Fundação CECIERJ

Consórcio cederj

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

# Matemática para Contabilidade I

## Volume Único


Eliane Ribeiro Pereira

Maria Cecília de Carvalho Chaves



GOVERNO DO ESTADO RIO DE JANEIRO

Secretaria de Ciência, Tecnologia e Inovação

UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

PÁTRIA AMADA BRASIL GOVERNO FEDERAL

Apoio:

FAPERJ

Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

## Fundação Cecierj / Consórcio Cederj
www.cederj.edu.br

**Presidente**
Carlos Eduardo Bielschowsky

**Vice-presidente**
Marilvia Dansa de Alencar

**Coordenação do Curso de Ciências Contábeis**
UFRJ - Eliane Ribeiro Pereira

## Material Didático

**Elaboração de Conteúdo**
Eliane Ribeiro Pereira
Maria Cecília de Carvalho Chaves

**Direção de Design Instrucional**
Cristine Costa Barreto

**Coordenação de Design Instrucional**
Bruno José Peixoto
Flávia Busnardo
Paulo Vasques de Miranda

**Design Instrucional**
Anna Maria Osborne
José Meyohas
Juliana Bezerra
Solange Nacimento Silva

**Biblioteca**
Raquel Cristina da Silva Tiellet
Simone da Cruz Correa de Souza
Vera Vani Alves de Pinho

**Coordenação de Produção**
Fábio Rapello Alencar

**Assistente de Produção**
Bianca Giacomelli

**Revisão Linguística e Tipográfica**
Maria Elisa Luiz da Silveira
Yana de Mello Gonzaga

**Ilustração**
Vinicius Mitchell

**Capa**
Vinicius Mitchell

**Programação Visual**
Filipe Dutra
Maria Fernanda de Novaes

**Produção Gráfica**
Patrícia Esteves
Ulisses Schnaider





P434m

Pereira, Eliane Ribeiro.

Matemática para contabilidade I. Volume único / Eliane Ribeiro Pereira, Maria Cecília de Carvalho Chaves. – Rio de Janeiro : Fundação Cecierj, 2016.

410p.; 19 x 26,5 cm.

ISBN: 978-85-458-0028-6

1. Matemática. 2. Contabilidade. I. Chaves, Maria Cecília de Carvalho. 1. Titulo.

CDD: 510

Referências bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.
Texto revisado segundo o novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa.

# Governo do Estado do Rio de Janeiro

**Governador**
Wilson Witzel

**Secretário de Estado de Ciência, Tecnologia e Inovação**
Leonardo Rodrigues

# Instituições Consorciadas

**CEFET/RJ - Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca**
Diretor-geral: Carlos Henrique Figueiredo Alves

**FAETEC - Fundação de Apoio à Escola Técnica**
Presidente: Alexandre Sérgio Alves Vieira

**IFF - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense**
Reitor: Jefferson Manhães de Azevedo

**UENF - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro**
Reitor: Luis César Passoni

**UERJ - Universidade do Estado do Rio de Janeiro**
Reitor: Ruy Garcia Marques

**UFF - Universidade Federal Fluminense**
Reitor: Antonio Claudio Lucas da Nóbrega

**UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro**
Reitora: Denise Pires de Carvalho

**UFRRJ - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro**
Reitora: Ricardo Luiz Louro Berbara

**UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro**
Reitor: Luiz Pedro San Gil Jutuca

# Sumário


Aula 1 • Teoria dos conjuntos e conjuntos numéricos ........................................ 7
*Eliane Ribeiro Pereira*
*Maria Cecília de Carvalho Chaves*

Aula 2 • Potências e raízes ........................................ 47
*Eliane Ribeiro Pereira*
*Maria Cecília de Carvalho Chaves*

Aula 3 • Fatoração de polinômios ........................................ 69
*Eliane Ribeiro Pereira*
*Maria Cecília de Carvalho Chaves*

Aula 4 • Equações do 1º grau e inequações de 1º grau ........................................ 91
*Eliane Ribeiro Pereira*
*Maria Cecília De Carvalho Chaves*

Aula 5 • Equações do 2º grau ........................................ 125
*Eliane Ribeiro Pereira*
*Maria Cecília De Carvalho Chaves*

Aula 6 • Razões, proporções e regra de três ........................................ 145
*Eliane Ribeiro Pereira*
*Maria Cecília De Carvalho Chaves*

Aula 7 • Funções ........................................ 179
*Eliane Ribeiro Pereira*
*Maria Cecília de Carvalho Chaves*

Aula 8 • Função do 1º grau ........................................ 231
*Eliane Ribeiro Pereira*
*Maria Cecília De Carvalho Chaves*

Aula 9 • Funções quadráticas ou de 2º grau ........................................ 257
*Eliane Ribeiro Pereira*
*Maria Cecília de Carvalho Chaves*

Aula 10 • Funções dadas por mais de uma sentença ........................................ 295
*Eliane Ribeiro Pereira*
*Maria Cecília de Carvalho Chaves*

Aula 11 • Funções exponenciais e logarítmicas ........................................ 317
*Eliane Ribeiro Pereira*
*Maria Cecília de Carvalho Chaves*

**Aula 12 • Progressão Aritmética (PA)**.......................................................................................................**347**
*Eliane Ribeiro Pereira*
*Maria Cecília de Carvalho Chaves*

**Aula 13 • Progressão Geométrica (PG)**.......................................................................................................**379**
*Eliane Ribeiro Pereira*
*Maria Cecília de Carvalho Chaves*

**Referências**.......................................................................................................**405**

# Aula 1

## Teoria dos conjuntos e conjuntos numéricos

*Eliane Ribeiro Pereira*
*Maria Cecília de Carvalho Chaves*

## Meta

Apresentar a teoria dos conjuntos e os conjuntos numéricos.

## Objetivos

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. enumerar os elementos de um conjunto;
2. relacionar diferentes representações de um conjunto;
3. identificar os conjuntos vazio, unitário, finito e infinito;
4. reconhecer a relação de pertinência;
5. reconhecer a relação entre conjuntos;
6. construir o conjunto de partes de um conjunto;
7. analisar problemas com base na teoria dos conjuntos;
8. representar intervalos numéricos na reta real;
9. escrever os intervalos numéricos em notação matemática.

## Introdução

Vamos iniciar o nosso estudo falando sobre conjuntos. A teoria dos conjuntos tem um papel muito importante em matemática pura e aplicada. Foi desenvolvida no final do século XIX pelo matemático Georg Cantor.

Cantor utilizou a palavra conjunto para designar qualquer coleção de objetos (números, funções, pontos do espaço, pessoas etc.). Os objetos individuais que compõem uma coleção chamam-se elementos do conjunto e diz-se que pertencem ao conjunto. Desde então, a teoria dos conjuntos tem-se desenvolvido intensamente, influenciando e enriquecendo todos os ramos da Matemática.

A teoria dos conjuntos foi uma grande inovação feita por Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor. Neste *link*, você poderá saber um pouco mais sobre o matemático: http://educacao.uol.com.br/biografias/georg-cantor.jhtm.

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor

Nesta aula, vamos estudar algumas ideias básicas da teoria dos conjuntos, evitando uma formulação demasiadamente abstrata, que foge dos objetivos da nossa disciplina.

## Noções básicas de teoria dos conjuntos

Considere que um conjunto é uma coleção de objetos chamados elementos e que cada um desses elementos forma um dos componentes do conjunto.

Geralmente, por convenção, usaremos letras minúsculas, com ou sem índices (a, b, c, ...), para representar os elementos dos conjuntos; e letras maiúsculas, com ou sem índices (A, B, C, …), para representar os conjuntos formados por esses elementos.

A tabela a seguir apresenta alguns símbolos matemáticos que usaremos ao longo da aula, relacionados à teoria dos conjuntos.

**Tabela 1.1:** Símbolos matemáticos

| Símbolo | Significado |
|---|---|
| $\mid$ | tal que |
| $\exists$ | existe |
| $\forall$ | para todo |
| $\wedge$ | e |
| $\vee$ | ou |
| $\Leftrightarrow$ | equivalente |
| $\Rightarrow$ | implica que |

Fonte: IEZZI (2006)

## Representações dos conjuntos

Um conjunto pode ser representado das seguintes formas:

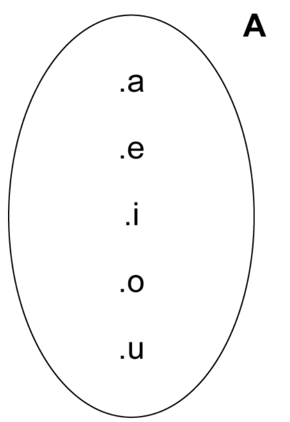
1. por enumeração de seus elementos,

   $A = \{a, e, i, o, u\}$

2. pela descrição de uma característica comum a todos os seus elementos,

   $A = \{x \mid x \text{ é uma vogal}\}$ (Lê-se: x tal que x é uma vogal.)

3. por meio do diagrama de *Venn*

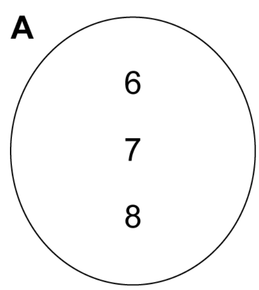



Exemplos:

1. Enumere o conjunto dos números pares maiores do que 10 e menores do que 20.

A = {12, 14, 16, 18}

2. Represente um conjunto formado por números inteiros entre 5 e 9.

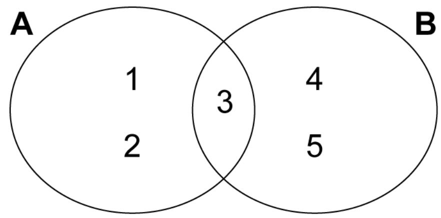



## Atividade 1

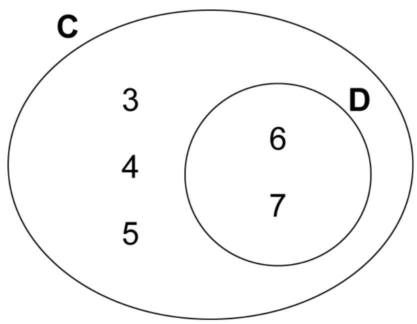
***Atende ao objetivo 1***

Enumere os elementos dos conjuntos a seguir:

(a)




(b)




***Resposta comentada***

No item (b) desta atividade, o conjunto D está contido no conjunto C. Logo, os elementos em comum aos dois conjuntos são os pertencentes ao conjunto D – 6 e 7.

a) A = {1, 2, 3}

B = {3, 4, 5}

b) C = {3, 4, 5, 6, 7}

D = {6, 7}

## Definições

Vamos relembrar algumas definições da teoria dos conjuntos.

### Conjunto unitário

O conjunto unitário é todo conjunto formado por um único elemento.

Exemplo:

Represente o conjunto formado por números naturais pares e primos.

A = {3}

### Conjunto vazio ($\varnothing$)

O conjunto vazio é todo conjunto que não possui elementos. Usa-se o símbolo $\varnothing$ para representar o conjunto vazio.

Exemplo:

Represente o conjunto formado por números naturais maiores do que 10 e menores do que 3.

$A = \{\ \} = \varnothing$

$B = \{x \mid \frac{1}{x} = 0\}$

Apostol, no seu livro *Calculus*, dá uma boa ideia de conjunto vazio: pode-se conceber um conjunto como uma caixa em cujo interior se encontram objetos; então, o conjunto vazio corresponde à situação em que a caixa está vazia (mesmo estando vazia, continua sendo uma caixa).

## Conjunto finito

O conjunto finito é um conjunto com um número limitado, n, de elementos.

Exemplo:

$A = \{x \mid 2x + 6 = 0\}$

## Conjunto infinito

O conjunto infinito é um conjunto com número ilimitado de elementos.

Exemplo:

$A = \{x \mid x$ é um número ímpar$\}$

## Conjunto universo

Todos os elementos envolvidos na resolução de algum problema matemático devem pertencer a algum conjunto. Esse conjunto é chamado conjunto universo – U.

## Conjuntos iguais

Diz-se que um conjunto A é igual a um conjunto B (A = B) quando A e B possuem os mesmos elementos, ou seja, todo elemento de A pertence ($\in$) a B e todo elemento de B pertence ($\in$) a A.

$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

## *Atividade 2*

***Atende ao objetivo 2***

Relacione os conjuntos, utilizando = ou ≠, conforme o caso:

(a) $A = \{1, 3, 5, 7\}$ $B = \{x \in N$ / x é ímpar, menor do que 9$\}$

(b) A = {verde, amarelo} B = {x / x é uma cor da bandeira brasileira}

(c) $A = \{0, -1, -2, -3\}$ $B = \{x \in Z / x \leq 0\}$

### *Resposta comentada*

No item (c) desta atividade, o conjunto A enumera apenas quatro elementos. Já o conjunto B representa os números inteiros menores ou iguais a zero, que é um conjunto infinito. Logo, os dois conjuntos são diferentes.

$A = B$

$A \neq B$

$A \neq B$

## *Atividade 3*

*Atende ao objetivo 3*

Classifique os conjuntos abaixo em vazio, unitário, finito ou infinito, conforme o caso:

a) $A = \{0, 1, 2, ..., 90\}$

b) $B = \{x \mid x$ é número inteiro par positivo$\} = \{x \in Z^+ \mid x$ é par$\}$

c) $C = \{x \in N \mid x$ é ímpar menor do que $2\}$

d) $D = \{x \in Z \mid x$ é par maior do que 4 e menor do que $6\}$

### *Resposta comentada*

No item (d) desta atividade, não é possível enumerar nenhum número inteiro par que seja ao mesmo tempo maior do que 4 e menor do que 6. Logo, esse conjunto não possui elementos, é um conjunto vazio, podendo ser representado por $D = \varnothing$

(a) finito

(b) infinito

(c) unitário

(d) vazio

## Relação de Pertinência

A relação de pertinência entre os elementos e os conjuntos é notada, matematicamente, por dois símbolos: $\in$ e $\notin$, que indicam que um dado objeto pertence ou não pertence ao conjunto. Por exemplo: $a \in X$ significa que o objeto a pertence ou é elemento do conjunto X ; $b \notin Y$ significa que o objeto b não pertence ou não é elemento do conjunto Y.

Exemplos de relações de pertinência:

Se $A = \{3, 5, 7, 9\}$;

$3 \in A$ (se lê 3 pertence ao conjunto A);

$4 \notin A$ (se lê 4 não pertence ao conjunto A).

Você sabia... (Parando para pensar...)

O desenvolvimento da teoria dos conjuntos e da lógica matemática mostrou que o conceito original pode conduzir a contradições lógicas.

Assim, utiliza-se a apresentação elementar da teoria, evitando-se a consideração de conjuntos que conduzem a contradições, como é o caso, por exemplo, do conjunto de todos os conjuntos que não são elementos de si próprios.

Esse conjunto conduz ao paradoxo de *Russell*, quando se pergunta se ele é ou não elemento de si próprio (se é, não pode ser, pela própria definição do conjunto em causa; se não é, tem de ser, também pela própria definição do conjunto em causa).

As contradições lógicas são evitadas pela teoria axiomática de conjuntos, cuja ideia básica consiste em chamar de conjuntos apenas coleções com propriedades fixadas axiomaticamente.

## Atividade 4

***Atende ao objetivo 4***

Vamos exercitar a relação de pertinência?

1. Sejam $A = \{3, 5, 7, 9\}$ e $B = \{0, 2, \{4\}, 6\}$. Coloque V ou F, conforme o caso:

| | | |
|---|---|---|
| a.( ) $3 \in A$ | d.( ) $\{4\} \in A$ | g.( ) $6 \in B$ |
| b.( ) $9 \notin B$ | e.( ) $\{4\} \notin B$ | h.( ) $\{4\} \in B$ |
| c.( ) $0 \in A$ | f.( ) $0 \in B$ | i.( ) $0 \notin A$ |

### *Resposta comentada*

É fácil verificar que os itens a, b, f, g, h, i são verdadeiros, enquanto são falsos os itens c, d, e.

Note que os itens d, e, h propõem a análise de {4}. Como veremos adiante nesta aula, uma das formas de representar um conjunto é descrever seus elementos entre chaves. No caso, apesar de estar escrito entre chaves, {4} é um elemento pertencente ao conjunto B. Logo, é verdadeiro escrever $\{4\} \in B$, pois estamos descrevendo uma relação entre um elemento e um conjunto, e não uma relação entre conjuntos.

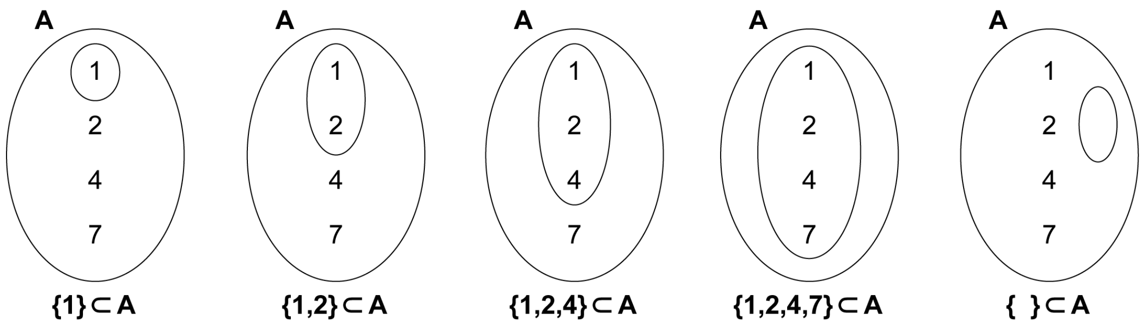
## Relação de Inclusão

A relação de inclusão entre conjuntos é notada pelos símbolos $\subset$ e $\not\subset$, que indicam que um conjunto está contido ou não está contido em outro. Dados dois conjuntos A e B, diz-se que A está contido em B (ou A é um subconjunto de B) se todo o elemento do conjunto A também for elemento do conjunto B.

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Por exemplo, $A \subset B$ significa que o conjunto A está contido no conjunto B; já $B \not\subset C$ significa que o conjunto B não está contido no conjunto C.

Exemplos:




Propriedades:

I. Todo conjunto está contido em si mesmo.

II. O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.

## Número de subconjuntos de um conjunto

Se um conjunto A possuir n elementos, então existirão $2^n$ subconjuntos de A.

Exemplo:

Sendo A = {1, 2, 3}, qual é o número de subconjuntos de A?

Como A possui 3 elementos, teremos $2^n = 2^3 = 8 \rightarrow \varnothing$, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}

Propriedades:

Sendo A, B e C três conjuntos arbitrários, valem as seguintes propriedades:

1ª) $\varnothing$ D $\subset$ A (O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto);

2ª) $A \subset A$ (reflexiva);

3ª) $(A \subset B$ e $B \subset A) \Rightarrow A = B$ (antissimétrica);

4ª) $(A \subset B$ e $B \subset C) \Rightarrow A \subset C$.

Com o mesmo significado de $A \subset B$, pode-se escrever $B \supset A$, que significa dizer que B contém A. Convém notar que o fato de se verificar a relação $A \subset B$ não exclui a possibilidade de se ter também $B \subset A$;

quando essas duas relações são conjuntamente verificadas, os conjuntos A e B têm precisamente os mesmos elementos, e diz-se, então, que são iguais (ou que são o mesmo conjunto), podendo escrever A = B. O mesmo ocorre com a negação dessa relação, isto é, $C \not\supset B$ significa que o conjunto C não contém o conjunto B.

Exemplo:

Dados os conjuntos $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-2, -1, 2\}$;

$A \supset B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\} \supset \{-2, -1, 2\} = B \subset A$;

diz-se: o conjunto A contém o conjunto B.

## Atividade 5

*Atende aos objetivos 4 e 5*

Considerando o conjunto $A = \{\varnothing, 1, 2, 3, \{4\}\}$; coloque $\in$, $\notin$, $\subset$ e $\not\subset$ nas sentenças a seguir, conforme o caso:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\varnothing$.... A | 1 .... A | {1} .... A | 2 .... A |
| {2, 3} .... A | 4 .... A | {4} .... A | {{4}} .... A |
| {$\varnothing$, 1, 2} .... A | | {$\varnothing$, 1, 2, 3, {4}} .... A | |

### Resposta comentada

Na atividade proposta, $\varnothing$ é um elemento do conjunto A, e não o símbolo que representa o conjunto vazio. Assim, a sua relação com o conjunto A é uma relação de pertinência, devendo-se utilizar o símbolo $\in$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\varnothing \in A$ | $1 \in A$ | $\{1\} \subset A$ | $2 \in A$ |
| $\{2, 3\} \subset A$ | $4 \notin A$ | $\{4\} \in A$ | $\{\{4\}\} \subset A$ |
| $\{\varnothing, 1, 2\} \subset A$ | | $\{\varnothing, 1, 2, 3, \{4\}\} \subset A$ | |

## Atividade 6

***Atende aos objetivos 4 e 5***

Considerando os conjuntos A = $\{\varnothing, 1, 2, 3, \{4\}\}$ e B = $\{\varnothing, 1, 2, 3, \{4\}, 5\}$, coloque V (verdadeiro) ou F(Falso), conforme o caso:

( ) $0 \in A$ ( ) $\{1\} \subset B$ ( ) $\{2\} \in A$ ( ) $\{3\} \in A$

( ) $\{4\} \in A$ ( ) $\varnothing \in A$ ( ) $\varnothing \subset A$ ( ) $1, 2 \in B$

( ) $\{\varnothing\} \subset A$ ( ) $A \subset B$

---

---

---

### *Resposta comentada*

Note que a atividade propõe três sentenças similares, mas com significados totalmente distintos: $\varnothing \in A$, $\varnothing \subset A$ e $\{\varnothing\} \subset A$, todas verdadeiras. A primeira apresenta a relação entre o elemento $\varnothing$ e o conjunto A, na qual dizemos que $\varnothing$ pertence ao conjunto A. A segunda apresenta a relação entre o conjunto vazio, cujo símbolo é $\varnothing$, e o conjunto A. Como o conjunto vazio está contido em todo conjunto, ele está contido em A. A terceira sentença apresenta o símbolo $\varnothing$ como elemento do conjunto unitário $\{\varnothing\}$. Como $\varnothing$ é elemento do conjunto A, o conjunto $\{\varnothing\}$ está contido no conjunto A.

( F ) $0 \in A$ ( V ) $\{1\} \subset B$ ( F ) $\{2\} \in A$

( F ) $\{3\} \in A$ ( V ) $\{4\} \in A$ ( V ) $\varnothing \in A$

( V ) $\varnothing \subset A$ ( V) $2 \in B$ ( V ) $\{\varnothing\} \subset A$

( V ) $A \subset B$

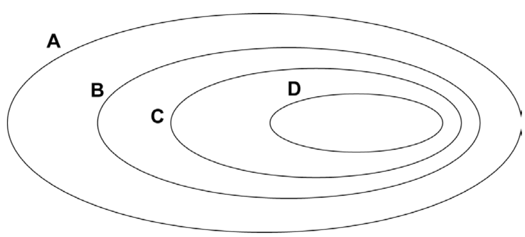
## Atividade 7

***Atende ao objetivo 2***

Faça um diagrama de Venn que simbolize a seguinte situação: A, B, C e D são conjuntos não vazios, tal que $D \subset C \subset B \subset A$.

### *Resposta comentada*

Como o conjunto D está contido no conjunto C, que está contido no conjunto B, que está contido no conjunto A, D está contido nos conjuntos A, B e C.



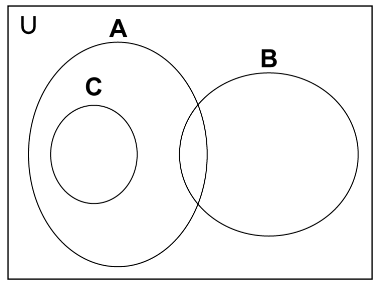

## *Atividade 8*

***Atende ao objetivo 5***

Represente, com o uso dos diagramas de Venn, os conjuntos A, B e C, de forma que $(A - B) \supset C$, sabendo que $A \cap B \neq \varnothing$.

***Resposta comentada***

Você deve começar a resolver a questão pela representação dos conjuntos A e B, considerando a informação de que há alguma interseção entre os conjuntos A e B, já que $A \cap B \neq \varnothing$. Como C está contido em A, tirando-se o conjunto B, a representação correta seria:




## Conjunto das partes

Dado um conjunto A, chama-se conjunto das partes de A (P (A)) aquele formado por todos os subconjuntos de A.

$P(A) = \{x \mid x \subset A\}$

Exemplo:

Se $A = \{a, b\}$

$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

### *Atividade 9*

***Atende ao Objetivo 6***

Sejam os conjuntos A, B e C tais que $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A \cap B = \{4, 5\}$, $C - B = \{1, 2\}$, $B - A = \{6, 7\}$, $C \cap B = \varnothing$ e $C \subset A$. Determine $C_A^C$.

### *Resposta comentada*

Considerando que $A \cap B = \{4, 5\}$ e $B - A = \{6, 7\}$, o conjunto $B = \{4, 5, 6, 7\}$. Por outro lado, como $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $A \cap B = \{4, 5\}$, o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Finalmente, como $C \cap B = \varnothing$, $C \subset A$ e $C - B = \{1, 2\}$, o conjunto $C = \{1, 2\}$. Logo, o complementar de C em relação ao conjunto A será formado pelos elementos do conjunto A que não pertencem ao conjunto C, ou seja:

$C_A^C = \{3, 4, 5\}$

## *Atividade 10*

*Atende ao objetivo 6*

Construa o conjunto das partes do conjunto A = {c, o , n , t}.

### *Resposta comentada*

Ao construir o conjunto das partes de um conjunto, precisamos enumerar todos os conjuntos possíveis de estarem contidos nesse conjunto, a começar pelo conjunto vazio, terminando no próprio conjunto.

P(A) = {∅, {c}, {o}, {n}, {t}, {c, o}, {c, n}, {c, t}, {o, n}, {o, t}, {n, t}, {c, o, n}, {c, o, t}, {c, n, t}, {o, n, t}, {c, o, n, t}}

## Operações com Conjuntos

Quando falamos em operações, lembramos logo de adição, subtração, divisão, multiplicação entre números. É possível, também, operar conjuntos. Todas essas operações são representadas por símbolos diferentes. Veja a representação de cada uma delas a seguir.

### União

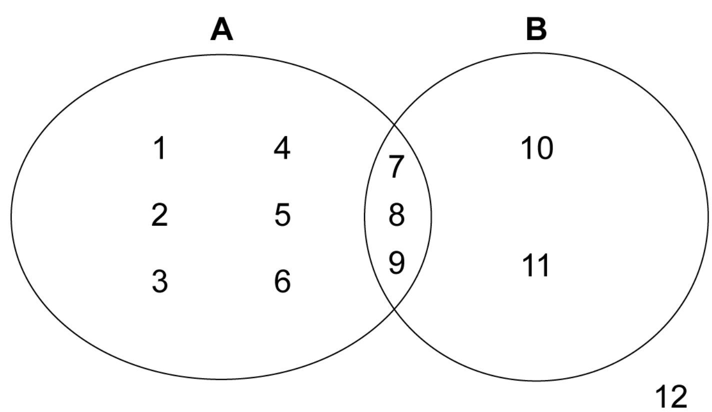
Dados dois conjuntos A e B, chama-se união de A e B, e indica-se $A \cup B$ (A união B), o conjunto de elementos pertencentes a A ou a B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

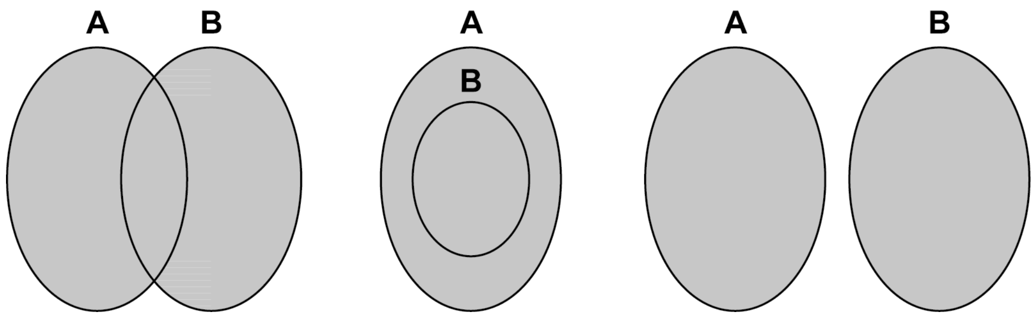
Exemplo:

Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $B = \{7, 8, 9, 10, 11\}$, determine $A \cup B$.

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$




Ao analisar a união de dois conjuntos, devemos considerar as seguintes possíveis situações:




Propriedades:

1ª) $A \cup A = A \rightarrow$ a essa propriedade damos o nome de idempotente;

2ª) $A \cup \varnothing = A \rightarrow$ a essa propriedade damos o nome de elemento neutro;

3ª) $A \cup B = B \cup A \rightarrow$ a essa propriedade damos o nome de comutativa;

4ª) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \rightarrow$ a essa propriedade damos o nome de associativa.

## Interseção

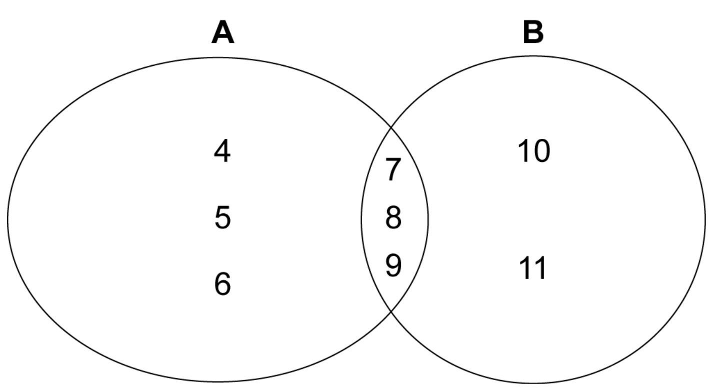
Dados dois conjuntos A e B, chama-se interseção de A e B e indica-se $A \cap B$ (A interseção B) o conjunto de elementos pertencentes a A e a B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

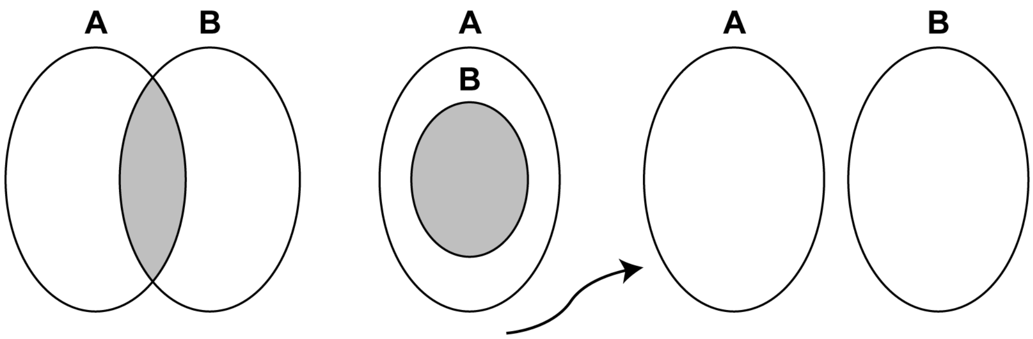
Exemplo:

Sejam $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $B = \{7, 8, 9, 10, 11\}$, determine $A \cap B$.

$A \cap B = \{7, 8, 9\}$



Ao analisar a interseção de dois conjuntos, devemos considerar as seguintes possíveis situações:




Quando a interseção de dois ou mais conjuntos é vazia, os conjuntos são ditos disjuntos. Verifique o último caso acima. Como não há elementos comuns entre os conjuntos A e B, dizemos que $A \cap B = \varnothing$, isto é, A e B são conjuntos disjuntos.

Propriedades:

1ª) $A \cap A = A \rightarrow$ a essa propriedade damos o nome de idempotente.

2ª) $A \cap U = A \rightarrow$ a essa propriedade damos o nome de elemento neutro.

3ª) $A \cap B = B \cap A \rightarrow$ a essa propriedade damos o nome de comutativa.

4ª) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \rightarrow$ a essa propriedade damos o nome de associativa.

## Produto cartesiano

O produto cartesiano, $A \times B$, de A por B, define um novo conjunto:

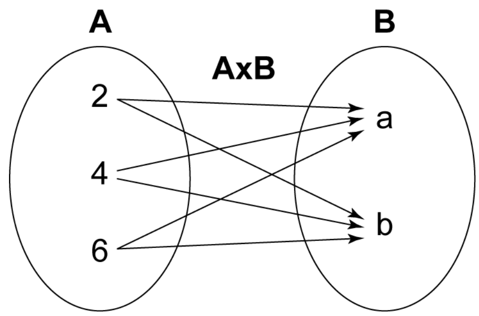
$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$

Cada um dos elementos do conjunto A é relacionado com cada um dos elementos do conjunto B, formando um par ordenado, em que o primeiro elemento pertence ao conjunto A e o segundo elemento do par pertence ao conjunto B.

É muito fácil conhecer o número de elementos do produto cartesiano. Se A tem n elementos e B tem m elementos, então $A \times B$ tem $(m \cdot n)$ elementos.

Exemplo:

Sejam A = {2, 4, 6} e B = {a, b} também representados por:




Como o conjunto A possui 3 elementos e o conjunto B possui 2 elementos, o conjunto A × B terá (3 × 2) 6 elementos.

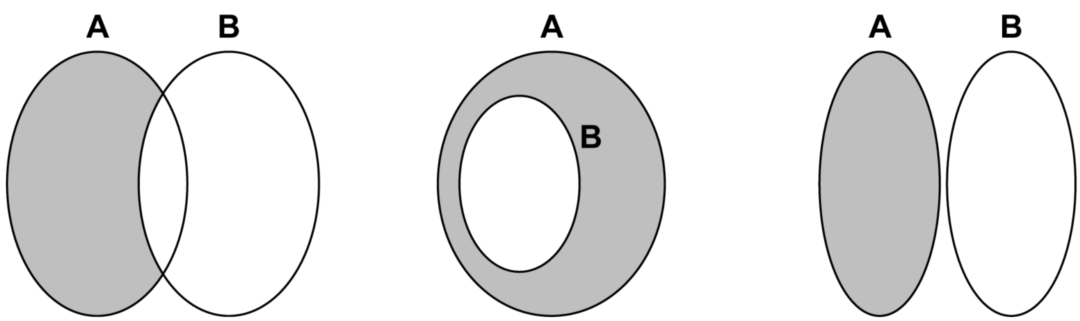
A × B = {(2, a), (2, b), (4, a), (4, b), (6, a), (6, b)}

## Diferença de conjuntos

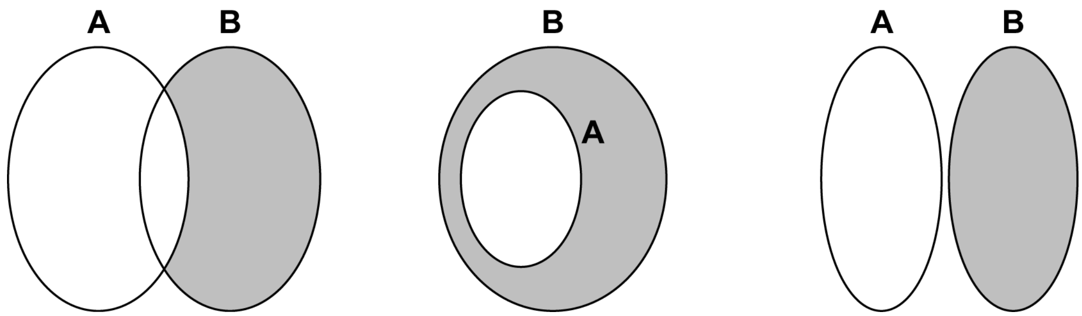
Dados dois conjuntos A e B, chama-se diferença entre os conjuntos A e B (A – B), o conjunto cujos elementos pertencem a A, mas não pertencem a B.

$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$

A – B



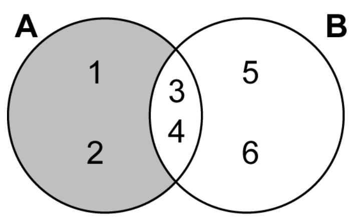
B – A




Exemplo:

Sejam A = {1, 2, 3, 4} e B = {3, 4, 5, 6}, determine A – B.

A – B = {1, 2}




## Conjunto complementar

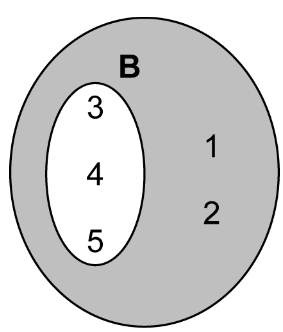
Dados dois conjuntos A e B, tais que $B \subset A$, chama-se complementar de B em relação a A o conjunto A – B, isto é, o conjunto dos elementos de A que não pertencem a B.

$C_A^B$ ou $\overline{B}$ (lê-se: complementar de B em relação a A.)

Exemplo:

Se A = {1, 2, 3, 4, 5} e B = {3, 4, 5 }

$C_A^B = A - B = \{1, 2\}$



## Número de elementos de um conjunto

Sejam A e B dois conjuntos finitos, sendo n(A) e n(B) o número de elementos de A e B, respectivamente. Sejam $n(A \cup B)$ o número de elementos da união desses conjuntos $(A \cup B)$ e $n(A \cap B)$ o número de elementos da interseção $(A \cap B)$. Demonstra-se que:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

Repare que, se $A \cap B = \varnothing$, o número de elementos da união dos conjuntos A e B será igual ao número de elementos do conjunto A somado ao número de elementos do conjunto B, pois, nesse caso, os elementos da interseção dos dois conjuntos não seriam contados duas vezes. Assim,

Se $A \cap B = \varnothing$, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

## *Atividade 11*

***Atende ao objetivo 7***

Foi desenvolvida uma pesquisa em uma academia de ginástica. Para ajudar a analisar dos dados, o gestor elaborou a seguinte tabela:

| Atividades | Nº de pessoas |
|---|---|
| Alongamento | 109 |
| Hidroginástica | 203 |
| Musculação | 162 |
| Alongamento e hidroginástica | 25 |
| Alongamento e musculação | 28 |
| Hidroginástica e musculação | 41 |
| As três atividades | 5 |
| Outras atividades | 115 |

Considerando que a pesquisa envolveu 500 pessoas, responda às seguintes perguntas:

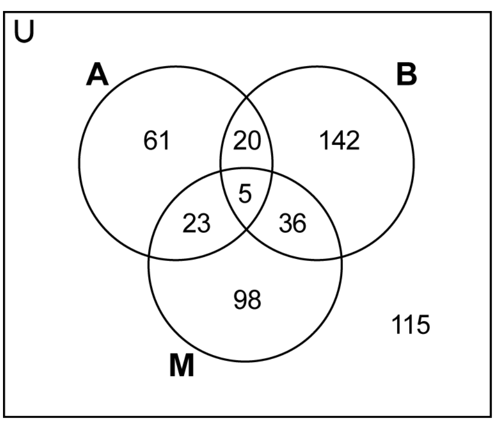
a) Quantas pessoas estão matriculadas apenas em alongamento?

b) Considerando o total de pessoas envolvidas na pesquisa, qual o percentual de pessoas matriculadas em alongamento ou musculação?

### *Resposta comentada*

A forma mais simples para resolver esta questão é construir o diagrama de Venn que representa a situação. Tem-se 3 atividades principais: alongamento (A), hidroginástica (H) e musculação (M), sendo que algumas pessoas fazem mais de uma atividade e sendo que 5 pessoas fazem as 3 atividades.

O diagrama deve ser preenchido a partir das interseções, começando-se pela interseção dos 3 conjuntos. A seguir, preenchem-se as interseções de cada conjunto com apenas um dos demais, lembrando-se de diminuir do total informado o número de pessoas que praticam as 3 atividades, já que estas pessoas já foram alocadas na interseção dos 3 conjuntos. Por exemplo, considerando-se as pessoas que fazem alongamento e hidroginástica (25 pessoas), esse número inclui as 5 que praticam as 3 atividades.



Assim, a interseção entre alongamento e hidroginástica terá 5 pessoas na interseção das 3 atividades e 20 pessoas na interseção apenas de alongamento e hidroginástica, totalizando as 25 pessoas mencionadas na tabela. O mesmo raciocínio deve ser aplicado às interseções dos demais conjuntos.

Finalmente, para definir o número de pessoas que pratica apenas uma das atividades, deve-se diminuir do valor mencionado na tabela todos os valores pertencentes ao conjunto em questão. Por exemplo, a tabela informa que o conjunto A (alongamento) possui 109 pessoas. Como 20 fazem alongamento e hidroginástica; 23 fazem alongamento e musculação e 5 fazem as 3 atividades, temos um total de 48 pessoas. Subtraindo-se 48 de 109, descobrimos que 61 pessoas fazem apenas alongamento, o que responde ao primeiro item da questão.

Para responder ao segundo item da questão, precisamos nos lembrar de que, usar o conectivo significa dizer que tanto faz qual das duas atividades é realizada, isto é, aceitaremos se fizer uma ou ambas as atividades. Assim, para sabermos quantas pessoas fazem alongamento ou musculação, devemos somar 61 + 20 + 5 + 23 + 98 + 36 = 243. Para encontrar o percentual que esse número de pessoas representa, basta dividir esse número pelo total de entrevistados, 500, achando 48,6%.

## *Atividade 12*

***Atende ao objetivo 7***

A tabela a seguir expressa o número de cursos oferecidos em uma faculdade, por turno.

| Turno | Número de cursos |
|---|---|
| Matutino | 10 |
| Vespertino | 9 |
| Noturno | 6 |
| Matutino e vespertino | 5 |
| Matutino e noturno | 4 |
| Vespertino e noturno | 4 |
| Matutino, vespertino e noturno | 3 |

Considerando os dados da tabela, responda:

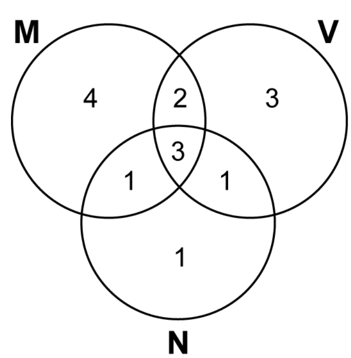
a) Qual é o número total de cursos oferecidos por esta instituição?

b) Qual é o número de cursos apenas vespertinos e noturnos?

### *Resposta comentada*

Mais uma vez, você deve construir o diagrama de Venn que represente a questão. Há 3 horários principais: matutino (M), vespertino (V) e noturno (N), sendo que alguns cursos são oferecidos em mais de um turno.

O diagrama de Veen a seguir representa a questão. Para construí-lo, precisamos nos lembrar de que no turno matutino, por exemplo, há 10 cursos, sendo 3 deles matutinos, vespertinos e noturnos; assim, os cursos apenas matutinos e vespertinos serão 5 – 3 = 2 e os cursos apenas matutinos e noturnos serão 4 – 3 = 1. Raciocínio semelhante pode ser seguido para os turnos vespertino e noturno.




No item (a), o número total de cursos matutinos é 10, incluindo os que também são vespertinos e os que também são noturnos; o mesmo acontece com os cursos noturnos, que somam 6, e com os cursos vespertinos, que totalizam 9. Assim, para saber o número total de cursos, basta fazer a soma desses cursos e subtrair sua interseção: 10 + 9 + 6 = 25. Agora precisamos subtrair as interseções, para que elas não sejam computadas mais de uma vez. Assim, iremos subtrair:

- 2 (como ele é a interseção de M e V, foi contado em ambos os conjuntos; como só deveria ter sido contado uma vez, deve-se subtraí-lo);
- 1 (ele é a interseção de M e N; pelo mesmo motivo anterior, deve-se subtraí-lo);
- 1 (ele é a interseção de N e V; pelo mesmo motivo anterior, deve-se subtraí-lo);
- 3 (ele é a interseção de M, N e V; logo, foi contado três vezes, e precisamos retirá-lo duas vezes).

Então:

$10 + 9 + 6 - (2 + 1 + 1 + (3 \times 2)) = 15.$

Para saber o número de cursos apenas vespertinos e noturnos, (b), devemos nos lembrar de que, dos 4 cursos vespertinos e noturnos, 3 são vespertinos, noturnos e também matutinos. Logo, precisamos fazer a subtração: 4 – 3 = 1, ou seja, somente 1 curso é apenas vespertino e noturno.

## *Atividade 13*

***Atende ao objetivo 7***

Em um vestibular, 80 alunos acertaram pelo menos uma questão entre as questões nº 1 e nº 2. Sabe-se que 70 deles acertaram a questão nº 1, e 50 acertaram a questão nº 2. Qual é o número de alunos que acertaram ambas as questões?

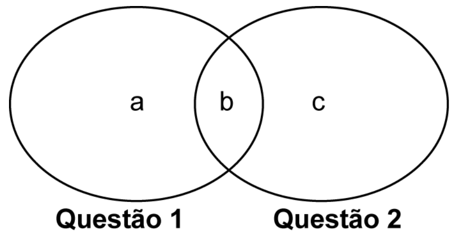
### *Resposta comentada*

Para resolver este problema, podemos montar o seguinte sistema:

$a + b + c = 8$

$a + b = 70$

$b + c = 50$




Resolvendo o sistema, encontraremos: a = 30, b = 40 e c = 10. Logo, a resposta à pergunta é: 40 alunos acertaram ambas as questões.

## Conjuntos Numéricos

Os principais conjuntos numéricos recebem as seguintes notações: N, Z, Q e R.

### Conjunto dos Números Naturais (N)

Primeiramente, vamos estudar o Conjunto dos Números Naturais (N). Esse conjunto foi criado com o objetivo de fazer contagens.

$$N = \{ 0, 1, 2, 3, ... \}$$

O asterisco é colocado acima da letra que representa o conjunto, para indicar a exclusão do zero, isto é, para representar o mesmo conjunto, só que sem o zero.

$$N^* = \{ 1, 2, 3, ... \}$$

### Conjunto dos Números Inteiros (Z)

A operação de subtração no conjunto dos números naturais só está definida para o caso em que o minuendo é maior ou igual ao subtraendo.

Por exemplo, se fizermos 10 – 3, encontraremos 7 como resposta, que é um número natural; agora, se fizermos 3 – 10, não encontraremos um número natural. Assim surgiu o Conjunto dos Números Inteiros (Z), formado pelo conjunto dos números naturais e pelo seu simétrico, variando de $-\infty$ até $\infty$:

$$Z = \{ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... \}$$

## Você sabia?

O conjunto dos números inteiros tem como símbolo a letra Z. Esse símbolo vem da palavra, em alemão, *Zahl* (que significa número). Apareceu pela primeira vez no livro Algèbre, de Bourbaki.

Podemos escrever o conjunto dos números inteiros considerando apenas seus elementos positivos (nesse caso, temos o próprio conjunto N), cujo símbolo é Z+ ; ou apenas seus elementos negativos, Z– .

$$Z+ = \{ 0, 1, 2, 3, ... \}$$

$$Z- = \{ ..., -3, -2, -1, 0 \}$$

## Conjunto dos Números Racionais (Q)

Nem sempre a operação de divisão entre dois números inteiros tem como resultado um número inteiro. Assim surgiu o Conjunto dos Números Racionais (Q), que é composto pelos números que podem ser expressos na forma a/b, em que a e b são inteiros quaisquer, com b diferente de zero (na Matemática, não existe divisão por zero).

$$Q = \{ \frac{a}{b} \mid a \in Z \text{ e } b \in Z^* \}$$

## Você sabia?

Os números que não podem ser expressos na forma a/b, com a e b inteiros e b diferente de zero, chamam-se irracionais.

São compostos por dízimas infinitas não periódicas.

Ex.:

$$\pi = 3{,}141592654...$$
$$\sqrt{3} = 1{,}73205...$$

Os números racionais podem ser escritos na forma decimal:

**Decimais exatos:**

5/1 = 5 ½ = 0,5 47/1000 = 0,047

**Decimais com infinitas casas periódicas:**

1/3 = 0,333... = 0,3 (período 3)

2/7 = 0,285714285714... (período 285714)

Quando o decimal é exato, pode-se transformá-lo em uma fração cujo numerador é o numeral decimal sem a vírgula, e cujo denominador é o algarismo 1 seguido de tantos zeros quantas forem as casas decimais do numeral dado.

Exemplos:

0,87 = 87/100

2,686 = 2686/1000

63,4679 = 634679/10000

Quando o decimal é uma dízima periódica, deve-se procurar sua geratriz. Os exemplos abaixo ilustram a busca da geratriz de uma dízima:

Exemplo 1: 0,7777....

$$\left.\begin{aligned} x &= 0{,}7777... \\ 10\,x &= 7{,}7777... \end{aligned}\right\} \Rightarrow 10\,x - x = 7 \Rightarrow x = 7/9$$

Logo, 0,7777... = 7/9

De outra forma: no numerador, colocamos o 7 (dízima) e, no denominador, 9, que representa a repetição de apenas um número, o 7.

Exemplo 2: 6,4343...

$$\left.\begin{aligned} x &= 6{,}4343... \\ 100\,x &= 643{,}4343... \end{aligned}\right\} \Rightarrow 100\,x - x = 637 \Rightarrow x = 637/99$$

Logo, 6,4343... = 637/99

De outra forma, esse número é composto pelo inteiro 6 e pela dízima 0,434343...; logo, devo fazer 6 inteiros somados a 43/99, pois, como a dízima é formada por 2 algarismos, devo utilizar dois 9. Assim, se fizermos a soma, encontraremos 637/99.

Exemplo 3: 2,57919191...

$$\left.\begin{aligned} x &= 2{,}57919191... \\ 100\,x &= 257{,}919191... \\ 10000\,x &= 25791{,}919191... \end{aligned}\right\} \Rightarrow 10000\,x - 100\,x = 25534 \Rightarrow x = 25534/9900$$

Logo, 2,57919191... = 25534/9900

## Conjunto dos números reais (R)

O conjunto dos números reais é formado pela união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais.

Os reais racionais, quando expressos na forma decimal, ou são decimais exatos ou têm infinitas casas, porém, periódicas.

Os reais irracionais, representados aproximadamente na forma decimal, têm infinitas casas decimais e não periódicas.

Todo número natural é inteiro, ou seja, N é um subconjunto de Z. Em outras palavras:

$$N \subset Z$$

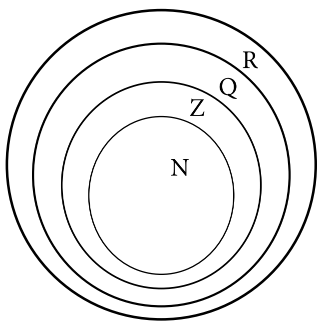
O conjunto dos números racionais é formado pelo conjunto dos inteiros e pelas frações resultantes da divisão inexata de dois números inteiros. Logo, Z é um subconjunto de Q. Em outras palavras:

$$Z \subset Q$$

Por sua vez, o conjunto dos números racionais Q é um subconjunto de R. Em outras palavras:

$$Q \subset R$$

O diagrama de Venn permite uma melhor visualização da relação existente entre os conjuntos numéricos:




$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

## A reta real

Os números reais são representados graficamente considerando a correspondência existente entre os pontos de uma reta e os números reais. Assim, a cada ponto da reta corresponde um e um só número real, e cada número real é correspondente de um único ponto. Por outro lado, assim como entre dois pontos de uma reta há infinitos pontos, também entre dois números reais quaisquer existem infinitos números reais.


Quando trabalhamos com intervalos abertos, o(s) extremo(s) aberto(s) não está(ão) incluído(s) no intervalo. No caso de intervalos fechados, o(s) extremo(s) fechado(s) está(ão) incluído(s) no intervalo.

## Intervalos Numéricos

Considerando dois números reais *a* e *b*, sendo *a* < *b*, podemos definir alguns subconjuntos de I, chamados intervalos numéricos de extremos *a* e *b*:

1. intervalo aberto de extremos *a* e *b*:

$] a, b [ = \{ x \in I \mid a < x < b \}$


Nesse intervalo, nenhum dos extremos está incluído, ou seja, os extremos *a* e *b* não pertencem ao intervalo I.

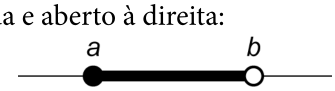
2. intervalo fechado de extremos *a* e *b*:

$[ a, b ] = \{ x \in I \mid a \leq x \leq b \}$


Nesse intervalo, os dois extremos estão incluídos, ou seja, os extremos *a* e *b* pertencem ao intervalo I.

3. intervalo fechado à esquerda e aberto à direita:

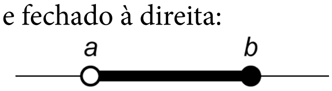
$[ a, b [ = \{ x \in I \mid a \leq x < b \}$




Nesse intervalo, apenas o extremo *a* está incluído, ou seja, o extremo *a* pertence ao intervalo I e o extremo *b* não pertence ao intervalo I.

4. intervalo aberto à esquerda e fechado à direita:

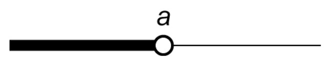
$] a, b ] = \{ x \in I \mid a < x \leq b \}$



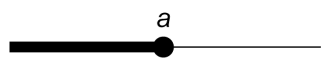

Nesse intervalo, apenas o extremo *b* está incluído, ou seja, o extremo *b* pertence ao intervalo I e o extremo *a* não pertence ao intervalo I.

Os números reais *a* e *b* são denominados, respectivamente, extremo inferior e extremo superior do intervalo.

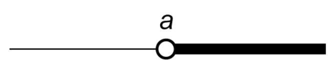
Pode-se, ainda, considerar intervalos com extremos não definidos:

1. $(-\infty, a\,[\; = \{\, x \in I \mid x < a \,\}$ 

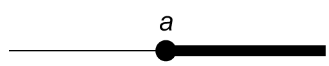

Ao escrever um conjunto numérico, devemos descrever o que acontece nesse conjunto da esquerda para a direita. Assim, esse intervalo inclui todos os elementos que vêm de -¥ (menos infinito) até o extremo a, sem incluí-lo.

2. $(-\infty, a\,] = \{\, x \in I \mid x \leq a \,\}$ 


Esse intervalo é similar ao anterior, mas inclui o extremo a, ou seja, inclui todos os elementos que vêm de -¥ (menos infinito) até o extremo a, incluindo a.

3. $]\, a, \infty\,) = \{\, x \in I \mid x > a \,\}$ 


Esse intervalo inicia-se no extremo *a*, sem incluí-lo, e segue até o infinito.

4. $[\, a, \infty\,) = \{\, x \in I \mid x \geq a \,\}$ 

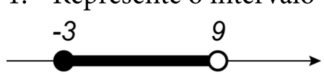

Esse intervalo inicia-se no extremo *a,* incluindo *a,* e segue até o infinito.

5. $(\,-\infty, \infty\,) = I$ 

Esse intervalo é o próprio conjunto dos números reais.

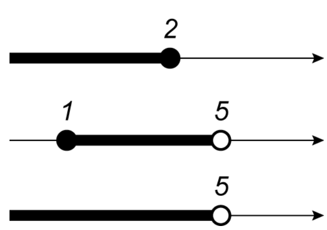
Exemplos:

1. Represente o intervalo [-3, 9[ na reta real:



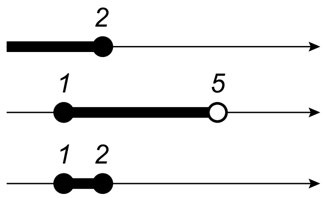

2. Dados A = $(-\infty, 2]$ e B = $[1, 5[$, determine:

(a) $A \cup B$




$A \cup B = (-\infty, 5[\; = \{x \in R \,/\, x < 5\}$

(b) $A \cap B$




$A \cap B = [1, 2] = \{x \in R \ / \ 1 \leq x \leq 2\}$

## Atividade 14

*Atende ao objetivo 8*

Represente, na reta real, os seguintes intervalos:

(a) $]-2, 4]$

(b) $[3, 7[$

(c) $(-\infty, 5]$

(d) $\{x \in R \ / \ -2 < x \leq 8\}$

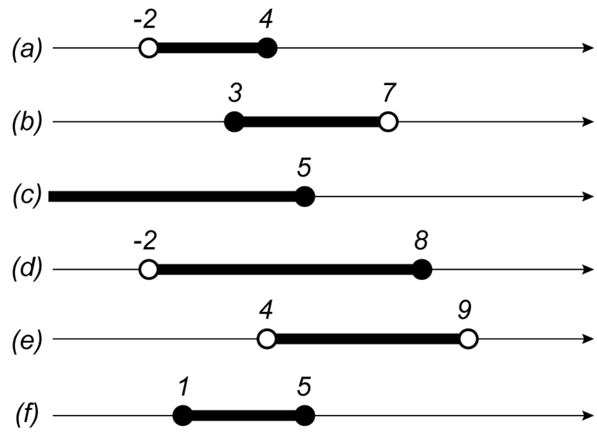
(e) $]4, 9[$

(f) $[1, 7]$

### *Resposta comentada*

A representação de um intervalo na reta real requer o cuidado de identificar se os valores iniciais e finais do intervalo estão ou não incluídos nele.

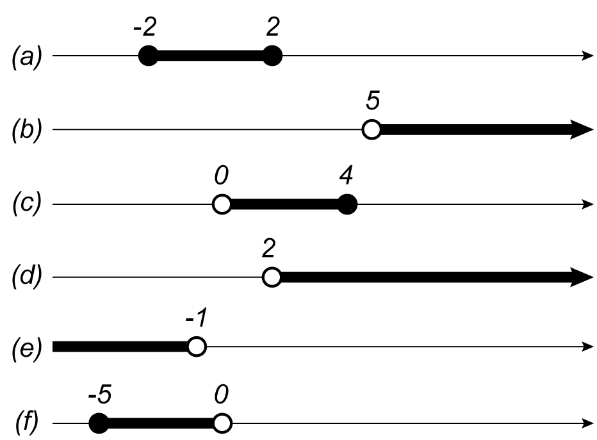
No item (d), pode-se perceber que o número -2 não está incluído no intervalo porque o sinal é menor (<) e não menor ou igual (≤). Já o 8 está incluído no intervalo porque o sinal usado é (≤).




## Atividade final

***Atende ao objetivo 9***

Escreva a notação para os seguintes intervalos:



### *Resposta comentada*

As notações dos intervalos devem sempre ser escritas da esquerda para a direita. Assim, no item (e), ao representar os valores reais menores do que –1, devemos escrever o intervalo iniciando em $-\infty$ até o -1, sem incluí-lo.

a) $[-2, 2] = \{x \in R \,/\, -2 \leq x \leq 2\}$

b) $]5, \infty) = \{x \in R \,/\, x > 5\}$

c) $]0, 4] = \{x \in R \,/\, 0 < x \leq 4\}$

d) $[2, \infty) = \{x \in R \,/\, x \geq 2\}$

e) $(-\infty, -1[ = \{x \in R \,/\, x < -1\}$

f) $[-5, 0[ = \{x \in R \,/\, -5 \leq x < 0\}$

A representação gráfica de conjuntos numéricos é muito importante em Matemática, pois nos ajuda a visualizar melhor aquilo que estamos representando na forma simbólica. Além disso, esses conceitos serão muito úteis no futuro, quando estivermos estudando funções e aplicações. Assim, se ainda não estiver se sentindo seguro na realização das atividades desenvolvidas, resolva novamente as atividades propostas até desenvolver mais segurança.

## Resumo

Neste capítulo, abordamos conceitos importantes de teoria dos conjuntos e conjuntos numéricos, que você irá utilizar ao longo do curso.

Discutimos a construção e a relação entre conjuntos, que podem ser feitas entre elementos e conjunto – relação de pertinência ($\in$, $\notin$) –; ou entre conjuntos – nesse caso, utilizaremos os símbolos contém, está contido, não contém, não está contido ($\supset$, $\subset$, $\not\supset$, $\not\subset$), conforme o caso.

Lembramos ainda que os conjuntos podem ser representados por enumeração de seus elementos através da descrição de uma característica comum a todos os seus elementos ou por meio do Diagrama de Venn.

Abordamos também a identificação do conjunto vazio (quando não possui elementos), unitário (quando possui apenas um elemento), finito (quando conseguimos enumerar todos os seus elementos) ou infinito (quando não é possível enumerar todos os seus elementos). A identificação desses conjuntos facilita a compreensão de diferentes tópicos da Matemática.

Os conceitos abordados foram aplicados em problemas do dia a dia, a fim de facilitar a sua compreensão e destacar a aplicabilidade do tema. Finalmente, tratamos dos conjuntos numéricos e da sua representação na reta numérica.

A identificação e a representação dos conjuntos numéricos facilitarão a compreensão da construção de gráficos cartesianos, que serão tratados em capítulos futuros deste curso.

O quadro a seguir apresenta alguns símbolos e operações tratados neste capítulo.

| Símbolo | Significado | Símbolo | Significado | Operação | Significado |
|---|---|---|---|---|---|
| $\in$ | Pertence | $\Leftrightarrow$ | Se e somente se | A x B | Produto Cartesiano entre A e B |
| $\notin$ | Não pertence | $\forall$ | Para todo | $C_A^B$ ou $\overline{B}$ | Complementar de B com relação a A |
| $\subset$ | Está contido | $\varnothing$ | Conjunto vazio | A – B | Diferença entre A e B |
| $\not\subset$ | Não está contido | N | Conjunto dos números naturais | a < b | A menor que b |
| $\supset$ | Contém | Z | Conjunto dos números inteiros | $a \leq b$ | A menor ou igual a b |
| $\not\supset$ | Não contém | Q | Conjunto dos números racionais | a > b | A maior que b |
| $\exists$ | Existe | I | Conjunto dos números irracionais | $a \geq b$ | A maior ou igual a b |
| $\nexists$ | Não existe | R | Conjunto dos números reais | $a \wedge b$ | a e b |
| / | Tal que | $A \cup B$ | A união B | $a \vee b$ | a ou b |
| $\Rightarrow$ | Implica que | $A \cap B$ | A interseção B | $\infty$ | Infinito |

## Informações sobre a próxima aula

Na próxima aula, abordaremos potenciação e radiciação – tema fundamental para o bom desenvolvimento de quase todas as aplicações futuras. As atividades desenvolvidas o ajudarão a realizar tarefas como a simplificação de expressões aritméticas e algébricas. Então, aproveite bem cada atividade proposta!

## Leituras recomendadas

O *link* a seguir é muito interessante. Nele, você encontra diversos temas relacionados à Matemática básica, incluindo os abordados nesta aula e em algumas aulas que teremos mais adiante. É muito útil para relembrar conceitos, e propõe atividades para exercitar os conceitos tratados. Vale a visita: http://pt.wikibooks.org/wiki/Matem%C3%A1tica_elementar/Imprimir#nogo

# Aula 2

## Potências e raízes

*Eliane Ribeiro Pereira*
*Maria Cecília de Carvalho Chaves*

## Metas

Definir os conceitos de potenciação e radiciação. Operar com potenciação e radiciação. Verificar que uma operação é a inversa da outra.

## Objetivos

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. reconhecer e aplicar o conceito de potência de expoente inteiro e fracionário, com base sendo um número real;
2. aplicar as propriedades decorrentes da definição e efetuar operações de multiplicação e de divisão com potências de mesma base, potências de um produto ou de um quociente, e potência de outras potências;
3. determinar o significado do expoente zero;
4. reconhecer e aplicar o conceito de raiz de um número real;
5. escrever potências com expoentes fracionários por meio de uma raiz e vice-versa;
6. aplicar as propriedades da radiciação;
7. calcular expressões numéricas que envolvam as operações de potenciação e/ou radiciação;
8. racionalizar denominadores.

## Introdução

Vamos tratar de assuntos que já devem ser familiares a você: a potenciação e a radiciação. O domínio desses assuntos é fundamental no âmbito da matemática para um bom desenvolvimento de quase todas as aplicações futuras.

O objetivo principal desta aula é capacitar você na simplificação de expressões aritméticas e algébricas.

## Potenciação ou exponenciação

Podemos dizer que potenciação representa uma multiplicação de fatores iguais. A exponenciação, ou potenciação, é uma operação matemática, escrita como $a^n$, que envolve dois números: a base $a$ e o expoente $n$. Seja a um número real e $n$ um número natural, $n \neq 0$. A expressão $a^n$, denominada potência, representa o produto de $n$ fatores iguais ao número $a$.

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots a \ (n \text{ fatores iguais a } a)$$

Pode-se ler $a^n$ como $a$ elevado à n-ésima potência ou, simplesmente, $a$ elevado a $n$. Alguns expoentes têm nomes específicos: $a^2$ costuma ser lido como $a$ elevado ao quadrado, $a^3$ como $a$ elevado ao cubo e $a^4$ como $a$ elevado à quarta potência, e assim por diante.

Exemplo:

$$3^4 = 81$$

base = 3 (o valor do fator)

expoente = 4 (quantidade de vezes que o fator repete)

potência = 81 (resultado do produto)

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_Descartes

René Descartes, filósofo e matemático francês do século XVII, foi o idealizador da notação an para as potências que utilizamos até hoje.

Exemplos:

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$(-3)^4 = (-3)\ (-3)\ (-3)\ (-3) = 81$$

$$4^{-3} = (1/4)^3 = (1/4) \cdot (1/4) \cdot (1/4) = 1/64$$

$$6^1 = 6$$

$$(0,1)^4 = (0,1) \cdot (0,1) \cdot (0,1) \cdot (0,1) = 0,0001$$

$$10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100.000$$
$$10^{-2} = (1/10)^2 = (1/10) \cdot (1/10) = 1/100$$

$$(-8)^6 = (-8) \cdot (-8) \cdot (-8) \cdot (-8) \cdot (-8) \cdot (-8) = 262.144$$

$$(-8)^5 = (-8) \cdot (-8) \cdot (-8) \cdot (-8) \cdot (-8) = -32.768$$

Vamos ver algumas observações sobre potenciação:

1. A potência de expoente 1 é igual à base:

$$a^1 = a;\ 3^1 = 3$$

2. Toda potência de 1 é igual a 1:

$$1^2 = 1;\ 1^{100} = 1$$

3. Toda potência de expoente par é positiva:

$$(-3)^2 = 9;\ (1/2)^4 = 1/8;\ (-5)^4 = 625$$

4. Toda potência de expoente ímpar tem o sinal da base:

$$(-3)^3 = -27;\ (1/2)^5 = 1/32;\ (-7)^5 = -16.807$$

## *Atividade 1*

***Atende ao objetivo 1***

Escreva em forma de potência os seguintes produtos:

a) $5 \cdot 5 \cdot 5$

b) $(1/3) \cdot (1/3) \cdot (1/3) \cdot (1/3)$

c) 6

d) $0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0$

***Resposta comentada***

a) $5^3$ Aplicação da definição: o número 5 está sendo multiplicado por ele mesmo 3 vezes.

b) $(1/3)^4$ Aplicação da definição: o número 1/3 está sendo multiplicado por ele mesmo 4 vezes.

c) $6^1$ Aplicação da definição: o número 6 está sendo multiplicado por ele mesmo 1 vez.

d) $0^8$ Aplicação da definição: o número 0 está sendo multiplicado por ele mesmo 8 vezes.

$(-3)^4 \neq -3^4$, pois $81 \neq -81$. Por quê?

No membro à direita, a base é $-3$. Assim, $(-3)^4$ representa o produto de $-3$ por ele mesmo 4 vezes.

Por outro lado, $-3^4$ indica o simétrico de 3 elevado à quarta potência. Daí o valor dessa expressão ser $-81$.

## Propriedades da Potenciação

As propriedades da potenciação podem ser facilmente demonstradas a partir da definição de potenciação e das propriedades da multiplicação e divisão de números reais.

O conhecimento e o uso dessas propriedades facilitam o cálculo das operações. Seu uso é facultativo, mas normalmente traz benefícios.

Sejam $a$ e $b$ números reais e $m$ e $n$ números inteiros. Então, são verdadeiras as seguintes propriedades:

I) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Para multiplicarmos potências de mesma base, mantemos a base e somamos o expoente.

II) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

Para dividirmos potências de mesma base, mantemos a base e subtraímos o expoente.

Exemplos

$$5^3 \cdot 5^4 = 5^{3+4} = 5^7 = 78.125$$

$$6^6 \div 6^4 = 6^{6-4} = 6^2 = 36$$

$$(-3)^2 \cdot (-3)^3 = (-3)^{2+3} = (-3)^5 = -243$$

$$4^4/4^4 = 4^{4-4} = 4^0 = 1$$

$$2^5/2^7 = 2^{5-7} = 2^{-2}$$

III) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Para efetuarmos a potência de uma potência, devemos manter a base e multiplicar os expoentes.

IV) $(ab)^m = a^m \cdot b^m$

O produto de dois números elevado a um expoente é igual ao produto de cada um deles elevado a esse expoente.

Observações:

1. Se $a \neq 0$, então $a^0 = 1$, como pode ser compreendido pela análise do seguinte exemplo:

$$2^7/2^7 = 2^{7-7} = 2^0$$

$$2^7/2^7 = 1$$

2. $0^0$ é uma indeterminação matemática. Existem outras importantes indeterminações matemáticas, como 0/0 . No curso de Cálculo, você terá oportunidade de conhecer e entender melhor essas inderteminações.

