CEJA >>

CENTRO DE EDUCAÇÃO
de JOVENS e ADULTOS

MATEMÁTICA

Ensino Fundamental II

Wendel de Oliveira Silva

Fascículo 10

Unidades 28, 29 e 30

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

PRODUÇÃO DO MATERIAL CEJA (CECIERJ)

Elaboração de Conteúdo
Wendel de Oliveira Silva

Diretoria de Material Didático
Bruno José Peixoto

Coordenação de Design Instrucional
Flávia Busnardo
Paulo Vasques de Miranda

Revisão de Língua Portuguesa
José Meyohas

Design Instrucional
Renata Vittoretti0

Diretoria de Material Impresso
Ulisses Schnaider

Projeto Gráfico
Núbia Roma

Ilustração
Renan Alves

Programação Visual
Bianca Giacomelli

Capa
Renan Alves

Produção Gráfica
Fábio Rapello Alencar

C391

CEJA : Centro de educação de jovens e adultos. Ensino fundamental II. Matemática / Wendel de Oliveira Silva . Rio de Janeiro : Fundação Cecierj, 2019.

Fasc. 10 – unid. 28-29-30

46p.; 21 x 28 cm.

ISBN: 978-85-458-0184-9

1. Matemática. 2. Equações do 2º grau. I. Silva Wendel de Oliveira. 1. Título.

CDD: 510

Referências bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.
Texto revisado segundo o novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa.

Sumário

Prezado(a) Aluno(a),

Seja bem-vindo a uma nova etapa da sua formação. Estamos aqui para auxiliá-lo numa jornada rumo ao aprendizado e conhecimento.

Você está recebendo o material didático impresso para acompanhamento de seus estudos, contendo as informações necessárias para seu aprendizado e avaliação, exercício de desenvolvimento e fixação dos conteúdos.

Além dele, disponibilizamos também, na sala de disciplina do CEJA Virtual, outros materiais que podem auxiliar na sua aprendizagem.

O CEJA Virtual é o Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) do CEJA. É um espaço disponibilizado em um site da internet onde é possível encontrar diversos tipos de materiais como vídeos, animações, textos, listas de exercício, exercícios interativos, simuladores, etc. Além disso, também existem algumas ferramentas de comunicação como chats, fóruns.

Você também pode postar as suas dúvidas nos fóruns de dúvida. Lembre-se que o fórum não é uma ferramenta síncrona, ou seja, seu professor pode não estar online no momento em que você postar seu questionamento, mas assim que possível irá retornar com uma resposta para você.

Para acessar o CEJA Virtual da sua unidade, basta digitar no seu navegador de internet o seguinte endereço: http://cejarj.cecierj.edu.br/ava

Utilize o seu número de matrícula da carteirinha do sistema de controle acadêmico para entrar no ambiente. Basta digitá-lo nos campos “nome de usuário” e “senha”.

Feito isso, clique no botão “Acesso”. Então, escolha a sala da disciplina que você está estudando. Atenção! Para algumas disciplinas, você precisará verificar o número do fascículo que tem em mãos e acessar a sala correspondente a ele.

Bons estudos!

CEJA >>
CENTRO DE EDUCAÇÃO
de JOVENS e ADULTOS

Equações do 2º grau

Matemática - Fascículo 10 - Unidade 28

Objetivos de aprendizagem

1. Reconhecer uma equação do 2º grau e identificar seus coeficientes;

2. Reconhecer quando uma equação do 2º grau está na forma incompleta ou completa;

3. Escrever uma equação do 2º grau a partir de seus coeficientes;

4. Verificar se um número é ou não raiz de uma equação do 2º grau.

Para início de conversa...

No século XII, o matemático hindu Bhaskara Akaria, nascido em 1114, escreveu duas obras muito importantes: o livro Lilavati (nome de sua filha) e o livro Vija-Ganita (extração de raízes). Estes livros mostravam trabalhos sobre equações do 1º e 2º graus, radicais e triângulos retângulos. Contudo, estas obras não deixaram uma fórmula de resolução destas equações.

François Viète, matemático francês, conhecido como o pai da Álgebra, no século XVI, ao criar uma álgebra puramente simbólica, transforma as ideias contidas nos livros de Bhaskara em equações.

Não foram apenas Bhaskara e François Viète que pesquisaram os caminhos para encontrar a fórmula da equação do 2º grau, mas sim um árduo trabalho de homens do Velho Mundo que deram à Matemática a fórmula definitiva da equação do 2º grau. Vamos, a partir de agora, aprender a solucionar essas equações.

1. Conhecendo uma equação do 2º grau e seus coeficientes

Senhor João é dono de um quintal de 63m². Em um determinado dia, resolve dividir seu quintal em três partes. A figura abaixo mostra um mapa do quintal dividido com as medidas de suas áreas.

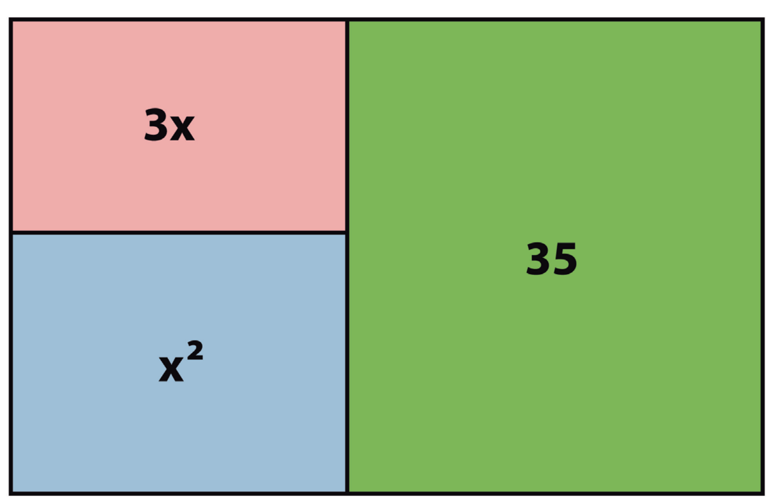


Figura 28.1: Mapa do quintal do Senhor João.
Fonte: Desenho do autor

Na parte maior, de verde, ele pretende plantar hortaliça; na parte rosa, será construído um galinheiro, e a parte azul será reservada para a criação de porcos. Como podemos representar, matematicamente, essa situação? Qual a área destinada à criação de porcos?

A soma das áreas das partes é dada por $x^2 + 3x + 35$, cujo total é $63m^2$, que pode ser representado pela equação $x^2 + 3x + 35 = 63$ ou $x^2 + 3x - 28 = 0$.

Note que a equação encontrada, $x^2 + 3x - 28 = 0$, possui uma só incógnita (letra x), sendo que seu maior expoente é 2. Essa equação é um exemplo de **Equação do 2º grau com uma incógnita**.

Portanto,

> **Equação do 2º grau** é toda equação que pode ser escrita na forma reduzida: $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b e c são números reais e $a \neq 0$.

Obs.: O coeficiente a não pode ser zero, para garantir a presença do termo ax^2, pois, do contrário, teríamos uma equação do 1º grau.

No estudo das equações do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, a, b e c são chamadas de coeficientes da equação do 2º grau.

Por exemplo, na equação $x^2 + 6x - 6 = 0$, temos que:

$a = 1$; $b = 6$ e $c = -6$.

Por outro lado, podemos encontrar uma equação do 2º grau a partir dos seus coeficientes. Veja como é fácil!

Dados os coeficientes $a = -1$, $b = 2$ e $c = 4$, escreva a equação do 2º grau.

Solução:

Sabendo-se que a equação do 2º grau é da forma $ax^2 + bx + c = 0$, temos que a equação procurada é $-1x^2 + 2x + 4 = 0$, porém, é mais comum representarmos como $-x^2 + 2x + 4 = 0$.

Uma equação do 2º grau pode ser:

- Completa: quando temos $b \neq 0$ e $c \neq 0$.

Exemplos: $x^2 - 3x + 2 = 0$ e $-2x^2 - 3x + 8 = 0$.

- Incompleta: quando temos b = 0 ou c = 0, ou ainda, b = 0 e c = 0.

  Exemplos: $x^2 - 6 = 0$, $x^2 + 3x = 0$ e $x^2 = 0$.

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 1

Em seu caderno, copie as equações do 2º grau.

a) $2x^2 - 2x - 5 = 0$

b) $3x - 10 = 0$

c) $-2x + 3x^2 + 1 = 0$

d) $-2x^3 + 5x = 0$

e) $(x - 1)^2 = 16$

f) $(x + 1).(x - 2) = 0$

Anote as respostas em seu caderno

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 2

Determine os coeficientes *a*, *b* e *c* das equações do 2º grau e classifique-as, descrevendo em seu caderno, como completa ou incompleta:

Equação	Coeficientes			Classificação
a) $x^2 + 5x - 8 = 0$	a =	b =	c =	
b) $2x^2 - x + 3 = 0$	a =	b =	c =	
c) $-x^2 + 4 = 0$	a =	b =	c =	
d) $3x^2 - 6x = 0$	a =	b =	c =	
e) $-x^2 = 0$	a =	b =	c =	

Anote as respostas em seu caderno.

