Matemática

PVC

PRÉ-VESTIBULAR **CECIERJ** | volume **2**

André Luiz Marques

Cleber Neto

Fabio Henrique Teixeira de Souza

Fundação CECIERJ

Secretaria de Ciência, Tecnologia e Inovação

GOVERNO DO ESTADO RIO DE JANEIRO

Rio 2030 É HORA DE AGIR

Mate
má
tica

PVC

PRÉ-VESTIBULAR **CECIERJ** | volume **2**

Fundação CECIERJ
Secretaria de Ciência, Tecnologia e Inovação
GOVERNO DO ESTADO RIO DE JANEIRO
Rio 2030 É HORA DE AGIR

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Governador
Cláudio Castro

Secretário de Estado de Ciência, Tecnologia e Inovação
João Carrilho

FUNDAÇÃO CECIERJ

Presidente
Rogerio Tavares Pires

Vice-Presidente de Educação Superior a Distância
Caroline Alves da Costa

Pré-Vestibular Cecierj

Diretor
Luiz Fernando Jardim Bento

Elaboração de Conteúdo
André Luiz Marques, Cleber Neto,
Fabio Henrique Teixeira de Souza.

Biblioteca
Any Bernstein, Simone da Cruz Correa de Souza
Vera Vani Alves de Pinho

cecierj.edu.br/pre-vestibular-social/

Material Didático

Diretor Geral
Ulisses Schnaider Cunha

Diretora de Design Instrucional
Diana Castellani

Diretora de Material Impresso
Bianca Giacomelli

Projeto Gráfico
Cristina Portella e Maria Fernanda de Novaes

Ilustração da Capa
Renan Alves

Design Instrucional
Vittorio Lo Bianco
Paula Barja

Revisão Linguística
Rosane Fernandes Lira de Oliveira

Diagramação
Camille Moraes

Tratamento de Imagens e Ilustrações
Fernando Romeiro e Vinicius Mitchell

Produção Gráfica
Fabio Rapello

FICHA CATALOGRÁFICA

P922

Pré-Vestibular CECIERJ I. Matemática. Volume 2 / André Luiz Marques, Cleber Neto, Fabio Henrique Teixeira de Souza. – Rio de Janeiro: Fundação Cecierj, 2022.
Rio de Janeiro: Fundação Cecierj, 2022.
xx p.; 21 x 28 cm.

ISBN: 978-85-458-0622-2

1. Pré-Vestibular Cecierj. 2. Matemática. 3. Progressões geométricas. 4. Logaritmo. 5. Trigonometria. 6. Geometria espacial. I. Marques, André Luiz. Neto, Cleber.II. Souza, Fabio Henrique Teixeira de. Título.

CDD: 510

Referências bibliográficas e catalogação na fonte de acordo com as normas da ABNT.
Texto revisado segundo o Novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa.

Matemática

sumário

Apresentação

Caro estudante,

Bem-vindo ao Pré-Vestibular Cecierj.

Queríamos que soubesse que o material didático que está em suas mãos foi preparado com muito cuidado e carinho. Os assuntos abordados são considerados relevantes para a sua formação e, para obtermos resultados juntos em sua aprendizagem, será indispensável que você faça – ou tente fazer – as tarefas propostas; pois são o meio pelo qual mediaremos o seu aprendizado.

Sabemos que o seu ano será de muito trabalho e que exigirá sacrifícios, por isso, tentamos fazer com que o material dialogue com você, permitindo que você se aproprie dos conteúdos de maneira amigável. Temos a certeza de que todo o esforço será por uma boa causa: a busca pela concretização de um sonho.

Esperamos que você goste de estudar conosco e afirmamos: durante toda a sua trajetória, você não estará sozinho.

Bons estudos!

Será que vai chover amanhã?

01

meta

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das ciências da natureza e humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.

objetivos

Esperamos que, ao final desta unidade, você seja capaz de:

- planejar e executar pesquisa amostral, usando dados coletados ou de diferentes fontes sobre questões relevantes atuais;
- comunicar os resultados dessas pesquisas amostrais por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e de dispersão;
- resolver e elaborar problemas que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão), em diferentes contextos.

Introdução

A estatística é um ramo da matemática que trata da organização, descrição, análise e interpretação de dados experimentais. Nos dias de hoje, praticamente todos os campos do conhecimento se utilizam das teorias probabilísticas para explicar a frequência da ocorrência de eventos, tanto em estudos observacionais quanto em experimentos, para modelar a aleatoriedade e a incerteza de forma a estimar, ou possibilitar a previsão de fenômenos futuros, conforme o caso.

Vejamos a seguinte situação-problema.

Após uma reunião numa escola privada, três professores e sete monitores saem para almoçar num restaurante em que há uma mesa circular com dez lugares. Essas pessoas são:

- professores: Amanda, de biologia, doutora em ciências; Catarina, de língua portuguesa, mestre em educação; e Estevão, de música, sem pós-graduação; com 55, 67 e 40 anos, e com salários mensais de R$ 16 000,00, R$ 12 000,00 e R$ 32 000,00, respectivamente;
- monitores: Bruna, Diego, Fabio, Gabriel, Humberto, Igor e Janaína, com 25, 29, 24, 22, 22, 24 e 22, ganhando mensalmente R$ 800,00, cada um.

Note que há uma miríade de informações apresentadas no parágrafo anterior. Uma forma de melhor dispor essas informações é por meio de uma tabela, como feito a seguir:

Tabela 1.1

PESSOAS	FUNÇÃO	FORMAÇÃO	IDADE	SALÁRIO
Amanda (A)	Professor	Doutor	55	16 000,00
Bruna (B)	Monitora	Estudante	25	800,00
Catarina (C)	Professora	Mestre	67	12 000,00
Diego (D)	Monitor	Estudante	29	800,00
Estevão (E)	Professor	Graduado	40	32 000,00
Fábio (F)	Monitor	Estudante	24	800,00
Gabriel (G)	Monitor	Estudante	22	800,00
Humberto (H)	Monitor	Estudante	22	800,00
Igor (I)	Monitor	Estudante	24	800,00
Janaína (J)	Monitor	Estudante	22	800,00

Se, na situação apresentada, fossem considerados todos os integrantes do corpo docente da escola e todos os seus monitores, teríamos uma *população*. Porém, como foi considerada apenas uma parte dessa população, temos uma *amostra*.

Cada uma das informações apresentadas sobre as pessoas – função, formação, idade e salário – recebe o nome de *variável*. As variáveis são classificadas em *quantitativas* ou em *qualitativas*, conforme seus valores sejam exprimíveis por valores numéricos ou qualidades referentes ao objeto de estudo. Assim:

- a função e a formação são variáveis qualitativas;
- a idade e o salário são variáveis quantitativas.

Diante de um conjunto de dados ou de informações quantitativas, pode ser muito útil encontrar um número que represente seus elementos, preservando a sua característica mais marcante. No caso da tabela anterior, consideremos a variável idade.

Tabela 1.2

PESSOAS	IDADE
Amanda (A)	55
Bruna (B)	25
Catarina (C)	67
Diego (D)	29
Estevão (E)	40
Fábio (F)	24
Gabriel (G)	22
Humberto (H)	22
Igor (I)	24
Janaína (J)	22

Uma das formas de se obter um número que expresse a "idade" do grupo é considerar que todas as pessoas tenham a mesma idade . Assim, com vistas a preservar a característica da lista acima, composta por 10 pessoas, temos:

$$10 \cdot x = 55 + 25 + 67 + 29 + 40 + 24 + 22 + 22 + 24 + 22$$

Donde vem que:

$$x = \frac{55 + 25 + 67 + 29 + 40 + 24 + 22 + 22 + 24 + 22}{10} \Rightarrow x = 33\,anos$$

Esse número, obtido somando-se as idades de cada pessoa da lista e dividindo-se a soma pela quantidade dessas pessoas, recebe o nome de *média aritmética* das idades.

A média aritmética (y) dos salários é:

$$y = \frac{16000 + 12000 + 32000 + 800 \times 7}{10} \Rightarrow y = R\$6560,00$$

Outra maneira de se obter um número que represente uma lista de dados, ou de informações é tomar para tal aquela que é mais frequente, ou seja, que aparece mais vezes na listagem. No caso das idades, esse número é 22 anos; no caso dos salários, é R$ 800,00.

Esse número, que é o que aparece mais vezes na listagem, recebe o nome de *moda*. Faz todo o sentido. Afinal, quando se vê algo com muita frequência, diz-se que "está na moda". O termo *frequência* também é importante em estatística.

Finalmente, uma terceira forma de se obter um número que represente a lista de dados, ou de informações é dispô-los numa ordem (crescente ou decrescente) e, em seguida, determinar aquele que a divide ao meio, ou seja, o número em relação ao qual a quantidade de informações menores do que ele é igual à quantidade de informações maiores do que ele.

22	22	22	24	24	25	29	40	55	67

$$\frac{24 + 25}{2} = 24,5\, anos$$

Esse número é a *mediana* da lista.

No caso dos salários, a mediana é obtida da seguinte forma:

800	800	800	800	800	800	800	12000	16000	32000

$$\frac{800 + 800}{2} = R\$800,00$$

A média, a moda e a mediana são chamadas de *medidas de tendência central*.

lá na plataforma

Na Unidade 1 de nosso ambiente virtual, no tema 1, acesse o vídeo, que aborda o que estudamos até aqui.

Distribuição de frequências

Voltando à situação descrita no início desta unidade, construamos, agora, uma tabela que apresente apenas as idades e o número de vezes em que cada uma delas aparece.

Tabela 1.3

IDADE (anos)	Nº DE PESSOAS
22	3
24	2
25	1
29	1
40	1
55	1
67	1
TOTAL	10

A coluna da direita da tabela acima contém o número de vezes que cada idade é observada. Esse número é denominado *frequência absoluta* ou simplesmente *frequência*. É, geralmente, indicado por f_a. A tabela na qual são apresentadas as frequências de uma distribuição é chamada de *tabela de frequências*.

Quando calculamos a razão entre a frequência de cada valor observado e o número total de elementos da amostra, encontramos a frequência relativa de cada valor; é geralmente representado por f_r. Assim, no exemplo anterior, acrescentemos à tabela das frequências uma coluna contendo as frequências relativas de cada idade observada:

Tabela 1.4

IDADE (anos)	Nº DE PESSOAS	f_r
22	3	3/10 = 30%
24	2	2/10 = 20%
25	1	1/10 = 10%
29	1	1/10 = 10%
40	1	1/10 = 10%
55	1	1/10 = 10%
67	1	1/10 = 10%
TOTAL	10	1 = 100%

Medidas de tendência central

Média

Chama-se *média* de uma lista de números (por comodidade, positivos) o valor que pode substituir todos os elementos da lista sem alterar a característica dessa lista. Se a característica da referida lista for a *soma de seus elementos*, então a média desses elementos será denominada *média aritmética*. Em símbolos, representando cada elemento da lista por $x_1, x_2, ..., x_n$ (n um número natural que indica a quantidade de elementos da lista) e, por $\bar{x}$ a média aritmética, teremos:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Observação:

A *média ponderada* da lista de números $x_1, x_2, ..., x_n$, com pesos (frequência de cada x_i na lista) respectivamente iguais a $p_1, p_2, ..., p_n$, é obtida fazendo-se:

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \cdots + x_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$$

Propriedades e observações sobre a média:

1ª) depende de todos os dados coletados, sendo, portanto, afetada por valores extremos;

2ª) é única em um conjunto de dados e nem sempre tem existência real, ou seja, nem sempre é igual a um determinado valor observado. É muito importante perceber que a média não necessariamente é um dado da série de valores observados;

3ª) por depender de todos os valores observados, qualquer modificação nos dados fará com que a média fique alterada.

Moda

Numa distribuição, o valor que aparece com maior frequência recebe o nome de *moda*. Quando todos os valores observados apresentarem a mesma frequência, não haverá moda na distribuição considerada. Por outro lado, se em um conjunto de valores observados houver duas ou mais modas, a distribuição será multimodal.

O uso da moda é mais indicado quando se deseja obter, rapidamente, uma medida de tendência central. Outro aspecto que favorece a utilização da moda é que seu valor não é afetado pelos valores extremos do conjunto de dados analisado.

Mediana

O valor que divide uma lista ordenada (crescentemente ou decrescentemente) de valores em dois grupos com a mesma quantidade de elementos observados é denominado *mediana* da distribuição.

O emprego da mediana se dá, em geral, quando há valores extremos que afetam muito a média.

lá na plataforma

Na Unidade 1 de nosso ambiente virtual, no tema 1, acesse o vídeo, que aborda o que estudamos até aqui.

Medidas de dispersão

Algumas das brincadeiras feitas com a estatística se pautam no conceito de média. Uma dessas brincadeiras diz que a estatística é a ciência na qual, se uma entre duas pessoas comer um frango inteiro, então cada uma delas comeu, em média, meio frango. De fato, a média (algo de conhecimento meio comum) entre 0 e 1 é 0,5, mas a interpretação feita deixa de lado um conceito muito importante por meio do qual veremos que nem sempre a média é o melhor número para representar uma distribuição.

Isso ocorre, pois, conquanto a média seja um número que preserva a característica da lista a que ela se refere, não nos é possível, a partir dela, entender o "comportamento" da lista. Vejamos, no caso do frango: se numa situação similar, uma das pessoas comesse 2/5 do frango e a outra comesse os 3/5 restantes, ambas comeriam em média meio frango. Então, as listas [0; 1] e [2/5; 3/5] possuem a mesma média, porém, a segunda apresenta-se disposta mais uniformemente do que a primeira.

Exploremos um pouco mais:

- na primeira lista: o valor 0 está 0,5 ponto distante do valor da média (para baixo); o valor 1 está 0,5 ponto distante do valor da média (para cima);
- na segunda lista: o valor 2/5 = 0,4 está 0,1 ponto distante do valor da média (para baixo); o valor 3/5 = 0,6 está 0,1 ponto distante do valor da média (para cima).

Quer dizer, na segunda lista, os valores estão menos distantes do valor da média. Destarte, na segunda, a média é uma expressão mais real do que o que ocorre na realidade. Portanto, para se ter a dimensão do quanto uma lista é ou não homogênea, além da média, é preciso que conheçamos o quão distante dela está cada valor que integra a referida lista. Essa noção de distância (ou desvio) nos conduzirá às chamadas medidas de dispersão que são os números que descrevem o comportamento de uma lista de valores em torno das medidas de tendência central. Dito de outra forma, as medidas de dispersão indicam se os dados estão, ou não, próximos uns dos outros.

Dentre as medidas de dispersão, aquela que possui maior aplicabilidade é o desvio padrão. *Desvio* nos leva à idéia de afastamento, e *padrão* relaciona-se com média, de modo que podemos intuir que o desvio padrão deve medir o afastamento médio de cada valor da variável em estudo em relação à média.

No caso do exemplo das idades, temos o que se segue.

Tabela 1.5

IDADE (anos)	Nº DE PESSOAS
22	3
24	2
25	1
29	1
40	1
55	1
67	1
TOTAL	10

- Média aritmética: 33 anos

Tabela 1.6

IDADE (anos)	Nº DE PESSOAS	DESVIOS EM RELAÇÃO À MÉDIA
22	3	$22 - 33 = -11$
24	2	$24 - 33 = -9$
25	1	$25 - 33 = -8$
29	1	$29 - 33 = -4$
40	1	$40 - 33 = 7$
55	1	$55 - 33 = 22$
67	1	$67 - 33 = 34$
TOTAL	10	0

O desvio padrão é a raiz quadrada da média ponderada dos quadrados dos desvios. No exemplo em estudo:

Tabela 1.7

IDADE (anos)	Nº DE PESSOAS	DESVIOS	QUADRADOS DOS DESVIOS
22	3	22 – 33 = – 11	121
24	2	24 – 33 = – 9	81
25	1	25 – 33 = – 8	64
29	1	29 – 33 = – 4	16
40	1	40 – 33 = 7	49
55	1	55 – 33 = 22	484
67	1	67 – 33 = 34	1 156
TOTAL	10	0	-----

- Média ponderada dos quadrados dos desvios (chamado de *variância*):

$$DP = \sqrt{\frac{3\times 121 + 2\times 81 + 1\times 64 + 1\times 16 + 1\times 49 + 1\times 484 + 1\times 1156}{10}} = \sqrt{229{,}4}$$

$$DP \approx 15 \text{ anos}$$

Grosso modo, o desvio-padrão serve para indicar se a variação está dentro do padrão, ou não. Esse padrão é determinado por meio dos intervalos de confiança. Vamos construir um desses intervalos.

- Para calcular o limite superior do intervalo, devemos fazer:

LIMITE SUPERIOR = MÉDIA + DP = 33 + 15 = 48.

- Para calcular o limite inferior do intervalo, devemos fazer:

LIMITE INFERIOR = MÉDIA – DP = 33 – 15 = 18.

Assim, no exemplo em questão: 18 e 48 são as extremidades do intervalo de confiança, cujo comprimento (amplitude) é 30.

22	22	22	24	24	25	29	40	55	67

18 48

Isso mostra que, em relação à média (33 anos), as idades apresentam-se espalhadas, ou seja, a distribuição apresenta um alto grau de dispersão.

No caso da brincadeira do frango, temos:

$$DP = \sqrt{\frac{(0-0,5)^2 + (1-0,5)^2}{2}} = \sqrt{0,25} = 0,5$$

- LIMITE SUPERIOR = 0,5 + 0,5 = 1.
- LIMITE INFERIOR = 0,5 – 0,5 = 0.

Ambos os valores observados (0 e 1) são as extremidades do referido intervalo considerado, que tem amplitude 1. Logo, a distribuição analisada apresenta alto grau de dispersão.

Para aquela situação (ainda do frango) em que uma das pessoas comeu 2/5 = 0,4 e, a outra, comeu 3/5 = 0,6 do frango, temos:

$$DP = \sqrt{\frac{(0,4-0,5)^2 + (0,6-0,5)^2}{2}} = \sqrt{0,01} = 0,1$$

- LIMITE SUPERIOR = 0,5 + 0,1 = 0,6.
- LIMITE INFERIOR = 0,5 – 0,1 = 0,4.

Ambos os valores observados (0,4 e 0,6) são as extremidades do referido intervalo que tem amplitude 0,2, apresentando, pois, baixo grau de dispersão. A distribuição dos frangos, aqui analisada, é mais homogênea do que a anterior.

Porém, convém observar que o desvio padrão, como valor absoluto, não nos diz muita coisa, pois um desvio de 5 com média 500 é um desvio pequeno, mas um desvio de 5 com média 10 é um desvio grande. Ou seja, o valor absoluto do desvio padrão, no caso, 5, não nos diz nada.

Resumindo, o desvio padrão é um parâmetro que mede a dispersão de um conjunto de elementos, ou seja, o seu espalhamento em torno da média. Suponha que dois grupos de 4 alunos sejam submetidos a um teste. No primeiro grupo, as notas foram 6, 7, 7 e 8. Assim, a média de desempenho nesse grupo é 7,5. As notas do segundo grupo foram 10, 8, 7 e 3. Note que a média do segundo grupo *também* é 7,5. É razoável dizer que esses grupos têm desempenhos parecidos? Se olharmos *apenas* para a média, diremos que sim. Entretanto, se observarmos um a um os desempenhos, perceberemos que o 1º grupo é mais homogêneo, pois o maior afastamento da média é de 1 ponto e meio. Já no 2º grupo, percebe-se que há desvios de até 4 pontos e meio. Logo, o desvio padrão é um indicador que nos permite diferenciar uma média da outra. No exemplo, o desvio padrão do 2º grupo é bem maior do que o desvio padrão do 1º grupo. Em concursos, o que inclui vestibulares, o desvio padrão é utilizado para definir a classificação. Caso dois candidatos ao mesmo curso tirem 8 em provas diferentes, o resultado vai depender do desvio padrão de cada exame. Digamos que a média das notas nas duas provas tenha sido 6. Aquele que obteve 8 na prova cujo desvio padrão foi menor (Situação I) será mais considerado, porque significa que ele conseguiu um 8 em um exame em que quase todo mundo ficou próximo a 6. Já o outro conquistou um 8 em uma prova na qual muitos outros também tiraram notas altas (Situação II).

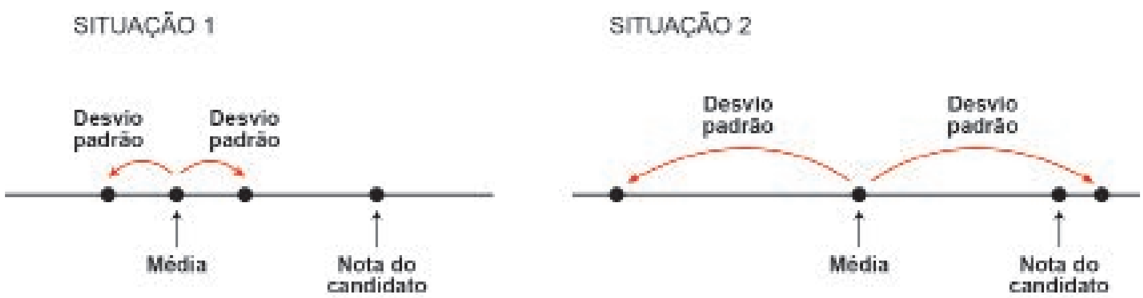


Figura 1.1: O desvio padrão como ferramenta de seleção em concursos.

Uma característica importante da distribuição normal (aquela em que os eventos aleatórios apresentam a tendência de se concentrarem próximos a uma posição que representa uma média matemática deles, implicando, assim, que a quantidade de eventos diminui constante e gradativamente, à medida que nos afastamos da média) é que, quanto maior a amostragem, mais uniformemente as ocorrências se distribuem, à medida que se afastam da média central. A medida desta uniformidade é o "desvio padrão", um valor que quantifica a dispersão dos eventos sob distribuição normal, ou seja, a média das diferenças entre o valor de cada evento e a média central.

 # lá na plataforma

Na Unidade 1 de nosso ambiente virtual, no tema 1, acesse o vídeo, que aborda o que estudamos até aqui.

Estatística nas provas de vestibulares e Enem

Estatística é um conteúdo que, especialmente no Enem, é bastante explorado. Vejamos alguns exemplos.

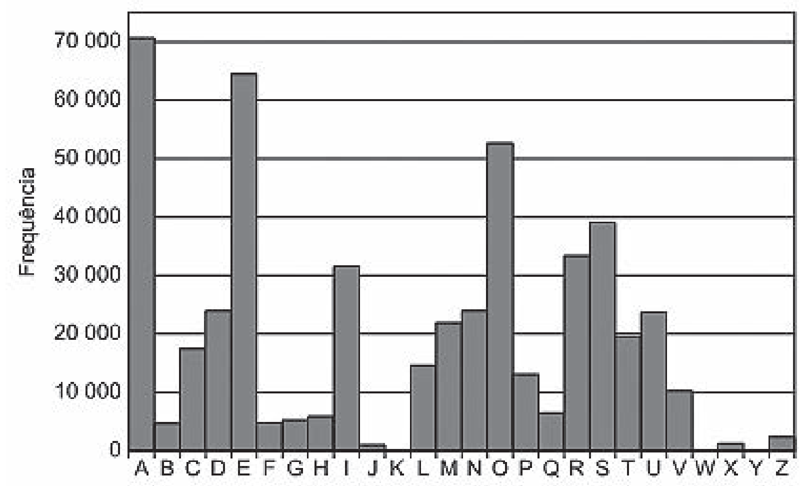
1. (Enem, 2021) A Cifra de César é um exemplo de um método de codificação de mensagens usado por Júlio César para se comunicar com seus generais.

No método, cada letra era trocada por uma letra que aparecia no alfabeto, de acordo com um número fixo de casas adiante (ou atrás), de forma cíclica. A seguir, temos um exemplo em que cada letra é substituída pela que vem três posições à frente.

Original	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Codificado	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

Para quebrar um código como esse, a análise de frequências das letras de um texto é uma ferramenta importante.

Uma análise do texto do romance *O guarani*, de José de Alencar, que é composto por 491.631 letras, gerou o seguinte gráfico de frequências:



Disponível em: www.dominiopublico.gov.br. Acesso em: 7 fev. 2015.

Após codificar esse texto com a regra do exemplo fornecido, faz-se nova análise de frequência no texto codificado. As quatro letras mais frequentes, em ordem decrescente de frequência, do texto codificado são:

a) A, E, O e S
b) D, E, F e G
c) D, H, R e V
d) R, L, B e X
e) X, B, L e P

Lá na plataforma

Acesse a plataforma e assista a um vídeo com a resolução comentada da Questão 1.

2. (Enem, 2021) O quadro apresenta o número de terremotos de magnitude maior ou igual a 7, na escala Richter, ocorridos em nosso planeta nos anos de 2000 a 2011.

Ano	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Terremotos	15	16	13	15	16	11	11	18	12	17	24	20

Disponível em: https://earthquake.usgs.gov/earthquakes/browse/m7-world.php. Acesso em: 13 ago. 2012 (adaptado).

Um pesquisador acredita que a mediana representa bem o número anual típico de terremotos em um período. Segundo esse pesquisador, o número anual típico de terremotos de magnitude maior ou igual a 7 é:

a) 11
b) 15
c) 15,5
d) 15,7
e) 17,5

3. (Enem, 2019) Os alunos de uma turma escolar foram divididos em dois grupos. Um grupo jogaria basquete, enquanto o outro jogaria futebol. Sabe-se que o grupo de basquete é formado pelos alunos mais altos da classe e tem uma pessoa a mais do que o grupo de futebol. A tabela seguinte apresenta informações sobre as alturas dos alunos da turma.

Média	Mediana	Moda
1,65	1,67	1,70

Os alunos P, J, F e M medem, respectivamente, 1,65 m, 1,66 m, 1,67 m e 1,68 m, e as suas alturas não são iguais a de nenhum outro colega da sala.

Segundo essas informações, argumenta-se que os alunos P, J, F e M jogaram, respectivamente:

a) basquete, basquete, basquete, basquete
b) futebol, basquete, basquete, basquete
c) futebol, futebol, basquete, basquete
d) futebol, futebol, futebol, basquete.
e) futebol, futebol, futebol, futebol

4. (Enem, 2016) Ao iniciar suas atividades, um ascensorista registra tanto o número de pessoas que entram, quanto o número de pessoas que saem do elevador, em cada um dos andares do edifício onde ele trabalha. O quadro apresenta os registros do ascensorista durante a primeira subida do térreo, de onde partem ele e mais três pessoas, ao quinto andar do edifício.

Número de pessoas	Térreo	1º andar	2º andar	3º andar	4º andar	5º andar
que entram no elevador	4	4	1	2	2	2
que saem do elevador	0	3	1	2	0	6

Com base no quadro, qual é a moda do número de pessoas no elevador durante a subida do térreo ao quinto andar?

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

5. (Enem, 2016) O procedimento de perda rápida de "peso" é comum entre os atletas dos esportes de combate. Para participar de um torneio, quatro atletas da categoria até $66\ \text{kg}$, Peso-Pena, foram submetidos a dietas balanceadas e atividades físicas. Realizaram três "pesagens" antes do início do torneio. Pelo regulamento do torneio, a primeira luta deverá ocorrer entre o atleta mais regular e o menos regular quanto aos "pesos". As informações com base nas pesagens dos atletas estão no quadro.

Atleta	1ª pesagem (kg)	2ª pesagem (kg)	3ª pesagem (kg)	Média	Mediana	Desvio-padrão
I	78	72	66	72	72	4,90
II	83	65	65	71	65	8,49
III	75	70	65	70	70	4,08
IV	80	77	62	73	77	7,87

Após as três "pesagens", os organizadores do torneio informaram aos atletas quais deles se enfrentariam na primeira luta.

A primeira luta foi entre os atletas:

a) I e III
b) I e IV
c) II e III
d) II e IV
e) III e IV

Resumo

- A estatística é um ramo da matemática que trata da organização, descrição, análise e interpretação de dados experimentais.

- A média aritmética (de uma lista de números x_1, x_2, ..., x_n (n um número natural que indica a quantidade de elementos da lista) é dada por:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

- Numa distribuição, o valor que aparece com maior frequência recebe o nome de *moda*.

- O número de possibilidades de fazer n ações distintas e mutuamente excludentes é a adição da quantidade de modos possíveis que cada uma pode ser feita isoladamente.

- O valor que divide uma lista ordenada (crescentemente ou decrescentemente) de valores em dois grupos com a mesma quantidade de elementos observados é denominado *mediana* da distribuição.

- O desvio padrão é a raiz quadrada da média ponderada dos quadrados dos desvios.

Resposta comentada

1. c
As letras mais frequentes no texto do romance, em ordem decrescente de frequência, são A, E, O e S. De acordo com a tabela, no texto codificado, tais letras correspondem, respectivamente, a D, H, R e V.

2. c
Escrevendo o rol, temos
11, 11, 12, 13, 15, 15, 16, 16, 17, 18, 20, 24
Como o número de observações é par, segue-se que a mediana é a média aritmética dos termos centrais, ou seja, $\frac{15+16}{2} = 15{,}5$.

3. c
Se o grupo de basquete possui um aluno a mais do que o grupo de futebol, então o número total de alunos é ímpar. Em consequência, sabendo que a mediana divide uma série de dados em duas outras séries com o mesmo número de observações, podemos concluir que o aluno F joga basquete, uma vez que sua altura é a mediana.
Portanto, P joga futebol, J joga futebol e M joga basquete.

4. d
Considerando as entradas e saídas de pessoas do elevador, tem-se os seguintes resultados: 4, 5, 5, 5, 7 e 3. Portanto, a moda é 5.

5: c
O menos regular é o que apresenta maior desvio-padrão e o mais regular é o que apresenta menor desvio-padrão. Portanto, a luta será entre os atletas II e III.

Quer que eu desenhe?

02

metas

Ler e interpretar gráficos utilizados nas resoluções de problemas em variados contextos, envolvendo diferentes tipos de representação, como gráficos de segmentos (ou linhas), barras, setores, ou cartográficos.

objetivos

Esperamos que, ao final desta unidade, você seja capaz de:

- interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas;
- investigar relações entre grandezas para representá-las no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização.

Introdução

Gráficos são ferramentas de apresentação de dados. Seu intuito, quase sempre, é proporcionar ao leitor uma exibição simples, tornando rápida a assimilação desses dados, a fim de que seja possível perceber tendências e/ou relações. Os gráficos precisam ter simplicidade e evidenciar as informações, entretanto, nem sempre é tão simples ler informações ou perceber tendências e relações em gráficos, seja pelas dificuldades inerentes aos tipos de gráficos, seja pelo real desejo de quem elabora o gráfico. Aqui, vamos focar nos tipos de gráficos. Os mais populares são: os *gráficos de segmentos* (também chamados de *gráficos de linhas*); os *gráficos de barras* ou *de colunas*; os *gráficos de setores*; e os *gráficos cartográficos* (representação gráfica que contém figuras).

Nesta unidade, faremos análises de gráficos dos três primeiros tipos, extraindo deles várias informações. Daremos preferência aos *gráficos de linhas*, por se relacionarem bastante com o que abordamos em unidades do módulo anterior e com o que será apresentado nos módulos seguintes.

// atenção

Como destacamos acima, nem sempre as informações presentes em gráficos são apresentadas de forma simples, evidente e correta. Muitas vezes, empresas da área de comunicação, instituições privadas, gestores públicos e candidatos a cargos eletivos lançam mão de artifícios que distorcem, literalmente, os gráficos, para dar maior destaque às informações que desejam divulgar.

Então, cuidado! Fique atento para não ser enganado. Para isso, quanto mais você souber sobre gráficos melhor será sua capacidade de analisá-los e até questioná-los.

Apresentaremos os tipos de gráficos mais detalhadamente nas seções a seguir, trazendo exemplos e comentários importantes.

Tipos de Gráficos

Gráficos de segmentos (ou de linhas)

Geralmente, é usado para representar como uma grandeza se relaciona com o tempo.

Abaixo está apresentado um gráfico com as quantidades mensais de carros alugados em uma locadora de veículos, nos meses de janeiro a junho.

Situação I

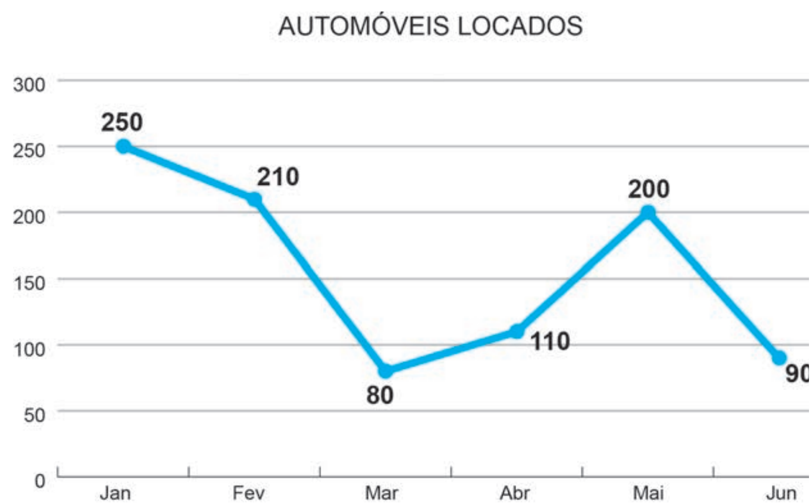


Figura 2.1: Automóveis locados por mês.

