Física

PVC

PRÉ-VESTIBULAR **CECIERJ** | volume **1**

Carlos Alberto Faria Leite

Eden Vieira Costa

VENDA PROIBIDA

Fundação CECIERJ

Secretaria de Ciência, Tecnologia e Inovação

GOVERNO DO ESTADO RIO DE JANEIRO

SEM TEMPO A PERDER

Física

PVC

PRÉ-VESTIBULAR **CECIERJ** | volume **1**

Fundação CECIERJ

Secretaria de Ciência, Tecnologia e Inovação

GOVERNO DO ESTADO RIO DE JANEIRO
SEM TEMPO A PERDER

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Governador
Cláudio Castro

Secretário de Estado de Ciência, Tecnologia e Inovação
Dr. Serginho

FUNDAÇÃO CECIERJ

Presidente
Rogerio Tavares Pires

Vice-Presidente de Educação Superior a Distância
Caroline Alves da Costa

Pré-Vestibular Social

Diretor
Luiz Fernando Jardim Bento

Elaboração de Conteúdo
Carlos Alberto Faria Leite
Eden Vieira Costa

Biblioteca
Any Bernstein, Simone da Cruz Correa de Souza
Vera Vani Alves de Pinho

cecierj.edu.br/pre-vestibular-social/

Material Didático

Diretor de Material Didático
Ulisses Schnaider Cunha

Diretora de Design Instrucional
Diana Castellani

Diretora de Material Impresso
Bianca Giacomelli

Projeto Gráfico
Cristina Portella e Maria Fernanda de Novaes

Ilustração da Capa
Renan Alves

Design Instrucional
Vittorio Lo Bianco
Luciana Britto

Revisão Linguística
Rosane Fernandes Lira de Oliveira

Diagramação
Maria Fernanda de Novaes

Tratamento de Imagens e Ilustrações
Renan Alves

Produção Gráfica
Fabio Rapello

FICHA CATALOGRÁFICA

P922f

Pré-Vestibular Social. Física. volume 1 / Carlos Alberto Faria Leite, Eden Vieira Costa. Rio de Janeiro: Fundação Cecierj, 2021
186 p.; 21 x 28 cm.

ISBN: 978-85-458-0255-6

1. Física. 2. Cinemática. 3. Movimentos. 4. Vetoriais de Velocidades. I. Leite, Carlos Alberto

CDD: 530

Referências bibliográficas e catalogação na fonte de acordo com as normas da ABNT.
Texto revisado segundo o Novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa.

Física

sumário

Apresentação

Caros Alunos,

Este conjunto de textos foi elaborado de acordo com as necessidades e a lógica do projeto do Pré-Vestibular Cecierj. Os conteúdos foram desenvolvidos para embasar as aulas semanais, de modo a abranger todo o conteúdo programático dos vestibulares. É muito importante a participação efetiva de todos nas aulas presenciais e/ou videoaulas disponibilizadas semanalmente para todas as disciplinas. Será também disponibilizada, por meio eletrônicos, uma grande quantidade de material que ilustra e complementa os assuntos expostos nos livros. A leitura antecipada dos capítulos permitirá que você participe mais ativamente das aulas, potencialmente aumentando sua compreensão dos conteúdos.

Aproveite ao máximo o material disponível de maneira adequada e terá mais chances de alcançar seus objetivos.

Bons estudos!

Agradecimentos

Os autores agradecem ao Professor Marcos Ribeiro Nascimento pelo suporte na área computacional disponibilizando vídeos e textos com informações complementares, ilustrando os diversos assuntos abordados no livro texto.

Agradecemos também ao mediador do PVS Pedro Queiros Mansur por sua colaboração na edição do texto e pela elaboração de aulas em áudio com a resolução de exercícios que são disponibilizadas para nossos alunos.

Grandezas físicas

01

meta

Apresentar aos alunos os principais tipos de grandezas estudadas em Física, suas relações e o modo de operar com elas.

objetivos

Esperamos que, ao final desta unidade, você seja capaz de:

- distinguir grandezas escalares de grandezas vetoriais;
- efetuar operações simples com vetores;
- reconhecer as unidades mecânicas fundamentais do S.I.

Introdução

Nessa primeira unidade do livro 1 de Física, vamos apresentar o conceito de *vetor*, pois grande parte das grandezas estudadas em Física não ficam bem definidas se apresentamos apenas o seu valor numérico.

Por exemplo, quando dizemos que uma pessoa está com febre e sua temperatura é de 38,5 graus Celsius, esse valor numérico 38,5 (que chamaremos também de **módulo** da grandeza), seguido da sua unidade (graus Celsius), define perfeitamente a temperatura da pessoa. Mas, por outro lado, quando dizemos que um automóvel está na ponte Rio-Niterói, a uma velocidade de 80 *km/h*, não fica bem definida a velocidade do automóvel, pois ele pode estar indo do Rio de Janeiro para Niterói ou de Niterói para o Rio de Janeiro, o que é bem diferente!

módulo

Valor numérico de um vetor representante de uma grandeza Física. Quando esse vetor estiver representado por uma seta (um seguimento de reta orientado) seu módulo será representado pelo seu comprimento.

A velocidade é um bom exemplo de grandeza que, para ficar fisicamente bem definida, necessita mais do que apenas seu valor numérico seguido da unidade de medida. Precisamos da *direção*, no caso, dada pela pista da ponte, e do sentido: Rio-Niterói ou Niterói-Rio. Vamos, então, estudar o que é uma grandeza escalar e uma grandeza vetorial; e uma maneira bem bacana de representar os *vetores*.

Grandezas escalares

Imagine um automóvel que, viajando entre Nova Friburgo e Niterói, percorre os cerca de 130 quilômetros da estrada em duas horas. Quais grandezas físicas estão envolvidas no movimento que acabamos de descrever?

Em primeiro lugar, temos a distância percorrida, isto é, o comprimento da estrada. Temos, também, o tempo gasto no percurso e, finalmente, uma outra grandeza, que relaciona o caminho percorrido com o tempo gasto no percurso, indicando-nos a rapidez com que foi feita a viagem, à qual chamamos *velocidade*.

A velocidade é definida como a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto no percurso. Isto é:

$$velocidade = \frac{distância}{tempo}$$

No caso do nosso automóvel, a velocidade v será, então:

$$v = \frac{130}{2}\frac{quilômetros}{horas} = 65\ km/h$$

Dizemos que o *módulo* da velocidade do automóvel é de 65 km/h. Veja que o comprimento da estrada não depende do fato de o automóvel estar viajando de Friburgo para Niterói, ou de Niterói para Friburgo. Da mesma forma, o tempo passa do mesmo jeito, independentemente de para onde o móvel está se dirigindo. As grandezas *tempo* e *comprimento* são chamadas *grandezas escalares*.

// atenção

Grandezas escalares são as que ficam bem definidas apenas pelos seus valores numéricos, seguidos de suas respectivas unidades de medida.

Exemplos de grandezas escalares:

- tempo → a sessão de cinema durou 2 h;
- comprimento → a régua tem 30 cm;
- área → a sala de aula é de 48 m^2;
- volume → a capacidade do balde é de 6 l;
- massa → o caminhão pode transportar 3 t.

Sendo um dos propósitos da mecânica determinar *onde* o móvel estará após decorrido um certo tempo, torna-se muito importante saber o sentido em que o móvel está se deslocando. Além disso, o motorista pode, sem querer, entrar numa estrada errada, isto é, tomar uma outra direção e acabar não chegando nem em Friburgo, nem em Niterói. Para que o movimento fique bem definido, torna-se importante saber também a *direção* e o *sentido* da velocidade, além do seu valor numérico (seu módulo). Passaremos, então, a estudar as representações das grandezas vetoriais.

Grandezas vetoriais

As grandezas físicas que só ficam bem definidas se soubermos a sua *direção* e *sentido*, além do seu *módulo*, são descritas em linguagem matemática por um *vetor*.

Para nossos estudos, é conveniente representar um vetor por um segmento de reta (uma seta) orientado do seguinte modo:

Representando um vetor graficamente

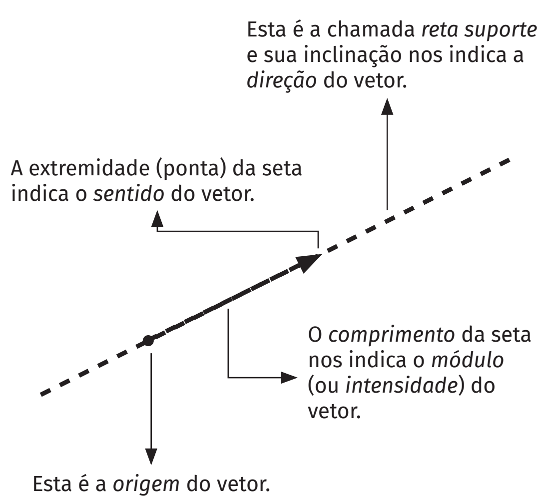


Figura 1.1: Representação gráfica de um vetor. A seta não é um vetor; é apenas uma representação gráfica que nos ajuda a visualizá-lo. Um vetor é um “objeto”, ou “ente” matemático, que tem *módulo*, *direção* e *sentido*.

Outras representações:

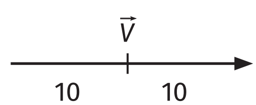
Podemos também representar um vetor utilizando uma letra, com uma pequena seta acima da mesma. Para representar o vetor "vê", escrevemos *V* com uma setinha superposta: $\vec{V}$

Ou então em negrito: ***V***.

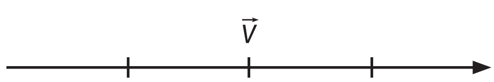
Para representar explicitamente o *módulo* de ***V*** escrevemos $|\vec{V}|$ isto é o vetor entre duas barras, ou simplesmente *V* (sem o negrito).

Vejamos graficamente:

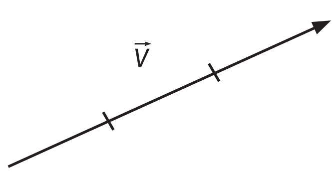
Consideremos um vetor com módulo 20 (unidades de medida)



Este terá módulo 40.



E este aqui, módulo 30.



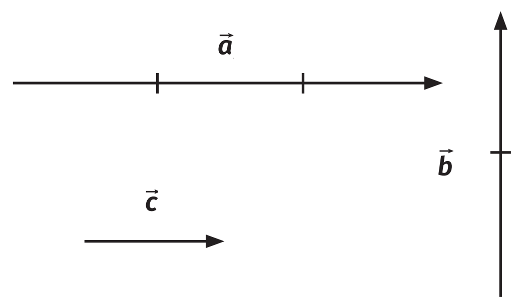
Repare que *o comprimento do vetor* representa o seu *módulo*.

Atividade

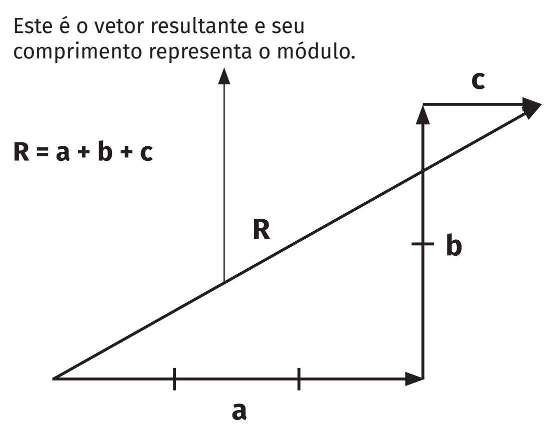
1. Dê mais alguns exemplos de grandezas *escalares* e grandezas *vetoriais*. Leve a lista para discussão em sala com os colegas, ou utilize seu celular ou computador para trocar ideias com eles. *(Anote as respostas em seu caderno)*

A adição de vetores: método gráfico

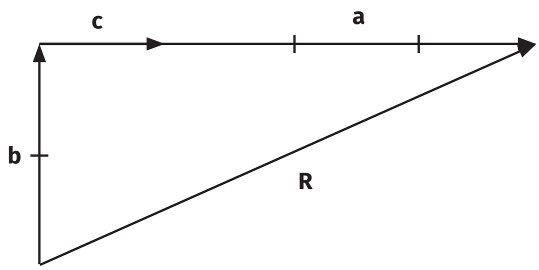
Consideremos $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ grandezas vetoriais quaisquer, de módulo 3, 2 e 1, respectivamente, representadas graficamente a seguir:



Para somar graficamente, escolhemos uma origem e colocamos os vetores um seguido do outro. A soma é obtida ligando-se a origem do primeiro à extremidade do último. Veja a seguir:



A ordem dos vetores não altera a sua soma (a soma vetorial é *comutativa*). Isto é, invertendo-se a órdem dos vetores o resultado da soma é o mesmo. Aqui, faremos **b + c + a**:



Note que o vetor resultante **R** é igual ao da figura anterior (isto é: tem mesmo módulo, direção e sentido).

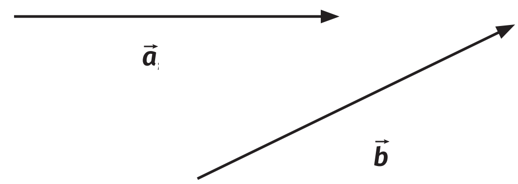
Atividade

2. Utilizando uma régua milimetrada, faça a soma dos mesmos vetores do exemplo anterior na ordem **c**; **b**; **a**; tomando o cuidado de preservar, respectivamente, os mesmos módulos (representados pelos comprimentos), as mesmas direções e os mesmos sentidos. Faça isso a partir da origem **O**, desenhada a seguir.

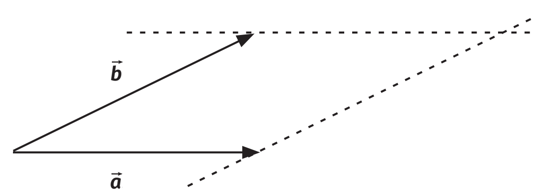
O.

O método do paralelogramo para a adição de vetores

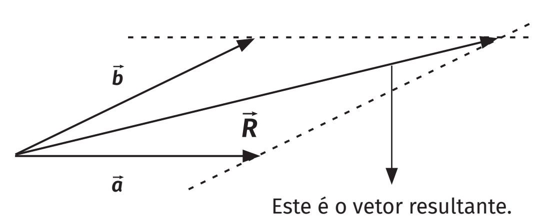
É comum termos que somar apenas dois vetores, sendo conveniente utilizar o método descrito abaixo. Consideremos dois vetores quaisquer, **a** e **b** representados por:



Para somá-los, colocamos os dois vetores com uma origem comum e traçamos retas auxiliares, paralelas a cada um dos vetores, passando pela extremidade um do outro, respectivamente. Veja:



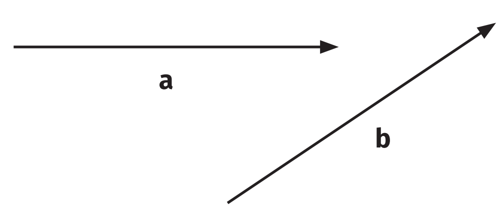
O vetor resultante é obtido ligando-se a origem comum à interseção das retas auxiliares que formam o paralelogramo.



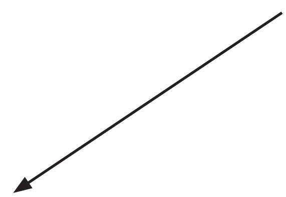
A subtração de vetores

Para subtrairmos um vetor de outro, podemos proceder como na soma, pondo um vetor seguido do outro, mas invertendo-se o sentido do vetor a subtrair. Isto é: para efetuarmos **a – b**, faremos **a + (– b)**, que é a mesma coisa.

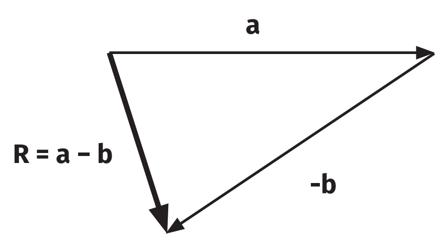
Temos aqui a representação dos vetores **a** e **b**:



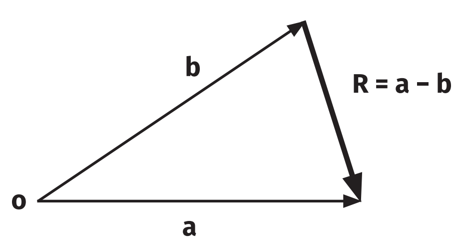
Este é o vetor (**– b**):



Assim, teremos:



Um outro modo de se fazer a subtração graficamente consiste em colocar os dois vetores com uma origem comum (que aqui chamaremos de **o**). Para efetuarmos a diferença **a – b**, ligamos a extremidade do segundo vetor (**b**) à extremidade do primeiro. Para os mesmos vetores do exemplo anterior, teremos:



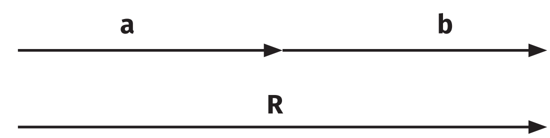
Obtendo o mesmo resultado do caso anterior.

Casos especiais

Podemos determinar, facilmente, o módulo do vetor resultante em três casos particulares: quando os vetores têm a mesma direção e sentido; quando têm mesma direção e sentidos opostos; e quando são perpendiculares. Vejamos a soma dos vetores **a** e **b**, em cada caso.

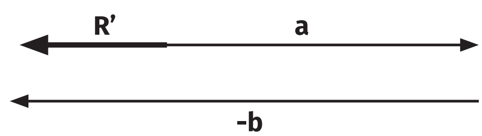
1º caso: **a** e **b** têm o mesmo sentido.

Em módulo, temos o vetor resultante **R = a + b**, como na soma algébrica comum.



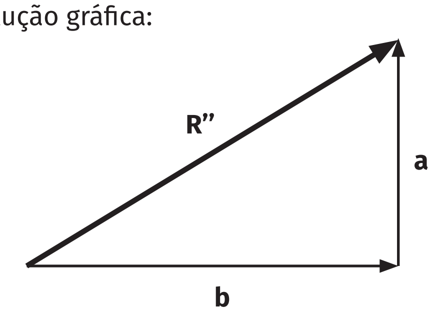
2º caso: **a** e **b** têm sentidos opostos.

Neste caso, temos o vetor resultante **R' = a – b** também como na soma (ou subtração) algébrica comum.



3º caso: **a** e **b** são perpendiculares.

Solução gráfica:



Neste caso, podemos encontrar o módulo do vetor resultante (que chamamos de **R''**) aplicando o famoso *teorema de Pitágoras*, que nos diz:

// atenção

"Num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos"

Aplicando o teorema, teremos:

$$(R'')^2 = a^2 + b^2.$$

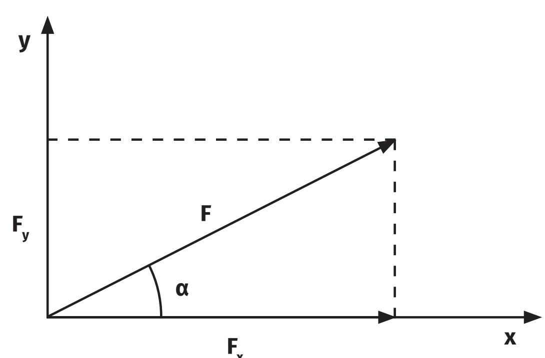
Assim, o módulo do vetor resultante será:

$$R'' = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Decomposição de um vetor em componentes perpendiculares

Já vimos como podemos encontrar a resultante de dois vetores perpendiculares utilizando o teorema de Pitágoras. Em nosso estudo, como veremos mais adiante, na decomposição dos movimentos ou das forças que atuam sobre um corpo, é conveniente que façamos o inverso; isto é, que uma vez conhecendo um vetor, encontremos as suas componentes perpendiculares.

Consideremos um vetor **F** que faz um ângulo **α** com o eixo horizontal (eixo **x**). As suas componentes horizontal, $\mathbf{F_x}$ e vertical $\mathbf{F_y}$, são as projeções de **F** sobre os eixos **x** e **y**, conforme ilustrado na figura a seguir,



$\mathbf{F_x}$ e $\mathbf{F_y}$ são as componentes vertical (**x**) e horizontal (**y**) de **F**.

Agora vamos olhar com mais detalhes o triângulo retângulo da figura anterior, redesenhado a seguir, onde F_x é o módulo de $\mathbf{F_x}$, F_y é o módulo de $\mathbf{F_y}$ e F é o módulo do vetor **F** e **α** é o ângulo entre **F** e o eixo *x*.

Os elementos do triângulo retângulo formado são:

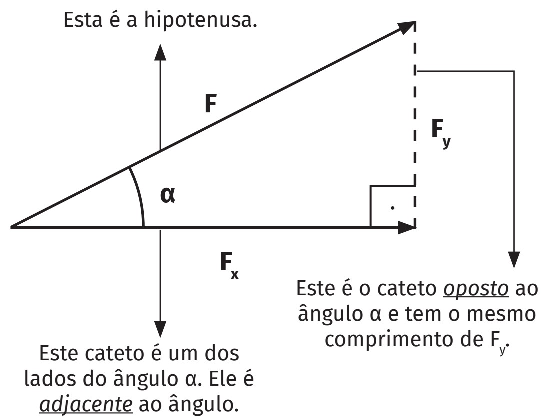


Figura 1.2: Elementos de um triângulo retângulo.

Relembrando as relações trigonométricas em um triângulo retângulo

Para fazermos a decomposição de um vetor em suas componentes, sobre os eixos *x* e *y* de um sistema de coordenadas Cartesiano, precisamos recordar as definições de seno e cosseno de um ângulo agudo *para um triângulo retângulo*, (ângulos agudos são aqueles menores que o ângulo reto, isto é: menor que 90°). Temos então, por definição:

$$\text{Seno (de um ângulo)} = \frac{\text{cateto oposto (ao ângulo)}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{Cosseno (de um ângulo)} = \frac{\text{cateto adjacente (ao ângulo)}}{\text{hipotenusa}}$$

Aplicando as definições para o triângulo retângulo anterior e escrevendo seno e cosseno abreviadamente, como na linguagem matemática, teremos:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{F_y}{F} \Rightarrow \text{assim podemos encontrar a componente y de } \mathbf{F} \Rightarrow F_y = F.\text{sen}(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{F_x}{F} \Rightarrow \text{assim podemos encontrar a componente x de } \mathbf{F} \Rightarrow F_x = F.\cos(\alpha)$$

Vamos lembrar também que a tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo é dada por:

$$\begin{array}{c}\text{Tangente}\\ \text{(de um ângulo)}\end{array} = \frac{\text{cateto oposto (ao ângulo)}}{\text{cateto adjacente (ao ângulo)}}$$

No caso das forças representadas no triângulo anterior, temos $\tan\alpha = \frac{F_y}{F_x}$; onde α é o ângulo entre a força **F** e o eixo dos x. Este ângulo nos indica a *direção* do vetor **F**.

Para fins práticos, se indicamos a tangente do ângulo entre o vetor e o eixo x, fica definida a *direção* do vetor.

Atividades

3. Utilizando as relações trigonométricas no triângulo retângulo definidas anteriormente, mostre que a tangente de um ângulo pode também ser dada pela razão entre o seno e o cosseno do ângulo. Isto é, mostre que:

$$\tan\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

Sugestão: releia atentamente as definições dadas acima.

Discuta sua solução com os colegas e com o professor, em aula presencial, ou por meio de mensagem para seus colegas e amigos também estudantes.

4. É de grande utilidade conhecermos os valores do seno, do cosseno e da tangente dos ângulos de 30°, 45°, 60° e 90°, muito comuns nos problemas de física. A seguir, com base nessas definições, dadas anteriormente, complete os valores que faltam na tabela.

Após completar a tabela, discuta sua solução com os colegas e com o professor, ou consulte uma tabela já pronta, para ver se você acertou. *(Anote as respostas em seu caderno)*

Tabela 1.1: Principais ângulos utilizados no estudo de Física

Ângulo (em graus)	Seno	cosseno	tangente
0	0	1	0
30	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
45	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
60	$\frac{\sqrt{3}}{2}$		
90	1		∞

Levando em conta que a força é uma grandeza vetorial, vamos supor que uma pessoa está puxando uma caixa sobre um piso bem liso, fazendo uma força constante de 10 *N* (newtons), segundo um ângulo de 45° com a horizontal; de modo que a caixa é arrastada para a direita sem se levantar do piso, conforme ilustra a figura a seguir:

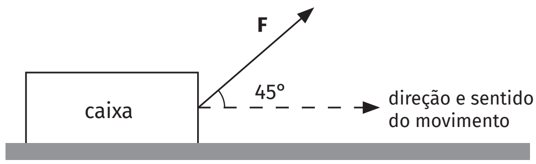


Figura 1.3: Caixa sobre um piso liso, sendo puxada para a direita por uma força que faz 45° com a horizontal.

Neste caso, a força que realmente faz a caixa se mover é apenas a componente da força **F** na direção do movimento sua componente F_x. Vejamos como calcular o seu *módulo*:

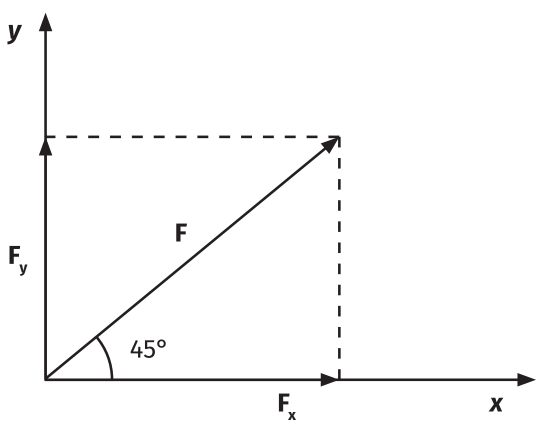


Figura 1.4: Decomposição de uma força em suas componentes horizontal F_X e vertical, F_Y, graficamente.

Calculando o módulo das componentes:

É dado do exemplo que a Força F tem módulo F = 10 *N* e o ângulo que faz com o eixo x é de 45°. Na **Tabela 1.1**, você pode consultar os valores do seno, do cosseno e da tangente desse ângulo, se necessário.

Assim, aplicando a definição do cosseno, a força na direção do movimento (direção x) será:

$$F_x = F\cos 45^\circ = 10.\frac{\sqrt{2}}{2} = 5.\sqrt{2}$$

$\cong 5 \times 1{,}41 \cong$ **7 Newtons**

Atividade

5. Aqui, cabe perguntar: e a componente y da força **F**, o que faz? Pense a respeito, olhe novamente para a figura da caixa sendo puxada, desenhe a componente vertical de **F**. Discuta com o professor e seus colegas.

// atenção

Quando que você for resolver uma atividade, um desafio ou um exercício, tente sempre chegar a uma conclusão por si mesmo. Pense, releia o texto a respeito do assunto, discuta com os colegas, e, somente depois disso, você deverá ver a resposta ou a solução. É apenas pensando, tentando resolver, que se aprende. Visualizar a solução antes disso é prejudicial para o seu aprendizado: não é possível decorar soluções de problemas; é preciso aprender a resolver os problemas!

O sistema internacional de unidades

As grandezas físicas podem ser medidas em muitas unidades diferentes. O comprimento, por exemplo, pode ser medido em centímetros, metros ou quilômetros. Já nos países de língua inglesa, é comum o uso da polegada como unidade de comprimento. Para que fossem uniformizadas as diversas unidades de medidas utilizadas no mundo, a maioria dos países resolveu adotar as unidades do Sistema Internacional de Unidades (que chamaremos de S. I.). O sistema atual foi proposto na 11ª Conferência Geral de Pesos e Medidas, no ano de 1960, sendo o Brasil um de seus signatários. No mesmo ano da conferência, o Brasil adotou o sistema por meio de uma lei, sancionada pelo então presidente da república, João Goulart.

Em 1971, uma nova grandeza mecânica, o *mol*, foi acrescentada ao S. I., para a quantidade de matéria.

Existe também uma unidade de tempo que é baseada numa determinada transição atômica em um isótopo do átomo de Césio, que é utilizada para calibrar relógios atômicos de altíssima precisão.

À proporção que continuarmos nosso curso de Física, definiremos as grandezas do S. I. que são estudadas em eletricidade, óptica, calorimetria e assim por diante.

As grandezas fundamentais da mecânica

As grandezas fundamentais da mecânica são o *comprimento*, a *massa* e o *tempo*.

Suas unidades, no S. I., são dadas como no quadro a seguir:

Tabela 1.2: Grandezas fundamentais da mecânica, suas respectivas unidades de medidas e abreviatura

Grandeza	Unidade de medida	Abreviatura
Comprimento	Metro	*m*
Massa	Quilograma	*kg*
Tempo	Segundo	*s*

// atenção

Não existe plural com abreviaturas. Por exemplo: 3 metros é abreviado como 3 m e não 3 ms, ou, muito menos, 3 mts.

Todas as outras grandezas mecânicas são derivadas dessas três fundamentais. Por exemplo, a velocidade, como vimos, é a razão entre o comprimento (distância) e o tempo; por isso sua unidade S. I. é o m/s. Mais adiante, à medida que formos estudando as outras grandezas, veremos quais são suas unidades no S. I.

Existem outras unidades que, por terem um uso muito comum, serão também estudadas, como, por exemplo, o minuto (min) e a hora (h), para o tempo; ou o quilômetro por hora (km/h), para a velocidade. Essas são chamadas *unidades práticas*.

Transformação de unidades

Para passarmos da unidade prática, *km/h* (quilômetros por hora), para a unidade S. I. de velocidade, o *m/s* (metros por segundo), fazemos:

$$1\frac{km}{h} = \frac{1000\,m}{3600\,s} = \frac{1}{3{,}6}\ m/s$$

Assim, em resumo, temos:

$$\boxed{m/s} \underset{\text{Dividir por 3,6}}{\overset{\text{Multiplicar por 3,6}}{\rightleftarrows}} \boxed{km/h}$$

Resumo

Nesta unidade, apresentamos o conceito matemático de vetores e alguns tipos de operação com os mesmos. Basicamente, estudamos a sua adição e subtração.

Esse estudo é importante porque a maior parte das grandezas que estudaremos no nosso curso de Física são grandezas vetoriais e, portanto, só ficam bem definidas quando conhecemos seu módulo, sua direção e seu sentido. Nas unidades seguintes, daremos continuidade ao estudo da mecânica.

lá na plataforma

Na Unidade 1 de nosso ambiente virtual, no tema Grandezas Físicas: vetores - o sistema internacional de unidades, *siga as orientações de desenvolvimento da atividade proposta. Acesse* objetos de aprendizagem de simulação computacional, *da Universidade de Boulder, Colorado [https://phet.colorado.edu/pt_BR/].*

Perceba como a atividade/recurso dialoga diretamente com o tema de nossa aula.

Exercícios

lá na plataforma

Informação complementar: na Unidade 2 de nosso ambiente virtual, no tema Grandezas Físicas: vetores - o sistema internacional de unidades, *siga as orientações pedagógicas de suporte para a resolução dos exercícios propostos a seguir, que foram pré-gravadas em áudio no formato [mp4].*

1. Responda: como podemos distinguir entre uma grandeza escalar e uma grandeza vetorial?

2. Identifique cada uma das grandezas a seguir, escrevendo V ou E, entre os parênteses, conforme a grandeza seja vetorial ou escalar, respectivamente.

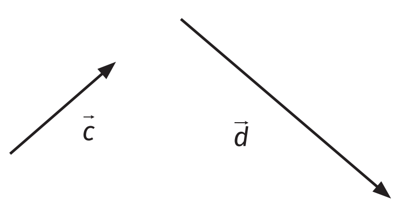
   a) Temperatura ( )

   b) Volume ( )

c) Peso ( )
d) Massa ( )
e) Força ( )
f) Pressão ( )
g) Comprimento ( )
h) Voltagem ( )
i) Tempo ( )
j) Velocidade ( )
k) Aceleração ( )
l) Campo elétrico ( )
m) Corrente elétrica ( )

3. Cite algumas unidades práticas (usuais) que não se encontram no S. I., para o comprimento e a velocidade.

4. Dados os vetores **c** e **d**, representados a seguir, encontre graficamente os vetores resultantes das operações que se pede.



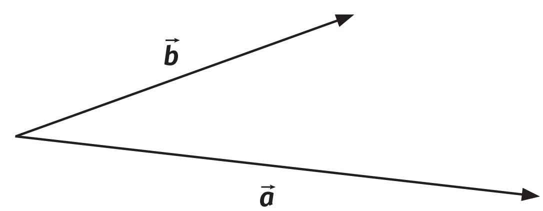
a) $\vec{c}+\vec{d}$
b) $\vec{c}-\vec{d}$
c) $\vec{d}-\vec{c}$

5. Uma força de 100 newtons faz um ângulo de 30° com o eixo horizontal. Calcule os módulos das componentes horizontal e vertical dessa força (consulte a tabela das funções trigonométricas, dada anteriormente). Sugestão: reveja o item *Grandezas vetoriais*, logo no início da Unidade 1.

6. Analise as afirmativas abaixo e assinale se verdadeira (V) ou falsa (F).

a) ( ) Dois vetores de mesma direção têm sempre o mesmo suporte;
b) ( ) Dois vetores de mesma direção têm sempre o mesmo sentido;
c) ( ) Dois vetores de mesmo suporte têm sempre a mesma direção;
d) ( ) Dois vetores de mesmo suporte têm sempre o mesmo sentido.

7. Determine graficamente o vetor soma (**a + b**) e o vetor subtração (**a – b**) dos vetores dados a seguir.



8. Um ônibus viaja a 108 km/h. Expresse sua velocidade em unidades do S. I.

9. Aqui um vai um desafio: a grandeza *trabalho* (**T**) pode ser definida como o produto da *força* (**F**) pelo *deslocamento* (**d**), sendo sua unidade S. I. (sistema internacional de unidades) chamada de *joule* (***J***). A grandeza *força* é definida como o produto da *massa* (**m**) pela *aceleração* (**a**). Escreva a unidade de medida "*joule*" em termos das unidades fundamentais do S. I.

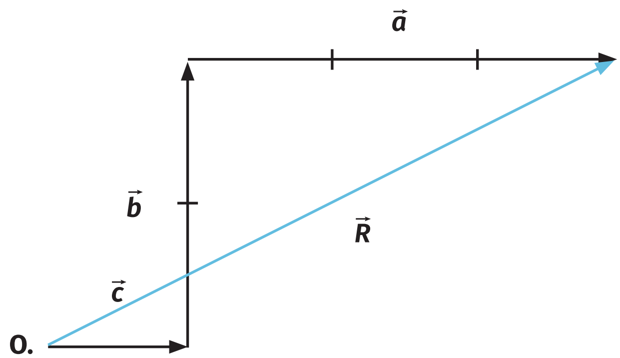
Respostas da unidade

Atividades

1. Exemplos de grandezas escalares: Tempo; massa; volume; comprimento; energia; trabalho; potência; rendimento; constante elástica; resistência elétrica; temperatura; frequência; amplitude de onda; índice de refração; voltagem; carga elétrica.

Exemplos de grandezas vetoriais: Velocidade; deslocamento; aceleração; força; quantidade de movimento (momento linear); impulso; campo elétrico.

2.



3. Temos as definições de seno e cosseno de um ângulo agudo de um triangulo retângulo quaisquer:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$
$$\cos(\alpha) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

Vamos dividir as equações membro a membro, para tal vamos lembrar que para dividirmos duas frações (os segundos membros de ambas as equações são frações) o procedimento é de multiplicarmos a primeira fração pelo inverso da segunda. Assim temos:

$$\frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \times \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}}$$

Logo, simplificando a hipotenusa.

$$\frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Que é a definição de tangente: $\text{Tangente}(\text{de um ângulo}) = \dfrac{\text{cateto oposto (ao ângulo)}}{\text{cateto adjacente (ao ângulo)}}$

Logo

$$\tan\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

4. Utilizando a solução da atividade anterior onde vimos que $\tan\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$.

Para os ângulos pedidos teremos:

$$\tan 30 = \frac{\text{sen}30}{\cos 30} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\approx \mathbf{0,577})$$

$$\tan 45 = \frac{\text{sen}45}{\cos 45} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = \mathbf{1}$$

O cosseno de 60°

$$\tan 60 = \frac{\text{sen}60}{\cos 60} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos 60} \quad \text{(eq. 1)}$$

Veja que não temos na nossa tabela o cosseno de 60° mas temos a sua tangente (tan60 = √3) Assim, teremos

$$\sqrt{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos 60} \text{ onde}$$

$$\cos 60 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \text{ (eq. 2)}$$

Assim, voltando ao valor da tangente (em 1)

O cosseno de 90°

Sabemos que

$$\tan 90 = \frac{\text{sen}90}{\cos 90} = \frac{1}{\cos 90}$$

Como foi dado o valor da tangente de 90° (∞ = um valor extremamente grande!) vejamos o que é possível fazer. Temos:

$$\infty = \frac{1}{\cos 90}$$

Para que a fração $\dfrac{1}{\cos 90}$ resulte em um número extremamente grande ("tenda" ao infinito) é necessário que o denominador, o cos90°, seja extremamente pequeno, muito próximo de zero.

A divisão por zero não é definida em matemática, mas nos estudos de limites, que é abordado no nível superior, vemos que "no limite", quando um número diferente de zero é dividido por um número muitíssimo próximo de zero o resultado é um número extremamente grande, como o valor da tan90° (que "tende" ao infinito). Sendo assim podemos completar a tabela com o cosseno de 90°.

cos90 = **0**

Exercícios

1. Grandezas escalares são aquelas que ficam bem definidas apenas pelos seus valores numéricos, seguidos das respectivas unidades de medida, já as grandezas vetoriais necessitam também da direção e do sentido.

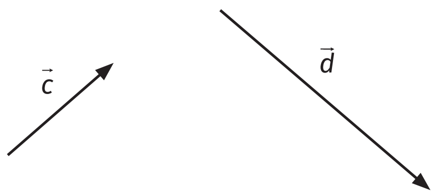
2. Temos (E → escalar e V → vetorial):
   - e) Temperatura (E)
   - f) Volume (E)
   - g) Peso (V)
   - h) Massa (E)
   - i) Força (V)
   - j) Pressão (E)
   - k) Comprimento (E)
   - l) Voltagem (E)
   - m) Tempo (E)
   - n) Velocidade (V)
   - o) Aceleração (V)
   - p) Campo elétrico (V)
   - q) Corrente elétrica (E)

3. Exemplos:

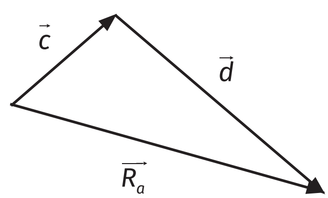
Para o comprimento: polegada (nos países de língua inglesa), palmo, quilômetro, centímetro, ano-luz (para distâncias astronômicas) etc...

Para a velocidade: *cm/s*, *km/s*, *km/h*, milhas/hora (nos países de língua inglesa), etc.

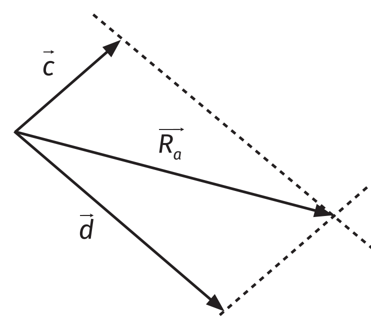
4. Os vetores **c** e **d**



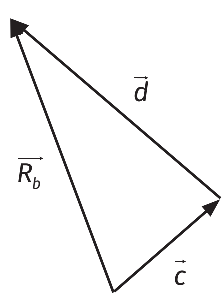
a) $\vec{c}+\vec{d}$



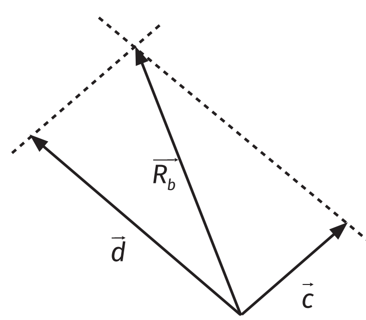
ou



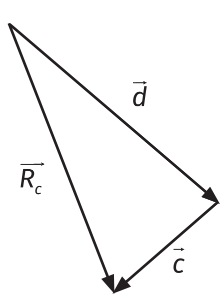
b) $\vec{c}-\vec{d}$



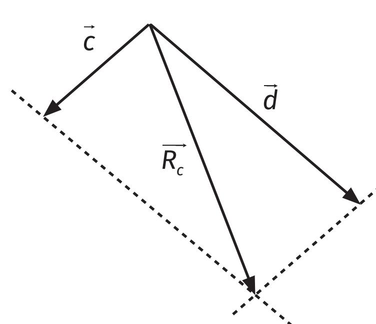
ou



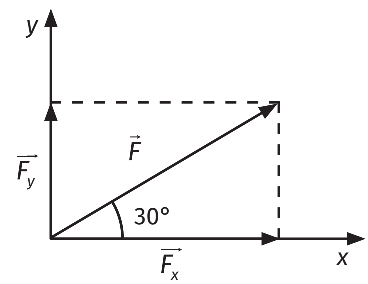
c) $\vec{d}-\vec{c}$ (Veja que $\vec{d}-\vec{c} = -(\vec{c}-\vec{d})$)



ou



5. Temos:



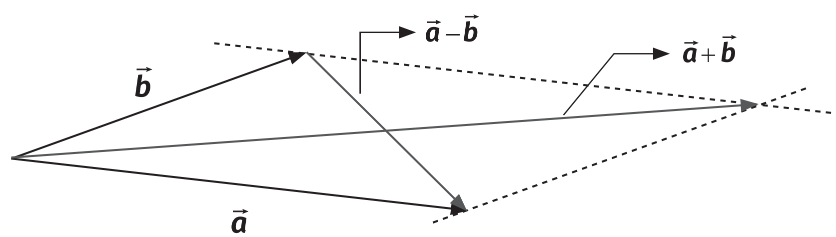
As componentes são, em módulo:

$$F_x = F.\cos 30 = 100.\frac{\sqrt{3}}{2} = 100.\frac{1{,}73}{2} = 86{,}5$$

$$F_y = F.\text{sen}30 = 100.\frac{1}{2} = 50\ N$$

6. a) F; b) F; c) V; d) F.

7.



8. $108\frac{km}{h} = \frac{108000m}{3600s} = \frac{1080}{36} = 30\ m/s$

9. τ = F.d = m.a.d

Logo, em termos das unidades S.I.:

$$[\tau] = \left[1kg.1\frac{m}{s^2}.1m\right] = 1\,kg.\frac{m^2}{s^2} = (Joule)$$

Introdução ao estudo da cinemática: o movimento retilíneo uniforme (MRU)

02

meta

Definir os principais conceitos físicos necessários para o estudo dos movimentos dos corpos.

objetivos

Esperamos que, ao final desta unidade, você seja capaz de:

- conhecer os conceitos de movimento, repouso, deslocamento, posição, trajetória e referencial;
- caracterizar a velocidade de um móvel;
- resolver problemas e analisar gráficos do movimento uniforme.

Introdução

A *Mecânica* é a parte da Física que estuda o movimento dos corpos, abrangendo, por exemplo, desde o movimento de um carrinho de brinquedo descendo uma rampa, uma pedra lançada para o alto, um caixote puxado por meio de uma corda, ou mesmo o movimento dos planetas e das estrelas distantes. Para nos referirmos a qualquer objeto que está em movimento, usaremos o termo *móvel*.

Por meio das leis, definições e equações que regem os movimentos, podemos prever *onde* e *quando* um móvel chegará em um outro lugar do espaço; desde que conheçamos sua posição e sua velocidade em um determinado instante inicial. Estudaremos em primeiro lugar, nas unidades de número 2 a 8, apenas os principais tipos de movimentos, sem nos preocupar com suas causas. A essa parte da mecânica, chamamos de *cinemática*. Nos capítulos seguintes, estudaremos as leis que regem os movimentos dos corpos, assim como as causas e efeitos desses movimentos. A essa parte do estudo, chamamos de *dinâmica* (ou *mecânica propriamente dita*). Estudaremos também um caso particular do movimento, que é a situação (ou *estado*) de repouso, e suas condições. A essa parte da mecânica, chamamos de *estática*.

Para iniciar os nossos estudos de cinemática, é necessário conhecer alguns conceitos gerais e importantes relativos aos movimentos, definidos a seguir.

Referencial e trajetória

Imagine que você está viajando em um ônibus. Se olhar pela janela, verá as casas, os postes de luz, as pessoas, lá fora, movendo-se para trás, em relação a você. Caso olhe o passageiro sentado no banco a seu lado, dirá que ele está em repouso (parado). Assim, para caracterizarmos um movimento, é necessário especificar em relação a que, ou a quem o móvel está se movendo (ou se está em repouso).

Figura 2.1

// atenção

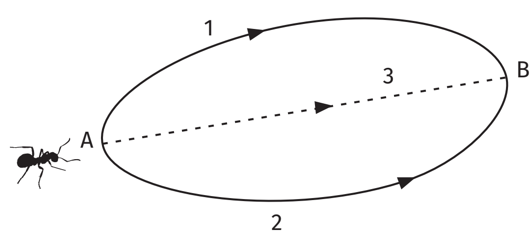
Chamamos de referencial *a qualquer corpo, objeto, ou conjunto de objetos, em relação aos quais verificamos se o corpo está em movimento ou em repouso.*

Um móvel pode, em princípio, fazer qualquer caminho para ir de um ponto a outro do espaço.

// atenção

Chamamos de trajetória *aos sucessivos pontos do espaço que o corpo ocupa, durante o seu movimento.*

Situação 1: consideremos o movimento de uma formiguinha que caminha do ponto A ao ponto B. Ela pode fazer o percurso por inúmeras trajetórias, como, por exemplo, as trajetórias 1, 2 ou 3.



Um sistema de referência: os eixos cartesianos

É importante que saibamos localizar o móvel na trajetória. Para isto, vamos utilizar um sistema de referência chamado de eixos cartesianos, idealizado por René Descartes.

Figura 2.2: Descartes e seu plano cartesiano. Fonte: https://www.atividadesmatematica.com/2019/12/aula-plano-cartesiano.html

Podemos representar as coordenadas da posição, por exemplo, em um sistema de dois eixos perpendiculares, *x* e *y*, onde cada par ordenado (*x*, *y*) indica uma posição. Veja a figura a seguir:

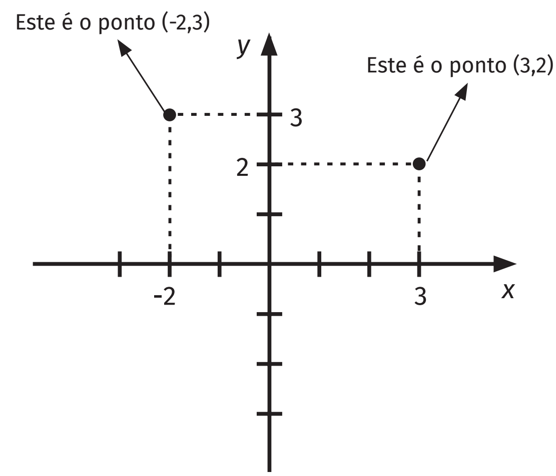


Figura 2.3: Exemplo de sistema de eixos coordenados cartesianos.

Com esse sistema de eixos, podemos representar muitos tipos de movimentos por meio de gráficos. Por exemplo, o gráfico da posição S em função do tempo *t*. Em vez de o par de números puros *x* e *y* (o par (*x*, *y*), como é estudado na disciplina de Matemática, no estudo dos movimentos), utilizamos o par ordenado (*S*, *t*), isto é: a *posição S*, onde o móvel se encontra, e o *instante de tempo*, *t*, correspondente àquela posição.

No caso do movimento retilíneo uniforme, precisamos de apenas um eixo; isto é, podemos trabalhar em apenas uma dimensão.

Tomamos uma reta orientada, onde estabelecemos uma origem (a posição zero) e a dividimos em distâncias igualmente espaçadas, por exemplo, em metros; em seguida, orientamos a reta, por exemplo, para a direita, indicando seu sentido positivo por meio de uma seta.

Figura 2.4: Eixo coordenado, em apenas uma dimensão, que utilizamos no estudo dos movimentos retilíneos.

Desse modo, se dizemos que um móvel se encontra na posição 8, significa que ele está 8 *m* à direita da origem (0). Se dissermos que está na posição −2, significa que o móvel está 2 *m* à esquerda da origem. Não é comum, mas perfeitamente possível, orientarmos a reta para a esquerda; isto é, definirmos o sentido esquerdo como positivo, se isso puder facilitar de alguma forma os cálculos que fazemos, em Física.

O deslocamento ΔS e o intervalo de tempo Δt

Normalmente usamos a letra grega Δ (delta maiúsculo) para indicar um intervalo de uma grandeza qualquer. Vamos chamar as posições sobre a trajetória, genericamente, de S. Chamaremos a posição inicial S_i e a posição final S_f. Analogamente, para o tempo, chamaremos t_i para o instante inicial e t_f o instante final. ΔS representará o intervalo entre duas posições e Δt entre dois instantes de tempo.

Consideremos um móvel que se encontra na posição $S_i = 20\ m$, no instante $t_i = 0\ s$ e que no instante $t_f = 20\ s$ passa pela posição $S_f = 100\ m$, conforme ilustrado no sistema de referência dado a seguir:

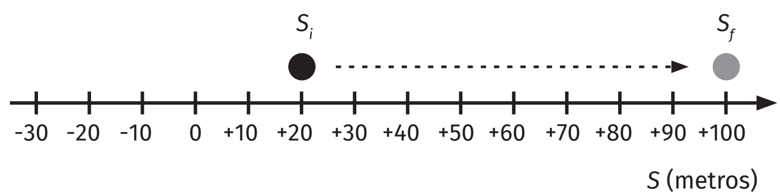


Figura 2.5: Representação gráfica do movimento de um móvel sobre um eixo orientado, à medida que o tempo passa.

O *deslocamento* ΔS do móvel é calculado do seguinte modo:

// atenção

$\Delta S = S_{final} - S_{inicial}$

Assim, temos: $\Delta S = S_f - S_i = 100 - 20 = 80\ m$

Do mesmo modo, o intervalo de tempo é calculado como: $\Delta t = t_{final} - t_{inicial}$

E teremos: $\Delta t = t_f - t_i = 20 - 0 = 20\ s$

A velocidade média (*Vm*)

Como vimos na Unidade 01, a velocidade é a grandeza que relaciona o caminho percorrido com o tempo gasto no percurso. Com respeito ao móvel que estamos considerando, sabemos que ele caminhou da posição 20 m até a posição 100 m e que gastou 20 segundos, mas não sabemos o que ocorreu entre essas duas posições. Ele pode ter corrido muito, pode ter freado, pode até ter dado uma parada, de modo que sua velocidade pode ter variado bastante durante o percurso.

Quando calculamos a razão entre o deslocamento total ΔS e o intervalo de tempo Δt, gasto no percurso, estamos calculando apenas a *velocidade média* do móvel. No nosso exemplo, citado no item anterior (*o deslocamento ΔS e o intervalo de tempo Δt*), temos para a velocidade média:

$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_f - S_i}{t_f - t_f} = \frac{100-20}{20-0} = \frac{80}{20} = 4{,}0\ m/s$$

Obs.: à velocidade real que o móvel possui em cada instante de tempo e em cada ponto da trajetória, chamamos de *velocidade instantânea*. Estudaremos esse conceito mais adiante.

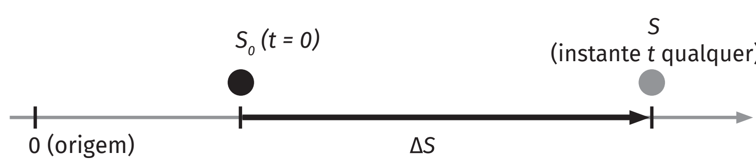
Veja que $V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$ é apenas uma *velocidade média*; não é necessariamente a velocidade do móvel em determinado instante. Esta definição de velocidade média vale para qualquer tipo de movimento.

