CEJA >>
CENTRO DE EDUCAÇÃO
de JOVENS e ADULTOS

MATEMÁTICA

Ensino Fundamental II

Paulo Roberto Castor Maciel
Leandro de Oliveira Moreira

Fascículo 5
Unidades 13, 14 e 15

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Governador
Wilson Witzel

Vice-Governador
Claudio Castro

Secretário de Estado de Ciência, Tecnologia e Inovação
Leonardo Rodrigues

Secretário de Estado de Educação
Pedro Fernandes

FUNDAÇÃO CECIERJ

Presidente
Carlos Eduardo Bielschowsky

PRODUÇÃO DO MATERIAL CEJA (CECIERJ)

Elaboração de Conteúdo
Paulo Roberto Castor Maciel
Leandro de Oliveira Moreira

Diretoria de Material Didático
Bruno José Peixoto

Coordenação de Design Instrucional
Flávia Busnardo
Paulo Vasques de Miranda

Revisão de Língua Portuguesa
José Meyohas

Design Instrucional
Renata Vittoretti

Diretoria de Material Impresso
Ulisses Schnaider

Projeto Gráfico
Núbia Roma

Ilustração
Renan Alves

Programação Visual
Maria Fernanda de Novaes

Capa
Renan Alves

Produção Gráfica
Fábio Rapello Alencar

C391

CEJA : Centro de educação de jovens e adultos. Ensino fundamental II. Matemática / Paulo Roberto Castor Maciel, Leandro de Oliveira Moreira . Rio de Janeiro : Fundação Cecierj, 2019. Rio de Janeiro : Fundação Cecierj, 2019.

Fasc. 5 – unid. 13-14-15

46p.; 21 x 28 cm.

ISBN: 978-85-458-0179-5

1. Matemática. 2. Números racionais. 3. Razão e proporção. 4. Proporcionalidade. I.Maciel, Roberto Castor. II. Moreira, Leandro de Oliveira. 1. Título.

CDD: 510

Referências bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.
Texto revisado segundo o novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa.

Sumário

Prezado(a) Aluno(a),

Seja bem-vindo a uma nova etapa da sua formação. Estamos aqui para auxiliá-lo numa jornada rumo ao aprendizado e conhecimento.

Você está recebendo o material didático impresso para acompanhamento de seus estudos, contendo as informações necessárias para seu aprendizado e avaliação, exercício de desenvolvimento e fixação dos conteúdos.

Além dele, disponibilizamos também, na sala de disciplina do CEJA Virtual, outros materiais que podem auxiliar na sua aprendizagem.

O CEJA Virtual é o Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) do CEJA. É um espaço disponibilizado em um site da internet onde é possível encontrar diversos tipos de materiais como vídeos, animações, textos, listas de exercício, exercícios interativos, simuladores, etc. Além disso, também existem algumas ferramentas de comunicação como chats, fóruns.

Você também pode postar as suas dúvidas nos fóruns de dúvida. Lembre-se que o fórum não é uma ferramenta síncrona, ou seja, seu professor pode não estar online no momento em que você postar seu questionamento, mas assim que possível irá retornar com uma resposta para você.

Para acessar o CEJA Virtual da sua unidade, basta digitar no seu navegador de internet o seguinte endereço: http://cejarj.cecierj.edu.br/ava

Utilize o seu número de matrícula da carteirinha do sistema de controle acadêmico para entrar no ambiente. Basta digitá-lo nos campos “nome de usuário” e “senha”.

Feito isso, clique no botão “Acesso”. Então, escolha a sala da disciplina que você está estudando. Atenção! Para algumas disciplinas, você precisará verificar o número do fascículo que tem em mãos e acessar a sala correspondente a ele.

Bons estudos!

CEJA >>
CENTRO DE EDUCAÇÃO
de JOVENS e ADULTOS

Números racionais

Matemática - Fascículo 5 Unidade 13

Objetivos de aprendizagem

1. Ampliar o conceito de números fracionários e decimais;
2. Introduzir as operações básicas (Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão) dos números racionais;
3. Apresentar a potenciação e radiciação dos números racionais.

Para início de conversa...

A pizza é um alimento que consiste em massa de farinha de trigo com fermento, no formato de disco, com molho de tomate e ingredientes variados, e assado em forno. Segundo relatos históricos, os egípcios e hebreus foram os primeiros a elaborarem a massa. Há outros estudiosos que afirmam que o princípio se deu com os gregos, que tinham o hábito de assar a massa de pão em fogo ardente. Além disso, três séculos antes de Cristo, os fenícios colocavam camadas de carne e cebola sobre o pão. Mas foi séculos depois, que os italianos começaram a recobrir a massa com tomate e outros ingredientes. Hoje, há uma variedade de sabores disponíveis no mercado. Ao comermos pizza, temos o hábito de cortá-la em fatias. Essas fatias dependem da quantidade de pessoas que comerão a pizza.

1. Números Fracionários

Uma família comprou uma pizza de calabresa e fatiou-a em 10 pedaços iguais. O pai comeu três pedaços, a mãe comeu dois pedaços, o filho comeu dois pedaços. Ao todo, quanto foi consumido de pizza? Se analisarmos, foram comidos 7 pedaços. A partir desses valores, podemos representar por meio de uma fração. O número de pedaços divididos será o denominador da fração, e número de pedaços comido será o numerador; poderemos representar da seguinte forma: $\frac{7}{10}$. Também poderíamos questionar qual a fração que representa a quantidade de pizza não consumida: como sobraram três pedaços, teremos $\frac{3}{10}$.

As frações também podem representar números decimais. No caso das fatias de pizza, podemos considerar que $\frac{7}{10}$ = 0,7 e $\frac{3}{10}$ = 0,3. Esses valores resultam em decimais exatos. Mas você sabe resolver essa conta? Vamos lembrar?

Calculando $\frac{7}{10}$, ou seja, 7 ÷ 10 ⟶ **7** | **10**

Observe que 7 é menor que 10. Logo, não á para dividir. Então, colocamos (0,) no quociente e acrescentamos um zero no dividendo.

A conta ficará assim: $\begin{array}{r|l} 70 & 10 \\ \cline{2-2} & 0, \end{array}$, e agora é possível dividir.

Como 70 ÷ 10 = 7, temos: $\begin{array}{r|l} 70 & 10 \\ \cline{2-2} 0 & 0,7 \end{array}$

Logo, $\frac{7}{10} = 0{,}7$

E como representamos por meio de um número decimal a seguinte fração $\frac{3}{5}$?

Para fazer essa representação, basta dividir o numerador pelo denominador.

3 ÷ 5 Dessa forma, obteremos 0,6.

$\frac{2}{3} = 0{,}666...$ esse número é uma dízima periódica.

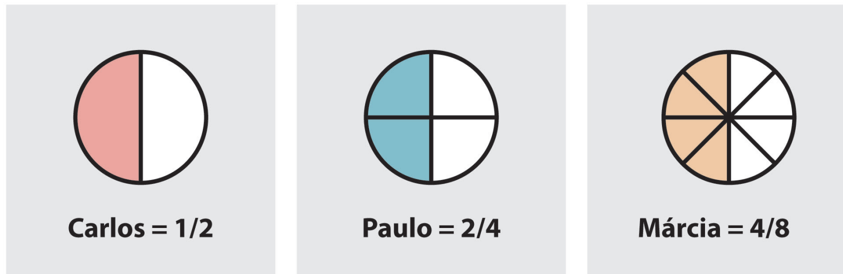
Anote as respostas em seu caderno.