Neste gráfico, é possível perceber que janeiro foi um mês de forte movimento na locadora (250 locações), mas a quantidade de locações foi caindo rapidamente até março, mês com menos automóveis locados (80 locações). A partir daí, houve uma recuperação quase total nos dois meses seguintes, atingindo a marca das 200 locações, para, em seguida, ocorrer nova queda. Essas informações podem ser representadas na tabela a seguir:

Tabela 2.1: Automóveis locados por mês

MÊS	AUTOMÓVEIS LOCADOS
Jan	250
Fev	210
Mar	80
Abr	110
Mai	200
Jun	90

Você sabe qual é a diferença entre um quadro e uma tabela, no contexto da apresentação de informações em linhas e colunas?

Tabela

Representação em linha e colunas que apresenta dados quantitativos, ou seja, a informação central dela é o dado numérico. Com isso, todos os demais itens presentes em uma tabela são complementares e têm a função de explicá-la.

Quadro

Representação quadrilátera que apresenta conteúdo não numérico, ou seja, a informação central é qualitativa, apresentando características, resumos, ideias. Eventualmente, podem figurar dados numéricos em um quadro, porém estes serão complementares ou representarão dados qualitativos.

Além das definições acima, cumpre informar que a Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) também diferencia tabelas e quadros quanto à formatação dos mesmos. A tabela não possui bordas laterais e é dividida pelo mínimo possível de linhas horizontais. Já o quadro possui bordas laterais fechadas e não tem limite de linhas horizontais.

Nas próximas seções, você verá muitas tabelas. Elas ora serão o resumo das informações que constam em determinado gráfico, ora servirão de base para a construção de um gráfico.

Gráficos de barras ou colunas

Ambos seguem a mesma ideia, sendo chamados de *gráfico de colunas*, quando verticais, ou *de barras*, quando horizontais. São, geralmente, usados para apresentar séries categóricas ou cronológicas (ou seja, de tempo).

Abaixo, temos um *gráfico de colunas* que apresenta o consumo de energia elétrica de uma residência no decorrer do ano. Nele, pode-se ver que os maiores consumos ocorreram nos meses de janeiro, fevereiro, junho, julho e dezembro, meses em que as pessoas estão mais em casa, por serem períodos de férias, festas ou carnaval.

Situação II

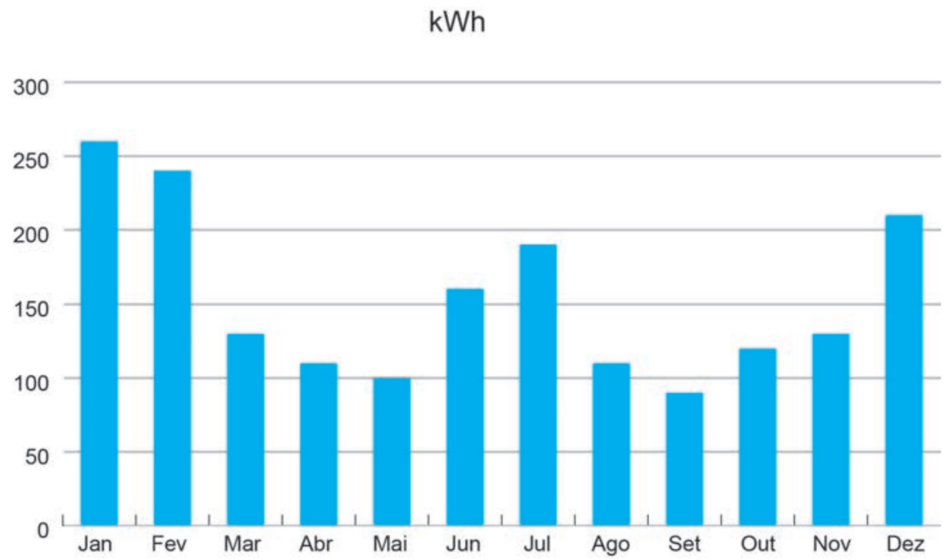


Figura 2.2: Gráfico de colunas – kWh consumidos por mês.

A seguir, temos as mesmas informações na horizontal, como um *gráfico de barras*.

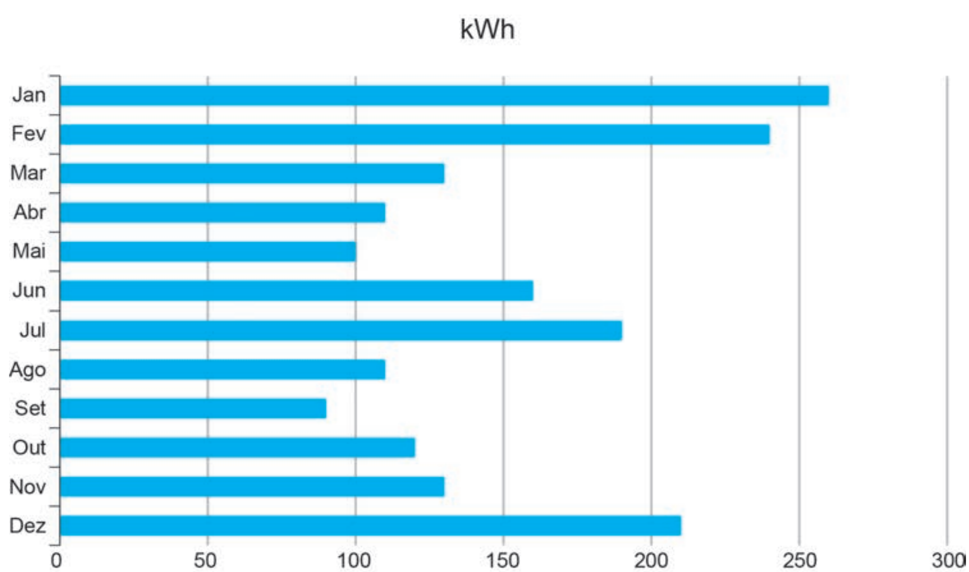


Figura 2.3: Gráfico de barras – KWh consumidos por mês.

Repare que, em ambos os casos, não é possível precisar o gasto de kWh em cada mês. Porém, é possível dizer o valor aproximado de consumo e comparar de forma a conseguir definir os meses com os maiores e menores consumos. A tabela a seguir representa os valores de consumo de cada mês que geraram os gráficos acima.

Tabela 2.2: KWh consumidos por mês

MÊS	kWh
Jan	260
Fev	240
Mar	130
Abr	110
Mai	100
Jun	160
Jul	190
Ago	110
Set	90
Out	120
Nov	130
Dez	210

A seguir, são apresentadas, inicialmente, em uma tabela, e, posteriormente, em um gráfico de colunas, as informações relativas às quantidades de sócios de um clube nos últimos quatro anos.

Situação III

Tabela 2.3: Quantidade de sócios em cada ano

CLUBE A	
ANO	SÓCIOS
2017	270
2018	310
2019	370
2020	490

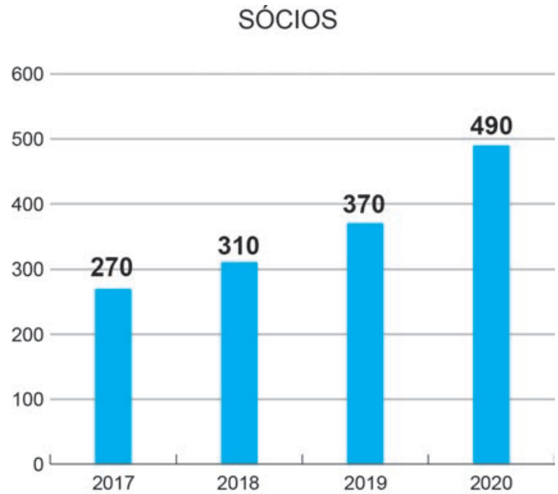


Figura 2.4: Quantidade de sócios em cada ano.

O clube A parece estar fazendo sucesso, pois não só o número de associados vem aumentando, como esses aumentos também vêm sendo cada vez maiores. Vamos observar:

- de 2017 para 2018, houve aumento de 40 sócios;
- de 2018 para 2019, houve aumento de 60 sócios;
- e, de 2019 para 2020, houve aumento de 120 sócios.

Portanto, a sequência de acréscimos está aumentando, e esse comportamento cria uma expectativa de que o aumento de 2020 para 2021 seja maior do que 120 sócios.

Pergunta 1:

É possível garantir que o número de sócios do Clube A, em 2021, será maior do que 490? Justifique sua resposta.

Pergunta 2:

Se levarmos essa situação para a vida real, na qual tivemos uma pandemia ocorrendo nos anos de 2020 e 2021, o que é mais provável que ocorra com o número de sócios do Clube A em 2021?

Gráficos de setores

Têm por objetivo expressar as informações em um círculo fracionado. É um gráfico muito usado na demonstração de dados percentuais.

O gráfico a seguir mostra a distribuição das ações de um grupo de investidores por setores da economia.

Situação IV:

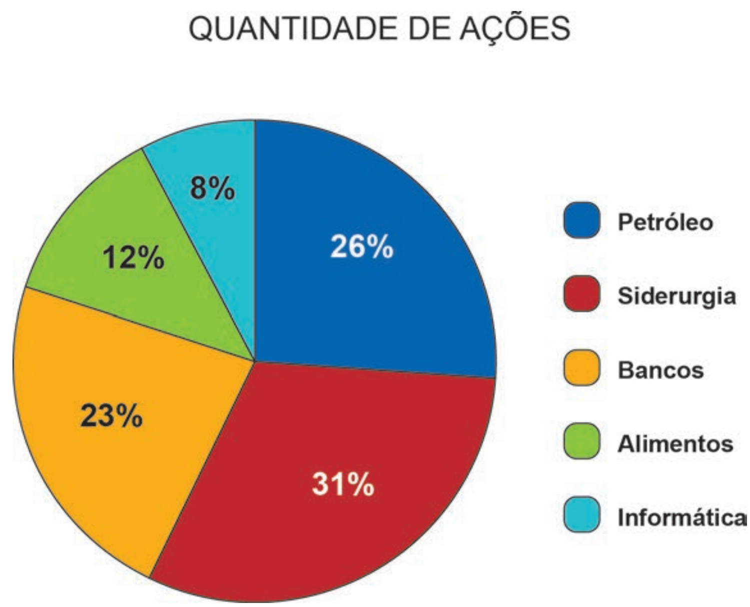


Figura 2.5: Gráfico de setores – Distribuição das ações por setor da economia.

No gráfico, é possível ver que siderurgia e petróleo são os setores preferidos pelos componentes desse grupo de investidores. Mesmo que os percentuais não estivessem informados, seria possível estimar que cerca de ¼ das ações é destinada ao setor de petróleo, pois o setor correspondente a essa categoria ocupa aproximadamente ¼ do círculo, ou seja, 25%.

Mais uma vez, o gráfico apresentado não deixa evidente os valores referentes às quantidades de ações em cada um dos setores. A seguir, apresentamos a tabela que originou a confecção do gráfico.

Tabela 2.4: Distribuição das ações por setor da economia

EMPRESA	QUANTIDADE DE AÇÕES
Petróleo	230
Siderurgia	280
Bancos	210
Alimentos	110
Informática	70
Total	900

Pergunta 3:

Os percentuais apresentados no gráfico estão de acordo com os dados apresentados na tabela? Justifique sua resposta.

Um exemplo e várias considerações

(CEDERJ, 2010.1 – FÍSICA/Adaptado)

Certa quantidade de uma substância desconhecida, contida em um recipiente de capacidade térmica desprezível, encontra-se inicialmente no estado sólido. Um aquecedor, a partir do instante t = 0, fornece-lhe calor a uma potência constante. Em um determinado instante, o aquecedor é desligado. O gráfico a seguir descreve o comportamento da temperatura (T) dessa quantidade da substância em relação ao tempo (t).

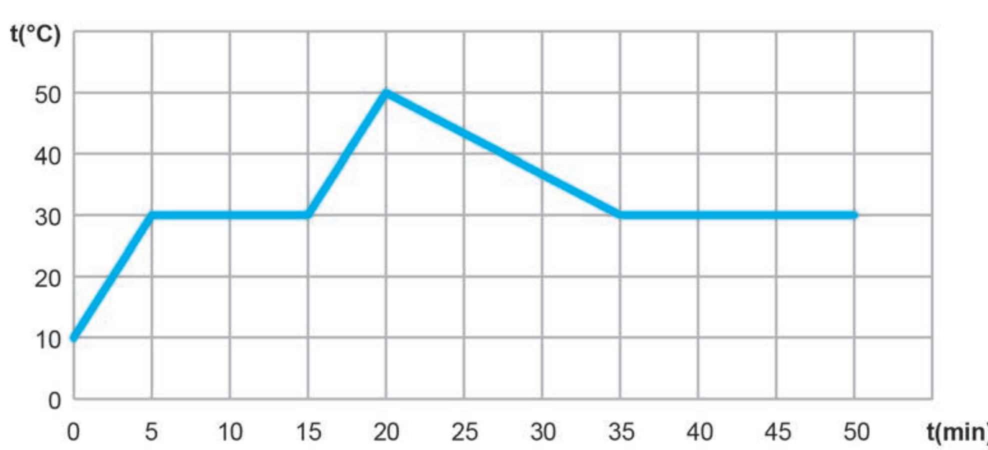


Figura 2.6: Relação entre temperatura e tempo.

1º Grupo de perguntas:

Com base no gráfico, responda aos itens abaixo, a respeito do comportamento da temperatura da substância nos primeiros cinco minutos.

a) Qual é a temperatura inicial da substância?
b) Qual é a temperatura da substância após cinco minutos?
c) Qual é a taxa de variação da temperatura com relação à variação de tempo?
d) Qual é a temperatura da substância quando t = 3min?
e) Qual é a função que, nesse intervalo, associa a temperatura ao tempo?

Solução:

Esse gráfico relaciona duas grandezas: *temperatura (T)* e *tempo (t)*. A temperatura está em graus Celsius (ºC) e será lida no eixo *vertical*. O tempo está em minutos (min) e será lido no eixo *horizontal*. Diz-se, assim, que *o gráfico apresenta a temperatura da substância em função do tempo*.

Observe que o ponto (20,50) pertence ao gráfico. Isso quer dizer que, quando o tempo era igual a 20 minutos, a temperatura da substância era 50ºC. Outro exemplo é o ponto (35,30), que também pertence ao gráfico e indica que, quando o tempo era igual a 35 minutos, a temperatura era 30ºC. Um exemplo contrário é o do ponto (20,40), que não representa nada para a tal substância, pois esse ponto *não pertence ao gráfico*.

A seguir, responderemos às perguntas com base nos primeiros cinco minutos. Portanto, neste momento, só nos interessa o trecho destacado.

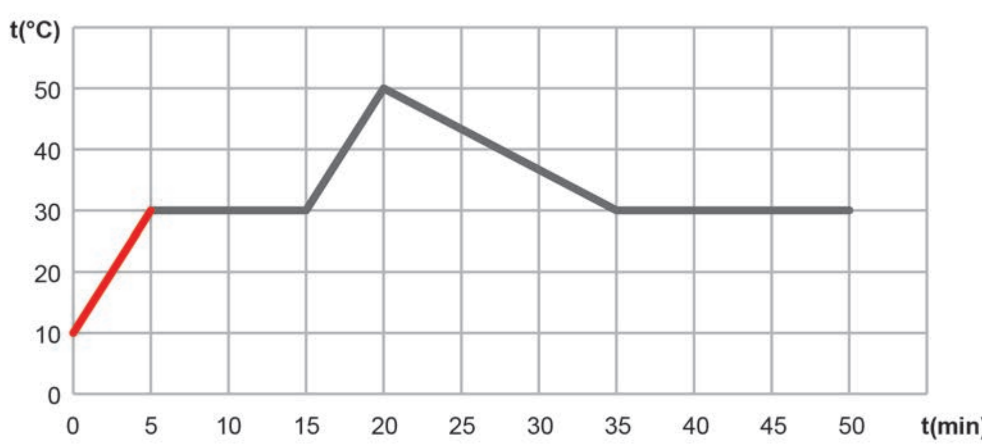


Figura 2.7: Gráfico realçado.

Note que o trecho do gráfico que está destacado é um *segmento de reta* que começa no ponto (0,10) e termina no ponto (5,30). Costumamos dizer, de maneira descuidada, que é uma reta. Entretanto, sabemos que as retas são infinitas, não começam e nem terminam em pontos.

Saber que esse trecho é um segmento de reta é muito importante, pois será, em breve, uma vantagem.

a) Qual é a temperatura inicial da substância?

O termo *inicial* normalmente significa que o tempo vale zero (t = 0). Lembre-se de que o tempo deve ser lido no eixo horizontal e siga as instruções:

- procure, sobre o eixo horizontal, a marca correspondente a zero;
- coloque o lápis ou objeto similar sobre essa marca;
- movimente-o na vertical, para cima, até encontrar o gráfico;
- ao encontrar o gráfico, marque sobre ele um ponto;
- agora movimente o lápis na horizontal, para a esquerda, até encontrar o eixo vertical. Isso acontecerá na marca correspondente a 10. Assim, a temperatura inicial (t = 0) da substância era 10ºC.

b) Qual é a temperatura da substância após cinco minutos?

Mais uma vez, o tempo deve ser lido no eixo horizontal. Siga as instruções:

- procure, sobre o eixo horizontal, a marca correspondente a cinco;
- coloque o lápis ou objeto similar sobre essa marca;
- movimente-o na vertical, para cima, até encontrar o gráfico;
- ao encontrá-lo, marque um ponto sobre ele;
- agora, movimente o lápis na horizontal, para a esquerda, até encontrar o eixo vertical. Isso acontecerá na marca correspondente a 30. Assim, quando t = 5 min, T = 30ºC.

c) Qual é a taxa de variação da temperatura com relação à variação de tempo?

Não devemos nos esquecer de que estamos estudando apenas o segmento destacado no gráfico acima. Note que, no início do segmento, o tempo valia zero e, no final, cinco minutos.

Representaremos essas informações da seguinte forma:

$t_{INICIAL} = 0$

$t_{FINAL} = 5$ minutos

Chamamos de *variação do tempo* a diferença $t_{FINAL} - t_{INICIAL}$. O símbolo utilizado para representar variações é Δ (delta). Assim, a variação de tempo é $\Delta t = t_{FINAL} - t_{INICIAL} = 5 - 0 \rightarrow \Delta t = 5$ min.

No início do segmento, a temperatura valia 10ºC e, no final, 30ºC.

Representaremos essas informações da seguinte forma:

$T_{\text{INICIAL}} = 10^\circ C$

$T_{\text{FINAL}} = 30^\circ C$

Chamamos de *variação da temperatura* à diferença $T_{\text{FINAL}} - T_{\text{INICIAL}}$. Assim, a variação de temperatura é $\Delta T = T_{\text{FINAL}} - T_{\text{INICIAL}} = 30 - 10 \rightarrow \Delta T = 20^\circ C$.

taxa

Valor que corresponde sempre à variação de uma grandeza, em relação à variação de outra grandeza. A taxa é obtida por meio de uma divisão.

Calcular a **taxa** de *variação da temperatura com relação à variação de tempo* é simples. Siga os passos:

1º) variação de temperatura (ΔT) = 20ºC;

2º) variação de tempo (Δt) = 5 min;

3º) taxa da “primeira” com relação à “segunda” = ($\Delta T/\Delta t$)= 20ºC / 5 min = 4ºC/min.

Logo, a taxa de variação da temperatura com relação à variação do tempo é quatro graus Celsius por minuto. Essa taxa nos informa que *a cada minuto, a temperatura AUMENTA quatro graus Celsius.*

d) Qual é a temperatura da substância quando t = 3 min?

Com o auxílio da conclusão acima, vamos montar uma tabela.

Tabela 2.5

TEMPERATURA (T)	TEMPO (t)
10	0
14	1
18	2
22	3

Explicando:

- a temperatura inicial (ou seja, quando o tempo é zero) era 10ºC;
- como a temperatura aumenta 4ºC a cada minuto, quando t = 1, T = 10 + 4 = 14ºC;
- como a temperatura aumenta 4ºC a cada minuto, quando t = 2, T = 10 + 4 + 4 = 18ºC;
- como a temperatura aumenta 4ºC a cada minuto, quando t = 3, T = 10 + 4 + 4 + 4 = 22ºC.

A resposta é 22ºC.

e) Qual é a função que, nesse intervalo, associa a temperatura ao tempo?

Antes de responder ao item (a), foi dito que “saber que esse trecho é um segmento de reta é muito importante, pois será, em breve, uma vantagem”. Pois bem, quando os gráficos são retas ou segmentos de retas, a função procurada é uma função polinomial de 1º grau, ou seja:

$$y = a \cdot x + b$$

Esse tema já foi abordado no módulo 1 e o relembramos aqui:

- a e b são “números fixos”. Chamamos esses “números fixos” de *coeficientes*;
- a é a *taxa de variação* de y com relação à variação de x;
- b é o *valor inicial* da variável y.

No nosso exemplo, x é t e y é T. Assim:

$$T = a \cdot t + b$$

em que:

- T é a temperatura (em ºC) e t é o tempo (em minutos);
- a é a *taxa de variação* de T com relação à variação de t. Esse valor é quatro e já foi calculado no item (c);
- b é o *valor inicial* da variável T. Esse valor é dez e já foi calculado no item (a).

Logo, a função que, no intervalo que vai de t = 0 a t = 5 min, associa a temperatura ao tempo é:

$$T = 4t + 10.$$

2º Grupo de perguntas:

Com base no gráfico, responda aos itens abaixo a respeito do comportamento da substância no intervalo que vai de t = 15 min a t = 20 min.

a) Qual é a taxa de variação da temperatura com relação à variação de tempo?

b) Qual é a temperatura da substância quando t = 17 minutos?

c) Qual é a temperatura da substância quando t = 19 minutos?

d) Qual é a função que, nesse intervalo, associa a temperatura ao tempo?

3º Grupo de perguntas:

Com base no gráfico, responda aos itens abaixo a respeito do comportamento da substância no intervalo que vai de t = 20 min a t = 35 min.

a) Qual é a temperatura da substância quando t = 20 min?

b) Qual é a temperatura da substância quando t = 35 min?

c) Qual é a taxa de variação da temperatura com relação à variação de tempo?

d) Qual é a temperatura da substância quando t = 22 min?

e) Qual é a temperatura da substância quando t = 30 min?

f) Qual é a função que, nesse intervalo, associa a temperatura ao tempo?

4º Grupo de perguntas:

Com base no gráfico, responda aos itens abaixo a respeito do comportamento da substância no intervalo que vai de t = 5 min a t = 15 min.

a) Qual é a temperatura da substância quando t = 5 min?

b) Qual é a temperatura da substância quando t = 15 min?

c) Qual é a taxa de variação da temperatura com relação à variação de tempo?

d) Qual é a temperatura da substância quando t = 10 min?

e) Qual é a função que, nesse intervalo, associa a temperatura ao tempo?

Solução para o 4º grupo de perguntas:

a) Qual é a temperatura da substância quando t = 5 min?

Basta observar o gráfico: $T\,(5) = 30^{o}C$.

b) Qual é a temperatura da substância quando t = 15 min?

Basta observar o gráfico: $T\,(15) = 30^{o}C$.

c) Qual é a taxa de variação da temperatura com relação à variação de tempo?

No início do segmento, o tempo vale 5 min e, no final, 15 min.

$t_{INICIAL}$ = 5 min

t_{FINAL} = 15 min

Variação de tempo: $\Delta t = t_{FINAL} - t_{INICIAL} = 15 - 5 \rightarrow \Delta t = 10$ min

No início do segmento, a temperatura valia 30ºC e no final, 30ºC, também.

$T_{INICIAL} = 30$ºC

$T_{FINAL} = 30$ºC

Variação da temperatura: $\Delta T = T_{FINAL} - T_{INICIAL} = 30 - 30 \rightarrow \Delta T = 0$ºC

Taxa de variação = $\Delta T/\Delta t$ = 0ºC/ 10 min = 0ºC/min.

Nesse caso, a taxa de variação é nula. Isso quer dizer que: *a temperatura, nesse trecho, não aumenta e nem diminui. Permanece constante.*

d) Qual é a temperatura da substância quando $t = 10$ min?

Se a temperatura permanece constante (e igual a 30ºC), então a temperatura valerá 30ºC quando o tempo for igual a dez minutos. Assim, $T(10) = 30$ºC.

e) Qual é a função que, nesse intervalo, associa a temperatura ao tempo?

A resposta é, simplesmente $T(t) = 30$.

Portanto, nesse trecho, qualquer que seja o valor de t, a temperatura valerá 30ºC. Dizemos, nesses casos, que *a temperatura independe de t*. Na verdade, para que a temperatura dependa de t de alguma forma, é preciso que a variável t apareça na expressão que está à direita do sinal de igual.

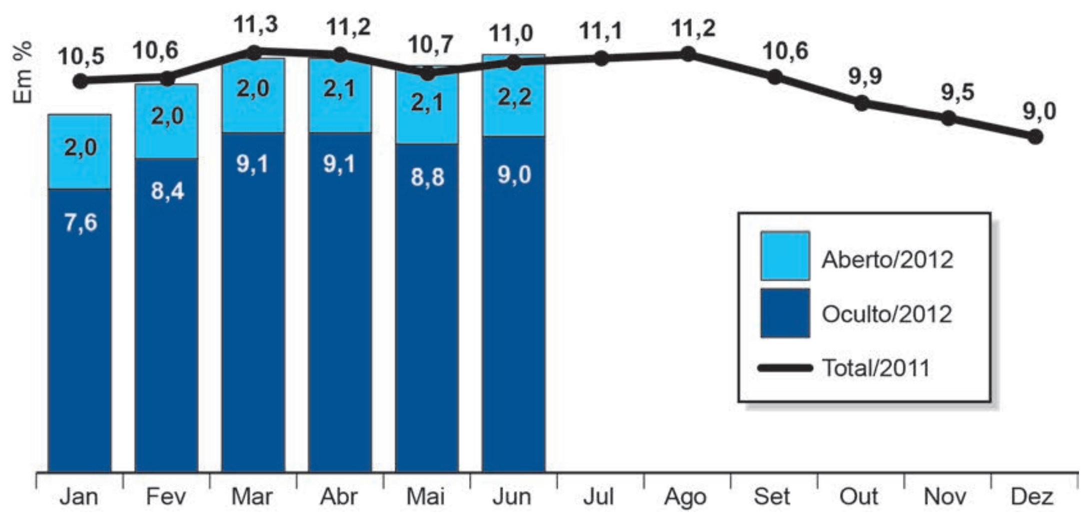
lá na plataforma

Acesse a plataforma e veja as soluções comentadas dos demais grupos de perguntas. Lá, você também pode continuar treinando, fazendo exercícios similares.

Atividades

A interpretação e análise de gráficos é um tema muito comum nas provas de matemática do Enem e nos vestibulares. Assim, apresentamos uma questão com um gráfico que reúne dois dos tipos que abordamos anteriormente. Mas fique tranquilo, pois, junto com a questão, vai uma vídeo-resolução. Em seguida, indicamos uma lista de exercícios complementar.

1. (Enem, 2014) O gráfico apresenta as taxas de desemprego durante o ano de 2011 e o primeiro semestre de 2012 na região metropolitana de São Paulo. A taxa de desemprego total é a soma das taxas de desemprego aberto e oculto.



Fonte: www.dieese.org.br. Acesso em: 1 ago. 2012 (fragmento).

Suponha que a taxa de desemprego oculto do mês de dezembro de 2012 tenha sido a metade da mesma taxa em junho de 2012 e que a taxa de desemprego total em dezembro de 2012 seja igual a essa taxa em dezembro de 2011.

Nesse caso, a taxa de desemprego aberto de dezembro de 2012 teria sido, em termos percentuais, de:

a) 1,1
b) 3,5
c) 4,5
d) 6,8
e) 7,9

lá na plataforma

Acesse a plataforma e assista a um vídeo com a resolução comentada da Questão 1.

Aproveite e faça mais exercícios sobre gráficos, que você encontrará, também, na plataforma.

Resumo

Para resolver problemas que envolvam interpretação de gráfico é importante:

- identificar o tipo de gráfico utilizado;
- identificar as grandezas que se relacionam;
- utilizar corretamente as informações expressas;
- analisar as informações presentes e utilizá-las como recurso para a construção de argumentos.

Referências

ABNT NBR 14724. Disponível em: *http://www.ufrgs.br/cursopgdr/download/NBR14724.pdf.* Acesso em: 19 mar. 2022.

MORGADO, A. C.; SOUZA, F. H. T.; COSTA, C. J.; FIGUEIREDO, L. M.; GIRALDO, V. A.; *Pré-vestibular social:* matemática. v. 1. 5. ed. Revista e Ampliada. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2012.

Quem varia é o expoente!

03

metas

Articular conhecimentos matemáticos, especialmente a função exponencial, ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, implicações da tecnologia no mundo do trabalho, dentre outros; recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da matemática; utilizar a função exponencial para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir uma argumentação consistente.

objetivos

Esperamos que, ao final desta unidade, você seja capaz de:

- elaborar e resolver problemas com funções exponenciais, nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos diversos, como o do crescimento de seres vivos microscópicos, dentre outros;
- analisar a representação da função exponencial em plano cartesiano, para identificar suas características fundamentais (domínio, imagem, crescimento), com, ou sem o apoio de tecnologias digitais.

Introdução

As funções exponenciais possuem uma diversidade de aplicações no cotidiano, estão presentes em diversas ciências, como na capitalização de valores pelo método do juro composto, em expressões responsáveis por explicar os crescimentos populacionais, em situações envolvendo decaimento radioativo, no desenvolvimento de microorganismos em culturas e na expressão das curvas de aprendizagem de seres humanos, além de outras inúmeras aplicações.

De modo geral, as exponenciais possuem a característica de expressar acentuadas variações em períodos curtos.

Vejamos a seguinte situação-problema, que envolve uma piscina cuja capacidade é de $100m^3$ de água. Quando essa piscina está completamente cheia, é colocado em seu interior 1kg de cloro. A água pura (sem cloro) continua a ser colocada na piscina a uma vazão constante, sendo o excesso eliminado por meio de um ladrão. Depois de uma hora, um teste revela que ainda restam 900g de cloro na piscina. Assim, que quantidade de cloro restará nessa piscina:

a) dez horas após sua colocação?
b) após meia hora de aplicação?

Vamos à resolução. Uma atitude bastante comum nesse tipo de situação-problema é pensar como se estivéssemos diante de um modelo que se expresse por meio de uma função afim, de modo que, se após 1h houve a perda de 100g, após 10h a perda será de $10 \times 100 = 1000$g, ou seja, não mais restará cloro na piscina.

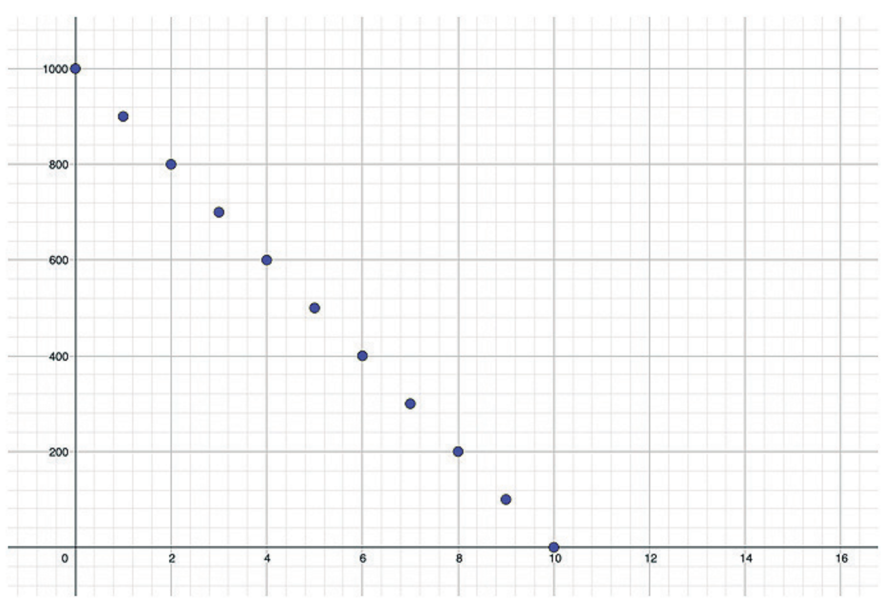


Figura 3.1: Gráfico suposto da quantidade discreta de cloro (em gramas) em função do tempo (em horas).

Porém, essa forma de pensar pressupõe que, em cada hora, haja uma perda de cloro constante de 100g, ou seja, a cada variação unitária na variável tempo, há uma perda constante de 100g (perda absoluta) na quantidade de cloro. Entretanto, não é isso o que ocorre, pois:

1º) a quantidade de cloro eliminada por unidade de tempo *não* é constante (a quantidade diminui com o passar do tempo, ou seja, a perda *absoluta* não é constante); portanto, a situação apresentada não pode ser modelada por meio de uma função afim;

2º) a quantidade de cloro eliminada por unidade de tempo é *proporcional* à sua concentração (o que permanece constante é a perda *relativa*); temos que a quantidade de cloro eliminada por unidade de tempo é 10% da concentração existente no momento da retirada, ou seja, após cada retirada, restam na piscina 90% da quantidade que existia.

Mais explicitamente, a perda relativa de cloro é constante em intervalos de tempos iguais.

Assim, após a primeira hora, haverá 90% de 1000 ($0{,}9 \times 1000$); na segunda hora, 90% de 90% de 1000 ($0{,}9 \times 0{,}9 \times 1000$); na terceira hora, 90% de 90% de 90% de 1000 ($0{,}9 \times 0{,}9 \times 0{,}9 \times 1000$) e assim, sucessivamente, de sorte que, após dez horas, haverá $0{,}9^{10} \times 1000$, que é aproximadamente igual a 349g de cloro.

