CEJA >>
CENTRO DE EDUCAÇÃO
de JOVENS e ADULTOS

MATEMÁTICA

Ensino Fundamental II

Alexandre José Miranda Antunes

Fascículo 9
Unidades 25, 26 e 27

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

PRODUÇÃO DO MATERIAL CEJA (CECIERJ)

Elaboração de Conteúdo
Alexandre José Miranda Antunes

Diretoria de Material Didático
Bruno José Peixoto

Coordenação de Design Instrucional
Flávia Busnardo
Paulo Vasques de Miranda

Revisão de Língua Portuguesa
José Meyohas

Design Instrucional
Renata Vittoretti

Diretoria de Material Impresso
Ulisses Schnaider

Projeto Gráfico
Núbia Roma

Ilustração
Renan Alves

Programação Visual
Filipe Dutra

Capa
Renan Alves

Produção Gráfica
Fábio Rapello Alencar

C391

CEJA : Centro de educação de jovens e adultos. Ensino fundamental II. Matemática / Alexandre José Miranda Antunes. Rio de Janeiro: Fundação Cecierj, 2019.

Fasc. 9 – unid. 25-26-27

58p.; 21 x 28 cm.

ISBN: 978-85-458-0183-2

1. Matemática. 2. Circunferência. 3. Relações métricas na circunferência. 4. Relações métricas nos polígonos e áreas de figuras planas. I. Antunes, Alexandre José Miranda. 1. Título.

CDD: 510

Referências bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.
Texto revisado segundo o novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa.

Sumário

Unidade 25 5

Circunferência

Unidade 26 21

Relações métricas na circunferência

Unidade 27 33

Relações métricas nos polígonos
e áreas de figuras planas

Prezado(a) Aluno(a),

Seja bem-vindo a uma nova etapa da sua formação. Estamos aqui para auxiliá-lo numa jornada rumo ao aprendizado e conhecimento.

Você está recebendo o material didático impresso para acompanhamento de seus estudos, contendo as informações necessárias para seu aprendizado e avaliação, exercício de desenvolvimento e fixação dos conteúdos.

Além dele, disponibilizamos também, na sala de disciplina do CEJA Virtual, outros materiais que podem auxiliar na sua aprendizagem.

O CEJA Virtual é o Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) do CEJA. É um espaço disponibilizado em um site da internet onde é possível encontrar diversos tipos de materiais como vídeos, animações, textos, listas de exercício, exercícios interativos, simuladores, etc. Além disso, também existem algumas ferramentas de comunicação como chats, fóruns.

Você também pode postar as suas dúvidas nos fóruns de dúvida. Lembre-se que o fórum não é uma ferramenta síncrona, ou seja, seu professor pode não estar online no momento em que você postar seu questionamento, mas assim que possível irá retornar com uma resposta para você.

Para acessar o CEJA Virtual da sua unidade, basta digitar no seu navegador de internet o seguinte endereço: http://cejarj.cecierj.edu.br/ava

Utilize o seu número de matrícula da carteirinha do sistema de controle acadêmico para entrar no ambiente. Basta digitá-lo nos campos "nome de usuário" e "senha".

Feito isso, clique no botão "Acesso". Então, escolha a sala da disciplina que você está estudando. Atenção! Para algumas disciplinas, você precisará verificar o número do fascículo que tem em mãos e acessar a sala correspondente a ele.

Bons estudos!

CEJA >>
CENTRO DE EDUCAÇÃO
de JOVENS e ADULTOS

Circunferência

Matemática - Fascículo 9 - Unidade 25

Objetivos de aprendizagem

1. Calcular o comprimento e o diâmetro de uma circunferência;

2. Classificar as posições relativas entre reta e circunferência;

3. Classificar as posições relativas entre duas circunferências;

4. Determinar o valor do ângulo central e inscrito em uma circunferência.

Para início de conversa...

Já vimos, em nossos estudos, que os pontos, em geometria, não possuem definição alguma, ou seja, são conceitos primitivos. Mas podemos dizer que todas as figuras geométricas são definidas com base em pontos. E, na vida real, são vários os exemplos que podemos lembrar de objetos "arredondados", ou seja, que têm a forma de uma circunferência. Você se lembra de algum? Na sequência desta unidade, vamos citar alguns.

A circunferência possui características que não são comuns de serem encontradas em outras figuras planas, principalmente em relação ao eixo de simetria. Já vimos o assunto de simetrias em unidades anteriores. Você se recorda desse tema? Vamos pensar juntos! Apesar de não estudarmos simetria nesta unidade, mas juntando o que já aprendeu com as definições e atividades sobre circunferência, você perceberá que a circunferência é a única figura plana que pode ser rodada em torno de um ponto sem modificar sua posição aparente. É também a única figura que é simétrica em relação a um número infinito de eixos de simetria. Mas, para descontrair antes de iniciar os estudos, veja a prosa que preparei para você!

Circunferência

Usando um ponto, chamado centro, como referência
O lugar geométrico equidistante desse centro
Um valor constante chamado raio
Será a linha curva, fechada, que chamamos circunferência

Para não existir sofrência
Acorda! A corda une dois pontos dela
Mas não devemos ter divergência
Centro, raio e diâmetro são elementos da circunferência

Esta prosa tem procedência
Pois não podemos ficar na carência
A verdade está na essência
Vamos avançar no estudo com nossa persistência

Minuto Matemático - Circunferência
http://www.alexandreantunes.com.br/2018/09/circunferencia.html

As formas circulares aparecem com frequência na Natureza, nas construções e nos objetos presentes em nosso dia a dia; por exemplo: rodas, bordas de xícaras, engrenagens, etc.

Introdução

As formas circulares aparecem com frequência na Natureza, nas construções e nos objetos presentes em nosso dia a dia; por exemplo: rodas, bordas de xícaras, engrenagens, etc.

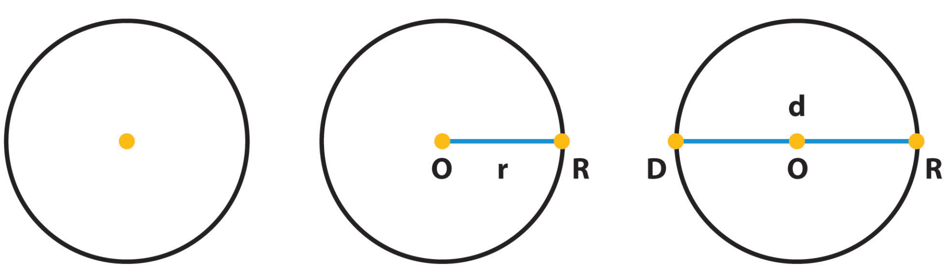
a) Roda de carro **b)** Xícara **c)** Engrenagem

Figura 25.1: Algumas formas circulares do nosso dia a dia
Fontes: https://pt.freeimages.com/photo/wheel-2-1414481
https://images.freeimages.com/images/small-previews/d22/brazilian-coffee-1544199.jpg
https://www.freeimages.com/photo/gear-rustic-metal-1415712

Vamos ver que a Matemática fornece diferentes estudos para que possamos utilizar melhor essas formas.

1. Estudando a circunferência

A circunferência, Figura 25.2a, é o conjunto de todos os pontos de um plano que estão a uma mesma distância não nula de um ponto fixo. Esse ponto fixo (*O*) é o *centro* da circunferência, e todo segmento de reta que une o centro da circunferência a um de seus pontos é chamado *raio* da circunferência (*r*), Figura 25.2b.



a) Circunferência b) $r = \overline{OR}$ (raio) c) $d = \overline{DR}$ (diâmetro)

Figura 25.2: A circunferência com centro e raio represent

Dessa forma, na circunferência, temos:

- $\overline{OD}$ e $\overline{OR}$, Figura 2c, são chamados de raios desta circunferência;
- o segmento $\overline{DR}$ é chamado de diâmetro da circunferência (d); sua medida é o dobro do raio. Assim, temos: d = 2 r;

Todo segmento que une dois pontos distintos de uma circunferência passando pelo centro é chamado de diâmetro da circunferência.

Ampliando esse conceito

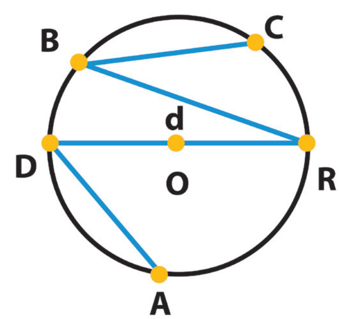


Figura 25.3: Cordas numa circunferência

- Todo segmento, por exemplo, $\overline{DA}$, $\overline{DR}$, $\overline{RB}$ e $\overline{BC}$, Figura. 3, que une dois pontos quaisquer de uma circunferência é chamado de corda.

Assim, temos que $\overline{DR}$ (diâmetro) é a maior corda que se pode traçar em uma circunferência.

Saiba mais

Antes de prosseguir, sugerimos que acesse o link Elementos da circunferência: https://www.geogebra.org/m/GqfrBGCd

Modifique as posições dos pontos e observe o comportamento do raio, corda e diâmetro.

2. Calculando o comprimento de uma circunferência

Na Antiguidade, os matemáticos já se perguntavam: quantas vezes o diâmetro de uma circunferência corresponde ao seu comprimento?

Eles perceberam que duas circunferências quaisquer têm a mesma forma e, por isso, são figuras semelhantes. Assim, concluíram que a razão entre o comprimento de uma circunferência e de seu diâmetro é sempre o mesmo número. Este número foi indicado pela letra grega π (pi).

Ou seja: $\frac{C}{d} = \pi$, onde C corresponde ao comprimento de uma circunferência e d ao diâmetro dessa circunferência.

Curiosidades

Para saber um pouco mais sobre o número π:

- Número π, aplicações em geometria;
- 10 fatos interessantes sobre o π.

Na prática, podemos determinar aproximadamente o comprimento da circunferência, envolvendo-a com um cordão e, a seguir, efetuando a medida do mesmo.

Se tivermos três circunferências de raios, respectivamente,1cm, 1,5cm e 2cm, e seus comprimentos determinados de modo aproximado pelo processo descrito(uso do cordão), vamos ter:

$$C_1 = \begin{cases} r_1 = 1cm \\ d_1 = 2cm \\ C_1 = 6{,}28cm \end{cases} \qquad C_2 = \begin{cases} r_2 = 1{,}5cm \\ d_2 = 3cm \\ C_2 = 9{,}42cm \end{cases} \qquad C_1 = \begin{cases} r_3 = 2cm \\ d_3 = 4cm \\ C_3 = 12{,}56cm \end{cases}$$

Determinando as relações entre os comprimentos das circunferências e seus respectivos diâmetros, obtemos:

$$\frac{C_1}{d_1} = \frac{6{,}28}{2} = 3{,}14 \qquad \frac{C_2}{d_2} = \frac{9{,}42}{3} = 3{,}14 \qquad \frac{C_1}{d_1} = \frac{12{,}56}{4} = 3{,}14$$

Observe que o resultado aproximado obtido é o mesmo nos três casos.

Saiba mais

Acesse o *link* Comprimento da circunferência; altere o valor do raio para as medidas 1cm, 1,5cm e 2cm. Confira os cálculos acima: https://www.geogebra.org/classic/jbMTrYtF

Este valor, divisão do comprimento da circunferência pelo diâmetro, é aproximadamente o mesmo, obtido mediante a determinação desta relação para qualquer circunferência.