3. Seja $a$ um número real não nulo e $n$ um número natural, $n \neq 0$. A expressão $a^{-n}$ representa o produto de n fatores iguais ao número $1/a$.

$$a^{-n} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a}\dots\frac{1}{a} = \left(\frac{1}{a}\right)^{n}\left(n \text{ fatores iguais a } \frac{1}{a}\right)$$

Observe que essa definição é consequência direta da propriedade II. O expoente negativo pode ser sempre interpretado como resultado de uma divisão de potências de mesma base na qual o quociente apresenta um expoente maior que o do dividendo.

Veja que não é permitido que a base seja zero. Você percebeu a razão?

Se fosse admitido que *a* fosse zero, estaria sendo realizada uma divisão por zero, e isso não está definido na matemática.

Exemplos:

$$(2^2)^3 = 2^{2\cdot 3} = 2^6 = 64$$

$$(3 \cdot 5)^3 = 3^3 \cdot 5^3 = 27 \cdot 125 = 3 \cdot 375$$

$$((0{,}2) \cdot (1{,}3))^0 = (0{,}2)^0 \cdot (1{,}3)^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$3^{-2} = (1/3)^2 = 1/9$$

Inúmeras são as aplicações matemáticas que fazem uso do cálculo de potências. Juros compostos é um tópico elementar e fundamental da Matemática Financeira, que utiliza a operação potenciação. Se você já ouviu falar, pode acessar o *link* a seguir e aprender um pouco sobre esse tópico: http://www.infoescola.com/matematica/juros-compostos/.

## Atividade 2

**Atende ao objetivo 2**

Transforme em uma única potência os seguintes produtos:

a) $8^6 \cdot 8 =$

b) $(-5)^8 \cdot (-5)^7 =$

c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{3} \cdot \left(\frac{2}{5}\right) =$

*d)* $x^3 \cdot x^6 \cdot x^4 =$

### Resposta comentada

A resolução dessas questões envolve aplicações da observação 1 e da propriedade I.

a) $8^7$, pois $8^6 \cdot 8 = 8^6 \cdot 8^1 = 8^{6+1} = 8^7$

b) $(-5)^{15}$, pois $(-5)^8 \cdot (-5)^7 = (-5)^{8+7} =$

c) $(2/5)^2$, pois $(2/5)^{-2} \cdot (2/5)^3 \cdot (2/5)^{1} = (2/5)^{-2+3+1}$

*d)* $x^{13}$, pois $x^3 \cdot x^6 \cdot x^4 = x^{3+6+4}$

## Atividade 3

**Atende aos objetivos 2 e 3**

Transforme em uma única potência os seguintes quocientes:

a) $8^7 \div 8^{-7} =$

b) $3^4 \div 3^0 =$

c) $(2,3)^8 \div (2,3)^{15} =$

d) $(2/5)^{-2} \div (2/5)^{-2}$

### Resposta comentada

A resolução dessas questões envolve o uso da propriedade II.

a) $8^{14}$, pois $8^7 \div 8^{-7} = 8^{7-(-7)} = 8^{7+7}$

b) Dois raciocínios podem ser aplicados:

Aplicar conceito expoente zero: $3^4 \div 3^0 = 3^4 \div 1 = 3^4$ (1 é o elemento neutro da divisão);

ou aplicar a propriedade de divisão de potências de mesma base. Teríamos:

$3^4 \div 3^0 = 3^{4-0} = 3^4$

c) $(2,3)^{-7}$, pois $(2,3)^8 \div (2,3)^{15} = (2,3)^{8-15}$

d) 1 pois $(2/5)^{-2} \div (2/5)^{-2} = (2/5)^{-2-(-2)} = (2/5)^{-2+2} = (2/5)^0$

Uma outra linha de raciocínio é observar que se está pedindo a divisão de um número diferente de zero por ele próprio, que sempre resulta em 1.

## *Atividade 4*

***Atende aos objetivos 2 e 7***

Transforme em uma única potência:

a) $(6^6)^{-2} =$

b) $(2/3)^{4^3} =$

c) $3 \cdot (3^{1/2} \cdot 5^2)^{-2} =$

d) $(5^7 \cdot 5^{-8}) \div (1/5)^{-3} =$

e) $(3^5 \div 3^2) \div 3^3 =$

***Resposta comentada***

a) $6^{6 \cdot (-2)} = 6^{-12}$

b) $(2/3)^{4^3} = (2/3)^{64}$

c) A solução mais simples faz uso da aplicação das propriedades IV e III. Também é possível resolver calculando primeiro o resultado do produto do interior dos parênteses, depois a potência e, só então, o produto. Contudo, é mais trabalhoso.

$$3 \cdot (3^{1/2} \cdot 5^2)^{-2} = 3 \cdot (3^{1/2})^{-2} \cdot (5^2)^{-2} = 3 \cdot 3^{(1/2)(-2)} \cdot 5^{2 \cdot (-2)} = 3 \cdot 3^{-1} \cdot 5^{-4} =$$

$$3 \cdot 1/3 \cdot (1/5)^4 = 1/54 = 1/652$$

d) $(5^7 \cdot 5^{-8}) \div (1/5)^{-3} = (5^{7-8}) \div (5^{-1})^{-3} = 5^{-1} \cdot 5^3 = 5^{-1+3} = 5^2$

e) $(3^5 \div 3^2) \div 3^3 = 3^{5-2} \div 3^3 = 3^3 \div 3^3 = 3^3 = 1$

## *Atividade 5*

***Atende aos objetivos 2 e 7***

Calcule:

$$\frac{2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}}{2^{n+3} + 2^{n+4}}$$

***Resposta comentada***

Nesta questão, não é possível calcularmos o numerador e o denominador, dado que n é desconhecido (expressão literal). Portanto, para resolvê-la, é preciso colocar em evidência o fator comum para, então, podermos simplificar a expressão.

$$\frac{2^n(1+2^1+2^2)}{2^{n+3}(1+2^1)} = \frac{7 \cdot 2^n}{3 \cdot 2^{n+3}} = \frac{7 \cdot 2^n}{3 \cdot 8 \cdot 2^n} = \frac{7}{24}$$

## Radiciação

A radiciação nada mais é que uma operação inversa da potenciação, em que, dado o valor da potência e do expoente, deseja-se conhecer a base.

Exemplo:

Qual é o número que elevado ao cubo resulta em 27?

Em termos simbólicos, teríamos:

$x^3 = 27$

Por meio de simples cálculos, é fácil chegar à resposta, que nesse caso é o número 3.

Para responder a questões similares a essa, criou-se a operação radiciação e o operador raiz.

Seja $a$ um número real e $n$ um número natural não nulo. Então: se $a \geq 0$, a raiz $n$-enésima de $a$ é o número real positivo que elevado a $n$ resulta em $a$. Para representar essa operação, usa-se a notação:

$$\sqrt[n]{a} \text{ ou } a^{1/n}$$

Lê-se $\sqrt[n]{a}$ como raiz $n$-ésima de $a$, em que $a$ é denominado radicando e $n$, índice.

Quando o índice é o número 2, não é usual escrevê-lo. Isto é:

$$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$$

Algumas raízes possuem denominações específicas: $\sqrt{a}$ costuma ser lido como raiz quadrada de $a$, $\sqrt[3]{a}$ como raiz cúbica de $a$.

Exemplos

$\sqrt[3]{8} = 2$, pois $2^3 = 8$

$\sqrt[4]{81} = 3$, pois $3^4 = 81$

$\sqrt{0} = 0$, pois $0^2 = 0$

$\sqrt{64} = 8$

$-\sqrt{64} = -8$

$\sqrt[4]{625} = 5$

$-\sqrt[4]{625} = -5$

Você pode agora estar se perguntando a razão de $\sqrt{9} = 3$ em vez de $\sqrt{9} = -3$. Será que ambas as respostas estão corretas?

Não! Embora $3^2 = (-3)^2 = 9$, o resultado da operação é 3. O resultado de toda e qualquer operação matemática deve ser único. Daí convencionou-se que a raiz de índice par sempre retorna o valor não negativo.

Se $a < 0$, então a raiz $n$-enésima de $a$ é o número real negativo que elevado a $n$ resulta em $a$.

Exemplos

$\sqrt[5]{-32} = -2$, pois $(-2)^5 = -32$

$\sqrt[3]{-27} = -3$, pois $(-3)^3 = -27$

Observe que não faz sentido a seguinte expressão:

$\sqrt[6]{-64}$

Nenhum número, ao ser elevado a um expoente par, resulta num valor negativo, conforme observado no nosso estudo de potências.

Também devemos destacar que essa operação não está definida para índices que não sejam naturais. Por exemplo, a expressão $\sqrt[-2]{16}$ não está definida.

## Atividade 6

*Atende ao objetivo 4*

A área de um terreno quadrado é de 196 metros quadrados. Qual é a medida do lado desse terreno?

### *Resposta comentada*

Sabe-se que a área de um quadrado é dada por $l^2$, em que $l$ = lado.

$l^2 = 196$

Isso corresponde à seguinte pergunta: Qual é o número que elevado ao quadrado resulta em 196?

A operação matemática que representa essa operação é a radiciação.

$1 = \sqrt{196} = \sqrt{14^2} = 14$

## Atividade 7

***Atende ao objetivo 4***

Calcule:

a) $\sqrt{36}$

b) $\sqrt[4]{81}$

c) $\sqrt[5]{-32}$

d) $\sqrt[4]{-10.000}$

### *Resposta comentada*

a) 6, pois $6^2 = 36$

b) 3, pois $3^4 = 81$

c) –2, pois $(-2)^5 = -32$

d) Não existe. Nenhum número elevado a uma potência par pode ser negativo.

Uma potência com expoente fracionário pode ser transformada numa raiz cujo radicando é a base, o índice é o denominador do expoente, e o numerador, o expoente do radicando.

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Exemplos:

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[5]{7^3} = 7^{\frac{3}{5}}$$

$$\sqrt{5^8} = 5^{\frac{8}{2}} = 5^4$$

Vamos agora estudar as propriedades da radiciação. Devemos observar que, como toda raiz pode ser escrita na forma de potência, as propriedades a seguir são equivalentes às da potenciação.

## Propriedades da Radiciação

I. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$ ou $\sqrt[m]{a} / \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a/b},\ b \neq 0$

Para multiplicarmos (ou dividirmos) radicais de mesmo índice, devemos multiplicar (dividir) os radicandos e manter o índice.

II. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

Para efetuarmos a radiciação de radicais, multiplicam-se os índices e mantém-se o radicando.

III. $(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$

A potência de um radical é obtida elevando-se o radicando ao expoente indicado e conservando-se o índice.

Exemplos:

$$\sqrt[3]{27}\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^4} = \sqrt[3]{3^3 3^1} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3}$$

$$\sqrt[4]{5}\sqrt[4]{125} = \sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = 5$$

$$\sqrt{6} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{30}$$

$$\sqrt{50} \div \sqrt{2} = \sqrt{\frac{50}{2}} = \sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{7}} = \sqrt[12]{7}$$

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = \sqrt[8]{2}$$

$$(\sqrt[4]{81})^2 = \sqrt[4]{81^2} = \sqrt[4]{(3^4)^2} = \sqrt[4]{3^8} = 3^{\frac{8}{4}} = 3^2 = 9$$

ou

$$(\sqrt[4]{81})^2 = \sqrt[4]{81^2} = \sqrt[4]{(3^4)^2} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 3^4} = \sqrt[4]{3^4} \cdot \sqrt[4]{3^4} = 3 \cdot 3 = 9$$

O cálculo do valor de uma raiz, de modo geral, é menos trivial que o da potenciação. Por isso, é comum deixarmos a resposta final com o símbolo da operação. Veja o seguinte exemplo:

$$\sqrt{50}-\sqrt{98=?}$$

Inicialmente, deve-se fatorar o radicando para que seja mais simples a aplicação das propriedades apresentadas.

$$\sqrt{2\cdot 5^2}-\sqrt{2\cdot 7^2}$$

$$\sqrt{2\cdot 5^2}-\sqrt{2\cdot 7^2}$$

Aplicando a propriedade 1:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{5^2}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{7^2}$$

Daí temos que:

$$5\sqrt{2}-7\sqrt{2}=-2\sqrt{2}$$

Outro exemplo:

$$\sqrt{27}+\sqrt[3]{625}=\sqrt{3^3}+\sqrt[3]{5^4}=\sqrt{3\cdot 3^2}+\sqrt[3]{5\cdot 5^3}=3\cdot\sqrt{3}+5\cdot\sqrt[3]{5}$$

Como os radicais têm índices diferentes, podemos finalizar a resposta neste momento.

## Atividade 8

***Atende aos objetivos 6 e 7***

Fatore o radicando e simplifique os radicais:

a) $\sqrt{99}$

b) $\sqrt{200}$

c) $\sqrt[6]{x^{10}}$

d) $\sqrt[10]{x^6}$

e) $\sqrt{98} - \sqrt{18} - 2\sqrt{32}$

f) $5\sqrt{180} + \sqrt{245} - 17\sqrt{5}$

### *Resposta comentada*

a) $\sqrt{3^2 \cdot 11} = 3\sqrt{11}$

b) $\sqrt{2 \cdot 10^2} = 10\sqrt{2}$

c) $\sqrt[6]{x^6 x^4} = x\sqrt[6]{x^4} = x \cdot x^{\frac{4}{6}} = x \cdot x^{\frac{2}{3}} = x\sqrt[3]{x^2}$

d) $x^{\frac{6}{10}} = x^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{x^3}$

e) $\sqrt{2 \cdot 7^2} - \sqrt{2 \cdot 3^2} - 2\sqrt{2^5} = 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 2 \cdot 2^2\sqrt{2} =$

$7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 8\sqrt{2} = -4\sqrt{2}$

f) $5\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} + \sqrt{5 \cdot 7^2} - 17\sqrt{5} = 30\sqrt{5} + 7\sqrt{5} - 17\sqrt{5} = 20\sqrt{5}$

## *Atividade 9*

*Atende ao objetivo 5*

Escreva na forma de potência e simplifique o resultado final:

a) $(\sqrt{7})^3$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{27}}$

c) $\dfrac{\sqrt[5]{20}}{\sqrt[5]{16}}$

### *Resposta comentada*

a) $7^{\frac{3}{2}} = 7^{1+\frac{1}{2}} = 7 \;.\; 7^{\frac{1}{2}} = 7\sqrt{7}$

b) $\left(\dfrac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\dfrac{1}{3^3}\right)^{\frac{1}{3}} = (3^{-3})^{\frac{1}{3}} = 3^{-1} = \dfrac{1}{3}$

c) $\sqrt[5]{\dfrac{20}{16}} = \sqrt[5]{\dfrac{5}{4}} = \left(\dfrac{5}{4}\right)^{\frac{1}{5}}$

Sempre devemos dar o resultado na sua forma mais simples.

No item *a*, a resposta $7^{3/2}$ não é adequada, pois o expoente corresponde a uma fração imprópria. A resposta $7 \cdot 7^{1/2}$ estaria simplificada, mas a representação de $7^{1/2}$ na forma de raiz é a padrão.

## Racionalização

É a operação que transforma uma fração com raiz no denominador em sua equivalente sem raiz no denominador. Por exemplo:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Como podemos reescrevê-la de modo que não ocorra raiz no denominador?

A resposta é simples e baseia-se na aplicação das propriedades apresentadas. Vejamos:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Observe que, quando multiplicamos o numerador e o denominador da fração original por $\sqrt{2}$ obtemos uma fração equivalente à original, isto é, não alteramos o número. A escolha do fator $\sqrt{2}$ justifica-se por permitir que o expoente do radicando ficasse igual ao índice e, portanto, podendo ser simplificado.

E se fosse $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$?

Simples! Para que seja possível eliminarmos o radical do denominador, é preciso igualar o expoente do radicando ao índice. Assim, o fator desejado é $\sqrt[4]{3^3}$ . Simplificando, temos:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \cdot \frac{\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3^3}} = \frac{\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3^4}} = \frac{\sqrt[4]{3^3}}{3}$$

## Por que racionalizar?

O costume de racionalizar os denominadores das frações é simplesmente uma questão operacional; a racionalização facilita os cálculos manuais. Atualmente, não há mais necessidade de racionalizar o denominador, em função da facilidade computacional disponível, como as calculadoras. Contudo, esse hábito está de tal modo incrustado nos indivíduos que dificilmente encontramos um livro que não traga a resposta racionalizada; logo, o procedimento não pode ser ignorado, e os alunos devem aprendê-lo.

## *Atividade 10*

***Atende ao objetivo 8***

Racionalize os denominadores:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{8}}$

b) $\dfrac{6}{\sqrt{145}}$

c) $\dfrac{3}{\sqrt[4]{27}}$

### *Resposta comentada*

a) $\dfrac{3}{2\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

b) $\dfrac{6}{29\sqrt{5}} = \dfrac{6\sqrt{5}}{29\sqrt{5}\sqrt{5}} = \dfrac{6\sqrt{5}}{145}$

c) $\dfrac{3}{\sqrt[4]{3^3}} = \dfrac{3\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3^3}\,\sqrt[4]{3}} = \dfrac{3\sqrt[4]{3}}{3} = \sqrt[4]{3}$

Chegou o momento de você verificar o seu aprendizado acerca das potências e raízes. Nosso objetivo é exercitar sua capacidade de representar números e operações aritméticas em termos de potências e aplicar as propriedades das potências e raízes. A próxima atividade mescla os objetivos apresentados.

## *Atividade 11*

***Atende ao objetivo 7***

1. Calcule:

a) $\dfrac{(-5)^2 - 4^2 + (1/5)^0}{3^{-2} + 1}$

b) $(\sqrt{2}+1)^2$

2. Será que $\sqrt{16}+\sqrt{25}=\sqrt{16+25}$ ? Justifique.

3. $4^{3^2} = (4^3)^2$. Verdadeiro ou falso? Justifique.

### *Respostas comentadas*

1.

a) Nesta questão, você deve mostrar domínio no uso das propriedades da potenciação, com o expoente fracionário e zero. Deve ficar atento à execução das operações na ordem correta.

$$\frac{25-16+1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2+1} = \frac{10}{\frac{1}{9}+1} = \frac{10}{\frac{1+9}{9}} = \frac{10}{\frac{10}{9}} = 10 \cdot \frac{9}{10} = 9$$

b)

$$(\sqrt{2}+1)\cdot(\sqrt{2}+1)=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot 1+1\cdot\sqrt{2}+1\cdot 1=\sqrt{2^2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}+1=$$

$$2+2\sqrt{2}+1=2\sqrt{2}+3$$

2. Falso.

$$\sqrt{16}+\sqrt{25}=4+5=9$$

Por outro lado,

$$\sqrt{16+25}=\sqrt{41}$$

3.

$4^{3^2}$: base 4, expoente $3^2$. Assim, primeiro deve-se calcular o expoente ($3^2$), para depois a potência.

$4^{3^2} = 4^9 = 262 \cdot 144$

Por outro lado, na expressão $(4^3)^2$, a base é $4^3$ e o expoente é 2. Há duas alternativas para o cálculo dessa potência: pode-se usar a propriedade $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ ou calcularmos $4^3$ e, em seguida, elevarmos o resultado ao quadrado. Veja:

$(4^3)^2 = 4^{3 \cdot 2} = 4^6 = 4096$

$(4^3)^2 = 64^2 = 4096$

## Resumo

Nesta aula, você foi apresentado às potências e raízes. Você aprendeu os conceitos de potenciação e radiciação, como calcular expressões numéricas que envolvam as operações de potenciação e radiciação e verificar que as duas operações são inversas entre si. A seguir, listamos os principais conceitos abordados:

**Potências**

Seja $a$ um número real e $n$ um número natural, $n \neq 0$. A expressão $a^n$, denominada potência, representa o produto de $n$ fatores iguais ao número $a$.

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots a \ (n \text{ fatores iguais a } a)$$

A expressão $a^{-n}$, denominada potência, representa o produto de $n$ fatores iguais ao número $1/a$.

$$a^{-n} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a}\ldots\frac{1}{a} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \left(n \text{ fatores iguais a } \frac{1}{a}\right)$$

Propriedades:

I. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

II. $a^m \div a^n = a^{m-n}$

III. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

IV. $(ab)^m = a^m \cdot b^m$

**Raízes**

Se $a \geq 0$, a raiz $n$-enésima de $a$ é o número real positivo que elevado a $n$ resulta em $a$. Para representar essa operação, usa-se a notação:

$$\sqrt[n]{a} \text{ ou } a^{\frac{1}{n}}$$

Propriedades:

I. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$ ou $\sqrt[m]{a} / \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a/b}, b \neq 0$

II. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

III. $(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$

# Aula 3

## Fatoração de polinômios

*Eliane Ribeiro Pereira*
*Maria Cecília de Carvalho Chaves*

## Meta

Apresentar a fatoração de polinômios.

## Objetivos

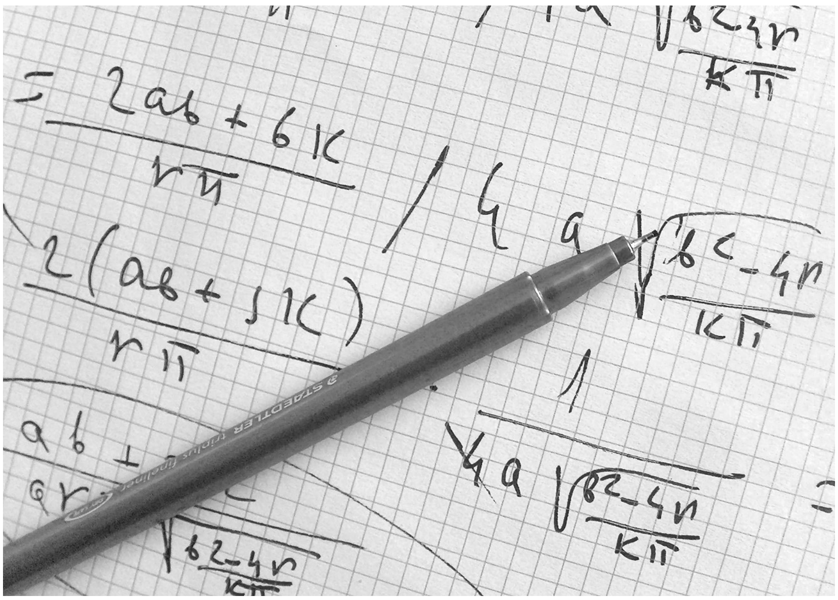
Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. classificar os polinômios de acordo com o número de termos que possui;
2. identificar o grau dos polinômios;
3. identificar e aplicar a fatoração de polinômios com fatores comuns em evidência;
4. reconhecer e aplicar numa expressão algébrica o caso de fatoração adequado.

## Introdução

Vamos iniciar a nossa aula falando sobre polinômios.

Os polinômios são essenciais na Matemática. Eles fazem parte do ramo denominado Álgebra, que faz uso de letras para representar números quaisquer, associando-as com operações aritméticas de adição, subtração, divisão, multiplicação, potenciação e radiciação. Existem importantes aplicações de polinômios na Geometria, com o seu emprego na busca de valores desconhecidos em expressões matemáticas.



Aleksandar Milosevic

**Figura 3.1:** Os polinômios têm várias aplicações na Matemática.
Fonte: http://www.sxc.hu/photo/347053

A fatoração é importante porque nos permite simplificar sentenças matemáticas, o que muitas vezes é fundamental para a sua resolução. Vamos agora conhecer algumas definições.

## Definições

Expressão algébrica: é uma expressão matemática formada por letras e números.

Exemplo: 4; 5 – 8xy; 3y

Monômio: é qualquer expressão algébrica representada por um número, uma variável ou pelo produto de números e variáveis.

Exemplo: 3; 5x; $-9xy^2$

Polinômio: é a soma algébrica de dois ou mais monômios. Cada parcela de um polinômio denomina-se termo.

Exemplo:

$8x^9 - 6x^3 + 3x^2 - 5x + 2$ é um polinômio com cinco termos.

Note que os polinômios são compostos por várias expressões algébricas, podendo envolver apenas números, ou diversas letras, potências, coeficientes etc.

De acordo com a quantidade de termos que possuem, os polinômios são classificados em:

- Monômio – quando há apenas um termo;
- Binômio – quando há dois termos;
- Trinômio – quando há três termos;
- Polinômio – acima de três termos.

Com os polinômios, podemos efetuar todas as operações: adição, subtração, divisão, multiplicação, potenciação, radiciação. Vamos agora recordar algumas definições importantes para o nosso estudo.

## Coeficientes

Os termos de um polinômio são formados por fatores compostos por letras e números. As letras recebem o nome de variáveis, ou incógnitas. Por sua vez, os números são denominados coeficientes dessas variáveis.

Por exemplo, considere o polinômio:

$4x^5 - 3x^4 + 5y + x - 7$

Nos três primeiros termos, os coeficientes são: 4, $-3$ e 5, respectivamente. O último termo é formado apenas pelo coeficiente, pois não possui variáveis. O quarto termo não possui um coeficiente explícito; todavia, convenciona-se considerar seu coeficiente como sendo 1, já que o produto de 1 pelo termo, nesse caso composto pela variável x, não altera o seu valor.

Em geral, os coeficientes são escritos na forma numérica, mas podem também ser representados por letras, que são, nesse caso, chamadas de parâmetros.

Por exemplo, na expressão:

$a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$

a, b, c, e d seriam os parâmetros (se entendermos que essas letras não representam variáveis) e x seria a variável da expressão.

## Termos semelhantes

Quando um polinômio é formado por mais de um monômio, ele pode apresentar termos semelhantes, que são monômios encontrados em um mesmo polinômio com partes literais e expoentes iguais.

Por exemplo, o polinômio:

$5x^4 - 4x^3 + 2x + 1 + 6\,x^3 - x + 2$

tem 7 monômios, sendo que $-4x^3$ e $6\,x^3$ são semelhantes, pois possuem as mesmas partes literais; o mesmo ocorrendo com $2x$ e $-x$; e com 1 e 2, que não possuem partes literais. Os termos semelhantes podem ser unidos, obtendo-se uma forma reduzida para o polinômio.

Assim, escrever um polinômio em sua forma reduzida seria escrevê-lo sem termos semelhantes. No caso de nosso exemplo, teríamos:

$5x^4 - 4x^3 + 2x + 1 + 6\,x^3 - x + 2 = 5x^4 + 2x^3 + x + 3$

## Grau de um polinômio

Como vimos, um polinômio é a soma algébrica de dois ou mais monômios. O monômio de maior grau, com coeficiente não nulo, é chamado de termo dominante. O grau de um polinômio $p = p(x)$ não nulo é dado pelo expoente de seu termo dominante, sendo denotado por gr(P).

Em resumo, o termo de maior expoente de um polinômio reduzido, não nulo, determina o grau desse polinômio.

Exemplo:

Esse polinômio poderia ser escrito como:

$2 \cdot x^0 = 2 \cdot 1 = 2 \rightarrow$ Logo, esse é um polinômio de grau zero, ou $gr(P) = 0$;

$5x^{11} - 8x^3 + 12 \rightarrow$ é um polinômio do 11º grau;

$3x^5 - 4x^3 + 2x - 8 \rightarrow$ é um polinômio do 5º grau;

$5x^3y - 8xy^2 + 10$ à é um polinômio do 4º grau.

Note que o grau deste polinômio, que possui mais de uma variável, considera tanto o expoente da variável x, quanto o expoente da variável y.

Temos, também, o polinômio nulo, que não tem grau, uma vez que não possui termo dominante. Em estudos mais avançados, é possível definir o grau de um polinômio nulo, mas isso não faz parte dos objetivos de nosso curso.

Dizemos que temos um polinômio completo quando ele possui todas as potências consecutivas desde o grau mais alto até o termo constante. Se o grau de um polinômio completo for *n*, o número de termos deste polinômio será n + 1.

Por exemplo:

$3x^4 - 2x^3 + x^2 + x + 3$

é um polinômio completo, já que possui todas as potências a partir de 4, que é o seu grau mais elevado, até a constante. Note que ele possui 5 termos, isto é, 4 + 1. Já o polinômio:

$3x^5 - 4x^3 + 2x - 8$

é dito incompleto, pois possui dois coeficientes nulos: o de $x^4$ e o de $x^2$.

## Atividade 1

***Atende aos objetivos 1 e 2***

Determine o grau do polinômio $10\,x^5\,y^3 - 2\,x^4\,y^6 + 4\,x\,y^7 - 3\,y^8$ e classifique-o quanto ao número de termos.

### *Resposta comentada*

O grau do polinômio é dado pela maior soma do expoente das variáveis de cada termo que o compõe. Assim, o polinômio $10\,x^5\,y^3 - 2\,x^4\,y^6 + 4\,x$

$y^7$ é de grau 10, que é a soma do expoente das variáveis x e y do segundo termo. Como esse polinômio tem 3 termos, é um trinômio.

## Fatoração

Fatorar é escrever na forma de produto, isto é, fatores. A vantagem de apresentarmos um número ou um polinômio fatorado é a possibilidade de podermos simplificar a expressão, como fazemos quando trabalhamos com frações equivalentes.

Quando falamos em fatoração, podemos abordar tanto a fatoração de números quanto a fatoração de polinômios, que será tratada nesta aula.

## Fatoração de Polinômios

Podemos definir fatoração como a transformação da soma e/ou da subtração de vários termos em um produto de diversos fatores. Para fatorar um polinômio, devemos escrevê-lo na forma de produto entre monômios ou outros polinômios.

Vamos apresentar algumas fatorações bastante usadas em problemas algébricos.

1º caso: Fator comum em evidência: $ax + bx = x(a + b)$

A forma mais básica de fatoração é a colocação de fatores comuns em evidência, isto é, o destaque dos fatores comuns.

Exemplo 1:

$ax + bx + cx$

Nesse caso, todos os termos possuem a variável x. Logo, devemos colocá-la em evidência. Lembre-se de que, para colocar em evidência, é preciso imaginar a operação inversa. Ou seja, se, ao colocá-la em evidência, multiplicaremos todos os termos por x, para descobrir o valor de cada termo, devemos dividir cada parcela por x:

$$\frac{ax}{x} = a, \qquad \frac{bx}{x} = b, \qquad \frac{cx}{x} = c$$

Então,

$$x\,(a + b + c)$$

Para verificar se está tudo certo, devemos resolver a operação de multiplicação e ver se voltamos ao que tínhamos anteriormente, isto é:

$x\,(a + b + c) = x\,.\,a + x\,.\,b + x\,.\,c$

Logo, voltamos ao polinômio inicial.

Exemplo 2:

$$4x + 24$$

Nesse caso, ambas as parcelas são múltiplas por 4. Fazendo-se raciocínio análogo ao anterior, teremos:

$$x + 4 \cdot 6 = 4\,(x + 6)$$

A técnica do fator comum é a mais simples, a mais usual. Sempre que precisamos fatorar um polinômio, devemos inicialmente verificar se é ou não é possível aplicá-la.

## Atividade 2

***Atende aos objetivos 3 e 4***

Fatore os polinômios:

a) $8xy - 6ay + 2by$

b) $x^5 + x^7 + x^9$

### *Resposta comentada*

a) Nesse caso, podemos facilmente perceber que todas as parcelas possuem a variável y; além disso, todas têm número par, isto é, números divisíveis por 2. Então, devemos colocar o 2 e o y em evidência:

2y (4x – 3a + b)

b) Nesse caso, temos o x em todas as parcelas, mas o fator comum é o que tem o menor expoente. Assim,

$x^5 (1 + x^2 + x^4)$

2º caso: Fatoração por agrupamento: ax + bx + ay + by = (a + b) · (x + y)

Na fatoração por agrupamento, não há um fator comum a todos os termos, mas fatores comuns a alguns termos. Assim, devemos agrupar os fatores de acordo com os termos comuns encontrados.

Exemplo:

$$3x + 3y + ax + ay = 3x + ax + 3y + ay$$

Nesse caso, temos duas parcelas que têm o valor x e outras duas com o fator y. Assim, vamos colocá-los em evidência:

$$x (3 + a) + y (3 + a)$$

Note que o fator (3 + a) se repete em ambas as parcelas. O polinômio entre parênteses pode ser considerado um fator; logo, pode ser colocado em evidência:

$$x (3 + a) + y (3 + a) = (3 + a) (x + y)$$

Poderíamos ter realizado a tarefa utilizando outro caminho. Poderíamos ter evidenciado os valores 3 e *a*, que também se repetem em duas parcelas da expressão inicial. Teríamos, então:

$$3 (x + y) + a (x + y)$$

De forma semelhante ao caso anterior, o fator (x + y) se repete em ambas as parcelas e podemos colocá-lo em evidência. Assim,

$$3\,(x + y) + a\,(x + y) = (x + y)\,(3 + a)$$

Note que ambos os caminhos levaram à mesma solução. Logo, você pode escolher qualquer um dos dois para resolver a questão.

## Atividade 3

***Atende aos objetivos 3 e 4***

Fatore o polinômio $a^3 + 4a^2 + 2a + 8$.

### *Resposta comentada*

Nesse caso, os dois primeiros termos têm $a^2$ e os dois últimos possuem múltiplos de 2. Então:

$$a^2\,(a + 4) + 2\,(a + 4)$$

Ambas as parcelas têm (a + 4), que pode novamente ser colocado em evidência. Teremos:

$$(a + 4)\,(a^2 + 2)$$

Na Matemática, encontramos alguns produtos de expressões algébricas que têm uma forma geral para sua resolução – são os produtos notáveis, que nos permitem resolver tais expressões sem que precisemos desenvolver cálculos mais trabalhosos.

Utilize o *link* a seguir para recordar os produtos notáveis, o que facilitará a compreensão dos aspectos abordados em nossa aula http://www.infoescola.com/matematica/produtos-notaveis/

3º caso: Diferença entre dois quadrados: $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$

Como é mostrado no estudo dos produtos notáveis, ao multiplicarmos a soma de dois termos, *a* e *b*, pela diferença desses mesmos dois termos, obtemos como resultado a diferença de dois quadrados, isto é:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

A fatoração da diferença de dois quadrados sempre será o produto da soma pela diferença de dois termos, em que o primeiro termo da diferença de quadrados representa o quadrado do primeiro termo entre parênteses e o segundo termo da diferença de quadrados corresponde ao quadrado do segundo termo entre parênteses.

Esse conhecimento pode nos ajudar em alguns casos de fatoração.

No exemplo 1, analisemos o binômio:

$$36 - c^2$$

36 é o quadrado de 6 e $c^2$ é o quadrado de *c*. Como $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$, podemos considerar que $a = 6$ e $b = c$. Substituindo-se:

$$36 - c^2 = (6 + c)\,(6 - c)$$

Repare que, para conferir o resultado encontrado, seria necessário resolver o produto do segundo membro. Teríamos, então:

$$(6 + c)\,(6 - c) = 36 - 6\,c + 6\,c - c^2 = 36 - c^2$$

Como mencionamos, conhecer o resultado dos produtos notáveis permite reduzir o volume de cálculos para a resolução de questões como essa.

Exemplo 2:

$$2x^2 - 18\,y^4$$

Ao analisar esse binômio, observamos que não se trata da diferença de dois quadrados, já que 2 e 18 não são quadrados perfeitos. Assim, devemos examinar a possibilidade de colocar em evidência. Notamos que ambos os termos são múltiplos de 2; logo, o binômio pode ser escrito na forma:

$$2\,(x^2 - 9\,y^4)$$

Agora, ao examinarmos o segundo fator, identificamos a diferença de quadrados, logo podemos aplicar a regra dada, pois $x^2$ é o quadrado de 2 e $9\,y^4$ é o quadrado de $3\,y^2$. Ficamos, então, com:

$$2\,(x - 3\,y^2) \cdot (x - 3\,y^2)$$

Chamamos quadrado perfeito qualquer número que possa ser representado pelo quadrado de um número natural. Em outras palavras, um número natural *n* é dito quadrado perfeito se, e somente se, existir um número natural *a* tal que $n = a^2$.

$$n \text{ é quadrado perfeito } \leftrightarrow \exists\, a \in \mathbb{N} \,|\, n = a^2$$

Entre os números naturais, apenas os quadrados perfeitos têm raízes quadradas exatas.

## Atividade 4

***Atende aos objetivos 3 e 4***

Fatore os polinômios:

a) $36x^2 - 25y^2$

b) $r^4 - 25/36$

c) $(x + 4)^2 - y^2$

### *Resposta comentada*

a) Usando-se o raciocínio da diferença entre dois quadrados, podemos ver que 36 $x^2$ é o quadrado de 6x = a, enquanto $25y^2$ é o quadrado de 5 y = b. Então,

$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$

$36x^2 - 25y^2 = (6x + 5y)\ (6x - 5y)$

b) Nada mudará em nosso raciocínio ao encontrarmos números fracionários. Neste exemplo, $r^4$ é o quadrado de $r^2$, enquanto 25/36 é o quadrado de 5/6. Assim,

$r^4 - 25/36 = (r^2 + 5/6)\ (r^2 - 5/6)$

c) A diferença entre dois quadrados pode ser aplicada mesmo quando um dos termos da diferença é um polinômio – no caso do exemplo, um binômio. Para solucionar a questão, mantemos o mesmo raciocínio:

$(x + 4)^2$ é o quadrado de (x + 4), enquanto $y^2$ é o quadrado de y.

Então:

$(x + 4)^2 - y^2 = (x + 4 + y)\ (x + 4 - y)$

4º caso: Trinômio quadrado perfeito

Soma: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

Quando estudamos produtos notáveis, vimos que o quadrado da soma de dois termos gera um trinômio quadrado perfeito; ou, em outras palavras, chamamos de trinômio quadrado perfeito o resultado de um polinômio formado pela soma de dois termos elevados ao quadrado.

$(a + b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2)$

Note que o termo $(a + b)^2$ pode ser considerado uma forma fatorada, pois é igual ao produto de (a + b) por (a + b).

Nem todo trinômio é um quadrado perfeito. Para verificar se um trinômio é um quadrado perfeito, precisamos fazer uma verificação termo a termo:

1. verificar se o primeiro termo do trinômio corresponde ao quadrado do primeiro termo do binômio, ou, de outra forma, verificar se a raiz quadrada do primeiro termo do trinômio corresponde ao primeiro termo do binômio;

2. verificar se o terceiro termo da soma corresponde ao quadrado do segundo termo do binômio, ou, de outra forma, verificar se a raiz quadrada do terceiro termo do trinômio corresponde ao segundo termo do binômio;

3. verificar se o termo do meio representa o dobro do produto dos 2 termos do binômio.

Por exemplo, seja o trinômio:

$$x^2 + 6x + 9$$

Para verificar se ele é um trinômio quadrado perfeito, precisamos seguir os passos acima:

1. calcular a raiz quadrada do primeiro termo: $x^2 \rightarrow x$;

2. calcular a raiz quadrada do terceiro termo: $9 \rightarrow 3$;

3. verificar se o termo do meio é igual ao dobro do produto das raízes calculadas para o primeiro e o terceiro termos: $2 \cdot 3 \cdot x = 6x$.

Assim, o polinômio $x^2 + 6x + 9$ é um trinômio quadrado perfeito e sua forma fatorada é $(x + 3)^2$.

Exemplo:

Fatore o polinômio: $4x^2 + 12xy + 9y^2$.

Extraindo-se a raiz quadrada do primeiro termo, temos: $2\,x$.

Extraindo-se a raiz quadrada do terceiro termo, temos: $3\,y$.

Calculando-se o dobro do produto das raízes calculadas para o primeiro e o terceiro termos, temos: $2 \cdot 2x \cdot 3y = 12xy$.

Verificamos que o polinômio é um trinômio quadrado perfeito. Assim, sua forma fatorada será: $(2x + 3y)^2$.

## *Atividade 5*

***Atende aos objetivos 3 e 4***

Fatore os polinômios:

a) $25x^2 + 10xy + y^2$

b) $25x^4 + 40x^2y^3 + 16y^6$

### *Resposta comentada*

a) A raiz quadrada do primeiro termo é 5x; a raiz quadrada do terceiro termo é y; e o dobro do produto das raízes calculadas para o primeiro e o terceiro termos é: $2 \cdot 5x \cdot y = 10xy$, que é igual ao segundo termo do polinômio. Então, a forma fatorada desse polinômio é a soma da raiz quadrada do primeiro termo e da raiz quadrada do terceiro, elevada ao quadrado: $(5x + y)^2$.

b) O primeiro passo é calcularmos a raiz quadrada do primeiro termo: $5x^2$; a seguir, calculamos a raiz quadrada do terceiro termo: $4y^3$; finalmente, verificamos se o dobro do produto das raízes calculadas é igual ao segundo termo do polinômio: $2 \cdot 5x^2 \cdot 4y^3 = 40\ x^2y^3$. Como o valor encontrado é igual ao segunso termo do trinômio, temos um trinômio quadrado perfeito e sua forma fatorada será dada por: $(5x^2 + 4y^3)^2 = 25\ x^4 + 40\ x^2y^3 + 16y^6$.

Como mencionado, nem sempre um trinômio é quadrado perfeito. Por exemplo, o trinômio:

$$16a^2 + 12a + 4$$

A raiz quadrada do primeiro termo é 4 a; a raiz quadrada do terceiro termo é 2; e o dobro do produto das raízes calculadas para o primeiro e o terceiro termos é:

$$2 \cdot 4a \cdot 2 = 16a$$

que é diferente do segundo termo do polinômio. Logo, ele não atende a todas as exigências para ser um trinômio quadrado perfeito.

Diferença: $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

Da mesma forma que tratamos do trinômio quadrado perfeito no caso de uma soma, podemos fazê-lo para o caso de uma diferença.

Neste caso, resolvemos o quadrado da diferença de dois termos para chegarmos a um trinômio quadrado perfeito; ou, em outras palavras, aqui o trinômio quadrado perfeito será o resultado de um polinômio formado pela diferença de dois termos elevado ao quadrado.

$$(a - b)^2 = (a^2 - 2ab + b^2)$$

Note que o termo $(a - b)^2$ pode ser considerado uma forma fatorada, por ser igual ao produto de $(a - b)$ por $(a - b)$.

As etapas para verificar se temos um trinômio quadrado perfeito são as mesmas elencadas anteriormente, ignorando-se o sinal para a realização das contas, considerando-o apenas na comparação final dos valores encontrados.

Por exemplo, para verificar se $9x^2 - 24x + 16$ é um trinômio quadrado perfeito, faremos:

1º – extrair a raiz do primeiro termo: $3x$;

2º – extrair a raiz do terceiro termo: 4;

3º – calcular o dobro do produto dos dois termos encontrados: $2 \cdot 3x \cdot 4 = 24\,x$.

Como conseguimos verificar os três quesitos necessários, podemos dizer que $9x^2 - 24x + 16$ é um trinômio quadrado perfeito e sua forma fatorada é:

$$(3x - 4)^2 = 9x^2 - 24x + 16$$

!

Nem sempre o polinômio nos é apresentado numa ordenação favorável. Devemos procurar, na realidade, ao tentarmos aplicar o quarto caso, identificar se o trinômio possui dois termos que sejam quadrados perfeitos e um que seja o dobro da raiz dos dois outros termos. Assim, o polinômio $x^2 + 6x + 9$ e o polinômio $9 + x^2 + 6x$ têm a mesma fatoração. O mesmo ocorrerá no quinto caso.

## Atividade 6

***Atende aos objetivos 3 e 4***

Fatore o trinômio $36x^6 - 48x^3 y + 16y^2$.

### *Resposta comentada*

$(6x^3 - 4y)^2 = 36x^6 - 2 . 6x^3 . 4y + 16y^2 = 36x^6 - 48 x^3y + 16y^2$

O primeiro passo é calcularmos a raiz quadrada do primeiro termo: $6x^3$; a seguir, calculamos a raiz quadrada do terceiro termo: 4y; finalmente, verificamos se o dobro do produto das raízes calculadas é igual ao segundo termo do polinômio: $2 \cdot 6x^3 \cdot 4y = 408\ x^3y$. Como o valor encontrado é igual ao segundo termo do trinômio, temos um trinômio quadrado perfeito e sua forma fatorada será dada por:

$(6x^3 - 4y)^2 = 36x^6 - 48x^3y + 16y^2$

5º caso: Cubo Perfeito

Soma: $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$

Quando estudamos produtos notáveis, vimos que o cubo da soma de dois termos é igual ao cubo do primeiro termo, mais três vezes o produto do quadrado do primeiro termo multiplicado pelo segundo termo, mais três vezes o produto do primeiro termo multiplicado pelo quadrado do segundo termo, mais o cubo do segundo termo:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Note que o termo $(a + b)^3$ pode ser considerado uma forma fatorada, pois ele é igual ao produto de 3 fatores de $(a + b)$.

Por exemplo, seja o polinômio $125x^3 + 150\ x^2y + 60\ xy^2 + 8y^3$. Nosso objetivo é fatorá-lo na forma $(a + b)^3 = a^3 + 3\ a^2b + 3\ ab^2 + b^3$.

Analisando-o termo a termo, teremos:

$125x^3$ é o cubo de $5x$; $8y^3$ é o cubo de $2y$. Agora precisamos verificar os termos do meio: $150x^2y$ é igual a $3 \cdot (5x)^2 \cdot 2y$; e $60xy^2$ é igual a $3 \cdot 5x \cdot (2y)^2$. Assim,

$125x^3 + 150x^2y + 60xy^2 + 8y^3 = (5x + 2y)^3$

Logo, o polinômio $125x^3 + 150x^2y + 60\ xy^2 + 8y^3$ é um cubo perfeito e sua forma fatorada é dada por $(5x + 2y)^3$.

## Atividade 7

***Atende aos Objetivos 3 e 4***

Fatore o polinômio $8x^6 + 12x^4y^3 + 6x^2y^6 + y^9$.

### *Resposta comentada*

Como não temos informação se esse polinômio é um cubo perfeito, precisamos testar cada termo. Assim, vemos que $8x^6$ é o cubo de $2x^2$; $y^9$ é o cubo de $y^3$.

Agora precisamos verificar os termos do meio:

$12\ x^4y^3$ é igual a $3 \cdot (2x^2)^2 \cdot y^3$; e $6\ x^2y^6$ é igual a $3 \cdot 2x^2 \cdot (y^3)^2$

$8x^6 + 12x^4y^3 + 6x^2y^6 + y^9 = (2x^2 + y^3)^3$

Então, $8x^6 + 12x^4y^3 + 6\ x^2y^6 + y^9$ é um cubo perfeito e sua forma fatorada é dada por $(2x^2 + y^3)^3$.

Diferença: $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$

Também podemos encontrar um cubo perfeito como resultado de um polinômio formado pela diferença de dois termos elevada ao cubo.

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3\,a\,b^2 - b^3$$

Por exemplo, seja o polinômio $343x^3 - 588x^2 + 336x - 64$. Nosso objetivo é fatorá-lo na forma $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Analisando-o termo a termo, teremos:

$343x^3$é o cubo de $7x$; 64 é o cubo de 4. Agora precisamos verificar os termos do meio: $588x^2$ é igual a $3 \cdot (7x)^2 \cdot 4$; e $336x$ é igual a $3 \cdot 7x \cdot (4)^2$. Assim,

$343x^3 - 588x^2 + 336x - 64 = (7x - 4)^3$

Logo, o polinômio $343x^3 - 588\,x^2 + 336\,x - 64$ é um cubo perfeito e sua forma fatorada é dada por $(7x - 4)^3$.

$(7x - 4)^3 = 343x^3 - 588x^2 + 336x - 64$

## *Atividade 8*

***Atende aos objetivos 3 e 4***

Fatore o polinômio $8a^3 - 18a^2b + 54ab^2 - 27b^3$.

### *Resposta comentada*

Como não temos informação se esse polinômio é um cubo perfeito, precisamos testar cada termo. Assim, vemos que $8a^3$ é o cubo de $2a$; $27b^3$ é o cubo de $3b$. Agora precisamos verificar os termos do meio: $18a^2b$ é igual a $3 \cdot (2a)^2 \cdot 3b$; e $54ab^2$ é igual a $3 \cdot 2a \cdot (3b)^2$. Então,

$8a^3 - 18a^2b + 54ab^2 - 27b^3 = 8a^3 - 3 \cdot (2a)^2 \cdot 3b + 3 \cdot 2a \cdot (3b)^2 - 27b^3 = (2a - 3b)^3$

Logo, o polinômio $8a^3 - 18a^2b + 54ab^2 - 27b^3$ é um cubo perfeito e sua forma fatorada é dada por $(2a - 3b)^3$.

## Fatoração completa

Por vezes, é necessário realizarmos mais de uma fatoração para tornarmos um polinômio fatorado ao máximo. Assim, utilizamos todos os métodos de fatoração de polinômios necessários para garantir que o polinômio esteja fatorado ao máximo, isto é, que ele não possa mais ser fatorado.

Por exemplo, para fatorar o polinômio $a^4 - b^4$, percebemos que estamos diante de uma diferença de quadrados, pois $a^4$ é o quadrado de $a^2$ e $b^4$ é o quadrado de $b^2$. Utilizando os conceitos que estudamos, podemos escrever:

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2) \cdot (a^2 + b^2)$$

Analisando o resultado encontrado, notamos que encontramos outra diferença de quadrados, $(a^2 - b^2)$. Logo, podemos novamente fatorar o binômio $(a^2 - b^2)$:

$$(a^2 - b^2) = (a - b) . (a + b)$$

Então, para obtermos a fatoração completa do polinômio $a^4 - b^4$, devemos fatorá-lo enquanto for possível. Logo, a forma fatorada de $a^4 - b^4$ será dada por:

$$a^4 - b^4 = (a - b) . (a + b) . (a^2 + b^2).$$

Exemplo:

Fatore o polinômio $x^3 - 2\,x^2\,y + xy^2$.

Para fatorar o polinômio, percebemos, inicialmente, que todos os termos possuem a variável x. Logo, começamos colocando essa variável em evidência:

$$x^3 - 2\,x^2y + xy^2 = x\,(x^2 - 2\,xy + y^2)$$

O segundo fator ainda pode ser fatorado: ele é um trinômio perfeito, pois $x^2$ é o quadrado e x, $y^2$ é o quadrado de y e 2xy é o dobro do produto de x por y. Então:

$$x^3 - 2x^2y + y^2 = x\,(x^2 - 2xy + y^2) = x\,(x - y)^2$$

## *Atividade final*

***Atende aos Objetivos 3 e 4***

Fatore o polinômio $3a^2 - 27b^2$.

### *Resposta Comentada*

Note que ambos os termos são múltiplos de 3. Assim, iniciamos colocando o 3 em evidência:

$3a^2 - 27b^2 = 3\,(a^2 - 9b^2)$

Encontramos, agora, no segundo fator, uma diferença de quadrados, onde $a^2$ é o quadrado de a e $9b^2$ é o quadrado de 3b. Então:

$(a^2 - 9b^2) = (a - 3b)\,(a + 3b)$

E a fatoração completa do polinômio será:

$3\,a^2 - 27b^2 = 3\,(a^2 - 9\,b^2) = (a - 3b)\,(a + 3b)$

Vimos, nesta aula, diferentes formas de fatoração de polinômios, que têm importância fundamental no ramo da Álgebra matemática. Através dos polinômios, podemos encontrar valores desconhecidos de expressões matemáticas, o que nos permite resolver inúmeras situações práticas cotidianas. A simplificação dos polinômios, através da fatoração, é um importante caminho para sua resolução.

## Resumo

A fatoração permite transformar a soma e/ou a subtração de vários termos em um produto de diversos fatores. A fatoração é importante porque nos permite simplificar sentenças matemáticas, o que muitas vezes é fundamental para a sua resolução.

Algumas fatorações são bastante conhecidas e muito usadas em problemas algébricos. Abordamos os casos de fatoração mais conhecidos, que se resumem em:

1º caso: fator comum em evidência;

2º caso: agrupamento;

3º caso: diferença entre dois quadrados;

4º caso: trinômio quadrado perfeito – soma e diferença;

5º caso: cubo perfeito – soma e diferença.

Por vezes, é necessário realizarmos mais de uma fatoração para tornarmos um polinômio fatorado ao máximo. Assim, utilizamos todos os métodos de fatoração de polinômios necessários para garantir que o polinômio esteja fatorado ao máximo, isto é, que ele não possa mais ser fatorado.

# Aula 4

## Equações do 1º grau e inequações de 1º grau

*Eliane Ribeiro Pereira*
*Maria Cecília De Carvalho Chaves*

## Meta

Apresentar o conceito de equações e inequações do 1º grau.

## Objetivos

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. definir a equação do 1ª grau e identificar a raiz da equação;
2. reconhecer e aplicar procedimentos para resolução de uma equação do 1ª grau;
3. analisar problemas que envolvam equação do 1º grau;
4. definir a inequação do 1ª grau como uma sentença aberta expressa por uma desigualdade e aplicar procedimentos para sua resolução.

## Pré-requisitos

Para melhor compreensão e aproveitamento desta aula, reveja, na Aula 1, os itens 4 (relação de pertinência) e 7 (conjuntos numéricos e operações com intervalo).

## Introdução

Nesta aula, iniciamos o estudo das equações. Equação é uma maneira de resolver situações nas quais surgem valores desconhecidos quando se tem uma igualdade. Por serem desconhecidos, esses valores são representados por letras.

Foram os árabes que promoveram um acentuado progresso na resolução de equações. Para representar o valor desconhecido por meio de uma sentença matemática, ou seja, em uma equação, os árabes chamavam o valor desconhecido em uma situação matemática de coisa. Em árabe, a palavra coisa era pronunciada como *xay*. Daí surge o *x* como tradução simplificada de palavra coisa em árabe.

As equações ganharam importância a partir do momento em que passaram a ser escritas com símbolos matemáticos e letras. O primeiro a fazer isso foi o francês François Viète, no final do século XVI.

François Viète (1540-1603) foi um administrador público e advogado que tinha a matemática como um passatempo. Apaixonado por álgebra, esse matemático francês foi responsável pela introdução da primeira notação algébrica sistematizada, além de contribuir para a teoria das equações. Ficou conhecido como o Pai da Álgebra. Apesar de ser mais conhecido como matemático, foi também um dos melhores especialistas em cifras de todos os tempos.

## Sentenças matemáticas

Uma sentença é uma afirmação declarativa que exprime um pensamento de sentido completo. Na matemática, as sentenças podem ser abertas ou fechadas. Observe os seguintes exemplos:

**i.** $\mathbf{2 + 2 = 4}$

**ii.** $\mathbf{2 + 3 = 6}$

**iii.** $\mathbf{2 + x = 4}$

Todas essas afirmações são ditas sentenças matemáticas. As duas primeiras são denominadas sentenças fechadas, pois podem ser classificadas como verdadeiras ou falsas. Nesse exemplo, a primeira sentença é verdadeira, e a segunda, falsa. A última sentença é dita aberta, pois pode ser verdadeira ou falsa, de acordo com o valor atribuído a $x$.

## Definição de equação

Define-se como uma equação toda e qualquer sentença matemática aberta expressa por uma igualdade na qual exista uma ou mais letras que representem números.

Exemplos:

$3x - 13 = 2$ é uma equação na qual o número $x$, que é desconhecido, recebe o nome incógnita ou variável.

$2y + 4 = 8$ é uma equação na qual o número $y$, que é desconhecido, recebe o nome incógnita ou variável.

$xy + 3y + 2x = 20$ é uma equação na qual os números $x$ e $y$, que são desconhecidos, recebem a denominação incógnitas ou variáveis.

Para cada equação anterior, é impossível afirmar se a igualdade é verdadeira ou falsa, pois os valores das incógnitas são desconhecidos.

Existem inúmeros tipos de equações na matemática. Todas são importantes e atendem a diversas aplicações. Nos exemplos anteriores, pode-se observar uma grande similaridade no formato das duas primeiras equações, enquanto a terceira já se apresenta diferente. Nesta aula, estamos interessados em estudar as equações do 1º grau.

## Equação do 1º grau

Uma equação do primeiro grau é toda equação na forma:

$$ax + b = 0$$

em que se tem:

- $a$ e $b$ constantes da equação, com $a \neq 0$ (diferente de zero);
- $x$ variável ou incógnita.

## Membros de uma equação

Numa equação, a expressão situada à esquerda da igualdade é chamada de primeiro membro da equação, e a expressão situada à direita da igualdade, de segundo membro da equação.

Exemplo:

$$6x + 10 = 4x - 2$$

$6x + 10$: primeiro membro,

$4x - 2$: segundo membro.

Cada uma das parcelas que compõem um membro de uma equação é chamada termo da equação.

$6x$, $10$, $4x$ e $-2$ são termos da equação $6x + 10 = 4x - 2$.

## Conjunto universo

É o conjunto de valores que a variável pode assumir. O conjunto universo é representado pela letra U.

## Raiz de uma equação

Cada um dos valores que, colocados no lugar da incógnita, transforma a equação em uma sentença verdadeira é chamado de raiz da equação. Para verificarmos se um dado número é ou não raiz de uma equação, basta substituirmos a incógnita por esse número e observarmos se a sentença obtida é ou não verdadeira. Se a raiz da equação pertencer ao conjunto universo, esse valor pertencerá ao conjunto Verdade da equação.

Portanto, ao resultado da raiz dá-se o nome de **conjunto verdade V** ou **conjunto solução S.**

Exemplos:

a) Verificar se 3 é raiz da equação $15x - 9 = 6x + 18$.

$15 \cdot 3 - 9 = 6 \cdot 3 + 18$

$45 - 9 = 18 + 18$

$36 = 36$, que é verdadeiro. Logo, 3 é raiz da equação ou $S = \{3\}$.

b) Verificar se $-2$ é raiz da equação $4x + 3 = 10 + 2x$.

$4 \,.\, (-2) + 3 = 10 + 2 \,.\, (-2)$

$-8 + 3 = 10 - 4$

$-5 = 6$, que é falso. Logo, $-2$ não é raiz da equação.

## *Atividade 1*

***Atende ao objetivo 1***

1. Verifique se o número 4 é raiz da equação $9a - 4 = 8 + 6a$.

2. Verifique se o número $-3$ é raiz da equação $2x - 3 = 3x + 2$.

3. Seja a equação $2x + 4 = 7 - 4x$. Considerando $U = R$, $x = 1/2$ é raiz da equação? E $U = Z$? Justifique.

## *Resposta comentada*

1. Para fazer a verificação, basta substituir o valor dado para a variável na equação. Veja:

$9a - 4 = 8 + 6a$

$9 . 4 - 4 = 8 + 6 \cdot 4$

$36 - 4 = 8 + 24$

$32 = 32$, verdadeiro

Logo, $a = 4$ é raiz da equação.

2.

$2x - 3 = 3x + 2$

$2 \cdot (-3) - 3 = 3 \cdot (-3) + 2$

$-6 - 3 = -9 + 2$

$- 9 = -7$, falso

Logo, $x = -3$ não é raiz da equação.

3.

$2x + 4 = 7 - 4x$

$2 . (1/2) + 4 = 7 - 4 . (1/2)$

$1 + 4 = 7 - 2$

$5 = 5$, verdadeiro

Logo $x = ½$ é raiz da equação considerando $U = R$, mas não é se $U = Z$, pois $½ \notin Z$.

## Método de solução

Resolver uma equação do 1º grau em um determinado conjunto universo significa determinar a raiz ou conjunto solução dessa equação, caso exista solução.

A resolução de equação do 1º grau é fundamentada nas propriedades da igualdade descritas a seguir.

Propriedade 4.1 (Princípio aditivo): Adicionando um mesmo número a ambos os membros de uma equação ou subtraindo um mesmo número de ambos os membros, a igualdade se mantém.

Exemplo:

$2 + 3 = 5 \Leftrightarrow (2 + 3) + 8 = 5 + 8 \Leftrightarrow 13 = 13$

$2 + 3 = 5 \Leftrightarrow (2 + 3) -1 = 5 - 1 \Leftrightarrow 4 = 4$

Propriedade 4.2 (Princípio multiplicativo): Dividindo ou multiplicando ambos os membros de uma equação por um mesmo número não nulo, a igualdade se mantém.

Exemplo:

$2 + 3 = 5 \Leftrightarrow (2 + 3) \cdot 4 = 5 \cdot 4 \Leftrightarrow 20 = 20$

$12 + 3 = 15 \Leftrightarrow (12 + 3) \div 5 = 15 \div 3 \Leftrightarrow 5 = 5$

Com o conhecimento dessas propriedades, estamos prontos para resolver equações do 1º grau. Os exemplos seguintes ilustram as etapas necessárias para encontrarmos a solução. Leia com atenção.

Exemplos:

a) $x - 8 = 20$, sendo $U = Q$.

Resolver uma equação é determinar o conjunto de valores que a variável pode assumir de modo a tornar a sentença verdadeira. O objetivo neste exemplo é determinar qual número x que, subtraído de 8, resulta em 20.

Como a operação inversa da subtração é a soma, adiciona-se 8 ao primeiro membro. Para preservarmos a igualdade, é necessário também adicionarmos 8 ao segundo membro (princípio aditivo). Assim:

$$x - 8 + 8 = 20 + 8$$

$$x = 28$$

Como $28 \in Q$

$V = \{28\}$, obtendo-se a solução da equação.

b) $5x = 21 - 2x$, sendo $U = R$.

Inicialmente, observa-se que a variável x está presente em ambos os membros da equação. Nosso primeiro passo será colocar a variável apenas no primeiro membro. Para isso, aplicaremos o princípio aditivo.

$5x + 2x = 21 - 2x + 2x$

$7x = 21$

Como desejamos conhecer o valor de x, devemos dividir ambos os membros da equação por 7 (princípio multiplicativo).

$$\frac{7x}{7} = \frac{21}{7}$$

$x = 3$

Como $3 \in R$

$V = \{3\}$

Quando o conjunto universo não é especificado, considera-se $U = R$.

O princípio aditivo e o princípio multiplicativo servem para facilitar o entendimento da solução de uma equação, mas, para resolvê-la, existe um método simples e prático, que é o seguinte:

Colocamos no primeiro membro os termos que apresentam a variável e, no segundo membro, os termos que não apresentam variável. Os termos que mudam de membro têm os sinais trocados.

Quando se passa de um membro para o outro, usa-se a operação inversa, ou seja, o que está multiplicando passa a dividir e o que está dividindo passa a multiplicar. O que está sendo adicionado passa a subtrair e o que está subtraindo passa a adicionar.

Para assimilar, veja alguns exemplos de fixação resolvidos.

a) Determine o valor do x:

$4x - 12 = 8$

$4x = 8 + 12$

$4x = 20$

$x = 20/4 \Leftrightarrow x = 5 \Leftrightarrow V = \{5\}$

b) Qual o valor da incógnita x?

$2 - 3 \cdot (2 - 4x) = 8$

$2 - 6 + 12x = 8$

$12x = 8 - 2 + 6$

$12x = 6 + 6$

$x = 12/12 \Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow V = \{1\}$

c) $2\ (x - 4) = 4\ (-x + 1)$

Nesse tipo de equação, devemos, inicialmente, retirar os parênteses, aplicando a propriedade distributiva da multiplicação e a regra de eliminação de parênteses.

$2x - 8 = -4x + 4$

$2x + 4x = 4 + 8$

$6x = 12$

$x = 12/6$

$x = 2$

$V = \{2\}$

d) $6(x - 5) - 2(4x + 2) = 100$

$6x - 30 - 8x - 4 = 100$

$6x - 8x = 100 + 30 + 4$

$-2x = 134 \ . \ (-1)$

$2x = -134$

$x = -134/2$

$x = -67$

$V = \{-67\}$

## Atividade 2

***Atende ao objetivo 2***

Resolva em R as seguintes equações:

a) $3x - 27 = 0$

b) $7x - 9 = 2x + 16$

c) $-(8 - 4x - 7) = 2x + 7$

d) $6(x - 5) - 2(4x + 2) = 80$

### *Resposta comentada*

a) $3x - 27 = 0$

$3x - 27 + 27 = 0 + 27$, (PA - Princípio Aditivo)

$3x = 27$

$\frac{3x}{3} = \frac{27}{3}$, (PM - Princípio Multiplicativo)

$x = 9$

$V = \{9\}$

b) $7x - 9 = 2x + 16$

Inicialmente, devemos colocar as variáveis no primeiro membro e as constantes numéricas no segundo membro. O raciocínio aplicado é o princípio aditivo. Assim, temos:

$7x - 2x = 16 + 9$, isto é, adicionamos a ambos os membros o termo -2x e o termo +9.

$5x = 25$

$$\frac{5x}{5} = \frac{25}{5}$$

$x = 5$

$V = \{5\}$

c) $-(8 - 4x - 7) = 2x + 7$

Neste caso, o primeiro passo é eliminar os parênteses.

$-8 + 4x + 7 = 2x + 7$

Em seguida, colocar as variáveis no primeiro membro e as constantes numéricas no segundo membro.

$4x - 2x = 7 + 8 - 7$

$2x = 8$

$x = 4$

$V = \{4\}$

d) $6(x - 5) - 2(4x + 2) = 80$

$6x - 30 - 8x - 4 = 80$

$6x - 8x = 80 + 30 + 4$

$-2x = 114$

$$x = \frac{114}{-2} = -57$$

$x = -57$

$V = \{-57\}$

## Equações com denominador

Agora que já nos familiarizamos com o uso dos princípios básicos para resolução de uma equação do 1º grau, podemos elaborar mais sua expressão. Vamos resolver equações com denominador. Para tal, devemos:

- reduzir ao mesmo denominador,
- eliminar os denominadores,
- isolar a variável.

Observe os seguintes exemplos:

1. $\frac{2(x+3)}{3}+\frac{5(2x-1)}{2}=5x-\frac{1}{6}$

Nessa equação, inicialmente, calcular o mmc dos denominadores para, então, reduzir todas as frações ao mesmo denominador.

mmc (3, 2, 1, 6) = 6

$$\frac{4(x+3)}{6}+\frac{15(2x-1)}{6}=\frac{30x}{6}-\frac{1}{6}$$

Após a redução ao denominador comum, é possível eliminarmos o uso dos denominadores. Isso é garantido pelo princípio multiplicativo.

$4(x + 3) + 15(2x - 1) = 30x - 1$

Em seguida, analogamente ao realizado na questão anterior, aplica-se a propriedade distributiva, agrupam-se os termos semelhantes.

$4x + 12 + 30x - 15 = 30x - 1$

$4x + 30x - 30x = - 1 - 12 + 15$

$4x = 2$

$x = ½$

$V = \{1/2\}$

Menor múltiplo comum (mmc): o mmc de dois ou mais números não nulos é o menor valor comum pertencente aos múltiplos dos números.

Se você esqueceu como se calcula o mmc, pode consultar os links: http://www.brasilescola.com/matematica/calculo-mmc-mdc.htm; http://www.somatematica.com.br/fundam/mmc.php.

---

2.

$$\frac{1}{2}(3x+4)=10+\frac{1}{5}(x-1)$$

$$\frac{1(3x+4)}{2}=\frac{10}{1}+\frac{1(x-1)}{5}=\frac{5(3x+4)}{10}=\frac{10}{10}+\frac{2(x-1)}{10}$$

$$\frac{5(3x+4)}{10}=\frac{100}{10}+\frac{2(x-1)}{10}$$

$$\frac{5}{10}(3x+4)=\frac{100}{10}+\frac{2}{10}(x-1)$$

$5(3x + 4) = 100 + 2(x - 1)$

$15x + 20 = 100 + 2x - 2$

$15x - 2x = 100 - 2 - 20$

$13x = 78$

$x = 6$

$V = \{6\}$

## Atividade 3

***Atende ao objetivo 2***

Resolva as seguintes equações:

a) $\frac{7}{5}x+\frac{3}{7}x=256$

b) $\frac{3(x-2)}{2}+\frac{x+3}{4}=2$

c) $\frac{8(x-3)}{9}+\frac{3x-3}{3}=1$

d) $\frac{2x+8}{3}+\frac{x-3}{6}=\frac{10}{4}$

e) $\frac{x-10}{3}+\frac{x+3}{5}=\frac{12}{15}$

***Resposta comentada***

a) $\frac{7}{5}x+\frac{3}{7}x=256$

Primeiro passo: cálculo do mmc.

mmc (5, 7) = 35

$$\frac{49}{35}x+\frac{15}{35}x=\frac{8960}{35}$$

Eliminar os denominadores.

$49x + 15x = 8960$

$64x = 8960$

$x = 140$

$V = \{140\}$

b) $\frac{3(x-2)}{2}+\frac{x+3}{4}=2$

Primeiro passo: cálculo do mmc.

mmc (2, 4) = 4

$$\frac{6(x-2)}{4}+\frac{x+3}{4}=\frac{8}{4}$$

Eliminar os denominadores.

$6(x - 2) + x + 3 = 8$

$6x - 12 + x + 3 = 8$

$6x + x = 8 + 12 - 3$

$7x = 17$

$x = 17/7$

$V = \{17/7\}$

c) $\frac{8(x-3)}{9}+\frac{3x-3}{3}=1$

Primeiro passo: cálculo do mmc.

mmc (9, 3) = 9

$$\frac{8(x-3)}{9}+\frac{3(3x-3)}{9}=\frac{9}{9}$$

Eliminar os denominadores.

