CEJA >>

CENTRO DE EDUCAÇÃO
de JOVENS e ADULTOS

MATEMÁTICA

Ensino Fundamental II

Luciana de Paula Chaves Gomes Hastenreiter
Wendel de Oliveira Silva

Fascículo 8

Unidades 22, 23 e 24

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

PRODUÇÃO DO MATERIAL CEJA (CECIERJ)

Elaboração de Conteúdo
Luciana de Paula Chaves Gomes Hastenreiter
Wendel de Oliveira Silva

Diretoria de Material Didático
Bruno José Peixoto

Coordenação de Design Instrucional
Flávia Busnardo
Paulo Vasques de Miranda

Revisão de Língua Portuguesa
José Meyohas

Design Instrucional
Renata Vittoretti

Diretoria de Material Impresso
Ulisses Schnaider

Projeto Gráfico
Núbia Roma

Ilustração
Renan Alves

Programação Visual
Bianca Giacomelli

Capa
Renan Alves

Produção Gráfica
Fábio Rapello Alencar

C391

CEJA : Centro de educação de jovens e adultos. Ensino fundamental II. Matemática / Luciana de Paula Chaves Gomes Hastenreiter, Wendel de Oliveira Silva. Rio de Janeiro : Fundação Cecierj, 2019.

Fasc. 8 – unid. 22-23-24

40p.; 21 x 28 cm.

ISBN: 978-85-458-0182-5

1. Matemática. 2. Expressões algébricas. 3. Produtos notáveis. 4. Polinômios. I. Hastenreit, Luciana de Paula Chaves Gomes. II. Silva, Wendel de Oliveira. 1. Título.

CDD: 510

Referências bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.
Texto revisado segundo o novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa.

Sumário

Prezado(a) Aluno(a),

Seja bem-vindo a uma nova etapa da sua formação. Estamos aqui para auxiliá-lo numa jornada rumo ao aprendizado e conhecimento.

Você está recebendo o material didático impresso para acompanhamento de seus estudos, contendo as informações necessárias para seu aprendizado e avaliação, exercício de desenvolvimento e fixação dos conteúdos.

Além dele, disponibilizamos também, na sala de disciplina do CEJA Virtual, outros materiais que podem auxiliar na sua aprendizagem.

O CEJA Virtual é o Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) do CEJA. É um espaço disponibilizado em um site da internet onde é possível encontrar diversos tipos de materiais como vídeos, animações, textos, listas de exercício, exercícios interativos, simuladores, etc. Além disso, também existem algumas ferramentas de comunicação como chats, fóruns.

Você também pode postar as suas dúvidas nos fóruns de dúvida. Lembre-se que o fórum não é uma ferramenta síncrona, ou seja, seu professor pode não estar online no momento em que você postar seu questionamento, mas assim que possível irá retornar com uma resposta para você.

Para acessar o CEJA Virtual da sua unidade, basta digitar no seu navegador de internet o seguinte endereço: http://cejarj.cecierj.edu.br/ava

Utilize o seu número de matrícula da carteirinha do sistema de controle acadêmico para entrar no ambiente. Basta digitá-lo nos campos "nome de usuário" e "senha".

Feito isso, clique no botão "Acesso". Então, escolha a sala da disciplina que você está estudando. Atenção! Para algumas disciplinas, você precisará verificar o número do fascículo que tem em mãos e acessar a sala correspondente a ele.

Bons estudos!

CEJA >>
CENTRO DE EDUCAÇÃO
de JOVENS e ADULTOS

Expressões algébricas

Matemática - Fascículo 8 - Unidade 22

Objetivos de aprendizagem

1. Reconhecer uma expressão algébrica;

2. Reconhecer um termo algébrico, identificando o coeficiente, a parte literal e o expoente da parte literal;

3. Efetuar operações com monômios: adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação;

4. Reconhecer um polinômio e saber determinar o seu grau;

5. Efetuar operações com polinômios: adição, subtração e multiplicação.

Para início de conversa...

Para resolver inúmeros problemas matemáticos, podemos utilizar uma parte muito importante da Matemática: a Álgebra.

A Álgebra ampliou o conceito do número, ao permitir a generalização de operações e sentenças matemáticas. No cotidiano, muitas vezes, usamos expressões sem perceber que elas representam expressões algébricas ou numéricas.

Lembra quando a sua primeira professora colocava no quadro:

3 + ■ = **5**, qual o valor do ■? E você, com certeza, respondia 2?

Nunca ninguém avisou, mas desde essa época você já realizava cálculos algébricos, e ainda achava simples! Agora só iremos substituir os quadrados, bolinhas ou qualquer outro desenho criativo por letras.

1. Linguagem algébrica

As expressões algébricas são expressões matemáticas que apresentam letras e podem conter números. São também denominadas expressões literais. Por exemplo:

$$x + y;\quad 2x^2 + \sqrt{y};\quad x - \frac{3}{2} + \frac{4y}{5};\quad 3a - 2b + 15$$

Obs.: a) Para indicar o produto entre letras ou entre letras e números, omitimos o sinal da multiplicação. Exemplo: $xy = x \,.\, y$ ou $4b = 4 \,.\, b$

b) O coeficiente 1 é, normalmente, omitido.

Exemplos: $1x = x$; $1ab = ab$; $-1xy = -xy$; $-1a = -a$

1.1 Termo algébrico ou monômio

Todo produto de números reais, expresso ou não por letras, é denominado monômio ou termo algébrico.

Exemplos: a) $3y$ b) $-\frac{3}{2}x^2$ c) $3xy$ d) $-5a^3b^2c$ e) ab^2

Num monômio, podemos destacar o coeficiente e a parte literal.

O coeficiente é um número, e a parte literal é formada por letras.

Exemplos: a) $3y$: coeficiente: 3 parte literal: y

b) $-4xy$: coeficiente: -4 parte literal: xy

c) ab^2: coeficiente: 1 parte literal: ab^2

Monômios semelhantes são aqueles que possuem a mesma parte literal ou não possuem parte literal.

Exemplos: a) $9x$ e $-7x$ são termos semelhantes

b) $5a^2b$ e a^2b são termos semelhantes

c) 4,18 e -3 são termos semelhantes

d) $7ab$ e $5ba$ são termos semelhantes

Atenção

O monômio x não é semelhante ao monômio x^2, pois, apesar de apresentarem a mesma letra, não possuem o mesmo grau.

1.2 Grau de um monômio

O grau de um monômio é fornecido pela soma dos expoentes da parte literal.

Exemplos: a) $3a^2b^5$

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{\textit{O expoente da variável a}} \text{ é } \mathbf{2} \\ \textbf{\textit{O expoente da variável b}} \text{ é } \mathbf{5}\end{array}\right\} \mathbf{2 + 5 = 7}$$

Logo, $3a^2b^5$ é um monômio de grau 7.

b) $\sqrt{5}xy$

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{\textit{O expoente da variável x}} \text{ é } \mathbf{1} \\ \textbf{\textit{O expoente da variável y}} \text{ é } \mathbf{1}\end{array}\right\} \mathbf{1+1=2}$$

Logo, $\sqrt{5}xy$ é um monômio de grau 2

Em algumas situações, o monômio aparece um pouco "desorganizado"; à organização desse monômio chamamos de simplificação.