$\frac{C}{d} = \frac{C}{2r} \cong \pi$, ou seja, $\frac{C}{2r} \cong \pi \therefore C \cong 2\pi r$

Daí, concluímos que o comprimento de qualquer circunferência passa a ser determinado por:

$$C=2\pi r$$

Atenção

Como d = 2r pode aparecer em algumas questões, a expressão C = d . π.

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 1

Calcule o comprimento de uma circunferência de 15cm de raio.

Anote as respostas em seu caderno

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 2

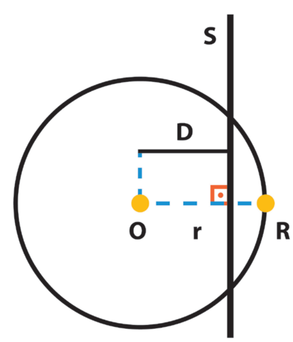
Determine o diâmetro de uma circunferência cujo comprimento é 78,5cm.

Anote as respostas em seu caderno.

3. Posições relativas entre uma reta e a circunferência

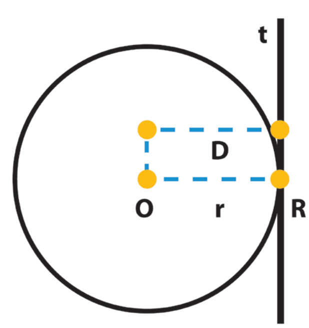
As posições relativas entre uma reta e uma circunferência baseiam-se na distância entre o ponto, *O*, centro da circunferência e a reta, comparadas com o tamanho do raio *r*. Quando traçamos uma reta e uma circunferência em um mesmo plano, podem ocorrer três casos:

1º Caso: Se a reta *s* e a circunferência têm dois pontos comuns. Nesse caso, dizemos que a **reta é *secante*** à circunferência.



A distância (D) entre a reta secante e o centro da circunferência é menor que o comprimento do seu raio r = $\overline{OR}$, ou seja, D < r

2º Caso: Se a reta *t* e a circunferência têm apenas um ponto comum, dizemos que a **reta é *tangente*** à circunferência.

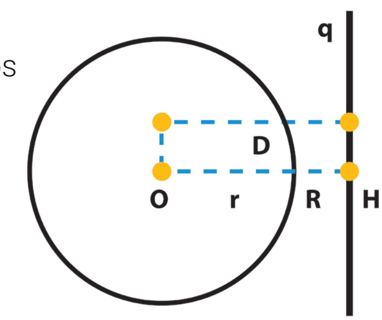


A distância (D) da reta t até o centro da circunferência é igual ao comprimento do seu raio r= $\overline{OR}$, ou seja, D= r

- Toda reta tangente é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

3º Caso: A reta q e a circunferência não têm pontos comuns. Nesse caso, dizemos que a **reta é *externa*** à circunferência.

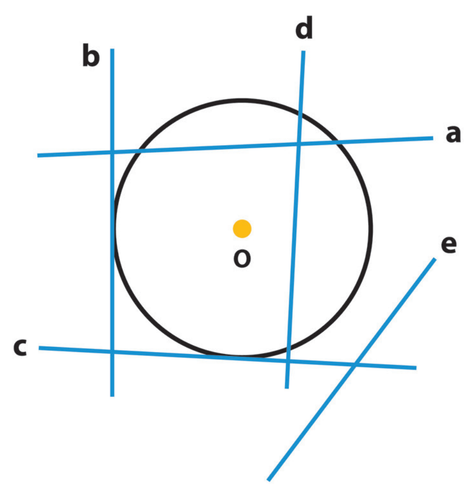
A distância ($D = \overline{OH}$) entre a reta externa e o centro da circunferência é maior que o comprimento do seu raio $r = \overline{OR}$, ou seja, $D > r$



Anote as respostas em seu caderno

Atividade 3

Em seu caderno, classifique as retas de acordo com a sua posição relativa à circunferência.



Anote as respostas em seu caderno.

4. Posições relativas entre duas circunferências

Quando traçamos duas circunferências em um mesmo plano, elas podem ou não ter pontos comuns. A posição relativa entre duas circunferências está baseada na distância entre seus centros. Ao todo, teremos cinco casos a analisar: tangente externa, tangente interna, secantes, externa, não concêntricas e concêntricas. Assim, conforme o esquema da Figura 3, temos:

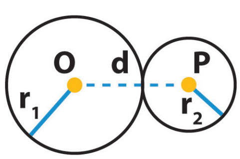
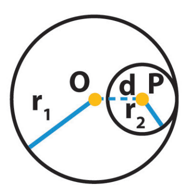
- Posição relativa
  - Com ponto comum
    - Tangentes
      - Externa
      - Interna
    - Secantes Externa
  - Sem Ponto Comum
    - Interna
      - Não concêntricas
      - Concêntricas

Figura 25.3: Esquema com os casos – posições relativas entre circunferências

Circunferências tangentes: quando as circunferências têm um ponto comum.

As circunferências podem se tangenciar externa e internamente. Veja a Tabela 25.1.

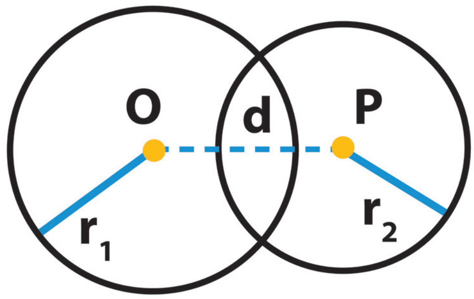
Tabela 25.1 – Tangentes externas e internas.

TANGENTES EXTERNAS	TANGENTES INTERNAS
Nas circunferências tangentes externas, a distância (*d*) entre os centros é igual à soma dos raios (r_1 e r_2) dessas circunferências.  $d = r_1 + r_2$	Nas circunferências tangentes internas, a distância (*d*) entre os centros é igual à diferença entre o raio (r_1) da circunferência maior e o raio (r_2) da circunferência menor.  $d = r_1 + r_2$

Atenção ⚠

Nas circunferências tangentes, os dois centros e o ponto de tangência são colineares, ou seja, estão numa mesma reta.

Circunferências secantes: quando as circunferências têm dois pontos comuns, dizemos que elas são secantes.



Nas circunferências secantes, a distância (d) entre os centros é dada pela seguinte desigualdade:

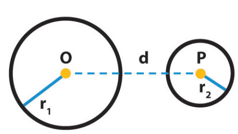
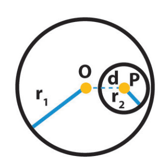
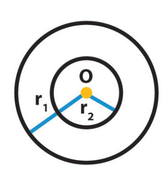
$$r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$$

Circunferências que não possuem pontos comuns: as circunferências podem estar em posições externas ou internas (sendo que existe um caso particular dos círculos concêntricos). Veja a Tabela 25.2.

Atenção

Circunferências concêntricas são aquelas que possuem o mesmo centro (O).

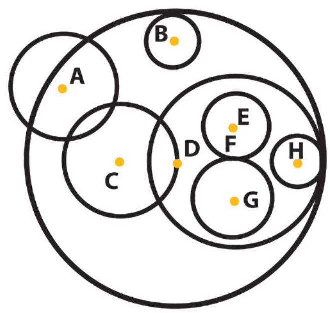
Tabela 25.2 – Circunferências externas e internas

<table>
<tr>
<td rowspan="2">EXTERNAS
Nas circunferências externas, a distância (d) entre os centros é maior que a soma dos raios.

$d > r_1 + r_2$</td>
<td>INTERNAS – NÃO CONCÊNTRICAS
Nas circunferências internas, a distância (d) entre os centros é menor que a diferença entre os raios.

$d < r_1 - r_2$</td>
</tr>
<tr>
<td>INTERNAS – CONCÊNTRICAS
Nas circunferências concêntricas, a distância (d) entre os centros é igual a zero.

$d = 0$</td>
</tr>
</table>

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 4

Em seu caderno, classifique as circunferências a seguir, de acordo com as suas posições relativas.

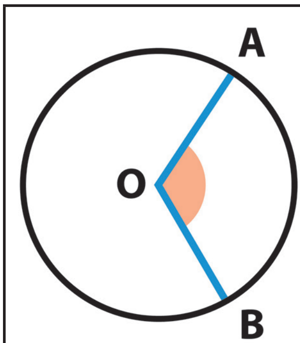


a) A e D
b) B e D
c) C e D
d) F e G
e) E e H
g) B e F
h) F e C

Anote as respostas em seu caderno.

5. Ângulos em uma circunferência

Ângulo central: é aquele cujo vértice corresponde ao centro da circunferência.

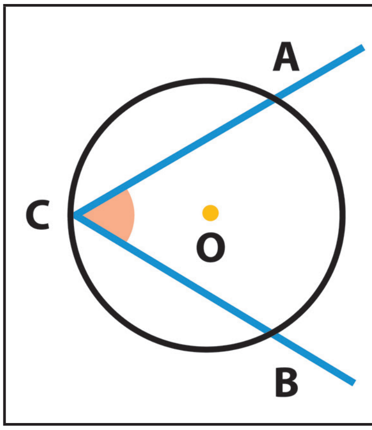


Sobre o ângulo central, podemos afirmar:

- O ângulo central divide a circunferência em duas partes. Cada uma dessas partes recebe o nome de *arco da circunferência*.
- Os pontos *A* e *B* são as *extremidades do arco*.
- O arco menor será indicado por $\overset{\frown}{AB}$
- A medida de um arco, em grau, é igual à medida do ângulo central correspondente.

$$\text{med } \widehat{AOB} = \text{med}(\overset{\frown}{AB})$$

Ângulo inscrito: é todo ângulo cujo vértice pertence à circunferência e cujos lados são semirretas secantes a ela.



- A medida do ângulo inscrito, em grau, é igual à metade da medida do ângulo central correspondente.

$$\text{med}(ACB) = \frac{\text{med}(\widehat{AOB})}{2}$$

Ou seja,

$$\text{med}(ACB) = \frac{\text{med}(\widehat{AB})}{2}$$

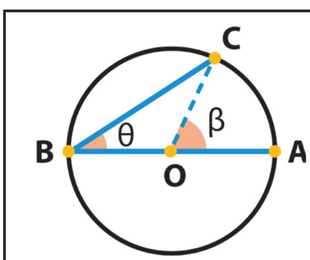
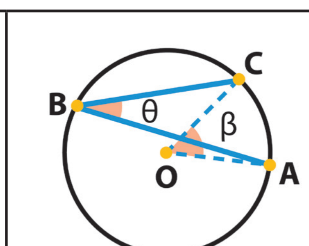
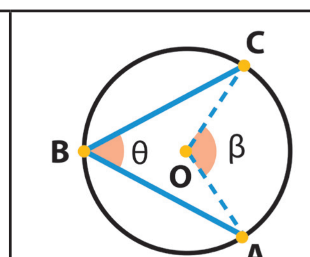
Obs.: Escrever $\widehat{AOB}$ é equivalente a escrever AÔB, representando, portanto, o mesmo ângulo.

Os casos de ângulos inscritos podem aparecer em três casos possíveis. Em todos, devemos proceder da mesma forma para determinar o seu valor. Considere o ângulo inscrito $\widehat{ABC}$, representado na Tabela 25.3.

Atenção ⚠

Repare que, apesar de mudar as representações dos pontos *A*, *B* e *C* e, consequentemente, do ângulo inscrito $\widehat{ABC}$, não se altera a expressão de seu valor. Ou seja, a medida do ângulo inscrito continua sendo a metade da medida do ângulo central correspondente.

Tabela 25.3: Casos de ângulos inscritos

		
a) Um dos lados do ângulo inscrito é diâmetro da circunferência.	b) O centro da circunferência não pertence aos lados e nem à região angular do ângulo inscrito.	c) O centro da circunferência pertence à região angular do ângulo inscrito.

