Fundação
CECIERJ
Consórcio cederj
Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Equações Diferenciais

Volume 1 • 2ª Edição

Pedro do Nascimento Nobrega

GOVERNO DO ESTADO
RIO DE JANEIRO
Secretaria de Ciência,Tecnologia e Inovação

UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

PÁTRIA AMADA BRASIL
GOVERNO FEDERAL

Apoio:

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj
www.cederj.edu.br

Presidente
Carlos Eduardo Bielschowsky

Vice-presidente
Marilvia Dansa de Alencar

Coordenação do Curso de Matemática
UFF - Marcelo da Silva Corrêa

Material Didático

Elaboração de Conteúdo
Pedro do Nascimento Nobrega

Diretoria de Material Didático
Bruno José Peixoto

Biblioteca
Simone da Cruz Correa de Souza
Vera Vani Alves de Pinho

Diretoria de Material Impresso
Ulisses Schnaider

Supervisão
Marcelo Freitas

Revisão
Eliane Amiune Camargo

Capa
Morvan de Araujo Neto

Diagramação
Nilda Helena Lopes da Silva

Produção Gráfica
Fábio Rapello Alencar

N754e

Nobrega, Pedro do Nascimento.
Equações diferenciais. Volume 1 / Pedro do Nascimento Nobrega. – 2. ed. – Rio de Janeiro : Fundação Cecierj, 2019.
236p.; 19 x 26,5 cm.

ISBN: 978-85-458-0208-2

1. Matemática. 2. Equações diferenciais. I. Título.

CDD: 515.35

Referências bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.
Texto revisado segundo o novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa.

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador
Wilson Witzel

Secretário de Estado de Ciência, Tecnologia e Inovação
Leonardo Rodrigues

Instituições Consorciadas

CEFET/RJ - Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca
Diretor-geral: Carlos Henrique Figueiredo Alves

FAETEC - Fundação de Apoio à Escola Técnica
Presidente: Alexandre Sérgio Alves Vieira

IFF - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense
Reitor: Jefferson Manhães de Azevedo

UENF - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro
Reitor: Luis César Passoni

UERJ - Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Reitor: Ruy Garcia Marques

UFF - Universidade Federal Fluminense
Reitor: Antonio Claudio Lucas da Nóbrega

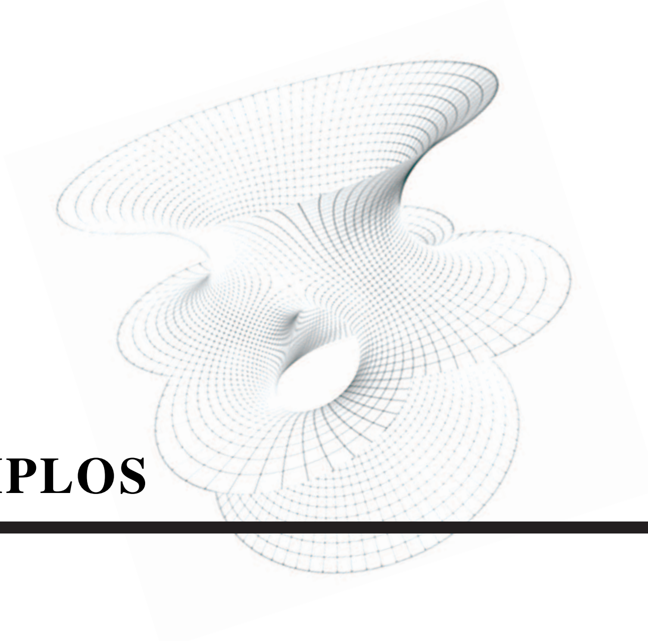
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Reitor: Roberto Leher

UFRRJ - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Reitor: Ricardo Luiz Louro Berbara

UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Reitor: Luiz Pedro San Gil Jutuca

Sumário

Aula 1



DEFINIÇÕES E EXEMPLOS

Objetivos

Ao final desta aula, você será capaz de:

1. Associar a origem do estudo das equações diferenciais com a do Cálculo Diferencial e Integral, na segunda metade do século XVII;
2. Enumerar alguns problemas que podem ser tratados matematicamente por meio de modelos com equações diferenciais;
3. Distinguir e classificar equações diferenciais quanto ao tipo, à ordem, linearidade e homogeneidade;
4. Reconhecer se uma função é solução duma equação diferencial ordinária e/ou de um problema.

Pré-requisito: Os cursos de Cálculo I a III.

INTRODUÇÃO

OBSERVAÇÕES HISTÓRICAS

"As equações diferenciais remontam à invenção do cálculo diferencial e integral, feita independentemente por Newton e Leibniz nos anos 1670-1680. No início essas equações serviam para resolver problemas geométricos, como a determinação de uma curva cujas tangentes satisfazem condições dadas" .

As equações diferenciais surgiram, em fins dos século XVII, como uma maneira de definir/analisar *curvas*.

"O primeiro livro texto sobre cálculo diferencial [l'Hôpital 1696] é também um livro texto sobre geometria diferencial de curvas planas, como se pode ver pelo seu título completo: *Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbe* ("Análise das [grandezas] infinitamente pequenas para a compreensão das linhas curvas").
Isto tabém pode ser visto a partir do índice, onde os títulos de sete dos dez capítulos se referem explicitamente a curvas. L'Hôpital ensina como usar o cálculo diferencial para descobrir as tangentes a curvas, seus pontos de inflexão, e cúspides, suas evolutas e raios de curvatura, as curvas cáusticas geradas por reflexões, as geradas por refrações, envoltórias de famílias de curvas, e outros problemas geométrico.

O livro de L''Hôpital logo se tornou uma referência padrão e assim permaneceria por um longo tempo.

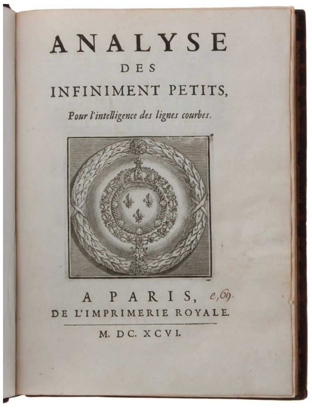


Figura 1.1: O primeiro livro de Cálculo

"Somente por volta de 1730, o matemático suiço Leonhard Euler começa a utilizar equações diferenciais para tratar de problemas de Dinâmica. Hoje em dia, elas aparecem em quase todos os domínios das ciências e tecnologia (matemática, física, química, biologia, engenharia, economia, etc.). Elas se prestam à traduzir as leis que regulam *as variações* de tal ou qual grandeza, da posição de uma nave espacial, à carga de um condensador elétrico, concentração de substâncias numa reação química, à avaliação de populações. As equações diferenciais estão entre as principais ferramentas matemáticas utilizadas tanto no processo de *modelagem* de diversos fenômenos, quanto na resolução concreta de inúmeras questões."

Modelos Matemáticos com Equações Diferenciais

O que significa *modelo matemático*?

Não há necessidade, neste momento, de tentar definir o termo modelo matemático com grande precisão: todos entendem que se trata de algum tipo de afirmação matemática a respeito de algum tipo de problema que se apresenta inicialmente em termos não matemáticos.

Uma caracterizacão provisória:

!

Atenção!
Modelagem matemática

Modelagem Matemática talvez possa ser entendida como a arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos, a serem resolvidos com as técnicas matemáticas, e cujas soluções devem ser posteriormente interpretadas na linguagem usual. Frequentemente a modelagem é uma forma de abstração e generalização *com a finalidade de previsão de tendências*. Isso significa que, de algum modo, o *tempo* é uma das variáveis relevantes no processo de modelagem. Mais geralmente, a matemática é utilizada para codificar fenômenos e procurar padrões e/ou regularidades que possam ser expressos usando suas ferrramentas. Exemplos de ferramentas matemáticas são equações, tabelas e gráficos, dentre outros.

✍ O processo de modelagem matemática, requer certos cuidados:
"Um problema do mundo real não pode,em geral, ser representado de maneira exata em toda sua complexidade por uma equação matemática ou um sistema de equações. Um modelo deve ser considerado apenas como um retrato ou uma simulação de um fenômeno e sua validação depende muito da escolha das variáveis e das hipóteses formuladas. "
Uma técnica muito usada para construir modelos para fenômenos ou experimentos, é a de procurar obter equações que descrevem "taxas de variação" de certas grandezas com relação a outras, das quais as primeiras dependem. Quando uma das variáveis é *o tempo*, e as outras variam em função do tempo, é muito frequente procurar equações que descrevam as taxas de variação com respeito ao tempo; isto é, tentar descobrir como o sistema *evolui à medida que o tempo transcorre*. Diz-se que o sistema estudado é um **sistema dinâmico**.
Sistema dinâmico é qualquer sistema que evolui no tempo, seja lá qual for a sua natureza: sistema fisíco, biológico, químico, social, econômicol, etc.. É possível distinguir dois tipos principais de sistemas dinâmicos: quando as variações são instantâneas, a dinâmica do fenômeno se desenvolve continuamente e as equações matemáticas são **equações diferenciais**, e outro quando as variáveis envolvidas são discretas, isto é, funções de uma malha de pontos, que representam médias das variações das grandezas usadas no modelo. Nesse caso, as equações são denominadas **equações de diferenças**.

!

Atenção!

Neste curso, todos os modelos tratados envolverão equações diferenciais. Em muitas delas o tempo, t, é uma variável relevante, mas nem sempre.
Apresentamos, em seguida alguns exemplos, cuja modelagem pode ser feita com equações diferenciais. Observamos que nem sempre o tempo é uma das variáveis envolvidas.

Exemplo 1.1.

Considere o circuito elétrico consistindo de uma bateria, um resistor (resistência R) e uma bobina de indutância L. Suponha que R e L são constantes. No instante $t = 0$ a chave C é fechada. Determinar a corrente I em um instante $t > 0$ qualquer.

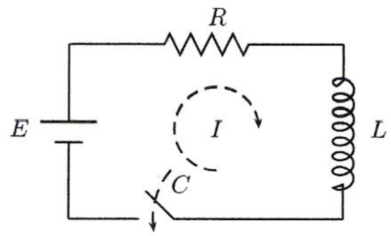


Figura 1.2: Um Circuito *RL*

Circuitos elétricos como o acima, são considerados a partir de várias hipóteses físicas simplificadoras. Um modelo matemático para ele é descrito por meio da equação diferencial $IR = E - L\dfrac{dI}{dt}$ (a equação diferencial do modelo), ou ainda:

$$L\frac{dI}{dt} + IR = E$$

onde os elementos físicos relevantes são a *indutância* L, a resistência R, e a *força eletromotriz produzida pela bobina* E. O objetivo é determinar, para cada instante t, posterior ao instante em que a chave C é fechada, a corrente elétrica, $I(t)$.

O texto abaixo, de autoria de um matemático aplicado, ligado à indústria, reforça a necessidade de utilizar com cautela o processo de modelagem matemática.

"Você talvez fique surpreso ao perceber o quão pouco se conhece dos detalhes mecânicos da maioria dos processos industriais, apesar de que, quando se presta atenção nas condições operacionais – temperaturas altíssimas, equipamentos inacessíveis ou minúsculos – não seja complicado perceber como seria caro e difícil efetuar/construir modelos detalhados. De qualquer jeito, muitos processos funcionam de maneira excelente, tendo sido projetados por engenheiros que sabem executar muito bem seu trabalho. Se não quebrar, não há necessidade de consertar. E então onde entra a Matemática? Bem, algumas utilizações importantes ocorrem em controle de qualidade e custo de processos que já existem; ou simulações e projetos de novos processos. Talvez ajude a entender porque surge um certo tipo de defeito num componente de um sistema, ou qual é a parte menos eficiente de um sistema, ou ainda como melhorar a sua eficiência, mesmo que só de certas partes; ou então quais são as chances de uma nova ideia funcionar, e se funcionar, como controlar o processo."

Exemplo 1.2.

Um corpo, a uma temperatura T_0 , é introduzido num ambiente a uma tempertura T_a num certo instante inicial t_0. Suponhamos que:

i. $T_0 \neq T_a$.

ii. Admitindo que o corpo é homogêneo. (em cada instante de tempo, a temperatura em cada ponto do corpo é a mesma, só variando com o tempo.)

iii. A temperatura do meio ambiente T_a é constante no tempo, e é a mesma em todos os pontos do ambiente.

iv. O calor flui do ambiente mais quente para o ambiente mais frio.

v. (Lei do resfriamento de Newton) - Em cada instante de tempo t,a variação da temperatura do corpo devida à troca de calor através da superfície é proporcional à diferença entre as temperaturas do corpo e do meio ambiente naquele instante.

O problema é deteminar a temperatura do corpo em cada instante $t > t_0$.

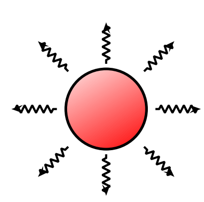


Figura 1.3: Corpo aquecido trocando calor.

As hipóteses físicas são resumidas matematicamene por meio da fórmula

$$\frac{dT}{dt} = -k(T(t) - T_a)$$

onde k é uma constante positiva que depende das propriedades fisico-químicas do corpo.

!

Atenção!

O sinal negativo se deve ao fato de o calor fluir do ambiente mais quente para o mais frio. Assim, se $T > T_a$ então $T - T_a > 0$ e portanto $-k(T(t) - T_a) < 0$. Isto é $\frac{dT}{dt} < 0$, e portanto a temperatura do corpo está diminuindo. Isso é consistente com o fato de o corpo estar perdendo calor para o meio ambiente. Analogamente, se $T < T_a$ então $T - T_a < 0$ e portanto $-k(T(t) - T_a) > 0$. De onde $\frac{dT}{dt} > 0$, o que significa que o corpo está ganhando calor do meio ambiente.

Para completar o modelo, acrescenta-se uma "informação inicial": a temperatura no instante em que se começa a observar a troca de calor: $T(t_0) = T_0$. Tem-se assim um exemplo de *problema de valor inicial*:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = -k(T(t) - T_a) \\ T(t_0) = T_0. \end{cases}$$

Uma aplicação bem interessante do modelo de resfriamento de Newton é a solução do seguinte "mistério":

Exemplo 1.3.

O crime da secretária

Ao chegar ao trabalho, a secretária de um importante empresário encontra-o morto.Ela telefona imediatamente para a polícia, que chega ao local 2hs. depois da chamada. O detetive encarregado examina o ambiente e o corpo. Uma hora mais tarde ele repete o exame. Então decide prender a secretária. Por que?

Aguarde os próximos capítulos, i.e, aulas!

Exemplo 1.4.

Para formular alguns modelos, às vezes é preciso formar mais do que uma equação diferencial, simultaneamente: Consideremos um sistema isolado, constituído por duas massas M e m que se atraem segundo a Lei da Gravitação Universal de Newton.

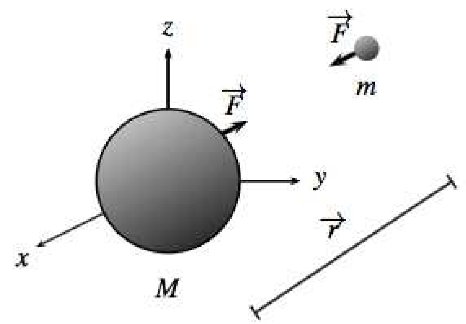


Figura 1.4: O problema dos dois corpos

Supondo $M \ggg m$, a localização do referencial do centro de massa do sistema "coincide" com o centro de massa de M.
Para um observador em M, a massa m descreverá uma trajetória ao seu redor, submetida à força de atração prescrita pela Lei de Gravitação Universal:

$$\overrightarrow{F} = -\frac{GMm}{r^3}\overrightarrow{r}, \quad \text{onde } r = ||\overrightarrow{r}|| = \sqrt{(x^2+y^2+z^2)}.$$

Por outro lado, a 2^a Lei do Movimento, nos diz que

$$\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a} = m\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2}$$

Substituindo a expressão da Lei de Gravitação na última equação obtemos a equação diferencial

$$m\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} = -\frac{GMm}{r^3}\overrightarrow{r},$$

a qual, decompondo a força $\vec{F}$, a aceleração $\vec{a}$ e a posição $\vec{r}$ em componentes segundo os eixos coordenados, fornece o seguinte **sistema de equações de segunda ordem**

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{GM\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{GM\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\[2ex] \dfrac{d^2z}{dt^2} = -\dfrac{GM\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{cases}$$

DEFINIÇÕES GERAIS E EXEMPLOS

!

Atenção!

Para trabalhar com modelos matemáticos de forma sistemática, é conveniente estabelecer alguns princípios gerais e classificações, que servirão de guias nessa tarefa.

Definição 1.1.

Uma **equação diferencial ordinária (EDO)** é uma igualdade que contém uma variável independente, frequentemente representada por x, e uma variável dependente de x, i.e, uma função (desconhecida) da variável x, representada por y, junto com um número finito de derivadas da variável dependente: $y^{(0)}, y', \ldots, y^{(n)}$.

Os alunos que já estudaram um pouco de equações diferenciais, podem usar esta seção como recordação, ou como referência para as notações e definições que serão adotadas em todo o curso.

Neste curso tanto a variável independente quanto a variável dependente são *reais*.

Os símbolos usadas para representar variáveis podem mudar. Por exemplo, é muito comum representar a variável independente por t (especialmente quando essa variável denota o tempo).

Exemplo 1.5.

$$xy' + 3y = 6x^3 \tag{1.1}$$

$$(y')^3 - 6x^3y = 0 \tag{1.2}$$

$$t^2x'' - 3tx' + 3x = 2\cos t \tag{1.3}$$

$$(y'')^4 - e^x y''' + 3y = \sqrt{x} \tag{1.4}$$

Observe que, na equação (1.3), a variável dependente é representada pela letra x, e t representa a variável independente.

A ordem de uma EDO é a maior ordem das derivadas da variável dependente que ocorre na equação. Assim as equações (1.1) e (1.2) são ambas de 1^a ordem, enquanto (1.3) e (1.4) são respectivamente de 2^a e 3^a ordens.

Se a variável dependente, digamos u, for uma função de mais de uma variável independente, por exemplo, então uma equação contendo u e derivadas parciais de u, é chamada de *equação diferencial parcial*.

Exemplo 1.6.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x,y) - x\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0, \tag{1.5}$$

$$u_{tt} = k\,u_{xx} + g(t,x), \tag{1.6}$$

sendo g uma função conhecida de (x,t).

Na mecânica quântica, a equação de Schrödinger é uma equação diferencial parcial que descreve como o estado quântico de um sistema físico muda com o tempo. Foi formulada no final de 1925, e publicado em 1926, pelo físico austríaco Erwin Schrödinger.

Na mecânica de ondas não-relativistica, a função de onda $\psi(\mathbf{r},t)$ de uma partícula satisfaz a *Equação de Onda de Schrödinger*

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi + V\psi.$$

!

Atenção!

Neste curso, a ênfase recairá nas equações diferenciais ordinárias. Quando utilizarmos a denominação *equações diferenciais*, sem outra qualificação, estaremos nos referindo a equações diferenciais ordinárias

É costume definir uma **equação diferencial de ordem n** por uma relação da forma

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.7}$$

sendo F uma função conhecida, das $n+2$ variáveis (dependentes e/ou independentes) $x, y, y', \cdots, y^{(n)}$.

Exemplo 1.7.

Uma equação diferencial de primeira ordem é uma expressão da forma

$$F(x, y, y') = 0.$$

Se for possível reescrever a equação diferencial (1.7) na forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}),$$

diz-se que a equacão é, ou pode ser posta na **forma normal** ou que a equação pode ser **normalizada**. Frequentemente uma equação só é normalizável em alguns subintervalos do intervalo onde ela está definida.

Exemplo 1.8.

A equação $xy' - 2xy = 3x$, é normal em qualquer intervalo que não contém o número 0.
A equação $x^4y' - 2xy = 3x$ não é normal no intervalo $(-3, +\infty)$.

Uma **equação diferencial normal de primeira ordem** é uma equação da forma

$$y' = f(x, y).$$

!

Atenção!

No primeiro módulo do curso só serão estudadas equações diferenciais de primeira ordem. Nos módulos seguintes, alguns aspectos fundamentais de certos tipos de equações de ordem maior do que um serão trabalhados.

Definição 1.2.

Chama-se **solução da equação diferencial** (1.7) a uma função φ da variável independente x, definida num intervalo I, que, quando substituída, junto com suas derivadas, no lugar da variável dependente y e das respectivas derivadas de y, na equação diferencial, a transforma numa indentidade em x.

$$\forall\, x \in I, \qquad F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \cdots, \varphi^{(n)}(x)) = 0.$$

Quando é possível expressar a solução por meio de uma fórmula $y = h(x)$, que fornece os valores de y correspondentes a cada $x \in I$, diz-se que essa função (fórmula) define uma **solução explícita** da equação diferencial (1.7).

Exemplo 1.9.

a. $\varphi(x) = e^{-x}$ é solução da equação diferencial $y' + y = 0$ no intervalo $I = (-\infty, +\infty)$, pois $\varphi'(x) = -e^{-x}$ e

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \varphi'(x) + \varphi(x) = -e^{-x} + e^{-x} = 0.$$

b. $\varphi(x) = ce^{-x^2}$ é solução da equação diferencial $y' + 2xy = 0$ no intervalo $I = (-\infty, +\infty)$, pois $\varphi'(x) = -2cxe^{-x}$ e

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \varphi'(x) + 2cx\,\varphi(x) = -2xce^{-x} + 2x(ce^{-x}) = 0.$$

c. $\varphi(x) = \cos 2x$ é solução da equação diferencial $y'' + 4y = 0$ no intervalo $I = (-\infty, +\infty)$, pois $\varphi'(x) = -2\,sen\,2x$, $\varphi''(x) = -4\cos 2x$ e

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \varphi''(x) + 4\,\varphi(x) = -4\cos 2x + 4\cos 2x = 0.$$

O próximo exemplo introduz novos conceitos: **parâmetros** e **parametrizações**.

Exemplo 1.10.

"*Dada a função contínua*

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 3x^2 + 1\,,$$

determinar todas as funções $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tais que*

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1\text{"} \tag{1.8}$$

As soluções da equação (1.8) são simplesmente as primitivas da função $f(x) = 3x^2 + 1$.

Solução: De acordo com o curso de Cálculo, o conjunto de todas as primitivas procuradas é

$$y(x) = x^3 + x + c \tag{1.9}$$

onde c é um número real arbitrário. Entretanto, cada escolha de um valor para c, digamos c_0, determina ***toda uma solução***, i.e, caracteriza o conjunto completo de todas as variáveis independentes x e suas respectivas variáveis dependentes $y = x^3 + x + c_0$, que formam a solução. Podemos dizer que *para cada escolha para o parâmetro c*, temos uma "visão global" da solução correspondente.

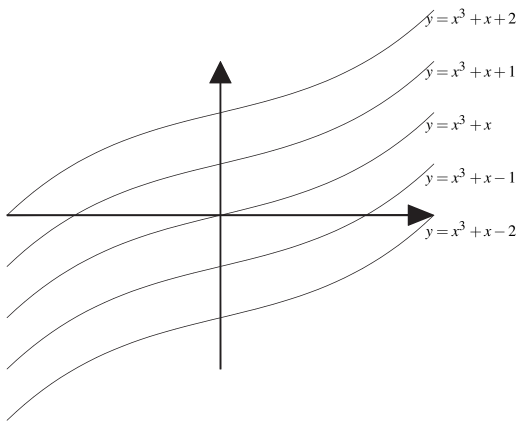


Figura 1.4: Gráficos de soluções de $y'(x) = 3x^2 + 1$

Parâmetros

Intuitivamente, um parâmetro *é um número, ou conjunto de números, utilizado(s) para identificar os elementos de um outro conjunto. No* **Exemplo 1.10**, *a cada parâmetro corresponde uma solução da equação.*

E, lembre-se, parâmetros são números independentes das variáveis da equação

A **Figura** (**1.4**) exibe algumas das soluções da equação diferencial $y'(x) = 3x^2 + 1$, correspondentes às escolhas do parâmetro como sendo os inteiros do intervalo $[-2, 2]$.

Uma **solução geral** de uma equação diferencial de ordem n é uma solução que contém $m \leq n$ *parâmetros*, ou *constantes arbitrárias* $c_1, c_2, \cdots, c_m$, de tal forma que, para cada escolha de valores para os parâmetros, obtém-se uma solução da equação. Cada solução de uma equação diferencial, obtida pela fixação de valores para os parâmetros que ocorrem numa solução geral é chamada de **solução particular** da equação diferencial.

Exemplo 1.11.

As funções

$$\varphi(x) = x^3 + \frac{c}{x^3} \tag{1.10}$$

e

$$\psi(x) = \frac{c^2}{4} + cx + x^2 \tag{1.11}$$

são soluções gerais das equações

$$xy' + 3y = 6x^3 \tag{1.12}$$

e

$$(y')^2 = 4y \tag{1.13}$$

respectivamente. Observe que $\varphi(x)$ está definida em qualquer intervalo que não contenha o númeror 0, $\psi(x)$ está definida em $\mathbb{R}$.

Nota

A solução $\zeta(x)$ contém apenas um parâmetro, embora a equação seja de segunda ordem. Repare também que $\zeta(x)$ impôe restrições ao parâmetro c (que deve ser diferente de zero) e também à variável independente x , a saber $1 + cx > 0$.

Exemplo 1.12.

A função

$$\zeta(x) = \frac{2x}{c} - \frac{2}{c^2} ln(1 + cx) \tag{1.14}$$

é uma solução geral da equação

$$2x^2y'' - (y')^2 = 0. \tag{1.15}$$

A função $g(x) = x^3$ é uma solução da equação (1.12) que se obtém fazendo $c = 0$ na solução geral (1.8).

Note que a função $h(x) = x^2$ é uma solução de (1.15) que *não pode ser obtida simplesmente escolhendo um valor apropriado para o parâmetro c na solução geral* (1.14).
Portanto $h(x)$ *não é uma solucão particular, no sentido definido acima*. Esta solução "extra" chama-se **solução singular** de (1.15).

Quando se fala em solução geral, a palavra "geral"nem sempre pode ser interpretada como indicando uma expressão que contém a totalidade das soluções de uma equação diferencial.

Chama-se **solução completa** à totalidade das soluções de uma equação diferencial.

Exemplo 1.13.

A solução completa da (1.15) é a solução geral (1.14) acrescida da solução singular $h(x)$.

✍ **Observação/Definição**: Muitas vezes não é possível, ou não sabemos como, ou simplesmente é muito complicado, calcular soluções explícitas de uma equação diferencial (1.7), mas é possível deduzir uma fórmula

$$G(x, y, c_1, c_2, \cdots, c_m) = 0,$$

contendo a variável independente, x, a variável dependente, y, e possivelmente parâmetros reais, de tal modo que, calculando as derivadas implícitas de y (até a ordem n), *a partir da expressão de G*, e eliminando os parâmetros, reobtém-se, no final, a equação (1.7) ,diz-se então que G define (uma ou várias) **soluções implícitas** de(1.7).

Exemplo 1.14.

A expressão $G(x,y) = x^2 + y^2 - c = 0$ define soluções implícitas da equação diferencial

$$yy' + x = 0.$$

Com efeito, derivando implicitamente a expressão $G(x,y) = 0$, obtém-se:

$$2x + 2yy' = 0.$$

Simpificando os dois lados (dividindo por 2) chega-se a $x + yy' = 0$; que é a equação diferencial de partida.

Uma Classificação Importante:

As equações diferenciais podem ser classificadas em dois grupos: **lineares** e **não lineares**.

Uma equação diferencial é linear se é linear *na variável dependente* e em todas as suas derivadas. Assim uma equação diferencial linear de ordem n na variável independente y tem a forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y. \qquad (1.16)$$

Exemplo 1.15.

Considere as seguintes equações diferenciais:

1. $u + 3t\dfrac{du}{dt} = sen t^2$
2. $x^2y'' - 3x(y')^{1/3} + 4y = 0$
3. $\dfrac{d^3A}{dzdtdu} = 6 - A/100$
4. $\dfrac{d^2z}{dx^2} + \dfrac{d^2z}{dy^2} = 0.$
5. $y\dfrac{dy}{dt} + y^2 = sen t.$
6. $\dfrac{d^3z}{dt^3} - 6\dfrac{dz}{dt} - z^2t = 2$

As equações (1) a (4) são exemplos de equações diferenciais lineares, enquanto (5) e (6) são equações não lineares.

As equações diferenciais lineares ainda podem ser classificadas em dois subgrupos: **homogêneas** e **não homogêneas**.

Se $a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y \equiv 0$, a equação diferencial diz-se *homogênea*, caso contrário é dita *não homogênea*.

A forma geral fe uma equação linear não homogênea é

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = h(x).$$

A função h(x) do lado direito é chamada de *termo independente*, ou *termo forçante*.

Às vezes um problema exige que se escolha uma função especial no conjunto de todas as funções que são soluções de uma equação diferencial. Uma das formas mais comuns de especificar uma solução é fazer a exigência de que ela e suas derivadas até a de ordem imediatamente inferior à ordem da equação assumam valores estabelecidos previamente, num ponto dado.

A tarefa de resolver uma equação diferencial dada que satisfaz, junto com suas derivadas valores especificados em um ponto é chamado de *resolução de um problema de valor inicial*.

Exemplo 1.16.

Calcule a solução da equação diferencial $y'(x) = 3x^2 + 1$ cujo valor em $x = 0$ é 1; isto é, calcule a solução $y(x)$ tal que $y(1) = 0$; i.e,

Resolva *o problema de valor inicial*:

$$\begin{cases} dy/dx = 3x^2 + 1 \\ y(1) = 0, \end{cases} \tag{1.17}$$

Uma solução geral da equação diferencial (1.17), é $y(x) = x^3 + x + c$. Impondo a condição $y(1) = 0$, calcula-se:

$$y(1) = 1^3 + 1 + c = 0 \Longrightarrow c = -2\,.$$

Logo,

$$y(x) = x^3 + x - 2\,,$$

é a solução do problema (1.17).

Problema de Valor Inicial (PVI)

A denominação *valor inicial* se deve a que, em diversas aplicações, a variável independente x representa uma medida de tempo, e o problema está especificando um valor para a variável y e suas derivadas, todas variando com x, correspondente(s) a um instante inicial (normalmente, mas nem sempre, o instante em que começam as medições dos fenômenos em consideração. Problemas de valor inicial são também chamados de **Problemas de Cauchy.**

Problema de Cauchy

Augustin-Louis Cauchy foi um dos maiores matemáticos do século XIX.Teve atuação decisiva no processo de fundamentar a Análise Matemática em bases rigorosas. Cauchy foi o primeiro matemático a estudar sistematicamente os PVIs.

Exemplo 1.17.

Um exemplo de PVI, para uma equação de terceira ordem é;

$$\begin{cases} y''' = f(t, y, y', y'') \\ y(t_0) = a \\ y'(t_0) = b \\ y''(t_0) = c \end{cases}$$

Uma outra forma de especificar soluções particulares, relevante no estudo de equações diferenciais de segunda ordem, é por meio da atribuição de valores prévios que as soluções e/ou suas derivadas devem assdumir nas extremidades (ou contornos) do intervalo onde a equação está definida.

Este tipo de condição é denomindado **condição de contorno**. As condições de contorno são importantes no estudo de equações diferenciais parciais, e não terão grande destaque neste curso. Um problema de valores de contorno é chamado de **PVC**.

Exemplo 1.18.

A função $x(t) = \cos t$ é a solução do PVC:

$$\begin{cases} x'' + x = 0 \\ x(0) = 1, \ x(\pi) = -1. \end{cases}$$

Solução:

$x(t) = \cos t \Longrightarrow x'' = -\cos t. \quad mboxLogo\ x'' + x = \cos t - \cos t = 0.$

Assim, $x(t) = \cos t$ é solução da equação diferencial do problema.

E como $\cos 0 = 1$ e $\cos \pi = -1$, $x(t) = \cos t$ verifica também as condições de contorno.

Atividade de auto-avaliação 1.1

1. Classifique as seguintes equações diferenciais quanto ao tipo, à ordem, e, se forem ordinárias, também quanto à linearidade e homogeneidade:

   a. $\dfrac{d^3u}{dt^3} + 3\sqrt{t}\dfrac{du}{dt} = t^2$

   b. $y'' + 4y^{1/3} = 0$

   c. $\dfrac{\partial^4 w}{\partial^2 z \partial t \partial u} = w - 1$

   d. $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.$

   e. $y\dfrac{dy}{dt} + y^2 = sen t.$

   f. $\left(\dfrac{d^3z}{dt^3}\right)^2 = z\left(\dfrac{dz}{dt}\right)^{10}.$

2. Em cada item, verifique se a função dada é solução da equação diferencial, ou PVI dado:
   (c, c_1, c_2 representam parâmetros reais.)

   a. $\dfrac{dy}{dt} + 2y = 0; \quad y = c\,e^{-2t}$

   b. $\begin{cases} xy'' - y' = 0 \\ y(1) = -8,\ y'(1) = 4 \end{cases} \qquad y = -10x^2 + 2$

   c. $y'' - y = t; \quad y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - t$

Atividade de auto-avaliação 1.2

Verifique que a solução completa da *Equação de Clairaut*

$$y = x\frac{dy}{dx} - ln\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

é dada por:

$$\begin{cases} y = cx - lnc. & \text{que é uma solução geral,} \\ y = 1 + lnx & \text{que é uma solução singular.} \end{cases}$$

Senhoras e senhores, afivelem os cintos. Nossa jornada vai começar!

Resumo

Nesta aula, aprendemos que:

1. O estudo das Equações Diferenciais teve início com o Cálculo Diferencial e Integral, no século XVII, como instrumento para a análise de curvas;

2. as equações diferenciais são equações em que as incógnitas são funções de uma ou várias variáveis, que ocorrem na equação, junto com suas derivadas;

3. Para trabalhar com equações diferenciais de forma sistemática, é conveniente estabelecer alguns princípios gerais e classificações. As equações diferenciais podem ser classificadas segundo vários critérios, com destaques para:

   Primeiro) quanto ao número de variáveis independentes e tipos de derivadas que ocorrem na equação;

   Segundo) quanto à ordem;

   Terceiro) quanto à linearidade ou não linearidade;

   Quarto) quanto à homogeneidade, no caso de equações lineares;

4. Também vimos que existem tipos de soluções de equações diferenciais ordinárias, a saber:

   (a) As soluções gerais e particulares;

   (b) As soluções singulares;

5. por fim, aprendemos o conceito de problema de valor inicial, que desempenha um papel fundamental no curso.

SOLUÇÕES COMENTADAS DAS ATIVIDADES DESTA AULA:

Solução comentada da atividade 1.1

1. a. A equação $\dfrac{d^3u}{dt^3} + 3\sqrt{t}\,\dfrac{du}{dt} = t^2$ é uma equação diferencial ordinária (não contém derivadas parciais), linear (está na forma geral das equações lineares), de terceira ordem, e não homogênea (o segundo membro não é nulo);

   b. A equação $y'' + 4y^{1/3} = 0$ é uma equação diferencial ordinária (não contém derivadas parciais), não linear (devido à parcela $4y^{1/3}$), de segunda ordem;

   c. A equação $\dfrac{\partial^4 w}{\partial^2 z \partial t \partial u} = w - 1$ é uma equação diferencial parcial (contém derivadas parciais), de quarta ordem;

   d. A equação $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ é uma equação diferencial parcial (contém derivadas parciais), de primeira ordem;

   e. A equação $y\dfrac{dy}{dt} + y^2 = sen t$ é uma equação diferencial ordinária (não contém derivadas parciais), não linear (devido ao fator y na primeira parcela, e também à parcela y^2). É uma equação de primeira ordem;

   f. A equação $\left(\dfrac{d^3z}{dt^3}\right)^2 = z\left(\dfrac{dz}{dt}\right)^{10}$. é uma equação diferencial ordinária (não contém derivadas parciais), não linear (pois equações lineares não contêm potências das derivadas da variável independente). É uma equação de terceira ordem.

2.

   a. $\dfrac{dy}{dt} + 2y = 0; \quad y = c\,e^{-2t}.$

   $y = c\,e^{-2t} \Longrightarrow y' = -2c\,e^{-2t}$; daí

   $$y' + 2y = -2c\,e^{-2t} + 2c\,e^{-2t} = 0.$$

   Portanto $y(t)$ é solução da equação diferencial proposta.

b. $\begin{cases} xy'' - y' = 0 \\ y(1) = -8,\ y'(1) = 4; \quad y = -10x^2 + 2. \end{cases}$

$y = -10x^2 + 2 \Longrightarrow y' = -20x$ e $y'' = -20$.

Portanto $xy'' - y' = -20x + 20x = 0$, o que mostra que $y(x)$ é solução da equação diferencial do problema.

Entretanto, $y(1) = -10x^2 + 2|_{x=1} = -8$, mas $y'(1) = -20x|_{x=1} = -20 \neq 4$; e então $y = -10x^2 + 2$ *não é* a solução do PVI proposto.

c. $y'' - y = t; \quad y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - t;$

$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - t \Longrightarrow y' = c_1 e^t - c_2 e^{-t} - 1$ e $y'' = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$.

Portanto

$$y'' - y = (c_1 e^t + c_2 e^{-t}) - (c_1 e^t + c_2 e^{-t} - t) = t,$$

o que mostra que $y(t)$ é solução da equação diferencial do problema.

Solução comentada da atividade 1.2

Precisamos verificar que $y = cx - ln c\ c > 0$ é uma solução geral, e que $y = 1 + ln x$ é uma solução singular.

Qualquer que seja o valor atribuído a $c > 0$, tem-se que $y = cx - ln c,\ c > 0$ é uma expressão que contém um parâmetro, e é solução de $x\dfrac{dy}{dx} - ln\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$.

De acordo com a caracterização de solução geral, $y = cx - ln c,\ c > 0$ é uma solução geral.

Por outro lado, se $y = 1 + ln x$, então $y' = 1/x$. Substituíndo na equação, fica-se com $x \cdot \dfrac{1}{x} - ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1 - (-ln x) = 1 + ln x = y$; e portanto $y = 1 + ln x$ também é solução da equação.

Ora, *um parâmetro é um número independente das variáveis da equação*. Isto é, não podemos obter uma solução “substituindo” a variável x (ou uma expressão contendo x) pelo parâmetro c. Portanto não podemos obter a solução $y = 1 + ln x$ escolhendo o parâmetro $c = 1$ e depois escolhendo, ao mesmo tempo, o parâmetro $c = 1/x$.(Na verdade estaríamos obtendo uma solução por meio de *duas escolhas* para um mesmo parâmetro, na mesma

solução; inclusive sendo uma dessas escolhas impossível)
Resumindo, $y = 1 + ln$ é uma solução singular.

Dada uma função contínua, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(t)$ definida em um intervalo I, determinar todas as funções $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$y'(t) = f(t). \tag{1.18}$$

A equação (1.18) nada mais é do que uma equção diferencial. As soluções desta equação são exatamente as primitivas da função $f(t)$. Em outras palavras, uma função $y(t)$ é solução da equação diferencial (1.18) se sua derivada é a função $f(t)$. Do que conhecemos do Cálculo,

$$y(t) = F(t) + c, \tag{1.19}$$

onde $F(t)$ é uma primitiva particular e $c \in \mathbb{R}$ é um parâmetro arbitrário, é uma representação convencional do conjunto de todas as funções deriváveis em I, com derivadas iguais a $f(t)$.

Neste caso, poderemos chamar (1.19) de *solução geral* de (1.18).

Na Aula 2 retomamos os trabalhos, inicialmente recordando alguns aspectos importantes da equação (1.18), que chamaremos de **equação diferencial fundamental.** A Aula 2 prosseguirá com a introdução de alguns desdobramentos da equação diferencial fundamental.

Aula 2

Equações Diferenciais Fundamentais
Equações Diferenciais Lineares

Objetivos

Ao final desta aula, você será capaz de:

1. identificar Equações Diferenciais Fundamentais, e calcular suas soluções em intervalos;
2. identificar Equações Diferenciais Lineares de Primeira ordem, e calcular suas soluções em intervalos;
3. construir modelos com Equações Diferenciais Fundamentais e Lineares.

INTRODUÇÃO

Pré-requisito: Os cursos de Cálculo I a III.

Nesta aula, vamos rever algumas equações diferenciais que já foram estudadas, com maior ou menor grau de detalhamento, nos curso de Cálculo. O princípio que vai nortear esta aula, e todo o restante do curso, é, iniciar com exemplos ou problemas simples e, progressivamente, considerar casos mais complexos, procurarando estabelecer uma transição natural entre os dois contextos.

A EQUAÇÃO DIFERENCIAL FUNDAMENTAL

A primeira equação diferencial de que vamos rever é uma conhecida nossa desde o primeiro curso de Cálculo. Com efeito, a parte do Cálculo chamada de Cálculo de Primitivas se ocupa da determinação de soluções $y(x)$ da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

sendo f uma função real de variável real conhecida. Vamos admitir que f é contínua, definida num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$.

Definição 2.1.

Dada uma função contínua $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida no intervalo aberto I, a equação

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{2.1}$$

é denominada de *equação diferencial fundamental de primeira ordem*. A equação diferencial fundamental também é representada por $y'(x) = f(x)$.

Definição 2.2.

Uma **solução** da equação (2.1), no intervalo I, é qualquer primitiva da função $f(x)$, isto é, qualquer função $y(x)$ da família

$$\int f(x)\, dx,$$

obtida pelo processo de antiderivação.

Exemplo 2.1.

Para cada $n \neq -1$, as funções $\varphi_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$ são soluções das equações $y'(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.2.

Para $n = -1$, as funções $lnx + c$ são soluções das equações $y'(x) = x^n, \quad x$ em qualquer intervalo que não contenha o número zero.

!

Atenção!

Uma equação diferencial fundamental, definida num intervalo aberto I, possui um número infinito de soluções. Qualquer solução da equação determina todas as outras soluções. De fato, se $y_0(x)$ é uma solução de

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

então qualquer outra solução $\varphi(x)$ é obtida de $y_0(x)$ adicionando a ela uma número real adequado c. Basta observar que $\varphi'(x) = y_0'(x)$. Portanto se $y_0(x)$ é solução, $\varphi(x)$ também é. Além disso todas as soluções são obtidas dessa maneira.
Todas as soluções da equação diferencial $dy/dx = f(x)$ podem ser representadas pela "integral indefinida" $\int f(x) \ dx$. Dizemos que $y(x)$ é a solução *geral* da equação.
No caso da equação fundamental, a solução *geral* contém efetivamente *todas* as soluções da equação no intervalo especificado.
Lembramos também que qualquer solução obtida da solução geral pela especificação de um valor para o parâmetro de integração é chamada de *solução particular*.

✍ Mesmo quando não sabemos (ou é impossível) calcular soluções para uma equação diferencial fundamental, o Teorema Fundamental do Cálculo permite escrever explicitamente todas as soluções da equação num intervalo I.

Vamos relembrar o TFC?

Teorema 2.1 (O Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo).

Seja f uma função integrável no intervalo $[a,b]$, e defina F em $[a,b]$ por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Se f é contínua no ponto $c \in [a,b]$, então F é derivável em c, e

$$F'(c) = f(c).$$

Exemplo 2.3.

Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{sen\,x}{x}; \qquad x \in (0,+\infty).$$

Por mais que procuremos, não vamos conseguir descobrir uma função, ou combinação finita de funções conhecidas, cuja derivada seja $\frac{dy}{dx} = \frac{sen\,x}{x}$. Trata-se de um resultado que não é simples de demonstrar, e que vamos aceitar, sem maiores preocupações.

Mesmo assim, o Teorema Fundamental do Cálculo nos possibilita escrever todas as soluções.

Veja como funciona : já que $(f(x) = \frac{sen\ x}{x}$, $x > 0$ é uma função contínua, escolha um ponto $x_0 > 0$ arbitrariamente. Temos que

$$y(x) = \int_{x_0}^x \frac{sen\ t}{t}\ dt + c$$

é o conjunto de todas as soluções da equação, sendo c um parâmetro arbitrário.

✍ **Para não esquecer**: basta fixar um $x_0 \in I$ e escrever a família de soluções da equação na forma

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(t)\ dt + c,$$

onde c é um parâmetro arbitrário.

!

Atenção!

Se o subconjunto aberto $A \subset \mathbb{R}$ onde uma equação diferencial fundamental está definida não é um intervalo, então a equação pode ter duas soluções distintas que não diferem por um parâmetro.

Exemplo 2.4.

As funções

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} 1, \text{ se } t > 0, \\ 2, \text{ se } t < 0 \end{cases} \qquad \text{e } \varphi_2(t) = \begin{cases} 2, \text{ se } t < 0, \\ 1, \text{ se } t > 0 \end{cases} \quad ;$$

ambas satisfazem a equação diferencial $y' = 0$ no conjunto $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; mas não existe um parâmetro real (único), k, tal que $\forall\, t \in A \quad \varphi_1(t) - \varphi_2(t) = k$.

Problema de Valor Inicial para Equações Fundamentais:

✍ Segundo as definições gerais da Aula 1, um problema de valor inicial (PVI) para uma equação fundamental, significa uma equação diferencial, junto com uma informação adicional sobre o valor da solução procurada em um ponto especificado.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x), \qquad x \in I \subset \mathbb{R} \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Observe que, na primeira linha, está a equação diferencial cuja solução é procurada, e na linha seguinte, os dados iniciais. *Cada problema de valor inicial tem uma solução única*.

Exemplo 2.5.

Considere duas partículas de massas m e m'. Calcule o trabalho contra a força de gravitação necessário para mover a segunda partícula ao longo da reta que as contém, da distância r_1 à distância $r_2 > r_1$.

Você pode perceber que este exemplo utiliza, em uma situação unidimensional, elementos do **Exemplo 1.4**; que apresenta um modelo do problema geral da atração entre dois corpos materiais.

Note que, quanto maior a distância, menor a intensidade da força.

