um par ordenado de números reais que correspondem às componentes no plano $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2]$. Na segunda, este mesmo par ordenado de componentes no plano aparece multiplicado aos vetores unitários nas direções dos eixos cartesianos $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2$.

Também na primeira aula, a resultante de forças concorrentes foi calculada mediante a soma das componentes da representação escalar em cada eixo, enquanto que a direção desta resultante foi calculada por trigonometria. Na presente aula, todos estes conceitos serão estendidos naturalmente ao espaço tri-dimensional. Para operações vetoriais em três dimensões, a notação vetorial cartesiana é a mais indicada e, por este motivo, será a única utilizada.

Sistema de coordenadas destro

Sabe-se que os vetores são objetos matemáticos independentes do referencial. Para utilizar a notação vetorial cartesiana, porém, é necessário definir um referencial. Neste curso será utilizado o referencial cartesiano. Um referencial cartesiano destro no espaço (**Figura 2.1**) é aquele no qual o dedo polegar da mão direita aponta no sentido positivo do eixo x_3 , enquanto que o restante dos dedos da mesma mão, estendidos, apontam na direção positiva do eixo x_1 . Quando se fecham, estes dedos varrem o plano horizontal desde o eixo x_1 até o eixo x_2 . A direção e sentido dos semi-eixos positivos é dada pelos vetores unitários \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 , também mostrados na **Figura 2.1**.

Notação vetorial cartesiana em 3D

Considere os diferentes vetores mostrados no primeiro octante do sistema destro $x_1 \ x_2 \ x_3$ (**Figura 2.2**). Uma primeira aplicação da regra do paralelogramo resulta em $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_3$, enquanto que uma segunda retorna $\mathbf{v}' = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. Eliminando \mathbf{v}' destas duas equações, obtém-se:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \quad (2.1)$$

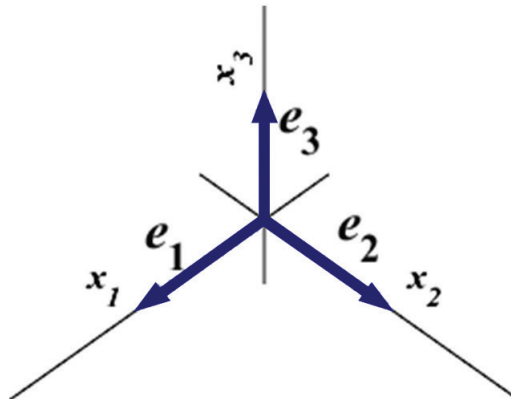


Figura 2.1: Sistema de coordenadas cartesianas e os respectivos vetores de base.

Como os vetores do membro direito da equação (2.1) são paralelos aos eixos coordenados, eles podem ser representados pelo produto da sua intensidade, vezes o vetor unitário que identifica a direção do respectivo eixo. Por exemplo, $\mathbf{v}_1 = v_1 \cdot \mathbf{e}_1$. Desta forma, um vetor \mathbf{v} , cujas componentes escalares v_1 , v_2 e v_3 atuam nas direções positivas dos vetores unitários \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 , terá sua representação cartesiana dada pela seguinte equação:

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3 \quad (2.2)$$

Mediante a notação vetorial cartesiana, é possível separar a intensidade e a direção de cada um dos vetores componentes de \mathbf{v} . A **Figura 2.3** mostra o vetor \mathbf{v} e as suas componentes na direção dos eixos coordenados, de acordo com a equação (2.2). Da mesma forma que com a regra do paralelogramo, é possível aplicar sucessivamente o teorema de Pitágoras para calcular a intensidade do vetor \mathbf{v} :

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \quad (2.3)$$

Os ângulos diretores α , β e γ (**Figura 2.2**) definem a direção de \mathbf{v} . Estes ângulos se formam entre o vetor \mathbf{v} e as direções positivas dos eixos e estarão sempre entre 0° e 180° . Os cossenos destes ângulos podem ser calculados a partir da intensidade dos vetores que os formam.

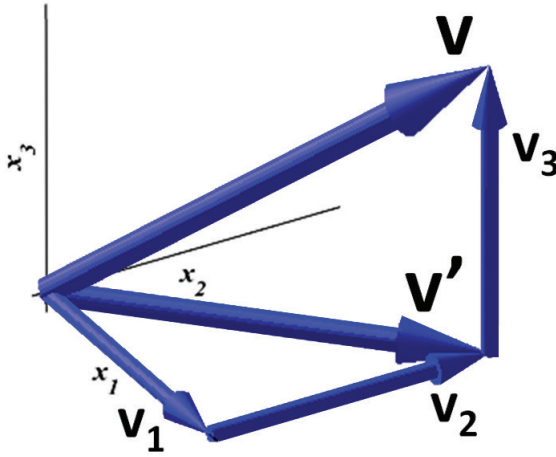


Figura 2.2: Duas aplicações sucessivas da regra do paralelogramo permitem obter o vetor \mathbf{v} como a soma dos vetores \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 e \mathbf{v}_3 .

$$\cos \alpha = \frac{v_1}{v} \quad \cos \beta = \frac{v_2}{v} \quad \cos \gamma = \frac{v_3}{v} \quad (2.4)$$

Substituindo a equação (4) em (2), tem-se:

$$\mathbf{v} = v \cos \alpha \mathbf{e}_1 + v \cos \beta \mathbf{e}_2 + v \cos \gamma \mathbf{e}_3 \quad (2.5)$$

Pela equação (2.5) se $v = 1$, ou seja, se o vetor \mathbf{v} for unitário, as suas componentes serão os próprios cossenos diretores. Neste caso, pode-se igualar a (2.1), a equação (2.3) e obter a seguinte relação entre os cossenos diretores:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (2.6)$$

A equação (2.6) mostra que, da mesma forma como ocorre no plano, no espaço, os três cossenos diretores não são independentes entre si. Será necessário conhecer ao menos dois deles para poder calcular o terceiro, pela equação (2.6).

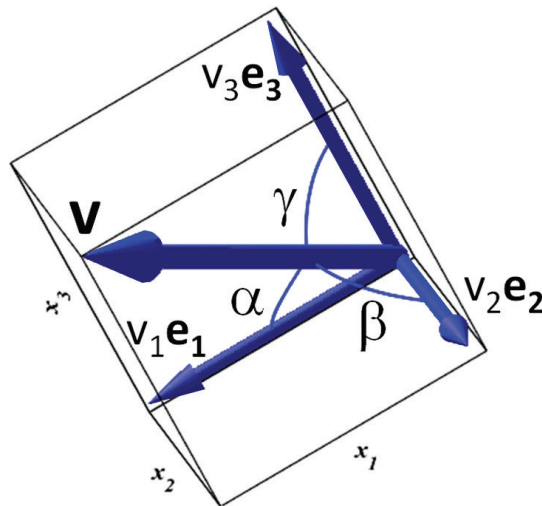


Figura 2.3: O vetor \mathbf{v} , suas componentes na direção dos eixos coordenados e os ângulos diretores α , β e γ .



Na internet você acha diversos aplicativos que permitem visualizar vetores tridimensionais. O geogebra (<http://www.geogebra.org/material/simple/id/2251831>) é um deles e você pode utilizar os controles deslizantes do aplicativo para visualizar, em tempo real, a influência das componentes cartesianas no módulo, direção e sentido de vetores resultantes.

Resultante de forças concorrentes

As operações de adição de vetores cartesianos consistem em somar as respectivas componentes. Portanto, para determinar o vetor resultante de um sistema de forças concorrentes basta expressar cada força como um vetor cartesiano (equação (2.2)) e somar algebricamente as suas componentes, de acordo com a seguinte equação:

$$\mathbf{FR} = \sum \mathbf{F} = \sum F_1 \mathbf{e}_1 + \sum F_2 \mathbf{e}_2 + \sum F_3 \mathbf{e}_3 \quad (2.7)$$

em que $\sum F_i$ ($i=1..3$) é o somatório das componentes cartesianas de \mathbf{F} , nas direções x_i .

Exemplo 1: utilize a notação vetorial cartesiana para representar a força mostrada na **Figura 2.4**.

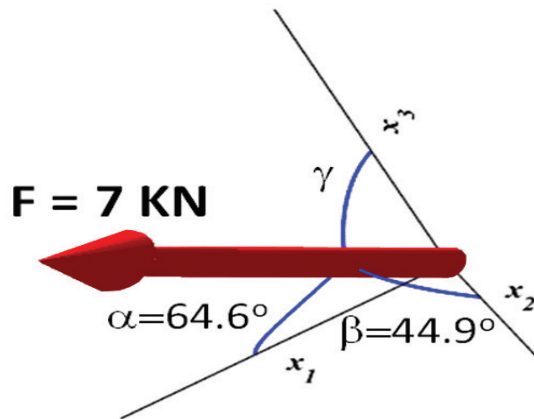


Figura 2.4: Vetor de força com intensidade igual a 7 kN, com os ângulos diretores no referencial cartesiano.

Solução: apenas dois dos três ângulos diretores são fornecidos na figura. O terceiro pode ser calculado utilizando a equação (2.6).

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \cos^2 64.6^\circ - \cos^2 44.9^\circ} = \pm 0,57$$

$$\gamma = \cos^{-1}(0,57) = 55,2^\circ \quad \gamma = \cos^{-1}(-0,57) = 124,8^\circ$$

As duas soluções para o ângulo γ são matematicamente possíveis. Deve-se lembrar, no entanto, que o ângulo diretor se forma entre o vetor e a direção positiva do eixo em questão. Como o vetor de força está no primeiro octante, o ângulo γ só poderá ser $55,2^\circ$. Para expressar a força $F = 7$ kN, na notação vetorial cartesiana, utiliza-se a equação (2.5).

$$\mathbf{F} = F \cos \alpha \mathbf{e}_1 + F \cos \beta \mathbf{e}_2 + F \cos \gamma \mathbf{e}_3 = 7 \cdot \cos(64,6) \mathbf{e}_1 + 7 \cdot \cos(44,9) \mathbf{e}_2 + 7 \cdot \cos(55,2) \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{F} = 3 \mathbf{e}_1 + 5 \mathbf{e}_2 + 4 \mathbf{e}_3 \quad \text{KN}$$

Exemplo 2: determine a intensidade e os ângulos de direção coordenados da força resultante \mathbf{FR} que atua no ponto comum das forças

F_A e F_B (Figura 2.5). A intensidade de F_A e F_B , em KN, mostra-se na figura, e os ângulos de direção estão tabelados a seguir:

Tabela 2.1: Ângulos de direção coordenados em graus dos vetores de força mostrados na Figura 2.5.

ângulo	F_A	F_B
α	74,48	32,29
β	36,68	80,26
γ	57,69	59,53

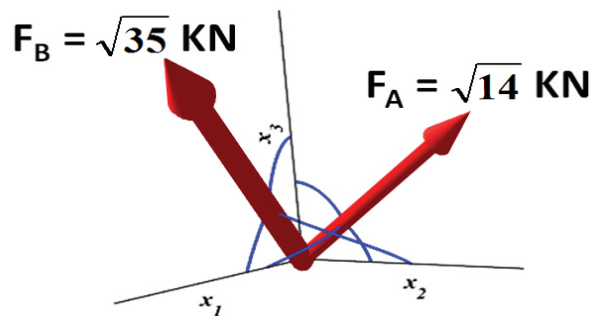


Figura 2.5: Vetores de força do exemplo 2.

Solução: primeiramente, é necessário representar as forças, mediante a notação vetorial cartesiana (equação (2.5)):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_A &= F_A \cos \alpha_A \mathbf{e}_1 + F_A \cos \beta_A \mathbf{e}_2 + F_A \cos \gamma_A \mathbf{e}_3 = \\
 \mathbf{F}_A &= \sqrt{14} \cdot \cos(74,48^\circ) \mathbf{e}_1 + \sqrt{14} \cdot \cos(36,68^\circ) \mathbf{e}_2 + \sqrt{14} \cdot \cos(57,69^\circ) \mathbf{e}_3 \\
 \mathbf{F}_A &= 1\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 \quad \text{KN} \\
 \mathbf{F}_B &= F_B \cos \alpha_B \mathbf{e}_1 + F_B \cos \beta_B \mathbf{e}_2 + F_B \cos \gamma_B \mathbf{e}_3 = \\
 \mathbf{F}_B &= \sqrt{35} \cdot \cos(32,29^\circ) \mathbf{e}_1 + \sqrt{35} \cdot \cos(80,26^\circ) \mathbf{e}_2 + \sqrt{35} \cdot \cos(59,53^\circ) \mathbf{e}_3 \\
 \mathbf{F}_B &= 5\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 \quad \text{KN}
 \end{aligned}$$

De acordo com a equação (2.7), o vetor cartesiano resultante das forças F_A e F_B será:

$$\mathbf{FR} = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B = (F_{A1} + F_{B1})\mathbf{e}_1 + (F_{A2} + F_{B2})\mathbf{e}_2 + (F_{A3} + F_{B3})\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{FR} = (1+5)\mathbf{e}_1 + (3+1)\mathbf{e}_2 + (2+3)\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{FR} = 6\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3 \quad \text{KN}$$

A intensidade de \mathbf{FR} é calculada pela equação (2.3) como a raiz quadrada de soma dos quadrados das componentes em cada eixo cartesiano:

$$FR = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} = \sqrt{6^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{77} \cong 8,7 \quad \text{KN}$$

Os ângulos de direção coordenados se calculam pela equação (2.4):

$$\cos \alpha = \frac{FR_1}{FR} = \frac{6}{\sqrt{77}} \quad \cos \beta = \frac{FR_2}{FR} = \frac{4}{\sqrt{77}} \quad \cos \gamma = \frac{FR_3}{FR} = \frac{5}{\sqrt{77}}$$

$$\alpha = 46,87^\circ \quad \beta = 62,86^\circ \quad \gamma = 55,26^\circ$$

Os resultados do exemplo 2 se mostram na **Figura 2.6**.

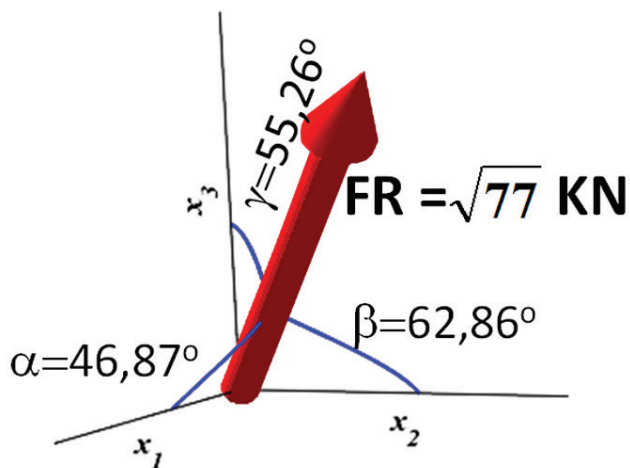


Figura 2.6: Vetor resultante e ângulos de direção, para o exemplo 2.

Atividade1

Atende ao objetivo 1

Considere a situação de forças concorrentes no espaço descrita na tabela a seguir. Determine as incógnitas solicitadas.

Tabela 2.2: Descrição de um sistema de forças concorrentes no espaço.

Força	Intensidade, KN	Ângulos de direção, (°)		
		α	β	γ
F_A	6	125	65	?
F_B	?	?	?	?
FR	12	90	90	0

Resposta comentada

Trata-se de um sistema de duas forças, cuja resultante tem intensidade e direção conhecidas. Na sua forma cartesiana, o vetor FR é:

$$FR = FR \cos \alpha_R \mathbf{e}_1 + FR \cos \beta_R \mathbf{e}_2 + FR \cos \gamma_R \mathbf{e}_3$$

$$FR = 12 \cos 90^\circ \mathbf{e}_1 + 12 \cos 90^\circ \mathbf{e}_2 + 12 \cos 0^\circ \mathbf{e}_3$$

$$FR = 12 \mathbf{e}_3 \quad \text{KN}$$

É necessário calcular o ângulo incógnita de cada força utilizando a equação (2.6). Para a força F_A tem-se:

$$\cos^2 \gamma_A = 1 - \cos^2 \alpha_A - \cos^2 \beta_A = 1 - \cos^2 125^\circ - \cos^2 65^\circ = 1 - 0,32 - 0,17 = 0,49$$

$$\cos \gamma_A = 0,7 \quad \Rightarrow \quad \gamma_A = 45,4^\circ$$

Seguidamente, representamos os vetores cartesianos de força F_A e F_B utilizando a equação (2.5):

$$F_A = F_A \cos \alpha_A \mathbf{e}_1 + F_A \cos \beta_A \mathbf{e}_2 + F_A \cos \gamma_A \mathbf{e}_3 =$$

$$F_A = 6 \cdot \cos(125^\circ) \mathbf{e}_1 + 6 \cdot \cos(65^\circ) \mathbf{e}_2 + 6 \cdot \cos(45,4^\circ) \mathbf{e}_3$$

$$F_A = -3,44 \mathbf{e}_1 + 2,53 \mathbf{e}_2 + 4,21 \mathbf{e}_3 \quad \text{KN}$$

$$F_B = F_{B1} \mathbf{e}_1 + F_{B2} \mathbf{e}_2 + F_{B3} \mathbf{e}_3$$

Para calcular a resultante deste sistema de forças concorrentes no espaço, utilizamos a equação (2.7):

$$FR = F_A + F_B = (F_{A1} + F_{B1}) \mathbf{e}_1 + (F_{A2} + F_{B2}) \mathbf{e}_2 + (F_{A3} + F_{B3}) \mathbf{e}_3$$

$$12 \mathbf{e}_3 = (-3,44 + F_{B1}) \mathbf{e}_1 + (2,53 + F_{B2}) \mathbf{e}_2 + (4,21 + F_{B3}) \mathbf{e}_3$$

Os vetores \mathbf{FR} e $\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B$ serão iguais, desde que as suas respectivas componentes também o sejam; o que resulta em três equações que permitem determinar as componentes de \mathbf{F}_B , bem como a intensidade desta força:

$$-3,44 + F_{B1} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{B1} = 3,44 \text{ KN}$$

$$2,53 + F_{B2} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{B2} = -2,53 \text{ KN}$$

$$4,21 + F_{B3} = 12 \quad \Rightarrow \quad F_{B3} = 7,79 \text{ KN}$$

$$F_B = \sqrt{3,44^2 + (-2,53)^2 + 7,79^2} = 8,8 \text{ KN}$$

Para calcular os ângulos de direção coordenados, utilizamos a equação (2.4):

$$\cos \alpha = \frac{F_{B1}}{F_B} = \frac{3,44}{8,8} \quad \cos \beta = \frac{F_{B2}}{F_B} = \frac{-2,53}{8,8} \quad \cos \gamma = \frac{F_{B3}}{F_B} = \frac{7,79}{8,8}$$

$$\alpha = 67,21^\circ \quad \beta = 106,5^\circ \quad \gamma = 28,7^\circ$$

Para finalizar, mostramos a tabela original da Atividade 1, agora com todas as células preenchidas:

Tabela 2.3: Descrição de um sistema de forças concorrentes no espaço (preenchida)

Força	Intensidade, KN	Ângulos de direção, (°)		
		α	β	γ
FA	6	125	65	45,4
FB	8,8	3,44	-2,53	7,79
FR	12	90	90	0

Vetores de Posição

Um vetor de posição permite definir a posição relativa de um ponto com relação a outro, no espaço. Por exemplo, o vetor \mathbf{r} da **Figura 2.7** é

o segmento de reta orientado que une os pontos A e B no sistema cartesiano $x_1 x_2 x_3$. As componentes cartesianas de \mathbf{r} serão as projeções das distâncias entre os pontos A e B, em cada eixo:

$$\mathbf{r} = (x_{1B} - x_{1A})\mathbf{e}_1 + (x_{2B} - x_{2A})\mathbf{e}_2 + (x_{3B} - x_{3A})\mathbf{e}_3 \quad (2.8)$$

Se a origem do referencial coincide com o ponto A, por exemplo, as distâncias x_{iA} ($i=1..3$) = 0, e a equação (2.8) se simplifica para:

$$\mathbf{r} = x_{1B}\mathbf{e}_1 + x_{2B}\mathbf{e}_2 + x_{3B}\mathbf{e}_3 \quad (2.9)$$

Deve-se notar que o vetor da equação (2.8) é independente do referencial, enquanto que o da equação (2.9), não. Esta (importante) diferença, no entanto, não invalida o uso que daremos aos vetores de posição. Vetores de posição são úteis para obter o vetor cartesiano de forças cuja linha de ação passa por dois pontos. Por exemplo, se a linha de ação de uma força \mathbf{F} , de intensidade F , passa pelos pontos A e B da **Figura 2.7**, o vetor cartesiano desta força será:

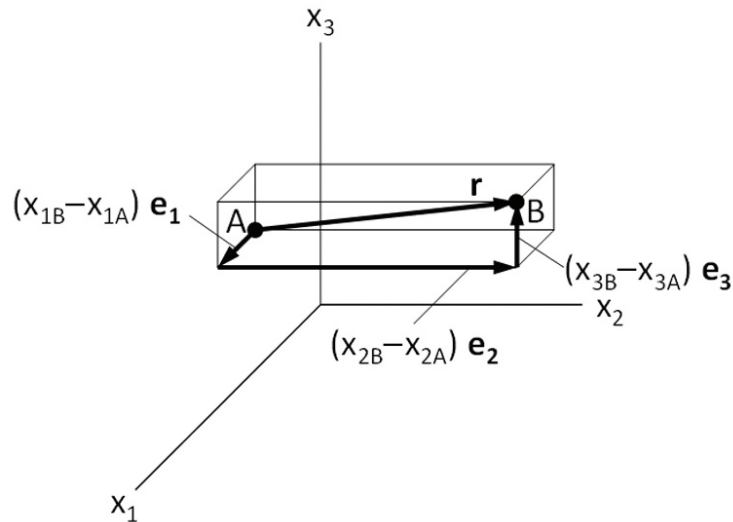


Figura 2.7: O vetor de posição é a soma dos vetores constituídos pelas projeções das distâncias entre os pontos A e B em cada eixo cartesiano.

$$\mathbf{F} = F \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{(x_{1B} - x_{1A})\mathbf{e}_1 + (x_{2B} - x_{2A})\mathbf{e}_2 + (x_{3B} - x_{3A})\mathbf{e}_3}{\sqrt{(x_{1B} - x_{1A})^2 + (x_{2B} - x_{2A})^2 + (x_{3B} - x_{3A})^2}} \quad (2.10)$$

O vetor \mathbf{r}/r é unitário e a multiplicação dele por um escalar altera sua intensidade (de 1 para F). A orientação da força \mathbf{F} permanece invariável, como deveria, já que sua linha de ação passa pelos pontos A e B.

Exemplo 3: considere o sistema de forças concorrentes mostrado na **Figura 2.8**. A intensidade das forças e as distâncias até o referencial se mostram na **Tabela 2.4**. Calcule a força resultante em A.

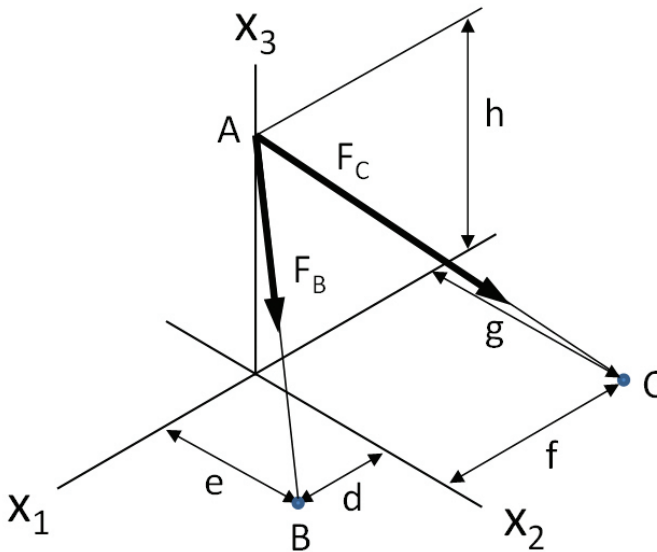


Figura 2.8: Sistema de forças concorrentes, cujas linhas de ação passam por dois pontos.

Tabela 2.4: Dados numéricos do exemplo 3.

Forças, N		Distâncias, m				
F_B	F_C	d	e	f	g	h
500	350	3	6	4	4	8

Solução: para as forças envolvidas neste problema, são conhecidos dois pontos da sua linha de ação. Podemos encontrar os vetores de posição que relacionam os pontos por onde passa a linha de ação destas forças e aplicar a equação (2.10). Convém deslocar a origem do referencial até o ponto A, definindo, então, os vetores de posição pela equação (2.9), que é mais simples do que a equação (2.8).

$$\mathbf{r}_B = d\mathbf{e}_1 + e\mathbf{e}_2 - h\mathbf{e}_3 = 3\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2 - 8\mathbf{e}_3, \text{ m}$$

$$\mathbf{r}_C = -f\mathbf{e}_1 + g\mathbf{e}_2 - h\mathbf{e}_3 = -4\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - 8\mathbf{e}_3, \text{ m}$$

$$\mathbf{F}_B = F_B \cdot \frac{\mathbf{r}_B}{r_B} = \frac{3\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2 - 8\mathbf{e}_3}{\sqrt{3^2 + 6^2 + (-8)^2}} = \frac{1500}{109}\sqrt{109}\mathbf{e}_1 + \frac{3000}{109}\sqrt{109}\mathbf{e}_2 - \frac{4000}{109}\sqrt{109}\mathbf{e}_3, \text{ N}$$

$$\mathbf{F}_C = F_C \cdot \frac{\mathbf{r}_C}{r_C} = \frac{-4\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - 8\mathbf{e}_3}{\sqrt{4^2 + 4^2 + (-8)^2}} = -\frac{175}{3}\sqrt{6}\mathbf{e}_1 + \frac{175}{3}\sqrt{6}\mathbf{e}_2 - \frac{350}{3}\sqrt{6}\mathbf{e}_3, \text{ N}$$

Tendo as forças definidas por vetores cartesianos, a resultante se calcula pela equação (2.7):

$$\mathbf{FR} = \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C$$

$$\mathbf{FR} = \left(\frac{1500}{109}\sqrt{109} - \frac{175}{3}\sqrt{6} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{3000}{109}\sqrt{109} + \frac{175}{3}\sqrt{6} \right) \mathbf{e}_2 + \left(-\frac{4000}{109}\sqrt{109} - \frac{350}{3}\sqrt{6} \right) \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{FR} = 0,77\mathbf{e}_1 + 430,23\mathbf{e}_2 - 668,9\mathbf{e}_3, \text{ N} \quad FR = \sqrt{0,77^2 + 430,23^2 + (-668,9)^2} = 795 \text{ N}$$

===== **Atividade 2** =====

Atende ao objetivo 2

Resolva o problema do exemplo 3 para os dados numéricos mostrados na tabela a seguir.

Tabela 2.5: Dados numéricos para a atividade 2.

Forças, N		Distâncias, m				
F_B	F_C	d	e	f	g	h
250	400	5	2	3	6	3

Resposta comentada

O procedimento é o mesmo descrito no exemplo 3. Os resultados são os seguintes:

$$\mathbf{r}_B = d\mathbf{e}_1 + e\mathbf{e}_2 - h\mathbf{e}_3 = 5\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3, \text{ m}$$

$$\mathbf{r}_C = -f\mathbf{e}_1 + g\mathbf{e}_2 - h\mathbf{e}_3 = -3\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3, \text{ m}$$

$$\mathbf{F}_B = F_B \cdot \frac{\mathbf{r}_B}{r_B} = \frac{5\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3}{\sqrt{5^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \frac{625}{19}\sqrt{38}\mathbf{e}_1 + \frac{250}{19}\sqrt{38}\mathbf{e}_2 - \frac{375}{19}\sqrt{38}\mathbf{e}_3, \text{ N}$$

$$\mathbf{F}_C = F_C \cdot \frac{\mathbf{r}_C}{r_C} = \frac{-3\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3}{\sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-3)^2}} = -\frac{200}{3}\sqrt{6}\mathbf{e}_1 + \frac{400}{3}\sqrt{6}\mathbf{e}_2 - \frac{200}{3}\sqrt{6}\mathbf{e}_3, \text{ N}$$

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C$$

$$\mathbf{F}_R = \left(\frac{625}{19}\sqrt{38} - \frac{200}{3}\sqrt{6} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{250}{19}\sqrt{38} + \frac{400}{3}\sqrt{6} \right) \mathbf{e}_2 + \left(-\frac{375}{19}\sqrt{38} - \frac{200}{3}\sqrt{6} \right) \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{F}_R = 39,48\mathbf{e}_1 + 407,7\mathbf{e}_2 - 284,9\mathbf{e}_3, \text{ N} \quad FR = \sqrt{39,48^2 + 407,7^2 + (-284,9)^2} = 499 \text{ N}$$

Conclusão

O conhecimento da representação e análise de forças no espaço, mediante vetores cartesianos, amplia a gama de aplicações de forças concorrentes a estruturas reais, como pontes e treliças. Os vetores de força são vetores deslizantes, o que significa que o efeito destas forças no corpo rígido independe do ponto de aplicação, desde que a linha de ação seja conservada. Esta propriedade é explorada, na presente aula, ao utilizar vetores de posição para representar vetores cartesianos de força e calcular, a partir destes, a resultante de forças concorrentes. Esta representação é conveniente em estruturas tri-dimensionais, em que é pouco prático medir os ângulos diretores.

Resumo

A presente aula constitui uma generalização da Aula 1 para o espaço tri-dimensional. A notação vetorial cartesiana, para representar vetores de força, é a preferida nesta dimensão.

Assim, a representação dos vetores passa de $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$ (Aula 1, bidi-mensional) para $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$ (Aula 2, tridimensional)

A resultante de forças concorrentes se calcula somando algebricamente as componentes dos vetores em cada eixo coordenado:

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F} = \sum F_1 \mathbf{e}_1 + \sum F_2 \mathbf{e}_2 + \sum F_3 \mathbf{e}_3$$

Os vetores de posição permitem definir a posição relativa de pontos em um mesmo referencial cartesiano. Estes vetores permitem representar forças cuja linha de ação passa por dois destes pontos; uma representação alternativa à utilização dos ângulos diretores.

Referências

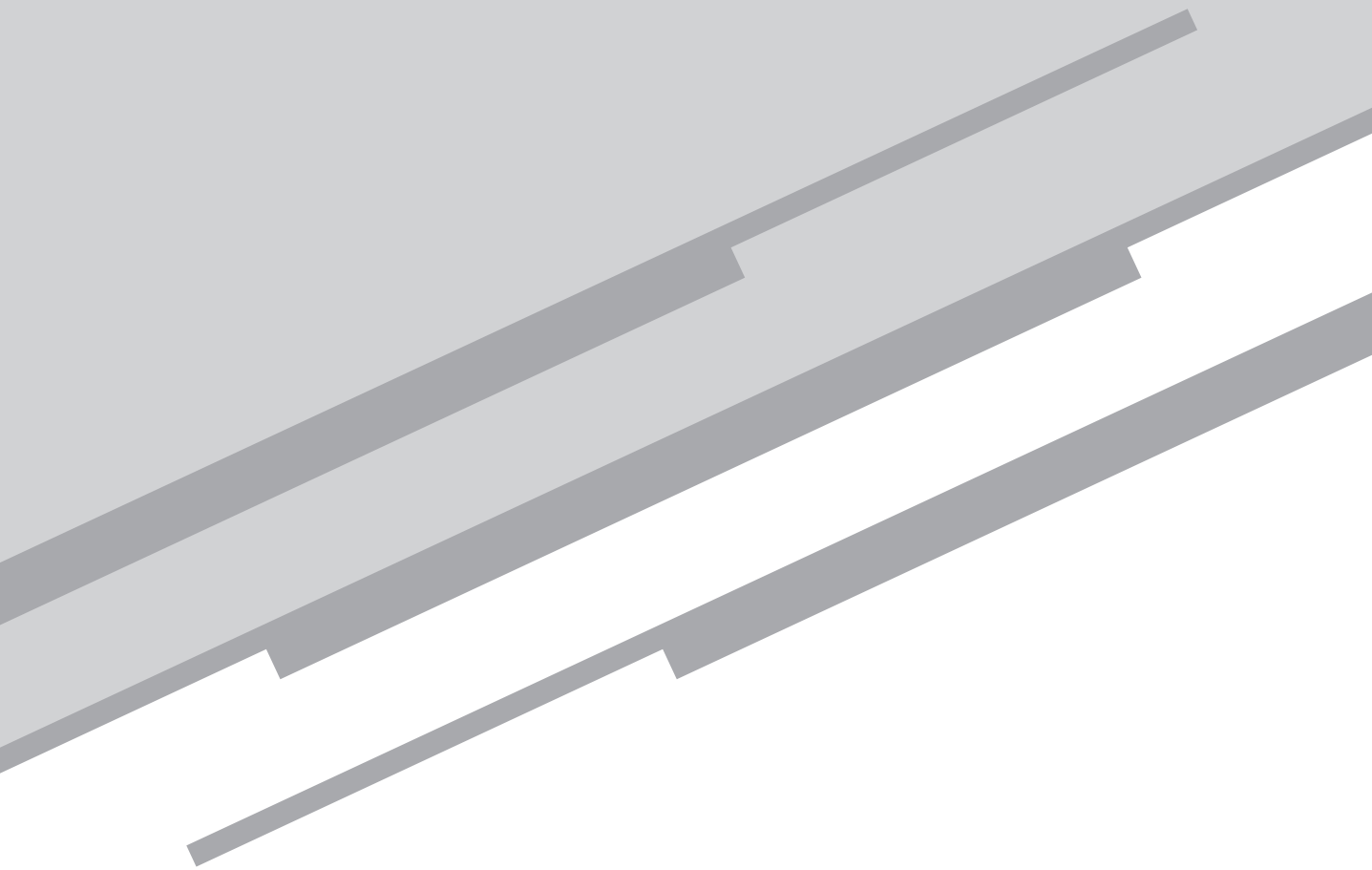
Ugural, A. C.; Fenster, S. K. *Advanced Mechanics of Materials and Applied Elasticity*, 5. ed. New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2011.

Hibbeler, R. C. *Estática Mecânica para Engenharia*. 12. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

Shifrin, T.; Adams, M. R. *Algebra Linear: Uma abordagem geométrica*. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2013.

Aula 3

Sistemas equivalentes de forças



Meta

Aprender a reduzir sistemas de forças a um sistema força-binário.

Objetivos

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. calcular momentos de forças em relação a um ponto e a um eixo;
2. reduzir sistemas de forças a uma única força e um binário.

Introdução

Nas aulas anteriores foram utilizados vetores cartesianos para representar forças no espaço. Quando a linha de ação de várias destas forças coincidem em um ponto, a resultante pode ser encontrada mediante a soma dos respectivos vetores cartesianos. A presente aula trata de problemas em que a linha de ação das forças não passa pelo ponto de interesse, provocando uma tendência de giro do corpo ao qual foi aplicada a força em torno desse ponto e em uma determinada direção. Este efeito é conhecido como momento de uma força e também será representado por um vetor. Ao final da aula, veremos como substituir um sistema de forças e momentos pelo seu equivalente estático.

Produto vetorial

Em aulas anteriores foram definidas algumas das principais operações com vetores. O produto escalar de vetores foi definido como uma operação cujo resultado é um escalar e que consiste no produto da soma das componentes dos respectivos operandos. Para a presente aula, será necessário conhecer uma nova operação: o produto vetorial de dois vetores. Considere os vetores **P** e **Q**, com orientações diferentes, tal que existe um ângulo θ entre eles (**Figura 3.1**). O produto vetorial será:

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} \quad (3.1)$$

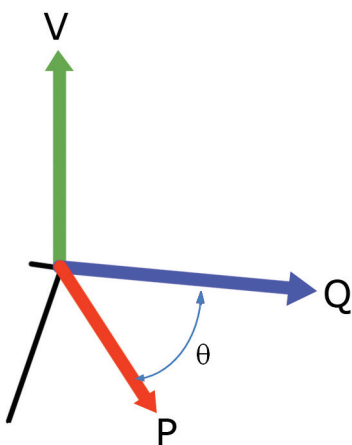


Figura 3.1: O produto vetorial de **P** e **Q** (nessa ordem) é um novo vetor **V**, perpendicular ao plano definido pelos vetores operandos.

Note que usamos um \times , em lugar do ponto, para diferenciar a multiplicação vetorial da escalar. O resultado do produto vetorial é um novo

vetor \mathbf{V} , perpendicular ao plano que contém os operandos \mathbf{P} e \mathbf{Q} . Os operandos na equação (1) não comutam sem mudar o resultado, ou seja, $\mathbf{Q} \times \mathbf{P} = -\mathbf{V}$. O módulo de \mathbf{V} se calcula considerando os módulos dos vetores envolvidos na multiplicação e o ângulo formado pelas linhas de ação destes vetores (sempre menor ou igual a 180°):

$$V = P \cdot Q \cdot \sin(\theta) \quad (3.2)$$

Quando \mathbf{P} e \mathbf{Q} são expressos como vetores cartesianos, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= (P_1 \mathbf{e}_1 + P_2 \mathbf{e}_2 + P_3 \mathbf{e}_3) \times (Q_1 \mathbf{e}_1 + Q_2 \mathbf{e}_2 + Q_3 \mathbf{e}_3) \\ \mathbf{V} &= P_1 Q_1 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 + P_1 Q_2 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 + P_1 Q_3 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 + \dots \\ &\quad + P_2 Q_1 \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 + P_2 Q_2 \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 + P_2 Q_3 \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 + \dots \\ &\quad + P_3 Q_1 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 + P_3 Q_2 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 + P_3 Q_3 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Os produtos vetoriais dos vetores unitários se calculam pela definição dada na equação (3.1). Por exemplo, o produto $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$, já que o ângulo entre \mathbf{e}_1 e ele próprio é zero. Já o produto $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = 1 \cdot 1 \cdot \sin(90) = \mathbf{e}_3$, e o produto $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = 1 \cdot 1 \cdot \sin(90) = -\mathbf{e}_3$, porque o produto vetorial é anticomutativo. Utilizando estas definições, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= P_1 Q_2 \mathbf{e}_3 + P_1 Q_3 (-\mathbf{e}_2) + P_2 Q_1 (-\mathbf{e}_3) + P_2 Q_3 \mathbf{e}_1 + P_3 Q_1 \mathbf{e}_2 + P_3 Q_2 (-\mathbf{e}_1) \\ \mathbf{V} &= (P_2 Q_3 - P_3 Q_2) \mathbf{e}_1 + (P_3 Q_1 - P_1 Q_3) \mathbf{e}_2 + (P_1 Q_2 - P_2 Q_1) \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Que representa o desenvolvimento do seguinte determinante:

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ P_1 & P_2 & P_3 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 \end{vmatrix} \quad (3.5)$$

O sentido do vetor resultante do produto vetorial pode ser determinado pela *regra da mão direita*, que consiste em alinhar os dedos desta mão com o primeiro dos operandos, neste caso \mathbf{P} , e dobrá-los no sentido de \mathbf{Q} . O dedo polegar indicará a orientação de \mathbf{V} .

Momento de uma força em relação a um ponto e a um eixo

Como sabemos, vetores de posição são utilizados para posicionar pontos em relação a outros no plano ou no espaço. A posição do ponto A

de aplicação de uma força \mathbf{F} em um corpo rígido pode, então, ser definida por um vetor de posição \mathbf{r} (**Figura 3.2**). O momento \mathbf{M}_O da força \mathbf{F} em relação ao ponto O se define como o produto vetorial de \mathbf{r} e \mathbf{F} (nessa ordem):

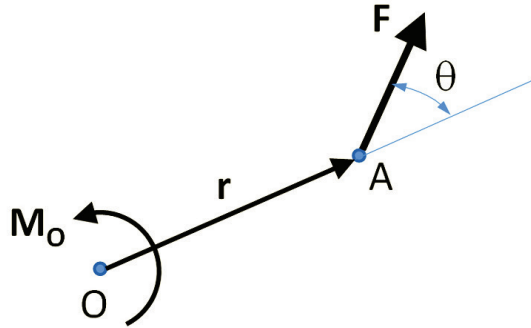


Figura 3.2: O vetor de momento \mathbf{M}_O está em um eixo perpendicular ao plano, definido por \mathbf{F} e \mathbf{r} , e reflete a tendência do vetor de força \mathbf{F} , aplicado no ponto \mathbf{A} , a girar o corpo rígido no sentido anti-horário (nesta ilustração) em torno deste eixo.

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.6)$$

Por tratar-se de um produto vetorial, o vetor \mathbf{M}_O estará em um eixo perpendicular ao plano definido por \mathbf{r} e \mathbf{F} . O módulo de \mathbf{M}_O se calcula utilizando a equação (3.2). Observe que o produto $d = r \cdot \sin(\theta)$ (**Figura 3.3**) é a menor distância entre a linha de ação de \mathbf{F} e o ponto O . Para $\theta = 90^\circ$, a distância d coincide com r e, nesse caso, o módulo do momento será o máximo possível para um dado \mathbf{F} . No outro extremo, quando o ângulo $\theta = 0^\circ$ a linha de ação da força passa pelo ponto O e neste caso não haverá momento \mathbf{M}_O .

$$M_O = r \cdot F \cdot \sin(\theta) = F \cdot d \quad (3.7)$$

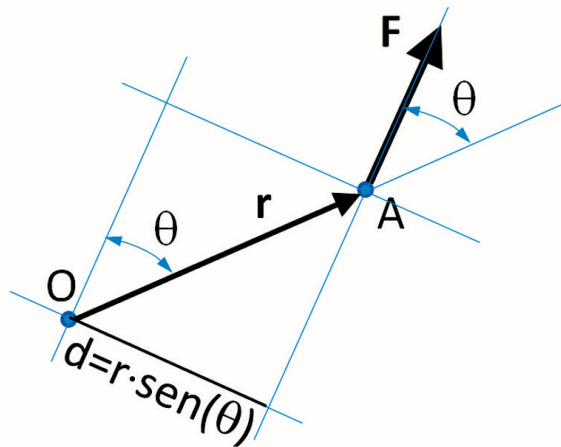


Figura 3.3: O módulo M_o do momento da força em relação ao ponto O pode ser calculado pelo produto dos escalares F e $d=r \cdot \text{sen}(\theta)$.