Veja o exemplo: $2 \,.\, a \,.\, x^2 \,.\, 10 \,.\, a$

Identificando as partes numérica e literal desse monômio, temos:

Parte numérica	*Parte literal*
$2 . 10 = 20$	$a.x^2.a = a^2x^2$

Com isso, a forma simplificada do monômio é $20\,a^2x^2$.

Como você já percebeu, simplificar monômios, muitas vezes, significa multiplicar ou dividir potências.

Importante

Multiplicando e dividindo potências

Para multiplicar potências de mesma base, basta repetir a base e somar os expoentes.

Exemplo: $x^2.x^5.x^3 = x^{2+5+3} = x^{10}$

Na divisão de potências de mesma base, basta repetir a base e subtrair os expoentes.

Exemplo: $\dfrac{t^9}{t^5} = t^{9-5} = t^4$

Faça a atividade a seguir e verifique seu aprendizado.

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 1

Marque os itens que forem semelhantes:

a) $4x$ e $-7x$	e) $\frac{a}{3}$ e $12a$
b) $5ab$, $13ab$, $2ab$	f) $3x^3$ e $6x^2$
c) a^2x^2, $-10a^2x^2$, $\frac{2}{3}\,a^2x^2$	g) $-13pq$, $16pq$ e $-84pq$
d) 8 e -3	h) $\frac{a}{b}$ e $5a$

Anote as respostas em seu caderno

2. Operações com monômios

2.1 Adição e subtração de monômios

1º) Observar se os termos são semelhantes. A adição e subtração só podem ser realizadas com termos semelhantes.

2º) Adicionar ou subtrair os coeficientes dos termos semelhantes, conservando a parte literal.

Exemplos:

a) $5x^3 - 12x^3 = -7x^3$

b) $6a + 7y - 2y - 4a = 2a + 5y$

c) $-10x^2 - 3x - 2x^2 = -12x^2 - 3x$

d) $xy + 5xy - x + 3y + 7x = 6xy + 6x + 3y$

2.2 Multiplicação e divisão de monômios

1º) Multiplicar ou dividir os coeficientes.

2º) Multiplicar ou dividir a parte literal. (Aqui utilizaremos as regras de multiplicação e divisão de potência apresentada no boxe explicativo).

Exemplos:

a) $(2x) . (4x) = 8x^2$

b) $-3 . (-5a) = 15a$

c) $(-5ab) . (-4a) = 20a^2b$

d) $5y . (-3xy^3) = -15xy^4$

e) $x^5 \div x^3 = x^2$

f) $14m^2 \div 2m = 7m$

g) $(-10x^3) \div (-5x^3) = 2$

h) $(-3a^4) \div 2a^2 = -\dfrac{3}{2}\ a^2$

2.3 Potenciação de monômios

1º) Elevar o coeficiente à potência indicada.

2º) Elevar a parte literal à potência indicada (multiplicar os expoentes)

Exemplos:

a) $(5a^3b)^2 = 25a^6b^2$

b) $(-3xy)^3 = -27x^3y^3$

c) $(-2m^3n^2)^4 = 16m^{12}n^8$

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 2

Calcule:

a) $2x.(3x^2) - 5x.x^2$

b) $a^5 + (5a^2).(-3a^3)$

c) $(5x^2)^2 - 4x.3x^3$

d) $20x^5 : 4x + 4x.x$

Anote as respostas em seu caderno.

3. Polinômios

Polinômio é um monômio ou a soma indicada de monômios.

Exemplos: a) $5x$ é um polinômio de um termo ou um monômio.

b) $3y - 1$ é um polinômio de dois termos ou um binômio.

c) $x^2 - 4x + 1$ é um polinômio de três termos ou um trinômio.

d) $a^3 - 3a^2 + 4a + 1$ é um polinômio de quatro termos.

Os polinômios com mais de três termos não têm nomes especiais.

3.1 Grau de um polinômio

O grau de um polinômio reduzido, não nulo, pode ser dado em relação a uma determinada variável. O maior grau dessa variável indica o grau do polinômio.

Exemplos: a) $4xy^3 + 9x^4y^2 - xy^5 \begin{cases} \textbf{polinômio do 4º grau em relação a x} \\ \textbf{polinômio do 5º grau em relação a y} \end{cases}$

b) $7x^3 - x^2 + 5x - 3 \; \{$ ***polinômio do 3ºgrau em relação a x***

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 3

Dê o grau de cada um dos polinômios:

a) $7x^2 - 5$

b) $4 + 5x$

c) $5x^4 - 3x^3 + 4x - 2x^7$

d) $-x^2 + x^5 - 2x^3 + 4x$

Anote as respostas em seu caderno.

4. Operações com polinômios

Da mesma forma que operamos com monômios, também podemos efetuar operações entre dois ou mais polinômios.

4.1 Adição e subtração de polinômios

Dados os polinômios $A = 4x^2 - 2x + 1$ e $B = 5x^3 - 2x^2 + 5$, vamos indicar a soma por A + B e a diferença por A – B. Para calculá-las, basta eliminarmos os parênteses e reduzirmos os termos semelhantes.

$$A + B = (4x^2 - 2x + 1) + (5x^3 - 2x^2 + 5) =$$

$$4x^2 - 2x + 1 + 5x^3 - 2x^2 + 5 = 5x^3 + 2x^2 - 2x + 6$$

$$A - B = (4x^2 - 2x + 1) - (5x^3 - 2x^2 + 5) = 4x^2 - 2x + 1 - 5x^3 + 2x^2 - 5 =$$

$$4x^2 - 2x + 1 - 5x^3 + 2x^2 - 5 = - 5x^3 + 6x^2 - 2x - 4$$

Exemplos:

a) $(x^2 + 3x - 1) + (-3x + 3) = x^2 + 3x - 1 - 3x + 3 = x^2 + 2$

b) $(- a^3 + 2a - 5) - (a^3 - 2a - 7) = -a^3 + 2a - 5 - a^3 + 2a + 7$

$$= - 2a^3 + 4a + 2$$

c) $(-ab^2 + 2b - 5) + (2ab^2 - b + 2) = -ab^2 + 2b - 5 + 2ab^2 - b + 2 =$

$$= ab^2 + b - 3$$

d) $(x^3 - 2x) - (4x^2 - 3x + 4) + (-3x^3 + 7)=$

$$=x^3 - 2x - 4x^2 + 3x - 4 - 3x^3 + 7= - 2x^3 - 4x^2 + x + 3$$

4.2 Multiplicação de polinômios

A multiplicação de polinômios baseia-se no produto de monômios e na propriedade distributiva. A observação dos exemplos facilitará a compreensão.

Exemplo 1: $2x \,.\, 4x$ (Multiplicamos os fatores)

$= (2.4)\,.\,(x.x) = 8x^2$

Exemplo 2: $7z \,.\, (3x + 4y)$ (Aplicando a propriedade distributiva)

$= (7z\,.3x) + (7z\,.4y) = 21xz + 28yz$

(É usual as letras aparecerem em ordem alfabética)

Exemplo 3: $\frac{1}{2}\,a\,.(5b - 9ac) = (\frac{1}{2}\,a\,.5b) + (\frac{1}{2}\,a\,.(-9ac)) = \frac{5}{2}\,ab - \frac{9}{2}\,a^2c$

Exemplo 4: $(x + 3)\,.\,(x + 4) = x.x + x.4 + 3.x + 3.4 = x^2 + 4x + 3x + 12 =$

$= x^2 + 7x + 12$

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 4

Calcule o valor das expressões:

a) $(-x^4 + 3x^2 + 2x - 3) + (x^2 + 2) - (2x^4 + 5x^3 - 3x + 4)$

b) $(2x - 3).(x + 4)$

c) $(-2x^2 + 5x - 6)\,.\,(x^3 + 1)$

d) $(4x - 1)\,.\,(x + 3) - (-3x^4 - x^2 + 6x - 2)$

Anote as respostas em seu caderno.