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 3

Com os coeficientes indicados em cada item, escreva em seu caderno uma equação do 2º grau.

Coeficientes			Equação
a) $a = 1$	$b = 5$	$c = -8$	
b) $a = 2$	$b = -1$	$c = 3$	
c) $a = -1$	$b = 0$	$c = 4$	
d) $a = 3$	$b = -6$	$c = 0$	
e) $a = -1$	$b = 0$	$c = 0$	

Anote as respostas em seu caderno.

2. Raízes de uma equação do 2º grau

Você se lembra? Resolver uma equação é determinar as suas raízes ou soluções, isto é, trata-se de um número que, se inserido no lugar do x, torna a igualdade verdadeira. Nas equações do 2º grau, podemos ter até duas raízes reais diferentes. Veja o seguinte exemplo:

Verifique se os números -3 e -2 são raízes ou soluções da equação

$x^2 + x - 6 = 0$.

Solução:

Substituindo x por -3, temos:	Substituindo x por -2, temos:
$\mathbf{(-3)^2 + (-3) - 6 = 0}$	$\mathbf{(-2)^2 + (-2) - 6 = 0}$
$\mathbf{9 - 3 - 6 = 0}$	$\mathbf{4 - 2 - 6 = 0}$
$\mathbf{9 - 9 = 0}$	$\mathbf{4 - 8 = 0}$
$\mathbf{0 = 0}$ (Verdadeiro)	$\mathbf{-4 = 0}$ (Falso)
Logo, -3 é raiz da equação.	Logo, -2 não é raiz da equação.

Figura 28.2: Professor e aluno conversando.

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 4

Na equação $2x^2 - (m - 5)x - 6m = 0$, com incógnita x, o número 3 é uma das raízes. Qual é o valor de m?

Anote as respostas em seu caderno.

Resumo

- O maior índice da incógnita na equação é igual a dois, e é isto que a define como sendo uma equação do 2º grau.
- A equação do 2º grau pode ser apresentada na forma completa ou incompleta.

- Para verificar se um determinado número é raiz ou solução de uma equação do 2º grau, basta substituí-lo no x. O número será a raiz ou solução, se a igualdade for verdadeira.
- Em uma equação do 2º grau, pode haver até duas raízes reais.

Referências

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. *Praticando Matemática - 9º ano*. 3ª ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

BARROSO, Juliane Matsubara. *Matemática. Projeto Araribá: 8ª série*. 1ª ed. São Paulo: Editora Moderna, 2006.

BIANCHINI, Edwaldo. *Matemática 9º ano*. 7a ed. São Paulo: Editora Moderna, 2011.

DANTE, Luiz Roberto. *Projeto Teláris: Matemática – Ensino Fundamental 2 – 9º ano* 2a ed. São Paulo: Editora Ática, 2015.

GIOVANNI, José Ruy; CASTRUCCI, Benedito; GIOVANNI JR, José Ruy. *A conquista da Matemática - Nova - 8ª série.* 1ª ed. São Paulo: editora FTD, 1998.

SOUZA, Joamir e PATARO, Patricia Moreno. *Vontade de Saber Matemática, 9º ano*. 3a ed. São Paulo: Editora FTD, 2015.

YOUSSEF, Antonio Nicolau; PACHI, Clarice Gameiro da Fonseca e HESSEL, Heloisa Maria. *Linguagens e aplicações: Matemática. Ensino Fundamental - Anos Finais - 9º ano*. 1ª ed. São Paulo: Cereja Editora, 2015.

Respostas das atividades

Atividade 1

a) É uma equação do 2º grau;

b) Não é uma equação do 2º grau;

c) É uma equação do 2º grau, mesmo que o polinômio não se apresente na forma ordenada $3x^2 - 2x + 1 = 0$;

d) Não é uma equação do 2º grau, pois o maior expoente de incógnita x é 3.;

e) É uma equação do 2º grau que equivale a $x^2 - 2x - 15 = 0$;

f) É uma equação do 2º grau. Isso pode ser verificado efetuando a multiplicação entre os fatores $(x + 1)$ e $(x - 2)$. Teremos, portanto,como resultado $x^2 - x - 2 = 0$.

Atividade 2

a) $a = 1$; $b = 5$ e $c = -8$, sendo uma equação completa.

b) $a = 2$; $b = -1$ e $c = 3$, sendo uma equação completa.

c) $a = -1$; $b = 0$ e $c = 4$, sendo uma equação incompleta.

d) $a = 3$; $b = -6$ e $c = 0$, sendo uma equação incompleta.

e) $a = -1$; $b = 0$ e $c = 0$, sendo uma equação incompleta.

Atividade 3

a) $x^2 + 5x - 8 = 0$

b) $2x^2 - x + 3 = 0$

c) $-x^2 + 4 = 0$

d) $3x^2 - 6x = 0$

e) $-x^2 = 0$

Atividade 4

Basta atribuirmos a x o valor 3 e resolvermos a equação:

$2x^2 - (m - 5)x - 6m = 0 \rightarrow 2 . 3^2 - (m - 5) . 3 - 6m = 0 \rightarrow 2 . 9 - (3m - 15) - 6m = 0 \rightarrow 18 - 3m + 15 - 6m = 0 \rightarrow -3m - 6m + 18 + 15 = 0 \rightarrow -9m + 33 = 0 \rightarrow -9m = -33 .(-1) \rightarrow 9m = 33 \rightarrow m = \frac{33}{9} \rightarrow m = \frac{11}{3}$

Exercícios

1. Quais das equações a seguir são do 2º grau?

a) $x.(x + 2) = 0$

b) $(2 + 2x)^2 = 16$

c) $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$

d) $(x - 2)^2 = x.(x - 1) + 3$

e) $-1 + x^2 + x = 0$

2. Marque um "x" nas equações do 2º grau que são completas.

a) (   ) $2 - 3x^2 = -x$

b) (   ) $(2x)^2 = 2$

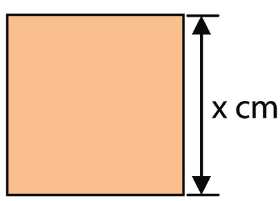
c) (   ) $x \cdot (1 - 2x) = 2$

d) (   ) $(2x - 2)^2 = 2$

3. Dado a tabela abaixo, determine os valores de a, b e c para cada equação do 2º grau:

Equação	Coeficientes		
a) $-2x^2 - x - 3 = 0$	a =	b =	c =
b) $-x^2 + x = 0$	a =	b =	c =
c) $x^2 - 3 = 0$	a =	b =	c =
d) $x^2 = 0$	a =	b =	c =

4. Observe a figura abaixo e responda à questão.



Área: 225 cm²

Qual a equação que relaciona a medida do lado do quadrado e sua área?

5. Escreva estas equações na forma reduzida:

a) $(2x - 1)^2 - 3x.(1 + x) = 7.(3 - x)$

b) $12 - (x - 6).(x + 1) = -2.(x^2 - 11)$

6. Para que valores reais de k a equação $(4k - 12)x^2 + 6x - 1 = 0$ é uma equação de 2º grau com uma incógnita?

7. Verifique se o número 5 é raiz das equações:

a) $x^2 + 6x = 0$ __________

b) $2x^2 - 10x = 0$ _________

c) $3x^2 - 75 = 0$ _________

d) $-x^2 - 2x + 1 = 0$ ________

Respostas dos exercícios

1. a) Sim. Basta multiplicar os fatores $x(x+2)=0 \rightarrow x^2 + 2x = 0$.

   b) Sim. Basta fazer $(2 + 2x)^2 = 16 \rightarrow 2^2 + 2 \,.\, (2) \,.\, (2x)+ (2x)^2 = 16 \rightarrow 4 + 8x + 4x^2 = 16 \rightarrow 4x^2 + 8x + 4 - 16 = 0 \rightarrow 4x^2 + 8x - 12 = 0$.

   c) Não. O polinômio é de grau 3;

   d) Não. Resolvendo a equação, encontramos uma equação do 1º grau. Veja: $(x - 2)^2 = x(x - 1) + 3 \rightarrow x^2 - 2.(x).(2)+2^2 = x^2 - x + 3 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = x^2 - x + 3 \rightarrow x^2 - x^2 - 4x + x + 4 - 3 = 0 \rightarrow - 4x + x + 1 = 0 \rightarrow - 3x + 1 = 0$.

   e) Sim. Veja: $- 1 + x^2 + x = 0 \rightarrow x^2 + x - 1 = 0$.