Portanto, para todos os casos, aplica-se o mesmo raciocínio.

Dessa forma,

med($\widehat{ABC}$) = $\dfrac{\text{med}(\widehat{AOC})}{2}$, que é equivalente a med($\widehat{ABC}$) = $\dfrac{\text{med}(\widehat{AC})}{2}$

Saiba mais

Para consolidar o que estudamos e ampliar o nosso conhecimento, acesse o *link* **Circunferência e Círculo**:

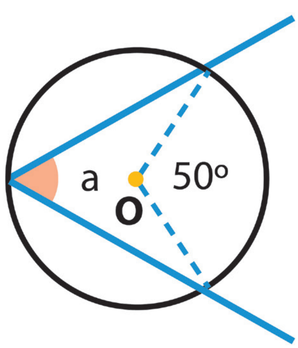
https://www.geogebra.org/m/kdbhfMZc

Anote as respostas em seu caderno

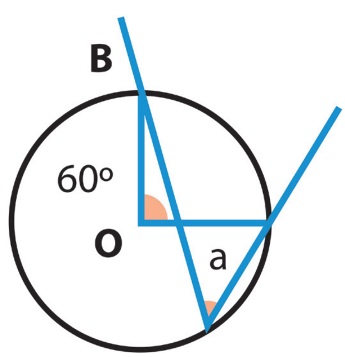
Atividade 5

Calcule, em seu caderno, a medida a em cada figura:

a)



b)



Anote as respostas em seu caderno.

Resumo

Nesta aula, você estudou:

- a circunferência e seus elementos;
- as posições relativas entre uma reta e uma circunferência;
- as posições relativas entre duas circunferências;

- como calcular o ângulo central de uma circunferência;
- como calcular o ângulo inscrito de uma circunferência.

Referências

DANTE, Luiz Roberto. *Tudo é Matemática*. 8ª série. 2ª edição. São Paulo. Editora Ática, 2005.

IMENES, Luiz Márcio. *Matemática*. 9ºano. 1ª edição. São Paulo, Editora Moderna, 2009.

JAKUBOVIC, José e LELLIS, Marcelo. *Matemática na medida certa*. 8ª série. 5ª edição. São Paulo. Editora Scipione, 1999.

RIBEIRO, Jackson da Silva. *Matemática*. 9º ano. 1ª edição. São Paulo. Editora Scipione, 2010.

SILVEIRA, Ênio e MARQUES, Cláudio. *Matemática*. 8ª série. 1ª edição. São Paulo. Editora Moderna, 1998.

Na Onda da Matemática. Disponível em http://www.youtube.com/c/NaOndadaMatematica; acesso em 26 de maio de 2018.

Respostas das atividades

Atividade 1

1. Vamos aplicar a fórmula do comprimento da circunferência, já que temos a medida do raio.

$C = 2\pi r \Rightarrow C=2 \cdot 3{,}14 \cdot 15 \Rightarrow C = 94{,}2cm$

Em algumas questões, a resposta poderia estar escrita como $C = 30\pi cm$

Atividade 2

1. $C=2\pi r$ como $2r = d$, temos $C = d\pi \therefore d = \frac{C}{\pi}$

$d = \frac{C}{\pi} = \frac{78{,}5}{3{,}14} = 25 \therefore d = 25cm$

Outra forma, mais longa, seria aplicar a fórmula do comprimento da circunferência, $C = 2\pi r$, para determinar a medida do raio, $r = \frac{C}{2\pi}$, e logo após determinar o diâmetro, utilizando $d = 2r$ (tente fazer dessa forma e compare as respostas).

Atividade 3

a: reta secante: corta a circunferência em dois pontos;

b: reta tangente: possui apenas um ponto comum com a circunferência;

c: reta tangente: possui apenas um ponto comum com a circunferência;

d: reta secante: corta a circunferência em dois pontos;

e: reta externa: não possui nenhum ponto comum com a circunferência.

Atividade 4

a) Secantes, pois possuem dois pontos comuns;

b) Tangentes internas, pois possuem um ponto comum;

c) Internas, pois a circunferência de centro C está dentro da circunferência de centro D;

d) Tangentes externas, pois possuem um ponto comum;

e) Externas, pois não possuem pontos comuns;

g) Externas, pois não possuem pontos comuns;

h) Secantes, pois possuem dois pontos comuns.

Atividade 5

a) Como a é um ângulo inscrito, então podemos ter: $a = \frac{50^0}{2} \Rightarrow a = 25^0$

b) O ângulo a é inscrito na circunferência no mesmo arco do ângulo central de 60°; logo, $a = \frac{60^0}{2} \Rightarrow a = 30^0$

CEJA >>
CENTRO DE EDUCAÇÃO
de JOVENS e ADULTOS

Relações métricas na circunferência

Matemática - Fascículo 9 - Unidade 26

Objetivo de aprendizagem

1. Identificar e aplicar as relações métricas na circunferência.

Ensino Fundamental II

Para início de conversa...

A Língua Portuguesa é muito importante no estudo e aprendizagem de todas as demais áreas de conhecimento, em particular, na Matemática. Saber o significado das palavras ajuda-nos, muitas vezes, a entender sua utilização e aplicação na Matemática. Nesta unidade, veremos alguns termos conhecidos e outros que podem ainda não ser de nosso domínio. Por exemplo, corda, segmento, secante e tangente. Por isso, deixo uma sugestão: que tal pesquisar o significado dessas palavras, para que possamos observar a diferença entre seu significado cotidiano e o matemático. Após sua pesquisa, acesse Linguagem: cotidiano x Matemática e compare com o que pesquisou sobre esses termos. Na sequência, nesta unidade de estudo, vamos identificar e aplicar as relações métricas na circunferência. Em especial, apresentaremos as relações entre as cordas, entre as secantes e entre a secante e a tangente de uma circunferência.

Introdução

Assim como os triângulos, a circunferência possui importantes relações métricas. Essas relações envolvem segmentos internos (relação entre cordas) e as retas, secantes e tangentes, em relação à circunferência, sendo esses das retas divididos em dois tipos de relação: relação entre segmentos secante e tangente e relação entre segmentos secantes. Por meio dessas relações, podemos obter diferentes tipos de medidas importantes no estudo das circunferências.

Nesta aula, vamos estudar essas relações e avaliar como elas são fundamentais para a compreensão da geometria de uma circunferência.

Atenção ⚠

Vale para toda a Geometria!

Relações métricas são propriedades que possibilitam o cálculo de medidas de comprimento de algumas figuras geométricas e de seus elementos.

Antes de iniciar o conteúdo desta unidade, vamos revisar alguns conceitos e propriedades que ajudarão na sequência do estudo.

A circunferência de raio r é o conjunto de pontos cuja distância até o ponto *O* é igual a *r*.

A corda (um dos elementos da circunferência) é definida como segmento de reta que liga dois pontos pertencentes a uma circunferência.

O diâmetro (*D*) é qualquer corda que passe pelo centro da circunferência. Dessa forma, é a maior corda que uma circunferência possui. A medida do diâmetro é igual a duas vezes a medida do raio (*r*), ou seja,

$$D = 2 \cdot r$$

Ou podemos escrever que o raio é a metade da medida do diâmetro:

$$r = \frac{D}{2}$$

Propriedades

Toda tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência. Dessa forma, ao traçarmos uma reta que liga o raio *R* ao ponto de tangência *T*, Figura1, podemos ver que a reta tangente e o raio são perpendiculares entre si, ou seja, formam um ângulo de 90°

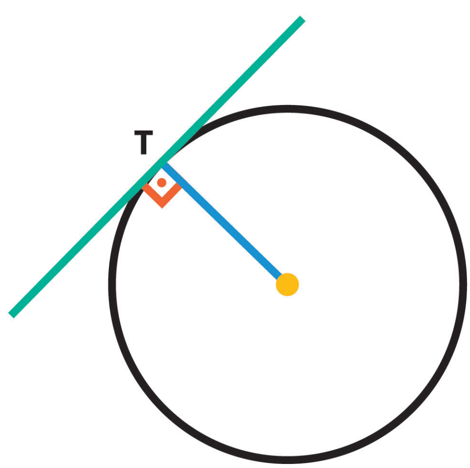
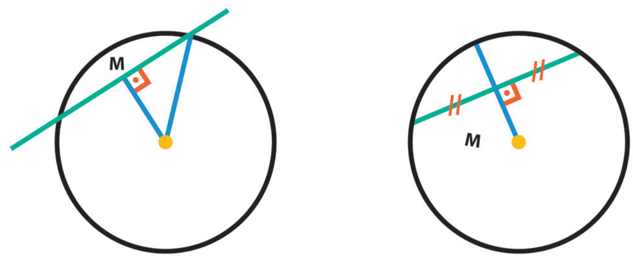


Figura 1: Reta tangente à circunferência e seu ponto de tangência

Já sabemos (pois estudamos na Unidade 26) que uma reta secante a uma circunferência é uma reta que intercepta a circunferência em dois pontos distintos. Acrescentamos agora que um segmento de reta, que une o centro e o ponto médio (*M*) de uma corda, é perpendicular a essa corda, Figura 2a.



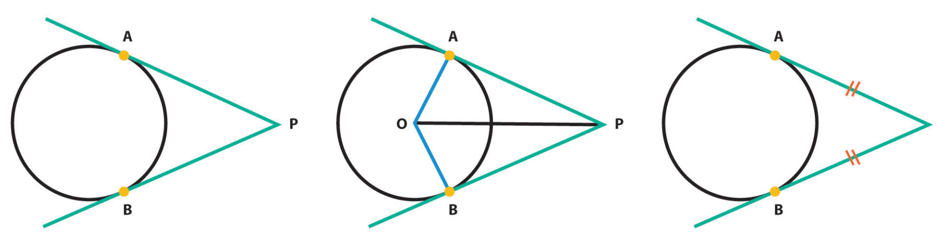
a) Ponto médio da corda

b) Corda – segmentos congruentes

Figura 2: Reta secante à circunferência e seu ponto médio

Neste caso, ao traçarmos uma reta ligando o raio R ao ponto médio da corda, também podemos perceber que ambas formam um ângulo reto entre si. Dessa forma, o raio perpendicular a essa corda, Figura 2b, a dividirá em dois segmentos que possuem o mesmo comprimento.

Considere um ponto P, externo à circunferência, com o qual podemos traçar os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$, ambos tangentes a uma circunferência, com *A* e *B* na circunferência, Figura 3a. Observe que, se traçarmos os raios $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$, construiremos os triângulos congruentes *OAP* e *OBP*, Figura 3b, sendo fácil observar que OP é um lado comum aos dois triângulos e $\overline{OA} = \overline{OB} = r$ (raio).



a) Retas tangentes

b) Triângulos congruentes

c) Segmentos congruentes

Figura 3: Segmentos tangentes à circunferência

Portanto, podemos concluir que os segmentos tangentes à circunferência são congruentes (têm a mesma medida), ou seja,

$$\overline{PA} \equiv \overline{PB}$$

1. Relações entre cordas

Observe a circunferência apresentada na Figura 4. Note que temos destacadas duas cordas, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, que se cortam em um determinado ponto P, distinto do centro O desta circunferência.