Resumo

- Expressão algébrica é toda expressão que envolve números, letras e as operações indicadas entre eles.

- Todo produto de números reais, expresso ou não por letras, é chamado monômio ou termo algébrico.
- Num monômio, destacamos o coeficiente (um número) e a parte literal (formada de letras).
- O grau de um monômio, não nulo, é dado pela soma dos expoentes de sua parte literal.
- A soma ou a diferença de dois monômios semelhantes é um monômio com coeficiente igual à soma algébrica dos coeficientes, e a parte literal é igual à desses monômios.
- O produto de dois ou mais monômios é um monômio com coeficiente igual ao produto dos coeficientes desses monômios e a parte literal igual ao produto das partes literais desses monômios;
- O quociente de dois monômios, com o divisor diferente de zero, tem coeficiente igual ao quociente dos coeficientes desses monômios e a parte literal igual ao quociente das partes literais desses monômios.
- Polinômio é a soma algébrica de monômios.
- A adição e subtração só podem ser efetuadas com termos semelhantes.
- A multiplicação não exige termos semelhantes, e a maneira prática de efetuá-la é aplicando a propriedade distributiva.

Referências

BONJORNO, José Roberto, BONJORNO, Regina Azenha & OLIVARES, Ayrton. *Matemática: fazendo a diferença*. 1a ed. São Paulo: Editora FTD, 2006.

DANTE, Luis Roberto. *Tudo é Matemática*. São Paulo: Editora Ática, 2009.

GIL, Antonio Carlos. *Metodologia do Ensino Superior*. 3a ed. São Paulo: Editora Atlas, 1997.

MARQUES, Monica Baeta. *Metodologia do Ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: Universidade Castelo Branco, 2008.

MORI, Iracema e ONAGA, Dulce Satiko. *Matemática: idéias e desafios.* 14a ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2007.

NAME, Miguel Assis. *Tempo de Matemática*. São Paulo: Editora do Brasil, 1996

Respostas das atividades

Atividade 1

a) São monômios semelhantes, pois ambos apresentam **x** como parte literal.

b) São monômios semelhantes, pois os três termos apresentam **ab** como parte literal.

c) São monômios semelhantes, pois os três termos apresentam **a^2x^2** como parte literal.

d) Todo número real é um monômio.

e) São monômios semelhantes, pois ambos apresentam **a** como parte literal.

f) Não são monômios, pois as partes literais são distintas (x3 e x2).

g) São monômios semelhantes, pois os três termos apresentam **pq** como parte literal.

h) Não são monômios semelhantes, pois as partes literais são distintas.

Atividade 2

a) $2x \,.\, (3x^2) - 5x \,.\, x^2 = 6x^3 - 5x^3 = 1x^3 = x^3$

b) $a^5 + (5a^2) \,.\, (-3a^3) = a^5 - 15a^5 = -14a^5$

c) $(5x^2)^2 - 4x \,.\, 3x^2 = 25x^4 - 12x^4 = 13x^4$

d) $20x^5 : 4x + 4x \,.\, x = 5x^4 + 4x^2$

Atividade 3

a) 2º grau b) 1º grau c) 7º grau d) 5º grau

Atividade 4

a) $(-x^4 + 3x^2 + 2x - 3) + (x^2 + 2) - (2x^4 + 5x^3 - 3x + 4) =$
$= -x^4 + 3x^2 + 2x - 3 + x^2 + 2 - 2x^4 - 5x^3 + 3x - 4 =$
$= -3x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 5x - 5$

b) $(2x - 3) \,.\, (x + 4) = 2x^2 + 8x - 3x - 12 = 2x^2 + 5x - 12$

c) $(-2x^2 + 5x - 6) \,.\, (x^3 + 1) = -2x^5 - 2x^2 + 5x^4 + 5x - 6x^3 - 6 =$
$= -2x^5 + 5x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 5x - 6$

d) $(4x - 1) \,.\, (x+3) - (-3x^4 - x^2 + 6x - 2) =$
$4x^2 + 12x - x - 3 + 3x^4 + x^2 - 6x + 2 = 3x^4 + 5x^2 + 5x - 1$

Exercícios

1. No monômio $\frac{a^3bx}{2}$, o coeficiente é:

a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{2}$ d) 3

2. Forme conjuntos de termos semelhantes existentes no quadro:

$5xy$	$8x$	$-3a^2b$	$-2x$
x^2y^3	$4b$	$-b$	$-xy$
$2a^2b$	$-5x$	$7x^2y^3$	$\sqrt{3}xy$

3. Simplificando a expressão $6x^2 - (4x^2 - 3) + (-x + 2) - (3x + 6)$, obtemos:

a) $2x^2 - 3x + 1$ c) $- 2x^2 - 4x + 1$

b) $2x^2 - 4x - 1$ d) $- 2x^2 - 4x + 3$

4. Calcule:

a) $2x . (3x^2) - 5x . (x^2) + 2 . 3x$ c) $(- 18x^2 y^3) : (- 3xy^2)$

b) $x^3 y . (10xy) - x^2 . (3x^2 y^3)$ d) $(3x^3 y) : (- 6x^2)$

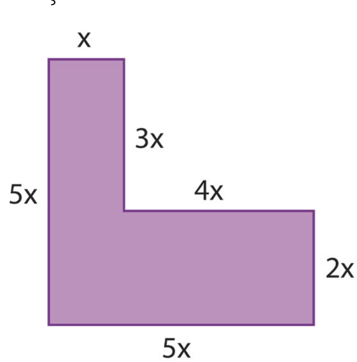
5. Dado os polinômios

$E = 3x - 5y + 2$	$F = 2x + 1$	$G = - x - y$

Calcule: a) $E + F . G$ b) $F - E$ c) $G . E - F$

6. Ao efetuar a potenciação $(-4x^3)^3$, um aluno deu como resposta $-12 x^9$. Essa resposta está certa ou errada? Se estiver errada, onde está o erro: no coeficiente ou na parte literal?

7. O perímetro da figura abaixo pode ser encontrado por meio da adição das medidas de seus lados. Determine o perímetro da figura.



Respostas dos exercícios

1. letra b

2.