2. a) Completa. Colocando na forma reduzida, temos: $2 - 3x^2 = -x \rightarrow -3x^2 + x + 2 = 0$.

   b) Incompleta. Desenvolvendo, temos que: $(2x)^2 = 2 \rightarrow 4x^2 = 2 \rightarrow 4x^2 - 2 = 0$ $(b = 0)$.

   c) Completa: $x(1 - 2x) = 2 \rightarrow x - 2x^2 = 2 \rightarrow -2x^2 + x - 2 = 0$.

   d) Completa: $(2x - 2)^2 = 2 \rightarrow (2x)^2 - 2 \,.\, (2x) \,.\, (2) + 2^2 = 2 \rightarrow 4x^2 - 8x + 4 = 2 \rightarrow 4x^2 - 8x + 4 - 2 = 0 \rightarrow 4x^2 - 8x + 2 = 0$.

3. a) $a = -2$; $b = -1$; $c = -3$;

   b) $a = -1$; $b = 1$; $c = 0$;

   c) $a = 1$; $b = 0$; $c = -3$;

   d) $a = 1$; $b = 0$; $c = 0$.

4. Como a figura é um quadrado, todos os lados medem x cm. Portanto, a equação que relaciona a medida do lado com sua área é $x^2 = 225$ ou $x^2 - 225 = 0$.

5. a) $(2x - 1)^2 - 3x.(1 + x) = 7.(3 - x) \rightarrow 4x^2 - 4x + 1 - 3x - 3x^2 = 21 - 7x \rightarrow 4x^2 - 3x^2 - 4x - 3x + 7x + 1 - 21 = 0 \rightarrow x^2 - 7x + 7x - 20 = 0 \rightarrow x^2 - 20 = 0$

   b) $12 - (x - 6).(x + 1) = - 2.(x^2 - 11) \rightarrow 12 - (x^2 + x - 6x - 6) = 2x^2 + 22 \rightarrow 12 - (x^2 - 5x - 6) = - 2x^2 + 22 \rightarrow 12 - x^2 + 5x + 6 = - 2x^2 + 22 \rightarrow - x^2 + 2x^2 + 5x + 12 + 6 - 22 = 0 \rightarrow x^2 + 5x - 4 = 0$

6. A equação $(4k - 12)x^2 + 6x - 1 = 0$ será uma equação do 2º grau se $a \neq 0$. Como o coeficiente a na equação é $(4k - 12)$, temos que: $4k - 12 \neq 0 \rightarrow 4k \neq 12 \rightarrow k \neq 12/4 \rightarrow k \neq 3$. Então, a equação $(4k - 12)x^2 + 6x - 1 = 0$ é uma equação do 2º grau, desde que o k seja diferente de 3 ($k \neq 3$).

7. Para saber se o 5 é raiz ou solução, basta substituir o 5 pelo x em cada equação.

   a) 5 não é raiz de $x^2 + 6x = 0$, pois: $5^2 + 6 . 5 = 0 \rightarrow 25 + 30 = 0 \rightarrow 55 = 0$ (Falso).

   b) 5 é raiz de $2x^2 - 10x = 0$, pois: $2.(5)^2 - 10 . (5) = 0 \rightarrow 2 . (25) - 50 = 0 \rightarrow 50 - 50 = 0 \rightarrow 0 = 0$ (Verdadeiro).

   c) 5 é raiz de $3x^2 - 75 = 0$, pois: $3.(5)^2 - 75 = 0 \rightarrow 3. (25) - 75 = 0 \rightarrow 75 - 75 = 0 \rightarrow 0 = 0$ (Verdadeiro).

   d) 5 não é raiz de $- x^2 - 2x + 1 = 0$, pois: $- 5^2 - 2 . (5) + 1 = 0 \rightarrow - 25 - 10 + 1 = 0 \rightarrow - 35 + 1 = 0 \rightarrow - 34 = 0$ (Falso).

Resolvendo problemas com equações do 2º grau

Matemática - Fascículo 10 - Unidade 29

Objetivos de aprendizagem

1. Resolver uma equação do 2º grau (completa e incompleta), aplicando a fórmula resolutiva (fórmula de Bháskara);

2. Identificar o discriminante e determinar o número de raízes de uma equação do 2º grau;

3. Resolver uma equação do 2º grau da forma incompleta sem a aplicação da fórmula de Bháskara;

4. Utilizar conceitos e procedimentos matemáticos para resolver situações-problemas envolvendo equações do 2º grau.

Para início de conversa...

As resoluções de equações do 2º grau foram abordadas, ao longo da história, por variados povos, como árabes, hindus e babilônios. Sabe-se que, em aproximadamente 2000 a.C, os babilônios já resolviam cálculos que denominamos hoje de equação do 2º grau. Os problemas eram escritos no formato de textos, e as resoluções realizadas através de tentativas. No século IX, al-Khowarizmi, matemático árabe, desenvolveu um método para resolver esses problemas, dando início à denominada álgebra geométrica. Baseando-se nos trabalhos de Bháskara, François Viète (1540-1603) aperfeiçoou a fórmula de resolução da equação do 2º grau, que ficou conhecida aqui no Brasil como Fórmula de Bháskara.

Saiba mais

https://www.youtube.com/watch?v=dw6wD5bP5vw

Esse vídeo proporciona um passeio histórico desde a Mesopotâmia até a Europa do século XVI, mostrando como diversas civilizações utilizavam diferentes métodos para resolver equações do 2º grau.

Fonte: Projeto Matemática Multimídia para o ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Médio. Site: www.m3.mat.br

1. Fórmula resolutiva da equação do 2º grau

Vejamos agora algumas situações-problemas nos quais utilizaremos uma equação do 2º grau com uma incógnita e a obtenção de suas raízes (ou soluções).

Situação-problema 1:

As dimensões de um terreno estão representadas como mostra a figura a seguir. Sabe-se que esse terreno possui uma área de 42m². Quanto mede o comprimento e a largura desse terreno?

Figura 29.1: Terreno

Podemos observar que, para determinarmos as medidas das dimensões desse terreno, precisamos conhecer o valor da incógnita *x*. Partindo do princípio de que o terreno seja retangular, podemos então expressar sua área como o produto do comprimento pela largura. Assim, temos que: $A = (x - 1).(x - 2)$. Por outro lado, o problema nos informa que o terreno possui $42m^2$. Portanto, temos também que $A = 42$. Chegamos, assim, a seguinte igualdade: $(x - 1).(x - 2) = 42$. Fazendo a multiplicação dos fatores $(x - 1)$ e $(x - 2)$ e igualando a equação a 42, temos:

$$(x - 1).(x - 2) = 42$$

$$x^2 - 2x - x + 2 = 42$$

$$x^2 - 3x + 2 = 42$$

$$x^2 - 3x + 2 - 42 = 0$$

$$x^2 - 3x - 40 = 0$$

Figura 29.2: Questão

A solução de uma equação do 2º grau pode ser obtida pela fórmula resolutiva (fórmula de Bháskara), que deduziremos a seguir:

Considere a equação do 2º grau na sua forma completa $ax^2 + bx + c = 0$.

$ax^2 + bx + c = 0$

$ax^2 + bx = -c \rightarrow$ Isolamos o termo independente no 2º membro.

$4a^2x^2 + 4abx = -4ac \rightarrow$ Multiplicamos cada membro por 4a ($a \neq 0$).

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac \rightarrow$ Adicionamos b^2 a cada membro.

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \rightarrow$ Fatoramos o 1º membro.

$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \rightarrow$ Para ($b^2 - 4ac \geq 0$).

$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$

Isolando x, temos:

$$\boxed{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \rightarrow \text{Fórmula Resolutiva ou Fórmula de Bháskara}$$

Na fórmula resolutiva, a expressão $b^2 - 4ac$ é denominada de **discriminante da equação**. Geralmente, ela é representada pela letra grega Δ (delta). Então:

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Desse modo, se $\Delta \geq 0$, podemos escrever a fórmula resolutiva da seguinte maneira:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

OBS.: Trabalharemos, neste primeiro momento, com a fórmula resolutiva quando o discriminante é maior que zero ($\Delta > 0$). Mais à frente, veremos outros possíveis valores para o discriminante.

Voltemos, então, ao problema anterior, o do terreno. Precisamos descobrir o valor $x^2 - 3x - 40 = 0$ para sabermos suas dimensões. Para isso, aplicaremos a fórmula resolutiva. Veja:

Dada a equação $x^2 - 3x - 40 = 0$, observamos que: $a = 1$, $b = -3$ e $c = -40$.