O módulo da componente de M_o em torno de qualquer outro eixo que passa por O , mas que não coincide com aquele na direção normal ao plano que contém r e F , pode ser calculado utilizando o produto escalar. Com base na **Figura 3.4**, para o eixo OQ , por exemplo, teremos:

$$M_{OQ} = M_o \cdot e_{OQ} = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| \cdot |\mathbf{e}_{OQ}| \cdot \cos(\alpha) = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| \cdot \cos(\alpha) \quad (3.8)$$

Onde \mathbf{e}_{OQ} é o vetor unitário na direção OQ .

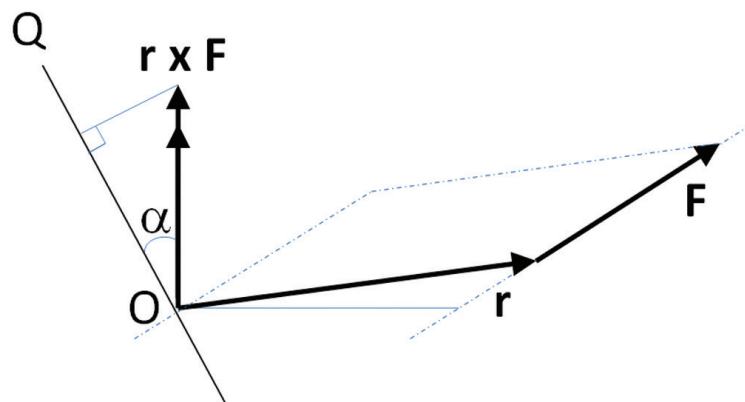


Figura 3.4: O vetor M_o é normal ao plano de r e F , e a magnitude da sua componente em outro eixo pode ser calculada utilizando o produto escalar. Note que duas setas são utilizadas para diferenciar um vetor de momentos de um vetor de força.

Para o caso de várias forças concorrentes \mathbf{F}_i , o momento \mathbf{M}_{OR} da força resultante \mathbf{F}_R em relação ao ponto O é igual à soma dos momentos das várias forças, em relação ao mesmo ponto:

$$\mathbf{M}_{\text{OR}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_R = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots \mathbf{F}_n) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \dots \mathbf{r} \times \mathbf{F}_n = \sum_n \mathbf{r} \times \mathbf{F}_n \quad (3.9)$$

Na equação (3.9), foi aplicada a propriedade distributiva do produto vetorial. Se cada uma das forças que integram o conjunto tiver um vetor de posição diferente até sua linha de ação, ou seja, se não forem concorrentes, o momento total será:

$$\mathbf{M}_{\text{OR}} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \dots \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n = \sum_n \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n \quad (3.10)$$

Exemplo 1: o apoio no ponto O do componente mostrado possibilita o giro no plano da figura. Calcule o momento resultante das forças \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 , em torno do ponto O. Utilize os dados da **Tabela 1**.

Tabela 1: Dados numéricos do exemplo 1.

Forças, KN		comprimentos				
F_1	F_2	a, m	b	c	d	e
25	50	2	1	1	1	$\sqrt{3}$

Solução: primeiramente, expressamos os vetores de força e o vetor de posição como vetores cartesianos, no referencial x_1x_2 mostrado na figura. Observe que é necessário, mesmo em problemas planos, utilizar a representação vetorial cartesiana completa, isto é, com três componentes, para aplicar corretamente o conceito de produto vetorial.

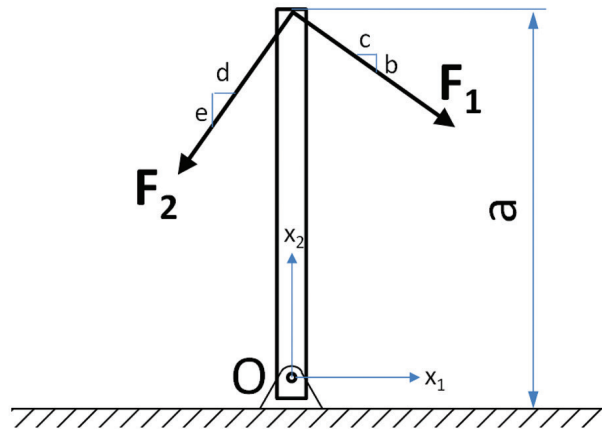


Figura 3.5: Figura do exemplo 1, mostrando um componente que pode girar livremente em torno do ponto O mas que está em equilíbrio sob a ação das forças F_1 e F_2 .

$$\mathbf{r} = 0\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{F}_1 = F_1 \cdot \cos\left(\arctan\frac{b}{c}\right)\mathbf{e}_1 - F_1 \cdot \sin\left(\arctan\frac{b}{c}\right)\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{F}_2 = -F_2 \cdot \cos\left(\arctan\frac{e}{d}\right)\mathbf{e}_1 - F_2 \cdot \sin\left(\arctan\frac{e}{d}\right)\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3$$

Substituindo os valores da **Tabela 1**, tem-se:

$$\mathbf{r} = 2\mathbf{e}_2 \quad m$$

$$\mathbf{F}_1 = 25\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_1 - 25\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_2 \quad KN$$

$$\mathbf{F}_2 = -25\mathbf{e}_1 - 25\sqrt{3}\mathbf{e}_2 \quad KN$$

Os produtos vetoriais são seguidamente desenvolvidos utilizando a equação (3.5):

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 25\frac{\sqrt{2}}{2} & -25\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} = -25\sqrt{2}\mathbf{e}_3 \quad KN \cdot m$$

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -25 & -25\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = 50\mathbf{e}_3 \quad KN \cdot m$$

Como esperado, os vetores de momento das respectivas forças estão orientados para fora do plano (no eixo x_3). Por último, para calcular o momento resultante, aplica-se a equação (3.9):

$$\mathbf{M}_{\text{OR}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 = (-25\sqrt{2} + 50)\mathbf{e}_3 \cong 14,6\mathbf{e}_3 \quad \text{KN} \cdot \text{m}$$

Exemplo 2: para o conjunto de barras mostrado na figura 3.6, calcule a componente do momento da força F em torno do eixo OA. Expresse o resultado como um vetor cartesiano. Utilize os dados da tabela 2. Observe que a orientação de F na figura é apenas ilustrativa. Dependendo dos dados da tabela 2, F pode apontar em outra direção.

Tabela 2: Dados numéricos do exemplo 2.

F KN	a m	b m	c m
$6\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3$	2	2	1

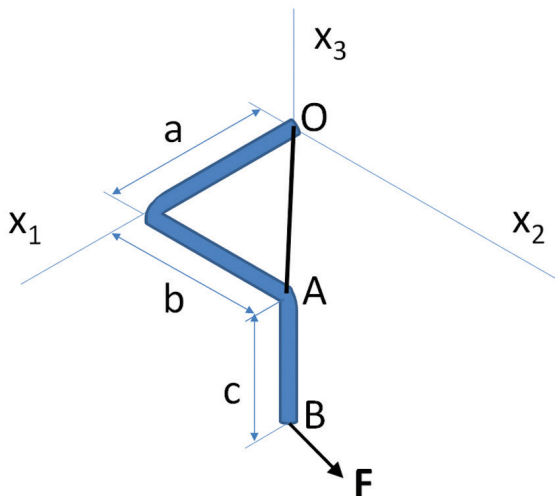


Figura 3.6: Conjunto de barras engastadas no ponto O sob a ação de uma força F na extremidade B.

Solução: a sequência de passos para resolver este problema pode ser resumida da seguinte forma:

1. obter o vetor de posição \mathbf{r} do ponto B;
2. obter o vetor de momento \mathbf{M}_O da força F em relação ao ponto O pela equação (3.5);

3. obter o vetor unitário que identifica a direção OA;
4. obter a componente de \mathbf{M}_O na direção de OA pela equação (3.8);
5. obter o vetor cartesiano de \mathbf{M}_O na direção OA.

O vetor de posição \mathbf{r}_{OB} será:

$$\mathbf{r}_{OB} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 - c\mathbf{e}_3 = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 1\mathbf{e}_3 \quad m$$

Efetuada o produto vetorial de $\mathbf{r}_{OB} \times \mathbf{F}$, temos:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OB} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 7\mathbf{e}_1 - 16\mathbf{e}_2 - 18\mathbf{e}_3 \quad KN \cdot m$$

Seguindo os passos descritos acima, determinamos agora o vetor unitário que identifica o eixo OA:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{r}_{OA}}{r_{OA}} &= \frac{a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3}{\sqrt{a^2 + b^2 + 0^2}} = \frac{2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2}{\sqrt{8}} = \frac{2}{2\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \\ \frac{\mathbf{r}_{OA}}{r_{OA}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

A componente de \mathbf{M}_O , na direção OA, calcula-se como o produto escalar de ambos os vetores, \mathbf{r}_{OA} (normalizado) e \mathbf{M}_O :

$$\begin{aligned} M_{OA} &= \mathbf{M}_O \cdot \frac{\mathbf{r}_{OA}}{r_{OA}} = (7\mathbf{e}_1 - 16\mathbf{e}_2 - 18\mathbf{e}_3) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \right) \\ M_{OA} &= \frac{(7-16)\sqrt{2}}{2} = \frac{-9\sqrt{2}}{2} \cong -6,36 \quad KN \cdot m \end{aligned}$$

Podemos, finalmente, expressar o momento de \mathbf{F} em torno de OA como um vetor cartesiano multiplicando a componente M_{OA} pelo vetor unitário que define a direção OA. Observe que, diferentemente do produto escalar acima, neste caso multiplicamos um escalar (o módulo de \mathbf{M}_{OA}) por um vetor:

$$\mathbf{M}_{OA} = M_{OA} \cdot \frac{\mathbf{r}_{OA}}{r_{OA}} = -\frac{9\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \right) = -\frac{9}{2} \cdot (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \quad KN \cdot m$$

Como esperado, os vetores relacionados com a direção OA (unitário \mathbf{r}_{OA}/r_{OA} e \mathbf{M}_{OA}) não têm componentes na direção x_3 .

Atividade 1

Atende ao objetivo 1

Resolver o exemplo 2, para os dados da Tabela 3.

Tabela 3: Dados numéricos da atividade 1.

F KN	a m	b m	c m
$4\mathbf{e}_1 + 12\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3$	4	3	-2

Resposta comentada

Utilizando o procedimento descrito no exemplo 2, mas procurando assimilar o significado físico do momento de uma força como um vetor que expressa a tendência de giro do corpo em torno de um eixo, os resultados são:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OB} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 4 & 3 & -2 \\ 4 & 12 & -3 \end{vmatrix} = 15\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 36\mathbf{e}_3 \quad \text{KN} \cdot \text{m}$$

$$\frac{\mathbf{r}_{OA}}{r_{OA}} = \frac{4\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2}{5}$$

$$M_{OA} = \mathbf{M}_O \cdot \frac{\mathbf{r}_{OA}}{r_{OA}} = \frac{72}{5} = 14,4 \quad \text{KN} \cdot \text{m}$$

$$\mathbf{M}_{OA} = M_{OA} \cdot \frac{\mathbf{r}_{OA}}{r_{OA}} = 11,52\mathbf{e}_1 + 8,64\mathbf{e}_2 \quad \text{KN} \cdot \text{m}$$

Momentos de Binário

O caso de várias forças não concorrentes deve ser abordado mediante a equação (3.10). Uma situação particular ocorre quando do conjunto de forças há duas de igual módulo e direção, mas de sentidos opostos (**Figura 3.7**). Esta configuração é chamada de binário. Aplicando a equação 10, para o momento resultante em torno do ponto O, tem-se:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + (\mathbf{r}_1 + \mathbf{v}) \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{r}_1 \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) + \mathbf{v} \times \mathbf{F}_2 \quad (3.11)$$

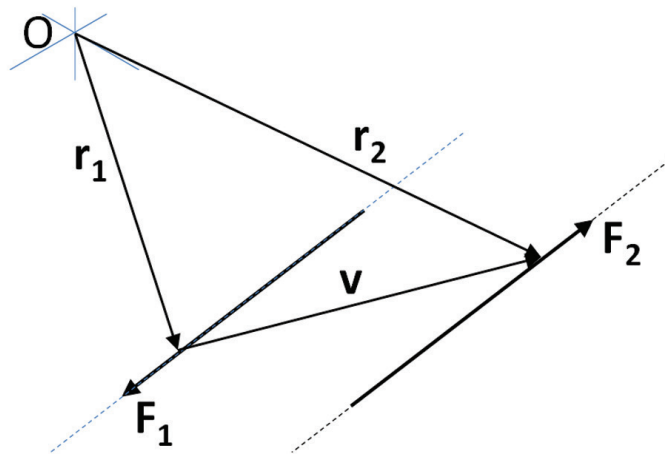


Figura 3.7: Duas forças paralelas de igual módulo geram um vetor binário.

As forças \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 são iguais e de sentido contrário, logo, cancelam-se e o momento resultante será:

$$\mathbf{M} = \mathbf{v} \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{v} \times \mathbf{F}_1 \quad (3.12)$$

Em que \mathbf{v} é um vetor arbitrário que vai desde qualquer ponto da linha de ação de \mathbf{F}_1 até qualquer ponto da linha de ação de \mathbf{F}_2 . Os vetores de posição não aparecem na equação (3.12), o que significa que o vetor binário é um vetor livre, que independe da localização do ponto O. Também por este motivo, eliminamos o subscrito O de \mathbf{M} na equação (3.12). O vetor binário, no entanto, é perpendicular ao plano que contém as forças. Sendo um vetor, o binário está subordinado às operações vetoriais conhecidas como adição e subtração, multiplicação por um escalar, produto interno e produto vetorial.

Deslocamento de uma força fora da linha de ação com adição de um binário

Sabemos que o efeito de uma força não se altera, ao deslocá-la ao longo da sua linha de ação. Para aplicar a força em outro ponto que não pertence à linha de ação original, mantendo-se o mesmo efeito sobre o corpo rígido, será necessário acrescentar um binário de valor igual ao produto da força, vezes a distância entre a nova linha de ação e a anterior. Esta situação está demonstrada na **Figura 3.8**. Inicialmente, temos uma força aplicada no ponto A (**Figura 3.8, a**). A posição deste ponto com relação à origem está definida pelo vetor de posição \mathbf{r} . A aplicação de duas forças de valor igual, mas sentidos opostos, em O, não altera o efeito de \mathbf{F} (**Figura 3.8, b**). As forças \mathbf{F} , em A, e $-\mathbf{F}$, em O, formam um binário que permite a substituição de ambas por \mathbf{M}_O (**Figura 3.8, c**). O sistema assim obtido denomina-se sistema força-binário.

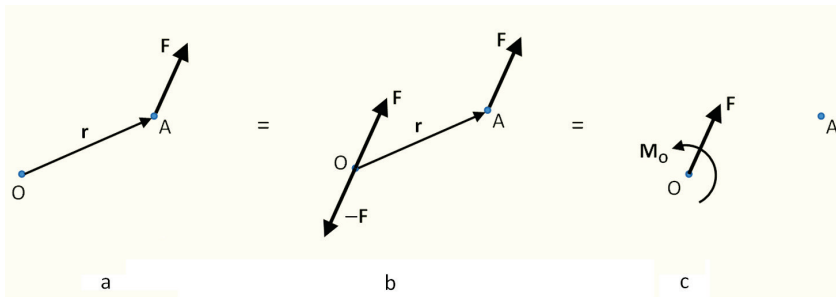


Figura 3.8: Uma força atuando no ponto A é equivalente a um sistema força binário em O. Observe que, sendo \mathbf{M}_O um vetor livre, poderia atuar em qualquer ponto do corpo. É usual, no entanto, situá-lo no ponto O.

Quando em lugar de uma, são n forças atuando no corpo, o procedimento pode ser aplicado a cada uma delas, desde que o ponto O seja o mesmo, obtendo-se n sistemas forças-binário. As n forças em O serão concorrentes e poderão ser somadas vetorialmente, para obter uma única força resultante \mathbf{R} , como discutido em aulas anteriores. O mesmo aplica-se aos n binários. Desta forma, pode-se afirmar que qualquer sistema de forças pode ser reduzido a uma força e um binário resultantes, que são equivalentes ao sistema original. As equações que governam este processo são:

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \sum \mathbf{F} \\ \mathbf{M}_{OR} &= \sum \mathbf{M}_O\end{aligned}\quad (3.13)$$

Mais uma vez, utiliza-se o subscrito O para \mathbf{M} por convenção, já que o binário resultante também será um vetor livre. Sistemas equivalentes de forças são aqueles que podem ser reduzidos ao mesmo sistema força-binário, em um dado ponto O.

Exemplo 3: uma força de magnitude $F=2\text{ kN}$ está aplicada no ponto A da aba do perfil I mostrado. Encontre o sistema força-binário no ponto C equivalente ao efeito da força \mathbf{F} , considerando $a=c=50\text{ mm}$ e $b=100\text{ mm}$.

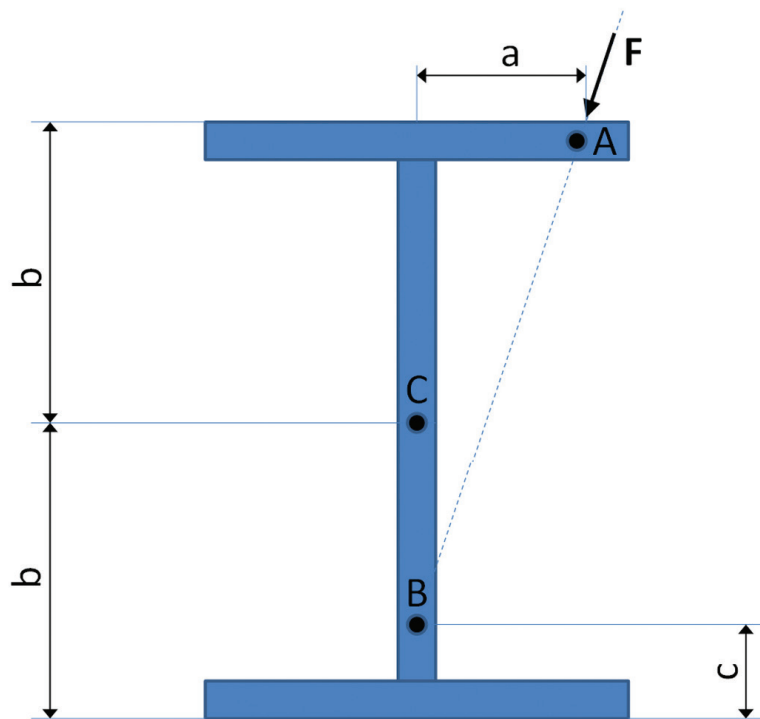


Figura 3.9: Um perfil I solicitado por uma força cuja linha de ação não passa pelo centróide da seção no ponto C.

Solução: o primeiro passo é estabelecer um referencial cartesiano no ponto C. Para deslocar a força \mathbf{F} até o ponto C, será necessário adicionar o binário $\mathbf{M}=\mathbf{r} \times \mathbf{F}$, onde \mathbf{r} é o vetor de posição até o ponto de aplicação de \mathbf{F} . Para expressar \mathbf{r} e \mathbf{F} como vetores cartesianos e efetuar o produto vetorial, devemos conhecer as componentes e o módulo de ambos. O vetor \mathbf{r} faz um ângulo β com a vertical (ver figura 3.10). Da mesma forma, o ângulo α indica a inclinação da força \mathbf{F} , com relação ao referencial. Da geometria do problema, tem-se:

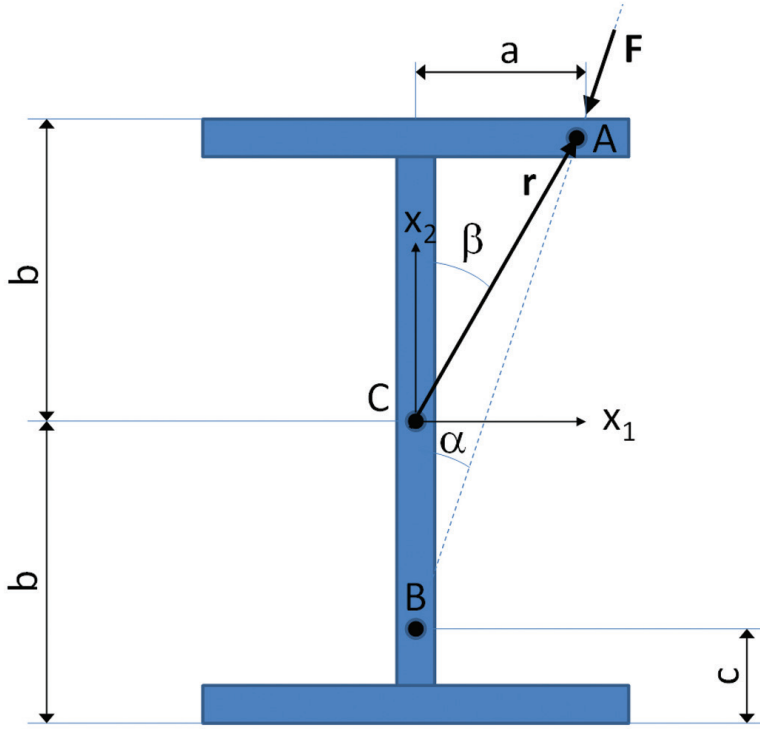


Figura 3.10: Para calcular o momento de \mathbf{F} em torno de C, deve ser utilizada a equação 5 que, por sua vez, necessita das componentes cartesianas do vetor de posição \mathbf{r} e de força \mathbf{F} . Com este objetivo, vincula-se um referencial cartesiano ao ponto C da seção.

$$\tan(\beta) = \frac{a}{b}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{2b - c}$$

É possível expressar, também, o módulo do vetor de posição \mathbf{r} em função das distâncias a e b :

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

De posse dos módulos e inclinações de \mathbf{r} e \mathbf{F} , podemos expressar ambos como vetores cartesianos:

$$\mathbf{r} = r \cdot \sin(\beta) \mathbf{e}_1 + r \cdot \cos(\beta) \mathbf{e}_2 + 0 \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{F} = -F \cdot \sin(\alpha) \mathbf{e}_1 - F \cdot \cos(\alpha) \mathbf{e}_2 + 0 \mathbf{e}_3$$

Substituindo valores e efetuando o produto vetorial, temos:

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ 0,05 & 0,1 & 0 \\ -632,45 & -1897,36 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -31,6 \end{bmatrix} \text{ N} \cdot \text{m}$$

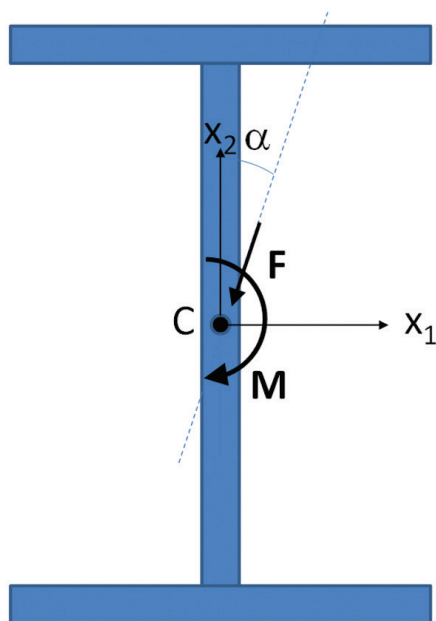


Figura 3.11: Vetor de força F e de momento M, aplicados em C e equivalentes a uma única força, aplicada no ponto A da figura 3.9.

Atividade 2

Atende ao objetivo 2

Uma força $F=3 \text{ kN}$ está aplicada na alma do perfil I mostrado. Encontre o sistema força-binário no ponto C equivalente ao efeito da força F, considerando $a=15 \text{ mm}$ e $b=100 \text{ mm}$.

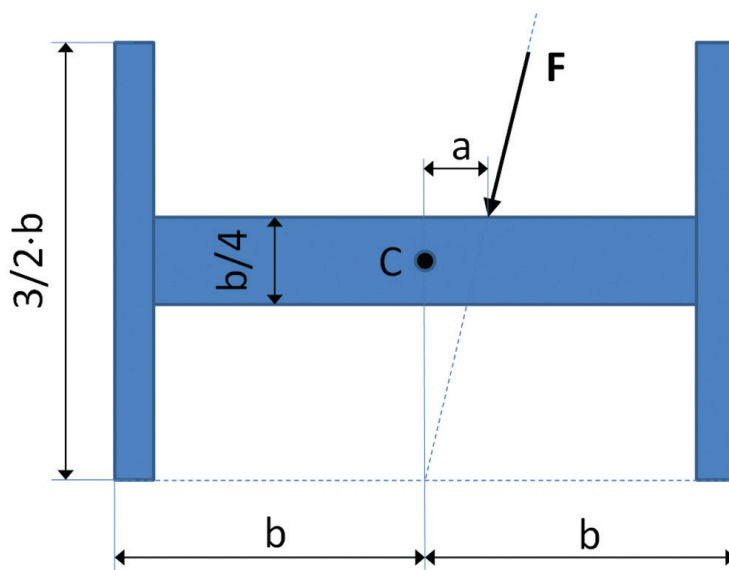


Figura 3.12: Figura da atividade 3, mostrando uma força F excêntrica em relação ao centróide C , da seção da viga I .

Resposta comentada

O procedimento descrito no exemplo 2 deverá ser adaptado às condições da presente atividade. Os resultados são:

$$F_C = 3 \text{ KN} \quad \alpha = 9,72^\circ$$

$$M = 38 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Para um sistema cartesiano x_1x_2 com origem no ponto C . O ângulo α é formado entre o eixo x_2 e o vetor F .

Conclusão

A principal conclusão da presente aula é que qualquer sistema de forças pode ser reduzido a um sistema força-binário que lhe é equivalente. Para isto, utilizam-se as equações (3.12) e (3.13). Este conceito é extremamente valioso, e será utilizado em muitas situações, dentre as quais destacam-se a modelagem de apoios engastados (Aula 4), na localização do centro de gravidade de placas (Aula 6) e na obtenção de fórmulas para o cálculo dos momentos de inércia de superfícies planas (Aula 11).

Resumo

Na presente aula, foi discutido primeiramente o conceito de produto vetorial. Como resultado desta operação, surge um novo vetor, perpendicular ao plano que contém os operandos envolvidos.

O momento de uma força em relação a um determinado ponto, O por exemplo, é uma das principais aplicações do produto vetorial. Neste caso, o produto vetorial é formado pelo vetor de força e pelo vetor de posição, desde o ponto O até o ponto de aplicação da força. O momento de uma força expressa a tendência desta a girar o corpo em torno do ponto O.

Se for necessário projetar o momento de uma força em relação a um eixo, utiliza-se o produto escalar. Neste caso, o resultado será a componente do vetor de momento (escalar) na direção do eixo.

Duas forças de igual módulo, paralelas e de sentido contrário geram um binário, que é um vetor livre porque independe da posição do ponto O, em relação aos pontos de aplicação das forças. Binários são vetores que podem ser somados para encontrar um binário resultante.

Qualquer sistema de forças poderá ser reduzido a um sistema força-binário equivalente pelas equações 12 e 13.

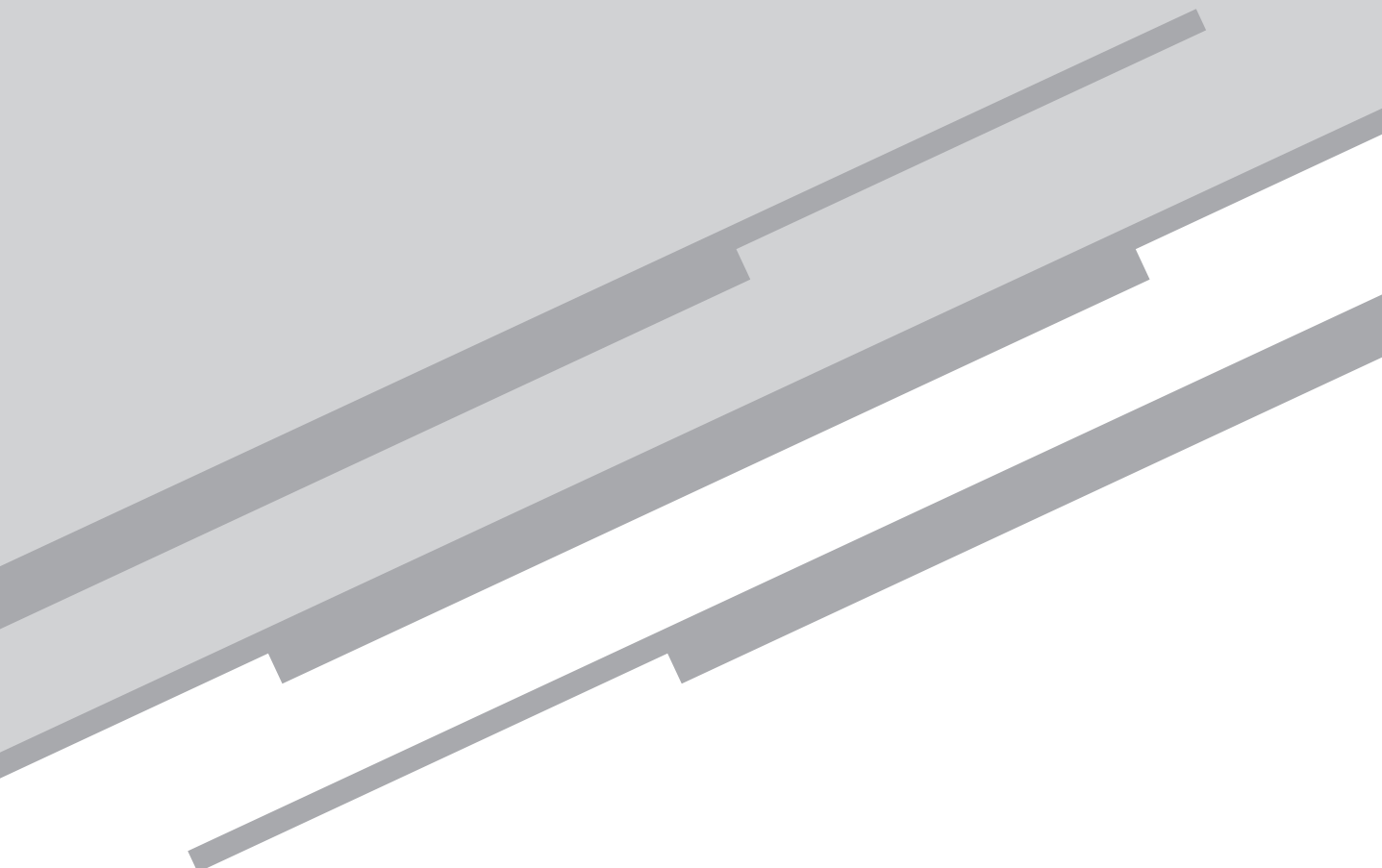
Referências

HIBBELER, R. C. *Estática Mecânica para Engenharia*, 12. edi., São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R. Jr. *Mecânica Vetorial para Engenheiros*. 5. ed. São Paulo: Makron Books, 1994.

Aula 4

Estática dos corpos rígidos
em duas dimensões



Jorge Alberto Rodriguez Duran

Meta

Obter os diagramas de corpo livre de corpos em duas dimensões e aplicar as equações de equilíbrio para definir todos os esforços externos envolvidos.

Objetivos

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. desenhar diagramas de corpo livre em duas dimensões;
2. aplicar as equações de equilíbrio e calcular todas as forças externas.

Introdução

Na aula anterior, vimos que qualquer sistema de forças atuando em um corpo rígido pode ser reduzido a um sistema força-binário. As equações que expressam este conceito são as seguintes:

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \sum \mathbf{F} \\ \mathbf{M}_{\text{OR}} &= \sum \mathbf{M}_O\end{aligned}\quad (4.1)$$

Desta forma, o efeito de todas as forças e momentos que atuam no corpo é equivalente ao de uma única força \mathbf{R} , aplicada em algum ponto e ao de um único momento (binário) \mathbf{M}_{OR} . O binário é um vetor livre e não estará necessariamente vinculado ao ponto de aplicação de \mathbf{R} , embora, por convenção, se especifique com o subscrito correspondente. Os sistemas de forças \mathbf{F} e de momentos \mathbf{M}_O originais são ditos de equivalentes a \mathbf{R} e \mathbf{M}_{OR} , respectivamente.

Na presente aula, aplicaremos estes conceitos na determinação de esforços desconhecidos e/ou reações nos vínculos do corpo com outros corpos, em situações de equilíbrio. Também abordaremos e aplicaremos um conceito central para todo engenheiro: o *diagrama de corpo livre*, ou *DCL*.

Equilíbrio de corpos em duas dimensões

Imagine uma situação em que um corpo rígido submetido a um sistema de forças externas \mathbf{F} encontra-se em equilíbrio. Isto significa que as forças externas não imprimem ao corpo qualquer movimento de translação e/ou rotação. Como o sistema \mathbf{F} é equivalente a uma força e binário resultantes \mathbf{R} e \mathbf{M}_{OR} , de acordo com a equação (4.1), o equilíbrio implica em que o sistema força-binário equivalente ao sistema de forças externas é igual a zero:

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \sum \mathbf{F} = 0 \\ \mathbf{M}_{\text{OR}} &= \sum \mathbf{M}_O = 0\end{aligned}\quad (4.2)$$

Um fato importante deve ser destacado neste momento. Para cada força externa atuando no corpo haverá uma força interna de reação \mathbf{F}_i . Se o sistema de partículas que formam o corpo é perfeitamente rígido, de maneira que não haja separação entre elas, as forças \mathbf{F}_i entre partículas vizinhas serão iguais. Estas forças cancelam-se por pares para fornecer o equilíbrio interno. Por este motivo, não aparecem nas equações (4.2).

Para o caso de um corpo ou sistema de partículas que não seja completamente rígido, o equilíbrio só será satisfeito se as equações (4.2) se cumprirem também em sub-sistemas isolados do corpo que incluam forças externas e internas. Este é o caso dos sólidos deformáveis, que serão tratados na disciplina Resistência dos Materiais.

Em um referencial cartesiano $x_1x_2x_3$, as equações (4.2) geram um sistema de 6 equações escalares:

$$\begin{array}{lll} \sum F_{x_1} = 0 & \sum F_{x_2} = 0 & \sum F_{x_3} = 0 \\ \sum M_{x_1} = 0 & \sum M_{x_2} = 0 & \sum M_{x_3} = 0 \end{array} \quad (4.3)$$

Para problemas planos, as forças na direção x_3 e os momentos em torno dos eixos x_1 e x_2 derivam nas identidades triviais $0=0$ e as equações (3) se reduzem a:

$$\sum F_{x_1} = 0 \quad \sum F_{x_2} = 0 \quad \sum M_O = 0 \quad (4.4)$$

Os binários M_O tendem a girar o corpo em torno do eixo x_3 . Sendo vetores livres, o ponto escolhido para efetuar o somatório poderá ser qualquer ponto do corpo ou mesmo fora deste. As equações (4.4) são independentes entre si, logo podemos concluir que, em problemas planos, as equações de equilíbrio permitem o cálculo de, no máximo, três incógnitas.

Reações nos apoios

Uma máquina ou estrutura pode ser modelada como um único corpo rígido, desde que os vínculos com apoios ou outras máquinas e estruturas sejam removidos e substituídos pelos seus efeitos, na forma de esforços ou binários. De maneira geral, estes esforços ou binários são chamados de *reações nos apoios*, embora em alguns casos não atuem em apoios externos. Em todos os casos, trata-se de modelos ou idealizações relativas à natureza dos efeitos nos corpos.

Partes das estruturas e máquinas também podem ser isoladas para fins de análises e, neste caso, as reações nos apoios seriam os esforços que atuam na interface destas partes com as outras, dentro das estruturas e máquinas. Uma única parte do conjunto pode também ser mentalmente seccionada e o efeito da parte restante substituído pelas reações nos apoios que, neste caso, correspondem a esforços internos.

Para problemas planos, as reações nos apoios podem ser classificadas em três grupos:

1. Forças com linha de ação conhecida (**Figura 4.1, a**): neste caso, o apoio restringe a translação do corpo em uma direção conhecida. A força de reação atuará nesta direção e será a única incôgnita no apoio. Exemplos típicos são os apoios de roletes, cabos e superfícies livres de atrito.
2. Forças com linha de ação desconhecida (**Figura 4.1, b**): o apoio restringe a translação do corpo em todas as direções. A força total de reação será representada pelas suas duas componentes no referencial cartesiano. Haverá duas incôgnitas no apoio. Neste grupo, os exemplos típicos são as juntas com pinos, apoios de eixos em mancais de rolamento e superfícies rugosas onde não é possível desprezar o atrito.
3. Forças e binários (**Figura 4.2**): o apoio restringe a translação em todas as direções e também a rotação no plano. As reações podem, então, ser reduzidas a uma força e um binário. Haverá três incôgnitas no apoio, duas componentes da força e um momento de binário. Este tipo de apoio é conhecido como engaste e ocorre, por exemplo, em barras ou vigas chumbadas na parede.

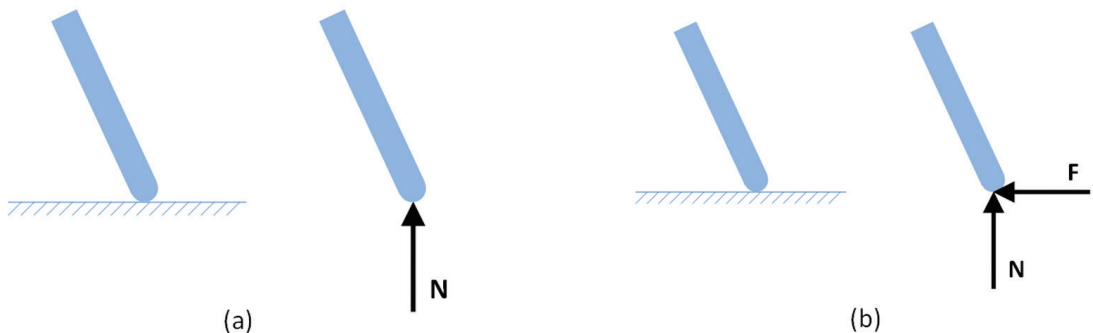


Figura 4.1: Uma superfície sem atrito reage com um único esforço normal N (a), enquanto, na presença de atrito (b), a superfície reage também com uma força horizontal F .

Diagramas de corpo livre DCL

As condições de equilíbrio no plano (equações (4.4)) são relações que devem ser satisfeitas pelas forças externas, tanto aplicadas como reativas (reações nos apoios) em corpos rígidos isolados. A melhor maneira de conduzir o processo de isolamento de sistemas ou sub-sistemas para aplicar as condições de equilíbrio consiste em fazer um esboço de

qualidade onde se representem todas as forças externas que atuam no corpo. Este esboço é conhecido como *diagrama de corpo livre (DCL)* e da sua precisão depende decisivamente a solução de qualquer problema de mecânica geral.

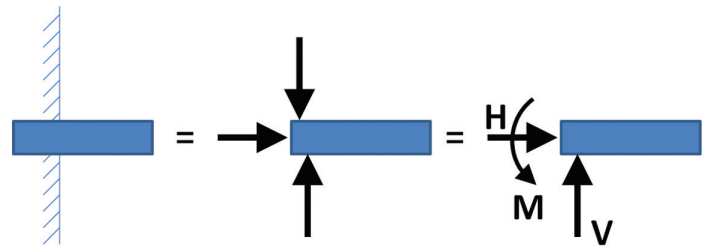


Figura 4.2: Um corpo engastado tem os seus movimentos horizontal e vertical restringidos, assim como o giro em torno do eixo que sai do papel. Este tipo de apoio fornece duas forças e um momento de reação.

Exemplo 1: considere o suporte em forma de T, mostrado na **Figura 4.3**. Um vetor de carga \mathbf{F} é aplicado no ponto B. Para os dados da tabela 1, obtenha o DCL do suporte.

Tabela 1: Dados numéricos para o exemplo 1.

a, m	b, m	c, m	\mathbf{F} , N
2	4	6	$F_1 \mathbf{e}_1 + F_2 \mathbf{e}_2 = 300\mathbf{e}_1 - 120\mathbf{e}_2$

Solução: identificamos que o apoio em A pertence ao grupo 1 e produz uma única força na direção vertical (que chamaremos de \mathbf{A}), enquanto em O teremos uma força com linha de ação desconhecida (grupo 2 das reações). Esta reação em O terá uma componente vertical \mathbf{O}_v e uma horizontal \mathbf{O}_h . Observe que convém aplicar primeiro o somatório de momentos da equação (4) no ponto O, pois desta forma calculamos diretamente a reação em A. A equação (4) está em função dos módulos, logo trata-se de um somatório escalar de momentos. Utilizaremos, no entanto, primeiramente o método vetorial e depois o escalar, este último mais simples e direto, para problemas no plano.

$$\sum \mathbf{M}_O = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{A} + \mathbf{r}_{OB} \times \mathbf{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{A} = -\mathbf{r}_{OB} \times \mathbf{F}$$

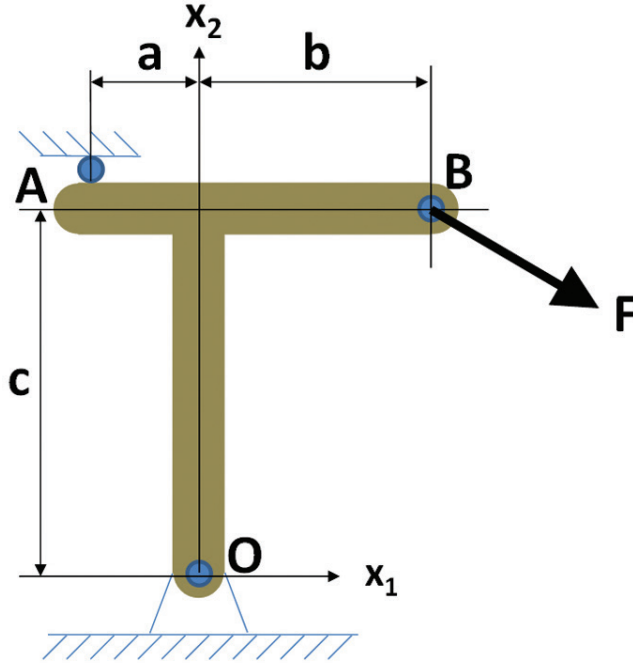


Figura 4.3: Suporte em T com força F aplicada no ponto B.