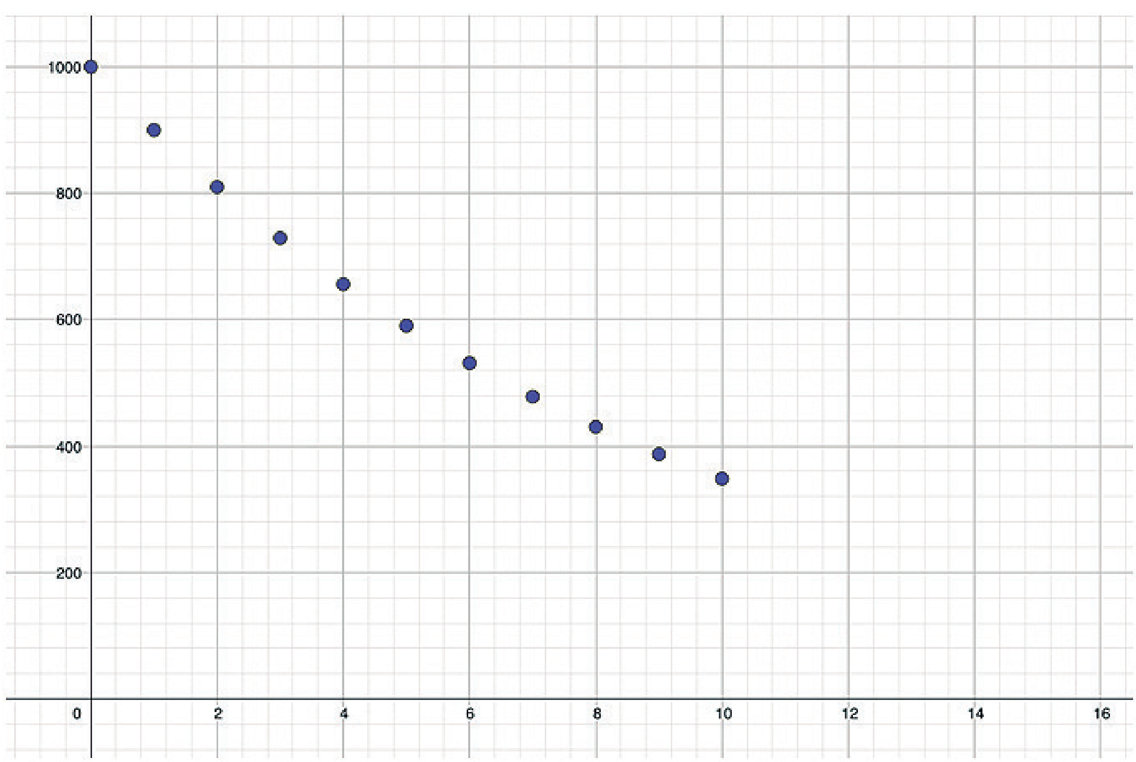


Figura 3.2: gráfico correto da quantidade discreta de cloro (em gramas) em função do tempo (em horas).

progressão geométrica

Sequência de números em que a divisão de cada termo pelo termo que o antecede sempre dá o mesmo resultado. Por exemplo, (2, 6, 18, 54) é uma progressão geométrica porque $\frac{54}{18} = \frac{18}{6} = \frac{6}{2} = 3$

Recebe o nome de **progressão geométrica** a sequência dos valores representativos da quantidade de cloro por unidade de tempo que permanece na piscina após cada retirada (1000; 0,9 × 1000; $0{,}9^2$ ×1000; ... ; $0{,}9^n$ × 1000), em que cada termo, a partir do primeiro, é igual ao anterior multiplicado por 0,9.

Se considerarmos, agora, o intervalo unitário [0; 1], na medida em que a *perda relativa é constante em intervalos de tempos iguais*, temos que, se, na primeira meia hora, for eliminada *a* % da quantidade de cloro, o mesmo se dará na segunda meia hora, ou seja, restará na piscina: (100% – *a*%) × (100% – *a*%) × 1000 = 90% × 1000. Donde vem que:

$$(1 - i)^2 = 0{,}9, \text{ sendo } i = a\% \Rightarrow 1 - i \approx 0{,}949.$$

Concluindo, pois, que haverá 949g de cloro na piscina.

A partir daí pode-se, mediante análise cuidadosa da situação, generalizar o processo, de modo a concluir que, para todo real não-negativo t, tem-se que a quantidade de cloro restante na piscina, após a t-ésima hora, é dada pela expressão 1000 × $0{,}9^t$.

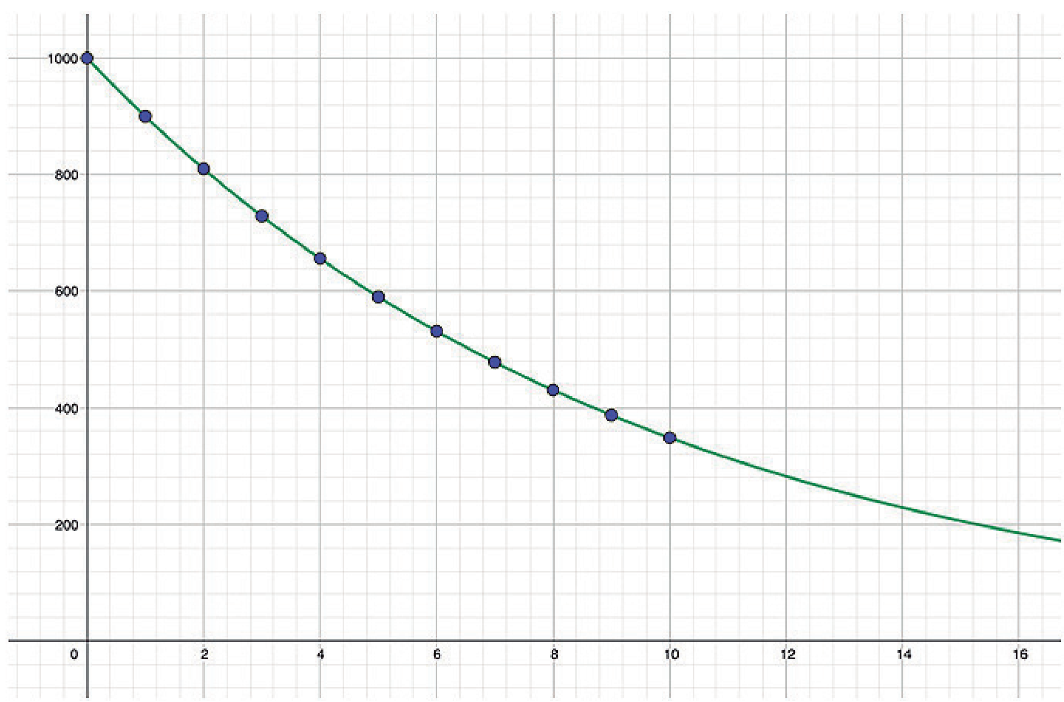


Figura 3.3: gráfico correto da quantidade contínua de cloro (em gramas) em função do tempo (em horas).

A expressão 1000 × $0{,}9^t$, obtida na resolução do problema proposto, com t variando no campo real, recebe o nome de *função do tipo exponencial*, sendo 1000, o *valor inicial* e 0,9, a *taxa de variação*.

Em muitas situações-problema, não temos a indicação do modelo que deve ser utilizado para analisá-las e obter soluções. De modo geral, por simplicidade, somos instados a considerar a função afim como modelo ideal, entretanto, como visto no exemplo analisado acima, nem sempre isso é verdade.

Isso ocorre porque a função afim modela somente situações em que há uma variação de valores constante em valor absoluto, ou seja, sendo h um número real positivo qualquer, quando $f(x + h) – f(x)$ for constante, f será uma função afim e vice-versa.

Por outro lado, para que o modelo seja uma função do tipo exponencial, é necessário e suficiente que a razão de valores seja constante, ou seja, quando $f(x+h)/f(x)$ for constante, f será uma função do tipo exponencial.

OPERAÇÃO	RESULTADO	MODELO
$f(x + h) - f(x)$ *(variação absoluta)*	CONSTANTE (valor que depende apenas de h)	Função afim → $f(x) = ax + b$
$\frac{f(x+h)}{f(x)}$ (variação relativa)	CONSTANTE (valor que depende apenas de h)	Função (tipo) exponencial → $f(x)=b.ax$

lá na plataforma

Acesse a plataforma e assista a vídeos sobre o assunto desta unidade.

Vejamos o problema seguinte.

Segundo dados extraídos de uma reportagem, a população de marlim-azul foi reduzida a 20% da existente há cinquenta anos. Considerando que foi constante a razão anual (razão entre a população de um ano e a do ano anterior) com que essa população decresceu durante esse período, a população de marlim-azul, ao final dos primeiros vinte e cinco anos, ficou reduzida a que parte da população inicial?

Vamos à solução.

Façamos uma tabela:

ANO	0	1	2	3	...	25	...	n	...
POP.	P0	P1	P2	P3		P25	...	Pn	...

Seja q a razão constante de decrescimento. Pelo enunciado, quando n = 50, P_n = 20% de P_0. Assim:

$$P_0 \cdot q^{50} = 0,2 \cdot P_0 \Rightarrow q^{50} = 0,2 \Rightarrow q = 0,2^{\frac{1}{50}}$$

Logo, para determinar P_{25}, vem:

$$P_{25} = P_0 \cdot q^{25} = P_0 \cdot \left(0,2^{\frac{1}{50}}\right)^{25} = P_0 \cdot 0,2^{\frac{1}{2}}$$

Com o auxílio de uma calculadora, encontramos $0,2^{0,5} \approx 0,45$. Donde vem que:

$$P_{25} = 0,45 \cdot P_0 = 45\% \text{ de } P_0$$

Exponenciais

Sejam *a* um número real fixo e *x* uma variável real qualquer. Analisemos a expressão a^x, ou seja, que tipo de valores ela poderá assumir, à medida que, fixado um valor para *a*, *x* variar em IR?

Lembremos, inicialmente, que:

i) se *x* for natural, a^x será uma multiplicação composta por *x* fatores iguais a *a*; por exemplo:

$$\left(-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^3 = \left(-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = -\frac{\pi\sqrt{\pi}}{8}$$

ii) se *x* for inteiro negativo, a^x será definido para todo *não-nulo* como $(a^{-1})^{-x}$, sendo a^{-1} o *inverso* de α; por exemplo:

$$(0,2555\ldots)^{-2} = \left(\frac{23}{90}\right)^{-2} = \left(\frac{90}{23}\right)^2 = \frac{8100}{529} \approx 15,31$$

iii) se *x* for um racional não-inteiro, isto é, $x = \frac{p}{q}$, com *p* e *q* inteiros primos entre si, $a^x = a^{p/q}$ será definido como a *raiz q*-ésima de *a* elevado a *p*; por exemplo:

$$(16)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{\left(2^4\right)^2} = \sqrt[5]{2^8} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 2^3} = 2 \times \sqrt[5]{8}$$

iv) se x for um irracional, a^x será calculado por meio da aproximação a^r, sendo r uma *aproximação racional* de x ; por exemplo:

$$2^{\sqrt{2}} \approx 2^{1,4} = 2^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{2^5 . 2^2} = 2 . \sqrt[5]{4} \Rightarrow 2^{\sqrt{2}} \simeq 2,64$$

Feita essa revisão, voltemos ao nosso problema original. Observemos que nossa análise deverá ser feita sobre o valor de a, para que x possa variar "livremente" dentro do conjunto dos números reais.

De cara, duas situações se apresentam:

1ª) não é possível calcular, em IR, a raiz n-ésima de números negativos, quando n é par;

2ª) o 0 (zero) não é inversível.

Portanto, não existirá a^x nos seguintes casos:

1º) $(-4)^{1/2}$

2º) 0^{-2}

Assim, se α = 0 ou se *a for negativo*, então, a fim de que x possa variar "livremente" em IR, *a^x não será definido*.

Finalmente, para encerrar nossa análise, recoloquemos a questão de partida: *que tipo de valores ela poderá assumir, à medida que, fixado um valor para a, x variar em IR?*

Se fixarmos $a = 1$ e variarmos x em IR, o número assumirá sempre o valor 1, ou seja, *não variará*. Este caso será, pois, desconsiderado da definição que faremos a seguir.

Dados um número real positivo $a \neq 1$ e uma variável real x, chama-se *exponencial* desse α a expressão a^x. A função real f que a cada x associa a exponencial a^x, a nas condições iniciais ($0 < a \neq 1$), ou seja, $f(x) = a^x$, chama-se *função exponencial*.

Consideremos a seguinte situação-problema.

Uma pessoa tomou 60mg de um antibiótico. A bula desse remédio indicava que sua *meia-vida* era de seis horas. Responda:

a) após 12 horas da ingestão desse remédio, que quantidade dele ainda permanece no organismo?

b) e após 3 horas da ingestão?

c) e após t horas da ingestão?

Vamos à solução.

A chave para resolver este problema está em perceber que, a cada intervalo de seis horas, a quantidade de remédio no organismo reduz-se à metade (definição de meia-vida). Note-se que o modelo adequado é do tipo exponencial, pois o que se tem é uma variação relativa constante (a cada seis horas, ocorre uma redução de 50%). Então, chamando a quantidade de remédio que permanece no organismo após *t* horas de *Q(t)*, temos:

$$Q(t) = 60 \bullet a^t$$

Mas, pelo enunciado, $Q(6) = 30$, ou seja:

$$60 \bullet a^6 = 30 \rightarrow a^6 = 0{,}5 \rightarrow a = 0{,}5^{1/6}$$

Donde vem que a função procurada em c) é:

$$Q(t) = 60 \bullet 0{,}5^{t/6}$$

Assim:

(a) $Q(12) = 60 \bullet 0{,}5^2 = 15$ mg

(b) $Q(3) = 60 \cdot 0{,}5^{1/2} \approx 42$ mg

Consideremos, agora, outra situação-problema.

Um banco afirma que empresta dinheiro a juros anuais de 100%, capitalizados mensalmente. Responda:

a) qual é a taxa anual efetivamente cobrada pelo banco?

b) e se o banco optar por uma capitalização diária?

c) e se o banco considerar uma capitalização contínua?

Vamos à solução. Situações em que se trabalha com capitalização monetária são modeladas por funções do tipo exponencial, $y = b \bullet a^x$, sendo a base $a = 1 + i$, com i igual à taxa de juros correspondente ao período. Assim:

(a) $i = \frac{1}{12}$

$$y = b \cdot \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} = b \cdot (1 + i_{anual})^1 \rightarrow 1 + i_{anual} \approx 2{,}613 \rightarrow i_{anual} \approx 1{,}613 = 161{,}3\%$$

(b) $i = \frac{1}{365}$

$$y = b \cdot \left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} = b \cdot (1 + i_{anual})^1 \rightarrow 1 + i_{anual} \approx 2{,}714 \rightarrow i_{anual} \approx 1{,}714 = 171{,}4\%$$

(C) $i = \frac{1}{n}$

$$y = b \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = b \cdot (1 + i_{anual})^1 \rightarrow 1 + i_{anual} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow i_{anual} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1$$

À medida que n for assumindo valores cada vez maiores ($n \rightarrow \infty$), teremos:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}718$$

Donde vem que i_{anual} será, aproximadamente, igual a 171,8%

Demonstra-se que, tomando $n \rightarrow +\infty$, tem-se: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281828459045\ldots$. Esse número é representado por uma letra, a letra e, em homenagem ao matemático suíço Leonard Euler. Portanto:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}718$$

A partir disso, define-se, para cada número real *x*, a função exponencial de base e pela seguinte lei de correspondência:

$$f(x) = e^x$$

Essa função possui propriedades muito importantes nas mais variadas áreas do conhecimento, especialmente aquelas que envolvem distribuições de probabilidades e estatísticas, além das descrições de alguns fenômenos naturais, como a radioatividade, o crescimento populacional, a cinética química e a propagação de moléstias.

lá na plataforma

Acesse a plataforma e assista a vídeos sobre o assunto que trabalhamos nesta unidade.

Gráfico da função exponencial

O gráfico dessa função é uma curva, obtida encontrando-se alguns pares ordenados que pertençam à função e desenhando-se a curva que passa por eles. A observação de gráficos dessas funções permite deduzir algumas de suas propriedades, que serão discutidas neste texto.

Em uma função qualquer, grosso modo, encontrar pares ordenados que pertençam ao seu gráfico consiste escolher valores para x e encontrar os valores de $f(x)$ ligados a eles, no contradomínio. Isso é feito substituindo-se o valor de x escolhido na função e calculando-se a expressão numérica resultante.

Utilizando um programa para construção de gráficos, o Winplot, temos:

1º caso: a base é um número menor do que 1 (por exemplo: 0,8)

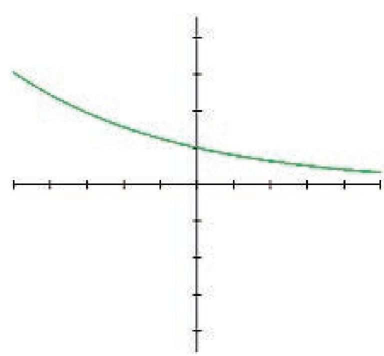


Figura 3.4

2º caso: a base é um número maior do que 1 (por exemplo: 3/2)

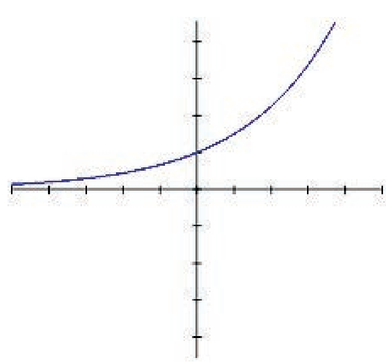


Figura 3.5

Algumas características notáveis da função real definida por $f(x) = a^x$:

1ª) A função exponencial é decrescente se $0 < a < 1$, e crescente, se $a > 1$. Decorre daí que:

$$a^p = a^q \text{ se, e somente se, } p = q$$

2ª) A afirmação anterior equivale a dizer que a função exponencial é injetiva (ou, se preferir, injetora).

3ª) A função exponencial não possui raízes reais (seu gráfico não intersecta o eixo das abscissas), ou seja, não existe x real de tal modo que $a^x = 0$.

3ª) o ponto de coordenadas (0; 1) sempre pertence ao gráfico de f.

4ª) A imagem da função exponencial é o intervalo real $(0;+\infty)$.

5ª) Se tomarmos $f : IR \rightarrow (0; +\infty)$, definida por $f(x) = a^x$ $(0 < a \neq 1)$, f será *sobrejetiva*. Como, por definição, a função exponencial já é injetiva, ela é *bijetiva* e, portanto, *inversível*.

Colocando $y = a^x$, a lei que define f^{-1} será aquela por meio da qual conseguiremos determinar o número que colocado como expoente de a, fornecerá o valor de y.

Por exemplo, dado $f(x) = 2^x$, para obter $f^{-1}(1024)$, chegamos à equação $2^x = 1024$, isto é, $x = 10$; logo, $f^{-1}(1024) = 10$.

lá na plataforma

Acesse a plataforma e assista a vídeos sobre o assunto que trabalhamos aqui.

Equações exponenciais

Grosso modo, são equações cuja *incógnita* encontra-se no *expoente*. Uma equação exponencial será dita *simples* quando for da forma $a^{f(x)} = a^r$ $(0 < a \neq 1)$, cuja solução será obtida por meio da resolução da equação decorrente: $f(x) = r$.

Exemplo:

Resolva a equação: $32^{2x-1} = 0{,}25^x$

Solução:

$$(2^5)^{2x-1} = (2^{-2})^x$$
$$2^{10x-5} = 2^{-2x}$$
$$10x - 5 = -2x$$
$$x = \frac{5}{12}$$

Equações “mais complicadas” são aquelas que envolvem adição e subtração de exponenciais de mesma base, as quais se resolvem, geralmente:

1º) identificando-se a *exponencial básica* (geralmente, o termo a^x a partir do qual se obtêm as expressões que aparecem na equação) e, em seguida, chamando-lhe de uma letra qualquer que não tenha sido utilizada como variável no problema;

2º) resolvendo-se a equação decorrente e, em seguida, retornando-se à variável original.

É importante lembrar que, qualquer que seja $0 < a \neq 1$,

$$i)\ a^{p+q} = a^p \cdot a^q$$
$$ii)\ a^{p-q} = \frac{a^p}{a^q}$$
$$iii)\ a^{p \cdot q} = (a^p)^q$$

Exemplo:

Resolver a equação $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 775$.

Solução:

- exponencial básica: $5^x = y$

- equação decorrente:

$$5^x \cdot 5^1 + 5^x + \frac{5^x}{5^1} = 775$$
$$5y + y + \frac{y}{5} = 775$$
$$\frac{25y + 5y + y}{5} = 775$$
$$\frac{31y}{5} = 775$$
$$\frac{y}{5} = 25$$
$$y = 125$$

- voltando: $5^x = 5^3 \Rightarrow x = 3$

Consideremos a seguinte situação-problema. Um barco parte de um porto *A* com 2^x passageiros e passa pelos portos *B* e *C* e , deixando, em cada um dos portos, metade dos passageiros presentes no momento de chegada, e recebendo, em cada um, $2^{x/2}$ novos passageiros. Se o barco parte do porto *C* com 28 passageiros, e se *N* representa o número de passageiros que partiram de *A*, determine o valor de *N*.

Solução:

Porto *A*: $N = 2^x$

Porto *B*: deixa $\frac{2^x}{2}$ e recebe $2^{x/2}$ passageiros, totalizando:

$$2^x - \frac{2^x}{2} + 2^{\frac{x}{2}} = N - \frac{N}{2} + \sqrt{N} = \frac{N}{2} + \sqrt{N} = M$$

Porto *C*: deixa $\frac{M}{2}$ e recebe $2^{x/2}$.

$$M - \frac{M}{2} + 2^{\frac{x}{2}} = 28$$

$$\frac{M}{2} + 2^{\frac{x}{2}} = 28$$

$$\frac{N}{4} + \frac{\sqrt{N}}{2} + \sqrt{N} = 28$$

$$\frac{N}{4} + \frac{3\sqrt{N}}{2} = 28.$$

Fazendo $N^{1/2} = t$, vem: $\frac{t^2}{4} + \frac{3t}{2} = 28 \Rightarrow t^2 + 6t - 112 = 0 \Rightarrow t = 8 \Rightarrow N = 64.$

Inequações exponenciais

Grosso modo, são inequações cuja incógnita encontra-se no expoente. Uma inequação exponencial será dita *simples* se for da forma $a^{f(x)}\ \partial\ a^r$ $(0 < a \neq 1)$, com *a* atendendo às condições iniciais e ∂ designando um dos sinais de desigualdade (<; >; ≤ ou ≥). Sua solução será obtida por meio da resolução da inequação decorrente:

$$f(x)\ \partial\ r, \text{ se } a > 1 \text{ ou}$$

$$f(x)\ \partial^{-1}\ r, \text{ se } 0 < a < 1$$

com ∂^{-1} *designando* ∂ *invertido* (por exemplo, se ∂ for o sinal <, então ∂^{-1} será o sinal >).

Exemplo:

Resolva a inequação $3^{1-x} \leq 9$.

Solução:

$$3^{1-x} \leq 9 \Rightarrow 3^{1-x} \leq 3^2 \Rightarrow 1 - x \leq 2 \Rightarrow x \geq -1.$$

Observação:

De modo geral, procede-se com as inequações exponenciais da mesma forma que com as equações.

 # lá na plataforma

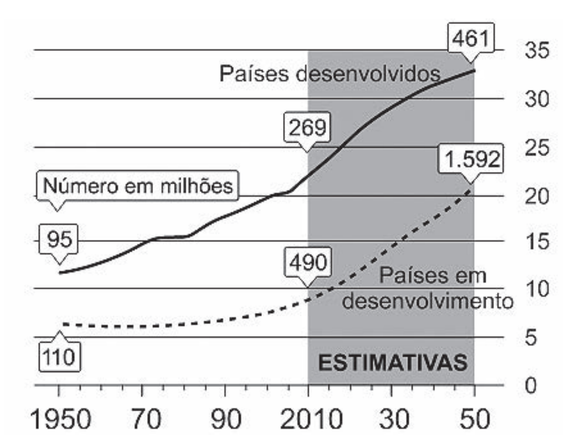
Acesse a plataforma e assista a vídeos sobre o assunto desta unidade.

Função exponencial nas provas de vestibulares e ENEM

A função exponencial é uma das funções cobradas na prova de *Matemática e suas Tecnologias*, do Enem.

Atividades

1.



Fonte: *Perspectivas da População Mundial*, ONU, 2009.

Disponível em: www.economist.com.
Acesso em: 9 jul. 2009 (adaptado).

(Enem, 2009) Suponha que o modelo exponencial $y = 363 \cdot e^{0,03x}$, em que x = 0 corresponde ao ano 2000, x = 1 corresponde ao ano 2001, e assim sucessivamente, e que y é a população em milhões de habitantes no ano x, seja usado para estimar essa população com 60 anos ou mais de idade nos países em desenvolvimento entre 2010 e 2050. Desse modo, considerando que $e^{0,3} = 1,35$, estima-se que a população com 60 anos ou mais estará, em 2030, entre:

a) 490 e 510 milhões

b) 550 e 620 milhões

c) 780 e 800 milhões

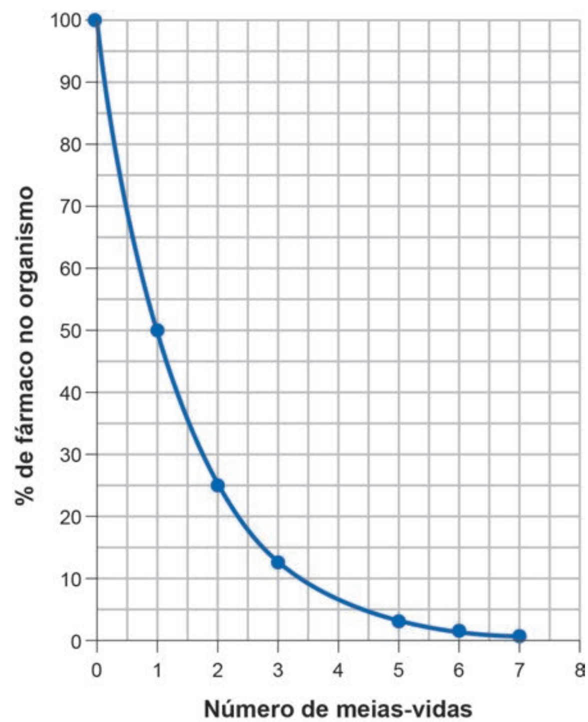
d) 810 e 860 milhões

e) 870 e 910 milhões

lá na plataforma

Acesse a plataforma e assista a um vídeo com a resolução comentada da questão 1.

2. (Enem, 2007 / Adaptada) A duração do efeito de alguns fármacos está relacionada à sua meia-vida, tempo necessário para que a quantidade original do fármaco no organismo se reduza à metade. A cada intervalo de tempo correspondente a uma meia-vida, a quantidade de fármaco existente no organismo no final do intervalo é igual a 50% da quantidade no início desse intervalo.



O gráfico anterior representa, de forma genérica, o que acontece com a quantidade de fármaco no organismo humano ao longo do tempo.

F. D. Fuchs e Cher l. Wannma. *Farmacologia Clínica*. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan,1992, p. 40.

A meia-vida do antibiótico amoxicilina é de uma hora. Assim, se uma dose desse antibiótico for injetada às 12h em um paciente, o percentual dessa dose que restará em seu organismo às 14h será de:

a) 0%

b) 10%

c) 20%

d) 25%

e) 50%

3. (Enem, PPL 2020) Um laboratório realizou um teste para calcular a velocidade de reprodução de um tipo de bactéria. Para tanto, realizou um experimento para observar a reprodução de uma quantidade x dessas bactérias por um período de duas horas. Após esse período, constava no habitáculo do experimento uma população de 189.440 da citada bactéria. Constatou-se, assim, que a população de bactérias dobrava a cada 0,25 hora.

A quantidade inicial de bactérias era de:

a) 370

b) 740

c) 1.480

d) 11.840

e) 23.680

4. (Fuvest, 2012) Uma substância radioativa sofre desintegração ao longo do tempo, de acordo com a relação $m(t) = c \cdot a^{-kt}$, em que a é um número real positivo, t é dado em anos, $m(t)$ a massa da substância em gramas e c e k são constantes positivas. Sabe-se que m_0 gramas dessa substância foram reduzidos a 20% em 10 anos. A que porcentagem de m_0 ficará reduzida a massa da substância, em 20 anos?

a) 10%

b) 5%

c) 4%

d) 3%

e) 2%

5. (Unisc, 2021) O número de bactérias numa cultura, em função do tempo t (em horas), pode ser expresso por:

$$N(t) = 256 \cdot 2^{0,75t}$$

Em quanto tempo, em horas, o número de bactérias será igual a 2048?

a) 2

b) 6

c) 8

d) 3

e) 4

Resumo

- A modelagem de uma situação problema por meio de $y = f(x)$ será do tipo exponencial quando $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ for constante.

- A função exponencial é decrescente, se $0 < a < 1$ e, crescente, se $a > 1$. Decorre daí que:

$$a^p = a^q \Leftrightarrow p = q$$

- A função exponencial não possui raízes reais (seu gráfico não intersecta o eixo das abscissas), ou seja, não existe x real de tal modo que $a^x = 0$.

- A imagem da função exponencial é o conjunto dos números reais positivos.

Qual é a razão? Progressões geométricas

04

meta

Interpretar problemas que envolvam sequências caracterizadas como progressões geométricas, resolvendo-os a partir do uso de propriedades e fórmulas deduzidas.

objetivos

Esperamos que, ao final desta unidade, você seja capaz de:

- identificar progressões geométricas;
- associar progressões geométricas a funções exponenciais de domínios discretos;
- analisar propriedades, deduzir fórmulas e resolver problemas.

Introdução

O problema a seguir foi adaptado de uma questão do Exame Nacional do MAA (*Mathematical Association of America*), sociedade matemática estadunidense. Um aspecto interessante desse problema é que ele costuma deixar os alunos intrigados e os professores desconfiados. Você aceita o desafio de observá-lo? Então vamos começar.

Problema 1:

Uma pessoa, começando com R$ 64,00, faz seis apostas consecutivas, em cada uma das quais arrisca perder ou ganhar a metade do que possui, no momento de cada aposta. Se ela ganha três e perde três dessas apostas, pode-se afirmar que ela:

a) ganha dinheiro.
b) não ganha nem perde dinheiro.
c) perde R$ 27,00.
d) perde R$ 37,00.
e) ganha ou perde dinheiro, dependendo da ordem em que ocorreram suas vitórias e derrotas.

Solução:

Em geral, ao tentarem solucionar o problema, os alunos escolhem uma ordem de vitórias e derrotas para ver o que acontece. Aliás, essa é até uma boa estratégia. Por exemplo, se ela vence as três primeiras apostas e perde as últimas três, o seu capital evolui de acordo com o esquema a seguir:

$$64 \rightarrow 96 \rightarrow 144 \rightarrow 216 \rightarrow 108 \rightarrow 54 \rightarrow 27.$$

Se ela começou com R$ 64,00 e terminou com R$ 27,00, ela perdeu R$ 37,00. Assim, sabemos agora que a resposta só poderá ser (D) ou (E).

Em seguida, os alunos costumam experimentar uma outra ordem, por exemplo, ganhando e perdendo alternadamente. Obtêm-se o seguinte esquema:

$$64 \rightarrow 96 \rightarrow 48 \rightarrow 72 \rightarrow 36 \rightarrow 54 \rightarrow 27.$$

Nessa ordem, a pessoa também perdeu R$ 37,00.

Em uma nova tentativa, experimentam outra ordem, torcendo para que a pessoa não termine com R$ 27,00, o que permitiria concluir que a resposta é (E). Entretanto, descobrem que a pessoa novamente termina com R$ 27,00 e permanecem na dúvida. Alguns se dispõem a tentar todas as ordens possíveis, mas logo desistem ao perceberem que há 20 possibilidades.

Mas como ter certeza de que sempre terminará com R$ 27,00 sem ter que verificar todas as possibilidades?

A melhor maneira de abordar problemas como esse, nos quais há uma grandeza variável da qual é conhecida a taxa (porcentagem) de variação, é concentrar a atenção, não na taxa de variação da grandeza, e sim no valor da grandeza depois da variação.

Nesse problema, devemos pensar assim:

- cada vez que a pessoa ganha, o capital aumenta $\frac{1}{2}$ (ou seja, 50%) e passa a valer $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ do que valia;
- cada vez que a pessoa perde, o capital diminui $\frac{1}{2}$ (ou seja, 50%) e passa a valer $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ do que valia.

Pensando assim, se a pessoa vence as três primeiras apostas e perde as três últimas, a evolução de seu capital pode ser representada conforme o esquema a seguir:

$$64 \to 64\cdot\frac{3}{2} \to 64\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} \to 64\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} \to 64\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} \to$$
$$64\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \to 64\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

Assim, ela termina com $64\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=27$.

Além disso, também podemos perceber que, se as vitórias e derrotas tivessem ocorrido em outra sequência, isso apenas mudaria a ordem dos fatores, sem alterar o produto, e a pessoa também terminaria com R$ 27,00.

Se ela começou com R$ 64,00 e terminou com R$ 27,00, perdeu R$ 37,00. A resposta é (D).