Daí temos que:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4.1.(-40) \Rightarrow \Delta = 9 + 160 \Rightarrow \Delta = 169$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{169}}{2.1} \Rightarrow \boxed{x = \frac{3 \pm 13}{2}}$$

$$x_1 = \frac{3+13}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{16}{2} \Rightarrow x_1 = 8$$

$$x_2 = \frac{3-13}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{-10}{2} \Rightarrow x_2 = -5$$

Teremos duas operações e, portanto, dois valores reais para "x".

Encontramos x = – 5 ou x = 8. No entanto, – 5 não serve, pois a medida do lado de um terreno não pode ser negativa. Portanto, o valor do *x* que satisfaz o problema é 8.

Substituindo o "x" por 8, temos:

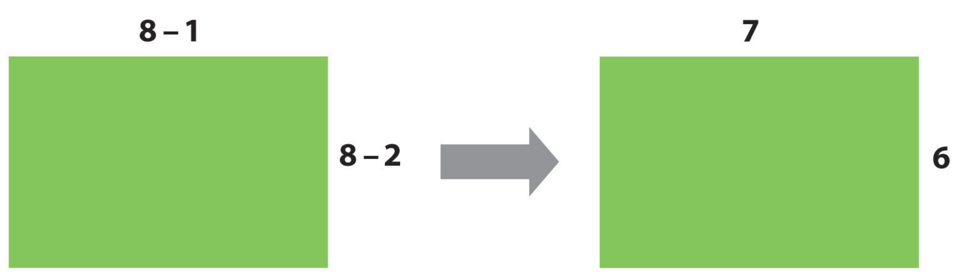


Figura 29.3: O valor do x que satisfaz o problema é 8.

Concluímos, então, que o terreno possui 7m de comprimento e 6m de largura.

Situação-problema 2:

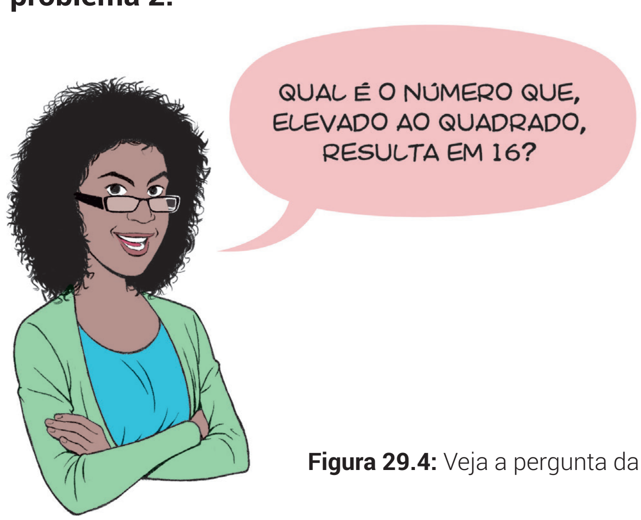


Figura 29.4: Veja a pergunta da professora.

Para representar essa situação-problema, vamos chamar o número desconhecido de x e escrever a equação: $x^2 = 16$.

Para encontrarmos a solução da equação do 2º grau $x^2 = 16$ pela fórmula resolutiva, vamos, primeiramente, escrever a equação na forma geral:

$x^2 = 16$

$x^2 - 16 = 0$

Observe que agora temos uma equação do 2º grau incompleta, onde: a = 1; b = 0 e c = – 16. Portanto, aplicando a fórmula:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = \cancel{0^2} - 4.1.(-16) \Rightarrow \Delta = 64$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{\cancel{-0} \pm \sqrt{64}}{2.1} \Rightarrow x = \frac{\pm 8}{2} \Rightarrow x = \pm 4$$

Observem que encontramos dois valores reais S = {– 4 , 4}. Portanto, há dois valores possíveis para *x*, que, elevados ao quadrado, resultam em 16.

OBS.: Veremos que há outra forma de encontrarmos os valores para *x* na situação-problema 2.

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 1

Resolva as seguintes equações do 2º grau, aplicando a fórmula resolutiva (Fórmula de Bháskara):

a) $x^2 - 2x - 8 = 0$

b) $x^2 - 5x = 0$

c) $x^2 - 49 = 0$

Anote as respostas em seu caderno

2. O Discriminante ($\Delta = b^2 - 4ac$) e o número de raízes de uma equação do 2º grau

O número $\Delta = b^2 - 4ac$ é chamado de discriminante da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$

Sempre que for necessário sabermos o número de raízes de uma equação do 2º grau (caso exista), basta analisarmos o valor do discriminante (Δ). Para tanto, precisamos analisar o valor de Δ, para verificarmos a existência de $\sqrt{\Delta}$. Veja:

Para $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais e distintas;
Para $\Delta = 0$, a equação tem duas raízes reais e iguais;
Para $\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais.

Vejamos alguns exemplos. Para cada caso, analisaremos seu discriminante:

a) Exemplo 1: $x^2 - 4x - 3 = 0$

Temos como coeficientes: a = 1; b = − 4 e c = − 3.

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4.1.(-3) \Rightarrow \Delta = 16 + 12 \Rightarrow \Delta = 28$$

Como temos $\Delta > 0$, a equação terá duas raízes reais e diferentes.

b) Exemplo 2: $x^2 + 2x + 1 = 0$

Temos como coeficientes: a = 1; b = 2 e c = 1.

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 2^2 - 4.1.1 \Rightarrow \Delta = 4 - 4 \Rightarrow \Delta = 0$$

Como temos $\Delta = 0$, a equação terá duas raízes reais e iguais.

c) Exemplo 3: $x^2 - 5x + 7 = 0$

Temos como coeficientes: a = 1; b = − 5 e c = 7.

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4.1.7 \Rightarrow \Delta = 25 - 28 \Rightarrow \Delta = -3$$

Como temos $\Delta < 0$, a equação não terá raízes reais.

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 2

Determine, pelo discriminante, quantas raízes reais tem cada equação.

a) $-x^2 + 3x - 1 = 0$

b) $x^2 + 3x + 5 = 0$

Anote as respostas em seu caderno

3. Equações incompletas

Já sabemos que, com a fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau, podemos encontrar as raízes de qualquer equação desse tipo. No entanto, esse caminho não é obrigatório. Para as equações incompletas, há procedimentos mais simples para sua resolução. Então, vamos em frente!

3.1 Resolução de equações incompletas do tipo $ax^2 + bx = 0$.

Você verá que as equações do tipo $ax^2 + bx = 0$ têm duas raízes reais, sendo que uma delas é zero. Vejamos como resolver a equação $x^2 - 4x = 0$.

Note que podemos fatorar essa equação da seguinte forma:

$$x^2 - 4x = 0 \rightarrow x.(x - 4) = 0$$

Escrita dessa maneira (na forma fatorada), fica mais simples determinarmos as raízes. Como se trata de uma multiplicação de dois fatores com os resultados iguais a zero, x ou $x - 4$ devem ser iguais a zero. Portanto, as soluções reais dessa equação são:

$x = 0$ ou $x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$. Logo, o conjunto solução é $S = \{0, 4\}$.

3.2 Resolução de equações incompletas do tipo $ax^2 + c = 0$

Observe outro exemplo ao resolvermos a equação $2x^2 - 8 = 0$. Nesse caso, sem a necessidade de fatoração, podemos isolar o x^2. Veja:

$$2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = \frac{8}{4} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$$

Assim, temos que $x = -2$ ou $x = 2$. Logo, o conjunto solução é $S = \{-2, 2\}$.

As equações do tipo $ax^2 + c = 0$ possuem duas raízes reais diferentes e opostas ou não possuem raízes reais.

Exemplo: $x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = -3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-3}$. Como o índice do radical é par e o radicando é negativo não haverá raízes reais.

3.3 Resolução de equações incompletas do tipo $ax^2 = 0$

A resolução aqui é similar à do caso anterior ($ax^2 + c = 0$): vamos determinar o valor de x^2 e depois o valor de x. Contudo, a conclusão será um pouco diferente! Vejamos:

$$8x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{0}{8} \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{0} \Rightarrow x = 0$$

Como + 0 e – 0 indicam o mesmo número, concluímos que esse tipo de equação tem apenas o zero como raiz. Dizemos, então, que a equação possui duas raízes reais e iguais zero.

Assim, temos que $x = 0$. Logo, o conjunto solução é $S = \{ 0 \}$.

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 3

Resolva as equações do 2º grau da forma incompleta, sem a utilização da fórmula resolutiva (fórmula de Bháskara).

a) $4x^2 - 16 = 0$

b) $-x^2 + x = 0$

c) $3x^2 = 0$

Anote as respostas em seu caderno

4. Resolvendo problemas com equações do 2º grau

Muitos problemas podem ser solucionados por meio de equações do 2º grau. Para obtermos sucesso nesse tipo de atividade, o significado das incógnitas deve ficar bem claro, para a correta elaboração da equação. Após o término da resolução, é aconselhável que verifiquemos se as raízes servem ou não como respostas ao problema. Acompanhe alguns exemplos.

