



Mate má tica

PVC

PRÉ-VESTIBULAR CECIERJ | volume 1

André Luiz Marques

Cleber Neto

Fabio Henrique Teixeira de Souza



Mate má tica

PVC

PRÉ-VESTIBULAR CECIERJ | volume 1

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Governador
Cláudio Castro

Secretário de Estado de Ciência, Tecnologia e Inovação
Dr. Serginho

FUNDAÇÃO CECIERJ

Presidente

Rogério Tavares Pires

Vice-Presidente de Educação

Superior a Distância

Caroline Alves da Costa

Pré-Vestibular Social

Diretor

Luiz Fernando Jardim Bento

Elaboração de Conteúdo

André Luiz Marques

Cleber Neto

Fabio Henrique Teixeira de Souza

Biblioteca

Any Bernstein, Simone da Cruz Correa de Souza

Vera Vani Alves de Pinho

cecierj.edu.br/pre-vestibular-social/

Material Didático

Diretor de Material Didático

Ulisses Schnaider Cunha

Diretora de Design Instrucional

Diana Castellani

Diretora de Material Impresso

Bianca Giacomelli

Projeto Gráfico

Cristina Portella e Maria Fernanda de Novaes

Ilustração da Capa

Renan Alves

Design Instrucional

Vittorio Lo Bianco,

Luciana Britto e Livia Tafuri

Revisão Linguística

Rosane Fernandes Lira de Oliveira

Diagramação

Maria Fernanda de Novaes

Tratamento de Imagens e Ilustrações

Renan Alves e Vinicius Mitchell

Produção Gráfica

Fabio Rapello

FICHA CATALOGRÁFICA

P922

Pré-Vestibular Cecierj. Matemática. Volume 1 / André Luiz Marques, Cleber Neto, Fabio Henrique Teixeira de Souza – Rio de Janeiro: Fundação Cecierj, 2021.
184 p.; 21 x 28 cm.

ISBN: 978-85-458-0254-9

1. Pré-Vestibular Cecierj. 2. Matemática. I. Marques, André Luiz. II. Neto, Cleber. III. Souza, Fabio Henrique Teixeira de. III. Título.

CDD: 510



Esta obra está licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição - Não Comercial - Sem Derivações 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0). Reservados todos os direitos mencionados ao longo da obra.

Proibida a venda.

Referências bibliográficas e catalogação na fonte de acordo com as normas da ABNT.
Texto revisado segundo o Novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa.

Mate má tica

sumário

1.	Ao infinito... e além!	7
2.	Contando partes das coisas	21
3.	Quantas vezes menor?	37
4.	Quantos por cento maior?	51
5.	A arte de fazer previsões	63
6.	A cada jogada, avance quatro casas	81
7.	Mantendo o ritmo	95
8.	Quando as coisas vão e voltam	111

9.	De quantas formas posso fazer?	135
10.	Como faço para contar?	151
11.	Qual é a chance?	167

Apresentação

Caro estudante,

Bem-vindo ao Pré-Vestibular Cecierj.

Queríamos que soubesse que o material didático que está em suas mãos foi preparado com muito cuidado e carinho. Os assuntos abordados são considerados relevantes para a sua formação e, para obtermos resultados juntos em sua aprendizagem, será indispensável que você faça – ou tente fazer – as tarefas propostas; pois são o meio pelo qual mediaremos o seu aprendizado.

Sabemos que o seu ano será de muito trabalho e que exigirá sacrifícios, por isso, tentamos fazer com que o material dialogue com você, permitindo que você se aproprie dos conteúdos de maneira amigável. Temos a certeza de que todo o esforço será por uma boa causa: a busca pela concretização de um sonho.

Esperamos que você goste de estudar conosco e afirmamos: durante toda a sua trajetória, você não estará sozinho.

Bons estudos!

Ao infinito... e além!

01

meta

Discutir a construção dos conjuntos dos números naturais e dos números inteiros, suas características e propriedades.

objetivos

Esperamos que, ao final desta unidade, você seja capaz de:

- identificar os conjuntos dos números naturais e dos números inteiros;
- relacionar conjuntos e subconjuntos contáveis;
- analisar e desenvolver problemas que envolvam operações básicas e paridade no conjunto dos números naturais;
- identificar a construção simétrica dos números inteiros, relacionando-a com as operações básicas nesse conjunto numérico.

Introdução

Você deve se lembrar de que o processo de contagem é um dos primeiros conhecimentos matemáticos abordados na escola. Nesse processo, associamos objetos, pessoas, animais, alimentos; ou seja, elementos de um conjunto, aos números, com seus significados e signos.

O osso de Ishango, encontrado em Ishango, na África, é um registro datado de entre vinte e dez mil anos a.C. Ele evidencia que o homem primitivo já sentia a necessidade de contar; utilizando elementos da natureza para ajudar na quantificação, conforme as suas necessidades.



Figura 1.1: O osso de Ishango. Fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Osso_di_Ishango.jpg. Autor: Gius195.

Tais números compõem o conjunto dos números naturais, que denotamos e representamos assim:

$$\text{NATURAIS: } \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Mais à frente, na vida escolar, surgem os números inteiros, que são compostos pelos números naturais, que passamos a chamar de *inteiros positivos*, e seus simétricos em relação ao zero (0), que chamamos de *inteiros negativos*. O número zero (0) funciona como nossa referência na separação entre os inteiros positivos e os inteiros negativos.

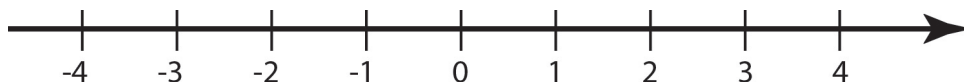


Figura 1.2: Reta numerada.

O conjunto dos números inteiros pode ser denotado e representado assim:

$$\text{INTEIROS: } \mathbb{Z} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Números naturais e números inteiros

Agora que já relembramos brevemente como esses conjuntos são estruturados, podemos discutir um pouco mais sobre eles.

Qual é o menor número natural? E o maior?

A resposta para a primeira pergunta parece simples: o menor número natural é o 1. Porém, há alguma discussão sobre isso.

// atenção

Para a ideia de contagem, matemáticos e educadores matemáticos entendem que o conjunto dos números naturais se inicia com o um (1). Porém, alguns professores incluem o zero (0) no conjunto dos números naturais, ao apresentarem as operações básicas, utilizando esse número no resultado de operações como $3 - 3$, ou na representação do resto de uma divisão como $15 : 5$.

Adotaremos, neste material, a resposta que se relaciona com a contagem: o menor número natural é o 1.

lá na plataforma

Na Unidade 1 de nosso ambiente virtual acesse o vídeo sobre a história do número 1.

Perceba como esse vídeo dialoga diretamente com a discussão sobre o conjunto dos números naturais que tivemos em sala.

Já o maior número natural não existe, pois se você pensar em qualquer número natural n , por maior que ele seja, sempre será possível encontrar um maior que ele, o $n + 1$.

Agora, vamos pensar no conjunto dos números inteiros: Qual é o maior número inteiro? E o menor?

Para a primeira pergunta, podemos usar o mesmo raciocínio utilizado para responder à pergunta sobre o maior número natural: ou seja, não existe.

Em relação ao menor, usamos um argumento parecido: se existir o menor número inteiro negativo, o seu simétrico seria o maior número natural, que já verificamos que não existe. Assim, não há o menor número no conjunto dos números inteiros.

Infinitos contáveis

Voltando aos números naturais, vamos observar os números pares positivos (excetuando-se o zero):

$$P = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots, 2n, \dots\}$$

Você acha que há mais números naturais ou mais números pares positivos?

Acho que tem mais números naturais, pois ele é formado por números pares e números ímpares...

Achou errado!



Figura 1.3: Diálogo sobre a comparação entre números naturais e números pares.

Para responder a essa questão, é necessário realizar a comparação entre dois conjuntos infinitos, a partir de uma associação 1 a 1. Mas como fazer isso?

Da mesma forma que fazemos para saber se há mais estudantes em uma sala ou na sala ao lado, sem saber a quantidade total de estudantes em cada sala. Ou seja: associando cada elemento de um dos conjuntos a um único elemento do outro conjunto.

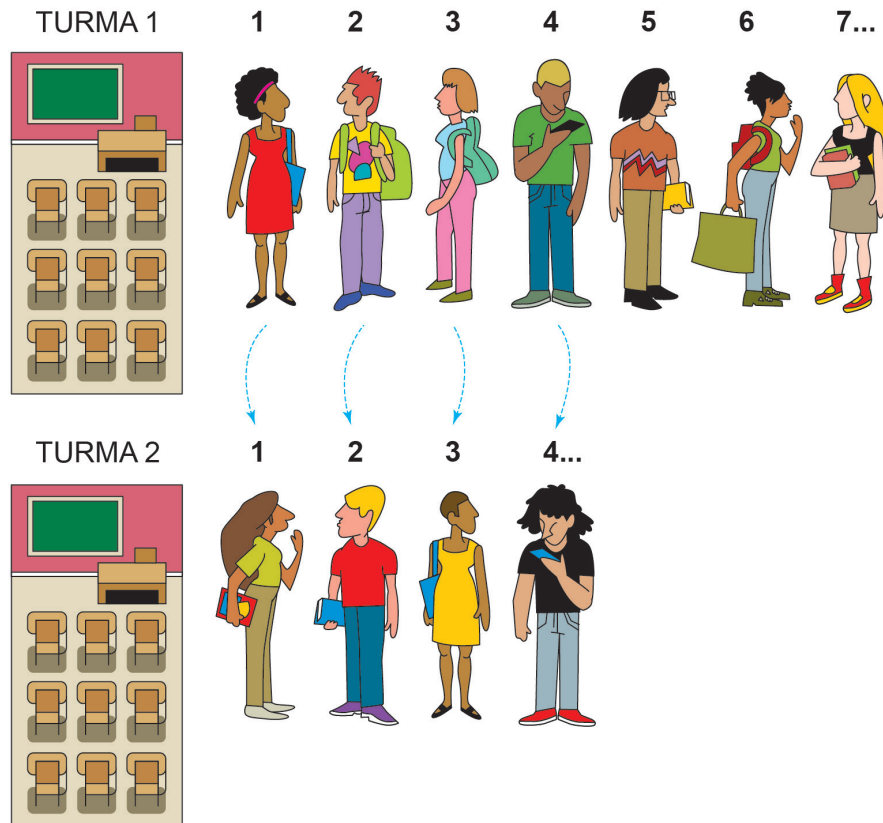


Figura 1.4: Estudantes em salas de aula.

Retornando à pergunta: há mais números naturais ou números pares positivos? A resposta correta é: eles têm a mesma quantidade de elementos!

Observe o esquema abaixo:

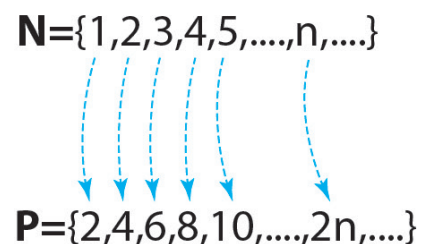


Figura 1.5: Esquema comparativo entre números naturais e números pares.

Como cada número natural tem um único correspondente par, e cada número par só tem um único correspondente natural, ambos os conjuntos têm o mesmo número de elementos!

Pergunta 1

Você acha que há mais números naturais ou números inteiros? Por quê? Apresente um esquema para justificar seu argumento.

Veja a resposta comentada na plataforma.

>> *saiba mais*

Você conhece o Hotel de Hilbert?

O Hotel de Hilbert possui infinitos quartos individuais numerados a partir do quarto 1.

Conheça as histórias desse hotel no vídeo que se encontra em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1117>.



Operações básicas com número naturais

Agora vamos praticar um pouco, a partir do que você já sabe sobre o conjunto dos números naturais e de suas operações. Para isso, usaremos questões do ENEM e alguns problemas.

Problema 1

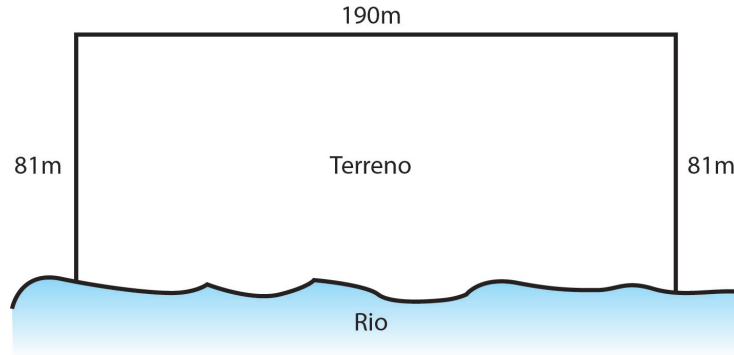
Imagine um número natural de quatro algarismos e outro de três algarismos. Se os sete algarismos usados para escrever os dois números forem todos diferentes entre si, qual é a maior soma que esses números podem ter?

Após resolver esse problema, compare sua resposta com a de outro estudante da turma. Será que existe uma única resposta correta para esse problema?

Veja a resposta comentada na plataforma.

Problema 2

(Enem 2013 – 1ª Aplicação – Prova Azul – Questão 147) Para o reflorestamento de uma área, deve-se cercar totalmente, com tela, os lados de um terreno, exceto o lado margeado pelo rio, conforme a figura. Cada rolo de tela que será comprado para confecção da cerca contém 48 metros de comprimento.



A quantidade mínima de rolos que deve ser comprada para cercar esse terreno é:

- a) 6
- b) 7
- c) 8
- d) 11
- e) 12

lá na plataforma

Na unidade 1 de nosso ambiente virtual, acesse o vídeo com a resolução do problema 2.

Problema 3

(Enem 2018 – Prova Azul – Questão 162) Torneios de tênis, em geral, são disputados em sistema de eliminatória simples. Nesse sistema, são disputadas partidas entre dois competidores, com a eliminação do perdedor e promoção do vencedor para a fase seguinte. Dessa forma, se na 1ª fase o torneio conta com $2n$ competidores, então na 2ª fase restarão n competidores, e assim sucessivamente até a partida final.

Em um torneio de tênis, disputado nesse sistema, participam 128 tenistas.

Para se definir o campeão desse torneio, o número de partidas necessárias é dado por:

- a) 2×128
- b) $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2$
- c) $128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$
- d) $128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2$
- e) $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$

Após resolver esse problema, discuta com outros estudantes o que poderia motivar alguém a assinalar cada uma das opções erradas.

lá na plataforma

Na unidade 1 de nosso ambiente virtual, acesse o vídeo com a resolução do problema 3.

Problema 4

Ao somarmos uma quantidade par de números ímpares, o resultado é par ou ímpar? E a soma de uma quantidade ímpar de números ímpares é par ou ímpar?

Veja a resposta comentada na plataforma.

Problema 5

André comprou um caderno com 96 folhas numeradas sequencialmente, frente e verso, de 1 a 192. Durante o ano letivo, arrancou 25 folhas desse caderno. A soma dos números registrados nas folhas que restaram no caderno pode ser igual a 2020?

Veja a resposta comentada na plataforma.

paridade

Característica do que é igual ou semelhante. Consiste numa comparação para mostrar algo que pode ser semelhante ou não, em relação a outro. É uma ideia simples, mas que pode gerar questionamentos interessantes, como os dos problemas que resolvemos acima. Do latim *paritas*.

Os problemas 4 e 5 se relacionam, porque podem ser resolvidos com **argumentos de paridade**. Você sabe o que significa esse termo?

A ideia de paridade é utilizada em diversas áreas. Por exemplo, nas Telecomunicações, para detectar erros em transmissões, no Direito, para considerar a concessão de benefícios e reajustes entre aposentados e funcionários ativos, na Economia, para calcular o poder de compra entre dois países.

Simetria e operações básicas com números inteiros

Quando aprendemos as operações com números inteiros na escola, estudamos algumas regras, como a de que menos com menos é mais. Porém, para sabermos por que essas regras são válidas e para que as apliquemos corretamente, é importante entender a representação dos números inteiros na reta numérica, o que já foi apresentado no início deste capítulo.

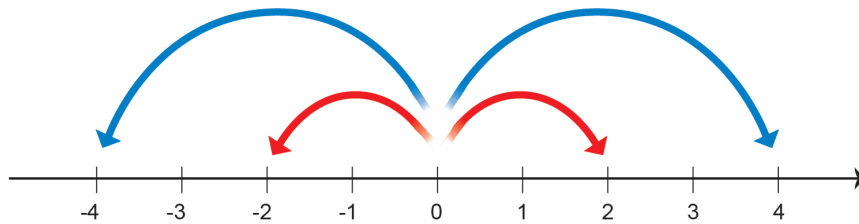


Figura 1.6: Reta numerada.

Também é importante lembrar que a seta da reta numerada indica o sentido de crescimento dos números (da esquerda para a direita). Assim, se andamos no mesmo sentido da seta, aumentaremos os valores dos números; e se andarmos no sentido oposto, diminuiremos esses valores. Também podemos perceber que se m é um número inteiro qualquer, então $-m$ (lê-se: *menos m*), corresponde ao simétrico desse número em relação ao 0. Desse modo, se fizermos $-(-m)$ (lê-se: *menos menos m*), tomaremos o simétrico do simétrico de m . Ou seja, o próprio m .

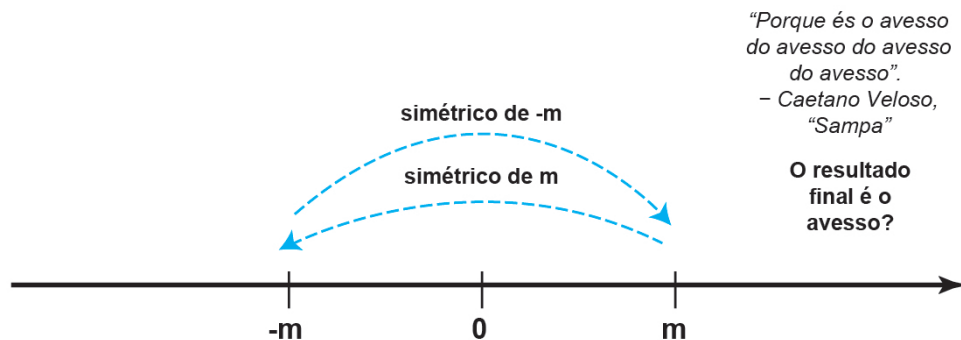


Figura 1.7: Averso do avesso.

A adição de números inteiros também pode ser interpretada na reta numérica: somar um número inteiro qualquer com um número positivo significa andar no sentido positivo da reta (isto é, para a direita). Por outro lado, somar um número negativo a um número inteiro qualquer significa andar no sentido negativo da reta (isto é, para a esquerda).

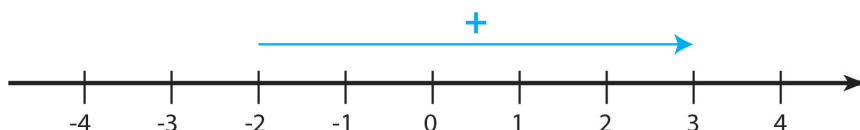


Figura 1.8: Representação da operação $-2 + 5$.

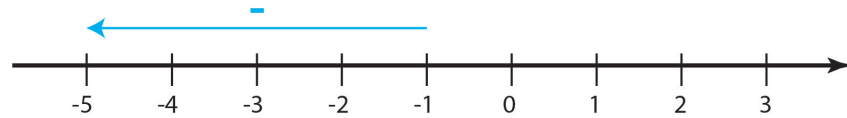


Figura 1.9: Representação da operação $-1 + (-4)$.

Depois de tratarmos sobre a adição de números inteiros, abordaremos agora a chamada *regra dos sinais*, que vale para a *multiplicação* de números inteiros. Esta não é uma convenção e nem muito menos uma regra arbitrária.

Podemos entendê-la se pensarmos na multiplicação com números positivos. Suponha que você esteja multiplicando os números naturais por 3 (isto é, escrevendo a *tabuada* de multiplicação por 3). Observe que, sempre que você subtrai uma unidade do primeiro fator, o resultado da multiplicação é subtraído de 3 unidades.

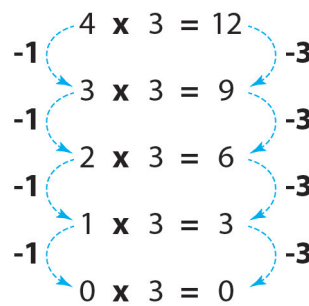


Figura 1.10: Multiplicações por 3.

Se quisermos continuar este processo, multiplicando o número 3 por números menores que 0, devemos continuar subtraindo três unidades dos resultados. Assim, vamos obter o seguinte:

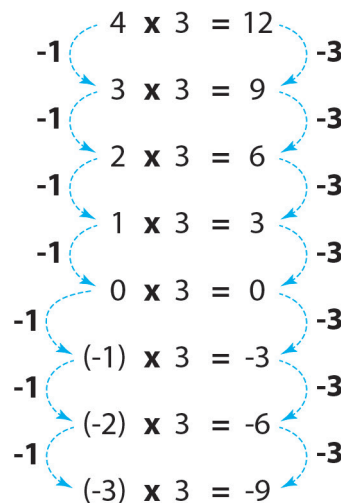


Figura 1.11: Multiplicações por 3 com números inteiros.

Com base neste raciocínio, podemos concluir a primeira parte da regra dos sinais para a multiplicação:

// atenção

Quando multiplicamos um número positivo por um número negativo, o resultado é sempre um número negativo.

Agora, precisamos determinar o que acontece quando multiplicamos dois números negativos. Pela regra que acabamos de deduzir, já sabemos multiplicar, por exemplo, por -3 . Observando os resultados desta multiplicação, vemos que, agora, sempre que diminuimos 1 unidade do primeiro fator, são somadas 3 unidades ao resultado. Lembre-se de que, para ir de -12 a -9 , estamos andando no sentido positivo da reta numérica (pois -12 é menor que -9). Assim, estamos somando 3 unidades.

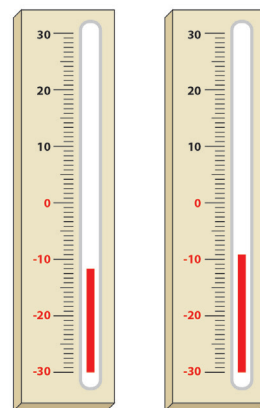
$$\begin{array}{rcl}
 & 4 \times (-3) = -12 & \\
 -1 & \swarrow & \searrow +3 \\
 & 3 \times (-3) = -9 & \\
 -1 & \swarrow & \searrow +3 \\
 & 2 \times (-3) = -6 & \\
 -1 & \swarrow & \searrow +3 \\
 & 1 \times (-3) = -3 & \\
 -1 & \swarrow & \searrow +3 \\
 & 0 \times (-3) = 0 &
 \end{array}$$

Figura 1.12: Multiplicações por -3 .

>> saiba mais

Onde está mais quente?

Quando estamos aprendendo a trabalhar com números inteiros negativos, às vezes temos dúvidas sobre qual número é o maior. Por exemplo, os números -9 e -12 . Qual deles é maior? Uma dica para tornar essa comparação mais fácil é pensar que esses dois números representam as temperaturas de um termômetro. Observe na figura a seguir, como -9° está posicionado acima de -12° na escala, indicando, visualmente, que -9° é uma temperatura maior e, portanto mais quente do que -12° .



Para prosseguir, devemos continuar somando 3 unidades ao resultado, obtendo o seguinte:

$$\begin{array}{rcl}
 & 4 \times (-3) = -12 & \\
 -1 \swarrow & & \searrow +3 \\
 & 3 \times (-3) = -9 & \\
 -1 \swarrow & & \searrow +3 \\
 & 2 \times (-3) = -6 & \\
 -1 \swarrow & & \searrow +3 \\
 & 1 \times (-3) = -3 & \\
 -1 \swarrow & & \searrow +3 \\
 & 0 \times (-3) = -0 & \\
 -1 \swarrow & & \searrow +3 \\
 & (-1) \times (-3) = 3 & \\
 -1 \swarrow & & \searrow +3 \\
 & (-2) \times (-3) = 6 & \\
 -1 \swarrow & & \searrow +3 \\
 & (-3) \times (-3) = 9 &
 \end{array}$$

Figura 1.13: Multiplicações por -3 com números inteiros.

Com base nesse raciocínio, podemos concluir a segunda parte da regra dos sinais para a multiplicação.

// atenção

Quando multiplicamos um número negativo por outro número negativo, o resultado é sempre um número positivo.

Agora vamos praticar um pouco, a partir do que você já sabe sobre o conjunto dos números inteiros, sua simetria e suas operações. Para isso, usaremos um problema.

Problema 6

Suponha que uma professora de Matemática proponha a seguinte condição para a correção de um teste com 10 questões objetivas (de múltipla escolha): cada questão certa vale 2 pontos positivos e cada questão errada, 1 ponto negativo. Assim, um estudante que acerte 6 questões terá nota 8,0. Nesse teste:

- qual é a nota de um estudante que acerta 5 questões?
- é possível obter uma nota acima de 10?
- é possível obter nota zero?
- qual é a nota máxima que um estudante pode obter? E a nota mínima?

Veja a resposta comentada na plataforma.

Resumo

- Números naturais surgem por meio do processo ordinário de contagem.
 - Números inteiros negativos surgem como os simétricos dos números naturais, em relação a um número especial, o zero.
 - Conjuntos contáveis são aqueles que podem ser colocados em correspondências 1 a 1 com o conjunto dos números naturais.
 - A regra de sinais da multiplicação de números inteiros não é uma convenção.
-

Atividade

(Enem 2017 – Prova Azul – Questão 170 - Adaptada) Neste modelo de termômetro, os filetes na cor preta registram as temperaturas mínima e máxima do dia anterior, e os filetes na cor cinza registram a temperatura ambiente atual, ou seja, no momento da leitura do termômetro.

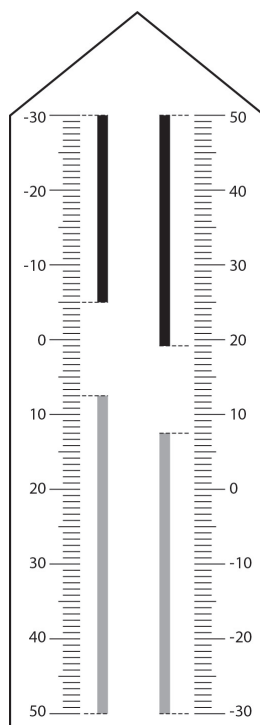


Figura 1.14: Termômetro.

Por isso ele tem duas colunas. Na da esquerda, os números estão em ordem crescente, de cima para baixo, de -30°C até 50°C . Na coluna da direita, os números estão ordenados de forma crescente, de baixo para cima, de -30°C até 50°C . A leitura é feita da seguinte maneira:

- a temperatura mínima é indicada pelo nível inferior do filete preto na coluna da esquerda;
 - a temperatura máxima é indicada pelo nível inferior do filete preto na coluna da direita;
 - a temperatura atual é indicada pelo nível superior dos filetes cinza nas duas colunas.
- a) Qual é a temperatura mínima mais aproximada que está sendo registrada nesse termômetro?
- b) Qual é a temperatura máxima mais aproximada que está sendo registrada nesse termômetro?
- c) Qual foi a variação observada entre as temperaturas máxima e mínima do dia anterior encontradas nos itens anteriores?

Resposta comentada

- a) Para obter a temperatura mínima registrada no termômetro, é necessário observar o nível inferior do filete preto da coluna da esquerda, que indica a marcação próximo do ponto médio entre 0 e -10 . Assim, a temperatura mínima mais aproximada pode ser -5°C .
- b) Para obter a temperatura máxima registrada no termômetro, é necessário observar o nível inferior do filete preto da coluna da direita, que indica a marcação um filete abaixo do valor de 20°C . Assim, a temperatura máxima mais aproximada pode ser 19°C .
- c) Como obtivemos -5°C e 19°C como respostas, a variação é dada pela diferença entre a maior e a menor temperatura. Ou seja, por $19 - (-5)$.

Como vimos neste capítulo que $-(-5)$ é o simétrico de -5 , temos que

$-(-5) = +5$. Assim, temos $19 + 5 = 24$. Ou seja, 24°C de variação.

Respostas comentadas da unidade

Na Unidade 1 de nosso ambiente virtual, acesse o arquivo com as respostas comentadas da pergunta 1 e dos problemas 1, 4, 5, e 6.

Mas só acesse esse documento depois de tentar resolver as questões.

Contando partes das coisas

02

meta

Discutir a construção do conjunto dos números racionais, suas características e propriedades.

objetivos

Esperamos que, ao final desta unidade, você seja capaz de:

- identificar o conjunto dos números racionais;
- relacionar as representações fracionárias e decimais dos números racionais;
- identificar e realizar os procedimentos utilizados nas operações com números racionais;
- resolver problemas variados, envolvendo os números racionais, suas características, operações e propriedades.

Introdução

Muito provavelmente, você deve recordar de problemas envolvendo frações em aulas de matemática. Nessas atividades, partes de um objeto eram associadas ou comparadas a esse mesmo objeto inteiro, a que também chamávamos de “o todo”; ou obtínhamos as quantidades de partes de um conjunto de elementos, como pessoas, animais e alimentos, a partir do total de elementos desse conjunto.

Esses são alguns tipos de problemas e de ideias associadas às frações com as quais nos deparamos nos primeiros anos escolares. Contudo, os seus usos vão se intensificando, com a ampliação das interpretações a seu respeito e com a utilização de outras representações.

Assim, é muito provável, também, que você tenha a lembrança de situações nas quais deveria apresentar a forma decimal do número representado por uma fração. Por exemplo, a partir de $\frac{1}{2}$ chegar a 0,5. Porém, antes de falarmos sobre esse e outros processos envolvendo as representações decimais e fracionárias, precisamos saber com que conjunto numérico lidaremos.

Este é o *conjunto dos números racionais*, que denotamos e representamos assim:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0 \right\}$$

Lê-se: o conjunto \mathbb{Q} , dos números racionais, é aquele cujos elementos são números que podem ser representados como frações, aqui representadas pela fração $\frac{p}{q}$. Note que há condições para os valores de p e q . Eles precisam ser sempre números inteiros ($p, q \in \mathbb{Z}$). Além disso, q não pode ser nulo ($q \neq 0$) porque é o denominador.

>> saiba mais

*O conjunto dos números racionais é representado por \mathbb{Q} , que se assemelha à letra Q, por derivar da palavra quociente. Seu significado se relaciona com o termo latino *quotiens*, que é o mesmo que quantas vezes. Quociente é o resultado da operação de divisão, ou seja, quantas vezes o divisor cabe no dividendo.*

// atenção

Repare que, a partir da definição acima, é possível afirmar que frações podem ter numeradores ou denominadores positivos e negativos, como nos exemplos de números racionais a seguir:

$$\frac{-2}{5} \quad \frac{7}{-3} \quad \frac{-21}{-10}$$

Mas o que significa o termo **racional** no contexto dos números, na matemática? **racional**

Possibilidade de o número ser representado como a razão ou proporção entre dois números inteiros; ou seja, representa a divisão entre esses números.

Números Racionais

Agora que já apresentamos a definição do conjunto dos números racionais, podemos discutir um pouco mais sobre as características e as operações com os mesmos. Para isso, iniciaremos com os procedimentos que envolvem as representações decimais e fracionárias.

Para que serve a “vírgula” na representação decimal de um Número Racional?

Todo número racional na forma fracionária $\frac{p}{q}$ pode ser escrito na forma decimal e vice-versa. Veja os exemplos:

1. $\frac{1}{2} = 0,5$	2. $\frac{4}{3} = 1,333\dots$	3. $1,2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$	4. $0,222\dots = \frac{2}{9}$
------------------------	-------------------------------	--	-------------------------------

Para se obter a forma decimal correspondente a partir de uma fração, basta dividir o numerador pelo denominador. É isso o que faremos a seguir, com os exemplos 1 e 2.

1. $\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r} 10 \bigg| 2 \\ -10 \\ \hline 0 \end{array} \quad 0,5$$

Figura 2.1: operação de divisão $1 \div 2$.

2. $\frac{4}{3}$

$$\begin{array}{r}
 4 \overline{) 3} \\
 \underline{-3} 1,333... \\
 10 \\
 \underline{-9} \\
 10 \\
 \underline{-9} \\
 10 \\
 \vdots
 \end{array}$$

Figura 2.2: operação de divisão $4 \div 3$.

// atenção

Perceba que, diferentemente do que ocorre no primeiro exemplo, neste, o procedimento de divisão não se encerra; isto é, não se obtém resto zero com as divisões sucessivas.

Isso faz com que tenhamos uma representação decimal da fração $\frac{4}{3}$ com uma série infinita de algarismos que, a partir de certa casa decimal, se repetem em grupos de um ou mais algarismos, sempre na mesma disposição. Nesse caso, como $\frac{4}{3} = 1,333...$, a série infinita de algarismos que se repetem é composta apenas pelo algarismo 3, que chamamos de período.

Denominamos dízima periódica a esse tipo de representação decimal, que pode ser denotada com a inserção de reticências após três unidades do grupo de algarismos repetidos, ou com uma barra acima do período. Veja a seguir:

$$\begin{aligned}
 1,333... &= 1,\overline{3} \\
 0,156156156... &= 0,\overline{156} \\
 25,4787878... &= 25,\overline{478}
 \end{aligned}$$

Quanto ao exemplo 3, para se obter a fração correspondente à forma decimal dada, é necessário multiplicá-la por potências de 10, até que a parte depois da vírgula fique apenas com zeros.

3. 1,2

Considere

$$\begin{aligned}x &= 1,2 \\10x &= 12 \\x &= \frac{12}{10}\end{aligned}$$

Simplificando essa fração através da divisão do numerador e do denominador pelo mesmo fator, que neste caso é o 2, temos:

$$x = \frac{6}{5}$$

// atenção

Outra forma de determinar a representação fracionária de um número racional é a partir da compreensão do que significa sua representação decimal. O número 1,2 pode ser lido como um inteiro e dois décimos ou como doze décimos. Dessa maneira, como doze décimos é representado por $\frac{12}{10}$, temos $1,2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$.

Já no exemplo 4, para se obter a fração correspondente à forma decimal dada, que neste caso é uma dízima periódica, é necessário multiplicá-la por potências de 10 até que a parte depois da vírgula fique com a *mesma sequência de algarismos repetidos*.

4. 0,222...

Considere

$$\begin{aligned}x &= 0,222... \\10x &= 2,222...\end{aligned}$$

Subtraindo uma equação da outra, tem-se:

$$\begin{aligned}10x - x &= (2,222...) - (0,222...) \\9x &= 2 \\x &= \frac{2}{9}\end{aligned}$$

// atenção

Para que serve a vírgula na representação decimal de um número racional?

A pergunta acima foi o título de toda esta seção. Após os exemplos que foram apresentados, já podemos deduzir sua resposta: a vírgula serve para separar a parte inteira e a parte não inteira do número racional.

Por exemplo, o número 1,2, que pode ser lido como um inteiro e dois décimos, tem a parte inteira igual a 1 (ou $\frac{10}{10}$ ou dez décimos) e a parte não inteira equivalente a $\frac{2}{10}$. Juntando as duas partes, temos dez décimos mais dois décimos que resulta em doze décimos ($\frac{12}{10}$), uma forma de escrita que não faz a separação entre parte inteira e não inteira.

Assim, a leitura de números na forma decimal necessita que se observe a localização da vírgula, que separa a parte inteira da parte não inteira. A representação de um número decimal pode ser indicada, de forma geral, como:

...	Unidades de Milhar	Centenas (simples)	Dezenas (simples)	Unidades (simples)	,	Décimos (da unidade)	Centésimos (da unidade)	Milésimos (da unidade)	Décimos de milésimos	...
Parte inteira						Parte não inteira				

Antes de avançarmos para a discussão de outras características e operações com números racionais, veremos mais algumas situações de obtenção da fração correspondente à dízima periódica, com casos um pouco diferentes do que o do exemplo 4.

Situação 1

Qual é a fração correspondente à dízima periódica $3,1\bar{2}$?

Resposta comentada:

Faremos da mesma forma com que procedemos no exemplo 4. Porém, perceba que a parte não inteira na dízima periódica $3,1\bar{2}$ não se inicia com uma sequência de algarismos repetidos. Contudo, para realizar a subtração entre duas equações, é necessário que as duas dízimas periódicas iniciem suas partes não inteiras com a mesma sequência de algarismos repetidos.

$$\begin{aligned}x &= 3,1222\dots \\10x &= 31,222\dots \\100x &= 312,222\dots\end{aligned}$$

Subtraindo a 2ª equação da 3ª, temos:

$$100x - 10x = 312,\bar{2} - 31,\bar{2}$$

$$90x = 312 - 31$$

$$x = \frac{281}{90}$$

Situação 2

Qual é a fração correspondente à dízima periódica $4,\bar{21}$?

Resposta comentada:

A dízima periódica $4,\bar{21}$ possui um bloco com dois algarismos que se repetem. Assim, para realizar a subtração entre duas equações, é preciso multiplicar a dízima periódica por 100, para que tenhamos dízimas com a mesma sequência de algarismos repetida nas partes não inteiras.

$$x = 4,212121\dots$$

$$100x = 421,2121\dots$$

Subtraindo uma equação da outra temos:

$$99x = 421 - 4$$

$$x = \frac{417}{99}$$

Operações com Números Racionais

Nas próximas unidades deste material, usaremos os números racionais na exposição de temas para os quais o entendimento das características e do modo de realização das operações com os mesmos serão necessários.

Assim, nesta seção abordaremos as operações com números racionais por meio de situações que exemplificam cada um desses procedimentos, dando prioridade à representação fracionária.

Situação 3

Em uma turma com 30 estudantes, $\frac{3}{5}$ se identificam como pessoas do sexo feminino. Quantos são os estudantes do sexo feminino dessa turma?

Resposta comentada:

Obter $\frac{3}{5}$ de 30 estudantes significa dividir a turma em 5 partes iguais, sendo que 3 destas partes correspondem às estudantes de sexo feminino.

Para calcular $\frac{3}{5}$ de 30, devemos fazer a seguinte operação: $\frac{3}{5} \times 30 = (30 \div 5) \times 3 = 6 \times 3 = 18$

Isto é, a turma tem 18 estudantes de sexo feminino.

// atenção

Nessa situação, temos a fração como um operador, na qual o denominador divide a quantidade referente ao todo e o numerador multiplica o valor resultante da primeira operação.

Situação 4

A figura abaixo ilustra duas barras de chocolate. As regiões escuras indicam as partes das barras que não foram consumidas.

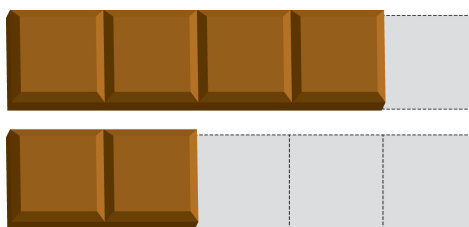


Figura 2.3: barras de chocolate (1)

Em relação a uma barra inteira de chocolate, determine que fração representa a soma das partes não consumidas das duas barras de chocolate.

Resposta comentada:

Ambas as barras estão divididas em 5 partes iguais, sendo que, na primeira, 4 destas partes não foram consumidas e, na segunda, 2 das partes não foram consumidas. Assim, temos $\frac{4}{5}$ e $\frac{2}{5}$, respectivamente, como as frações correspondentes às partes das duas barras de chocolate.

Como devemos determinar a soma das partes não consumidas, temos que fazer quatro quintos mais dois quintos, ou seja:

$$\frac{4}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$$

// atenção

Nessa situação temos a soma de frações com o mesmo denominador. Para realizar essa operação, basta somar os numeradores e repetir o denominador. O mesmo vale para a subtração de frações.

Situação 5

$\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$ de uma barra de chocolate correspondem à mesma quantidade de chocolate?

Resposta comentada:

Sim.

Observe as figuras abaixo:

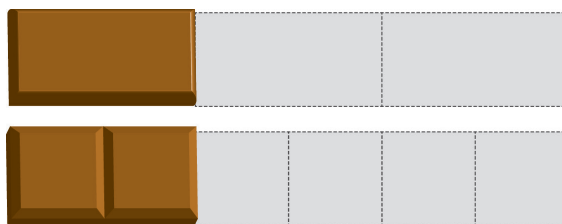


Figura 2.4: barras de chocolate (2)

Na primeira representação, o inteiro foi dividido em 3 pedaços iguais e foi tomado um desses pedaços. Na segunda, o inteiro foi dividido em 6 pedaços iguais e foram tomados 2 desses. É claro que os pedaços da segunda representação são menores do que os anteriores. Mais precisamente, cada pedaço maior corresponde a dois pedaços menores. Mas, como estamos tomando 2 pedaços menores, obtemos o mesmo resultado. Assim, as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$ são formas equivalentes de representar uma mesma quantidade. Por isto, dizemos que são *frações equivalentes*.

Pelo mesmo raciocínio anterior, podemos perceber que há infinitas formas equivalentes de representar esta mesma quantidade:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \dots$$

// atenção

De forma mais geral, observamos o seguinte processo para obter frações equivalentes:

Se dividimos 1 inteiro em q partes iguais e tomamos p destas partes, temos como resultado a fração $\frac{p}{q}$.

Se dividimos o mesmo inteiro em k vezes mais partes (isto é, em $k \times q$) e, em compensação, também tomamos k vezes mais partes (isto é, $k \times p$) obtemos o mesmo resultado.

Em outras palavras, se multiplicamos o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número k , obtemos uma fração equivalente:

$$\frac{p}{q} = \frac{k \times p}{k \times q}$$

Da mesma forma, se dividimos o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número $k \in \mathbb{Z}$, obtemos frações equivalentes.

Situação 6

Determine a soma $\frac{1}{3} + \frac{2}{5}$.

Resposta comentada:

Como os denominadores das frações são diferentes, devemos procurar frações equivalentes a $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{5}$. Vejamos:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \frac{5}{15} = \dots$$

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} = \frac{8}{20} = \dots$$

Observe que $\frac{5}{15}$ e $\frac{6}{15}$ são frações que têm o mesmo denominador e são equivalentes, respectivamente, a $\frac{1}{3}$ e a $\frac{2}{5}$. Assim,

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{11}{15}$$

// atenção

De forma geral, para somar duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, devemos encontrar um múltiplo comum entre os denominadores b e d . O mesmo vale para a subtração de frações.

Situação 7

Determine a multiplicação $\frac{2}{5} \times 3$.