$8(x - 3) + 3(3x - 3) = 9$

$8x - 24 + 9x - 9 = 9$

$8x + 9x = 9 + 24 + 9$

$17x = 42$

$x = 42/17$

$x = 6$

$V = \{ 6 \}$

d) $\frac{2x+8}{3}+\frac{x-3}{6}=\frac{10}{4}$

Primeiro passo: cálculo do mmc.

mmc (3, 6, 4) = 12

$$\frac{4(2x+8)}{12}+\frac{2(x-3)}{12}=\frac{30}{12}$$

Eliminar os denominadores.

$4(2x + 8) + 2(x - 3) = 30$

$8x + 32 + 2x - 6 = 30$

$8x + 2x = 30 - 32 + 6$

$10x = 4$

$x = 4/10 = 2/5$

$V = \{2/5\}$

e) $\frac{x-10}{3}+\frac{x+3}{5}=\frac{12}{15}$

Primeiro passo: cálculo do mmc.

mmc (3, 5, 15) = 15

$$\frac{5(x-10)}{15}+\frac{3(x+3)}{15}=\frac{12}{15}$$

Eliminar os denominadores

$5(x - 10) + 3(x + 3) = 12$

$5x - 50 + 3x + 9 = 12$

$8x = 12 + 50 - 9$

$8x = 53$

$x = 53/8$

$V = \{53/8\}$

## Equação sem solução

Às vezes, uma equação não tem solução. Nesse caso, dizemos que ela é impossível ou que a solução é vazia.

Exemplo:

Resolver a equação.

$3x + 5 = 3(x + 4)$

$3x + 5 = 3x + 12$

$3x - 3x = 12 - 5$

$0x = 7$

Essa sentença é sempre falsa, pois não existe nenhum número que multiplicado por 0 resulte em 7.

$V = \varnothing$

## Equação com infinitas soluções

Há casos em que todos os números do universo considerado são raízes da equação. Dizemos que ela tem infinitas soluções.

$$\frac{3x-3}{6}=\frac{x-1}{2}$$

mmc (6, 2) = 6

$$\frac{3x-3}{6}=\frac{3(x-1)}{6}$$

$3x - 3 = 3(x - 1)$

$3x - 3 = 3x - 3$

$3x - 3x = -3 + 3$

$0x = 0$

Essa sentença é sempre verdadeira, pois qualquer número multiplicado por zero é igual a zero. Então, a equação tem infinitas soluções.

$0x = k$, onde k é uma constante numérica diferente de zero e representa uma equação impossível.

$0x = 0$ representa uma equação indeterminada, isto é, admite infinitas soluções. Qualquer número real multiplicado por zero resulta em zero.

## Atividade 4

***Atende ao objetivo 2***

Resolva em R:

a) $2 \cdot (6x - 4) = 3 \cdot (4x - 1)$

b) $10 - 3x - 8 = 2 - 3x$

c) $-\left(\frac{5}{2}x + 1\right) = 2\left(3 - \frac{5}{4}x\right)$

d) $0{,}5x - 2{,}3 + x = -(2{,}3 - 1{,}5x)$

### *Resposta comentada*

a) $2 \cdot (6x - 4) = 3 \cdot (4x - 1)$

$12x - 8 = 12x - 3$

$12x - 12x = -3 + 8$

$0x = 5$

$V = \varnothing$

b) $10 - 3x - 8 = 2 - 3x$

$-3x + 3x = 2 - 10 + 8$

$0x = 0$

$V = R$

c) $-\left(\frac{5}{2}x + 1\right) = 2\left(3 - \frac{5}{4}x\right)$

$-\frac{5}{2}x - 1 = 6 - \frac{10}{4}x$

mmc (2, 4) = 4

$-\frac{10}{4}x - \frac{4}{4} = \frac{24}{4} - \frac{10}{4}x$

$-10x - 4 = 24 - 10x$

$-10x + 10x = 24 + 4$

$0x = 28$

$V = \varnothing$

d) $0,5x - 2,3 + x = -(2,3 - 1,5x)$

$0,5x - 2,3 + x = -2,3 + 1,5x$

$0,5x + x - 1,5x = -2,3 + 2,3$

$0x = 0$

$V = R$

## Equações: modelos de representação de problemas

Como vimos na introdução desta aula, um dos objetivos de estudarmos equações é o fato de elas servirem como modelo de representação de problemas. Vamos passar a traduzir situações por meio do uso de equações.

Exemplos:

a) Somando as idades de dois alunos, obtemos 55 anos. Sabe-se que um dos alunos é 15 anos mais velho que o outro. Calcule as duas idades.

Nesse enunciado, deseja-se conhecer a idade dos alunos. Ambas são desconhecidas, mas relacionadas.

Idade do aluno mais novo: $x$

Idade do aluno mais velho: $x + 15$

Assim,

$x + x + 15 = 55$

$2x = 55 - 15$

$2x = 40$

$x = 20$

O aluno mais novo tem 20 anos, e o mais velho, 35 anos.

b) Sérgio deseja comprar um presente especial para seu pai, que completa 70 anos. O presente custa R$ 250,00 e está sendo vendido sem juros com o seguinte plano de pagamento: uma entrada de R$ 70,00 e mais 4 prestações iguais. Qual é o valor de cada prestação?

Preço do presente: 250,00

Entrada: 70,00

Prestação: $x$

Plano de pagamento: $70 + 4x = 250$

$70 + 4x = 250$

$4x = 250 - 70$

$4x = 180$

$x = 45$

O valor de cada prestação é R$ 45,00.

c) Uma casa com 200 $m^2$ de área construída tem três quartos de mesmo tamanho. Qual é a área de cada quarto, se as outras dependências da casa ocupam 140$m^2$?

Neste problema, a variável é a área de cada quarto. O problema informa adicionalmente que todos os quartos têm a mesma área. Assim, esse problema tem apenas uma variável.

$3x + 140 = 200$, isto é, os três quartos mais a área das demais dependências da casa têm que ser igual à área total da casa.

Resolvendo, tem-se:

$3x + 140 - 140 = 200 - 140$

$3x = 60$

$x = 60/3$

$x = 20$

Resposta: cada quarto tem 20 $m^2$.

d) A população de uma cidade A é o triplo da população da cidade B. Se as duas cidades juntas têm uma população de 100.000 habitantes, quantos habitantes tem a cidade B?

Este problema, a princípio, apresenta duas variáveis: a população da cidade A e a da B. Contudo, o enunciado indica que há uma relação clara entre essas grandezas: a população de A é o triplo da população de B. Assim, com uma única variável, é possível representarmos essa situação.

$3x + x = 100.000$

$4x = 100.000$

$x = 25.000$

Reposta: a cidade B tem 25.000 habitantes.

e) Meu irmão é cinco anos mais velho do que eu. O triplo da minha idade somando ao dobro da idade dele dá 100 anos. Quais são as nossas idades?

Minha idade: x,

Idade de meu irmão: x + 5.

$3x + 2(x + 5) = 100$

$3x + 2x + 10 = 100$

$5x = 90$

$x = 18$

Resposta: minha idade é 18 anos, e a de meu irmão, 23 anos.

## Atividade 5

***Atende ao objetivo 3***

1. Uma pessoa retira R$ 70,00 de um banco, recebendo 10 notas, algumas de R$10,00 e outras de R$ 5,00. Calcule quantas notas de R$ 5,00 a pessoa recebeu.

2. A relação entre o preço de venda e a quantidade vendida (Q) de um produto é dada pela equação: $Q = 120 - 2p$. Determinar o preço *p* correspondente a 30 unidades de produtos vendidos.

3. Um produto teve seu preço aumentado em 20% para pagamento a prazo, resultando em um total de R$ 600,00. Qual era o preço à vista do produto?

4. Um aluno ganha 5 pontos por exercícios que acerta e perde 3 por exercício que erra. Ao fim de 50 exercícios, tinha 130 pontos. Quantos exercícios acertou?

### *Resposta comentada*

1.

Total de notas de R$ 5,00: x

Total de notas de R$ 10,00: 10 − x

$5x + 10(10 - x) = 70$

$5x + 100 - 10x = 70$

$-5x = -30$

$x = \frac{-30}{-5}$

$x = 6$

Resposta: a pessoa recebeu 6 notas.

2.

$Q = 120 - 2p$

O enunciado fornece a quantidade Q vendida. Assim, temos:

$30 = 120 - 2p$

$30 - 120 = -2p$

$-90 = -2p$

$p = 45$

Resposta: o preço correspondente a 30 unidades vendidas é R$ 45,00.

3.

Preço do produto: x

Preço aumentado: x + 20% de x

$$x + 0,20 \cdot x = 1,2x$$

$1,2x = 600$

$x = 600/(1,2)$

$x = 500$

Resposta: o preço à vista era R$ 500,00.

4.

Total de exercícios corretos: x

Total de exercícios errados: $50 - x$

$5x - 3(50 - x) = 130$

$5x - 150 + 3x = 130$

$5x + 3x = 130 + 150$

$8x = 280$

$x = 280/8 = 35$

Resposta: o aluno acertou 35 questões.

## Inequações do 1º grau

Relacionadas com as equações do 1º grau, existem as desigualdades do 1º grau ou inequações do 1º grau. Denomina-se inequação toda sentença matemática aberta expressa por uma desigualdade. Uma inequação pode ser expressa em uma das seguintes formas:

$$ax + b > 0;\ ax + b < 0;\ ax + b \geq 0;\ ax + b \leq 0;\ \text{onde } a, b \in R, \text{ com } a \neq 0.$$

Duas inequações têm mesmo sentido quando possuem o mesmo sinal de desigualdade.

## Método de solução

O método para resolução de uma inequação do 1 º grau é bastante similar ao da equação do 1º grau. Devemos destacar que, quando resolvemos uma desigualdade, nosso objetivo é encontrar um conjunto de todos os possíveis valores para a variável que satisfaçam a desigualdade.

A resolução de uma inequação do 1º grau é fundamentada nas propriedades da igualdade, descritas a seguir.

Princípio aditivo da desigualdade: ao adicionarmos um mesmo número aos dois membros de uma desigualdade, obtemos uma outra desigualdade de mesmo sentido.

Exemplos:

a)

$2 < 5$

$2 + 3 < 5 + 3$

$5 < 8$

b)

$-10 > -20$

$-10 + 2 > -20 + 2$

$-8 > -18$

c)

$-10 > -20$

$-10 - 2 > -20 - 2$

$-12 > -22$

Antes de enunciarmos o princípio multiplicativo, devemos lembrar que um número negativo é tanto maior quanto menor for seu módulo. Por outro lado, um número positivo é tanto maior quão maior for seu módulo.

$-1$ é maior que $-2$, $|-1| < |-2|$

10 é maior que 6, $|10| > |6|$

Princípio multiplicativo da desigualdade: uma desigualdade não altera seu sentido quando multiplicamos ou dividimos ambos os membros por um mesmo número positivo.

Princípio multiplicativo da desigualdade: uma desigualdade altera seu sentido quando multiplicamos ou dividimos ambos os membros por um mesmo número negativo.

A **Tabela 4.1** exemplifica as três possíveis situações que podem ocorrer quando multiplicamos um mesmo número pelos dois membros da desigualdade:

**Tabela 4.1:** Exemplos: Princípio Multiplicativo da Desigualdade

| Multiplicando por um número positivo | Multiplicando por um número negativo | Multiplicando pelo número zero |
|---|---|---|
| $2 < 4$<br>$2 \cdot (3) < 4 \cdot (3)$<br>$6 < 12$ | $3 > 2$<br>$3 . (-1) < 2 \cdot (-1)$<br>$-3 < -2$ | $2 < 4$<br>$2 \cdot 0 < 4 \cdot 0$<br>$0 = 0$ |

Exemplos:

a)

$8x + 15 < 55$

Devemos inicialmente subtrair 15 de cada um dos membros da inequação.

$8x + 15 - 15 < 55 - 15$

$8x < 40$

Como queremos o valor de x e não o de 8x, iremos dividir ambos os membros por 8, obtendo:

$x < 5$.

Como nada foi dito sobre o conjunto universo, entende-se que U = R, daí:

$V = \{x \in R \mid x < 5\}$.

Esta resposta pode ser visualizada na reta real, conforme apresentado na Aula 1.

b)

$3(x + 1) - 3 \geq x + 4$

Primeiramente, eliminamos os parênteses:

$3x + 3 - 3 \geq x + 4.$

Em seguida, devemos isolar a variável no membro à esquerda e as constantes numéricas à direita.

$3x - x \geq 4 - 3 + 3$

$2x \geq 4$

$x \geq 2$

Assim, o conjunto solução é dado por:

$V = \{x \in R \mid x \geq 2\}.$


c)

$$\frac{5x}{4} + \frac{x}{2} \leq 2x - 1$$

$$\frac{5x}{4} + \frac{2x}{4} \leq \frac{4(2x-1)}{4}$$

$5x + 2x \leq 4(2x - 1)$

$7x \leq 8x - 4$

$7x - 8x \leq -4$

$-x \leq -4$

$-x\,(-1) \leq -4(-1)$

$x \geq 4$

$V = \{x \in R \mid x \geq 4\}$

## *Atividade 6*

***Atende ao objetivo 4***

1. Resolva as inequações:

a) $x - 4(x - 1) \leq 19$

b) $3(x + 2) > 2(2x + 4)$

c) $\frac{x}{2} + 1 < \frac{5}{3} - x$

d) $\frac{x+2}{10} - 1 \leq \frac{1-x}{4}$

e) $\frac{x+6}{3} - \frac{2x+3}{4} \geq \frac{x+5}{2}$

2. Quais são, em Z, as três menores soluções da inequação $\frac{5x-1}{6} - \frac{x}{2}1 \geq 1$?

### *Resposta comentada*

a) $x - 4(x - 1) \leq 19$

Iniciaremos aplicando a propriedade distributiva:

$x - 4x + 4 \leq 19$

$x - 4x \leq 19 - 4$

$-3x \leq 15$

Dividindo ambos os membros por $-3$, temos:

$x \geq -5$

Observe que, como dividimos ambos os membros por um número negativo, o sinal da desigualdade foi invertido.

$V = \{x \in R \mid x \geq -5\}$

b) $3(x + 2) > 2(2x + 4)$

Mais uma vez, começaremos aplicando a propriedade distributiva:

$3x + 6 > 4x + 8$

$3x - 4x > 8 - 6$

$-x > 2$

Multiplicando ambos os membros por $-1$, temos:

$x < 2$

$V = \{x \in R \mid x < 2\}$

c) $\frac{x}{2}+1<\frac{5}{3}-x$

Como essa inequação apresenta frações, o primeiro passo é o cálculo do mmc:

mmc (2, 3) = 6

$$\frac{3x}{6}+\frac{6}{6}<\frac{10}{6}-\frac{6x}{6}$$

Após essa etapa, podemos eliminar os denominadores:

$3x + 6 < 10 - 6x$

$3x + 6x < 10 - 6$

$9x < 4$

$x < 4/9$

$V = \{x \in R \mid x < 4/9\}$

d) $\frac{x+2}{10}-1\leq\frac{1-x}{4}$

mmc (10, 4) = 20

$$\frac{2(x+2)}{20}-\frac{20}{20}\leq\frac{5(1-x)}{20}$$

$2(x + 2) - 20 \leq 5(1 - x)$

$2x + 4 - 20 \leq 5 - 5x$

$2x + 5x \leq 5 - 4 + 20$

$7x \leq 21$

$x \leq 3$

$V = \{x \in R \mid x \leq 3\}$

e) $\frac{x+6}{3}-\frac{2x+3}{4}\geq\frac{x+5}{2}$

mmc (3, 4, 2) = 12

$$\frac{4(x+6)}{12}-\frac{3(2x+3}{12}\geq\frac{6(x+5)}{12}$$

$4(x + 6) - 3(2x + 3) \geq 6(x + 5)$

$4x + 24 - 6x - 9 \geq 6x + 30$

$4x - 6x - 6x \geq 30 - 24 + 9$

$-8x \geq 15$

$x \leq -15/8$

$V = \{x \in R \mid x \leq -15/8\}$

2. $\frac{5x-1}{6} = \frac{x}{2} \geq 1$

Como esta inequação apresenta frações, o primeiro passo é o cálculo do mmc.

mmc (6, 2) = 6

$$\frac{5x-1}{6} = \frac{3x}{6} \geq \frac{6}{6}$$

$5x-1-3x \geq 6$

$5x-3x \geq 6+1$

$$x \geq \frac{7}{2}$$

$$x \geq 3 + \frac{1}{2}$$

Então, em Z, as três menores soluções da inequação são: 4, 5 e 6.

A resolução de problemas requer a adoção de estratégias adequadas que permitam obter as soluções procuradas. A interpretação e a representação de situações diversas usando equações e inequações do 1º grau constituem um importante primeiro passo no desenvolvimento da nossa capacidade geral de abstrair e resolver problemas. A próxima atividade resume todo o nosso aprendizado desta aula.

## Atividade final

***Atende aos objetivos 3 e 4***

1. Carlos trabalha em um determinado setor numa indústria de carros. Ele recebe um salário fixo mensal de R$ 2.000,00 mais R$ 20,00 por hora extra trabalhada.

a) Quantas horas extras ele deverá realizar em um mês em que precise contabilizar R$ 600,00 a mais em seu salário?

b) Quantas horas extras ele deverá realizar, no mínimo, em um mês em que precise contabilizar, pelo menos, R$ 450,00 a mais em seu salário?

2. Uma aluna tem um saldo bancário de R$ 1.000,00. Ao chegar a uma agência bancária para realizar um saque, ela lê um aviso que informa que os caixas eletrônicos só fornecem cédulas de R$ 50,00. Quantas notas de R$50,00 ela irá receber no máximo, se não deseja que seu saldo seja inferior a R$ 420,00?

### *Resposta comentada*

1.

a) Variável: nº de horas extras no mês

$2000 + 20x = 2600$

$20x = 2600 - 2000$

$20x = 600$

$x = 30$

Ele deverá trabalhar 30 horas extras ao todo ao longo do mês.

b) Variável: nº de horas extras no mês

$20x \geq 450$

$x \geq 22,5$

Ele deverá trabalhar no mínimo 22,5 horas extras ao todo ao longo do mês.

2.

Variável: nº de cédulas de R$ 50,00

$1.000 - 50x \geq 420$

Isto é, o saldo atual menos a quantia total sacada (50x) tem que ser maior ou igual a R$ 420,00.

$-50x \geq 420 - 1000$

$-50x \geq -580$

$x \geq 11,6$

Isto é, no máximo 11,6 notas poderão ser sacadas. Como não há interpretação prática para a parte decimal, no máximo 11 notas poderão ser sacadas.

## Resumo

Uma análise cuidadosa das equações resolvidas ao longo desta aula nos permite observar que, normalmente, a penúltima linha encontrada na resolução é uma igualdade na forma $ax = b$.

Na prática, quando resolvemos uma equação do 1º grau, transpomos todos os termos que contêm incógnitas para o primeiro membro e todos os que não contêm para o segundo membro. Isso é feito com base nos princípios aditivo e multiplicativo.

A resolução de uma inequação é feita exatamente como uma equação do 1º grau. A única diferença ocorre quando é preciso multiplicá-la ou dividi-la por um número negativo. Nesse caso, e apenas nesse, ela muda de sentido.

# Aula 5

## Equações do 2º grau

*Eliane Ribeiro Pereira*
*Maria Cecília De Carvalho Chaves*

## Meta

Apresentar o conceito de equações do 2º grau.

## Objetivos

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. definir equação do 2ª grau e identificar a(s) raiz(es) da equação;
2. reconhecer e aplicar procedimentos para resolução de uma equação do 2º grau;
3. identificar a relação entre os coeficientes e as raízes de uma equação do 2º grau;
4. analisar e resolver problemas que envolvam equações do 2º grau.

## Introdução

Como vimos na aula anterior, equação é uma maneira de resolver situações nas quais surgem valores desconhecidos quando se tem uma igualdade. Qual é a diferença entre uma equação de 1º grau e uma de 2º grau? O que determina o grau de uma equação é o expoente (a potência) da incógnita (a letra, geralmente x e y). Nas equações de 2º grau, o maior expoente da incógnita é 2; nas equações de 1º grau, o maior expoente da incógnita é 1.

A resolução das equações do 2º grau é feita por intermédio de uma expressão matemática desenvolvida a partir do trabalho de diferentes pesquisadores das mais diversas nacionalidades, entre egípcios, indianos, gregos e babilônios, que utilizavam técnicas que permitiam resolver essas equações.

O primeiro registro de que se tem notícia das equações do 2º grau foi feito pelos babilônios. Com uma álgebra bastante desenvolvida, eles utilizavam métodos semelhantes aos atuais, ou o método de completar quadrados.

Até o fim do século XVI, as raízes das equações do 2º grau não eram obtidas a partir de uma fórmula, pois os seus coeficientes não eram representados por letras. Foi o francês Viète que introduziu as letras como símbolos nas equações, contribuindo para a modernização da álgebra. Seus trabalhos inspiraram, mais tarde, o francês René Descartes.

**Figura 5.1:** Viète

Fonte http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Francois_Viete.jpg

**Figura 5.2:** René Descartes
Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Frans_Hals_-_Portret_van_Ren%C3%A9_Descartes.jpg

A fórmula para resolução de equações do 2º grau foi obtida pelo matemático hindu Sridhara, pelo menos um século antes da publicação de Bhaskara, que dá nome à expressão no Brasil.

Ainda hoje, pesquisas são realizadas com o intuito de descobrir novas maneiras de resolver equações do 2º grau.

Bhaskara Akaria (1114-1185) foi um indiano oriundo de uma família de astrólogos. Ele seguiu a vocação familiar, aliando uma orientação científica à astrologia. Escreveu um famoso livro intitulado *Lilavati*, cuja tradução é Graciosa, levando estudiosos a pensarem que tal nome teria sido uma alusão aos métodos da Aritmética.

No Brasil, na década de 60, deu-se o nome de Bhaskara para a fórmula de resolução da equação do 2º grau, prática não adotada internacionalmente. Todavia, essa fórmula não foi desenvolvida por ele. Problemas que recaem numa equação do 2º grau já eram encontrados há cerca de 4 mil anos antes de Bhaskara em textos dos babilônios. Esses textos eram escritos na forma de regras, sem o uso de símbolos, só introduzidos no final do século XVI, com Viète.

A grande contribuição de Bhaskara se deu com as equações indeterminadas do 2º grau, em especial com a invenção do método iterativo do *chakravala* e a modificação do clássico método *kuttaka*, que podem ser considerados como o ápice da Matemática indiana clássica.

## Sentenças matemáticas e equações

Como vimos no capítulo anterior, existem sentenças matemáticas fechadas (Ex.: $2 + 3 = 5$) e sentenças matemáticas abertas (Ex.: $x^2 - 4 = 0$), que podem ser classificadas como verdadeiras ou falsas, de acordo com o valor atribuído a x, chamado de incógnita ou variável**.**

Vimos também que existem inúmeros tipos de equações na Matemática. Nesta aula, estamos interessados em estudar as equações do 2º grau.

## Equação do 2º grau

Denomina-se equação do 2° grau qualquer sentença matemática que possa ser reduzida à forma $ax^2 + bx + c= 0$, em que x é a incógnita e *a*, *b* e *c* são números reais, com $a \neq 0$. Diz-se que *a*, *b* e *c* são coeficientes da equação. Note que o maior índice da incógnita na equação é igual a 2, e é isso que a define como uma equação do 2º grau.

Uma equação do 2º grau tem, então, a seguinte forma:

$ax^2 + bx + c = 0$

em que:

*a, b e c* são as constantes da equação, com $a \neq 0$ (diferente de zero)

*x*, variável ou incógnita

Note que $a \neq 0$ é fundamental na definição da equação do 2o grau, pois se $a = 0$ a equação $ax^2 + bx + c = 0$ é reduzida à equação $bx + c = 0$, que é uma equação do 1º grau se $b \neq 0$.

Exemplos:

a) Na equação $7x^2 - 3x + 2 = 0$, temos $a = 7$, $b = -3$ e $c = 2$;

b) Na equação $x^2 - 4 = 0$, temos $a = 1$, $b = 0$ e $c = -4$;

c) Na equação $3x^2 + 5x = 0$, temos $a = 3$, $b = 5$ e $c = 0$.

## Raiz de uma equação do 2º grau

Vimos que se chama raiz da equação cada um dos valores que, colocados no lugar da incógnita, transformam a equação em uma sentença verdadeira. Para verificarmos se um dado número é ou não raiz de uma equação, basta substituirmos a incógnita por esse número e observarmos se a sentença obtida é ou não verdadeira. Se a raiz da equação pertencer ao conjunto universo, esse valor pertencerá ao conjunto verdade da equação.

Portanto, ao resultado da raiz dá-se o nome de conjunto verdade (V) ou conjunto solução (S).

Exemplos:

a) Verificar se 2 é raiz da equação $x^2 - 4 = 0$.

$2^2 - 4 = 0$

$4 - 4 = 0$

$0 = 0$, que é verdadeiro. Logo, 2 é raiz da equação ou $S = \{2\}$.

b) Verificar se $-2$ é raiz da equação $x^2 - 4 = 0$.

$(-2)^2 - 4 = 0$

$4 - 4 = 0$

$0 = 0$, que é verdadeiro. Logo, $-2$ é raiz da equação ou $S = \{-2\}$.

Este exemplo nos mostra que a equação $x^2 - 4 = 0$ tem mais de uma raiz.

As equações do 2º grau podem ter até duas raízes, ou seja, até dois valores diferentes de x que, ao serem substituídos na equação, podem torná-la verdadeira.

## Atividade 1

**_Atende ao Objetivo 1_**

1. Verifique se o número 4 é raiz da equação $9x^2 - 4 = 8 + 6x$.

2. Verifique se o número $-3$ é raiz da equação $2x^2 - 3x + 5 = 3x^2 + 5$.

3. Considere a equação $x^2 + 2x + 4 = 7 - 7x/2$. Sendo U = R, $x = ½$ é raiz da equação? E se U = N? Justifique.

### *Resposta comentada*

1. Para fazer a verificação, basta substituir o valor dado para a variável na equação. Sendo:

$9x^2 - 4 = 8 + 6x$

$9 \cdot 4^2 - 4 = 8 + 6.4$

$9 \cdot 16 - 4 = 8 + 24$

$144 - 4 = 32$

$140 = 32$, falso

Logo, $x = 4$ não é raiz da equação.

2.

$2x^2 - 3x + 5 = 3x^2 + 5$

$2 \cdot (-3)^2 - 3 \cdot (-3) + 5 = 3 \cdot (-3)^2 + 5$

$2 \cdot 9 + 9 + 5 = 3 \cdot 9 + 5$

$18 + 14 = 27 + 5$

$32 = 32$, verdadeiro

Logo, $x = -3$ é raiz da equação.

3.

$x^2 + 2x + 4 = 7 - 7x/2$

$(1/2)^2 + 2 \cdot (1/2) + 4 = 7 - 7 \cdot (1/2)/2$

$1/4 + 1 + 4 = 7 - 7/2 \cdot 1/2$

$1/4 + 5 = 7 - 7/4$

$(1 + 20)/4 = (28 - 7)/4$

$21/4 = 21/4$, verdadeiro

Logo, $x = ½$ é raiz da equação considerando U = R, mas não é se U = N, pois $½ \notin N$.

## Método de solução

Resolver uma equação do 2º grau em um determinado conjunto universo significa determinar a raiz ou conjunto solução dessa equação, caso exista solução.

O fundamento usado para obter a fórmula geral para resolução da equação de segundo grau foi buscar reduzir essa equação a uma do 1º grau, por meio da extração de raízes quadradas de ambos os membros da mesma.

A fórmula geral de Bhaskara é dada por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Lembrando que a equação do 2º grau pode ter até duas raízes, o que se deseja é identificar tais raízes.

No segundo membro da fórmula, $\Delta = b^2 - 4ac$ é chamado discriminante da equação.

Observando o discriminante, é possível perceber que:

a) Se $b^2 - 4ac > 0$, a fórmula de Bhaskara terá duas raízes reais ($x_1$ e $x_2$), que serão obtidas a partir da fórmula geral:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

b) Se $b^2 - 4ac = 0$, a fórmula geral de Bhaskara fica reduzida a:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Nesse caso, a equação terá apenas uma raiz.

c) Se b2 – 4ac < 0, não é possível encontrar um número real que satisfaça a fórmula geral de Bhaskara.

Nesse caso, a equação não terá nenhuma raiz real.

Em resumo, podemos dizer que:

a) $\Delta > 0$, a equação tem 2 raízes reais.

b) $\Delta = 0$, a equação tem 1 raiz real.

c) $\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais.

Exemplo:

a) Vamos encontrar as raízes da equação: $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Temos $a = 1$, $b = 2$ e $c = -3$, então:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.(-3)}}{2.1} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} =$$

$$x_1 = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$S = \{-1, 3\}$

b) Vamos encontrar as raízes da equação: $x^2 - 2x + 1 = 0$.

Temos $a = 1$, $b = -2$ e $c = 1$, então:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.1}}{2.1} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{2-0}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$S = \{1\}$

c) Vamos encontrar as raízes da equação: $x^2 + 2x + 3 = 0$.

Temos $a = 1$, $b = 2$ e $c = 3$, então:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.(3)}}{2.1} = \frac{2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

Como $\Delta < 0$, essa equação não terá raízes.

$S = \varnothing$

## *Atividade 2*

***Atende ao objetivo 2***

Resolva as equações a seguir, definidas para todos os valores de x pertencentes ao conjunto R:

a) $-(3x^2 - 27) = 0$;

b) $7x^2 - 9 = 2x - 16$;

c) $-(8 - 4x^2 - 7x) = 2x + 7$;

d) $6(x^2 - 5) - 2(4x + 2) = 10$.

***Resposta comentada***

a) $-(3x^2 - 27) = 0$

Aplicando a propriedade distributiva, temos: $-3x^2 + 27 = 0$.

Nessa equação, $a = -3$, $b = 0$ e $c = 27$. Calcularemos primeiramente o valor de $\Delta$:

$\Delta = 0^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 27 = 12 \cdot 27 = 324$

Como $\Delta > 0$, essa equação terá 2 raízes reais:

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{324}}{2.(-3)} = \frac{\pm 18}{-6}$$

$$x_1 = \frac{+18}{-6} = -3 \text{ e } x_2 = \frac{-18}{-6} = 3$$

$S = \{-3, 3\}$

b) $7x^2 - 9 = 2x - 16$

Resolvendo a equação, iremos colocar todos os termos no primeiro membro:

$7x^2 - 9 = 2x - 16$

$7x^2 - 9 - 2x + 16 = 0$

$7x^2 - 2x + 7 = 0$

Então, $a = 7$, $b = -2$ e $c = 7$. Calculando o valor de $\Delta$, temos:

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 7 = 4 - 196 = -192$

Como $\Delta < 0$, essa equação não possui raízes.

c) $-(8 - 4x^2 - 7x) = 2x + 7$;

Nesse caso, o primeiro passo é eliminar os parênteses e, a seguir, passar todos os termos para o primeiro membro:

$-(8 - 4x^2 - 7x) = 2x + 7$

$-8 + 4x^2 + 7x - 2x - 7 = 0$

$4x^2 + 5x - 15 = 0$

Então, $a = 4$, $b = 5$ e $c = -15$. Calculando o valor de $\Delta$, temos:

$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-15) = 25 + 240 = 265$

Como $\Delta > 0$, vamos calcular os valores das raízes:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{265}}{2.4} = \frac{-5 \pm 16,28}{8}$$

$$x_1 = \frac{-5 + 16,28}{8} = \frac{11,28}{8} \cong 1,41 \text{ e } x_2 = \frac{-5 - 16,28}{8} = \frac{-21,28}{8} \cong 2,66$$

d) $6(x^2 - 5) - 2(4x + 2) = 10$

$6x^2 - 30 - 8x - 4 - 10 = 0$

$6x^2 - 8x - 44 = 0$

Nessa equação, $a = 6$, $b = -8$ e $c = -44$. Calculando o valor de $\Delta$, temos:

$\Delta = (-8)^2 - 4 . 6 . (-44) = 64 + 1056 = 1120$

Como $\Delta > 0$, vamos calcular os valores das raízes:

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{1120}}{2.6} = \frac{8 \pm 33,47}{12}$$

$$x_1 = \frac{8 + 33,47}{12} = \frac{41,47}{12} \cong 3,46 \text{ e } x_2 = \frac{8 - 33,47}{12} = \frac{-25,47}{12} \cong -2,12$$

## Relação entre os coeficientes e as raízes de uma equação do 2º grau

O conhecimento da relação dos coeficientes da equação do 2º grau com suas raízes pode nos ajudar na sua solução.

Vamos começar analisando as raízes da equação geral $ax^2 + bx + c = 0$. Sendo $\Delta = b^2 - 4ac$, temos:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se calcularmos a soma (S) dessas raízes, teremos:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

Se calcularmos o produto (P) dessas raízes, teremos:

$$P = x_1 . x_2 = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a} . \frac{(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a} = \frac{b^2 + b\sqrt{b^2 - 4ac} - b\sqrt{b^2 - 4ac} - (b^2 - 4ac)}{(2a)^2} =$$

$$= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Como podemos ver, tanto a soma quanto o produto das raízes da equação do 2º grau têm como quociente o coeficiente *a*. Assim, se dividirmos cada membro da equação geral pelo coeficiente *a*, teremos:

$$\frac{a}{a}x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \frac{0}{a} \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Como vimos, a soma das raízes $S = -\,b/a$ e o produto das raízes $P = c/a$. Note que o coeficiente de x é igual a $-S$ e a constante é igual a P. Logo, podemos escrever a equação geral do 2º grau da seguinte forma:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Assim, conhecidas as suas raízes, podemos obter uma equação do 2º grau.

Exemplo:

Escreva a equação do 2º grau cujas raízes são 3 e 4.

$S = 3 + 4 = 7$

$P = 3 \cdot 4 = 12$

Considerando que $x^2 - Sx + P = 0$, temos a equação: $x^2 - 7x + 12 = 0$

Determine as raízes da equação $x^2 - 2x + 1 = 0$, considerando a relação entre as raízes e os coeficientes da equação.

$S = x_1 + x_2 = -\,(-2)/1$

$P = x_1 \cdot x_2 = 1/1$

Resolvendo-se o sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = 1 \end{cases}$$

encontramos $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$.

## *Atividade 3*

***Atende ao objetivo 3***

Resolva as questões a seguir em R, identificando a relação entre os coeficientes e as raízes de uma equação do 2º grau.

a) $x^2 - 5x + 4 = 0$

b) $x^2 - 9 = 0$

c) $2x^2 - 3x = 0$

## *Resposta comentada*

a) $x^2 - 5x + 4 = 0$

Neste caso, $a = 1$, $b = -5$ e $c = 4$. Vimos que $S = -b/a$ e $P = c/a$, isto é:

$S = -(-5)/1 = 5$

$P = 4/1 = 4$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 \cdot x_2 = 4 \end{cases}$$

Logo, $x_1 = 1$ e $x_2 = 4$.

b) $x^2 - 9 = 0$

Quando temos a equação incompleta, podemos resolver a equação do 2º grau apenas separando a variável da equação no primeiro termo e a constante no lado direito:

$x^2 = 9$

$x = \sqrt{9} = \pm 3$

Logo, $x_1 = 3$ e $x_2 = -3$.

c) $2x^2 - 3x = 0$

$x (2x - 3) = 0$

$x = 0$ ou

$2x - 3 = 0$

$2x = 3$

$x = 3/2$

Logo, $x_1 = 0$ e $x_2 = 3/2$

## Equações do 2º grau: modelos de representação de problemas

Já vimos anteriormente que as equações servem como modelo de representação de problemas. Vamos, mais uma vez, traduzir situações por meio do uso de equações. Vamos nos concentrar na construção modelos com enfoque na resolução de situações relacionadas à gestão de processos produtivos.

Exemplo:

1. Sabemos que o custo C para produzir *x* unidades de certo produto é dado por $C(x) = x^2 - 14x + 40$. Deseja-se investigar o custo de produzir 100 unidades.

Sendo *x* o número de unidades a serem produzidas. Como o custo de produção é dado por $C(x) = x^2 - 14x + 40$, para produzir 100 unidades, o custo total será de $C(100) = 100^2 - 14 \cdot 100 + 40 = 10.000 - 1400 + 40 =$ R\$ 8.640,00. Logo, o custo de produzir 100 unidades é igual a R\$ 8.640,00.

Como visto na aula anterior, resolver problemas requer a adoção de estratégias adequadas que permitam obter as soluções procuradas. Interpretar e representar situações usando equações e inequações ajuda a desenvolver nossa capacidade de abstração e resolução de problemas. A atividade a seguir ajudará a fixar os conteúdos abordados nesta aula.

## Atividade 4

***Atende ao objetivo 4***

1. A receita (R) diária de um escritório de contabilidade é $R = p^2 - 20\,p$, em que p é o preço cobrado por serviço realizado. Que preço deve ser cobrado para obtermos uma receita diária de R$ 28.800,00?

2. O lucro total de uma empresa é dado pela diferença entre a sua receita total (R) e seu custo total (C), isto é, $L = R - C$. Numa empresa em que se produz *x* unidades, verificamos que sua receita é dada por $R(x) = 2x^2 - 600\,x$, e seu custo total, por $C(x) = x^2 - 1500\,x$. Quantas unidades a empresa deve produzir para que seu lucro seja de R$ 80.524,00?

3. A venda de *x* milhares de unidades de um determinado *software* produzido para microcomputadores gera uma receita dada por $R = x^2 + 11x$ unidades monetárias. O custo para produzir essas unidades é dado por $C = x^2/8 - 16$ unidades monetárias. Determine:

a) a receita da empresa para a produção de 1.500 unidades;

b) o custo para a produção de 1.500 unidades;

c) o lucro da empresa para a produção de 1.500 unidades.

### Resposta comentada

1. Sendo R = $p^2 - 20$ p, para descobrirmos o preço, basta igualar a equação à receita pretendida e resolver a equação resultante, ou seja:

$p^2 - 20\ p = 28.800$

$p^2 - 20\ p - 28.800 = 0$

Resolvendo a equação, encontramos $x_1 = 180$ e $x_2 = -160$. Como não faz sentido pensarmos em um preço negativo, o preço buscado é R$ 180,00.

2. Neste caso, tanto a receita total quanto o custo total variam de acordo com o número de unidades *x* produzidas. Precisamos, inicialmente, calcular a função lucro. Para tanto, basta fazer a diferença entre as funções receita e custo:

$L = R - C = 2x^2 - 600x - (x^2 - 1500x) = 2x^2 - 600x - x^2 + 1500x = x^2 + 900x.$

O próximo passo é igualar a função lucro ao valor que se deseja atingir, e resolvê-la:

$x^2 + 900x = 80.524$

$x^2 + 900x - 80.524 = 0$

$\Delta = 810000 - 4 \cdot 1 \cdot (-80.524) = 810.000 + 322.096 = 1132096$

$$x = \frac{-900 \pm \sqrt{1132096}}{2.1} = \frac{-900 \pm 1064}{2}$$

$$x_1 = \frac{-900 + 1064}{2} = 82 \qquad x_2 = \frac{-900 - 1064}{2} = -982$$

Como não faz sentido produzir uma quantidade negativa de produtos, a empresa deve produzir 82 unidades para obter um lucro de R$ 80.524,00.

3. Como conhecemos a equação da receita total e do custo total da empresa para a produção de x unidades de produto, basta substituir o número de unidades desejadas (no caso, 1.500 unidades) em cada equação:

a) Como a equação da receita total da empresa é dada por R(x) =

$x^2 + 11x$, substituímos *x* por 1.500: $R(1.500) = (1.500)^2 + 11.\ 1.500 = 2.266.500$. Logo, a receita total para a produção de 1.500 unidades será de R$ 2.266.500,00.

b) A equação de custo total da empresa é $C(x) = x^2/8 - 16$, ou seja, $C(1.500) = (1.500)^2/8 - 16 = 281.234$. Logo, o custo total para a produção de 1.500 unidades será de R$ 281.234,00.

c) Como já vimos, o lucro total é dado pela diferença entre a receita e o custo. Assim, o lucro total para a produção de 1.500 unidades será: $L = 2.266.500 - 281.234 = 1.985.266$. Assim, o lucro total para a produção de 1.500 unidades será de R$ 1.985.266,00.

## Conclusão

Como vimos nos exemplos apresentados, em nosso cotidiano, estamos sempre nos deparando com situações que envolvem conceitos matemáticos. As equações de 2º grau são muito importantes, pois podem ser utilizadas para solucionar inúmeras situações práticas.

Ao se deparar com a necessidade de descobrir valores desconhecidos, a construção de equações o ajudará a resolver seu problema. Quando a equação construída tiver grau 2, você poderá contar com uma expressão matemática desenvolvida a partir do trabalho de diferentes pesquisadores para resolvê-la: a expressão conhecida no Brasil como Fórmula de Bhaskara.

As técnicas de resolução de equações discutidas neste capítulo vão ajudar você a encontrar a solução buscada.

## Resumo

Nesta aula, estudamos equações do 2º grau, abordando, inicialmente, a sua forma geral: $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, pois, caso $a = 0$, a primeira parcela da equação daria zero e cairíamos em uma equação do 1º grau, estudada na aula anterior.

Vimos que toda equação do segundo grau tem, no máximo, duas raízes (ou dois zeros), obtidas a partir da seguinte fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ sendo } \Delta = b^2 - 4ac$$

Para sabermos quantas raízes a equação terá, precisamos verificar se:

$\Delta < 0 \rightarrow$ a equação não terá raízes reais;

$\Delta = 0 \rightarrow$ a equação terá duas raízes reais iguais;

$\Delta > 0 \rightarrow$ a equação terá duas raízes reais e distintas.

Por vezes, a equação não está escrita na sua forma completa, permitindo que sua resolução se dê de forma mais rápida:

Se $b = 0$, a equação geral ficará: $ax^2 + c = 0$, permitindo sua resolução direta:

$ax^2 = -c$

$x^2 = -c/a$

$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Note que se $-c/a > 0$, a equação terá duas raízes reais e distintas; e se $-c/a < 0$, a equação não terá raízes reais.

Se $c = 0$, a equação geral ficará: $ax^2 + bx = 0$, cuja resolução direta será feita da seguinte forma:

$ax^2 + bx = 0$

$x \cdot (ax + b) = 0$

Como é um produto, temos que $x = 0$, ou $(ax + b) = 0$

$ax = -b$

$x = -b/a$

Portanto, neste caso, uma das raízes é sempre nula, e a outra, igual a $-b/a$.

Os conceitos que estudamos aqui serão muito importantes em nossas próximas aulas. Assim, não deixe de rever todas as atividades até sentir-se totalmente seguro para seguir adiante.

# Aula 6

## Razões, proporções e regra de três

*Eliane Ribeiro Pereira*
*Maria Cecília De Carvalho Chaves*

## Meta

Apresentar os conceitos de razão, proporção e regra de três.

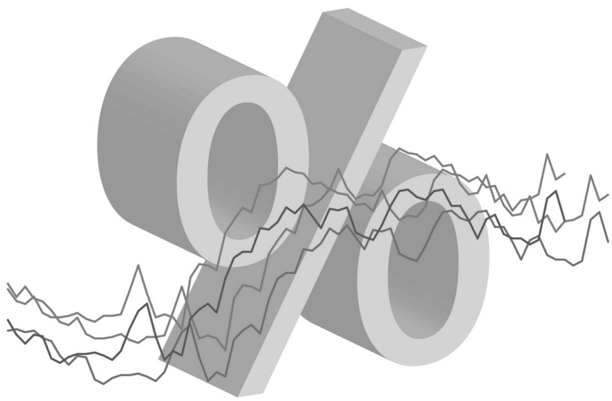
## Objetivos

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. definir razões, porcentagens e proporções matematicamente;
2. representar matematicamente situações reais, por meio de razões, porcentagens e proporções;
3. identificar as variações das grandezas direta e inversamente proporcionais;
4. expressar a relação das variações direta e inversamente proporcionais, por meio de uma sentença algébrica (regra de três).

## Introdução

Nesta aula, você vai aprender os conceitos e aplicações das razões e das proporções e vai ver também como esses conceitos se relacionam com as porcentagens. Tanto as razões como as proporções têm aplicação frequente em situações cotidianas, sendo as porcentagens um exemplo de aplicação usual em nosso cotidiano. A regra de três é apresentada como uma extensão do conceito de grandezas direta e inversamente proporcionais, que também são fundamentais no nosso dia a dia, assim como em diversas aplicações matemáticas.



Fonte: http://www.sxc.hu/photo/1420328

## Grandezas e medidas

Fonte: http://www.sxc.hu/photo/1046106; http://www.sxc.hu/photo/909551; http://www.sxc.hu/photo/480396.

Muitas das nossas atividades envolvem medidas. A Física, a Química e tantas outras áreas do conhecimento baseiam-se na medição. Todos temos certa noção do que seja medir. Um feirante não comercializa seus produtos sem uma balança, um médico mede a pressão arterial, um operário calcula o total de azulejos necessários para reformar um banheiro etc. Há diferentes coisas que podem ser medidas. Tudo o que pode ser medido é denominado grandeza. Medir é comparar uma quantidade de uma grandeza qualquer com outra quantidade da mesma grandeza, que se escolhe como unidade.

## Razão

Denomina-se razão de dois números A e B, $B \neq 0$, o quociente formado por eles nessa ordem, isto é, a razão de A para B é denotada por $A/B$.

Na razão, o número A é chamado antecedente e o B tem o nome de consequente.

Razão é uma forma de se realizar a comparação de duas grandezas. Quando tratamos de grandezas de mesma natureza (comprimento, massa etc.), é necessário que as duas estejam na mesma unidade de medida.

Exemplos:

1. Em uma sala de aula, há 40 alunos, sendo que 15 deles são homens. Calcule:

Fonte: http://www.sxc.hu/photo/213004.

a) a razão entre o número de alunos do sexo masculino e o total de alunos;

b) a razão entre o número de alunos do sexo feminino e o total de alunos;

c) a razão entre o número de alunos do sexo masculino e o total de alunos do sexo feminino.

Total de estudantes: 40

Número de alunos homens: 15

Número de alunos mulheres: 40 – 15 = 25

a) razão = $\frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

b) razão = $\frac{25}{40} = \frac{5}{8}$

c) razão = $\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$

2. Hamilton tem 1,80 m de altura, e seu cachorro, 40 cm. Qual a razão entre a altura do cachorro e a de Hamilton?

Fonte: http://www.sxc.hu/photo/1425610

Altura do cachorro: 40 cm

Altura de Hamilton: 1,80 m = 180 centímetros (medida equivalente)

Razao = $\frac{40}{180} = \frac{2}{9}$

3. Em março de 2013, O BC divulgou a lista dos maiores bancos do Brasil por ativos totais.

| Posição | Nome | Ativos totais em R$ |
|---|---|---|
| 1 | Itaú-Unibanco | 1,028 trilhão |
| 2 | Banco do Brasil | 935,4 bilhões |
| 3 | Bradesco | 894,467 bilhões |
| 4 | Caixa Econômica Federal | 702,9 bilhões |
| 5 | Santander Brasil | 448,601 bilhões |

Determine a razão entre:

a) os ativos totais do Banco Itaú-Unibanco e Caixa Econômica,

b) os ativos totais do Banco Bradesco e Banco do Brasil.

$$\text{a. razão} = \frac{1028}{702{,}9}$$

Observe que, para calcularmos essa razão, transformamos a informação sobre o total de ativos do Banco Itaú-Unibanco para bilhões.

$$\text{b. razão} = \frac{894{,}467}{935{,}4}$$

Também é possível determinar a razão entre duas grandezas distintas. Vejamos as questões:

4. A densidade de um composto químico consiste na razão entre a sua massa e o seu volume. Assim sendo, calcule a densidade do ferro, sabendo que 30 $cm^3$ de ferro tem uma massa de 235,8 g.

$$d_f = \frac{\text{massa}}{\text{volume}} = \frac{235{,}8}{30} = 7{,}86\text{g}/\text{cm}^3$$

Perceba que, quando duas grandezas diferentes (no caso anterior, massa e volume) estabelecem uma razão, esta vem acompanhada por uma unidade de medida (no caso anterior, $g/cm^3$).

## Atividade 1

***Atende aos objetivos 1 e 2***

1. O meu salário atual é R$ 4.500,00. Uma empresa está me ofertando uma possibilidade de um novo emprego, cujo salário é R$ 6.000,00. Qual a razão de um salário para outro?

2. Um automóvel percorre 480 km em 6 horas. Qual a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto?

3. Em uma classe, há 25 meninas e 20 meninos.

a) Qual a razão entre o número de meninos e meninas?

b) Qual a razão entre o número de meninas e o total de alunos da turma?

### *Resposta comentada*

1. Observe que a escolha do numerador e do denominador é feita em função das informações apresentadas no enunciado que, neste caso, é a razão do salário atual para o do novo emprego. Deve-se prestar atenção à ordem das informações, para que a montagem da razão seja correta.

Temos, portanto: $\frac{4500}{6000}$

A razão deve ser apresentada preferencialmente na forma **irredutível**.

Assim, devemos simplificar a fração $\frac{4500}{6000}$, dividindo o numerador e o denominador pelo maior divisor comum, que é 1.500. Logo,

**Irredutível**

Uma fração é dita irredutível (ou totalmente simplificada) quando o maior divisor comum de seus termos for a unidade, isto é, quando o numerador e o denominador são números primos entre si. Uma fonte de estudo para simplificações de frações pode ser: http://www.matematicadidatica.com.br/FracaoSimplificacao.aspx.

$$\frac{4500}{6000} = \frac{3}{4}$$

Portanto, a razão de um salário para outro é igual a 3/4.

2. A razão pedida é a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto.

Temos: $\frac{480}{6} = \frac{80}{1}$

3.

a. $\frac{n^o \text{ meninos}}{n^o \text{ meninas}} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$

b. $\frac{n^o \text{ meninas}}{\text{total alunos}} = \frac{25}{45} = \frac{5}{9}$

## Proporção

Uma proporção é uma igualdade entre duas razões.

Para entender melhor, considere que quatro números não nulos, A, B, C e D, formam, nessa ordem, uma proporção quando $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

A, B, C e D são denominados termos de uma proporção. A e D são os extremos e B e C são os meios.

Exemplos:

1. Uma pesquisa realizada pelo IBOPE foi realizada com a intenção de comparar o número de homens e de mulheres que trabalham em três empresas do setor de telefonia. Os resultados encontram-se a seguir:

| Empresa | Total homens | Total mulheres |
|---|---|---|
| A | 150 | 450 |
| B | 110 | 165 |
| C | 42 | 126 |

Obtém-se para cada empresa as seguintes razões entre o número de homens e de mulheres empregados:

$$\text{Razão empresa}_{A} = \frac{150}{450} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Razão empresa}_{B} = \frac{110}{165} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Razão empresa}_{C} = \frac{42}{126} = \frac{1}{3}$$

Assim, pode-se concluir que a razão entre o número de homens e de mulheres na empresa A é igual à razão entre o número de homens e de mulheres na empresa C; ou que a proporção entre o número de homens e de mulheres na empresa A é igual à da empresa C.

Propriedade 1: em toda proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos. Algebricamente, temos

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a.d}{b.d} = \frac{c.d}{b.d}$$

Observe as seguintes proporções:

| | |
|---|---|
| $\frac{3}{4} = \frac{60}{80}$ | Produto dos meios = 4.60 = 240<br>Produto dos extremos = 3.80 = 240 |
| $\frac{4}{9} = \frac{20}{45}$ | Produto dos meios = 9.20 = 180<br>Produto dos extremos = 4.45 = 180 |
| $\frac{5}{8} = \frac{45}{72}$ | Produto dos meios = 8.45 = 360<br>Produto dos extremos = 5.72 = 360 |

Exemplos:

1. Calcule o valor de x:

$$\frac{x}{50} = \frac{7}{10}$$

Aplicando a propriedade 1, temos:

$10 \cdot x = 7.\ 5$

$10x = 350$

$$x = \frac{350}{10} = 35$$

2. Uma grande empresa do ramo de energia tem atualmente 28.000 funcionários. Se a relação entre o número de efetivos e de terceirizados é de 5 por 2, qual é o total de funcionários terceirizados?

Nesse exemplo, temos, a princípio, duas variáveis: o número de funcionários efetivos e o número de terceirizados, e sabe-se que estes totalizam 28000.

Nº de efetivos: x

Nº de terceirizados: 28000 – x

Além disso, o enunciado informa que a razão entre o número de efetivos e de terceirizados é de 5 por 2, isto é, $\frac{x}{28000-x} = \frac{5}{2}$

Aplicando a propriedade 1, obtemos:

$2 \cdot x = 5 \cdot (28000 - x)$

$2x = 140000 - 5x$

$2x + 5x = 140000$

$7x = 140000$

$$x = \frac{140000}{7} = 20000$$

Devemos ter atenção neste momento. Foi perguntado o total de terceirizados que, na nossa representação, não corresponde a x, mas a 28.000 – x. Assim,

Total de terceirizados: 28.000 – 20.000 = 8.000

## Atividade 2

***Atende aos objetivos 1 e 2***

1. Verifique se os números 16, 10, 8 e 6 formam, nesta ordem, uma proporção.

2. Calcule o valor de x nas seguintes proporções:

a) $\frac{x}{4} = \frac{8}{12}$

b) $\frac{1}{8} = \frac{9}{x}$

c) $\frac{1}{7} = \frac{x-6}{49}$

3. Um investidor aplicou seu dinheiro em dois investimentos distintos: A e B. Essas aplicações estão na razão de 8 para 3, e a maior delas excede a menor em R$ 30.000,00. Determine o montante aplicado.

### *Resposta comentada*

1. Os números A, B, C e D formam uma proporção se A/B = C/D.

Se os números formarem uma proporção, a propriedade 1 pode ser aplicada. Assim, queremos verificar se

$$\frac{16}{10} = \frac{8}{6}$$

Vamos testar se a propriedade 1 é válida:

Será que $16 \cdot 6 = 10 \cdot 8$?

96 = 80, falso. Logo os números 16, 10, 8 e 6 não formam, nesta ordem, uma proporção.

2. Em cada caso, para determinarmos o valor da variável x, devemos aplicar a propriedade 1.

a.

$x \cdot 12 = 8 \cdot 4$

$12x = 32$

$x = \frac{32}{12} = \frac{8}{12} = \frac{8}{3}$

b. $\frac{1}{8} = \frac{9}{x}$

$1.x = 8 . 9$

$x = 72$

c. $\frac{1}{7} = \frac{x-6}{49}$

$7(x\text{-}6) = 1 . 49$

$7x - 42 = 49$

$7x = 49 + 42$

$x = 91/7$

$x = 13$

3. As grandezas envolvidas neste problema são os capitais, em real, aplicados nos investimentos A e B. Além disso, o enunciado informa que esses capitais estão na razão de 8 para 3 e que o maior excede o outro em R$ 30.000,00. Assim:

Sejam:

x = capital aplicado em A (em R$)

y = capital aplicado em B (em R$)

$x - y = 30.000$ (a quantia aplicada em A excede a quantia aplicada em B em R$ 30.000,00). Ou seja, $x = 30.000 + y$.

Do fato de estarem na razão de 8 para 3,

$$\frac{30.000 + y}{y} = \frac{8}{3}$$

Aplicando a propriedade 1,

$8y = 3\ (30.000 + y)$

$8y = 90.000 + 3y$

$5y = 90.000$

$y = 18.000$

Logo, $x = 18.000 + 30.000 = 48.000$

O total aplicado foi de R$ 66.000,00

## Regra de três

A regra de três pode ser compreendida como um processo prático para resolver problemas por meio de proporções, utilizando duas grandezas. Constitui uma ferramenta indispensável para todos, até mesmo para os que dizem não precisar ou gostar de matemática.

Para falarmos de regra de três, é necessário estarmos familiarizados com o conceito de grandezas direta e inversamente proporcionais.

## Grandezas proporcionais

Duas grandezas são ditas diretamente proporcionais quando, aumentando (diminuindo) uma delas, a outra grandeza aumenta (diminui) na mesma razão da primeira.

Exemplo: Observe a tabela seguinte, que apresenta a variação de grandezas em diversos momentos.

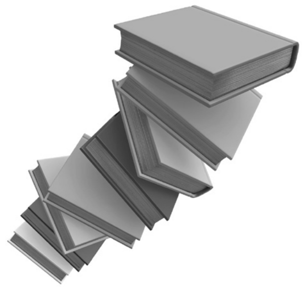
**Tabela 6.1**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Nº produtos | 2 | 4 | 12 | 30 |
| Tempo fabricação (h) | 6 | 12 | 36 | 90 |

Ao calcular a razão entre o número de produtos e o tempo necessário para fabricá-los, observa-se:

$$\frac{2}{6} = \frac{4}{12} = \frac{12}{36} = \frac{30}{90}$$

Essas razões são todas iguais a 1/3. A razão 1/3 informa que a cada unidade a mais, considerada no número de produtos, o tempo necessário triplica. Assim, essas grandezas são ditas diretamente proporcionais.



Duas grandezas são ditas indiretamente proporcionais quando, aumentando (diminuindo) uma delas, a outra grandeza varia na razão inversa da primeira. Explicando de maneira informal, são grandezas em que: quando uma dobra, a outra se reduz à metade; se uma triplica, a outra é reduzida à terça parte; e assim por diante.

Observe a tabela a seguir, que apresenta a variação de grandezas em diversos momentos.

Uma escola decidiu premiar os melhores alunos, distribuindo 24 livros diversos. Se apenas dois forem considerados os melhores, cada um receberá 12 livros. Se 3 forem selecionados, cada um receberá 8. Se 4 forem selecionados, cada um receberá 6 livros. Observe a tabela:

**Tabela 6.2**

| Nº de alunos | Nº de livros recebidos |
|---|---|
| 2 | 12 |
| 3 | 8 |
| 4 | 6 |

Fonte: http://www.sxc.hu/photo/1408766

Como definido, duas grandezas são inversamente proporcionais. Quando dobramos uma delas, a outra se reduz à metade; triplicando uma delas, a outra se reduz à terça parte; e assim por diante.

No nosso exemplo, podemos observar que, se dobrarmos o número de alunos premiados, o número de prêmio por aluno cai pela metade.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\\[4pt] \frac{12}{6}=\frac{2}{1}\end{array}\right\}\ \frac{2}{4}\ \text{e}\ \frac{12}{6}\ \text{são inversas}$$

As situações a seguir ajudam a compreender esses conceitos:

a) Se você gasta 1 litro de gasolina para percorrer 14 km, quanto você gastará para percorrer 7 km? Nesse exemplo, a distância percorrida caiu pela metade, logo, você reduzirá pela metade também o consumo de gasolina (grandezas diretamente proporcionais).

b) Seis pedreiros levam 1 dia para construir um muro. Se diminuirmos o número de pedreiros para 2, o muro ficará pronto em três dias, ou seja, quanto maior o número de pedreiros utilizados na construção do muro, menor o tempo gasto para sua construção (grandezas inversamente proporcionais). Uma grandeza foi reduzida à sua terça parte, enquanto a outra foi triplicada.

## *Atividade 3*

***Atende ao objetivo 3***

1. Marque se as grandezas são diretamente (D) ou inversamente (I) proporcionais.

a) (   ) O número de máquinas funcionando e a quantidade de peças que elas produzem durante um mês.

b) (   ) o número de operários trabalhando e o tempo que levam para construir uma estrada de 10 km.

c) (   ) A velocidade de um ônibus e o tempo que ele leva para fazer uma viagem de Brasília a São Paulo.

d) (   ) A velocidade de um ônibus e a distância percorrida por ele em três horas.

e) (   ) A quantidade de ração e o número de animais que podem ser alimentados com ela durante uma semana.

f) (   ) O tamanho de um tanque e o tempo necessário para enchê-lo.

g) (   ) O número de linhas por página e o total de páginas de um livro.

h) ( ) A eficiência de um grupo de operários e o tempo necessário para executarem certo serviço.

i) ( ) A dificuldade de uma tarefa e o tempo necessário para uma pessoa executá-la.

### *Resposta comentada*

a) ( D ) Quanto mais máquinas funcionam, mais peças fabricam.

b) ( I ) Quanto mais funcionários, menos tempo para fazer o serviço.

c) ( I ) Quanto mais rápido o ônibus, menos tempo para a viagem.

d) ( D ) Quanto mais rápido o ônibus, maior distância percorre.

e) ( D ) Quanto mais ração, mais animais podem ser alimentados.

f) ( D ) Quanto maior o tanque, mais tempo se levará para enchê-lo.

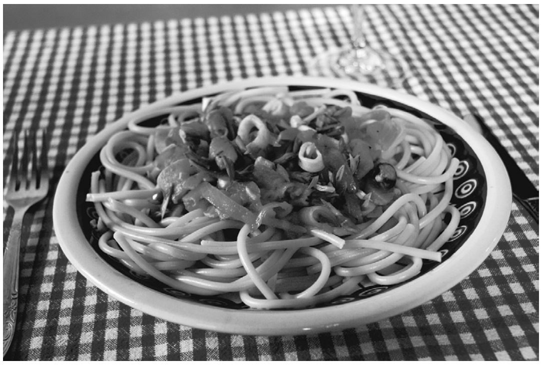
g) ( I ) Quanto maior o número de linhas por página, menos páginas serão necessárias.

h) ( I ) Quanto maior a eficiência, mais rapidamente se faz o serviço.

i) ( D ) Quanto mais difícil o trabalho, mais tempo se leva.

Agora leia e analise as seguintes situações/problemas:

Exemplo 1:



Fonte: http://www.sxc.hu/photo/1144005

Uma indústria fornece refeições a seus 100 funcionários. Um levantamento de dados mostrou que o custo de alimentação desses funcionários, durante 10 dias, é de R$ 3.000,00. Qual o custo total de alimentação para esses 100 durante o período de um mês (considere o mês com 22 dias)?

Inicialmente devemos observar que há duas grandezas envolvidas nesse problema: o total de dias e o custo total, em reais, das refeições. Observe que o número de funcionários não sofre alteração, segundo o enunciado, isto é, está constante, não caracterizando uma das grandezas que estão em análise. O que você pode notar em relação às grandezas em análise?

Elas são diretamente proporcionais, pois, à medida que o número de dias aumenta, o custo total também irá aumentar, na mesma proporção. Os dados podem ser apresentados na seguinte tabela:

**Tabela 6.3**

| | | |
|---|---|---|
| Nº de dias | 10 | 22 |
| Custo total (R$) | 3.000 | x |

Logo, temos:

$$\frac{10}{3000} = \frac{22}{x}$$

Então, pela propriedade fundamental das proporções:

$10x = 22.3000$

$10x = 66.000$

$x = \dfrac{66.000}{10} = 6.600$

Logo, o custo total mensal será de R$ 6.600,00.

Esse método de se resolver problemas denomina-se regra de três.

## Origem do nome regra de três

A regra de três, ao que tudo indica, surgiu na Índia. Contudo, foram os árabes, na Idade Média, que divulgaram essa classe de problemas. Leonardo da Pisa, no século XIII, também contribuiu com o seu trabalho “Líber Abacis” para torná-la conhecida pelo nome: regra dos três números conhecidos ou, como ficou popularmente conhecida, regra de três.

---

Exemplo 2:

Paulo trabalhou 30 horas extras e recebeu 1.500 reais. Quantas horas extras teria de trabalhar para receber 2.000 reais?

Esse problema envolve duas grandezas: o valor, em reais, recebido pelas horas adicionais, e o tempo trabalhado em regime de hora extra. Essas grandezas são diretamente proporcionais: aumentando o tempo trabalhado, aumenta-se o valor recebido.

Montando a regra de três, temos:

1.500 ___________ 30

2.000 ___________ x

$$\frac{1500}{2000} = \frac{30}{x}$$

Para resolver, basta multiplicar de forma cruzada (propriedade 1):

$1.500 \cdot x = 6.000$

$x = \dfrac{6000}{1500} = \dfrac{30}{x}$

$x = 40$

Portanto, Paulo teria de trabalhar 40 horas extras para receber 2.000 reais.

Exemplo 3:

Com a proximidade das férias escolares de verão, Mônica resolveu comprar uma pequena piscina portátil plástica com capacidade para 600 l. Uma mangueira enche a piscina em 40 minutos, com uma vazão de 15 l/min. Se a torneira diminuir a vazão para 5 l/min., quantos minutos serão necessários para encher a piscina?

Mais uma vez, inicialmente devemos observar que há duas grandezas envolvidas nesse problema: o tempo total necessário para encher a piscina (em minutos) e a vazão da torneira (em l/min.).

Note que, à medida que a vazão diminuir, o tempo irá aumentar na mesma proporção. Logo, essas grandezas são inversamente proporcionais.

De forma análoga ao exemplo anterior, vamos montar a tabela.

**Tabela 6.4**

| Tempo (min.) | Vazão (l/min.) |
|---|---|
| 40 | 15 |
| x | 5 |

Para resolver esse exemplo, devemos inverter uma das razões da proporção. Assim:

$$\frac{40}{x} = \frac{5}{15}$$

Depois disso, aplicaremos a propriedade fundamental das proporções:

$5 \cdot x = 40 \cdot 15$

$x = 120$

Logo, o tempo total será de 120 minutos ou duas horas.

## *Atividade 5*

***Atende ao objetivo 4***

1. Com 5 litros de gasolina, um automóvel percorre a distância de 41 km. Quantos quilômetros percorrerá o mesmo automóvel com 20 litros de gasolina?

2. Com 14 litros de tinta podemos pintar uma parede de 35 $m^2$. Quantos litros são necessários para pintar uma parede de 15 $m^2$?

3. Uma máquina produz 100 peças em 25 minutos. Quantas peças produzirá em 1 hora?

4. Um certo volume de medicação demora 6 horas para ser ministrado em um gotejamento de 12 gotas por minuto. Se o número de gotas por minuto fosse de 18 gotas, quanto tempo teria demorado a aplicação dessa mesma medicação?

5. Para construir a cobertura de uma quadra de basquete, 25 operários levaram 48 dias. Se fosse construída uma cobertura idêntica em outra quadra e fossem contratados 30 operários de mesma capacidade que os primeiros, em quantos dias a cobertura estaria pronta?

6. Com o dinheiro que tenho, posso comprar 21 passagens de metrô ao custo unitário de R$ 3,60. Eu soube, porém, que o valor da passagem está para aumentar para R$ 4,20. Com o novo valor, quantas passagens poderei comprar com a mesma quantia que tenho?

### *Resposta comentada*

1. Grandeza 1: combustível (l); grandeza 2: distância (km); diretamente proporcionais.

Montando a regra de três, temos:

5 ___________ 41

20 __________ x

$$\frac{5}{20} = \frac{41}{x}$$

Para resolver, basta multiplicar de forma cruzada (propriedade 1):

$5 \cdot x = 820$

$x = \dfrac{820}{5}$

$x = 164$

Serão percorridos 164 km.

2. Grandeza 1: tinta (l); grandeza 2: área ($m^2$); diretamente proporcionais.

Montando a regra de três, temos:

14 ___________ 35

x ____________15

$$\frac{14}{x} = \frac{35}{15}$$

Para resolver, basta multiplicar de forma cruzada (propriedade 1):

$35 \cdot x = 210$

$x = \dfrac{210}{35}$

$x = 6$

Serão necessários 6 litros de tinta.

3. Uma máquina produz 100 peças em 25 minutos. Quantas peças produzirá em 1 hora?

Grandeza 1: Número de peças (unid.); Grandeza 2: Tempo (min); Diretamente Proporcionais.

Montando a regra de três temos:

Montando a regra de três, temos:

100 ____________ 25

x _____________ 60

$$\frac{100}{x} = \frac{25}{60}$$

Para resolver, basta multiplicar de forma cruzada (propriedade 1):

$25 \cdot x = 6000$

$x = \dfrac{6.000}{25}$

$x = 240$

Serão produzidas 240 peças.

4. Temos a grandeza tempo (T) e a grandeza velocidade de gotejamento (V). Quando a velocidade aumenta, o tempo diminui porque estamos ministrando um volume maior por minuto. Percebemos, então, que as duas grandezas são inversamente proporcionais.

Montando a regra de três, temos:

6 ____________ 12

x ____________ 18

$$\frac{6}{x} = \frac{18}{12}$$

Observe que a segunda razão está invertida, pois as grandezas são inversamente proporcionais.

Para resolver, basta multiplicar de forma cruzada (propriedade 1):

$18 . x = 72$

$x = \dfrac{72}{18}$

$x = 4$

Teriam sido consumidas 4 horas.

5. Temos a grandeza número de operários e a grandeza tempo. Quanto maior o número de operários, menor o tempo necessário para conclusão da obra. Percebemos, portanto, que as duas grandezas são inversamente proporcionais.