Atividade 1

Numa noite de sábado, três amigos foram ao barzinho e pediram uma pizza brotinho cada um. Como o garçom era uma pessoa muito atenciosa, atendeu ao pedido de cada um sem reclamar. Carlos pediu que sua pizza fosse dividida ao meio, mas só comeu $\frac{1}{2}$. Paulo pediu a sua dividida em 4 partes iguais e só comeu 2 partes. Já Márcia, alegando estar de dieta, pediu que a sua viesse em 8 pequenos pedaços, e saiu feliz, pois só comeu 4.

Fonte: https://www.freeimages.com/photo/pizza-1325642 - Foto: Gabriel Robledo

Os desenhos a seguir nos auxiliarão a compreender quanto cada um consumiu.



O que podemos dizer sobre quem comeu mais?

Anote as respostas em seu caderno.

2. Representando as frações na reta racional

Podemos localizar os números racionais em uma reta. Os passos necessários para essa localização são:

- fixar uma origem O;
- determinar um intervalo entre os números referente a uma unidade, tal que a medida desse intervalo seja igual a 1;
- estabelecer o sentido da direita para ser o positivo.

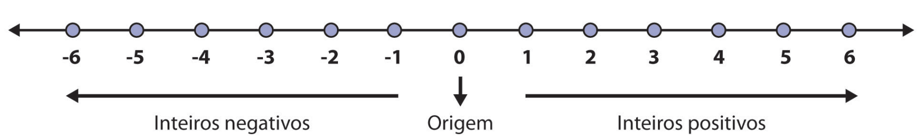
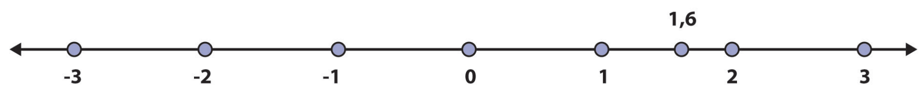


Figura: Localização dos números na reta.

Após marcar os números inteiros na reta, podemos localizar os pontos dos demais números racionais. Observe que podemos identificar, dentre os números inteiros, onde os números racionais se encontram.

Veja alguns exemplos:

- 1,6 é um número racional entre 1 e 2,

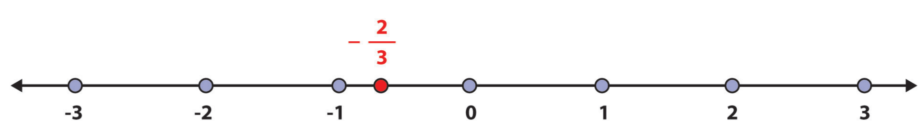


- $-\dfrac{2}{3}$ é um número racional entre −1 e 0, pois

  $-\dfrac{2}{3} = -0{,}666...$

Atenção

Para verificar a igualdade $-\dfrac{2}{3} = -0{,}666...$ utilize uma calculadora e divida −2 por 3. Verá que o resultado dará −0,6666...



Como todo número racional pode ser escrito na forma de uma fração, com o processo utilizado nos exemplos, podemos localizar qualquer número racional na reta.

Então, podemos afirmar que, para cada número racional, existe um ponto na reta. Por outro lado, nem todo ponto na reta tem como correspondente um número racional. Existem pontos que representam números chamados irracionais, que você irá estudar em módulos posteriores.

2.1 Módulo ou valor absoluto de um número racional

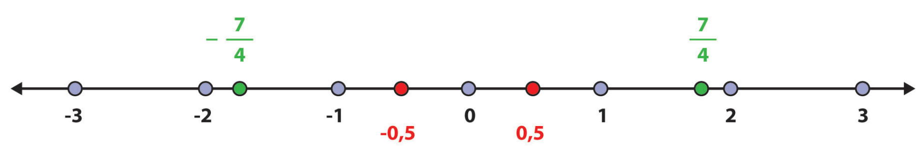
Chamamos de *módulo* de um número inteiro a *distância* desse número até o zero na reta dos inteiros. O mesmo acontece com os números racionais. Por exemplo: para encontrarmos o módulo de $-\dfrac{7}{4}$, procuramos na reta numerada a distância de $-\dfrac{7}{4}$ até o zero. Essa distância é sempre positiva.

Chamamos de módulo, ou valor absoluto de um número racional, a distância do ponto que representa esse número até a origem (zero).

Representamos desta maneira: $\left|-\frac{7}{4}\right| = \frac{7}{4}$ e $\left|+\frac{7}{4}\right| = \frac{7}{4}$.

É bom lembrar que o módulo de um número diferente de zero é sempre positivo, pois representa uma distância.

Dois números racionais são opostos quando são representados por pontos que estão à mesma distância do zero, mas de lados opostos na reta. Observe a figura a seguir:



Observe que os pontos estão à mesma distância da origem O.

Dizemos então que o oposto ou simétrico de $-\frac{7}{4}$ é $+\frac{7}{4}$, e o oposto de +0,5 é –0,5.

Anote as respostas em seu caderno.

Atividade 2

Pedro estava tentando adivinhar que número Lucas escreveu num pedaço de papel. A única dica que Lucas deu foi que o módulo desse número era $\frac{21}{5}$. Que número é esse?

Anote as respostas em seu caderno.

3. Operações com números racionais fracionários

3.1 Adição e subtração de números racionais fracionários

Para adicionar ou subtrair números fracionários, devemos, em primeiro lugar, observar os denominadores das frações, que podem ser iguais ou diferentes.

a) Quando as frações possuem denominadores iguais.

Para adicionar ou subtrair números fracionários com mesmo denominador, devemos adicionar ou subtrair os numeradores e conservar o denominador.

Veja o exemplo que se segue: $\frac{4}{7}+\frac{13}{7}-\frac{1}{7}=\frac{16}{7}$

b) Quando as frações possuem denominadores diferentes.

Para adicionar ou subtrair números fracionários com denominadores diferentes, é preciso:

- *Substituir as frações por frações equivalentes com denominadores iguais;*
- *Adicionar ou subtrair os numeradores, conservando o denominador.*

Veja o exemplo a seguir: $\frac{1}{5}-\frac{1}{10}+\frac{1}{8}=?$

Para calcular a adição e subtração entre as frações $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{8}$ é preciso substituir essas frações por frações equivalentes que tenham o mesmo denominador. Para tanto, é preciso encontrar o menor múltiplo comum (mmc), diferente de zero, entre os números 5, 10 e 8. Ou seja, você deverá calcular o mmc entre esses denominadores. Assim, o mmc encontrado será o novo denominador. Finalmente, efetuam-se a adição e a subtração somente dos numeradores, conservando-se o denominador.

$$\begin{array}{r|l} 5,\ 10,\ 8 & 2 \\ 5,\ 5,\ 4 & 2 \\ 5,\ 5,\ 2 & 2 \\ 5,\ 5,\ 1 & 5 \\ \hline 1,\ 1,\ 1 & 40 \end{array}$$

O mmc entre 4, 8 e 10 é 40, logo: $\frac{1}{5}=\frac{8}{40}$ e $\frac{1}{10}=\frac{4}{40}$ e $\frac{1}{8}=\frac{5}{40}$

Efetuando a adição e subtração, temos: $\frac{8}{40}-\frac{4}{40}+\frac{5}{40}=\frac{9}{40}$.

3.2 Multiplicação e divisão entre números racionais

Para entender a multiplicação e a divisão entre números racionais, é preciso ter em mente as operações de multiplicação e divisão de números inteiros e fracionários. Vamos revê-las?

a) Multiplicação

Para multiplicar um número natural por um número fracionário, devemos:

- multiplicar o número natural pelo numerador da fração;
- conservar o denominador.