O movimento retilíneo uniforme (MRU)

O *movimento uniforme* se caracteriza pela *velocidade uniforme*, isto é, a *velocidade é constante durante todo o trajeto*. Neste caso, a velocidade média é a própria velocidade do móvel em qualquer instante!

A equação do movimento

Consideremos um móvel que está numa posição qualquer S_0 da trajetória, no instante em que começamos a contar o tempo, isto é, em $t_{inicial} = 0$; e que, num instante posterior, t, chega à posição S, conforme representado no referencial a seguir.



// atenção

Durante todo o movimento temos a mesma velocidade V (pois o movimento é uniforme*)*

Assim: $\frac{\Delta S}{\Delta t} = V$ ou $\frac{S - S_o}{t - 0} = V$

Onde $S = S_0 + V_t$ *em que passamos primeiro o t, e depois o* S_0 *para o segundo membro da equação.*

Esta é a equação horária do MRU, na qual tanto V, como S_0*, são constantes.*

Situação 2: consideremos um móvel que caminha em linha reta, com velocidade constante de 10 *km*/*h*, a partir do quilômetro 30 de uma estrada. Escreva a função horária do movimento e calcule a posição do móvel no instante $t = 2{,}5\ h$.

Neste caso, temos $S_0 = 30\ km$ e $V = 10\ km/h$. Como V é constante, temos um movimento uniforme (MU) e a equação é do tipo $S = S_0 + Vt$. Assim, substituindo os valores de S_0 e de V, dados no enunciado, temos a equação horária do móvel:

$S = 30 + 10t$, onde t está em horas, e S, em quilômetros.

Cálculo da posição do móvel no instante $t = 2{,}5\ h$.

Substituindo $t = 2{,}5\ h$ na equação horária, a posição do móvel neste instante será:

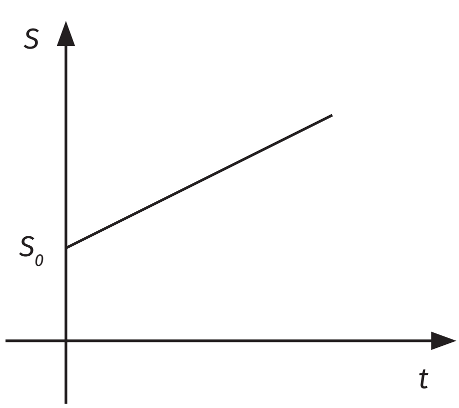
$S = 30 + 10 \times 2{,}5 = 30 + 25 = 55\ km$

Gráficos do MRU

Gráfico da posição em função do tempo ($S \times t$)

De um modo geral:

Se a velocidade (V) do móvel é positiva, então sua posição (S) aumenta linearmente o tempo, e o gráfico $S \times t$ será do tipo:



Se a velocidade for negativa, a posição S diminui com o tempo, e teremos o gráfico:

$S = S_0 - Vt$

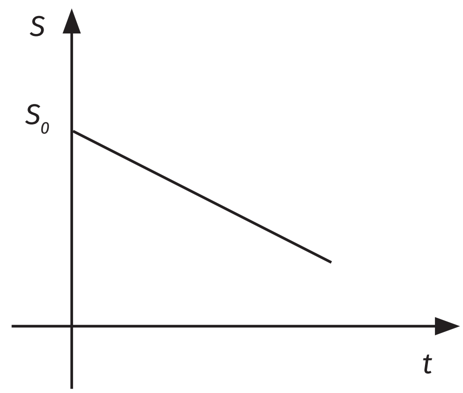
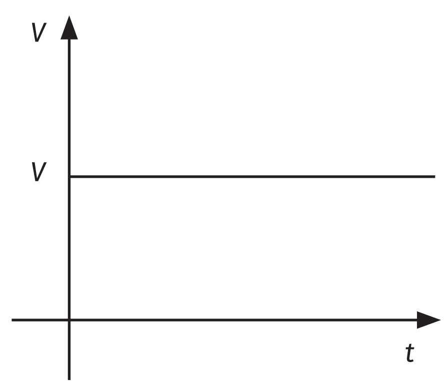


Gráfico de $V \times t$ para o MRU.

Uma vez que, no movimento retilíneo uniforme, a velocidade é constante, teremos um gráfico do tipo:



Situação 3: Vamos rever o exemplo anterior, onde o móvel tem equação horária $S = 30 + 10t$ no S.I (as unidades de medida estão no Sistema Internacional) e construir os gráficos da posição e da velocidade, em função do tempo.

Vamos utilizar a equação dada e calcular os valores das posições S para cada valor de t, nos instantes $t = 0$; $t = 1$; $t = 2$; $t = 3$; $t = 4$ e $t = 5$ segundos; e preencher uma tabela com esses valores:

Como no caso $S = 30 + 10t$

Para $t = 0$, temos: $S = 30 + 10 \times 0 = 30 + 0 = 30\ m$ (onde substituímos t por 0)

Para $t = 1\ s$, temos: $S = 30 + 10 \times 1 = 30 + 10 = 40\ m$ (onde substituímos t por 1)

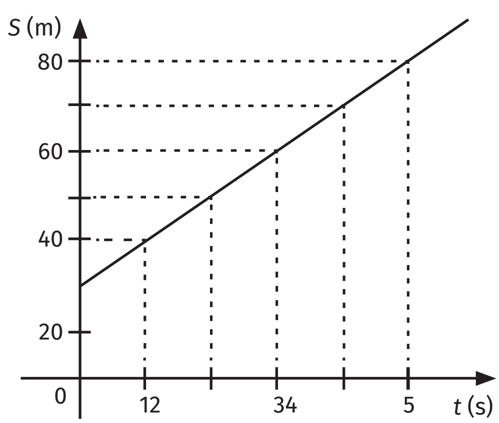
Para $t = 2\ s$, temos: $S = 30 + 10 \times 2 = 30 + 20 = 60\ m$ (onde substituímos t por 2)

Fazendo o mesmo para $t = 3\ s$; $t = 4\ s$; e $t = 5\ s$, completamos a tabela:

Tabela 2.1: Valores das posições S para cada valor de t

tempo(*s*)	0	1	2	3	4	5
posição (*m*)	30	40	50	60	70	80

Para fazer o gráfico de $S = 30 + 10t$, construímos um par de eixos cartesianos adequado para os valores de t e de S que temos. Em seguida, marcamos as posições dos pontos para cada par ordenado (t, S) ou seja, os pontos (0, 30); (1, 40); (2, 50) etc. Depois ligamos os pontos. Vejamos:



Calculando a velocidade através do gráfico.

Dado o gráfico da posição em função do tempo, podemos calcular a velocidade do móvel. Vejamos.

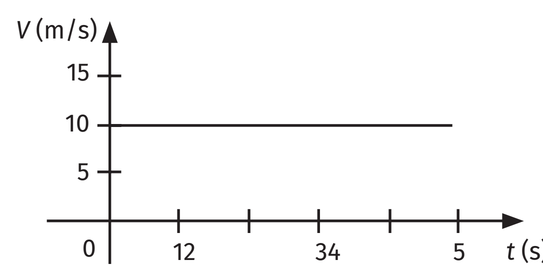
Como nesse caso a velocidade é constante, podemos escolher qualquer intervalo de tempo para o cálculo; por exemplo, entre $t = 1\ s$ e $t = 5\ s$, olhando para o gráfico, observamos que o móvel passa pelas posições $40\ m$ e $80\ m$, respectivamente. Assim, temos:

$$V = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{80 - 40}{5 - 1} = \frac{40}{4} = 10\ \mathrm{m/s}$$

como já sabíamos, pois, a equação do movimento $S = 30 + 10t$ era conhecida. Comparando essa equação com a equação horária geral do MRU, $S = S_0 + Vt$, vemos diretamente que $S_0 = 30\ m$ e $V = 10\ m/s$.

O gráfico da velocidade para esse móvel:

Como no caso V = constante e igual a $10\ m/s$, temos:



Resumo

Nesta unidade, estudamos um dos tipos mais simples de movimento, o movimento retilíneo uniforme. Conforme veremos mais adiante, tratando a respeito das Leis de

Newton, quando um móvel está em movimento retilíneo uniforme, ele permanecerá com esse tipo de movimento para sempre, a não ser que alguma coisa externa ao corpo (uma força) modifique o movimento.

lá na plataforma

Na Unidade 2 de nosso ambiente virtual, no tema movimento retilíneo uniforme, *siga as orientações de desenvolvimento da atividade proposta. Acesse por meio do ambiente, objetos de aprendizagem de simulação computacional, [https://phet.colorado.edu/pt_BR/] da Universidade de Boulder, Colorado.*

Perceba como a atividade/recurso dialoga diretamente com o tema de nossa aula.

Exercícios

lá na plataforma

Informação complementar: na Unidade 2 de nosso ambiente virtual, no tema movimento retilíneo uniforme, *siga as orientações pedagógicas de suporte à resolução dos exercícios propostos a seguir, no texto, que foram pré-gravadas em áudio, no formato [mp4].*

Anote as respostas em seu caderno!

1. Um corredor olímpico, disputando a prova dos 100 metros rasos, fez o percurso em 10 segundos. Calcule a velocidade média do atleta.

2. Você observa o clarão de um raio numa noite chuvosa e, 3 segundos depois, escuta o barulho do trovão. Sabendo que o som se propaga a aproximadamente 340 m/s no ar, calcule a que distância de você "caiu" o raio.

3. Um motorista de ônibus levou 2 h para ir de Niterói a Nova Friburgo, percorrendo uma distância aproximada de 130 km e tendo parado 30 min para fazer um lanche. Determine a velocidade escalar média do ônibus em km/h e em m/s, ao final da viagem.

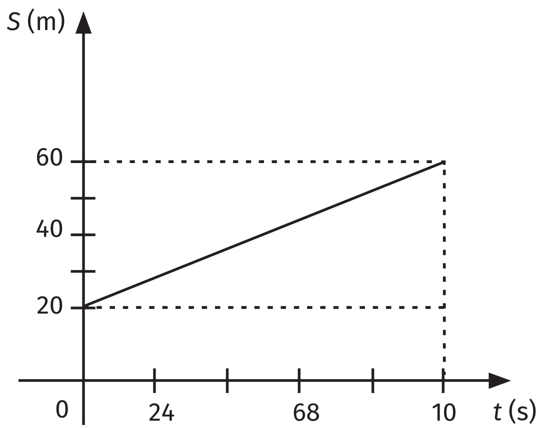
4. Um carro percorre 20 km com velocidade constante e igual a 60 km/h e, a seguir, 60 km também com velocidade constante e igual a 90 km/h, na mesma direção e sentido. Determine sua velocidade média nos 80 km assim percorridos.

5. A equação horária para o movimento de um móvel é $S = 2 + 4t$, sendo S expresso em metros e t em segundos. Pede-se:
   a) Determine a posição escalar inicial.
   b) Determine a velocidade escalar.
   c) Determine a posição escalar no instante 1,5 s.

6. Dois móveis, A e B, descrevem a mesma trajetória retilínea, com equações horárias dadas por $S_A = 20 + 5t$ e $S_B = 50 - 10t$, sendo S expresso em metros e t em segundos. Sabendo que os móveis partiram ao mesmo tempo de suas posições iniciais, calcule a posição e o instante em que os dois móveis se encontram.

Dica: se os móveis estão na mesma trajetória, e se encontram, nesse instante (que podemos chamar de tempo de encontro, *te*) estarão *na mesma posição S*.

7. O gráfico de $S \times t$ para o movimento de um móvel está representado na figura a seguir.



Pede-se:

a) a posição inicial (S_0) do móvel.
b) A posição do móvel no instante $t = 5$ s.
c) Calcular a velocidade do móvel.
d) Escrever a equação horária do movimento.

Respostas da unidade

1. $V_m = 10\ m/s$

2. $\Delta S = 1020\ m = 1{,}02 \times 10^3\ m$

3. $V_m = 65\ km/h \approx 18\ m/s$ (faça a transformação de km/h para m/s)

4. $V_m = 80\ km/h$

5.

a) $S_0 = 2{,}0\ m$;
b) $V = 4{,}0\ m/s$;
c) $S = 8{,}0\ m$

6. $te = 2{,}0\ s$

7.

a) No gráfico, em $t = 0$ temos $S_0 = 20\ s$
b) Também no gráfico em $t = 5\ s$ temos $S_5 = 40\ m$
c) $V = \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \text{constante} = \dfrac{60 - 20}{10} =$

$\dfrac{40}{10} = 4{,}0 m/s$

d) $S = S_0 + Vt \Rightarrow S = 20 + 4t$

O movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV)

03

metas

Definir aceleração e estudar os movimentos com aceleração constante, por meio de suas equações.

objetivos

Esperamos que, ao final desta unidade, você seja capaz de:

- caracterizar a aceleração de um móvel;
- resolver problemas simples, utilizando as equações do MRUV;
- construir e analisar gráficos do MRUV.

Introdução

Vocês já devem ter ouvido falar a respeito da performance de um modelo de automóvel nos termos: “tal carro faz de 0 a 100 km/h, em 14,5 segundos”. Essa situação se refere a um movimento acelerado, pois a velocidade do automóvel está variando com o tempo. Vamos, agora, estudar os movimentos desse tipo, chamado de *uniformemente variado* (MRUV), que corresponde àquele onde a velocidade varia de modo uniforme, com o passar do tempo. Estes são os casos nos quais a **aceleração** do móvel é **constante**.

A aceleração

Na Unidade 02, estudamos os movimentos nos quais a velocidade era constante. Normalmente, quando entramos num automóvel ou num ônibus e ele se encontra parado, temos que, gradativamente, aumentar a velocidade, para fazer a viagem. Ao encontrarmos um sinal fechado, ou quando chegamos ao fim da viagem, temos que frear para diminuir a velocidade, ou parar. É comum aumentarmos ou diminuímos a velocidade, durante um percurso. A aceleração mede como a velocidade varia com o tempo, de modo análogo a como a velocidade mede a variação da posição com o tempo.

Definição de aceleração média

Aceleração média é a razão entre a variação da velocidade (ΔV) e o intervalo de tempo (Δt), decorrido durante a variação da velocidade. Assim:

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{V_{final} - V_{inicial}}{t_{final} - t_{inicial}}$$

Situação 1: se um carro, partindo do repouso (parado), atinge a velocidade de 80 km/h, em 10s, ele tem aceleração média:

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{80\ km/h}{10\ s} = 8\ \frac{km/h}{s}$$

"Isto é: 8 km/h por segundo".

Isto significa que sua velocidade varia 8km/h a cada segundo.

Unidade S.I. de aceleração no MRUV

A unidade de aceleração que vimos no exemplo logo acima é bastante confusa (km/h por segundo).

No Sistema Internacional de Unidades (S. I.), a velocidade é medida em m/s e o tempo em s; assim, a unidade S. I. de aceleração é dada por:

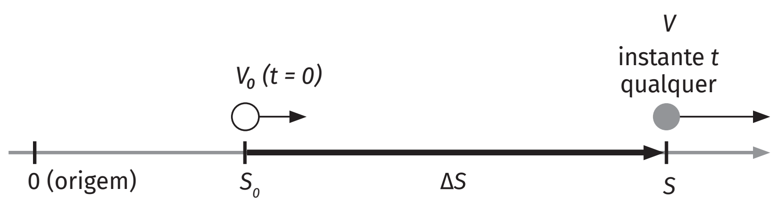
$$\frac{m/s}{s} = \frac{m}{s} \cdot \frac{1}{s} = m/s^2$$

Ou seja, uma aceleração de $1/ms^2$ significa que a velocidade varia de *um metro por segundo em cada segundo*.

A equação da velocidade do MRUV

Como vimos, o movimento uniformemente variado se caracteriza pela aceleração constante, isto é, a *velocidade varia uniformemente com o tempo*.

Vamos considerar um móvel que sai de uma posição S_0 com velocidade V_0, quando começamos a contar o tempo (em $t_0 = 0$), e que, depois de um certo tempo t, chega numa posição S, com velocidade V, mas com aceleração constante; conforme ilustra a figura.



A variação da velocidade com o tempo é a aceleração. Assim:

$$\frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{V - V_0}{t - 0} = a \quad \text{Ou seja:} \quad \frac{V - V_0}{t} = a$$

Passando primeiro o t para o segundo membro na equação, teremos:

$$V - V_0 = a \cdot t$$

Agora, passando o V_0 também para o segundo membro, obtemos:

$$V = V_0 + a \cdot t$$

Esta é a equação da velocidade do MRUV; onde tanto V_0 quanto a são constantes.

Situação 2: consideremos um móvel que tem velocidade inicial $V_0 = 10\ m/s$ e que aumenta a velocidade com aceleração constante de $5\ m/s^2$. Pede-se:

a) escreva a equação da velocidade.

Sabemos que a equação é do tipo $V = V_0 + at$ porque o enunciado diz que a aceleração é constante. Assim, com $V_0 = 10\ m/s$ e $a = 5\ m/s^2$.

Teremos:

$$V = 10 + 5t \text{ (no S. I.)}$$

b) construa o gráfico da velocidade em função do tempo.

Atribuímos valores para t e calculamos a velocidade usando a equação $V = 10 + 5t$, para cada instante. Por exemplo:

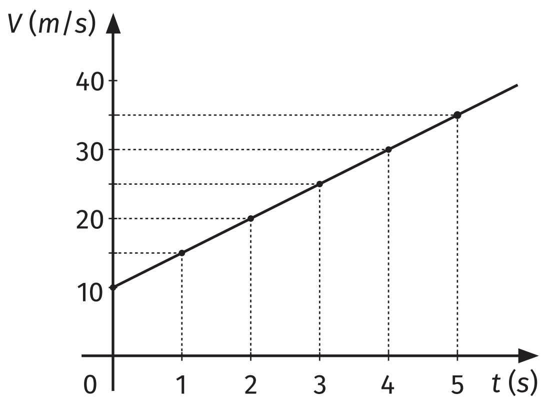
Para $t = 0\ s \Rightarrow V = 10 + 5 \times 0 = 10\ m/s$.

Se $t = 1\ s \quad \Rightarrow V = 10 + 5 \times 1 = 15\ m/s$.

Se $t = 2\ s \quad \Rightarrow V = 10 + 5 \times 2 = 20\ m/s$.
E assim sucessivamente.

Desse modo, podemos construir o gráfico marcando os pares ordenados (t, V). No caso, temos os pares: (10, 0); (15, 1); (20, 2). Depois de marcar os pares ordenados, ligamos os os pontos. Assim, obtemos o gráfico de $V = 10 + 5t$, representado a seguir.

Aqui, a velocidade V é uma *função linear* de t (é uma linha reta).



c) determine a velocidade do móvel em $t = 3s$.

Podemos ver *diretamente no gráfico* (veja você!), onde $t = 3s$, temos $V = 25\ m/s$.

Mesmo que o valor 25 não esteja escrito, podemos verificar, *observando diretamente no gráfico*, que este é o valor de V correspondente ao valor 3 s, para o tempo.

Outra solução seria calcular analiticamente a velocidade no instante $t = 3\ s$, usando a equação da velocidade $V = 10 + 5t$.

Onde substituindo $t = 3\ s \Rightarrow V = 10 + 5 \times 3 = 10 + 15 \Rightarrow V = 25\ m/s$.

A equação do deslocamento (equação horária) do MRUV

Ao estudarmos a velocidade média, vimos que para qualquer tipo de movimento, podemos calcular o caminho percorrido por $\Delta S = V_m.t$. Para o caso do movimento uniformemente variado, pode-se mostrar que a velocidade média entre dois pontos do caminho é igual à média das velocidades entre esses pontos. Isto é, para um MRUV, temos:

$$V_m = \frac{V + V_0}{2}$$

Assim, a equação $\Delta S = V_m t$ torna-se

$$\Delta S = \frac{V + V_0}{2} t .$$

Como no MUV temos $V = V_0 + a \cdot t$, substituindo este valor de V_0 na equação anterior, o ΔS torna-se:

$$\Delta S = \frac{V_0 + at + V_0}{2} t .$$

Somando os dois V_0, obtemos,

$$\Delta S = \frac{2V_0 t + at^2}{2} ,$$

ou $\Delta S = \frac{2V_0\, t}{2} + \frac{at^2}{2}$, onde $\Delta S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$.

Como $\Delta S = S - S_0$, escrevemos:

$$S - S_0 = V_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Logo, passando o "$-S_0$" para o segundo membro, obtemos a equação horária do MRUV:

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Esta é a *equação do movimento* (equação horaria do MRUV).

Veja que este movimento é bem diferente do movimento uniforme. Aqui, a velocidade aumenta linearmente com o tempo, mas o deslocamento (ΔS) aumenta bem mais rápido: aumenta de forma quadrática com o tempo (com t "ao quadrado"). A equação do deslocamento é uma" função do segundo grau", como aquelas que vocês já viram no curso de matemática.

Situação 3: suponha que um móvel andando em linha reta, passe pela origem dos movimentos ($S = 0$) com velocidade de 6 m/s, com aceleração constante de 4 m/s^2, no instante em que começamos a contar o tempo (isto é: em $t = 0$).

Pede-se:

a) Escreva a *função horária* do movimento.

b) Calcule a posição do móvel no instante $t = 2\ s$.

c) Calcule o instante em que o móvel passa pela posição $S = 13{,}5\ m$

Temos os dados do problema:

Nesse caso: o móvel passa pela origem dos movimentos, no instante $t = 0$, com velocidade de 6 m/s, com aceleração de 4 m/s^2.

Resumindo: os dados são: $S_0 = 0$, $t_0 = 0$, $V_0 = 6\ m/s$ e $a = 4\ m/s^2$ (constante).

Solução do item (a): o móvel caminha em linha reta, com aceleração constante; logo, está em MRUV. Assim sua equação horária será do tipo:

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Substituindo os valores de S, V e de a dados, temos $S = 6t + 4t^2/2$, isto é: $S = 6t + 2t^2$ é a equação horária do movimento, conforme pedido.

Solução do item (b): em que posição estará o móvel no instante $t = 2\ s$? Substituindo $t = 2\ s$ na equação do movimento, temos:

$S = 6 \times 2 + 2 \times 2^2 = 12 + 2 \times 4 = 12 + 8 = 20$

Assim, a posição do móvel em $t = 2$ s é:

$$S_{(t=2)} = 20\ m$$

Solução do item (c): substituído $S = 13{,}5$ na equação do movimento, $S = 6t + 2t^2$, teremos:

$$13{,}5 = 6t + 2t^2$$

Passando o 13,5 para o segundo membro e rearrumando os termos da equação, podemos escrever:

$$2t^2 + 6t - 13{,}5 = 0$$

Veja que temos uma equação do segundo grau em t – e não em x, como na disciplina de matemática –, que pode ser resolvida da mesma forma, utilizando a equação (ou fórmula) de Bhaskara.

// atenção

Segundo Bhaskara (Viayapura, Índia 1114 – 1185), para uma equação do tipo:

$at^2 + bt + c = 0$ (equação do segundo grau).

Temos: $t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a}$

No nosso caso: a = 2 (não confundir com o a de aceleração...) b = 6 e c = –13.

Substituindo na fórmula de Bhaskara vem:

$$t = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 2 \times (-13,5)}}{2 \times 2}$$

$$\text{onde: } t = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 108}}{4} = \frac{-6 \pm \sqrt{144}}{4}$$

Daí, obtemos:

$$t = \frac{-6 + 12}{4} = \frac{+6}{4} = 1,5\,s$$

$$t' = \frac{-6 - 12}{4} - \frac{-18}{4} = -4,5\,s$$

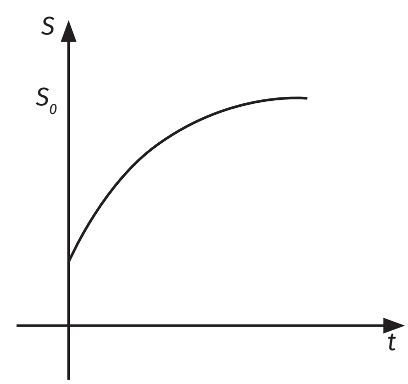
O que nos leva a uma impossibilidade física, pois o tempo não "anda para trás". Não faz sentido um tempo negativo!

Assim, a única solução fisicamente possível é:

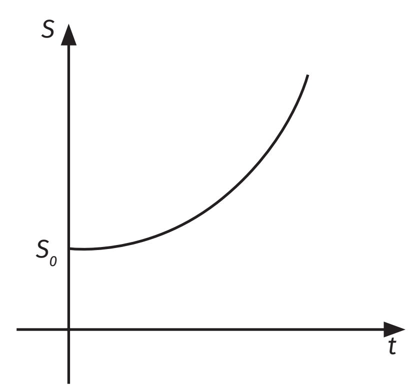
O móvel passa na posição S = 13,5 m no instante t = 1,5 s.

Gráfico da posição versus tempo ($S \times t$) no MRUV

Os gráficos da posição (S) em função do tempo (t), para os movimentos uniformemente variados têm a forma de parábolas.



Neste, o movimento é retardado.



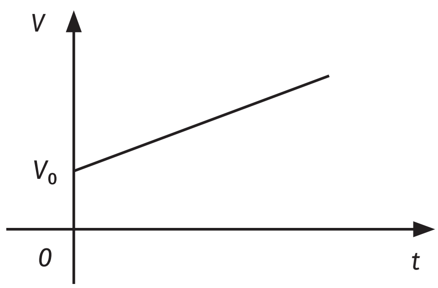
Neste, o movimento é acelerado.

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2}$$

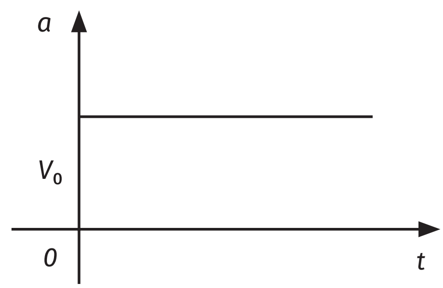
Gráfico da velocidade e da aceleração no MRUV

Para o movimento acelerado, temos:

$V = V_0 + at$ e V aumenta com o tempo

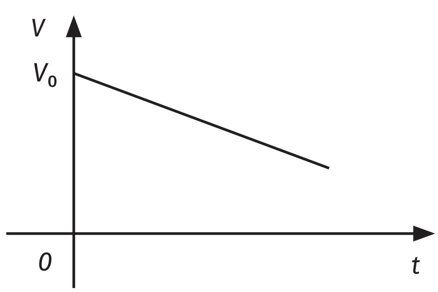


A aceleração é positiva

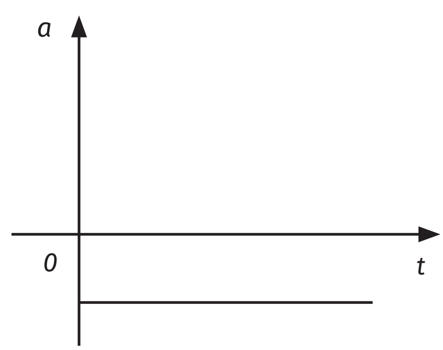


Para o movimento retardado, temos:

$V = V_0 - at$ e V diminui com o tempo



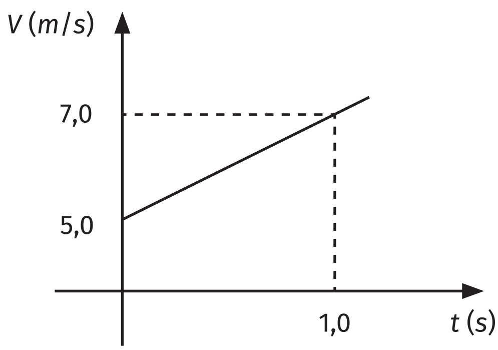
A aceleração é negativa

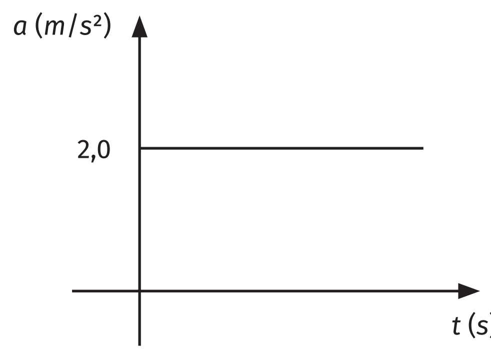


Situação 4: a equação da velocidade em função do tempo, para o movimento de uma partícula, é dada por $V = 5{,}0 + 2{,}0t$ (no S. I.). Esboçar os gráficos de $V \times t$ e $a \times t$, para este movimento.

Veja na equação de velocidade que, para $t = 0$ s, $V = 5$ m/s e para $t = 1$ s (por exemplo), temos $V = 7$ m/s, enquanto que a aceleração é igual a 2 m/s^2 para todo t.

Sendo assim, os gráficos da velocidade e da aceleração são, respectivamente, do tipo:

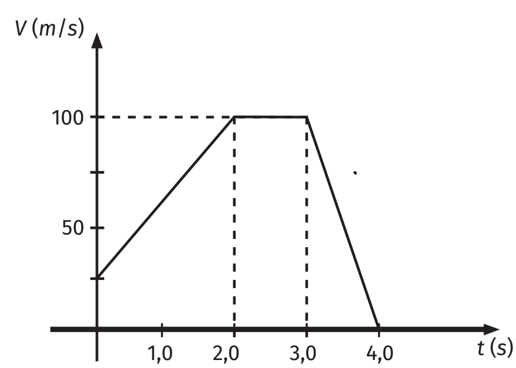




A “área” sob a curva $V \times t$

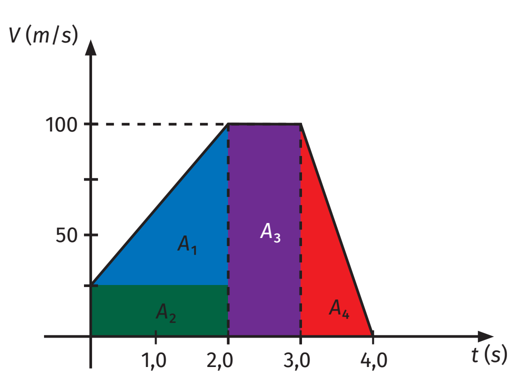
Veja que em qualquer gráfico de *V* versus *t*, como no exemplo acima, ao calcularmos a “área” sobre a curva da velocidade em função do tempo, até o eixo dos tempos *t*, na verdade, estamos fazendo o produto de *velocidades por tempos* e, assim, o resultado não é uma “área” propriamente dita, mas sim um *deslocamento*, ou um *caminho percorrido*, ΔS. Veja o exemplo a seguir:

Situação 5: no gráfico de *V* versus *t* dado a seguir, pede-se que seja calculado o caminho percorrido pelo móvel entre os instantes $t = 0$ e $t = 4$ s.



Como vimos, o caminho percorrido, ΔS, é dado pela a “área” sobre a curva, até o eixo *t*.

Para facilitar o cálculo, dividiremos a “área” nas partes A_1, A_2, A_3 e A_4, do seguinte modo:



$\Delta S = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$.

Tirando da própria figura os valores para o cálculo de A_1, A_2, A_3 e A_4, teremos, respectivamente:

$$\Delta S = \frac{(100-25)\,x\,2,0}{2} + 25\,x\,2,0 + 100\,x\,(3-2) + \frac{100\,x\,(4-3)}{2}$$

Onde:

$\Delta S = 75 + 50 + 100 + 50$.

Finalmente: $\Delta S = 275\ m$.

Mais tarde, em nossos estudos, veremos que mesmo quando a velocidade varia de maneira não uniforme, esse raciocínio, para calcularmos o deslocamento ΔS sob a curva $V \times t$, continua válido.

A equação de Torricelli

Podemos resolver os problemas numéricos de MRUV por meio das equações da velocidade $V = V_0 + at$ e da equação horária $S = S_0 + V_0t + (1/2)at^2$. Entretanto, são muito comuns os problemas onde não é dado o tempo. Nesses casos, torna-se muito útil uma terceira equação, a *equação de Torricelli*, que é obtida pela eliminação do tempo nas duas equações citadas acima.

Esta equação relaciona a velocidade com o deslocamento.

$$V^2 = V_0^2 + 2a\Delta S$$

Essa é a equação de Torricelli.

Atividade

Anote a resposta em seu caderno!

1. Deduzir a equação de Torricelli, eliminando o tempo, entre as duas equações do MUV.

Situação 6: suponha um móvel em MRUV, com velocidade inicial $V_0 = 6\ m/s$ e aceleração $a = 4\ m/s^2$. Deseja-se calcular a velocidade do móvel ao chegar à posição 20 m.

São dados: $V_0 = 6,0\ m/s$ e $a = 4,0\ m/s^2$, pede-se: $V = ?$ para $S = 20\ m$.

Vamos resolver o problema de duas maneiras possíveis. Primeiro, usando as duas equações do MRUV.

A equação do deslocamento é:

$$\Delta S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Substituindo os valores dados:

$20 = 6,0t + \frac{4t^2}{2}$ ou $20 = 6,0t + 2t^2$. Dividindo ambos os membros por 2, obtemos:

$10 = 3,0t + t^2$. Ou, passando o 10 para o outro membro e rearranjando os termos:

$t^2 + 3,0t - 10 = 0$ (novamente uma equação do segundo grau).

Aplicando Bhaskara (com $a = 1$, $b = 3,0$ e $c = -10$):

$$t = \frac{-3,0 \pm \sqrt{(3,0)^2 - 4 \times 1 \times (-10)}}{2 \times 1}$$

$$t = \frac{-3,0 \pm \sqrt{9 + 40}}{2 \times 1} = \frac{-3,0 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-3,0 \pm 7}{2}$$

E temos as possibilidades:

$$t = \frac{-3,0 - 7}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

(fisicamente impossível);

Ou

$$t = \frac{-3,0 + 7}{2} = \frac{+4}{2} = 2,0\,s$$

que é a solução para o tempo.

Levando o valor de t na equação da velocidade:

$V = V_0 + at \Rightarrow V = 6,0 + 4,0 \times 2,0 \Rightarrow V = 14\ m/s$

Agora, aplicando Torricelli: como não é dado o tempo, em vez dos cálculos acima, podemos usar diretamente a equação de Torricelli e o problema se resolve em uma linha!

$V^2 = V_0^2 + 2a\Delta S \Rightarrow V^2 = 6,0^2 + 2 \times 4,0 \times 20$

$\Rightarrow V^2 = 196 \Delta V = \sqrt{196} \Delta V = 14\ m/s$

lá na plataforma

Na Unidade 3 de nosso ambiente virtual, no tema Movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV), *siga as orientações de desenvolvimento da atividade proposta. Acesse, por meio do ambiente, objetos de aprendizagem de simulação computacional, [https://phet.colorado.edu/pt_BR/], da Universidade de Boulder, Colorado.*

Perceba como a atividade/recurso dialoga diretamente com o tema de nossa aula.

Resumo

Nesta unidade, estudamos o conceito de *aceleração*, aplicado no movimento retilíneo uniformemente variado, onde o *módulo* da velocidade varia com o passar do tempo. Quando estudarmos mais adiante, nas Unidades 06 e 07, os movimentos circulares, veremos que existe um outro tipo de aceleração, responsável, não pela variação do módulo, mas sim, pela direção da velocidade.

Exercícios

lá na plataforma

Informação complementar: na Unidade 03 de nosso ambiente virtual, no tema Movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV), *siga as orientações pedagógicas de suporte à resolução de exercícios propostos a seguir no texto, que foram pré-gravadas em áudio no formato [mp4].*

1. Um carro com uma velocidade de 25 m/s freia, com aceleração constante, e percorre 60 m, até parar. Calcule o valor da aceleração do carro.

Dicas: temos um MUV, logo, a aceleração é constante e igual a $\Delta V/\Delta t$. Mas, como não é dado o tempo, você pode usar a equação da posição para encontrar o tempo e, depois, a equação da velocidade para encontrar a aceleração pedida. Ou então usar Torricelli.

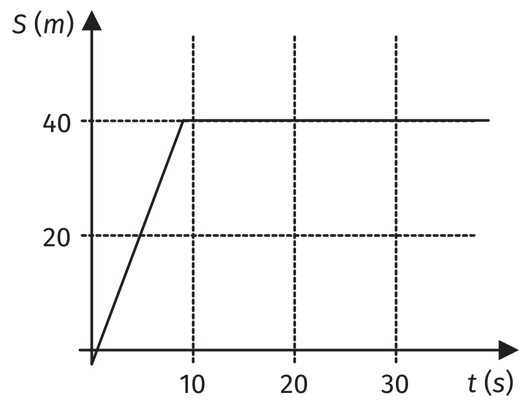
Sugerimos que você tente as duas formas de resolver a questão, como um treino para se familiarizar com a álgebra envolvida. Se você encontrar a mesma resposta ao utilizar as duas formas de resolver a questão, é muito provável que sua solução esteja correta!

2. Um avião, partindo do repouso, tem aceleração uniforme na pista e percorre a distância de 800 m, até levantar vôo, com velocidade de 100 m/s. Calcule o intervalo de tempo gasto nesse processo.

Dica: nessa questão, também não é dado o tempo, então...

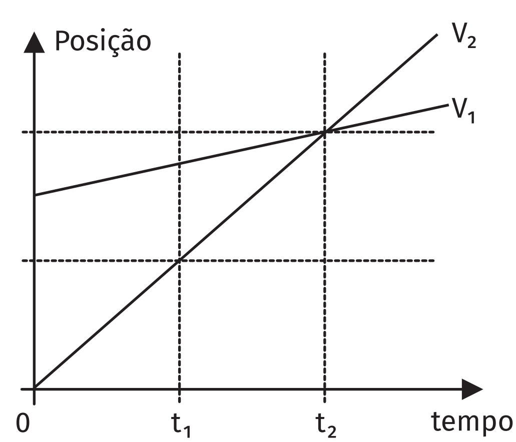
3. Um carro leva 12 s para atingir a velocidade de 100 km/h, partindo do repouso. Supondo que sua aceleração seja constante, quanto ele se desloca até atingir essa velocidade?

4. O gráfico a seguir representa a variação da posição (S), em função do tempo (t), para o movimento de um homem que caminha em linha reta sobre uma calçada.



Determine a velocidade do homem nos instantes: a) 5 s e b) 20 s.

5. Os movimentos de dois carros são descritos pelo gráfico da figura a seguir. Responda às questões (5.1) e (5.2), descritas logo após o gráfico.



5.1. Com respeito às velocidades dos dois móveis, podemos afirmar corretamente que:

a) são as mesmas em todos os instantes;
b) são as mesmas no instante t_1;

c) são as mesmas no instante t_2 ;

d) são sempre diferentes e $V_2 \leq V_1$;

e) são sempre diferentes e $V_1 < V_2$;

5.2 Com respeito às posições sucessivas ocupadas pelos dois móveis, podemos afirmar corretamente que:

a) são as mesmas em todos os instantes;

b) são as mesmas no instante t_1;

c) são as mesmas no instante t_2;

d) são sempre diferentes;

e) são sempre iguais.

6. Um movimento uniformemente variado é descrito pela função: $S = 12 + 10t - t^2$. Determine a velocidade média no intervalo entre os instantes 1 *s* e 4 *s*.

7. Um automóvel com velocidade 90 *km/h* é freado uniformemente, com aceleração 2,5 m/s^2 até parar. Determine o espaço percorrido pelo automóvel durante a freada.

8. A tabela a seguir nos dá alguns valores da velocidade instantânea de um móvel, em função do tempo.

t (s)	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
V (*m/s*)	7,0	10	13	16	19

Determine:

a) o tipo de movimento.

b) a velocidade inicial.

c) a aceleração.

Dicas: observando s valores dados na tabela, veja como a velocidade varia a cada segundo que passa. Com uma régua milimetrada, construa o gráfico de *V* versus *t*, com os valores da tabela, e você poderá encontrar a velocidade inicial extrapolando o gráfico até o $t = 0$. A aceleração pode, então, ser obtida do próprio gráfico.

9. A equação horária de um movimento uniformemente variado é $S = 5t^2 + 20t + 8$. A posição e o tempo estão expressos no S. I. Determine:

a) a aceleração;

b) a velocidade inicial;

c) a posição inicial;

d) a equação para a velocidade.

10. A equação horária de um movimento uniformemente variado é $S = 2t^2 - 24t + 40$. A posição e o tempo estão expressos no S. I. Pergunta-se:

a) entre quais instantes o movimento é retardado?

b) entre quais instantes o movimento é acelerado?

Dica: analise a equação verificando, de acordo com os tempos, quando as posições estão diminuindo ou quando estão aumentando.

Recomendamos fortemente que após estudar cada unidade, você faça também os exercícios referentes à mesma, no livro de exercícios.

Respostas da unidade

Atividade

1. Temos as equações do MRUV

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{1}{2}.a.t^2$$

ou

$$S - S_0 = S_0 + V_0 t + \frac{1}{2}.a.t^2$$

Ou ainda $\Delta S = V_0 t + \frac{1}{2}.a.t^2$ (eq. 1)

E também $V = V_0 + a.t$ (eq. 2)

Explicitando o (t) na (eq. 2) obtemos:

$t = \frac{V - V_0}{a}$ (eq. 3)

Substituindo-se (3) em (1) vem:

$$\Delta S = V_0 \left(\frac{V - V_0}{a} \right) + \frac{1}{2}.a.\left(\frac{V - V_0}{a} \right)^2$$

$$\Delta S = V_0 \left(\frac{V - V_0}{a} \right) + \frac{1}{2}.a.\frac{(V - V_0)^2}{a \times a}$$

$$\Delta S = \left(\frac{VV_0 - V_0^2}{a} \right) + \frac{1}{2}.\frac{V^2 - 2.VV_0 + V_0^2}{a}$$

Multiplicando ambos os membros por $2a$ obtemos

$2a\Delta S = 2VV_0 - 2V_0^2 + V^2 - 2.VV_0 + V_0^2$

Reduzindo os termos semelhantes

$2a\Delta S = -V_0^2 + V^2$

Finalmente, explicitando o V^2

$V^2 = V_0^2 + 2a\Delta S$

Exercícios

1. 5,2 m/s^2.
2. 16 s.
3. 167 m.
4.
   a) 4,0 m/s;
   b) zero.
5.
   5.1) e;
   5.2) c.
6. 5,0 m/s.
7. 125 m.
8.
   a) MUV;
   b) 4,0 m/s;
   c) 3,0 m/s^2.
9.
   a) 10 m/s^2;
   b) 20 m/s;
   c) 8 m;
   d) $v = 20 + 10t$.
10.
   e) Entre 0 s e 6 s;
   f) a partir de 6 s.

O movimento de queda livre

04

metas

Utilizar as equações do MUV em situações do cotidiano.

objetivos

Esperamos que, ao final desta unidade, você seja capaz de:

- identificar quais são as equações mais indicadas para a resolução de um determinado problema de queda livre, a partir das informações dadas pelo seu enunciado;
- aplicar as equações do movimento retilíneo uniformemente variado nos casos de um corpo que é deixado cair livremente de uma certa altura ou quando é lançado diretamente para baixo ou para cima com uma certa velocidade inicial;
- resolver problemas de um corpo em movimento vertical no vácuo (queda livre).

Introdução

Um exemplo de movimento retilíneo uniformemente variado que estudamos anteriormente é o movimento de queda livre. Na realidade, quando um corpo cai de grandes alturas seu movimento é prejudicado pela resistência do ar. A resistência do ar não permite que a velocidade aumente indefinidamente. Ao utilizarmos a expressão *queda livre*, estamos supondo uma queda de pequena altura, ou estamos simplesmente desprezando a resistência do ar. Nesse caso, todos os corpos caem com a mesma aceleração, chamada de *aceleração da gravidade*.

Próximo ao nível do mar e próximo do equador terrestre, a aceleração da gravidade (que chamaremos de g) vale 9,81 m/s^2. Essa é a chamada *aceleração normal da gravidade*. Nos exercícios, é comum utilizarmos o valor aproximado de 10 m/s^2, para facilitar as contas.

Figura 4.1: O paraquedismo é considerado um esporte radical porque apresenta muitos riscos, lidando com variáveis como altura, velocidade e aceleração.
Fonte: https://pxhere.com/en/photo/760480.

No paraquedismo, como exemplificado na **Figura 4.1**, o esportista não experimenta *queda livre*, pois a resistência do ar possui um papel seriamente importante. A velocidade final de um corpo caindo nas proximidades da Terra depende basicamente da forma do corpo. Por isso, os paraquedistas abrem um pouco os braços e as pernas, como na ilustração. Caso o paraquedista *mergulhe* em pé ou de cabeça, sua velocidade pode aumentar perigosamente, dificultando ou mesmo não permitindo a abertura do paraquedas.

Nesta unidade, estudaremos três casos bastante comuns de movimentos de queda livre:

- um corpo abandonado do repouso;
- um corpo lançado verticalmente para baixo;
- um corpo lançado verticalmente para cima.

Um corpo é abandonado do repouso

Vamos imaginar uma pedra que é abandonada a partir do repouso (ela está representada pela bolinha na figura abaixo, à direita). Como o movimento é vertical, vamos orientar nosso sistema de referência para baixo e chamar as sucessivas posições simplesmente de *y*. Veja com atenção os sistemas de referência desenhados ao lado de cada caso.

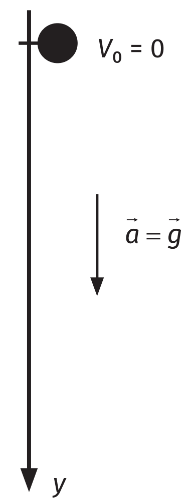
Como $\mathbf{V_0} = 0$ (a pedra está inicialmente em repouso), o deslocamento será:

$$\Delta S = V_0 t + \frac{at^2}{2} \text{ se torna } y = \frac{gt^2}{2}$$

e a velocidade $V = V_0 + at$ será dada por $V = gt$.

Podemos, também, usar a equação de Torricelli:

$V^2 = V_0^2 + 2a\Delta S$, que se torna $V^2 = 2gy$.



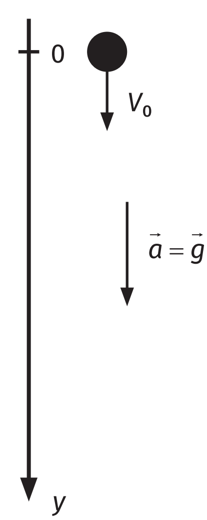
Um corpo é lançado verticalmente para baixo

Nesse caso, temos uma velocidade inicial diferente de zero.

Com $V_0 \neq 0$ e aceleração $a = g$, teremos o deslocamento:

$$\Delta S = V_0 t + \frac{at^2}{2} \text{ se torna } y = V_0 t + \frac{gt^2}{2}$$

A velocidade $V = V_0 + at$ será dada por $V = V_0 + gt$; e a equação de Torricelli $V^2 = V_0^2 + 2a\Delta S$ torna-se $V^2 = V_0^2 + 2gy$.

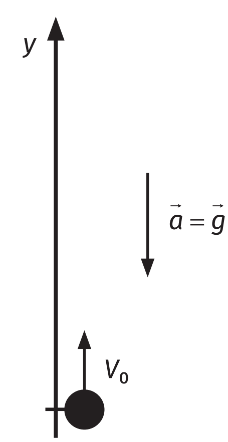


Um corpo é lançado verticalmente para cima

Quando o corpo é lançado verticalmente para cima, temos que tomar um pouco mais de cuidado, pois o movimento é, inicialmente, retardado (até o corpo atingir a altura máxima). Isto é: após o lançamento, com uma certa velocidade V_0, o corpo diminui a velocidade.

A velocidade está orientada *para cima* e a aceleração da gravidade é *para baixo*, o que faz o corpo frear.

Vamos colocar nosso sistema de referência (o eixo y) orientado para cima (repare na figura abaixo, à direita). Nesses casos, nos quais a aceleração tem sentido contrário ao sentido da velocidade, colocamos a aceleração com sinal negativo, nas equações. Assim, teremos: com $V_0 \neq 0$ e $a = -g$ (negativa).



O deslocamento:

$$\Delta S = V_0 t + \frac{at^2}{2} \text{ se torna } y = V_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

A velocidade $V = V_0 + at$ será dada por $V = V_0 - gt$.

Podemos tambem utilizar a equação de Torricelli:

$V^2 = V_0^2 + 2a\Delta S$, que se torna $V^2 = V_0^2 - 2gy$.

Situação 1: imagine que uma pedra é lançada para cima, na vertical, com velocidade de 30 m/s.

Aqui, vamos supor que a resistência do ar é desprezível e usar $g = 10\ m/s^2$ para facilitar os cálculos da:

a) posição do corpo, após decorridos 2 s;

b) velocidade da pedra, também em $t = 2\ s$;

c) altura máxima que a pedra atinge.

Solução: são dados $V_0 = 30\ m/s$ e $a = g = 10\ m/s^2$.

a) para $t = 2$ s, a posição será:

$$y = V_0 t - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow y = 30 \times 2 - \frac{10 \times 2^2}{2} = 60 - 20 = 40 \Rightarrow y = 40m$$

b) a velocidade em $t = 2\ s$ será:

$V = V_0 - gt \Rightarrow V = 30 - 10 \times 2 = 30 - 20 = 10 \Rightarrow V = 10\ m/s$

c) quanto à altura máxima, repare que, ao atingi-la, a pedra para de subir. Sua *velocidade* se torna momentaneamente *nula*, mas a pedra continua *com aceleração*, pois imediatamente após atingir a altura máxima, a pedra continua seu movimento, agora aumentando a velocidade (em módulo), na descida.

Tendo em vista que não foi dado o tempo, aplicaremos a equação de Torricelli:

$V^2 = V_0^2 + 2\ a\Delta S.$

Com $V = 0$ (na altura máxima); $V_0 = 30m/s$; $a = g = -10m/s^2$ e $\Delta S = Y_{\text{máximo}}$, ficamos com:

$0^2 = 30^2 - 2 \times 10.Y_{\text{máximo}}$

$0 = 900 - 20.Y_{\text{máximo}}$

$20.Y_{\text{máximo}} = 900$ Logo $Y_{\text{máximo}} = \frac{900}{20} = 45m$

(nunca se esqueça de colocar a unidade de medida nas suas repostas).

Essa é a altura máxima, alcançada pelo corpo no instante em que sua velocidade se torna nula e o corpo passa a cair. A partir desse momento, o módulo da sua velocidade vai aumentando, pois a velocidade passa a ter a mesma direção e sentido da aceleração (ambas são verticais e para baixo). Lembre-se que, no ponto mais alto de sua trajetória, o corpo continua com a aceleração igual à aceleração da gravidade local, *g*, embora tenha velocidade zero.

>> saiba mais

Você sabia que o nosso planeta Terra apresenta variações no módulo da aceleração da gravidade?

O planeta Terra não é uma esfera perfeita e está mais para o que os geofísicos chamam de "geoide", que é algo parecido com uma esfera, mas com uma superfície bem irregular. Outro fato bastante desconhecido é que a distribuição de massa no planeta é heterogênea. Esses fatos, combinados, permitem diferenças sutis entre os valores da aceleração da gravidade, em locais distintos do globo, de acordo com o professor Eder Molina, do Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências atmosféricas da USP.

Fonte: https://canaltech.com.br/ciencia/a-gravidade-e-a-mesma-em-toda-a-terra-e-por-que-isso-e-importante-150787/.

Resumo

Nesta unidade, estudamos o movimento de *queda livre*. Dizemos *livre*, porque, na realidade, o ar atrapalha o movimento de queda, aqui na Terra. Um paraquedista, por exemplo, atinge uma velocidade máxima de aproximadamente 120 km/h graças à resistência do ar, que é proporcional ao quadrado da velocidade (V^2) e depende também da forma do corpo. Quando estudamos quedas de pequenas alturas, podemos desprezar a resistência do ar; e as equações que aplicamos nesta unidade funcionam muito bem para descrever as quedas.