Exemplo 1: A soma de um número positivo com seu quadrado é igual a 20. Qual é esse número?

Solução:

x = o número positivo procurado.

x^2 = o quadrado desse número .

$x + x^2 = 20$

$x^2 + x - 20 = 0 \rightarrow$ Representando a equação na forma geral

Temos como coeficientes: a = 1; b = 1 e c = – 20.

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4.1.(-20) \Rightarrow \Delta = 1 + 80 \Rightarrow \Delta = 81$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{2.1} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm 9}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{-1+9}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{8}{2} \Rightarrow x_1 = 4$$

$$x_2 = \frac{-1-9}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{-10}{2} \Rightarrow x_2 = -5$$

Como podemos observar, há dois possíveis valores para x (4 ou – 5). No entanto, x = – 5 não serve como solução para o problema, pois o número procurado deve ser positivo. Assim, S = { 4 }.

Exemplo 2: A figura abaixo representa parte da planta de um apartamento. As salas 1 e 2 são quadradas, e o corredor, retangular. Os cômodos juntos têm 70m² de área. Cada sala tem x metros de lado, e o corredor tem 2m de largura. Determine a medida x de cada sala quadrada.

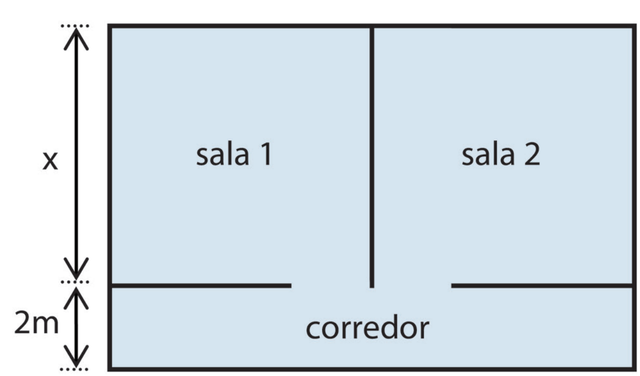


Figura 29.4: Planta de um apartamento

Solução:

A área de cada sala é dada por x². A área do corredor é dada por 2 . 2x = 4x. Conforme a figura, podemos escrever a equação:

$$\underbrace{2x^2}_{\text{Áreas das salas}} + \underbrace{4x}_{\text{Área do corredor}} = 70$$

$2x^2 + 4x - 70 = 0 \rightarrow$ Dividimos todos os termos por 2, para simplificar a equação.

$x^2 + 2x - 35 = 0$

Na equação, temos: a = 1, b = 2, c = − 35.

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 2^2 - 4.1.(-35) \Rightarrow \Delta = 4 + 140 \Rightarrow \Delta = 144$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{144}}{2.1} \Rightarrow x = \frac{-2 \pm 12}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{-2+12}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{10}{2} \Rightarrow x_1 = 5$$

$$x_2 = \frac{-2-12}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{-14}{2} \Rightarrow x_2 = -7$$

Como uma medida não pode ser negativa, o −7 não serve para o nosso problema. Assim, a medida do lado de cada sala é de 5m.

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 4

O quadrado da quantia que Jorge possui, acrescido do triplo da mesma, equivale a R$ 18,00. Quanto possui Jorge?

Anote as respostas em seu caderno.

Resumo

- Quando conhecemos o valor do discriminante ($\Delta = b^2 - 4ac$), é possível sabermos a quantidade de raízes reais existentes em uma equação do 2º grau, caso exista.

- Com a fórmula resolutiva (ou fórmula de Bháskara), $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ podemos determinar as raízes de uma equação do 2º grau, caso elas existam.
- É possível resolver as equações do 2º grau da forma incompleta sem a necessidade da aplicação da fórmula resolutiva.
- Muitos problemas do nosso cotidiano podem ser solucionados através da resolução de uma equação do 2º grau.

Referências

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. *Praticando Matemática - 9º ano*. 3ª ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

BARROSO, Juliane Matsubara. *Matemática. Projeto Araribá: 8ª série*. 1ª ed. São Paulo: Editora Moderna, 2006.

BIANCHINI, Edwaldo. *Matemática 9º ano*. 7a ed. São Paulo: Editora Moderna, 2011.

DANTE, Luiz Roberto. *Projeto Teláris: Matemática – Ensino Fundamental 2 – 9º ano* 2a ed. São Paulo: Editora Ática, 2015.

GIOVANNI, José Ruy; CASTRUCCI, Benedito; GIOVANNI JR, José Ruy. *A conquista da Matemática - Nova - 8ª série*. 1ª ed. São Paulo: editora FTD, 1998.

SOUZA, Joamir; PATARO, Patricia Moreno. *Vontade de Saber Matemática, 9º ano*. 3a ed. São Paulo: Editora FTD, 2015.

YOUSSEF, Antonio Nicolau; PACHI, Clarice Gameiro da Fonseca e HESSEL, Heloisa Maria. *Linguagens e aplicações: Matemática. Ensino Fundamental - Anos Finais - 9º ano*. 1ª ed. São Paulo: Cereja Editora, 2015.

Respostas das atividades

Atividade 1

a) Para $x^2 - 2x - 8 = 0$, temos: $a = 1$; $b = -2$ e $c = -8$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4.1.(-8) \Rightarrow \Delta = 4 + 32 \Rightarrow \Delta = 36$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2.1} \Rightarrow x = \frac{2 \pm 6}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{2+6}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{8}{2} \Rightarrow x_1 = 4$$

$$x_2 = \frac{2-6}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{-4}{2} \Rightarrow x_2 = -2$$

Logo, o conjunto solução é S = {– 2, 4}.

b) Para x² – 5x = 0, temos: a = 1; b = – 5 e c = 0

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - \cancel{4.1.0} \Rightarrow \Delta = 25$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{25}}{2.1} \Rightarrow x = \frac{5 \pm 5}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{5+5}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{10}{2} \Rightarrow x_1 = 5$$

$$x_2 = \frac{5-5}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{0}{2} \Rightarrow x_2 = 0$$

Logo, o conjunto solução é S = {0, 5}.

c) Para x² – 49 = 0, temos: a = 1; b = 0 e c = – 49.

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 0^2 - 4.1.(-49) \Rightarrow \Delta = 0 + 196 \Rightarrow \Delta = 196$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-\cancel{0} \pm \sqrt{196}}{2.1} \Rightarrow x = \frac{\pm 14}{2} \Rightarrow x = \pm 7$$

Logo, o conjunto solução é S = {– 7, 7}.

Atividade 2

a) Para – x² + 3x – 1 = 0. Temos como coeficientes: a = – 1; b = 3 e c = – 1.

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 3^2 - 4.(-1).(-1) \Rightarrow \Delta = 9 - 4 \Rightarrow \Delta = 5$$

Como temos $\Delta > 0$, a equação terá duas raízes reais e diferentes.

b) Para x² + 3x + 5 = 0. Temos como coeficientes: a = 1; b = 3 e c = 5.

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 3^2 - 4.1.5 \Rightarrow \Delta = 9 - 20 \Rightarrow \Delta = -11$$

Como temos $\Delta < 0$, a equação não terá raízes reais.

Atividade 3

a) 4x² – 16 = 0 é uma equação incompleta do tipo ax² + c = 0.

$$4x^2 - 16 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = \frac{16}{4} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$$

Logo, S = {– 2, 2}.

b) $-x^2 + x = 0$ é uma equação incompleta do tipo $ax^2 + bx = 0$.

$-x^2 + x = 0 \rightarrow x.(-x + 1) = 0 \rightarrow x = 0$ ou $-x + 1 = 0 \rightarrow -x = -1 \rightarrow x = 1$.

Logo, S = {0, 1}.

c) $3x^2 = 0$ é uma equação incompleta do tipo $ax^2 = 0$.

$3x^2 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{0}{3} \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{0} \rightarrow x = 0$.

Logo, S = { 0 }.

Atividade 4

x = a quantia que Jorge possui.

x^2 = o quadrado dessa quantia.

$3x$ = o triplo da quantia.

$x^2 + 3x = 18$

$x^2 + 3x - 18 = 0 \rightarrow$ Escrevendo a equação na forma geral.

Temos como coeficientes: a = 1; b = 3 e c = − 18.

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 3^2 - 4.1.(-18) \Rightarrow \Delta = 9 + 72 \Rightarrow \Delta = 81$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{81}}{2.1} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm 9}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{-3 + 9}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{6}{2} \Rightarrow x_1 = 3$$

$$x_2 = \frac{-3 - 9}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{-12}{2} \Rightarrow x_2 = -6$$

Como podemos observar, há dois possíveis valores para x (− 6 ou 3). No entanto, x = − 6 não serve como solução para o problema, pois o número procurado deve ser positivo. Assim, podemos afirmar que a quantia que Jorge possui é R$3,00.