Outros problemas

A seguir, apresentaremos outros problemas, nos quais a variação das grandezas se dará de maneira similar ao exemplo mostrado no Problema 1. Eles são úteis para percebermos determinados comportamentos antes de definirmos progressões geométricas.

Problema 2:

A população de um país é hoje igual a P_0 e cresce 2% ao ano. Qual será a população desse país daqui a *n* anos?

Você também discutirá sobre **crescimento demográfico** em aulas de Geografia, dando mais destaque às questões sociais que são responsáveis por tal incremento. Aqui, vamos pensar na modelagem matemática que está por trás das informações.

Crescimento demográfico ou populacional

Incremento médio anual da população residente em determinado espaço geográfico, devido à diferença entre o número de pessoas que nascem (natalidade) e o número de pessoas que morrem (mortalidade) ou à migração líquida.

Solução:

Se a população cresce 2% ao ano, em cada ano a população será 102% da população do ano anterior. Portanto, a cada ano que passa, a população sofre uma multiplicação por 102% = 1,02. Com isso, depois de anos, a população será:

$P_0 \cdot (1{,}02)^n$

Problema 3:

A torcida de certo clube é hoje igual a P_0 e decresce 5% ao ano. Qual será a torcida desse clube daqui a *n* anos?

Solução:

Se a torcida decresce 5% ao ano, em cada ano a população será 95% da população do ano anterior. Portanto, a cada ano que passa, a população sofre uma multiplicação por 95% = 0,95. Com isso, depois de anos, a população será:

$P_0 \cdot (0{,}95)^n$

Nos Problemas 2 e 3, percebemos que se uma grandeza tem taxa de crescimento igual a *i*, cada valor da grandeza é 1 + *i* vezes o valor anterior.

No Problema 2, tivemos 1 + 0,02 = 1,02, pois tratava-se de um crescimento populacional. No Problema 3, tivemos 1 + (-0,05) = 0,95, pois tratava-se de um decrescimento da quantidade de torcedores.

Progressões geométricas

Nesta seção, serão apresentados exemplos de sequências que se configuram progressões geométricas. Com eles, discutiremos propriedades e deduziremos fórmulas importantes. Tais fórmulas não precisam ser decoradas, mas, sim, entendidas dentro de contextos similares aos dos problemas que apresentamos anteriormente.

Progressões geométricas (PG) são sequências nas quais a taxa de crescimento i, de cada termo para o seguinte, é sempre a mesma.

Exemplo 1:

A sequência (1, 2, 4, 8, 16, 32, ...) é um exemplo de uma progressão geométrica. Aqui, a taxa de crescimento de cada termo para o seguinte é de 100%, o que faz com que cada termo seja igual a 200% do termo anterior, isto é, cada termo é o anterior multiplicado por 2.

Exemplo 2:

A sequência (1000, 800, 640, 512, ...) é outro exemplo de uma progressão geométrica. Aqui, a taxa de crescimento de cada termo para o seguinte é de - 20% (nesse caso, dado que a taxa é negativa, o que há é *decrescimento*). Ou seja, cada termo é 80% do termo anterior, o que é equivalente ao termo anterior multiplicado por 0,80.

Razão da progressão geométrica

Como acabamos de ver, numa progressão geométrica, cada termo é igual ao anterior multiplicado pelo valor 1 + i, em que i é a taxa de crescimento (ou de decrescimento) dos termos. Chamamos 1 + i de razão da progressão geométrica e representamos a razão pela letra q.

Assim, também podemos definir uma progressão geométrica com outras palavras: é uma sequência na qual o quociente da divisão de cada termo pelo termo anterior é constante. Esse quociente constante é a razão da progressão geométrica, a mesma que representamos acima com a letra q.

Exemplo 3:

As sequências (2, 6, 18, 54, ...) e (128, 32, 8, 2, ...) são progressões geométricas cujas razões valem, respectivamente, $q_1 = 3$ e $q_2 = \frac{1}{4}$. Suas taxas de crescimento são, respectivamente, $i_1 = 200\%$ e $i_2 = -75\%$.

$$q_1 = 1 + i_1 \Rightarrow 3 = 1 + i_1 \Rightarrow i_1 = 2 = 200\%$$
$$q_2 = 1 + i_2 \Rightarrow \frac{1}{4} = 1 + i_1 \Rightarrow i_1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} = -75\%$$

Repare que, em ambas as sequências, para avançar um termo, basta multiplicá-lo pela razão; para avançar dois termos basta multiplicá-lo pela razão duas vezes, e assim por diante.

Considerando uma progressão geométrica (a_1, a_2, a_3, ...), podemos dizer, por exemplo, que $a_3 = a_1 \bullet q^2$ ou que $a_{12} = a_5 \bullet q^7$, pois avançamos, respectivamente, dois termos, ao passar do a_1 para o a_3 e sete termos ao passar do a_5 para o a_{12}. Por outro lado, $a_4 = \frac{a_{13}}{q^9}$, pois ao passar do a_{13} para o a_4, retrocedemos 9 termos. Note que também podemos escrever essa mesma expressão da seguinte forma: $a_4 = a_{13} \bullet q^{-9}$.

De modo geral, podemos relacionar o expoente da razão com a diferença entre os índices dos termos de partida (a_p) e de chegada (a_n). Assim, $a_n = a_p \bullet q^{n-p}$.

Particularmente, podemos escrever essa expressão partindo do primeiro termo: $a_n = a_1 \bullet q^{n-1}$.

Em muitos casos, é mais natural numerar os termos a partir de zero, como foi feito nos Exemplos 1 e 2; nesse caso, a fórmula obtida acima ficaria assim: $a_n = a_0 \bullet q^n$, pois avançamos n termos ao passar do a_0 para o a_n. Isso é comum quando os termos estão indexados pelo tempo.

Problema 4:

Em uma progressão geométrica, o quinto termo vale 5 e o oitavo termo vale 135. Quanto vale o sétimo termo dessa progressão?

Solução:

Temos que $a_5 = 5$ e $a_8 = 135$. Assim, podemos determinar a razão dessa progressão geométrica, fazendo:

$$a_8 = a_5 \cdot q^{(8-5)}$$
$$a_8 = a_5 \cdot q^3$$
$$135 = 5 \cdot q^3$$
$$\frac{135}{5} = q^3$$
$$27 = q^3$$
$$q = 3$$

Analogamente, usamos $a_7 = a_5 \cdot q^{7-5}$ para determinar o sétimo termo da progressão:

$$a_7 = a_5 \cdot q^2$$
$$a_7 = 5 \cdot 3^2$$
$$a_7 = 5 \cdot 9$$
$$a_7 = 45$$

O sétimo termo vale 45.

Problema 5:

Ao inserir três termos entre os números 30 e 480, de forma a obter uma progressão geométrica com os cinco números, qual será a razão dessa PG?

Solução:

Chamamos *interpolação* ao processo de inserir números entre dois outros já existentes. Nesse caso, como o resultado será uma progressão geométrica, a chamaremos de *interpolação geométrica*. Inserindo-se três termos entre 30 e 480, ficamos com cinco termos, sendo 30 o primeiro termo e 480, o último deles. Temos $a_1 = 30$ e $a_5 = 480$. Como $a_5 = a_1 \cdot q^4$, então:

$$480 = 30 \cdot q^4$$
$$\frac{480}{30} = q^4$$
$$16 = q^4$$
$$q = \pm 2$$

No Problema 5, encontramos dois valores possíveis para a razão da PG. Vamos verificar como ficariam as sequências em cada caso.

- Se $q = 2$, então os cinco números em progressão geométrica serão (30, 60, 120, 240, 480);
- Se $q = -2$, então os cinco números em progressão geométrica serão (30, -60, 120, -240, 480).

Repare que, em ambos os casos, os termos estão em ordem crescente, mas, no segundo caso, há uma alternância nos seus sinais.

Também já verificamos no Exemplo 3 que razões podem determinar crescimento e decrescimento em progressões geométricas e isso ocorre da seguinte forma:

- se $q > 1$, então a progressão geométrica é crescente;
- se $q = 1$, então a progressão geométrica é constante;
- se $0 < q < 1$, então a progressão geométrica é decrescente;
- se $q < 0$, então a progressão geométrica é alternada ou oscilante.

Soma dos *n* primeiros termos de uma progressão geométrica

A soma dos n primeiros termos (S_n) de uma progressão geométrica (a_n) de razão $q \neq 1$, é:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

A afirmação acima é verdadeira, mas em matemática precisamos apresentar argumentos que comprovem a validade do que é afirmado. Damos a esse processo de comprovação o nome de *prova* ou *demonstração*. O intuito da prova ou demonstração é o da comprovação. Assim, não é necessário que a cada vez que utilize a fórmula você tenha de demonstrá-la.

Prova:

A soma dos n primeiros termos de uma PG pode ser representada da seguinte forma:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \quad \text{(I)}$$

Multiplicando por q toda a expressão, obtemos:

$$q \cdot S_n = q \cdot a_1 + q \cdot a_2 + q \cdot a_3 + \ldots + q \cdot a_{n-1} + q \cdot a_n \quad \text{(II)}$$

Subtraindo da expressão (I) a expressão (II), temos:

$S_n - q \cdot S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n - a_2 - a_3 - a_4 + \ldots - a_n - a_{n+1}$

$S_n - q \cdot S_n = a_1 - a_{n+1}$

$S_n \cdot (1 - q) = a_1 - a_{n+1}$

Como $a_{n+1} = a_1 \cdot q^n$, substituímos:

$$S_n \cdot (1-q) = a_1 - a_1 \cdot q^n$$
$$S_n \cdot (1-q) = a_1 \cdot (1-q^n)$$
$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Nas progressões geométricas que possuem razão com valor absoluto menor do que 1, $|q| < 1$, é possível obter um valor finito para a soma dos infinitos termos da sequência. Em linguagem matemática, isso é equivalente a dizer que a soma dos n primeiros termos tem um limite finito (converge), quando n tende ao infinito ($n \to \infty$).

Como a soma dos n primeiros termos de uma PG é dada por $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$, então devemos

verificar o que ocorre com q^n, quando $n \to \infty$. Assim, como a razão é um número cujo valor absoluto é menor do que 1, podemos dizer, grosso modo, que, à medida que o expoente vai aumentando, o valor de q^n vai diminuindo, se aproximando cada vez mais de 0. Isto é, o limite de q^n quando n tende a infinito é igual a zero.

Nesse caso, se , $\lim_{n \to \infty} q^n = 0$, então $\lim_{n\to\infty} S_n = a_1 \cdot \frac{1-0}{1-q}$. Ou seja:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

Problema 6:

Qual o valor da soma 0,3 + 0,03 + 0,003 +..., quando o número de parcelas tende ao infinito?

Solução:

Intuitivamente, podemos dizer que a soma resulta em 0,3333..., uma dízima periódica cuja representação fracionária é $\frac{1}{3}$ Porém, é possível usar a fórmula que acabamos de verificar. Para isso, consideremos que as parcelas da soma são os termos da PG $\left(\frac{3}{10}, \frac{3}{100}, \frac{3}{1000}, \dots\right)$. Assim, $a_1 = \frac{3}{10}$ e $q = \frac{1}{10}$.

Substituindo, temos:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Problema 7:

Calcule o limite da soma $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$

Solução

Vamos considerar que as parcelas são termos da PG $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right)$. Assim, $a_1 = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{1}{2}$. Substituindo, temos:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

O resultado admite uma interessante paráfrase. Suponha que Fábio deva correr 1km. Inicialmente, ele corre metade dessa distância, isto é, $\frac{1}{2}$ km; em seguida, ele corre metade da distância que falta, isto é, $\frac{1}{4}$ km; depois metade da distância restante, isto é, $\frac{1}{8}$ km, e assim por diante.

Depois de dessas etapas, Fábio terá corrido $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$ km. Se n for grande, essa soma será aproximadamente igual a 1km.

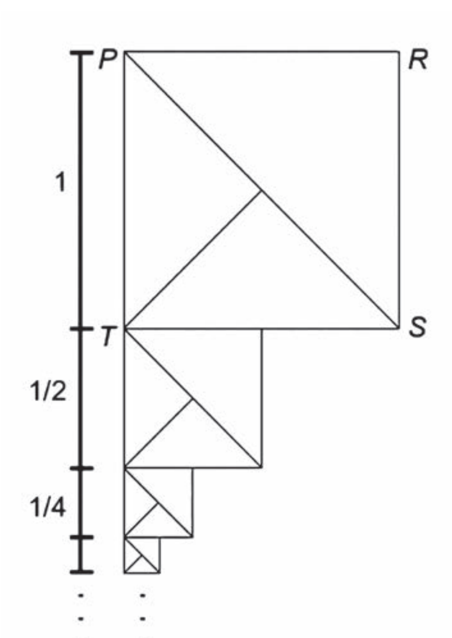
lá na plataforma

Quer saber mais sobre soma de progressão geométrica? Acesse a plataforma e veja um vídeo sobre o assunto.

Atividade

Questões sobre progressões geométricas são muito comuns em provas do ENEM, muitas vezes com contextos relativos às linguagens, às ciências humanas ou da natureza. Assim, apresentaremos a seguir uma questão do ENEM para que você pratique mais um pouco.

1. (Enem, 2020) O artista gráfico holandês Maurits Cornelius Escher criou belíssimas obras nas quais as imagens se repetiam, com diferentes tamanhos, induzindo ao raciocínio de repetição infinita das imagens. Inspirado por ele, um artista fez um rascunho de uma obra na qual propunha a ideia de construção de uma sequência de infinitos quadrados, cada vez menores, uns sob os outros, conforme indicado na figura.



O quadrado *PRST*, com lado de medida 1, é o ponto de partida. O segundo quadrado é construído sob ele tomando-se o ponto médio da base do quadrado anterior e criando-se um quadrado novo, cujo lado corresponde à metade dessa base. Essa sequência de construção se repete recursivamente. Qual é a medida do lado do centésimo quadrado construído de acordo com esse padrão?

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{99}$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{97}$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{98}$

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-98}$

Resumo

Progressão geométrica (PG) é uma sequência numérica na qual a taxa de crescimento *i*, de cada termo para o seguinte, é sempre a mesma.

A fórmula que relaciona dois termos de uma PG é $a_n = a_p \cdot q^{n-p}$

A fórmula da soma dos primeiros termos de uma PG é $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$.

Para progressões geométricas cuja razão tem valor absoluto menor do que 1, é possível obter a soma dos infinitos termos da sequência através da seguinte expressão: $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$.

Referências

IBGE. Glossário do censo 2010. Disponível em: *https://censo2010.ibge.gov.br/apps/atlas/pdf/209_213_Glossario_ATLASDEMO%202010.pdf*. Acesso em: 27 abr. 2022.

MORGADO, A. C.; SOUZA, F. H. T.; COSTA, C. J.; FIGUEIREDO, L. M.; GIRALDO, V. A. *Pré-vestibular social*: matemática. v. 1. 5. ed. rev. ampl. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2012.

Pra que serve esse tal de logaritmo?

05

metas

Articular conhecimentos matemáticos, especialmente a função logarítmica, ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da matemática; utilizar a função logaritmos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

objetivos

Esperamos que, ao final desta unidade, você seja capaz de:

- resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, matemática financeira, dentre outros.
- comparar e analisar as representações, em plano cartesiano, das funções exponencial e logarítmica para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada uma, com ou sem apoio de tecnologias digitais, estabelecendo relações entre elas.

Introdução

Num país, a inflação mensal é de 6%. Após quantos meses, a partir de hoje, um produto desse país terá seu valor triplicado?"

O problema colocado é resolvido bastando observar que, a cada mês, o valor V_n de um determinado produto, no mês *n*, será igual a 106% do valor V_{n-1}, que é o valor no mês anterior. Assim, V_n será igual a V_{n-1} multiplicado por 1,06. Em notação matemática:

$$V_n = 1{,}06 \bullet V_{n-1}.$$

Dessa forma, a sequência formada pelos valores do referido produto em cada mês será uma PG de razão 1,06. Colocando o valor inicial igual a , o problema será modelado como segue:

$$V_0 \cdot 1{,}06^n = 3V \Rightarrow 1{,}06^n = 3\,.$$

Assim, a solução do problema é *o número que colocado como expoente do 1,06 produz a potência 3*. A questão que se coloca, nesse ponto, é se tal equação possui, ou não, solução e, em seguida, existindo tal solução, se ela é única, ou não.

Observemos a **Figura 5.1**, em que está representado o gráfico da função exponencial $f(x) = a^x$, com $a > 1$.

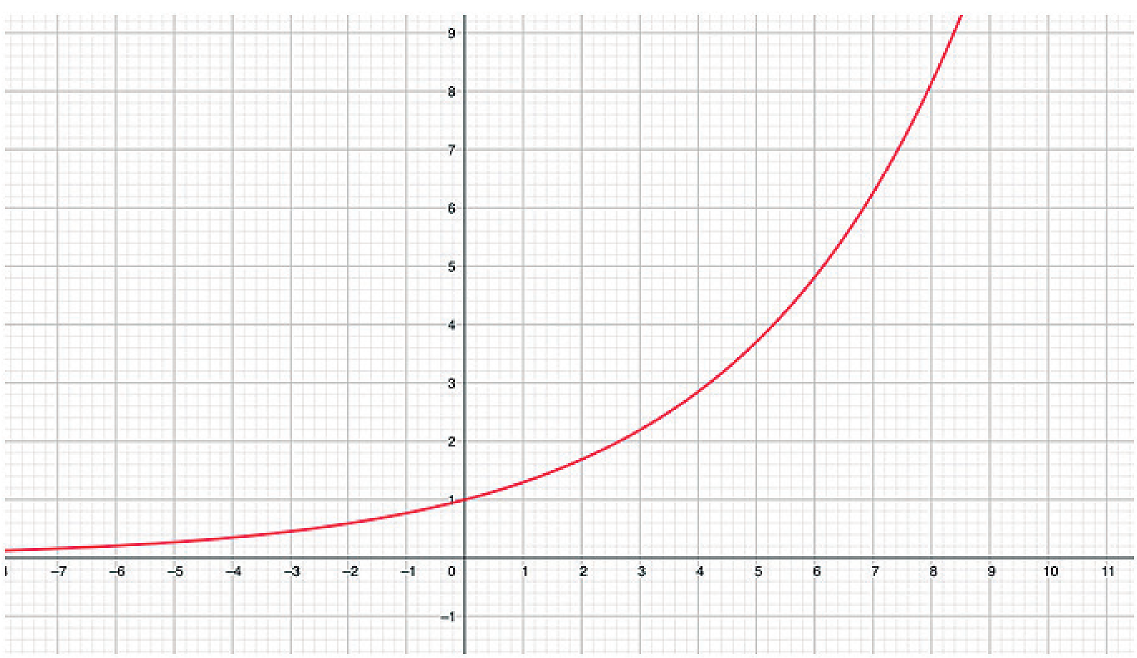


Figura 5.1: Função exponencial $f(x) = a^x$, com $a > 1$.

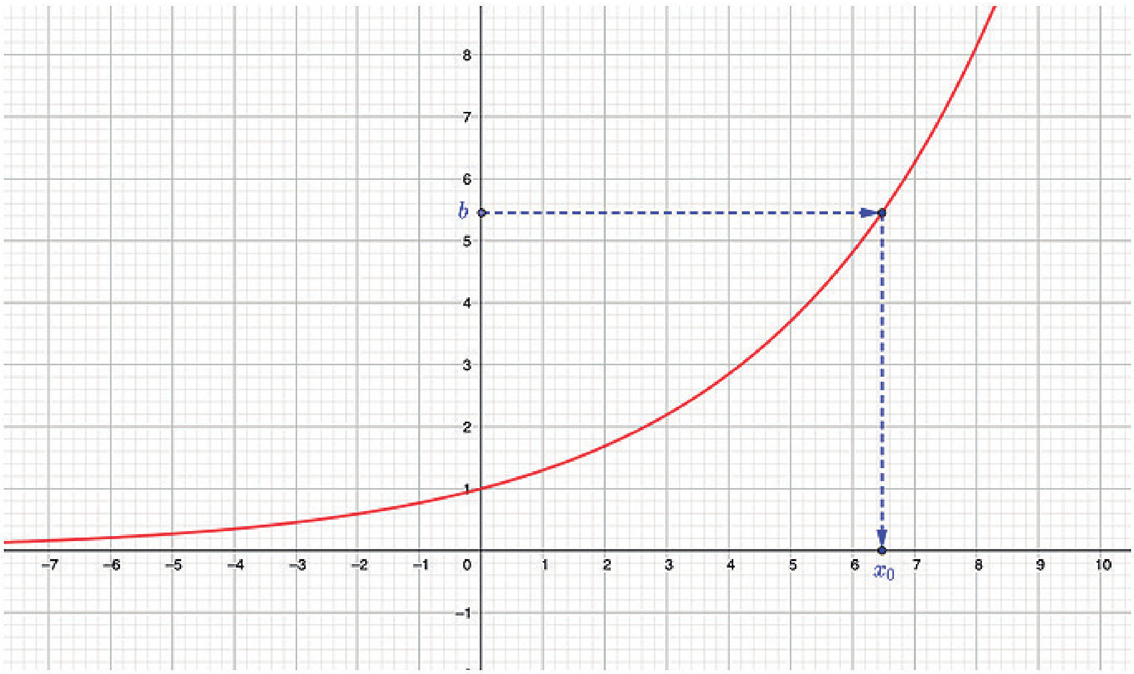


Figura 5.2: Dado $b > 0$, existe x_0 tal que $f(x_0) = b$.

Notemos que, **Figura 5.2**, tomando arbitrariamente o ponto (0, b), com $b > 0$, existe um único x_0 de tal modo que se tenha $f(x_0) = b$, ou seja:

$$a^{x_0} = b\,.$$

Isso se dá pois, considerando para contradomínio de f o conjunto formado por todos os números reais positivos, cada "y" é a imagem de um "x" (*sobrejetividade* da função exponencial). Além disso, como f é estritamente crescente, quando "y" for a imagem de um "x", este será único (*injetividade* da função exponencial). Portanto, definindo $f : \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}^{*}_{+}$, cada "y" será a imagem de um único "x" (*bijetividade* da função exponencial), de modo que, para todo real positivo P, a equação exponencial $a^x = P$, tem solução única.

>> saiba mais

Quando resolvemos a equação $x^3 = 27$, é simples chegar à conclusão de que $x=3$. Isso não ocorre quando, por exemplo, resolvemos $x^3 = 2$. Nesse caso, representamos a solução, ou seja, o número real cujo cubo é igual a 2, por um símbolo próprio: $\sqrt[3]{2}$. Ainda que ele represente a solução da equação $x^3 = 2$, não há uma "caracterização" objetiva desse número, obtida diretamente de sua representação. O mesmo acontece quando temos as equações $sen(x) = 0{,}1$ e $2^x = 5$, por exemplo. Nesses casos, adotamos uma simbologia que representa a solução, mas que não fornece uma "caracterização" explícita dos números procurados, ainda que sejam garantidas suas existências.

Voltando ao problema proposto, a solução procurada, ou seja, *o número que colocado como expoente do 1,06 produz a potência 3*, é chamado de *logaritmo* de 3 na base 1,06. Escreve-se: $log_{1,06}3$.

Portanto:

$$1{,}06^{n} = 3n \Leftrightarrow log_{1,06}(3)$$
$$(Base)^{Expoente} = Resultado$$
$$Expoente = log_{Base}(Resultado)$$

Historicamente, os logaritmos antecederam as exponenciais, sendo considerados, por muitos historiadores da matemática, uma espécie de "calculadora" em períodos como o das grandes navegações, e em transações financeiras, em virtude de transformar multiplicações e divisões em adições e subtrações, respectivamente.

Já antes dos logaritmos, a simplificação das operações era realizada por meio de expressões trigonométricas, que relacionam produtos com somas ou subtrações. Esse processo de simplificação das operações envolvidas passou a ser conhecido como *prostaférese*, sendo largamente utilizado numa época em que as questões relativas à navegação e à astronomia estavam no centro das atenções. De fato, efetuar multiplicações ou divisões com números muito grandes era um processo bastante dispendioso em termos de tempo. A simplificação provocada pela prostaférese, era relativa e, sendo assim, o problema ainda permanecia.

John Napier, teólogo e matemático escocês, foi um dos que impulsionaram fortemente seu desenvolvimento, perto do início do século XVII. Ele é considerado o inventor dos logaritmos, muito embora outros matemáticos da época também tenham trabalhado com ele.

Figura 5.3: John Napier.

Fonte: https://es.wikipedia.org/wiki/John_Napier#/media/Archivo:John_Napier_(Neper).jpg

O método de Napier baseou-se no fato de que, associando aos termos de uma progressão geométrica $b, b^2, b^3, b^4, b^5, \ldots, b^n, \ldots$, os termos da progressão aritmética $1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots$, o produto de dois termos da primeira progressão, $b^m \bullet b^p$, estará associado à soma $m+p$ dos termos correspondentes na segunda progressão.

Considerando, por exemplo,

PA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
PG	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16394

Para efetuar, talvez, 256 × 36 , basta observar que:

- 256 , na segunda linha, corresponde a 8, na primeira;
- 32, na segunda linha, corresponde a 5, na primeira;
- 8 + 5 = 13, na primeira linha, corresponde a 8192 na segunda.

Assim, 256 × 32 = 8192, resultado esse que foi encontrado por meio de uma simples operação de adição.

A fim de que os números da progressão geométrica estivessem bem próximos, para ser possível usar interpolação e preencher as lacunas entre os termos na correspondência estabelecida, evitando erros muito grosseiros, Napier escolheu para razão o número $b = 1 - \frac{1}{10^7} = 0{,}9999999$, que é bem próximo de 1. Há relatos nos quais, para evitar decimais, Napier multiplicava cada potência por 10^7. Desse modo, ele chamava de *"logaritmo"* de N o número L tal que:

$$N = 10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$$

Ou seja:

PA →	1	2	3	...	n	...
PG →	$10^7 \cdot b$	$10^7 \cdot b^2$	$10^7 \cdot b^3$	...	$10^7 \cdot b^n$	...

Particularmente, o logaritmo de Napier de 10^7 vale 0 e o de $b = 1 - \frac{1}{10^7}$, vale 1.

lá na plataforma

Na Unidade 3 de nosso ambiente virtual, acesse o vídeo, que aborda o que estudamos até aqui.

Definição e propriedades básicas

Sejam *a* e *b* números reais positivos com *a* diferente de 1. Chama-se *logaritmo* de *b* na base *a* o *expoente* ao qual *a* deve ser elevado para resultar *b*, ou seja:

$$x = log_a b \Leftrightarrow a^x = b.$$

Portanto, *o logaritmo nada mais é do que um expoente*. Assim, temos a seguinte nomenclatura:

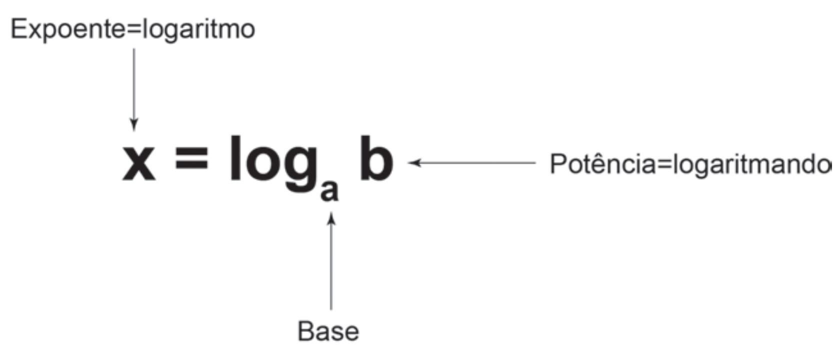


Figura 5.4: Nomenclaturas de um logaritmo.

Exemplos:

1º) $log_{0,01} 10 = x \Leftrightarrow (0,01)^x = 10 \Leftrightarrow 10^{-2x} = 10 \Rightarrow -2x = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

2º) $3^{log_3 5} = 3^x \Leftrightarrow log_3 5 = x \Leftrightarrow 3^x = 5$, ou seja, $3^{log_3 5} = 5$.

Generalizando, sendo *a* e *b* números reais positivos com *a* diferente de 1:

$$a^{(log_a b)} = a.$$

3º) $log_5 1 = x \Leftrightarrow 5^x = 1 = 5^0 \Leftrightarrow x = 0$.

Generalizando, sendo *a* um número real positivo e diferente de 1:

$$log_a 1 = 0.$$

4º) $log_{\sqrt{3}} \sqrt{3} = x \Leftrightarrow \sqrt{3}^x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 1$.

Generalizando, sendo *a* um número real positivo e diferente de 1:

$$log_a a = 1.$$

5º) Sendo dado $log_2 5 = 2{,}32$, determine o valor de $log_8 25$.

Dado: $5 = 2^{2,32}$, então:

$$log_8 25 = x \Leftrightarrow (2^3)^x = 5^2 \Leftrightarrow 2^{3x} = (2^{2,32})^2 \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{4,64} \Leftrightarrow 3x = 4{,}64 \Rightarrow x \approx 1{,}55.$$

6º) Dados $log_{10}2 = 0{,}30$ e $log_{10}3 = 0{,}48$, determine o valor de $x = log_{10}12$, de $y = log_{10}1{,}5$ e de $z = log_{3}2$.

Dados: $log_{10}2 = 0{,}30$ e $log_{10}3 = 0{,}48$, então $2 = 10^{30}$ e $3 = 10^{0{,}48}$. Assim:

- $10^{x} = 12 \Leftrightarrow 10^{x} = 2^{2} \times 3 \Leftrightarrow 10^{x} = \left(10^{0{,}30}\right)^{2} \times 10^{0{,}48} \Leftrightarrow 10^{x} = 10^{1{,}08} \Leftrightarrow x = 1{,}08$
- $10^{y} = 3/2 \Leftrightarrow 10^{y} = \dfrac{10^{0{,}48}}{10^{0{,}30}} \Leftrightarrow 10^{y} = 10^{0{,}18} \Leftrightarrow y = 0{,}18$
- $3^{z} = 2 \Leftrightarrow \left(10^{0{,}48}\right)^{z} = 10^{0{,}30} \Leftrightarrow 10^{0{,}48z} = 10^{0{,}30} \Leftrightarrow 0{,}48z = 0{,}30 \Leftrightarrow z = 0{,}625$

Sistemas de logaritmos

Sendo $0 < a \neq 1$, o conjunto $S(a) = \{L \in IR \,/\, L = log_{a}(x)$, para algum x real e positivo recebe o nome de *sistema de logaritmos de base a*. Os sistemas de logaritmos mais usuais são aqueles em que a base é 10, chamado de *sistema decimal*, e o *sistema natural* ou *neperiano*, cuja base é o número irracional *e* de valor aproximadamente igual a 2,71. Para um número real positivo *b*, neste sistema escreve-se *ln(b) ou L(b)* e, naquele, *log(b)*.

Propriedades operatórias

Satisfeitas as condições exigidas para a existência dos logaritmos e para a realização das operações necessárias, temos:

P_1: $log_{a}(P \cdot Q) = log_{a}P + log_{a}Q$ (na multiplicação de potências de mesma base, conserva-se a base e adicionam-se os expoentes)	P_2: $log_{a}\left(\dfrac{P}{Q}\right) = log_{a}P - log_{a}Q$ (na divisão de potências de mesma base, conserva-se a base e subtraem-se os expoentes)	P_3: $log_{a}P^{\alpha} = \alpha \cdot log_{a}P$ (quando se eleva uma potência a um expoente, conserva-se a base e multiplicam-se os expoentes)

Para demonstrá-las, sejam os números reais *x* e *y* tais que;

- $log_{a}P = x \Leftrightarrow a^{x} = P.$
- $log_{a}Q = y \Leftrightarrow a^{y} = Q.$

1ª) Queremos determinar o número real *z* tal que $log_{a}(P \cdot Q) = z \Leftrightarrow a^{z} = P \cdot Q$. Assim, temos:

$$a^{z} = P \cdot Q = a^{x} \cdot a^{y} = a^{x+y} \Leftrightarrow z = x + y\,.$$

2ª) Queremos determinar o número real *w* tal que $log_{a}\left(\dfrac{P}{Q}\right) = w \Leftrightarrow a^{w} = \dfrac{P}{Q}$. Assim, temos:

$$a^{w} = \frac{P}{Q} = \frac{a^{x}}{a^{y}} = a^{x-y} \Leftrightarrow z = x - y\,.$$

3ª) Queremos determinar o número real *k* tal que $log_a P^{\alpha} = k \Leftrightarrow a^k = P^{\alpha}$. Assim, temos:

$$a^k = P^{\alpha} = (a^x)^{\alpha} \Leftrightarrow k = \alpha \cdot x \ .$$

Exemplos:

1º) Dados: *log* 2 = 0,301 e *log* 3 = 0,477, calcular o valor de *log*1,8.

Solução:

$$log\,1,8 = log\frac{2 \times 3^2}{10} = log\,2 + log\,3^2 - log\,10 = log\,2 + 2 \cdot log\,3 - log\,10$$
$$log\,1,8 = 0,301 + 0,954 - 1 = 0,255\ .$$

Observação:

Um resultado muito útil é:

$$log\,5 = \log\frac{10}{2} = log\,10 - log\,2 \Rightarrow log\,5 = 1 - log\,2.$$

2º) O IDH - Índice de Desenvolvimento Humano - é um número entre 0 e 1, calculado pela média aritmética de três índices: de educação, de expectativa de vida ao nascer e do PIB em dólares. Com base nesses dados e na comparação entre os países, é possível analisar a qualidade de vida e o desenvolvimento humano no planeta.