O MRUV é o movimento típico que todos os corpos fazem quando são abandonados nas proximidades de uma massa muito grande, como a Terra. Existe uma força, feita pela terra, que "puxa" para baixo os corpos em suas proximidades. Isto se deve a uma atração natural entre todos os corpos que possuem massa, chamada de *atração gravitacional*. Estudaremos com mais detalhes as forças envolvidas no fenômeno da atração na Unidade 12 (Gravitação).

lá na plataforma

Na Unidade 4 de nosso ambiente virtual, no tema Movimento de queda livre, *siga as orientações de desenvolvimento da atividade proposta. Acesse, por meio do ambiente,* objetos de aprendizagem de simulação computacional, *[https://phet.colorado.edu/pt_BR/] da Universidade de Boulder, Colorado.*

Perceba como a atividade/recurso dialoga diretamente com o tema de nossa aula.

Exercícios

lá na plataforma

Informação complementar: na Unidade 4 de nosso ambiente virtual, no tema Movimento de queda livre, *siga as orientações pedagógicas de suporte à resolução dos exercícios propostos a seguir, que foram pré-gravadas em áudio, no formato [mp4].*

1. Um corpo cai livremente a partir do repouso. Determine:
   a) sua aceleração;
   b) a distância que ele cai após decorridos 3,0 *s*;
   c) sua velocidade após o corpo ter caído 70 *m*;
   d) o intervalo de tempo necessário para atingir a velocidade de 25 *m/s*;
   e) o intervalo de tempo necessário para o corpo cair $3{,}0 \times 10^2$ *m*.
2. Uma pedra, deixada cair, de uma ponte, atinge a água em 5,0s. Calcule:
   a) a velocidade com que a pedra atinge a água;
   b) a altura da ponte. Despreze a resistência do ar e considere $g = 10\ m/s^2$.

3. Uma pedra é atirada verticalmente para cima e atinge uma altura de 20 *m*. Determine a velocidade com que ela foi lançada. Despreze a resistência do ar e considere $g = 10\ m/s^2$.

4. Uma pedra é atirada verticalmente para cima, com uma velocidade de 20 *m/s*. Ela é apanhada em seu caminho de volta, em um ponto 5,0 *m* acima de onde ela foi lançada. Determine:
   a) a velocidade da pedra quando ela foi apanhada;
   b) a duração de todo o percurso. Despreze a resistência do ar e considere $g = 10\ m/s^2$.

5. Uma bola é arremessada verticalmente para cima e retorna ao ponto de partida em 4,0 *s*. Determine a velocidade inicial. Despreze a resistência do ar e considere $g = 10\ m/s^2$.

6. Um míssil é disparado verticalmente para cima com uma velocidade inicial de $5{,}0 \times 10^2\ m/s$. Supondo desprezível a resistência do ar e $g = 10\ m/s^2$ pede-se calcular:
   a) a altura máxima alcançada;
   b) o tempo gasto para atingir a altura máxima;
   c) a velocidade instantânea após decorridos 60 *s* do movimento;
   d) quando o míssil atingirá a altura de 10 *km*.

Respostas da unidade

1.
   a) $9{,}8\ m/s^2$;
   b) 44 *m*;
   c) 37 *m/s*;
   d) 2,6 *s*;
   e) 7,8 *s*.

2.
   a) 50 *m/s*;
   b) 125 *m*.

3. Supondo para cima positivo: 20 m/s.

4. Supondo" para cima" positivo:

   a) 17 m/s

   b) 3,7 s.

5. Supondo "para cima" positivo: 20 m/s.

6.

   a) $Y_{max.} = 12.500\ m$

   b) $t = 50\ s$

   c) $v = -100\ m/s$ (para esse tempo o corpo já atingiu a altura máxima e está descendo com aceleração g)

   d) $t \approx 27{,}6\ s$ e $t' \approx 72\ s$ (o corpo passa pela altura $h = 10.000\ m$ duas vezes, uma na subida e outra na descida).

Lançamento de projéteis

05

meta

Introduzir o princípio da decomposição de movimentos de Galileu Galilei na análise do movi-mento dos projéteis.

objetivos

Esperamos que, ao final desta unidade, você seja capaz de:

- conhecer as trajetórias nos diversos tipos de lançamento de projéteis;
- calcular a velocidade em um instante qualquer do movimento de um projétil;
- calcular o alcance de um projétil, dadas as condições iniciais de lançamento;
- resolver problemas simples de lançamento de projéteis.

Introdução

O grande cientista Galileu Galilei, nascido em Pisa, na Itália, foi o primeiro a estudar em detalhes os movimentos dos corpos, sendo responsável pela introdução dos métodos experimentais na pesquisa e pela descrição dos fenômenos da natureza por meio da matemática.

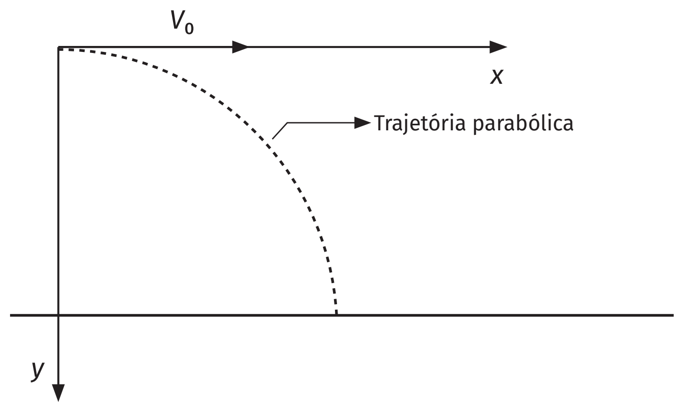
Galileu foi também o primeiro cientista a estudar com detalhes o movimento dos projéteis. Sua grande contribuição para esse estudo foi ter demonstrado que esses tipos de movimento podem ser decompostos em dois, distintos: um horizontal, e outro vertical, o que permite estudá-los com grande facilidade.

Figura 5.1: Galileu Galilei (1564-1642) colocou em xeque a autoridade dos antigos sábios, colaborando com a teoria heliocêntrica por meio da descoberta dos quatro maiores satélites de Júpiter: Europa, Ganimedes, Calisto e Io. Fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:1635_Justus-Suttermans_Galileo-Galilei.jpg

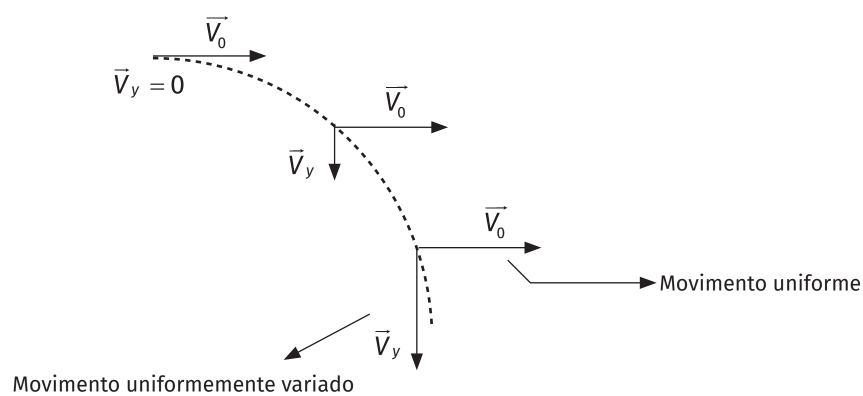
Lançamento horizontal

Quando um corpo é lançado horizontalmente, no vácuo, seu movimento pode ser perfeitamente decomposto em um movimento horizontal, *uniforme*, e em um movimento descendente, naturalmente *acelerado*, devido à gravidade. Dessa forma, o móvel descreverá uma trajetória parabólica. Podemos simplesmente usar as equações do movimento uniforme na horizontal e as equações do movimento uniformemente acelerado (com aceleração da gravidade g) para o movimento vertical, do mesmo modo que estudamos na *queda livre*.

Para descrever o movimento, vamos trabalhar com dois eixos, x e y, como na figura a seguir.



A velocidade em cada ponto é tangente à trajetória, sendo que a componente horizontal, V_0, permanece constante, enquanto a componente vertical V_y, aumenta de acordo com a aceleração g, conforme ilustrado na figura a seguir:



Na horizontal, temos um movimento uniforme onde a velocidade é $V_x = V_0 =$ *constante* e a coordenada x é dada por $x = V_0 t$ (como no movimento uniforme).

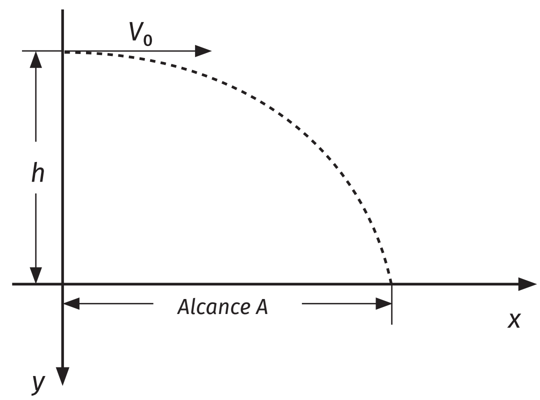
Na vertical, temos um movimento de queda livre, com *aceleração constante* $= g$. Assim, a velocidade varia de acordo com $V_y = gt$ e a coordenada y é dada por $y = \dfrac{gt^2}{2}$.

O alcance

Quando um corpo é lançado horizontalmente, a partir de uma altura h do solo, uma equação bastante útil é a do alcance, que nos dá a coordenada x de onde o corpo cairá. Veja a figura.

Onde o alcance é:

$$A = V_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$$



Ou seja: na direção horizontal temos a equação $x = V_0 t$, (do MU) assim, o alcance é dado por $A = V_0.t_q$ onde t_q é o tempo gasto na queda, podendo ser calculado por $y = h = \frac{g t_q^2}{2}$ (pois o movimento vertical é um MUV).

Situação 1: uma pedra é lançada horizontalmente do alto de um edifício, com uma velocidade inicial de 5 *m/s*. Desprezando a resistência do ar e supondo $g = 10\ m/s^2$, calcule:

a) a posição da pedra 2 segundos após o lançamento;

b) a velocidade da pedra nesse instante.

Solução:

a) A posição é dada pelas coordenadas horizontal *x*, e vertical *y*, onde:

$$x = V_0 t = 5 \times 2 = 10\ m$$

$$y = \frac{gt^2}{2} = \frac{10 \times 2^2}{2} = 20m$$

A posição da pedra é então dada pelo par ordenado (*x*, *y*), num referencial cartesiano. No caso, o par (10, 20), no Sistema Internacional de Unidades (S. I.); ou seja, a grandeza *posição*, em metros (*m*).

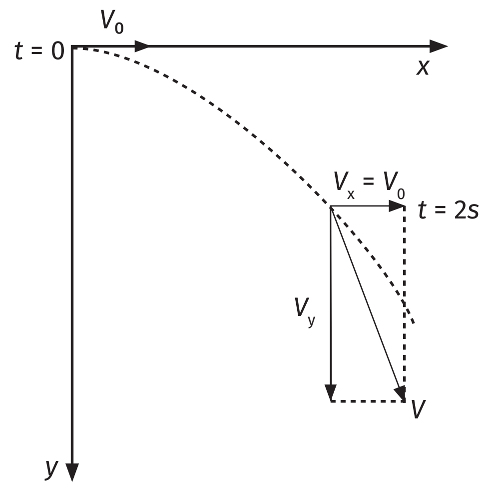
b) Para calcular a velocidade, precisamos calcular suas componentes V_x e V_y e, depois, aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo formado por V, V_x e V_y, conforme ilustrado a seguir.

Temos, assim:

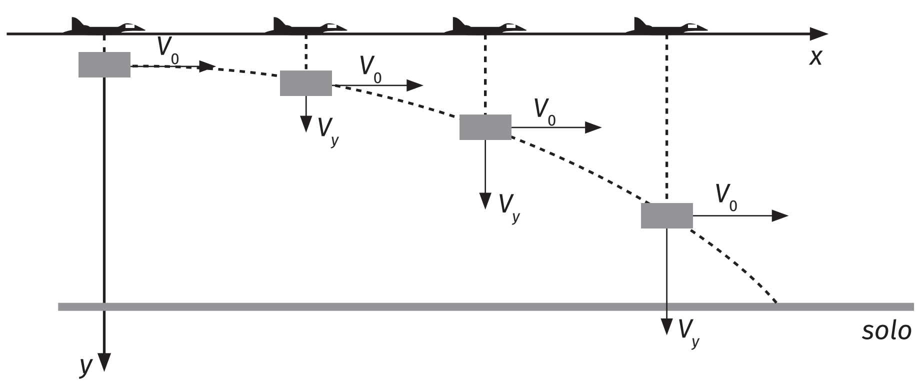
$V_x = V_0 = 5\ m/s$

$V_y = gt = 10 \times 2 \rightarrow V_y = 20\ m/s$

Por Pitágoras: $V^2 = V_x{}^2 + V_y{}^2$ onde $V = \sqrt{5^2 + 20^2} = 20{,}6\,m/s$



Situação 2: um avião de salvamento, voando horizontalmente a 720 *m* de altitude, com velocidade constante de 50 *m/s*, deixa cair um pacote com medicamentos e víveres, para um grupo de pessoas no solo. A que distância, medida na horizontal, o pacote deve ser abandonado do avião, para alcançar as pessoas? (Despreze a resistência do ar e adote $g = 10\ m/s^2$ para a aceleração da gravidade). Veja a ilustração a seguir:



Solução: são dados: $h = 720\ m$, $50\ m/s$ e $g = 10\ m/s^2$. Pede-se o alcance.

À medida que o pacote vai caindo, ele acompanha as posições do avião na direção *x*; e seu movimento, na horizontal, pode ser descrito por $x = A = V_0 t$ (como no movimento uniforme). *A* é o alcance, e *t* é o tempo que o pacote leva para cair (tempo de queda t_q).

Calculemos então o tempo de queda, e depois o alcance.

Na direção vertical, temos *queda livre* (MUV com aceleração *g*). Assim, lembrando que a altitude do avião é $h = 720\ m$, teremos:

$y = h = \dfrac{g(t_q)^2}{2} \rightarrow t_q = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} = \sqrt{\dfrac{2 \times 720}{10}} = \sqrt{144} = 12\ s$ (esse é o tempo de queda).

Logo, para esse tempo, o pacote andará na horizontal uma distância x igual ao alcance A. Lembrando que a velocidade do avião é de $50m/s$, teremos:

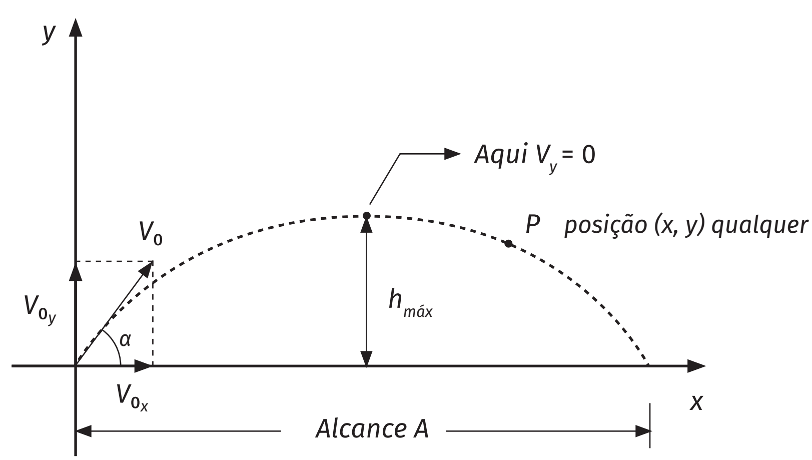
$x = A = V_0 t_q = 50 \times 12 \rightarrow A = 600\ m$. Essa é a distância pedida.

Atividade

- Experimente você mesmo lançar várias vezes uma bolinha de papel ou borracha, verticalmente para cima, e veja o que acontece.
- Faça também, vários lançamentos horizontalmente, e verifique o tipo de trajetória que a bolinha faz até cair (mas não na sala de aula!).
- Pense você: vista da Terra, a trajetória do pacote lançado do avião da Situação 2 é uma linha parabólica. Qual é o tipo de trajetória observada por alguém dentro do avião?

Lançamento oblíquo

No caso do lançamento oblíquo, temos que considerar que, desde o início do lançamento, a velocidade tem componentes tanto verticais quanto horizontais. A trajetória também é parabólica. Como por exemplo, podemos observar numa bola chutada por um goleiro ao bater o "tiro de meta". Vejamos a figura a seguir, na qual a bola é lançada com velocidade inicial V_0, fazendo um ângulo α com a horizontal.



Da mesma forma que no lançamento horizontal, vamos descrever o movimento da bola decompondo-o em um movimento horizontal, no qual não há aceleração (nosso velho conhecido MU) e num movimento vertical, um MUV com aceleração – g, que também já conhecemos. Vamos, então, escrever as equações correspondentes aos dois movimentos:

As velocidades iniciais, agora, são:

$V_{0x} = V_0 \cos\alpha$ (no eixo x) e $V_{0y} = V_0 \operatorname{sen}\alpha$ (no eixo y).

Assim, as equações da velocidade se tornam:

$V_x = V_0 \cos\alpha$ (que é constante no MU)

e

$V_y = V_0 \operatorname{sen}\alpha - gt$ (em que o movimento é MUV retardado, pois V_{0y} é para cima e g é para baixo).

Para as coordenadas x e y, temos:

$x = V_0 \cos\alpha . t$, como no MU,

e $y = V_0 . \operatorname{sen}\alpha . t - \dfrac{g(t_q)^2}{2}$,

como no MU Retardado.

No movimento vertical, em y, onde temos MUV, podemos também usar a equação de Torricelli, do seguinte modo:

$V^2 = V_0^2 + 2a\Delta S$ (Torricelli) com $V = V_y$; $V_0 = V_0 \operatorname{sen}\alpha$; $a = -g$ e $\Delta S = y$.

Podemos escrever: $V_y^2 = (V_0 \operatorname{sen}\alpha)^2 - 2gy$.

O tempo de subida e o tempo de descida

No lançamento oblíquo, temos que o tempo de subida é igual ao tempo de descida, pois tanto as distâncias (h) como as acelerações (g) são as mesmas. O tempo total do lançamento é a soma dos dois. Assim:

a) tempo de subida (para atingir a altura máxima)

Temos que $V_y = V_0 . \operatorname{sen}\alpha - gt$. Na altura máxima $t = t_{subida}$ e $V_y = 0$.

Logo: $0 = V_0 . \operatorname{sen}\alpha - gt_{subida}$. → $gt_{subida} = V_0 . \operatorname{sen}\alpha$

→ $t_{subida} = \dfrac{V_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}$;

b) o tempo total (para subir e descer)

$t_{total} = 2 . t_{subida} = 2 . \dfrac{V_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}$.

A altura máxima

Para o cálculo da altura máxima, aplicamos a Equação de Torricelli:

$V^2 = V_0^2 + 2a\Delta S$ com $V = V_{ymáx} = 0$; $V_0 = V_{0y} = V_0 \operatorname{sen}\alpha$ (na direção y); $a = -g$ e $\Delta S = h_{máx}$.

Temos:

$0^2 = (V_0 \operatorname{sen}\alpha)^2 - 2gh_{máx}$ → $(V_0 \operatorname{sen}\alpha)^2 = 2gh_{máx}$

→ $h_{máx} = \dfrac{(V_0 \operatorname{sen}\alpha)^2}{2g}$.

Situação 3: um projétil (como um disparo de fuzil) é lançado do solo para cima, segundo um ângulo de 60° com a horizontal, com velocidade de 400 m/s (supor desprezível a resistência do ar).

Dados extras:

aceleração da gravidade $g = 10\ m/s^2$;

$\operatorname{sen}60^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos 60^o = 0,5$..

Calcule o que se pede:

a) o tempo para o projétil atingir a altura máxima;

b) a altura máxima;

c) o tempo para o projétil voltar ao solo;

d) o alcance;

e) a velocidade no instante t = 8 s;

f) a posição do projétil também em = 8 s.

Solução:

a) O tempo para o projétil atingir a altura máxima:

Temos: $t_{subida} = \dfrac{V_0 sen\alpha}{g}$.

Lembrando dos dados: o ângulo que a velocidade inicial (V_0 = 400 m/s) faz com a horizontal é de 60°; g = 10 m/s^2; $sen60^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos 60^o = 0,5.$.

Assim teremos o tempo de subida:

$$t_{subida} = \frac{V_0 sen\alpha}{g} = \frac{400\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{10} = \frac{400\sqrt{3}}{2\times 10} = \frac{400\times 1,73}{20} = 20\times 1,73 = 34,6\,s$$

b) A altura máxima:

Temos: $h_{máx} = \dfrac{(V_0\ sen\alpha\ )^2}{2g}$

Substituindo os valores dados:

$$h_{máx} = \frac{(V_0 sen\alpha)^2}{2g} = \frac{\left[400\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]^2}{2\times 10} = \frac{400^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{20} = \frac{400^2\ \frac{3}{2^2}}{20} = \frac{400^2\ \frac{3}{4}}{20} = \frac{400^2\times 3}{20\times 4} =$$

$$h_{máx} = \frac{400^2\times 3}{80} = \frac{160.000\times 3}{80} = \frac{48.000}{8} = 6000 = 6,0\times 10^3\,m$$

c) O tempo para voltar ao solo (esse tempo é igual ao dobro do tempo de subida que calculamos no item a):

t_{total} = 2.t_{subida} = 2 × 34,6 = 69,2 s.

d) O alcance (vamos calcular a maior distância percorrida na direção x):

$A = V_0 \cos\alpha t_{total}$ = 400 × 0,5 × 69,2 = 13.840m = 1,38 . 10^4 m.

e) A velocidade em t = 8 s. Para calcularmos a velocidade V, temos que calcular V_x e V_y.

Na direção horizontal (direção x), temos movimento uniforme (MU), então V é constante: $V_x = V_0 \cos\alpha$ = 400 × 0,5 = 200 m/s.

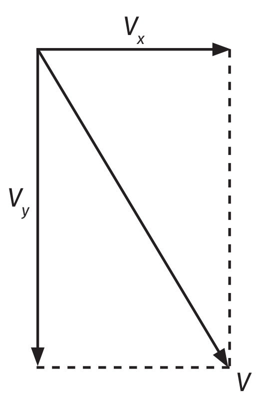
Na direção vertical (direção *y*), temos movimento uniformemente retardado, pois a velocidade é inicialmente *para cima* e a aceleração (da gravidade) é para baixo. Assim, usando a equação da velocidade do MUV:

$$V_y = V_0 \operatorname{sen}\alpha - gt = 400 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 10 \times 8 = 266\, m/s$$

Finalmente, para calcular a velocidade, usamos Pitágoras:

$V^2 = V_x^2 + V_y^2$ logo $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$.

Veja a figura:



Assim:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{200^2 + 266^2} \rightarrow \boldsymbol{V = 333 \, m/s}$$

f) A posição do projétil em $t = 8\ s$ (temos que calcular x e y em $t = 8\ s$): $x = V_0 \cos\alpha t = 400 \times 0{,}5 \times 8 = 1600 = 1{,}6 \times 10^3\ m$ (como em um MU) e

$$y = V_0 \operatorname{sen}\alpha\, t - \frac{gt^2}{2} = 400 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 8 - \frac{10 \times 8^2}{2} = 2451 m = 2{,}4 \times 10^3 m$$ (como em um MUV).

Resumo

Nesta unidade, estudamos um tipo de movimento curvilíneo (no caso, uma parábola) e pudemos ver a importância do método de Galileu Galilei para decompor o movimento, permitindo estudá-lo com facilidade.

lá na plataforma

Na Unidade 5 de nosso ambiente virtual, no tema – Lançamento de Projéteis, *siga as orientações de desenvolvimento da atividade proposta. Acesse, por meio do ambiente,* objetos de aprendizagem de simulação computacional, *[https://phet.colorado.edu/pt_BR/] da Universidade de Boulder, Colorado.*

Perceba como a atividade/recurso dialoga diretamente com o tema de nossa aula.

Exercícios

lá na plataforma

Informação complementar: na Unidade 5 de nosso ambiente virtual, no tema – Lançamento de Projéteis, *siga as orientações pedagógicas de suporte à resolução de exercícios propostos a seguir, que foram pré-gravadas em áudio, no formato [mp4].*

1. Lembre-se de que, num lançamento horizontal, temos $x = V_0.t$ (pois na direção horizontal, x, temos MU). Assim, o alcance pode ser dado por $A = V_{0x}.t_q$, onde tq é o tempo gasto na queda.

O tempo de queda, por sua vez, pode ser calculado pela equação do movimento na direção vertical, que é um MUV, isto é: $y = h = \frac{g t_q^2}{2}$, onde h é a altura da queda.

Utilize essas equações para mostrar que o alcance pode ser escrito como $A = V_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Sugestão: elimine o t entre as duas equações!

(discuta com os seus colegas e com o seu professor a sua solução)

2. Uma esfera rola com velocidade constante de 10 m/s sobre uma mesa horizontal. Ao abandonar a mesa, ela fica exclusivamente sob a ação da gravidade, atingindo o solo em um ponto situado a 5 m da borda da mesa, distância tomada na direção horizontal. Suponha desprezível a resistência do ar e $g = 10\ m/s^2$. Calcule:

   a) o tempo de queda;

   b) a altura da mesa;

   c) a velocidade da esfera imediatamente antes de atingir o solo.

3. Um avião voa horizontalmente a $2 \times 10^3\ m$ de altura, com velocidade de $2{,}5 \times 10^2\ m/s$, no instante em que abandona um objeto. Considere desprezível a resistência do ar e $g = 10\ m/s^2$. Pede-se determinar:

   a) o tempo de queda do objeto;

   b) a distância que o objeto percorre na horizontal até atingir o solo;

   c) a velocidade do objeto ao tocar o solo (lembre-se que você deve calcular V_x e V_y; e aplicar Pitágoras para calcular V).

4. Um corpo é lançado obliquamente no vácuo, com velocidade inicial 100 m/s, numa direção que forma, com a horizontal, um ângulo θ, tal que $sen\theta = 0{,}80$ e $cos\theta = 0{,}60$. Adotando $g = 10\ m/s^2$, determine:

   a) os valores das componentes horizontal e vertical da velocidade, no instante de lançamento;

   b) a altura máxima atingida pelo corpo;

   c) o alcance máximo.

5. Um projétil lançado obliquamente a partir do solo descreve uma trajetória parabólica, tocando o solo novamente num ponto situado a 10 *m* do ponto de lançamento. Sendo 10 *m*/*s* o menor valor da velocidade, durante o trajeto, determine a duração do movimento. Despreze a ação do ar e adote $g = 10\ m/s^2$.

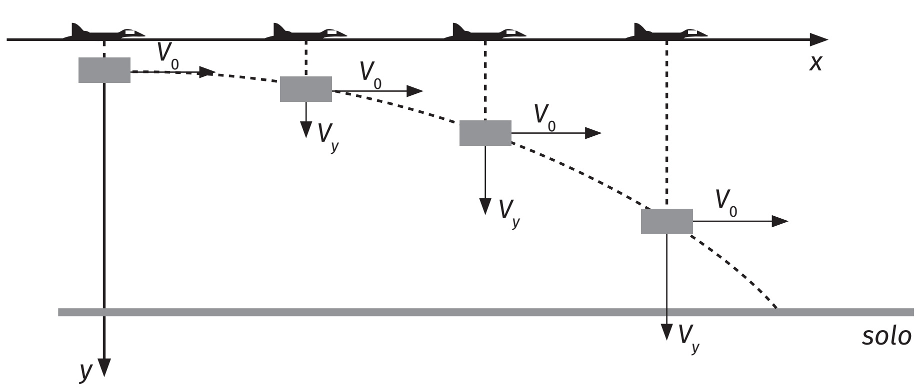
Respostas da unidade

Atividade

Se você realmente realizou o experimento, deve ter verificado que ao lançar a bolinha para cima, assim que ela deixa sua mão, isto é, imediatamente após o lançamento, a velocidade da bolinha vai diminuindo, isto porque no caso a trajetória da bolinha é uma vertical para cima, suas *velocidades* estão orientadas também *para cima* e a *aceleração* (da gravidade) é *para baixo*. Sendo assim, a velocidade vai diminuindo até a bolinha chegar na altura máxima, onde a velocidade é instantaneamente nula. A partir desse instante, a bolinha começa a descer, a velocidade passa a ter o mesmo sentido que a aceleração, e aumenta gradativamente até cair...

No caso do lançamento horizontal temos a composição de dois movimentos: para frente e para baixo, ao mesmo tempo. Você de ter observado que a trajetória é uma curva, para baixo, cada vez mais acentuada, esta curva é chamada de parábola. Vamos mostrar isto mais adiante, ao escrevermos a equação da trajetória como pedido no exercício de número 5 da unidade 5 do livro de exercícios.

Quanto à trajetória do pacote lançado do avião (na **Situação 2**) para um observador fixo na Terra, a trajetória é curva, mas um observador que se move com o avião vê o pacote se afastar deste em queda livre, numa linha reta. Observe a figura a seguir e imagine que você está dentro do avião observando o pacote cair. À medida que o pacote se move para a direita (visto da Terra), o avião também segue para a direita, acompanhado o pacote. O resultado é que quem está dentro do avião vê o pacote se afastar em uma *linha reta*.



Exercícios

1. Solução:

Na direção horizontal, temos como no movimento uniforme, $x = A = V_{0X}t_q$ (*).

Na direção vertical (o movimento de queda), temos $y = \frac{gt^2}{2}$ como no movimento uniformemente variado da queda livre.

Assim com $y = h$ e $t = t_q$ (o tempo de queda), teremos:

$$y = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow h = \frac{gt_q^2}{2} \Rightarrow t_q^2 = \frac{2h}{g} \Rightarrow t_q = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (**)$$

Substituindo *tq* de (**) em (*), vem: $A = V_{0X}\sqrt{\frac{2h}{g}}$ como queríamos mostrar.

2. São dados: a velocidade inicial da esfera ao abandonar a mesa, que é na direção horizontal, V_{0X} = 10 *m/s*, a aceleração da gravidade, g = 10 *m/s²* e a distância horizontal desde a borda da mesa até atingir o solo. Essa distância é o alcance, A = 5,0 *m*.

Veja a solução do exercício anterior (número dois) para se orientar na solução desse exercício.

Respostas:

a) 0,50 *s*;
b) 1,25 *m*;
c) 11,2 *m/s*.

3. Dica: leia atentamente o enunciado e veja que são dados: $h = 2{,}0 \times 10^3$ *m* = 2000 *m* e a velocidade (horizontal) $V_{0X} = 2{,}5 \times 10^2$ *m/s* = 250 *m/s*.

a) 20 *s*;
b) $5{,}0 \times 10^3$ *m*;
c) $3{,}2 \times 10^2$ *m/s*.

4.

a) V_{0x} = 60 *m/s* e V_{0y} = 80 *m/s*;
b) 320 *m*;
c) 960 *m*.

5. 1,0 s.

O movimento circular uniforme (MCU)

06

meta

Introduzir os conceitos de ângulo central, velocidade angular, período e frequência dos movimentos periódicos, em particular, do movimento circular.

objetivos

Esperamos que, ao final desta unidade, você seja capaz de:

- identificar e distinguir as grandezas envolvidas no estudo dos movimentos circulares;
- conhecer e identificar as relações entre as grandezas angulares e as grandezas lineares correspondentes;
- resolver problemas simples de movimento circular uniforme.

Introdução

Os movimentos que podemos observar em nosso cotidiano são, em grande parte, circulares, pelos quais os objetos executam um movimento de rotação em torno de um eixo. Como exemplos, podemos citar as rodas dos automóveis e das bicicletas, os motores elétricos de um modo geral, as hélices dos helicópteros, as rodas gigantes dos parques de diversões e assim por diante. Grandes objetos, como os planetas, também giram em torno de um eixo, como a própria Terra e a Lua, assim como todos os planetas do nosso sistema solar e, inclusive, os inúmeros exoplanetas recentemente descobertos, que orbitam estrelas muito distantes de nós e de nosso Sol. Até mesmo a nossa galáxia, a Via Láctea, que contém bilhões de estrelas, possuindo um diâmetro de cerca de 100 anos-luz (um ano-luz equivale à distância percorrida pela luz em um ano, ≈ 9.400.000.000.000 de quilômetros), gira em torno de um eixo que passa pelo centro dela!

A maioria dos planetas de nosso sistema solar, assim como suas luas, têm trajetórias que se aproximam bastante do movimento circular. Outros, como Plutão, atualmente chamado de "planeta anão", e também a maioria dos cometas, têm órbitas parabólicas.

Figura 6.1: A Via Láctea através do telescópio Spitzer. Fonte: https://www.nasa.gov/image-feature/revealing-the-milky-way-s-center. Créditos: NASA.

A velocidade

Num movimento qualquer, a velocidade tem o mesmo sentido do movimento e direção tangente à trajetória, como podemos ver na ilustração a seguir.

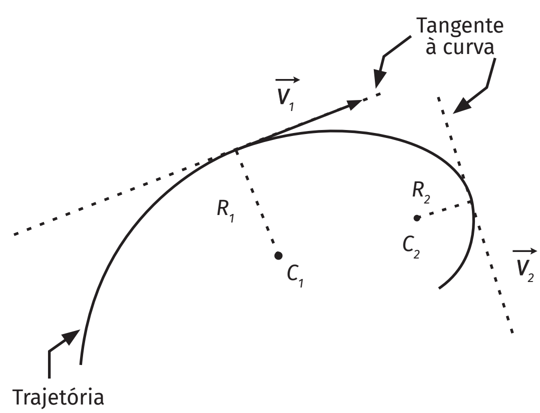


Figura 6.2: Na figura, C_1 e C_2 são os centros das circunferências descritas pelos raios R_1 e R_2; já V_1 e V_2 são as velocidades descritas nos pontos da trajetória que possuem curvaturas de raios R_1 e R_2.

O movimento circular uniforme (MCU)

No movimento circular uniforme, a trajetória é uma circunferência de círculo. O movimento é dito *uniforme* porque *a velocidade é constante em módulo*, embora *varie sua direção* em cada ponto da trajetória, como ilustrado a seguir.

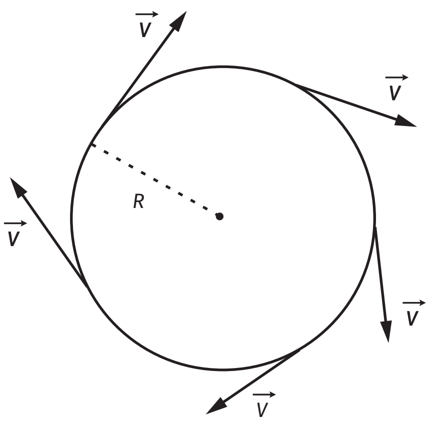


Figura 6.3

Ao estudarmos os movimentos curvilíneos, de um modo geral, e, em particular, o movimento circular, é importante levarmos em conta o caráter vetorial das grandezas, pois a direção do movimento varia instante após instante e não podemos mais tratar matematicamente a velocidade e a aceleração como grandezas escalares, assim como no movimento retilíneo. Além disso, para este estudo, é necessário recordarmos um pouco nossos conhecimentos sobre os ângulos.

Ângulo central

Para iniciarmos os estudos dos movimentos circulares, de um modo geral, é necessário definirmos algumas grandezas matemáticas que serão muito úteis para a descrição e a compreensão dos assuntos que vamos abordar.

Quando nos referirmos a um ângulo, usaremos uma letra grega, sendo as mais utilizadas as letras α (alfa), β (beta), θ (teta) ou γ (gama).

Definição de ângulo central

// atenção

Ângulo central é, por definição, a razão entre a medida dos comprimentos do arco e o raio da circunferência.

Vamos considerar um ângulo central, **θ**, com vértice no centro de um círculo de raio **R**, como ilustrado na figura a seguir:

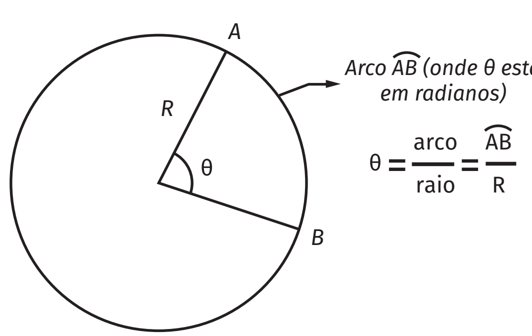


Figura 6.4

Definido dessa forma, o ângulo é medido em ***radianos***.

Definição de radiano (*rad*)

// atenção

Um radiano é a medida do ângulo central que subentende um arco igual ao raio.

Um radiano corresponde a um ângulo de aproximadamente 57° (quando medido em graus). Veja que ele é obtido pela razão entre dois comprimentos: o *comprimento do arco dividido pelo comprimento do raio*. Por isso o *radiano* é uma *grandeza adimensional* (não tem dimensão).

Situação 1: observe, na figura a seguir, que, quando o ângulo central θ corresponder a uma volta completa, isto é, quando $\theta = 360°$, teremos um arco de comprimento $2\pi R$ (o perímetro da circunferência).

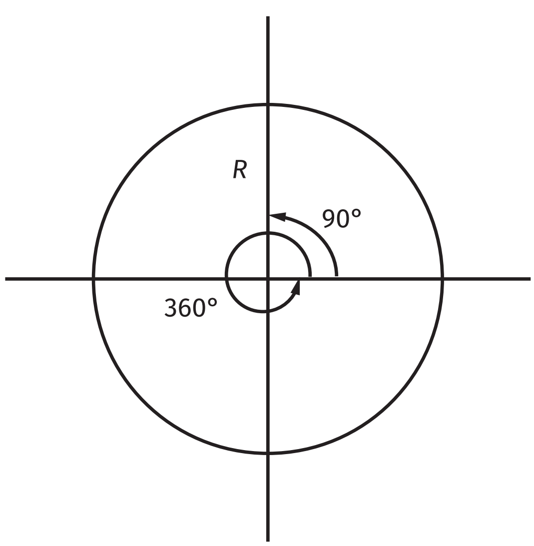


Figura 6.5

Solução:

Para uma volta completa (360°), teremos:

$$\theta = \frac{arco}{raio} = \frac{AB}{R} \Rightarrow 360° = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi \ (rad)$$

Do mesmo modo, para um quarto de volta (ângulo reto = 90°), teremos:

$$90° = \frac{\frac{1}{4}(2\pi R)}{4R} = \frac{\pi}{2} \ (rad)$$

Atividade

1. Faça você: encontre o valor dos ângulos de 180° e 60° em radianos. *Dica*: lembre-se de que a circunferência inteira (360°) corresponde a 2π *rad*.

O *Número pi* (π)

Você se lembra da definição e do valor do número π?

// atenção

O número π é a razão entre o comprimento de uma circunferência qualquer e seu diâmetro.

Esse número tem sempre o mesmo valor para qualquer circunferência. Vários povos da antiguidade (como os chineses e os gregos) já o haviam descoberto muitos séculos atrás.

Um valor aproximado para o pi é $\pi \cong 3{,}1415926538\ldots$ e assim por diante.

O valor de π é um número *não periódico* (não fica repetindo as dízimas) e é, também, *irracional* (não pode ser obtido pela razão entre dois números inteiros).

>> saiba mais

Contraexemplo para o número irracional: o número racional

Um valor bem conhecido é o do número racional obtido pela divisão de 10 por 3, cujo resultado é uma "dízima periódica".

$\frac{10}{3} = 3{,}3333333333333\ldots$ *(e assim por diante)*

Nota: na maioria dos problemas e exercícios, podemos usar o valor aproximado de $\pi = 3{,}1416$ ou, ainda, $\pi = 3{,}14$.

A velocidade angular (ω)

Chamaremos a velocidade angular de ω (*ômega minúsculo*). Sua definição é análoga à da velocidade linear, $V = \frac{\Delta S}{\Delta t}$.

Para um corpo que executa um movimento de rotação, a *velocidade angular é definida como*:

$$\omega = \frac{\textit{deslocamento angular}}{\textit{tempo gasto}} \text{ ou } \omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Situação 2: consideremos um móvel que executa 10 voltas (10 × 2π *rad.*) em 5 segundos. Vamos calcular a sua velocidade angular.

Solução:

Aplicando a definição de velocidade angular teremos:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{10 \times 2\pi}{5} = \frac{20\pi}{5} = 4\pi$$

$$= 4 \times 3{,}14 \approx 12{,}6 \; rad / s$$

Nota: o símbolo ≈ significa "semelhante a", no sentido de que o valor que vem depois dele é bastante próximo do anterior. Nós o utilizamos pela necessidade de "arredondar" o valor de π, tendo em vista que é um número irracional, como vimos anteriormente.

A relação entre grandezas angulares e grandezas lineares

Se um móvel percorre uma circunferência, seu caminho percorrido, ΔS, é igual ao arco descrito sobre ela. Dessa forma, podemos relacionar as grandezas angulares com as grandezas lineares que já estudamos. Veja a figura a seguir:

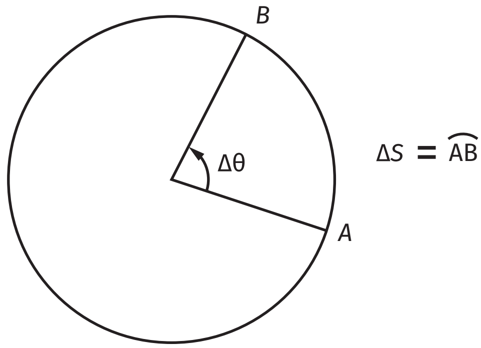


Figura 6.6

Usando a definição de ângulo central, podemos escrever:

$$\Delta\theta = \frac{\overset{\frown}{AB}}{R} = \frac{\Delta S}{R}$$

Assim, $\Delta S = \Delta\theta \times R$

Dividindo ambos os membros por Δt, temos: $\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \times R$. Logo: $V = \omega R$, ou seja, a velocidade escalar é igual ao produto da velocidade angular pelo raio da circunferência.

O período (T)

// atenção

Chamamos de período de um MCU ao tempo gasto para o móvel executar uma rotação completa. Vamos denominar o período por T.

Vejamos alguns períodos bem conhecidos:

- período de rotação da Terra: T_{Terra} = 1 dia = 24 *h*;
- período de rotação da Lua em torno da Terra: $T_{Lua} \cong$ 28 dias;
- período de rotação do ponteiro dos segundos de um relógio: T = 60 s.

A unidade S. I. de período é o segundo (s).

A frequência (f)

Chamamos de *frequência* ao número de repetições por unidade de tempo para qualquer acontecimento que se repete regularmente no tempo. No caso do movimento circular, a frequência é o número de voltas por unidade de tempo. Como o período é o tempo gasto para uma volta completa, a frequência será uma volta por período.

Assim: $f = \frac{1}{T}$ (a unidade de frequência é o inverso da unidade de tempo).

Pela definição da frequência, podemos ver que: *unidade de frequência* = 1/*s* (ou s^{-1}). Podemos também dizer *rotações por segundo* (*rps*), ou, ainda, *hertz* (*Hz*), em homenagem ao Físico alemão Heinrich Hertz, e o significado será o mesmo.

Figura 6.7

Resumindo:

No S. I.:

unidade de frequência = $\frac{1}{s} = s^{-1}$ = 1 *rps* = 1 *Hz*

Situação 3: considere um disco das antigas vitrolas, que executam 33 rotações por minuto (*rpm*). Vamos calcular sua frequência de rotação no S. I.

Solução:

$$f = \frac{33}{1}\left(\frac{rotações}{min}\right) = \frac{33}{60\,segundos} \approx 0,55\ \frac{1}{s}$$

ou $0,55\,s^{-1}$ ou ainda $0,55\,Hz$

Relação entre a velocidade angular *ω* e o período *T*.

Veja que, por definição, o período é o tempo para o móvel completar uma volta. Como uma volta corresponde a um deslocamento angular de 2*π* radianos, teremos;

Numa volta completa, o deslocamento angular é *θ = 2π*

O tempo para completar uma volta corresponde ao período: *Δt = T*

Assim: $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$

Isto é: $\omega = \frac{2\pi}{T}$

A aceleração no MCU

Você pode se perguntar: mas como pode? O movimento não é uniforme? Como temos aceleração?

Acontece, que no movimento circular uniforme, a *velocidade tem módulo constante*, mas *muda de direção* o tempo todo. A *aceleração*, nesse caso, é responsável pela *variação na direção da velocidade com o tempo*.

No MCU, a aceleração ($\boldsymbol{a_c}$) é *perpendicular à velocidade* e tem o sentido do *centro da trajetória*. Ela é chamada de aceleração *centrípeta*. Veja a figura ilustrativa a seguir, que nos mostra a representação da velocidade em dois pontos distintos da trajetória:

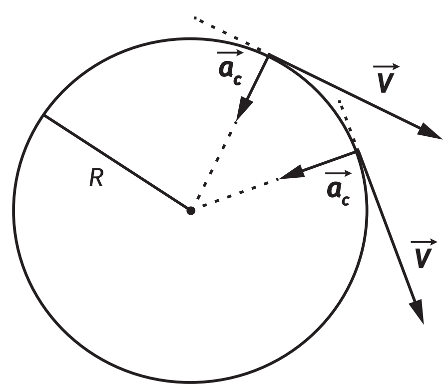


Figura 6.8

Observe que a aceleração centrípeta ($\boldsymbol{a_c}$) é sempre *perpendicular* à trajetória, assim, ela é também chamada de *aceleração normal.*

De um modo geral, a aceleração centrípeta é dada por:

$$\boldsymbol{a_c} = \frac{\boldsymbol{V}^2}{R}$$

Onde $\boldsymbol{V}$ é a velocidade e R, o raio da curva naquele ponto (mesmo que não seja uma circunferência). Na unidade 7 mostraremos essa equação com mais detalhes.

Note que, quanto *maior* a velocidade do móvel ($\boldsymbol{V}$), ou quanto *menor* o raio da curva (R), *maior* será a aceleração centrípeta ($\boldsymbol{a_c}$).

Unidade S.I. de aceleração centrípeta

Vamos escrever as grandezas V e R em termos de suas unidades S. I.

Como $\boldsymbol{a_c} = \frac{\boldsymbol{V}^2}{R}$, temos que a unidade de a_c será dada por:

$$\boldsymbol{a_c} = \frac{\left[\boldsymbol{V}^2\right]}{[R]} = \left[\frac{\left(\frac{m}{s}\right)^2}{m}\right] = \left[\frac{\frac{m^2}{s^2}}{m}\right] = \left[\frac{m^2}{s^2} \times \frac{1}{m}\right] = \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Relação entre a aceleração centrípeta a_c e a velocidade angular ω

Temos:

$$\boldsymbol{a_c} = \frac{\boldsymbol{V}^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} \quad \text{logo, } \boldsymbol{a_c} = \omega^2 R$$

Situação 4: vamos calcular o período e a velocidade angular de um móvel que executa um MCU com 100 rotações por segundo.

Solução:

Cálculo do período:

temos que a frequência é $f = 100$ *rps* ou 100 *Hz*, assim, o período será:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{100} = 0{,}01 \text{ s}$$

Cálculo da *velocidade* angular:

como $\omega = \frac{2\pi}{T}$, teremos:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}01} = 200\pi\left(\frac{rad}{s}\right) \approx 200 \times 3{,}14 \approx 628 \, {}^{rad}\!/_{s}$$

Situação 5: uma roda d'água executa uma volta em 1 minuto. Vamos calcular:

a) a velocidade angular da roda (ω);

b) o deslocamento angular total $\Delta\theta$, após decorridos t = 5 s do movimento.

Solução:

a) A velocidade angular é dada por $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$, assim, precisamos do período T.

Como a roda d'água executa uma volta por minuto, temos T = 1 min = 60 s e a velocidade angular será, então:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30} rad/s$$

b) O deslocamento angular $\Delta\theta$, após decorridos t = 5 s do movimento (esse é o nosso Δt). Assim:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow \Delta\theta = \omega\Delta t \Rightarrow \Delta\theta = \frac{\pi}{30} \times 5 = \frac{\pi}{6} rad$$

Situação 6: supondo que o raio da roda d'água do exercício anterior tenha 2 m de comprimento, calcule a aceleração centrípeta de um ponto de sua extremidade.

Solução: já havíamos calculado a velocidade angular: $\omega = \frac{\pi}{6} rad/s$.

Como $a_c = \omega^2 R$, teremos, para R = 2 m, conforme foi dado:

$$a_c = \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \times 2 = \frac{\pi^2}{36} \times 2 = \frac{\pi^2}{18} \cong 0{,}54831\ldots \Rightarrow a_c \cong 0{,}55 = 5{,}5 \times 10^{-1} m/s^2$$

Nessa resposta, fizemos o "arredondamento" do número 0,54831... para apenas dois algarismos e, depois, escrevemos a expressão em "linguagem científica". Esses temas serão abordados posteriormente, ao final do livro.

Resumo

Nesta unidade, estudamos o movimento circular uniforme, no qual o módulo da velocidade permanece constante, mas sua direção varia todo o tempo, devido à aceleração dirigida para o centro da trajetória, a aceleração centrípeta. Na próxima unidade, estudaremos mais detalhes sobre os movimentos com trajetórias curvas.

lá na plataforma

Na Unidade 6 de nosso ambiente virtual, no tema Movimento Uniforme Circular, *siga as orientações de desenvolvimento da atividade proposta. Acesse, ainda, alguns objetos de aprendizagem de simulação computacional, no ambiente [https://phet.colorado.edu/pt_BR/] da Universidade de Boulder Colorado.*

Perceba como a atividade/recurso dialoga diretamente com o tema de nossa aula.

Exercícios

lá na plataforma

Informação complementar: na Unidade 6 de nosso ambiente virtual, no tema Movimento Circular Uniforme, *siga as orientações pedagógicas de suporte à resolução de exercícios propostos a seguir, no texto, que* foram pré-gravadas em áudio, no formato [mp4].

1. Uma turbina gira com uma velocidade de $9{,}0 \times 10^2$ *rpm*. Determine:

    a) a velocidade angular de um ponto da pá da turbina, em radianos por segundo;

    b) a velocidade tangencial de um ponto da extremidade de uma das pás, sabendo-se que a distância entre o eixo de rotação e a extremidade da pá é igual a 20 *cm*.

2. Uma correia passa por uma polia com 25 *cm* de raio (veja a figura a seguir). Sabendo que um ponto da correia tem velocidade 5,0 *m/s*, determine a velocidade angular da roda em rotações por segundo (*rps*).

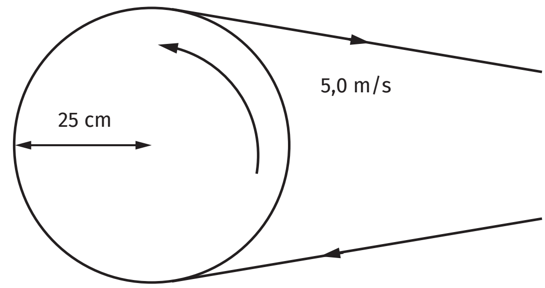


Figura 6.9

3. Um objeto de massa $2{,}0 \times 10^2$ *g* é preso à extremidade de uma corda e posto a girar em torno de um ponto fixo, com velocidade angular de 3,0 *rps*, em um círculo supostamente horizontal de raio 1,2 *m*. Determine o valor da aceleração centrípeta.

4. Um satélite para observação de queimadas na Amazônia circunda a Terra numa altitude de $6{,}0 \times 10^2$ *km*, onde a aceleração da gravidade vale 8,2 m/s^2. Determine o período da órbita do satélite. Dado: o raio da Terra vale aproximadamente $6{,}37 \times 10^3$ *km*.