Resposta comentada:

Para realizar esta operação, devemos pensar exatamente da mesma forma que pensamos quando queremos multiplicar dois números naturais. Isto é, multiplicar por 3 equivale a efetuar a soma de 3 parcelas, todas iguais a $\frac{2}{5}$.

$$\frac{2}{5} \times 3 = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{2 \times 3}{5} = \frac{6}{5}$$

// atenção

De forma geral, para multiplicar uma fração $\frac{p}{q}$ por um número inteiro k , devemos multiplicar o numerador por k e manter o denominador.

$$\frac{p}{q} \times k = \frac{p \times k}{q}$$

Situação 8

Determine a divisão $\frac{2}{5} \div 3$.

Resposta comentada:

A fração $\frac{2}{5}$ representa a quantidade que resulta da operação de dividir 1 inteiro em 5 partes iguais e tomar 2 dessas partes. Se queremos dividir esta quantidade por 3, devemos dividir cada uma das partes em 3. Assim, a unidade será dividida em $5 \times 3 = 15$ partes. Em seguida, tomamos 2 dessas partes, equivalentes a um terço das partes que haviam sido tomadas no início. Isto é:

$$\frac{2}{5} \div 3 = \frac{2}{5 \times 3} = \frac{2}{15}$$

// atenção

De forma geral, para dividir uma fração $\frac{p}{q}$ por um número inteiro k , devemos manter o numerador e multiplicar o denominador por k .

$$\frac{p}{q} \div k = \frac{p}{q \times k}$$

Situação 9

Determine a multiplicação $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4}$.

Resposta comentada:

Para representar essa multiplicação, apresentamos uma interpretação geométrica a partir de um quadrado cuja medida do lado representa a unidade de comprimento, que utilizaremos como referência do todo.

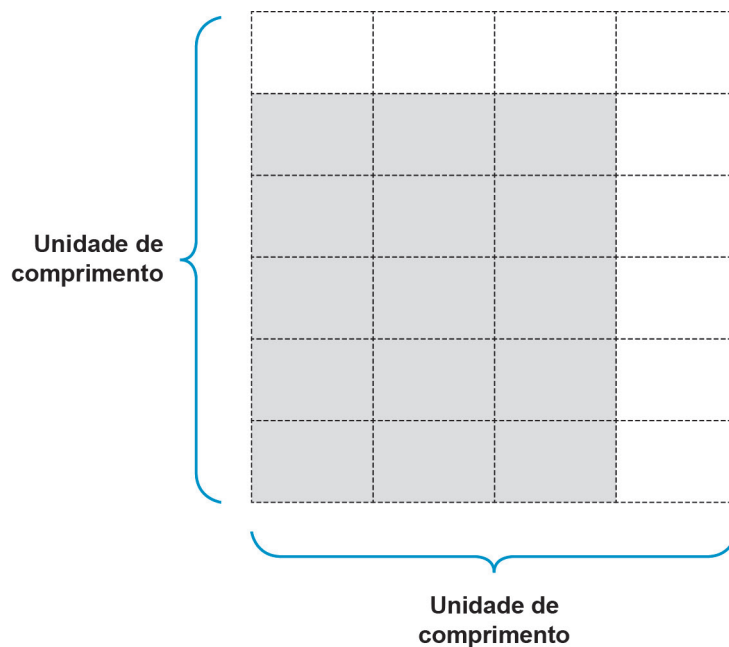


Figura 2.5: quadrado de lado unitário.

O lado referente à altura foi dividido em 6 partes, das quais 5 foram tomadas, representando, assim, $\frac{5}{6}$. Já o lado referente à base, foi dividido em 4 partes, das quais 3 foram tomadas, representando, assim, $\frac{3}{4}$.

Assim, o quadrado foi dividido em 24 partes iguais, das quais 15 serão tomadas a partir da representação acima, ou seja, refere-se à fração $\frac{15}{24}$.

Tal interpretação é compatível com a obtenção da medida da área de um retângulo com lados que medem $\frac{5}{6}$ e $\frac{3}{4}$. Dessa maneira:

$$\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{6 \times 4} = \frac{15}{24}$$

// atenção

Outra maneira de interpretar a multiplicação de duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ consiste em pensar que é o mesmo que multiplicar $\frac{a}{b}$ por c e, em seguida, dividir por d . Assim, temos, pelas situações 7 e 8 que descrevemos anteriormente, que:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times c \div d = \frac{a \times c}{b} \div d = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Ou seja, para multiplicar duas frações, multiplicamos numerador por numerador e denominador por denominador. Observe que, diferentemente do que ocorre com a adição e a subtração, para multiplicar não é necessário igualar os denominadores.

Situação 10

E como seria realizada a divisão $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$?

Resposta comentada:

Consideremos que o resultado da divisão $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$, que ainda não conhecemos, seja $\frac{x}{y}$. Ou seja:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{x}{y}$$

Como multiplicação e divisão são operações inversas, ao multiplicarmos $\frac{x}{y}$ por $\frac{c}{d}$, devemos encontrar novamente $\frac{a}{b}$. Ou seja:

$$\frac{x}{y} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

Multiplicando ambos os lados da expressão por $\frac{d}{c}$, temos:

$$\frac{x}{y} \times \frac{c}{d} \times \frac{d}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

A fração $\frac{d}{c}$ é chamada de inversa de $\frac{c}{d}$, pois $\frac{c}{d} \times \frac{d}{c} = 1$. Então:

$$\frac{x}{y} \times \frac{c}{d} \times \frac{d}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

$$\frac{x}{y} \times 1 = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

// atenção

Ou seja, para dividir duas frações, multiplicamos a primeira fração pela fração inversa da segunda.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Situação 11

Qual é o resultado da potência $\left(\frac{2}{5}\right)^3$?

Resposta comentada:

Para fazer esta operação, pensamos exatamente da mesma maneira que pensamos quando realizamos a potenciação que tem um número natural como base. Isto é, deve-se realizar o produto de 3 fatores, todos iguais a $\frac{2}{5}$. Ou seja:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{2 \times 2 \times 2}{5 \times 5 \times 5} = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$$

// atenção

Ou seja, em potências cuja base é uma fração, realizamos a potenciação do numerador e do denominador com o mesmo expoente da potência original, *como se segue*:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

lá na plataforma

Na Unidade 2 de nosso ambiente virtual, acesse o vídeo que preparamos sobre Números Racionais. Esse vídeo apresenta elementos importantes sobre os números racionais em sua forma fracionária, dialogando diretamente com a discussão que realizamos até aqui e apresentando de maneira resumida os procedimentos referentes às operações.

Resumo

- Números *racionais* são os que podem ser denotados como uma fração em que ambos, numerador e denominador, são números inteiros, sendo o denominador diferente de zero. Todo número racional pode ser escrito na forma decimal além da forma fracionária.
 - Quando escritos na forma decimal, os números racionais ou serão decimais finitos ou dízimas periódicas.
 - *Dízimas periódicas* são representações decimais de números racionais que apresentam uma quantidade infinita de algarismos que, a partir de certa casa decimal, se repetem em grupos de algarismos, sempre na mesma disposição.
 - Uma fração tem infinitas *frações equivalentes* a ela.
 - Todos os procedimentos de operações com frações têm justificativas baseadas em interpretações, características e usos dos números racionais.
-

Atividade

(Uerj 2011) Um supermercado realiza uma promoção com o objetivo de diminuir o consumo de sacolas plásticas: o cliente que não utilizar as sacolas disponíveis no mercado terá um desconto de R\$ 0,03 a cada cinco itens registrados no caixa. Um participante dessa promoção comprou 215 itens e pagou R\$ 155,00. Determine o valor, em reais, que esse cliente pagaria se fizesse as mesmas compras e não participasse da promoção.

lá na plataforma

Na Unidade 2 de nosso ambiente virtual, acesse os demais exercícios de nossa lista sobre números racionais.

Após tentar resolver esses exercícios, verifique as respostas comentadas, que também figuram na Unidade 2 do ambiente virtual.

Quantas vezes menor?

03

meta

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

objetivos

Esperamos que, ao final desta unidade, você seja capaz de:

- utilizar o conceito de razão em diversos contextos como escala, velocidade, porcentagem;
- reconhecer situações que envolvem proporcionalidade em diferentes contextos;
- identificar grandezas direta e inversamente proporcionais;
- resolver problemas variados, envolvendo grandezas direta e inversamente proporcionais.

Introdução

Um cartógrafo é o profissional dedicado à produção de mapas, locais, regionais ou globais, da Terra, da Lua e inclusive dos outros planetas. Eles trabalham com uma visão reduzida do território, de modo que se torna necessário indicar a proporção entre a superfície terrestre e a sua representação. Esta proporção é indicada pela escala.

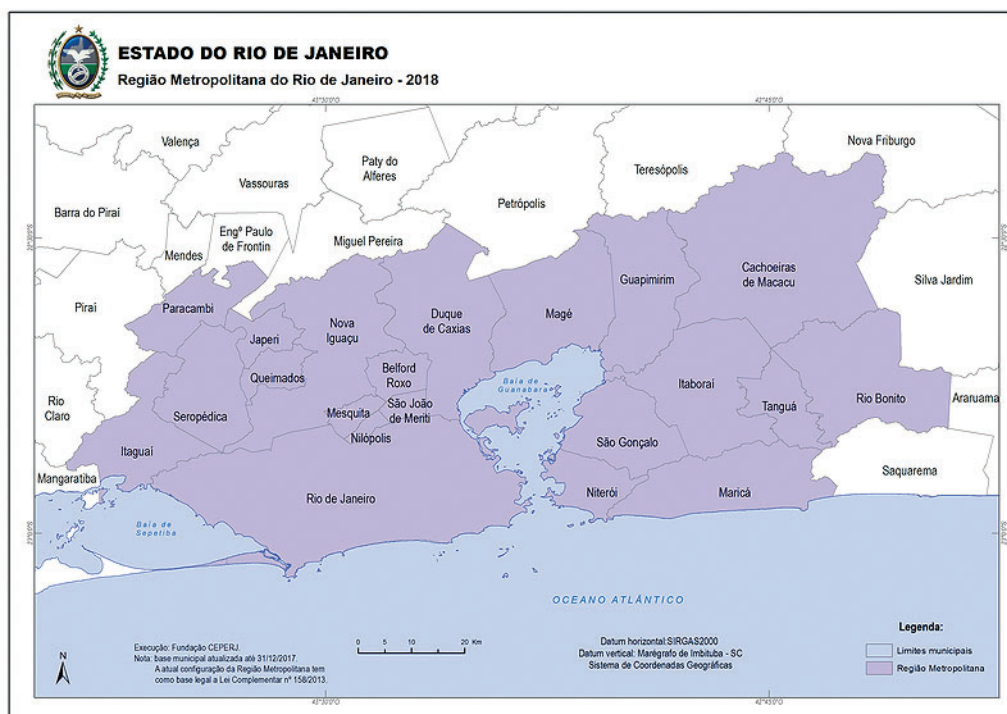


Figura 3.1: Mapa parcial do Rio de Janeiro. Fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Maparj2018RMRJ-Mapa_Região_Metropolitana_do_Rio_de_Janeiro_Brasil-2018.png

Escala

Retomando o que comentamos na introdução, definimos *escala* como a razão entre o tamanho linear de uma *representação* do real e o tamanho linear real.

No caso particular dos mapas, as escalas são definidas de acordo com os assuntos representados neles, podendo ser maiores ou menores, conforme a necessidade de se observar um espaço com maior ou menor nível de detalhamento.

A figura a seguir ilustra 6 miniaturas de um mesmo carro em tamanhos diferentes e suas respectivas escalas. A maior das miniaturas está na escala 1 : 18 (leia-se “um por dezoito”). Isto quer dizer que, no veículo real, todas as medidas de comprimento são 18 vezes maiores do que os comprimentos correspondentes nessa miniatura.

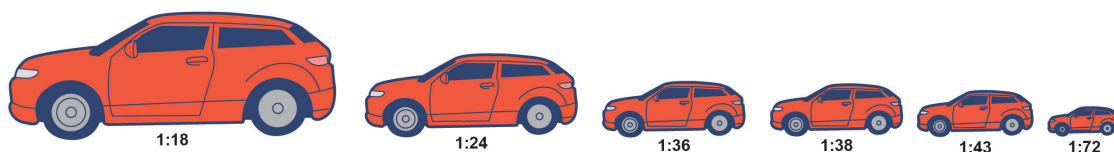


Figura 3.2: Miniaturas de um mesmo carro. Você sabia que as miniaturas trazem a escala na sua parte de baixo?

// atenção

A escala pode ser representada de maneira numérica ou gráfica. A escala numérica indica a relação entre as dimensões do espaço real e do espaço representado, por meio de uma razão.

Por exemplo, numa escala 1 : 100 000, 1 centímetro medido no mapa representa uma distância real de 100 000 centímetros ou 1 quilômetro na superfície terrestre.

Numerador
Comprimento
no mapa

1 : 100 000

Denominador
Comprimento real

Observação: a escala gráfica é a representação de distâncias do terreno sobre uma linha reta graduada. Nela, não há necessidade de mudança de unidades.

Assim, no caso de um desenho ou de um mapa, escala é a razão constante entre medidas do comprimento do que foi desenhado e o comprimento correspondente no objeto real que está sendo representado, ou seja:

$$\text{ESCALA} = \frac{\text{medida do comprimento no desenho}}{\text{medida do comprimento no objeto real}}$$

Situação 1: num mapa, a distância entre duas cidades é de 2 cm. Sabendo que a escala do mapa é de 1 : 2 500 000, calcule a distância entre as duas cidades.

Solução:

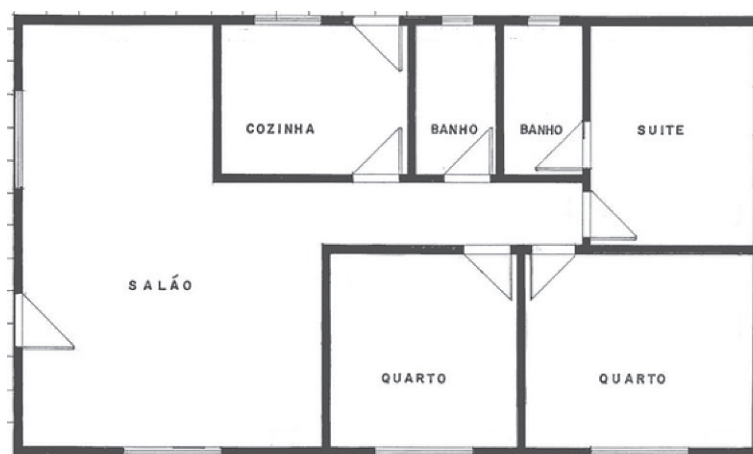
Seja D a distância procurada. Então:

$$\frac{1}{2\,500\,000} = \frac{2\text{ cm}}{D\text{ cm}} \rightarrow D = 5\,000\,000\text{ cm}$$

Note que a aplicação da escala dá uma resposta na mesma unidade, ou seja, em cm. A partir de então – depois de usar a escala – é possível reescrever essa resposta em outra unidade de medida. Mas só se você desejar ou for conveniente. Nesse exemplo, é bastante estranho expressar a distância entre duas cidades em centímetros, sendo conveniente expressá-la em quilômetros.

$$D = 5\,000\,000\text{ cm} = 50\text{ km}$$

Situação 2: indique a escala da seguinte planta de uma casa, sabendo que na realidade, o seu comprimento é 12 metros, e, na figura, é 8 cm.



Solução:

Antes de descobrir a escala, é fundamental escrever ambos os comprimentos na mesma unidade de medida. Vamos escrever 12 metros em centímetros.

$$12\text{ m} = 1200\text{ cm}$$

$$ESCALA = \frac{8\text{ cm}}{1200\text{ cm}} = \frac{1}{150} \rightarrow 1:150$$

lá na plataforma

Na Unidade 3 de nosso ambiente virtual, acesse o vídeo sobre escala cartográfica.

Perceba como esse vídeo ilustra o que discutimos em sala de aula.

Razões

Como vimos, a escala envolve uma relação de comparação entre duas medidas de comprimento. De modo mais geral, chamamos de *razão* o resultado obtido quando se divide os valores que expressam as duas grandezas (nome dado a tudo aquilo que pode ser medido ou contado). Em geral, é utilizada quando se deseja comparar uma das grandezas com a outra.

Essas grandezas podem ser da mesma espécie: por exemplo, se uma garrafa A tiver capacidade de 600 mL e uma garrafa B tiver capacidade de 300 mL, então a razão entre as suas capacidades será $\frac{600}{300} = 2$ ou $\frac{300}{600} = \frac{1}{2}$, indicando que a garrafa A tem o dobro da capacidade da garrafa B (e isto significa que a garrafa B tem a metade da capacidade da garrafa A); comparando, assim, grandezas de mesma espécie (volumes em mililitros).

Há também as razões entre grandezas de espécies diferentes que indicam a taxa de variação de uma delas em relação à outra. É o caso, por exemplo, da velocidade. Quando se escreve 80 km/h, deseja-se expressar, grosso modo, que, em 1 hora, percorre-se 80 km.

// atenção

Considerando duas variáveis reais x e y , tais que $y = f(x)$, a taxa de variação de y em relação à variável x é, em geral, uma forma de medir quão rápido a variável y está mudando à medida que a variável x muda.

lá na plataforma

Na Unidade 3 de nosso ambiente virtual, assista ao vídeo que trata de maneira bastante simplificada os conceitos de variação e de taxa de variação.

Perceba como esse vídeo ilustra o que discutimos em sala de aula.

Observação:

Uma razão particularmente relevante por sua ampla utilização é a *taxa percentual*, que é tomada em relação a 100. Escreve-se $\alpha\% = \frac{\alpha}{100}$. Em problemas, essa razão costuma ser relativa a um valor básico, de modo que, em geral, tem-se $\alpha\%$ de Q , ou seja:

$$\alpha\% \text{ de } Q = \frac{\alpha}{100} \times Q$$

Na próxima unidade deste livro, esse assunto será melhor detalhado.

Proporcionalidade

Considere as situações-problema que se seguem.

Situação 3: uma caixa d'água está furada no fundo. Por causa disso, ela perde 2 litros de água a cada 1 hora. Assim:

- em 1 hora, a quantidade de água perdida é 2 litros;
- em 2 horas, a quantidade de água perdida é 4 litros;
- em 3 horas, a quantidade de água perdida é 6 litros;
- em 4 horas, a quantidade de água perdida é 8 litros; e
- em 5 horas, a quantidade de água perdida é 10 litros.

X (tempo)	0	1	2	3	4	5
Y (quantidade de água perdida)	0	2	4	6	8	10

Pense: como calcular a quantidade de água perdida pela caixa d'água em apenas meia hora?

Solução:

Embora não haja na tabela a indicação do valor de Y para $X = 0,5$, é possível intuir que, nesse caso, Y é 1 litro.

Situação 4: Fabinho quer cortar a grama de um terreno de $1\,600\text{ m}^2$ e, para isso, vai contratar profissionais. Cada cortador consegue cortar, em média, 400 m^2 em um único dia. Vamos construir uma tabela a fim de representar a situação: se Fabinho contratar apenas um cortador de grama profissional, quanto tempo ele levará para cortar toda a grama? E se ele contratasse dois? E se contratasse quatro?

Solução:

- para $X = 1$, ou seja, com 1 cortador, em cada dia serão cortados 400 m^2 de grama; sendo necessários, pois, $1\,600 / 400 = 4$ dias. Logo, $Y = 4$;
- para $X = 2$, ou seja, com 2 cortadores, em cada dia serão cortados 800 m^2 de grama; sendo necessários, pois, $1\,600 / 800 = 2$ dias. Logo, $Y = 2$;
- para $X = 3$, ou seja, com 3 cortadores, em cada dia serão cortados $1\,200\text{ m}^2$ de grama; sendo necessários, pois, $1\,600 / 1\,200 = 4/3$ dias. Logo, $Y = 4/3$;

- para $X = 4$, ou seja, com 4 cortadores, em cada dia serão cortados $1\,600\text{ m}^2$ de grama; sendo necessário, pois, $1\,600 / 1\,600 = 1$ dia. Logo, $Y = 1$;
- para $X = 5$, ou seja, com 5 cortadores, em cada dia serão cortados $2\,000\text{ m}^2$ de grama; sendo necessários, pois, $1\,600 / 2\,000 = 4/5$ dia. Logo, $Y = 4/5$.

A tabela ficaria assim:

X	1	2	3	4	5	...
Y	4	2	4/3	1	4/5	...

Observe agora a tabela com os valores invertidos de Y:

X	1	2	3	4	5	...
1/Y	1/4	1/2	3/4	1	5/4	...

Proporcionalidade direta

Diremos que duas grandezas X e Y são *diretamente proporcionais* (escreve-se: $Y \propto X$) se, e somente se, existir um número real $a > 0$ de modo que:

$$Y = a \times X$$

Decorre dessa definição que, *se o valor de uma das grandezas dobrar, o mesmo acontecerá com a outra grandeza; se o valor de uma das grandezas triplicar, também triplicará a outra grandeza. Geralmente, se uma das grandezas for multiplicada por um número natural “n”, o mesmo acontecerá com a outra.*

Observação:

A condição anterior é suficiente para garantir a proporcionalidade direta. Esta afirmação é o *teorema fundamental da proporcionalidade*.

Decorre da definição que:

$$X \propto Y \Rightarrow \frac{Y}{X} = \text{constante}$$

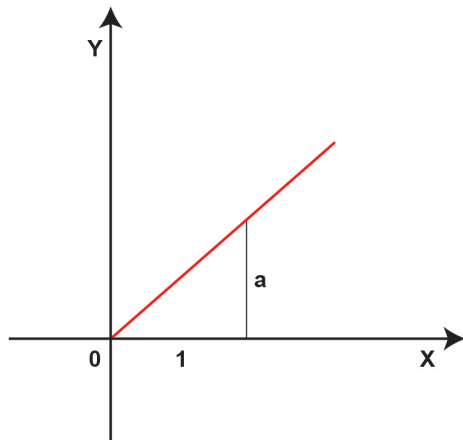


Figura 3.3: Considerando um sistema cartesiano ortogonal, a representação gráfica da relação entre X e Y será uma reta que contém a origem $(0; 0)$ e tal que, para cada deslocamento de 1 unidade na horizontal, ocorrerá um deslocamento de a unidades na vertical.

Proporcionalidade inversa

Diremos que duas grandezas X e Y são *inversamente proporcionais* quando Y e $1/X$ forem diretamente proporcionais (escreve-se $Y \propto 1/X$), ou seja, quando existir um número real $a > 0$ de modo que:

$$Y = a \times \frac{1}{X}$$

(Lê-se: “ Y e X são grandezas inversamente proporcionais”).

Isto equivale a ter X e Y relacionadas por meio de uma função decrescente f , de modo que:

$$Y = f(X) = \frac{a}{X} \text{ (para algum número real } a > 0 \text{)}$$

Decorre dessa definição que, *se uma das grandezas dobrar, a outra deverá ser reduzida à metade; se uma das grandezas triplicar, a outra deverá ser reduzida à terça parte; geralmente, se uma das grandezas for multiplicada por um número natural “ n ”, a outra grandeza será dividida pelo mesmo número natural “ n ”.*

Observação:

A condição anterior é suficiente para garantir a proporcionalidade inversa. Esta afirmação também decorre do *teorema fundamental da proporcionalidade*.

Assim:

$$Y \propto \frac{1}{X} \Rightarrow X \times Y = \text{constante}$$

(lê-se: “ X é inversamente proporcional a Y , assim como o produto de X e Y é constante”).

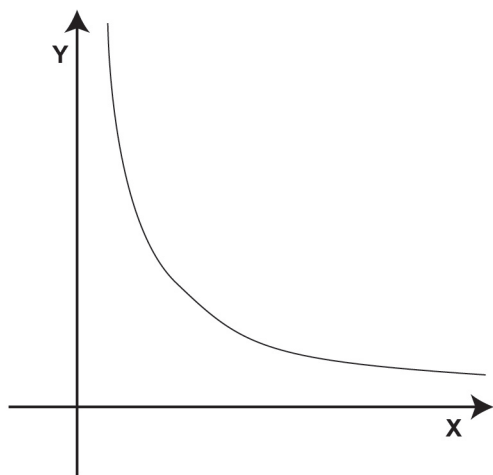


Figura 3.4: Considerando um sistema cartesiano ortogonal, a representação gráfica da relação entre X e Y será uma curva denominada hipérbole. Essa curva jamais intersectará o eixo horizontal, embora fique cada vez mais próxima dele, à medida que X assumia valores cada vez maiores.

Vejamos alguns exemplos.

Situação 5: uma firma de engenharia asfaltou uma estrada de 36 km , em 14 dias. Quantos dias seriam necessários para a mesma firma asfaltar uma estrada de 54 km ?

Solução:

Para encontrar a solução, consideremos as grandezas C (comprimento da estrada, em km) e t (tempo, em dias). Note que, para cada valor de t , corresponde um único valor de C , de sorte que, quando dobramos, triplicamos, quadruplicamos e assim sucessivamente, a variável t , da mesma forma, C dobra, triplica, quadruplica etc. Portanto, C e t são grandezas diretamente proporcionais e, por conseguinte, existe um número real $a > 0$ tal que $C = a \times t$ (função linear). Assim:

- “asfalta 36 km em 14 dias”, ou seja:

$$36 = a \times 14 \Rightarrow a = \frac{36}{14} = \frac{18}{7}$$

- “asfalta 54 km em x dias”, ou seja:

$$\frac{54}{x} = \frac{18}{7} \Rightarrow x = \frac{7 \times 54}{18} = 21$$

Situação 6: Se três torneiras de mesma vazão conseguem encher um tanque em 2 horas, quanto tempo demorará para se encher esse tanque quando uma das torneiras não for aberta?

Solução:

Consideremos as grandezas t (tempo, em horas) e N (número de torneiras). Note que, para cada valor de N , corresponde um único valor de t ; de sorte que, quando dobramos, triplicamos, quadruplicamos e assim sucessivamente, a variável N , t reduz-se à metade, à terça parte, à quarta parte etc., respectivamente. Portanto, C e t são grandezas inversamente proporcionais e, por conseguinte, existe um número real $a > 0$ tal que $t = a/N$. Assim:

- “3 torneiras gastam 2 h”, ou seja:

$$2 = \frac{a}{3} \Rightarrow a = 6$$

- “2 torneiras gastam x h”, ou seja:

$$x = \frac{6}{2} \Rightarrow x = 3$$

Situação 7: como dividir 360 em três partes que sejam respectivamente proporcionais a 2, 3 e 5?

Solução:

Chamando essas partes de A, B e C, temos que atender às seguintes condições: $A + B + C = 360$

Existe um número real $t > 0$, tal que: $A = 2t$, $B = 3t$ e $C = 5t$.

Então:

$$2t + 3t + 5t = 360 \Rightarrow t = 36$$

$$A = 36 \times (2) = 72$$

$$B = 36 \times (3) = 108$$

$$C = 36 \times (5) = 180$$

Situação 8: Como dividir 360 em duas partes que sejam inversamente proporcionais a 2 e 3?

Solução:

Chamando essas partes de A e B, temos que atender às seguintes condições: $A + B = 360$

Existe um número real $t > 0$, tal que: $A = t/2$ e $B = t/3$.

Então:

$$\frac{t}{2} + \frac{t}{3} = 360$$

Resolvendo a equação, multiplicamos ambos os membros por 6 (que é o MMC entre os denominadores 2 e 3), temos $3t + 2t = 360 \cdot 6$

$$\frac{t}{2} + \frac{t}{3} = 360 \Rightarrow 5t = 6 \times 360 \Rightarrow t = 432$$

$$A = \frac{432}{2} = 216$$

$$B = \frac{432}{3} = 144$$

// atenção

Considerando três grandezas X , Y e Z interrelacionadas, diremos que Z será diretamente proporcional a X e inversamente a Y , se e somente se existir um número real $c > 0$, tal que:

$$Z = c \times \frac{X}{Y}$$

Por exemplo, a Lei da Gravitação Universal, formulada por Sir Isaac Newton, explica por que nos mantemos presos à Terra, ao invés de despencarmos pelo Universo. Sua redação é apresentada a seguir:

“Dados dois corpos de massas respectivamente iguais a m e M , a uma distância d entre si, esses dois corpos se atraem mutuamente com uma força cuja intensidade F é proporcional à massa de cada um deles e inversamente proporcional ao quadrado da distância que separa esses corpos.”

Representando a constante por G (denominada de constante de gravitação universal), a formulação matemática da Lei da Gravitação Universal fica da seguinte forma:

$$F = G \times \frac{M \times m}{d^2}$$

Considere, para ilustrar, a seguinte situação-problema.

Situação 9: para pavimentar 48 m de estrada foram precisos 8 trabalhadores, durante 15 dias de 10 horas. Quantos dias de 12 horas serão necessários para 6 trabalhadores pavimentarem 96 m?

Solução:

Representando por D o número de dias trabalhados, por C , o comprimento da estrada, por T , o número de trabalhadores e, por J , a jornada de trabalho, temos $D = f(C; T; J)$ e verificamos que:

$$D \propto C$$

$$D \propto 1/T$$

$$D \propto 1/J.$$

Com efeito,

- dobrando, triplicando, quadruplicando, e assim sucessivamente, o valor de C , o valor de D dobra, triplica, quadruplica etc. Ou seja, para k inteiro e positivo, tem-se $D = k \times C$;

- dobrando, triplicando, quadruplicando, e assim sucessivamente, o valor de T , o valor de D reduz-se à metade, à terça parte, à quarta parte etc. Ou seja, para m inteiro e positivo, tem-se $D = m/T$;
- dobrando, triplicando, quadruplicando, e assim sucessivamente, o valor de J , o valor de D reduz-se à metade, à terça parte, à quarta parte etc. Ou seja, para n inteiro e positivo, tem-se $D = n/J$.

Portanto, existe um número real $\lambda > 0$ (leia-se: “lâmbda maior que zero”), de modo que:

$$D = \lambda \times \frac{C}{T \times J}$$

Acarretando:

- a informação de que “8 trabalhadores, durante 15 dias de 10 horas, pavimentam 48 m” leva a:

$$15 = \lambda \times \frac{48}{8 \times 10} \Rightarrow \lambda = \frac{8 \times 10 \times 15}{48} = 25$$

- a informação de que “x dias de 12 horas serão necessários para 6 trabalhadores pavimentarem 96 m” leva a:

$$x = 25 \times \frac{96}{6 \times 12} \Rightarrow x \approx 34$$

>> saiba mais

Bifes na chapa

O material que sugerimos encontra-se em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1302> e mostra como um jovem utiliza matemática básica para conseguir assar bifes no menor tempo possível, garantindo um emprego de auxiliar de cozinha em um restaurante.

Fonte: M3 Matemática Multimídia - UNICAMP

Resumo

- Escala

$$\text{ESCALA} = \frac{\text{medida do comprimento no desenho}}{\text{medida do comprimento no objeto real}}$$

- Razão

Sendo A e B duas grandezas; B , diferente de 0; A/B , a razão entre elas; se A e B são de mesma natureza, a razão representa uma *comparação*; se são de naturezas diferentes, expressa, em geral, uma *taxa de variação*. Quando $B = 100$, $A/100$ também é dita uma taxa percentual.

- Grandezas diretamente proporcionais

A e B serão diretamente proporcionais quando dobrando, triplicando, quadruplicando, quintuplicando, etc. a grandeza A , o valor da grandeza B dobrará, triplicará, quadruplicará, quintuplicará etc. Nesse caso, existirá um número real fixo $k > 0$, de tal modo que $B = k \times A$.

- Grandezas inversamente proporcionais

A e B serão inversamente proporcionais quando dobrando, triplicando, quadruplicando, quintuplicando etc. a grandeza A , o valor da grandeza B reduzir-se-á à metade, à terça parte, à quarta parte, à quinta parte etc. Nesse caso, existirá um número real fixo $k > 0$, de tal modo que $A \times B = k$.

Sendo A , B e C três grandezas, diremos que C é diretamente proporcional a A e inversamente proporcional a B , quando existir um número real fixo $k > 0$, de tal modo que $C = k \times A/B$.

Atividade

(ENEM 2017-PPL - Reproduzida)

O estado de qualquer substância gasosa é determinado pela medida de três grandezas: o volume (V), a pressão (P) e a temperatura (T) dessa substância. Para os chamados gases ideais, o valor do quociente $\frac{P \times V}{T}$ é sempre constante. Considere um reservatório que está cheio de um gás ideal. Sem vaziar o gás, realiza-se uma compressão do reservatório, reduzindo seu volume à metade. Ao mesmo tempo, uma fonte de calor faz a temperatura do gás ser quadruplicada. Considere P_0 e P_1 , respectivamente, os valores da pressão do gás no reservatório, antes e depois do procedimento descrito.

A relação entre P_0 e P_1 é:

a) $P_1 = \frac{P_0}{8}$

b) $P_1 = \frac{P_0}{2}$

c) $P_1 = P_0$

d) $P_1 = 2P_0$

e) $P_1 = 8P_0$

lá na plataforma

Na Unidade 3 de nosso ambiente virtual, acesse a lista de exercícios sobre escalas, razão e proporção.

Após tentar resolver esses exercícios, verifique as respostas comentadas, que também estarão no tema 3, da Unidade 3, do ambiente virtual.

Referências

IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (Ed.). *Atlas Escolar*. 2021. Elaborado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em: <https://atlasescolar.ibge.gov.br/conceitos-gerais/o-que-e-cartografia/escala.html>. Acesso em: 17 maio 2021.

Quantos por cento maior?

04

meta

Discutir os usos da porcentagem, relacionando a diversidade de procedimentos de cálculo utilizados no cotidiano com aqueles formalizados na matemática escolar.

objetivos

Esperamos que, ao final desta unidade, você seja capaz de:

- representar os números racionais como frações cujo denominador é 100;
- relacionar o uso de porcentagem com frações cujo denominador é 100;
- analisar e desenvolver problemas que envolvam porcentagem;
- identificar procedimentos diversos para calcular porcentagem, relacionando-os com outros procedimentos formalizados anteriormente.

Introdução

Você, com certeza, já deve ter se deparado com situações nas quais descontos ou aumentos são aplicados em um valor a ser pago ou recebido. Isso é muito comum em contextos de promoções em lojas físicas e em sites de compras; nos contracheques, em que os descontos costumam se referir à previdência ou ao imposto de renda e os aumentos, aos reajustes salariais; em contas, nas quais os aumentos são referentes às multas por atraso no pagamento.

Em cada um desses casos, é muito provável que tais descontos e aumentos sejam dados por valores percentuais, ou seja, utilizando o cálculo da porcentagem. Por exemplo, pode ser oferecido um “desconto de 30 por cento em cada peça oferecida por uma loja de roupas”, ou reajustado um “aumento salarial de 12 por cento”. Mas o que significa o termo

porcentagem porcentagem?

Palavra originada do latim per centum, ou seja, refere-se “a cada centena”, ou a “por cento”. Consiste em uma fração cujo denominador é 100 e é representada pelo símbolo %.

Assim, por exemplo, um aumento salarial de 12%, significa um aumento de 12 reais a cada 100 reais que compunham o salário anterior. Dessa forma, se um trabalhador que recebia R\$ 2.000,00 ($20 \times \text{R\$ } 100,00$) obtiver um aumento de 12% em seu salário, então ele terá R\$ 240,00 ($20 \times \text{R\$ } 12,00$) de aumento. Ou seja, seu novo salário será de R\$ 2.240,00.

Porcentagem

Agora que falamos brevemente sobre o que significa porcentagem, podemos discutir um pouco mais sobre formas de calcular. Para isso, utilizaremos as situações abaixo com resoluções comentadas.

Situação 1: uma loja de roupas oferece desconto de 30% no valor original de cada peça. Quanto um cliente pagará em uma calça que custava R\$ 250,00?

Solução A: utilizando a ideia discutida na introdução desta unidade, temos que descontar 30 reais a cada 100 reais do valor.



Figura 4.1: Quanto tenho que descontar dos 50 reais?

Repare que dividimos o valor original em duas parcelas de R\$ 100,00 e uma de R\$ 50,00. Após descontarmos R\$ 30,00 reais a cada R\$ 100,00, temos que proceder com o desconto relativo à parte do valor que não completa R\$ 100,00. Faremos isso de maneira proporcional: se 30% de 100 reais é 30 reais, então 30% de 50 reais, que é metade de 100 reais, será a metade de 30 reais; isto é, 30% de 50 reais é equivalente a 15 reais.

Assim, o desconto que será dado no valor original da calça será a soma dos descontos que fizemos em cada parte do valor: R\$ 30,00 + R\$ 30,00 + R\$ 15,00 = R\$ 75,00.

Por fim, para saber o valor que o cliente pagará basta fazer: R\$ 250,00 – R\$ 75,00 = R\$ 175,00.

Solução B: utilizando a ideia de que 30% equivale à fração $\frac{30}{100}$, podemos resolver o problema de outra forma. Basta pensarmos que 30% de 250 (vamos chamar de x) e 250 são proporcionais a 30 e 100, respectivamente. Assim, igualamos as razões entre os valores:

$$\frac{30}{100} = \frac{x}{250}$$

E procedemos com a resolução dessa equação:

$$\begin{aligned} 100x &= 30 \times 250 \\ x &= \frac{30 \times 250}{100} \\ x &= 3 \times 25 \\ x &= 75 \end{aligned}$$

O desconto será de R\$ 75,00. Por fim, para saber o valor que o cliente pagará basta fazer: R\$ 250,00 – R\$ 75,00 = R\$ 175,00.

Solução C: como se deseja fazer um desconto de 30%, isto significa que o valor que será pago pelo cliente equivale a 70% do valor original (100% – 30%). Assim, podemos utilizar a ideia que já foi apresentada na Unidade 03 desse livro:

$$\% \text{ de } Q = \frac{\alpha}{100} \times Q$$

Neste caso, devemos calcular:

$$\begin{aligned} 70\% \text{ de } 250 &= \frac{70}{100} \times 250 \\ &= \frac{70 \times 250}{100} = 7 \times 25 = 175 \end{aligned}$$

Ou seja, o cliente pagará R\$ 175,00 pela calça.

Pergunta 1: qual das resoluções apresentadas na Situação 1 se assemelha mais com os cálculos que você faz no cotidiano para calcular uma porcentagem?

lá na plataforma

Na Unidade 04 de nosso ambiente virtual, acesse o vídeo com o episódio 246 do programa Hora do ENEM, da TV Escola.

Perceba como esse episódio dialoga diretamente com a discussão sobre porcentagem que estamos fazendo aqui, além de dar dicas sobre como se organizar com os estudos em matemática.

Situação 2: um site de compras oferece desconto de 20% no valor original de todos os produtos. Além disso, aos clientes que fazem aniversário no mês, é oferecido outro desconto adicional de 10% no valor final.

- Qual é o desconto final dado aos clientes aniversariantes do mês, em relação ao valor original do produto?
- Quanto um cliente aniversariante do mês pagará por uma compra de produtos cujo valor original total é R\$ 480,00?
- Um cliente, que não é aniversariante do mês, pagou R\$ 556,00 por um produto desse site. Qual era o valor original do produto?

Solução:

- Nesse caso, não podemos simplesmente somar os percentuais de desconto. Vamos verificar o porquê? Considere que V é o valor original de um produto. Com o desconto de 20%, sabemos que o novo valor do produto passa a ser 80% de V , ou seja, $\frac{80}{100} \times V$.

// atenção

Repare que 80% pode ser representado de diversas formas. As que figuram abaixo são exemplos mais diretos. Pense em outras frações e representações decimais que sejam equivalentes a 80% e registre ao lado das que seguem.

$$\frac{80}{100} \quad \frac{8}{10} \quad 0,80 \quad 0,8$$

Prosseguindo, o desconto adicional de 10% é realizado sobre $\frac{80}{100} \times V$. Ou seja, o valor final será:

$$\begin{aligned}
 90\% \text{ de } \frac{80}{100} \times V &= \frac{90}{100} \times \frac{80}{100} \times V \\
 &= \frac{9}{10} \times \frac{8}{10} \times V \\
 &= \frac{72}{100} \times V
 \end{aligned}$$

Como $\frac{72}{100} \times V = 72\% \text{ de } V$, temos que o desconto final foi de $100\% - 72\% = 28\%$.

b) Já sabemos que um cliente aniversariante do mês terá um desconto total de 28% no valor original dos produtos. Assim, o valor final a ser pago será de 72% ($100\% - 28\%$) do valor original V . Sendo $V = \text{R\$ } 480,00$, temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{72}{100} \times V &= \frac{72}{100} \times 480 \\
 &= \frac{72 \times 48}{10} = \frac{3456}{10} = 345,6
 \end{aligned}$$

Portanto, como estamos lidando com unidade monetária, representamos o valor com duas casas decimais na parte não inteira, isto é, R\$ 345,60 será o valor final a ser pago.

// atenção

Perceba que realizar um desconto de 28% é equivalente a multiplicar o valor anterior por $\frac{72}{100}$, que é igual a $1 - \frac{28}{100} = 1 - 0,28 = 0,72$.

Ou seja, se deseja fazer um desconto percentual de $\alpha\%$ de um valor V , basta multiplicá-lo por $(1 - \alpha\%)$. Nesse caso, pode optar por usar na forma $1 - \frac{\alpha}{100}$ ou passar para a representação decimal.

c) Como se trata de um cliente não aniversariante do mês, ele terá desconto de apenas 20%. Dessa forma, o valor pago por ele, de R\$ 556,00, corresponde a 80% do valor original do produto. Sendo V o valor original, temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{80}{100} \times V &= 556 \Rightarrow \frac{8}{10} \times V = 556 \\
 V &= \frac{556 \times 10}{8} \Rightarrow V = \frac{5560}{8} \\
 V &= 695
 \end{aligned}$$

O valor original do produto era R\$ 695,00.

Pergunta 2: na Situação 2, se os descontos oferecidos fossem realizados em outra ordem, primeiro os 10% e depois os 20%, o desconto final ainda seria o mesmo que foi encontrado no item (a)? Justifique.

Situação 3: uma funcionária de uma empresa recebeu, em janeiro de 2019, um aumento de 12% em seu salário mensal. Em dezembro do mesmo ano, foi promovida e recebeu um novo aumento: agora, de 18% sobre o salário vigente. Qual foi o percentual de aumento do salário da funcionária, em relação ao que recebia em dezembro de 2018?

Solução: da mesma forma que procedemos na situação anterior, não devemos somar os percentuais de aumento. Assim, se o salário da funcionária em dezembro de 2018 era S , no mês seguinte passará a ser:

$$\begin{aligned} S + 12\% \text{ de } S &= S + \frac{12}{100} \times S \\ &= S + 0,12 \times S \\ &= 1,12 \times S \end{aligned}$$

Ou seja, o valor do salário em janeiro de 2019 será o anterior multiplicado por 1,12.