Utilizamos a notação vetorial cartesiana para o representar os vetores de posição e de força (**Figura 4.4**). Os produtos vetoriais se calculam expandindo os seguintes determinantes:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -a & c & 0 \\ 0 & A & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ b & c & 0 \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow (-a \cdot A) \cdot \mathbf{e}_3 = (F_1 \cdot c - F_2 \cdot b) \cdot \mathbf{e}_3$$

Como esperado, as componentes cartesianas dos momentos estão fora do plano. Obviamente, o sinal de igualdade só será preservado se ambas as componentes forem iguais. Logo:

$$A = -\frac{F_1 \cdot c - F_2 \cdot b}{a} = -\frac{300 \cdot 6 - (-120) \cdot 4}{2} = -1140 \text{ N}$$

O sinal negativo da reação em A indica que o sentido é contrário àquele assumido na figura. O mesmo resultado seria obtido utilizando os módulos (escalares) dos momentos, no somatório:

$$\sum M_O = 0 \Rightarrow -a \cdot A = 120 \cdot b + 300 \cdot c \Rightarrow A = -\frac{120 \cdot b + 300 \cdot c}{a} = -1140 \text{ N}$$

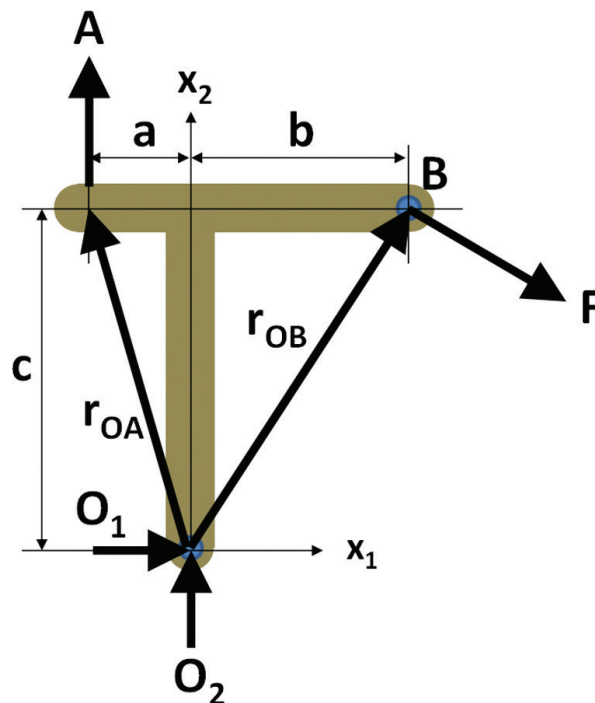


Figura 4.4: Suporte em T, com a marcação dos vetores de força e dos vetores posição dos pontos onde estas forças estão aplicadas.

As componentes da reação em O podem agora ser calculadas aplicando o equilíbrio de forças da equação (4):

$$\begin{aligned} \sum F_{x1} = 0 & \Rightarrow O_1 + F_1 = 0 \Rightarrow O_1 = -F_1 = -300 \text{ N} \\ \sum F_{x2} = 0 & \Rightarrow O_2 + A + F_2 = 0 \Rightarrow O_2 = -A - F_2 = -(-1140) - (-120) = 1260 \text{ N} \end{aligned}$$

Dos resultados numéricos podemos concluir que a reação O_1 atua para a esquerda, enquanto que O_2 atua para cima.

Exemplo 2: a figura mostra uma viga engastada em balanço, com uma força F aplicada na extremidade. Para os dados da tabela 2, obtenha o DCL da viga.

Tabela 2: Dados numéricos para o exemplo 2.

a, m	α , graus	F, N
6	30	400

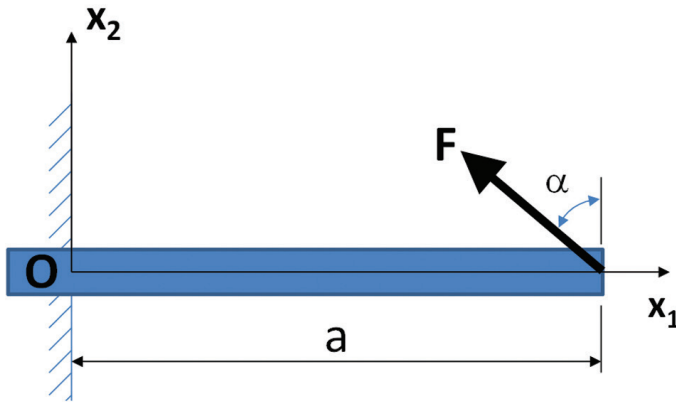


Figura 4.5: Viga engastada em balanço, com uma força F aplicada na extremidade.

Solução: o conjunto de reações que surgem no engaste podem ser reduzidas a um sistema força-binário (**Figura 4.6**). Como no exemplo anterior, aplicam-se as condições de equilíbrio no plano (equações. (4.4)), com o objetivo de calcular estas reações:

$$\begin{aligned}\sum F_{x1} = 0 &\Rightarrow O_1 - F \cdot \sin(\alpha) = 0 \Rightarrow O_1 = F \cdot \sin(\alpha) = 400 \cdot \sin(30) = 200 \text{ N} \\ \sum F_{x2} = 0 &\Rightarrow O_2 + F \cdot \cos(\alpha) = 0 \Rightarrow O_2 = -F \cdot \cos(\alpha) = -400 \cdot \cos(30) = -346,4 \text{ N} \\ \sum M_O = 0 &\Rightarrow M + a \cdot F \cdot \cos(\alpha) = 0 \Rightarrow M = -a \cdot F \cdot \cos(\alpha) = -6 \cdot 400 \cdot \cos(30) = -2078,5 \text{ N} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

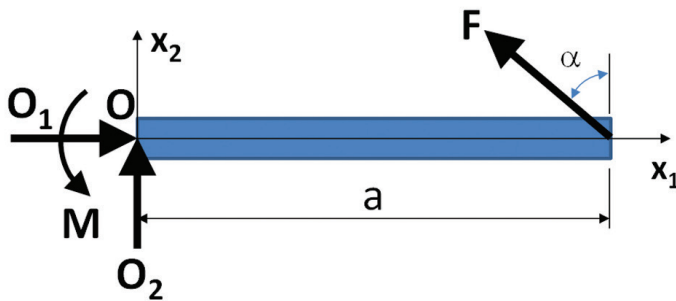


Figura 4.6: Viga engastada em balanço, com forças aplicadas reduzidas a um sistema força-binário.

Atividade 1

Atende aos objetivos 1 e 2

Resolva o exemplo 1, para os seguintes dados:

a, m	b, m	c, m	F, N
3	2	4	$-2300\mathbf{e}_1 + 420\mathbf{e}_2$

Resposta comentada

Siga o procedimento descrito nos exemplos sem utilizar a fórmula encontrada para as reações. Observe que a direção e sentido de F agora mudaram. Se for utilizar o método escalar, é recomendado desenhar o vetor, não necessariamente em escala. Isto ajuda a visualizar o sinal dos momentos, no somatório. Os resultados são:

$$A = 3346,7 \text{ N}$$

$$O_1 = 2300 \text{ N}$$

$$O_2 = -3766,7 \text{ N}$$



Atividade 2

Atende aos objetivos 1 e 2

Resolva o exemplo 2, para os seguintes dados:

a, m	α , graus	F, N
4	60	1500

Comentários da atividade: Siga o procedimento descrito nos exemplos sem utilizar a fórmula encontrada para as reações. Os resultados são:

$$O_1 = 1299,1 \text{ N}$$

$$O_2 = -750 \text{ N}$$

$$M = -3000 \text{ N.m}$$

Conclusão

Baseados no princípio de que o conjunto de forças externas, atuando em qualquer corpo, pode ser reduzido a um sistema força-binário, vimos que as equações (4.4) representam a condição matemática para o equilíbrio.

Esta aula abordou também um aspecto de vital importância para qualquer engenheiro: o conceito de diagrama de corpo livre, o DCL. Este diagrama constitui uma idealização do corpo ou conjunto de corpos onde devem ser representadas todas as forças atuantes. Quando os apoios ou vínculos com outros corpos são eliminados no processo de idealização, seus efeitos devem ser substituídos pelas reações. As equações de equilíbrio devem, então, ser aplicadas para encontrar os esforços desconhecidos e assim completar toda a informação relacionada com o DCL.

No plano, haverá apenas três equações de equilíbrio independentes. Logo, apenas problemas com três incógnitas poderão ser resolvidos. Se esse for o caso, o problema será estaticamente determinado. Todos os exemplos desta aula se enquadram nesta categoria. Situações estaticamente indeterminadas (mais de três incógnitas no plano) devem ser abordadas por métodos específicos que estão fora do escopo desta disciplina.

Resumo

Condição matemática para equilíbrio do corpo no plano.

$$\sum F_{x1} = 0 \quad \sum F_{x2} = 0 \quad \sum M_O = 0$$

O diagrama de corpo livre é uma idealização do componente de interesse onde se incluem todas as forças externas que o solicitam, dentre elas, as produzidas pelos vínculos retirados durante o isolamento.

Referências

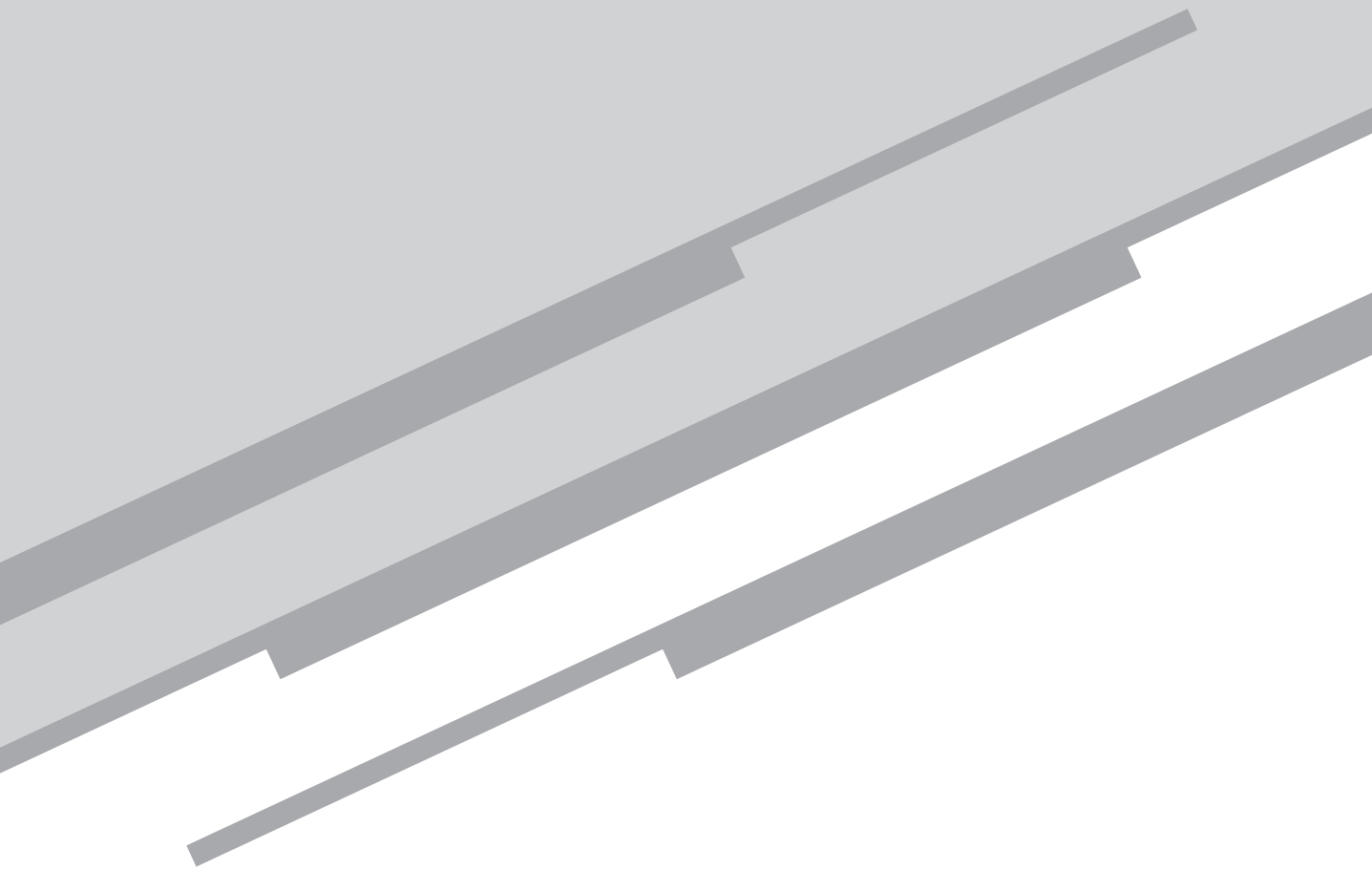
HIBBELER, R. C. *Estática Mecânica para Engenharia*, 12. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R. Jr. *Mecânica Vetorial para Engenheiros*. 5. ed. São Paulo: Makron Books, 1994,

CRANDALL, S. H.; DAHL, N. C.; LARDNER, T. J. *An Introduction to the Mechanics of Solids*. 3. ed. Tokyo: McGraw-Hill Inc. 1978.

Aula 5

Estática dos corpos rígidos
em três dimensões



Jorge Alberto Rodriguez Duran

Meta

Obter os diagramas de corpo livre de corpos em três dimensões, e aplicar as equações de equilíbrio para definir todos os esforços externos envolvidos.

Objetivos

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. desenhar diagramas de corpo livre em três dimensões;
2. aplicar as equações de equilíbrio e calcular todas as forças externas.

Introdução

A presente aula constitui uma generalização da Aula 4 (Estatística dos corpos rígidos em 2D) ao caso tri-dimensional. Para expressar o equilíbrio, continuaremos utilizando as equações:

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \sum \mathbf{F} = 0 \\ \mathbf{M}_{\text{OR}} &= \sum \mathbf{M}_O = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0\end{aligned}\quad (5.1)$$

A diferença em relação à Aula 4 é que as componentes escalares de (5.1) no espaço são seis, três equações de equilíbrio de forças e de momentos em cada eixo cartesiano, e não apenas três, como em problemas planos:

$$\begin{aligned}\sum F_{x1} &= 0 & \sum F_{x2} &= 0 & \sum F_{x3} &= 0 \\ \sum M_{x1} &= 0 & \sum M_{x2} &= 0 & \sum M_{x3} &= 0\end{aligned}\quad (5.2)$$

Como o sistema das seis equações anteriores constitui um sistema de equações independentes entre si, o número máximo de incógnitas que poderá ser calculado é de seis.

O modelamento das reações nos apoios para construir os diagramas de corpo livre (DCLs) segue as mesmas regras que em problemas planos. Um apoio *completo* (**Figura 5.1**) tem potencial para limitar o deslocamento e o giro do corpo nos três eixos, gerando então seis reações escalares (três forças e três momentos). Todos os outros tipos de apoios poderão ser modelados como sub-conjuntos do apoio completo. Uma regra simples consiste em associar uma componente escalar da reação a cada limitação de movimento imposta pelo apoio. Cada uma das referências listadas ao final desta aula contém tabelas com os principais modelos utilizados para representar os diversos tipos de vínculos impostos aos corpos.

É importante lembrar que o diagrama de corpo livre (DCL) consiste em um esboço de qualidade, representando a forma do corpo, com todas as componentes escalares das forças externas que atuam sobre o mesmo, aplicadas e reativas, em um referencial cartesiano $x_1x_2x_3$.

Não havendo conteúdos novos a apresentar nesta aula, e apenas estendendo os conceitos de equilíbrio e DCL, da Aula 4, a problemas tri-dimensionais, passaremos diretamente aos exemplos e atividades.

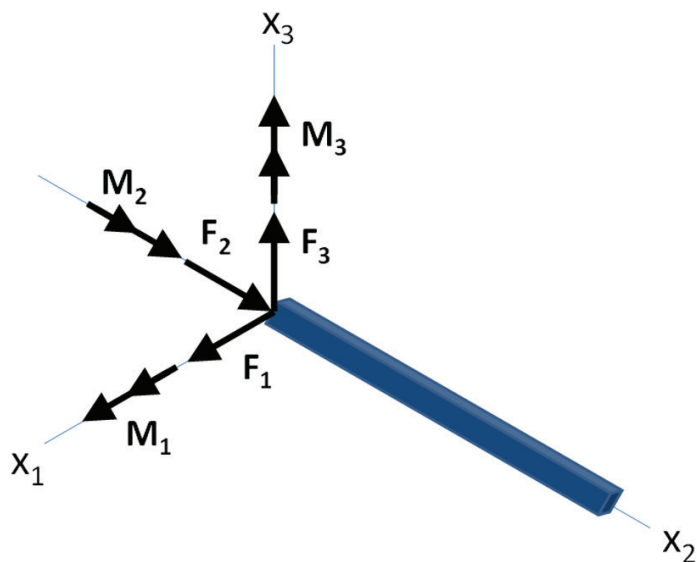


Figura 5.1: Reações em potencial em um apoio engastado. A quantidade delas que realmente aparece no DCL vai depender das solicitações externas no corpo.

Exemplo 1: a **Figura 5.2** mostra uma barra ABO que suporta um carregamento F_A na vertical e que encontra-se em equilíbrio ,pela ação de dois cabos de aço, BL e BH, e um apoio de rótula em O. Os pontos O, L e H estão no plano x_2x_3 , como mostrado na figura. Obtenha o DCL da barra ABO, com os esforços em função do módulo da carga aplicada F_{A3} . Considere os dados da tabela.

Tabela 5.1: Distâncias em metros do exemplo 1 (ver Figura 5.2).

a	b	c	d	e	f
6	4	2	4	5	6

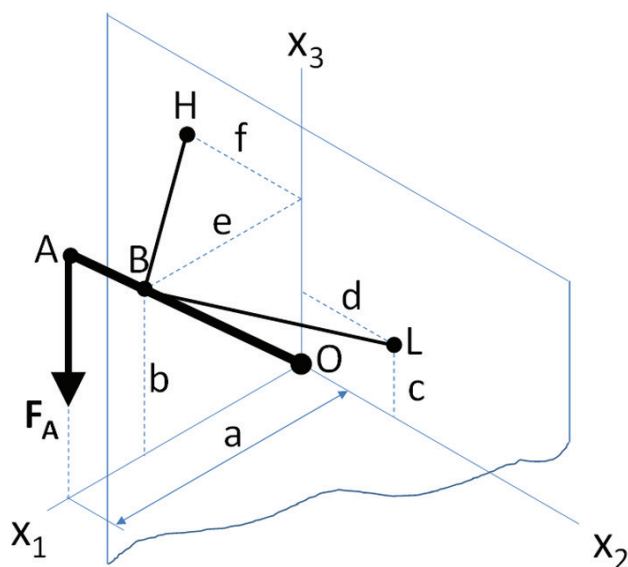


Figura 5.2: O carregamento F_A , aplicado à barra ABO, é suportado pelos cabos BL e BH e por um apoio de rótula em O. Obs.: Figura fora de escala para os dados do problema.

Solução: o primeiro passo consiste em identificar o tipo de vínculo da barra ABO com o restante da estrutura. Cada cabo exerce uma única força de direção conhecida (ao longo do cabo), mas cujo módulo deverá ser calculado durante a resolução do problema. Já na rótula, a única reação tem módulo e direção desconhecidos. Observe que neste tipo de apoio não há momentos de reação. A **Figura 5.3** mostra a barra ABO isolada da estrutura, com as forças que a solicitam. A seguinte sequência de passos é indicada para resolver problemas de equilíbrio tri-dimensional:

1. definir os vetores de posição;
2. definir os vetores de força;
3. aplicar as equações de equilíbrio de forças e momentos;
4. montar um sistema de equações, igualando a zero as componentes escalares das equações de equilíbrio, em cada eixo cartesiano;
5. solução do sistema de equações para a determinação dos esforços desconhecidos.

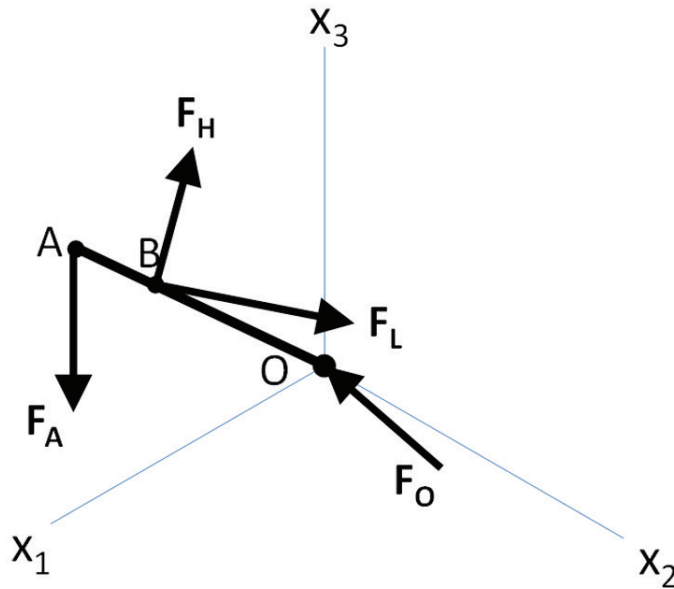


Figura 5.3: Para isolar a barra ABO do restante da estrutura, é necessário substituir o efeito dos vínculos retirados pelas correspondentes reações.

Os vetores de posição são úteis para representar forças cuja linha de ação passa por dois pontos (ver Aula 2) e também para calcular os produtos vetoriais durante o somatório de momentos (ver Aula 3). No problema que nos ocupa, precisaremos de 4 vetores de posição. Para identificar estes vetores, utilizaremos a letra \mathbf{r} , com dois subscritos correspondentes ao ponto de início e fim do vetor, nessa ordem. Por exemplo, o vetor de posição na direção BL será:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{BL} &= (x_{1L} - x_{1B})\mathbf{e}_1 + (x_{2L} - x_{2B})\mathbf{e}_2 + (x_{3L} - x_{3B})\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{r}_{BL} &= (0 - e)\mathbf{e}_1 + (d - 0)\mathbf{e}_2 + (c - b)\mathbf{e}_3 = -e\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2 + (c - b)\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{r}_{BL} &= -5\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 \quad m\end{aligned}$$

Igual procedimento será utilizado para obter os outros três vetores:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{BH} &= -5\mathbf{e}_1 - 6\mathbf{e}_2 \quad m \\ \mathbf{r}_{OA} &= 6\mathbf{e}_1 + \frac{24}{5}\mathbf{e}_3 \quad m \\ \mathbf{r}_{OB} &= 5\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_3 \quad m\end{aligned}$$

Continuando com a sequência de passos proposta, corresponde agora a definição dos vetores de força. Para representar as forças nos cabos, normalizamos o vetor de posição e o multiplicamos pela intensidade da força. No cabo BL (força \mathbf{F}_L), por exemplo, teremos:

$$\mathbf{F}_L = F_L \cdot \frac{\mathbf{r}_{BL}}{r_{BL}} = F_L \cdot \frac{-5\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3}{\sqrt{(-5)^2 + (4)^2 + (-2)^2}} = F_L \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{4\sqrt{5}}{15}\mathbf{e}_2 - \frac{2\sqrt{5}}{15}\mathbf{e}_3 \right)$$

Os outros vetores de força serão:

$$\mathbf{F}_H = F_H \cdot \frac{\mathbf{r}_{BH}}{r_{BH}} = F_H \cdot \left(-\frac{5\sqrt{61}}{61}\mathbf{e}_1 - \frac{6\sqrt{61}}{61}\mathbf{e}_2 \right)$$

$$\mathbf{F}_O = F_{O1}\mathbf{e}_1 + F_{O2}\mathbf{e}_2 + F_{O3}\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{F}_A = -F_{A3}\mathbf{e}_3$$

Neste momento, já temos todas as forças que atuam na barra ABO expressas como vetores cartesianos, o que possibilita a aplicação das equações de equilíbrio. Fazendo primeiramente o somatório de forças, temos:

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_H + \mathbf{F}_O + \mathbf{F}_A = 0$$

$$\left(F_{O1} - \frac{\sqrt{5}}{3}F_L - \frac{5\sqrt{61}}{61}F_H \right)\mathbf{e}_1 + \left(F_{O2} + \frac{4\sqrt{5}}{15}F_L - \frac{6\sqrt{61}}{61}F_H \right)\mathbf{e}_2 + \left(-F_{A3} + F_{O3} - \frac{2\sqrt{5}}{15}F_L \right)\mathbf{e}_3 = 0$$

Seguidamente, escrevemos o balanço de momentos. A escolha do ponto O para o somatório de momentos facilita a solução do sistema de equações resultante.

$$\sum \mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{F}_A + \mathbf{r}_{OB} \times \mathbf{F}_L + \mathbf{r}_{OB} \times \mathbf{F}_H = 0$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 6 & 0 & \frac{24}{5} \\ 0 & 0 & -F_{A3} \end{vmatrix} + F_L \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 5 & 0 & 4 \\ -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & -\frac{2\sqrt{5}}{15} \end{vmatrix} + F_H \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 5 & 0 & 4 \\ -\frac{5\sqrt{61}}{61} & -\frac{6\sqrt{61}}{61} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(-\frac{16\sqrt{5}}{15}F_L + \frac{24\sqrt{61}}{61}F_H \right)\mathbf{e}_1 + \left(6F_{A3} - \frac{2\sqrt{5}}{3}F_L - \frac{20\sqrt{61}}{61}F_H \right)\mathbf{e}_2 + \left(\frac{4\sqrt{5}}{3}F_L - \frac{30\sqrt{61}}{61}F_H \right)\mathbf{e}_3 = 0$$

Para que as equações vetoriais que acabamos de obter sejam satisfeitas, as componentes escalares em cada eixo deverão ser nulas. Igualando a zero os termos que multiplicam os vetores unitários, obtemos um sistema de seis equações lineares:

$$\begin{array}{rclcl}
 F_{O1} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{3}F_L & -\frac{5\sqrt{61}}{61}F_H & = 0 \\
 0 & F_{O2} & 0 & +\frac{4\sqrt{5}}{15}F_L & -\frac{6\sqrt{61}}{61}F_H & = 0 \\
 0 & 0 & F_{O3} & -\frac{2\sqrt{5}}{15}F_L & 0 & = F_{A3} \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{16\sqrt{5}}{15}F_L & \frac{24\sqrt{61}}{61}F_H & = 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{2\sqrt{5}}{3}F_L & -\frac{20\sqrt{61}}{61}F_H & = -6F_{A3} \\
 0 & 0 & 0 & \frac{4\sqrt{5}}{3}F_L & -\frac{30\sqrt{61}}{61}F_H & = 0
 \end{array}$$

Para resolver o sistema que acabamos de obter, você é livre para utilizar os seus conhecimentos de álgebra linear e os métodos de solução de sistemas de equações lineares. Observe, no entanto, que o nosso sistema tem seis equações e apenas cinco incógnitas. Podemos encontrar os módulos de F_L e F_H por qualquer dupla das últimas três equações e, de posse destes valores, calcular as componentes de \mathbf{F}_O , pelas três primeiras equações. Lembre que nos foi solicitada uma solução para os esforços resistivos, em função do carregamento aplicado F_{A3} .

$$\begin{aligned}
 -\frac{16\sqrt{5}}{15}F_L + \frac{24\sqrt{61}}{61}F_H &= 0 \Rightarrow F_H = \frac{2\sqrt{5}\sqrt{61}}{45}F_L \\
 -\frac{2\sqrt{5}}{3}F_L - \frac{20\sqrt{61}}{61}F_H &= -6F_{A3} \Rightarrow -\frac{2\sqrt{5}}{3}F_L - \frac{20\sqrt{61}}{61} \frac{2\sqrt{5}\sqrt{61}}{45}F_L = -6F_{A3} \\
 F_L &= \frac{27}{7\sqrt{5}}F_{A3} = \frac{27\sqrt{5}}{35}F_{A3} \\
 F_H &= \frac{6\sqrt{61}}{35}F_{A3}
 \end{aligned}$$

Substituindo as expressões de F_L e F_H nas primeiras três equações, teremos:

$$\mathbf{F}_O = \left(\frac{15}{7}\mathbf{e}_1 + \frac{53}{35}\mathbf{e}_3 \right) F_{A3}$$

Como solicitado, todos os esforços no DCL da **Figura 5.3** estão agora em função de F_{A3} .

Comentários do exemplo 1: Atribuindo algum valor a F_{A3} , por exemplo, 5 kN, podemos ter uma ideia de como esta carga se distribui nos diferentes apoios. A tabela a seguir mostra estes resultados:

Tabela 5.2: Valores da carga por apoio, para $F_{A3} = 5$ kN

F_{A3} , kN	F_{O1} , kN	F_{O3} , kN	F_L , kN	F_H , kN
5	10,7	7,6	8,6	6,7

Se o procedimento descrito for implementado em algum sistema de computação algébrica (Maple, MatLab, etc) será possível obter os resultados em função de parâmetros geométricos da estrutura. Este código parametrizado permite otimizar, por exemplo, o posicionamento dos cabos ou o ângulo de inclinação da barra ABO, tentando minimizar as cargas nos apoios. Estas cargas são utilizadas, também, no dimensionamento dos cabos e da barra ABO, para garantir a resistência à falha por algum mecanismo. Esta última abordagem faz parte do curso de Resistência dos Materiais.

===== **Atividade 1** =====

Atende aos objetivos 1 e 2

A figura mostra uma estrutura similar àquela do exemplo 1. Obtenha o DCL da barra ABO, com os esforços em função do módulo da carga aplicada F_{A3} . Considere os dados da seguinte tabela. A partir das expressões obtidas, calcule as reações para $F_{A3} = 10$ kN.

Tabela 5.3: Distâncias em metros da atividade 1.

a	B	c	d	e	f
10	$4/6 \cdot a$	$a/12$	$4/5 \cdot a$	$a/3$	$4/5 \cdot a$

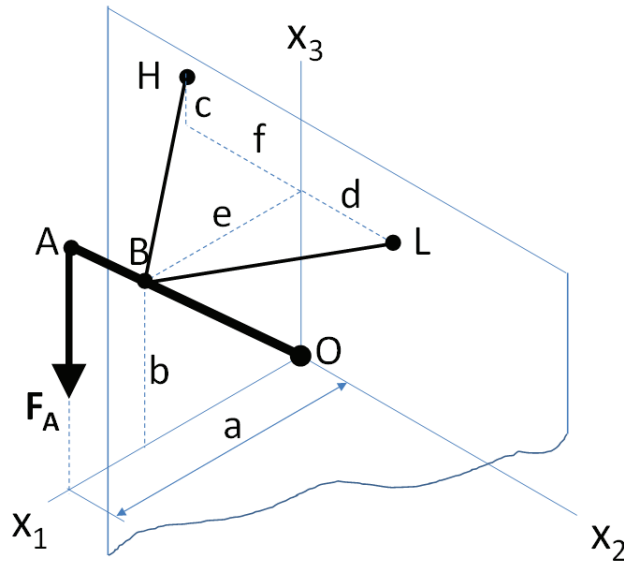


Figura 5.4: Corresponde à atividade 1.

Resposta comentada

O procedimento para resolver esta atividade é similar ao adotado no exemplo 1. Observe, no entanto, que há algumas diferenças na posição dos cabos e, conseqüentemente, nos vetores de posição das forças nestes elementos. Cuidado com o sentido dos vetores. Um vetor de posição na direção do cabo BH \mathbf{r}_{BH} , por exemplo, tem a direção da reta que une os pontos B e H, mas o sentido é de B para H. Como a força nos cabos é sempre trativa, o sentido do vetor indica o sentido da força, daí a importância da sua correta definição. Utilize sempre a fórmula:

$$\mathbf{r}_{BH} = (x_{1H} - x_{1B})\mathbf{e}_1 + (x_{2H} - x_{2B})\mathbf{e}_2 + (x_{3H} - x_{3B})\mathbf{e}_3$$

Os novos vetores de posição entre os pontos BH e BL são:

$$\mathbf{r}_{BH} = -e\mathbf{e}_1 - f\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3 \quad m$$

$$\mathbf{r}_{OL} = -e\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2 \quad m$$

Os resultados finais são os seguintes:

$$F_H = \frac{3}{85} \sqrt{2729} F_{A3} \cong 1,84 F_{A3}$$

$$F_L = \frac{156}{85} F_{A3} \cong 1,83 F_{A3}$$

$$\mathbf{F}_O = \left(\frac{24}{17} \mathbf{e}_1 + \frac{14}{17} \mathbf{e}_3 \right) F_{A3}$$

Para $F_{A3} = 10$ KN as reações serão:

F_{A3} KN	F_{O1} , KN	F_{O3} KN	F_L , KN	F_H , KN
10	14,1	8,2	18,3	18,4

Tabela 2: Valores da carga por apoio, para $F_{A3} = 5$ KN

F_{A3} KN	F_{O1} , KN	F_{O3} KN	F_L , KN	F_H , KN
5	10,7	7,6	8,6	6,7

Conclusão

Para discutir o equilíbrio dos corpos rígidos no espaço, utilizamos exclusivamente a notação vetorial cartesiana para representar os vetores de força. As condições são as mesmas apresentadas na aula anterior: $\mathbf{R} = 0$ e $\mathbf{M}_{OR} = 0$.

Como resultado do balanço vetorial de forças e momentos, em um referencial cartesiano, surge um sistema de seis equações lineares que permite o cálculo de até seis esforços desconhecidos. Se houver um número maior de incógnitas, a estrutura é dita *hiperestática* e novas equações são necessárias para a resolução do sistema. Estes casos, porém, estão fora do escopo do presente curso.

Resumo

A condição matemática para equilíbrio do corpo se mantém:

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F} = 0$$

$$\mathbf{M}_{OR} = \sum \mathbf{M}_O = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0$$

Como estamos trabalhando em três dimensões, ela toma a seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc} \sum F_{x1} = 0 & \sum F_{x2} = 0 & \sum F_{x3} = 0 \\ \sum M_{x1} = 0 & \sum M_{x2} = 0 & \sum M_{x3} = 0 \end{array}$$

Estes somatórios dão origem a um sistema de seis equações lineares.

Referências

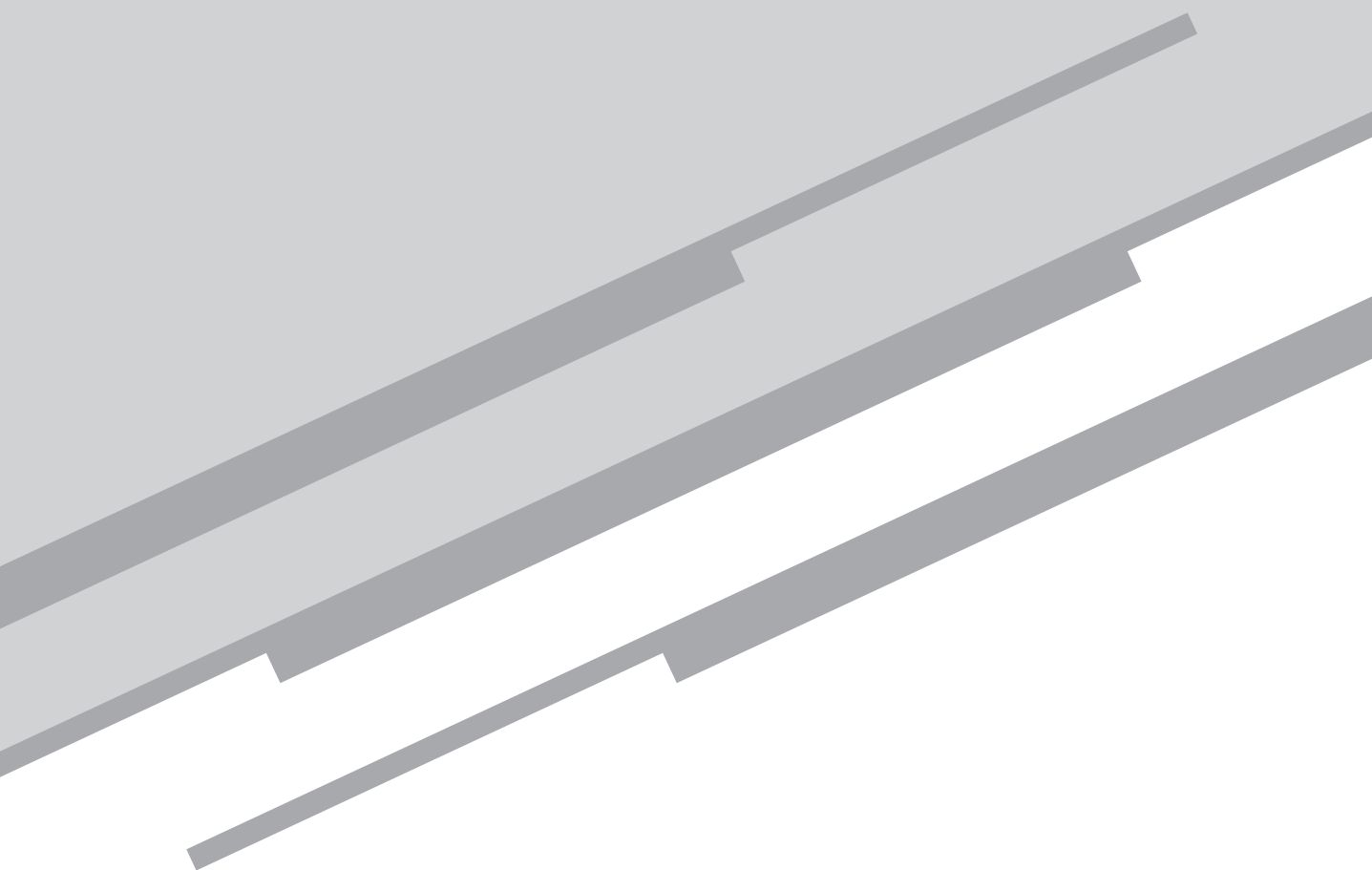
HIBBELER, R. C. *Estática Mecânica para Engenharia*., 12. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R. Jr. *Mecânica Vetorial para Engenheiros*. 5. ed., São Paulo: Makron Books, 1994.

CRANDALL, S. H.; DAHL, N. C.; LARDNER, T.J. *An Introduction to the Mechanics of Solids*, 3. ed. Tokyo: McGraw-Hill Inc., 1978.

Aula 6

Forças distribuídas



Jorge Alberto Rodriguez Duran

Metas

Localizar o centroide de seções planas e calcular a resultante de forças continuamente distribuídas por unidade de comprimento.

Objetivos

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. localizar o centroide de uma seção plana;
2. calcular a resultante e o seu ponto de aplicação para uma força continuamente distribuída.

Introdução

Em aulas anteriores, vimos que qualquer sistema de forças pode ser reduzido a uma única força e a um binário atuando em um ponto. Este sistema força-binário tem, no sólido, um efeito equivalente ao efeito do conjunto de forças do sistema original.

Na presente aula, estas ideias serão utilizadas para definir o centro de gravidade CG de corpos com espessura constante. Para o caso de a densidade de massa destes corpos ser uniforme, a espessura pode ser desconsiderada e o CG coincide com o centro geométrico ou centroide da seção plana.

Analisaremos, também, o conceito de forças continuamente distribuídas por unidade de comprimento, que constitui, conjuntamente com o conceito de força ou momento concentrado, uma idealização amplamente utilizada na modelagem de componentes e estruturas. As forças distribuídas servem para tratar de problemas envolvendo pressão de gases e fluidos, assim como forças de origem magnética ou gravitacional.

Centro de gravidade e centroide

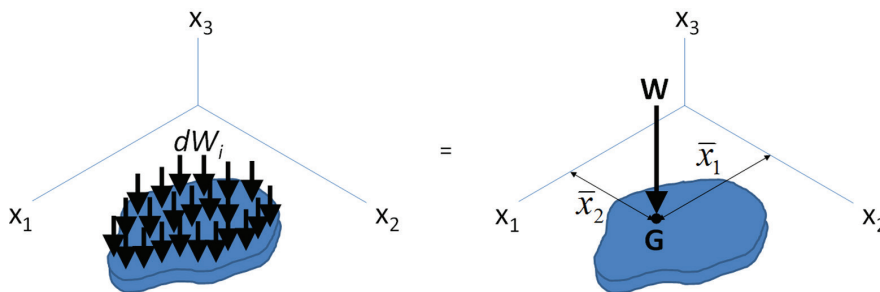


Figura 6.1: O peso próprio de uma placa de espessura constante apoiada no plano x_1x_2 está distribuído por toda a superfície de contato. O sistema equivalente consiste do peso total W aplicado no centro de gravidade G da placa.

Uma placa de espessura t constante, apoiada no plano x_1x_2 (Figura 6.1) estará sob a ação do seu próprio peso W . Em cada elemento infinitesimal de área dA atuará uma parte, também infinitesimal dW , do peso total, tal que $W = \int dW$.