Exercícios

1. Para cada equação a seguir, encontre o valor do discriminante (Δ) e diga se a equação tem raízes reais.

a) $x^2 - 12x + 36 = 0$

b) $-6x^2 + x - 1 = 0$

c) $-x^2 - 2x = 0$

2. Determine as raízes das equações, aplicando a fórmula resolutiva.

a) $2x^2 + x - 1 = 0$

b) $-x^2 + 12x = 0$

3. Considere a equação $9x^2 + 9x + 2 = 0$.

a) Calcule o valor de $\Delta = b^2 - 4ac$.

b) Determine os valores de $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

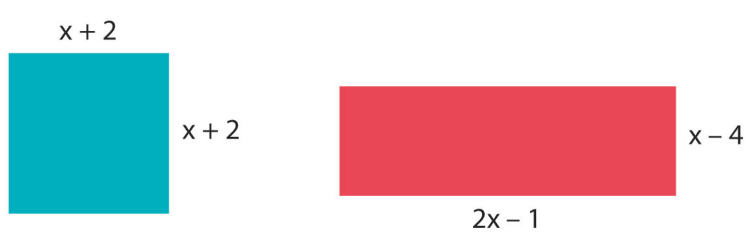
c) Verifique se as raízes que você encontrou estão corretas. (dica: basta substituir o valor do x na equação e verificar se a igualdade é satisfeita).

4. Determine o conjunto solução das equações a seguir sem a utilização da fórmula resolutiva.

a) $16x^2 - 1 = 0$

b) $x^2 - 9x = 0$

5. A região quadrangular e a região retangular possuem a mesma área em centímetros quadrados. Determine a medida x em centímetros.



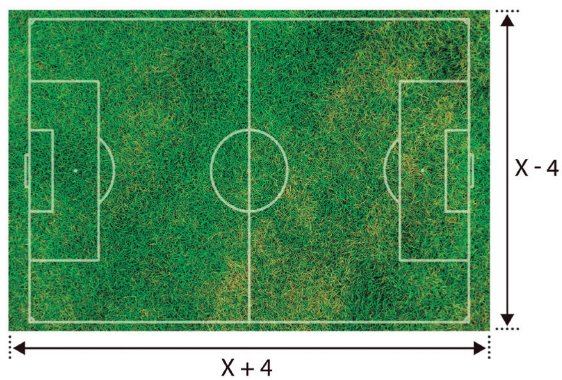
6. Dado um quadrado, sabe-se que o valor da sua área (A) é igual ao seu perímetro (P). Sendo x a medida do lado do quadrado, qual é o valor correspondente a x?

7. O número de diagonais D de um polígono com n lados é dado pela fórmula $D = \dfrac{n(n-3)}{2}$. Essa fórmula pode ser escrita da seguinte forma: $D = \dfrac{n(n-3)}{2} \rightarrow D = \dfrac{n^2 - 3n}{2}$. Quantos lados tem um polígono de 5 diagonais?

8. Pedro construiu um pequeno campo de futebol com 180m². Para evitar que a bola seja chutada para longe do campo, Pedro pretende comprar tela para colocar em todo seu contorno. Observe a figura abaixo e responda:

a) Quais são as dimensões do campo?

b) Qual é o comprimento de tela que Pedro terá que comprar para cercar o campo?



Fonte: https://pixabay.com/pt/campo-de-futebol-futebol-rush-320100/ (adaptado)

Respostas dos exercícios

1. a) Para $x^2 - 12x + 36 = 0$, temos como coeficientes: $a = 1$; $b = -12$ e $c = 36$.

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-12)^2 - 4.1.36 \Rightarrow \Delta = 144 - 144 \Rightarrow \Delta = 0$

Como temos $\Delta = 0$, a equação terá duas raízes reais e iguais.

b) Para $-6x^2 + x - 1 = 0$, temos como coeficientes: $a = -6$; $b = 1$ e $c = -1$.

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4.(-6).(-1) \Rightarrow \Delta = 1 - 24 \Rightarrow \Delta = -23$. Como temos $\Delta < 0$, a equação não terá raízes reais.

c) Para $-x^2 - 2x = 0$, temos como coeficientes: $a = -1$; $b = -2$ e $c = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4.(-1).0 \Rightarrow \Delta = 4$. Como temos $\Delta > 0$, a equação terá duas raízes reais e iguais.

2. a) Para $2x^2 + x - 1 = 0$, temos como coeficientes: $a = 2$; $b = 1$ e $c = -1$.

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4.2.(-1) \Rightarrow \Delta = 1 + 8 \Rightarrow \Delta = 9$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2.2} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{-1+3}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{2}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$$

$x_2 = \frac{-1-3}{4} \Rightarrow x_2 = \frac{-4}{4} \Rightarrow x_2 = -1$ Portanto, $S = \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$.

b) Para $-x^2 + 12x = 0$, temos como coeficientes: a = – 1; b = 12 e c = 0.

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (12)^2 - 4.(-1).0 \Rightarrow \Delta = 144 + 0 \Rightarrow \Delta = 144$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{144}}{2.(-1)} \Rightarrow x = \frac{-12 \pm 12}{-2} \Rightarrow x_1 = \frac{-12+12}{-2} \Rightarrow x_1 = \frac{0}{-2} \Rightarrow x_1 = 0$$

$x_2 = \frac{-12-12}{-2} \Rightarrow x_2 = \frac{-24}{-2} \Rightarrow x_2 = 12$. Portanto, S = {0, 12}.

3. Para $9x^2 + 9x + 2 = 0$, temos como coeficientes: a = 9; b = 9 e c = 2.

a)

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 9^2 - 4.9.2 \Rightarrow \Delta = 81 - 72 \Rightarrow \Delta = 9$$

b)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{9}}{2.9} \Rightarrow x = \frac{-9 \pm 3}{18} \Rightarrow x_1 = \frac{-9+3}{18} \Rightarrow x_1 = -\frac{6}{18} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{3}$$

c) Para $x = -\frac{1}{3}$

$$9.\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 9.\left(-\frac{1}{3}\right) + 2 = 0 \Rightarrow 9.\left(\frac{1}{9}\right) - \frac{9}{3} + 2 = 0 \Rightarrow \frac{9}{9} - \frac{9}{3} + 2 = 0 \Rightarrow 1 - 3 + 2 = 0 \Rightarrow 3 - 3 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

portanto, $-\frac{1}{3}$ é raiz da equação.

Para $x = -\frac{2}{3}$, substituindo na equação, temos:

$$9.\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 9.\left(-\frac{2}{3}\right) + 2 = 0 \Rightarrow 9.\left(\frac{4}{9}\right) - \frac{18}{3} + 2 = 0 \Rightarrow \frac{36}{9} - \frac{18}{3} + 2 = 0 \Rightarrow 4 - 6 + 2 = 0 \Rightarrow 6 - 6 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

portanto, $-\frac{2}{3}$ também é raiz da equação.

4. a) Para $16x^2 - 1 = 0$. É uma equação incompleta do tipo $ax^2 + c = 0$.

$$16x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 16x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{16}} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{4}$$

Logo, $S = \left\{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right\}$.

b) $x^2 - 9x = 0$. É uma equação incompleta do tipo $ax^2 + bx = 0$.

$x^2 - 9x = 0 \rightarrow x.(x - 9) = 0 \rightarrow x = 0$ ou $x - 9 = 0 \rightarrow x = 9$.

Logo, S = {0, 9}.

5. Encontremos, primeiramente, a área do quadrado de lado x + 2. Como bem sabemos, a área do quadrado é $A_Q = l^2$; então, teremos:

$A_Q = (x + 2)^2$. Para a área do retângulo, calculamos, aplicando a fórmula $A_R = b.h$, em que h é a altura do retângulo. Sendo assim, pela figura, temos: $A_R = (2x - 1).(x - 4)$. Como as áreas das duas regiões são iguais, fazermos a igualdade. Veja: $(x + 2)^2 = (2x - 1).(x - 4)$. Agora resolvemos essa equação, para determinarmos o valor de x. $(x + 2)^2 = (2x - 1).(x - 4) \to x^2 + 4x + 4 = 2x^2 - 8x - x + 4 \to$

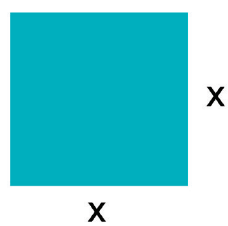
$x^2 - 2x^2 + 4x + x + 8x + 4 - 4 = 0 \to - x^2 + 13x = 0 \to x.(- x + 13) = 0 \to$

$x = 0$ *ou* $-x + 13 = 0 \to -x = - 13 \to - x = - 13 \;.\; (-1) \to x = 13$

x = 0 não serve (pois a medida não pode ser nula). Portanto,
x = 13 centímetros.

x = 0 não serve (pois a medida não pode ser nula). Portanto,
x = 13 centímetros.

