



Fundação

CECIERJ

Consórcio **cederj**

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Equações Diferenciais

Volume 2 • 3ª Edição

Pedro do Nascimento Nobrega



GOVERNO DO ESTADO
RIO DE JANEIRO

Secretaria de Ciência, Tecnologia e Inovação

**UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL**

MINISTÉRIO DA
EDUCAÇÃO



PÁTRIA AMADA
BRASIL
GOVERNO FEDERAL

Apoio:



FAPERJ

Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

www.cederj.edu.br

Presidente

Carlos Eduardo Bielschowsky

Vice-presidente

Marilvia Dansa de Alencar

Coordenação do Curso de Matemática

UFF - Marcelo da Silva Corrêa

Material Didático

Elaboração de Conteúdo

Pedro do Nascimento Nobrega

Diretoria de Material Didático

Bruno José Peixoto

Biblioteca

Simone da Cruz Correa de Souza

Vera Vani Alves de Pinho

Diretoria de Material Impresso

Ulisses Schnaider

Supervisão

Marcelo Freitas

Revisão

Eliane Amiune Camargo

Capa

Morvan de Araujo Neto

Diagramação

Nilda Helena Lopes da Silva

Produção Gráfica

Fábio Rapello Alencar

Copyright © 2019 Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e/ou gravada, por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da Fundação.

N754e

Nobrega, Pedro do Nascimento.

Equações diferenciais. Volume 2 / Pedro do Nascimento
Nobrega. – 3. ed. – Rio de Janeiro : Fundação Cecierj, 2019. 280p.;
19 x 26,5 cm.

978-85-458-0207-5

1. Matemática. 2. Equações diferenciais. I. Título.

CDD: 515.35

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador

Wilson Witzel

Secretário de Estado de Ciência, Tecnologia e Inovação

Leonardo Rodrigues

Instituições Consorciadas

CEFET/RJ - Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca

Diretor-geral: Carlos Henrique Figueiredo Alves

FAETEC - Fundação de Apoio à Escola Técnica

Presidente: Alexandre Sérgio Alves Vieira

IFF - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense

Reitor: Jefferson Manhães de Azevedo

UENF - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Reitor: Luis César Passoni

UERJ - Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Reitor: Ruy Garcia Marques

UFF - Universidade Federal Fluminense

Reitor: Antonio Claudio Lucas da Nóbrega

UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro

Reitor: Roberto Leher

UFRRJ - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Reitor: Ricardo Luiz Louro Berbara

UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Reitor: Luiz Pedro San Gil Jutuca

Sumário

Aula 9 • Equações Diferenciais Lineares de Ordem Superior	7
<i>Pedro do Nascimento Nobrega</i>	
Aula 10 • EDOs Homogêneas de Ordem Superior Cálculo de Soluções.....	35
<i>Pedro do Nascimento Nobrega</i>	
Aula 11 • EDOs Não Homogêneas de Ordem Superior Cálculo de Soluções	51
<i>Pedro do Nascimento Nobrega</i>	
Aula 12 • Modelos Matemáticos com Equações Diferenciais de Segunda Ordem	69
<i>Pedro do Nascimento Nobrega</i>	
Aula 13 • Teansformada de Laplace	99
<i>Pedro do Nascimento Nobrega</i>	
Aula 14 • Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias.....	149
<i>Pedro do Nascimento Nobrega</i>	
Aula 15 • Cálculo de Soluções de Sistemas Lineares de Primeira Ordem	195
<i>Pedro do Nascimento Nobrega</i>	

Aula 9

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE ORDEM SUPERIOR

Objetivos

Ao final desta aula, você será capaz de:

- 1 Identificar as equações diferenciais lineares de ordem n definidas em um intervalo;
- 2 caracterizar o conjunto de soluções de uma equação diferencial linear de ordem n , homogênea, como espaço vetorial de dimensão n ;
- 3 definir funções linearmente dependentes e linearmente independentes sobre um intervalo; definir e calcular o determinante wronskiano e utilizá-lo no cálculo de soluções gerais de equações diferenciais lineares em I .

INTRODUÇÃO

A partir desta aula, e até o final do curso, vamos estudar exclusivamente equações diferenciais lineares de ordem $n \geq 1$. Vamos relembrar a definição dessas equações e de suas soluções mais abaixo. Antes de entrar em detalhes técnicos, vale a pena ressaltar que tais equações são extremamente importantes e ocorrem em diversos campos da Matemática, das Ciências e das Engenharias. Em vez de enumerar uma longa lista de teorias e problemas nos quais as equações diferenciais lineares desempenham um papel central, preferimos, neste momento, mencionar algumas características fundamentais dessas equações e de suas soluções:

- 1 Equações diferenciais lineares são ferramentas utilizadas para modelar *os problemas lineares*. É uma característica essencial dos problemas lineares é que, falando intuitivamente, eles podem ser subdivididos em subproblemas. Cada um desses subproblemas é modelado por uma equação diferencial, que é a restrição da equação do problema original e cuja solução, em geral, é calculada de modo mais simples. Finalmente, as soluções parciais podem ser recombinadas para dar a resposta final da equação original. Esse processo de subdividir, resolver casos parciais, e depois combinar as soluções parciais traz uma simplificação fantástica à abordagem de problemas complexos. Essa é a “filosofia” subjacente aos problemas lineares que estudaremos.
- 2 No caso de equações diferenciais, lineares ou não, as soluções são funções. Para todo intervalo $I \subset \mathbb{R}$, o conjunto $\mathcal{F}(I; \mathbb{R})$ de todas as funções de I para \mathbb{R} é um espaço vetorial. Assim, para determinar todas as soluções de uma equação basta calcular uma base para o espaço $\mathcal{F}(I; \mathbb{R})$. Acontece que esses espaços de funções têm, em geral, dimensão infinita, e não sabemos como garantir a existência, e muito menos calcular “bases” de espaços vetoriais de dimensão infinita.
Apesar disso, e esse resultado é espetacular, o conjunto das soluções de uma mesma equação diferencial ordinária linear possui dimensão finita.
- 3 Então podemos reabilitar a ideia de construir uma base para o espaço de soluções. Isso é o que corresponde a

dividir o problema em subproblemas teoricamente mais simples. Depois de calcular todas as soluções da equação restrita a cada um dos subespaços gerados pelos vetores da base, é só combinar tudo.



Atenção!

Não estamos afirmando que vamos *calcular explicitamente* uma base para o espaço das soluções de *qualquer equação diferencial ordinária linear homogênea de grau n* . Podemos garantir, isso sim, que os espaços de soluções dessas equações *têm* bases finitas. Também não estamos fazendo afirmações sobre equações diferenciais parciais lineares.

Vamos aos resultados matemáticos!

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE ORDEM SUPERIOR E SUAS SOLUÇÕES




Para maior comodidade, vamos repetir, adaptando, alguns resultados que vimos nas duas primeiras aulas:

*Uma equação diferencial ordinária de ordem n , definida em um intervalo I , é **linear** se puder ser escrita na forma padrão:*

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y = \theta, \quad (9.1)$$

sendo $a_1(x), \dots, a_n(x)$ funções definidas em I , com $a_n(x)$ não identicamente nula em I . θ representa a função nula:

$$\text{Para todo } x \in I, \quad \theta(x) = 0.$$

-  As funções $a_1(x), \dots, a_n(x)$ são chamadas de *coeficientes* da equação diferencial linear;
-  A não ser que se diga expressamente o contrário, vamos assumir que os coeficientes de (9.1) são funções contínuas;
-  Para simplificar escreveremos

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y = 0$$
em vez de

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y = \theta.$$

Lembremos também a noção de *solução* de uma equação linear: (A letra y na equação $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y'(t) + a_0(x)y = 0$, representa a *função incógnita*).


Definição 9.1.

Dizemos que uma função φ é uma *solução* de

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y'(t) + a_0(x)y = 0$$

se

1. $\varphi \in \mathcal{C}^n(I)$,

 $\varphi \in \mathcal{C}^n(I)$ é o subespaço de $\mathcal{F}(I; \mathbb{R})$ formado pelas funções que têm derivadas até a ordem n , e a n -ésima função derivada é contínua.

Quando uma função é de classe $\mathcal{C}^n(I)$ qualquer que seja $n \geq 0$, diz-se que ela é de classe $\mathcal{C}^\infty(I)$.

Uma função apenas contínua é também chama de função de classe classe $\mathcal{C}^0(I)$.

2. $\forall x \in I$,

$$a_n(t)\varphi^{(n)}(x) + \dots + a_1(t)\varphi'(x) + a_0(t)\varphi(x) = 0.$$

Exemplo 9.1.

A função $\varphi(x) = e^{2x}$ é solução da equação diferencial linear de primeira ordem $y' - 2y = 0$ em $I = \mathbb{R}$, pois é de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ e $\forall x \in \mathbb{R}, (e^{2x})' - 2e^{2x} = 0$.

Exemplo 9.2.

A função $y = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen} x$ é solução da equação linear de segunda ordem $4x^2 y'' + 4xy' + (4x^2 - 1)y = 0$ no intervalo $(0, +\infty)$.

Solução: A função $\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen} x \in \mathcal{C}^2(0, +\infty)$. Além disso, devido à linearidade da equação, esta função será uma solução se e só se $\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}$

for solução.

Temos:

$$\begin{aligned} y = \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} &\implies y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\cos x - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) \\ &\implies y'' = -\frac{\cos x}{x\sqrt{x}} + \frac{3\operatorname{sen} x}{4x^2\sqrt{x}} - \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$


Portanto

$$\begin{aligned} 4x^2 y'' &= \frac{-4x \cos x}{\sqrt{x}} + \frac{3 \operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} - \frac{4x^2 \operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} \\ 4xy' &= \frac{4x \cos x}{\sqrt{x}} - \frac{2 \operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} \\ (4x^2 - 1)y &= \frac{4x^2 \operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} - \frac{\operatorname{sen} x}{x}. \end{aligned}$$

Consequentemente (reagrupando as parcelas)

$$\begin{aligned} 4x^2 y'' + 4xy' + (4x^2 - 1)y &= \left(\frac{-4x \cos x}{\sqrt{x}} + \frac{4x \cos x}{\sqrt{x}} \right) \\ &+ \left(-\frac{4x^2 \operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} + \frac{4x^2 \operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} \right) \\ &+ \left(\frac{3 \operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} - \frac{2 \operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} - \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} \right) \\ &= 0 + 0 + 0 \\ &= 0; \end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

 É comum chamar de **equações diferenciais lineares homogêneas** às equações da forma (9.1); e definir como uma equação diferencial **linear não homogênea** uma equação da forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y = h(x),$$

onde h é uma função de I para \mathbb{R} , não necessariamente a função θ ; chamada de “termo independente”, ou “segundo membro da equação não homogênea”, ou (nos livros técnicos, principalmente) “termo forçado”.

A noção de solução de uma equação diferencial linear não homogênea é uma adaptação direta da definição de solução de uma equação diferencial linear. Entretanto, podemos constatar que *o conjunto de soluções de uma equação diferencial linear não homogênea NÃO é um espaço vetorial*.

Portanto os resultados de Álgebra Linear que estamos usando não se aplicam diretamente às equações diferenciais lineares não homogêneas.



Atenção!

Nesta aula, o nosso estudo está restrito às equações diferenciais lineares, ou - se você preferir - equações diferenciais lineares homogêneas.

Reservaremos a aula 11 ao estudo de equações diferenciais não homogêneas.



Obs: Uma maneira muito conveniente de representar equações diferenciais lineares é por meio da notação de operadores:

Definimos os *operadores diferenciais de derivação*: Id , D , D^2 , \dots , D^n , no conjunto das funções n vezes deriváveis definidas no intervalo I , com valores em \mathbb{R} especificando a forma como eles atuam sobre as funções $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ que têm derivadas até pelo menos a ordem n :

$$\begin{aligned} Id(y) &= y \text{ (a transformação identidade)} \\ Dy &= y' \text{ (a transformação derivada);} \\ D^2y &= y'' \text{ (a transformação derivada segunda)} \\ &\vdots \\ D^n y &= \frac{d^n}{dx^n} \text{ (a transformação derivada de ordem } n\text{).} \end{aligned}$$

Algumas vezes, para uniformizar a notação, escrevemos $Id \equiv D^0$, e dizemos que o operador identidade é *o operador derivada de ordem zero*.

Usando os operadores de derivação, definimos os operadores diferenciais lineares de ordem n como sendo os operadores da

forma

$$\begin{aligned} L &\stackrel{def}{=} a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x) \\ &= \sum_{i=0}^n a_i(x)D^i \end{aligned} \quad (9.2)$$

Claramente, para todas as funções $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ que têm derivadas até pelo menos a ordem n :

$$\begin{aligned} L.y &\stackrel{def}{=} a_n(x)D^n.y + a_{n-1}(x)D^{n-1}.y + \cdots + a_1(x)D.y + a_0(x)y \\ &= a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y \\ &= \sum_{i=0}^n a_i(x)D^i y. \end{aligned}$$

Na linguagem de operadores lineares, a equação diferencial (9.1) se escreve simplesmente como

$$L \cdot y = \theta, \text{ ou } L(y) = 0, \text{ ou simplesmente } Ly = 0.$$

Dizemos também que

$$\sum_{i=0}^n a_i(x)D^i.y = 0.$$

é a forma linear canônica da equação (9.1).

O operador L pode ser pensado como uma *máquina* ou *sistema linear*:

Esta forma de apresentar uma equação é muito usada nos textos de engenharia

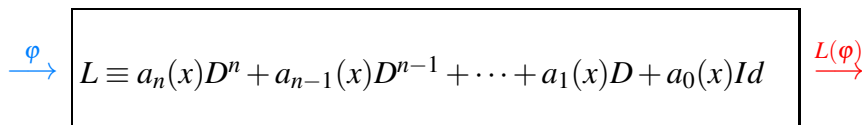



Figura 9.1: Uma Máquina Linear

Nesta linguagem de diagramas, é comum dizer que resolver a equação diferencial $L.y = 0$ é determinar todas as *respostas* $\varphi(x)$ correspondentes a uma *entrada* 0.



Atenção!


Observe que a *entrada* é a função θ e *resposta* é a solução da equação diferencial. Não houve troca de nomes.

 A equação (9.1) é dita *linear* porque o operador L é uma transformação linear no conjunto das funções que têm derivadas contínuas até a ordem n . Isto é:

$$\forall y_1, y_2 \in \mathcal{C}^n(I), \quad L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$$

e

$$\forall y \in \mathcal{C}^n(I), \forall c \in \mathbb{R} \quad L(cy) = c L(y)$$

 matematicamente, calcular o conjunto de respostas da equação diferencial linear $Ly = 0$, correspondentes à entrada θ , é o problema de descrever o subespaço vetorial *imagem inversa* de θ , de $\mathcal{C}^n(I)$, pelo operador linear L :

$$L^{-1}\{\theta\}.$$

Exemplo 9.3.

Verifique se função $f(x) = \text{sen}^3 x$ é solução da equação

$$[D^2 + (\text{tg } x)D - 6 \cot g^2 x] y = 0$$

no intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Solução:

A função $f(x) = \text{sen}^3 x$ pertence a $\mathcal{C}^2\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Além disso, temos:

$$\begin{aligned} y = \text{sen}^3 x &\implies y' = 3 \text{sen}^2 x \cos x \\ &\implies y'' = 6 \text{sen} x \cos^2 x - 3 \text{sen}^3 x. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} (\text{tg } x)y' &= 3 \text{sen}^3 x \\ (6 \cot g^2 x)y &= 6 \cos^2 x \text{sen} x. \end{aligned}$$

Consequentemente

$$[D^2 + (\operatorname{tg} x)D - 6 \cot g^2 x]y = 6 \cos^2 x \operatorname{sen} x - 3 \operatorname{sen}^3 x + 3 \operatorname{sen}^3 x - 6 \cos^2 x \operatorname{sen} x = 0;$$

mostrando que $f(x) = \operatorname{sen}^3 x$ é solução da equação

$$[D^2 + (\operatorname{tg} x)D - 6 \cot g^2 x]y = 0$$

no intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

O ESPAÇO VETORIAL DAS SOLUÇÕES DE UMA EQUAÇÃO LINEAR DE ORDEM n

Utilizando uma adaptação do Teorema de Existência e Unicidade de Cauchy, que vimos na Aula 7, provaremos que o conjunto de todas as soluções de uma equação diferencial linear homogênea, normal, de ordem n , é um espaço vetorial de dimensão *exatamente igual a n* .

Começamos recordando algumas definições da Aula 1:

Definição 9.2.

Uma equação diferencial linear $L \cdot y = 0$, i.é,

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

é *normal no intervalo I* se $\forall x \in I, a_n(x) \neq 0$

Um Problema de Valor Inicial (PVI) envolvendo uma equação diferencial linear de ordem n , normal, $Ly = 0$, definida num intervalo I , consiste em calcular uma solução $\varphi(x)$ da equação, definida em todo o intervalo e tal que

$$\varphi(x_0) = y_0, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

onde $x_0 \in I$ é um ponto qualquer (escolhido e fixado), e y_0, \dots, y_{n-1} são n números reais escolhidos arbitrariamente.

Para calcular a solução de um problema de valor inicial, de-

vemos não somente achar uma solução de $Ly = 0$, mas sim a solução cujo valor e de suas derivadas sucessivas até a de ordem $n - 1$ em um ponto escolhido arbitrariamente no intervalo I sejam números escolhidos (também de maneira completamente livre).

✍ É bastante usual representar um problema de valor inicial da seguinte maneira concisa

$$\begin{cases} L \cdot y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}.$$

Enunciamos agora o resultado fundamental para o restante de nosso curso, que garante que todo problema de valor inicial envolvendo **equações lineares normais** num intervalo possui uma solução; e essa solução é única.

Mais precisamente:

Teorema 9.1 (O Teorema de Existência e Unicidade de Soluções para Equações Lineares de Ordem Superior).

Seja

$$L \cdot y = 0$$

uma equação diferencial linear de ordem n , *normal*, definida num intervalo I , e seja x_0 um ponto qualquer de I . Então, para y_0, y_1, \dots, y_{n-1} números reais escolhidos arbitrariamente, existe uma, e somente uma, solução $\varphi(x)$ da equação acima, definida em um subintervalo $J \subset I$, com a propriedade de que

$$\varphi(x_0) = y_0, \varphi'(x_0) = y_1, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Comentário: A demonstração do Teorema de Existência e Unicidade (T.E.U) está além dos métodos que temos ao nosso dispor.

Alguns exemplos nos ajudarão a compreender melhor a importância e o significado do Teorema de Existência e Unicidade (T.E.U.).

Exemplo 9.4.

As funções $\varphi_1(x) = 0$ e $\varphi_2(x) = x$ ambas são soluções da equação diferencial linear normal de primeira ordem

$$xy' - y = 0,$$


no intervalo $(0, +\infty)$.

Mas seus gráficos não podem ter nenhum ponto em comum no intervalo $(0, +\infty)$. Caso existisse um ponto x_0 de $(0, +\infty)$ com $\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0) = y_0$, então teríamos duas soluções diferentes para o PVI

$$\begin{cases} xy' - y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{o que é proibido pelo T.E.U..}$$

Exemplo 9.5.

As funções $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$ não podem ser soluções de uma mesma equação diferencial linear de primeira ordem no intervalo $(0, \pi)$, pois seus gráficos se cortam num ponto deste intervalo, e isso é proibido pelo Teorema de Existência e Unicidade.

 Uma constatação importante, que podemos fazer a partir do teorema de existência e unicidade, é que o conjunto-solução de uma equação diferencial linear normal não contém somente a função nula. Isso pode até parecer um detalhe de menor importância, mas nos dá uma garantia de que, quando estivermos tentando resolver uma equação linear, não estaremos trabalhando em vão.

Atividade de auto-avaliação 9.1

Assinale V para as afirmativas que você considera corretas e F para as incorretas justificando sua resposta:

- 1) () As funções seno e cosseno podem ser soluções de equações de primeira ordem no intervalo $(0, \pi)$
- 2) () As funções seno e cosseno podem ser soluções de uma mesma equação linear homogênea de segunda ordem no intervalo $(0, \pi)$
- 3) () As funções seno e cosseno podem ser soluções de um mesmo PVI com uma equação linear homogênea de segunda ordem no intervalo $(0, \pi)$

Construiremos agora um conjunto de geradores para $L^{-1}\{0\}$:

Teorema 9.2.

Num primeiro estudo, você pode pular a demonstração. Esta demonstração evidencia a importância do Teorema de Existência e Unicidade na teoria de equações diferenciais.

Seja $L \equiv a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \dots + a_1(x)D + a_0(x)$ um operador linear *normal*, de ordem n , em um intervalo I . O espaço das soluções da equação homogênea $L \cdot y = 0$ possui um conjunto de n geradores. Note que n é igual à ordem da equação.

Demonstração

A demonstração do teorema consiste em exhibir, explicitamente, um conjunto gerador do espaço das soluções, formado por n soluções.

Escolha um ponto $x_0 \in I$ Consideremos os n problemas com valores iniciais abaixo. Os vetores de valores iniciais são distintos, mas a equação diferencial linear de ordem n , homogênea e normal, é a mesma para todos.

$$\left\{ \begin{array}{l} L \cdot y = 0 \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} L \cdot y = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 1 \\ y''(x_0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{array} \right. \quad \dots \quad \left\{ \begin{array}{l} L \cdot y = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) = 1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{array} \right.$$

Sejam $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ as respectivas soluções desses PVI's.

Afirmamos agora que as funções $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ geram o espaço das soluções $\text{Ker}(L)$.

Para mostrar isto, devemos mostrar que toda solução ψ de $L \cdot y = 0$ se escreve como combinação linear das funções $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Isto é, devemos mostrar que, para cada $\psi \in \text{Ker}(L)$, existem constantes

$$c_1, c_2, \dots, c_n$$

tais que

$$\psi(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots + c_n \varphi_n(x)$$

para todo $x \in I$.

Podemos escolher $\psi \neq \theta$, pois $\text{Ker}(L) \neq \{0\}$, já que $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \text{Ker}(L)$. Logo podemos formar o *vetor de condições iniciais*,

$$(\psi(x_0), \psi'(x_0), \dots, \psi^{(n-1)}(x_0)) \neq (0, 0, \dots, 0)$$

pois se $(\psi(x_0), \psi'(x_0), \dots, \psi^{(n-1)}(x_0))$ fosse o vetor nulo então o Teorema de Existência e Unicidade de soluções acarretaria que $\psi = \theta$, já que o vetor de condições iniciais da solução constante nula 0 também é $(0, 0, \dots, 0)$. Consideremos a função

$$\eta(x) = \psi(x) - c_1 \varphi_1(x) - c_2 \varphi_2(x) - c_3 \varphi_3(x) - \dots - c_n \varphi_n(x) \quad (9.3)$$

e façamos $c_1 = \psi(x_0)$, $c_2 = \psi'(x_0)$, \dots , $c_n = \psi^{(n-1)}(x_0)$

Como L é um operador linear, então

$$L(\eta(x)) = L(\psi(x)) - c_1 L(\varphi_1(x)) - c_2 L(\varphi_2(x)) - \dots - c_n L(\varphi_n(x))$$

Para cada termo individual vale

$$L(\psi(x)) = 0, \quad L(\varphi_1(x)) = 0, \quad L(\varphi_2(x)) = 0, \dots, L(\varphi_n(x)) = 0$$

já cada uma das funções é uma solução da equação $L \cdot y = 0$, então

$$L(\eta(x)) = 0.$$

Para cada $j = 1, 2, \dots, n-1$, calculando a derivada de ordem j das funções na equação 9.2 temos

$$\eta^{(j)}(x_0) = \psi^{(j)}(x_0) - c_1 \varphi_1^{(j)}(x_0) - c_2 \varphi_2^{(j)}(x_0) - \dots - c_n \varphi_n^{(j)}(x_0).$$

Assim

$$\eta(x_0) = \psi(x_0) - c_1 \cdot 1 - c_2 \cdot 0 - \dots - c_n \cdot 0 = 0$$

(lembre que $\psi(x_0) = c_1, \varphi_1(x_0) = 1$, e todos os demais $\varphi_k(x_0) = 0$, $k = 2, 3, \dots, n-1$.) Da mesma forma

$$\eta'(x_0) = \psi'(x_0) - c_1 \cdot 0 - c_2 \cdot 1 - \dots - c_n \cdot 0 = 0$$

(lembre que $\psi'(x_0) = c_2, \varphi_2'(x_0) = 1$, e todos os demais $\varphi_k'(x_0) = 0$, $k = 1, 3, \dots, n-1$)

Desta forma temos

$$\forall j = 1, 2, \dots, n-1 \quad \eta^{(j)=0}(x_0)$$

E isso diz que $\eta(x)$ é solução do PVI

$$L \cdot y = 0, y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Apelando novamente para o Teorema de Existência e Unicidade, conclui-se que $\eta = \theta$, de onde

$$\psi(x) = c_1 \varphi(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots + c_n \varphi_n(x)$$

como queríamos demonstrar .

Encaminhamento: Queremos agora mostrar que o conjunto $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ é uma base do espaço de soluções, o que mostra que tal espaço tem dimensão finita, igual à ordem da equação $L \cdot y = 0$.

Quando falamos em *base*, estamos falando de um conjunto gerador formado por vetores **linearmente independentes**. Ainda não examinamos os conceitos de *dependência linear* e *independência linear* no contexto de espaços de funções. É o que faremos a seguir:

DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR DE CONJUNTOS DE FUNÇÕES

Definição 9.3.

- Um conjunto $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ de funções pertencentes a $\mathcal{C}^n(I)$ é linearmente dependente se existem constantes c_1, \dots, c_k não simultaneamente nulas, tais que

$$c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots + c_k \varphi_k(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

- Um conjunto $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k\}$ de funções pertencentes a $\mathcal{C}^n(I)$ é um conjunto linearmente independente se

$$\forall x \in I \quad c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots + c_k \varphi_k(x) = 0 \implies c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0.$$



Atenção!

Para verificar que um conjunto $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ de funções pertencentes a $\mathcal{C}^n(I)$ é linearmente dependente, devemos mostrar que existe um conjunto de constantes $\{c_1, \dots, c_n\}$, NÃO TODAS NULAS (ao mesmo tempo), tal que $\forall x \in I$

$$c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots + c_k \varphi_k(x) = 0.$$

Para não esquecer: Para testar se um conjunto $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ de funções pertencentes a $\mathcal{C}^n(I)$ é linearmente independente, devemos exibir um único conjunto de constantes $\{c_1, \dots, c_n\}$, tal que a *combinação linear nula*

$$c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots + c_k \varphi_k(x) = 0$$

seja satisfeita, PARA TODOS OS $x \in I$, é

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0.$$



Atenção!

REFORÇANDO: Na combinação linear nula

$$c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \cdots + c_k \varphi_k(x) = 0,$$

usada para verificar a independência linear do conjunto de funções $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k\}$, NÃO podemos ficar trocando os valores das constantes de acordo com a variável x .

Equivalentemente: SE PARA ALGUM $x_0 \in I$ existir um conjunto de constantes c_1, c_2, \dots, c_n , NÃO TODAS NULAS, que anule a combinação linear nula $c_1 \varphi_1(x_0) + c_2 \varphi_2(x_0) + \cdots + c_k \varphi_k(x_0) = 0$, ENTÃO $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ É LINEARMENTE DEPENDENTE.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 9.6.

Consideremos as funções $\sin x$ e $\cos x$ do espaço $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Queremos saber se elas são linearmente dependentes ou linearmente independentes (ou nenhuma das duas coisas).

Solução:

Primeiramente, formamos a combinação linear nula

$$c_1 \cos x + c_2 \sin x = 0 \quad (9.4)$$

e investigamos se as constantes tem de ser ambas nulas, ou se existem constantes não simultaneamente nulas que tornam esta relação verdadeira para todos os valores de $x \in \mathbb{R}$.

Temos:

Se escolhermos $x = 0$ na equação (9.4) ficamos com a igualdade

$$c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = 0$$

de onde concluímos que $c_1 = 0$

Então devemos ter $c_1 = 0$ sempre. Pois é o único valor que torna a equação (9.4) verdadeira para $x = 0$. E a relação tem de

ser verdadeira para todos os valores de x , em particular tem de ser a mesma que é satisfeita quando $x = 0$.

A equação (9.4) se reduz a

$$c_2 \operatorname{sen} x = 0 \quad (9.5)$$

Se escolhermos agora $x = \pi/2$ na equação (9.5) ficamos com a igualdade

$$c_2 \operatorname{sen} \pi/2 = 0$$

de onde concluímos que $c_2 = 0$

Então devemos ter $c_2 = 0$ sempre. Pois é o único valor que torna a equação (9.4) verdadeira para $x = \pi/2$. E - lembremos - esta relação tem de ser verdadeira para todos os valores de x , em particular tem de ser a mesma que é satisfeita quando $x = \pi/2$.

Concluindo:

Se $\forall x \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x = 0$ então $c_1 = c_2 = 0$.

As funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ são linearmente independentes em $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

Exemplo 9.7.

Considere as funções e^x , e^{-x} e $\cosh x$ no mesmo espaço $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

Formemos a combinação linear nula

$$c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cosh x = 0$$

Como, por definição $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, então

$$\begin{aligned} c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cosh x = 0 &\iff c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 0 \\ &\iff c_1 e^x + c_2 e^{-x} = \frac{c_3}{2} e^x + \frac{c_3}{2} e^{-x} = 0 \\ &\iff \left(c_1 + \frac{c_3}{2}\right) e^x + \left(c_2 + \frac{c_3}{2}\right) e^{-x} = 0 \end{aligned}$$

Note que não precisamos ter todos os coeficientes iguais a zero.

Acontece que $c_1 = c_2 = -\frac{c_3}{2}$. Então podemos escolher qualquer valor para c_3 , por exemplo $c_3 = 1$ e tomarmos $c_1 = c_2 = -\frac{1}{2}$. Existe a combinação linear nula


$$\left(-\frac{1}{2}\right)e^x + \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-x} + 1 \cosh x = 0$$

onde nem todos os coeficientes são nulos.

(Note que, neste exemplo, não foi preciso particularizar nenhum valor de x . O raciocínio se aplica a qualquer valor de x .)

Portanto o conjunto $\{e^x, e^{-x}, \cosh x\}$ é linearmente dependente em $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

O DETERMINANTE WRONSKIANO

 O determinante wronskiano fornece um critério numérico bastante simples para testar a dependência, ou independência lineares de um conjunto de funções.

Definição 9.4.

Sejam $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funções $(n-1)$ -vezes continuamente deriváveis em um intervalo aberto I , e seja $x_0 \in I$.

O determinante

$$\det \begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

é chamado de **determinante Wronskiano** das funções $y_i(x)$, $1 \leq i \leq n$, no ponto x_0 , e é representado por $W[y_1(x_0), \dots, y_n(x_0)]$, ou então $W[y_1, \dots, y_n](x_0)$.

Teorema 9.3.

Sejam $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funções $(n-1)$ -vezes continuamente deriváveis no intervalo aberto I .

Suponha que existe um ponto $x_0 \in I$ tal que os vetores

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2(x_0) \\ y_2'(x_0) \\ \vdots \\ y_2^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} y_n(x_0) \\ y_n'(x_0) \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

são linearmente independentes em \mathbb{R}^n .

Então as funções $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ são linearmente independentes no espaço $\mathcal{C}^{n-1}(I)$.

Demonstração

Formemos a combinação linear nula

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) = 0 \quad (9.6)$$

Precisamos mostrar que $c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = c_n = 0$.

Derivando $(n-1)$ -vezes a equação (9.6), obtemos o sistema

$$\begin{cases} c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) = 0 \\ c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) + \cdots + c_n y_n'(x) = 0 \\ \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x) + c_2 y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases}$$

Agora substituímos x por x_0 e reescrevemos o sistema na forma de uma equação vetorial:

$$c_1 \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} y_2(x_0) \\ y_2'(x_0) \\ \vdots \\ y_2^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} + \cdots + c_n \begin{pmatrix} y_n(x_0) \\ y_n'(x_0) \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$


Como os vetores desta combinação linear são, por hipótese, linearmente independentes em \mathbb{R}^n então

$$c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = c_n = 0.$$

Ou seja, se temos uma combinação linear nula em $\mathcal{C}^n(I)$ como na equação (9.6). Logo todos os coeficientes são nulos.

Isso significa que as funções $y_1(x)$, $y_2(x)$, \cdots , $y_n(x)$ são linearmente independentes no espaço $\mathcal{C}^{n-1}(I)$.

□

 **Observação:** Então, se o determinante wronskiano de um conjunto qualquer de funções do espaço $\mathcal{C}^{n-1}(I)$ é diferente de zero em algum ponto $x_0 \in I$, o conjunto é linearmente independente sobre I .

**Atenção!**

O teorema (9.3) vale somente como teste de *independência linear*.

O teorema NÃO ESTÁ AFIRMANDO, que SE se o determinante wronskiano de um conjunto **qualquer** de funções do espaço $\mathcal{C}^{n-1}(I)$ é zero em um ponto de I ENTÃO as funções são linearmente dependentes no espaço $\mathcal{C}^{n-1}(I)$.

Exemplo 9.8.

$$\text{Sejam } f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2, & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = x^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Temos (verifique!) $f(0) = f'(0) = 0$, e $g(0) = g'(0) = 0$.

Portanto

$$W[f(0), g(0)] = 0 \quad (9.7)$$

Agora, consideremos a combinação linear nula

$$c_1 f(x) + c_2 g(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}. \quad (9.8)$$

Escolhendo $x = -1$, (9.8) nos dá

$$-c_1 + c_2 = 0 \quad (9.9)$$

Escolhendo $x = 1$, (9.8) nos dá

$$c_1 + c_2 = 0 \quad (9.10)$$

Lembrando que (9.7) e (9.8) devem ser verificadas para todos os $x \in \mathbb{R}$, concluímos que a única possibilidade é

$$c_1 = c_2 = 0. \quad (9.11)$$

A equação (9.11) nos diz que f e g são linearmente independentes sobre \mathbb{R} , apesar de seu wronskiano ser nulo no ponto $x_0 = 0$, de acordo com (9.7).



Atenção!

Quando as funções $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ são soluções de uma mesma equação diferencial linear homogênea normal de ordem n , então y_1, \dots, y_n são l.i. $\implies W[f_1(x), \dots, f_n(x)] \neq 0$ em todos os pontos de I .



Para simplificar, vamos enunciar e demonstrar o teorema para equações diferenciais lineares de segunda ordem apenas. O caso geral é análogo.

Teorema 9.4.

Se y_1 e y_2 são soluções de uma equação diferencial linear de segunda ordem normal $a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$ então

$$y_1 \text{ e } y_2 \text{ são linearmente independentes} \implies W[y_1(x), y_2(x)] \neq 0.$$

em todos os pontos de I

Demonstração

Provar o teorema (9.4) é equivalente a provar que se y_1 e y_2 são soluções de uma equação diferencial linear de segunda ordem normal

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \quad \text{e} \quad W[y_1(x_0), y_2(x_0)] = 0$$

em algum ponto $x_0 \in I$ então y_1 e y_2 são linearmente dependentes.

É este enunciado equivalente que vamos provar.

Temos:

Hipótese 1: y_1 e y_2 são soluções de $a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$.

Hipótese 2: o determinante $W[y_1(x_0), y_2(x_0)] = 0$ é nulo no ponto $x_0 \in I$.

Consideremos o sistema de equações

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = 0 \end{cases} \quad (9.12)$$

As incógnitas do sistema (9.14) são c_1 e c_2 .

O determinante principal do sistema (9.14) é precisamente $W[y_1(x_0), y_2(x_0)]$

Segue da hipótese nº 2 que o sistema (9.14) é indeterminado.

Logo $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ não é a sua única solução.

Seja $(\overline{c}_1, \overline{c}_2)$ uma solução diferente de $(0, 0)$

Então, a função

$$y(x) = \overline{c}_1 y_1(x) + \overline{c}_2 y_2(x) \quad (9.13)$$

é uma solução da equação diferencial

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

que satisfaz às condições

$$y(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad y'(x_0) = 0.$$

A função nula também é uma solução da mesma equação e satisfaz às mesmas condições iniciais.

O Teorema de Existência e Unicidade de soluções de problemas de valor inicial obriga que as funções $\overline{c}_1 y_1(x) + \overline{c}_2 y_2(x)$ e a função nula sejam iguais em todos os pontos do intervalo I .

Isto é,

$$\overline{c}_1 y_1(x) + \overline{c}_2 y_2(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in I$$

Observando que pelo menos um dos coeficientes $\overline{c}_1, \overline{c}_2$ é diferente de zero, temos uma combinação linear nula das funções y_1, y_2 onde nem todos os coeficientes são iguais a zero.

Isso quer dizer que as funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são linearmente dependentes, o que conclui a demonstração.



Atenção!

- Se $W[y_1(x_0), y_2(x_0)] \neq 0$ em algum ponto $x_0 \in I$ então $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são linearmente independentes sempre
- Podemos ter $y_1(x)$ e $y_2(x)$ linearmente independentes e $W[y_1(x), y_2(x)] = 0$ em todos os pontos de I . Mas neste caso $y_1(x)$ e $y_2(x)$ não podem ser soluções de uma mesma equação linear homogênea normal de segunda ordem
- Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções de uma equação diferencial linear homogênea normal de segunda ordem então

$$y_1 \text{ e } y_2 \text{ são l. i. } \iff W[y_1(x_0), y_2(x_0)] \neq 0$$

em algum $x_0 \in I$.

✍ Agora fica mais simples testar se um conjunto de *soluções de uma mesma equação é linearmente independente ou não*. Basta calcular o seu determinante wronskiano e checar se ele é diferente de zero em algum ponto.

Exemplo 9.9.

Mostre que:

a) $\varphi_1(x) = \sin x$, $\varphi_2(x) = \cos x$ e $\varphi_3(x) = e^x$ são soluções da equação

$$(D^3 - D^2 + D - 1)y = 0,$$

no intervalo $I = (-\pi/2, \pi/2)$

b) Calcule $W[\varphi_1(0), \varphi_2(0), \varphi_3(0)]$

c) Determine a solução geral de $y''' - y'' + y' - y = 0$

Solução:

a) Verifiquemos apenas para a função seno. As demais verificações

são semelhantes. Temos

$$\varphi_1(x) = \operatorname{sen} x, \quad \varphi_1'(x) = \cos x, \quad \varphi_1''(x) = -\operatorname{sen} x, \quad \varphi_1'''(x) = -\cos x$$

Substituindo na equação:

$$(-\cos x) - (-\operatorname{sen} x) + (\cos x) - (\operatorname{sen} x) = 0 \text{ para todo}$$

$$x \in (-\pi/2, \pi/2)$$

Portanto $\varphi_1(x) = \operatorname{sen} x$ é solução da equação.

b)

$$\begin{aligned} W[\varphi_1(0), \varphi_2(0), \varphi_3(0)] &= \det \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x & e^x \\ \cos x & -\operatorname{sen} x & e^x \\ -\operatorname{sen} x & -\cos x & e^x \end{pmatrix}_{x=0} = \\ &= \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -2 \end{aligned}$$

c) Como $W[\varphi_1(0), \varphi_2(0), \varphi_3(0)] \neq 0$, o conjunto $\{\operatorname{sen} x, \cos x, e^x\}$ constitui uma base para o espaço das soluções de $y''' - y'' + y' - y = 0$.

Consequentemente, uma solução geral é

$$y(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x,$$

sendo c_1, c_2 e c_3 constantes arbitrárias.

Teorema 9.5 (A fórmula de Abel / Ostrogradskii para o Wronskiano).

Se y_1 e y_2 são soluções de uma equação diferencial linear de segunda ordem normal no intervalo I

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Então

$$\forall x \in I \quad W[y_1(x), y_2(x)] = c e^{-\int p(x) dx}.$$

Demonstração

Sabemos que (omitindo o ponto x)

$$W[y_1, y_2] = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' \text{ portanto}$$

$$\frac{d}{dx} W[y_1(x), y_2(x)] = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_2' y_1' - y_2 y_1'' \quad (9.14)$$

Como y_1 e y_2 são soluções da equação $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, então

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0 \quad \text{e} \quad y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0. \quad (9.15)$$

Tirando os valores de y_1'' e y_2'' respectivamente nas equações (9.15), e substituindo na fórmula (9.14), obtemos

$$W'[y_1(x), y_2(x)] = -p(x)y_1 \cdot y_2' + p(x)y_2 \cdot y_1' = -p(x) \underbrace{[y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1']}_{W[y_1(x), y_2(x)]}.$$

Ou seja,

$$W'[y_1(x), y_2(x)] = -p(x)W[y_1(x), y_2(x)]. \quad (9.16)$$

(9.16) mostra que $W[y_1, y_2]$ é solução da equação diferencial linear de primeira ordem, homogênea

$$z' + p(x)z = 0;$$

cujas soluções gerais são

$$W[y_1(x), y_2(x)] = c e^{-\int p(x) dx}.$$

como queríamos provar.

Corolário 9.6.

O determinante wronskiano de duas soluções de uma equação diferencial linear de segunda ordem normal no intervalo I ou é sempre diferente de zero, ou é identicamente nulo.

Para saber se duas soluções são *l.i.* ou *l.d.*, basta testar em um ponto do intervalo.

Demonstração

Basta observar que ou o parâmetro c em $W[y_1(x), y_2(x)] = c e^{-\int p(x) dx}$ é igual a zero; ou é diferente de zero. No primeiro caso, as soluções são *l.d.*; e no segundo caso são *l.i.*

Exemplo 9.10.

Calcule uma expressão para o wronskiano de um par de soluções da equação $x^2 y'' + xy' + (x^2 + 1)y = 0$ em um ponto x qualquer do intervalo $(0, +\infty)$.

Solução:

De acordo com a fórmula de Abel/Ostrogradskii, se y_1 e y_2 são soluções da equação $x^2 y'' + xy' + (x^2 + 1)y = 0$ no intervalo $(0, +\infty)$, então

$$[W[y_1(x), y_2(x)]] = c e^{-\int p(x) dx},$$

onde, neste caso $p(x) = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$.

Então,

$$W[y_1(x), y_2(x)] = c e^{-\int 1/x dx} = \frac{c}{x}.$$

- ✍ O exemplo mostra que o valor do wronskiano depende do ponto x .
 E mais: não devemos concluir que o wronskiano é independente do par de soluções. A constante c varia de acordo com as soluções consideradas. Para cada par de soluções temos uma constante particular. Por exemplo, se tomarmos duas soluções linearmente dependentes certamente teremos $c = 0$. Se considerarmos duas soluções linearmente independentes, então $c \neq 0$.

Atividade de auto-avaliação 9.2

Calcule a expressão geral para o wronskiano das duas soluções y_1 e y_2 da equação $x^2 y'' + xy' + (x^2 + 1)y = 0$ que satisfazem às condições $y_1(1) = 0$, $y_1'(1) = 1$, $y_2(1) = y_2'(1) = 1$.

Definição 9.5.

Dada uma equação diferencial linear homogênea de ordem n , normal em um intervalo,

$$L.y = 0,$$

chamamos de **sistema fundamental de soluções** ou **conjunto fundamental de soluções** de $L.y = 0$ a *qualquer base* do espaço vetorial $L^{-1}\{0\}$.

- ✍ A definição (9.5) resume a estratégia para obter todas as soluções (i.é, a solução *geral*, no melhor sentido do termo) de uma equação diferencial linear de ordem n , homogênea e normal em um intervalo I
- Encontre/calcule n soluções y_1, \dots, y_n da equação
 - prove que essas soluções são linearmente independentes e \dots
- \dots e pronto! A solução geral da equação é

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x).$$

Resumo

Nesta aula você aprendeu:

- a identificar equações diferenciais lineares de ordem n , definidas em um intervalo

$$I \subset \mathbb{R},$$

bem como a caracterizar suas soluções;

- a caracterizar alternativamente as equações diferenciais lineares com a ajuda do conceito de operador diferencial linear sobre um espaço vetorial de funções que possuem derivadas até a ordem n em um intervalo;

$$\text{entrada} \rightarrow \boxed{\text{sistema linear } L} \rightarrow \text{saída};$$

- a noção de problema de valor inicial para uma equação diferencial de ordem n ;
- o enunciado do Teorema de Existência e Unicidade de Soluções de problemas de valor inicial envolvendo equações diferenciais lineares de ordem n ;
- a noção de determinante wronskiano de funções definidas em I , e utilizá-lo para a caracterizar um conjunto linearmente de n soluções linearmente independentes de $L.y = 0$, isto é, uma base de $L^{-1}\{0\}$;
- e finalmente você aprendeu a demonstrar que o *conjunto das soluções* da equação diferencial $L.y = 0$ é um *espaço vetorial de dimensão n* e que para obter a solução completa de $L.y = 0$ precisamos calcular uma *base* para o núcleo: $L^{-1}\{0\}$.

O QUE VEM POR AÍ:

Até agora não estudamos nenhum método para **calcular** soluções de equações diferenciais lineares, excetuando as de primeira ordem. Aprendemos a reconhecer se um conjunto de soluções de uma equação *dado* é, ou não, um conjunto fundamental de soluções, mas não vimos ainda nenhum método para construir esse conjunto de soluções.

Em geral, construir um conjunto de soluções é uma tarefa muito difícil, ou ineficiente, ou então precisamos apelar para métodos numérico/aproximados a fim de realizá-la. Entretanto, às vezes é possível desenvolver métodos analíticos para o cálculo de soluções. Na próxima aula, apresentaremos dois métodos para calcular conjuntos fundamentais de soluções de equações $L.y = 0$, no contexto de equações diferenciais lineares de ordem dois. Ambos têm restrições: o primeiro método vale para equações bem gerais, que têm funções como coeficientes, *mas requer o conhecimento a priori de uma solução*. O segundo *vale essencialmente para equações de coeficientes constantes*. Eles podem ser generalizados, fazendo as devidas adaptações, mas não vamos estudar essas generalizações.

SOLUÇÕES COMENTADAS DAS ATIVIDADES DESTA AULA:

Solução comentada da atividade 9.1

Assinale V para as afirmativas que você considera corretas e F para as incorretas justificando sua resposta:

1) (V) As funções seno e cosseno podem ser soluções de equações de primeira ordem no intervalo $(0, \pi)$

Justificativa: note que não se está exigindo nada, nem que as funções satisfaçam a mesma equação. Então, por exemplo, a função seno é solução da equação $y' = \cos x$; e a função cosseno é solução de $y' = -\sin x$.

2) (V) As funções seno e cosseno podem ser soluções de uma mesma equação linear homogênea de segunda ordem no intervalo $(0, \pi)$.

Justificativa: de fato, revendo os exemplos desta aula, observamos que as duas funções são soluções da equação $y'' + y = 0$ no intervalo dado. Não há contradição com o Teorema de Existência e Unicidade de Soluções.

3) (F) As funções seno e cosseno podem ser soluções de um mesmo PVI com uma equação linear homogênea de segunda ordem no intervalo $(0, \pi)$.

Justificativa: como se trata de um Problema de Valor Inicial, a resposta seria verdadeira somente se as duas funções satisfizessem uma mesma equação diferencial (o que, de fato acontece); que assumissem o mesmo valor em algum ponto do intervalo, (o que também é verdade somente no ponto $\pi/2$); e que, além disso, tivessem derivadas iguais naquele ponto, *o que não é verdade*. Portanto a afirmativa é falsa.