Veja um exemplo: $3 \times \frac{5}{7} = \frac{(3 \times 5)}{7} = \frac{15}{7}$.

Para multiplicar um número fracionário por outro número fracionário, devemos multiplicar o numerador da primeira fração pelo numerador da segunda fração e, depois, multiplicar seus denominadores da mesma forma.

Observe o exemplo que se segue:

$\left(-\frac{3}{10}\right) \times \left(+\frac{5}{2}\right) = -\frac{15}{20}$; tal valor pode ser simplificado. Assim $-\frac{15}{20} = -\frac{3}{4}$

Atenção ⚠

Multiplicação e Divisão de números racionais segue a regra dos sinais:

Sinais iguais: +

Sinais diferentes: −

b) Divisão

Você se lembra de como fazer a divisão? Então, observe o seguinte exemplo:

$$\left(-\frac{1}{2}\right) \div \left(-\frac{9}{7}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{7}{9}\right) = \frac{7}{18}$$

Para dividir um número fracionário por outro número fracionário, multiplica-se o primeiro pelo inverso do segundo.

Anote as respostas em seu caderno.

Atividade 3

Efetue as operações a seguir, simplificando os resultados, quando possível:

a) $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$ b) $-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}$ c) $\frac{2}{3}\times\left(-\frac{5}{4}\right)$ d) $-\frac{1}{7}\div\left(-\frac{7}{3}\right)$

Anote as respostas em seu caderno.

3.3 Potência de números racionais

Para calcular uma potência, basta realizar uma multiplicação tal que a base se repita a quantidade de vezes do número do expoente, como no exemplo a seguir: $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$.

Veja alguns exemplos:

a) $\left(-\frac{7}{4}\right)^0 = 1$

b) $\left(-\frac{1}{4}\right)^1 = -\frac{1}{4}$

c) $\left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \left(-\frac{3}{5}\right)\times\left(-\frac{3}{5}\right) = +\frac{9}{25}$

d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$

3.4 Radiciação de números racionais

Como calcular as seguintes raízes $\sqrt{\frac{9}{4}}$ e $-\sqrt{\frac{4}{25}}$. Para calcular, basta calcular separadamente as raízes, quando for possível. Vejamos:

$$\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2} \text{ e } -\sqrt{\frac{4}{25}} = -\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = -\frac{2}{5}$$

3.5 Potência com expoente negativo

Como calcular $8^5 \div 8^7 = ?$

Aplicando a propriedade de potência para realizar a divisão de potências de mesma base, conservamos essa base e subtraímos os expoentes. $8^5 \div 8^7 = 8^{-2}$

Para calcular, devemos saber que para todo número racional não-nulo a e para todo número inteiro $(-n)$, define-se: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Dessa forma, $8^{-2} = \dfrac{1}{8^2} = \dfrac{1}{64}$

Para simplificar, podemos usar um modo prático de calcular potências com expoentes negativos: inverter a base e mudar o sinal do expoente. Veja:

Muda o sinal

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^{2} = \frac{25}{9}$$

Inverte a base

Figura 14.1: Cálculo com expoentes negativos.

A potenciação, como qualquer outra operação matemática, possui sua operação inversa. Nesse caso, é a radiciação. Você vai estudar esse conceito mais detalhadamente em outro módulo. No próximo tópico, vamos analisar somente a raiz quadrada de números inteiros.

Anote as respostas em seu caderno.

Atividade 4

Determine o valor de:

a) $\left(-\dfrac{2}{5}\right)^3$ b) $-\sqrt{\dfrac{16}{9}}$ c) 3^{-2} d) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-3}$

Anote as respostas em seu caderno.

Resumo

- Todo número que pode ser escrito em forma de fração é um número racional.
- Para transformar uma fração em número decimal, basta dividir o numerador pelo denominador.
- O módulo de um número racional é sempre a distância do número até zero.
- Para realizar a adição e subtração de frações, devemos ter o mesmo denominador; caso seja diferente, devemos tirar mmc e substituir a fração antiga pela fração equivalente cujo denominador é o mmc.
- Para realizar a multiplicação entre frações, basta multiplicar numerador por numerador e denominador por denominador.
- Para realizar divisão entre frações, basta repetir a primeira fração e multiplicar pelo inverso da segunda fração.
- Na potência de frações, basta repetir a base n vezes, sendo n o expoente da potência.
- A raiz quadrada de frações deve ser calculada de forma separada: primeiro, determinar a raiz do numerador; depois, do denominador.

Referências

BONJORNO, José Roberto, BONJORNO, Regina Azenha & OLIVARES, Ayrton. *Matemática: fazendo a diferença*. 1a ed. São Paulo: Editora FTD, 2006.

DANTE, Luis Roberto. *Tudo é Matemática*. São Paulo: Editora Àtica, 2009.

MARQUES, Monica Baeta. *Metodologia do Ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: Universidade Castelo Branco, 2008.

Respostas das atividades

Atividade 1

Comparando os desenhos, percebemos que todos comeram a mesma quantidade: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$

Atividade 2

Lucas poderia ter escrito no pedaço de papel o número $-\frac{21}{5}$ ou $\frac{21}{5}$

Atividade 3

a) $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$

b) $-\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = -\frac{5}{10} + \frac{4}{10} = -\frac{1}{10}$

c) $\frac{2}{3} \times \left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{10}{12} = -\frac{5}{6}$

d) $-\frac{1}{7} \div \left(-\frac{7}{3}\right) = -\frac{1}{7} \times \left(-\frac{3}{7}\right) = +\frac{3}{49}$

Atividade 4

a) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{8}{125}$

b) $-\sqrt{\frac{16}{9}} = -\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = -\frac{4}{3}$

c) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

d) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{125}{8}$

Exercícios

1. Escreva o oposto (ou simétrico) de cada um dos números a seguir:

a) -4 b) $-5{,}7$ c) $\frac{1}{3}$ d) $-\frac{13}{4}$

2. Calcule as seguintes operações:

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ b) $-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$ c) $-\frac{2}{6} - \frac{1}{3}$

d) $3 + \frac{1}{2}$ e) $-\frac{1}{4} + \frac{2}{4}$ f) $\frac{5}{4} - \frac{2}{3}$

g) $-2 \times \left(-\frac{3}{10}\right)$ h) $\frac{3}{4} \times \frac{1}{7}$ i) $\left(-\frac{5}{6}\right) \times \frac{1}{8}$

j) $\left(-\frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{7}$ k) $\frac{32}{27} \div \left(-\frac{4}{3}\right)$ l) $\left(-\frac{5}{4}\right) \div \left(-\frac{2}{3}\right)$

m) $5 \div \left(-\frac{3}{7}\right)$ n) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{7}$

3. Calcule as seguintes potências e raízes:

a) 5^{-2} b) $\sqrt{\frac{1}{4}}$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ e) 4^{-1}

f) $-\sqrt{\frac{36}{25}}$ g) $\sqrt{\frac{1}{100}}$ h) $-\sqrt{\frac{49}{9}}$ i) $\left(-\frac{7}{5}\right)^{-2}$ j) $-\sqrt{\frac{64}{16}}$

4. Maria dividiu uma pizza em 8 pedaços. Ela comeu 3 pedaços e o namorado dela comeu 4 pedaços. Como poderíamos representar isso utilizando a soma de frações?

5. José comprou uma pizza. Ele comeu metade da pizza e, posteriormente, conseguiu comer mais um pedaço equivalente à quinta parte dessa mesma pizza. Que fração representa a quantidade total de pizza que José comeu?