5. Um satélite artificial terrestre se move em órbita circular, numa altitude $3{,}3 \times 10^2$ *km*. O módulo de sua velocidade é 7,7 *km/s*. Determine:

    a) o valor da aceleração centrípeta do satélite;

    b) o valor da aceleração da gravidade na altitude de $3{,}3 \times 10^2$ *km*. Dado: o raio da Terra vale aproximadamente $6{,}37 \times 10^3$ *km*.

6. Calcule a aceleração da Terra em seu movimento de translação em torno do Sol. Considere a órbita circular e de raio $1{,}5 \times 10^{11}$ *m*.

7. Calcule em radianos:

a) 30º; b) 45º; c) 60º; d) 80º.

8. Determine a velocidade angular do ponteiro dos segundos de um relógio em *rad/s*.

9. Calcule o comprimento de um arco subentendido por um ângulo central de 90º, em uma circunferência com 10 *m* de raio.

10. O raio da Terra é de cerca de 6.400 *km*. Calcule a velocidade linear *V* de um ponto da superfície terrestre situada no equador terrestre em *km/h*. Suponha a Terra perfeitamente esférica.

Respostas da unidade

Atividade

Encontrar o valor dos ângulos de 180° e 60° em radianos.

Lembrando que, por definição, $\theta = \frac{arco}{raio}$, teremos:

Para $\theta = 180°$, o arco correspondente equivale à metade da circunferência, ou seja: tem o comprimento de $\frac{2\pi R}{2} = \pi R$.

Assim: $\theta = 180^o = \frac{\pi R}{R} = \pi\, rad$.

Já para θ = 60°, o arco corresponde a $\frac{1}{6}$ da circunferência, isto é, $\frac{360^o}{6}$ = 60°.

Assim: $60^o = \frac{2\pi}{6} = \pi/3\, rad$.

Exercícios

1.
   a) 94 *rad/s;*
   b) 19 *m/s*.

2. 3,2 *rps*.

3. $4{,}3 \times 10^2$ *m/s*.

4. 97 *min*.

5.
   a) 8,9 m/s^2;
   b) 8,9 m/s^2.

6. $6{,}0 \times 10^{-3}$ m/s^2.

7.
   a) $\frac{\pi}{6}$;
   b) $\frac{\pi}{4}$;
   c) $\frac{\pi}{3}$;
   d) $\frac{\pi}{9}$.

8. $\frac{\pi}{30}$ *rad/s*.

9. 5π *m* ≅ 15,7 *m*.

10. *V* ≅ 1.676 *km/h* ≅ $1{,}68 \times 10^3$ *km/h*.

O movimento circular uniformemente variado (MCUV)

07

metas

Introduzir os conceitos de aceleração angular, de aceleração centrípeta e de aceleração tangencial. Definir as relações entre as grandezas angulares e aplicar esses conceitos em problemas de MCUV.

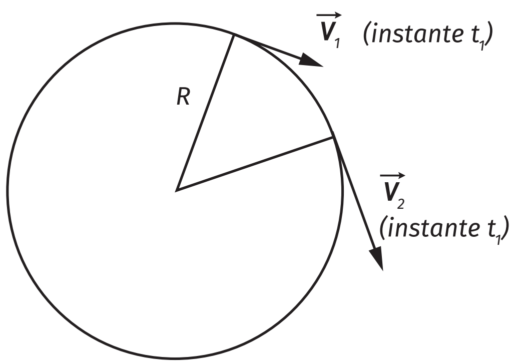
objetivos

Esperamos que, ao final desta unidade, você seja capaz de:

- identificar as grandezas envolvidas no estudo do MCUV;
- reconhecer e diferenciar aceleração centrípeta, aceleração tangencial e identificar qual a relação entre elas;
- reconhecer quando o movimento é uniformemente acelerado ou retardado;
- aplicar os conceitos e as equações na solução de problemas de MCUV.

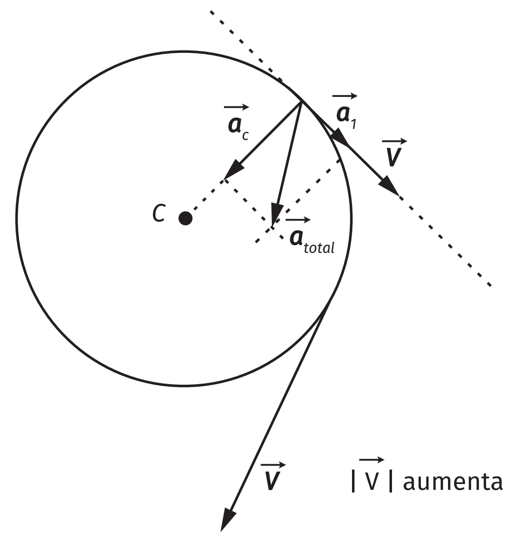
Introdução

Dizemos que um móvel executa um movimento circular uniformemente variado quando sua trajetória é uma circunferência e o módulo de sua velocidade varia uniformemente no tempo. Nesse tipo de movimento, a velocidade varia tanto em módulo quanto em direção. Veja, na figura a seguir, uma ilustração do que acabamos de dizer:



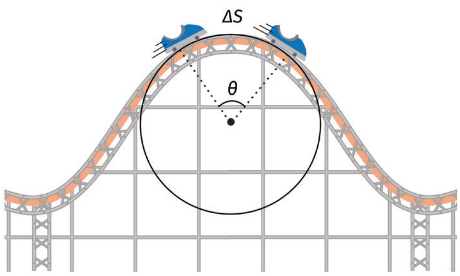
A velocidade tangencial, a aceleração tangencial e a aceleração centrípeta

No MCUV a *aceleração total* é responsável pela variação *tanto do módulo quanto da direção de* ***V***. Isto significa que a aceleração tem uma parte *centrípeta*, dirigida ao centro da trajetória, que é responsável pela variação da *direção* da velocidade, que chamaremos de $\boldsymbol{a}_C$. A *aceleração total* tem também uma parte, na mesma direção da velocidade, que é tangencial à trajetória e é responsável pela *variação do módulo da velocidade*. Esta é chamada de *aceleração tangencial* $\boldsymbol{a}_t$. Veja a ilustração a seguir:



A velocidade tangencial

A velocidade ***V***, por sua vez, é chamada de *velocidade tangencial*, por ser sempre tangente à trajetória, em qualquer tipo de movimento (mesmo para trajetórias que não sejam uma circunferência). A velocidade tangencial pode ser escrita em *cada instante*, como: $\boldsymbol{V} = \frac{\Delta \boldsymbol{S}}{\Delta t}$. No caso dos movimentos curvilíneos, o $\Delta \boldsymbol{S}$ corresponde ao comprimento de um arco, onde consideramos um $\Delta \boldsymbol{S}$ muito pequeno, tendendo a zero, correspondendo a um intervalo de tempo muito pequeno, também tendendo a zero. O resultado é a velocidade naquele ponto específico (velocidade instantânea).



A aceleração tangencial

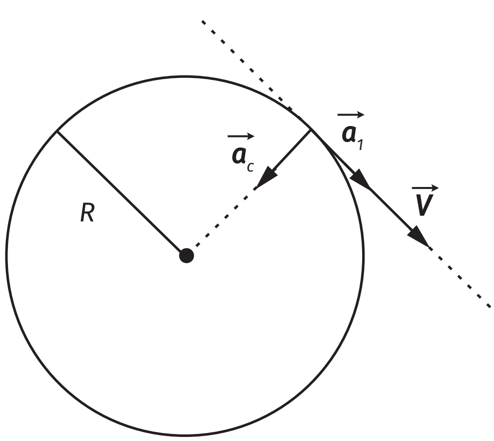
A aceleração tangencial pode ser escrita como: $\boldsymbol{a}_t = \frac{\Delta \boldsymbol{V}}{\Delta t}$.

// atenção

A aceleração tangencial indica como varia o módulo da velocidade com o tempo.

A aceleração centrípeta

Nos movimentos em trajetórias curvas, como no caso do MCUV, teremos também uma *aceleração centrípeta, dirigida sempre para o centro da trajetória*, que nos indica como varia a direção da velocidade com o tempo. Veja a ilustração a seguir:



A aceleração centrípeta pode ser escrita em função da velocidade tangencial e do raio da curva em um determinado ponto da trajetória como: $\boldsymbol{a}_c = \frac{\boldsymbol{V}^2}{R}$.

Situação 1: para ilustrar o que estamos dizendo, imagine uma bicicleta que entra numa curva de 50 metros de raio com velocidade de 4 m/s e sai da curva, 5 segundos depois, com velocidade de 10 m/s. Vamos calcular a aceleração tangencial e a aceleração centrípeta no início do movimento, ao entrar na curva, e no final, ao sair da curva.

Solução:

São dados: $\boldsymbol{V}_{\text{inicial}} = 4\ m/s$; $\boldsymbol{V}_{\text{final}} = 10\ m/s$ e $\Delta t = 5\ s$, pede-se $\boldsymbol{a}_t$ e $\boldsymbol{a}_c$.

A aceleração tangencial será:

$$\boldsymbol{a}_t = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_f - V_i}{\Delta t} = \frac{10-4}{4} = \frac{6}{4} = 1{,}5\ m/s^2,$$

indicando como varia o módulo da velocidade tangencial com o tempo.

A aceleração centrípeta:

A direção da velocidade muda, à medida que o ciclista faz a curva. Como o módulo da velocidade está variando, a aceleração centrípeta também varia, para manter o raio da trajetória constante. Com $\boldsymbol{a}_c = \frac{\boldsymbol{V}^2}{R}$, teremos:

No início da curva:

$$\boldsymbol{a}_{ci} = \frac{V_i^2}{R} = \frac{4^2}{20} = \frac{16}{20} = 0{,}8\ m/s^2.$$

Ao sair da curva:

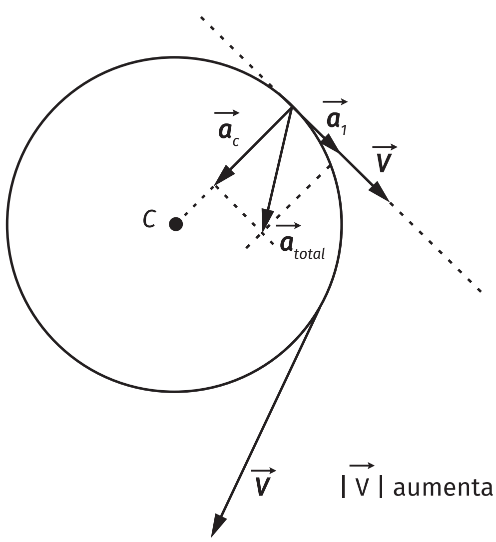
$$\boldsymbol{a}_{cf} = \frac{V_f^2}{R} = \frac{10^2}{20} = \frac{100}{20} = 5{,}0\ m/s^2.$$

// atenção

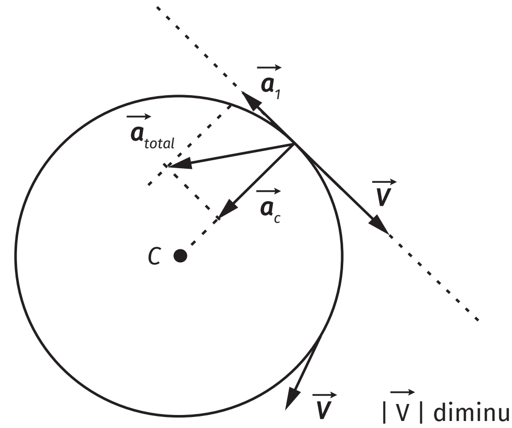
Repare que a velocidade tangencial está aumentando durante o movimento, portanto, sua direção está mudando cada vez mais rapidamente. Por isso, a aceleração centrípeta é bem maior no final do que no início do movimento em questão.

A aceleração total no MCUV

Quando a velocidade está aumentando, a aceleração tangencial tem a mesma direção e sentido de ***V***, conforme ilustrado na figura a seguir:



Se o *movimento é retardado* (***V*** está diminuindo), a aceleração tangencial tem sentido contrário ao de ***V***, e o módulo de ***V*** diminui com o tempo. Veja a ilustração:



A aceleração total é a soma vetorial da aceleração centrípeta com a aceleração tangencial.

Como $\boldsymbol{a}_c$ e $\boldsymbol{a}_t$ são sempre perpendiculares, o módulo de $\boldsymbol{a}_{total}$ é dado por Pitágoras:

$\boldsymbol{a}_{total} = \sqrt{\boldsymbol{a}_c^2 + \boldsymbol{a}_t^2}$ (tudo em módulo)

Repare na direção e no sentido de $\boldsymbol{a}_{total}$ nas duas ilustrações anteriores.

A aceleração angular

No MCUV a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ está variando com o tempo de maneira uniforme, assim teremos uma aceleração angular, que chamaremos de $\boldsymbol{\alpha}$ (alfa), definida pela razão entre a variação da velocidade angular e o tempo gasto para ocorrer essa variação. Assim, temos:

$\boldsymbol{\alpha} = \dfrac{\Delta\boldsymbol{\omega}}{\Delta t}$, onde $\Delta\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_f - \boldsymbol{\omega}_i = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$ e Δt é o intervalo de tempo.

A unidade S. I. de $\boldsymbol{\alpha}$ será dada da seguinte forma:

Com $\boldsymbol{\alpha} = \dfrac{\Delta\boldsymbol{\omega}}{\Delta t}$, temos

$\boldsymbol{\alpha}$ = unidade de $\dfrac{\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}}{\Delta t} = \left[\dfrac{\dfrac{rad}{s}}{s}\right] = rad\,/\,s^2.$

Situação 2: considere um disco que, partindo do repouso, atinge uma velocidade angular de 50 *rad/s* decorridos 10 *s* após a partida. Qual será sua aceleração angular média?

Solução:

São dados: $\omega_i = 0$ (pois o disco parte do repouso) e $\omega_f = 50\ rad/s$

Assim, aplicando a definição da aceleração angular, teremos:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_i}{\Delta t} = \frac{50-0}{10} = 5{,}0\ rad\,/\,s^2$$

Relação entre a aceleração angular (α) e a aceleração tangencial (a_t)

Vamos supor um movimento circular em que, no instante inicial, $\boldsymbol{t_0}$, a velocidade tangencial e a velocidade angular sejam, respectivamente, $\boldsymbol{V_0}$ e $\boldsymbol{\omega_0}$, e que, num instante posterior, sejam respectivamente $\boldsymbol{V_F}$ e $\boldsymbol{\omega_F}$.

Lembrando que $V = \omega R$, teremos: $V_0 = \omega_0 \times R$ e $V_F = \omega_F \times R$,

logo podemos escrever:

$(V_F - V_0) = \omega_F \times R - \omega_0 \times R.$

Colocando o R em evidência:

$(V_F - V_0) = (\omega_F - \omega_0)R,$

ou $\Delta V = \Delta\omega \times R.$

Dividindo ambos os membros dessa equação por Δt, obtemos:

$$\underbrace{\frac{\Delta V}{\Delta t}}_{a_{tangencial}} = \underbrace{\frac{\Delta\omega}{\Delta t}}_{\alpha} \times R\,.$$

Finalmente, temos: $\boldsymbol{a_t} = \alpha R.$

// atenção

A aceleração tangencial é igual ao produto da aceleração angular pelo raio da trajetória, e ambas são constantes no MCUV.

No MCUV, tanto a velocidade linear quanto a velocidade angular variam uniformemente. Desse modo, podemos relacionar diretamente as equações do MCUV com as do movimento retilíneo uniformemente variado, com apenas uma diferença, pois, no movimento circular, existe também uma aceleração centrípeta.

Podemos relacionar a aceleração centrípeta com o raio da trajetória da seguinte forma:

Como havíamos visto anteriormente:	$\boldsymbol{a_c} = \dfrac{\boldsymbol{V}^2}{R}.$
Como $V = \omega R$, teremos:	$\boldsymbol{a_c} = \dfrac{(\omega R)^2}{R},$
ou	$\boldsymbol{a_c} = \dfrac{\omega^2 R^2}{R}.$
Finalmente:	$\boldsymbol{a_c} = \omega^2 R.$

// atenção

Nos movimentos circulares acelerados, a aceleração centrípeta aumenta à medida que a velocidade angular aumenta. A direção da velocidade tangencial muda cada vez mais rápido.

Relações entre as grandezas lineares e as grandezas escalares

As equações do movimento *circular* uniformemente variado são muito parecidas com as do movimento *retilíneo* uniformemente variado. A dedução dessas equações pode ser feita do mesmo modo como fizemos ao estudar o MRUV. No caso, usamos θ no lugar de S, $\boldsymbol{\omega}$ no lugar de $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{\alpha}$ no lugar de $\boldsymbol{a}$. Veja as correspondências entre as equações no quadro a seguir:

Equações do MRUV (lineares) $a = a_{tangencial}$	Equações do MCUV (angulares)
$\Delta S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$	$\Delta\theta = \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$
$V = V_0 + at$	$\omega = \omega_0 t + \alpha t$
$V^2 = V_0^2 + 2a\Delta S$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$

Situação 3: a velocidade angular da polia de um motor varia, uniformemente, de 3 *rad/s* para 10 *rad/s* em um tempo de 20 s. Determinar o número de rotações que a polia realizou nesse intervalo de tempo.

Solução:

Lembrando a importância de ler atentamente o enunciado do problema, *relacione todos os dados* da questão *àquilo que foi pedido*.

No caso, são dados: ω_0 = 3 *rad/s*, ω = 10 *rad/s* e t = 20 s (pede-se o número de rotações).

Veja que, para calcular o número de rotações, precisamos encontrar o deslocamento angular total, $\Delta\theta$, durante os 20 segundos pedidos, e depois ver quantas voltas foram dadas (lembrando que cada rotação corresponde a um deslocamento angular de 2π radianos). Assim, podemos utilizar a equação $\Delta\theta = \omega_0 \times t + \frac{\alpha t^2}{2}$. Veja que temos a velocidade angular inicial, ω_0, temos o tempo t, mas não temos a aceleração angular α. Sendo assim, vejamos:

Cálculo da aceleração angular: usando a equação da velocidade angular do MCUV, podemos escrever:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t,$$

ou $10 = 3 + \alpha \times 20;$

ou ainda $10 - 3 = \alpha \times 20,$

onde $7 = \alpha \times 20.$

Finalmente: $\alpha = \frac{7}{20} = 0{,}35 \text{ rad/s}^2.$

Cálculo do número de rotações: usando a equação do deslocamento angular, teremos:

$$\Delta\theta = \omega_0 \times t + \frac{\alpha . t^2}{2}$$

Substituindo os valores dados e o valor da aceleração angular que calculamos, teremos:

$$\Delta\theta = 3\times 20+\frac{0,35\times 20^2}{2}$$

$$\Delta\theta = 60+\frac{0,35\times 400}{2}$$

$\Delta\theta = 60+70=130\ rad$ (esse deslocamento angular corresponde a várias voltas).

Cada rotação corresponde a uma volta completa, isto é, 2π *rad*. Assim, para 130 *rad*, teremos:

$$\frac{x\ (rotações)}{130\ (rad)}=\frac{1\ (rotação)}{2\pi\ (rad)}$$

$$\frac{x}{130}=\frac{1}{2\pi}$$

$$x=\frac{130}{2\pi}=\frac{130}{2\times 3,14}$$

$$x\cong 20,7\text{rotações}$$

lá na plataforma

Na Unidade 7 de nosso ambiente virtual, no tema Movimento Circular Uniformemente Variado (MCUV), *siga as orientações de desenvolvimento da atividade proposta. Além disso, você também pode acessar o ambiente da Universidade de Boulder, Colorado, em https://phet.colorado.edu/pt_BR/. Perceba como a atividade/recurso dialoga diretamente com o tema de nossa aula.*

Resumo

Nesta unidade, estudamos as grandezas angulares pertinentes aos movimentos de rotação dos corpos:

- a velocidade angular: $\boldsymbol{\omega}=\frac{\Delta\boldsymbol{\theta}}{\Delta t}$;
- a aceleração angular: $\boldsymbol{\alpha}=\frac{\Delta\boldsymbol{\omega}}{\Delta t}$;
- a aceleração tangencial: $\boldsymbol{a_t}=\frac{\Delta\boldsymbol{V}}{\Delta t}$;

E as relações entre as grandezas lineares e angulares, onde, com $V=\frac{\Delta s}{\Delta t}$ e $\omega=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$, obtivemos $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\omega}.R$;

$\boldsymbol{a}_{tangencial}=\frac{\Delta V}{\Delta t}$ e $\alpha=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$, onde $\boldsymbol{a}_{tangencial} = \boldsymbol{\alpha}.R$;

a aceleração centrípeta: $\boldsymbol{a_c}=\boldsymbol{\omega}^2R=\frac{\boldsymbol{V}^2}{R}$;

e a aceleração total no MCUV:

$\boldsymbol{a}_{total}=\sqrt{\boldsymbol{a}_c^2+\boldsymbol{a}_t^2}$.

Finalmente, vimos as relações entre as equações lineares e angulares num quadro ao final de "Relações entre as grandezas lineares e as grandezas escalares".

Exercícios

lá na plataforma

Informação complementar: na Unidade 7 de nosso ambiente virtual, no tema – Movimento Circular Uniformemente Variado (MCUV), *siga as orientações pedagógicas de suporte à resolução de exercícios propostos a seguir no texto, que* foram pré-gravadas em áudio no formato [mp4].

1. Um automóvel com velocidade (tangencial) de 18 *km/h* encontra-se numa pista de corrida, circular, de 30 *m* de raio. Em determinado instante, o motorista imprime uma aceleração constante de modo que, decorridos 10 segundos, a velocidade passa a ser de 25 *m/s*. Pede-se calcular:

a) a aceleração tangencial;

b) a distância percorrida nos 10 primeiros segundos;

c) a velocidade angular após 9,5 *s* de aceleração;

d) o deslocamento angular nos primeiros 5 *s* do movimento;

e) a aceleração centrípeta em $t = 5\ s$.

2. Um volante gira com 200 *rpm* e é, então, retardado com taxa constante de 2,0 rad/s^2. Determine:

a) o intervalo de tempo necessário para o volante atingir o repouso;

b) o número de rotações que ele efetua durante esse intervalo de tempo.

Respostas

1. Nota: como os valores que estamos calculando neste exercício resultam em números decimais, vamos arredondar os resultados, escrevendo-os com dois ou três algarismos. Dependendo do modo como você fez as contas, pode ter encontrado números um pouco (mas só um pouco) diferentes dos que estão aqui na solução. No lugar do símbolo da igualdade (=) usaremos o símbolo ≅ (igual ou semelhante), indicando que o valor é aproximado.

Os dados do problema são: $V_0 = 18\ km/h$; $R = 30\ m$, a aceleração angular é constante e, decorridos $\Delta t = 10\ s$, a velocidade passa a ser $V_f = 25\ m/s$.

Primeiro vamos passar os dados para o sistema internacional de unidades.

$$V_0 = 18km/h = \frac{18000m}{3600s} = 5m/s$$

a) Cálculo da aceleração tangencial.

Temos: $V = V_0 + a_t t$,

onde $25 = 5 + a_t 10$,

ou $25 - 5 = a_t 10$.

Então, $20 = a_t 10$.

Logo: $a_t = \frac{20}{10}$.

Finalmente: $a_t = \mathbf{2\ m/s^2}$.

b) A distância percorrida nos 10 primeiros segundos.

Nesse tempo, o móvel descreve um arco de circunferência de comprimento ΔS.

Temos: $V = V_0 + a_t t$

$$\Delta S = V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$\Delta S = 5 \times 10 + \frac{1}{2} \times 2 \times 10^2$$

$$\Delta S = 50 + 100$$

$$\Delta S = \mathbf{150\ m}$$

c) A velocidade angular após decorridos $t = 9{,}5$ s.

Temos a equação da velocidade angular do MCUV:

$\omega = \omega_0 + \alpha t$ (*)

Foi dado o tempo t, precisamos do ω_0 e do α, assim:

$V_0 = \omega_0 R \Rightarrow \omega_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{5}{30} \cong 0{,}17\ rad/s$

$a_t = \alpha R \Rightarrow \alpha = \frac{a_t}{R} = \frac{2}{30} \Rightarrow \alpha \cong 0{,}067\ rad/s^2$

Substituindo os valores de $\omega_0 \cong 0{,}17\ rad/s$; $\alpha \cong 0{,}067\ rad/s^2$ e $t = 9{,}5$ s em (*), obtemos:

$\omega = 0{,}17 + 0{,}067 \times 9{,}5$

$\omega = 0{,}17 + 0{,}64$ logo $\boldsymbol{\omega \cong 0{,}81\ rad/s}$

d) O deslocamento angular.

Para calcular o deslocamento angular nos primeiros 5 s do movimento, vamos aplicar a equação horária na sua forma angular:

$\Delta\theta = \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$. Assim:

$\Delta\theta = 0{,}17 \times 5 + \frac{0{,}067 \times 5^2}{2}$

$\Delta\theta = 0{,}85 + 0{,}84 \cong \mathbf{1{,}7\ rad}$

e) A aceleração centrípeta em $t = 5$ s.

Para a aceleração centrípeta temos $\boldsymbol{a_c} = \omega^2 R$, o valor de R foi dado, assim, precisamos calcular o ω em $t = 5$ s.

Temos: $\omega = \omega_0 + \alpha t$

Substituindo os valores: $\omega_5 = 1{,}7 + 0.67 \times 5$

$\omega_5 \cong 5{,}0\ rad/s$

Logo, com $\boldsymbol{a_c} = \omega^2 R$,

temos: $\boldsymbol{a_c} = 5^2 \times 30$.

Finalmente: $\boldsymbol{a_c} \cong 750\ m/s^2$.

Observação: lembre-se, como vimos, que no movimento circular uniformemente variado a aceleração tangencial ($\boldsymbol{a_t}$) e a aceleração angular (α) são constantes e, como também vimos, $a_{tangencial} = \alpha . R$. Mas a aceleração centrípeta varia, pois a velocidade tangencial está sempre aumentando (ou diminuindo) em módulo. Assim sendo, temos $\boldsymbol{a_c} = \omega^2 R$, onde R é constante, mas ω varia cada vez mais rápido.

2. São dados: “um volante gira com 200 *rpm*” logo temos o ω_0 em rotações por minuto. Passando para o SI, teremos:

$$\omega_0 = 200 rpm = 200 \frac{rotações}{minuto} = \frac{200 \times 2\pi\ (rad)}{60\ (segundos)}$$

$$= \frac{200 \times 2 \times 3{,}14}{60} rad/s = \frac{1257}{60} \cong 21\ rad/s$$

Também é dado que: “é então *retardado* com taxa constante de 2 rad/s^2 ”.

Logo, temos $\boldsymbol{\alpha = -2\ rad/s^2}$ (o sinal negativo é devido ao fato de o movimento ser retardado).

Assim:

a) pede-se intervalo de tempo para o volante atingir o repouso, logo temos $\omega_{final} = 0\ rpm$.

Aplicando a equação da velocidade angular do MCUV:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

Substituindo os valores dados:

$$0 = 21 - 2t,$$

ou $\quad 2t = 21,$

onde $\quad t = \dfrac{21}{2}.$

Finalmente: ***t* = 10,5 *s***.

b) pede-se o número de rotações durante esse tempo (o tempo que o volante leva para parar, e que foi calculado no item a).

Precisamos então calcular o deslocamento angular $\Delta\theta$. Vamos então utilizar a equação horária do MCUV:

Assim, substituindo os valores dados, $\omega_0 = 200\ rpm = 21\ rad/s$ e $\alpha = -2\ rad/s^2$, e o valor calculado de t, na equação horária:

$$\Delta\theta = \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$$

Teremos:

$$\Delta\theta = 21 \times 10 + \frac{-(2.0)\times(10,5)^2}{2}$$

Ou: $\quad \Delta\theta = 210 - \dfrac{(2,0)\times 110}{2}$

Onde: $\quad \Delta\theta = 210 - \dfrac{220}{2}$

Assim: $\Delta\theta = 210 - 110 = 100\ rad$

Como cada rotação corresponde a $2\pi\ rad$. Teremos:

$$\frac{X(rotações)}{100(rad)} = \frac{1(rotação)}{2\pi(rad)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \frac{100(rad)}{2\times 3,14(rad)} = \frac{100}{6,28}$$

finalmente **X ≅ 15,9 rotações.**

Composição vetorial de velocidades

08

metas

Reforçar o conceito de velocidade como um vetor e introduzir o conceito de velocidades relativas a mais do que um referencial.

objetivos

Esperamos que, ao final desta unidade, você seja capaz de:

- analisar exemplos nos quais se faz necessária a utilização do conceito vetorial de velocidades;
- resolver problemas envolvendo a grandeza velocidade como vetor;
- resolver problemas simples onde estão envolvidas velocidades relativas a dois referenciais.

Introdução

Muitas situações do nosso cotidiano envolvem movimentos relativos. Você já deve ter tido a sensação de, estando sentado em um banco de um ônibus, ao olhar para um outro ônibus que se movimentava próximo ao que você está, momentaneamente não conseguir distinguir se você estava se movimentando para a frente, ou pra trás, ou se quem estava se movimentando era o ônibus que se encontrava próximo a você!

Nós vamos estudar esse tipo de movimento relativo por meio de três exemplos envolvendo um pequeno barco navegando em um rio sereno, sem corredeiras.

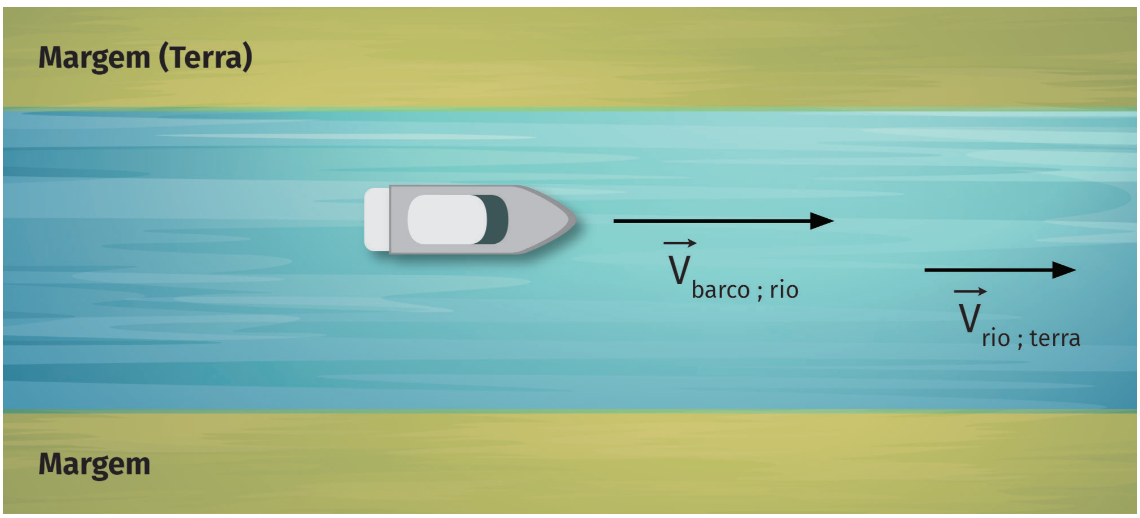
Considere que a correnteza do rio é da esquerda para a direita, e que a velocidade do rio em relação à Terra, em módulo, é dada por:

$$\left|\vec{V}_{rio;terra}\right| = +3\ km/h \text{ (sentido escolhido como positivo).}$$

Vamos analisar três situações distintas: um barco descendo um rio, um barco subindo um rio e um barco atravessando o rio de uma margem para a outra.

O barco descendo um rio

Situação 1: considere que o barco desce o rio (caminha para a direita) com velocidade dada por $\left|\vec{V}_{barco\ ;rio}\right| = +4\ km/h$ em relação ao rio. Veja a figura ilustrativa a seguir.

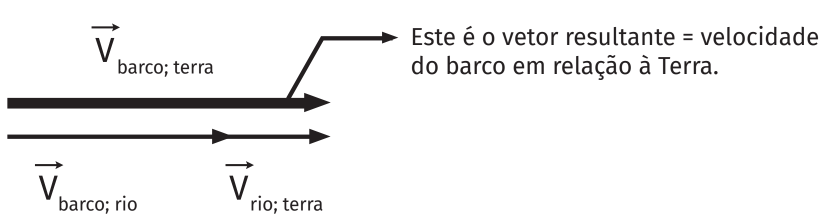


Como uma pessoa que estivesse na margem (na Terra) veria o barco descer o rio? E com qual velocidade? Pense um pouco antes de continuar, releia o texto anterior e reveja a figura.

Vamos calcular a velocidade do barco em relação à terra.

Uma pessoa que esteja numa das margens (isto é, no referencial da Terra) verá o barco descer com uma velocidade maior que a velocidade do barco em relação ao rio, pois, nesse caso, a velocidade do rio em relação à Terra tem o mesmo sentido da velocidade do barco, isto é, o rio "ajuda" o barco a descer.

Vejamos graficamente:



Nesse caso, as velocidades têm a mesma direção e podem ser somadas como na soma algébrica comum. Assim, em módulo:

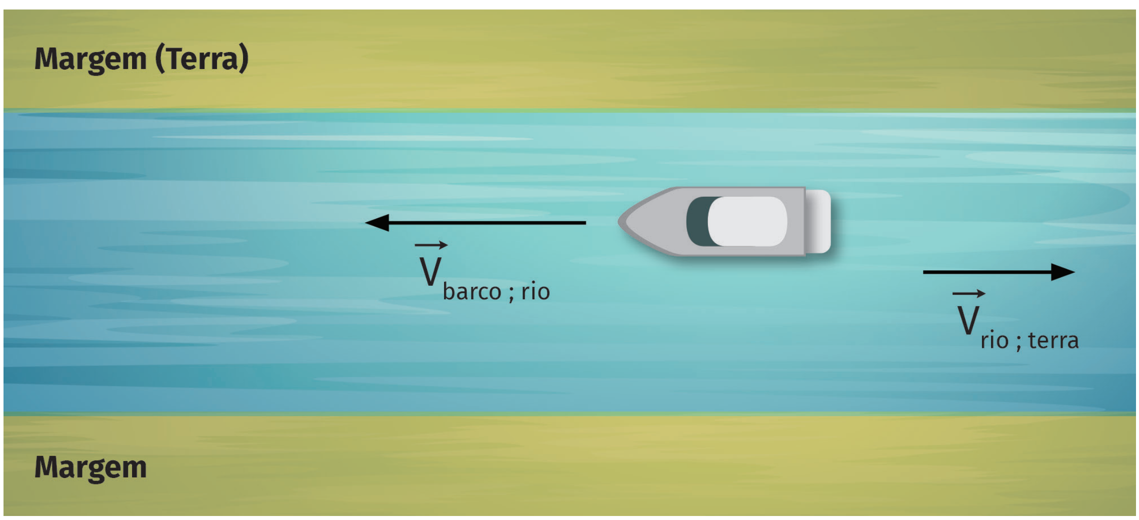
$$\left|\vec{V}_{barco;terra}\right| = \left|\vec{V}_{barco;rio}\right| + \left|\vec{V}_{rio;terra}\right| = +4 + 3 = +7\ (km/h)$$

Lembre-se que para indicar apenas os módulos dos vetores, podemos escrever sem colocar as "setinhas" e sem as barras laterais. Assim, podemos escrever também:

$$V_{barco;terra} = V_{barco;rio} + V_{rio;terra} = +4 + 3 = +7\ (km/h)$$

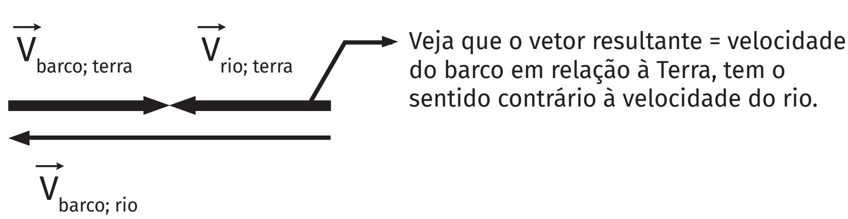
Barco subindo o rio

Situação 2: vamos supor, agora, que o barco está virado para a esquerda, no sentido contrário ao da correnteza, com a mesma velocidade, em módulo, de 4 km/h em relação ao rio. O barco desce ou sobe o rio? Pense um pouco antes de seguir adiante. A figura a seguir ilustra essa situação.



Nesse caso, a velocidade do barco em relação ao rio também tem módulo de 4 km/h, mas no sentido para a esquerda (contra a correnteza). Como as velocidades do rio em relação à Terra e do barco em relação ao rio têm a mesma direção, elas se somam, como na soma algébrica comum, mas atribuímos um sinal negativo à velocidade do barco em relação ao rio, por ter sentido contrário ao sentido que nós consideramos como positivo. A velocidade do barco em relação à Terra pode ser calculada do seguinte modo:

Graficamente:



Nesse caso, teremos (em módulo):

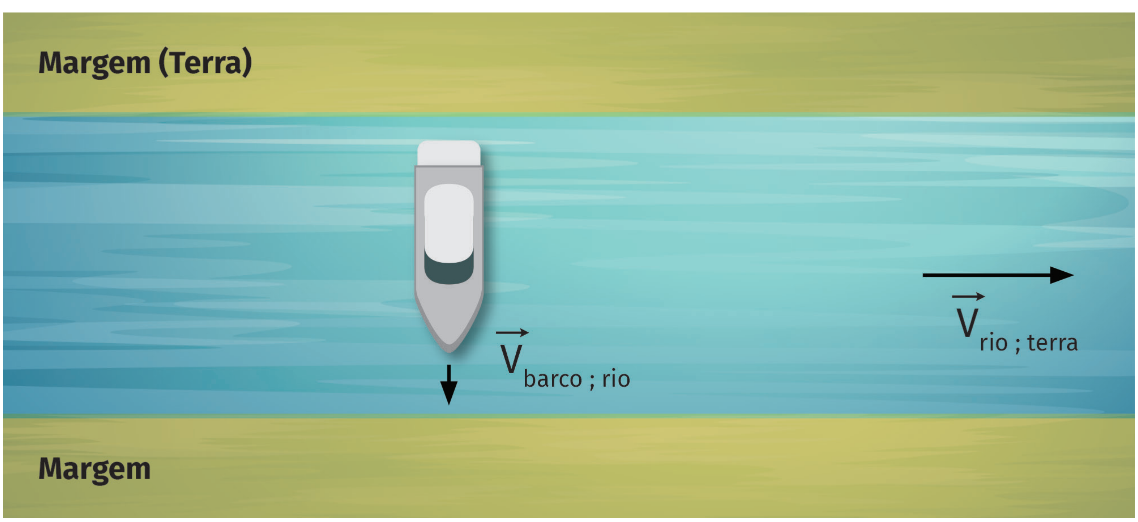
$$V_{barco;terra} = V_{barco;rio} + V_{rio;terra} = -4 + 3 = -1\ (km/h)$$

Veja que o barco "ganhou" da correnteza, pois o sinal negativo indica que a velocidade do barco em relação à Terra tem sentido oposto ao da velocidade do rio em relação à Terra (que escolhemos como positiva). O barco anda para a frente, para a esquerda, subindo o rio.

Barco atravessando o rio de uma margem para a outra

Situação 3: O barco, ao mesmo tempo em que atravessa o rio, desce com a correnteza.

Agora, vamos supor que o barco esteja indo de uma margem à outra, mantendo-se sempre na direção perpendicular às margens do rio, conforme ilustrado na figura a seguir. Nessa situação, ao mesmo tempo em que o barco atravessa o rio, ele desce junto da correnteza e chega na margem oposta, bem mais abaixo.

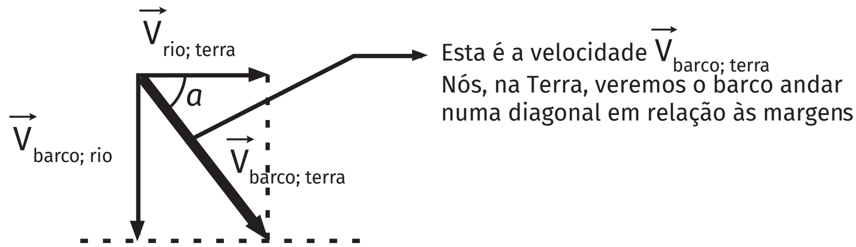


Vamos calcular a velocidade do barco em relação à Terra e, depois, a direção da velocidade.

Neste caso, temos também $\vec{V}_{barco;terra} = \vec{V}_{barco;rio} + \vec{V}_{rio;terra}$, mas a soma não pode ser feita algebricamente, pois os vetores não têm a mesma direção. *Temos que efetuar a soma vetorialmente.*

Veja a solução gráfica e seu cálculo algébrico, a seguir:

Solução gráfica:



Veja que o barco, ao mesmo em tempo que atravessou o rio, também desceu junto à correnteza.

Cálculo algébrico do módulo de $\vec{V}_{barco;\ terra}$:

Como os vetores que compõem essa velocidade são perpendiculares entre si, aplicamos o teorema de Pitágoras:

Assim, em módulo:

$$V_{barco;terra} = \sqrt{(V_{barco;rio})^2 + (V_{rio;terra})^2}$$
$$V_{barco;terra} = \sqrt{4^2 + 3^2}$$
$$V_{barco;terra} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25}$$
$$V_{barco;terra} = 5\ km/h.$$

A direção da velocidade

Em relação à margem do rio, a direção pode ser calculada pela tangente do ângulo α, onde:

$$tg\alpha = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{|V_{barco;\ rio}|}{|V_{barco;\ terra}|}$$

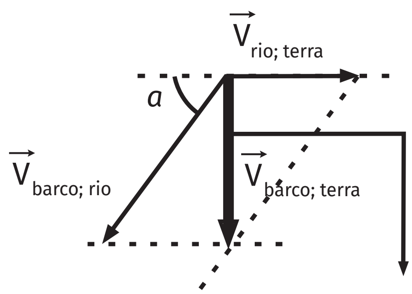
$$tg\alpha = \frac{4}{3} \cong 1{,}33 \quad \text{(isto corresponde a um ângulo } \alpha \cong 53°\text{)}$$

O barco atravessa o rio direto, de uma margem para a outra

Situação 4: como fazer para que o barco vá direto de uma margem para a outra, sem se deixar levar pela correnteza?

Se desejarmos que o barco atravesse o rio perpendicularmente às margens, temos que virar o leme, de modo que a velocidade do barco em relação ao rio faça um ângulo α = 53°

(à esquerda) em relação à margem, cuja tangente foi calculada no exemplo anterior, $tg\alpha = \frac{4}{3} \cong 1,33$. Veja a ilustração a seguir.



Esta seria então a velocidade do barco em relação à Terra, perpendicular às margens.

lá na plataforma

Na Unidade 8 de nosso ambiente virtual, no tema Composição vetorial de velocidades, *siga as orientações de desenvolvimento da atividade proposta. Acesse por meio do ambiente* objetos de aprendizagem de simulação computacional, *[https://phet.colorado.edu/pt_BR/] da Universidade de Boulder Colorado.*

Perceba como a atividade/recurso dialoga diretamente com o tema de nossa aula.

Resumo

Nessa unidade estudamos alguns casos interessantes de movimentos relativos. Vimos uma aplicação dos estudos de Galileu Galilei sobre a decomposição dos movimentos, como já havíamos estudado anteriormente e, também, a necessidade de tratarmos a velocidade como uma grandeza vetorial, em alguns tipos de problemas, quando as velocidades envolvidas não estão na mesma direção.

Exercícios

lá na plataforma

Informação complementar: na Unidade 8 de nosso ambiente virtual, no tema Composição vetorial de velocidades, *siga as orientações pedagógicas de suporte à resolução dos exercícios propostos a seguir, que foram pré-gravadas em áudio, no formato [mp4].*

1. Um barco navega em um rio e está com o motor funcionando em regime constante. Sua velocidade em relação ao rio tem módulo 5,0 m/s. A correnteza do rio se movimenta em relação às margens com 2,0 *m*/s. Determine o módulo da velocidade do barco em relação às margens nas duas situações:

   a) o barco se move paralelo à correnteza e no mesmo sentido;

   b) o barco se move paralelo à correnteza e em sentido contrário.

Dicas: lendo atentamente o enunciado, vemos que "o motor está funcionando em regime constante", logo temos um movimento uniforme. É dado, também, $|\vec{V}|_{barco;rio} = 5,0\ m/s$ (o módulo da velocidade do barco em relação ao rio) e, ainda, a velocidade do barco em relação à margem (em relação à Terra): $|\vec{V}|_{barco;margem} = 2,0\ m/s$

(também em módulo). Pede-se então a velocidade do barco em duas situações: no item a), quando o barco desce o rio e no item b), quando o barco sobe o rio. Reveja o que foi estudado nas situações *O barco descendo um rio* e *Barco subindo o rio* desta unidade, para a resolução do exercício.

2. O piloto de uma lancha atravessa um rio de 60 m de largura. A velocidade da lancha em relação ao rio tem módulo $V_{L,R} = 10\ m/s$ e a velocidade do rio em relação à margem tem módulo $V_{R,M} = 2{,}0\ m/s$. Responda o que se pede.

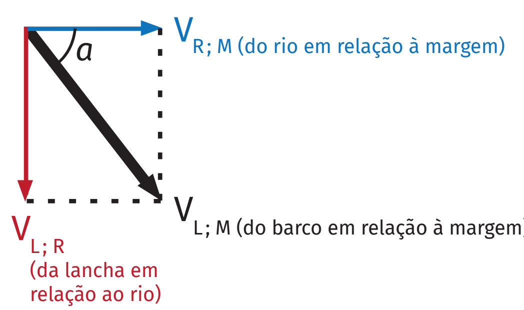
Dica: veja que este é o caso em que a velocidade da lancha em relação à margem (ou à Terra) é composta das duas velocidades: a velocidade do rio em relação à margem e a velocidade da lancha em relação ao rio (caso estudado no item *Barco atravessando o rio de uma margem para a outra*).

a) Se o piloto mantiver o eixo da embarcação perpendicular à direção da correnteza, a que distância, horizontal, abaixo do ponto de partida, a lancha atracará na outra margem?

Dica: na direção horizontal, que supomos a mesma do rio, a lancha anda com a velocidade do rio, que é uniforme. Assim, se soubermos quanto tempo o barco andou nessa direção e sentido, poderemos calcular o caminho percorrido ΔS, usando a equação horária do MRU, $\Delta S = V \times t$.

Para calcular esse tempo, temos que lançar mão da velocidade em relação ao rio e ver quanto tempo a lancha leva na travessia, pois temos a largura do rio LRIO = $\Delta S = 60\ m$. Conhecido o tempo que o barco leva na travessia, podemos calcular o caminho percorrido rio abaixo, até chegar na outra margem.

Nesse caso, a situação das velocidades pode ser descrita graficamente, como ilustrado a seguir:



b) Se o piloto mantiver o eixo da embarcação inclinado, a fim de que a lancha atravesse o rio perpendicularmente à correnteza, qual deverá ser o valor do ângulo de inclinação?

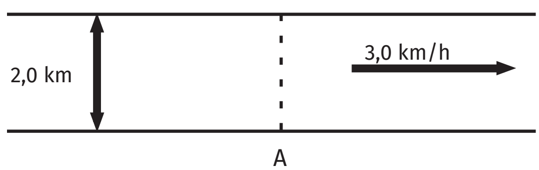
Dica: movendo-se como no caso anterior, vimos que a lancha acaba descendo o rio. Para o barco chegar direto na outra margem, em frente ao lugar de onde partiu, ele deverá inclinar o barco de um ângulo do mesmo valor do ângulo α da figura logo acima, mas à esquerda, para compensar o movimento do rio, que tende a arrastar a lancha para a direita (no nosso caso).

Basta calcular a tangente de α, na figura (ou o seno ou o cosseno), e depois ver o valor do ângulo numa tabela e/ou aplicativo.

3. Um barco deve atravessar um rio em direção perpendicular à correnteza, cuja velocidade é de 10 *km/h*. A velocidade do barco em relação à água é de 20 *km/h*. O barco deverá fazer com a correnteza um ângulo de:

a) 120° (ou seja 60° à esquerda)
b) 150° (ou seja 30° à esquerda)
c) 90°
d) 0°
e) 80°

4. Um barco sai do ponto A (conforme a figura a seguir) para atravessar um rio de 2,0 *km* de largura. A velocidade da correnteza é de 3,0 *km/h*. A travessia é feita segundo a menor distância de A para a outra margem, e dura (1/2) hora. Veja a ilustração:



A velocidade do barco em relação à correnteza será de:

a) 2,0 *km/h*
b) 3,0 *km/h*
c) 4,0 *km/h*
d) 5,0 *km/h*
e) 6,0 *km/h*

5. Num dia de chuva, sem ventos, a chuva cai verticalmente em relação ao solo com velocidade de 10 *m/s*. Um carro se desloca horizontalmente com velocidade de 20 *m/s* em relação ao solo. Determine o módulo da velocidade da chuva em relação ao carro.

Respostas da unidade

1. a) 7,0 *m/s* e b) 3,0 *m/s*.

2. a) $\Delta S \cong 12\ m$ e b) $\alpha \cong 12°$.

3. a

4. d

5. 22,4 *m/s*.

09

A 1ª lei de Newton

metas

Introduzir os conceitos de força e de inércia e estabelecer suas relações com o movimento dos corpos.

objetivos

Esperamos que, ao final desta unidade, você seja capaz de:

- enunciar e aplicar a 1ª lei de Newton em situações práticas;
- reconhecer e aplicar os conceitos de força e de inércia;
- resolver problemas simples de equilíbrio.

Introdução

Até aqui, vimos a parte da mecânica chamada *cinemática*, na qual estudamos vários tipos de movimento. Passaremos, agora, a estudar as leis gerais que regem esses movimentos e as condições para que os corpos permaneçam em equilíbrio. Foi Galileu Galilei (1564-1642) quem iniciou o estudo sistemático sobre o movimento dos corpos. Ele introduziu o método científico no estudo dos fenômenos da natureza, baseando seus estudos e conclusões na experimentação. Sir Isaac Newton (1642-1727), nascido, coincidentemente, no ano da morte de Galileu, conseguiu, aos 25 anos de idade, uma das mais brilhantes sínteses do conhecimento humano a respeito da natureza, particularmente no que diz respeito ao movimento dos corpos, ao enunciar as leis gerais que regem esses movimentos. São elas:

A *1ª lei*, também chamada *lei da inércia*, que se refere aos corpos em equilíbrio. Esse equilíbrio pode ser estático ou dinâmico, isto é, corpos em repouso (parados) ou em movimento retilíneo e uniforme.

A *2ª lei*, também conhecida como *princípio fundamental da dinâmica*, relaciona as forças aplicadas em um corpo com a aceleração que elas produzem.

A *3ª lei*, chamada de *lei da ação e reação*, estuda as forças entre dois corpos que estão interagindo um com o outro.

Uma outra lei, também concebida por Newton e que estudaremos mais tarde, é a chamada *lei da gravitação universal*, que nos mostra de que forma a "matéria atrai a matéria" e permite compreender os movimentos do Sol, dos planetas e de seus satélites.

Nesta unidade, vamos iniciar o estudo dessas leis e suas aplicações. Para isso, é necessário, primeiro, conhecer dois importantes conceitos estudados na mecânica: *força* e *inércia*.