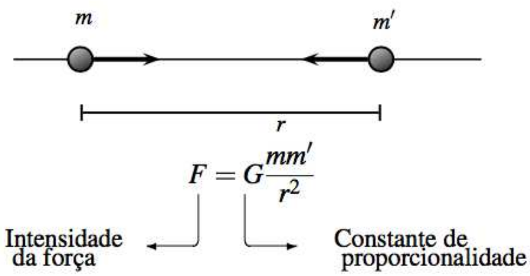


Figura 2.1: Atração gravitacional entre partículas

> **!**
>
> ## Atenção!
> Vamos chamar de *partícula* um qualquer, cujas dimensões, forma e estrutura interna são irrelevantes para o problema em consideração. Uma partícula pode ser idealizada como um ponto material (ao qual se pode, entretanto, atribuir uma massa, ou carga elétrica, etc.)
> (2) Newton provou que a força com que duas partículas se atraem mutuamente tem intensidade inversamente proporcioal ao quadrado da distância que as separa.

✍ Quando uma força constante (em intensidade, direção e sentido) atua sobre uma partícula , deslocando-a de r unidades (ao longo da linha de ação da força), o trabalho realizado por esta força durante o percurso é,por definição,

$$T = F \times r$$

O problema proposto tem a dificuldade extra de que a intensidade da força que m exerce sobre m' é variável. A força vai diminuindo à medida em que a distância entre as partículas vai aumentando.

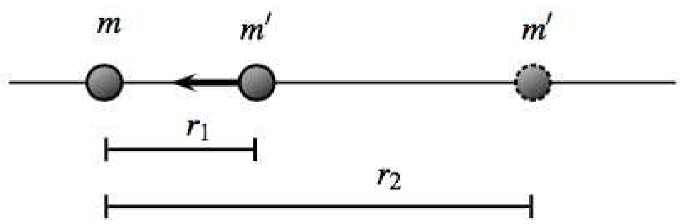


Figura 2.2: Corpo aquecido trocando calor

Solução:

Para $r \geq r_1$ denotemos por $T(r)$ o trabalho necessário para mover a segunda partícula da distância r_1 até a distância r da primeira partícula. (Estamos introduzindo a função que soluciona o problema. A resposta que procuramos é $T(r)$.)

Seja $h > 0$. À medida que deslocamos a segunda partícula da posição r para a posição $r+h$, a intensidade da força gravitacional cai de $F(r) = Gmm'/r^2$ para $F(r+h) = Gmm'/(r+h)^2$. Consequentemente, o trabalho realizado, $T(r+h) - T(r)$, está entre $hF(r)$ e $hF(r+h)$ ($hF(r)$ e $hF(r+h)$ são os trabalhos correspondentes às situações em que as forças aplicadas são constantes, com o menor e maior valores respecitvamente). Temos então

$$\frac{Gmm'}{(r+h)^2} < \frac{T(r+h) - T(r)}{h} < \frac{Gmm'}{r^2}.$$

Portanto

$$\lim_{h \to 0+} \frac{T(r+h) - T(r)}{h} = \frac{Gmm'}{r^2} \tag{2.2}$$

Se h for negativo teremos as estimativas

$$F(r) \cdot (-h) \leq T(r) - T(r+h) \leq T(r+h) \cdot (-h)$$

de onde

$$F(r+h) \leq \frac{T(r+h) - T(r)}{h} \leq F(r)$$

isto é

$$\frac{Gmm'}{(r+h)^2} \leq \frac{T(r+h) - T(r)}{h} \leq \frac{Gmm'}{r^2}$$

Daí

$$\lim_{h \to 0-} \frac{T(r+h) - T(r)}{h} = \frac{Gmm'}{r^2}. \tag{2.3}$$

De (2.2) e (2.3):

$$\frac{dT}{dr} = \lim_{h\to 0} \frac{T(r+h) - T(r)}{h} = \frac{Gmm'}{r^2}.$$

O problema se reduziu ao de descobrir uma função, conhecida a sua derivada. Ou, dizendo de outro modo, é preciso resolver a "equação diferencial "

$$\frac{dT}{dr} = \frac{Gmm'}{r^2}.$$

Repare o papel fundamental da condição inicial na resolução do problema. Sem o dado inicial, de nada serviria todo o trabalho efetuado.

Qualquer função da forma

$$T(r) = -\frac{Gmm'}{r} + c$$

é uma solução da equação.
O valor apropriado de c pode ser determinado a partir da condição

$$0 = T(r_1) = -\frac{Gmm'}{r_1} + c$$

Então $c = Gmm'/r_1$ e a resposta final do problema é

$$\boxed{T(r_2) = Gmm'\Big(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\Big).}$$

Atividade de auto-avaliação 2.1

Determine uma função real $y(x)$, definida no intervalo $I = (-3, +\infty)$, solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = e^x - 3x^2,$$

sabendo que seu gráfico no plano $\mathbb{R}^2$ contém o ponto (0,-1)

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

Nos cursos iniciais de Cálculo, foram estudadas diversas "técnicas de integração" para a resolução de integrais indefinidas. Dependendo da função f usava-se substituições, integração por partes, integração de funções racionais, etc.

De todas as técnicas de solução, as substituições, mais precisamente chamadas de *mudanças de variáveis* consituem a técnica mais geral. Indo um pouco além, na próxima seção vamos ver como substituições convenientes muitas vezes permitem transfomar equações mais complicadas em equações fundamentais.

Começaremos esta seção examinando um outro modelo interessante, envolvendo a *lei de atração universal*. A lei de atração universal é, de fato, uma questão muito fértil. Desde o **Exemplo 1.4** da Aula 1, temos tratado de problemas de atração entre corpos. E ainda vamos voltar a eles. Para alguns, conseguimos calcular soluções explícitas, para outros não está muito claro nem mesmo se existem soluções.

Exemplo 2.6.

Antigamente, isto é, antes de Galileu Galilei, acreditava-se que a velocidade de um corpo em queda livre, partindo do repouso, perto da superfície da Terra, era diretamente proporcional à distância por ele percorrida até colidir com o solo. Parece razoável, mas observando a velocidades de colisão com o solo, de uma bola de chumbo e de uma bola de algodão (abandonadas de uma mesma altura) são bastante diferentes.

Vejamos o que acontece se formularmos um modelo matemático associado à primeira suposição (velocidade diretamente proporcional à altura):

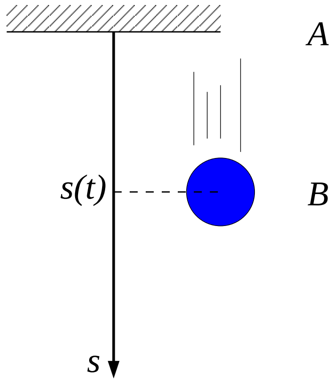


Figura 2.3: Queda Livre

Admitamos que a suposição seja verdadeira. Designemos pot t o tempo de do corpo a partir do ponto A e por $s(t)$ a distância percorrida desde a posição A de repouso depois do tempo t. Veja a **Figura 2.3**.

- No ponto A temos $t = 0$ e $s(0) = 0$.
- No ponto B, corpo em após um tempo t.
- Distância de A até B é igual a $s(t)$.

Em cada instante $t > 0$, o valor $s = s(t) > 0$ marcado no eixo vertical, mede a distância percorrida pelo objeto ao longo da trajetória vertical,i.é, a distância medida a partir do ponto A.

Seja v a velocidade instantânea do corpo depois de um tempo t. Como estamos admitindo (crença antiga) que v é proporcional a $s(t)$, então existe uma constante $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{v}{s(t)} = k, \ \ k = \text{constante}.$$

Ou seja,

$$v = k \cdot s(t) \tag{2.4}$$

Na **Figura 2.3**, escolhemos um eixo s, orientado positivamente para baixo.

Lembrando que a velocidade instantânea v é a taxa de variação da posição $s(t)$ com relação ao tempo t, escrevemos

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Levando em conta a equação 2.4 acima, concluimos que

$$\frac{ds}{dt} = ks.$$

Esta é a equação diferencial que modela o fenômeno que estamos estudando.

Indo além, vamos agregar à equação diferencial encontrada as condições iniciais. A posição A da figura indica o início da contagem do tempo e o corpo não se deslocou ainda. Isto corresponde a $s = 0$ e $t = 0$. Assim, encontramos o modelo matemático para o fenômeno:

$$\begin{cases} \dfrac{ds}{dt} = & ks, \ k = \text{cte} \\ s(0) = & 0 \end{cases}$$

Veja como se resolve esta equação diferencial, onde a variável é o número real $t > 0$, representando a medida do tempo e a função incógnita procurada é $s(t)$.

$$\frac{ds}{dt} = ks \Longleftrightarrow \frac{ds/dt}{s} = k \Longleftrightarrow \frac{d}{dt}[ln(s(t))] = k \Longleftrightarrow$$

$$ln(s(t)) = kt + k_1 \Longleftrightarrow s(t) = e^{kt+k_1} = e^{kt}e^{k_1}, \quad (k \text{ e } k_1 \text{ constantes})$$

Portanto

$$s(t) = ce^{kt}, \qquad c = e^{k_1} \quad \text{e} \quad k \quad \text{constantes}$$

é a solução geral da equação.

Com o intuito de particularizar uma solução entre todas as soluções $s(t) = ce^{kt}$ com c e k constantes, usamos os valores iniciais. Se $t = 0$ então $s(0) = 0$. Portanto,

$$0 = s(0) = ce^0 = c \Longrightarrow c = 0.$$

Mas daí, substituindo $c = 0$ na solução geral vemos que a solução que obedece às condições iniciais é identicamente nula.

A solução obtida mostra que *o corpo em queda livre não se movimenta*. Isso é um absurdo. Consequentemente a suposição não estava correta. A partir dos trabalhos de Galileu no século XVII, conhecemos que a velocidade é proporcional ao tempo de e não ao espaço percorrido.

Equações Lineares de Primeira Ordem Homogêneas

Definição 2.3.

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $p : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, uma função contínua. Toda a equação diferencial que pode ser posta, na forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \tag{2.5}$$

é chamada *uma equação diferencial linear homogênea de* 1^a *ordem.*

Exemplo 2.7.

A equação do problema de queda-livre: **Exemplo 2.6** acima, é linear homogênea de primeira ordem. Nesse caso, $p(x)$ é a função constante $= -k$.

Exemplo 2.8.

Dois outros exemplos de equações diferenciais lineares homogêneas:

a. $\dfrac{dy}{dx} + sen(2x)y = 0$ e

b. $y' - 3xy = 0.$

Cálculo das Soluções de Equações Lineares Homogêneas

Inicialmente, observamos que a função identicamente nula $y \equiv 0$ é uma solução trivial da equação diferencial 2.5. No que se segue vamos procurar soluções $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ da equação 2.5, com a condição que $y(x) \neq 0$, para todo $x \in I$.

Suponhamos então $y(x) \neq 0$, para todo $x \in I$. Partindo da equação 2.5, calculamos:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \Longleftrightarrow \frac{\frac{dy}{dx}}{y} = -p(x) \Longleftrightarrow \frac{d}{dx}\ln[y(x)] = -p(x)\,.$$

Observe que essa última é uma equação do tipo da fundamental. Portanto admite uma solução que pode ser expressa em função de uma integral indefinida. Temos as equivalências:

$$\frac{d}{dx}\ln[y(x)] = -p(x) \Longleftrightarrow ln[y(x)] = -\int p(x)\,dx \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow y(x) = e^{-\int p(x)\,dx}.$$

Escolhendo uma primitiva $P(x)$ de $p(x)$, podemos escrever a solução geral na forma

$$y(x) = e^{-P(x)+c}.$$

Denotando e^c por k, temos que

$$y(x) = k\,e^{-P(x)}$$

ou, simplesmente

$$y(x) = k\,e^{-\int p(x)\,dx} \tag{2.6}$$

é a solução geral da equação (2.5) .

A solução (2.6) é a ***solução geral***; e, neste caso, engloba **todas** as possíveis soluções da equacão 2.5 .

PROBLEMAS DE VALOR INICIAL COM EQUAÇÕES LINEARES HOMOGÊNEAS

O problema de calcular a solução $y(x)$ de uma equação diferencial (linear homogênea se primeira ordem) que tem um valor conhecido y_0, correspondendo a um valor x_0 pré-fixado, é chamado de *Problema de Valor Inicial (PVI)*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Calculamos, se possível, a solução geral da equacão diferencial do problema, e usamos os dados iniciais para calcular o valor do o parâmetro k, que corresponde à solução particular procurada.

Exemplo 2.9.

Obtenha *a* solução $y(x)$ da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 0, \quad x > 0,$$

tal que $y(1) = 2$.

Solução:

A solução geral da equação acima é $y(x) = k\,e^{-\int 1/x\,dx} = k\,|x|^{-1}$. O problema informa que estamos procurando soluções definidas em intervalos onde $x > 0$. Assim, a solução geral é $y(x) = k/x, x > 0$. Impondo a condição inicial $y(1) = 2$, obtém-se $2 = k/1$, de modo que *a* solução do problema, no intervalo $(0, +\infty)$ é $y(x) = 2/x$.

Exemplo 2.10.

Resolva
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -e^{x^4}y \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Solução: Não sabemos obter, com métodos elementares, uma primitiva de $p(x) = -e^{x^4}$. Mas podemos sempre escolher um número real x_0, no intervalo onde $p(x)$ está definida, por exemplo $x_0 = 1$, e formar a função

$$y(x) = k \cdot e^{-\int_1^x e^{t^4}\,dt};$$

que representa a solução geral da equação proposta.

Para determinar a constante k, impomos que $y(1) = 2$. Assim

$$2 = y(1) = ke^{-\int_1^1 e^{t^4}\, dt} = k \cdot 1 \Longrightarrow k = 2$$

Portanto

$$y(x) = 2e^{-\int_{x_0}^{x} e^{t^4}\, dt}$$

é a solução procurada.

Atividade de auto-avaliação 2.2

Justifique, com base no curso de Álgebra Linear, o nome *equação diferencial linear* dado à equacão da definição 2.3.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM NÃO HOMOGÊNEAS

Definição 2.4.

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $p, q : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, funções contínuas. Toda a equação diferencial que pode ser posta, na forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{2.7}$$

é chamada *uma equação diferencial linear não-homogênea de* 1^a *ordem.*

!

Atenção!

Observe que as equações diferenciais não homogêneas que acabamos de definir, a rigor,deveriam ser chamadas de equações diferenciais *afins* de primeira ordem. Todavia a denominação *linear não homogênea* é universalmente adotada para essas equações, e será mantida ao longo do nosso curso.

Cálculo de Soluções de Equações Diferenciais Lineares Não homogêneas

Para resolver a equação 2.7, procuramos uma função $\mu(x)$ conveniente, de tal modo que, multiplicando ambos os membros da equação por essa função, obtemos uma equação que saibamos resolver.

Procedendo de acordo com essa ideia, temos:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + p(x)\mu(x)y = \mu(x)q(x) \tag{2.8}$$

Agora observe que se a função $\mu(x)$ satisfizer a equacão auxiliar

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = p(x)\mu(x) \tag{2.9}$$

então (2.8) se converte em

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \frac{d\mu(x)}{dx}y = \mu(x)q(x)\,.$$

Ou seja, (2.8) assume a forma

$$\frac{d}{dx}\Big(\mu(x)y\Big) = \mu(x)q(x) \tag{2.10}$$

que é uma função do tipo fundamental.

A pergunta importante é:

Existe alguma solução $\mu(x)$ de 2.9?

Observando que $dy/dx = p(x)y$ é uma equação diferencial linear homogênea, sabemos que ela tem solução. Por exemplo:

$$\mu(x) = e^{\left(\int p(x)\,dx\right)}.$$

Substituindo $e^{\left(\int p(x)\,dx\right)}$ em 2.10 obtemos:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)\,dx}\cdot y\right) = e^{\int p(x)\,dx}\cdot q(x).$$

Integrando:

$$e^{\int p(x)\,dx} \cdot y = \int e^{\int p(x)\,dx} \cdot q(x)\,dx + c.$$

Portanto

$$y = e^{\left(-\int p(x)\,dx\right)} \left[\int e^{\int p(x)\,dx} q(x)\,dx + c \right] \qquad (2.11)$$

é uma solução geral da equação não homogênea que estamos estudando.

✍ Quando $q(x)$ é a função nula, a equação não-homogênea se reduz a uma equação diferencial homogênea. Consistentemente a fórmula acima se reduz à solução geral da homogênea. Essa equação homogênea é dita ser a *homogênea associada*.

✍ A função $\mu(x) = e^{\left(\int p(x)\,dx\right)}$ é chamada de ***fator de integração*** para a equação não-homogênea. Note que esta função nunca se anula.

PROBLEMAS DE CAUCHY COM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES NÃO HOMOGÊNEAS

Como sempre, se estivermos interessados numa solução específica da equação linear não-homogênea, satisfazendo a uma condição inicial $y(x_0) = y_0$, devemos resolver o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} . \qquad (2.12)$$

Temos dois caminhos possíveis:

- Primeiro, podemos tentar calcular explicitamente as integrais indefinidas que aparecem na solução geral da equação não homogênea e, posteriormente, determinar o valor da constante que se adapta à condição inicial.

- Na impossibilidade de calcular primitivas, temos uma segunda via:

Integrando, entre x_0 e x, ambos os lados de

$$\frac{d}{dx}\Big(\mu(x)y\Big) = \mu(x)q(x)$$

obtemos

$$\mu(x)y - \mu(x_0)y_0 = \int_{x_0}^{x} \mu(t)q(t)\,dt$$

E já que $\mu(x) \neq 0$, pois $\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$ para todo x, podemos explicitar a solução y da equação 2.12:

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\mu(x_0)y_0 + \int_{x_0}^{x} \mu(t)q(t)\,dt\right] \qquad (2.13)$$

O Teorema Fundamental do Cálculo nos garante que 2.13 é a solução do problema de valor inicial 2.12.

Exemplo 2.11.

Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2e^{x^2} + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Solução:

Os dados do exemplo são: $p(x) = -1$, $q(x) = 2e^{x^2}$. Aplicando as fórmulas acima, obtemos $\mu(x) = e^{-x}$, e

$$y = e^{x}\left\{1\cdot 1 + \int_{0}^{x} e^{-t}2e^{t^2}dt\right\}$$

Isto é,

$$y = e^{x}\left(1 + 2\int_{0}^{x} e^{t^2-t}\,dt\right)$$

Exemplo 2.12.

A função definida por

$$\text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

é chamada de *função erro*. Mostre que

$$y(x) = e^{x^2} + \frac{1}{2} e^{x^2} \sqrt{\pi}\, \text{Erf}(x)$$

é a solução de

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2xy + 1 \\[2ex] y(0) = 1 \end{cases}$$

Solução:

Por um lado

$$\begin{aligned} y'(x) &= 2xe^{x^2} + xe^{x^2}\sqrt{\pi}\,\text{Erf}(x) + \frac{1}{2}e^{x^2}\sqrt{\pi}\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2} \\ &= 2xe^{x^2} + xe^{x^2}\sqrt{\pi}Erf(x) + 1 \end{aligned}$$

Por outro lado, é imediato que

$$2xy + 1 = 2xe^{x^2} + xe^{x^2}\sqrt{\pi}Erf(x) + 1$$

Além disso, claramente

$$e^{x^2} + \frac{1}{2}e^{x^2}\sqrt{\pi}\,\text{Erf}(x)\Big|_{x=0} = e^{0^2} + \frac{1}{2}e^{0^2}\sqrt{\pi}\,\text{Erf}(0) = 1$$

o que conclui o exemplo.

MODELOS COM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

Exemplo 2.13.

A Lei do Resfriamento de Newton

Um corpo, a uma temperatura T_0 , é introduzido num ambiente a uma tempertura T_a num certo instante inicial t_0. Suponhamos que:

Para sua comodidade, repetimos os enunciado de alguns problemas de modelagem, enunciados, mas não solucionados, na Aual 1.

- $T_0 \neq T_a$.
- Admitindo que o corpo é homogêneo (em cada instante de tempo, a temperatura em cada ponto do corpo é a mesma, só variando com o tempo)
- A temperatura do meio ambiente T_a é constante no tempo, e é a mesma em todos os pontos do ambiente.
- O calor flui do ambiente mais quente para o ambiente mais frio.
- (Lei do resfriamento de Newton) - Em cada instante de tempo t,a variação da temperatura do corpo devida à troca de calor através da superfície é proporcional à diferença entre as temperaturas do corpo e do meio ambiente naquele instante.

Queremos deteminar a temperatura do corpo em cada instante $t > t_0$

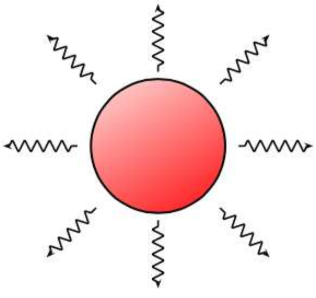


Figura 2.4: Corpo aquecido trocando calor.

Solução:

Seja ΔT a variação da temperatura do corpo devida à troca de calor através da superfície no intervalo de tempo Δt.

A variação <u>por unidade de tempo</u> é calculada por meio da regra de três:

$$\begin{array}{ccc} \Delta t & \rightsquigarrow & \Delta T \\ 1 & \rightsquigarrow & x \end{array}$$

De onde

$$x = \frac{\Delta T}{\Delta t}$$

Assim a variação instantânea da emperatura do corpo é dada por

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{dT}{dt}$$

As informações físicas das hipóteses feitas podem ser resumidas matematicamene por meio da fórmula

$$\frac{dT}{dt} = -k(T(t) - T_a)$$

onde k é uma constante positiva que depende das propriedades fisico-químicas do corpo.

!

Atenção!

O sinal negativo se deve ao fato de o calor fluir do ambiente mais quente para o mais frio.
Assim, se $T > T_a$ então $T - T_a > 0$ e portanto $-k(T(t) - T_a) < 0$. Isto é $\frac{dT}{dt} < 0$, e portanto a temperatura do corpo está diminuindo. Isso é consistente com o fato de o corpo estar perdendo calor para o meio ambiente.
Analogamente, se $T < T_a$ então $T - T_a < 0$ e portanto $-k(T(t) - T_a) > 0$. De onde $\frac{dT}{dt} > 0$, o que significa que o corpo está ganhando calor do meio ambiente.

Para completar o modelo, acrescentamos o "dado inicial": $T(t_0) = T_0$. Temos assim o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = -k(T(t) - T_a) \\ T(t_0) = T_0 \end{cases}$$

A próxima etapa consiste na resolução do problema acima. Fazemos $y = T(t) - T_a$ de modo que $dy/dt = dT/dt$ e a equação se torna

$$\frac{dy}{dt} = -ky$$

cuja solução é $y(t) = Ce^{-kt}$ ou seja

$$T(t) - T_a = Ce^{-kt}$$

Introduzindo o dado inicial $T(t_0) = T_0$ tira-se que

$$C = e^{kt_0}(T_0 - T_a)$$

Assim

$$\boxed{T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-k(t-t_0)}}$$

Observe que à medida que t aumenta , valor $T(t)$ tende ao valor da temperatura ambiente T_a. No limite a tempertatura do corpo se estabiliza no valor da temperatura do ambiente.

No nosso modelo a temperatura do corpo só se estabiliza num tempo infinito. Na prática. a temperatura do meio ambiente é atingida num tempo finito. Essa é uma indicação de que o nosso modelo é apenas um modelo aproximado.

Aplicação

O crime da secretária

Ao chegar ao trabalho, a secretária de um importante empresário encontra-o morto.Ela telefona imediatamente para a polícia, que chega ao local 2hs. depois da chamada. O detetive encarregado examina o ambiente e o corpo. Uma hora mais tarde ele repete o exame. Então decide prender a secretária. Por que?

Resolução:

A secretária chegou na delagacia protestando inocência, reclamando da arbitrariedade policial e ameaçando convocar a imprensa. O delegado de plantão então requisitou o relatório do detetive, no qual encontrou apenas os seguintes dados:

1)

Hora	Temperatura ambiente	Temperatura do corpo
t^*	20^oC	35^oC
t^*+1	20^oC	$34{,}2^oC$

2) Temperatura de pessoas vivas = $36{,}5^oC$

3) Curso de Equações Diferenciais - CEDERJ

Então ele concordou com o detetive.
De fato,
para cada $t > 0$ seja $T(t)$ a temperatura do corpo no instante t; e seja $t_0 = 0$ o instante da morte. Então:

i. Por hipótese, $0 = t_0 < t^* - 2 < t^*$
(t^* = instante da chegada da polícia, $t^* - 2$ instante em que a secretária telefonou)

ii. $T(t_0) = 36{,}5^oC$

iii. $T(t^*) = 35^oC$

iv. $T(t^* + 1) = 34{,}2^oC$

Utilizando o modelo matemático para o resfriamento de um corpo (Curso de Equações- CEDERJ, etc.etc.) o detetive obteve

$$T(t) = 20 + (36,5 - 20)e^{-kt}$$

Assim, substituindo t por t^* e por $t^* + 1$, junto com as respectivas temperaturas obtém-se as equações:

$$\begin{cases} 35 & = 20 + 16,5e^{-kt^*} \\ 34,2 & = 20 + 16,5e^{-k(t^*+1)} \end{cases}$$

De onde,

$$\begin{cases} e^{-kt^*} = 15/16,5 \\ e^{-k(t^*+1)} = 14,2/16,5. \end{cases}$$

Portanto (trabalhando com 4 decimais):

$$e^{-k(t^*+1)}/e^{-kt^*} = 14,2/15$$

$$\therefore \quad e^k = 1/0,9466 = 1,0564$$

$$\therefore \quad k = 0,0548$$

Como

$$e^{-kt^*} = 15/16,5$$

então

$$e^{0,0548t^*} = 16,5/15$$

$$\therefore t^* = ln(16,5/15)/0,0548 = 1,7392$$

Mas então

$$t^* - 2 = -0,2608 < t_0 = 0.$$

Ou seja, quando a secretária telefonou, o empresário ainda não tinha morrido.

Exemplo 2.14.

Reações Químicas de primeira ordem

Misturas Homogêneas

Um reservatório contém V litros de água pura. A partir de um certo instante começa-se a despejar uma solução de água salgada (c kg de sal por litro) no reservatório, à taxa de α litros por segundo, mantendo-se homogênea a mistura que vai se formando. Ao mesmo tempo retira-se, por um orifício, parte da solução obtida, à mesma razão de α litros por segundo. Determinar a quantidade de sal no reservatório num instante t qualquer.

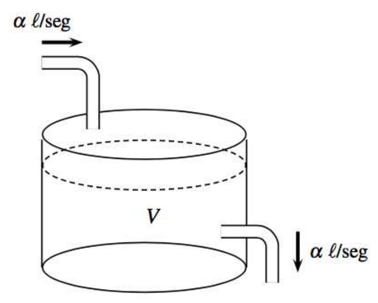


Figura 2.5: Tanque de mistura.

Solução:

A cada segundo entram no reservatório α litros de água salgada, com c quilos de sal por litro; ou seja, a quantidade de sal aumenta αc quilos por segundo.Podemos escrever que a taxa de aumento da concentração de sal é dada por $dy/dt = \alpha c$ Mas, ao mesmo tempo o reservatório perde α litros de solução, com (y/V) kg. de sal por litro. Ou seja dy/dt diminui de $\alpha y/V$ quilos de sal por segundo.

Portanto, a taxa de variacão instantânea da quantidade de sal no reservatório é igual a à taxa de variação positiva menos a taxa de variação negativa, ou seja:

$$\left\langle \begin{array}{l} \text{variação instantânea da} \\ \text{quantidade total de sal} \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{l} \text{variação instantânea da} \\ \text{quantidade de sal que entra} \end{array} \right\rangle - \left\langle \begin{array}{l} \text{variação instantânea da} \\ \text{quantidade de sal que sai} \end{array} \right\rangle$$

$$\frac{dy}{dt} = \alpha c - \alpha \frac{y}{V}$$

Assim o modelo matemático para o problema acima é

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \alpha c - \alpha \dfrac{y}{V} \\ y(0) = 0; \end{cases}$$

cuja equação diferencial é linear, não homogênea, tendo como solução

$$y(t) = cV\left[1 - e^{-(\alpha/V)t}\right].$$

Análise da solução: À medida que t aumenta, $y(t)$ tende ao valor cV, correspondente à situação em que todo o volume V é ocupado pela solução, não ocorrendo mais nenhuma modificação na concentração de sal (pois a solução que entra tem a mesma concentração da solução que já está no reservatório). Segundo o modelo acima, seria necessário um tempo infinito para que a concentração de sal se estabilizasse, o que evidentemente não ocorre na prática. Isso mostra,mais uma vez, que os modelos matemáticos são - em geral - modelos aproximados.

Aplicação

Despoluição de lagoas

Alguns países, por falta legislação específica, ou de recursos suficientes, ou mesmo por negligência na fiscalização do governo, estão sujeitas à constante poluição do ar e da água. Nos restringiremos neste modelo às formas de despoluição de lagos e lagoas uma vez que no caso dos rios, quando a poluição ainda não causou danos extremos, eles próprios podem se autoreparar, bastando para tanto que se tenha uma diminuição no lançamento de poluentes em suas águas. Já no caso de lagoas (ou lagos) o processo de despoluição é mais lento, podendo ser efetivado caso ainda não estejam "mortas". Tal mecanismo de limpeza consiste em substituir sua água gradual-

mente. Nos modelos propostos, encaramos o fluxo da água na lagoa como um problema de diluição de substâncias, não levando em consideração a sedimentação dos poluentes, sua ação biológica etc. Faremos agora as "hipóteses simplificadoras":
Existe um fluxo de água que entra na lagoa, proveniente de um riacho ou minas, e uma vazão para outro riacho. As vazões de entrada e saída são iguais e constantes, valendo r (ℓ/seg) (r litros por segundo).
Quando a água entra na lagoa, se mistura rapidamente e de maneira homogênea, havendo uma distribuição uniforme dos poluentes.
O volume da lagoa é constante (a quantidade de água de chuva se equilibra com a que se evapora) e é igual a V litros.
Os poluentes são retirados da lagoa somente através do fluxo de saída.
A poluição provém de uma indústria instalada na margem da lagoa ou do riacho que a alimenta. Se a quantidade de poluentes existente na lagoa é prejudicial ao desenvolvimento da vida aquática ou mesmo à recreação, quais os mecanismos existentes para se efetuar sua limpeza?

Solução:

Consideremos primeiramente o caso em que a indústria cessa totalmente a poluição da lagoa, colocando filtros especiais. Seja P_0 a quantidade de detritos químicos existentes na lagoa no instante em que cessou a poluição, $t = O$; seja $P = P(t)$ a quantidade de poluentes dissolvida na água no tempo t. Como o volume da lagoa é constante e as vazões dos riachos também, então é razoável supor que a variação da quantidade de poluentes por unidade de tempo seja proporcional à quantidade total existente na lagoa em cada instante, de modo que

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{rP}{V} \tag{2.14}$$

onde $r > 0$ é a vazão de cada rio.

A solução de (2.14), para $P(0) = P_0$, é

$$P(t) = P_0\, e^{-rt/V}$$

Neste caso, a quantidade de poluentes diminui rapidamente no princípio e depois lentamente; de qualquer forma $P \to 0$ quando t cresce. Assim, o problema pode ser solucionado e um aumento na vazão dos dois riachos acelera a despoluição. Se, por outro lado, a indústria continuar poluindo, o modelo matemático precisa ser modificado. Consideremos $Q = Q(t)$ a quantidade total de poluentes acumulados na lagoa pela indústria desde o instante $t = 0$ até o tempo t.

Então, $P_i(t) = \dfrac{dQ}{dt}$ é sua variação por unidade de tempo.

A equação 2.14 anterior deve ser modificada para

$$\frac{dP}{dt} = P_i(t) - \frac{r}{V}P(t) \quad \text{com } r > 0 \quad \text{e } P(0) = P_0 \tag{2.15}$$

(2.15) é um problema de valor inicial com uma equação diferencial linear de primeira ordem não homogênea.

A solução de 2.15 é dada por

$$P(t) = P_0 e^{-rt/V} + e^{-rt/V} \int_0^t e^{-rs/V} P_i(s)\, ds.$$

✍ A primeira parcela de $P(t)$, isto é, $P_0 e^{-rt/V}$, é independente do termo proveniente da nova poluição, e para t suficientemente grande seu valor é desprezível. o que equivale a dizer que a poluição inicial não afeta sensivelmente a quantidade total de poluentes.

Vamos analisar um caso particular, onde a indústria deposita continuamente uma quantidade constante de poluentes, então $P_i(t) = P_{i0}$ (constante). A Equação 2.15 se torna

$$\frac{dP}{dt} = P_{i0} - \frac{r}{V}P(t), \tag{2.16}$$

que pode ser reescrita como $\dfrac{dP}{dt} + \dfrac{r}{V}P(t) = P_{i0}$ (linear com coeficientes constantes). Sua solução será

$$P(t) = P_0 e^{-rt/V} + \frac{VP_{i0}}{r}(1 - e^{-r/Vt}) =$$

$$= \left(P_0 - \frac{VP_{i0}}{r}\right)e^{-r/Vt} + \frac{V}{r}P_{i0};$$

e quando t cresce, $P(t)$ tende a se estabilizar no ponto de equilíbrio $\dfrac{VP_{i0}}{r}$.

Se $P_0 = \dfrac{VP_{i0}}{r}$, a quantidade de poluentes no lago permanece inalterada.

Se $P_0 < \dfrac{VP_{i0}}{r}$, a quantidade $P(t)$ cresce até o valor limite $\dfrac{VP_{i0}}{r}$.

Se $P_0 > \dfrac{VP_{i0}}{r}$, a quantidade $P(t)$ diminui com o tempo, ainda tendendo a $\dfrac{VP_{i0}}{r}$; neste caso se a vida aquática for compatível com o nível $\dfrac{VP_{i0}}{r}$, ela poderá ser restaurada depois de algum tempo.

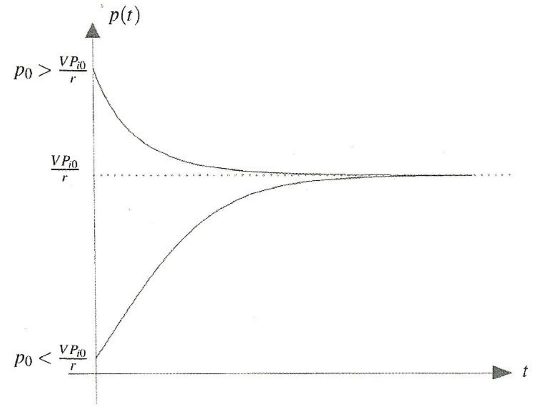


Figura 2.6: Evolução da quantidade de poluentes

Se utilizarmos a concentração de poluentes , em vez de sua quantidade isto é, $C(t) = \dfrac{P(t)}{V}$, a solução da Equação (XX) vem dada por uma forma mais prática, e mais frequente na modelação:

$$C(t) = [C_0 - C_{i0}]e^{-r/Vt} + C_{i0}.$$

Exemplo 2.15.

Ciruitos Elétricos "RL"

Considere o circuito elétrico consistindo de uma bateria, um resistor (resistência R) e uma bobina de indutância L. Suponha que R e L são constantes. No instante $t = 0$ a chave C é fechada.

Determinar a corrente I em um instante $t > 0$ qualquer.

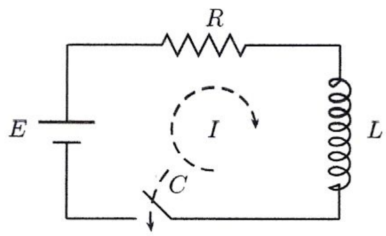


Figura 2.7: Um Circuito RL

Solução:

A primeira etapa da resolução consiste em formular um problema de valor inicial que "retrate" o circuito acima. Podemos proceder da seguinte maneira:

A queda de voltagem através da resistência (que é igual a IR pela *lei de Ohm*) é igual à voltagem E produzida pela bateria menos a força eletromotriz produzida pela bobina, essa última sendo proporcional à taxa de variação da corrente com o tempo; a constante de proporcionalidade sendo a indutância L. Essas informações físicas permitem imediatamente formar a equação diferencial $IR = E - L\dfrac{dI}{dt}$ (a equação diferencial do modelo), ou ainda:

$$L\frac{dI}{dt} + IR = E$$

No instante $t = 0$, quando a chave é ligada, ainda não circula nenhuma corrente, de modo que $I(0) = 0$.
Temos então o seguinte PVI, associado ao circuito dado:

$$\begin{cases} L\dfrac{dI}{dt} + IR = E \\ I(0) = 0 \end{cases}$$

A próxima fase é a de resolver matematicamente o PVI:
Vamos repetir, para relembrar, o procedimento, a redução da equação diferencial linear do problema à uma equação do tipo fundamental:
Normalizando a equação:

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}\left(I - \frac{E}{R}\right)$$

Em seguida fazemos a mudança de variáveis $y = I - \dfrac{E}{R}$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dI}{dt}$$

e a equação fica

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{R}{L}y$$

Se $y \neq 0$

$$\frac{(dy/dt)}{y} = -\frac{R}{L}$$

Isto é

$$\frac{d}{dt}\left\{ln[y(t)]\right\} = -\frac{R}{L}$$

Fazendo $ln[y(t)] = z$ ainda podemos escrever

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{R}{L}$$

que é uma equção do "tipo" das que estudamos no Cálculo I. A solução é

$$z(t) = \int -\frac{R}{L}\,dt = -\frac{R}{L}t + C_1$$

onde C_1 é uma constante arbitrária. Assim

$$ln[y(t)] = -\frac{R}{L}t + C_1$$

Aplicando a exponencial aos dois lados

$$y(t) = e^{-\frac{R}{L}t + C_1} = e^{C_1}e^{-\frac{R}{L}t} = Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

Voltando à variável I:

$$I - \frac{E}{R} = Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

E finalmente, já que $I(0) = 0$, obtemos $C = -\dfrac{E}{R}$

Assim a solução (única OK?) do PVI acima é

$$I(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{(-R/L)t}\right)$$

Uma última etapa consiste em interpretar a resposta obtida, ou obter informações relevantes para o problema a partir da solução matemática. Por exemplo poderíamos querer saber o gráfico de $I(t)$, e/ou o comportamento de $I(t)$ " muito tempo" depois de ligar a chave. Um exercício de Cálculo I

Naturalmente descobrir o comportamento de $I(t)$ para t muito grande é investigar $\lim_{t\to+\infty} I(t)$. No caso presente temos

$$\lim_{t\to+\infty} I(t) = \frac{E}{R},$$

indicando que a corrente tende a se estabilizar à medida que o tempo passa.

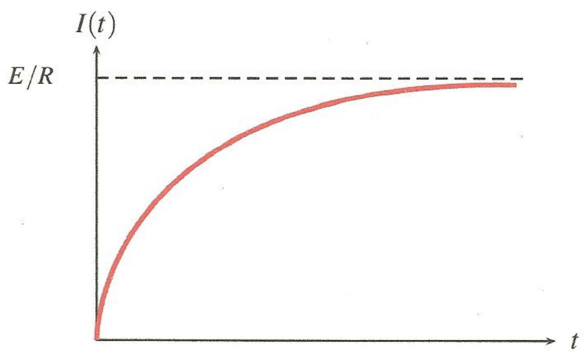


Figura 2.8: Comportamento da corrente

Exemplo 2.16.

Juros acumulados continuamente

✍ Você está convidado(a) a preencher os detalhes de qualquer ponto que lhe pareça não muito claro.

Suponha que P_0 reais são depositados num fundo de investimentos que dá um rendimento de $100\,r\%$ por ano. Nenhum outro depósito é feito desde então. Consideremos a quantia Q que estará na conta ao final de um ano. Esta quantia dependerá do número de vezes que os juros são computados no decorrer do ano. Se é computado o juro simples, então

$$Q = P + rP = (1+r)P\cdot$$

Se os juros são calculados semestralmente, então ao final dos seis primeiros meses a conta estará com $[1+(r/2)]P$ reais, de modo que no final do ano

$$Q = \left(1+\frac{r}{2}\right)\left[\left(1+\frac{r}{2}\right)P\right] = \left(1+\frac{r}{2}\right)^2 P.$$

Se os juros forem computados três vezes ao ano, a quantia final será

$$Q = \left(1 + \frac{r}{2}\right)^3 P.$$

De modo geral, se os juros forem calculados n vezes por ano, então

$$Q = \left(1 + \frac{r}{2}\right)^n P.$$

O "sentimento " comum é que Q aumenta em proporção direta com n. Entretanto existe um limite para a quantidade de reais que se pode obter calculando os juros com frequencia cada vez maior.

Entretanto, é razoavelmente intuitivo que, à medida que n vai aumentando, estamos nos áproximando da situação em que a taxa instantânea de variação (crescimento) do dinheiro na conta é diretamente proporcional à quantidade de dinheiro naquele instante. Nesta situação ideal

$$\frac{dQ}{dt} = rQ,$$

que nada mais é do que uma lei "malthusiana" de crescimento.

Mas então $Q(t) = Pe^{rt}$, de modo que , ao final de um ano teremos a quantia máxima de

$$Q = Pe^{r} \quad \text{reais.}$$

Obs: A argumentação acima pode ser rigorosamente justificada por meio do limite notável

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n P = Pe^{r},$$

que encontramos nos livros de Cálculo.

Atenção!

Existe muitos outros modelos matemáticos com equações diferenciais fundamentais e equações diferenciais lineares de primeira ordem:

KITCHEN Jr. J.W.; - *Calculus of One Variable*, Addison-Wesley Publishing Company, 1968.

Neste livro, são desenvolvidos muitos modelos com a equação diferencial fundamental, usando a técnica que aplicamos no **Exemplo 2.5**.

Alguns modelos clássicos famosos, envolvendo o fenômeno físico do decaimento radiativo de certas substâncias, são trabalhados em

BOYCE,W;DIPRIMA,R. - *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno-8^a.ed.*Rio de Janeiro: LTC Editora,2008;

ZILL,D.- *Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem*.Rio de Janeiro: Thomson,2003;

Uma aplicação interessante do modelo de decaimento radiativo no diagnóstico de falsificações de obras de arte se acha no livro

BRAUN,M. - *Equacões Diferenciais e suas Aplicações*, Editora Campus, RJ, 1987;

GUIDORIZZI. L.- *Um Curso de Cálculo, VoI. 1*, LTC, 1979.

Resumo

Nesta aula, aprendemos

1. que um tratamento sistemático das Equações Diferenciais pode se iniciar pelo estudo da Equação Diferencial Fundamental, que estabelece uma *ponte* muito natural, e completa e utiliza diversos conteúdos estudados nos cursos de Cálculo;

2. que uma das maneiras de prosseguir no estudo de equações diferenciais é apresentar, por meio de modelos matemáticos, novas equações diferenciais, as quais, mediante o emprego de mudanças de coordenadas, se reduzem a equações diferenciais fundamentais;

3. em particular, identificamos e aprendemos a resolver a classe especial da *equações diferenciais lineares de primeira ordem*;

4. por fim, estudamos vários exemplos de fenômenos cujos modelos matemáticos são equações diferenciais lineares de primeira ordem.

O QUE VEM POR AÍ:

Na próxima aula, apresentaremos duas equações diferenciais muito importantes: As equações diferenciai de Bernoulli e de Riccati.

Elas são importantes tanto do ponto de vista histórico, pois provocaram avanços da própria Matemática, quanto do ponto de vista de servirem para modelar problemas importantes e atuais, das áreas de Engenharia de Controle, Engenharia de Produção (equação logística), Geofísica, para mencionar apenas algumas.

As equações de Bernoulli e Riccati são equações diferencias de primeira ordem ***não lineares*** mas que podem ser transformadas em equações diferenciais lineares.
Este fato não é absolutamente comum, e sua descoberta se deve a dois dos maiores matemáticos de todos os tempos: Leibniz e Euler.

!

Atenção!
O estudo específico de equações diferenciais lineares será retomado, e ampliado, a partir da Aula 9.

Nossa jornada prossegue! E de forma cada vez mais interessante.

SOLUÇÕES COMENTADAS DAS ATIVIDADES DESTA AULA:

Solução comentada da atividade 2.1

As funções cujas derivadas são iguais a $e^x - 3x^2$, no intervalo especificado, são precisamente as soluções da equação acima. Sabemos que qualquer função $y(x)$,

$$y(x) = e^x - x^3 + c \tag{2.17}$$

onde c é um parâmetro, é a solução geral da equação.

Agora utilizamos a informação extra: *o gráfico da função solução passa pelo ponto* $(0,-1)$. Isso significa que no ponto $x = 0$ o correspondente valor y é igual a -1. E essa observação vai permitir calcular o valor do parâmetro c. Substituindo $x = 0$ e $y = -1$ na solução geral 2.17, encontramos

$$x = 0 \Longrightarrow y = 1\,.$$

$$-1 = y(0) = e^0 - 0^3 + c \Longrightarrow c = -2\,.$$

Conclusão: Dentre todas as funções definidas em $(-3,+\infty)$ com derivadas iguais a $e^x - 3x^2$, aquela cujo gráfico passa por $(0,1)$ é $y(x) = e^x - x^3 - 2$.

Comentário: O exemplo acima é frequentemente enunciado da forma suscinta como: Resolva a *equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = e^x - 3x^2 \quad y(0) = -1;$$

e você pode observar que o PVI é apresentado em uma linha só, sem chaves.

Solução comentada da atividade 2.2

Usando nossos conhecimentos de Álgebra Linear, podemos apresentar a seguinte justificativa para o nome ***equação diferencial linear*** de primeira ordem, e homogênea.
Bem, ela é ***linear*** porque dadas quaisquer duas funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ tais que, individualmente

$$\frac{dy_1}{dx} + p(x)y_1 = 0\,,$$

$$\frac{dy_2}{dx} + p(x)y_2 = 0\,,$$

então, para todo $x \in I$,

$$\frac{d(y_1+y_2)}{dx} + p(x)(y_1+y_2) = \left(\frac{dy_1}{dx} + p(x)y_1\right) +$$

$$+ \left(\frac{dy_2}{dx} + p(x)y_2\right) = 0+0 = 0\,,$$

e, para qualquer número real α, e todo $x \in I$,

$$\frac{d(\alpha \cdot y)}{dx} + p(x)(\alpha \cdot y) = \alpha \cdot \left(\frac{dy}{dx} + p(x)y\right) = \alpha \cdot 0 = 0\,,$$

As duas igualdades acima mostram que somas de funções que verificam a equação e produtos de funções que verificam a equação por números reais, são também funções que verificam a equação. Esses são os quesitos básicos que caracterizam processos lineares. Discutiremos esses processos mais detalhadamente a partir da Aula 9.