// atenção

Perceba que realizar um aumento de 12% é equivalente a multiplicar o valor anterior por 1,12, que é igual a $1 + 0,12 = 1 + \frac{12}{100}$.

Ou seja, se deseja fazer um aumento percentual de $\alpha\%$ de um valor V , basta multiplicá-lo por $(1 + \alpha\%)$.

Nesse caso, pode optar por usar na forma $1 + \frac{\alpha}{100}$ ou passar para a representação decimal.

Prosseguindo, podemos aplicar o mesmo procedimento no salário de $1,12 \times S$ a partir do novo aumento:

$$\begin{aligned} (1,12 \times S) + 18\% \text{ de } (1,12 \times S) \\ &= (1,12 \times S) + 0,18 \times (1,12 \times S) \\ &= (1,12 \times S) + 0,2016 \times S \\ &= 1,3216 \times S \end{aligned}$$

Assim, temos que o novo salário equivale ao salário de dezembro de 2018 multiplicado por 1,3216, que é igual a:

$$1,3216 \times S = \left(1 + \frac{3216}{10000}\right) \times S$$

$$= \left(1 + \frac{32,16}{100}\right) \times S$$

Portanto, o aumento salarial da funcionária em relação ao que recebia em dezembro de 2018 foi de 32,16%.

Pergunta 3: se um funcionário tem uma redução salarial de 20% e, meses depois, recebe um aumento de 20% sobre o salário vigente, seu salário volta a ter valor anterior à redução? Justifique.

Porcentagem nas provas de vestibulares e ENEM

Porcentagem é um assunto muito comum em provas de vestibulares e no ENEM. A partir de um levantamento feito pelo site <http://www.professoresdematematica.com.br>, foi verificado que 7,9% das questões de matemática das provas do ENEM, de 2013 até 2019, versaram sobre porcentagem. Tal fato mostra que, para além de se tratar de um tema muito presente em nosso cotidiano, o tema é relevante no contexto de preparação para realização de provas de acesso ao ensino superior. Assim, apresentaremos a seguir algumas questões de vestibulares e do ENEM para que você pratique um pouco.

1. (VESTIBULAR CEDERJ 2017-2) Durante os dois últimos anos, o carro de Ana sofreu uma depreciação de 20% ao ano. Sendo P o valor do carro há dois anos, qual o valor atual de mercado do carro de Ana?

- | | |
|-------------|-------------|
| a) 64% de P | c) 40% de P |
| b) 60% de P | d) 36% de P |

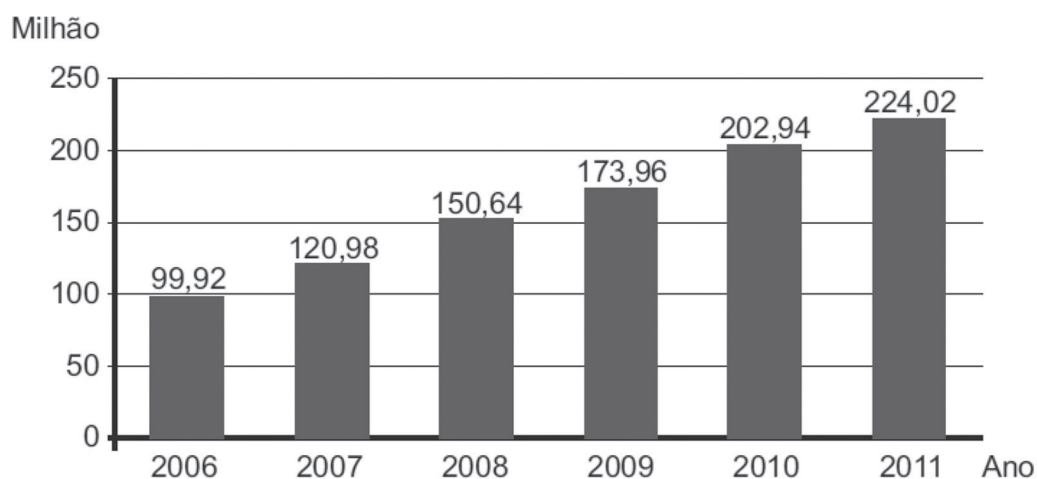
2. (ENEM 2019) Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), o rendimento médio mensal dos trabalhadores brasileiros, no ano 2000, era de R\$ 1.250,00. O Censo, em 2010, mostrou que esse valor teve um aumento de 7,2% em relação a 2000. Esse mesmo instituto projeta que, em 2020, o rendimento médio mensal dos trabalhadores brasileiros poderá ser 10% maior do que foi em 2010. Supondo que as projeções do IBGE se realizem, o rendimento médio mensal dos brasileiros em 2020 será de:

- | | |
|------------------|------------------|
| a) R\$ 1.340,00. | d) R\$ 1.465,00. |
| b) R\$ 1.349,00. | e) R\$ 1.474,00. |
| c) R\$ 1.375,00. | |

>> saiba mais

Para uma resolução comentada da Questão 2, acesse: https://www.youtube.com/watch?v=EUrG_dlm1LI

3. (ENEM 2017) O gráfico mostra a expansão da base de assinantes de telefonia celular no Brasil, em milhões de unidades, no período de 2006 a 2011.



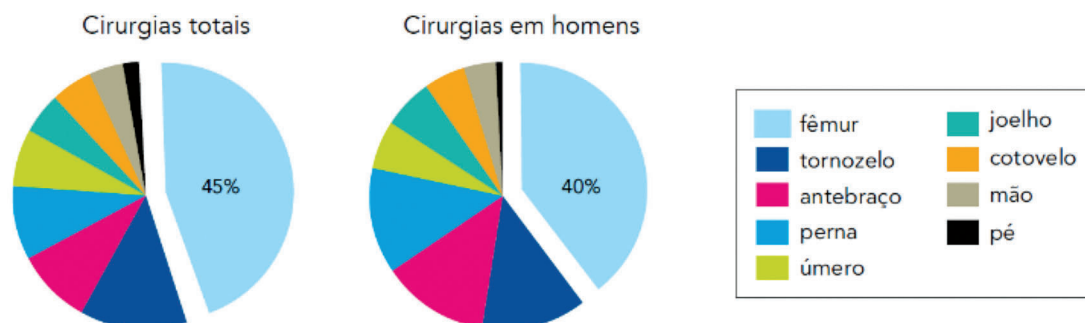
De acordo com o gráfico, a taxa de crescimento do número de aparelhos celulares no Brasil, de 2007 para 2011, foi de:

- a) 8,53%
- b) 85,17%
- c) 103,04%
- d) 185,17%
- e) 345,00%

>> saiba mais

Para uma solução comentada da questão, acesse: <https://www.youtube.com/watch?v=gu4GnvVmTFY>

4. (UERJ 2017) No mapa mensal de um hospital, foi registrado o total de 800 cirurgias ortopédicas, sendo 440 em homens, conforme os gráficos abaixo.



De acordo com esses dados, o número total de cirurgias de fêmur realizadas em mulheres foi:

- a) 144 c) 184
b) 162 d) 190

5. (ENEM 2018) O colesterol total de uma pessoa é obtido pela soma da taxa do seu “colesterol bom” com a taxa do seu “colesterol ruim”. Os exames periódicos, realizados em um paciente adulto, apresentaram taxa normal de “colesterol bom”, porém, taxa do “colesterol ruim” (também chamado LDL) de 280 mg/dL . O quadro apresenta uma classificação de acordo com as taxas de LDL em adultos.

Taxa de LDL (mg/dL)	
Ótima	Menor do que 100
Próxima de ótima	De 100 a 129
Limite	De 130 a 159
Alta	De 160 a 189
Muito alta	190 ou mais

Disponível em: www.minhavidacom.br. Acesso em 15 out. 2015 (adaptado).

O paciente, seguindo as recomendações médicas sobre estilo de vida e alimentação, realizou o exame logo após o primeiro mês, e a taxa de LDL reduziu 25%. No mês seguinte, realizou novo exame e constatou uma redução de mais 20% na taxa de LDL. De acordo com o resultado do segundo exame, a classificação da taxa de LDL do paciente é

- a) ótima. d) alta.
b) próxima de ótima. e) muito alta.
c) limite.

6. (ENEM 2014) De acordo com a ONU, da água utilizada diariamente:

- 25% são para tomar banho, lavar as mãos e escovar os dentes.
- 33% são utilizados em descarga de banheiro.
- 27% são para cozinhar e beber.
- 15% são para demais atividades.

No Brasil, o consumo de água por pessoa chega, em média, a 200 litros por dia. O quadro mostra sugestões de consumo moderado de água por pessoa, por dia, em algumas atividades.

Atividade	Consumo total de água na atividade (em litros)
Tomar banho	24,0
Dar descarga	18,0
Lavar as mãos	3,2
Escovar os dentes	2,4
Beber e cozinhar	22,0

Se cada brasileiro adotar o consumo de água indicado no quadro, mantendo o mesmo consumo nas demais atividades, então economizará diariamente, em média, em litros de água,

- a) 30,0.
- b) 69,6.
- c) 100,4.
- d) 130,4.
- e) 170,0.

Resumo

- Porcentagem consiste em uma fração cujo denominador é 100.
- Um aumento de $\alpha\%$ significa que, a cada 100 unidades, aumenta-se α unidades.
- Um desconto de $\alpha\%$ significa que, a cada 100 unidades, desconta-se α unidades.
- Um aumento percentual de $\alpha\%$ de um valor V equivale a realizar $(1 + \alpha\%) \times V$ ou $(1 + \frac{\alpha}{100}) \times V$.
- Um desconto percentual de $\alpha\%$ de um valor V equivale a realizar $(1 - \alpha\%) \times V$ ou $(1 - \frac{\alpha}{100}) \times V$.

lá na plataforma

Na Unidade 4 de nosso ambiente virtual, acesse o arquivo com as respostas comentadas das Perguntas 2 e 3 e das Questões 1, 4, 5, e 6.

Mas só acesse esse documento depois de tentar resolver as questões.

Referências

YOKOYAMA, Prof. Dr. Leo Akio. *Portal dos Professores de Matemática*. Disponível em: <http://www.professoresdematematica.com.br>. Acesso em: 26 ago. 2021.

A arte de fazer previsões

05

meta

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.

objetivos

Esperamos que, ao final desta unidade, você seja capaz de:

- interpretar situações econômicas, sociais e das Ciências da Natureza que envolvem a variação de duas grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação com ou sem apoio de tecnologias digitais;
- analisar gráficos apresentados em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.

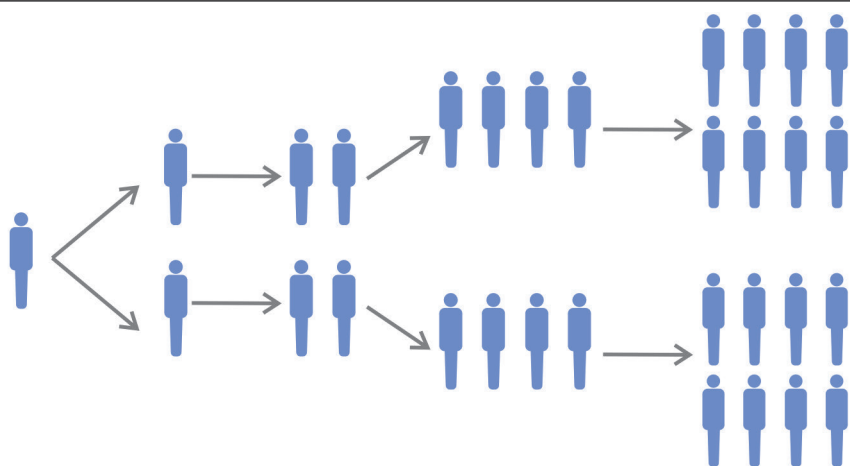
Introdução

Em 2020, vivemos uma situação fortuita de uma pandemia em que se tornou necessário o conhecimento de inúmeras informações acerca do comportamento do vírus que a causou. Dentre essas informações, uma das mais relevantes é a forma como se dá a propagação desse vírus. Em linhas gerais, considerando duas grandezas, tais que variações de uma implicam variações da outra, remete-se ao estudo de funções como meio de atingir um dos grandes objetivos do ensino da Matemática, especificamente no Ensino Médio, que é a construção de uma visão integrada dessa ciência, aplicada à realidade.

Essa forma de lidar com o ensino de Matemática nos conduz a promover ações que estimulem e provoquem, nos estudantes, processos de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar criativos, analíticos, indutivos, dedutivos e sistêmicos e que favoreçam a tomada de decisões orientadas pela ética e o bem comum.

Crescimento exponencial

Com que velocidade o vírus se propaga?



em função de

Expressão empregada com o significado de “de acordo com”, “em conformidade com”, “na dependência de”, “em resultado de”. Podemos empregá-la significando “em consequência de”, ou seja, “em resultado de”. É o que vemos no exemplo: “Em função das (= em consequência, em resultado das) fortes chuvas, o jogo foi adiado.”

Fonte: <https://ciberduvidas.iscte-iul.pt/consultorio/perguntas/em-funcao-de/11576> [adaptado].

Figura 5.1: A Covid-19 se propaga segundo uma função exponencial, que, em linhas gerais, é expressa por uma equação do tipo $f(x) = ax^n + b$.

Dessa forma, podemos dizer que a propagação do coronavírus ocorre de tal modo que o número de pessoas contaminadas cresce **em função do** tempo decorrido.

Vejamos o exemplo seguinte:

Situação 1: ao chegar à rodoviária de uma cidade, Fabinho foi informado de que a corrida de táxi é calculada da seguinte maneira: R\$ 5,20 de bandeirada e R\$ 1,05 por quilômetro rodado. Uma vez que o hotel onde ele se hospedará fica a 35 km da rodoviária, se Fabinho pegar um táxi da rodoviária ao seu hotel, quanto ele vai gastar?

Solução:

A fim de chegar à solução do problema, consideremos a tabela seguinte:

Km rodado	0	1	2	3	4	5	6
Preço	5,20	6,25	7,30	8,35	9,40	10,45	11,50

Essa tabela exhibe uma situação interessante, pois a cada acréscimo de 1 km, corresponde um acréscimo, constante, de R\$ 1,05 no preço da corrida. Se tomarmos as quadrículas alternadamente, veremos que, a cada acréscimo de 2 km, ocorrerá um acréscimo de $2 \times 1,05$ reais no preço da corrida. Mais geralmente, podemos intuir que a cada acréscimo de n km, sendo n um número natural, corresponderá um acréscimo de $n \times 1,05$ reais no preço da corrida. Isso aponta um caminho de solução, pois os 35 km corresponderão a um acréscimo de $35 \times 1,05$ no preço da corrida. Assim, o valor da corrida será: $5,20 + 35 \times 1,05 = 41,95$ reais.

De modo geral, nesse problema, se representarmos o preço da corrida por uma variável (P) e a distância percorrida, em km, por outra variável (d), teremos o seguinte:

- a cada valor da variável d corresponderá um único valor da variável P , ficando assim estabelecida uma relação de dependência entre as variáveis P e d , do tipo: “dado d , tem-se P ”;
- acréscimos unitários a d implicam acréscimos de 1,05 a P , ou ainda, acréscimos de h unidades a d implicam acréscimos de $h \times 1,05$ a P .

A primeira afirmação, grosso modo, que estabelece uma relação de dependência entre as variáveis P e d , indica que há uma *função* associando as variáveis P e d . A segunda afirmação, conforme estudaremos noutra unidade deste livro, estabelece que as variáveis consideradas seguem uma *função afim*. Particularmente, podemos escrever, para P e d , a seguinte equação:

$$P = 5,20 + 1,05 \times d$$

Nela, ficam explícitos:

- o valor (5,20), que corresponde ao preço da corrida quando $d = 0$;
- o acréscimo constante dado a P (1,05), quando são considerados acréscimos unitários em d .

Esses dois números são, respectivamente, chamados de *valor inicial* e *taxa de variação* da função considerada (lembre-se de que falamos sobre isso na Unidade 3).

Com certa dose de intuição (e de boa vontade), podemos considerar essa equação ainda válida, mesmo que tomemos para d valores não naturais.

Por meio da introdução de um sistema de coordenadas cartesianas, podemos estabelecer uma representação para a situação analisada, adotando que $(x; y)$ estará nessa representação, desde que se tenha $y = 5,20 + 1,05x$. Essa representação é mostrada a seguir:

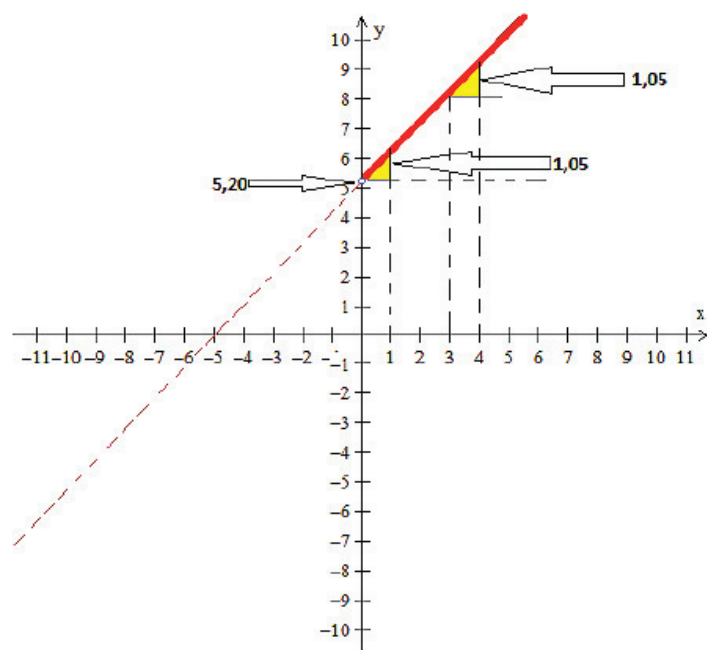


Figura 5.2: Essa representação é denominada de *gráfico da função* considerada, que é necessariamente uma reta, por ser uma função afim. Nesse gráfico, o valor inicial é a ordenada do ponto cuja abscissa vale 0 e a taxa de variação é o acréscimo vertical correspondente ao acréscimo de 1 unidade na horizontal.

Vejamos outro exemplo:

Situação 2: uma caixa d'água está completamente cheia com 1000 litros de água. Em um determinado instante, uma torneira é aberta e, desse modo, são retirados 2 litros de água por hora da caixa d'água.

- Qual será o volume de água na caixa após 24 horas de a torneira ter sido aberta?
- Após quanto tempo de a torneira ter sido aberta, o volume de água na caixa será de 500 litros?
- Após quanto tempo de a torneira ter sido aberta, a caixa d'água estará vazia?

Solução:

Assim como no problema inicial, fazendo uma tabela, temos:

Tempo (t)	0	1	2	3	4	5	6
Volume (V)	1 000	998	996	994	992	990	988

Nesse problema, se representarmos o volume remanescente na caixa d'água, em litros, por uma variável (V) e o tempo decorrido, em horas, por outra variável (t), teremos o seguinte:

- a cada valor da variável t corresponderá um único valor da variável V : há uma função;
- acréscimos unitários em t implicam decréscimos de 2 litros em V : a função é afim (1000 é o valor inicial e -2 é a taxa de variação). Assim, podemos escrever a equação: $V = 1000 - 2 \times t$.

Por meio da introdução de um sistema de coordenadas cartesianas, $(x; y)$ estará no gráfico dessa função, desde que se tenha $y = 1000 - 2 \times x$. Essa representação é mostrada a seguir (numa escala 1 : 100):

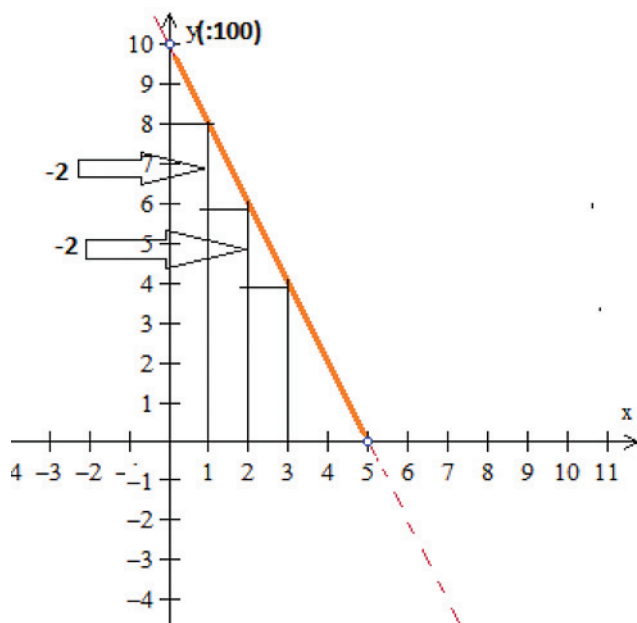


Figura 5.3: Representação gráfica da função caracterizada por $f(x) = 1000 - 2x$.

Resolvendo, temos:

- $V = 1000 - 2 \times 24 = 952$ litros
- $500 = 1000 - 2 \times t \Rightarrow 2t = 500 \Rightarrow t = 250 \text{ h} = 10 \text{ dias } 10 \text{ h}$
- $0 = 1000 - 2 \times t \Rightarrow 2t = 1000 \Rightarrow t = 500 \text{ h} = 20 \text{ dias } 20 \text{ h}$

Mais um exemplo.

Situação 3: considere uma aplicação de 1000 reais numa instituição financeira que paga juros mensais de 10% capitalizados mensalmente (ao final de cada período de capitalização, o juro do período é somado ao capital, para formar o capital do próximo período). Qual será o tempo mínimo necessário para que essa aplicação dobre o valor inicialmente investido?

Solução:

Façamos uma tabela para ilustrar a situação.

Tempo (t)	0	1	2	3	4	5	...
Capital (C)	1 000	1 100	1 210	1 331	1 464,10	1 610,51	...

Nesse problema, se representarmos o capital acumulado por uma variável (C) e o tempo decorrido, em meses, por outra variável (t), teremos o seguinte:

- a cada valor da variável t corresponderá um único valor da variável C : há uma função;
- acréscimos unitários a t implicam acréscimos relativos de 10% a C (lembre-se de que, conforme visto na unidade anterior, para calcular um valor que foi acrescido de 10%, basta multiplica-lo por 1,1): essa função *não* é afim.

Pelo enunciado, t é necessariamente um número natural e C um número real (positivo) e:

- para $t = 0$, temos $C = 1000$;
- para $t = 1$, temos $C = 1000 \times 1,1$;
- para $t = 2$, temos $C = (1\,000 \times 1,1) \times 1,1 = 1000 \times 1,1^2$;
- para $t = 3$, temos $C = (1\,000 \times 1,1^2) \times 1,1 = 1000 \times 1,1^3$.

Assim, uma equação que expressa a relação de dependência entre C e t é $C = 1000 \times 1,1^t$.

Para o capital investido dobrar, devemos ter $1000 \times 1,1^t = 2000$, ou seja:

$$1,1^t = 2, \text{ onde } 7 < t < 9.$$

Como $1,1^7 \approx 1,9$ e $1,1^8 \approx 2,1$ (valores obtidos utilizando-se uma calculadora científica), somos levados a concluir que o valor de t que faz com que $1,1^t$ resulte em 2 está entre 7 e 9. Donde vem que $t = 8$ meses.

Por meio da introdução de um sistema de coordenadas cartesianas, $(x; y)$ estará no gráfico dessa função, desde que se tenha $y = 1000 \times 1,1^x$, em que x é uma variável natural. Essa representação é mostrada a seguir:

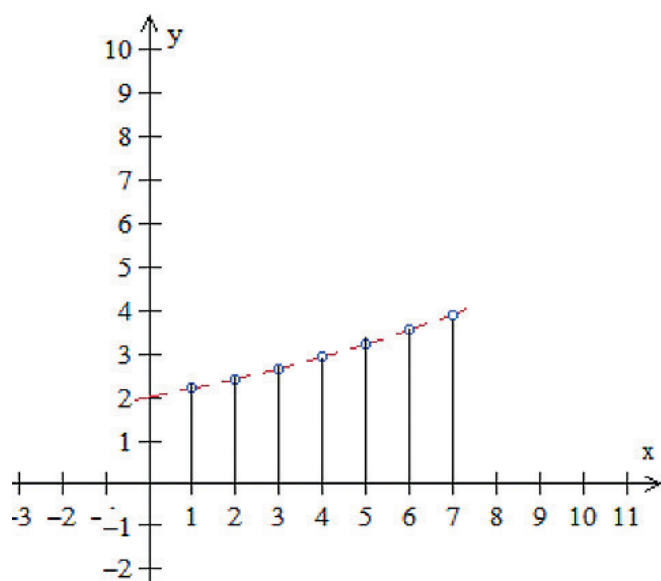


Figura 5.4: Representação da função $f(x) = 1000 \times 1,1^x$.

Conceito de função

Em linhas gerais, quando duas variáveis x e y são tais que, a cada valor de x corresponde um valor bem determinado de y , segundo uma lei qualquer, dizemos que y é função de x .

Funções descrevem relações matemáticas especiais entre dois objetos. Intuitivamente, uma função é uma maneira de associar a cada valor da variável x um único valor da função $f(x)$. Uma função pode ser vista como uma “máquina”, que converte *entradas válidas em saídas, de forma unívoca*, por isso alguns autores as chamam de *funções* ou *relações unívocas*.

unívoco

Aquilo que só admite uma interpretação; que não é ambíguo; inequívoco.
Fonte: <http://michaelis.uol.com.br/busca?id=e3pX8>.

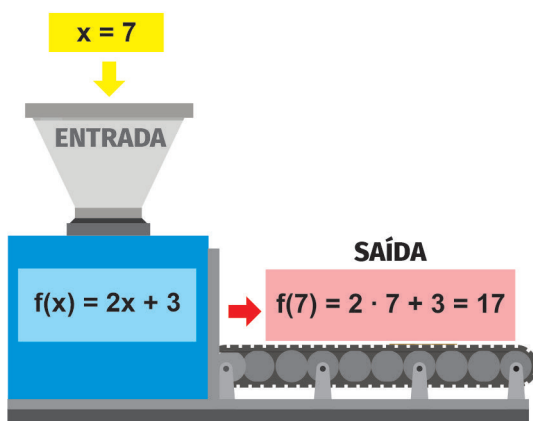


Figura 5.5: Uma função pode ser entendida como uma espécie de máquina de converter entradas válidas, como um número natural, por exemplo, em saídas, de forma unívoca. Na situação ilustrada, ao entrar com o número 7, na figura, a máquina realiza a operação $2 \times 7 + 3$ e entrega o número 17 na saída.

A definição formal de uma função exige que se tenham dois conjuntos A e B , respectivamente chamados de *domínio* e de *contradomínio*, e uma forma de associação entre os elementos desses dois conjuntos, em que a cada valor da variável x corresponda um único valor da variável y . Escreve-se:

$$f: A \rightarrow B, \text{ com } y = f(x), \text{ para cada } x \in A$$

Particularmente, o subconjunto de B formado por todos os elementos y tais que $y = f(x)$, para algum $x \in A$, é denominado *conjunto imagem de f* – escreve-se Im_f ou $f(A)$. Além disso, quando se escreve $y = f(x)$, diz-se que y é a *imagem de x* pela função f .

Quando A e B forem subconjuntos de \mathbb{R} , diremos que f é uma função real de variável real. Particularmente, quando $A = \mathbb{N}$, f é também chamada de *sucessão* ou *sequência*. É importante lembrar que o conjunto dos números reais (\mathbb{R}) é formado pela reunião dos racionais (\mathbb{Q}) com o conjunto formado por todos os números que admitem representação decimal infinita, mas não-periódica, os chamados números irracionais.

>> saiba mais

A fim de visualizar os termos utilizados na definição anterior, sugerimos que você assista ao vídeo em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1063>.

Voltando aos três exemplos anteriores, temos, no caso do deslocamento de Fabinho até o hotel, uma função f cujo domínio é o conjunto dos números naturais (\mathbb{N}), o contradomínio é o conjunto dos números reais (\mathbb{R}) e a lei de associação é dada por $y = f(x) = 5,20 + 1,05x$, sendo y o preço da corrida, em reais, e x a distância percorrida, em km . Notemos ainda que, por exemplo, $f(2) = 7,30$, ou seja, 7,30 é a imagem de 2 pela função f . Além disso, na medida em que o domínio é \mathbb{N} , temos a sequência (5,20; 6,25; 7,30; 8,35; 9,40, ..., $5,20 + 1,05n$; ...)

Observação: numa sequência, é comum utilizar variáveis indexadas para representar o valor de $f(n)$ (n natural). Assim:

$$f(0) = f_0 \quad f(1) = f_1 \quad f(2) = f_2 \dots \quad f(n) = f_n$$

Portanto, no exemplo em tela,

$$f_0 = 5,20$$

$$f_1 = 6,25$$

$$f_2 = 7,30$$

$$f_3 = 8,35$$

...

$$f_n = 5,20 + 1,05 \times n$$

No caso da caixa d'água, temos uma função f cujo domínio é o conjunto dos números naturais (\mathbb{N}), o contradomínio é o conjunto dos números reais (\mathbb{R}) e a lei de associação é dada por $y = f(x) = 1000 - 2x$, sendo y o volume, em litros, remanescente na caixa d'água, e x o tempo decorrido, em horas. Notemos ainda que, por exemplo, $f(3) = 994$, ou seja, 994 é a imagem de 3 pela função f . Além disso, na medida em que o domínio é \mathbb{N} , temos a sequência (1000; 998; 996; 994; 992; ...; $1\ 000 - 2n$; ...). Neste exemplo,

$$a_0 = 1000$$

$$a_1 = 998$$

$$a_2 = 996$$

$$a_3 = 994$$

...

$$a_n = 1\ 000 - 2 \times n$$

No exemplo da aplicação financeira, temos uma função f cujo domínio é o conjunto dos números naturais (\mathbb{N}), o contradomínio é o conjunto dos números reais (\mathbb{R}) e a lei de associação é dada por $y = f(x) = 1000 \times 1,1^x$, sendo y , em reais, o capital acumulado por uma variável e x o tempo decorrido, em meses. Notemos ainda que, por exemplo, $f(0) = 1000$, ou seja, 1000 é a imagem de 0 pela função f . Além disso, na medida em que o domínio é \mathbb{N} , temos a sequência (1000; 1100; 1210; 1331; ...; $1000 \times 1,1^n$; ...). Neste exemplo,

$$a_0 = 1000$$

$$a_1 = 1100$$

$$a_2 = 1210$$

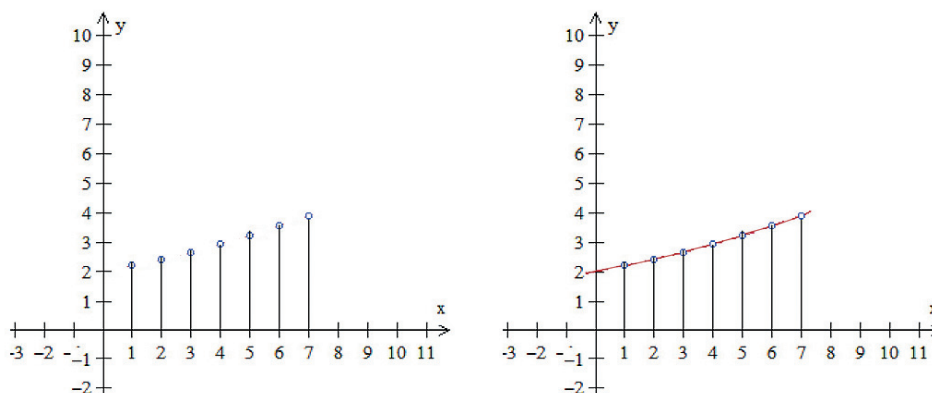
$$a_3 = 1331$$

...

$$a_n = 1\ 000 \times 1,1^n$$

// atenção

Nos três exemplos considerados, apelando para aquela dose de boa vontade para estendermos os domínios de \mathbb{N} para \mathbb{R} e introduzindo sistemas de coordenadas cartesianas, teremos os gráficos cartesianos das funções consideradas.



Progressão aritmética e progressão geométrica (noções iniciais)

Há duas sequências que merecem destaque por suas características peculiares. São elas:

- Progressão aritmética: sequência em que cada termo, a partir do primeiro, é igual ao anterior acrescido de uma constante R , denominada *razão*.

$$a_{n+1} = a_n + r$$

Por exemplo, na questão que versa sobre o deslocamento do Fabinho, na tabela que construímos, em cada linha, há uma progressão aritmética.

PA de razão = 1								
Km rodado	0	1	2	3	4	5	6	...
Preço	5,20	6,25	7,30	8,35	9,40	10,45	11,50	...
PA de razão = 1,05								

- Progressão geométrica: sequência em que cada termo, a partir do primeiro, é igual ao anterior multiplicado por uma constante Q (não-nula), denominada *razão*.

$$a_{n+1} = a_n \times q$$

Por exemplo, na questão da aplicação financeira, na tabela que construímos, em cada linha, há uma progressão: na 1ª, aritmética e na 2ª, geométrica.

PA de razão = 1							
Tempo (t)	0	1	2	3	4	5	...
Capital (C)	1 000	1 100	1 210	1 331	1 464,10	1 610,51	...
PG de razão = 1,1							

lá na plataforma

Na Unidade 5 de nosso ambiente virtual, acesse os vídeos sobre essas progressões.

Sobre PA: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1049>; sobre PG: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1151>.

Gráficos

Os gráficos estatísticos integram uma linguagem universal, uma forma de apresentação de dados para descrever informações, com o objetivo de produzir em quem o observa uma impressão mais rápida e viva do assunto em estudo. São frequentemente encontrados em meios de comunicação escrita e falada, pois tornam possível a organização de dados coletados, utilizando números ao descrever fatos; facilitando a comparação, entre eles, por exemplo.

Para se interpretar um gráfico é necessário:

- declarar qual é o fenômeno representado, o período de tempo abrangido, a região estudada, a fonte dos dados. Para isso, é importante observar o título e o subtítulo do gráfico e as indicações contidas nos eixos de referência ou nas regiões representadas;
- analisar cada fenômeno separadamente, ressaltando os pontos importantes como a média, o máximo e o mínimo e as mudanças mais expressivas;
- verificar se o fato exposto é estacionário ou se há uma “tendência geral” crescente ou decrescente;

d) investigar se há repetição ou periodicidade. Essa observação é muito importante para se fazer previsões.

Vejamos a atividade seguinte (extraída de GRAVINA; PEIXOTO; NOTARE, 2021).

São dados três reservatórios R_1 , R_2 e R_3 , cilíndricos e idênticos. Considere que os três reservatórios, inicialmente vazios, começam a receber água.

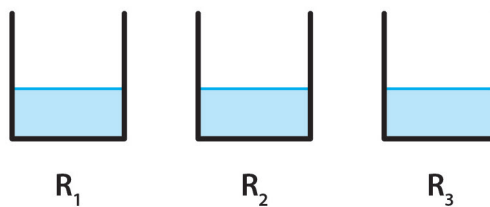


Figura 5.6: Reservatórios cilíndricos e idênticos.

Os gráficos abaixo representam o nível da água nos reservatórios em função do tempo, decorrido desde o início do processo, que vamos tomar como $t = 0$.

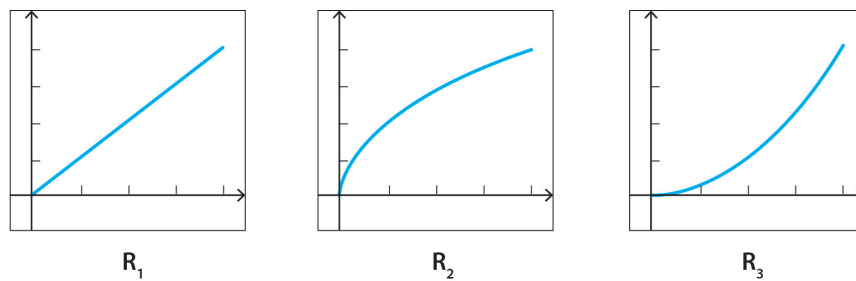


Figura 5.7: Gráficos com os níveis de água em cada reservatório no instante $t > 0$.

Pela forma dos gráficos, é possível descrever como foi a entrada de água em cada um dos reservatórios – R_1 , R_2 e R_3 .

Como o nível de água aumenta com o tempo, as funções em questão são do tipo crescente. Isto é, conforme a variável independente “ t = tempo” aumenta, a variável dependente “ y = altura do nível de água” também aumenta.

Os gráficos registram este crescimento, mas mais do que isto, registram o tipo de crescimento. Nos gráficos, os pontos A , B e C representam, respectivamente, a altura do nível de água, num mesmo instante de tempo para os três reservatórios. Vamos imaginar estes pontos em movimento. Com isto podemos ver que:

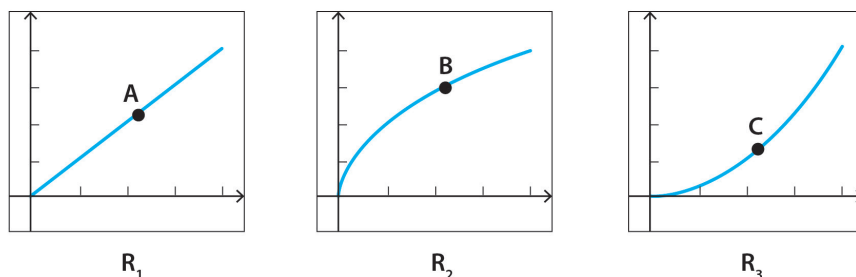


Figura 5.8: Gráficos que registram o tipo de crescimento do nível da água no reservatório.

Assim, a forma do gráfico nos informa sobre o tipo de crescimento:

- a entrada de água em R_1 se processa sempre da mesma forma, isto é, em intervalos de tempo iguais, a variação do nível de água é sempre a mesma;
- a entrada de água em R_2 , no início do processo, é mais rápida que no fim. Podemos ver isto ao analisar a variação do nível de água em dois intervalos de tempo iguais: um no início do processo e outro no fim. No intervalo de tempo no início do processo a variação é maior que no intervalo de tempo no final do processo;
- a entrada de água em R_3 é lenta no início do processo, e mais rápida no final. Para ver isto, repetimos o raciocínio análogo ao feito no caso do reservatório R_2 .

A figura a seguir nos mostra o nível de água em cada um dos reservatórios num mesmo instante de tempo. A saber: t é igual à metade do tempo total (é importante indicar que, ao final, todos os reservatórios terão a mesma altura, pois o que se investiga é o processo de crescimento do volume inicial até o volume final):

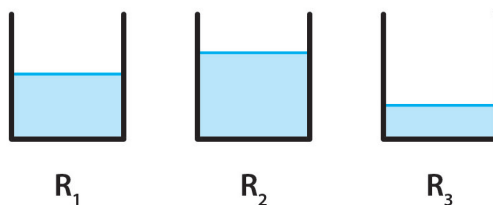


Figura 5.9: O nível de água em cada um dos reservatórios num mesmo instante de tempo.

Assim, a forma do gráfico nos informa sobre o tipo de crescimento:

- se a curva é do tipo “voltada para baixo”, o crescimento é rápido no início do processo e mais lento no fim (caso do reservatório R_2);
- se a curva é do tipo “voltada para cima”, o crescimento é lento no início do processo e mais rápido no fim (caso do reservatório R_3).

Funções e ENEM

Agora vamos praticar um pouco a partir do que você já sabe sobre funções. Este é um assunto muito cobrado em provas de vestibulares e no ENEM, não somente em Matemática, mas em diversas outras disciplinas, inclusive nas áreas de Ciências da Natureza e Ciências Humanas. Tal fato mostra a importância desse tema no contexto de preparação para realização de provas de acesso ao ensino superior, além de se tratar de um tema muito presente em nosso cotidiano. Assim, apresentaremos a seguir algumas questões para que você pratique um pouco.

Atividades

1. (ENEM PPL 2015 - Reproduzida) Num campeonato de futebol de 2012, um time sagrou-se campeão com um total de 77 pontos (P) em 38 jogos, tendo 22 vitórias (V), 11 empates (E) e 5 derrotas (D). No critério adotado para esse ano, somente as vitórias e empates têm pontuações positivas e inteiras. As derrotas têm valor zero e o valor de cada vitória é maior que o valor de cada empate.

Um torcedor, considerando a fórmula da soma de pontos injusta, propôs aos organizadores do campeonato que, para o ano de 2013, o time derrotado em cada partida perca 2 pontos, privilegiando os times que perdem menos ao longo do campeonato. Cada vitória e cada empate continuariam com a mesma pontuação de 2012.

Qual é a expressão que fornece a quantidade de pontos (P), em função do número de vitórias (V), do número de empates (E) e do número de derrotas (D), no sistema de pontuação proposto pelo torcedor para o ano de 2013?

a) $P = 3V + E$

d) $P = 3V + E - 2D$

b) $P = 3V - 2D$

e) $P = 3V + E + 2D$

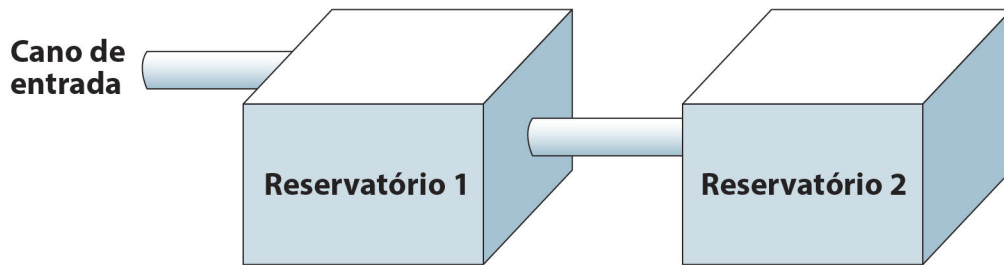
c) $P = 3V + E - D$

Disponível em: <https://descomplica.com.br/gabarito-enem/questoes/2015-segunda-aplicacao/segundo-dia/num-campeonato-de-futebol-de-2012-um-time-sagrou-se-campeao-com-um-total-de-77-pontos-p/27>. Acesso em: 27/09/2020

>> saiba mais

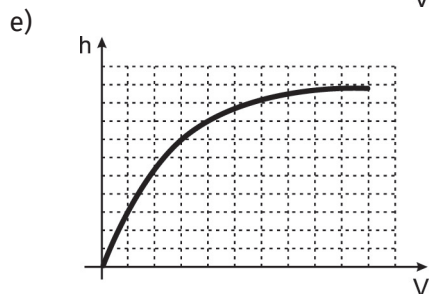
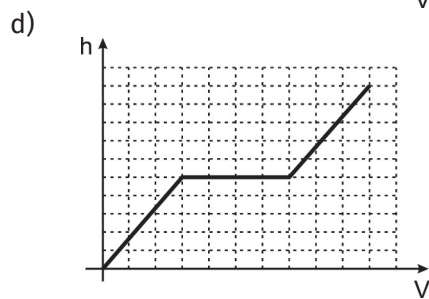
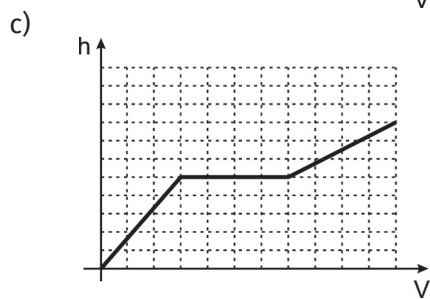
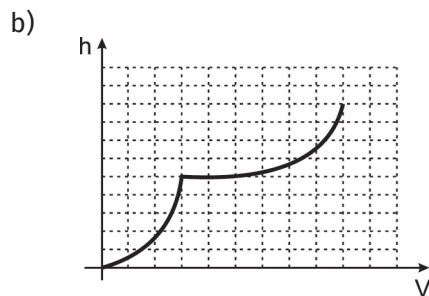
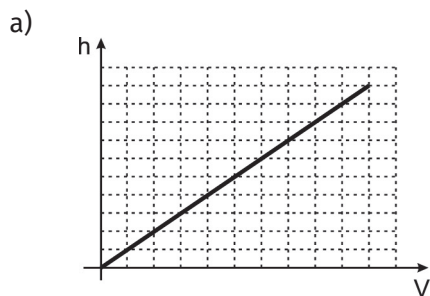
Utilize esse link para acessar uma resolução comentada da questão: https://www.youtube.com/watch?v=QXZNf4m_pp4.