6.



Dados:
Área: x²
Perímetro: 4x

O problema informa que a área do quadrado e seu perímetro são iguais. Portanto, temos:
$x^2 = 4x \to x^2 - 4x = 0 \to x.(x - 4) = 0 \to x = 0$ ou $x - 4 = 0 \to x = 4$. Para nosso problema, o x não pode ser zero. Temos, então, a medida x = 4.

7. Como o número de diagonais do polígono é 5, D = 5. Substituindo na fórmula e resolvendo, temos:

$$5 = \frac{n^2 - 3n}{2} \to \frac{5}{1} = \frac{n^2 - 3n}{2} \to 10 = n^2 - 3n \to n^2 - 3n - 10 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4.(1).(-10) \Rightarrow \Delta = 9 + 40 \Rightarrow \Delta = 49$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2.1} \Rightarrow x = \frac{3 \pm 7}{2} \Rightarrow {}_1 = \frac{3+7}{2} \Rightarrow {}_1 = \frac{10}{2} \Rightarrow x_1 = 5$$

$x_2 = \frac{3-7}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{-4}{2} \Rightarrow x_2 = -2$ (não serve, pois a quantidade de lados deve ser um número natural). Portanto, o polígono que possui 5 diagonais possui 5 lados (pentágono).

8. a) Para descobrirmos as dimensões do campo, precisamos conhecer o valor de x. O campo tem formato retangular, suas medidas valem (x+4) e (x–4) e sua área vale 180m². Portanto, chegamos à seguinte equação: $(x + 4).(x - 4) = 180 \rightarrow$ Base x Altura = Área. Fazendo a multiplicação... $x^2 - 16 = 180 \rightarrow x^2 = 180 + 16 \rightarrow x^2 = 196 \rightarrow x = \pm\sqrt{196}$ $x = \pm 14$. Já sabemos que, neste caso, o x não poder ser um número negativo. Portanto, –14 não serve. Temos, então, que x = 14. Assim, substituindo o x por 14, teremos (14 + 4) e (14 – 4). As dimensões do campo serão 18m e 10m:

   b) Como encontramos as dimensões do campo, para sabermos a quantidade de cerca que deverá ser comprada, basta fazer 2.18 + 2.10 = 36 + 20 = 56. Portanto, deverão ser comprados 56m de cerca.

CEJA >>
CENTRO DE EDUCAÇÃO
de JOVENS e ADULTOS

As relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação do 2º grau

Matemática - Fascículo 10 - Unidade 30

Objetivos de aprendizagem

1. Determinar a soma e o produto de uma equação do 2º grau a partir de seus coeficientes;
2. Compor uma equação do 2º grau a partir de suas raízes;
3. Utilizar conceitos e procedimentos matemáticos para resolver situações-problemas envolvendo sistemas de equações do 2º grau.

Para início de conversa...

Iniciaremos o estudo de sistema de equações apresentando o desafio que a Ana Júlia fez à sua colega de sala Giselle.

Figura 30.1: Como podemos notar, Giselle está com dúvidas.

Vamos ajudá-la? A princípio, chamaremos esses números de x e y. Temos, então, que: $x + y = 2$ e

$x.y = -8$. Para determinarmos x e y, devemos resolver o seguinte sistema de equações: $\begin{cases} x + y = 2 \\ x.y = -8 \end{cases}$

Fazendo as devidas operações e simplificações, vamos obter um sistema de equações do 2º grau, pois uma das equações é do 2º grau. Você deve estar querendo saber a solução desse problema, não é mesmo? Aguarde um pouco mais; chegaremos lá!

1. A soma e o produto das raízes de uma equação do 2º grau (Relação de Girard)

Consideremos a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$. Neste caso, temos como suas raízes reais:

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, com $\Delta = b^2 - 4ac$ e $\Delta \geq 0$.

Agora podemos estabelecer as seguintes relações:

1ª Relação: Soma das raízes (S)

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

2ª Relação: Produto das raízes (P)

$$P = x_1.x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b+\sqrt{\Delta}).(-b-\sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{(-b)^2-\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$. Portanto,

$$\boxed{S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}} \quad \text{e} \quad \boxed{P = x_1 . x_2 = \frac{c}{a}}$$

Essas relações são também conhecidas como **Relações de Girard**.

Vejamos, agora, alguns exemplos:

Exemplo 1: A equação x² – 7x + 10 = 0 têm duas raízes reais e diferentes. Sem resolver a equação, determine a soma e o produto dessas raízes.

Pela equação, temos: a = 1, b = – 7 e c = 10. De acordo com as relações, podemos escrever:

Solução:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-7)}{1} = \frac{7}{1} = 7$$

$$P = x_1 . x_2 = \frac{c}{a} = \frac{10}{1} = 10$$

Portanto, temos que S = 7 e P = 10.

Exemplo 2: Determinar o valor do coeficiente m na equação – 2x² + mx + 8 = 0, de modo que a soma de suas raízes resulte em – 2.

Solução:

Na equação, temos: a = – 2, b = m e c = 8. De acordo com a relação da soma, podemos escrever:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-m}{-2} = \frac{m}{2} \quad 1$$

De acordo com os dados do problema, temos: S = – 2 (2)

Comparando (1) e (2), podemos escrever a equação:

$\frac{m}{2} = -2 \Rightarrow m = -4$. Logo, temos m = – 4.

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 1

Sendo x_1 e x_2 as raízes da equação, determine o valor de n em cada item a seguir.

a) $x^2 + 11x + n = 0$, em que $x_1 \cdot x_2 = 7$

b) $3x^2 - nx + 5 = 0$, em que $x_1 + x_2 = 2$

Anote as respostas em seu caderno

2. Escrevendo uma equação do 2º grau a partir das suas raízes

Aprendemos, até o momento, a determinar as soluções ou raízes de uma equação do 2º grau. Mas se fosse o contrário? Poderíamos escrever a equação do 2º grau a partir de suas raízes? A resposta é sim!

Consideremos a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$. Se dividirmos todos os termos dessa equação por a, sendo $a \neq 0$, teremos:

$$\frac{\cancel{a}x^2}{\cancel{a}} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a} \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Como $S = \frac{-b}{a}$ e $P = \frac{c}{a}$, podemos substituir na equação e teremos, então, $\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$

Exemplo 1: Componha uma equação do 2º grau cujas raízes sejam 2 e – 3.

Solução:

$S = x_1 + x_2 = 2 + (-3) = -1$ $\quad$ $P = x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot (-3) = -6$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - (-1)x + (-6) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

Portanto, uma equação cujas raízes são 2 e –3, é dada por $x^2 + x - 6 = 0$.

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 2

Determine o produto das raízes da equação $x^2 + 6mx + 2m = 0$, sabendo que a soma dessas raízes é 18.

Anote as respostas em seu caderno

3. Resolvendo problemas envolvendo sistemas de duas equações com duas incógnitas

Existem alguns métodos de resolução de sistema de equações que você já conhece, usando equações do 1º grau. Vamos agora, com os mesmos métodos, resolver problemas que envolvem sistema de equações do 2º grau. Observe a situação a seguir.

João utilizou 36m de tela para cercar um terreno retangular de 80m² de área. Quais são as dimensões do terreno?

Para solucionarmos o problema, podemos escrever um sistema de duas equações. Representaremos por x o comprimento, e por y a largura do terreno.

Veja o quadro resumido do nosso problema.

Informação	Equação	Sistema
Perímetro	$2x + 2y = 36$	$\begin{cases} 2x + 2y = 36 \\ x . y = 80 \end{cases}$
Área	$x . y = 80$	

O sistema pode ser resolvido pelo método da substituição. Para isso, escolhemos uma das equações e, em seguida, isolamos uma das incógnitas.

$$2x + 2y = 36$$
$$2x = 36 - 2y$$
$$x = \frac{36 - 2y}{2}$$
$$x = \frac{2.(18 - y)}{2}$$
$$x = 18 - y$$

Em seguida, substituímos x por

18 − y na equação.

$$x.y = 80$$
$$(18 - y).y = 80$$
$$18y - y^2 = 80$$
$$-y^2 + 18y - 80 = 0$$

Agora, resolvendo $-y^2 + 18y - 80 = 0$ pela fórmula resolutiva, temos:

$a = -1$; $b = 18$; $c = -80$

$$\Delta = 18^2 - 4.(-1).(-80)$$

$$\Delta = 324 - 320 \Rightarrow \Delta = 4$$

$$y = \frac{-18 \pm \sqrt{4}}{2.(-1)} \Rightarrow y = \frac{-18 \pm 2}{-2}$$

Encontraremos então dois valores para y (y_1 e y_2):

$$y_1 = \frac{-18 + 2}{-2} \Rightarrow y_1 = \frac{-16}{-2} \Rightarrow y_1 = 8$$

$$y_2 = \frac{-18 - 2}{-2} \Rightarrow y_2 = \frac{-20}{-2} \Rightarrow y_2 = 10$$

Para determinarmos o valor de x, substituímos os valores obtidos de y na equação x = 18 − y.