Aula 3

Equações não lineares: Bernoulli, Riccati e Separáveis

Objetivos

Ao final desta aula, você será capaz de:

1. identificar as equações diferencias de Bernoulli, Riccati e as equações separáveis;
2. obter soluções das equações de Bernoulli, de Riccati, e das separáveis, utilizando mudanças de variáveis.

Pré-requisito:
Equações diferenciais fundamentais; Equações diferenciais lineares de primeira ordem.

INTRODUÇÃO

Nesta aula, iniciamos o estudo sistemático de equações diferenciais não lineares. Já estudamos equações diferenciais fundamentais, que, excetuando a equação trivial $y' = 0$, são essencialmente não lineares. Agora começaremos o estudo de outras equações não lineares, que também surgiram logo nos primeiros tempos do Cálculo, e tem sido, desde então, muito importantes para desenvolvimento da Matemática e de suas aplicações. São as equações de Bernoulli, de Riccati e as separáveis.

Introduziremos primeiramente a equação de Bernoulli e calcularemos uma solução geral para ela. Em seguida, estudaremos a equação de Riccati e um método para resolvê-la, baseados no estudo anterior de equações de Bernoulli. Mesmo sendo equações diferenciais não lineares, vamos poder calcular suas soluções por meio de equações lineares associadas, que sabemos resolver. A partir das soluções das equações diferenciais lineares associadas, poderemos recuperar as soluções das equações originais.

A “filosofia” deste curso é ir aumentando gradativamente a complexidade das equacões diferenciais tratadas; reduzindo, se possível, as mais complicadas a outras equações que já aprendemos a resolver.

A última parte desta aula, tratará das equações diferenciais separáveis. Elas também são generalizações da equação diferencial fundamental, mas, em geral, suas soluções não são obtidas por meio de equações lineares auxiliares.

✍ É interessante notar que tanto a equação de Bernoulli quanto a de Riccati foram propostas, inicialmente, como equações para as quais se procurava um modo de separar variáveis (ou resolver por quadraturas, o que significa transformar em equações diferenciais fundamentais, e calcular as soluções dessas últimas, usando primitivas ou o (primeiro) teorema fundamental do cálculo). As “conversões” das equações de Bernoulli e de Riccati em equações diferenciais lineares só aconteceram posteriormente.

A EQUAÇÃO DE BERNOULLI

Definição 3.1.

Chama-se *Equação de Bernoulli* a toda equação diferencial de primeira ordem que pode ser posta na forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n,$$

sendo $p(x)$ e $q(x)$ funções contínuas num intervalo I, e $n \in \mathbb{R}$ um parâmetro tal que $n \neq 0$ e $n \neq 1$.

✍ se o parâmetro n é igual a 1, a equação de Bernoulli se reduz a uma equação diferencial linear de primeira ordem homogênea. Se $n = 0$, a equacão de Bernoulli se reduz a uma equação diferencial linear de primeira ordem não homogênea.

Exemplo 3.1.

Identifique as equações de Bernoulli na lista abaixo:

1. $x\dfrac{dy}{dx} + y = x^3y^{-3}$
2. $\dfrac{dy}{dx} + xy = x^3y^3$
3. $2xy\dfrac{dy}{dx} - y^2 + x = 0$
4. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial z}{\partial t};$
5. $y\dfrac{dy}{dt} + y^2 = sen\,t.$

Solução:

1. A equação $x\dfrac{dy}{dx} + y = x^3y^{-3}$ pode ser posta na forma $dy/dx + (1/x)y = x^2y^{-3}$, e portanto é uma equação de Bernoulli *em qualquer intervalo que não contenha* $x = 0$;

2. a equação $\dfrac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$ é uma equaçãoi de Bernoulli definida no intervalo $(-\infty,+\infty)$;

3. a equação $2xy\dfrac{dy}{dx}-y^2+x=0$ pode ser escrita sob a forma $dy/dx-(1/2x)y=-(1/2)y^{-1}$, e é identificável como uma equação de Bernoulli *em qualquer intervalo que não contenha* $x=0$. Esta equação não admite soluções que assumam o valor 0;

4. a equação $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial z}{\partial t}$ é uma equação diferencial parcial. Não é uma equação de Bernoulli;

5. a equação $y\dfrac{dy}{dt}+y^2=sen t$ se escreve também como $dy/dt+y=sen t\, y^{-1}$ e então é reconhecível como uma equação de Bernoulli.

CÁLCULO DE SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE BERNOULLI:

✍ Observe que, *se* $n\geq 0$ a função nula ($y\equiv 0$) é sempre uma solução da equação

$$y'+p(x)y=q(x)y^n.$$

Se $n<0$, a função nula não é uma solução da equação. Se a função nula é solucão, costuma-se chamá-la de *solução trivial*.

Nosso primeiro objetivo é o de calcular soluções não triviais da equação de Bernoulli:

Seja então $y(x)\neq 0$ para todo $x\in I$. Nesta situação, dividindo os dois lados da equação por y^n:

$$y'y^{-n}+p(x)y^{1-n}=q(x) \tag{3.1}$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$z=y^{1-n},$$

e observando que

$$z'=(1-n)y^{-n}y',$$

obtemos (substituindo as expressões de z e z' em (3.1)) uma nova equação, agora na variável z, equivalente à original:

$$\frac{z'}{1-n} + p(x)z = q(x).$$

Esta nova equação é uma equação linear de primeira ordem não homogênea, que já aprendemos a resolver.

Depois de calcular as soluções $z(x)$ da equacão diferencial linear, soluções $y(x)$ da equação original por meio da substituição inversa

$$y = z^{1/(1-n)} = \sqrt[1-n]{z}.$$

Exemplo 3.2.

Determine a solução da equação

$$\frac{dy}{dx} - 2\frac{y}{x} = 3xy^2, x > 0$$

Solução: Temos uma equação de Bernoulli, com

$$p(x) = -\frac{2}{x}, \quad q(x) = 3x, \quad \text{e} \quad n = 2.$$

A substituição $z = y^{1-2} = y^{-1}$ transforma a equação original na equação de primeira ordem não-homogênea

$$-\frac{dz}{dx} - 2\frac{z}{x} = 3x,$$

cuja solução geral é

$$z = \frac{1}{x^2}\left(-\frac{3x^4}{4} + c\right) = \frac{4c - 3x^4}{4x^2}, \text{ onde } c \text{ é um parâmetro real.}$$

Como $y = z^{-1}$ então (fazendo $4c = k$),

$$y = \frac{4x^2}{k - 3x^4}.$$

Exemplo 3.3.

Mediante a "troca das variáveis independente e dependente" transforme a equação

$$y' = \frac{x}{x^2y^2 + y^5}$$

numa equação de Bernoulli. Resolva a equação de Bernoulli e obtenha então as soluções da equação proposta.

✍ "Trocar os papéis da variáveis dependente e independente" significa considerar x como função de y em vez de y como função de x. Uma maneira de fazer isso, é por meio de Teorema da Função Inversa; o qual nos diz que podemos "tirar o valor" de x numa certa expressão, fornecendo x como função de y. Nas condições do teorema, a nova variável dependente x é derivável em relacão a y e $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{dy/dx}$..

O problema informa que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2y^2 + y^5},$$

então

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2y^2 + y^5}{x}. \tag{3.2}$$

Observe agora que (3.2) é uma equação de Bernoulli (para x como função de y). De fato, (3.2) se escreve como

$$\frac{dx}{dy} - y^2x = y^5x^{-1}. \tag{3.3}$$

Temos

$$p(y) = -y^2, q(y) = y^5 \text{ e } n = -1.$$

A substituição

$$z = x^{1-(-1)} = x^2$$

transforma (3.3) na equação linear de primeira ordem

$$\frac{1}{2}\frac{dz}{dy} - y^2z = y^5,$$

ou seja,

$$\frac{dz}{dy} - 2\,y^2 z = 2y^5. \qquad (3.4)$$

Resolvendo (3.4), obtemos

$$z(y) = e^{-\int -2y^2 dy}\left[\int e^{\int -2y^2 dy}\cdot 2y^5 dy + c\right].$$

Ou seja,

$$z(y) = e^{2y^3/3}\left[\int e^{-2y^3/3}\cdot 2y^5\ dy + c\right].$$

A integral $\int e^{-2y^3/3}\cdot 2y^5\ dy$ pode ser calculada da seguinte forma:

$$\int e^{-2y^3/3}\cdot 2y^5\ dy = \int \underbrace{y^3}_{u}\cdot\underbrace{e^{-2y^3/3}\cdot 2y^2\ dy}_{dv}.$$

Integrando por partes:

$$\int y^3\cdot e^{-2y^3/3}\cdot 2y^2 dy = -y^3\cdot e^{-2y^3/3} + 3\int e^{-2y^3/3}\cdot(-y^2)dy.$$

A integral remanescente é imediata:

$$\int y^3\cdot e^{-2y^3/3}\cdot 2y^2\ dy = -y^3\cdot e^{-2y^3/3} - \frac{3}{2}\cdot e^{-3y^3/3} + c.$$

Logo,

$$\begin{aligned} z(y) &= e^{2y^3/3}\cdot\left[-y^3\cdot e^{-2y^3/3} - \frac{3}{2}\cdot e^{-2y^3/3} + c\right] \\ &= -y^3 - \frac{3}{2} + c\cdot e^{2y^3/3} \end{aligned}$$

Lembrando que $z = x^2$, temos

$$x^2 = -y^3 - \frac{3}{2} + c\cdot e^{2y^3/3};$$

que é a equacão da família de curvas que definem implicitamente as soluções de $y' = \frac{x}{x^2y^2+y^5}$.

A ***subnormal*** a uma curva $\mathscr{C}$, no ponto P é a projeção, sobre o eixo OX, do segmento da reta normal (em P) entre P e OX. Na figura, é o segmento RQ.

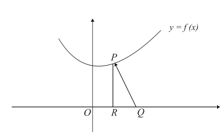


Figura 3.1: Subnormal ao gráfico da função $y = f(x)$.

Atividade de auto-avaliação 3.1

Determinar a equação da curva que passa por $(0,1)$, tal que o quadrado da distância de qualquer ponto $P = (x,y)$ à origem seja igual ao comprimento da subnormal naquele ponto.

!

Atenção!

A equação de Bernoulli é um daqueles modelos "férteis", cuja utilização ultrapassa, de longe, o problema inicialmente abordado. O problema inicial, isto é, o problema com o qual J. Bernoulli introduziu a equação diferencial era um problema geométrico; entretanto atualmente diversos problemas de outras áreas: Economia, Engenharia, Biomatemática, para citar apenas algumas, são *modelados* com equações diferenciais de Bernoulli.

A Equação de Riccati

Definição 3.2.

Chama-se *equação de Riccati* a toda equação diferencial de primeira ordem que pode ser posta na forma

$$\frac{dy}{dx} = a_2(x)y^2 + a_1(x)y + a_0(x) \tag{3.5}$$

em que $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ são funções contínuas num intervalo I e $a_2(x) \neq 0$ em I.

Exemplo 3.4.

Identifique as equações de Riccati na lista abaixo:

1. $dx/dt = \alpha x^2 + \beta t^m, \quad \alpha, \beta$ constantes;

2. $\dfrac{dy}{dx} + (2x-1)y - xy^2 = x - 1;$

3. $\dfrac{\partial z}{\partial x} + z^2 + xz - 7\,cos\,x = 0$;

4. $dy/dx + y^2 - 4y + 4 = 0$;

5. $\dfrac{dx}{dt} - \alpha x^2 + \beta t + \gamma t^2 = 0 \quad \alpha, \beta$ e γ constantes.

Solução:

1. A equação $dx/dt = \alpha x^2 + \beta t^m, \quad \alpha, \beta$constantes é uma equação de Riccati tendo x como variável dependente e t como variável independente;

2. a equação $\dfrac{dy}{dx} + (2x-1)y - xy^2 = x - 1$ já está na forma de uma equação de Riccati. Logo é uma equação de Riccati;

3. a equação $\dfrac{\partial z}{\partial x} + z^2 + xz - 7\,cos\,x = 0$ é uma equação diferencial parcial. Apesar da forma bem parecida, não é uma equação de Riccati;

4. a equação $dy/dx + y^2 - 4y + 4 = 0$ é uma equação de Riccati de coeficientes constantes;

5. a equação $\dfrac{dx}{dt} - \alpha x^2 + \beta t + \gamma t^2 = 0 \quad \alpha, \beta$e γ constantes também é reconhecível como uma equação de Riccati, sendo x a variável dependente e t a variável independente.

CÁLCULO DE SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE RICCATI:

Lema 3.1.

Se duas funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da equação (3.5), então $z = y_1 - y_2$ é solução de uma equação de Bernoulli da forma
$$z' + P(x)\,z = Q(x)z^2.$$

Demonstração

De fato,

$$y_1 \text{ é solução de (3.5) } \Leftrightarrow y_1' = a_2(x)y_1^2 + a_1(x)y_1 + a_0(x), \quad (3.6)$$

$$y_2 \text{ é solução de (3.5) } \Leftrightarrow y_2' = a_2(x)y_2^2 + a_1(x)y_2 + a_0(x). \quad (3.7)$$

Subtraindo o lado direito do símbolo $\Leftrightarrow$ em (3.7) do lado direito do símbolo $\Leftrightarrow$ em (3.6), obtemos

$$(y_2 - y_1)' = a_2(x)(y_2^2 - y_1^2) + a_1(x)(y_2 - y_1),$$

isto é,

$$(y_2 - y_1)' = a_2(x)\left[(y_2 - y_1)(y_2 + y_1)\right] + a_1(x)(y_2 - y_1) \quad (3.8)$$

Fazendo $z = y_2 - y_1$ e notando que

$$y_2 + y_1 = y_2 - y_1 + 2y_1 = z + 2y_1,$$

a igualdade (3.8) se transforma em

$$z' = a_1(x)z + a_2(x)\left[z(z + 2y_1)\right].$$

Ou seja,

$$z' - \left[a_1(x) + 2y_1 a_2(x)\right] z = a_2(x)z^2,$$

que é a equação de Bernoulli na variável z.

CQD

Teorema 3.2.

Suponhamos que y_1 é uma solução conhecida de

$$\frac{dy}{dx} = a_2(x)y^2 + a_1(x)y + a_0(x).$$

a mudança de variáveis $y = y_1 + \frac{1}{z}$ a transforma numa equação diferencial linear na variável z.

Demonstração Segue diretamente do Lema **3.1**

CQD

!

Atenção!

Conhecida uma solucão particular y_1 da equação de Riccati

$$\frac{dy}{dx} = a_2(x)y^2 + a_1(x)y + a_0(x),$$

Qualquer outra solução y da equação de Riccati tem-se que $v = y - y_1$ é solução da equação de Bernoulli

$$v' = p(x)v + q(x)v^2, p(x) = a_1(x) + 2y_1a_2(x), q(x) = a_2(x).$$

Procurando soluções não-nulas da equação de Bernoulli, promovemos a mudança de variáveis

$$z = 1/v.$$

Esta mudança transforma a equação de Bernoulli numa linear de 1ª ordem, para a qual sabemos calcular a solução geral $z(x)$.
Consequentemente, a solução geral da equação de Riccati é

$$y = y_1 + \frac{1}{z}.$$

Exemplo 3.5.

Observando que $y_1(x) \equiv 1$ é uma solução particular da equação de Riccati $y' - xy^2 + (2x-1)y = x - 1$ calcule uma solução geral para a mesma.

Solução: Efetuamos primeiramente a mudança de variáveis $y_1 + \dfrac{1}{z}$.
Tem-se

$$y^2 = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z}$$

$$y' = -\frac{z'}{z^2}.$$

Substituindo na equação de Riccati

$$-\frac{z'}{z^2} - x\left(1 + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z}\right) + (2x-1)\left(1 + \frac{1}{z}\right) = x - 1,$$

isto é,

$$-\frac{z'}{z^2} - x - \frac{x}{z^2} - 2\frac{x}{z} + 2x + \frac{2x}{z} - 1 - \frac{1}{z} = x - 1.$$

Multiplicando por z^2,

$$-z' - x\,z^2 - x - 2xz + 2xz^2 + 2xz - z^2 - z = xz^2 - z^2.$$

Depois de simplificar as parcelas, obtemos a equação diferencial linear de primeira ordem

$$z' - x - z = 0,$$

cuja solução geral é

$$z(x) = e^{-\int dx}\left[\int e^{\int dx}(-x)dx + c\right];$$

ou seja,

$$z(x) = e^{-x}(-xe^x + e^x + c) = -x + ce^{-x}.$$

Portanto uma solução geral da equação de Riccati $y' - xy^2 + (2x-1)y = x - 1$ é

$$y(x) = 1 + \frac{1}{z(x)} = 1 + \frac{1}{1 - x + ce^{-x}}.$$

Exemplo 3.6.

Resolva as seguintes equações de Riccati:

a. $\dfrac{dy}{dx} = x^2 + \dfrac{y}{x} - y^2.$

Note que $y_1 = x$ é uma solução particular.

b. $\dfrac{dy}{dx} = (1 + xy)P(x) + y^2.$

Note que $y_1 = -\frac{1}{x}$ é uma solução particular.

Solução:

a. Como $y_1 = x$ é uma solução, façamos a mudança de variável

$y = x + \frac{1}{z}$. Daí, $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}$. Assim, nossa equação fica

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} &= x^2 + \frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{z}\right) - \left(x + \frac{1}{z}\right)^2 \\ &= 1 + \frac{1}{xz} - 2\frac{x}{z} - \frac{1}{z^2}. \end{aligned}$$

Da expressão acima, segue que

$$\frac{dz}{dx} + \left(\frac{1}{x} - 2x\right)z = 1.$$

A equação linear acima tem a seguinte solução

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{-\int\left(\frac{1}{x}-2x\right)dx}\left[\int e^{\int\left(\frac{1}{x}-2x\right)dx}dx + c\right] \\ &= e^{-(-x^2+\ln x)}\left[\int e^{-x^2+\ln x}dx + c\right] \\ &= \frac{e^{x^2}}{x}\left[\underbrace{\int \frac{x}{e^{x^2}}dx}_{-\frac{1}{2e^{x^2}}} + c\right] \\ &= \frac{e^{x^2}}{x}\left[-\frac{1}{2e^{x^2}} + c\right] \\ &= -\frac{1}{x} + c\frac{e^{x^2}}{x}. \end{aligned}$$

Portanto, a solução é

$$\begin{aligned} y(x) &= x + \frac{1}{z(x)} = x + \frac{1}{-\frac{1}{x} + c\frac{e^{x^2}}{x}} \\ &= x + \frac{x}{ce^{x^2} - 1}. \end{aligned}$$

b. Seja $y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{z}$, segue que $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} &= \left[1 + x\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)\right]P(x) + \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)^2 \\ &= \frac{x}{z}P(x) + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{xz} + \frac{1}{z^2}. \end{aligned}$$

Daí, obtemos

$$\frac{dz}{dx} + \left(xP(x) + \frac{2}{x}\right)z = -1.$$

A solução da equação linear acima é dada por:

$$\begin{aligned}
z(x) &= e^{-\int\left(xP(x)+\frac{2}{x}\right)dx}\left[\int e^{\int\left(xP(x)+\frac{2}{x}\right)dx}(-1)dx+c\right] \\
&= -e^{-\int xP(x)dx-\ln x^2}\left[\int e^{\int xP(x)dx+\ln x^2}dx+c\right] \\
&= -e^{-\int xP(x)dx}\frac{1}{x^2}\left[\int e^{\int xP(x)dx}x^2dx+c\right].
\end{aligned}$$

Como $y = -\frac{1}{x}+\frac{1}{z}$, temos

$$y(x) = -\frac{1}{x} - \frac{x^2e^{\int xP(x)dx}}{\int e^{\int xP(x)dx}x^2dx+c}.$$

Atividade de auto-avaliação 3.2

Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções particulares da equação de Riccati

$$\frac{dy}{dx} = a_2(x)y^2+a_1(x)y+a_0(x).$$

Mostre que a solução geral da equação é

$$\frac{y-y_1}{y-y_2} = ce^{\int a_2(x)(y_1-y_2)dx},$$

onde c é um parâmetro real.

EQUAÇÕES DE VARIÁVEIS SEPARÁVEIS

Definição 3.3.

Sejam I, J intervalos abertos, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, e $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas, onde $g(y) \neq 0$ para todo $y \in J$ e $Im(f) \subset J$. Uma equação diferencial que pode ser posta na forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \tag{3.9}$$

é chamada de *equação de variáveis separáveis*, ou simplesmente *equação separável*

Exemplo 3.7.

A equação diferencial

$$y' = (1+y^2)/xy \qquad x > 0,$$

é uma equação separávelem $I = J = (0, +\infty)$.

Temos

$$\frac{1+y^2}{xy} = \frac{1}{\left(\dfrac{xy}{1+y^2}\right)} = \frac{(1/x)}{y/(1+y^2)}.$$

Neste caso

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad g(y) = \frac{y}{1+y^2}.$$

Exemplo 3.8.

Toda equação linear homogênea de primeira ordem $y' + p(x)y = 0$ pode ser escrita como uma equação separável $y' = -\dfrac{p(x)}{1/y}$ em qualquer intervalo J onde $y \neq 0$.

Exemplo 3.9.

A equação linear não homogênea $y' - (1+x)y = 1+x$ pode ser escrita como a equação separável $y' = (1+x)\cdot(1+y) = \dfrac{1+x}{1/1+y}$.

✍ para escrever a equação $y' - (1+x)y = 1+x$ na forma padrão das equações de variáveis separáveis, $y' = \dfrac{1+x}{1/(1+y)}$, fica implícito que estamos restringindo a variável y a pertencer a um intervalo que não contém o número -1.

SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DE VARIÁVEIS SEPARÁVEIS

Note que ***não*** estamos exigindo que $\varphi(x) \neq 0$ para todo x.

Definição 3.4.

Uma solução da equação separável $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f(x)}{g(y)}$, caracterizada na definição (3.3), é uma função $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

1) Para todo $x \in I$ $\quad \varphi(x) \in J$,

2) Para todo $x \in I$ $\quad \dfrac{d\varphi}{dx}(x) = \dfrac{f(x)}{g(\varphi(x))}$

Para calcular as soluções, inicialmente multiplicamos a equação (3.9) por $g(y)$, obtendo

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{3.10}$$

Em seguida, observamos que se $G(y)$ é uma primitiva de $g(y)$ em J, podemos reescrever a equação (3.10) como

$$\frac{d}{dt}G[y(x)] = f(x) \tag{3.11}$$

(Para constatar a equivalência entre (3.10) e (3.11), basta derivar (3.11), usando a regra da cadeia, e o fato de que $G' = g$.) Observe que reduzimos a equação (3.9) à equação diferencial fundamental (3.11), cuja solução é obtida "integrando" os dois membros de (3.11) *com relação a* x no intervalo I. Temos

$$G[y(x)] = \int f(x)\, dx.$$

Se F é uma primitiva de f em I, então

$$G[y(x)] = F(x) + c \tag{3.12}$$

onde c um parâmetro arbitrário.

!

Atenção!

As definições (3.3) e (3.4), assim como a fórmula de solução (3.12), exigem que tenhamos $g(y) \neq 0$ e $y' \neq 0$.

De fato, o Teorema da Função Implícita garante que (3.12) define a solucão $y(x)$ implicitamente na vizinhança de um ponto (x_0, y_0), se

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big[G(y(x)) - F(x)\Big]\Big|_{(x_0, y_0)} \neq 0.$$

Isto é, se

$$g(y) \cdot y' \neq 0.$$

Entretanto, na prática é comum adotar o ponto de vista dos fundadores do Cálculo, e considerar uma equação diferencial como sendo a equação que define um conjunto de curvas.

Diz-se que (3.12) define o conjunto de ***curvas*** que são soluções de (3.9). De modo abusivo, é comum dizer que (3.12) é o ***conjunto das soluções***, ou mesmo a ***solução geral*** da equação (3.9).

Exemplo 3.10.

Calcule a solução geral de $\quad y' = -\dfrac{x}{y}, \qquad x \in \mathbb{R}, y \neq 0.$

Obtenha também, duas soluções distintas, tais que $y > 0$.

Solução: Identificando as funções que aparecem na equação com as da forma padrão da definição (3.9), temos

$$f(x=-x) \quad \text{e} \quad g(y)=y.$$

Multiplicando a equação por y, ela se reescreve como

$$yy'=-x;$$

ou ainda

$$\frac{1}{2}2yy'=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}[y(x)^2]=-x$$

Integrando os dois lados com relação a x:

$$y(x)^2=-x^2+c$$

onde c é uma constante arbitrária. Portanto,

$$x^2+y(x)^2=c$$

é a solução geral.
A natureza da resposta impõe que a constante c seja positiva.
Para cada $c>0$, a fórmula acima define de soluções $y(x)$, contínuas em intervalos abertos convenientes. Por exemplo, a **Figura 3.2** exibe três soluções distintas $(y=y(x))$ de $y'=-\dfrac{x}{y}$.

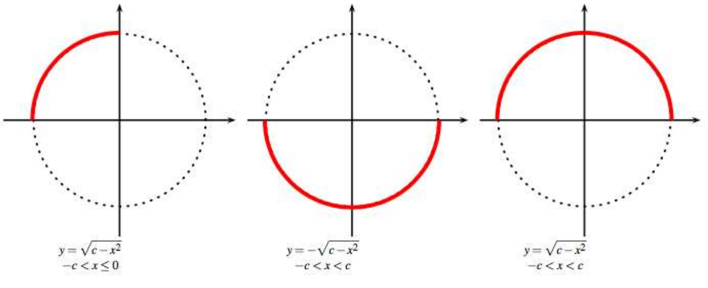


Figura 3.2: Três soluções $y(x)$ definidas por $x^2+y(x)^2=c$.

✍ Para escolher soluções adequadas, lembramos que devemos ter $y>0$. Portanto, dentre as soluções apresentadas, as que são compatíveis com a exigência feita são as da esquerda e da direita na **Figura 3.2** .
Moral da história: ***Não basta resolver tecnicamente uma equação. É sempre necessário fazer uma análise das***

respostas obtidas, para verificar a compatibilidade com os dados iniciais da equação diferencial.

✍ Frequentemente encontramos a seguinte "mágica" (matemágica) utilizada na solução de equações diferenciais separáveis: partindo de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)},$$

operamos simbolicamente (multiplicamos em cruz) para encontrar

$$f(x)\,dx = g(y)\,dy.$$

A seguir "integramos o lado esquerdo com relação a x, e o lado direito com relação a y", obtendo

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx$$

Isso não é lá muito justificável nos padrões do rigor da Matemática a que estamos habituados. Afinal, desde o Cálculo I sabemos que dx e dy não são números reais; logo não faz sentido usar propriedades de números reais para efetuar a a multiplicação cruzada como feito acima. No entanto, o método sempre funciona.
A pergunta é: Por quê?
Veja o próximo bloco de **Atenção**.

✍ Um outro detalhe a observar é que tratamos x e y no mesmo pé de igualdade. Integramos "um lado" com relação a y, e, independentemente, integramos o "outro lado" com relação a x, sem a preocupação de saber qual era a variável dependente e qual a variável independente. Na prática, dá certo.

✍ Escrevendo a equação $y' = \dfrac{f(x)}{g(y)}$ na forma

$$f(x)\ dx = g(y)\ dy,$$

fica claro o porquê do nome *equação com variáveis separáveis*. As variáveis x e y podem ser efetivamente *separadas* em lados distintos da igualdade.

!

Atenção!

O que justifica (segundo os padrões atuais de rigor em Matemática) o método utilizado é a teoria de *formas diferenciais*, um assunto avançado que foge aos nossos objetivos. Nessa teoria, expressões do tipo $g(y)\ dy = f(x)dx$, ou, mais geralmente, do tipo

$$M(x,y)\ dx + N(x,y)\ dy$$

são definidas e estudadas rigorosamente. Neste curso não vamos usar a teoria de formas diferenciais.
Fica combinado que uma equação com (formas) diferenciais do tipo :

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

corresponde a uma equação diferencial

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

(ou, respectivamente,

$$M(x,y)\frac{dx}{dy} + N(x,y) =, 0)$$

se for possível expressar y em termos de x, (respectivamente x em termos de y).

!

Atenção!

REGRA PRÁTICA: Para resolver uma equação separável, primeiro precisamos escrevê-la na ***forma separada***:
$f(x)\,dx = g(y)\,dy$, e depois integrar os dois lados independentemente, i.e, tratando x e y como variáveis independentes entre si.

Ilustremos essa “matemágica” com um exemplo.

Exemplo 3.11.

Resolva novamente a equação

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

agora reescrita na forma diferencial

$$x\,dx + y\,dy = 0$$

Solução:

$$x\,dx + y\,dy = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x\,dx = -y\,dy \Longleftrightarrow \int x\,dx = -\int y\,dy$$

(integrando independentemente
com relação a x e a y)

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + c \Longleftrightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c$$

Isto é $x^2 + y^2 = c$, exatamente o mesmo resultado calculado antes pelo método do **Exemplo 3.2.**

Exemplo 3.12.

Resolva a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$$

Solução: A equação dada pode ser escrita na forma

$$y\,\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{(1+x^2)x}$$

Integrando o lado esquerdo com relação a y e o direito com relação a x, obtemos

$$\int \frac{y}{1+y^2}\,dy = \int \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx,$$

ou seja

$$\frac{1}{2}\,ln(1+y^2) + c = \int \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx, \qquad c \text{ constante} \qquad (3.13)$$

Para resolver a integral da direita precisamos decompor o integrando em frações parciais,

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(1+x^2)}, \qquad A,B,C \in \mathbb{R}$$

Igualando os numeradores:

$$A+B=0, \qquad C=0 \qquad \text{e} \qquad A=1$$

Assim, os valores das constantes são

$$A=1, \qquad B=-1 \qquad \text{e} \qquad C=0,$$

e

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

Portanto,

$$\int \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{1+x^2} = ln(x) - \frac{1}{2}\,ln(1+x^2) + c_1,$$

onde c_1 é uma constante.
Adicionando uma constante de integração k_1 e substituindo em 3.13, chegamos a

$$\frac{1}{2}\,ln(1+y^2) = ln(x) - \frac{1}{2}\,ln(1+x^2) + k_1.$$

Finalmente, observando que o contra-domínio da função $x \mapsto ln(x)$ é o conjunto $\mathbb{R}$, podemos garantir que $k_1 = ln(k)$ para algum número positivo k. Assim, a última igualdade pode reescrita como

$$\frac{1}{2}\,ln(1+y^2) \quad = \quad ln(x) - \frac{1}{2}\,ln(1+x^2) + ln(k).$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} ln(1+y^2) &= 2\cdot ln(x) - ln(1+x^2) + 2\cdot ln(k), \\ ln(1+y^2) &= ln\left(\frac{x^2k^2}{x^2+1}\right) \\ 1+y^2 &= \frac{x^2c}{x^2+1}, \qquad c=k^2 \end{aligned}$$

Observe que não é possível explicitar y em função de x de maneira única. Temos

$$y = \pm\sqrt{\frac{cx^2}{x^2+1} - 1}$$

Não esqueça que, como sempre, num problema específico, precisamos de alguma informação extra (um dado inicial), mediante o qual possamos escolher qual das duas possibilidades representa a solução procurada.

Atividade de auto-avaliação 3.3

Calcule uma solução geral para a equação *de Bernoulli* de coeficientes constantes $x' - \lambda x + \gamma x^2 = 0$, *utilizando o método de separação de variáveis*.

Resumo

Nesta aula, aprendemos

1. A mudança de variáveis $z = y^{1-n}$, transforma a equação de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n,$$

na equacão diferencial linear de primeira ordem não-homogênea, na variável z: $\frac{z'}{1-n} + p(x)z = q(x)$.

2. Se y_1 é uma solução conhecida da equação de Riccati $\frac{dy}{dx} = a_2(x)y^2 + a_1(x)y + a_0(x)$, então a mudança de variáveis $y = y_1 + \frac{1}{z}$ a transforma numa equação diferencial linear na variável z.

3. Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são duas soluções particulares da equação de Riccati $\frac{dy}{dx} = a_2(x)y^2 + a_1(x)y + a_0(x)$, então uma solução geral da equação de Riccati é $\frac{y-y_1}{y-y_2} = ce^{\int a_2(x)(y_1-y_2)dx}$, onde c é um parâmetro real.

   O fato das equações de Bernoulli e Riccati serem equações diferencias de primeira ordem ***não lineares***, cujo estudo pode ser feito utilizando equações diferenciais lineares assosciadas não é absolutamente comum (em termos globais), e sua descoberta se deve a dois dos maiores matemáticos de todos os tempos: Leibniz e Euler.

4. Quando I, J são intervalos abertos, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, e $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas, tais que $g(y) \neq 0$ para todo $y \in J$ e $Im(f) \subset J$, a equação separável $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f(x)}{g(y)}$ tem como soluções as funções $y(x)$ definidas implícita ou explicitamente por $G[y(x)] = F(x) + c$, onde G é uma primitiva de g e F uma primitiva de f.

5. A *expressão diferencial* $g(y)\,dy = f(x)\,dx$ é equivalente a equação diferencial separável, e pode ser "integrada" como se x e y não fossem variáveis relacionadas entre si.

O QUE VEM POR AÍ:

Na próxima aula, apresentaremos alguns modelos matemáticos envolvendo as equações diferenciais de Bernoulli, de Riccati e separáveis. Alguns modelos serão bem concretos, outros um pouco mais teóricos, mas igualmente importantes, pois provocaram avanços da própria Matemática. Outros serão de especial interesse para as Engenharia de Controle, Engenharia de Produção (equação logística), Geofísica, para mencionar apenas algumas.

E segue a jornada.

SOLUÇÕES COMENTADAS DAS ATIVIDADES DESTA AULA:

Solução comentada da atividade 3.1

Para começar a trabalhar, vamos fazer algumas hipóteses simplificadoras:

- A curva procurada é o gráfico de uma função $y = f(x)$.
- A função y, bem como sua derivada,y', não se anulam, isto é: $y(x) \neq 0$ e $y'(x) \neq 0$ para todo x.

Se, com estas hipóteses, os cálculos levarem a um resultado contraditório ou impossível, será um sinal de que precisaremos reexaminar (e modificar) as hipóteses feitas.

Fixe um ponto $P = (x, y)$ da curva. A equação da reta tangente à curva procurada, em P é

$$Y - y = y'(X - x).$$

Então, a equação da reta normal que passa por aquele ponto é

$$Y - y = -\frac{1}{y'}\,(X - x).$$

A reta normal corta o eixo OX no ponto Q de coordenadas $(yy' + x, 0)$ (para ver isto, faça $Y = 0$ na equação da reta normal, e tire o valor de X). Portanto, o comprimento da subnormal (comprimento do segmento RQ) é igual a $x - (yy' + x) = yy'$.
A curva procurada satisfaz à seguinte equação:

$$x^2 + y^2 = yy';$$

ou ainda (dividindo os dois lados por y)

$$y' - y = x^2 y^{-1}.$$

A equação diferencial do problema acima não é uma equação fundamental, nem uma equação linear. Ela é um exemplo de Equação Diferencial de Bernoulli.
Obtivemos a equação $y' - y = x^2 y^{-1}$, que é uma equação de Bernoulli com $p(x) = 1, q(x) = x^2$ e $n = -1$. A mudança de variáveis $z = y^{1-(-1)} = y^2$ a transforma na equação linear

$$z' - 2zx = x^2,$$

cuja solução geral é

$$z = e^{2x}\left(\int e^{-2x} 2x^2 dx + c\right).$$

Fazendo $u = 2x^2$ e $dv = e^{-2x}$, temos pela integração por partes:

$$\int e^{-2x} 2x^2 dx = -x^2 e^{-2x} + \int e^{-2x} 2x dx.$$

Integrando novamente por partes, $[u = 2x \quad dv = e^{-2x}]$, obtemos

$$\int e^{-2x} 2x dx = -x e^{-2x} + \int e^{-2x} dx.$$

Portanto,

$$\int e^{-2x} 2x^2 dx + c = -x^2 e^{-2x} - x e^{-2x} - \frac{1}{2} e^{-2x} + c.$$

Consequentemente,

$$z = -x^2 - x - \frac{1}{2} + c e^{2x};$$

e, finalmente, como $z = y^2$,

$$y^2 = -x^2 - x - \frac{1}{2} + c e^{2x}.$$

Usando o fato de que a curva passa por $(0, 1)$, encontramos $c = 3/2$. Então, a princípio a resposta do problema é a curva $2y^2 + 2x^2 + 2x + 1 - 3e^{2x} = 0$.

✍ i. para adequar a "solução" obtida às hipóteses utilizadas (o gráfico de $y(x)$ deve ser de uma função que não se anula), devemos descartar a parte da figura que fica do eixo horizontal para baixo. Caso contrário

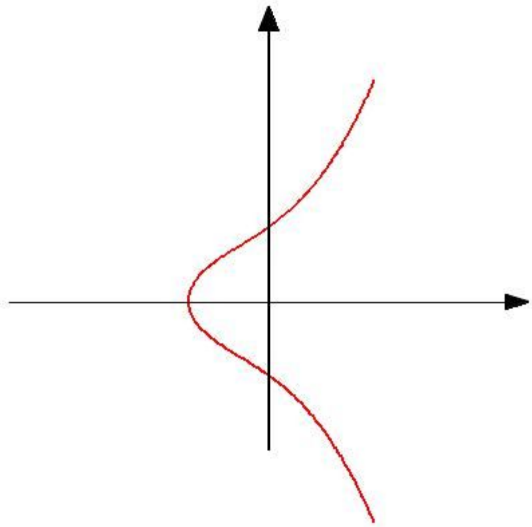


Figura 3.3: Representação gráfica da equação $2y^2+2x^2+2x+1-3e^{2x}=0$.

a curva obtida já não seria o gráfico de uma função, além de ter um ponto onde $y=0$;

ii. agora, se o problema não impusesse a passagem pelo ponto $(0,1)$, estaríamos diante de uma ambiguidade: qual dos dois ramos escolher?

iii. Esse fenômeno é comum quando lidamos com equações diferenciais não lineares, como a equação de Bernoulli;

iv. para podermos falar numa solução *legítima* , isto é, numa *função que verifique a equação diferencial* precisamos de informações adicionais que permitam restringir convenientemente as expressões obtidas;

v. dizendo de outro modo: as fórmulas obtidas ao resolver equações não lineares definem - em geral - curvas no plano, as quais podem não ser gráficos de nenhuma função, mas apenas definir soluções implicitamente;

vi. em particular, não é estritamente correto dizer, por exemplo, que a *solução* da equação de Bernoulli $y'-y=x^2y^{-1}$ é a curva

$$2y^2+2x^2+2x+1-3e^{2x}=0.$$

Solução comentada da atividade 3.2

✍ estamos supondo conhecidas *duas soluções* particulares, o que é ainda mais difícil que conhecer previamente apenas uma solução particular. Em compensação, temos uma "fórmula fechada", que permite calcular, com uma única operação de antiderivação, (uma única "quadratura") uma solução geral da equação de Riccati.

Se $y(x)$ é uma solução qualquer da equacão de Riccati, então (omitindo a variável independente x):

$$y' = a_2 y^2 + a_1 y + a_0. \tag{3.14}$$

Consideremos agora duas soluções particulares y_1 e y_2 da mesma equação. Substituindo y_1 e y_2 em (3.14), temos

$$y_1' = a_2 y_1^2 + a_1 y_1 + a_0, \tag{3.15}$$

$$y_2' = a_2 y_2^2 + a_1 y_2 + a_0. \tag{3.16}$$

Subtraindo (3.15) de (3.14):

$$y' - y_1' = a_2(y - y_1)(y + y_1) + a_1(y - y_1). \tag{3.17}$$

Subtraindo agora (3.16) de (3.14):

$$y' - y_2' = a_2(y - y_2)(y + y_2) + a_1(y - y_2). \tag{3.18}$$

Dividindo a equação (3.17) por $y - y_1$:

$$\frac{y' - y_1'}{y - y_1} = a_2(y + y_1) + a_1. \tag{3.19}$$

Dividindo a equação (3.18) por $y - y_2$:

$$\frac{y' - y_2'}{y - y_2} = a_2(y + y_2) + a_1. \tag{3.20}$$

Subtraindo (3.20) de (3.19):

$$\frac{y' - y_1'}{y - y_1} - \frac{y' - y_2'}{y - y_2} = a_2(y_1 - y_2). \tag{3.21}$$

Finalmente, integrando (3.21):

$$\ln\left|\frac{y-y_1}{y-y_2}\right| = k\int a_2(x)(y_1-y_2)dx,$$

isto é,

$$\left|\frac{y-y_1}{y-y_2}\right| = ke^{\int a_2(x)(y_1-y_2)dx}.$$

Permitindo que o parâmetro de integração assuma quaisquer valores reais, ($k=\pm c$), obtemos a expressão desejada:

$$\frac{y-y_1}{y-y_2} = ce^{\int a_2(x)(y_1-y_2)dx}.$$

Solução comentada da atividade 3.3

Seja t a variável independente e $x = x(t)$. Separando as variáveis na equacão de Bernoulli $x' - \lambda x + \gamma x^2 = 0$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
x' - \lambda x + \gamma x^2 = 0 &\Longleftrightarrow x' = \lambda x - \gamma x^2 \\
&\Longleftrightarrow \frac{dx}{\lambda x - \gamma x^2} = dt \\
\text{(usando o método de frações parciais)} & \\
&\Longleftrightarrow \frac{1/\lambda}{x} + \frac{\gamma/\lambda}{\lambda - \gamma x} = dt \\
&\Longleftrightarrow \frac{1}{\lambda} ln\,|x| + \frac{\gamma}{\lambda}\int \frac{1}{\lambda - \gamma x}dx = dt \\
\text{(fazendo a mudança de variáveis } u = \lambda - \gamma x) & \\
&\Longleftrightarrow \frac{1}{\lambda} ln\,|x| + \frac{\gamma}{\lambda}\left(-\frac{1}{\gamma}\right)\int \frac{du}{u} = dt \\
&\Longleftrightarrow \frac{1}{\lambda} ln\,|x| - \frac{1}{\lambda} ln\,|\lambda - \gamma x| = t + c_1 \\
&\Longleftrightarrow ln\left|\frac{x}{\lambda - \gamma x}\right| = \lambda t + c_2 \\
&\Longleftrightarrow \frac{x}{\lambda - \gamma x} = c\,e^{\lambda t}; \quad c = \pm e^{c_2} \\
&\Longleftrightarrow x = \lambda c e^{\lambda t} - \gamma x c e^{\lambda t} \\
&\Longleftrightarrow x(1 + \gamma c e^{\lambda t}) = \lambda c e^{\lambda t} \\
&\Longleftrightarrow x(t) = \frac{\lambda c e^{\lambda t}}{1 + \gamma c e^{\lambda t}}.
\end{aligned}$$

É instrutivo resolver a equacão de Bernoulli $x' - \lambda x + \gamma x^2 = 0$ ***pelo método de solução usual, e comparar os resultados.***

Aula 4

MODELOS COM EQUAÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM

Objetivo

Ao final desta aula, você será capaz de:

1. construir modelos envolvendo equações de Bernoulli, de Riccati, e separáveis.

Pré-requisito:
Equações diferenciais fundamentais; Equações diferenciais de Bernoulli, de Riccati e separáveis.

INTRODUÇÃO

Esta extensa aula contém apenas uma amostra minúscula de problemas que podem ser modelados com o auxílio das equações diferenciais que temos estudamos até agora, focando nos problemas modelados por equações diferenciais de Bernoulli, Riccati e separáveis.

O número de modelos envolvendo equações diferenciais ordinárias e parciais, bem como as equações de diferenças finitas, não para de aumentar, sugerimos que, numa primeira leitura, sejam selecionados alguns para exame. Preferencialmente, siga as recomendações do professor coordenador da disciplina. Posteriormente, você pode explorar os modelos que faltam, e também procurar novos modelos, na Internet, por exemplo.

População

Nesta aula, o termo *população* será usado para designar qualquer conjunto de seres vivos. Vamos assumir que todos os elementos da população, os *indivíduos*, são equivalentes, no sentido de terem a mesma constituição, e as mesmas características.

MODELOS CONTÍNUOS DE DINÂMICA DE POPULAÇÕES

> “ O estudo crescente de modelos matemáticos em Ecologia (basicamente o estudo das relações entre espécies e seus ambientes) reflete o seu uso como auxílio na compreeensão do processo dinâmico envolvido em áreas como competição predador-presa e interação entre espécies em competição, ou gestão de recursos renováveis, evolução de espécies resistentes a pesticidas, controle ecológico de pragas, evolução de populações compostas, plantio de culturas de árvores entre outras. A lista em expansão contínua de aplicacões é extensa. Existem também aplicacões interessantes e úteis de modelos contínuos de dinâmica de populacões (de indivíduos de uma única espécie) nas ciências biomédicas, por exemplo em Fisiologia (Em poucas palavras, a Fisiologia estuda o funcionamento do organismo de um ser vivo, em particular, se ocupa do estudo de doenças dinâmicas, i.e, que evoluem com o tempo).”

Iniciamos esta seção examinando dois modelos matemáticos famosos desenvolvidos para compreender como uma população (de um certo tipo de seres vivos) varia com o tempo.

Então seja $p(t)$ a função que mede o tamanho de uma determinada população de seres vivos no instante t. Os modelos serão obtidos considerando-se *a taxa de variação da população com relação ao tempo*:

$$\frac{dp}{dt} = \text{nascimentos} - \text{mortes} + \text{migrações} \tag{4.1}$$

às vezes chamada de ***equação de conservação*** da população.