$5xy$, $-xy$ e $\sqrt{3}xy$	$8x$, $-2x$ e $-5x$	$-3a^2b$ e $2a^2b$	x^2y^3 e $7x^2y^3$	$4b$ e $-b$

3. letra b

$6x^2 - (4x^2 - 3) + (-x + 2) - (3x + 6) = 6x^2 - 4x^2 + 3 - x + 2 - 3x - 6 =$

$= 2x^2 - 4x - 1$

4. a) $2x \,.\, (3x^2) - 5x \,.\, (x^2) + 2 \,.\, 3x = 6x^3 - 5x^3 + 6x = x^3 + 6x$

b) $x^3 y \,.\, (10xy) - x^2.(3x^2 y^3) = 10x^4y^2 - 3x^9y^3$

c) $(-18x^2y^3) : (-3xy^2) = 6xy$

d) $(3x^3y) : (-6x^2) = -\frac{3}{6}xy = -\frac{1}{2}xy = -\frac{xy}{2}$

5. a) $E + F \,.\, G = (3x - 5y + 2) + (2x + 1)(-x - y)$

$= 3x - 5y + 2 - 2x^2 - 2xy - x - y = -2x^2 - 2xy + 2x - 6y + 2$

b) $F - E = (2x + 1) - (3x - 5y + 2) = 2x + 1 - 3x + 5y - 2 = -x + 5y - 1$

c) $G.E - F = (-x - y)(3x - 5y + 2) - (2x + 1)$

$= -3x^2 + 5xy - 2x - 3xy + 5y^2 - 2y - 2x - 1$

$= -3x^2 + 5y^2 + 2xy - 4x - 2y - 1$

6. $(-4x^3)^3 = (-4)^3 \,.\, (x^3)^3 = -64x^9$

A resposta está errada, e o erro está no coeficiente.

7. $x + 5x + 5x + 2x + 4x + 3x = 20x$

CEJA >>
CENTRO DE EDUCAÇÃO
de JOVENS e ADULTOS

Produtos notáveis

Matemática - Fascículo 8 - Unidade 23

Objetivos de aprendizagem

1. Identificar produtos notáveis;
2. Desenvolver o quadrado da soma de dois termos;
3. Desenvolver o quadrado da diferença de dois termos;
4. Determinar o produto da soma pela diferença de dois termos.

Para início de conversa...

O que você acha mais fácil: calcular de cabeça 23 x 7 ou 23 x 10?

Tenho certeza de que você respondeu 23 x 10, pois basta acrescentar um zero ao 23. Esse processo irá se repetir para toda potência de 10 (1, 10, 100, 1000,...), ou seja, basta acrescentar zero(s) ao final do número. A esse tipo de conhecimento, podemos chamar de notável, essencial, pois o seu domínio torna mais fácil a obtenção do resultado.

É esta a ideia matemática de um produto notável: encontrar uma regra que facilite o cálculo sem precisar passar por várias etapas.

1. Quadrado da soma de dois termos: $(a + b)^2$ ou $(a + b)(a + b)$

Observe os exemplos a seguir:

A) $(x + 3)^2 = (x + 3)(x + 3) \rightarrow$ aplicando a propriedade distributiva, teremos:

$= x(x+3)+3(x+3) = x^2+3x+3x+9 \rightarrow$ reduzindo os termos semelhantes:

$= x^2 + 6x + 9$

B) $(4 + 2x)^2 = (4 + 2x)(4 + 2x) = 4(4 + 2x) + 2x(4 + 2x) = 16 + 8x + 8x + 4x^2$

$= 16 + 16x + 4x^2$

C) $(x^2 + 3y)^2 = (x^2 + 3y)(x^2+ 3y) = x^2 (x^2 + 3y) + 3y(x^2 + 3y)$

$= x^4 + 3x^2y + 3x^2y + 9y^2 = x^4 + 6x^2y + 9y^2$

Assim, podemos concluir que o quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo.

$(\textit{primeiro} + \textit{segundo})^2$

$= (\textit{primeiro})^2 + 2.(\textit{primeiro})(\textit{segundo}) + (\textit{segundo})^2$

Curiosidades

Podemos usar produtos notáveis em cálculos numéricos.

Calcular o quadrado de potencias de 10 é fácil; basta dobrar o número de zeros:

$10^2 = 100$ $\quad\quad$ $100^2 = 10000$

Se o quadrado a ser calculado for de um número multiplicado por uma potência de 10, ainda assim o cálculo é fácil: fazemos o quadrado do número e dobramos o número de zeros.

$20^2 = 2^2.100 = 400$	$300^2 = 3^2.10000 = 90000$
$4000^2 = 4^2.1000000 = 16000000$	

Mas, e se quisermos calcular quadrados do tipo:

201^2 $\quad\quad$ 301^2 $\quad\quad$ 41^2

é aqui que usamos os produtos notáveis. Veja como:

$201^2 = (200 + 1)^2 = 200^2 + 2.200.1 + 1^2$

$= 40000 + 400 + 1$

$= 40401$

Agora é com você; faça 301^2 e 41^2 e depois confira o resultado na calculadora.

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 1

Usando a regra do quadrado da soma, calcule:

a) $(a + 7)^2$ $\quad\quad$ c) $(2y + 4x)^2$

b) $(3x + 1)^2$ $\quad\quad$ d) $(2m + 3p)^2$

Anote as respostas em seu caderno

2. Quadrado da diferença de dois termos: $(a - b)^2$ ou $(a - b)(a - b)$

Assim como o quadrado da soma, o quadrado da diferença também é um produto notável, ou seja, existe uma regra capaz de defini-lo.

Exemplos:

A) $(x - 3)^2 = (x - 3)(x - 3) \rightarrow$ aplicando a propriedade distributiva, teremos:

$= x(x - 3) - 3(x - 3) = x^2 - 3x - 3x + 3^2 \rightarrow$ reduzindo os termos semelhantes

$= x^2 - 6x + 9$

B) $(2x - 4)^2 = (2x - 4)(2x - 4) = 2x(2x - 4) - 4(2x - 4) = 4x^2 - 8x - 8x + 16 =$

$= 4x^2 - 16x + 16$

C) $(a - 2m)^2 = (a - 2m)(a - 2m) = a(a - 2m) - 2m(a - 2m)$

$= a^2 - 2am - 2am + 4m^2 = a^2 - 4am + 4m^2$

Assim, podemos concluir que o quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, menos duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo.

$$\boxed{(\textit{primeiro} - \textit{segundo})^2 = (\textit{primeiro})^2 - 2.(\textit{primeiro})(\textit{segundo}) + (\textit{segundo})^2}$$

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 2

Calcule os quadrados:

a) $(x - y)^2$ c) $(3x - 1)^2$

b) $(a - 2)^2$ d) $(3a - 5b)^2$

Anote as respostas em seu caderno.

3. Produto da soma pela diferença de dois termos: $(a + b)(a - b)$

Observe que a soma e a subtração são dos mesmos termos.

Aplicando a propriedade distributiva, temos:

$(a + b).(a - b) = a(a - b) + b(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$

Portanto, podemos concluir que o produto da soma pela diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, menos o quadrado do segundo termo.

(*primeiro* + *segundo*). (*primeiro* - *segundo*) = (*primeiro*)² - (*segundo*)²

Veja os exemplos:

A) $(x + 3)(x - 3) = x^2 - 3x + 3x - 9 = x^2 - 9$

B) $(3x + 2y)(3x - 2y) = 9x^2 - 6xy + 6xy - 4y^2 = 9x^2 - 4y^2$

C) $(2m + 4)(2m - 4) = 4m^2 - 8m + 8m - 16 = 4m^2 - 16$

D) $(-7 + p)(7 + p)=$

Atenção ⚠

O objetivo deste exemplo é mostrar que é possível a mudança da posição dos termos opostos. Se for visualmente mais claro, é possível alterar a ordem antes de iniciar os cálculos $(p - 7)(p + 7)$

$= - 7(7 + p) + p(7 + p) = - 49 - 7p + 7p + p^2 = - 49 + p^2$

Portanto, $(- 7 + p)(7 + p) = (p - 7)(p + 7) = - 49 + p^2 = p^2 - 49$

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 3

Calcule:

a) $(x + 11)(x - 11)$

b) $(4x - 2)(4x + 2)$

c) $(2z - w)(2z + w)$

d) $(-5a + 3b)(5a + 3b)$

Anote as respostas em seu caderno.