Respostas dos exercícios

1. a) + 4 b) + 5,7. c) $-\frac{1}{3}$ d) $+\frac{13}{4}$

2. a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ b) $-\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = -\frac{3}{4} + \frac{2}{4} = -\frac{1}{4}$

c) $-\frac{2}{6}-\frac{1}{3}=-\frac{2}{6}-\frac{2}{6}=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$ d) $3+\frac{1}{2}=\frac{6}{2}+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

e) $-\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{1}{4}$ f) $\frac{5}{4}-\frac{2}{3}=\frac{15}{12}-\frac{8}{12}=\frac{7}{12}$

g) $-2\times\left(-\frac{3}{10}\right)=+\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ h) $\frac{3}{4}\times\frac{1}{7}=\frac{3}{28}$ i) $\left(-\frac{5}{6}\right)\times\frac{1}{8}=-\frac{5}{48}$

j) $\left(-\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{7}=-\frac{3}{28}$ k) $\frac{32}{27}\div\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{32}{27}\times\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{96}{108}=-\frac{8}{9}$

l) $-\frac{5}{4}\div\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{5}{4}\times\left(-\frac{3}{2}\right)=+\frac{15}{8}$ m) $5\div\left(-\frac{3}{7}\right)=5\times\left(-\frac{7}{3}\right)=-\frac{35}{3}$

n) $\frac{3}{4}\div\frac{1}{7}=\frac{3}{4}\times\frac{7}{1}=\frac{21}{4}$

3. a) $5^{-2}=\left(\frac{1}{5}\right)^{2}=\frac{1}{25}$ b) $\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=3^{2}=9$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{3}{2}\right)^{3}=\frac{27}{8}$ e) $4^{-1}=\left(\frac{1}{4}\right)^{1}=\frac{1}{4}$ f) $-\sqrt{\frac{36}{25}}=-\frac{6}{5}$

g) $\sqrt{\frac{1}{100}}=\frac{1}{10}$ h) $-\sqrt{\frac{49}{9}}=-\frac{7}{3}$ j) $-\sqrt{\frac{64}{16}}=-\frac{8}{4}=-2$

4. $\frac{3}{8}+\frac{4}{8}=\frac{7}{8}$

5. $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{5}{10}+\frac{2}{10}=\frac{7}{10}$

CEJA >>
CENTRO DE EDUCAÇÃO
de JOVENS e ADULTOS

Razão e proporção

Matemática - Fascículo 5 Unidade 14

Objetivos de aprendizagem

1. Introduzir a ideia de razão entre dois números;
2. Apresentar algumas razões especiais;
3. Apresentar situações em que utilizamos a porcentagem na resolução de problemas.

Para início de conversa...

Dois amigos, Pedro e Ana, estão organizando uma festa de aniversário para tia Dora, uma tia muito querida por eles. Eles estão indo ao mercado comprar alguns ingredientes para que tia Dora prepare um bolo para sua festinha. Pedro logo se lembrou de um bolo muito delicioso que comeu na casa da Dona Laura, sua vizinha. E falou para Ana, como se pode observar em sua conversa, mostrada a seguir:

Figura 14.1: Tirinha

1. Razão

No início de conversa, apresentamos um diálogo entre Ana e Pedro. As crianças estão conversando sobre um bolo que Pedro comeu na casa de Dona Laura e que rendeu para 6 pessoas. Utilizou 2 ovos e duas xícaras de farinha. Ana mencionou que, para realizar na casa da tia de Pedro, seria necessário dobrar a receita, para que pudesse dar para as 12 pessoas da casa.

Agora vamos ajudá-los a identificar qual a quantidade de ingredientes será preciso comprar, para que tia Dora possa fazer um bolo como este. Para isso, vamos primeiramente encontrar uma fração de tal modo que o número de ovos esteja compatível com o número de xícaras de farinha. Considerando uma receita apenas, essa fração chama-se razão.

Vamos fazer isso completando a tabela a seguir:

	Uma Receita	Duas Receitas
Número de ovos	2	4
Número de xícaras de farinha	3	6
Razão		
Leitura	Dois para três	Quatro para seis

Percebemos que a razão $\frac{4}{6}$ é equivalente à fração $\frac{2}{3}$, pois $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Assim, percebemos que, mesmo alterando os valores, a fração do número de ovos pelo número de xícaras de farinha é a mesma.

Portanto, a razão entre dois números a e b, sendo $b \neq 0$, é o quociente de $a \div b$, que pode ser indicado por $\frac{a}{b}$ ou qualquer outra forma equivalente.

Anote as respostas em seu caderno.

Atividade 1

Agora vamos ajudá-los a identificar qual quantidade de ingredientes será necessário comprar, para fazer um bolo que renda para 24 pessoas, ou seja fazer quatro receitas. Vamos fazer isso completando a tabela a seguir:

	Uma Receita	Quatro Receitas
Número de ovos	2	
Número de xícaras de farinha	3	
Razão		
Leitura	Dois para três	

Anote as respostas em seu caderno.

2. Escala

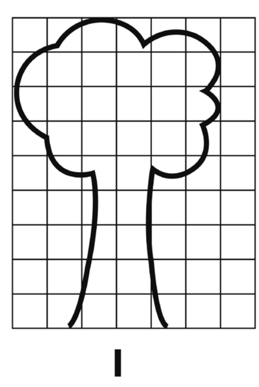
Escala é a razão entre uma medida de comprimento em um desenho de determinado objeto e a medida de comprimento correspondente a esse objeto na realidade. Essas medidas devem ser expressas na mesma unidade.

$$Escala = \frac{Medida\ do\ desenho}{Medida\ real}$$

As escalas são usadas em muitas áreas da atividade humana, como na cartografia (para fazer mapas), na engenharia e arquitetura (para plantas, esquemas e maquetes de edificações), ou na oceanografia (para representações do fundo do mar, por exemplo). As escalas ajudam a garantir a semelhança entre o desenho e o objeto real que serve de modelo para a representação.

Exemplo: (ADAPTADO do ENEM 2012-Prova Amarela):

Um biólogo mediu a altura de uma árvore e representou-a em uma malha quadriculada, conforme indicações na figura a seguir.

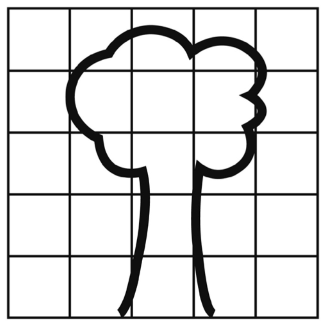


Se cada lado dos quadrados da malha equivale a um centimentro, qual é a medida da árvore? A escala do desenho é 1:100, ou seja, 1 cm para 100 cm (cada 1 centrímetro do desenho equivale a 100 cm da medida real). Se contarmos no desenho, a altura da árvore tem nove unidades; logo, a medida da árvore é 9 × 100 = 900 cm, ou seja, 9 metros.

Anote as respostas em seu caderno.

Atividade 2

O biólogo fez a medida de outra árvore e a representou em outra malha cuja escala estava 1:300, como podemos verificar na imagem a seguir.



IV

1:300

Fonte: ENEM 2012, prova Amarela

Qual era o tamanho real desta árvore?

Anote as respostas em seu caderno.

3. Velocidade média

Velocidade média é a razão entre a distância percorrida por um corpo (um carro, um avião, uma pessoa, entre outros) e o tempo gasto para percorrer essa distância.

$$\textit{Velocidade média} = \frac{\textit{distância percorrida}}{\textit{tempo gasto para percorrer esta distância}}$$

Perceba que essa razão compara grandezas diferentes (distância e tempo). Em muitas situações do dia a dia, usamos, mesmo sem perceber, uma razão para comparar duas grandezas diferentes, ou seja, duas grandezas expressas em unidades distintas. Exemplo:

Se um automóvel percorre 240 km em 3 horas, a sua velocidade média é calculada fazendo a razão entre 240 e 3; a unidade de medida dessa razão será Km/h. Veja o cálculo:

$$\textit{Velocidade média} = \frac{240km}{3\ horas} = 80km/h$$

Anote as respostas em seu caderno.