Solução comentada da atividade 9.2

A forma geral do wronskiano de qualquer par de soluções da equação é (sando a fórmula de Abel):

$$W[y_1(x), y_2(x)] = \frac{c}{x}$$

Portanto, no ponto $x = 1$, $W[y_1(1), y_2(1)] = c/1 = c$.

Por outro lado, calculando wronskiano no ponto $x = 1$, pela definição, temos:

$$W[y_1(1), y_2(1)] = \det \begin{pmatrix} y_1(1) & y_2(1) \\ y_1'(1) & y_2'(1) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1;$$

Igualando os dois cálculos obtemos $c = -1$.

Concluimos então que o Wronskiano das soluções y_1 e y_2 da equação $x^2 y'' + xy' + (x^2 + 1)y = 0$ que satisfazem às condições $y_1(1) = 0$, $y_1'(1) = 1$, $y_2(1) = y_2'(1) = 1$ é $W[y_1(x), y_2(x)] = -\frac{1}{x}$.

Aula 10

EDOS HOMOGÊNEAS DE ORDEM SUPERIOR CÁLCULO DE SOLUÇÕES

O b j e t i v o s

Ao final desta aula, você será capaz de:

- 1 calcular soluções gerais de equações diferenciais lineares de segunda ordem, normais pelo método de redução de ordem;
- 2 calcular as soluções gerais de quaisquer equações diferenciais lineares de segunda ordem, de coeficientes constantes.

INTRODUÇÃO

Nesta aula, vamos nos restringir às equações diferenciais lineares de segunda ordem normais. Os métodos de solução que vamos obter admitem extensões às equações lineares de ordem qualquer, com algumas adaptações; mas não vamos considerá-las neste texto.

De acordo com o que vimos na Aula 9, para calcular a solução geral de uma equação diferencial linear de segunda ordem, normal em um intervalo I

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (10.1)$$

é preciso obter duas soluções linearmente independentes da equação. Usando somente as ferramentas de que dispomos, existem basicamente duas situações em que se consegue construir uma solução geral da equação (10.1):

- quando conhecemos previamente uma solução
- quando a equação tem coeficientes constantes



Atenção!

Repetimos que não vamos considerar equações de *coeficientes analíticos*, normais ou não; para as quais existem os chamados “métodos de séries de potências”. O leitor curioso poderá consultar a literatura pertinente.

MÉTODO DA REDUÇÃO DA ORDEM

Suponhamos que, por inspeção/experimentação, ou - usando técnicas mais avançadas, como a utilização de séries de potências (quando os coeficientes são mais do que contínuos, são analíticos em I , o que significa intuitivamente que eles podem ser substituídos localmente por séries de Taylor), ... enfim, de alguma maneira, se conhece uma solução de (10.1).

O método da redução de ordem permite - em tese - descobrir uma segunda solução $y_2(x)$, linearmente independente de $y_1(x)$.

Passemos ao laboratório. Vamos fazer algumas experiências

Dividindo a equação (10.1) por $a_2(x)$, vamos trabalhá-la sob a *forma normalizada*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (10.2)$$

onde $p(x) = a_1(x)/a_2(x)$ e $q(x) = a_0(x)/a_2(x)$ são funções contínuas em I .

Uma primeira observação é que para cada constante c , a função $cy_1(x)$ também é uma solução da equação (10.2).

Acontece que $cy_1(x)$ é linearmente dependente de $y_1(x)$.

Portanto não nos serve.

Todavia quando substituímos a constante c pela função identidade, uma tentativa razoável num processo experimental, em lugar de $c y_1(x)$ temos $x y_1(x)$. Calculando o determinante wronskiano de $y_1(x)$ e $x y_1(x)$ temos

$$W[y_1(x), x y_1(x)] = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & x y_1(x) \\ y_1'(x) & y_1(x) + x y_1'(x) \end{pmatrix} = [y_1(x)]^2.$$

Vemos que se $y_1(x) \neq 0$ em todos os pontos de I então $y_2(x) = x y_1(x)$ é linearmente independente de $y_1(x)$.

Infelizmente a condição $W[y_1(x), x y_1(x)] \neq 0$ não basta para garantir $y_2(x) = x y_1(x)$ seja solução da equação (10.2).

Vejam os dois exemplos. No primeiro $[y_1(x)]^2 \neq 0$ em todos os pontos de I , e $x y_1(x)$ também é solução da equação. No segundo, apesar de $[y_1(x)]^2 \neq 0$ em todos os pontos de I . Entretanto $x y_1(x)$ **não** é solução da equação.

Exemplo 10.1.

Considere a equação $y'' - 2y' + y = 0$.

É bem fácil verificar que $y_1(x) = e^x$ é uma solução desta equação.

Mais ainda, $y_2(x) = x e^x$ também é solução da equação.

E como $W[y_1(x), x y_1(x)] = y_1(x)^2 = e^{2x}$ as duas soluções são linearmente independentes, e a solução geral da equação é

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$$


Exemplo 10.2.


Consideremos agora a equação $y'' + 4y = 0$ no intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$y_1(x) = \cos 2x$ é solução desta equação.

$y_2(x) = x y_1(x) = x \cos 2x$, temos que $W[\cos 2x, x \cos 2x] = \cos^2 2x$, logo $\cos 2x$ e $x \cos 2x$ são linearmente independentes em $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Você pode verificar facilmente que $y_2(x) = x \cos 2x$ não é solução de $y'' + 2y = 0$. (De fato, $[y_2(x)]'' + y_2(x) = -4 \sin 2x$).

 **Conclusão:** Multiplicar uma solução por x às vezes produz uma nova solução linearmente independente da primeira, às vezes não.

 Vimos, nos exemplos que, se $y_1(x)$ é solução de (10.2), $y_2(x) = x y_1(x)$ pode ser solução, mas também pode não ser solução de (10.2).

Prosseguindo o trabalho de laboratório, perguntamos: será que existe

alguma $u(x)$ tal que $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ seja *sempre* solução de (10.2), linearmente independente da solução $y_1(x)$?

Suponhamos que exista $u(x)$ tal que $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ seja solução.

Temos (omitindo temporariamente o argumento x , para não sobrecarregar a notação)

$$\begin{aligned} y_2 &= uy_1 \\ y_2' &= u'y_1 + uy_1' \\ y_2'' &= u''y_1 + u'y_1' + u'y_1' + uy_1'' \end{aligned}$$

Substituindo y_2 e suas derivadas na equação (10.2),

$$\underbrace{u''y_1 + u'y_1' + u'y_1' + uy_1''}_{y_2''} + \underbrace{p(u'y_1 + uy_1')}_{py_2'} + \underbrace{q(uy_1)}_{qy_2} = 0;$$

podemos reescrever a última equação como

$$(uy_1'' + puy_1' + quy_1) + (u''y_1 + 2u'y_1' + pu'y_1) = 0 \quad (10.3)$$

Fatorando u na expressão do primeiro parêntese obtemos $u(y_1'' + py_1' + qy_1)$.

E como y_1 é solução de (10.2) então $y_1'' + py_1' + qy_1 = 0$, de modo que (10.3) se reduz a

$$u''y_1 + 2u'y_1' + pu'y_1 = 0$$

e chamando u' de v , obtemos a equação

Daí é que vem o nome *redução de ordem*. Para resolver a equação (10.2), de segunda ordem, precisamos resolver a equação, que é de primeira ordem. O problema passou a ser o de calcular uma solução de uma equação de ordem reduzida de uma unidade.

$$v' + \left(p(x) + 2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)}\right)v = 0, \quad (10.4)$$

que é uma linear de primeira ordem.

Resolvendo a equação (10.4) pelos métodos da Aula 3, obtemos

$$v(x) = \frac{c}{[\varphi_1(x)]^2} \cdot e^{\left(-\int p(x)dx\right)}, \quad c = \text{constante}$$

Como $v = u'$ temos

$$u(x) = c \int \frac{1}{[\varphi_1(x)]^2} \cdot e^{\left(-\int p(x)dx\right)} dx.$$

Estamos precisando descobrir **uma função** $u(x)$ adequada a nossos propósitos. Na verdade conseguimos toda uma família de funções. Para cada escolha de c temos uma função $u(x)$. Então basta escolher um valor para c .

Atenção! Não podemos escolher $c = 0$, pois isso daria $u(x) = 0$ e consequentemente $y_2(x) = 0$, o que não nos serve porque a função nula é linearmente dependente com qualquer outra função, e portanto não pode fazer parte de

uma base para o espaço das soluções de (10.2). Podemos escolher qualquer $c \neq 0$ Escolhendo $c = 1$,

$$u(x) = \int \frac{1}{[y_1(x)]^2} \cdot e^{\left(-\int p(x)dx\right)} dx$$

e temos para segunda solução da equação (10.2)

$$y_2(x) = y_1(x) \cdot \int \frac{1}{[y_1(x)]^2} \cdot e^{\left(-\int p(x)dx\right)} dx$$

Para completar a tarefa, precisamos verificar que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são linearmente independentes; o que decorre imediatamente da fórmula de Abel. De fato,

$$W[y_1(x), y_2(x)] = e^{\left(-\int p(x)dx\right)} \neq 0 \quad \text{para todo } x.$$

Assim alcançamos nosso objetivo.

Exemplo 10.3.

Calcular uma solução geral de $2x^2y'' + 3xy' - y = 0$, $x > 0$, sabendo que $y_1(x) = 1/x$ é uma solução da mesma.

Solução: Usaremos a fórmula desenvolvida na técnica de redução de ordem.

Escrevendo a equação na forma normalizada

$$y'' + 3/2xy' - 1/2x^2y = 0$$

vemos que a função coeficiente de y' é $p(x) = 3/2x$, e


$$y_2(x) = (1/x) \cdot \int \frac{e^{-\int 3/2x dx}}{(1/x)^2} dx$$

é uma segunda solução, linearmente independente de $y_1(x) = 1/x$.

Calculando as integrais obtemos $y_2(x) = 1/x \cdot \frac{2}{3}x^{3/2} = \frac{2}{3}x^{1/2}$.

Sendo assim, a solução geral de $2x^2y'' + 3xy' - y = 0$ é

$$y(x) = c_1 \frac{1}{x} + c_2 x^{1/2}$$

 **Observação:** o fator $\frac{2}{3}$ foi englobado na segunda constante arbitrária, c_2 .

Atividade de auto-avaliação 10.1

Conhecida uma solução $y_1(x)$, de uma equação diferencial linear normal de segunda ordem, para obter uma segunda solução $y_2(x)$, da equação, da forma $y_2(x) = u(x)y_1(x)$, linearmente independente da primeira, pelo método da redução de ordem, basta ...

Exemplo 10.4.

Comprove diretamente que $W[y_1(x), y_2(x)] = e^{\left(-\int p(x)dx\right)}$, quando y_1 e y_2 são duas soluções da equação (10.4), sendo y_2 obtida a parti de y_1 por redução de ordem.

Solução:

$$\begin{aligned} W[y_1(x), y_2(x)] &= \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_1(x) \cdot \int \frac{1}{[y_1(x)]^2} \cdot e^{\left(-\int p(x)dx\right)} dx \\ y_1'(x) & y_1'(x) \cdot \int \frac{1}{[y_1(x)]^2} \cdot e^{\left(-\int p(x)dx\right)} dx + y_1(x) \cdot \frac{1}{[y_1(x)]^2} \cdot e^{\left(-\int p(x)dx\right)} \end{pmatrix} = \\ &= y_1(x)y_1'(x) \cdot \int \frac{1}{[y_1(x)]^2} \cdot e^{\left(-\int p(x)dx\right)} dx + \\ &+ [y_1(x)]^2 \cdot \frac{1}{[y_1(x)]^2} \cdot e^{\left(-\int p(x)dx\right)} dx - \\ &- y_1(x)y_1'(x) \cdot \int \frac{1}{[y_1(x)]^2} \cdot e^{\left(-\int p(x)dx\right)} dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$W[y_1(x), y_2(x)] = e^{\left(-\int p(x)dx\right)}$$

Atividade de auto-avaliação 10.2

Considere a equação de Legendre com parâmetro igual a um:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad -1 < x < 1.$$

Mostre que a função $\varphi_1(x) = x$ é uma solução. Determine a solução geral da equação de Legendre .

EQUAÇÕES DE COEFICIENTES CONSTANTES

A segunda situação em que é possível calcular uma solução geral para a equação linear de segunda ordem homogênea (10.1), extremamente comum nas aplicações, é quando as funções coeficientes são constantes.

A forma normalizada da equação (10.2) é

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (10.5)$$

Teorema 10.1.

- A equação $y'' + py' + qy = 0$ tem sempre uma solução da forma

$$\varphi(x) = e^{ax}$$

onde a é uma constante.

- a é uma raiz (real ou complexa) da equação algébrica

$$r^2 + pr + q = 0,$$

chamada de *equação característica* da equação $y'' + py' + qy = 0$

Demonstração

Seja $\varphi(x) = e^{ax}$, $a = \text{constante}$. Então
 $\varphi''(x) + p\varphi'(x) + q\varphi(x) = a^2e^{ax} + ape^{ax} + qe^{ax}$.
 Portanto

$$\varphi''(x) + p\varphi'(x) + q\varphi(x) = 0 \iff e^{ax}[a^2 + ap + q] = 0.$$

Como e^{ax} nunca se anula $\varphi(x) = e^{ax}$ é solução de $y'' + py' + qy = 0 \iff a^2 + ap + q = 0 \iff a$ é uma raiz da equação característica.

E já que toda equação do segundo grau tem sempre uma raiz (real ou complexa) a , então a equação $y'' + py' + qy = 0$ tem sempre uma solução da forma e^{ax}

Este teorema dá a pista para encontrar a solução geral de qualquer equação homogênea de 2^a ordem com coeficientes constantes.

A primeira coisa a fazer é calcular as raízes da equação au-

xiliar $r^2 + pr + q = 0$, mais conhecida como *equação característica*.

Temos alguns casos a considerar:

1º caso:

A equação característica tem duas raízes reais, distintas: r_1 e r_2 .

Então podemos formar duas soluções da equação diferencial $y'' + py' + qy = 0$, a saber:

$$e^{r_1 x} \quad \text{e} \quad e^{r_2 x}$$

Um exercício simples mostra que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad W[e^{r_1 x}, e^{r_2 x}] = (r_2 - r_1)e^{(r_1 + r_2)x} \neq 0.$$

Sendo assim, a solução geral da equação é

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

2º caso:

A equação característica $r^2 + pr + q = 0$ tem duas raízes reais iguais:

$$r_1 = r_2 = r.$$

Então só temos, em princípio, uma solução

$$\varphi_1(x) = e^{rx}$$

Precisamos encontrar uma outra solução $\varphi_2(x)$, que seja linearmente independente de φ_1 .

Podemos aplicar diretamente a fórmula desenvolvida na seção anterior e calcular diretamente $\varphi_2(x) = xe^{rx}$ como uma segunda solução.

Vamos repetir uma parte do raciocínio, para fixar:

Procurando uma segunda solução da forma $\varphi_2(x) = u(x)e^{rx}$, sabemos que $v = u'$ deve satisfazer

$$\varphi_1 v' + (2\varphi_1' + p\varphi_1)v = 0$$

ou seja

$$e^{rx}v' + (2re^{rx} + pe^{rx})v = 0$$

Como $r = -p/2$ então $p = -2r$ e a expressão entre parênteses se reduz a

$$2re^{rx} + (-2r)e^{rx} = 0$$

Portanto a equação de 1ª ordem para v fica

$$v' = 0$$

De onde $v = cte$.

Escolhendo a constante como sendo 1

Assim $u' = v = 1$. De modo que

$$u(x) = x$$

Então $u(x) = x$ de modo que

$$\varphi_2(x) = xe^{rx} \quad \blacksquare$$


A solução geral da equação (10.5) é

$$y(x) = (c_1 + xc_2)e^{rx}$$

Resta ainda a examinar o

3º caso:

A equação característica $r^2 + pr + q = 0$ tem duas raízes complexas conjugadas $r_1 = a + bi$, $r_2 = a - bi$, sendo $b \neq 0$.

 Lembre que: se $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ é um polinômio de grau ≥ 1 com coeficientes reais, e se $\beta \in \mathbb{C}$, então

$$p(\beta) = 0 \iff x^2 - (\beta + \bar{\beta})x + \beta\bar{\beta} \text{ divide } p(x)$$

Em particular, se $gr[p(x)] = 2$ então a forma de $p(x)$ é

$$p(x) = x^2 - (\beta + \bar{\beta})x + \beta\bar{\beta}$$

Daí a equação característica pode ser reescrita como

$$r^2 - 2ar + (a^2 + b^2) = 0.$$

Afirmamos que as funções $\varphi_1(x) = e^{ax} \cos bx$ e $\varphi_2(x) = e^{ax} \sin bx$ são soluções linearmente independentes da equação

$$y'' - 2ay' + (a^2 + b^2)y = 0, \quad b \neq 0$$

Provemos que φ_1 é solução.

Tem-se:

$$\varphi_1'(x) = a e^{ax} \cos bx - b e^{ax} \sin bx$$

$$\varphi_1''(x) = a^2 e^{ax} \cos bx - ab e^{ax} \sin bx - ab e^{ax} \sin bx - b^2 e^{ax} \cos bx$$

Substituindo na equação,

$$\begin{aligned} & a^2 e^{ax} \cos bx - ab e^{ax} \sin bx - ab e^{ax} \sin bx - b^2 e^{ax} \cos bx + \\ & - 2a^2 e^{ax} \cos bx + 2ab e^{ax} \sin bx - (a^2 + b^2) e^{ax} \cos bx = 0 \end{aligned}$$

o que mostra que φ_1 é solução.

A verificação de que φ_2 é solução é completamente análoga.

Para mostrar que φ_1 e φ_2 são linearmente independentes observamos que

$$W[\varphi_1(x), \varphi_2(x)] = -be^{ax}$$

que é diferente de zero, já que $b \neq 0$.

Portanto a solução geral de $y'' - 2ay' + (a^2 + b^2)y = 0$, $b \neq 0$ é

$$y(x) = c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \sin bx.$$

Resumo Geral

Para resolver a equação diferencial linear homogênea de segunda ordem

$$y'' + py' + qy = 0, \quad p, q, \text{ constantes}$$

primeiro encontramos as raízes r_1, r_2 da equação auxiliar (ou característica)

$$r^2 + pr + q = 0.$$

A seguir, a solução geral da equação dada pode ser expressa em termos de r_1 e r_2 como se segue:

r_1, r_2	Solução Geral
Reais, $r_1 \neq r_2$	$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$
Reais, $r_1 = r_2 = r$	$y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{rx}$
Complexos, $r_1 = a + bi$ $r_2 = a - bi$	$y(x) = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$

Exemplo 10.5.

Encontre uma equação diferencial linear com coeficientes constantes cuja solução geral seja $c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x$

Solução:

Seja $y'' + py' + qy = 0$ a equação procurada.

$$\begin{aligned} \sin 3x \text{ é solução} &\iff -9 \sin 3x + p3 \cos 3x + q \sin 3x = 0 \\ &\iff (q - 9) \sin 3x + 3p \cos 3x = 0 \end{aligned}$$

A equação $(q - 9) \sin 3x + 3p \cos 3x = 0$ é uma combinação linear nula de duas soluções linearmente independentes.

Devemos ter $q - 9 = 0$ e $3p = 0$

Daí $p = 0$, $q = 9$ e a equação procurada é

$$y'' + 9y = 0$$

Atividade de auto-avaliação 10.3

Encontre uma equação diferencial linear com coeficientes constantes cuja solução geral seja $c_1 + c_2xe^x$

Resumo

Nesta aula você aprendeu a:

- utilizar o *método de redução de ordem* para, a partir do conhecimento de uma solução de uma equação diferencial linear, de segunda ordem, normal em um intervalo I , calcular uma segunda solução, linearmente independente da primeira; e consequentemente obter uma solução geral para a equação em I ;
- Calcular uma solução geral de *qualquer* equação diferencial linear, de segunda ordem, *de coeficientes constantes*.

O QUE VEM POR AÍ:

Na próxima aula, ainda no contexto de equações diferenciais lineares de segunda ordem, normais em intervalos, você vai aprender a calcular soluções particulares de *equações não homogêneas* utilizando dois métodos, a saber:

1. o *método dos coeficientes a determinar*; que é muito útil no cálculo de soluções particulares de equações diferenciais de segunda ordem, *com coeficientes constantes, possuindo segundo membro com certas formas especiais* (embora se aplique também a algumas equações particulares de coeficientes variáveis, como certos tipos de equações de Euler);
2. o *método da variação de parâmetros*, que se aplica a equações normais **que podem ter coeficientes variáveis**,

mas que *depende do conhecimento de uma solução geral de uma equação diferencial homogênea associada.*

Assim como nos métodos de cálculo de soluções desta aula, os métodos que você vai aprender se estendem, com as devidas adaptações, a equações diferenciais lineares normais, não homogêneas, com as adaptações apropriadas.

SOLUÇÕES COMENTADAS DAS ATIVIDADES DESTA AULA:


Solução comentada da atividade 10.1

Conhecida uma solução $y_1(x)$, de uma equação diferencial linear normal de segunda ordem, para obter uma segunda solução $y_2(x)$, da equação, da forma $y_2(x) = u(x)y_1(x)$, linearmente independente da primeira, pelo método da redução de ordem, basta ...

utilizar a fórmula

$$y_2(x) = y_1(x) \cdot \int \frac{1}{[y_1(x)]^2} \cdot e^{\left(-\int p(x)dx\right)} dx$$

e fazer as contas.

 **Obs:** Naturalmente a fórmula acima se aplica aos intervalos onde $y_1(x) \neq 0$. Em princípio, deveríamos sempre explicitar tais intervalos; um procedimento que, em geral é negligenciado.

Veja a “resposta” da atividade 10.2, por exemplo.

Solução comentada da atividade 10.2

Temos, pra todo $x \in (-1, 1)$

$$\begin{aligned} (1-x^2)\varphi_1'' - 2x\varphi_1' + 2\varphi_1 &= (1-x^2) \cdot 0 - 2x \cdot 1 + 2 \cdot x \\ &= -2x + 2x \\ &= 0. \end{aligned}$$

Isto mostra que $\varphi_1(x) = x$ é uma solução.

Para obter uma solução geral, precisamos de uma segunda solução $\varphi_2(x)$ da equação de Legendre, linearmente independente de $\varphi_1(x)$. Para isto, vamos utilizar a fórmula do método de redução de ordem, não esquecendo de escrever a equação de Legendre na forma normal:

$$\varphi_2(x) = x \cdot \int \frac{e^{-\int (-2x/(1-x^2)) dx}}{x^2} dx.$$

Tem-se

$$\begin{aligned}\varphi_2(x) &= x \cdot \int \frac{e^{-\ln(1-x^2)}}{x^2} dx \\ &= x \cdot \int \frac{1}{x^2(1-x^2)} dx\end{aligned}$$

Por frações parciais

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2(1-x^2)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1-x} + \frac{D}{1+x} \\ &= \frac{Ax(1-x^2) + B(1-x^2) + Cx^2(1+x) + Dx^2(1-x)}{x^2(1-x^2)};\end{aligned}$$

de onde formamos o sistema

$$\begin{cases} -A + C - D = 0 \\ -B + C + D = 0 \\ A = 0 \\ B = 1 \end{cases}.$$

Daí $A = 0, B = 1, C = 1/2, D = 1/2$, e então

$$\int \frac{1}{x^2(1-x^2)} dx = \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+x} \right) dx.$$

Consequentemente $\varphi_2(x) = x[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln(1-x^2)]$ e uma solução geral para a equação de Legendre é

$$\varphi(x) = c_1 x + c_2 [x \ln(\sqrt{1-x^2})].$$

Solução comentada da atividade 10.3

Seja $y'' + py' + qy = 0$ a equação procurada.

$$\begin{aligned} e^x \text{ é solução} &\iff e^x + pe^x + qe^x = 0 \\ &\iff (p + q + 1)e^x = 0 \end{aligned}$$

Daí podemos concluir apenas que $p + q + 1 = 0$.

Usando a outra solução xe^x temos:

$$\begin{aligned} xe^x \text{ é solução} &\iff 2e^x + xe^x + pe^x + pxe^x + qxe^x = 0 = 0 \\ &\iff (1 + p + q)xe^x + (2 + p)e^x = 0 \end{aligned}$$

A equação $(1 + p + q)xe^x + (2 + p)e^x = 0$ é uma combinação linear nula de duas soluções linearmente independentes.

Devemos ter $1 + p + q = 0$ e $2 + p = 0$ Daí $p = -2$ e $q = 1$ e a equação procurada é

$$y'' - 2y' + y = 0 .$$

Aula 11



EDOS NÃO HOMOGÊNEAS DE ORDEM SUPERIOR - CÁLCULO DE SOLUÇÕES

Objetivos

Ao final desta aula, você será capaz de:

- 1 Identificar as equações diferenciais lineares não homogêneas de ordem 2 definidas em um intervalo;
- 2 calcular conjuntos de soluções de uma equações diferenciais linear de ordem 2, não homogêneas, pelos métodos de Variação dos parâmetros e de coeficientes a determinar.


INTRODUÇÃO

Nesta aula vamos estudar dois métodos de obtenção de soluções de as equações diferenciais lineares não homogêneas de ordem maior do que um. Como na aula anterior, vamos enfatizar as equações de segunda ordem:

*Uma equação diferencial ordinária de ordem n , definida em um intervalo I , é **linear não homogênea** puder ser escrita na forma padrão:*

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y = h(x), \quad (11.1)$$

sendo $a_1(x), \dots, a_n(x)$, funções contínuas em I , com $a_n(x)$ não identicamente nula em I . $h(x)$ é uma função, que, salvo expressamente dito o contrário, é contínua em I ; chamada de *segundo membro*, ou *entrada*, ou *termo independente*, ou *termo forçado* da equação (11.1).

 Como já foi observado na aula precedente, chamar a equação (11.1) de **equação diferencial linear não homogênea** não é estritamente correto. Entretanto, vamos seguir o costume usual, tendo em mente que se trata de um uso abusivo.

A noção de solução de uma equação diferencial linear não homogênea é uma adaptação direta da definição de solução de ao diferencial uma equação diferencial linear. E lembre que nem todos os resultados de Álgebra Linear se aplicam diretamente às equações diferenciais lineares não homogêneas. Em particular os conjuntos de soluções de equações diferenciais não homogêneas **NÃO são espaços vetoriais**. Por exemplo, na linguagem de operadores, uma equação diferencial linear não homogênea de ordem n é uma equação da forma

$$\underbrace{a_n(x)D^n y + a_{n-1}(x)D^{n-1}y + \cdots + a_0(x)D^0 y}_{L} \cdot y = g(x);$$

e vamos às vezes nos referir ao problema de calcular uma solução geral simplesmente como calcular o conjunto *imagem inversa* $L^{-1}[g(x)]$.

Iniciamos agora o projeto de cálculo de soluções de equações

diferenciais lineares não homogêneas *de segunda ordem*:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x), \quad \text{ou} \quad \mathcal{L}.y = g(x) \quad (11.2)$$


- Uma solução da equação não homogênea (11.2) é uma função φ pertencente ao espaço $\mathcal{C}^2(I)$ tal que para todo $x \in I$,

$$a_2(x)\varphi''(x) + a_1(x)\varphi'(x) + a_0(x)\varphi(x) = g(x).$$

- Se $a_2(x) \neq 0$ em todos os pontos de I , então a equação (11.2) é equivalente à equação

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = h(x), \quad (11.3)$$

onde $p(x) = a_1(x)/a_2(x)$, $q(x) = a_0(x)/a_2(x)$, $h(x) = g(x)/a_2(x)$.

 **Obs:** A equação (11.3) é a **forma normalizada** da equação (11.2).

Definição 11.1.

A **equação homogênea associada** à equação (11.3) é a equação

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (11.4)$$

Teorema 11.1.

Suponha que $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ são duas soluções da equação (11.3).

Então $\varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ é solução da equação (11.4)

Demonstração

$$\varphi_1 \text{ é solução de (11.3)} \iff \varphi_1''(x) + p(x)\varphi_1'(x) + q(x)\varphi_1(x) = h(x)$$

$$\varphi_2 \text{ é solução de (11.3)} \iff \varphi_2''(x) + p(x)\varphi_2'(x) + q(x)\varphi_2(x) = h(x)$$

Subtraindo membro a membro, e usando da linearidade da derivada, podemos escrever

$$(\varphi_1 - \varphi_2)''(x) + p(x)(\varphi_1 - \varphi_2)'(x) + q(x)(\varphi_1 - \varphi_2)(x)$$

$$= h(x) - h(x) = 0,$$

o que mostra que $\varphi_1 - \varphi_2$ é solução da equação (11.4).

Segue imediatamente do resultado acima que, se conhecermos uma solução particular $\varphi_1(x)$ da equação não homogênea, então para qualquer outra solução $y(x)$ da não homogênea vale que $y(x) - \varphi_1(x)$ é solução da homogênea associada.

Ora, como qualquer *solução geral* da equação diferencial homogênea associada (11.4) é da forma

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

podemos garantir que, existirão constantes α_1 e α_2 tais que

$$y(x) - \varphi_1(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$$

ou ainda

$$y(x) = \varphi_1(x) + \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \quad (11.5)$$

Concluimos daí que

A solução geral da equação não homogênea (11.4):

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = h(x),$$

é obtida pela adição de uma **solução particular**, $\varphi_1(x)$, dela própria, (11.3), à solução geral da sua equação **homogênea associada** (11.4).

Exemplo 11.1.

O objetivo deste exemplo é mostrar que a afirmação de que *a solução geral da não-homogênea é igual à soma da solução geral da homogênea associada com uma solução particular da não-homogênea*, já era verdadeira para as equações lineares de primeira ordem e, como você já deve estar desconfiado(a), vale para equações de ordem n qualquer.

i) A função

$$y_p(x) = e^{\left(-\int p(x) dx\right)} \left[\int e^{\int p(x) dx} q(x) dx \right] \quad (I)$$

é uma *solução particular* da equação não homogênea de 1ª or-

dem

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Demonstração

De fato,

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= -p(x) \cdot e^{\left(-\int p(x) dx\right)} \cdot \left[\int e^{\int p(x) dx} q(x) dx \right] + q(x) \\ &= -p(x)y_p + q(x). \end{aligned}$$

ii) A função

$$y_h = Ce^{\left(-\int p(x) dx\right)} \quad (II)$$

é a solução geral da homogênea associada: $y' + p(x)y = 0$.

iii) Mostremos agora que $y_h(x) + y_p(x)$ é solução geral da equação linear não homogênea:

$$\begin{aligned} y_h(x) + y_p(x) &= Ce^{\left(-\int p(x) dx\right)} + \\ &\quad + e^{\left(-\int p(x) dx\right)} \cdot \left[\int e^{\int p(x) dx} q(x) dx \right] \\ &= e^{\left(-\int p(x) dx\right)} \cdot \left[\int e^{\int p(x) dx} q(x) dx + C \right] \end{aligned}$$

Portanto $y_h(x) + y_p(x)$ coincide com a solução geral que conhecemos, desde a Aula 3, para a equação linear de primeira ordem não-homogênea.

Dizendo de outro modo, a solução *geral* da equação linear de primeira ordem não-homogênea é da forma

$$y_h(x) + y_p(x),$$

como queríamos demonstrar.

Atividade de auto-avaliação 11.1

Demonstre a afirmação do item (ii)

Encaminhamento: A fórmula (11.5) indica o caminho para determinar uma solução geral de uma equação diferencial linear de segunda ordem, não-homogênea .

Precisamos resolver dois problemas:

- 1⁰) - calcular uma solução geral da equação homogênea associada
- 2⁰) - obter uma solução particular da equação não -homogênea

A obtenção de soluções gerais de equações diferenciais lineares homogêneas foi abordada na aula anterior, em dois casos importantes.

Veremos a seguir dois métodos de construir soluções particulares de equações não-homogêneas.

O primeiro método, e o mais geral, é o da variação dos parâmetros, que se aplica a equações de coeficientes contínuos. O outro método é o dos coeficientes a determinar, que entretanto se aplica somente a equações de coeficientes constantes e cujos segundos membros são funções de formas bem especiais, se bem que muito frequentes nas aplicações.

O MÉTODO DA VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS (LAGRANGE)

Nota Histórica

O método, que descreveremos logo abaixo, lembra o da redução de ordem, mas a motivação de Lagrange foi totalmente outra (e acabou roubando o nome de método da variação das constantes). A inspiração de Lagrange proveio inicialmente do estudo das equações das trajetórias de planetas em torno do Sol. Um problema que surgiu logo após a demonstração de que as órbitas dos planetas eram elipses, tendo o Sol em um dos focos, foi o da estabilidade secular do eixo maior das órbitas planetárias: *Será que, com o passar dos séculos, o eixo maior das órbitas elípticas não iria ficando progressivamente maior, de modo que após algum tempo (um longo tempo talvez) os planetas viessem a se desgarrar da atração solar?* Ao abordar este problema, Lagrange levou em consideração as influências que um planeta sofre não somente do Sol, mas também dos outros planetas. E aí ele introduziu o método da variação das

constantes (que determinavam a posição de um planeta em sua órbita) permitindo coeficientes variáveis nas equações do movimento dos planetas. Lagrange não resolveu completamente a questão (ninguém resolveu até hoje), mas inventou um bocado de matemática nova que veio a ser muito empregada em outros contextos. Mais tarde ele generalizou o método de variação das constantes às equações diferenciais ordinárias lineares quaisquer. Lagrange foi um dos maiores matemáticos do século XVIII, tendo contribuído de maneira profunda em vários ramos da matemática: Teoria dos Números, Geometria, Álgebra, Mecânica e Análise. Alguns dizem que o único que rivalizava com ele em capacidade matemática, naquela época, era Euler. Bem ... Gauss já estava bem ativo muitos anos antes de Lagrange falecer.

O método da variação dos parâmetros (que, em textos mais antigos, era chamado de método da variação das constantes) em uma apresentação moderna e elementar, no contexto de equações diferenciais lineares, consiste em buscar uma solução particular da equação não-homogênea (11.3) a partir da solução geral de sua equação homogênea associada (11.4).

Se a solução geral (11.4) é $y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ busca-se uma solução particular de (11.3) da forma

$$y_p(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$$

sendo $c_1(x)$ e $c_2(x)$ funções a determinar. Substituindo y_p e suas derivadas na equação (11.3), e agrupando (omitindo a variável x , para simplificar.):

$$c_1(a_2y_1'' + a_1y_1' + a_0y_1) + c_2(a_2y_2'' + a_1y_2' + a_0y_2) + (c_1'y_1 + c_2'y_2)' + a_1(c_1'y_1 + c_2'y_2) + (c_1'y_1' + c_2'y_2') = h.$$

Como y_1 e y_2 são soluções da equação homogênea, os dois primeiros parênteses do lado esquerdo da igualdade acima são nulos, e ficamos com:

$$(c_1'y_1 + c_2'y_2)' + a_1(c_1'y_1 + c_2'y_2) + (c_1'y_1' + c_2'y_2') = h.$$

Esta identidade será satisfeita se c_1 e c_2 puderem ser escolhidos de tal forma que

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0, \quad (11.6)$$

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = h(x). \quad (11.7)$$

para todo x .

Para cada x , (11.6 - 11.7) formam um sistema de equações (algébricas) lineares nas incógnitas $c_1'(x)$ e $c_2'(x)$. O determinante dos coeficientes desse sistema é o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}$$

que reconhecemos como o Wronskiano, $W[y_1(x), y_2(x)]$, das soluções linearmente independentes $y_1(x)$ e $y_2(x)$, da equação homogênea associada (11.3). Esse determinante é diferente de zero, e utilizando a *regra de Cramer*:

$$c_1'(x) = -\frac{h(x)y_2(x)}{W[y_1(x), y_2(x)]}, \quad c_2'(x) = \frac{h(x)y_1(x)}{W[y_1(x), y_2(x)]}.$$

Daí, por integração,

$$c_1(x) = -\int \frac{h(x)y_2(x)}{W[y_1(x), y_2(x)]} dx, \quad c_2(x) = \int \frac{h(x)y_1(x)}{W[y_1(x), y_2(x)]} dx$$

Agora substitui-se $c_1(x)$ e $c_2(x)$ na expressão da solução particular $y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$.

Exemplo 11.2.

Achar a a solução geral de

$$y'' + y = \operatorname{tg} x$$

Solução:

A solução geral da equação homogênea associada é

$$y_h(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x.$$

Temos então $W[(\operatorname{sen} x, \cos x)] = -1$, e a solução particular é

$$y_p(x) = c_1(x) \operatorname{sen} x + c_2(x) \cos x,$$

onde

$$c_1(x) = - \int \frac{\operatorname{tg} x \cos x}{-1} dx = -\cos x,$$

$$c_2(x) = \int \frac{\operatorname{tg} x \operatorname{sen} x}{-1} dx = \operatorname{sen} x - \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$$

Assim,

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -\cos x \operatorname{sen} x + [\operatorname{sen} x - \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)] \cos x \\ &= -\cos x \ln \left(\frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} \right) \end{aligned}$$

A solução geral de $y'' + y = \operatorname{tg} x$ é

$$y(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x - \cos x \ln \left(\frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} \right)$$

Atividade de auto-avaliação 11.2

Calcule, pelo método de variação de parâmetros, um a solução geral de

$$y'' - 5y' + 6y = e^x$$

O MÉTODO DOS COEFICIENTES A DETERMINAR

Este método permite determinar uma solução particular da equação de coeficientes constantes

$$y'' + py' + q = h(x), \quad p, q \text{ constantes}, \quad (11.8)$$

para certos tipos particulares de funções $h(x)$.

Comentário: Apesar de restrito, o método é aplicável a um grande número de problemas concretos.


O teorema **11.2** abaixo, sintetiza os principais casos em que o teorema é utilizado:

Teorema 11.2.

Se, na equação (11.8), $h(x) = (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n)e^{\alpha x} \cos \beta x$ ou $g(x) = (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n)e^{\alpha x} \sin \beta x$, então existe uma solução particular da forma

$$y_p(x) = (b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n)e^{\alpha x} \cos \beta x + \\ + (c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n)e^{\alpha x} \sin \beta x$$

sendo $b_0, \dots, b_n, c_0, \dots, c_n$ um coeficientes a determinar.

 **Observação:** Uma demonstração do teorema (11.2) pode ser feita utilizando resultados de operadores diferenciais de coeficientes constantes que não trabalhamos, e será omitida.

Nos limitares a apresentar, como corolários, os principais casos em que o método é utilizado.

Corolário 11.3.

Se, na equação (11.8) $h(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, então existe uma solução particular da forma $y_p(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$, de mesmo grau que $h(x)$

sendo b_0, b_1, \dots, b_n coeficientes a determinar.

Exemplo 11.3.

Determine uma solução particular de

$$y'' - 3y' + 2y = 2x + 1$$

Solução:

Usando o corolário (11.3), procuramos uma solução particular da forma $y_p(x) = ax + b$, polinômio do mesmo grau que $2x + 1$.

Então $y'_p(x) = a$ e $y''_p = 0$.


Substituindo na equação obtemos $0 - 3a + 2(ax + b) = 2x + 1$, isto é

$$2ax + 2b - 3a = 2x + 1.$$

Igualando os coeficientes das potências de x , calcula-se $a = 1$ e $b = 2$

Portanto a solução particular é

$$y_p(x) = x + 2$$

 **Obs:** Mesmo quando um polinômio de grau n que aparece como termo independente numa equação diferencial linear não contiver todas as potências de x , devemos procurar uma solução particular da forma de um polinômio completo de grau n : $y_p(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$. Os cálculos indicarão se algum(uns) coeficiente(s) b'_i s devem ser nulos.

Quando o lado direito é uma constante, devemos procurar uma solução particular constante.

Exemplo 11.4.

Determine uma solução particular para $y'' + 7y = x^2$.

Solução: Procuramos uma solução particular da forma

$y_p(x) = ax^2 + bx + c$, um polinômio do segundo grau completo.

Tem-se:
$$\begin{cases} y'_p(x) = 2ax + b \\ y''_p(x) = 2a \end{cases}$$

Substituindo na equação chega-se a $2a + 7(ax^2 + bx + c) = x^2$

Igualando os coeficientes das potências de x dos dois lados, vem que $7a = 1$, $7b = 0$ e $2a + 7c = 0$.

Daí $a = 1/7$, $b = 0$ e $c = -2/49$. A solução particular é

$$y_p(x) = 1/7x^2 - 2/49.$$

Corolário 11.4.

Se, na equação (11.8), $h(x) = e^{\alpha x}$, então existe uma solução particular da forma

$$y_p(x) = b e^{\alpha x}$$

sendo b um coeficiente a determinar.

Exemplo 11.5.

Calcule uma solução particular para $y'' + y' + y = e^{-2x}$

Solução:

Aplicando diretamente o corolário (11.4), procuramos uma solução particular da forma $y_p(x) = ae^{-2x}$. Calculando as derivadas de $y_p(x)$ até a segunda ordem e substituindo na equação, obtemos $4ae^{-2x} - 2ae^{-2x} + ae^{-2x} = e^{-2x}$

Daí $3a = 1$ e a solução particular é

$$y_p(x) = \frac{1}{3} e^{-2x}$$

Corolário 11.5.

Se, na equação (11.8), $h(x) = \cos \beta x$ ou $h(x) = \sin \beta x$, então existe uma solução particular da forma

$$y_p(x) = b_1 \cos \beta x + b_2 \sin \beta x$$

sendo b_1 e b_2 um coeficientes a determinar.

Atividade de auto-avaliação 11.3

Calcule a forma de uma solução particular da equação
 $3y'' - y = 2 \cos x$

Exemplo 11.6.

A forma de uma solução particular de $2y'' - y' + 5y = x e^{2x} \sin x$ é $y_p(x) = (b_0 + b_1 x) e^{2x} \cos x + (c_0 + c_1 x) e^{2x} \sin x$ onde b_0, b_1, c_0, c_1 são coeficientes a determinar.

**Atenção!**

Se algum termo na expressão de $y_p(x)$ for solução da equação diferencial linear *homogênea associada* a (11.1), você deve procurar uma solução particular da forma $xy_p(x)$ para solução particular. Caso algum termo de $xy_p(x)$ seja solução da homogênea associada então a solução particular buscada é $x^2 y_p(x)$.

Observação: A demonstração do resultado acima também é consequência dos mesmos fatos relativos a operadores diferenciais de coeficientes constantes mencionados após o enunciado do teorema (11.2), e também será omitida.

Exemplo 11.7.

Calcule a solução geral de $(D^2 - 4)y = -e^{2x}$

Solução: Aplicando o teorema (11.4), procuramos uma solução particular da forma

$$y_p(x) = ae^{2x}$$

Calculando as derivadas desta y_p e substituindo na equação diferencial, chega-se a

$$4e^{2x} - 4e^{2x} = -e^{2x},$$

de onde se conclui que $0 = -1$, o que é um absurdo.

Isso aconteceu porque $-e^{2x}$ é solução da homogênea associada à equação $(D^2 - 4)y = -e^{2x}$.

Experimentamos então $y_p(x) = xae^{2x}$.

Neste caso $y'_p(x) = ae^{2x} + 2axe^{2x}$ e $y''_p(x) = 4ae^{2x} + 4axe^{2x}$. Substituindo na equação:

$$4ae^{2x} + 4axe^{2x} - 4axe^{2x} = -e^{2x},$$

e portanto $a = -1/4$. A solução particular é

$$y_p(x) = -1/4 x e^{2x}.$$



Outros tipos de funções $h(x)$ aos quais o método se aplica podem ser obtidos graças ao princípio de superposição:

“ Se $y_p(x)$ e $\tilde{y}_p(x)$ são soluções respectivamente das equações

$$y'' + py' + qy = g_1(x) \quad \text{e} \quad y'' + py' + qy = g_2(x)$$

então $c_1y_p(x) + c_2\tilde{y}_p(x)$ é solução particular de

$$y'' + py' + qy = c_1g_1(x) + c_2g_2(x).''$$

Exemplo 11.8.

A equação diferencial $y'' + y' - 2y = e^x - x \cos x$ tem uma solução particular da forma

$$y_p(x) = ke^x + (b_0 + b_1x) \cos x + (c_0 + c_1x) \sin x,$$

pois

$$y'' + y' - 2y = e^x \quad \text{tem uma solução particular da forma} \quad ke^x$$

$$\text{e } y'' + y' - 2y = -x \cos x \quad \text{tem uma solução particular da forma}$$

$$(b_0 + b_1x) \cos x + (c_0 + c_1x) \sin x$$

Exemplo 11.9.

Encontre uma equação diferencial linear com coeficientes constantes cuja solução geral seja $(c_1 + c_2 x)e^{-3x} + x$

Solução: Sabemos que a solução geral de uma equação diferencial linear não-homogênea é a soma da solução geral da equação diferencial linear homogênea associada com uma solução particular da própria equação não-homogênea.

Examinando a forma da solução geral proposta: $(c_1 + c_2 x)e^{-3x} + x$, somos levados a dividir o problema em duas partes:

- 1 - Determinar uma equação diferencial linear homogênea - digamos $L(y) = 0$ - cuja solução geral seja $(c_1 + c_2 x)e^{-3x}$.
- 2 - Calcular uma função $h(x)$ de tal modo que a $f(x) = x$ seja uma solução particular de $L(y) = h(x)$.

Vejamos como funciona:

Na aula anterior, aprendemos a calcular equações diferenciais lineares homogêneas normais, de coeficientes constantes, a partir de suas soluções gerais:

Seja $y'' + py' + qy = 0$ a equação procurada.

A função $y_2(x) = xe^{-3x}$ é solução desta equação. Logo

$$-6e^{-3x} + 9xe^{-3x} + p(e^{-3x} - 3xe^{-3x}) + qx e^{-3x} = 0$$

ou seja

$$(-9 + p)e^{-3x} + (9 - 3p + q)x e^{-3x} = 0;$$

e como e^{-3x} e $x e^{-3x}$ são funções linearmente independentes, os coeficientes da combinação linear nula acima devem ser todos iguais a zero.

Então $p - 9 = 0$ e $q - 3p + 9 = 0$. Isto é $p = 9$ e $q = 18$ e a equação homogênea cuja solução geral é $(c_1 + c_2 x)e^{-3x}$ é

$$y'' + 9y' + 18y = 0$$

Agora a segunda etapa: determinar uma função $h(x)$ tal que $y_p(x) = x$ seja solução particular de $y'' + 9y' + 18y = h(x)$.

Substituindo x e suas derivadas na equação acima, ficamos com

$$0 + 9 + 18x = h(x)$$

Assim $h(x) = 18x + 9$ e a solução do problema é

$$y'' + 9y' + 18y = 18x + 9.$$



Para não esquecer: Só utilize o método dos coeficientes a determinar nas condições em que ele é aplicável (Teorema (11.2), ou um dos seus corolários (11.3) a (11.5), ou em casos que possam ser reduzidos a eles.