Montando a regra de três, temos:

25 ____________ 48

$$\frac{25}{30} = \frac{x}{48}$$

30 ____________ x

Observe que a segunda razão está invertida, pois as grandezas são inversamente proporcionais.

$30 \cdot x = 1200$

$x = \dfrac{1.200}{30}$

$x = 40$

Serão necessários 40 dias para completar a obra.

6. Temos a grandeza preço da passagem e a grandeza número de passagens. Quando o preço aumenta, obviamente o poder aquisitivo diminui e um número menor de bilhetes poderá ser adquirido. Então, as duas grandezas são inversamente proporcionais.

Montando a regra de três, temos:

21 ____________ 3,60

x ____________ 4,20

$$\frac{21}{x} = \frac{4,20}{3,60}$$

Observe que a segunda razão está invertida, pois as grandezas são inversamente proporcionais.

$4,20 \cdot x = 75,60$

$x = \dfrac{75,60}{4,20}$

$x = 18$

Poderão ser adquiridos apenas 18 bilhetes.

## Porcentagem

A porcentagem é uma razão que relaciona a ocorrência de um evento qualquer com o número 100. O número 100 é uma referência fixa tradicional.

$$\frac{i}{100} = \frac{P}{T}$$

Na prática, os problemas de cálculos de porcentagens se resumem basicamente na solução de uma regra de três simples (proporcionalidade direta), expressa conforme a proporção em que:

i é a porcentagem;

P é o valor da ocorrência (parte, parcela, desconto, aumento, comissão etc );

T é o valor Total (total ou base de referência).

Lê-se "i está para 100, assim como P (a Parte) está para B (a Base ou o Total)".

Para solução, igualam-se os produtos cruzados: $100 \cdot P = i \cdot T$, o que fornece o mesmo resultado da notação de proporção.

Daremos preferência à notação de proporção, que diminui as possibilidades de errarmos o equacionamento, uma vez que cada razão deverá estar expressa numa mesma unidade.

Exemplos:

1. A loja de José faturou neste mês R$ 8.800,00. Sabendo-se que o lucro de José foi de 20% do faturamento, de quanto foi seu lucro em reais? Qual o custo dos produtos vendidos?

Total = R$ 8.800,00

Porcentagem i = 20

A parcela desconhecida corresponde nesse exemplo ao lucro, que é parte do todo. Assim,

$$\frac{20}{100} = \frac{x}{8.800}$$

Resolvendo, temos:

$100x = 20 \cdot 8.800$

$100x = 176.000$

$x = 1.760$

Assim o lucro foi de R$ 1.760,00.

Conhecido o lucro e dado o faturamento, o custo é obtido pela diferença entre a receita e o lucro.

Custo = 8.800 – 1.760 = 7.040

O custo da loja foi de R$ 7.040,00

Esse problema poderia ter uma resolução mais simples, cuja justificativa é dada pelo método apresentado.

Observe que, para calcularmos o lucro, realizamos o seguinte cálculo:

$$x = \frac{20}{100} \cdot 8.800 = (0,2) \cdot 8.800 = 1.760$$

Assim, para obtermos um dado valor porcentual, basta multiplicarmos o todo pela porcentagem desejada em notação decimal.

Dessa forma, podemos concluir que o cálculo de uma porcentagem i de um total T pode ser obtido de um modo mais prático, por:

$$i\% \ T = \frac{i}{100} \cdot T$$

2. Qual o valor real de um título pelo qual se pagou R$ 2.550,00, sabendo-se que o proprietário concordou em fazer um abatimento de 15%?

Nesse exemplo, nos é fornecido o valor da parte (quanto se pagou pelo título), a taxa de desconto (i) e deseja-se conhecer o todo. Então:

total = x,

parte = 2.550,00.

Devemos observar que o valor da parte dada não corresponde ao desconto, mas ao que restou após o desconto. Assim, R$ 2.550,00 corresponde a 85% do todo. Logo,

porcentagem i = 85

$$\frac{85}{100} = \frac{2550}{x}$$

85x = 255.000

x = 3.000

O valor original do título é R$ 3.000,00.

3. No mês de novembro de 2013, o índice da caderneta de poupança foi 0,55%. Sabemos que foi depositada na conta de Antônio a importância de R$ 182,70 de juros. Qual era seu saldo anterior?

Os dados desse exemplo são:

índice de reajuste: 0,55. O valor de i é, portanto, 0,55.

O valor correspondente a esse reajuste: 182,70 (P).

Deseja-se conhecer o saldo anterior, isto é, o valor do todo sobre o qual incorreu o reajuste. Assim,

$$\frac{0,55}{100} = \frac{182,70}{x}$$

0,55x = 18270,00

x = 33.218,18

O saldo do mês anterior era R$ 33.218,18.

## Atividade 6

***Atende ao objetivo 4***

1. Um comerciante recebe de comissão 4% das vendas que realiza. Em um mês, ele recebeu de comissão R$ 580,00. Quanto vendeu nesse mês?

2. Um professor, que ganhava R$ 2.500,00 por mês, teve um aumento de 6,5%. Quanto passou a receber?

3. Inscreveram-se num concurso 1.480 candidatos. Foram reprovados 35%. Qual o número de aprovados?

4. Em uma fábrica, 20% dos funcionários são mulheres, e os homens são 1.080. Quantos funcionários há, ao todo, na fábrica?

5. Na compra de um televisor à vista, Sérgio obteve um desconto de 4%, correspondente a R$ 38,00. Qual é o preço do televisor sem o desconto?

### *Resposta comentada*

1. Dados:

comissão: 580,00 (P),

porcentagem correspondente à comissão: 4% (i),

todo (valor que se deseja conhecer): x.

$$\frac{4}{100} = \frac{580}{x}$$

4x = 58.000

x = 58.000/4

x = 14.500

Ele vendeu ao todo R$ 14.500,00.

2. Dados:

valor do aumento (valor que se deseja conhecer): x (P),

porcentagem correspondente à comissão: 6,5% (i), todo: 2.500,00

$$\frac{6,5}{100} = \frac{x}{2500}$$

$100 \cdot x = 16.250$

$x = 16 \cdot 250/100$

$x = 162,50$

Observe que o novo salário corresponde à soma do anterior mais a parcela correspondente ao reajuste.

Salário atualizado = 2.500 + 162,50 = 2.662,50

O professor passou a receber R$ 2.262,50 por mês.

Essa questão admite outra possibilidade de solução.

Na solução anterior, primeiramente calculamos o valor a ser acrescentado ao salário para depois obtermos o salário reajustado. Poderíamos tê-la formulado de modo a obtermos diretamente o salário novo.

O novo salário é o anterior mais 6,5% do salário, ou seja, 100% + 6,5%. Assim, o salário após o reajuste corresponde a 106,5% do salário anterior.

$$\frac{100}{106,5} = \frac{2500}{x}$$

$100 \cdot x = 266.250$

$x = 266.250/100$

$x = 2.662,50$

3. Dado: taxa reprovação: 35% . Como queremos o total de aprovados, devemos utilizar a taxa de aprovação, que é: 100 – 35 = 65.

taxa de aprovação: 65%

parte correspondente à aprovação (valor que se deseja conhecer): x

todo: 1.480

$$\frac{65}{100} = \frac{x}{1480}$$

$100 \cdot x = 96.200$

$$x = \frac{96.200}{100}$$

x = 962

Foram aprovados 962 candidatos.

4. O enunciado informa que 20% dos funcionários são do sexo feminino, mas não diz o valor correspondente a essa porcentagem. Contudo, se 20% são mulheres, então, 80% são do sexo masculino. Assim,

i = 80

P = 1.080

T (valor que se deseja conhecer) = x

$$\frac{80}{100} = \frac{1080}{x}$$

$80 \cdot x = 108.000$

x = 1.350

4. P = 38,00

Porcentagem do desconto (i) = 4%

Total (valor que se deseja conhecer) = x

$$\frac{4}{100} = \frac{38}{x}$$

$5 \cdot x = 3.800$

x = 950

O preço do televisor sem desconto é R$ 950,00.

O sinal (%) que estabelece a indicação de "tantos por cento" nos problemas de juros e porcentagem é uma transformação da abreviatura da palavra CENTO (CTO), muito usado nas operações comerciais. O primeiro autor que o usou em seu trabalho "O guia do comerciante" foi Delaporte, na Itália, em 1685.

Fonte: http://www.sxc.hu/photo/1127999

O fato de que muitas situações da vida cotidiana funcionam de acordo com leis de proporcionalidade evidencia que o uso do raciocínio proporcional é útil na interpretação de inúmeros aspectos do mundo real. A regra de três é a principal em toda a Aritmética. Esta aula nos permitiu verificar a riqueza e a variedade de situações cotidianas que podem ser formuladas e resolvidas por essa técnica. Em particular, o cálculo de porcentagem é fundamental no âmbito das Ciências Contábeis. A próxima atividade resume todo o nosso aprendizado desta aula.

## *Atividade final*

***Atende aos objetivos 3 e 4***

1. O sistema de aluguel de bicicletas lançado pela prefeitura, em parceria com uma instituição privada, mostrou-se um grande sucesso. Atualmente, duas grandes empresas, Ciclotour e a YBike, disponibilizam esse serviço na cidade. A tabela a seguir mostra as tabelas de preços praticados pelas empresas:

**Tabela 6.5**

| Ciclotour | | YBike | |
|---|---|---|---|
| Tempo (min.) | Preço (R$) | Tempo (min.) | Preço (R$) |
| 30 | 3 | 20 | 1,5 |
| 45 | 4,5 | 40 | 4 |
| 60 | 6 | 60 | 6,5 |
| 90 | 9 | 90 | 10 |

a) Em alguma das empresas, o preço a pagar é diretamente proporcional ao tempo de utilização da bicicleta? Justifique.

b) Em alguma das empresas, é possível prever o preço a ser pago pelo aluguel da bicicleta durante 120 minutos? Justifique.

2. Um auditor precisou de 15 dias para realizar um auditoria, trabalhando 7 horas por dia. Se o prazo concedido fosse de 21 dias para realizar a mesma auditoria, quantas horas por dia a menos ele poderia ter trabalhado na tarefa?

3. Um inquilino recebeu a notícia de que seu aluguel irá passar de R$ 1.540,00 para R$ 2.160,00. Qual será o porcentual de aumento que o aluguel vai sofrer?

4. Um comerciante comprou 120 camisas a R$ 20,00 cada. Vendeu metade por R$ 22,40 e o restante a R$ 30,80. De quantos por cento foi o lucro?

### *Resposta comentada*

1. Este problema envolve duas grandezas: tempo (min.) e preço (reais).

a. Inicialmente, em cada uma das empresas, é preciso verificar se as grandezas envolvidas são ou não diretamente proporcionais.

Ciclotour: $\frac{3}{30} = \frac{4,5}{45} = \frac{6}{60} = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$

Então, os preços praticados pela Ciclotour são diretamente proporcionais.

YBike: $\frac{3}{30} = \frac{1,5}{20} = \frac{4}{40}$ ? Falso!

Então os preços praticados pela Ciclotour não são diretamente proporcionais.

b. Apenas na Ciclotour, pois existe proporcionalidade entre os valores: quando aumentamos o tempo do aluguel, o preço a ser pago aumenta na mesma razão. Já na YBike, como não há a proporcionalidade, não temos a regra de definição de quanto será o preço para 120 min.

2. Há duas grandezas envolvidas: número de dias e número de horas por dia. É crucial observar que, como se trata de resolver a mesma tarefa em um número maior de dias de trabalho, o número de horas a serem trabalhadas por dia irá cair. Então, as grandezas são inversamente proporcionais.

Montando a regra de três, temos:

15 ____________ 7

21 ____________ x

$$\frac{3}{30} = \frac{15}{21} = \frac{x}{7}$$

Observe que a segunda razão está invertida, pois as grandezas são inversamente proporcionais.

$21 \cdot x = 105$

$x = 5$

Assim, para realizar a mesma tarefa bastaria que o auditor dedicasse 5 horas por dia. Contudo, o enunciado pediu o número de horas a menos. Como ele trabalhava 7, seriam 2 horas a menos.

3. Dados:

índice reajuste (valor que deseja-se conhecer): x,

todo: 1.540,

parte: 2160 – 1540 = 620.

$$\frac{620}{1540} = \frac{x}{100}$$

1.540 · x = 620.100

x = 620.000/1.540

x = 40,26

O índice foi de 40,26%.

4. Primeiramente é preciso conhecer o custo total, a receita total e o lucro total do comerciante.

Custo total = 120 x 20 = 2400

Receita total = 60 · 22,40 + 60 · 30,80 = 3192

Assim, o lucro total = 3192 – 2400 = 792,00

índice reajuste (valor que deseja-se conhecer): x

Todo: 2400

Parte: 792

$$\frac{792}{2400} = \frac{x}{100}$$

2.400 · x = 792 . 100

2400x = 79.200

x = 33

O comerciante teve um lucro de 33%.

Ao término desta aula, você deve se sentir confortável na resolução de inúmeras situações cotidianas que envolvem técnicas básicas da Matemática. Em particular, razão, proporção e regra de três, que são de grande importância na formação de um contador. Caso considere necessário, reveja as atividades propostas para uma melhor assimilação do conteúdo trabalhado.

## Resumo

Esta aula apresentou o conceito de proporcionalidade direta e indireta, os principais tipos de problemas que envolvem relações de proporcionalidade, em particular, o cálculo de porcentagens. A seguir, são relacionados os principais conceitos da aula:

- Denomina-se proporção a sentença matemática que exprime igualdade entre duas razões.
- Duas grandezas são ditas diretamente proporcionais quando a variação de uma implica a variação ou mudança da outra na mesma proporção, mesma direção e mesmo sentido. Analogamente, duas grandezas são inversamente proporcionais quando a variação de uma implica, necessariamente, a variação da outra na mesma proporção, porém, em sentido e direção contrários.
- Regra de três simples é o nome dado a um procedimento prático para resolução de problemas que envolvem quatro valores, dos quais três são conhecidos. Devemos, portanto, determinar um valor a partir dos três já conhecidos.

Passos utilizados numa regra de três simples:

a) construir uma tabela, agrupando as grandezas da mesma espécie em colunas e mantendo, na mesma linha, as grandezas de espécies diferentes em correspondência;

b) identificar se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais;

c) montar a proporção e resolver a equação.

# Aula 7

## Funções

*Eliane Ribeiro Pereira*
*Maria Cecília de Carvalho Chaves*

## Meta

Apresentar noções introdutórias de funções, abrangendo funções inversas.

## Objetivos

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. plotar um ponto no plano cartesiano;
2. reconhecer uma relação entre dois conjuntos;
3. identificar conjunto partida, contradomínio, domínio e imagem de uma relação;
4. identificar uma função;
5. definir domínio, contradomínio e imagem de uma função;
6. verificar o crescimento e o decrescimento de uma função;
7. identificar funções sobrejetoras, injetoras e bijetoras;
8. identificar a inversa de uma função;
9. identificar a função composta.

## Pré-requisitos

O melhor aproveitamento desta aula requer a revisão dos conceitos da Aula 1, referentes aos conjuntos numéricos. Se perceber alguma dificuldade no desenvolvimento das atividades, não deixe de retornar a essa aula para reforçar alguns tópicos que, com certeza, o ajudarão.

## Introdução

A ideia que permite relacionar entidades diferentes é tão antiga quanto a própria Matemática. Essa ideia gerou o conceito de função, absolutamente fundamental na Matemática.

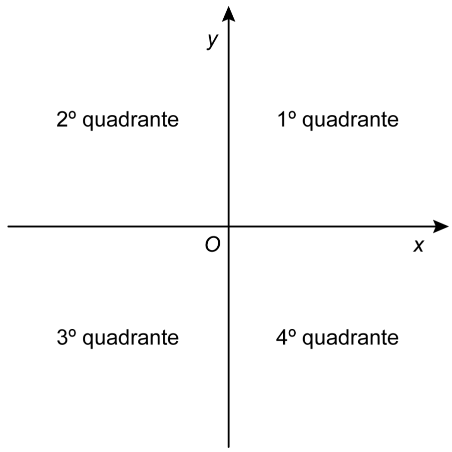
O conceito de função, que hoje pode parecer simples, é resultado de uma lenta e longa evolução histórica iniciada na Antiguidade, quando matemáticos, como os da antiga Babilônia, utilizaram tabelas de quadrados e de raízes quadradas e cúbicas, ou quando os pitagóricos tentaram relacionar a altura do som emitido por cordas submetidas à mesma tensão com o seu comprimento. Naquela época, o conceito de função não estava claramente definido: as relações entre as variáveis surgiam de forma implícita e eram usualmente descritas verbalmente. Apenas no séc. XVII, quando Descartes e Pierre Fermat introduziram as coordenadas cartesianas, tornou-se possível transformar problemas geométricos em problemas algébricos e estudar analiticamente funções.

A Matemática recebeu, então, um grande impulso, e os pesquisadores passaram a tentar determinar uma fórmula ou uma função que relacionasse as variáveis em estudo, a partir de observações e experiências. Surgiu, então, a noção exata de função, como relação entre variável independente e lei de variação.

## Sistema cartesiano ortogonal

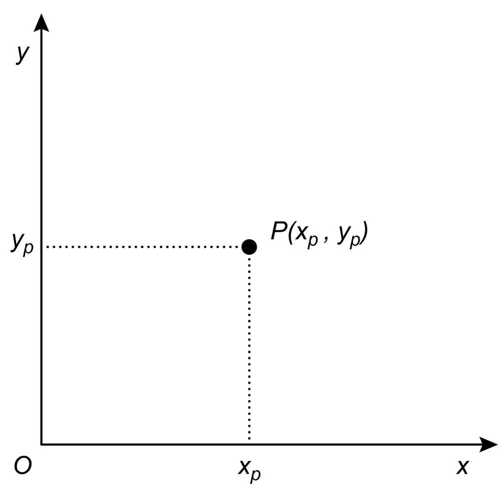
O principal objetivo de um sistema de coordenadas é determinar um ponto através de um conjunto de informações. Traçando-se dois eixos Ox (eixo das abscissas) e Oy (eixo das ordenadas), de forma que ambos se interceptem perpendicularmente em O (Origem), o plano sobre o qual esses eixos são construídos fica dividido em quatro quadrantes.

A esse sistema de eixos dá-se o nome de sistema cartesiano ortogonal de coordenadas, e o plano que o contém é denominado plano cartesiano.




## Coordenadas de um ponto no plano cartesiano

Sejam dois eixos x e y perpendiculares em O, que determinam um plano cartesiano a. Um ponto P qualquer é definido por suas coordenadas (geralmente indicadas na forma de par ordenado), sendo sua abscissa o número real $x_p$ e sua ordenada o número real $y_p$, dados pela projeção ortogonal de P sobre os eixos $O_x$ e $O_y$.



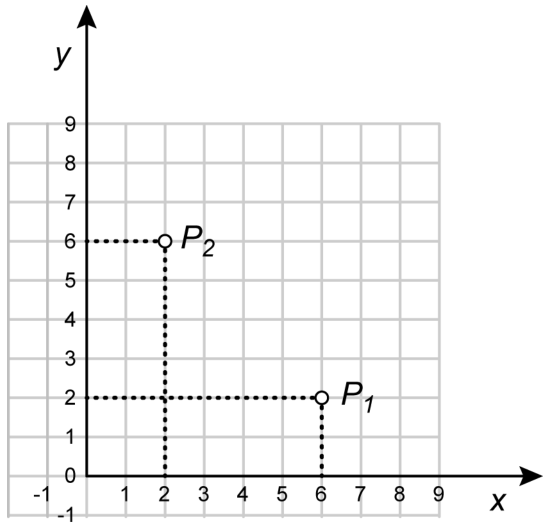

Dizemos que as coordenadas do ponto são a abscissa ($x_p$) e a ordenada ($y_p$).

Exemplo:

a) Plote no plano cartesiano os pontos:

$P_1$ de abscissa 6 e ordenada 2 e

$P_2$ de abscissa 2 e ordenada 6.




Note que os pontos $P_1$ e $P_2$ são muito diferentes, pois têm abscissas e ordenadas diferentes. É, então, preciso ter atenção à identificação da abscissa (marcada no eixo x) e da ordenada (marcada no eixo y). Faremos a distinção entre abscissa e ordenada a partir da definição de par ordenado.

## Par ordenado

Chama-se par todo conjunto formado por dois elementos. Em Matemática, existem situações em que há necessidade de distinguir dois pares pela ordem dos elementos. Um ponto P possui abscissa ($x_p$) e ordenada ($y_p$), notados da seguinte forma:

$$P\ (x_p, y_p)$$

O símbolo $(x_p, y_p)$ é chamado de par ordenado.

Definição: para cada elemento $x_p$ e cada elemento $y_p$, admitiremos a existência de um terceiro elemento (xp, yp) que denominamos par ordenado, de modo que se tenha:

$$(x_p, y_p) = (a, b) \leftrightarrow x_p = a \text{ e } y_p = b$$

Exemplo:

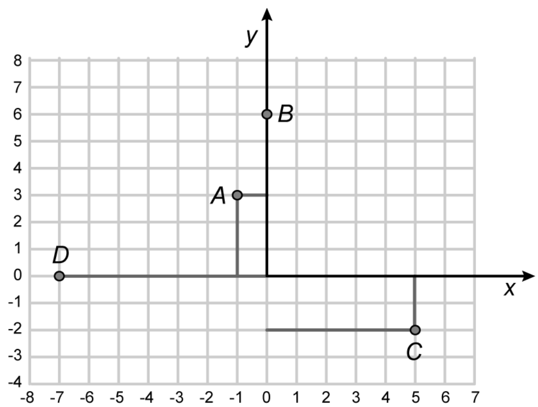
Plote os seguintes pontos no eixo cartesiano:

b) A (–1, 3)

c) B (0, 6)

d) C (5, –2)

e) D (–7, 0)




Repare nos pontos B e D. Eles ficam exatamente sobre o eixo cartesiano. Isso só aconteceu porque:

a) como a abscissa do ponto B é zero, esse ponto pertence ao eixo das ordenadas;

b) como a ordenada do ponto D é zero, esse ponto pertence ao eixo das abscissas.

## *Atividade 1*

***Atende ao objetivo 1***

1. 1. Represente no plano cartesiano os seguintes pontos:

a) A (–1, 4)

b) B (0, 0)

c) C (4, –3)

d) D (2, 7)

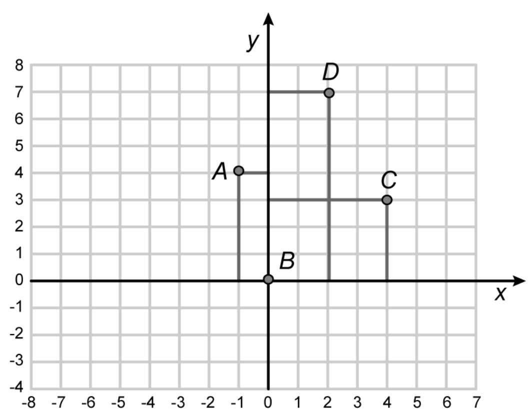
2. Para que valores reais de x o ponto P $(3x - 4, x + 5)$ pertencerá ao primeiro quadrante?

3. Para que valores reais de x o ponto Q $(7, x^2 - 4)$ pertencerá ao eixo das abscissas?

4. Determine os números reais a e b de modo que (5a – 4b, 2a + b) = (8, 13)

***Resposta comentada***

1. Para plotar os pontos no plano cartesiano, devemos nos lembrar de que o primeiro elemento deve ser relacionado ao eixo das abscissas (eixo *x*) e o segundo elemento deve ser relacionado ao eixo das ordenadas (eixo *y*):




2. A análise de cada quadrante nos permite perceber o sinal da abscissa e da ordenada de todos os pontos pertencentes àquele quadrante. No primeiro, por exemplo, tanto os valores da abscissa quanto os das ordenadas serão sempre positivos (sem considerar os eixos). Assim, no exercício, deseja-se investigar os valores reais que levarão o ponto P (3x – 4, x + 5) a pertencer ao primeiro quadrante.

Então, se $3x - 4 > 0$ e $x + 5 > 0$, o ponto pertencerá ao primeiro quadrante. Resolvendo as inequações:

$3x - 4 > 0$ $\qquad$ $x + 5 > 0$

$3x > 4$ $\qquad$ $x > -5$

$x > 4/3$

Como ambas as coordenadas precisam ser positivas, a solução será a interseção dessas desigualdades, ou seja,

$S = \{x \in R \ / \ x > 4/3\}$.

Para que o ponto Q $(7, x^2 - 4)$ pertença ao eixo das abscissas, é preciso que sua ordenada seja nula, isto é:

$x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4$

$x = 2$ ou $x = -2$

Logo, $S = \{x \in R \ / \ x = 2 \text{ ou } x = -2\}$.

3. Precisamos fazer com que $(5a - 4b, 2a + b) = (8, 13)$, ou seja, devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} 5a - 4b = 8 \\ 2a + b = 13 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema por substituição, podemos destacar o valor de b na segunda equação, substituindo-o na primeira equação:

$b = 13 - 2a$

$5a - 4(13 - 2a) = 8$

$5a - 52 + 8a = 8$

$13a = 8 + 52$

$13a = 60$

$a = 60/13$

Logo,

$b = 13 - 2(60/13)$

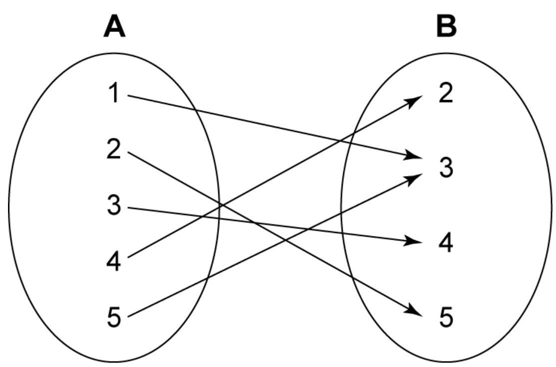
$b = 13 - 120/13 = (169 - 120)/13 = 49/13$

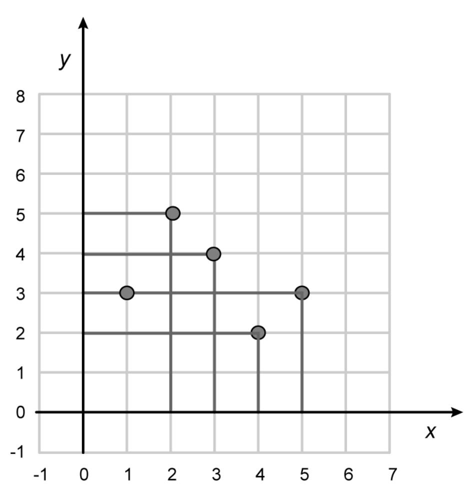
## Relação

Imagine que um gestor, para analisar a performance do contador de sua empresa, resolveu contar o número de processos analisados por ele durante uma semana de trabalho. Numerou os dias de um até cinco e montou a seguinte tabela:

| Dia | Processos Analisados |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 5 |
| 3 | 4 |
| 4 | 2 |
| 5 | 3 |

Podemos escrever matematicamente a relação estabelecida pelo gestor entre o conjunto A, dos dias da semana, A = {1, 2, 3, 4, 5}; e o conjunto B, do número de processos analisados pelo contador, B = {2, 3, 4, 5}:



Na forma de conjunto, podemos descrever a relação R da seguinte forma:

$$R = \{(1, 3), (2, 5), (3, 4), (4, 2), (5, 3)\}$$

Note que o primeiro elemento de cada par ordenado pertence ao conjunto A e o segundo elemento pertence ao conjunto B. Se relacionássemos todos os elementos do primeiro conjunto com todos os elementos do segundo conjunto, encontraríamos o que chamamos de produto cartesiano.

### Produto cartesiano

Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Denomina-se produto cartesiano de A por B o conjunto A x B, cujos elementos são todos pares ordenados (x, y), em que o primeiro elemento pertence ao conjunto A e o segundo elemento pertence a B.

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Exemplo:

No caso do gestor, A = {1, 2, 3, 4, 5} e B = {2, 3, 4, 5}. O produto cartesiano seria dado por:

A x B = {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5)}

O produto cartesiano nos dá, então, todas as possibilidades de pares ordenados em que o primeiro elemento pertença ao conjunto A e o segundo elemento pertença ao conjunto B.

## Relação binária

Seja o produto cartesiano A x B o conjunto:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Quando se considera apenas os pares ordenados (x, y) de A x B que atendam a determinada ordem, forma-se um conjunto chamado de relação entre os elementos de A e de B, ou, simplesmente, uma relação binária de A em B.

$R = \{(x, y) \in A \times B \mid \text{'alguma ordem, por ex., } x < y\text{'}\}$

O conjunto R está contido em A x B e é formado por pares (x, y), em que o elemento x de A é associado ao elemento y de B mediante certo critério de relacionamento ou correspondência.

Exemplo:

Dados os conjuntos A = {–1, 0,1, 2} e B = {0, 1, 2, 3, 4}, determine as relações:

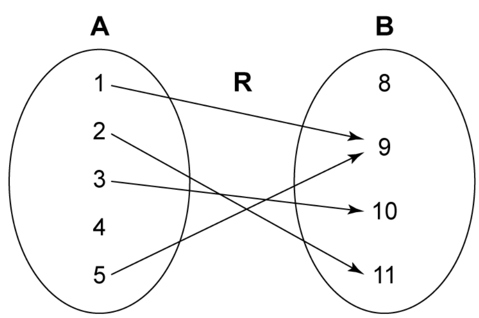
$R_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2\}$.

Teremos, então, $R_1 = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$.

$R_1$ é o subconjunto de A x B formado pelos pares ordenados em que o segundo elemento (y) de cada par é o quadrado do primeiro elemento (x).

## Domínio e imagem de uma relação

Seja a relação R de A em B, descrita por:




Os conjuntos A e B são denominados respectivamente de conjunto de partida (CP) e contradomínio (CD) da relação R.

## Domínio

Chama-se domínio da relação D(R) o conjunto formado pelos elementos de A relacionados com os elementos de B através de R, isto é:

D(R) = {1, 2, 3, 5}

Definição: seja R uma relação de A em B, chama-se domínio de R o conjunto D de todos os primeiros elementos dos pares ordenados pertencentes a R.

$$x \in D \leftrightarrow y, y \in B \mid (x, y) \in R$$

Decorre da definição que $D \subset A$.

## Imagem

Chama-se conjunto imagem Im(R) o conjunto formado pelos elementos de B que estão relacionados com os elementos de A, através de R, ou seja:

$$\text{Im}(R) = \{9, 10, 11\}.$$

Definição: chama-se imagem de R o conjunto Im de todos os segundos elementos dos pares ordenados pertencentes a R.

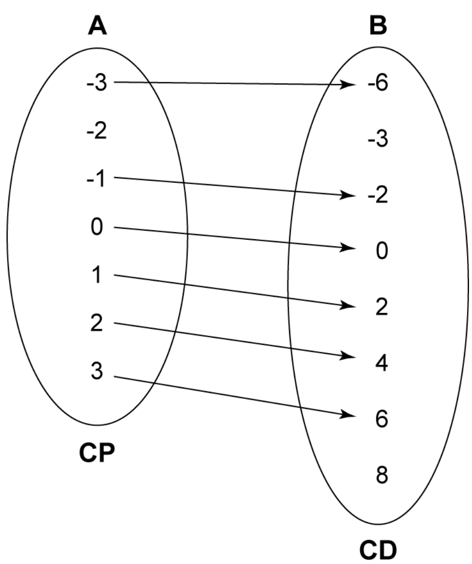
$$y \in \text{Im} \leftrightarrow \exists x, x \in A \mid (x, y) \in R$$

Decorre da definição que $\text{Im} \subset B$.

Exemplo:

Sejam $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{-6, -3, -2, 0, 2, 4, 6, 8\}$.

Represente a relação $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$, em diagramas de flechas e identifique o domínio e a imagem de R.




Olhando para o conjunto A, podemos identificar o domínio de R:

$D(R) = \{-3, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

O conjunto imagem de R serão os elementos do conjunto B relacionados com o conjunto A:

Im(R) = {–6, –2, 0, 2, 4, 6}

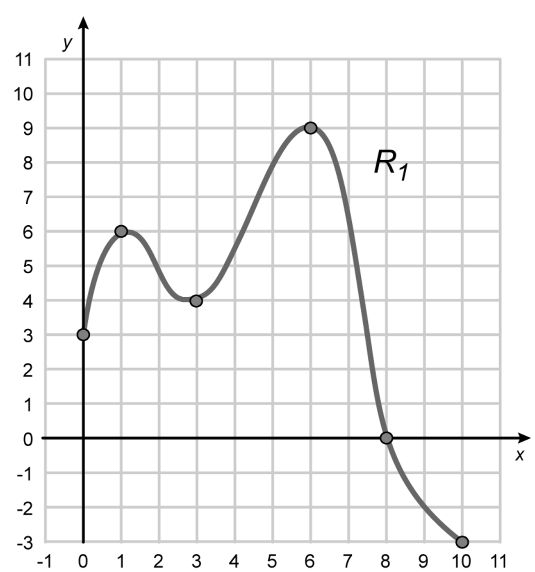
## Atividade 2

***Atende aos objetivos 2 e 3***

1. Dados os conjuntos A e B descritos a seguir, determine a relação $R_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2\}$, representando-a graficamente. Determine o domínio e a imagem da relação.

$A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ $\qquad$ $B = \{0, 2, 4, 6\}$

2. O gráfico abaixo representa a relação $R_1$ de R → R (lê-se: R em R). Observando o gráfico, classifique as afirmativas abaixo em (V), quando verdadeiras, ou (F), quando falsas:



a) $(3, 4) \in R_1$,

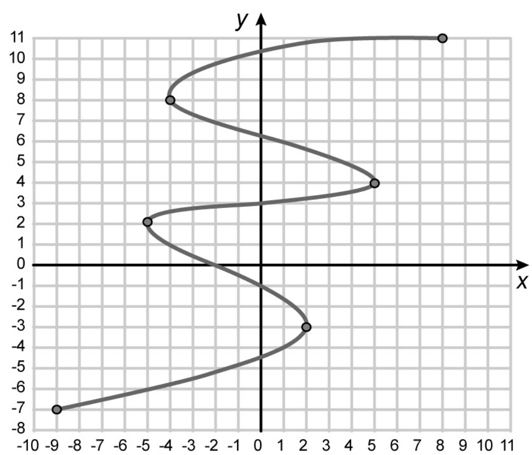
b) existe apenas um ponto de $R_1$ com ordenada 6,

c) o ponto de $R_1$ com abiscissa 7 tem ordenada menor do que 9,

d) se $3 < x < 6$ e $(x, y) \in R_1$, então $4 < y < 9$,

e) não existe nenhum ponto de $R_1$ com ordenada negativa.

3. O gráfico abaixo representa $R_2$, que é uma relação de R. Determine o domínio e a imagem de $R_2$.




## *Resposta comentada*

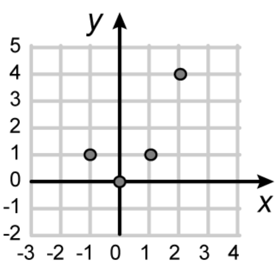
1. Sendo:

$A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

para deterinar $R_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2\}$, devemos identificar os valores de cada elemento do conjunto A elevado ao quadrado e, a seguir, ver quais dos resultados pertencem ao conjunto B, formando os pares ordenados da relação. Então,

| x | y |
|---|---|
| –1 | $(-1)^2 = 1$ |
| 0 | $(0)^2 = 0$ |
| 1 | $(1)^2 = 1$ |
| 2 | $(2)^2 = 4$ |
| 3 | $(3)^2 = 9$ |

Assim, $R_1 = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$. Graficamente, $R_1$ seria representado da seguinte forma:



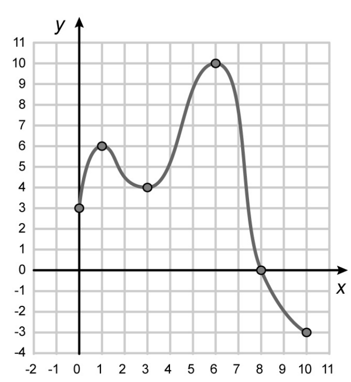
O conjunto Domínio de $R_1$ será dado pelos elementos de A que tiveram um correspondente em B. Logo,

$D(R_1) = \{-1, 0, 1, 2\}$.

O conjunto imagem será dado pelos elementos de B que sejam correspondentes a algum elemento de A. Assim,

$Im(R_1) = \{0, 1, 4\}$.

2. Para analisar as questões formuladas, devemos observar o gráfico com cuidado, identificando as abscissas (valor de x) e as ordenadas (valores de y) de cada ponto:



a) Este item investiga se o ponto (3, 4) pertence à relação $R_1$. Como quando x vale 3, o valor correspondente de y é 4, é verdadeiro (V) afirmar que o ponto (3, 4) pertence a $R_1$.

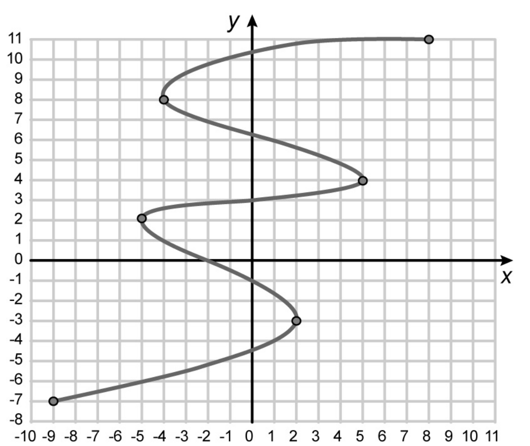
b) Passando-se uma reta paralela ao eixo x por 6 (em tracejado no gráfico), vemos que a reta corta a relação $R_1$ em mais de um ponto. Logo, é falsa (F) a afirmativa de que "existe apenas um ponto de $R_1$ com ordenada 6".

c) Observando-se no gráfico a linha pontilhada passando por x = 7, percebe-se a sua ordenada (valor correspondente de y) é 6, que é menor do que 9. Logo, a afirmativa é verdadeira (V).

d) Pelo gráfico, podemos ver que a ordenada de 3 é 4, que a ordenada de 6 é 9, e que as ordenadas de todos os pontos que se encontram no intervalo $3 < x < 6$ estão no intervalo $4 < y < 9$. Logo, a afirmativa é verdadeira (V).

e) Mais uma vez, observando o gráfico, podemos perceber que as ordenadas dos pontos em que x assume valores maiores do que 8 são negativas. Logo, a afirmativa é falsa (F).

3. Ao observar o gráfico, vemos que no eixo x a função assume valores no intervalo $-9 \leq x \leq 8$ e no eixo y a função varia no intervalo $-7 \leq y \leq 11$.




Como o domínio da função abrange os valores assumidos pela abscissa (x) e o conjunto imagem os valores assumidos pela ordenada (y), teremos:

$D(_{R2}) = \{x \in R \mid -9 \leq x \leq 8\}$,

$Im\ (R_2) = \{y \in R \mid -7 \leq y \leq 11\}$.

## Funções

A palavra função é muito comum, mesmo em textos não técnicos. Um jornal pode, por exemplo, ter um artigo sobre o aumento dos salários iniciais dos recém-formados neste ano. O artigo poderia dizer algo do tipo: "o aumento dos salários varia de acordo com o curso" ou "o aumento dos salários é função do curso". O jornal pode ilustrar esse relacionamento de função com um gráfico como o da **Figura 7.1**, a seguir. A figura mostra que a cada curso está associado um valor salarial (representado graficamente por uma coluna). Nenhum curso tem mais de um valor associado, mas o gráfico ilustra, por exemplo, que os profissionais de Física e de Artes recebem o mesmo valor.

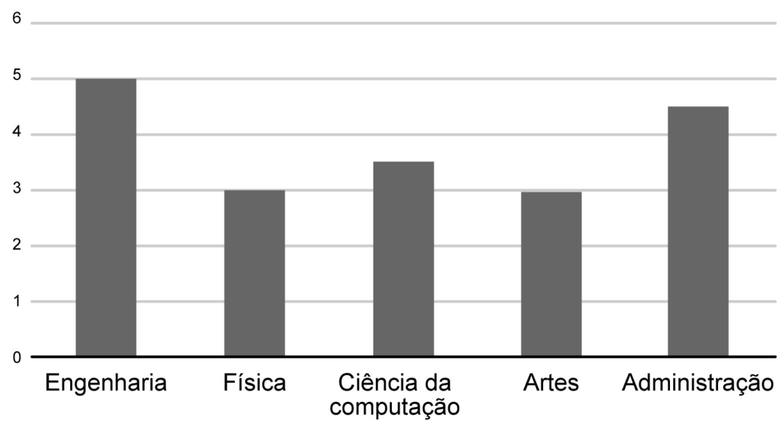



**Figura 7.1:** Gráfico ilustrativo do salário recebido por profissionais de determinadas áreas.

Esses valores são assumidos por uma variável. Variável é um símbolo representativo de qualquer valor dos elementos de um conjunto. A variável pode ser contínua (por exemplo, pertencer a um intervalo: [1, 5]) ou discreta (assumir valores distintos, por exemplo, inteiros – 1, 2, ...).

Sendo x e y duas variáveis, dizemos que y é função de x e escrevemos: $y = f(x)$.

As duas variáveis estão relacionadas ($x \rightarrow y$). Chamamos x de variável independente e y de variável dependente. Assim, cada valor atribuído à variável x, define o valor a ser assumido pela variável y.

## Conceituação

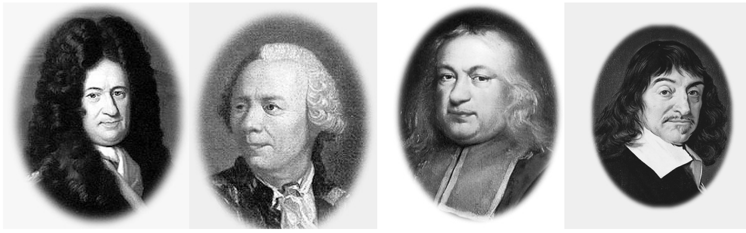
Entende-se por função (ou aplicação) toda a correspondência unívoca que a todo o elemento de um conjunto de partida faz corresponder um, e um só, elemento no conjunto de chegada. Em outras palavras: uma função é um tipo particular de relação entre conjuntos, que possui uma propriedade especial: todos os elementos do conjunto de partida devem possuir um, e somente um, correspondente no contradomínio.

Naturalmente, também usamos funções matemáticas na Álgebra e no Cálculo. A equação $g(x) = x^3$ expressa uma relação funcional entre os valores x e os valores que resultam da substituição, na equação, de x por seus valores. Por exemplo, se x assumir o valor 2, teremos: $g(2) = 2^3 = 8$.

A palavra função parece ter sido introduzida por Leibniz (1646-1716). Foi Leonhard Euler (1707-1783), matemático suíço, quem primeiro adotou a expressão f(x) para representar o valor de uma função.

A evolução do conceito de função foi paralela à evolução do conceito de curva, que é o seu correspondente geométrico: dizia-se que uma curva era geométrica ou arbitrária, conforme se sabia ou não representá-la analiticamente, ou seja, escrever a expressão da função a que ela correspondia. Fermat (1601-1665) e Descartes (1596-1650) introduziram o método analítico de definir funções.

O desenvolvimento da Matemática no século XX e a sua crescente interação com as demais ciências levaram à generalização do conceito de função ao caso de variáveis cujos valores pertencem a um conjunto qualquer de objetos. Assim, quando se diz que o preço, por metro, de um tecido é função da sua qualidade, entendemos que podem ser atribuídos valores numéricos à variável qualidade para identificar o preço do tecido. Essa generalização do conceito de função levou à criação da Análise Moderna, que compreende ramos como a Lógica, a Teoria dos Conjuntos, a Álgebra Abstrata e a Topologia Geral, entre outros.



Leibniz Leonhard Euler Fermat Descartes

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Gottfried_Wilhelm_von_Leibniz.jpg; http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Leonhard_Euler_2.jpg; http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Pierre_de_Fermat.jpg; http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Frans_ Hals_-_Portret_van_Ren%C3%A9_Descartes.jpg

Definição: dados dois conjuntos A e B, não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de aplicação de A em B, ou função definida em A com imagens em B, se e somente se para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

$$f: A \to B \leftrightarrow (\forall x \in A, \exists | \, y \in B \mid (x, y) \in f)$$

## Notação de funções

Toda função é uma relação binária de A em B; portanto, toda função é um conjunto de pares ordenados. Em geral, existe uma sentença aberta $y = f(x)$ que expressa a lei mediante a qual, dado $x \in A$, determinamos $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$, então:

$$f = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B \text{ e } y = f(x)\}$$

Isso significa que, dados os conjuntos A e B, a função f tem a lei de correspondência $y = f(x)$.

Para indicar uma função f definida em A com imagens em B, segundo a lei de correspondência $y = f(x)$, usaremos uma das seguintes notações:

$$\begin{array}{llcll} f: & A \to B & \quad\text{ou}\quad & f: & A \to B \\ & x \to f(x) & & & y = f(x) \end{array}$$

## Valor numérico de uma função

Chamamos de valor numérico de uma função o valor que a variável $y = f(x)$ assume quando se atribui a x um determinado valor.

Exemplo:

$f: A \rightarrow B$ definida por: $f(x) = 2x + 1$

$f(-1) = 2(-1) + 1 = -2 + 1 = -1$

$f(-3/2) = 2(-3/2) + 1 = -3 + 1 = -2$

$f(h + 1) = 2(h + 1) + 1 = 2h + 2 + 1 = 2h + 3$

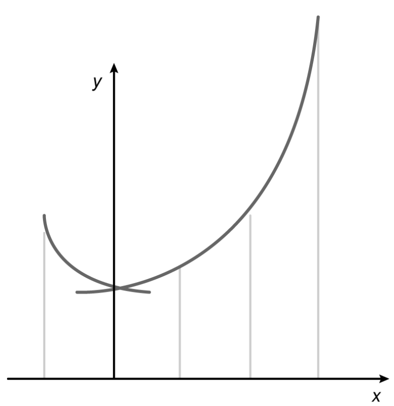
Como vimos, a função é um tipo especial de relação, em que todos os elementos do conjunto partida têm um e somente um correspondente no conjunto chegada.

Na verdade, para verificar se uma relação é ou não função, basta olharmos o conjunto de partida, verificando se todos os elementos possuem apenas um correspondente.

## Análise gráfica

A análise gráfica também permite que identifiquemos se uma relação é ou não uma função. Nesse caso, basta analisarmos o eixo que representa o conjunto de partida, que, salvo quando explicitado ao contrário, será o eixo x.

De forma prática, podemos verificar pela representação cartesiana da relação f de A (no eixo x) em B (no eixo y) se f é ou não função: basta verificar se a reta paralela ao eixo y conduzida pelo ponto (x, 0), em que $x \in A$, encontra sempre o gráfico de f em um só ponto.

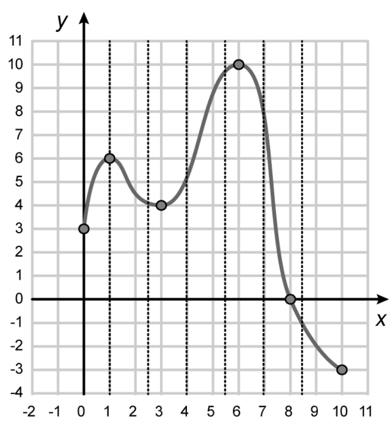


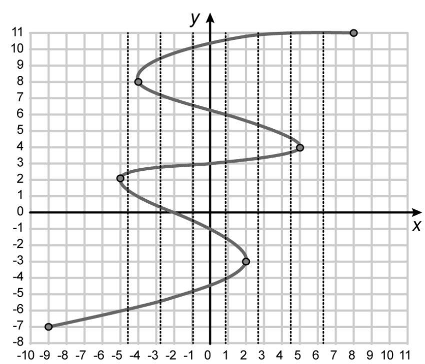
A relação representada é função, pois toda reta vertical conduzida pelos pontos de abscissa $x \in A$ encontra sempre o gráfico de f num só ponto.

Isso significa que cada valor associado à variável x pertencente ao conjunto partida, possui apenas um correspondente no conjunto chegada.

Exemplo:

Consideremos os gráficos das relações dadas nos exercícios 2 e 3 da atividade 2. Vamos investigar se as relações dadas são funções:




Note que, no primeiro caso, as retas paralelas ao eixo y cortam o gráfico da relação apenas uma vez, enquanto, no segundo caso, essas retas por vezes cortam o gráfico da relação em mais de um ponto. Logo, a primeira relação é também uma função; mas a segunda é apenas relação, não é função.

Devemos, então, sempre nos lembrar de que toda função é uma relação, mas nem toda relação é uma função.

## *Atividade 3*

***Atende aos objetivos 3 e 4***

1. Dados os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, determine cada uma das relações solicitadas, representando-as em diagrama de flechas e graficamente. Determine o domínio e a imagem de cada relação, indicando as que são funções.

a) $R_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2\}$

b) $R_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 3\}$

c) $R_3 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x + 5\}$

d) $R_4 = \{(x, y) \in A \times B \mid y > x + 2\}$

2. Sendo $f: R \rightarrow R$ uma função definida por $f(x) = 2x + 7$, determine:

a. $f(0)$

b. $f(-3/2)$

### *Resposta comentada*

1. Para resolver esta atividade, precisamos substituir os valores possíveis de x (pertencentes ao conjunto A) e verificar se o resultado correspondente pertence ao conjunto B. Caso pertença, esse ponto deve ser considerado; caso contrário, o ponto não pertencerá à relação.

a) Nesse caso, a relação desejada é: $y = x^2$, então:

Diagrama de flechas

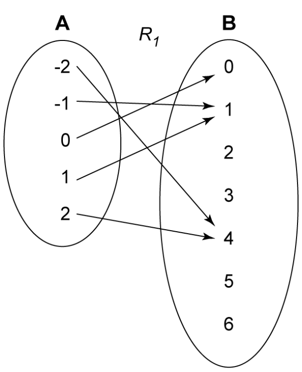
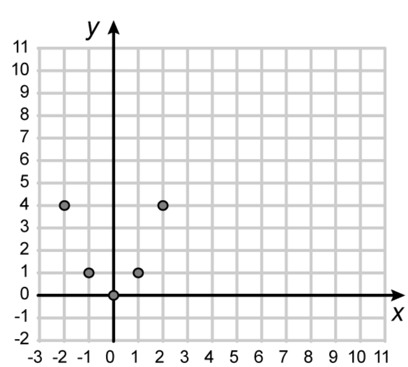



Gráfico cartesiano



Analisando os conjuntos domínio e imagem de $R_1$, temos: $D(R_1) = A$, $Im(R_1) = \{0, 1, 4\}$. Logo, como todos os elementos do conjunto de partida possuem apenas um correspondente no conjunto chegada, $R_1$ é função.

b) A relação a ser investigada é $y = x + 3$. Então:

Diagrama de flechas

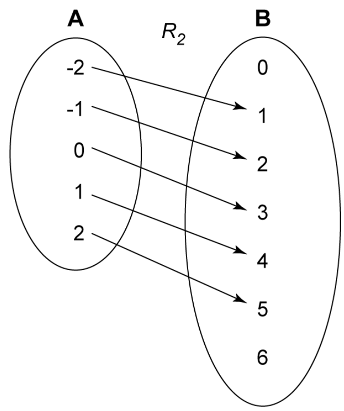
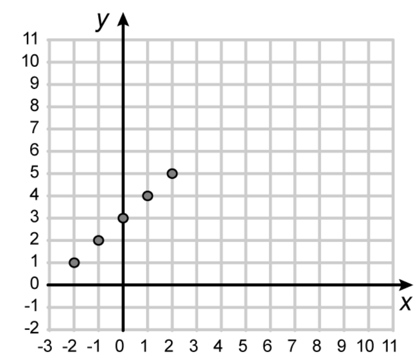



Gráfico cartesiano




Analisando os conjuntos domínio e imagem de $R_2$, temos: $D(R_2) = A$, $Im(R_2) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Logo, como todos os elementos do conjunto de partida possuem apenas um correspondente no conjunto chegada, $R_2$ é função.

c) A relação a ser investigada é $y = 2x + 5$. Então:

Diagrama de flechas

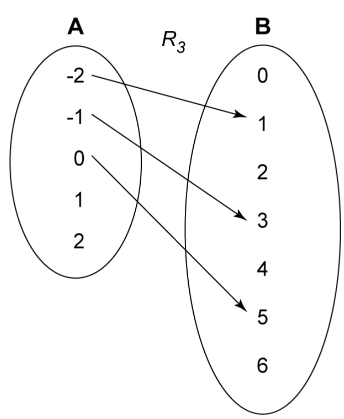
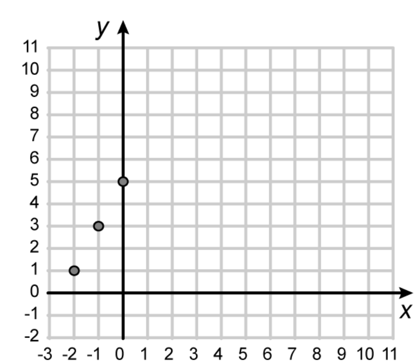



Gráfico cartesiano



Analisando os conjuntos domínio e imagem de $R_3$, temos: $D(R_3) = \{-2, -1, 0\}$, $Im(R_3) = \{1, 3, 5\}$. Logo, como existem elementos do conjunto de partida que não possuem correspondente no conjunto chegada, $R_3$ não é função.

d) A relação a ser investigada é $y > x + 2$. Então:

Diagrama de flechas

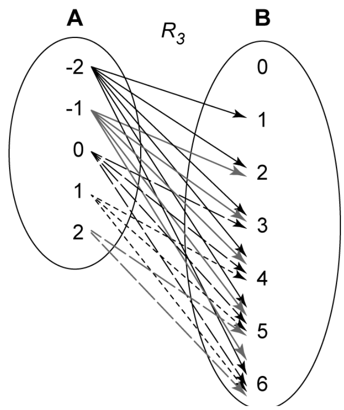
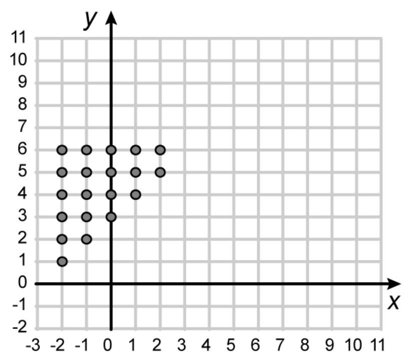



Gráfico cartesiano




Analisando os conjuntos domínio e imagem de $R_4$, temos: $D(R_4) = A$, $Im(R_1) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Logo, apesar de todos os elementos do conjunto de partida possuírem correspondentes no conjunto chegada, há mais de um correspondente. Assim, $R_4$ não é função.

2. Temos uma função de $R \rightarrow R$, definida por $f(x) = 2x + 7$. Para identificar o valor da função em um determinado ponto, basta substituir o valor buscado no lugar da variável x e calcular y:

a) $f(0) = 2 \cdot 0 + 7 = 7$

b) $f(-3/2) = 2 \cdot (-3/2) + 7 = -3 + 7 = 4$

Como uma função f de A em B é uma relação, os conceitos de domínio (D), contradomínio (CD), conjunto de partida (CP) e conjunto imagem (Im) continuam válidos. Vamos apenas formular as definições de domínio e imagem de funções.

## Domínio

Chama-se de domínio ao conjunto D dos elementos $x \in A$ para os quais existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. Como, pela definição de função, todo elemento de A tem essa propriedade, temos nas funções:

domínio = conjunto de partida,

isto é, $D = A$.

## Domínio das funções numéricas

Toda função f em que o domínio e o contradomínio são subconjuntos de R é denominada função real de variável real.

As funções numéricas são também chamadas funções reais de variável real. Observa-se que uma função f fica completamente definida quando são dados o seu domínio D, o seu contradomínio e a lei de correspondência $y = f(x)$.

Quando existe uma referência à função f e apresenta-se apenas a sentença aberta $y = f(x)$ que a define, subentende-se que D é conjunto dos números reais x, cujas imagens pela aplicação f são números reais, isto é, D é formado por todos os números reais x para os quais é possível calcular $f(x)$.

Assim, ao apresentarmos a função $y = f(x)$, ficam subentendidos como domínio e contradomínio de f os conjuntos:

$$D(f) = \{x \in R \mid f(x) \in R\},$$

$$CD(f) = R.$$

## Determinação do domínio de uma função:

Como mencionado, na prática, é bastante comum indicar-se uma função apenas pela lei que a define, não mencionando, portanto, os dois conjuntos A e B, domínio e contradomínio da função.

Nesse caso, deve-se admitir que:

- o contradomínio é R;
- o domínio é o conjunto formado por todos os números reais que a variável arbitrária x pode assumir, de modo que as operações indicadas em f(x) possam ser efetuadas em R.

Deste ponto em diante, a menos que seja especificado o contrário, o domínio das funções será o conjunto de todos os números reais x para o qual a função estiver definida.

Exemplos:

a) $f(x) = \dfrac{5}{x-3}$

A variável x não pode assumir valores que anulem o denominador. Então, deve-se ter:

$x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$

Portanto, $D_f = \{x \in R \mid x \neq 3\}$.

b) $f(x) = x^2$, é possível calcular uma imagem para todos os valores reais x.

Logo, o domínio da função serão todos os números reais, ou seja, $D_f = (-\infty, +\infty)$.

c) $f(x) = \sqrt{2x+4}$

Nesse caso, como temos uma raiz par, não podemos ter valores negativos em seu interior, isto é:

$2x + 4 \geq 0$

$2x \geq -4$

$x \geq -4/2$

$x \geq -2$

Então, $D_f = [-2, +\infty)$.

## *Atividade 4*

***Atende ao objetivo 5***

Determine o domínio das seguintes funções reais:

a) $f_1(x) = -9x + 4$

---

---

b) $f_2(x)= \dfrac{3x \quad 8}{6x \quad 7}$

c) $f_3(x)= \sqrt[8]{7x-2}$

d) $f_4(x)= \dfrac{2x-1}{6}$

e) $f_5(x)= \sqrt[7]{8x+5}$

### *Resposta comentada*

Para resolver esta atividade, precisamos ter em mente que nossa tarefa é garantir que o número resultante do valor atribuído à variável x seja um número pertencente a R, ou seja, um número real. Assim, a forma mais simples de fazer isso é retirar do conjunto dos reais os valores que fazem a função deixar de ser real.

a) $f_1(x) = -9x + 4$

Neste caso, como a função possui variável apenas no numerador, todos os números reais atribuídos à variável x terão um número real correspondente.

Logo, $D(f_1) = R$.

b) $f_2(x)= \dfrac{3x+8}{6x-7}$

Neste caso, como no anterior, não temos preocupação com os valores atribuídos à variável x no numerador. Nossa preocupação deve concentrar-se nos valores assumidos pela variável x no denominador, já que a divisão por zero não está definida em R. Assim, precisamos garantir que o denominador seja diferente de zero:

$6x - 7 \neq 0$

$6x \neq 7$

$x \neq \frac{7}{6}$

Logo, D(f2) = $\{x \in R \mid x \neq \frac{7}{6}\} = R - \{\frac{7}{6}\}$.

c) $f_3(x) = \sqrt[8]{7x - 2}$

Neste caso, temos uma raiz de índice par. Para que essa função esteja definida em R, é preciso que os valores assumidos pela variável x garantam que o radicando seja maior ou igual a zero, ou seja:

$7x - 2 \geq 0$

$7x \geq 2$

$x \geq \frac{2}{7}$

Logo, $D(f_2) = \{x \in R \mid x \geq \frac{2}{7}\}$.

d) $f_4(x) = \frac{2x - 1}{6}$

Neste caso, a função possui variável apenas no numerador, sem quaisquer outras restrições, o que faz com que todos os números reais atribuídos à variável x tenham um número real correspondente.

Logo, $D(f_1) = R$.

e) $f_5(x) = \sqrt[7]{8x + 5}$

Neste caso, como a raiz tem expoente ímpar, não temos quaisquer restrições para a função. Todos os números reais atribuídos à variável x terão um número real correspondente.

Logo, $D(f_1) = R$.

## Imagem

Chama-se de imagem o conjunto Im dos elementos $y \in B$ para os quais existe $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$; portanto:

Im é subconjunto do contradomínio,

isto é, $Im \subset B$.

## Imagem de um elemento pela lei y = f(x)

O símbolo f(x) representa a ordenada do ponto de abscissa x. Assim, em vez de escrevermos $f(x) = -3x + 2$, podemos escrever $y = -3x + 2$, ou seja, o símbolo f(x) pode ser substituído por y e vice-versa.

Exemplo:

Sejam os conjuntos $A = [-4, 3]$, $B = [-6, 9]$ e a função $f: A \rightarrow B$, em que cada x, $x \in A$, é associado a um único f(x), $f(x) \in B$, pela lei $f(x) = -3x + 2$.

A lei $f(x) = -3x + 2$ nos diz que a imagem de cada x do domínio de f é o número $f(x) = -3x + 2$ do contradomínio. Assim, temos, por exemplo:

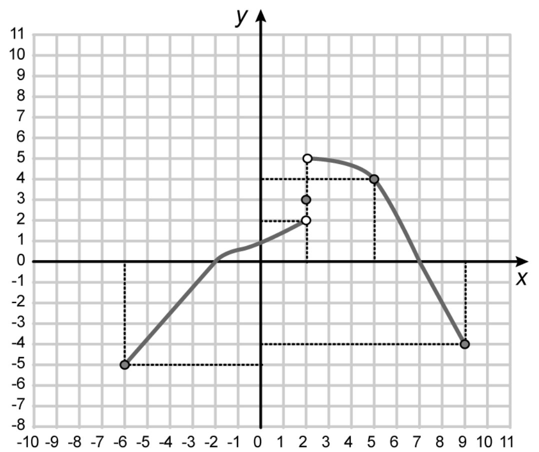
$f(-2) = -3 \cdot (-2) + 2 = 6 + 2 = 8$, logo, 8 é a imagem de $-2$, $f(-2) = 8$; logo $(-2, 8) \in f$;

$f(0) = -3 \cdot (0) + 2 = 0 + 2 = 2$, logo 2 é a imagem de 0, $f(0) = 2$; logo $(0, 2) \in f$;

$f(1) = -3 \cdot (1) + 2 = -3 + 2 = -1$, logo -1 é a imagem de 1, $f(1) = -1$; logo $(1, -1) \in f$.

## Imagem de um elemento através do gráfico de uma função

Consideremos o gráfico da função f(x) a seguir:




Cada ponto (x, y) deve ser interpretado como (x, f(x)), ou seja, a ordenada é a imagem da abscissa através do gráfico de f. Por exemplo:

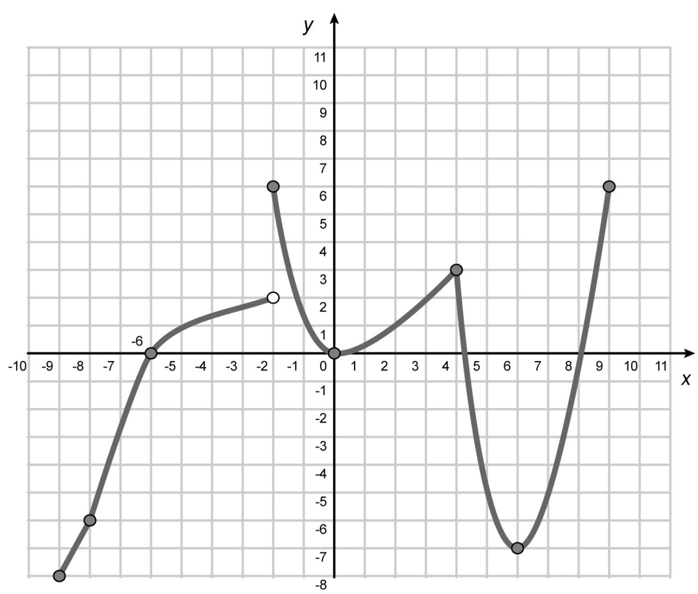
f(5) = 4, pois (5, 4) é ponto do gráfico;

f(2) = 3, pois (2, 3) é ponto do gráfico;

f(0) = 1, pois (0, 1) é ponto do gráfico.

Exemplo:

Determine o domínio e a imagem da função f, cujo gráfico é dado por:

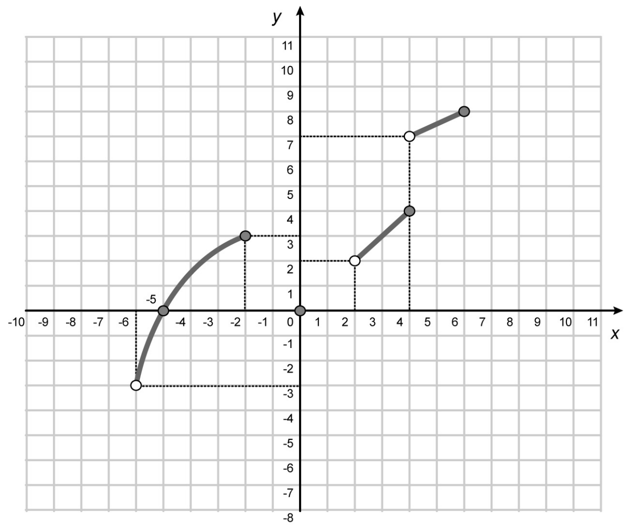



Observando o gráfico de f(x), podemos verificar que D(f) = [–9, 9] e Im(f) = [-9, 6].

## Atividade 5

***Atende ao objetivo 5***

1. Determinar o domínio e o conjunto imagem da função f cujo gráfico é:




2. Determine o domínio da função definida por $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+1}$ .

### *Resposta comentada*

1. Para definir o domínio e a imagem da função, basta observar os valores que a variável x assume (domínio) e os valores que a variável y assume (imagem). Logo,

$D(f) = ]-6, -2] \cup \{0\} \cup ]2, 6]$,

$Im(f) = ]-4, 4] \cup ]7, 8]$

2. Para definir o domínio desta função, devemos nos lembrar de que basta retirar do conjunto dos reais (R) os valores que a variável x não pode assumir se desejamos que a função f seja definida em R. Assim,

como temos um quociente, não podemos deixar o denominador ser igual a zero. Logo, devemos fazer:

$x + 1 \neq 0$

$x \neq -1$

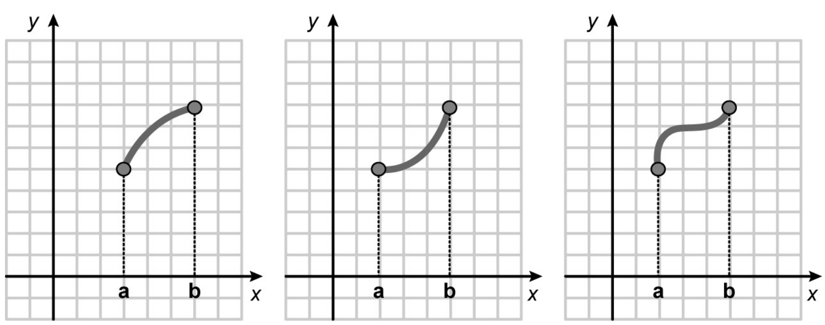
Então, D($f$) = R – {–1}.

## Critérios de crescimento e de decrescimento de uma função

### Função crescente

Uma função é estritamente crescente em um intervalo se, para dois valores quaisquer a e b, se verifica que:

$$a < b \rightarrow f(a) < f(b)$$



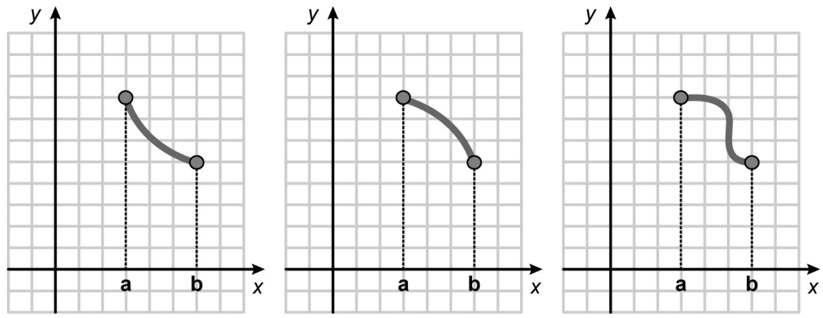

Definição: seja f uma função definida em um intervalo I. A função f é crescente em I se

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ sempre que } x_1 < x_2,\ \forall\, x_1, x_2 \in I$$

### Função decrescente

De forma análoga, uma função é estritamente decrescente em um intervalo se, para dois valores quaisquer a e b, se verifica que:

$$a < b \rightarrow f(a) > f(b)$$




Definição: seja f uma função definida em um intervalo I. A função f é decrescente em I se

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ sempre que } x_1 < x_2, \forall x_1, x_2 \in I$$

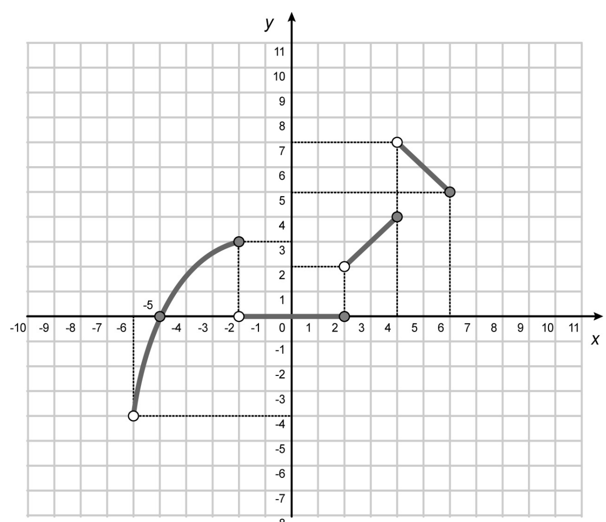
## Sinal de uma função

Seja a função f: $A \rightarrow B$ definida por $y = f(x)$. Resolver o problema "para que valores de x tem-se $f(x) > 0$ ou $f(x) < 0$" significa estudar o sinal da função $y = f(x)$ para cada x pertencente ao seu domínio.