Resumo

- Alguns produtos envolvendo polinômios apresentam uma regularidade em seus resultados (um padrão). Por isso, são conhecidos como produtos notáveis.
- O padrão do quadrado da soma é $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- O padrão do quadrado da diferença é $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- O padrão do produto da soma pela diferença é $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Referências

BIGODE, Antonio José Lopes. *Matemática hoje é feita assim*. 1ª ed. São Paulo: Editora FTD, 2000.

BONJORNO, José Roberto, BONJORNO, Regina Azenha & OLIVARES, Ayrton. *Matemática: fazendo a diferença*. 1ª ed. São Paulo: Editora FTD, 2006.

CENTURIÒN, Marília, JAKUBOVIC, José & LELLIS, Marcelo. *Matemática na medida certa*. 3ª ed. São Paulo: Scipione, 2003.

DANTE, Luis Roberto. *Tudo é Matemática*. São Paulo: Editora Àtica, 2009.

GIL, Antonio Carlos. *Metodologia do Ensino Superior.* 3ª ed. São Paulo: Editora Atlas, 1997.

MARQUES, Monica Baeta. *Metodologia do Ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: Universidade Castelo Branco, 2008.

MORI, Iracema e ONAGA, Dulce Satiko. *Matemática: idéias e desafios.* 14ª ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2007.

NAME, Miguel Assis. *Tempo de Matemática*. São Paulo: Editora do Brasil,1996

SPINELLI, Walter & SOUZA, Maria Helena. *Matemática*.1ª ed. São Paulo: Editora Ática, 2001.

Respostas das atividades

Atividade 1

a) $a^2 + 2.a.7 + 7^2 = a^2 + 14a + 49$

b) $(3x)^2 + 2.3x.1 + 1^2 = 9x^2 + 6x + 1$

c) $(2y)^2 + 2.2y.4x + (4x)^2 = 4y^2 + 16xy + 16x^2$

d) $(2m)^2 + 2.2m.3p + (3p)^2 = 4m^2 + 12mp + 9p^2$

Atividade 2

a) $x^2 - 2.x.y + y^2 = x^2 - 2xy + y^2$

b) $a^2 - 2.a.2 + 2^2 = a^2 - 4a + 4$

c) $(3x)^2 - 2.3x.1 + 1^2 = 9x^2 - 6x + 1$

d) $(3a)^2 - 2.3a.5b + (5b)^2 = 9a^2 - 30ab + 25b^2$

Atividade 3

a) $x^2 - 11^2 = x^2 - 121$

b) $(4x)^2 - 2^2 = 16x^2 - 4$

c) $(2z)^2 - w^2 = 4z^2 - w^2$

d) $(3b - 5a)(3b + 5a) = (3b)^2 - (5a)^2 = 9b^2 - 25a^2$

Exercícios

1. Calcule as expressões:

a) $(x + 1)^2 + (x + 5)^2$ b) $(a + b)^2 - (b + c)^2$

2. O desenvolvimento de $(6x^5 - \frac{1}{3})^2$ é:

a) $36x^{25} - \frac{1}{9}$ b) $36x^{10} + \frac{1}{9}$ c) $36x^{10} - 4x^5 + \frac{1}{9}$ d) $36x^{10} - 2x^5 - \frac{1}{9}$

3. Simplifique as expressões:

a) $(- x + 3)^2 - 2x(4 - x)$

b) $1/2\ [(x + 1)^2 + (x - 1)^2]$

4. Considere as expressões:

I. $(a - b)^2 = a^2 - b^2$

II. $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$

III. $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$

Então:

a) são todas falsas.

b) são todas verdadeiras.

c) somente II e III são verdadeiras.

d) somente I e II são verdadeiras.

5. Calcule os produtos:

a) $(x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{3})$

b) $(x + 5)(5 - x)$

c) $(0{,}3 - a)(0{,}3 + a)$

6. Aplicando a regra do produto da soma pela diferença de dois números, calcule:

a) $(10 + 7)(10 - 7) =$

b) $(30 - 9)(30 + 9) =$

7. Escreva as expressões na sua forma mais simples:

a) $10a^2 \,.\, (a - 4)^2 =$

b) $(2x - y)^2 - x \,.\, (x - 4y) =$

c) $9x^2 - (3x - 1)^2 =$

Respostas dos exercícios

1. a) $(x + 1)^2 + (x + 5)^2 = x^2 + 2.x.1 + 1^2 + x^2 + 2.x.5 + 5^2$
   $= x^2 + 2x + 1 + x^2 + 10x + 25 = 2x^2 + 12x + 26$
   b) $(a + b)^2 - (b + c)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2 - (b^2 + 2.b.c + c^2)$
   $= a^2 + 2ab + b^2 - b^2 - 2bc - c^2 = a^2 + 2ab - 2bc - c^2$

2. letra c
   $(6x^5 - \frac{1}{3})^2 = (6x^5)^2 - 2.6x^5.\frac{1}{3} + (\frac{1}{3})^2 = 36x^{10} - 4x^5 + \frac{1}{9}$

3. a) $(- x + 3)^2 - 2x(4 - x)$ Observe que, $(- x + 3)^2 = (3 - x)^2$, logo:
   $= 3^2 - 2.3.x + x^2 - 8x + 2x^2 = 9 - 6x + x^2 - 8x + 2x^2 = 3x^2 - 14x + 9$

   b) $\frac{1}{2}[(x + 1)^2 + (x - 1)^2] = \frac{1}{2}[x^2 + 2.x.1 + 1^2 + x^2 - 2.x.1 + 1^2]$
   $= \frac{1}{2}[x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1] = \frac{1}{2}[2x^2 + 2] = \frac{1}{2}.2x^2 + \frac{1}{2}.2 = \frac{2x^2}{2}$
   $+ \frac{2}{2} = x^2 + 1$

4. letra c
   I. $(a - b)^2 = a^2 - b^2 \rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \neq a^2 - b^2$ (Falsa)
   II. $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab \rightarrow a^2 + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = a^2 + b^2$
   (verdadeira)
   III. $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab \rightarrow a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)$
   $= a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 4ab$ (verdadeira)

5. a) $(x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{3}) = x^2 - (\frac{1}{3})^2 = x^2 - \frac{1}{9}$

   b) $(x + 5)(5 - x) = (5 + x)(5 - x) = 5^2 - x^2 = 25 - x^2$
   c) $(0,3 - a)(0,3 + a) = (0,3)^2 - a^2 = 0,09 - a^2$

6. a) $(10 + 7)(10 - 7) = (10)^2 - (7)^2 = 100 - 49 = 51$
   b) $(30 - 9)(30 + 9) = (30)^2 - (9)^2 = 900 - 81 = 819$

7. a) $10a^2.(a - 4)^2 = 10a^2.(a^2 - 8a + 16) = 10a^2 - 80a^3 + 160a^2$
   b) $(2x - y)^2 - x.(x - 4y) =$
   $4x^2 - 4xy + y^2 - (x^2 - 4xy) = 4x^2 - \cancel{4xy} + y^2 - x^2 + \cancel{4xy} = 3x^2 + y^2$
   c) $9x^2 - (3x - 1)^2 = 9x^2 - (9x^2 - 6x + 1) = \cancel{9x^2} - \cancel{9x^2} + 6x - 1 = 6x - 1$

CEJA >>
CENTRO DE EDUCAÇÃO
de JOVENS e ADULTOS

Fatorando polinômios

Matemática - Fascículo 8 - Unidade 24

Objetivos de aprendizagem

1. Identificar e dominar os principais casos de fatoração;
2. Determinar o m.m.c. de polinômios;
3. Simplificar frações algébricas;
4. Efetuar a adição e subtração de frações algébricas;
5. Multiplicar e dividir frações algébricas.