2. (ENEM 2017 - Reproduzida) A água para o abastecimento de um prédio é armazenada em um sistema formado por dois reservatórios idênticos, em formato de bloco retangular, ligados entre si por um cano igual ao cano de entrada, conforme ilustra a figura.



A água entra no sistema pelo cano de entrada no Reservatório 1 a uma vazão constante e, ao atingir o nível do cano de ligação, passa a abastecer o Reservatório 2. Suponha que, inicialmente, os dois reservatórios estejam vazios.

Qual dos gráficos melhor descreverá a altura h do nível da água no Reservatório 1, em função do volume V da água no sistema?



>> saiba mais

Utilize esse link para acessar uma resolução comentada da questão: <https://www.youtube.com/watch?v=uo0U4eCPMwo>.

3. (Enem 2016 - Reproduzida) Sob a orientação de um mestre de obras, João e Pedro trabalharam na reforma de um edifício. João efetuou reparos na parte hidráulica nos andares e assim sucessivamente, de dois em dois andares. Pedro trabalhou na parte elétrica nos andares e assim sucessivamente, de três em três andares. Coincidentemente, terminaram seus trabalhos no último andar. Na conclusão da reforma, o mestre de obras informou, em seu relatório, o número de andares do edifício. Sabe-se que, ao longo da execução da obra, em exatamente 20 andares, foram realizados reparos nas partes hidráulica e elétrica por João e Pedro.

Qual é o número de andares desse edifício?

- a) 40
- b) 60
- c) 100
- d) 115
- e) 120

>> saiba mais

Utilize esse link para acessar uma resolução comentada da questão: <https://www.youtube.com/watch?v=iDgXSCMkoFQ>.

4. (ENEM 2015 - Reproduzida) O acréscimo de tecnologias no sistema produtivo industrial tem por objetivo reduzir custos e aumentar a produtividade. No primeiro ano de funcionamento, uma indústria fabricou 8000 unidades de um determinado produto. No ano seguinte, investiu em tecnologia, adquirindo novas máquinas, e aumentou a produção em 50%. Estima-se que esse aumento percentual se repita nos próximos anos, garantindo um crescimento anual de 50%. Considere P a quantidade anual de produtos fabricados no ano t de funcionamento da indústria.

Se a estimativa for alcançada, qual é a expressão que determina o número de unidades produzidas P em função de t , para $t \geq 1$?

- a) $P(t) = 0,5 \times t^{-1} + 8.000$
- b) $P(t) = 50 \times t^{-1} + 8.000$
- c) $P(t) = 4.000 \times t^{-1} + 8.000$
- d) $P(t) = 8.000 \times (0,5)^{t-1}$
- e) $P(t) = 8.000 \times (1,5)^{t-1}$

>> saiba mais

Utilize esse link para acessar uma resolução comentada da questão: https://www.youtube.com/watch?v=6_pl3t-vKPc.

lá na plataforma

Na Unidade 5 de nosso ambiente virtual, acesse o arquivo com mais questões de vestibulares e ENEM.

Após tentar resolvê-las, acesse o arquivo com as respostas comentadas.

Referências

GRAVINA, M. A.; PEIXOTO, L.; NOTARE, M. R. *Funções e gráficos: um curso introdutório*. Disponível em: <http://www.edumatec.mat.ufrgs.br/cursos/trab2/ativi1.htm>. Acesso em: 05 jul. 2021.

LIMA, E. L. et al. *A Matemática no Ensino Médio*. vol.1. Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, SBM: 2016.

A cada jogada, avance quatro casas

06

metas

Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas.

objetivos

Esperamos que, ao final desta unidade, você seja capaz de:

- investigar relações entre números expressos em tabelas, para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau;
- identificar e associar sequências numéricas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas;
- resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais de 1º grau em contextos diversos.
- converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional.

Introdução

O tema desta unidade já foi apresentado na unidade anterior, que trata das funções. Relembre que, então, consideramos a seguinte situação-problema:

Ao chegar à rodoviária de uma cidade, Fabinho foi informado de que a corrida de táxi é calculada da seguinte maneira: R\$ 5,20 de bandeirada e R\$ 1,05 por quilômetro rodado. Uma vez que o hotel onde ele se hospedará fica a 35 km da rodoviária, se Fabinho pegar um táxi da rodoviária até o seu hotel, quanto ele vai gastar?

Na sua resolução, construímos a tabela:

Km rodado	0	1	2	3	4	5	6
Preço	5,20	6,25	7,30	8,35	9,40	10,45	11,50

Por meio dela, identificamos que, a cada acréscimo de 1 km, corresponde um acréscimo, constante, de R\$ 1,05 no preço da corrida. Mais ainda, que a cada acréscimo de 2 km, ocorre um acréscimo de $2 \times 1,05$ reais no preço da corrida e, mais geralmente, que a cada acréscimo de n km, n natural, corresponde um acréscimo de $n \times 1,05$ reais no preço da corrida, chegando à resposta: $5,20 + 35 \times 1,05 = 41,95$ reais.

Destacamos, ainda, que, representando o preço da corrida por uma variável, (P), e a distância percorrida, em km, por outra variável, (d), temos:

- uma função, pois a cada valor da variável d , corresponde um único valor da variável P ;
- uma função afim, pois acréscimos unitários a d implicam acréscimos de 1,05 a P , ou ainda, acréscimos de h unidades a d implicam acréscimos de $h \times 1,05$ a P .
- E, assim, para P e d , poderíamos considerar a equação:

$$P = 5,20 + 1,05 \times d,$$

sendo destacados:

- o valor inicial (5,20), que corresponde ao preço da corrida quando $d = 0$;
- a taxa de variação da função, ou seja, o acréscimo constante dado a P (que, nesse caso, é 1,05), quando são considerados acréscimos unitários em d .

Essa forma particular de se comportar, característica das funções afins, aparece de maneira bem interessante no vídeo que indicamos a seguir:

>> saiba mais

A fim de visualizar o que apresentamos na introdução, sugerimos que você assista ao vídeo em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1091>.

Conceito de função afim

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $y = f(x)$, é denominada afim quando existem números reais a e b tais que:

$$y = f(x) = ax + b$$

Nessa função, $b (= f(0))$ chama-se valor inicial e a é a sua taxa de variação.

Nela, qualquer acréscimo de 1 unidade na variável x implica um acréscimo de a unidades na variável y . De forma mais geral, qualquer acréscimo de h unidades em x acarretará um acréscimo de $a \times h$ unidades em y . Usando um quadro, temos:

Progressão Aritmética de razão h					
x	x_0	x_1	...	x_n	...
y	y_0	y_1	...	y_n	...
Progressão Aritmética de razão $a.h$					

Por isso, tomando um sistema cartesiano ortogonal, o gráfico dessa função — o conjunto de pontos do plano $(x; y)$, tais que $y = ax + b$ — é uma reta. De fato, considere a figura seguinte, em que o ponto P tem coordenadas $(0; b)$. Tomando um ponto qualquer A do gráfico, isto é, $A = (t; at + b)$, t um real arbitrário não-nulo, tem-se a situação seguinte:

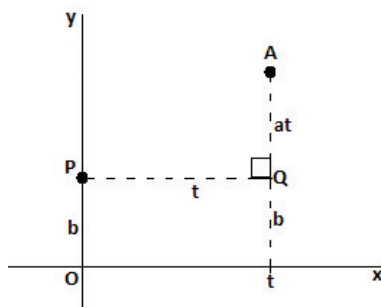


Figura 6.1: Entendendo por que o gráfico de uma função afim é sempre uma reta.

Então, independentemente do valor real de $t \neq 0$:

$$\frac{AQ}{PQ} = \frac{at}{t} = a$$

Ou seja, a razão $\frac{AQ}{PQ}$ é uma constante, implicando, com isso, que o ângulo QPA seja constante. Isso é possível se e somente se A pertencer à reta que contém P .

A figura seguinte ilustra essa situação.

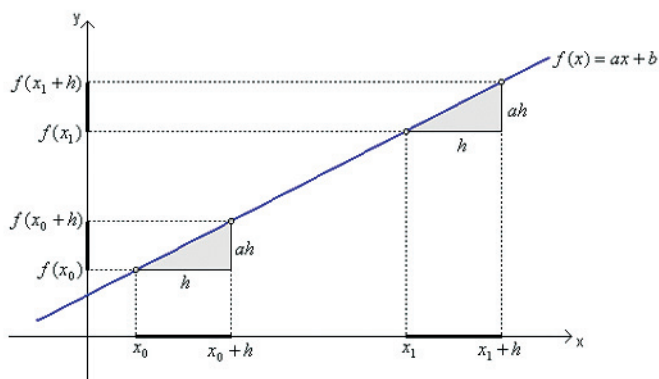
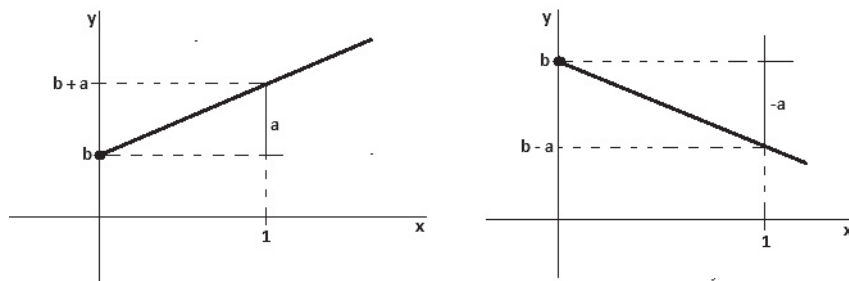


Figura 6.2: Entendendo por que o gráfico de uma função afim é sempre uma reta.

O número real a tal que $f(a) = 0$, ou seja, $a \times (a) + b = 0$, recebe o nome de *zero da função*. Ele é a *abscissa do ponto em que o gráfico de f (a reta) intersecta o eixo horizontal*.

// atenção

De modo geral, para visualizar os coeficientes a e b da função afim $f(x) = ax + b$, no gráfico, tem-se:



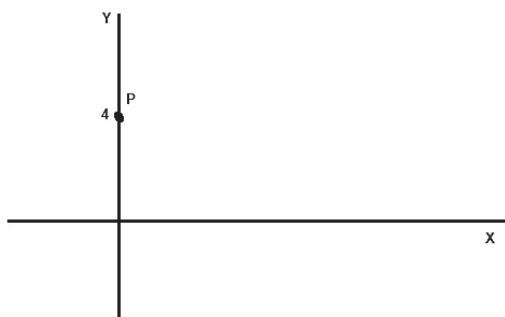
Assim, o coeficiente a representa o quanto a função aumenta ou diminui, o quando x varia de 1 unidade. Se $|a| > 1$, o crescimento da reta se dará de forma mais "rápida" do que se $|a| < 1$, exceção feita no caso em que $a = 0$, quando a reta será horizontal.

Outrossim, sempre que $a > 0$, a função será crescente e, se $a < 0$, a função será decrescente.

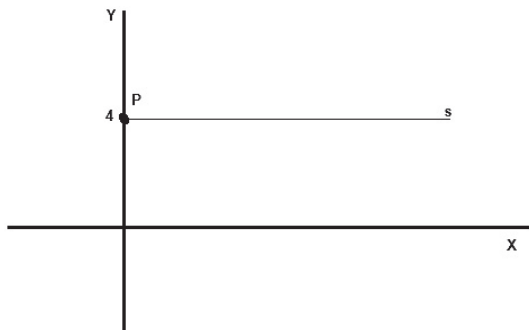
De modo geral, quando se ensina função afim, um dos exercícios mais comuns é pedir que os alunos representem graficamente uma função como, por exemplo, $f(x) = \frac{2}{3}x + 4$. A solução usual consiste em recorrer à tradicional tabela por meio da qual se atribuem dois valores a x , encontram-se os correspondentes valores de $f(x)$, marcam-se os pontos encontrados e traça-se a reta por eles definida. Ainda que seja uma forma correta de resolver o exercício, em termos conceituais, ela tem pouquíssimo valor, na medida em que não leva em conta o significado dos coeficientes a e b .

Uma maneira de resolver esse exercício levando em consideração a interpretação dos coeficientes é a seguinte:

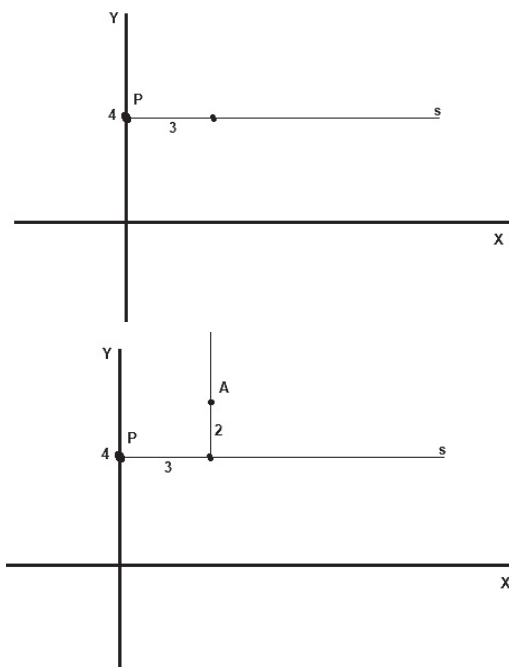
1. no eixo Oy , destacar o ponto P , cuja ordenada é o 4 (coeficiente linear);



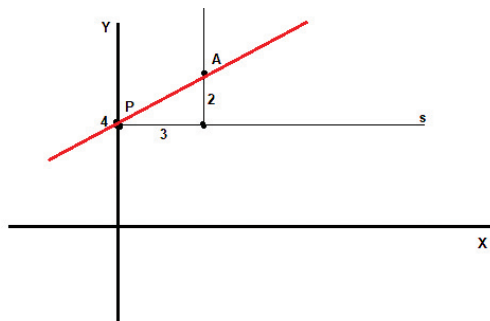
2. traçar a reta horizontal S , que passa pelo ponto $(0; 4)$;



3. marcar sobre s , a partir de P , 3 unidades para a direita e, em seguida, 2 unidades para cima – chame o ponto obtido de A ;



4. a reta definida pelos pontos A e P será o gráfico de f .



>> saiba mais

A fim de visualizar os termos utilizados na definição anterior, sugerimos que você assista ao vídeo em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1063>.

// atenção

A função $f(x) = ax$, com $a \neq 0$, é um caso particular da função afim, denominada função linear. Ela modela a proporcionalidade, pois, sendo x e y duas grandezas reais (por comodidade, consideradas positivas), dizer que elas são diretamente proporcionais, ou simplesmente proporcionais, significa admitir que existe uma constante real $a > 0$, de tal modo que $y = a \times x$. O valor de a é denominado constante de proporcionalidade. Isso implica que a razão entre elas é constante.

Essa definição, conquanto límpida e simples, possui uma complicação em termos práticos, pois nem sempre conseguimos exprimir com facilidade o valor da constante de proporcionalidade. Para driblar esse problema, na resolução de problemas, utilizaremos a seguinte regra:

Isso significa que, para identificarmos se duas grandezas x e y são diretamente proporcionais, relacionadas entre si por meio de uma função, basta verificarmos se, dobrando, triplicando, quadruplicando, quintuplicando etc., uma delas, a outra dobrará, tricarará, quadruplicará, quintuplicará etc. Analogamente, duas grandezas x e y serão inversamente proporcionais, se x e y^{-1} forem diretamente proporcionais.

Vejamos a seguinte situação-problema: estudando 3 horas por dia durante 16 dias, Fabinho realizou 400 exercícios. Quanto tempo seria necessário para que ele realizasse 500 exercícios estudando 4 horas por dia?

As variáveis envolvidas nesse problema são: número de horas de estudo por dia (r), dias de estudo (t) e quantidade de exercícios (q).

r	t	q
3	16	400
4	x	500

Observe que, dobrando, triplicando, quadruplicando etc. o t , o mesmo ocorrerá com o r^{-1} e da mesma forma ocorrerá quando considerarmos a relação entre q e t . Portanto, t é diretamente proporcional a q e inversamente proporcional a r . Logo, para alguma constante real k : $t = k \times \frac{q}{r}$,

- $16 = k \times \frac{400}{3} \Rightarrow k = \frac{3}{25}$
- $t = \frac{3}{25} \times \frac{500}{4} \Rightarrow t = 15$ horas.

// atenção

O estabelecimento de valores entre dois ou mais pontos sobre os quais temos informações numéricas chama-se interpolação. Por outro lado, extrapolar é estimar valores fora de um conjunto de pontos, ao invés de entre eles.

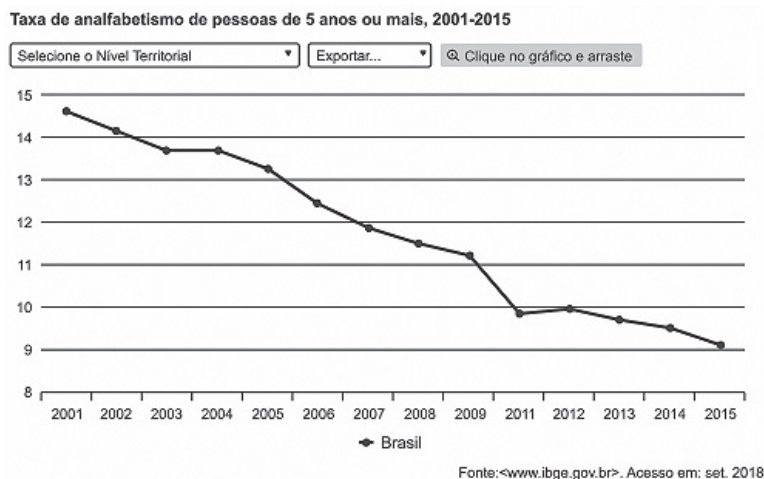
A interpolação e a extrapolação envolvem a descoberta de um padrão em um conjunto de pontos dados para estimar um valor entre dois pontos ou fora deles.

Particularmente, a interpolação linear é uma das maneiras mais simples de interpolar — uma linha conectando dois pontos é usada para estimar valores intermediários. No caso da extrapolação linear, procede-se da mesma forma para estimar valores aquém ou além dos extremos do intervalo considerado.

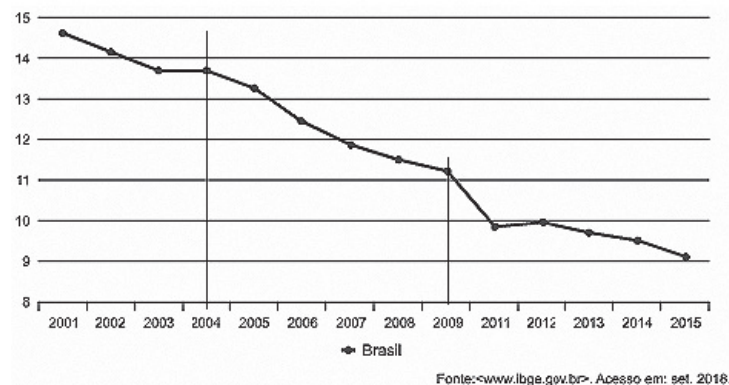
Interpolações

Vejamos a seguinte situação-problema:

O gráfico a seguir descreve a taxa de analfabetismo de pessoas de 5 anos ou mais, no período 2001-2015.



Admitindo que, em 2004, a taxa era 13,8 e que, em 2007, era 11,9, estime em que ano a taxa foi 13 e, em seguida, estime a taxa em 2009.



Supondo que, no trecho considerado, entre os anos de 2004 e 2009, o gráfico seja uma linha reta, teremos sua equação expressa por $y = ax + b$, sendo:

$$a = \frac{11,9 - 13,8}{2009 - 2004} = -0,38 \rightarrow y = -0,38x + b$$

e, como (2004; 13,8) pertence à reta considerada: $13,8 = -0,38 \times (2004) + b \Rightarrow b = 775,32$.

Assim, a equação da linha reta, no trecho considerado, é $y = -0,38x + 775,32$. Donde vem que:

- se a taxa foi igual a 13, então: $13 = -0,38x + 775,32 \Rightarrow x \approx 2006,10 \rightarrow$ aproximadamente 2006;
- a taxa em 2009 foi: $y = -0,38 \times (2009) + 775,32 \Rightarrow y \approx 11,9 \rightarrow$ aproximadamente 12.

Função afim e ENEM

Agora vamos praticar um pouco, a partir do que você já sabe sobre função afim. Este é um assunto muito cobrado em provas de vestibulares e, no ENEM, aparece com frequência todos os anos. Assim, apresentaremos a seguir algumas questões de vestibulares e do ENEM para que você pratique.

Resumo

- Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $y = f(x)$, é denominada *afim* quando existem números reais a e b tais que $y = f(x) = ax + b$.

- Na função afim, o coeficiente b chama-se *valor inicial* e o coeficiente a é a sua *taxa de variação*.
- O gráfico de uma função afim, definida no conjunto dos números reais, é uma reta.
- O número real α , tal que $f(\alpha) = 0$, é denominado *zero da função*. No gráfico da função, representa o ponto $(\alpha, 0)$.

Atividades

1. (Enem 2019 - Reproduzida) Uma empresa tem diversos funcionários. Um deles é o gerente, que recebe R\$ 1.000,00 por semana. Os outros funcionários são diaristas. Cada um trabalha 2 dias por semana, recebendo R\$ 80,00 por dia trabalhado.

Chamando de X a quantidade total de funcionários da empresa, a quantia Y , em reais, que esta empresa gasta semanalmente para pagar seus funcionários é expressa por:

- | | |
|---------------------|----------------------|
| a) $Y = 80X + 920$ | d) $Y = 160X + 840$ |
| b) $Y = 80X + 1000$ | e) $Y = 160X + 1000$ |
| c) $Y = 80X + 1080$ | |

// atenção

Após resolver esse problema, discuta com outros estudantes o que poderia motivar alguém a assinalar cada uma das opções erradas.

2. (Enem PPL 2019 - Reproduzida) Em um município, foi realizado um levantamento relativo ao número de médicos, obtendo-se os seguintes dados:

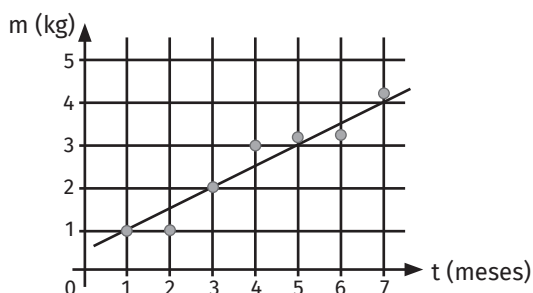
Ano	Médicos
1980	137
1985	162
1995	212
2010	287

Tendo em vista a crescente demanda por atendimento médico na rede de saúde pública, pretende-se promover a expansão, a longo prazo, do número de médicos desse município, seguindo o comportamento de crescimento linear no período observado no quadro.

Qual é a previsão do número de médicos nesse município para o ano 2040?

- a) 387
- b) 424
- c) 437
- d) 574
- e) 711

3. (Famerp 2018 - Reproduzida) Um animal, submetido à ação de uma droga experimental, teve sua massa corporal registrada nos sete primeiros meses de vida. Os sete pontos destacados no gráfico mostram esses registros, e a reta indica a tendência de evolução da massa corporal em animais que não tenham sido submetidos à ação da droga experimental. Sabe-se que houve correlação perfeita entre os registros coletados no experimento e a reta apenas no 1º e no 3º mês.



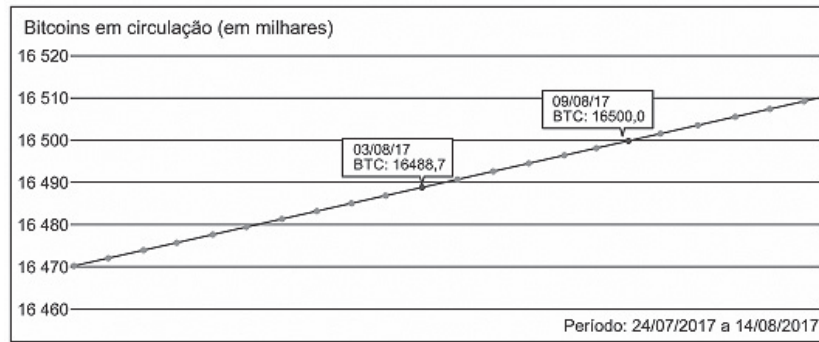
Se a massa registrada no 6º mês do experimento foi 210 gramas inferior à tendência de evolução da massa em animais não submetidos à droga experimental, o valor dessa massa registrada é igual a:

- a) 3,47 kg
- b) 3,27 kg
- c) 3,31 kg
- d) 3,35 kg
- e) 3,29 kg

// atenção

Utilize esse link para acessar uma resolução comentada da questão:
<https://www.youtube.com/watch?v=UIZYb52Jgxl>.

4. (Insper 2018 - Reproduzida) Lançada em 2009, a *bitcoin* ganha espaço no mercado internacional como um meio de troca atrativo, por permitir transações a taxas baixas sem recorrer a intermediários, como bancos ou empresas como o PayPal. Diferentemente de moedas tradicionais, ela não é gerida por um banco central, mas por uma comunidade dispersa na internet.



(www.nexojornal.com.br e https://blockchain.info. Adaptado)

Dado: considere linear o comportamento do total de *bitcoins* em circulação ao longo do período indicado no gráfico.

Seja t a taxa diária de crescimento do total de bitcoins no período analisado. No último dia do mês de julho de 2017, o total de bitcoins em circulação, em milhares, era igual a:

- a) $16\,488,7 - 4t$
- b) $16\,488,7 - 3 \times 10^{-3}t$
- c) $16\,488,7 - 3t$
- d) $16\,488,7 - 3 \times 10^3t$
- e) $(16\,488,7 - 3t) \times 10^{-3}$

5. (G1 - cfrj 2019 - Reproduzida) Anualmente, o Cefet/RJ, em seus diversos *campi*, participa da Olimpíada Brasileira de Astronomia (OBA), tendo, este ano, diversos alunos selecionados para representar o Brasil nas olimpíadas internacionais no tema.

Em astronomia, é importante conseguir relacionar a influência que um corpo exerce sobre outro. A Lei da Gravitação Universal, por exemplo, afirma que dois corpos quaisquer de massas m_1 e m_2 se atraem com uma força de intensidade F medida em Newtons (N), que é proporcional ao produto de suas massas, medidas em kg, e inversamente proporcional ao quadrado da distância d , medida em metros, entre os corpos. A constante de proporcionalidade é chamada *constante de gravitação universal*, dada por:

$$G = 10^{-10} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$$

Levando em conta apenas as relações de proporcionalidade descritas no texto, um aluno escreveu 2 expressões, na tentativa de expressar a intensidade da força F de atração.

Expressão 1: $F = Gx \frac{m_1 \times m_2}{d^2}$.

Expressão 2: $F = Gx \left(\frac{m_1 \times m_2}{d^2} \right)^{-1}$.

- a) Qual das duas tentativas expressa a relação descrita no texto?
- b) Usando a expressão que você considerou correta, qual é o valor aproximado da força,

em Newtons, de atração entre a Terra e a Lua, considerando que a massa da Terra é aproximadamente 10^{25} kg , a massa da Lua é aproximadamente 10^{23} kg e a distância entre a Terra e a Lua é aproximadamente 10^8 m ?

Respostas comentadas

1. d

O valor total gasto com os diaristas, em reais, é $(X - 1) \times 80 \times 2 = 160X - 160$

Logo, a resposta é:

$$Y = 160X - 160 = 1000 \Leftrightarrow Y = 160X + 840$$

2. c

Tomando 1980 como sendo o ano $x = 0$, e 1985 como sendo o ano $x = 5$, segue-se que a taxa de variação do número de médicos é dada por:

$$\frac{162 - 137}{5 - 0} = 5$$

Desse modo, a lei da função, f , que exprime o número de médicos x anos após 1980 é igual a: $f(x) = 5x + 137$.

Em consequência, a resposta é: $f(60) = 5 \cdot 60 + 137 = 437$.

3. e

Calculando:

$$y = ax + b$$

$$P_1(1, 1) \text{ e } P_2(3, 2)$$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - 1}{3 - 1} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{x}{2} + b \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} + b \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

Assim:

$$y = \frac{1}{2}(x + 1)$$

$$6^\circ \text{ mês} \Rightarrow y - 0,21$$

$$y = \frac{1}{2}(6 + 1) = \frac{7}{2} = 3,5 \Rightarrow 3,5 - 0,21 = 3,29 \text{ kg}$$

4. b

Desde que, no dia 3 de agosto, o número de bitcoins, em milhares, era 16488,7 e que, do dia 31 de julho ao dia 3 de agosto, passaram-se 3 dias, podemos concluir que a resposta é: $16\,488,7 - 3 \times 10^{-3}t$

5.

a) A Expressão 1, pois o texto explica que a força F é diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância d , conforme descrito na Expressão 1.

b) Calculando:

$$F = 10^{-10} \times \frac{10^{25} \times 10^{23}}{(10^8)^2} = \frac{10^{38}}{10^{16}} = 10^{22} \text{ N}.$$

Referências

- LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. *A matemática do ensino médio*. v. 1. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- MATEMÁTICA MULTIMÍDIA. Carro Flex — Números e funções. *Unicamp: Matemática na Escola*. [Série]. 1 vídeo. Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1063>. Acesso: 08 out. 2021.
- MATEMÁTICA MULTIMÍDIA. Direitos do consumidor Números e funções. *Unicamp: Matemática na Escola*. [Série]. 1 vídeo. Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1091>. Acesso: 08 out. 2021.
- PROJETO SEEDUC. *Matemática e suas tecnologias*. Módulo II — Matemática. Nova EJA. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2013. Disponível em: http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/eja/material-aluno/modulo-02/Miolo_Matematica_Modulo_2_Aluno_Nova_Eja.pdf. Acesso em: 08 out. 2021.
- PRÉ-VESTIBULAR SOCIAL DA FUNDAÇÃO CECIERJ. *Matemática* — Semana 11: Função Afim. 23 Ago. 2021. 1 vídeo. Disponível em: <https://youtu.be/5b9HRSyv4Fw>. Acesso em: 08 out. 2021.

Mantendo o ritmo

07

meta

Discutir características e propriedades de progressões aritméticas a partir de estratégias e processos utilizados na interpretação de situações e problemas que se relacionam, por exemplo, com atividades cotidianas, questões econômicas, procedimentos científicos ou fatos históricos.

objetivos

- identificar uma progressão aritmética;
- determinar termos de uma progressão aritmética;
- relacionar um termo da progressão aritmética com dois termos equidistantes a ele;
- determinar a soma de termos de uma progressão aritmética;
- resolver problemas variados que possam ser modelados por progressões aritméticas, a partir de suas características e propriedades.

Introdução

Em nossa vida, várias são as siglas e abreviações que utilizamos. Muitas vezes não nos damos conta do seu significado e as replicamos quase que de maneira automática. Nas aulas

progressão

Desenvolvimento gradual de um processo, isto é, trata-se de uma sucessão.

No contexto matemático, pode ser uma sequência de números, de quantidades ou de formas que derivam sucessivamente umas das outras, segundo uma mesma lei. Vem do latim *progressio*.

aritmética

Ramo da matemática que estuda os números e suas operações. Vem do grego *arimetikos*.

de matemática, isso também costuma acontecer. Um exemplo disso está no ensino do tema *progressão aritmética*, ou *PA*, para os mais íntimos. Muito provavelmente, você, durante o Ensino Médio, deve ter escutado a pronúncia dessa pequena sigla como “pê-á”, abreviando duas palavras que carregam muitos conceitos. Mas antes de avançarmos com as definições, características e propriedades desse tema, vamos descobrir o que significam os termos **progressão** e **aritmética**, separadamente.

Mas o que seria uma progressão aritmética? Dizer apenas que se trata de uma sequência de números não é suficiente, pois uma *PA* tem características bem definidas, que envolvem operações matemáticas com os termos que a compõem. Assim, definimos a progressão aritmética como *uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante*. Isso equivale a dizer que a *PA* é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com uma constante. Essa constante é chamada de *razão da progressão* e é representada pela letra *r*, pertencendo ao conjunto dos números reais.

// atenção

Na Unidade 3 deste material, definimos o termo *razão* (de duas grandezas) como o resultado obtido quando se dividem os valores que expressam as duas grandezas. No contexto da progressão aritmética, esse termo tem outro significado: trata-se da constante obtida por meio da diferença entre um termo e o termo anterior a ele.

Se a razão for um número positivo, a progressão aritmética será crescente. Se a razão for um número negativo, a progressão aritmética será decrescente. Se a razão for igual a zero, todos os termos da progressão aritmética serão iguais e diz-se que a progressão aritmética é constante.

Nas Unidades 5 e 6 deste mesmo material, introduzimos o conceito de função e avançamos na apresentação de função afim. Dentre os vários exemplos abordados, um deles apresentava noções iniciais de progressão aritmética. Isso ocorreu porque uma *PA* é uma função afim, cujo domínio é o conjunto dos números naturais.

Progressão aritmética

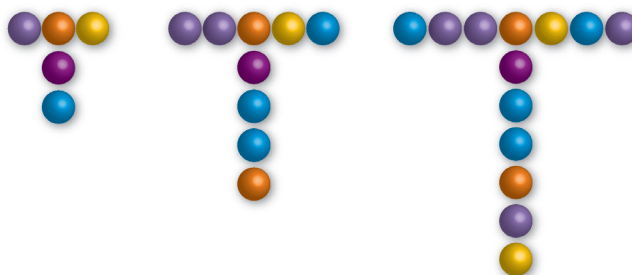
Agora que já apresentamos a definição de progressão aritmética, podemos discutir um pouco mais sobre suas características e propriedades. Para isso, utilizaremos problemas e exemplos.

Como determinar um termo de uma progressão aritmética?

Chamamos de *termo de uma progressão aritmética* cada um dos números que figuram na sequência, podendo nos referir a eles, de maneira ordenada, como: *primeiro termo*, *segundo termo* e assim por diante. Nos problemas a seguir, abordaremos formas de determinar e representar esses termos, bem como as relações existentes entre eles.

Problema 1

Uma criança resolveu organizar suas bolinhas de gude em formatos de “T”, conforme a figura abaixo.



Suponha que, para obter o próximo “T”, a criança sempre copia a disposição do “T” anterior e acrescenta 4 bolinhas. Também se sabe que suas bolinhas de gude são suficientes para organizar 10 desses “T”.

- A sequência numérica com as quantidades de bolinhas de gude utilizadas em cada um dos “T” é uma progressão aritmética?
- Quantas bolinhas de gude serão necessárias para formar o 8º “T” desta sequência?
- O último “T” desta sequência é formado por quantas bolinhas de gude?
- Se a criança tivesse bolinhas suficientes para completar 15 “T”, qual seria o número necessário de bolinhas para compor o último “T”?

Soluções

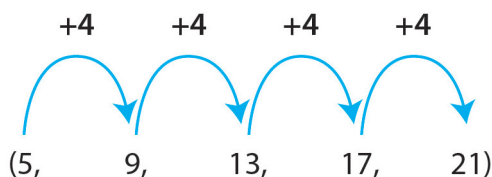
a) Sim. A sequência numérica referente ao problema pode ser representada assim:

$$(5, 9, 13, 17, 21\dots)$$

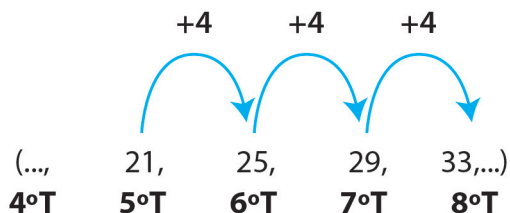
Ou seja, o primeiro “T” é formado por 5 bolinhas de gude, o segundo por 9 e o terceiro por 13, conforme a disposição verificada na imagem. Porém, podemos imaginar, sem desenhar, que o 4º “T” tem 17 bolinhas de gude, pois foi informado no enunciado que se obtém um “T” a partir do anterior com o acréscimo de 4 bolinhas. Podemos proceder da mesma maneira para determinar que o 5º “T” é formado por 21 bolinhas e assim sucessivamente.

Dessa forma, concluímos que, na sequência numérica $(5, 9, 13, 17, 21, \dots)$, cada termo, a partir do segundo, é dado pela soma do termo anterior com o número 4. Ou seja, essa sequência numérica é uma progressão aritmética, pois a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante e igual a 4, estando de acordo com a definição que apresentamos na introdução desta unidade.

b) 33 bolinhas de gude. Quando observamos as quantidades de bolinhas de gude utilizadas em cada T, notamos que a sequência de “T” apresentada pela criança dá origem a uma progressão aritmética. O esquema abaixo representa o procedimento de obtenção de cada um dos termos que determinamos no item a. Isto é, obtivemos os 5 primeiros termos da sequência sempre acrescentando 4 unidades:



Para obter a quantidade de bolinhas de gude que são necessárias para formar o 8º “T” da sequência – o que equivale a encontrar o 8º termo desta progressão aritmética –, vamos continuar com o procedimento de acrescentar 4 unidades, que é a razão desta PA. Porém, podemos fazer isso já a partir do 5º termo, acrescentando três razões.



c) 41 bolinhas de gude. O último “T” da sequência é o 10º. Tentaremos determinar a quantidade de bolinhas de gude desse “T” a partir de uma sistematização da ideia vista no item *b*. Para isso, vamos chamar cada termo de t_n , em que n é a sua posição na sequência. Nesse caso:

$$t_1 = 5$$

$$t_2 = 9$$

$$t_3 = 13$$

$$t_4 = 17$$

$$t_5 = 21$$

...

No item anterior, por exemplo, verificamos como determinar t_8 a partir do t_5 . Partimos do 5º termo e somamos três razões – que representaremos por r e que, nesse problema, equivalem a 4. Assim, justifica-se a expressão abaixo:1

$$t_8 = t_5 + 3r$$

Nela, substituímos $t_5 = 21$ e $r = 4$

$$t_8 = 21 + 3 \times 4$$

$$t_8 = 21 + 12$$

$$t_8 = 33$$

Logo, para chegar ao décimo termo, t_{10} , a partir do quinto termo, t_5 , podemos proceder de maneira similar: partimos do 5º termo e somamos cinco razões.

$$t_{10} = t_5 + 5r$$

$$t_{10} = 21 + 5 \times 4$$

$$t_{10} = 21 + 20$$

$$t_{10} = 41$$

Repare que, se quiséssemos chegar ao décimo termo, t_{10} , a partir do oitavo termo, t_8 , também seria possível. Bastaria, a partir do 8º termo, somar duas razões.

$$t_{10} = t_8 + 2r$$

$$t_{10} = 33 + 2 \times 4$$

$$t_{10} = 33 + 8$$

$$t_{10} = 41$$

// atenção

Com a resolução deste item, é possível perceber que há uma relação entre o índice do termo que tomamos como partida, a quantidade de razões somadas e o índice do termo que desejamos determinar. Você consegue dizer que relação é essa?

Pense um pouco e discuta com seus colegas, pois retornaremos a essa questão após a resolução do item d.

d) 61 bolinhas de gude. Vamos tentar resolver esse item observando apenas a figura do problema, sem considerar os termos que já determinamos nos itens anteriores. Sabemos que o terceiro “T” tem 13 bolinhas de gude, $t_3 = 13$, e que a razão é igual a 4. Assim, do 3º termo até o 15º termo, devemos somar 12 razões. Ou seja:

$$t_{15} = t_3 + 12r$$

$$t_{15} = 13 + 12 \times 4$$

$$t_{15} = 13 + 48$$

$$t_{15} = 61$$

// atenção

Então, conseguiu perceber qual a relação? Esperamos que sim. Mas vamos enunciá-la aqui também:

“a quantidade de razões somadas é igual à diferença entre o índice do termo que desejamos determinar e o índice do termo que tomamos como ponto de partida.”

Talvez fique mais fácil de perceber essa relação usando uma linguagem algébrica. Considere:

n = o índice do termo que desejamos determinar;

p = o índice do termo que tomamos como partida.

Assim, a quantidade de razões somadas é igual a $(n - p)$. Com isso, para determinar o valor do termo t_n , devemos somar $(n - p)$ razões ao termo t_p . Ou seja, $t = t_p + (n - p)r$.

Nesse problema, ao sistematizarmos a ideia para a determinação de um termo de uma progressão aritmética, utilizamos a letra t para denotar cada termo. No contexto com o qual estávamos lidando, esse uso poderia ser justificado pela associação à forma da letra construída com as bolinhas de gude ou ainda pela letra inicial da palavra *termo*. Porém, você deve concordar que qualquer letra utilizada não traria prejuízo ao entendimento da sistematização, evitando-se apenas o uso das letras n , p e r , que foram usadas para representar outras informações da PA. Ou seja, você pode utilizar as letras a , b , c , d , dentre outras, para representar os termos de

uma PA; mas ao escolher uma, utilize-a para todos os termos, diferenciando-os com os índices que se referem à posição. Em geral, utiliza-se a letra a em problemas envolvendo progressões aritméticas, denotando a sequência da seguinte forma: $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_n, \dots)$; mas fique à vontade para fazer outras escolhas.