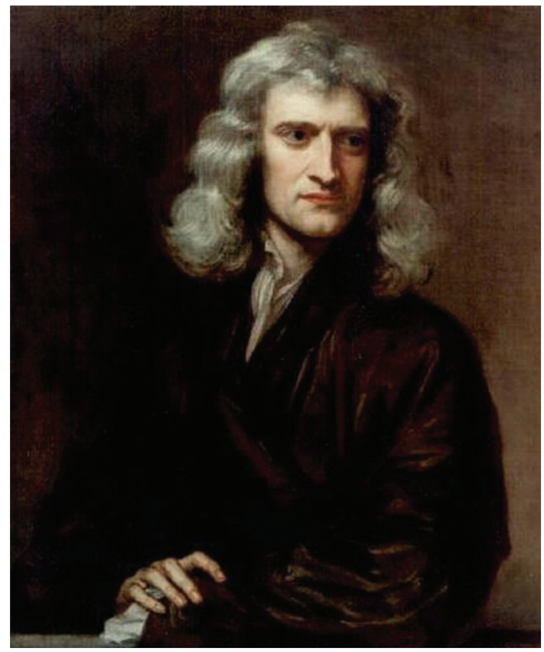


Figura 9.1: Isaac Newton aos 46 anos de idade, retratado por Godfrey Kneller, 1689. Fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sir_Isaac_Newton_(1643-1727).jpg.

A força e a inércia

Todos sabemos que, quando empurramos uma caixa, levantamos um balde d'água ou puxamos uma gaveta, estamos exercendo uma força sobre esses objetos. Para compreendermos melhor o que vem a ser uma força, vamos destacar, primeiramente, a sua natureza vetorial.

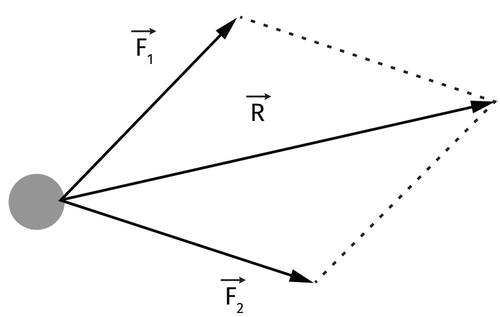
As forças são grandezas vetoriais

Para representarmos as forças e fazermos operações matemáticas com elas, usaremos as propriedades dos vetores que estudamos na Unidade 1. Vamos nos lembrar dessas propriedades com os exemplos a seguir:

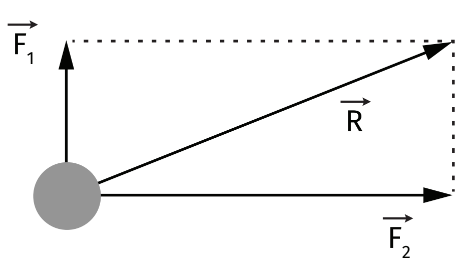
Chamamos de *resultante* à força que, sozinha, produz o mesmo efeito sobre o corpo que todas as outras juntas. Chamaremos a força resultante de $\vec{R}$.

Situação 1: consideremos duas forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ agindo ao mesmo tempo sobre um corpo em várias situações. Vamos recordar o modo de obter a resultante em cada caso.

As forças formam um ângulo qualquer.

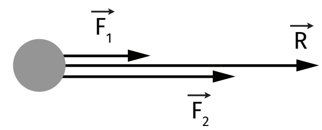


As forças são perpendiculares.

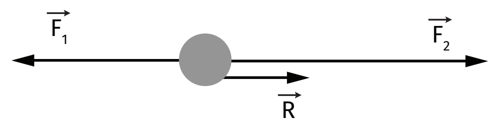


$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

As forças são paralelas.



$$R = F_1 + F_2$$



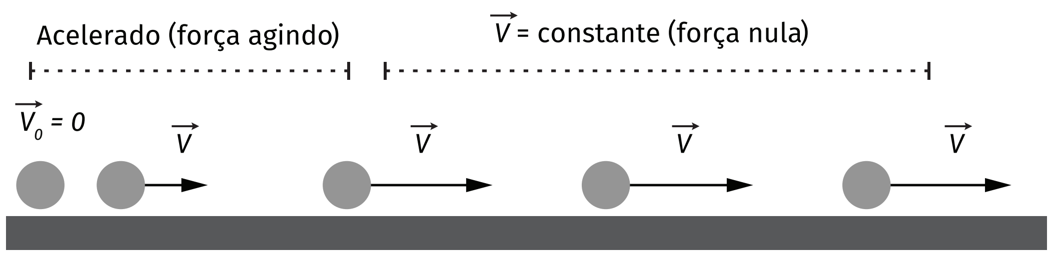
$$R = F_2 - F_1$$

A força de que estamos tratando aqui é um *agente que atua sobre o corpo*. Trata-se de um *agente externo* a ele, isto é, existe alguma coisa ou alguém exercendo a força sobre o corpo e, quando essa ação externa acaba, a força também acaba.

// atenção

Não devemos confundir força com movimento.

Situação 2: imagine uma mesa de bilhar e uma bola em repouso sobre ela. Se nenhum agente externo agir sobre a bola, ela permanecerá parada sobre a mesa e nada acontecerá. Mas imagine, agora, que você empurra a bola sobre a mesa. Enquanto está com a mão sobre a bola, empurrando-a, você exerce uma força sobre ela e altera seu movimento e sua velocidade até o instante em que a solta. Assim que você larga a bola, a força feita pela mão cessa, mas a bola continua se movendo na direção em que você a empurrou, *sem necessidade de força alguma!* Veja a ilustração a seguir.



Chamamos de *inércia* a essa propriedade dos corpos de permanecerem em *repouso* ou *movimento (retilíneo e uniforme)*, mesmo que não haja força alguma agindo sobre eles.

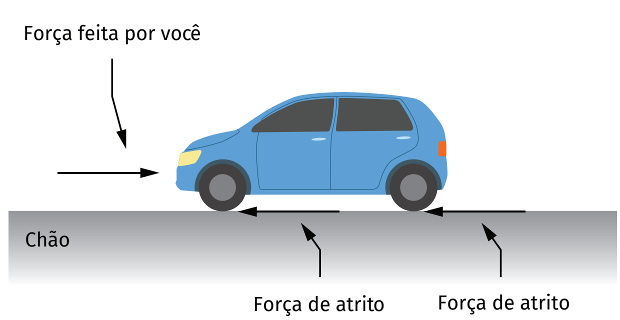
Resumindo: chamamos de *força* qualquer agente externo que modifica o estado de movimento do corpo. Se este está parado, a força faz com que comece a se mover, acelerando-o. Se o corpo estiver em movimento, a força pode diminuir ou aumentar sua velocidade, ou, ainda, modificar a direção desta. Em qualquer desses casos, o corpo estará *acelerado*.

// atenção

A força é um agente que modifica o estado de repouso ou de movimento dos corpos.

Se tentamos, entretanto, empurrar um carro engrenado ou com o freio de mão puxado, mesmo com muita força, nada acontece. Não conseguimos modificar seu "estado de repouso". Como se explica esse fato?

Pense bem! Nesse caso, nós realmente exercemos uma força sobre o carro, mas o próprio chão onde ele está também faz uma força sobre ele, de modo que a força resultante sobre o carro é nula. O máximo que pode acontecer é ficarmos com as mãos doendo, ou mesmo amassar um pouco a lataria do carro, mas ele permanecerá no estado de repouso. Portanto, o efeito de uma força pode ser também *alterar a forma do corpo*, amassar ou envergar, por exemplo. Vejamos o caso narrado, na tentativa de empurrar um carro:



A esse tipo de força, feita pelo chão sobre as rodas do carro, chamamos *força de atrito*. Nesse caso, as forças de atrito anulam a força feita por nós, tornando a resultante nula, e o carro permanece em equilíbrio estático (parado).

A inércia

Voltemos à nossa bola de bilhar.

Imagine uma mesa muito lisa e muito comprida sobre a qual você empurra uma bola. Mesmo depois de você largar a bola, ela permanecerá em movimento. Assim, você poderia dizer: “Então a força que eu fiz sobre a bola continua agindo sobre ela.” Correto? A resposta de Newton é *não*, não é necessário força alguma para que a bola permaneça em movimento. Galileu também já havia verificado esse fato, mas foi Newton quem o expressou sob a forma de um novo conceito, o de *inércia*.

// atenção

Inércia é a propriedade dos corpos de permanecerem em seu estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme.

A 1ª lei de Newton (ou lei da inércia)

Agora que já sabemos o que é inércia, podemos enunciar a 1ª lei de Newton simplesmente assim:

// atenção

Todo corpo possui inércia.

Ou então:

// atenção

Todo corpo permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme, a não ser que um agente externo exerça uma força sobre ele.

Isso significa que, *na ausência de forças*, ou quando a soma das forças que agem sobre um corpo é nula, *o corpo fica em repouso* (parado) ou em *movimento retilíneo uniforme*. Chamando a resultante de todas as forças que atuam sobre um corpo de $\vec{R}$, podemos escrever, resumidamente:

// atenção

$\vec{R} = 0 \Leftrightarrow$ REPOUSO OU MRU

Concluímos, a partir de tudo isso, que o estado de equilíbrio natural da matéria pode ser tanto o estado de repouso (e o corpo só abandona o repouso se alguma força agir sobre ele), como também o estado de movimento retilíneo uniforme (e o corpo permanece em MRU, a não ser que algum agente externo, uma força, atue sobre ele).

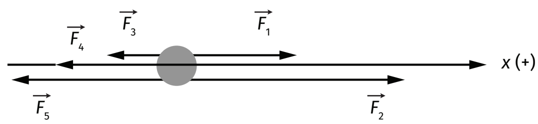
Aplicações

Vamos ver, agora, algumas aplicações da lei de Newton. Na maioria dos casos de equilíbrio, onde a força resultante sobre o corpo é nula ($\vec{R} = 0$), teremos uma das situações descritas a seguir. Consideremos as forças $\vec{F}_1$; $\vec{F}_2$; $\vec{F}_3$; $\vec{F}_4$ e $\vec{F}_5$ atuando sobre um corpo qualquer.

Vamos nos lembrar de que os módulos das forças podem ser representados por:

$|\vec{F}_1| = F$; $|\vec{F}_2| = F_2$; $|\vec{F}_3| = F_3$; $|\vec{F}_4| = F_4$ e $|\vec{F}_5| = F_5$.

Caso (a): *As forças que atuam no corpo são paralelas*, isto é, têm a mesma direção. Veja que o sentido positivo está indicado na figura.

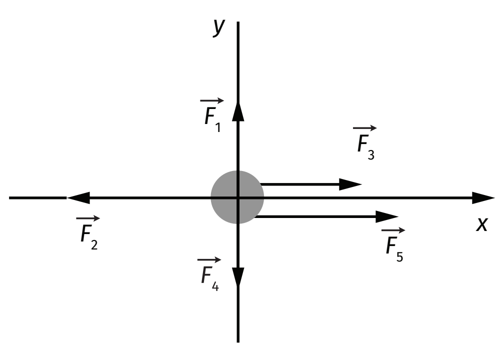


A resultante pode ser obtida pela soma algébrica (com números positivos e negativos).

No equilíbrio temos $\vec{R}$ = 0, assim, em módulo:

R = 0 = $F_1 + F_2 - F_3 - F_4 - F_5 = 0$

Caso (b): *As forças que atuam sobre o corpo são perpendiculares*, por exemplo:

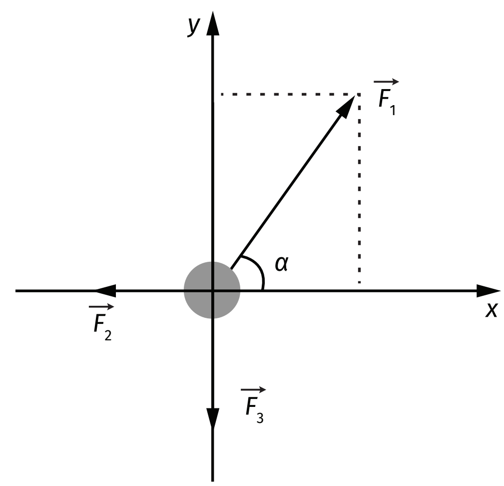


Nesse caso, as componentes das forças tanto no eixo x, quanto no eixo y, devem ser nulas. Na situação de equilíbrio, teremos:

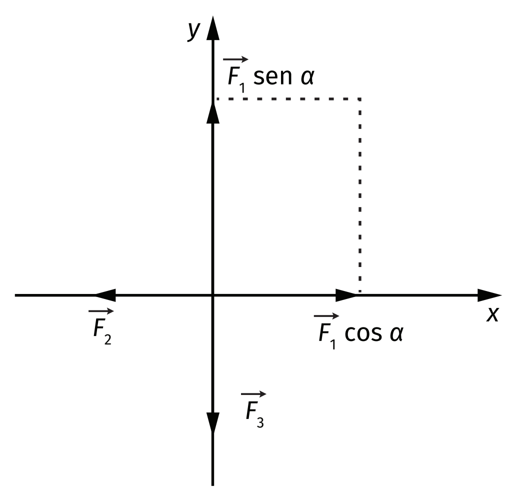
$\vec{R}_x = 0 \Rightarrow F_3 + F_5 - F_2 = 0 \Rightarrow F_2 = F_3 + F_5$

$\vec{R}_y = 0 \Rightarrow F_1 - F_4 = 0 \Rightarrow F_1 = F_4$

Caso (c): *As forças têm uma direção qualquer*. Nesse caso, temos que nos lembrar da decomposição de vetores, conforme estudado na Unidade 1: projetar as forças nos eixos *x* e *y*, quando for o caso, e, depois, proceder como no exemplo anterior. Veja o exemplo ilustrado na figura a seguir:



Projetando a força $\vec{F}_1$ no eixo *x* e no eixo *y*, ficamos com:



Assim, as condições de equilíbrio serão:

$\left(\sum \vec{F}_X = \vec{R}_x = 0\right)$, isto é: a soma de todas as forças no eixo x (a resultante *x*) deve ser nula.

E

$\left(\sum \vec{F}_Y = \vec{R}_y = 0\right)$, isto é: a soma de todas as forças no eixo y (a resultante *y*) deve ser nula.

Podemos escrever de modo mais simples:

No eixo x:

$\vec{R}_x = 0 \Rightarrow F_1 \cos\alpha - F_2 = 0 \Rightarrow F_2 = F_1 \cos\alpha$

No eixo y:

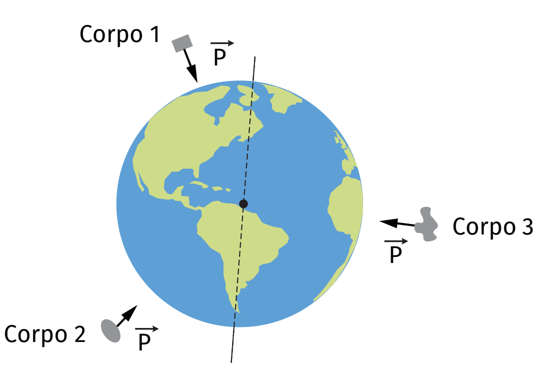
$\vec{R}_y = 0 \Rightarrow F_1 \operatorname{sen}\alpha - F_3 = 0 \Rightarrow F_3 = F_1 \operatorname{sen}\alpha$

Algumas forças muito comuns na natureza

Nós mesmos e todos os corpos ao nosso redor somos submetidos a algumas forças muito comuns. Vamos conhecê-las com mais detalhes, para que possamos continuar nossos estudos e aplicar os conhecimentos adquiridos em situações práticas de nosso cotidiano.

A força *peso*

O peso é a força de atração da gravidade. Essa força é exercida pela Terra sobre todos os corpos ao seu redor. Ela acontece sempre na direção vertical e com sentido de cima para baixo, apontando para o centro da Terra. Veja na ilustração a seguir:

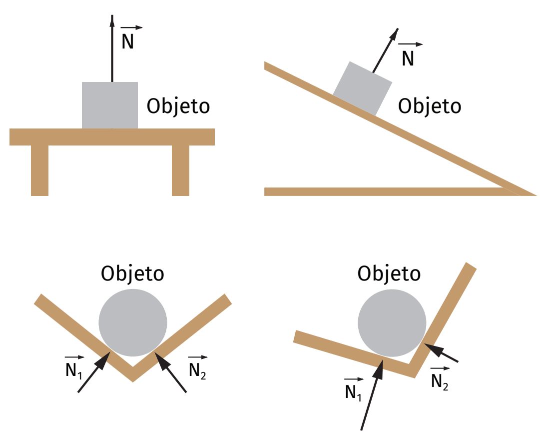


A força *normal*

Também chamada de "força de apoio".

Sempre que colocamos um objeto sobre alguma superfície, como uma mesa, esta, por ser um corpo rígido, cujas moléculas estão fortemente ligadas, impede que ele, desça ao encontro do chão (da Terra), exercendo uma força sobre o objeto, com uma direção que é *perpendicular* (normal) à superfície de contato entre o objeto e a mesa. Chamamos esse tipo de força de *força normal* $\vec{N}$.

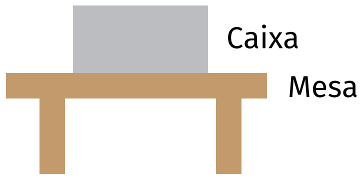
Vejamos alguns exemplos de forças atuando em objetos apoiados sobre uma superfície rígida:



// atenção

A força normal é sempre perpendicular à superfície de contato.

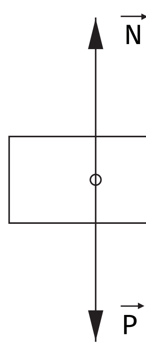
Situação 3: uma caixa pesando 20 newtons se encontra em repouso sobre uma mesa, conforme mostra a figura a seguir. Com base nessa informação, responda ao que se pede.



a) Represente as forças que estão atuando sobre a caixa.

Solução:

Apenas duas forças externas atuam sobre a caixa: *a força peso, exercida pela Terra*, e a força de contato, exercida pela mesa, chamada de *força normal, N*. Vamos desenhar apenas a caixa e representar as forças que atuam sobre ela. Assim, teremos:



b) Calcule o valor da força normal.

Solução:

Vamos lembrar que foi dado o peso da caixa P = 20 N. A caixa se encontra em repouso. Logo, a força resultante sobre ela deve ser nula. Assim, vetorialmente, temos: $\vec{R} = \vec{P} + \vec{N} = 0$. Como elas são paralelas (têm a mesma direção), podemos fazer a conta algebricamente. Vamos escolher o sentido positivo para cima, assim o peso ficará com o sinal negativo, pois $\vec{P}$ e $\vec{N}$ têm sentidos opostos. Assim: $-P + N = 0$,

ou $N = P$.

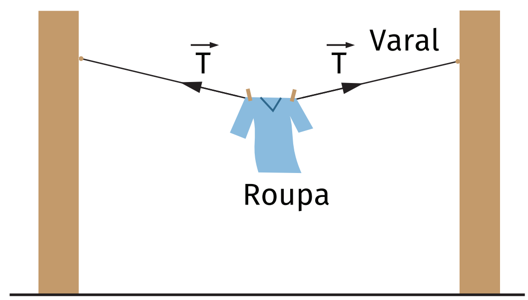
Logo, N = 20 N (20 newtons).

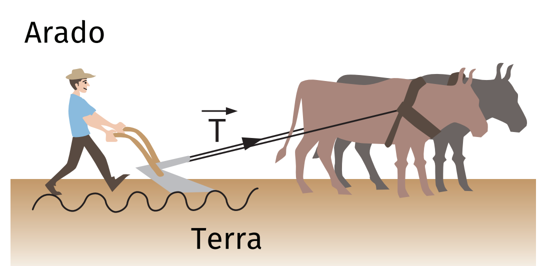
As forças de tração

Forças de tração são aquelas feitas por meio de fios ou cordas. Quando puxamos um carrinho ou uma caixa por meio de uma corda, ou penduramos uma roupa no varal, dizemos que a corda fica *tracionada*, isto é, estamos exercendo uma força de tração.

Note que, por meio de um fio ou de uma corda, podemos apenas *puxar* alguma coisa, não podemos empurrar ou comprimir.

Vamos denominar as forças de tração de $\vec{T}$. Veja as ilustrações a seguir.



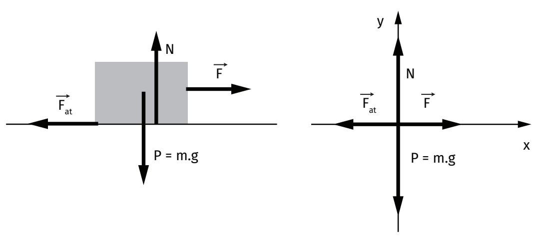


As forças de atrito

O atrito é uma força bastante familiar, que aparece sempre que arrastamos um corpo sólido sobre outro. Ela é sempre contrária à direção para a qual estamos arrastando ou tentando arrastar o objeto. É uma força que depende muito dos tipos de superfícies que estão em contato com ele, e, principalmente, das irregularidades que existem nessas superfícies.

A figura a seguir representa um bloco, *em equilíbrio estático*, apoiado sobre uma superfície plana e horizontal.

Ao tentarmos puxar um bloco para a direita com uma força $\vec{F}$, como representado, surge sempre uma força entre o bloco e a superfície onde ele se encontra, contrária à tendência do movimento, chamada força de atrito, $\vec{F}_{at}$. Veja a ilustração a seguir.



Como o bloco está em *equilíbrio*, a força resultante sobre ele deve ser nula. Isso nos permite concluir que, em módulo:

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow F = F_{at}$$

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow N - P = 0 \Rightarrow N = P$$

O atrito estático

A força $\vec{F}_{at}$, que age sobre um corpo que permanece em repouso quando tentamos arrastá-lo, é chamada de força de atrito estático. A experiência mostra que, se fizermos a força aumentar, a partir de zero, o corpo entrará em movimento quando o seu módulo ultrapassar um certo valor-limite. Isso nos leva a concluir que *a força de atrito estático é variável, podendo ir desde zero até um valor máximo.*

A experiência também nos mostra que a força de atrito estático máxima é diretamente proporcional à força normal à superfície de contato. Assim, podemos escrever:

$F_{at} \propto N$ (a força de atrito é proporcional à força normal N).

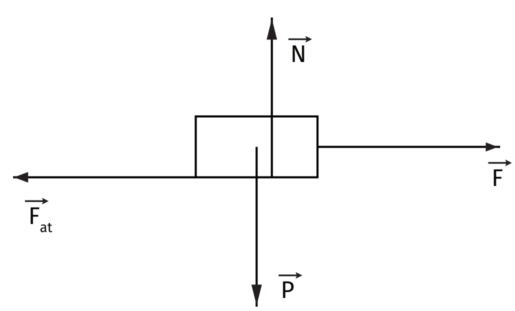
$$F_{at} \leq \mu_E \cdot N$$

Aqui, o coeficiente de proporcionalidade μ_E é chamado de *coeficiente de atrito estático*. Essa é uma grandeza *adimensional*, isto é, trata-se de um número puro, que é uma característica dos materiais das superfícies de contato.

Situação 4: vamos supor que uma caixa apoiada sobre uma mesa seja puxada para a direita com uma força = 4 *N*, mas, mesmo assim, ela *permaneça em repouso*. Pede-se descrever as forças que atuam sobre a caixa e calcular a força de atrito.

Solução:

Mesmo quando está sendo puxada, a caixa não se move. Isso se deve ao surgimento de uma força de atrito contrária à força que tenta puxar a caixa para a direita. Podemos representar as forças que atuam sobre a caixa conforme a ilustração:



A caixa não se move nem para a esquerda nem para a direita, assim, na direção horizontal, temos:

$$\vec{R}_x = 0 \Rightarrow F - F_{at} = 0 \Rightarrow F = F_{at}$$

A caixa não sobe, nem desce, assim, na direção vertical (eixo y), temos:

$$\vec{R}_y = 0 \Rightarrow N - P = 0 \Rightarrow N = P$$

Note que tomamos os sentidos *para a direita* e *para cima* como positivos.

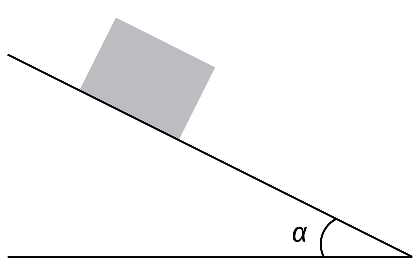
O atrito cinético

Se, por outro lado, o corpo se encontra em movimento, o atrito é diferente, normalmente menor do que o atrito estático, e é chamado de *atrito cinético*. Em uma boa aproximação, o seu valor é dado por: $F_{at} = \mu_C \cdot N$.

O coeficiente de proporcionalidade, μ_C, é chamado de *coeficiente de atrito cinético*.

Para um mesmo par de superfícies em contato, a experiência nos mostra que a força de atrito cinético é sempre menor do que a força de atrito estático máxima, pois $\mu_C < \mu_E$.

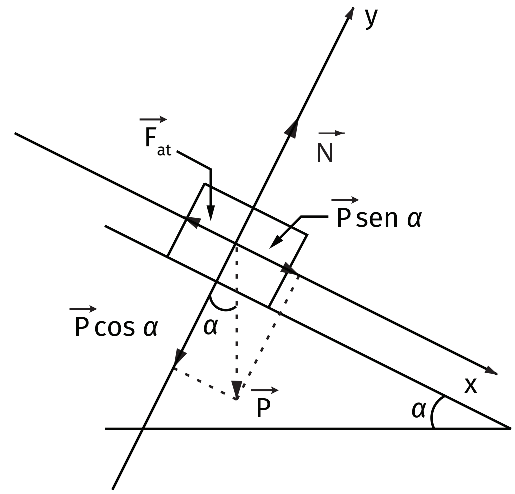
Situação 5: uma caixa de peso igual a 100 newtons está em repouso sobre um plano inclinado que faz um ângulo α com a horizontal, conforme ilustra a figura a seguir. Sabendo-se que *sen α* = 0,60 e *cos α* = 0,80, pede-se representar adequadamente as forças que atuam na caixa, discutir as condições de equilíbrio e calcular: a força normal, a força de atrito e o coeficiente de atrito estático.



Solução:

Vamos traçar os dois eixos cartesianos *x* e *y* convenientes e representar todas as forças que atuam na caixa.

Note que a força *peso* tem a direção da *vertical* do lugar onde estamos, em relação à Terra, e a força *normal* é *perpendicular à superfície de contato* (no caso, o plano inclinado).



Sobre o equilíbrio:

Haverá equilíbrio se houver uma força de atrito pelo menos igual a $|\vec{P} sen\alpha|$ (em módulo). Caso contrário, o corpo descerá o plano inclinado, acelerado, como veremos mais adiante.

No equilíbrio (ou seja, quando a caixa estiver em repouso), a resultante deve ser nula.

Assim, para o eixo x, com $\vec{R}_x = 0$, escrevemos:

$$+\vec{P}sen\alpha - F_{at} = 0$$
$$F_{at} = \vec{P}sen\alpha$$
$$F_{at} = 100 \times 0{,}60 = 60\ N.$$

Para o eixo *y*, com $\vec{R}_y = 0$, teremos:

$$N - \vec{P}cos\alpha = 0$$
$$N = \vec{P}cos\alpha$$
$$N = 100 \times 0{,}80 = 80N.$$

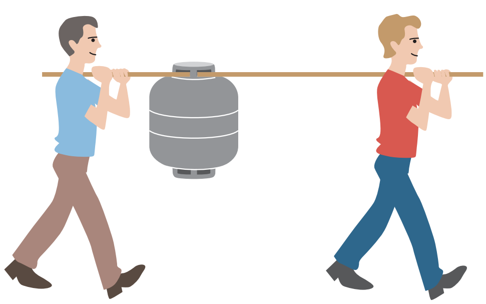
Cálculo do coeficiente de atrito:

Temos: $F_{at} = \mu \cdot N$

Assim, $\mu = \dfrac{N}{F_{at}}$

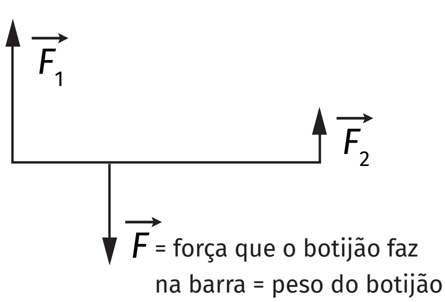
Logo: $\mu = \dfrac{80}{60} = 0{,}75$ (repare que μ não tem unidade. Ele é um coeficiente numérico).

Situação 6: duas pessoas estão segurando um botijão de gás de 150 newtons de peso, por meio de um cabo de vassoura de peso desprezível, se comparado ao peso do botijão. O botijão está mais perto da pessoa da esquerda, de tal maneira que esta faz uma força que é o dobro da força feita pela pessoa da direita. A figura a seguir ilustra a situação. Vamos calcular a força que cada pessoa está fazendo para segurar o botijão, supondo que tudo está em repouso.



Solução:

Vamos lembrar que são dados: *o peso do botijão = 150 N* e *que uma força é o dobro da outra*. Com base nisso, vamos focar apenas nas forças que atuam no cabo de vassoura, conforme representados na ilustração a seguir.



// atenção

Aqui devemos tomar cuidado: a força que o botijão faz na barra tem o mesmo valor numérico do peso do botijão, mas não é o peso (o peso do botijão age no botijão e não na barra!).

Como o sistema está em equilíbrio, temos que ter uma força resultante nula. Assim:

$\vec{R} = 0 \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 - \vec{F} = 0$

onde: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}$ (*).

Temos duas incógnitas para calcular: $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$. Precisamos, portanto, de mais uma equação. Como sabemos que uma das forças é o dobro da outra, podemos escrever: $\vec{F}_1 = 2\vec{F}_2$, que, substituindo em (*) fica:

$2\vec{F}_2 + \vec{F}_2 = \vec{F}$,

ou $3\vec{F}_2 = \vec{F}$.

Logo: $\vec{F}_2 = \dfrac{\vec{F}}{3} = \dfrac{150}{3} \rightarrow \vec{F}_2 = 50\,N$

Para o valor de $\vec{F}_1$ (em módulo):

$F_1 = 2F_2 = 2 \times 50 = 100\ N.$

lá na plataforma

Na Unidade 9 de nosso ambiente virtual, no tema A 1ª lei de Newton, *siga as orientações para o desenvolvimento da atividade proposta. Além disso, acesse os objetos de aprendizagem de simulação computacional no ambiente [https://phet.colorado.edu/pt_BR/] da Universidade de Boulder, Colorado.*

Perceba como a atividade/recurso dialoga diretamente com o tema da nossa aula.

Resumo

Nesta unidade, estudamos o importante conceito do princípio da inércia, primeiramente descrito pelo físico e astrônomo Galileu Galilei, no ano de 1609, e que, mais tarde, veio a fazer parte das leis que regem o movimento dos corpos, brilhantemente formuladas por *Sir* Isaac Newton (Reino Unido, 1643 - 1722).

- A inércia

Inércia é a propriedade dos corpos de permanecerem em seu estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme.

- A 1ª lei de Newton (ou *lei da inércia*)

Agora que já sabemos o que é inércia, podemos enunciar a 1ª lei de Newton simplesmente assim:

Todo corpo possui inércia.

Ou então:

Todo corpo permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme, a não ser que um agente externo exerça uma força sobre ele.

Também podemos escrever isso, resumidamente, usando a linguagem matemática:

$\vec{R} = 0 \Leftrightarrow$ REPOUSO OU MRU

Isto é: se a resultante de todas as forças que atuam em um corpo for nula, ele permanecerá em seu estado de repouso, ou de movimento retilíneo uniforme, e vice-versa.

- As condições de equilíbrio

Estudamos também as condições de equilíbrio, de forma mais detalhada, e vimos que as equações que devem ser satisfeitas para haver equilíbrio são:

$\left(\sum \vec{F}_X = \vec{R}_x = 0\right)$, isto é: a soma de todas as forças no eixo *x* (a resultante *x*) deve ser nula.

e

$\left(\sum \vec{F}_Y = \vec{R}_y = 0\right)$, isto é: a soma de todas as forças no eixo *y* (a resultante *y*) deve ser nula.

Estudamos, ainda:

- A força *peso*

O peso é a força de atração da gravidade. Essa é força que a Terra (ou outra grande massa, como um planeta, por exemplo) exerce sobre todos os corpos ao seu redor. Ela acontece sempre na direção vertical e com sentido de cima para baixo, apontando para o chamado *centro de gravidade* da Terra. Nas próximas unidades, estudaremos com mais detalhes a força peso.

- A força *normal*

Também chamada de *força de apoio*. Aparece quando um corpo está encostado no outro e é sempre perpendicular às superfícies de contato.

- As forças de tração

Forças de tração são aquelas feitas por meio de fios ou cordas. Quando puxamos um carrinho ou uma caixa por meio de uma corda, ou penduramos uma roupa no varal, dizemos que a corda fica *tracionada*, isto é, que estamos exercendo uma *força de tração*.

Note que, por meio de um fio ou corda, podemos apenas puxar alguma coisa, não podemos empurrar ou comprimir.

- As forças de atrito estático e cinético

São forças que aparecem quando arrastamos ou tentamos arrastar um corpo sólido sobre outro. Elas serão sempre contrárias à direção na qual estamos arrastando ou tentando arrastar o objeto. São forças que dependem muito dos tipos de superfícies com as quais estão em contato e, principalmente, das irregularidades que existem nessas superfícies.

Em linguagem matemática, escrevemos:

$F_{at} = \mu_C \cdot N$ para o atrito cinético;

$F_{at} = \mu_E \cdot N$ para o atrito estático.

Vimos, também, que a força de atrito estático é sempre maior que a força de atrito cinético, tendo em vista que $\mu_C < \mu_E$.

Exercícios

lá na plataforma

Informação complementar: na Unidade 9 de nosso ambiente virtual, no tema A 1ª Lei de Newton, *siga as orientações pedagógicas de suporte à resolução dos exercícios propostos a seguir, que foram* pré-gravadas em áudio, no formato [mp4].

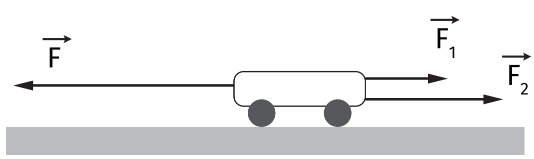
Antes de iniciarmos os exercícios, é bom lembrar que a unidade de medida de força, no Sistema Internacional De Unidades (S. I.), é o newton, e sua abreviação é *N*. Mais adiante, ao estudarmos a 2ª lei de Newton, veremos com mais detalhes a definição dessa unidade de medida de força.

// atenção

Dica: lembre-se de que você deve sempre tentar, por esforço próprio, fazer os exercícios antes de olhar as respostas ou soluções que estão ao final do livro.

Para fazer os exercícios de 1 a 3, reveja o item Aplicações.

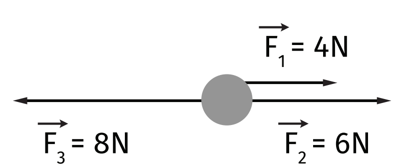
1. Você e um colega puxam, juntos, um carrinho com rodas, sobre uma superfície bem lisa, exercendo as forças $F_1 = 5\ N$ e $F_2 = 6\ N$ sobre um carrinho, conforme ilustra a figura.



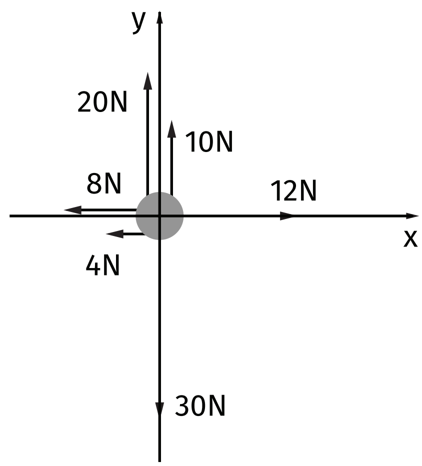
Pede-se: calcule a força *F* que deve ser feita sobre o carrinho, para que ele fique em equilíbrio.

2. Em cada caso representado a seguir, várias forças atuam sobre um corpo. Analise cada uma, verificando se o corpo permanece ou não em equilíbrio. Justifique suas respostas.

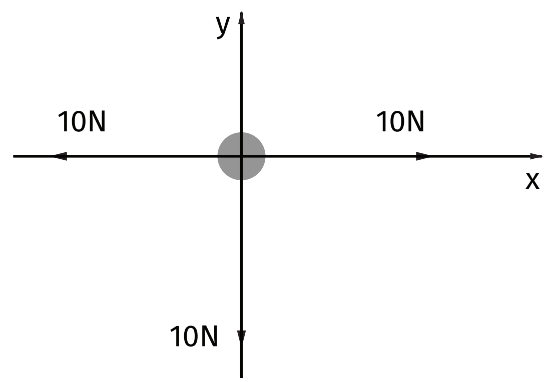
a)



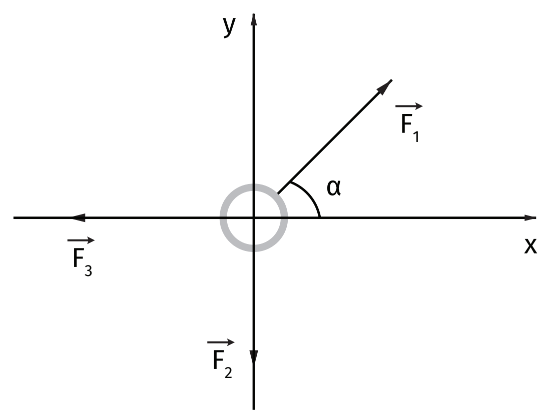
b)



c)



3. Um anel está sobre uma mesa muito lisa (atrito desprezível), sendo puxado pelas forças $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$, conforme mostra a figura a seguir. O módulo de $|\vec{F}_1| = F_1$ vale 100 *N*. Sabendo que *sen α* = 0,60 e *cos α* = 0,80, calcule os valores de $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$ para que o anel fique em equilíbrio.



4. Um avião viaja na horizontal, em "velocidade de cruzeiro" constante de 600 *km/h*. Ele mantém seus motores ligados, exercendo uma força de propulsão, também constante, de 2.800 *N*. Pede-se esboçar as forças que atuam sobre o avião durante o voo e calcular a força de resistência do ar.

Respostas da unidade

1. Para o carrinho ficar na situação de equilíbrio, temos que ter $\sum \vec{F} = \vec{R} = 0$, assim: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 - \vec{F} = 0$.

Como todas as forças têm a mesma direção, podemos fazer a soma algebricamente:

$F_1 + F_2 - F = 0$

$F = F_1 + F_2$

$F = 5 + 6 =$ **11 *N***.

2.

a) esse caso, temos:

$\sum \vec{F} = \vec{R} = 6 + 4 - 8 =$ **2 *N***. Logo, o corpo não está em equilíbrio.

b) Para haver equilíbrio. temos que ter: $\sum \vec{F}_x = 0$ e $\sum \vec{F}_y = 0$.

Vejamos:

$\sum \vec{F}_x = 12 - 8 - 4 =$ **0**

$\sum \vec{F}_y = 20 + 10 - 30 =$ **0**. Logo o corpo está em equilíbrio.

c) Temos:

$\sum \vec{F}_x = 19 - 10 =$ **0**

$\sum \vec{F}_y = 0 - 10 =$ **−10 *N***. Logo, o corpo *descerá* acelerado. Não está em equilíbrio.

3. Para haver equilíbrio, temos que ter: $\sum \vec{F}_x = 0$ e $\sum \vec{F}_y = 0$.

Decompondo $\vec{F}_1$, teremos, no eixo *x*:

$\sum \vec{F}_x = \vec{F}_{1x} - \vec{F}_3 = 0$.

Em módulo, $F_1 \cdot \cos \alpha - F_3 = 0$

Assim, $F_3 = F_1 \cdot \cos\alpha$.

Finalmente, $F_3 = 100 \times 0{,}80 =$ **80 *N***.

Já no eixo *y*, teremos:

$\sum \vec{F}_y = \vec{F}_{1y} - \vec{F}_2 = 0$

ou $F_1 \cdot \sin \alpha - F_2 = 0$,

onde $F_2 = F_1 \cdot \sin \alpha$.

Finalmente, $F_2 = 100 \times 0{,}60 =$ **60 *N***.

4) As forças que atuam sobre o avião são:

A situação é de equilíbrio dinâmico (equilíbrio com movimento). O avião se move em linha reta com velocidade constante. Assim, a força resultante sobre o avião tem que ser nula. Temos, então:

Na vertical: $\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow$ Peso = Força de sustentação.

Na horizontal: $\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow$ assim, Força de resistência do ar = Força dos motores (empuxo).

Assim, em módulo, teremos:

$F_{resistência}$ = *empuxo* = **2.800 *N***.

O avião permanece em movimento retilíneo uniforme. O empuxo serve para equilibrar as forças de resistência.

10

A 2ª lei de Newton

metas

Introduzir a relação entre a força resultante e a aceleração adquirida pelos corpos e o conceito de massa inercial.

objetivos

Esperamos que, ao final desta unidade, você seja capaz de:

- resolver problemas fora do equilíbrio, nos quais a força resultante seja não nula;
- reconhecer e diferenciar peso e massa.

Introdução

Na unidade anterior, estudamos os casos de equilíbrio nos quais a força resultante sobre os corpos é nula. Vimos, de acordo com a 1ª lei, que, nesses casos, os corpos permanecem em repouso ou em movimento retilíneo uniforme, sendo nula a sua aceleração. Nesta unidade, estudaremos a relação entre as forças que atuam sobre os corpos e suas consequências. Além disso, aprofundaremos nossos conhecimentos sobre o conceito de inércia. Esses estudos fazem parte do assunto denominado "dinâmica", ou mecânica propriamente dita.

A 2ª Lei de Newton

O que acontece quando existe uma força resultante diferente de zero atuando sobre o corpo? A esta altura de nossos estudos, você deve ter imaginado que o principal efeito da força é o de causar uma aceleração. Se você pensou assim, acertou! A relação entre a aceleração adquirida por um corpo e a força que está sendo exercida sobre ele foi descoberta por Newton. Essa lei, também chamada de "princípio fundamental da dinâmica", pode ser enunciada do seguinte modo.

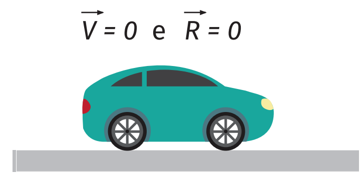
// atenção

A aceleração adquirida por um corpo é diretamente proporcional à força que a produziu e inversamente proporcional à sua massa.

Em linguagem matemática, escrevemos simplesmente: $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$.

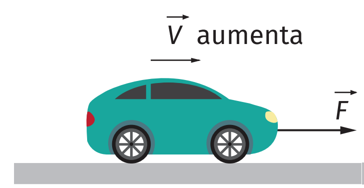
Vamos verificar as implicações da 2ª lei em alguns casos concretos:

Imagine um carrinho inicialmente em repouso. Teremos velocidade nula e, sendo também nula a resultante das forças sobre o carrinho, ele permanecerá parado.

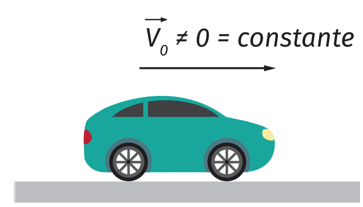


- Aplicando uma força sobre o carrinho.

Se, em determinado instante, aplicarmos uma força sobre o carrinho que estava em repouso, ele começará a andar, com movimento acelerado, na mesma direção da força.



Imagine agora um carrinho que já está em movimento, com velocidade constante. Nesse caso, também temos $\vec{R} = 0$, mas com $\vec{V} \neq 0$ (temos um equilíbrio dinâmico).



Se aplicarmos uma força, no mesmo sentido da velocidade, em um carrinho que já está se movendo, o efeito será o de aumentar sua velocidade.

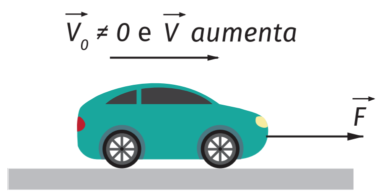
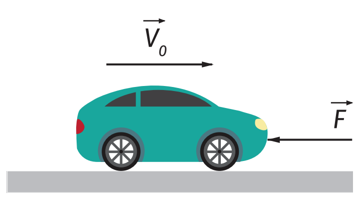


Figura 10.4

- Aplicando uma força contrária ao movimento inicial do carrinho.

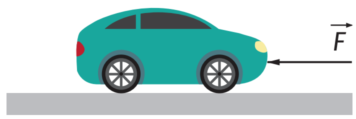
Nesse mesmo caso, no qual o carrinho se encontra inicialmente em movimento, se aplicamos uma força contrária a esse movimento, isto é, no sentido contrário à velocidade, o efeito será o de diminuir a velocidade do carrinho até ele parar. Se a força continuar agindo, sem descontinuidade, o módulo da velocidade irá, então, aumentar, mas agora no mesmo sentido da força. Vejam a sequência de ilustrações:

Ao aplicarmos uma força contrária à velocidade, o carrinho começa a diminuir a velocidade.



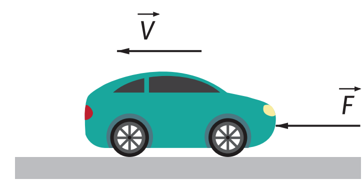
Velocidade diminui

Em certo momento, o carrinho para e, momentaneamente, sua velocidade se anula.



A velocidade chega
a se anular

Se mantivermos a força aplicada, o carrinho passa a acelerar de novo, mas com a velocidade com sentido contrário à do início do movimento.



A velocidade aumenta
e tem sentido contrário

Esse é um caso semelhante ao de um corpo lançado verticalmente para cima, em que a força peso atua continuamente e o corpo vai diminuindo a velocidade, até atingir a altura máxima, quando a velocidade se anula. Em seguida, o corpo começa a cair, aumentando a velocidade sempre com a mesma aceleração, nesse caso, a aceleração da gravidade.

O significado da massa na mecânica newtoniana

Outro conceito muito importante na mecânica newtoniana deriva do fato de a aceleração ser inversamente proporcional à massa do corpo.

Conforme já vimos: $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$. Vamos estudar algumas consequências dessa lei.

Imagine que você pegue uma pedra e a jogue com bastante força. Mesmo que ela esteja inicialmente em repouso, é fácil acelerar a pedra, que pode atingir uma grande velocidade e cair bem longe. Imagine agora que você pega um balde cheio de pedras e tenta fazer o mesmo. A dificuldade para fazer o balde atingir a velocidade da pedra será muito grande, isto porque a massa do balde cheio de pedras é muitas vezes maior do que a massa de uma única pedra.

Veja também como é difícil fazer grandes objetos, como um navio cargueiro, por exemplo, atingir uma certa velocidade a partir do repouso, ou a enorme força necessária para fazê-lo parar quando se encontra em movimento. Por esse motivo, os motores dos navios são máquinas muito grandes e, mesmo assim, eles aceleram bem devagar. Podemos então concluir que:

// atenção

Quanto maior a massa do corpo maior a sua "inércia". A massa, nesse contexto, segundo Newton, tem o sentido de uma "resistência" ao movimento. Isto é:

A massa é uma medida da inércia do corpo.

A massa definida dessa forma, a partir da 2ª lei, é chamada de "*massa inercial*".

É muito importante a aplicação da 2ª lei na análise dos movimentos. Conhecendo-se a aceleração do corpo (e sua massa) podemos calcular a força que causou essa aceleração, ou, conhecida a força que atua sobre o corpo, podemos calcular sua aceleração e, em seguida, utilizando as equações dos movimentos acelerados, resolver inúmeros problemas de dinâmica dos corpos. Para isso, vamos escrever a segunda lei explicitando a força.

A partir de $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$, podemos escrever diretamente $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$.

Escrita dessa forma, a equação é chamada de "equação fundamental da dinâmica" e é a forma comum que utilizamos na resolução dos problemas.

Antes de começarmos a resolução de problemas, vamos nos familiarizar com as unidades de medida de força mais usadas.

As unidades do S. I. para medida de força

Lembremos que as *grandezas fundamentais da mecânica* e suas respectivas unidades de medidas no Sistema Internacional são:

- *o comprimento*, expresso em metros (*m*);
- *a massa*, expressa em quilogramas (*kg*);
- *o tempo*, expresso em segundos (*s*).

Todas as outras grandezas da mecânica são derivadas dessas três grandezas fundamentais. Nós já vimos, por exemplo, que a grandeza velocidade média é definida como a razão entre o espaço percorrido e o tempo gasto no percurso: $V = \Delta S/\Delta t$, assim como a aceleração média é definida pela razão entre as grandezas velocidade e o tempo: $a = \Delta V/\Delta t$. Essas são grandezas derivadas das fundamentais.

A unidade de aceleração no S. I. é o m/s^2 assim, podemos obter a unidade S. I. de força, o newton, (*N*), do seguinte modo:

Com $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, temos *unidade de força = unidade de massa × unidade de aceleração.*

Assim, podemos escrever: $1\ N = 1(kg) \times 1\left(\frac{m}{s^2}\right)$

ou seja,

// atenção

O newton é a força capaz de imprimir em um corpo de 1 kg de massa uma aceleração de 1m/s².

Outras unidades de força

A Unidade CGS

Um outro sistema de unidades, também bastante utilizado é o sistema *CGS*, em que utilizamos as unidades de medidas: *centímetro* (*cm*) para a grandeza comprimento, o *grama* (*g*) para a grandeza massa e o *segundo* (*s*) para a grandeza tempo. No sistema *CGS*, a unidade de força é o dina (abrevia-se *dyn*). Assim temos:

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ ⇒ unidade de força = unidade de massa × unidade de aceleração.

Onde: $1dyn = 1(g) \times 1\left(\frac{cm}{s^2}\right)$,

Que podemos passar para o S. I. do seguinte modo:

$$1dyn = 1g \, .1\frac{cm}{s^2} = 10^{-3}\,kg \times \frac{10^{-2}\,m}{s^2}$$

$$= 10^{-3} \times 10^{-2}\,kg.\frac{m}{s^2} = 10^{-5}\,N$$

Logo, $1\ dyn = 10^{-5}\ N$

ou, multiplicando-se ambos os membros por 10^{+5},

$$10^{+5}\ dyn = 10^{+5} \times 10^{-5}\ N.$$

Onde, $10^{+5}\ dyn = 10^{0}\ N$.

Ou $1\ N = 10^{+5}\ dyn$. (10 micro newtons)

Unidade prática

Uma unidade de força também bastante usada, é o quilograma-força (*kgf*). Ela representa a força que a Terra faz sobre um corpo de 1 *kg* de massa (o peso de uma massa de 1 *kg*, na Terra).

Com P = mg = 1 × 9,8, no sistema internacional, teremos: *1 kgf = 9,8 N.*

Situação 1: cálculo do peso de uma pessoa de massa m = 100 *kg*, na superfície da Terra, onde, ao nível do mar, temos $g \cong 9{,}80665...\ m/s^2$. (Aqui usaremos o valor aproximado 9,8 m/s^2.)

na unidade prática;

Solução:

Usando diretamente a definição da unidade prática: *P = 100 kgf.*

no sistema internacional de medidas.

No S. I., teremos:

$F = m \times a \Rightarrow P = m \times g \approx 100 \times 9{,}8 = 980\ N$

Nota: repare que, na vida cotidiana, costumamos chamar de *peso* à massa. Por exemplo, é comum dizer: *fulano pesa* 100 quilos. Em nossos estudos, não podemos confundir peso e massa. Em Física, *P = mg*, isto é:

// atenção

peso = massa x aceleração da gravidade

Situação 2: um automóvel com 1.200 *kg* de massa encontra-se em repouso. Pede-se calcular:

a) a força resultante capaz de imprimir uma aceleração de 2,0 m/s^2;

Solução:

Pela 2ª lei de Newton, teremos:

$R = ma = 1200 \times 2,0 = 2.400\ N = 1,2 \times 10^3\ N$

b) a velocidade em t = 10 s;

Solução:

O móvel tem aceleração constante, logo podemos utilizar as equações do MUV.

$V = V_0 + a_t$

$V = 0 + 2,0 \times 10$

$V = 20\ m/s$

c) a distância percorrida durante os primeiros 10 s.