O método não se aplica, por exemplo, à equação $L \cdot y = \ln(x)$, ou à equação $L \cdot y = 1/x$

Resumo

Nesta aula você aprendeu:

- que para obter uma solução geral da equação diferencial linear normal não homogênea $y'' + p(x)y' + q(x)y = h(x)$, devemos adicionar *uma solução geral da equação diferencial linear homogênea associada* a uma solução particular da própria equação não homogênea;
- a calcular soluções particulares, e então soluções gerais de equações diferenciais lineares de segunda ordem normais não homogêneas, segundo dois métodos:

1. O método da variação dos parâmetros;
2. O método dos coeficientes a determinar.

- O primeiro método pressupõe que a solução geral da equação homogênea associada seja conhecida.
- O segundo método só se aplica a equações de coeficientes constantes, e quando as funções no segundo membro da equação diferencial são de alguns tipos especiais.

O QUE VEM POR AÍ:

As aulas anteriores foram de caráter mais teórico, não apresentando modelos físicos. Vamos compensar um pouco este fato na aula 12, onde veremos uma pequena amostra de como as equações diferenciais lineares de ordem superior são importantes nas aplicações.

SOLUÇÕES COMENTADAS DAS ATIVIDADES DESTA AULA:

Solução comentada da atividade 11.1

Temos:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \iff \frac{\frac{dy}{dx}}{y} = -p(x) \iff \frac{d}{dx} \ln[y(x)] = -p(x).$$

Observe que essa última é uma equação do tipo da fundamental. Portanto admite uma solução que pode ser expressa em função de uma família de primitivas. Temos as equivalências:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln[y(x)] = -p(x) &\iff \ln[y(x)] = -\int p(x) dx \iff \\ &\iff y(x) = e^{-\int p(x) dx}. \end{aligned}$$

Escolhendo uma primitiva $P(x)$ de $p(x)$, podemos escrever a solução geral na forma

$$y(x) = e^{-P(x)+c}.$$

Denotando e^c por k , temos que

$$y(x) = k e^{-P(x)}$$

Portanto

$$y(x) = k e^{-\int p(x) dx}$$

é a solução geral da equação homogênea associada a .

A solução é a **solução geral**; e, neste caso, engloba **todas** as possíveis soluções da equação não homogênea associada.

Solução comentada da atividade 11.2

A solução geral da equação homogênea associada é

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}.$$

Temos então $W[(e^{2x}, e^{3x})] = e^{5x}$, e a solução particular é

$$y_p(x) = c_1(x) e^{2x} + c_2(x) e^{3x},$$

onde

$$c_1(x) = - \int \frac{e^x e^{3x}}{e^{5x}} dx = e^{-x},$$

$$c_2(x) = \int \frac{e^x e^{2x}}{e^{5x}} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x}$$

Assim,

$$y_p(x) = e^{-x} e^{2x} - \frac{1}{2} e^{-2x} e^{3x} = \frac{1}{2} e^x$$

E a solução geral de $y'' - 5y' + 6y = e^x$ é

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{2} e^x$$

Solução comentada da atividade 11.3

Solução: $y_p(x) = \underline{b_1 \cos \beta x + b_2 \sin \beta x}$.

Obs.: Note que o lado direito da equação não precisa conter obrigatoriamente as duas parcelas $\cos \beta x$ e $\sin \beta x$. Basta a ocorrência de uma delas para que procuremos uma solução particular da forma $y_p(x) = b_1 \cos \beta x + b_2 \sin \beta x$.

Aula 12


MODELOS MATEMÁTICOS COM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SEGUNDA ORDEM

Objetivos

Ao final desta aula, você será capaz de:

- 1 Verificar a importância das equações diferenciais lineares de ordem superior na modelagem de fenômenos físicos;
- 2 Resolver problemas simples referentes a dois modelos com equações diferenciais lineares de segunda ordem: oscilações harmônicas e circuitos elétricos.

INTRODUÇÃO

 Os modelos que faremos uma breve descrição agora estão, direta ou indiretamente, relacionados com as leis de movimento de Newton, em particular, com a segunda lei, que é como um modelo formal de equação diferencial de segunda ordem; e conceitos tais como trabalho e energia, conservação da energia, energia de posição, energia cinética, etc.

Você conhece as leis de Newton desde o segundo grau. Vamos recordá-las?

Primeira Lei de Newton

Um corpo permanece em repouso ou com velocidade constante (aceleração zero) quando não está submetido à ação de forças externas, isto é,

$$\vec{a} = 0 \text{ quando } \vec{F} = 0$$

Segunda Lei de Newton

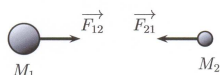
A resultante das forças que atuam sobre um corpo é igual ao produto da massa do corpo pela sua aceleração, isto é,

$$\vec{F} = M \vec{a}$$

Terceira Lei de Newton

Sempre que dois corpos interagem, a força \vec{F}_{12} que o primeiro corpo exerce sobre o segundo é igual e oposta à força \vec{F}_{21} que o segundo corpo exerce sobre o primeiro, isto é,

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$



Comentário: Existem limitações inerentes à validade das Leis de Newton. As duas primeiras leis valem somente quando observadas em sistemas de referência inerciais (não acelerados). A terceira lei, em certos fenômenos de escala atômica, nem sempre é uma boa aproximação. Não vamos trabalhar com essas situações críticas, e vamos admitir que as três leis são válidas.

Observe que a equação que exprime a segunda lei de Newton é uma equação diferencial de segunda ordem. Na forma geral, como enunciada acima, é uma equação vetorial. Introduzindo eixos coordenados, poderemos substituí-la por um sistema de

três equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, não necessariamente lineares.

$$\begin{cases} F_x = M a_x \\ F_y = M a_y \\ F_z = M a_z \end{cases} \quad (12.1)$$

onde F_x, F_y, F_z representam as componentes, segundo os eixos x, y, z , da resultante $\vec{\mathbf{F}}$ das forças que atuam sobre a massa. Semelhantemente, a_x, a_y, a_z são as componentes da aceleração $\vec{\mathbf{a}}$, segundo os eixos coordenados.

Como sabemos, $\vec{\mathbf{a}}$ é a derivada de segunda ordem do vetor posição $\vec{\mathbf{r}}$ com relação ao tempo, isto é,

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}}{dt^2}.$$

Em termos de suas componentes, o vetor $\frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}}{dt^2}$ se escreve

$$\frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = \left(\frac{d^2 r_x}{dt^2}, \frac{d^2 r_y}{dt^2}, \frac{d^2 r_z}{dt^2} \right),$$

sendo, é claro, r_x, r_y e r_z as componentes do vetor posição $\vec{\mathbf{r}}$, com relação aos eixos coordenados. Assim, o sistema (12.1) se reescreve como


$$\begin{cases} F_x = M \frac{d^2 r_x}{dt^2} \\ F_y = M \frac{d^2 r_y}{dt^2} \\ F_z = M \frac{d^2 r_z}{dt^2} \end{cases} \quad (12.2)$$

Posteriormente abordaremos os sistemas de equações diferenciais lineares.

A seguir, veremos alguns exemplos de movimentos unidimensionais envolvendo a segunda lei de Newton onde a expressão matemática da segunda lei se reduz a

$$F = M d^2 r / dt^2 \quad (12.3)$$

onde estamos designando pela letra r a medida da posição (relativamente a uma origem) do corpo de massa M , a força F é uma função de r .

 Para resolver a equação de movimento (12.3) precisamos conhecer (ou deduzir) a expressão da força F ; e “integrar” (12.3), que é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem.



Atenção!

Todos os modelos matemáticos com equações diferenciais que temos visto até agora são *problemas de valor inicial*. A equação que governa o problema vem acompanhada de condições iniciais prescritas; isto é, informações sobre os valores da função desconhecida e (de um n^0 suficiente) de suas derivadas, em um ponto especificado.

Existem um outros tipos de modelos matemático envolvendo uma (ou mais equações diferenciais), junto com *condições iniciais e/ou de contorno*. As condições de contorno, ou de fronteira, são condições impostas sobre a(s) função(ões) incógnita(s) ou sua(s) derivadas(s) no bordo da região onde ela está definida (ou à qual nos restringimos para buscar a a solução).

Quando trabalhamos com equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem em intervalos limitados, a fronteira é um par de pontos. Podemos considerar, por exemplo, o seguinte problema de valores de contorno:

$$\begin{cases} a_2(t) \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1(t) \frac{dy}{dt} + a_0(t) y = g(t) \\ y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1. \end{cases}$$

sendo as funções coeficientes, e o termo independente definidos num intervalo $[a, b]$. Os números y_0 e y_1 são as *condições de contorno, ou de fronteira*, que devem ser satisfeitas pela solução da equação linear dada.

Exemplo 12.1.

O problema de valor de contorno

$$\begin{cases} a_2(t) \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1(t) \frac{dy}{dt} + a_0(t)y = g(t) \\ \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1 \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2 \end{cases}$$

com $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ e $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ constantes, é chamado de *problema de valor de contorno*, com *condições de contorno lineares no intervalo* $[a, b]$ para uma equação diferencial linear de segunda ordem.

- ✍ Diferentemente dos problemas de valores iniciais, problemas de valores de contorno envolvendo funções “bem comportadas”, podem admitir uma, nenhuma, ou mesmo várias soluções.
 - ✍ Frequentemente, os problemas de valor de fronteira surgem quando buscamos soluções de equações diferenciais parciais.
- Os próximos dois exemplos ilustram essa afirmação.

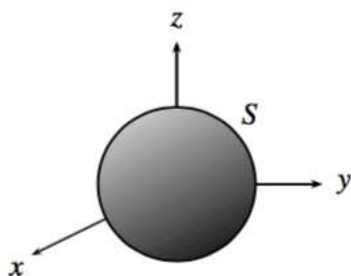
Exemplo 12.2.**Equação de Legendre**

Figura 12.1: Esfera Sólida Aquecida

Consideremos uma esfera sólida S , de raio 1, centrada na origem (conforme **Figura (12.1)**). Suponhamos que a esfera é

feita de um único tipo de material, e que a temperatura em cada ponto, e em cada instante de tempo t , é medida por uma função real $u(x, y, z, t)$.

A taxa de variação de temperatura no ponto (x, y, z) da esfera, no instante de tempo t , é governada pela equação diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

conhecida como a *equação do calor*.

 O **operador laplaciano** é definido por

$$\Delta(f) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)(f) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)$$

para toda f possuindo derivadas parciais até a segunda ordem.


Obtemos uma equação muito especial quando procuramos a distribuição de temperatura em “*estado permanente*” do corpo. É quando a temperatura do corpo não varia com o tempo.

A temperatura de estado permanente, corresponde a $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ na equação do calor.

A equação resultante

$$\Delta u = 0$$

é conhecida como a **equação de Laplace**. A ela devemos acrescentar uma *condição de fronteira*, especificada por uma função $u_0(x, y, z)$ que mede a temperatura em cada ponto da superfície esférica (“casca” da bola sólida). Essa função u_0 é um dado do problema. Podemos medi-la experimentalmente. O modelo matemático para o problema da distribuição do calor na esfera, em estado permanente, é $\Delta u = 0$, junto com a condição $u|_{\partial S} = u_0$, u_0 uma função conhecida.

 ∂S denota o bordo (a “casca”) da esfera S , entretanto lembre que a equação vale para todos os pontos da esfera sólida.

O objetivo é determinar $u(x, y, z)$, no estado permanente. Tirando proveito da forma do sólido, uma esfera, reescrevemos a equação de Laplace e a condição de fronteira em coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{(\rho^2 \sin \varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{(\rho^2 \sin \varphi)} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = 0 \\ U|_{\partial S} = u_0 \end{cases}$$

onde agora $u_0 = u_0(\rho, \theta, \varphi)$ é a expressão da função que dá a temperatura na casca em termos das coordenadas esféricas.

Faremos também a hipótese simplificadora de que a temperatura, no estado permanente, é constante ao longo de cada círculo concêntrico a um “paralelo”, isto é, é a mesma em todos os pontos de um círculo centrado no eixo vertical, paralelo ao plano *horizontal*, contido no interior da esfera.

Ou ainda

U não depende de θ

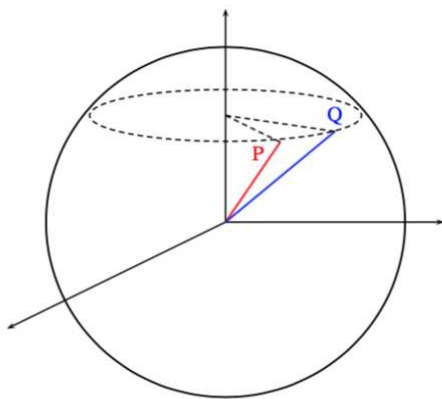


Figura 12.2: Círculo “Isotérmico”

Assim, por exemplo, na **Figura (12.2)**, $u(P) = u(Q)$. Isso acarreta que o problema de contorno se simplifica:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{(\rho^2 \sin \varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) = 0 \\ U|_{\partial S} = u_0 \end{cases}$$

Finalmente, como a esfera é suposta ser de raio unitário, na casca $\rho = 1$, de sorte que o modelo matemático se simplifica ainda mais:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{(\text{sen } \varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\text{sen } \varphi \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) = 0 \\ U(1, \varphi) = u_0(\varphi) \end{cases}$$

Na busca da solução do problema de valor de contorno acima, aplicaremos o **método de separação de variáveis**, que consiste em procurar uma solução da forma

$$U(\rho, \varphi) = F(\rho) \cdot G(\varphi).$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \rho} &= F'(\rho) \cdot G(\varphi) \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} &= F''(\rho) \cdot G(\varphi) \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi} &= F(\rho) \cdot G'(\varphi) \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} &= F(\rho) \cdot G''(\varphi) \end{aligned}$$

Substituindo na equação:

$$G(\varphi) \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 F'(\rho)) + \frac{F(\rho)}{\text{sen } \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\text{sen } \varphi G'(\varphi)) = 0$$

De onde:

$$G(\varphi) \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 F'(\rho)) = - \frac{F(\rho)}{\text{sen } \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\text{sen } \varphi G'(\varphi))$$

ou ainda

$$\frac{1}{F(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 F'(\rho)) = - \frac{1}{G(\varphi) \text{sen } \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\text{sen } \varphi G'(\varphi)).$$



Atenção!

O lado esquerdo da última equação é função só de ρ , e o lado direito é função só de φ . A única possibilidade de uma função só de ρ ser igual a uma outra função só de φ para todos os valores de ρ e φ (em seus respectivos domínios) é que ambas sejam constantes; e, na verdade, iguais a uma *mesma constante*. Essa constante é denominada *constante de separação*.

No que segue, vamos representar a constante de separação pela letra λ

A equação

$$\frac{1}{F(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 F'(\rho)) = - \frac{1}{G(\varphi) \operatorname{sen} \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\operatorname{sen} \varphi G'(\varphi))$$

dá origem a um par de equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{1}{F(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 F'(\rho)) = - \frac{1}{G(\varphi) \operatorname{sen} \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\operatorname{sen} \varphi G'(\varphi)) = \lambda$$

isto é:

$$\begin{cases} \frac{1}{F(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 F'(\rho)) = \lambda \\ - \frac{1}{G(\varphi) \operatorname{sen} \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\operatorname{sen} \varphi G'(\varphi)) = \lambda \end{cases}$$

ou ainda:

$$\begin{cases} \rho^2 F''(\rho) + 2\rho F'(\rho) - \lambda F(\rho) = 0 & (I) \\ - \frac{1}{G(\varphi) \operatorname{sen} \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\operatorname{sen} \varphi G'(\varphi)) = \lambda & (II) \end{cases}$$

A equação (I) é uma *equação diferencial de Euler bidimensional* na variável ρ .

A equação (II) é uma *equação de Legendre* na variável φ .

Não vamos prosseguir com a obtenção das respectivas soluções das equações de Euler e de Legendre, para depois combiná-las obtendo a solução da equação do calor par o problema da esfera. Estas soluções são trabalhadas em outros cursos . Faremos apenas um par de observações:

- a solução da equação de Euler na variável ρ :

$$\rho^2 F''(\rho) + 2\rho F'(\rho) - \lambda F(\rho) = 0,$$

devido a razões de natureza física, deve ser da forma:

$$F(\rho) = c \rho^\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad \xi > 0,$$

com $-1/2 - \sqrt{1/4 + \lambda} = \xi$.

Daí tiramos que

$$\lambda = \xi(\xi + 1); \quad \xi \in \mathbb{R}^+.$$

- O segundo fator da solução, $G(\varphi)$, (substituindo λ por $\xi(\xi + 1)$) se converte em

$$-\frac{1}{G(\varphi) \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sin \varphi G'(\varphi)) = \xi(\xi + 1)$$

Isto é,

$$G''(\varphi) + \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} G'(\varphi) + \xi(\xi + 1) G(\varphi) = 0$$

Fazendo a mudança de variáveis $\cos \varphi = x$, após alguns cálculos com a regra da cadeia, obtemos

$$\begin{cases} \frac{dG}{d\varphi} = -\sqrt{1-x^2} \cdot \frac{dG}{dx} \\ \frac{d^2G}{d\varphi^2} = (1-x^2) \frac{d^2G}{dx^2} - x \frac{dG}{dx} \end{cases}$$

Substituindo na equação

$$(1-x^2) \frac{d^2G}{dx^2} - x \frac{dG}{dx} + \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) \left[-\sqrt{1-x^2} \frac{dG}{dx} \right] + \xi(\xi + 1)G = 0$$

tem-se que a função G deve ser solução da equação diferencial

ordinária linear de segunda ordem

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \xi(\xi + 1)y = 0$$

que é *equação de Legendre* em coordenadas retangulares.

Exemplo 12.3.

Na formulação ondulatória da **Mecânica Quântica Não Relativística**, a **Equação de Schrödinger** é uma equação diferencial parcial que descreve como o “estado quântico” de uma partícula de massa m muda com o tempo. Foi formulada no final de 1925, e publicado em 1926, pelo físico austríaco Erwin Schrödinger.

A **equação de onda de Schrödinger** na sua forma dependente do tempo para uma partícula com energia E movendo-se numa região submetida a um potencial V em uma dimensão é:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V\Psi(x,t)$$

onde $V = V(x,t)$ e $i = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária.

Procurando soluções $\Psi(x,t)$ tais que a dependência de Ψ com (x,t) pode ser separada na forma

$$\Psi(x,t) = \psi(x) \cdot f(t),$$

a equação de Schrödinger se escreve

$$i\hbar \psi(x) \frac{\partial f(t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2 f(t)}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V(x) \psi(x) f(t)$$

ou, dividindo pela função de onda $\psi(x)f(t)$,


$$i\hbar \frac{1}{f(t)} \frac{df}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi(x)} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + V(x)$$

Repetimos o princípio básico do método de separação de variáveis: o lado esquerdo depende somente de t , enquanto o lado direito depende somente de x . A única possibilidade de uma função só de t ser igual a uma outra função só de x para todos

os valores de t e x (em seus respectivos domínios) é que ambas sejam constantes; e, na verdade, iguais a uma *mesma constante*, digamos c .

Então a equação diferencial parcial de Schrödinger pode ser substituída pelo par de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} i\hbar \frac{1}{f(t)} \frac{df}{dt} = c \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi(x)} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x) = c \end{cases}$$

 Observe que a primeira equação é uma equação diferencial ordinária do tipo fundamental, e a segunda uma equação diferencial linear ordinária de segunda ordem.



Atenção!

Existem modelos com equações diferenciais ordinárias lineares e não lineares para muitas outras áreas de ciências e tecnologia, como modelos matemáticos para a previsão de diabetes, modelos para da Engenharia de Produção, (modelo de diabetes-Braun; modelos em Engenharia de Produção, para, por exemplo, planejamento da produção em sistemas de distribuição de redes elétricas; modelos em Teoria Econômica, modelos matemáticos no estudo de Ecossistemas, entre outros. O leitor interessado está convidado a fazer uma pesquisa na literatura especializada e na Internet.

Optamos por ilustrar o curso com modelos da Física Geral para conferir uma certa unidade à esta aula, em vez de apresentar modelos escolhidos mais ou menos aleatoriamente no vasto campo da modelagem de outros fenômenos do mundo real.

Na sequência, vamos nos limitar a trabalhar com mais detalhes, dois fenômenos físicos que apresentam o mesmo tipo de comportamento.

ESTUDO DE DOIS MODELOS DE FENÔMENOS OSCILATÓRIOS

Primeiro Modelo: O OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES

Corpos em movimento numa região restrita do espaço, oscilando (ou vibrando), sob a ação de uma força *restauradora*, em torno de uma posição média (ou de equilíbrio).

O modelo matemático para o movimento unidimensional de partículas sujeitas a forças restauradoras lineares é o *oscilador harmônico*.

Suponha que a posição da partícula no instante t é dada pela função

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad t \mapsto x(t)$$

e que a partícula (de massa m) está sujeita a uma força que a atrai para uma posição de equilíbrio (que vamos admitir que é a origem) com uma magnitude proporcional à distância até essa posição de equilíbrio, com constante de proporcionalidade $k > 0$, temos o seguinte esquema:

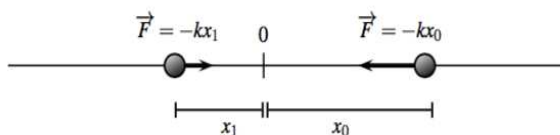


Figura 12.3: Força atratora para a origem



Atenção!

Quando se está derivando uma função em relação ao tempo, muitas vezes a notação de derivada utiliza pontos sobre a função. O número de pontos deve ser igual à ordem de derivação.

A segunda lei de Newton nos diz então que

$$m\ddot{x} = -kx$$

que é a equação do *movimento do oscilador harmônico simples* (ou *livre*).

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DO OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES

Escrevemos a equação do oscilador sob a forma

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

onde $\omega^2 = k/m$. A solução geral desta equação é $x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$, onde c_1 e c_2 são constantes que podem ser determinadas sabendo-se a posição inicial $x(0) = x_0$ e a velocidade inicial $\dot{x}(0) = v_0$.

A solução do PVI

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

é :

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \quad (12.4)$$

Atividade de auto-avaliação 12.1

1. Faça os cálculos e obtenha a solução (12.4)
2. Escreva a solução $x(t)$ sob a forma

$$x(t) = A \cos (\omega t - \phi)$$

sendo A e ϕ constantes apropriadas.

Sugestão: Multiplique e divida a expressão de $x(t)$ por $\sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$.

Nota: Esta maneira de representar a solução oscilador é bastante cômoda e útil. A é chamado de *amplitude* do movimento. O período da função cosseno na expressão acima, $T = 2\pi/\omega$ é o *período do movimento*, que representa o tempo necessário para uma oscilação completa. O inverso do período é chamado de *frequência* do movimento, $f = 1/T = \omega/2\pi$. A frequência mede o número de oscilações por unidade de tempo. Finalmente, o ângulo ϕ é chamado de *ângulo de fase*.

Exemplo 12.4.

Um modelo de oscilador harmônico simples: *O Pêndulo Simples*
 Um pêndulo simples consiste de uma partícula de massa m (constante) fixada à extremidade de uma haste sem peso (ou de um fio inextensível), sendo a outra extremidade presa a um ponto fixo. Consideremos apenas os movimentos do pêndulo nos quais o sistema se move num plano vertical definido

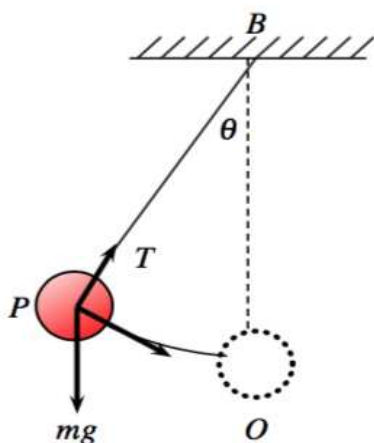


Figura 12.4: Pêndulo Simples

Na **Figura (12.4)**, B é o ponto fixo e P é a partícula, afastada de sua posição de equilíbrio O .

P se move sob a influência de duas forças: (1) o peso mg , e (2) a tensão T no fio.

Sejam

$$PB = l, \quad \widehat{OBP} = \theta;$$

então, o deslocamento da partícula, medido ao longo do perímetro do arco circular de sua trajetória, é $s = l\theta$ (lei “zero” da Trigonometria). A velocidade tangencial instantânea correspondente é $ld\theta/dt$. E a aceleração tangencial correspondente é $ld^2\theta/dt^2$. A força de retorno (que puxa a partícula para a posição de equilíbrio) é a componente tangencial da resultante das forças que atuam na massa. A projeção da tensão na tangente é nula. A projeção do peso na direção da tangente é $-mg \sin \theta$.

De acordo com a 2ª lei de Newton temos

$$\frac{mld^2\theta}{dt^2} = -mg \operatorname{sen} \theta(t)$$

Usamos agora o desenvolvimento em série de McLaurin

$$\operatorname{sen} \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} - \dots$$

e observamos que, se nos restringimos a valores de θ suficientemente pequenos, $\operatorname{sen} \theta \sim \theta$, de maneira que podemos desprezar os termos correspondentes às potências de θ maiores do que 1.

Se consideramos só o primeiro termo do desenvolvimento de $\operatorname{sen} \theta$, então a equação de movimento toma a forma

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \theta(t)$$

ou ainda

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2 \theta, \quad \omega^2 = \frac{g}{l}.$$

Atividade de auto-avaliação 12.2

O ângulo que mede o afastamento da posição de equilíbrio de uma massa m kg presa a um fio de comprimento l metros satisfaz à equação $\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$. Calcule l , sabendo que $\omega^2 = 4$. Calcule também o período do movimento. Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$

O OSCILADOR HARMÔNICO FORÇADO

Existem alguns tipos de movimentos oscilatórios cujos modelos matemáticos são obtidos fazendo pequenas modificações no modelo do oscilador simples:

Exemplo 12.5.

Se o oscilador estiver submetido a uma força resistiva proporcional à sua velocidade (p. ex. uma força de atrito) a resultante das forças na equação do movimento deve incluir a parcela referente à força resistiva:

$$m\ddot{x} = -kx - \mu\dot{x}$$

que é a equação do *oscilador harmônico amortecido*.

μ é a constante de atrito do meio em que a massa está oscilando

Exemplo 12.6.

Quando, além da força restauradora, a partícula está submetida a uma força externa, (que vamos supor para simplificar só depende do tempo), $F = F(t)$, a equação do movimento se escreve

$$m\ddot{x} = -kx + F(t)$$

chamada de equação do *oscilador harmônico forçado*.

Exemplo 12.7.

Consideremos o problema das oscilações de uma massa m presa a uma mola de constante k . Abandonado a si mesmo, o sistema massa-mola ficaria em equilíbrio numa posição y_0 unidades abaixo do comprimento da mola relaxada, conforme figura abaixo. Essa posição de equilíbrio será adotada como a posição inicial $y = 0$. Nessa posição ocorre o equilíbrio de forças $mg = -ky_0$.

Em seguida, desloca-se a massa verticalmente para uma posição diferente de $y = 0$ (sem velocidade inicial) e aplica-se uma força externa $h(t)$ vertical, de cima para baixo.

Queremos estudar a evolução do sistema com o tempo.

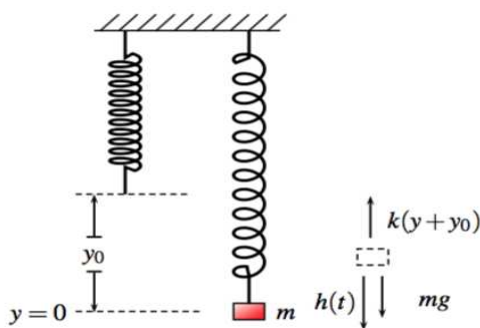


Figura 12.5: Oscilador Forçado

Acompanhando pela **Figura** (12.17), podemos montar o problema de valor inicial que traduz a situação. Temos:

$$m \frac{d^2}{dt^2}(y + y_0) = -k(y + y_0) + mg + h(t)$$

Além disso,

$$y(0) = y_0, \quad y'_0 = 0$$

Como na posição de equilíbrio temos $mg - ky_0 = 0$ então a equação do movimento se simplifica e podemos escrever que o problema de Cauchy correspondente à situação física proposta é

$$\begin{cases} m y'' + ky = h(t) \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Calculemos a solução deste problema para uma “força externa” $h(t)$ periódica.

Tomamos o modelo acima e aplica-se, no instante inicial uma força $h(t) = A \text{ sen } (\omega t)$. O problema de Cauchy se torna

$$\begin{cases} m y'' + ky = A \text{ sen } (\omega t) \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Fazendo $k/m = \omega_0^2$, a equação diferencial homogênea associada $m y'' + ky = 0$, se reescreve como $y'' + \omega_0^2 y = 0$, a qual tem para geral

$$y_H(t) = c_1 \cos (\omega_0 t) + c_2 \text{ sen } (\omega_0 t).$$

Usando agora o método dos coeficientes a determinar, procuramos uma solução particular da forma $B \cos(\omega t) + C \text{ sen}(\omega t)$. Substituindo na equação, calculamos

$$y_P(t) = \frac{A \text{ sen}(\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

supondo naturalmente que $\omega_0 \neq \omega$. Assim, a solução geral da equação do movimento é

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = c_1 \cos (\omega_0 t) + c_2 \text{ sen } (\omega_0 t) + \frac{A \text{ sen}(\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Impondo as condições iniciais, calculamos

$$c_1 = y_0 \quad \text{e} \quad c_2 = -\frac{A\omega}{\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Portanto a solução do problema é

$$y(t) = y_0 \cos(\omega_0 t) - \frac{A\omega}{\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin(\omega_0 t) + \frac{A \sin(\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (12.5)$$

desde que $\omega_0 \neq \omega$.

Se escolhermos por exemplo $y_0 = -1$, $A = 2$, $\omega_0 = 2$, $\omega = 1.5$, o gráfico da solução é

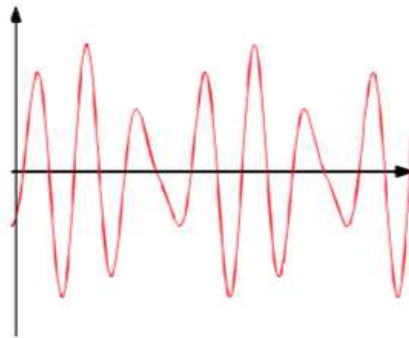



Figura 12.6: Oscilação Forçada Periódica

 Apesar de bem complicado, a **Figura (12.6)** mostra que a solução é periódica, como era de se esperar, com uma amplitude bem definida.

Para completar a análise do modelo resta estudar como são as soluções no caso $\omega_0 = \omega$, caso existam.

É razoável adotar como solução, no caso $\omega_0 = \omega$, o limite quando $\omega \rightarrow \omega_0$ das soluções $y(t)$ definidas por (12.17). Usaremos a regra de L'Hôpital. Temos:

$$y(t) = y_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{A}{\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)} [-\omega \sin(\omega_0 t) + \omega_0 \sin(\omega t)]$$

Daí


$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} y(t) = y_0 \cos(\omega_0 t) + A \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{\frac{d}{d\omega}[-\omega \sin(\omega_0 t) + \omega_0 \sin(\omega t)]}{\frac{d}{d\omega}[\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)]}.$$

Isto é,

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} y(t) = y_0 \cos(\omega_0 t) + A \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{-\sin \omega_0 t + \omega_0 t \cos \omega t}{-2\omega_0 \omega},$$

o que nos dá, finalmente,

$$y(t) = y_0 \cos(\omega_0 t) + A \frac{-\sin \omega_0 t + \omega_0 t \cos \omega_0 t}{-2\omega_0^2} \quad (12.6)$$

 Intuitivamente, a solução (12.6) pode ser interpretada como a solução obtida quando sintonizamos a frequência ω da força aplicada com a frequência ω_0 interna de vibração do sistema (i.é, aquela frequência com que o sistema massa-mola vibraria, depois de deslocado da posição de equilíbrio, se não tivesse sido aplicada nenhuma força externa).

Vejamos como seria o gráfico da solução correspondente à escolha de parâmetros $y_0 = -1$, $A = 2$, $\omega_0 = \omega = 2$ na solução (12.6):

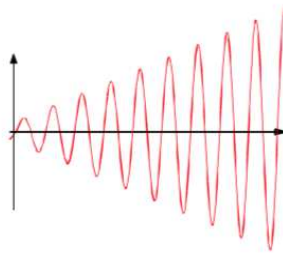


Figura 12.7: Oscilação Forçada Periódica

A **Figura** (12.7) mostra que a amplitude da solução vai aumentando à medida que o tempo passa. Eventualmente a amplitude alcança um valor tão grande que a mola não tem mais como fazer o sistema retornar, ocorrendo uma ruptura.

Este é um exemplo do fenômeno da ressonância, que faz com que os engenheiros, ao projetar um sistema que possua vibrações internas, (uma ponte por exemplo), o façam de tal modo que as eventuais frequências de forças externas (imagine uma coluna de soldados marchando sobre a ponte) nunca entrem em sintonia de ressonância. Seria um desastre!

E por falar em desastre ...

Atividade de auto-avaliação 12.3

O caso da ponte do estreito de Tacoma:

Em julho de 1940, a Ponte de Tacoma, no Estado de Washington, rompeu-se ao entrar em ressonância com rajadas do vento que soprava periodicamente na região.

Aqui, a força externa foi a força do vento. Atuando periodicamente sobre a ponte, com uma determinada frequência. Essa frequência entrou em sintonia com a frequência interna da ponte.

Que frequência interna é essa?

Faça uma pesquisa na Internet e procure mais informações sobre a ponte de Tacoma.

Sugestão: Procure links em português. Existem às dezenas.

SEGUNDO MODELO: A “RESOLUÇÃO CLÁSSICA” DE CIRCUITOS ELÉTRICOS RLC.

O fluxo de corrente em uma rede elétrica constituída de um número finito de circuitos fechados é governado pelas seguintes leis, conhecidas como leis de *Kirchhoff*

1ª Lei de Kirchhoff

A soma algébrica das correntes que entram e saem de um nó qualquer da rede é zero.

2ª Lei de Kirchhoff

A soma algébrica das aumentos (ganhos) e das diminuições (perdas) de tensão nos vários componentes elétricos de qualquer circuito fechado da rede é zero.

Vamos nos limitar às redes constituídas de um único circuito formado por uma fonte de tensão V , um resistor de resistência

constante R , um capacitor de capacitância constante C e uma bobina de indutância constante L .

As fórmulas que relacionam o fluxo de corrente i com a variação da tensão através de cada um destes componentes são:

$$V_R = iR \quad \text{para resistência,}$$

$$V_L = L \frac{di}{dt} \quad \text{para indutância,}$$

$$i = C \frac{dV_C}{dt} \quad \text{para a capacitância.}$$

Consideremos um circuito RLC simples ao qual se aplica uma tensão senoidal. Queremos determinar a intensidade da corrente elétrica que percorre o circuito em cada instante t .

Tensões senoidais: dizemos que a tensão $V(t)$ é senoidal, se tem a seguinte forma

$$V(t) = E \cos(\omega t + \phi),$$

sendo E , ω e ϕ números reais.

Observação: Significados dos parâmetros E , ω e ϕ .

Significado físico de E Conforme aprendemos no curso de Cálculo I, E é um fator que mede o valor máximo de $|V(t)|$.

E é a amplitude máxima da tensão $V(t)$.

Chamemos de T o *período* da tensão, isto é o tempo mínimo necessário para a forma $V(t)$ se repetir. Tem-se:

$$V(t + T) = V(t) \quad (12.7)$$

A *frequência* f da voltagem é o número de vezes que a forma $V(t)$ se repete em cada unidade de tempo. A relação entre o período e a frequência é dada por

Nº de repetições		tempo
1	\longrightarrow	T
f	\longrightarrow	1

Daí $1/f = T/1$, e portanto $f = 1/T$.

Usando a equação (12.7), podemos entender o significado físico de ω .

Tem-se

$$\begin{aligned} V(t+T) = V(t) &\iff E \cos [\omega(t+T) + \phi] = E \cos (\omega t + \phi) \\ &\iff E \cos (\omega t + \omega T + \phi) = E \cos (\omega t + \phi) \\ &\iff \omega T = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Como o período T é o menor número positivo, tal que a forma de onda se repete após um tempo T , devemos escolher $k = 1$. Dessa forma

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{e} \quad 2\pi f = \omega.$$

E vemos que ω é uma medida da frequência com que a tensão oscila (se repete). *Significado físico dos parâmetros ω e ϕ*

ϕ é um parâmetro que dá a medida do quanto a tensão no instante $t = 0$ é diferente da tensão máxima E .

Passemos então ao problema de determinar a corrente que percorre o circuito RLC quando aplicamos a tensão senoidal $V(t) = E \cos (\omega t + \phi)$.

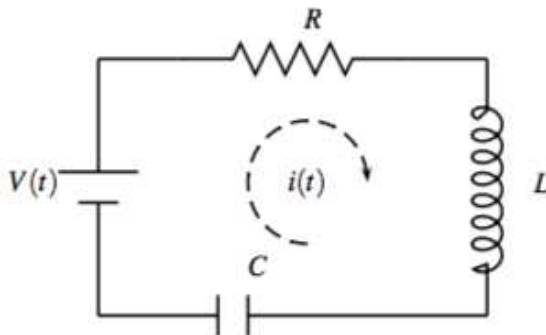


Figura 12.8: Circuito RLC

Acompanhando pela **Figura (12.8)**, temos que, usando a segunda lei de Kirchhoff, temos que a soma das quedas de tensão na resistência ($E_R = iR$), na indutância

($E_L = L \frac{di}{dt}$) e no capacitor ($E_C = \int i dt$), é igual ao aumento de tensão fornecido pela bateria ($V = E \cos(\omega t + \phi)$). Assim, a equação integro-diferencial (i.é, equação envolvendo derivadas e primitivas de uma função desconhecida) é

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = E \cos(\omega t + \phi)$$

Derivando uma vez com respeito ao tempo obtemos a equação (puramente) diferencial do modelo matemático para o circuito:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{dV}{dt}$$

Ou seja,

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = -E\omega \sin(\omega t + \phi) \quad (12.8)$$

Sabemos que a solução geral da equação (12.8) é formada pela soma da solução geral da sua equação homogênea associada com uma solução particular.

Atividade de auto-avaliação 12.4

Faça o que se pede:

(a) Calcule a equação característica da equação homogênea associada a (12.8) e mostre que suas raízes são

$$-\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

(b) Sabemos que a solução geral $i_h(t)$ de (12.8) assume diferentes formas de acordo com o sinal do número $\alpha = \left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}$.

Mostre que se $\alpha \geq 0$ então a solução da equação diferencial homogênea associada a (12.8) sempre tende a zero quando $t \rightarrow +\infty$.



Atenção!

Quando $\alpha \geq 0$, a solução geral da equação homogênea associada a (12.8) é chamada de *solução transitória*, e a corrente que persiste ao longo do tempo é uma solução particular de

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = -E\omega \sin(\omega t + \phi),$$

que é chamada de *solução de estado permanente*.

Supondo $\alpha \geq 0$, calculemos uma solução em estado permanente.

Segundo o método de coeficientes a determinar, como o termo independente é $-E\omega \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$, procuramos uma solução particular da forma

$$i(t) = A \cos(\omega t + \phi) + B \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

onde A e B são constantes a determinar.

Substituindo na equação, obtemos

$$\begin{aligned} L[-\omega^2 A \cos(\omega t + \phi_1) - \omega^2 B \operatorname{sen}(\omega t + \phi_1)] \\ &= R[-\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \phi_1) + \omega B \cos(\omega t + \phi_1)] \\ &= \frac{1}{C}[A \cos(\omega t + \phi_1) + B \operatorname{sen}(\omega t + \phi_1)] \\ &= -E\omega \operatorname{sen}(\omega t + \phi_1). \end{aligned}$$

Usando a fórmula do *cosseno da soma de dois arcos* para expandir $\cos(\omega t + \phi_1)$, e depois igualando os termos dos *senos* e *cossenos*, obtemos:

$$-\omega^2 LA + \omega RB + \frac{1}{C}A = 0$$

$$-\omega^2 LB - \omega RA + \frac{1}{C}B = -\omega E$$

Resolvendo estas equações, obtemos

$$A = \frac{RE}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}; \quad B = \frac{(\omega L - 1/\omega C)E}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

de maneira que

$$i(t) = \frac{E}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} [R \cos(\omega t + \phi_1) + (\omega L - 1/\omega C) \operatorname{sen}(\omega t + \phi_1)]$$

Observação: A corrente $i(t)$, em estado permanente, é dada por uma expressão da forma

$$A \cos \theta + B \operatorname{sen} \theta \quad (12.9)$$

Multiplicando e dividindo (12.9) por $\sqrt{A^2 + B^2}$, obtemos :

$$\sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \theta + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sen \theta \right) \quad (12.10)$$

E como

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)^2 = 1$$

podemos garantir que existe um ângulo γ tal que

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos \gamma \quad \text{e} \quad \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sen \gamma \quad (12.11)$$

Das relações (12.11) deduz-se imediatamente que

$$\gamma = \arctg \left(\frac{B}{A} \right) \quad (12.12)$$

Substituindo as relações (12.11) em (12.10) obtemos:

$$\sqrt{A^2 + B^2} (\cos \gamma \cos \theta + \sen \gamma \sen \theta) = (\sqrt{A^2 + B^2}) \cos (\theta - \gamma) \quad (12.13)$$

Podemos então reescrever $i(t)$ sob a forma

$$i(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \cos \left[\omega t + \phi - \arctg \left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \right) \right] \quad (12.14)$$

que é da forma

$$i(t) = I \cos(\omega t + \psi).$$

Conclusão: A corrente (em estado permanente) correspondente a uma voltagem senoidal é uma função senoidal, ou um sinal de Corrente Alternada (CA), de mesma frequência que a tensão alimentadora, embora a amplitude e a fase inicial sejam diferentes.

A corrente elétrica é uma função periódica.

Ela se repete.

Ela oscila.

Resumo

Nesta aula você:

- pode observar a relevância dos modelos matemáticos com equações diferenciais de ordem dois em problemas da Física;
- aprendeu, através dos exemplos dados, a noção de *problema de valor de contorno*;
- aprendeu também dois casos em que o *método de separação de variáveis*, ou *método de Fourier* permitiu transformar modelos matemáticos com equações diferenciais parciais em problemas com equações diferenciais ordinárias;
- por último, aprendeu a resolver dois importantes problemas relativos a modelos de fenômenos oscilatórios: movimentos harmônicos simples e circuitos elétricos RLC.

O QUE VEM POR AÍ:

A Aula 13 introduzirá um outro operador, a Transformada de Laplace, que, tal como os operadores diferenciais D^n , são transformações lineares entre espaços de funções. Dessa vez será um *operador integral*, muito empregado por cientistas e engenheiros de todos os matizes, em questões referentes obtenção de soluções de equações diferenciais lineares de coeficientes constantes, com termo independente descontínuo; na versão complexa, a transformada de Laplace é muito útil nos estudos de estabilidade de sistemas dinâmico causais invariantes no tempo, para mencionar apenas alguns itens.

SOLUÇÕES COMENTADAS DAS ATIVIDADES DESTA AULA:

Solução comentada da atividade 12.1

Multiplicando e dividindo (12.4) por $\sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$, obtemos:

$$\sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2}} \cos \omega t + \frac{(v_0/\omega)}{\sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2}} \sin \omega t \right) \quad (12.15)$$

E como

$$\left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2}} \right)^2 + \left(\frac{(v_0/\omega)}{\sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2}} \right)^2 = 1$$

podemos garantir que existe um ângulo θ tal que

$$\cos \theta = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2}} \quad \text{e} \quad \sin \theta = \frac{(v_0/\omega)}{\sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2}} \quad (12.16)$$

Das relações (12.4) deduz-se imediatamente que

$$\theta = \arctg \left(\frac{(v_0/\omega)}{x_0} \right) \quad (12.17)$$

Substituindo as relações (12.4) em (12.3) chegamos a:

$$\begin{aligned} & \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2} (\cos \theta \cos \omega t + \sin \theta \sin \omega t) \\ &= \left[\sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2} \right] \cos (\omega t - \theta) \end{aligned}$$

sendo, obviamente $\theta = \arctg \left(\frac{(v_0/\omega)}{x_0} \right)$.

Solução comentada da atividade 12.2

Como vimos ao estudar o modelo do pêndulo simples, $\omega = \sqrt{g/l}$, de modo que $4 = 10/l$, de onde imediatamente $l = 2,5$ metros.

E como o período T é igual a $2\pi/\omega$, obtemos $T = 2\pi/2 = \pi$ segundos.

Solução comentada da atividade 12.3

(a). A equação homogênea associada a (12.8) é

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0,$$

ou

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0;$$

e então a equação característica pedida é $x^2 + \frac{R}{L}x + \frac{1}{LC} = 0$.

O discriminante da equação característica é

$$\Delta = \frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}.$$

Logo as raízes da equação característica são dadas por

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}} \right).$$

(b) A solução geral da equação homogênea correspondente ao caso $\alpha > 0$ é

$$i_h(t) = c_1 e^{(-\frac{R}{2L} - \sqrt{\alpha})t} + c_2 e^{(-\frac{R}{2L} + \sqrt{\alpha})t},$$

E como $L > 0$, $C > 0$ então $\frac{-1}{LC} < 0$.

Adicionando $\frac{R^2}{4L^2}$ aos dois lados, concluímos que $\alpha < \frac{R}{2L}$. Portanto $-\frac{R}{2L} + \sqrt{\alpha} < 0$.

Você conclui então que a segunda parcela de $i_h(t)$ tende a zero quando $t \rightarrow +\infty$.

Quanto à primeira parcela, basta observar que ela é igual a

$$e^{-\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\alpha}\right)t}.$$

E como $\frac{R}{2L} + \sqrt{\alpha} > 0$ então a primeira parcela de $i_h(t)$ também tende a zero.

Conclusão:

$$\text{Se } \alpha > 0 \text{ então } \lim_{t \rightarrow +\infty} i_h(t) = 0.$$

Nota: A demonstração de que $i_h(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$ para o caso $\alpha = 0$ fica como exercício para você fazer .

Aula 13



TRANSFORMADA DE LAPLACE

Objetivos

Ao final desta aula, você será capaz de:

- 1 definir e calcular a transformada de Laplace de funções elementares;
- 2 identificar, e aplicar, as principais propriedades da transformada de Laplace aos cálculos de transformadas de Laplace e de suas inversas;
- 3 definir o produto de convolução e aplicá-lo ao cálculo de transformadas de Laplace;
- 4 obter soluções de de PVIs com equações diferenciais lineares de coeficientes constantes com o auxílio da transformada de Laplace;
- 5 aplicar o método das transformadas de Laplace a equações diferenciais lineares com segundo membro descontínuo.

INTRODUÇÃO

A Transformada de Laplace é uma das ferramentas mais importantes para cientistas e engenheiros. Ela é um poderoso auxiliar na solução de equações diferenciais lineares, e, usando o jargão técnico, utilizá-la na análise de sinais e sistemas lineares invariantes no tempo, contínuos.


DEFINIÇÕES E PRIMEIRAS PROPRIEDADES


Definição 13.1 (A Transformada de Laplace).


A transformada de Laplace de uma função $f(t)$ de $[0, +\infty)$ em \mathbb{R} é definida por

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

sendo s um parâmetro real.

 **Obs:** A variável t será sistematicamente considerada como sendo o *tempo*. O parâmetro s , no contexto apropriado, pode ser interpretado como uma *frequência*.