Para início de conversa...

Nesta aula, vamos falar de fatoração. O que vem a ser fatorar?

Analise a questão proposta pelo professor e a resposta dada por Pedro.

Figura 24.1: Professor e Pedro na aula de Matemática.

O que Pedro fez foi transformar o polinômio $4x^2 + 4xy$ em uma multiplicação de 4x por x + y. Nesse caso, dizemos que foi feita uma fatoração de $4x^2 + 4xy$ ou que $4x^2 + 4xy$ foi fatorado.

1. Fatoração de polinômios

Fatorar um polinômio é expressá-lo por meio de uma multiplicação.

Existem vários casos de fatoração; aqui, veremos os quatro casos mais importantes.

1.1 Fator comum em evidência

A "volta" da propriedade distributiva é a fatoração em que destacamos o fator comum.

A) $ax + ay = a(x + y) \rightarrow$ a é o fator comum em evidência

B) $mx + mz - mw = m(x + z - w) \rightarrow$ m é o fator comum em evidência

C) $12x - 6y + 9z = 3(4x - 2y + 3z) \rightarrow$ 3 é o fator comum (observe que 3 é o mdc entre os números 12, 6 e 9. Sendo assim, cada termo será dividido por 3)

D) $6x^4 - 12x^3 + 15x^2 = 3x^2(2x^2 - 4x + 5) \rightarrow$ fator comum dos coeficientes: 3

fator comum da parte literal: x^2

1.2 Fatoração por agrupamento

Vamos aplicar duas vezes a fatoração, utilizando o processo do fator comum.

Veja:

$$ax + ay + bx + by = \underbrace{(ax + ay)}_{\text{fator comum (a)}} + \underbrace{(bx + by)}_{\text{fator comum (b)}} = \underbrace{a(x + y) + b(x + y)}_{\text{fator comum (x+y)}}$$

$=(x+y)(a+b)$

Exemplos:

A) $8ax + bx + 8ay + by = x(8a + b) + y(8a + b) = (8a + b)(x + y)$

B) $2x^2 - 4x + 3xy - 6y = 2x(x - 2) + 3y(x - 2) = (x - 2)(2x + 3y)$

1.3 Fatoração por diferença de dois quadrados

Vimos que $(a + b)(a - b)=a^2 - b^2$

Então, podemos escrever que $(a + b).(a - b)$ é a forma fatorada de $a^2 - b^2$.

Exemplos:

A) $x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4) \rightarrow$ Observe que tanto x^2 quanto o 16 possuem raiz quadrada exata.

$\downarrow \quad \downarrow$

$\sqrt{x^2} \quad \sqrt{16}$

B) $25 - a^2 = (5 - a)(5 + a)$

C) $p^2 - 100 = (p + 10)(p - 10)$

D) $36x^4 - y^6 = (6x^2 + y^3)(6x^2 - y^3)$

E) $49a^2 - x^2y^2 = (7a + xy)(7a - xy)$

1.4 Fatoração do trinômio quadrado perfeito

Vimos que:

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2)} \text{ e } \boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2)}$$

Então:

- $a^2 + 2ab + b^2$ tem forma fatorada igual a $(a + b)^2$
- $a^2 - 2ab + b^2$ tem forma fatorada igual a $(a - b)^2$

Atenção ⚠

Nem todos os trinômios podem ser fatorados.

Para fatorar um trinômio quadrado perfeito, devemos:

1. Achar a raiz quadrada do primeiro termo;
2. Achar a raiz quadrada do último termo;
3. O termo do meio deve ser o dobro do produto das raízes;
4. O resultado terá o sinal do termo do meio.

Exemplos:

A) $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

B) $x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$

C) $36 + 12x + x^2 = (6 + x)^2$

D) $4x^2 + 12xy + 36y^2 = (2x + 6y)^2$

E) $x^2 - 5x + 25$ não é um quadrado perfeito, pois $5x \neq 2.x.5 = 10x$

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 1

1. Sabendo que x+y=10 e que x-y=4, determine quanto vale:

a) $5x + 5y$

b) $3x - 3y$

c) $x^2 - y^2$

d) $x^2 - 2xy+y^2$

2. Assinale qual das alternativas abaixo não representa um trinômio quadrado perfeito.

a) $x^2 - 4x + 4$

b) $x^2 - 12x + 9$

c) $x^2 - x + 0,25$

d) $x^4 + 22x^2 + 121$

Anote as respostas em seu caderno

2. Mínimo múltiplo comum de polinômios

Devemos fatorar os polinômios e calcular o m.m.c. procedendo da mesma maneira como fazemos com os números naturais, ou seja, o m.m.c. será o produto dos fatores comuns e não comuns com o maior expoente.

Exemplos:

A) Calcular o m.m.c. dos polinômios $3x + 3$ e $5x + 5$

Solução: Fatorando os polinômios, temos, $3x + 3 = 3(x + 1)$ e

$5x + 5 = 5(x + 1)$.

m.m.c. = $3.5.(x + 1) = 15(x + 1)$

B) Calcular o m.m.c. dos polinômios $7x - 7$ e $x^2 - 2x + 1$

Solução: $7x - 7 = 7(x-1)$ e $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

m.m.c. = $7(x - 1)^2$

C) Calcular o m.m.c. dos polinômios $x - y$ e $x^2 - y^2$

Solução: $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

m.m.c. = $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$

D) Calcular o m.m.c. dos polinômios $49x^2 - 14x + 1$ e $21x - 3$

Solução: $49x^2 - 14x + 1 = (7x - 1)^2$ e $21x - 3 = 3(7x - 1)$

m.m.c. = $3(7x - 1)^2$

E) Calcular o m.m.c. dos polinômios $x^2 - 9$ e $x^2 + 6x + 9$

Solução: $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ e $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

m.m.c. = $(x - 3)(x + 3)^2$

3. Simplificação de frações algébricas

Simplificar uma fração algébrica significa dividir o numerador e o denominador por seus divisores comuns, encontrando, assim, uma fração algébrica mais simples (irredutível), equivalente à primeira.