O cálculo do índice do PIB é feito através da seguinte fórmula:

$$Índice\ do\ PIB = \frac{log(PIB\ per\ capita) - log\,100}{log\,40000 - log\,100},$$

sendo PIB *per capita* o valor da renda *per capita* do país analisado, em dólares; 40.000 dólares é o valor máximo de renda per capita no mundo.

Um país que tenha o índice do PIB igual a 0,79, possui um PIB *per capita* mais bem aproximado por

a) 100 dólares

b) 500 dólares

c) 1 000 dólares

d) 5 000 dólares

e) 10 000 dólares

(dados *log* 2 = 0,30 e *log* 3 = 0,48).

Solução:

Como $10^2 = 100$ e $10^3 = 1000$, então, temos os logaritmos decimais $\log 100 = 2$ e $\log 1000 = 3$. Segue que $\log 40000 = \log (8 \times 5 \times 1000) = \log 2^3 + \log 5 + \log 1000 = 3 \log 2 + \log 5 + 3$. Assim, $\log 40000 = 3(0,30) + 0,70 + 3 = 4,6$.

Seja x o PIB *per capita*. Na fórmula dada, ficamos com:

$$0,79 = \frac{\log x - \log 100}{\log 40000 - \log 100} = \frac{\log x - 2}{4,6 - 2} \Rightarrow \log x - 2 = 2,054 \Rightarrow \log x = 4,054 \approx 4\,.$$

Portanto, o PIB *per capita* é aproximadamente igual a $10^4 = 10000$ dólares. A alternativa correta é E.

Mudança de base

Se dispusermos de uma calculadora científica, veremos que, nela, há duas teclas que dizem respeito explícito a logaritmos.

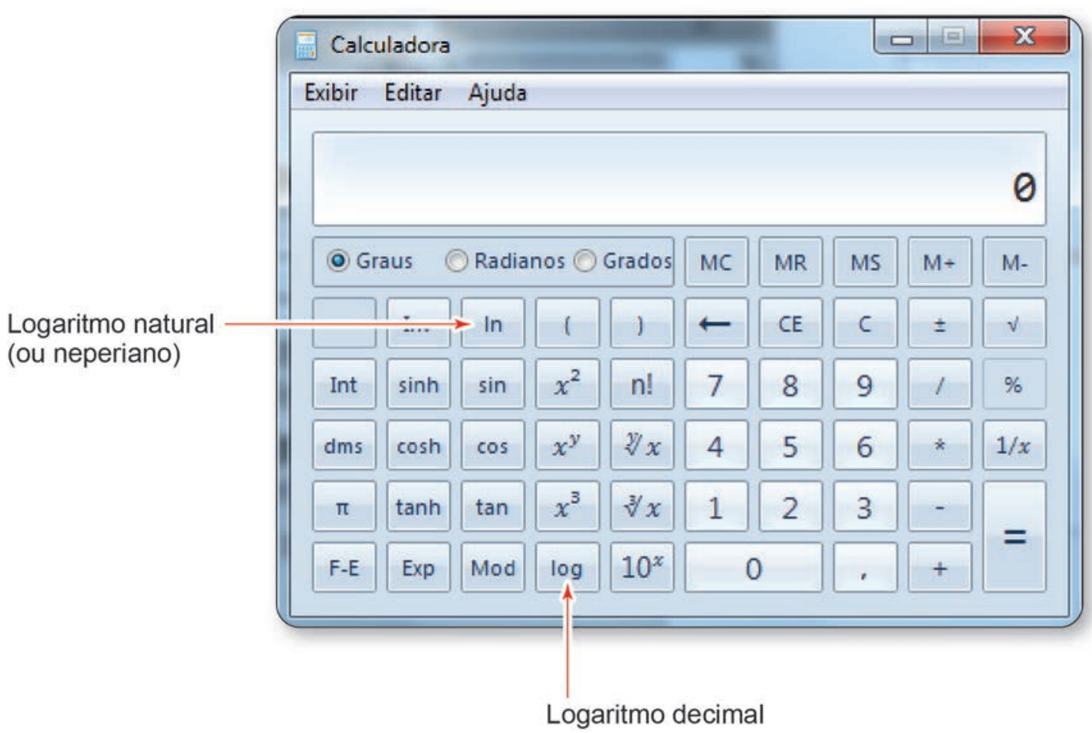


Figura 5.5

Mas e se necessitarmos obter, por exemplo, um logaritmo em outra base, como no problema introdutório, cuja solução era $log_{1,06}3$? Ou seja, fica posto o seguinte problema, como relacionar $log_P x$ com $log_a x$ (admitindo-se satisfeitas todas as condições de existência)?

Vejamos, sejam $R = log_P x$ e $S = log_a x$. Então:

$$P^R = x \text{ e } a^S = x \Rightarrow P^R = a^S.$$

Donde vem que:

$$S = log_a P^R = R \cdot log_a P = (log_P x) \cdot (log_a P) \Rightarrow log_a x = (log_P x) \cdot (log_a P).$$

Ou seja:

$$log_P x = \frac{\log_a x}{\log_a P}.$$

Na medida em que log_a P é um valor constante, por exemplo, K, podemos escrever:

$$log_a x = K \cdot (log_P x).$$

Isso nos mostra que, *todo logaritmo em uma base qualquer* α*, é sempre um múltiplo de um logaritmo numa outra base qualquer P*. Assim, basta que conheçamos os logaritmos em uma base para obtermos o logaritmo em qualquer outra base.

Exemplos:

1º) Utilizando uma calculadora científica, resolva o problema introdutório.

Solução:

Vimos que o número n procurado é dado por

$$n = log_{1,06}3.$$

Então, se decidirmos trabalhar com logaritmos decimais, teremos:

$$n = \frac{log_{10} 3}{log_{10} 1,06} \approx \frac{0,477}{0,025} \approx 19.$$

A partir do 19º mês.

Por outro lado, se decidíssemos trabalhar com logaritmos naturais (ou neperianos), teríamos:

$$n = \frac{ln 3}{ln 1,06} \approx \frac{1,099}{0,058} \approx 18,95$$

a partir do 19º mês.

2º) A produção anual de uma indústria, a partir de determinado ano, apresenta decrescimento anual de taxa 10%. Assim, se a produção em 2010 foi de 1.000 unidades, em que ano essa produção será de 500 unidades?

Solução:

Na medida em que o decrescimento anual se dá segundo uma taxa constante, o modelo matemático que expressa a produção (p) em determinado ano A, a partir de 2010, é uma função do tipo exponencial, neste caso: $p(A) = 1000 \times 0{,}9^{A}$.

Assim deve-se ter:

$$1000 \cdot 0{,}9^{A} = 500 \Leftrightarrow 0{,}9^{A} = 2^{-1} \Rightarrow A = \log_{0,9} 2^{-1} = -1 \cdot \frac{\log 2}{\log 0{,}9}.$$

Então, recorrendo a uma calculadora científica, temos:

$$A = -1 \cdot \frac{0{,}301}{-0{,}046} \approx 6{,}5.$$

Assim, a produção será de 500 unidades em 2017.

3º) Sabendo que, satisfeitas as condições de existência, $\log_a b = c$, determine $\log_{a^q} b^p$.

Solução:

$$\log_{a^q} b^p = \frac{\log_a b^p}{\log_a a^q} = \frac{p \cdot \log_a b}{q \cdot \log_a a} = \frac{p}{q} \cdot \log_a b = \frac{p}{q} \cdot c.$$

Assim:

$$\log_{a^q} b^p = \frac{p}{q} \cdot c.$$

Função logarítmica

Para finalizar, a função exponencial definida de IR em IR_{+}^{*} é tal que para cada "y" existe um único "x" de modo que $f(x) = y$, ou seja, ele é *bijetiva*. Portanto, é possível definir uma função de IR_{+}^{*} em IR, de modo que $g(y) = x$, sempre que $f(x) = y$. A função g é denominada *função inversa* de f, sendo representada por f^{-1}.

Pelo que vimos até aqui, para cada real positivo x, temos:

$$f^{-1}(x) = \log_a(x), \text{ em que } 0 < a \neq 1.$$

f^{-1} é denominada *função logarítmica* de base a.

Observemos que, satisfeitas as condições necessárias e suficientes:

1º) $a^{\log_a(x)} = x$ *[logaritmo aplicado na exponencial]*

2º) $\log_a\left(a^x\right) = x$ *[exponencial aplicada no logaritmo]*

De fato, em ambos os casos, estamos aplicando uma das duas funções e, em seguida, a sua inversas. Naturalmente, os efeitos se anulam.

O gráfico de uma pode ser obtido do gráfico da outra por meio de uma simetria em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, ou seja, a reta de equação $y = x$.

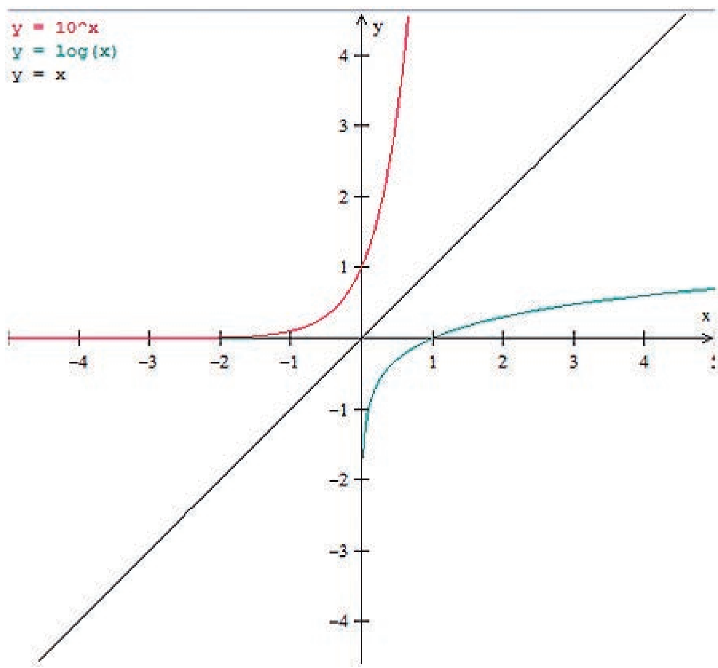


Figura 5.6: Simetria das funções exponencial e logaritmica.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplos:

1º) A intensidade I de um terremoto, medida na escala *Richter*, é um número que varia de $I = 0$ até $I = 8{,}9$ para o maior terremoto conhecido. O valor de I é dado pela fórmula $I = \frac{2}{3} \cdot log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$, em que E é a energia liberada no terremoto em quilowatt-hora (kWh) e E_0 kWh.

a) Qual é a energia liberada num terremoto de intensidade 8 na escala *Richter*?

b) Aumentando de uma unidade a intensidade do terremoto, por quanto fica multiplicada a energia liberada?

Solução:

a) $8 = \frac{2}{3} \cdot log_{10}\left(\frac{E}{7 \times 10^{-3}}\right) \Rightarrow log_{10}\left(\frac{E}{7 \times 10^{-3}}\right) = 12 \Rightarrow \frac{E}{7 \times 10^{-3}} = 10^{12} \Rightarrow E = 7 \times 10^{9}$ kWh.

b) Para responder à letra b, vamos usar o resultado da letra a. Já que sabemos a energia liberada em um terremoto de intensidade 8, vejamos qual será a energia liberada em um terremoto de intensidade 9.

$$9=\frac{2}{3}\cdot log_{10}\left(\frac{E}{7\times 10^{-3}}\right)\Rightarrow 13,5=log_{10}\left(\frac{E}{7\times 10^{-3}}\right)\Rightarrow \frac{E}{7\times 10^{-3}}=10^{13,5}\Rightarrow E=7\times 10^{10,5}$$

Em seguida, vamos dividir o resultado encontrado em b) pelo encontrado em a):

$$\frac{7\times 10^{10,5}}{7\times 10^{9}}=10^{1,5}.$$

Portanto, aumentando de uma unidade a intensidade do terremoto, a energia liberada será multiplicada por $10^{1,5}$.

Um questionamento plausível é se isso acontece para qualquer aumento unitário, ou apenas para o aumento de 8 para 9. Vamos, então, repetir o argumento de forma genérica:

$$I+1=\frac{2}{3}\cdot log_{10}\left(\frac{k\cdot E}{E_0}\right)\Rightarrow \frac{2}{3}\cdot log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)+1=\frac{2}{3}\cdot log_{10}\left(\frac{k\cdot E}{E_0}\right)$$

$$\frac{2}{3}\cdot\left\{log_{10}\left(\frac{k\cdot E}{E_0}\right)-log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)\right\}=1\Rightarrow log_{10}\left(\frac{\frac{k\cdot E}{E_0}}{\frac{E}{E_0}}\right)=\frac{3}{2}$$

$$\frac{\frac{k\cdot E}{E_0}}{\frac{E}{E_0}}=10^{3/2}\cdot k\Rightarrow 10^{1,5}=10\times\sqrt{10}.$$

2º) Em química, define-se o pH de uma solução como segue: $pH=log_{10}\left(\frac{1}{H^+}\right)$, em que indica a concentração de hidrogênio em íons-grama por litro de solução. O cérebro humano contém um fluido cuja concentração de H^+ é $4{,}8\times 10^{-8}$ (em média). Sendo dados *log* 2= 0,30 e *log* 3= 0,48, determine o *pH* desse fluido.

Solução:

$$pH=log_{10}\left(\frac{1}{48\cdot 10^{-9}}\right)=log_{10}\left(\frac{10^9}{48}\right)=log_{10}10^9-log\left(2^4\cdot 3\right)=9-(4\cdot log\,2+log\,3)$$

$$pH=9-1,20-0,48=9-1,68\Rightarrow pH=7,32.$$

Função logarítmica nas provas de vestibulares e ENEM

A função logarítmica é frequentemente cobrada no Enem e nos vestibulares. Sendo assim, vejamos, agora, algumas questões dessas provas.

1. (Enem, 2020) Enquanto um ser está vivo, a quantidade de carbono-14 nele existente não se altera. Quando ele morre, essa quantidade vai diminuindo. Sabe-se que a meia-vida do carbono-14 é de 5 730 anos, ou seja, num fóssil de um organismo que morreu há 5 730 anos, haverá metade do C^{14} que existia quando ele estava vivo. Assim, cientistas e arqueólogos usam a seguinte fórmula para saber a idade de um fóssil encontrado: $Q(t) = Q_0 \cdot 2^{\frac{-t}{5730}}$, em que t é o tempo, medido em ano, $Q(t)$ é a quantidade de C^{14} medida no instante t e Q_0 é a quantidade de carbono-14 no ser, quando vivo.

Um grupo de arqueólogos, numa de suas expedições, encontrou 5 fósseis de espécies conhecidas e mediram as quantidades de carbono-14 neles existentes. Na tabela, temos esses valores juntamente com a quantidade de C^{14} nas referidas espécies vivas.

Fóssil	Q_0	$Q(t)$
1	128	32
2	256	8
3	512	64
4	1024	512
5	2048	128

O fóssil mais antigo encontrado nessa expedição foi:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

lá na plataforma

Acesse a plataforma e assista a um vídeo com a resolução comentada da Questão 1.

2. (Enem, 2020 - Adaptada) A Lei de Zipf, batizada com o nome do linguista americano George Zipf, é uma lei empírica que relaciona a frequência (f) de uma palavra em um dado texto com o seu ranking (r). Ela é dada por:

$$f = \frac{A}{r^B}.$$

O ranking da palavra é a sua posição ao ordenar as palavras por ordem de frequência. Ou seja, $r = 1$ para a palavra mais frequente, $r = 2$ para a segunda palavra mais frequente e, assim, sucessivamente. A e B são constantes positivas.

Disponível em: http://klein.sbm.org.br. Acesso em: 12 ago. 2020.

Com base nos valores de $X = log\ (r)$ e $Y = log\ (f)$ é possível estimar valores para A e B.

No caso hipotético em que a lei é verificada exatamente, a relação entre Y e X é :

a) $Y = log\ (A) - B \cdot X$

b) $Y = \frac{log\ (A)}{X + log\ (B)}$

c) $Y = \frac{log\ (A)}{B} - X$

d) $Y = \dfrac{log(A)}{B \cdot X}$

e) $Y = \dfrac{log(A)}{X^B}$

3. (Enem, 2019 - Adaptada) Charles Richter e Beno Gutenberg desenvolveram a escala Richter, que mede a magnitude de um terremoto. Essa escala pode variar 0 a 10, com possibilidades de valores maiores. O quadro mostra a escala de magnitude local (M_S) de um terremoto que é utilizada para descrevê-lo.

Descrição	Magnitude local (MS) (μmHz)
Pequeno	0 ≤ MS ≤ 3,9
Ligeiro	4,0 ≤ MS ≤ 4,9
Moderado	5,0 ≤ MS ≤ 5,9
Grande	6,0 ≤ MS ≤ 9,9
Extremo	MS ≥ 10,0

Para se calcular a magnitude local, usa-se a fórmula $M_S = 3{,}30 + log(A \cdot f)$, em que A representa a amplitude máxima da onda registrada por um sismógrafo em micrômetro (μm) e f representa a frequência da onda, em hertz (Hz). Ocorreu um terremoto com amplitude máxima de 2 000 μm e frequência de 0,2 Hz.

Disponível em: http://cejarj.cecierj.edu.br. Acesso em: 1 fev. 2015.

Utilize 0,3 como aproximação para *log* 2.

De acordo com os dados fornecidos, o terremoto ocorrido pode ser descrito como:

a) Pequeno
b) Ligeiro
c) Moderado
d) Grande
e) Extremo

4. (Enem, 2017) Para realizar a viagem dos sonhos, uma pessoa precisava fazer um empréstimo no valor de R$ 5.000,00. Para pagar as prestações, dispõe de, no máximo, R$ 400,00 mensais. Para esse valor de empréstimo, o valor da prestação (P) é calculado em função do número de prestações (n), segundo a fórmula:

$$P = \frac{5000 \times 1{,}013^n \times 0{,}013}{1{,}013^n - 1}$$

Se necessário, utilize 0,005 como aproximação para *log* 1,013; 2,602 como aproximação para *log* 400; 2,525 como aproximação para *log* 335.

De acordo com a fórmula dada, o menor número de parcelas cujos valores não comprometem o limite definido pela pessoa é:

a) 12
b) 14
c) 15
d) 16
e) 17

5. (Enem, 2016 - Adaptada) Em 2011, um terremoto de magnitude 9,0 na escala Richter causou um devastador *tsunami* no Japão, provocando um alerta na usina nuclear de Fukushima. Em 2013, outro terremoto, de magnitude 7,0 na mesma escala, sacudiu Sichuan (sudoeste da China), deixando centenas de mortos e milhares de feridos. A magnitude de um terremoto na escala Richter pode ser calculada por:

$$M = \frac{2}{3} \cdot log\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

sendo E a energia, em kWh liberada pelo terremoto e E_0 uma constante real positiva. Considere que E_1 e E_2 representam as energias liberadas nos terremotos ocorridos no Japão e na China, respectivamente.

Disponível em: www.terra.com.br. Acesso em: 15 ago. 2013.

Qual a relação entre E_1 e E_2?

a) $E_1 = E_2 + 2$

b) $E_1 = 10^2 \cdot E_2$

c) $E_1 = 10^3 \cdot E_2$

d) $E_1 = 10^{9/7} \cdot E_2$

e) $E_1 = \frac{9}{7} \cdot E_2$

Resumo

1. Sejam *a* e *b* números reais positivos com diferente de 1. Chama-se *logaritmo* de *b* na base *a* o *expoente* ao qual *a* deve ser elevado para resultar *b*, ou seja:

$$x = log_a b \Leftrightarrow a^x = b$$

2. Sendo *a* e *b* números reais positivos com *a* diferente de 1:

$$a^{log_a b} = a$$
$$log_a 1 = 0$$
$$log_a a = 1$$

3. Satisfeitas as condições exigidas para a existência dos logaritmos e para a realização das operações necessárias, temos:

P_1: $log_a (P \cdot Q) = log_a P + log_a Q$ (na multiplicação de potências de mesma base, conserva-se a base e adicionam-se os expoentes)	P_2: $log_a \left(\frac{P}{Q}\right) = log_a P - log_a Q$ (na divisão de potências de mesma base, conserva-se a base e subtraem-se os expoentes)	P_3: $log_a P^\alpha = \alpha \cdot log_a P$ (quando se eleva uma potência a um expoente, conserva-se a base e multiplicam-se os expoentes)

4. Satisfeitas as condições exigidas para a existência dos logaritmos:

$$log_P x = \frac{log_a x}{log_a P}$$

(mudança de base)

Resposta comentada

1. b

Tem-se que:

$$Q(t) = Q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{5730}} \Leftrightarrow 2^{\frac{t}{5730}} = \frac{Q_0}{Q(t)} \Leftrightarrow log_2 2^{\frac{t}{5730}} = log_2 \frac{Q_0}{Q(t)} \Leftrightarrow t = 5730 \cdot log_2 \frac{Q_0}{Q(t)}$$

Como a função $log_2 x$ é crescente, o fóssil mais antigo é aquele que tiver a maior razão $r_i = \frac{Q_0}{Q(t)}$. Portanto, sendo $r_1 = \frac{128}{32} = 4$, $r_2 = \frac{256}{8} = 32$, $r_3 = \frac{512}{64} = 8$, $r_4 = \frac{1024}{512} = 2$, e $r_5 = \frac{2048}{128} = 16$, podemos concluir que o fóssil mais antigo é o 2.

2. a

Tem-se que

$$f = \frac{A}{r^B} \Leftrightarrow log(f) = log\frac{A}{r^B} \Leftrightarrow \log(f) = log(A) - log r^B \Leftrightarrow Y = log(A) - B \cdot log(r)$$

$$Y = log(A) - B \cdot X$$

3. c

Sendo

$$\begin{aligned} M_S &= 3,3 + log(2000 \cdot 0,2) \\ &= 3,3 + log(2^2 \cdot 10^2) \\ &= 3,3 + log\,2^2 + log\,10^2 \\ &= 3,3 + 2 \cdot log\,2 + 2 \cdot log\,10 \\ &= 3,3 + 2 \cdot 0,3 + 2 \cdot 1 \\ &= 3,3 + 0,60,6 + 2 \cong 5,9, \end{aligned}$$

podemos concluir que o terremoto ocorrido pode ser descrito como Moderado.

4. d

Calculando:

$P_{Max} = 400$

$$400 = \frac{5000 \times 1,013^n \times 0,013}{1,013^n - 1}$$

$400 \cdot (1,013^n - 1) = 65 \cdot 1,013^n$

$400 \cdot 1,013^n - 400 = 65 \cdot 1,013^n$

$335 \cdot 1,013^n = 400$

$$1,013^n = \frac{400}{335}$$

$n \cdot log\,(1,013) = log\,(400) - log\,(335)$

$n \cdot 0{,}005 = 2{,}602 - 2{,}525$

$n = 15{,}4 \Rightarrow n = 16$ parcelas

5. c

Tem-se qu:e

$$M = \frac{2}{3} \cdot log\left(\frac{E}{E_0}\right) \Leftrightarrow log\left(\frac{E}{E_0}\right) = \frac{3M}{2} \Leftrightarrow \frac{E}{E_0} = 10^{3M/2}$$

$$E = E_0 \times 10^{3M/2}$$

Daí, como $M_1 = 9$ e $M_2 = 7$, vem $E_1 = E_0 \cdot 10^{27/2}$ e $E_2 = E_0 \cdot 10^{21/2}$

Portanto, segue que:

$$E_1 = E_0 \cdot 10^{27/2} = E_0 \cdot 10^{21/2} \cdot 10^{6/2}$$

$$E_1 = E_0 \cdot 10^3$$

No Mundo das Sombras

06

meta

Nesta unidade, veremos uma possível forma de descrever a posição de objetos ou ferramentas que não estão na vertical e nem na horizontal.

objetivo

Esperamos que, ao final desta unidade, você seja capaz de:

- identificar projeções ortogonais de objetos;
- expressar a medida de cada projeção ortogonal em função do ângulo de obliquidade;
- calcular a medida de cada projeção ortogonal;
- aplicar essas medidas na resolução de problemas.

Introdução

Você sabe o que é uma escada de pintor? Na **Figura 6.1**, você verá uma de 2,60 m de comprimento, só que fechada.

Figura 6.1: Escada de pintor fechada.
Autor: Fabio Henrique Souza

Acontece que, para ser utilizada, ela precisa estar aberta (**Figura 6.2**).

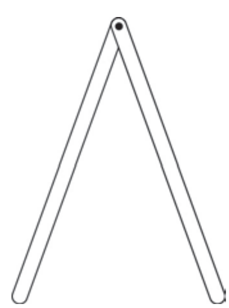


Figura 6.2: Escada de pintor aberta.
Autor: Fabio Henrique Souza

Você acha que, depois de aberta, ela continuará alcançando a mesma altura? De que outro parâmetro essa altura depende?

Em geometria, o que é a projeção de um objeto?

O termo "projeção" tem muitos significados diferentes, dependendo da área do conhecimento em que é utilizado. Na geografia, por exemplo, existem as projeções cartográficas. Mas, e na geometria? Você sabe o que é uma projeção?

lá na plataforma

Projeções cartográficas são tentativas de representar a Terra em planos. Cada uma dessas tentativas se transforma em um tipo de mapa com vantagens e desvantagens. Vá lá na plataforma e conheça os diversos tipos de projeções cartográficas.

Naqueles dias ensolarados, quando você olha para o chão, lá está a sua sombra, certo? Pois é isso! A sombra que você vê é a sua projeção sobre o chão devido aos raios do sol (**Figura 6.3**).

De uma forma geral, quando tratamos de projeções de objetos (ou de pessoas), chamamos:

- o plano em que o objeto está sendo projetado de plano projetivo ou plano de projeção. No exemplo que demos das sombras, o plano de projeção é o chão, mas pode ser uma parede, uma folha de papel etc.;
- os raios que incidem sobre o objeto, criando a projeção, de *raios projetantes*. No exemplo dado, são os raios de sol.

Figura 6.3: Projeção de pessoas caminhando.
Autor: Tom Barrett. Fonte: https://unsplash.com/s/photos/shadows Acesso em 29.01.2020

Portanto, a projeção de um objeto é a sua representação gráfica no plano projetivo, graças à ação dos raios projetantes.

Experimento: faça, agora, seu próprio experimento sobre projeções de objetos!

1. Segure um objeto (não muito grande) acima de uma mesa.

2. Arranje uma lanterna para iluminar esse objeto (no seu celular deve ter uma).

3. Coloque o objeto entre a lanterna e a mesa de modo que a lanterna fique exatamente acima do objeto, ou seja, em uma mesma vertical. O que você pode nos dizer sobre a projeção? Ela tem a mesma forma do objeto? Ela tem o mesmo tamanho do objeto?

4. Afaste o objeto da lanterna aproximando-o da mesa. Em seguida, faça o movimento contrário. Percebe alguma modificação na projeção?

5. Agora, mude a lanterna de posição mantendo o objeto no mesmo lugar. O que você pode concluir sobre a forma e o tamanho da projeção?

Em algum momento, durante o seu experimento, a projeção do objeto ficou, ao mesmo tempo, com a *mesma forma e o mesmo tamanho* do objeto?

Em sua opinião, qual é a condição para que a projeção de um objeto apresente, no plano projetivo, a mesma forma e o mesmo tamanho do objeto simultaneamente?

Projeção ortogonal

Você não vai conseguir isso com a sua lanterna, mas se você puder fazer com que todos os raios projetivos sejam perpendiculares ao plano de projeção, a imagem projetada passará a se chamar projeção **ortogonal**.

ortogonal
Aquilo que incide perpendicularmente ou faz ângulo de 90° com algo.

Vamos voltar à escada de pintor que mencionamos no início desta unidade. Se ela estiver aberta sobre um piso horizontal e próxima a uma parede vertical, como ficarão as projeções ortogonais sobre o chão e sobre a parede? Observe na representação na **Figura 6.4**, onde estão as projeções ortogonais.

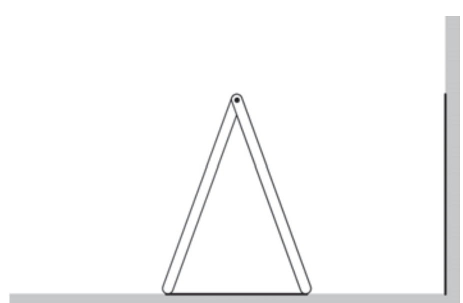


Figura 6.4: Projeções da escada de pintor.
Autor: Fabio Henrique Souza

Aqui fica uma dica: é muito comum que objetos sejam representados por pares de projeções ortogonais que formam 90° entre si. Perceba que é justamente isso que acontece na Figura 6.4: uma projeção ortogonal está na horizontal e a outra, na vertical, formando um ângulo **reto** entre elas.

ângulo Reto

Ângulo de medida igual a 90°.

Identificando as projeções ortogonais de objetos.

Nós, os autores, assim como o seu professor, ficaremos muito felizes se você desenvolver uma habilidade que consideramos muito importante: identificar projeções ortogonais de objetos e formas geométricas diversas. Para que você entenda melhor o que é isso, imagine um disco suspenso sobre um piso horizontal e próximo a uma parede vertical. Quais serão as suas projeções ortogonais sobre o chão e sobre a parede (**Figura 6.5**)?

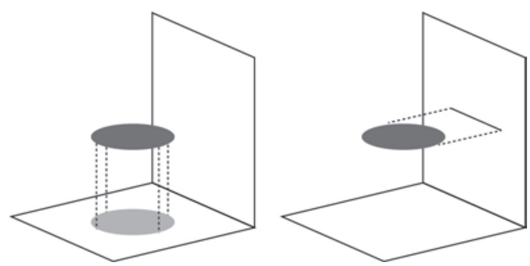


Figura 6.5: Projeções de um disco. Autor: Fabio Henrique Souza

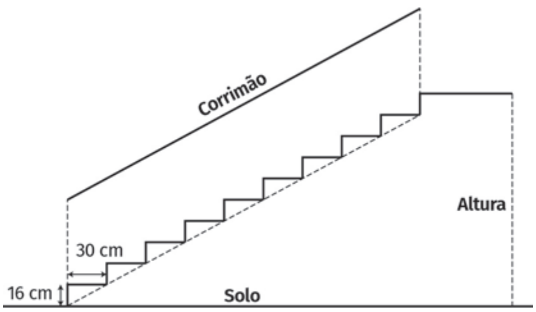
Na **Figura 6.5 (a)**, é possível ver a projeção ortogonal do disco sobre o chão. Ela é uma cópia fiel do disco, ou seja, tem a mesma forma (circular) e o mesmo tamanho. Isso significa que todas as medidas de comprimento são iguais, tais como raio e perímetro, por exemplo.

Na figura **Figura 6.5 (b)**, é possível ver a projeção ortogonal do disco sobre a parede. Note que o formato da sombra é totalmente diferente da forma do disco!

Vamos testar o que vimos até aqui?

Atividade

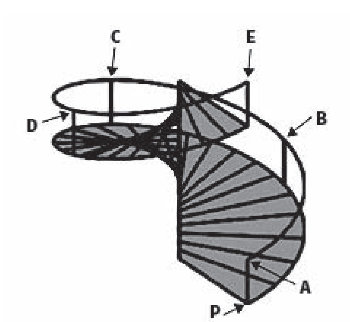
1. Uma arquiteta está planejando uma escada conforme a figura a seguir. Cada degrau deve ter 30cm de profundidade e 16cm de altura.



a) Determine a altura da escada em metros.

b) No projeto, também há a previsão de um corrimão, que será afixado na parede ao lado da escada. Determine o comprimento, em metros, desse corrimão.

2. (ENEM, 2014) O acesso entre os dois andares de uma casa é feito através de uma escada circular (escada caracol), representada na figura. Os cinco pontos *A*, *B*, *C*, *D*, E sobre o corrimão estão igualmente espaçados, e os pontos *P*, *A* e *E* estão em uma mesma reta. Nessa escada, uma pessoa caminha deslizando a mão sobre o corrimão do ponto *A* até o ponto *D*.



A figura que melhor representa a projeção ortogonal sobre o piso da casa (plano), do caminho percorrido pela mão dessa pessoa é:

a) 

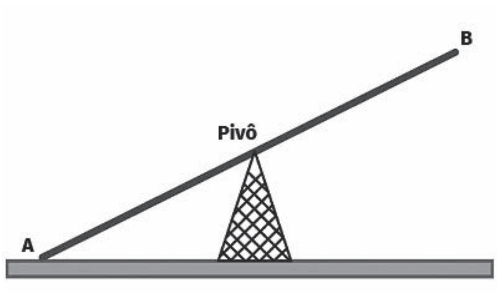
b) 

c) 

d) 

e) 

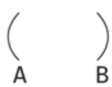
3. (ENEM, 2013) Gangorra é um brinquedo que consiste em uma tábua longa e estreita equilibrada e fixada no seu ponto central (pivô). Nesse brinquedo, duas pessoas sentam-se nas extremidades e, alternadamente, impulsionam-se para cima, fazendo descer a extremidade oposta, realizando, assim, o movimento da gangorra. Considere a gangorra representada na figura, em que os pontos *A* e *B* são equidistantes do pivô:



A projeção ortogonal da trajetória dos pontos *A* e *B*, sobre o plano do chão da gangorra, quando esta se encontra em movimento, é:

a) 

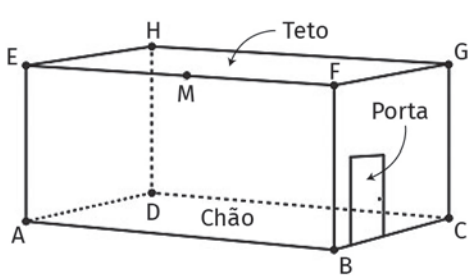
b) 

c) 

d) 

e) 

4. (ENEM – PPL, 2017) Uma lagartixa está no interior de um quarto e começa a se deslocar. Esse quarto, apresentando o formato de um paralelepípedo retangular, é representado pela figura.