Frequentemente é útil considerar a *taxa de crescimento (ou taxa de crescimento relativa, ou específica)* da população, definida pela quantidade

$$\frac{dp/dt}{p}. \tag{4.2}$$

O MODELO DE MALTHUS

Thomas Malthus era um economista político preocupado com o que ele via como o declínio das condições de vida na Inglaterra do século XIX.
Ele afirmava que a população tendia a ter um crescimento de ordem geométrico, ao passo que os meios de subsistência cresciam em ordem aritmética. Fatalmente chegaria o ponto onde não haveria como sustentar toda a população, que definharia devido à falta de alimentos, abrigos, etc. .

Figura 4.1: Thomas Malthus - (1766 - 1834)

Neste modelo, proposto em 1798, não ocorrem migrações, e as quantidades de nascimentos e mortes são proporcionais a $p(t)$. Isto é,

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p - \beta p.$$

Equivalentemente, a taxa de crescimento específica é uma constante $\lambda = \alpha - \beta$, que é positiva se a população estiver aumentando, negativa se estiver diminuindo. A sua equação é

$$\frac{dp}{dt} = \lambda p, \tag{4.3}$$

que tem para solução :

$$p(t) = p(t_0)e^{\lambda(t-t_0)},$$

onde t_0 é um instante inicial e $p(t_0)$ um valor incial, fixados.

Exemplo 4.1.

Numa amostragem aproximada, estimou-se que a população da Terra, em 1960, era de 3 bilhões de habitantes, e que a população aumentou à taxa média de 2 % ao ano nos ultimos cinquenta anos.
Calcule, utilizando o modelo de Malthus, a população no ano de 1970.

Solução: Temos $p_0 = 3 \times 10^9$, $t_0 = 1960$ e $\lambda = 0,02$. Substituindo na fórmula de Malthus, obtemos

$$p(t) = 3\,10^9 e^{0,02(t-1960)}.$$

Para $t = 1970$,

$$p(1970) \sim 3\,10^9\, e^{0,2},$$

um número aproximadamentae igual a três bilhões e seiscentos e sessenta e cinco milhões de habitantes.

Micro-organismos

os “filhotes”, não precisam amadurecer sexualmente. Ao nascer, eles já estão aptos para a reprodução.

✍ Dentro de certos limites, o modelo de Malthus concorda razoavelmente com as observações. Por exemplo, ele “funciona” para certas populações de micro-organismos que se reproduzem por mitose , e mesmo assim durante intervalos de tempo limitados. Afinal, até micro-organismos morrem, certo?

O MODELO DE VERHULST

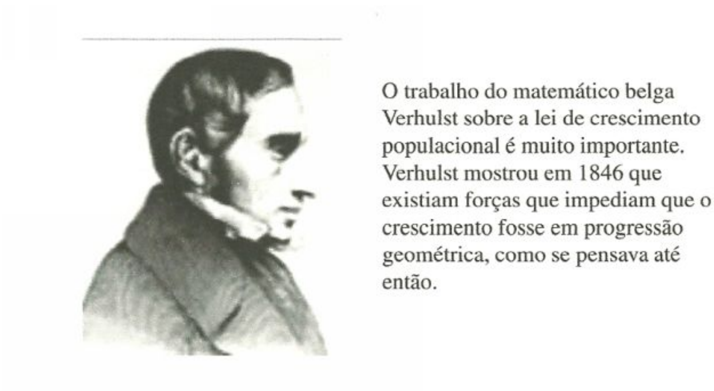


Figura 4.2: Pierre Verhulst (1804-1849)

✍ Crescimentos exponenciais de populações não são modelos muito realísticos, devido principalmente aos recursos limitados do meio ambiente e taxas de mortalidade ocasionadas por diversos fatores: predadores, variações climáticas, ou talvez , levando em conta os efeitos prejudiciais do (ou sobre o) meio ambiente, como poluição e alta demanda por alimentos (competição) e combustível (no caso de populações humanas), frequentemente há um fator inibidor no crescimento populacional, pelo menos a partir de um certo valor da população. É preciso adaptar o modelo de Malthus, a fim de que a taxa específica de crescimento se torne decrescente a partir de um certo número limite alcançado pela população.

Suponhamos agora que o ambiente seja capaz de sustentar no máximo um número fixo K de indivíduos. K é chamada de **capacidade de suporte** do meio ambiente. Assim, quando $p = K$, f se anula ($f(K) = 0$). Seja $f(0) = r$. Procuramos então uma função decrescente $f(p)$ com $f(0) = r$ e $f(K) = 0$. O modelo proposto por volta de 1840 pelo matemático e biólogo belga P. F. Verhuslt, para predizer a população humana em diversos países, consiste em supor $f(p)$ linear

$$f(p) = c_1 p + c_2.$$

As condições $f(0) = r$ e $f(K) = 0$ nos dão $f(p) = r - (r/K)p$, e obtemos então:

$$\frac{dp}{dt} = rp(1 - \frac{p}{K}) \qquad p > 0, \tag{4.4}$$

sendo conhecida como *equação do modelo de Verhulst*.

!

Figura 4.3: Vitórias Régias- Museu Paraense Emílio Goeldi - Fonte:https://pt.wikipedia.org/wiki

Uma medida da capacidade de suporte de um lago com vitórias-régias adultas pode ser a medida da área da superfície do lago.

A EQUAÇÃO LOGÍSTICA

Suponha que escolhemos um sistema de unidades apropriadas, de tal modo que $K = 1$; isto é, a capacidade de suporte do ambiente é uma unidade de medida do número de indivíduos (que pode muito bem corresponder a um milhão, por exemplo.)

A equação de Verulhst, neste caso, se reescreve sob uma forma bastante tradicional, a saber:

$$\frac{dp}{dt} = rp(1 - p), \tag{4.5}$$

conhecida como a *equação logística*.

CÁLCULO DE SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO LOGÍSTICA

Solução: Observe que as constantes $p=0$ e $p=1$ são soluções da equação logística.

Separando variáveis, temos:

$$\frac{1}{p(1-p)}\,dp = rdt$$

decompondo o lado esquerdo em frações parciais, e observando que

$$\begin{aligned}\frac{1}{p(1-p)} &= -\frac{1}{p(p-1)}\\ &= \frac{p-1-p}{p(p-1)}\\ &= \frac{1}{p}-\frac{1}{p-1},\end{aligned}$$

temos

$$\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p-1}\right)dp = r\,dt,$$

de onde, integrando diretamente os dois lados,

$$ln|p| - ln|(p-1)| = rt + c, \qquad c = \text{parâmetro arbitrário};$$

i.e,

$$ln\left|\frac{p}{p-1}\right| = rt + c.$$

Portanto

$$\left|\frac{p}{p-1}\right| = e^{rt+c};$$

ou

$$\frac{p}{p-1} = \pm e^{rt}e^{c}.$$

Como $0<p<1$, devemos escolher o sinal negativo, pois, caso contrário, o lado esquerdo seria negativo e o lado direito seria positivo.
Assim, a solução geral da equação logística é

$$\frac{p}{p-1} = -e^{c}e^{rt}.$$

Ou ainda

$$\frac{p}{1-p} = e^{c}e^{rt} \tag{4.6}$$

Da fórmula (4.6) obtemos:

$$p(t) = e^{c}\,e^{rt} - p(t)\,e^{c}\,e^{rt};$$

ou

$$p(t)[1+e^c\,e^{rt}] = e^c\,e^{rt}.$$

De onde

$$p(t) = \frac{\lambda\,e^{rt}}{1+\lambda\,e^{rt}}, \qquad \text{com } \lambda = e^c.$$

Podemos escrever então que a *solução geral* da equação logística (4.5), é

$$p(t) = \frac{\lambda}{[1+\lambda\,e^{rt}]\,e^{-rt}}, \qquad \text{sendo } \lambda \quad \text{um parâmetro positivo}.$$

Suponhamos agora que é conhecido o valor da população inicial $p(0) = p_0$. Então, fazendo $t = 0$ na fórmula da solução geral, temos

$$p_0 = \frac{\lambda}{1+\lambda}.$$

Então

$$p_0 + \lambda\,p_0 = \lambda;$$

e consequentemente, como estamos supondo $p_0 \neq 0$ e $p_0 \neq 1$:

$$\lambda = \frac{p_0}{1-p_0}.$$

Assim, substituindo esse valor de λ na expressão da solução geral, obtemos:

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{\left(\dfrac{p_0}{1-p_0}\right)}{\left[1+\left(\dfrac{p_0}{1-p_0}\right).e^{rt}\right]\,e^{-rt}} \\ &= \frac{p_0}{[(1-p_0)+p_0\,e^{rt}]\,e^{-rt}} \\ &= \frac{p_0}{(1-p_0)\,e^{-rt}+p_0}. \end{aligned}$$

!

Atenção!

Resumindo, a solução do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = r\,p(1-p) & \text{com } 0 \leq p \leq 1 \\ p(0) = p_0 \end{cases}$$

é

$$\boxed{p(t) = \frac{p_0}{p_0 + (1-p_0)e^{-rt}}}$$

✍ *equação logística de parâmetros a e b*, é :

$$\frac{dp}{dt} = p(a - bp).$$

A solução da equação logística de parâmetros a e b, $a > b > 0$ é a *função logística*

$$p(t) = \frac{ap_0}{bp_0 + (a - bp_0)e^{-at}}.$$

✍ Agora, a princípio, a e b são parâmetros positivos satisfazendo $0 < a < b$.

Exemplo 4.2.

Obtenha a solução e faça um esboço do gráfico da solução do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = p(a - bp) \\ p(0) = 1 \end{cases}$$

para o caso em que $a = 0,2$ e $b = 0,1$.

Solução:

Temos:

- As retas $p = 0$ e $p = a/b$ são soluções da equação logística.

- Se $p > a/b$ então $g(p) < 0$ (e como $dp/dt = g(p)$ então $dp/dt < 0$ quando $p > a/b$; e analogamente $dp/dt > 0$ de $0 < p < a/b$.

- Usando a regra da cadeia, deduz-se que $dg/dt = (a-2bp)dp/dt$; e então

$$d^2p/dt^2 = (a-2bp)p(a-bp).$$

- Analisando a variação de sinais de $(a-2bp)p(a-bp)$ concluímos que $a/2b$ é um ponto de inflexão de $p(t)$.

- Sendo $p_0 = p(0) > 0$

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = \frac{a}{b}.$$

no caso deste exemplo, temos $a/b = 0,2/0,1 = 2$, $p_0 = 1$ e o esboço do gráfico da solução é:

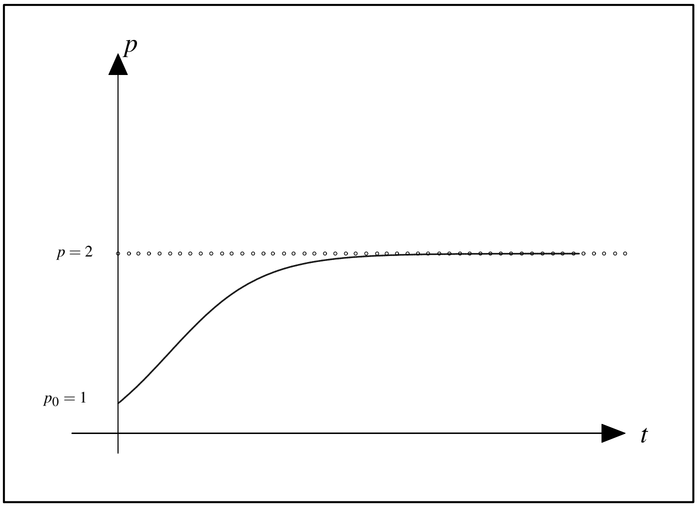


Figura 4.4: Gráfico de uma solução da equação logística

Atividade de auto-avaliação 4.1

Assumindo novamente que $a = r$ e $b = r/K$ com a capacidade de suporte $K = 1$, faça o que se pede:

a) Faça um esboço do gráfico de $f(p) = 1-p$, e conclua que o intervalo em que o ambiente consegue sustentar a população é $[0,1]$, que corresponde a $1-p > 0$.

b) Desenhe agora o gráfico de $g(p) = rp(1-p)$, pode considerar $r = 1$, para simnplificar e conclua que $dp/dt > 0$ para $0 < p < 1/2$, e que $dp/dt < 0$ se $p > 1/2$.

c) Observando que $\dfrac{dg}{dt} = \dfrac{d^2p}{dt^2}$, mostre então que $p = 1/2$ é ponto de inflexão do gráfico da solução da equação logística (no intervalo onde o ambiente consegue sustentar a população).

Sugestão: $\left(\dfrac{dg}{dt} = \dfrac{dg}{dp}\dfrac{dp}{dt} = \dfrac{dg}{dp}rp(1-p) = rp(1-p)(1-2p)\right)$.

d) Faça um esboço dos gráficos de $p(t)$ para os casos $0 < p_0 < 1/2$; $1/2 < p_0 < 1$ e $p_0 > 1$.

Exemplo 4.3.

Vamos ajudar o prefeito?

Preocupado com a possível extinção do cardume de peixes *paraopecicabas*, cuja comercialização era uma das principais fontes de arrecadação de seu (pequeno) município, o novo prefeito solicitou estudos visando a estabelecer uma legislação para restringir ou estimular o número de indivíduos da população de peixes, o qual, já se sabia, não poderia ultrapassar 10.000 (a capacidade máxima de suporte do ambiente).
Os biocientistas e engenheiros de uma ONG local propuseram como modelo, para a variação da quantidade $x(t)$ de peixes, a equação logística

$$\frac{dx}{dt} = x(t)\left[a - \frac{1}{d}x(t)\right],$$

onde $a > 1$ corresponderia ao fator de "crescimento malthusiano" (determinado experimentalmente; e que, para simplificar, vamos supor que tem o valor $a = 2$), e onde a parcela $\frac{1}{d}x(t)$ representaria a taxa de diminuição da população devida à capacidade de suporte do seu meio ambiente.
Caberia ao prefeito controlar o valor de d da maneira que lhe fosse mais conveniente para assegurar um bom cardume,(e uma reeleição confortável).

O prefeito então solicitou que fosse reforçada a quantidade de ração despeja na lagoa para que a taxa de perda fosse igual à metade da taxa de crescimento da população. Neste caso, o modelo para a variação da quantidade $x(t)$ de peixes é

$$\frac{dx}{dt} = 2x(t)[1 - x(t)].$$

UMC = unidade de medida de cardume. Uma UMC = 10.000 peixes. Trata-se de uma unidade inventada para este exemplo

Diante dessa solicitacão, os engenheiros efetuaram foram feitas estimativas, levando em conta a população inicial x_0:

Uma medida inicial indicou $x_0 = 0,25$ UMCs, isto é, a primeira medição indicou o número de 2.500 peixes.

Se $a = 2$, $d = 1/2$ (a fração de pesca seria igual à metade da população, em cada instante. Parece um "chute" razoável).

Sendo assim, o modelo para a quantidade de peixes é

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x(1-x), \\ x(0) = 0,025 \end{cases} .$$

Resolvendo o modelo, calculamenos

$$x(t) = \frac{x_0}{x_0 + (1 - x_0)e^{-at}} = \frac{1}{1 + 3\,e^{-2t}}.$$

✍ Reparemos que a solução da equação do modelo, e conhecimentos de Cálculo, garantem que $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} x(t) = 1$. Ou seja, à medida que o tempo passa, a população tende ao valor 1; o que parece muito satisfatório para o prefeito. Se $x(t)$ tende a um, vai ficando próximo de 10.000 peixes; que é a maior quantidade possível.

!

Atenção!

Para poder tomar decisões políticas, para o prefeito é importante saber se a produção máxima vai acontecer num tempo eleitoralmente útil. Em outras palavras,"$t \longrightarrow +\infty$" não é uma informação muito completa: $x(t)$ talvez só aumente significativamente para um valor de t muito grande.
E até lá, o prefeito já poderia ter sido "detonado".

É preciso analisar a questão mais a fundo.

Como o valor limite $x = 1\ UMC$ só seria alcançado em $t = +\infty$,e isso não faz sentido concretamente, os biocientistas e engenheiros se propuseram calcular o tempo necessário para alcançar uma produção inferior, porém que atendesse as ambições em jogo. Por exemplo $0,8UMCs$.

Chamando de t_1 o tempo necessário para a população alcançar o valor $0,8UMCs$, eles precisavam resolver a seguinte questão: Se $x(t_1) = 0,8$ então $t_1 =?$

A solução da equação $0,8 = \dfrac{1}{1+3\,e^{-2t_1}}$ é

$$t_1 = \frac{ln\,12}{2} \sim 1,242343325.$$

Tendo em vista que o mandato duraria quatro anos, os assessores se declararam satisfeito. Em pouco mais de um ano, a população estaria próxima do limite máximo.

Eles expuseram seus resultados ao prefeito por meio do gráfico da solução do problema de valor inicial com equacnao logística, que tinham desenvolvido:

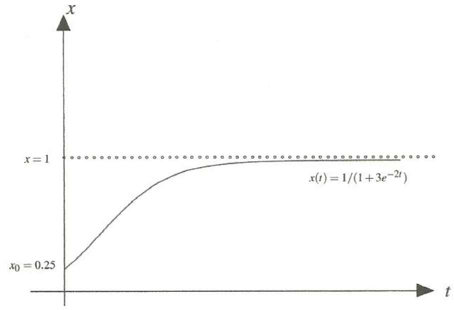


Figura 4.5: Crescimento do cardume de paraopecicabas

Estratégia

Plano, método, manobras ou estratagemas usados para alcançar um objetivo ou resultado específico.

Atividade de auto-avaliação 4.2

Entusiasmado, o prefeito sugeriu alterar o valor x_0, comprando, se necessário, mais peixes, de tal modo que, ao fim de quatro anos, a produção alcançasse o "valor- limite" 10.000. Sua estratégia dará bom resultado?

Exemplo 4.4.

Completando o estudo elaborado para o prefeito: cota absoluta de pesca

Lembrando que os peixes deveriam ser pescados e comercializados, o prefeito aperfeiçoou seu raciocínio da seguinte maneira: 'consideremos a equação diferencial $dx/dt = 2x(1-x)$ sugerida para o modelo. Ela não levou em conta a ação predatória dos pescadores. Precisamos saber de que forma a população de paraopecicabas varia quando a pesca é liberada. Por exemplo, suponha que eu autorize uma *cota máxima de pesca* de, digamos, c peixes por unidade de tempo (a unidade pode ser igual a UM MÊS, por exemplo). Essa cota será constante. Como será a variação do cardume com essa nova restrição? Esta é um cenário mais realístico, certo? A partir daí poderemos estabelecer uma tática apropriada aos objetivos da reeleição.

Tática

Conjunto de ações concretas adotadas para alcançar um objetivo; sair-se bem num empreendimento.

Os assessores, biocientistas e engenheiros, imediatamente se puseram a trabalhar e concluíram que o lado direito da equação diferencial do modelo precisaria ser modificado. Seria preciso subtrair o valor da cota c, o que dá a nova equação diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = 2x(1-x) - c.$$

Não é mais uma equação logística. Entretanto é uma equação de Riccati de coeficientes constantes. Então os assessores recordaram o seguinte fato bastante útil:

Lema 4.1.

Uma equação de Riccati com coeficientes constantes

$$\frac{dx}{dt} + ax^2 + bx + c = 0$$

tem uma solução *real* da forma $x(t) = m$, sendo m constante se, e somente se, m é uma raiz da equação do segundo grau

$$am^2 + bm + c = 0.$$

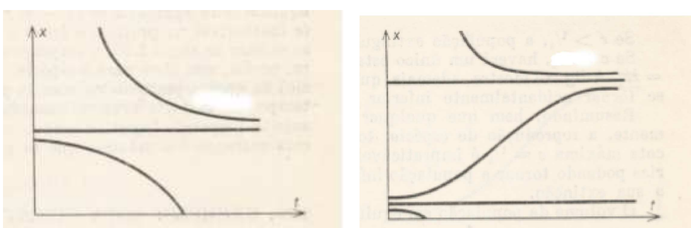
Demonstração

$$
\begin{aligned}
& x(t) = m \quad \text{é solução de} \\
& \frac{dx}{dt} + ax^2 + bx + c = 0 \iff \frac{dm}{dt} + am^2 + bm + c = 0 \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \iff am^2 + bm + c = 0 \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \iff m \quad \text{é solução de} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad am^2 + bm + c = 0. \qquad \square
\end{aligned}
$$

A equação $\dfrac{dx}{dt} = 2x(1-x) - c$ admite soluções *reais* constantes se, e somente se,

$$\Delta = 4 - 8c \geq 0. \tag{4.7}$$

Imediatamente perceberam que o valor $c = 1/2UMCs$, exatamente o que o prefeito havia proposto, era um valor bem crítico. Além disso, não podiam esquecer que a população em qualquer instante futuro, dependia da quantidade inicial de peixes.
Naturalmente, tendo em visata a equação (4.7), eles se limitaram a valores $c \leq 1/2$. Os dados coletados levaram a gráficos com os seguintes aspectos:



(a) $c = 1/2$ (b) $0 < c < 1/2$

Figura 4.6: Cota absoluta de pesca

Nas duas figuras, as linhas horizontais superiores correspondiam ao valor $c = 1/2$.
As curvas desenhadas acima da reta horizontal $c = 1/2$ podem ser descartadas. Elas dão a evolução da quantidade de peixes para uma população inicial maior do que $1/2UMC$, que não é o caso. Temos:

- A **Figura (a)** dá a evolução da população de peixes, correspondente à escolha exatamente igual a $1/2$. Como a populacão inicial era de $0,25$ UMC então a evolução da população seria de acordo com o gráfico abaixo da reta horizontal. E o cardume eventualmente se extinguiria. A única possibilidade sustentável seria aumentar a população inicial para $1/2\ UMC$. Neste caso, ela permaneceria sempre igual a $1/2\ UMC$.

- A **Figura (b)** corresponde a duas situações mais realistas. A linha horizontal inferior corresponde ao valor da população inicial levemente superior a $0,25\ UMC$, e o gráfico abaixo da linha horizontal inferior corresponde a um valor inicial levemene inferior a $0,25\ UMC$. A linha horizontal inferior seria então correspondente a $0,25\ UMC$.
  No caso $0,25 < x(0) < 1/2$, diferentemente da situação em que não havia cota de pesca, a população evolui até o máximo de $1/2\ UMC$, o que não é legal para o prefeito.
  E se $x(0) < 0,25$ a população se extingue muito rapidamente.
  Os assessores informaram seus dados ao prefeito que - no fim das contas - ficou com a responsabilidade de tomar uma decisão complicada. As equações e gráficos não indicaram nenhuma saída com real ganho político-eelitoral, mas pelo menos podem ajudar a impedir a tomada de decisões precipitadas e errôneas.

Exemplo 4.5.

O proprietário de um pesque-pague, interessado em a aumentar o lucro de seu negócio, tomou as seguintes providências:

1. Criar seus próprios peixes em tanques, e não mais comprá-los de uma "fazenda" de criação, como era seu costume, separando cada espécie de peixe em um tanque exclusivo.

2. Só transferir peixes dos tanques de criação para o lago de pesca quando eles estivessem com o peso ideal (leia-se: peso máximo).

3. Em vez de contratar funcionários para selecionar os peixes que podiam ser transferidos, o que aumentaria bastante seus custos, optou por colocar em cada tanque peixes "nascidos no mesmo dia".

O dono do pesque-pague justificou suas medidas, dizendo que tinha conversado com amigos biólogos e professores de matemática, e aprendido que:

- O peso $p(t)$ dos peixes de uma dada espécie, em cada instante t, é dado aproximadamente pela equação (obtida experimentalmente):

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p^{2/3} - \beta p.$$

- α e β são constantes, chamadas respectivamente de *constante de anabolismo* e *constante de catabolismo*, e têm a ver com os processos de assimilação e de eliminação de alimentos, representando as taxas de síntese e de diminuição de massa por unidade de superfície do animal.

Faça o que se pede:

i. Mostre que a equação acima, tem como solução

$$p(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \left(1 + \frac{c\beta}{\alpha} e^{-\frac{\beta}{3}t}\right)^3,$$

onde c é uma constante de integração arbitrária.

ii. Assumindo que no instante em que cada peixinho é colocado no tanque seu peso é insignificante (independentemente de sua espécie), determine o valor da constante de integração.

iii. Usando o valor de c obtido no item (ii), calcule $p(t)$ quando t tende a infinito (na prática: quando t se torna muito grande) e estabeleça o peso ideal para venda (o peso máximo) para cada espécie.

iv. Você pode dar uma razão para considerarmos o modelo apenas um modelo aproximado?

!

Atenção!

Anabolismo e **catabolismo** são processos que descrevem se o corpo está construindo ou perdendo tecido muscular. Quando você está tentando ganhar peso, você deve maximizar o tempo em que seu corpo fica no estado de construção muscular, de forma que seus resultados sejam mais satisfatórios. A maneira que você come, treina e descansa influencia diretamente nesse processo.

CATABOLISMO

Catabolismo é o estado do seu corpo que degenera o tecido muscular. Sempre que você treina, seja cardio ou musculação, você está fadigando os músculos. Quanto mais longo e difícil for seu treino, mais dano você causa ao tecido muscular. Outros fatores podem contribuir para que seu corpo fique em estado catabólico, como a má alimentação e a falta de descanso.

ANABOLISMO

Anabolismo é o estado em que seu corpo constrói tecido muscular. Quando você *descansa*, seu corpo começa a reparar o tecido muscular danificado. Dessa forma, é durante o repouso, e não no exercício, que seu corpo desenvolve a massa muscular.

Solução:

i. Resolvendo a equação dada no modelo, temos:

$$\begin{aligned} p' = \alpha p^{2/3} - \beta p \quad &\Leftrightarrow \quad p^{-2/3}p' + \beta p^{1/3} = \alpha \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}p^{-2/3}p' + \frac{\beta}{3}p^{1/3} = \frac{\alpha}{3} \\ &\Leftrightarrow \quad z' + \frac{\beta}{3}z = \frac{\alpha}{3} (\text{ onde } z = p^{1/3}.) \end{aligned}$$

A solução da equação diferencial linear na variável z:

$$\begin{aligned} z &= e^{-\int (\frac{\beta}{3} dt} \left[\int e^{\int \frac{\beta}{3} dt} \cdot \frac{\alpha}{3} dt + c \right] = e^{-\frac{\beta}{3}t} \left[\int e^{\frac{\beta}{3}t} \cdot \frac{\alpha}{3} dt + c \right] \\ &= e^{-\frac{\beta}{3}t} \left[\frac{\alpha}{3} \cdot \frac{3}{\beta} \cdot e^{\frac{\beta}{3}t} + c \right] = \frac{\alpha}{\beta} + ce^{-\frac{\beta}{3}t} \end{aligned}$$

A solução z ainda pode ser escrita como

$$z = \frac{\alpha}{\beta}\left(1 + \frac{c\beta}{\alpha} e^{-\frac{\beta}{3}t}\right).$$

E como $z = p^{(1/3)}$, então $p = z^3$.
Ou seja,

$$p(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \cdot \left(1 + \frac{c\beta}{\alpha} e^{-\frac{\beta}{3}t}\right)^3,$$

conforme queríamos demonstrar.

Observe que a solução tem a mesma forma qualquer que seja a espécie considerada. As constantes α e β é que diferenciam os pesos dos peixes de cada tipo.

ii. A expressão "no instante em que cada peixinho é colocado no tanque seu peso é insignificante" nos diz que, representando aquele instante por $t = 0$, vale a condição inicial $p(0) = 0$.

Impondo a condição inicial, temos

$$0 = p(0) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \cdot \left(1 + \frac{c\beta}{\alpha}\right)^3;$$

ou seja,

$$\left(1 + \frac{c\beta}{\alpha}\right)^3 = 0,$$

o que equivale a

$$1 + \frac{c\,\beta}{\alpha} = 0.$$

Assim,

$$c = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

iii. Utilizando o valor de c calculado no item (ii), sob a hipótese de que o peso de cada peixinho no instante em que é posto no tanque é desprezível, o seu peso num instante posterior t é

$$p(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \left(1 - e^{-\frac{\beta}{3}t}\right)^3.$$

Então

$$\lim_{t \to +\infty} p(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3,$$

porque

$$e^{-\frac{\beta}{3}t} \to 0, \text{e, portanto, } \left(1 - e^{-\frac{\beta}{3}t}\right) \to 1$$

quando $t \to +\infty$.

O peso ideal para comercialização é $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3$.

iv. Temos

$$\begin{aligned} p'(t) &= \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \cdot 3\left(1-e^{-\frac{\beta}{3}t}\right)^2 \cdot (-e^{-\beta t}) \cdot \left(-\frac{\beta}{3}\right) \\ &= \frac{\alpha^3}{\beta^2}\left(1-e^{-\frac{\beta}{3}t}\right)^2 \cdot e^{-\frac{\beta}{3}t}, \end{aligned}$$

de maneira que $p'(t) > 0$ para todo t.

Consequentemente, $p(t)$ é uma função estritamente crescente. Em particular, ela não pode oscilar em torno da reta $p = (\alpha/\beta)^3$.

!

Atenção!

Segundo os cálculos, seria necessário um tempo infinito para que cada peixe chegasse ao peso ideal. Na prática, o peso é atingido num tempo finito. Só esta observação já mostra que o modelo é uma aproximação. Uma outra razão para que o modelo não seja considerado exato é que ele não leva em conta que a taxa de produção de novos membros da espécie depende da idade dos pais, i.é, membros recém-nascidos não contribuem de imediato para o aumento da espécie. Existem outros modelos que levam em conta esses fatores, mas não vamos considerá-los neste estudo.

Reações Químicas de Segunda Ordem

Um composto C é formado pela combinação de duas substâncias químicas A e B. suponha que **a** gramas de A sejam combinadas com **b** gramas de B. Se $x(t)$ é o número de gramas de C no instante t, sendo cada grama de C constituída por M partes de A e N partes de B, introduzindo as quantidades relativas de substâncias A e B em cada grama de mistura C por

$$\frac{M}{M+N} \qquad \text{e} \qquad \frac{N}{M+N}\,,$$

respectivamente, em x gramas do composto C teremos

$$\frac{M}{M+N}\cdot a \qquad \text{e} \qquad \frac{N}{M+N}\cdot b$$

gramas das substâncias A e B.

Consequentemente as quantidades das substâncias A e B que ainda não foram transformadas (i.é, que são remanescentes) no instante t são dadas por:

$$a-\frac{M}{M+N}\,x \qquad b-\frac{N}{M+N}\,x.$$

A *lei de ação das massas* diz que, quando não há mudanças na temperatura, a taxa segundo a qual as duas substâncias reagem é proporcional ao produto das quantidades de A e B remanescentes no instante t:

$$\frac{dx}{dt}\propto\left(a-\frac{M}{M+N}\,x\right)\left(b-\frac{N}{M+N}\,x\right).$$

O que pode ser reescrito como

$$\frac{dx}{dt}=\tilde{k}\frac{M}{M+N}\left(\frac{M+N}{M}\,a-x\right)\frac{N}{M+N}\left(\frac{M+N}{N}\,b-x\right)$$

ou ainda

$$\frac{dx}{dt}=k\,(\alpha-x)(\beta-x), \tag{4.8}$$

onde $k=\tilde{k}\dfrac{M}{M+N}\dfrac{N}{M+N},\quad \alpha=\dfrac{M+N}{M}\,a,\quad \beta=\dfrac{M+N}{N}\,b.$

Uma reação cujo modelo é uma equação da forma (4.8) é chamada de *reação de segunda ordem*.

Nota

Você percebeu que a equação 4.8 também pode ser vista como uma equação de Riccati?

Exemplo 4.6.

Um composto C é formado pela combinação de duas substâncias A e B, de tal forma que para cada grama de A quatro gramas de B são usados. É observado que 30 gramas do composto C são formadas em 10 minutos. Sabendo que inicialmente havia 50 gramas de A e 32 gramas de B, determinar a quantidade de C em qualquer instante t.Quanto do composto C se terá formado em 15 minutos? Interprete a solução quando $t \to \infty$

Solução:
Seja $x(t)$ o número de gramas do com posto C após t minutos. Temos

$$x(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad x(10) = 30.$$

A equação diferencial associada ao problema é da forma

$$\frac{dx}{dt} = k(\alpha - x)(\beta - x).$$

Como em cada grama de C temos uma parte de A e 4 partes de B, então (com a notação acima), $M = 1$ e $N = 4$. Assim,

$$\frac{M}{M+n} = \frac{1}{5} \qquad \text{e} \qquad \frac{N}{M+N} = \frac{4}{5},$$

de sorte que

$$\alpha = \frac{M+N}{M}\, a = \frac{5}{1} \cdot 50 = 250 \qquad \text{e} \qquad \frac{M+N}{N}\, b = \frac{5}{4} \cdot 32 = 40.$$

A equação do problema fica

$$\frac{dx}{dt} = k(250 - x)(40 - x) \tag{4.9}$$

(uma equação separável).
A esta equação devemos acrescentar as condições

$$x(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad x(10) = 30.$$

Separando as variáveis da equação (4.9), e utilizando frações parciais, obtemos a equação

$$-\left(\frac{1/210}{250 - x} + \frac{1/210}{40 - x}\right) dx = k\, dt,$$

a qual, integrada, nos dá: $ln \left| \dfrac{250 - x}{40 - x} \right| = 210\, kt + c_1$.

Tomando exponenciais dos dois lados:

$$\frac{250-x}{40-x} = c_2 e^{210\ kt}. \tag{4.10}$$

e como $x(0)=0$, tiramos $c_2 = 25/4$, de modo que

$$\frac{250-x}{40-x} = \frac{25}{4}\, e^{210\ kt}$$

E finalmente como $x(10)=30$, substituindo na última equação, e usando uma calculadora, obtemos (com quatro decimais significativas)

$$k = 0,1258$$

Levando $c_2 = 25/4$ e $k = 0,1258$ na equação (4.10), e tirando o valor de $x(t)$ chega-se a

$$\boxed{x(t) = 100\ \frac{1-e^{-0,1258\ t}}{25-4e^{-0,1258\ t}}}$$

que é a resposta da primeira parte do problema.

Análise da solução: Para ter uma ideia do comportamento de $x(t)$, podemos construir uma tabela e desenhar o esboço do gráfico:

t (min)	$x(t)$ (gr)
10	30
15	34,78
20	37,25
25	38,54
30	39,22
35	39,59

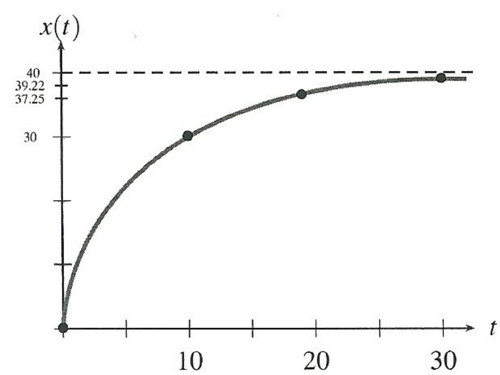


Figura 4.7: Gráfico do **Exemplo 4.6**

Observamos que quando $t \to \infty$, $x(t) \to 40$, isto é, no final do processo são formadas 40 grs. do composto C.

Utilizando as fórmulas para os remanescentes de substâncias A e B obtidas acima, calculamos que- no final- sobram respectivamente $50 - \frac{40}{5} = 32$ gramas de substância A e $32 - \frac{4\times 40}{5} = 0$ gramas da substância B.

Atividade de auto-avaliação 4.3

Curvas de perseguição

Considere um rato que se encontra parado na origem, quando um gato localizado no ponto $(a,0)$ o avista e começa imediatamente a persegui-lo. Neste mesmo instante, o rato percebe a aproximação do gato e parte em fuga no sentido positivo do eixo y com velocidade constante v. O gato corre sempre na direção em que está o rato, à velocidade constante ω. Queremos determinar a curva $y = y(x)$ descrita pela trajetória do gato.

(a) Decorrido um certo intevalo de tempo t, o gato se encontra no ponto
$P = (x,y)$, e o rato no ponto $Q = (0, vt)$. Mostre que

$$t = \frac{1}{t}\int_x^a \sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx.$$

(b) Mostre que $y' = -\dfrac{\overline{OQ}-y}{x}$. E como $\overline{OQ} = vt$, conclua que

$$\frac{v}{\omega}\int_x^a \sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx = y - y'x. \qquad (4.11)$$

Derive a equação (4.11) e mostre que

$$xy'' = c\sqrt{1+[y'(x)]^2},$$

com $c = v/\omega$.

(c) Fazendo a mudança de variável $p = y'$ obtenha uma equação diferencial separável, e resolva-a.

(d) Determine então $y = y(x)$

(e) Determine em que condições o gato alcança o rato. Calcule em que ponto do eixo y o encontro ocorre.

Exemplo 4.7.

A equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{y} \qquad (4.12)$$

é satisfeita pela(s) curva(s) plana(s) $\mathscr{C}$ que verifica(m) a seguinte propriedade:

Todas as retas paralelas ao eixo $0x$ que incidem sobre $\mathscr{C}$ por um dos lados de $\mathscr{C}$, são refletidas por $\mathscr{C}$ e passam por um mesmo ponto F, conforme a **Figura 4.8**:

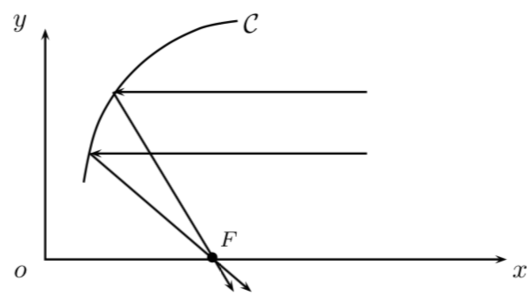


Figura 4.8: Espelho parabólico

a) Faça a mudança de variáveis $u = y/x$ e transforme a equação (4.12) numa equação de variáveis separáveis.

(b) Resolva a equação (4.12) por meio da mudança de coordenadas
$u = x^2 + y^2$ e determine a(s) curva(s) $\mathscr{C}$

Solução:

a)

$$u = y/x \Longrightarrow y = ux \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = u + x\,\frac{du}{dx}$$

Substituindo y e dy/dx respectivamente por ux e $u + x\,du/dx$ na equação (4.12):

$$u + x\,\frac{du}{dx} = \frac{-x + \sqrt{x^2 + x^2u^2}}{ux}$$

Simplificando x no lado direito:

$$u + x\,\frac{du}{dx} = \frac{-1 + \sqrt{1 + u^2}}{u}$$

ou seja

$$x\,\frac{du}{dx} = \frac{-1 + \sqrt{1 + u^2}}{u} - u$$

ou ainda

$$\frac{u\,du}{\sqrt{1+u^2}-(1+u^2)} = \frac{dx}{x} \qquad \text{(equação separável)}$$

(b) Seja $u = x^2 + y^2$. Então

$$u' = 2x + 2yy' \tag{4.13}$$

Como

$$y' = \frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}$$

então

$$yy' = -x + \sqrt{x^2+y^2} \tag{4.14}$$

de (4.13);

$$yy' = \frac{u'-2x}{2}$$

Substituindo em (4.14):

$$\frac{u'-2x}{2} = -x + \sqrt{u}$$

Portanto

$$u' - \cancel{2x} = -\cancel{2x} + 2\sqrt{u}.$$

Assim

$$\frac{u'}{2\sqrt{u}} = 1$$

de onde

$$\sqrt{u} = x = c$$

e como $u = x^2 + y^2$, obtemos $\sqrt{x^2+y^2} = x + c$, ou,

$$x^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2$$

I.é,

$$\boxed{y^2 = 2cx + c^2}$$

que é a equação de uma família de parábolas com eixos paraleos a ox e focos situados sobre ox

Exemplo 4.8.

A equação

$$\frac{dA}{dx} = A\sqrt{4-2A}$$

fornece um modelo simplificado para a altura $A(x) > 0$ de um ponto a x quilômetros da costa, situado sobre um *tsunami* (onda gigantesca, provocada por um maremoto ou tempestade).

- Determine, por inspeção (i.é, por tentativa), as soluções constantes da equação acima;
- resolva a equação diferencial do *tsunami*;
- calcule, se possível, a solução que satisfaz a condição inicial $A(0) = 2$. Interprete sua solução ·

Solução:

- Observe que $A(x) = 0 \leftrightarrow \frac{dA}{dx} = 0 \leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ A = 2 \end{cases}$.

  $A = 0$ corresponde a uma onde de 0 unidades de altura em todos os pontos. Então, na verdade, não há onda neste caso.

  $A = 2$ corresponde a uma onda de altura constante 2 unidades. Não é uma onda; é uma elevação do nível do mar.

- Temos:

$$\frac{dA}{dx} = A\,\sqrt{4-2A} \Longleftrightarrow \frac{dA}{A\sqrt{4-2A}} = dx.$$

Fazendo a mudança de variáveis $A = 2\,sen^2 u$ temos

$$\sqrt{4-2A} = \sqrt{4-4sen^2 u} = 2\sqrt{1-sen^2\,u} = 2\,cos\,u;$$

e

$$dA = 4\,sen\,u\,cos\,u\,du.$$

Então

$$\int \frac{dA}{A\sqrt{4-2A}} = \int \frac{4\,sen\,u\,cos\,u\,du}{2\,sen^2\,u\,2\,cos\,u} = \int dx;$$

i.é,

$$\int \frac{du}{sen\,u} = \int dx.$$

Portanto
$$ln|cossec\,u + cotg\,u| = x + c.$$
como $sen^2 u = A/2$ então $sen\,u = \sqrt{\frac{A}{2}}$ e $cos\,u = \sqrt{1 - \frac{A}{2}}$. Portanto, a solução geral da equação do tsunami é

$$ln\left|\sqrt{\frac{2}{A}} + \sqrt{\frac{2}{A} - 1}\right| = x + c.$$

- Impondo a condição inicial $A(0) = 2$ obtemos $c = 1$ e a onda correspondente é aquela cuja altura A no ponto a x quilômetros da costa é definida implicitamente pela equação

$$ln\left|\sqrt{\frac{2}{A}} + \sqrt{\frac{2}{A} - 1}\right| = x + 1.$$

✍ Note que a equação que define A implicitamente só faz sentido para $0 < A < 2$. O valor $A = 2$ corresponde aos pontos da orla marítima, onde a onda já não existe mais, segundo o modelo.

Uma figura (um corte instantâneo), mostrando a evolução da altura A em função da distância em quilômetros da costa é:

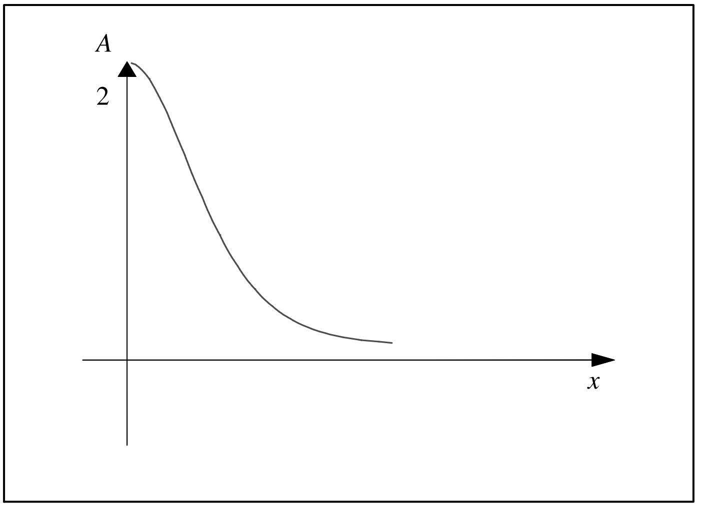


Figura 4.9: Evolução do Tsunami

Atividade de auto-avaliação 4.4

Mostre que toda equação diferencial linear de segunda ordem

$$\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

é equivalente a um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem, uma das quais é a equação de Riccati (numa nova variável u)

$$\frac{du}{dx} = -P(x) - Q(x)u - u^2.$$

Exemplo 4.9.

Resolva a *equação diferencial de Bessel*:

$$xy'' - y' - x^3 y = 0, \qquad x > 0.$$

Sugestão: Divida e equação por x, faça uma mudança de variáveis e transforme-a numa equação de Riccati

Resumo

Nesta aula você estudou alguns modelos matemáticos de fenômenos físicos utilizando equações diferenciais. Foi apenas uma amostra irrisória dos problemas que podemos resolver com o auxílio das equações diferenciais, problemas estes que se desviaram um pouquinho do caráter geométrico que vinha motivando a teoria das aulas anteriores.

O QUE VEM POR AÍ:

Nas próximas aulas, retomaremos as considerações geométricas, e generalizaremos fatos conhecidos sobre curvas clássicas (retas, círculos, cónicas, entre outras), a curvas mais gerais. Simultâneamente vamos desenvolver alguns métodos que apontarão para os resultados gerais sobre equações diferenciais de primeira ordem, obtidos a partir do século XIX.

SOLUÇÕES COMENTADAS DAS ATIVIDADES DESTA AULA:

Solução comentada da atividade 4.1

a) O gráfico de $f(p) = 1 - p$ é:

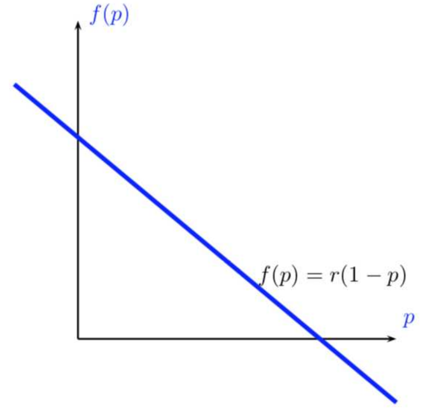


Figura 4.10: Gráfico de $f(p) = 1 - p \quad r > 0$.

Obs: Claramente devemos considerar também $p > 0$.

b) Desenhe agora o gráfico de $g(p) = rp(1-p)$ e conclua que $dp/dt > 0$ para $0 < p < 1/2$, e que $dp/dt < 0$ se $p > 1/2$.