Atividade 3

Qual foi a velocidade média em km/h de um carro que percorreu 342 km em 4 horas?

Anote as respostas em seu caderno.

4. Densidade demográfica

Densidade demográfica é a razão entre um número de habitantes de uma determinada região e a área dessa região. A densidade demográfica mede a concentração populacional de uma região ou país. Essa também é uma razão entre diferentes unidades.

$$\textit{Densidade demográfica} = \frac{\textit{número de habitantes}}{\textit{área}}$$

Vamos entender melhor essa história, analisando a seguinte situação:

Se um município tem população de 12.000 habitantes e a sua área é de 150 km^2, dizemos que a densidade demográfica desse município é de 80 habitantes por quilômetro quadrado (80 hab./km^2). Veja:

$$\textit{Densidade demográfica} = \frac{12000\ habitantes}{150\ km^2} = \frac{12000}{150} = 80\ hab./km^2$$

Anote as respostas em seu caderno.

Atividade 4

Calcule a densidade demográfica de uma região que tem população de 300.000 habitantes e área de 15.000 km^2.

Anote as respostas em seu caderno.

5. Porcentagem

A porcentagem é uma razão cujo denominador (consequente - 2º termo) vale 100. Veja o seguinte exemplo:

40% → razão entre 40 e 100 = $\frac{40}{100} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

Observe a situação a seguir para compreender melhor.

Como podemos escrever a porcentagem 38% na forma de razão?

É preciso escrever 38% como uma razão em que o segundo termo é 100. Assim, temos que 38% é a razão entre 38 e 100, ou seja,

38% = $\frac{38}{100} = \frac{19}{50}$ = 19 ÷ 50 *ou* 19 *para* 50 *ou* 19 *em* 50.

6. Cálculo da porcentagem de um número

Leia os problemas a seguir com atenção. Você não precisa mecanizar as contas, mas, para usar a calculadora, é necessário entender o processo.

Exemplo:

O grupo de dança de Joana está organizando um churrasco. Irão 80% do grupo. Se o grupo tem 35 dançarinos, quantos irão participar do churrasco? Precisamos calcular 80% de 35.

Já vimos que 80% = $\frac{80}{100} = \frac{4}{5}$

Então, calcular 80% de 35 é o mesmo que calcular $\frac{4}{5}$ de 35. Assim:

$$\frac{80}{100} \times 35 = \frac{80 \times 35}{100} = \frac{2800}{100} = 28 \text{ ou } \frac{4}{5} \times 35 = \frac{4 \times 35}{5} = \frac{140}{5} = 28$$

Resposta: 28 dançarinos vão ao churrasco.

Anote as respostas em seu caderno.

Atividade 5

a) Um celular custa R$ 150,00 a vista. Se for vendido em três prestações iguais, terá um acréscimo de 4% do valor a vista . Qual será o valor de cada prestação?

Anote as respostas em seu caderno.

Resumo

- Razão é um divisão entre dois valores a e b.
- Escala é a razão entre uma medida de comprimento em um desenho e a medida de comprimento correspondente na realidade, expressos na mesma unidade.

$$\textit{Escala} = \frac{\textit{medida do desenho}}{\textit{medida real}}$$

- Velocidade média é a razão entre a distância percorrida por um corpo (um carro, um avião, uma pessoa, entre outros) e o tempo gasto para percorrer essa distância.

$$\textit{Velocidade média} = \frac{\textit{distância percorrida}}{\textit{tempo gasto para percorrer esta distância}}$$

- Densidade demográfica é a razão entre o número de habitantes de uma determinada região e a área dessa região. A densidade demográfica mede a concentração populacional de uma região ou país.

$$\textit{Densidade demográfica} = \frac{\textit{número de habitantes}}{\textit{área}}$$

- A porcentagem é uma razão que tem o consequente (2º termo) igual a 100.

Referências

BIGODE, Antonio José Lopes. *Matemática hoje é feita assim*. 1a ed. São Paulo: Editora FTD, 2000.

BONJORNO, José Roberto, BONJORNO, Regina Azenha & OLIVARES, Ayrton. *Matemática: fazendo a diferença*. 1a ed. São Paulo: Editora FTD, 2006.

CECIERJ, *Reforço Escolar de razão a relação: da sala de TV à sala de aula: Dinâmica 6:9ºano/2ºbimestre*

DANTE, Luis Roberto. *Tudo é Matemática*. São Paulo: Editora Ática, 2009.

GIL, Antonio Carlos. *Metodologia do Ensino Superior*. 3a ed. São Paulo: Editora Atlas, 1997.

MARQUES, Monica Baeta. *Metodologia do Ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: Universidade Castelo Branco, 2008.

MORI, Iracema e ONAGA, Dulce Satiko. *Matemática: ideias e desafios*. 14a ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2007.

Respostas das atividades

Atividade 1

	Uma Receita	Quatro Receitas
Número de ovos	2	8
Número de xícaras de farinha	3	12
Razão	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{12}$
Leitura	Dois para três	Oito para doze

Repare que $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

Atividade 2

Como a escala está 1 cm para 300 cm, e a árvore tem 4,5 unidades de altura, logo, basta fazer 4,5 × 300 = 1350 cm =1,35m

Atividade 3

85,5 km/h . Veja: velocidade média = $\frac{342 \text{ km}}{4 \text{ horas}} = \frac{342}{4}$ = 85,5 km/h.

Atividade 4

$$\textit{Densidade demográfica} = \frac{300000 \textit{ habitantes}}{15000 \textit{ km}^2} = \frac{300000}{15000} = 20 \textit{ hab./km}^2$$

Atividade 5

Basta calcular 4% de 150=

$$\frac{4}{100} \times 150 = \frac{600}{100} = 6$$

Logo, devemos calcular 150 + 6 = 156 e dividir em três prestações iguais 52.

Exercícios

1. Calcule a densidade demográfica de uma região que tem população de 200.000 habitantes e área de 25.000 km^2.

2. Relacione cada quadro à esquerda, que indica porcentagem, com o quadro à direita que apresenta a razão correspondente:

75%	50%	60%
25%	10%	

3 em 5	1 ÷ 2	$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{4}$	3 para 4	

3. Calcule a porcentagem dos números a seguir.

a) 25% de 200

b) 50% de 800

c) 10% de 150

d) 30% de 90

e) 12% de 600

4. Num jogo de basquete, o cestinha marcou 15 pontos, correspondentes a 30% dos pontos de sua equipe. A equipe pode se orgulhar de ter feito quantos pontos?

5. Qual foi a velocidade média em m/min de uma bicicleta que percorreu 1.800 m em 5 minutos?

6. Neste ano, o time de vôlei de uma escola ganhou 75% dos jogos que disputou. Se foram 60 jogos, quantos deles o time ganhou ?

7. Comprei um fogão por R$ 750,00. Revendi com um lucro de 10%. Qual o preço de venda?

8. Numa sala há 40 alunos, sendo 40% de meninos e o restante de meninas. Qual a quantidade de meninas na sala?

9. Um celular custa R$1.200,00. Teve um aumento de 20%. Qual o valor do aumento e o novo valor do celular?

10. Determine 15 % de 6000.

Respostas dos exercícios

1. 8 hab/km^2. Observe:

Densidade Demográfica = $\frac{200000 \text{ habitantes}}{25000 \text{ km}^2} = \frac{200000}{25000}$ = 8 hab./km^2

2. 75% está relacionado ao quadro 3 para 4, pois 75% = $\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$.