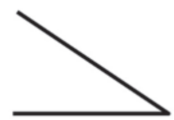


A lagartixa parte do ponto e vai até o ponto . A seguir, de *A* ela se desloca, pela parede, até o ponto *M*, que é o ponto médio do segmento *EF*. Finalmente, pelo teto, ela vai do ponto *M* até o ponto *H*. Considere que todos esses deslocamentos foram feitos pelo caminho de menor distância entre os respectivos pontos envolvidos.

A projeção ortogonal desses deslocamentos no plano que contém o chão do quarto é dada por:

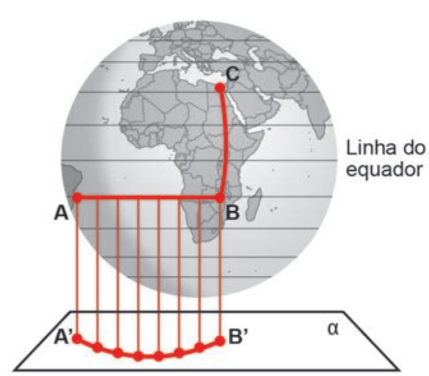
a)

b) 

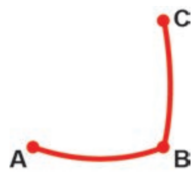
c) 

d) 

5. (ENEM, 2016) A figura representa o globo terrestre e nela estão marcados os pontos *A*, *B*, e *C*. Os pontos *A* e *B* estão localizados sobre um mesmo paralelo, e os pontos e , sobre um mesmo meridiano. É traçado um caminho do ponto *A* até *C*, pela superfície do globo, passando por *B*, de forma que o trecho de *A* até *B* se dê sobre o paralelo que passa por *A* e *B* e, o trecho de *B* até *C* se dê sobre o meridiano que passa por *B* e *C*. Considere que o plano é paralelo à linha do equador na figura.



A projeção ortogonal, no plano , do caminho traçado no globo pode ser representada por:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

6. (ENEM, 2ª aplicação – 2016) Um grupo de escoteiros mirins, numa atividade num parque da cidade onde moram, montou uma barraca conforme a foto da Figura 1. A Figura 2 mostra o esquema da estrutura dessa barraca, em forma de um prisma reto em que foram usadas hastes metálicas.

Figura 1

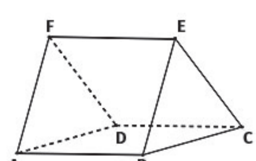
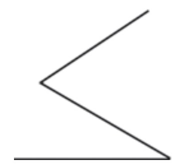


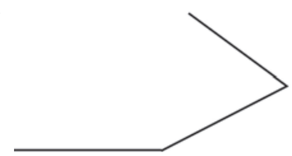
Figura 2

Após a armação das hastes, um dos escoteiros observou um inseto deslocar-se sobre elas, partindo do vértice em direção ao vértice , deste em direção ao vértice e, finalmente, fez o trajeto do vértice ao . Considere que todos esses deslocamentos foram feitos pelo caminho de menor distância entre os pontos. A projeção do deslocamento do inseto no plano que contém a base *ABCD* é dada por:

a) 

b) 

c) 

d) 

e)

7. (ENEM, 2019) Um grupo de países criou uma instituição responsável por organizar o Programa Internacional de Nivelamento de Estudos (PINE) com o objetivo de melhorar os índices mundiais de educação. Em sua sede foi construída uma escultura suspensa, com a logomarca oficial do programa, em três dimensões, que é formada por suas iniciais, conforme mostrada na figura.

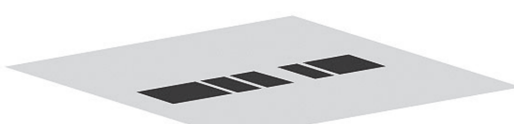
Essa escultura está suspensa por cabos de aço, de maneira que o espaçamento entre letras adjacentes é o mesmo, todas têm igual espessura e ficam dispostas em posição ortogonal ao solo, como ilustrado a seguir.

Ao meio-dia, com o sol a pino, as letras que formam essa escultura projetam ortogonalmente suas sombras sobre o solo.

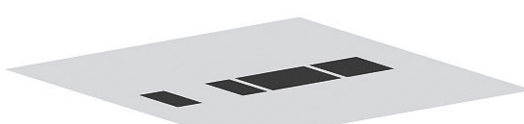
A sombra projetada no solo é

a)

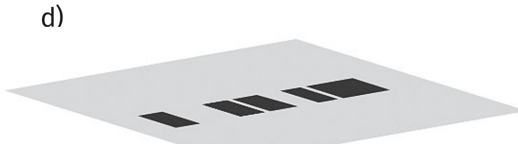
b)



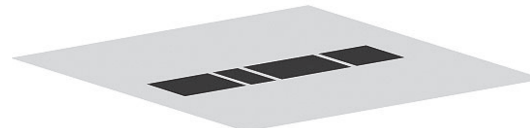
c)



d)



e)



8. (ENEM, PPL – 2018) Uma torneira do tipo 1/4 de volta é mais econômica, já que seu registro abre e fecha bem mais rapidamente do que o de uma torneira comum. A figura de uma torneira do tipo 1/4 de volta tem um ponto preto marcado na extremidade da haste de seu registro, que se encontra na posição fechado, e, para abri-lo completamente, é necessário girar a haste 1/4 de volta no sentido anti-horário. Considere que a haste esteja paralela ao plano da parede.

Disponível em: www.furkin.com.br. Acesso em: 13 nov. 2014.

Resumo

- O plano em que o objeto está sendo projetado de *plano projetivo* ou *plano de projeção*.
- Os raios que incidem sobre o objeto, criando a projeção, de *raios projetantes*.
- A projeção de um objeto é a sua representação gráfica no plano projetivo, graças à ação dos raios projetantes.
- Se todos os raios projetivos forem perpendiculares ao plano de projeção, a imagem projetada passará a se chamar projeção *ortogonal*.

Qual é a razão? Trigonometria no triângulo retângulo

07

metas

Articular conhecimentos matemáticos, especialmente as razões trigonométricas nos triângulos retângulos, ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, dentre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da matemática; utilizar as razões trigonométricas para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

objetivos

Esperamos que, ao final desta unidade, você seja capaz de:

- identificar as razões trigonométricas e utilizá-las na resolução de problemas, em contextos diversos.

Introdução

A trigonometria é um dos mais antigos ramos da matemática. Surgida na antiguidade, usada para medir ângulos e distâncias, foi uma importante ferramenta para a localização de pontos sobre a superfície terrestre e a resolução de diversos problemas oriundos das necessidades humanas.

Hoje, é utilizada em várias situações práticas, ligadas à comunicação e aos transportes, por exemplo, e teóricas, envolvendo não somente problemas internos da matemática, mas também de outras disciplinas cientificas e tecnológicas que envolvem fenômenos periódicos, como eletricidade, termodinâmica, óptica, diagnose médica, dentre outros.

Razões trigonométricas

A definição usual de seno, cosseno e tangente assume que se tenha um ângulo agudo, que, um ponto P se fixe sobre um de seus lados e, sobre o outro, à projeção ortogonal (lembra-se da Unidade 6?) desse ponto, à qual chamaremos de Q, conforme mostrado na figura seguinte.

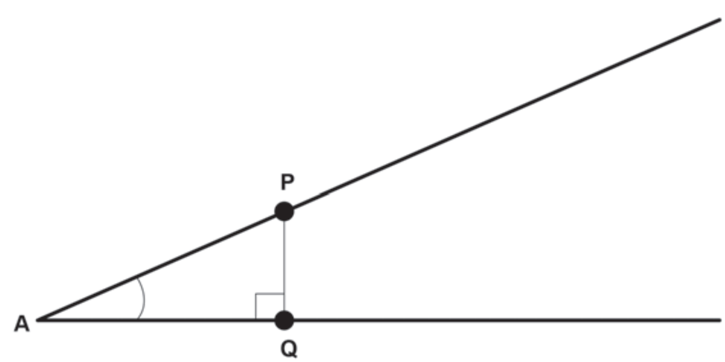


Figura 7.1

Assim definem-se:

1º) o *seno* do ângulo agudo $\hat{A}$ é a razão entre as medidas do cateto oposto a $\hat{A}$ (PQ) e da hipotenusa (AP);

2º) o *cosseno* do ângulo agudo $\hat{A}$ é a razão entre as medidas do cateto adjacente a $\hat{A}$ (AQ) e da hipotenusa (AP);

3º) a *tangente* do ângulo agudo $\hat{A}$ é a razão entre as medidas dos catetos oposto (PQ) e adjacente (AQ) a $\hat{A}$.

Em símbolos:

$$sen(\hat{A}) = \frac{\overline{PQ}}{\overline{AP}} \qquad cos(\hat{A}) = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}} \qquad tg(\hat{A}) = \frac{\overline{PQ}}{\overline{AQ}}$$

Uma questão que se coloca e cuja resposta se torna imprescindível para a validação dessa definição é a seguinte: as razões obtidas independem da posição onde se fixa o ponto *P*, ou seja, se o ponto *P* for tomado arbitrariamente sobre o lado, as razões permanecerão inalteradas?

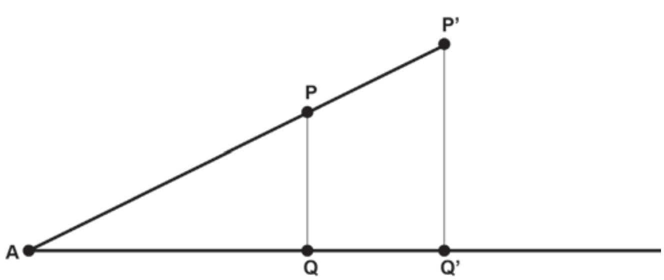


Figura 7.2

Em decorrência da semelhança dos triângulos *APQ* e *AQ'L'* temos:

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{AQ'}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{P'Q'}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AP'}}$$

Donde vem que:

$$sen(\hat{A}) = \frac{\overline{PQ}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{P'Q'}}{\overline{AP'}} \qquad cos(\hat{A}) = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AQ'}}{\overline{AP'}} \qquad tg(\hat{A}) = \frac{\overline{PQ}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{P'Q'}}{\overline{AQ'}}$$

ou seja, as definições de seno, de cosseno e de tangente independem da posição em que se fixa o ponto *P*. Destarte, *as razões trigonométricas são uma consequência direta e específica da semelhança de triângulos.*

>> saiba mais

Dois triângulos são semelhantes se e somente se seus três ângulos são congruentes (na mesma ordem) e seus lados homólogos (aqueles que são opostos a ângulos congruentes) são proporcionais.

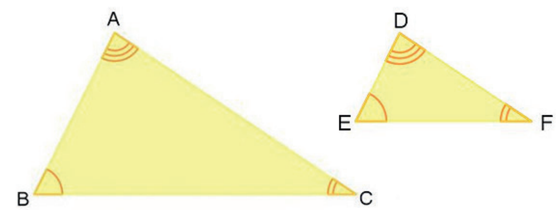


Figura 7.3

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF \rightarrow \begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{D} \\ \hat{B} \equiv \hat{E} \\ \hat{C} \equiv \hat{F} \end{cases} \rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = k$$

A razão entre dois segmentos homólogos de mesmo nome (k) é chamada de razão de semelhança.

lá na plataforma

Na Unidade 7 de nosso ambiente virtual, acesse o vídeo que aborda o que estudamos até aqui.

Uma consequência direta dessa relação é que todo o estudo das razões trigonométricas pode ser feito em um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede uma unidade de comprimento. Essa consequência permite a obtenção imediata de relações muito importantes para a trigonometria, mostradas a seguir.

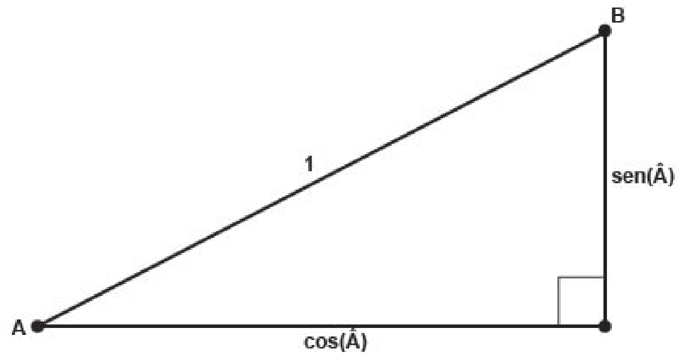


Figura 7.4

1ª) Relação fundamental da Trigonometria

$$sen^2(\hat{A}) + \cos^2(\hat{A}) = 1$$

2ª) Relação da tangente

$$tg\,(\hat{A}) + = \frac{sen\,(\hat{A})}{cos\,(\hat{A})}$$

3ª) Ângulos complementares

$$A + B = 90^0 \Rightarrow \begin{cases} sen\,(\hat{A}) = cos\,(\hat{B}) \\ sen\,(\hat{B}) = cos\,(\hat{A}) \end{cases} \text{ e } \; tg\,(\hat{A}) \cdot tg\,(\hat{B}) = 1$$

Ângulos notáveis (30º, 45º e 60º)

Tomemos um triângulo equilátero de lado unitário.

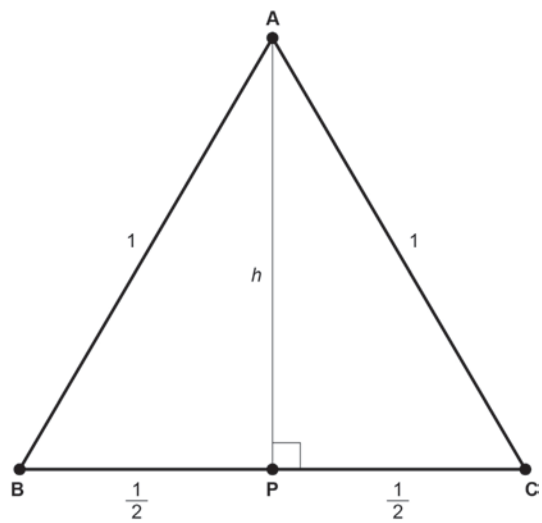


Figura 7.5

Aplicando o teorema de Pitágoras, encontramos $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Além disso, considerando o triângulo *ABP*, cujos ângulos internos têm medidas 30º, 60º e 90º, temos:

$$sen\,(30^0) = cos\,(60^0) = \frac{1}{2} \quad e \quad sen\,(30^0) = cos\,(60^0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\,(30^0) = \frac{sen\,(30^0)}{cos\,(30^0)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad e \quad tg\,(60^0) = \frac{1}{tg\,(30^0)} = \sqrt{3}$$

Tomemos, agora, um quadrado de diagonal unitária.

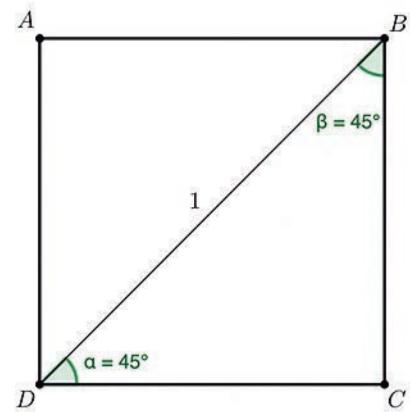


Figura 7.6

Aplicando o Teorema de Pitágoras, encontramos que o lado do quadrado mede $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Além disso, considerando o triângulo *ABC*, cujos ângulos internos têm medidas 45º, 45º e 90º, temos:

$$sen\,(30^0) = cos\,(60^0) = \frac{1}{2} \quad e \quad sen\,(30^0) = cos\,(60^0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\,(30^0) = \frac{sen\,(30^0)}{cos\,(30^0)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad e \quad tg\,(60^0) = \frac{1}{tg\,(30^0)} = \sqrt{3}$$

Cumpre lembrar que uma das principais finalidades das razões trigonométricas é a obtenção de distâncias inacessíveis, como a altura de um edifício ou de um morro, já que não podem ser medidas. Igualmente, para se resolver problemas que envolvem ângulos cujas medidas são 30º, 45º ou 60º não há necessidade de se utilizar as razões trigonométricas. Com o uso da calculadora não se deve temer ângulos cujas medidas sejam 37º ou 83º, por exemplo.

lá na plataforma

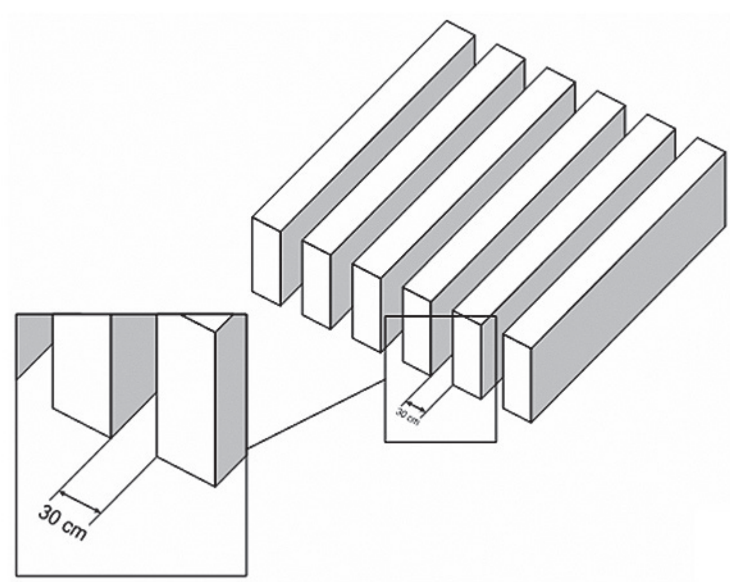
Na Unidade 7 de nosso ambiente virtual, acesse o vídeo que aborda o que estudamos até aqui.

Razões trigonométricas nas provas de vestibulares e Enem

As razões trigonométricas são relações particulares estabelecidas entre os ângulos e a medida dos lados do triângulo. Elas ajudam a resolver diversos problemas que caem no Enem, nos Vestibulares e no Encceja.

QUESTÃO 1

(Enem, 2020) *Pergolado* é o nome que se dá a um tipo de cobertura projetada por arquitetos, comumente em praças e jardins, para criar um ambiente para pessoas ou plantas, no qual há uma quebra da quantidade de luz, dependendo da posição do sol. É feito como um estrado de vigas iguais, postas paralelas e perfeitamente em fila, como ilustra a figura.



Um arquiteto projeta um pergolado com vãos de 30 cm de distância entre suas vigas, de modo que, no solstício de verão, a trajetória do sol durante o dia seja realizada num plano perpendicular à direção das vigas, e que o sol da tarde, no momento em que seus raios fizerem 30º com a posição a pino, gere a metade da luz que passa no pergolado ao meio-dia.

Para atender à proposta do projeto elaborado pelo arquiteto, as vigas do pergolado devem ser construídas de maneira que a altura, em centímetros, seja a mais próxima possível de:

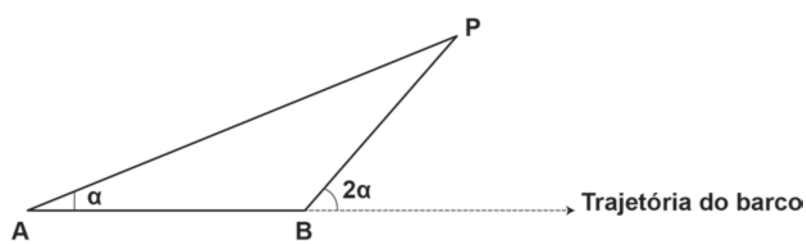
a) 9
b) 15
c) 26
d) 52
e) 60

lá na plataforma

Acesse a plataforma e assista a um vídeo com a resolução comentada da Questão 1.

QUESTÃO 2

(Enem, 2011) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto *A*, mediu o ângulo visual *a* fazendo mira em um ponto fixo *P* da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto *B*, de modo que fosse possível ver o mesmo ponto *P* da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação:

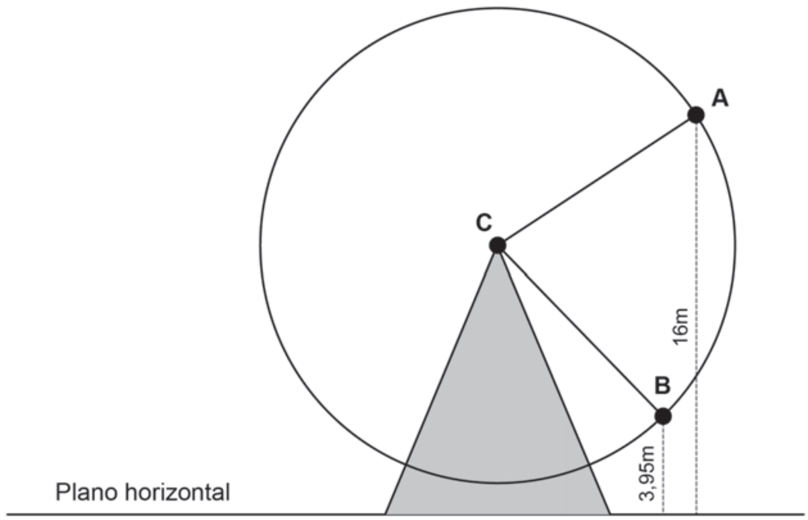


Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30^{o}$ e, ao chegar ao ponto *B*, verificou que o barco havia percorrido a distância *AB* = 2000m. Com base nesses dados e mantendo a trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo será:

a) 1000m
b) $1000\sqrt{3}$ m
c) $2000\frac{\sqrt{3}}{3}$ m
d) 2000 m
e) $2000\sqrt{3}$ m

QUESTÃO 3

(Uerj, 2016) O raio de uma roda gigante de centro *C* mede $\overline{CA} = \overline{CB} = 10$ m. Do centro *C* ao plano horizontal do chão, há uma distância de 11m Os pontos *A* e *B*, situados no mesmo plano vertical, *ABC* pertencem à circunferência dessa roda e distam, respectivamente, 16m e 3,95m do plano do chão. Observe o esquema e a tabela:



θ (graus)	sen(θ)
15º	0,259
30º	0,500
45º	0,707
60º	0,866

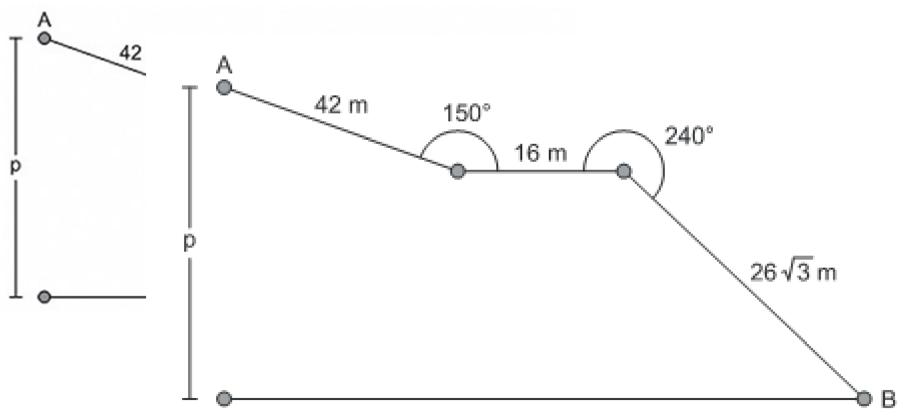
A medida, em graus, mais próxima do menor ângulo corresponde a:

a) 45º
b) 60º
c) 75º
d) 105⁰

QUESTÃO 4

(Ufsc, 2022 - Adaptada) Analise a afirmação seguinte e, em seguida, diga se ela é falsa ou verdadeira.

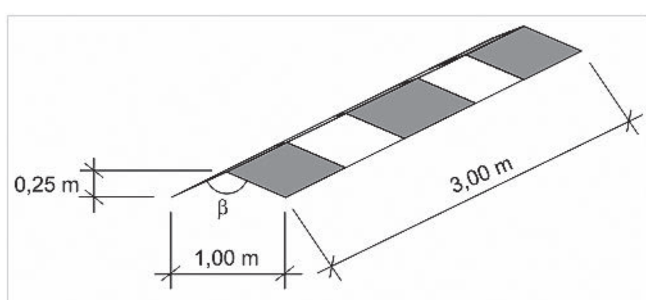
Para acessar a garagem subterrânea de um *shopping*, é necessário sair do ponto *A* e chegar ao ponto *B*, conforme indica a figura a seguir.



Se a garagem fica situada no ponto *B*, na linha do horizonte, então a profundidade *p* é maior do que 60m.

QUESTÃO 5

(Unesp, 2021) Na aviação, o perímetro da região que define a fase final da manobra de aproximação para um helicóptero pairar ou pousar pode ser definido por meio de sinalizadores uniformemente espaçados. As características dimensionais desses sinalizadores de perímetro estão indicadas na figura a seguir.



(Agência Nacional de Aviação Civil. RBAC, nº 155. Adaptado.)

Uma empresa contratada para produzir esse sinalizador está definindo os parâmetros para a produção em escala do artefato. Para tanto, é necessário conhecer o valor do ângulo β de abertura do sinalizador, indicado na figura, respeitadas as medidas nela apresentadas.

Considere a tabela trigonométrica a seguir.

Ângulo φ	14,5°	26,6°	30,0°	60,0°	63,4°	72,9°
sen φ	0,25	0,45	0,50	0,87	0,89	0,96
cos φ	0,97	0,89	0,87	0,50	0,45	0,29
tg φ	0,26	0,50	0,58	1,73	2,00	3,25

De acordo com a tabela, o ângulo β necessário para a produção do sinalizador é igual a:

a) 126,8°
b) 120,0°
c) 116,5°
d) 150,0°
e) 107,1°

Resumo

1. Definem-se:

- o *seno* do ângulo agudo *Â*, como sendo a razão entre as medidas do cateto oposto a *Â* e da hipotenusa;
- o *cosseno* do ângulo agudo *Â* pela razão entre as medidas do cateto adjacente a *Â* e da hipotenusa;
- a *tangente* do ângulo agudo *Â* como a razão entre as medidas dos catetos oposto a *Â* e adjacente a *Â*.

2. Sendo α e β ângulos agudos, temos:

- relação fundamental da trigonometria

$$sen^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$$

- relação da tangente

$$tg(\alpha)=\frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

- ângulos complementares

$$\alpha+\beta=90^0\begin{cases} sen(\alpha)=\cos(\beta)\\ sen(\beta)=\cos(\alpha)\end{cases} \; e \;\; tg(\alpha)\cdot tg(\beta)=1$$

3. Para os ângulos notáveis 30º, 45º e 60º temos:

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Perímetro e áreas

08

meta

Introduzir conhecimentos matemáticos relacionados à geometria, em especial o estudo da área e do perímetro de polígonos, além de noções de transformações isométricas e homotéticas, e ladrilhamento de plano.

objetivos

Esperamos que, ao final desta unidade, você seja capaz de:

- empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície e deduzir expressões de cálculo para aplicação em situações reais;
- aplicar as noções de congruência e semelhança para a resolução de problemas que envolvem triângulos;
- calcular perímetros e áreas;
- representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.

Introdução

De maneira ampla, a geometria se origina a partir das necessidades e das observações do homem. Podemos dizer que ela estuda a medida da terra.

euclidiana

Geometria nomeada em homenagem ao grego Euclides (nascido no século III a.C.), o primeiro matemático a apresentar a geometria de forma sistematizada em seu famoso livro "Os Elementos".

Segundo algumas referências históricas, a geometria começou no Egito antigo, com a medição de terrenos. E pode parecer estranho, mas existem muitas geometrias (É isso mesmo! No plural!). A que vamos estudar é chamada **euclidiana**.

 # lá na plataforma

Va à plataforma e assista ao vídeo Geometria no cotidiano, para verificar como a geometria está presente em nossa vida.

Perímetro

Muito provavelmente, você já ouviu falar na palavra perímetro. Talvez, até já tenha estudado sobre isso em aulas de matemática. Quase sempre, os alunos aprendem que perímetro é *a soma dos comprimentos dos lados de um polígono*. Sempre que um estudante me diz isso, eu peço para que imagine uma lagoa.

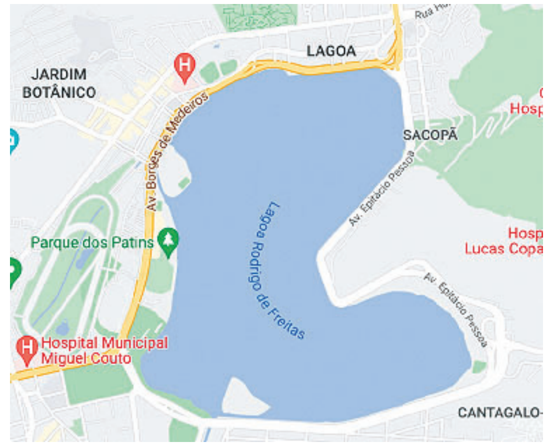


Figura 8.1: Lagoa Rodrigo de Freitas, no Rio de Janeiro.

Em seguida, que se imagine caminhando ao redor dessa lagoa. Ao completar a volta, tal estudante teria percorrido o *perímetro* dessa lagoa. Finalmente, eu pergunto: onde estão os lados da lagoa?

A resposta é que a lagoa não tem lados. A ideia de que o perímetro é a soma dos lados só está correta se estamos falando de polígonos. Se a figura for uma circunferência, essa ideia não se sustenta. Melhor será pensar no perímetro como o *comprimento do contorno*.

Entendido isso, vamos aprender como calcular perímetros das figuras mais comuns no estudo elementar da geometria euclidiana.

Comprimento da circunferência e comprimento de um arco de circunferência.

Inicialmente, busquemos compreender o que é o *comprimento de uma curva limitada*, ou seja, seu perímetro.

- Se a curva for um segmento de reta, seu comprimento será a distância entre suas extremidades.

- Se a curva for composta por segmentos de reta (curva poligonal), medir o seu comprimento consiste em medir cada segmento que a compõe e, em seguida, adicionar os comprimentos encontrados.

Porém, se a curva não for poligonal, há uma forma de se obter uma aproximação de seu comprimento.

Considere que essa curva esteja desenhada em uma placa de isopor. Cubra-a, da melhor forma possível, acompanhando seu contorno, com um pedaço de barbante. Em seguida, estique o barbante de modo a fazê-lo tomar a forma de um segmento de reta (chamamos esta ação de *retificação* do barbante). Dessa forma, poderemos determinar o seu comprimento. O valor obtido é uma aproximação para o comprimento da curva.

Um experimento interessante de se fazer é utilizar o procedimento que descrevemos acima para determinar o comprimento de circunferências com diâmetros variados e, em seguida, construir uma tabela, como a **Tabela 8.1**, com três colunas. A primeira, indicando o valor encontrado no comprimento medido pelo barbante (circunferência), a segunda, com o diâmetro da respectiva circunferência, e uma terceira, com o quociente obtido pela divisão de uma medida pela outra. Teste em casa e veja o que você descobre.

Tabela 8.1: Experiência utilizando circunferências

Circunferência	Diâmetro	Circunferência / diâmetro

Ao final desse experimento, você vai observar que na terceira coluna os valores obtidos serão bem próximos de 3. Esses valores são aproximações para o número π (que é o valor correto para toda a 3ª coluna). Sendo assim, se r representa o raio da circunferência, podemos dizer que:

$$\frac{\textit{Comprimento da Circunferência}}{2r} = \pi$$
$$\textit{Comprimento da Circunferência} = 2\pi r$$

Vale dizer que é usual representar o perímetro das figuras planas com o símbolo *2p*. Consequentemente, *p* é utilizado para o semiperímetro.

lá na plataforma

.Quer observar melhor este experimento do porquê de π? Vá à plataforma e assista ao vídeo.

Outro experimento que pode ser bastante útil consiste em desenhar várias circunferências concêntricas (**Figura 8.2**), de modo que:

concêntrico

Circunferência com centros no mesmo ponto.

- o raio da segunda circunferência seja igual ao dobro do raio da primeira;
- o raio da terceira circunferência seja igual ao triplo do raio da primeira;
- o raio da quarta circunferência seja igual ao quádruplo do raio da primeira; e assim sucessivamente.

Em seguida, trace duas semirretas com origem no centro comum dessas circunferências, de modo a obter um ângulo de medida qualquer.

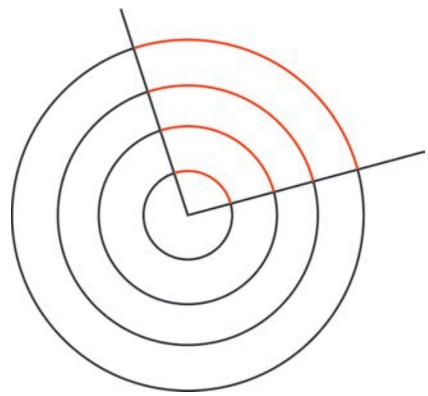


Figura 8.2: 2º Experimento proposto com circunferências.

Usando o processo de retificação do barbante, determine os comprimentos dos arcos obtidos, anotando os resultados, os quais deverão ser:

- o segundo igual ao dobro do primeiro;
- o terceiro igual ao triplo do primeiro;
- e assim sucessivamente.

Observando os resultados deste experimento, podemos concluir que o comprimento de um arco (c) é diretamente proporcional à medida do raio (*r*), ou seja:

$$c = k \cdot r$$

Note que o *k*, na expressão acima, é um número real e positivo que faz o papel de fator de proporcionalidade.