 **Obs:** Por definição $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt$

 É comum escrever $F(s)$ para a transformada de Laplace de $f(t)$, em vez de $\mathcal{L}[f(t)](s)$. Outra prática usual é a de utilizar letras minúsculas para funções do tempo, t , e usar a mesma letra minúscula, com acento circunflexo. Também usaremos indistintamente $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ em vez de $\mathcal{L}[f(t)](s)$.

A simbologia

$$x(t) \longleftrightarrow X(s)$$

também é empregada para expressar que $X(s)$ é a transformada de Laplace de $x(t)$; e o uso da seta de dois sentidos sugere que $x(t)$ pode ser calculada a partir do conhecimento de sua transformada transformada de Laplace $X(s)$. Voltaremos a esse ponto posteriormente.

 Para garantir que a transformada de Laplace de uma função f existe, precisamos impor algumas condições: .



Atenção!

As condições são:

- $f(t)$ é **seccionalmente contínua** em $[0, +\infty)$, i.é, $f(t)$ é contínua por partes em cada intervalo fechado e limitado $[a, b] \subset [0, +\infty)$; o que significa que $f(t)$ é contínua exceto possivelmente num número finito de pontos deste intervalo e se em cada ponto de descontinuidade $x_j \in [a, b]$ os limites laterais existem (i. é são finitos).


Obs: Se f é contínua por partes num intervalo limitado $[a, b]$ então existe $\int_a^b f(t) dt$. Se $f(t)$ é seccionalmente contínua em $[0, +\infty)$ então $e^{-st}f(t)$ também é seccionalmente contínua em $[0, +\infty)$

(dessa forma fica garantido que existe a integral de $e^{-st}f(t)$ sobre qualquer intervalo $[0, b]$)

- f é **de ordem exponencial** em $[0, +\infty)$; isto é, se existem constantes $K > 0$, e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que

$$\forall t > 0 \quad |f(t)| < K e^{\alpha t}$$

Obs: Esta última condição garante que a integral imprópria de $e^{-st}f(t)$ sobre o intervalo $[0, +\infty)$ converge.

 **Nota:** Lembre que toda função contínua em $[0, +\infty)$ é seccionalmente contínua em $[0, +\infty)$.

Definição 13.2.

Se $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é seccionalmente contínua e *de ordem exponencial* em $[0, +\infty)$, diz-se que f é uma *função admissível (para transformadas de Laplace)*, ou simplesmente *admissível* em $[0, +\infty)$.



Atenção!

O número α da definição de função admissível não deve ser confundido com um outro parâmetro, que definiremos no teorema a seguir, a partir do qual definimos o domínio da transformada de Laplace de $F(s)$. Não esqueça que o domínio de F é um conjunto de números s , que, a princípio, não tem nada a ver com o domínio $[0, +\infty)$ de $f(t)$.



Obs: Mais precisamente, a abscissa de convergência s_0 de uma transformada de Laplace $F(s)$ é o ínfimo dos parâmetros σ (no “mundo” das transformadas) tais que a transformada está definida para $s \in [\sigma, +\infty)$. Ela pode ser nula, ou até $-\infty$. Para não nos desviarmos do foco principal, o cálculo das funções transformadas de Laplace, não vamos nos alongar em maiores detalhes; apesar de sua evidente importância conceitual. Para simplificar, vamos representar a abscissa de convergência pela letra σ , sem o subscrito 0.

O teorema 13.1 a seguir, cuja demonstração omitimos, sintetiza a questão:

Teorema 13.1.

Se f é uma função contínua por partes, de ordem exponencial, existe um número real σ tal que

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

converge para todos os valores de $s > \sigma$.

A integral diverge se $s < \sigma$ e, em geral, nada se pode afirmar quando $s = \sigma$.



Atenção!

Uma observação geral a respeito dos cálculos.

Ao efetuar cálculos nos exemplos e atividades você pode obter respostas diferentes das apresentadas no texto. Nesses casos, em geral ocorre uma das duas situações seguintes:

- as duas expressões são equivalentes. Vale verificar as contas, sozinha(o), com um colega, com o tutor, etc.;
- realmente as duas expressões não se reduzem uma à outra. Aí então é preciso verificar quem cometeu algum engano.

O segundo caso, *do ponto de vista teórico, ou de avaliação de métodos empregados*, não costuma ser considerado muito grave. Porém *se o resultado influencia decisivamente conclusões e avaliações posteriores*, como num laboratório ou num escritório de engenharia, aí a questão é muito relevante e tem de ser corrigida. Além disso, hoje em dia dispõe-se de calculadoras e programas de computadores que resolvem essas diferenças com bastante eficiência.

Exemplo 13.1.

As restrições das funções $f(t) = a$ (constante), $f(t) = \cos \omega t$, $f(t) = e^{at}$ ao intervalo $[0, +\infty)$ são funções de ordem exponencial em $[0, +\infty)$.

Solução: Com efeito, as três funções são contínuas em $[0, +\infty)$.

- Seja $f(t) = a$. Se $a = 0$, considere $K = 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ qualquer. Para $f(t) = a \neq 0$, tome, $K = |a|$ e $\alpha = 1$. Tem-se

$$\forall t > 0, |f(t)| < |a| \cdot e^{1 \cdot t}$$

- Seja $f(t) = \cos \omega t$. Escolha $K = \alpha = 1$. Temos :

$$\forall t > 0, |f(t)| = |\cos \omega t| < 1 \cdot e^{1 \cdot t}$$

- Seja $f(t) = e^{at}$. Escolha $K = 1$ e $\alpha = a$. Temos :

$$\forall t > 0, |f(t)| = |e^{at}| = e^{at} < 2 \cdot e^{at}.$$

CÁLCULOS DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE DE ALGUMAS FUNÇÕES ELEMENTARES

Exemplo 13.2.

1. Seja $f(t) = 1$ para $t \in [0; +\infty)$

$$\begin{aligned}\hat{f}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot 1 \, dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-st} \, dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{s} (1 - e^{-sb}) \\ &= \frac{1}{s} - \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{bs}} = \frac{1}{s}, \text{ se } s > 0\end{aligned}$$

(Se $s < 0$ então $\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{bs}}$ não existe.)

Assim

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s} \quad \text{com abcissa de convergência } \sigma = 0$$

2. Seja $f(t) = e^{at}$ para $t \in [0; +\infty)$ e $a \in \mathbb{R}$ (*repare que a pode ser negativo*)

$$\hat{f}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot e^{at} \, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t(s-a)} \, dt$$

Fazendo $c = s - a$ e usando o exemplo anterior :

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{c} \quad \text{convergente para } c > 0$$

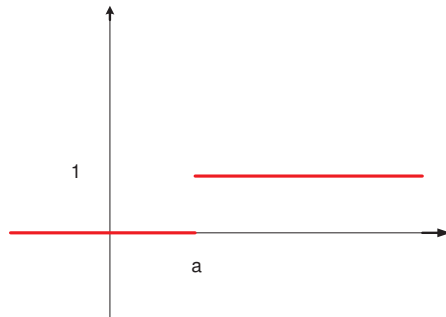
o que nos dá

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a} \quad \text{com abcissa de convergência } \sigma = a$$

3. Para cada $a \in \mathbb{R}$, definamos

$$u_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq a \\ 1, & \text{se } t > a \end{cases}$$

$u_a(t)$ é a função degrau unitário no ponto a



Nota: Por convenção, $u(t)$ (sem índice) representa a função $u_0(t)$.

Exemplo 13.3.

Calcule $\mathcal{L}[u_a(t)]$.


Solução:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[u_a] &= \int_0^{\infty} e^{-st} u_a(t) dt \\
 &= \int_a^{+\infty} e^{-st} dt \\
 &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{-st} dt \\
 &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-sa}}{s} - \frac{e^{-sb}}{s} \right) \\
 &= \frac{e^{-sa}}{s} \quad \text{se } s > 0.
 \end{aligned}$$

(Se $s < 0$ então $\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{bs}}$ não existe.)

Em particular,

$$\mathcal{L}\{u(t)\}(s) = \frac{1}{s} \quad \text{com abscissa de convergência } \sigma = 0$$

 Se $g(t)$ uma função real de variável real. Seja $a \in \text{domínio de } g(t)$. A função

$$u_a(t) \cdot g(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq a \\ g(t-a), & \text{se } t > a \end{cases}$$

descreve a função que se obtém quando deslocamos $g(t)$ “ a ” unidades para a direita, e depois anular a porção à esquerda de a .

Em particular, se a função f está definida num intervalo contendo $[0, +\infty)$, ao calcular sua transformada de Laplace, caso exista, é muito comum omitir a função degrau e escrever abusivamente $\mathcal{L}[f(t)]$ em vez de $\mathcal{L}[u(t)f(t)]$.

Por exemplo, escrevemos

$$\mathcal{L}[\mathbf{1}] = \frac{1}{s}, \quad s > 0,$$

em vez de

$$\mathcal{L}[u_0 \cdot \mathbf{1}] = \frac{1}{s}, \quad s > 0.$$



Atenção!

- Para $a < b$, $(u_a - u_b)(t)$ é a função constante igual a 1 para t pertencente ao intervalo $[a, b]$; e vale zero em outro caso.

Verifique esse fato desenhando algumas figuras.

É bem comum chamar a função $(u_a - u_b)(t)$ de **função porta de largura $b - a$ e altura 1**.

- Verifique também que multiplicar uma função $f(t)$, cujo domínio contém o número a , pela função $u_a(t)$ é o mesmo que criar uma função que é igual a zero, nos pontos à esquerda de a ; e igual a $f(t)$ nos pontos à direita de a .

- E tome cuidado! $u_a(t) \cdot f(t) \neq f(t) \Big|_{[a, +\infty)}$.

$$\mathcal{L}\{\sin t\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} \sin t \, dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \sin t \, dt$$

Integrando por partes:

$$\int_0^b e^{-st} \sin t \, dt = \frac{e^{-sb} \cos b - s e^{-sb} \sin b}{1 + s^2} + \frac{1}{s^2 + 1}$$

De modo que

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \sin t \, dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{e^{-sb} \cos b - s e^{-sb} \sin b}{1 + s^2} + \frac{1}{s^2 + 1} =$$

Note que o limite existe se e só se $s > 0$

$$= s \frac{1}{s^2 + 1} \quad \text{para } s > 0.$$

 Um raciocínio semelhante mostra que

$$\mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad s > 0.$$

Encaminhamento: Na sequência vamos estudar algumas propriedades que são muito úteis nos cálculos de transformadas de Laplace de funções elementares.

PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

LINEARIDADE DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Nota: Designemos por \mathcal{E} o conjunto de todas as funções de $[0; +\infty)$ para \mathbb{R} que são admissíveis, no sentido da definição (13.2).

Tem-se:

- (i) \mathcal{E} é um espaço vetorial.
- (ii) o conjunto \mathcal{F} de todas as funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} é, (como sabemos desde a Aula 9, pelo menos), um espaço vetorial.

$$\mathcal{L} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$$

é uma transformação linear. Isto é, $\forall x(t), y(t) \in \mathcal{E}$,

$$\mathcal{L}\{x(t) + y(t)\}(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s) + \mathcal{L}\{y(t)\}(s).$$

Em termos de diagramas: $\forall x(t), y(t) \in \mathcal{E}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

Se

$$x(t) \longleftrightarrow X(s)$$

e

$$y(t) \longleftrightarrow Y(s)$$

então

$$ax(t) + by(t) \longleftrightarrow aX(s) + bY(s).$$

Isto é, vale um *princípio de superposição finita*.

Exemplo 13.4.

Calcule $\mathcal{L}\{2e^t - 6\cos(\pi t) + 4\}(s)$

Solução:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{2e^t - 6\cos(\pi t) + 4\}(s) &= 2\mathcal{L}\{e^t\}(s) - 6\mathcal{L}\{\cos(\pi t)\}(s) + \mathcal{L}\{4\}(s) \\ &= \frac{1}{s-1} - 6\frac{\pi}{1+s^2} + 4\frac{1}{s}.\end{aligned}$$

Exemplo 13.5.

Calcular as transformadas de Laplace das funções admissíveis (para transformadas de Laplace), $f(t) = \sinh at$ e $g(t) = \cosh at$.

Solução:

$$\sinh at = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$$

Como e^{at} e e^{-at} são de ordem exponencial e o conjunto das funções de ordem exponencial é um espaço vetorial segue-se imediatamente que $\sinh at$ e $\cosh at$ são de ordem exponencial, pois são combinações lineares de e^{at} e e^{-at} .

Além disso, como \mathcal{L} é linear, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sinh at] &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right] = \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{at}] - \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-at}] = \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{s-a} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+a} = \frac{1}{2}\frac{s+a - (s-a)}{s^2 - a^2} = \frac{a}{s^2 - a^2}\end{aligned}$$

Analogamente

$$\mathcal{L}[\cosh at] = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

TRANSFORMADAS DE LAPLACE E DERIVADAS

O comportamento das transformadas de Laplace com relação às derivadas é estabelecido no seguinte teorema:

Teorema 13.2.

Seja f contínua em $[0, +\infty)$.

(a) Se f' é admissível em $[0, +\infty)$ então

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0).$$

(b) Se f' é contínua em $[0, +\infty)$ e f'' é de ordem exponencial em $[0, +\infty)$ então

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2 \mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0)$$

Demonstração

Provaremos o item (a). (a demonstração do item (b) é análoga).

$\mathcal{L}[f'(t)]$ existe pois $f'(t)$ é admissível.

Temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} [f'(t)] dt \\ &\quad \left[\begin{array}{ll} u = e^{-st} & du = -s e^{-st} dt \\ dv = f'(t) dt & v = f(t) \end{array} \right] \\ &= e^{-st} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-st} [f(t)] dt \\ &= -e^{s \cdot 0} f(0) + s \int_0^{+\infty} e^{-st} [f(t)] dt \\ &\quad [\text{pois o "valor" de } e^{-st} \text{ em } +\infty \text{ é } 0, \text{ porque } f \text{ é de ordem exponencial.}] \\ &= s \int_0^{+\infty} e^{-st} [f(t)] dt - f(0) \\ &= s\mathcal{L}[f(t)] - f(0). \end{aligned}$$

Corolário 13.3.

Se $f^{(n-1)}$ é contínua em $[0, +\infty)$ e $f^{(n)}$ é de ordem exponencial em $[0, +\infty)$ então


$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \mathcal{L}[f(t)] - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

Obs: Omitiremos a demonstração (que pode ser feita por indução finita sobre n).

Obs: Em termos de diagramas de setas:

$$\text{Se } f(t) \longleftrightarrow F(s)$$

$$\text{então } f^{(n)}(t) \longleftrightarrow s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$$

 Assim, as transformadas de Laplace das derivadas de f , caso existam, se reduzem à transformada de f . Nesse sentido \mathcal{L} “destrói” (ou “ignora”) derivadas.

Exemplo 13.6.

Assumindo que as derivadas da função $y(t)$ são funções admissíveis,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[3y'' - 2y' + y] &= 3\mathcal{L}[y''] - 2\mathcal{L}[y'] + \mathcal{L}[y] \\ &= 3(s^2 \mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0)) - 2(s\mathcal{L}[y] - y(0)) + \mathcal{L}[y] \\ &= (3s^2 - 2s + 1)\mathcal{L}[y] - (3s - 2)y(0) - 3y'(0) \end{aligned}$$

Exemplo 13.7.

Calcule $\mathcal{L}\{\cos at\}$ usando $\mathcal{L}\{\sin at\}$.

Solução:

Seja $f(t) = \sin at$, então $f'(t) = a \cos at$.

Isso nos dá $\mathcal{L}\{f'(t)\} = a\mathcal{L}\{\cos at\}$,

Daí,

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{1}{a}\mathcal{L}\{f'(t)\} = \frac{1}{a}\mathcal{L}\{\sin' at\}$$

então, pelo teorema (13.2),

$$= \mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{1}{a} \cdot s\mathcal{L}\{\sin at\} - \sin(0).$$

E como

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2},$$

então

$$\mathcal{L}[\cos at] = s \cdot \frac{1}{a} \left(\frac{a}{s^2 + a^2} \right) - \sin(0);$$

isto é

$$\mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2}.$$

Atividade de auto-avaliação 13.1

Prove que

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Sugestão: Vale que $\forall n = 0, 1, 2, \dots \quad \frac{d^n}{dt^n}(t^n) = n!$

Podemos formar uma tabela provisória com as transformadas de Laplace que calculamos até agora:

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$	$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$
$u_a(t)$	e^{-sa}/s	t^n	$n!/s^{n+1}$
e^{at}	$1/(s-a)$	-	-
$\cos at$	$s/(s^2 + a^2)$	$\sin at$	$a/(s^2 + a^2)$
$\cosh at$	$s/(s^2 - a^2)$	$\sinh at$	$a/(s^2 - a^2)$

INVERSÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Teorema 13.4.

Se $f(t)$ e $g(t)$ são seccionalmente contínuas e de ordem exponencial em $[0, +\infty)$ e se

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}[g(t)](s),$$

então $f(t) = g(t)$ (exceto possivelmente em pontos de descontinuidade)

CÁLCULO DA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE POR INSPEÇÃO:

Segue do teorema (13.4) que, se reconhecermos uma função $F(s)$ como a transformada de Laplace da função $f(t)$ então poderemos afirmar que $F(s)$ provém de $f(t)$; ou que $f(t)$ é a transformada de Laplace inversa de $F(s)$.

Um método prático para a obtenção das transformadas inversas de Laplace é a utilização de uma tabela. Algumas vezes é preciso “manipular” a função $F(s)$ dada até que ela assuma a forma da transformada de uma função conhecida. Suponha que a transformada de Laplace, $F(s)$, de um sinal $f(t)$, pode ser decomposta num número finito de funções

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \dots + F_n(s).$$

Se soubermos calcular as transformadas inversas de Laplace da cada parcela,

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)], f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)], \dots, f_n(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_n(s)],$$

então

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \\ &= \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] + \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)] + \dots + \mathcal{L}^{-1}[F_n(s)] \\ &= f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t) \end{aligned}$$

Exemplo 13.8.

Calcule $y(t)$ sabendo que sua transformada de Laplace é

$$\mathcal{L}[y] = \frac{s+1}{s(s^2-1)}$$

.

Solução: Observe que

$$\frac{s+1}{s(s^2-1)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$$

$$\therefore \mathcal{L}[y] = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$$

E como sabemos que $\frac{1}{s-a} = \mathcal{L}[e^{at}]$ e $\frac{1}{s} = \mathcal{L}[1]$ concluímos que

$$\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[e^t] - \mathcal{L}[1] = \mathcal{L}[e^t - 1]$$

Daí por inspeção, ou melhor, pelo teorema de Lerch, concluímos que

$$y = e^t - 1$$

TEOREMAS DE DESLOCAMENTO

Os *teoremas de deslocamento* são resultados muito úteis para cálculos de transformadas de Laplace ou de transformadas de Laplace inversas.

Teorema 13.5 (Primeiro Teorema do Deslocamento (deslocamento na variável s)).

$$\text{Se } \mathcal{L}[f(t)] = F(s) \quad \text{então} \quad \mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a);$$

ou, em termos de diagramas:

$$\begin{aligned} f(t) &\longleftrightarrow F(s) \\ e^{at} f(t) &\longleftrightarrow F(s-a) \end{aligned}$$

Demonstração

Segue diretamente da definição de transformada de Laplace. Com efeito,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{at} f(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{at} f(t) dt = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt \stackrel{\text{def}}{=} F(s-a). \end{aligned}$$


Exemplo 13.9.

Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s+3}{s^2-4s+20}\right].$

Solução:

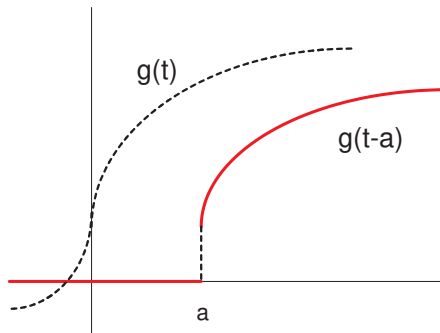
$$\begin{aligned}
\frac{2s+3}{s^2-4s+20} &= \frac{2s+3}{(s-2)^2+16} \\
&= \frac{2s-4+4+3}{(s-2)^2+16} \\
&= \frac{2(s-2)+7}{(s-2)^2+16} \\
&= 2\left(\frac{(s-2)}{(s-2)^2+16}\right) + \frac{7}{4}\left(\frac{4}{(s-2)^2+16}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s+3}{s^2-4s+20}\right] &= 2 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s-2)}{(s-2)^2+16}\right] + \\
&+ \frac{7}{4} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{(s-2)^2+16}\right] = \\
&= 2 e^{2t} \cos 4t + \frac{7}{4} e^{2t} \sin 4t.
\end{aligned}$$

 Seja $g(t)$ uma função real de variável real. Seja $a \in \mathbb{R}$. A função

$$u_a(t) \cdot g(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq a \\ g(t-a), & \text{se } t > a \end{cases}$$

descreve a função que se obtém ao deslocar $g(t)$ a unidades para a direita, e depois anulando a porção à esquerda de a .



Teorema 13.6 (Segundo Teorema do deslocamento (deslocamento na variável t)).

Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ então

$$\mathcal{L}[u_a(t) \cdot f(t-a)] = e^{-sa} \mathcal{L}[f(t)];$$

ou, em termos de diagramas:

$$f(t) \quad \longleftrightarrow \quad F(s)$$

$$u_a(t) \cdot f(t-a) \quad \longleftrightarrow \quad e^{-sa} F(s)$$

Demonstração

Seja

$$g(t) = u_a(t) f(t-a).$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[g] &= \int_0^{\infty} e^{-st} u_a(t) f(t-a) dt \\ &= \int_a^{+\infty} e^{-st} f(t-a) dt \\ &\quad (\text{fazendo } x = t-a), \\ &= \int_0^{\infty} e^{-s(x+a)} f(x) dx \\ &= e^{-sa} \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \\ &= e^{-sa} \mathcal{L}[f]. \end{aligned}$$

Exemplo 13.10.

Calcule $\mathcal{L}[f(t)]$, sendo

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 2 \\ (t-2)^2, & \text{se } t \geq 2 \end{cases}$$

Solução:

Observe que $f(t)$ pode ser escrita como

$$f(t) = u_2(t)(t-2).$$

Sendo $g(t) = t^2$, $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[u_2(t)g(t-2)]$.

Usando o segundo teorema de deslocamento, podemos afirmar que $\mathcal{L}[f(t)] = e^{-2s}\mathcal{L}[t^2]$.

E como $\mathcal{L}[t^2] = \frac{2!}{s^3}$, segue-se que

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{2e^{-2s}}{s^3}.$$

Exemplo 13.11.

Calcule $\mathcal{L}[u_a(t)\text{sen } t]$.

Solução:

$$u_a(t)\text{sen } t = u_a(t)\text{sen } (t+a-a)$$

portanto

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[u_a(t)\text{sen } t] &= \mathcal{L}[u_a(t)\text{sen } (t+a-a)] \\ &= e^{-sa}\mathcal{L}[\text{sen}(t+a)] \\ &= e^{-sa}\mathcal{L}[\text{sen } t \cos a + \text{sen } a \cos t] \\ &= e^{-sa}(\cos a \mathcal{L}[\text{sen } t] + \text{sen } a \mathcal{L}[\cos t]) \\ &= e^{-sa} \text{sen } a \frac{s}{s^2+1} + e^{-sa} \cos a \frac{1}{s^2+1} \\ &= \frac{e^{-sa}(\cos a + s \text{sen } a)}{s^2+1}.\end{aligned}$$

Exemplo 13.12.

$$\text{Calcule } \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-3s}}{s^2+6s+10}\right].$$

Solução: Temos:

$$\frac{e^{-3s}}{s^2+6s+10} = e^{-3s} \cdot \frac{1}{s^2+6s+10}.$$

Então, aplicando o segundo teorema do deslocamento,

$$\frac{e^{-3s}}{s^2+6s+10} = \mathcal{L}[u_3(t)g(t-3)]$$

sendo $g(t)$ tal que $\mathcal{L}[g(t)] = \frac{1}{s^2 + 6s + 10}$.

Ora

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 6s + 10}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+3)^2 + 1}\right] \\ &= e^{-3t} \text{sen } t \quad (\text{pelo 1}^{\text{o}} \text{ teo. do deslocamento})\end{aligned}$$

Portanto

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-3s}}{s^2 + 6s + 10}\right] = u_3(t)e^{-(t-3)} \text{sen } (t-3).$$

Atividade de auto-avaliação 13.2

Utilizando o primeiro teorema do deslocamento e a linearidade de \mathcal{L} (e consequentemente a linearidade de \mathcal{L}^{-1}), calcule $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5s+3}{(s+2)^2}\right]$.

CÁLCULO DA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE POR FRAÇÕES PARCIAIS

Nas aplicações, frequentemente precisamos calcular transformadas inversas de Laplace de funções da forma

$$R(s) = \frac{p(s)}{q(s)},$$

onde $p(s)$ e $q(s)$ são funções polinomiais em s . Tais funções são chamadas de *funções racionais*.

Toda função racional pode ser escrita como uma soma de

- a) um polinômio;
- b) funções da forma $A/(s-a)^m$;
- c) funções da forma

$$\frac{As+B}{(s^2+2bs+c)^n}$$

sendo $s^2 + 2bs + c$ uma *forma quadrática irredutível*;

isto significa que $s^2 + 2bs + c$ não pode ser fatorado como um

produto de duas funções de primeiro grau com coeficientes reais. Isto também é equivalente a dizer que a equação

$$s^2 + 2bs + c = 0$$

não tem raízes reais; ou ainda que $b^2 < c$.

Temos:

Fatores do primeiro grau:

Cada polinômio do tipo $(s - a)^m$ da fatoração denominador dá origem a m parcelas

$$\frac{a_1}{s - a} + \frac{a_2}{(s - a)^2} + \cdots + \frac{a_m}{(s - a)^m}.$$

Os números a_1, a_2, \dots, a_m dos numeradores são constantes a determinar.

Exemplo 13.13.

Suponha que um dos fatores da *decomposição em fatores do denominador* $q(s)$ é potência $(s - 4)^3$. Isto é

$$R(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{p(s)}{(s - 4)^3 \cdot (\text{outros fatores})}.$$

Então ao fator $(s - 4)^3$ correspondem *três* fatores na decomposição de $R(s)$ em frações parciais. Quer dizer, podemos garantir que a decomposição em frações parciais de $R(s)$ é da forma

$$\frac{A_1}{(s - 4)} + \frac{A_2}{(s - 4)^2} + \frac{A_3}{(s - 4)^3} + \cdots$$

Suponha agora que a *decomposição em fatores do denominador* $q(s)$ de $R(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ é da forma

$$q(s) = (s - 4)^3 \cdot (s + 1)^2 \cdot (\text{outros fatores}).$$

Agora podemos garantir que a decomposição em frações parciais de $R(s)$ é da forma

$$\frac{A_1}{(s - 4)} + \frac{A_2}{(s - 4)^2} + \frac{C_1}{(s - 4)^3} + \frac{B_1}{(s + 1)} + \frac{B_2}{(s + 1)^2} + \cdots$$

Prosseguimos assim até esgotar todos os fatores da decomposição de $q(s)$. Ou seja, se o denominador $q(s)$ de $R(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ é da forma

$$q(s) = (s - a_1)^{n_1} \cdot (s - a_2)^{n_2} \cdots (s - a_p)^{n_p},$$

Então podemos garantir que a decomposição em frações parciais de $R(s)$ é da forma

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{(s - a_1)} + \cdots + \frac{A_{n_1}}{(s - a_1)^{n_1}} + \frac{A_2}{(s - a_2)} + \cdots + \frac{A_{n_2}}{(s - a_2)^{n_2}} + \cdots + \\ + \frac{A_p}{(s - a_p)} + \cdots + \frac{A_{n_p}}{(s - a_p)^{n_p}}. \end{aligned}$$

Fatores irredutíveis do segundo grau:

Suponha que o denominador $q(s)$ de uma função racional $R(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ se decompõe em potências de *fatores irredutíveis do segundo grau* do tipo $X = s^2 + 2bs + c$ com $b^2 - c < 0$.

Cada fator do denominador da forma $X^n = (s^2 + 2bs + c)^n$, dá origem a m parcelas da forma

$$\frac{A_1s + B_1}{X} + \frac{A_2s + B_2}{X^2} + \cdots + \frac{A_ns + B}{X^n}.$$

Os números A_k e B_k ($1 \leq k \leq n$) são constantes a determinar.

Este caso é análogo ao anterior. Vejamos um exemplo:

Exemplo 13.14.

Fazer a expansão da função racional

$$R(s) = \frac{s^2 - 3s + 7}{(s^2 + 1)^2}$$

em frações parciais.

Solução:

Neste exemplo $X = s^2 + 1$ e $n = 2$.

Tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{s^2 - 3s + 7}{(s^2 + 1)^2} &= \frac{As + B}{s^2 + 1} + \frac{Cs + D}{(s^2 + 1)^2} \\
&= \frac{(As + B)(s^2 + 1) + Cs + D}{(s^2 + 1)^2} \\
&= \frac{As^3 + Bs^2 + (A + C)s + D}{(s^2 + 1)^2}.
\end{aligned}$$

Igualando os coeficientes das potências de s nos numeradores:

$$\begin{cases} A = 0; \\ B = 1; \\ A + C = -3; \\ B + D = 7; \end{cases}$$

Portanto $A = 0$, $B = 1$, $C = -3$, $D = 6$ e então

$$R(t) = \frac{s^2 - 3s + 7}{(s^2 + 1)^2} = \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{-3s + 6}{(s^2 + 1)^2}$$

Fatores do primeiro grau e do segundo grau:

Aqui basta compor os dois casos anteriores. Vejamos um exemplo:

Exemplo 13.15.

$$F(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{5s + 3}{(s + 1)^2(s^2 + 2)} \quad (13.1)$$

Solução:

$$F(s) = \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{(s + 1)^2} + \frac{Cs + D}{(s^2 + 2)} \quad (13.2)$$

Agora efetuamos a soma das frações do lado direito de (13.2), e depois igualamos os coeficientes do polinômio resultante no numerador da função racional resultante com os respectivos coeficientes de $p(s)$ no lado direito de (13.1).

Obtemos:

$$\frac{A}{s + 1} + \frac{B}{(s + 1)^2} + \frac{Cs + D}{(s^2 + 2)} =$$

$$= \frac{(A+C)s^3 + (A+B+2C+D)s^2 + (2A+B+2D)s + 2A+2B+D}{(s+1)^2(s^2+2)}$$

Igualando os coeficientes das potências correspondentes de s nos numeradores de (13.1) e do lado direito da última igualdade acima obtemos o sistema

$$\begin{cases} A+C=0 \\ A+B+2C+D=0 \\ 2A+B+2D=5 \\ 2A+2B+D=3; \end{cases}$$

cujas solução é

$$A=5, B=-14, C=-5, D=19.$$

Portanto

$$\frac{5s+3}{(s+1)(s^2+2)} = \frac{5}{s+1} + \frac{-14}{(s+1)^2} + \frac{-5s+19}{(s^2+2)}.$$

O PRODUTO DE CONVOLUÇÃO

Dada o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} f(t) & \longleftrightarrow & F(s) \\ g(t) & \longleftrightarrow & G(s) \\ & \Downarrow & \\ \dots & \longleftrightarrow & F(s).G(s), \end{array}$$

consideramos o seguinte problema: *podemos completar o diagrama anterior escrevendo simplesmente $f(t) \cdot g(t)$ na linha pontilhada?*

$$\begin{array}{ccc}
 f(t) & \longleftrightarrow & F(s) \\
 g(t) & \longleftrightarrow & G(s) \\
 & \Downarrow & \\
 f(t) \cdot g(t) & \longleftrightarrow & F(s) \cdot G(s)?
 \end{array}$$

Vejamos um exemplo:

Exemplo 13.16.

Sabemos que $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$.

Também $\mathcal{L}[\sin t] = 1/(s^2 + 1)$.

Então como *não* é verdade que $\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1+s^2} = \mathcal{L}[1 \cdot \sin t]$, não podemos completar o diagrama simplesmente escrevendo $f(t) \cdot d(t)$. na lacuna pontilhada.

Entretanto, insistindo na questão, investiguemos se é possível determinar *alguma* função $h(t)$ tal que

$$\mathcal{L}[h(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \cdot \mathcal{L}[g(t)]$$

Afinal o procedimento acima parece muito mais simples do que a decomposição em frações parciais que resultaria ao calcular $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(s^2 + 1)} \right]$.

Então reformulamos o problema,

Dadas duas funções f, g de ordem exponencial em $[0, +\infty)$, determinar h , também de ordem exponencial em $[0, +\infty)$ tal que

$$\mathcal{L}[h(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \cdot \mathcal{L}[g(t)]$$

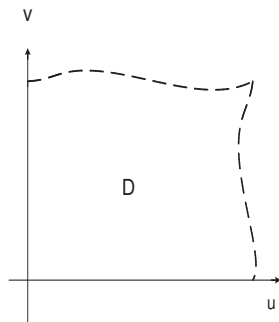
Suponhamos que uma tal h exista. Devemos ter

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[h(t)] &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-su} f(u) du \right) \cdot \left(\int_0^{+\infty} e^{-sv} g(v) dv \right) \\
 &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-s(u+v)} f(u) g(v) du dv \\
 &= \int \int_D e^{-s(u+v)} f(u) g(v) dA
 \end{aligned}$$

sendo D a região

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0, v > 0\}.$$

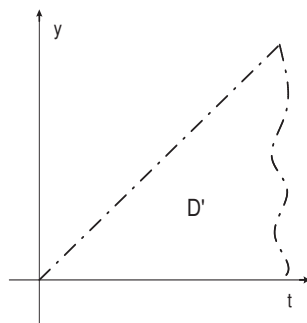
A mudança de variáveis



$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \xrightarrow{\chi} \begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+v \\ v \end{pmatrix}$$

transforma a região D (no plano uv), na região $D' = \chi(D)$ (no plano ty) dada por

$$\chi(D) = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0, 0 < y < t\}$$



Além disso

$$\frac{\partial(t,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \partial t / \partial u & \partial t / \partial v \\ \partial y / \partial u & \partial y / \partial v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Pelo teorema de mudança de variáveis em integrais impróprias:

$$\int \int_D e^{-s(u+v)} f(u)g(v) dA = \int \int_{\chi(D)} e^{-st} f(t-v)g(v) dA$$

a qual pode ser reescrita (em termos de integrais repetidas) como

$$\int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^t f(y)g(t-y) dy \right) dt.$$

vemos que a última expressão acima é justamente $\mathcal{L}[\int_0^t f(y)g(t-y) dy]$

Se definirmos $h(t) = \int_0^t f(y)g(t-y) dy$, essa h terá exatamente a propriedade que buscamos:

Definição 13.3 (Convolução).

Dadas as funções $f, g \in \mathcal{E}$, o *produto de convolução* (ou simplesmente *a convolução*) de f com g , denotada por $f * g$, é a função pertencente a \mathcal{E} definida por

$$(f * g)(t) \stackrel{def}{=} \int_0^t f(y)g(t-y) dy$$

Até este ponto, a propriedade fundamental, usada para definir $f * g$ é que

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \cdot \mathcal{L}[g(t)]$$

Isto é,

$$\begin{array}{ccc}
 f(t) & \longleftrightarrow & F(s) \\
 g(t) & \longleftrightarrow & G(s) \\
 \Downarrow & & \\
 f(t) * g(t) & \longleftrightarrow & F(s) \cdot G(s)
 \end{array}$$

Vale a pena advertir sobre o fato de que a transformada de Laplace é uma ferramenta muito mais poderosa!

Exemplo 13.17.

Vamos testar o novo produto voltando ao exemplo que o motivou. Queríamos calcular uma função $y(t)$ sabendo que

$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{1}{s^2 + 1} \cdot \left(\frac{1}{s}\right)$$

Identificamos as funções de s : $\mathcal{L}[1]$ e $\mathcal{L}[\sin t]$. Portanto

$$\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[\sin t] \cdot \mathcal{L}[1]$$

De acordo com o que vimos,

$$\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[(\sin t) * (1)]$$

portanto


$$y(t) = (\sin t) * (1)$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[(\sin t) * (1)] &= \int_0^t \sin y \cdot [1] dy \\
 &= -\cos t + 1
 \end{aligned}$$

Verificando diretamente:

$$\mathcal{L}[1 - \cos t] = \frac{1}{s} - \frac{s}{1 + s^2} = \frac{1}{s(1 + s^2)} = \mathcal{L}[1] \cdot \mathcal{L}[\sin t]$$

 Observe que *não é verdade, em geral que*

$$\forall f, \quad f * 1 = f.$$

Proposição 13.7 (Propriedades do produto de convolução).

1. $f * g = g * f$, (propriedade comutativa):

$$\int_0^t f(y) \cdot g(t-y) dy = \int_0^t f(t-y) \cdot g(y) dy$$

2. $(f * g) * h = f * (g * h)$ (propriedade associativa):

3. $f * (g + h) = f * g + f * h$ (propriedade distributiva) :

Demonstração

Demonstração de (1.): Temos, usando a definição (13.3),

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \int_0^t f(t-u)g(u) du \\ &\quad \text{(fazendo a mudança } \sigma = t - u) \\ &= - \int_t^0 f(\sigma)g(t-\sigma) d\sigma \\ &= \int_0^t f(\sigma)g(t-\sigma) d\sigma \\ &= (g * f)(t). \end{aligned}$$

Demonstração de (2.): Por definição

$$\begin{aligned} [f * (g * h)](t) &= \int_0^t f(t-u)(g * h)(u) du \\ &= \int_0^t f(t-u) \left(\int_0^u g(u-\sigma)h(\sigma) d\sigma \right) du \\ &= \int_0^t \int_0^u f(t-u)g(u-\sigma)h(\sigma) d\sigma du \quad (i) \end{aligned}$$

Por sua vez,

$$\begin{aligned}
[(f * g) * h](t) &= \int_0^t (f * g)(t-x)h(x)dx \\
&= \int_0^t \left(\int_0^{t-x} f(t-x-y)g(y)dy \right) h(x)dx \\
&= \int_0^t \int_0^{t-x} f(t-x-y)g(y)h(x)dydx \\
&= \int_0^t \int_0^{t-y} f(t-x-y)g(y)h(x)dx dy.
\end{aligned}$$

A mudança de variáveis $\sigma = x$, $u = x + y$, nos permite escrever

$$[(f * g) * h](t) = \int_0^t \int_0^u f(t-u)g(u-\sigma)h(\sigma)d\sigma du. \quad (ii)$$

Comparando (i) e (ii) :

$$(f * g) * h = f * (g * h).$$

Demonstração de (3.): Por definição

$$\begin{aligned}
[f * (g + h)](t) &= \int_0^t f(u)[(g + h)(t-u)] du \\
&= \int_0^t [f(u)g(t-u) + f(u)h(t-u)] du \\
&= \int_0^t f(u)g(t-u) du + \int_0^t f(u)h(t-u) du \\
&= [f * g + f * h](t) \quad .
\end{aligned}$$

Então , como t pode ser qualquer número pertencente a $[0, +\infty)$, podemos concluir que

$$f * (g + h) = f * g + f * h.$$

Exemplo 13.18.

Mostre que $\underbrace{[1 * 1 * \dots * 1]}_{n \text{ fatores}}(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$, onde **1** designa a função constante igual a 1.

Solução: (Demonstração por indução sobre $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$):

1⁰: Para $n = 2$ a fórmula é verdadeira. Com efeito, :

$$\begin{aligned} [1 * 1](t) &= \int_0^t 1(x) \cdot 1(t-x) dx = \int_0^t 1 \cdot 1 dx = \\ &= \int_0^t 1(x) \cdot 1(t-x) dx = t = \frac{t^{(2-1)}}{(2-1)!}; \end{aligned}$$

mostrando que a fórmula é verdadeira para $n = 2$.

2⁰: Se a fórmula vale para $n = k - 1$ então ela vale para $n = k$. De

fato, suponha que $\underbrace{[1 * 1 * \dots * 1]}_{k-1 \text{ fatores}}(t) = \frac{t^{k-2}}{(k-2)!}$.

Daí, $\underbrace{[1 * 1 * \dots * 1]}_{k \text{ fatores}}(t) = \{ \underbrace{[1 * 1 * \dots * 1]}_{k-1 \text{ fatores}} * 1 \}(t) =$
 $= \frac{t^{(k-2)}}{(k-2)!} * 1 = \int_0^t \frac{x^{(k-2)}}{(k-2)!} \cdot 1 dx = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$, mostrando que
 se a fórmula vale para $n = k - 1$ então ela vale para $n = k$.

Dos itens 1⁰ e 2⁰; e do princípio de indução, segue que

$$\forall n \geq 2 \quad \underbrace{[1 * \dots * 1]}_{n \text{ fatores}}(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Atividade de auto-avaliação 13.3

Mostre que $e^{at} * e^{bt} = \begin{cases} \frac{e^{bt} - e^{at}}{b - a}, & \text{se } b \neq a, \\ te^{at} & \text{se } b = a. \end{cases}$

Exemplo 13.19.

Calcule $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3}{(s+1)^2} \right]$

Solução:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3}{(s+1)^2} \right] = 3 \cdot \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+1)} \cdot \frac{1}{(s+1)} \right]$$

Consultando uma tabela, vemos que $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+1)} \right] = e^{-t}$.

$$\text{Portanto, } \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3}{(s+1)^2} \right] = 3(e^{-t} * e^{-t}) = 3te^{-t}.$$

TEOREMAS COMPLEMENTARES SOBRE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

Uma situação importante em que o método das transformadas pode ser aplicado é quando o segundo membro é uma função *periódica*:

Proposição 13.8.

Se f é de ordem exponencial e periódica de período p , então

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{\int_0^p e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-ps}}$$

Demonstração

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^p e^{-st} f(t) dt + \int_p^{2p} e^{-st} f(t) dt + \dots \\ &\quad + \int_{np}^{(n+1)p} e^{-st} f(t) dt + \dots \end{aligned}$$

Fazendo a mudança $x + np = t$ na $(n+1)$ -ésima integral da soma acima, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{np}^{(n+1)p} e^{-st} f(t) dt &= \int_0^p e^{-s(x+np)} f(x+np) dx \\ &= e^{-nps} \int_0^p e^{-sx} f(x) dx \end{aligned}$$

sendo que o último passo resulta da periodicidade de f . Assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f] &= \int_0^P e^{-sx} f(x) dx + e^{-ps} \int_0^P e^{-sx} f(x) dx + \dots \\ &\quad + e^{-nps} \int_0^P e^{-sx} f(x) dx + \dots \\ &= [1 + e^{-ps} + e^{-2ps} + \dots] \int_0^P e^{-sx} f(x) dx.\end{aligned}$$

A soma da série geométrica

$$1 + e^{-ps} + e^{-2ps} + \dots$$

é $1/(1 - e^{-ps})$, de onde

$$\mathcal{L}[f] = \frac{\int_0^P e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-ps}}$$

Exemplo 13.20.

Calcule a transformada de Laplace da função

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{se } 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

sabendo que ela é periódica de período 2.

Solução:

Identificamos imediatamente que a função dada é periódica de período igual a 2. Podemos aplicar diretamente a proposição (13.8):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)](s) &= \frac{\int_0^2 e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-2s}} = \frac{\int_0^1 e^{-st} dt}{1 - e^{-2s}} = \frac{-(1/s) e^{-st} \Big|_0^1}{1 - e^{-2s}} = \\ &= \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - e^{-2s})} = \frac{1}{s(1 + e^{-s})}.\end{aligned}$$

Proposição 13.9.

Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ então

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

Demonstração

(a) $F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$. Então

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} F(s) &= \frac{d}{ds} \left[\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \right] \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s} [e^{-st} f(t)] dt \\ &= \int_0^{+\infty} (-t) e^{-st} f(t) dt \\ &= - \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= (-1)^1 \frac{d}{ds} F(s) \end{aligned}$$

(b) Suponha que $\mathcal{L}[t^k f(t)] = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} F(s)$. Tem-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^{k+1} f(t)] &= \mathcal{L}[t(t^k f(t))] \\ &= -1 \frac{d}{ds} \mathcal{L}[t^k f(t)] \\ &= -1 \frac{d}{ds} \left[(-1)^k \frac{d^k}{ds^k} F(s) \right] \\ &= (-1)^{k+1} \frac{d^{k+1}}{ds^{k+1}} F(s) \end{aligned}$$

O teorema segue de (a), (b) e do princípio de indução.

Observação: A “derivação sob o sinal de integração” efetuada acima, é legítima. Estamos nas condições do Teorema de Leibniz.

Exemplo 13.21.

Calcule $\int_0^{+\infty} e^{-3t} t^2 \sinh t \, dt$.

Solução:

Consultando a tabela de transformadas tem-se que

$$F(s) = \mathcal{L}[\sinh at] = \frac{a}{s^2 - a^2} \quad s > |a|$$

Observando o integrando, e ignorando momentaneamente o fator t^2 , ficamos com

$$\int_0^{+\infty} e^{-3t} \sinh t \, dt,$$

que reconhecemos como sendo

$$\mathcal{L}[\sinh t](s = 3).$$

Lembrando isso e reintroduzindo o fator t^2 , estamos exatamente nas condições da proposição (13.9), com $n = 2$:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-3t} t^2 \sinh t \, dt &= \int_0^{+\infty} t^2 \cdot [e^{-3t} \sinh t] \, dt = \\ &= (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}[\sinh t](s) = \frac{6s^2 + 2}{(s^2 - 1)^3} \Big|_{s=3} = \frac{7}{64}. \end{aligned}$$

Proposição 13.10.

Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ então

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(u) \, du \right] = \frac{F(s)}{s}$$

Demonstração

Seja $F(t) = \int_0^t f(u) \, du$.

Temos $F'(t) = f(t)$, e então

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[F'(t)] = s \mathcal{L}[F(t)] - F(0) = s \mathcal{L}[F(t)] = \\ &= s \mathcal{L} \left[\int_0^t f(u) \, du \right]. \end{aligned}$$

Portanto $\mathcal{L} \left[\int_0^t f(u) du \right] = \frac{F(s)}{s}$.

Proposição 13.11.

Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ então

$$\mathcal{L} \left[\frac{f(t)}{t} \right] = \int_s^{+\infty} F(u) du.$$

Demonstração

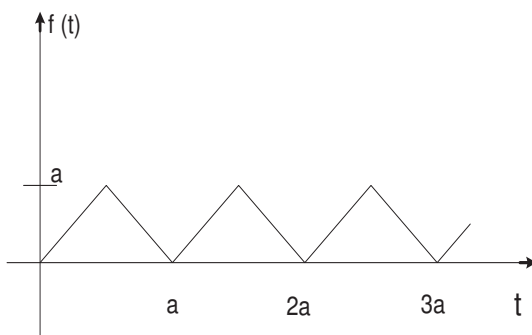
$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\frac{f(t)}{t} \right] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \left[\frac{f(t)}{t} \right] dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\frac{e^{-st}}{t} \right] f(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\int_s^{+\infty} e^{-ut} du \right] f(t) dt \\ &= \int_s^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{-ut} f(t) dt \right] du \\ &= \int_s^{+\infty} F(u) du. \end{aligned}$$

Exemplo 13.22.


Calcule $\mathcal{L} \left(\frac{\sin t}{t} \right)$.