Como as forças dW constituem um conjunto de forças paralelas entre si e perpendiculares ao plano x_1x_2 , a menor distância entre a linha

de ação de cada uma delas até o eixo x_1 será a respectiva coordenada x_2 . O momento elementar de cada dW em relação ao eixo x_1 será, então, $dM_{x1} = x_2 \cdot dW$ e o momento resultante, $M_{x1} = \int x_2 \cdot dW$. Como W e M_{x1} são perpendiculares entre si, podemos reduzir o sistema a uma única força W atuando a uma distância \bar{x}_2 , tal que:

$$\bar{x}_2 \cdot W = M_{x1} = \int x_2 \cdot dW \quad (6.1)$$

Mediante um raciocínio similar, chegamos à expressão para \bar{x}_1 :

$$\bar{x}_1 \cdot W = M_{x2} = \int x_1 \cdot dW \quad (6.2)$$

Assim, chegamos à conclusão de que as infinitas forças de peso dW são equivalentes a uma única força resultante W , aplicada no centro de gravidade G da placa, e cujas coordenadas são $\bar{x}_1 \bar{x}_2$.

Os pesos elementares dW de um corpo dependem de propriedades físicas, como a densidade de massa ρ e de peso γ , do volume dV e da aceleração da gravidade g . Uma expressão relacionando estas grandezas é:

$$dW = \gamma \cdot dV = \rho \cdot g \cdot dV = \rho \cdot g \cdot t \cdot dA \quad (6.3)$$

Substituindo a equação (6.3), nas equações (6.1) e (6.2), temos:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 \cdot W &= \int x_1 \cdot \rho \cdot g \cdot t \cdot dA \\ \bar{x}_2 \cdot W &= \int x_2 \cdot \rho \cdot g \cdot t \cdot dA \end{aligned} \quad (6.4)$$

O peso total da placa, para espessura t e densidade de massa ρ constantes, será $W = \rho \cdot t \cdot g \cdot A$. Neste caso, a posição do centro de gravidade coincide com a do centro geométrico da placa (centroide), este sim, independente das propriedades físicas do corpo que se cancelam, como mostrado nas equações em (6.5):

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 \cdot \rho \cdot g \cdot t \cdot A &= \rho \cdot g \cdot t \cdot \int x_1 \cdot dA & \Rightarrow & \quad \bar{x}_1 = \frac{\int x_1 \cdot dA}{A} \\ \bar{x}_2 \cdot \rho \cdot g \cdot t \cdot A &= \rho \cdot g \cdot t \cdot \int x_2 \cdot dA & \Rightarrow & \quad \bar{x}_2 = \frac{\int x_2 \cdot dA}{A} \end{aligned} \quad (6.5)$$

As integrais do membro direito das equações em (6.5) são conhecidas como *momentos de área de primeira ordem* Q , com relação aos respectivos eixos:

$$\begin{aligned} Q_{x_1} &= \int x_2 \cdot dA \\ Q_{x_2} &= \int x_1 \cdot dA \end{aligned} \quad (6.6)$$

Se o corpo tiver um eixo de simetria, o centroide estará sobre este eixo, pois, nessa situação, os momentos de área de primeira ordem positivos $x \cdot dA$ cancelam-se com os negativos $-x \cdot dA$, e a integral é zero. Para o caso de placas compostas por retângulos e outras formas conhecidas, a seguinte fórmula para a determinação do centroide da placa composta pode ser deduzida, utilizando um procedimento similar ao descrito acima:

$$\begin{aligned} \bar{X}_1 &= \frac{\sum \bar{x}_{1i} \cdot A_i}{\sum A_i} \\ \bar{X}_2 &= \frac{\sum \bar{x}_{2i} \cdot A_i}{\sum A_i} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Exemplo 1: Obtenha a posição do centroide C , de um triângulo de base b e altura h .

Solução: Calculamos, primeiramente, os momentos de área de primeira ordem pela equação (6.6). É necessário transformar os diferenciais de área em diferenciais de comprimento, para utilizar integrais simples. O processo está descrito na **Figura 6.2**.

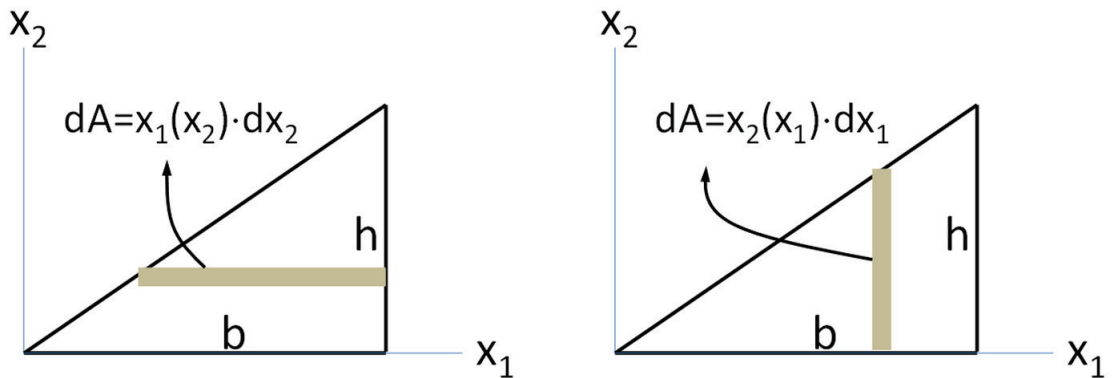


Figura 6.2: O diferencial de área dA pode ser expresso em termos do diferencial dx_1 ou dx_2 , dependendo da variável de integração.

$$Q_{x_1} = \int x_2 \cdot dA = \int_0^h x_2 \cdot [b - x_1(x_2)] \cdot dx_2$$

$$Q_{x_2} = \int x_1 \cdot dA = \int_0^b x_1 \cdot x_2(x_1) \cdot dx_1$$

Substituindo a relação $x_2(x_1) = \frac{h}{b} \cdot x_1$ e integrando teremos:

$$Q_{x_1} = \int_0^h x_2 \cdot \left[b - \frac{b}{h} \cdot x_2 \right] \cdot dx_2 = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

$$Q_{x_2} = \int_0^b x_1 \cdot \frac{h}{b} \cdot x_1 \cdot dx_1 = \frac{h \cdot b^2}{3}$$

A área de um triângulo é $A = bh/2$. Logo, utilizando a equação (6.5), calculamos a posição do centroide. Os resultados se mostram na **Figura 6.3**.

$$\bar{x}_1 = \frac{Q_{x_2}}{A} = \frac{2 \cdot h \cdot b^2}{3 \cdot b \cdot h} = \frac{2}{3}b$$

$$\bar{x}_2 = \frac{Q_{x_1}}{A} = \frac{2 \cdot b \cdot h^2}{6 \cdot b \cdot h} = \frac{1}{3}h$$

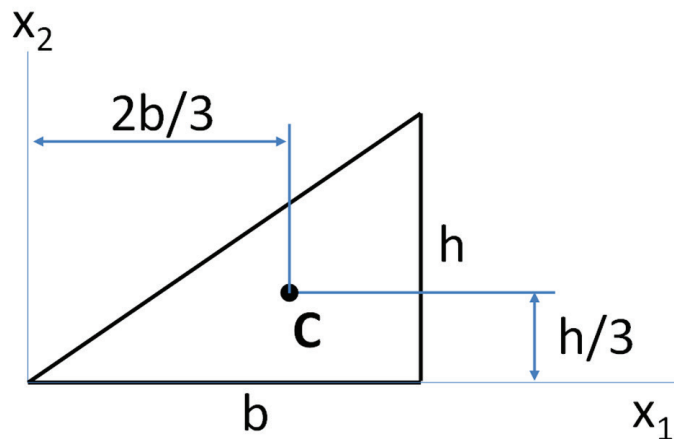


Figura 6.3: Posição do centroide de um triângulo.

Exemplo 2: Obtenha a posição do centroide C , para o perfil mostrado na **Figura 6.4**:

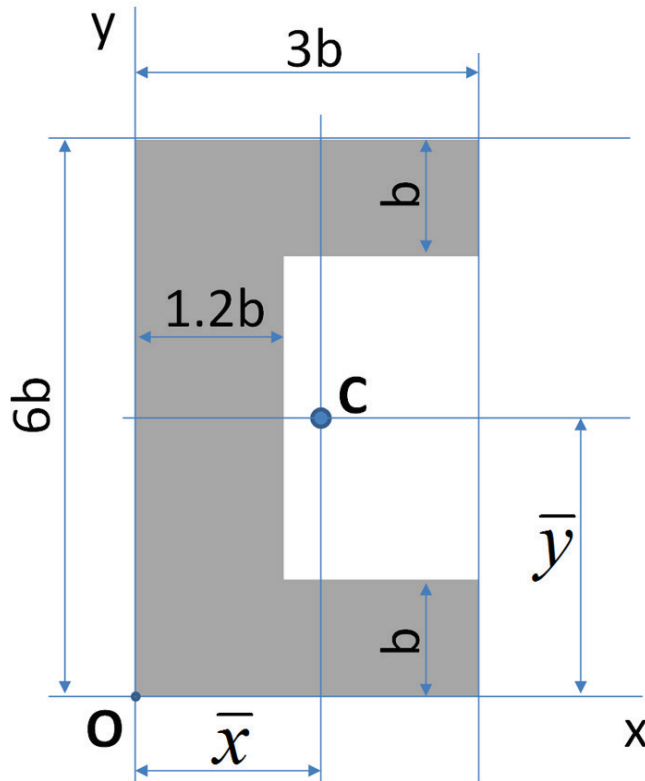


Figura 6.4: Perfil para obtenção do centroide C, do Exemplo 2.

O seguinte exemplo mostra que, dependendo da distribuição dos momentos de área, o centroide poderá estar localizado fora do perfil.

Solução: Observe que a posição do eixo centroidal já está definida em, $\bar{y} = 3b$, devido à simetria do perfil na direção vertical. Para determinar \bar{x} , dividimos o perfil em três retângulos, como mostrado na **Figura 6.5**. Determinamos, primeiramente, as áreas de cada retângulo e a posição do centroide de cada uma delas, com relação ao eixo y:

$$\begin{aligned}
 A_1 = A_3 &= 3b^2 & \bar{x}_1 = \bar{x}_3 &= \frac{3}{2}b \\
 A_2 &= 4b \cdot \frac{6}{5}b = \frac{24}{5}b^2 & \bar{x}_2 &= \frac{6}{5} \frac{b}{2} = \frac{3}{5}b
 \end{aligned}$$

Substituindo estes resultados, nas equações em (6.7), temos:

$$\bar{X} = \frac{\sum \bar{x}_i \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{2\left(\frac{3}{2}b\right)3b^2 + \left(\frac{3}{5}b\right)\frac{24}{5}b^2}{2(3b^2) + \frac{24}{5}b^2} = \frac{99}{65}b \cong 1.52b$$

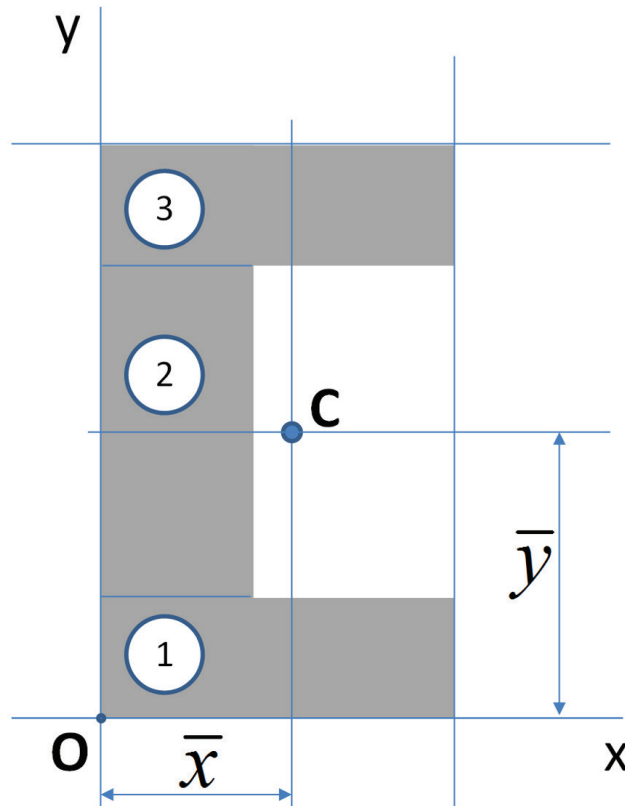


Figura 6.5: Perfil do Exemplo 2, mostrando a divisão em triângulos, para aplicação das equações em (6.7).

Atividade 1

Atende ao objetivo 1

Obtenha a posição do centróide C, para a seção mostrada na **Figura 6.6**, a seguir:

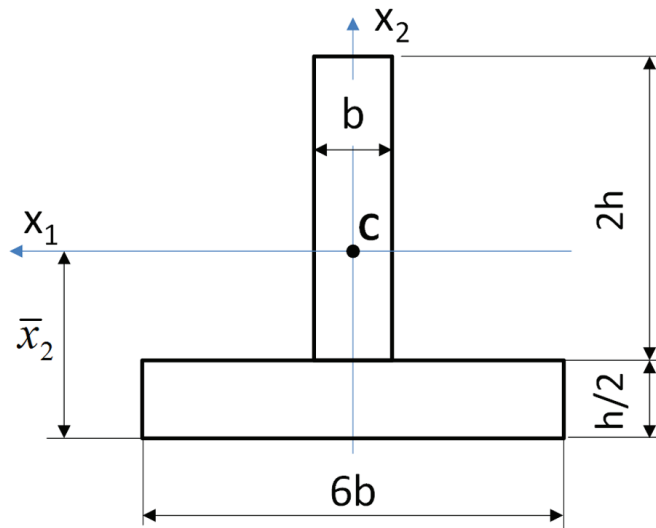


Figura 6.6: Corresponde à primeira atividade.

Resposta comentada

Trata-se uma figura composta por dois retângulos. Utilizam-se as equações em (6.7). Como o eixo x_2 é um eixo de simetria, o centroide já estará sobre ele. A tarefa se resume, então, a encontrar a posição de C, a partir da base da seção. O resultado $\bar{x}_2 = \frac{3}{4} \cdot h$ é independente da largura b da seção.

Forças continuamente distribuídas

Retomando o que dissemos na introdução da presente aula, os modelos que consideram as cargas continuamente distribuídas são utilizados para representar forças oriundas da pressão de gases e fluídos, além de forças volumétricas, como a gravidade. A **Figura 6.7** mostra uma viga sob a ação de um conjunto de forças paralelas. A variação infinitesimal da resultante destes carregamentos dF , por unidade de comprimento $q(x_1) = dF/dx_1$, é conhecida como *intensidade da força distribuída*. As funções $q(x_1)$ mais utilizadas, na prática, são $q(x_1) = \text{constante}$ e $q(x_1) = Ax_1 + B$, onde A e B são constantes.

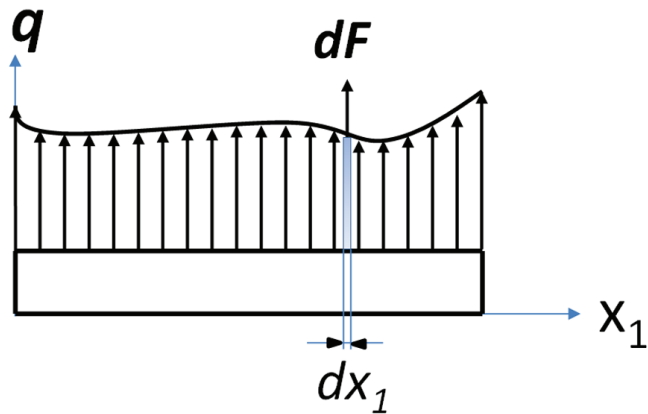


Figura 6.7: Força continuamente distribuída de intensidade $q(x)$.

De aulas anteriores, sabemos que dois sistemas de forças serão equivalentes se produzirem o mesmo sistema força-binário resultante. Para corpos em equilíbrio, sistemas equivalentes de forças implicam nas mesmas equações de equilíbrio. Podemos utilizar estes conceitos para substituir as forças continuamente distribuídas por uma resultante \mathbf{R} , aplicada em algum ponto do diagrama de carga $q(x)$. Considere a situação mostrada na **Figura 6.8**. Vamos escrever, primeiramente, as equações de equilíbrio escalares para o sistema de forças distribuídas de intensidade q (equação (6.8)) e, depois, para a resultante R (equação (6.9)); esta última, considerada atuando a uma distância \bar{x} do apoio esquerdo.

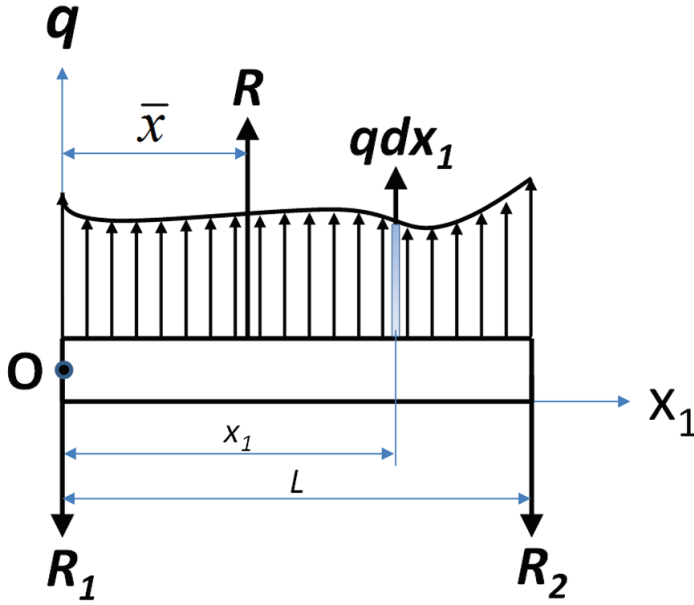


Figura 6.8: Diagrama de corpo livre de uma viga bi-apoiada com um carregamento distribuído.

$$\begin{aligned}\sum F = 0 &\Rightarrow \int_L q \cdot dx_1 = R_1 + R_2 \\ \sum M_o = 0 &\Rightarrow \int_L x_1 \cdot q \cdot dx_1 = L \cdot R_2\end{aligned}\quad (6.8)$$

$$\begin{aligned}\sum F = 0 &\Rightarrow R = R_1 + R_2 \\ \sum M_o = 0 &\Rightarrow \bar{x}_1 \cdot R = L \cdot R_2\end{aligned}\quad (6.9)$$

Para que a força resultante R seja equivalente à força distribuída, de intensidade q , as equações (6.8) e (6.9) têm que produzir os mesmos resultados. Logo:

$$\begin{aligned}R &= \int_L q \cdot dx_1 \\ \bar{x} &= \frac{\int_L x_1 \cdot q \cdot dx_1}{\int_L q \cdot dx_1} = \frac{\int_L x_1 \cdot q \cdot dx_1}{R}\end{aligned}\quad (6.10)$$

A primeira das equações em (6.10) nos diz que a resultante de um carregamento distribuído será a área sob o diagrama de carga $q(x_1)$; enquanto a segunda equação nos diz que a linha de ação desta resultante passa pelo centroide do diagrama (ver equações (6.5) e (6.6)).

Exemplo 3: Considere uma viga de comprimento L (Figura 6.9) engastada em uma das suas extremidades (ponto O). Um certo carregamento com intensidade $sw(x_1=L)=0$ e $w(x_1=0)=w_o$ e variação linear age em cima da viga. Obtenha o DCL da viga, desprezando o peso próprio.

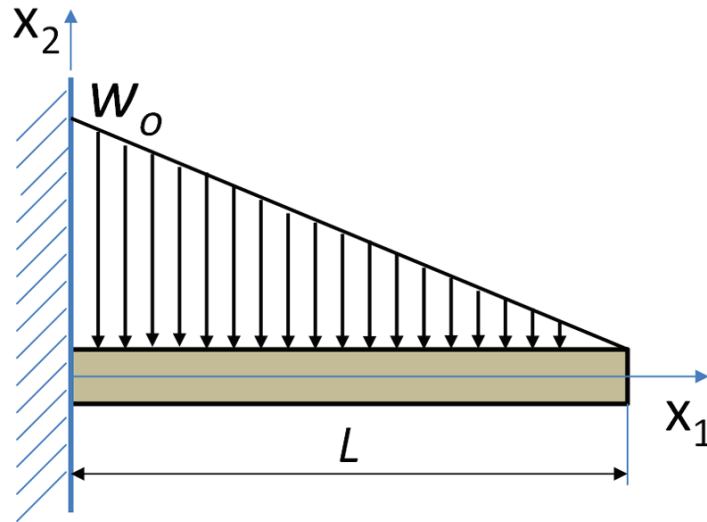


Figura 6.9: Viga em balanço suportando um carregamento distribuído de variação linear.

Solução: Para o referencial mostrado na figura, o diagrama de carga está descrito pela função $q(x_1)=w_o(1-x_1/L)$. Podemos substituir o carregamento pelo seu equivalente estático, aplicando as equações em (6.10):

$$R = \int_L^0 q \cdot dx_1 = \int_0^L w_o \cdot \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) \cdot dx_1 = w_o \cdot \left(x_1 - \frac{x_1^2}{2L}\right) \Big|_0^L = \frac{1}{2} w_o \cdot L$$

$$\bar{x} = \frac{\int_L^0 x_1 \cdot q \cdot dx_1}{R} = \frac{\int_0^L w_o \cdot \left(x_1 - \frac{x_1^2}{L}\right) \cdot dx}{\frac{1}{2} w_o \cdot L} = \frac{w_o \cdot \left(\frac{x_1^2}{2} - \frac{x_1^3}{3L}\right) \Big|_0^L}{\frac{1}{2} w_o \cdot L} = \frac{L}{3}$$

Como esperado, a resultante $R=w_o \cdot L/2$ é a área sob o diagrama de carga (um triângulo) e a sua linha de ação passa pelo centroide do triângulo, situado a $L/3$ da origem (ver Exemplo 1). Com a resultante do carregamento e a distância até sua linha de ação, estamos em condições de isolar a viga do engaste e substituir o vínculo removido pelas reações de apoio

R_O e M_O (**Figura 6.10**). Aplicando as equações de equilíbrio, temos:

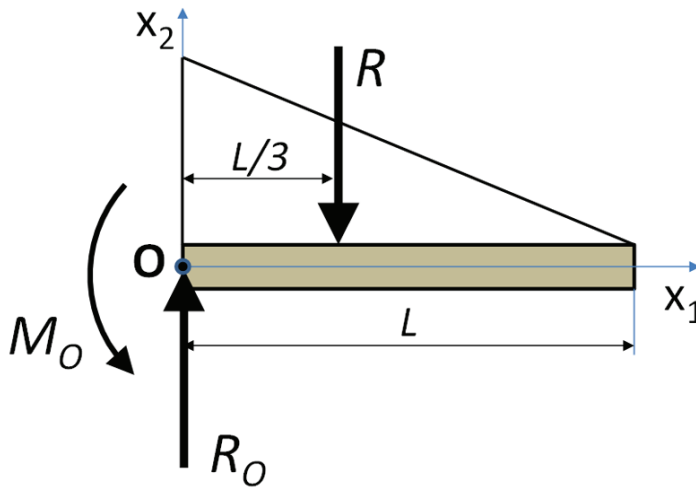


Figura 6.10: Diagrama de corpo livre da viga do Exemplo 3.

$$\begin{aligned}\sum F_O = 0 & \Rightarrow R_O = R \\ \sum M_O = 0 & \Rightarrow M_O = \frac{1}{3}L \cdot R\end{aligned}$$

Comentários do Exemplo 3: É importante que o estudante de engenharia entenda, desde agora, que o procedimento descrito para substituir o carregamento distribuído por uma resultante que lhe é equivalente e a posterior utilização desta resultante nas equações de equilíbrio só são permitidos para o caso de forças *externas*. Estes procedimentos não podem ser utilizados para a determinação de forças e momentos *internos*. Nesses casos, trabalha-se com uma resultante variável $R(x_i)$, antes de aplicar o equilíbrio.

Atividade 2

Atende ao objetivo 2

A figura a seguir mostra uma viga bi-apoiada solicitada pelo seu peso próprio, que é modelado como uma carga distribuída, de valor constante. Obtenha o DCL da viga.

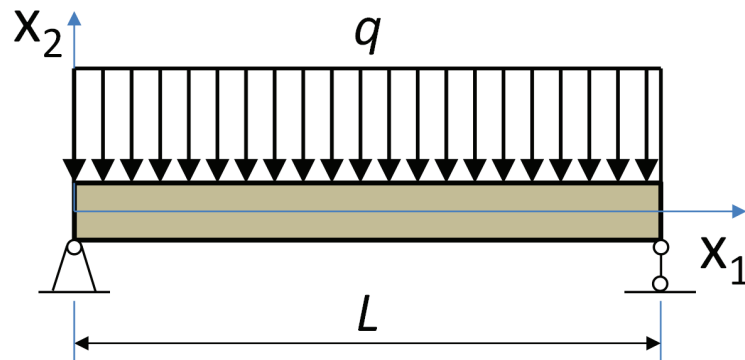


Figura 6.11: Corresponde à segunda atividade.

Resposta comentada:

A carga distribuída pode ser substituída por uma resultante igual à área do retângulo descrito pelo diagrama de carga $R=q \cdot L$, atuando em $x_1=L/2$. Os apoios podem ser substituídos por reações verticais de valor igual a $R/2=q \cdot L/2$.

Conclusão

Para determinar as coordenadas do centro de gravidade G de uma placa de espessura constante, consideramos que o sistema composto pelo peso total da placa W , aplicado no ponto G , é equivalente ao composto pelos infinitos pesos dW distribuídos na superfície. Para o caso de placas com densidade de massa constante, o ponto G coincide com o centróide C , e as coordenadas deste centro geométrico dependem então da relação entre os momentos de área de primeira ordem e a área total da seção. Desta forma, o centróide é uma propriedade de área independente do material.

Os carregamentos continuamente distribuídos permitem modelar problemas envolvendo pressão de gases e fluidos, assim como forças de origem magnética ou gravitacional. Em problemas bidimensionais, este carregamento é estaticamente equivalente a uma resultante cujo módulo é igual à área sob o diagrama de carga $q(x_1)$, e cuja linha de ação passa pelo centróide da figura geométrica descrita por este diagrama.

Resumo

Na presente aula, aprendemos que, para calcular a posição do centroide de figuras planas, devemos utilizar a seguinte fórmula:

$$\bar{x}_1 = \frac{\int x_1 \cdot dA}{A}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\int x_2 \cdot dA}{A}$$

Se a área em análise estiver formada por figuras geométricas conhecidas, as equações anteriores se reduzem a:

$$\bar{X}_1 = \frac{\sum \bar{x}_{1i} \cdot A_i}{\sum A_i}$$

$$\bar{X}_2 = \frac{\sum \bar{x}_{2i} \cdot A_i}{\sum A_i}$$

Para problemas planos de carregamentos distribuídos $q(x_1)$, a resultante R e a posição da sua linha de ação \bar{x} se calculam utilizando as seguintes equações:

$$R = \int_L q \cdot dx_1$$

$$\bar{x} = \frac{\int_L x_1 \cdot q \cdot dx_1}{R} = \frac{\int_L x_1 \cdot q \cdot dx_1}{\int_L q \cdot dx_1}$$

Referências

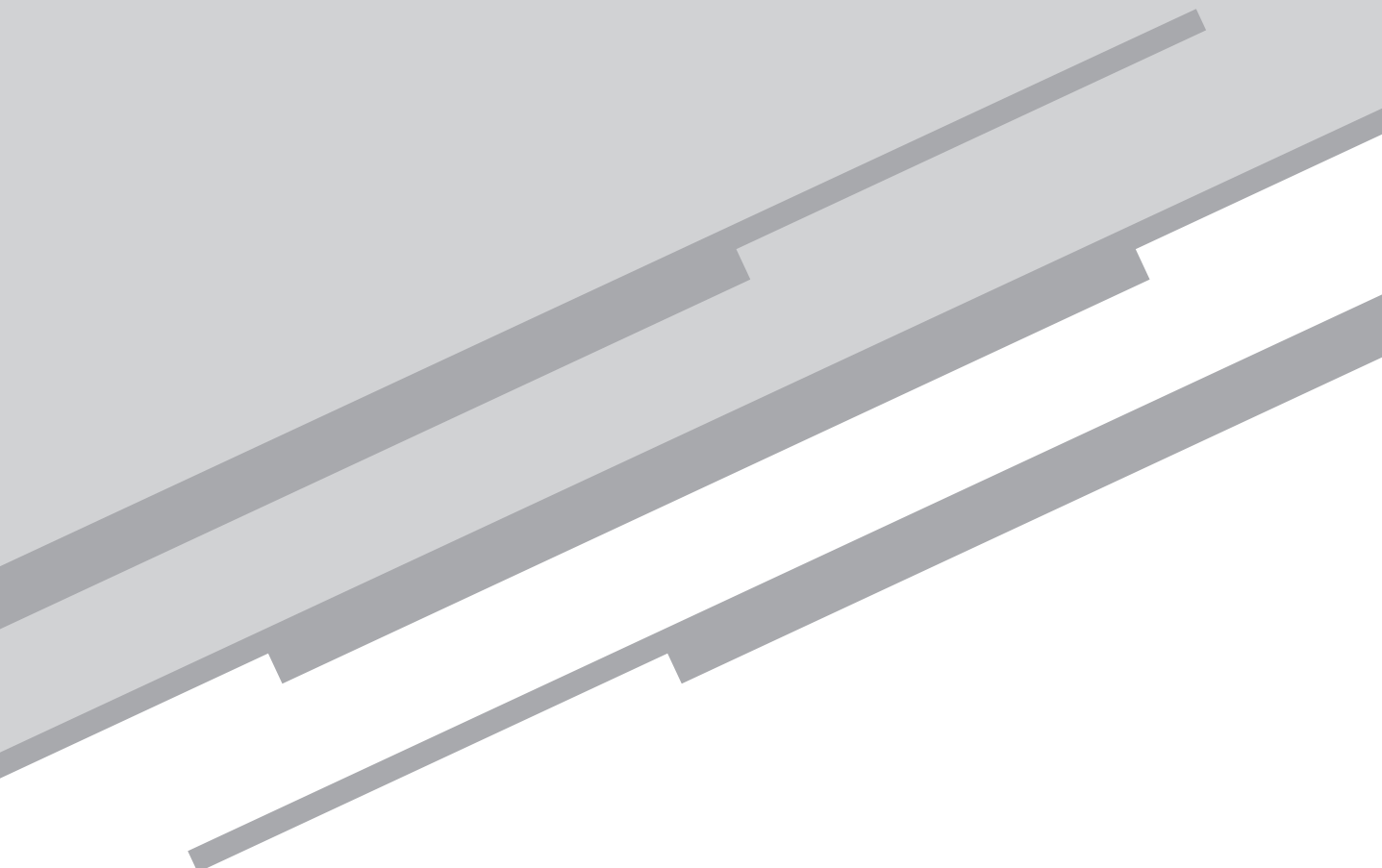
HIBBELER, R. C. *Estática Mecânica para Engenharia.*, 12. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R. Jr. *Mecânica Vetorial para Engenheiros.* 5. ed., São Paulo: Makron Books, 1994.

CRANDALL, S. H.; DAHL, N. C.; LARDNER, T. J. *An Introduction to the Mechanics of Solids*, 3. ed. Tokyo: McGraw-Hill Inc., 1978.

Aula 7

Estruturas



Jorge Alberto Rodriguez Duran

Metas

Apresentar o método dos nós e o das seções, utilizados para a determinação das forças de tração ou compressão, nas barras de treliças planas simples.

Objetivos

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. aplicar as equações de equilíbrio para calcular as reações em treliças planas simples;
2. aplicar o método dos nós (ou o método das seções) para calcular as forças de tração e compressão nas barras de treliças planas simples.

Introdução

O equilíbrio de forças e momentos só pode ser aplicado a sistemas convenientemente isolados de estruturas ou máquinas. Estes sistemas podem estar constituídos pela estrutura ou máquina como um todo, ou por partes das mesmas. Em ambos os casos, deve-se percorrer a periferia do sistema e identificar as forças que fazem contato direto (forças concentradas, distribuídas) ou indireto (de gravidade, eletromagnéticas etc.). Para modelar estas forças, utilizamos certas idealizações, como as mostradas na **Figura 4.1** e na **Figura 4.2**. O esboço do sistema isolado, com todas as forças presentes, é chamado de *diagrama de corpo livre*, ou *DCL*, conforme vimos na Aula 4.

Nesta aula, vamos aplicar as condições de equilíbrio a um tipo especial de estrutura chamado de *treliça*. A treliça é um conjunto de barras retas (**Figura 7.1, a**) cujo comprimento é bem maior do que as suas dimensões transversais. As junções ou nós (**Figura 7.1, b**) das barras estão constituídas por elementos de fixação removíveis, como pinos, parafusos, rebites, ou também permanentes, como é o caso das soldas.



Figura 7.1: As treliças espaciais permitem cobrir grandes vãos, com um número limitado de colunas (a). Por esse motivo, são muito utilizadas em aeroportos e centros de convenções. As articulações entre as barras podem ser feitas mediante parafusos (b).

As forças de reação necessárias para garantir o equilíbrio das barras de uma treliça plana consistem de uma força normal e uma tangencial, atuando em algum ponto da circunferência do furo por onde passam os elementos de fixação (**Figura 7.2**). As forças tangenciais são forças de atrito entre estes elementos e as barras. Problemas de atrito serão tratados na Aula 10, mas desde já, podemos adiantar que as forças de atrito são empiricamente estimadas como o produto da força normal N , entre as superfícies, e um coeficiente de atrito μ , cujo valor oscila entre 0.2 e 0.4. Os pinos ou elementos de fixação estarão, portanto, solicitados

por duas forças ortogonais entre si: a força normal N e a força tangencial ou de atrito μN . O sistema equivalente a estas duas forças é composto por uma força normal N e um binário $\mu N r$, em que r é o raio do pino (Figura 7.2). Ambos os vetores estarão aplicados no centróide do pino. Este sistema força-binário será equivalente a uma única força N , aplicada a uma distância $d = \mu r$ do centro do pino. O raio dos pinos já é um valor pequeno em comparação com as dimensões da treliça. A distância d é um valor ainda menor (entre 20 e 40% de r). Por este motivo e para todos os efeitos práticos, o sistema equivalente de forças consiste de uma única força N , atuando no centro geométrico do pino (Figura 7.2), o que transforma as barras da treliça em membros de duas forças. Como sabemos, um membro de duas forças só estará em equilíbrio se estas forças forem colineares. Assim, podemos concluir que as barras de qualquer treliça estarão sempre solicitadas em tração ou compressão.

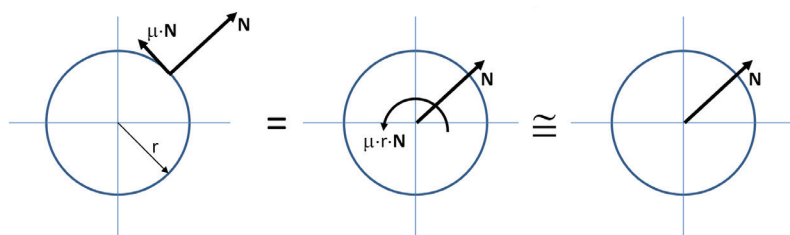


Figura 7.2: Apesar das articulações das treliças transmitirem momentos, é possível considerar que o sistema de forças é estaticamente equivalente a uma única força, atuando no centro geométrico do elemento de fixação.

Uma treliça rígida elementar (Figura 7.3, a) está constituída por três barras (b) e três nós (n). Observe que todas as forças estão aplicadas nos nós e que a estrutura não colapsará sob a ação destas forças. Daí o nome de *treliça rígida*. Uma fórmula relacionando o número de barras (b) e de nós (n), para a treliça rígida da Figura 7.3 (a) será:

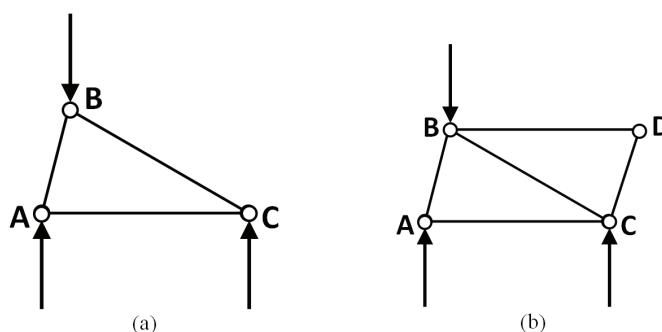


Figura 7.3: Exemplos de treliça rígida (a) e treliça simples (b).

$$b = 2n - 3 \quad (7.1)$$

A adição de duas novas barras, em dois nós da treliça rígida, e de um novo nó, para unir as duas novas barras (**Figura 7.3, b**), gera uma treliça simples que não altera a relação entre o número de barras e o de nós (equação (7.1)). As treliças planas simples serão as únicas abordadas na presente aula e, por esse motivo, chamamo-las, a partir de agora, simplesmente de *treliças*.

Determinação das reações em treliças

A aplicação das equações de equilíbrio a treliças planas simples segue os mesmos padrões estudados anteriormente. A treliça inteira é considerada um corpo rígido e isolada dos apoios. As características dos esforços que estes apoios exercem sobre a treliça e que irão fazer parte do seu diagrama de corpo livre dependem das idealizações estudadas em aulas anteriores. A melhor maneira de desenvolver este tópico é mediante um exemplo.

Exemplo 1: Obtenha uma expressão para as reações nos apoios **A** e **C**, em função das dimensões e do carregamento aplicado **P**, para a treliça mostrada na **Figura 7.4 (a)**.

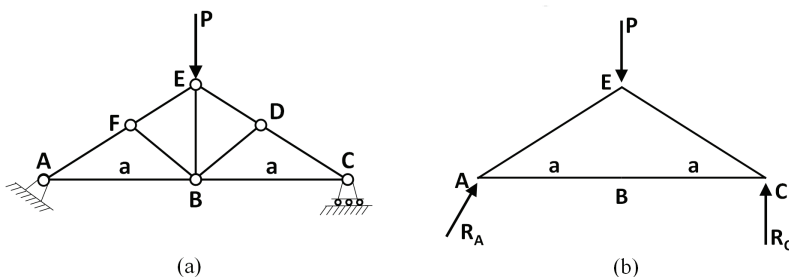


Figura 7.4: Treliça e DCL da treliça, do Exemplo 1.

Solução: Utilizamos o tradicional sistema de referência cartesiano x_1x_2 (não mostrado na figura). Isolamos a treliça inteira e a consideramos como um corpo completamente rígido. Esta idealização implica em desconsiderar todas as forças de tração e compressão nas barras, assim como as correspondentes reações, nos pinos que as conectam. O apoio em **A** reage ao efeito da treliça com uma única força **R_A**, de direção desconhecida; enquanto, no apoio em **C**, surge uma reação vertical

R_C , como mostrado no DCL da **Figura 7.4 (b)**. O somatório de momentos em **A** tem de ser zero, para garantir o equilíbrio do sistema. Logo, o módulo de R_C será:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 2 \cdot a \cdot R_C = a \cdot P \Rightarrow R_C = \frac{P}{2} \quad (7.2)$$

Aplicando as outras duas equações vetoriais de equilíbrio, temos:

$$\begin{aligned} \sum F_{x1} = 0 &\Rightarrow R_{Ax1} = 0 \\ \sum F_{x2} = 0 &\Rightarrow R_{Ax2} + R_C = P \Rightarrow R_{Ax2} = R_C = \frac{P}{2} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Tanto o carregamento quanto a treliça são simétricos. Por este motivo, as reações independem das dimensões da treliça. Por simplicidade, desenvolvemos os somatórios considerando apenas as componentes escalares das forças. Em problemas planos, esta abordagem é sempre a mais indicada, devido a sua simplicidade.

Determinação das forças internas em treliças

Sabemos que todas as barras de uma treliça constituem membros de duas forças e, conseqüentemente, só podem estar em tração e compressão. Pela terceira lei de Newton, as solicitações nas barras são iguais e de sentido contrário às solicitações nos pinos. Estas forças são internas à treliça como um todo, mas externas às barras e pinos. Para determiná-las, é preciso isolar subsistemas da treliça original e aplicar as equações de equilíbrio.

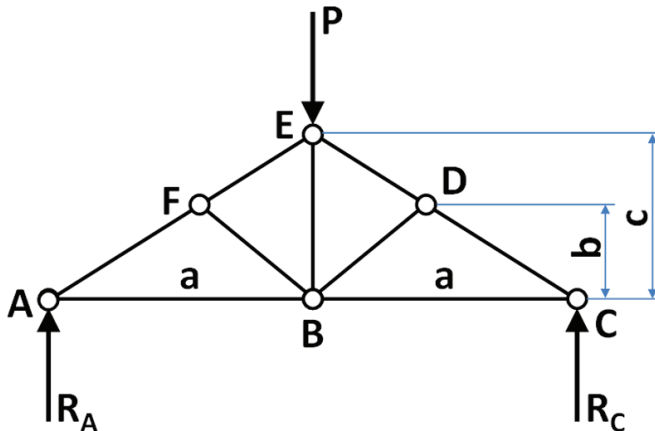
A abordagem que trabalha com todas as barras e pinos da treliça como subsistemas, ou seja, aquela em que se faz o desmembramento total da treliça recebe o nome de *método dos nós*. Neste caso, será possível calcular todas as forças em todas as barras e pinos. Outro método consiste em isolar algumas seções, para calcular os esforços em apenas algumas barras de interesse. Este segundo método é conhecido como o *método das seções*. Demonstraremos ambos os métodos, mediante exemplos.

Exemplo 2: Calcule pelo método dos nós, todas as forças atuantes nas barras e pinos da treliça do Exemplo 1, reproduzida com todas as dimensões necessárias na **Figura 7.5**. Considere os dados da **Tabela 7.1**.

Tabela 7.1: Dados numéricos do Exemplo 2.

P KN	a mm	b	c
15	100	$a/4$	$4/5 \cdot a$

Solução: Utilizamos o método dos nós. Para isto, é necessário construir o DCL de todos os nós e barras da treliça. Todas as forças serão, inicialmente, consideradas trativas nas barras, logo, saindo dos elementos. Um sinal negativo na resposta numérica significa que o sentido assumido não é o correto e, portanto, a força é compressiva. A análise é simplificada pela simetria da treliça e do carregamento.