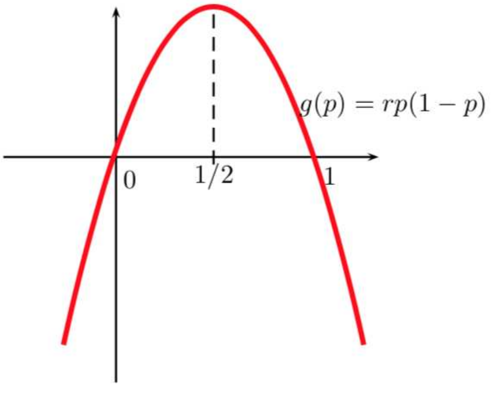


Figura 4.11: Gráfico de $g(p) = rp(1-p) \quad r > 0$.

Obs:Observe que no intervalo [0,1/2], $g(p)$ é crescente. Como

$g(p) = dp/dt$, segue a afirmação. Vale uma obs análoga para o intervalo $[1/2, 1]$.

c) fazendo uma tabela de variação do sinal de $\dfrac{d^2p}{dt^2} = \dfrac{dg}{dp}$, temos

	$(0,1/2)$	$(1/2,1)$
p	$+$	$+$
$1-p$	$+$	$+$
$p(1-p)$	$+$	$+$
$(1-2p)$	$+$	$-$
dg/dp	$+$	$-$

A função d^2p/dt^2 é contínua em $t = 1/2$ e muda de concavidade nesse ponto. Portanto $t = 1/2$ é um ponto de inflexão de $p(t)$.

Quando $t \to +\infty, p(t) \to K = 1$. Esse valor também é chamado de *população limite* e é o valor assintótico da população , seja qual for a população inicial $p_0 > 0$.

!

Atenção!

- Conclui-se de b), que se a população inicial fosse maior do que UM (a capacidade de suporte máxima), então $dp/dt < 0$.
- Se $p_0 > 1$, a população $p(t)$ decresce, tendendo a 1.
- Se $0 < p_0 < 1$, $p(t)$ cresce tendendo assintoticamente para 1.

  Neste caso o gráfico de $p(t)$ estará entre as retas $p = 0$ e $p = 1$, possuindo uma inflexão quando a população alcança o valor $1/2$. Isso quer dizer que, até atingir o valor $1/2$, a população cresce com derivada positiva e a partir daí, o crescimento se dá com velocidade cada vez menor (e nunca ultrapassa o valor da população limite).

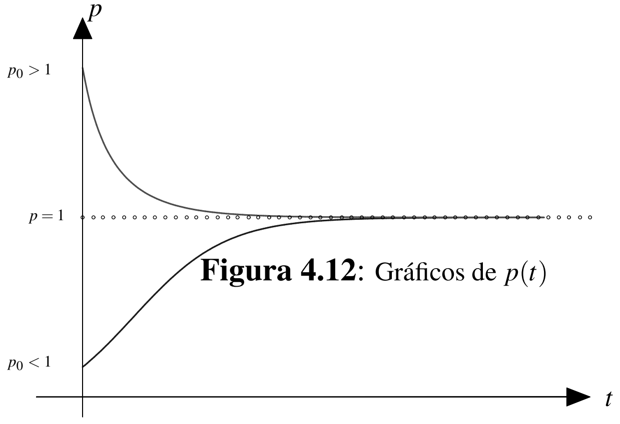


Figura 4.12: Gráficos de $p(t)$

Solução comentada da atividade 4.2

O problema pode ser colocado sob a seguinte forma: Qual deve ser o valor x_1 (para a população inicial de peixes) tal que, ao fim de $t_1 = 4$ unidades de tempo, (anos), tenhamos $1UMC$ peixes? Trata-se de resolver a equação

$$x(4) = 1 = \frac{x_1}{x_1 + (1 - x_1)e^{-2.4}};$$

i.e,

$$x_1 = x_1 + \frac{1 - x_1}{e^8},$$

ou ainda

$$\frac{1 - x_1}{e^8} = 0.$$

A solução desta última equação é $x_1 = 1$.
Portanto, para que ao fim de 4 anos tenhamos 1 UMC quantidade de peixes, a única possibilidade é que a população inicial já seja igual a 1 UMC. Só reforça o fato, que já sabíamos, de que a função constante igual a UM é solução da equação do modelo.
Não adianta aumentar a populacão inicial. **A estratégia do prefeito é "furada".**

Solução comentada da atividade 4.3

(a) Decorrido um certo intevalo de tempo t, o gato se encontra no ponto
$P = (x, y)$, e o rato no ponto $Q = (0, vt)$. Mostre que

$$t = \frac{1}{t}\int_x^a \sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx.$$

(b) Mostre que $y' = -\dfrac{\overline{OQ}-y}{x}$. E como $\overline{OQ} = vt$, conclua que

$$\frac{v}{\omega}\int_x^a \sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx = y - y'x. \qquad (4.15)$$

Derive a equação (4.15) e mostre que

$$xy'' = c\sqrt{1+[y'(x)]^2},$$

com $c = v/\omega$.

(c) Fazendo a mudança de variável $p = y'$ obtenha uma equação diferencial separável, e resolva-a.

(d) Determine então $y = y(x)$

(e) Determine em que condições o gato alcança o rato. Calcule em que ponto do eixo y o encontro ocorre.

Solução:

(a) No instante t após o início da perseguição, o gato está no ponto (x, y) da *curva de perseguição* $\mathscr{C}$, que vamos supor ser o gráfico de uma função $y = y(x)$; e o rato, no mesmo instante se deslocou até a posição $(0, v_R t)$ sobre o eixo OY. A distância percorrida pelo gato é o comprimento do arco desde $(a, 0)$ até (x, y):

$$\ell(\mathscr{C}) = \int_a^x \sqrt{1+[y'(x)]^2}. \qquad (4.16)$$

Mas, como a velocidade do gato ao longo da curva é ω, temos também

$$\ell(\mathscr{C}) = \omega.t. \qquad (4.17)$$

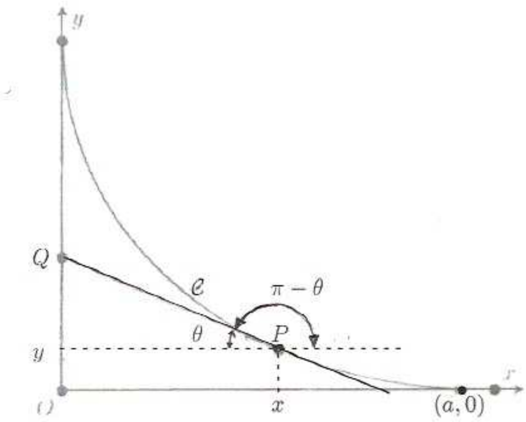


Figura 4.13: Curva de Perseguição.

Igualando (4.16) com (4.17), e tirando o valor do tempo t, obtemos

$$t = \frac{1}{\omega}\int_a^x \sqrt{1+[y'(x)]^2}. \tag{4.18}$$

como se queria mostrar.

(b) Por outro lado, seja $\theta = \theta(t)$ a medida do menor ângulo que a reta tangente ao gráfico de $\mathscr{C}$, reta segundo a qual o gato deve se deslocar no instante t, para estar sempre apontando na direção do rato, faz com o eixo horizontal.

Acompanhando pela figura, temos $tg\,(\pi - \theta) = \dfrac{\overline{OQ} - y}{x} = \dfrac{v_R t - y}{x}$

Ou seja, $-tg\,(\theta) = \dfrac{v_R t - y}{x}$.

Mas $tg\,(\theta) = -y'(x)$. Assim

$$-y' = \frac{v_R t - y}{x};$$

e portanto (tirando o valor de t):

$$t = \frac{-xy' + y}{v_R}. \tag{4.19}$$

Igualando (4.18) com (4.19):

$$\frac{1}{\omega}\int_a^x \sqrt{1+[y'(x)]^2} = \frac{-xy' + y}{v_R}.$$

Daí,

$$xy' - y = -\frac{v}{\omega}\int_a^x \sqrt{1+[y'(x)]^2};$$

e então, derivando com respeito a t (usando o Teorema Fundamental do Cálculo), obtemos (depois de simplificar):

$$xy'' = c\sqrt{1+[y'(x)]^2}, \tag{4.20}$$

com $c = v/\omega$. com queríamos.

(c) Fazendo a mudança de variável $p = y'$, (4.20) se escreve como

$$xp' = c\sqrt{1+p^2},$$

ou, na forma separada:

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = c\,\frac{dx}{x}. \tag{4.21}$$

(d) Integrando os dois lados de (4.21), temos:

$$-\ln(\sqrt{1+p^2}-p) = c\,ln\,(x) + k.$$

E, já que $p(a) = y'(a) = 0$, então $k = c\,ln(a)$; de maneira que a solução de (4.21) é

$$\begin{aligned} ln(\sqrt{1+p^2}-p) &= c\,[ln\,(a) - ln\,(x)] \\ &= c\,ln\left(\frac{a}{x}\right) \\ &= ln\left(\frac{a}{x}\right)^c. \end{aligned}$$

Ou seja

$$\sqrt{1+p^2} - p = \left(\frac{a}{x}\right)^c. \tag{4.22}$$

Mas $xp' = c\sqrt{1+p^2}$. Portanto

$$\sqrt{1+p^2} = \frac{xp'}{c}.$$

Substituindo em (4.22):

$$\frac{xp'}{c} - p = \left(\frac{a}{x}\right)^c,$$

ou ainda

$$p' - \frac{x}{c}\, p = \frac{c}{x} \cdot \left(\frac{a}{x}\right)^{c},$$

que é uma equação diferencial linear não homogênea de primeira ordem para $p = p(x)$. Sua solução geral é

$$p(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^{c} + k\, c\, a^{c}\, x^{c}.$$

Para $x = a$, $y = 0$, de modo que

$$0 = \frac{1}{2} + k\, a^{2c}.$$

Logo $k = \dfrac{1}{2a^{2c}}$ e assim

$$p(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^{c} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^{c}.$$

Retornando à variável y:

$$y'(x) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{c} - \left(\frac{a}{x}\right)^{c}\right] \tag{4.23}$$

Se $c \neq 1$, obtemos a solucão

$$y(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{x^{c+1}}{a^{c}\,(c+1)}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{a^{c}\, x^{-c+1}}{1-c}\right] + \tilde{k}.$$

Isto é,

$$y(x) = \frac{1}{2}\, a \left[\frac{1}{c+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{c+1} + \frac{1}{c-1}\left(\frac{a}{x}\right)^{c-1}\right] + \tilde{k}.$$

Novamente usando que $x = a \Longrightarrow y = 0$ tiramos o valor

$$k = -\frac{ca}{c^{2}-1}.$$

E assim, para $c \neq 1$,

$$y(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{x^{c+1}}{a^{c}\,(c+1)}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{a^{c}\, x^{-c+1}}{1-c}\right] - \frac{ac}{c^{2}-1}. \tag{4.24}$$

Caso $c = 1$ (4.23) se torna

$$y'(x) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right) - \left(\frac{a}{x}\right)\right],$$

cuja solução geral é

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2a} - a\ln x\right) + \tilde{\tilde{k}}$$

$y(a) = 0 \Longrightarrow \tilde{\tilde{k}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} - a\ln a\right)$, e a solução correspondente é

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2a} - a\ln x\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} - a\ln a\right). \qquad (4.25)$$

(d) Para o gato alcançar o rato duas condições devem ser satisfeitas:

Primeira A abcissa x do ponto da curva de perseguição tem de ser zero.

Segunda A ordenada que dá a posição do rato tem de ser igual à ordenada da curva de perseguição em $x = 0$.

Caso $c = 1$, $y(x)$ é dada por (4.25), e vemos que $y(0)$ não está definida.

$c = 1 \Rightarrow$ *o gato nunca alcançará o rato.*

Caso $c \neq 1$, $y(x)$ é dada por (4.24), e $y(0) = -\dfrac{ac}{c^2-1}$.

Precisamos distinguir dois casos:

$c > 1$. Neste caso $y(0) < 0$ e o gato *não alcançará o rato*.

$c < 1$. Aí $y(0) > 0$ e *o gato alcançará o rato, sendo que o encontro ocorrerá quando* $vt = -\dfrac{ac}{c^2-1}$ isto é, quando

$$t = -\frac{ac}{v(c^2-1)}\ .$$

Solução comentada da atividade 4.4

Considere a variável u tal que $y = e^{\int u(x)\,dx}$; isto é $u = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$. Temos

$$\frac{dy}{dx} = e^{\int u(x)dx}u(x) \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = e^{\int u(x)dx}\left[u^2(x) + \frac{du}{dx}\right].$$

Substituindo as expressões de y, $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$ em (1) segue que

$$\begin{aligned} 0 &= e^{\int u(x)dx}\left(u^2(x)+\frac{du}{dx}\right)+Q(x)\left(e^{\int u(x)dx}u(x)\right)+P(x)e^{\int u(x)dx} \\ &= e^{\int u(x)dx}\left[u^2(x)+\frac{du}{dx}+Q(x)u(x)+P(x)\right] \\ &= \frac{du}{dx}+u^2(x)+Q(x)u(x)+P(x). \end{aligned}$$

Da última igualdade acima, segue que

$$\frac{du}{dx}=-P(x)-Q(x)u-u^2.$$

Reciprocamente,

$$y=e^{\int u(x)dx} \Rightarrow \int u(x)dx=\ln y$$
$$\Rightarrow u(x)=\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{du}{dx}=-\frac{1}{y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Substituindo as expressões de $u(x)$ e $\dfrac{du}{dx}$ na equação de Riccati $\frac{du}{dx}=-P(x)-Q(x)u-u^2.$, temos

$$-\frac{1}{y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2}=-P(x)-Q(x)\cdot\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}-\frac{1}{y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

Daí,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-P(x)y-Q(x)\frac{dy}{dx}.$$

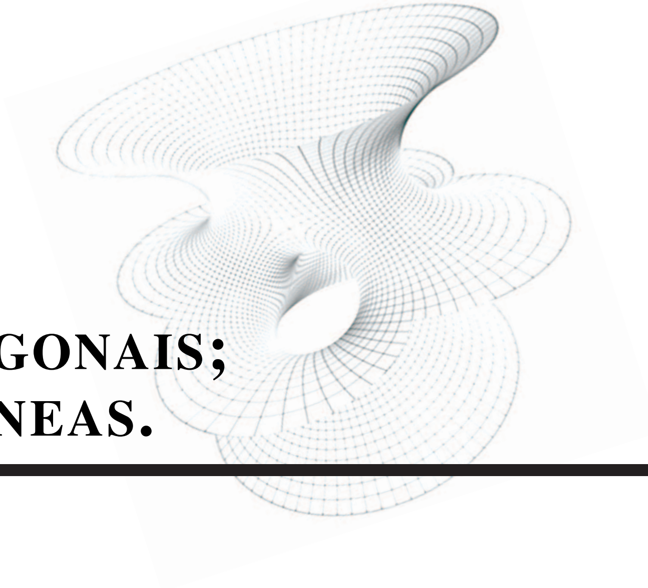
Logo,

$$\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\frac{dy}{dx}+P(x)y=0.$$

✍ concluímos então que para resolver uma equação linear homogênea de segunda ordem acima, podemos transformá-la num par de equações simultâneas de primeira ordem, uma das quais é uma equação de Riccati:

$$\begin{cases} dy/dx = uy \\ du/dx = -u^2 - Q(x)u - P(x) \end{cases}$$

Aula 5



TRAJETÓRIAS ORTOGONAIS; EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS.

Objetivos

Ao final desta aula, você será capaz de:

1. calcular as trajetórias ortogonais a famílias de curvas dadas;
2. identificar e obter soluções de equações homogêneas.

INTRODUÇÃO

Pré-requisito:
Equações diferenciais fundamentais; Equações diferenciais lineares de primeira ordem, equações diferenciais de Bernoulli, de Riccati e separáveis.

Nesta aula, vamos começar a resgatar um pouco a ordem histórica, e estudar problemas que surgiram logo no início do Cálculo. Trata-se de problemas de determinar as “trajetórias” (curvas) que cortam todas as curvas de uma coleção segundo um ângulo pré-estabelecido; problemas cuja solução já se sabia obter (em determinados casos particulares) com os recursos geometria euclidiana tradicional.

Inicialmente, por ser tecnicamente mais simples, vamos abordar o problema de obter as trajetórias que intersectam uma curva, ou uma família de curvas,segundo um ângulo reto, as famosas *trajetórias ortogonais*; e, completando o estudo, obter as trajetórias que intersectam uma curva, ou uma família de curvas, segundo um ângulo agudo ou obtuso.

Cuidado!

A palavra “curva” está sendo empregada no sentido geral. Uma linha reta é uma curva. Não estamos exigindo que curvas sejam linhas ”encurvadas”.

✍ Todas as curvas serão consideradas como gráficos de funções, ou figuras que podem ser decompostas em pedaços de gráficos.

Em 1692, apenas oito anos após sua primeira publicação a respeito do Cálculo Diferencial, Leibniz publicou um pequeno artigo na *Acta Eruditorum* (um periódico especializado da época, com o título interessante de “Ações dos Eruditos”). O artigo prometia uma nova aplicação e uso da análise do infinito (leia-se do Cálculo Diferencial). Dois anos mais tarde ele deu seqüência àquele artigo com mais uma “nova aplicação e uso do cálculo diferencial”. Os dois artigos eram devotados ao mesmo problema, a saber: obter um algoritmo para calcular a curva que em cada um de seus pontos tangenciava uma das curvas de uma dada família: a assim chamada envoltória. Não era a primeira vez que as envoltórias apareciam. O conceito já tinha se manifestado pelo menos desde 1644 nos estudos de Torricelli a respeito de balística. Torricelli tinha demonstrado que todas as parábolas balísticas que são as trajetórias de balas de canhão atiradas segundo diferentes ângulos de elevação com a mesma velocidade inicial e segundo um mesmo plano vertical) tangenciavam uma parábola fixa. Essa parábola é a “parábola de segurança”, pois ela define o alcance do canhão. Trata-se da envoltória da família de parábolas balísticas. Também Huygens, em sua teoria da luz, tinha feito uso extensivo das envoltórias. Assim, o conceito não era realmente novo. O que era novidade era o emprego do Cálculo Diferencial (o “algoritmo de Leibniz”) nesse problema a respeito de famílias de curvas.

Gottfried Leibniz
1646 - 1716

Gottfried W Leibniz com a idade de vinte anos entrou para o serviço político do Eelitor de Mainz. Seu estudo "à sério" de Matemática não começou senão aos vinte e seis anos quando foi enviado a Paris numa missão diplomática. Durante sua estadia (quatro anos) em Paris, ele concebeu as principais características a respeito do Cálculo. Apesar de sua careira profissional ter sido devotada principalmente à Lei e à Diplomacia, o alcance de suas contribuições fundamentais - em áreas tão diversas quanto Matemática, Filosofia, e Ciência - provavelmente nunca foi igualado por nenhum sábio posterior.

TRAJETÓRIAS QUE SE CORTAM PERPENDICULARMENTE

!

Atenção!

O problema das trajetórias ortogonais foi proposto, pela primeira vez, por Johann Bernoulli, no ano de 1694, quando ele pediu a Leibniz que considerasse a seguinte questão:

> "Conhecidas as posições de um número infinito de curvas dadas, ache a curva que intersecta todas elas segundo ângulos retos."
>
> Bernoulli afirmou que o problema lhe era familiar há muito tempo, e comentou que tinha recomeçado a pensar nele ao deparar com um artigo de Leibniz, de 1694, a respeito da envoltória de famílias de curvas. Ele motivou o problema das trajetórias ortogonais referindo-se à teoria ondulatória da luz de Huygens proposta no livro *Traité de la lumiére* (1690); lá os raios de luz são vistos como as trajetórias ortogonais às frentes de onda, e assim, Johann Bernoulli sugeria que métodos de calcular trajetórias ortogonais a famílias de curvas seriam importantes para determinar os raios de luz. Bernoulli só tinha conseguido resolver o problema para alguns casos particulares, como por exemplo o de certas famílias de parábolas, e assim ele estava pedindo a Leibniz que descobrisse uma regra analítica geral para calcular tais trajetórias, análoga à que ele havia obtido para cálculo das envoltórias.

Definição 5.1.

Duas curvas que se cortam num ponto P, e que possuem retas tangentes em P, são perpendiculares , ou ortogonais, quando essas retas tangentes fazem um ângulo reto.

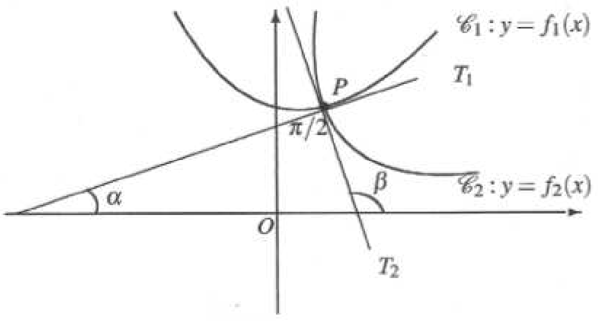


Figura 5.1: Curvas que se cortam ortogonalmente em um ponto

Do curso de Álgebra Linear, sabemos que as retas T_1 e T_2 são perpendiculares, se e só se

$$\boxed{m_1 \cdot m_2 = -1}$$

Claramente, se $y' = m_1(x)$ é a equação diferencial satisfeita pelos pontos da curva $\mathscr{C}_1$, então $y' = -1/m_1(x)$ é a equação diferencial satisfeita pelos pontos da curva ortogonal $\mathscr{C}_2$.

Exemplo 5.1.

Use a definição de ortogonalidade para verificar que a "reta" $y = x$ e o "semicírculo" $y = \sqrt{1-x^2}$ são ortogonais no ponto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

Solução: Basta observar que:

1. O ponto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ pertence tanto à reta $y = x$, quanto ao semicírculo $y = \sqrt{1-x^2}$;

2. a inclinação da reta $y = x$, no ponto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, é igual a 1, e a inclinação da reta tangente a $y = \sqrt{1-x^2}$, no ponto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, é igual a -1;

3. o produto das duas inclinações é igual a -1 e então as duas curvas são ortogonais no ponto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$

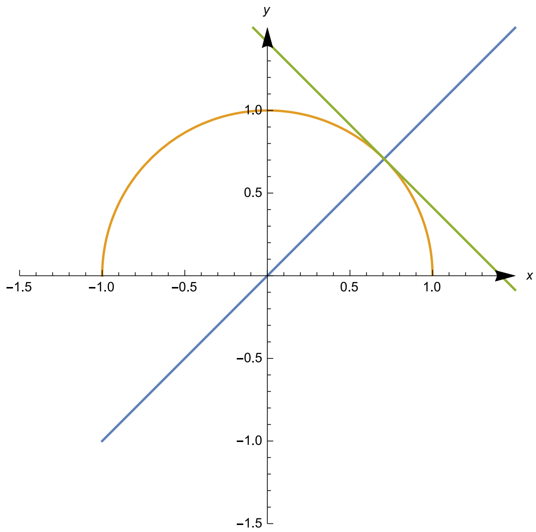


Figura 5.2: Curvas ortogonais no ponto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

Exemplo 5.2.

Calcule a família de trajetórias ortogonais à família de elipses:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

A figura abaixo exibe uma elipse genérica da família.

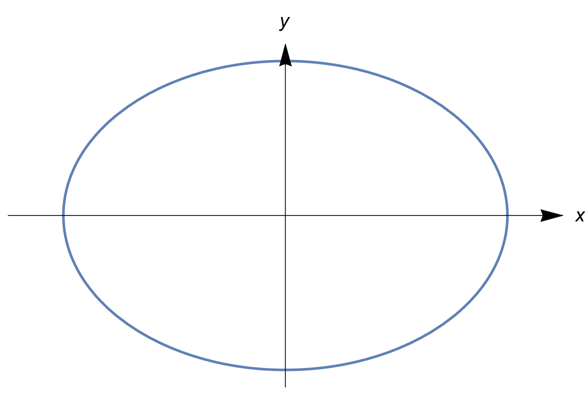


Figura 5.3: Elipse da família $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

Solução: Primeiramente, usando derivação implícita, calculamos a inclinação de cada reta tangente em cada ponto das elipses da família dada:

$$\frac{2}{a^2}x + \frac{2}{b^2}y\,y' = 0.$$

O que nos dá

$$y' = -\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{x}{y}\right) \tag{5.1}$$

A equação (5.1) é a *equação diferencial* da família que contém a elipse dada.

As curvas que seccionam todas as elipses da família ortogonalmente são soluções de

$$y' = \frac{a^2}{b^2}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{5.2}$$

A equação (5.2) é uma equação separável, cuja solução geral é (verifique!)

$$y = \lambda\, x^{a^2/b^2}$$

sendo λ um parâmetro real.

As figuras abaixo exibem algumas situações possíveis, de acordo com os valores relativos de a e b.

- Se $a = b$, trajetórias são semi-retas emanando da origem.
- Se $a > b$, trajetórias são parábolas com vértice na origem, e eixos paralelos ao eixo das abcissas
- Se $a < b$, trajetórias são parábolas com vértice na origem, e eixos paralelos ao eixo das ordenadas

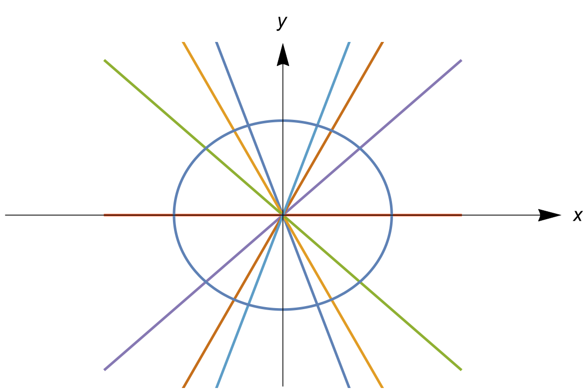


Figura 5.4: Trajetórias ortogonais, caso $a = b$.

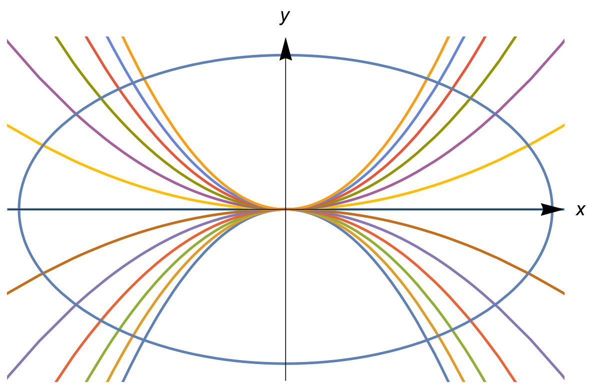


Figura 5.5: Trajetórias ortogonais, caso $a > b$.

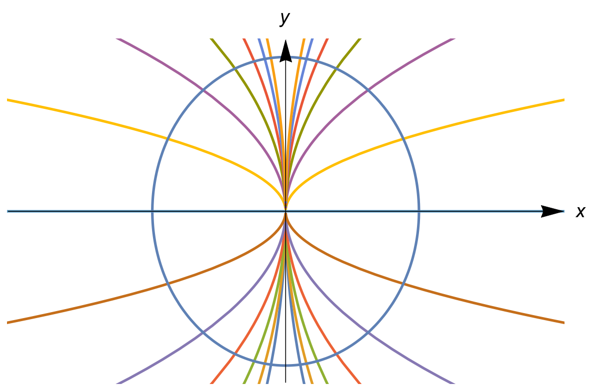


Figura 5.6: Trajetórias ortogonais, caso $a < b$.

!

Atenção!

Os exemplos a seguir, mostram como o procedimento sistemático para calcular as trajetórias ortogonais a uma curva, se estendem, de maneira natural, ao cálculo de trajetórias ortogonais a todas as curvas de uma família, indexada por um parâmetro

Exemplo 5.3.

Determine a família de trajetórias ortogonais à família de parábolas $y = cx^2$

Solução: Repetimos o "método", na forma de um conjunto de regras:

1. Primeiramente, calcula-se a inclinação da reta tangente a um

ponto genérico de uma qualquer das curvas da família. *Observe que, para aplicar este método, é muito importante que as curvas sejam vistas como gráficos de funções $y = y(x)$, definidas implícita ou explicitamente* derivando a equação da família com relação a x, obtemos: dy/dx. Como procuramos uma equação diferencial para a incinação das derivadas ela não pode conter parâmetros, assim, se necessário, elimina-se o parâmetro no sistema formado pela equação da família e a equação para dy/dx, obtendo a equação diferencial dos coeficientes angulares das curvas da família dada da forma $dy/dx = f(x,y)$

2. Repetindo o raciocínio do início desta seção, temos que *a equação diferencial das inclinacões das retas tangentes às trajetórias ortogonais* é dada por $dy/dx = -1/f(x,y)$

3. A família de trajetórias é obtida como o conjunto de soluções da equação diferencial das trajetórias ortogonais.

Aplicando este "roteiro" ao exemplo que estamos examinando, temos que a variável y é dada como função explícita de x, a saber: $y = cx^2$. Derivando (explicitamente) a equação da família, obtém-se $dy/dx = 2cx$. A seguir vamos (se possível) eliminar o parâmetro no sistema

$$\begin{cases} y = cx^2 \\ y' = 2cx \end{cases}$$

Da primeira equação calculamos $c = y/x^2$. Substituindo em dy/dx obtemos $dy/dx = 2.(y/x^2).x = 2y/x$.
Consequentemente a *equação das trajetórias ortogonais é* $dy/dx = -1/(dy/dx) = -x/(2y)$. Essa equação é separável, e, depois de integrada diretamente, obtemos as soluções $2y^2 + x^2 = k$, o qual identificamos como uma família de elipses, centradas no ponto $(0,0)$, com eixos paralelos aos eixos coordenados.

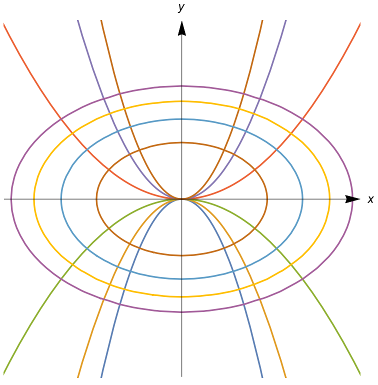


Figura 5.7: Trajetórias ortogonais à família de parábolas $y = cx^2$.

Exemplo 5.4.

Calcule as trajetórias ortogonais à família $y = c\,e^x$.

Solução: Tem-se, pelo algoritmo:

$$
\begin{aligned}
y = ce^x \quad &\Longrightarrow \quad y' = ce^x \\
&\Longrightarrow \quad y' = \left(\frac{y}{e^x}\right) e^x, \text{ pois } c = \frac{y}{e^x} \\
&\Longrightarrow \quad y' = y \\
&\Longrightarrow \quad -\frac{1}{y'} = y \\
&\Longrightarrow \quad y' = -\frac{1}{y} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y} \\
&\Longrightarrow \quad y\,dy = -dx \\
&\Longrightarrow \quad \int y dy = -\int dx \\
&\Longrightarrow \quad \frac{y^2}{2} = -x + c \\
&\Longrightarrow \quad y^2 + 2x = c,
\end{aligned}
$$

onde c é um parâmetro real arbitrário.

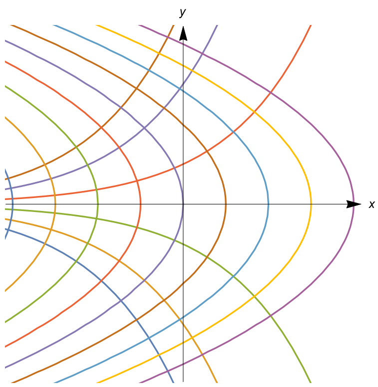


Figura 5.8: Trajetórias ortogonais à família $y = c\,e^x$.

Atividade de auto-avaliação 5.1

Calcule as trajetórias que cortam *todos* os círculos da família (i.e, da coleção)

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad R \in \mathbb{R} - \{0\} \quad \text{ortogonalmente.}$$

Exemplo 5.5.

Mostre que a família

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1$$

onde a e b são contantes dadas, é "auto-ortogonal". Tais curvas são denominadas curvas confocais.

Solução: Consideremos a equação

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1. \tag{5.3}$$

A equação acima é equivalente a

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{(a^2+\lambda)+(b^2-a^2)}=1.$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned}
& \frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{(a^2+\lambda)+(b^2-a^2)}=1\\
\Rightarrow\quad & \frac{2x}{a^2+\lambda}+\frac{2yy'}{(a^2+\lambda)+(b^2-a^2)}=0\\
\Rightarrow\quad & \frac{x}{a^2+\lambda}=-\frac{yy'}{(a^2+\lambda)+(b^2-a^2)}\\
\Rightarrow\quad & \frac{a^2+\lambda}{x}=-\frac{\left(a^2+\lambda\right)+\left(b^2-a^2\right)}{yy'}\\
\Rightarrow\quad & \frac{a^2+\lambda}{x}+\frac{a^2+\lambda}{yy'}=\frac{a^2-b^2}{yy'}\\
\Rightarrow\quad & \left(a^2+\lambda\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{yy'}\right)=\frac{a^2-b^2}{yy'}\\
\Rightarrow\quad & \left(a^2+\lambda\right)\left(\frac{x+yy'}{xyy'}\right)=\frac{a^2-b^2}{yy'}\\
\Rightarrow\quad & a^2+\lambda=\frac{\left(a^2-b^2\right)x}{x+yy'}
\end{aligned}$$

Segue disso que

$$\begin{aligned}
b^2+\lambda &= \left(a^2+\lambda\right)+\left(b^2-a^2\right)=\frac{\left(a^2-b^2\right)x}{x+yy'}+\left(b^2-a^2\right)\\
&= \frac{\left(a^2-b^2\right)x+\left(b^2-a^2\right)(x+yy')}{x+yy'}=\frac{\left(b^2-a^2\right)yy'}{x+yy'}.
\end{aligned}$$

Substituindo as expressões de $a^2+\lambda$ e $b^2+\lambda$ em (5.3), segue

$$\begin{aligned}
& \frac{x^2\,(x+yy')}{(a^2-b^2)\,x}+\frac{y^2\,(x+yy')}{(b^2-a^2)\,yy'}=1\\
\Rightarrow\quad & \frac{x\,(x+yy')}{(a^2-b^2)}+\frac{y\,(x+yy')}{(b^2-a^2)\,y'}=1\\
\Rightarrow\quad & \left(x+yy'\right)\left(\frac{x}{a^2-b^2}+\frac{y}{(a^2-b^2)\,y'}\right)=1\\
\Rightarrow\quad & \left(x+yy'\right)\left(\frac{xy'-y}{(a^2-b^2)\,y'}\right)=1.
\end{aligned}$$

De onde obtemos a equação

$$\left(x+yy'\right)\left(xy'-y\right)=\left(a^2-b^2\right)y'. \tag{5.4}$$

Substituindo y' por $-\dfrac{1}{y'}$, segue

$$\begin{aligned}
\left(x-\frac{y}{y'}\right)\left(-\frac{x}{y'}-y\right) &= \left(a^2-b^2\right)\left(-\frac{1}{y'}\right)\\
\frac{(y'x-y)}{y'}\,\frac{-x-yy'}{y'} &= \left(a^2-b^2\right)\left(-\frac{1}{y'}\right)\\
\left(y'x-y\right)\left(x+yy'\right) &= \left(a^2-b^2\right)y'
\end{aligned}$$

que é precisamente a equação (5.4). Portanto, a equação (5.4) representa sua própria família de trajetórias ortogonais.

Exemplo 5.6.

Mostre que a família $\mathscr{C} := y^2-2cx=c^2$. é “auto-ortogonal”.

Solução: A equação diferencial da família $\mathscr{C}$ é calculada por eliminação do parâmetro c no sistema

$$\begin{cases} y^2-2cx-c^2=0\\ \dfrac{\partial}{\partial c}(y^2-2cx-c^2)=0. \end{cases}$$

Ou seja, eliminando c no sistema:

$$\begin{cases} y^2-2cx-c^2=0\\ yy'=c, \end{cases}$$

obtemos a equação diferencial

$$y\,(y')^2 + 2xy' - y = 0. \tag{5.5}$$

A equacão diferencial (5.5) é a equação diferencial associada á família $\mathscr{C}$.

Por outro lado, usando novamente a técnica de "substituir y' por $-1/y'$, calculamos a equação diferencial associada à família de trajetórias ortogonais:

Temos:

$$\begin{aligned} y\,(-1/y')^2 + 2x\,(-1/y') - y = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad y - 2xy' - (y')^2 y = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad y\,(y')^2 + 2xy' - y = 0. \end{aligned}$$

Então a equação diferencial da família de trajetórias ortogonais a $\mathscr{C}$ é

$$y\,(y')^2 + 2xy' - y = 0. \tag{5.6}$$

Observando que (5.5) = (5.6), concluímos que $\mathscr{C}$ é auto-ortogonal.

A figura abaixo exibe algumas curvas da família $\mathscr{C}$, ou de sua família ortogonal, é claro:

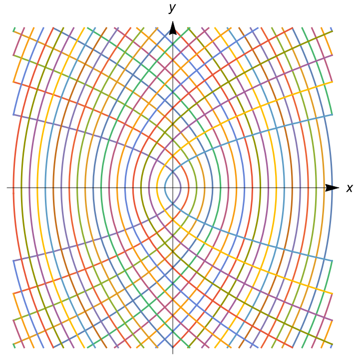


Figura 5.9: Trajetórias da família auto-ortogonal $\mathscr{C}$.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS HOMOGÊNEAS

Definição 5.2 (Equações diferenciais homogêneas)**.**

Uma *equação diferencial homogênea* é uma equação da forma

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right) \tag{5.7}$$

onde F é uma função definida em $U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x \neq 0$ em todos os pontos de U.

Exemplo 5.7.

A equação $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - x\,cos^2\left(\frac{y}{x}\right)}{x}$ é uma equação homogênea em $U = \mathbb{R}^2 - (0,x)$.

De fato, observamos que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - x\,cos^2\left(\frac{y}{x}\right)}{x} = \dfrac{y}{x} - cos^2\left(\dfrac{y}{x}\right) = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Teorema 5.1.

A mudança de variáveis

$$v = \frac{y}{x},$$

definida em qualquer região onde $x \neq 0$,transforma a equação homogênea (5.7) em uma equação fundamental, ou numa equação de variáveis separadas.

Demonstração

$v = \dfrac{y}{x} \Longrightarrow y' = v + xv'$. Substituindo em (5.7), obtemos $xv' = F(v) - v$. Se $\forall\ v\ F(v) = v$ então a equação $xv' = F(v) - v$ se reduz a $xv' = 0$. Como estamos supondo $x \neq 0$, a equação se torna $v' = 0$, uma equação fundamental, cujas soluções são $v = c$; ou seja $y = cx$.
Se $\exists v_0$ tal que $F(v_0) \neq v_0$, então, por continuidade $F(v) \neq v$ para todo v numa vizinhança W de v_0. Para todo $v \in W \quad xv' = F(v) - v \Longleftrightarrow \dfrac{dv}{F(v) - v} = \dfrac{dx}{x}$; que é uma equação separada .

CQD

Exemplo 5.8.

Resolva as seguintes equações homogêneas:

1. $y' = \dfrac{x+y}{x}$

2. $2y - xy' = 0$
3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4y-3x}{2x-y}$

Solução:

Observem o padrão: Em todos os itens, a primeira coisa que fazemos é escrever a equação na forma padronizada da equação homogênea; a saber:

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right).$$

Em seguida fazemos a mudança de variáveis $v = y/x$ (de onde $y = vx$ e consequentemente $y' = v + xv'$.)
Substituindo na equação original, ela se transforma numa equação separável (na variável v). Após resolver essa equação separável, faz-se a mudança inversa, para obter a resposta em termos de y.

Obs: Para simplificar as contas, vamos supor, nestes exemplos, sempre regiões onde $\boldsymbol{x > 0}$, e onde as expressões, na variável $\boldsymbol{v}$, que aparecem nos domínios do logaritmo são positivas.

1. $y' = \dfrac{x+y}{x}$.

   - Forma padrão: $y' = 1 + \dfrac{y}{x}$;
   - $v = y/x$; $y' = v + xv'$;
   - equação separável/separada:

   $$v' = 1/x;$$

   - solução geral da equação, em v:

   $$v = ln(cx);$$

   - Solução geral em y:

   $$y = x\,ln\,cx.$$

2. $2y - xy' = 0$.

   - Forma padrão: $2\dfrac{y}{x} - y' = 0$;
   - $v = y/x$; $y' = v + xv'$;

- equação separável/separada:

$$\frac{v'}{v} = \frac{1}{x};$$

- solução geral da equação, em v:

$$v = cx;$$

- Solução geral em y:

$$y = cx^2.$$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4y-3x}{2x-y}$.
(verifique cuidadosamente as contas e simplificações)

- Forma padrão : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4y/x-3}{2-y/x}$;
- $v = y/x; \quad y' = v + xv'$;
- equação separável/separada:

$$\frac{2-v}{v^2+2v-3}\,dv = \frac{1}{x}\,dx;$$

- solução geral da equação, em v, por frações parciais:

$$\left(\frac{v-1}{v+3}\right)^{1/4} = cx;$$

- Solução geral em y:

$$\sqrt[4]{\frac{y-x}{y+3x}} = cx.$$

EQUACÕES HOMOGRÁFICAS

Exemplo 5.9.

Calcule as trajetórias ortogonais à curva cônica (em posição geral)

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

Mais uma vez vamos aplicar nosso método de calcular trajetórias ortogonais:

Equações Homográficas

Este nome provém de uma transformacão geométrica do plano, cuja exploração e relacão com as equações diferenciais está além do conteúdo destas aulas.

1. Utilizando derivação implícita, procuramos uma equação diferencial de primeira ordem para a qual a família de cônicas define implicitamente solucões:

   Derivando implicitamente a equação da cônica em posição geral:

   $$2ax + 2b(y + xy') + 2cyy' + 2d + 2ey' = 0$$

   de onde
   $$y' = -\frac{ax + by + d}{bx + cy + e}$$

2. Escrevemos então a equação diferencial da família de trajetórias ortogonais
   $$y' = \frac{bx + cy + e}{ax + by + d}, \tag{5.8}$$

   também chamadas de **equações homográficas**.

3. As equações $\ell_1 \equiv bx + cy + e = 0$ e $\ell_2 \equiv ax + by + d = 0$ representam retas no plano cartesiano. Essas retas podem ser paralelas ou concorrentes.

   ℓ_1 e ℓ_2 serão paralelas se e só se $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$. Isto é, se e só se $b^2 = ac$.

4. Consideremos a possibilidade $b^2 = ac$, e $d \neq 0$ Vamos distinguir os casos $b = 0$ e $b \neq 0$.

   - $b = 0 \Longleftrightarrow ac = 0$
     - Suponha que $a = 0$ e $c \neq 0$. Então a equação (5.8) se reescreve como
     $$y' = \frac{cy + e}{d},$$

     que é uma equação diferencial linear não-homogênea de primeira ordem para y como função de x.

     - Suponha que $a \neq 0$ e $c = 0$. (5.8) se reescreve como

     $$y' = \frac{e}{ax + d},$$

     que é uma equação diferencial fundamental.
     - Suponha agora $a = c = 0$, de modo que (5.8) se reduz a

     $$y' = \frac{e}{d},$$

     que é uma equação trivial.

   - Suponha $b \neq 0$. Lembremos que isto equivale a

     $$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = k.$$

     . Portanto $b = ka$ e $c = kb$ e a equação (5.8) toma a forma

     $$y' = \frac{kax + kby + e}{ax + by + d},$$

ou seja

$$y' = \frac{k(ax+by)+e}{ax+by+d}. \tag{5.9}$$

A equação (5.9) sugere a mudança de variáveis

$$z = ax+by,$$

de maneira que $y = \frac{1}{b}(z-ax)$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right).$$

Substituindo na equação (5.8)

$$\frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right) = \frac{kz+e}{z+d}$$

isto é

$$\frac{dz}{dx} = \underbrace{b\left(\frac{kz+e}{z+d}\right) + a}_{G_1(z)}$$

que é uma equação separável (na variável z como função de x).

Observe que, neste caso, as equações $bx+cy+e=0$ e $ax+by+d=0$ representam retas concorrentes.

O sistema

$$\begin{cases} bx+cy+e &= 0 \\ ax+by+d &= 0 \end{cases}$$

possui uma única solucão:

$$x_0 = H, \qquad y_0 = K$$

Obs : Fazendo a mudança de variáveis $x = X+H$ e $y = Y+K$, temos

$$X = x-H, \qquad Y = y-K, \tag{5.10}$$

e pela regra da cadeia,

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dY}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dX} = \frac{d}{dy}(y-K)\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d}{dX}(X-H) = 1\cdot\frac{dy}{dx}\cdot 1 = \frac{dy}{dx}$$

Substituindo x e y por $X+H$, $Y+K$ e dy/dx por dY/dX na equação $y' = \frac{bx+cy+e}{ax+by+d}$, obtemos

$$\frac{dY}{dX} = \frac{b(X+H)+c(Y+K)+e}{a(X+H)+b(Y+K)+d}$$

isto é

$$\frac{dY}{dX} = \frac{bX+cY+\underbrace{bH+cK+e}_{0}}{aX+bY+\underbrace{aH+bK+d}_{0}}.$$

Assim a equação diferencial das trajetórias ortogonais se reduz a

$$\frac{dY}{dX} = \frac{bX + cY}{aX + bY}$$

De fato,

$$\frac{bX + cY}{aX + bY} = \frac{X(b + c\,Y/X)}{X(a + b\,Y/X)} = \frac{b + cY/X}{a + bY/X}$$

Trata-se de uma equação homogênea nas variáveis X e Y. Façamos então a mudança de variáveis:

$$V = \frac{Y}{X},$$

i.é,

$$Y = VX;$$

de maneira que

$$\frac{dY}{dX} = V + X\frac{dv}{dX}.$$

Daí

$$V + X\frac{dV}{dX} = \frac{b + c\,V}{a + b\,V},$$

a qual se reescreve como uma equação de variáveis separáveis:

$$\frac{dV}{dX} = \frac{1/X}{1/(-abV^2 + (c-a)V + b)}\ .$$

Exemplo 5.10.