Atividade de auto-avaliação 13.4

Calcule $F(s)$ para $f(t)$ como na figura abaixo



SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS UTILIZANDO TRANSFORMADA LAPLACE

 **Comentário :** As Transformadas de Laplace são muito úteis na resolução de equações diferenciais ordinárias (EDOs) de coeficientes constantes, transformando-as em equações algébricas no “domínio s ”. O problema deixa de ser obter soluções de equações diferenciais e passa a ser o de, após transformar as equações diferenciais em equações algébricas, obter as soluções das equações diferenciais que as originaram usando a transformada inversa de Laplace.

As Transformadas de Laplace de derivadas são particularmente importantes para a resolução de EDOs por esta via.

Utilizando uma terminologia comum em textos para Engenharia, as EDOs descrevem a *dinâmica de sistemas contínuos* onde $x(t)$ é a “entrada” (input) e $y(t)$ é a “saída” (output).

Observação: A entrada $x(t)$ é uma função conhecida; assim como as condições iniciais da saída $y(t)$: $y(0), y'(0), y''(0)$, etc. Deseja-se calcular a saída $y(t)$, a solução do PVI.



Atenção!

Estamos sempre escolhendo $t = 0$ para *instante inicial*. Isso é só para simplificar. Nada se modifica na teoria se supusermos $t = t_0$, sendo t_0 qualquer, como valor inicial.

Lembre que para resolver um problema de valor inicial, o número de condições iniciais tem de ser igual à ordem da equação diferencial do PVI; começando sempre pelo valor da “saída” $y(0)$. Daí, se tivermos um problema com uma equação diferencial de 1^a ordem, precisa-se de $y(0)$; se for de 2^a ordem, precisa-se de $y(0)$ e $y'(0)$, e assim por diante.

O método :

Apresentamos o método por meio de alguns exemplos:

Exemplo 13.23.

Resolver o PVI

$$\begin{cases} y'' - y = 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Solução:

Aplicando \mathcal{L} a ambos os lados da equação

$$\mathcal{L}[y'' - y] = \mathcal{L}[1]$$

isto é

$$\mathcal{L}[y''] - \mathcal{L}[y] = 1/s$$

de onde

$$\begin{aligned} s^2 \mathcal{L}[y] - sf(0) - f'(0) - \mathcal{L}[y] &= 1/s \\ (s^2 - 1)\mathcal{L}[y] - 1 &= 1/s \end{aligned}$$

Portanto

$$\mathcal{L}[y] = \frac{s+1}{s(s^2-1)} = \frac{1}{s(s-1)}$$

Obtivemos a expressão da transformada de y . Queremos calcular y

Observe que

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$$

E como sabemos que $\frac{1}{s-a} = \mathcal{L}[e^{at}]$ e $\frac{1}{s} = \mathcal{L}[1]$ concluímos que

$$\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[e^t] - \mathcal{L}[1] = \mathcal{L}[e^t - 1]$$

Daí gostaríamos de concluir que

$$y = e^x - 1$$

É imediato verificar que esta é efetivamente a resposta do PVI dado.

O princípio utilizado foi o seguinte:

$$\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \implies y(t) = f(t)$$

Exemplo 13.24.

Resolver, usando transformadas de Laplace, o PVI:

$$\begin{cases} y'' + y = t^2 + 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Solução:

Aplicando o operador \mathcal{L} a ambos os lados da equação, e utilizando as suas propriedades, obtemos:

$$(s^2 + 1)\mathcal{L}[y(t)] = \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s}$$

isto é

$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{2 + s^2}{s^3(s^2 + 1)}$$

Podemos decompor o lado direito em frações parciais:

$$\frac{2 + s^2}{s^3(s^2 + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{Ds + E}{s^2 + 1}$$

de onde:

$$A = -1, \quad B = 0, \quad C = 2, \quad D = 1, \quad \text{e} \quad E = 0$$

ou seja

$$\frac{2 + s^2}{s^3(s^2 + 1)} = \frac{-1}{s} + \frac{2}{s^3} + \frac{s}{s^2 + 1}$$

Portanto

$$\mathcal{L}[y] = -\mathcal{L}[1] + \mathcal{L}[t^2] + \mathcal{L}[\cos t]$$

e então (pelo teorema de Lerch)

$$y(t) = -1 + t^2 + \cos t.$$


O leitor pode confirmar essa solução pelo método dos coeficientes a determinar.

Atividade de auto-avaliação 13.5

Ao aplicar o “método da Transformada de Laplace” a um determinado PVI, obtivemos $\mathcal{L}[y(t)] = \left(\frac{8s^2 - 4s + 12}{s(s^2 + 4)} \right)$.

Determine a solução, $y(t)$, do PVI.

EQUAÇÕES COM SEGUNDO TERMO DESCONTÍNUO POR “SALTOS”

 Nosso programa mínimo com respeito às transformadas de Laplace está “quase” cumprido. Mostramos que as transformadas são lineares, ignoram derivadas, etc. , mas na verdade, até agora, o método parece ser uma maneira muito complicada de resolver PVI's que poderiam ser resolvidos mais facilmente por outros processos. Esta impressão deve começar a mudar a partir de agora.

Consideremos o problema de calcular a solução do PVI:

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = h(t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad h(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq t \leq \pi \\ -1, & \text{se } t > \pi \end{cases}$$

Para resolvê-lo uma ideia é a seguinte: vamos dividir o problema dado em dois subproblemas:

Primeiro resolvemos o PVI

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = 1 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

definido no subintervalo $[0, \pi]$.

Digamos que sua solução seja a função $\varphi_1(t)$

Em seguida, calculamos a solução de


$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = -1 \\ y(\pi) = \varphi_1(\pi) \\ y'(\pi) = (\varphi_1'(\pi))^+ \end{cases}$$

no intervalo $(\pi, +\infty)$.



Atenção!

- 1) A escolha das condições iniciais *do segundo PVI* foi feita de modo a garantir que a sua solução emendará continuamente com a solução do primeiro, e também que a inclinação inicial da solução do segundo PVI, coincidissem com a inclinação do último ponto da solução do primeiro. Fazendo assim, podemos determinar uma solução (única) para o problema em todo o intervalo $[0, +\infty)$.
- 2) Se não impusermos condições de recolamento adequadas no valor inicial da segunda solução então perderemos a unicidade da solução global.
- 3) Para obter a solução foi preciso “dobrar” o trabalho. Se a função independente fosse dada por partes em n intervalos, teríamos de calcular n problemas de Cauchy.

 Trata-se de um procedimento, para dizer o mínimo, incômodo. A transformada de Laplace se mostra uma alternativa muito mais cômoda para cálculo da solução. Na verdade existem situações em que a transformada de Laplace é essencialmente a única ferramenta disponível. Não vamos considerar esses casos nesta aula.

Exemplo 13.25.

Determine a solução do problema de valor inicial

$$y'' - 2y' + y = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ t, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & 2 \leq t < +\infty \end{cases} \quad ; \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

Solução:

$$\begin{aligned} \text{Observe que } f(t) &= \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ t, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & 2 \leq t < +\infty \end{cases} = \\ &= t(u_1 - u_2)(t) = tu_1(t) - tu_2(t). \end{aligned}$$

Também, como

$$u_a(t) \longleftrightarrow \frac{e^{-sa}}{s}$$

então

$$tu_a(t) \longleftrightarrow (-1)^1 \frac{d}{ds} \left(\frac{e^{-sa}}{s} \right) = \frac{e^{-sa}}{s^2} + \frac{ae^{-sa}}{s}$$

Daí

$$F(s) = \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{2e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s^2}.$$

Sendo, como sempre,

$$y(t) \longleftrightarrow Y(s),$$

temos que, aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação:

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + y = f(t) &\longleftrightarrow (s^2 - 2s + 1)Y(s) - 1 = F(s) \\ &\iff (s - 1)^2 Y(s) = 1 + F(s) \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{F(s)}{(s-1)^2} \\ Y(s) &= \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^2} \left(\frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{2e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s^2} \right) \\ Y(s) &= \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{e^{-s}}{s(s-1)^2} + \frac{e^{-s}}{s^2(s-1)^2} - \frac{2e^{-2s}}{s(s-1)^2} - \frac{e^{-2s}}{s^2(s-1)^2} \end{aligned}$$

Temos :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s-1)^2} \right) &= 1 * t e^t = \int_0^t u e^u du \\ &= (\text{integrando por partes}) \\ &= u e^u - e^u \Big|_0^t = t e^t - e^t + 1 \end{aligned}$$

Também

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{(s-1)^2} \right) &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s(s-1)^2} \right) = 1 * (t e^t - e^t + 1) = \\ &= 1 * t e^t - 1 * e^t + 1 * 1 = t e^t - e^t + 1 - e^t + 1 + t = \\ &= t e^t - 2e^t + t + 2. \end{aligned}$$

Logo:

$$t e^t \longleftrightarrow \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$F_1(t) = t e^t - e^t + 1 \longleftrightarrow \frac{1}{s(s-1)^2}$$

$$F_2(t) = t e^t - 2e^t + t + 2 \longleftrightarrow \frac{1}{s^2(s-1)^2}.$$

Utilizando o segundo teorema do deslocamento:

$$y(t) = t e^{2t} + u_1(t) F_1(t-1) + \\ + u_1(t) F_2(t-1) - 2u_2(t) F_1(t-1) - u_2(t) F_2(t-1).$$

Exemplo 13.26.

Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'' + 4x' + 4x = h(t) \\ x(0) = 1; \quad x'(0) = 1 \end{cases}$$

sabendo que a função h é periódica de período igual a 2, e que

$$\int_0^2 e^{-st} h(t) dt = 1 - e^{-4s}.$$

Solução:

Como sempre, fazendo as correspondências

$$x(t) \longleftrightarrow X(s)$$

$$h(t) \longleftrightarrow H(s);$$

e aplicando a transformada de Laplace aos dois membros da equação:

$$s^2 X(s) - s - 1 + 4(sX(s) - 1) + 4X(s) = H(s)$$

ou ainda

$$(s+2)^2 X(s) = s+5+H(s)$$

Daí, tirando o valor de $X(s)$, e usando a fórmula da transformada de uma função periódica:

$$\begin{aligned}
 X(s) &= \frac{s+5}{(s+2)^2} + \frac{1}{(s+2)^2} \frac{1-e^{-4s}}{1-e^{-2s}} \\
 &= \frac{s+5}{(s+2)^2} + \frac{1+e^{-2s}}{(s+2)^2} \\
 &= \frac{s+2}{(s+2)^2} + \frac{4}{(s+2)^2} + \frac{e^{-2s}}{(s+2)^2}
 \end{aligned}$$

A partir daí, usando uma tabela e os teoremas de deslocamento, obtemos

$$x(t) = e^{-2t} + 4te^{-2t} + u_2(t) \left[(t-2)e^{-2(t-2)} \right].$$

Tabela de Transformadas de Laplace

$f(t)$	\longleftrightarrow	$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$
e^{at}	\longleftrightarrow	$1/(s-a), \quad s > a$
t^n	\longleftrightarrow	$n!/s^{n+1}, \quad s > 0$
$\operatorname{sen} at$	\longleftrightarrow	$a/(s^2+a^2), \quad s > 0$
$\cos at$	\longleftrightarrow	$s/(s^2+a^2), \quad s > 0$
$u_a(t)$	\longleftrightarrow	$e^{-sa}/s, \quad s > 0$
$\operatorname{senh} at$	\longleftrightarrow	$a/(s^2-a^2), \quad s > a $
$\cosh at$	\longleftrightarrow	$s/(s^2-a^2), \quad s > a $
$a f(t) + b g(t)$	\longleftrightarrow	$a F(s) + b G(s)$
$f'(t)$	\longleftrightarrow	$s F(s) - f(0)$
$f''(t)$	\longleftrightarrow	$s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	\longleftrightarrow	$s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$
$e^{at} f(t)$	\longleftrightarrow	$F(s-a)$
$u_a(t) f(t-a)$	\longleftrightarrow	$e^{-sa} F(s)$
$\int_0^t f(u) du$	\longleftrightarrow	$F(s)/s$
$t^n f(t)$	\longleftrightarrow	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s).$
$(f * g)(t) = \int_0^t f(u) g(t-u) du$	\longleftrightarrow	$F(s).G(s)$
$f(t+p) = f(t)$	\longleftrightarrow	$(\int_0^p e^{-st} f(t) dt) / (1 - e^{-ps})$

Resumo

Nesta aula, você:

- aprendeu um outro tipo de transformação entre espaços vetoriais de funções, a *Transformada de Laplace*, que leva *funções de ordem exponencial* da variável $t \in [0, +\infty)$, em funções de uma nova variável s , definidas em intervalos do tipo $[\sigma, +\infty]$, sendo
- aprendeu que a Transformada de Laplace é uma *transformação integral linear*, que “destrói” as derivadas das funções;
- estudou os importantes teoremas de deslocamento no tempo e na frequência;
- aprendeu a calcular a *Transformada Inversa de Laplace* por inspeção e, como caso particular, por decomposição em frações parciais;
- aprendeu o importantíssimo *produto de convolução*, e a utilizá-lo no cálculo de Transformadas de Laplace;
- por fim, aprendeu a utilizar as transformadas de Laplace, no cálculo de soluções de problemas de valor inicial envolvendo equações diferenciais lineares de coeficientes constantes, incluindo o caso em que o segundo membro das equações tem descontinuidades de tipo “salto”.

O QUE VEM POR AÍ:

A sequência usual de “Transformada de Laplace” inclui *função DELTA de Dirac*, a *transformada de Laplace da função DELTA*, soluções de equações cujo membro independente contém a função DELTA, e temas correlacionados. Não trataremos desses assuntos principalmente porque o foco principal é o estudo introdutório das *equações diferenciais lineares*, cujos *coeficientes e termo independente são funções (eventualmente funções constantes)*, e a “função” DELTA não é - de fato - uma função. Ela é tratada com propriedade no contexto de uma outra teoria: a teoria de distribuições.

O que vem por aí é a parte final deste curso, os sistemas de

equações diferenciais lineares de primeira ordem (também referidos como sistemas de equações diferenciais simultâneas).

Você verá alguns conceitos de cursos anteriores, como Álgebra Linear, Cálculo 2, *em ação, o que - po si só - é uma justificativa poderosa para o seu estudo.*

Vamos a eles!

SOLUÇÕES COMENTADAS DAS ATIVIDADES DESTA AULA:

Solução comentada da atividade 13.1

Sabe-se que $\forall n = 0, 1, 2, \dots \quad \frac{d^n}{dt^n}(t^n) = n!$
Sendo $f(t) = t^n$ então

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}(f)\right] = \mathcal{L}[n!] = n! \mathcal{L}[u(t)] = \frac{n!}{s} \quad (13.3)$$

Pelo o corolário do teorema da transformada de Laplace da derivada ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}(f)\right] &= s^n \mathcal{L}[t^n] - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \\ &= s^n \mathcal{L}[t^n] \end{aligned} \quad (13.4)$$

Igualando o lado direito da igualdade (13.3) com (13.4):

$$\frac{n!}{s} = s^n \mathcal{L}[t^n].$$

Portanto

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Observe que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5s+3}{(s+1)^2}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5(s+2)-10+3}{(s+1)^2}\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5(s+2)}{(s+1)^2} - \frac{7}{(s+1)^2}\right] \\ &= 5\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)}\right] - 7\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right]\end{aligned}$$

Consultando uma tabela, vemos que a primeira transformada inversa é e^{-2t} . Com relação à segunda transformada inversa, vamos utilizar o primeiro teorema do deslocamento. Temos:

$$\begin{array}{ccc}e^{-2t} & \longleftrightarrow & \frac{1}{s^2} \\ \Downarrow & & \\ te^{-2t} & \longleftrightarrow & \frac{1}{(s+1)^2}.\end{array}$$

Portanto

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5s+3}{(s+1)^2}\right] = 5e^{-2t} - te^{-2t}.$$

Solução comentada da atividade 13.3

Suponha $a \neq b$. Temos:

$$\begin{aligned}
 e^{at} * e^{bt} &= \int_0^t e^{au} e^{b(t-u)} du \\
 &= \int_0^t e^{-(b-a)u} e^{bt} du \\
 &= e^{bt} \left[-\frac{1}{(b-a)} \cdot e^{-(b-a)u} \right]_0^t \\
 &= e^{bt} \left[-\frac{e^{-(b-a)t}}{(b-a)} + \frac{1}{b-a} \right] \\
 &= -\frac{e^{bt} \cdot e^{-(b-a)t} \cdot e^{at}}{b-a} + \frac{e^{bt}}{b-a} \\
 &= \frac{e^{bt} - e^{at}}{b-a}.
 \end{aligned}$$

Se $a = b$,

$$\begin{aligned}
 e^{at} * e^{at} &= \int_0^t e^{au} e^{a(t-u)} du \\
 &= \int_0^t e^{-(b-a)u} e^{bt} du \\
 &= e^{at} \int_0^t du \\
 &= t e^{at}.
 \end{aligned}$$

Solução comentada da atividade 13.4

Considere inicialmente da restrição da função $f(t)$ ao intervalo $(0, a]$; isto é, considere a função

$$g(t) = f|_{(0,a]}(t) = [u_0(t) - u_a(t)] f(t).$$

O gráfico desta restrição é o primeiro “dente” da função “dente de serra” que é um nome usualmente dado à função $f(t)$; a qual também é conhecida como função “serra”.

o gráfico de $g(t)$ é composto por dois segmentos de reta, sendo o primeiro o segmento da reta $y = 2x$ entre os pontos $(0,0)$ e $(a/2, a)$; e o segundo o segmento da reta $y = -2(x - a)$, entre os

pontos $(a/2, a)$ e $(a, 0)$.

Logo $g(t)$ é a função :

$$g(t) = \begin{cases} 2t, & \text{se } 0 \leq t \leq a/2, \\ -2t + 2a, & \text{se } a/2 \leq t \leq a \end{cases}$$

Daí podemos concluir que a função $f(t)$ é *igual à função $g(t)$, prolongada por periodicidade (de período “a”) ao intervalo $(0, +\infty)$* . Esta conclusão é interessante porque nos permite reformular o problema da seguinte maneira:

“Calcule $F(s)$ para $f(t) = g(t)$, se $t \in [0, a]$, sendo g periódica, de período igual a a .

Nestes termos, a proposição (13.8) se aplica, e temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)](s) &= \frac{\int_0^a e^{-st} g(t) dt}{1 - e^{-as}} \\ &= \frac{\int_0^{a/2} e^{-st} g(t) dt + \int_{a/2}^a e^{-st} g(t) dt}{1 - e^{-as}} \\ &= \frac{\int_0^{a/2} e^{-st} (-2t) dt + \int_{a/2}^a e^{-st} [-2(t+a)] dt}{1 - e^{-as}} \\ &= \frac{-2 \int_0^a t e^{-st} dt - 2a \int_{a/2}^a e^{-st} dt}{1 - e^{-as}} \end{aligned} \quad (13.5)$$

Integrando $\int_0^a t e^{-st} dt$ por partes obtemos. (verifique!)

$$1 - \frac{a}{s} e^{-sa} \left(\frac{a}{s} + 1 \right) \quad (13.6)$$

Calculando diretamente $\int_{a/2}^a e^{-st} dt$ obtemos

$$-\frac{1}{s} e^{-sa} + \frac{1}{s} e^{-(sa)/2} \quad (13.7)$$

substituindo (13.6) e (13.7) no numerador de (13.5) obtemos

$$\hat{f}(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \left(\frac{2s+4a}{s} \right) e^{-sa} - 2 \left(1 + \frac{a}{s} e^{-sa/2} \right),$$

que é a resposta final .

Solução comentada da atividade 13.5

Basta calcular $y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{8s^2 - 4s + 12}{s(s^2 + 4)} \right)$

$$\begin{aligned} \frac{8s^2 - 4s + 12}{s(s^2 + 4)} &= \frac{8s^2}{s(s^2 + 4)} - \frac{4s}{s(s^2 + 4)} + \frac{12}{s(s^2 + 4)} \\ &= \frac{8s}{s^2 + 4} - \frac{4}{s^2 + 4} + \frac{12}{s(s^2 + 4)} \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \frac{12}{s(s^2 + 4)} &= \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 4} \\ &= \frac{(A + B)s^2 + Cs + 4A}{s(s^2 + 4)} \end{aligned}$$

Daí $A = 3, B = -3, C = 0$. Portanto

$$\begin{aligned} \frac{8s^2 - 4s + 12}{s(s^2 + 4)} &= \frac{8s}{s^2 + 4} - \frac{4}{s^2 + 4} + \frac{3}{s} - \frac{3s}{s^2 + 4} \\ &= \frac{5s}{s^2 + 4} - 2 \frac{2}{s^2 + 4} + \frac{3}{s} \\ &= 5 \mathcal{L}[\cos 2t] - 2 \mathcal{L}[\sin 2t] + 3 \mathcal{L}[1] \\ &= \mathcal{L}[5 \cos 2t - 2 \sin 2t + 3] \end{aligned}$$

Daí então,

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{8s^2 - 4s + 12}{s(s^2 + 4)} \right) = 5 \cos 2t - 2 \sin 2t + 3.$$

Esta é a solução do PVI .

Aula 14

SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Objetivos

Ao final desta aula, você será capaz de:

- 1 definir e identificar sistemas de equações diferenciais ordinárias de ordem p e dimensão n , também chamados de *equações diferenciais vetoriais de ordem p e dimensão n* ;
- 2 identificar os sistemas de equações diferenciais lineares de ordem 1 e dimensão n , classificá-los como *homogêneos* ou *não homogêneos*;
- 3 obter sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem e dimensão n a partir de equações diferenciais lineares normais de ordem n . Reconhecer a importância dos sistemas de equações diferenciais ordinárias nas aplicações;
- 4 definir *soluções de sistemas de equações diferenciais* e entender a sua interpretação geométrica. Formular o conceito de *problema de valor inicial*, e compreender o *Teorema de Existência e Unicidade de Soluções* para sistemas de equações lineares de primeira ordem e sua interpretação geométrica;
- 5 definir os sistemas *autônomos* de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e dimensão n ; bem como compreender as noções de plano de fase e de retrato de fase de sistemas bidimensionais e utilizá-las para analisar qualitativamente os sistemas de equações diferenciais lineares autônomos bidimensionais.

INTRODUÇÃO. RESULTADOS GERAIS

Definição 14.1.

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto conexo.

Suponhamos que

- $\forall i, 1 \leq i \leq n, x_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função p vezes derivável, da variável $t \in I$;
- o conjunto $\{[t, x_1(t), \dots, x_n(t)] \text{ tais que } t \in I\}$ está contido em $I \times \mathcal{U}$;
- é dada uma coleção de n funções de $I \times \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{1+n}$ para \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} f_i : I \times \mathcal{U} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, a_1, \dots, a_n) &\mapsto f_i(t, a_1, a_2, \dots, a_n) \end{aligned} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Um **sistema (normal) de equações diferenciais ordinárias de ordem p e dimensão n** é um conjunto de n equações diferenciais simultâneas da forma

$$\begin{cases} x_1^{(p)}(t) = f_1[t, x_1(t), \dots, x_n(t)] \\ x_2^{(p)}(t) = f_2[t, x_1(t), \dots, x_n(t)] \\ \vdots \\ x_n^{(p)}(t) = f_n[t, x_1(t), \dots, x_n(t)] \end{cases} \quad (14.1)$$

Exemplo 14.1.

Exemplo de equação diferencial vetorial de primeira ordem e dimensão dois, definida em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x_1'(t) = e^{x_1(t)} + t x_2(t) \\ x_2'(t) = \cos(x_1(t) \cdot x_2(t)). \end{cases}$$

Nesta equação

$$f_1(t, x_1, x_2) = e^{x_1} + t x_2, \quad f_2(t, x_1, x_2) = \cos(x_1 \cdot x_2).$$

Exemplo 14.2.

Exemplo de equação diferencial vetorial de segunda ordem e dimensão três, definida em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

Utilizaremos x, y, z no lugar de (x_1, x_2, x_3) :

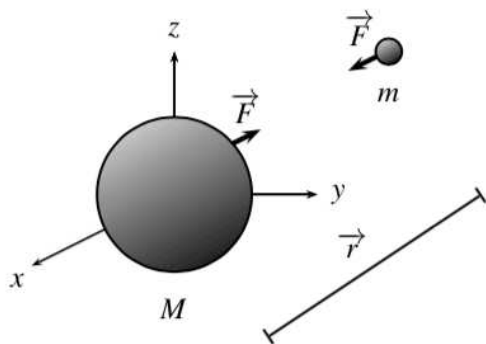


Figura 14.1:

Consideremos um sistema isolado, constituído por duas massas M e m que se atraem segundo a Lei da Gravitação Universal. Vamos supor $M \gg m$, de modo que a localização do referencial do centro de massa do sistema “coincide” com o centro de massa de M .

Para um observador em M , a massa m descreverá uma trajetória ao seu redor, submetida à força de atração prescrita pela Lei de Gravitação Universal:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^3} \vec{r}, \quad \text{onde } r = \|\vec{r}\| = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

Por outro lado, a 2ª Lei do Movimento, nos diz que


$$\vec{F} = m \vec{a} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Substituindo a expressão da Lei de Gravitação na última equação obtemos a equação diferencial

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{GMm}{r^3} \vec{r},$$

a qual, decompondo a força \vec{F} , a aceleração \vec{a} e a posição \vec{r} em componentes segundo os eixos coordenados, fornece o seguinte **sistema de equações escalares de segunda ordem, e dimensão 3**:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{GM x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{GM y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{GM z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \end{array} \right.$$

 No que segue, salvo expressamente especificado o contrário, vamos estudar somente sistemas de equações de primeira ordem .

Como foi visto no curso de Cálculo, o conjunto de funções

$$f_i : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R},$$

define, e fica definido pela função vetorial $\vec{F} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que a cada n -upla de números $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathcal{U}$ associa o vetor

$$\vec{F}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} f_1(a_1, a_2, \dots, a_n) \\ f_2(a_1, a_2, \dots, a_n) \\ \vdots \\ f_n(a_1, a_2, \dots, a_n) \end{pmatrix}.$$

Então se $\forall i, 1 \leq i \leq n, x_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável, da variável $t \in I \subset \mathbb{R}$, podemos formar o “vetor”

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

cujas derivadas são os vetores

$$\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix}.$$

Em termos das funções vetoriais \vec{X} e \vec{F} , o sistema de equações (14.1) (com $p = 1$), se escreve na forma


$$\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ f_2(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{pmatrix}; \quad (14.2)$$

ou ainda,

$$\vec{X}'(t) = \vec{F}[\vec{X}(t)]. \quad (14.3)$$

Definição 14.2.

Mantendo as condições da definição (14.1), com $p=1$, e conservando as notações acima, dizemos que (14.2), ou (14.3), são **as formas vetoriais** do sistema de equações (14.1).

 Nos termos da definição (14.2), quando é dado um sistema na forma vetorial (14.3) (ou que é equivalente a dizer que é dada uma equação diferencial de primeira ordem vetorial), às vezes chamamos o sistema equivalente (14.1) de **forma explícita** correspondente à equação diferencial vetorial dada.

Observação: É muito comum omitir a variável t no lado direito de (14.2) ou (14.3); e retirar a seta sobre a função vetorial \vec{F} . Para não sobrecarregar a notação, vamos escrever, por exemplo,

$$\vec{X}'(t) = F(t, \vec{X}) \quad \text{em vez de} \quad \vec{X}'(t) = \vec{F}(t, \vec{X}(t)).$$

Exemplo 14.3.

Escreva a forma explícita da equação diferencial vetorial de dimensão 3

$$\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} tx_1/x_2 - x_3 \\ \ln|x_1 \cdot x_2 \cdot x_3| \\ (t^3 - t^2 - 1)\sqrt{x_2} \end{pmatrix}.$$

Solução:

A solução é imediata: definindo $\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$, temos

$$\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ x'_3(t) \end{pmatrix}. \quad \text{Substituindo na equação vetorial, esta se trans-}$$

forma em

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tx_1/x_2 - x_3 \\ \ln|x_1 \cdot x_2 \cdot x_3| \\ (t^3 - t^2 - 1)\sqrt{x_2} \end{pmatrix}.$$

Igualando os termos correspondentes dos dois “vetores”, construímos o sistema

$$\begin{cases} x_1'(t) = tx_1/x_2 - x_3 \\ x_2'(t) = \ln|x_1 \cdot x_2 \cdot x_3| \\ x_3'(t) = (t^3 - t^2 - 1)\sqrt{x_2} \end{cases};$$

o que é a forma explícita da equação vetorial dada.

Atividade de auto-avaliação 14.1

Identifique as formas vetorial e explícita dos sistema de equações de segunda ordem do **Exemplo 14.2**.

SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM E DIMENSÃO n

Sistemas homogêneos de equações diferenciais lineares de primeira ordem e dimensão n

Definição 14.3 (Sistemas homogêneos de equações diferenciais de primeira ordem e dimensão n).

São os sistemas da forma

$$\vec{X}'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}}_{\text{multiplicação de matrizes}} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad (14.4)$$

onde $a_{ij} : I \rightarrow \mathbb{R}$, são n^2 funções com valores reais.


A matriz

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

é chamada de *matriz do sistema de equações diferenciais lineares* (14.4).

A notação abreviada para o sistema (14.4) é

$$\vec{X}'(t) = A(t) \cdot \vec{X}$$

 Os sistemas homogêneos de equações de primeira ordem e dimensão n são os sistemas para os quais

$$F(t, \vec{X}) = A(t) \cdot \vec{X}$$

A forma explícita dos sistemas homogêneos de equações de primeira ordem e dimensão n da definição (14.3) é

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1 + \cdots + a_{2n}(t)x_n \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n \end{cases} \quad (14.5)$$

As funções a_{ij} são chamadas de *funções componentes da matriz do sistema homogêneo*, ou simplesmente de *funções componentes do sistema*.

SISTEMAS NÃO HOMOGÊNEOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM E DIMENSÃO n

Definição 14.4 (Sistemas de Equações Diferenciais Lineares não homogêneos primeira ordem e dimensão n).

São os sistemas da forma

$$\vec{X}'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}}_{\text{multiplicação de matrizes}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}}_{\vec{H}(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} h_1(t) \\ \vdots \\ h_n(t) \end{pmatrix}}_{\vec{H}(t)} \quad (14.6)$$

onde $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, a_{ij} : I \rightarrow \mathbb{R}$, são n^2 funções com valores reais definidas em um intervalo I , chamadas de **(funções) coeficientes do sistema**, e $\vec{H}(t) = (h_1(t), \dots, h_n(t))$ é uma função vetorial, definida em I , chamada de **termo independente do sistema**.

A forma explícita dos sistemas de equações diferenciais não lineares de primeira ordem é

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + h_1(t) \\ x_2' = a_{12}(t)x_1 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + h_2(t) \\ \vdots \\ x_n' = a_{1n}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + h_n(t) \end{cases} \quad (14.7)$$

Observação: Podemos reescrever o sistema (14.7) na forma vetorial (ou matricial):

$$\vec{X}'(t) = A(t) \cdot \vec{X}(t) + \vec{H}(t) \quad (14.8)$$



Atenção!

Para não esquecer:

- \vec{X} é o vetor das incógnitas,
- a matriz $A(t)$ é a matriz do sistema
- $\vec{H}(t)$ é o vetor de termos independentes



Obs : Repare as semelhança da forma da equação (14.8) com a forma da equação diferencial linear não-homogênea de primeira ordem

$$x' = p(t)x + q(t).$$

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM CONSTRUÍDOS A PARTIR DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE ORDEM n

Uma maneira importante de obter sistemas de equações diferenciais de primeira ordem n -dimensionais é a partir de equações diferenciais lineares de ordem n , normais.

Isto será consequência do seguinte teorema geral:

Teorema 14.1.

Toda equação diferencial escalar de ordem n , normal, dá origem a uma equação vetorial de primeira ordem, i.é, a um sistema de equações diferenciais de ordem um.

Demonstração

Consideremos uma equação de ordem n normal:

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \quad (14.9)$$

Definamos novas funções x_1, x_2, \dots, x_n por meio das relações


$$x_1(t) = x(t) \quad (14.10)$$

$$x_2(t) = x'_1(t) \quad (14.11)$$

$$x_3(t) = x'_2(t) \quad (14.12)$$

$$\vdots$$

$$x_n(t) = x'_{n-1}(t) \quad (14.13)$$

 Repare que a função $x_1(t)$ é a própria função. $x(t)$ incógnita da equação diferencial de ordem n (14.9).

Trocando de lado as funções das relações (14.11) a (14.13), já podemos escrever um sistema de $n - 1$ equações diferenciais de primeira ordem, a saber:

$$\begin{cases} x'_1(t) = x_2(t) \\ x'_2(t) = x_3(t) \\ \vdots \\ x'_{n-1}(t) = x_n(t) \end{cases}$$



Atenção!

para obter um sistema de n equações de primeira ordem para as funções $x_1(t), \dots, x_n(t)$, ficou faltando justamente a equação para a derivada de $x_n(t)$

Para calcular $x'_n(t)$ observe que podemos expressar todas as funções x_i em termos da função incógnita da equação (14.9), da seguinte maneira:

$$x_1 = x$$

$$x_2 = x'_1 = x'$$

$$x_3 = x'_2 = [x']' = x''$$

$$x_4 = x'_3 = [x'']' = x'''$$

$$\vdots$$

$$x_n = x'_{n-1} = [x^{(n-2)}]' = x^{(n-1)}$$

Ora, usando essas expressões, e a própria equação (14.9), temos:

$$x_n' = [x^{(n-1)}]' = x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) = f(t, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

Ou seja, temos o seguinte sistema de n equações diferenciais de primeira ordem para as funções x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\begin{cases} x'_1(t) = x_2(t) \\ x'_2(t) = x_3(t) \\ \vdots \\ x'_{n-1}(t) = x_n(t) \\ x'_n(t) = f(t, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \end{cases} \quad (14.14)$$

Podemos ainda escrever o sistema (14.14) na forma vetorial:

Seja como sempre,

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Então

$$\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}'(t) \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \\ f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} = F(t, \vec{X})$$

Exemplo 14.4.

Considere a equação

$$x'' + \operatorname{sen}(t) x' + e^{2t} x = \operatorname{arctg} t.$$

Faça

$$x_1 = x, \quad x_2 = x_1'$$

Então

$$x_2' = x_1'' = x'' = -\operatorname{sen}(t) x' - e^{2t} x + \operatorname{arctg} t$$

\therefore

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\operatorname{sen}(t) x_2 - e^{2t} x_1 + \operatorname{arctg} t \end{cases}$$

ou ainda

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -e^{2t} x_1 - \operatorname{sen}(t) x_2 + \operatorname{arctg} t \end{pmatrix}$$

Atividade de auto-avaliação 14.2

Mostre que a forma vetorial do sistema obtido a partir da equação diferencial linear não homogênea normal de ordem n ,

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = f(t)$$

é

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Exemplo 14.5.

Seja a equação de 3ª ordem

$$y''' + 5y'' - 6y' + 7y = 0$$

Faça

$$y_1 = y, \quad y_2 = y_1', \quad y_3 = y_2'.$$

Daí

$$y_3' = y_2'' = y_1''' = y''' = -5y'' + 6y' - 7y$$

ou seja

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = -7y_1 + 6y_2 - 5y_3 \end{cases}$$

MODELOS UTILIZANDO SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

Diluição de Soluções Salinas

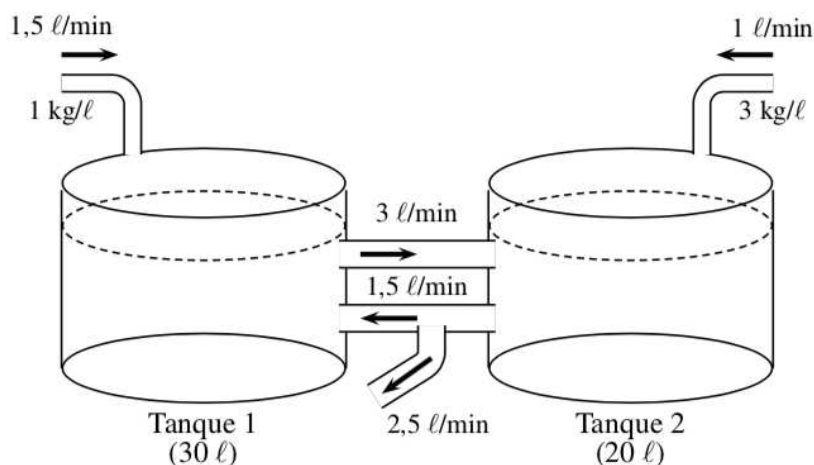


Figura 14.2:

Consideremos os dois tanques interligados da figura abaixo. O tanque 1 contém inicialmente 30 litros de água e 25 kg de sal, enquanto o tanque 2 contém inicialmente 20 litros de água e 15 kg de sal. Uma solução de 1 kg/l de sal entra no tanque 1 com uma vazão de 1,5 l/min. A mistura formada passa do tanque 1 para o tanque 2 com uma vazão de 3 l/min. Simultaneamente, entra no tanque 2 uma solução de 3 kg/l de água salgada (vinda de fora) com uma vazão de 1 l/min. Parte da solução formada no tanque 2 é expelida com uma vazão de 4 l/min; uma parte indo para o tanque 1 com uma vazão de 1,5 l/min, enquanto o resto deixa o sistema.

Sejam $Q_1(t)$ e $Q_2(t)$ as quantidades de sal nos dois tanques no tempo t . Escreva as equações diferenciais e as condições iniciais que modelam o processo de fluxo.

Solução:

Consideremos o primeiro tanque: a quantidade de sal num instante t é igual à quantidade de sal original, mais a que entrou no tempo t menos a que saiu no tempo t . A mesma coisa vale para o segundo tanque (uma equação de balanço). Logo, a taxa de variação da quantidade de

sal em um tanque é igual à taxa de variação da quantidade de sal que entra, menos a taxa de variação da quantidade de sal que sai.

Uma outra observação importante é que os volumes das soluções nos dois tanques sempre são constantes. Assim, por exemplo, seja qual for a quantidade de sal $Q_1(t)$ no tanque 1 no instante t , podemos garantir que a quantidade de sal por litro na solução do tanque 1 é $Q_1(t)/30 \text{ kg}/\ell$. E a quantidade de sal por litro na solução do tanque 2 é $Q_2(t)/20 \text{ kg}/\ell$.

Portanto, a taxa de variação da quantidade de sal no tanque 1 será:

$$\begin{aligned} &\{\text{taxa que entra de fora}\} + \{\text{taxa que entra do tanque 2}\} \\ &\quad - \{\text{taxa do que sai do próprio tanque 1}\} \end{aligned}$$

ou seja

$$\frac{dQ_1}{dt} = 1,5 + \frac{1,5}{20}Q_2(t) - \frac{1,5}{20}Q_1(t) \quad (i).$$

De modo análogo, a taxa de variação da quantidade de sal no tanque 2 será:

$$\begin{aligned} &\{\text{taxa que entra de fora}\} + \{\text{taxa que entra do tanque 1}\} \\ &\quad - \{\text{taxa do que sai do próprio tanque 2}\} \end{aligned}$$

Então,

$$\frac{dQ_2}{dt} = 3,0 + \frac{3}{30}Q_1(t) - \frac{4}{20}Q_2(t) \quad (ii)$$

E assim a resposta é

$$\begin{cases} \frac{dQ_1}{dt} = 1,5 + \frac{1,5}{20}Q_2(t) - \frac{1,5}{20}Q_1(t) \\ \frac{dQ_2}{dt} = 3,0 + \frac{3}{30}Q_1(t) - \frac{4}{20}Q_2(t) \end{cases} \quad (14.15)$$

MASSAS ACOPLADAS POR MOLAS

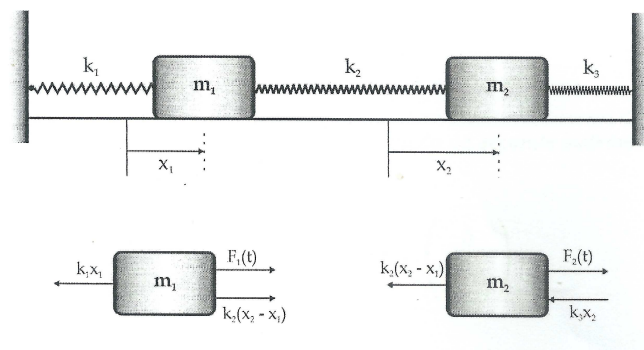


Figura 14.3:

Considere o sistema de duas massas m_1 e m_2 , interconectadas entre si e à duas paredes por meio de molas, que exercem forças restauradoras (de acordo com a “Lei de Hooke”), com constantes k_1, k_2, k_3 respectivamente; conforme da **Figura 14.3**. As massas podem se mover horizontalmente sobre uma superfície com atrito desprezível. No instante inicial, $t_0 = 0$, o sistema está em equilíbrio. Duas forças, $F_1(t)$ e $F_2(t)$, começam a atuar sobre as massas m_1 e m_2 , e, em cada instante t posterior, as massas ocupam posições x_1 e x_2 em relação a suas respectivas posições de equilíbrio. No momento captado na figura, $x_1 < x_2$, a primeira e a segunda molas estão alongadas e a terceira mola está comprimida. Os diagramas de forças a que cada massa está submetida aparecem ressaltados na parte inferior da **Figura 14.3**.

Usando todas as informações do diagrama e a segunda Lei do Movimento de Newton, $\sum F = ma$, para cada massa, obtenha as equações diferenciais que determinam as posições das duas massas em cada instante.

Solução:

Considere a massa m_1 . Usando o diagrama (levando em conta os sentidos das forças) temos que m_1 está submetida às forças

$$\left\{ \begin{array}{ll} -k_1 x_1 & \text{(força exercida pela primeira mola sobre } m_1) \\ +k_2(x_2 - x_1) & \text{(força exercida pela segunda mola sobre } m_1); \\ +F_1(t) & \text{(força externa aplicada à } m_1). \end{array} \right.$$

Então, pela segunda lei de Newton:

$$m_1 a_1 = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) + F_1(t),$$

(a_1 é a aceleração de m_1 , isto é, a derivada segunda da posição de m_1 ; ou ainda $d^2 x_1 / dt^2$). Reorganizando as parcelas, obtemos a equação do movimento da massa m_1 :

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2 + F_1(t). \quad (14.16)$$

Considere agora a massa m_2 . Repetindo a argumentação anterior, tem-se: m_2 está submetida às forças

$$\left\{ \begin{array}{ll} -k_2(x_2 - x_1) & \text{(força exercida pela segunda mola sobre } m_2) \\ -k_3 x_2 & \text{(força exercida pela terceira mola sobre } m_2); \\ +F_2(t) & \text{(força externa aplicada à } m_2). \end{array} \right.$$

Daí, e da segunda lei de Newton:


$$m_2 a_2 = -k_2(x_2 - x_1) - k_3 x_2 + F_2(t),$$

(a_2 é a aceleração de m_2 , isto é, a derivada segunda da posição de m_2 ; ou ainda $d^2 x_2 / dt^2$). Reorganizando as parcelas, obtemos a equação do movimento da massa m_2 :

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = k_2 x_1 - (k_2 + k_3)x_2 + F_2(t). \quad (14.17)$$

(14.16) e (14.17) constituem um sistema bidimensional de **equações diferenciais de segunda ordem**, que governa os movimentos simultâneos das massas m_1 e m_2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2 + F_1(t) \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = k_2 x_1 - (k_2 + k_3)x_2 + F_2(t). \end{array} \right.$$

 *Existem muitos outros problemas: circuitos elétricos acoplados (circuitos de segunda ordem), dinâmica de populações, para citar apenas dois) que admitem modelos matemáticos formados por conjuntos, ou sistemas, de equações diferenciais simultâneas.*

Obtenha um sistema de quatro **equações diferenciais lineares de primeira ordem**, que governa os movimentos das massas m_1 e m_2 .

SOLUÇÕES DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS. INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA. TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES DE SISTEMAS LINEARES

Lembre que, um *caminho*, ou *curva parametrizada* em \mathbb{R}^2 é uma aplicação

$$\begin{aligned} I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \vec{\gamma}(t) \end{aligned},$$

O conjunto \mathcal{C} de pontos $\vec{\gamma}(t)$, quando t varia em I , isto é, a imagem do caminho $\vec{\gamma}$, é uma *curva* em \mathbb{R}^2 .

Se $I = [a, b]$ então $\vec{\gamma}(a)$ e $\vec{\gamma}(b)$ são as *extremidades* de \mathcal{C} ;

O caminho $\vec{\gamma}$ é uma *parametrização* da curva \mathcal{C} , e diz-se também que $\vec{\gamma}(t)$ *percorre* \mathcal{C} à medida que t varia de a até b .

Se $\vec{\gamma}$ é um caminho em \mathbb{R}^2 , podemos escrever

$$\vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t)).$$

Chamamos $x(t)$ e $y(t)$ de *funções componentes*, ou *funções coordenadas* de $\vec{\gamma}$.

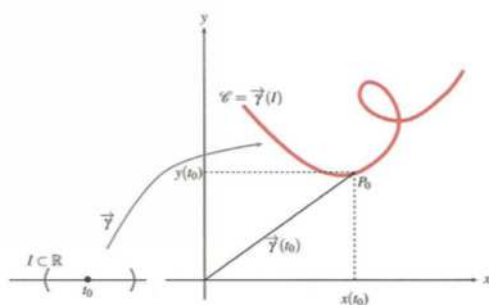


Figura 14.4:

Exemplo 14.6.

Parametrização de um gráfico de uma função real de variável real.

Se

$$f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad t \longmapsto f(t)$$

é uma função, então o gráfico de f , isto é, o conjunto $\{(t, f(t)) \mid t \in I\}$ pode ser visto como uma curva no plano, parametrizada pelo caminho

$$\vec{\alpha} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2; \quad \vec{\alpha}(t) = (t, f(t)).$$

O parâmetro é a própria variável independente da função f .

Definição 14.5 (Caminhos e Curvas diferenciáveis).

Um caminho $\vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$ é **contínuo num ponto** t_0 de seu domínio I , (respectivamente **diferenciável em** t_0) se as funções componentes $x(t)$ e $y(t)$ são contínuas em t_0 , (respectivamente deriváveis em t_0).

Uma **curva** \mathcal{C} é contínua em um ponto $P_0 \in \mathcal{C}$ (respectivamente diferenciável em P_0) se existe uma parametrização $\vec{\gamma} : J \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de \mathcal{C} , tal que $\vec{\gamma}(\bar{t}) = P_0$ e $\vec{\gamma}$ é contínuo (respectivamente derivável) em t_0 .

Uma curva \mathcal{C} é *contínua* (respectivamente diferenciável) quando existe uma parametrização de \mathcal{C} *contínua* (respectivamente *derivável*) **em todos os pontos** de seu domínio.

Definição 14.6 (Vetores Velocidade e Velocidades de Caminhos / Vetores tangentes a curvas).

Se $\vec{\gamma}$ é um caminho (ou parametrização) diferenciável, o *vetor velocidade* de $\vec{\gamma}$ no instante t é definido por

$$\vec{\gamma}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{\gamma}(t+h) - \vec{\gamma}(t)}{h}.$$

A *velocidade* ou *rapidez* de $\vec{\gamma}$ no instante t , é o comprimento do vetor $\vec{\gamma}'(t)$.