**Figura 7.5:** Treliça do Exemplo 1, com as dimensões necessárias para calcular o comprimento de todas as barras.

O primeiro passo consiste em realizar uma análise geométrica, para definir o comprimento de todas as barras. Como as distâncias b e c são função de a (Tabela 1), podemos parametrizar a treliça, ou seja, calcular todas suas dimensões em função do parâmetro a . Esta abordagem tem algumas vantagens: 1) A solução pode ser estendida a treliças de outro tamanho, desde que as proporções permaneçam iguais; 2) O desenvolvimento algébrico até o final do problema facilita a identificação e correção de eventuais erros, cometidos durante as análises; e 3) É possível separar a influência de cada variável ou parâmetro, nos resultados finais. Algumas aplicações sucessivas do teorema de Pitágoras, para os triângulos retângulos incluídos na treliça, permitem obter os seguintes

resultados, para as barras AF, FE e FB. Acompanhe o procedimento com base na **Figura 7.6** e os resultados na **Figura 7.7**.

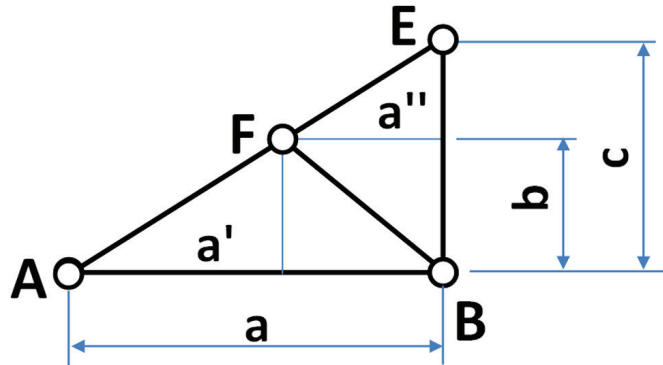


Figura 7.6: Geometria da metade esquerda da treliça.

$$\frac{b}{a'} = \frac{c-b}{a''} = \frac{c}{a} = \frac{\frac{4}{5}a}{a} = \frac{4}{5} \Rightarrow a' = \frac{5}{4}b = \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5}a = \frac{5}{16}a$$

$$a'' = \frac{5}{4}(c-b) = \frac{5}{4}\left(\frac{4}{5}a - \frac{a}{4}\right) = \frac{11}{16}a$$

$$AF^2 = b^2 + (a')^2 = \left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{16}a\right)^2 \Rightarrow AF = \frac{\sqrt{41}}{16}a$$

$$FE^2 = (c-b)^2 + (a'')^2 = \left(\frac{11}{20}a\right)^2 + \left(\frac{11}{16}a\right)^2 \Rightarrow FE = \frac{11\sqrt{41}}{80}a \quad (7.4)$$

$$FB^2 = b^2 + (a'')^2 = \left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{11}{16}a\right)^2 \Rightarrow FB = \frac{\sqrt{137}}{16}a$$

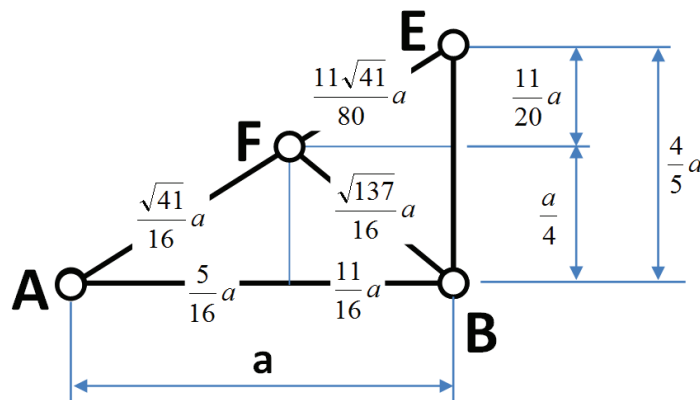


Figura 7.7: Dimensões das barras da treliça, em função do parâmetro a .

O DCL de todos os pinos e barras da metade esquerda da treliça é mostrado na **Figura 7.8**. Começamos aplicando as equações de equilíbrio (na sua forma escalar) ao nó **A**. Observe que, para projetar a força F_{AF} nas direções x_1 e x_2 , utilizamos o ângulo formado entre as barras **AB** e **AF**. O seno deste ângulo será igual ao quociente do cateto oposto, pela hipotenusa $\frac{a/4}{\sqrt{41/16a}} = \frac{4}{\sqrt{41}}$, enquanto que o cosseno será $\frac{5/16a}{\sqrt{41/16a}} = \frac{5}{\sqrt{41}}$.

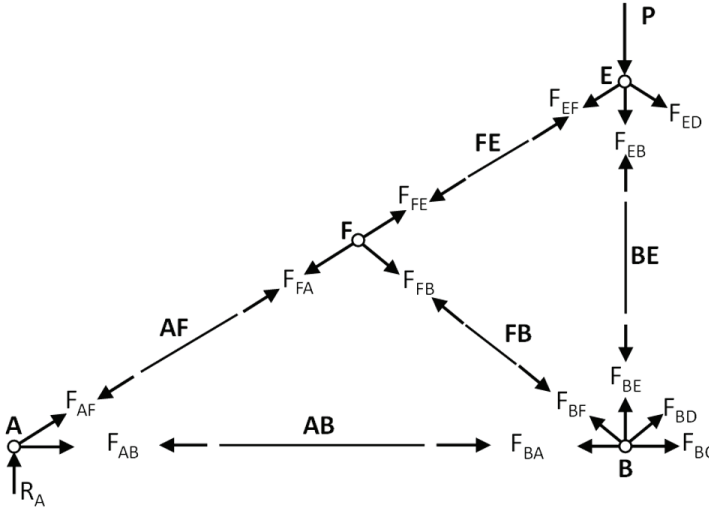


Figura 7.8: Diagrama de corpo livre de todos os pinos e barras da metade esquerda da treliça, do Exemplo 2.

$$\sum F_{x2} = 0 \Big|_{n \ A} \Rightarrow R_A + F_{AF} \cdot \frac{4}{\sqrt{41}} = 0$$

$$F_{AF} = -\frac{R_A \cdot \sqrt{41}}{4} = -\frac{P \cdot \sqrt{41}}{2 \cdot 4} = -15 \cdot \frac{\sqrt{41}}{8} = -12 \text{ KN} \quad (7.5)$$

O resultado negativo indica que a barra **AB** está sendo comprimida.

$$\sum F_{x1} = 0 \Big|_{n \text{ó} \ A} \Rightarrow F_{AB} + F_{AF} \cdot \frac{5}{\sqrt{41}} = 0$$

$$F_{AB} = -F_{AF} \cdot \frac{5}{\sqrt{41}} = -(-12) \cdot \frac{5}{\sqrt{41}} = 9.4 \text{ KN} \quad (7.6)$$

A aplicação das equações de equilíbrio ao nó **F** retorna o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
\sum F_{x2} = 0 \Big|_{\text{nó F}} &\Rightarrow -F_{FA} \cdot \frac{\frac{a}{4}}{\frac{\sqrt{41}}{16}a} - F_{FB} \cdot \frac{\frac{a}{4}}{\frac{\sqrt{137}}{16}a} + F_{FE} \cdot \frac{\frac{11}{20}a}{\frac{11\sqrt{41}}{80}a} = 0 \\
&\quad -F_{FA} \cdot \frac{4}{\sqrt{41}} - F_{FB} \cdot \frac{4}{\sqrt{137}} + F_{FE} \cdot \frac{44}{11\sqrt{41}} = 0 \\
\sum F_{x1} = 0 \Big|_{\text{nó F}} &\Rightarrow -F_{FA} \cdot \frac{\frac{5}{16}a}{\frac{\sqrt{41}}{16}a} + F_{FB} \cdot \frac{\frac{11}{16}a}{\frac{\sqrt{137}}{16}a} + F_{FE} \cdot \frac{\frac{11}{16}a}{\frac{11\sqrt{41}}{80}a} = 0 \\
&\quad -F_{FA} \cdot \frac{5}{\sqrt{41}} + F_{FB} \cdot \frac{11}{\sqrt{137}} + F_{FE} \cdot \frac{5}{\sqrt{41}} = 0
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Que, após a substituição dos valores conhecidos e na sua forma matricial é:

$$\begin{bmatrix} -0,34 & 0,62 \\ 0,94 & 0,78 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{FB} \\ F_{FE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7,5 \\ -9,37 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} F_{FB} \\ F_{FE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -12 \end{bmatrix} \tag{7.8}$$

Ou seja, a barra FB está descarregada, enquanto a força compressiva, na barra FE, permanece igual à da barra AF ($F_{FE} = F_{AF} = 12 \text{ KN}$). Observe também que, apesar de continuarmos tratando a força $F_{AF} = F_{FA}$ como positiva, no momento de substituir seu valor, colocamos o sinal negativo na frente, isto é, $F_{AF} = -12 \text{ KN}$. Continuando com o nó E, temos:

$$\begin{aligned}
\sum F_{x1} = 0 \Big|_{\text{nó E}} &\Rightarrow -F_{EF} \cdot \frac{\frac{11}{16}a}{\frac{11\sqrt{41}}{80}a} + F_{ED} \cdot \frac{\frac{11}{16}a}{\frac{11\sqrt{41}}{80}a} = 0 \Rightarrow F_{EF} = F_{ED} \\
\sum F_{x2} = 0 \Big|_{\text{nó E}} &\Rightarrow -P - F_{EB} - F_{EF} \cdot \frac{\frac{20}{11\sqrt{41}}a}{\frac{80}{11\sqrt{41}}a} - F_{ED} \cdot \frac{\frac{20}{11\sqrt{41}}a}{\frac{80}{11\sqrt{41}}a} = 0 \\
&\Rightarrow -P - F_{EB} - F_{EF} \cdot \left(\frac{2 \cdot 4}{\sqrt{41}} \right) = 0 \Rightarrow F_{EB} = 0
\end{aligned} \tag{7.9}$$

Devido à simetria da treliça e do carregamento, a mesma análise desenvolvida até aqui poderia ter começado no nó C, obtendo-se os mesmos resultados. Por este motivo, ao chegar ao nó B, as forças F_{BD} e F_{BC} , da **Figura 7.8** já são conhecidas e iguais a F_{BF} e F_{BA} , respectivamente.

No caso particular desta treliça, apenas as barras externas suportam esforços. A **Figura 7.9** mostra o resultado final, com todas as forças de reação nas barras e nos apoios da treliça, do Exemplo 2. Observe que resolvemos um problema com 11 incógnitas a partir de uma única força P dada.

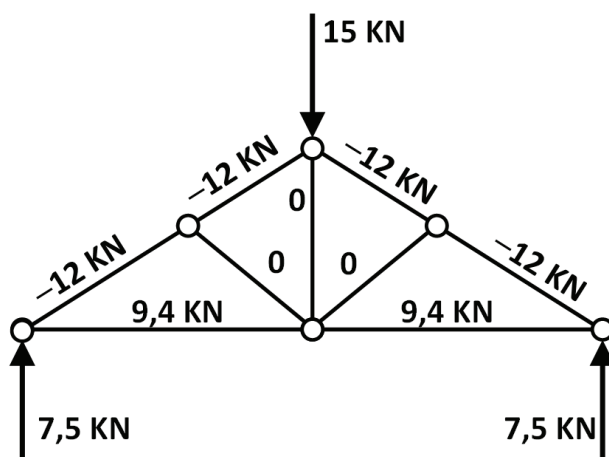


Figura 7.9: Forças de reação à força externa de 15 kN nos elementos e apoios da treliça.

Comentários: Ao final deste exemplo, observamos que, em cada nó, é possível aplicar apenas os somatórios de forças nas direções x_1 e x_2 . Assim, haverá duas equações por cada nó ou $2n$ equações para toda a treliça, que podem ser resolvidas para $2n$ incógnitas. Para o presente exemplo, $2n=9+3=12$ (ver equação (7.1)), mas o número de incógnitas era de apenas 11. Ou seja, o método dos nós, sozinho, permitiria, não apenas encontrar as forças nas barras e pinos, como também as reações nos apoios. Neste curso, porém, daremos preferência à sequência demonstrada mediante os Exemplos 1 e 2. Isto é, calcularemos primeiramente as reações nos apoios, mediante o equilíbrio da treliça e, depois, as forças nos nós e barras que a compõem, mediante o método dos nós.



Existem alguns *softwares* que podem ser usados para fazer o cálculo dos carregamentos sobre treliças em 2D. Um exemplo é o SkyCiv, que pode ser acessado em <https://skyciv.com/free-truss-calculator/>.

Exemplo 3: Calcule o módulo da força na barra FB (F_{FB}), da treliça mostrada na **Figura 7.10**. Utilize o método das seções. Os dados geométricos e de carregamento são mostrados na **Tabela 7.2**.

Tabela 7.2: Dados numéricos do Exemplo 3.

P KN	W KN	a mm	b	c
15	12	100	$a/4$	$4/5 \cdot a$

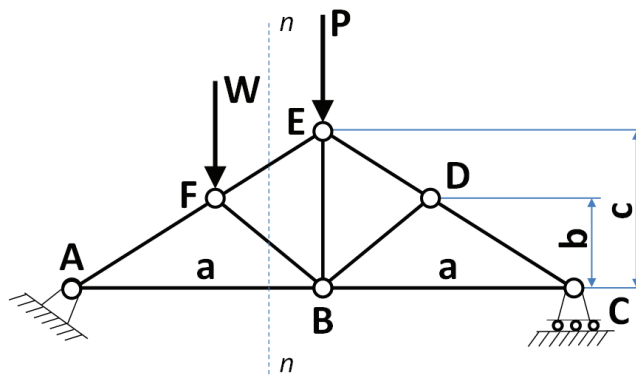


Figura 7.10: Treliça do Exemplo 3. A seção nn permite separar a treliça em dois corpos rígidos, cada um deles com os seus respectivos diagramas de corpo livre.

Solução: Da mesma forma que a treliça inteira (Exemplo 1) e cada um dos nós e barras que a compõem (Exemplo 2) foram considerados como um corpo rígido em equilíbrio, partes ou seções da treliça também estarão em equilíbrio. É nesta ideia simples que se baseia o poderoso método das seções, largamente utilizado na análise estrutural. Começamos calculando as reações nos apoios. As relações geométricas obtidas no Exemplo 2 permanecem válidas, especialmente as análises relacionadas com a equação (7.4), a **Figura 7.6** e a **Figura 7.7**.

Começamos aplicando o equilíbrio à treliça inteira, considerada como um corpo rígido (**Figura 7.11**):

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot a \cdot R_C &= a \cdot P + \frac{5}{16} a \cdot W \\ R_C &= \frac{1}{2} \left(P + \frac{5}{16} \cdot W \right) \end{aligned} \quad (7.10)$$

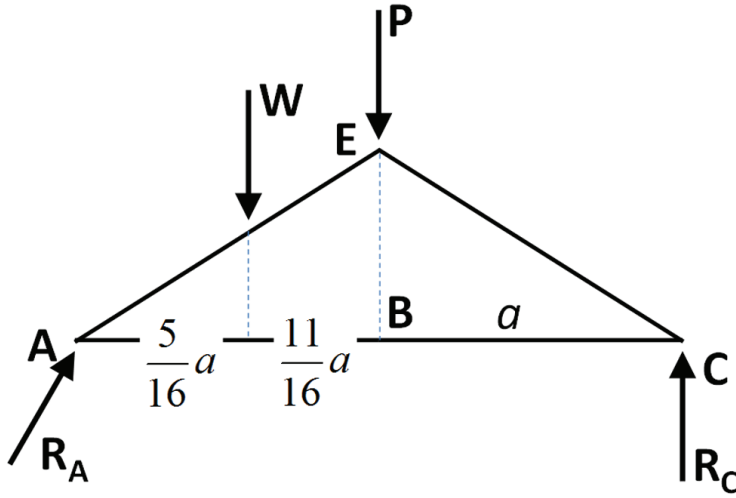


Figura 7.11: DCL da treliça inteira, do Exemplo 3.

$$\begin{aligned}
 \sum F_{x1} = 0 &\Rightarrow R_{Ax1} = 0 \\
 \sum F_{x2} = 0 &\Rightarrow R_{Ax2} + R_C = P + W \\
 R_{Ax2} = P + W - \frac{1}{2} \left(P + \frac{5}{16} \cdot W \right) &= \frac{P}{2} + \frac{11}{16} \cdot W
 \end{aligned} \tag{7.11}$$

Isolando a parte à esquerda do corte, ou seção nn , teremos um corpo rígido solicitado pelas forças externas de módulos W , R_A , F_{BA} , F_{FB} e F_{FE} (**Figura 7.12**). Como W e $R_A = R_{Ax2}$ são conhecidas, as três equações de equilíbrio no plano serão suficientes para encontrar as forças nas barras, cortadas pela seção nn . Observe que a linha de ação das forças F_{FE} e F_{AB} passa pelo nó A, o que significa que elas não têm braço de alavanca, em relação a este ponto. Como consequência, seus momentos, em relação a A, serão zero. Isto permite a determinação da força F_{FB} , mediante uma única equação.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \mathbf{r}_{AF} \times \mathbf{F}_{FB} + \mathbf{r}_{AF} \times \mathbf{W} = 0 \tag{7.12}$$

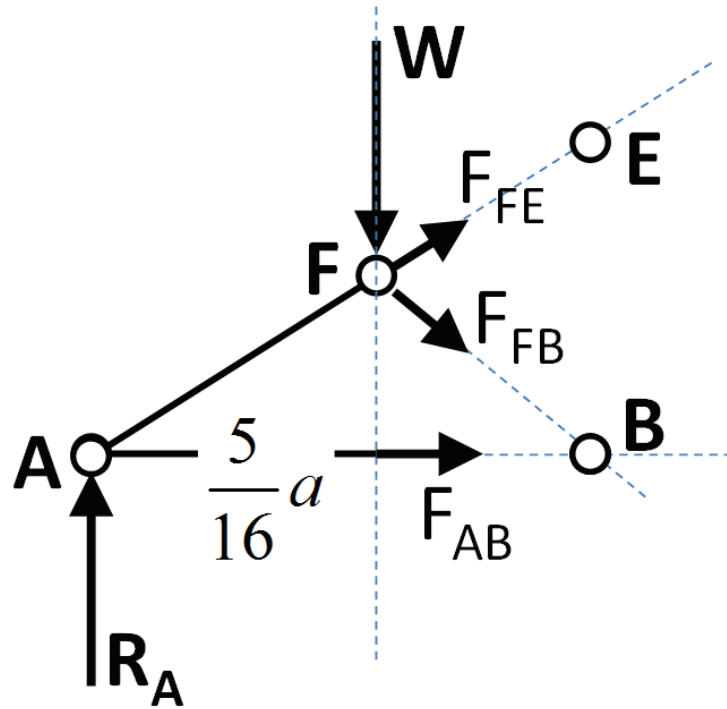


Figura 7.12: Diagrama de corpo livre da treliça à esquerda da seção nn.

Para efetuar os produtos vetoriais, devemos estabelecer um referencial e expressar os vetores de força e de posição como vetores cartesianos. Em problemas planos, no entanto, estamos dando preferência ao trabalho com escalares. Escrevendo, então, a equação (7.12) em função das componentes, temos:

$$r_{AF} \cdot F_{FB} \cdot \sin(\alpha) + r_{AF} \cdot W \cdot \sin(\beta) = 0 \quad (7.13)$$

Onde α e β são os ângulos entre o vetor de posição \mathbf{r}_{AB} e as forças F_{FB} e W , respectivamente. Note que o produto $r_{AF} \cdot \sin(\beta) = \frac{5}{16}a$. Já para o ângulo α , observamos que a lei dos senos, quando aplicada ao triângulo formado pelos nós FEB, retorna:

$$\frac{\frac{4}{5}a}{\sin(\alpha)} = \frac{\frac{\sqrt{137}}{16}a}{\sin(\gamma)} \quad (7.14)$$

Onde γ é o ângulo entre as barras FE e EB. Da **Figura 7.6**, temos:

$$\operatorname{sen}(\gamma) = \frac{\frac{11}{16}a}{\frac{11\sqrt{41}}{80}a} = \frac{5}{\sqrt{41}} \quad (7.15)$$

Portanto:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\frac{5}{\sqrt{41}} \cdot \frac{4}{5}a}{\frac{\sqrt{137}}{16}a} = \frac{64}{\sqrt{41}\sqrt{137}} = \frac{64}{5617}\sqrt{41}\sqrt{137} \quad (7.16)$$

Substituindo estes resultados, na equação (7.13), temos:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{41}}{16}a \cdot F_{FB} \cdot \frac{64}{5617}\sqrt{41}\sqrt{137} + \frac{5}{16}a \cdot W &= 0 \\ F_{FB} &= -\frac{5}{64}W\sqrt{137} = -\frac{5}{64} \cdot 12 \cdot \sqrt{137} \cong -11 \text{ KN} \end{aligned} \quad (7.17)$$

Podemos, apesar de não ter sido solicitado no exemplo, calcular as demais forças nas barras cortadas, novamente aplicando as equações de equilíbrio. O estudante deve verificar os seguintes resultados numéricos:

$$\begin{aligned} F_{FE} &= -12 \text{ KN} \\ F_{AB} &= 19,7 \text{ KN} \end{aligned} \quad (7.18)$$

===== **Atividade 1** =====

Atende aos objetivos 1 e 2

Considere a treliça mostrada na **Figura 7.13**. Determine as forças e as reações nos apoios, em todas as barras, em função da carga externa aplicada P .

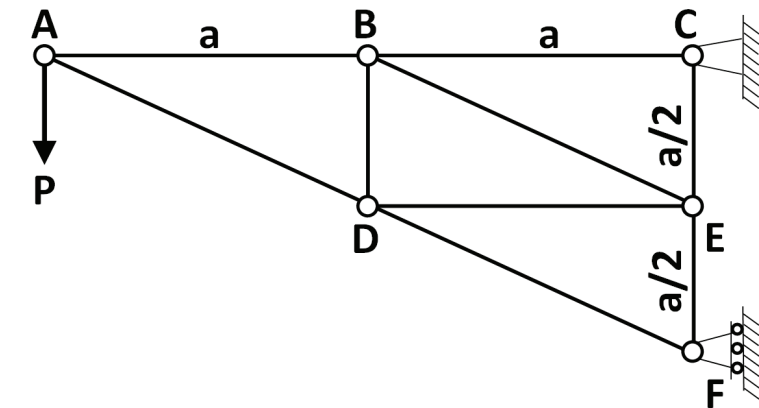


Figura 7.13: Treliça da primeira atividade.

Resposta comentada

Seguindo o procedimento descrito nos exemplos anteriores, primeiramente isolamos a treliça e calculamos as reações nos apoios. As direções horizontal e vertical dos esforços estão representadas pelos subscritos 1 e 2, respectivamente, enquanto o sentido é dado pelas setas ao lado de cada resposta.

$$\begin{aligned} R_F &= 2P && \leftarrow \\ R_{C1} &= 2P && \rightarrow \\ R_{C2} &= P && \uparrow \end{aligned} \quad (7.19)$$

A seguir, construímos os DCLs de cada nó e determinamos as forças nas barras. Como não será possível resolver mais do que duas forças por nó, uma certa ordem deverá ser seguida. Uma boa dica seria começar pelas barras próximas aos apoios, ou aos pontos de aplicação das forças externas. Para projetar as forças, utilizamos as definições de senos e cossenos, eliminando a necessidade de calcular os ângulos. Por trigonometria, calculamos o comprimento das barras AD, DF e BE como sendo $\frac{\sqrt{5}}{2}a$.

Como de costume, consideramos todas as forças saindo dos nós (ou como sendo trativas, nas barras que neles se encontram). O sinal negativo na frente de algumas forças indica que estas entram nos nós (ou comprimem as barras). Para o nó A, por exemplo, temos:

$$\begin{aligned}\sum F_{x2} = 0 &\Rightarrow \frac{a/2}{\frac{\sqrt{5}}{2}a} F_{AD} + P = 0 \Rightarrow F_{AD} = -\sqrt{5}P \\ \sum F_{x1} = 0 &\Rightarrow F_{AB} + \frac{a}{\frac{\sqrt{5}}{2}a} F_{AD} = 0 \Rightarrow F_{AB} = 2P\end{aligned}\quad (7.20)$$

O mesmo procedimento deve ser seguido nas outras articulações da treliça. Os resultados finais são mostrados na **Figura 7.14**, sempre em função da carga externa aplicada P . É interessante notar que, para esta configuração de treliça, haverá três membros de força zero.

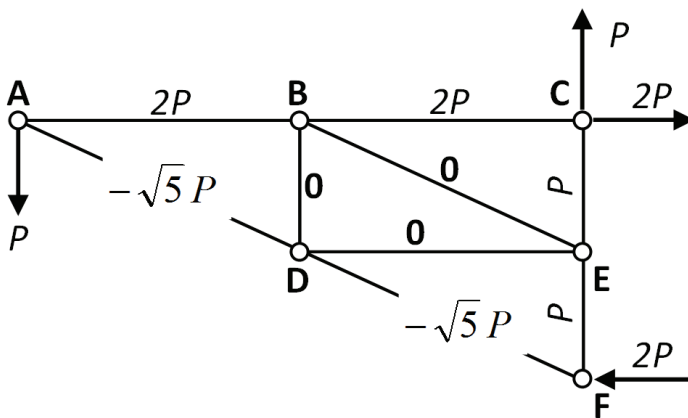


Figura 7.14: Reações e forças nas barras da treliça, da primeira atividade, em função da carga externa aplicada P .

Conclusão

Nesta aula, vimos que uma treliça plana é uma estrutura de barras retas, articuladas, que suportam esforços externos apenas nas junções. O momento gerado pelas forças de atrito entre os pinos e as barras é desprezado na modelagem das treliças. Desta forma, as barras das treliças podem ser tratadas como membros de duas forças, que só transmitem esforços de tração ou compressão. Isto possibilita a utilização de barras delgadas, diminuindo o peso total da estrutura.

A determinação das reações nos apoios deve ser feita considerando as treliças como corpos rígidos e aplicando as equações de equilíbrio. Já os esforços em todas as barras devem ser calculados utilizando o método dos nós, que consiste em aplicar as condições de equilíbrio a cada um dos nós da estrutura. Isto é equivalente a isolar os pinos que unem as

barras e aplicar as equações de equilíbrio aos diagramas de corpo livre destes pinos. Para calcular os esforços em apenas algumas barras, aplica-se o método das seções, que consiste em seccionar a treliça e aplicar as equações de equilíbrio a uma das duas partes que resultam do corte.

Em lugar de resolver as equações de equilíbrio em cada nó, uma solução alternativa consiste em gerar um sistema de equações lineares, que inclua todas as equações de equilíbrio, em todos os nós. Dependendo do número de equações, será necessária a utilização de *softwares* específicos, para a solução do sistema. Em contrapartida, os esforços em todas as barras poderão ser calculados de uma única vez.

Resumo

Para resolver problemas de treliças planas, utilizamos o método dos nós e o método das seções. A utilização destes métodos deve ser sempre precedida de uma análise de equilíbrio na treliça inteira, para determinar as reações nos apoios. Como apenas duas equações da estática estão disponíveis em cada nó, para simplificar a solução pelo método dos nós e evitar a formação de sistemas de equações lineares, recomenda-se começar pelos nós dos apoios e continuar com os nós com menos barras convergentes.

Referências

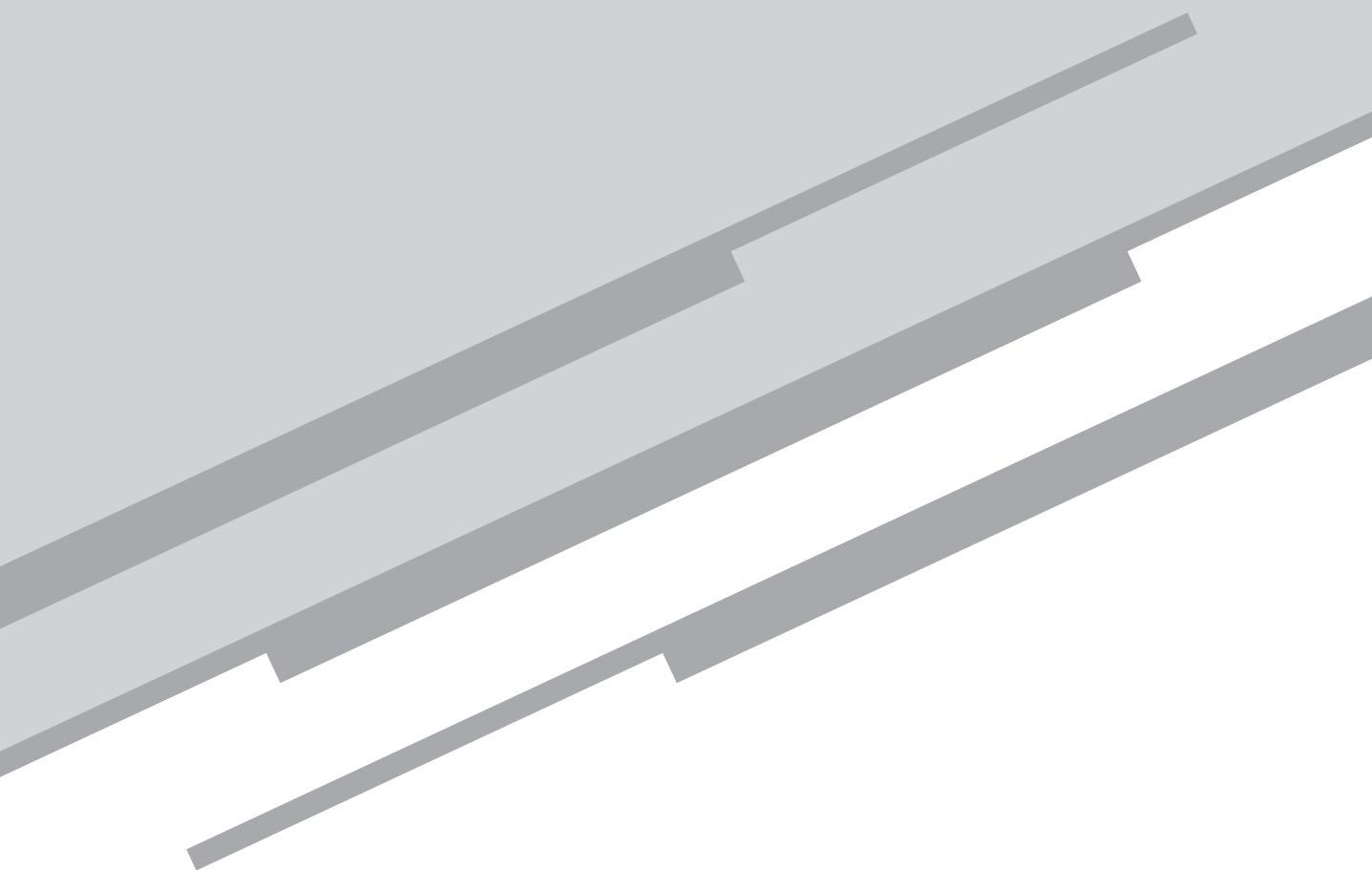
BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R. Jr. *Mecânica Vetorial para Engenheiros*. 5 ed. São Paulo: Makron Books, 1994.

CRANDALL, S. H.; DAHL, N. C.; LARDNER, T.J. *An Introduction to the Mechanics of Solids*. 3 ed. Tokyo: McGraw-Hill Inc., 1978.

HIBBELER, R. C. *Estática Mecânica para Engenharia*. 12 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

Aula 8

Vigas



Jorge Alberto Rodriguez Duran

Meta

Obter os gráficos de forças internas em elementos do tipo *vigas*.

Objetivos

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. aplicar o método das seções para obter as equações que representam a variação dos esforços internos ao longo (na direção axial) de elementos do tipo *vigas*;
2. plotar as equações das forças internas, identificando as seções críticas.

Introdução

Na Aula 7, “Estruturas”, aprendemos a calcular os esforços de tração e compressão nas barras das treliças. Estas barras são elementos delgados, cujo comprimento é bem maior do que as suas dimensões transversais. O elemento do tipo *viga* se enquadra nesta definição e, portanto, as barras das treliças podem ser modeladas como vigas.

Quando queremos encontrar os esforços em apenas algumas vigas, aplicamos o método das seções. De acordo com este método, se toda a treliça está em equilíbrio, partes dela (no caso, as vigas) também estarão. É possível, então, estabelecer um referencial local às vigas, de maneira que um dos eixos (quase sempre o x_1) coincida com a maior dimensão do elemento, ou seja, com o comprimento. A partir daí, aplicamos as equações de equilíbrio e determinamos as forças axiais (de tração ou compressão, na direção de x_1), nas vigas cortadas pela seção.

É importante destacar que as forças internas determinadas pelo método das seções constituem resultantes de vários esforços infinitesimais, distribuídos em toda a seção de corte. Como sabemos, esses vários esforços infinitesimais podem ser reduzidos, como qualquer sistema de forças, a uma força e um momento resultantes, aplicados no centróide da seção. Mediante o método das seções, procuramos pelas componentes desses esforços resultantes. Por este motivo, teremos, no caso mais geral, seis tipos de forças internas (três momentos e três forças). As vigas da treliça constituem um caso particular, no qual apenas um dos esforços internos não é zero (a força axial de tração ou compressão). Nessa situação, todas as outras componentes escalares do equilíbrio se reduzem às identidades $0=0$.

Equações e gráficos das forças internas

As equações das forças internas, para elementos do tipo viga, serão funções das cargas externas aplicadas e da distância até a origem do referencial. Vamos definir essa distância na direção x_1 , pela variável x . Considere o DCL de uma viga AB prismática (de igual seção em todo seu comprimento, como as barras das treliças, por exemplo), solicitada por uma força externa de tração \mathbf{P} , que passa pelo centróide (**Figura 8.1**). O referencial cartesiano está situado no extremo esquerdo da viga com o eixo x_1 indicando a direção axial.

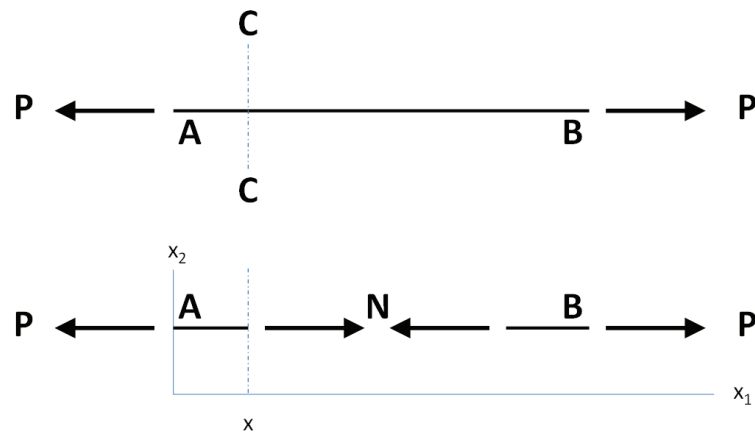


Figura 8.1: Viga prismática **AB** cortada por uma seção **CC**, a uma distância **x** na direção **x_1** .

Um corte transversal da viga pela seção **CC** fornece dois novos DCLs. O efeito de cada uma das partes da viga sobre a outra se reduz a um único esforço axial interno, **N**. Se a viga como um todo estava em equilíbrio, cada um das novas partes também estará. Assim o esforço axial **N** deverá ser suficiente para satisfazer a seguinte equação:

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \sum F_{x_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad N = P \quad (8.1)$$

Observamos que **N** é uma função de **P**, mas não da variável **x**. Isto significa que, para qualquer corte ou seção entre $0 \leq x \leq AB$, a força interna permanece constante. Todas as seções da viga **AB** devem resistir a uma força interna axial resultante, de valor constante e igual ao esforço externo aplicado **P**. O gráfico de **N(x)** para esta viga é, portanto, uma linha horizontal, como mostrado na **Figura 8.2**.

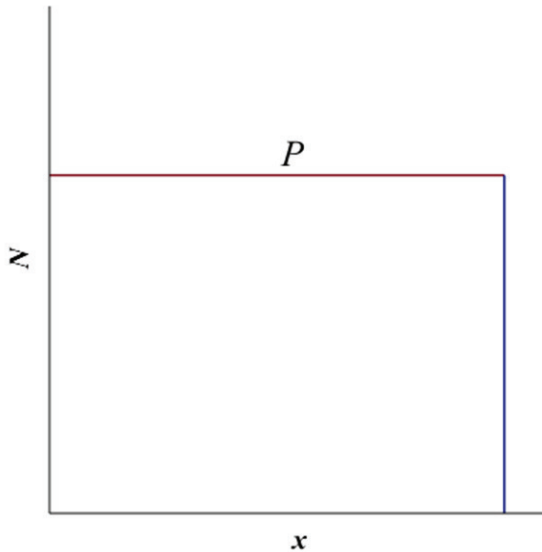


Figura 8.2: Gráfico de $N(x)=P$ para a viga da Figura 8.1.

Em alguns tipos de estruturas, as cargas estão aplicadas diretamente nos membros e não apenas nos nós, como nas treliças. Estas forças transversais geram outros dois tipos de forças internas, chamadas de *Esforço Cortante EQ* e *Momento Fletor MF*. Considere uma viga apoiada em rótulas e solicitada por uma força transversal P a uma distância a do apoio A (**Figura 8.3**). As reações nas rótulas têm direção desconhecida, mas como a única força externa é transversal à viga, a direção das reações é automaticamente definida por esta força. Aplicando as equações de equilíbrio no plano, tem-se $R_A = b P/L$ e $R_B = a P/L$, onde $L = a + b$. Como esperado, intuitivamente, a reação será maior no apoio mais próximo da seção de aplicação da carga P , ou seja $R_B > R_A$. Observe que a carga externa P tem dois caminhos alternativos para chegar à estrutura de reação: pelo apoio A ou pelo apoio B. Uma maior parte de P ($a P/L$ neste caso) irá pelo caminho mais curto. Pode-se generalizar afirmando que o compartilhamento de carga entre vínculos redundantes ocorre sempre de maneira inversamente proporcional à rigidez dos elementos mecânicos por onde passam as linhas de força. Mas esta afirmação só pode ser demonstrada com mais rigor utilizando a mecânica dos sólidos deformáveis e por tanto foge do escopo da presente disciplina.

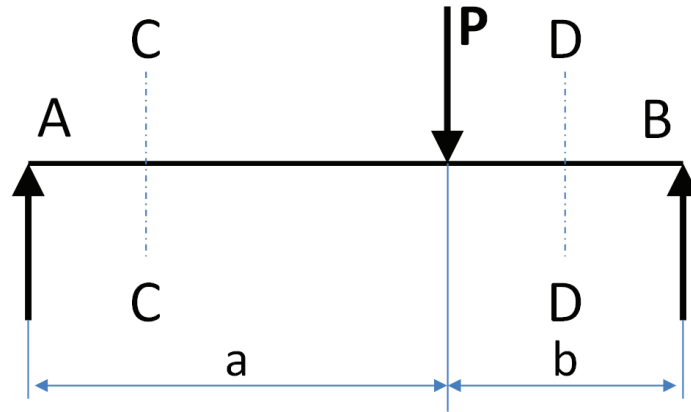


Figura 8.3: Diagrama de corpo livre de uma viga, sob apoios do tipo rótula, e solicitada por uma força transversal P .

O corte da viga, na seção CC (Figura 8.3), revela a existência de um cortante V e fletor M internos (Figura 8.4). O somatório de forças na direção x_2 e de momentos em torno do eixo x_3 (perpendicular ao papel), na seção CC, fornece expressões para estas incógnitas.

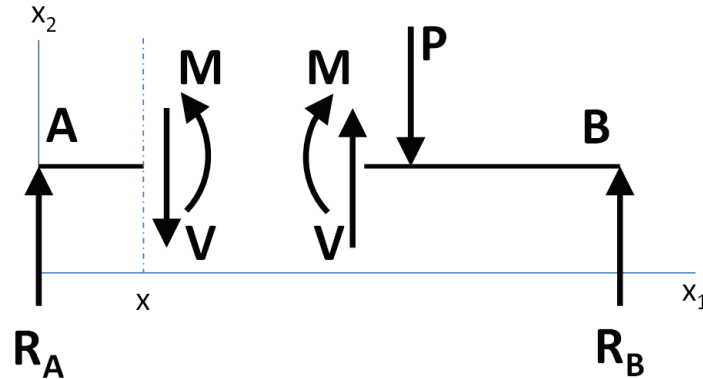


Figura 8.4: Um cortante $V(x)$ e um fletor $M(x)$ internos, a serem determinados pelas equações de equilíbrio surgem ao seccionar a viga em CC.

$$\begin{aligned} \sum F_{x_2} = 0 & \Rightarrow V = \frac{P \cdot b}{L} = R_A & 0 \leq x \leq a \\ \sum M_{x_3} = 0 & \Rightarrow M = \frac{P \cdot b}{L} \cdot x & 0 \leq x \leq a \end{aligned} \quad (8.2)$$

A partir da $x = a$, as equações para $V(x)$ e $M(x)$ serão diferentes. Considerando o corte na seção DD, temos:

$$\begin{aligned}
\sum F_{x2} = 0 \quad \Rightarrow \quad V &= \frac{P \cdot b}{L} - P = P \left(\frac{b}{L} - 1 \right) \\
V &= P \left(\frac{b-L}{L} \right) = -P \left(\frac{a}{L} \right) = -R_B \quad a \leq x \leq L \\
\sum M_{x3} = 0 \quad \Rightarrow \quad M &= \frac{P \cdot b}{L} \cdot x - P(x-a) \\
M &= P \left(\frac{b}{L} x - x + a \right) \\
M &= P \left(x \left(\frac{b}{L} - 1 \right) + a \right) \quad a \leq x \leq L
\end{aligned} \tag{8.3}$$

A **Figura 8.5** mostra os gráficos obtidos plotando-se as equações anteriores, ao longo do comprimento da viga. Os valores máximos de $V_{max} = R_B$ e $M_{max} = abP/L$ ocorrem em $x=a$.