Nos próximos problemas, utilizaremos, preferencialmente, a letra a para essa representação. Assim, a seguir, reescrevemos a fórmula que relaciona dois termos de uma PA, conforme destacamos nas resoluções anteriores.

$$a_n = a_p + (n - p)r$$

Essa mesma fórmula pode ser reescrita utilizando como ponto de partida o primeiro termo da Progressão Aritmética. Isto é, considerando $p = 1$. Dessa maneira, temos:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

// atenção

Essas relações também valem para determinar um termo em uma posição anterior ao termo que temos como ponto de partida. Por exemplo: como obter o 3º termo de uma PA, tendo os valores do 11º termo e da razão?

Nesse caso, o índice do termo que desejamos determinar é 3, isto é, $n = 3$. Já o índice do termo que tomamos como partida é 11, isto é, $p = 11$. Com isso, para determinar o valor do termo a_3 , utilizaremos:

$$a_n = a_p + (n - p)r$$

Com $n = 3$ e $p = 11$.

$$a_3 = a_{11} + (3 - 11)r$$

$$a_3 = a_{11} + (-8)r$$

$$a_3 = a_{11} - 8r$$

Ou seja, para se obter o 3º termo de uma PA deve-se subtrair 8 razões do valor referente ao 11º termo. De maneira mais genérica, quando se quer determinar um termo em uma posição n anterior ao termo que temos como ponto de partida, na posição p , deve-se subtrair $(p - n)$ razões do termo de ordem p .

Problema 2

Em uma progressão aritmética, o quarto termo vale 30 e o vigésimo termo vale 50. Quanto vale o décimo segundo termo dessa progressão?

Soluções

Para esse problema, apresentaremos 3 soluções diferentes.

Solução A

Temos $a_4 = 30$ e $a_{20} = 50$ e desejamos encontrar o valor de a_{12} . Para isso, vamos determinar inicialmente a razão desta PA.

$$a_{20} = a_4 + (20 - 4)r$$

$$a_{20} = a_4 + 16r$$

$$50 = 30 + 16r$$

$$50 - 30 = 16r$$

$$20 = 16r$$

$$r = \frac{20}{16}$$

$$r = \frac{5}{4}$$

Agora, podemos obter o 12º termo a partir do 4º, ou do 20º termo. Vamos escolher fazer a partir do 4º termo.

$$a_{12} = a_4 + 8r$$

$$a_{12} = 30 + 8 \times \frac{5}{4}$$

$$a_{12} = 30 + 2 \times 5$$

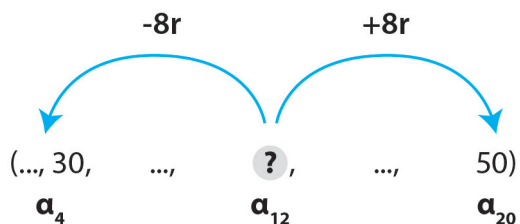
$$a_{12} = 30 + 10$$

$$a_{12} = 40$$

Resposta: o décimo segundo termo é igual a 40.

Solução B

Observe o esquema abaixo:



Temos o termo a_{12} exatamente na “metade do caminho” entre o a_4 e a_{20} . Assim, se a diferença entre a_{20} e a_4 **é de 20 unidades**, a “distância” do a_{12} até cada um deles será de 10 unidades. Portanto,

$$a_{12} = a_4 + 10 = 30 + 10 = 40$$

ou

$$a_{12} = a_{20} - 10 = 50 - 10 = 40$$

Resposta: o décimo segundo termo é igual a 40.

Solução C

Temos $a_4 = 30$ e $a_{20} = 50$ e desejamos encontrar o valor de a_{12} . Para isso, sabemos que a_{12} pode ser obtido a partir de a_4 e de a_{20} .

$$\begin{cases} a_{12} = a_4 + (12-4)r \\ a_{12} = a_{20} + (12-20)r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{12} = a_4 + 8r \\ a_{12} = a_{20} + (-8)r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{12} = a_4 + 8r \\ a_{12} = a_{20} - 8r \end{cases}$$

Se somarmos as duas equações, temos:

$$a_{12} + a_{12} = a_4 + 8r + a_{20} - 8r$$

$$2a_{12} = a_4 + a_{20}$$

$$2a_{12} = \frac{a_4 + a_{20}}{2}$$

Assim, substituímos $a_4 = 30$ e $a_{20} = 50$.

$$2a_{12} = \frac{30 + 50}{2}$$

$$2a_{12} = \frac{80}{2}$$

$$a_{12} = 40$$

Resposta: o décimo segundo termo é igual a 40.

// atenção

Discuta com seus colegas de classe sobre as resoluções apresentadas para o Problema 2, destacando qual se assemelha mais com os cálculos que você faria para resolver. Pode ser que nessa conversa surjam formas diferentes de resolver este mesmo problema.

Vamos destacar aqui aspectos presentes nas soluções B e C, pois em ambas ficou evidente a percepção de que o décimo segundo termo é a *média aritmética* entre o quarto termo e vigésimo termo. Mas o que é uma *média aritmética*?

// atenção

Uma definição para média aritmética que pode ser bem associada ao contexto do problema é: “um número é a média aritmética de dois outros quando o excesso do primeiro para o segundo é igual ao excesso do segundo para o terceiro”.

De fato, no problema, o excesso do a_4 para o a_{12} é igual ao excesso do a_{12} para o a_{20} . Ou seja, $a_{12} - a_4 = a_{20} - a_{12}$, que resulta em $a_{12} = \frac{a_4 + a_{20}}{2}$, expressão que figurou na solução C. Nesse caso, dizemos que o a_{12} é a média aritmética entre a_4 e a_{20} , pois ambos estão equidistantes ao a_{12} .

De maneira genérica, temos que: se $a_n - a_m = a_p - a_n$, então $a_n = \frac{a_m + a_p}{2}$.

lá na plataforma

Na Unidade 7 de nosso ambiente virtual, acesse o vídeo que preparamos. Ele apresenta elementos importantes sobre progressões aritméticas, relacionando-se diretamente com o que vimos até aqui.

Soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética

Para tratar da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, retomaremos o contexto do Problema 1 desta unidade. Lembra dele? Se não se lembrar, retorne e faça uma nova leitura do enunciado.

Vamos retornar à situação na qual a criança construiu 10 “T” com as bolinhas de gude. Quantas bolinhas ela gastou para fazer todos os “T”?

Solução

Como vimos nas resoluções do Problema 1, as quantidades de bolinhas gastas em cada um dos “T” podem ser representadas como os termos da progressão aritmética a seguir:

$$(5, 9, 13, 17, 21, \dots)$$

Para determinar a quantidade total de bolinhas de gude que seriam utilizadas, uma solução é encontrar as quantidades gastas em cada um dos “T” e somá-las. Ou seja, realizar a soma dos 10 primeiros termos da progressão aritmética, que indicamos abaixo.

$$(5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41)$$

Entendemos que realizar essa soma não seja uma ação tão complicada, pois trata-se de apenas 10 parcelas. Assim, bastaria fazer:

$$S_{10} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$$

$$S_{10} = 5 + 9 + 13 + 17 + 21 + 25 + 29 + 33 + 37 + 41 = 230$$

Resposta: 230 bolinhas de gude.

Porém, se tivéssemos a soma de uma quantidade maior de termos, o trabalho para somar todas as parcelas também seria maior.

Vamos imaginar agora a situação na qual a criança construiu 15 “T” com as bolinhas de gude, conforme o item (d) do problema 1. Quantas bolinhas ela gastou para fazer todos os “T”?

Solução

Para essa solução, buscaremos alternativas para determinar a quantidade de bolinhas de uma maneira que não seja realizando a soma das 15 parcelas.

Ao final da seção anterior, vimos uma relação entre termos equidistantes de um outro termo da PA e a aproveitaremos juntamente com resultados obtidos no Problema 1.

Do enunciado do problema, sabe-se que:

$$a_1 = 5$$

$$a_2 = 9$$

$$a_3 = 13$$

Dos itens *b* e *d* do Problema 1, temos que:

$$a_8 = 33$$

$$a_{15} = 61$$

Além disso, sabemos que o a_8 é média aritmética entre a_1 e a_{15} . Ou seja, $a_8 = \frac{a_1 + a_{15}}{2}$. Porém, a_8 também é média aritmética entre a_2 e a_{14} , pois basta pensar que foi acrescida uma razão em um extremo e retirada uma razão de outro. Ou seja, $a_8 = \frac{a_2 + a_{14}}{2}$. De forma análoga, podemos fazer o mesmo para outros pares de termos, sempre em relação ao a_8 . Assim,

$$a_8 = \frac{a_1 + a_{15}}{2} = \frac{a_2 + a_{14}}{2} = \frac{a_3 + a_{13}}{2} = \frac{a_4 + a_{12}}{2} = \frac{a_5 + a_{11}}{2} = \frac{a_6 + a_{10}}{2} = \frac{a_7 + a_9}{2}$$

$$2a_8 = a_1 + a_{15} = a_2 + a_{14} = a_3 + a_{13} = a_4 + a_{12} = a_5 + a_{11} = a_6 + a_{10} = a_7 + a_9$$

Dessa maneira, ao fazer a soma dos 15 primeiros termos, temos: de duas em duas parcelas, o equivalente ao dobro do valor do a_8 e uma parcela equivalente ao próprio a_8 . Veja a seguir:

$$\begin{aligned}
 S_{15} &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} \\
 S_{15} &= (a_1 + a_{15}) + (a_2 + a_{14}) + (a_3 + a_{13}) + (a_4 + a_{12}) + (a_5 + a_{11}) + (a_6 + a_{10}) + (a_7 + a_9) + a_8 \\
 S_{15} &= (2a_8) + (2a_8) + (2a_8) + (2a_8) + (2a_8) + (2a_8) + (2a_8) + 2a_8 \\
 S_{15} &= 15a_8
 \end{aligned}$$

Portanto, para encontrar a soma dos 15 primeiros termos dessa PA, basta fazer 15 vezes o termo a_8 , que vale 33. Assim:

$$S_{15} = 15 \times 33 = 495$$

Resposta: 495 bolinhas de gude.

Como $a_8 = \frac{a_1 + a_{15}}{2}$, podemos reescrever a expressão assim:

$$S_{15} = \frac{(a_1 + a_{15})}{2} \times 15$$

Ou seja, a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PA relaciona o 1º e o último termos e a quantidade de termos somados da seguinte forma:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \times n$$

Aplicando essa fórmula para resolver o problema, também vamos obter 495 bolinhas de gude, como era de se esperar.

$$\begin{aligned}
 S_{15} &= \frac{(a_1 + a_{15})}{2} \times 15 \\
 S_{15} &= \frac{(5 + 61)}{2} \times 15 \\
 S_{15} &= \frac{66}{2} \times 15 \\
 S_{15} &= 33 \times 15 = 495
 \end{aligned}$$

>> saiba mais

Uma forma de provar que essa fórmula vale para todas as progressões aritméticas é a seguinte.

Considere a soma dos n primeiros termos de uma PA escrita de duas formas:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1$$

Agora, vamos somar as duas equações:

$$2 \times S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Observe que há pares aditivos. Ao passar de um par aditivo para o seguinte, a primeira parcela do par aditivo aumenta de d e a segunda parcela diminui de d , o que não altera o valor desse par aditivo. Portanto, todos os pares aditivos têm o mesmo valor do primeiro:

Como são n pares, temos:

$$2 \times S_n = (a_1 + a_n) \times n$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \times n$$

Progressões aritméticas no ENEM

Questões sobre progressões aritméticas são muito comuns em provas do ENEM, muitas vezes com contextos relativos à economia ou à biologia. Também é muito comum que os dados estejam organizados em gráficos ou em tabelas, exigindo que o estudante tenha habilidade para interpretá-los. Assim, apresentaremos a seguir duas questões do ENEM, para que você pratique mais um pouco. Na plataforma, teremos mais exercícios.

1. (ENEM 2011 - Reproduzida) O número mensal de passageiros de uma determinada empresa aérea aumentou, no ano passado, nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33.000 passagens; em fevereiro, 34.500; em março, 36.000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes. Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?

- a) 38.000
- b) 40.500
- c) 41.000
- d) 42.000
- e) 48.000

lá na plataforma

Utilize esse link para acessar uma resolução comentada da questão: https://www.youtube.com/watch?v=Ba_LONpmaCE.

2. (ENEM 2013 - Reproduzida) As projeções para a produção de arroz no período de 2012 – 2021, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. O quadro apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.

Ano	Projeção da produção (t)
2012	50,25
2013	51,50
2014	52,75
2015	54,00

A quantidade total de arroz, em toneladas, que deverá ser produzida no período de 2012 a 2021 será de:

- a) 497,25
- b) 500,85
- c) 502,87
- d) 558,75
- e) 563,25

lá na plataforma

Utilize esse link para acessar uma resolução comentada da questão: <https://youtu.be/5Dwd9RLrrF4>.

Resumo

Progressão aritmética é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com uma constante, chamada de *razão*.

A fórmula que relaciona dois termos de uma PA é $a_n = a_p + (n - p)r$.

Se $a_n - a_m = a_p - a_n$, então $a_n = \frac{a_m + a_p}{2}$, isto é, a_n é a média aritmética entre a_m e a_p , pois ambos estão equidistantes ao a_n .

A fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PA é $S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \times n$.

Atividade

lá na plataforma

Na Unidade 7 de nosso ambiente virtual, acesse a lista de exercícios sobre progressões aritméticas.

Após tentar resolver esses exercícios, verifique as respostas comentadas, que também figuram no final do mesmo arquivo.

Referências

MORGADO, A., WAGNER, E., ZANI, S. *Progressões e Matemática Financeira*. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, SBM, 2005.

PROJETO SEEDUC. *Matemática e suas tecnologias*. Módulo III – Matemática. Nova EJA. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2013. Disponível em: http://projetoeduc.cecierj.edu.br/eja/material-aluno/modulo-03/Miolo_Matematica_Nova_Eja_Aluno_Mod03.pdf. Acesso em: 14 Out. 2021.

PORTAL DA MATEMÁTICA OBMEP. Aula 02 – Progressão Aritmética, o início. *Youtube*, 14 de nov. de 2016. Disponível em: https://youtu.be/yrCin_TlrZo. Acesso em: 14 Out. 2021.

PORTAL DA MATEMÁTICA OBMEP. Aula 03 – Exercícios introdutórios de PA. *Youtube*, 14 de nov. de 2016. Disponível em: <https://youtu.be/oMFxarXIZdk>. Acesso em: 14 Out. 2021.

PRÉ-VESTIBULAR SOCIAL DA FUNDAÇÃO CECIERJ. Matemática – Semana 6: Progressão Aritmética. *Youtube*, 19 de jul. de 2021. Disponível em: <https://youtu.be/0YPZfLm2dRk>. Acesso em: 14 Out. 2021.

PRÉ-VESTIBULAR SOCIAL DA FUNDAÇÃO CECIERJ. Matemática – Semana 7: Soma de Números em Progressão Aritmética. *Youtube*, 26 de jul. de 2021. Disponível em: <https://youtu.be/tn0cwIRay8U>. Acesso em: 14 Out. 2021.

Quando as coisas vão e voltam

08

metas

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias, como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, para identificar a necessidade, ou não, de modelagem de situações e problemas com funções polinomiais de 2º grau.

objetivos

Esperamos que, ao final desta unidade, você seja capaz de:

- investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau, do tipo $y = ax^2$;
- resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais de 2º grau, em contextos diversos;
- converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau para representações geométricas no plano cartesiano.

Introdução

Considere a seguinte situação-problema:

O gráfico esboçado, da função $y = ax + b$, representa o custo unitário de produção de uma peça em função da quantidade mensal produzida.

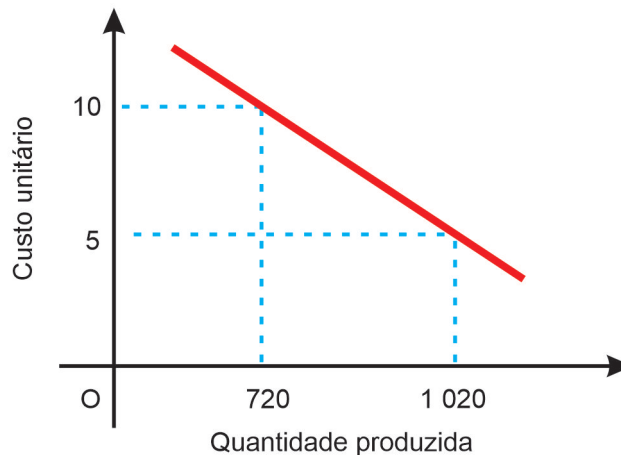


Figura 8.1: Custo unitário x quantidade produzida.

Para que esse custo unitário seja R\$ 6,00, a produção mensal deve ser igual a:

- | | |
|--------|--------|
| a) 930 | d) 960 |
| b) 920 | e) 980 |
| c) 940 | |

Note que, no gráfico:

- o eixo das abscissas é utilizado para representar a quantidade produzida;
- o eixo das ordenadas é utilizado para representar o custo unitário, ou seja, quanto custa a fabricação de cada unidade, se já soubermos qual é a quantidade produzida.

Como o gráfico que representa o custo unitário em função da quantidade produzida é uma reta, concluímos que se trata de uma função polinomial de 1º grau. Assim, representando-se o custo unitário por y e a quantidade produzida por x , temos que $y = ax + b$, em que a é a taxa de variação e B é o coeficiente linear. A taxa de variação pode ser calculada fazendo-se:

$$A = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Na figura a seguir, o segmento verde tem tamanho 5 e indica que Δy vale -5 . Atente para o fato de que Δy , nesse caso, deve ser negativo porque a reta é decrescente.

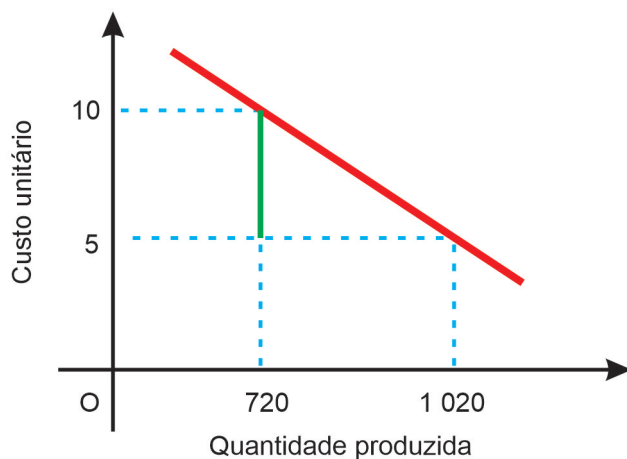


Figura 8.2: Variação de y .

Na figura a seguir, o segmento laranja tem tamanho 300 e indica que Δx vale 300.

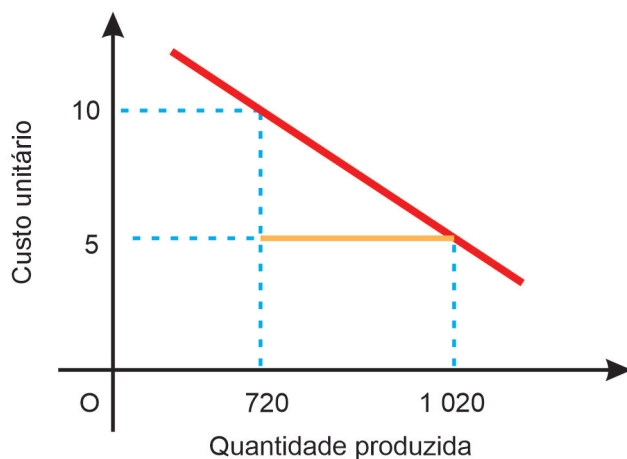


Figura 8.3: Variação de x .

Logo:

$$A = \frac{-5}{300} = -\frac{1}{60}$$

Em seguida, por substituição, podem ser usadas as informações contidas no ponto (720; 10), ou no ponto (1020; 5), para o cálculo do coeficiente B . No caso, usaremos as informações do primeiro ponto.

$$10 = -\frac{1}{60} \cdot 720 + B \Rightarrow B = 10 + 12 \Rightarrow B = 22$$

Portanto, a função polinomial de 1º grau que calcula o custo unitário de acordo com a quantidade produzida é:

$$y = -\frac{1}{60} \cdot x + 22$$

De posse da Lei da Função, podemos responder à pergunta feita no enunciado da questão substituindo-se y por 6 e, em seguida, calculando x .

$$6 = -\frac{1}{60} \cdot x + 22 \Rightarrow \frac{x}{60} = 16 \Rightarrow x = 960$$

Neste mesmo problema, se desejarmos calcular o custo total, devemos multiplicar o custo unitário - custo de uma única peça - pela quantidade de peças.

$$\text{Custo total} = (\text{custo unitário}) \cdot (\text{quantidade de peças})$$

Considerando-se que:

- quantidade de peças: x ;
- custo unitário: $= -\frac{1}{60} \cdot x + 22$

$$\text{Concluimos que o custo total (C)} = x \cdot \left(-\frac{1}{60} \cdot x + 22 \right) = -\frac{1}{60} \cdot x^2 + 22x$$

Nesse exemplo, existe uma relação de dependência entre as grandezas quantidade de peças (x) e custo total (C), ambas sendo números racionais, com x maior do que ou igual a 0. Certamente, não é um polinômio do 1º grau, e sim, um polinômio do 2º grau, por causa do termo quadrático x^2 .

Isso ilustra que a condição *sine qua non* para se ter uma função polinomial de 2º grau é haver, em sua regra de definição, o termo ax^2 , com o $a \neq 0$. Mas isto não é suficiente, pois não podem existir, na referida regra, termos cujo grau seja maior do que 2 (a não ser que precedidos por coeficiente 0). Porém, pode haver termos de grau inferior a 2, ou seja, igual a 1, ou igual a 0, ou termos nulos. Assim, chegamos à regra por meio da qual uma função real de variável real será polinomial do 2º grau:

$$y = ax^2 + bx + c$$

com a , b e c parâmetros reais e não nulos.

No caso do problema apresentado, o tipo de modelagem propicia estudar o comportamento do custo (crescimento ou decrescimento, variação de sinal, interpolações e extrapolações, existência de valores extremos etc.) a partir do número de peças vendidas.

Essa forma particular de se comportar, característica das funções quadráticas, aparece de maneira bem interessante no vídeo que indicamos a seguir.

lá na plataforma

Na Unidade 8 de nosso ambiente virtual, acesse o vídeo que aborda o que estudamos até aqui.

Conceito de função quadrática

Uma função real, de variável real f , será dita *polinomial do 2º grau* (ou *quadrática*) quando for expressa por uma sentença do tipo $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Dentre essas, a função mais simples é aquela que associa cada número real x ao seu quadrado x^2 , ou seja, aquela cuja expressão é $f(x) = x^2$.

A fim obter seu gráfico, recorreremos ao processo por meio do qual atribuímos valores à variável x e determinamos a imagem correspondente, ligando, em seguida, os pontos obtidos.

x	x^2
-2	4
-1,9	3,61
-1,8	3,24
-1,7	2,89
-1,6	2,56
-1,5	2,25
-1,4	1,96
-1,3	1,69
-1,2	1,44
-1,1	1,21
-1	1
-0,9	0,81
-0,8	0,64
-0,7	0,49
-0,6	0,36
-0,5	0,25
-0,4	0,16
-0,3	0,09
-0,2	0,04
-0,1	0,01
0	0
1	1
2	4

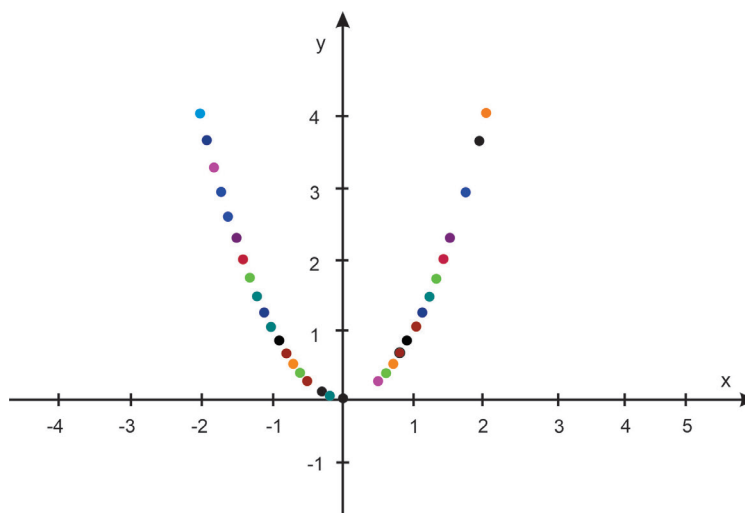


Figura 8.4: Plotagem de pontos de $f(x) = x^2$.

A curva obtida ligando-se os pontos encontrados é denominada *parábola*.

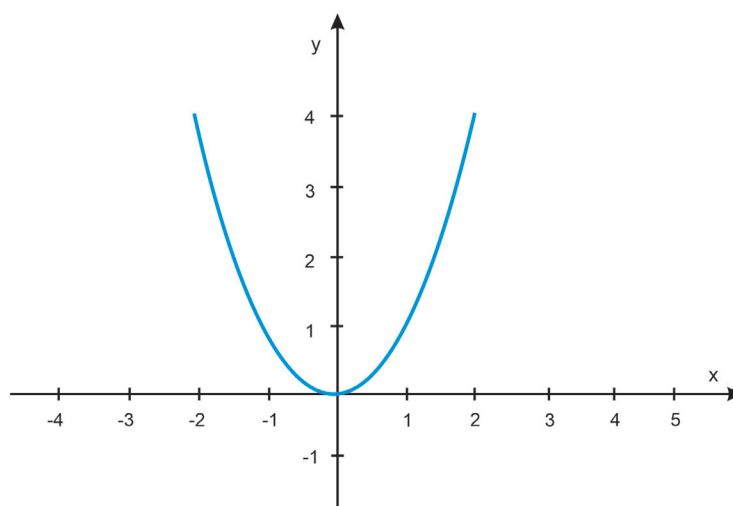


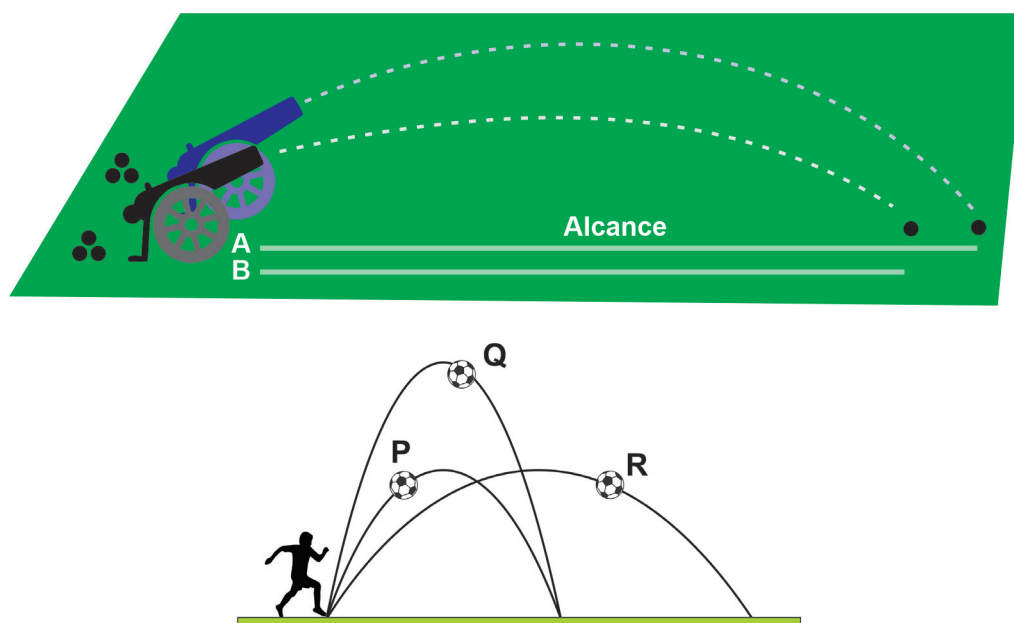
Figura 8.5: Gráfico de $f(x) = x^2$.

O ponto de coordenadas $(0; f(0))$, que é o ponto “mais baixo”, recebe o nome de *vértice* da parábola. O conjunto $(0; +\infty)$ é a imagem da função. A reta de equação $x = 0$ (o eixo das ordenadas) é denominada *eixo de simetria* da parábola. A abertura da curva recebe o nome de *concavidade* da parábola.

// atenção

Parábola e vértice

Segundo a etimologia, parábola é palavra formada pela junção de PARA, que significa “ao lado”, com BALLEIN, que significa “lançar, atirar”. Provavelmente, este último significado refere-se à trajetória descrita por objeto lançado “para cima e para frente”.



Assim, é natural chamar o ponto mais alto, o topo da trajetória, o ápice da curva, de vértice, que, segundo os dicionários, significa “a altura máxima atingida por algo que se eleva ou o ponto mais alto de (algo); ápice, cume, culminação” (Grande Dicionário Houaiss). Ainda referente à parábola, o eixo de simetria é a linha que divide uma figura em duas partes “iguais”, como se fossem o objeto e a sua imagem em um espelho. Finalmente, a palavra concavidade é um dos sinônimos mais apropriados à representação que se vê na parábola – cavidade.

O estudo do gráfico da função quadrática

>> saiba mais

Sugerimos que você acesse o programa disponível Winplot, que é uma ferramenta que nos auxilia a trabalhar com representações gráficas de funções reais. O link de acesso é <http://www.baixaki.com.br/download/winplot.htm>.

Em seguida, para aprender a utilizá-lo, recomendamos a leitura do material que se encontra em anexo.

Vejamos agora o que acontece com a parábola quando “mexemos” em sua equação.

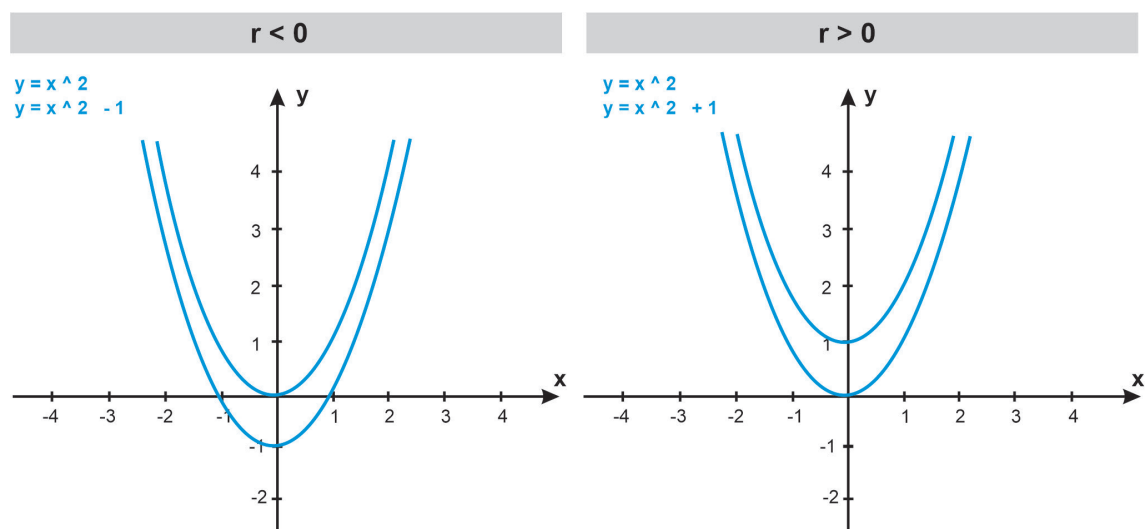


Figura 8.6: Gráficos de $y = x^2 + r$.

Seja r um número real não-nulo. Partindo do gráfico de $f(x) = x^2$, o que acontecerá com o gráfico de uma nova função g , também do 2º grau, de equação $g(x) = x^2 + r$?

translação

Ação ou o efeito de mudar uma coisa de um lugar para outro. Fonte: Dicionário Aulete Digital (<http://www.aulete.com.br/>).

De modo geral, em relação ao gráfico de f , o gráfico de g sofre uma translação vertical de r unidades para cima, se $r > 0$ e sofre uma translação vertical de r unidades para baixo, se $r < 0$.

Seja r um número real não-nulo. Partindo do gráfico de $f(x) = x^2$, o que acontecerá com o gráfico de uma nova função g , também do 2º grau, de equação $g(x) = (x + r)^2$?

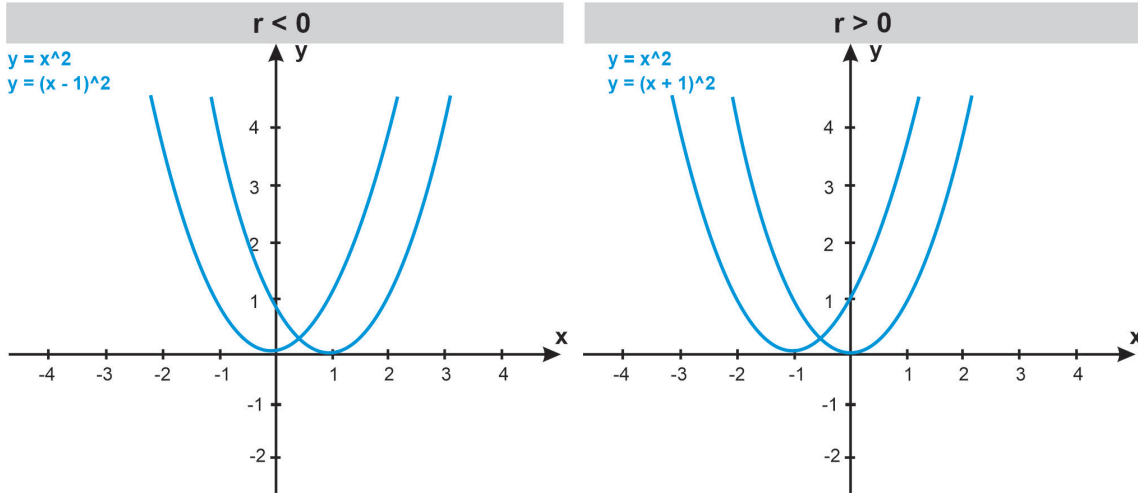
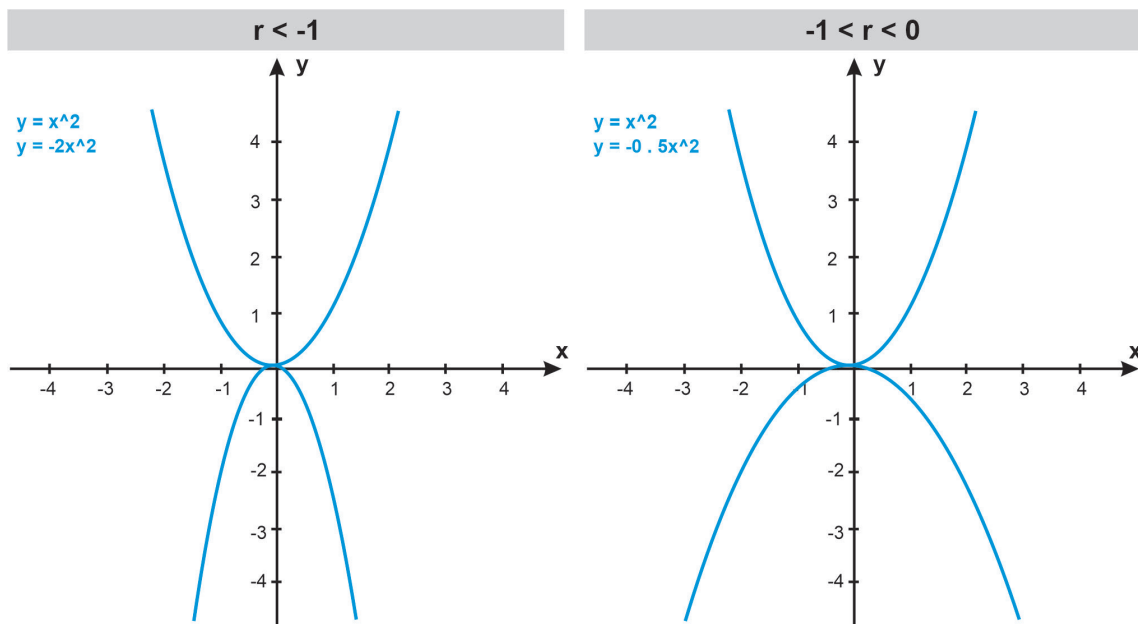


Figura 8.7: Gráficos de $y = (x + r)^2$.

De modo geral, em relação ao gráfico de f , o gráfico de g sofre uma translação horizontal de r unidades para a direita, se $r < 0$ e sofre uma translação horizontal de r unidades para a esquerda, se $r > 0$. Note que a translação horizontal tem comportamento invertido ao comumente esperado.

	$r > 0$	$r < 0$
Translação vertical	Sentido positivo de y	Sentido negativo de y
Translação horizontal	Sentido negativo de x	Sentido positivo de x

Seja r um número real não-nulo. Partindo do gráfico de $f(x) = x^2$, o que acontecerá com o gráfico de uma nova função g , também do 2º grau, de equação $g(x) = r \cdot x^2$?



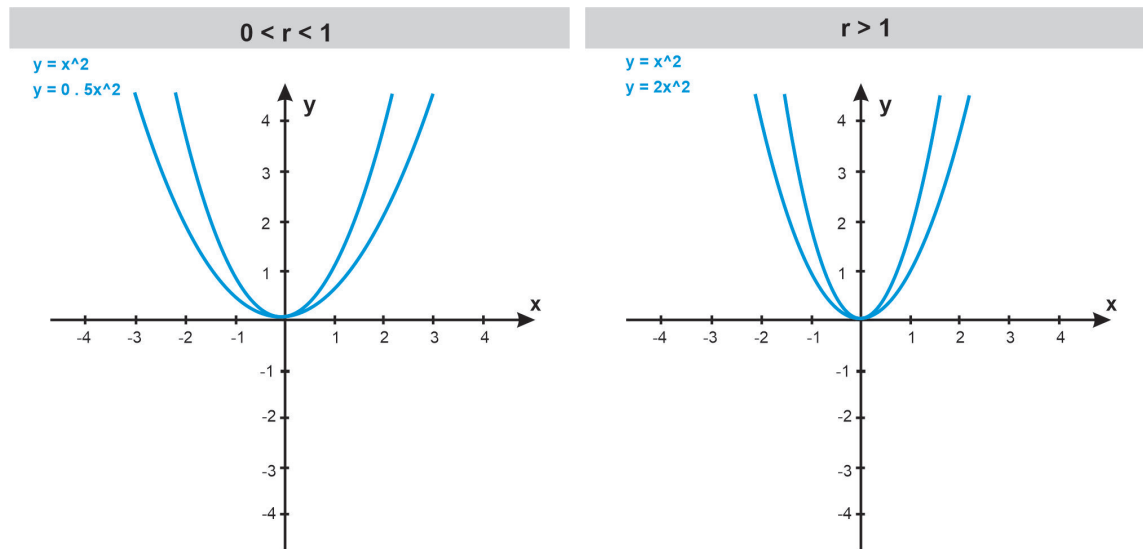


Figura 8.7: Gráficos de $y = r \cdot x^2$.

De modo geral, em relação ao gráfico de f , o gráfico de g sofre alterações em sua abertura (concavidade):

- se $r < 0$, a concavidade muda de sentido, ficando para baixo ou negativa;
- se $r > 0$, a concavidade mantém o sentido, ficando para cima ou positiva;
- se $-1 < 0 < 1$, ou seja, $|r| < 1$, a concavidade expande, ou seja, “abre”;
- se $r \leftarrow 1$ ou $r > 1$, ou seja, $|r| > 1$, a concavidade contrai, ou seja, “fecha”.

De modo geral, a maneira como se comporta uma função quadrática, quando são dados acréscimos de 1 unidade na variável x , permite observar a forma como se dá o crescimento ou o decréscimo dessa função. Graficamente, isso é chamado de *concavidade*. A figura seguinte ilustra o que se afirma para funções crescentes.

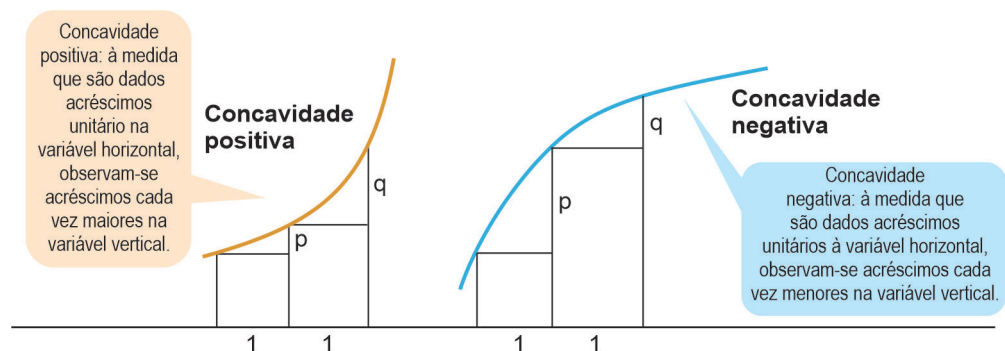


Figura 8.8: Concavidade.

No caso da função quadrática $f(x) = a \cdot x^2$, a cada acréscimo de 1 unidade na variável x , tem-se:

$$f(x+1) = a \cdot (x+1)^2 = a \cdot (x^2 + 2x + 1) = ax^2 + 2ax + a$$

$$f(x+1) = f(x) + (2ax + a)$$

$$f(x+1) = f(x) + a(2x+1),$$

o que corresponde a um acréscimo de $a(2x+1)$ na variável vertical. Isso mostra que a concavidade de uma função quadrática depende exclusivamente de a , pois é o seu sinal que determina se $y = 2ax + a$ é crescente ou decrescente. Assim:

- se $a > 0$, o gráfico de $f(x)$ terá concavidade positiva (voltada para cima), pois $y = 2ax + a$ é crescente;
- se $a < 0$, o gráfico de $f(x)$ terá concavidade negativa (voltada para baixo), pois $y = 2ax + a$ é decrescente.