No MUV, temos a equação horária:

$$\Delta S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$$

substituindo os valores de $\boldsymbol{V_0}$, de $\boldsymbol{a}$ e de $\boldsymbol{t}$.

Teremos $\Delta S = 0 \cdot t + \dfrac{2,0 \times 10^2}{2}$.

Finalmente $\Delta S = 0 + \dfrac{200}{2} = 100 m$.

Situação 3: uma força constante de módulo igual a 80 N arrasta uma caixa de 10 kg de massa, inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal. Sabendo que entre o bloco e a superfície existe uma força de atrito de 20 N, calcule:

a) a aceleração do bloco;

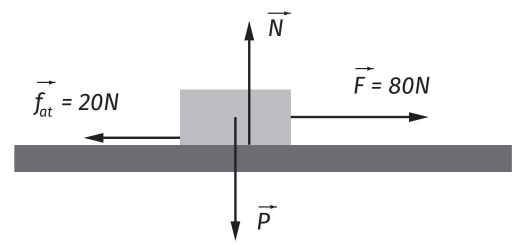
b) a velocidade do bloco 10 s depois de iniciado o movimento;

c) a distância percorrida pela caixa depois de decorrido esse tempo.

Solução:

São dados: $V_0 = 0$ (parte do repouso), $F = 80\ N$, $m = 10\ kg$ e $f_{at} = 20\ N$.

A normal equilibra o peso e só teremos força na direção horizontal. Vamos fazer uma ilustração:



a) a aceleração;

Pela 2ª lei de Newton temos:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m},$$

onde $F = \left|\vec{F} - \vec{f}_{at}\right|$ é o módulo da força resultante.

Assim: $a = \dfrac{F - f_{at}}{m}$.

Substituindo-se os valores dados,

$$a = \frac{80 - 20}{10}.$$

Finalmente: $a = \dfrac{60}{10} = 6\ N$.

b) a velocidade do bloco após 10 s do movimento;

O movimento é uniformemente acelerado. Logo:

$V = V_0 + a.t$

$V = 0 + 6,0 \times 1\ 0 = 60\ m/s$.

c) a distância percorrida.

Podemos usar a equação horária do MRUV.

$$\Delta S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Assim: $\Delta S = 0 \cdot t + \dfrac{6{,}0 \times 10^2}{2}$

logo: $\Delta S = 0 + \dfrac{6{,}0 \times 10^2}{2} = \dfrac{600}{2} = 300\,m.$

Situação 4: todos os corpos próximos da superfície da Terra estão submetidos à ação da gravidade com aceleração $g \cong 9{,}8\ m/s^2$. Calcule o peso de uma pessoa com 60 *kg* de massa, na superfície da Terra.

Solução:

$F = ma \Rightarrow P = mg$ (o peso é o produto da massa pela aceleração da gravidade)

Assim:

$P = mg = 60\ (kg) \times 9{,}8\ (m/s^2) = 588\ N.$

Situação 5: na superfície Lunar, a atração gravitacional é aproximadamente seis vezes menor que na Terra. Calcule a força com que a Lua atrai a pessoa do exemplo anterior (isto é: calcule o peso da pessoa na Lua).

Solução:

Veja que uma pessoa pesa cerca de seis vezes menos na Lua do que na Terra, mas sua *massa* (60 *kg*) *não varia*. Assim, temos:

$$P_{na\ Lua} = m \cdot g_{da\ Lua} = 60(kg) \times \frac{9{,}8}{6}\left(\frac{m}{S^2}\right)$$

$= 10 \times 9{,}8 = 98\ N$

// atenção

Note que o peso depende de onde o corpo está, mas a sua massa, não.

A força centrípeta

Como vimos no capítulo sobre MCUV, em todo movimento curvilíneo, há uma aceleração dirigida para o centro da trajetória, a aceleração centrípeta. Para determinarmos a força centrípeta (F_c) que atua sobre o móvel, vamos escrever a força centrípeta a partir da equação fundamental.

Temos: $F = ma$ (2ª lei de Newton),

onde $F_c = ma_c$, com $a_c = \dfrac{V^2}{R}$

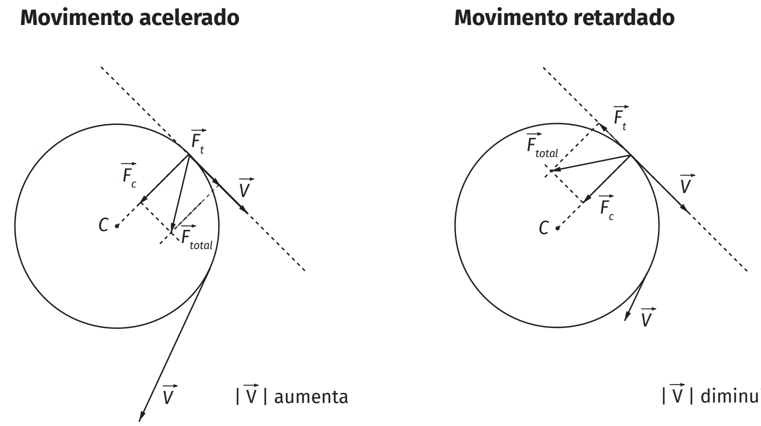
Teremos, então: $F_c = m\dfrac{V^2}{R}$

(onde V é a velocidade tangencial do móvel e R, o raio de curvatura),

com $V = \omega R$, $F_c = m\dfrac{(\omega R)^2}{R} = m\dfrac{\omega^2 R^2}{R}$

Finalmente: $F_c = m\omega^2 R$

Vamos, agora, considerar dois movimentos circulares: um acelerado, onde o módulo de V aumenta, e outro retardado, onde o módulo de V diminui. Nesses casos, além da aceleração centrípeta, responsável pela variação na direção de velocidade, temos a aceleração tangencial, responsável pela variação do módulo da velocidade.



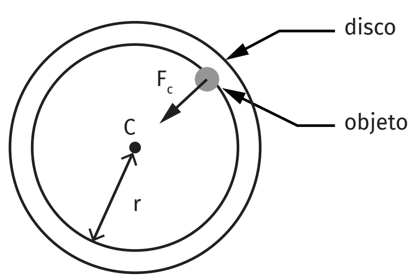
Observações:

- a força centrípeta é a componente da força dirigida para o centro da trajetória;
- no caso do *movimento circular uniforme*, onde o módulo da velocidade permanece constante, teremos apenas a força centrípeta (*a força tangencial é nula*).

Situação 6: um antigo disco de vinil gira num plano horizontal com velocidade constante de 33 *rpm* (rotações por minuto). Um objeto é colocado sobre o disco a 15 *cm* do seu centro. Supondo a aceleração da gravidade $g = 10\ m/s^2$, calcular o coeficiente de atrito estático (μe) entre o disco e o objeto, sabendo que este está na iminência de deslizar sobre o disco.

Solução:

No caso, as forças que atuam no objeto são seu peso *P* e a normal *N*. Ambas são perpendiculares ao disco. Elas se anulam e não estão representadas no desenho. Temos também a força de atrito entre o objeto e o disco. Como queremos que o objeto permaneça na mesma posição em relação ao disco, girando na mesma rotação que ele, a força de atrito tem que ser a força dirigida para o centro de rotação: $F_{AT} = F_C$ (a força centrípeta), conforme ilustrado na figura a seguir.



Vamos primeiramente passar os dados para o S. I.:

a velocidade angular:

$\omega = 33\ rpm = \dfrac{33 \times 2\pi\ (rad)}{60\ (s)} \approx 3{,}5\ rad/s$;

o raio: $r = 15\ cm = 0{,}15\ m$.

A aceleração da gravidade dada, $g = 10\ m/s^2$, já está no S. I.

Cálculo do coeficiente de atrito:

Temos a força centrípeta para fazer o corpo girar sem escorregar sobre o disco: $F_C = m\ a_c$. Nesse caso, a força centrípeta será o atrito.

Assim: $F_{At} = {}_{mac}$.   Como $F_{At} = \mu_E \cdot N$ e $a_c = \omega^2 r$,

Podemos escrever: $\mu_E \cdot N = m\omega^2 r$.

Como, em módulo,

$$N = P: \mu_E \cdot P = m\omega^2 r,$$

com $P = mg$, $\mu_E \cdot mg = m\omega^2 r$.

Dividindo ambos os membros por m,

teremos: $$\mu_E = \frac{\omega^2 r}{g} = \frac{3{,}5^2 \times 0{,}15}{10} \cong 0{,}18$$

Com um coeficiente de atrito menor que esse, a força de atrito não seria suficiente para manter o objeto sobre o disco: ele deslizaria para fora e cairia.

lá na plataforma

Na Unidade 10 de nosso ambiente virtual, na seção dedicada à 2ª lei de Newton, siga as orientações para o desenvolvimento da atividade proposta. Acesse, por meio do ambiente, objetos de aprendizagem de simulação computacional *da Universidade de Boulder Colorado, também disponíveis em: https://phet.colorado.edu/pt_BR/. Perceba como a atividade/recurso dialoga diretamente com o tema de nossa aula.*

Resumo

Nesta unidade, estudamos outra importante lei que rege os movimentos dos corpos, vimos várias aplicações da segunda lei, e aprimoramos nossos conhecimentos sobre o conceito de inércia. Vimos também a força centrípeta escrita de uma outra maneira. Os principais conceitos e equações estudadas foram, em resumo:

- a 2ª lei de Newton;

A aceleração adquirida por um corpo é diretamente proporcional à força que a produziu e inversamente proporcional à sua massa.

Ou simplesmente: $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$.

- o conceito de massa inercial;

Quanto maior a massa do corpo, maior a sua “inércia”. A massa, nesse contexto, segundo Newton, tem o sentido de uma “resistência” ao movimento. Isto é:

A massa é uma medida da inércia do corpo.

- a equação fundamental da dinâmica;

Onde, a partir de $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$, podemos escrever diretamente $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$.

- As unidades de medida da força.

No S. I.: com $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, temos: *unidade de força = unidade de massa × unidade de aceleração*. Assim podemos escrever:

$1\ N = 1(kg) \times 1\left(\frac{m}{s^2}\right)$, ou seja,

O newton é a força capaz de imprimir em um corpo de 1 kg de massa uma aceleração de 1 m/s².

No CGS: com *unidade de força = unidade de massa × unidade de aceleração*, definimos: $1dyn = 1(g)\times 1\left(\frac{cm}{s^2}\right)$, que se relaciona com o S. I. do seguinte modo: 1 *N* = 10^{+5} *dyn* (10 micro newtons).

A unidade prática:

Uma unidade de força também bastante usada é o quilograma-força (*kgf*). Ela representa a força que a Terra faz sobre um corpo de 1 *kg* de massa (o peso de uma massa de 1 *kg*, na Terra).

No sistema internacional, teremos: *1 kgf = 9,8 N*.

Exercícios

lá na plataforma

Informação complementar: na Unidade 10 de nosso ambiente virtual, no tema A 2ª lei de Newton, siga as orientações pedagógicas de suporte à resolução dos exercícios propostos a seguir, que foram pré-gravadas em áudio, no formato mp4.

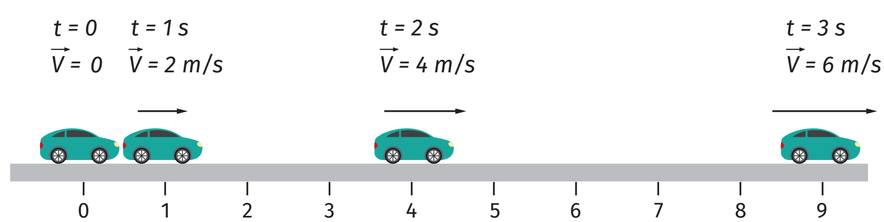
1. Uma força de 24 *N* paralela a uma superfície horizontal arrasta uma caixa com 10 *kg* de massa, de modo que a caixa adquire uma aceleração de 2,0 m/s^2. Calcular:

   a) a força de atrito entre a caixa e a superfície;

   b) a velocidade da caixa 6 segundos depois de iniciado o movimento;

   c) a distância percorrida pela caixa ao atingir a velocidade de 8 *m/s*.

2. Um carrinho com 10 *kg* de massa caminha sobre uma superfície horizontal. O desenho abaixo mostra as posições do carrinho e suas respectivas velocidades, tomadas em intervalos de tempo iguais. Responda:



   a) Existe uma força resultante atuando sobre o carrinho? Justifique sua resposta.

   b) Calcule a aceleração do carrinho supondo que ela é constante.

   c) Calcule a força resultante sobre o carrinho.

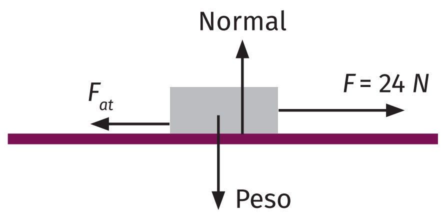
3. Na vida cotidiana, é comum ouvirmos frases do tipo: “Pedrinho está muito gordo, ele está pesando 80 quilos”. Responda, então:

a) De acordo com o que aprendemos da dinâmica Newtoniana, o que está errado nesta frase?

b) Supondo que a aceleração da gravidade é $g = 10\ m/s^2$, calcule o peso de Pedrinho.

Respostas comentadas

1. Nesse tipo de problemas, é importante que você faça um desenho, como na ilustração a seguir, descrevendo a situação, e contendo os dados do enunciado,



A massa da caixa é $m = 10\ kg$ e a aceleração $a = 2{,}0\ m/s^2$.

Na direção vertical, a normal equilibra o peso e a caixa não sobe nem desce.

Na horizontal, teremos:

a) Cálculo da força de atrito:

Temos:

$F_{resultante} = m \cdot a$

$F - F_{at} = m \cdot a$

$-F_{at} = m \cdot a - F$

$F_{at} = F - m \cdot a$

$F_{at} = 24 - 10 \times 2{,}0 = 24 - 20 = \mathbf{4{,}0\ N}$

b) A velocidade, após decorridos 6 s do movimento.

No MUV, temos $V = V_0 + at$

$V = 0 + 2{,}0 \times 6 = \mathbf{12\ m/s}$

c) A distância percorrida pela caixa ao atingir a velocidade de 8 m/s. Nesse item não temos o tempo. Aplicamos Torricelli:

$V^2 = V_0^2 + 2a\Delta S$

$8^2 = 0 + 2 \times 2{,}0 \times \Delta S$

$64 = 4{,}0\ \Delta S \Rightarrow \Delta S = 64/4 = \mathbf{16\ m}$

2.

a) Sim, pois o movimento é acelerado.

b) Sendo a = constante, teremos entre os instantes $t = 1\ s$ e $t = 2\ s$, por exemplo.

c) 20 N.

3.

a) Segundo a mecânica que estamos estudando, 80 “quilos” é a **massa** de Pedrinho e não seu peso.

b) Temos $F = ma$ ou $P = mg$, logo $P = 80\ (kg) \times 10\ (m/s^2) \Rightarrow P =$ **800 *N***.

4. **4,0 *N***.

A 3ª lei de Newton e as condições de equilíbrio

11

meta

Apresentar a 3ª lei de Newton, as principais forças mecânicas de interação e o conceito de momento de uma força.

objetivos

Esperamos que, ao final desta unidade, você seja capaz de:

- aplicar a 3ª lei de Newton em casos práticos;
- reconhecer e diferenciar as forças de ação e reação, dentre aquelas que estão agindo sobre um corpo;
- entender o conceito de momento de uma força e uma nova condição de equilíbrio: aquela em que não há a possibilidade de rotação, isto é, quando são nulos o somatório de todas as forças, e também o momento.

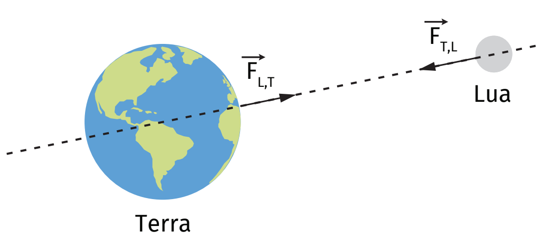
Introdução

Forças de interação

As forças são sempre o resultado da interação entre os corpos. O peso, por exemplo, é a força exercida pela Terra sobre o corpo. Acontece que o corpo também exerce uma força de atração sobre a Terra. Sempre que um corpo exerce uma força sobre outro, este reage e exerce também uma força sobre o primeiro.

Situação 1: *Força de ação a distância*

Vamos considerar o caso da interação gravitacional entre a Terra e a Lua e chamar de $F_{T,L}$ a força que a Terra faz na Lua, e $F_{L,T}$ a força que a Lua faz na Terra. Veja a ilustração a seguir:

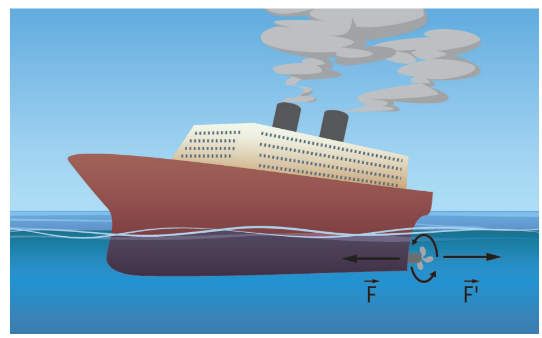


Na figura, vemos uma representação da Terra e de sua Lua, mostrando as forças de interação entre os dois corpos celestes. Essa força, chamada de *força gravitacional,* é, segundo Newton, uma força de *interação à distância.*

Em módulo, a força que a Terra faz na Lua é igual à força que a Lua faz na Terra: $\left|\overrightarrow{F_{T,L}}\right| = \left|\overrightarrow{F_{L,T}}\right|$, mas elas têm sentidos diferentes. Assim: $\overrightarrow{F_{T,L}} = -\overrightarrow{F_{L,T}}$.

Situação 2: imagine que você está de patins e empurra, com força, uma parede. O resultado é você sair patinando na direção contrária à da parede. Isso acontece porque, ao empurrar a parede, esta *reage* e empurra você também.

Situação 3: a hélice de um navio, girando, empurra a água para trás e, então, a água empurra o navio para a frente.



Na figura, estão representados um navio, a força que ele exerce sobre a água por meio do movimento da hélice (representada pela ação $\vec{F'}$) e a reação a essa força que é exercida pela água sobre o navio (representada por $\vec{F}$).

Nesse caso, também temos: $\left|\vec{F}\right| = \left|\vec{F'}\right|$, onde $\vec{F} = -\vec{F'}$. Essas forças são chamadas forças de *ação e reação.*

Podemos enunciar a 3ª lei do seguinte modo:

// atenção

Sempre que um corpo A exerce uma força sobre um corpo B, este reage e exerce sobre o corpo A uma força de mesma intensidade, mesma direção e sentido contrário à primeira.

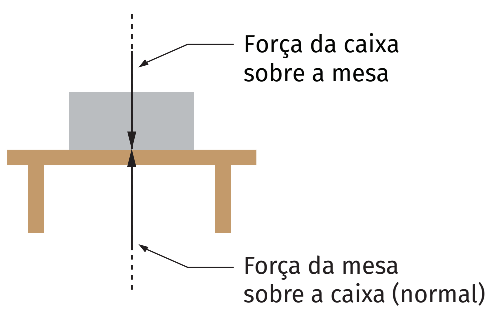
É bom lembrar que:

// atenção

As forças de ação e reação agem sempre em corpos diferentes.

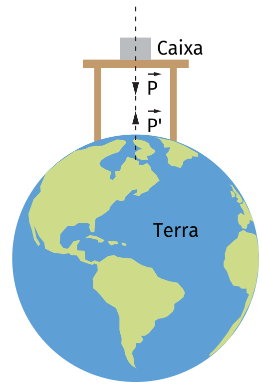
Isto é: você empurra a parede, a parede empurra você. Note também que as forças de ação e reação não se somam. Cada uma, separadamente, causa o seu efeito, mas em *corpos diferentes*.

Situação 4: consideremos uma caixa sobre uma mesa. A caixa exerce uma força de contato sobre a mesa. A mesa reage e exerce uma força sobre a caixa (a nossa conhecida força normal N).



Observação: nesse caso, a força que a caixa exerce sobre a mesa é igual em módulo, direção e sentido à força peso, *mas não é o peso*. O peso da caixa atua na caixa e não na mesa. *A força normal não é reação ao peso*. Então, onde está a reação ao peso da caixa?

Lembremos que o peso da caixa é a força que a *Terra exerce sobre a caixa*, portanto, a reação a seu peso é a força que a *caixa exerce sobre Terra*.



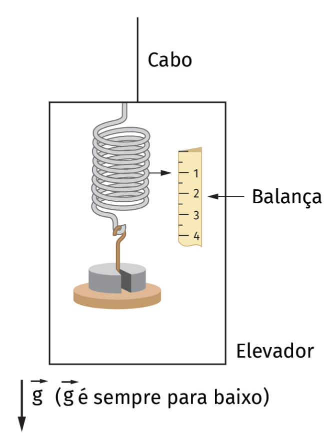
Na figura, são representadas uma mesa sobre a superfície terrestre e uma caixa disposta sobre a mesa. Também estão representadas as forças que a terra exerce sobre a caixa (seu peso, $\vec{P}$, e reação ao peso, $\vec{P}'$, que é a força com que a caixa "atrai" a Terra).

// atenção

A reação ao peso da caixa atua na Terra.

Situação 5: *o problema do elevador.*

Vamos considerar uma balança de mola que está presa ao teto de um elevador e sustenta um corpo de 20 *kg* de massa, conforme ilustrado a seguir. Supondo que a aceleração da gravidade vale $g = 10\ m/s^2$, analise cada caso, respondendo ao que se pede:

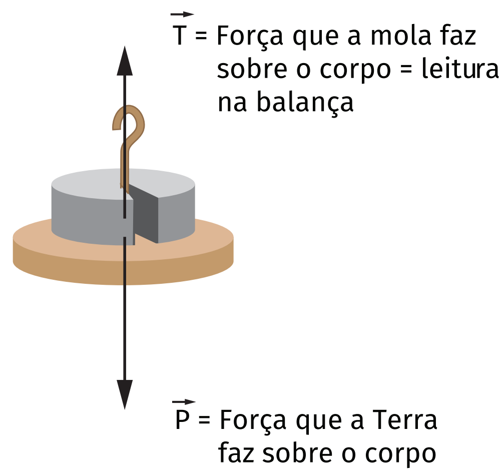


Pede-se:

a) calcular a leitura na balança, sabendo que *o elevador está parado*;

Solução:

Nesse caso, as forças que agem sobre o corpo são:



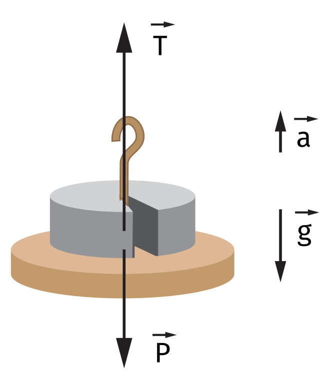
Temos que: $\vec{P}$= força que a Terra faz sobre o corpo e $\vec{T}$ = força que a mola faz sobre o corpo = leitura na balança. Como a resultante é $R = 0$ (pois o elevador está "parado"), temos, em módulo:

$$T = P = mg = 20 \times 10 \Rightarrow T = 200\ N$$

b) calcular a nova leitura na balança, sabendo que *o elevador começa a subir com aceleração de 2 m/s²*;

Solução:

As forças que agem sobre o corpo são:



Como o elevador está *subindo acelerado*, temos, em módulo, $T > P$, e a resultante das forças sobre o corpo será $T - P$.

Pela $2^{\underline{a}}$ lei de Newton, temos: $R = m.a$ (R = resultante das forças sobre o corpo).

Logo, $T - P = m.a$,

onde $T = m.a + P$.

Com $P = m.g$, $T = m.a + mg$,

ou, colocando em evidência, $T = m.(a + g)$.

Substituindo-se os valores dados, $T = 20(kg) \times (2{,}0 + 10)(m/s^2) = 20 \times 12\ (kg)(m/s^2)$.

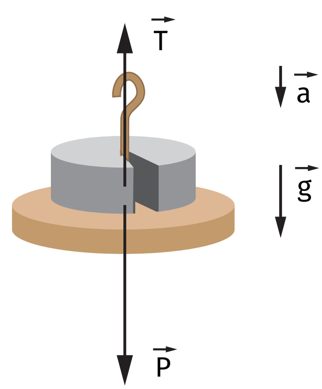
Finalmente: $T = 240\ N$.

Note que, quando o elevador começa a subir, ele está acelerado e a tensão no cabo se torna *maior* do que quando o elevador está parado.

c) calcular a nova leitura na balança, sabendo que *o elevador desce com aceleração de 3 m/s²*;

Solução:

As forças que agem sobre o corpo são:



Como o elevador *está descendo acelerado*, temos que, em módulo, $T < P$. Desse modo, teremos a resultante $R = P - T$. Assim:

Pela 2^a lei de Newton, temos: $R = m.a$.

Logo, $P - T = m.a$,

onde (multiplicamos tudo por -1) $T = P - m.a$.

Com $P = m.g$, $T = m.g - m.a$,

ou, colocando (m) em evidência, $T = m.(g - a)$.

Substituindo-se os valores dados, $T = 20 \times (10 - 3{,}0) = 20 \times 7{,}0$.

Finalmente: $T = 140\ N$.

Note que, quando o elevador começa a descer, ele está acelerado, com aceleração na mesma direção e sentido que a aceleração da gravidade, *g*, e a tensão no cabo se torna *menor* do que quando o elevador está parado.

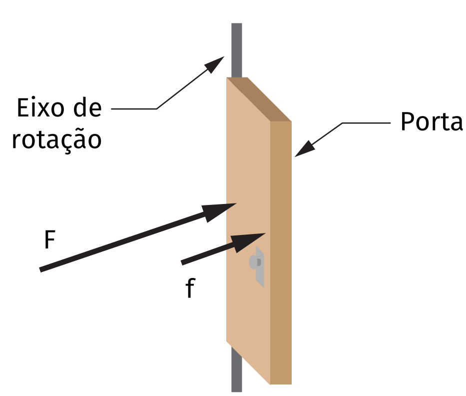
d) calcular a nova leitura na balança, sabendo que o *cabo do elevador se rompe, de modo que ele cai com a aceleração da gravidade*.

Solução:

Nesse caso, o corpo, a balança e o elevador caem com a mesma aceleração (g). A mola da balança não exerce força alguma sobre o corpo. A balança registra *zero*. Quem estiver dentro do elevador tem a sensação de que está num lugar sem gravidade. Faz parte do treinamento dos astronautas um experimento desse tipo. O piloto de um avião, depois de alcançar grandes alturas, coloca o avião em queda livre (durante uns poucos segundos, é claro) e tudo dentro do avião se passa como se não houvesse gravidade.

Momento de uma força (uma nova condição de equilíbrio)

Você já deve ter notado que, para abrir ou fechar uma porta, é muito mais fácil fazê-lo perto da maçaneta do que empurrando em algum ponto próximo do eixo de rotação, onde estão as dobradiças (faça essa experiência e verifique).

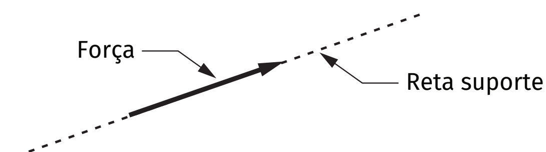


A grandeza física envolvida nesse fato é o *momento*.

// atenção

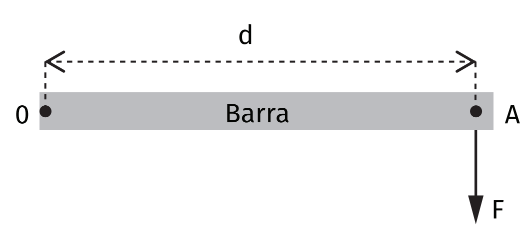
O momento de uma força em relação a um ponto é igual ao produto da distância do ponto ao suporte da força, pela força.

O *suporte da força* a que se refere o enunciado é a reta sob a qual a força se encontra, que nos dá a *direção* da força. Veja a ilustração a seguir.



Mais adiante, veremos como calcular a distância do ponto à reta suporte. Por enquanto, vamos ver alguns casos, mais simples, onde a *força é perpendicular à direção da distância d*. Nesses casos, escrevemos, simplesmente: M_0 = distância × força.

Vamos considerar uma barra onde aplicamos uma força F em sua extremidade, a uma distância d do ponto 0, conforme a ilustração a seguir.



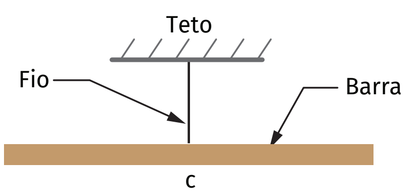
Veja que F é perpendicular a d. Nesse caso, escrevemos:

// atenção

O momento da força F em relação ao ponto 0 é dado por: $M_0 = d \cdot F$.

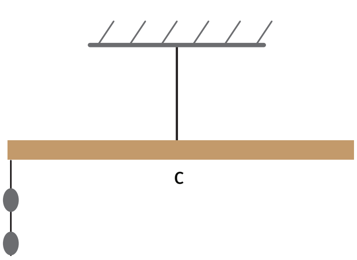
O *momento* nos indica a maior ou menor tendência de a barra *girar* em torno do ponto considerado. Quanto maior a distância da força ao ponto, ou quanto maior a força, maior será a tendência de a barra girar em torno de 0.

Situação 6: vamos imaginar uma barra de madeira, homogênea, com 20 *cm* de comprimento, e que nós a penduramos ao teto por meio de um fio, preso ao centro da barra, conforme ilustrado a seguir.



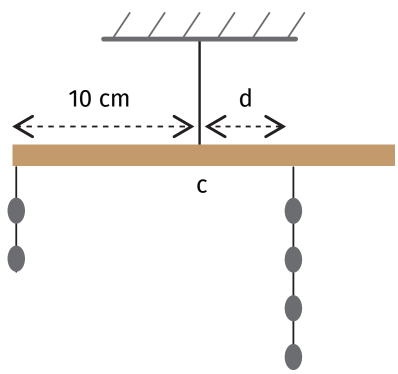
Como a barra é homogênea e o fio está preso em seu centro, ela ficará em equilíbrio, na horizontal (faça a experiência com uma régua, ou coisa parecida, e verifique).

Imagine, agora, que dispomos de 6 pesinhos iguais, cada um com peso p. Vamos supor que penduremos dois desses pesinhos na extremidade esquerda da barra.



Certamente, a barra não ficará em equilíbrio. Ao colocarmos os pesinhos, aparecerá um *momento* que fará a barra girar, em torno do ponto c, no sentido *anti-horário*:

Vamos, então, calcular a que distância do centro *c* devemos colocar os quatro pesinhos restantes de que dispomos, de modo que a barra fique em equilíbrio na horizontal. Certamente, teremos que colocá-los no outro lado da barra, à direita de *c*. Vamos calcular a que distância *d*, de *c*, devemos fazê-lo.



Solução:

Para haver equilíbrio (ou seja, para a barra não girar), é necessário que o momento total sobre a barra seja nulo. Assim, o momento dos dois pesinhos da esquerda (que vamos considerar negativo) somado ao da direita (que vamos considerar positivo) deverá resultar zero.

Temos, então, a nova condição de equilíbrio: $\Sigma M = 0$.

Por definição, no caso, o momento é $M_0 = d \cdot F$. Cada pesinho pesa *p*. Assim, em relação ao ponto *c*, teremos:

Para a direita (momento que convencionamos positivo), temos: $\Sigma Mc = d \times 4p$.

Para a *esquerda* (momento que convencionamos negativo), temos: $\Sigma Mc = -10 \times 2p$ (usando as distâncias em centímetros).

Assim, fazendo: $\Sigma M_C = 0$, teremos:

$$d \times 4p - 10 \times 2p = 0,$$

ou $$d \times 4p = 10 \times 2p;$$

onde $$d = \frac{10 \times 2p}{4p}.$$

Assim, $$d = \frac{20}{4}.$$

Finalmente: $d = 5\ cm.$

Observações:

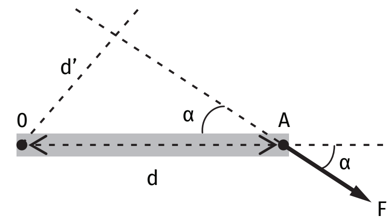
- a unidade de momento no Sistema Internacional é o $N.m$ (Newton x metro).
- devemos sempre escolher um sentido de rotação, horário ou anti-horário, como positivo, assim, é claro, o outro sentido será negativo.

Dois modos para calcular o momento

Vamos estudar, agora, os casos mais gerais, onde a força não é perpendicular à direção da distância *d*.

Situação 7: consideremos uma barra na qual aplicamos uma força *F* em uma de suas extremidades (ponto *A*). Vamos calcular o momento de *F* em relação ao ponto 0, sendo *d* a distância do ponto 0 à reta suporte da força. Faremos isso de dois modos. É claro que o valor do momento tem que ser o mesmo.

Primeiro modo:



Na figura anterior, vemos que a distância do ponto 0 ao suporte da força é *d'*.

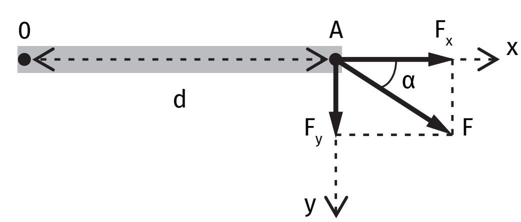
Assim, temos o momento $M_0 = d'.F$.

Usando a definição do seno, fica:

$M_0 = d.sen\ \alpha.F$ pois $d' = d.sen\ \alpha$.

Segundo modo:

Outra maneira de calcular o momento é decompor a força *F* em suas componentes cartesianas e calcular o momento de cada componente. Veja, na ilustração a seguir, que o momento da componente F_X é nulo, pois seu suporte passa por 0, sendo nula a distância de 0 ao suporte de F_X. Temos apenas o momento da componente y de *F* ($F_Y = F \cdot sen\ \alpha$).



Assim: $M_0 = d.F_y$,

onde $M_0 = d.F.sen\ \alpha$.

Veja que o resultado é idêntico ao anterior, pois a ordem dos fatores não altera o produto. Assim, para calcularmos o momento, podemos fazer:

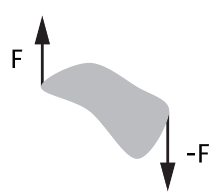
// atenção

[(distância ⊥ força) × (força)] ou [(distância) × (força ⊥ distância)].

O símbolo ⊥ significa *perpendicular a*.

O binário de forças

Chamamos *binário* a um par de forças de mesmo módulo e de sentidos contrários, aplicadas em pontos distintos de um corpo. Imagine um corpo qualquer sob a ação de um binário. Veja que a força resultante é nula e, assim, o corpo não terá nenhuma aceleração linear. Mas um corpo sob a ação de um binário tem um momento não nulo e não estará em equilíbrio, pois, certamente, começará a girar.



Temos $\Sigma F = 0$, mas o corpo não está em equilíbrio.

Para que um corpo esteja em equilíbrio, não basta apenas que a resultante das forças seja nula, pois o corpo pode estar girando sob a ação de um binário.

// atenção

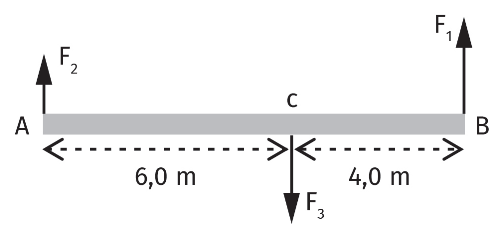
Para haver equilíbrio, é necessário que a resultante das forças seja nula e que o momento resultante também seja nulo.

Resumindo:

// atenção

Equilíbrio $\Leftrightarrow \Sigma F = 0$ *e* $\Sigma M = 0$.

Situação 8: a barra ilustrada a seguir está em equilíbrio sob a ação das três forças, conforme indicado. Sendo dado $F_3 = 50$ N, calcular as intensidades de F_1 e F_2.



Solução:

Veja que temos duas incógnitas, F_1 e F_2. Vamos ter que encontrar duas equações. Sendo assim, vamos aplicar as duas condições de equilíbrio: $\Sigma F = 0$ e $\Sigma M = 0$.

Observe que, se o momento total é *nulo em relação a um ponto*, ele será *nulo em relação a qualquer outro ponto*. Se o corpo *não está girando*, não gira em relação a quaisquer pontos. Assim, podemos escolher o ponto mais conveniente para usar nos cálculos. Vamos escolher o sentido anti-horário como positivo e escolher o ponto A para calcular os momentos.

Temos: $\Sigma M_A = 0$,

ou $M_1 + M_2 + M_3 = 0$

(os momentos das forças F_1, F_2 e F_3).

Ainda $(AB \times F_1) + (0 \times F_2) - (AC \times F_3) = 0$.

Fazendo as substituições dos dados, vem

$$(6{,}0 + 4{,}0) \times F_1 - 6{,}0 \times 50 = 0.$$

Logo, $10 \times F_1 = 300$

$\rightarrow F_1 = 30\ N.$

Agora, vamos usar a outra condição de equilíbrio.

Temos: $\Sigma F = 0$.

Assim, $F_1 + F_2 + F_3 = 0$,

ou $F_1 + F_2 - 50 = 0$,

ou ainda $F_2 = 50 - F_1$.

Como $F_1 = 30N$, $F_2 = 50 - 30$.

Finalmente: $F_2 = 20\ N$.

lá na plataforma

Na Unidade 11 de nosso ambiente virtual, no tema A 3ª Lei de Newton e as condições de equilíbrio, *siga as orientações de desenvolvimento da atividade proposta. Além disso, acesse os objetos de aprendizagem de simulação computacional no ambiente [https://phet.colorado.edu/pt_BR/] da Universidade de Boulder, Colorado.*

Perceba como a atividade/recurso dialoga diretamente com o tema de nossa aula.

Resumo

- Nesta unidade, foi estudada a 3ª lei de Newton, que pode ser enunciada do seguinte modo:

Sempre que um corpo A exerce uma força sobre um corpo B, este reage e exerce sobre o corpo A uma força de mesma intensidade, mesma direção e sentido contrário à primeira.

- A respeito das forças de ação e reação, lembre-se de que:

As forças de ação e reação agem sempre em corpos diferentes.

- Lembre-se, também, de que *se você empurra uma parede, a parede empurra você*. Note que as forças de ação e reação não se somam. Cada uma, separadamente, causa o seu efeito, mas em corpos diferentes.

O momento $M = F\,.\,d$

- Definimos, também, o conceito de *momento de uma força*, por meio do qual, para calcularmos o momento, em geral, podemos fazer:

$$M = [(\text{distância} \perp \text{força}) \times (\text{força})] \text{ ou}$$
$$M = [(\text{distância}) \times (\text{força} \perp \text{distância})].$$

O símbolo $\perp$ significa *perpendicular a*.

- Foi definido, ainda, o conceito de *binário* de forças, que, mesmo tendo resultante nula – uma vez que elas agem em pontos diferentes do corpo – pode permitir que este comece a girar acelerado. Isto é: temos $\Sigma F = 0$, mas o corpo não está em equilíbrio.

Para haver equilíbrio, é *necessário que o momento também seja nulo*.

- Resumindo, as condições de equilíbrio são:

$$\text{Equilíbrio} \Leftrightarrow \Sigma F = 0 \text{ e } \Sigma M = 0.$$

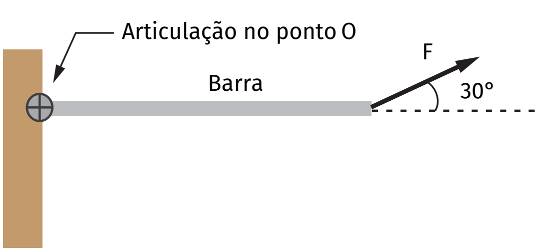
Exercícios

lá na plataforma

Informação complementar: na Unidade 11 de nosso ambiente virtual, no tema A 3ª Lei de Newton e as condições de equilíbrio, *siga as orientações pedagógicas de suporte à resolução de exercícios propostos a seguir, que* foram pré-gravadas em áudio, no formato [mp4].

1. Uma barra homogênea de peso $P = 10\ N$ e 1,2 *m* de comprimento está presa a uma parede, por meio de uma articulação, no ponto 0, de modo que ela pode girar livremente em torno desse ponto. Dados: *sen* 30º = ½ = 0,5 e *cos* 30 = $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}86$. Pede-se:
   a) o valor da força *F*, aplicada na outra extremidade da barra e fazendo um ângulo de 30° com o eixo desta, conforme ilustrado a seguir, que é capaz de deixar a barra em equilíbrio, na posição horizontal;
   b) a força que a parede faz na barra.

Veja a ilustração:



Foram dados:

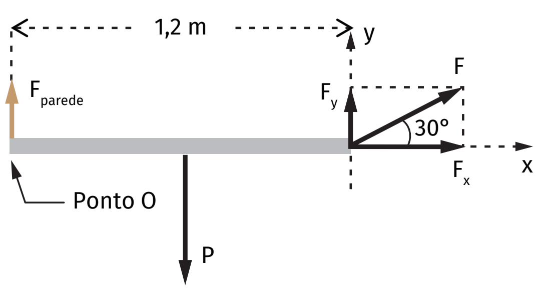
- a barra é homogênea, logo seu peso está atuando no centro dela;
- a barra tem 1,2 *m* de comprimento;
- a força que a Terra faz sobre a barra, que é $P = 10\ N$;
- o seno e o cosseno de 30º;
- o apoio da barra na parede, articulado (como numa dobradiça), de modo que a barra não cause um momento, não pode fazer a barra girar. Sendo assim, a força que a parede faz na barra é apenas para que esta não caia.

Foram pedidos:

- a força que a parede faz na barra;
- o valor da força *F*.

Você deve decompor a força em suas componentes, como na **Situação 7** desta unidade.

Para facilitar a solução, devemos "isolar a barra" e colocar todas as forças que agem sobre ela. Para isso, *vamos desenhar apenas a barra* e indicar essas forças sobre o desenho.

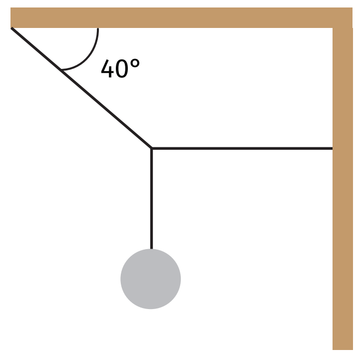


Reveja o item "Dois modos para calcular o momento".

Finalmente, aplique as condições de equilíbrio, para encontrar F_{PAREDE} e *F*, como pedido.

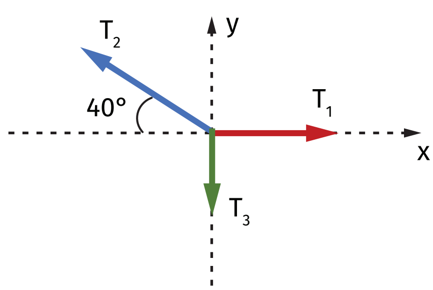
2. Um sistema com três cordas de massas desprezíveis sustenta uma esfera, conforme mostra a ilustração a seguir. A tensão na corda horizontal vale 30 *N*.

Dados: *sen* 40° = 0,64 e *cos* 40° = 0,77. Pede-se determinar o peso da esfera.



Na figura, uma esfera pesada é sustentada por 3 cordas muito leves, conforme ilustrado.

Sugestões: para resolver esses tipos de exercícios, é conveniente escolher um sistema de eixos cartesianos adequado, colocar as forças pertinentes, dando nomes diferentes a cada uma delas, e aplicar as leis que dizem respeito à situação. Por exemplo, no caso, vamos colocar o vértice do sistema de eixos, no ponto de encontro das três cordas e aplicar as condições de equilíbrio. Note que o ângulo de 40° se repete abaixo de T_2.

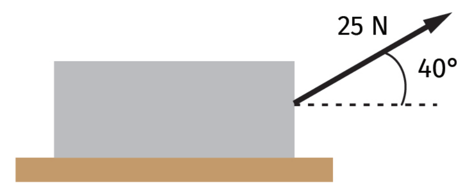


As condições de equilíbrio são: $\Sigma F = 0$ e $\Sigma M = 0$. Veja que, nesse caso, as três forças são concorrentes no ponto de encontro das cordas. Assim, a distância das forças a esse ponto é nula, sendo também nulos todos os momentos. Logo, não adianta usarmos a condição $\Sigma M = 0$.

São dados: a tensão $T_1 = 30\ N$, e podemos ver, pela figura, que o que causa a tensão T_3 é o peso da esfera. Logo, em módulo, T_3 = Peso (que é o valor pedido).

Devemos, desse modo, aplicar a condição de equilíbrio $\Sigma F = 0$, ou seja: $\Sigma FX = 0$ e $\Sigma FY = 0$. Com isso, você terá um sistema de duas equações, com duas incógnitas, e poderá resolver a questão.

3. Uma caixa de peso 50 *N* é puxada por uma força de 25 *N*, conforme é mostrado na ilustração a seguir, de modo que ela desliza sobre a superfície horizontal com velocidade constante. Dados: *sen* 40° = 0,64 e *cos* 40° = 0,77.



Determine:

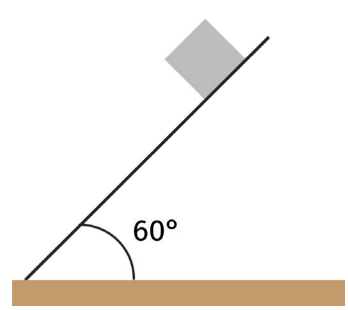
a) o valor da força de atrito que se opõe ao movimento da caixa;

b) o valor da força normal.

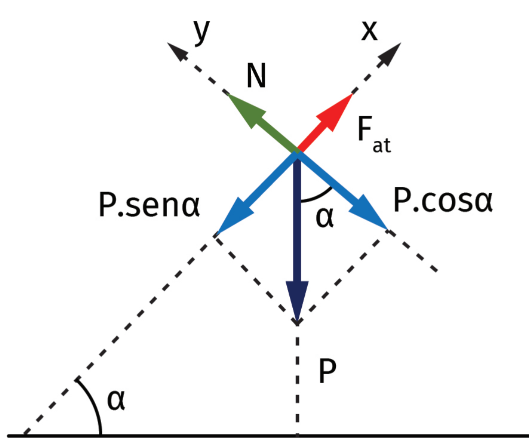
4. Um bloco de peso igual a 10 *N* está em repouso sobre um plano inclinado, conforme ilustra a figura a seguir. Determine:

a) o valor da força normal ao plano inclinado;

b) a força de atrito estático.



Dica: trace um sistema de eixos conveniente e coloque todas as forças que atuam sobre o corpo considerado. Veja como fazer isso, na ilustração a seguir.

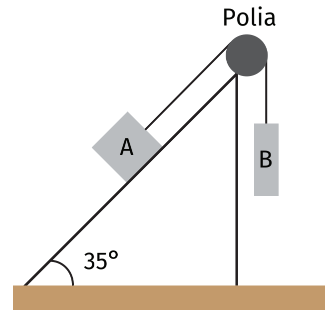


Observações:

- os dois lados do ângulo α são a horizontal e a direção do plano inclinado (direção *x*);
- note que o suporte do peso é *perpendicular à horizontal* e que o eixo *y* é *perpendicular ao eixo* x;
- isto é: a direção de P e a direção de y são perpendiculares às direções dos lados que formam o ângulo α dado. Sendo assim, entre P e y temos o mesmo ângulo α, conforme mostra a ilustração.

Finalmente: escreva as equações das condições de equilíbrio pertinentes e resolva a questão!

5. Num plano inclinado perfeitamente liso, o sistema da figura está em equilíbrio. O peso do bloco A é 2×10^2 *N*. A polia pode girar livremente e a massa do fio que liga os blocos é desprezível. Determine o peso do bloco B. Dados: *sen* 35° = 0,57, *cos* 35° = 0,82.



Dicas:

- é dado que o plano inclinado é "perfeitamente liso", e a polia pode "girar livremente"; logo, podemos supor que não há atrito entre o plano e o bloco, e no eixo da polia;
- no equilíbrio, as forças de tração na corda devem se anular. Veja a dica do desenho do exercício anterior para isolar o bloco A;
- a força com que o bloco A traciona a corda deve ser igual, em módulo, à força com que o bloco B o faz; caso contrário, a corda não ficaria em equilíbrio.

Respostas

1. a) $F = 10$ *N*. b) $F_{PAREDE} = 5{,}0$ *N*.
2. 25 *N*.
3. a) $F_{AT} = 19$ *N*. b) $N_{ORMAL} = 34$ *N*.
4. a) $N_{ORMAL} = 5{,}0$ *N*. b) $F_{AT} = 0{,}87$ *N*.
5. 114 *N*.

12 Gravitação

meta

Apresentar as leis de Newton e de Kleper para a gravitação.

objetivos

Espera-se que, ao final desta unidade, você seja capaz de:

- conhecer e enunciar as leis de Newton e de Kepler para a gravitação;
- aplicar as leis em casos simples de órbitas circulares;
- distinguir corretamente os conceitos de massa gravitacional e massa inercial.

Introdução

A Lei da Gravitação Universal

Uma das maiores contribuições de Newton para o conhecimento humano sobre a natureza foi a aplicação das leis fundamentais da mecânica ao estudo dos movimentos dos astros. A hipótese inicial de que os corpos “caem” na direção da Terra porque esta os atrai para si, levou Newton a elaborar as leis que regem os movimentos, não apenas dos corpos próximos de nós, como também dos planetas e das estrelas mais distantes.

A força da gravidade

A força da gravidade se deve à atração entre massas. Ela é responsável pelo movimento harmonioso que podemos observar nos planetas que gravitam em torno do Sol e nos satélites que orbitam seus planetas, como a Lua em torno da Terra.

Vamos considerar dois corpos de massas m_1 e m_2, separadas pela distância *r*. Eles se atraem, e cada corpo exerce uma força sobre o outro de mesmo módulo e sentidos contrários. Como na terceira lei de Newton, estas são forças de ação e reação. Elas têm características muito importantes: embora sejam muito fracas, podem atuar em distâncias consideráveis. Veja a ilustração a seguir:

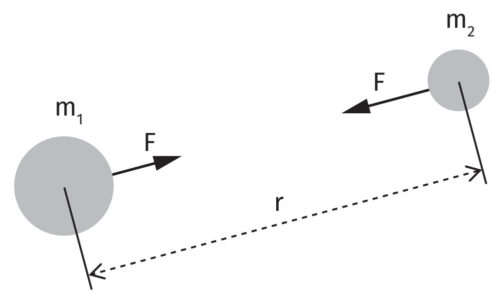


Figura 12.1

A lei da gravitação universal de Newton pode ser enunciada como segue:

// atenção

A força F com que dois corpos se atraem é diretamente proporcional ao produto das suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles.

Em linguagem matemática, escrevemos: $F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$.

Observações:

- Newton demostrou que tudo se passa como se a força *F* agisse no centro dos corpos (considerando-os homogêneos).
- A constante de proporcionalidade, *G*, é chamada de constante de gravitação universal. O seu valor independe do meio onde se encontram os dois corpos, e vale:

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$$

>> saiba mais

Acredita-se que Newton tenha estimado um valor para a constante de gravitação baseado na observação da aceleração de corpos em queda livre.

Foi Henry Cavendish (nascido em Nice, França, em 1731, e falecido em Londres, em 1810), um conhecido físico-químico da época, quem conseguiu pela primeira vez, entre os anos de 1797 e 1798, medir um valor de G com grande precisão.

Fazendo-se valer de ideias anteriores de John Michel e Charles August Coulomb, Cavendish construiu uma balança, muito sensível, chamada "balança de torção" e logrou medir, em laboratório, a força entre duas massas conhecidas e, assim, calcular um excelente valor de G. Seu objetivo na época era determinar a densidade da Terra, o que ele pôde então fazer, após as medidas realizadas.