Se $\vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$ então

$$\vec{\gamma}'(t) = (x'(t), y'(t))$$

e

$$|\vec{\gamma}'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}.$$

Um vetor \vec{v} é *tangente* à curva \mathcal{C} no ponto P_0 , se existe uma parametrização diferenciável $\vec{\gamma}$ de \mathcal{C} , com $\vec{\gamma}(t_0) = P_0$ e $\vec{\gamma}'(t_0) = \vec{v}$.

Se \vec{v} é o vetor tangente à curva \mathcal{C} , parametrizada por $\vec{\gamma}$, no ponto $P_0 = \vec{\gamma}(t_0)$, é costume desenhar o vetor \vec{v} com sua origem no ponto $P_0 = \vec{\gamma}(t_0)$.

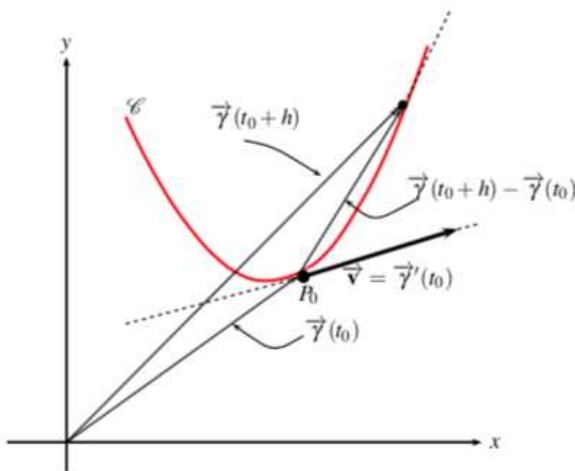



Figura 14.5:

 As definições e resultados que recordamos em \mathbb{R}^2 se estendem de modo natural ao caso de curvas no espaço \mathbb{R}^n . A apresentação em duas dimensões é feita essencialmente para tornar mais intuitivas as representações gráficas.

DEFINIÇÃO DE SOLUÇÃO DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM

Definição 14.7.


Sejam $I \in \mathbb{R}$ um intervalo e $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ uma região. Uma *solução* de um sistema de equações diferenciais ordinárias de ordem um e dimensão n definido em $I \times \mathcal{U}$:

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x'_n = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

é uma função diferenciável $\vec{\varphi} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ que tal para todo $t \in I$,

$$\begin{aligned} &\bullet \vec{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) \in \mathcal{U}; \\ &\bullet \begin{cases} \varphi'_1(t) = f_1(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) \\ \vdots \\ \varphi'_n(t) = f_n(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) \end{cases} \end{aligned}$$

Geometricamente, $\vec{\varphi}$ é um caminho diferenciável de I em \mathbb{R}^n ; e as componentes φ_i do *vetor velocidade* de $\vec{\varphi}$ são iguais às respectivas funções f_i que caracterizam o sistema de equações diferenciais.

 A imagem de cada solução $\vec{\varphi}$ é uma **curva solução do sistema de equações diferenciais** ou uma **curva integral do sistema**; ou uma **órbita**. Ela está contida em $I \times \mathbb{R}^n$.

Exemplo 14.7.

Consideremos o sistema de equações de primeira ordem bi-dimensional

$$\begin{cases} x'_1 = -\text{sen}[x_1(t)] \\ x'_2 = \cos[x_2(t)] \end{cases}$$

com $x_1(t) = t = x_2(t)$ para $t \in \mathcal{U} = \mathbb{R}$

Sejam $f_1(t, x_1, x_2) = \cos[x_1(t)]$ e $f_2(t, x_1, x_2) = \sin[x_2(t)]$.

Então $\vec{\phi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\vec{\phi}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

é solução do sistema.

Solução:

De fato, o sistema dado é

$$\begin{cases} x_1' = -\sin t \\ x_2' = \cos t \end{cases}$$

e $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_1'(t) = \frac{d}{dt} \cos t = -\sin t \quad \text{e} \quad \phi_2'(t) = \frac{d}{dt} \sin t = \cos t.$$

Atividade de auto-avaliação 14.4

Para cada número real “a”, baseado no **Exemplo 14.7**, escreva a solução do sistema de equações diferenciais de primeira ordem, bidimensional

$$\begin{cases} x_1' = a \cos[x_1(t)] \\ x_2' = -a \sin[x_2(t)] \end{cases}$$

sendo $x_1(t) = t$ e $x_2(t) = t$.

Identifique as funções $f_i(t, x_1, x_2)$ que definem o sistema;

Descreva a família de todas as curvas integrais dos sistemas obtidos ao permitir que o parâmetro “a” varie em \mathbb{R} .

PROBLEMA DE CAUCHY /TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE

Arrazoado: Por que a existência de soluções e sua unicidade são importantes?

Definição 14.8 (Problema de Cauchy para sistemas de equações diferenciais lineares).


Dada um sistema de equações diferenciais

$$\vec{X}' = F(t, \vec{X}),$$

onde F é uma função definida num aberto $I \times \mathbb{R}^n$, com valores em \mathbb{R}^n , e dado um ponto $(t_0, \vec{X}_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, o **problema de Cauchy**, ou **problema de valor inicial** para a equação

$$\vec{X}' = F(t, \vec{X})$$

com os **dados iniciais** t_0 e \vec{X}_0 consiste em descobrir uma solução $\vec{\phi}(t)$, definida numa vizinhança de t_0 , que seja solução da equação, e tal que no ponto t_0 assuma o valor \vec{X}_0

 Repare que agora o valor inicial é um vetor, o **vetor de condições iniciais**. Em particular, para especificar um *problema de Cauchy para uma equação escalar de ordem n* precisamos escolher um ponto t_0 junto com os valores que a solução e suas derivadas até a ordem $n - 1$ têm de assumir no ponto t_0 .

Exemplo 14.8.

Um exemplo de PVI, para uma equação de terceira ordem é;

$$\begin{cases} y''' = f(t, y, y', y'') \\ y(t_0) = a \\ y'(t_0) = b \\ y''(t_0) = c \end{cases}$$

Ao falar: *a solução passa pelo ponto* (t_0, \vec{X}_0) estamos transportando para as funções vetoriais a linguagem geométrica. Naturalmente quem passa pelo ponto (t_0, \vec{X}_0) é a curva solução, mas é bem comum usar esse abuso de linguagem.

O próximo teorema dá condições suficientes para garantir de que não estejamos trabalhando em vão quando buscamos soluções para um sistema de equações diferenciais lineares. Muitas vezes basta saber que as soluções *existem*, sem ter de calculá-las analiticamente, para que as usemos, ou procuremos métodos aproximados de solução.

Teorema 14.2 (Teorema de Existência e Unicidade de Soluções).

Considere um sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem

$$\vec{X}'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}}_{A(t)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}}_{\vec{X}(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} h_1(t) \\ \vdots \\ h_n(t) \end{pmatrix}}_{\vec{H}(t)}$$

definido em $I \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, com valores em \mathbb{R}^n , sendo $a_{ij}; h_i$ ($1 \leq i, j \leq n$) funções de classe $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.

Dado um ponto $(t_0, \vec{X}_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, $\vec{X}_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ o **problema de Cauchy com condições iniciais** t_0 e \vec{X}_0 :

$$\begin{cases} \vec{X}' = A(t)\vec{X} + \vec{H}(t) \\ \vec{X}(t_0) = \vec{X}_0 \end{cases}$$

tem uma única solução, definida em I , que “passa” pelo ponto \vec{X}_0 quando $t = t_0$.

Exemplo 14.9.

Seja o sistema

$$\begin{cases} dx/dt = x^2 + 1 \\ dy/dt = 1 \end{cases}$$

com as condições iniciais $(x(0), y(0)) = (0, 0)$. Pelo teorema (14.2) podemos garantir que esse sistema tem solução, e ela é única. Nesse exemplo podemos até calcular a solução explicitamente. De fato, observe que é possível separar esse sistema em dois subsistemas:

$$\begin{cases} dx/dt = x^2 + 1 \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} dy/dt = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(Cuidado! Isso nem sempre é possível. Deu certo porque as funções que definem o sistema não contêm x e y misturados de tal forma que não possamos separá-los.)

A única solução do primeiro sistema é $\arctg[x(t)] = t$; ou equivalentemente $x(t) = tg(t)$. A única solução do segundo sistema é $y(t) = t$. Assim, a única solução do sistema proposto é

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tg(t) \\ t \end{pmatrix}$$



Atenção!

O número de condições iniciais é sempre igual à dimensão do sistema.

Atividade de auto-avaliação 14.5

O problema de valor inicial

$$\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} f(t) & t \\ 0 & 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix}$$

com as condições iniciais $x_0 = x(0) = 0$; $y_0 = y(0) = 0$ e

$$f(t) = \begin{cases} \text{sen}(1/t) & \text{se } t \neq 0, \\ 0, & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

pode ter solução única em alguma vizinhança de (x_0, y_0) ?

SISTEMAS AUTÔNOMOS BIDIMENSIONAIS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Considere o seguinte exemplo:

Exemplo 14.10.

Para cada número real positivo t , calcule a solução do sistema de equações diferenciais de primeira ordem, bidimensional

$$\begin{cases} x_1' = t \cos[x_1(t)] \\ x_2' = -t \sin[x_2(t)]. \end{cases}$$

sendo $x_1(t) = t$ e $x_2(t) = t$.

Identifique as funções $x_i(t, x_1, x_2)$ que definem o sistema;

Calcule a família de todas as curvas integrais do sistema obtido ao permitir que o parâmetro “ t ” varie em $(0, +\infty)$.

Solução:

Devemos calcular $\vec{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$, tal que $\forall t \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{cases} \varphi_1'(t) = t \cos t \\ \varphi_2'(t) = -t \sin t \end{cases}$$

Duas integrações por partes fornecem

$$\vec{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} t \sin t + \cos t + c_1 \\ t \cos t - \sin t + c_2 \end{pmatrix},$$

que são as curvas integrais.



Atenção!

Observe que nos sistemas do **Exemplo 14.10** a variável t aparece explicitamente (não só como variável independente de $x_1(t)$ e $x_2(t)$, mas como variável independente outras eventuais funções que aparecem no sistema, como funções coeficientes da matriz do sistema ou como componentes da função vetorial de termos independentes).


Quando a variável t *não aparece explicitamente* é possível representar todas as curvas integrais do sistema em um mesmo plano. E essa possibilidade de representar as curvas soluções em um mesmo plano, é extremamente útil.

No que segue, vamos considerar sistemas bidimensionais nos quais t não aparece explicitamente.

Exemplo 14.11.

Observe os cinco sistemas de equações diferenciais lineares bidimensionais abaixo. Todos são *sistemas de equações diferenciais lineares bidimensionais*. Pede-se para identificar os sistemas em que a variável independente t aparece explicitamente, e os sistemas onde t só ocorre implicitamente.:

1. $\begin{cases} x' = a(t)x + b(t)y + e(t) \\ y' = c(t)x + d(t)y + h(t) \end{cases}$
2. $\begin{cases} x' = a(t)x + b(t)y \\ y' = c(t)x + d(t)y \end{cases}$
3. $\begin{cases} x' = ax + by + e(t) \\ y' = cx + dy + h(t) \end{cases}$
4. $\begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + h \end{cases}$
5. $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$.

 **Observação:** Neste exemplo, a notação $a(t)$ significa que a é uma função explícita de t , ao passo que a notação a denota que a é uma constante; o mesmo vale para os outros coeficientes e termos independentes dos sistemas.

Solução:

As respostas são imediatas: nos sistemas dos itens (1) a (3) a

variável t aparece explicitamente (nos coeficientes e/ou em pelo menos um dos termos independentes). Nos sistemas dos itens (4) e (5), t não aparece explicitamente.

Caracterização dos Sistemas Bidimensionais Autônomos

Os sistemas de equações diferenciais, lineares ou não lineares, nos quais a variável independente, t , não aparece explicitamente, são muito importantes. Esses sistemas recebem o nome de **sistemas autônomos**, ou **equações vetoriais autônomas**.

Exemplo 14.12.

O sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x' = x - 3xy \\ y' = 2x - y \end{cases}$$

é um sistema de primeira ordem autônomo, *mas não é linear*.

O sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x' = 2x + 4y \\ y' = -.4x + y \end{cases}$$

é um sistema *linear* de primeira ordem autônomo.



Atenção!

Repetindo, para não esquecer: Uma das razões que tornam os sistemas lineares bidimensionais autônomos muito importantes é o fato de podermos, a princípio, desenhar o *conjunto completo de suas curvas soluções*, sem precisar resolvê-los previamente. Isso também vale para o caso de sistemas não lineares, quando esta é, muitas vezes, a melhor alternativa para compreender o comportamento das soluções, a outra alternativa é buscar soluções numéricas.

Até o fim desta seção vamos tratar com sistemas autônomos

bidimensionais, que vamos escrever na forma

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad (14.18)$$

Estamos escrevendo $\vec{X}(x, y)$ em vez de $\vec{X}(x_1, x_2)$, etc. e usaremos frequentemente a notação $\vec{X}' = F(x, y) = [f(x, y), g(x, y)]$.

A interpretação geométrica de uma tal equação é a generalização da interpretação geométrica para equações diferenciais ordinárias $y' = f(x, y)$, que estudamos na Aula 7:

Em cada ponto (x, y) da região $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ onde as funções f e g estão definidas o vetor $(x', y') = (f(x, y), g(x, y))$ é o vetor tangente à curva solução $\vec{\phi}(t) = (x(t), y(t))$ que é solução da equação.

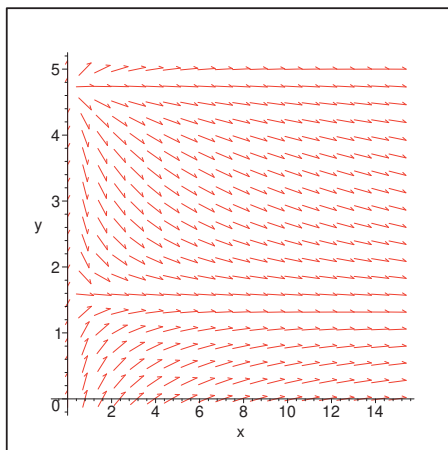
Sem resolver a equação, podemos desenhar em cada ponto da região onde ela está definida um vetor $\vec{v} = (f(x, y), g(x, y))$.

Plano de Fase: O plano xy no qual desenhemos os vetores $\vec{v} = (f(x, y), g(x, y))$, cada um com origem no respectivo ponto $(x, y) \in \Omega$ é o **plano de fase**, da equação (14.18).

Exemplo 14.13.

Considere o sistema
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \cos y - 0,002x \end{cases}$$

Com a ajuda de um sistema de computação algébrica (há vários deles), obtemos o plano de fase:



✍ Quando especificamos condições iniciais $x(t_0) = \alpha$ e $y(t_0) = \beta$, a solução particular que passa por (a, b) quando $t = t_0$ é a **órbita da equação (14.18) passando pelo ponto (α, β)** .

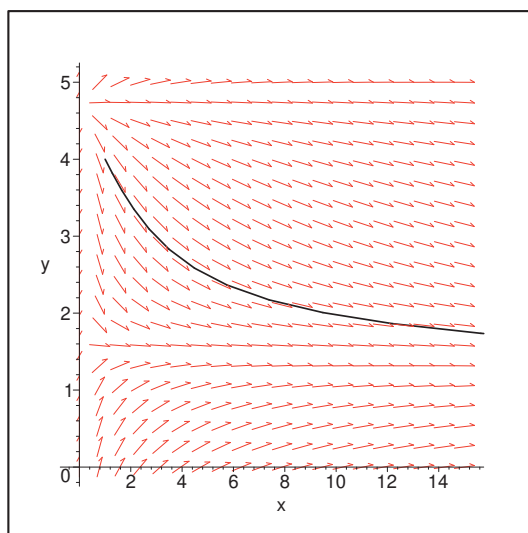
Retratos de Fase: O conjunto das órbitas de um sistema bidimensional autônomo é chamado de **retrato de fase** da equação. A análise do retrato de fase, muitas vezes conduz a importantes revelações sobre o sistema, sem ter de resolvê-la previamente.

Exemplo 14.14.

Considere novamente a equação vetorial

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \cos y - 0,002 x \end{cases}$$

Para obter a órbita por um ponto, por exemplo $(1, 4)$ devemos acrescentar a condição inicial $x_0 = 1$, $y_0 = 4$ aos comandos do sistema de plotagem que estejamos usando.

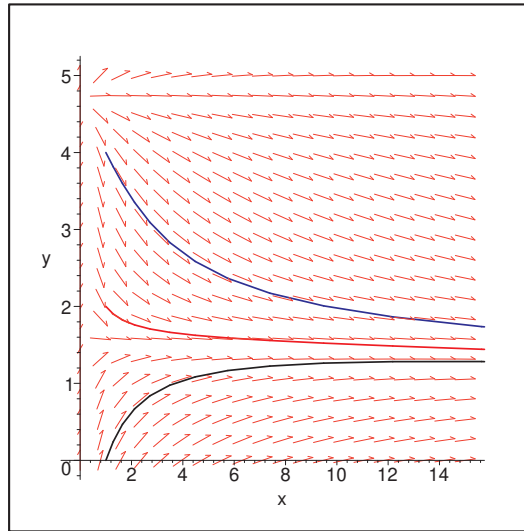


Para desenhar um retrato de fase, várias condições iniciais precisam ser especificadas.

Na figura abaixo, as curvas integrais do sistema

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \cos y - 0,002x \end{cases}$$

que passam pelos pontos $(1, 4)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$



Exemplo 14.15.

Um Exemplo Não Linear Importante:

Consideremos duas espécies, A (presas) e B (predadores), que convivem numa região fechada. Os predadores se alimentam exclusivamente das presas, enquanto estas se alimentam de uma outra fonte, presente no ambiente.

Sejam respectivamente $x(t)$ e $y(t)$ as populações das espécies A e B num instante t .

Fazemos as seguintes hipóteses:

- I) Se não houvesse predadores, a população de presas crescerá de acordo com a lei malthusiana: $dx/dt = ax$, $a > 0$. (Supõe-se também que a fonte de alimentos da espécie A é inesgotável.)
- II) Se não houvesse presas, a população de predadores decrescerá de acordo com a lei $dy/dt = -cy$, $c > 0$.

- III) Levando-se em conta a presença simultânea das duas espécies, supõe-se que a taxa de mortalidade da população de presas e a taxa de proliferação da população de predadores são ambas proporcionais ao número de encontros entre indivíduos das duas espécies. Substituímos então as equações das taxas de variação do números de indivíduos de cada espécie por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy, & a, b > 0 \\ \frac{dy}{dt} = -cxy + dxy, & c, d > 0 \end{cases} \quad (14.19)$$

Podemos justificar a introdução dos termos $-bxy$ e $+dxy$ nas equações de variação das populações A e B do seguinte modo: o número de encontros entre indivíduos das duas espécies num intervalo unitário de tempo é proporcional a xy : digamos que seja igual a αxy . Esses encontros resultam negativos para as presas; digamos que a população y diminua de β_1 membros para cada n encontros. Logo, a população y diminua de

$$\frac{\beta_1}{n} \alpha xy = bxy$$

membros por unidade de tempo. De modo análogo, esses encontros resultam benéficos para os predadores; digamos que a população y aumente de β_2 membros para cada n encontros. Logo, a população x aumenta de

$$\frac{\beta_2}{n} \alpha xy \equiv dxy$$

membros por unidade de tempo. O coeficiente b mede a susceptibilidade da espécie A às ações predatórias, e o coeficiente d mede a habilidade predatória da espécie B .

As equações (14.19) são conhecidas como **equações de Lotka-Volterra**. Foram propostas por Lotka, em 1925, e por Volterra, um ano depois. Elas se aplicam a uma grande variedade de problemas.



Atenção!

Nas aplicações, as funções $x(t)$ e $y(t)$ podem se referir tanto às populações de presas e predadores, nesta ordem, quanto às populações de predadores e presas, nesta ordem. O primeiro cuidado é identificar corretamente as equações das taxas de variação das populações de presas e predadores

Exemplo 14.16.

Imaginemos que x representa o número de raposas (em centenas) e y o número de coelhos (em milhares), isolados numa ilha. Uma equipe de biólogos, após um paciente estudo, obteve os seguintes dados para o modelo predador - presa:

$$a = -0.8, \quad b = 0.7, \quad c = 0.9 \quad \text{e} \quad d = -0.6,$$

de modo que as equações de Lotka-Volterra são

$$\begin{cases} x' = -0.8x + 0.7xy \\ y' = 0.9y - 0.6xy \end{cases}$$

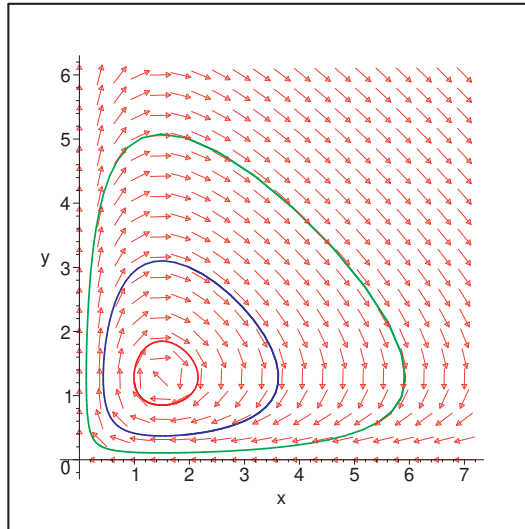
Posteriormente, três expedições à ilha, em ocasiões distintas, estudaram as populações de raposas e coelhos para as diferentes “configurações” especificadas abaixo, no instante em que chegaram:

$$(t_0, x_0, y_0) = (0, 2, 5),$$

$$(t_0, x_0, y_0) = (0, 2, 1),$$

$$(t_0, x_0, y_0) = (0, 2, 3).$$

Utilizando um sistema de computação algébrica temos o seguinte retrato de fase:



Nesse retrato de fase, o eixo horizontal mede a população de raposas, o eixo vertical, a população de coelhos, e as três órbitas são os resultados dos três diferentes conjuntos de dados iniciais.

Exemplo 14.17.

Para cada um dos sistemas predador-presa abaixo, identifique qual variável, x ou y , é a população de presas e qual é a população de predadores. (Obs: $(a, b, c, d > 0)$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -ax + bxy \\ \frac{dy}{dt} = cy - dxy \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = ax - b^2xy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + 3dxy \end{array} \right.$$

Solução:

Para identificar as populações de presas e predadores, devemos prestar atenção aos sinais dos coeficientes x e y nas equações do sistema:

No primeiro sistema, o coeficiente de x é negativo e o de y é positivo. Se não houvesse termos em xy então, pela lei de Malthus, a taxa de variação de x seria negativa, e a de y seria positiva. Logo $x(t)$ seria a população de predadores e $y(t)$ a de presas.

Observe que o coeficiente de xy na primeira equação é positivo (os predadores aumentam devido aos encontros com as presas); e o coeficiente de xy na segunda equação é negativo (as presas diminuem

devido aos encontros com os predadores).

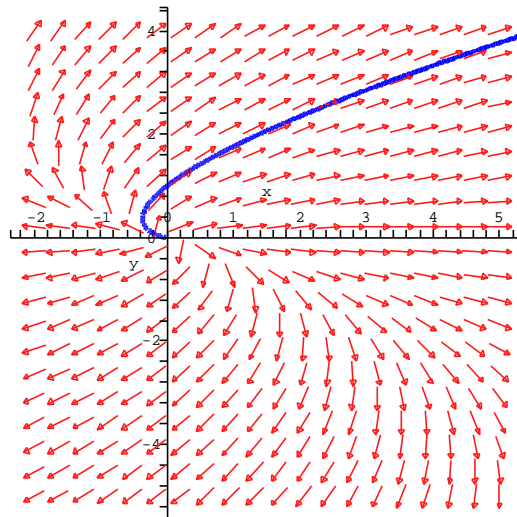
Conclusão: No primeiro sistema y se refere à população de presas e x à população de predadores.

O mesmo tipo de interpretação indica que, no segundo sistema x se refere à população de presas e y à população de predadores.

Atividade de auto-avaliação 14.6

Primeira parte : A figura abaixo corresponde à órbita do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = x + y, & y' = y \\ x(0) = 0, & y(0) = 0.1 \end{cases}$$



- Assinale na figura o ponto a partir do qual as abcissas dos pontos da trajetória começam a crescer.
- Determine, através de um exame visual da órbita, os comportamentos de $x(t)$ e de $y(t)$ quando $t \rightarrow +\infty$ e quando $t \rightarrow -\infty$
- Verifique que as soluções do PVI são

$$\begin{cases} x(t) = t e^t \\ y(t) = e^t \end{cases}$$

d) Calcule, usando as expressões de $x(t)$ e $y(t)$,

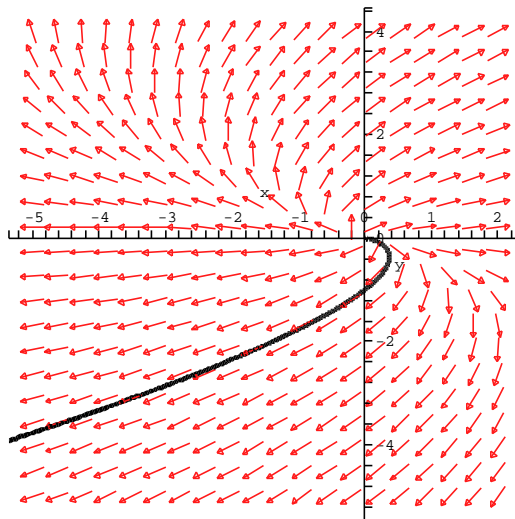
$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t), \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$$

e) Existe algum valor $t = t^*$ tal que $(x(t^*), y(t^*)) = (0, 0)$?

f) Qual é a abscissa do ponto de retorno?

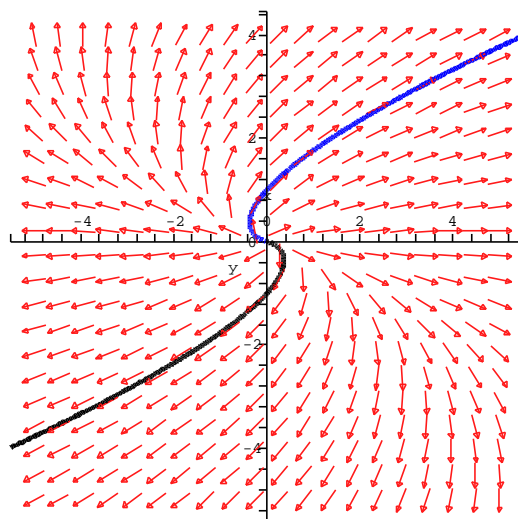
Segunda parte: Considere agora o problema de valor inicial, com mesmas equações diferenciais :

$$\begin{cases} x' = x + y, & y' = y \\ x(0) = 0, & y(0) = -0.1 \end{cases}$$



Repita todos os itens da primeira parte para esse PVI.

Terceira parte: Considerando as partes 1 e 2, o que se pode afirmar a respeito da figura abaixo?



Resumo

Nesta aula você aprendeu:

- a definir e/ou identificar sistemas de equações diferenciais ordinárias ordem n , e grau p ;
- a identificar sistemas *lineares*, classificá-los como *homogêneos* ou *não homogêneos*, a definir e/ou identificar sistemas lineares provenientes de equações diferenciais lineares normais de ordem n ;
- a definir soluções de sistemas de equações diferenciais lineares e o enunciado do Teorema de Existência e Unicidade de Soluções para essa classe de sistemas;
- as noções de *sistemas autônomos* e *não autônomos*, os conceitos de *plano de fase* e de *retrato de fase* de sistemas de equações diferenciais lineares de primeira ordem e primeiro grau.

O QUE VEM POR AÍ:

Na próxima aula, vamos descrever alguns dos métodos usuais de obtenção de soluções de sistemas de equações diferenciais de primeira ordem, e estudar mais detalhadamente o *método dos*

autovalores e autovetores para obtenção de soluções de sistemas de equações diferenciais de primeira ordem, com matrizes de coeficientes constantes, enfatizando o caso de sistemas bidimensionais.

SOLUÇÕES COMENTADAS DAS ATIVIDADES DESTA AULA:

Solução comentada da atividade 14.1

A forma explícita é

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{GMx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{GM y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{GM z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \end{cases}$$

. e a forma vetorial

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{GMm}{r^3} \vec{r}.$$

Solução comentada da atividade 14.2

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = f(t)$$

dá origem ao sistema construído da seguinte maneira:

Faça

$$x_1 = x, \quad x_2 = x'_1, \quad x_3 = x'_2, \quad \dots \quad x_n = x'_{n-1}.$$

A seguir calcule

$$\begin{aligned} x'_n = x''_{n-1} = x'''_{n-2} = \dots = x_1^{(n)} &= -a_{n-1}(t)x^{(n-1)} - \dots \\ &\dots - a_1(t)x' - a_0(t)x + f(t), \end{aligned}$$

de onde construímos o sistema

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ x'_3 = x_4 \\ \vdots \\ x'_{n-1} = x_n \\ x'_n = -a_0(t)y_1 - a_1(t)y_2 - \cdots - a_{n-2}(t)y_{n-1} - a_{n-1}(t)y_n + f(t) \end{cases}$$

Que ainda pode se escrito, em notação matricial, como

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Solução comentada da atividade 14.3

Primeiramente, vamos escrever as equações de segunda ordem do movimento do sistema, na forma normalizada, nas variáveis $x_1(t)$ e $x_2(t)$:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{k_1 + k_2}{m_1} x_1 + \frac{k_2}{m_1} x_2 + \frac{F_1(t)}{m_1} \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\frac{k_2 + k_3}{m_2} x_2 + \frac{k_2}{m_2} x_1 + \frac{F_2(t)}{m_2} \end{cases} \quad (14.20)$$

Vamos introduzir quatro novas funções incógnitas: y_1, y_2, y_3, y_4 ; sendo y_1, y_2 provenientes da primeira equação de segunda ordem do sistema (14.20); e y_3, y_4 referentes à segunda equação de segunda ordem do sistema (14.20), pois *sabemos que cada equação de segunda ordem dá origem a duas equações de primeira ordem*. E, de antemão, *sabemos também que a resposta é um sistema de quatro equações diferenciais de primeira ordem, do tipo*:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(y_1, y_2, y_3, y_4) \\ y_2' = f_2(y_1, y_2, y_3, y_4) \\ y_3' = f_3(y_1, y_2, y_3, y_4) \\ y_4' = f_4(y_1, y_2, y_3, y_4) \end{cases}$$

Definimos:

$$\begin{aligned} y_1 = x_1 \quad \text{e} \quad y_3 = x_2 \\ y_2 = y_1' \quad \text{e} \quad y_4 = y_3' \end{aligned}$$

Daí já temos o sistema incompleto:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = ? \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = ? \end{cases}$$

Para “completá-lo”, precisamos calcular as expressões para $y_2' = f_2(y_1, y_2, y_3, y_4)$ e para $y_4' = f_4(y_1, y_2, y_3, y_4)$.

Vejamos o cálculo de y_2' primeiro. Temos:

$$y_1 \stackrel{def}{=} x_1 \quad \text{e} \quad y_2 \stackrel{def}{=} y_1'$$

Portanto

$$\begin{aligned} y_2 = x_1' &\implies y_2' = [x_1']' \\ &\iff y_2' = x_1'' \end{aligned}$$

Usando a primeira equação de (14.20), e substituímos, no lado direito, x_1 e x_2 respectivamente por y_1 e y_3 . O resultado é

$$\begin{aligned} y_2' = x_1'' &= -\frac{k_1 + k_2}{m_1} x_1 + \frac{k_2}{m_1} x_2 + \frac{F_1(t)}{m_1} = \\ &= -\frac{k_1 + k_2}{m_1} y_1 + \frac{k_2}{m_1} y_3 + \frac{F_1(t)}{m_1} = f_2(y_1, y_2, y_3, y_4). \end{aligned}$$

Agora já temos o sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\frac{k_1 + k_2}{m_1} y_1 + \frac{k_2}{m_1} y_3 + \frac{F_1(t)}{m_1} \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = ? \end{cases},$$

e, para finalizar, vamos repetir o raciocínio acima, para obter y_4' .

Partindo de

$$y_3 \stackrel{def}{=} x_2 \quad \text{e} \quad y_4 \stackrel{def}{=} y_3'$$

obtemos

$$\begin{aligned} y_3' = x_2' &\implies y_4' = [x_2']' \\ &\iff y_4' = x_2'' \end{aligned}$$

Agora usamos a primeira equação de (14.20), e substituímos, no lado direito, x_1 e x_2 respectivamente por y_1 e y_3 e o resultado é

$$y_4' = -\frac{k_2 + k_3}{m_2} y_3 + \frac{k_2}{m_2} y_1 + \frac{F_2(t)}{m_2}.$$

Assim, a resposta da atividade (14.3) é:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\frac{k_1 + k_2}{m_1} y_1 + \frac{k_2}{m_1} y_3 + \frac{F_1(t)}{m_1} \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = -\frac{k_2 + k_3}{m_2} y_3 + \frac{k_2}{m_2} y_1 + \frac{F_2(t)}{m_2} \end{cases}$$

ou ainda, na forma matricial,

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & 0 & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{k_2 + k_3}{m_2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{F_1(t)}{m_1} \\ 0 \\ \frac{F_2(t)}{m_2} \end{pmatrix}.$$

Solução comentada da atividade 14.4

Fixe um número $a \in \mathbb{R}$. Repetindo as observações do **Exemplo 14.7**, e escrevendo o sistema na forma $\begin{cases} x_1' = a \cos t \\ x_2' = -a \sin t \end{cases}$, identificamos imediatamente

$$f_1(t, x_1, x_2) = a \cos t \text{ e } f_2(t, x_1, x_2) = -a \sin t.$$

Também, por analogia com o **Exemplo 14.7**, obtemos, para cada real “a” fixado, a solução

$$\vec{\varphi}_a(t) = \begin{pmatrix} a \sin t \\ -a \cos t \end{pmatrix}$$

cujas imagens são o ponto $(0, 0)$ (se $a = 0$) ou um círculo de centro na origem e raio $|a|$ (se $a \neq 0$).

Então a família de curvas integrais obtida quando a varia em \mathbb{R} é a imagem da família $\{\vec{\varphi}_a\}$, que identificamos como a família de círculos de centro na origem e raio $|a|$ unida à origem $(0, 0)$.

Solução comentada da atividade 14.5

Observando o coeficiente $f(t)$, vemos que ele não é uma função contínua no ponto 0. Consequentemente não é derivável em nenhuma vizinhança de $t = 0$; e muito menos de classe \mathcal{C}^1 .

Podemos garantir que o Problema de Cauchy apresentado *não tem solução única*.

Solução comentada da atividade 14.6

Primeira parte:

- Você deve marcar o ponto onde a reta tangente à órbita é vertical. É o “ponto de retorno” dos valores da abscissa de uma partícula que percorre a órbita no sentido de t crescente.
- Note que as equações do sistema não impõem restrições aos

valores do parâmetro t , o qual varia de $-\infty$ a $+\infty$. O exame do plano de fase revela que numa pequena vizinhança do ponto $(0,0.1)$ os vetores do campo associado ao sistema se afastam da origem, e o desenho da órbita que passa por $(0,0.1)$ está totalmente contido no semiplano superior ($y > 0$); e o sentido das setas indica sugere que a órbita “sai” da origem e “tende ao infinito”. As abcissas $x(t)$ partem do valor 0, decrescem até o ponto de retorno assinalado no item [a)], e depois passam a crescer sem parar. Quanto à ordenada $y(t)$, elas partem do valor 0.1 e não decrescem nunca.

Resumindo, o exame visual da figura nos sugere como possibilidades bastante razoáveis as seguintes afirmações:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0 \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0 \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$$

- c) Como o item pede para *verificar* que as funções dadas são soluções, basta substituí-las no sistema:

$$x(t) = t e^t \implies x'(t) = e^t + t e^t = y(t) + x(t)$$

e

$$y(t) = e^t \implies y'(t) = e^t = y(t);$$

o que prova a afirmação.

- d) Temos:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} t e^t = (-\infty) \cdot 0,$$

que é uma indeterminação. Para levantar esta indeterminação usamos a regra de L'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} t e^t &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t}{e^{-t}} = \frac{-\infty}{+\infty} \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-t}} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

Também

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t e^t = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

Além disso

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0,$$

e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty.$$

Ficam assim provadas as afirmações que tínhamos feito no item (b), a partir da figura dada.

- e) Suponha que exista um t^* tal que $(x(t^*), y(t^*)) = (0, 0)$.
Então

$$\begin{cases} t^* e^{t^*} = 0 \\ e^{t^*} = 0 \end{cases},$$

o que é impossível (basta considerar a segunda equação, e lembrar que a função exponencial nunca se anula).

Isto significa que a origem não é um ponto da órbita, apesar de sempre podermos considerar pontos da órbita próximos da origem a menos de uma vizinhança de raio $r = 0.1$.

- f) Queremos calcular o valor mínimo da abscissa $x(t)$.

Como $x(t)$ é derivável no intervalo aberto $(-\infty, +\infty)$ os seus pontos de extremo, caso existam, serão pontos críticos. Para calcular os pontos críticos de $x(t)$, calculamos sua derivada, obtendo

$$x'(t) = e^t + t e^t$$

de modo que

$$x'(t_0) = 0 \iff e^{t_0} + t_0 e^{t_0} = 0 \iff t_0 = -1$$

Então o único candidato a ponto de mínimo de $x(t)$ é $t_0 = -1$.

Novamente, de acordo com o Cálculo I, temos que

$$x''(-1) = 2e^{-1} - e^{-1} = e^{-1} > 0$$

e portanto $t_0 = -1$ é - de fato - um ponto de mínimo para $x(t)$.

Neste caso o valor mínimo de $x(t)$ é o valor

$$x(-1) = (-1) e^{-1} = -1/e$$

que é a abscissa do ponto de retorno

Segunda parte: é totalmente análoga à primeira. Omitiremos a solução.

Terceira parte: Podemos garantir que a figura apresenta TRÊS órbitas distintas (sem pontos em comum) do sistema

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = y \end{cases},$$

correspondentes a três problemas de valor inicial:

Dois deles são os PVI's discutidos nos exercícios **1** e **2**. A terceira órbita corresponde ao PVI

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = y \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases},$$

cuja solução única é $x(t) = y(t) = 0$ para todo t (órbita formada por um único ponto).

Repetimos que não temos uma órbita única que se estendendo de $-\infty$ a $+\infty$, tendo dois pontos de retorno.

Aula 15

CÁLCULO DE SOLUÇÕES DE SISTEMAS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

Objetivos

Ao final desta aula, você será capaz de:

- 1 calcular soluções de sistemas lineares *homogêneos e autônomos*, de dimensões 2 e 3, pelos métodos de autovalores e autovetores;
- 2 calcular soluções de sistemas lineares não homogêneos pelo método de variação dos parâmetros.

INTRODUÇÃO

Nesta aula queremos calcular soluções explícitas de sistemas de equações diferenciais lineares de primeira ordem, autônomos, isto é queremos obter soluções de sistemas

$$\vec{X}'(t) = A \cdot \vec{X}(t) + \vec{B}(t).$$


Os problemas básicos do estudo dos sistemas lineares são análogos aos já estudados para equações escalares de ordem n , a saber: examinar a existência, unicidade das soluções a partir de problemas de valor inicial.

Teorema 15.1.

O conjunto das soluções de um sistema de equações lineares homogêneo

$$\vec{X}'(t) = A(t) \cdot \vec{X}(t)$$

é um espaço vetorial de dimensão igual à ordem da matriz $A(t)$.

 **Obs:** Não deixe de observar que o teorema (15.1) vale para sistemas cujas matrizes são funções contínuas.

Portanto para obter todas as soluções de um dado sistema é necessário e suficiente calcular uma base para o espaço de suas soluções. Isto significa obter um *conjunto linearmente independente de geradores*.

SOLUÇÕES LINEARMENTE INDEPENDENTES

Definição 15.1.

Sejam $\vec{X}_1(t), \dots, \vec{X}_n(t)$ soluções de uma mesma equação vetorial de primeira ordem $\vec{X}' = A(t)\vec{X}$; $(t, \vec{X}) \in (\alpha, \beta \times U)$.

Diremos que $\vec{X}_1(t), \dots, \vec{X}_n(t)$ são soluções linearmente independentes se, para cada $t \in (\alpha, \beta)$ os vetores $\vec{X}_1(t), \dots, \vec{X}_n(t)$ são linearmente independentes em \mathbb{R}^n .

 **Observação:** Os vetores

$$\vec{X}_1(t), \dots, \vec{X}_n(t)$$

são linearmente independentes se, e somente se,

$$\det\{\text{col}[\vec{X}_1(t), \dots, \vec{X}_n(t)]\} \neq 0,$$

onde $\text{col}[\vec{X}_1(t), \dots, \vec{X}_n(t)]$ representa a matriz cujas colunas são os vetores $\vec{X}_i(t)$, $i \leq i \leq n$.

Exemplo 15.1.

Mostre que

$$\vec{X}_1(t) = \begin{pmatrix} \text{sen } t \\ \text{cos } t \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{X}_2(t) = \begin{pmatrix} \text{cos } t \\ -\text{sen } t \end{pmatrix}$$

são soluções linearmente independentes do sistema

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -x_1; \end{cases}$$

definidas em \mathbb{R} .

Solução:

A forma matricial do sistema dado é

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{X},$$

sendo

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Substituindo $\vec{X}(t)$ por $\vec{X}_1(t) = \begin{pmatrix} \text{sen } t \\ \text{cos } t \end{pmatrix}$ obtemos, no lado esquerdo:

$$\vec{X}_1'(t) = \begin{pmatrix} \text{cos } t \\ -\text{sen } t \end{pmatrix},$$

e, no lado direito:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{sen } t \\ \text{cos } t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{cos } t \\ -\text{sen } t \end{pmatrix};$$

comprovando que vale $\vec{X}_1' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{X}_1$; e que portanto, \vec{X}_1 é solução.


A comprovação de que $\vec{X}_2(t)$ também é solução é análoga e fica a seu cargo.

Sejam agora c_1 e c_2 constantes reais tais que,

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad c_1 \vec{X}_1(t) + c_2 \vec{X}_2(t) = \vec{0}.$$

Então

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} \quad c_1 \text{sen } t + c_2 \text{cos } t &= 0 \\ c_1 \text{cos } t - c_2 \text{sen } t &= 0. \end{aligned}$$

 c_1 e c_2 têm de ser as mesmas **para todos os valores** $t \in \mathbb{R}$. Não podemos mudar c_1 ou c_2 de acordo com o valor de t .

Observamos que, quando fazemos $t = 0$, a relação

$$c_1 \text{sen } t + c_2 \text{cos } t = 0$$

se transforma em $c_1 \text{sen } 0 + c_2 \text{cos } 0 = 0$; de onde tiramos que $c_2 \cdot 1 = 0$. Portanto a única alternativa para c_2 é

$$c_2 = 0.$$

E quando fazemos $t = \frac{\pi}{2}$, a relação

$$c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t = 0$$

se transforma em $c_1 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + c_2 \cos \frac{\pi}{2} = 0$; de onde tiramos que $c_1 \cdot 1 = 0$. Portanto a única alternativa para c_1 é

$$c_1 = 0.$$


Então

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad c_1 \vec{X}_1(t) + c_2 \vec{X}_2(t) = \vec{0} \implies c_1 = c_2 = 0.$$

Logo $\vec{X}_1(t)$ e $\vec{X}_2(t)$ são linearmente independentes.

O DETERMINANTE WRONSKIANO

Os próximos resultados simplificarão bastante a verificação se um conjunto de soluções é, ou não, linearmente independente.

 Vejamos como fica a noção de independência linear de soluções para o caso de uma equação escalar, normal, linear, de ordem n :

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0. \quad (15.1)$$

Esta equação dá origem a um sistema de n equações lineares de primeira ordem:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = -(a_{n-1}(t)y_n + \cdots + a_1(t)y_2 + a_0(t)y_1 \end{cases} \quad (15.2)$$

Se $\varphi(t)$ é solução da equação escalar (15.1) então, como

$$\varphi(t) = y(t) = y_1(t), \varphi'(t) = y'(t) = y_2(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t) = y^{(n-1)}(t) = y_n(t)$$

segue-se que o vetor $(\varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$ satisfaz ao sistema (15.2). Consequentemente \dots

$$\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$$

são soluções de (15.1) se e só se

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_1'(t) \\ \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \varphi_n(t) \\ \varphi_n'(t) \\ \vdots \\ \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \quad (15.3)$$

são soluções de (15.2). De maneira bem natural, n soluções $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ da equação escalar (15.1) serão linearmente independentes se os correspondentes vetores (15.3) forem linearmente independentes. Temos então:

Um conjunto de n soluções $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$, da equação escalar, linear, normal, de ordem n ,

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$$

definidas em $I \subset \mathbb{R}$ é linearmente independente se, e só se, o determinante

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \dots & \varphi_n'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

for diferente de 0 para todos os pontos $t \in I$.

Exemplo 15.2.

Dar exemplo de duas funções $f(x)$ e $g(x)$ linearmente independentes sobre \mathbb{R} mas tais que o determinante $\det \begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{pmatrix}$ seja identicamente nulo em \mathbb{R} .

Solução:

Considere as funções $f(x) = x$ e $g(x) = |x|$. Elas são linearmente independentes em \mathbb{R} , pois se $c_1x + c_2|x| = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ então, tomando $x = 1$ e $x = -1$ respectivamente, obtemos

$$c_1 + c_2 = 0$$

$$c_1 - c_2 = 0$$

Logo $c_1 = c_2 = 0$.

Por outro lado, para $x \geq 0$, temos

$$\det \begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0;$$

e para $x < 0$, temos

$$\det \begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & -x \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

Definição 15.2.

Dadas n funções vetoriais $\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_n$ definidas em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, com valores em \mathbb{R}^n ; para cada $t_0 \in I$, o **determinante Wronskiano** de $\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_n$ **no ponto** t_0 é o número $W[\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_n](t_0)$ (ou $W[\vec{X}_1(t_0), \dots, \vec{X}_n(t_0)]$) definido por

$$W[\vec{X}_1(t_0), \dots, \vec{X}_n(t_0)] \stackrel{def}{=} \det[\text{col}(\vec{X}_1(t_0), \dots, \vec{X}_n(t_0))].$$



Atenção!

O **Exemplo 15.2** mostra que, em geral, o wronskiano de duas funções linearmente independentes em um intervalo pode ser nulo. Entretanto, quando as funções são soluções de um mesmo sistema de equações diferenciais, vale o seguinte teorema geral, cuja demonstração omitimos

Teorema 15.2.

Se $\vec{X}_1(t), \dots, \vec{X}_n(t)$ são n soluções de um mesmo sistema linear homogêneo $\vec{X}' = A(t) \vec{X}$ em um intervalo I , então $\vec{X}_1(t), \dots, \vec{X}_n(t)$ são linearmente independentes se, e só se,


$$\forall t \in I \quad W[\vec{X}_1(t_0), \dots, \vec{X}_n(t)] \neq 0.$$


A FÓRMULA DE ABEL

Teorema 15.3 (Fórmula de Abel).