Por exemplo, vamos construir o gráfico de $g(x) = x^2 + 2x + 1$, a partir do gráfico de $f(x) = x^2$. Inicialmente, convém notar que a equação de g pode ser reescrita de uma forma mais conveniente, pois se trata de um trinômio quadrado perfeito.

$$g(x) = (x+1)^2$$

Assim, basta transladar $Gr(f)$ em 1 unidade para a esquerda, que teremos $Gr(g)$, conforme ilustrado na figura seguinte:

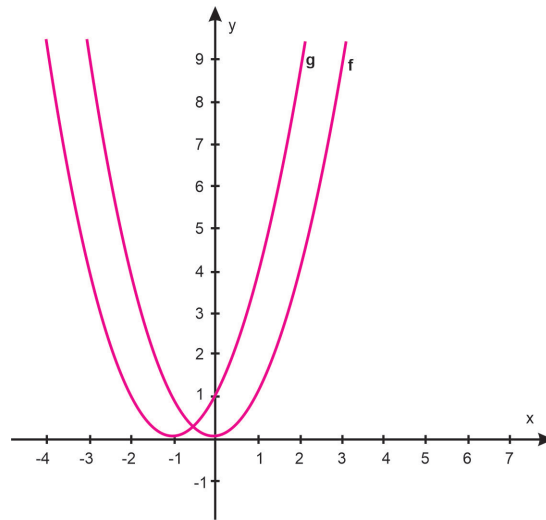


Figura 8.9: Gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = (x+1)^2$.

Assim, quando a função quadrática for expressa por meio de um trinômio quadrado perfeito do tipo $g(x) = (x-m)^2$, seu gráfico será diretamente obtido do gráfico de $f(x) = x^2$ por meio de uma translação sobre o eixo \overline{Ox} .

Vejamos outro exemplo: construir o gráfico de $g(x) = 4x^2 - 4x + 1$, a partir do gráfico de $f(x) = x^2$. Conquanto a equação de g seja um trinômio quadrado perfeito, ele não é do tipo $(x - m)^2$, pois o coeficiente do termo do 2º grau não é 1. Porém, cabe o ajuste seguinte:

$$g(x) = 4\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right)^2 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

Assim, basta transladar $Gr(f)$ em $1/2$ unidade para a direita e, em seguida, contraí-lo verticalmente 4 vezes, que teremos $Gr(g)$, conforme ilustrado na figura seguinte:

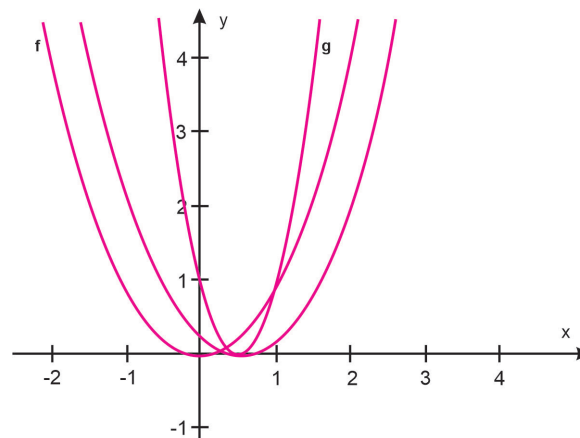


Figura 8.10: Gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = 4x^2 - 4x + 1$.

Assim, quando a função quadrática for expressa por uma equação do tipo $g(x) = a(x - m)^2$, seu gráfico será diretamente obtido do gráfico de $f(x) = x^2$ por meio de uma translação na direção do eixo das abscissas, seguida de uma contração ou de uma expansão vertical.

Vejamos mais um exemplo: construir, a partir do gráfico de $f(x) = x^2$, o gráfico de $g(x) = x^2 + 6x + 8$. Neste caso, a equação de g não é um trinômio quadrado perfeito por causa do termo independente, que vale 8 (para se ter um trinômio quadrado perfeito, este termo deveria ser o quadrado da metade do coeficiente do termo do 1º grau, neste caso, valer $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$). Então, reescrevendo $g(x)$ de outra forma, visando à obtenção de um trinômio quadrado perfeito, temos:

$$g(x) = (x^2 + 6x + 9) - 9 + 8$$

$$g(x) = (x + 3)^2 - 1$$

Assim, basta transladar $Gr(f)$ em 3 unidades para a esquerda e, em seguida, transladá-lo 1 unidade para baixo, que teremos $Gr(g)$, conforme ilustrado na figura seguinte:

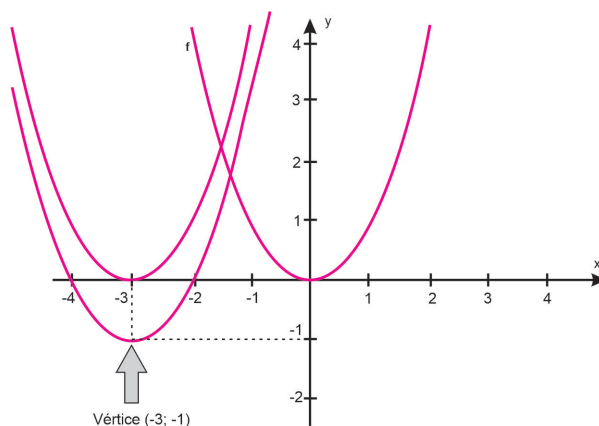


Figura 8.11: Gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^2 + 6x + 8$.

Portanto, quando a função quadrática for expressa por uma equação do tipo $g(x) = a(x - m)^2 + n$, seu gráfico será obtido do gráfico de $f(x) = x^2$, por meio de uma translação horizontal, seguida de uma contração ou de uma expansão vertical e, finalmente, de uma translação vertical.

A forma canônica da função quadrática

A forma canônica da função quadrática $g(x) = ax^2 + bx + c$ permite identificar, em detalhes, cada uma das transformações que são necessárias fazer no gráfico de $f(x) = x^2$ de modo a se obter o gráfico de $g(x)$. Segue a forma canônica:

$$g(x) = a \cdot (x - m)^2 + n$$

Voltemos ao exemplo anterior, em que se tem:

$$g(x) = (x + 3)^2 - 1$$

- quando $x = -3$, então $g(-3) = -1$ é o valor mínimo de g e, por conseguinte, as coordenadas do vértice da parábola são $(-3, -1)$.
- o eixo de simetria da parábola é a reta vertical de equação $x = -3$;
- quando $x < -3$, a função será decrescente; quando $x > -3$, a função será crescente;
- os zeros da função g são as raízes da equação do 2º grau $(x + 3)^2 - 1 = 0$, ou seja:

$$(x + 3)^2 = 1 \Rightarrow x + 3 = \pm \sqrt{1} \Rightarrow x = -3 \pm 1 \Rightarrow x = -2 \text{ e } x = -4;$$

- lembrando que $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$, temos:

$$g(x) = (x + 3)^2 - 1 = (x + 3 - 1) \cdot (x + 3 + 1)$$

$$g(x) = (x + 2) \cdot (x + 4),$$

que é chamada de *forma fatorada* de g ;

- quando $x < -4$ ou $x > -2$ (x “situar-se” fora dos zeros), a função terá valores positivos; quando $-4 < x < -2$ (x “situar-se” entre os zeros), a função terá valores negativos.

Outrossim, vimos que, a partir da forma canônica, obtemos diretamente informações importantes acerca da função e de seu gráfico. Destarte, analisando

$$g(x) = a \cdot (x - m)^2 + n,$$

temos:

- o valor de a informa se $Gr(g)$ é mais “aberto” ou “fechado”;
- o sinal de a informa o sentido da concavidade de $Gr(g)$ e, por conseguinte, se o vértice é ponto de máximo ou de mínimo;
- quando $x = m$, então $g(m) = n$ corresponde ao valor extremo da função e, por conseguinte, (m, n) são as coordenadas do vértice da parábola, que é o ponto;
- o eixo de simetria é a reta vertical de equação $x = m$;
- quando $x < m$, a função será decrescente ou crescente, conforme $a > 0$ ou $a < 0$, respectivamente; quando $x > m$, a função será crescente ou decrescente, conforme $a > 0$, ou $a < 0$, respectivamente.
- os zeros da função g são as raízes da equação do 2º grau $a(x - m)^2 + n = 0$, ou seja:

$$a \cdot (x - m)^2 = -n \Rightarrow (x - m)^2 = -\frac{n}{a} \Rightarrow x - m = \pm \sqrt{-\frac{n}{a}}, \text{ se } -\frac{n}{a} \geq 0$$

Logo, $x = m \pm \sqrt{-\frac{n}{a}}$;

- se $-\frac{n}{a}$ for positivo, chamando de α e de β os zeros da função, a forma fatorada de g será:

$$g(x) = a \cdot (x - \alpha) \cdot (x - \beta);$$

- neste caso, supondo $\alpha < \beta$, quando $x < \alpha$ ou $x > \beta$ (x “situando-se” fora dos zeros), a função terá o sinal de a ; já quando $\alpha < x < \beta$ (x “situando-se” entre os zeros), a função terá sinal contrário ao de a .

O processo utilizado para obter a forma canônica de uma função quadrática de equação $g(x) = ax^2 + bx + c$ consiste em determinar números reais m e n tais que $g(x) = a(x - m)^2 + n$.

Vejamos o exemplo seguinte: obter a forma canônica de $g(x) = -2x^2 + 3x - 1$.

Nosso objetivo é “fazer surgir” um trinômio quadrado perfeito (TQP), cuja fatoração resulte $(m - n)^2$, dentro da expressão de g . Para isso, inicialmente o -2 será colocado em evidência para que fiquemos apenas com o x^2 . Depois, uma parcela p^2 será “criada” a fim de que o bloco entre parênteses se transforme em (TQP). Naturalmente, a inserção de uma parcela precisa ser anulada por outra parcela de valor oposto. Assim:

$$\begin{aligned} -2x^2 + 3x - 1 &= -2 \cdot \underbrace{\left(x^2 - \frac{3}{2} + p^2\right)}_{\text{TQP}} - (-2p^2) - 1 \\ -2x^2 + 3x - 1 &= -2 \cdot \underbrace{\left(x - \frac{3}{4}\right)^2}_{\text{TQP}} + 2p^2 - 1 \end{aligned}$$

Para que se tenha um trinômio quadrado perfeito, o valor de p^2 (com $p > 0$) tem de ser igual ao quadrado da metade de $\frac{3}{2}$, ou seja:

$$p^2 = \left(\frac{3/2}{2}\right)^2 \Rightarrow p^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow p = \frac{3}{4}$$

Donde vem que:

$$\begin{aligned} -2x^2 + 3x - 1 &= -2 \cdot \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + 2 \cdot \frac{9}{16} - 1 \\ g(x) &= \underbrace{-2 \cdot \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{8}}_{\text{Forma canônica}} \end{aligned}$$

O processo de obtenção da forma canônica da expressão que define $g(x)$ denomina-se “completamento” do quadrado.

A partir da forma canônica:

- $a = -2 \rightarrow Gr(g)$ é uma parábola mais “fechada”;
- $a < 0 \rightarrow Gr(g)$ é uma parábola com concavidade para baixo \rightarrow o vértice é de máximo;
- $g\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{8} \rightarrow$ o valor mínimo de g é $\frac{1}{8} \rightarrow$ as coordenadas do vértice da parábola são $\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{8}\right)$;
- o eixo de simetria da parábola é a reta vertical de equação $x = \frac{3}{4}$;

- a função g é crescente $\forall x \in \left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$ e é decrescente $\forall x \in \left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$;
- os zeros da função g :

$$-2 \cdot \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow x - \frac{3}{4} = \pm \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ ou } x = \frac{4}{4} = 1$$

Logo, a parábola intersecta o eixo das abscissas nos pontos:

$$A = \left(\frac{1}{2}; 0\right) \text{ e } B = (1; 0).$$

- assim, a forma fatorada de g é $g(x) = -2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (x - 1)$
- a função g é positiva $\forall x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$ e negativa $\forall x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$;
- $Gr(g)$ será obtido a partir do gráfico de $f(x) = x^2$ por meio da aplicação sucessiva das seguintes transformações:
 1. translação de $\frac{3}{4}$ de unidade para a direita;
 2. reflexão em torno do eixo das abscissas, seguida de uma expansão de 2 unidades;
 3. translação de $\frac{1}{8}$ de unidade para cima.

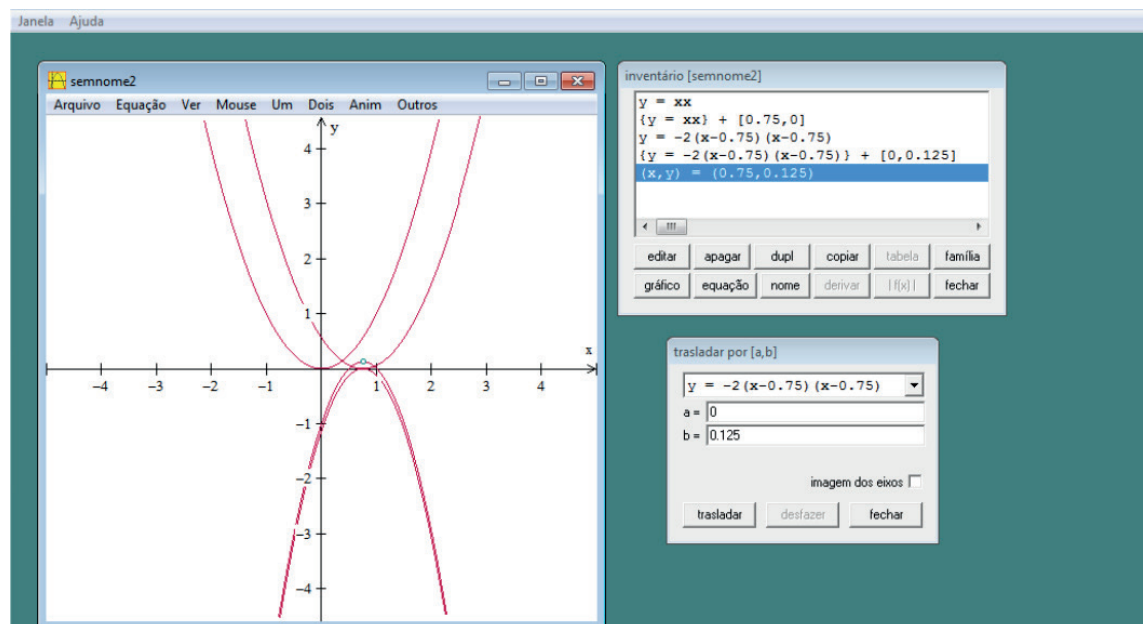


Figura 8.12: Transformações realizadas.

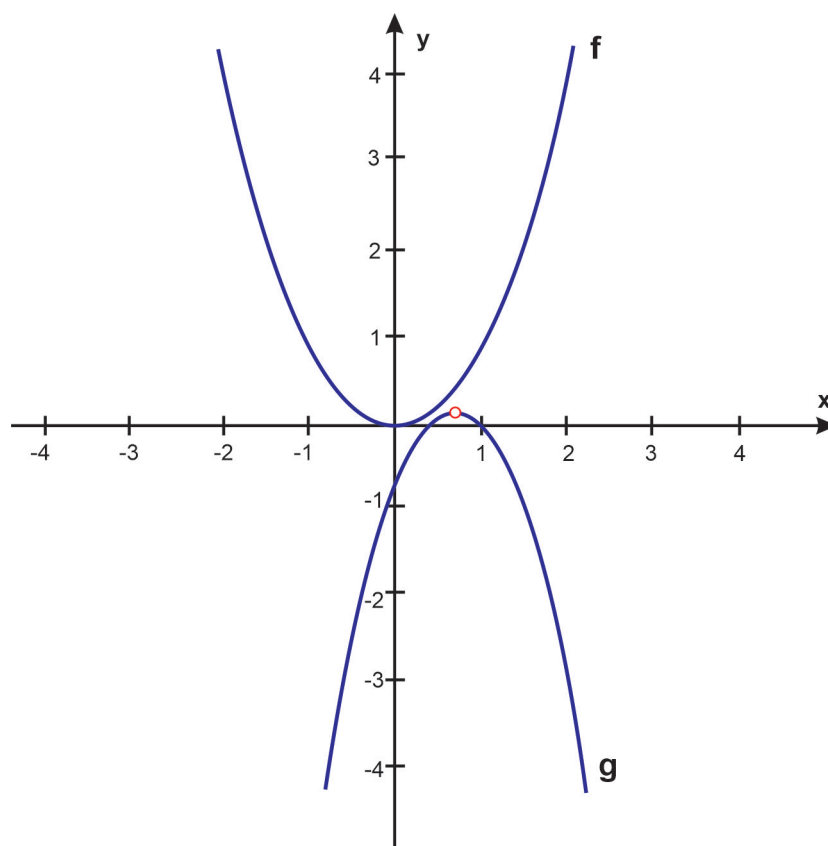


Figura 8.13: Gráficos de f e g .

>> saiba mais

A fim de visualizar os termos utilizados anteriormente, sugerimos que você assista ao vídeo em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1172>.

Máximo ou mínimo de uma função quadrática

Como vocês já viram nas seções anteriores, o gráfico de uma função quadrática (uma parábola) possui um ponto que chamamos de *vértice* e, dependendo de sua concavidade, esse ponto será de máximo ou de mínimo. Isto é: se a concavidade da parábola é para baixo ($a < 0$), então o ponto é de máximo (o maior valor da função); se a concavidade da parábola é para cima ($a > 0$), então o ponto é de mínimo (o menor valor da função).

Especificamente, na seção anterior, verificamos como obter elementos importantes do gráfico de uma função quadrática – dentre eles, o vértice da parábola – a partir da interpretação de parâmetros de sua forma canônica. Porém, como devemos fazer se quisermos obter apenas as coordenadas do vértice da parábola que representa o gráfico de uma função quadrática, cuja lei de formação não se apresenta na forma canônica?

Vamos a um exemplo em que lei de formação da função quadrática se apresenta como $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Situação 1: determine as coordenadas do vértice da função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(x) = x^2 + 4x + 5$.

Solução:

Nossa intenção, aqui, é determinar as coordenadas do vértice dessa função quadrática sem ter que recorrer à forma canônica da mesma. Para isso, é importante resgatar algumas características do gráfico de uma função quadrática:

- a parábola possui um eixo de simetria. Nesse caso, trata-se de um eixo vertical;
- o vértice é o ponto de interseção entre esse eixo de simetria e a parábola.

Assim, a partir dessas duas informações, sabemos que, em uma função quadrática, ao atribuírmos a $y = f(x)$ um valor pertencente ao conjunto imagem, teremos dois valores em x associados ao valor escolhido para y : um à esquerda e outro à direita do eixo de simetria, gerando, no gráfico, dois pontos simétricos ao eixo de simetria.

// atenção

A exceção dessa observação é quando se trata do valor da imagem referente à ordenada do próprio vértice da parábola, pois só haverá um valor em x associado a ele.

Dessa maneira, para se obter o eixo de simetria, basta fazer a média aritmética entre os dois valores obtidos em x .

Mas, como podemos, na prática, atribuir um valor a $y = f(x)$ e ter a garantia de que esse valor é uma imagem da função $f(x) = ax^2 + bx + c$? Escolhendo $f(x) = c$.

Neste exemplo, isso é o equivalente a atribuir a y o valor de $c = 5$. Assim, teremos a equação:

$$5 = x^2 + 4x + 5$$

$$x^2 + 4x = 0$$

$$x(x + 4) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x + 4 = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = -4$$

Com isso, obtemos os pontos $(0, 5)$ e $(-4, 5)$ como pontos pertencentes ao gráfico da função e simétricos em relação ao eixo de simetria. Para encontrar o eixo de simetria, basta fazer a média aritmética entre os dois valores x obtidos:

$$\frac{0 + (-4)}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Ou seja, o eixo de simetria dessa parábola é a reta vertical de equação $x = -2$.

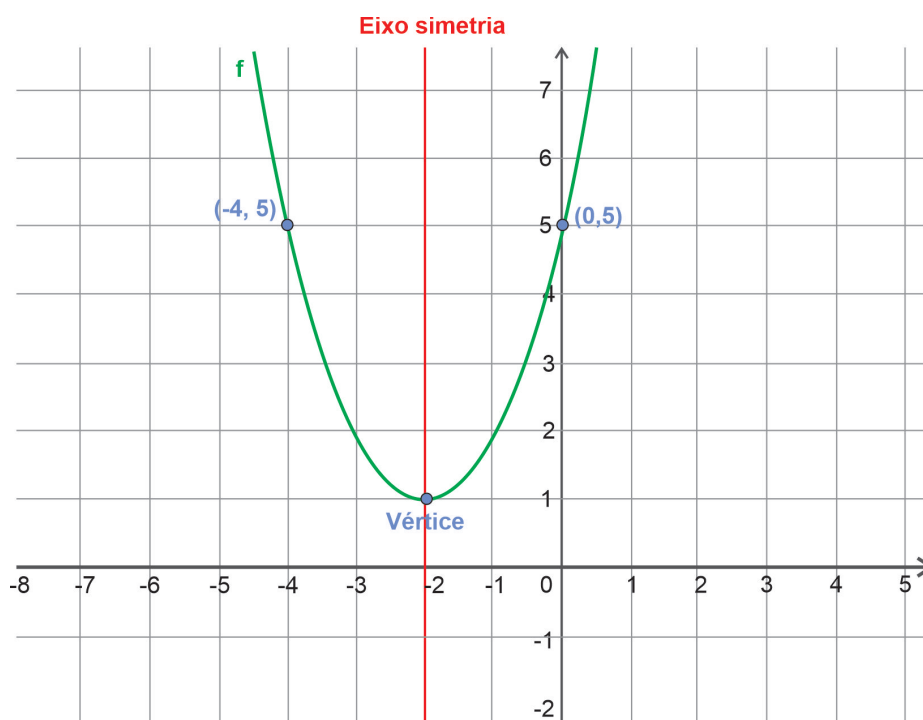


Figura 8.14: Gráfico de $f(x) = x^2 + 4x + 5$.

Portanto, como o vértice se encontra na interseção entre essa reta e parábola, basta fazer a substituição de $x = -2$ em $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^2 + 4(-2) + 5 \\ &= 4 - 8 + 5 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Logo, as coordenadas do vértice da parábola são $(-2, 1)$. Ou seja, como se trata de uma parábola com concavidade para cima, temos um valor mínimo da função, que é 1.

Vamos a outro exemplo, com uma resolução menos detalhada:

Situação 2: determine as coordenadas do vértice da função quadrática $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $g(x) = -2x^2 + 3x - 1$.

Solução:

Como $c = -1$, façamos a substituição de $y = g(x) = -1$. Assim, teremos a equação:

$$-1 = -2x^2 + 3x - 1$$

$$2x^2 - 3x = 0$$

$$x(2x - 3) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } 2x - 3 = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = \frac{3}{2}$$

Assim, o x do vértice,

$$x_v = \frac{0 + \frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

Substituindo esse valor na equação, temos a coordenada y do vértice, representada por y_v :

$$y_v = -2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) - 1$$

$$y_v = -2 \cdot \frac{9}{16} + \frac{9}{4} - 1$$

$$y_v = -\frac{9}{8} + \frac{9}{4} - 1$$

$$y_v = -\frac{9}{8} + \frac{18}{8} - \frac{8}{8}$$

$$y_v = \frac{1}{8}$$

Logo, as coordenadas do vértice da parábola são $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{8}\right)$. Ou seja, como se trata de uma parábola com concavidade para baixo, temos um máximo da função, que é $\frac{1}{8}$.

Resumo

- Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $y = f(x)$, é denominada quadrática quando existem números reais a , b e c , com $a \neq 0$, tais que $y = ax^2 + bx + c$. Seu gráfico é uma parábola com eixo de simetria vertical.

- Na função quadrática, o sinal do coeficiente a indica o sentido da concavidade da parábola correspondente à equação que define a função: (i) quando $a > 0$, a concavidade volta-se para cima; (ii) quando $a < 0$, a concavidade volta-se para baixo.
- O ponto de intersecção da parábola com o seu eixo de simetria chama-se *vértice* da parábola: (i) quando $a > 0$, o vértice é o ponto mais baixo da parábola, ou seja, é o seu ponto mínimo; (ii) quando $a < 0$, o vértice é o ponto mais alto da parábola, ou seja, é o seu ponto máximo.
- Na função quadrática, o coeficiente c é a ordenada do ponto em que a parábola intersecta o eixo das ordenadas, ou seja, é o valor da função obtido quando substituímos x por zero.
- Quando existem, os pontos em que a parábola intersecta o eixo \overline{Ox} têm por abscissas os zeros da função, que podem ser obtidos por meio da fórmula resolutive da equação do 2º grau.
- A forma canônica da função quadrática é:

$$g(x) = a(x - m)^2 + n$$

em que (m, n) é o vértice da parábola que é associada ao gráfico da função $g(x)$.

- A forma fatorada da função quadrática é:

$$g(x) = a(x - \alpha) \times (x - \beta)$$

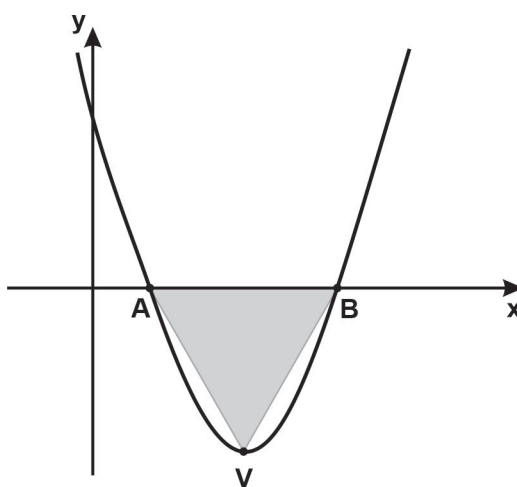
em que os números reais α e β são os zeros da função.

Atividade

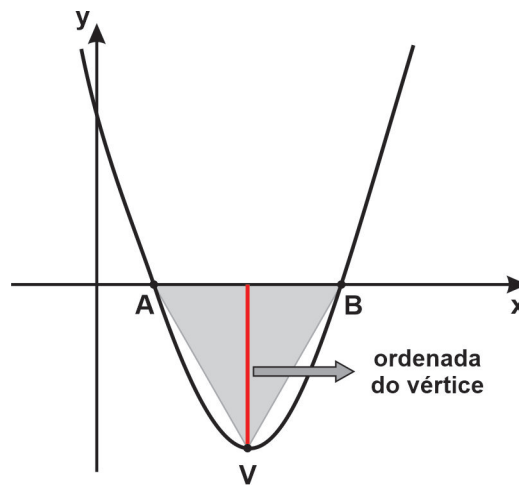
Função quadrática é um tema muito comum nas provas de Matemática do ENEM e nos vestibulares. A seguir, apresentamos uma questão com vídeo-resolução e indicamos uma lista complementar de exercícios:

(UERJ, 2009 / Reprodução) Observe a parábola de vértice V gráfico da função quadrática definida por $y = ax^2 + bx + c$ que corta o eixo das abscissas nos pontos A e B .

Calcule o valor numérico de $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ sabendo que o triângulo ABV é equilátero.



Resposta comentada



Pelo gráfico, em que a parábola intersecta o eixo das abscissas em dois pontos, A e B, vemos que a função possui dois zeros, que são as abscissas de A e de B (x_A e x_B , respectivamente). Então, a partir da fórmula resolvente da equação do 2º grau, é possível escrever:

$$x_A = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_B = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

O comprimento do segmento de extremidades A e B é dado por $x_B - x_A$, ou seja:

$$x_B - x_A = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_B - x_A = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = L$$

sendo L, a medida do lado do triângulo equilátero ABC.

Portanto, a altura do triângulo é dada por:

$$h = \frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\Delta}{2a}$$

Decorre daí que:

$$y_{\text{vértice}} = -h = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow \Delta = 4a \cdot h = 4a \cdot \frac{\sqrt{3}\Delta}{2a} = 2\sqrt{3}\Delta$$

$$\Delta = 2\sqrt{3}\Delta \quad \Rightarrow \quad \Delta^2 = 12\Delta \quad \Rightarrow \quad \Delta = 12$$

elevando os membros ao quadrado com o $\Delta \neq 0$

lá na plataforma

Na Unidade 8 de nosso ambiente virtual, acesse o arquivo com a lista de exercícios sobre função quadrática.

Em seguida, acesse o arquivo com as respostas comentadas das questões.

Mas só acesse esse documento depois de tentar resolver as questões.

Referências

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. *A matemática do ensino médio*. v. 1. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

MATEMÁTICA MULTIMÍDIA. Direitos do consumidor – Números e funções - Série: Matemática na Escola. Unicamp. Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1091>. Acesso: 08 Out. 2021.

PROJETO SEEDUC. *Matemática e suas tecnologias*. Módulo II – Matemática. Nova EJA. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2013. Disponível em: http://projetoeduc.cecierj.edu.br/eja/material-aluno/modulo-02/Miolo_Matematica_Modulo_2_Aluno_Nova_Eja.pdf. Acesso em: 11 Out. 2021.

TRABALHANDO COM O WINPLOT. Disponível em: <http://www.mat.ufpb.br/sergio/winplot/winplot.html>. Acesso: 11 Out. 2021.

De quantas formas posso fazer?

09

meta

Discutir formas de estabelecer a contagem em problemas que envolvem diferentes tipos de agrupamento de elementos, destacando os princípios multiplicativo e aditivo e os diagramas de árvore.

objetivo

Esperamos que, ao final desta unidade, você seja capaz de:

- utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir uma argumentação consistente.

Introdução

A contagem é uma das situações mais expressivas da matemática (outra, igualmente importante, é a que requer a medida). Quando falamos em contar, essencialmente, o nosso interesse está em enumerar a quantidade de maneiras pelas quais, diante de certas restrições, pode-se alcançar um resultado desejado. Como visto nas primeiras unidades deste material, enumerar elementos de um conjunto finito significa associar cada um desses elementos a um número inteiro, a partir do 1, de modo que, se o último deles for associado ao inteiro n , esse conjunto terá n elementos.

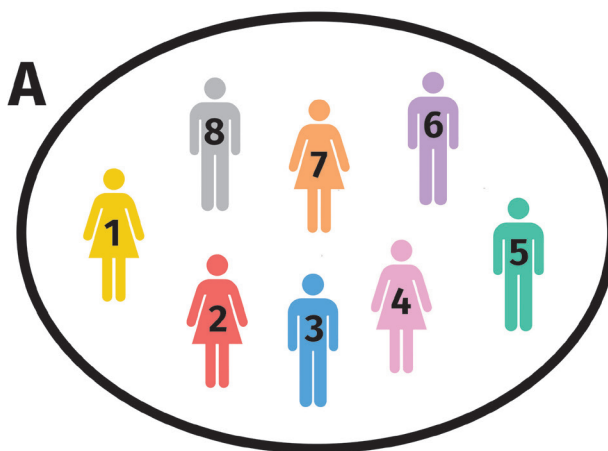


Figura 9.1: Conjunto A.

Por exemplo, o conjunto A, acima, possui 8 elementos. Outro exemplo é a contagem do número de possíveis placas de carro, considerando um número certo de caracteres sujeitos a condições, de modo que, a partir de um número de placa parcial dado por uma testemunha, podem-se auxiliar policiais que estejam tentando apreender o suspeito em um acidente de carro.

À medida que introduzimos certas técnicas como instrumentos básicos de construção e os princípios de multiplicação e de adição como nossas ferramentas para acessá-los, seremos capazes de resolver problemas cada vez mais complexos de contagem, como a quantidade de maneiras em que um grupo de trabalhadores poderá ser dividido em times ou o estudo da segurança de senhas e outros códigos.

Outro tópico bastante expressivo é que, com o aumento de nossas habilidades de contagem, também poderemos calcular probabilidades. Por exemplo, ao contar o número de maneiras pelas quais se pode preencher um cartão da Mega-Sena, podemos determinar a probabilidade de se acertar os seis números sorteados.

>> saiba mais

A Mega-Sena é uma modalidade de apostas disponibilizada pela Loteria da Caixa (administrada pela Caixa Econômica Federal), com os sorteios acontecendo duas vezes por semana. Nela, o ganhador deve ter realizado uma aposta de, no mínimo, seis números, dentre um total de 60 dezenas, acertando a sena, que é a sequência dos seis números sorteados. O apostador pode selecionar qualquer número em qualquer ordem e tem a chance de ganhar uma parte do prêmio, que é a Quina (apenas cinco números) ou a Quadra (quatro números).

A base sobre a qual fundamentaremos nosso estudo é o Princípio Multiplicativo, cuja formulação, em linhas gerais, assemelha-se à famosa “regra de três simples e direta”, isto é:

Se para 1 objeto existirem n possibilidades para a realização de determinada tarefa, então para m objetos de mesma natureza existirão $m \cdot n$ possibilidades para a realização da mesma tarefa.

De fato:

Número de objetos	Número de possibilidades
1	n
m	x

Donde vem que, x será igual ao produto de m por n , ou ainda, $x = m \cdot n$.

Árvore de possibilidades é um diagrama que provê uma maneira conveniente de organizar as informações de um conjunto de eventos sucessivos.

A construção de uma árvore de possibilidades é feita simplesmente por meio da ramificação de todas as possibilidades de todas as etapas. Por exemplo, se tivermos o lançamento de três moedas, fazemos a ramificação de cada evento possível para a primeira jogada (cara ou coroa). Em seguida, para a segunda moeda, fazemos também a ramificação das duas possibilidades, com relação a cada ramificação da primeira jogada, totalizando quatro ramificações. Finalmente, para a terceira moeda, fazemos a ramificação das duas possibilidades, com relação a cada ramificação da segunda jogada, totalizando oito ramificações.

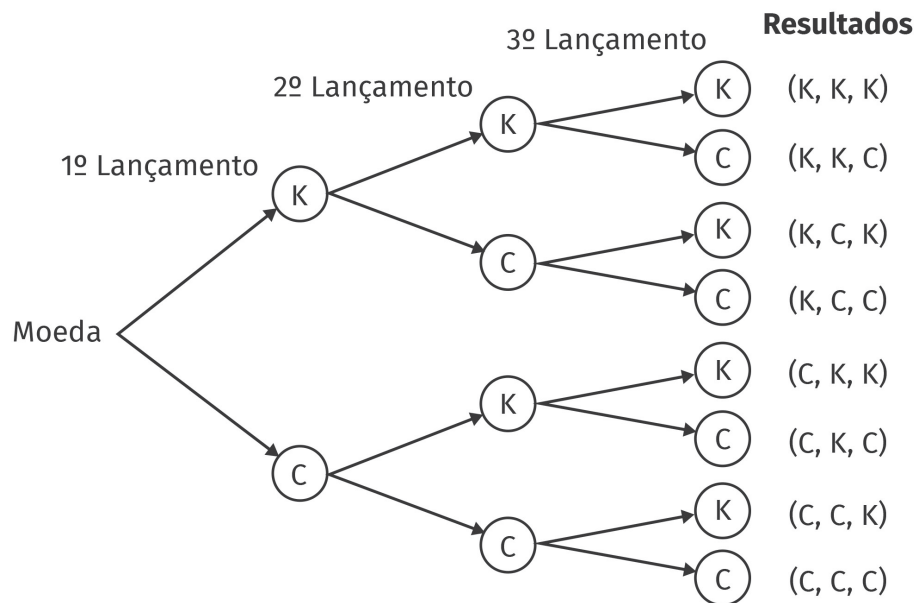


Figura 9.2: Cara e Coroa: K - cara e C - coroa.

Assim, por exemplo, considere um restaurante em que cada opção de refeição será constituída por um prato principal, escolhido entre carne, frango ou peixe, e uma sobremesa, escolhida entre pudim ou melancia. O diagrama a seguir ilustra as possibilidades de composição de uma refeição.

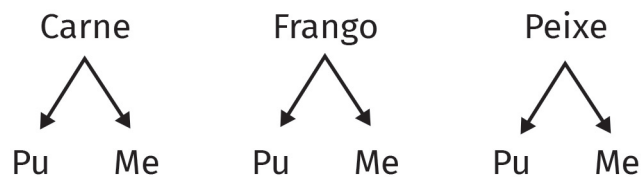


Figura 9.3: Possibilidades de refeição.

De modo que, nas condições dadas, nesse restaurante, poderão ser formadas 6 opções de refeição que, aplicando o princípio multiplicativo, é 3×2 .

Princípio fundamental da contagem

As situações que ilustramos anteriormente nos conduzem a d_1 e d_2 .

Se uma decisão d_1 puder ser tomada de m maneiras distintas, e outra decisão d_2 puder ser tomada de n maneiras distintas, então o número de maneiras de se tomar sucessivamente as decisões d_1 e d_2 será $m \times n$ (princípio multiplicativo).

// atenção

O princípio multiplicativo é indutivamente estendido para um número qualquer (finito) de decisões sucessivas.

lá na plataforma

Na Unidade 10 de nosso ambiente virtual, no tema 1, acesse o vídeo seguinte, que aborda o que estudamos até aqui.

Vejam as seguintes situações-problema:

Situação 1: há algum tempo, as placas de automóveis eram compostas por duas letras, escolhidas dentre as 26 do nosso alfabeto, seguidas por quatro algarismos do sistema de numeração decimal (0, 1, 2, ..., 9). Devido ao aumento do número de veículos, foi implantado um novo sistema de emplacamento, em que as placas passaram a ser compostas por três letras e quatro algarismos.

De quanto será o aumento do número de placas no novo sistema?

Solução:

No sistema antigo:

- d_1 : escolha de uma primeira letra $(m_1 = 26)$;
- d_2 : escolha de uma segunda letra $(m_2 = 26)$;
- d_3 : escolha de um primeiro algarismo $(m_3 = 10)$;
- d_4 : escolha de um segundo algarismo $(m_4 = 10)$;
- d_5 : escolha de um terceiro algarismo $(m_5 = 10)$;
- d_6 : escolha de um quarto algarismo; $(m_6 = 10)$;
- d_1 e d_2 e d_3 e d_4 e d_5 e d_6 : escolha sucessiva de duas letras e de quatro algarismos:

$$m_1 \times m_2 \times m_3 \times m_4 \times m_5 \times m_6 = 26^2 \times 10^4 = 6.760.000 \text{ placas.}$$

No sistema atual:

- d_1 : escolha de uma primeira letra $(m_1 = 26)$;
- d_2 : escolha de uma segunda letra $(m_2 = 26)$;
- d_3 : escolha de uma terceira letra $(m_3 = 26)$;
- d_4 : escolha de um primeiro algarismo $(m_4 = 10)$;
- d_5 : escolha de um segundo algarismo $(m_5 = 10)$;
- d_6 : escolha de um terceiro algarismo $(m_6 = 10)$;
- d_7 : escolha de um quarto algarismo $(m_7 = 10)$;
- d_1 e d_2 e d_3 e d_4 e d_5 e d_6 e d_7 : escolha sucessiva de três letras e de quatro algarismos:

$$m_1 \times m_2 \times m_3 \times m_4 \times m_5 \times m_6 \times m_7 = 26^3 \times 10^4 = 175\,760\,000 \text{ placas.}$$

Portanto, o aumento será de $175.760.000 - 6.760.000 = 169.000.000$ novas placas.

// atenção

Na prática, podemos utilizar o chamado esquema dos tracinhos, em que, cada tracinho indicará uma decisão a ser tomada e, sob ele, o número de maneiras de ser tomada a decisão representada.

Assim, no problema das placas:

No sistema antigo:	<u>letra</u>	<u>letra</u>	<u>alg.</u>	<u>alg.</u>	<u>alg.</u>	<u>alg.</u>	
	26	26	10	10	10	10	
No sistema atual:	<u>letra</u>	<u>letra</u>	<u>letra</u>	<u>alg.</u>	<u>alg.</u>	<u>alg.</u>	<u>alg.</u>
	26	26	26	10	10	10	10

Assim, temos: $26^3 \times 10^4 - 26^2 \times 10^4 = 169.000.000$ novas placas.

Situação 2: dispondo-se de três cores distintas (azul, branco e cinza), deseja-se pintar uma bandeira que possui quatro listras verticais. De quantos modos distintos pode ser pintada esta bandeira, se listras adjacentes devem ter cores diferentes?

Solução:

A pintura da primeira listra envolve uma decisão que pode ser tomada de três modos distintos (pintar de azul, de branco ou de cinza). Na pintura da listra seguinte, que deve ter cor diferente da anterior, a decisão pode ser tomada de dois modos distintos. Na pintura da próxima listra, pelo mesmo motivo da decisão anterior, esta pode ser tomada de dois modos distintos. Finalmente, na pintura da quarta listra a decisão também pode ser tomada de dois modos distintos.

1ª LISTRA	2ª LISTRA	3ª LISTRA	4ª LISTRA
3	2	2	2

Portanto, pelo princípio multiplicativo, a pintura das quatro listras pode ser feita de 3×2^3 , ou seja, de 24 modos.

Situação 3: no sistema de numeração decimal, quantos números formados por três algarismos distintos existem?

Solução:

Indiquemos por C o algarismo das centenas, por D o algarismo das dezenas e por U o algarismo das unidades.

Pelo enunciado do problema, devemos destacar duas coisas importantes:

- a) C não pode ser zero, pois, caso contrário, o número teria menos que três algarismos;
- b) C, D e U são distintos entre si.

Logo, a escolha de C é uma decisão que pode ser tomada de 9 modos distintos; a escolha de D é uma decisão que pode ser tomada de 9 modos distintos, enquanto a escolha de U pode ser tomada de 8 modos distintos.

$$\begin{array}{ccc} \underline{C} & \underline{D} & \underline{U} \\ 9 & 9 & 8 \end{array}$$

Portanto, pelo princípio multiplicativo, a quantidade de números de três algarismos que podem ser formados no sistema decimal é $9^2 \times 8 = 648$.

// atenção

Note que, se tivéssemos começado escolhendo D ou U no lugar de C, o problema ficaria um pouco complicado (tente!).

Assim, recomendamos que, se o problema envolver alguma restrição em uma de suas sucessivas etapas, então a decisão inicial deverá ser tomada nesta etapa onde há a restrição.

Voltando ao exemplo anterior há outra forma um pouco mais requintada de resolvê-lo, que se baseia no chamado raciocínio destrutivo, que, apesar de ser por vezes muito útil, somente deverá ser usado se conhecermos claramente o(s) caso(s) que deverá(ão) ser(em) excluído(s). Esse raciocínio, basicamente, consiste em resolver o problema desconsiderando a restrição e, em seguida, subtrair do número encontrado a quantidade de situações em que ocorre a restrição, ou seja:

(Todos os casos possíveis) – (casos nos quais há o que não pode ocorrer)

Dessa forma, para a solução do problema anterior, se não houvesse uma restrição na escolha de C, a quantidade de números que poderíamos formar seria, pelo princípio multiplicativo, $10 \times 9 \times 8 = 720$. Porém, este resultado inclui todos os números em que $C = 0$. Vejamos quantos eles são:

- para a escolha de C, há apenas 1 opção (C é zero!);
- para a escolha de D, há 9 opções (D deve ser diferente de C);
- para a escolha de U, há 8 opções (U deve ser diferente de C e de D).

$$\begin{array}{ccc} \underline{0} & \underline{D} & \underline{U} \\ 1 & 9 & 8 \end{array}$$

Assim, pelo princípio multiplicativo, há $1 \times 9 \times 8 = 72$ números começados por zero e que devem ser retirados dos 720 inicialmente encontrados.