Para se estudar o sinal de uma função quando a função está representada no plano cartesiano, basta examinar se a ordenada de cada ponto da curva é positiva, nula ou negativa.

Exemplo:

Dada a função ilustrada no gráfico a seguir, identifique seus intervalos de crescimento e de decrescimento, fazendo o estudo da variação do sinal da função.



Observando o gráfico, podemos ver que:

f(x) é crescente $\rightarrow I_1 = ]-6, -2[, I_2 = ]2, 4[$

f(x) é decrescente $\rightarrow I_4 = ]4, 6[$

f(x) é constante $\rightarrow I_3 = ]-2, 2[$

O sinal da função é

positivo: $f(x) > 0 \rightarrow S = ]-5, -2[ \cup ]2, 6[$;

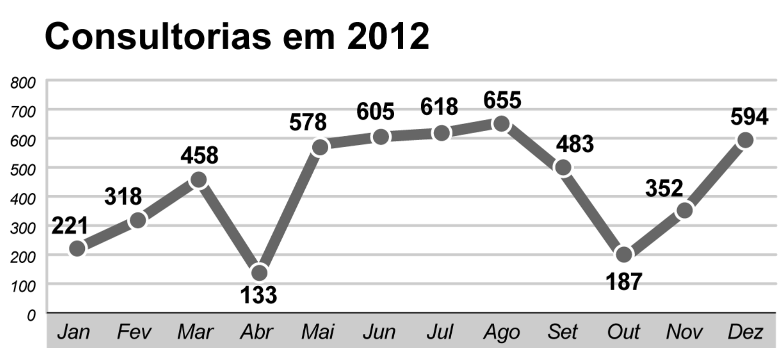
negativo: $f(x) < 0 \rightarrow S = ]-6, -5[$;

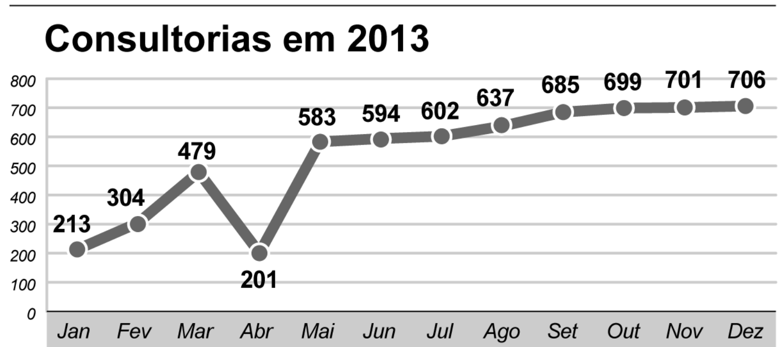
nulo: $f(x) = 0 \rightarrow S = \{-5\} \cup ]-2, 2]$.

## Atividade 6

***Atende ao objetivo 6***

Os gráficos a seguir ilustram a evolução das consultorias realizadas por uma empresa de auditoria nos anos de 2012 e 2013, considerando o número de consultorias realizadas por mês.



Utilize seus conhecimentos de crescimento e decrescimento de funções para ajudar o gestor da empresa a analisar o trabalho desenvolvido pela empresa nesses dois anos.

### *Resposta comentada*

Analisando-se o ano de 2012, percebe-se que foi um ano de muitas variações. Houve um crescimento do número de consultorias entre os meses de janeiro e março. Nos meses de março e abril, houve um grande decréscimo no número de consultorias. A partir daí, as consultorias realizadas cresceram, até atingir o máximo naquele ano (655), em agosto. De agosto a outubro, o número de consultorias decresceu, voltando a crescer nos dois últimos meses do ano.

O ano de 2013 mostrou-se mais regular, havendo crescimento no número de consultorias praticamente durante todo o ano, com exceção de março e abril, quando houve um forte decréscimo.

## Funções iguais

Duas funções f: $A \to B$ e g: $C \to D$ são iguais se, e somente se, apresentarem:

a) domínios iguais ($A = C$);

b) contradomínios iguais ($B = D$);

c) $f(x) = g(x)$ para todo x do domínio.

Isso equivale a dizer que duas funções f e g são iguais se, e somente se, forem conjuntos iguais de pares ordenados.

# Tipos de funções

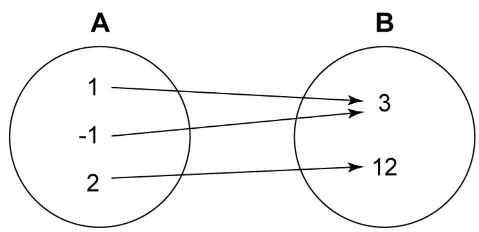
## Funções sobrejetoras

Definição: uma função f: $A \rightarrow B$ é sobrejetora se, e somente se, para todo $y \in B$, existe $x \in A$, tal que $f(x) = y$.

Em outras palavras, uma função será sobrejetora somente se o conjunto imagem for igual ao contradomínio: $Im(f) = CD(f) = B$.

Exemplo:

Seja f: $A \rightarrow B$, definida por: $f(x) = 3x^2$.




É sobrejetora, pois não sobram elementos em B.

*f* é sobrejetora $\Rightarrow$ Im = B

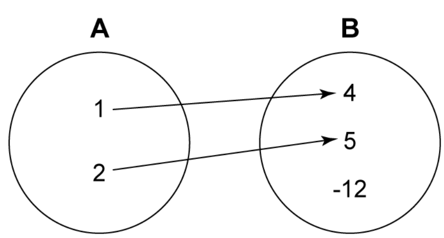
## Funções Injetoras

Definição: uma função f: $A \rightarrow B$ é injetora se, e somente se, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \forall \{x_1, x_2\} \subset A$.

Em outras palavras, uma função será injetora somente se dois elementos quaisquer distintos de A (domínio) tiverem imagens distintas em B (contradomínio).

Exemplo:

Seja f: $A \rightarrow B$, definida por $f(x) = x + 3$.



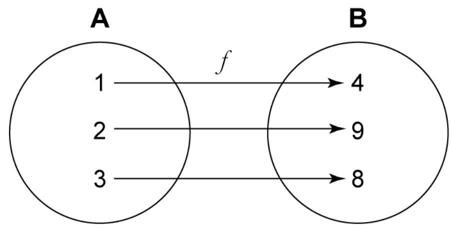

É injetora, pois cada elemento de B só recebe uma seta.

*f* é injetora quando: se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

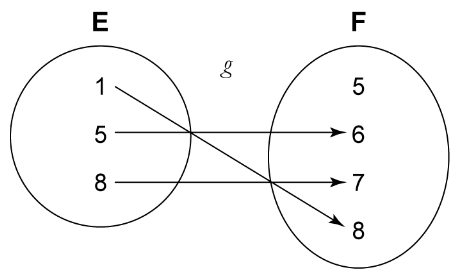
## Funções Bijetoras

Definição: uma função f: A $\rightarrow$ B será bijetora se, e somente se, *f* for ao mesmo tempo sobrejetora e injetora.

Em outras palavras, uma função f: A $\rightarrow$ B é bijetora somente se todo elemento $y \in B$ for imagem, através da função *f*, de um único $x \in A$.




*f* é uma função bijetora, pois é injetora e sobrejetora.




*g* não é uma função bijetora, pois não é sobrejetora.

## Classificação da função f através da lei de associação y = f(x)

Dada a lei de associação y = f(x) de uma função *f* sobrejetora, injetora ou bijetora, a conclusão sobre qual dessas classificações ocorre pode ser feita da seguinte maneira:

a) se para qualquer $y \in CD(f)$, a equação na variável x: f(x) = y tem pelo menos uma solução, então, f é sobrejetora;

b) se para todo $y \in Im(f)$, a equação na variável x: f(x) = y tem uma única solução, então, *f* é injetora. Note que se essa condição for satisfeita, então, teremos $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, $\forall \{x_1, x_2\} \subset D(f)$ (por isso, a função é injetora);

c) se para qualquer $y \in CD(f)$, a equação na variável $x$: $f(x) = y$ tem uma única solução, então, $f$ é bijetora.

Exemplo:

Dada a função f: $R \to R$, tal que $f(x) = 2x - 1$, classifique-a como sobrejetora, injetora ou bijetora.

Sendo $y \in CD(f) = R$, devemos resolver a equação $f(x) = y$ na variável x da seguinte forma:

$$2x - 1 = y \to 2x = y + 1 \therefore x = \frac{y+1}{2}$$

Podemos verificar que, para qualquer $y \in CD(f) = R$, a equação em x, $2x - 1 = y$, tem solução única. Logo, $f$ é bijetora.

## *Atividade 7*

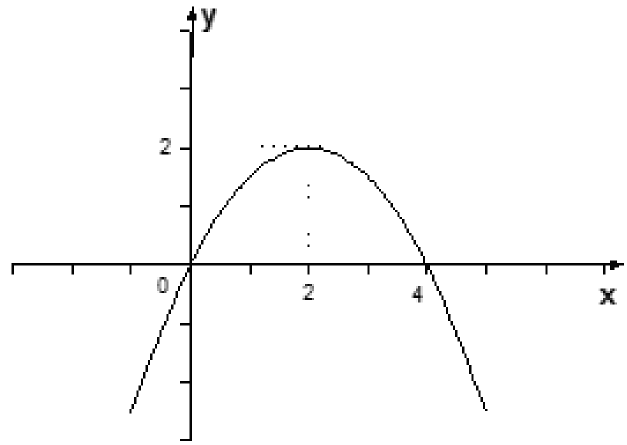
***Atende ao objetivo 7***

1. Dados os conjuntos A = {–5, –4, 0, 4, 5}, B = {0, 16, 25} e C = {–4, –3, 1, 5, 6, 8}, classifique cada uma das funções a seguir como sobrejetora, injetora ou bijetora:

a) $A \to B$ tal que $f(x) = x^2$

b) $A \to C$ tal que $g(x) = x + 1$

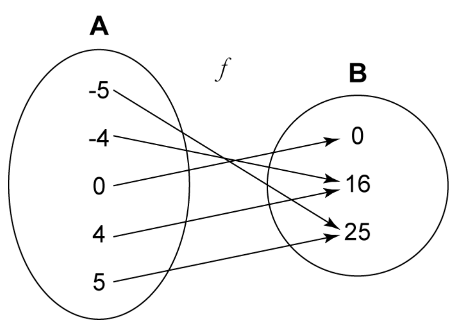
2. Classifique como sobrejetora, injetora ou bijetora a função f: R à $]-\infty, 2]$, cujo gráfico é dado por:




## *Resposta comentada*

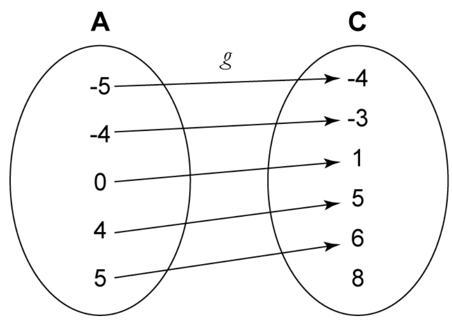
1. Para resolver esta questão, basta considerar que em ambas as funções os valores de x pertencem ao conjunto A e os de y, no item a, pertencem ao conjunto B; e ao conjunto C no item b. Usando o diagrama de flechas, teremos:

a) f: A $\rightarrow$ B tal que $f(x) = x^2$



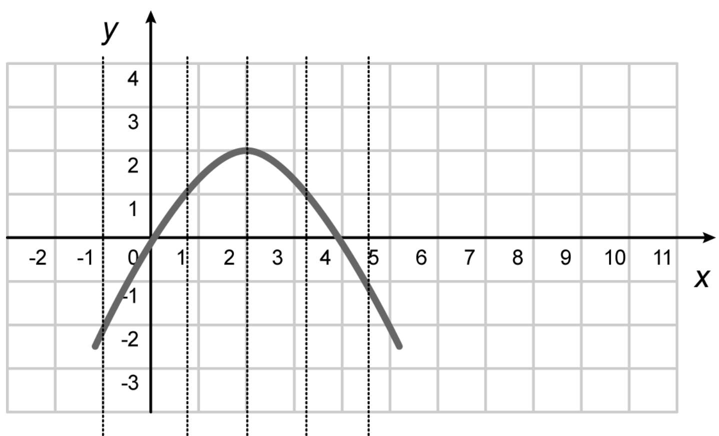

É fácil ver, pelo diagrama de flechas, que a função é sobrejetora, já que não sobram elementos em B sem correspondente.

b) g: A $\rightarrow$ C tal que $g(x) = x + 1$




Podemos ver, pelo diagrama de flechas, que a função é injetora, pois cada elemento de C recebe apenas uma seta.

2. Se traçarmos retas paralelas ao eixo *y*, conseguiremos ver com mais facilidade o tipo de função:




Note que todos os elementos do CD(f) têm correspondente a partir de f. Logo, a função é sobrejetora.

## Função inversa

Definição: uma função f: $A \rightarrow B$ é invertível se, e somente se, sua relação inversa, expressa por $f^{-1}$, de B em A também for função.

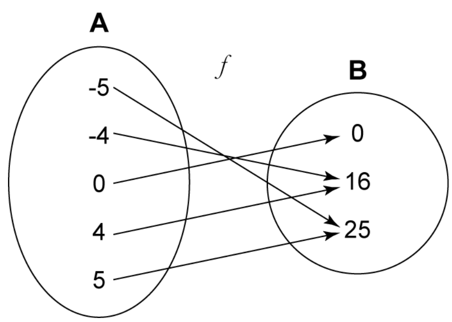
Em outras palavras, dada uma função bijetora f: $A \rightarrow B$ pelo conjunto dos pares ordenados (x, y), chama-se função inversa de f, e indica-se

$f^{-1}$: B $\rightarrow$ A, a função formada pelo conjunto dos pares ordenados (y, x), onde (x, y)$\in$ f.

As funções f e $f^{-1}$ são chamadas de funções inversas entre si.

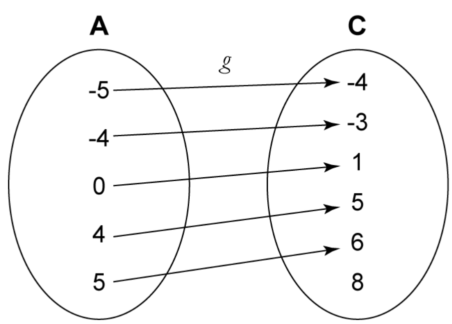
Exemplo:

Sendo f: A $\rightarrow$ B:




f = {(1, 2), (2, 4), (3, 6)}

Então: $f^{-1}$: B $\rightarrow$ A




$f^{-1}$ = { (2, 1), (4, 2), (6, 3) }

Função *f*: Domínio = A

Imagem = A

Função $f^{-1}$: Domínio = B

Imagem = B

Destaca-se que só há inversa de função bijetora.

## Como determinar a função inversa de uma função

Quando uma função bijetora f: $A \to B$ não é dada por um conjunto de pares ordenados, e sim definida por uma expressão algébrica, obtemos a inversa usando a seguinte regra prática:

1. trocamos x pelo y e y pelo x,

2. isolamos y em função do x

Exemplo:

Determine a função inversa da função $y = 5x + 3$

1) trocamos x pelo y e y pelo x: $x = 5y + 3$

2) isolamos y em função do x: $5y = x - 3$

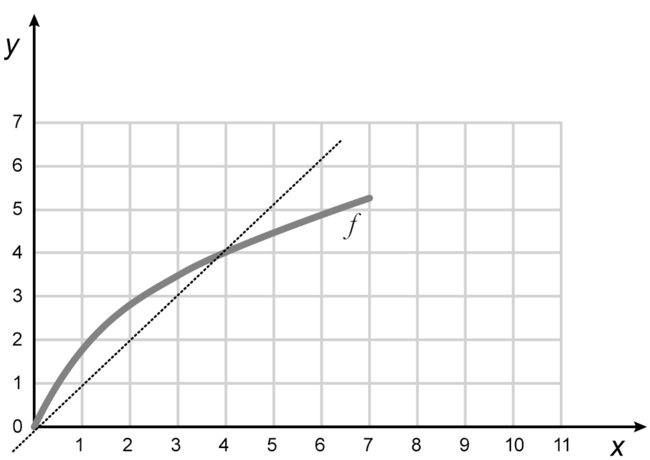
$y = \dfrac{x-3}{5}$ (função inversa)

## Gráficos de funções inversas

Os gráficos de duas funções inversas f e $f^{-1}$ são simétricos em relação à reta suporte que divide ao meio os quadrantes ímpares (bissetriz).

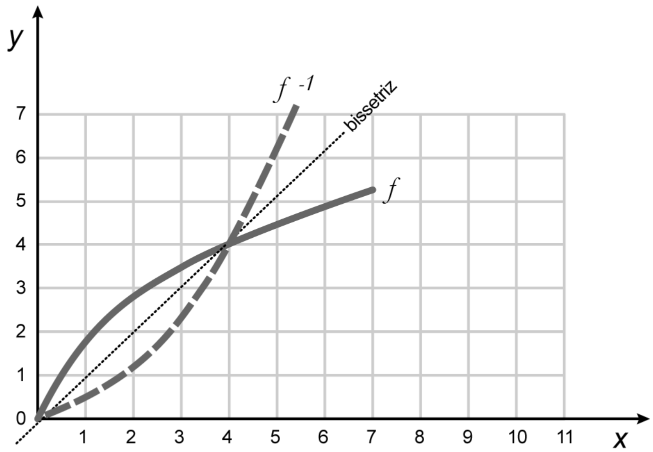
Exemplo:

Considere a função bijetora cujo gráfico é dado por:




Sabemos que (x, y) é ponto de $f^{-1}$ se, e somente se, (y, x) é ponto de f. Assim, para obter o gráfico de $f^{-1}$, basta transformarmos cada ponto (x, y) do gráfico de f em seu simétrico (y, x) em relação à reta suporte das bissetrizes dos quadrantes ímpares.

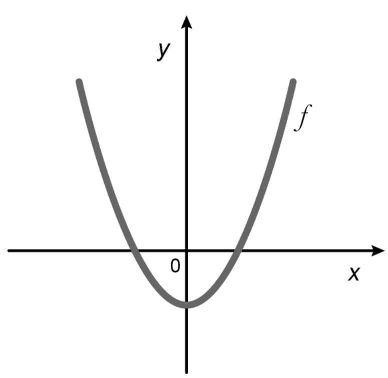
Assim, o gráfico de $f^{-1}$ será:

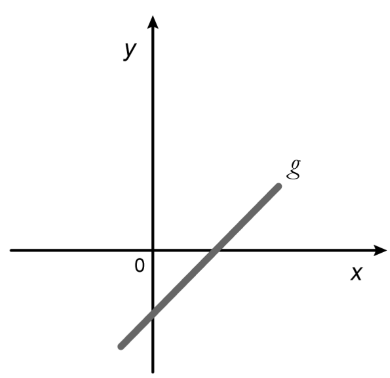



## Atividade 8

***Atende ao objetivo 8***

1. Os gráficos das funções f: $R \rightarrow R$ e g: $R \rightarrow R$ representados a seguir são uma parábola e uma reta, respectivamente. As funções possuem inversa? Por quê?



2. Sendo f: R → R uma função definida por f(x) = 2x + 3, pergunta-se: f possui inversa? Em caso afirmativo, determine a inversa de f.

3. Determine a inversa da função f(x) = 5x + 8.

### *Resposta comentada*

1. A função f de R → R não é sobrejetora, logo, não pode ser bijetora. Assim, f não possui inversa; já a função g é bijetora, logo, possui função inversa.

2. Como a função f(x) = 2x + 3 é bijetora e dada por uma expressão algébrica, devemos seguir os passos a seguir para encontrar sua inversa:

1) trocamos x pelo y e y pelo x: $x = 2y + 3$

2) isolamos y em função do x: $2y = x - 3$

$$y = \frac{x-3}{2}$$

Essa é a função inversa a f(x)

3. Para determinar a inversa da função bijetora *f*(x) = –5 + 8, vamos seguir os passos usados para determinar a inversa de expressões algébricas:

1) trocamos x pelo y e y pelo x: $x = -5y + 8$

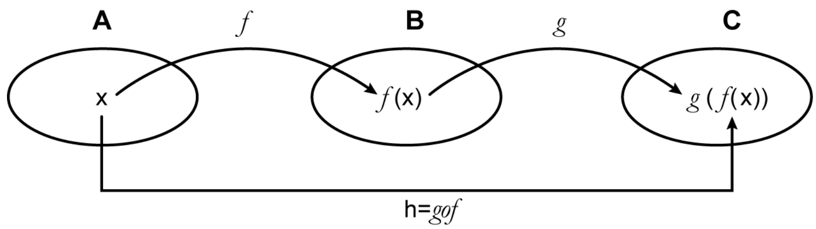
2) isolamos y em função do x: $x - 8 = -5y$

$$y = \frac{8-x}{5}$$

## Função composta

Sejam A, B e C conjuntos e sejam as funções f: $A \rightarrow B$ e g: $B \rightarrow C$. A função h: $A \rightarrow C$ tal que h(x) = g(f(x)) é chamada função composta de g com f. Indicaremos essa composição por g o f. Lê-se g composta com f.

Esquematicamente, temos:

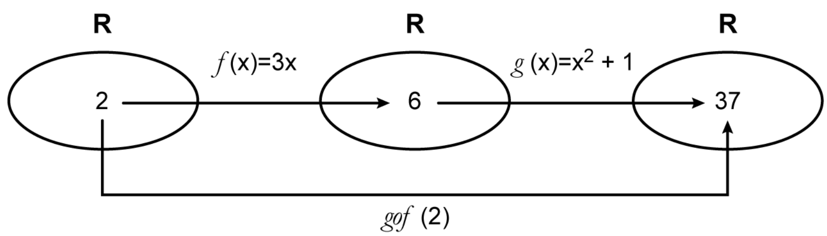



Devemos destacar que, de acordo com a definição, só existe a composta de g com f, isto é, g o f se, e somente se, CD (f) = Dom (g).

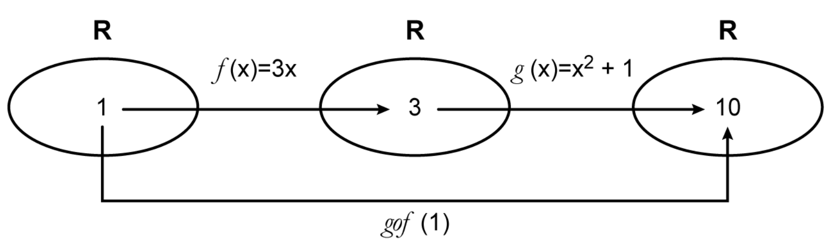
Exemplo:

Sejam as funções reais de variáveis reais f e g, em que f(x) = 3x e g(x) = $x^2 + 1$

f(2) = 6, g(6) = 37 e g(f(2) ) = g(6) = 37 , logo, (g o f) (2) = 37.



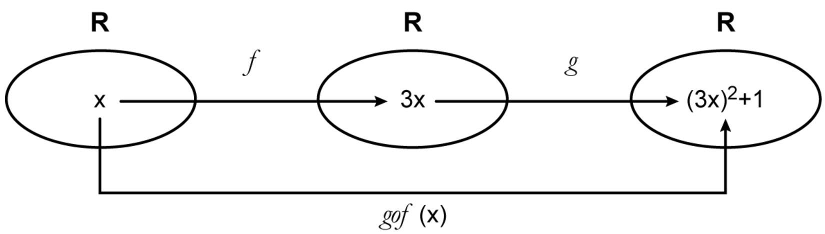

f(1) = 3, g(3) = 10 e g(f(1) ) = g(3) = 10 , logo, (gof) (1) = 10.



Vamos agora exemplificar a obtenção da expressão da função g o f. Considerando o exemplo anterior, basta que os seguintes cálculos sejam realizados:

$(gof)\ (x) = g(f(x)) = (f(x))^2 + 1 = (3x)^2 + 1 = 9x^2 + 1.$

Esquematicamente, temos:




Vale observar que a composição de funções não é comutativa. No exemplo anterior, temos:

$(gof)\ (x) = 9x^2 + 1$, enquanto $(fog)\ (x) = 3x^2 + 3$ (verifique).

## Atividade 9

***Atende ao objetivo 9***

Dadas as funções $f(x) = 4x - 5$, $g(x) = 3x^2 + 2$ e $h(x) = -x^2 + 2x$, determine as seguintes funções compostas:

a) (fog) (x)

b) (goh) (x)

c) (hof) (x)

### *Resposta comentada*

Para resolver essas questões, precisaremos substituir o valor de x pelo valor da função com a qual se deseja obter a composta. Então, neste caso, substitui-se o x da função f pela função g(x):

a) $(fog)\ (x) = 4\ (3x^2 + 2) - 5 = 12x^2 + 8 - 5 = 12x^2 + 3$

b) $(goh)\ (x) = 3(-x^2 + 2x)^2 + 2 = 3(x^4 - 4x^3 + 4x^2) + 2 = 3x^4 - 12x^3 + 12x^2 + 2$

c) $(hof)\ (x) = -(4x\text{-}5)^2 + 2\ (4x-5) = -(16x^2 - 40x + 25) + 8x - 10 = -16x^2 + 48x - 35$

## *Atividade final*

***Atende aos objetivos 4, 5, 6 e 9***

Vamos agora realizar uma atividade que permita rever os conteúdos abordados durante nossa aula. Caso perceba que continua com alguma dúvida, volte ao início da aula e refaça as atividades propostas.

Dada a relação $R_1 = \{(x, y) \in R^2 \mid y = 6x + 3\}$, faça o que se pede:

a) identifique se a relação é função;

b) defina seu domínio e sua imagem;

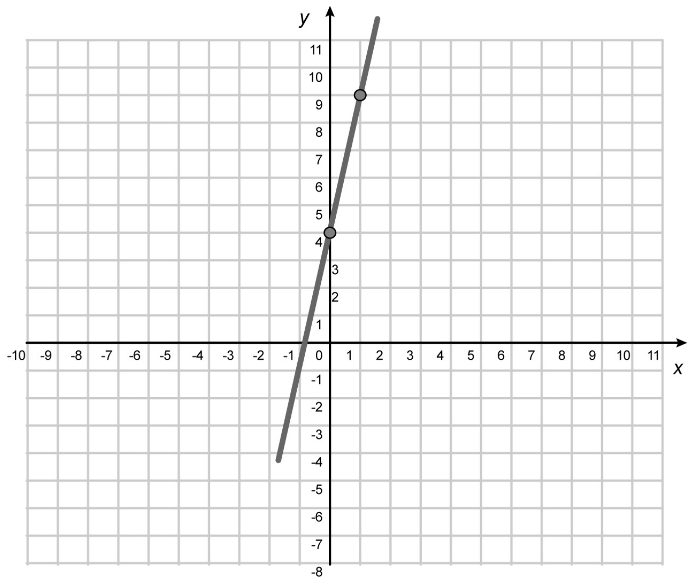
c) se for função, verifique se possui inversa, identificando;

d) analise seus intervalos de crescimento/decrescimento.

### *Resposta comentada*

a) Para verificar se uma relação é ou não função, basta olharmos o conjunto de partida, neste caso, R. Como o conjunto de chegada também é R, qualquer elemento que escolhermos no conjunto partida terá um único correspondente em R. Logo, essa relação é uma função.

Se fizermos o gráfico da relação, teremos uma melhor visão dessa questão:




b) Como não há restrições à escolha de nenhum número real para que a função pertença a R, o conjunto domínio será D(f) = R e o conjunto imagem Im(f) = R.

c) A função é bijetora, logo podemos encontrar a sua inversa:

1) trocamos x pelo y e y pelo x: $x = 6y + 3$

2) isolamos y em função do x: $6y = x - 3$

$$y = \frac{x-3}{6}$$

Essa é a função inversa a f(x)

A função é sempre crescente para todos os valores de x, $x \in R$.

O estudo de função é essencial na Matemática. O reconhecimento desse conceito nos permitirá construir uma série de modelos que nos serão muito úteis posteriormente. Todo o cálculo é baseado neste conceito.

Funções custo, lucro, receita, elasticidade-preço, valor presente de um fluxo de caixa, entre outras aplicações, só podem ser definidas a partir desse conceito.

## Resumo

Vamos fazer um apanhado dos principais pontos abordados nesta aula.

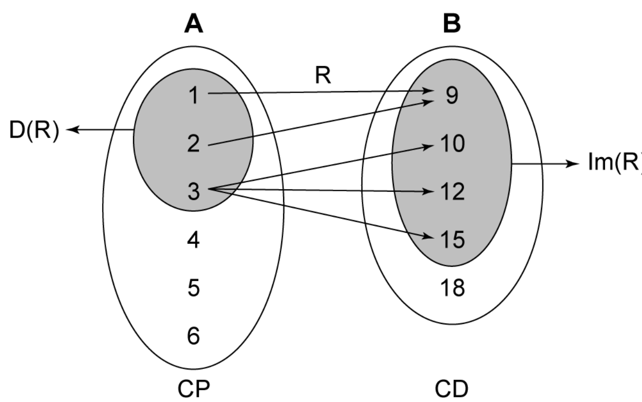
De maneira geral, temos que, se R é uma relação de A em B, então:

I. A é chamado de conjunto de partida da relação R;

II. B é chamado de contradomínio da relação R;

III. chama-se domínio da relação R ao conjunto $D(R) = \{x \in A \mid (x, y) \in R\}$;

IV. chama-se imagem da relação R ao conjunto $Im(R) = \{y \in B \mid (x, y) \in R\}$.




Função é um caso especial de relação, em que todos os elementos do conjunto de partida devem possuir um, e somente um, correspondente no contradomínio.

Chama-se domínio de uma função ao conjunto D(f) dos elementos $x \in A$ para os quais existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. Como, pela definição de função, todo elemento de A tem essa propriedade, temos nas funções:

$$D(f) = \text{conjunto de partida,}$$

$$\text{isto é, } D = A.$$

Chama-se imagem o conjunto Im dos elementos $y \in B$ para os quais existe $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$; portanto:

$$Im(f) \text{ é subconjunto do contradomínio.}$$

As funções podem ser crescentes, quando em um intervalo, para dois valores quaisquer a e b, se verifica que: $a < b \rightarrow f(a) < f(b)$; ou decrescentes, quando em um intervalo, para dois valores quaisquer a e b, se verifica que: $a < b \rightarrow f(a) > f(b)$.

As funções podem ser sobrejetoras (quando todos os elementos do contradomínio são correspondentes a algum elemento do conjunto de partida), injetoras (quando elementos distintos do conjunto de partida têm correspondentes distintos no conjunto imagem) ou bijetoras (quando são ao mesmo tempo sobrejetoras e injetoras).

Dada uma função bijetora $f: A \to B$ pelo conjunto dos pares ordenados $(x, y)$, chama-se função inversa de f, e indica-se $f^{-1}: B \to A$, a função formada pelo conjunto dos pares ordenados $(y, x)$, onde $(x, y) \in f$.

Somente a função bijetora possui função inversa. Para determinar a inversa de uma função que não é dada por um conjunto de pares ordenados, e sim definida por uma expressão algébrica, usamos a seguinte regra prática:

1. trocamos x pelo y e y pelo x,

2. isolamos y em função do x.

# Aula 8

## Função do 1º grau

*Eliane Ribeiro Pereira*
*Maria Cecília De Carvalho Chaves*

## Metas

Apresentar a natureza de interdependência de duas grandezas na resolução de problemas em que elas sejam diretamente proporcionais. Mostrar que essa interdependência caracteriza o estudo das funções do 1º grau.

## Objetivos

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. utilizar a função linear para representar relações entre grandezas diretamente proporcionais;
2. identificar uma função linear a partir de sua representação algébrica ou gráfica;
3. identificar os principais elementos da função de 1º grau;
4. analisar a variação do sinal da função de 1º grau;
5. resolver exercícios em que as funções estejam contextualizadas em situação do cotidiano ou aplicadas em outras áreas do conhecimento.

## Introdução

Na Aula 7, vimos que as funções podem ser compreendidas como uma forma de expressar como fenômenos ligados a ciências naturais, sociais etc. podem ser expressos. A chave desse conceito está na noção de dependência, de variável dependente e de variável independente. A questão-chave é como determinar a expressão algébrica que descreve a dependência existente entre as variáveis. Em um primeiro momento, deve-se analisar a relação entre as grandezas envolvidas para depois se estabelecer a melhor forma de generalizá-la por meio de uma função.

Esta aula diz respeito à modelagem das situações que envolvem grandezas que sofrem aumentos iguais em tempos iguais, isto é, que sejam diretamente proporcionais. Nesse caso, dizemos que as grandezas estão relacionadas por uma função do primeiro grau. Grandezas diretamente proporcionais encontram-se em diversas situações de nosso cotidiano, como no número de peças produzidas e no tempo de operação da máquina, nos juros simples e no montante, exemplos de pares de grandezas, conforme veremos nesta aula, diretamente proporcionais.

## Funções do 1º grau (ou funções afim)

Como visto na Aula 6, quando duas grandezas são diretamente proporcionais, os números que expressam essas grandezas variam na mesma razão, isto é, existe uma constante positiva k, tal que:

$$\frac{y}{x} = k$$

Se entendermos que a grandeza representada por y pode ter seus valores descritos por meio dos valores que a grandeza representada por x assume, então, uma melhor forma de apresentarmos esse relacionamento é dado por:

$$y = k \cdot x$$

Vamos agora exemplificar algumas situações que envolvam grandezas diretamente proporcionais.

Exemplo 1:


Fonte: http://www.sxc.hu/photo/1154996

Após o último reajuste dos preços dos combustíveis, o preço médio do litro da gasolina, pago nas bombas de combustíveis pelos consumidores do Rio de Janeiro, é R$ 3,15. O total a ser pago pelo consumidor no posto e a quantidade em litros abastecida definem grandezas diretamente proporcionais. Observe a tabela abaixo:

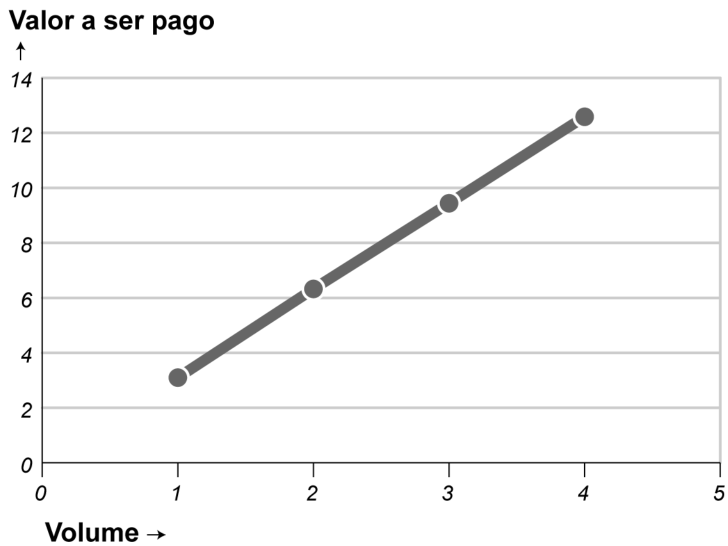
| Volume (litros) | Valor a ser pago (R$) |
|---|---|
| 1 | 3,15 |
| 2 | 6,30 |
| 3 | 9,45 |
| 4 | 12,60 |
| ... | ... |

$$\frac{1}{3{,}15} = \frac{2}{6{,}30} = \frac{3}{9{,}45} = \frac{4}{12{,}60} = k$$

Essas razões são todas iguais a 1/3,15. A razão $\frac{1}{3{,}15}$ indica que, a cada litro a mais, o valor a ser pago é multiplicado por 3,15. Assim, essas grandezas são ditas diretamente proporcionais.

$$y = 3{,}15 \cdot x$$

O gráfico correspondente a essa tabela é:




Exemplo 2:

Uma confecção apresenta a seguinte tabela de custos para fabricação de camisetas:

| Quant. (q) | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Custo (c) | 120 | 140 | 160 | 180 | 200 | 220 |

Fonte: http://www.sxc.hu/photo/348782

Primeiramente, é importante observar que há um custo de R$ 120,00, mesmo quando não há produção. Esse custo pode ser atribuído a impostos, salários, manutenção etc. Além disso, nota-se que, quando há um aumento de 10 unidades, o custo aumenta em R$ 20,00. Se há uma variação de 20 unidades no total produzido, o custo aumenta em R$ 40,00. Em um aumento de 30 unidades no total produzido, o custo aumenta em R$ 60,00, e assim por diante, isto é, uma variação na quantidade de camisetas produzidas gera uma variação proporcional no custo.

O custo possui duas componentes: uma componente variável, que é dependente do número de camisetas produzidas, e uma fixa. Dessa forma, identificam-se duas variáveis:

– custo de produção (c) – variável dependente;

– quantidade produzida (q) – variável livre.

Contudo, não está explícita a variação que a variável dependente c sofre a cada variação unitária na variável livre. Para isso, devemos calcular a taxa de variação média da variável dependente c em relação à variável independente q.

$$\frac{\text{variação em mc}}{\text{variação em q}} = \frac{140-120}{10-0} = \frac{160-140}{20-10} = \frac{180-160}{30-20} = \ldots = 2$$

Essa razão 2 indica o valor do acréscimo no custo de produção correspondente à produção de uma camiseta adicional. O custo variável e a quantidade de camisetas produzidas são, portanto, grandezas diretamente proporcionais, e a função custo total pode ser expressa por:

$C = CF + CV = 120 + 2q$, CF = custo fixo e CV = custo variável

$$C = 120 + 2q$$

Esses exemplos nos permitem concluir que, quando duas grandezas são diretamente proporcionais, o valor de uma pode ser expresso por $y = kx$ ou por $y = kx + c$, dependendo da necessidade de o valor final ser acrescido de um valor fixo que independe da variação sofrida pelas grandezas.

## Definição

Denomina-se função do 1º grau (afim) a toda função f de R em R expressa por $f(x) = ax + b$, em que a e b são números reais, com $a \neq 0$. Na função $f(x) = ax + b$, o número a é denominado coeficiente angular e o número b (termo independente) é denominado coeficiente linear. Quando $b = 0$, a função afim recebe o nome particular de função linear.

Assim, duas grandezas, x e y, estão relacionadas por uma função do

1º grau se existir números reais a e b, com $a \neq 0$, tais que os valores correspondentes de x e y são expressos por $y = ax + b$. Nesse caso, dizemos que x é a variável independente (ou livre) e y a variável dependente.

As seguintes funções são exemplos de funções afins:

a · $y = 4x + 3$ , coeficiente angular = 4 e linear = 3

b · $y = -3x - 2$, coeficiente angular = –3 e linear = –2

c · $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{3}$ , coeficiente angular = 1/2 e linear = 2/3

A função $y = x^2 + 8$ não é do 1º grau, pois sua expressão não é da forma $f(x) = ax + b$. Observe que a variável independente x, nesse caso, está com expoente 2.

## *Atividade 1*

***Atende ao objetivo 1***

1. Na cidade do Rio de Janeiro, a bandeirada dos táxis custa R$ 4,80 e o quilômetro rodado, R$ 1,95.

a. Construa uma tabela que ilustre o valor a ser pago pelo passageiro após os 5 primeiros quilômetros rodados.

b. As grandezas envolvidas são diretamente proporcionais? Por quê?

c. Caso a resposta do item b tenha sido afirmativa, apresente a função que relacione o total a ser pago com a distância percorrida, destacando a variável independente e a dependente.

2. Uma empresa de telefonia móvel está ofertando uma nova promoção para o sistema pré-pago. O usuário que aderir a esse pacote deverá pagar R$ 6,90 por semana e terá uma franquia de 100 minutos para ligações locais ou de longa distância para celulares dessa mesma operadora. Quando ultrapassar esse limite, o usuário irá pagar R$ 0,05/min. Determine a função que relaciona o valor a ser pago e o tempo excedente (em minutos).

### *Resposta comentada*

1. a.

| Distância (km) | Valor a ser pago (R$) | Valor a ser pago (R$) |
|---|---|---|
| 1 | 4,80 + 1,95 | 6,75 |
| 2 | 4,80 + 2.(1,95) | 8,70 |
| 3 | 4,80 + 3.(1,95) | 10,65 |
| 4 | 4,80 + 4.(1,95) | 12,60 |
| 5 | 4,80 + 5.(1,95) | 14,55 |

b. Sim, se considerarmos a variação do preço (sem a bandeirada inicial) e a variação da distância percorrida.

$$\frac{1}{1{,}95} = \frac{2}{3{,}90} = \frac{3}{5{,}85} = \frac{4}{7{,}80} = \frac{5}{9{,}75}$$

Essas razões são todas iguais a 1/1,95, que indica que, a cada quilometro adicional, o valor a ser pago pelo passageiro aumenta em 1,95. Assim, essas grandezas são ditas diretamente proporcionais.

c. Como as grandezas são diretamente proporcionais, podemos representá-las por meio de uma função do 1º grau em que y representa o total a ser pago (variável dependente), que é função da quilometragem rodada x (variável independente). Assim, temos

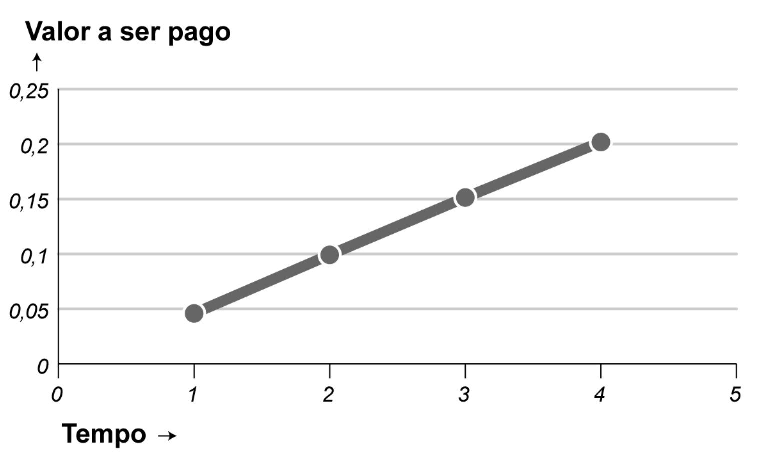
$$y = 1{,}95 \cdot x + 4{,}80$$

2. Inicialmente, construímos a tabela abaixo, que relaciona o tempo com o valor a ser pago pelo cliente:

| Tempo excedente (min.) | Valor a ser pago (R$) |
|---|---|
| 1 | 0,05 |
| 2 | 0,10 |
| 3 | 0,15 |
| 4 | 0,20 |
| ... | ... |

Observamos se cada minuto a mais que o cliente utiliza implica um aumento de R$ 0,05 na sua fatura.

O gráfico correspondente a essa tabela é:



Contudo, devemos observar que o valor final da conta não é dado por y = 0,05x, em que y é a variável dependente (valor da fatura) e x é a variável independente (total de minutos excedentes). Isso, porque o usuário deve pagar, independentemente do total de minutos excedentes, R$ 6,90/sem. ou R$ 27,60/mês.

Assim, o valor da conta é expresso por:

$y = 0{,}05 \cdot x + 27{,}60$

## A representação gráfica de uma função do 1º grau

Toda função do 1º grau pode ser representada graficamente por uma reta. Para esboçarmos a reta associada a uma dada função do 1º grau, basta conhecermos dois pontos por onde ela passa. Tradicionalmente, determinamos as interseções da reta com os eixos x e y.

### Interseção com o eixo x

Quando a reta intercepta o eixo x, a imagem da função é zero, isto é, f(x) = 0. O valor x para o qual f(x) = 0 é denominado zero (ou raiz) da função. Logo, o zero da função é dado pelo valor de x, o que faz com que a função assuma o valor zero. Encontrar esse valor de x é muito fácil, pois basta resolver a equação do 1º grau.

Exemplo:

$f(x) = -3x + 18$

$f(x) = 0 =$ $f(0) = -3 \cdot 0 + 18 \therefore f(0) = 0 + 18 = 18$

Num caso geral, para determinar-se o zero da função afim, basta resolver a equação do 1º grau:

ax + b = 0, cuja única solução é: $x = \dfrac{-b}{a}$ .

O ponto de interseção é, portanto, igual a (–b/a, 0).

## Interseção com o eixo y

Analogamente, quando a reta intercepta o eixo y, o valor da abscissa do ponto de interseção é igual a zero, isto é, o ponto de interseção com o eixo y é $(0,f(0)) = (0, b)$.

Exemplo:

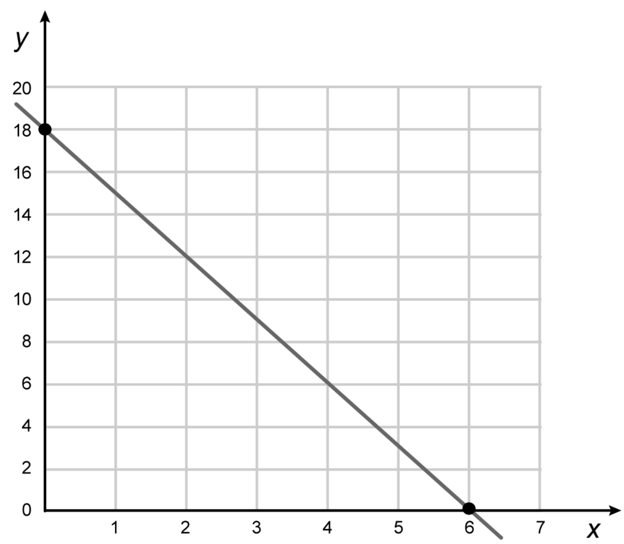
$f(x) = -3x + 18$

$f(0) = -3.0 + 18 \therefore f(0) = 0 + 18 = 18$

Agora, dado que já se conhecem dois pontos por onde a reta passa, podemos esboçar o gráfico.

Exemplo:

Representação gráfica da função $f(x) = -3x + 18$

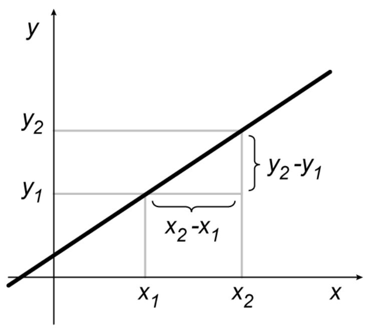



## Interpretação dos coeficientes da função do 1º grau

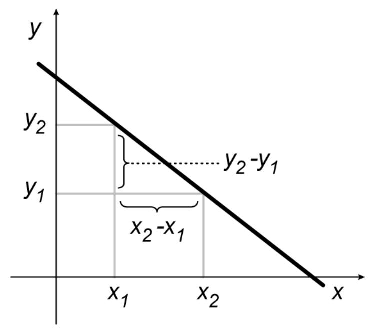
Quando calculamos a interseção da função com o eixo y, vimos que o valor do coeficiente b (coeficiente linear) corresponde ao ponto que a reta corta o eixo y.

O coeficiente a da função $f(x) = a x + b$ é denominado coeficiente angular ou taxa de variação média da variável dependente, y, em relação à variável independente, x. Como mostrado no exemplo 2, essa taxa de variação média pode ser obtida pelo cálculo da seguinte razão:

$$a = \frac{\text{variação em } y}{\text{variação em } x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



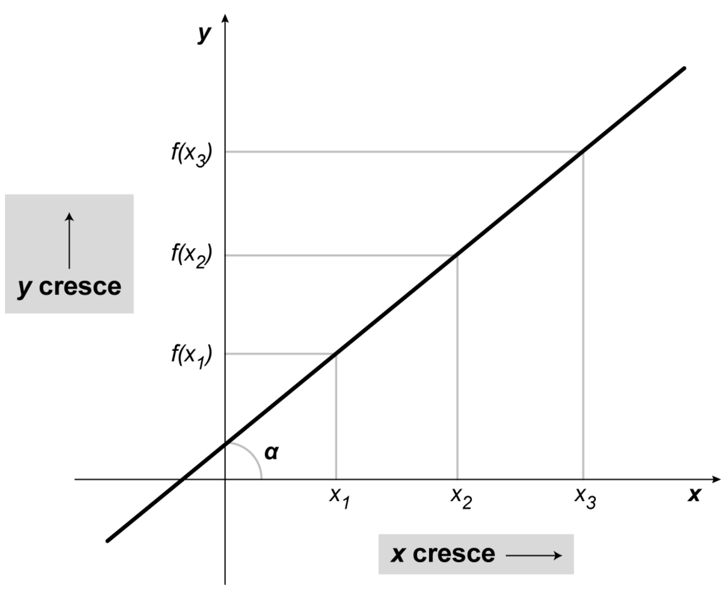

ou



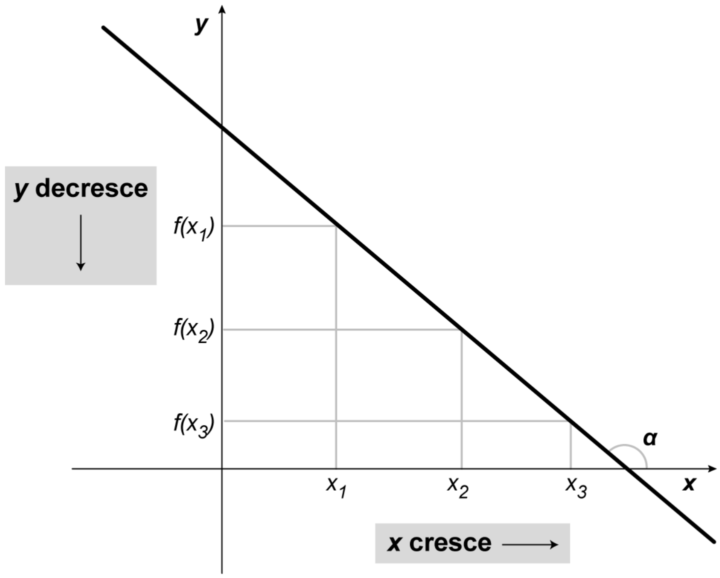

O gráfico da função pode ser crescente ou decrescente, dependendo do sinal de a (coeficiente angular). Quando a > 0, a taxa de variação é positiva, logo, x aumenta, y também aumenta. Por isso, quando a > 0 a função é dita crescente. Nesse caso, o ângulo α formado pela reta e o eixo x será agudo (menor que 90 °). Quando a < 0, a taxa de variação é negativa, isto é, conforme x aumenta, y diminui. Por isso, quando a < 0 a função é decrescente. Neste caso, o ângulo α formado pela reta e o eixo x será obtuso (maior que 90 º).

Resumindo, tem-se:

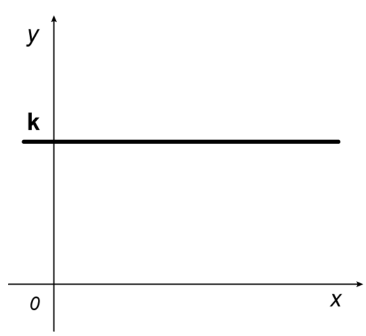
i. a> 0, f(x) = ax + b é crescente; quanto maior x, maior y;



ii. a< 0, f(x) = ax + b é decrescente; quanto maior x, menor y.




Nem toda função que possui a reta como representação gráfica é linear! Observe o gráfico adiante:




A função representada nesse gráfico é uma função real denominada função constante: f: R→R tal que f(x) = k, em que k é uma constante real.

Isso significa que todos os elementos do domínio apresentam a mesma imagem. Não existe, portanto, qualquer relação de proporcionalidade entre as grandezas envolvidas.

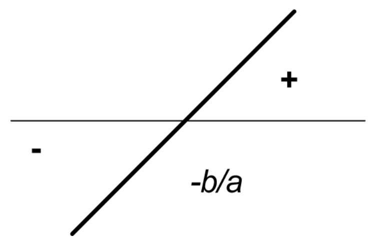
## Estudo da variação do sinal da função do 1º grau

Estudar o sinal da função do 1º grau é determinar os valores de x para os quais se tenha y <0 , y = 0 ou y > 0. Sabemos que y = 0 quando x = –b/a. Para conhecermos os valores de x de modo que y seja positivo ou negativo, devemos considerar o sinal do coeficiente a.

1º caso: a > 0.

$f(x) = a x + b > 0 \leftrightarrow a x > -b \leftrightarrow x > -b/a$

$f(x) = a x + b < 0 \leftrightarrow a x < -b \leftrightarrow x < -b/a$

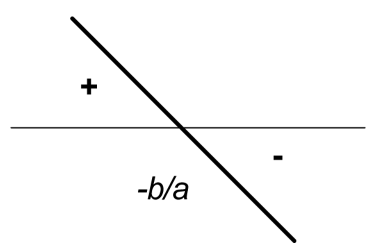



Observa-se que, para todo valor de x > – b/a, a função é positiva, e para valores menores que –b/a, a função é negativa.

2º caso: a < 0.

$f(x) = ax + b > 0 \leftrightarrow a x > -b \leftrightarrow x < -b/a$

$f(x) = ax + b < 0 \leftrightarrow a x < -b \leftrightarrow x > -b/a$




Observa-se que, para todo valor de x > – b/a, a função é negativa. Por outro lado, para valores maiores que –b/a, a função é positiva.

Exemplo:

Discutir a variação do sinal das seguintes funções afins:

a.

$f(x) = 4x - 16$

O zero da função é dado por:

$4x - 16 = 0 \therefore 4x = 16 \therefore x = 4.$

Também é possível aplicarmos direto a fórmula e obtermos o zero da função como $-b/a$.

$x = -(-16)/4 = 16/4 = 4$

Como $a = 4 > 0$, a função é crescente. Assim, para

$x > 4$, $y > 0$ (a função é positiva),

$x < 4$, $y < 0$ (a função é negativa).

b.

$f(x) = -2x - 10$

O zero da função é dado por:

$x = -b/a$

$x = -(-10)/(-2) = 10/(-2) = -5$

Como $a = -2 < 0$, a função é decrescente. Assim, para

$x > -5$, $y < 0$ (a função é negativa),

$x < -5$, $y > 0$ (a função é positiva).

## *Atividade 2*

***Atende aos objetivos 2 e 3***

1. Classifique cada uma das funções do 1º grau como crescente ou decrescente:

a) $y = \frac{x}{3} + 5$

---

---

b) $y = -8x - 7$

c. $9 - 5x$

2. Dada a função $f(x) = (-2m + 4) + 10$, determine m de modo que f(x) seja uma função decrescente.

3. Discuta, através do gráfico, a variação de sinal da função:

$$y = -4x + 1$$

4. Discuta algebricamente a variação de sinal das funções:

a) $y = \sqrt{2}x - \sqrt{6}$

b) $y = -3x + 1$

## *Resposta comentada*

1. a. Coeficiente angular: $a = 1/3$.

Como $a > 0$, a função é crescente.

b. Coeficiente angular: $a = -8$.

Como $a < 0$, a função é decrescente.

c. Coeficiente angular: $a = -5$.

Como $a < 0$, a função é decrescente.

2. O coeficiente angular da reta define se a função é crescente ou decrescente. Como o enunciado pede que a função seja decrescente, o coeficiente angular precisa ser um número negativo.

$a = -2m + 4$

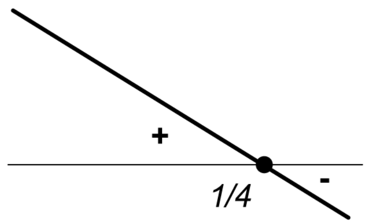
$a < 0 \rightarrow -2m + 4 < 0 \rightarrow -2m < -4 \rightarrow m > 2$.

Assim, para qualquer valor de $m > 2$, a função $f(x) = (-2m + 4) + 10$ é decrescente.

3. O zero da função é dado por:

$$-4x + 1 = 0 \therefore -4x = -1 \therefore x = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

Como o coeficiente angular é negativo, a função é decrescente. Logo,




x > 1/4, y < 0 (a função é negativa),

x < 1/4, y > 0 (a função é positiva).

4.

a) $y = \sqrt{2}x - \sqrt{6}$

$y > 0 \rightarrow \sqrt{2}x - \sqrt{6} > 0$

$$\sqrt{2x} > \sqrt{6} \rightarrow x > \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{3}$$

Isto é, para valores de $x > \sqrt{3}$, a função y é positiva e, para valores de $x < \sqrt{3}$, a função y negativa.

b) $y = -3x + 1$

$y > 0 \rightarrow -3x + 1 > 0$

$-3x > -1 \rightarrow x < \dfrac{1}{3}$

Isto é, para valores de x < 1/3, a função y é positiva e, para valores de x > 1/3, a função y negativa.

## Obtenção da expressão da função do 1º grau

Agora que já estamos familiarizados com a função do 1º grau, conhecemos a premissa fundamental que afirma que, quando as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais, sua relação pode ser expressa por meio de uma função afim. Devemos saber escrever a função a partir de informações acerca da reta que a descreve.

Vamos lembrar que a função afim é dada pela expressão y = ax + b. Assim, a função fica completamente definida quando os parâmetros a e b são conhecidos.

Exemplo 1:

Dada a função f (x) = ax + b, calcule o valor de a e b sabendo que f (0) = 3 e f (–3) = 0.

Dizer que f (0) = 3 e f (–3) = 0 significa dizer que, quando x = 0, y = 3, e que, quando x = –3, y = 0. São dados dois pontos por onde a reta passa, que, nesse caso, são (0, 3) e (–3, 0).

Agora já é possível formularmos o sistema cuja resolução nos fornecerá os valores de a e de b.

$$\begin{cases} f(0) = 3 \rightarrow 3 = a.0 + b \\ f(-3) = 0 \rightarrow 0 = a.(-3) + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 3 \\ -3 \cdot a + b = 0 \end{cases}$$

A primeira equação desse sistema já nos fornece o valor de b. Substituindo-se b = 3 na segunda equação, obtemos:

$-3 \cdot a + 3 = 0 \rightarrow -3 \cdot a = -3 \rightarrow a = \dfrac{-3}{-3} = 1$. Logo, a =1 e b = 3 e a função é dada por f (x) = x – 3.

Exemplo 2:

Calcule o valor de a, sabendo que o gráfico de y = ax + 5 passa no ponto (2, 6).

Nesse exemplo, é fornecido o valor do coeficiente linear (b = 5). Assim, a expressão geral y = ax + b já pode ser reescrita como:

$y = a \cdot x + 5$ (I)

Com a informação adicional que afirma que a reta passa pelo ponto (2, 9), pode-se determinar a. Basta que lembremos que isso significa que, quando x = 2, y = 9. Substituindo na expressão I, temos:

$$9 = a \cdot 2 + 5 \rightarrow 2 \cdot a + 5 = 9 \rightarrow 2 \cdot a = 4 \rightarrow a = \frac{4}{2} = 2$$

Logo, a = 2 e a função é dada por f (x) = 2x + 9.

## *Atividade 3*

***Atende ao objetivo 1***

1. Sabendo que os pontos P1 = (2,5) e P2 = (3,7) pertencem ao gráfico da função f(x) = ax + b,

calcule:

a) f(4)

b) x, tal que f(x) = 10

2. Um estagiário de um pequeno escritório de contabilidade tem seu salário definido por um valor fixo mais uma parte variável, que é diretamente proporcional ao número de horas extras trabalhadas. Em função do calendário de entrega das declarações do IR, os meses de março e abril são de bastante trabalho. No mês de março, ele fez 15 horas extras e recebeu R$ 945,00; no mês de abril, trabalhou 30 horas extras e recebeu de salário R$ 1.170,00.

Fonte: http://www.sxc.hu/photo/1096838

a. Determine a função salário desse estagiário.

b. Qual o valor do salário do estagiário em um mês sem horas extras?

### *Resposta comentada*

1. Para podermos responder ao que é solicitado, é preciso primeiramente conhecer os parâmetros a e b da função. Com esse propósito, devemos proceder de forma análoga à desenvolvida no exemplo 1 da seção 1.6., ou seja, substituir as coordenadas dos pontos $P_1$ e $P_2$ na expressão geral da função do 1º grau.

Substituindo-se as coordenadas de $P_1$, obtemos $5 = a \cdot 2 + b$ e substituindo-se as coordenadas de $P_2$, $7 = 3 \cdot a + b$. Geramos, portanto, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2 \cdot a + b = 5 \\ 3 \cdot a + b = 7 \end{cases}$$

Resolvendo por substituição, da primeira equação podemos isolar b e reescrevê-la como $b = 5 - 2 \cdot a$. Substituindo-se b na segunda, temos:

$3 \cdot a + (5 - 2 \cdot a) = 7$

$3 \cdot a - 2 \cdot a + 5 = 7$

$3 \cdot a - 2 \cdot a = 7 - 5$

$a = 2$

Para determinarmos b, basta substituirmos o valor encontrado para a na expressão de b.

$b = 5 - 2 \cdot a \rightarrow b = 5 - 2 \cdot 2 \rightarrow b = 1$

Agora que conhecemos a e b, temos $f(x) = 2 \cdot x + 1$.

a) $f(4) = 2 \cdot 4 + 1 = 5$

$f(4) = 5$

b) $f(x) = 10$, isto é, y é conhecido e x não.

$f(x) = 2 \cdot x + 1$

$y = 2 \cdot x + 1$

$10 = 2x + 1$

$2x = 10 - 1$

$2x = 9$

$x = 4{,}5$

2. a) O enunciado garante que o salário final (y) pode ser expresso por meio de uma função do 1º grau, dado que a componente variável é diretamente proporcional ao número de horas extras trabalhadas, isto é,

$y(x) = ax + b$, onde b = valor fixo do salário,

x = nº de horas extras feitas.

O coeficiente linear, nesse caso, pode ser interpretado como o valor recebido pelo estagiário por hora extra trabalhada no mês.

Dados:

| Nº horas extras (x) | Salário final (y) |
|---|---|
| 15 | R$ 945,00 |
| 30 | R$ 1170,00 |

Inicialmente, precisamos calcular a função salário. Devemos lembrar que o coeficiente angular representa a taxa de variação da função.

$$a = \frac{\text{variação em } y}{\text{variação em } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1170 - 945}{30 - 15} = \frac{225}{15} = 15$$

Para obtermos o termo b, devemos substituir a = 15 na expressão y = ax + b e um dos pares de valores de x e y fornecidos.

y = 15x + b, substituindo, por exemplo, o par (15, 945), temos

$945 = 15 \cdot 15 + b$

$225 + b = 945 \rightarrow b = 945 - 225 = 720$

Logo, $y = 15 \cdot x + 720$.

Também poderíamos ter encontrado salário, lembrando que as informações dadas correspondem a conhecermos dois pontos por onde a reta passa (15, 945) e (30, 1170).

b) Se não houve hora extra, então x = 0. Logo, deseja-se saber o valor de y quando x = 0.

$f(0) = 15 \cdot 0 + 720 = 720$.

Em um mês sem hora extra, o funcionário receberá R$ 720,00.

## *Atividade final*

***Atende aos objetivos 1, 4 e 5***

Após a exposição dos principais conceitos relativos à função do 1º grau, devemos sedimentar nosso aprendizado resolvendo os exercícios a seguir, que nos permitirão aplicar todo o conteúdo visto durante nossa aula e vivenciar algumas das aplicações mais usuais para as funções do 1º grau.

1. Acredita-se que um automóvel que atualmente custe R$ 60.000,00 sofrerá uma desvalorização linear de 5.000,00 reais por ano. Sob essa condição, calcule:

a) o valor do automóvel daqui a 8 anos;

b) o tempo decorrido para que o preço do mesmo esteja reduzido à metade.

2. Um banco paga as contas de um cliente. As contas vencem segundo a função $y = -\frac{2x}{3} + 18$, onde $x \in \{1, 2, ..., 30\}$ e y é o saldo do cliente (em real) no dia x do mês.

a. Em que dia do mês o saldo do cliente chega a R$ 0,00?

b. Em que período do mês o saldo é positivo?

c. Em que período do mês o saldo é negativo?

3. Uma pessoa precisa escolher um novo plano de saúde entre duas opções que sua empresa oferece: Saúde Total e UNIMEDICAL. Condições dos planos:

- Plano Saúde Total: cobra um valor fixo mensal de R$ 160,00 e R$ 20,00 por consulta num certo período.
- Plano UNIMEDICAL: cobra um valor fixo mensal de R$ 120,00 e R$ 30,00 por consulta num certo período. O gasto total de cada plano é dado em função do número de consultas x dentro do período preestabelecido. Calcule:

a) a função correspondente a cada plano;

b) em qual situação o plano Saúde Total é mais econômico, o plano UNIMEDICAL é mais econômico, os dois se equivalem.

### *Resposta comentada*

1. O enunciado afirma que o valor de mercado de automóvel sofre uma desvalorização linear, de modo que, a cada ano, o veículo é desvalorizado em R$ 5.000,00. Podemos, então, expressar o valor do automóvel como a seguinte função linear:

$y = 60.000 - 5.000x$, x = idade, em anos, do veículo.

a. Calcular o valor do carro daqui a 6 anos corresponde a calcularmos a imagem de $x = 6$.

$f(6) = 60.000 - 5.000 \cdot 6 = 60.000 - 30.000 = 30.000$

b. Lembrando que y representa o valor de mercado do automóvel passados x anos, esse enunciado pede o valor de x tal que y seja a terça parte do valor de compra, isto é, y = 20.000.

f(x) = 20.000

60.000 – 5.000x = 20.000

–5.000x = 20.000 – 60.000

–5.000x = –40.000

x = 8

Após 8 anos, o carro valerá a terça parte do seu valor inicial.

2.

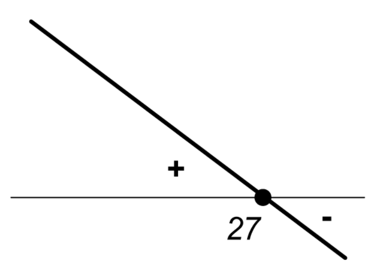
a) Como y foi definido como o saldo do cliente no dia x, devemos encontrar qual valor de x torna y = 0, isto é, calcular f(x) = 0, ou seja, é o zero da função.

$$y = -\frac{2x}{3} + 18 \rightarrow -\frac{2x}{3} + 18 = 0 \rightarrow -2x + 54 = 0 \rightarrow -2x = -54 \rightarrow x = 27$$

O cliente tem seu saldo zerado no 27º dia do mês.

b) Queremos saber para qual variação de x a função y é positiva.

O item anterior nos forneceu o zero da função. Além disso, como o coeficiente angular da função é negativo (a = –2/3), a função é decrescente. Assim, a variação do sinal da função pode ser representada graficamente por:




Isso quer dizer que o cliente tem saldo positivo nos primeiros 26 dias do mês e negativo a partir do 28º dia do mês.

3.

a) Seja f1 a função que expressa o custo total do cliente no plano Saúde Total, em que x corresponde ao número de consultas num certo período. Logo, $f1 = 160 + 20x$

Seja f2 a função que expressa o custo total do cliente no plano UNIMEDICAL, em que x corresponde ao número de consultas num certo período. Logo, $f2 = 120 + 30x$

b. Para o plano Saúde Total ser mais econômico que o plano UNIMEDICAL precisamos ter $f1 < f2$, que pode ser expresso algebricamente por:

$160 + 20x < 120 + 30x \rightarrow 20x - 30x < 120 - 160 \rightarrow -10x < -40 \rightarrow x > 4$

Isto significa dizer que o plano Saúde Total passa a ser mais econômico que o plano UNIMEDICAL quando o cliente faz mais do 4 consultas por período.

Eles são equivalentes quando $f1(x) = f2(x)$.

$160 + 20x = 120 + 30x \rightarrow 20x - 30x = 120 - 160 \rightarrow -10x = -40 \rightarrow x = 4$

Ou seja, se o cliente sempre realiza quatro consultas por mês, os custos dos planos são iguais.

---

Esta aula dedicou-se ao estudo da função do 1º grau, que é um caso particular de função. Embora a função do 1º grau tenha uma formulação simples, pudemos verificar o quão variado é seu escopo de aplicações. Taxa de variação, função receita/custo e lucro e juros simples foram algumas das célebres aplicações estudadas. Também vimos diferentes possibilidades de obtermos e interpretarmos a função do 1º grau.

## Resumo

Vamos fazer um apanhado dos principais pontos abordados nesta aula.