Continuando nosso experimento, desenhe uma circunferência de diâmetro qualquer (de preferência não muito pequeno). Utilizando um transferidor:

- assinale nela um arco de medida 10º e meça seu comprimento utilizando o método de retificação do barbante;
- repita o processo para um arco de medida 20º e meça seu comprimento utilizando a retificação do barbante;
- repita o processo para o arco de 30º;
- repita o processo para o arco de 40º.

Analisando os valores dos comprimentos dos arcos obtidos, vê-se que dobrando, triplicando, quadruplicando a medida do arco, o seu comprimento dobra, triplica, quadruplica. Assim, o comprimento de um arco (*c*) é diretamente proporcional à medida do arco (α), ou seja:

$$c = \lambda \cdot \alpha$$

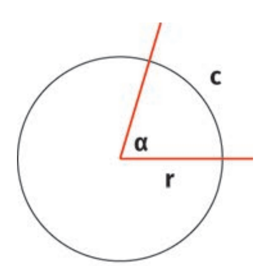
Note que o λ, na expressão acima, é um número real e positivo que faz o papel de fator de proporcionalidade.

Portanto, o comprimento de um arco (*c*) é diretamente proporcional ao produto da medida do arco que o define e o raio da circunferência que o contém. Em símbolos, sendo *p* uma constante real positiva:

$$c = p \cdot \alpha \cdot r$$

Para p = 1, temos a medida do arco (α) como sendo o radiano, ou seja (**Figura 8.3**):

$$c = \alpha \cdot r \rightarrow \alpha = \frac{c}{r}$$



$$\alpha \text{ radianos} = \frac{c}{r}$$

Figura 8.3: O que é o radiano.

A partir dessa definição, tomando *c* como o comprimento da circunferência, temos que:

$$\alpha = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ radianos}$$

Mas, em uma circunferência, $\alpha = 360°$. Assim, equivale a 2π radianos. Para compreender melhor essas regras, vejamos o exemplo a seguir:

A **Figura 8.4** ilustra duas circunferências concêntricas. A distância do ponto A ao ponto B corresponde ao diâmetro da maior circunferência e mede 14cm. A distância do ponto C ao ponto D corresponde ao diâmetro da menor circunferência e mede 8cm. Um ponto móvel descreve a trajetória ABCD indicada em vermelho.

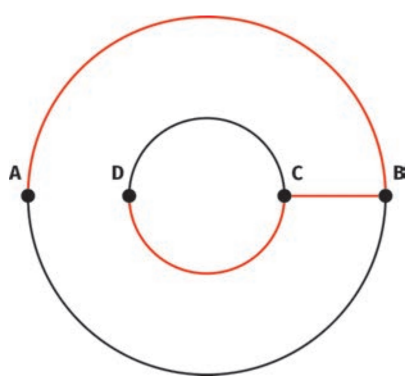


Figura 8.4: Percurso ABCD.

Considerando-se 3 como uma aproximação para π, qual é a distância total percorrida pelo ponto móvel nessa trajetória?

Resolvendo:

Conforme o enunciado, "a distância do ponto A ao ponto B corresponde ao diâmetro da maior circunferência e mede 14cm" (**Figura 8.5**). Tenha em mente que distâncias entre pontos sempre são tiradas em *linha_reta*.

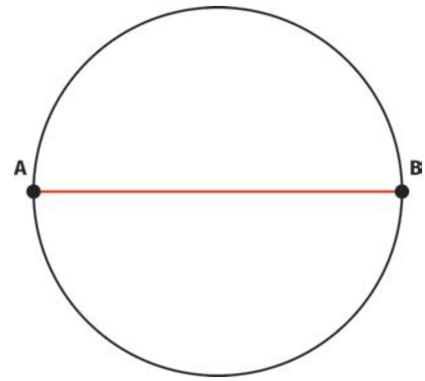


Figura 8.5: Diâmetro da circunferência maior.

Essa distância é denominada *segmento* $\overline{AB}$ e, segundo o enunciado, vale 14cm. Logo, o raio dessa circunferência mede 7cm.

Podemos assim calcular o comprimento (perímetro) da circunferência.

$$C_1 = 2\pi \times 7 = 14\pi \text{ cm}$$

Sendo assim, o trecho destacado na **figura 8.6**, NÃO corresponde à distância entre os pontos A e B, mas configura um arco, denominado *arco AB*, e seu comprimento é a metade do comprimento da circunferência.

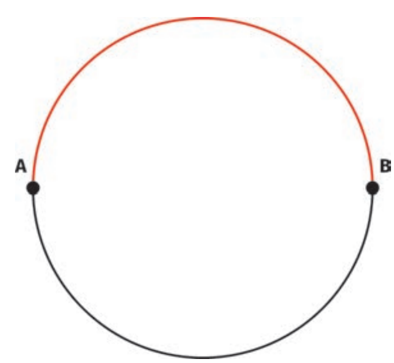


Figura 8.6: Semicircunferência.

Comprimento do arco $\widehat{AB} = 7\pi$ cm = 21 cm (já que a aproximação sugerida para π é 3.

Vamos repetir o procedimento para a circunferência menor. Se a distância *CD* vale 8 cm, o raio dessa segunda circunferência vale 4 cm. Assim, seu perímetro vale $C_2 = 2\pi \times 4 = 8\pi$ cm. Consequentemente, o comprimento do arco $\overset{\frown}{CD} = 4\pi$ cm = 12 cm.

Falta contabilizar o trecho retilíneo CB, que, na verdade, é a diferença entre os raios. Sendo assim, o valor de CB é de 3cm (**Figura 8.7**).

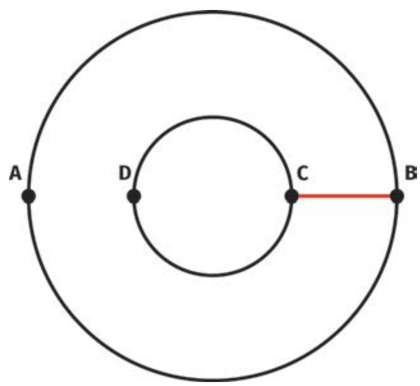


Figura 8.4: Trecho retilíneo do percurso.

Portanto, o comprimento da trajetória descrita pelo ponto é 21 + 12 + 3 ≈ 36cm.

Perímetro de polígonos.

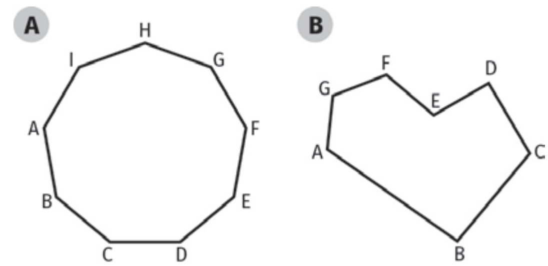
Consideremos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, com $n \geq 3$, pontos distintos de um plano. Considere ainda os segmentos A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 atendendo às seguintes condições.

- Nenhum par de segmentos se auto intersecciona, a não ser em um extremo.
- Nenhum par de segmentos com extremo comum pertence a mesma reta.

A reunião desses segmentos recebe o nome de *polígono*, com vértices $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ e lados A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1.

Um polígono é uma linha poligonal fechada que determina no plano duas regiões: o interior do polígono, cuja fronteira é o próprio polígono, e outra não limitada.

Se o interior de um polígono for uma região convexa do plano, diremos que o polígono é *convexo* (**Figura 8.8 (a)**).



Convexo

$2p = \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FG}+\overline{GH}+\overline{HI}+\overline{IA}$

Não convexo

$2p = \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FG}+\overline{GA}$

Figura 8.8: Exemplos de polígonos convexo e não convexo.

A nomenclatura de um polígono varia de acordo com a quantidade de lados (**Tabela 8.2**).

Tabela 8.2: Nomenclatura dos pentágonos de acordo com seu número de lados

Número de lados	Nome do polígono
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octágono (ou octógono)
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Icoságono

Vamos compreender mais melhor sobre o perímetro de polígonos acompanhando os exemplos a seguir.

Exemplo 1:

Um triângulo ABC possui lados medindo 6cm, 9cm e 10cm. Qual é o seu perímetro?

Solução:

O perímetro de um polígono é dado pela soma dos comprimentos dos seus lados. Dado que o triângulo é um polígono, seu perímetro será 6cm + 9cm + 10cm = 25cm.

Exemplo 2:

Um triângulo retângulo possui catetos medindo 5dm e 12dm. Qual é o seu perímetro?

Solução:

Se o triângulo é retângulo, podemos utilizar o Teorema de Pitágoras para encontrar a medida da hipotenusa.

$$h^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$$

$$h = 13\text{dm}$$

De modo que o perímetro do triângulo mede 5 + 12 + 13 = 30dm.

Exemplo 3:

Qual é o perímetro de um triângulo equilátero cuja altura mede $6\sqrt{3}$ mm?

Solução:

Como ABC é um triângulo equilátero, os lados possuem as mesmas medidas. Aqui, tomamos a liberdade de representar tais medidas por *2x* (**Figura 8.9**).

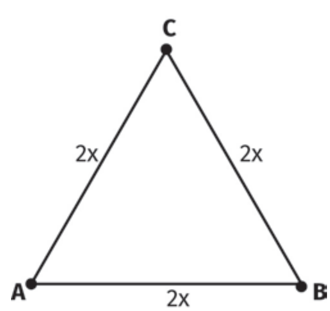


Figura 8.9: Triângulo equilátero.

Ao traçarmos a altura CD (**Figura 8.10**), dividimos o lado AB ao meio e criamos um triângulo retângulo ACD. Aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$(2x)^2 = x^2 + (\,6\sqrt{3}\,)$$
$$4x^2 = x^2 - 108$$
$$x^2 = 36$$
$$x = 6$$

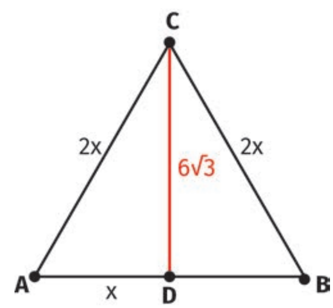


Figura 8.10: Triângulo equilátero com altura.

Conclui-se que os lados do triângulo medem $2x$ = 12. Logo, o perímetro do triângulo vale 36mm.

Exemplo 4:

A **Figura 8.11** ilustra um trapézio isósceles ABCD cujas bases medem 2cm e 8cm e cuja altura mede 4cm. Calcule o seu perímetro.

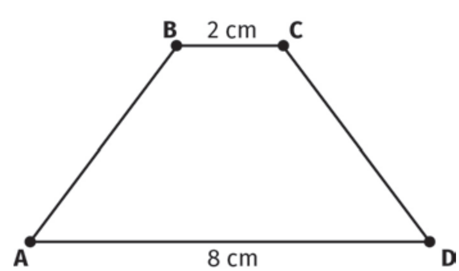


Figura 8.11: Trapézio isósceles.

Solução:

Um trapézio é dito isósceles quando seus lados não paralelos são iguais. Por essa razão, ao traçarmos as alturas a partir de B e a partir de C, criamos 2 triângulos retângulos idênticos (**Figura 8.12**). Note que EF tem o mesmo tamanho que BC. Então AE = DF = 3cm.

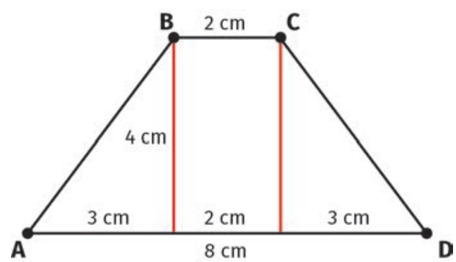


Figura 8.12: Trapézio isósceles dividido pelas alturas.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABE, descobre-se que AB mede 5cm. Assim, o perímetro do trapézio é 2 + 5 + 8 + 5 = 20cm.

Exemplo 5:

A **Figura 8.13** ilustra um quadrado ABCD cujas diagonais medem $6\sqrt{2}$ m. Qual o perímetro do quadrado?

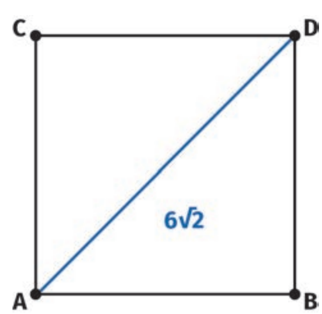


Figura 8.13: Quadrado com uma de suas diagonais.

ABC é um triângulo retângulo e isósceles (porque AB = BC). Assim:

$$x^2 + x^2 = (6\sqrt{2})^2 \rightarrow 2x^2 = 72 \rightarrow x = 6 \text{ m}$$

Portanto, o perímetro é 4 x 6 = 24m.

hexágono regular

Polígono que possui todos os ângulos internos com mesma medida (equiângulo) e todos os lados congruentes (equilátero).

Exemplo 6:

Considere um **hexágono regular** em que a distância do seu centro a um de seus lados mede $7\sqrt{3}$ cm (**Figura 8.14**). Quanto vale o seu perímetro?

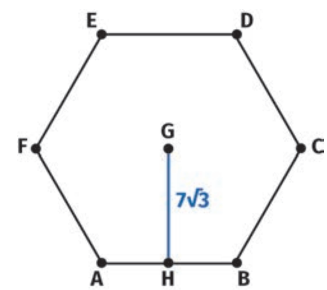


Figura 8.14: Hexágono regular.

A soma dos ângulos internos de um polígono convexo de *n* lados pode ser calculada pela relação:

$$S_i = 180 \cdot (n - 2)$$

Se o polígono convexo de *n* lados for *regular*, todos os ângulos internos terão a mesma medida. Portanto, a medida de cada um pode ser obtida dividindo-se a sua soma pela quantidade de ângulos (que também é *n*).

$$a_i = \frac{180 \cdot (n-2)}{n}$$

No caso particular do hexágono regular:

$$S_i = 180 \cdot (6-2) = 720^o$$
$$a_i = \frac{180 \cdot (6-2)}{6} = 120$$

Considere o triângulo *ABG*. O segmento $\overline{AG}$ divide o ângulo interno $F\hat{A}B$ ao meio. De modo análogo, o segmento $\overline{BG}$ divide o ângulo interno $C\hat{B}A$ ao meio. Logo, $G\hat{B}A = G\hat{A}B = 60^o$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, conclui-se que $B\hat{G}A = 60^o$. Então, o triângulo *ABG* é equilátero e a altura *GH* divide o lado *AB* ao meio. Repetiremos, agora, o procedimento utilizado no *Exemplo 3*.

Aplicando-se o Teorema de Pitágoras no triângulo *AGH*, tem-se:

$$AG^2 = AH^2 + (7\sqrt{3})^2$$
$$AB^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + (7\sqrt{3})^2$$
$$AB^2 = \frac{AB^2}{4} + 147$$
$$4AB^2 = AB^2 + 588$$
$$AB^2 = 196$$
$$AB = 14cm.$$

Logo, o perímetro é 14 × 6 = 84cm.

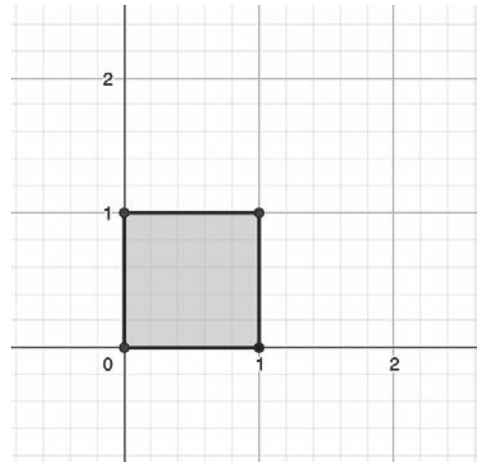


Figura 8.15: Quadrado unitário.

Área

Unidade de área

Medir uma grandeza significa compará-la com uma outra, de mesma natureza, chamada de unidade.

Intuitivamente, a área de um polígono é um número associado à região do plano ocupada pelo interior desse polígono. Esse número é obtido por comparação, como dito anteriormente.

Por definição, adotaremos para unidade de área a região do plano ocupada por um quadrado de lados unitários, chamado de *quadrado unitário* (**Figura 8.15**).

Diante do exposto, medir a área de um polígono significa determinar quantas vezes o quadrado unitário cabe dentro desse polígono.

Área do retângulo

Consideremos um retângulo de dimensões variáveis de comprimento *a* e largura *b*. Seja *A*(*a*; *b*) a medida da área do retângulo. Mantendo a largura *b* fixa e dobrando, triplicando, quadruplicando etc. a medida do comprimento *a*, poderemos observar que a área do retângulo dobrará, triplicará, quadruplicará etc (**Figura 8.16**).

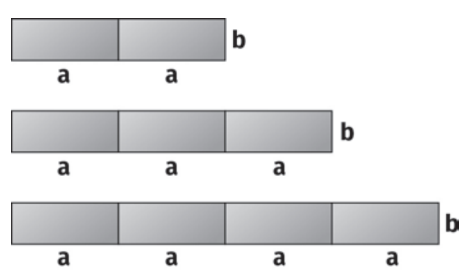


Figura 8.16: A área do retângulo é proporcional ao comprimento.

A partir desta observação, podemos dizer que A(*a*; *b*) é diretamente proporcional ao comprimento.

Analogamente, mantendo a fixo e dobrando, triplicando, quadruplicando etc. a largura b, concluiremos que a área $A(a; b)$ é diretamente proporcional à largura.

Você sabe como se diz, em linguagem matemática, que uma grandeza A é diretamente proporcional a uma grandeza x e, ao mesmo tempo, diretamente proporcional a uma grandeza y? Eis a resposta:

$$A = k \cdot x \cdot y$$

k nesta situação é a constante de proporcionalidade, da mesma forma que foi utilizada quando vimos perímetro na seção anterior.

Quando arbitramos área 1 para o quadrado de lado 1, na verdade dissemos que: $A = 1$, $x = 1$ e $y = 1$. Assim, substituindo-se esses valores no modelo acima, determinamos o valor de k.

$$1 = k \cdot 1 \cdot 1 \rightarrow k = 1$$

Isso nos leva à fórmula que calcula a área do retângulo:

$$A = x \cdot y$$

Portanto, para um retângulo de base b e altura h (**Figura 8.17**), a área é dada por:

$$A_{retângulo} = b \cdot h$$

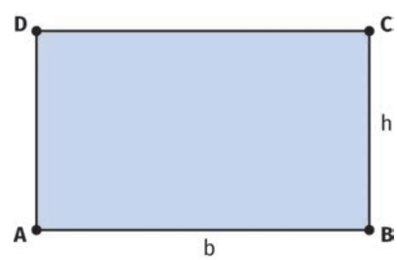


Figura 8.17: O retângulo e como calcular a sua área.

Essa ideia se aplica aos quadrados. Basta considerar que a base b e altura h são iguais a l.

$$A_{quadrado} = b \cdot h = l^2$$

Área do paralelogramo

Paralelogramos são quadriláteros com os lados opostos paralelos. Consequentemente, os ângulos opostos são **congruentes**, e os ângulos **adjacentes**, **suplementares**.

congruente
ângulos de mesma medida.
adjacente
junto a, ao lado de.
suplementares
ângulos que somam 180º.

É muito interessante ver como a área de uma nova figura pode ser deduzida a partir de figuras previamente conhecidas. É isso o que faremos agora, para deduzir a área do paralelogramo.

Observe o paralelogramo ABCD, com medida da base bb e altura hh apresentado na **Figura 8.18**.

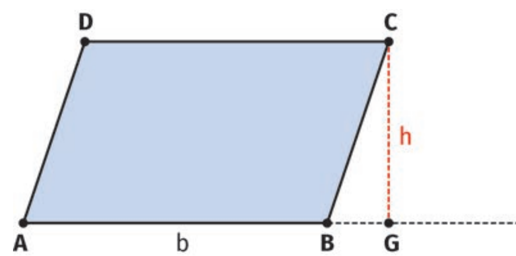


Figura 8.18: Paralelogramo de base *b* e altura *h*.

A partir do vértice *B*, trace um segmento paralelo a *CG*, determinando o ponto *H* (**Figura 8.19**).

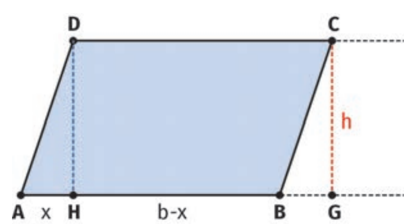


Figura 8.19: Paralelogramo sendo recortado.

Note que os triângulos *ADH* e *BCG* são idênticos. Logo, *AH* = *BG*. Em seguida, recorte o triângulo *ADH* e preencha o espaço triangular *BCG* (**Figura 8.20**).

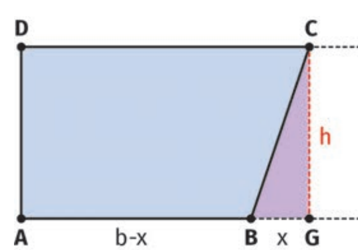


Figura 8.20: Paralelogramo transformado em retângulo.

Conseguimos, assim, transformar o paralelogramo em retângulo *sem perda ou ganho de área*!! Portanto, as áreas são idênticas.

$$A_{paralelogramo} = b \cdot h$$

Área do triângulo

Para encontrar uma fórmula que calcule a área de triângulos, pode-se utilizar procedimento análogo ao do paralelogramo.

Considere o triângulo *ABC* de base medindo *b* e altura medindo *h* (**Figura 8.21**).

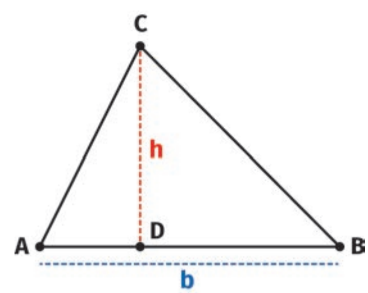


Figura 8.21: Triângulo *ABC* de base *b* e altura *h*.

Façamos uma cópia idêntica do triângulo *ABC* usando o lado *BC* como suporte (**Figura 8.22**). Assim, criamos um paralelogramo *ABGC* de base *b* e altura *h*.

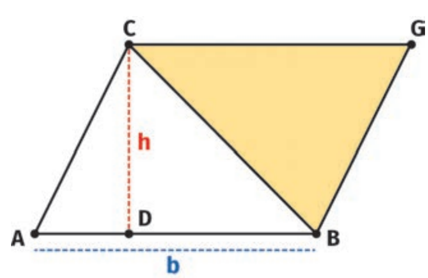


Figura 8.22: Paralelogramo de base *b* e altura *h* criado com a cópia do triângulo *ABC*.

Como visto na seção anterior, a área desse paralelogramo vale $b \cdot h$ A área do triângulo *ABC* é, evidentemente, a metade da área do paralelogramo. Assim:

$$A_{triângulo} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Área do losango

Losangos são paralelogramos especiais. Além de terem todas as características inerentes aos paralelogramos, também possuem os quatro lados com o *mesmo tamanho* e *diagonais perpendiculares*. Portanto, a fórmula para a área do paralelogramo pode ser utilizada também para losangos.

Acontece que é muito raro, em problemas envolvendo losangos, que sejam informadas as medidas da base e da altura. Assim, quase nunca se utiliza tal fórmula em losangos. Em geral, as informações dadas são as medidas das diagonais (aquelas que são perpendiculares). Por isso, vamos deduzir a fórmula da área do losango em função das diagonais.

Considere o retângulo *ABCD* de lados medindo *D* e *d* (**Figura 8.23**). Como vimos anteriormente, a área de *ABCD* é $D \cdot d$.

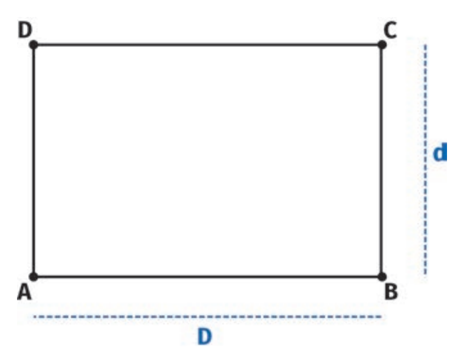


Figura 8.23: Retângulo de lados *D* e altura *d*.

O losango foi construído traçando seus vértices *EFGH* nos pontos médios do retângulo (**Figura 8.24**).

A área do losango EFGH vale exatamente a metade da área do retângulo. Isso pode ser percebido dividindo-se o retângulo em quatro retângulos idênticos como a seguir.

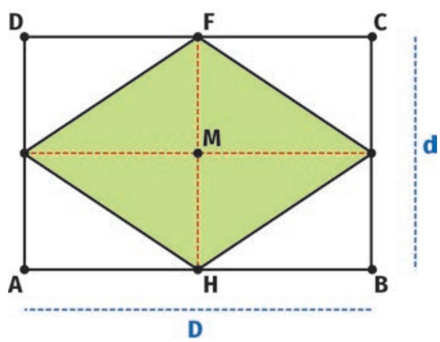


Figura 8.24: Losango com diagonais *D* e *d*. E equivalência de áreas.

As áreas *AEH*, *MEH*, *BGH*, *MGH*, *CFG*, *MFG*, *DEF*, *MEF* são iguais. Assim, é possível concluir que:

$$A_{losango} = \frac{D \cdot d}{2}$$

Área do trapézio

Trapézios são quadriláteros em que dois lados opostos são paralelos. Esses lados são chamados base maior (*B*) e base menor (*b*). Obteremos uma fórmula que calcula a área do trapézio pelo mesmo processo utilizado para encontrar a área do triângulo. Considere o trapézio *ABCD*, de bases *B* e *b* e altura *h* (**Figura 8.25**).

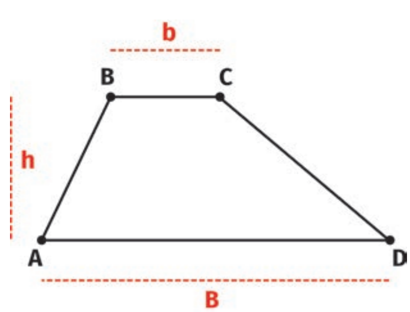


Figura 8.25: Trapézio *ABCD*.

Façamos uma cópia idêntica do trapézio *ABCD* usando o lado *CD* como suporte (**Figura 8.26**). Assim, criamos um paralelogramo *ABJI* de base *B* + *b* e altura *h*.

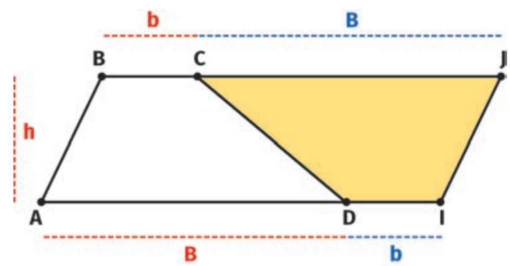


Figura 8.26: Trapézio duplicado para formar um paralelogramo.

Já sabemos que a área de um paralelogramo é dada pelo produto da base pela altura. A área do trapézio *ABCD* é, evidentemente, a metade da área do paralelogramo. Sendo assim, temos:

$$A_{trapézio} = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$$

Área do polígono regular

Considere um polígono regular ABCDEFGHI... com *n* lados medindo, cada um, *α* (**Figura 8.27**). A distância do centro *O* do polígono a qualquer dos lados é chamada apótema. Considere que o apótema desse polígono mede *g*. Ligando-se o centro aos vértices do polígono regular, obtêm-se *n* triângulos isósceles idênticos, cada um deles tendo a medida *a* como base e a medida *g* como altura.

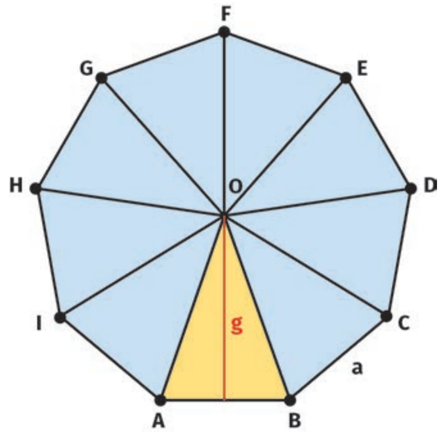


Figura 8.27: Polígono regular com n lados.

A área do polígono regular é dada pela soma das áreas de todos os n triângulos. Assim:

$$A_{polígono\ regular} = \frac{n \cdot a}{2} \cdot g$$

Note que $\frac{n \cdot a}{2}$ é a metade do perímetro do polígono. Ou seja, $\frac{n \cdot a}{2} = p$.

$$A_{polígono\ regular} = p \cdot g$$

Área do círculo

A área do círculo pode ser obtida por meio da inscrição, em uma circunferência, de polígonos regulares com número cada vez maior de lados (**Figura 8.28**).

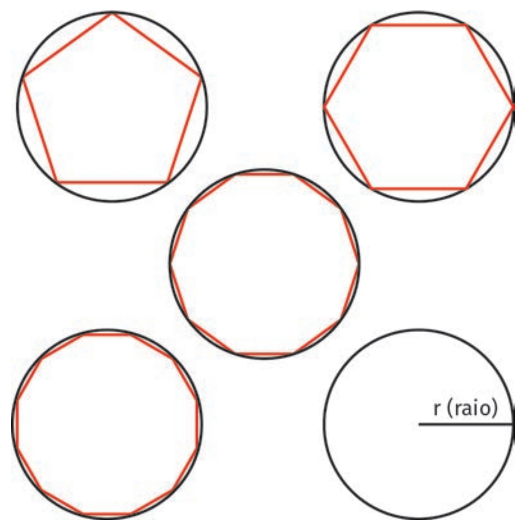


Figura 8.28: Polígonos regulares inscritos na circunferência.

Assim, intuitivamente, podemos considerar a área do círculo como a área de um polígono regular com n lados, com n crescendo ilimitadamente ($n \to \infty$). Note que, quanto maior n, mais g se aproxima do valor do raio ($g \to r$). Na fórmula da área do polígono regular, substitua p por $\frac{2\pi r}{2}$ e g por r para obter a área do círculo.

$$A_{círculo} = \frac{2\pi r}{2} \cdot r = \pi r^2$$

Atividade

A geometria plana é um dos tópicos de matemática mais cobrados no Enem, nos vestibulares e no Encceja. Vamos testar nossos conhecimentos com as questões a seguir.

1. (ENEM, 2021) O dono de uma loja pretende usar cartões imantados para a divulgação de sua loja. A empresa que fornecerá o serviço lhe informa que o custo de fabricação do cartão é de R$ 0,01 por centímetro quadrado e que disponibiliza modelos tendo como faces úteis para impressão:

- um triângulo equilátero de lado 12cm;

- um quadrado de lado 8cm;

- um retângulo de lados 11cm e 8cm;

- um hexágono regular de lado 6cm;

- um círculo de diâmetro 10cm.

O dono da loja está disposto a pagar, no máximo, R$ 0,80 por cartão. Ele escolherá, dentro desse limite de preço, o modelo que tiver maior área de impressão.

Use 3 como aproximação para π e use 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

Nessas condições, o modelo que deverá ser escolhido tem como face útil para impressão um:

a) triângulo.
b) quadrado.
c) retângulo.
d) hexágono.
e) círculo.

lá na plataforma

Acesse a plataforma e assista a um vídeo com a resposta comentada da questão 1.

2. (ENEM, 2021) O instrumento de percussão conhecido como triângulo é composto por uma barra fina de aço, dobrada em um formato que se assemelha a um triângulo, com uma abertura e uma haste, conforme ilustra a Figura 1.

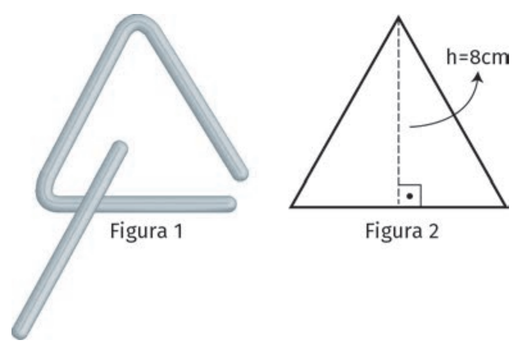


Figura 1 Figura 2

Uma empresa de brindes promocionais contrata uma fundição para a produção de miniaturas de instrumentos desse tipo. A fundição produz, inicialmente, peças com o formato de um triângulo equilátero de altura h, conforme ilustra a Figura 2. Após esse processo, cada peça é aquecida, deformando os cantos, e cortada em um dos vértices, dando origem à miniatura, Assuma que não ocorram perdas de material no processo de produção, de forma que o comprimento da barra utilizada seja igual ao perímetro do triângulo equilátero representado na Figura 2.

Considere 1,7 como valor aproximado para $\sqrt{3}$.

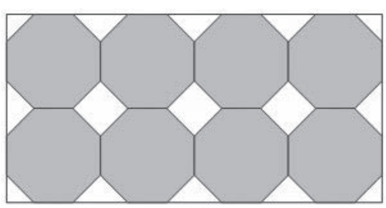
Nessas condições, o valor que mais se aproxima da medida do comprimento da barra, em centímetro, é

a) 9,07.
b) 13,60.
c) 20,40.
d) 27,18.
e) 36,24.

3. (ENEM, 2020) Azulejo designa peça de cerâmica vitrificada e/ou esmaltada usada, sobretudo, no revestimento de paredes. A origem das técnicas de fabricação de azulejos é oriental, mas sua expansão pela Europa traz consigo uma diversificação de estilos, padrões e usos, que podem ser decorativos, utilitários e arquitetônicos.

Disponível em: www.itaucultural.org.br. Acesso em: 31 jul. 2012.