Veja os exemplos:

a) $\dfrac{6ab^2c^3}{15a^3b^2c^2}$ → fatorando os termos da fração, teremos:

$$\frac{2.\cancel{3}.\cancel{a}.\cancel{b}.\cancel{b}.\cancel{c}.\cancel{c}.c}{\cancel{3}.5.\cancel{a}.a.a.\cancel{b}.\cancel{b}.\cancel{c}.\cancel{c}} = \frac{2c}{5a^2}$$

b) $\dfrac{10a}{10a} = 1$

c) $\dfrac{(x^2 - 4)}{(x^2 + 4x + 4)}$ → fatorando os termos da fração, teremos:

$$\frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)^2} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x+2)} = \frac{x-2}{x+2}$$

d) $$\frac{10a - b^3}{b^3 - 10a} = \frac{10a - b^3}{\underbrace{-\left(-b^3 + 10a\right)}} = \frac{10a - b^3}{-\left(10a - b^3\right)} = -1$$

Recurso muito utilizado para se obter equivalência

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 2

1. Sendo A = $x^2 - 10x + 25$, B = $x^2 - 25$ e C = $(x - 5)(x + 1)$, calcule:

a) m.m.c. de A e B

b) m.m.c. de B e C

c) m.m.c. de A, B e C

2. Simplifique as expressões:

a) $\dfrac{10xy}{10x^2+20xy}$ c) $\dfrac{x-2}{x^2-4}$

b) $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{3x-3y}$ d) $\dfrac{(x^2-4x+4)(x+2)}{x^2-4}$

Anote as respostas em seu caderno.

4. Operações com frações algébricas

4.1 Adição e subtração de frações algébricas

1º caso: As frações algébricas apresentam denominadores iguais.

$$\frac{5x+2y}{z}+\frac{10x-3y}{z}-\frac{x+1}{z}=\frac{5x+2y+10x-3y-x-1}{z}=\frac{14x-y-1}{z}$$

2º caso: As frações algébricas apresentam denominadores diferentes.

Neste caso, devemos primeiramente reduzir as frações ao mesmo denominador e, em seguida, procedermos como no 1º caso.

Veja os exemplos.

A) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{x^2}$

Primeiramente, reduzimos as frações ao mesmo denominador e, a seguir, procedemos como no caso anterior.

x² é o resultado do m.m.c. entre x² e x; então, devemos achar as frações equivalentes com denominador x².

$\frac{3}{x} = \frac{3x}{x^2}$, os demais termos já apresentam denominar x².

A adição será realizada com as frações equivalentes:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{3x}{x^2} - \frac{4}{x^2} = \frac{1+3x-4}{x^2} = \frac{3x-3}{x^2}$$

B) $\frac{3}{2x-1} - \frac{6}{4x^2-1} + \frac{3}{2x+1} = \frac{3}{2x-1} - \frac{6}{(2x+1)(2x-1)} + \frac{3}{2x+1}$

Inicialmente, escrevemos as frações com denominadores fatorados.

Percebemos, dessa forma, que o m.m.c. é (2x + 1)(2x - 1); então, vamos reduzir as frações a um mesmo denominador.

$$\frac{3(2x+1)}{(2x-1)(2x+1)} - \frac{6}{(2x+1)(2x-1)} + \frac{3(2x-1)}{(2x+1)(2x-1)} =$$

$$\frac{6x+3}{(2x+1)(2x-1)} - \frac{6}{(2x+1)(2x-1)} + \frac{6x-3}{(2x+1)(2x-1)} =$$

$$\frac{6x+3-6+6x-3}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{12x-6}{(2x+1)(2x-1)}$$

podemos colocar, no numerador, o fator comum em evidência:

$$= \frac{6(2x-1)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{6}{2x+1}$$

4.2 Multiplicação de frações algébricas

Como nas frações numéricas, o produto de duas frações algébricas é obtido multiplicando-se os numeradores entre si e os denominadores entre si.

Exemplos:

a) $\frac{3a}{5b} \times \frac{a^2}{c} = \frac{3a^3}{5bc}$

b) $\frac{2}{a+b} \times \frac{a-3}{a-b} = \frac{2(a-3)}{(a+b)(a-b)} = \frac{2a-6}{a^2-b^2}$

Importante

Quando existirem fatores comuns no numerador e no denominador, podemos cancelá-los, como nos seguintes exemplos:

a) $\frac{14\cancel{x}}{\cancel{3}y} \times \frac{\cancel{6}a}{\cancel{x}} = \frac{14}{y} \times \frac{2a}{1} = \frac{28a}{y}$

b) $\frac{\cancel{10}a^{\cancel{2}}}{\cancel{a-b}} \cdot \frac{(a-b)^{\cancel{2}}}{\cancel{5a}b} = \frac{2a(a-b)}{b}$

c) $\frac{x+y}{a^2-6a+9} \cdot \frac{a-3}{x^2-y^2} = \frac{\cancel{x+y}}{(a-3)^2} \cdot \frac{\cancel{a-3}}{\cancel{(x+y)}(x-y)} = \frac{1}{(a-3)(x-y)}$

4.3 Divisão de frações algébricas

Da mesma forma, o quociente de duas frações algébricas é obtido multiplicando-se a primeira fração pelo inverso da segunda.

$$\boxed{\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}}$$

Veja os exemplos:

a) $\frac{7}{8} \div \frac{a}{b} = \frac{7}{8} \times \frac{b}{a} = \frac{7b}{8a}$

b) $\frac{5x}{2y} \div \frac{7x}{6a} = \frac{5x}{2y} \times \frac{6a}{7x} = \frac{15a}{7y}$

c) $\frac{a^2-b^2}{3ab^2} \div \frac{a^2+2ab+b^2}{6a^2b} = \frac{a^2-b^2}{3ab^2} \times \frac{6a^2b}{a^2+2ab+b^2} =$

$\frac{(a+b)(a-b)}{3ab^2} \times \frac{6a^2b}{(a+b)^2} = \frac{(a-b).2a}{b(a+b)} = \frac{2a(a-b)}{b(a+b)}$

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 3

Simplifique as frações:

a) $\frac{5a}{a+3} + \frac{3a}{a^2-9}$ b) $\frac{3x-4}{x^2-16} - \frac{1}{x-4}$ c) $\frac{2x}{x-7} \div \frac{x-7}{x} . \frac{x^2-49}{5x}$

Anote as respostas em seu caderno.

Resumo

- Fatorar um polinômio é expressá-lo por meio de uma multiplicação.
- A simplificação de fração algébrica segue os mesmos procedimentos utilizados na fração numérica.
- Nas adições e subtrações de frações algébricas, é necessário reduzirmos as frações ao mesmo denominador (m.m.c. dos denominadores).
- O produto de duas frações algébricas é obtido multiplicando-se os numeradores entre si, bem como os denominadores entre si.
- O quociente de duas frações algébricas é obtido multiplicando-se a primeira fração pelo inverso da segunda.

Referências

BIGODE, Antonio José Lopes. *Matemática hoje é feita assim*. 1a ed. São Paulo: Editora FTD, 2000..

BONJORNO, José Roberto, BONJORNO, Regina Azenha & OLIVARES, Ayrton. *Matemática: fazendo a diferença*. 1a ed. São Paulo: Editora FTD, 2006.

CENTURIÒN, Marília, JAKUBOVIC, José & LELLIS, Marcelo. *Matemática na medida certa*. 3a ed. São Paulo: Scipione, 2003.

DANTE, Luis Roberto. *Tudo é Matemática*. São Paulo: Editora Àtica, 2009.

GIL, Antonio Carlos. *Metodologia do Ensino Superior*. 3a ed. São Paulo: Editora Atlas, 1997.