60% está relacionado ao quadro 3 em 5, pois 60% = $\frac{60}{100} = \frac{3}{5}$.

50% está relacionado ao quadro 1 ÷ 2, pois 50% = $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$.

25% está relacionado ao quadro $\frac{1}{4}$, pois 25% = $\frac{25}{100} = \frac{2}{4}$.

10% está relacionado ao quadro $\frac{1}{10}$, pois 10% = $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$.

3.

a) 25% de 200 $\rightarrow \frac{25}{100}$ de 200 $\rightarrow \frac{1}{4}$ de 200 $\rightarrow \frac{1}{4}$ x de 200 = $\frac{200}{4}$ = 50

b) 50% de 800 $\rightarrow \frac{50}{100}$ de 800 $\rightarrow \frac{1}{2}$ de 800 $\rightarrow \frac{1}{2}$ x de 800 = $\frac{800}{2}$ = 400

c) 10% de 150 $\rightarrow \frac{10}{100}$ de 150 $\rightarrow \frac{1}{10}$ de 150 $\rightarrow \frac{1}{10}$ x de 150 = $\frac{150}{10}$ = 15

d) 30% de 90 $\rightarrow \frac{30}{100}$ de 90 $\rightarrow \frac{3}{10}$ de 90 $\rightarrow \frac{3}{10}$ x de 90 = $\frac{270}{10}$ = 27

e) 12% de 600 $\rightarrow \frac{12}{100}$ de 600 $\rightarrow \frac{3}{25}$ de 600 $\rightarrow \frac{3}{25}$ x de 600 = $\frac{1800}{25}$ = 72

4. O número de pontos é determinado por $\frac{15}{30}$. Se dividirmos ambos os lados por 15, teremos: $\frac{1}{2}$., que corresponde à metade, ou seja, 50.

Logo, a equipe fez 50 pontos.

5. 360 m/min. Veja: Velocidade média = $\frac{1800 \text{ metros}}{5 \text{ minutos}} = \frac{1800}{5}$ = 360m/min
6. 5% de 60= 45
7. 750 + 75 = 825
8. 40% de 40 = 16; logo, o número de meninas será 40 – 16 = 24
9. 20% de 1200 = 240; logo, o aumento será de 240 reais, e o novo preço de 1440 reais
10. 15% de 6000 = 900

CEJA >>
CENTRO DE EDUCAÇÃO
de JOVENS e ADULTOS

Proporcionalidade

Matemática - Fascículo 5 Unidade 15

Objetivos de aprendizagem

1. Introduzir a ideia de proporção;
2. Identificar quando duas grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais;
3. Utilizar a regra de três em situações-problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais.

Para início de conversa...

Nos dias de hoje, podemos ampliar ou reduzir uma figura facilmente, com a utilização de programas de computadores.

Agora, observe a figura a seguir:

Figura 15.1: As imagens são iguais; os tamanhos, diferentes; mas as proporções são mantidas.

Fonte: https://www.freeimages.com/photo/a-girl-with-a-phone-1158782

As imagens se apresentam em tamanhos diferentes, mas existe entre elas uma relação de proporcionalidade. Nesta aula, você vai estudar vários assuntos ligados às ideias de razão e proporção.

Vamos lá?

1. Proporção

A proporcionalidade está presente no dia a dia de muitas pessoas. Não só aparece na ampliação e na redução de fotos, mas também nas mais diversas atividades, tais como a análise da planta de uma casa, o desenho de um mapa, a interpretação de um gráfico, a dosagem de um remédio, a leitura de uma receita de torta e muitas outras situações.

Nessas situações, a noção de razão é fundamental para o desenvolvimento da ideia de proporcionalidade e de seus cálculos.

Vamos observar as figuras a seguir.

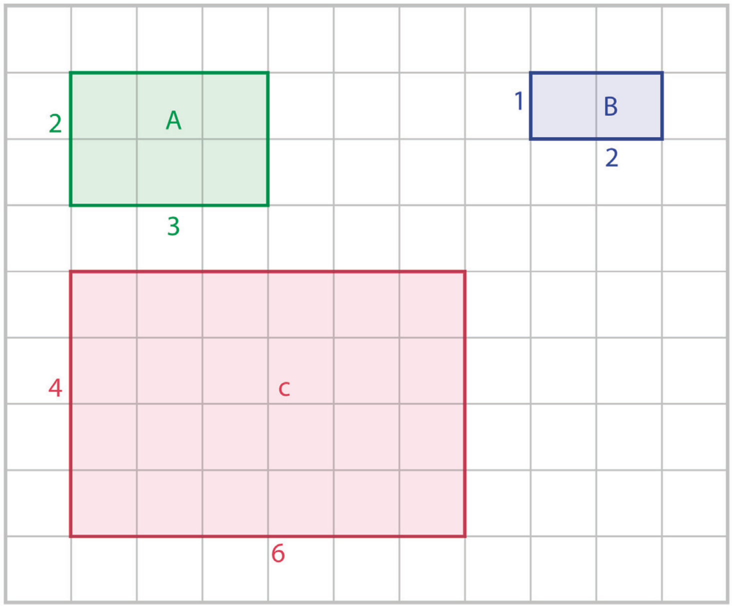


Figura 15.2: Retângulos
Fonte: Autor

Podemos reparar que, ao olharmos para alguns desses retângulos, percebemos que alguns aparentam ser reduções ou ampliações de outros retângulos, mas há alguns que não podem ser considerados nem como reduções e nem ampliações.

No caso dos retângulos A e C, podemos perceber que têm as medidas proporcionais. Já com relação aos retângulos B e C, não são proporcionais.

De modo geral, podemos escrever: *Se duas razões forem iguais, elas formarão uma proporção.*

Assim, se a razão entre os números a e b for igual à razão entre os números c e d, dizemos que a razão $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *é uma proporção.*

A leitura da proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ é: *a está para b, assim como c está para d*.

O primeiro e o último termos citados na leitura são chamados de extremos da proporção (*a* e *d*). Os outros dois termos são chamados de meios da proporção (*b* e *c*).

Anote as respostas em seu caderno.

Atividade 1

Determine as proporções dos lados dos retângulos da Figura 15.2 e complete a tabela.

	Retângulo A	Retângulo B	Retângulo C
base			
altura			
razão			

Anote as respostas em seu caderno.

A propriedade fundamental das proporções diz que: em toda proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

Veja essa propriedade simbolicamente: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow a \times d = b \times c$.

2. Grandezas proporcionais

Podemos afirmar que as grandezas são proporcionais quando uma variação interfere na variação de outra.

As grandezas proporcionais podem ser dividas em grandezas inversamente proporcionais e grandezas diretamente proporcionais.

Para entender melhor esse assunto, nada melhor do que considerar algumas situações-problemas.

3.1 Grandezas diretamente proporcionais

Observe a seguinte situação-problema:

Dona Margarida é costureira. Ela está fazendo bermudas encomendadas por uma instituição. Com 1,40 m de tecido, ela faz duas bermudas.

Agora, ela quer saber quantos metros vai precisar para fazer seis bermudas. Felipe, filho de dona Margarida, tentou ajudar, pensando: para fazer duas bermudas, minha mãe gasta 1,40 m; como 6 é o triplo de 2, ela gastará o triplo de 1,40 m.

Assim, podemos concluir: 1,40 m × 3 = 4,20 m de tecido para fazer seis bermudas.