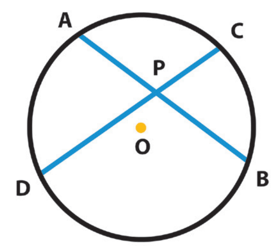


Figura 4: Circunferência com as cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$

Assim, ficam determinados dois segmentos de reta sobre cada uma dessas cordas, ou seja, sobre $\overline{AB}$, temos os segmentos $\overline{AP} = \overline{PA}$ e $\overline{BP} = \overline{PB}$ e, sobre $\overline{CD}$, temos os segmentos $\overline{DP} = \overline{PD}$ e $\overline{CP} = \overline{PC}$. Além disso, observe que traçando os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{CB}$, temos dois triângulos semelhantes. Podemos, então, estabelecer uma relação métrica entre estes segmentos, como podemos verificar a seguir.

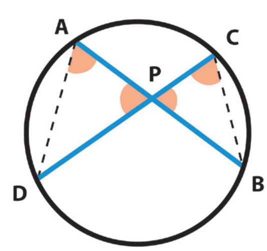


Figura 5: Circunferência e os triângulos APD e CPB

Considerando os triângulos APD e CPB, temos:

$A\hat{P}D \cong C\hat{P}D$ (são ângulos opostos pelo vértice).

$\hat{A} \cong \hat{C}$ (são ângulos inscritos no mesmo arco).

Como todo par de triângulos que tem dois ângulos internos, respectivamente congruentes, são semelhantes, temos:

$$\Delta APD \sim \Delta CPB$$

Portanto:

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB} \Rightarrow PA \,.\, PB = PC \,.\, PD$$

Atenção

Se o ponto P coincidir com o centro da circunferência, podemos dizer que é um caso particular e trivial da relação entre cordas. Note que, se P estiver no centro da circunferência, todos os segmentos terão o mesmo valor (raio da circunferência), ou seja, $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC} = \overline{PD} = r$, tornando a relação verdadeira.

Curiosidades

Trivial! O que é ser trivial?

Trivial é algo que é do conhecimento de todos, o que é muito usado, repetido, batido. Ampliando, podemos dizer que é um conhecimento básico, que todos sabem, ou seja, é algo comum, que não causa surpresa, estranheza ou espanto.

Em Matemática, o **adjetivo trivial** ou **trivialidade** é frequentemente utilizado para algo que tem uma estrutura muito simples. O nome trivialidade, geralmente, se refere a um aspecto técnico simples de alguma prova, demonstração ou definição.

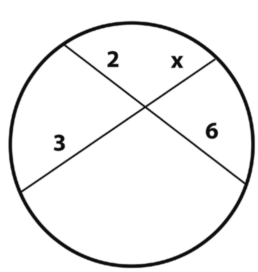
Resumindo, ser trivial é ser óbvio!

Anote as respostas em seu caderno

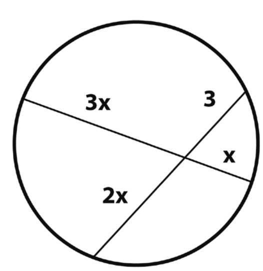
Atividade 1

Calcule o valor de x:

a)



b)



Anote as respostas em seu caderno

2. Relações entre segmentos secantes

Observe, na circunferência representada na Fig. 6, que temos duas secantes, $\overline{PA}$ e $\overline{PC}$, traçadas a partir de um mesmo ponto exterior P. Nelas, podemos destacar, respectivamente, os segmentos $\overline{PB}$ e $\overline{PD}$.

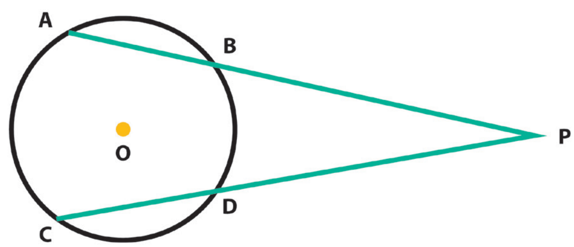


Figura 6: Circunferência e as retas secantes $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$

$\overline{PA}$ é um segmento de reta secante e $\overline{PB}$ é a parte desse segmento externa à circunferência.

$\overline{PC}$ é um segmento de reta secante e $\overline{PD}$ é a parte desse segmento externa à circunferência.

Entre esses quatro segmentos que acabamos de destacar, podemos estabelecer mais uma relação métrica. Observe que, se traçarmos os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{CB}$, temos dois triângulos semelhantes: *PAD* e *PCB*.

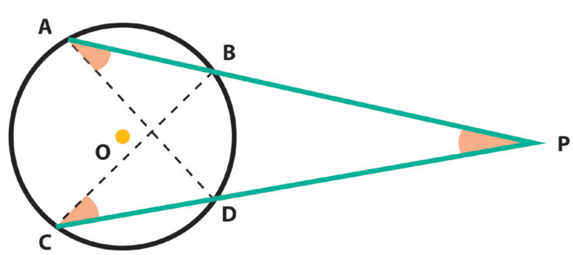


Figura 7: Circunferência e os triângulos PAD e PCB

Considerando $\Delta PAD \sim \Delta PCB$, temos:

$\hat{P} \equiv \hat{P}$ (ângulo comum)

$\hat{A} \cong \hat{C}$ (são ângulos inscritos num mesmo arco)

Assim, temos: $\Delta PAD \sim \Delta PCB$.

Portanto:

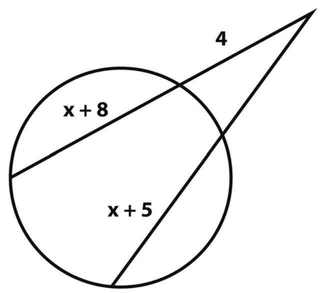
$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \Rightarrow PA \,.\, PB = PC \,.\, PD$$

Anote as respostas em seu caderno

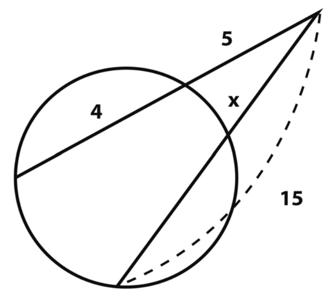
Atividade 2

Calcule o valor de x:

a)



b)



Anote as respostas em seu caderno.

3. Relação entre segmentos secante e tangente

Agora, na circunferência da Figura 8, temos dois segmentos, sendo um deles secante, $\overline{PA}$, e outro tangente, $\overline{PC}$; ambos traçados de um mesmo ponto externo P. Observe que, no segmento tangente, podemos destacar a existência do segmento $\overline{PB}$.

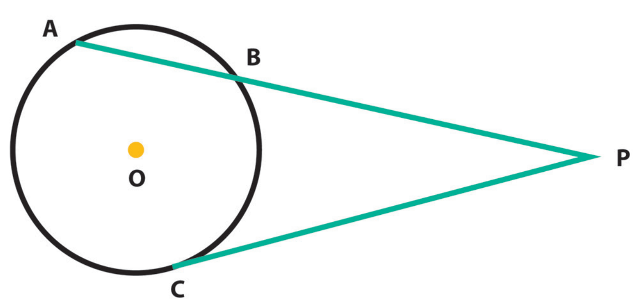


Figura 8: Circunferência e as retas $\overline{PA}$ (secante) e $\overline{PC}$ (tangente).

$\overline{PA}$ é um segmento de reta secante e $\overline{PB}$ é a parte desse segmento externa à circunferência.

$\overline{PC}$ é um segmento de reta tangente.

Entre esses três segmentos que acabamos de destacar, também podemos estabelecer uma relação métrica, como veremos na sequência. Para isso, observe que, se traçarmos os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{AC}$ formamos, respectivamente, os triângulos *PAC* e *PCB*. É fácil observar que o ângulo $\hat{P}$ é comum aos dois triângulos e que os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ são congruentes, pois são ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência $\widehat{BC}$ (compreendido de *B* até *C*).

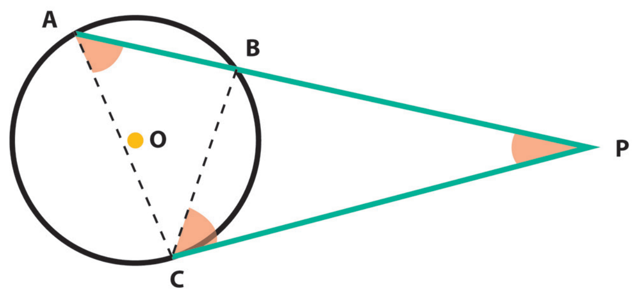


Figura 9: Circunferência e os triângulos PAC e PCB

Considerando os triângulos PAC e PCB, temos:

$\hat{P} \equiv \hat{P}$ (ângulo comum).

$\hat{A} \cong \hat{C}$ (são ângulos inscritos no mesmo arco).

Assim, temos: $\Delta PAC \sim \Delta PCB$

Portanto:

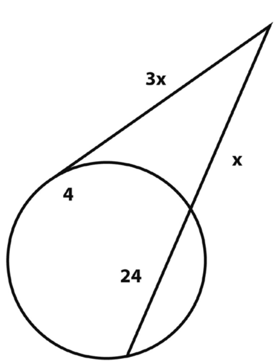
$$\frac{PA}{PC} = \frac{PC}{PB} \Rightarrow PC^2 = PA \,.\, PB$$

Anote as respostas em seu caderno

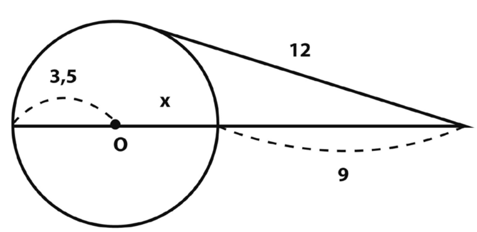
Atividade 3

Calcule o valor de x:

a)



b)



Anote as respostas em seu caderno.

Resumo

Nesta aula, você estudou:

- as relações entre as cordas em uma circunferência;
- as relações entre os segmentos secantes em uma circunferência;
- as relações entre um segmento secante com um segmento tangente em uma circunferência.

Referências

DANTE, Luiz Roberto. *Tudo é Matemática*. 8ª série. 2ª edição. São Paulo. Editora Ática, 2005.

IMENES, Luiz Márcio. *Matemática*. 9ºano. 1ª edição. São Paulo, Editora Moderna, 2009.

JAKUBOVIC, José e LELLIS, Marcelo. *Matemática na medida certa*. 8ª série. 5ª edição. São Paulo. Editora Scipione, 1999.

RIBEIRO, Jackson da Silva. *Matemática*. 9º ano. 1ª edição. São Paulo. Editora Scipione, 2010.

SILVEIRA, Ênio e MARQUES, Cláudio. *Matemática*. 8ª série. 1ª edição. São Paulo. Editora Moderna, 1998.

Na Onda da Matemática. Disponível em http://www.youtube.com/c/NaOndadaMatematica, acesso em 26 de maio de 2018.

Respostas das atividades

Atividade 1

1. a) $3x = 2 \,.\, 6 \Rightarrow x = \dfrac{12}{3} \Rightarrow x = 4$

b)

Como não tem sentido a medida do segmento ser zero, o valor que serve como resposta é $x = 2$.

Atividade 2

1. a) $5 \,.\, (x + 10) = 4 \,.\, (x + 12) \Rightarrow 5x - 4x = 48 - 50 \Rightarrow x = -2$

b) $x \,.\, 15 = 5 \,.\, 9 \Rightarrow x = \dfrac{45}{15} \Rightarrow x = 3$

Atividade 3

a) 3.

b) $12^2 = 9 \,.\, (12{,}5 + x) \Rightarrow 144 = 112{,}5 + 9x \Rightarrow 9x = 31{,}5 \Rightarrow x = 3{,}5$

CEJA >>
CENTRO DE EDUCAÇÃO
de JOVENS e ADULTOS

Relações métricas nos polígonos e áreas de figuras planas

Matemática - Fascículo 9 - Unidade 27

Objetivos de aprendizagem

1. 1. Reconhecer um polígono regular;

2. 2. Calcular a medida do ângulo central, ângulo interno e ângulo externo de diferentes polígonos;

3. 3. Calcular a medida do lado e do apótema em função do raio da circunferência na qual o polígono está inscrito;

4. 4. Identificar e calcular o lado e o apótema do polígono regular circunscrito em função do inscrito.