Portanto, a quantidade pedida é $720 - 72 = 648$ números.

Situação 4: no sistema decimal, quantos são os números pares formados por três algarismos distintos?

Solução:

Assim como no segundo exemplo, utilizaremos C, D e U para indicar os algarismos das centenas, das dezenas e das unidades, respectivamente.

Pelo enunciado do problema, devemos destacar três coisas importantes:

- C não pode ser zero;
- C, D e U são distintos;
- U deve ser um dos seguintes algarismos: 0, 2, 4, 6 ou 8.

$$\underline{C \neq 0} \quad \underline{D} \quad \underline{U = 0, 2, 4, 6 \text{ ou } 8}$$

Começamos escolhendo o valor de U. Se para ele for escolhido o valor zero, o número de maneiras de decidir o valor de C será 9. No entanto, se para ele for escolhido um dos valores 2, 4, 6 ou 8, o número de maneiras de decidir o valor de C será 8. Como proceder? Estamos diante de uma situação em que o 0 é um *causador de dificuldades*.

// atenção

Quando, na resolução de um problema, surgir um elemento causador de dificuldades, deveremos tratá-lo de maneira diferenciada, ou seja, se, no problema, existir um elemento causando dificuldades na definição do número de decisões de outra etapa sucessiva, então o problema deverá ser dividido em duas partes: uma, na qual aquele elemento ocupa a etapa e outra, na qual ele não ocupa a etapa considerada.

Com o que foi exposto acima, suponhamos, inicialmente, que U seja zero. Então:

- a) o número de opções para a escolha de U é 1;
- b) o número de opções para a escolha de C é 9;
- c) o número de opções para a escolha de D é 8.

$$\begin{array}{ccc} \underline{C \neq 0} & \underline{D} & \underline{U = 0.} \\ 9 & 8 & 1 \end{array}$$

Portanto, pelo princípio multiplicativo, a quantidade de números pares terminados por zero é $1 \times 9 \times 8 = 72$, que é a solução da primeira parte do problema.

Consideremos agora a hipótese em que U não é zero. Então:

- a) o número de opções para a escolha de U é 4 (ele pode ser 2, 4, 6 ou 8);
- b) o número de opções para a escolha de C é 8 (ele deve ser diferente tanto de zero como de U);
- c) o número de opções para a escolha de D é 8 (ele deve ser diferente tanto de U como de C).

$$\begin{array}{ccc} \underline{C \neq 0} & \underline{D} & \underline{U = 2, 4, 6 \text{ ou } 8} \\ 8 & 8 & 4 \end{array}$$

Portanto, pelo princípio multiplicativo, a quantidade de números pares não terminados por zero é $4 \times 8 \times 8 = 256$, que é a solução da segunda parte do problema.

Então, se fôssemos listar todos os números formados, haveria, em nossa lista, 72 números terminados por 0 e 256 números terminados por 2, 4, 6 ou 8. Portanto, a quantidade total de números formados é $72 + 256 = 328$.

// atenção

Sejam d_1 e d_2 duas decisões mutuamente exclusivas, isto é, a escolha de uma impede a escolha da outra. Se a decisão d_1 puder ser tomada de m maneiras distintas e a decisão d_2 puder ser tomada de n maneiras distintas, então o número de maneiras de tomar ou a decisão d_1 , ou a decisão d_2 , é $m + n$ (princípio aditivo).

O princípio aditivo é indutivamente estendido para um número qualquer (finito) de decisões mutuamente exclusivas.

Observação: outra maneira de resolver esse problema seria ignorar uma das restrições e, mais uma vez, fazer uso do raciocínio destrutivo (tente!).

Situação 5: considere um grupo formado por sete pessoas, A, B, C, D, E, F e G. Responda:

Fila a) de quantas maneiras diferentes podemos dispor essas sete pessoas em **fila**?

Alinhamento de uma série de indivíduos ou objetos em sequência, de modo que um esteja imediatamente atrás do outro; sequência de pessoas dispostas de maneira alinhada pelos mais diversos critérios (ordem de chegada, altura etc.) e para os mais diversos objetivos.



Figura 9.4: Fila.

Solução:

Formar uma fila consiste em tomar, neste caso, sete decisões sucessivas – que posição cada pessoa ocupará na fila, ou seja, quem será a primeira, em seguida, quem será a segunda, depois, quem será a terceira, e assim por diante, até chegarmos a quem será a última pessoa da fila. Note que, neste caso, a tomada de uma decisão implica diretamente na tomada da decisão seguinte.

<u>1ª pessoa</u>	<u>2ª pessoa</u>	<u>3ª pessoa</u>	<u>4ª pessoa</u>	<u>5ª pessoa</u>	<u>6ª pessoa</u>	<u>7ª pessoa</u>
7	6	5	4	3	2	1

Portanto, pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de dispor essas sete pessoas em fila é o produto $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5.040$.

d) de quantas maneiras diferentes podemos dispor essas sete pessoas em fila, mantendo A, B e C sempre nas três primeiras posições?

Solução:

Começamos pela restrição de ter A, B e C nas três primeiras posições. Neste caso, teremos:

<u>1ª pessoa</u>	<u>2ª pessoa</u>	<u>3ª pessoa</u>
3	2	1

Portanto, pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de dispor as pessoas A, B e C nas três primeiras posições é o produto $3 \times 2 \times 1 = 6$.

Agora, tendo ocupado as três primeiras posições, por exemplo, colocando C, A e B, nossa tarefa será colocar as pessoas remanescentes nos lugares restantes.

C A B	<u>4ª pessoa</u>	<u>5ª pessoa</u>	<u>6ª pessoa</u>	<u>7ª pessoa</u>
6	4	3	2	1

Portanto, pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de dispor essas 7 pessoas fila, mantendo A, B e C nas três posições, é o produto $6 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 144$.

e) de quantas maneiras diferentes podemos dispor essas sete pessoas em fila, mantendo A, B e C sempre juntas, nesta ordem?

Solução:

Começamos pela restrição de ter A, B e C, nesta ordem, juntas. Nesse caso, as possibilidades são:

A B C	<u>4ª pessoa</u>	<u>5ª pessoa</u>	<u>6ª pessoa</u>	<u>7ª pessoa</u>
1ª pessoa	A B C	5ª pessoa	6ª pessoa	7ª pessoa
1ª pessoa	2ª pessoa	A B C	6ª pessoa	7ª pessoa
1ª pessoa	2ª pessoa	3ª pessoa	A B C	7ª pessoa
1ª pessoa	2ª pessoa	3ª pessoa	4ª pessoa	A B C

A partir do momento em que A, B e C são colocadas na fila, para dispor as demais pessoas, teremos:

A B C	4ª pessoa	5ª pessoa	6ª pessoa	7ª pessoa
	4	3	2	1
1ª pessoa	A B C	5ª pessoa	6ª pessoa	7ª pessoa
4		3	2	1
1ª pessoa	2ª pessoa	A B C	6ª pessoa	7ª pessoa
4	3		2	1
1ª pessoa	2ª pessoa	3ª pessoa	A B C	7ª pessoa
4	3	2		1
1ª pessoa	2ª pessoa	3ª pessoa	4ª pessoa	A B C
4	3	2	1	

Portanto, pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de dispor essas sete pessoas em fila, mantendo A, B e C, nesta ordem, juntas, é o produto $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 144$.

// atenção

Note que, neste caso, o resultado obtido é igual ao que encontraríamos caso estivéssemos dispo-
nido cinco pessoas em fila. Procure pensar nisso, ou seja, no porquê isso ocorre.

Situação 6: considere, agora, a seguinte situação-problema: de quantos modos diferentes pode-se selecionar três pessoas a partir de um grupo formado por sete pessoas (A, B, C, D, E, F e G)?

Fabinho propôs a solução seguinte:

“Uma forma de selecionar as três pessoas consiste em formar uma fila com as sete pessoas e, em seguida, escolher as três primeiras pessoas dessa fila. Então, como existem $5.040 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ possibilidades de se formar uma fila, o número pedido é 5.040”.

Conquanto a forma descrita para se fazer a seleção seja válida, ela apresenta um problema no que tange à contagem, pois, por exemplo, ainda que as filas (A, B, C, D, E, F, G) e (C, A, B, G, E, F, D) sejam diferentes, ambas fornecem a mesma seleção (A, B e C). Pede-se:

- forme uma fila a fim de selecionar três pessoas, conforme descrito no raciocínio de Fabinho e, em seguida, estabeleça quantas filas, diferentes da sua, fornecem a mesma seleção feita por você;
- chamando de x o resultado correto, que relação existe entre o valor de x e o 5 040?

// atenção

O objetivo desse exemplo é estabelecer uma reflexão e uma discussão ampla sobre um procedimento específico.

Solução:

a) Para cada fila formada, seleções iguais são obtidas quando mudamos entre si as três primeiras pessoas ($3 \times 2 \times 1 = 6$) e mudamos entre si as quatro últimas pessoas ($4 \times 3 \times 2 \times 1 = 144$). Portanto, o número de filas diferentes que fornecem a mesma seleção é $6 \times 24 = 144$.

b) Pelo que vimos, $144 \times x = 5\,040$. Logo,

$$x = \frac{5040}{144} = 35 \text{ seleções}$$

Resumo

Para um bom desempenho na resolução de problemas de contagem, recomendamos a seguinte estratégia:

1. colocar-se na posição de quem vai fazer o que o problema pede para ser contado;
2. dividir a ação a ser realizada em etapas (decisões sucessivas);
3. começar pela etapa (decisão) mais restrita;
4. o número de possibilidades de fazer n ações distintas e mutuamente excludentes é a adição da quantidade de modos possíveis como cada uma pode ser feita.

Princípio fundamental da contagem nas provas de vestibulares e ENEM

Agora vamos praticar um pouco a partir do que você já sabe sobre o Princípio Fundamental da Contagem. Este é um assunto muito comum em provas de vestibulares e no ENEM.

Atividades

1. (UERJ, 2020 / Reproduzida) Apenas com os algarismos 2, 4, 5, 6 ou 9, foram escritos todos os números possíveis com cinco algarismos. Cada um desses números foi registrado em um único cartão, como está exemplificado a seguir.

Cartão A	Cartão B	Cartão C	Cartão D	Cartão E
24644	45996	66666	99696	66969

Alguns desses cartões podem ser lidos de duas maneiras, como é o caso dos cartões C, D e E. Observe:

Cartão C	Cartão D	Cartão E
99999	96966	69699

O total de cartões que admitem duas leituras é:

- | | |
|-------|--------|
| a) 32 | c) 81 |
| b) 64 | d) 120 |

lá na plataforma

Utilize o endereço eletrônico a seguir para acessar uma resolução comentada da questão.

Solução: <https://www.youtube.com/watch?v=LYmlfla6rgI>

2. (UECE, 2019 - Reproduzida) Quantos são os números inteiros positivos, com três dígitos distintos, nos quais o algarismo 5 aparece?

- | | |
|--------|--------|
| a) 136 | c) 176 |
| b) 200 | d) 194 |

3. (G1, IFPE, 2019 - Reproduzida) Ajude a Paty Pimentinha a resolver o problema, para a educação dela “desencalhar”, e marque a única alternativa que seja a resposta para o problema lido pela personagem.



SCHULZ, Charles. *Peanuts e a Álgebra*. Uol notícias. Disponível em: <<https://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/irinhas-na-aula-matematica.htm>>. Acesso: 28 set. 2018 (adaptado).

- | | |
|--------------|--------------|
| a) 15 formas | d) 18 formas |
| b) 12 formas | e) 20 formas |
| c) 60 formas | |

4. UFRGS, 2018 - Reproduzida) Tomando os algarismos ímpares para formar números com quatro algarismos distintos, a quantidade de números divisíveis por 5 que se pode obter é:

- | | |
|-------|-------|
| a) 12 | d) 24 |
| b) 14 | e) 26 |
| c) 22 | |

5. (UECE, 2018 - Reproduzida) A quantidade de números inteiros positivos com quatro algarismos distintos que são múltiplos de quatro é:

- | | |
|----------|----------|
| a) 1.136 | d) 1.120 |
| b) 1.114 | |
| c) 1.126 | |

Respostas comentadas

lá na plataforma

Na Unidade 10 de nosso ambiente virtual, acesse o arquivo com as respostas comentadas das questões de vestibulares e ENEM.

(inserir na plataforma o pdf com as respostas comentadas que seguem em anexo)

Mas só acesse esse documento depois de tentar resolver as questões!

Referências

ADAMI, A. Mega-Sena. Infoescola. Disponível em: <https://www.infoescola.com/curiosidades/mega-sena/>. Acesso em: 29 Out. 2021.

MORGADO, A., CARVALHO, J.B.P., CARVALHO, P.C.P., FERNANDEZ, P. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, SBM, 1991.

PROJETO SEEDUC. *Matemática e suas tecnologias*. Módulo IV – Matemática. Nova EJA. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2013. Disponível em: http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/eja/material-aluno/modulo-04/Miolo_Matematica_Nova_Eja_Aluno_Mod04.pdf. Acesso em: 29 Out. 2021.

PRÉ-VESTIBULAR SOCIAL DA FUNDAÇÃO CECIERJ. Que venha o ENEM! Matemática - Análise Combinatória e Probabilidade. *Pré-Vestibular Social da Fundação Cecierj*, [vídeo] 97 min., 19 de jan. de 2021. Disponível em: <https://youtu.be/QWAc2BPNg2w>. Acesso em: 29 Out. 2021.

PRÉ-VESTIBULAR SOCIAL DA FUNDAÇÃO CECIERJ. Matemática – Semana 14: Princípio Fundamental da Contagem. *Youtube*, 13 de set. de 2021. Disponível em: <https://youtu.be/p-n-l-Xak-U>. Acesso em: 29 Out. 2021.

Como faço para contar?

10

meta

Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, recorrendo a estratégias diversas, como permutações e combinações.

objetivo

Esperamos que, ao final desta unidade, você seja capaz de:

- utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Introdução

Esta unidade está intimamente ligada à anterior, que é, portanto, base imprescindível para o estudo desta.

Na Situação 5, proposta na unidade anterior, especificamente no item a), apresentamos um problema que será a linha condutora do que estudaremos agora – o problema da disposição de um número qualquer (finito) de pessoas em filas. Lembremo-lo a seguir:

Considere um grupo formado por sete pessoas – A, B, C, D, E, F e G. De quantas maneiras diferentes podemos dispor essas sete pessoas em fila?

Vimos que, para a sua solução, tomamos sete decisões sucessivas, a saber: que pessoa ocuparia a primeira posição na fila; depois, que pessoa ocuparia a segunda posição na fila, dado que uma delas já ocupava a primeira posição; em seguida, que pessoa ocuparia a terceira posição na fila, dado que duas delas já ocupavam as duas posições anteriores e, assim sucessivamente, até chegarmos à última posição da fila, a sétima. Isso posto, pelo princípio multiplicativo, a solução obtida foi o produto $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5.040$.

Interessante notar que este tipo de problema, independentemente do número de pessoas a serem dispostas na fila, não varia em sua solução. Ou seja, se a fila fosse formada por três pessoas, a solução seria $3 \times 2 \times 1 = 6$; se fosse formada por dez pessoas, a solução seria $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3.628.800$.

Portanto, dado um número n qualquer de pessoas, sendo $n > 1$, o número de maneiras de dispô-las em filas será o produto de:

$$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times (n - 3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

Assim, o produto é o *número de maneiras de dispor* $n(n > 1)$ pessoas em filas. Simbolicamente, para representar esse número, utilizaremos $n!$ (lê-se n fatorial ou fatorial de n). Desse modo:

o número de filas que podemos formar com 2 pessoas é $2! = 2 \times 1$;

o número de filas que podemos formar com 3 pessoas é $3! = 3 \times 2 \times 1$;

o número de filas que podemos formar com 7 pessoas é $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$;

o número de filas que podemos formar com 10 pessoas é $10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$.

// atenção

Quando estudamos conjuntos, atribuímos um nome especial para o conjunto desprovido de elementos – o conjunto vazio. De maneira análoga, chamaremos de fila vazia a fila formada por zero pessoas. Assim, pelo que vimos anteriormente, $0!$, ou seja, o número de filas formadas por zero pessoas, é 1.

$$0! = 1$$

Seguindo o mesmo raciocínio, teremos que o número de filas formadas por uma única pessoa, será igual a 1 – a fila unitária –, ou seja:

$$1! = 1$$

Voltando à Situação 5 da unidade anterior, com a notação agora introduzidas:

b) de quantas maneiras diferentes podemos dispor essas sete pessoas em fila, mantendo A, B e C sempre nas três primeiras posições?

Solução: $3! \times 4!$

c) de quantas maneiras diferentes podemos dispor essas sete pessoas em fila, mantendo A, B e C sempre juntas, nesta ordem?

Solução: $5 \times 4! = 5!$

Na Situação 6, item b), teríamos, a solução $\frac{7!}{3! \times 4!}$.

De modo geral, nos dicionários, *permutação* é um substantivo feminino que significa *substituição de uma coisa por outra* ou *alteração dos elementos que formam um todo, a fim de se obter nova combinação*.

Notemos que, quando consideramos uma fila, cada vez que mudamos a posição de pelo menos um de seus integrantes, obtemos uma nova fila, ou seja, duas filas formadas por n pessoas (n inteiro e positivo) somente serão iguais se tiverem as mesmas n pessoas, dispostas nas mesmas posições.

Portanto, cada fila pode ser entendida como uma *permutação* das n pessoas consideradas na sua composição. Isso posto, o número de filas que podemos formar com n pessoas é o número de permutações que se podem estabelecer com essas pessoas.

Número de filas com n pessoas = número de permutações de n pessoas

Ainda nesta linha léxica, *ordenação* é um substantivo feminino que significa *ato ou efeito de ordenar*, ou seja, *estabelecer, em um conjunto de objetos, quem é o primeiro, quem é o segundo*,

quem é o terceiro e assim sucessivamente. Também significa uma distribuição metódica, uma organização ou arrumação desses objetos.

Número de filas com n pessoas = número de permutações de n pessoas =
número de ordenações de n pessoas

Permutações

Dado um número natural não-nulo n , chama-se *fatorial* de n (notação: $n!$) o produto de todos os números naturais desde 1 até n .

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times (n - 3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

Em termos conceituais, $n!$ significa o *número de ordenações de $n!$ objetos distintos*.

Dados n objetos distintos, chama-se *permutação* desses n objetos a toda ordenação feita com eles, isto é, permutar n objetos distintos é o mesmo que definir, dentre eles, quem será o primeiro, quem será o segundo, quem será o terceiro e assim sucessivamente, até o n -ésimo elemento.

O número de permutações de n objetos distintos é dado por $n!$.

O que temos, então, é:

Permutar = Ordenar = Arrumar

// atenção

O que é $n!$? → É o número de permutações/ordenações/arrumações que podem ser feitas com n objetos distintos.

Como se calcula $n!$, se $n > 1$? → $n!$ é o produto $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1$.

Como se calcula $n!$, se $n \leq 1$? → $n!$ é $0! = 1! = 1$.

>> saiba mais

Anagrama

Chama-se anagrama de uma palavra, qualquer permutação feita com as suas letras. Por exemplo: amor e mroa são dois anagramas da palavra roma. Em particular, a palavra considerada é também um de seus anagramas. Um anagrama pode ou não ser uma palavra. roma é anagrama de amor e também uma palavra. Entretanto, mroa é anagrama de amor, mas não é uma palavra.

Situação 1: considere a palavra escola e responda, quanto aos seus anagramas:

a) quantos são?

Solução:

Como vimos, cada anagrama da palavra escola é, na verdade, uma permutação de suas letras. Portanto, determinar o número de anagramas da palavra considerada é o mesmo que determinar o número de permutações de seis objetos distintos, ou seja, $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.

b) quantos deles começam e terminam por uma vogal?

Solução:

Lembre-se de que, *havendo uma restrição, comece a resolver o problema por ela*. Então:

vogal	_	_	_	_	vogal
3	4!				2

Logo, pelo princípio multiplicativo, o número de anagramas, nas condições pedidas, é $3 \times 2 \times 4! = 144$.

c) quantos possuem as vogais juntas no início do anagrama?

Solução:

Vog.	Vog.	Vog.	Cons.	Cons.	Cons.
3!			3!		

Logo, pelo princípio multiplicativo, o número de anagramas, nas condições pedidas, é $3! \times 3! \times 6 \times 6 = 36$.

d) quantos possuem as vogais juntas?

Solução:

Note que, nesse problema, a estrutura de resolução é semelhante à do item anterior, considerando apenas que as vogais juntas podem ocupar outras posições além daquela que foi fixada lá. Então, além das três primeiras posições, temos ainda as seguintes possibilidades:

1ª: Cons. Vog. Vog. Vog. Cons. Cons.

2ª: Cons. Cons. Vog. Vog. Vog. Cons.

3ª: Cons. Cons. Cons. Vog. Vog. Vog.

Logo, pelo princípio multiplicativo, o número de anagramas nas condições pedidas é $4 \times 3! \times 3! = 4! \times 3! = 24 \times 6 = 144$.

// atenção

No item d, acima, a solução obtida pode ser interpretada como a tomada de duas decisões sucessivas:

- a primeira consiste em ordenar as vogais que ficarão juntas ($3!$ maneiras);
- a segunda consiste em ordenar quatro objetos distintos (vogais, c, l e s) ($4!$ maneiras).

Assim, em geral, quando um grupo de objetos tiver que ficar junto, bastará considerá-lo como um objeto único.

Situação 2: uma comissão de quatro alunos será formada a partir de uma turma que é composta por 12 alunos. Quantas dessas comissões poderão ser formadas?

Solução:

Para ilustrar, representemos os alunos por $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{12}$. Formar uma comissão consiste na tomada de quatro decisões sucessivas:

<u>Escolha do 1º aluno</u>	<u>Escolha do 2º aluno</u>	<u>Escolha do 3º aluno</u>	<u>Escolha do 4º aluno</u>
12	11	10	9

A aplicação direta do princípio multiplicativo nos daria como resultado $12 \times 11 \times 10 \times 9 = 11.880$. Porém, esse resultado é muito maior do que o resultado real. Vejamos, por meio de um exemplo, por quê.

Suponha que a comissão formada tenha sido A_1, A_2, A_3 e A_4 . Dentro das 11.880 comissões, estarão também as comissões A_4, A_1, A_3 e A_2 , além de A_2, A_3, A_4 e A_1 (por exemplo), que são, menos na

ordem de escolha, exatamente iguais à comissão A_1, A_2, A_3 e A_4 . Assim, cada vez que for formada uma comissão, existirão k comissões exatamente iguais a ela, a menos da ordem de escolha.

Portanto, o número real de comissões que poderão ser formadas é $\frac{11.880}{k}$, sendo k o número de repetições de cada comissão fixada.

Para obter o valor de k basta observar que uma repetição ocorre sempre que, fixados quatro elementos, fazemos permutações desses elementos, isto é, k é o número de permutações de quatro objetos distintos. Logo, $k = 4!$.

Donde vem que a solução do problema é $\frac{11.880}{4!} = 495$.

// atenção

Para excluir as repetições causadas simplesmente pela mudança na ordem de um grupo de objetos, basta dividir o resultado obtido, desconsiderando a possibilidade de repetição, pelo número de ordenações dos objetos contidos no referido grupo.

Situação 3: quantos são os anagramas da palavra *banana*?

Solução:

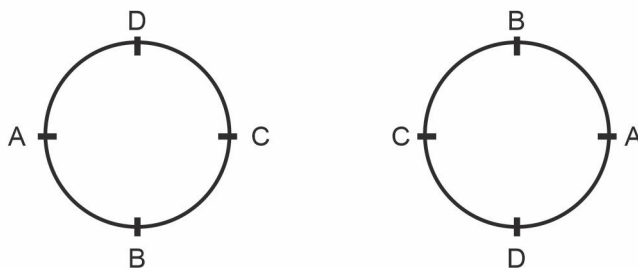
Nesse caso, cada anagrama formado possui repetições causadas pela mudança na ordem tanto das letras iguais a a como das letras iguais a n . Assim, desconsiderando a possibilidade de repetições, encontramos o resultado $6!$. Entretanto, há $3!$ permutações das letras iguais a a e, $2!$ permutações das letras iguais a n . Assim, teremos: $\frac{6!}{3! \times 2!} = 60$ anagramas.

Situação 4:

De quantas maneiras diferentes é possível dispor quatro pessoas (A, B, C e D) em torno de uma mesa circular com quatro lugares?

Solução:

A princípio, pelo que foi visto até aqui, somos tentados a concluir que o número pedido é $4!$. Porém, vamos olhar o problema com um pouco mais de cuidado.



Acima estão representadas duas disposições possíveis que, num primeiro momento, parecem distintas, mas, na verdade, como as pessoas mantiveram a mesma posição relativamente às outras, são disposições iguais. Isto é:

- na primeira temos, no sentido anti-horário: A, em seguida B, em seguida C, em seguida D, em seguida A;
- na segunda temos, no sentido anti-horário: C, em seguida D, em seguida A, em seguida B, em seguida C.

Tal fato ocorre porque a segunda representação pode ser obtida aplicando-se, na primeira, uma rotação plana de 180° . Então, para podermos obter disposições distintas é necessário impedir a realização de rotações planas, ou seja, é necessário impedir “a roda de girar”. Para isto, basta que fixemos um de seus pontos.

Assim, o número de maneiras de dispormos as pessoas A, B, C e D em torno da mesa é obtido fixando-se uma delas (por exemplo, A) e, em seguida, arrumando as demais ($3!$). Portanto, o número desejado é $3! = 6$.

// atenção

O número de maneiras de dispor n objetos distintos, igualmente espaçados sobre uma circunferência, é obtido fixando-se um deles e permutando os demais, ou seja, esse número é $(n - 1)!$.

Combinações

Introdução

A seguir, são apresentadas algumas situações relacionadas aos problemas de contagem:

- formar triângulos com vértices em pontos situados numa mesma circunferência;
- selecionar, a partir de uma turma com 30 alunos, quatro pessoas para formar uma chapa para o grêmio escolar;
- selecionar, a partir de uma turma com 30 alunos, quatro pessoas para formar um grupo de estudos;
- dispor seis pessoas em torno de uma mesa circular com seis lugares;
- fazer filas com quatro pessoas selecionadas, a partir de um grupo que possui dez pessoas;

Para cada situação acima, é possível destacar a tarefa a ser realizada:

- *Simples escolha:* (a) e (c);
- *Simples arrumação:* (d);
- *Escolha seguida de arrumação:* (b) e (e).

Note que:

- simples **escolha**: caracteriza-se pela existência de mais objetos do que é necessário; em geral, associam-se a ela dúvidas expressas por *quem?*, *quais?*, *onde?*; **escolher**
Ato de optar entre dois ou mais objetos. Em geral, a escolha se faz necessária quando dispomos de mais objetos do que aquilo que precisamos. Por exemplo, tenho cinco ternos, mas, para uma viagem, levarei apenas dois deles, ou seja, terei que fazer uma opção de 2 ternos dentre os 5 que possuo.
- simples **arrumação**: caracteriza-se pela necessidade exclusiva de colocar em ordem os objetos considerados; em geral, associam-se a ela dúvidas expressas por *como?*, *de que forma?*, *em que ordem?*; **arrumar**
Ato de pôr em ordem.
- *escolha seguida de arrumação*: caracteriza-se pela necessidade da *escolha com uma finalidade cuja ordem seja relevante*; em geral, associam-se a ela dúvidas expressas pelo uso sucessivo das perguntas colocadas nos dois casos anteriores.

Assim, para realizar a tarefa:

- em (a), basta responder à pergunta: “quais (ou que) pontos deverei usar?”
- em (b), basta responder, sucessivamente, às perguntas: “quais alunos deverei selecionar?” e “de que forma constituirei a chapa?”
- em (c), basta responder à pergunta: “quais (ou que) alunos deverei selecionar?”
- em (d), basta responder à pergunta: “de que forma deverei dispor as pessoas ao redor da mesa?”
- em (e), basta responder, sucessivamente, às perguntas: “quais (ou que) pessoas deverei selecionar?” e “em que ordem colocarei as pessoas selecionadas na fila?”

Situação 5: de quantas maneiras diferentes é possível selecionar, a partir de uma turma com 30 alunos, quatro pessoas para formar um grupo de estudos?

Solução:

Conforme vimos acima, estamos diante de uma simples escolha, pois precisamos de menos alunos do que temos disponíveis.

<u>Escolha do 1º aluno</u>	<u>Escolha do 2º aluno</u>	<u>Escolha do 3º aluno</u>	<u>Escolha do 4º aluno</u>
30	29	28	27

No entanto, como a simples mudança na ordem de escolha acarreta uma repetição do grupo formado, pelo que já foi visto, teremos: $\frac{30 \times 29 \times 28 \times 27}{4!} = 27.405$ maneiras.

Definição

Dados n objetos distintos ($n > 1$), chama-se combinação simples desses n objetos tomados (pegados/escolhidos) p a p ($1 < p < n$) toda escolha não ordenada de p dos n objetos dados.

O número de combinações simples de n objetos distintos tomados p a p é representado por C_n^p ou $C_{n,p}$ ou $\binom{n}{p}$ (este último sendo também chamado de *número binomial* n p) e dado por:

$$C_n^p = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!}$$

// atenção

Fazer uma combinação = escolha.

Assim, a solução da Situação 5 poder ser escrita por C_{30}^4 , ou seja, número de maneiras de escolher quatro alunos, dentre 30 disponíveis.

Situação 6: considere um conjunto $A = \{a; b; c; d; e; f; g\}$. Quantos subconjuntos de A possuem exatamente três elementos?

Solução:

Notemos que formar um subconjunto de A contendo exatamente três elementos, consiste em escolher três dos sete elementos disponíveis em A . Assim, o número pedido é:

$$C_7^3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3!} = 35$$

Outra forma de ver a solução deste problema é notar que formar um subconjunto de A , contendo três dos sete elementos disponíveis em A , é escolher quatro, dentre esses elementos, para não integrarem o subconjunto, ou seja, a cada escolha inclusiva de três, dentre os sete elementos de A , corresponde uma escolha excludente de quatro, dentre os sete elementos de A . Portanto,

$$C_7^3 = C_7^4$$

// atenção

Em outras palavras, a combinação simples de n objetos distintos tomados p a p , ou seja, a escolha de p dentre n objetos disponíveis, indica o número de subconjuntos com exatamente p elementos de um conjunto que possui n elementos.

Além disso, quaisquer que sejam n e p , satisfazendo as condições da definição de combinação, tem-se:

$$C_n^p = C_n^{n-p} \quad \text{combinações complementares}$$

Dessa forma:

- C_n^0 significa o número de subconjuntos com 0 elementos de um conjunto que possui n elementos; como o único conjunto que possui 0 elementos é o conjunto-vazio, temos $C_n^0 = 1$.
- C_n^1 significa o número de subconjuntos com 1 elemento de um conjunto que possui n elementos; este número é n e, portanto, temos $C_n^1 = n$.
- C_n^2 significa o número de subconjuntos com 2 elementos de um conjunto que possui n elementos;

e assim por diante, até:

- C_n^n significa o número de subconjuntos com n elementos de um conjunto que possui n elementos; como o único subconjunto que possui n elementos é o próprio conjunto, temos $C_n^n = 1$.

Lembrando que o número de subconjuntos de um conjunto que possui elementos é 2^n , temos:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$$

Situação 7: de quantas maneiras diferentes podemos selecionar, a partir de uma turma com 30 alunos, quatro pessoas para formar uma chapa para o grêmio escolar, ou seja, definir o presidente, o vice-presidente, o tesoureiro e o secretário?

Solução:

Nesse problema, a resolução consiste de duas etapas:

- na primeira (a escolha), devemos responder à pergunta: “que alunos farão parte da chapa?”

A resposta é dada por C_{30}^4 ;

- na segunda (a arrumação), escolhidos os quatro alunos, devemos responder à pergunta: “de que forma a chapa será composta (por exemplo: presidente, vice, tesoureiro e secretário)?”

A resposta é dada por $4!$.

Assim, pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de formar a chapa é dado por: $C_{30}^4 \times 4! = 30 \times 29 \times 28 \times 27 = 657.720$. Note que o resultado obtido é o mesmo que fazer a escolha com ordenação de quatro pessoas em 30 disponíveis.

Situação 8: considere os anagramas da palavra *geometria*. Em quantos deles:

- a) as vogais aparecem em ordem alfabética?

Solução:

___ _ _ _ _

O anagrama é formado quando preenchemos, usando as letras da palavra dada, nove espaços, atendendo às etapas seguintes:

1ª: escolher *onde* colocar as vogais;

2ª: escolhidos os espaços onde colocar as vogais, definir *de que forma* elas serão colocadas;

3ª: colocadas as vogais, escolher *onde* colocar as consoantes;

4ª: definir *de que forma* colocar as consoantes.

Cumprindo as etapas:

$$1ª: C_9^5 = C_9^4 = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4!} = 126$$

2ª: só há uma forma de colocar as vogais: a ordem alfabética;

3ª: preenchidos cinco espaços com as vogais, restam quatro espaços para colocar as consoantes;

4ª: $4! = 24$.

Portanto, pelo princípio multiplicativo, temos $126 \times 1 \times 1 \times 24 = 3024$.

- b) duas consoantes não aparecem juntas?

Solução:

Uma vez que não deve haver duas consoantes juntas, entre duas delas deverá haver pelo menos uma vogal, ou seja, a colocação das consoantes ficará condicionada à colocação das vogais. Vejamos um exemplo:

___ A ___ E ___ E ___ I ___ O ___

Os espaços vazios indicam os possíveis lugares onde poderão ser colocadas as consoantes. Então:

1ª: onde colocar as consoantes?

$$C_6^4 = C_6^2 = \frac{6 \times 5}{2!} = 15$$

2ª: de que forma colocar as consoantes?

$$4! = 24$$

3ª: de que forma colocar as vogais?

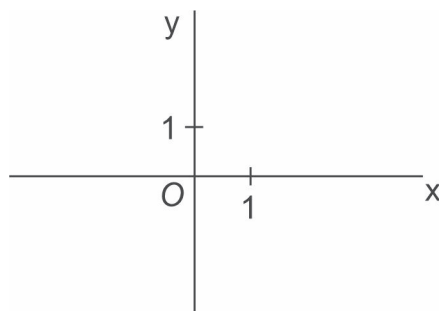
$$\frac{5!}{2!} = 60 \text{ (observe que a divisão por } 2! \text{ deve-se}$$

à repetição das vogais iguais a E)

Portanto, pelo princípio multiplicativo, temos: $15 \times 24 \times 60 = 21.600$.

Situação 9: uma partícula localizada em um sistema cartesiano ortogonal pode realizar, a cada vez, um dos movimentos seguintes:

- estando no ponto de coordenadas $(x; y)$ deslocar-se para o ponto de coordenadas $(x + 1; y)$;
- estando no ponto de coordenadas $(x; y)$ deslocar-se para o ponto de coordenadas $(x; y + 1)$;



Se uma partícula estiver na origem do sistema, isto é, no ponto de coordenadas $(0; 0)$, quantos caminhos diferentes ela poderá descrever para atingir o ponto de coordenadas $(5; 3)$?

Solução:

Considere que D indica o deslocamento de uma unidade para a direita e C indica o deslocamento de uma unidade para cima. Dois exemplos de caminho são: (D; D; D; D; D; C; C; C) e (D; D; C; D; C; D; D; C).

O que diferencia um caminho do outro é a ordem em que aparecem as letras iguais a D e as letras iguais a C. Portanto, o número de caminhos é o número de ordenações que se podem estabelecer com oito objetos, sendo cinco iguais a D e três iguais a C, ou seja, o número de caminhos é $\frac{8!}{5! \times 3!} = 56$.

Situação 10: “numa turma, há cinco homens e quatro mulheres. Quantas comissões de cinco pessoas podem ser formadas contendo: a) necessariamente três homens e duas mulheres? b) pelo menos dois homens?”

Esse problema foi resolvido por Fabinho do seguinte modo:

a) para selecionar três dos cinco homens, temos $\frac{5!}{3! \times 2!}$ modos. Em seguida, para selecionar duas das quatro mulheres, temos $\frac{4!}{2! \times 2!}$ modos. Assim, pelo princípio multiplicativo, o número de comissões é $\frac{5!}{3! \times 2!} \times \frac{4!}{2! \times 2!} = 120$;

b) para garantir que cada comissão formada tenha pelo menos dois homens, inicialmente, selecionemos dois dos cinco homens para fazerem parte da comissão. Isso pode ser feito de $\frac{5!}{2! \times 3!}$ modos. Em seguida, basta selecionar três, dentre as seis pessoas disponíveis (dois homens e quatro mulheres), o que pode ser feito de $\frac{6!}{2! \times 4!}$ modos. Assim, pelo princípio multiplicativo, o número de comissões é $\frac{5!}{2! \times 3!} \times \frac{6!}{2! \times 4!} = 150$.

Verifique se a forma como Fabinho resolveu cada um dos itens está correta. Caso contrário, identifique o erro cometido e apresente a solução correta.

Solução:

a) a resolução está correta;

b) representemos os homens por A, B, C, D e E e as mulheres por M, N, P e Q. Sejam A e B os homens escolhidos, que garantirão o mínimo de dois necessários para compor a comissão, e C, M e N os demais escolhidos. Então, a comissão formada será A, B, C, M e N. Por outro lado, se os homens escolhidos inicialmente fossem A e C, sendo B, M e N os demais escolhidos a comissão seria A, C, B, M e N, que é igual àquela anteriormente formada. Isso nos mostra que a forma escolhida pelo aluno apresenta uma solução superestimada.

Para obter a solução correta, analisemos as seguintes possibilidades:

1ª: comissões com dois homens e três mulheres → basta selecionar dois dos cinco homens e três das quatro mulheres

$$\frac{5!}{2! \times 3!} \times \frac{4!}{3! \times 1!} = 10 \times 4 = 40 \text{ comissões};$$

2ª: comissões com três homens e duas mulheres → basta selecionar três dos cinco homens e duas das quatro mulheres

$$\frac{5!}{3! \times 2!} \times \frac{4!}{2! \times 2!} = 10 \times 6 = 60 \text{ comissões};$$

3ª: comissões com quatro homens e uma mulher → basta selecionar quatro dos cinco homens e uma das quatro mulheres

$$\frac{5!}{4! \times 1!} \times \frac{4!}{1! \times 3!} = 5 \times 4 = 20 \text{ comissões};$$

4ª: comissões com cinco homens e nenhuma mulher → basta selecionar cinco dos cinco homens
1 comissão.

Portanto, o número de comissões que se podem formar é $40 + 60 + 20 + 1 = 121$.

lá na plataforma

Na Unidade 11 de nosso ambiente virtual, acesse os vídeos seguintes, que abordam o que estudamos até aqui.

https://www.youtube.com/watch?v=q9Un_xWOk3c&list=PL7RjLI0hJPfDgTMbUUar53g0XB6FtxXIB&index=17

https://www.youtube.com/watch?v=J3F4_QlNt6Y&list=PL7RjLI0hJPfDgTMbUUar53g0XB6FtxXIB&index=18

<https://www.youtube.com/watch?v=ZOYBb1twyYQ&list=PL7RjLI0hJPfDgTMbUUar53g0XB6FtxXIB&index=19>

<https://www.youtube.com/watch?v=sKvbKBIA9ns&list=PL7RjLI0hJPfDgTMbUUar53g0XB6FtxXIB&index=26>

https://www.youtube.com/watch?v=RZyAEQx_wS4&list=PL7RjLI0hJPfDgTMbUUar53g0XB6FtxXIB&index=28

Resumo

Para um bom desempenho na resolução de problemas de contagem, recomendamos a seguinte estratégia:

1. colocar-se na posição de quem vai fazer o que o problema pede para ser contado;
2. dividir a ação a ser realizada em etapas (decisões sucessivas);
3. começar pela etapa (decisão) mais restrita;
4. o número de possibilidades de fazer n ações distintas e mutuamente excludentes é a adição da quantidade de modos possíveis que cada uma pode ser feita;
5. ordenar = permutar = arrumar;
6. toda escolha é uma combinação.

Atividade

Análise combinatória é um tema muito comum nas provas de matemática do ENEM e nos vestibulares. A seguir, apresentamos uma questão com vídeo-resolução e indicamos uma lista de exercícios complementar.

1. (Enem, 2019 / Reprodução) Durante suas férias, oito amigos, dos quais dois são canhotos, decidem realizar um torneio de vôlei de praia. Eles precisam formar quatro duplas para a realização do torneio. Nenhuma dupla pode ser formada por dois jogadores canhotos.

De quantas maneiras diferentes podem ser formadas essas quatro duplas?

- | | |
|-------|--------|
| a) 69 | d) 104 |
| b) 70 | e) 105 |
| c) 90 | |

Resposta comentada

Utilize o link a seguir para acessar uma resolução comentada da questão.

Solução: https://www.youtube.com/watch?v=HMLz0h_d9dU

lá na plataforma

Na Unidade 11 de nosso ambiente virtual, acesse o arquivo com a lista de exercícios sobre análise combinatória.

Em seguida, acesse o arquivo com as respostas comentadas das questões.

Mas só acesse esse documento depois de tentar resolver as questões.

Referências

BACHX, Arago de C.; POPPE, Luiz M. B.; TAVARES, Raymundo N. O. *Prelúdio à análise combinatória*. Companhia Editora Nacional: Rio de Janeiro, 1975.

MORGADO, Augusto Cesar de Oliveira; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de; CARVALHO, Paulo César Pinto; FERNANDEZ, Pedro. *Análise combinatória e probabilidade*. Coleção Professor de Matemática. SBM: Rio de Janeiro, 2020.