Resolva

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 3y - 1}{4x + 6y + 4}$$

Solução:

Temos

$$det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = 12 - 12 = 0$$

Façamos a mudança $2x + 3y = t$. Então

$$y = \frac{1}{3}(t - 2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left(\frac{dt}{dx} - 2\right)$$

Substituindo na equação

$$\frac{1}{3}\left(\frac{dt}{dx}-2\right)=\frac{t-1}{2t+4}$$

$$\frac{dt}{dx}=\frac{3t-3}{2t+4}+2=\frac{7t+5}{2t+4}$$

$$\frac{2t+4}{7t+5}\,dt=dx$$

$$\left(\frac{2}{7}+\frac{18/7}{7t+5}\right)\,dt=dx$$

Integrando

$$\frac{2}{7}\,t+\frac{18}{49}\,ln(7t+5)=x+c$$

ou

$$2t+18\,ln(7t+5)=49x+k$$

e como $t=2x+3y$,

$$4x+6y+18\,ln(14x+21y+5)=49x+k$$

$$2y-15x+6\,ln(14x+21y+5)=k$$

!

Atenção!

Um dos fundadores do estudo moderno de aerodinâmica foi o matemático Nikolai E. Zhukovskii, nascido em 1847. Em sua tese de mestrado (Moscou - 1876), entitulada "Cinemática de um Fluido", ao estudar o problema das trajetórias de um fluxo bidimensinal em uma vizinhança de um ponto onde as componentes da velocidade se anulam, Zhukovskii se deparou com o problema de estudar o comportamento das curvas integrais da equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by}{cx+dy} \qquad (ad-bc \neq 0),$$

em vizinhanças da origem, e deu uma classificação dos *pontos críticos* de tais equações.
Equações do tipo acima, e outras mais gerais cujos coeficientes são funções racionais de x e y, foram estudadas por Poincaré em seus artigos fundamentais, dos anos de 1881 a 1886, que inauguraram um novo campo de estudo de equações diferenciais: a chamada teoria qualitativa de equações diferenciais.
Não vamos, neste curso, penetrar nesta vasta área da Matemática. O comentário acima serve apenas para chamar a atenção sobre a importância das equações que são funções racionais (i.e, quocientes de polinômios) nas variáveis x e y. Poincaré, na verdade, considerou primeiramente equações lineares (com coeficientes racionais e/ou algébricos), e depois equações não-lineares, para as quais - via de regra - não sabemos calcular soluções explícitas.

Atividade de auto-avaliação 5.2

Calcular a equação da curva $\mathscr{C} : y = f(x)$ que satisfaz a seguinte propriedade: *em cada ponto de $\mathscr{C}$, o comprimento do segmento da perpendicular traçada da origem à reta tangente naquele ponto é igual ao módulo da abcissa do ponto de tangência*

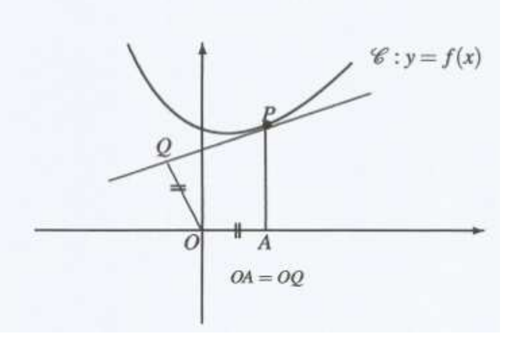


Figura 5.10: Figura para a atividade **5.2**.

Resumo

Nesta aula, aprendemos que:

- As trajetórias ortogonais (perpendiculares) a uma família de curvas cuja equação diferencial é
$$y' = f(x,y)$$
é a família de curvas que satisfazem à equação diferencial $y' = -1/f(x,y)$;
- As *equacões homogêneas* são as equações que estão, ou podem ser reduzidas à forma
$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right);$$
- A mudança de variáveis $v = y/x$ transorma uma equacão homogênea numa equação fundamental, ou numa equação separada.
- As equações da forma
$$y' = \frac{ax+by+c}{dx+ey+f},$$

ao chamadas de *equações homográficas* e se reduzem a

1. equações fundamentais ou separáveis (se $b^2 = ac$),
2. equações homogêneas (se $b^2 \neq ac$).

O QUE VEM POR AÍ:

Na próxima aula, continuaremos o estudo de famílias de curvas que se cortam, examinando os casos de interseções oblíquaas e "interseções" segundo ângulos rasos. Lembrando o que foi dito no final da aula 4: *os métodos desenvolvidos, servirão como balizas, que nos guiarão para os métodos numéricos e resultados gerais sobre equações diferenciais de primeira ordem, obtidos a partir do século XIX.*

SOLUÇÕES COMENTADAS DAS ATIVIDADES DESTA AULA:

Solução comentada da atividade 5.1

seja $P(x,y) = (x, f(x))$ um ponto genérico de um dos círculos da família, que não seja um dos pontos $(\pm R, 0)$ em cujas vizinhanças não podemos pensar no círculo como definindo uma função $y = f(x)$.
Seja m o coeficiente angular da reta tangente ao círculo em P. Claramente $m = y'$.

Calculamos y' derivando implicitamente a equação $x^2 + y^2 = R^2$:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = R^2 \quad &\Longrightarrow \quad 2x + 2yy' = 0 \\ &\Longrightarrow \quad y' = -\frac{x}{y}. \end{aligned}$$

Então os coeficientes angulares das curvas ortogonais são dados por

$$m' = -\frac{1}{\left(-\frac{x}{y}\right)} = \frac{y}{x}.$$

Daí formamos a equação diferencial das curvas ortogonais:

$$y' = \frac{y}{x},$$

que é uma equação linear homogênea de primeira ordem, e tem para soluções $y = c e^{\int \frac{1}{x} dx}$, i.é

$$y = c e^{ln|x|} = \pm c x.$$

Com exceção dos pontos $(-R, 0)$ e $(R, 0)$, qualquer outro ponto do círculo pode ser considerado como um ponto do gráfico de uma funcão derivável: $x \longmapsto \pm\sqrt{R^2 - x^2}$. Para fixar idéias, consideremos a raiz quadrada positiva:

A inclinação da reta tangente no ponto P de cooordenadas $(x, \sqrt{R^2 - x^2})$ é dada por $\frac{d}{dx}\sqrt{R^2 - x^2} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$.

Ou seja a inclinação da reta tangente em P é

$$\frac{dy}{dx} = -(x/y) \tag{5.11}$$

Pelo que acabamos de ver, a inclinação da reta tangente à curva perpendicular ao círculo no ponto P é

$$\frac{dy}{dx} = -1/(-x/y) = y/x \tag{5.12}$$

Para calcular essas curvas perpendiculares, basta resolver a equação (5.12).

Temos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = y/x \quad &\Longleftrightarrow \quad dy/y = dx/x \\ &\leftrightarrow \quad ln\, y \;= ln\, x + k \\ &\leftrightarrow \quad lny = ln\, x + ln\, c = ln\, cx\end{aligned}$$

o que nos dá, finalmente,

$$y = cx,$$

a coleção de todas as semi-retas partindo da origem, com a exceção das contidas no eixo das ordenadas (que na equação das curvas perpendiculares correspondem a $x = 0$). Uma análise à parte, permite que incluamos o eixo vertical na coleção de "trajetórias ortogonais", e o problema está resolvido.

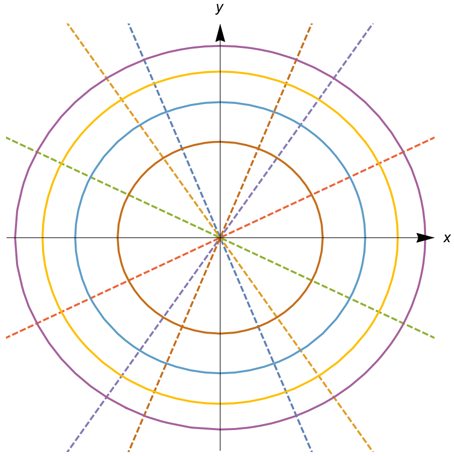


Figura 5.11: Trajetórias ortogonais à família de círculos $x^2 + y^2 = R^2$.

✍ Para enfatizar, as trajetórias ortogonais foram desenhadas em linhas pontilhadas, excetuando os eixo coordenados. Isso não é necessário pois a relação "cortar perpendicularmente" é *simétrica*, no sentido de que se $\mathscr{C}$ é (família) ortogonal a $\mathscr{D}$, então $\mathscr{D}$ é (família) ortogonal a $\mathscr{C}$. Pense nisso!

Solução comentada da atividade 5.2

num ponto arbitrário $P = (x_0, y_0) \in \mathscr{C}$ a equação da reta tangente é

$$Y - y_0 = y'(x_0)(X - x_0),$$

i.e,

$$y'(x_0)X - Y + [y_0 - y'(x_0)x_0] = 0.$$

A distância do ponto $(0,0)$ à reta tangente em P é

$$d = \frac{|y_0 - y'(x_0)x_0|}{\sqrt{1 + [y'(x_0)]^2}}$$

O problema nos informa que $d = |x_0|$. Daí:

$$|x_0| = \frac{|y_0 - y'(x_0)x_0|}{\sqrt{1 + [y'(x_0)]^2}}$$

Como (x_0, y_0) é um ponto arbitrário da curva $\mathscr{C}$, podemos abandonar o índice "0".

Elevando os dois lados ao quadrado :

$$x^2\left[1 + (y'(x))^2\right] = y^2 + x^2[y'(x)]^2 - 2xyy'(x).$$

Depois de simplificar, obtemos:

$$x^2 - y^2 + 2xyy'(x) = 0;$$

que é a equação diferencial que modela o problema.

Trata-se de uma equação homogênea, pois podemos reescrevê-la sucessivamente como

$$y' \quad = \quad -\frac{x^2 - y^2}{2xy} \quad = \quad -\frac{x^2\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)}{2xy}$$

Ou seja,

$$y' = \frac{(y/x)^2 - 1}{2(y/x)} \tag{5.13}$$

Usando a mudança de variáveis $v = y/x$ em (5.13), temos uma nova equação na variável v:

$$v + xv' = \frac{v^2 - 1}{2v}.$$

Simplificando,

$$\frac{2v\,dv}{1 + v^2} = -\frac{dx}{x}.$$

Esta última equação é de variáveis separáveis.
Assim,

$$\int \frac{2v}{1 + v^2}\,dv = -\int \frac{dx}{x}$$

Daí,

$$ln(1 + v^2) = -lnx + \tilde{k}, \qquad \tilde{k} = \text{ constante.}$$

Fazendo $\tilde{k} = ln\,k$, obtemos que

$$ln(1 + v^2) + ln\,x = ln\,k, \qquad k = \text{constante } > 0,$$

ou ainda que

$$x(1 + v^2) = k.$$

Recordando que $v = y/x$, obtém-se que

$$1+\frac{y^2}{x^2}=\frac{k}{x}.$$

Finalmente, escrevemos a equação da curva solução na forma

$$x^2+y^2=kx,$$

a qual é facilmente reconhecível como sendo a família de círculos com centros nos pontos $(k/2,0)$ e raios = $k/2$.

Aula 6

TRAJETÓRIAS TANGENCIAIS; EQUAÇÕES ESPECIAIS.

Objetivos

Ao final desta aula, você será capaz de:

1. Calcular trajetórias tangenciais associadas a equações diferenciais com soluções singulares e obter suas soluções completas;
2. identificar e obter soluções das equações de Clairaut e D'Alembert-Lagrange.

Pré-requisitos:
Aulas de 1 a 4; cursos de Cálculo I e II.

INTRODUÇÃO

Nesta aula introduzimos as trajetórias tangenciais e nos propomos a seguinte questão: calcular a curva (ou família de curvas) que é tangente às curvas-soluções de uma equação diferencial. Este problema leva às noções de solução singular e de solução completa, como definidos na aula 1. As soluções singulares de uma equação diferencial são curvas que intersectam *tangencialmente* (em oposição a ortogonalmente) todas as trajetórias que compôem solução geral da equação.

TRAJETÓRIAS TANGENCIAIS E EQUAÇÕES COM SOLUÇÕES SINGULARES

Exemplo 6.1.

Consideremos a equação diferencial

$$y' = \sqrt{\frac{1-y^2}{y^2}} \qquad y > 0. \tag{6.1}$$

Observamos que a função constante $y = 1$ é uma solução, pois

$$y' = 0 = \frac{1-(1)^2}{(1)^2}.$$

Também, para cada $c \in \mathbb{R}$, o semicírculo $y = [1-(x+c)^2]^{1/2}$, situado acima do eixo das abcissas, é solução de (6.1). De fato:

$$\begin{aligned}
y = [1-(x+c)^2]^{1/2} \quad &\Longrightarrow \quad y^2 + (x+c)^2 = 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad (x+c)^2 = 1-y^2 \qquad (6.2) \\
&\Longrightarrow \quad \text{derivando implicitamente } 2yy' = -2(x+c) \\
&\Longrightarrow \quad (y')^2 = \frac{(x+c)^2}{y^2} \quad \text{e, usando(6.2) :} \\
&\Longrightarrow \quad (y')^2 = \frac{1-y^2}{y^2}.
\end{aligned}$$

Assim, Cada semicírculo é uma solução; e, além da família de semicírculos temos a *solução especial* $y \equiv 1$.

✍ Por um lado, a reta ℓ gráfico da solução $y \equiv 1$ é, ela própria, uma solução de equilíbrio, pois, em cada ponto da reta ℓ as inclinações de todas as tangentes às curvas solução são iguais a zero. ℓ é uma curva integral de (6.1), pois $y \equiv 1$ é solução.Mas observe que *não é possível obter* a solução $y \equiv 1$ a partir da família de semicírculos, pela simples escolha de um valor para c.

$y \equiv 1$ é uma ***solução singular*** da equação diferencial (6.1).

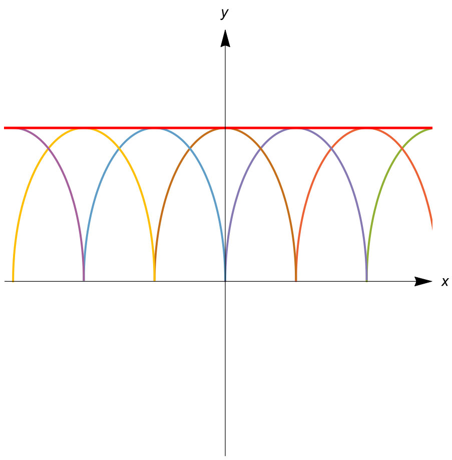


Figura 6.1: Figura do Exemplo 6.2.

Definição 6.1.

Duas curvas que passam por um ponto P, e que possuem retas tangentes concidentes em P, são ditas curvas tangentes em P. Neste caso, também podemos dizer que as retas respectivas tangentes fazem um ângulo $\alpha = 0\,rd$. ou $\alpha = \pi\,rd$.

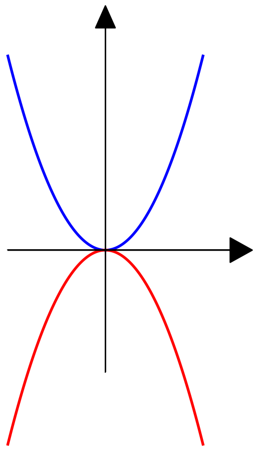


Figura 6.2: Exemplo de curvas tangentes na origem.

A **Figura 6.2** mostra duas curvas (parábolas) tangentes na origem. A tangente comum às duas curvas é o eixo horizontal. Observe que também podemos podemos dizer que o eixo horizontal e qualquer uma das parábolas são curvas tangentes.

Atenção!

Observe que, na definição ao lado, o parâmetro p está sendo usado para distinguir as curvas da família $\mathscr{C}$; e ao mesmo tempo está sendo usado para designar um ponto sobre a envoltória.

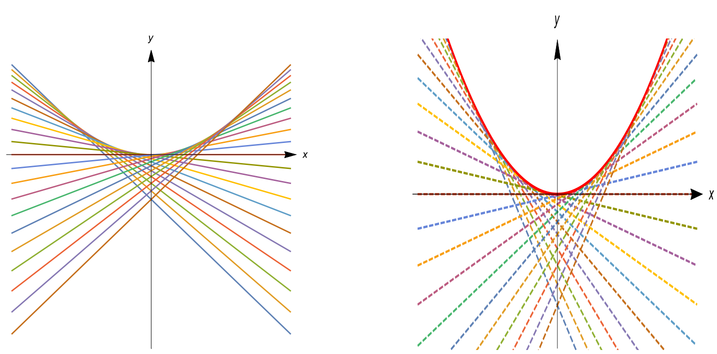
Definição 6.2 (Envoltórias).

Seja $\Lambda \subset \mathbb{R}$, um intervalo; e $G : \mathbb{R}^2 \times \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}$ **uma família de curvas planas indexada por** p; Isto é, para cada $p = p_0 \in \Lambda$, fixado, a equação $G_{p_0}(x,y) = 0 \overset{def}{=} G(x,y,p_0)$ define uma curva plana.
Também escrevemos $G(x(p_0), y(p_0)) = 0$.
Agora deixemos p variar, e suponhamos que, para cada p, a curva $G_p(x,y) = 0$ é **suave**, no sentido de que $\nabla G(p) \neq 0$. Isso significa que a curva definida por $G_p(x,y) = 0$ tem um vetor tangente não nulo em cada ponto.
Uma envoltória γ da família de curvas G, dependente do parâmetro p, é uma curva $\gamma : \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $p \mapsto \gamma(p)$, que não pertence à família, e que satisfaz às seguintes condições:

i) $\forall\ p, oponto\ \gamma(p)\ \in G_p$;

ii) γ e G_p têm a mesma reta tangente no ponto $\gamma(p)$.

Exemplo 6.2.



(a) Família de retas $y = 2px - p^2$

(b) Parábola $y = x^2$, envoltória da família $y = 2px - p^2$.

Figura 6.3: Família de retas e sua envoltória

Queremos calcular (se possível), as envoltórias de famílias parametrizadas de curvas.
O primeiro problema é saber se existe algum critério para decidir se uma família tem ou não envoltória(s), sem precisar desenhar as curvas da família e verificar visualmente, o que, aliás, é um procedimento muito precário, altamente sujeito a falhas, e portanto inaceitável como garantia de existência.
O **Exemplo 6.3** sugere que existe uma relação entre envoltórias de famílias de curvas que satisfazem uma determinada equação diferencial e soluções singulares da equação. É interessante observar que a solução singular do **Exemplo 6.3** não foi obtida como solução de uma equação diferencial.

✍ "Euler estava bem consciente da existência do que agora conhecemos como *soluções singulares* de equações diferenciais. Essa existência tinha sido observada em [pelo menos] dois trabalhos que surgiram em 1736, um dos quais era a sua *Mechanica sive Motus Scientia Analytice Exposita - A Mecânica Exposta como Ciência Analítica do Movimento* [Euler 1736].No segundo volume dessa obra, Euler não só dá dois exemplos de equações com soluções singulares, como também dá uma regra para calcular tais soluções . O outro trabalho publicado em 1736 que menciona soluções singulares é do matemático Clairaut, que trata da solução de vários problemas geométricos sobre curvas que satisfazem certas relações expressas por meio de equações dadas a priori." Ver a referência [5].

A questão é que as soluções singulares dos problemas considerados, e de muitos outros, estão relacionadas a envoltórias das famílias de curvas integrais de equações diferenciais, e podiam ser obtidas interando-se equações "auxiliares", obtidas depois de *modificar as equações*. Em 1756, Euler explicou mais claramente o que ele chamou de *dois paradoxos interrelacionados*: que algumas equações diferenciais são mais facilmente resolvidas quando **as derivamos uma vez mais**, em vez de utilizar os métodos normais de integração, e que algumas equações diferenciais são satisfeitas por equações (curvas) que não fazem parte de sua solução geral. Essas conclusões de Euler influenciaram profundamente grandes matemáticos: Laplace, D'Alembert e Lagrange, entre outros, que as aprimoraram. Não vamos prosseguir , aqui, com estas interessantes questões históricas. Discutiremos somente um problema, hoje clássico, envolvendo famílias de curvas, envoltórias, soluções gerais e soluções singulares. Antes, porém, temos um problema importante a resolver. Um, não! Dois:

Obter um critério para determinar se equação diferencial possui soluções singulares. E, caso possua, como fazer para calculá-las? A proposicão (**6.1)** trata simultaneamente dessas duas questões:

Proposição 6.1.

Suponha que para cada p, a curva $G_p(x,y)=0$ é **suave**:

$$\nabla G(x,y,p)=\left(\frac{\partial G}{\partial x}(x,y,p),\frac{\partial G}{\partial y}(x,y,p)\right)\neq(0,0).$$

Uma envoltória γ da família $\mathscr{C}$ é caracterizada pelas condições:

$$\begin{cases} G(x,y,p)=0 \\ \dfrac{dG}{dp}=0. \end{cases} \tag{6.3}$$

Demonstração
Note que a segunda condição da definição (6.2) informa que o vetor tangente à envoltória, $\gamma'(p)=(x'(p),y'(p))$ não é nulo. Caso contrário γ não teria

uma reta tangente bem definida.Considere uma vizinhança de um ponto de tangência da envoltória com a família de curvas planas. Nessa vizinhança, a envoltória satisfaz:

$$G(x(p)y(p),p)=0, \text{ com } [x'(p)]^2+[y'(p)] \neq 0\ .$$

Derivando a equação $G(x(p)y(p),p)=0$ com relação a p:

$$\frac{d}{dp}G(x(p)y(p),p)=\frac{d}{dp}[0]=0.$$

Ou seja

$$\frac{\partial G}{\partial x}.\frac{dx}{dp}+\frac{\partial G}{\partial y}.\frac{dy}{dp}+\frac{\partial G}{\partial p}.\frac{dp}{dp}=0. \tag{6.4}$$

No ponto comum de tangência, devemos ter:

$$\nabla G(x(p)y(p))\cdot(x'(p),y'(p))=0.$$

Daí a soma das duas primeiras parcelas em (6.4) é zero. Restando

$$\frac{\partial G}{\partial p}=0. \tag{6.5}$$

A equação (6.5) fornece uma segunda condição que deve ser satisfeita por todos os pontos de tangência.

O sistema

$$\begin{cases} G(x,y,p) & =0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial p} & =0, \end{cases} \tag{6.6}$$

tem duas equações e três incógnitas x, y e p. Se pudermos expressar as duas primeiras em termos de p teremos exatamente um sistema de equações paramétricas para a envoltória γ. Então já sabemos o que fazer para determinar, caso seja possível, a envoltória de uma família.

Falta examinar sob que condições é possível expressar x e y em termos de p no sistema (6.6).

E quem nos dá garantias nessa parte da história é o Teorema das Funções Implícitas: poderemos expressar x e y em termos de p no sistema (6.6) se o determinante de derivadas parciais

$$\begin{vmatrix} G_x & G_y \\ G_{px} & G_{py} \end{vmatrix}$$

for diferente de zero.

Exemplo 6.3.

Determine a(s) envoltória(s) da família de círculos centrados no eixo dos x, definida por $G(x,y,p) = (x-p)^2 + y^2 - \dfrac{p^2}{2}$.

Solução: Pela proposição (6.1), basta eliminar o parâmetro no sistema

$$\begin{cases} (x-p)^2 + y^2 & = \dfrac{p^2}{2} \\ \dfrac{\partial}{\partial p}(x-p)^2 + y^2 - \dfrac{p^2}{2} & = 0. \end{cases}$$

A segunda equação nos dá

$$-2(x-p) - p = 0,$$

de onde

$$p = 2x.$$

Substituindo na primeira equação

$$(x-2x)^2 + y^2 = 2x^2.$$

De onde tiramos

$$y^2 = x^2,$$

que identificamos imediatamente como o par de retas $y = \pm x$.

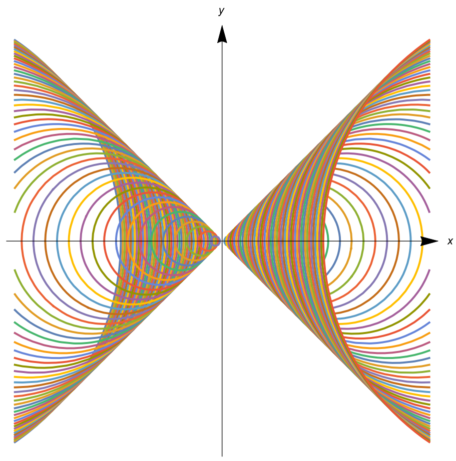


Figura 6.4: Figura do Exemplo 6.4.

!

Atenção!

Dada a família de curvas (deriváveis) $G(x,y,p) = 0$, se $G_x \cdot G_{py} - G_y \cdot G_{px} \neq 0$ para todos x, y, p, então a família possui envoltória(s) e o sistema

$$\begin{cases} G(x,y,p) & = 0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial p} & = 0 \end{cases}$$

permite calcular as equações paramétricas $(x(p), y(p))$ das envoltórias.

Exemplo 6.4.

Refazendo o **Exemplo 6.2**: Calcular as solução singulares de

$$(y')^2 = \frac{1-y^2}{y^2}, y \neq 0.$$

Vimos que $G(x,y,c) = (x+c)^2 + y^2 - 1$ era a equação de uma família de círculos que satisfaziam à equação (aqui o parâmetro é representado por c).

Temos $G_x = 2(x+c)$, $G_y = 2y$, $G_{cx} = 2$ e $G_{cy} = 0$. Portanto,

$$(G_x G_{cx} - G_y G_{cy}) = 2(x+c) \cdot 0 - 2 \cdot 2y = 4y \neq 0.$$

Então a família possui envoltórias, cujas equações são dadas pelo sistema

$$\begin{cases} (x+c)^2 + y^2 - 1 & = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial c}[(x+c)^2 + y^2 - 1] & = 0, \end{cases}$$

isto é,

$$\begin{cases} (x+c)^2 + y^2 - 1 & = 0 \\ 2(x+c) & = 0. \end{cases}$$

Então, $(x+c)^2 = 0$ e, portanto, (substituindo na primeira equação) $y^2 - 1 = 0$.

Obtemos, então, as duas envoltórias $y = 1$ e $y = -1$, concordando perfeitamente com os resultados obtidos anteriormente.

Atividade de auto-avaliação 6.1

Desenhe algumas curvas da família de círculos de centros nos pontos $(p, 0)$ e raios p. Calcule, caso exista(m), sua(s) envoltória(s).

!

Atenção!

Famílias de curvas possuindo envoltórias já tinham "marcado presença", e vinham sendo exploradas desde a pré-história do Cálculo.

Aqui vão algumas sugestões de temas para examinar:
procure na Internet artigos relacionados às histórias de:

- A *parábola de segurança de Torricelli*;
- o *relógio solar isoclínico*;
- *frentes de onda luminosas*, de Huygens;
- o *pêndulo isócrono* (Huygens de novo)

AS EQUAÇÕES DE CLAIRAUT E DE D'ALEMBERT-LAGRANGE

Nesta seção vamos, por meio de um exemplo, relacionar a noção geométrica de *envoltória de uma família de curvas*, com a noção algébrico/analítica de *solução singular de uma equação diferencial.*

Exemplo 6.5.

Um segmento de comprimento unitário, situado inicialmente no primeiro quadrante, se move (sem escorregar) apoiado nos eixos coordenados. Obtenha a equação da (ou equações paramétricas para a) curva que é tangente ao segmento em cada instante.

Suponhamos que a curva é um gráfico, e portanto tem equação da forma $y = f(x)$.

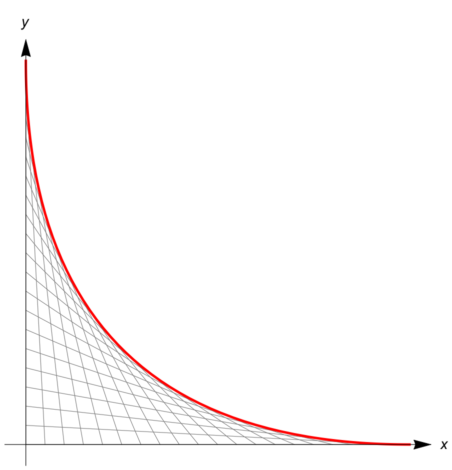


Figura 6.5: Segmentos deslizando sem escorregar

Baseados na **Figura** (**6.5**), calculemos a equação da reta tangente a $y = f(x)$ num ponto (x_0, y_0). Claro que essa tangente vai conter um dos segmentos da família dada. A equação da tangente é:

$$Y - y_0 = f'(x_0)(X - x_0).$$

As interseções dessa reta com os eixos coordenados são os pontos $A = (X_A, 0)$ e $B = (0, Y_B)$:

$$A : Y = 0 \rightsquigarrow -y_0 = f'(x_0)(X_A - x_0) \rightsquigarrow X_A = \frac{x_0 f'(x_0) - y_0}{f'(x_0)},$$

$$B : X = 0 \rightsquigarrow Y = f(x_0) + f'(x_0)(-x_0) \rightsquigarrow Y_B = y_0 - x_0 f'(x_0).$$

A seguir acrescentamos a informação de que $d(A, B) = 1$:

$$\left(\frac{x_0 f'(x_0) - y_0}{f'(x_0)}\right)^2 + \big(y_0 - x_0 f'(x_0)\big)^2 = 1.$$

Efetuando as contas:

$$(y_0 - x_0 f'(x_0))^2 \left(\frac{1}{f'(x_0)^2} + 1\right) = 1$$

$$(y_0 - x_0 f'(x_0))^2 = \frac{f'(x_0)^2}{1 + f'(x_0)^2}$$

Assim,

$$y_0 = x_0 f'(x_0) + \sqrt{\frac{f'(x_0)^2}{1 + f'(x_0)^2}}.$$

Essa é uma relação que deve ser satisfeita em cada ponto de tangência (x_0, y_0) pelas cordenadas do ponto e pelo coeficiente angular da tangente da curva $y = f(x)$ naquele ponto. Podemos abandonar o índice inferior “0”:

$$y = x f'(x) + \sqrt{\frac{f'(x)^2}{1 + f'(x)^2}}.$$

Ou ainda

$$y = xy' + \sqrt{\frac{[y']^2}{1 + [y']^2}}. \tag{6.7}$$

Definição 6.3.

Uma equação diferencial de primeira ordem da forma

$$y = xy' + g(y')$$

em que g é uma função derivável em um intervalo I, é chamada *equação de Clairaut*.

Exemplo 6.6.

A equação (6.7) é uma equação de Clairaut.

A questão agora é: Calcular as soluções de uma equação de Clairaut.

Soluções da equacão de Clairaut:

Temos:

$$y(x) = x\frac{dy}{dx} + g\left(\frac{dy}{dx}\right) \tag{6.8}$$

Derivando (6.8) conm relação a x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2} + g'\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2};$$

que, depois de simplificar e fatorar, dá:

$$0 = \left[x + g'\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Claramente temos duas possibilidades:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \tag{6.9}$$

ou

$$x + g'\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0. \tag{6.10}$$

A possibilidade (6.9) implica que

$$\frac{dy}{dx} = c. \tag{6.11}$$

Substituindo (6.11) em (6.8), obtemos uma **solução geral da equação de Clairaut**:

$$y(x) = cx + g(c). \tag{6.12}$$

Identificamos (6.12) como uma família a um parâmetro de retas.

Falta examinar a possibilidade (6.10). Veremos agora que esta possibilidade está associada à existência de uma envoltória da família (6.12).

De fato, reescrevendo a família $y(x) = cx + g(c)$ sob a forma $G(x,y,c) = y(x) - cx - g(c)$; e aplicando o critério do determinante de derivadas parciais

$$\begin{vmatrix} G_x & G_y \\ G_{cx} & G_{cy} \end{vmatrix} \neq 0,$$

temos:

$$\begin{vmatrix} -c & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

o que garante que a família (6.12) possui envoltórias.

Pela proposição (6.1), as equações paramétricas da(s) envoltória(s) são as soluções de:

$$\begin{cases} y - cx - g(c) = 0 \\ -x - g'(c) = 0. \end{cases} \tag{6.13}$$

Agora observe: (6.13) é precisamente o sistema de equações paramétricas da envoltória das curvas integrais que formam a solução geral da equação de Clairaut!

Vamos resumir:

1. A solução geral da equação de Clairaut (6.8) é

$$y(x) = cx + g(c).$$

   Cada reta da solução geral é uma isóclina da equação de Clairaut.

2. A envoltória da família $y(x) = cx + g(c)$ é definida parametricamente por

$$\begin{cases} x(c) = -g'(c) \\ y(c) = -c\,g'(c) + g(c). \end{cases}$$

Para completar, observamos que a curva envoltória "é" uma solução singular da equação de Clairaut, pois não pode ser obtida atribuindo-se um valor ao parâmetro que ocorre na solução geral.

Exemplo 6.7.

Calcule a solução completa da equação

$$x(y')^3 - y(y')^2 + 1 = 0.$$

Solução: Certamente não pode existir uma solução tal que $y' = 0$ em algum ponto x_0. Caso existisse, teríamos $x_0[y'(x_0)]^3 - y(x_0)[y'(x_0)]^2 + 1 = 0$, o que implicaria 1 = 0.

Podemos então dividir a equação por y' e isolar y, obtendo

$$y = y'\,x + [y']^{-2};$$

que identificamos como uma equação de Clairaut.

Conservando a notação da definição (6.3), vem que $g(y') = (y')^{-2}$.

Assim $g'(y') = -2(y')^{-3}$, e de acordo com o método de solução de equações de Clairaut, temos a *solução geral*:

$$y = cx + \frac{1}{c^2},$$

e a *solução singular*, de equações paramétricas:

$$\begin{cases} x(c) = 2c^{-3} \\ y(c) = 2c\,c^{-3} + c^{-2} = 3c^{-2}. \end{cases}$$

Eliminando o parâmetro c, obtemos a equacão cartesiana da solução singular

$$27x^2 - 4y^3 = 0.$$

A EQUAÇÃO DE D'ALEMBERT-LAGRANGE:

Como já observamos anteriormente, o Cálculo Diferencial e Integral, e as Equações Diferenciais, surgiram com a necessidade de associar equações a curvas (e, posteriormente, a superfícies). Na verdade as equações desempenhavam apenas um papel intermediário. Tipicamente ao tentar determinar uma curva a partir de propriedades que ela devia satisfazer, buscava-se deduzir uma equação diferencial que a representasse (um modelo matemático com equações diferenciais). A partir da equação procurava-se então determinar as curvas integrais. Somente depois de feita uma construção geométrica da curva integral, esta passava a ser considerada um objeto matemático legítimo. Pois bem, com o Cálculo aumentou dramaticamente o repertório de equações que podiam ser associadas a curvas. As equações agora podiam ser *equações diferenciais*. Entretanto permanecia a ideia de que sempre era preciso dar uma construção geométrica para as curva integrais de equação diferencial.

Algumas décadas se passaram até que a Matemática mudasse de ponto de vista. Pelos meados do século XVIII, praticamente já se tinha abandonado a exigência validar uma curva por meio de uma construção geométrica. Se, ao estudar um problema, fosse possível modelá-lo por meio de uma equação algébrica, ou diferencial, ficando implícito que, no caso no caso de equações diferenciais,elas sempre tinham soluções. Então nada mais natural do que considerar a questão do cálculo de *todas as soluções de uma equação diferencial*. Esta era uma questão crucial na segunda metade do século dezoito. A equação de Clairaut, e as que Euler tinha obtido para modelar questões de Mecânica, mostraram que algumas soluções não faziam parte da solução geral. Isto certamente era um grande problema (Euler chamou de paradoxo) que podia prejudicar a própria ideia de representar uma curva por meio de uma equação; já que poderíamos ter equações para as quais não soubéssemos calcular todas as soluções. Justamente nesta época começou a procura por

métodos sistemáticos para calcular as “soluções completas” de equações diferenciais. Muitos matemáticos, além de Clairaut, Euler, d’Alambert, Laplace e Lagrange se ocuparam dessa questão.
Neste contexto, surgiu a equação ordinária de primeira ordem da forma

$$F(y')x + G(y')y = H(y') \tag{6.14}$$

que é linear tanto na variável dependente x quanto na variável independente y, mas não é linear na variável y', ligada ao nome de J.L. Lagrange. Tirando o valor de y (dividindo ambos os lados por $G(y')$) , obtemos a equação na forma

$$y = f(y')x + g(y'),$$

onde $f = -F/G$ e $g = H/G$, forma sob a qual é mais conhecida. Note que o processo de escrever (6.14) na forma $y = f(y')x + g(y')$, só é válido nas regiões em que $G(y') \neq 0$. Esta equação também tinha sido estudada por J. d’Alembert, e às vezes é chamada de *equação de D’Alembert/Lagrange*.
Como caso especial das equações de d’Alembert/Lagrange (quando $f(y') = y'$) reobtemos as equações de Clairaut. E, também como as equações de Clairaut, elas possuem soluções singulares calculáveis(pelo menos em tese) .

Definição 6.4.

Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções deriváveis. Equações da forma

$$y = xf(y') + g(y') \tag{6.15}$$

são conhecidas como *eqções de d’Alembert/Lagrange*.

Cálculo de Soluções da Equação de Lagrange:

Repetimos o argumento usado com a equação de Clairaut:
Derivamos os dois lados de (6.15) com relação a x, para obter

$$y' = f'(y')y''x + f(y') + g'(y')y'';$$

que é uma equação que só contém y' e derivadas de ordem superior.

Faça $p = y'$. A equação se torna:

$$y' = p = f(p) + xf'(p)\frac{dp}{dx} + g'(p)\frac{dp}{dx}.$$

Ou seja,

$$\frac{dp}{dx}(xf'(p) + g'(p)) = p - f(p)$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p - f(p)}{xf'(p) + g'(p)}.$$

Suponha que $\forall\ p,\ p \neq f(p)$ então $\dfrac{dp}{dx} \neq 0$; e o Teorema da Função Inversa garante que podemos definir x como função de p, e que essa inversa é derivável, com derivada dada por

$$\frac{dx}{dp} = \frac{1}{\frac{dp}{dx}} = \frac{f'(p)}{p - f(p)}x + \frac{g'(p)}{p - f(p)}, \tag{6.16}$$

uma equação linear para x em termos de p.

Uma vez obtida a solução $x = x(p)$ de (6.16), usando (6.15) , calculamos

$$y(p) = x(p)f(p) + g(p).$$

A solução de (6.15) é expressa na forma paramétrica

$$\begin{cases} x = x(p) \\ y = f(p)x(p) + g(p). \end{cases}$$

Exemplo 6.8.

Calcule a solução de

$$y = x\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

Solução:

Seja $\dfrac{dy}{dx} = p$. A equação apresentada é uma equação de Lagrange com $f(p) = 1 + p$ e $g(p) = p^2$. Temos $p - f(p) = p - 1 - p = -1 \neq 0$.

Conforme visto acima, $x = x(p)$ satisfaz a equação

$$\frac{dx}{dp} = \frac{f'(p)}{p - f(p)}x + \frac{g'(p)}{p - f(p)},$$

isto é,

$$\frac{dx}{dp} = -1 \cdot x - 2p.$$

Uma solução desta linear é

$$x(p) = ce^{-p} - 2p + 2.$$

Para calcular y em função de p, basta substituir a expresssão de $x(p)$ acima na equação $y = x(1 + p) + p^2$, o que nos dá

$$y(p) = (ce^{-p} - 2p + 2)(1 + p) + p^2.$$

Assim, a(s) solução(ões) da equação apresentada é(são) definida(s) pela curva parametrizada por

$$\begin{cases} x(p) & = ce^{-p} - 2p + 2 \\ y(p) & = (ce^{-p} - 2p + 2)(1 + p) + p^2 \end{cases}$$

Atividade de auto-avaliação 6.2

Calcule as soluções da equação

$$y = x[y']^2/2 + 2y'.$$

APÊNDICE

CAMPOS DE DIREÇÕES. CAMPOS DE VETORES.

Lembrando que dy/dx é interpretado como *inclinação da reta tangente ao gráfico da função y=y(x)*, nesta seção começaremos a discutir mais sistematicamente a "interpretação geométrica" das equações diferenciais normais de primeira ordem, estendendo esta interpretação para o caso em que $y(x)$ é solução da equação $y' = f(x,y)$, mesmo que não tenhamos resolvido explicitamente a equação. E também *quando a tangente à curva que define implicitamente as soluções é uma reta vertical*. Diremos genericamente, que a função $f(x,y)$ mede, em cada ponto (x,y), a inclinação da reta tangente ao gráfico da solução que passa por aquele ponto. Calculando o valor $f(x,y)$ em vários pontos no domínio $U \subset \mathbb{R}^2$ onde está definida a função f, e desenhando em cada ponto (x,y) um pequeno segmento de reta, ou um vetor unitário, que chamaremos de **o elemento linear**, e cuja reta suporte tem inclinação $f(x,y)$, a figura resultante será chamada de ***campo de direções da equação diferencial*** $dy/dx = f(x,y)$.
O ponto chave da interpretação é que cada curva integral que passa por um ponto deve ser tangente ao segmento desenhado naquele ponto. Atualmente, o uso de calculadoras e/ou sistemas computacionais é praticamente indispensável para efetuar as construções de campos de direções.

Frequentemente a variável independente x na equação diferencial $y' = f(x,y)$ é interpretada como sendo o tempo. Neste caso, um problema fundamental é analisar como as curvas-soluções evoluem à medida que o tempo passa. É comum então substituirmos o segmento tangente em cada ponto de uma curva integral por um *vetor tangente unitário*, isto é um segmento orientado. O sentido do vetor tangente indica a evolução temporal da curva-solução "em cada ponto". Com o auxílio de ferramentas computacionais, consegue-se representar graficamente campos de vetores e as curvas imagens das soluções.

As curvas que são imagens das soluções também são chamadas de **curvas integrais** ou **trajetórias integrais**

Na **Figura 6.6**, ilustramos a ideia: desenhamos vários elementos lineares, em diversos pontos do plano xy, e também a curva integral que passa por um ponto selecionado do eixo das ordenadas.

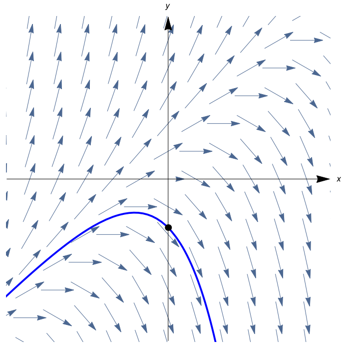


Figura 6.6: Campo de vetores com uma curva integral

Exemplo 6.9.

Campo de direções da equação diferencial $dy/dx = 2x^2$.

Solução:
Na **Figura 6.7** desenhamos algumas curvas solução e os correspondentes campos de direções para a equação diferencial $dy/dx = 2x^2$.
Note que, neste exemplo, podemos integrar a equação diferencial, obtendo a solução geral

$$y(x) = \frac{2}{3}x^3 + c.$$

Se traçarmos retas perpendiculares ao eixo-x, cada uma delas interceptará todas as curvas da família de soluções segundo um mesmo ângulo. Mas, cuidado! O ângulo mudará de acordo com a reta vertical.

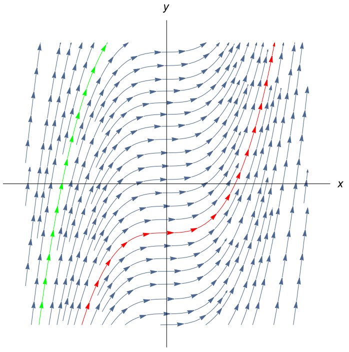


Figura 6.7: Algumas curvas integrais da equação diferencial $y' = 2x^2$

Vejamos mais alguns exemplos de campos de vetores e curvas integrais, desenhados com ajuda de softwares computacionais:

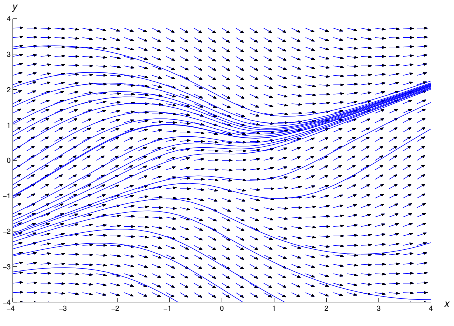


Figura 6.8: Campo de vetores e algumas curvas integrais da equação diferencial $y' = \dfrac{x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}$

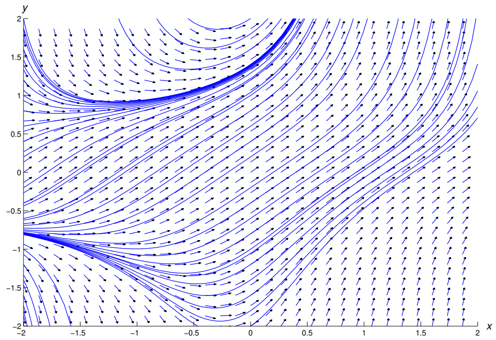


Figura 6.9: Campo de vetores e curvas integrais da equação diferencial $y' = 1 + xy^2$

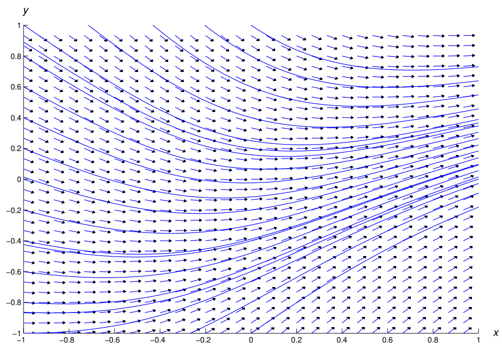


Figura 6.10: Campo de direções e curvas integrais da equação diferencial $y' = \dfrac{x-y}{1+x^2}$

Uma outra noção que merece destaque na análise geométrica das soluções de equações diferenciais é a de *solução de equilíbrio de uma equação autônoma*:

Definição 6.5 (Equações de primeira ordem autônomas).