Se $\vec{X}_1(t), \dots, \vec{X}_n(t)$ são soluções de $\vec{X}' = A(t) \vec{X}$ então

$$\det(\text{col}[\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_n]) = e^{\int \text{tr}(A(t)) dt}.$$

 **Observação:** $\text{tr} A(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n a_{ii}(t)$

 Verificação da fórmula de Abel para o caso em que o sistema é proveniente de um sistema de ordem dois - compatibilidade

Verificação: Em primeiro lugar vamos especificar os ingredientes que intervêm na fórmula de Abel, a saber:

O sistema proveniente de uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ e o wronskiano de duas soluções.

Temos:

$$\begin{array}{l} y_1 = y \\ y_2 = y_1' \end{array} \longrightarrow \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = ? \end{cases}$$

Como $y_2 = y_1'$ então

$$y_2' = (y_1')' = y_1'' = y'' = -p y' - q y = -q y_1 - p y_2.$$

Portanto o sistema associado à equação $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ é

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -q y_1 - p y_2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix}}_A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Note que $\text{tr} A(t) = -p(t)$.

Se $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ são duas soluções de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, então as correspondentes soluções vetoriais de $\vec{X}' = A(t) \cdot \vec{X}$ são

$$\vec{\phi}_1(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_1'(t) \end{pmatrix} \text{ e } \vec{\phi}_2(t) = \begin{pmatrix} \varphi_2(t) \\ \varphi_2'(t) \end{pmatrix}, \text{ de modo que}$$

$$\det(\text{col}[\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2]) = W(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} = \varphi_1 \varphi_2' - \varphi_2 \varphi_1'$$

Agora, observamos que

$$\frac{d}{dt} W(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_1 \varphi_2'' - \varphi_2 \varphi_1'' \quad (15.4)$$

e como φ_1 e φ_2 são soluções da equação de segunda ordem,

$$\begin{aligned} \varphi_1'' &= -p \varphi_1' - q \varphi_1 \\ \varphi_2'' &= -p \varphi_2' - q \varphi_2 \end{aligned}$$

Substituindo na equação (15.4) e simplificando,

$$\frac{d}{dt}W(\varphi_1, \varphi_2) = -p(t) W(\varphi_1, \varphi_2),$$

o que mostra que $W(\varphi_1, \varphi_2)$ satisfaz à equação linear homogênea de primeira ordem $\omega' = -p(t)\omega$, cujas soluções são da forma $c e^{\int -p(t) dt}$. Logo

$$W(\varphi_1, \varphi_2) = c e^{\int -p dt} = c e^{\int \text{tr}(A(t)) dt}.$$

Corolário 15.4 (Corolário da fórmula de Abel).

Se $\vec{X}_1(t), \dots, \vec{X}_n(t)$ são soluções de $\vec{X}' = A(t) \vec{X}$ então

- ou

$$\det(\text{col}[\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_n]) \neq 0 \quad \forall t,$$

- ou

$$\det(\text{col}[\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_n]) = 0 \quad \forall t.$$

Consequentemente, para testar a independência linear de um conjunto de n soluções de uma equação diferencial basta calcular o determinante $\det(\text{col}[\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_n])$ em um ponto.

CÁLCULO DE SOLUÇÕES

Estudaremos agora métodos para obter um conjunto de geradores do espaço solução de um sistema linear. Trabalharemos inicialmente com sistemas homogêneos e **autônomos**; isto é, sistemas que satisfazem às seguintes restrições:

- Os sistemas são homogêneos; isto é, sistemas cujos termos independentes, $\vec{H}(t)$, são nulos.
- Os coeficientes da matriz do sistema são constantes.

Abreviadamente:

$$\vec{X}'(t) = A \cdot \vec{X} \quad (15.5)$$

Exemplo 15.3.

$$(n = 1) \quad x' = ax, \quad a \in \mathbb{R}$$

Trata-se de uma equação linear homogênea de 1ª ordem, estudada no início do curso. Sua solução geral é

$$x(t) = c e^{at} \quad (15.6)$$

onde c é um parâmetro real.

O espaço das soluções é gerado pelo “vetor” e^{at} , e é claramente um espaço unidimensional.


Exemplo 15.4.

$$(n = 2)$$

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + 2x_2 \\ x'_2 = 8x_1 + x_2 \end{cases}$$

O sistema é bidimensional, autônomo e homogêneo, com coeficientes constantes. De acordo com o teorema (15.1) para calcular sua solução geral, precisamos encontrar duas soluções linearmente independentes.

O Método dos Autovalores e Autovetores

 Dentre vários procedimentos existentes para obter soluções, merece destaque o chamado método dos autovalores e autovetores.

Exemplo 15.5.

A forma matricial (ou vetorial) do sistema do **Exemplo 15.4** é:

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \vec{X}.$$

Lembre que, para determinar a solução geral desse sistema 2×2 , precisamos encontrar *duas soluções linearmente independentes do mesmo*.

Motivados pelo **Exemplo 15.3**, vamos tentar uma solução *vetorial* que envolva a função exponencial. A princípio, se apresentam duas escolhas inspiradas pela analogia das formas das

$$\text{equações } x' = ax \text{ e } \vec{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \vec{X}.$$

- A primeira tentativa seria generalizar o parâmetro c da solução do **Exemplo 15.3**, substituindo-o por um vetor apropriado (a ser calculado) e mantendo o expoente da forma $e^{\lambda t}$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$ também tem de ser calculado apropriadamente;
- Uma outra possibilidade é tentar generalizar o expoente a da solução (15.2), substituindo-o pela “exponencial da matriz A ”, $e^{A \cdot t}$, e mantendo o coeficiente como sendo um número real (a ser calculado).

As duas opções são viáveis. Entretanto, a mais natural é a primeira, já que envolve operações que sabemos efetuar bem. A segunda introduz uma nova função, a **exponencial de uma matriz**, cuja construção não vamos abordar neste curso pois requer conceitos de espaços vetoriais normados, convergência de série de matrizes, entre outros, que ainda não fazem parte do nosso curso.

Por isso, vamos tentar obter uma solução da forma

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t};$$

sendo λ um escalar (i.é, um número real ou complexo) e

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

um vetor; ambos ainda a serem determinados.

Prosseguindo no laboratório, experimentaremos uma solução da forma

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

Substituindo no sistema, devemos ter:

$$\begin{pmatrix} (v_1 e^{\lambda t})' \\ (v_2 e^{\lambda t})' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 e^{\lambda t} \\ v_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

de onde, calculando as derivadas no lado esquerdo, a multiplicação de matriz por vetor no lado direito; e igualando os termos, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} v_1 \lambda e^{\lambda t} = v_1 e^{\lambda t} + 2v_2 e^{\lambda t} \\ v_2 \lambda e^{\lambda t} = 8v_1 e^{\lambda t} + v_2 e^{\lambda t} \end{cases}$$

“Simplificando” o fator exponencial:

$$\begin{cases} \lambda v_1 = v_1 + 2v_2 \\ \lambda v_2 = 8v_1 + v_2 \end{cases} ;$$

ou ainda

$$A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} ;$$

o que, (segundo a Álgebra Linear), obriga λ a ser um *autovalor*

da matriz A , e $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ um *autovetor* de A *associado*, ou *pertencente*, ao autovalor λ .



Estabelecemos então a seguinte estratégia para a obtenção de soluções do sistema dado. Se der certo, vamos tentar a mesma que tentaremos para qualquer sistema homogêneo de coeficientes constantes

- Calcular os autovalores, λ_i , da matriz A

- Para cada autovalor, calcular um autovetor \vec{K}_{λ_i} que lhe seja associado.
- formar o conjunto de soluções

$$\{e^{\lambda_1 t} \vec{K}_{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_m t} \vec{K}_{\lambda_m}\}$$



Atenção!

Ora, sabe-se que os autovalores de uma matriz A são exatamente as raízes da equação polinomial

$$\det (A - \lambda Id) = 0$$

- ✍ Observe que, para cálculo de autovalores e autovetores, podemos considerar tanto a matriz $\lambda Id - A$ quanto $A - \lambda Id$. Entretanto, existem situações, envolvendo autovalores com multiplicidades, que devemos considerar sempre $A - \lambda I$.
- ✍ Em toda esta aula Id ou I , indistintamente, se referem à matriz identidade de dimensão exatamente igual à dimensão da matriz A do sistema que estiver sendo tratado na ocasião.

Recorde que

Definição 15.3.

A equação polinomial $\det (A - \lambda Id) = 0$ é chamada de *equação característica* da matriz A ,

O polinômio $\det (A - \lambda I)$ é chamado de *polinômio característico* de A , ou, às vezes, *polinômio característico do sistema determinado por A* .

Retomando o **Exemplo 15.3**, temos que o polinômio característico de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ é

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 8 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 16$$

e, portanto a equação característica de A é

$$(\lambda - 1)^2 - 16 = 0$$

cujas raízes são $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -3$.

Precisamos calcular autovetores associados a cada um dos autovalores.

Definição 15.4 (Autoespaços).

O conjunto de autovetores associados a um autovalor λ é chamado de *autoespaço de, ou associado a, λ* .

Para determinar o autoespaço associado a $\lambda_1 = 5$, resolvemos a equação vetorial

$$A\vec{K} = 5\vec{K}$$

isto é,

$$(5Id - A)\vec{K} = \vec{0}$$

ou ainda

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tiramos a relação

$$4v_1 - 2v_2 = 0$$

de modo que \vec{K} pode ser qualquer vetor não-nulo (v_1, v_2) cujas

componentes verificam a relação $v_2 = 2v_1$.

O autoespaço do autovalor $\lambda_1 = 5$ é então

$$\{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid v_2 = 2v_1, \quad v_1 \neq 0\}$$

Um autovetor de A associado a λ_1 é **qualquer vetor não nulo** do autoespaço de λ_1

Por exemplo, escolhendo $v_1 = 1$ calculamos $v_2 = 2$.

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

E assim construímos a “solução”

$$\vec{X}_1(t) = e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Procedemos de modo análogo para $\lambda_2 = -3$. Primeiro determinamos o autoespaço de λ_2 :

$$A\vec{K} = -3\vec{K},$$

e para isso resolvemos o sistema

$$(-3Id - A)\vec{K} = \vec{0},$$

isto é:

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

de onde obtemos a relação $v_2 = -v_1$. Escolhemos agora podemos tomar para \vec{K} qualquer vetor (v_1, v_2) do autoespaço de λ_2 :

$$\{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid v_2 = -v_1\}.$$

Podemos escolher, por exemplo,

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Daí construímos uma segunda solução

$$\vec{X}_2(t) = e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Observe agora que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

são vetores linearmente independentes em \mathbb{R}^2 . Portanto

$$e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

também são, para todo $t \in \mathbb{R}$, pois são múltiplos de vetores linearmente independentes.

Isto significa que as funções vetoriais $t \mapsto e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e

$$t \mapsto e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

são soluções linearmente independentes.

Deixamos para você a tarefa de verificar que $\vec{X}_1(t)$ e $\vec{X}_2(t)$

são soluções do sistema.

Assim o conjunto

$$\{\vec{X}_1(t), \vec{X}_2(t)\}$$

é uma base do espaço das soluções de


$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + 2x_2 \\ x'_2 = 8x_1 + x_2 \end{cases}$$

Logo *uma solução geral* do sistema proposto é

$$\vec{X}(t) = c_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ou explicitando as funções coordenadas da solução geral calculada:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 e^{5t} + c_2 e^{-3t} \\ x_2(t) &= 2c_1 e^{5t} - 2c_2 e^{-3t}. \end{aligned}$$

 Não devemos substituir, na expressão de $x_2(t)$, $2c_1$ (respectivamente $-2c_2$) por uma nova constante arbitrária c_3 (respectivamente c_4). Ao fazer isso, estamos na verdade dizendo que a solução x_2 é igual a x_1 . As soluções x_1 e x_2 são distintas, embora relacionadas pelas equações do sistema.

Atividade de auto-avaliação 15.1


As equações algébricas vetoriais para determinação de auto-vetores levaram a sistemas indeterminados, com uma infinidade de soluções. Explique porque.



Atenção!

A construção de soluções gerais de sistemas de n equações diferenciais lineares homogêneas autônomas, cujas matrizes de coeficientes possuem n autovalores diferentes é uma generalização natural do **Exemplo 15.3**. Na próxima seção, vamos ver mais exemplos de cálculos de soluções desses sistemas, às vezes chamados de **sistemas desacopláveis**.

SISTEMAS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM n -DIMENSIONAIS, COM n AUTOVALORES REAIS DISTINTOS.

 A construção de soluções completas de sistemas de n equações diferenciais autônomas e lineares, cujas matrizes de coeficientes possuem n autovalores diferentes é uma generalização natural do **Exemplo 15.3**.

Vejamos um par de exemplos de cálculo de soluções gerais de sistemas desacopláveis de dimensão maior do que 2:

Exemplo 15.6.

Determine uma solução geral de

$$\vec{X}'(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{X}(t)$$

Solução:

Primeiramente formamos a matriz

$$A - \lambda Id = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2 - \lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Então (verifique!)

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda Id) = 0 &\iff \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \\ &\iff \lambda = 1; \lambda = -2; \lambda = 3. \end{aligned}$$

Substituindo $\lambda_1 = 1$ na matriz $(A - \lambda Id)$, e resolvendo o sistema algébrico

$$(A - \lambda_1 Id)\vec{V}_1 = \vec{0},$$

obtemos um sistema indeterminado, que admite como solução, por exemplo, o autovetor

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Analogamente, substituindo $\lambda_2 = -2$ e $\lambda_3 = 3$ na matriz $(A - \lambda Id)$, e resolvendo os sistemas algébricos

$$(A - \lambda_2 Id)\vec{V}_2 = \vec{0}, \quad \text{e} \quad (A - \lambda_3 Id)\vec{V}_3 = \vec{0}$$

respectivamente; obtemos, por exemplo, as soluções

$$\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{V}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

respectivamente.

Então podemos formar a solução geral

$$\vec{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t};$$

sendo c_1 , c_2 e c_3 parâmetros arbitrários.

Exemplo 15.7.

Determine a solução do PVI

$$\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \vec{X}(t), \quad \vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solução:

Repetindo os passos do exemplo anterior:

Formamos a matriz

$$A - \lambda Id = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 & 2 \\ 0 & 2 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Então

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda Id) = 0 &\iff \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \\ &\iff \lambda = 1; \lambda = 2; \lambda = 3. \end{aligned}$$

Substituindo $\lambda_1 = 1$ na matriz $A - \lambda Id$, e resolvendo o sistema algébrico

$$(A - \lambda_1 Id)\vec{V}_1 = \vec{0},$$

obtemos um sistema indeterminado, que admite como solução, por exemplo, o autovetor

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Analogamente, substituindo $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 3$ na matriz $A - \lambda Id$, e resolvendo os sistemas algébricos

$$(A - \lambda_2 Id)\vec{V}_2 = \vec{0}, \quad \text{e} \quad (A - \lambda_3 Id)\vec{V}_3 = \vec{0}$$

respectivamente, calculamos as soluções

$$\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{V}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

respectivamente.

Então podemos formar a solução geral

$$\vec{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t};$$

sendo c_1 , c_2 e c_3 parâmetros arbitrários.

Substituindo no ponto $t = 0$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fica como exercício resolver o sistema acima e calcular as constantes c_1, c_2, c_3 , obtendo como resultado $c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 0$.

A solução do PVI é

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ -2e^t + 2e^{2t} \\ e^t \end{pmatrix}.$$



Atenção!

Resumindo: Dado um sistema homogêneo de n equações diferenciais lineares de primeira ordem, de coeficientes constantes

$$\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \vec{X}(t);$$

cuja equação característica

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

tem n raízes reais distintas

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n;$$

sua solução geral é

$$\vec{X}(t) = c_1 \vec{V}_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n \vec{V}_n e^{\lambda_n t}$$

sendo $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_n$ autovetores associados respectivamente a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Atividade de auto-avaliação 15.2

Considere o sistema

$$\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \vec{X}$$

Sejam \vec{V}_1 e \vec{V}_2 autovetores associados respectivamente aos autovalores λ_1 e λ_2 dessa matriz.

a) Construa a matriz $P = \text{col}[\vec{V}_1 \ \vec{V}_2]$

b) Mostre que $P^{-1} A P = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

c) Calcule as soluções $\vec{Z}_1(t)$ e $\vec{Z}_2(t)$ do sistema.

$$\vec{Z}'(t) = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \vec{Z}.$$

d) Mostre que $\vec{X}_i(t) = P \vec{Z}_i(t)$, $i = 1, 2$ são soluções do sistema $\vec{X}'(t) = A \vec{X}$

SISTEMAS COM AUTOVALORES COMPLEXOS

✍ Algumas complicações podem surgir ao empregar o método de autovalores e autovetores. Uma delas, é que, *mesmo um sistema homogêneo, autônomo, cuja matriz associada só tem coeficientes reais, pode ter alguns (ou todos) os seus autovalores complexos.*

✍ Lembre que os autovalores são sempre as raízes da equação característica. E se um número complexo $a + bi$ é solução de uma equação algébrica (polinomial), cujos coeficientes são todos números reais, então o *complexo conjugado* $a - bi$ também é solução da mesma equação. Ou seja, **se todos os coeficientes da matriz de um sistema homogêneo, autônomo são números reais**, o que equivale a dizer que **todos os coeficientes do polinômio característico da matriz do sistema são números reais**, então caso o sistema tenha um autovalor complexo z , o complexo conjugado, \bar{z} , também é autovalor do sistema.



Atenção!

Nesta seção, vamos supor que todos os eventuais autovalores complexos de um sistema são distintos, a menos de conjugação.

Alguns exemplos:

Exemplo 15.8.

Determine a solução geral de.

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 4x - y, \end{cases}$$

Passando sistema para a forma matricial:

$$\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \vec{X}$$

Solução:

Procedendo como no caso de autovalores reais, temos que, para calcular o polinômio característico de A é preciso formar a matriz

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ 4 & -1 - \lambda \end{pmatrix}. \text{ Depois obtemos o polinômio caracte-}$$

terístico do sistema, que, neste exemplo, é, (confira!):

$$\det(A - \lambda Id) = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0;$$

cujas raízes são

$$\lambda_1 = 1 + 2i, \quad \lambda_2 = 1 - 2i.$$

Agora precisamos resolver a equação vetorial $(A - \lambda Id)\vec{V} = \vec{0}$ para determinar os autovetores, exatamente como no caso real. Substituindo λ_1 na matriz $(A - \lambda Id)$ obtém-se a matriz

$$\begin{pmatrix} 3 - (1 + 2i) & -2 \\ 4 & -1 - (1 + 2i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2i & -2 \\ 4 & -2 - 2i \end{pmatrix}$$

**Atenção!**

A matriz obtida quando substituímos um autovalor complexo em $A - \lambda I$ **pode** ter coeficientes complexos. Quem nós estamos supondo que não tem coeficientes complexos é a matriz **do sistema**.

Prosseguindo, para calcular um autovetor $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ associado a $\lambda_1 = 1 + 2i$, precisamos resolver o sistema algébrico

$$\begin{pmatrix} 2-2i & -2 \\ 4 & -2-2i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daí obtemos o sistema de equações algébricas

$$\begin{cases} (2-2i)v_1 - 2v_2 = 0 \\ 4v_1 + (-2-2i)v_2 = 0 \end{cases}$$

A primeira equação do sistema acima nos diz que $v_2 = (1-i)v_1$; e a segunda, que $2v_1 = (1+i)v_2$.



Atenção!

Entretanto, lembrando de como se efetua divisão de números complexos, temos

$$\begin{aligned} 2v_1 = (1+i)v_2 &\iff v_2 = \frac{2}{1+i}v_1 \\ &\iff v_2 = \frac{2}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}v_1 \\ &\iff v_2 = \frac{2(1-i)}{2}v_1 \\ &\iff v_2 = (1-i)v_1. \end{aligned}$$

Portanto as duas equações do sistema fornecem a mesma relação para as coordenadas do autovetor pertencente a $\lambda_1 = 1 + 2i$. Qualquer vetor da forma

$$w \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

($w \in \mathbb{C}$) é um autovetor de λ_1 . Por exemplo:

$$\overrightarrow{V_{C1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Continuando com a analogia com o caso de autovetores de coordenadas reais, formamos a *solução complexa*:

$$\overrightarrow{X_{C1}}(t) = e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 1/2 + (1/2)i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Convém recordar a a **fórmula de Euler**:

$$e^{a+bi} = e^a \cos b + i e^a \sin b.$$

Usando essa fórmula, podemos desmembrar a solução $\overrightarrow{X_{C1}}(t)$ em

$$\overrightarrow{X_{C1}}(t) = (e^t \cos 2t + i e^t \sin 2t) \cdot \left[\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

Efetutando as contas e agrupando convenientemente:

$$\overrightarrow{X_{C1}}(t) = \begin{pmatrix} (1/2)[e^t \cos(2t) - e^t \sin(2t)] \\ e^t \sin(2t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} (1/2)[e^t \sin(2t) + e^t \cos(2t)] \\ e^t \cos(2t) \end{pmatrix}$$

Vale o seguinte resultado:

Proposição 15.5.

Sendo A é uma matriz de coeficientes reais, e se

$$\overrightarrow{X_C}(t) = \overrightarrow{X_1}(t) + i\overrightarrow{X_2}(t)$$

uma solução complexa de $\overrightarrow{X}' = A\overrightarrow{X}$,

então $\overrightarrow{X_1}(t)$ e $\overrightarrow{X_2}(t)$ são **soluções reais, linearmente independentes** de

$$\overrightarrow{X}' = A\overrightarrow{X}.$$

Segue dessa proposição que um par de soluções reais, linearmente independentes, do sistema

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \vec{X}$$

é

$$\begin{pmatrix} (1/2)[e^t \cos(2t) - e^t \sin(2t)] \\ e^t \sin(2t) \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} (1/2)[e^t \sin(2t) + e^t \cos(2t)] \\ e^t \cos(2t) \end{pmatrix}$$

Consequentemente uma solução geral **real** do sistema em consideração é

$$\begin{aligned} \vec{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} (1/2)[e^t \cos(2t) - e^t \sin(2t)] \\ e^t \sin(2t) \end{pmatrix} + \\ + c_2 \begin{pmatrix} (1/2)[e^t \sin(2t) + e^t \cos(2t)] \\ e^t \cos(2t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Atenção!

Não há necessidade de utilizar o autovalor complexo conjugado. Afinal já calculamos duas soluções *reais* linearmente independentes utilizando somente um autovalor complexo. E isso basta.



O mesmo vai acontecer com autovalores complexos de matrizes (ou sistemas) com coeficientes reais de qualquer dimensão: cada autovalor complexo dá origem a duas soluções *reais* linearmente independentes. Não precisamos refazer os cálculos com o autovalor conjugado.

Considere o sistema

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \vec{X}.$$

- a) Mostre que os autovalores da matriz A do sistema são $a + bi$ e $a - bi$
- b) Mostre que

$$\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

é um autovetor pertencente ao autovalor $a + bi$

- c) Mostre que

$$t \mapsto \begin{pmatrix} -e^{at} \operatorname{sen} bt \\ e^{at} \cos bt \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad t \mapsto \begin{pmatrix} e^{at} \cos bt \\ e^{at} \operatorname{sen} bt \end{pmatrix}$$

são duas soluções linearmente independentes do sistema proposto.

Exemplo 15.9.

Resolva o problema de valor inicial

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{X}; \quad \vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Solução:

1º : Cálculo dos autovalores:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff \det \begin{pmatrix} -3 - \lambda & 0 & 2 \\ 1 & -1 - \lambda & 0 \\ -2 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Calculando o determinante, obtemos a equação

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0,$$

cujos coeficientes são números inteiros. Então, *se* essa equação tiver raízes inteiras, elas serão divisores do termo independente (neste caso, 6).

Os divisores de 6 são $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

Experimentando, verificamos que $\lambda = -2$ é uma raiz da equação característica.

Consequentemente, o polinômio $\lambda^3 + 4\lambda^2 + 7\lambda + 6$ é divisível por $(\lambda - (-2))$; isto é, por $\lambda + 2$.

Efetuada a divisão, obtemos

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 7\lambda + 6 = (\lambda^2 + 2\lambda + 3) \cdot (\lambda + 2).$$

Portanto as raízes da equação característica são $\lambda = -2$ e mais as raízes da equação do segundo grau $\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$.

Ou seja, os autovetores da matriz do sistema são

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1 + \sqrt{2}i \text{ e } \lambda_3 = -1 - \sqrt{2}i.$$

2º : Cálculo de autovetores associados:

- Para $\lambda_1 = -2$.
Devemos resolver o sistema (algébrico)

$$(A - \lambda I) \Big|_{\lambda=-2} \vec{V} = \vec{0}. \text{ Escrevendo } \vec{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

temos

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

isto é

$$\begin{cases} -v_1 + 2v_3 = 0 \\ v_1 + v_2 = 0 \\ -2v_1 - v_2 + 2v_3 = 0. \end{cases}$$

Obtemos as relações

$$v_1 = 2v_3, \quad v_2 = -v_1, \quad v_3 \text{ arbitrário.}$$

Podemos escolher, por exemplo, $\vec{V}_1 = (2, -2, 1)$, e formar a primeira solução

$$\vec{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

- Para $\lambda_1 = -1 + \sqrt{2}i$:

O sistema agora é $(A - \lambda I)|_{\lambda=-1+\sqrt{2}i} \vec{V} = \vec{0}$:

$$\begin{pmatrix} -3 - (-1 + \sqrt{2}i) & 0 & 2 \\ 1 & -1 - (-1 + \sqrt{2}i) & 0 \\ -2 & -1 & 2 - (-1 + \sqrt{2}i) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

de onde tiramos

$$\begin{cases} (-2 - \sqrt{2}i)v_1 + 2v_3 = 0 \\ v_1 - \sqrt{2}iv_2 = 0 \\ -2v_1 - v_2 + (1 - \sqrt{2}i)v_3 = 0 \end{cases};$$

que por sua vez nos dá as relações

$$v_1 = \sqrt{2}iv_2, \quad v_3 = (-1 + \sqrt{2}i)v_2, \quad v_2 \text{ arbitrário.}$$

Escolhendo, por exemplo, $\vec{V}_C = \begin{pmatrix} \sqrt{2}i, 1, -1 + \sqrt{2}i \end{pmatrix}$, formamos a *solução complexa*

$$\vec{X}_C(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}i \\ 1 \\ -1 + \sqrt{2}i \end{pmatrix} e^{(-1+\sqrt{2}i)t}.$$

Usamos agora a *fórmula de Euler*, escrevemos

$$\begin{aligned} \vec{X}_C(t) &= \begin{pmatrix} \sqrt{2}i \\ 1 \\ -1 + \sqrt{2}i \end{pmatrix} e^{-t} [\cos(\sqrt{2}t) + i \operatorname{sen}(\sqrt{2}t)] \\ &= \begin{pmatrix} -\sqrt{2}e^{-t} \operatorname{sen}(\sqrt{2}t) + i\sqrt{2}e^{-t} \cos(\sqrt{2}t) \\ e^{-t} \cos(\sqrt{2}t) + ie^{-t} \operatorname{sen}(\sqrt{2}t) \\ e^{-t} \cos(\sqrt{2}t) - \sqrt{2}e^{-t} \operatorname{sen}(\sqrt{2}t) \end{pmatrix} + \\ &\quad + i \begin{pmatrix} \sqrt{2}e^{-t} \cos(\sqrt{2}t) \\ e^{-t} \operatorname{sen}(\sqrt{2}t) \\ e^{-t} \operatorname{sen}(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}e^{-t} \cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Obs1: As funções vetoriais

$$\vec{X}_2(t) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}e^{-t}\operatorname{sen}(\sqrt{2}t) \\ e^{-t}\cos(\sqrt{2}t) \\ e^{-t}\cos(\sqrt{2}t) - \sqrt{2}e^{-t}\operatorname{sen}(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}$$

e

$$\vec{X}_3(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}e^{-t}\cos(\sqrt{2}t) \\ e^{-t}\operatorname{sen}(\sqrt{2}t) \\ e^{-t}\operatorname{sen}(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}e^{-t}\cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix},$$

são respectivamente a **parte real** e a **parte imaginária** da solução $\vec{X}_{\mathbb{C}}(t)$.

Portanto $\vec{X}_1(t)$, $\vec{X}_2(t)$ e $\vec{X}_3(t)$ são três soluções *reais*, linearmente independentes, do sistema

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{X}.$$

E assim a solução geral **real** desse sistema é

$$\begin{aligned} \vec{X}(t) = & c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2}e^{-t}\operatorname{sen}(\sqrt{2}t) \\ e^{-t}\cos(\sqrt{2}t) \\ e^{-t}\cos(\sqrt{2}t) - \sqrt{2}e^{-t}\operatorname{sen}(\sqrt{2}t) \end{pmatrix} + \\ & + c_3 \begin{pmatrix} \sqrt{2}e^{-t}\cos(\sqrt{2}t) \\ e^{-t}\operatorname{sen}(\sqrt{2}t) \\ e^{-t}\operatorname{sen}(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}e^{-t}\cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para concluir o exemplo, precisamos calcular c_1, c_2 , e c_3 tais que

$$\vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Assim, fazendo $t = 0$ na solução geral, devemos ter

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Ou seja

$$\begin{cases} 2c_1 + \sqrt{2}c_3 = 0 \\ -2c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - c_2 + \sqrt{2}c_3 = -2. \end{cases}$$

Temos (verifique!)

$$c_1 = \frac{6 + \sqrt{2}}{7}, \quad c_2 = \frac{19 + 2\sqrt{2}}{7} \quad c_3 = -\frac{(2 + 6\sqrt{2})}{7}$$

A única solução do PVI proposto é

$$\begin{aligned} \vec{X}(t) = & \left(\frac{6 + \sqrt{2}}{7} \right) \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + \left(\frac{19 + 2\sqrt{2}}{7} \right) \begin{pmatrix} -\sqrt{2}e^{-t} \operatorname{sen}(\sqrt{2}t) \\ e^{-t} \cos(\sqrt{2}t) \\ e^{-t} \cos(\sqrt{2}t) - \sqrt{2}e^{-t} \operatorname{sen}(\sqrt{2}t) \end{pmatrix} - \\ & - \left(\frac{2 + 6\sqrt{2}}{7} \right) \begin{pmatrix} \sqrt{2}e^{-t} \cos(\sqrt{2}t) \\ e^{-t} \operatorname{sen}(\sqrt{2}t) \\ e^{-t} \operatorname{sen}(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}e^{-t} \cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Atenção!

Resumindo: Dado um sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem, homogêneo, com coeficientes reais

$$\vec{X}' = A \vec{X}$$

cuja equação característica

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

tem raízes complexas (que sempre ocorrem em pares conjugados),

$$\lambda_k = A_k \pm B_k i,$$

para cada autovalor complexo - digamos $A_m + B_m i$ -, calculamos um autovetor (complexo) $\vec{K}_{\mathbb{C},m}$ associado a ele.

A solução complexa correspondente é


$$\vec{X}_{\mathbb{C},m}(t) = e^{(A_m + B_m i)t} \vec{K}_{\mathbb{C},m}.$$

A partir daí, usando a fórmula de Euler, obtemos duas componentes da solução geral **real**

$$\vec{X}_{1,m}(t) \text{ e } \vec{X}_{2,m}(t),$$

sendo $\vec{X}_{1,m}(t)$ e $\vec{X}_{2,m}(t)$ as partes real e imaginária de $\vec{X}_{\mathbb{C},m}(t)$.

SISTEMAS COM AUTOVALORES REAIS REPETIDOS

 Já aprendemos a calcular soluções de sistemas homogêneos autônomos, utilizando autovalores das equações características associadas. Vimos como obter soluções de sistemas cujos autovalores são reais ou complexos. Mas estivemos restritos aos casos em que os autovalores eram todos distintos. Vamos abordar agora sistemas autônomos cujas equações características possuem autovalores repetidos.

Estudaremos somente o caso de autovalores **reais** repetidos, de **sistemas bidimensionais e tridimensionais**.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 15.10.

Considere o sistema bidimensional $\vec{X}' = A\vec{X}$, com

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Temos $\det(A - \lambda Id) = 0 \iff (\lambda + 1)^2 = 0$, e então tem raízes reais $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -1$.

Dizemos que $\lambda = -1$ é um *autovalor de multiplicidade dois* da matriz A .

Para determinar autovetores de A associados a $\lambda = -1$ resolvemos a equação matricial

$$\begin{pmatrix} -1+1 & 0 \\ 0 & -1+1 \end{pmatrix} \cdot \vec{V} = \vec{0} \quad (15.7)$$

Qualquer vetor \vec{V} de \mathbb{R}^2 torna a equação (15.1) verdadeira. Isto é, todo vetor (diferente de $\vec{0}$) é autovetor da matriz A associado ao autovalor $\lambda = -1$.

E como, para calcular uma solução geral do sistema

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{X},$$

precisamos de dois autovetores de A linearmente independentes, podemos escolher quaisquer dois vetores linearmente independentes em \mathbb{R}^2 . Por exemplo

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daí construímos as soluções (necessariamente linearmente independentes)

$$\vec{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} \quad \text{e} \quad \vec{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Portanto uma solução geral de

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{X},$$

é

$$\vec{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$



Atenção!


Note que, neste exemplo, apesar de a matriz A possuir **apenas um autovalor** $\lambda = -1$, pudemos obter **dois autovetores linearmente independentes** associados a ela.

Definição 15.5.

A *multiplicidade algébrica* de um autovalor λ_i é o expoente do fator $(x - \lambda_i)$ na fatoração do polinômio característico da matriz A do sistema. Se a multiplicidade algébrica de λ_i é r_i , então o sistema possui r_i **soluções** linearmente independentes, construídas a partir do autovalor λ_i .

Definição 15.6.

A *multiplicidade geométrica* de um autovalor λ_i é a *dimensão do autoespaço associado a λ* ; isto é, e o número de autovetores linearmente independentes, associados a λ .

 A partir da fatoração do polinômio característico da matriz A do sistema, podemos construir um outro polinômio, chamado de *polinômio minimal*; que - por definição - é o polinômio de **menor grau** que divide o polinômio característico.

O polinômio minimal permite saber, *de antemão*, para cada autovalor λ , a dimensão do autoespaço associado a λ . Será exatamente o número de **autovetores linearmente independentes** associados a λ , que pode não ser igual ao número de **soluções** linearmente independentes associadas ao autovalor λ .

Considere o exemplo seguinte:

Exemplo 15.11.

Calcular uma solução geral de

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{X}$$

A equação característica desse sistema é $(\lambda - 2)^2 = 0$; e portanto $\lambda = 2$ é o único autovalor de A , com multiplicidade algébrica dois. A dimensão do autoespaço associado é **dois**. Então o sistema tem duas soluções linearmente independentes.

Mas isso já sabemos!

A novidade é que o polinômio de menor grau que divide $(\lambda - 2)^2$ é $m(\lambda) = \lambda - 2$, que tem grau **1**; e então só vamos conseguir determinar um **autovetor** \vec{V}_1 associado a $\lambda = 2$.

Acabamos de confirmar, usando o polinômio mínimo, que só é possível construir **uma solução** da forma

$$\vec{X}(t) = \vec{V}_1 e^{2t}, \text{ com } \vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ por exemplo.}$$

Podemos construir diretamente uma segunda solução $\vec{X}_2(t)$, linearmente independente de $\vec{X}_1(t)$, utilizando a noção de autovetor generalizado, definida no Apêndice I, no final desta Aula. Temos:

$$\vec{X}_2(t) = (t\vec{V}_1 + \vec{V}_2)e^{2t},$$

onde $\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ é solução da equação matricial

$(A - 2I)\vec{V}_2 = \vec{V}_1$, isto é:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Desta última equação obtemos a relação

$$w_1 - w_2 = 1.$$

Podemos escolher para \vec{V}_2 qualquer vetor $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ cujas coordenadas satisfaçam à relação $w_1 - w_2 = 1$. Por exemplo

$$\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Portanto } \vec{X}_2(t) = \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{2t}.$$

$$\text{E uma solução geral de } \vec{X}' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{X} \text{ é}$$

$$\vec{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{2t},$$

ou ainda

$$\vec{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} t \\ 1+t \end{pmatrix} e^{2t}.$$



Atenção!

Resumindo: Considere um sistema autônomo bidimensional

$$\vec{X}' = A \vec{X}$$

cuja equação característica

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

possui uma raiz λ de multiplicidade algébrica dois.

Então, se λ tiver multiplicidade geométrica dois, existirão dois autovetores linearmente independentes, \vec{V}_1 e \vec{V}_2 associados a λ , a solução geral de $\vec{X}' = A \vec{X}$ será

$$\vec{X}(t) = c_1 \vec{V}_1 e^{\lambda t} + c_2 \vec{V}_2 e^{\lambda t}.$$

Se λ tiver multiplicidade geométrica um, existirá apenas um autovetor \vec{V}_1 , (a menos de múltiplos), associado a λ .

Neste caso uma solução geral é

$$\vec{X}(t) = c_1 \vec{V}_1 e^{\lambda t} + c_2 [t \vec{V}_1 + \vec{V}_2] e^{\lambda t},$$

onde \vec{V}_2 é um autovetor generalizado de peso 2, de A , determinado a partir de \vec{V}_1 por meio da equação matricial

$$(A - \lambda I) \vec{V}_2 = \vec{V}_1.$$



O cálculo de soluções de sistemas bidimensionais está concluído.

Precisamos examinar como o problema dos autovalores repetidos se coloca para sistemas de dimensão três; basicamente examinando alguns exemplos.

Exemplo 15.12.

Obter todas as soluções de

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{X}.$$

Solução:

A matriz do sistema é a matriz $\text{diag}\{2,2,2\}$, cuja equação característica é $(\lambda - 2)^3$, com autovalor $\lambda = 2$ de multiplicidade algébrica 3.

A equação dos autovetores é

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{V} = \vec{0},$$


a qual é satisfeita por qualquer vetor $\vec{V} \in \mathbb{R}^3$. Dizendo de outro modo: *qualquer vetor* \mathbb{R}^3 é um autovetor de A .

Então, para obter uma base de soluções, basta escolher três vetores linearmente independentes em \mathbb{R}^3 , por exemplo:

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{V}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

e formar uma solução geral

$$\vec{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

 Neste exemplo, a multiplicidade geométrica do autovalor $\lambda = 2$ é igual à sua multiplicidade algébrica.

Exemplo 15.13.

Obter todas as soluções de

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{X}.$$

Solução:

A equação característica é novamente $(\lambda - 2)^3$, com multiplicidade algébrica 3, mas a equação dos autovetores associados a $\lambda = 2$ é

$$\begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \Big|_{\lambda=2} \vec{V} = \vec{0},$$

isto é,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A única restrição que esta equação impõe é que $v_2 = 0$. Ou seja,

qualquer vetor da forma $\begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix}$, pertence ao autoespaço associado ao

$\lambda = 2$.


Daí, o autoespaço associado a $\lambda = 2$ é o plano XOZ em \mathbb{R}^3 ; o qual

tem dimensão dois. Logo podemos determinar dois, e apenas dois, autovetores linearmente independentes neste autoespaço. Por exemplo

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Qualquer outro vetor do autoespaço associado a $\lambda = 2$ é combinação linear de \vec{V}_1 e \vec{V}_2 . Isto significa que a multiplicidade geométrica de $\lambda = 2$ é dois; e que só temos, por enquanto duas soluções linearmente independentes do sistema proposto:

$$\vec{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} \quad \text{e} \quad \vec{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

 **Obs:** Conforme o desenvolvimento apresentado no Apêndice I, 2a.parte, vamos escrever diretamente mais uma solução utilizando um *autovetor generalizado associado ao autovalor* $\lambda = 2$, sem precisar refazer o raciocínio.

Então, escolhendo o autovetor \vec{V}_1 podemos escrever diretamente a terceira solução

$$\vec{X}_3(t) = [t \vec{V}_1 + \vec{W}_1] e^{2t},$$

sendo $\vec{W}_1 = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ solução de

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Efetuando as contas vemos que a restrição que se faz a \vec{w}_1 é que w_2 seja igual a 2. Podemos escolher, por exemplo,

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e formar a solução

$$\vec{X}_3(t) = \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] e^{2t} = \begin{pmatrix} t + 10 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t}$$


$\vec{X}_3(t)$ é linearmente independente de $\vec{X}_1(t)$ e de $\vec{X}_2(t)$.

E, para completar, escrevemos a solução geral:

$$\vec{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{pmatrix} t + 10 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Atividade de auto-avaliação 15.4

No **Exemplo 15.13**, para calcular um autovetor generalizado de peso 1, poderíamos ter escolhido autovetor \vec{V}_2 . Discuta de que maneira isso modificaria a solução geral.

 Recuperamos, pelo menos neste caso, o controle da situação, e foi possível prosseguir com a conclusão do **Exemplo 15.13**

Agora estude com atenção o seguinte exemplo:

Exemplo 15.14.

Obtenha uma solução geral para

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{X}$$

Solução:

Mais uma vez a equação característica do sistema é $(\lambda - 2)^3$, com multiplicidade algébrica 3, mas a equação dos autovetores associados a $\lambda = 2$ é

$$\begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \cdot \vec{V} = \vec{0}, \quad \Big|_{\lambda=2}$$

isto é,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esta equação impõe duas restrições: $v_2 = 0$ e $v_3 = 0$. Ou seja, os veto-

res pertencentes ao autoespaço associado a $\lambda = 2$ são da forma $\begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

indicando que o autoespaço associado a $\lambda = 2$ é o eixo OX ; que tem dimensão um. Logo podemos determinar apenas um autovetor neste autoespaço, e formar uma solução.

Por exemplo, escolhemos

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e construímos a solução } \vec{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

A ideia natural, agora, é procurar dois autovetores generalizados, de peso dois, partindo do autovetor \vec{V}_1 , e usá-los para construir duas novas soluções linearmente independentes.

Vejam os:

A equação dos autovetores generalizados de peso dois, construídos a partir de \vec{V}_1 é

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daí obrigatoriamente $w_2 = 1, w_3 = 0$ e w_1 não está sujeito a restrições, podendo ser qualquer número real.

Por exemplo, escolhendo os autovetores generalizados

$$\vec{W}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \vec{W}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

formamos as respectivas soluções

$$\vec{X}_2(t) = \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^{2t} \text{ e } \vec{X}_3(t) = \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^{2t}.$$

Entretanto, as três soluções obtidas, $\vec{X}_1(t), \vec{X}_2(t), \vec{X}_3(t)$, não são linearmente independentes. De fato basta observar que os vetores $\vec{X}_1(0), \vec{X}_2(0), \vec{X}_3(0)$, não são linearmente independentes: O determinante cujas colunas são esses vetores é nulo:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Como fazê-lo?

Com a garantia do teorema (15.1), do Apêndice, uma terceira solução, $\vec{X}_3(t)$ é

$$\vec{X}_3(t) = \left[(t^2/2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right] e^{2t}.$$

onde $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ é solução de

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (15.8)$$

A equação matricial (15.8) acarreta que $w_2 = 0$, $w_3 = 1$ e não impõe condições sobre w_1 .

Podemos escolher, por exemplo $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e assim construir

$$\Longleftrightarrow X_3(t) = \left[(t^2/2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{2t}.$$

Portanto, uma solução geral de $\Longleftrightarrow X' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{X}$ é

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow X(t) = & c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^{2t} + \\ & + c_3 \left[(t^2/2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{2t}. \end{aligned}$$

SISTEMAS LINEARES NÃO HOMOGÊNEOS

Passamos agora a considerar sistemas da forma

$$\vec{X}' = A \vec{X} + \vec{B}(t),$$

sendo a matriz A e o vetor $\vec{B}(t)$ contínuos num intervalo I . Pelo mesmo tipo de argumento utilizado anteriormente, a solução geral da equação não-linear pode se exprimir como a soma da solução geral da equação homogênea associada:

$$\vec{X}' = A \vec{X}$$

com uma solução particular $\vec{\varphi}(t)$ do sistema não homogêneo dado.

Alguns métodos para determinação de $\vec{\varphi}(t)$:

SISTEMAS DIAGONALIZÁVEIS

Definição 15.7.

Diz-se que um sistema linear de dimensão n :

$$\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{B}(t)$$

é diagonalizável quando a matriz A possui n autovalores distintos.

Se o sistema linear de dimensão n :

$$\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{B}(t)$$

é diagonalizável, seja $P = \text{col}[\vec{V}_1 \cdots \vec{V}_n]$ a matriz cujas colunas são os autovetores de A , associados aos n autovalores distintos de A .

Definido uma nova variável \vec{Y} por

$$\vec{X} = P\vec{Y},$$

a substituição na equação não homogênea nos dá

$$P\vec{Y}' = AP\vec{Y} + \vec{B}(t).$$

Multiplicando por P^{-1} :

$$\vec{Y}' = (P^{-1}AP)\vec{Y} + P^{-1}\vec{B}(t) = D\vec{Y} + P^{-1}\vec{B}(t) \quad (15.9)$$

onde D é a matriz diagonal (ver Atividade 15.2) cujos elementos são os autovalores de A , ordenados na mesma sequência em que os correspondentes autovetores $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_n$ ocorrem como colunas na matriz P .

O sistema (15.9) é um sistema de n equações lineares de primeira ordem, que podemos resolver facilmente pelos métodos desenvolvidos anteriormente no curso.

Uma vez obtidas as soluções $\vec{Y}_1(t), \dots, \vec{Y}_n(t)$ calculamos as soluções $\vec{X}_1(t), \dots, \vec{X}_n(t)$ do sistema original multiplicando-as pela **matriz de passagem** P .

Exemplo 15.15.

Determine uma solução geral do sistema

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{X} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 4 \end{pmatrix}$$

Solução:

Deixamos a seu cargo verificar os seguintes fatos:

•

$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} -2 - \lambda & 1 \\ 1 & -2 - \lambda \end{pmatrix}$$

• $\det(A - \lambda I) = 0 \iff \lambda = -3, -1$

• Um autovetor pertencente a $\lambda = -3$ é $\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, e um auto-

vetor pertencente a $\lambda = -1$ é $\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

• A matriz de passagem é

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

e portanto

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix};$$

• $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e o sistema proposto é equivalente

a


$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{Y} + \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 4 \end{pmatrix};$$

isto é

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{Y} + \begin{pmatrix} e^{-t} - 2 \\ e^{-t} + 2 \end{pmatrix}. \quad (15.10)$$

Sendo $\vec{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, a forma explícita de (15.10) é

$$\begin{cases} y_1' = -3y_1 + e^{-t} - 2 \\ y_2' = -y_2 + e^{-t} + 2 \end{cases} \quad (15.11)$$

 Note que (15.11) é um sistema de duas equações independentes entre si; ou que não apresentam suas variáveis y_1 e y_2 *misturadas* em nenhuma das equações. Dizemos então que o sistema (15.11) está desacoplado. Isto explica o adjetivo **desacoplável** dado ao sistema original

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{X} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo as duas equações diferenciais lineares de primeira ordem do sistema (15.11) obtemos (confira!):

$$\begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{-3t} + (1/2)e^{-t} - 2/3 \\ y_2(t) = c_2 e^{-t} + t e^{-t} + 2 \end{cases}$$

Em notação vetorial

$$\vec{Y}(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{-3t} + (1/2)e^{-t} - 2/3 \\ c_2 e^{-t} + t e^{-t} + 2 \end{pmatrix};$$

ou ainda

$$\vec{Y}(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1/2)e^{-t} - 2/3 \\ te^{-t} + 2 \end{pmatrix}.$$

Daí a solução do sistema original é:

$$\begin{aligned} \vec{X}(t) &= P \cdot \vec{Y}(t) = c_1 P \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 P \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} (1/2)e^{-t} - 2/3 \\ te^{-t} + 2 \end{pmatrix} = \\ &= c_1 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix} + \\ &\quad + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1/2)e^{-t} - 2/3 \\ te^{-t} + 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Efetuada as contas:

$$\vec{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -2e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (t-1)e^{-t} + (10/3) \\ (-3/2)e^{-t} - (8/3) \end{pmatrix}.$$

O MÉTODO DA VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS

Vamos agora estudar um outro método de calcular soluções gerais de

$$\vec{X}' = A(t)\vec{X} + \vec{B}(t) \quad (15.12)$$

onde $\vec{B}(t)$ é o “vetor de termos independentes”


$$\begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}, \text{ sendo } b_i : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ e as funções componentes}$$

da matriz $A(t)$ funções contínuas em um intervalo I .