5. 5. Determinar a área de figuras planas;

6. 6. Calcular a área de figuras compostas.

Para início de conversa...

Pegue a sua régua e compasso, pois voltaremos a trabalhar conteúdos relacionados à geometria. Antes de iniciarmos, veja a amplitude deste tema. Nesta unidade, veremos alguns temas sobre polígonos, e vale ressaltar ser um assunto que se relaciona a artes, Natureza, arquitetura, Figura. 1, entre outras áreas.

(a) nas artes (b) na Natureza (c) na arquitetura

Figura 1: Polígonos no cotidiano
(a): https://gartic.com.br/marimlonghi/desenho-livre/poligonos-na-arte (Ilustração: favor redesenhar)
(b): http://www.cdme.im-uff.mat.br/ppr/ppr-html/fig-tile-04-g.jpg
(c): https://pixabay.com/sv/photos/ikosaeder-polyeder-utrymme-geometri-1925781/

Observe que podemos observar alguns padrões. Vamos estudar um pouco mais sobre estes padrões geométricos compostos pelos polígonos regulares.

Introdução

Você já deve ter ouvido nas aulas de História e Geografia que a necessidade de determinar a área de uma figura é bem antiga. Por exemplo, no Antigo Egito, os donos das terras às margens do rio Nilo já pagavam aos faraós pelo uso da terra. Esse valor era proporcional à área cultivada.

Curiosidades

"Os camponeses eram, em geral, muito pobres e trabalhavam no limite de suas forças. Alimentavam-se de pão de trigo, cebola, peixe e cerveja, ou seja, com o mínimo que conseguiam depois de pagar as taxas que deviam pelo uso da terra. Viviam em casebres com pouca mobília, construídos com barro e palha, com um buraco no teto para a saída da fumaça."
Veja mais em https://www.planetaenem.com/historia-do-egito-antigo-resumo/

Ainda hoje, e cada vez mais, pagamos esses tipos de taxas ou impostos. Você, com certeza, já ouviu falar sobre IPTU (Imposto Predial e Territorial Urbano), cuja cobrança está diretamente relacionada, entre outros fatores, à área do terreno.

Curiosidades

IPTU é um imposto municipal, cobrado de acordo com as áreas dos terrenos e edificações. São atribuídos valores monetários por metro quadrado de área livre e área edificada, de acordo com a localização e o tipo de uso. Esse imposto deve ser pago anualmente à prefeitura.

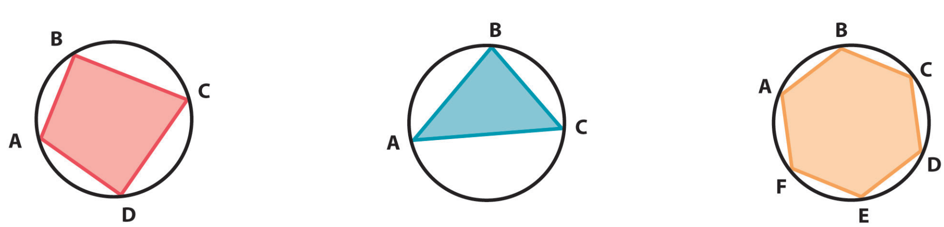
Em nosso dia a dia, deparamos constantemente com outras situações que exigem o conhecimento da área de uma superfície, como, por exemplo:

- Qual é a área da parede da casa a ser pintada?
- Qual é a área do piso da sala?
- Quantos metros quadrados de muro serão construídos?

Vamos, então, começar o nosso estudo? Vamos juntos!

1. Polígonos inscritos e circunscritos a uma circunferência

Um polígono está inscrito numa circunferência quando todos os seus vértices são pontos desta circunferência. Podemos inscrever diversos polígonos em uma circunferência, vamos ver, Figura 2, alguns exemplos:



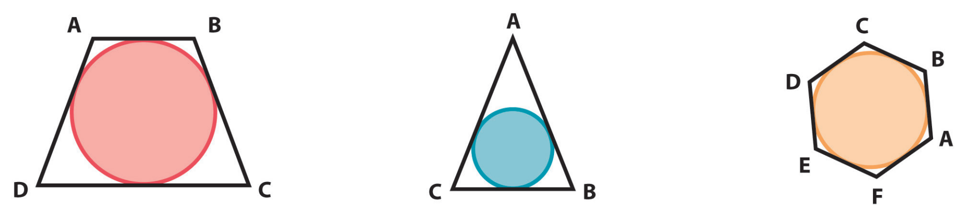
a) Quadrilátero inscrito b) Triângulo inscrito c) Hexágono inscrito

Figura 2: Polígonos inscritos

Atenção ⚠

Podemos dizer que os polígonos estão inscritos nas circunferências ou que as circunferências estão circunscritas aos polígonos.

Um polígono é circunscrito a uma circunferência quando todos os seus lados estão tangentes à circunferência. Vamos ver, Figura 3, alguns exemplos:



a) Quadrilátero circunscrito **b) Triângulo circunscrito** **c) Hexágono circunscrito**

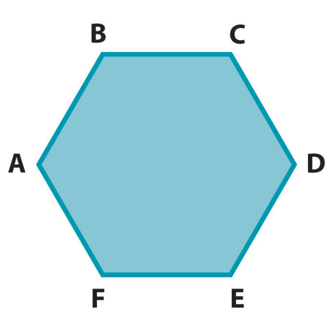
Figura 3: Polígonos circunscritos

Atenção ⚠

Podemos dizer que os polígonos estão circunscritos às circunferências ou que as circunferências estão inscritas nos polígonos.

2. Polígonos regulares

Um polígono é regular quando todos os seus lados e todos os seus ângulos são congruentes. Veja um exemplo:



Temos:

$$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DE} \cong \overline{EF} \cong \overline{FA}$$
$$\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C} \cong \hat{D} \cong \hat{E} \cong \hat{F}$$

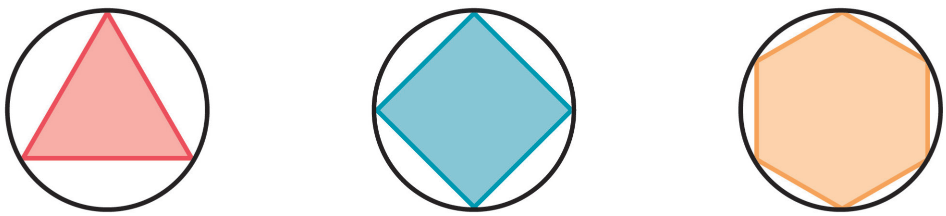
Figura 4: Polígono regular

Todo polígono equilátero e equiângulo é chamado de *polígono regular.*

3. Propriedades dos polígonos regulares

Os polígonos regulares possuem duas propriedades básicas.

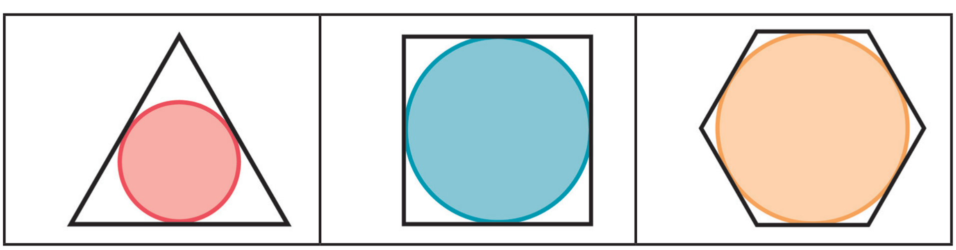
1ª Propriedade: Todo polígono regular é inscritível numa circunferência. Para inscrever um polígono numa circunferência, basta dividi-la em n arcos congruentes ($n > 2$) e unir os pontos consecutivos obtidos desta divisão, determinando, assim, os lados do polígono.



a) Triângulo regular inscrito **b) Quadrado regular inscrito** **c) Hexágono regular inscrito**

Figura 5: Polígonos regulares inscritos

2ª Propriedade: Todo polígono regular é circunscritível a uma circunferência.

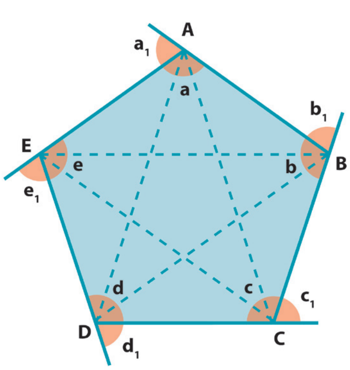


a) Triângulo regular circunscrito **b) Quadrado regular circunscrito** **c) Hexágono regular circunscrito**

Figura 6: Polígonos regulares circunscritos

4. Elementos de um polígono

Observe o pentágono (polígono regular de cinco lados), na Figura 7, e seus elementos representados:



Vértices: A, B, C, D e E

Lados: $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}$ e $\overline{EA}$

Diagonais: AC, AD, BD, BE e CE

Ângulos Internos: $E\hat{A}B = a$, $A\hat{B}C = b$, $B\hat{C}D = c$, $C\hat{D}E = d$ e $D\hat{E}A = e$

Ângulos Externos: a_1, b_1, c_1, d_1 e e_1

Figura 7: Elementos de um polígono

Considere n o número de lados de um polígono regular; sobre os ângulos, podemos afirmar que:

O ângulo interno (a_i): $a_i = \frac{180°(n-2)}{n}$

O ângulo externo (a_e): $a_e = \frac{360°}{n}$

A soma dos ângulos internos é: $S_i = 180°(n - 2)$.

A soma dos ângulos externos é: $S_e = 360°$.

Quando os polígonos estão inscritos ou circunscritos, Figura 8, podem-se destacar outros elementos:

Centro O, que coincide com o centro da respectiva circunferência.

O raio da circunferência circunscrita (r) é o *raio do polígono*.

Ângulo central, representado pelo ângulo $F\hat{O}E = \hat{O}$, cuja medida é proporcional ao número de lados (n): $F\hat{O}E = \frac{360°}{n}$.

A distância do centro do polígono ao ponto médio de qualquer lado é *o apótema do polígono*; por exemplo, $\overline{OM}$ é um apótema do polígono.

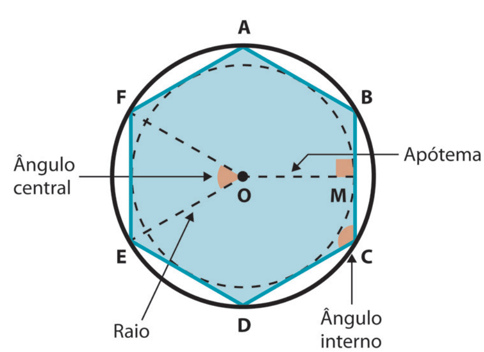


Figura 8: Elementos de um polígono inscrito ou circunscrito.