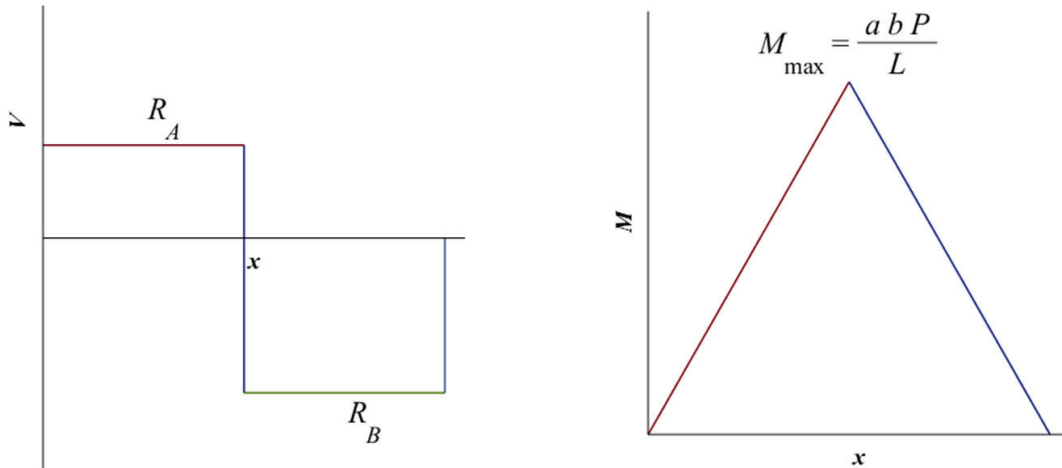


Figura 8.5: Gráficos de Esforço Cortante **EQ** e Momento Fletor **MF**, para a viga da **Figura 8.3**.

Exemplo 1: A **Figura 8.6** mostra uma viga biapoiada, de comprimento L , solicitada por um carregamento uniformemente distribuído w . Obtenha as equações, os gráficos do esforço cortante e o momento fletor, na viga, para $w = 1 \text{ N/m}$ e $L = 1 \text{ m}$. Com base nestes gráficos, determine as seções críticas e os valores máximos do cortante e do fletor.

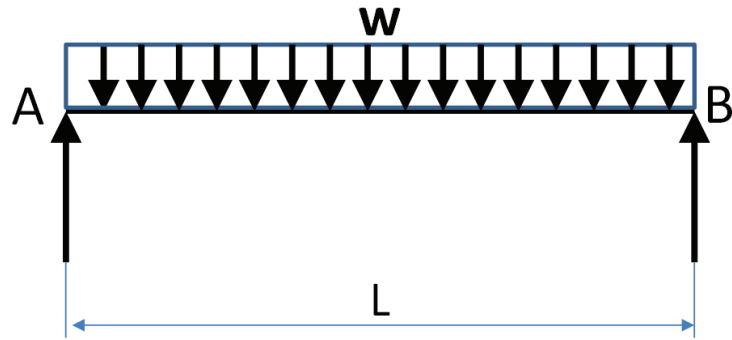


Figura 8.6: Esquema de uma viga simplesmente apoiada sob um carregamento W .

O DCL desta viga foi obtido na Aula 6, do presente curso. Consiste em substituir a força distribuída por uma concentrada, que lhe é estaticamente equivalente. Esta força concentrada tem a sua linha de ação no centro da viga e tem um valor igual à área do retângulo $P = wL$. As reações nos apoios serão $R_A = R_B = wL/2$.

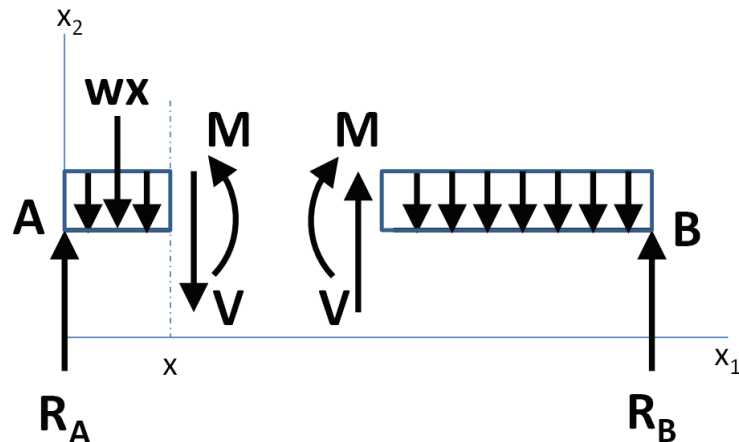


Figura 8.7: Para determinar as equações das forças internas, o carregamento distribuído se substitui por uma resultante $w x$, variável com a distância até o referencial.

Uma única seção feita a qualquer distância da origem do referencial será suficiente para obter as equações das forças internas $V(x)$ e $M(x)$, como mostrado na **Figura 8.7**. Observe que a força concentrada wL utiliza-se *apenas* para o cálculo das reações nos apoios. Para as forças internas, trabalhamos também com uma resultante do carregamento, mas que varia com a distância x (**Figura 8.7**). Aplicando o equilíbrio ao **DCL** à esquerda do corte, temos:

$$\begin{aligned}
 \sum F_{x_2} = 0 & \Rightarrow V = \frac{w \cdot L}{2} - w \cdot x = w \left(\frac{L}{2} - x \right) & 0 \leq x \leq L \\
 \sum M_{x_3} = 0 & \Rightarrow M = \frac{w \cdot L}{2} \cdot x - w \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{w}{2} (L \cdot x - x^2) & 0 \leq x \leq L
 \end{aligned} \tag{8.4}$$

As equações em (8.4) são plotadas, na **Figura 8.8**, para os dados do problema. O valor máximo do cortante (que define a seção crítica para este esforço) ocorre nos apoios ($x = 0$) e é $V_{max} = R_A = R_B = wL/2 = 1/2 \text{ N}$. Já o fletor máximo é $M_{max} = M_{x_3} (x=L/2) = wL^2/8 = 1/8 \text{ N.m}$, coincidindo com $V = 0$. Esta é, portanto, a seção crítica do fletor. Ambos os resultados são obtidos substituindo-se os respectivos valores de x nas equações em (8.4).

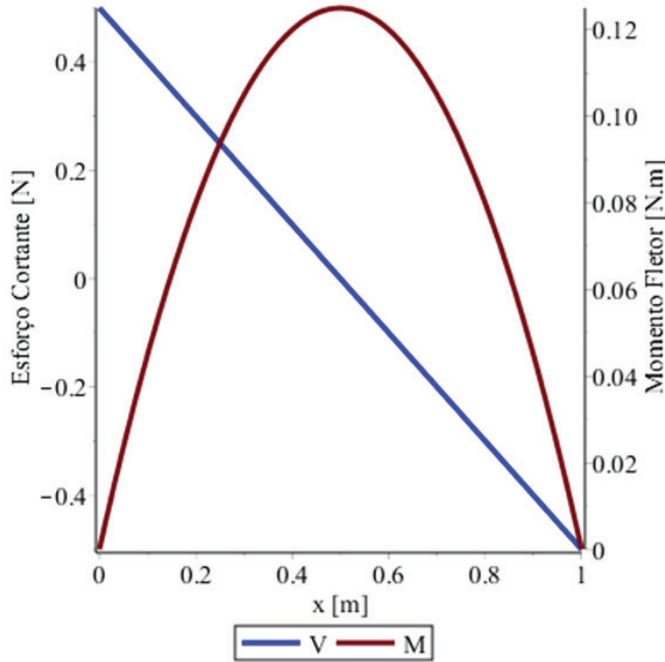


Figura 8.8: Sistema de dois eixos, mostrando os gráficos de cortante e de momento, de acordo com as equações em (8.4), para a viga da **Figura 8.6**, e considerando $w = 1 \text{ N/m}$ e $L = 1 \text{ m}$.

Atividade 1

Atende aos objetivos 1 e 2

Obtenha as equações e plote os gráficos de $V(x)$ e $M(x)$, para a viga mostrada na **Figura 8.9**, a seguir. Considere $w_o = 6000 \text{ N/m}$ e $L = 2 \text{ m}$. Defina as seções críticas e os valores máximos de V e M .

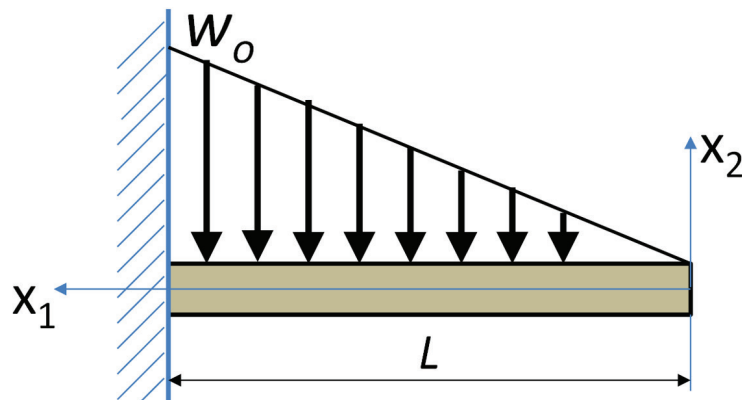


Figura 8.9: Viga com uma carga distribuída de variação linear.

Resposta comentada

Observe que, nesse caso, convém utilizar um referencial com origem na extremidade em balanço da viga. Dessa forma, não será necessário nem mesmo calcular as reações nos apoios. O primeiro passo consiste em encontrar a função $w(x) = w_o/L \cdot x$, que descreve a variação linear do carregamento (no referencial adotado). A resultante estática de um carregamento, na forma triangular, será a área do triângulo. Para uma distância x qualquer, desde a origem, esta resultante será igual à metade do produto da altura, vezes a base $\frac{w_o \cdot x}{L} \cdot \frac{x}{2} = \frac{w_o \cdot x^2}{2 \cdot L}$. A linha de ação desta força passa pelo centróide do triângulo, situado a $1/3$ da base, do lado maior. Por fim, o equilíbrio fornece as seguintes equações e gráficos para $V(x)$ e $M(x)$, respectivamente. Os máximos do esforço cortante $V_{máx} = 6 \text{ KNe}$ do momento fletor $M_{máx} = 4 \text{ KN.m}$ coincidem na seção do engaste $x=L$, como esperado. Esta é, portanto, a seção crítica para os dois casos.

$$\begin{aligned}
 \sum F_{x2} = 0 & \Rightarrow V = -\frac{w_o \cdot x^2}{2 \cdot L} & 0 \leq x \leq L \\
 \sum M_{x3} = 0 & \Rightarrow M = -\frac{w_o \cdot x^3}{6 \cdot L} & 0 \leq x \leq L
 \end{aligned}
 \tag{8.5}$$

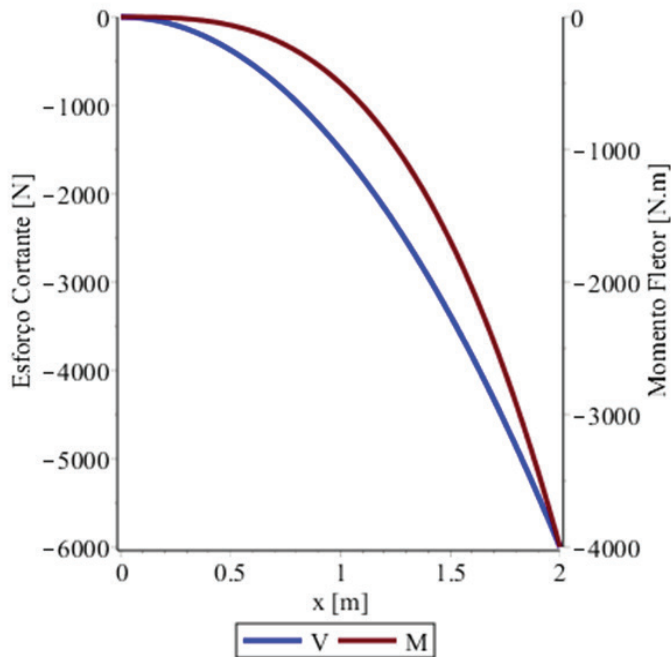


Figura 8.10: Diagramas de esforço cortante e momento fletor para a viga da **Figura 8.9**.

Conclusão

Na presente aula, vimos que as vigas são elementos cujo comprimento é bem maior do que as suas dimensões transversais. Aprendemos, também, a equacionar e plotar a variação no comprimento de três tipos de forças internas que surgem em vigas: *Força Normal (N)*, *Esforço Cortante EQ (V)* e *Momento Fletor MF (M)*. A análise destes gráficos permite a localização das seções críticas.

Não devemos esquecer que os esforços internos estão distribuídos em toda a seção de corte. Pelo equilíbrio, encontramos apenas a resul-

tante destes esforços. A análise da distribuição dos esforços internos, em cada seção, faz-se através da sua intensidade, expressa mediante o conceito de tensão em um ponto, a ser discutido na disciplina Resistência dos Materiais.

Resumo

As componentes escalares das equações de equilíbrio, no plano, são:

$$\sum F_{x1} = 0 \quad \sum F_{x2} = 0 \quad \sum M_{x3} = 0 \quad (8.6)$$

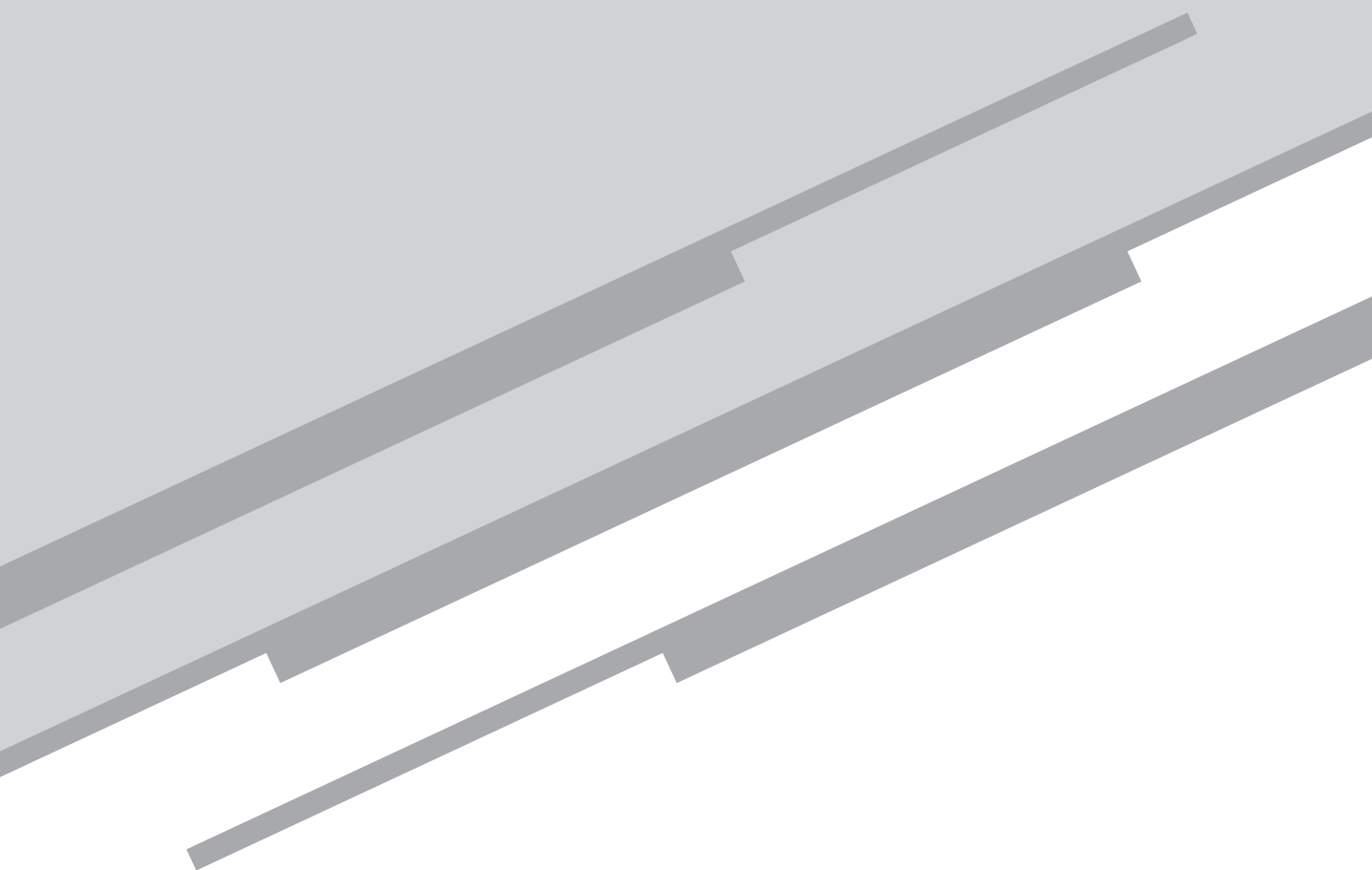
A aplicação destas equações às seções das vigas constitui a essência do método das seções. Desta forma, pode-se obter a variação dos esforços internos como função das distâncias até o referencial. As funções de uma variável assim obtidas são geralmente polinômios, cujos gráficos podem ser esboçados com relativa simplicidade. A partir dos gráficos (ou mediante os métodos de análises do cálculo elementar), é possível definir as distâncias (ou seções) críticas das vigas.

Referências

- BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R. Jr. *Mecânica Vetorial para Engenheiros*. 5 ed., São Paulo: Makron Books, 1994.
- CRANDALL, S. H.; DAHL, N. C.; LARDNER, T. J. *An Introduction to the Mechanics of Solids*. 3 ed. Tokyo: McGraw-Hill Inc., 1978.
- HIBBELER, R. C. *Estática Mecânica para Engenharia*. 12 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

Aula 9

Cabos



Jorge Alberto Rodriguez Duran

Metas

Obter os diagramas de corpo livre e o das forças internas de tração, em cabos biapoiados.

Objetivos

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. aplicar as equações de equilíbrio e o método das seções, para obter sistemas de equações de solução única, que definam todos os esforços atuantes em cabos;
2. calcular as forças de tração máximas, em cabos.

Introdução

Cabos são elementos amplamente utilizados para transmitir potência, com ganho mecânico, na indústria de construção de maquinaria. Outras áreas de utilização incluem os elevadores, pontes pênséis, transmissão de energia elétrica etc. São, geralmente, feitos de metal, sendo o aço, o material preferido. Os cabos estão constituídos por vários fios que se entrelaçam, formando uma espiral (**Figura 9.1, a**). As terminações mais comuns consistem num laço no cabo, abraçado um dedal (**Figura 9.1, b**). O dedal, por sua vez, conecta o terminal do cabo a uma abraçadeira. Desta forma, a única força de reação estará na mesma direção do cabo. Como esta direção é desconhecida, as reações, no plano, terão duas componentes: uma vertical e uma horizontal. Os cabos podem ser solicitados por forças concentradas ou distribuídas. As próximas análises se limitam a cabos com cargas concentradas.

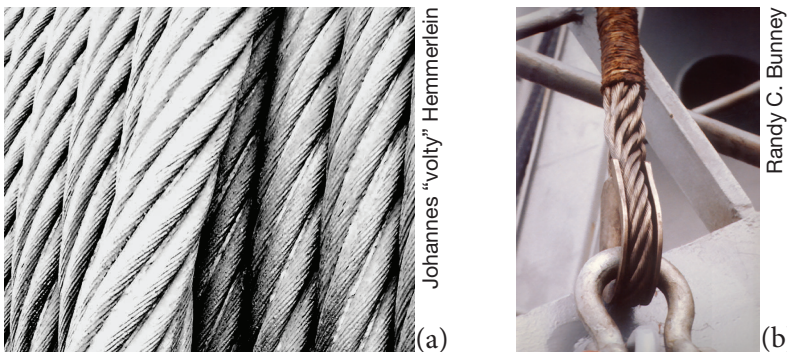


Figura 9.1: Vários cabos de aço (a) e uma das formas mais comuns de terminal, utilizada nos apoios (b). A única força de reação será colinear com o cabo. Mas, como a inclinação deste é desconhecida, no plano, esta reação, se representa por dois componentes escalares em cada eixo de um referencial cartesiano.

Fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Steel_wire_rope.png
https://en.wikipedia.org/wiki/Wire_rope#/media/File:Wire_rope_eye_splice.jpg

Cabos que suportam cargas concentradas

Um exemplo de cabo solicitado por forças externas concentradas se mostra na **Figura 9.2**. Como os cabos são elementos flexíveis, a resistência à flexão é baixa o suficiente para ser desprezada. Desconsiderando também o peso próprio, qualquer trecho do cabo, entre duas forças verticais, pode ser considerado como um elemento de duas forças. Desta forma, o cabo será solicitado apenas por forças internas, colineares ou de tração. Nos apoios, a única reação será igual, e de sentido contrário a

esta força interna de tração. O processo de análise começa, como sempre, por isolar o cabo dos apoios; substituir os vínculos eliminados pelos esforços com que eles reagem à ação do componente (reações); e aplicar as equações de equilíbrio. Com base na **Figura 9.2**, temos:

$$\begin{aligned}\sum M_A = 0 &\Rightarrow -d \cdot Bx + (a+b+c) \cdot By = a(Q1+Q2) + b \cdot Q2 \\ \sum M_B = 0 &\Rightarrow d \cdot Ax - (a+b+c) \cdot Ay = -c(Q1+Q2) - b \cdot Q1 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow Ay + By = Q1 + Q2\end{aligned}\quad (9.1)$$

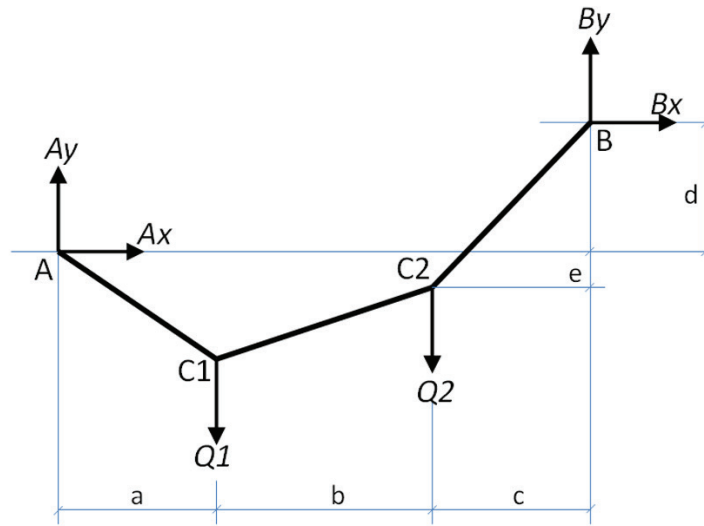


Figura 9.2: Exemplo de cabo biapoiado, com cargas concentradas verticais.

O número de incógnitas (quatro) é superior ao de equações (três), o que inviabiliza a solução do sistema da equação (9.1), considerando que $Q1$ e $Q2$ são conhecidas. Para obter uma equação complementar, é necessário conhecer as coordenadas de ao menos um dos pontos de aplicação das cargas Q . No nosso caso, esse ponto é o $C2$. Isolando a porção $C2 B$ do cabo e aplicando o equilíbrio de momentos em $C2$, para que a equação complementar seja independente da força de tração, no cabo T , conforme a **Figura 9.3** temos:

$$\sum M_{C2} = 0 \Rightarrow -(d+e) \cdot Bx + c \cdot By = 0 \quad (9.2)$$

Como Bx é agora uma função de By (e vice-versa), o número de incógnitas na equação (9.1) diminui para três, e o sistema passa a ser solúvel. A equação (9.3) mostra a forma matricial do sistema, composto pelas equa-

ções (9.1) e (9.2). O DCL da **Figura 9.3** revela, ainda, um fato interessante: A componente horizontal da força de tração no cabo é constante, em todo o cabo, e igual, neste caso, a Bx . Basta aplicar o equilíbrio de forças na direção horizontal, para termos como resultado a equação (9.4). Obviamente, a força máxima T_{max} , no cabo, ocorre no trecho em que o $\cos(\theta)$ for mínimo, ou o ângulo θ for o mais próximo de 90° .

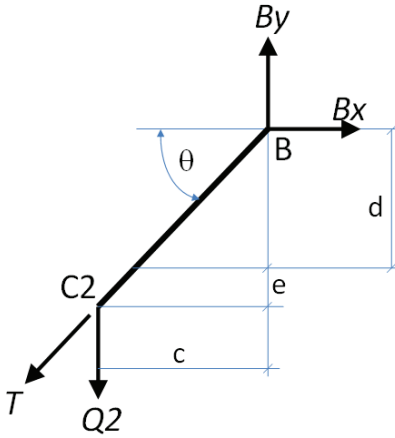


Figura 9.3: Diagrama de corpo livre da porção C2 B, do cabo. Como discutido, a força de tração, no cabo, é colinear com o mesmo.

$$\begin{bmatrix} d & -L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & L \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -(d+e) & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Ax \\ Ay \\ Bx \\ By \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \cdot (Q1+Q2) - b \cdot Q1 \\ a \cdot (Q1+Q2) + b \cdot Q2 \\ Q1+Q2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.3)$$

$\mathbf{M} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow Tx = T \cdot \cos \theta = Bx \quad (9.4)$$

Exemplo 1: Calcule as reações nos apoios e a força T_{max} , para o cabo da **Figura 9.2**, com os dados da **Tabela 9.1**.

Solução: Para resolver este exemplo, simplesmente substituímos os valores numéricos da **Tabela 9.1**, na equação (9.3). A solução do sistema retorna os valores mostrados na equação (9.5), para o vetor \mathbf{x} das reações, nos apoios.

Tabela 9.1: Dados numéricos.

a,m	b,m	c,m	d,m	e,m	Q1,KN	Q2,KN
3	4	6	2	1	12	10

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} Ax \\ Ay \\ Bx \\ By \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{212}{9} \\ \frac{92}{9} \\ \frac{212}{9} \\ \frac{106}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23,6 \\ 10,2 \\ 23,6 \\ 11,8 \end{bmatrix} \text{ KN} \quad (9.5)$$

A componente horizontal da força de tração que, como sabemos, é constante para todo o cabo, calcula-se pela equação (9.4). Substituindo, temos:

$$Tx = T \cdot \cos \theta = Bx = \frac{212}{9} \text{ KN} = 23,6 \text{ KN} \quad (9.6)$$

A tração máxima T_{max} depende do ângulo que a porção do cabo analisado faz com a horizontal. Por este motivo, será necessário primeiramente encontrar a coordenada vertical f do ponto C1. Para isto, aplicamos o equilíbrio ao corpo livre A C1 (**Figura 9.4**).

$$\begin{aligned} \sum M_{C1} = 0 &\Rightarrow -a \cdot Ay - f \cdot Ax = 0 \\ \Rightarrow f = -a \frac{Ay}{Ax} &= -3 \cdot \frac{92}{9} \cdot \left(-\frac{9}{212} \right) = \frac{69}{53} \text{ m} = 1,3 \text{ m} \end{aligned} \quad (9.7)$$

As declividades dos diferentes trechos do cabo são:

$$\begin{aligned} AC1 &\Rightarrow \frac{f}{a} = \frac{1,3}{3} = 0,43 \\ C1C2 &\Rightarrow \frac{f-e}{b} = \frac{1,3-1}{4} = 0,075 \\ C2B &\Rightarrow \frac{d+e}{c} = \frac{2+1}{6} = 0,5 \end{aligned} \quad (9.8)$$

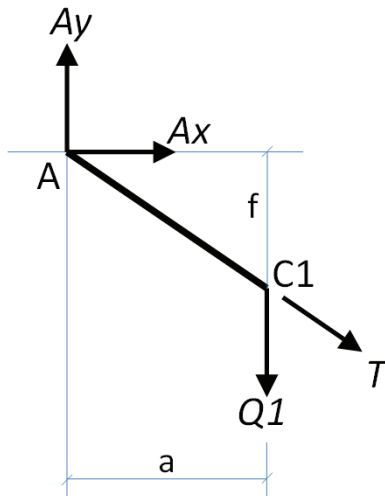


Figura 9.4: Diagrama de corpo livre **A C1**, do cabo da **Figura 9.2**.

A maior declividade ocorre, portanto, na porção C2 B. O cosseno do ângulo θ que a força de tração faz com a horizontal (**Figura 9.3**) e T_{\max} serão:

$$\cos \theta = \frac{c}{\sqrt{c^2 + (d+e)^2}} = \frac{6}{\sqrt{6^2 + (3)^2}} = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{5} \quad (9.9)$$

$$T_{\max} = \frac{Bx}{\cos \theta} = \frac{212}{9} \cdot \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{106}{9} \cdot \sqrt{5} \cong 26,3 \text{ KN}$$

É interessante notar como o cabo suporta uma força maior do que a soma das duas forças verticais ($26,3 \text{ KN} > 22 \text{ KN}$). Pode-se concluir que os cabos serão mais eficientes, quando utilizados na posição vertical (máximo de θ).

Atividade 1:

Atende ao objetivo 1

O cabo A C1 C2, da **Figura 9.5**, suporta duas cargas conhecidas $Q1$ e $Q2$. As distâncias a , b e d são dadas. Obtenha expressões para as seguintes incógnitas, em função dos parâmetros dados:

A carga P , que mantém o conjunto em equilíbrio.

O T_x no cabo.

A distância c .

O T_{max} no cabo.

As reações em A.

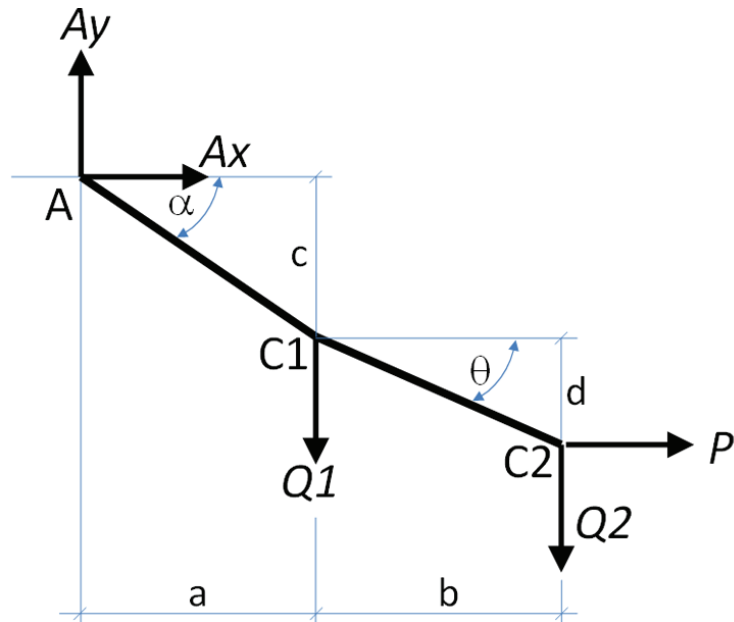


Figura 9.5: Duas cargas, $Q1$ e $Q2$, estão suspensas do cabo $A C1 C2$, enquanto a força P mantém o conjunto em equilíbrio.

Resposta comentada

O equilíbrio do corpo $C1 C2$ permite obter as seguintes expressões, para P e T_x :

$$P = \frac{b}{d} \cdot Q2$$

$$T_x = T \cos \theta = \frac{b}{d} \cdot Q2 \quad (9.10)$$

O equilíbrio do cabo inteiro permite obter a distância c e as reações em A:

$$\begin{aligned}
 c &= \frac{a \cdot Q1 + (a+b) \cdot Q2}{\frac{b}{d} \cdot Q2} - d \\
 Ax = -P &= -\frac{b}{d} \cdot Q2 \\
 Ay &= Q1 + Q2
 \end{aligned}
 \tag{9.11}$$

A maior declividade ocorre na porção A C1. Logo, o T_{max} será:

$$T_{\max} = \frac{P}{\cos \alpha} = \frac{\frac{b}{d} \cdot Q2}{\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + c^2}}} = \frac{\sqrt{a^2 + c^2} \cdot b \cdot Q2}{d \cdot a^2}
 \tag{9.12}$$

Conclusão

Os cabos são elementos flexíveis amplamente utilizados na construção civil e mecânica, na indústria do petróleo etc. A resistência à flexão das seções transversais dos cabos é desprezível e, por esse motivo, para os nossos efeitos, são modelados como membros de duas forças. Como não suportam momento fletor, não há necessidade de se preocupar com as distâncias de aplicação das cargas, até os apoios.

Os cabos podem suportar cargas concentradas ou distribuídas em seu comprimento. A presente aula tratou apenas da aplicação de cargas concentradas. As equações de equilíbrio para o diagrama de corpo livre DCL do cabo não são suficientes para determinar as reações dos apoios, e DCLs adicionais são necessários. Estes diagramas revelam que o produto da tração no cabo T , versus a declividade do trecho $\cos \theta$, é uma constante, ou seja: a tração máxima corresponde ao trecho mais inclinado. Exemplos numéricos de cabos biapoiados, resolvidos nesta aula, demonstraram também que a tração no cabo é maior do que a soma das forças aplicadas verticalmente; o que não diminui em nada a importância destes elementos mecânicos.

Resumo

A flexibilidade dos cabos exige forças colineares com estes, nos apoios, o que automaticamente transforma os sistemas em estaticamente indeterminados (ver, por exemplo, a equação (9.1)). A solução demanda o conhecimento das coordenadas de, ao menos, um dos pontos de aplicação das cargas e consiste em aplicar as equações de equilíbrio ao trecho do cabo, em que se tem este dado (ver, por exemplo, a equação (9.2) e a **Figura 9.3**).

Como o produto da tração no cabo T , pelo ângulo de inclinação do trecho em análise, é uma constante, os valores máximos T_{max} correspondem às regiões de maior declividade (equação (9.4)).

Referências

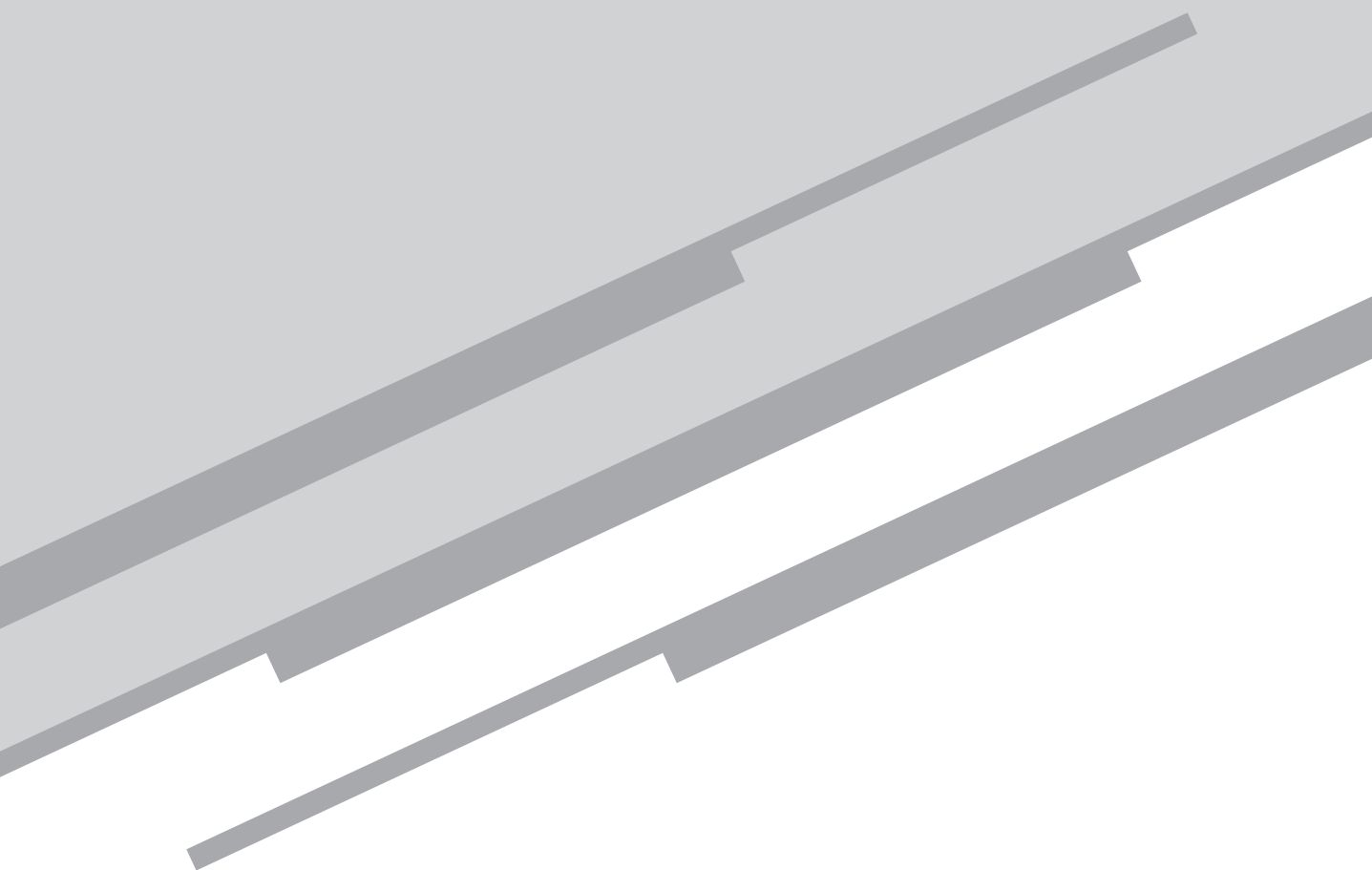
BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R. Jr. *Mecânica Vetorial para Engenheiros*. 5 ed. São Paulo: Makron Books, 1994.

CRANDALL, S. H.; DAHL, N. C.; LARDNER, T. J. *An Introduction to the Mechanics of Solids*. 3 ed. Tokyo: McGraw-Hill Inc., 1978.

HIBBELER, R. C. *Estática Mecânica para Engenharia*. 12 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

Aula 10

Atrito



Jorge Alberto Rodriguez Duran

Meta

Capacitar o aluno a solucionar problemas de equilíbrio estático e de iminência do deslizamento envolvendo atrito seco entre duas superfícies.

Objetivo

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. resolver problemas de equilíbrio estático, de iminência do movimento ou de movimento envolvendo forças de atrito em corpos rígidos.

Introdução

O atrito é definido como a força que se opõe ao movimento relativo entre duas superfícies. Na Aula 4, classificamos as reações nos apoios em três grupos. As superfícies sem ou com atrito foram alocadas nos grupos 1 e 2, respectivamente. Se o atrito entre as superfícies de contato no apoio for desprezado (grupo 1), surge uma única força de reação de direção conhecida. No outro extremo, a consideração do atrito (grupo 2) não permite identificar a direção da reação e a mesma é decomposta em suas duas (plano) ou três (espaço) componentes.

Em situações reais, os esforços solicitantes podem ser tais que as reações devidas ao atrito entre as superfícies não sejam capazes de manter o equilíbrio. Nestas condições, ocorre o deslizamento relativo entre as partes. Tanto na iminência do deslizamento quanto no deslizamento em si, forças de atrito são desenvolvidas entre as superfícies. Estas forças e a aplicação das equações de equilíbrio estático para analisá-las constituem o foco da presente aula.

Atrito Seco

Considere o caso simples de um bloco de peso W apoiado em uma superfície plana com atrito (**Figura 10.1**). A força H empurra o bloco para a direita (na direção do semi-eixo positivo de x_1), mas o movimento é impedido totalmente (ou ao menos dificultado) pela existência da força de atrito F . Esta força é o resultado da ação da superfície de apoio sobre o bloco. Uma força normal N surge também pelo efeito do peso próprio do bloco W e da componente vertical de H . As duas forças (F e N) mostradas na figura constituem a resultante das infinitas forças dF ou dN , atuando entre as superfícies. O ponto O de aplicação de N e F está localizado a uma distância variável x tal que os binários provocados pelos diferentes pares de forças atuantes ($W + H \sin \theta$; N) e ($H \cos \theta$; F) se cancelem. O equilíbrio nas direções horizontal e vertical fornece rapidamente as seguintes relações:

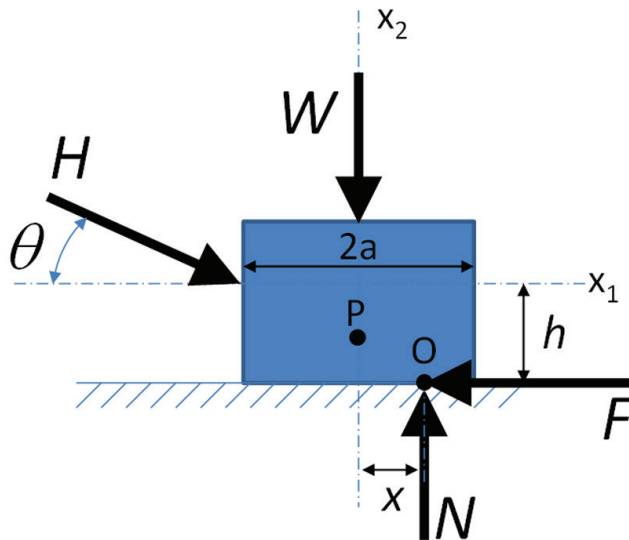


Figura 10.1: Um bloco apoiado no plano sob a ação do próprio peso W e de uma força inclinada H . As componentes da resultante das forças de reação N e F também aparecem na figura.

$$\begin{aligned}
 \sum F_{x1} &= 0 & H \cos \theta - F &= 0 & F &= H \cos \theta \\
 \sum F_{x2} &= 0 & N - W - H \sin \theta &= 0 & N &= W + H \sin \theta \\
 \sum M_O &= 0 & xW - hH \cos \theta + (a+x)H \sin \theta &= 0 & & (10.1) \\
 & & x &= \frac{H(h \cos \theta - a \sin \theta)}{W + H \sin \theta}
 \end{aligned}$$

É claro que se a distância x calculada pela equação (10.1) estiver fora do bloco, este irá girar em torno do seu canto inferior direito e perderá o equilíbrio. Os parâmetros que controlam esta distância são o peso W do bloco, a força H aplicada, o ângulo θ de inclinação desta força, com relação ao eixo x_1 e a altura h . A influência relativa de cada um deles pode ser analisada definindo as seguintes variáveis adimensionais e substituindo-as, na expressão de x :

$$\begin{aligned}
 h' &= \frac{h}{a} & x' &= \frac{x}{a} & H' &= \frac{H}{W} \\
 x' &= \frac{H'(h' \cos \theta - \sin \theta)}{1 + H' \sin \theta} & & & & (10.2)
 \end{aligned}$$

Uma combinação de alta carga relativa H' com um pequeno ângulo θ pode fazer com que o x' atinja o valor de 1 (**Figura 10.2**), e o bloco gire,

em lugar de ficar parado ou deslizar. Esta situação, porém, não será tratada na presente aula, em que o foco são as forças de atrito necessárias para garantir o equilíbrio estático ou dinâmico. Nesse contexto, o valor máximo da força de atrito que impede o deslizamento do bloco é definido como $F_m = \mu_e N = H \cdot \cos\theta$, onde e é o coeficiente de atrito estático. Este é um resultado empírico, como também o são os coeficientes μ_e mostrados na Tabela 10.1, para diferentes pares de superfícies em contato. Uma vez que a força $H \cos\theta$ consegue vencer a resistência do atrito estático, o bloco começa a deslizar sobre a superfície e a força de atrito cai para $F_c = \mu_c N < H \cdot \cos\theta$, onde $c < e$ é o coeficiente de atrito dinâmico. A relação entre os coeficientes de atrito dinâmico e estático normalmente está próxima de 0,7, ou seja, $\mu_c \cong 0.7 \mu_e$. Nestas circunstâncias, as forças $H \cdot \cos\theta$ e F_c não se anulam mutuamente, como acontece durante o equilíbrio estático, e o bloco começa a se movimentar para a direita, na **Figura 10.1**. É importante destacar que os coeficientes de atrito estático μ_e e dinâmico μ_c independem das áreas em contato.