A unidade de medida da constante de gravitação G

Temos que: $F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$, onde, explicitando o G, temos: $G = \frac{F \cdot r^2}{m_1 \cdot m_2}$.

Escrevendo em termos das unidades de medidas, vem: $[G] = \frac{[F] \cdot [r]^2}{[m_1 \cdot m_2]}$.

Finalmente, $[G] = \frac{N \cdot m^2}{kg \cdot kg} = \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$.

Em termos das grandezas fundamentais, podemos escrever também de outra forma: como o N é a unidade de força, e sendo $F = m \cdot a$, teremos, em termos das unidades, $[F] = N = kg \cdot \frac{m}{s^2}$. Substituindo essas unidades, no lugar do newton N na expressão de G, mais acima, obtemos: $[G] = \frac{kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot m^2}{kg^2}$.

Finalmente a unidade de G: $[G] = \frac{m^3}{s^2 \cdot kg}$, que é a expressão da unidade de medida da constante de gravitação em termos das unidades de medida das grandezas fundamentais da mecânica: o comprimento (ou distância) em metros (m), o tempo em segundos (s) e a massa em quilogramas (kg).

Situação 1: vamos calcular a força de atração gravitacional entre um ônibus com massa M_O = 5,0 toneladas e um caminhão carregado, com massa total M_C = 10 toneladas, quando seus centros de massa estão separados em 20 m.

Solução: primeiro vamos passar os dados para o S.I., pois a constante de gravitação G escrita acima está no S.I.: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$.

A massa do ônibus: M_O = 5,0 T = 5.000 kg = $5{,}0 \times 10^3\ kg$.

A massa do caminhão: M_c = 10 T = 10.000 kg = $10 \times 10^3\ kg$.

A distância entre o caminhão e o ônibus r = 20 m (já está no S. I.).

Pede-se a força de atração entre eles.

De acordo com a lei da gravitação universal, $F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$,

substituindo-se os valores dados, vem: $F = 6{,}67 \times 10^{-11} \times \frac{5{,}0 \times 10^3 \times 10 \times 10^3}{20^2}$,

onde $F = \frac{6{,}67 \times 5{,}0 \times 10 \times 10^{-11} \times 10^3 \times 10^3}{400}$,

ou $F = \frac{6{,}67 \times 5{,}0 \times 10^1 \times 10^{-11} \times 10^3 \times 10^3}{400}$,

ou ainda $F = \frac{6{,}67 \times 5{,}0 \times 10^{1-11+3+3}}{400}$.

Finalmente: $F = 0{,}083 \times 10^{-4} = 8{,}3 \times 10^{-6}\,N$.

Note que a força vale 0,0000083 N (8,3 milionésimos de newtons). Quando estamos nas proximidades de uma massa como a de um ônibus, um caminhão, ou mesmo de uma enorme montanha, a força gravitacional é tão pequena que não é perceptível para nós. A força gravitacional passa a ser significativa para massas muito grandes como, por exemplo, a massa da Terra, que vale aproximadamente, $6{,}0 \times 10^{24}\,kg$, ou a massa do Sol, 333.400 vezes maior do que a da Terra.

A força peso e a aceleração da gravidade

A força com que a Terra atrai um corpo é chamada de peso (força da gravidade). O peso é um caso particular da força gravitacional e podemos escrever: $F = P = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$.

Onde P é o peso do corpo; m, a massa do corpo; M, a massa da Terra, e r, a distância do corpo ao centro da Terra. Igualando as equações a seguir:

$P = mg$ e $P = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$ obtemos $mg = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$ ou $g = G \cdot \frac{M}{r^2}$.

Assim, encontramos o valor da aceleração da gravidade a uma distância r do centro da Terra.

O valor de g no nível do mar, à latitude de 45°, é chamado de “aceleração normal da gravidade” e seu valor é: $g = 9{,}80665\,m/s^2$. Para pequenas alturas, nas proximidades da Terra, g varia muito pouco com respeito a r, e podemos considerá-la praticamente constante. Como já vimos anteriormente, em muitos exercícios, adotamos o valor aproximado: $g = 9{,}81$ ou $g = 10\,m/s^2$ para simplificar os cálculos.

Situação 2: conhecendo a constante de gravitação: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,m^3/s^2\,kg$, a aceleração da gravidade na superfície terrestre, $g = 9{,}81\,m/s^2$, e supondo que a Terra é uma esfera de aproximadamente 6.370 km de raio, vamos calcular sua massa.

Solução:

Passando o valor do raio r para o S. I., teremos: r = 6.370 km = 6.370.000 = $6{,}37 \times 10^6$ m.

Como $P = mg$ e $P = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$ onde $g = G \cdot \frac{M}{r^2}$,

podemos escrever $M = \frac{gr^2}{G}$,

onde $$M = \frac{9{,}81 \times (6{,}37 \times 10^6)^2}{6{,}67 \times 10^{-11}}.$$

Assim, $$M = \frac{9{,}81 \times 6{,}37^2 \times 10^{12}}{6{,}67 \times 10^{-11}},$$

ou $$M = \frac{9{,}81 \times 40{,}6 \times 10^{12}}{6{,}67 \times 10^{-11}},$$

ou ainda, $$M = \frac{9{,}81 \times 40{,}6}{6{,}67} \times 10^{12} \times 10^{+11}.$$

Finalmente: $$M = 59{,}713 \times 10^{23} \cong 5{,}97 \times 10^{24}.$$

Situação 3: determinar o valor da aceleração da gravidade terrestre em um ponto a uma altitude h igual a 10.000 km. Dados: raio da Terra $R \approx 6{,}37 \times 10^6$ m; $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ $m^3/s^2\,kg$. Considere a massa da Terra $M = 6{,}0 \times 10^{24}$ kg.

Solução:

Temos a altitude h = 10.000 km = 10.000.000 m = 10^7 m. Assim, a distância do centro da Terra ao ponto considerado será dada pelo raio da Terra + altitude. Isto é:

$r = R + h = 6{,}37 \times 10^6 + 10^7\ m = 6{,}37 \times \underline{10^6} + 10 \times 10^6 = (6{,}37 + 10) \times \underline{10^6} = 16{,}4 \times 10^6.$

Da lei da gravitação, obtemos: $g = G \times \frac{M}{r^2}$ (veja na Situação 2).

Substituindo-se os valores: $$g = 6{,}67 \times 10^{-11} \times \frac{6{,}0 \times 10^{24}}{(16{,}4 \times 10^6)^2},$$

ou $$g = 6{,}67 \times 10^{-11} \times \frac{6{,}0 \times 10^{24}}{(16{,}4)^2 \times 10^{12}},$$

ou ainda, $$g = \frac{6{,}67 \times 6{,}0}{269} 10^{-11} \times 10^{24} \times 10^{-12}.$$

Assim, $$g = 0{,}14877\ldots \times 10^{-11+24-12},$$

ou $$g \cong 0{,}15 \times 10^1.$$

Finalmente: $$g \cong 1{,}5\,m/s^2.$$

Se considerássemos altitudes menores (por exemplo 10 ou 20 *km*), o valor de g teria variado muito pouco, se comparado ao seu valor ao nível do mar. Resolva o exercício 1, ao final da unidade, e confira.

A massa gravitacional e a massa inercial

A massa, como acabamos de verificar na lei da gravitação, refere-se à propriedade de atração entre duas massas e, por isso, é denominada massa gravitacional, como na equação: $F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$.

Ao estudarmos a 2ª lei de Newton, vimos que a massa pode ser interpretada como uma medida da inércia do corpo, isto é, uma medida da resistência do corpo às mudanças em seu estado de repouso ou de movimento. Nesse caso, a massa é dita massa inercial, como na equação: $a = \frac{F}{m}$.

As leis de Kepler

Johannes Kepler (1571–1630) foi um astrônomo austríaco que, por muitos anos, estudou o movimento dos astros celestes. Ele trabalhou principalmente no laboratório astronômico da ilha de Uraniborg, construído pelo astrônomo dinamarquês *Ticho Brahe* (1546–1601), sob o patrocínio do rei Frederico II.

Kepler foi aluno e colaborador de Brahe, sendo que as principais medidas por eles obtidas foram relativas às posições angulares dos planetas, medidas, estas, realizadas nas mesmas horas, noite após noite, durante vários anos consecutivos...

Embora vários instrumentos de medidas astronômicas tenham sido utilizados, as observações eram feitas "a olho nu", pois eles não dispunham de telescópios naquela época. É interessante notar que as medidas foram realizadas com tanta precisão que concordam plenamente com os valores atuais, quando são utilizadas tecnologias sofisticadíssimas.

Baseado nestes dados observacionais, Kepler elaborou as leis que passaremos a enunciar.

A 1ª lei de Kepler (lei das órbitas)

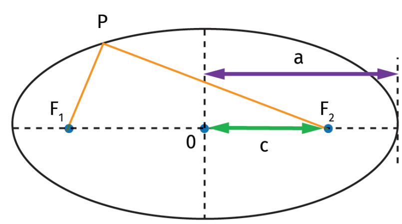
// atenção

Os planetas descrevem órbitas elípticas em torno do sol, estando este posicionado num dos focos da elipse.

>> saiba mais

A elipse

As elipses são figuras geométricas onde, por definição, a soma das distâncias entre um ponto da curva a dois pontos fixos (chamados de focos da elipse) *é uma constante. Veja a ilustração a seguir, onde a soma das distâncias de* F_1 *a* **P**, *mais a distância de* **P** *a* F_2 *é constante (***P** *é um ponto qualquer da elipse e* F_1 *e* F_2 *são seus focos).*



Excentricidade da elipse:

*Chama-se excentricidade (***e***) à razão entre a semidistância focal e o semieixo maior. Isto é:* $e = \frac{c}{a}$.

*A excentricidade é um número entre 0 e 1. Quando e tende a zero (***e** *→ 0), a curva tende a se tornar uma circunferência.*

A 2ª lei de Kepler (lei das áreas)

// atenção

As áreas varridas pela reta que liga o sol aos planetas são iguais, para tempos iguais.

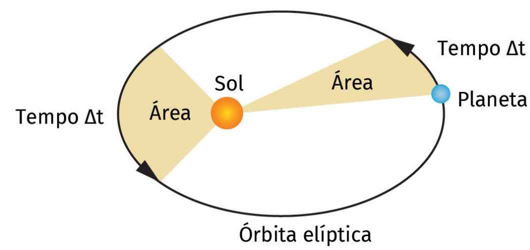


Figura 12.2

Observações:

- Os planetas conhecidos na época de Kepler eram apenas os que são visíveis a olho nu: Mercúrio; Vênus; Terra; Marte; Júpiter e Saturno.
- Na realidade, as órbitas dos planetas têm excentricidade bem menor que a da figura anterior, sendo bem próximas de circunferências, à exceção dos atualmente chamados “planetas anões”.
- Segundo a convenção de 24 de agosto de 2006 da União Astronômica Internacional, são atualmente considerados planetas do sistema solar: *Mercúrio*, *Vênus*, *Terra*, *Marte*, *Júpiter*, *Saturno*, *Urano* e *Netuno*. Passaram a ser considerados planetas anões: *Ceres*, no cinturão de asteroides entre Marte e Júpiter, e *Plutão* e *Éris*, situados após Netuno. (Éris foi descoberto recentemente, em 2003, por Richard Brown, Chad Trujillo e David Rabinowitz, no observatório do Monte Palomar (EUA). Éris tem um diâmetro equatorial 1,34 vezes maior que o de Plutão, e chega a se encontrar cerca de duas vezes mais distante do sol.)

O inverno e o verão

A ocorrência do inverno e do verão não é devido ao fato de a Terra se afastar ou se aproximar do sol. Quando o planeta está mais próximo do sol sua velocidade é maior. Desse modo, em média, a radiação solar recebida pelo planeta, por unidade de tempo, é praticamente a mesma de quando ele está mais afastado do sol e sua velocidade é menor (o planeta não fica mais quente ou mais frio por causa disso). A existência do inverno e do verão é devida ao fato de o eixo de rotação da Terra ser inclinado cerca de 23° em relação ao plano da órbita (chamado de *eclíptica*). Durante nosso inverno, a *taxa de radiação solar por unidade de área* é menor no hemisfério sul e maior no hemisfério norte (**Figura 12.3**). Quando é verão no Brasil, ocorre o contrário, e é inverno no hemisfério norte (**Figura 12.4**).

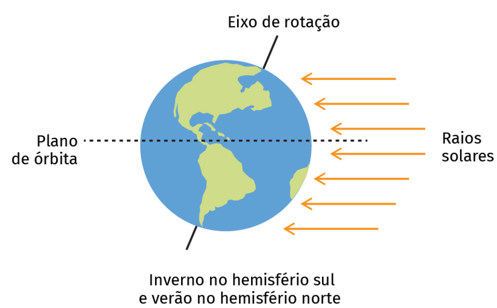


Figura 12.3

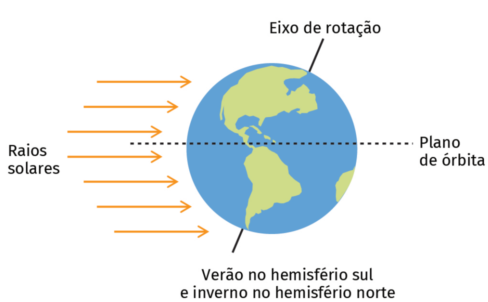


Figura 12.4

Repare que, próximo aos polos, a incidência dos raios solares é muito mais inclinada em relação à superfície terrestre do que nas regiões próximas do equador e, por isso, as regiões polares são bastante frias e as equatoriais são tórridas (quentes). A taxa de energia solar por unidade de área é bem menor nos polos. Veja a ilustração a seguir.

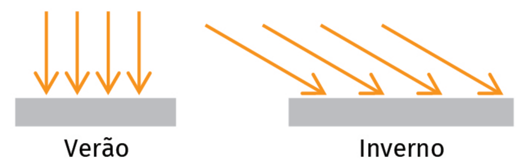


Figura 12.5

A 3ª lei de Kepler (lei dos períodos)

// atenção

O quadrado do período de revolução de um planeta em torno do sol é proporcional ao cubo do raio médio de suas órbitas.

Matematicamente, escrevemos: $T^2 \propto r^3$ (T^2 é proporcional a r^3).

Colocando uma constante de proporcionalidade: $T^2 = K \cdot r^3$.

Onde temos: T = período da órbita (tempo para uma volta completa em torno do sol) e r = raio médio da órbita ≈ semieixo maior. E K é a constante de proporcionalidade.

Observações:

- Esta lei é válida não apenas para os planetas que giram ao redor do sol, mas para qualquer astro que tenha satélites girando sob a ação de sua força gravitacional.

- Se o período *T* for dado em *anos terrestres* e o raio médio ***r*** em *unidades astronômicas* (UA), a constante tem um valor muito próximo de 1, para todos os planetas.
- 1 ano terrestre = 365 dias = 365 × 24 *h* = 365 × 24 × 60 *min* = 365 × 24 × 60 × 60 s, logo um ano terrestre = 31.536.000 s ≅ 3,2 × 10^7 s.
- 1 UA = distância média da Terra ao sol = 149.597.870.700 *m*.
- Tabela ilustrativa dos valores da constante K = $\frac{T^2}{r^3}$.

Tabela 12.1

Planeta	Raio médio da órbita	Período em anos terrestres	K = $\frac{T^2}{r^3}$
Mercúrio	0,387	0,241	1,002
Vênus	0,723	0,615	1,001
Terra	1,000	1,000	1,000
Marte	1,524	1,881	1,000
Júpiter	5,203	11,881	0,999
Saturno	9,538	29,460	1,000
Urano	19,190	84,010	0,999
Netuno	30,060	164,800	1,000

Situação 3: considerando um satélite em órbita circular ao redor de um planeta de massa M, mostrar que a razão entre o quadrado do período (T^2) de revolução e o cubo do raio da órbita (r^3) é: $\frac{4\pi^2}{GM}$.

Solução:

No caso, temos que: $F_{GRAVITACIONAL} = F_{CENTRÍPETA} = m \cdot \frac{V^2}{r}$.

Assim, escrevemos: $G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{V^2}{r}$,

ou, simplificando o *m* e o *r*, $\frac{GM}{r} = V^2$.

Lembrando que, no movimento circular, temos: $V = \omega \cdot r = \frac{2\pi r}{T}$,

podemos escrever $\frac{GM}{r} = V^2 = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2$,

ou $\frac{GM}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$.

Finalmente: $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$.

Aqui, *T* é o período de revolução do satélite, *r* é o raio da sua órbita e *M*, a massa do planeta em torno do qual o satélite está girando.

lá na plataforma

Na Unidade 12 de nosso ambiente virtual, na seção Gravitação, *siga as orientações de desenvolvimento da atividade proposta. Acesse, por meio do ambiente,* objetos de aprendizagem de simulação computacional *da Universidade de Boulder Colorado, disponíveis em: https://phet.colorado.edu/pt_BR/. Perceba como a atividade/recurso dialoga diretamente com o tema de nossa aula.*

Resumo

Nesta unidade, estudamos as quatro leis que regem o movimento de todos os astros. A lei da gravitação universal, de Newton, e as três leis de Kepler.

- A lei da gravitação universal

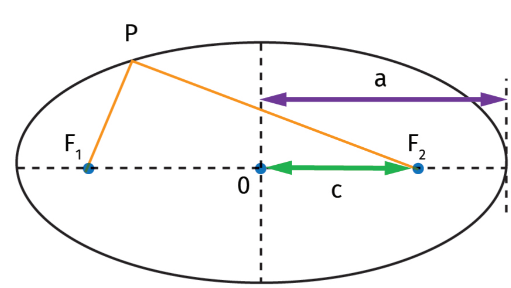
"A força F com que dois corpos se atraem é diretamente proporcional ao produto das suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles."

Em linguagem matemática: $F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$

- A 1ª lei de Kepler

"Os planetas descrevem órbitas elípticas em torno do sol, estando este posicionado num dos focos da elipse."

Estudamos também a elipse. Vimos que a maioria dos astros e satélites que giram em torno de uma estrela ou planeta têm órbitas elípticas, embora grande parte dessas órbitas possa ser considerada circular, pois as trajetórias têm excentricidade muito pequena.

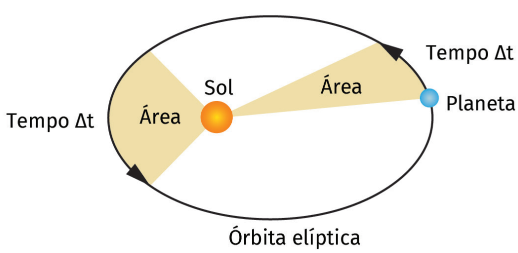


- A excentricidade da elipse: $e = \frac{c}{a}$.

Excentricidade é um número entre 0 e 1. Quando *e* tende a zero ($e \to 0$), a curva tende a se tornar uma circunferência.

- A 2ª lei de Kepler

"As áreas varridas pela reta que liga o sol aos planetas são iguais, para tempos iguais."



- A 3ª lei de Kepler

"O quadrado do período de revolução de um planeta em torno do sol é proporcional ao cubo do raio médio de suas órbitas."

Matematicamente: $\frac{T^2}{r^3} = K$ (constante para todos os planetas), em que temos:

T = período da órbita (tempo para uma volta completa em torno do sol) e r = raio da órbita.

Com T dado em anos terrestres e r em UA, vimos que a constante ≅ 1,00.

- A massa gravitacional e a massa inercial

Vimos, ainda, a diferença conceitual entre:

"*massa inercial*", que é a massa estudada por meio da 1ª lei de Newton (a lei da inércia) e da 2ª lei: $a = \frac{F}{m}$, onde a massa representa uma resistência à modificação do estado de repouso ou de seu movimento retilíneo uniforme.

e

"*massa gravitacional*", que é a massa responsável pela atração gravitacional, como estudado na lei da gravitação: $F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$.

Observação: até hoje não foram encontradas diferenças nas medidas das massas, dentro dos desvios experimentais, quando são submetidas a experimentos que utilizam o conceito de inércia ou de atração gravitacional.

Exercícios

lá na plataforma

Na Unidade 12 de nosso ambiente virtual, na seção Gravitação, *siga as orientações de desenvolvimento da atividade proposta. Acesse, por meio do ambiente,* objetos de aprendizagem de simulação computacional *da Universidade de Boulder Colorado, também disponível em: https://phet.colorado.edu/pt_BR/. Perceba como a atividade/recurso dialoga diretamente com o tema de nossa aula.*

1. Calcule o valor da aceleração da gravidade num ponto situado a 20 *km* de altitude. Compare com o valor da aceleração normal da gravidade.

Dica: reveja a solução da Situação 3.

2. Dois corpos, A e B, de dimensões desprezíveis, têm massas tais que $m_A = 2m_B$. Eles foram levados para o espaço, longe da influência de qualquer outro corpo, e colocados

a uma certa distância um do outro, estando ambos inicialmente em repouso. As acelerações de A e de B em instante, antes da colisão, são tais que:

a) $a_A = a_B$;
b) $a_A = 2a_B$;
c) $a_A = a_B/2$;
d) $a_A = 4a_B$;
e) $a_A = a_B/4$.

3. Tendo em vista a questão anterior, os dois corpos vão se aproximar um do outro com movimentos que, em relação a um referencial inercial, podem ser considerados:

a) retilíneos uniformes;
b) retilíneos acelerados;
c) retilíneos retardados;
d) curvilíneos;
e) eles não se aproximarão.

4. Considere a massa da Terra 81 vezes maior do que a da lua, e, chamando de D a distância entre o centro da Terra e o centro da lua, calcule, em função de D, a que distância do centro da Terra um corpo situado entre a Terra e a lua seria igualmente atraído pelos dois astros.

Sugestão: faça um desenho colocando os elementos descritos no enunciado do exercício. A Terra, a lua, a distância D de um corpo (uma massa m) entre a Terra e a lua. Veja que o enunciado diz que o corpo deve estar numa posição onde a força da Terra sobre ele seja igual à da lua sobre ele. Sendo assim, ele deverá estar mais perto da lua, já que massa da lua é bem menor que a da Terra. Chame de d_T a distância do corpo à Terra e de dL a distância do corpo à lua. Finalmente, aplique a lei da gravitação entre o corpo e a Terra e entre o corpo e a lua.

5. Um satélite artificial, cuja altura de sua órbita, contada a partir do nível do mar, fosse igual ao raio da Terra, estaria sujeito a uma aceleração centrípeta de módulo igual a:

a) $g/2$;
b) $g/4$;
c) $2g$;
d) g;
e) $4g$.

6. (Cesesp-PE/Reproduzida) Ao ser examinado sobre o movimento dos planetas, um aluno respondeu os seguintes enunciados para a leis de Kepler:

I. Todos os planetas movem-se em órbitas elípticas com o sol ocupando um dos seus focos.

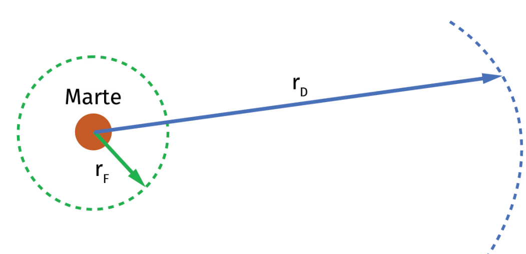
II. Uma reta ligando qualquer planeta ao sol varre áreas iguais em tempos iguais.

III. A razão R/T, onde R é a distância média dentre o planeta e o sol e T, o seu período de revolução ao redor do sol, é a mesma para todos os planetas.

Dos enunciados acima estão corretos:

a) apenas I;
b) apenas II;
c) apenas I e II;
d) apenas II e III;
e) todos.

7. As duas luas de Marte, Fobos e Deimos, estão em órbita com raios aproximadamente iguais a: $r_F \approx 3R_M$ e $r_D \approx 7\,R_M$, sendo R_M o raio de Marte. Veja a ilustração a seguir:



Pede-se:

a) qual dos dois tem maior velocidade;

b) qual dos dois leva mais tempo para completar uma volta;

c) encontre a razão entre os períodos de Deimos e Fobos, respectivamente iguais a T_D e T_F.

Dicas: reveja os itens referentes às leis de Kepler.

Para o item c, veja que são dados $r_F \approx 3R_M$ e $r_D \approx 7\ R_M$. Encontre a relação entre r_D e r_F e, em seguida, aplique a lei dos períodos para os dois satélites. Deixe a resposta sob a forma de raiz.

Respostas

1. g = 9,8011 m/s^2 (o valor "normal" é g = 9,80665 m/s^2

2. c

3. b

4. Distância ao centro da Terra, entre a Terra e a lua , em que um corpo seria igualmente atraído pelos dois planetas: 0,9 D

5. b

6. c

7.

a) Fobos

b) Deimos

c) $\frac{T_D}{T_F} = \frac{7}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}$

13 Trabalho, potência e rendimento

meta

Introduzir os conceitos de trabalho e de potência para que sejam utilizados em casos práticos do cotidiano.

objetivos

Esperamos que, ao final desta unidade, você seja capaz de:

- definir trabalho e calcular o trabalho de uma força constante;
- calcular a potência de um sistema;
- calcular o rendimento em casos simples.

Trabalho de uma força constante

Em nosso cotidiano, chamamos de *trabalho* às diversas atividades profissionais que realizamos para sustentar a nós e às nossas famílias. Normalmente, trata-se de atividades físicas ou intelectuais (ou ambas), podendo ser remuneradas ou não. Em nosso estudo de Física, o termo *trabalho* tem um sentido bem definido e diz respeito à força e ao efeito que ela produz ao deslocar um corpo.

// atenção

Trabalho é o produto da força pelo deslocamento.

Observações:

- identificaremos a grandeza trabalho pela letra grega τ (tau);
- nesse caso temos: trabalho = força × deslocamento. Isto é: $\tau = F.d$;
- o trabalho é uma grandeza escalar. Ela é o produto (escalar) dos módulos de $\vec{F}$ e $\vec{d}$.

A unidade S.I. de trabalho

Pela definição de trabalho, vemos que:

unidade de trabalho =
unidade de força × unidade de deslocamento.

Assim, podemos fazer:

unidade de trabalho = $N \cdot m$ (newton × metro, que chamamos de joule e abreviamos por *J*).

Resumindo: 1 J = $1\ N \cdot 1\ m$.

Ou seja: uma força de 1 N, ao deslocar um corpo por uma distância de 1 m, realiza um trabalho de 1 J.

Repare que, para realizar trabalho, ao mover um corpo aplicando uma força sobre ele, você despende (gasta) energia. Ao estudarmos o conceito de energia, mais adiante, veremos melhor a relação entre ela e o trabalho, mas já podemos adiantar que *realizar trabalho sobre um corpo é transferir energia para ele.*

Unidades práticas de trabalho

Duas outras unidades de trabalho são bastante utilizadas no cotidiano: a caloria (*cal*), que será muito usada ao estudarmos o *calor*, e o quilowatt-hora (*kWh*), muito utilizado no estudo da *energia elétrica*. Veremos com mais detalhes essas unidades de trabalho ao estudarmos os assuntos citados.

Em termos das unidades no Sistema Internacional, temos os fatores de conversão:

- 1 *cal* = 4,18 *J*;
- 1 *kWh* = $3{,}6 \times 10^3$ *J*.

Cálculo do trabalho

Quando a força tem a mesma direção do deslocamento

Considere um corpo que, ao ser submetido a uma força constante, $\vec{F}$, sofre um deslocamento $\vec{d}$ entre os pontos A e B de uma trajetória retilínea. Veja a ilustração a seguir.

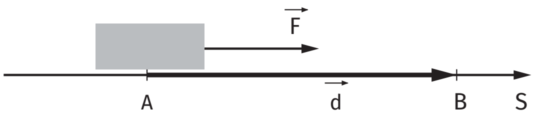


Figura 13.1

Nesse caso, temos: trabalho = força × deslocamento. Isto é: $\tau = F \cdot d$.

Quando a força não tem a mesma direção do deslocamento

Vamos considerar o caso em que um corpo é deslocado entre os pontos A e B de uma trajetória horizontal por meio de uma força, fazendo um ângulo α com a direção do deslocamento, conforme ilustrado a seguir.

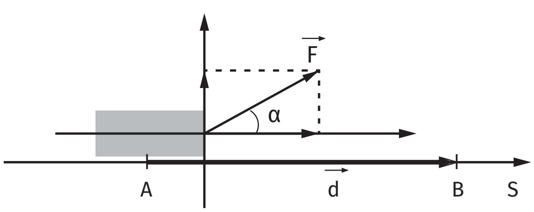


Figura 13.2

Nesse caso, apenas o componente horizontal de $\vec{F}$, ($\vec{F} \cdot cos\ \alpha$), realiza trabalho, por ter a mesma direção do movimento (mesma direção de $\vec{d}$).

Temos, então, em módulo: $\tau = F \cdot cos\ \alpha \cdot d$.

Situação 1: suponha que, na ilustração anterior, a força seja de 100 *N*, o ângulo *α* tenha 30° e o deslocamento seja de 5,0 *m*. Vamos calcular o trabalho realizado pela força, lembrando que $cos\ 30° \cong 0{,}87$.

Temos	$\tau = F \cdot cos\ \alpha \cdot d,$
onde	$\tau = 100 \times cos\ 30° \times 5{,}0.$
Ainda,	$\tau = 100 \times 0{,}87 \times 5{,}0.$
Finalmente	$\tau = 433\ J.$

Para lembrar: *"forças perpendiculares ao deslocamento não realizam trabalho".*

Estude com atenção as situações a seguir, pois elas contêm um grande número de informações úteis para a solução de vários outros problemas de mecânica. As soluções estão feitas passo a passo, de modo a facilitar ao máximo a sua compreensão.

Situação 2: a ilustração a seguir representa um corpo com 18 *kg* de massa, que é deslocado sobre uma superfície horizontal entre os pontos A e B, distando 20 *m* um do outro, por meio de uma força de módulo 200 *N*. A força faz um ângulo *θ* com a horizontal, tal que $cos\ \theta = 0{,}80$ e $sen\ \theta = 0{,}60$. Entre o corpo e a superfície, existe uma força de atrito de módulo 50 *N*. Supor a aceleração da gravidade $g = 10\ m/s^2$.

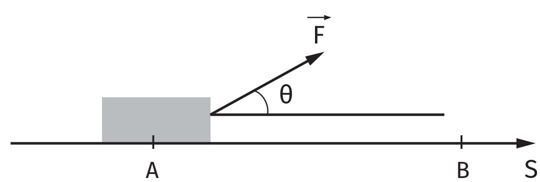


Figura 13.3

Pede-se:

a) representar esquematicamente todas as forças que atuam sobre o corpo;

b) calcular a força normal;

c) calcular o trabalho realizado por cada uma das forças durante o movimento;

d) calcular a força resultante;

e) calcular o trabalho total.

Solução: os dados do problema são: $m = 18\ kg$; $F = 200\ N$; $d = 20\ m$; $sen\ \theta = 0,60$; $cos\ \theta = 0,80$; $f_{at} = 50\ N$ e $g = 10\ m/s^2$.

a) As forças que agem sobre o corpo são: a força F, a força de atrito (f_{at}), a normal (N) e o peso do corpo (P). Vamos representá-las:

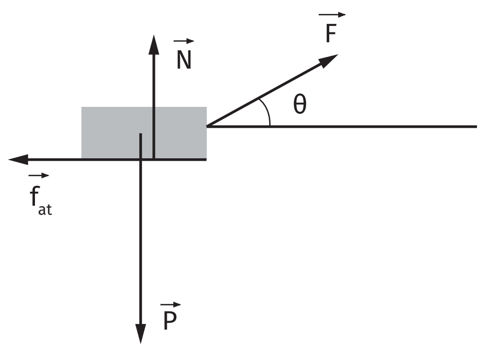


Figura 13.4

b) Cálculo da força normal

Veja que, nesse caso, a força normal não é igual ao peso. Na realidade, ela é menor que o peso, pois a componente vertical de F "ajuda" a superfície a equilibrá-lo. Para calcular a normal, vamos fazer um desenho dos eixos x e y e projetar as forças sobre eles, conforme ilustrado a seguir.

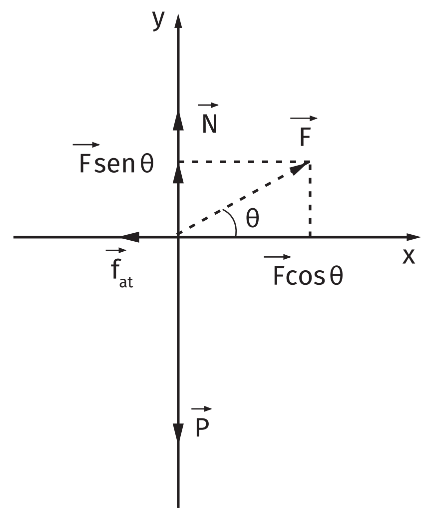


Figura 13.5

O corpo não se move na direção vertical, então a componente da resultante no eixo y deve ser nula. Assim, teremos:

a resultante vertical $R_Y = 0$

ou $N + Fcos\ \theta - P = 0$,

onde $N = +P - Fsen\ \theta$,

ou, ainda, $N = m \cdot g - Fsen\ \theta$.

Onde, substituindo-se os dados, vem: $N = 18 \times 10 - 200 \times 0,60$.

Finalmente, $N = 180 - 120 = 60\ N$.

c) O trabalho realizado por cada força

- Pela força normal: como a normal (N) é perpendicular à direção do movimento (perpendicular a x), ela não realiza trabalho e $\tau_N = 0$.
- Pela força peso: o peso também é perpendicular ao deslocamento, logo: $\tau_P = 0$.
- Pela força F: apenas sua componente na direção x "trabalha".

Assim, $\tau_{Fx} = F_X \times d$,

$\tau_{Fx} = F \cdot cos\ \theta \times d$.

Onde $\tau_{Fx} = 200 \times 0{,}80 \times 20 = 160 \times 20\ (N \cdot m) = 3.200\ (J) = 3{,}2 \times 10^3\ J$.

A componente vertical de F ($F_Y = F \cdot sen\ \theta$) é perpendicular ao deslocamento e não realiza trabalho.

- O trabalho de atrito

Temos: $\tau_{fat} = f_{at} \times d$,
onde $\tau_{fat} = -50 \times 20$
($f_{at} = -50$, pois tem sentido contrário ao do movimento)
Assim, $\tau_{fat} = -1.000 = -1{,}0 \times 10^3$
(o sinal negativo indica que o trabalho é "resistente")

d) Cálculo da força resultante.

Na direção vertical, a força resultante é nula, pois o corpo não "sobe" nem "desce" e temos, em módulo: $N + Fsen\ \theta = P$.

Na horizontal, temos a resultante $R_X = F_X - f_{at}$. Assim:

$R_X = F \cdot cos\ \theta - f_{at}$;

$R_X = 200 \times 0{,}80 - 50$;

$R_X = 160 - 50 = 110\ N$.

e) O trabalho total.

O trabalho total é o trabalho da resultante. Assim:

$\tau_{Rx} = R_x \times d$;

$\tau_{Rx} = 110 \times 20 = 2.200\ N \cdot m = 2{,}2 \times 10^3\ J$.

Observação: veja que poderíamos ter calculado o trabalho total (resultante) somando (algebricamente) os trabalhos de todas as forças, que já havíamos calculado anteriormente.

Veja que: $\tau_{Total} = \tau_N + \tau_P + \tau_{Fy} + \tau_{Fx} + \tau_{fat}$.
Assim, $\tau_{Total} = 0 + 0 + 0 + 3{,}2 \times 10^3 - 1{,}0 \times 10^3$.
Finalmente,
$\tau_{Total} = (3{,}2 - 1{,}0) \times 10^3 = 2{,}2 \times 10^3\ J$
– como havíamos visto!

No exemplo a seguir, temos um caso bastante geral, em que, a cada instante do movimento, a força tem uma direção diferente em relação à trajetória. Veja que solução interessante.

Situação 3: um corpo de massa $m = 62\ kg$ desliza sobre uma rampa com inclinação variável sob a ação de seu peso, desde A até B, descendo uma altura total $h = 2{,}0\ m$, sendo este o módulo do seu deslocamento vetorial total na direção da força peso. Supondo a aceleração da gravidade $g = 10\ m/s^2$, calcule o trabalho realizado pela força peso.

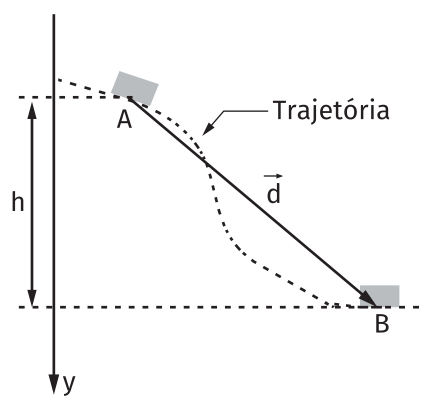


Figura 13.6

A força normal é, por definição, sempre perpendicular à trajetória e, portanto, não realiza trabalho algum. Só realiza trabalho a força na direção do movimento (na direção da trajetória). Veja, na ilustração a seguir, entretanto, que o peso forma um ângulo diferente e desconhecido com a direção da trajetória em cada ponto e não podemos calcular sua projeção na direção do movimento. *O ângulo β varia ponto a ponto.*

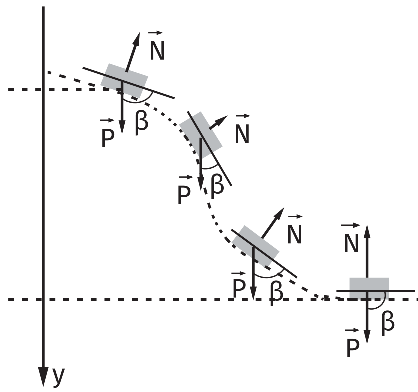


Figura 13.7

Como resolver o problema? A solução consiste em *projetar a trajetória na direção da força*. Nesse caso, a projeção de $\vec{d}$ na direção *y* é $\vec{h}$. Veja a ilustração a seguir:

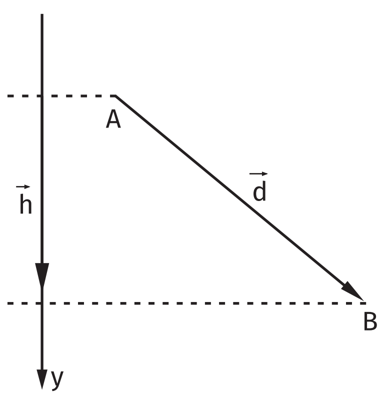


Figura 13.8

Em vez de calcular *trabalho = força na direção do movimento × deslocamento*, podemos fazer *trabalho = força × deslocamento na direção da força*,

Assim, o trabalho da força peso será: $\tau_P = P \times h$,

ou $\tau_P = m \cdot g \times h$.

Ainda, $\tau_P = 62 \times 10 \times 2{,}0$.

Finalmente, $\tau_P = 1.240\ J = 1{,}24 \times 10^3\ J$.

Potência

Imagine que, para encher o tanque de um carro, em um determinado posto de gasolina, o frentista gasta 3 minutos. Em outro posto, você observa que consegue encher o tanque bem mais rápido, em 2 minutos, por exemplo. O que diferencia a bomba de gasolina de cada um dos postos?

Estamos tratando, aqui, da rapidez com que a bomba consegue realizar o trabalho de bombear gasolina para o tanque. A diferença entre as duas bombas, nesse caso, é a *potência*.

// atenção

A potência mede a rapidez com que o trabalho é realizado.

Por definição, temos:

$$potência = \frac{trabalho}{tempo} \text{ ou } P_{ot} = \frac{\tau}{\Delta t}.$$

Veja que a potência relaciona o trabalho e o tempo, duas grandezas escalares. Desse modo, *a potência também é uma grandeza escalar.*

Situação 4: suponha que um trabalho de 340 *J* é realizado em 10 segundos por uma máquina. Calcular a potência da máquina.

Solução:

$$P_{ot} = \frac{\tau}{\Delta t} = \frac{340}{10} = 34\ J/s.$$

Unidades de potência

O J/s é a unidade de potência no Sistema Internacional. Ela recebe o nome especial de *Watts*, em homenagem a James Watt (Escócia, 1736-1819), inventor da moderna máquina a vapor.

Assim, 1 W = 1 Joule/1 segundo.

Outras unidades de potência bastante utilizadas são:

- *quilowatt* (kW), em que: 1 $kW = 10^3$ W;
- *cavalo-vapor* (cv), em que: 1 cv = 736 W;
- *horse-power* (hp), em que: 1 hp = 746 W.

Vamos observar mais alguns exemplos.

Situação 5: uma força de módulo igual a 600 N faz um ângulo de 45° com a direção do deslocamento e move um corpo por uma distância de 100 m, em 6 segundos. Calcular a potência desenvolvida. Dado: cos 45° = 0,70 (supor o atrito desprezível).

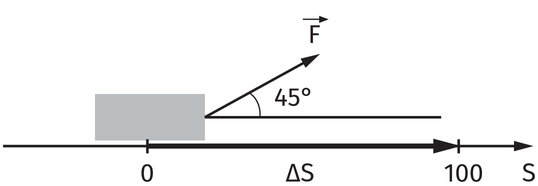


Figura 13.9

Solução:

São dados F = 600 N; d = 100 m; Δt = 6 s e cos 45° = 0,7.

Inicialmente, calculamos o trabalho realizado pela força.

No caso, temos: $\tau = F \cdot cos\ \alpha \times d$,

ou $\tau = F \cdot cos\ 45° \times d$.

Assim, $\tau = 600 \times 0{,}7 \times 100$.

Finalmente, $\tau = 42.000 = 4{,}2 \times 10^4\ J$.

Desse modo, a potência será:

$$P = \frac{\tau}{\Delta t} = \frac{42.000}{6} = 7.000\ J/s = 7{,}0\ \times 10^3 W.$$

Situação 6: uma caixa com 60 N de peso é arrastada, por meio de uma força, na mesma direção do deslocamento, com uma velocidade constante de 4,0 m/s. A força de atrito entre a superfície e a caixa é de 50 N. Calcular a potência desenvolvida pela força.

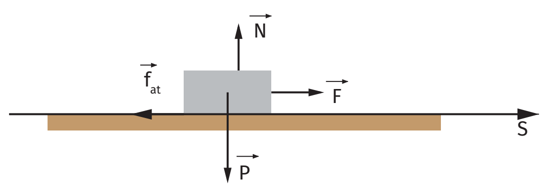


Figura 13.10

Solução:

É dado que $V = 4{,}0\ m/s^2$ = constante. Logo, trata-se de um caso de equilíbrio dinâmico e, portanto, a resultante das forças deve ser nula ($\Sigma F = 0$). Também é dado f_{at} = 50 N. Pede-se a potência.

Sabemos que $P_{ot} = \frac{\tau}{\Delta t}$. Precisamos encontrar o trabalho e o tempo. Vejamos como fazê-lo.

Temos: $P_{ot} = \frac{\tau}{\Delta t} = \frac{F \cdot d}{\Delta t} = \frac{F \cdot \Delta S}{\Delta t} = F \cdot V$ (eq. 1).

Vamos calcular a força (pois o V foi dado). Na *direção vertical*, temos $N = P$, que não realizam trabalho.

Na *horizontal*, temos $\Sigma F = 0$ (pois a velocidade é constante, logo não temos força resultante).

Logo, $F - f_{at} = 0$,

ou $F = f_{at}$.

Assim, $F = 50\ N$.

Levando a (eq. 1): $P_{ot} = F \cdot V = 50 \times 4{,}0 = 200\ W$.

// atenção

A equação $P_{ot} = F \cdot V$ é outra expressão para a potência, sendo V a velocidade média.

Situação 7: a caixa d'água de uma residência tem capacidade para 2.000 litros e está situada a uma altura $h = 3{,}0\ m$ do solo, onde se encontra a cisterna. Calcule a potência necessária para que a bomba encha a caixa em 5,0 minutos, em watts e em cavalos-vapor. Supor $g = 10\ m/s^2$.

Solução:

Foram dados: $h = 3{,}0\ m$; o volume de 2.000 litros de água; $\Delta t = 5{,}0\ m = 5{,}0 \times 60\ s = 300\ s$ e $g = 10\ m/s^2$. Pede-se a potência da bomba em W e em cavalos-vapor.

Cada litro de água tem massa de 1 kg e, assim, 2.000 litros correspondem a 2.000 kg. Dessa forma, o peso total de água que deve ser erguido até a caixa será:

$P_{eso} = m \cdot g = 2.000 \times 10 = 20.000\ N = 2{,}0 \times 10^4\ N.$

Supondo que a tubulação e a própria bomba não oferecem resistência à passagem da água (não há atrito, não temos perdas) e que a água sobe com velocidade constante, podemos supor que a bomba também faz uma força total de $2 \times 10^4\ N$ sobre a água. Assim, o trabalho realizado pela bomba será:

$$\tau = F.h = P_{eso} \cdot h,$$

ou $\tau = 2{,}0 \times 10^4\ (N) \times 3{,}0\ (m),$

em que $\tau = 6{,}0 \times 10^4\ J.$

Assim, como o tempo foi de 300 s, teremos, para a potência:

$$P_{ot} = \frac{\tau}{\Delta t} = \frac{6{,}0 \times 10^4}{300} = \frac{6{,}0 \times 10^4}{3 \times 10^2} = 2{,}0 \times 10^{4-2}$$

$$= 2{,}0 \times 10^2\ W \text{ (no S.I.)}.$$

Passando para cavalos-vapor:

Sabemos que: $1\ cv = 736\ W$.

Logo, $1\ W = \frac{1}{736}\ cv.$

Assim, $2{,}0 \times 10^2\ W = \frac{2{,}0 \times 10^2}{736} cv$

$= 0{,}27\ cv.$

Rendimento

Quando uma máquina qualquer realiza um trabalho, existem perdas. Por exemplo, no caso de uma bomba d'água, além do trabalho que ela precisa realizar para elevar a água da cisterna para a caixa, ela tem que gastar alguma energia para seu próprio movimento. Outra parte da energia é gasta durante a passagem da água pela tubulação, que sempre oferece certa resistência. Essas perdas de energia, normalmente, são dissipadas para o ambiente sob a forma de calor.

De um modo geral, podemos definir os seguintes tipos de trabalho, como no exemplo da bomba d'água:

- *trabalho motriz* (τ_M): é o trabalho total realizado pela bomba;
- *trabalho útil* (τ_u): nesse caso, foi utilizado para levar a água da cisterna até a caixa;

- *trabalho passivo* (τ_p): é o trabalho que se perdeu (foi dissipado).

Pelo exposto, podemos ver que o trabalho motriz é igual à soma dos trabalhos útil e passivo:

$\tau_M = \tau_u + \tau_p$

Assim, podemos definir o rendimento como sendo a razão entre o trabalho útil e o trabalho motriz (total):

$$rendimento = \frac{trabalho\ útil}{trabalho\ motriz}$$

ou seja, $r = \frac{\tau_u}{\tau_M}$.

Note que o rendimento é dado pela razão entre grandezas de mesma espécie – no caso, o trabalho –, sendo assim, ele não tem dimensão. Normalmente, nos referimos ao rendimento como uma porcentagem.

Situação 8: vamos supor que um elevador suba 30 *m* com velocidade constante, em 20 *s*. Sendo o peso do elevador igual a 2,0 × 10³ *N*, pede-se calcular:

a) a potência necessária para o movimento, em *w*, em *kw* e em *cv*;

b) supondo que a potência do motor que movimenta o elevador tem um rendimento de 60%, determinar a potência total, em watts.

Solução:

São dados: a altura, $h = 30\ m$; o peso, $P_{eso} = 2{,}0 \times 10^3\ N$; o tempo, $\Delta t = 20\ s$, e o rendimento, $r = 60\% = \frac{60}{100} = 0{,}6$.

a) Cálculo da potência (essa é a potência útil)

Temos: $P_{ot} = \frac{\tau_u}{\Delta t}$

$$P_{ot} = \frac{P_{eso}.h}{\Delta t} = \frac{2{,}0 \times 10^3 \times 30}{20} = \frac{60 \times 10^3}{20}$$

$$= 3{,}0 \times 10^3\ W = 3{,}0\ kW.$$

Em cavalos-vapor:

como $1\ cv = 736\ W$,

teremos: $1\ W = \frac{1}{736} cv$.

Assim, $3{,}0 \times 10^3\ W = \frac{3{,}0 \times 10^3}{736} cv = \frac{3.000}{736}$

$\cong 4{,}1\ cv$.

b) A potência total em watts.

Temos: $r = \frac{\tau_u}{\tau_M}$, em que τ_u = trabalho útil e τ_M = trabalho motriz (total).

Assim, $\tau_M = \frac{\tau_u}{r}$.

Dividindo por Δt, $\frac{\tau_M}{\Delta t} = \frac{\tau_u}{\Delta t} \times \frac{1}{r}$.

Assim, $P_{total} = P_u \times \frac{1}{r}$.

Finalmente, $P_{total} = 3{,}0 \times 10^3 \times \frac{1}{0{,}6}$

$= 5{,}0 \times 10^3 W$.

lá na plataforma

Na Unidade 13 de nosso ambiente virtual, no tema Trabalho, potência e rendimento, *siga as orientações para o desenvolvimento da atividade proposta. Além disso, acesse os* objetos de aprendizagem de simulação computacional, *no ambiente [https://phet.colorado.edu/pt_BR/], da Universidade de Boulder, Colorado.*

Perceba como a atividade/recurso dialoga diretamente com o tema de nossa aula.

Resumo

- O trabalho

Nesta unidade, estudamos a grandeza *trabalho*, que, como vimos nos estudos de Física, tem um significado diferente daquele ao qual estamos acostumados na vida cotidiana.

Para uma força constante, definimos o trabalho:

Trabalho é o produto da força pelo deslocamento.

Ou seja: $\tau = F \cdot d$, sendo F a força *na direção do deslocamento*.

Se a força aplicada ao corpo *não tem a direção do deslocamento*, podemos escrever de um modo mais geral: $\tau = F\cos\alpha \cdot d$.

$F \cdot \cos\alpha$ é a projeção da força na direção do deslocamento.

Vimos também as unidades de trabalho:

- no S.I., o $N \cdot m$, que chamamos joule J;
- as unidades práticas *caloria* (*cal*) e o *quilowatt-hora* (*kWh*), em que:
  - 1 *cal* = 4, 18 *J;*
  - 1 *kWh* = $3{,}6 \times 10^3$ *J.*

Chamamos a atenção, também, para o princípio que diz: “realizar trabalho sobre um corpo é transferir energia para ele”.

Vimos, ainda, que, em alguns casos, nos quais a projeção da força na direção da trajetória *varia ponto a ponto*, como no caso ilustrado a seguir, ao invés de calcular *trabalho = força na direção do movimento × deslocamento*, podemos fazer *trabalho = força × deslocamento na direção da força.*

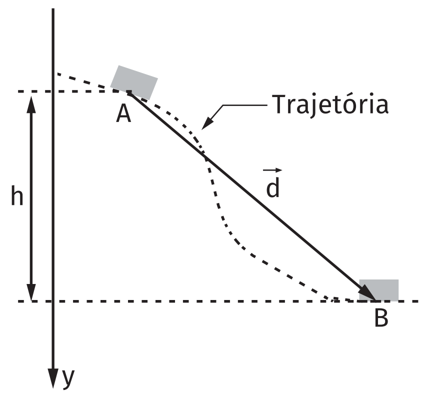


Figura 13.11

- A potência

Estudamos a *grandeza potência*, em que: $potência = \dfrac{trabalho}{tempo}$ ou $P_{ot} = \dfrac{\tau}{\Delta t}$. Em última análise, ela *mede a rapidez com que o trabalho é realizado.*

Vimos que, quando o movimento do corpo é uniforme (velocidade constante), podemos escrever a potência como: $P_{ot} = F \cdot V$.