As funções do 1º grau (ou afins) são funções reais que correspondem às relações entre a variável dependente e a independente expressa por um polinômio do 1º grau. São expressas por:

$$f(x) = ax + b, \ a \neq 0$$

O coeficiente a é denominado coeficiente angular da reta ou taxa de variação média da variável dependente, y, em relação à variável independente, x.

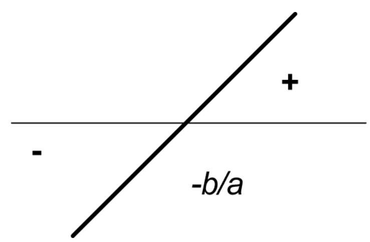
$$a = \frac{\text{variação em } y}{\text{variação em } x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

A função afim f (x) = ax + b é crescente se, e somente se, o coeficiente angular a for positivo.

A função afim f (x) = ax + b é decrescente se, e somente se, o coeficiente angular a for negativo.

O zero da função afim f (x) = ax + b é dado por x = – b /a e, para se estudar o sinal d, basta examinar se é positiva, nula ou negativa a ordenada de cada ponto da curva.

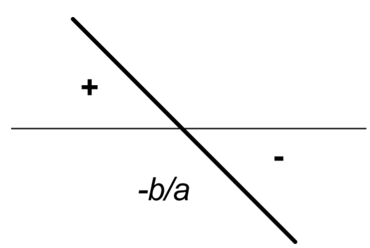
1º) a > 0




$f(x) = ax + b > 0 \leftrightarrow ax > -b \leftrightarrow x > -b/a$

$f(x) = ax + b < 0 \leftrightarrow ax < -b \leftrightarrow x < -b/a$

2º) a < 0




$f(x) = ax + b > 0 \leftrightarrow ax > -b \leftrightarrow x < -b/a$

$f(x) = ax + b < 0 \leftrightarrow ax < -b \leftrightarrow x > -b/a$

# Aula 9

## Funções quadráticas ou de 2º grau

*Eliane Ribeiro Pereira*
*Maria Cecília de Carvalho Chaves*

## Meta

Apresentar noções de funções de 2º grau e suas aplicações.

## Objetivos

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. reconhecer a concavidade de uma função quadrática;
2. identificar as raízes da função quadrática;
3. identificar o vértice da função quadrática como seu ponto de máximo e mínimo, aplicando o conceito em situações práticas;
4. determinar o domínio e a imagem de uma função quadrática;
5. analisar a variação de sinal da função quadrática;
7. plotar o gráfico de uma função quadrática;
8. aplicar procedimentos para a aplicação e resolução de inequações de 2º grau;
9. aplicar procedimentos para a resolução de inequações produto e quociente.

## Introdução

A função quadrática é uma função equivalente à equação do 2º grau. Ela é um polinômio de segundo grau, ou um polinômio de grau dois, porque o maior expoente de x é 2.

Veremos adiante que o gráfico cartesiano da função quadrática é uma curva plana chamada de parábola. A palavra parábola indica colocar ao lado ou comparação, e foi usada por Apolonius de Perga – astrônomo e matemático grego – como nome para uma seção plana.

Fonte: http://ecalculo.if.usp.br/historia/apolonio_perga.htm

O matemático Apolonius nasceu em Perga (Turquia, nos dias de hoje) e era chamado de Apolónio de Perga. Apesar de muitos de seus trabalhos terem sido perdidos ao longo dos anos, Apolonius, conhecido como "O Grande Geómetra", deixou uma vasta obra, contribuindo sobremaneira para o desenvolvimento da Matemática.

O seu trabalho mais importante, Cónicas, era composto por oito livros. Alguns deles não chegaram aos dias de hoje. Apolonius introduziu termos que hoje em dia são muito utilizados por nós, como parábola, hipérbole e elipse.

Você pode obter mais informações sobre esse grande matemático no *site*: http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/2012/05/apolonio-de-perga.html.

## Função quadrática ou função do 2º grau

**Definição**

Chama-se função quadrática, ou função polinomial do 2º grau, qualquer função f de R em R dada por uma lei da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são números reais e $a \neq 0$.

Exemplos:

$f(x) = 3x^2 - 4x + 1$, em que $a = 3$, $b = -4$ e $c = 1$

$f(x) = x^2 - 1$, em que $a = 1$, $b = 0$ e $c = -1$

$f(x) = 2x^2 + 3x + 5$, em que $a = 2$, $b = 3$ e $c = 5$

$f(x) = -x^2 + 8x$, em que $a = -1$, $b = 8$ e $c = 0$

$f(x) = -4x^2$, em que $a = -4$, $b = 0$ e $c = 0$

**Gráfico**

O gráfico de uma função polinomial do 2º grau, $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ é uma curva chamada parábola.

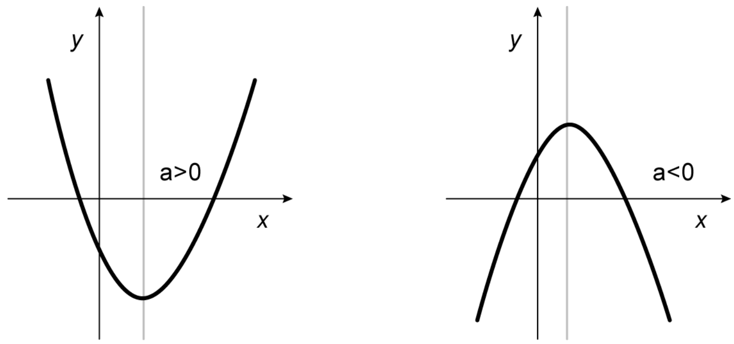
Essa parábola tem o eixo de simetria perpendicular ao eixo Ox e sua concavidade é definida pelo sinal do termo dominante a: se $a > 0$, ela é voltada para o sentido positivo do eixo Oy; e se $a < 0$, ela é voltada para o sentido negativo do eixo Oy.

Em resumo, podemos analisar a concavidade da função quadrática da seguinte forma:

$a > 0 \rightarrow$ concavidade da parábola voltada para cima

$a < 0 \rightarrow$ concavidade da parábola voltada para baixo

Exemplo:




Vamos verificar a concavidade do gráfico da função $y = -5x^2 + 3$.

Para verificar a concavidade do gráfico de uma função, basta investigar o coeficiente de $x^2$, ou seja, o valor de a.

Nesse caso, $a = -5$, logo, o gráfico da função terá concavidade voltada para baixo.

## *Atividade 1*

***Atende ao objetivo 1***

Identifique a concavidade das seguintes funções quadráticas:

a) $f(x) = 7x^2 - 3$

b) $f(x) = -3x^2 + 7$

c) $f(x) = \dfrac{-3}{5}x^2$

### *Resposta comentada*

Para resolver esta questão, basta analisar o coeficiente da variável $x^2$, isto é, o valor de a:

a) $f(x) = 7x^2 - 3$, neste caso, $a = 7$, positivo, logo, esta parábola é voltada para cima;

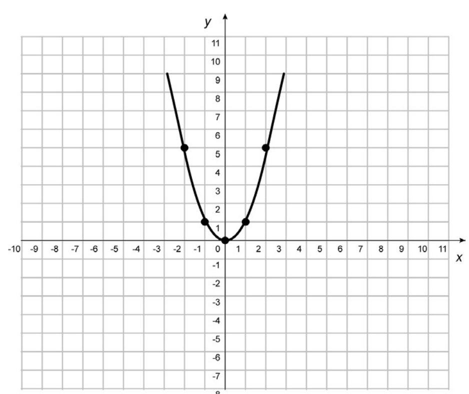
b) $f(x) = -3x^2 + 7$, neste caso, $a = -3$, negativo, logo, a parábola é voltada para baixo;

c) $f(x) = \frac{-3}{5}x^2$, neste caso, $a = -3/5$, negativo, logo, a parábola é voltada para baixo.

Após identificar a concavidade da parábola, devemos pensar no esboço do gráfico de uma função quadrática. Considerando a função $y = x^2$, podemos atribuir alguns valores à variável x e obter o valor correspondente de y. A tabela a seguir ilustra alguns desses valores:

| x | y |
|---|---|
| –2 | $(-2)^2 = 4$ |
| –1 | $(-1)^2 = 1$ |
| 0 | $(0)^2 = 0$ |
| 1 | $(1)^2 = 1$ |
| 2 | $(2)^2 = 4$ |

Como sabemos que o gráfico da função do 2º grau é uma parábola e que, nesse caso, $a > 0$, já sabemos que o gráfico da função terá concavidade para cima. Marcamos no plano cartesiano os pontos obtidos pela tabela e desenhamos a parábola:



Todavia, escolher pontos aleatórios não é a melhor forma de esboçar o gráfico de uma função quadrática. Na construção do gráfico da parábola, existem pontos que têm grande importância por facilitarem o esboço do gráfico. São eles:

- os pontos de interseção da parábola com o eixo Ox, chamados de zeros ou raízes da função;
- o vértice da parábola;
- os pontos de interseção da parábola com o eixo Oy.

## Raízes ou zeros da função quadrática

Raízes ou zeros da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ são os valores de x para os quais a função se anula ($f(x) = 0$). Logo, para encontrar esses valores, é preciso resolver a equação:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Estudamos as equações do 2º grau na Aula 5. Vimos que a solução dessa equação pode ser facilmente encontrada através da fórmula geral de Bhaskara, dada por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Devemos nos lembrar de que a equação do 2º grau pode ter até duas raízes. O que se deseja é identificar tais raízes.

O segundo membro da fórmula $\Delta = b^2 - 4ac$, chamado discriminante da equação, define o número de raízes que podemos ter, podendo a fórmula geral de Bhaskara ser escrita da seguinte forma:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

## Interpretação geométrica das raízes

Sendo as raízes os valores de x para os quais $y = 0$, geometricamente as raízes vão representar os pontos onde a parábola corta ou tangencia o eixo Ox.

Como a existência de raízes reais para a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) fica condicionada ao fato de $\sqrt{\Delta}$ ser real, pode-se considerar três casos:

1º) $\Delta > 0 \rightarrow$ a equação apresentará duas raízes distintas:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2º) $\Delta = 0 \rightarrow$ a equação apresentará duas raízes iguais, ficando reduzida a:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b}{2a}$$

3º) $\Delta < 0 \rightarrow$ a equação não apresenta raízes reais.

Exemplo:

Vamos encontrar as raízes da função do 2º grau $y = 3x^2 + 1$.

Nessa função, $a = 3$, $b = 0$ e $c = -1$.

Calculando o valor de $\Delta$, teremos:

$\Delta = b^2 - 4\ ac = 0^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = -12$

Como $\Delta < 0$, essa função não possui raízes.

## Atividade 2

***Atende ao objetivo 2***

Determine as raízes das seguintes funções quadráticas, definidas em R:

a) $y = 2x^2 - x - 1$

---

b) $y = -4x^2 + 4x - 1$

---

c) $y = 5x^2$

---

### *Resposta comentada*

Para obtermos os zeros das funções, ou seja, os ponto de interseção do gráfico de cada função com o eixo Ox, basta atribuir o valor zero à variável y e resolver a equação resultante:

a) $2x^2 - x - 1 = 0$

Nesse caso, $a = 2$, $b = -1$ e $c = -1$. Vamos calcular primeiro o valor de $\Delta$:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 - (-8) = 1 + 8 = 9$

Como $\Delta > 0$, a função tem dois zeros:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2.2} = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

e

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2.2} = \frac{1-3}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

b) $y = -4x^2 + 4x - 1$

Nesse caso, $a = -4$, $b = 4$ e $c = -1$. Vamos calcular primeiro o valor de $\Delta$:

$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-1) = 16 - 16 = 0$

Como $\Delta = 0$, a função tem um zero:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2.(-4)} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$$

c) $y = 5x^2 + 1$

Nesse caso, $a = 5$, $b = 0$ e $c = 1$. Vamos calcular primeiro o valor de $\Delta$:

$\Delta = b^2 - 4ac = (0)^2 - 4 \cdot (5) \cdot 1 = -20$

Como $\Delta < 0$, a função não tem zero.

## Máximos e Mínimos de Funções Quadráticas

A função quadrática é aplicada de diversas formas em nosso dia a dia. Uma de suas aplicações está relacionada com máximos e mínimos. Dependendo da concavidade da função, ela terá um ponto de máximo ou de mínimo, denominado vértice da parábola.

## Vértice da Parábola

Observando-se os gráficos que representam a função quadrática $ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$, pode-se notar que a parábola é simétrica em relação à reta r, chamada eixo de simetria da parábola, que é paralela ao eixo Oy. A abscissa do vértice de uma parábola é o ponto médio entre as suas raízes, por conta da simetria que a parábola possui. A interseção do eixo de simetria e a parábola, o ponto $V(x_v, y_v)$, chama-se vértice da parábola, cujas coordenadas são:

$$x_V = \frac{-b}{2a} \quad \text{e} \qquad \frac{-\Delta}{4a}$$

Calculando o valor numérico de $f(y_v)$ teremos a ordenada do vértice que corresponde ao valor máximo ou mínimo dessa função. Assim, o vértice da parábola indica o ponto de mínimo (se $a > 0$) ou de máximo (se $a < 0$) atingido pela função.

Ao analisarmos o movimento da parábola, podemos perceber que, quando $a < 0$, a função cresce até o vértice (seu ponto de máximo), nele muda de direção e começa a decrescer. Por sua vez, quando $a > 0$, a função decresce até o vértice (seu ponto de mínimo), nele muda de direção e passa a crescer.

Em muitas aplicações de Ciências Contábeis, Administração e Economia, o conhecimento da função quadrática é muito importante na modelagem de diversos problemas de otimização (máximos e mínimos).

Exemplo:

O custo, em reais, para a produção de x unidades de determinado produto é dado por: $C(x) = x^2 - 80x + 3000$. Quantas unidades devem ser produzidas pela empresa, de modo a tornar o seu custo mínimo?

Temos uma parábola com concavidade para cima (a > 0), logo, o valor mínimo será atingido em seu vértice. Assim, o número de unidades ideal será dado pelo valor de xv.

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-80)}{2} = 40$$

A empresa deve produzir 40 unidades para ter o custo mínimo de:

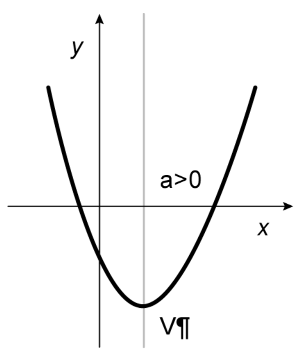
$C(40) = 40^2 - 80 \cdot 40 + 3.000 = 1.600 + 3.200 + 3.000 =$ R$ 7.800,00.

## Domínio e imagem da função quadrática

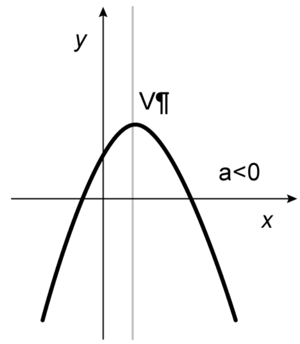
O domínio da função quadrática é dado por R, já que, para quaisquer valores reais, sempre será possível encontrar um correspondente em R.

Para definirmos o conjunto imagem, será necessário observarmos, mais uma vez, o esboço dos gráficos da função quadrática $ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$. Notaremos que:

a) se a > 0, a função assume um valor mínimo em seu vértice V, cuja ordenada é dada por $y_V = \frac{-\Delta}{4a}$.




b) se a < 0, a função assume um valor máximo em seu vértice V, cuja ordenada é dada por $y_V = \frac{-\Delta}{4a}$.




Assim, o conjunto imagem da função quadrática será:

$$Im = \{y\in|\ y \geq \frac{-\Delta}{4a}\} \quad (\text{se } a > 0)$$

$$Im = \{y\in|\ y \leq \frac{-\Delta}{4a}\} \quad (\text{se } a < 0)$$

## *Atividade 3*

***Atende aos objetivos 3 e 4***

1. Dadas as funções quadráticas a seguir, determine seus pontos de máximo e de mínimo, identificando seu domínio e sua imagem:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

b) $g(x) = -x^2 + 2x - 3$

c) $h(x) = x^2 + 4x + 4$

2. O lucro total é dado pela diferença entre a receita total (R) e o custo total (C) de produção: $L = R - C$. Uma empresa obteve $R = 6000\ x - x^2$ com custo $C = x^2 - 2000x$ para a produção de x unidades. Qual deve ser a produção ideal da empresa para maximizar o seu lucro? Qual o valor do lucro máximo que a empresa poderá obter?

3. O lucro mensal de uma empresa é dado por $L = -x^2 + 30x - 5$, em que x representa a quantidade de peças a serem produzidas e L o valor do lucro, em milhares de reais.

a) Qual a quantidade ideal de peças a serem produzidas, para gerar o maior lucro possível?

b) Qual o valor máximo possível para esse lucro?

### *Resposta comentada*

1. Primeiramente, precisamos identificar a concavidade da função quadrática, a fim de saber se ela possui ponto de máximo ($a < 0$) ou de mínimo ($a > 0$). Para definir os pontos de máximo e de mínimo, basta identificar o vértice da função. Finalmente, o domínio da função quadrática será sempre R, e a sua imagem também será definida a partir do vértice da função.

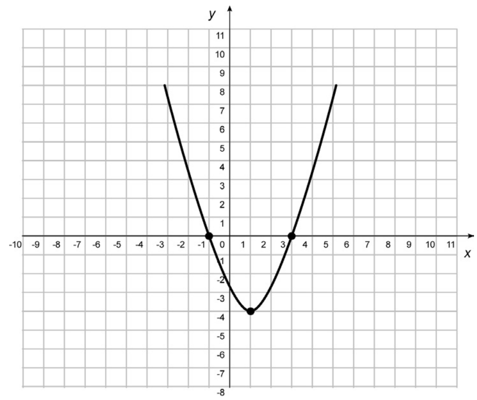
a) Para $f(x) = x^2 - 2x - 3$, temos $a = 1$, $b = -2$, $c = -3$, ou seja, $a > 0$, fazendo com que a função tenha concavidade para cima e, consequentemente, um ponto de mínimo.

Calculando as coordenadas do vértice, temos:

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2.1} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{e} \quad y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-16}{4.1} = \frac{-16}{4} = -4$$

O gráfico da função é:




E o domínio e a imagem da função:

D(f) = R

Im(f) = {y∈| y ≥ −4}

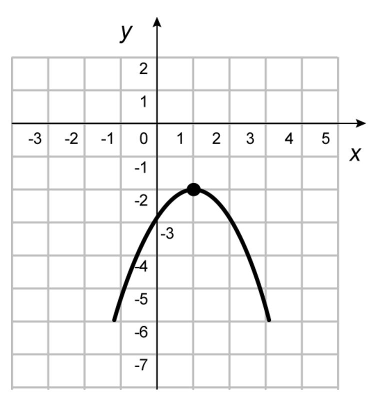
b) Para $g(x) = -x^2 + 2x - 3$, temos a = −1, b = 2, c = −3, ou seja, a < 0, fazendo com que a função tenha concavidade para baixo e, consequentemente, um ponto de máximo.

Calculando as coordenadas do vértice, temos:

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3) = 4 - 12 = -8$

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2.(-1)} = \frac{-2}{-2} = 1 \quad \text{e} \quad y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-8)}{4.(-1)} = \frac{8}{-4} = -2$$

O gráfico da função é:



E o domínio e a imagem da função:

D(g) = R

Im(g) = {y∈| y ≤ –2}

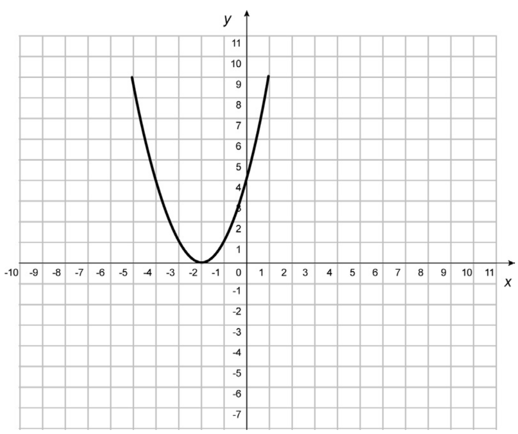
c) Para $h(x) = x^2 + 4x + 4$, temos a = 1, b = 4, c = 4, ou seja, a > 0, fazendo com que a função tenha concavidade para cima e, consequentemente, um ponto de mínimo.

Calculando as coordenadas do vértice, temos:

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2.1} = \frac{-4}{2} = -2 \text{ e } y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{0}{4.1} = 0$$

O gráfico da função é:




E o domínio e a imagem da função:

D(h) = R

Im(h) = {y∈| y ≥ 0}

2. Primeiramente, devemos identificar a solução lucro:

$L = R - C = (6000x - x^2) - (x^2 - 2000x) = 6000x - x^2 - x^2 + 2000x$

$L = -2x^2 + 8000x$

Temos uma parábola com concavidade voltada para baixo (a < 0), o que faz com que tenhamos um ponto de máximo no vértice dessa parábola:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-8000}{2.(-2)} = \frac{8000}{4} = 2000 \text{ unidades}$$

O lucro máximo que a empresa poderá obter será, então:

$L = -2 \cdot (2000)^2 + 8000 \cdot 2000 = -8.000.000 + 16.000.000 = 8.000.000$

Assim, para uma produção de 20.00 unidades, a empresa obterá um lucro máximo de R$8.000.000,00.

3. Consideremos a função lucro dada por:

$L = -x^2 + 30x - 5$

Temos uma parábola com concavidade voltada para baixo ($a < 0$), o que faz com que tenhamos um ponto de máximo no vértice dessa parábola:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-30}{2.(-1)} = \frac{30}{2} = 15 \text{ unidades}$$

O lucro máximo que a empresa poderá obter será, então:

$L = -(15)^2 + 30 \cdot 15 - 5 = -225 + 450 - 5 = 220$

Assim, para uma produção de 15 unidades, a empresa obterá um lucro máximo de R$220.000,00.

## Variação do sinal da função quadrática

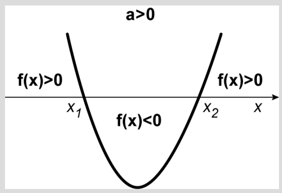
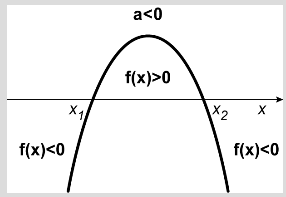
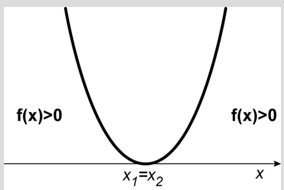
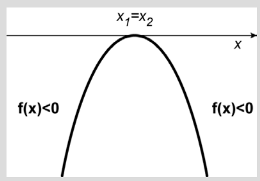
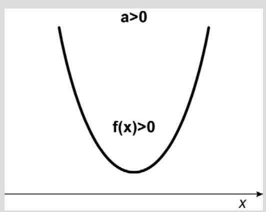
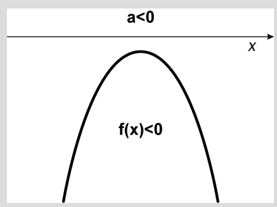
Analisar a variação do sinal de uma função é investigar os pontos em que a função, f(x) ou y, é positiva, negativa ou zero. Já discutimos a determinação dos zeros da função quadrática; vamos agora analisar o momento em que a função se torna positiva e negativa.

O sinal da função quadrática varia de acordo com a sua concavidade e o número de zeros da função. Assim, ao analisar genericamente o seu sinal, precisaremos investigar os três casos possíveis:

- $\Delta > 0$, quando a função possui dois zeros ($x_1$ e $x_2$), ela terá o mesmo sinal de a fora das raízes e o sinal contrário ao de a entre as raízes;
- $\Delta = 0$, quando a função possui um zero ($x_1 = x_2$), ela terá sempre o

sinal de a, exceto no zero da função, onde ela valerá zero;

- $\Delta < 0$, quando a função não possui zeros, ela terá sempre o sinal de a.

| **Δ** | **Zero da Função** | **a > 0 (Concavidade para cima)** | **a < 0 (Concavidade para baixo)** | **Estudo da variação do sinal** |
|---|---|---|---|---|
| $\Delta > 0$ | 2 zeros (a função corta o eixo Ox em dois pontos) |  |  | $x < x_1 \to f(x)$ tem sinal de a<br>$x > x_2 \to f(x)$ tem sinal de a<br>$x_1 < x < x_2 \to f(x)$ tem sinal contrário ao de a<br>$x = x_1$ ou $x = x_2 \to f(x) = 0$ |
| $\Delta = 0$ | 1 zero (a função corta o eixo Ox em 1 ponto) |  |  | $x \neq x_1 \to f(x)$ tem sinal de a<br>$x = x_1 \to f(x) = 0$ |
| $\Delta < 0$ | Nenhum zero (a função não corta o eixo Ox) |  |  | $\forall x \to f(x)$ tem sinal de a |

Exemplo:

Vamos estudar a variação de sinal da função $f(x) = 2x^2 - x - 1$.

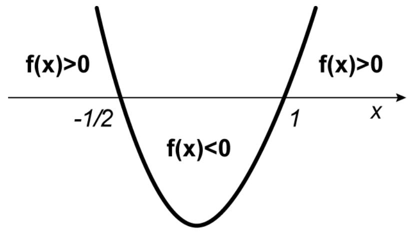
Primeiramente, vamos identificar os zeros da função, $a = 2$, $b = -1$ e $c = -1$:

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2.2} = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2.2} = \frac{1-3}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

Como $a > 0$, e $\Delta > 0$, temos dois zeros e concavidade para cima. Logo,

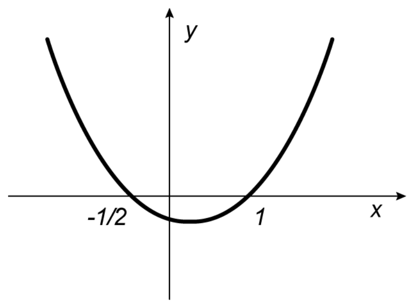



$f(x) = 0 \rightarrow x = -1/2$ ou $x = 1$

$f(x) > 0 \rightarrow (-\infty, -1/2[\cup]1, \infty)$

$f(x) < 0 \rightarrow -1/2 < x < 1$

Podemos visualizar melhor a situação analisando o gráfico da função:




Ela é positiva quando $x < -1/2$, ou $x > 1$; e negativa entre os zeros: $-1/2 < x < 1$.

## *Atividade 4*

***Atende ao objetivo 5***

Analise a variação de sinal das seguintes funções quadráticas:

a) $f(x) = -5x^2 + 3x$

b) $f(x) = 6x^2 + 2x + 1$

c) $f(x) = x^2 - 8x + 16$

### *Resposta comentada*

a) $f(x) = -5x^2 + 3x$

Vamos iniciar encontrando os zeros da função, sendo $a = -5$, $b = 3$ e $c = 0$:

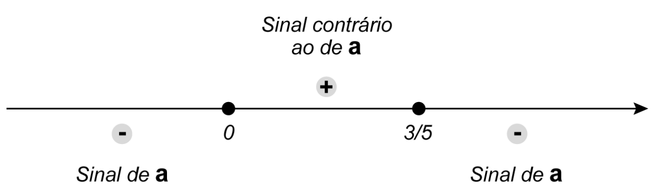
$\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 0 = 9$

Como $\Delta > 0$, temos duas raízes; e, sendo $a < 0$, a função terá concavidade para baixo, com sinal negativo fora das raízes e sinal positivo entre as raízes. Então:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{9}}{2.(-5)} = \frac{-3 + 3}{-10} = 0$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{9}}{2.(-5)} = \frac{-3 - 3}{-10} = \frac{-6}{-10} = \frac{3}{5}$$

Plotando os pontos numa reta graduada, teremos:




Ou seja, teremos sinal igual ao de a fora das raízes e sinal contrário ao de a entre as raízes.

A função será negativa quando $x < 0$, ou $x > 3/5$; e positiva entre os zeros: $0 < x < 3/5$. Em símbolos:

$f(x) > 0 \rightarrow ]0, 3/5[$

$f(x) < 0 \rightarrow (-\infty, 0[\cup]3/5, \infty)$

b) $f(x) = 6x^2 + 2x + 1$

Vamos iniciar encontrando os zeros da função, sendo $a = 6$, $b = 2$ e $c = 1$:

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (6) \cdot 1 = 4 - 24 = -20$

Como $\Delta < 0$, a função não possui raízes reais. Sendo $a > 0$, a função terá concavidade para cima, sendo sempre positiva.

Assim, $f(x) > 0, \forall x$.

c) $f(x) = x^2 - 8x + 16$

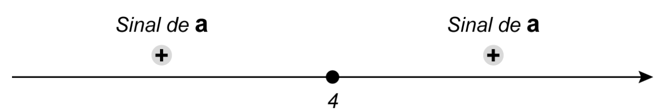
Vamos iniciar encontrando os zeros da função, sendo $a = 1$, $b = -8$ e $c = 16$:

$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 64 - 64 = 0$

Como $\Delta = 0$, temos uma raiz dupla; e, sendo $a > 0$, a função terá concavidade para cima, com valor zero na raiz e sinal positivo nos demais pontos do domínio. Então:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{0}}{2.1} = \frac{8}{2} = 4$$

Plotando o ponto numa reta graduada, teremos:




Ou seja, teremos sinal igual ao de a em toda a reta real, exceto no zero da função.

Em símbolos:

$f(x) > 0 \to (-\infty, 4[\cup]4, \infty)$

## Esboço do gráfico da função quadrática

Finalmente, a identificação do ponto de interseção da parábola com o eixo Oy permitirá completar as informações que propiciam a elaboração do esboço do gráfico da função do 2º grau, $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Para obter o ponto de interseção da parábola com o eixo Oy, basta atribuir o valor zero à variável x. Então:

$$y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \rightarrow y = c$$

Assim, o ponto de interseção da parábola com o eixo Oy é (0, c).

Exemplo:

Obter o ponto de interseção da função $y = x^2 - 6x + 5$ com o eixo Oy.

Para obter o ponto de interseção com o eixo Oy, basta substituir x por zero e calcular o valor de y:

$$y = 0^2 - 6 \cdot 0 + 5 \rightarrow y = 5$$

Assim, para esboçarmos o gráfico da função quadrática, devemos identificar:

- os pontos de interseção da parábola com o eixo Ox, chamados de zeros ou raízes da função;
- o vértice da parábola;
- os pontos de interseção da parábola com o eixo Oy.

Vamos esboçar o gráfico de $y = x^2 - 6x + 5$.

Já identificamos o ponto de interseção com o eixo Oy, y = 5, que é o próprio valor de c.

Vamos agora identificar os zeros da função e determinar o seu vértice.

Temos a = 1, b = –6 e c = 5, então:

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) + \sqrt{16}}{2.1} = \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

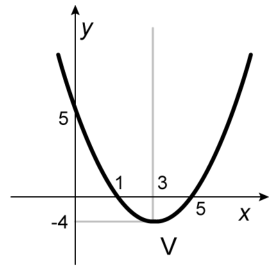
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) - \sqrt{16}}{2.1} = \frac{6-4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Como a > 0, e Δ > 0, temos dois zeros e concavidade para cima.

O vértice será dado por:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2.1} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{e} \quad y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-16}{4.1} = -4$$

O gráfico da função será:




## Atividade 5

***Atende ao objetivo 6***

Esboce o gráfico das seguintes funções quadráticas:

a) $f(x) = -x^2 + 4x - 5$

b) $g(x) = x^2 + 2x + 1$

### *Resposta comentada*

Para fazer o esboço do gráfico dessas funções quadráticas, devemos identificar os seus zeros, a interseção com o eixo Oy e os vértices.

a) Em $f(x) = -x^2 + 4x - 5$, $a = -1$, $b = 4$ e $c = -5$.

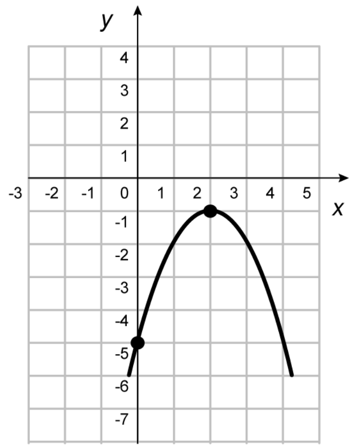
Imediatamente, temos $y = -5$ como ponto de interseção de f(x) com o eixo Oy. Vamos calcular os zeros da função:

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5) = 16 - 20 = -4$

Como $\Delta < 0$, a função não terá zeros. Por outro lado, $a < 0$, sua concavidade será para baixo, sendo f(x) sempre negativa. Seu vértice:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2.(-1)} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{e} \quad y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-4)}{4.(-1)} = -1$$

O gráfico de f(x) será:




b) Em $g(x) = -x^2 + 2x - 1$ $a = -1$, $b = 2$ e $c = -1$.

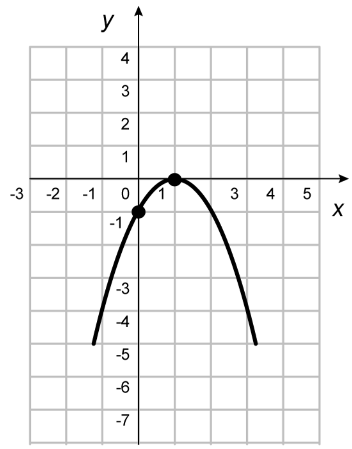
Imediatamente temos $y = 1$ como ponto de interseção de g(x) com o eixo Oy. Vamos calcular os zeros da função:

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = 4 - 4 = 0$

Como $\Delta = 0$, a função terá um único zero. Por outro lado, $a < 0$, sua concavidade será para baixo, sendo g(x) negativa para todos os valores de x diferentes do zero da função. Seu vértice:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2.(-1)} = \frac{-2}{-2} = 1 \quad \text{e} \quad y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{0}{4.(-1)} = 0$$

O gráfico de g(x) será:




## Inequações do 2º grau

Na Aula 4, vimos que as inequações se relacionam com as equações. Além das inequações de 1º grau, existem inequações de graus mais elevados.

Da mesma forma que acontece com as equações, o que determina o grau da inequação é o maior expoente da variável x. Então, enquanto

$$2x - 5 < 7$$

é uma inequação do 1º grau, pois o maior expoente da variável x é 1,

$$x^2 - 3x + 8 < 0$$

é uma inequação do 2º grau, pois o maior expoente da variável x é 2. Assim como fizemos na resolução das inequações do 1º grau, para resolvermos inequações do segundo grau, seguiremos os mesmos procedimentos utilizados para resolver as equações do 2º grau, acrescentando a análise do sinal da inequação.

Exemplo:

Resolva a inequação $x^2 - 3x - 4 > 0$.

Vamos, inicialmente, resolver a equação $x^2 - 3x - 4 = 0$, utilizando a fórmula de Bhaskara:

Temos: $a = 1$, $b = -3$ e $c = -4$.

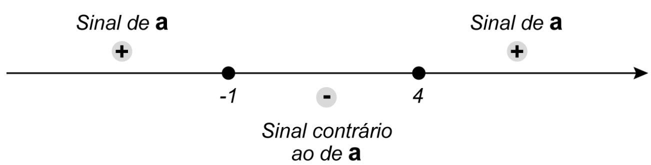
$\Delta = (-3)2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-3)+\sqrt{25}}{2.1} = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-3)-\sqrt{25}}{2.1} = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Identificamos os dois valores da variável x que tornam a equação igual a zero. Para resolver a inequação, precisamos analisar os valores que tornam a equação maior do que zero, o que fazemos a partir do estudo da variação de seu sinal.

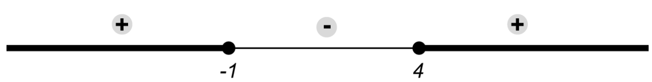
Representando graficamente, teremos:




Como vimos, a equação terá sinais (positivo ou negativo) distintos fora das raízes e entre as raízes, pois exatamente nas raízes ela valerá zero, devendo, portanto, ter sinais trocados à direita e à esquerda da raiz.

Na verdade, basta calcular o sinal entre as raízes, pois, se soubermos esse sinal, saberemos imediatamente os demais, que deverão ser o contrário do encontrado entre as raízes.

Assim, se entre as raízes a equação tem sinal negativo, terá sinal positivo fora delas, isto é:




Agora podemos facilmente concluir a resolução de nossa inequação, que, como mostra o gráfico, será positiva quando $x < -1$ ou quando $x > 4$. Então,

$S = (-\infty, -1[\cup]4, \infty)$

Note que o valor positivo da inequação ocorre quando x assume valores inferiores a –1 ou superiores a 4. Nesse caso, não podemos usar o conectivo e, pois ele significaria estarmos tratando de um número que fosse ao mesmo tempo menor do que –1 e maior do que 4, o que não é possível!

## Atividade 6

***Atende ao objetivo 7***

Resolva as seguintes inequações quadráticas:

a) $x^2 - 5x \leq 0$

b) $-x^2 - 3 \geq 0$

### *Resposta comentada*

Vamos, inicialmente, resolver cada uma das equações:

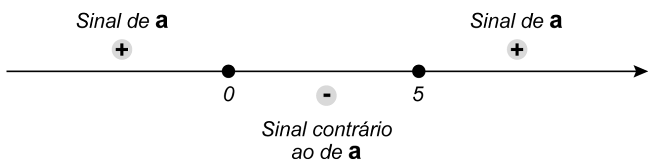
a) Resolveremos a equação $x^2 - 5x = 0$. Nesse caso, não precisamos utilizar a fórmula de Bhaskara, bastando colocar x em evidência:

$x (x - 5) = 0$

$x = 0$ ou $x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$

Identificamos os dois valores da variável x que tornam a equação igual a zero. Para resolver a inequação, precisamos analisar os valores que tornam a equação menor ou igual a zero, o que fazemos a partir do estudo da variação de seu sinal.

Representando graficamente, teremos:




Agora podemos facilmente concluir a resolução de nossa inequação, que, como mostra o gráfico, será negativa quando $0 < x < 5$ e valerá zero quando $x = 0$ ou $x = 5$. Então,

$S = [0, 5]$

b) Resolveremos a equação $-x^2 - 3 = 0$. Nesse caso, não precisamos utilizar a fórmula de Bhaskara:

$-x^2 - 3 = 0$

$-x^2 = 3$

$x^2 = -3$

Não é possível encontrar valores de x que, elevados ao quadrado, resultem em um número negativo. Essa equação não possui zeros, tendo sempre o sinal de a. Sendo $a < 0$, essa equação será sempre negativa. Como procuramos os valores de x que tornam a inequação maior ou igual a zero, essa inequação não terá valores de x que a satisfaçam:

$S = \varnothing$

## Inequações

Neste tópico, discutiremos diferentes tipos de inequações.

### Definição

Sejam as funções f (x) e g (x), cujos domínios são respectivamente

$D_1 \subset R$ e $D_2 \subset R$. Chama-se inequação na incógnita x a qualquer uma das sentenças abertas abaixo:

$$f(x) > g(x) \quad f(x) < g(x) \quad f(x) \geq g(x) \quad f(x) \leq g(x)$$

**Domínio de validade**

Chama-se domínio de validade da inequação $f(x) > g(x)$ o conjunto $D = D_1 \cap D_2$, em que $D_1$ é o domínio da função f e $D_2$ é o domínio da função g. É evidente que, para todo $x_0 \in D$, estão definidos $f(x_0)$ e $g(x_0)$, isto é:

$$x_0 \in D \leftrightarrow (x_0 \in D_1 \text{ e } x_0 \in D_2) \leftrightarrow (f(x_0) \in R \text{ e } g(x_0) \in R).$$

**Solução**

O número real $x_0$ é solução da inequação $f(x) > g(x)$ se, e somente se, for verdadeira a sentença $f(x_0) > g(x_0)$.

**Conjunto solução**

Chama-se de conjunto solução da inequação o conjunto S de todos os números reais x tais que $f(x) > g(x)$ seja uma sentença verdadeira.

**Inequação equivalente**

Duas inequações são equivalentes em $D \subset \Re$ se o conjunto solução da primeira é igual ao conjunto solução da segunda.

Exemplo:

Sejam as inequações $3x - 5 < 4$ e $5x - 8 < 7$. Resolvendo cada uma dessas inequações, teremos:

$3x - 5 < 4 \Rightarrow 3x < 4 + 5 \Rightarrow x < 9/3 \Rightarrow x < 3$

$5x - 8 < 7 \Rightarrow 5x < 7 + 8 \Rightarrow x < 15/5 \Rightarrow x < 3$

Logo, as duas inequações são equivalentes, pois possuem o mesmo conjunto solução.

**Inequações simultâneas**

A dupla desigualdade f (x) < g (x) < h (x) se decompõe em duas inequações simultâneas, isto é, equivale a um sistema de duas equações em x, separadas pelo conectivo e:

$$f(x) < g(x) < h(x) \leftrightarrow f(x) < g(x)$$

$$\text{e}$$

$$g(x) < h(x)$$

Indicando com $S_1$ o conjunto solução da 1ª equação e com $S_2$ o conjunto solução da 2ª equação, o conjunto solução da dupla desigualdade é $S = S_1 \cap S_2$. Em outras palavras, você deve resolver cada desigualdade em separado e, a seguir, identificar sua interseção, de forma a determinar o subconjunto que atende à dupla desigualdade ao mesmo tempo.

Exemplo:

Resolver a inequação 2 < 2x – 5 < 7 em R.

Para resolver estas inequações, devemos escrevê-las na forma de um sistema:

$$\begin{cases} 2 < 2x - 5 \\ 2x - 5 < 7 \end{cases}$$

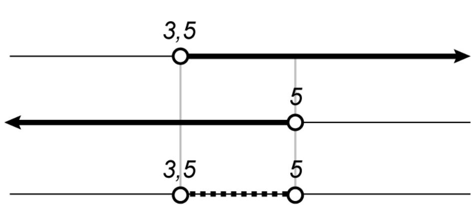
Resolvendo a primeira inequação, temos:

$2 < 2x - 5 \Rightarrow -2x < -5 - 2 \quad \Rightarrow \quad 2x > 7 \Rightarrow x > 7/2$

Representando graficamente $S_1$, temos:


Resolvendo-se a segunda inequação, temos:


Para atender às duas inequações simultaneamente, devemos selecionar os pontos que atendem a ambas:



Assim, os valores de x que atendem simultaneamente a ambas as inequações são os contidos entre 3, 5 e 5, que é a interseção dos dois conjuntos. Em símbolos:

$S = \{x \in R \mid 3,5 < x < 5\} = ]3, 5, 5[$

**Inequações - Produto e Inequações – Quociente**

Sendo f(x) e g(x) duas funções na variável x, as inequações:

$f(x) \cdot g(x) > 0$, $f(x) \cdot g(x) < 0$, $f(x) \cdot g(x) \geq 0$ e $f(x) \cdot g(x) \leq 0$

são denominadas inequações-produto. Por sua vez, as inequações do tipo:

$f(x)/g(x) > 0$, $f(x)/g(x) < 0$, $f(x)/g(x) \geq 0$ e $f(x)/g(x) \leq 0$

com $g(x) \neq 0$, são denominadas inequações-quociente.

Para determinar o conjunto solução de inequações-produto e de inequações-quociente basta efetuar um estudo da variação de sinal de cada uma das funções envolvidas (f(x) e g(x)). Destaca-se o fato de que, no caso das inequações-quociente, o denominador, g(x), não pode assumir o valor nulo, isto é, $g(x) \neq 0$.

Exemplo:

Resolver em R a inequação $(3x + 4)(7 - 6x) > 0$.

Para resolver esta inequação, precisamos estudar a variação de sinal de cada uma das funções que a compõem, $f(x) = (3x + 4)$ e $g(x) = (7 - 6x)$. Assim,

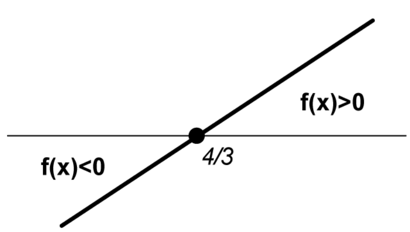
$f(x) = (3x + 4)$

$3x - 4 = 0$

$3x = 4$

$x = 4/3$

Variação de sinal de f: $a > 0$, logo f é crescente:



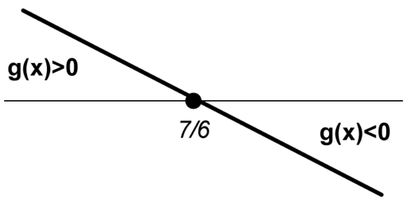
$g(x) = (7 - 6x)$

$-6x + 7 = 0$

$-6x = -7$

$x = 7/6$

Variação de sinal de g: $a < 0$, logo g é decrescente:




Agora montamos um quadro para analisar as funções conjuntamente:

| | | 7/6 | 4/3 |
|---|---|---|---|
| f(x) | − | − | + |
| g(x) | + | − | − |
| f(x) · g(x) | − | + | − |

Aplicando as regras dos sinais para o produto, obtemos, na última linha, os sinais do produto entre f(x) e g(x). Como buscamos o intervalo em que $f(x) \cdot g(x) > 0$,

$S = ]7/6, 4/3[$.

Dentre as inequações-produto e inequações-quocientes são importantes inequações do tipo:

$[f(x)]^n > 0$, $[f(x)]^n < 0$, $[f(x)]^n \geq 0$ e $[f(x)]^n \leq 0$, em que $n \in N^*$.

Para resolver essas inequações, deve-se lembrar de duas propriedades das potências de base real e expoente inteiro:

1º) Toda potência de base real e expoente ímpar conserva o sinal da base, isto é:

$a^{2n+1} > 0 \quad \leftrightarrow \quad a > 0$

$a^{2n+1} = 0 \quad \leftrightarrow \quad a = 0$

$a^{2n+1} < 0 \quad \leftrightarrow \quad a < 0 \ (n \in N)$

2º) Toda potência de base real e expoente par é um número não negativo, isto é:

$$a^{2n} \geq 0, \forall a \in R, \forall n \in N$$

Em resumo, a solução de inequações-potências seguem as regras de solução das inequações resolvidas até aqui, considerando, no entanto, as seguintes situações:

a) se tivermos um expoente ímpar, o estudo de sinais deverá ser realizado considerando-se o sinal da base;

b) se tivermos um expoente par, teremos sempre sinal positivo para a base, exceto no(s) valor(es) que torna(m) a base igual a zero.

Exemplo:

Resolver em R a inequação $(3x - 1)^2 (1 - 5x)^3 (2x - 8)^{100} < 0$

Nesse caso, como o expoente de $f(x) = (3x - 1)^2$ é par, para quaisquer valores de x diferentes do zero, teremos sempre um número positivo, o mesmo valendo para $h(x) = (2x - 8)^{100}$. Logo, o sinal de $g(x) = (1 - 5x)^3$ definirá o sinal do resultado do produto, pois, como esse expoente é ímpar, valerá o sinal da base:

| | 1/5 | 1/3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|
| f(x) | + | + | + | + |
| g(x) | + | – | – | – |
| h(x) | + | + | + | + |
| f(x) · g(x) · h(x) | + | – | – | – |

Como nos interessa que $f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) < 0$, a solução será:

$S = ]1/5, \infty)$

## Atividade 7

***Atende ao objetivo 8***

Resolva as seguintes inequações reais:

a) $\dfrac{(-2x)(5x-2)^{11}}{(-4x+3)^{20}} \geq 0$

b) $5x^{32}(x-1)^{44} \leq 0$

### *Resposta comentada*

a) Nesse caso, temos uma inequação-quociente, logo $h(x) \neq 0$. Como o expoente de $h(x) = (-4x + 3)^{20}$ é par, para quaisquer valores de x diferentes do zero, teremos sempre um número positivo. Assim:

| | | 0 | 2/5 | 3/4 |
|---|---|---|---|---|
| f(x) | + | – | – | – |
| g(x) | – | – | + | + |
| h(x) | + | + | + | + |
| f(x) · g(x)/h(x) | – | + | – | – |

Como nos interessa que $f(x) \,.\, g(x) \,/\, h(x) \geq 0$, a solução será:

S = [0, 2/5].

b) Nesse caso, ambos os termos da inequação-produto estão elevados a um expoente par. Assim, jamais terão um resultado menor do que zero. A única solução possível para esta inequação serão os pontos que tornam cada uma das equações igual a zero. Então:

$5x^{32} = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$

$(x - 1)^{44} = 0 \quad \rightarrow \quad x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1$

Logo,

S = {0, 1}.

## *Atividade final*

***Atende aos Objetivos 6 e 7***

1. Esboce o gráfico da função $f(x) = 3x^2 - x + 1$, dando seu domínio e imagem.

2. Resolva, em R, a inequação $(5x^2 - 3x)^{31} > 0$.

3. Suponha que um competidor de salto em altura que ao saltar do solo tenha sua posição no espaço descrita em função do tempo (em segundos) dada pela expressão $h = 3t - 3t^2$, em que h é a altura que o saltador alcança (em metros).

a) Quanto tempo o saltador vai levar para atingir a altura máxima?

b) Qual a altura máxima alcançada pelo saltador?

## *Resposta comentada*

1. Para fazer o esboço do gráfico da função quadrática $f(x) = 3x^2 - x + 1$, devemos identificar os seus zeros, interseção com o eixo Oy e vértices.

Nesse caso, $a = 3$, $b = -1$ e $c = 1$.

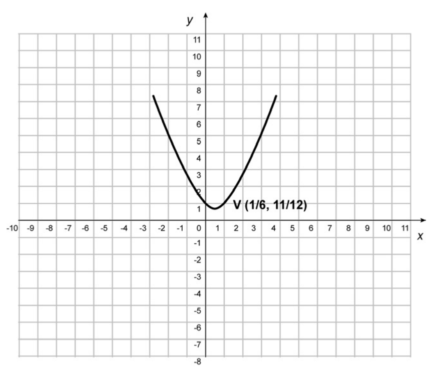
Imediatamente temos $y = 1$ como ponto de interseção de $f(x)$ com o eixo Oy. Vamos calcular os zeros da função:

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 1 - 12 = -11$

Como $\Delta < 0$, a função não terá zeros. Por outro lado, $a > 0$, sua concavidade será para cima, sendo $f(x)$ sempre positiva. Seu vértice:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{2.3} = \frac{1}{6} \text{ e } y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-11)}{4.3} = \frac{11}{12}$$

O gráfico de f(x) será:



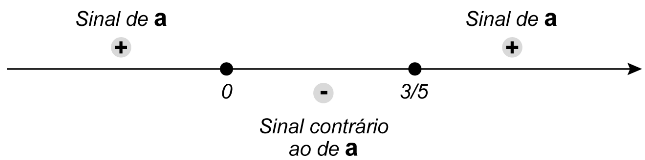

2. A equação $(5x^2 - 3x)^{31} = 0$ tem expoente ímpar, logo, vale o sinal da base. Vamos resolver a equação $5x^2 - 3x = 0$. Nesse caso, não precisamos utilizar a fórmula de Bhaskara, bastando colocar x em evidência:

$x\,(5x - 3) = 0$

$x = 0$ ou $5x - 3 = 0 \rightarrow x = 3/5$

Identificamos os dois valores da variável x que tornam a equação igual a zero. Para resolver a inequação, precisamos analisar os valores que tornam a equação maior do que zero, o que fazemos a partir do estudo da variação de seu sinal.

Representando graficamente, teremos:




Agora podemos facilmente concluir a resolução de nossa inequação, que, como mostra o gráfico, será positiva quando $x < 0$ ou $x > 3/5$. Então,

$$S = (-\infty, 0[\cup]3/5, \infty).$$

3. Analisando $h = 3t - 3t^2$, podemos perceber que a trajetória do saltador é dada por uma parábola com a concavidade para baixo, logo ela terá no seu vértice um ponto de máximo.

Então,

a) $x_V = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(3)}{2.(-3)} = \dfrac{3}{6} = 0,5$ segundos

b) $h(0,5) = 3(0,5) - 3(0,5)^2 = 1,5 - 0,75 = 0,75$ metros

O saltador levará 0,5 segundos para atingir a altura máxima de 0,75 metros.

Nesta aula, trabalhamos os conceitos de funções de 2º grau ou quadráticas. Essa importante função tem inúmeras aplicações em nosso dia a dia. Podemos encontrar exemplos do uso dessas funções nos faróis dos carros, nas antenas parabólicas, entre outros. Os conceitos estudados nesta aula serão de grande serventia em nosso curso.

## Resumo

Vamos agora fazer um resumo sobre os pontos estudados.

Chamamos função quadrática, ou função polinomial do 2º grau, qualquer função f de R em R dada por uma lei da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são números reais e $a \neq 0$. O gráfico da função quadrática é uma parábola, que pode ter concavidade para cima ou para baixo, de acordo com o sinal de a, da seguinte forma:

$a > 0 \rightarrow$ concavidade da parábola voltada para cima

$a < 0 \rightarrow$ concavidade da parábola voltada para baixo

Para esboçar o gráfico da função quadrática, precisamos identificar:

- Os pontos de interseção da parábola com o eixo Ox, chamados de zeros ou raízes da função:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- O vértice da parábola:

$$x_V = \frac{-b}{2a} \quad \text{e} \quad y_V = \frac{-\Delta}{4a}$$

- Os pontos de interseção da parábola com o eixo Oy:

$$y = c$$

Para determinar o conjunto solução de inequações-produto e de inequações–quociente, basta efetuar um estudo da variação de sinal de cada uma das funções envolvidas (f(x) e g(x)). Destaca-se o fato de que, no caso das inequações-quociente, o denominador, g(x), não pode assumir o valor nulo, isto é, $g(x) \neq 0$.

Quando essas inequações estão elevadas a um expoente, é preciso considerar que:

a) se tivermos um expoente ímpar, o estudo de sinais deverá ser realizado considerando-se o sinal da base;

b) se tivermos um expoente par, teremos sempre sinal positivo para a base, exceto no(s) valor(es) que tornam a base igual a zero.

# Aula 10

## Funções dadas por mais de uma sentença

*Eliane Ribeiro Pereira*
*Maria Cecília de Carvalho Chaves*

## Meta

Apresentar funções dadas por mais de uma sentença.

## Objetivos

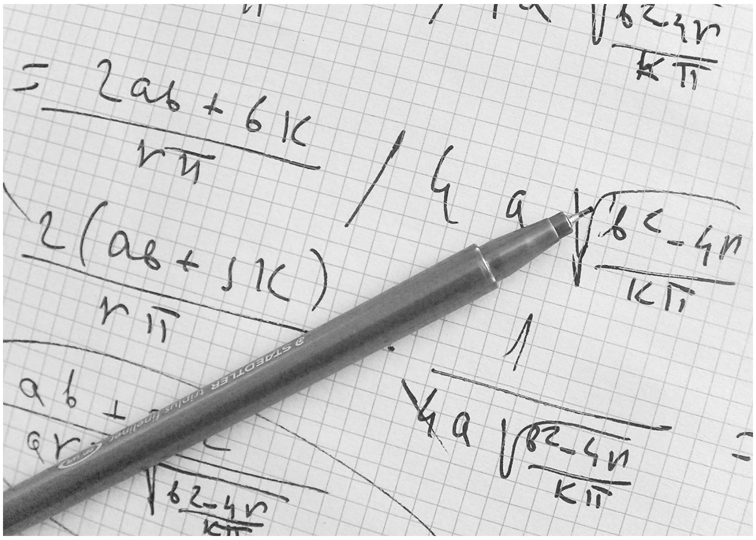
Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. identificar a função definida por mais de uma sentença;
2. construir o gráfico de uma função dada por mais de uma sentença;
3. definir a função modular;
4. reconhecer a função modular como uma função dada por mais de uma sentença;
5. construir o gráfico de uma função modular.

## Pré-requisitos

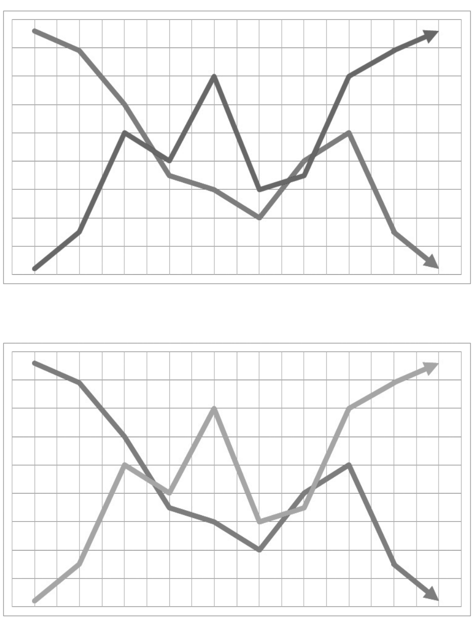
Para obter um melhor aproveitamento desta aula, você precisa ter realizado sem dificuldades as atividades das Aulas 8 e 9. Se perceber alguma dificuldade no desenvolvimento das atividades propostas, retorne a essas aulas para reforçar os tópicos necessários.

## Introdução



Fonte: http://www.freeimages.com/photo/967421

Como já vimos em aulas anteriores, uma **função** $f(x)$é uma relação que associa a cada valor do argumento $x$ um único valor de$f(x)$. Entre conjuntos numéricos, é comum representarmos funções por seus gráficos, cujos pontos são formados por pares $(x, f(x))$.



Fonte: http://www.freeimages.com/photo/347053

O conceito de função é extremamente importante, e podemos aplicá-lo em diversas situações práticas, como quando analisamos o valor a ser pago em uma conta de luz, que depende da quantidade de energia consumida, ou o valor do pagamento de um consultor, que dependerá do número de horas trabalhadas. Para resolver problemas dessa natureza, funções mais simples são suficientes, mas algumas situações não podem ser representadas por uma dessas funções. Dependendo das variáveis envolvidas, pode ser necessário uso de mais de uma função para representar adequadamente uma determinada situação.

Por essa razão, nesta aula,vamos estudar situações em que se torna necessário definir uma função de uma variável com várias expressões algébricas diferentes.

## Funções definidas por mais de uma sentença

Podemos escrever as funções definidas por mais de uma sentença da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} S_1(x), & C_1 \\ S_2(x) & C_2 \\ \vdots & \\ S_n(x) & C_n \end{cases}$$

em que cada S*i*(x) é uma sentença sujeita à condição imposta por Ci, ou seja, cada condição será o domínio para a respectiva sentença.

Exemplos:

a)

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se} \quad x < -1 \\ 5x & \text{se} \quad -1 \leq x < 5 \\ -4 & \text{se} \quad x \geq 5 \end{cases}$$

Note que a função tem um comportamento diferente em cada parte do dominio, definido pela condição imposta, no caso:

$C_1$: quando $x < -1$ → $f(x) = 3$

$C_2$: quando $-1 \leq x < 5$ → $f(x) = 5$

$C_3$: quando $x \geq 5$ → $f(x) = -4$

b) Diversas situações do nosso cotidiano demandam o uso de uma função dada por mais de uma sentença para serem expressas matematicamente. Imagine que você deseja calcular o salário líquido que irá receber. Um dos descontos que deverão ser realizados no seu contracheque é a contribuição para o INSS. A tabela de contribuição dos segurados empregados, domésticos e avulsos, vigente a partir de 01/01/2014, estabele as seguintes alíquotas de contribuição:

| Salário de Contribuição (R$) | Alíquota INSS |
|---|---|
| Até R$ 1.317,07 | 8% |
| de 1.317,08 até 2.195,12 | 9% |
| de 2.195,13 até 4.390,24 | 11% |
| Acima de 4.390,24 | R$ 482,93 |

Assim, o valor a ser descontado depende (ou é função) do salário recebido.

O cálculo do valor a ser descontado pode ser expresso como uma função definida por várias sentenças, em que x representa o salário bruto do trabalhador e f(x) o valor do desconto.

A função ficaria, então:

$$f(x) = \begin{cases} (0{,}08).x, & \text{se } x \leq 1.317{,}07 \\ (0{,}09).x, & \text{se } 1.317{,}08 \leq x \leq 2.195{,}12 \\ (0{,}11).x, & \text{se } 2.195{,}13 \leq x \leq 4.390{,}24 \\ 482{,}93, & \text{se } x > 4.390{,}24 \end{cases}$$

c) Considere a função f definida por:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Neste exemplo, o comportamento da função muda em função do valor do domínio considerado.

Quando:

$x < 0$: a função é constante, com $y = 1$

$0 \leq x < 2$: a função é afim, com coeficiente angular igual a 1

$x \geq 2$: a função volta a ser constante,com $y = 3$

Assim, se

$f(4) = 3$, pois a imagem de $x = 4$ é definida pela 3ª sentença.

$f(1) = 2$ , pois a imagem de $x = 1$ é definida pela 2ª sentença ($f(1) = x + 1 = 1 + 1 = 2$).

## *Atividade 1*

***Atende ao objetivo 1***

1. A tabela a seguir apresenta as alíquotas para o cálculo mensal do Imposto sobre a Renda da Pessoa Física, a partir do exercício de 2015, ano-calendário de 2014:

| Base de Cálculo Mensal | Alíquota | Parcela a deduzir do imposto |
|---|---|---|
| Até R$ 1.787,77 | Isento | - |
| Acima de R$ 1.787,77 a R$ 2.679,29 | 7,5% | R$ 134,08 |
| Acima de R$ 2.679,29,00 a R$ 3.572,43 | 15% | R$ 335,03 |
| Acima de R$ 3.572,43 a R$ 4.463,81 | 22,5% | R$ 602,96 |
| Acima de R$ 4.463,81 | 27,5% | R$ 826,15 |

De acordo com esta tabela, se a renda mensal de um cidadão é x reais, qual será a função f(x) do imposto mensal a pagar?

2. Determine a imagem de f(2) em cada uma das funções a seguir:

a) $f(x)=\begin{cases} 3x, & \text{se } x>5 \\ \dfrac{5}{2x}, & \text{se } x\leq 5 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 3x, & \text{se } x>-1 \\ \dfrac{5}{2x}, & \text{se } x\leq -1 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} 7x^2, & \text{se } x\geq 0 \\ -4x+2, & \text{se } x<0 \end{cases}$

### *Resposta comentada*

1. De acordo com a tabela, a função que descreve o imposto pago pelos brasileiros é formada por mais de uma sentença, pois, de acordo com as faixas salariais, as alíquotas são diferentes. Assim, quem ganha até R$ 1.787,77 está isento do pagamento do imposto, ou seja, a alíquota a ser paga é zero; quem ganha acima deste valor, até a quantia de R$ 2.679,29, deve pagar uma alíquota de 7,5%, podendo deduzir do valor apurado a quantia de R$ 134,08. Então, a função que descreveria o cálculo desta alíquota seria:

7,5x – 134,08 → para quem recebe salário entre R$ 1.787,77 < x ≤ R$ 2.679,29

As demais alíquotas devem ser calculadas de forma similar, deduzindo-se, em cada uma, o valor indicado na tabela. A função ficaria, então:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 1.787,77 \\ 7,5x-134,08, & \text{se } 1.787,77 < x \leq 2.679,29 \\ 15x-335,03, & \text{se } 2.679,29 < x \leq 3.572,43 \\ 22,5x-602,96, & \text{se } 3.572,43 < x \leq 4.463,81 \\ 27,5x-826,15, & \text{se } x > 4.463,81 \end{cases}$$

2.

a) Neste caso, temos uma função definida por duas sentenças e, para obtermos a imagem de x = 2, precisamos observar qual das sentenças contém este valor do domínio.

Para x = 2, devemos considerar a função $f(x)=\frac{5}{2x}$, pois este comportamento da função está definido para todo valor de $x \leq 5$.

Logo,

$$f(2) = \frac{5}{2 \cdot 2} = \frac{5}{4}$$

b) Esta função é similar à do item a. Da mesma forma que no caso anterior, precisamos observar qual das sentenças contém o valor do domínio x = 2.

Para x = 2, devemos considerar a função f(x) = 3x, pois este comportamento da função está definido para todo valor de $x > -1$.

Logo,

$f(2) = 3 \cdot 2 = 6$

c) Finalmente, temos a função $f(x)=\begin{cases} 7x^2, & \text{se } x \geq 0 \\ -4x+2, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Como x = 2 é maior que zero, a imagem vai ser definida pela primeira condição.

Assim,

$f(2) = 7 \cdot 2^2 = 7 \cdot 4 = 28$

## Gráfico da função dada por mais de uma sentença

Como vimos, as funções definidas por mais de uma sentença podem ser descritas como:

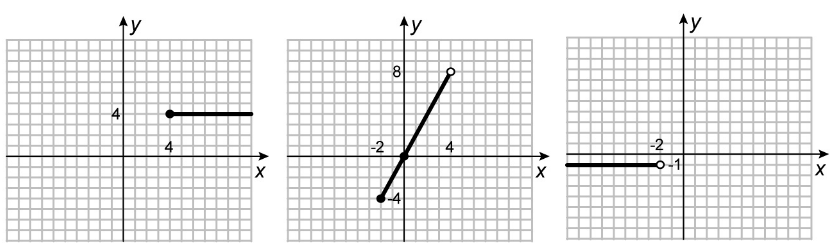
$$f(x)=\begin{cases} S_1(x), & C_1 \\ S_2(x) & C_2 \\ \quad \text{M} & \\ S_n(x) & C_n \end{cases}$$

onde cada S*i*(x) é uma sentença sujeita à condição imposta por C*i*. Para fazer o esboço do gráfico desta função, podemos imaginá-la como tendo várias funções, cada uma delas definida em um domínio C*i*. Dessa forma, poderíamos fazer vários gráficos separados e depois uni-los em um único gráfico.

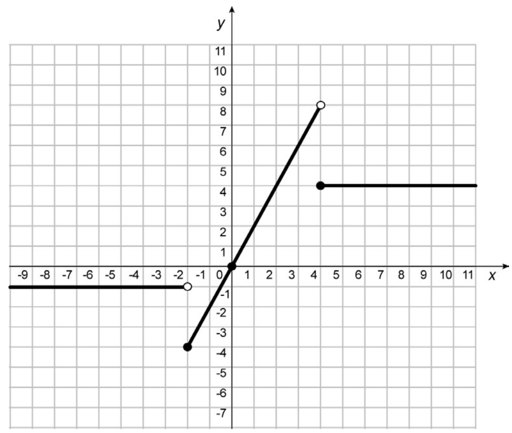
Exemplo:

$$f(x)=\begin{cases} -1 & \text{se} \quad x<-2 \\ 2x & \text{se} \quad -2\leq x<4 \\ 4 & \text{se} \quad x\geq 4 \end{cases}$$

Para montar seu gráfico, basta pensarmos em f(x) como se fosse três funções distintas.




Assim, o gráfico de f(x) ficaria:




Note que a função tem um comportamento diferente em cada parte do dominio, definido pela condição imposta, no caso:

$C_1 \rightarrow x < -2 \quad C_2 \rightarrow -2 \leq x < 4 C_3 \rightarrow x \geq 4$

Esboçar o gráfico de uma função exige que se conheça a forma da curva. Como será visto mais tarde, existem ferramentas matemáticas que irão nos auxiliar nessa construção. Por enquanto, observe se a função é constante, afim ou quadrática. Em seguida, calcula-se, em cada caso, quais os pontos-chave da construção do gráfico em cada um desses casos.

i. $f(\mathrm{x}) = k$ (função constante): reta horizontal paralela ao eixo $x$, passando pelo ponto $(0, k)$

ii. $f(x) = ax + b$ (função afim): para esboçar o gráfico da função afim, basta calcularmos dois pontos pertencentes à reta e ligá-los por uma reta.

iii. $f(x) = ax^2 + bx + c$ (função quadrática): o gráfico da função quadrática é a parábola. Para um esboço, devemos verificar a concavidade, o vértice e os zeros da função (valores de $x$ tais que $f(x) = 0$).

Porém, atenção! Quando lidamos com funções definidas por mais de uma sentença, devemos ficar atentos se estamos respeitando o domínio. Isto é, na hora de substitiuirmos ou calcularmos os zeros e o vértice, precisamos observar se os valores realmente pertencem ao intervalo de definição.

## Atividade 2

***Atende ao objetivo 2***

Faça um esboço do gráfico das seguintes funções:

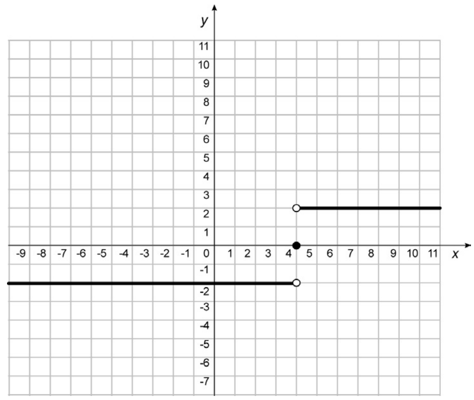
a) $$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x > 5 \\ 0, & \text{se } x = 5 \\ -2, & \text{se } x < 5 \end{cases}$$

b) $$f(x) = \begin{cases} -7x^2, & \text{se } x \geq 0 \\ 4x + 2, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

### *Resposta comentada*

Para esboçar o gráfico desta função, devemos construir o gráfico da função constante f(x) = 2, no intervalo em que x > 5; de forma similar, construímos o gráfico da função constante f(x) = –2, no intervalo em que x < 5. Note que, em ambos os caso, os intervalos são abertos no ponto x = 5, já que este ponto não pertence a nenhum dos dois intervalos.