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 1

Identifique, em seu caderno, as sentenças verdadeiras e falsas.

a) Um polígono é regular quando todos os seus lado e ângulos são congruentes. (   )

b) Denomina-se equiângulo um polígono que possui todos os seus ângulos congruentes. (   )

c) O retângulo é um polígono regular. (   )

d) Denomina-se equilátero um polígono que possui todos os seus lados congruentes. (   )

e) Todo polígono regular é inscritível e circunscritível a uma circunferência. (   )

f) O losango é um polígono regular. (   )

Anote as respostas em seu caderno

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 2

Calcule a medida do ângulo central, ângulo interno e ângulo externo dos polígonos:

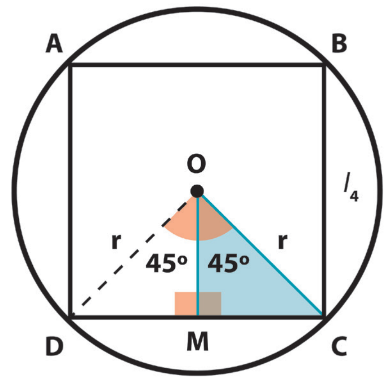
a) triângulo equilátero   b) quadrado   c) hexágono

Anote as respostas em seu caderno.

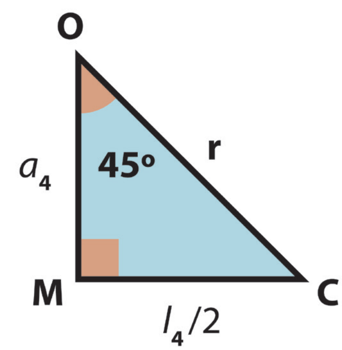
5. Relações métricas nos polígonos regulares inscritos

Estudaremos, a seguir, as relações entre o lado e o apótema do quadrado, do triângulo equilátero e do hexágono regular, e o raio da circunferência que circunscreve esses polígonos, utilizando as relações de seno e cosseno nos triângulos retângulos que destacaremos em cada caso.

5.1 Quadrado inscrito



a) Quadrado inscrito



b) Triângulo retângulo OMC

Figura 9: Polígono inscrito

Notação:

l_4: Medida do lado do quadrado;

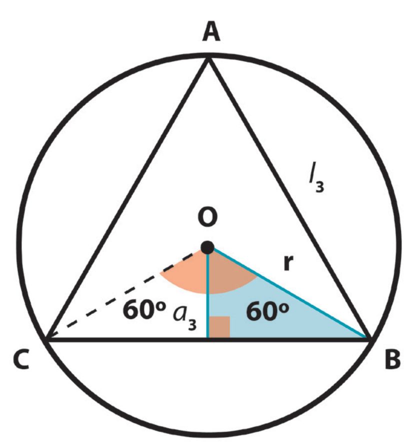
a_4: Medida do apótema do quadrado.

Considerando o triângulo retângulo OMC, temos:

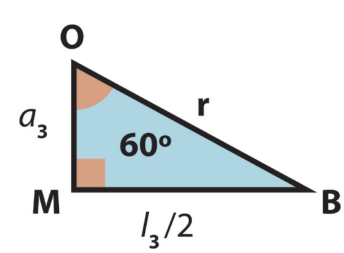
Lado em relação ao raio $\Rightarrow$ $sen\ 45° = \dfrac{\frac{l_4}{2}}{r} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{l_4}{2r} \Rightarrow l_4 = r\sqrt{2}$

Apótema em relação ao raio $\Rightarrow$ $cos\ 45° = \dfrac{a_4}{r} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a_4}{r} \Rightarrow a_4 = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$

5.2 Triângulo inscrito



a) Triângulo inscrito



b) Triângulo retângulo OMB

Figura 10: Polígono inscrito

Notação:

l_3: Medida do lado do triângulo;

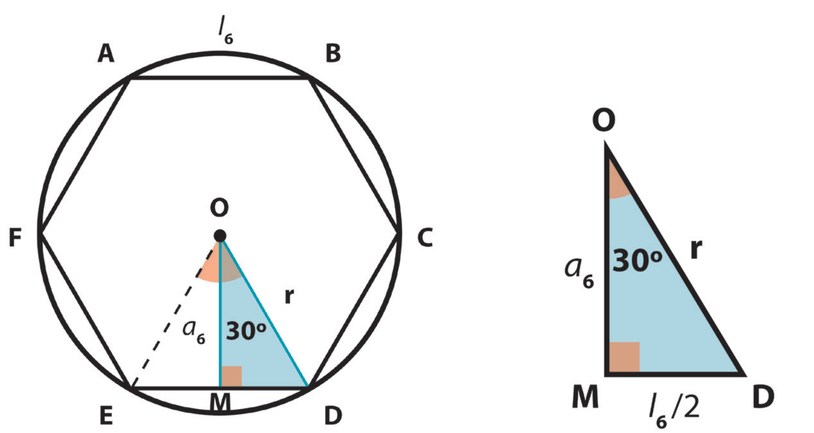
a_3: Medida do apótema do triângulo.

Considerando o triângulo retângulo OMB, temos:

Lado em relação ao raio $\Rightarrow$ $sen\ 60° = \dfrac{\frac{l_3}{2}}{r} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{l_4}{2r} \Rightarrow l_3 = r\sqrt{3}$

Apótema em relação ao raio $\Rightarrow$ $cos\ 60° = \dfrac{a_3}{r} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{a_4}{r} \Rightarrow a_4 = \dfrac{r}{2}$

5.3 Hexágono Inscrito



a) Hexágono inscrito

b) Triângulo retângulo OMD

Figura 11: Polígono inscrito

Notação:

l_6: Medida do lado do triângulo;

a_6: Medida do apótema do triângulo.

Considerando o triângulo retângulo OMD, temos:

Lado em relação ao raio $\Rightarrow$ $sen\ 30° = \dfrac{\frac{l_6}{2}}{r} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{l_6}{2r} \Rightarrow l_6 = r$

Apótema em relação ao raio $\Rightarrow$ $cos\ 30° = \dfrac{a_6}{r} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a_6}{r} \Rightarrow a_6 = \dfrac{r\sqrt{3}}{2}$

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 3

Calcule a medida do lado e do apótema de um quadrado inscrito em uma circunferência de $10\sqrt{3}$ cm de raio.

Anote as respostas em seu caderno.

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 4

Calcule o perímetro do triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de 10cm de raio.

Anote as respostas em seu caderno.

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 5

Calcule as medidas do lado e do apótema de um hexágono regular inscrito em uma circunferência de 12cm de raio.

Anote as respostas em seu caderno.

5.4 Polígono regular inscrito

Determinaremos agora, generalizando, as relações entre o lado e o apótema de um polígono regular de *n* lados e o raio da circunferência onde está o polígono inscrito.

Notação:

l_n: Medida do lado do polígono de *n* lados;

a_n: Medida do apótema do polígono de *n* lados.

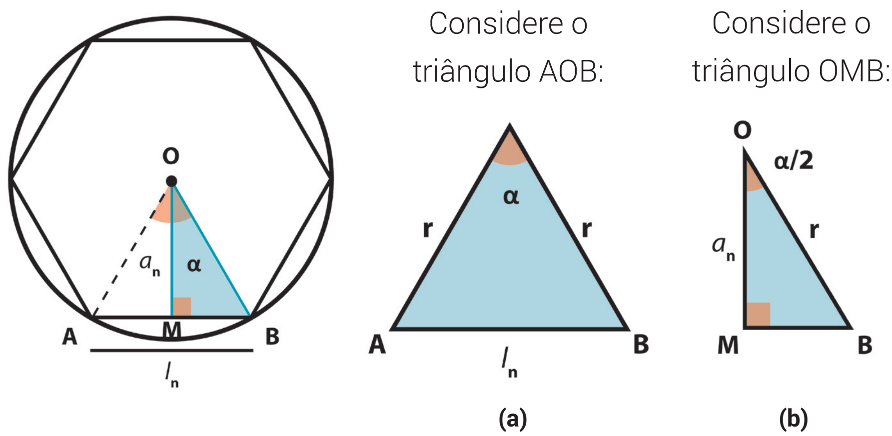


Figura 12: Polígono inscrito

Em **(a)**, utilizando a lei dos cossenos, temos: $l_n^2 = r^2 + r^2 - 2r \cdot r \cdot \cos\alpha$

$l_n^2 = 2 \cdot r^2 - 2r^2 \cos\alpha \Rightarrow l_n^2 = 2 \cdot r^2 (1 - \cos\alpha)$

$l_n = \sqrt{2 \cdot r^2 (1 - \cos\alpha)}$

Em **(b)**, utilizando a relação do cosseno no triangulo retângulo OMB, temos:

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \left(\frac{a_n}{r}\right) \Rightarrow a_n = r\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 6

Calcule a medida do lado do decágono regular inscrito em uma circunferência de 6 cm de raio (use cos 360 = 0,81).

Anote as respostas em seu caderno.

5.5 Polígonos regulares circunscritos

Observe, na figura a seguir, dois polígonos: um inscrito e outro circunscrito à circunferência de raio r.

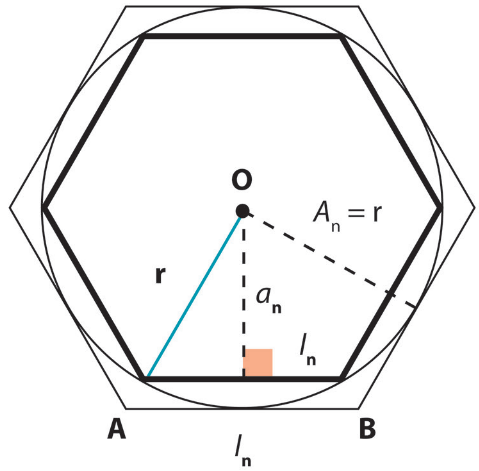


Figura 13: Polígonos inscrito e circunscrito

Notação:

l_n: Medida do lado do polígono inscrito;

a_n: Medida do apótema do polígono inscrito;

L_n: Medida do lado do polígono regular circunscrito;

A_n: Medida do apótema do polígono regular circunscrito.

Como os polígonos inscritos e circunscritos são semelhantes, podemos estabelecer a seguinte relação:

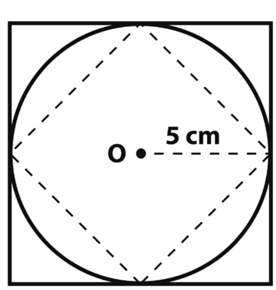
$$\frac{l_n}{L_n} = \frac{a_n}{A_n}$$

Como $A_n = r$

$$\frac{l_n}{L_n} = \frac{a_n}{r}$$

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 7



Na figura a seguir, temos um quadrado inscrito e outro circunscrito a uma circunferência de raio de 5cm. Determine:

a) a medida do lado do quadrado inscrito;

b) a medida do lado do quadrado circunscrito;

c) a razão entre a medida do lado do quadrado inscrito e a medida do lado do quadrado circunscrito.

Anote as respostas em seu caderno.

6. Superfície e área de um polígono

6.1 O metro quadrado

Para determinarmos a área de uma superfície, devemos compará-la com outra, tomada como unidade de medida. Assim:

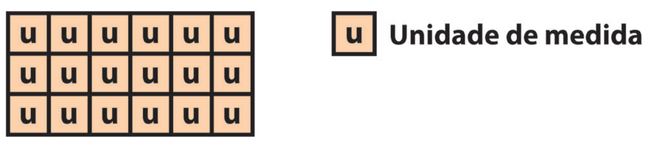


Figura 14: Área do polígono em referência à unidade de área

Podemos verificar, no polígono da Figura 14, que a área é igual a 18 u.

Para evitar o uso de diferentes unidades de medida, escolhemos uma unidade *padrão* como *unidade fundamental* de medida. A nossa unidade fundamental de medida de superfície, reconhecida pelo Sistema Internacional de Unidades, é o *metro quadrado* (m^2), que corresponde à superfície de um quadrado com 1 m de lado.