Repetindo o argumento usado no estudo de equações lineares, normais, não homogêneas, de ordem n (veja a Aula 12), verifica-se que qualquer solução **geral** de (15.12) será a soma da solução geral do sistema homogêneo associado

$$\vec{X}' = A(t)\vec{X} \quad (15.13)$$

com uma solução particular do sistema não homogêneo (15.12).

 A questão se reduz então ao cálculo de uma solução particular de (15.12)

Também no contexto dos sistemas de equações lineares não homogêneas, um método de variação dos parâmetros permite calcular uma solução particular de (15.12) a partir da solução geral de (15.13).

Sejam $\vec{X}_1(t), \dots, \vec{X}_n(t)$ soluções linearmente independentes de (15.13)

Partindo da solução geral

$$\vec{X}_H(t) = c_1 \vec{X}_1(t) + \dots + c_n \vec{X}_n(t) \quad (15.14)$$

do sistema homogêneo associado $\vec{X}' = A(t)\vec{X}$, deixamos que os parâmetros **reais** c_1, \dots, c_n variem. Isto é procuramos uma solução particular da forma

$$\vec{X}_P(t) = u_1(t) \vec{X}_1(t) + \dots + u_n(t) \vec{X}_n(t) \quad (15.15)$$

sendo $u_1(t), \dots, u_n(t)$ funções reais que devem ser calculadas.

Conservando as notações precedentes, procuramos uma solução da forma $\vec{X}_p(t) = u_1(t) \vec{X}_1(t) + \dots + u_n(t) \vec{X}_n(t)$.

Então

$$\vec{X}_p' = u_1' \vec{X}_1 + u_1 \vec{X}_1' + \dots + u_n' \vec{X}_n + u_n \vec{X}_n'.$$

Substituindo \vec{X}_p e \vec{X}_p' no sistema não homogêneo, obtemos:

$$\begin{aligned} u_1' \vec{X}_1 + u_1 \vec{X}_1' + \dots + u_n' \vec{X}_n + u_n \vec{X}_n' &= A \cdot [u_1 \vec{X}_1 + \dots + u_n \vec{X}_n] + \vec{B}(t) = \\ &= A \cdot [u_1 \vec{X}_1] + A \cdot [u_2 \vec{X}_2] + \dots + A \cdot [u_n \vec{X}_n] + \vec{B}(t) \\ &= u_1(A\vec{X}_1) + u_2(A\vec{X}_2) + \dots + u_n(A\vec{X}_n) + \vec{B}(t). \end{aligned}$$

Note que

$$u_1 \vec{X}_1' = u_1(A\vec{X}_1), \dots, u_n \vec{X}_n' = u_n(A\vec{X}_n),$$

pois $\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_n$ são soluções de $\vec{X}' = A \cdot \vec{X}$.

Efetando os cancelamentos dos dois lados, ficamos com

$$u_1' \vec{X}_1 + \dots + u_n' \vec{X}_n = \vec{B}(t);$$

isto é

$$u_1' \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ \vdots \\ x_{1n}(t) \end{pmatrix} + \dots + u_n' \begin{pmatrix} x_{n1}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix};$$

ou ainda

$$\begin{cases} u_1' x_{11}(t) + u_2' x_{21}(t) + \dots + u_n' x_{n1}(t) = b_1(t) \\ u_1' x_{12}(t) + u_2' x_{22}(t) + \dots + u_n' x_{n2}(t) = b_2(t) \\ \vdots \\ u_1' x_{1n}(t) + u_2' x_{2n}(t) + \dots + u_n' x_{nn}(t) = b_n(t) \end{cases} \quad (15.16)$$



Atenção!

Observe que, para cada t , (15.16) é um sistema algébrico de equações lineares, **cujas incógnitas são** u'_1, u'_2, \dots, u'_n . Mais ainda, o determinante principal da matrix do sistema é

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

que é justamente o wronskiano das soluções $\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_n$ de $\vec{X}' = A(t)\vec{X}$.

Ora, as soluções $\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_n$ são *linearmente independentes*. Então $\Delta \neq 0$ e, para cada t , (15.17) tem uma única solução. Daí, **para todo** t podemos resolver o sistema pela regra de Cramer, obtendo:

$$u'_i(t) = \frac{\begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & b_1 & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & b_n & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}}{\Delta};$$

para $1 \leq i \leq n$.

(Lembre que, no cálculo de u'_i , substituímos a coluna i de Δ , no numerador, pela coluna do vetor de termos independentes \vec{B})

Para completar, integramos as expressões das u'_i , obtendo as funções $u_i(t)$, que permitem formar a solução particular

$$\vec{X}_p(t) = u_1(t)\vec{X}_1(t) + \cdots + u_n(t)\vec{X}_n(t).$$

A partir daí construímos uma solução geral do sistema não homogêneo:

$$\vec{X}(t) = \vec{X}_H(t) + \vec{X}_p(t).$$

Exemplo 15.16.

Calcule uma solução geral de

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + 3y + e^{-2t} \end{cases}$$

Solução:

Definamos $\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. A forma matricial do sistema proposto é

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \vec{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

A equação dos autovalores da matriz do sistema é

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 2)^2 = 0,$$

e portanto $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.

O autovetor associado a $\lambda = 2$ é uma solução do sistema vetorial

$$\begin{pmatrix} 1 - 2 & -1 \\ 1 & 3 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Todas as soluções desse sistema são tais que $v_1 + v_2 = 0$. Assim, por exemplo, podemos escolher a solução $\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

e formar uma primeira solução do sistema homogêneo associado:

$$\vec{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Uma segunda solução do sistema homogêneo associado é da forma $\vec{X}_2(t) = [t \vec{V}_1 + \vec{V}_2]$, onde \vec{V}_2 é solução de

$$(A - 2I)\vec{V}_2 = \vec{V}_1;$$

isto é

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Então devemos ter $w_1 + w_2 = -1$ e podemos escolher, por exem-

plo, $\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; a partir do que formamos a segunda solução do

sistema homogêneo associado:

$$\vec{X}_2(t) = \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] e^{2t} = \begin{pmatrix} t e^{2t} \\ -t e^{2t} - e^{2t} \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Consequentemente, uma solução geral do sistema homogêneo associado a

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \vec{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$$

é

$$\vec{X}_H(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} t e^{2t} \\ -t e^{2t} - e^{2t} \end{pmatrix} e^{2t}.$$

A seguir, vamos calcular uma solução particular do sistema não homogêneo, utilizando o método de variação dos parâmetros.

Devemos ter

$$\vec{X}_P(t) = u_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + u_2(t) \begin{pmatrix} t e^{2t} \\ -t e^{2t} - e^{2t} \end{pmatrix} e^{2t},$$

onde

$$u'(t) = \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & t e^{2t} \\ e^{-2t} & -t e^{2t} - e^{2t} \end{pmatrix}}{\det[\text{col}(\vec{X}_1(t), \vec{X}_2(t))]} = \frac{t}{-e^{4t}} = -t e^{-4t}$$

e

$$v'(t) = \frac{\det \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ -e^{2t} & e^{-2t} \end{pmatrix}}{\det[\text{col}(\vec{X}_1(t), \vec{X}_2(t))]} = \frac{1}{-e^{4t}} = -e^{-4t}.$$

Portanto (verifique!)

$$u(t) = \left(\frac{t}{4} + \frac{1}{16} \right) e^{-4t} \quad v(t) = \frac{1}{4} e^{-4t}$$

e logo


$$\begin{aligned} \vec{X}_P(t) &= \left(\frac{t}{4} + \frac{1}{16} \right) e^{-4t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + \frac{e^{-4t}}{4} \begin{pmatrix} t e^{2t} \\ -t e^{2t} - e^{2t} \end{pmatrix} e^{2t} = \\ &= \left(\frac{t}{4} + \frac{1}{16} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + \begin{pmatrix} t e^{2t} \\ -t e^{2t} - e^{2t} \end{pmatrix} \frac{e^{-2t}}{4} = \\ &= \frac{e^{-2t}}{4} \left[\left(t + \frac{1}{4} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} t \\ -(t+1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daí a solução geral correspondente é

$$\vec{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} t e^{2t} \\ -t e^{2t} - e^{2t} \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{e^{-2t}}{4} \left[\left(t + \frac{1}{4} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} t \\ -(t+1) \end{pmatrix}.$$

Deixamos a seu cargo escrever as expressões de $x(t)$ e $y(t)$.

 Na Aula 11, aprendemos a calcular soluções de equações diferenciais de segunda ordem normais, não homogêneas, usando variação dos parâmetros que ocorriam na solução geral da equação diferencial homogênea associada para determinar uma solução particular.

Na Aula 14, aprendemos a construir um sistema de equações diferenciais de primeira ordem a partir de equações de segunda ordem. O sistema assim construído é não homogêneo se, e só se, a equação de onde ele proveio é não homogênea.

Nesta aula, introduzimos um *método de variação dos parâmetros para calcular soluções particulares de sistemas de equações diferenciais de primeira ordem não homogêneos, usando variação dos parâmetros que ocorriam na solução geral do sistema homogêneo associado*.

O objetivo da próxima atividade é investigar a seguinte questão:

*Quando usamos o método de variação dos parâmetros para calcular uma solução particular de um sistema não homogêneo proveniente de uma equação de segunda ordem, existe alguma relação entre essa solução particular **vetorial** e a **função solução particular** da equação diferencial de segunda ordem normal não homogênea, a partir da qual o sistema foi construído?*

Atividade de auto-avaliação 15.5

Sistemas não homogêneos provenientes de equações normais de segunda ordem, não-homogêneas.

Considere uma equação diferencial linear de segunda ordem, normal, não homogênea

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = h(t), \quad (15.17)$$

com coeficientes e termo independente $h(t)$ contínuos em um intervalo.

Complete as lacunas, formando o sistema de duas equações de primeira ordem equivalente a (15.17)

$$\begin{cases} x_1' = \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} \\ x_2' = \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} \end{cases} \quad (15.18)$$

A forma matricial do sistema (15.18) é

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} \underline{\hspace{2cm}} & \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} & \underline{\hspace{2cm}} \end{pmatrix} \vec{X} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ h(t) \end{pmatrix}}_{\vec{B}(t)} \quad (15.19)$$

Sejam $\vec{X}_1(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}$ e $\vec{X}_2(t) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix}$ soluções do sistema

homogêneo associado a (15.19).

Complete: Para calcular uma solução particular de (15.19) pelo método da variação dos parâmetros, conforme a construção desta aula, precisamos determinar $u(t)$ e $v(t)$ pelas fórmulas

$$u'(t) = \frac{\det \begin{pmatrix} \underline{\hspace{2cm}} & x_2 \\ \underline{\hspace{2cm}} & x_2' \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{pmatrix}} \quad \text{e} \quad v'(t) = \frac{\det \begin{pmatrix} x_1 & \underline{\hspace{2cm}} \\ x_1' & \underline{\hspace{2cm}} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{pmatrix}}$$

Observe que $\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{pmatrix} = W[x_1(t), x_2(t)]$ é o wronskiano das

soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ da equação homogênea associada a (15.17), calculado como na Aula 11.

Para terminar, escreva abaixo as expressões de $u(t)$ e $v(t)$

$$u(t) = - \int \frac{1}{W[x_1(t), x_2(t)]} dt \quad \text{e} \quad v(t) = \int \frac{1}{W[x_1(t), x_2(t)]} dt$$

Escreva agora a solução particular do sistema (15.19)

$$\vec{X}_P(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} \quad (15.20)$$

Conclua então que a primeira linha da solução vetorial (15.20) (do sistema não homogêneo (15.19)) coincide com a solução particular da equação de segunda ordem (15.17) como foi calculada na Aula 11.

De quebra, temos, na segunda linha da solução vetorial, a derivada da solução particular da equação de segunda ordem.

UMA SEGUNDA APRESENTAÇÃO DO MÉTODO DE VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS:

Vamos considerar novamente o sistema não homogêneo (15.12), e seu sistema homogêneo associado (15.13).

Para obter uma solução particular do sistema (15.12) a partir da solução geral $\vec{X}_H(t)$ de (15.13), primeiramente reescrevemos (15.13) na forma matricial:

$$\vec{X}_H(t) = c_1 \vec{X}_1(t) + \cdots + c_n \vec{X}_n(t) =$$

$$= \text{col}[\vec{X}_1(t), \dots, \vec{X}_n(t)] \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

e agora deixamos o parâmetro **vetorial** $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ variar; isto é pro-

curamos uma solução particular da forma

$$\vec{X}_P(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix} \quad (15.21)$$

sendo $u_1(t), \dots, u_n(t)$ funções reais que devem ser calculadas.

✍ Esta forma de tratar o problema, apesar de inicialmente parecer mais complicada, vai permitir um tratamento bastante cômodo do problema de calcular uma $\vec{X}_p(t)$.

Antes de prosseguir, e também para efeito de referência e comparação com a literatura usual, damos a seguinte definição:

Definição 15.8 (Matriz Fundamental de um Sistema Linear Homogêneo).

Se $\vec{X}_i(t) = \begin{pmatrix} x_{i1}(t) \\ \vdots \\ x_{in}(t) \end{pmatrix} \quad 1 \leq i \leq n$ são soluções linear-

mente independentes de um sistema linear homogêneo, n -dimensional, $\vec{X}' = A(t)\vec{X}$ então a matriz

$$\mathbf{X}(t) = \text{col} [\vec{X}_1(t), \dots, \vec{X}_n(t)] = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{21}(t) & \cdots & x_{n1}(t) \\ x_{12}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{n2}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n}(t) & x_{2n}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

é uma **matriz fundamental de soluções**, ou simplesmente uma **matriz fundamental** do sistema $\vec{X}' = A(t)\vec{X}$.

Precisamos calcular uma função vetorial $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$

tal que

$$\vec{X}_p(t) = \mathbf{X}(t)\vec{u}(t)$$

seja solução particular de (15.12).

Observe que

$$\vec{X}_p'(t) = \mathbf{X}'(t) \vec{u}(t) + \mathbf{X}(t) \vec{u}'(t)$$

Substituindo no sistema não homogêneo:

$$\mathbf{X}'(t) \vec{u}(t) + \mathbf{X}(t) \vec{u}'(t) = A(t) \cdot [\mathbf{X}(t) \vec{u}(t)] + \vec{B}(t).$$

E, já que $\mathbf{X}(t)$ é matriz fundamental do sistema homogêneo associado, vale

$$\mathbf{X}'(t) = A(t) \cdot \mathbf{X}(t);$$

e portanto

$$\mathbf{X}'(t) \vec{u}(t) + \mathbf{X}(t) \vec{u}'(t) = \mathbf{X}'(t) \vec{u}(t) + \vec{B}(t).$$

Simplificando, obtém-se

$$\mathbf{X}(t) \vec{u}'(t) = \vec{B}(t).$$

A matriz fundamental é invertível (por que?); e assim vale

$$\vec{u}'(t) = \mathbf{X}^{-1}(t) \cdot \vec{B}(t) \quad (15.22)$$

De onde $\vec{u}(t)$ pertence à família de primitivas

$$\int \mathbf{X}^{-1}(s) \cdot \vec{B}(s) ds$$

de $\mathbf{X}^{-1}(t) \vec{B}(t)$.

Sendo t_0 um ponto qualquer no intervalo onde as b_i e os coeficientes de $A(t)$ estão definidas, tem-se que

$$\vec{u}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{X}^{-1}(s) \cdot \vec{B}(s) ds$$

é uma primitiva de $\mathbf{X}^{-1}(t) \cdot \vec{B}(t)$. E então todas as primitivas de $\mathbf{X}^{-1}(t) \cdot \vec{B}(t)$ são da forma

$$\vec{u}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{X}^{-1}(s) \cdot \vec{B}(s) ds + \vec{K}.$$

Claramente

$$\vec{u}(t_0) = \vec{K},$$

e assim a **solução particular** procurada é

$$\vec{X}_P(t) = \mathbf{X}(t) \cdot \vec{u}(t) = \mathbf{X}(t) \cdot \vec{u}(t_0) + \mathbf{X}(t) \cdot \int_{t_0}^t \mathbf{X}^{-1}(s) \cdot \vec{B}(s) ds$$

Exemplo 15.17.

Calcule uma solução particular dos sistema linear não homogêneo

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \vec{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6e^{-t} \end{pmatrix}$$

Solução:

Verifique que uma matriz fundamental do sistema homogêneo associado é

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} & e^{3t} \\ e^{2t} & e^{3t} \end{pmatrix},$$

cuja inversa é

$$\mathbf{X}^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & -e^{-2t} \\ -e^{-3t} & 2e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Aplicaremos diretamente a fórmula de variação dos parâmetros, supondo $t_0 = 0$ e $\vec{u}(t_0) = \vec{0}$:

$$\vec{X}_P(t) = \mathbf{X}(t) \int_0^t \mathbf{X}^{-1}(s) \cdot \vec{B}(s) ds$$

Temos

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathbf{X}^{-1}(s) \vec{B}(s) ds &= \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-2s} & -e^{-2s} \\ -e^{-3s} & 2e^{-3s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6e^{-s} \end{pmatrix} ds \\ &= \int_0^t \begin{pmatrix} -e^{-3s} \\ 12e^{-4s} \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 2[e^{-3t} - 1] \\ -3[e^{-4t} - 1] \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Consequentemente

$$\begin{aligned}\vec{X}_p(t) &= \begin{pmatrix} e^{-2t} & -e^{-2t} \\ -e^{-3t} & 2e^{-3t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2[e^{-3t} - 1] \\ -3[e^{-4t} - 1] \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} - 4e^{2t} - 3e^{3t} \\ -e^{-t} - 2e^{2t} - 3e^{3t} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

O MÉTODO DOS COEFICIENTES A DETERMINAR

Algumas vezes, quando a matriz do sistema não homogêneo

$$\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{B}(t),$$

é constante e os elementos do vetor de termos independentes $\vec{B}(t)$ são constantes, ou polinômios, funções exponenciais, cossenos ou senos, ou combinações lineares dessas funções, é possível encontrar uma solução particular pelo **método dos coeficientes a determinar**.

Trata-se da generalização do método que aplicamos às equações de segunda ordem, na Aula 11.

Vejamos um par de exemplos:

Exemplo 15.18.

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \vec{X} + \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Solução:

Os coeficientes de $\vec{B}(t)$ são constantes. Procuremos um solução particular $\vec{X}_p = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, a_1 e a_2 constantes. Substituindo no sistema,

temos

$$\vec{X}_p' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix},$$

o que dá origem ao sistema de duas equações

$$\begin{cases} 2a_1 + 3a_2 = 7 \\ -a_1 - 2a_2 = -5 \end{cases}$$

As soluções deste sistema são $a_1 = -1$ e $a_2 = 3$. Portanto

$$\vec{X}_p = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 15.19.

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \vec{X} + \begin{pmatrix} 6t \\ -10t + 4 \end{pmatrix}$$

Solução:

Os coeficientes de $\vec{B}(t)$ são polinômios de primeiro grau. Procuremos uma solução particular $\vec{X}_p = \begin{pmatrix} a_1t + b_1 \\ a_2t + b_2 \end{pmatrix}$. Substituindo no sistema:

$$\vec{X}_p' = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1t + b_1 \\ a_2t + b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6t \\ -10t + 4 \end{pmatrix}.$$

Daí deduzimos o sistema algébrico

$$\begin{cases} 6(a_1t + b_1) + a_2t + b_2 + 6t = a_1 \\ 4(a_1t + b_1) + 3(a_2t + b_2) - 10t + 4 = a_2 \end{cases}$$

Simplificando o lado esquerdo do sinal de igualdade em cada linha, e igualando os coeficientes das potências de t nas expressões obtidas aos

respectivos coeficientes das potências de t nas linhas do vetor $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$,

obtemos o sistema

$$\begin{cases} 6a_1 + a_2 + 6 = 0 \\ 6b_1 + b_2 = a_1 \\ 4a_1 + 3a_2 + 10 = 0 \\ 4b_1 + 3b_2 + 4 = a_2 \end{cases}$$

Ou ainda

$$\begin{cases} 6a_1 + a_2 = -6 \\ -a_1 + 6b_1 + b_2 = 0 \\ 4a_1 + 3a_2 = -10 \\ -a_2 + 4b_1 + 3b_2 = -4 \end{cases}$$

Cujas soluções são $a_1 = -4/7$, $a_2 = -18/7$, $b_1 = 17/49$ e $b_2 = -130/49$.

Assim,

$$\vec{X}_p = \begin{pmatrix} (-4/7)t + 17/49 \\ (-18/7)t - 130/49 \end{pmatrix}.$$

Atividade de auto-avaliação 15.6

Calcule uma uma solução particular do sistema abaixo pelo método dos coeficientes a determinar

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{X} + \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ -3 \sin t \end{pmatrix}$$

APÊNDICE

1ª parte: Dedução da expressão da solução adicional para sistemas com autovalores reais repetidos - caso bidimensional

Examinamos a seguinte questão: $\vec{X}' = A\vec{X}$ é tal que a equação característica $\det A - \lambda I = 0$, tem multiplicidade algébrica **2** (logo A só tem um autovalor); o qual vamos supor que tenha multiplicidade geométrica **1**, de maneira que só conseguimos

construir **uma solução** $\vec{X}_1(t) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$.

Como construir uma segunda solução, linearmente independente de $\vec{X}_1(t)$?

A estratégia que adotaremos é a de adaptar aos sistemas lineares bidimensionais o procedimento de **redução de ordem** usado no caso de equações escalares de segunda ordem normais $y'' + py' + q = 0$, quando apenas uma solução era conhecida.

Então vamos procurar uma segunda solução da forma

$$\vec{X}_2(t) = \begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{pmatrix} e^{\lambda t} \quad (15.23)$$

onde vamos supor também que $k_1(t)$ e $k_2(t)$ são funções deriváveis em todos os pontos; o que não é pedir muito. Afinal de contas a primeira solução $\vec{X}_1(t)$ é derivável em todos os pontos; em particular são deriváveis em $t = 0$.

Lembre que dizer que $k_1(t)$ e $k_2(t)$ são deriváveis em $t = 0$ significa dizer que, numa vizinhança do ponto $t = 0$, podemos aproximá-las pelas retas tangentes aos seus gráficos, as chamadas **aproximações de primeira ordem**. (Quer dizer, podemos “substituir” $k_1(t)$ e $k_2(t)$, numa vizinhança de $t = 0$ pelas suas retas tangentes em $t = 0$).

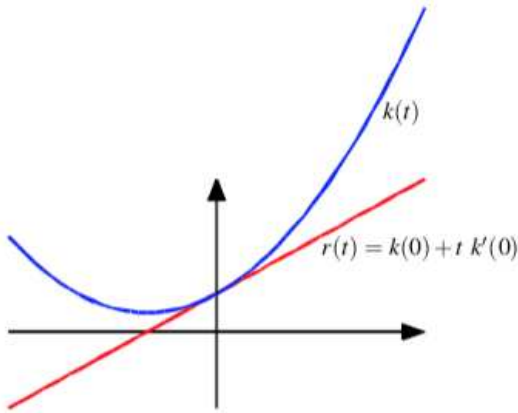


Figura 15.1:

As equações das retas tangentes são

$$\begin{cases} r_1(t) = k_1(0) + k'_1(0)t \\ r_2(t) = k_2(0) + k'_2(0)t \end{cases}$$

Assim procuramos uma segunda solução da forma

$$\vec{X}_2(t) = \begin{pmatrix} k_1(0) + t k'_1(0) \\ k_2(0) + t k'_2(0) \end{pmatrix} e^{\lambda t},$$

ou ainda

$$\vec{X}_2(t) = \left[\begin{pmatrix} k_1(0) \\ k_2(0) \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} k'_1(0) \\ k'_2(0) \end{pmatrix} \right] e^{\lambda t}.$$

Façamos

$$\begin{pmatrix} k_1(0) \\ k_2(0) \end{pmatrix} = \vec{V}_2 \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} k'_1(0) \\ k'_2(0) \end{pmatrix} = \vec{V}_1,$$

de modo que a segunda solução $\vec{X}_2(t)$ que estamos querendo calcular tem a forma

$$\vec{X}_2(t) = [\vec{V}_2 + t\vec{V}_1] e^{\lambda t} \quad (15.24)$$

A questão pode ser reformulada da seguinte maneira:

Encontre vetores \vec{V}_1 e \vec{V}_2 tais que (15.24) seja uma segunda solução de $\vec{X}' = A\vec{X}$, linearmente independente de $\vec{X}_1(t) = \vec{V}_1 e^{\lambda t}$

Substituindo (15.24) na equação $\vec{X}' = A\vec{X}$:

$$\vec{V}_1 e^{\lambda t} + [\vec{V}_2 + t\vec{V}_1] \lambda e^{\lambda t} = A ([\vec{V}_2 + t\vec{V}_1] e^{\lambda t})$$

o que pode ser reescrito como

$$\underbrace{t e^{\lambda t} \lambda \vec{V}_1}_{*} + \overbrace{e^{\lambda t} (\vec{V}_1 + \lambda \vec{V}_2)}^{**} = \underbrace{t e^{\lambda t} A \vec{V}_1}_{*} + \overbrace{e^{\lambda t} A \vec{V}_2}^{**}$$

Se valerem as igualdades das parcelas assinaladas com (*) dos dois lados, e também das parcelas marcadas com (**) em ambos os lados, então (15.24) será solução de $\vec{X}' = A\vec{X}$.

Ou seja, (15.24) será solução de $\vec{X}' = A\vec{X}$ se \vec{V}_1 e \vec{V}_2 satisfizerem às equações

$$\begin{cases} \lambda \vec{V}_1 = A \vec{V}_1 \\ A \vec{V}_2 = \lambda \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \end{cases}$$

ou ainda, (15.24) será solução de $\vec{X}' = A\vec{X}$ se

$$(A - \lambda I) \vec{V}_1 = \vec{0} \quad (15.25)$$

$$(A - \lambda I) \vec{V}_2 = \vec{V}_1 \quad (15.26)$$

A equação (15.25) nos diz que o vetor \vec{V}_1 deve ser um autovetor de A associado ao autovalor λ .

A equação (15.26) nos diz que, uma vez determinado \vec{V}_1 , para calcular \vec{V}_2 devemos resolver a equação vetorial

$$(A - \lambda I) \vec{V}_2 = \vec{V}_1$$

Definição 15.9.

- Um *autovetor generalizado* de peso 2, da matriz A , associado ao autovalor λ é um vetor \vec{V} tal que

$$(A - \lambda I) \vec{V} \neq \vec{0}$$

$$(A - \lambda I)^2 \vec{V} = \vec{0}$$

- Um *autovetor generalizado* de peso 1, de A , associado ao autovalor λ é um autovetor usual de A

Proposição 15.6.

Suponha que \vec{V}_1 e $\vec{V}_2 \in \mathbb{R}^2$ são tais que $\vec{V}_1 \neq \vec{0}$ e

$$(A - \lambda I) \vec{V}_1 = \vec{0}; \quad (A - \lambda I) \vec{V}_2 = \vec{V}_1.$$

Então \vec{V}_2 é um autovetor generalizado de A , de peso 2, associado ao autovalor λ ; e $\{\vec{V}_1, \vec{V}_2\}$ é um conjunto linearmente independente em \mathbb{R}^2

Demonstração

Observe que \vec{V}_1 e \vec{V}_2 satisfazem às equações

1. $(A - \lambda I) \vec{V}_1 = \vec{0}$, e, portanto, \vec{V}_1 é autovetor de A associado ao autovalor λ ,
2. $(A - \lambda I) \vec{V}_2 \neq \vec{0}$, pois $(A - \lambda I) \vec{V}_2 = \vec{V}_1$, o qual é diferente de zero. Além disso

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)^2 \vec{V}_2 &= (A - \lambda I)[(A - \lambda I) \vec{V}_2] \\ &= (A - \lambda I) \vec{V}_1 \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

logo \vec{V}_2 é um autovetor generalizado de A , de peso 2, associado ao autovalor λ , construído a partir do autovetor \vec{V}_1 .

Para verificar a independência linear de \vec{V}_1 e \vec{V}_2 , sejam α e

$\beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha \vec{V}_1 + \beta \vec{V}_2 = \vec{0} \quad (15.27)$$

Então, aplicando $(A - \lambda I)$ aos dois lados de (15.27):

$$(A - \lambda Id)[\alpha \vec{V}_1 + \beta \vec{V}_2] = (A - \lambda Id) \vec{0} = \vec{0}$$

Pela a linearidade de $(A - \lambda I)$ temos

$$(A - \lambda Id)[\alpha \vec{V}_1 + \beta \vec{V}_2] = \alpha (A - \lambda Id)\vec{V}_1 + \beta (A - \lambda Id)\vec{V}_2.$$

Como $(A - \lambda Id)\vec{V}_2 = \vec{V}_1$ e $(A - \lambda Id)\vec{V}_1 = \vec{0}$, a equação (15.27) se reduz a

$$\alpha \vec{V}_1 = \vec{0}$$

E como $\vec{V}_1 \neq \vec{0}$, então $\alpha = 0$.

Portanto (15.27) se reduz a $\beta \vec{V}_1 = \vec{0}$.

Novamente, esta última equação implica que $\beta = 0$, pois $\vec{V}_1 \neq \vec{0}$.

Conclusão:

$$\alpha \vec{V}_1 + \beta \vec{V}_2 = \vec{0} \implies \alpha = \beta = 0,$$

o que prova que \vec{V}_1 e \vec{V}_2 são linearmente independentes.

E isso conclui a demonstração.

2ª parte: Deduções de fórmulas para obter soluções adicionais de sistemas com autovalores reais repetidos - o caso tridimensional:

Motivação: ao tentar calcular soluções de

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{X}$$

pelo método dos autovalores e autovetores obtém-se a equação característica $(\lambda - 2)^3$, com multiplicidade algébrica 3. O auto espaço referente a $\lambda = 3$ tem dimensão um. Podemos escolher

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e construir a solução} \quad \vec{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}.$$


Ao procurar autovetores generalizados, de peso dois, construídos a partir do autovetor \vec{V}_1 , e usá-los para construir duas novas soluções linearmente independentes, temos, por exemplo:

$$\vec{W}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{W}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e formamos as respectivas soluções

$$\vec{X}_2(t) = \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^{2t} \quad \text{e} \quad \vec{X}_3(t) = \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^{2t}.$$

O problema é que as três soluções obtidas, $\vec{X}_1(t)$, $\vec{X}_2(t)$, $\vec{X}_3(t)$, são linearmente dependentes, e precisamos de **três** soluções linearmente **independentes**.

 De modo geral, o problema é o seguinte: Tem-se um sistema tridimensional arbitrário.

$$\vec{X}' = A \vec{X},$$

tal que a matriz A tem apenas um autovetor de multiplicidade algébrica um e multiplicidade geométrica também igual a um. Calculamos um autovetor \vec{V}_1 , a partir do qual construímos uma solução $\vec{X}_1(t)$. Em seguida calculamos uma segunda solução $\vec{X}_2(t)$ usando um autovetor generalizado de A de peso dois, construído a partir de \vec{V}_1 . Entretanto, qualquer outra solução $\vec{X}_3(t)$ construída utilizando

autovetores generalizados de A , de peso dois construídos a partir de \vec{V}_1 é linearmente dependente de $\vec{X}_1(t)$ e $\vec{X}_2(t)$. Como podemos obter uma terceira solução linearmente independente?

A resposta é: refinando o processo de aproximação que foi utilizado anteriormente. Utilizando o método de variação dos parâmetros, procuramos uma outra solução da forma

$$\vec{X}_3(t) = \begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \\ k_3(t) \end{pmatrix} e^{2t} \quad (15.28)$$

só que agora vamos substituímos as funções $k_i(t)$ por suas aproximações ***aproximações de segunda ordem***.

Ou seja, as aproximações até a segunda ordem de $k_1(t)$, $k_2(t)$ e $k_3(t)$ no ponto 0):

$$\begin{cases} r_1(t) = k_1(0) + t k'_1(0) + (t^2/2) k''_1(0) \\ r_2(t) = k_2(0) + t k'_2(0) + (t^2/2) k''_2(0) \\ r_3(t) = k_3(0) + t k'_3(0) + (t^2/2) k''_3(0) \end{cases}$$

Obs: Trabalharemos inicialmente sem especificar o valor de λ , uma vez que o procedimento é geral. Posteriormente, quando formos completar a solução do **Exemplo 9.6** substituiremos λ pelo número 2.

Estamos buscando uma terceira solução de um sistema tridimensional autônomo

$$\vec{X}' = A \vec{X},$$

da forma

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} k_1(0) + t k'_1(0) + (t^2/2) k''_1(0) \\ k_2(0) + t k'_2(0) + (t^2/2) k''_2(0) \\ k_3(0) + t k'_3(0) + (t^2/2) k''_3(0) \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

ou:

$$\vec{X}(t) = \left[\underbrace{\begin{pmatrix} k_1(0) \\ k_2(0) \\ k_3(0) \end{pmatrix}}_{\vec{V}_3} + t \underbrace{\begin{pmatrix} k'_1(0) \\ k'_2(0) \\ k'_3(0) \end{pmatrix}}_{\vec{V}_2} + \frac{t^2}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} k''_1(0) \\ k''_2(0) \\ k''_3(0) \end{pmatrix}}_{\vec{V}_1} \right] e^{\lambda t}$$

isto é

$$\vec{X}(t) = \left(\vec{V}_3 + t \vec{V}_2 + (t^2/2) \vec{V}_1 \right) e^{\lambda t}.$$

Então:

$$\begin{aligned} \vec{X}'(t) &= \lambda \vec{V}_3 e^{\lambda t} + \vec{V}_2 e^{\lambda t} + t \lambda \vec{V}_2 e^{\lambda t} + t \lambda \vec{V}_1 e^{\lambda t} + (t^2/2) \lambda \vec{V}_1 e^{\lambda t}, \end{aligned} \quad (15.29)$$

e

$$A \vec{X}(t) = e^{\lambda t} A \vec{V}_3 + t e^{\lambda t} A \vec{V}_2 + (t^2/2) e^{\lambda t} A \vec{V}_1. \quad (15.30)$$

Uma condição suficiente para

$$\vec{X}(t) = \left(\vec{V}_3 + t \vec{V}_2 + \frac{t^2}{2} \vec{V}_1 \right) e^{\lambda t}$$

ser solução de $\vec{X}' = A \vec{X}$ é que as seguintes relações, obtidas ao igualar os coeficientes das potências de t em (15.29) e (15.30), sejam verificadas (para todo $t \in \mathbb{R}$):

$$\begin{cases} (t^2/2) \lambda \vec{V}_1 e^{\lambda t} = (t^2/2) e^{\lambda t} A \vec{V}_1 \\ t \lambda \vec{V}_2 e^{\lambda t} + t \vec{V}_1 e^{\lambda t} = t e^{\lambda t} A \vec{V}_2 \\ \lambda \vec{V}_3 e^{\lambda t} + \vec{V}_2 e^{\lambda t} = e^{\lambda t} A \vec{V}_3. \end{cases}$$

Cancelando as exponenciais e as potências de t nos dois lados

das equações, obtém-se:

$$\begin{cases} A\vec{V}_1 = \lambda \vec{V}_1 \\ \lambda \vec{V}_2 + \vec{V}_1 = A\vec{V}_2 \\ \lambda \vec{V}_3 + \vec{V}_2 = A\vec{V}_3 \end{cases}$$

ou ainda

$$(A - \lambda I)\vec{V}_1 = \vec{0} \quad (15.31)$$

$$(A - \lambda I)\vec{V}_2 = \vec{V}_1 \quad (15.32)$$

$$(A - \lambda I)\vec{V}_3 = \vec{V}_2 \quad (15.33)$$


Definição 15.10.

- Um *autovetor generalizado* de peso $k \geq 2$, da matriz A , associado ao autovalor λ é um vetor \vec{V} tal que

$$(A - \lambda I)^{k-1} \vec{V} \neq \vec{0}$$

$$(A - \lambda I)^K \vec{V} = \vec{0}$$

- Um *autovetor generalizado* de peso 1, de A , associado ao autovalor λ é um autovetor usual de A

 **Obs:** Da definição (15.10) e das equações (15.31), (15.32) e (15.33) concluímos que

- \vec{V}_1 é um autovetor de A pertencente ao autovalor λ ,
- \vec{V}_2 é um autovetor generalizado de peso dois, de A , pertencente a λ e construído a partir de \vec{V}_1 ,
- \vec{V}_3 é um autovetor generalizado de peso três, de A , pertencente a λ e construído a partir de \vec{V}_1 .

Teorema 15.7.

Suponha que $\vec{X}' = A\vec{X}$, $A \in \mathfrak{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, tem um autovalor λ de multiplicidade algébrica 3 e multiplicidade geométrica igual a 1. Sejam \vec{V}_1 , \vec{V}_2 e \vec{V}_3 vetores que satisfazem às equações (15.31), (15.32) e (15.33).

Então as funções vetoriais

$$\vec{X}_1(t) = \vec{V}_1 e^{\lambda t} \quad \vec{X}_2(t) = (t\vec{V}_1 + \vec{V}_2) e^{\lambda t}$$

$$\text{e } \vec{X}_3(t) = [(t^2/2)\vec{V}_1 + t\vec{V}_2 + \vec{V}_3] e^{\lambda t}$$

constituem uma base para o conjunto das soluções de

$$\vec{X}' = A\vec{X}$$

Demonstração

As funções $\{\vec{X}_1(t), \vec{X}_2(t), \vec{X}_3(t)\}$ são soluções de $\vec{X}' = A\vec{X}$ por construção.

Então, basta mostrar que $\{\vec{X}_1(t), \vec{X}_2(t), \vec{X}_3(t)\}$ é um conjunto linearmente independente.

Sejam α , β e γ números reais tais que $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\alpha \vec{X}_1(t) + \beta \vec{X}_2(t) + \gamma \vec{X}_3(t) = \vec{0}.$$

Em particular, para $t = 0$,

$$\alpha \vec{V}_1 + \beta \vec{V}_2 + \gamma \vec{V}_3 = \vec{0} \quad (15.34)$$

Aplicando $(A - \lambda I)$ aos dois membros de (15.34), e usando (15.31), (15.32) e (15.33):

$$\begin{aligned} \alpha \underbrace{(A - \lambda I)\vec{V}_1}_{\vec{0}} + \beta \underbrace{(A - \lambda I)\vec{V}_2}_{\vec{V}_1} + \gamma \underbrace{(A - \lambda I)\vec{V}_3}_{\vec{V}_2} = \\ = \vec{0} \end{aligned} \quad (15.35)$$

Daí $\alpha \vec{V}_1 + \beta \vec{V}_2 + \gamma \vec{V}_3 = \vec{0}$ se reduz a

$$\beta \vec{V}_1 + \gamma \vec{V}_2 = \vec{0}. \quad (15.36)$$

Aplicando $(A - \lambda I)$ aos dois membros de (15.36), e usando (15.31) e (15.32) :

$$\beta \underbrace{(A - \lambda I)\vec{V}_1}_{\vec{0}} + \gamma \underbrace{(A - \lambda I)\vec{V}_2}_{\vec{V}_1} = \vec{0};$$

que resulta em

$$\gamma \vec{V}_1 = \vec{0}. \quad (15.37)$$

E como \vec{V}_1 é um autovetor pertencente a λ , então $\vec{V}_1 \neq \vec{0}$. Portanto, $\gamma = 0$ e (15.37) implica que $\beta = 0$. E então (15.35) implica que $\alpha = 0$.

Ou seja

$$\alpha \vec{V} + \beta \vec{W}_1 + \gamma \vec{W}_2 = \vec{0} \implies \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

CQD

Resumo

Nesta aula você:

- aprendeu o conceito de espaço de soluções de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem e dimensão n ;
- aprendeu a calcular soluções gerais de sistemas de equações de primeira ordem homogêneos pelo método de autovalores
- por último, aprendeu a calcular soluções particulares de sistemas não homogêneos.

COMENTÁRIOS DE FINAL DE CURSO:

- Esperamos que você tenha conseguido formar uma pequena ideia sobre as EDOs. Acredite: mal tocamos na ponta do iceberg (jargão de praxe). Na primeira parte do curso (Módulo 1), o fio condutor que tentamos seguir foi o de, partindo do Cálculo, ir trabalhando os tipos básicos de equações diferenciais que se apresentaram no início da teoria (séculos XVII e XVIII) até chegar a uma formulação moderna $x' = f(t, x)$, ou sua equivalente para sistemas; incluindo o Teorema Fundamental de Existência e Unicidade de Soluções. A segunda parte (Módulo 2) teve como eixo central o estudo de equações lineares de ordem superior e, mais geralmente, de sistemas de equações diferenciais lineares de primeira ordem, apresentando alguns dos desenvolvimentos necessários para que você possa “encarar” um curso mais avançado; incluindo alguns (mas não todos) conceitos necessários ao estudo de equações não lineares e de sistemas dinâmicos.
- Toda a matéria relacionada com a obtenção de soluções de sistemas, lineares ou não, pelo método da transformada de Laplace, e o estudo geométrico das soluções de sistemas autônomos bidimensionais não foi incluída nestas Aulas. Você pode procurar na literatura; e esses tópicos sempre poderão ser explorada em materiais complementares às aulas.

SOLUÇÕES COMENTADAS DAS ATIVIDADES DESTA AULA:

Solução comentada da atividade 15.1

Isso não foi um acaso. Para cada autovalor λ , existe uma infinidade de autovetores associados a ele. Todos eles são soluções de um mesmo sistema algébrico. Então esse sistema tem de ter sempre um número infinito de soluções. Isto é tem de ser indeterminado.

Solução comentada da atividade 15.2

a) A matriz A do sistema do **Exemplo 16.1** é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Autovetores associados respectivamente aos autovalores $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -3$ de A , são, por exemplo,

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Então

$$P = \text{col}[\vec{V}_1 \ \vec{V}_2] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

b) De acordo com a fórmula da inversa de uma matriz de ordem 2,

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

c)

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 5/2 & 5/4 \\ -3/2 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2).$$

c) A forma explícita do sistema $\vec{Z}' = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \vec{Z}$ é

$$\begin{cases} z_1' = 5z_1 \\ z_2' = -3z_2; \end{cases}$$

então (verifique!)

$$\vec{Z}(t) = c_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{Z}_1(t)} e^{5t} + c_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{Z}_2(t)} e^{-3t}. \quad (15.38)$$

d) Chamemos de B a matriz $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$.Seja $\vec{Z}(t)$ uma solução qualquer do sistema $\vec{Z}' = B \vec{Z}$.Pede-se para mostrar que $P \vec{Z}(t)$ é solução do sistema original $\vec{X}' = A \vec{X}$.

Uma solução possível, porém trabalhosa, é usar a expressão de $\vec{Z}(t)$ obtida, para calcular $P \vec{Z}(t)$ e por último verificar diretamente que $P \vec{Z}(t)$ é solução de $\vec{X}' = A \vec{X}$.

Apresentamos, abaixo, um outro caminho.

Observe que $(P \vec{Z}(t))' = P \vec{Z}'(t)$, pois P é uma matriz constante.

Então

$$\begin{aligned}
 (P \vec{Z}(t))' &= P \vec{Z}'(t) \\
 &= P[B \vec{Z}(t)] \text{ (substituindo } \vec{Z}'(t) \text{ por } B \vec{Z}(t)) \\
 &= P[P^{-1}AP] \vec{Z}(t) \text{ (substituindo } B \text{ por } P^{-1}AP) \\
 &= [PP^{-1}]A[P \vec{Z}(t)] \text{ (associando os fatores)} \\
 &= A[P \vec{Z}(t)] \text{ (lembrando que } PP^{-1} = Id).
 \end{aligned}$$

Resumindo,

$$(P \vec{Z}(t))' = A[P \vec{Z}(t)];$$

o que mostra que $P \vec{Z}(t)$ é solução de $\vec{X}' = A \vec{X}$, conforme queríamos demonstrar.

Solução comentada da atividade 15.3

a) A matriz dos sistema é

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

e portanto a equação característica $\det(a - \lambda I) = 0$ é $(a - \lambda)^2 + b^2 = 0$, com raízes $\lambda = a \pm bi$.

b) Por um lado,

$$A \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b + ai \\ a + bi \end{pmatrix}.$$

Por outro lado,

$$(a + bi) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ai - b \\ a + bi \end{pmatrix}.$$

Logo

$$A \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = (a + bi) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Uma solução complexa associada ao autovalor complexo $a + bi$ é

$$\begin{aligned} \vec{X}_C(t) &= \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(a+bi)t} = (e^{at} \cos bt + i e^{at} \sin bt) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{at} \cos bt i - e^{at} \sin bt \\ e^{at} \cos bt + e^{at} \sin bt \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -e^{at} \sin bt \\ e^{at} \cos bt \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} e^{at} \cos bt \\ e^{at} \sin bt \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Segue daí que

$$x \rightarrow \begin{pmatrix} -e^{at} \sin bt \\ e^{at} \cos bt \end{pmatrix} \text{ e } x \rightarrow \begin{pmatrix} e^{at} \cos bt \\ e^{at} \sin bt \end{pmatrix}$$

são soluções reais linearmente independentes de $\vec{X}' = \begin{pmatrix} a & b & a \end{pmatrix} \vec{X}$.

Solução comentada da atividade 15.4

Iríamos obter uma outra solução geral do sistema, no sentido de que cada solução particular obtida da solução geral calculada com o autovetor generalizado \vec{W}_1 mediante a escolha de constantes c_1 , c_2 e c_3 seria também uma solução particular da solução geral construída com o autovetor generalizado \vec{W}_2 mediante a escolha de constantes \tilde{c}_1 , \tilde{c}_2 e \tilde{c}_3 ; e vice-versa.

Solução comentada da atividade 15.5

Omitimos.

Solução comentada da atividade 15.6

Procuramos uma solução particular da forma

$$\vec{X}_p(t) = \begin{pmatrix} a \cos t + b \sin t \\ c \cos t + d \sin t \end{pmatrix}.$$

Substituindo essa expressão no sistema, temos

$$\begin{cases} a - b - c = -2 \\ a + b - d = 0 \\ a + c - d = 0 \\ b + c + d = 3. \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema algébrico, obtemos $a = 0$, $b = c = d = 1$. Portanto uma solução particular do sistema dado é

$$\vec{X}_p(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}.$$