MARQUES, Monica Baeta. *Metodologia do Ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: Universidade Castelo Branco, 2008.

NAME, Miguel Assis. *Tempo de Matemática*. São Paulo: Editora do Brasil, 1996

Respostas das atividades

Atividade 1

1. a) Colocando 5 em evidência, temos: $5(x + y) = 5 .10 = 50$

   b) Colocando 3 em evidência, temos: $3(x - y) = 3 . 4 = 12$

   c) Temos, neste caso, a diferença de dois quadrados; portanto:

   $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 4 . 10 = 40$

   d) Neste caso, temos um trinômio quadrado perfeito, pois $\sqrt{x^2}=x$, $\sqrt{y^2}$ $=y$ e

   $2.x.y = 2xy$ (termo central). Logo, $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 = 4^2 = 16$

2. Letra b. Observe que $\sqrt{x^2} = x$, $\sqrt{9} = 3$ e $12x \neq 2.x.3 = 6x$

Atividade 2

1. a) Fatorando A, temos: $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$

   Fatorando B, temos: $x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$

   Portanto o m.m.c. de A e B é $(x + 5)(x - 5)^2$

b) $B = (x + 5)(x - 5)$ e $C = (x - 5)(x + 1)$

   m.m.c $(B,C) = (x + 5)(x - 5)(x + 1)$

c) A = $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$, B = $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$ e

$$C = (x - 5)(x + 1)$$

$$\text{m.m.c.}(A, B, C) = (x - 5)^2(x + 5)(x + 1)$$

2. a) $\dfrac{10xy}{10x^2+20xy} = \dfrac{10xy}{10x(x+2y)} = \dfrac{y}{x+2y}$ (Fator comum em evidência)

b) $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{3x-3y} = \dfrac{(x-y)^2}{3(x-y)} = \dfrac{(x-y)(x-y)}{3(x-y)} = \dfrac{x-y}{3}$

Aqui, o numerador é um trinômio quadrado perfeito e o denominador tem um fator comum.

c) $\dfrac{x-2}{x^2-4} = \dfrac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{1}{(x+2)}$

O denominador representa a diferença de dois quadrados.

d) $\dfrac{(x^2-4x+4)(x+2)}{x^2-4} = \dfrac{(x-2)^2(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{(x-2)(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = x-2$

No numerador, temos um trinômio quadrado perfeito e no denominador uma diferença de dois quadrados.

Atividade 3

a) $\dfrac{5a}{a+3} + \dfrac{3a}{a^2-9} = \dfrac{5a}{a+3} + \dfrac{3a}{(a+3)(a-3)} = \dfrac{5a(a-3)+3a}{(a+3)(a-3)} = \dfrac{5a^2-15a+3a}{(a+3)(a-3)} =$

$\dfrac{5a^2-12a}{(a+3)(a-3)} = \dfrac{a(5a-12)}{a^2-9}$

b) $\dfrac{3x-4}{x^2-16} - \dfrac{1}{x-4} = \dfrac{3x-4}{(x-4)(x+4)} - \dfrac{1}{x-4} = \dfrac{3x-4-1(x+4)}{(x-4)(x+4)} = \dfrac{3x-4-x-4}{(x-4)(x+4)} =$

$\dfrac{2x-8}{(x-4)(x+4)} = \dfrac{2(x-4)}{(x-4)(x+4)} = \dfrac{2}{(x+4)}$

c) $\dfrac{2x}{x-7} \div \dfrac{x-7}{x} \cdot \dfrac{x^2-49}{5x} = \dfrac{2x}{x+7} \cdot \dfrac{x}{x-7} \cdot \dfrac{(x-7)(x+7)}{5x} = \dfrac{2x}{5}$

Exercícios

1. Fatore as expressões:

a) $9 - 6m + m^2$ b) $x^4 - 81$ c) $x^3 - x^2 + 6x - 6$ d) $10x^2 y - 15xy + 5y$

2. Determine o m.m.c. dos seguintes polinômios:

a) x e $x - 8$ b) $7x^2$ e $2x^2 - 2x$ c) $x^2 - 7x$ e $x^2 - 49$

3. Efetue as operações:

a) $\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{6}{x^2-9}$ b) $\dfrac{3}{x-3} + \dfrac{5}{2x-6}$

4. Efetue as operações:

a) $\dfrac{2c}{7m} \cdot \dfrac{4m}{c}$ b) $\dfrac{x^2-6x}{x^2-1} \div \dfrac{x^2-16}{2x^2+2}$

5. Simplificando a expressão $\dfrac{mx + m - x - 1}{m^2 - 1}$, obtemos

a) $\dfrac{x+1}{m+1}$ b) $\dfrac{x-1}{m-1}$ c) $\dfrac{x+1}{m-1}$ d) $\dfrac{x-1}{m+1}$

Respostas dos exercícios

1. a) $9 - 6m + m^2 = (3 - m)^2$ Trinômio quadrado perfeito
   b) $x^4 - 81 = (x^2 + 9)(x^2 - 9)$ Diferença de dois quadrados
   c) $x^3 - x^2 + 6x - 6 = x^2 (x - 1) + 6(x - 1) = (x - 1)(x^2 + 6)$ Agrupamento
   d) $10x^2 y - 15xy + 5y = 5y(2x^2 - 3x + 1)$ Fator comum em evidência

2. a) m.m.c.$(x, x - 8) = x.(x - 8)$
   b) $7x^2$ e $2x^2 - 2x$ observe que $2x^2 - 2x = 2x(x - 1)$
   logo, m.m.c.$(7x^2, 2x^2 - 2x) = 2.7.x^2 (x - 1) = 14x^2 (x - 1)$
   c) $x^2 - 7x = x(x - 7)$ e $x^2 - 49 = (x + 7)(x - 7)$
   logo, $m.m.c.(x^2 - 7x, x^2 - 49) = x(x - 7)(x + 7)$

3. a) $\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{6}{x^2-9}$
   Observe que $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$; então, o
   $m.m.c.(x - 3, x^2 - 9) = (x - 3)(x + 3)$

$$\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}=\frac{1.(x+3)-6}{(x-3)(x+3)}=\frac{x+3-6}{(x-3)(x+3)}=\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\frac{1}{(x+3)}$$

b) $\frac{3}{x-3}+\frac{5}{2x-6}=\frac{3}{x-3}+\frac{5}{2(x-3)}=\frac{2.3+5}{2(x-3)}=\frac{6+5}{2(x-3)}=\frac{11}{2(x-3)}$

4. a) $\frac{2c}{7m}\cdot\frac{4m}{c}=\frac{8mc}{7mc}=\frac{8}{7}$

b) $\frac{x^2-4x}{x^2-1}\div\frac{x^2-16}{2x^2+2}=\frac{x^2-4x}{x^2-1}\cdot\frac{2x^2-2}{x^2-16}=\frac{x(x-4)}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{2(x-1)(x+1)}{(x-4)(x+4)}=\frac{x}{1}\cdot\frac{2}{x+4}=\frac{2x}{x+4}$

5. Letra a

$$\frac{mx+m-x-1}{m^2-1}=\frac{m(x+1)-1(x+1)}{(m-1)(m+1)}=\frac{(m-1)(x+1)}{(m-1)(m+1)}=\frac{(x+1)}{(m+1)}$$