Qual é a chance?

metas

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos probabilísticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos; analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir uma argumentação consistente.

objetivos

Esperamos que, ao final desta unidade, você seja capaz de:

- identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade;
- reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades;
- resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

Introdução

Imagine que duas pessoas (*A* e *B*) estejam brincando com uma moeda comum e resolvam apostar R\$ 10,00, cada, de modo que ganhe todo o dinheiro aquela que obtiver primeiro seis resultados iguais. Considere que, para todas as jogadas, *A* tenha escolhido a face “cara” e, consequentemente, *B*, a face “coroa”. Após uma série de jogadas, *A* consegue obter cinco caras e *B* obtém três coroas. Por algum motivo insólito, o jogo tem de ser interrompido. Nesse ponto, surge a dúvida: como dividir, de forma justa, os R\$ 20,00 apostados?



Figura 11.1: Cara ou coroa?

Naturalmente, uma maneira de dividir é cada um pegar os R\$10,00 apostados e dar termo à possível celeuma. Entretanto, na medida em que *A* estava próximo da vitória, é questionável que ele saia do jogo da mesma forma que entrou, quando ambos estavam em pé de igualdade. Outra forma seria sugerir uma divisão proporcional ao número de vitórias de cada um, o que daria, para *A*, $5/8$ do total apostado e, para *B*, $3/8$. Porém, embora *A* estivesse mais próximo da vitória, *B* poderia argumentar que, dando-se seguimento ao jogo, por uma “virada da sorte”, ele talvez obtivesse, por exemplo, três coroas seguidas, e *A*, nenhuma cara, o que lhe daria a vitória. Enfim, como fazer?

a priori

Algo que parte do que é anterior, ou seja, que parte de dados ou fundamentos anteriores. Por exemplo: *a priori*, toda criança deve estar na escola.

Fonte: <https://www.dicio.com.br/a-priori/>.

A divisão proporcional toma por base o passado, enquanto o questionamento levantado pelo jogador *B* coloca em pauta uma forma de divisão que contempla o futuro, ou seja, algo que, embora desconhecido, pode ser previsto. A discussão instada por esse problema remonta à Renascença e instituiu uma maneira diferente de modelagem matemática; que, conquanto não descarte o *a priori*, leva em consideração o que pode vir a acontecer. Esse problema clássico suscitou o “pensamento probabilístico”, isto é, o pensamento a respeito de como modelar coisas incertas, visando à tomada de decisão que se baseia no

que pode vir a acontecer. Dito de forma mais direta, o estudo de probabilidades tem por objetivo estabelecer modelos por meio dos quais seja possível mensurar as chances de alguma coisa ocorrer.

Faremos uma breve apresentação dos conceitos basilares de probabilidades e, em seguida, retomaremos a discussão do problema que inicia este texto.

>> *saiba mais*

Para começar a se familiarizar com o tema que estudaremos, sugerimos assistir ao vídeo seguinte:
https://www.youtube.com/watch?v=r0GnS_SWU2s.

Um experimento será dito *determinístico* quando, uma vez repetido em condições semelhantes, conduz a resultados essencialmente iguais. Já os experimentos que, repetidos sob as mesmas condições, produzem resultados diferentes serão denominados *aleatórios*. Estes são os mais usuais em nosso cotidiano. A todo instante somos conduzidos a questões cujas respostas envolvem expressões como *talvez*, *pode ser que*, *acho que* etc.

Num experimento aleatório, destacamos:

- *espaço amostral*: conjunto formado por todos os resultados possíveis deste experimento;
- *evento elementar*: nome dado a cada elemento do espaço amostral;
- *evento*: conjunto formado por resultados possíveis, ou seja, é qualquer subconjunto do espaço amostral; geralmente, seus elementos são os resultados favoráveis.

Por exemplo, considere o experimento aleatório: *Um casal de seres humanos deseja ter dois filhos*.

- Espaço amostral: $U = \{(\text{MENINO}; \text{MENINO}), (\text{MENINO}; \text{MENINA}), (\text{MENINA}; \text{MENINO}), (\text{MENINA}; \text{MENINA})\}$
- Eventos elementares: $(\text{MENINO}; \text{MENINO})$, $(\text{MENINO}; \text{MENINA})$, $(\text{MENINA}; \text{MENINO})$ e $(\text{MENINA}; \text{MENINA})$
- Eventos: $A = \{(\text{MENINA}; \text{MENINA})\}$; $B = \{(\text{MENINO}; \text{MENINA}), (\text{MENINA}; \text{MENINO})\}$ (observe que há $2^4 = 16$ eventos)

Atenção: salvo menção contrária, trabalharemos sempre com experimentos aleatórios em que o espaço amostral será um conjunto finito.

Dado um espaço amostral qualquer U , são sempre subconjuntos de U o conjunto vazio e o próprio conjunto U . Eles são chamados de *evento impossível* e de *evento certo*, respectivamente.

Dois eventos A e B são *mutuamente excludentes* quando não podem ocorrer simultaneamente, isto é:

$$A \cap B = \emptyset$$

Considerando, por exemplo, o experimento aleatório: “lançar um dado comum e observar o número escrito na face superior”.

- Espaço amostral: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- eventos: \emptyset ; $A = \{2, 4, 6\}$; $B = \{3, 6\}$; U (observe que há $2^6 = 64$ eventos)
- são eventos mutuamente excludentes: \emptyset e U ; $A = \{2, 4, 6\}$ e $C = \{1, 3\}$ (entretanto, observe que A e B não são mutuamente excludentes, pois $A \cap B = \{6\}$).

Para estudar experimentos aleatórios utiliza-se um *modelo probabilístico* em que se procura determinar um número que expresse a maior ou a menor confiança de um evento ocorrer. De maneira mais formal, a ideia é definir uma função, denominada *probabilidade*, que associe, a cada evento A , um número real $P(A)$, denominado *probabilidade de o evento A ocorrer*, na realização do experimento. Esse número deve ser tal que:

- $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo evento A ;
- $P(U) = 1$;
- se A e B forem mutuamente excludentes, então a probabilidade de que A ou B ocorra será a soma das probabilidades de ocorrência de A e de B ; ou seja:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Ainda que as condições colocadas sejam bastante razoáveis, convém observar que o conceito de probabilidade é oriundo de uma interpretação, sendo, portanto, bastante abstrato. Na verdade, esse conceito caracteriza, mas não informa diretamente como obter esse número *probabilidade*, que, de um modo geral, pode ser obtido de duas formas bastantes naturais, em condições reais. A primeira, mais usual, é a *situação equiprobabilística*, na qual há “motivos” suficientes para acreditar que os eventos elementares são igualmente prováveis.

Isso ocorre, por exemplo, quando lançamos um dado, evento em que não há motivos para se esperar que uma das faces seja mais provável de cair virada para cima do que a outra. Outra situação em que se identifica a equiprobabilidade é a *ignorância*, que é quando desconhecemos qualquer informação sobre a situação do experimento (por exemplo, se forem jogar Flamengo e Botafogo, desconhecendo-se informações específicas sobre as condições de cada time ou sobre a campanha que realizam, é razoável supor que as probabilidades de vitória do Flamengo, ou do Botafogo e de empate sejam as mesmas).

No caso do dado, uma vez que $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = p$, temos pela condição (iii):

$$p + p + p + p + p + p = 6p = 1$$

$$p = 1/6$$

Portanto, $P(\{3,6,9\}) = 3/6$ e $P(\{3,6\}) = 2/6$, além de $P(U) = 1$ e $P(\emptyset) = 0$.

No caso do experimento descrito na situação de jogo Flamengo x Botafogo, uma vez que $P(\text{Fla}) = P(\text{Fogo}) = P(\text{empate}) = q$, temos:

$$3q = 1$$

$$q = 1/3.$$

Portanto, a probabilidade de o Flamengo não perder o jogo, ou seja, de ele ganhar ou empatar, é $2/3$.

Nessa situação – em que as possibilidades têm a mesma probabilidade –, se U é o espaço amostral constituído exatamente por n eventos elementares (os casos possíveis) e A é um evento de U contendo exatamente k elementos (os casos favoráveis), temos que a probabilidade de ocorrer cada um dos eventos elementares é $1/n$ e, por conseguinte, $P(A) = k/n$, ou seja, em espaços *equiprobabilísticos* define-se:

a probabilidade de um evento é a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis.

$$P = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

Vejamos os exemplos seguintes:

Situação 1: jogando-se um **dado comum**, não-viciado, qual será a probabilidade de obter:

- | | |
|-------------------------------|-----------------------------------|
| a) um número maior que 4? | b) um número primo? |
| c) um número divisível por 1? | d) um número não-divisível por 3? |

dado comum

Diz-se que um dado é comum quando ele possui o formato tradicional com 6 faces quadradas e numeradas de 1 a 6.

Solução:

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- | | |
|---|---|
| a) Evento: $\{5, 6\} \Rightarrow P = 2/6 = 1/3$ | b) Evento: $\{2, 3, 5\} \Rightarrow P = 3/6 = 1/2$ |
| c) Evento: $U \Rightarrow P = 6/6 = 1$ | d) Evento: $\{1, 2, 4, 5\} \Rightarrow P = 4/6 = 2/3$ |

Situação 2: num lote de 12 peças, há 4 que são defeituosas. Calcule a probabilidade de, retirando-se ao acaso uma das peças desse lote:

- | | |
|----------------------|------------------------|
| a) ela ser perfeita? | b) ela ser defeituosa? |
|----------------------|------------------------|

Solução:

a) $P = 8/12 = 2/3$

b) $P = 4/12 = 1/3$

Situação 3: se um baralho comum de 52 cartas, uma é extraída ao acaso. Qual é a probabilidade de esta carta:

a) ser o ás de ouros?

b) ser um ás?

c) ser valete, dama ou rei?

d) não ser um ás?

Observação: As 52 cartas são divididas em 4 naipes (ouros, copas, paus e espadas), cada um deles com 13 cartas diferentes (ás, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, valete, dama e rei).

Solução:

a) $P = 1/52$

b) $P = 4/52 = 1/13$

c) Há 4 vales, 4 damas e 4 reis no baralho. Logo, $P = 12/52 = 3/13$.

d) Há 4 ases no baralho. Logo, $P = 4/52 = 1/13$.

Situação 4: dois dados comuns e não-viciados são lançados, para que se observe os números obtidos nas suas faces, voltadas para cima. Determine a probabilidade de a soma desses números ser maior do que 7.

Solução:

Note que, neste caso, o espaço amostral possui um número pequeno de elementos. Vale a pena então escrevê-lo. Há aí uma situação especial em que uma *tabela de dupla entrada* pode ser bastante útil. Nela, aparecerão, de forma explícita, os 36 resultados possíveis, e poderemos, ainda, destacar os resultados favoráveis.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						X
3					X	X
4				X	X	X
5			X	X	X	X
6		X	X	X	X	X

Por contagem direta, chegamos a 15 resultados favoráveis. Logo, a probabilidade pedida é:

$$P = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \approx 42\%$$

Com respeito ao problema anterior, poderíamos pensar em escrever o espaço amostral como se segue:

$$S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

que é o conjunto formado por todas as possíveis somas, quando lançamos dois dados. No contexto em que estamos, esse espaço amostral é *inconveniente*, por não ser equiprobabilístico (basta notar que a probabilidade de ocorrer o 12 é $1/6$, enquanto, por exemplo, a probabilidade de ocorrer o 3 é $2/6$).

Nesses casos, uma alternativa é adotar a seguinte definição de probabilidade:

Seja $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, para o qual considera-se cada evento formado por um resultado simples $A = \{a_i\}$. Chama-se *probabilidade de A ocorrer*, a função que associa a cada a_i um número p_i (escreve-se: $P(a_i) = p_i$), que possui as seguintes propriedades:

$$1^a) p_i \geq 0, \text{ para todo } i \in \{1, 2, \dots, n\};$$

$$2^a) p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

Neste exemplo, temos:

S	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Prob.	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Note que a soma das probabilidades de todas as possibilidades é 1.

Pede-se $P(\{8; 9; 10; 11; 12\})$, que é dada por:

$$P(8) + P(9) + P(10) + P(11) + P(12) = \frac{5 + 4 + 3 + 2 + 1}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

Normalmente, esse modelo probabilístico é utilizado em espaços amostrais finitos e não-equiprobabilísticos.

Em alguns casos, resolver um problema de probabilidades, cujo experimento aleatório não tenha um espaço amostral de fácil exposição, consiste em resolver dois problemas de contagem: o primeiro, sem restrições, para determinar o número de casos possíveis; e o segundo, com as restrições devidas, para determinar o número de casos favoráveis.

Vejamos o exemplo seguinte.

Situação 5: considere todos os números formados por quatro algarismos distintos no sistema decimal. Se um deles for escolhido ao acaso, qual será a probabilidade de ele conter o algarismo 2, mas não conter o algarismo 3?

Solução:

Inicialmente, vamos descobrir quantos números de quatro algarismos distintos podemos formar no sistema decimal.

$$\underline{A \neq 0} \quad \underline{B} \quad \underline{C} \quad \underline{D}$$

Para a escolha de A , há 9 opções; para a escolha de B , 9 opções; para a escolha de C , 8 opções e para a escolha de D , há 7 opções. Então, pelo princípio multiplicativo, podemos formar $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4.536$ números (quantidade de resultados possíveis).

Agora, vamos resolver o seguinte problema: quantos números de quatro algarismos distintos podemos formar no sistema decimal, contendo o 2, mas não contendo o 3?

$$\underline{A \neq 0} \quad \underline{B} \quad \underline{C} \quad \underline{D}$$

Se $A = 2$, então há 8 opções para a escolha de B (estão excluídos o 2, já usado, e o 3), há 7 opções para a escolha de C e 6 opções para a escolha de D . Assim, pelo princípio multiplicativo, podemos formar $1 \times 8 \times 7 \times 6 = 336$ números começados por 2 e sem o 3.

Por outro lado, se $A \neq 2$ e $B = 2$, então há 7 opções para a escolha de A (estão excluídos o 0, o 2 e o 3), há 7 opções para a escolha de C (estão excluídos o 2, o 3 e o algarismo colocado no lugar de A) e há 6 opções para a escolha de D . Logo, pelo princípio multiplicativo, podemos formar $7 \times 1 \times 7 \times 6 \times 3 = 882$ (aqui, houve a multiplicação por 3, pois o cálculo se repete quando colocamos o dígito 2 sucessivamente nos lugares de C e D). Portanto, podemos formar $336 + 882 = 1.218$ números contendo o 2, mas não contendo o 3 (quantidade de resultados favoráveis).

Com isto, a probabilidade pedida é:

$$P = \frac{1218}{4536} \approx 27\%$$

Vejamos, agora, a segunda forma de obter a probabilidade de um evento ocorrer, que é a *situação frequencial*. Nela, adota-se, para a probabilidade de um evento, a frequência relativa em que ele ocorreu; ou seja, o número de observações de determinado tipo de ocorrências.

Isso ocorre, por exemplo, quando após lançar uma moeda 100 vezes, observa-se a ocorrência de 70 caras e 30 coroas, o que torna razoável, então, adotar para P (cara) o número $70/100 = 0,7$ e para P (coroa) o número $30/100 = 0,3$. No caso de Flamengo e Botafogo, se são conhecidas algumas informações como, por exemplo, que aquele tem feito melhor campanha do que este, que jogará com o time titular, enquanto este entrará com o time reserva, é razoável supor $P(\text{Fla}) > P(\text{Fogo})$ e $P(\text{Fla}) > P(\text{empate})$.

Nessa situação, em geral, utiliza-se a Estatística para apurar as frequências relativas dos eventos. Isso é comumente observado na indústria farmacêutica, nas pesquisas eleitorais e na Teoria da Resposta ao Item, utilizada no ENEM.

Propriedades da probabilidade

Seja um experimento aleatório cujo espaço amostral é U . Então:

$$1^a) P(\emptyset) = 0$$

De fato, U e \emptyset são eventos mutuamente excludentes e, portanto:

$$P(U \cup \emptyset) = P(U) + P(\emptyset) \Rightarrow P(U) = P(U) + P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = 0$$

$$2^a) P(A^c) = 1 - P(A), \text{ sendo } A \text{ um evento de } U \text{ (} A^c \text{ designa o complementar de } A, \text{ ou seja, } A^c = U - A)$$

De fato, A e A^c são mutuamente excludentes e, portanto:

$$P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) \Rightarrow P(U) = P(A) + P(A^c) \Rightarrow 1 - P(A) = P(A^c)$$

$$3^a) P(A - B) = P(A) - P(A \cap B), \text{ sendo } A \text{ e } B \text{ eventos quaisquer de } U.$$

De fato, $P(A) = P((A - B) \cup (A \cap B)) = P(A - B) + P(A \cap B)$, pois $A - B$ e $A \cap B$ são mutuamente excludentes.

Donde:

$$P(A) - P(A \cap B) = P(A - B)$$

$$4^a) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \text{ sendo } A \text{ e } B \text{ eventos quaisquer de } U.$$

De fato, $P(A \cup B) = P((A - B) \cup B) = P(A - B) + P(B)$, pois $A - B$ e B são mutuamente excludentes.

Donde:

$$P(A \cup B) = [P(A) - P(A \cap B)] + P(B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Observação: a generalização dessa propriedade é conhecida como *Teorema de Da Silva*.

Vejamos o exemplo seguinte.

Situação 6: uma cidade tem 30.000 habitantes e três jornais A, B e C. Uma pesquisa revela que:

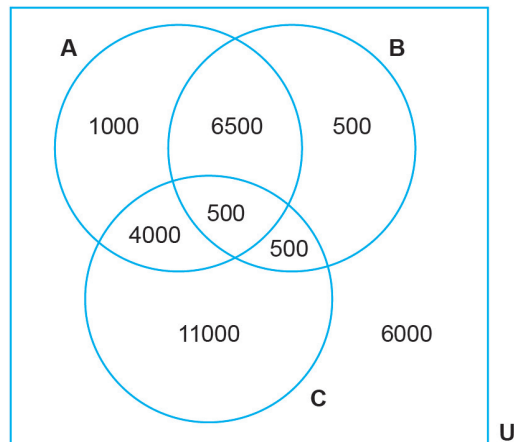
- 12.000 leem A • 8.000 leem B • 16.000 leem C • 7.000 leem A e B
- 4.500 leem A e C • 1.000 leem B e C • 500 leem A, B e C

a) Qual é a probabilidade de que um habitante desta cidade leia pelo menos um desses jornais?

b) Qual é a probabilidade de que um habitante desta cidade leia só um desses jornais?

Solução:

Representando as informações num diagrama conveniente, onde cada número colocado numa região indica o número de elementos que pertencem àquela região, temos:



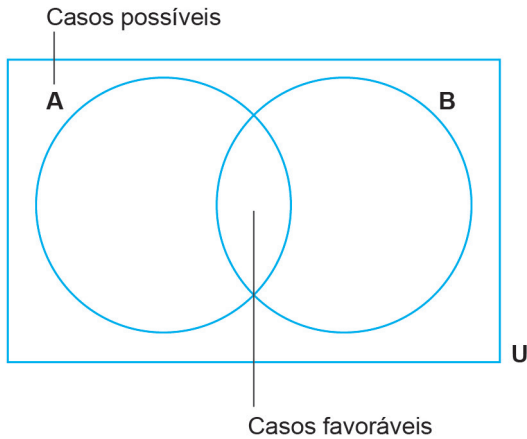
$$a) P = 1 - \frac{6000}{30000} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = 80\%$$

$$b) P = \frac{1000 + 500 + 11000}{30000} = \frac{125}{300} = \frac{5}{12} \approx 42\%$$

Consideremos a seguinte situação: em uma cidade há um barbeiro que, em cada dia, quando se levanta, escolhe um número natural de 1 a 100. Na barbearia, ele prestava os seus serviços aos seus clientes e, ao terminar, pedia-lhes que tentassem adivinhar o número por ele escolhido quando se levantou. Se o cliente acertasse, não teria que pagar a conta e, caso contrário, pagaria normalmente. Nessa situação é bastante razoável para o cliente supor que cada número de 1 a 100 tem a mesma probabilidade de ocorrer, ou seja, essa probabilidade é 1/100.

Suponha que o referido cliente soubesse, *a priori*, que o barbeiro, por razões estritamente pessoais (desconhecidas), jamais escolheria um número ímpar. Essa informação faria com que o espaço amostral ficasse restringido ao conjunto $S' = \{2, 4, 6, \dots, 100\}$ e, portanto, a probabilidade de o cliente acertar o número escolhido pelo barbeiro passaria a ser 1/50. Essa probabilidade é denominada probabilidade condicional de acertar o número sabendo *a priori* que ele é par.

Sejam A e B dois eventos de um mesmo experimento aleatório de espaço amostral U. A probabilidade de ocorrer o evento B, dada a ocorrência do evento A (naturalmente, $A \neq \emptyset$), recebe o nome de *probabilidade condicional* e será representada por $P(B|A)$. Observe o diagrama:



Pelo diagrama, $P(B|A) =$

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(U)}}{\frac{n(A)}{n(U)}}.$$

Assim, a probabilidade condicional de ocorrer B , dado que A ocorreu, é uma nova probabilidade definida por:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Observação: de modo geral, na resolução de problemas, essa expressão não é utilizada para calcular uma probabilidade condicional, mas é fundamental para obter a probabilidade de ocorrerem sucessivamente os eventos A e B . Assim, a *probabilidade de ocorrerem A e B é o produto da probabilidade de ocorrer A pela probabilidade de ocorrer B , dado que A ocorreu.*

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

Particularmente, quando A e B forem independentes um do outro, isto é, a realização ou não realização de um dos eventos não

afetar a probabilidade da realização do outro e vice-versa, teremos:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Por exemplo, suponha que numa urna I haja 4 bolas brancas e 6 bolas pretas e que, numa urna II, existam 5 bolas brancas e 4 bolas pretas. Uma pessoa saca uma bola da urna I e a coloca na urna II. Após essa operação, se for retirada uma bola da urna II, qual será a probabilidade de ela ser preta?

A resolução desse problema requer uma análise de possibilidades:

- 1ª) Retirar uma bola branca da urna I e uma bola preta da urna II

$$P(\text{Pr}_{II} \cap \text{Br}_I) = P(\text{Br}_I) \times P(\text{Pr}_{II} | \text{Br}_I) = 4/10 \times 4/10 = 16/100$$

- 2ª) Retirar uma bola preta da urna I e uma bola preta da urna II

$$P(\text{Pr}_{II} \cap \text{Pr}_I) = P(\text{Pr}_I) \times P(\text{Pr}_{II} | \text{Pr}_I) = 6/10 \times 5/10 = 30/100$$

Uma vez que esses eventos são mutuamente excludentes, temos que a probabilidade pedida é $16/100 + 30/100 = 46/100$ ou ainda 46%.

Observações:

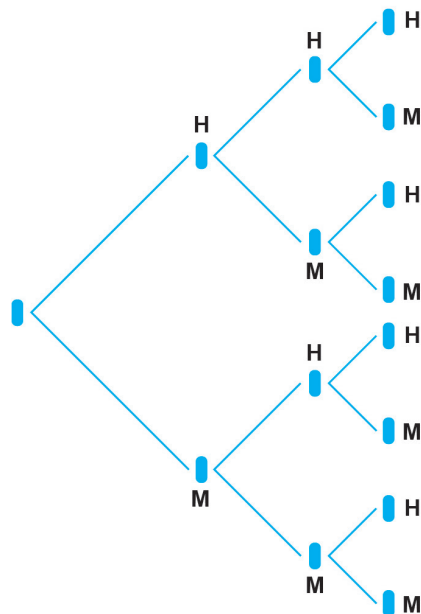
1. Decorre, então, que, um problema de probabilidades que envolva sucessivas decisões pode ser resolvido como um problema usual de contagem, em que analisamos sucessivamente as decisões envolvidas, enquanto o número de maneiras de ocorrência será a probabilidade de cada uma delas. A probabilidade será, assim, obtida pela aplicação de uma espécie de princípio multiplicativo.

2. Na resolução de problemas que envolvem etapas sucessivas, um recurso bastante útil é o *diagrama em árvore*.

Exemplos:

Situação 7: considere o experimento aleatório *nascimento de três filhos de um casal*. Faça um diagrama em árvore, represente o evento *nascimento de 2 meninos em três filhos do casal* e calcule a probabilidade de que ele ocorra.

Solução:



- H designa menino
- M designa menina

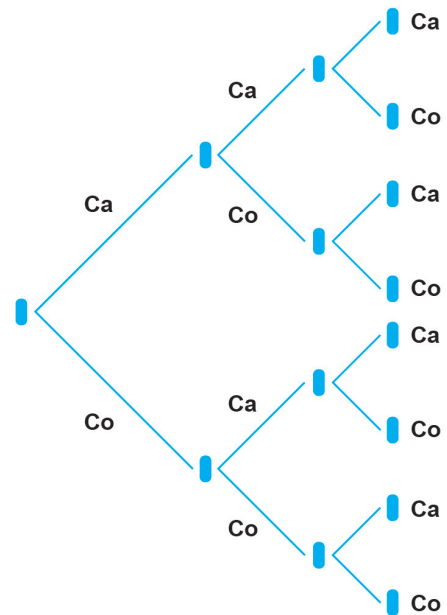
Evento: $\{(H,H,H); (H,H,M); (H,M,H); (M,H,H)\}$

$$P = 4/8 = 1/2$$

Situação 8: pede-se que se faça um diagrama em árvore do experimento aleatório *lançamento simultâneo de três moedas diferentes* e calcule a probabilidade de ocorrer:

- exatamente uma cara;
- pelo menos 1 cara;
- exatamente duas caras;
- no máximo duas caras.

Solução:



- U designa o espaço amostral
- Ca designa cara
- Co designa coroa

$$a) \{(Ca,Co,Co); (Co,Ca,Co); (Co,Co,Ca)\} \Rightarrow p = 3/8$$

$$b) U - \{(Co,Co,Co)\} \Rightarrow p = 1 - 1/8 = 7/8$$

$$c) \{(Ca,Ca,Co); (Ca,Co,Ca); (Co,Ca,Ca)\} \Rightarrow p = 3/8$$

$$e) d) U - \{(Ca,Ca,Ca)\} \Rightarrow p = 1 - 1/8 = 7/8$$

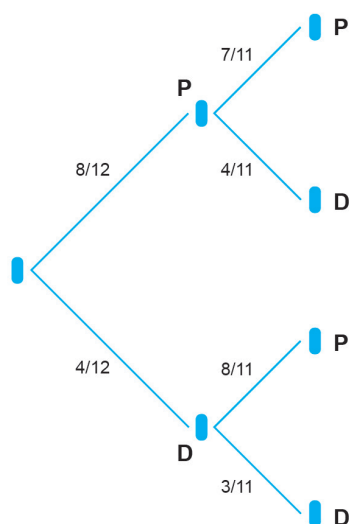
Situação 9: num lote de 12 peças, há 4 que são defeituosas. Calcule a probabilidade de:

- retirando-se ao acaso e sucessivamente duas das peças desse lote, serem ambas perfeitas.

b) retirando-se ao acaso e sucessivamente três das peças desse lote, apenas uma ser defeituosa.

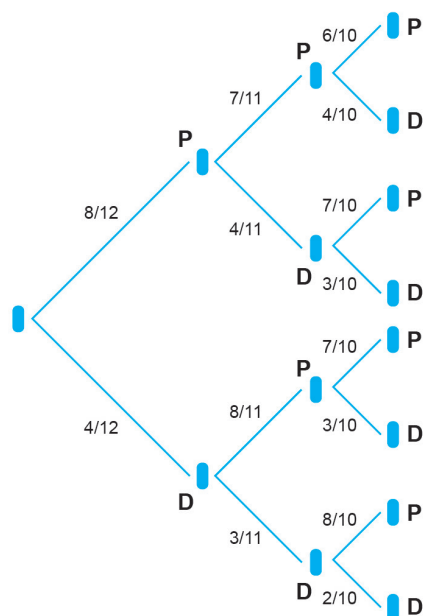
Solução:

a)



$$P = 8/12 \times 7/11 = 14/33$$

b)



$$P_1 = 8/12 \times 7/11 \times 4/10 = 28/165$$

$$P_2 = 8/12 \times 4/11 \times 7/10 = 28/165$$

$$P_3 = 4/12 \times 8/11 \times 7/10 = 28/165$$

$$\text{Logo, } P = 3 \times 28/165 = 28/55.$$

Situação 10: numa caixa, existem 5 balas de hortelã e 3 balas de mel. Retirando-se sucessivamente e sem reposição duas dessas balas, qual será a probabilidade de que ambas sejam de hortelã?

Solução:

A primeira etapa consiste na retirada de uma bala da urna. A probabilidade de que ela seja de hortelã é $5/8$. A segunda etapa consiste na retirada de uma outra bala da urna. A probabilidade de que ela também seja de hortelã é $4/7$. Logo, pelo *princípio multiplicativo*:

$$P = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{5}{14} \approx 36\%$$

Situação 11: o problema introdutório: Imagine que duas pessoas (A e B) estejam brincando com uma moeda comum e resolvam apostar R\$ 10,00, cada, de modo que ganhe aquela que obtiver primeiro seis resultados iguais. Após uma série de jogadas, A consegue obter cinco caras e B obtém três coroas. Por algum motivo insólito, o jogo tem de ser interrompido. Nesse ponto, surge a dúvida: como dividir, de forma justa, os R\$ 20,00 apostados?

Solução:

Como já comentamos, uma divisão que parece ser mais justa deve levar em conta as probabilidades que cada pessoa tem de vencer o jogo, caso ele continuasse. Temos, então:

I: sairá *cara* no lançamento da moeda, determinando a vitória do jogador A (ele já obteve 5 *caras*).

II: sairá *coroa* no lançamento da moeda, determinando a continuação do jogo (A permanece com as 5 “*caras*”, mas B passa a ter 4 *coroas*). Continuando o jogo, podem ocorrer as seguintes situações:

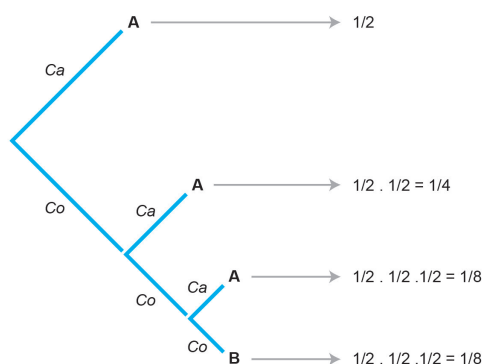
II.1: sairá *cara* no lançamento da moeda, determinando a vitória do jogador A (ele já obteve 5 *caras*).

II.2: sairá *coroa* no lançamento da moeda, determinando a continuação do jogo (A permanece com as 5 *caras*, mas B passa a ter 5 *coroas*). Continuando o jogo, podem ocorrer as seguintes situações:

II.2.1: Sai *cara* no lançamento da moeda, determinando a vitória do jogador A (ele já obteve 5 *caras*).

II.2.2: Sai *coroa* no lançamento da moeda, determinando a vitória do jogador B (ele já obteve 5 *coroas*).

Façamos um diagrama em árvore.



A probabilidade de B ganhar o jogo, caso ele continuasse, é $1/8$, de modo que a de A ganhar é $7/8$. Portanto, A deve receber $7/8$ de

R\$ 20,00, ou seja, R\$ 17,50 e, B deve receber $1/8$ de R\$ 20,00, ou seja, R\$ 2,50.

>> saiba mais

Sugerimos que você assista ao vídeo seguinte, como forma de revisar os principais conceitos trabalhados até aqui: <https://youtu.be/HKg3tuq0uj4>.

Ao longo de toda a solução do problema anterior, trabalhamos com duas situações mutuamente excludentes: vitória de A ou vitória de B. Vejamos a seguir como lidar com situações em que este tipo de fenômeno acontece.

Seja A um evento para o qual admite-se a ocorrência de duas situações mutuamente excludentes: o *sucesso* e o *fracasso*. Suponha que a sua probabilidade de sucesso seja s . Então:

- probabilidade de A ocorrer n vezes consecutivas é s^n .
- probabilidade de não ocorrer o evento A, isto é, de ocorrer o fracasso, é $1 - s$.

Vejamos o exemplo que se segue.

Situação 12: muito hábil com um arco e flechas, Clebinho tem 60% de chance de acertar uma maçã colocada na cabeça de seu amigo Fabinho. Se Clebinho só tiver direito de atirar cinco flechas, qual será a probabilidade de que ele:

- só acerte a maçã com a terceira flecha?
- acerte a maçã com exatamente três flechas?
- acerte a maçã com pelo menos uma das flechas atiradas?

Solução:

a) Neste problema há duas etapas sucessivas: errar quatro das flechas definidas e acertar exatamente a terceira delas. A probabilidade de Clebinho errar a primeira, a segunda, a quarta e a quinta flechas é $(0,4)^4 = 0,0256$. A probabilidade de Clebinho acertar a terceira flecha é 0,6. Portanto, a probabilidade de Clebinho acertar a maça somente com a terceira flecha, das cinco atiradas, é $0,0256 \times 0,6 = 0,01536 = 1,536\%$.

b) Nesse caso, Clebinho deverá acertar três e errar duas, das cinco flechas atiradas. Uma das situações a ser considerada é A, A, A, E e E. A probabilidade de isto ocorrer é dada por $(0,6)^3 \times (0,4)^2$. Porém, como os três acertos e os dois erros poderão ocorrer em outras ordens, teremos a seguinte solução:

$$P = (0,6)^3 \times (0,4)^2 \times P_{5,3,2} = 0,216 \times 0,16 \times \frac{5!}{3!2!} = 0,3456 = 34,56\%$$

c) Aqui, há uma situação bem definida que não pode ocorrer: *Clebinho errar todas as flechas atiradas*. Assim, teremos que excluir da probabilidade total (1) a probabilidade de que Clebinho erre todas as flechas atiradas $(0,4^5)$, isto é:

$$P = 1 - 0,01024 = 0,98976 \approx 99\%.$$

Geralmente, entende-se a probabilidade como o número que mede a chance de ocorrência de determinado evento. No dia a dia, intuitivamente, utiliza-se um outro conceito, que se confunde com o de probabilidade, chamado de *favorabilidade*. Quando dizemos que “algo tem 200% de chance de acontecer” ou que “há uma chance de 4 para 3 de algo ocorrer”, na verdade estamos usando este conceito.

Grosso modo, definimos a *favorabilidade* de um evento A como a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos desfavoráveis (se o espaço amostral for equiprobabilístico). Por exemplo, admitamos que no clássico Flamengo x Botafogo, as probabilidades de ocorrerem vitória do Flamengo, vitória do Botafogo e empate sejam iguais, ou seja, 1/3 cada uma. Então, a favorabilidade de o Flamengo ganhar é 1/2. Outro exemplo: numa urna há dez bolas numeradas de 1 a 10, todas indistinguíveis pelo tato. Considerando o evento sortear um número que não seja primo, temos:

$$Prob. = \frac{6}{10} = 60\%$$

$$Favor. = \frac{6}{4} = 150\%$$

que é um número maior do que 1.

Consideremos agora a seguinte situação: a chance de o Flamengo ganhar do Botafogo é de 5 em 3; qual a probabilidade de o Flamengo ganhar do Botafogo? Neste caso, foi dada a favorabilidade de o Flamengo ganhar, que representa 5 resultados favoráveis (vitória do Flamengo) em 3 resultados desfavoráveis (não vitória do Flamengo). Logo, o número de resultados possíveis é oito, sendo que, em 5 deles há a vitória do Flamengo. Portanto, a probabilidade de o Flamengo ganhar é $5/8 = 62,5\%$. Porém, como chacota, os torcedores do Botafogo lembram que, na Libertadores, a chance de o Flamengo ser eliminado é 180%. Isso, na verdade, é uma favorabilidade, a qual expressa que há 9 resultados favoráveis à eliminação contra 5 resultados não favoráveis à ela. Logo, o número de resultados possíveis é 14 e, como o número de resultados favoráveis é 9, a probabilidade de o Flamengo ser eliminado da Libertadores é $9/14 \approx 64\%$.

Para finalizar esta apresentação que objetiva trazer noções iniciais sobre probabilidades, falemos sobre o conceito de *valor esperado*.

Considere que dois jogadores, Cleber e Fabio, queiram participar de um jogo que dá a Cleber uma probabilidade de ganhar de 0,7 e, a Fabio, uma probabilidade de ganhar de 0,3. É razoável compreender que, se ambos apostarem quantias iguais, o jogo não será justo, pois Cleber precisa desembolsar mais dinheiro, por conta do privilégio de jogar com uma probabilidade maior de ganhar.

Suponhamos que cada um deles estipule sua aposta. Por exemplo, Fabio se dispõe a apostar R\$ 10,00, caso Cleber aposte R\$ 20,00. Se ambos jogarem diversas vezes, quanto Cleber espera ganhar?

Observemos que os ganhos que Cleber espera por jogo são calculados como se segue:

- em 3, das 10 vezes, Cleber perderá R\$ 20,00;
- em 7, das 10 vezes, Cleber ganhará R\$ 10,00.

Logo, o ganho previsto por jogo será:

$$G = \frac{0,3 \times (-20) + 0,7 \times (10)}{0,3 + 0,7} \rightarrow$$

$G = 1$ real por jogo

Assim, se disputarem o jogo muitas vezes, Cleber pode esperar ganhar uma média de R\$ 1,00 por jogo e Fabio pode esperar perder R\$ 1,00 por jogo.

Seja $X = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ um evento de um experimento aleatório de espaço amostral S , atendendo às condições impostas pela definição. Nestas condições, o *valor esperado*

(ou *esperança*, ou *expectância*) de uma variável aleatória é a soma das probabilidades de cada possibilidade de saída da experiência multiplicada pelo seu valor. Isto é, representa o valor médio “esperado” de uma experiência, se ela for repetida muitas vezes.

Assim, o valor esperado de X ($\text{esp}(X)$) é obtido por meio da média ponderada dos valores possíveis (x_i) de X , com os pesos respectivamente iguais a $P(x_i)$ (probabilidade de ocorrer x_i).

Em termos intuitivos, suponhamos que vamos repetir um experimento aleatório n vezes, independentemente, e observar os seus resultados. Nestes n experimentos, se n for grande, as observações produzirão o valor x_i com frequência relativa de aproximadamente $P(x_i)$.

$$\text{esp}(X) = x_1 \times P(x_1) + x_2 \times P(x_2) + \dots + x_n \times P(x_n)$$

Situação 13: supondo que um jogador de basquete tenha média de aproveitamento nos lances livres de 60%. Este jogador fará dois lances livres, valendo 1 ponto cada, sendo que o segundo somente ocorrerá se ele acertar o primeiro. Nessas condições, qual é o número de pontos que se espera que ele faça?

Solução:

- a probabilidade de ele fazer 0 pontos é $P_1 = 0,40$;
- a probabilidade de ele fazer 1 ponto é $P_2 = 0,6 \times 0,4 = 0,24$;
- a probabilidade de ele fazer 2 pontos é $P_3 = 0,6 \times 0,6 = 0,36$;

O número esperado de pontos (N) do referido jogador é, então:

$$N = \frac{0 \times 0,40 + 1 \times 0,24 + 2 \times 0,36}{0,40 + 0,24 + 0,36} = 0,96$$

Observação: pode-se demonstrar que, em ensaios nos quais a probabilidade de sucesso é a mesma (P) para todo o ensaio, o valor esperado do tempo de espera até que ocorra o primeiro sucesso é $1/P$.

Exemplo: frequentemente, alguns produtos alimentícios e refrigerantes fazem campanhas publicitárias colocando prêmios em suas embalagens. A expectativa dos fabricantes é, possivelmente, a de que os consumidores, especialmente as crianças, continuem a comprar seus produtos na esperança de colecionar um conjunto completo de prêmios.

Como é impossível determinar, a partir do exterior da embalagem, o prêmio específico que ela contém, pode ocorrer de um consumidor acumular vários prêmios de certo tipo e nenhum dos outros.

Se há cinco prêmios diferentes, que número de embalagens de um desses produtos espera-se que um consumidor tenha que comprar para obter um conjunto completo de prêmios, se esses prêmios estiverem distribuídos uniformemente pelas embalagens, e apenas um em cada uma delas?

Solução:

Na 1ª embalagem comprada a probabilidade P_1 de vir um prêmio é 1; a probabilidade P_2 de se encontrar um prêmio diferente em qualquer outra embalagem é $4/5$; a probabilidade P_3 de se encontrar um prêmio diferente dos dois já encontradas numa outra embalagem é $3/5$; a probabilidade P_4 de se encontrar um prêmio diferente dos três já encontrados é $2/5$ e, finalmente, $P_5 = 1/5$.

Portanto, o número esperado (N) de embalagens é:

$$N = 1 + \frac{5}{4} + \frac{5}{3} + \frac{5}{2} + \frac{5}{1} \approx 11,42 \Rightarrow N = 12$$

lá na plataforma

Na Unidade 11 de nosso ambiente virtual, acesse o vídeo seguinte, que aborda o que estudamos até aqui.

<https://m3.ime.unicamp.br/recursos?search=probabilidades>

Probabilidades nas provas de vestibulares e ENEM

Probabilidades é um conteúdo clássico da Matemática abordado tanto no Enem, quanto nos demais vestibulares. Verifiquem algumas questões em nossa plataforma.

lá na plataforma

Na Unidade 11 de nosso ambiente virtual, acesse o arquivo com a lista de exercícios sobre Probabilidade.

Em seguida, acesse o arquivo com as respostas comentadas das questões.

Mas só acesse esse documento depois de tentar resolver as questões!

Resumo

Para um bom desempenho na resolução de problemas envolvendo probabilidades, recomendamos a seguinte estratégia:

- sempre que possível, escreva um espaço amostral que seja equiprobabilístico;
 - nos casos em que o experimento aleatório não tenha um espaço amostral de fácil exposição, procure resolver dois problemas de contagem: o primeiro, sem restrições, para determinar o número de casos possíveis e, o segundo, com as restrições devidas, para determinar o número de casos favoráveis;
 - um problema de probabilidades que envolva sucessivas decisões pode ser resolvido como um problema usual de contagem, em que analisamos sucessivamente as decisões envolvidas enquanto o número de maneiras de ocorrência será a probabilidade de cada uma delas. A probabilidade será então obtida pela aplicação de uma espécie de princípio multiplicativo;
 - na resolução de problemas que envolvem etapas sucessivas, um recurso bastante útil é o diagrama em árvore.
-

Referências

DWASS, Meyer. *First steps in probability*. U.S.A.: McGraw-Hill, Inc, 1967.

FERLAND, Kevin. *Discrete mathematics*. New York: Houghton Mifflin Company, 2009.

MATTHEWS, Roberto. *As leis do acaso*. Rio de Janeiro: Zahar Editoria, 2017.

MORGADO, Augusto C. de O.; CARVALHO, João B. P. de; CARVALHO, Paulo C. P.; FERNANDEZ, Pedro. *Análise combinatória e probabilidades*. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: S.B.M., 1991.