Para $y_1 = 8$	Para $y2 = 10$
$x_1 = 18 - y_1$	$x_2 = 18 - y_2$
$x_1 = 18 - 8$	$x_2 = 18 - 10$
$x_1 = 10$	$x_2 = 8$

Portanto, as dimensões do terreno são 10 m e 8 m.

Anote as respostas em seu caderno

Atividade 3

Daremos continuidade à resolução do desafio de Ana Júlia à Giselle logo na nossa introdução. Recordemos a pergunta: "A soma de dois números é 2 e o produto entre eles é − 8. Quais são esses números?".

Anote as respostas em seu caderno

Resumo

- Em equações do 2º grau, podemos estabelecer relações entre a soma e o produto de suas raízes; nós as chamamos de Relações de Girard.
- Com a fórmula $x^2 - Sx + P = 0$ e sabendo-se as raízes, conseguimos escrever a equação do 2º grau.
- Podemos resolver sistema de equações do 2º grau utilizando o método de substituição.

Referências

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. *Praticando Matemática - 9º ano*. 3ª ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

BARROSO, Juliane Matsubara. *Matemática. Projeto Araribá: 8ª série*. 1ª ed. São Paulo: Editora Moderna, 2006.

BIANCHINI, Edwaldo. *Matemática 9º ano*. 7a ed. São Paulo: Editora Moderna, 2011.

DANTE, Luiz Roberto. Projeto Teláris: *Matemática – Ensino Fundamental 2 – 9º ano* 2a ed. São Paulo: Editora Ática, 2015.

GIOVANNI, José Ruy; CASTRUCCI, Benedito; GIOVANNI JR, José Ruy. *A conquista da Matemática - Nova - 8ª série*. 1ª ed. São Paulo: editora FTD, 1998.

SOUZA, Joamir; PATARO, Patricia Moreno. *Vontade de Saber Matemática, 9º ano*. 3a ed. São Paulo: Editora FTD, 2015.

YOUSSEF, Antonio Nicolau; PACHI, Clarice Gameiro da Fonseca e HESSEL, Heloisa Maria. *Linguagens e aplicações: Matemática. Ensino Fundamental - Anos Finais - 9º ano*. 1ª ed. São Paulo: Cereja Editora, 2015.

Respostas das atividades

Atividade 1

a) Na equação, temos: a = 1, b = 11 e c = n. De acordo com a relação do produto das raízes, podemos escrever:

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a} = \frac{n}{1} \quad (1)$$

Comparando (1) e (2), podemos escrever a equação:

$\frac{n}{1} = 7 \Rightarrow n = 7$. Logo, temos n = 7.

b) Na equação, temos: a = 3, b = – n e c = 5. De acordo com a relação da soma, podemos escrever:

$$x_1 + x_2 = \frac{-(-n)}{3} = \frac{n}{3} \quad (1)$$

De acordo com os dados do problema, temos: $x_1 + x_2 = 2$ (2)

Comparando (1) e (2), podemos escrever a equação:

$\frac{n}{3} = 2 \Rightarrow n = 6$. Logo, temos n = 6.

Atividade 2

Tendo $x^2 + 6mx + 2m = 0$ e sabendo que S = 18, temos que;

Dada a fórmula: $x^2 - Sx + P = 0$

– S = 6m, como S = 18 → – 18 = 6m → m = – 3. O produto P = 2m, como sabemos o valor de *m* (m = – 3). Temos: P = 2m → P = 2 . (– 3) → P = – 6

Logo, o produto das raízes é – 6.

Atividade 3

Como vimos na introdução, chegamos ao sistema de equações $\begin{cases} x + y = 2 \\ x . y = -8 \end{cases}$

1º) Isolamos o x na 1ª equação:

$x + y = 2 \Rightarrow x = 2 - y$

2º) Substituímos, na 2ª equação, esse valor obtido e resolvemos:

$$x.y = -8$$
$$(2-y).y = -8$$
$$2y - y^2 = -8$$
$$-y^2 + 2y + 8 = 0$$

$a = -1;\ b = 2;\ c = 8$

$$\Delta = (-2)^2 - 4.(-1).8$$
$$\Delta = 4 + 32 \Rightarrow \Delta = 36$$
$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2.(-1)} \Rightarrow y = \frac{-2 \pm 6}{-2}$$
$$y_1 = \frac{-2+6}{-2} \Rightarrow y_1 = \frac{4}{-2} \Rightarrow y_1 = -2$$
$$y_2 = \frac{-2-6}{-2} \Rightarrow y_2 = \frac{-8}{-2} \Rightarrow y_2 = 4$$

3º) Com os valores para *y* encontrados, determinaremos *x*, sabendo que

$x = 2 - y.$

Para $y_1 = -2$, temos:

$x_1 = 2 - y_1$

$x_1 = 2 - (-2) \rightarrow$ $\boxed{\text{Solução} = (4, -2)}$

$x_1 = 4$

Para $y_2 = 4$, temos:

$x_2 = 2 - y_1$

$x_2 = 2 - 4 \rightarrow$ $\boxed{\text{Solução} = (-2, 4)}$

$x_2 = -2$

Portanto, podemos ter:

$x = 4$ e $y = -2$ ou $x = -2$ e $y = 4$.

Exercícios

1. Sejam $\frac{1}{2}$ e -3 as raízes reais de uma equação do 2º grau de incógnita x. Escreva essa equação.

2. Escreva a equação do 2º grau, de incógnita x, que nos permita calcular dois números reais quando a soma desses números é -1 e o produto é -2.

3. Sabendo que x_1 e x_2 são raízes reais da equação $x^2 + mx + 6 = 0$, encontre o valor de m sabendo que $x_1 = 2$.

4. Determine o valor de m para que a equação $x^2 - (m + 1)x - 28 = 0$ tenha duas raízes cuja soma seja igual a -3.

5. A soma de dois números é $-\frac{2}{5}$ e o produto é $-\frac{3}{5}$. Quais são esses números?

6. Ao dobrarmos 6m de arame, foi possível construir um retângulo de área de 2m². Qual a medida do comprimento e da largura desse retângulo formado com o pedaço do arame?

Respostas dos exercícios

1. $S = x_1 + x_2 = \frac{1}{2} + (-3) = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$ $\quad P = x_1 . x_2 = \frac{1}{2} . (-3) = -\frac{3}{2}$

   $x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - (-\frac{5}{2})x + (-\frac{3}{2}) = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0$ ou

   $2.\left(x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow 2x^2 + 5x - 3 = 0$

   Portanto, uma equação cujas raízes são $\frac{1}{2}$ e – 3, é dada por $2x^2 + 5x - 3 = 0$.

2. $S = -1$ $\qquad P = -2$

   $x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - (-1)x + (-2) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$

3. Tendo $x^2 + mx + 6 = 0$ e sabendo que $x_1 = 2$, temos que;

   Dada a fórmula: $x^2 - Sx + P = 0$, sabemos que $S = x_1 + x_2$ e $P = x_1 . x_2$

   $P = x_1 . x_2 = 6 \rightarrow 2 . x_2 = 6 \rightarrow x_2 = 3$. Portanto, temos $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$.

   Como $S = x_1 + x_2$ e, fazendo uma comparação entre os coeficientes "b" da fórmula com a equação proposta, temos: $-S = m \rightarrow S = -m \rightarrow x_1 + x_2 = -m \rightarrow 2 + 3 = -m \rightarrow 5 = -m \rightarrow m = -5$

4. Dada a equação $x^2 - (m + 1)x - 28 = 0$, temos que: $a = 1$, $b = -(m + 1)$ e $c = -28$. Sabemos também que $x_1 + x_2 = -3$. Como $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$, temos que: $-3 = \frac{-[-(m+1)]}{1} \rightarrow -3 = (m+1) \rightarrow m = -4$. Portanto, $m = -4$ para que a equação tenha duas raízes cuja soma seja – 3.

5. Os números que estamos procurando são as raízes de uma equação de 2º grau na forma $x^2 - Sx + P = 0$.

   $S = -\frac{2}{5}$ e $P = -\frac{3}{5} \rightarrow x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{3}{5} = 0 \rightarrow \frac{5x^2}{5} + \frac{2}{5}x - \frac{3}{5} = 0 \rightarrow 5x^2 + 2x - 3 = 0$

   Aplicando a fórmula resolutiva encontramos, como raízes, -1 e $\frac{3}{5}$