Por fim, marcamos o ponto (5, 0), já que f(5) = 0. O gráfico de f(x) será:



Nesta função, dada por mais de uma sentença, temos a função variando a partir do eixo de y, ou seja, $f(x) = -7x^2$ se $x \geq 0$ e $f(x) = 4x + 2$ se $x < 0$.

Vamos iniciar fazendo um esboço do gráfico para valores de $x \geq 0$. Neste caso, temos uma função de 2º grau, com concavidade para baixo.

Vamos começar encontrando o vértice e o(s) zero(s) da função.

Para $f(x) = -7x^2$, o zero da função será:

$f(x) = -7x^2 = 0 \to x = 0$

Nesta função, $a = -7$, $b = 0$ e $c = 0$. Assim, o seu vértice será dado por:

$$x_V = \frac{-b}{2a} \quad \text{e} \quad y_V = \frac{-\Delta}{4a}$$

Calculando o valor de $\Delta$, teremos:

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0^2 - 4 \cdot (-7) \cdot 0 = 0$

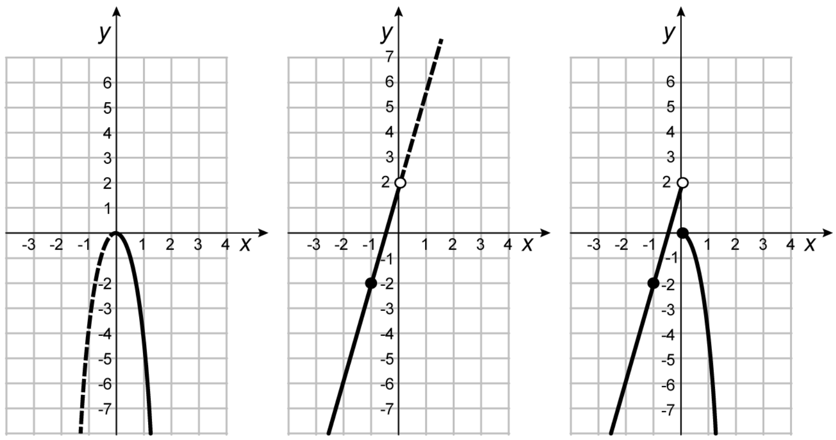
Logo,

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2 \cdot (-7)} = 0 \quad \text{e} \quad y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-0}{4 \cdot (-7)} = 0$$

Para valores de $x < 0$, temos uma função linear, cujo gráfico será uma reta. Para traçar uma reta, basta calcularmos 2 pontos da função:

| x | y |
|---|---|
| 0 | 2 |
| - | - |
| 1 | 2 |

Assim, o gráfico de f(x) ficará:



$-7x^2$      $4x = +\,2$      $f(x) = \begin{cases} -7x^2, & \text{se } x \geq 0 \\ 4x + 2, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

se $x \geq 0$      se $x < 0$

A função modular é uma função que tem a sua lei de formação descrita pelo módulo, podendo ser analisada como uma função definida por mais de uma sentença.

## Função modular

Antes de tratarmos da função modular, é preciso relembrarmos a definição de módulo de um número. O módulo de um número possui um significado geométrico, que é a distância desse número até o zero na reta real (origem), indicando a magnitude do número. Por exemplo, o módulo de 3 é a distância entre o 3 e o 0. Para nos deslocarmos do 3 ao 0, andaremos 1 unidade, tanto se nos deslocarmos para a direita (sentido positivo) quanto para a esquerda (sentido negativo).

Portanto, o módulo de 3 é igual a 3, ou simbolicamente:

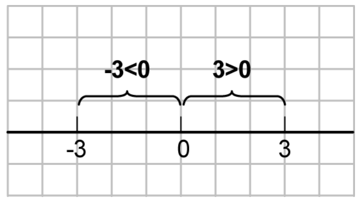
$$|3| = 3$$

Da mesma forma, o módulo de 3 é igual a 3, ou simbolicamente:

$$|-3| = 3$$

Já que a distância de –3 ao zero é também de 3 unidades.

$$|-3| = 3 \qquad |3| = 3$$




Em resumo, precisamos lembrar que o conceito de módulo de um número real está associado à ideia de distância de um ponto da reta à origem.

Exemplos:

Identifique os módulos (ou valor absoluto) dos números a seguir:

a) $|-5| = 5$

b) $|1.290| = 1.290$

c) $|0| = 0$

d) $|35,81| = 35,81$

e) $|-\log 7| = \log 7$

f) $|-\pi| = \pi$

## Definição

Dado um número real *a*, **módulo** ou *valor absoluto* de *a*, escrito matematicamente como $|a|$, é o valor numérico de *a* desconsiderando seu sinal.

Definimos então a **função modular** como a função que, *a cada número real, associa o módulo de a*, ou seja, a distância de *a* à origem.

De modo geral, podemos dizer que:

- se $a > 0$, $|a| = a$
- se $a < 0$, $|a| = -a$
- se $a = 0$, $|0| = 0$

Assim, o módulo (ou valor absoluto) de um número real qualquer é uma operação que o torna positivo (exceto o zero). Em outras palavras, todos os números positivos continuam positivos; e todos os números negativos tornam-se positivos.

Podemos descrever a função modular como:

$f(x) = |x|$ ou $y = |x|$

A função modular, $f(x) = |x|$, é a função $f: R \to R$, em que a cada $x \in R$ associa-se um único número real $|x|$. Ora,

$|x| = x$, se x for positivo $|x| = -x$, se x for negativo

Como $|0| = 0$, convenciona-se (na falta de uma informação em contrário) escrever o zero junto com o valor positivo do número. Então, escrevendo em linguagem matemática, teremos:

$|x| = x$, se $x \geq 0$

$|x| = -x$, se $x < 0$

A função $f(x) = |x|$ será escrita, então, da seguinte forma:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

!

Em outras palavras, poderíamos dizer que a função módulo de x é:

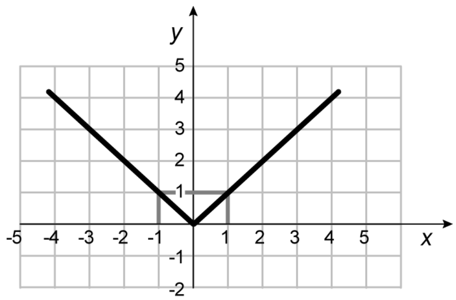
x, o próprio número, se ele (x) for maior ou igual a zero;

–x, isto é, seu simétrico, se ele (x) for menor do que zero.

Como podemos perceber, a função modular é uma função definida por mais de uma sentença. Assim, seu gráfico será construído pensando em cada sentença como uma função diferente, para depois juntá-las num mesmo gráfico, considerando o domínio de cada uma das sentenças.

Assim, seu gráfico é construído a partir de suas condições:

$f(x) = x$, se $x \geq 0$ e $f(x) = -x$, se $x<0$




O gráfico de y = |x| coincide com a reta y = x para valores positivos ou zero de x, enquanto para valores negativos de x, tomamos a semirreta simétrica à y = x em relação ao eixo horizontal. É como se tivéssemos "rebatido" a reta y = x com relação ao eixo horizontal, já que neste caso |x| = –x.

Em resumo, para os valores positivos ou zero da variável independente x, o valor da variável dependente y é o mesmo que x, pois y = x; para valores negativos de x o valor de y é –x, pois y = –x. Dessa forma, o gráfico é constituído de duas semirretas de mesma origem.

Generalizando, para entender como será o gráfico dey = |f(x)| para uma dada função conhecida,

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

teremos que seu gráfico:

i) coincidirá com o gráfico de f(x) para todos os valores de x nos quais f(x) é positiva ou zero;

ii) será simétrico com relação ao eixo horizontal do gráfico de f(x) ("rebatido") para todos os valores de x nos quais f(x) é negativa.

Exemplo:

Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = |x^2 - 9|$.

Pela definição de módulo, temos:

$$f(x) = |x^2 - 9| = \begin{cases} x^2 - 9, & \text{se } x^2 - 9 \geq 0 \\ -(x^2 - 9), & \text{se } x^2 - 9 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 9, & \text{se } x^2 \geq 9 \\ -x^2 + 9, & \text{se } x^2 < 9 \end{cases}$$

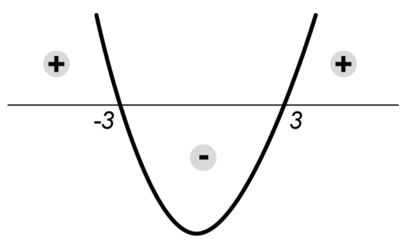
Em palavras, a função módulo de $x^2 - 9$ é: ele mesmo $(x^2 - 9)$, se ele $(x^2 - 9)$ for maior ou igual a zero; e é o negativo dele $-(x^2 - 9)$, se ele $(x^2 - 9)$ for menor do que zero.

Para construir o gráfico desta função, basta construirmos o gráfico de $f(x) = x^2 - 9$, para $x^2 - 9 \geq 0$ e $f(x) = -(x^2 - 9)$, para $x^2 - 9 < 0$. Assim, é preciso resolver estas inequações para identificar os intervalos de x para cada uma das sentenças, ou seja, a solução dessas inequações indicará o domínio de cada sentença.

Resolvendo as inequações:

Como solução para as inequações $C_1$: $x^2 - 9 \geq 0$ e $C_2$: $x^2 - 9 < 0$ temos:

$$x^2 - 9 = 0 \quad \therefore \quad x^2 = 9 \quad \therefore \quad x = \pm 3$$



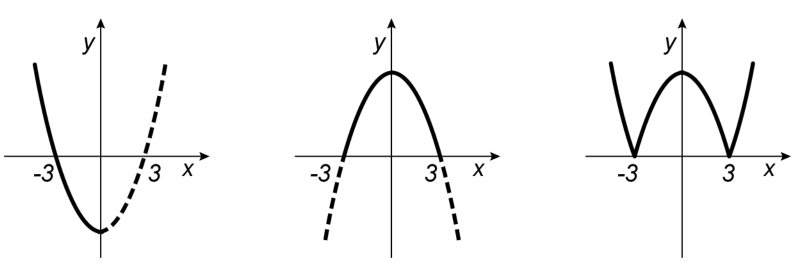

Para $C_1$: $x \leq -3$ ou $x \geq 3$

Para $C_2$: $-3 < x < 3$

Dessa forma, podemos reescrever:

$$f(x) = |x2 - 9| = \begin{cases} x^2 - 9, & \text{se } x \leq -3 \text{ ou } x \geq 3 \\ -x^2 + 9, & \text{se } -3 < x < 3 \end{cases}$$

Então,




$x^2 - 9 = 0$ $\qquad$ $-x^2 + 9 = 0$ $\qquad$ $f(x) = |x2 - 9|$

se $x \leq -3$ ou $x \geq 3$ $\qquad$ $-3 < x < 3$

## Conclusão

Nesta aula, trabalhamos os conceitos de funções dadas por mais de uma sentença e uma importante função, que pode ser tratada desta forma: a função modular.

As funções modulares nos permitem tratar situações que abordam apenas valores positivos. As funções dadas por mais de uma sentença têm muitas aplicações em nosso dia a dia, pois nos permitem representar, numa mesma função, situações distintas.

## *Atividade final*

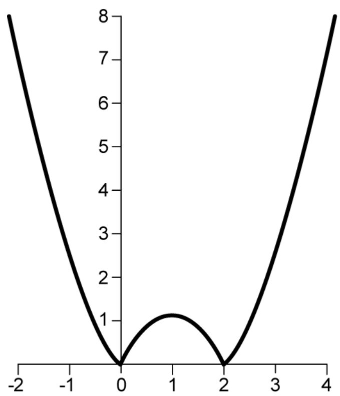
***Atende aos objetivos 3, 4 e 5***

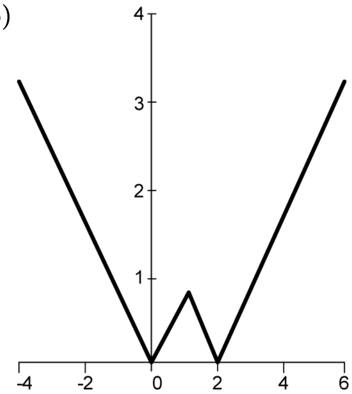
1. Faça um esboço do gráfico das seguintes funções reais:

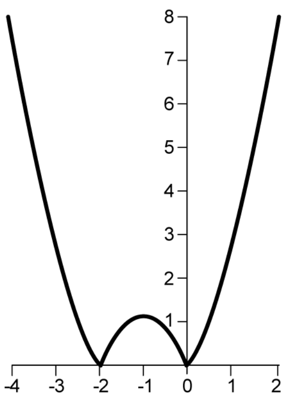
a) $f(x) = |2x + 6|$

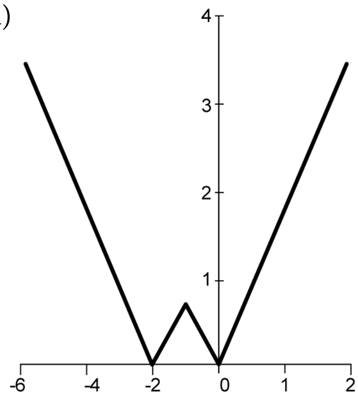
b) $f(x) = |x^2 - 3x|$

2. (UFCE) Sendo $f(x) = |x^2 - 2x|$, o gráfico que melhor representa f é:

a)



b)



c)



d)



### *Resposta comentada*

1. Para fazer o esboço do gráfico das funções modulares, precisamos escrevê-las como uma função dada por mais de uma sentença. Então:

a) $f(x) = |2x + 6|$

Para fazer o esboço do gráfico da função, precisamos escrevê-la na forma de uma função dada por mais de uma sentença: Assim,

$$f(x) = |2x+6| = \begin{cases} 2x+6, & \text{se } 2x+6 \geq 0 \\ -2x-6, & \text{se } -2x-6 < 0 \end{cases}$$

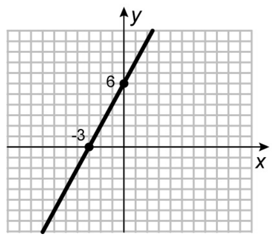
O zero da equação será:

$2x + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad 2x = -6 \quad \rightarrow \quad x = -3$

Então, podemos escrever:

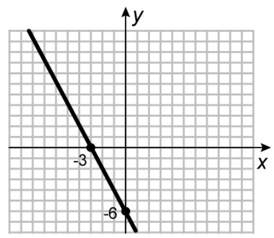
$$f(x) = |2x+6| = \begin{cases} 2x+6, & \text{se } x \geq -3 \\ -2x-6, & \text{se } x < -3 \end{cases}$$

Se fizermos o esboço de cada uma das sentenças e depois unirmos as duas em um só gráfico, teremos o gráfico de f(x) = |2x + 6|



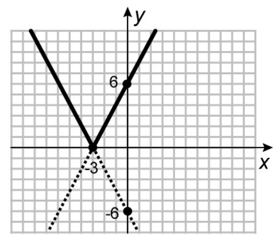

f(x) = 2x + 6

se x ≥ −3




f(x) = −(2x + 6)

se x < −3




f(x) = |2x + 6|

a) f(x) = |x2– 3x|

Pela definição de módulo, temos que:

f(x) = $x^2$– 3x, se x≥ 0

e

f(x) = – ($x^2$– 3x), se x < 0

Assim, segue que:

$x^2$– 3x = 0 ∴ x (x – 3) = 0

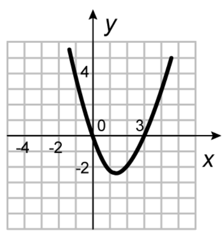
x = 0 ou x = 3

Temos também que:

– ($x^2$– 3x) = 0

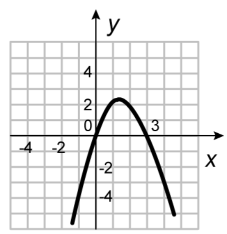
x= 0 ou x = 3

Logo:



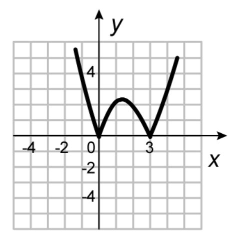

$f(x) = x^2 - 3x$

se $x \geq 3$ ou $x \leq 0$




$f(x) = -(x^2 - 3x)$

se $0 < x < 3$




$f(x) = |x^2 - 3x|$

Em resumo, unindo-se as partes dos dois gráficos que se encontram acima do eixo x, teremos o gráfico da função $f(x) = |x^2 - 3x|$

2. Para resolver esta questão, basta pensarmos que, por se tratar do módulo de uma função quadrática, o gráfico deverá ter a forma de uma parábola, ao menos parcialmente. Assim, as opções (b) e (d) são imediatamente descartadas.

Devemos, então, calcular o(s) zero(s) de$f(x) = |x^2 - 2x|$

$x^2 - 2x = 0 \qquad \rightarrow \qquad x\,(x - 2) = 0$, então:

$x = 0$ ou $x = 2$

Logo, a alternativa correta é a opção (a) que passa por esses pontos.

## Resumo

Vamos agora resumir os pontos estudados nesta aula.

As funções definidas por mais de uma sentença são escritas da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} S_1(x), & C_1 \\ S_2(x) & C_2 \\ \vdots & \\ S_n(x) & C_n \end{cases},$$

em que cada Si(x) é uma sentença sujeita à condição imposta por $C_i$, ou seja, cada condição será o domínio para a respectiva sentença.

Para fazer o esboço do gráfico desta função, podemos imaginá-la como sendo várias funções, cada uma delas definida em um domínio $C_i$. Dessa forma, é possível fazer vários gráficos separados e depois uni-los em um único gráfico.

A função modular pode ser escrita como uma função dada por mais de uma sentença.

O módulo ou valor absoluto de um número real a, $|a|$, é o valor numérico de *a* desconsiderando seu sinal.

De modo geral, podemos dizer que:

se $a > 0$, $|a| = a$

se $a < 0$, $|a| = -a$

se $a = 0$, $|0| = 0$

A função modular, $f(x) = |x|$, é a função $f: R \to R$, em que a cada $x \in R$ associa-se um único número real $|x|$.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

# Aula 11

## Funções exponenciais e logarítmicas

*Eliane Ribeiro Pereira*
*Maria Cecília de Carvalho Chaves*

## Meta

Apresentar funções exponenciais e logarítmicas e problemas que envolvem a aplicação dessas funções.

## Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. reconhecer a função exponencial e suas propriedades;
2. construir o gráfico de uma função exponencial;
3. classificar a função exponencial em crescente e decrescente;
4. reconhecer a função logarítmica como inversa da função exponencial;
5. construir o gráfico de uma função logarítmica;
6. reconhecer os sistemas de logaritmo decimal e neperiano;
7. aplicar os conceitos de funções exponenciais e logarítmicas na resolução de situações-problema.

## Pré-requisitos

Para obter um melhor aproveitamento desta aula, você precisa ter realizado sem dificuldades as atividades das Aulas 2 e 7. Se perceber alguma dificuldade no desenvolvimento das atividades propostas, retorne a essas aulas para reforçar os tópicos necessários.

## Introdução

Nesta aula, trataremos de duas funções muito utilizadas na modelagem de situações de nosso dia a dia: a exponencial e a logarítmica.

As funções exponenciais são importantes porque se comportam de forma especial: elas crescem (ou decrescem) de forma muito rápida. Assim, elas acabam sendo muito importantes para representar situações práticas na Matemática, na Física, na Engenharia, entre outras.

As funções logarítmicas, por sua vez, surgiram no final do século XVII, passando a ser muito utilizadas na ocasião, devido a suas propriedades especiais. Em especial, sua propriedade que permite transformar produtos em somas e quocientes em diferenças, propiciou o seu desenvolvimento, já que seu uso possibilitava a realização de cálculos complexos na época, como o produto de números muito grandes.

Como a função logarítmica é a inversa da função exponencial, seus comportamentos são similares. Assim, podemos sempre escolher trabalhar com uma ou com a outra, conforme a conveniência.

Até muito pouco tempo, o estudo dos logaritmos devia-se especialmente ao seu uso como instrumento para a realização de cálculos. Todavia, o desenvolvimento da informática fez mudar esta situação, já que os cálculos passaram a poder ser realizados com o uso de computadores e calculadoras científicas. As tábuas de logaritmo e as réguas de cálculo não são mais usadas, mas as funções logarítmica e exponencial continuam sendo muito importantes, por envolverem variações com características fundamentais em algumas análises, sendo, inclusive, utilizadas na representação da tecnologia moderna.

Diz uma lenda que, há muitos e muitos anos, um rei, procurando dar fim ao seu tédio, lançou um concurso que premiaria aquele que inventasse o melhor jogo, dando-lhe o direito de fazer qualquer pedido. Foi então que um inventor criou o jogo de xadrez, deixando o rei muito impressionado. Ao ir até o rei fazer o seu pedido, o inventor, muito esperto, pediu que o rei preenchesse as 64 casas do tabuleiro de xadrez com moedas de ouro. O rei achou muito fácil atender a este pedido, mas o inventor fez uma exigência: que, após colocar uma moeda na primeira casa, as casas seguintes fossem preenchidas com o dobro da quantidade de moedas da casa anterior. O rei ordenou que o pedido fosse atendido. Ao fazer as contas para satisfazer o rei, os tesoureiros do reino descobriram que, para atender a tal pedido, o rei iria falir! Consegue imaginar por quê?

Pense bem:

Na 1ª casa: 1 moeda

Na 2ª casa: $1 \times 2$ moedas

Na 3ª casa: $2 \times 2 = 2^2$ moedas

Na 4ª casa: $2^2 \times 2 = 2^3$ moedas

E assim sucessivamente, até que na última casa teria $2^{63}$ moedas, o que dá um total de, aproximadamente, 9.223.300.000.000.000.000 $= 9{,}2233 \times 10^{18}$ moedas. Além disso, o inventor receberia a soma de todas as moedas, e não apenas aquelas que estivessem na última casa. Já pensaram? Essa lenda é uma aplicação de funções exponenciais ($y = 2^x$).

Fonte: http://www.freeimages.com/photo/1432405

## Função exponencial

A expressão matemática que define a função exponencial é uma potência. Nesta potência, a base é constante e o expoente é uma variável.

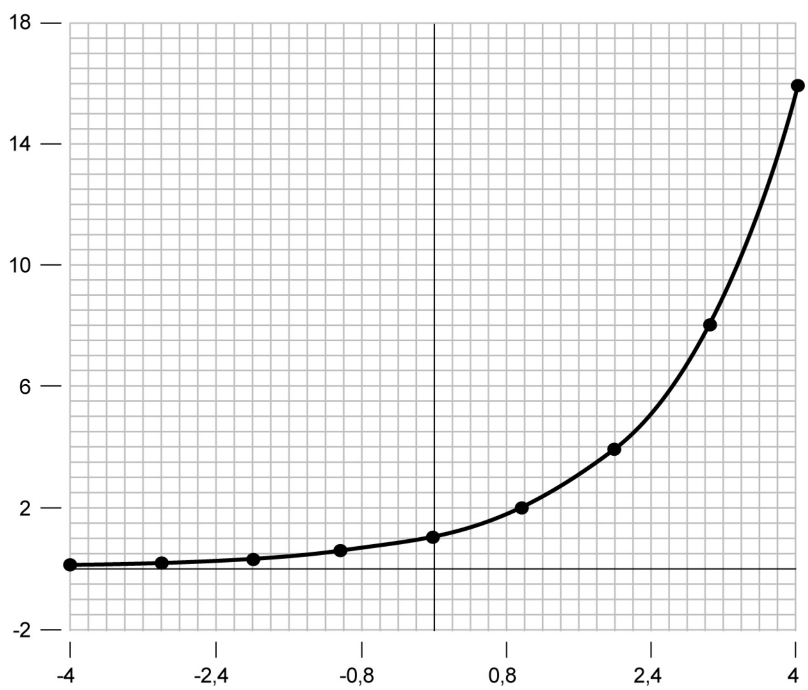
## Definição

Chamamos função exponencial a função $f\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}_{+}^{*}$ tal que $f(x) = a^x$ em que $a \in \mathrm{R}$, e $0 < a \neq 1$. Assim, a base é $a$ e o expoente é $x$.

Exemplo:

$f(x) = 2^x$, com $x \in [-4, 4]$

é uma função exponencial, cujo gráfico seria:




Funções exponenciais são sempre positivas. Usamos este tipo de função para representar questões que envolvem o *crescimento* (ou *decrescimento*) rápido daquilo que desejamos estudar. Em nosso dia a dia, usamos a função exponencial em operações rotineiras, como o cálculo de juros ou da produtividade de funcionários e empresas.

Vamos recordar alguns pontos de potenciação?

O produto com fatores iguais pode ser escrito na forma de potência. Assim, considerando-se *a* um número real e *n* um número natural diferente de zero:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\boldsymbol{n} \text{ vezes}}$$

onde ***a*** é chamado de base e ***n*** (expoente) é o número de vezes que a base se repete.

Exemplos:

$$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

### Expoente inteiro negativo

Inverte-se a base e troca-se o sinal do expoente:

Exemplos:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

$$(-8)^{-2} = \left(\frac{-1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}$$

## Expoente expresso por uma fração

Eleva-se a base ao valor do numerador e extrai-se a raiz do valor do denominador

Exemplos:

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64}$$

$$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$$

## Domínio da função exponencial

Para toda função exponencial $f(x)$, $f$ é contínua, o seu domínio é **R** e a sua imagem é $R^+$. Ou seja,

O *domínio* de $f(x) = a^x$ é o conjunto de todos os números reais.

A *imagem* de $f(x) = a^x$ é o conjunto de todos os números reais positivos $-]0,+\infty[$.

Exemplo:

Determine o domínio e o contradomínio de $f(x) = 2^x$.

Analisando-se a função, é fácil perceber que podemos atribuir a $x$ quaisquer valores reais, que sempre conseguiremos encontrar um valor para $f(x)$. Assim, domínio de $f(x)$ é R. Logo,

$$D(f) = R$$

Para analisar o conjunto imagem, é fácil perceber que, para quaisquer valores atribuídos à variável $x$, obteremos sempre um número positivo, pois, como a função nunca assume o valor nulo, não poderá assumir valores negativos. Logo,

$$Im(f) = R^+$$

## Propriedades da função exponencial

Sejam $a$ e $b$ números reais, tais que $0 < a \neq 1$, $0 < b \neq 1$; $x$ e $y$ números reais quaisquer, então:

*i.* $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

ii. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

iii. $(a^x)^y = a^{x.y}$

iv. $(ab)^x = a^x b^x$

v. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

vi. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

## Atividade 1

***Atende ao objetivo 1***

Resolva, utilizando as propriedades das funções exponenciais:

a) $8^x = 0{,}25$

b) $\left(2^{m+3}\right)^4 = 2^{\frac{5}{3}}$

### *Resposta comentada*

Para resolver estas questões, precisamos:

a) $8^x = 0{,}25 \Rightarrow \left(2^3\right)^x = \frac{1}{4} \Rightarrow 2^{3x} = \frac{1}{2^2} \Rightarrow 2^{3x} = 2^{-2}$

$\Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$

b) $\left(2^{m+3}\right)^4 = 2^{\frac{5}{3}} \Rightarrow 2^{(4m+12)} = 2^{\frac{5}{3}}$

$\Rightarrow 4m + 12 = \frac{5}{3} \Rightarrow 4m = \frac{5-36}{3}$

$\Rightarrow m = \frac{-31}{3 \cdot 4} = \frac{-31}{12}$

## Gráfico da função exponencial

Para fazermos o esboço do gráfico da função exponencial, devemos analisar 3 características importantes dessas funções:

### O ponto em que elas cortam o eixo *OY*

A função exponencial sempre corta o eixo de *OY* no ponto (0,1), já que, neste ponto, $x$ é zero e, ao elevar qualquer número a zero, encontramos 1. Então,

$$f(0) = 1, \text{ isto é, } a^0 = 1,\ a \neq 0$$

### O valor assumido pela função quando *x* = 1

O valor da função em 1 será sempre o valor da base, já que, ao elevar quaisquer números a 1, encontramos sempre o valor da base. Então,

$$f(1) = a, \text{ isto é, } a^1 = a$$

### O comportamento da função exponencial

A função exponencial pode ser crescente ou decrescente, de acordo com o valor assumido pela base ($a$):

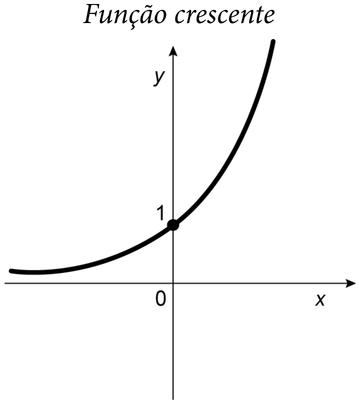
Se $a > 1$ → $f$ é crescente

Se $0 < a < 1$ → $f$ é decrescente

Em ambos os casos, o gráfico da função exponencial varia de forma muito rápida:

$a > 1$

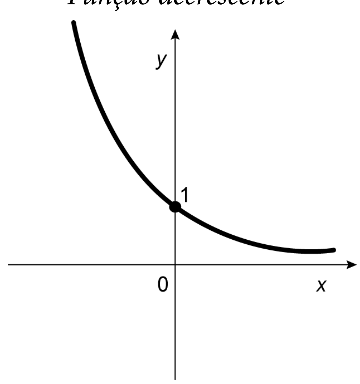
*Função crescente*




(a)

$0 < a < 1$

*Função decrescente*



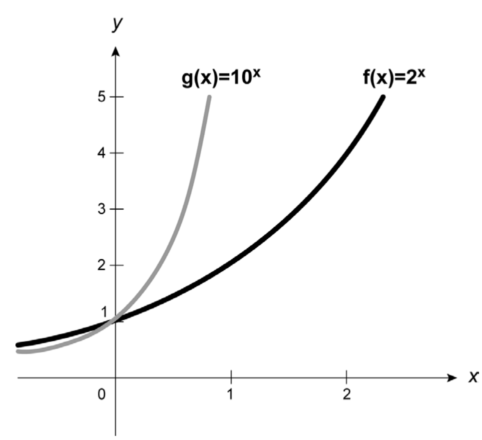

(b)

a) No primeiro gráfico, quanto mais aumenta o valor de $x$, maiores são os valores assumidos pela função; e quanto mais diminui o valor de $x$, a função assume valores cada vez menores e mais próximos de 0, sempre pelo lado positivo do eixo $OY$.

b) No segundo gráfico, quanto mais aumenta o valor de $x$, menores são os valores assumidos pela função, e mais próximos de 0 pelo lado positivo do eixo $OY$; e quanto mais diminui o valor de $x$, a função assume valores cada vez maiores.

Assim, o gráfico da função exponencial será uma curva crescente (se $a > 1$) ou decrescente (se $0 < a < 1$). Quanto maior for a base da função, mais rapidamente crescerá o seu valor, fazendo com que seu gráfico seja mais próximo do eixo $OY$.

Por exemplo, analise o gráfico de $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 10^x$:




Como $10 > 2$, a função $g(x)$ fica muito mais próxima do eixo $OY$, do que $f(x)$, já que seus valores crescem com mais velocidade.

Exemplo:

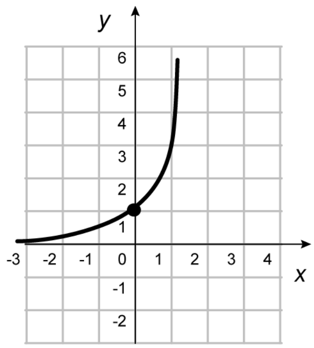
Faça um esboço do gráfico de $f(x) = 5^x$.

Para esboçar o gráfico da função $f(x) = 5^x$, verificamos que a base é 5, logo, maior do que um, o que faz com que tenhamos uma função crescente.

A função corta o eixo de y no ponto (0, 1) e

$f(1) = 5^1 = 5$

Assim,




## Atividade 2

***Atende aos objetivos 2 e 3***

1. Dadas as funções abaixo, classifique-as em crescente ou decrescente:

*a)* $f(x) = 3^x$

*b)* $f(x) = \left(\dfrac{2}{5}\right)^x$

2. Construa o gráfico das funções exponenciais do exercício anterior.

### *Resposta comentada*

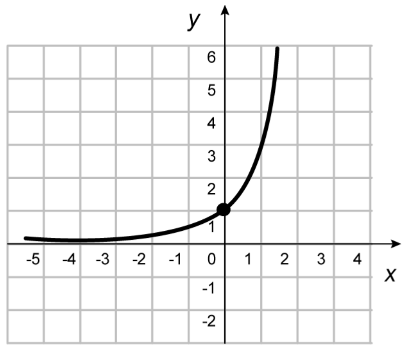
1. Para identificar se a função exponencial é crescente, ou decrescente, basta analisar a sua base:

a) $a = 3$, como $a > 1$, a função é crescente.

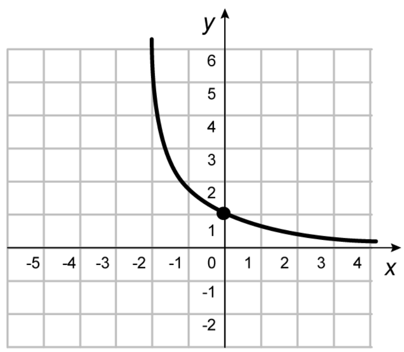
b) $a = \left(\dfrac{2}{5}\right)^1$, como $0 < a < 1$, a função é decrescente.

2. Vamos agora construir o gráfico de cada uma das funções.

a) Para esboçar o gráfico da função exponencial, primeiramente devemos analisar a base, neste caso, $a = 3$. Logo, a função é crescente, corta o eixo de y no ponto (0, 1) e $f(1) = 3^1 = 3$:



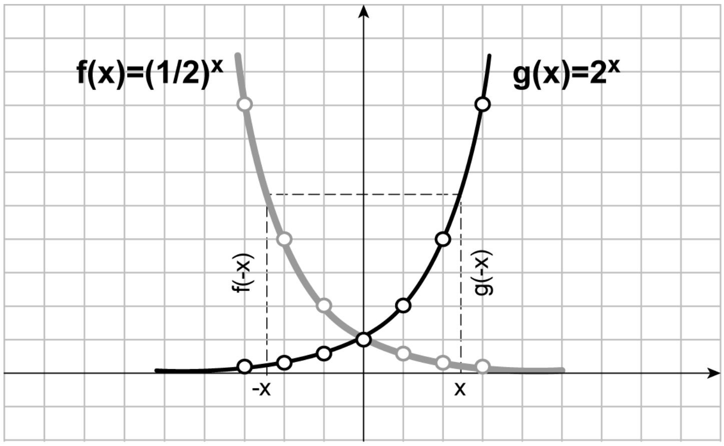

b) Neste caso, a base é um valor entre 0 e 1, $a = \left(\frac{2}{5}\right)$, logo, a função é decrescente, corta o eixo de y no ponto (0, 1) e $f(1) = \left(\frac{2}{5}\right)^1 = \left(\frac{2}{5}\right)$:




Os gráficos de $y = a^x$ e de $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ são simétricos em relação ao eixo *OY*.

Exemplo:

Seja $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $g(x) = 2^x$




## A constante de Euler

Existe um número muito importante na Matemática, chamado número de Euler, denotado por *e* em homenagem ao matemático suíço que primeiro estudou suas propriedades: Leonhard Euler (1707 – 1783).

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler#mediaviewer/Ficheiro: Leonhard_Euler_2.jpg

Leonard Paul Euler nasceu no dia 15 de abril de 1707 em Basileia, na Suíça. Seu pai foi aluno do famoso matemático Jean Bernoulli, que mais tarde iria ter papel fundamental em sua vida. Desenvolveu inúmeros e importantes trabalhos científicos, além de inspirar o caminho de vários jovens, inclusive alguns de seus filhos. Atuou na Alemanha, Suíça e, em especial, na Academia de S. Petersburgo, na Rússia, onde assumiu, aos 26 anos, o posto de principal matemático da Academia. Teve alguns problemas de saúde, perdendo a visão do olho direito em 1738, por excesso de trabalho. Fato este que não o impediu de continuar produzindo cada vez mais. Chegou a assumir o cargo de diretor na Academia de Berlim, mas voltou para a Academia de S. Petersburgo, onde desenvolveu grande parte de seu trabalho.

Diante da perspectiva de perder completamente a visão devido à catarata, preparou-se para tal possibilidade treinando a escrita em quadros e o cálculo mental. Assim, conseguiu continuar sua produção quando a cegueira chegou, tendo sido mais da metade de sua obra produzida após este período. Para tanto, contou com a ajuda de diferentes pessoas, em especial de seus filhos e do marido de sua neta. Sua impressionante capacidade de produção continuou até sua morte, ocorrida em 18 de setembro de 1783.

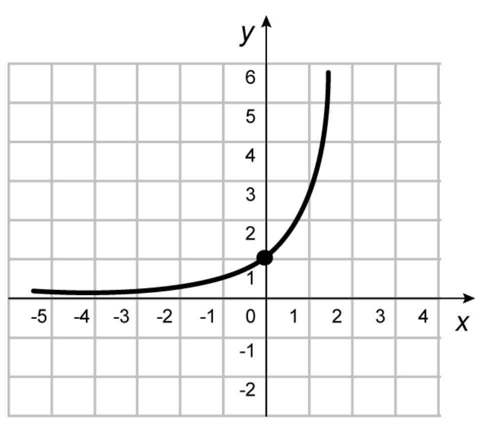
O número $e$ é um número irracional e positivo, expresso com 40 casas decimais:

$$e = 2{,}7182818284590452353602874713526624977572$$

Sendo $x$ é um número real, podemos escrever a função exponencial de base $e$, dada por:

$$f(x) = e^x$$

Como $e$ é um número positivo maior do que a unidade, valem para a função $\boldsymbol{f(x) = e^x}$ as mesmas propriedades das funções exponenciais de base maior que 1, logo o seu gráfico será crescente, da forma:



## Função logarítmica

Para falar da função logarítmica, precisamos antes relembrar o logaritmo, que é a expressão matemática que a define. Você lembra o que é logaritmo?

O logaritmo é, algebricamente falando, um expoente.

Dados dois números reais e positivos $a$ e $b$, sendo $a \neq 1$, chama-se logaritmo de $b$ na base $a$ o expoente que se deve dar à base $a$, de modo que a potência obtida seja igual a $b$, isto é,

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Onde, b é chamado logaritmando, a é a base e x o logaritmo.

Exemplo:

$\log_2 8 = 3$ lê-se: log de 8 na base 2.

Para resolver, devemos pensar: a quanto devo elevar o 2 para encontrar 8?

$2^x = 8 \Leftrightarrow 2^3 = 8$

**Definição**

A função logarítmica de base a é toda função f: $R_+^* \rightarrow R$, definida por $f(x) = \log_a x$, com $a \in R_+^*$ e $a \neq 1$.

Observe que, neste tipo de função, a variável independente $x$ é um logaritmando; por isto, a denominamos função logarítmica; a base $a$ é um valor real constante, não é uma variável, mas sim um número real.

## Domínio da função logarítmica

Para toda função logarítmica $f(x)$, $f$ é contínua, o seu domínio, o conjunto dos números reais positivos e o seu conjunto de imagens, é o conjunto de todos os números reais.

$$D(f) = R^+$$

$$Im(f) = R$$

Exemplo:

Determine o domínio e o contradomínio de $f(x) = \log_3 x$.

Analisando-se a função, podemos perceber que podemos atribuir a $x$ quaisquer valores reais positivos, que sempre conseguiremos encontrar um valor correspondente para $f(x)$, assim, domínio de $f(x)$ é $R^+$.

Para analisar o conjunto imagem, devemos pensar que a função pode assumir quaisquer valores reais. Logo,

$$\text{Im}(f) = R$$

## Funções inversas

A função logarítmica de $R_+^* \to R$ é inversa da função exponencial de $R \to R_+^*$ e vice-versa, pois:

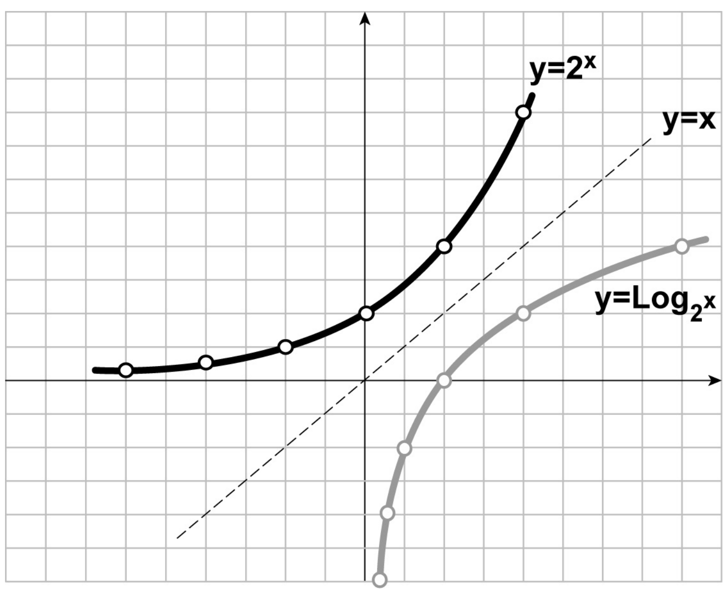
$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$

Assim, $y = \log_a x$.

Para a > 1, os gráficos das funções exponenciais e logarítmicas são simétricos em relação à bissetriz $y = x$.

Exemplo:

Ao analisar o esboço do gráfico das funções $y = 2^x$ e $y = \log_2 x$,




é facilmente possível perceber a simetria dessas funções com relação a $y = x$.

## Gráfico da função logarítmica

Assim como no caso dos gráficos das funções exponenciais, o esboço dos gráficos das funções logarítmicas requer a análise de algumas características especiais:

### O ponto em que elas cortam o eixo *OX*

A função logarítmica sempre corta o eixo de *OX* no ponto (1, 0), já que neste ponto $x$ é 1 e, ao calcular o log de 1, encontramos 0, já que todo número elevado a zero tem 1 como resultado. Então,

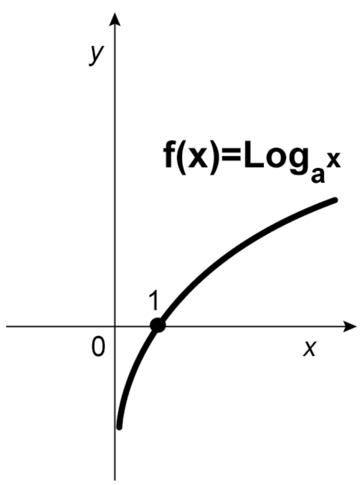
$$f(1) = 0, \text{ isto é, } \log_a 1 = 0,\ a \in \mathbb{R}_+^* \text{ e } a \neq 1$$

### O comportamento da função logarítmica

O comportamento da função logarítmica varia conforme a sua base $a$. Se $a > 1$, a função é crescente; e é decrescente se $0 < a < 1$.

$a > 1$

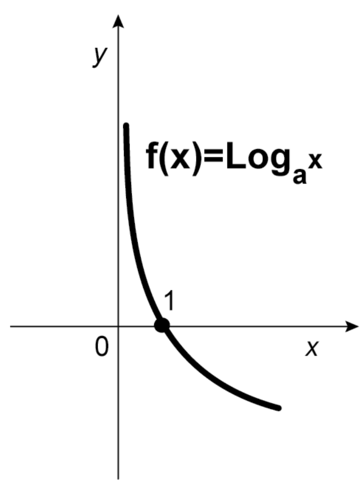
*Função crescente*




(a)

$0 < a < 1$

*Função decrescente*




(b)

### As regiões ou espaços diferentes sobre o eixo *x*:

a) Um intervalo em que a função logarítmica não está definida: $]-\infty, 0[$

b) Um intervalo em que a função assume valores negativos:

Para $a > 1$ → $]0, 1[$

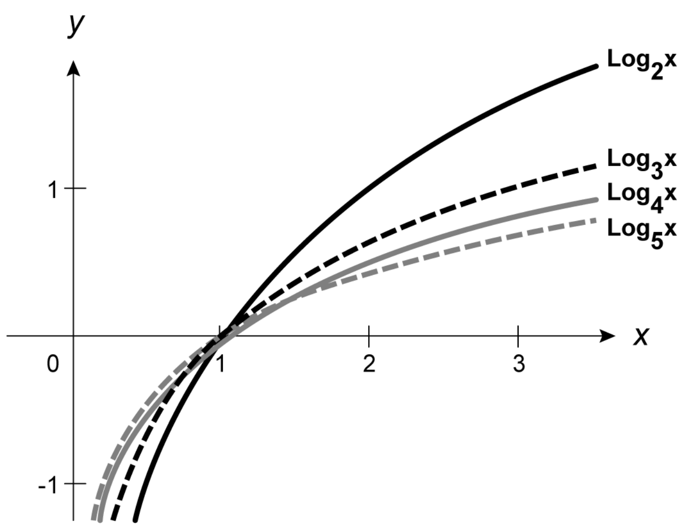
Para $0 < a < 1$ → $]1, +\infty[$

c) Um intervalo em que a função assume valores positivos:

Para $a > 1$ → $]\,1, +\infty[$

Para $0 < a < 1$ → $]\,0, 1[$

O gráfico da função logarítmica varia de acordo com o valor de sua base. Quanto maior for a base de um logaritmo, mais próximo dos eixos seu gráfico estará. Observe:




Repare que, conforme fomos aumentando o valor da base, o gráfico foi ficando mais próximo tanto do eixo $x$, quanto do eixo $y$.

## Propriedades da função logarítmica

1. $\log_a 1 = 0$ (O logaritmo de 1 na base $a$ é zero)
$(a^0 = 1)$

2. $\log_a a = 1$ (O logaritmo da própria base $a$ é 1)
$(a^1 = a)$

3. $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$ (Dois logaritmos numa mesma base são iguais se, e somente se, os logaritmandos são iguais)

## Propriedades operatórias

Dados os números reais e positivos $a$, $b$ e $c$, sendo $a \neq 1$, temos as seguintes propriedades:

1. $\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$
2. $\log_a (\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c$
3. $\log_a b^r = r \log_a b$
4. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

Esta última propriedade é muito utilizada, já que é através dela que conseguimos escrever o logaritmo na base que desejarmos. No caso, transformamos o logaritmo de base a em um quociente de logaritmos na base c.

Exemplo:

Mudar a base do logaritmo de 15 na base 2, para base 4.

$$\log_2 15 = \frac{\log_4 15}{\log_4 2}$$

Quando não se escreve a base do logaritmo, convenciona-se que a base é 10.

Se repetirmos o exemplo dado para a base 10, teremos:

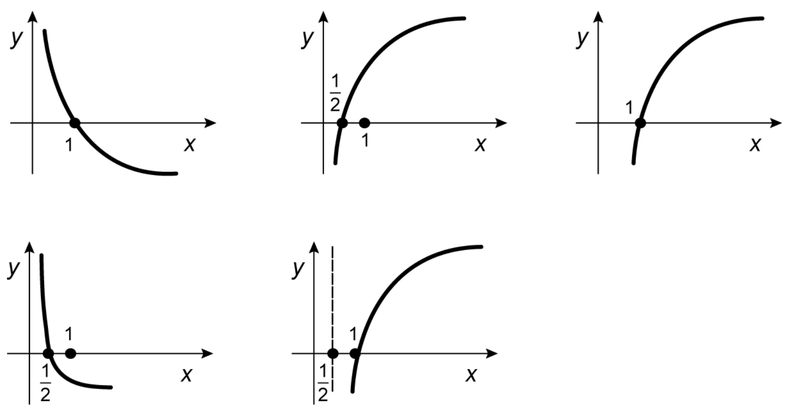
$$\log_2 15 = \frac{\log_{10} 15}{\log_{10} 2} = \frac{\log 15}{\log 2}$$

Os logaritmos de base 10 são conhecidos como logaritmos comuns e são representados sem a referência explícita da base. Assim, escrevemos log $x$ e não $\log_{10} x$.

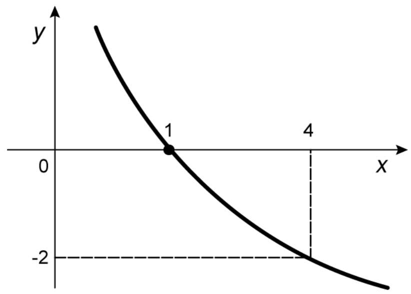
## Atividade 3

***Atende aos objetivos 4 e 5***

1. (UFRGS) A representação geométrica que melhor representa o gráfico da função real de variável real $x$, dada por $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, é:




2. (UFSM) O gráfico mostra o comportamento da função logarítmica na base $a$. Então, o valor de $a$ é:




a) 10 (d)1/2

b) 2 (e)-2

c) 1

3. Faça um esboço do gráfico de:

a) $f(x) = \log_3 x$

b) $g(x) = \log_{\frac{2}{5}} x$

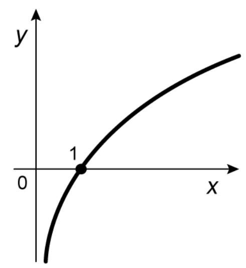
### *Resposta comentada*

1. Temos, neste caso, a base igual a ½, um valor entre 0 e 1. Logo, o gráfico será de uma função decrescente. Nas opções fornecidas, temos apenas 2 funções decrescentes, os itens a e d. Todavia, este último corta o eixo x no ponto ½, o que não é possível no caso da função logarítmica. Assim, a resposta correta é a opção a.

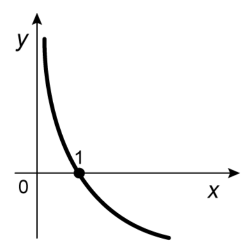
2. Nesta questão, temos uma função com comportamento decrescente. Assim, necessariamente teremos uma base com valor entre 0 e 1. Neste caso, a única opção possível é a letra d.

3.

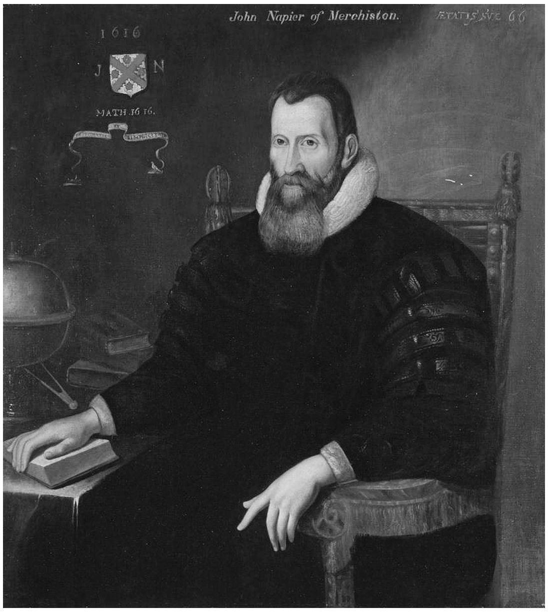
a) Para fazer um esboço do gráfico de $f(x) = \log_3 x$ , devemos observar que a base é um número maior do que 1. Logo, teremos uma função com comportamento crescente, que corta o eixo $x$ no ponto (1, 0). Assim:




b) De forma similar, para fazer um esboço do gráfico de $g(x) = \log_{\frac{2}{5}} x$ , devemos observar que a base é um número entre 0 e 1. Logo, teremos uma função com comportamento decrescente, que corta o eixo $x$ no ponto (1, 0). Assim:




Os logaritmos surgiram por volta do século XVII, sendo sua invenção atribuída a John Napier (1550–1617), um matemático, físico, astrônomo e teólogo escocês, que também introduziu o uso do ponto decimal em aritmética. Napier decodificou o logaritmo natural – o neperiano, utilizando uma constante, sendo a primeira referência conhecida ao número "*e*", descrito, muitos anos depois, por Leonhard Euler. Hoje, o número "*e*" é chamado "número de Euler" ou "número de Napier".




Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/John_Napier#mediaviewer /Ficheiro:John_Napier.jpg

As questões ligadas às navegações e astronomia envolviam operações com números muito grandes, efetuadas com o uso de relações trigonométricas, até o surgimento dos logaritmos, que possibilitaram a sua simplificação.

No *link*: http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/logaritmica/historia/hist_log.htm, você pode encontrar mais informações sobre a história dos logaritmos.

## Logaritmo neperiano

O logaritmo na base *e* recebe o nome especial de logaritmo neperiano e pode ser escrito da seguinte forma:

$$\log_e x = \ln x$$

Assim,

$y = e^x$ se, e somente se, $x = \ln(y)$

$\mathrm{In}(e^x) = x$

Considerando as propriedades dos logaritmos, podemos facilmente identificar que:

$\log_e e = 1$

Ou seja:

$\ln e = 1$

As propriedades das funções exponenciais e logarítmicas também são válidas para a base $e$:

Sejam $a$ e $b$ números reais, tais que $0 < a \neq 1$, $0 < b \neq 1$; $x$ e $y$, números reais quaisquer e $k$, um número racional, então:

i. $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$

ii. $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

iii. $e^{x \cdot k} = (e^x)^k$

iv. $\ln_a (b \times c) = \ln_a b + \ln_a c$

v. $\ln_a (\dfrac{b}{c}) = \ln_a b - \ln_a c$

vi. $\ln_a b^r = r \ln_a b$

## Atividade 4

***Atende ao objetivo 6***

1. Escreva ln $x$ na base decimal.

2. Sabendo que log 7 = 0,85, determine ln 7.

3. Sendo ln 0,08 = –2,5, determine log 0,08.

### *Resposta comentada*

1. Neste caso, desejamos mudar a base do logaritmo neperiano para o logaritmo na base dez. Assim, devemos lembrar que $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.
Logo, sendo *x* um número positivo, teremos:

$$\log_e x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} \mathrm{e}} = \frac{\log x}{\log e} = \frac{\log x}{0,43} = \frac{1}{0,43} \cdot \log x = 2,3 \cdot \log x$$

Assim, lnx = 2,3 log*x*. Esta relação pode nos ajudar em diversos problemas que envolvam logaritmos na base decimal e neperiana.

2. Podemos, neste caso, utilizar o resultado obtido no exercício 1:

Vimos que In *x* = 2,3 log*x*

Então, In 7 = 2,3 · log 7, como log 7 = 0,85, teremos:

ln7 = 2,3 · 0,85 = 1,955

3. De forma similar ao caso anterior, temos que In *x* = 2,3 log *x*. Assim:

$$\ln x = 2,3.\log x \Rightarrow \log x = \frac{\ln x}{2,3}$$

$$\log 0,08 = \frac{\ln 0,08}{2,3} = \frac{-2,5}{2,3} = -1,09$$

## Aplicações

As funções exponenciais e logarítmicas são muito utilizadas em várias aplicações da Matemática, na Ciência, na indústria e mesmo em nosso dia a dia. É fundamental para a resolução de muitos problemas na área de Economia e na de Finanças, em particular para o cálculo de juros, tão presente em nossa realidade.

Exemplo:

O valor de um bem daqui a *t* anos é dado por $V(t) = 30.000 \cdot (0,8)t$ em reais. Calcule o valor desse bem daqui a 5 anos.

$V(t) = 30.000 \cdot (0,8)t$

Para $t = 5$, teremos:

$V(5) = 30.000 \cdot (0.8)^5 = 9.830,40$

Os juros compostos, que você estuda em disciplinas de finanças, pressupõe um ganho sobre um capital, ao fim de um período de tempo, onde se acrescenta ao capital inicial um valor, a título de remuneração pelo período de tempo transcorrido (o chamado juro). No caso dos juros compostos, tal remuneração é calculada considerando-se juros sobre juros. Por exemplo:

Um estudante coloca R$50,00 a prazo, à taxa de 10% ao ano, para retirá-lo apenas 10 anos depois. Quanto ele receberá ao final do prazo?

Neste caso, o valor a receber é chamado capital acumulado ao fim de 10 anos.

Ora, ao fim de um ano, o estudante terá:

$50 + 50 \cdot 0,1 = 50\,(1 + 0,1) = 50 \cdot 1,1$

Ao fim de 2 anos: $50 \cdot 1,1 + 50 \cdot 1,1 \cdot 0,1 = 50 \cdot 1,1\,(1 + 0,1) = 50 \cdot 1,1^2$

Ao fim de 3 anos: $50 \cdot 1,1^2 + 50 \cdot 1,1^2 \cdot 0,1 = 50 \cdot 1,1^2\,(1 + 0,1) = 50 \cdot 1,1^3$

Mantendo-se o mesmo raciocínio, teremos:

Ao fim de 10 anos: $50 \cdot 1,1^9 + 50 \cdot 1,1^9 \cdot 0,1 = 50 \cdot 1,1^9\,(1 + 0,1) = 50 \cdot 1,1^{10}$

Ao fim de x anos, esse valor será dado pela função exponencial: $50 \cdot 1,1^x$

Podemos, então, resumir a fórmula dos juros compostos da seguinte forma:

$$M = C\,(1 + i)^t$$

sendo M = montante final, C = capital, *i* = taxa unitária e t = tempo de aplicação.

## Conclusão

Nesta aula, discutimos diversas aplicações das funções exponenciais e logarítmicas, que são muito usadas em problemas do nosso cotidiano. O profissional da área financeira, em especial, irá se deparar com tais funções em seu dia a dia. Por isso, não deixe de refazer os exercícios propostos até se sentir bastante seguro para utilizá-los em quaisquer ocasiões.

## *Atividade final*

***Atende ao objetivo 7***

1. A quantia de R$ 3.500,00 foi aplicada em um banco durante 5 anos, a uma taxa de 2,5% ao mês, no sistema de juros compostos.

a) Qual será o saldo da aplicação no final de 12 meses?

b) Qual será o montante final?

2. (EU–PI) Suponha que, em 2003, o PIB (Produto Interno Bruto) de um país seja de 500 bilhões de dólares. Se o PIB crescer 3% ao ano, de forma cumulativa, qual será o PIB do país em 2023, dado em bilhões de dólares?

### *Resposta comentada*

1. a) Para calcular o saldo da aplicação depois de 12 meses, teremos:

$M = ?$

$C = 3500$

$i = 2{,}5\% = 0{,}025$ (taxa unitária)

$t = 12$ meses

$M = 3500 \cdot (1+0{,}025)^{12}$

$M = 3500 \cdot (1{,}025)^{12}$

$M = 3500 \cdot (1{,}344889)$

$M = 4.707{,}111$

Após 12 meses, ele terá um saldo de R$ 4.707,11

b) Montante final

$M = ?$

$C = 3500$

$i = 2{,}5\% = 0{,}025$ (taxa unitária)

$t = 5$ anos $= 60$ meses

$M = 3500 \cdot (1+ 0{,}025)^{60}$

$M = 3500 \cdot (1{,}025)^{60}$

$M = 3500 \cdot (4{,}39979)$

$M = 15.399{,}26$

Após 5 anos, ele terá um saldo de R$15.399,26

2. Ora, em 2003, PIB = 500

O crescimento se dá a uma taxa $i = 3\% = 0{,}03$

Deseja-se saber o PIB em 2023, isto é, 20 anos depois. Logo, $t = 20$. Assim:

$P(x) = P_0 \cdot (1 + i)^t$

$P(x) = 500 \cdot (1 + 0{,}03)^{20}$

$P(x) = 500 \cdot 1{,}03^{20}$

P(x) = 500 · 1,806111

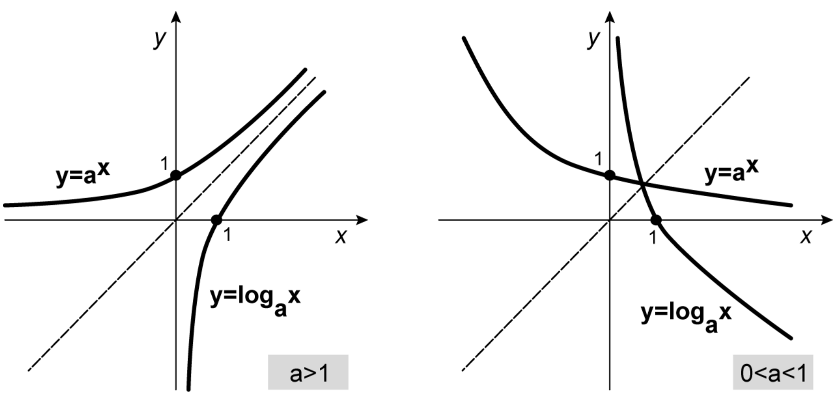
P(x) = 903,0556

Segundo os dados informados, o PIB do país no ano de 2023 será de aproximadamente R$ 903 bilhões.

## Resumo

Para esboçar o gráfico da função exponencial e logarítmica, devemos primeiramente identificar o valor da base: se for maior do que a unidade, teremos uma função crescente; e se $0 < a < 1$, teremos uma função decrescente.

A função logarítmica é a inversa da função exponencial. Assim, o gráfico de $y = a^x$ e de $y = \log_a x$ são simétricos com relação a $y = x$.




Podemos notar que $(x,y)$ está no gráfico da função logarítmica se o seu inverso $(y,x)$ está na função exponencial de mesma base.

| **Exponencial / Logaritmo base e** | **Exponencial / Logaritmo geral** |
|---|---|
| • Inversa do $\ln x$<br>• $\exp(x) = y \Leftrightarrow \ln y = x$<br>• $e^x = \exp x$<br>• $e \quad = y \Leftrightarrow \ln y = x$<br>• equações de cancelamento:<br>$e^{\ln x} = x \qquad , x > 0$<br>$\ln(e^x) = x \qquad , \forall x$ | • $a^x = e^{x \ln a}$<br>• $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$ |

| **Lei dos expoentes** Se *x* e *y* forem números reais, e *r* for racional, então, | **Lei dos Logaritmos** Se *x* e *y* forem números positivos, e *r* for um número racional, então, |
|---|---|
| 1) $e^{x+y} = e^x e^y$<br>2) $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$<br>3) $\left(e^x\right)^r = e^{rx}$ | 1) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$<br>2) $\ln(\dfrac{x}{y}) = \ln x - \ln y$<br>3) $\ln(x^r) = r \ln x$ |

# Aula 12

## Progressão Aritmética (PA)

*Eliane Ribeiro Pereira*
*Maria Cecília de Carvalho Chaves*

## Meta

Apresentar os conceitos de sequência e de progressão aritmética, as fórmulas do termo geral e da soma de uma progressão aritmética e os problemas que envolvem o conceito de progressão aritmética.

## Objetivos

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. reconhecer e representar sequências numéricas;
2. usar a linguagem matemática para expressar as regularidades da sequência por meio de fórmulas de recorrência;
3. obter os termos de uma PA pela aplicação da fórmula do termo geral;
4. determinar a razão, a soma de n termos consecutivos de uma progressão aritmética;
5. aplicar os conceitos de progressão aritmética (PA) na resolução de situações-problema.

## Introdução

Em nossa vida cotiditiana, somos constantemente atraídos para as regularidades e, muitas vezes, tentamos interpretar situações procurando, ou mesmo impondo, padrões. Os padrões são a essência da Matemática e da linguagem na qual é expressa. Embora essa busca de padrões já tenha sido explorada em aulas anteriores, aqui iremos apresentar esse tema de modo mais formal e aplicá-lo no estudo das progressões aritméticas e geométricas.

Fonte: http://www.freeimages.com/photo/889735

## Ordenação e sequências

Classificar é agrupar, considerando as semelhanças dos objetos. Ordenar é seriar, a partir da análise das diferenças dos objetos. Assim, quando seriamos elementos, estamos estabelecendo uma ordenação crescente ou decrescente de determinadas características dos objetos, como peso, tamanho, idade, valor etc.

Informalmente, dizemos que uma sequência é uma sucessão, finita ou não, de elementos. Os elementos (ou termos) de uma sequência podem ser números, palavras, objetos etc. A seguir, alguns exemplos de sequências:

Exemplos:

a) O conjunto (verão, outono, inverno, primavera) é chamado sequência ou sucessão das estações do ano;

b) O conjunto ordenado (0, 2, 4, 6…) é chamado sequência ou sucessão dos números naturais pares.

Estamos interessados em sequências numéricas, ou seja, em sequências cujos elementos são números. Mais particularmente, nas sequências cujos termos obedecem a uma lei de formação, ou seja, é possível escrever a relação matemática entre eles. Infelizmente, nem sempre é possível determinar o termo seguinte pela análise dos termos anteriores na sequência.

É importante destacar que, ao contrário do que ocorre num conjunto, qualquer alteração na ordem dos elementos de uma sequência altera a própria sequência.

Uma sequência numérica pode ser representada genericamente na forma:

$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, \ldots, a_n, \ldots)$, em que $a_1$ é o primeiro termo, $a_2$ é o segundo termo,... , $a_k$ é o k-ésimo termo,... , $a_n$ é o n-ésimo termo (neste caso, $k < n$).

Isto é, cada termo de uma sequência é, em geral, representado por uma variável indexada. O índice serve para indicar qual é a posição do termo na sequência. Por exemplo: $a_n$ indica o elemento que ocupa a n-ésima posição na sequência.

## Lei de formação de uma sequência

Existem sequências numéricas nas quais os termos são dispostos de modo que não é possível relacioná-los por meio da descrição de uma lei de formação. Um exemplo célebre dessa situação é a sequência (2, 3, 5, 7, 9). Contudo, nesta aula, estamos interessados nas situações em que sempre seja possível descrever uma lei de formação para a sequência apresentada.

Há dois tipos de leis de formação:

1. Fórmula do termo geral

Nesse caso, descreve-se uma fórmula (regra) que permite calcular diretamente qualquer termo da sequência a partir da posição que o termo ocupa nela. O seguinte exemplo apresenta uma fórmula de termo geral a partir da qual geraremos alguns de seus elementos.

Exemplo:

$$a_n = \left(\frac{1}{n+1}\right)^{-1},\ n \geq 1$$

Logo,

o primeiro termo da sequência(n = 1) é $a_1 = \left(\frac{1}{1+1}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$

o quarto termo da sequência (n = 4) é $a_4 = \left(\frac{1}{4+1}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5$

2. Lei de recorrência

É uma regra que calcula o valor de um termo da sequência a partir de um ou mais valores anteriores. O exemplo a seguir apresenta como obter os termos de uma sequência a partir do conhecimento de sua lei de recorrência.

Exemplo:

$a_n+1 = 2a_n+1$, $n \geq 1$ e $a_1 = 2$

Observe que, se um termo da sequência não tivesse sido fornecido, não seria possível descrever nenhum outro termo desta sequência, pois a lei de formação é do tipo recorrência, isto é, é necessário o conhecimento prévio de algum termo da sequência (nesse exemplo, o predecessor).

$a_2= 2a_1 + 1 =$

$a_2= 2 \cdot 2 + 1 = 5$

$a_3= 2a_2 + 1 =$

$a_3= 2 \cdot 5 + 1 = 11$

E assim por diante.

Na prática, há duas situações de interesse:

1. a lei de formação é apresentada e, a partir dela, deve-se estar apto a gerar os elementos da sequência;

2. é informada a sequência e deseja-se estabelecer sua lei de formação.

Exemplos:

a) Seja uma sequência de números naturais positivos definida por $a_n = 2 \cdot n - 1$. Vamos encontrar os seus cinco primeiros elementos:

$a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$

$a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$

$a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$

$a_4 = 2 \cdot 4 - 1 = 7$

$a_5 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$

Sequência: (1, 3, 5, 7, 9,...)

b) Seja uma sequência de números naturais positivos definida por $a_n = \left(2 + (-1)^n\right)$. Vamos encontrar os seus primeiros elementos:

$a_1 = 2 + (-1)^1 = 1$

$a_2 = 2 + (-1)^2 = 3$

$a_3 = 2 + (-1)^3 = 1$

$a_4 = 2 + (-1)^4 = 3$

$a_5 = 2 + (-1)^5 = 1$

Sequência: (1, 3, 1, 3, 1,...)

Analogamente, poderíamos fazer o processo contrário: dada a sequência, encontrar a lei de formação.

b) Seja a sequência numérica (1, 6, 11, 16, 21,...). Qual a sua lei de formação?

Estamos diante de uma sequência infinita.

Ao analisarmos os elementos dessa sequência, é possível observarmos que cada elemento é igual ao anterior mais 5.

Assim, $a_n = a_{n-1} + 5$, n = 2, 3, 4,...

d) Seja a sequência numérica (1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6). Qual a sua lei de formação?

A sequência desse exemplo apresenta um número finito de termos.

Observa-se que todos os termos apresentam o mesmo numerador, enquanto o denominador de cada termo é igual ao do termo anterior mais 1.

Assim, $a_n = 1/(n + 1)$, n = 1, 2,..., 5.

## *Atividade 1*

***Atende aos objetivos 1 e 2***

1. Dada a sequência (2, 4, 6, 8, 10), reconhecer e calcular:

a) $a_3$

b) $a_2 + 3a_1$

2) Descubra os dois termos seguintes das sequências e determine qual o padrão de cada uma.

a) 2, 4, 8, 16, 32,...

b) 3, 6, 11, 18, 27,...

c) 1, 3, 6, 10, 15, 21,...

d) 1, 4, 9, 16, 25,....