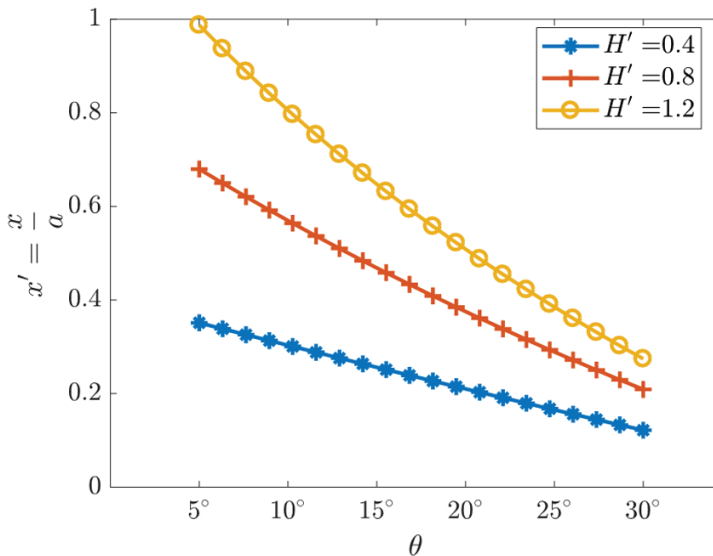


Figura 10.2: Variação da distância de equilíbrio adimensional x' (equação (2)) dos diferentes binários que atuam no bloco da **Figura 10.1**, para três valores da relação entre a carga aplicada H e o peso do bloco W , em função do ângulo de aplicação de H e para $h/a = 1$.

Observe que o equilíbrio de momentos em relação ao ponto O inclui as forças W e H . Isto acontece porque a linha de ação destas forças não passa por O , e sim por P . Esta estratégia pode gerar um sistema com mais incógnitas do que equações e dificultar a solução do problema.

Tabela 10.1: Coeficientes de atrito estático para algumas combinações de superfícies em contato.

Materiais em contato	Coeficiente de atrito estático μ_e
Metal com gelo	0,03–0,05
Madeira com madeira	0,3–0,7
Couro com madeira	0,2–0,5
Couro com metal	0,3–0,6
Alumínio com alumínio	1,1–1,75

Fonte: Adaptado de HIBBELER (2016, p.403).

Por outro lado, a linha de ação da resultante R das forças N e F têm necessariamente que passar também pelo ponto P . De outra forma, o equilíbrio de momentos em torno deste ponto não seria satisfeito. O nosso bloco é um membro de três forças e poderemos simplificar as nossas análises fazendo uso do triângulo de forças (**Figura 10.3**).

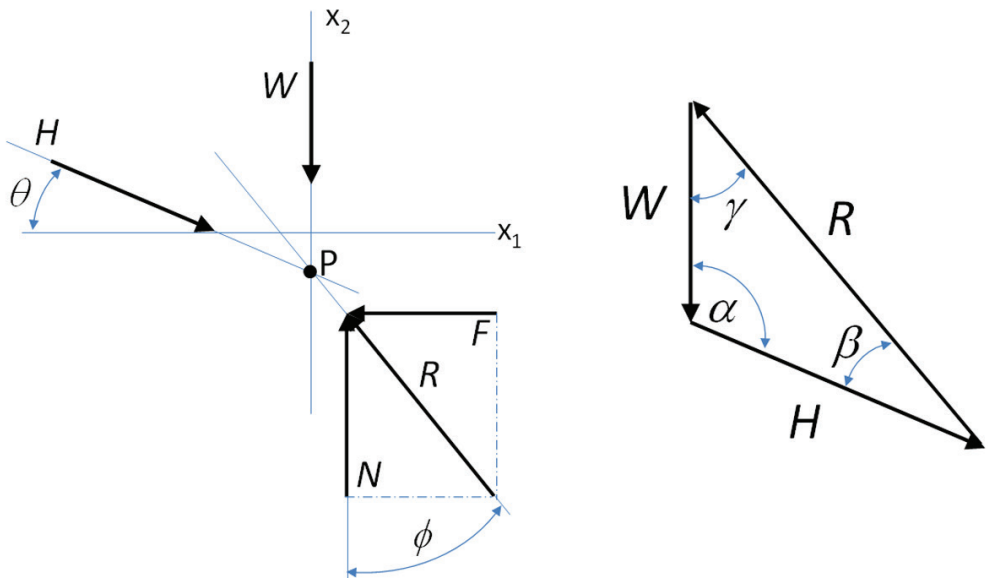


Figura 10.3: A consideração da resultante R da força de atrito F e da normal N permite analisar o bloco como um membro de três forças.

A direção de R é geralmente conhecida, pois:

$$\tan(\phi) = \frac{F}{N} = \frac{\mu \cdot N}{N} = \mu \quad (10.3)$$

Onde F poderá ser F_m (na iminência do deslizamento) ou F_c (durante o deslizamento). A aplicação da lei dos senos e da lei dos cossenos ao triângulo de forças da **Figura 10.3** fornece as seguintes equações:

$$\frac{R}{\cos \alpha} = \frac{W}{\sin \beta} = \frac{H}{\sin \gamma} \quad (10.4)$$

$$R^2 = H^2 + W^2 - 2HW \cos \alpha$$

Obviamente, para a utilização das equações em (10.4), devemos estabelecer uma relação entre os ângulos internos do triângulo de forças (α , β e γ) e os ângulos (θ e φ), que as linhas de ação das forças H e R fazem com o nosso referencial cartesiano x_1x_2 . Da **Figura 10.3**, temos:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \theta$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - (\theta + \varphi) \quad (10.5)$$

$$\gamma = \varphi$$

Exemplo1: Verifique se o bloco da **Figura 10.4** está em equilíbrio sob a ação das forças mostradas. Dependendo do resultado, calcule a força de atrito atuante. Os dados do problema são: $H = 1 \text{ KN}$, $W = 3 \text{ KN}$, $\alpha = 25^\circ$, $\beta = 12^\circ$, $\mu_e = 0.3$ e $\mu_c = 0.2$.

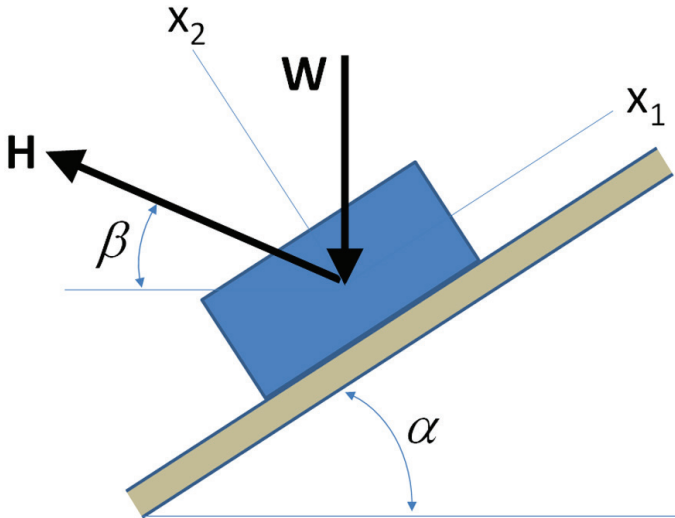


Figura 10.4: Bloco sob a ação das forças W e H em um plano inclinado.

Solução: A estratégia de solução deste problema é simples. Deve-se calcular a força de atrito F necessária para manter o equilíbrio do bloco e compará-la com a estimativa de $F_m = \mu_e N$. Se $F > F_m$ significa que o bloco está em movimento e a força de atrito presente na interface será $F_c = \mu_c N$. Neste último caso, as equações de equilíbrio não serão satisfeitas e o somatório de forças na direção x_1 será igual à diferença entre F e F_c .

O diagrama de corpo livre do bloco se mostra na **Figura 10.5**. Projetando as forças na direção dos eixos cartesianos e aplicando as equações de equilíbrio, temos:

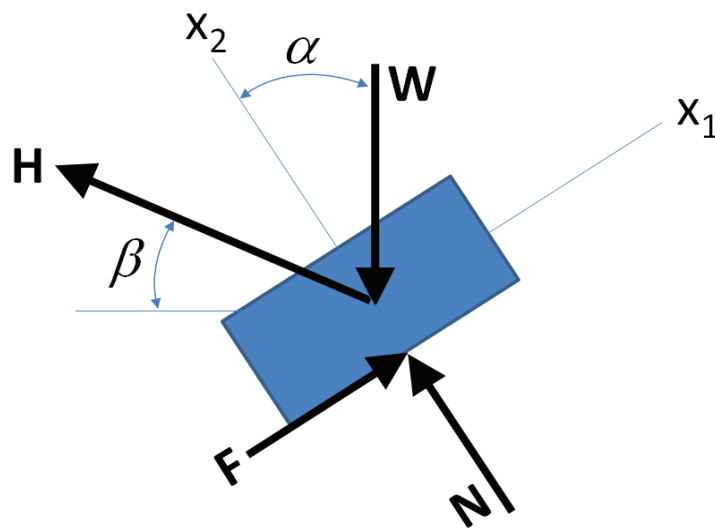


Figura 10.5: Diagrama de corpo livre **DCL** do bloco, no Exemplo 1.

$$\begin{aligned}\sum Fx_2 &= 0 \Rightarrow N = W \cdot \cos(\alpha) - H \cdot \sin(\alpha + \beta) = 2,11 \text{ KN} \\ \sum Fx_1 &= 0 \Rightarrow F = W \cdot \sin(\alpha) + H \cdot \cos(\alpha + \beta) = 2 \text{ KN}\end{aligned}\quad (10.6)$$

A força de atrito necessária para manter o bloco em equilíbrio estático é $F = 2 \text{ KN}$, enquanto a combinação de coeficiente de atrito estático μ_e e a componente de força normal à superfície N do bloco fornecem um valor de $F_m = \mu_e \cdot N = 0,64 \text{ KN}$. Como este valor é inferior ao necessário, haverá deslizamento. A força de atrito realmente atuando entre as duas superfícies será, então, $F_c = \mu_c \cdot N = 0,42 \text{ KN}$. A equação de equilíbrio em x_1 será igual à diferença $F - F_c$:

$$W \cdot \sin(\alpha) + H \cdot \cos(\alpha + \beta) - F_c = 1,64 \text{ KN} \quad (10.7)$$

Exemplo 2: O bloco da **Figura 10.1** encontra-se sob a ação do próprio peso W e de uma força H que faz um ângulo θ com a horizontal. Calcule o maior valor de θ para o qual o deslizamento do bloco é iminente. O coeficiente de atrito estático entre as superfícies é $\mu_e = 0,25$ e as forças $W = 750$ N e $H = 300$ N. Verifique também se, nestas condições, (iminência do deslizamento) não ocorre o tombamento do bloco para $h = 40$ mm e $2a = 60$ mm.

Solução: O sistema obtido como resultado da aplicação das equações de equilíbrio a este problema (o mesmo da equação (10.1)) é o seguinte:

$$\begin{aligned} F &= H \cos \theta \\ N &= W + H \sin \theta \\ x &= \frac{H(h \cos \theta - a \sin \theta)}{W + H \sin \theta} \end{aligned} \quad (10.8)$$

O sistema consta de apenas três equações que não são suficientes para obter as cinco incógnitas (F_m , N , $\sin \theta$, $\cos \theta$, x). Na iminência do deslizamento, podemos aplicar a relação $F_m = \mu_e \cdot N$, o que reduz o número de incógnitas de cinco para quatro, mas o sistema permanece insolúvel. A melhor forma de contornar o problema consiste em utilizar o triângulo de forças da **Figura 10.3** e a lei dos senos (equações (10.4)).

$$\frac{W}{\sin \beta} = \frac{H}{\sin \gamma} \quad (10.9)$$

Os ângulos β e γ são funções de θ e ϕ (equações em (10.5)). Após a utilização da equação (10.3) com $\mu = \mu_e$, a única incógnita da equação (10.9) passa a ser o ângulo θ :

$$\begin{aligned} \frac{W}{\sin \left[\frac{\pi}{2} - (\theta + \phi) \right]} &= \frac{H}{\sin \phi} \\ \frac{W}{\sin \left[\frac{\pi}{2} - (\theta + \tan^{-1} \mu_e) \right]} &= \frac{H}{\sin (\tan^{-1} \mu_e)} \end{aligned} \quad (10.10)$$

Resolvendo a equação (10.9) para θ , temos:

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \mu_e - \sin^{-1} \left[\frac{W}{H} \sin (\tan^{-1} \mu_e) \right] = 38.6^\circ \quad (10.11)$$

Este valor deve ser interpretado da seguinte forma: Para a combinação de esforços dados no problema (H e W), se o ângulo $\theta \geq 38,6^\circ$ as forças de reação, especificamente a força de atrito F , evitam o deslizamento do bloco sobre a superfície. Quando $\theta = 38,6^\circ$, o deslizamento é iminente e a força $F_m = \mu_e \cdot N$. Para ângulos menores, a componente horizontal de H é suficiente para vencer a resistência do atrito e o bloco desliza. As condições de equilíbrio estático, assim, deixam de ser válidas, pois $H \cos \theta$ passa a ser maior do que $F_c = \mu_c \cdot N$.

Para verificar o tombamento, calculamos a distância x (equação (10.8)) até a posição do centróide da distribuição de N (**Figura 10.1**).

$$x = \frac{H(h \cos \theta - a \sin \theta)}{W + H \sin \theta} = 4 \text{ mm} \quad (10.12)$$

Como $x = 4 \text{ mm} < a = 30 \text{ mm}$ não ocorre o tombamento do bloco.

Atividade 1

Atende ao objetivo 1

Calcule a força P necessária para que o carretel de $W = 350 \text{ kg}$ esteja na iminência do movimento (**Figura 10.6**). Nos pontos de contato A e B , os coeficientes de atrito estático são $\mu_A = 0.4$ e $\mu_B = 0.5$. Os dados geométricos do problema são: $b = 2 \cdot a$, $c = 3/4 \cdot a$ e $a = 400 \text{ mm}$.

Resposta comentada

Isolamos o carretel da superfície de contato e substituímos o efeito da mesma por forças normais \mathbf{N}_A e \mathbf{N}_B , cuja linha de ação passa pelo ponto O e por forças de atrito \mathbf{F}_A e \mathbf{F}_B , como mostrado no diagrama de corpo livre da **Figura 10.7**.

Ao aplicar as equações de equilíbrio, o somatório de momentos deverá ser feito em torno de um eixo normal ao papel e que passa pelo ponto O . Desta forma, a equação resultante não incluirá as incógnitas N_A e N_B . Observe,

também, que o ângulo de lados $b - c$ e d (Figura 10.7) será utilizado para projetar as forças nas direções dos eixos coordenados x_1 e x_2 .

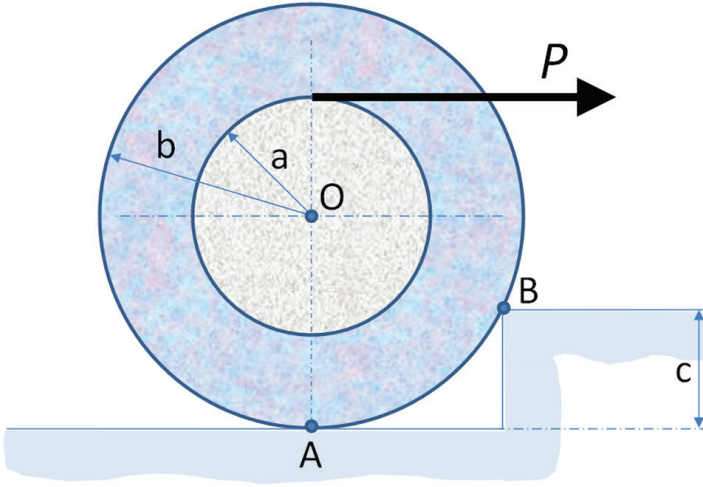


Figura 10.6: Um carretel de 350 kg está na iminência do movimento, sob ação da força P .

$$\begin{aligned}
 \sum M_O = 0 & \quad -a \cdot P + b \cdot F_A + b \cdot F_B = 0 \\
 \sum F_{x1} = 0 & \quad P + F_A + \frac{b-c}{b} F_B - \frac{d}{b} N_B = 0 \\
 \sum F_{x2} = 0 & \quad N_A + \frac{b-c}{b} N_B + \frac{d}{b} F_B = W
 \end{aligned} \tag{10.13}$$

A condição de iminência do movimento agrega as equações $F_A = \mu_A N_A$ e $F_B = \mu_B N_B$ ao nosso sistema. Isto reduz o número de incógnitas de 5 para 3. O sistema de equações lineares resultante, na sua forma matricial, será:

$$\begin{bmatrix} 1 & \mu_A & \mu_B \cdot \left(1 - \frac{c}{b}\right) - \frac{d}{b} \\ 0 & 1 & \frac{d}{b} \cdot \mu_B + \left(1 - \frac{c}{b}\right) \\ -a & b \cdot \mu_A & b \cdot \mu_B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P \\ N_A \\ N_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ W \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10.14}$$

A solução final se obtém substituindo os dados do problema e resolvendo o sistema da equação (10.14).

$$\begin{bmatrix} P \\ N_A \\ N_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,86 \\ -2,65 \\ 5,99 \end{bmatrix} \text{ KN} \quad (10.15)$$

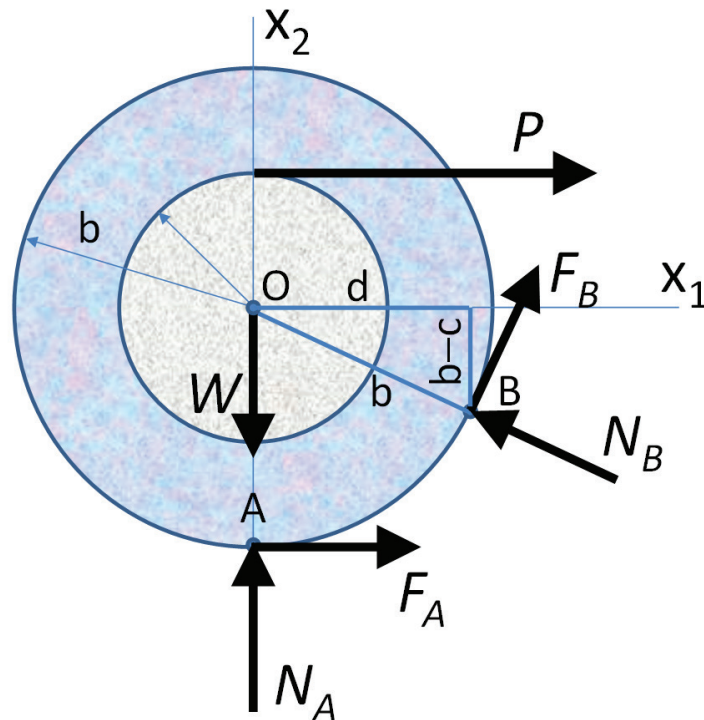


Figura 10.7: Diagrama de corpo livre **DCL** do carretel da primeira atividade.

Por último, as forças de atrito serão $F_A = -1,06 \text{ KN}$ e $F_B = 2,99 \text{ KN}$.

Conclusão

Esta aula foi dedicada às forças de atrito. Estas forças ocorrem no sentido tangencial às superfícies de contato de dois corpos, pressionados um contra o outro. Experimentalmente, verifica-se que as forças de atrito são proporcionais às forças normais entre as superfícies. As constantes de proporcionalidade são os coeficientes de atrito estático e dinâmico. Estes coeficientes são independentes das áreas em contato. O coeficiente de atrito estático é sempre superior ao dinâmico, como nossa própria intuição nos indica.

Os problemas de atrito podem envolver a determinação de várias incógnitas. Em alguns casos, as equações de equilíbrio são suficientes para encontrar as incógnitas. É o caso do Exemplo 1 da presente aula. As forças de atrito calculadas por equilíbrio são comparadas, então, com as determinadas pela relação $F = \mu N$. Como resultado desta comparação, poderemos saber se o corpo: permanece em equilíbrio, está na iminência do movimento ou em movimento.

Uma outra classe de problemas envolve mais incógnitas do que equações de equilíbrio. Se o número de forças que atuam no corpo for igual a três, sabemos que o equilíbrio só será satisfeito se estas forças forem concorrentes. Assim, o triângulo de forças e as leis dos senos e cossenos permitem obter a solução. Um exemplo desta classe de problemas foi analisado no Exemplo 2. Se o número de forças atuantes for maior do que três, será necessário utilizar as relações $F = \mu N$ para diminuir o número de incógnitas (ou aumentar o número de equações). O uso destas relações exige que se defina o tipo de atrito atuante no corpo, estático ou dinâmico. A atividade 1 tratou deste tipo de problemas.

Resumo

Como em muitas outras aulas do presente curso, nesta, aplicamos as equações de equilíbrios a corpos rígidos sob determinada pressão (que poderá ser devida ao peso próprio) contra superfícies ou outros corpos. Na iminência do movimento ou no movimento entre estas superfícies surgem forças de atrito F que se relacionam com as forças normais N , entre as superfícies, pela equação:

$$F = \mu \cdot N \quad (10.16)$$

A direção da resultante R entre N e F depende apenas do coeficiente de atrito:

$$\tan(\varphi) = \frac{F}{N} = \frac{\mu \cdot N}{N} = \mu \quad (10.17)$$

Em membros de três forças, este dado facilita a solução analítica do triângulo de forças e, conseqüentemente, do problema como um todo.

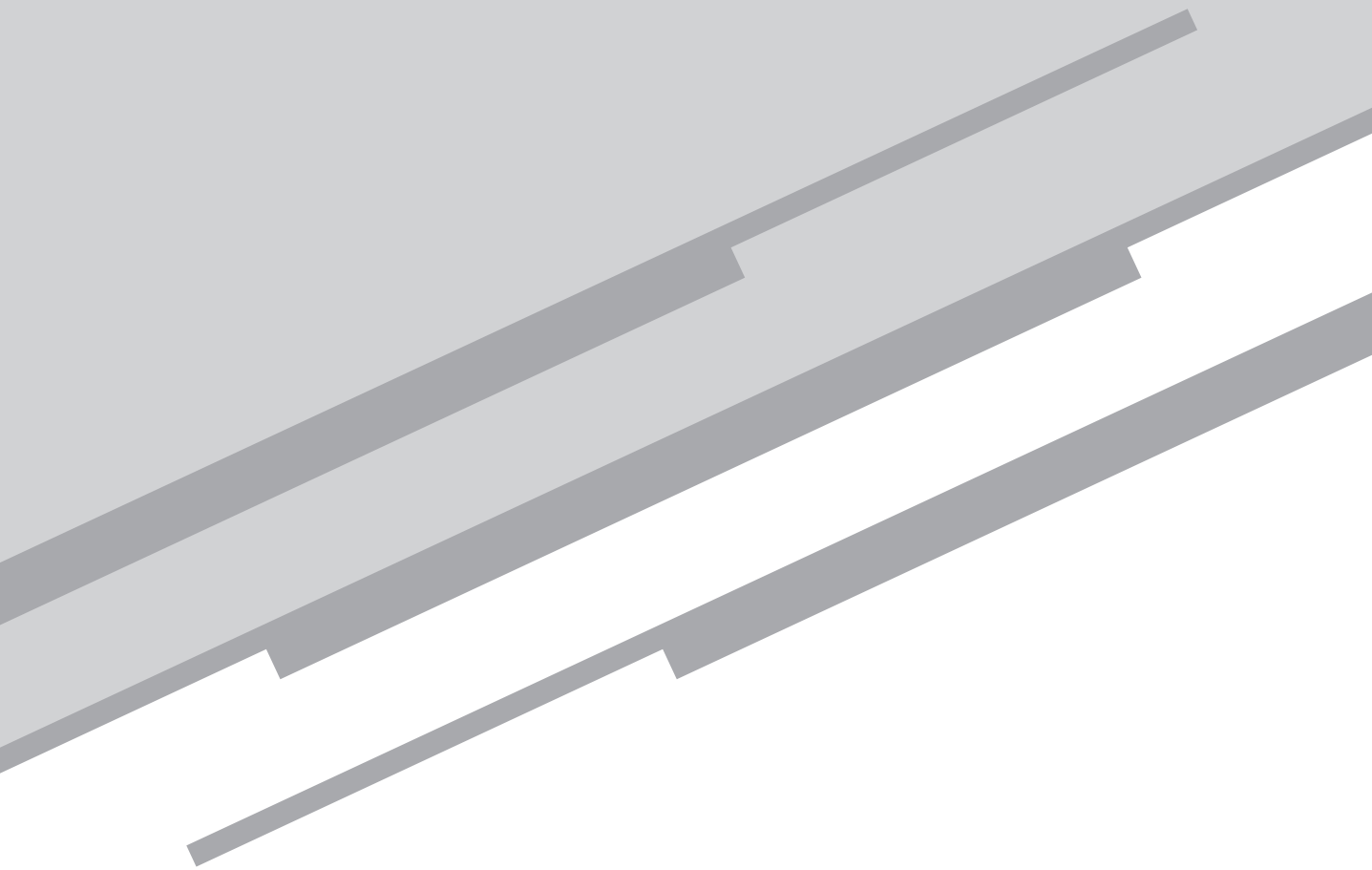
Referências

BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R. Jr. *Mecânica Vetorial para Engenheiros*. 5 ed. São Paulo: Makron Books, 1994.

HIBBELER, R. C, *Statics and Dynamics*. 14 ed. Pearson Prentice Hall, New Jersey USA, 2016.

Aula 11

Momentos de Inércia de Superfícies Planas



Jorge Alberto Rodriguez Duran

Metas

Definir, calcular e transformar algumas das mais importantes propriedades geométricas de superfícies planas.

Objetivos

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. calcular os momentos de segunda ordem (momentos de inércia) e produtos de inércia de superfícies planas mediante integração;
2. aplicar o teorema dos eixos paralelos para calcular momentos e produtos de inércia de superfícies;
3. calcular a orientação e o valor dos momentos principais de inércia.

Introdução

Na **Aula 6**, aprendemos a localizar o centroide de superfícies planas e a calcular a resultante de forças continuamente distribuídas. Vimos que a posição do centroide depende da relação entre os momentos de área de primeira ordem e a própria área da superfície. Por outro lado, a resultante dos carregamentos é a área sob o diagrama de carga.

Na presente aula, vamos desenvolver o conceito de momentos de área de segunda ordem (ou momentos de inércia) de superfícies. Aprenderemos a calcular os momentos de inércia em relação a eixos que passam pelo centroide da área. É claro que, caso seja necessário determinar a posição deste centroide, utilizaremos os procedimentos desenvolvidos na **Aula 6**. Estudaremos, também, como os momentos de inércia variam com a inclinação dos eixos centroidais. Podemos pensar nos momentos de inércia como as propriedades de área que se opõem à rotação que os momentos fletores tendem a provocar em torno de um determinado eixo. Não devemos confundir os momentos de inércia de superfícies com os de massa, embora estes últimos também possam ser encarados como uma medida da resistência ao giro em torno de um eixo; mas, neste caso, referidos a uma massa e provocados por um torque. O conceito de momento de inércia encontra vasta aplicação na mecânica dos materiais e contribui para quantificar a intensidade das forças internas que surgem nos elementos, como resposta à ação de cargas externas ou aos deslocamentos angulares, nas seções de interesse.

Momentos Axiais de Inércia de Superfícies

Considere uma placa homogênea sob a ação do próprio peso W (**Figura 11.1**). Em cada elemento de área dA da placa atua um peso elementar dW . A intensidade desse peso $dq = dW/dA$ pode variar linearmente, com a distância até os eixos. Se esse for o caso, até o eixo x_1 , por exemplo, esta variação pode ser expressa como $dq = k \cdot x_2$, onde k é uma constante. Desta forma, teremos $dW = dq \cdot dA = k \cdot x_2 \cdot dA$. Como de costume, as infinitas forças elementares de peso dW podem ser reduzidas a um sistema força-binário em torno de um eixo, por exemplo do eixo x_1 . Os módulos da força resultante R e do binário resultante M serão:

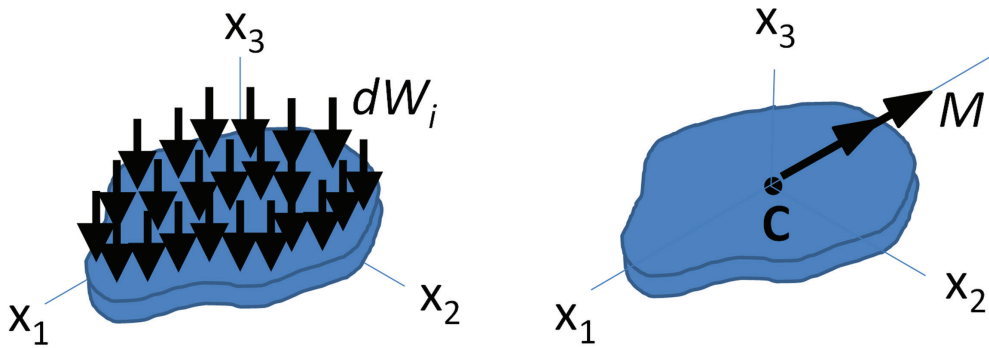


Figura 11.1: Sistemas de forças de peso distribuídas na superfície de uma placa homogênea e o binário equivalente M , quando a origem do referencial coincide com o centroide C .

$$\begin{aligned} R &= \int_A dW = \int_A dq \cdot dA = k \int_A x_2 \cdot dA \\ M &= \int_A x_2 \cdot dW = k \int_A x_2^2 \cdot dA \end{aligned} \quad (11.1)$$

Para o caso em que os eixos cartesianos passem pelo centroide C da placa, a resultante será zero $R = 0$ devido à quantidade de momentos de área positivos $x_2 \cdot dA$, que se iguala aos negativos $-x_2 \cdot dA$, e à integral (ou somatório de diferenciais) ser nula. Nessa situação, resta apenas o binário M e a quantidade $I_{x1} = \int_A x_2^2 \cdot dA$ é conhecida como *momento de área de segunda ordem* (ou *momento axial de inércia*) em torno do eixo x_1 . Observe que a diferença do Q_{x1} (momento de primeira ordem) I_{x1} será sempre positiva. O momento axial de inércia, ou simplesmente momento de inércia, tem unidades de comprimento elevadas à quarta potência (m^4 , e.g.), como se deduz da própria definição. Por analogia, o momento de inércia com relação ao eixo x_2 será:

$$I_{x1} = \int_A x_2^2 \cdot dA \quad (11.2)$$

Por outro lado, se a intensidade da força distribuída não apresenta variação linear até nenhum dos eixos, ou seja $dq = k$, tem-se:

$$\begin{aligned} R &= \int_A dW = \int_A dq \cdot dA = k \int_A dA = k \cdot A \\ M &= \int_A x_2 \cdot dW = k \int_A x_2 \cdot dA = k \cdot Q_{x1} \end{aligned} \quad (11.3)$$

As equações em (3) mostram que, diferentemente do caso anterior (equações em (1)), quando dq é constante e o referencial cartesiano passa pelo centroide da superfície, o carregamento distribuído se reduz, então, a apenas uma força resultante R (já que o primeiro momento de área $Q_{x1} = 0$ e $M = 0$).

É importante destacar que as propriedades de área (momentos de área e momentos de inércia) são puramente geométricas e, portanto, independentes do caráter da distribuição das forças de peso (constantes ou não). Apenas o sistema força-binário resultante estará afetado por esta distribuição. Além disso, nesta aula, as forças de peso foram utilizadas para definir estas propriedades, mas outros sistemas de forças distribuídas poderão atuar na área, como, por exemplo, forças e momentos internos, pressão hidrostática etc.

Momento Polar de Inércia de Superfícies

Considere uma situação em que a variação linear do carregamento distribuído é uma função da distância polar r ($dq = k \cdot r$) até a origem do referencial da placa. Por analogia com o desenvolvimento dos momentos axiais de segunda ordem podemos definir o momento polar de inércia J como:

$$\begin{aligned} R &= \int_A dW = \int_A dq \cdot dA = k \int_A r \cdot dA \\ M &= \int_A r \cdot dW = k \int_A r^2 \cdot dA \\ J &= \int_A r^2 \cdot dA \end{aligned} \quad (11.4)$$

Estas resultantes estarão sobre um eixo x' no plano da placa mas perpendicular à distância polar r (**Figura 11.2**). Se a quantidade de momentos infinitesimais de área a ambos os lados de x' é igual, $Q_{x'} = 0$ e o sistema de forças se reduz a um único binário. Igualmente, se $dq = k$ o sistema de forças distribuídas se reduz a uma única força resultante R (equações em (11.3)). O momento polar de inércia também tem unidades de comprimento à quarta potência. Uma relação entre os momentos axiais e o polar pode ser obtida a partir da definição de J :

$$J = \int_A r^2 \cdot dA = \int_A (x_2^2 + x_1^2) \cdot dA = I_{x1} + I_{x2} \quad (11.5)$$

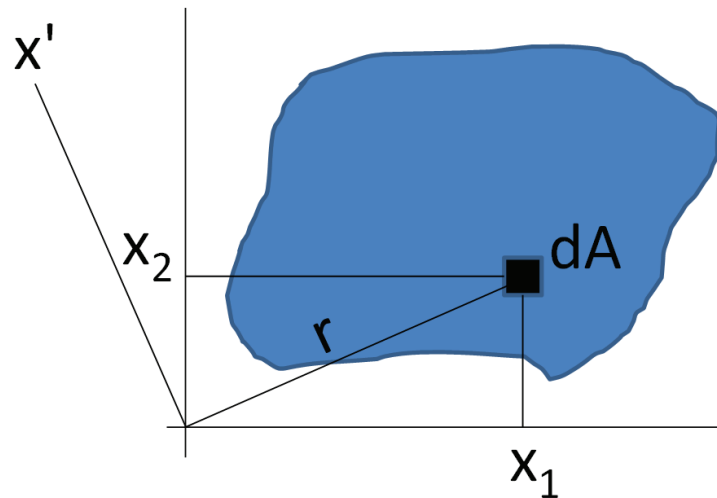


Figura 11.2: Momentos de área de segunda ordem axiais se calculam como a integral de área das distâncias x_1 ou x_2 ao quadrado enquanto que no cálculo do momento polar se considera a distância polar r ao quadrado (equações em (4)).

Exemplo 1: Demonstre que o momento de inércia de uma área retangular, com relação a qualquer eixo centroidal, é igual ao produto da base pela altura ao cubo, dividido por 12.

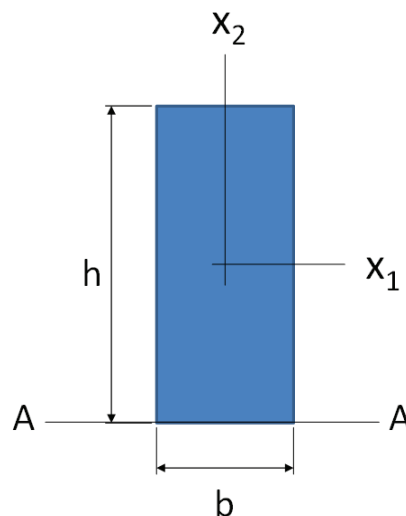


Figura 11.3

Solução: Este e qualquer outro problema de determinação de momentos de inércia é basicamente um exercício de integração. Utilizando as definições para os momentos axiais de inércia I_{x1} e I_{x2} , temos:

$$\begin{aligned}
I_{x_1} &= \int_A x_2^2 \cdot dA = 2 \int_0^{h/2} \int_0^b x_2^2 dx_1 dx_2 = 2 \int_0^{h/2} x_2^2 x_1 \Big|_0^b dx_2 = \frac{2x_2^3 b}{3} \Big|_0^{h/2} = \frac{bh^3}{12} \\
I_{x_2} &= \int_A x_1^2 \cdot dA = 2 \int_0^{b/2} \int_0^h x_1^2 dx_2 dx_1 = 2 \int_0^{b/2} x_1^2 x_2 \Big|_0^h dx_1 = \frac{2x_1^3 h}{3} \Big|_0^{b/2} = \frac{hb^3}{12}
\end{aligned} \quad (11.6)$$

Exemplo 2: Obtenha uma expressão para os momentos axiais e polar de inércia de uma seção circular maciça de diâmetro d , em relação a um sistema de eixos cartesianos que passa pelo centroide da área.

Solução: Para uma seção circular maciça, qualquer eixo que passe pelo centroide será um eixo de simetria. Logo, os momentos axiais de inércia serão iguais e $J = 2I$. Neste caso, convém resolver a integral dupla em coordenadas polares:

$$I_{x_1} = \iint_A x_2^2 \cdot dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{d/2} (r \cdot \sin(\theta))^2 r \cdot dr \cdot d\theta = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{J}{2} \quad (11.7)$$

Exemplo 3: Calcule o momento de inércia, com relação ao eixo x_2 da área entre as curvas, mostradas na **Figura 11.4**.

Solução: Como nos exemplos anteriores, não será possível descrever a área com uma única função das duas variáveis $A(x_1; x_2)$. Assim, resolvemos a integral de área como duas integrais aninhadas. Neste caso, convém integrar primeiro em relação a x_2 entre os limites $x_2 = x_1^3$ e $x_2 = x_1^2$, e depois, em relação a x_1 entre os limites constantes $x_1 = 0$ e $x_1 = 1$. Aplicando a definição de I_{x_2} e resolvendo a integral dupla da forma descrita, temos:

$$\begin{aligned}
I_{x_2} &= \int_A x_1^2 \cdot dA = \int_0^1 \int_{x_1^3}^{x_1^2} x_1^2 dx_2 dx_1 = \int_0^1 x_1^2 x_2 \Big|_{x_1^3}^{x_1^2} dx_1 \\
&= \int_0^1 x_1^2 (x_1^2 - x_1^3) dx_1 = \int_0^1 x_1^4 - x_1^5 dx_1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}
\end{aligned} \quad (11.8)$$

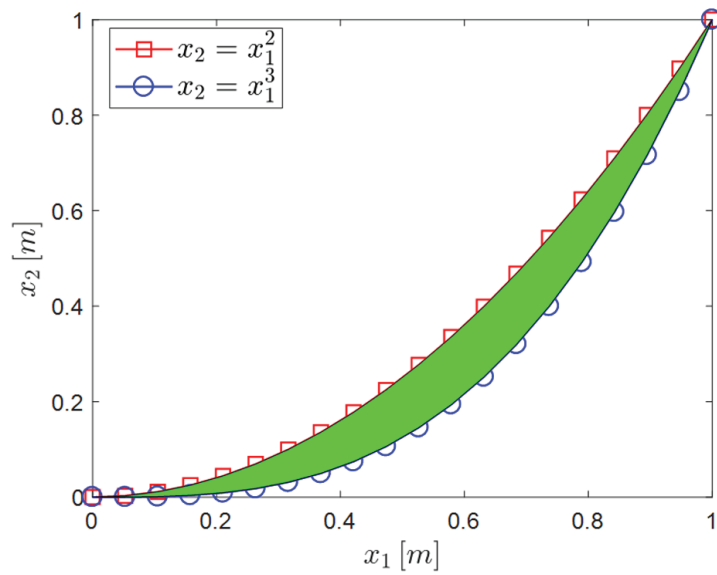


Figura 11.4: Curvas correspondentes às parábolas $x_2 = x_1^2$ e $x_2 = x_1^3$ e a área sombreada entre elas.

Exemplo 4: Calcule o momento polar de inércia da área delimitada pelas curvas $r = 1$ e $r = 2$ ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) em coordenadas polares (Figura 11.5), com relação ao polo ou origem.