Quando o valor de uma grandeza dobra, triplica ou fica a metade; o valor de outra grandeza também dobra, triplica ou fica a metade, e assim por diante. Nessas circunstâncias, dizemos, então, que as duas grandezas envolvidas são diretamente proporcionais. Desta forma, podemos concluir que:

Duas grandezas são diretamente proporcionais quando o aumento (ou diminuição) de uma corresponde ao aumento (ou diminuição) da outra na mesma razão.

Anote as respostas em seu caderno.

Atividade 2

Para percorrer 310 km, o carro de Afonso gastou 25 litros de gasolina. Nas mesmas condições, Afonso quer saber quantos quilômetros seu carro percorrerá com 50 litros. Calcule quantos quilômetros irá percorrer o carro de Afonso e explique sua resposta.

Anote as respostas em seu caderno.

3.2 Grandezas inversamente proporcionais

Observe a seguinte situação:

Luciana, Rodrigo e Deise fizerem um mesmo percurso de três formas diferentes e respectivamente: de bicicleta, de calhambeque e de carro.

Luciana, de bicicleta, fez esse percurso com uma velocidade média de 15 km/h e gastou 120 minutos (2h).

Em seu calhambeque, Rodrigo fez o mesmo percurso com uma velocidade média de 30 km/h e gastou 60 minutos (1h). Já a Deise, em seu carro, andou a uma velocidade média de 90 km/h e gastou 20 minutos.

Observe que quem gastou mais tempo foi Luciana, pois a bicicleta possui uma velocidade menor. A velocidade e o tempo não são grandezas diretamente proporcionais, pois a velocidade dobrou (15 Km/h para 30 Km/h) e o tempo não dobrou (120 minutos para 60 minutos).

Vamos analisar a Tabela 23.2 com os valores dessa situação, envolvendo duas grandezas: velocidade (em km/h) e tempo (em min).

Tabela 15.1: Tabela velocidade × tempo de um mesmo percurso

Velocidade (km/h)	Tempo (min)
15	120
30	60
90	20

Note que na primeira coluna da tabela, quando a velocidade dobra (15 para 30), o tempo, representado na segunda coluna, se reduz pela metade (120 para 60). Depois, a velocidade de 30 km/h passa para 90 km/h, ou seja, a velocidade triplicou. E o tempo? Nesse caso, o tempo reduziu a terça parte (60 minutos para 20 minutos). Dobrando a velocidade, o tempo reduz-se à metade. Multiplicando a velocidade por 3, o tempo fica dividido por 3. Se multiplicarmos a velocidade por 6, o tempo vai ficar dividido por 6.

Grandezas que se relacionam desse modo são inversamente proporcionais. Essa é uma situação de proporcionalidade inversa. Dizemos que velocidade e tempo são grandezas inversamente proporcionais.

Desta forma podemos concluir que:

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando ao aumento (ou diminuição) de uma corresponde uma diminuição (ou aumento) da outra, na razão inversa.

Anote as respostas em seu caderno.

Atividade 3

Uma torneira que despeja 15 litros de água por minuto enche um tanque em duas horas. Se essa torneira despejasse 30 litros de água por minuto, em quanto tempo encheria esse mesmo tanque? As grandezas indicadas em litros por minutos e em horas são diretamente ou inversamente proporcionais?

Anote as respostas em seu caderno.

4. Quarta proporcional

Veja que em todas as situações-problemas envolvendo grandezas direta ou inversamente proporcionais, nós conhecemos três números da proporção, sendo necessário calcular o quarto número. Esse quarto número é chamado de quarta proporcional. O procedimento usado na resolução desses problemas é conhecido por regra de três simples. Por que será que esta regra tem esse nome? Pense um pouco... É porque conhecemos três números de uma proporção e procuramos o quarto (quarta proporcional). Na próxima seção, vamos aprender como utilizar a regra de três.

Acompanhe!

5. A regra de três simples

5.1 Aplicando a regra de três simples em situações de proporcionalidade direta

Observe o seguinte exemplo:

Uma barra de cano com 6 metros de comprimento tem massa de 10 kg. Qual é a massa de uma barra de 9 metros de comprimento desse mesmo tipo de cano?

Figura 15.3: Barras de cano com medidas de comprimento diretamente proporcionais.

Veja que esta é uma situação de proporcionalidade direta, já que, dobrando o comprimento da barra, a massa dobra; triplicando o comprimento, a massa triplica, e assim por diante.

Agora vamos utilizar o método da construção de uma tabela e, a partir dela, escrever uma proporção que permita o cálculo do valor procurado.

Tabela 15.2: Comprimento x massa da barra de cano

Comprimento (em m)	Massa (em kg)
6	10
9	x

Atenção ⚠

Para montar a proporção, analisamos a relação entre as grandezas e colocamos uma seta ao lado de cada coluna. Como as grandezas são diretamente proporcionais, as setas ficam no mesmo sentido, mostrando como a proporção deve ser montada.

Observe que $\frac{6}{9} = \frac{10}{x}$ está no sentido da seta. Assim, aplicando a propriedade fundamental da proporção ou "multiplicando em cruz", temos a equação: $6x = 9 \times 10 \rightarrow 6x = 90 \rightarrow x = \frac{90}{6} \rightarrow$ logo $x = 15$

Portanto, uma barra de 9 metros tem massa de 15 Kg.

Anote as respostas em seu caderno.

Atividade 4

Se com 40 kg de laranja é possível fazer 24 litros de suco, quantos litros de suco serão obtidos com 30 kg de laranja?

Anote as respostas em seu caderno.

5.2 Regra de três simples em situações de proporcionalidade inversa

Veja este exemplo: Marcos precisa, para sua festa, de 7 litros de refrigerante. Se comprar latinhas de refrigerante de 350 ml, ele vai precisar de 20 latinhas para sua festa. Quantas latinhas Marcos deve comprar se escolher latinhas de 500 ml?

Observe a tabela

Tabela 15.3: Capacidade (ml) x número de latinhas.

Capacidade (em ml)	Número de latinhas
350	20
500	x

As grandezas envolvidas, capacidade (ml) e quantidade de latinhas são inversamente proporcionais, já que aumentando a capacidade de cada latinha, diminuímos a quantidade de latinhas de refrigerante que é preciso comprar. Para podermos montar a seguinte proporção, devemos nos lembrar de analisar o sentido das setas que, neste caso, ficam em sentidos opostos. Assim, temos a seguinte proporção: $\frac{500}{350} = \frac{20}{x}$. Lembra como resolvemos? Basta multiplicar em cruz! Desta forma, encontramos a equação: $500x = 20 \times 350$. Resolvendo, temos: $500x = 7000$. Assim, $x = \frac{7000}{500} = 14$.

Portanto, se Marcos escolher latinhas de 500 ml, deverá comprar 14 latinhas de refrigerante.

Anote as respostas em seu caderno.

Atividade 5

Guardando R$ 18,00 por mês, Gilberto conseguiu uma certa quantia em 10 meses. Para obter essa mesma quantia em 8 meses, quanto ele deveria ter guardado por mês?

Anote as respostas em seu caderno.

Resumo

- Duas grandezas são diretamente proporcionais quando o aumento (ou diminuição) de uma corresponde ao aumento (ou diminuição) da outra na mesma razão.
- Duas grandezas são inversamente proporcionais, quando ao aumento (ou diminuição) de uma corresponde uma diminuição (ou aumento) da outra, na razão inversa.
- Quarta proporcional é o valor desconhecido em situações de proporcionalidade em que se conhecem três valores.
- A regra de três simples é um processo prático para resolver problemas que envolvem grandezas diretamente e inversamente proporcionais.
- Para calcular, usando a regra de três simples, podemos montar uma proporção, multiplicar em cruz e encontrar uma equação e resolvê-la.
- Elaborar uma tabela, analisar as grandezas e montar a proporção. Aplicar a propriedade fundamental da proporção, encontrando uma equação e depois resolver a mesma.