Uma equação diferencial de primeira ordem para uma função y em termos de uma variável x, definida por uma função que f, que não depende explicitamente de x, istro é, da forma

$$y' = f(y),$$

é chamada de *equação diferencial de primeira ordem autônoma*.

Assim, as equações $y' - y = 3$, $y' = y(2-y)$ são autônomas, ao passo que $y' = x(y-1)$ não é autônoma.

Definição 6.6 (Soluções de Equilíbrio).

As soluções de equilíbrio de uma equação autônoma, caso existam, são as ***soluções da equação*** $y' = 0$

✍ Claramente, as soluções de equilíbrio são as soluções da equação $f(y) = 0$

Exemplo 6.10.

Calcule as soluções de equilíbrio da equação de Riccati

$$y' - y^2 + y + 2 = 0.$$

Solução:
Temos $f(y) = y^2 - y - 2$ de modo que $f(y) = 0 \Leftrightarrow y = -1,\;$ e $y = 2.$ Vemos assim que as soluções de equilíbrio da equação proposta são as funções constantes $y = 1$ e $y = 2.$

Atividade de auto-avaliação 6.3

Calcule, caso existam, as soluções de equilibrio das equações $y' = 2y - y^2$ e $y' - 3e^y = 0$

Resumo

Nesta aula você aprendeu alguns métodos geométricos muito úteis na visualiação de soluções de equações diferenciais. Merecem destaque:

- as trajetórias de inclinação nula;
- envoltória de uma família de curvas a um parâmetro;
- solução singular de uma equação diferencial de primeira ordem (a solução associada à envoltória da família de curvas que define uma solução geral da equação)

Você aprendedeu, em particular, a reconhecer e obter solucões para as equações de Clairaut e de Lagrange, que nos introduziram o método de substituições e derivações como forma de calcular soluções de equações.

O QUE VEM POR AÍ:

Os métodos empregados para obter as soluções singulares das equações de Clairaut e de Lagrange, que às vezes ainda são chamos de “metodos de *derivação* e *substituição* serão utilizados para obter soluções de algumas equações diferenciais particulares, e, principalmente, serão usados, desde as primeiras seções da Aula 7, para justificar porque, no estudo das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, normais, podemos nos limitar às equações da forma $y' = f(x,y)$.

SOLUÇÕES COMENTADAS DAS ATIVIDADES DESTA AULA:

Solução comentada da atividade 6.1

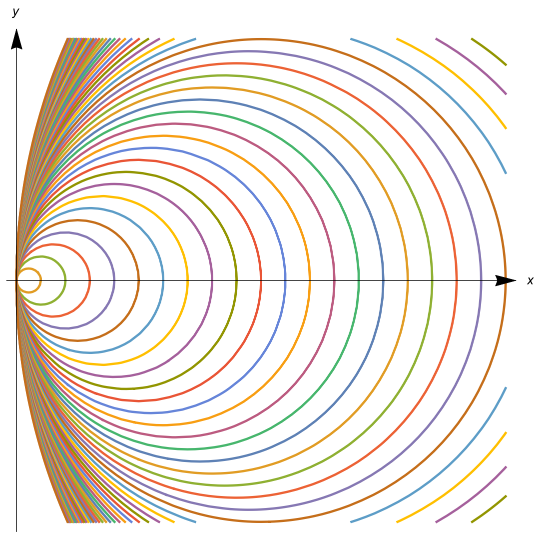


Figura 6.11: Figura do exemplo 6.7

Usando a proposição (6.1), formamos o sistema

$$\begin{cases} (x-p)^2+y^2=p^2 \\ \dfrac{\partial}{\partial p}(x-p)^2+y^2-p^2=0. \end{cases}$$

A segunda equação nos dá

$$-2(x-p)-2p=0,$$

de onde $x-p=-p$, e portanto (substituindo $x-p$ por $-p$ na primeira equação) obtemos $x=0$.

Concluímos que o eixo vertical, *é a envoltória da família de círculos* $(x-p)^2+y^2-p^2$.
Observe que o eixo $x=0$ é uma envoltória *vertical* da família de círculos. Constatamos então que o "algoritmo" é bastante geral. Ele possibilita o cálculo de envoltórias que não são funções.

✍ Observe que cada círculo da família, tangencia todos os outros no ponto $(0,0)$. Então, a primeira tendência seria de dizer que cada círculo é, ele mesmo, uma envoltória. Entretanto lembramos que a definição (6.2) exige que as envotórias sejam curvas *que não pertençam à família*; e o algoritmo da proposição (6.1) calcula a(s) envoltória(s) definidas em (6.2).

Solução comentada da atividade 6.2

Trata-se de uma equação de Lagrange, com $f(y') = [y']^2$ e $g(y') = 2y'$.

Sendo $y' = p$, as soluções para $p = 0,2$, de $-p^2/2 = 0$ dão origem a duas soluções

$$y = 2x+1 \quad \text{e} \quad y = 0$$

da equação original. Se $p \neq 0,2$ então aos equações paramétricas (parâmetro p) das soluções restantes são $(x(p), y(p))$, onde

$$\frac{dx}{dp} - \frac{p}{p-\frac{p^2}{2}}.x = \frac{2}{p-\frac{p^2}{2}}$$

cuja solução é

$$x(p) = \frac{1}{(p-2)^2}.[4\,ln(p^2) - 4p + k], \quad k \in \mathbb{R};$$

e

$$y(p) = p^2/2.x(p) + 2p.$$

Solução comentada da atividade 6.3

Com relação à equação logística $y' = 2y - y^2 = -y(2-y)$, as soluções de equilíbrio são as funções constante s cujos gráficos passam pela origem e pelo ponto $(0,2)$.

A equação $y' - 3e^y = 0$ não possui soluções de equilíbrio, pois a equação $3e^y = 0$ não tem soluções.

Aula 7

MÉTODOS NUMÉRICOS; TEORIA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE

Objetivos

Ao final desta aula, você será capaz de:

1. Calcular soluções aproximadas para a equação $y' = f(x,y)$ pelo método de Euler e de Heun;
2. Identificar o Teorema de Existência e Unicidade de Soluções, e reconhecer sua importância na teoria de equações diferenciais.

Pré-requisitos:
Aulas de 1 a 6; cursos de Cálculo I e II e III.

INTRODUÇÃO - UMA AULA FUNDAMENTAL

!

Atenção!

Nesta aula, apresentaremos *o teorema mais importante de todo este curso de Equações Diferenciais*: o ***Teorema de Existência e Unicidade de Soluções de Equações normais de primeira ordem***, brevemente ***T.E.U***. Vamos abordá-lo aos poucos. Na verdade, tudo o que fizemos até agora culmina neste teorema.

Existem muitas versões e generalizações desse resultado fundamental. As demonstrações dessas versões não fazem parte do programa deste curso,entretanto é essencial conhecer o enunciado, e os principais passos da demonstração de (pelo menos) uma delas, além de saber empregá-la adequadamente. Trabalharemos com a versão que o matemático francês Charles Émile Picard, propôs em 1890.

Este estudo é apenas uma primeira abordagem, necessariamente simplificada e incompleta. Entretanto ele nos ajudará a ter uma visão mais unificada do material estudado.

O quadro da **Figura 7.1** resume os principais tipos de equações que estudamos até agora, indicando algumas relações de dependência entre elas:

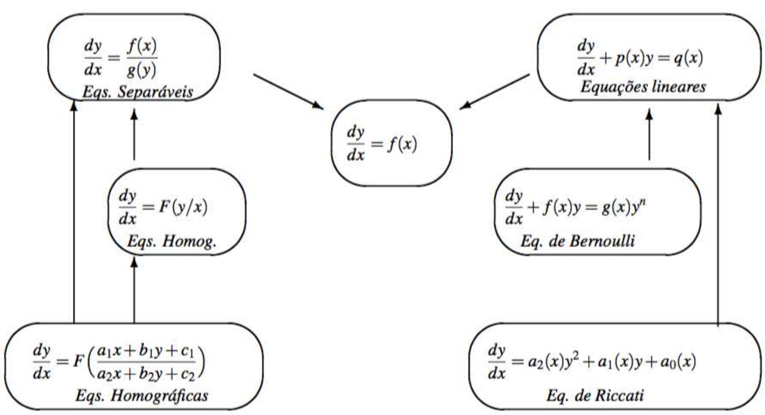


Figura 7.1:

✍ As setas indicam que, por exemplo, as equações de coeficientes homogêneos e de Bernoulli se reduzem respectivamente a equações separáveis e a equações lineares de 1^a ordem, as quais - por sua vez - se reduzem à equação Fundamental.

Observação semelhante vale para as equações $\dfrac{dy}{dx} = F\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ e para as equações de Riccati.

✍ **ATENÇÃO!** O diagrama pode levar a pensar que, por exemplo, o conjunto das equações de Riccati não tem elementos comuns com o conjunto de equações separáveis, ou que o conjunto das equações separáveis é disjunto do das lineares de primeira ordem. Isso não é verdade. Existem exemplos de equações que podem ser classificadas de vários modos. Basta lembrar das equações de Bernoulli de coeficientes constantes.

Nesta aula, começamos a abordagem de questões mais gerais; isto é, não específicas de tipos particulares de equações diferenciais.
Note que ausências notáveis, no quadro-resumo acima, são as equações de Clairaut e de Lagrange. Nos desenvolvimentos que seguem, apresentaremos outros exemplos de equações que não são de nenhum dos tipos vistos, mas que podem ser resolvidas utilizando o mesmo método usado para obter soluções das equações de Clairaut e de Lagrange.
É muito importante observar que o processo utilizado para construção de soluções ds equações especiais, de Clairaut e Lagrange, será usado para, sob hipóteses razoáveis, "reduzir" o estudo da equação diferencial de primeira ordem geral:

$$F(x,y,y') = 0, \tag{7.1}$$

ao das equacões *normais*; onde é possível "tirar o valor de" y' em função de x e de y na equação (7.1):

$$y' = f(x,y), \tag{7.2}$$

!

Atenção!

Nesta e nas próximas aulas, examinaremos mais cuidadosamente as seguintes questões:

1. "Ao considerar as equações normais,(7.2), estamos restringindo demasiadamente a teoria de equações diferenciais de primeira ordem?
2. É possível calcular soluções (completas) para quaisquer equações diferenciais normais, ou equivalentes a equações normais?

EQUAÇÕES REDUTÍVEIS A EQUAÇÕES NORMAIS

✍ Partindo da equação (7.1), suponha que podemos explicitar uma das variáveis em termos das outras duas. Temos três possibilidades:

$$\begin{tikzcd} & y' = f(x,y) \qquad (I) \\ F(x,y,y') = 0 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & y = f(x,y') \qquad (II) \\ & x = f(y,y') \qquad (III) \end{tikzcd}$$

Observação

Repare que as equações de tipo (I) são exatamente as equações

ESTUDO DA EQUAÇÃO (II):

Partindo da equação $(II): y = f(x, y')$, e imitando o procedimento usado para calcular as soluções da equação de Clairaut, fazemos a substituição $y' = p$, construindo uma família a um parâmetro:

$$y = f(x, p) \tag{7.3}$$

Derivando a equação (7.3) com relação a x, obtemos a equação

$$y' = p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}, \tag{7.4}$$

a qual é uma equação diferencial de primeira ordem para a variável p.

A solução geral de (7.4) é uma expressão

$$p = \phi(x, c). \tag{7.5}$$

Substituindo (7.5) em (7.3), chegamos a

$$y = f(x, \phi(x, c)), \tag{7.6}$$

que é a solução geral para (I).

Exemplo 7.1.

Determine uma solução geral e as soluções singulares (caso existam) de

$$y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2} \tag{7.7}$$

Solução: Façamos a substituição $y' = p$. A equação (7.7) se reescreve como

$$y = p^2 - xp + \frac{x^2}{2}. \tag{7.8}$$

Derivando (7.8) com relação a x:

$$p = 2p\frac{dp}{dx} - x\frac{dp}{dx} - p + x;$$

isto é,

$$\frac{dp}{dx}(2p - x) = 2p - x.$$

Daí,

$$\frac{dp}{dx} = 1$$

ou

$$2p - x = 0.$$

Suponha que $dp/dx = 1$. Temos

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx} = 1 &\Rightarrow p = x + c \\ &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = x + c \\ &\Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + cx + c_1. \end{aligned}$$

✍ Trata-se da equação de uma família de curvas a *dois* parâmetros. Todavia, essa família só satisfaz à equação diferencial (7.7) se $c_1 = c^2/2$. (Mostre isso!)

Portanto, obtemos a solução geral

$$y = \frac{x^2}{2} + cx + \frac{c^2}{2} \tag{7.9}$$

para a equação (7.7).

Suponhamos agora que $2p - x = 0$.
Então $p = x/2$. Portanto, $dy/dx = x/2$. Daí, conclui-se facilmente que

$$y = \frac{x^2}{4} + c_2. \tag{7.10}$$

Todavia (7.10) só é solução de (7.7) se $c_2 = 0$.

Portanto, as soluções de (7.7) são

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{2} + cx + \dfrac{c^2}{2} & \text{solução geral,} \\ y = \dfrac{x^2}{4} & \text{solução singular.} \end{cases}$$

ESTUDO DA EQUAÇÃO (III):

Com algumas adaptações, o procedimento utilizado na equação (II) pode ser usado para resolver a equação (III):

Partindo de

$$x = f(y, y'),$$

fazemos a mesma mudança de variáveis $y' = p$, produzindo a família a um parâmetro

$$x = f(y, p) \tag{7.11}$$

Derivando (7.11) com relação a y, e substituindo $\dfrac{dx}{dy}$ por $\dfrac{1}{p}$ obtemos uma equação diferencial para p e y:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy}. \tag{7.12}$$

Observe que (7.12) é uma equação diferencial de primeira ordem para p como função de y.

Suponhamos que sua solução geral possa ser calculada, obtendo

$$p = \psi(y,c) \tag{7.13}$$

Substituindo (7.13) em (7.11) obtém-se

$$x = f(y, \psi(y,c)), \tag{7.14}$$

que é uma solução geral de (III).

Exemplo 7.2.

Resolva

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - y = x. \tag{7.15}$$

Solução: Façamos $p = \dfrac{dy}{dx}$. A equação se reescreve como

$$x = p^3 - y.$$

Derivando com respeito a x:

$$1 = 3p^2\frac{dp}{dx} - y',$$

isto é,

$$3p^2\frac{dp}{dx} - p = 1. \tag{7.16}$$

Mas observe que

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p.$$

Substituindo em (7.16), simplificando e separando variáveis, obtemos

$$\frac{3p^3}{p+1}dp = dy, \tag{7.17}$$

que é uma equação separável.

Uma solução de (7.17) é

$$y = p^3 - \frac{3p^2}{2} + 3p - 3\ln(p+1) + c. \qquad (7.18)$$

E como $x = p^3 - y$, então

$$x = p^3 - \left[p^3 - \frac{3}{2}p^2 + 3p - 3\ln(p+1) + c\right].$$

Isto é,

$$x = \frac{3}{2}p^2 - 3p + 3\ln(p+1) - c. \qquad (7.19)$$

Eliminando o parâmetro p nas equações (7.18) e (7.19), obtemos e $(y = p^3 - x \Rightarrow p = \sqrt[3]{x+y})$.

$$3\sqrt[3]{x+y} + 3\ln\left(\sqrt[3]{x+y} + 1\right) = x - \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+y)^2} + c. \qquad (7.20)$$

A equação (7.20) define implicitamente as soluções $y = y(x)$ da equação (7.15).

ANÁLISE DAS SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES (II) E (III)

Voltemos, por um momento, aos cálculos efetuados para a obtenção de soluções das equações (II) e (III):

Em determinados momentos, precisamos asssumir que as equações (7.4) e (7.12) tinham soluções. Essas hipóteses certamente precisam ser analisadas com muito cuidado. Não só não temos garantia de que saberemos produzir as soluções de (7.4) e (7.12), como sequer sabemos se tais equações possuem soluções. Em um dos exemplos, construímos soluções gerais e soluções singulares. Em outro, só construímos, aparentemente, soluções gerais. E ficamos sem saber se também existiam soluções singulares.

✍ Em alguns casos, podemos garantir que (7.2) e (7.12) possuem soluções. Por exemplo, se, em (7.4), $\dfrac{\partial f}{\partial p} \neq 0$ e se ambos $\dfrac{\partial f}{\partial p}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ forem funções só de x, então (7.4) é uma equação linear para p em termos de x, que certamente possui uma solução geral.

Mas, convenhamos, estamos fazendo muitas exigências!

OK! Então vamos relaxar um pouco e pedir somente que

$$\frac{\partial f}{\partial p} \neq 0.$$

Neste caso, podemos tirar o valor de $\frac{dp}{dx}$ em (7.4):

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{df/dp} \cdot \left[p - \frac{\partial f}{\partial x} \right]. \tag{7.21}$$

Agora, se pudermos garantir que (7.21) tem solução...

Mas veja! A equação (7.21) é da forma

$$\frac{dp}{dx} = g(x,p), \tag{7.22}$$

que é precisamente uma equação do tipo (I) . Escreva y no lugar de p, e f no lugar de g.

Por sua vez, a equação (7.12)

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy}$$

pode ser reescrita como

$$\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{1}{p} \right)}_{M(y,p)} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial p}}_{N(y,p)} \frac{dp}{dy} = 0.$$

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{7.23}$$

Na Aula 8 vamos nos dedicar às equações desse tipo.

Observe, em particular, que toda equação normal $y' = f(x,y)$ pode ser posta na forma (7.23):

$$\underbrace{-f(x,y)}_{M(x,y)} + \underbrace{1}_{N(x,y)} \frac{dy}{dx} = 0.$$

E, reciprocamente, toda equação (7.23), pode ser escrita na forma (I), em vizinhanças de pontos (x_0, y_0) tais que $N(x_0, y_0) \neq 0$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}.$$

Vemos assim que as equações (I) são de importância fundamental. A existência de soluções das equações (II) e (III) dependem da existência de soluções da equação (I).

!

Atenção!

Nosso estudo das soluções de equações de tipos (II) e (III) colocou em realce a necessidade de garantir a existência de soluções de *equações normais*.
Isso, de certa forma, já é uma pista do porquê a maioria dos textos de Equações Diferenciais iniciam o estudo de equações diferenciais apresentando - de cara - as equações normais. E tratando de garantir que elas possuem soluções.
Ao longo do século XVIII, a atenção dos matemáticos foi se concentrando nas questões mais gerais, procurando resolver e obter resutados para *classes* de equações, ou então investigando sob quais condições uma equação um determinado tipo de solução, ou propriedade. O estudo de equacões particulares de modelos específicos não foi deixado de lado. Muito pleo contrário: questões altamente especializadas têm origem naque período.
As questões específicas que começamos a tratar são relacionadas com a busca de *soluções gerais*, e o processo de investigação de existência de soluções singulares.

MÉTODO DE EULER PARA EQUAÇÕES NORMAIS

Até agora, temos procurado obter métodos para calcular as soluções exatas de equações diferenciais, com destaque para o processo de *mudança de variáveis*, tentando transformar equações mais complicadas em equações que tivessem “as mesmas soluções”, e que soubéssemos resolver por integração, ou então, após uma derivação seguida de integrações.
Infelizmente existem muitos problemas importantes em engenharia e nas ciências para os quais os métodos usuais não se aplicam, ou são muito complicados para usar. Nesta seção, vamos apresentar alguns métodos alternativos, que frequentemente são os únicos disponíveis, que podem ser empregado para o cálculo de soluções aproximadas para problemas de valor inicial. Trabalharemos no contexto simples de equações diferenciais normais de primeira ordem.
Os procedimentos numéricos que vamos descrever podem ser executados por computadores e algumas calculadoras. Normalmente, os valores aproximados de uma solução devem ser acompanhados de estimativas para os erros cometidos, a fim de garantir uma margem de trabalho confiável.

✍ Euler já tinha concebido diversos métodos numéricos para calcular soluções aproximadas de EDOs para as quais não se conhecia nenhum processo de solução formal. O método mais simples que ele inventou foi o *método da poligonal de Euler*, ou *método da poligonal de Euler/Cauchy* que vamos esboçar nesta seção.
Euler assumia tacitamente a equação diferencial na forma normal, e assumia que ela possuía solução. e se ocupava em calcular os valores aproximados da solução em cada ponto. O seu esquema de

aproximação, definia uma sequência de valores aproximados, que podia ser utilizada para obter resultados próximos do valor da solução exata. [2]

O método de Euler, um dos primeiros exemplos de *método de diferenças finitas*, pode ser descrito da seguinte maneira:

Queremos obter um valor aproximado para a solução da equação diferencial normal $y' = f(x,y)$, no ponto X; i.e, queremos calcular $\tilde{y}(X)$, tal que o erro cometido

$$|y(X) - \tilde{y}(X)|$$

não seja muito grande.

Observação

Como em vários esquemas de aproximação numérica, precisamos começar com um ***ponto inicial***: (x_0).

O primeiro passo na solução numérica é introduzir uma *partição pontilhada*: Divide-se um intervalo $[x_0, X]$, começando em x_0 segundo uma partição arbitrária:

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n_1} < x_n = X.$$

Traça-se uma reta passando pelo ponto (x_0, y_0), com inclinação $f(x_0, y_0)$. O valor exato da solução no ponto x_1, isto é, o valor $y(x_1)$, é substituído pela ordenada, $\tilde{y_1}$, do ponto de interseção da vertical passando por x_1 e a reta tangente traçada a partir de (x_0, y_0). Tem-se

$$\tilde{y_1} = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$$

Em seguida, pelo ponto $(x_1, \tilde{y_1})$ desenhamos a reta com inclinação $f(x_1, y_1)$, que é a inclinação da solução exata no ponto de abcissa x_1. O valor exato da solução no ponto x_2, isto é, o valor $y(x_2)$, é substituído pela ordenada, $\tilde{y_2}$, do ponto de interseção da vertical passando por x_2 e a reta tangente traçada a partir de $(x_1, \tilde{y_1})$. Temos que

$$\tilde{y_2} = \tilde{y_1} + f(x_2, y_2)(x_2 - x_1)$$

e assim por diante.

Finalmente , pelo ponto $(x_{n-1}, \tilde{y}_{n-1})$ desenha-se a reta com inclinação $f(x_{n-1}, y_{n-1})$ sobre a qual o ponto $(X, \tilde{y_n})$ é escolhido:

$$\tilde{y_n} = \tilde{y}_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})(X - x_{n-1}).$$

O método pressupõe que, à medida que aumentamos o número de pontos da partição, os correspondentes valores $\tilde{y_n}$ sobre a poligonal vão se tornando aproximações cada vez melhor para os valores da solução exata.

✍ Quando todos os subintervalos $(x_k - x_{k-1}), k = 0 \cdots n$ têm o mesmo comprimento (a partição é dita ser regular), é costume designar esse comprimento pelo nome de "passo", representando-o pela letra h. É evidente que o passo referente ao ponto de abcissa X é dado por $h = (X - x_0)/n$.
Usando o conceito de passo, podemos escrever que o k-ésimo valor

aproximado da solução no ponto x_k é calculado por

$$\tilde{y}_k = \tilde{y}_{k-1} + hf(x_{k-1}, y_{k-1}).$$

Exemplo 7.3.

Determine a solução exata do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

no intervalo $[0,1]$. Use o método de Euler, com $h = 0,1$ para calcular uma solução aproximada para o mesmo problema e compare os resultados.

Solução: A solução exata do PVI é

$$y(x) = e^{x^2/2}.$$

Para aplicar o método de Euler, observamos que $f(x,y) = xy$, $x_0 = 0,\ y_0 = 1$.
Para $h = 0,1$ temos a fórmula (escrevendo y_k em vez de $\tilde{y}_k$, etc.)

$$y_k = y_{k-1} + 0,1x_{k-1}y_{k-1}.$$

Daí, para $x_1 = x_0 + h = 0,1$, temos

$$y_1 = x_0 + 0,1x_0y_0 = 1 + 0,1.0.1 = 1.$$

Para $x_2 = x_0 + 2h$,

$$y_2 = y_1 + 0,1x_1y_1 = 1 + 0,1.0,1.1 = 1,01.$$

Podemos construir uma tabela, dispondo os valores x_k e y_k da solução aproximada:

x_k	y_k
0	1
$0,1$	1
$0,2$	$1,01$
$0,3$	$1,0302$
$0,4$	$1,06111$
$0,5$	$1,10355$
$0,6$	$1,15873$
$0,7$	$1,22825$
08	$1,31423$
$0,9$	$1,41937$
1	$1,54711$

A tabela informa que o valor aproximado(usando o método de Euler, com passo $h = 0,1$) para $e^{1/2}$ é $1,54711$.

O valor exato, com precisão de quatro casas decimais, é $1,64872$.

O erro cometido com as aproximações adotadas, é de $0,10161$; o qual pode estar dentro da margem de tolerância, ou ser um erro muito grande. Depende do grau de exigência do problema.

OUTROS MÉTODOS NUMÉRICOS PARA EQUAÇÕES NORMAIS

Uma maneira de diminuir o erro de aproximação, quando se usa o método de Euler, é aumentar o número, n, de subintervalos da partição pontilhada do intervalo considerado; ou, o que dá no mesmo quando a partição é regular, diminuir o tamanho do passo.

Exemplo 7.4.

Refaça o **Exemplo 7.3**:

$$\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

no intervalo $[0,1]$, usando o método de Euler, com $h = 0,05$.

Solução: Para $h = 0,05$ temos a fórmula

$$y_k = y_{k-1} + 0,05x_{k-1}y_{k-1}.$$

Usando os dados iniciasi, e uma calculadora, formamos a tabela:

x_k	y_k
0	1
$0,05$	1
$0,1$	$1,0025$
$0,15$	$1,00751$
$0,2$	$1,01507$
$0,25$	$1,02522$
$0,3$	$1,03803$
$0,35$	$1,05361$
$0,4$	$1,07204$

x_k	y_k
$0,45$	$1,09348$
$0,5$	$1,11809$
$0,55$	$1,14604$
$0,6$	$1,17756$
$0,65$	$1,21288$
$0,7$	$1,2523$
$0,75$	$1,29613$
$0,8$	$1,34474$
$0,85$	$1,39853$
$0,9$	$1,45796$
$0,95$	$1,52357$
1	$1,59594$

Utilizando os dados da tabela, podemos esboçar a seguinte figura:

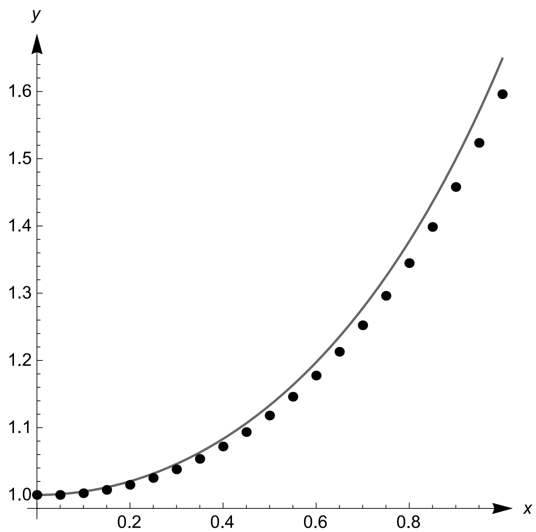


Figura 7.2: Comparação entre resultados do método do Euler e a solução exata para a o PVI $y' = xy;\ y(0) = 1; \quad h = 0,05$.

Agora as diferenças entre os valores computados pelo método de Euler e os valores exatos são bem menores do que as diferenças calculadas com o passo $h = 0,1$ **Figura 7.1**.

Entretanto esse procedimento acarreta um custo computacional maior.
Outra maneira de melhorar as aproximações, isto é, ter um controle maior da diferença entre os valores exatos da solução e os valores calculados aproximadamente é modificando o próprio método de Euler. Isto pode ser feito de várias maneiras:

O MÉTODO DE HEUN

Este método utiliza os valores médios de duas inclinações em cada subintervalo da partição.
Para simplificar, vamos supor a particão regular de passo h.

Começando com o ponto x_0, a ideia é tomar para valor $\tilde{y_1}$, correspondente ao ponto$x_1 = x_0 + h$, o ponto de interseção da reta vertical passando por x_1, com a reta que passa por (x_0, y_0) e tem como inclinação a média das inclinações das retas tangentes à solução exata nos pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1); onde y_1 representa o valor da solucão exata no ponto x_1.

Esse valor é

$$\tilde{y_1} = x_0 + \frac{h}{2}[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)].$$

Observe que essa última expressão é problemática: para calcular o valor aproximado $\tilde{y_1}$ precisamos conhecer o valor exato y_1. O problema é que não conhecemos esse valor exato. E, se conhecêssemos, então não haveria necessidade de calcular um valor aproximado.

Entretanto, podemos calcular, usando o método das tangentes de Euler, um valor $y_e(1)$; e então utilizar esse valor $y_e(1)$ no lugar do valor exato y_1. Assim, o valor aproximado referente ao ponto $x_1 = x_0 + h$ dado por

$$\tilde{y}_1 = x_0 + \frac{h}{2}[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_e(1))].$$

Consideramos agora o segundo subintervalo: $[x_1, x_2 = x_1 + h]$. Repetindo o processo, vamos tomar para valor aproximado $\tilde{y}_2$, correspondente ao ponto $x_2 = x_1 + h$, o ponto de interseção da reta vertical passando por x_2, com a reta que passa por $(x_1, \tilde{y}_1)$ e tem como inclinação a média das inclinações das retas tangentes nos pontos $(x_1, \tilde{y}_1)$ e (x_2, y_{e2}); onde y_{e2} representa o valor da solução aproximada, calculada pelo método de Euler original, no ponto x_2:

$$\tilde{y}_2 = x_1 + \frac{h}{2}[f(x_1, \tilde{y}_1) + f(x_2, y_{e2})].$$

E assim por diante. No subintervalo $[x_k, x_{k+1}]$, o valor aproximado referente ao ponto $x_{k+1} = x_k + h$ dado por

$$\tilde{y}_{k+1} = x_k + \frac{h}{2}[f(x_k, \tilde{y}_k) + f(x_{k+1}, y_{e(k+1)})].$$

Vamos ilustrar o método com o mesmo exemplo, (**7.3**):

$$\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

no intervalo $[0, 1]$, usando o método de Heun, com $h = 0,2$:

A figura correspondente é:

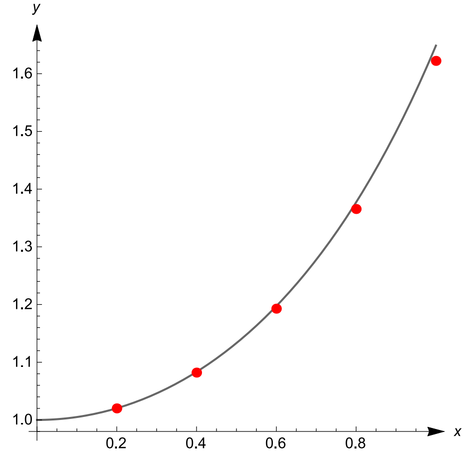


Figura 7.3: Comparação entre resultados do método de Heun e a solução exata para a o PVI $y' = xy$; $y(0) = 1$; $\quad h = 0,2$.

Nos pontos considerados, a diferença visual entre os valores exatos e os valores aproximados é quase imperceptível.

O Teorema de Cauchy/Picard

Cauchy ($\pm 1820's/30's$) foi o primeiro matemático a dar uma "demonstração" existência de soluções para equações normais, uma vez fixados os *dados iniciais: um ponto do domínio da solução e o valor da solução no ponto.* A exposição de Cauchy não era muito clara. Ele procurou um método de garantir a existência de soluções numéricas aproximadas, que convergissem para uma soluçnao exata, a partir de considerações sobre a continuidade e continuidade das derivadas parciais da função $f(x,y)$, que definia a equação diferencial. Entretanto Cauchy identificava os conceitos de *continuidade* e *continuidade uniforme*; os quais são equivalentes apenas sobre conjuntos compactos. Este resultado não existia na época em que Cauchy publicou suas pesquisas (por volta de 1835).

R. Lipschitz (1876) aperfeiçoou o trabalho de Cauchy. Ele substituiu as condições de continuidade das derivadas parciaisi de F por outras condições topológicas. Lipschitz também considerou *sistemas* de equações diferenciais de primeira ordem. Os métodos de Cauchy-Lipschitz envolviam esquemas numéricos, tratando da convergência pontual de sequências de aproximações numéricas.

C. E. Picard, em 1890, usou o Teorema Fundamental do Cálculo, para construir uma sequência de de funções, chamada de *sequência de aproximações sucessivas*, construída iterativamente, e provou que o limite essa sequência de funções converge para uma solução da equação (sempre tendo sido especificado um valor inicial).
Apresentamos, a seguir, e sem demonstrações, os principais passos do Método de Picard. Observe que se trata de um método construtivo, no sentido de que ele vai- efetivamente - construindo uma sucessão de funções que converge para uma solução (e não mais sucessões de pontos, que convergem para os valores de uma solução).

Uma Apresentacão do Teorema de Existência e Unicidade de Soluções Via as Iteradas de Picard

Teorema 7.1.

Seja f uma função real, definida em um um retângulo

$$\mathscr{R} = \{(x,y) : |x-x_0| \leq a, |y-y_0| \leq b\}.$$

Suponha que f e $\partial f/\partial y$ são contínuas em $\mathscr{R}$.
Então existe um números α tal que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{7.24}$$

possui uma, e somente uma solução, no subretângulo
$[x_0-\alpha; x_0+\alpha] \times [y_0-b; y_0+b] \subset \mathscr{R}$.

Observação!

Esta seção deixa clara a necessidade de estudos mais avançados em Análise , Topologia, etc. , para provar os resultados que usamos no dia a dia.

Pontos essenciais da demonstração:

- Para começar a demonstração, apresentamos uma formulação equivalente ao problema de valor inicial dado. Mais exatamente, se $y(x)$ é uma solução de (7.24), então, integrando os dois lados com relação ao x:
$$\int_{x_0}^{x} \frac{dy(s)}{ds}\, ds = \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds,$$
de onde
$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds. \tag{7.25}$$
Reciprocamente,se $y(x)$ é contínua e satisfaz (7.25), então $y'(x) = f(x, y(x))$. Além disso, $y(x_0) = y_0$, e portanto $y(x)$ é uma solução contínua de (7.25).

Observação!

As funções $y_n(x)$ são chamadas de aproximações sucessivas ou de *iteradas* de Picard.

- Utilizando (7.25), constrói-se a sequência de "aproximações" $y_n(x)$, da seguinte maneira:

  1. $y_0(x) \equiv y_0$;
  2. $y_{n+1} = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_n(s))\, ds, \quad n > 1.$

- A condição de $\partial f / \partial y$ é fundamental para provar que a sequência de iteradas converge *uniformemente* (um conceito fundamental da Topologia) para uma função $y(x)$, que é solução de (7.24). Com efeito, a condição $\partial f / \partial y$ *contínua* no domínio $\mathscr{R}$ (convexo), implica que existe uma constante $L > 1$, chamada de *constante de Lipschitz* de f em $\mathscr{R}$, tal que
$$sup \left| \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right| \leq L.$$
Por sua vez, a constante de Lipschitz garante a unicidade da função que é limite da sequência de iteradas.

Exemplo 7.5.

Calcule as duas primeiras iteradas de Picard para o problema de valor inicial
$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Solução:
Temos: $f(x,y) = x^2 + y^2$. Daí,

$$
\begin{aligned}
y_0(x) &= y_0 = 1 \\
y_1(x) &= 1 + \int_0^x f(s, y_0(s))\, ds = 1 + \int_0^x s^2 + 1^2\, ds = \frac{x^3}{3} + x + 1 \\
y_2(x) &= y_0 + \int_0^x f(s, y_1(s))\, ds = 1 + \int_0^x s^2 + \left(\frac{s^3}{3} + s + 1\right)^2 ds \\
&= 1 + x + x^2 + \frac{2x^3}{3} + \frac{s^4}{12} + \frac{s^5}{30} + \frac{s^7}{49}.
\end{aligned}
$$

Exemplo 7.6.

Calcule as iteradas de Picard para o problema de valor inicial

$$
\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1; \end{cases}
$$

e mostre que elas convergem para a solução $y(x) = e^x$.
Sugestão: Use o seguinte resultado do Cálculo:

$$
\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + \cdots
$$

Solução:

Temos: $f(x, y) = y$. Daí,

$$
\begin{aligned}
y_0(x) &= y_0 = 1 \\
y_1(x) &= 1 + \int_0^x ds = 1 + x \\
y_2(x) &= y_0 + \int_0^x f(s, y_1(s))\, ds = 1 + \int_0^x (1 + s)\, ds = 1 + x + \frac{x^2}{2} \\
y_3(x) &= y_0 + \int_0^x f(s, y_2(s))\, ds = 1 + \int_0^x \left[1 + s + \frac{s^2}{2}\right] ds = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \\
y_4(x) &= y_0 + \int_0^x f(s, y_3(s))\, ds = 1 + \int_0^x \left[1 + s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6}\right] ds = \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \\
&\vdots \\
y_n(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^n}{n!}
\end{aligned}
$$

Observe que, de acordo com a sugestão dada:

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \longrightarrow e^x.$$

O significa que a sequência de iteradas $y_n(x)$ converge para a função $x \mapsto e^x$; que é a solução do PVI proposto.

Encerraremos a discussão do teorema fundamental de existência de soluções com uma observação

✍ As duas hipótese feitas sobre a função f no teorema de Picard são suficientes para garantir que existem soluções definidas em vizinhanças do ponto (x_0, y_0) (chamadas de *soluções locais*) e que essas soluções são únicas.
Se eliminarmos a hipótese de que a função derivada parcial com relação a y seja contínua, então podemos demonstrar (o matemático Giuseppe Peano foi o primeiro a fazê-lo) que o problema de valor inicial sempre admite solução, mas agora a solução não é necessariamente única.

Exemplo 7.7.

Considere o PVI:

$$y' = y - y^2, \qquad y(x_0) = y_0. \tag{7.26}$$

1. Mostre, sem calcular a solução geeral, que para todo par $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, (7.26) possui uma única solução.
2. Resolva explicitamente o PVI, quando $x_0 = 0$ e $y_0 - 1/3$.
3. Determine o domínio da solução do PVI do item 2.
4. Podemos concluir que de um PVI tem soluções para quaisquer escolhas de $x_0 \in \mathbb{R}$ e de $y_0 \in \mathbb{R}$, isto **não** significa que os domínios de todas as soluções seja $\mathbb{R}$.

Solução:

Temos uma equação "logística":

$$\frac{dy}{dx} = y(1 - y)$$

Tanto $f(x,y) = y - y^2$ quanto $\partial f / \partial y = 1 - 2y$ são contínuas em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$

Então, para qualquer escolha do ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, o PVI formado pela equação e pelos dados iniciais (x_0, y_0) tem uma solução local.

Resolvendo a equação diferencial do problema como equação de Bernoulli, chegamos facilmente à solução

$$y = \frac{1}{1+ce^{-x}}$$

Substituindo agora $x_0 = 0$ e $y_0 = -1/3$,

$$-1/3 = \frac{1}{1+ce^0}$$

ou seja,

$$-\frac{1}{3} = \frac{1}{1+c};$$

de onde tiramos facilmente $c = -4$.

Então, numa vizinhança de $x_0 = 0$, a função

$$y = \frac{1}{1-4e^{-x}}$$

é a única solução da equação diferencial $y' = y - y^2$ que vale -1 quando $x = 0$

Observação: Repare que a solução acima não é definida num intervalo que contenha o ponto $x_1 = ln(4)$.

Exemplo 7.8.

Determine um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ no qual a equação diferencial $(1+y^3)y' = x^2$ possua uma única solução passando por um ponto (x_0, y_0) qualquer dessa região.

Solução:

$(1+y^3)y' = x^2 \Longleftrightarrow y' = \dfrac{x^2}{1+y^3}$.

A função $f(x,y) = \dfrac{x^2}{1+y^3}$ é contínua em todos os pontos (x,y) tais que $1+y^3 \neq 0$. Ou seja $f(x,y)$ é contínua em todos os pontos (x,y) tais que $y^3+1 \neq 0$. Observe que $y^3+1 = 0 \Longleftrightarrow y = -1$.

Além disso, a função derivada parcial de f, com relação à variável y é $f_y = -\dfrac{3y^2x^2}{(1+y^3)^2}$, que é descontínua nos pontos da reta $y = -1$.

Então, de acordo com o teorema de existência e unicidade de soluções, para cada ponto (x_0, y_0) no aberto $U = \mathbb{R}^2 - \{(x,y) \mid y = -1\}$ o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x^2}{1+y^3} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tem um única solução.

Atividade de auto-avaliação 7.1

Assinale, em poucas palavras, um aspecto importante que diferencia o método numérico de Euler do método de iteradas de Picard.

Atividade de auto-avaliação 7.2

Calcule as iteradas de Picard para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = 2x(y+1) \\ y(0) = 0; \end{cases}$$

e mostre que elas convergem para a solução $y(x) = e^{x^2} - 1$. .

Sugestão: Use o seguinte resultado do Cálculo:

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + \cdots$$

Atividade de auto-avaliação 7.3

(a) Mostre que $y = tg(x+c)$ é uma solução geral de $y' = 1 + y^2$
(b) Já que $f(x,y) = 1 + y^2$ e $\partial f/\partial y = 2y$ são contínuas em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$, então pelo teorema de existência e uicidade de soluções, o problema de valor inicial $y' = 1 + y^2, \qquad y(0) = 0$ possui uma única solução. Calcule esta solução
(c) Explique porque a solução do PVI apresentado no item (b) não pode estar definida no interalo $(-\pi, \pi)$.

Resumo

Nesta aula, você aprendeu que:

1. Os métodos utilizados para obter soluções de equações de Clairaut e de Lagrange se aplicam a muitas outras equações diferenciais especiais;
2. O estudo das equações diferenciais $y = f(x,y')$ e $x = f(y,y')$, pode ser reduzido, sob condições bem gerais, ao estudo de equações diferenciais normais $y' = f(x,y)$.
3. no século XVIII, Euler apresentou um método iterativo para construir valores aproximados de soluções de equações diferenciais normais, *admitindo que tais soluções existiam*.
4. No século XIX Cauchy, sem admitir previamente a existência de soluções, tentou estabelecer condições suficientes para garantir a existência de soluções, e de convergência da sequência numérica de aproximações.
5. Vários matemáticos aperfeiçoaram o resultado de Cauchy, e forneceram condições suficientes para garantir de antemão a existência e/ou unicidade de soluções de equações diferenciais normais de primeira ordem. Dentre eles, foi destacado o método construtivo de Picard (apresentado por volta de 1890), das aproximações sucessivas por sequências de funções que tendem para a solução exata.

O QUE VEM POR AÍ:

Na próxima aula, consideraremos equações diferenciais associadas a curvas dadas pelam interseção de superfícies e planos paralelos a XoY; bem como o *problema inverso*: determinar, se existriem, as curvas que podem se expressadas como interseções de superfícies que determinam as soluções de equações diferenciais dadas a priori. Examinaremos também exemplos de existência de soluções locais, isto é, definidas somente para vizinhanças de certos pontos.

SOLUÇÕES COMENTADAS DAS ATIVIDADES DESTA AULA:

Solução comentada da atividade 7.1

Um aspecto importante do TEU é que, tendo garantido. *de antemão*, que uma sucessão de valores ou funções construídas iterativamente é convergente, podemos utilizar essas iteradas para calcular valores aproximados para a solução exata , ou funções que são *aproximações sucessivas* para a solucão exata. É possível também avaliar o erro cometido a fazer tal substituicão.
O método numérico fornece uma tabela de pares de pontos (x_k, y_k). Unindo esses pontos, obtém-se uma linha poligonal que é a aproximação da solução exata. É uma aproximacão seccionalnte derivável apenas. O método de Picard permite a construção direta de uma sucessão de aproximações sucessivas formada por funções deriváveis em todos os pontos.

Solução comentada da atividade 7.2

Temos: $f(x,y) = 2x(y+1)$. Daí,

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= y_0 = 0 \\
y_1(x) &= y_0 + \int_0^x 2s(y_0(s)+1)\,ds = 0 + \int_0^x 2s\,ds = x^2 \\
y_2(x) &= y_0 + \int_0^x 2s(y_1(s)+1)\,ds = 0 + \int_0^x 2s(s^2)+1\,ds = x^2 + \frac{x^4}{2} \\
y_3(x) &= y_0 + \int_0^x 2s(y_2(s)+1)\,ds = 0 + \int_0^x 2s\left[\frac{s^4}{2}+1\right]ds = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} \\
y_4(x) &= y_0 + \int_0^x 2s(y_3(s)+1)\,ds = 0 + \int_0^x 2s\left[\frac{s^6}{6}+\frac{s^4}{2}+s^2+1\right]ds = \\
&= x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} \\
&\vdots \\
y_n(x) &= x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!}
\end{aligned}$$

Observe que

$$y_n(x) = [x^2] + \frac{[x^2]^2}{2} + \frac{[x^2]^3}{3!} + \frac{[x^2]^4}{4!} + \cdots + \frac{[x^2]^n}{n!}.$$

Usando a substituição $x^2 = t$, podemos escrever:

$$[x^2] + \frac{[x^2]^2}{2} + \frac{[x^2]^3}{3!} + \frac{[x^2]^4}{4!} + \cdots + \frac{[x^2]^n}{n!} = t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}.$$

Observe que, de acordo com a sugestão dada:

$$1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} \longrightarrow e^t.$$

Logo

$$t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}\longrightarrow e^t-1.$$

Substituindo t por x^2:

$$[x^2]+\frac{[x^2]^2}{2}+\frac{[x^2]^3}{3!}+\frac{[x^2]^4}{4!}+\cdots+\frac{[x^2]^n}{n!}+\cdots\longrightarrow e^{x^2}-1.$$

Isto é:

$$x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{6}+\frac{x^8}{24}+\cdots+\frac{x^{2n}}{n!}+\cdots\longrightarrow e^{x^2}-1.$$

Mas isto significa que a sequência de iteradas $y_n(x)$ converge para a função $x\mapsto e^{x^2}-1$; que é a solução do PVI proposto.