3) Escreva os quatro primeiros termos da sequência S, definida por:

$S(1) = 1$; $S_n = S_{n-1} + 3$, $n \geq 2$.

4) Escreva os cinco primeiros termos da sequência de Fibonacci, definida por:

$F_1 = 1$; $F_2 = 2$, $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$, $n \geq 3$.

### *Resposta comentada*

1)

a) $a_3$ é o terceiro termo; logo, $a_3 = 6$.

b) $a_2 + 3a_1 = 4 + 3 \cdot 2 = 4 + 6 = 10$.

2)

a) Inicialmente, precisamos identificar o padrão de formação da sequência apresentada. Observa-se que a sequência é formada apenas por números pares. Logo, todos os termos são múltiplos de 2.

Além disso, cada termo pode ser escrito como:

$2 = 2^1$; $4 = 2^2$; $8 = 2^3$; $16 = 2^4$; $32 = 2^5$, ou seja, cada termo é uma potência de 2.

Assim, os próximos elementos serão:

$2^6 = 64$ e $2^7 = 128$.

b) Numa primeira inspeção, não se percebe um padrão tão claro como no item anterior, pois a sequência apresenta números ímpares e pares. Observa-se que a sequência é crescente e que o valor da diferença entre os termos na sequência também é crescente. Esta diferença não só aumenta de um termo para o seguinte como apresenta um padrão nesse aumento. Vejamos:

3, 6, 11, 18, 27,...

$6 - 3 = 3$; $11 - 6 = 5$; $18 - 11 = 7$; $27 - 18 = 9$

A análise desse padrão possibilita estabelecer a lei de formação: cada termo é obtido a partir do anterior, somando-se um número ímpar ao termo.

Logo, os próximos dois termos da sequência serão:

$27 + 11 = 36$ e $36 + 13 = 49$.

c) Situação análoga à anterior. Neste caso, também se observa uma sequência crescente na qual a diferença entre os termos aumenta à medida que a ordem do elemento cresce.

$3 - 1 = 2$; $6 - 3 = 3$; $10 - 6 = 4$; $15 - 10 = 5$; $21 - 15 = 6$

A análise desse padrão possibilita estabelecer a lei de formação: cada termo é obtido a partir do anterior, somando-se um número natural ao termo.

Logo, os próximos dois termos da sequência serão:

21 + 7 = 28 e 28 + 8 = 36.

d) 1, 4, 9, 16, 25,....

Se aplicarmos o raciocínio anterior neste caso, observaremos que os termos da sequência não são obtidos a partir do anterior mais a soma de um número.

4 – 1 =3; 9 – 4 = 5; 16 – 9 = 7; 25 – 16 = 11

A sequência das parcelas não nos permite identificar qualquer padrão. Contudo, para quem está familiarizado com as potências, é fácil identificar a lei de formação: a sequência é formada pelos quadrados dos números naturais positivos.

$1^2 = 1$; $2^2 = 4$; $3^2 = 9$; $4^2 = 16$; $5^2 = 25$

Logo, os próximos dois termos da sequência serão:

$6^2 = 36$ e $7^2 = 49$.

3) $S(1) = 1$; $S_n = S_{n-1} + 3$, $n \geq 2$

$S_2 = S_1 + 3 = 1 + 3 = 4$

$S_3 = S_2 + 3 = 4 + 3 = 7$

$S_4 = S_3 + 3 = 7 + 3 = 10$

4)$F_1 = 1$; $F_2 = 2$, $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$, $n \geq 3$

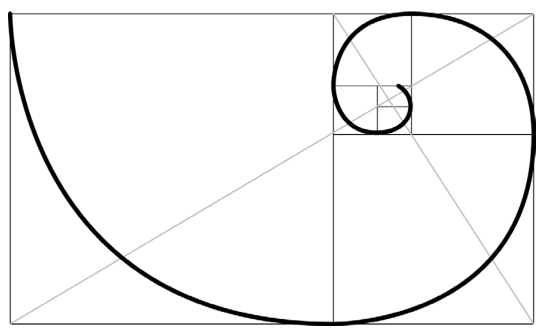
$F_3 = F_1 + F_2 = 1 + 2 = 3$

$F_4 = F_2 + F_3 = 2 + 3 = 5$

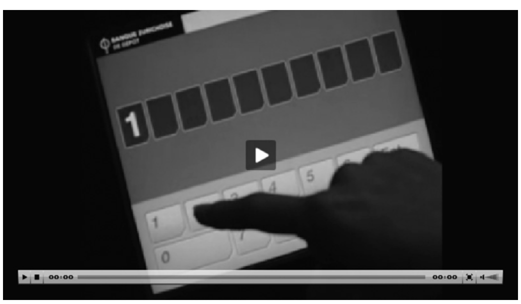
$F_5 = F_3 + F_4 = 3 + 5 = 8$

A sequência de Fibonacci pode parecer uma simples sequência numérica. Contudo, o que faz dessa ordem de números uma descoberta especial é a sua ligação com os fenômenos da Natureza e o valor aproximado da constante 1,6, quociente da divisão entre um número e seu antecessor na sequência, a partir do número três. Esse quociente recebe o nome de razão áurea e é um número que há muito tempo é empregado na arte e aparece em diversas formas da Natureza.

No cinema, podemos encontrar uma referência à série de Fibonacci no filme O Código da Vinci. Se você quiser espiar uma sequência matemática, atuando como estrela de Hollywood, acesse: http://www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/video/showVideo.php?video=12085.



Fonte: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/23/Golden_spiral_in_rectangles.png




Fonte: http://www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/video/showVideo.php?video=12085

## Progressão aritmética (PA)

Chama-se Progressão Aritmética – PA – toda sequência de números reais na qual cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior somado com um valor constante denominado *razão* (r).

Exemplos:

(1, 4, 7, 10, 13, 16,... ) razão = 3

(3, 12, 21, 30, 39, 48,... ) razão = 9

(8, 8, 8, 8 ,8 ,8 ... ) razão = 0

(100, 90, 80, 70, 60, 50,... ) razão = –10

### Classificação de uma PA

Uma PA pode ser crescente, decrescente ou constante, conforme o valor da razão(r). Veja a seguir:

crescente – quando $r > 0$;

decrescente – quando $r < 0$;

constante – quando $r = 0$;

### Termo geral de uma PA

Seja uma PA $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots, )$, o termo geral de dessa PA é dado por:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

É fácil entendermos o porquê dessa expressão. Observe:

$a_2 = a_1 + r$

$a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r$

$a_4 = a3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3r$

...

$a_n = a_1 + (n - 1)r$

Logo,

$a_n = a_1 + (n - 1)r$

Exemplos:

a) Considere a PA (4, 8, 12,... ). Determine seu décimo termo.

Para determinarmos um elemento de uma PA, precisamos conhecer seu termo geral e sua razão.

$a_1 = 4$. A razão pode ser obtida pela diferença entre quaisquer pares de elementos consecutivos.

$r = a_2 - a_1 = 8 - 4 = 4$

Agora, substituímos esses valores na fórmula do termo geral:

$a_n = a_1 + (n - 1)r = a_{10} = 4 + (10 - 1) \cdot 4 = 4 + 9 \cdot 4 = 40$

b) No século XXI, a primeira eleição presidencial ocorreu em 2002. A cada quatro anos, uma nova eleição ocorre. Em que ano ocorrerá a 20ª eleição presidencial deste século?

Podemos observar que os anos em que ocorrem eleições formam uma PA de razão 4 e primeiro termo 2002.

PA (2002, 2006, 2010,...)

$a_{20} = a_1 + (20 - 1) \cdot 4 = 2002 + 19 \cdot 4 = 2078.$

**Termo geral de uma PA em função de qualquer termo**

Algumas vezes, pode ser interessante expressar a fórmula do termo geral em função de um termo qualquer da sequência, que não o primeiro.

Observe:

Considere uma PA genérica: PA ($a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$,...).

O termo $a_4$ pode ser expresso em função de $a_4$($a_4 = a_2 + 2r$ ou $a_4 = a_2 + (4 - 2)r$). Isso, porque, para alcançarmos o $a_4$ a partir do $a_2$, é necessário realizarmos dois deslocamentos na sequência ($a_2$ para $a_3$ e $a_3$ para $a_4$). O termo $a_5$, por exemplo, pode ser expresso em função do $a_2$. Observe que, para alcançarmos o $a_5$ a partir do $a_2$, realizamos três deslocamentos à direita. Assim, $a_5 = a_2 + 3r$ ou

$a_5 = a_{2\,+}\ (5 - 2)r$. Isto é,

$a_n = a_m + (n - m) . r$

Poderíamos usar o mesmo raciocínio para determinar um termo de uma PA que está à esquerda do conhecido. Nesse caso, estaríamos subtraindo o valor da razão tantas vezes quanto fosse o deslocamento.

PA (..., $a_{10}$, $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{13}$, $a_{14}$, $a_{15}$, ..)

$a_{10} = a_{15} + (10 - 15).r$ ou $a_{10} = a_{15} - 5 \cdot r$

Observe que, do $a_{15}$ para alcançarmos o $a_{10}$, precisamos subtrair a razão r do $a_{15}$ para $a_{14}$, do $a_{14}$ para $a_{13}$, do $a_{13}$ para o $a_{12,}$ do $a_{12}$ para $a_{11}$ e, finalmente, do $a_{11}$ para o $a_{10}$, totalizando, portanto, 5 (10 – 15) subtrações. Obtemos, assim, como válida a seguinte relação:

Termo geral : $a_n = a_m + (n - m) \cdot r$

Exemplos:

a) Considere uma PA de razão –3. Sabendo que seu 20º termo vale 150, calcule seu 10º termo.

Nesse exemplo, a razão r é dada, r = 3. Conhecido o termo $a_{20}$, pede-se $a_{10}$.

Aplicando a relação do termo geral,

$a_{10} = a_{20} + (10 - 20) \cdot r = 150 + (-10) \cdot (3)$

$a_{10} = 150 + (-10) \cdot (3) = 150 - 30 = 120$

Logo, o 10º termo vale 120.

b) Calcule o quinto termo da PA (–6, –2, 2,...).

Inicialmente, devemos obter a razão dessa PA. Para tal, basta subtrairmos quaisquer dois termos consecutivos ($r = a_{n+1} - a_n$). Logo, r = –2 – (–6) = –2 + 6 = 4.

Aplicando a fórmula do termo geral,

$a_n = a_1 + (n - 1)\ r = a_5 = -6 + (5 - 1) \cdot 4 = -6 + 4 \cdot 4 = -6 + 16 = 10$

O quinto termo da progressão é 10.

c) Encontre o termo geral da PA (10, 12, 16,...).

Para obtermos a expressão do termo geral de uma dada PA, é preciso conhecer seu primeiro termo e a razão. O primeiro termo está dado na sequência: $a_1 = 10$.

Para obter a razão desta PA, basta subtrairmos dois termos quaisquer consecutivos ($r = a_{n+1} - a_n$). Logo, $r = 12 - 10 = 2$.

Assim, a expressão do termo geral desta PA é dada por:

$$a_n = 10 + (n - 1) \cdot 2$$

d) O sétimo termo de uma PA é 75 e r = 11. Calcule o primeiro termo.

Nesse exemplo, são dados $a_7$ e a razão. Substituindo-os na fórmula do termo geral, obtém-se:

$a_7 = a_1 + (7 - 1) \cdot 11 \therefore 75 = a_1 + (7 - 1) \cdot 11$

$a_1 = 75 - 6 \cdot 11 \therefore a_1 = 9$

## Atividade 2

***Atende ao objetivo 3***

1. Escreva os quatro primeiros termos de uma PA em que $a_1 = 4$ e $r = -3$.

2. Numa PA, sabe-se que o primeiro termo é igual a 10 e o décimo, igual a 73. Determine a razão.

3. Determine o nono termo de uma PA sabendo que a $r = 3$ e $a_3 = 15$.

4. Numa PA, o primeiro termo é 46 e a razão, – 12. Calcule a posição ocupada pelo termo de valor 10.

### *Resposta comentada*

1. A fórmula do termo geral desta PA é dada por:

$a_n = 4 + (n - 1)(-3) = 4 - 3n + 3 = -3n + 7$

Assim,

$a_2 = -3\ (2) + 7 = 1$

$a_3 = -3\ (3) + 7 = -2$

$a_4 = -3\ (4) + 7 = -5$

2. Dados: a1 = 10 e $a_{10} = 73$.

Ao substituirmos os valores dados na expressão do termo geral, obteremos $a_1$.

$a_{10} = a_1 + (10 - 1)(r) \therefore a_{10} = a_1 + 9r$

$73 = 10 + 9r$

$9r = 73 - 10$

$9r = 63$

$r = 7$

3. Dados: n = 9, r = 3 e $a_3 = 15$.

Expressão do termo geral: an = $a_1 + (n - 1)\ r$

Assim, para ser possível determinar $a_9$, é preciso conhecer $a_1$.

Ao substituirmos os valores dados na expressão do termo geral, obteremos $a_1$.

$a_3 = a_1 + (3 - 1)(3) \therefore a_3 = a_1 + 6$

$a_1 = a_3 - 6 \therefore a_1 = 15 - 6 = 9$

Agora estamos prontos para calcular $a_9$:

$a_9 = 9 + (9 - 1) \cdot 3$

$a_9 = 9 + 24 = 33$

4. A fórmula do termo geral para esta PA é dada por:

$a_n = 46 + (n - 1)(-12) = 46 - 12n + 12 = -12n + 58.$

Neste exercício, é dado o valor do termo, mas desconhece-se sua posição na sequência, isto é, deseja-se conhecer n. Assim, substituindo os valores na expressão temos:

$10 = -12n + 58$

$-12n = 10 - 58$

$n = \dfrac{-48}{-12} = 4$

O termo de valor 10 ocupa a quarta posição na sequência.

## Soma dos n primeiros termos de uma PA

Seja a PA $(a_1, a_2, a_3, a_4,..., a_{n-4}, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$.

Podemos afirmar, com base na definição, que:

$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1}$, pois deslocamos uma razão à direita (de $a_1$ para $a_2$) e deslocamos uma razão à esquerda (de an para an−1). Logo, um deslocamento anulou o outro e o valor da soma não se altera.

Raciocínio análogo pode ser aplicado para garantir que:

$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = \ldots = a_m + a_{n-(m-1)}$

Assim, pode-se afirmar que:

A soma de dois termos equidistantes dos extremos de uma PA finita é igual à soma dos extremos.

Estamos agora interessados em obter uma expressão que nos forneça a soma dos n primeiros termos de uma PA, isto é, queremos $S_n = a_1 + a_2 + a_3 +...+ a_{n-1} + a_n$.

Já sabemos que a soma de dois termos equidistantes é igual à soma dos extremos. Do princípio aditivo apresentado na Aula 4, sabemos que, adicionando um mesmo número a ambos os membros de uma equação, ou subtraindo um mesmo número de ambos os membros, a igualdade se mantém. Assim, podemos fazer a seguinte soma:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$+$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Como $a_2$ e $a_{n-1}$ e a3 e $a_{n-2}$ e... são pares de termos equidistantes dos extremos, suas somas são sempre iguais a $a_1 + a_n$, logo:

Exemplo:

a) Determine a soma dos inteiros consecutivos 1, 2,..., 3.000.

Temos uma PA onde $a_1 = 1$, $r = 1$. Essa PA tem, ao todo, 3.000 termos, sendo $a_{3000} = 3.000$. Logo,

$$S_{3000} = \frac{(a_1 + a_{3000}) \cdot 3.000}{2} = \frac{(1 + 3.000) \cdot 3.000}{2} = 4.501.500$$

b) Calcular a soma dos vinte primeiros termos de uma PA, sabendo que o primeiro termo é 50 e o vigésimo vale 126.

Dados do exemplo:

$a_1 = 50 \quad a_{20} = 126$

Aplicando a fórmula da soma, $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(50 + 126) \cdot 20}{2} = 1.760$$

A soma dos vinte primeiros termos é igual a 1.760.

c) Qual a soma dos cinquenta primeiros termos de uma PA cuja razão é razão 5 e $a_1 = 32$?

Dados do exemplo:

$a_1 = 32r = 5$

Aplicando a fórmula da soma,

$$S_{50} = \frac{(32 + a_{50}) \cdot 50}{2}$$

Está faltando o valor de $a_{50}$. Então, para ser possível encontrar $S_{50}$, precisamos antes calcular $a_{50}$.

Aplicando os dados na fórmula do termo geral,

$a_{50} = 32 + (50 - 1)(50) = 277$

Agora, com todos os dados necessários, retornamos à fórmula de Sn.

$$S_{50} = \frac{(32 + 277) \cdot 50}{2} = 7.725$$

A soma dos cinquenta primeiros termos é igual a 7.725.

d) A soma de todos os termos de uma PA é 480. Sabe-se que essa PA possui vinte termos e que o primeiro termo é igual a 5. Determinar o oitavo termo da PA.

Dados do exemplo:

$S_n = 480$ $n = 20$ e $a_1 = 5$

Aplicando a fórmula do termo geral,

$a_n = a_1 + (n - 1)(r)$

$a_8 = a_1 + (7 - 1)(r)$

Está faltando o valor de r. Então, para ser possível encontrar $a_8$, precisamos antes determinar r. O valor de r é dado pela diferença de dois termos consecutivos de uma PA. Neste momento, apenas se conhece $a_1$. Vamos agora usar a fórmula da soma para encontrarmos r.

A fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PA é originalmente escrita em função de $a_1$, $a_n$ e n. Assim, a expressão do termo geral pode ser reescrita como:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{[(a_1 + (a_1 + (n-1) \cdot r)]}{2} \cdot n = \frac{(2a_1 + n \cdot r - r) \cdot n}{2}$$

Dessa forma, ela se torna adequada aos dados disponíveis, pois a única variável desconhecida passa a ser r. Substituindo, obtém-se:

$S_{20} = \dfrac{\left(2 \cdot 5 + 20 \cdot r - r\right) \cdot 20}{2}$, simplificando a fração,

$S_{20} = (10 + 20 \cdot r - r) \cdot 10$, substituindo o valor $S_{20}$

$480 = 100 + 200r - 10r$

$190r = 380$

$r = 2$

Agora, temos todas as informações necessárias para uso da fórmula do termo geral. Aplicando os dados na fórmula do termo geral,

$a_8 = 5 + (8 - 1)(2) = 5 + 7 \cdot 2 = 19$

Esse exemplo nos permitiu obter outra expressão para a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PA. Essa relação deve ser conhecida e utilizada sempre que necessário.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \text{ ou } S_n = \frac{(2a_1 + n \cdot r - r) \cdot n}{2}$$

## *Atividade 3*

***Atende ao objetivo 4***

1. Calcule a soma dos trinta primeiros termos da PA (3, 7, 11,...)

2. Determine a soma dos 100 primeiros termos de uma PA onde $a_n$ = 5n + 4.

3. Qual é a soma dos números pares compreendidos entre 1 e 1.001?

### *Resposta comentada*

1) Esta é uma PA crescente de razão 4, pois $a_1 = 3$, $a_2 = 7$ e 7 – 3 = 4.

O modo mais simples de calcularmos $S_{30}$, dado que não temos $a_{30}$ é utilizarmos a fórmula:

$S_n = \dfrac{(2a_1 + n \cdot r - r) \cdot n}{2}$, substituindo os valores chegamos a

$$S_{30} = \frac{(2 \cdot 3 + 30 \cdot 4 - 4) \cdot 30}{2} = 1.830$$

Logo, a soma dos trinta primeiros termos da PA é igual a 1.830.

2) Como a regra do termo geral da PA foi fornecida, podemos obter qualquer termo da PA.

Para o cálculo da soma dos 100 primeiros termos, iremos precisar do 1º e do 100º (soma dos 100 primeiros termos). Então:

$a_1 = 5 \cdot 1 + 4 = 9$

$a_{100} = 5 \cdot 100 + 4 = 504$

Com essas informações, podemos utilizar a fórmula da soma de uma PA.

$$S_{100} = \frac{(9+504)\cdot 100}{2} = \frac{513.100}{2} = 25.650$$

3) Os números pares entre 1 e 1001 formam a sequência (2, 4, 6,..., 1000), que é uma PA de razão 2.

Aplicando a fórmula da soma da PA:

$S = (a_1 + a_n)*(n/2)$, observamos que precisamos calcular n.

Assim:

$a_n = a_1 + (n - 1)*r$

$1000 = 2 + (n - 1)*2$

$1000 = 2 + 2n - 2$

$2n = 1000$

$n = 500$

Voltando à fórmula da soma da PA:

$S = (2 + 1000)*(500/2) = (1002)*(250) = 1252$

A partir deste ponto, já estamos familiarizados o suficiente com o uso das fórmulas. Podemos, então, aplicá-las na resolução de problemas.

Observem com atenção as seguintes situações:

a) Maria Cecília precisou pegar um empréstimo pessoal com uma tia. Sabendo que a sobrinha não poderá reembolsá-la de uma única vez e não tendo condições de esperar um tempo demasiadamente longo para receber seu dinheiro de volta, a tia faz a seguinte proposta a Maria Cecilia: pagar o empréstimo em dez parcelas. O valor de cada parcela deve ser R\$ 150,00 a mais que o valor pago no mês anterior. Considerando que a primeira prestação é de R\$ 180,00, qual será o valor da última parcela? Qual o valor total do empréstimo?

Fonte: http://www.freeimages.com/photo/1096838

O primeiro passo é estabelecer a existência ou não de um padrão na sequência de pagamentos a serem realizados.

A tia propõe que as mensalidades a serem recebidas formam um PA com primeiro termo 180 e razão 150 (cada parcela deve ser R\$ 150,00 a mais que o valor pago no mês anterior) .

O valor da última mensalidade é obtido por meio da aplicação da fórmula do termo geral:

$$a_{10} = a_1 + (10 - 1)(150)$$

$$a_{10} = 180 + 9 \cdot (150) = 1530$$

Para obtermos o valor total do empréstimo, basta aplicarmos a fórmula da soma do n termos de uma PA. Deve-se observar que, nesse exemplo, qualquer versão da fórmula é adequada, pois conhecemos $a_1$, $a_n$ e r.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

$$S_{10} = \frac{(180 + 1.530) \cdot 10}{2}$$

$$S_{10} = \frac{(180 + 1.530) \cdot 10}{2} = 8.550$$

A tia emprestou um total de R$ 8.550,00 à sobrinha.

b) Pensando no futuro, um jovem casal pretende iniciar um investimento para seu filho recém-nascido. Eles ainda não decidiram a natureza do investimento que farão, mas já avaliaram o quanto poderão reservar por mês para aplicar. No primeiro mês, irão depositar R$ 60,00, no segundo, R$ 80,00 ,no terceiro R$ 100,00, e assim por diante. Após um ano de depósito, qual será o capital total depositado por eles?

Fonte: http://www.freeimages.com/photo/1111654

Inicialmente, é preciso estabelecer a existência, ou não, de um padrão na sequência de depósitos realizados. Os depósitos, ao longo do primeiro ano, formam a seguinte série:

(60, 80, 100,...)

A diferença dos valores depositados do primeiro para o segundo mês é 80 – 60 = 20.

A diferença dos valores depositados do terceiro para o segundo mês é 100 – 80 = 20

Logo, os depósitos ao longo dos anos crescem numa razão constante de valor 20. Como o enunciado sugere que esse crescimento se manterá ao longo de todos os meses seguintes, os depósitos formam uma PA de razão 20 e termo inicial 60.

Como se deseja conhecer o total depositado, deve-se utilizar a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PA expressa por:

$$S_n = \frac{(2a_1 + n \cdot r - r) \cdot n}{2}$$

$$S = \frac{(2 \cdot 60 + 12 \cdot 20 - 20) \cdot 12}{2}$$

$$S = \frac{(340 \cdot 12)}{2} = \frac{4080}{2} = 2040$$

Logo, ao final do primeiro ano, o casal terá depositado R$ 2.040,00.

Fonte da imagem: http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Carl_Friedrich_Gauss.jpg

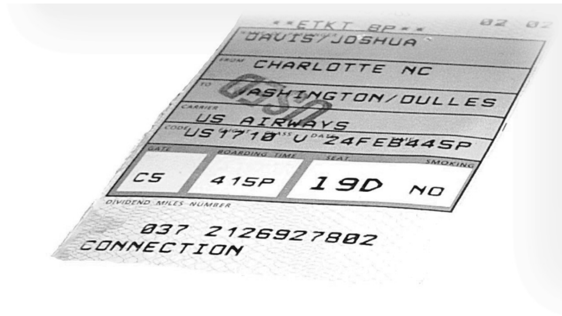
Carl Friedrich Gauss (1777-1855) é considerado por muitos como o Príncipe da Matemática e é, com certeza, um dos grandes nomes da história da Matemática. Gauss contribuiu para todos os ramos da Matemática e para a teoria dos números. Diz a história que sua professora primária, para manter a classe ocupada, lhe passou a tarefa de fazer uma soma de 1 a 100, tarefa que Gauss cumpriu quase que de imediato com a utilização da fórmula da PA. Se você quiser conhecer mais sobre Gauss e sobre PA, visite o *site*: http://www.uff.br/sintoniamatematica/curiosidadesmatematicas/curiosidadesmatematicas-html/audio-gauss-br.html

Esses últimos exemplos nos permitiram compreender melhor a importância prática de conhecermos as progressões aritméticas. Esse estudo nos proporcionou treinarmos nosso poder de abstração ou de generalização, fazermos uso das propriedades dadas na Aula 4 e resolvermos problemas importantes do cotidiano.

## *Atividade final*

***Atende ao objetivo 4***

1. (ENEM 2011) O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro, foram vendidas 33.000 passagens; em fevereiro, 34.500; em marco, 36.000. Esse padrão de crescimento se manteve mos meses subsequentes. Calcular o número de passagens que foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado.




Fonte:http://www.freeimages.com/photo/153672

2. Um paciente precisa tomar um total de 72 comprimidos de um determinado medicamento para terminar seu tratamento. Ele toma duas pílulas do remédio no primeiro dia, quatro no segundo dia, seis no terceiro dia e assim sucessivamente até ingerir o total necessário de comprimidos. Em quantos dias terminará o tratamento?

Fonte: http://www.freeimages.com/photo/942757

3. Um pai, decidido a ensinar ao filho o valor do dinheiro, resolve começar a lhe dar uma mesada de R$ 400, 00. O menino, sempre muito esperto, faz uma contraproposta ao pai. Ao invés de dar a mesada completa no início do mês, ele sugere ao pai que lhe dê um pouco a cada dia: R$ 0,50 no primeiro dia de cada mês e, a cada dia, R$ 1,20 a mais que no dia anterior. O pai achou graça na proposta (pensando que faria um ótimo negócio) e concordou. Contudo, logo ao final do primeiro mês, percebeu que o filho não precisava de lições de economia e que já estava bem esperto. Calcule o lucro que o menino teve ao elaborar essa proposta.


Fonte: http://www.freeimages.com/photo/1187283

### *Resposta comentada*

1. Vamos, inicialmente, estabelecer a existência ou não de um padrão no volume de vendas da empresa. As vendas no ano de 2010, a contar de janeiro, formam a seguinte série: (33.000, 34.500, 36.000,...)

A diferença de vendas de fevereiro para janeiro é de + 34.500 – 33.000 = 1.500.

A diferença de vendas de março para fevereiro 36.000 – 34.500 = 1.500.

Logo, as vendas, nos meses apresentados, cresceram numa razão constante de valor 1.500. Como o enunciado afirma que esse crescimento se manteve nos meses seguintes, as vendas no ano de 2010 formam uma PA de razão 1.500 e termo inicial 33.000.

Julho é o mês 7. Assim, precisamos calcular o sétimo termo da PA.

$a_n = a_1 + (n - 1)r$

$a_7 = a_1 + (7 - 1) \cdot 1.500$

$a_7 = 33.000 + 6 \cdot 1.500$

$a_7 = 33.000 + 9.000$

$a_7 = 42.000$

2) Mais uma vez, o primeiro passo é identificar o padrão da sequência sugerida na questão. O número de comprimidos ingeridos por dia gera a seguinte sequência:

(2, 4, 6,...).

Observamos que temos uma PA de razão 2 e termo inicial igual a 2.

O paciente precisa ingerir um total de 72 comprimidos, isto é, a soma de todos os comprimidos tem de ser igual a 72, que corresponde à soma dos termos de uma PA.

A fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PA é originalmente escrita em função de $a_1$, $n_a$ e n. Nesse caso, n é o valor que se deseja conhecer. A questão é que não temos o número de comprimidos que ele tomou no último dia do tratamento. Logo, parece que será impossível determinar quanto tempo levou o tratamento. Errado! Devemos lembrar que não pode ser expresso em função de a1, r e n. Assim, a expressão do termo geral pode ser reescrita como:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{[(a_1 + (a_1 + (n-1) \cdot r)]}{2} \cdot n = \frac{(2a_1 + n \cdot r - r) \cdot n}{2}$$

Dessa forma, ela se torna adequada aos dados disponíveis, pois a única variável desconhecida passa a ser n. Substituindo, obtém-se:

$$S = \frac{(2 \cdot 2 + n \cdot 2 - 2) \cdot n}{2}$$

$$72 = \frac{(2 \cdot 2 + n \cdot 2 - 2) \cdot n}{2}$$

Utilizando a propriedade 1 das proporções, vista na Aula 6, temos:

$144 = (4 + 2n - 2) \cdot n$

Aplicando a distributiva,

$144 = 4n + 2n_2 - 2n$

Simplificando por 2, somando os termos semelhantes e trocando a ordem dos membros da equação,

$n_2 + n - 72 = 0$

Resolvendo a equação do segundo grau, encontramos as seguintes raízes:

$n = 8$ ou $n = -9$.

Como o número de dias precisa ser um valor positivo, o paciente precisou tomar medicação por um período de 8 dias.

3) A proposta feita pela criança gera uma sequência de valores diários dados pelo pai, como mostra a série a seguir:

(0,50; 1,70; 2,90; 4,10; ...)

Essa sequência é uma PA de razão 1,20 e termo inicial 0,50.

Para calcularmos o lucro da criança, precisamos encontrar o valor total recebido após 30 dias, isto é, desejamos a soma dos 30 primeiros termos da PA. Para aplicarmos a fórmula do termo geral, será preciso antes calcular o valor recebido pelo menino no trigésimo dia. Aplica-se, portanto, a fórmula do termo geral:

$a_{30} = a_1 + (30 - 1) \cdot (1{,}20)$

$a_{30} = 0{,}50 + (30 - 1) \cdot (1{,}20) = 35{,}30$

Aplicando na fórmula da soma,

$$S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

$$S = \frac{(0{,}50 + 35{,}30) \cdot 30}{2}$$

$$S = \frac{(35{,}80) \cdot 30}{2} = 537$$

Como a mesada sugerida pelo pai era de R$ 400,00, o menino teve um lucro de R$ 137,00 (537 – 400).

O estudo de sequências numéricas é importantíssimo. Ele cria mecanismos para aperfeiçoarmos nosso poder de abstração e de generalização, um dos objetivos do ensino da Matemática.

Em particular, esta aula apresentou a progressão aritmética, um caso particular de sequência numérica que, como foi visto, possui diversas aplicações úteis no cotidiano e na Matemática Financeira, em particular.

## Resumo

Um conjunto ou grupo que, para ser especificado, precisa obedecer a uma dada ordem é considerado uma sequência. Em nosso cotidiano, encontramos vários conjuntos que formam uma sequência, por exemplo: anos em ordem cronológica que o Brasil foi campeão mundial de futebol, classificação de aprovados em um concurso etc. Na Matemática, estamos interessados em sequências numéricas, particularmente nas progressões. Uma progressão é um tipo de sequência que envolve apenas números que são dispostos conforme uma determinada regra específica. Nesta aula, fomos apresentados à progressão aritmética.

Progressão aritmética é uma sequência de números reais cuja diferença entre um termo e seu antecedente, a partir do segundo, é uma constante.

Propriedades estudadas:

$r = a_n - a_{n-1}$, cálculo da razão de uma PA;

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, determinação de um termo geral dado $a_1$ e r;

$a_n = a_m + (n - m) \cdot r$, determinação de um termo geral dado um termo qualquer da PA ($a_m$) e r;

$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$, soma dos n primeiros termos de uma PA.

# Aula 13

## Progressão Geométrica (PG)

*Eliane Ribeiro Pereira*
*Maria Cecília de Carvalho Chaves*

## Metas

Apresentar o conceito de PG. Mostrar como aplicar as fórmulas do termo geral e da soma de uma PG para resolver problemas.

## Objetivos

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. obter os termos de uma Progressão Geométrica pela aplicação da fórmula do termo geral;
2. determinar a razão, a soma de n termos consecutivos e a soma dos infinitos termos de uma Progressão Geométrica;
3. aplicar os conceitos de Progressão Geométrica na resolução de situações-problema.

## Introdução

Fonte: http://www.freeimages.com/photo/1433053

Para alcançar a tão sonhada independência financeira, você precisa seguir três passos: o primeiro é poupar. Você precisa investir parte do dinheiro que você ganha, senão nunca poderá investir e nunca alcançará a independência financeira. Eu sei que é necessário um esforço maior muitas vezes, principalmente para quem não tem um rendimento mensal tão confortável. Mas R$ 100 ou R$ 200 por mês, por incrível que pareça, pode ser o necessário !

O segundo passo é aprender a investir. Se você não conseguir boa rentabilidade nos seus investimentos, dificilmente chegará longe. Deixe-me dar um exemplo: se você investir R$ 300 por mês durante 20 anos com uma rentabilidade de 0,5% ao mês (uma rentabilidade aproximada de investimentos muito utilizados por brasileiros, como a poupança), você irá acumular 138 mil reais. Esses mesmos R$ 300 mensais investidos com uma rentabilidade de 2,0% ao mês, algo bem palpável de se conseguir, investindo de forma adequada na Bolsa de Valores, você irá acumular R$ 1.700 milhão! Se você aplicar R$ 1.700 milhão em imóveis, por exemplo, para alugar (algo que é possível fazer através da Bolsa de Valores, comprando fundos imobiliários), você poderá obter facilmente uma renda mensal de R$ 12 mil!

Pronto; a independência financeira ao seu alcance! Somente para completar; eu havia falado em três passos necessários para alcançar o objetivo desejado. O terceiro passo é o tempo. Veja

> que eu usei um exemplo de 20 anos; não adianta você investir durante três ou cinco anos. É necessário dar tempo para que a mágica dos juros compostos aconteça, e você possa multiplicar o seu dinheiro investido. Com esses três passos, você tem tudo para chegar lá!
>
> Agora, é só adquirir o conhecimento e seguir em frente! O futuro é de quem planeja e faz acontecer! Boa sorte!
>
> Fonte: Texto adaptado de Marcello Duarte Vieira (CRM-SC 13.995), médico, investidor, empresário e palestrante. http://www.santacatarina24horas.com/editorias/artigos/15559-os-tres-principais-passos-para-conquistar-a-independencia-financeira.html.

Muitas pessoas pensam que a Matemática é uma disciplina em que só se trabalha com um grande número de fórmulas sem sentido e com cálculos intermináveis. Nesta aula, daremos continuidade ao nosso estudo de regularidades. Só que agora, faremos o estudo das progressões geométricas. Assim como visto na aula anterior. As progressões geométricas possuem importantes aplicações na nossa vida cotidiana, em particular, em aplicações na matemática financeira, destacando-se o cálculo de juros compostos, como vimos no texto acima.

## Progressão Geométrica (PG)

Uma PG é uma sequência de números reais não nulos, tal que a razão entre um termo qualquer (a partir do segundo) e seu antecessor é sempre constante. Essa constante é denominada razão da PG e é representada pela letra q.

Exemplos:

a. (3, 9, 27, 81, ...), q = 3

b. (−2, 4, −8, 16, ...), q = −2

c. (40, 20, 10, 5, ...), q = ½

d. (−4, −8, −16, −32, ...), q = 2

e. (−1, −1/3, −1/9, −1/27, ...), q = 1/3

f. (2, 2, 2, 2,...), q = 1

**Classificação:**

As PGs são classificadas em três classes distintas:

1. PG Alternante: ocorre quando a PG apresenta razão negativa: exemplo b
2. PG Crescente: ocorre quando a PG apresenta razão maior que 1 ($q > 1$): exemplo a
3. PG Decrescente: uma PG decrescente pode surgir em dois casos:
    3.1. primeiro termo positivo ($a_1 > 0$) e razão entre 0 e 1 ($0 < q < 1$): exemplos c, e
    3.2. primeiro termo negativo ($a_1 < 0$) e razão maior que 1 ($q > 1$): exemplo d
4. Constante: ocorre quando a PG apresenta razão igual à unidade ($q = 1$): exemplo f

**Termo Geral**

A expressão para o termo geral de uma PG é obtida de modo simples a partir da sua própria definição.

Consideremos uma PG ($a_1$, $a_2$, $a_3$, ...) de razão q. Da definição, sabemos que cada termo é obtido pelo produto do seu antecessor pela razão q. Isto é, o quociente entre qualquer termo (a partir do segundo) e seu antecessor é igual a q. Matematicamente,

$$\frac{a_2}{a_1} = q \leftrightarrow a_2 = a_1 \cdot q$$

$$\frac{a_3}{a_2} = q \leftrightarrow a_3 = a_2 \cdot q \rightarrow a_3 = a_1 \cdot q^2$$

$$\frac{a_4}{a_3} = q \leftrightarrow a_4 = a_3 \cdot q \rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^3$$

...

...

Logo, $a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}, n \geq 1$

A fórmula do termo geral pode ser reescrita em função de um termo que não o primeiro.

$$a_n = a_m \cdot q^{(n-m)}$$

Exemplos:

a) Calcule o quarto e o sétimo termos da PG (3, –6, 12, ...).

Deve-se observar que esta PG é alternada; então, a razão é um valor negativo.Para obtermos um termo de uma PG, é preciso antes conhecer a razão.

Assim,

$$q = \frac{-6}{2} = -3$$

Aplicando a fórmula do termo geral, encontramos:

$a_4 = 3 \cdot (-3)^{(4-1)} = 3 \cdot (-3)^3 = 3 \cdot (-27) = -81$

$a_7 = 3 \cdot (-3)^{(7-1)} = 3 \cdot (-3)^6 = 3 \cdot (729) = 2.187$

b) Calcule a razão e o 5º termo de uma PG decrescente, sabendo que $a_1 = 18$ e $a_3 = 8$.

A fórmula do termo geral de uma PG permite que determinemos a razão de uma PG, desde que dois termos da PG sejam conhecidos.

Então, aplicando os dados na fórmula,

$$a_n = a_m \cdot q^{(n-m)} \therefore a_3 = a_1 \cdot q^{(3-1)} \therefore 8 = 18 \cdot q^2$$

Resolvendo a equação do 2º grau em q,

$$q^2 = \frac{8}{18} \therefore q^2 = \frac{4}{9} \therefore q = \pm\sqrt{\frac{4}{9}} \therefore q = \pm\frac{2}{3}$$

O fato de a PG ser decrescente garante que a raiz que procuramos é a positiva. Isto é, q = 2/3. Sem esta informação, ambas as respostas seriam possíveis. Contudo, se q = –2/3, a PG seria alternante.

Determinada a razão, torna-se trivial a obtenção de qualquer termo.

$$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)} \therefore a_5 = a_1 \cdot q^{(4-1)} = \therefore a_5 = 18 \cdot (\frac{2}{3})^3 = \frac{16}{3}$$

c) O 2º termo de uma PG de termos positivos é $10^5$ e o 10º termo é $10^{21}$. Calcule a razão desta PG.

Inicialmente, deve ser observado que estamos diante de uma PG formada por potências de 10, dado que $a_2$ e $a_{10}$ podem ser expressos como potências de 10. Isso sugere que a razão é uma potência de 10 também.

Da fórmula do termo geral, temos que:

$$a_2 = a_1 \cdot q \rightarrow a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{10^5}{q}$$

Do mesmo modo, podemos aplicar a fórmula do termo geral para expressar o 20º termo. Então,

$$a_{10} = a_1 \cdot q^9$$

substituindo $a \quad \frac{10}{\ }$ na expressão, obtemos:

$$a_{10} = \frac{10^5}{q} \cdot q^9 = 10^5 \cdot q^8$$

Do enunciado, sabe-se que $\mathrm{a}_{20} = 10^{21}$. Logo,

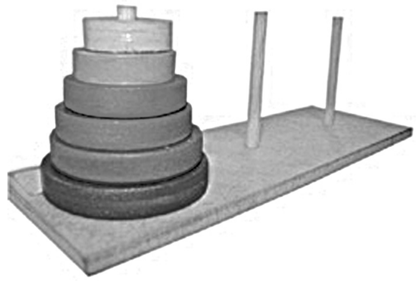
$$10^{21} = 10^5 \cdot q^8$$

Resolvendo a equação do 1º grau em q,

$$q^8 = \frac{10^{21}}{10^5} = 10^{16}$$

$$\mathrm{q} = \pm\sqrt[8]{10^{16}} = \pm 10^{\frac{16}{8}} = \pm 10^2 = \pm 100$$

Como a PG é formada por termos positivos, q = 100.



## Torre de Hanói

Talvez uma das aplicações mais famosa das PGs seja a Torre de Hanói. Trata-se de um jogo inventado e vendido como brinquedo, no ano de 1883, pelo matemático francês Édouard Lucas. Constitui-se de uma torre com oito discos, inicialmente empilhados, por tamanhos decrescentes, em três pinos dados. O objetivo é transferir a torre inteira para um dos outros pinos, movendo apenas um disco de cada vez e nunca colocando um disco maior em cima de um menor.

Este jogo foi inspirado por uma lenda hindu, a qual falava que Brahma supostamente havia criado uma torre com 64 discos de ouro e mais duas estacas equilibradas sobre uma plataforma. Brahma pediu que seus discípulos movessem todos os discos de uma estaca para outra. As regras eram simples: apenas um disco poderia ser movido por vez e nunca um disco maior deveria ficar por cima de um disco menor. Segundo a lenda, quando todos os discos fossem transferidos de uma estaca para a outra, o templo desmoronar-se-ia e o mundo acabaria.

A solução deste intrigante problema pode ser obtida usando-se PG e mostra-se que, para um total de 64 discos, seriam necessários 18.446.744.073.709.551.615 movimentos.

Se quiser entender melhor como calcular este número total de movimentos, visite: http://www.ime.usp.br/~trodrigo/documentos/mat450/mat450-2001242-seminario-7-torre_hanoi.pdf.

Fonte: http://www.mat.ibilce.unesp.br/laboratorio/pages/jogos/torre_hanoi.htm.

## Atividade 1

*Atende aos objetivos 1 e 2*

1. Determinar a expressão do termo geral da PG (8, 16, 32, 64, 128, ...).

2. Calcular o termo inicial de uma PG, sabendo-se que o 6º termo é igual a 6, e a razão, 2.

3. Sabe-se que o 10º termo de uma PG de razão ½ é igual a –(1/32). Qual o valor do terceiro termo desta PG?

### Resposta comentada

1. Inicialmente, deve-se determinar a razão da PG, que é dada pelo quociente de um termo qualquer e seu antecessor.

$q = 16/8 = 2$

Como $a_1$ foi dado, podemos aplicar a relação do termo geral.

$$a_n = 8 \cdot 2^{n-1}$$

2. O enunciado disponibiliza um termo da PG ($a_6$) e a razão (q) e pede o termo inicial ($a_1$).

Aplicando os dados na fórmula termo geral, obtemos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_6 = a_1 \cdot q^{(6-1)}$$

$$6 = a_1 \cdot 2^5$$

$$32a_1 = 6$$

$$a_1 = 3/16$$

$$a_n = a_1 \cdot q_{n-1}$$

3. Esta questão poderia ser resolvida aplicando a expressão $a_n = a_1 \cdot q_{n-1}$. Contudo, se essa fosse a escolha, a resolução seria mais longa, pois precisaríamos primeiro obter a1 a partir do $a_{10}$ para, em seguida, obter $a_3$.

A opção pela variação $a_n = a_m \cdot q^{(n-m)}$ permite que a solução seja mais simples e rápida.

$$a_n = a_m \cdot q^{(n-m)}$$

$$a_{10} = a_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(10-3)}$$

$$-\frac{1}{32} = a_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

$$\left(\frac{1}{128}\right) \cdot a_3 = -\frac{1}{32}$$

$$a_3 = \left(-\frac{1}{32}\right) \cdot \left(\frac{128}{1}\right)$$

$$a_3 = -4$$

## Produto dos n primeiros termos de uma PG

O seguinte teorema nos permite obter o produto dos *n* primeiros termos de uma PG.

Teorema: Se ($a_1$, $a_2$, $a_3$, ...) é uma PG e $P_n$ é o produtos de seus *n* primeiros termos; então,

$$|P_n| = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

É importante destacar que a fórmula dada no teorema nos permite obter o valor absoluto do produto. Para determinarmos o sinal de $P_n$, basta analisarmos o sinal dos termos da PG.

Exemplo:

Calcule o produto dos dez primeiros termos da PG (1, 5, 25, 125, ...)

A aplicação da fórmula do produto dos n termos de uma PG demanda que se conheça o seu termo inicial ($a_1$), sua razão e o seu n-ésimo termo, neste caso $a_{10}$.

Da leitura da sequência dada, sabe-se que $a_1 = 1$.

A razão q é obtida pela razão de um termo qualquer e seu antecessor. Assim, $q = \frac{5}{1} = 5$ . Agora é necessário o cálculo de $a_{10}$.

$a_{10} = a_1 \cdot q^{(n-1)} =$

$a_{10} = 1 \cdot 5^{(10-1)} = 1 \cdot 5^9 = 1.953.125$

Agora dispomos de todas as informações necessárias para aplicação da fórmula do produto.

$$|P_n| = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

$$|P_n| = \sqrt{(1 \cdot (1.953.152))^{10}} = \sqrt{1.953.152^{10}} = 1.953.152^{\frac{10}{2}} = (1.953.152)^5$$

$$|P_n| = (1.953.152)^5$$

Como todos os termos da PG são positivos, $P_n = (1.953.152)^5$

É interessante observarmos dois pontos desta resolução:

- foi utilizada a propriedade $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$
- como o número encontrado corresponde a um valor muito alto, não é necessário obtê-lo, pode-se deixá-lo indicado.

Você sabe por que é perda de tempo discutir com uma PG?

Porque ela tem sempre razão!

Essas e outras piadas matemáticas podem ser acessadas no endereço: http://www.somatematica.com.br/piadas.php.

O mais bacana é observar que quão maior for nosso conhecimento, mais engraçada e divertida a piada fica.

Fonte: http://www.freeimages.com/photo/1158074

## Soma dos n primeiros termos de uma PG

A obtenção de uma expressão geral para a soma dos n primeiros termos de uma PG pode ser obtida por meio de alguns "truques" algébricos simples, mas bem pensados.

A soma de uma PG com $q \neq 1$ é dada como:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$

Multiplicando ambos os termos da igualdade por q, temos:

$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + ... + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q$

Lembre-se de que um termo de uma PG é sempre obtido a partir de seu antecessor multiplicado pela razão. Logo, $a_1 \cdot q = a_2$, $a_2 \cdot q = a_3$ e assim por diante.

Portanto, a expressão $S_n \cdot q$ pode ser reescrita como:

$S_n \cdot q = a_2 + a_3 + ... + a_n + a_n \cdot q$

Por outro lado, como $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$, então $S_n - a_1 = a_2 + a_3 + ... + a_n$

Assim,

$S_n \cdot q = S_n - a_1 + a_n \cdot q$

$S_n \cdot q - S_n = - a_1 + a_n \cdot q$

$S_n(q - 1) = - a_1 + a_n \cdot q$

$$S_n = \frac{-a_1 + a_n \cdot q}{(q-1)} = \frac{a_n \cdot q - a_1}{(q-1)}$$

Esta expressão pode ser escrita de um modo ainda mais simples se substituirmos $a_n$ por $a_1 . q^{n-1}$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q - a_1}{(q-1)} = \frac{a_1 \cdot q^n - a_1}{(q-1)} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$$

Temos então a expressão geral para a soma dos n primeiros termos de uma PG.

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$$

Quando iniciamos nossa dedução para a expressão geral da soma dos n primeiros termos de uma PG, incluímos a restrição $q \neq 1$. Qual seria o valor dessa soma se $q = 1$? Seria necessária uma fórmula para seu cálculo?

A resposta é não. Quando $q = 1$, todos os termos da PG são constantes, logo o valor de sua soma é trivial. Basta simplesmente multiplicarmos esse valor por n. Veja o exemplo a seguir:

PG (3, 3, 3, ...)

$a_1 = 3$, $q = 1$

A soma dos 15 primeiros termos é dada por 3 + 3 +...+ 3 15 vezes. Ou, mais simplesmente, $3 \cdot 15 = 45$.

Simples, não?

Exemplos:

a) Uma PG é tal que seu primeiro termo é igual a 4 e sua razão é igual a 2. Calcule o valor da soma de seus dez primeiros termos.

Dos dados do enunciado, sabe-se que:

$a_1 = 4$ e $q = 2$

Para aplicarmos a fórmula da soma, é preciso conhecer o termo inicial (dado), a razão (não fornecida) e o número **n** de termos a serem somados, que neste caso é 10. Assim, substituindo-se esses valores na fórmula, obtém-se:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{4 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} = \frac{4 \cdot (1024 - 1)}{1} = 4 \cdot 1023 = 4.092$$

A soma dos dez primeiros termos da PG é igual a 4.092.

b) Determine a soma dos termos da PG finita (5, 50, ..., 5000000)

Para aplicarmos a fórmula da soma é preciso conhecer o termo inicial (dado), a razão (não fornecida) e o número **n** de termos a serem somados.

Uma análise dos termos desta PG nos permite reescrevê-la como $(5 \cdot 10^0, 5 \cdot 10^1, ..., 5 \cdot 10^6)$. Logo, a razão q é igual a 10 e a PG possui 7 termos.

Como $q \neq 1$, aplica-se a seguinte fórmula $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$

$$S_7 = \frac{5 \cdot (10^7 - 1)}{10 - 1} = 5555555$$

c) Calcular a soma dos 5 primeiros termos de uma PG, sabendo-se que sua razão vale 3 e $a_5 = 162$.

Dados: $n = 5$, $a_5 = 162$ e $q = 3$

Do fato $a_5 = 162$ podemos obter $a_1$.

$a_5 = a_1 \cdot q^{(5-1)}$

$162 = a_1 \cdot 3^4 \therefore a_1 = \frac{162}{81} \therefore a_1 = 2$

Como $q \neq 1$, aplica-se a seguinte fórmula $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$

$$S_5 = \frac{2 \cdot (3^5 - 1)}{3 - 1} = 242$$

d) Uma loja de artigos esportivos tem uma média de vendas de camisas da seleção brasileira igual a 12 unidades por mês. Em função da proximidade da Copa do Mundo 2014, há uma projeção que as vendas serão triplicadas a cada mês, de abril até o julho, quando termina a Copa. Em agosto, deve-se voltar ao patamar de vendas regular. Se as projeções se confirmarem, qual o total de camisetas a ser vendido no ano de 2014?

Como o número de camisetas vendidas a partir de março é triplicado a cada mês até julho, o número de camisetas vendidas neste período forma uma PG com termo inicial 12 e razão 3.

Assim, o total de camisetas vendidas neste quadrimestre pode ser obtido calculando-se a soma dos 4 termos desta PG.

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_4 = \frac{12 \cdot (3^4 - 1)}{3 - 1} = \frac{12 \cdot (81 - 1)}{2} = \frac{960}{2} = 480$$

Para conhecermos a venda anual, precisamos somar a venda deste quadrimestre com a dos outros 8 meses do ano, que se acredita ser igual a 12 em cada um dos meses. Assim,

Venda total = 12 · 8 + 480 = 96 + 480 = 576

Logo, a projeção do número total de camisas do Brasil a serem vendidas ao longo de 2014 é de 576 camisas.

## Atividade 2

***Atende aos objetivos 2 e 3***

1. Considere a PG (1, 3, 9, 27, ...). Quantos termos devem ser somados para que a soma seja 9841?

2. Uma estudante de intercâmbio recebeu uma proposta para trabalhar como babá de segunda a sábado por um período de duas semanas. O patrão (um matemático amador) ofereceu R$ 2,00 pelo primeiro dia de trabalho e, nos dias seguintes, o dobro do que ela recebera no dia anterior. A moça, horrorizada pela mesquinha oferta, recusou o trabalho. Se ela tivesse aceitado o serviço, quanto teria recebido pelos 12 dias de trabalho?

3. Em um surto de febre aftosa, cada animal infectado pode contaminar outros oito em um período de uma semana. Supondo-se que uma epidemia não seja controlada e prossiga nesse ritmo, quanto tempo pode-se estimar para que um rebanho de 299.593 cabeças esteja todo contaminado?

### *Resposta comentada*

1. Deseja-se conhecer o número de parcelas, *n*, tal que $S_n$ = 9.841.

Dado que $S_n = \dfrac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$ e $a_1$ = 1, precisamos determinar *q*.

Da definição, *q* = 3/1 = 3

Substituindo na fórmula, $S_n = \dfrac{1 \cdot (3^n - 1)}{3 - 1} = 9841$

$$\frac{3^n - 1}{2} = 9.841 \therefore 3^{\text{n}} - 1 = 19.682 \therefore 3^{\text{n}} = 19863 \therefore 3^{\text{n}} = 59.049 \therefore 3^{\text{n}} = 3^9 \therefore \text{n} = 9$$

2. A sequência de pagamentos proposta é (2, 4, 8, 16, 32, ...), que forma uma PG de razão 2.

Determinar quanto a jovem receberia pelos 12 dias equivale a determinar a soma dos 12 termos desta PG.

Aplicando a fórmula,

$$S_{12} = \frac{2 \cdot (2^{12} - 1)}{2 - 1} = \frac{2 \cdot 4.095}{1} = 8.190$$

Assim, a jovem perdeu a oportunidade de receber R$ 8.190,00 pelos 12 dias de trabalho.

3. O número total de animais contaminados de uma semana para outra é dado pela sequência (1, 8, 64, 512, ...), que caracteriza uma PG de razão 8.

Deseja-se conhecer o número de parcelas, *n*, tal que $S_n$ = 299593.

Dado que $S_n = \dfrac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$ e $a_1$ = 1, precisamos determinar *q*.

Da definição, *q* = 8/1 = 8

Substituindo na fórmula, $S_n = \dfrac{1 \cdot (8^n - 1)}{8 - 1} = 299.593$

$$\frac{8^n - 1}{7} = 299.593 \therefore .8^n - 1 = 2.097.151 \therefore 8^{\text{n}} = 2.097.152 \therefore 8^n = 8^7 \therefore n = 7$$

Logo, se nada for feito para impedir a propagação da epidemia, após 7 semanas, o rebanho inteiro estará contaminado.

## Limite da Soma

Anteriormente, aprendemos como somar um número finito de termos de uma PG.

Nesta seção, nosso objetivo é ligeiramente diferente. Agora desejamos conhecer o valor da soma de todos os termos de uma PG. Aqui é preciso destacar que o cálculo desta soma só é possível se estivermos lidando com uma PG que possua razão q, $-1 < q < 1$.

Em qualquer situação que não esta, o valor da soma tenderá para um valor muito alto positivo ou um valor muito pequeno negativo. Observe o seguinte exemplo:

PG: (5, 15, 45, 135, ...)

Esta PG tem razão $q = 3$. À medida que a ordem do termo cresce, seu valor também cresce sem nenhum impedimento. Logo, a soma de todos os termos será tal que possui infinitas parcelas de valor crescente. Logo, o valor desta soma é infinito. Raciocínio similar pode ser feito para valores de q menores que zero.

Por outro lado, observe o comportamento de uma PG com $0 < q < 1$:

PG: (5, 5/10, 5/100, 5/1000, 5/10000, ...)

PG decrescente com razão 1/10.

Facilmente, observa-se que à medida que a ordem do termo aumenta, o valor do termo correspondente está mais próximo de zero. Logo, o valor desta soma não cresce ilimitadamente, nem decresce. A partir de um determinado termo, o valor desta soma se estabiliza porque as parcelas são aproximadamente iguais a zero.

É possível mostrar que:

A soma dos infinitos termos de uma PG de razão q, $-1 < q < 1$, é dada por:

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

Exemplos:

a) PG (5, 5/10, 5/100, 5/1000, ...)

PG decrescente, $a_1 = 5$ e $q = 1/10$.

Aplicando a fórmula da soma de uma PG infinita com $-1 < q < 1$ obtém-se:

$$S = \frac{5}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{5}{\frac{9}{10}} = \frac{50}{9}$$

b) PG (1, −2/3, 4/9, −8/27, ...)

Inicialmente, devemos verificar se as parcelas desta soma infinita formam uma PG.

(1, −2/3, 4/9, −8/27, ...)

Sim, a razão entre dois termos consecutivos é constante e igual a −2/3.

Como −1 < q < 1, aplica-se a fórmula $S = \frac{a_1}{1-q}$

$$S = \frac{1}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

## *Atividade 3*

***Atende aos objetivos 2 e 3***

1. Considere a PG (24, 12, 6, ...) e encontre:

a) a expressão do termo geral;

b) a razão entre o 7º e o 9º termo;

c) a soma de seus infinitos termos.

2. Calcule a soma da PG (6, 4, 8/3, ...).

3. Determine a soma dos infinitos termos de uma PG, sabendo-se que a razão é igual a 3/7 e $a_2 = 6$.

### *Resposta comentada*

1.

a) Uma PG está bem caracterizada quando se conhece o termo inicial da sequência e sua razão. Logo, nosso primeiro passo nesta questão é obter a razão.

q = 12/24 = ½. É importante lembrar que a razão é sempre dada como o quociente de um termo pelo seu antecessor.

Agora, basta substituirmos $a_1 = 24$ e q = ½ na fórmula do termo geral.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_n = 24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

b) A solução desse item poderia ser feita de duas formas:

i. calculando-se o valor de $a_7$ e o valor de $a_9$ e, por fim, calculando-se a razão.

ii. calculando-se diretamente a razão e simplificando o resultado. Esta opção é a mais simples. Observe:

$$\frac{a_7}{a_9} = \frac{24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7}{24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7}{\left(\frac{1}{2}\right)^9} = \left(\frac{1}{2}\right)^{7-9} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$$

Embora de algum modo tenhamos calculado $a_7$ e $a_9$, não precisamos explicitar os valores destes termos, o que tornou o cálculo final muito mais rápido e menos cansativo.

c) Como calculado no item a, q = ½. Pode-se, portanto, aplicar a fórmula da soma dos infinitos termos de uma PG.

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$
$$S = \frac{24}{1-\frac{1}{2}}$$
$$S = \frac{24}{\frac{1}{2}}$$
$$S = 48$$

2. A PG dada é infinita com razão 2/3 (q = 4/6 = 2/3).

Pode-se, portanto, novamente aplicar a fórmula da soma dos infinitos termos de uma PG.

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$
$$S = \frac{6}{1-\frac{2}{3}}$$
$$S = \frac{24}{\frac{1}{3}}$$
$$S = 72$$

3. Neste exercício, inicialmente precisamos obter $a_1$.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$
$$a_2 = a_1 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{2-1}$$
$$6 = a_1 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{1}$$
$$a_1 = 6 \cdot \left(\frac{7}{3}\right)$$
$$a_1 = 14$$

Agora, conhecidos $a_1$ e q, podemos aplicar a fórmula da soma dos infinitos termos de uma PG.

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

$$S = \frac{14}{1-\frac{3}{7}}$$

$$S = \frac{24}{\frac{4}{7}}$$

$$S = 24 \cdot \left(\frac{7}{4}\right) = 42$$

## Conclusão

Nesta aula, fomos apresentados ao estudo das Progressões Geométricas. Apesar de constituírem um desenvolvimento conceitual muito similar ao das PAs, as PGs nos possibilitam abstrair e resolver questões distintas, mas também de grande importância no nosso cotidiano. É sempre interessante notar a relevância do tópico em função das aplicações que o tema fornece. Assim, as sequências numéricas constituem um campo de estudo não só importante, em função do exercício de abstração que proporcionam, como servem de modelos para resolução de diversos problemas.

## *Atividade final*

***Atende ao objetivo 3***

1. Uma empresa apresentou, em novembro de 2012, um faturamento de 300 mil reais e uma despesa de 350 mil reais. O departamento de vendas prevê que a receita mensal da firma aumentará segundo uma P.G. de razão 6/5. Por outro lado, o departamento de produção sinaliza que a despesa mensal crescerá segundo uma P.A. de razão igual a 55mil.

Quantos meses a empresa levará para deixar de ter prejuízo?

2. Uma pessoa aplica um capital de R$ 500,00 a juros de 1,2% ao mês em um período de 8 meses. Determine quanto essa pessoa terá no 2º e no 3º mês de aplicação. E no final do período?

### *Resposta comentada*

1. Receita: (300, 360, 432, ...), PG de razão 6/5

Despesas: (350, 405, 460, ...), PA de razão 55

Termo geral PG: $a_n = 300 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{(n-1)} > 295 - 55n$

Termo geral PA: $a_n = 350 + (n-1) \cdot 55 = 295 - 55n$

Para a empresa deixar de ter prejuízo, é preciso que a receita seja igual ou maior que a despesa. Isto é, deseja-se saber para qual valor de n, o termo geral da PG é maior que o termo geral da PA. Isto é,

$$300 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{(n-1)} > 295 - 55n$$

2. Quando consideramos aplicações, as taxas incidem sobre o montante do período em análise. Isto é:

Montante no mês 1: $M_1 = 500$

Montante no mês 2: $M_2 = 500 + 0{,}012 \text{ x } 500 = 500 \cdot (1 + 0{,}012) = 506$

Montante no mês 3: $M_3 = 506 + 0{,}012 \cdot 506 = 506 \cdot (1 + 0{,}072) = 512{,}072$

E assim por diante.

Logo, o capital que o investidor possui em cada um dos meses pode ser compreendido como uma PG cujo termo inicial é 500 e com razão igual a 1,012. A razão 1,012 explica-se porque o montante corresponde ao que ele já tinha mais a remuneração do mês (100% + 1,2% ou 1 + 0,012).

Termo geral:

$$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$$

$$a_n = 500 \cdot (1{,}012)^{n-1}$$

Agora estamos prontos para responder ao que foi pedido, utilizando o conceito de PG.

Montante no início do mês 2: $M_2 = 500 \cdot (1{,}012)^1 = 506$

Montante no início do mês 3: $M_3 = 500 \cdot (1{,}012)^2 = 500 \cdot (1{,}02114) = 512{,}072$

Para sabermos o capital no final dos 8 meses, basta calcularmos $M_9$ .

$M_9 = 500 \cdot (1{,}012)^8 = 550{,}06$

Ou como é apresentado na matemática financeira:

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$, onde M = montante, C = capital inicial, i = taxa de juros e n = número de períodos.

A diferença está na notação. Enquanto na PG $M_n$ representa o montante no início do mês *n*, na matemática financeira $M_n$ representa o montante no final do período *n*. Por isso, eles elevam a razão a ***n*** e não a ***n*−1**, como seria o esperado.

## Resumo

Progressão Geométrica é uma sequência de números reais cuja razão entre um termo e seu antecedente, a partir do segundo, é uma constante.

Propriedades estudadas:

$q = a_n/a_{n-1}$, cálculo da razão de uma PG.

$a_n = a_m \cdot q^{(n-m)}$, determinação de um termo geral dado $a_1$ e r.

$|P_n| = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$ fornece o valor do produto dos n primeiros termos de uma PG.

$S_n = \dfrac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$, expressão geral para a soma dos n primeiros termos de uma PG.

$S = \dfrac{a_1}{1 - q}$, retorna a soma dos infinitos termos de uma PG de razão q, -1 < q < 1.

# Referências

## Aula 1


GONÇALVES, M. B.; FLEMMING, D. M. *Cálculo A*. São Paulo: Makron Books, 2000.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. *Fundamentos de matemática elementar*. São Paulo: Atual, 2006. v. 1.

LEITHOLD, L. *O cálculo com geometria analítica*. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. v. 1.


## Aula 2


BARROSO, J. M. *Projeto Araribá:* matemática. São Paulo: Moderna, 2010. v. 7.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. *Matemática e realidade*. São Paulo: Atual, 2009. v. 7.

LIMA, E. L. et al. *Temas e problemas elementares*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

SOUZA, J. R. P.; MORENO, P. *Vontade de saber matemática*: 8° ano. São Paulo: FTD, 2009.


## Aula 3


BARROSO, J. M. *Projeto Araribá:* matemática. São Paulo: Moderna, 2010. v. 7.

GIOVANNI, J. R.; CASTRUCCI, B.; GIOVANNI, J. R. Jr.; *A conquista da matemática: nova.* São Paulo: FTD, 1998.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. *Matemática e realidade*. São Paulo: Atual, 2009. v. 7.

LARA, I. C. M. de. *Jogando com a matemática de 5ª a 8ª série*. São Paulo: Rêspel, 2003.

NAME, M. A. *Tempo de matemática.* São Paulo: Brasil, 1996.

SOUZA, J. R. P.; MORENO, P. *Vontade de saber matemática:* 8° ano. São Paulo: FTD, 2009.

## Aula 4

BARROSO, J. M. *Projeto Araribá*: matemática. São Paulo: Moderna, 2010. v. 7.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. *Matemática e realidade*. São Paulo: Atual, 2009. v. 7.

SOUZA, J. R. P.; MORENO, P. *Vontade de saber matemática*: 7° ano. São Paulo: FTD, 2009.

## Aula 5

BIANCHINI, E. *Matemática*: 9° ano. 7. ed. São Paulo: Moderna, 2011.

FRAGOSO, W. da C. *Equação do 2º grau: uma abordagem histórica*. 2. ed. Rio Ijuí: Unijuí, 1999.

GIOVANNI, J. R.; CASTRUCCI, B., GIOVANNI JR., J. R. *A conquista da Matemática:* 9º ano/8ª série. 9. ed. São Paulo: FTD, 2012.

## Aula 6

BARROSO, J. M. *Projeto Araribá*: matemática. São Paulo: Moderna, 2010. v. 7.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da matemática*. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.BOYER, C. B. (2012). *História da matemática,* 3 ed.. São Paulo: Ed Edgard Blücher.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. *Matemática e realidade*. São Paulo: Atual, 2009. v. 7.

SOUZA, J. R. P.; MORENO, P. *Vontade de saber matemática*: 7° ano. São Paulo: FTD, 2009.

## Aula 7

BIANCHINI, E.; PACCOLA, H. *Matemática*., vol. 1, Editora Moderna. São Paulo: Moderna, 1995. v. 1.

IEZZI, Gelson et al. *Matemática*: ensino médio. 4. ed. São Paulo: Atual, 2007.

PAIVA, M. *Matemática*. São Paulo: Moderna, 2009. v. 1.

## Aula 8

FERNANDES, W. S. *Matemática para o ensino médio*. Volume Único. São Paulo: , SP: IBEP,. 2005.

IEZZI, Gelson et al. *Matemática*: ensino médio. 4. ed. São Paulo: Atual, 2007.

MUROLO, A. C.; BONETTO, G. *Matemática aplicada à administração, economia e contabilidade*. São Paulo: Cengage Learning, 2012.

## Aula 9

IEZZI, Gelson et al. *Matemática*: ensino médio. 4. ed. São Paulo: Atual, 2007.

PAIVA, M. *Matemática*. São Paulo: Moderna, 2009. v. 1.

## Aula 10

BIANCHINI, E.; PACCOLA, H. *Matemática*. São Paulo: Moderna, 1995. v. 1.

DANTE, L. uiz Roberto. *Matemática, Ccontexto e aAplicações*: . Volume Único. Eensino mMédio. , 2.ª eEd.ição, São Paulo: Ática, 2007.

IEZZI, Gelson et al. *Matemática*: ensino médio. 4. ed. São Paulo: Atual, 2007.

## Aula 11

DANTE, L. R. *Matemática, contexto e aplicações*: ensino médio. 2. ed. São Paulo: Ática, 2007.

HARIKI, Seiji. *Matemática aplicada*: administração, economia, contabilidade. São Paulo: Saraiva, 2005.

IEZZI, Gelson et al. *Matemática*: ensino médio. 4. ed. São Paulo: Atual, 2007.

MORETTIN, P. A. *Cálculo*: funções de uma variável. São Paulo: Atual, 1987.

## Aula 12

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da matemática*. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

GIOVANNI, J. R. *Matemática*: uma nova abordagem. , vol 2. São Paulo: FTD, 2000. v. 2.

PAIVA, M. *Matemática*. São Paulo: Moderna, 2003.

SANTOS, C. A. M. dos et al. *Matemática*. São Paulo: Ática, 2003.

## Aula 13

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da matemática*. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

GIOVANNI, J. R. *Matemática*: uma nova abordagem. São Paulo: FTD, 2000. v. 2.

PAIVA, M. *Matemática*. São Paulo: Moderna, 2003.

SANTOS, C. A. M. dos et al. *Matemática*. São Paulo: Ática, 2003.