Referências

BIGODE, Antonio José Lopes. *Matemática hoje é feita assim*. 1a ed. São Paulo: Editora FTD, 2000.

BONJORNO, José Roberto, BONJORNO, Regina Azenha & OLIVARES, Ayrton. *Matemática: fazendo a diferença*. 1a ed. São Paulo: Editora FTD, 2006.

DANTE, Luis Roberto. *Tudo é Matemática*. São Paulo: Editora Ática, 2009.

MORI, Iracema e ONAGA, Dulce Satiko. *Matemática: ideias e desafios.* 14a ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2007.

Respostas das atividades

Atividade 1

	Retângulo A	Retângulo B	Retângulo C
base	3	2	6
altura	2	1	4
razão	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{6}{4}$

Logo, os retângulos proporcionais são A e C. Se compararmos B com o A e B com o C, não são proporcionais.

Atividade 2

620 km (como 50 litros é o dobro de 25 litros, ele percorrerá, em quilômetros, o dobro de 310, ou seja, 2 x 310 = 620).

Atividade 3

Quantidade de litros por minuto que a torneira despeja (litros/min)	Tempo (horas)
15	2
30	1

Quando a quantidade de litros de água despejada dobra (15 para 30), o tempo diminui pela metade (2 para 1). Logo, essas grandezas são inversamente proporcionais, pois quando uma aumenta, a outra diminui na mesma proporção, ou seja, o dobro é um valor inversamente proporcional à sua metade.

Atividade 4

As grandezas massa (Kg) e capacidade (litro) são diretamente proporcionais, pois, diminuindo a quantidade de quilos de laranjas, diminuímos, na mesma proporção, a quantidade em litros de suco de laranja. Criando uma tabela, temos:

Massa (em Kg)	Capacidade (em litros)
40	24
30	x

Montando a proporção, $\frac{40}{30} = \frac{24}{x}$. Multiplicando em cruz, temos a seguinte equação: $40x = 24 \times 30$. Assim, $40x = 720$, $x = \frac{720}{40}$, logo $x = 18$. Portanto, serão obtidos 18 litros de suco.

Atividade 5

As grandezas tempo (meses) e dinheiro (R$) são inversamente proporcionais, pois diminuindo o número de meses, aumentamos a quantia que Gilberto deveria ter guardado em dinheiro para manter o valor juntado. Observe a tabela que traduz a situação descrita.

Número de meses	Quantia guardada por mês (R$)
10	18
8	x

Respeitando o sentido das setas, podemos montar a proporção, $\frac{8}{10} = \frac{18}{x}$. Multiplicando em cruz, temos a seguinte equação: $8x = 18 \times 10$. Assim, $8x = 180$, $x = \frac{180}{8}$, logo $x = 22{,}5$. Portanto, Gilberto deveria ter guardado por mês R$ 22,50 para manter a mesma quantia, que em nosso problema é de R$ 180,00.

Exercícios

1. Assinale quais desses pares de razões formam proporções.

a) $\frac{4}{5}$ e $\frac{28}{35}$ b) $\frac{18}{4}$ e $\frac{9}{3}$

2. Para fazer 1.200 filões de pães pequenos são gastos, em uma padaria, 100 kg de farinha. Quantos filões de pães pequenos podem ser feitos com 50 kg de farinha?

3. Márcia, em 4 horas, leu 60 páginas de um livro. No mesmo ritmo, quantas páginas ela terá lido em 6 horas?

4. Em três minutos, uma torneira despeja 4 litros de água em um tanque. Se o tanque leva 5 horas para ficar cheio, qual é a capacidade desse tanque?

5. Cinco carros transportam 20 pessoas. Para transportar 500 pessoas, quantos carros iguais a esses seriam necessários?

6. Um motorista percorre, em 20 segundos, um determinado percurso com uma velocidade média de 160 km/h. Se ele estiver a uma velocidade de 200 km/h, quando tempo ele vai levar para percorrer o mesmo percurso?

7. Com três caminhões transporta-se uma média de 300m³ de areia. Quantos caminhões desse tipo seriam necessários para transportar 1800 m³ de areia?

8. Após um acidente com um navio, a comida que havia daria para 4 náufragos se alimentar por 12 dias. No entanto, se tivéssemos apenas 3 náufragos, qual seria a duração dos alimentos?

9. Para fazer um bolo de aniversário, utilizamos 200 gramas de chocolate. Se fizermos 5 bolos, qual será a quantidade de chocolate necessária?

10. Uma determinada quantidade de refrigerante foi colocada em garrafas de 3 litros cada uma, obtendo-se, assim, 60 garrafas. Se fossem usadas garrafas de 2 litros, quantas garrafas seriam necessárias para colocar a mesma quantidade de refrigerante?

Respostas dos exercícios

1. a) $\frac{4}{5} = \frac{28}{35}$ logo, formam uma proporção.

   b) $\frac{18}{4}$ e $\frac{9}{3}$ *não* formam uma proporção.

2. 600 filões pequenos. Como diminuímos pela metade a quantidade de farinha, a outra grandeza, quantidade de filões de pães pequenos, também diminuirá pela metade; logo, é preciso calcular 1.200 dividido por 2, e teremos como resultado 600.

3. As grandezas tempo (hora) e quantidade de páginas são diretamente proporcionais; assim, teremos a proporção $\frac{4}{6} = \frac{60}{x}$. Multiplicando em cruz, temos a seguinte equação: $4x = 60 \times 6$. Assim, $4x = 360$, $x = \frac{360}{4}$, logo $x = 90$. Portanto, Márcia terá lido 90 páginas em 6 horas.

4. Obteremos a seguinte proporção: $\frac{3}{300} = \frac{4}{x}$. Aplicando a propriedade fundamental da proporção, temos a mesma equação encontrada na primeira forma de resolução do problema, utilizando a regra de três simples. $3x = 4 \times 300$.

   Assim, já sabemos que $x = 400$ e, portanto, a capacidade do tanque é de 400 litros.

5. Obtemos a seguinte proporção $\frac{5}{20} = \frac{x}{500}$. E encontramos a seguinte equação: $20x = 2500$; logo, o valor de $x = 125$

6. As grandezas aqui são inversamente proporcionais; por isso, a proporção será $\frac{20}{x} = \frac{200}{160}$ e obtermos a seguinte equação: $200x = 3200$; logo, o valor de $x = 16$

7. As grandezas são diretamente proporcionais. Assim, obtemos a seguinte proporção: $\frac{3}{x} = \frac{300}{1800}$, e obtemos a seguinte equação: $300x = 5400$; logo, o valor de $x = 18$

8. As grandezas são inversamente proporcionais; logo, obtemos a seguinte proporção: $\frac{3}{4} = \frac{12}{x}$, e obtemos a seguinte equação: $3x = 48$; logo, $x = 16$

9. As grandezas são diretamente proporcionais; logo, obtemos a seguinte proporção: $\frac{1}{5} = \frac{200}{x}$, e obtemos a seguinte equação: x = 1000 gramas, ou seja, x = 1kg.

10. As grandezas são inversamente proporcionais; logo, obtemos a proporção $\frac{2}{3} = \frac{60}{x}$; logo, obtemos a seguinte equação: 2x =180; assim, o valor de x = 90