Solução comentada da atividade 7.3

(a) $y=tg(x+c)$ é uma família a um parâmetro de funções tais que

$$y'=sec^2(x+c)1+tg^2(x+c)=1+y^2.$$

Então é uma solução geral da equação.

(b) A solução que satisfaz $y(0)=0$ é $y=tg(x)$.
(c) Qualquer solução local de um problema de valor inicial passando por um ponto (x_0,y_0) é uma função derivável em todos os pontos de um intervalo centrado no ponto x_0.

O maior intervalo de centro em $x_0=0$ onde a função $y=tg(x)$, solução do PVI $y'=1+y^2,\quad y(0)=0$ é contínua, é o intervalo $(-\pi/2,\pi/2)$. Logo o maior intervalo de centro em $x_0=0$ onde a função $y=tg(x)$ é derivável é o intervalo $(-\pi/2,\pi/2)$, o qual está contido em, mas não é igual a $(-2,2)$.

Dizendo de outro modo: A função $y=tg(x)$ não é contínua (portanto não é derivável) no intervalo $(-2,2)$. Não pode existir uma solução definida em todo o intervalo $(-2,2)$.

Então não pode ser uma solução do PVI apresentado.

Aula 8

Equações Exatas e Equações Fechadas; Fatores Integrantes

Objetivos

Ao terminar de estudar esta aula você será capaz de:

1. reconhecer e resolver equações diferenciais exatas;
2. reconhecer equações diferenciais fechadas e construir fatores integrantes em casos especiais.

Pré-requisitos:
Aula 7; cursos de Cálculo I e II e III.

EQUAÇÕES EXATAS E EQUAÇÕES FECHADAS

INTRODUÇÃO

Na aula anterior, motivados pela questão de obter resultados gerais para equações diferenciais ordinárias de primeira ordem:

$$F(x,y,y') = 0$$

que não dependessem de procedimentos especiais, ou das formas particulares das equações, chegamos ao Teorema de Existência e Unicidade de soluções de equações diferenciais normais:

$$y' = f(x,y).$$

Vamos relembrar: partindo de $F(x,y,y') = 0$, e admitindo que valem as hipóteses apropriadas para " tirar uma das variáveis em termos das outras duas", obtivemos três situações possíveis:

- $y' = f(x,y)$,
- $y = f(x,y')$ e
- $x = f(y,y')$

A primeira delas é a que temos chamado de *equação diferencial normal de primeira ordem.* Com relação à equação $y = f(x,y')$, fazendo a substituicão $y' = p$, e derivando em relação a x, obtivemos a equação

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dfp}{dx},$$

i.e,

$$\left(p - \frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx} = 0;$$

que é uma equação da forma

$$M(x,p) + N(x,p)\,\frac{dp}{dx}. \quad (*)$$

Procedendo de maneira análoga com relação à equação $x = f(y,y')$, fazendo a substituicão $y' = p$, e derivando em relação a x, obtivemos a equação

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dy},$$

i.e,

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dy} = 0;$$

que é uma equação da forma

$$M(y,p)+N(y,p)\,\frac{dp}{dy}=0. \quad (**)$$

✍ Na aula precedente, quando obtivemos as equações (*) e (**), fizemos as hipóteses adicionais:

$$N(x,p)\neq 0 \quad \text{e, respectivamente,} \quad N(y,p)\neq 0,$$

e pudemos reescrevê-las como equações normais.

✍ Vamos agora trabalhar diretamente com equações diferenciais da forma

$$M(x,y)\,+N(x,y)\,\frac{dy}{dx}=0,$$

$M,N : U_{ab}\subset\mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}$; funções arbitrárias, com derivadas parciais contínuas, e mantendo a hipótese $N(x,y)\neq 0$.

Começamos apresentando uma interpretação geométrica das soluções de equações diferenciais

$$M(x,y)\,+N(x,y)\,\frac{dy}{dx}=0, \quad N(x,y)\neq 0$$

No curso de Cálculo foi visto que dada uma função

$$\varphi : U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$

a fórmula

$$\varphi(x,y)=c$$

define as curvas de nível c da função φ,

(a) Gráfico de φ (b) Gráf$(\varphi)\cap z=c$

Figura 8.1: Gráfico cortado por planos horizontais

As projeções dessas curvas no plano xy serão referidas simplesmente como curvas $\varphi(x,y)=c$.

O *mapa de contorno* de φ é a coleção das projeções das curvas de nível de φ no plano xy e define um *conjunto de curvas planas* *indexado por um parâmetro*. No caso, o parâmetro é a altura do plano horizontal que define o nível c.

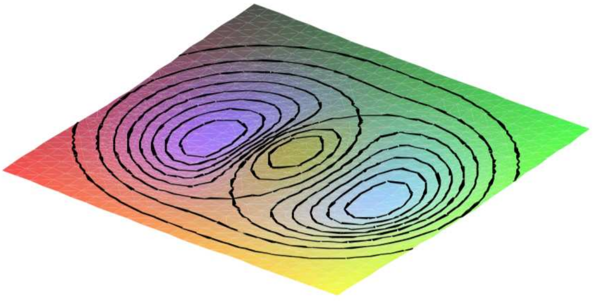


Figura 8.2: Mapa de contorno de φ

Agora vamos inverter o problema:

Suponha que são dadas duas funções $M(x,y)$ e $N(x,y) \neq 0$ definidas em um conjunto aberto $\mathscr{U} \subset \mathbb{R}^2$. Podemos formar a equação diferencial

$$M(x,y) + N(x,y)\,\frac{dy}{dx} = 0 \tag{8.1}$$

!

Atenção!

Resolver a equação (8.1) é construir um mapa de contorno tal que (8.1) seja a equação diferencial das curvas daquele mapa de contorno.
Equivalentemente, resolver (8.1) é descobrir uma função $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que a equação diferencial da família de curvas $\varphi(x,y) = c$ seja exatamente (8.1).

Definição 8.1 (Funções Potenciais)**.**

Uma função $\varphi(x,y)$ é uma função potencial de

$$M + Ny' = 0$$

se $\partial\varphi/\partial x = M$ e $\partial\varphi/\partial y = N$ em todos os pontos do aberto $\mathscr{U}$ onde M e N estão definidas.

Definição 8.2.

Dizemos que a equação $M(x,y) + N(x,y)\dfrac{dy}{dx} = 0$ é *exata* em $\mathscr{U}$ quando ela possui uma função potencial definida em $\mathscr{U}$.

O próximo resultado caracteriza formalmente as soluções de uma equacão exata. Omitiremos sua demonstração.

Teorema 8.1.

Se $M(x,y) + N(x,y)\dfrac{dy}{dx} = 0$ é *exata* em $\mathscr{U}$ e $\varphi(x,y)$ é uma função potencial para esta equação, então a família de curvas a um parâmetro $\varphi(x,y) = c$ define implicitamente soluções $M(x,y) + N(x,y)\dfrac{dy}{dx} = 0.$

A resposta mais direta seria: exiba uma $\varphi(x,y)$.Todavia, isso já seria resolver a equação, e o que estamos querendo saber é se é possível determinar se a equação tem soluções (sem precisar resolvê-la a priori).

Definição 8.3.

A equação

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0 \qquad M,N : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

é *fechada* na região U se em todo ponto $(x,y) \in U$

$$M_y(x,y) = N_x(x,y).$$

Teorema 8.2.

Se uma equação

$$M(x,y)+N(x,y)y'=0 \qquad \text{onde } M,N : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

são duas vezes continuamente deriváveis, é exata na região U então ela é fechada em U.

Demonstração

Usando o teorema de Schwarz sobre a igualdade de derivadas parciais mistas de funções duas vezes continuamente deriváveis, sempre que as soluções são dadas por $\varphi(x,y)=c$ valem $\varphi_x = M$ e $\varphi_y = N$,e como a função φ é duas vezes continuamente diferenciável, então

$$M_y = \varphi_{xy} = \varphi_{yx} = N_x.$$

$\exists\ \varphi$ e as soluções são definidas por $\varphi(x,y)=c$	$\Longrightarrow$	$\forall\ (x,y) \quad M_y(x,y)=N_x(x,y)$

Teorema 8.3.

Se uma equação

$$M(x,y)+N(x,y)y'=0 \qquad M,N : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

é fechada em todos os pontos de uma região U que não contém falhas ou lacunas então ela é exata naquela região.

✍ É importante que não haja lacunas na região U porque partindo da equação diferencial $M(x,y)+N(x,y)\,\dfrac{dy}{dx}=0$ e considerando o campo de vetores

$$\overrightarrow{F}(x,y) = (M(x,y), N(x,y))$$

podemos calcular a integral de linha do campo $\overrightarrow{F}$ ao longo de qualquer curva (continuamente derivável) contida em U.

Pois bem, fixado um ponto qualquer $(x_0, y_0) \in U$, para cada outro ponto $(x,y) \in U$ se a integral de linha de $\overrightarrow{F}$ ao longo de qualquer curva ligando (x_0, y_0) a (x,y):

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \overrightarrow{F} \cdot ds$$

não depender da curva escolhida para ligar (x_0, y_0) a (x,y), podemos definir uma função $\varphi(x,y)$ por

$$\varphi(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \overrightarrow{F} \cdot ds$$

e, mais ainda, provar que essa função φ satisfaz à equação diferencial $M(x,y) + N(x,y)\,\dfrac{dy}{dx} = 0$.

Como aprendemos no curso de Cálculo, a própria φ só fica bem definida se a região não possuir "lacunas".

✍ Existem muitas regiões que não possuem lacunas. O próximo resultado exibe algumas regiões delas; o que significa que, nessas regiões, todas as equações fechadas são exatas.

Obtendo Soluções de Equações Exatas

Nesta seção, estamos supondo que as regiões U são de um dos tipos caracterizados no teorema acima.

Teorema 8.4.

- Toda equação fechada em um semiplano aberto é exata;

- Toda equação fechada em um retângulo aberto, o é exata;

- Toda equação fechada em $\mathbb{R}^2$ é exata;
(**Obs:** $\mathbb{R}^2$ pode ser pensado como um retângulo de lados infinitos)

- Toda equação fechada em uma faixa infinita (vertical ou horizontal) é exata.

Demonstração

Observamos que as funções $\varphi(x,y)$ definidas por

$$\varphi(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \overrightarrow{F} \cdot ds = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} M(t,s)\,dt + N(t,s)\,ds \quad (8.2)$$

definem soluções (funções potenciais) para a equação diferencial

$$M(x,y) + N(x,y)\,\frac{dy}{dx} = 0.$$

Usando propriedades de integrais de linha podemos calcular a integral que define φ (ao longo de qualquer caminho unindo (x_0,y_0) a (x,y)) por meio de duas integrais mais simples:

1 - Calculamos a integral de $\overrightarrow{F}$ ao longo do segmento horizontal unido (x_0,y_0) a(x,y_0).Neste segmento a segunda coordenada, s, não varia, ($ds = 0$) e a integral (8.2) se reduz a

$$\int_{x_0}^{x} M(t,y_0)\,dt; \quad (8.3)$$

2 - Calculamos depois a integral de $\overrightarrow{F}$ ao longo do segmento vertical unido (x,y_0) a (x,y).
Neste segmento, a primeira coordenada, t, não varia, ($dt = 0$) e a integral se reduz a

$$\int_{x_0}^{x} N(x_0,s)\,ds; \quad (8.4)$$

3 - A seguir somamos (8.3) com (8.4), chegando assim à expressão da função potencial

$$\varphi(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y_0)\,dt + \int_{x_0}^{x} N(x_0,s)\,ds. \quad (8.5)$$

Naturalmente (8.5) define implicitamente a solução do PVI

$$\begin{cases} M(x,y) + N(x,y)\,\dfrac{dy}{dx} = 0; \\ \varphi(x_0,y_0) = 0. \end{cases}$$

Com relação a soluções gerais, observe o seguinte:

$$\begin{aligned} M(t,y_0) &= \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,y_0) \\ &\Downarrow \\ \int_{x_0}^{x} M(t,y_0)\,dt &= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,y_0)\,dt. \end{aligned}$$

Portanto, de acordo com o Teorema Fundamental do Cálculo, qualquer primitiva da família

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,y_0)\,dt$$

que é exatamente igual à família

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y_0)\,dx$$

é uma função da forma

$$\varphi(x,y_0)+g(y)$$

para todo y_0 escolhido.
Isso nos permite concluir que todas as funções potenciais da equação

$$M(x,y)+N(x,y)\,\frac{dy}{dx}=0$$

são as funções da forma

$$\varphi(x,y)+g(y); \tag{8.6}$$

onde $g(y)$ é uma função a ser calculada.

Ora, se (8.6) é a expressão de *todas as funções potenciais* da equação $M(x,y)+N(x,y)\,\dfrac{dy}{dx}=0$ então, em particular, sua derivada parcial com respeito a y é - necessariamente - igual a $N(x,y)$.

Isto é:

$$\frac{\partial}{\partial y}[\varphi(x,y)+g(y)]=\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y}+g'(y)=N(x,y) \tag{8.7}$$

A primeira das igualdades de (8.10) é uma tautologia (vale sempre, independentemente de quaisquer variáveis ou constantes).

A segunda igualdade:

$$\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} + g'(y) = N(x,y)$$

é uma equacão que permite calcular $g(y)$, e - consequentemente- a fórmula geral de $\varphi(x,y)$.

Exemplo 8.1.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x-y^2}$$

Solução: $M(x,y) = -(x-y), \qquad N(x,y) = x-y^2.$

Então

$$M_y = 1 = N_x$$

de modo que a equação é fechada em $\mathbb{R}^2$. Portanto é exata.

Existe uma $\varphi(x,y)$ tal que $\varphi_x = M$ e $\varphi_y = N$.

$$\begin{aligned} \varphi_x = M = -x+y \quad &\Longrightarrow \quad \varphi(x,y) = \int [-x+y]\,dx + h(y) \\ &\Longleftrightarrow \quad \varphi(x,y) = -\frac{x^2}{2} + yx + h(y) \end{aligned}$$

Ora, $\varphi_y = N = x-y^2$.

Isto é $\dfrac{d}{dy}\left[-\dfrac{x^2}{2} + yx + h(y)\right]$ é igual a $x-y^2$. Assim,

$$x + h'(y) = x - y^2$$

de onde concluímos que $h'(y) = -y^2$ e portanto

$$h(y) = -\frac{y^3}{3} + c_1$$

Então

$$\varphi(x,y) = -\frac{x^2}{2} + yx - \frac{y^3}{3} + c_1$$

E as soluções da equação dada são definidas por

$$-\frac{x^2}{2}+yx-\frac{y^3}{3}+c_1=c_2$$

ou (englobando as duas constantes numa só)

$$-\frac{x^2}{2}+yx-\frac{y^3}{3}=c.$$

✍ Também é possível obter φ calculando primeiramente a integral de $\overrightarrow{F}$ ao longo do segmento vertical unido (x_0,y_0) a(x_0,y), onde a primeira coordenada, t, não varia, $(dt=0)$ e, depois, a integral de $\overrightarrow{F}$ ao longo do segmento horizontal unido (x_0,y) a (x,y). Neste segmento, a segunda coordenada, s, não varia, $(ds=0)$. Somamos as duas integrais obtemos a expressão da função potencial que define implicitamente as soluções da equação diferencial.

Exemplo 8.2.

Resolva

$$(2x\,sen\,y+e^x cos\,y)\,dx+(x^2\,cos\,y-e^x\,sen\,y)\,dy=0,\ y(0)=\pi/4$$

Solução:

$M(x,y)=2x\,sen\,y+e^x cos\,y$ e $N(x,y)=x^2\,cos\,y-e^x\,sen\,y$
$M_y=2x\,cos\,y-e^x sen\,y=N_x$, portanto a equação é fechada em $\mathbb{R}^2$, logo é exata.
Existe uma $\varphi(x,y)$ tal que $\varphi_x=M$ e $\varphi_y=N$.

$$\varphi_y=N=x^2\,cos\,y-e^x\,sen\,y\Longrightarrow\varphi(x,y)=\int[x^2\,cos\,y-e^x\,sen\,y]\,dy+g(x)$$

$$\therefore\qquad\varphi(x,y)=x^2\,sen\,y+e^x\,cos\,y+g(x)$$

Ora, $\varphi_x=M=2x\,sen\,y+e^x cos\,y$.
Isto é $\dfrac{d}{dx}\left[x^2\,sen\,y+e^x\,cos\,y+g(x)\right]$ é igual a $2x\,sen\,y+e^x cos\,y$. Assim,

$$2x\,sen\,y+e^x cos\,y+g'(x)=2x\,sen\,y+e^x cos\,y$$

de onde concluímos que $g'(x) = 0$ e portanto

$$g(x) = C_1$$

Então as soluções ficam definidas por

$$x^2 \; sen \; y + e^x \; cos \; y = c$$

E como $y(0) = \pi/4$,

$$0^2 \; sen \; \pi/4 + e^0 cos \; \pi/4 = c$$

logo $c = 2/\sqrt{2}$ E assim as soluções são definidas pela equação

$$x^2 \; sen \; y + e^x \; cos \; y = 2/\sqrt{2}.$$

!

Atenção!

No primeiro exemplo partimos de $\varphi_x = M$ e integramos com relação a x. No segundo, partimos de $\varphi_y = N$ e integramos com relação a y. Os dois procedimentos são equivalentes.

Fatores de Integração

Nesta seção, examinaremos a seguinte questão:

Questão : O que acontece quando a região U, onde os coeficientes de uma equação diferencial fechada

$$M(x,y) + N(x,y)\,y' = 0$$

contém lacunas que impedem a definição de uma função φ em todos os seus pontos.

Resposta: A equação é *localmente exata*. Isto significa que, dado qualquer ponto $(x_0, y_0) \in U$, existe um retângulo $\mathscr{R}_{(x_0,y_0)} \subset U$ e uma função $\varphi_{(x_0,y_0)}$ que é solução da equação naquele retângulo $\mathscr{R}_{(x_0,y_0)}$.

Dizendo de outro modo: Podemos ter uma equação

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

com $M(x,y)$ e $N(x,y)$ definidos numa certa região $U \subset \mathbb{R}^2$, que contém lacunas, sendo que a condição $M_y = N_x$ vale em todos os pontos de U, mas não é possível definir uma solução em todo U.

Exemplo 8.3.

Seja a equação $\dfrac{-y}{x^2+y^2} + \dfrac{x}{x^2+y^2}\, y' = 0$

Sob condições apropriadas, para cada ponto $(x_0, y_0) \in U$, existe uma região $\mathscr{R}_0 \subset U$ contendo (x_0, y_0), tal que a equação $M(x,y) + N(x,y)\dfrac{dy}{dx} = 0$ é exata em $\mathscr{R}_0$. Portanto existe uma função φ_0, definida em $\mathscr{R}_0$, que é solução da equação.

Dado um outro ponto $(x_1, y_1) \in U$, existe uma sub-região $\mathscr{R}_1 \subset U$, contendo (x_1, y_1), tal que a equação $M(x,y) + N(x,y)\dfrac{dy}{dx} = 0$ é exata em $\mathscr{R}_1$; e então, existe uma função φ_1 definida em $\mathscr{R}_1$ que também é solução da equação. Nada obriga que φ_0 seja igual a φ_1, isto é:

✍ *As soluções podem variar de sub-região para sub-região*

A questão seguinte é :

Questão : *Como determinar uma solução local?*

Analisando os diversos tipos de equações que aprendemos a resolver até agora, observamos que, frequentemente, foi preciso modificar a equacão, por meio de uma divisão, ou multiplicação por uma função, para transformá-la numa equacão que já sabíamos resolver. Considere, por exemplo, o procedimento de obter soluções de equações de Bernoulli, ou de equações separáveis. Em geral esse tipo de operacão restringe o domínio onde a equação está originalmente definida.

Um outro exemplo familiar envolve a equação linear de 1^a ordem, não homogênea: $y' + f(x)y = g(x)$.
Podemos reescrevê-la na forma

$$\underbrace{[f(x)y - g(x)]}_{M} + \underbrace{1}_{N} \cdot y' = 0 \tag{8.8}$$

Temos
$$M_y = f(x) \qquad \text{ao passo que} \quad N_x = 0$$
e a equação não é exata.

Multiplicando (8.8) por
$$\mu(x) = e^{\int f(x)\ dx}$$
ela se tansforma na equação
$$\underbrace{e^{\int f(x)\ dx}\Big([f(x)y - g(x)\Big]}_{\tilde{M}} + \underbrace{e^{\int f(x)\ dx}}_{\tilde{N}} y' = 0,$$
que é exata.

✍ Lembre que $\mu(x) = e^{\int f(x)\ dx}$ é solução de uma equação linear homogênea do tipo $y\prime - f(x)y = 0$. E para resolver essa última, foi preciso dividir por y, e portanto reduzir a validade da solução ao conjunto de pares (x,y) tais que $y \neq 0$

Então $\exists\ \varphi(x,y)$ tal que
$$\varphi_x = e^{\int f(x)\ dx}(f(x)y - g(x)) \tag{8.9}$$
e
$$\varphi_y = e^{\int f(x)\ dx} \tag{8.10}$$
Daí ,
$$\begin{aligned}
\varphi(x,y) &= \int e^{\int f(x)\ dx}[f(x)y - g(x)]\ dx + h(y) \\
&= y \int \underbrace{e^{\int f(x)\ dx} f(x)}_{\frac{d}{dx} e^{\int f(x)dx}}\ dx - \int e^{\int f(x)dx} g(x)\ dx + h(y) \\
&= ye^{\int f(x)dx} - \int e^{\int f(x)dx} g(x)\ dx + h(y)
\end{aligned}$$

Logo
$$\frac{d}{dy}\Big[ye^{\int f(x)dx} - \int e^{\int f(x)dx} g(x)\ dx + h(y)\Big] = e^{\int f(x)dx} + h'(y)$$

E como, de acordo com a eq. (8.7), $\varphi_y = e^{\int f(x)\ dx}$, então $h'(y) = 0$.
Assim

$$\varphi(x,y) = ye^{\int f(x)dx} - \int e^{\int f(x)dx} g(x)dx + C_1$$

e as soluções são dadas por

$$\varphi(x,y) = ye^{\int f(x)dx} - \int e^{\int f(x)dx} g(x)dx = C,$$

isto é

$$\boxed{y = e^{-\int f(x)dx} \cdot \left[\int e^{\int f(x)dx} g(x)dx + C\right]}$$

exatamente como antes.

✍ Motivados pelas considerações acima, procuraremos reformular o problema da obtenção de soluções locais para equações (que sabemos antecipadamente ser) localmente exatas em uma região U da seguinte maneira:
Dada uma equação

$$M(x,y)\ + N(x,y)\ y' = 0$$

e um ponto $(x_0, y_0) \in U$*, existe alguma função* $\mu(x,y)$ *não identicamente nula, definida num retângulo* $\mathscr{R} \ni (x_0,y_0)$ *tal que*

$$\mu(x,y) \cdot M(x,y)\ + \mu(x,y) \cdot N(x,y)\ y' = 0$$

seja exata em $\mathscr{R}$*?*

Definição 8.4.

Dizemos que a função $\mu(x,y)$ é um *fator de integração* ou *um multiplicador* para $M(x,y)\ + N(x,y)\ y' = 0$ em $\mathscr{R}$.

Obs: Se $\mu(x,y)$ é um *fator de integração* ou um *multiplicador* para $M(x,y) \ + N(x,y)\ y' = 0$ em $\mathscr{R}$, então, naturalmente,

$$\frac{1}{\mu}\Big(N\mu_x - M\mu_y\Big) = M_y - N_x \qquad (8.11)$$

As questões fundamentais que se apresentam agora são:

Questões :

1. "Toda equação $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ admite um multiplicador?"
2. "Existe algum procedimento prático para calcular multiplicadores para uma equação?"

Repare que, se as respostas forem afirmativas, então, pelo menos em princípio, temos um técnica geral para resolver equações diferenciais localmente: basta calcular o multiplicador adequado e achar a função potencial correspondente.

Vale o seguinte teorema, cuja demonstração omitimos.

Teorema 8.5.

Se as funções M e N possuem derivadas parciais contínuas em todos os pontos da região U, e se $N(x_0, y_0) \neq 0$ em U então existe um fator integrante numa vizinhança de (x_0, y_0).

Comentário: A equação (8.11) é uma *equação diferencial parcial*, pois envolve derivadas parciais de $\mu(x,y)$.

Na maior parter das vezes, não sabemos resolvê-la explicitamente. Entretanto, em muitas situações importantes , é possível obter um fator de integração.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 8.4.

Suponha que μ seja função de x somente. Neste caso $\mu_y \equiv 0$, e a equação (14.6) se reduz a

$$\frac{1}{\mu} N\mu_x = M_y - N_x$$

Daí

$$\frac{\mu_x}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{N} \tag{8.12}$$

o que nos mostra que o lado direito é função só de x.

Reciprocamente, se $\dfrac{M_y - N_x}{N}$ é função somente de x Então a equação $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ tem fator integrante dependente só de x, dado por

$$\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}\, dx}$$

Prova: Basta verificar que

$$e^{\int \frac{M_y-N_x}{N}\, dx} \cdot M(x,y) + e^{\int \frac{M_y-N_x}{N}\, dx} \cdot N(x,y)y' = 0$$

é exata. Com efeito:

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(e^{\int \frac{M_y-N_x}{N}\, dx} \cdot M(x,y)\Big) = e^{\int \frac{M_y-N_x}{N}\, dx} \cdot M_y$$

(pois o expoente é função somente de x).

Por sua vez

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\Big(e^{\int \frac{M_y-N_x}{N}\, dx} \cdot N(x,y)\Big) &= \\ = e^{\int \frac{M_y-N_x}{N}\, dx} \cdot \frac{M_y - N_x}{N} \cdot N + e^{\int \frac{M_y-N_x}{N}\, dx} \cdot N_x & \\ = e^{\int \frac{M_y-N_x}{N}\, dx} \cdot M_y & \end{aligned}$$

Exemplo 8.5.

Considere a equação

$$(x^2y-x)y'+y=0$$

Temos $M(x,y)=y, \quad N(x,y)=x^2y-x$. Logo

$$\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{-2}{x}$$

Então $\mu(x)=e^{\int\frac{-2\,dx}{x}}=x^{-2}$.
De fato, multiplicando a equação por μ obtemos uma equação exata (exercício).

Exemplo 8.6.

Se $\dfrac{N_x-M_y}{M}$ é função somente de y, a equação $M(x,y)+N(x,y)y'=0$ tem um fator integrante função somente de y, dado por

$$\mu(y)=e^{\int\frac{N_x-M_y}{M}\,dy}.$$

Atividade de auto-avaliação 8.1

Mostre que as equações abaixo não são exatas, mas tornam-se exatas quando multiplicadas pelo fator integrante dado. Em seguida, resolva as equações

a) $x^2y^3+x(1+y^2)y'=0, \qquad \mu(x,y)=1/xy^3$

b) $\left(\dfrac{\operatorname{sen} y}{y}-2e^{-x}\operatorname{sen} x\right)+\left(\dfrac{\cos y+2e^{-x}\cos x}{y}\right)\dfrac{dy}{dx}=0,$
$\mu(x,y)=ye^x$

Exemplo 8.7.

Determine fatores integrantes para as seguintes equações:

$a)\ (x^3y-x^2)+xy'=0$

$b)\ y+(ye^yx-y^2)\ \dfrac{dy}{dx}=0$

$c)\ [y\ cos\ x - tg\ x] + sen\ x\ \frac{dy}{dx} = 0$

Solução:

$a)\ (x^3y-x^2)+xy'=0$

Temos: $M(x,y)=x^3y-x^2$ e $N(x,y)=x$.

Portanto $M_y=x^3$ e $N_x=1$, e assim

$$\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{x^3-1}{x}=x^2-\frac{1}{x}.$$

A função $\mu(x)=e^{\int\left(x^2-\frac{1}{x}\right)dx}=e^{x^3/3-lnx}=\dfrac{e^{x^3/3}}{x}$ é um fator de integração.

$b)\ y+(ye^yx-y^2)\dfrac{dy}{dx}=0$

Temos: $M(x,y)=y$ e $N(x,y)=ye^yx-y^2$.

Portanto $M_y=1$ e $N_x=ye^y$, e então

$$\frac{N_x-M_y}{M}=\frac{ye^y-1}{y}=e^y-\frac{1}{y};$$

que é função só da variável y.

Assim,

$$e^{\int(e^y-1/y)\,dy}=\frac{e^{(e^y)}}{y}$$

é um fator de integração.

$c)\ [y\ cos\ x-tg\ x]+sen\ x\ \dfrac{dy}{dx}=0$

Temos: $M(x,y)=y\ cos\ x-tg\ x$ e $N(x,y)=sen x$.

Portanto $M_y=cos x$ e $N_x=cos x$, e então a equação já é exata.

!

Atenção!

Vamos insistir um pouco mais , e tentar um fator integrante de um dos "tipos conhecidos":
$M_y = x^3$ e $N_x = 1$, e assim

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{0-0}{N} = 0.$$

A função $\mu(x) = e^{\int 0\,dx} = e^0 = 1$ é um fator de integração.

Da mesma forma, se tentarmos um fator de integração função só de y, encontraremos $\nu(y) = 1$.
Mas isso não quer dizer que não possa existir um outro fator integrante, função simultaneamente de x e y.

Exemplo 8.8.

Resolva:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2\ ln\, x + x^2 - y}{x} \qquad y(1) = 5$$

Solução:

Multiplicando a equação (pelo fator de integração $\mu(x) = x$),obtemos

$$\underbrace{3x^2\ ln\, x + x^2 - y}_{M} + \underbrace{-x}_{N}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Vemos que

$$M_y = -1 = N_x,$$

e portanto a equação multiplicada é exata.

Existe $\phi(x,y)$ tal que $\dfrac{\partial\phi}{\partial x} = 3x^2\ ln\, x + x^2 - y$ e $\dfrac{\partial\phi}{\partial y} = -x.$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial y} = -x \quad &\Rightarrow \quad \phi(x,y) = \int -x\,dy + h(x) \\
&\Longleftrightarrow \quad \phi(x,y) = -xy + h(x). \\
&\Rightarrow \quad \frac{\partial\phi}{\partial x} = -y + h'(x) = 3x^2\ ln\ x + x^2 - y \\
&\Rightarrow \quad h'(x) = 3x^2\ ln\ x + x^2 \\
&\Rightarrow \quad h(x) = x^3\, ln x
\end{aligned}
$$

Logo, $\phi(x,y) = -xy + x^3\, ln x + c_1$.

Portanto, as soluções da equação diferencial são definidas implicitamente por

$$-xy + x^3\, ln x = c.$$

Impondo a condição inicial $y(1) = 5$, isto é substituindo $x = 1$ e $y = 5$, calculamos $c = -5$

Resposta: A solução do PVI é a função

$$y = \frac{x^3\, ln x + 5}{x}.$$

Exemplo 8.9.

Determine expressões que definem soluções gerais para as equações

a) $(3x^2 - y^2)y' - 2xy = 0$

b) $(x^2 - xy)y' + (xy - 1) = 0$

Solução:
a) Temos:
$M(x,y) = -2xy \quad$ e $\quad N(x,y) = 3x^2 - y^2$

$M_y = -2x \quad$ e $N_x = 6x$.

Então $\dfrac{N_x - M_y}{M} = \dfrac{6x + 2x}{-2xy} = -\dfrac{4}{y}$.

Então $\mu(y) = e^{-\int (4/y)\,dy} = y^{-4}$ é um fator integrante.

Multiplicando a equação por $\mu(y)$ obtemos a equação exata (definida para $y \neq 0$)

$$-2xy^{-3} + (3x^2y^{-4} - y^{-2})\,y' = 0.$$

Existe $\varphi(x,y)$ tal que $\varphi_x = -2xy^{-3}$ e $\varphi_y = 3x^2y^{-4} - y^{-2}$.

Integrando $-2xy^{-3}$ com relação a x obtemos

$$\varphi(x,y) = -x^2y^{-3} + g(y).$$

Derivando φ com relação a y e igualando o resultado a $3x^2y^{-4} - y^{-2}$, obtemos

$\varphi_y = 3x^2y^{-4} + g'(y) = 3x^2y^{-4} - y^{-2}$

Logo $g'(y) = -\dfrac{1}{y^2}$; e consequentemente $g(y) = \dfrac{1}{y}$.

Então a expressão $-x^2y^{-3} + \dfrac{1}{y} = c$ define uma solução geral de $(3x^2 - y^2)y' - 2xy = 0$.

b) Temos:
$M(x,y) = xy - 1$ e $N(x,y) = x^2 - xy$

$M_y = x$ e $N_x = 2x - y$.

Daí $\dfrac{M_y - N_x}{N} = \dfrac{-x+y}{x(x-y)} = -\dfrac{1}{x}$.

Então $\mu(x) = e^{-\int (1/x)\,dx} = x^{-1}$ é um fator integrante.

Multiplicando a equação por $\mu(x)$ obtemos a equação exata (definida para $x \neq 0$)

$$\left(y - \frac{1}{x}\right) + (x-y)\,y' = 0.$$

Existe $\varphi(x,y)$ tal que $\varphi_x = y - \dfrac{1}{x}$ e $\varphi_y = x - y$.

Integrando $x - y$ com relação a y obtemos

$$\varphi(x,y) = xy - \frac{y^2}{2} + h(x).$$

Derivando φ com relação a x e igualando o resultado a $y - \dfrac{1}{x}$, obtemos

$\varphi_x = y + h'(x) = y - \dfrac{1}{x}$

Logo $h'(x) = -\dfrac{1}{x}$; e consequentemente $h(x) = lnx$.

Então a expressão

$$xy - \frac{y^2}{2} + lnx = c$$

define uma solução geral de $(x^2 - xy)y' + (xy - 1) = 0$.

APÊNDICE

A FÓRMULA DE EULER

A proposição a seguir apresenta uma fórmula interessante, devida a Euler, que é de utilidade no estudo de fatores de integração.

Teorema 8.6 (A fórmula de Euler para funções homogêneas)**.**

Se $G : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é homogênea de grau k em $\mathscr{U}$, então

$$\forall\ (x,y) \in \mathscr{U}, \quad x\,\frac{\partial G}{\partial x} + y\,\frac{\partial G}{\partial y} = k\ G(x,y)$$

Demonstração

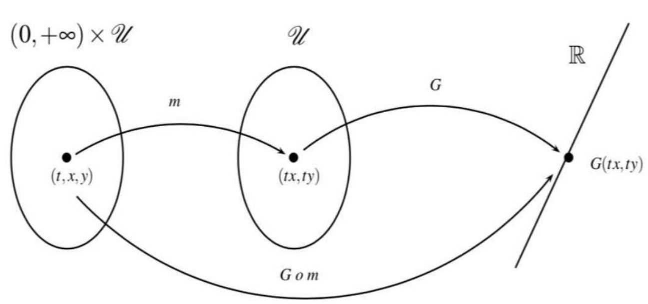


Figura 8.3: Seja $m : (0,+\infty)\times\mathscr{U} \longrightarrow \mathscr{U}$ definida por $m(t,(x,y)) = (tx,ty)$

Condideremos a composição

$$\begin{array}{ccccc} (0,+\infty)\times\mathscr{U} & \stackrel{m}{\longrightarrow} & \mathscr{U} & \stackrel{G}{\longrightarrow} & \mathbb{R} \\ (t,(x,y)) & \mapsto & (tx,ty) & \mapsto & G(tx,ty) \end{array}$$

Faça $\begin{cases} u = tx \\ v = ty \end{cases}$. De acordo com a regra da cadeia:

$$\frac{\partial (G\ o\ m)}{\partial t}\bigg|_{(t,x,y)} = \frac{\partial G}{\partial u}\bigg|_{(u,v)} \cdot \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t} + \frac{\partial G}{\partial v}\bigg|_{(u,v)} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t}$$

Calculando no ponto $t = 1$, e lembrando que $t = 1 \Longrightarrow u = x \quad \text{e} \quad v = y$, obtemos

$$\frac{\partial (G\ o\ m)}{\partial t}\bigg|_{(1,x,y)} = \frac{\partial G}{\partial x}\cdot x + \frac{\partial G}{\partial y}\cdot y \qquad (8.13)$$

Por outro lado, como $G(tx,ty) = t^k\, G(x,y)$, então

$$\frac{\partial (G\ o\ m)}{\partial t}\bigg|_{(1,x,y)} = \frac{\partial}{\partial t} G(tx,ty)\bigg|_{(1,x,y)} = \frac{\partial}{\partial t}[t^k G(x,y)] =$$

$$= kt^{k-1}G(x,y)\bigg|_{(1,x,y)} = k\, G(x,y) \qquad (8.14)$$

Igualando (8.13) com (8.14), temos o resultado.

Exemplo 8.10.

Mostre que se os coeficientes $M(x,y)$ e $N(x,y)$ da equação

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0 \qquad (8.15)$$

são funções homogêneas de mesmo grau, então a função

$$\mu(x,y) = \frac{1}{xM(x,y) + yN(x,y)} \qquad (8.16)$$

é um fator integrante de (8.1).

Sugestão: Utilize a fórmula de Euler para funções homogêneas.

Solução:

Sejam $M(x,y)$ e $N(x,y)$ funções homogêneas de mesmo grau p.

De acordo com a fórmula de Euler para funções homogêneas, temos (omitindo o ponto de aplicação das funções):

$$xM_x + yM_y = pM \tag{8.17}$$

$$xN_x + yN_y = pN \tag{8.18}$$

Multiplicando a equação original pelo fator $\mu(x,y)$ dado, obtemos

$$\frac{M}{xM+yN} + \frac{N}{xM+yN}\, y' = 0 \tag{8.19}$$

Devemos mostrar que (8.19) é uma equação exata, i.é

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{M}{xM+yN}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{N}{xM+yN}\right)$$

Temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{M}{xM+yN}\right) &= \frac{(xM+yN)M_y - M(xM_y+N+yN_y}{(xM+yN)^2} \\ &= \frac{x\cancel{M}M_y + yNM_y - x\cancel{M}M_y - MN - yMN_y}{(xM+yN)^2} \end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{M}{xM+yN}\right) = \frac{yNM_y - yMN_y - MN}{(xM+yN)^2} \tag{8.20}$$

De maneira análoga

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{N}{xM+yN}\right) = \frac{xMN_x - xNM_x - MN}{(xM+yN)^2} \tag{8.21}$$

Para provar que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{M}{xM+yN}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{N}{xM+yN}\right)$$

basta provar que a diferença (8.20) - (8.21) é identicamente nula.

Subtraindo (8.21) de (8.20) (o que equivale a subtrair os numeradores, já que os denominadores são iguais), obtemos:

$$yNM_y - yMN_y - MN - xMN_x + xNM_x + MN$$

i.é
$$N \underbrace{(yM_y + xM_x)}_{\substack{\| \text{ (eq (8.17))} \\ pM}} - M \underbrace{(xN_x + yN_y)}_{\substack{\| \text{ (eq(8.18))} \\ pN}}$$

ou ainda
$$pMN - pNM = 0,$$
conforme queríamos provar.

Exemplo 8.11.

Suponha que μ seja função de $z = xy$. Então
$$\mu(x,y)M(x,y) + \mu(x,y)N(x,y)y' = 0$$
é exata se e só se
$$\mu_z yN + \mu N_x = \mu_z xM + \mu M_y$$
ou seja
$$\frac{\mu_z}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{yN - xM}$$
o que mostra que o lado direito é função de $z = xy$.

revertendo o raciocínio:

Se $\dfrac{M_y - N_x}{yN - xM}$ *é função de* $z = xy$ *a equação* $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ *tem um fator integrante função de z, dado por*
$$\mu(z) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{yN - xM}\, dz}.$$

Resumo

Nesta aula, você estudou as equações diferenciais da forma $M(x,y)+N(x,y)\,\dfrac{dy}{dx}=0$; onde $M,N: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sendo U é uma região, isto é um conjunto aberto e conexo de $\mathbb{R}^2$. Você viu que:

- Uma equação $M(x,y)+N(x,y)\,\dfrac{dy}{dx}=0$ é chamada de *exata* quando existe uma função $\varphi(x,y)$, definida em U, chamada de *função potencial* da equação, tal que

$$\partial\varphi(x,y)/\partial x = M(x,y) \text{ e } \partial\varphi(x,y)/\partial y = N(x,y)$$

  em todos os pontos de U;

- Uma condição necessária e suficiente para que uma equação $M(x,y)+N(x,y)\,\dfrac{dy}{dx}=0$ seja exata num retângulo é que $M_y(x,y)=N_x(x,y)$ em todos os pontos do retângulo;
- Se vale a condição $M_y(x,y)=N_x(x,y)$ em todos os pontos de um conjunto aberto U, a equação é dita ser *fechada*;
- Toda equação exata é fechada. Entretanto uma equação pode ser fechada em uma região U e **não** ser exata em U. Se a região contém lacunas, a equação é dita ser apenas *localmente exata*;
- Existem procedimentos padronizados para construir funções potenciais para equações exatas;
- Em muitos casos, multiplicando uma equação que não é fechada por uma função conveniente $\mu(x,y)$, ela se torna uma equação fechada. Além dissso, se a região é um retângulo (ou uma bola aberta, ou o plano todo) a equação multiplicada não é somente fechada, mas sim exata.

O QUE VEM POR AÍ:

Na próxima aula, iniciaremos o estudo sistemático de uma classe de equações muito interessante: as equações diferenciais lineares de orden $n \geq 2$. Tais equações sempre possuem soluções gerais, não admitem soluções singulares; e todas as soluções gerais são equivalentes entre si. Para culminar, tais equações são extremamente frequentes e de grande importância em diversos ramos de ciências e tecnologias.

SOLUÇÕES COMENTADAS DAS ATIVIDADES DESTA AULA:

Solução comentada da atividade 8.1

a) Primeiramente, note que $y(x) = 0$ é uma solução da equação diferencial. Para $y(x) \neq 0$, segue que

$$x^2y^3 + x(1+y^2)y' = 0 \Rightarrow x^2y^3 + (1+y^2)x\frac{dy}{dx} = 0.$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y^3\right) = 3x^2y^2 \neq 1+y^2 = \frac{\partial}{\partial x}\left[(1+y^2)x\right],$$

a equação não é exata. Porém, se multiplicarmos a equação por $\mu(x,y) = 1/xy^3$, encontramos

$$x + \left(\frac{1+y^2}{y^3}\right)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Daí,

$$\frac{\partial}{\partial y}(x) = 0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1+y^2}{y^3}\right).$$

Agora a equação é exata. Assim, existe $\phi(x,y)$ tal que $\dfrac{\partial\phi}{\partial x} = x$ e $\dfrac{\partial\phi}{\partial y} = \dfrac{1+y^2}{y^3}$. Daí,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial x} = x \quad &\Rightarrow \quad \phi(x,y) = \int x dx\\ &\Rightarrow \quad \phi(x,y) = \frac{x^2}{2} + h(y).\end{aligned}$$

Segue daí,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{1+y^2}{y^3} \quad &\Rightarrow \quad h'(y) = \frac{1+y^2}{y^3}\\ &\Rightarrow \quad h'(y) = \int \frac{1+y^2}{y^3}dy\\ &\Rightarrow \quad h(y) = \int \frac{dy}{y^3} + \int \frac{dy}{y}\\ &\Rightarrow \quad h(y) = -\frac{1}{2y^2} + \ln y.\end{aligned}$$

Logo, $\phi(x,y) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2y^2} + \ln y$. Portanto, a solução da equação diferencial é dada implicitamente por

$$\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2y^2} + \ln y = C.$$

b) Como

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\operatorname{sen} y}{y} - 2e^{-x}\operatorname{sen} x\right) &= \frac{y\cos y - \operatorname{sen} x}{y^2}\\ &\neq -\frac{2e^{-x}(\cos x + \operatorname{sen} x)}{y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos y + 2e^{-x}\cos x}{y}\right),\end{aligned}$$

a equação não é exata. Porém, se multiplicarmos a equação por $\mu(x,y) = ye^x$, encontramos

$$(e^x\operatorname{sen} y - 2y\operatorname{sen} x) + (e^x\cos y + 2\cos x)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Daí,

$$\frac{\partial}{\partial y}(e^x\operatorname{sen} y - 2y\operatorname{sen} x) = e^x\cos y - 2\operatorname{sen} x = \frac{\partial}{\partial x}(e^x\cos y + 2\cos x).$$

Agora a equação é exata. Assim, existe $\phi(x,y)$ tal que $\dfrac{\partial\phi}{\partial x} = e^x\operatorname{sen} y - 2y\operatorname{sen} x$ e $\dfrac{\partial\phi}{\partial y} = e^x\cos y + 2\cos x$. Daí,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial x} = e^x\operatorname{sen} y - 2y\operatorname{sen} x \quad &\Rightarrow \quad \phi(x,y) = \int (e^x\operatorname{sen} y - 2y\operatorname{sen} x)\,dx\\ &\Rightarrow \quad \phi(x,y) = \operatorname{sen} y\int e^x dx - 2y\int \operatorname{sen} x dx\\ &\Rightarrow \quad \phi(x,y) = e^x\operatorname{sen} y + 2y\cos x + h(y).\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial y} = e^x\cos y + 2\cos x \quad &\Rightarrow \quad e^x\cos y + 2\cos x + h'(y) = e^x\cos y + 2\cos y\\ &\Rightarrow \quad h'(y) = 0\\ &\Rightarrow \quad h(y) = C.\end{aligned}$$

Logo, $\phi(x,y) = e^x\operatorname{sen} y + 2y\cos x + h(y)$. Portanto, a solução da equação diferencial é dada implicitamente por

$$e^x\operatorname{sen} y + 2y\cos x = C.$$