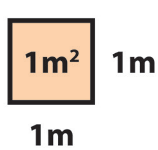


Figura 15: Representação do metro quadrado

Como cada $1m$ é equivalente a $100cm$, observe que um metro quadrado ($1m^2$) equivale a dez mil centímetros quadrados ($10.000cm^2$).

$1m^2 = 1m \cdot 1m = 100cm \cdot 100cm = 100 \cdot 100cm^2 = 10.000cm^2$

Assim, $10.000cm^2$ é uma forma equivalente para $1m^2$. Em vários problemas, precisamos converter a unidade de área. Dessa forma, para calcularmos a área de uma superfície, no sistema decimal, será fundamental a utilização da Tabela 1, apresentada a seguir:

Tabela 1 – Tabela de unidades de medida de área

Múltiplos			Unidade fundamental	Submúltiplos		
Quilômetro quadrado	Hectômetro quadrado	Decâmetro quadrado	Metro quadrado	Decímetro quadrado	Centímetro quadrado	Milímetro quadrado
km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
$1.000.000m^2$	$10.000m^2$	$100m^2$	$1m^2$	$0{,}01m^2$	$0{,}0001m^2$	$0{,}000001m^2$

7. Áreas de figuras planas

Vamos aprender a calcular a área das principais figuras planas.

7.1 Área do retângulo

A área do retângulo é dada pelo produto do comprimento pela largura.

Área do retângulo:

$A = b \cdot h$

Figura 16: Retângulo

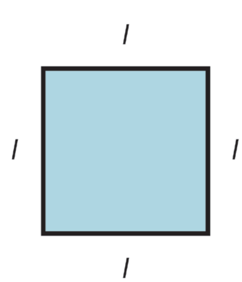
Notação:

b: medida do comprimento ou base;

h: medida da largura ou altura.

7.2 Área do quadrado

Sendo l a medida do lado do quadrado, temos:



Área do quadrado:

$A = l^2$

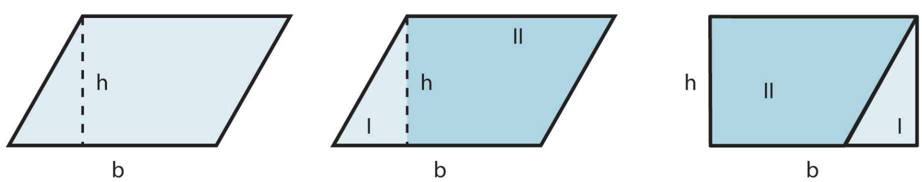
Figura 17: Quadrado

7.3 Área do paralelogramo

Saiba mais

Utilizaremos, nesta seção, uma técnica denominada decomposição de região para o cálculo de áreas. Acesse o link **https://youtu.be/zhm4vxtHfQs** para acompanhar a resolução de uma questão sobre o cálculo da área de uma figura plana, utilizando a decomposição da figura original em figuras planas simples.

Considere o paralelogramo, Figura 18 (a), de base de medida *b* e altura de medida *h*.



a) Paralelogramo **b) Decomposição: áreas I e II** **c) Retângulo com as áreas I e II**

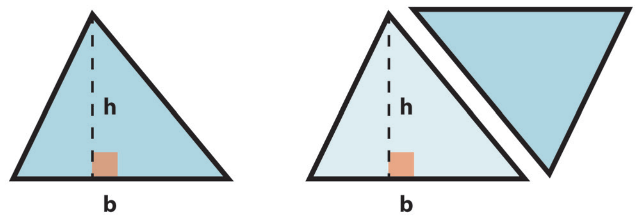
Figura 18: Paralelogramo

Vamos decompor a área desse paralelogramo em duas regiões, que denominamos I e II, Figura 18 (b). Observe que, na Figura 18 (c), deslocamos a região I e construímos um retângulo. Dessa forma, podemos concluir que a área do paralelogramo, Figura 18 (a), é igual à do retângulo, Figura 18 (c). Logo:

$$A = b \cdot h$$

7.4 Área do triângulo

Considere, Figura 19 (a), o triângulo de base de medida *b* e altura *h* da figura:



a) Triângulo b) Paralelogramo

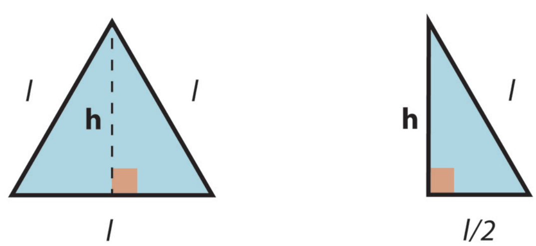
Figura 19: Triângulo

Observe que, na Figura 19 (b), dois triângulos congruentes formam um paralelogramo de base de medida *b* e altura de medida *h*. Sendo, portanto, a área do triângulo igual à metade da área do paralelogramo. Logo:

$$A = \frac{(b\ .\ h)}{2}$$

7.4.1 Casos particulares de áreas de triângulos

a) Triângulo equilátero



a) Triângulo equilátero b) Triângulo retângulo

Figura 18: Paralelogramo

Dado o triângulo equilátero, Figura 20 (a), observe que a altura h constrói o triângulo retângulo, Figura 20 (b), no qual, aplicando o Teorema de Pitágoras, encontramos a altura em função do lado do triângulo. Portanto,

$$h = \frac{(l\sqrt{3})}{2} \qquad \text{(I)}$$

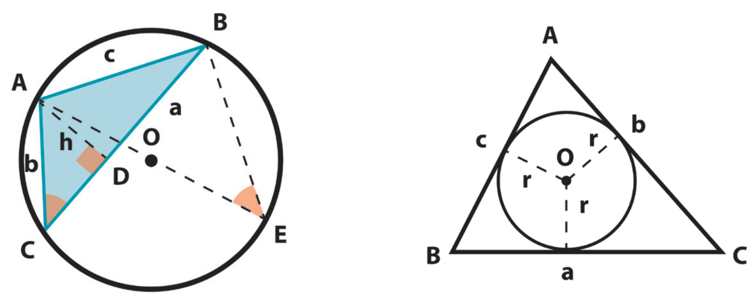
Vimos, em **7.4 Área do triângulo**, que calculamos a área utilizando

$$A = \frac{(b\ .\ h)}{2} \qquad \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II) e considerando $b = l$, temos que a área do triângulo equilátero é dada por:

$$A = \frac{(b\,.\,h)}{2} = A = \frac{\frac{l\,.\,l\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \quad \therefore \quad A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

b) Triângulo inscrito e circunscrito a uma circunferência.



a) Inscrito

b) Circunscrito

Figura 21: Triângulo

Demonstração:

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}.a.h_a$$

$$\Delta ABE \text{ com } AE = 2R$$

$$\hat{B} = \hat{D}\ (retos)$$

$$\hat{C} = \hat{E} = \frac{AB}{2} \Rightarrow \Delta ADC \sim \Delta ABE$$

Assim temos:

$$\frac{h_a}{c} = \frac{b}{2R} \Rightarrow h_a = \frac{b\,.\,c}{2R}$$

Logo:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}a.\frac{b.c}{2R}$$

$$A = \frac{a\,.\,b\,.\,c}{4R}$$

Demonstração:

$$A_{ABC} = A_{BOC} + A_{AOC} + A_{AOB}$$

$$A_{ABC} = \frac{a\,.\,r}{2} + \frac{b\,.\,r}{2} + \frac{c\,.\,r}{2}$$

$$A_{ABC} = \frac{a+b+c}{2}.r,\ como\ p = \frac{a+b+c}{2}$$

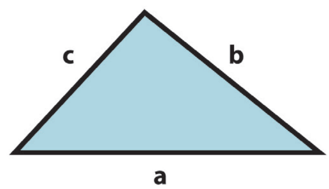
p é o semiperímetro

Logo:

$$A = p\,.\,a$$

7.4.2 Fórmula de Herão

Herão, matemático grego, desenvolveu uma fórmula que permite determinar a área de um triângulo, simplesmente conhecendo os seus lados.



$p \rightarrow semiperímetro$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Figura 22: Triângulo e a Fórmula de Herão

Saiba mais

Antes de fazer as Atividades 8 a 10, acesse os links

https://youtu.be/cKy6KXgF1OY

https://youtu.be/UyORn8gjUi0

e resolva os exercícios com o cálculo das áreas das principais figuras planas.

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 8

Determinar a área de um retângulo de 25 cm de comprimento e 12 cm de largura.

Anote as respostas em seu caderno.

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 9

O perímetro de um triângulo equilátero é 30 cm. Calcule a sua área.

Anote as respostas em seu caderno.

Anote as respostas em seu caderno

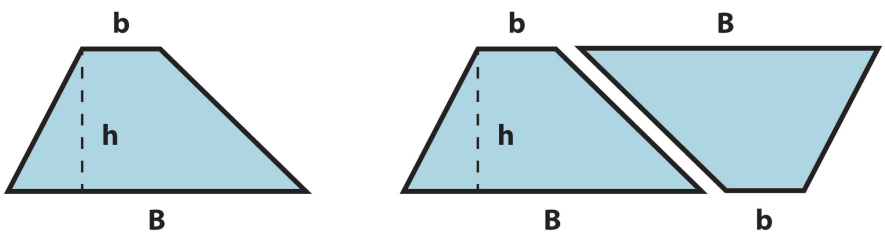
Atividade 10

Calcule a área do triângulo de lados 5 cm, 12 cm e 9 cm.

Anote as respostas em seu caderno.

7.5 Área do trapézio

Considere o trapézio, Figura 23 (a), sendo *B* a medida da base maior, *b* a medida da base menor e *h* a medida da altura.



a) Trapézio **b) Paralelogramo**

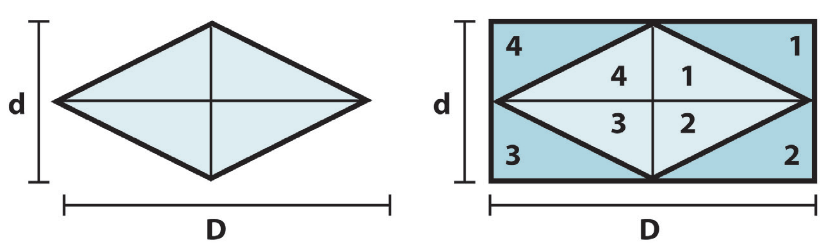
Figura 23: Trapézio

Observe, na Figura 23 (b), que dois trapézios congruentes formam um paralelogramo. Sendo, portanto, a área do trapézio igual à metade da área do paralelogramo de base $B + b$ e altura h. Logo,

$$A = \frac{(B+b).h}{2}$$

7.6 Área do Losango

Considere o losango, Figura 24 (a), sendo *D* a medida da diagonal maior e *d* a medida da diagonal menor



a) Losango **b) Retângulo**

Figura 24: Losango

Primeiro, dividindo a região do losango nas áreas 1, 2, 3 e 4. E depois, duplicando essas regiões, conforme apresentado na Figura 24 (b), construímos um retângulo. Observe que a área do losango corresponde à metade da área do retângulo de base (D) e altura (d). Logo:

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

7.7 Área do círculo

Saiba mais

Antes de prosseguir, vale acessar o link

https://youtu.be/oPacf9kE8Zg

para revisar o estudo de circunferência.

Considere o círculo de raio *r* apresentado na Figura 25 (a1). Tomando esse círculo dado, vamos dividi-lo em n partes iguais, Figura 25 (a2).