Estudamos, ainda, as unidades de potência:

- no S. I., o Joule por segundo (*J/s*), que chamamos *watt* (*W*);
- as unidades bastante utilizadas:
  - *quilowatt* (*kW*), em que:
    1 *kW* = 1.000 *W* = 10^3 *W*;
    (um múltiplo do watt);
  - *cavalo-vapor* (*cv*), em que:
    1 *cv* = 736 *W*;
  - *horse-power* (*hp*), em que:
    1 *hp* = 746 *W*.

- O rendimento

Definimos, para uma máquina qualquer, os trabalhos:

• *o trabalho motriz* (τ_M) o trabalho total realizado pela máquina;

• *trabalho útil* (τ_u): o resultado do trabalho realizado pela máquina para o exterior;

• *trabalho passivo* (τ_p): o trabalho que se perdeu.

Vimos que o trabalho motriz é igual à soma dos trabalhos útil e passivo: $\tau_M = \tau_u + \tau_p$.

Finalmente, vimos que:

$$rendimento = \frac{trabalho\ útil}{trabalho\ motriz}$$

$$\text{ou seja, } r = \frac{\tau_u}{\tau_M}.$$

em que o rendimento é um número adimensional, que é, muitas vezes, escrito na forma de porcentagem.

Exercícios

lá na plataforma

Informação complementar: na Unidade 13 de nosso ambiente virtual, no tema Trabalho, potência e rendimento, *siga as orientações pedagógicas de suporte à resolução dos exercícios propostos a seguir, que foram* pré-gravadas em áudio, *no formato [mp4].*

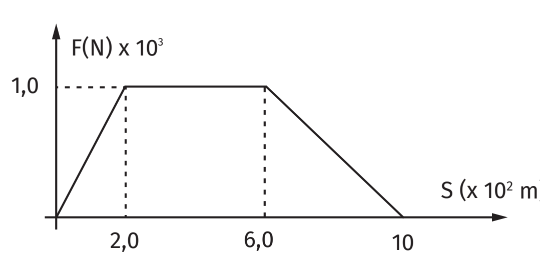
1. Um móvel de massa 4,8 *kg* sai do repouso, descrevendo uma trajetória retilínea e horizontal pela ação de uma força constante que atua durante um intervalo de tempo igual a 4,0 *s*. Nesse intervalo, o móvel percorre 20 *m*. Considere o atrito desprezível. Determine o trabalho realizado pela força.

Dicas: veja que são dados do problema a massa m = 4,8 *kg*; a trajetória horizontal e a força constante. Logo, temos um MRUV. O móvel percorre $d = \Delta S$ = 20 *m* em Δt = 4,0 *s*. Encontre a aceleração, depois a força e, por fim, o trabalho, já que foi dado o deslocamento.

2. Um comercial diz que um carro de massa 1,2 × 10³ *kg* pode acelerar do repouso a uma velocidade de 25 *m/s*, num intervalo de tempo de 8,0 *s*, numa pista retilínea e horizontal. Supondo a aceleração constante e desprezando as perdas, determine a potência do motor do carro em *hp*, lembrando que 1 *hp* = 746 *W*.

Dica: esse exercício é semelhante ao primeiro, mas você pode utilizar a expressão alternativa da potência, lembrando que, no MRUV, a velocidade média é a média das velocidades.

3. Um carro de massa 1,0 × 10³ *kg* move-se em trajetória retilínea, a partir do repouso. O gráfico da força resultante aplicada ao carro em função do espaço percorrido está representado na figura a seguir. Determine o trabalho realizado pela força resultante no deslocamento entre 0 e 1,0 × 10² *m*.



Dica: repare que, no eixo vertical, temos a força *F* e, no eixo horizontal, o deslocamento *S*.

Se calcularmos a "área" sob a curva até o eixo horizontal, estaremos, na realidade, multiplicando F por um deslocamento que nos dá o trabalho, pois $\tau = F.d$. Faça as contas, observando que as forças estão dadas (multiplicadas por 10^3 *N* no eixo *y*), assim como os deslocamentos (multiplicados por 10^2 *m* no eixo *x*).

4. Um pequeno veículo de massa $1{,}0 \times 10^2$ *kg* parte do repouso numa superfície plana e horizontal. Despreze qualquer resistência ao movimento e suponha que o motor exerça uma força constante e paralela à direção da velocidade. Após percorrer $2{,}0 \times 10^2$ *m*, o veículo atinge a velocidade de 72 *km/h*. Determine:

   a) o trabalho realizado pela força motora;

   b) a potência do motor.

5. Um rapaz de massa 60 *kg* sobe uma escada de 20 degraus em 10 *s*. Cada degrau tem 20 *cm* de altura. Determine:

   a) o trabalho realizado pela força peso;

   b) a potência com que o rapaz sobe a escada (considere $g = 10$ m/s^2).

6. Uma máquina consome 5,0 *hp* em sua operação. Sabendo-se que 3,0 *hp* são perdidos na dissipação, determine o rendimento da máquina.

Respostas

1. $2{,}4 \times 10^2$ *J*.

2. 63 *hp*.

3. $7{,}0 \times 10^5$ *J*.

Nota: o prefixo "quilo", que abreviamos por "*k*", significa mil, isto é: ($\times 10^3$).

4. a) $2{,}0 \times 10^4$ *J*; b) $1{,}0 \times 10^3$ *W* = 1,0 *kW*.

5. a) $-2{,}4 \times 10^3$ *J* = 20 *kJ*; b) $2{,}4 \times 10^2$ *W*.

6. 0,40 (ou 40%).

A energia cinética e sua relação com o trabalho

14

meta

Definir energia cinética e estabelecer sua relação com o trabalho.

objetivos

Espera-se que, ao final desta unidade, você seja capaz de:

- reconhecer e conceituar a energia cinética, a conservação da energia e o teorema do trabalho energia;
- calcular a energia cinética de um corpo em movimento;
- aplicar o teorema do trabalho-energia em casos simples.

Introdução

No nosso cotidiano, ouvimos falar sobre energia eólica (dos ventos), energia elétrica, energia solar, energia das marés e assim por diante. Na realidade, todas essas "energias" são manifestações de dois tipos básicos de energia: a *energia cinética* e a *energia potencial*. Para iniciar o estudo da energia, vamos primeiramente estabelecer o conceito de energia e fazer duas observações muito importantes a respeito da energia e da sua conservação.

Figura 14.1: Aerogeradores são uma alternativa renovável ao uso de combustíveis fósseis, pois a energia eólica não produz gases de efeito estufa, impactando menos no ambiente. Fonte: https://pixabay.com/pt/photos/cataventos-energia-for%c3%a7a-do-vento-1639567/.

O conceito de energia

O conceito de energia está diretamente ligado ao conceito do trabalho realizado por uma força, que estudamos anteriormente. Uma maneira bastante simples e útil de conceituar energia é a definição de Ostwald:

// atenção

Energia é a capacidade de realizar trabalho, tudo aquilo que pode ser obtido do trabalho, ou nele se transformar.

Assim, podemos considerar que, quando uma força atua sobre um corpo realizando um trabalho sobre ele, o resultado é um aumento (ou uma diminuição) da energia desse corpo. A energia que os corpos possuem devido ao seu movimento é chamada de energia cinética.

Princípio geral da conservação da energia

// atenção

A energia não pode ser criada nem destruída, mas apenas transformada de uma forma de energia em outra.

Esse princípio é tão geral e importante, que é muito utilizado em trabalhos de pesquisa científica, como um critério para o cientista verificar a validade e a correção do estudo que está desenvolvendo.

A energia cinética

A palavra *cinética* deriva da palavra grega *kinetike*, relativa ao movimento, à velocidade. *Energia cinética = energia do movimento.*

Quando os corpos estão em movimento, eles apresentam características ou capacidades bem diferentes de quando estão em repouso. Vejamos alguns exemplos:

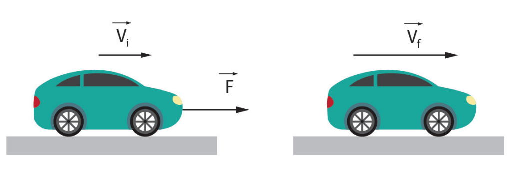
Ao chutar uma bola, quanto mais velocidade você conseguir imprimir em seu pé, tanto mais longe você conseguirá arremessá-la. Do mesmo modo, quanto mais velocidade você imprimir em um martelo, tão mais profundamente você conseguirá enterrar um prego em uma madeira. A essa forma de energia que os corpos possuem quando estão em movimento, chamamos de *energia cinética*.

A energia cinética depende da *massa do corpo* (m) e do *módulo de sua velocidade* (V). Podemos escrever a energia cinética (Ec) como: $E_c = \frac{1}{2}mv^2$, conforme veremos mais adiante.

Veja que, para uma mesma velocidade, se a massa do corpo for dobrada, a energia também irá dobrar. Se a velocidade for o seu dobro, a energia cinética irá *quadruplicar*, pois a velocidade está "elevada ao quadrado".

A transformação do trabalho em energia cinética (o teorema do trabalho-energia)

Imagine um corpo (um de nossos carrinhos) com massa m se movendo com velocidade $\vec{V}_i$. Suponha que apliquemos sobre o carrinho uma força $\vec{F}$. Como uma força passa a agir sobre o carrinho, ele acelera e, após alguns instantes, sua velocidade passa ser $\vec{V}_f$.



O teorema

Vamos calcular o trabalho da força F sobre o carrinho.

Temos o trabalho $\tau = F \cdot \Delta S$ (eq. 1)

e a força $F = m \cdot a$ (eq. 2).

Como F é constante, temos aceleração constante. Logo, o movimento é do tipo MUV e podemos aplicar Torricelli:

$$V_f^2 = V_i^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta S,$$

onde: $$\Delta S = \frac{V_f^2 - V_i^2}{2.a} \text{ (eq. 3).}$$

Substituindo as equações (eq. 3) e (eq. 2) na equação (eq. 1), obtemos:

$$\tau = m.a.\left(\frac{V_f^2 - V_i^2}{2.a}\right).$$

Eliminando o (a) e fatorando-se, o trabalho se transforma em:

$$\tau = \frac{1}{2}mV_f^2 - \frac{1}{2}mV_i^2 \text{ (eq. 4).}$$

À grandeza $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ chamamos *energia cinética*, pois está diretamente ligada ao quadrado da velocidade, isto é, ao movimento. Assim, olhando para a equação (eq. 4) podemos escrever:

$$\tau = E_{Cf} - E_{Ci}.$$

Ou seja: $\tau = \Delta E_C$, que é o *teorema do trabalho-energia*, que pode ser enunciado como:

// atenção

O trabalho da resultante é igual à variação da energia cinética.

A unidade de energia no Sistema Internacional

Podemos estabelecer facilmente a unidade de energia cinética. Vejamos a seguir.

Temos: $E_c = \frac{1}{2}mv^2$.

Assim: (*unidade de energia*) = (*unidade de massa*) × (*unidade de velocidade ao quadrado*). Isto é, em termos de unidades, podemos escrever:

$$[E_c] = [m_{assa}]\,[v]^2 = kg \cdot \left(\frac{m_{etro}{}^2}{s^2}\right) = kg \cdot \left(\frac{m_{etro}}{s^2}\right) \cdot m_{etro} = N \cdot m = J \quad .$$

Veja que essa unidade é o *joule*, a nossa já conhecida unidade de trabalho. Dessa forma, fica bem clara a equivalência entre trabalho e energia, e podemos compreender melhor a definição de Ostwald (dê uma relida na definição no início da unidade, em "O conceito de energia"). O número ½ é adimensional, isto é, não tem unidade de medida.

Observação: pela própria definição de energia cinética, vemos que ela é um produto de grandezas escalares (a massa e o módulo da velocidade ao quadrado). Portanto, a *energia cinética* também é uma *grandeza escalar*.

Vamos, agora, ver alguns exemplos de aplicação da definição de energia cinética e o teorema do trabalho-energia.

Situação 1: um tijolo com 4 *kg* de massa, ao cair de uma certa altura, atinge a velocidade de 3 *m/s*. Calcule sua energia cinética.

Solução:

Temos: a massa m = 4 *kg* e a velocidade V = 3 *m/s* (ambos estão no S.I.). Assim, basta aplicar a equação de definição de energia cinética.

$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 4 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18\ J.$

Situação 2: qual será a relação entre as energias cinéticas de dois automóveis, de mesma marca e modelo, que trafegam com velocidades tais que a velocidade de um é o triplo da velocidade do outro?

Solução:

Uma vez que os automóveis são iguais, temos que as massas são $m_2 = m_1 = m$. Como a velocidade de um é o triplo da velocidade do outro: $V_2 = 3V_1$, teremos:

para o automóvel (1) $E_{c1} = \frac{1}{2}m_1 V_1^2$;

para o automóvel (2) $E_{c2} = \frac{1}{2}m_2 V_2^2 = \frac{1}{2}(3V_1)^2 = 9 \times \left\{\frac{1}{2}(V_1)^2\right\}$;

logo, $E_{c2} = 9 \times E_{c1}$.

A energia será 9 vezes maior.

Situação 3: um carrinho com 20 *kg* de massa, caminha com velocidade de 10 *m/s*. Uma força *F*, constante, é aplicada sobre ele, de modo que acelera até atingir a velocidade de 20 *m/s*. Calcule o trabalho realizado pela força sobre o carrinho.

Solução:

São dados: $m = 20\ kg$; $V_i = 10\ m/s$ e $V_f = 20\ m/s$. Pede-se o trabalho realizado pela força.

Temos: $\tau = \Delta E_C = E_{cf} - E_{ci}$.

Assim, $\tau = \Delta E_C = \frac{1}{2} m V_f^2 - \frac{1}{2} m V_i^2$.

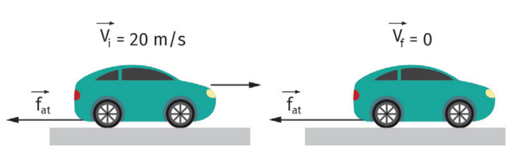
Logo: $\tau = \frac{1}{2} \times 20 \times 20^2 - \frac{1}{2} \times 20 \times 10^2$

ou $\tau = 10 \times 400 - 10 \times 100$.

$= 4.000 - 1000$

Finalmente: $\tau = 3.000 = 3{,}0 \times 10^3\ J$.

Situação 4: um automóvel com 800 *kg* de massa caminha sobre uma estrada plana e horizontal, com velocidade de 20 *m/s*, quando o motorista freia, de modo que, após um certo tempo, a força de atrito resultante faz o automóvel parar. Vamos calcular o trabalho realizado pelas forças de atrito.



Solução:

São dadas: a massa $m = 800\ kg$; a velocidade inicial $V_i = 20\ m/s$ e a velocidade final, $V_f = 0$, pois o carro para.

Vamos aplicar o teorema do trabalho-energia.

Temos: $\tau = \Delta E_C = E_{Cf} - E_{Ci}$.

Ou seja: $\tau = \Delta E_C = 0 - 1/2\ m V_i^2$ pois $V_f = 0$;

assim $\tau = \Delta E_C = 0 - \frac{1}{2} m V_i^2$

ou $\tau = -\frac{1}{2} \times 800 \times 20^2$.

Finalmente: $\tau = -160.000 = -1{,}6 \times 10^5\ J$.

Como a energia cinética final é menor do que a inicial, encontramos um sinal negativo (–) para o trabalho realizado. Isso sempre acontece quando a força atua contra o movimento, como é o caso das forças de atrito. A energia foi "retirada" do corpo.

Atividade

Supondo que o mesmo automóvel do exemplo anterior caminhou 40 *m* até parar, pede-se calcular:

a) a força de atrito necessária para fazê-lo parar;

b) o tempo decorrido desde que a força foi aplicada até o automóvel parar.

Dicas: anteriormente, tínhamos a massa do automóvel, $m = 800\ kg$; a velocidade inicial $V_i = 20\ m/s$ e a velocidade final, $V_f = 0$; pois o carro para. Logo, $\left(\Delta V = 20 \frac{m}{s}\right)$. Agora, foi dado também o caminho percorrido, $\Delta S = 40\ m$. Sabemos, ainda, o trabalho realizado pela força de atrito, que calculamos logo acima: $\tau = -160.000 = -1{,}6 \times 10^5\ J$. Utilize a definição do trabalho para calcular a força de atrito. Para calcular o tempo decorrido, lembre-se de que, sendo a força constante, temos um MRUV (no caso, *retardado*).

lá na plataforma

Na Unidade 14 de nosso ambiente virtual, na seção sobre a energia cinética e sua relação com o trabalho, *siga as orientações de desenvolvimento da atividade proposta. Acesse, por meio do ambiente,* objetos de aprendizagem de simulação computacional *da Universidade de Boulder, Colorado, também disponível em: https://phet.colorado.edu/pt_BR/.*

Perceba como a atividade/recurso dialoga diretamente com o tema de nossa aula.

Resumo

- Definição de trabalho

Nesta unidade, revimos a definição do trabalho nos estudos de Física, onde $\tau = F \cdot \Delta S$.

- O conceito de energia e a definição de Ostwald

Vimos os importantes conceitos de *energia* e também de *energia cinética*, que aparece naturalmente quando calculamos o trabalho realizado por uma força.

Energia é a capacidade de realizar trabalho, tudo aquilo que pode ser obtido do trabalho, ou nele se transformar.

- A energia cinética

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

- O *teorema do trabalho energia*

O trabalho da resultante é igual à variação da energia cinética.

Isto é: $\tau = \Delta E_c$.

- Princípio geral da conservação da energia

Vimos também o importante conceito da conservação da energia:

A energia não pode ser criada nem destruída, mas apenas transformada de uma forma de energia em outra.

Exercícios

lá na plataforma

Informação complementar: na Unidade 14 de nosso ambiente virtual, na seção sobre energia cinética e sua relação com o trabalho, *siga as orientações pedagógicas de suporte à resolução dos exercícios propostos a seguir, que* foram pré-gravadas em áudio, no formato [mp4].

Agora é com você! Faça uma nova leitura da aula e resolva os exercícios a seguir.

1. Um carro, cuja massa vale $1{,}2 \times 10^3$ *kg*, viaja inicialmente a 30 *m/s* em pista plana e horizontal, quando o motorista freia fortemente. A força de atrito dos pneus com o piso vale $7{,}2 \times 10^3$ *N*. Calcule o deslocamento do carro durante a freada.

2. Uma pedra presa à extremidade de um fio gira em torno de um ponto fixo, descrevendo uma trajetória circular supostamente horizontal. Determine o trabalho realizado sobre a pedra pela tração do fio.

3. Um tiro é desferido contra uma porta. A bala, de massa m = 20 g, antes de atravessar a porta, tinha uma velocidade V_1 = 800 m/s. Logo após atravessar a porta, sua velocidade é V_2 = 200 m/s. Determine:

   a) o trabalho da resultante das forças que agiram sobre a bala, enquanto ela atravessava a porta.

   b) o valor da força resultante, supostamente constante. Considere a espessura da porta igual a 5 cm.

4. Uma força horizontal de 1,5 N atua em um carrinho de 0,20 kg, para acelerá-lo, ao longo de uma pista horizontal. Qual é a velocidade do carrinho depois de partir do repouso e percorrer 30 cm? Considere o atrito desprezível.

5. Um bloco de 0,50 kg é lançado sobre uma mesa com velocidade inicial de 0,20 m/s. Ele desliza até parar. A distância percorrida pelo bloco é igual a 0,70 m. Determine a força de atrito existente entre o bloco e a mesa.

Respostas da unidade

Atividade

a) força de atrito necessária para fazê-lo parar;

Temos o trabalho: $\tau_{fat} = F_{at} \cdot \Delta S$

Assim $F_{at} = \dfrac{\tau_{at}}{\Delta S}$

Finalmente

$$F_{at} = \frac{-\,1{,}6 \times 10^5}{40} = -\frac{160.000}{40} = -4.000$$

= **− 4,0 × 10³ *N***

O sinal negativo significa que a força é contrária ao deslocamento $\overrightarrow{\Delta S}$.

b) o tempo decorrido desde que a força foi aplicada até o automóvel parar.

Temos MUV, logo $V_f = V_i \times a \cdot \Delta t$.

Onde: $0 = V_i \times a \cdot \Delta t$;

Ou: $\Delta t = -V_i \cdot \dfrac{1}{a}$ (eq. 1).

Temos também $F = m \cdot a \Rightarrow \dfrac{1}{a} = \dfrac{m}{F}$ (eq. 2).

Assim, substituindo a (eq. 2) em (eq. 1), vem:

$$\Delta t = -V_i \cdot \frac{m}{F}.$$

Finalmente: $\Delta t = -20 \times \dfrac{800}{-4000}$

$$\Delta t = -20 \times \frac{800}{-4000} = \mathbf{+\,4{,}0\ s}$$

Outra solução: usando o conceito de energia.

Temos $\tau_{at} = F_{at} \cdot \Delta S$ (eq. 1).

Ou, como no MUV:

$$S = S_0 + \frac{1}{2} a \cdot \Delta t^2 \Rightarrow S - S_0 = \frac{1}{2} a t^2$$

$$\Rightarrow \Delta S = \frac{1}{2} a \cdot \Delta t^2$$

Podemos escrever na (eq. 1)

$$\tau_{fat} = F_{at} \cdot \frac{1}{2} a \cdot \Delta t^2$$

Ou: $\Delta t^2 = 2 \dfrac{\tau_{fat}}{F_{at} \cdot a}$.

Com $a = \dfrac{F_{at}}{m}$ onde $\dfrac{1}{a} = \dfrac{m}{F_{at}}$

Vem: $\Delta t^2 = 2 \cdot \dfrac{\tau_{fat}}{F_{at}} \cdot \dfrac{m}{F_{at}}$

Onde: $\Delta t^2 = 2 \times \dfrac{160.000}{-4000} \times \dfrac{800}{-4000} = +16$

Finalmente: $\Delta t = \sqrt{16} = \mathbf{+\,4{,}0\ s}$, como na solução anterior.

Exercícios

1. 75 m
2. zero
3. a) $-6{,}0 \times 10^3$ J; b) $1{,}2 \times 10^5$ N.
4. 2,1 m/s.
5. $1{,}4 \times 10^{-2}$ N.

A energia potencial

15

meta

Introduzir os conceitos de energia potencial gravitacional e de energia potencial elástica.

objetivos

Esperamos que, ao final desta unidade, você seja capaz de:

- reconhecer e calcular a energia potencial gravitacional;
- resolver problemas simples de elasticidade, em molas que obedeçam à lei de Hooke;
- reconhecer e calcular a energia potencial elástica.

Introdução

No capítulo anterior, estudamos a energia relacionada ao movimento dos corpos. Verificamos que, quanto maior sua massa e sua velocidade, maior era sua *energia do movimento*, isto é, sua *energia cinética*. Agora, estudaremos alguns casos em que a energia não está manifesta, como no caso da energia cinética, mas nos quais o corpo poderá liberar ou não sua energia. As energias chamadas de *potencial* são aquelas nas quais a energia está de alguma forma *armazenada* ou *guardada* com o corpo e que poderá ser liberada, se e quando o corpo puder se mover.

Figura 15.1: Nesta imagem, uma arqueira do time coreano de tiro com arco encaixa a cauda da flecha na corda, puxando-a para trás. Ao esticar a corda, a esportista armazena nela uma energia potencial que será transferida para a flecha assim que ela for solta, conferindo-lhe velocidade. Fonte: https://www.flickr.com/photos/koreanet/7682350138.

A energia potencial gravitacional

Imagine que você está lançando uma pedra para cima com certa velocidade. Durante o lançamento, você imprime certa velocidade à pedra, ela adquire energia cinética e irá alcançar certa altura. Se você lança a pedra com mais força (realiza um trabalho maior sobre ela), a pedra terá uma energia cinética inicial maior e alcançará uma altura também maior. Imagine, agora, que você deixa a pedra cair. Quanto maior for a altura da queda, maior será a velocidade com que a pedra irá atingir o chão e, portanto, maior será sua energia cinética final. Veja que existe uma relação direta entre a altura e a energia cinética que a pedra poderá adquirir se você a deixar cair.

Quando os corpos estão próximos da Terra e, portanto, sujeitos à força da gravidade, eles possuem uma energia potencial, isto é uma energia que pode (ou não) ser liberada, caso você deixe o corpo se mover livremente (cair).

A essa energia, chamamos *energia potencial gravitacional*, que é dada pelo produto do *peso do corpo* (P) e pela *altura* considerada (h). Assim, escrevemos:

$$E_P = P \cdot h.$$

onde E_P é a energia potencial gravitacional.

Repare que $P \cdot h$ é exatamente o trabalho que a força peso poderá realizar se o corpo for deixado cair da altura h (pois trabalho = força × deslocamento). Como o peso do corpo é produto de sua massa pela aceleração da gravidade, $p = mg$, podemos também escrever:

$$E_P = m \cdot g \cdot h.$$

que é a maneira mais comum de se escrever a energia potencial gravitacional.

Assim, para um determinado corpo, quanto maior for a altura em que ele estiver, em relação a um certo referencial, maior será sua energia em relação a esse referencial. Normalmente, escolhemos como referencial o chão ou a altura mais baixa onde o corpo poderá cair, mas, em cada situação, podemos (e devemos) escolher o referencial que melhor nos convier para resolver o problema.

Figura 15.2: Quando uma pessoa salta de *bungee jump*, experimenta a transformação da energia potencial gravitacional, representada pela altura em que ela se encontra no momento do salto, em energia cinética, representada pela velocidade que adquire ao cair. Depois, parte da sua energia cinética é transformada na energia potencial elástica usada no amortecimento da queda. Fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bungee-Jumping-620x465_(21197957813).jpg.

Em resumo:

// atenção

A Energia Potencial é uma energia que está "armazenada" junto ao corpo. Ela pode (ou não) ser liberada para realizar trabalho.

// atenção

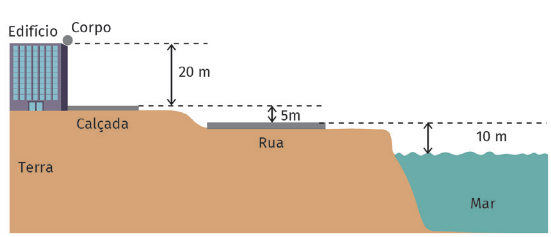
Você sabe como funciona uma usina hidrelétrica?

Assista o vídeo indicado no link *a seguir para entender na prática como funciona uma usina hidrelétrica e conhecer a usina que mais gera energia no mundo: a poderosa usina de Itaipu, que funciona por meio das águas do rio Paraná, na cidade de Foz do Iguaçu: https://www.youtube.com/watch?v=48IlepuOvLw (Créditos: Manual do Mundo).*

Vale lembrar que a *energia potencial gravitacional depende do referencial*, isto é, nós precisamos escolher a partir de onde estamos considerando a altura, ou seja, onde está o nosso zero de potencial. Faremos isso, *arbitrariamente*, do modo mais conveniente para a solução do problema em questão.

Vejamos um exemplo para ilustrar uma boa maneira de se escolher um referencial para a energia potencial gravitacional.

Situação 1: vamos calcular a energia potencial gravitacional de um corpo de 4 *kg* de massa, que é abandonado a partir do repouso no alto de um edifício de 20 *m* de altura, conforme ilustrado no desenho abaixo. Supor $g = 10\ m/s^2$.



Considerações: se tomarmos como referencial (como o zero de potencial) o nível do mar, a energia potencial do corpo será:

$E_{P(mar)} = m \cdot g \cdot h_{mar}$

$E_P = 4{,}0 \times 10 \times (20 + 5 + 10)$

$E_P = 40 \times 35 = 1.400\ J$

Se tomarmos como referencial o nível da rua, a energia potencial do corpo será:

$E_{P(rua)} = m \cdot g \cdot h_{rua}$

$E_P = 4{,}0 \times 10 \times (20 + 5)$

$E_P = 40 \times 25 = 1.000\ J$

Se tomarmos como referencial a calçada do edifício, a energia potencial do corpo será:

$E_{P(calçada)} = m \cdot g \cdot h_{calçada}$

$E_P = 4{,}0 \times 10 \times (20) = 800\ J$

Mas, então, qual é a energia potencial desse corpo, afinal? É isso mesmo o que você viu!

// atenção

A energia potencial gravitacional é definida arbitrariamente, a partir de um referencial que nós escolhemos!

Em cada situação devemos escolher um referencial que nos facilite os cálculos. Vamos resolver um caso concreto.

Situação 2: o corpo do exemplo que estudamos (na Situação 1) é deixado cair livremente, a partir do repouso, do alto do edifício. Como calcular a energia cinética do corpo ao fim da queda (imediatamente antes de o corpo bater na calçada, é claro)?

Solução:

O corpo cai *livremente*. Assim, podemos desprezar a força de resistência do ar. Veja na figura anterior que o corpo, *abandonado* do repouso do alto do edifício, cairá, certamente, na calçada, e não na rua, ou muito menos no mar. Dessa forma, tomaremos como referencial, isto é, como *zero* de potencial, o nível da calçada. Logo, teremos:

A energia potencial

$E_{P(calçada)} = m \cdot g \cdot h_{calçada}$

$E_P = 4{,}0 \times 10 \times (20) = 800\ J$

A energia cinética

Pelo teorema trabalho-energia, todo o trabalho realizado pela força peso será transformado em energia cinética (quando não há perdas). Assim:

$$\tau_{peso} = \Delta Ec$$

$m.g.h = E_{cf} - E_{ci}$

$m.g.h = E_{cf} - 0$, pois a velocidade inicial é nula (o corpo foi abandonado do "repouso");

$800 = E_{cf}$ $m.g.h$ = trabalho da força peso = variação da energia cinética;

$E_{cf} = 800\ J$, e a energia potencial se transformou em energia cinética (a força peso realizou trabalho).

Situação 3: uma jaca madura, de 2 *kg* de massa, está presa na jaqueira a uma altura de 4 *m* do chão quando, de repente, desprende-se e cai. Considere a aceleração da gravidade local $g = 10\ m/s^2$. Vamos calcular:

a) a energia potencial inicial da jaca, em relação ao chão;

b) a energia potencial da jaca, depois de cair 3 *m*;

c) a energia potencial da jaca, imediatamente antes de atingir o chão;

d) a energia cinética da jaca, ao atingir o chão.

Solução:

Como a jaca cai do galho até o chão, usaremos como referencial o nível do chão, onde a altura e a energia potencial serão consideradas *zero*.

a) Temos, em relação ao chão:
$Ep = m \cdot g \cdot h = 2{,}0 \times 10 \times 4{,}0 = 80\ J$.

b) Temos também $Ep = m \cdot g \cdot h$ mas nesse caso, $h = 4 - 3 = 1\ m$.

Assim: $E_p = 2{,}0 \times 10 \times 1 = 20$ J.

Veja que, ao cair apenas 3 *m*, a energia potencial é 60 *J* menor que no início da queda, pois, ao cair, a jaca diminui sua energia potencial e ganha energia cinética.

c) Ao atingir o chão, $h = 0$, logo $Ep = m \cdot g \cdot h = m \cdot g \times 0 = 0$.

d) Como vimos, o trabalho da força *peso* é igual à energia potencial gravitacional e, pelo teorema do trabalho-energia, é igual à variação da energia cinética. Assim:

Temos: $\tau_{peso} = \Delta Ec$.

Logo: $P_{eso} \cdot h = Ec_f - Ec_i$

ou $m \cdot g \cdot h = Ec_f - 0$.

Finalmente: $Ec_f = m \cdot g \cdot h = 2{,}0 \times 10 \times 4{,}0 = 80\ J$ (como havíamos visto no item a)).

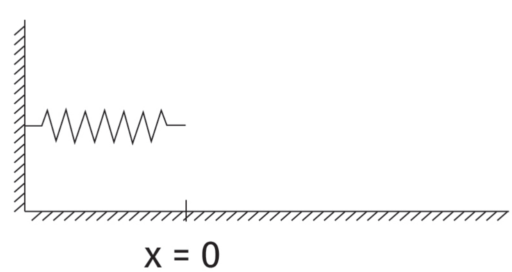
Outra solução:

Podemos calcular a energia cinética utilizando a equação $Ec_f = \frac{1}{2}mv^2$, pois foi dada a massa da jaca. As equações do MUV podem ser usadas para calcular a velocidade após a queda livre de 4 *m* da jaca. Normalmente, as soluções dos problemas de dinâmica que utilizam os conceitos de energia e o teorema do trabalho-energia são bem menos trabalhosas.

A força elástica e a lei de Hooke

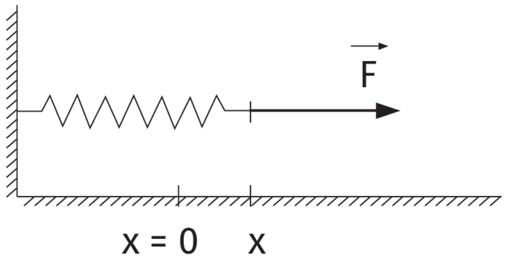
A energia potencial elástica está associada aos corpos que têm elasticidade, que podem ser deformados e depois voltar à sua condição inicial, como uma mola por exemplo.

Consideremos uma mola, presa a uma parede, e que um agente externo (você por exemplo) puxe a mola com uma força . Repare a sequência de ilustrações.

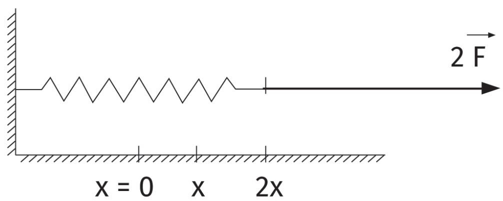


Não havendo nenhuma força sobre a mola, esta está relaxada.

Quando a mola é esticada pela força $\vec{F}$, ela se distende de um elongamento *x*.



Quando a mola é esticada por uma força $\overrightarrow{2F}$, ela se distende de $2x$.



Desde que você não estique demais a mola de modo a danificá-la, a força feita é proporcional à deformação (x). Se dobrarmos a força, a mola se distende o dobro; se triplicarmos a força, a mola se distende o triplo e assim por diante. Dissemos que *a força aplicada é proporcional ao elongamento* x. Matematicamente, escrevemos:

$F \propto x$ (F é proporcional ao alongamento x).

Colocando-se uma constante de proporcionalidade, podemos escrever:

$$F = K \cdot x.$$

Essa relação existente entre a força aplicada e a deformação sofrida pela mola foi determinada experimentalmente por Robert Hooke, no ano de 1678.

Essa expressão é conhecida como *lei de Hooke* e nos mostra qual será a deformação ou alongamento (x) para cada força (F) aplicada.

A constante k é chamada de *constante elástica* da mola. Cada mola tem sua constante k e, quanto maior ela for, maior será a força necessária para esticar ou comprimir a mola, produzindo uma deformação.

Figura 15.3: Robert Hooke (1635-1703) foi um físico inglês contemporâneo de Newton, de quem discordava e com quem teve inúmeras e acirradas discussões, até o fim da vida. Essa imagem, em sua versão original, é uma pintura a óleo de Rita Greer (2004), retratando Robert Hooke. Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Robert_Hooke#/media/Ficheiro:13_Portrait_of_Robert_Hooke.JPG.

Figura 15.4: Microscópio manufaturado por Christopher Cock para que Robert Hooke realizasse as observações que formaram a base do seu livro *Micrographia*, no qual descreve seus inúmeros estudos em microscopia e óptica. Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Hooke_Microscope-03000276-FIG-4.jpg.

As unidades de K

Sendo $F = K \cdot x$, a unidade de k no S. I. é o N/m (Newton/metro).

É comum utilizarmos também o N/cm, já que molas comuns, usadas no cotidiano, como a molinha de uma caneta esferográfica ou mesmo a mola da suspensão de um automóvel, em seu funcionamento normal, não se deformam mais do que alguns centímetros.

Situação 4: vamos calcular a força necessária para produzir um alongamento de 5 cm, a partir da posição relaxada, em uma mola de constante elástica $K = 20\ N/cm$.

Solução:

Temos $K = 20\ N/cm$ e $x = 5\ cm$.

Aplicando a lei de Hooke: $F = K \cdot x$

teremos: $$F = 20\left(\frac{N}{cm}\right) \times 5(cm) = 100\ N.$$

Situação 5: um automóvel de 800 kg de massa possui quatro molas idênticas em sua suspensão, uma em cada roda. Suponha que o peso do automóvel está dividido igualmente sobre cada roda e que, com o automóvel parado, em equilíbrio, cada mola está comprimida em 5 cm. Calcular a constante elástica das molas no S. I. Supor $g = 10\ m/s^2$.

Solução:

A força que está comprimindo as quatro molas é igual ao peso do automóvel. Cada mola sustenta, então, 1/4 do peso do automóvel. Assim, para cada mola, teremos:

$$F = \frac{P}{4} = \frac{m.g}{4} = \frac{800 \times 10}{4} = 2.000\ N.$$

Aplicando a lei de Hooke, teremos, para cada mola: $F = K \cdot x$,

onde $$K = \frac{F}{x} = \frac{2.000}{x}.$$

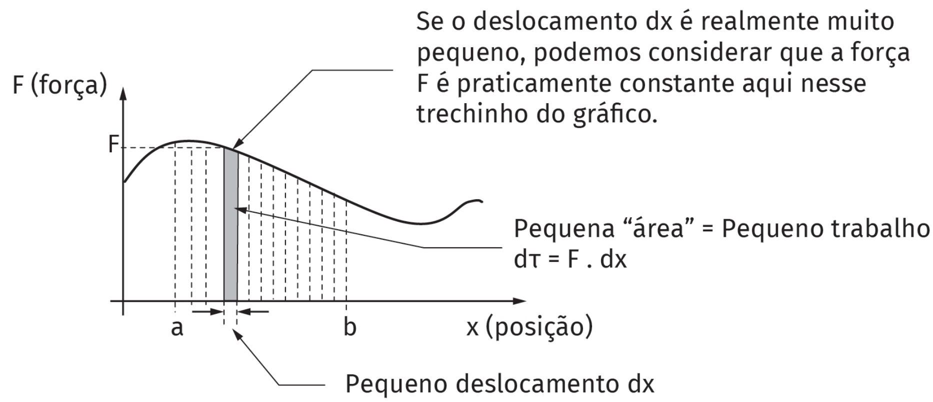
Assim: $$K = \frac{2.000}{5} = 400\ N/cm$$

ou, passando para o S. I., 5 cm = 0,05 $$K = \frac{2.000}{0{,}05} = 40.000 = 4{,}0 \times 10^4\ N/m.$$

Trabalho de uma força variável

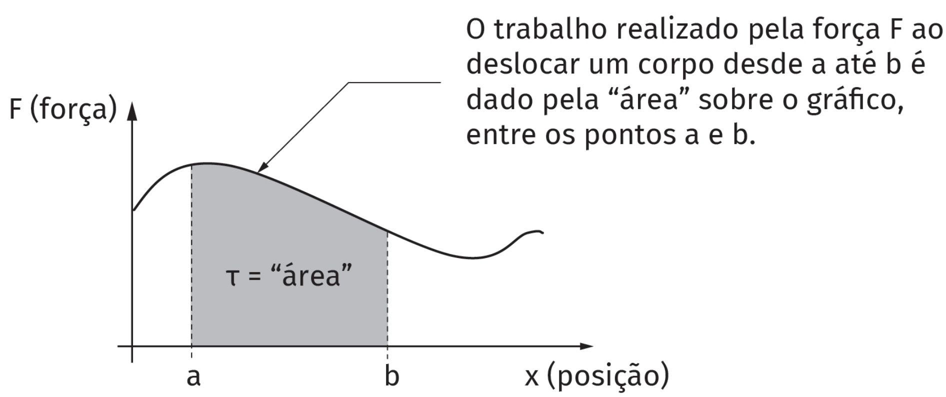
Nós já vimos que o trabalho de uma força constante é igual ao produto da força pelo deslocamento ($\tau = F \cdot d$). No caso em que a força varia com o deslocamento, como no caso da força elástica, temos que fazer uso de um raciocínio que é utilizado no chamado *cálculo integral*, estudado mais a fundo no nível superior.

Tomemos como exemplo uma força *F* que varia com a posição *x*, de acordo com o gráfico a seguir:



Para um deslocamento muito pequeno (como o dx, do gráfico) a força varia tão pouco que é praticamente constante durante esse deslocamento. Assim, o pequenino trabalho para o corpo se deslocar de dx pode ser escrito como $d\tau = F \cdot dx$. Veja que esse trabalho é igual à pequena área sombreada no gráfico.

Para calcularmos o trabalho de uma força variável *F* para um deslocamento desde uma posição a até uma posição b, utilizando o raciocínio anterior, basta somarmos todos os pequeninos trabalhos áreas $d\tau$ desde *a* até *b*. O resultado é a área toda. A esse tipo de soma, chamamos *integral*. Foi também Newton quem desenvolveu o cálculo que resolve esse tipo de problema, na mesma época em que descobriu suas famosas leis da mecânica.

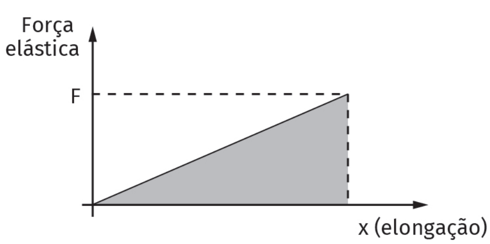


Nós não faremos cálculos do trabalho realizado por forças que variam como nos gráficos acima, pois necessitaríamos de estudos mais avançados do cálculo. Entretanto, podemos aplicar o raciocínio para forças que variam de forma linear com a posição, como no caso da força de Hooke, pois na lei de Hooke ($F = K \cdot x$) a força é uma função linear de *x* (o gráfico de *F versus x* é uma reta) e torna-se fácil calcular a "área", como veremos logo adiante.

Aplicação para a força elástica da mola

As molas, como vimos anteriormente, desde que não as estiquemos demais, para não se deformarem, obedecem à lei de Hooke. Isto é, a elongação (x) causada em uma mola é proporcional à força aplicada à mola ($F = K \cdot x$).

Para calcularmos o trabalho realizado pela força para esticar (ou comprimir) uma mola, podemos fazer uso do gráfico da força F *versus* elongação x e determinar a "área" sobre o gráfico. Vejamos:



O trabalho para esticar (ou comprimir) a mola

Veja que, ao calcularmos a área sobre a curva até o eixo x, estaremos multiplicando uma força por um deslocamento e, é claro, não encontramos uma área propriamente dita, mas sim um *trabalho* = $F.d$. Sendo assim, temos:

trabalho = *área*

Do gráfico, vemos que: $\tau = \dfrac{F.x}{2}$,

mas $F = K \cdot x$. Assim: $\tau = \dfrac{K.x.x}{2}$.

Finalmente: $\tau = \dfrac{1}{2}Kx^2$ é o trabalho realizado pela força elástica.

Situação 6: vamos calcular o trabalho realizado por uma força para esticar de 6 *cm* uma mola cuja constante elástica é de 10 *N*/*cm*.

Solução:

Temos os dados: a elongação x = 6 *cm* e a constante elástica k = 10 *N*/*cm*.

Passando para o S. I., teremos: x = 6 *cm* = 6 × 10^{-2} *m* e também

$$K = 10\left(\frac{N}{cm}\right) = 10\left(\frac{N}{10^{-2}\,m}\right) = 10 \times 10^{+2}\left(\frac{N}{m}\right).$$

Assim, o trabalho será:

$$\tau = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{10 \times 10^2\,\left(6{,}0 \times 10^{-2}\right)^2}{2}$$

$$= \frac{10^1 \times 10^2 \times 36 \times 10^{-4}}{2}.$$

Finalmente: $\tau = 18 \times 10^{1+2-4} = 18 \times 10^{-1} = 1{,}8$ J.

A energia potencial elástica

Vimos, anteriormente, que o trabalho realizado para mover um corpo se transforma em energia cinética. No caso da força elástica, o trabalho realizado para *esticar* ou *comprimir* uma mola se transforma em energia potencial elástica, ficando armazenada junto à mola. Essa energia potencial pode, posteriormente, ser liberada e se transformar em energia cinética, como nos antigos relógios de mola.

A energia potencial elástica é dada por:

$$Ep_{elástica} = \frac{1}{2}Kx^2.$$

A energia elástica é dada em joules, no S. I.

Para isso, devemos usar x em metros e K em Newton/metro.

Vamos fazer, agora, um exercício de aplicação.

Situação 7: imagine uma mola de constante elástica k = 400 N/m, cujo comprimento, quando relaxada (sem deformação), é de 30 cm. Você estica a mola até que seu comprimento final seja de 40 cm. Vamos calcular:

a) o valor da força que você está exercendo sobre a mola para mantê-la esticada;

b) a energia potencial elástica da mola quando esticada até 40 cm;

Solução:

a) A elongação é $x = 40 - 30 = 10\ m = 0{,}10$ (passando para o S. I.) e $K = 400\ N/m$.

Logo: $F = K \cdot x = 400\left(\frac{N}{m}\right) \times 0{,}10(m) = 40\ N$

b) Temos: $Ep_{elástica} = \frac{1}{2}Kx^2$

ou $Ep_{elástica} = \frac{1}{2} \times 400 \times (0{,}10)^2$.

Finalmente: $Ep_{elástica} = \frac{1}{2}Kx^2 = 200 \times 0{,}01$

$= 2\ N$

lá na plataforma

Na Unidade 14 de nosso ambiente virtual, na seção sobre a energia potencial*, siga as orientações de desenvolvimento da atividade proposta. Acesse, por meio do* ambiente*,* objetos de aprendizagem de simulação computacional*, da Universidade de Boulder, Colorado, [https://phet.colorado.edu/pt_BR/]. Perceba como a atividade/recurso dialoga diretamente com o tema de nosso aula.*

Resumo

Nesta unidade, estudamos os importantes conceitos de energia potencial, de energia potencial gravitacional, da energia potencial elástica e da lei de Hooke.

- Energia potencial

A energia potencial é uma energia que está "armazenada" junto ao corpo. Ela pode (ou não) ser liberada.

- A energia potencial gravitacional

$E_P = P \cdot h$, onde E_P é a energia potencial gravitacional, ou $E_P = m \cdot g \cdot h$, que é a maneira mais comum de se escrever.

- A lei de Hooke

$$F = K \cdot x$$

Vimos, também, que o trabalho pode ser calculado por meio da área sob a curva até o eixo x, nos gráficos de força *versus* deslocamento, o que nos levou a estabelecer que:

- o trabalho realizado pela força elástica é dado por:

$$\tau = \frac{1}{2}Kx^2$$

- e que a energia potencial elástica:

$$Ep_{elástica} = \frac{1}{2}Kx^2$$

Exercícios

lá na plataforma

Informação complementar: na Unidade 14 de nosso ambiente virtual, na seção sobre a energia potencial, *siga as orientações pedagógicas de suporte à resolução dos exercícios propostos a seguir, que* foram pré-gravadas em áudio, no formato [mp4].

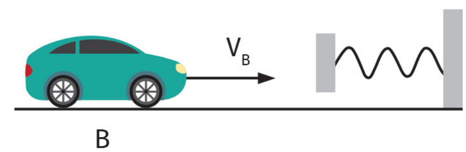
1. Um bloco de massa igual a 2 *kg*, movendo-se inicialmente com velocidade 4 *m/s*, é freado ao se chocar frontalmente com uma mola, cuja constante elástica vale 8×10^2 *N/m*. Determine:

   a) a compressão máxima (x_{max}) da mola;

   b) a velocidade do bloco quando a compressão da mola é $\frac{x_{max}}{2}$.

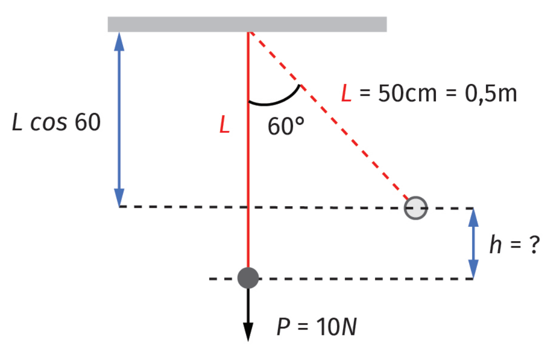
Dicas: o bloco caminha com uma certa velocidade, portanto tem uma energia cinética. Ao encontrar a mola, essa energia cinética vai sendo passada para a mola, sob a forma de energia potencial elástica, à medida que ela é comprimida, até que o bloco para. Aí, a velocidade é zero e a energia cinética é também zero, tendo se transformado completamente em energia potencial elástica.

Sugestão: para ilustrar a situação descrita nesta questão e em questões semelhantes, faça um desenho, como exemplificado a seguir, com o carrinho se aproximando da mola, e mais um desenho semelhante, com o carrinho depois de comprimir ao máximo a mola, quando a velocidade se anula.



2. Determine a variação da energia potencial de uma pequena esfera de peso igual a 10 *N*, suspensa na extremidade de um fio de comprimento igual a 50 *cm* (como um pêndulo), quando a deslocamos da posição de equilíbrio até uma nova posição, que forma um ângulo de 60° com a vertical.

Dica: aqui, trata-se de energia potencial gravitacional. Para resolver esses tipos de problemas, você deve fazer um desenho, colocando o maior número de informações possíveis, para ter uma visão geral da questão. Veja como:



Pela figura, você pode observar que $L = L \cos 60 + h$. Releia o primeiro item dessa unidade e resolva o exercício.

3. Uma mola de constante elástica 16 *N/m* é esticada desde a sua posição de equilíbrio até uma nova posição, em que seu comprimento aumenta 10 *cm*. A energia potencial elástica da mola esticada é:

   a) 5×10^{-2} *J*

   b) 8×10^{-2} *J*

   c) 16×10^{-2} *J*

   d) 5×10^{-1} *J*

   e) 5×10^{-3} *J*

4. Quando uma mola é puxada pela ação de uma força de 10 *N*, ela se alonga 5 *cm*. Determine:

   a) a constante elástica da mola;

   b) o trabalho da força elástica durante o alongamento da mola.

5. Um bloco de massa 4 *kg* e velocidade horizontal 0,50 *m/s* choca-se com uma mola de constante elástica 1×10^2 *N/m*. Determine o valor da máxima deformação que a mola experimenta.

6. Uma mola vertical comprimida sustenta uma esfera de massa 1 *kg*. Solta-se o conjunto e a esfera é lançada verticalmente para cima, atingindo uma altura *h*. Determine *h*. Dados: a constante da mola e a compressão da mola valem, respectivamente, 1×10^2 *N/m* e 0,10 *m*. Considere $g = 10\ m/s^2$ e despreze a resistência do ar. Dica: nesse caso, a energia potencial elástica da mola vai se transformando em energia potencial gravitacional, até que a esfera chegue no ponto mais alto da trajetória.

Respostas

1. a) 0,20 *m* e b) 3,5 *m/s*

2. 2,5 *J*.

3. b)

4. a) $2{,}0 \times 10^2$ *N/m* e b) $-2{,}5 \times 10^{-1}$ *J*.

5. 0,10 *m*

6. 0,060 *m*

Referências

BLACKWOOD, Oswald; HERRON, Wilmer; KELLY, William. *Física na escola secundária*. São Paulo: Fundo de Cultura, 1969. v. 1.

CENTRO EDUCACIONAL DE NITERÓI. *Ensino individualizado*: curso do 2º grau. Niterói, RJ: GRAFCEN, 1995, p. 119.

GONÇALVES, Dalton. *Física*. São Paulo: Ao Livro Técnico, 1979. v. 1.

GUIMARÃES, Luiz Alberto Mendes; FONTE BOA, Marcelo Cordeiro. *Física Mecânica* Ilustrações: Marcelo Pamplona, Niterói, RJ: Galera 2010.

GUIMARÃES, Luiz Alberto Mendes; FONTE BOA, Marcelo Cordeiro. *Passe!* Niterói, Rj: Galera 2011.