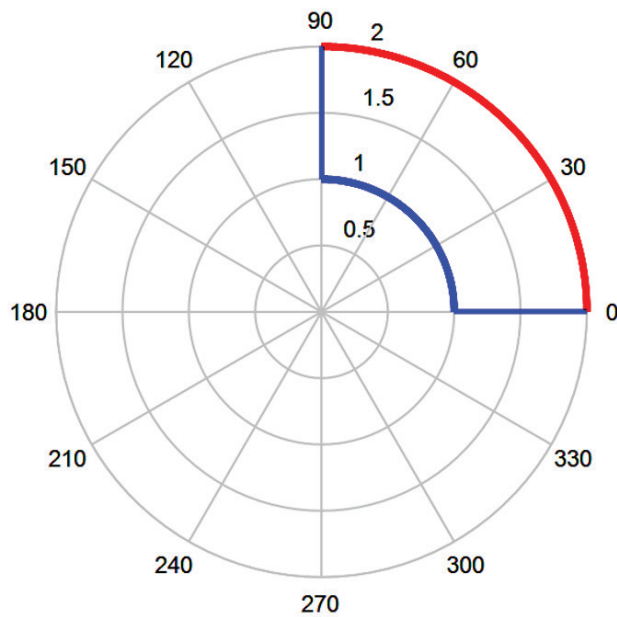


Figura 11.5: Área entre as curvas $r = 1$ e $r = 2$ ($0 \leq \theta \leq \pi/2$), em coordenadas polares.

Solução: Aplicando a definição de J e integrando em coordenadas polares, temos:

$$J = \int_A r^2 dA = \int_0^{\pi/2} \int_1^2 r^2 r dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \left. \frac{r^4}{4} \right|_1^2 d\theta = \frac{15}{4} \theta \Big|_0^{\pi/2} = \frac{15\pi}{8} \quad (11.9)$$

Atividade 1

Atende ao objetivo 1

Calcule o I_{x_1} para a área entre as parábolas da **Figura 11.4**.

Resposta comentada

O procedimento permanece inalterado. É preciso, no entanto, prestar atenção aos detalhes do processo de integração. A solução segue:

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= \int_A x_2^2 \cdot dA = \int_0^1 \int_{x_1^3}^{x_1^2} x_2^2 dx_2 dx_1 = \int_0^1 \left. \frac{x_2^3}{3} \right|_{x_1^3}^{x_1^2} dx_1 \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 (x_1^6 - x_1^9) dx_1 = \frac{1}{3} \left(\frac{x_1^7}{7} - \frac{x_1^{10}}{10} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{70} \end{aligned} \quad (11.10)$$

Atividade 2

Atende ao objetivo 1

Calcule o momento de inércia em relação ao eixo vertical I_{x_2} da área sombreada entre a parábola $x_2^2 = x_1$ e a reta $x_2 = 4$ (**Figura 11.6**).

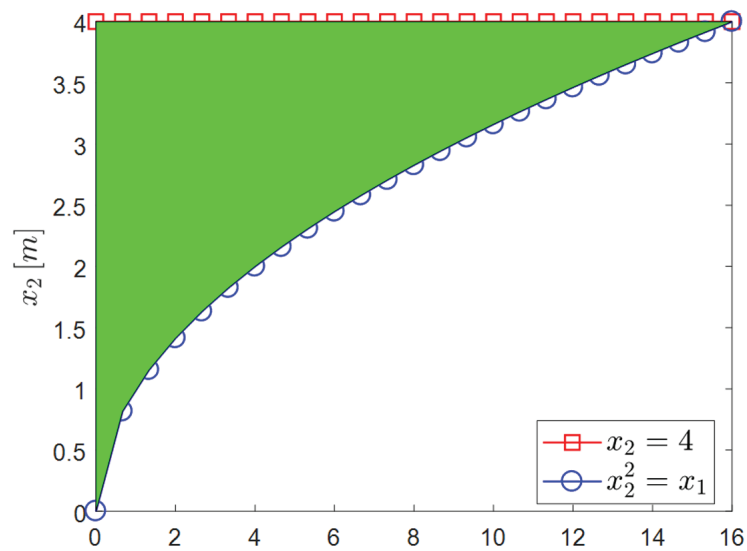


Figura 11.6: Área entre a parábola $x_2^2 = x_1$ e a reta $x_2 = 4$.

Resposta comentada

Para varrer a área sombreada, integramos primeiro em relação ao eixo x_1 e, depois, em relação a x_2 . Como as coordenadas estão em metros, o momento de inércia estará em m^4 .

$$\begin{aligned}
 I_{x_2} &= \int_A x_1^2 \cdot dA = \int_{x_2=0}^{x_2=4} \int_{x_1=0}^{x_1=x_2^2} x_1^2 dx_1 dx_2 = \int_0^4 \frac{x_1^3}{3} \Big|_0^{x_2^2} dx_2 \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^4 x_2^6 dx_2 = \frac{1}{21} x_2^7 \Big|_0^4 = \frac{16384}{70} \cong 780,2 m^4
 \end{aligned} \tag{11.11}$$

Teorema dos eixos paralelos

A definição e as equações para os momentos de inércia axiais que utilizamos até agora se referem aos eixos centroidais da superfície. Para algumas figuras geométricas elementares e também para os perfis estruturais, os momentos de inércia podem ser facilmente calculados pelas equações (11.1) e (11.2), ou encontrados em tabelas (ver, por exemplo, as **Figuras 9.12 e 9.13** de BEER (1994)). Em muitas situações práticas, no entanto, existe a necessidade de calcular momentos de inércia em relação a eixos não centroidais. Isto motiva o desenvolvimento do *teorema dos eixos paralelos*.

Suponha que queremos determinar o I_{x1} para a superfície da **Figura 11.7**. A posição C do centroide da área é conhecida. Logo, a distância d é uma constante. Por outro lado, a distância a é uma variável, pois representa a distância até o elemento diferencial dA com relação ao qual realizaremos a integração. Utilizando a definição do momento de inércia, temos:

$$\begin{aligned}
 I_{x1} &= \int_A x_2^2 \cdot dA = \int_A (a+d)^2 \cdot dA \\
 I_{x1} &= \int_A a^2 \cdot dA + 2d \int_A a \cdot dA + d^2 \int_A dA \\
 I_{x1} &= \bar{I}_{x1} + A \cdot d^2
 \end{aligned} \tag{11.12}$$

A integral $\int_A a \cdot dA$ representa o primeiro momento de área em relação ao eixo centroidal BB, logo será zero. A integral $\bar{I}_{x1} = \int_A a^2 \cdot dA$ é o segundo momento de área da superfície com relação ao centroide. Desta forma, o teorema dos eixos paralelos permite, então, encontrar o I com relação a eixos não centroidais, como a soma do momento centroidal \bar{I} , mais o produto da área da figura vezes a distância d , até o eixo de interesse ao quadrado (equação (11.12)).

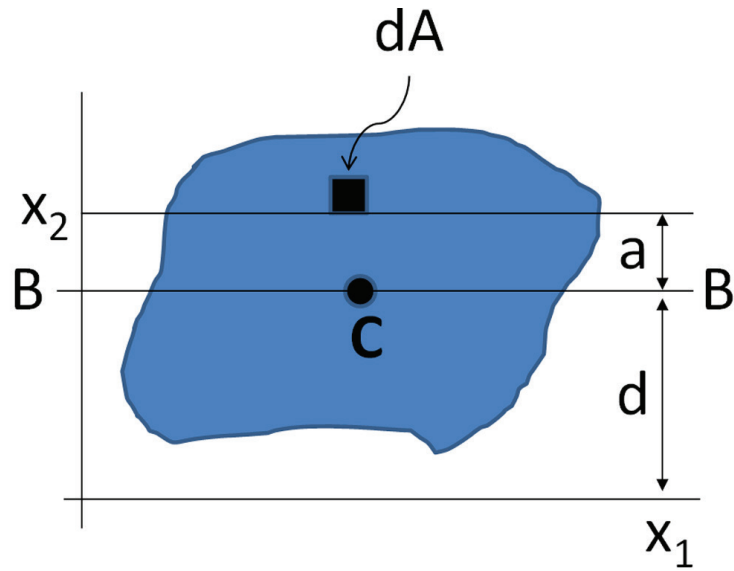


Figura 11.7: Pelo teorema dos eixos paralelos, o momento de inércia de uma superfície em relação a um eixo não centroidal, mas paralelo a este, será $I_{x1} = \bar{I}_{x1} + A \cdot d^2$, onde \bar{I}_{x1} é o momento de inércia em relação ao eixo centroidal.

Exemplo 5: Calcule o momento de inércia da superfície da **Figura 11.3** com relação ao eixo AA.

Solução: O I_{x1} já foi calculado no Exemplo 1. Aplicando o teorema dos eixos paralelos para I_{AA} , temos:

$$I_{AA} = \bar{I}_{x1} + A \cdot d^2 = \frac{bh^3}{12} + bh \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{1}{3}bh^3 \quad (11.13)$$

Neste caso simples, o mesmo resultado teria sido obtido aplicando diretamente a definição de momento de inércia e resolvendo a seguinte integral:

$$I_{AA} = \int_A x_2^2 \cdot dA = \int_0^b \int_0^h x_2^2 dx_2 dx_1 = \frac{1}{3} \int_0^b x_2^3 \Big|_0^h dx_1 = \frac{1}{3} h^3 x_1 \Big|_0^b = \frac{bh^3}{3} \quad (11.14)$$

Atividade 3

Atende ao objetivo 2

Determine a posição do centroide para a seção em T mostrada (**Figura 11.8**) e calcule os momentos de inércia em relação a cada eixo centroidal.

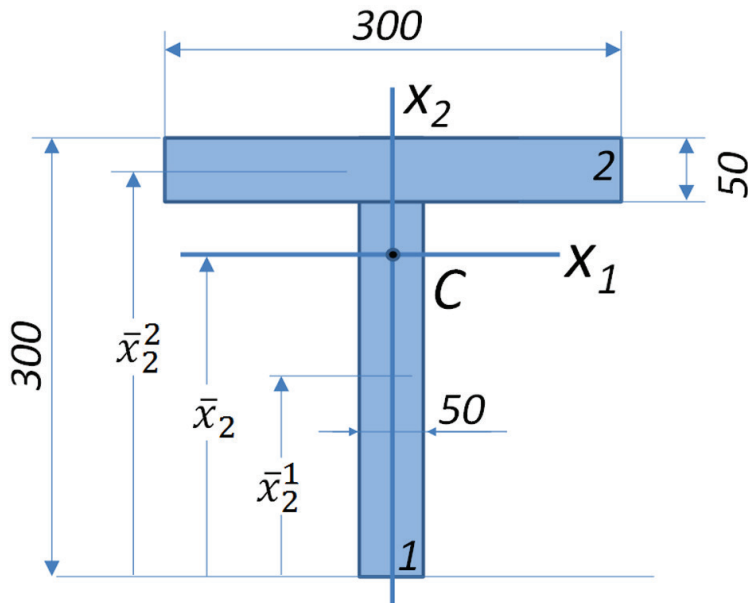


Figura 11.8: Viga em T correspondente à Atividade 3. Todas as dimensões estão em mm.

Resposta comentada

Observamos que o eixo x_2 é um eixo de simetria e, conseqüentemente, o centroide C estará sobre ele. A posição vertical de C será determinada utilizando as fórmulas da **Aula 6**. Tomando como referência a base do perfil e considerando os retângulos 1 e 2, temos:

$$\bar{x}_2 = \frac{\sum \bar{x}_{2i} \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{\bar{x}_2^1 \cdot A_1 + \bar{x}_2^2 \cdot A_2}{A_1 + A_2} \quad (11.15)$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\frac{0,25}{2} \cdot 0,25 \cdot 0,05 + 0,275 \cdot 0,3 \cdot 0,05}{0,25 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,05} = 0,207 m$$

Para determinar o momento de inércia de todo o perfil em relação ao eixo x_1 , primeiramente calculamos os momentos de cada retângulo com relação aos seus próprios eixos centroidais:

$$\bar{I}_{x1}^1 = \frac{0,05 \cdot 0,250^3}{12} = 6,5 \times 10^{-5} m^4$$

$$\bar{I}_{x1}^2 = \frac{0,3 \cdot 0,050^3}{12} = 3,12 \times 10^{-6} m^4 \quad (11.19)$$

Para calcular os momentos de inércia de cada retângulo em relação ao eixo centroidal, aplicamos o teorema dos eixos paralelos:

$$I_{x1}^1 = \bar{I}_{x1}^1 + A_1 \cdot d_1^2 = 6,5 \times 10^{-5} + 0,25 \cdot 0,05 \cdot (\bar{x}_2 - \bar{x}_2^1)^2 = 1,48 \times 10^{-4} m^4$$

$$I_{x1}^2 = \bar{I}_{x1}^2 + A_2 \cdot d_2^2 = 3,12 \times 10^{-6} + 0,3 \cdot 0,05 \cdot (\bar{x}_2 - \bar{x}_2^2)^2 = 1,03 \times 10^{-4} m^4 \quad (11.19)$$

$$I_{x1} = I_{x1}^1 + I_{x1}^2 = 2,52 \times 10^{-4} m^4$$

Para o momento de inércia com relação ao eixo x_2 , não precisamos do teorema dos eixos paralelos, devido à simetria do perfil nessa direção:

$$\bar{I}_{x2} = \frac{0,25 \cdot 0,250^3 + 0,05 \cdot 0,300^3}{12} = 1,13 \times 10^{-4} m^4 \quad (11.19)$$

Produtos de inércia

A definição do *produto de inércia* segue o mesmo raciocínio que a dos momentos de inércia. Os momentos de área, no entanto, são calculados simultaneamente em relação aos dois eixos coordenados:

$$I_{x1x2} = \int_A x_1 x_2 dA \quad (11.16)$$

O produto de inércia também tem unidades de comprimento à quarta potência e, diferentemente dos momentos axiais e do momento polar

de inércia, poderá ser negativo, positivo ou zero. No caso de áreas simétricas, em relação a qualquer eixo, $I_{x_1x_2} = 0$. Por exemplo, se o eixo x_1 for um eixo de simetria, haverá a mesma quantidade de produtos x_1x_2dA do que produtos $-x_1x_2dA$ em toda a área, e a integral será zero. O teorema dos eixos paralelos permite também encontrar o produto de inércia de áreas em relação a eixos não centroidais:

$$I_{x_1x_2} = \bar{I}_{x_1x_2} + A \cdot dx_1 \cdot dx_2 \quad (11.17)$$

Na equação (11.17) $\bar{I}_{x_1x_2}$ é o produto de inércia da área em relação ao seu centroide, enquanto dx_1 e dx_2 são as distâncias (não confundir com diferenciais) desde o centroide da área até os respectivos eixos não centroidais. Observe que dx_1 e dx_2 podem ser positivos ou negativos, dependendo da posição relativa do centroide até a origem do referencial. Se algum dos eixos centroidais da área for também de simetria, $\bar{I}_{x_1x_2} = 0$ e $I_{x_1x_2} = A \cdot dx_1 \cdot dx_2$.

Exemplo 6: A **Figura 11.9** mostra a seção transversal de uma viga metálica com perfil em L. Defina a posição do centroide da seção e calcule os momentos de inércia e produto de inércia com relação aos eixos centroidais. A viga tem a mesma largura das abas $w = 60 \text{ mm}$ e espessura $t = 10 \text{ mm}$.

Solução: Para posicionar o centroide, dividimos a seção nos retângulos A e B e aplicamos as fórmulas da **Aula 6**, “Forças distribuídas”. Utilizamos como referencial inicial a base do perfil. Pela simetria da seção, apenas uma das distâncias até o centroide será calculada. A **Figura 11.10** mostra os parâmetros utilizados em todas as equações do presente exemplo.

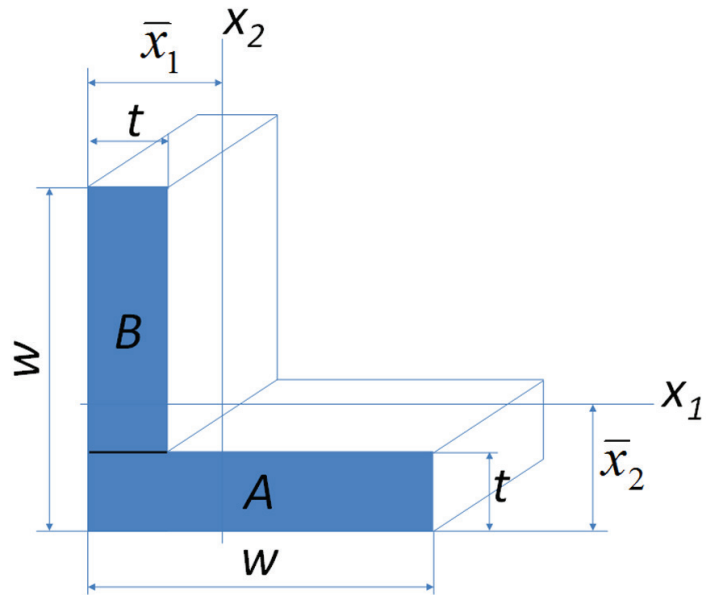


Figura 11.9: Perfil de uma viga em L (Exemplo 6).

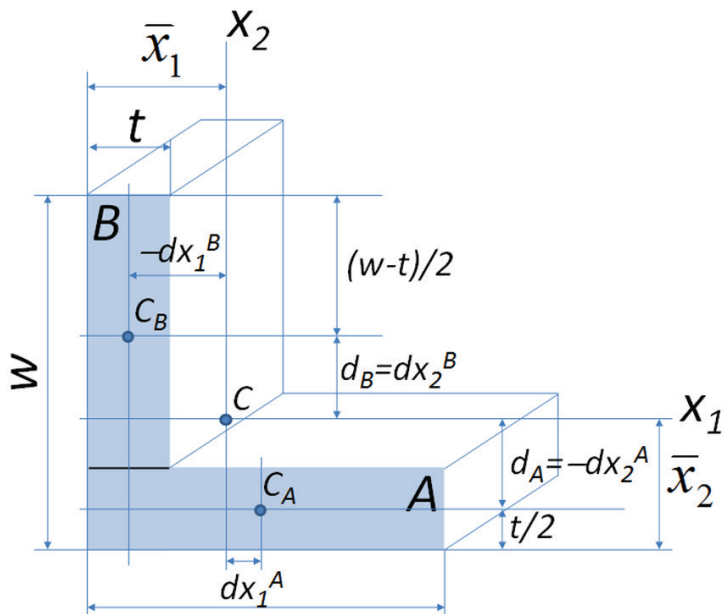


Figura 11.10: Perfil do Exemplo 6 mostrando a posição do centroide bem como as distâncias necessárias para a aplicação do teorema dos eixos paralelos.

$$\bar{x}_2 = \frac{\sum \bar{x}_{2i} \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{\bar{x}_{2A} \cdot A_A + \bar{x}_{2B} \cdot A_B}{A_A + A_B} = \frac{\frac{t}{2} \cdot w \cdot t + \left(\frac{w-t}{2} + t\right)(w-t) \cdot t}{w \cdot t + (w-t) \cdot t} \quad (11.18)$$

$$\bar{x}_2 = \frac{t^2 - t \cdot w - w^2}{2 \cdot t - 4 \cdot w} = 18,6 \text{ mm} = \bar{x}_1$$

Os eixos centroidais dos retângulos A e B não coincidem com os do perfil em L. Logo, utilizaremos o teorema dos eixos paralelos tanto para o cálculo dos momentos de inércia (equação (11.12)) como do produto de inércia (equação (11.17)). Começamos pelo momento de inércia em torno do eixo x_1 (igual ao I_{x2}):

$$I_{x1}^A = \bar{I}_{x1}^A + A_A \cdot d_A^2 = \frac{w}{12} \left(\frac{t}{2}\right)^3 + w \cdot t \cdot \left(\bar{x}_2 - \frac{t}{2}\right)^2 = 1,12 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

$$I_{x1}^B = \bar{I}_{x1}^B + A_B \cdot d_B^2 = \frac{t \cdot (w-t)^3}{12} + (w-t) \cdot t \cdot \left(\frac{w-t}{2} + t - \bar{x}_2\right)^2 = 2,38 \times 10^5 \text{ mm}^4 \quad (11.19)$$

$$I_{x1} = I_{x1}^A + I_{x1}^B = 3,5 \times 10^5 \text{ mm}^4 = I_{x2}$$

Os eixos centroidais de cada retângulo são também eixos de simetria, e os produtos de inércia em relação a eles será zero. Observe que durante a aplicação do teorema dos eixos paralelos algumas distâncias dx_1 e dx_2 são negativas. Por exemplo, o centroide C_A do retângulo A está no quarto quadrante. Logo dx_1^A será positivo e dx_2^A será negativo. O oposto acontece com as distâncias dx_1 e dx_2 para o retângulo B, já que C_B está no segundo quadrante (**Figura 11.10**).

$$I_{x1x2}^A = \bar{I}_{x1x2}^A + A_A \cdot dx_1^A \cdot dx_2^A =$$

$$= 0 + w \cdot t \cdot \left(\frac{w}{2} - \bar{x}_1\right) \cdot \left(-\left(\bar{x}_2 - \frac{t}{2}\right)\right) = -92980 \text{ mm}^4$$

$$I_{x1x2}^B = \bar{I}_{x1x2}^B + A_B \cdot dx_1^B \cdot dx_2^B = \quad (11.20)$$

$$= 0 + (w-t) \cdot t \cdot \left(-\left(\bar{x}_1 - \frac{t}{2}\right)\right) \cdot \left(\frac{w+t}{2} - \bar{x}_2\right) = -1,116 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

$$I_{x1x2} = I_{x1x2}^A + I_{x1x2}^B = -2,045 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

Equações de transformação e momentos principais de Inércia

Os momentos e produtos de inércia estudados na presente aula fornecem uma ideia da distribuição dos pontos de uma determinada área em relação a um referencial cartesiano arbitrário. Em determinadas situações práticas, pode ser necessário calcular os momentos e produtos de inércia para referenciais cartesianos girados de um certo ângulo θ (aqui considerado positivo, no sentido anti-horário), em relação ao original (**Figura 11.11**). A forma mais eficiente de calcular as equações que relacionam as propriedades de área nestes dois referenciais consiste em organizar os momentos e produtos de inércia como elementos de uma matriz de momentos de inércia \mathbf{I} e aplicar as equações de transformação das matrizes entre uma base e outra.

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{x1} & I_{x1x2} \\ I_{x2x1} & I_{x2} \end{bmatrix} \quad (11.21)$$

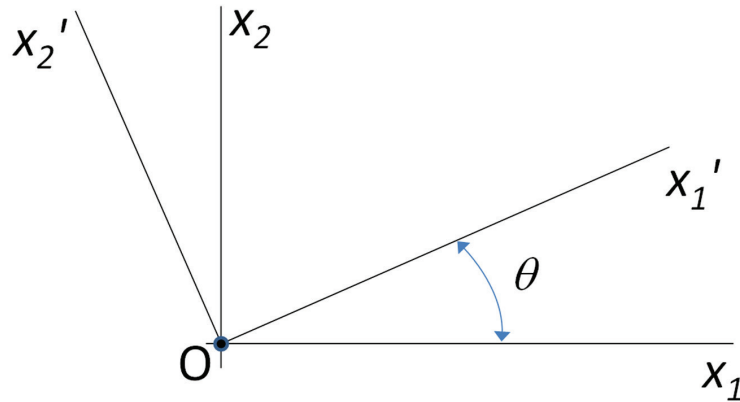


Figura 11.11: A matriz da transformação \mathbf{T} , que permite girar a representação cartesiana do tensor \mathbf{I} entre duas bases, é composta por funções trigonométricas do ângulo θ .

Diferentemente dos momentos de inércia de massa utilizados em análises dinâmicas, a matriz \mathbf{I} , aqui utilizada, não representa um tensor, já que não está associada a nenhuma grandeza física. Assim, as transformações matriciais que desenvolveremos, na continuação, devem ser entendidas apenas como o meio mais eficaz, na opinião do autor, para se chegar às equações de transformação dos momentos e produtos de inércia, e não como uma aplicação propriamente dita da álgebra tensorial.

Consideramos $I_{x_1x_2} = I_{x_2x_1}$. Logo, a nossa matriz \mathbf{I} será simétrica. Na diagonal, as componentes de \mathbf{I} são os momentos de inércia em relação aos eixos coordenados, enquanto que as componentes fora da diagonal são os produtos de inércia. Para calcular as componentes de \mathbf{I} em um referencial $x'_1x'_2$ que está inclinado de um certo ângulo θ , em sentido anti-horário com relação a x_1x_2 (**Figura 11.11**), primeiramente introduzimos a matriz de transformação \mathbf{T} , composta pelos cossenos dos ângulos formados entre o novo e o velho referencial:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (11.22)$$

Para simplificar as equações, adotaremos os símbolos s e c para substituir os senos e cossenos, respectivamente. Designando por \mathbf{I}' a matriz dos momentos de inércia no novo referencial, temos:

$$\mathbf{I}' = \mathbf{T} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{T}^T$$

$$\begin{bmatrix} I_{x'_1} & -I_{x'_1x'_2} \\ -I_{x'_2x'_1} & I_{x'_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{x_1} & I_{x_1x_2} \\ I_{x_2x_1} & I_{x_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \quad (11.23)$$

Na equação (11.23) \mathbf{T}^T é a transposta da matriz \mathbf{T} . As equações de transformação resultantes da multiplicação matricial são:

$$I_{x'_1} = I_{x_1} \cdot c^2 + I_{x_2} \cdot s^2 + 2 \cdot I_{x_1x_2} \cdot s \cdot c$$

$$I_{x'_1x'_2} = -(I_{x_1} - I_{x_2}) \cdot s \cdot c + I_{x_1x_2} \cdot (c^2 - s^2) \quad (11.24)$$

O expoente das funções trigonométricas pode ser reduzido de 2 para 1 ao custo de dobrar o argumento destas (de θ para 2θ), mediante as identidades $c(2\theta) = c^2 - s^2$, $s(2\theta) = 2 \cdot s \cdot c$, $s^2 = \frac{1}{2}(1 - c(2\theta))$ e $c^2 = \frac{1}{2}(1 + c(2\theta))$, resultando em:

$$I_{x'_1} = \frac{I_{x_1} + I_{x_2}}{2} + \frac{I_{x_1} - I_{x_2}}{2} \cdot c(2\theta) + I_{x_1x_2} \cdot s(2\theta)$$

$$I_{x'_1x'_2} = -\frac{I_{x_1} - I_{x_2}}{2} \cdot s(2\theta) + I_{x_1x_2} \cdot c(2\theta) \quad (11.25)$$

Estas (equações em (11.24) e (11.25)) são as equações de transformação dos momentos de inércia. Elas mostram como os momentos e produtos de inércia de áreas variam com a orientação dos eixos coordenados (dada pelo ângulo θ), quando se conhecem os valores da matriz \mathbf{I} (ou seja os valores de I_{x1} , I_{x2} e I_{x1x2}) na orientação original ($\theta = 0$). Há duas formas de analisar graficamente a variação das componentes da matriz de momentos de inércia com a inclinação dos eixos centroidais: 1) plotando as curvas das equações em (24) na forma explícita $\mathbf{I}(\theta)$, ou 2) na forma paramétrica, em coordenadas $I_{x1}(\theta)$ vs. $I_{x1x2}(\theta)$ (equações em (11.25)). As duas formas serão utilizadas no próximo exemplo.

Exemplo 7: Considere uma viga metálica com perfil em L, similar à do Exemplo 6 (**Figura 11.12**), mas com dimensões diferentes ($w = 100 \text{ mm}$ e $t = 15 \text{ mm}$). Calcule a posição do centroide, os momentos e o produto de inércia, com relação aos eixos centroidais. Plote a variação do momento de inércia da seção com relação ao eixo x'_1 e do produto de inércia $I_{x'_1x'_2}$, quando os eixos centroidais giram entre 0 e π , tanto na forma explícita, como na forma paramétrica. Comente os resultados.

Solução: Utilizando as equações desenvolvidas no Exemplo 6, determinamos os parâmetros solicitados. Os resultados se mostram na **Tabela 11.1**.

Tabela 11.1: Posição do centroide, e momento e produto de inércia para o perfil em L da **Figura 11.12** (Exemplo 7).

Parâmetro	Valor	Unidades
$\bar{x}_1 = \bar{x}_2$	30,47	Mm
$I_{x2} = I_{x1}$	$2,49 \times 10^6$	mm^4
I_{x1x2}	$-1,46 \times 10^6$	mm^4

A substituição dos valores de $I_{x1} = I_{x2}$ e I_{x1x2} da **Tabela 11.1** na equação (11.24) gera duas equações que são função de uma única variável (o ângulo θ). Estas equações constituem a forma explícita $\mathbf{I}(\theta)$, e os seus respectivos gráficos aparecem na **Figura 11.13** (esquerda). Já a forma paramétrica (onde θ é o parâmetro) se mostra na **Figura 11.13** (direita). Este último gráfico é conhecido como o *círculo de Mohr* para os momentos de inércia. Nos dois casos, os pontos sobre as curvas ou sobre o círculo representam pares de valores de I_{x1} e I_{x1x2} para diferentes inclinações θ dos eixos centroidais. Com base nos gráficos, podemos fazer as seguintes observações:

1. a curva dos momentos de inércia tem valores extremos (máximos e mínimos) em duas inclinações específicas dos eixos centroidais ($\pi/4$ e $3\pi/4$, para este caso). Estas são as direções principais θ_{p1} e θ_{p2} e os eixos assim orientados são os eixos principais de inércia.
2. nas orientações principais, o círculo de Mohr intercepta o eixo horizontal, ou seja, os momentos de inércia $I_{x'l}$ passam por valores extremos.
3. sempre que o momento de inércia $I_{x'l}$ passa por um valor extremo, o produto de inércia é zero. Este resultado não é casual já que, na equação (24), $I_{x'1x'2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{d\theta}(I_{x'1})$ ou $I_{x'1x'2} = \frac{d}{d(2\theta)}(I_{x'1})$ na equação (25).
4. o mínimo do produto de inércia $I_{x'l x'2}$ (que ocorre em $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, no exemplo) não coincide com o valor zero do momento de inércia, e sim com o valor médio deste, $I_m = (I_{x1} + I_{x2})/2$.
5. as duas curvas retornam aos seus valores de partida em $\theta = \pi$, como deveriam, pois isto equivale a inverter o sentido dos eixos centroidais, mas conservando a sua direção original.

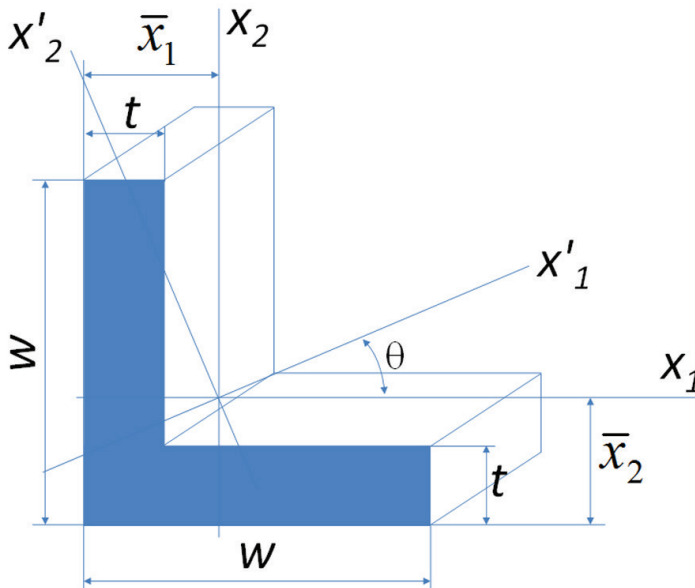


Figura 11.12: Perfil em L similar ao do Exemplo 6. Os momentos e o produto de inércia do perfil variam com o ângulo de giro dos eixos centroidais.

Uma expressão para os valores extremos do momento de inércia e para o ângulo em que eles ocorrem pode ser obtida utilizando os métodos de análise de funções do cálculo elementar. As operações algébricas necessárias se simplificam, se utilizarmos a equação (11.25). Os resultados são:

$$I_{x1\min}^{\max} = \frac{I_{x1} + I_{x2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{x1} - I_{x2}}{2}\right)^2 + I_{x1x2}^2}$$

$$\theta_p = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2 \cdot I_{x1x2}}{I_{x1} - I_{x2}} \right)$$
(11.26)

Para o Exemplo 7, os valores numéricos são os seguintes:

$$I_{x1}^{\max} = 3,95 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{x1\min} = 1,02 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\theta_p = 0,78 \text{ rad} = -45^\circ$$
(11.27)

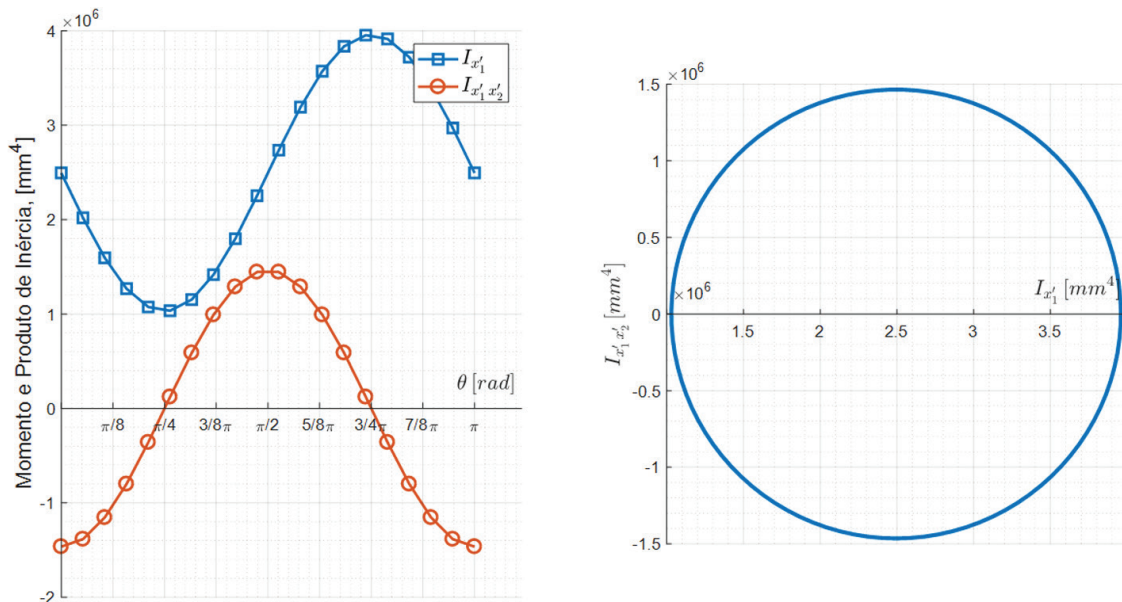


Figura 11.13: Gráficos mostrando a variação dos momentos e do produto de inércia com a inclinação dos eixos centroidais, para o perfil do Exemplo 7.

Atividade 4

Atende ao objetivo 3

O perfil I padronizado de abas largas da **Figura 11.14** tem $I_1 = 145 \times 10^6 \text{ mm}^4$ e $I_2 = 20,7 \times 10^6 \text{ mm}^4$. Observe que os eixos 1 e 2 são eixos centroidais e também de simetria. Plote os gráficos equivalentes aos da **Figura 11.13** para este perfil e discuta os resultados.

Resposta comentada

Em virtude da simetria do perfil os eixos centroidais são também principais de inércia logo $I_{\max} = I_1$, $I_{\min} = I_2$, $I_{12} = 0$ e $\theta_p = 0^\circ$. Em qualquer outra orientação dos eixos os momentos de inércia deixarão de ser extremos e os produtos de inércia deixarão de ser iguais a zero, como verificado na **Figura 11.15**.

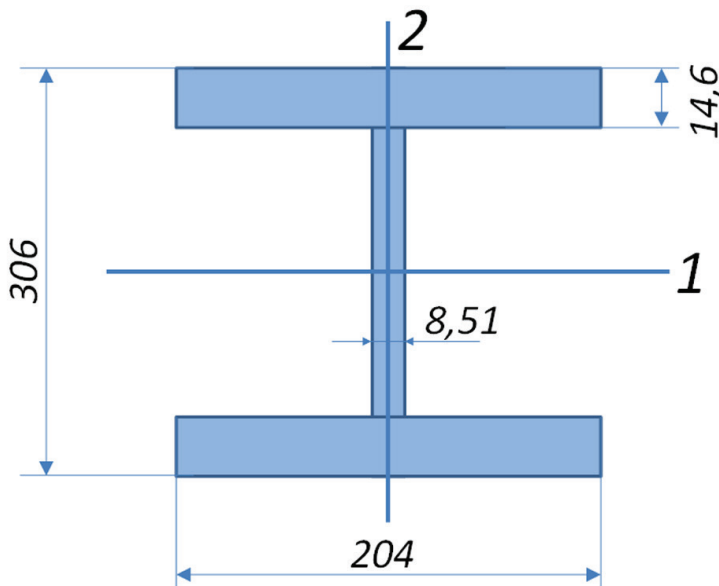


Figura 11.14: Perfil I padronizado. Todas as dimensões estão em mm.

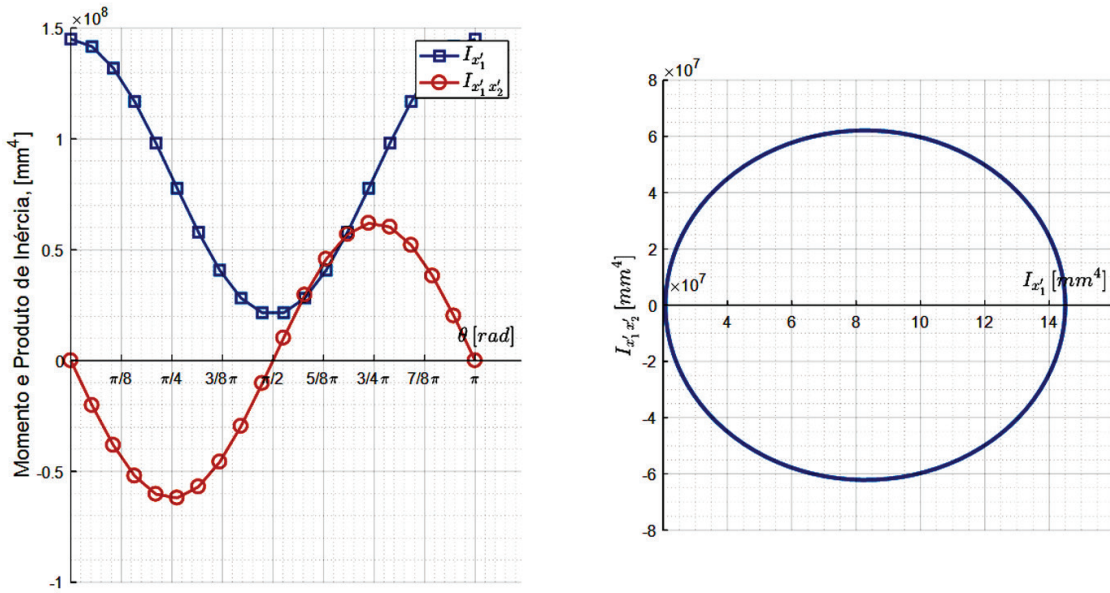


Figura 11.15: Gráficos correspondentes à Atividade 4.

Conclusão

Nesta aula, definimos e aprendemos a calcular algumas das mais importantes propriedades geométricas das superfícies planas, como os momentos de inércia e os produtos de inércia. Especificamente, o momento de inércia constitui uma medida da resistência da área a girar na presença de momentos fletores. Quanto maior o I em torno de um determinado eixo, menor a curvatura para um mesmo momento em torno do eixo ortogonal. Para alguns perfis estruturais e outras áreas, os eixos centroidais nem sempre estão orientados na direção dos eixos principais de inércia. A orientação destes eixos e os valores extremos de I que nela atuam devem ser calculados pelas equações em (26).

A localização dos eixos principais de inércia tem uma aplicação prática imediata: durante o projeto estrutural, seria desejável orientar os perfis de maneira que o momento fletor estivesse aplicado na direção do I_{\min} (logo perpendicular ao I_{\max}), diminuindo a curvatura e, consequentemente, as chances de falha do elemento.

Resumo

As equações para o cálculo dos momentos axiais I e polar J de inércia, em relação a eixos que passam pelo centroide da área, são:

$$\begin{aligned}\bar{I}_{x1} &= \int_A x_2^2 \cdot dA \\ \bar{I}_{x2} &= \int_A x_1^2 \cdot dA \\ J &= \bar{I}_{x1} + \bar{I}_{x2}\end{aligned}\quad (11.28)$$

Se houver necessidade de calcular os momentos de inércia em relação a eixos não centroidais, utilizamos o teorema dos eixos paralelos:

$$I_x = \bar{I}_x + A \cdot d^2 \quad (11.29)$$

O produto de inércia se calcula como o somatório (ou integral) dos produtos elementares simultâneos de momentos de área. Da mesma forma que, para os momentos de inércia, quando os eixos de interesse não passam pelo centroide, utiliza-se o teorema dos eixos paralelos:

$$\begin{aligned}\bar{I}_{x1x2} &= - \int_A x_1 x_2 dA \\ I_{x1x2} &= \bar{I}_{x1x2} + A \cdot dx_1 \cdot dx_2\end{aligned}\quad (11.30)$$

Os momentos e o produto de inércia variam com a inclinação dos eixos centroidais. Os valores extremos de I e a direção dos eixos principais de inércia se calculam pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}I_{x1\min}^{\max} &= \frac{I_{x1} + I_{x2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{x1} - I_{x2}}{2}\right)^2 + I_{x1x2}^2} \\ \theta_p &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2 \cdot I_{x1x2}}{I_{x1} - I_{x2}} \right)\end{aligned}\quad (11.31)$$

Referências

BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R. Jr. *Mecânica Vetorial para Engenheiros*. 5. ed. São Paulo: Makron Books, 1994.

CRANDALL, S. H.; DAHL, N. C.; LARDNER, T.J. *An Introduction to the Mechanics of Solids*. 3. ed. Tokyo: McGraw-Hill Inc., 1978.

HIBBELER, R. C. *Estática Mecânica para Engenharia*. 12. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.