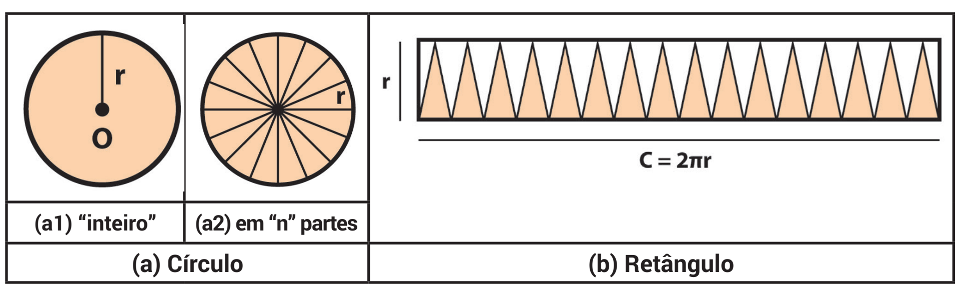


Figura 25: Construção da área do Círculo

Agora, contando com a sua imaginação, acompanhando a Figura 25, vamos cortar essa circunferência num ponto e esticá-la, decompondo-a, conforme apresentado na Figura 25 (b). Observe que obtemos um retângulo, mas a região correspondente ao círculo (representada pelos triângulos escuros) é menor que a região de todo o retângulo. Verificamos, portanto, que a área do círculo corresponde à metade da área do retângulo de base $2\pi r$ e altura r. Dessa forma, temos:

$A = \pi r^2$

7.7.1 Outras áreas circulares

Apresentaremos, a seguir, três outras figuras circulares: Coroa circular, Setor circular e Segmento circular.

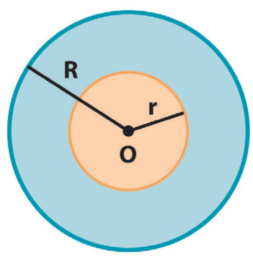
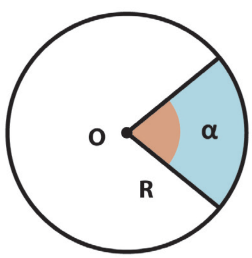
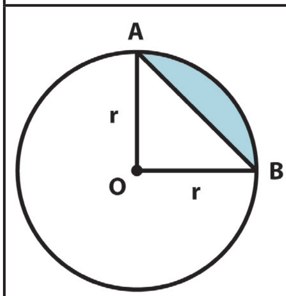
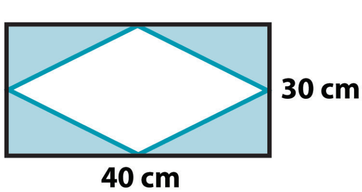
Figura	Área	
	Definição	**Expressão**
 **Coroa circular**	A área da coroa circular é a região do círculo limitada por dois círculos concêntricos.	$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$
 **Setor circular**	A área do setor circular é a região do círculo limitada por um arco e os raios que o compreendem.	Pela regra de três, πR^2 ___ 360^0 A ___ α Temos: $A = \dfrac{\alpha}{360°} \pi \cdot R^2$
 **Segmento circular**	A área do segmento circular é a região do círculo limitada pelo arco e pela corda que o compreende.	Obtemos a área do segmento circular determinando a diferença entre a área do setor circular e a área do triângulo. A_{SC} = Área do setor circular - Área do triângulo

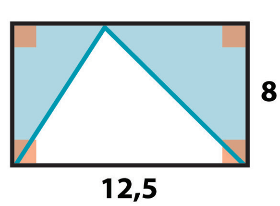
Tabela 2: Áreas de outras figuras circulares

Anote as respostas em seu caderno

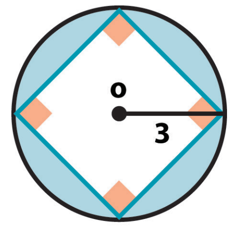
Atividade 11

Calcule a área sombreada das figuras:

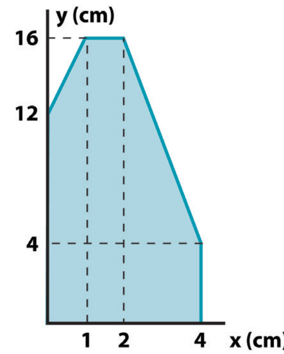
a) 

b) 

c)



d)



Anote as respostas em seu caderno.

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 12

Calcule a área da coroa circular, determinada por duas circunferências concêntricas de raios de 8cm e de 5cm, respectivamente.

Anote as respostas em seu caderno.

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 13

Um banheiro tem um piso com dimensões 1m x 2m. Deseja-se cobrir o piso com cerâmicas quadradas, medindo 20cm de lado. Qual é a quantidade de cerâmicas necessária?

Anote as respostas em seu caderno.

Resumo

Nesta aula, você estudou:

- a calcular áreas de figuras planas;
- a calcular áreas de figuras compostas;

- a usar o sistema de medida de área.
- sobre o polígono regular;
- sobre o polígono inscrito;
- sobre o polígono circunscrito e suas relações métricas.

Referências

DANTE, Luiz Roberto. *Tudo é Matemática*. 8ª série. 2ª edição. São Paulo. Editora Ática, 2005.

IMENES, Luiz Márcio. *Matemática*. 9ºano. 1ª edição. São Paulo, Editora Moderna, 2009.

JAKUBOVIC, José e LELLIS, Marcelo. *Matemática na medida certa*. 8ª série. 5ª edição. São Paulo. Editora Scipione, 1999.

RIBEIRO, Jackson da Silva. *Matemática*. 9º ano. 1ª edição. São Paulo. Editora Scipione, 2010.

SILVEIRA, Ênio e MARQUES, Cláudio. *Matemática*. 8ª série. 1ª edição. São Paulo. Editora Moderna, 1998.

Na Onda da Matemática. Disponível em http://www.youtube.com/c/NaOndadaMatematica; acesso em 26 de maio de 2018.

Respostas das atividades

Atividade 1

As únicas opções falsas são os itens c e f, pois o retângulo, apesar de equiângulo, não é equilátero; já o losango é equilátero, mas não é equiângulo. Portanto, nenhum dos dois é regular.

Atividade 2

Usando a fórmula do ângulo central $a_C = \dfrac{360°}{n}$, temos:

a) $a_c = \dfrac{360^0}{3} = 120^0$ $\qquad a_e = \dfrac{360^0}{3} = 120^0$ $\qquad a_i = \dfrac{180^0(3-2)}{3} = 60^0$

b) $a_c = \dfrac{360^0}{4} = 90^0$ $\quad a_e = \dfrac{360^0}{4} = 90^0$ $\quad a_i = \dfrac{180^0(4-2)}{4} = 90^0$

c) $a_c = \dfrac{360^0}{6} = 60^0$ $\quad a_e = \dfrac{360^0}{6} = 60^0$ $\quad a_i = \dfrac{180^0(6-2)}{6} = 120^0$

Atividade 3

$l_4 = r\sqrt{2} \Rightarrow l_4 = 10\sqrt{2}cm$

$a_4 = \dfrac{10\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a_4 = 5\sqrt{2}cm$

Atividade 4

$l_3 = 10\sqrt{3} \,.\, \sqrt{3} \Rightarrow l_3 = 30cm$

Logo, o perímetro é 3 • 30 = 90 cm.

Atividade 5

$l_6 = r \Rightarrow l_6 = 12\ cm$

$a_6 = \dfrac{12\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a_6 = 6\sqrt{3}$

Atividade 6

α é o ângulo central, logo: $\alpha = \dfrac{360^0}{10} \Rightarrow \alpha = 36^0$

$l^2{}_n = r^2 + r^2 - 2\,.\,r.\,r.\cos\alpha \Rightarrow l^2{}_{10} = 6^2 + 6^2 - 2.6.6.0,81 \Rightarrow l_{10}{}^2 = 58,32 \Rightarrow l_{10} \cong 3,7cm$

Atividade 7

a) $l_4 = r\sqrt{2} \Rightarrow l_4 = 5\sqrt{2}cm$

b) $a_4 = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{l_n}{L_n} = \frac{a_n}{r} \Rightarrow \frac{5\sqrt{2}}{L_4} = \frac{\frac{5\sqrt{2}}{2}}{5} \Rightarrow \frac{5\sqrt{2}}{L_4} = \frac{5\sqrt{2}}{10} \Rightarrow 5\sqrt{2}\ L_4 = 50\sqrt{2} \Rightarrow L_4 = \frac{50\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} \Rightarrow L_4 = 10\ cm$$

c) $\dfrac{5\sqrt{2}}{10} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Atividade 8

A = b • h

A = 25 • 12 = 300 cm²

Atividade 9

Se o perímetro é 30cm, então, o seu lado é igual $\frac{30}{3} = 10cm$. Usando a fórmula da área, teremos $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A = \frac{10^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}\ cm^2$

Atividade 10

Aplicando a fórmula de Herão, teremos:

$A = \sqrt{p(p-a).(p-b).(p-c)}$

$p = \frac{5+12+9}{2} = 13$

$A = \sqrt{13.(13-5).(13-12).(13-9)} \Rightarrow A = \sqrt{13.8.1.4} = 4\sqrt{26}\ cm^2$

Atividade 11

a) Vamos calcular a área do retângulo e a do losango; a diferença dessas áreas será a área sombreada:

$A = 40\ .\ 30 = 1\,200\ cm^2 \quad \text{área do retângulo}$

$A = \frac{40.30}{2} = 600\ cm^2 \quad \text{área do losango}$

$A_c = 1200 - 600 = 600\ cm^2$

b) Vamos calcular a área do retângulo e a área do triângulo branco; a área sombreada é a diferença dessas áreas.

$A = 12,5\ .\ 8 = 100\ cm^2 \quad \text{área do retângulo}$

$A = \frac{12,5.8}{2} = 50\ cm^2 \quad \text{área do triângulo}$

$A_c = 100 - 50 = 50\ cm^2$

c) Vamos calcular a área do círculo e a área do quadrado; a área sombreada é a diferença dessas áreas.

$A = \pi\,.\,r^2 = 3{,}14\ .\ 3^2 = 28,26\ cm^2 \quad \text{área do círculo}$

$l_4 = r\sqrt{2} = 3.\sqrt{2}$

$A = l^2 \Rightarrow A = \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18$

$A_c = 28,26 - 18 = 10,26\ cm^2$

d) Vamos decompor a figura em dois trapézios e um retângulo; a área sombreada é a soma das áreas.

$$A_1 = \frac{(16+12).1}{2} = 14 \quad \textit{área do trapézio}$$
$$A_2 = 16\,.\,1 = 16 \quad \textit{área do retângulo}$$
$$A_3 = \frac{(4+16).2}{2} = 20 \quad \textit{área do trapézio}$$
$$A_c = A_1 + A_2 + A_3 \Rightarrow A_c = 14 + 16 + 20\ cm^2$$

Atividade 12

Aplicando a fórmula da coroa circular A= π (R^2 - r^2)

Pelos dados, temos R = 8 cm e r = 5 cm. Substituindo na fórmula, vamos ter: $A = \pi(8^2 - 5^2) \Rightarrow A = 39\pi\ cm^2$

Atividade 13

Temos que achar a área do banheiro e a área da cerâmica.

$$A_b = 1\,.\,2 = 2\ m^2$$
$$A_c = 20\,.\,20 = 400\ cm^2$$
$$2\,m^2 = 20000\ cm^2$$

Logo, a quantidade de cerâmicas é o quociente entre a área do banheiro e a área da cerâmica: $\frac{20000}{400}$ = 50 cerâmicas.