Azulejos no formato de octógonos regulares serão utilizados para cobrir um painel retangular conforme ilustrado na figura.



Entre os octógonos e na borda lateral dessa área, será necessária a colocação de 15 azulejos de outros formatos para preencher os 15 espaços em branco do painel. Uma loja oferece azulejos nos seguintes formatos:

1 – Triângulo retângulo isósceles;

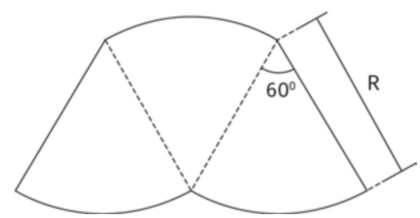
2 – Triângulo equilátero;

3 – Quadrado.

Os azulejos necessários para o devido preenchimento das áreas em branco desse painel são os de formato

a) 1.
b) 3.
c) 1 e 2.
d) 1 e 3.
e) 2 e 3.

4. (ENEM, 2015) O proprietário de um parque aquático deseja construir uma piscina em suas dependências. A figura representa a vista superior dessa piscina, que é formada por três setores circulares idênticos, com ângulo central igual a 60º. O raio R deve ser um número natural.



O parque aquático já conta com uma piscina em formato retangular com dimensões 50m x 24m. O proprietário quer que a área ocupada pela nova piscina seja menor que a ocupada pela piscina já existente.

Considere 3,0 como aproximação para π.

O maior valor possível para R em metros, deverá ser:

a) 16.
b) 28.
c) 29.
d) 31.
e) 49.

Resumo

O perímetro é o comprimento do contorno. No caso de uma circunferência, o perímetro é dado por $2p = 2\pi r$.

Em polígonos, o perímetro é dado pela soma dos lados. Dado um polígono regular de n lados, todos medindo a, o perímetro é dado por $2p = n \cdot a$.

A área é uma medida de quantas vezes uma unidade de referência cabe em dada superfície.

$$A_{retângulo} = b \cdot h$$

$$A_{quadrado} = l^2$$

$$A_{paralelogramo} = b \cdot h$$

$$A_{triângulo} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A_{losango} = \frac{D \cdot d}{2}$$

$$A_{trapézio} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

$$A_{polígono\ regular} = p \cdot g$$

$$A_{círculo} = \pi r^2$$

Em pé, sem sono. Deitado, com sono.

09

metas

Introduzir conhecimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da matemática, como as leis do cosseno e do seno.

objetivo

Esperamos que, ao final desta unidade, você seja capaz de:

- identificar a lei dos cossenos e a lei dos senos e utilizá-las na resolução de problemas em contextos diversos.

Introdução

As razões trigonométricas relacionam ângulos com segmentos, sendo, por isso, muito eficientes como instrumento de cálculo na geometria, especialmente para medir comprimentos inacessíveis.

As aplicações da trigonometria no cálculo de medidas inacessíveis já ocorriam desde a antiguidade, séculos antes de Cristo.

Nesta unidade, veremos como as razões trigonométricas obtidas em triângulos retângulos podem ser utilizadas em quaisquer triângulos.

Lei dos cossenos e lei dos senos

Se o triângulo for **acutângulo**, as relações seguintes se demonstram, com relativa facilidade:

acutângulo
Triângulos cujos ângulos são menores do que 90º.

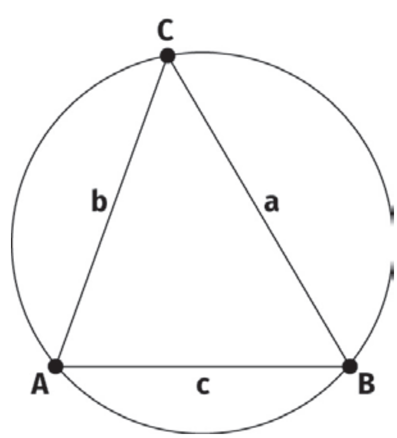


Figura 9.1: Triângulo inscrito em circunferência.

1ª) Lei dos cossenos

$a2 = b2 + c2 - 2b \cdot c \cdot \cos(\hat{A})$

$b2 = a2 + c2 - 2a \cdot c \cdot \cos(\hat{B})$

$c2 = a2 + b2 - 2a \cdot b \cdot \cos(\hat{C})$

2ª) Lei dos senos

$$\frac{a}{\text{sen}(\hat{A})} = \frac{b}{\text{sen}(\hat{B})} = \frac{c}{\text{sen}(\hat{C})} = 2R$$

R = diâmetro do círculo circunscrito

3ª) Expressão da área

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \text{sen}\left(\hat{A}\right) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \text{sen}\left(\hat{B}\right) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \text{sen}\left(\hat{C}\right)$$

lá na plataforma

Quer aprender mais sobre as Leis do seno e do cosseno? Acesse a plataforma e assista aos vídeos sobre o tema.

As três regras acima podem ser estendidas para os triângulos retângulos, de acordo com os seguintes princípios:

(i) se $\hat{A}$ for reto, o termo $2 \cdot b \cdot c \cdot cos(90^o)$ tem de ser zero, o que implica $cos(90^o) = 0$;

(ii) se $\hat{A}$ for reto, a tem de ser o diâmetro e, portanto, $sen(90^o) = 1$.

Assim, definem-se:

$$sen(90^o) = 1 \text{ e } cos(90^o) = 0$$

Prosseguindo essa análise, para entender as regras para os triângulos obtusângulos, é necessário observar os seguintes princípios:

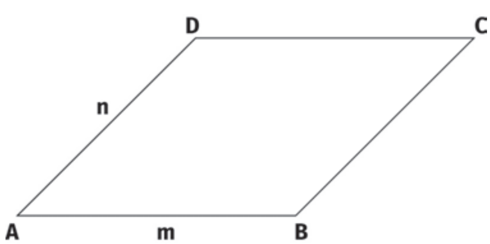


Figura 9.2: Paralelogramo ABCD.

i) Considerando a diagonal BD:

$$S_{par.} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot n \cdot sen\left(\hat{A}\right) = m \cdot n \cdot sen(\hat{A})$$

Considerando a diagonal AC e a regra estendida:

$$S_{par.} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot n \cdot sen\left(\hat{B}\right) = m \cdot n \cdot sen\left(\hat{B}\right)$$

Donde vem que: $sen\left(\hat{A}\right) = sen\left(\hat{B}\right)$

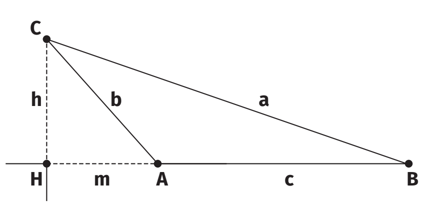


Figura 9.3: Triângulo ABC.

(ii) Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo BCH, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\left(\hat{A}\right)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\left(\hat{B}\right)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\left(\hat{C}\right)$$

Considerando a regra estendida aplicada ao triângulo ABC:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(180^o - \hat{A})$$

Assim, sendo θ um ângulo obtuso, definem-se:

$$sen(\theta) = sen(180^o - \theta) e \cos(\theta) = -\cos(180^o - \theta)$$

Concluindo, para todo triângulo temos:

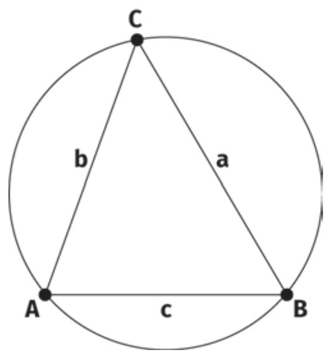


Figura 9.4:Triângulo ABC inscrito em uma circunferência de raio r.

1ª) Lei dos cossenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos(\hat{A})$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\hat{B})$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\hat{C})$$

2ª) Lei dos senos

$$\frac{a}{sen(\hat{A})} = \frac{b}{sen(\hat{B})} = \frac{c}{sen(\hat{C})} = 2R$$

R = diâmetro do círculo circunscrito

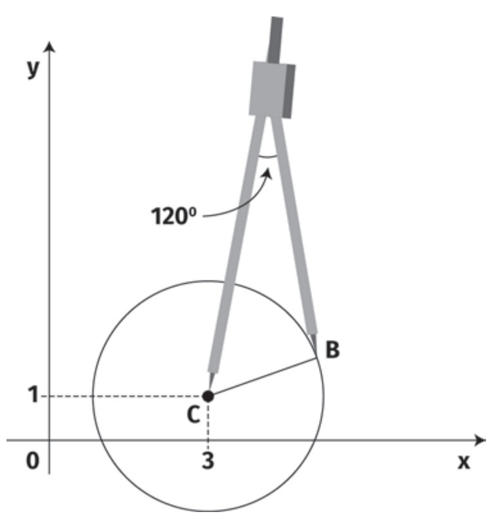
3ª) Expressão da area

$$S_\triangle = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot sen(\hat{A}) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot sen(\hat{B}) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot sen(\hat{C})$$
$$sen(90^0) = 1 \ e \ cos(90^0) = 0$$
$$sen(?) = sen(180^0 - \theta) \ e \ cos(\theta)$$
$$= - cos(180^0 - \theta)$$

Atividade

Como as leis dos senos e dos cossenos auxiliam no cálculo dos ângulos e dos lados dos triângulos, elas são muito exploradas em questões de vestibulares e no ENEM. Então vamos testar esse novo conhecimento fazendo algumas questões de provas anteriores?

1. (Enem, 2017) Uma desenhista projetista deverá desenhar uma tampa de panela em forma circular. Para realizar esse desenho, ela dispõe, no momento, de apenas um compasso, cujo comprimento das hastes é de 10cm, um transferidor e uma folha de papel com um plano cartesiano. Para esboçar o desenho dessa tampa, ela afastou as hastes do compasso de forma que o ângulo formado por elas fosse de 120º. A ponta seca está representada pelo ponto *C*, a ponta do grafite está representada pelo ponto *B* e a cabeça do compasso está representada pelo ponto *A*, conforme a figura.



Após concluir o desenho, ela o encaminha para o setor de produção. Ao receber o desenho com a indicação do raio da tampa, verificará em qual intervalo este se encontra e decidirá o tipo de material a ser utilizado na sua fabricação, de acordo com os dados.

Tipo de material	Intervalo de valores de raio (cm)
I	$0 < R \leq 5$
II	$5 < R \leq 10$
III	$10 < R \leq 15$
IV	$15 < R \leq 21$
V	$21 < R \leq 40$

Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

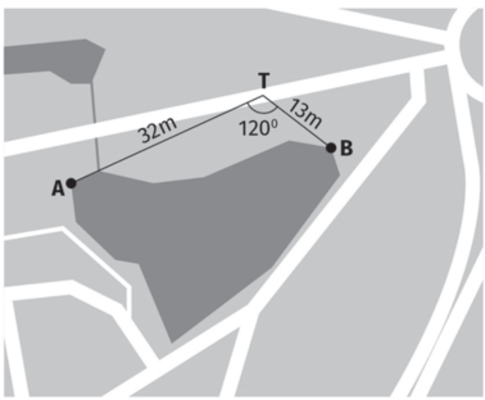
O tipo de material a ser utilizado pelo setor de produção será:

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

lá na plataforma

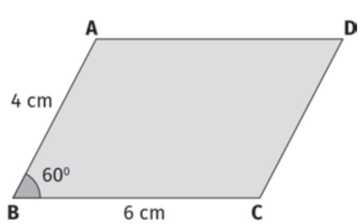
Acesse a plataforma e assista a um vídeo com a resolução desta questão.

2. (Uerj, 2017) Ao coletar os dados para um estudo topográfico da margem de um lago a partir dos pontos *A*, *B* e *T*, e , um técnico determinou as medidas *AT* 32m, *BT* 13m e *ATB* 120º, representadas no esquema abaixo.



Calcule a distância, em metros, entre os pontos A e B definidos pelo técnico nas margens desse lago.

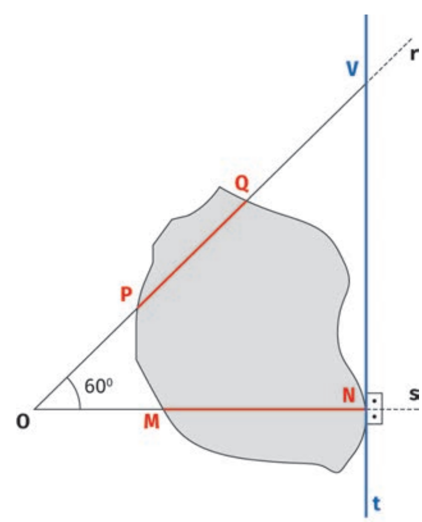
3. (Upe-ssa, 2022) No paralelogramo *ABCD* da figura, as medidas dos segmentos *AB* e *BC* são, respectivamente, 4cm e 6cm, e a medida do ângulo formado por esses segmentos é 60°.



Qual a medida, em cm, da diagonal AC? Use $\sqrt{7} \approx 2{,}65$

a) 5,1
b) 5,3
c) 5,6
d) 6,2
e) 6,8

4. (F. Albert Einstein – Medicina, 2021) A figura representa dois feixes lineares de raio X, emitidos por um tomógrafo sobre a região fechada e plana λ, cuja imagem está em processo de construção pelo aparelho. Os feixes estão representados pelas semirretas *r* e *s*, com origem no ponto *O*, local de onde partem os feixes em direção a λ. Sabe-se que *OP* = 2 cm, *OM* = 1,5 cm e que as velocidades dos feixes, a partir de *O*, são constantes e iguais a 3 × 108 m/s. Após atingirem os pontos *P* e *M*, na borda de λ, os feixes preservam suas velocidades, sentido e direção percorrendo $\overline{PQ}$ e $\overline{MN}$, com *Q* e *N* na borda de λ até atingirem o anteparo, representado pela reta *t* nos pontos *V* e *N*.



Fora de escala

a) Sabendo que o feixe sobre *r* levou $9{,}2 \times 10^{-6}$ microssegundos (μs) para percorrer o ângulo *PMO* e que 1μs = 10^{-6}s, calcule a medida de *PQ* em centímetros.

b) Calcule a medida de *PM*, em centímetros, e o valor do seno do ângulo agudo *PMO*.

Resumo

A lei dos cossenos, de modo geral, é utilizada quando relacionamos os lados e, pelo menos, um dos ângulos.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\hat{A})$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\hat{B})$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\hat{C})$$

A lei dos senos é utilizada quando relacionamos os lados e, pelo menos, dois dos ângulos.

$$\frac{a}{sen(\hat{A})} = \frac{b}{sen(\hat{B})} = \frac{c}{sen(\hat{C})} = 2R$$

R = diâmetro do círculo circunscrito

A expressão da área de um triângulo é:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot sen(\hat{A}) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot sen(\hat{B}) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot sen(\hat{C})$$
$$sen(\theta) = sen(180^0 - \theta) \text{ e } \cos(\theta) = -\cos(180^0 - \theta)$$

Resposta comentada

1. d - O compasso forma, com a superfície do papel, um triângulo isósceles de lados 10, 10 e R (raios) e ângulos 120º, 30º e 30º. Sabendo-se disto, pode-se calcular o raio R:

$$\frac{R}{sen\ 120°} = \frac{10}{sen\ 30°} \Rightarrow R \cdot \frac{1}{2} = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R = 10\sqrt{3} \approx 17cm \Rightarrow 15 < R \leq 21$$

2. Tem-se, pela Lei dos Cossenos, que a resposta é

$$\overline{AB}^2 = \overline{AT}^2 + \overline{BT}^2 - 2 \cdot \overline{AT} \cdot \overline{BT} \cdot \cos A\hat{T}B \Leftrightarrow$$
$$\overline{AB}^2 = 32^2 + 13^2 - 2 \cdot 32 \cdot 13 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$
$$\overline{AB} = \sqrt{1609} \Rightarrow$$
$$\overline{AB} \cong 40\ m.$$

3. b - Pela Lei dos Cossenos, temos:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos A\hat{B}C \Rightarrow$$
$$\overline{AC}^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos 60° \Rightarrow$$
$$\overline{AC} = 2\sqrt{7} \Rightarrow$$
$$\overline{AC} \cong 5{,}3\,\text{cm}.$$

4. Pela Lei dos Cossenos, temos:

$$\overline{PM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OM}^2 - 2 \cdot \overline{OP} \cdot \overline{OM} \cdot \cos M\hat{O}P \Leftrightarrow$$
$$\overline{PM}^2 = 2^2 + 1{,}5^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1{,}5 \cdot \cos 60° \Leftrightarrow$$
$$\overline{PM} = \frac{\sqrt{13}}{2}\,\text{cm}.$$

Pela Lei dos Senos, vem:

$$\frac{\overline{OP}}{\operatorname{sen} P\hat{M}O} = \frac{\overline{PM}}{\operatorname{sen} M\hat{O}P} \Leftrightarrow \frac{2}{\operatorname{sen} P\hat{M}O} = \frac{\frac{\sqrt{13}}{2}}{\operatorname{sen} 60°}$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} P\hat{M}O = \frac{4}{\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} P\hat{M}O = \frac{2\sqrt{39}}{13}.$$

Geometria espacial – 1ª parte: poliedros, prismas e pirâmides

10

meta

Introduzir conhecimentos matemáticos relacionados à geometria espacial, apresentando os poliedros, em especial os prismas, prirâmides e corpos redondos, além do cálculo de seus volumes e suas superfícies.

objetivo

Esperamos que, ao final desta unidade, você seja capaz de:

- resolver problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos (cilindro e cone) em situações reais, como no cálculo do gasto de material para forrações ou pinturas de objetos.

Introdução

Para alguns historiadores da matemática, a geometria é a mais antiga manifestação da atividade matemática de que se tem conhecimento. Sua importância deriva das práticas do uso do espaço e a da necessidade de utilização das formas geométricas em diferentes atividades, como em inúmeras profissões, por exemplo, a engenharia, a arquitetura, a astronomia, a geografia, as artes plásticas.

A geometria, conforme a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), "envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento".

Poliedros

Chama-se *poliedro* a reunião P de um número finito de polígonos planos, chamados de *faces*, em que:

a) cada lado de um desses polígonos é também lado de um e apenas de um outro polígono;

b) a interseção de duas faces quaisquer é ou um lado comum, ou um vértice comum, ou vazia;

c) cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é denominado *aresta* de P e cada vértice de uma face é um *vértice* de P;

d) sendo A, B e P pontos distintos dos vértices de P, é sempre possível traçar uma linha poligonal sobre P, ligando A a B sem passar por vértices de P.

As formas ilustradas na **Figura 10.1** não são poliedros.

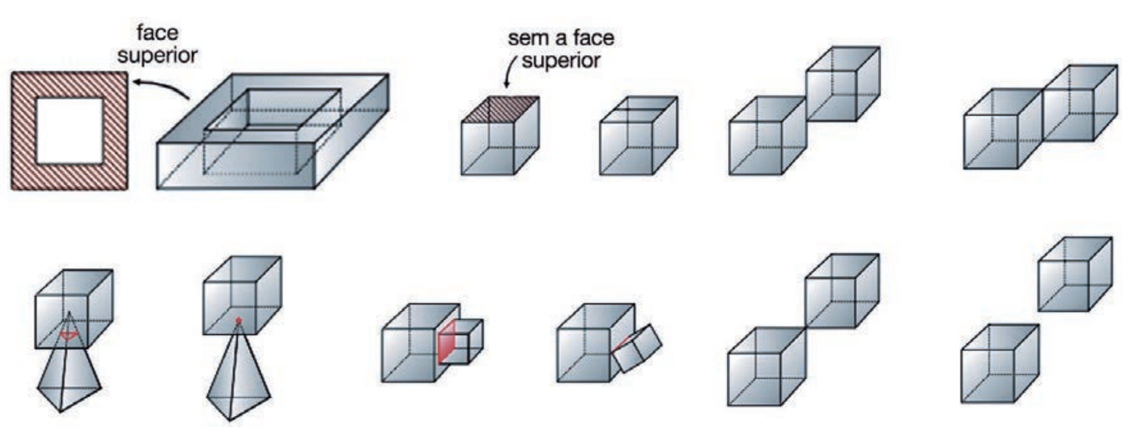


Figura 10.1: Exemplos de formas que não são poliedros.

As faces de um poliedro que incidem em um determinado vértice originam pelo menos um *ângulo poliédrico* no espaço. Sendo assim, para que a definição de poliedro seja válida, é necessário e suficiente que haja, no mínimo, quatro polígonos.

Para entender melhor o que é um ângulo poliédrico, vejamos o exemplo: sejam *n* (inteiro e *n* > 3) semirretas de mesma origem, tais que nunca fiquem três num mesmo semiplano. Essas semirretas determinam *n* ângulos, cujos planos deixa as outras semirretas em um mesmo semiespaço. A figura formada por esses ângulos é o ângulo poliédrico.

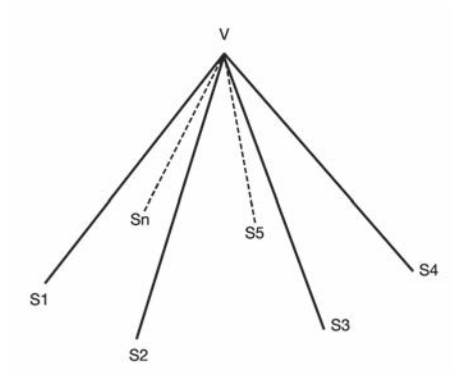


Figura 10.2: Exemplo de ângulo poliedro.

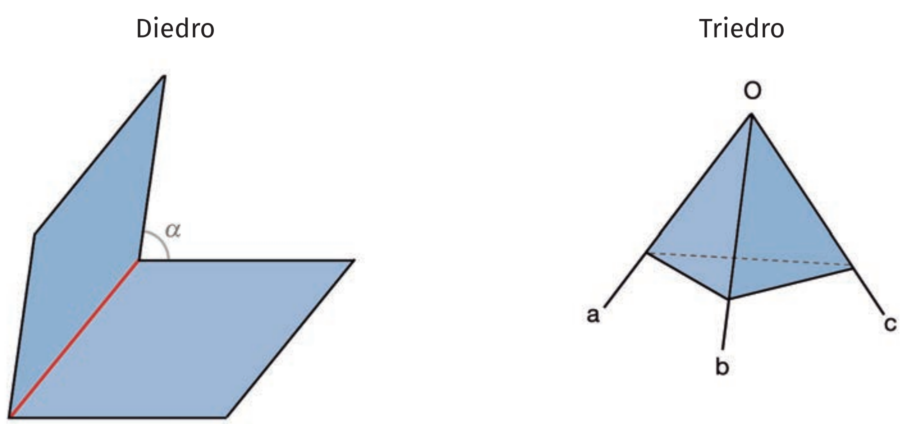


Figura 10.3: Exemplos de ângulos diedros (junção de duas semiretas em planos diferentes) e triedro (junção de três semiretas em planos diferentes).

lá na plataforma

Acesse a plataforma, assista ao vídeo "Angulos Poliédricos" e conheça um pouco mais sobre o que estamos estudando

Todo poliedro determina no espaço duas regiões: uma limitada, cuja fronteira é o próprio poliedro, e outra, não limitada. A região limitada é o interior desse poliedro, e a não limitada, a exterior. O poliedro será convexo quando seu interior (a região limitada) for tal que, para cada par de pontos A e B dentro da região, o segmento AB está todo dentro dessa região interna.

Outra forma de identificar poliedros convexos é valer-se da seguinte definição: um poliedro é convexo quando toda reta não paralela a qualquer de suas faces intersecta sua superfície em, no máximo, dois pontos (**Figura 10.4**).

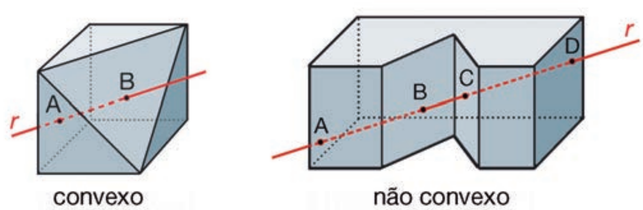
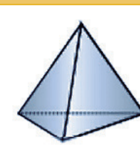
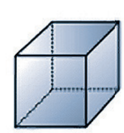


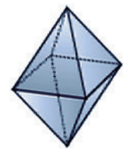
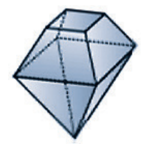
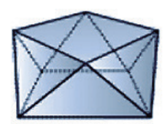
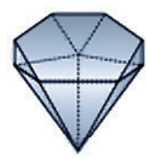
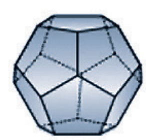
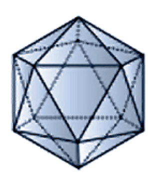
Figura 10.4: Poliedros convexos e não convexos.

Faces do poliedro

Há poliedros que possuem nomeclatura específica em função da quantidade de faces que têm (**Tabela 10.1**):

Tabela 10.1: Nomenclatura dos poliedros, de acordo com o número de faces.

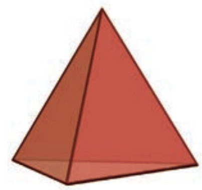
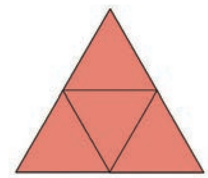
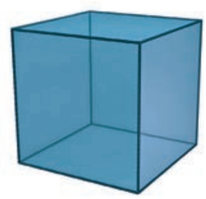
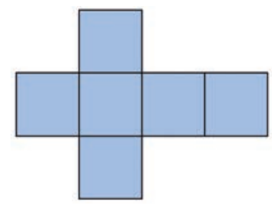
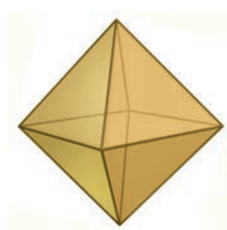
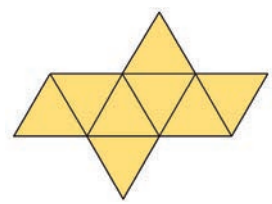
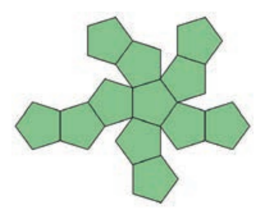
Número de faces	Nomes	Representação
4	Tetraedro	
5	Pentaedro	
6	Hexaedro	
7	Heptaedro	

8	Octaedro	
9	Eneaedro	
10	Decaedro	
11	Undecaedro	
12	Dodecaedro	
20	Icosaedro	

Área de um poliedro

Para calcular a área total de um poliedro, devemos somar o valor das áreas de cada face do objeto. A figura plana obtida por meio da reunião de cada uma de suas faces é denominada *planificação* desse poliedro (**Tabela 10.2**).

Tabela 10.2: Planificação dos poliedros

Poliedro	Planificação
	
	
	
	

Os poliedros com 4, 6, 8, 12 e 20 faces podem ser exclusivamente formados utilizando-se somente polígonos regulares de mesma natureza. Demonstra-se que eles são os únicos poliedros regulares que existem, sendo conhecidos como sólidos de Platão. Um sólido de Platão é um poliedro regular e convexo em que todas as faces são formadas por polígonos regulares e congruentes e todos os vértices partem do mesmo número de arestas. Sendo, portanto, todos os ângulos poliédricos congruentes.

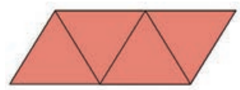
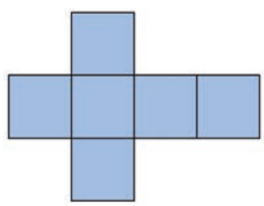
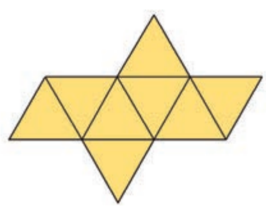
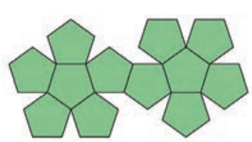
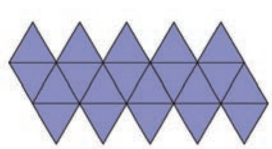
Platão

Filósofo grego que viveu no século IV antes de Cristo, sendo relevante na história da matemática e da filosofia da ciência.

Calculando faces, arestas e vértices

A tabela seguinte ilustra cada um dos poliedros regulares, as planificações de suas superfícies laterais e de seus principais elementos (faces, vértices e arestas).

Tabela 10.3: Poliedros regulars e seus elementos

Poliedro regular	Planificação	Elementos
 tetraedro		- 4 faces triangulares - 4 vértices - 6 arestas
 hexaedro (cubo)		- 6 faces quadrangulares - 8 vértices - 12 arestas
 octaedro		- 8 faces triangulares - 6 vértices - 12 arestas
 dodecaedro		- 12 faces pentagonais - 20 vértices - 30 arestas
 icosaedro		- 20 faces triangulares - 12 vértices - 30 arestas

Observando a última coluna da tabela, é possível verificar que, para cada poliedro lá apresentado, o resultado da expressão que se segue é sempre 2.

(nº de vértices) – (nº de arestas) + (nº de faces)

Esse resultado é muito importante e serve para caracterizar um grupo especial de poliedros denominados *eulerianos*. Assim, considerando um poliedro com V vértices, A arestas e F faces, com V, A e F inteiros positivos, temos a chamada *relação de Euler*:

$$V - A + F = 2$$

Demonstra-se que todo poliedro convexo é euleriano, embora a recíproca não seja verdadeira.

lá na plataforma

Quer estudar mais sobre os poliedros, suas propriedades e a Relação de Euler? Vá à plataforma e assista ao vídeo "Poliedros - Relação de Euler".

Vamos analisar os exemplos a seguir.

Exemplo 1:

Um poliedro convexo é composto por cinco ângulos tetraédricos e quatro ângulos triédricos. Determine a soma dos ângulos das faces e o número de faces desse poliedro.

Solução:

- 5 ângulos *tetra*édricos (4 faces) → 5 x 4 (*tetra*) = 20 arestas;
- 4 ângulos *tri*êdricos (3 faces) → 4 x 3 (*tri*) = 12 arestas.

Como cada aresta é comum a duas faces, temos que dividir pela metade o valor que encontramos:

$$A = \frac{20 + 12}{2} \Rightarrow A = 16$$

Como o poliedro é convexo e o número de vértices é $V = 5 + 4 = 9$, podemos aplicar a relação de Euler:

$$9 - 16 + F = 2 \Rightarrow F = 9$$

Sabendo o número de faces, podemos calcular o somatório dos ângulos:

$$S=(9-2)\cdot 360^{\circ} \Rightarrow S=2520^{\circ}$$

Exemplo 2:

Diagonal de um poliedro convexo é qualquer segmento de reta que une dois de seus vértices que não pertençam à mesma face. O segmento que une dois vértices de uma mesma face ou é uma aresta, ou é uma diagonal de face. De posse dessa informação, determine o número de diagonais de um dodecaedro regular.

Solução:

O *dodecaedro* regular é o poliedro formado por *12* faces pentagonais. Como cada aresta é comum a duas faces:

$$A=\frac{12\cdot 5}{2} \Rightarrow A=30$$

Como o poliedro é convexo, aplicando a relação de Euler, temos:

$$V-30+12=2 \Rightarrow V=20$$

Observemos que, escolhendo dois vértices quaisquer desse poliedro, o segmento obtido poderá ser:

- uma diagonal do poliedro;
- uma aresta;
- uma diagonal de face.

O número de escolhas de dois dentre os 20 vértices é:

$$C_{20}^{2}=\frac{20\cdot 19}{2!}=190$$

Como cada face é um pentágono convexo, o número de diagonais de face é:

$$12\cdot\left(C_{5}^{2}-5\right)=12\cdot\left(\frac{5\cdot 4}{2!}-5\right)=60$$

Portanto, o número de diagonais do dodecaedro regular é:

$$D=190-30-60=100$$

Exemplo 3:

Um tetraedro regular *ABCD* tem aresta medindo 12cm. Determine a área de sua superfície e a medida do ângulo diédrico formado pelas faces *ABC* e *BCD*.

Solução:

A planificação de um tetraedro regular (**Figura 10.5**) é uma região plana formada pela reunião de quatro triângulos equiláteros, cada um deles com lado medindo 12cm.

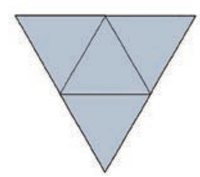


Figura 10.5: Tetraedro planificado.

Para calcular a área, calculamos a área de cada face (área do triângulo) e multiplicamos pelo número de faces, nesse caso, quatro.

$$A_{total}=4\cdot\frac{12^{2}\cdot\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_{total}=144\sqrt{3}\,cm^{2}$$

Prosseguindo, observemos a **Figura 10.6**:

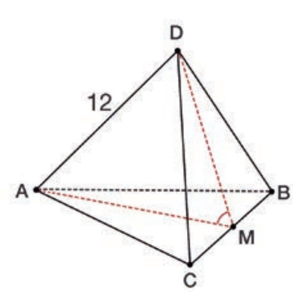


Figura 10.6: Tetraedro do problema, com destaque para o ângulo diédrico.

Nela, os segmentos *AM* e *MD* são, respectivamente, as alturas dos triângulos equiláteros congruentes *ABC* e *BCD* ou seja, medem:

$$\overline{AM} = \overline{MD} = \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}cm$$

Chamando de θ a medida do ângulo diédrico e aplicando a lei dos cossenos no triângulo *AMD*, temos:

$$12^2 = \left(6\sqrt{3}\right)^2 + \left(6\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(6\sqrt{3}\right) \cdot \left(6\sqrt{3}\right) \cdot \cos\theta$$

$$144 = 108 + 108 - 216 \cdot \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{72}{216} = \frac{1}{3}$$

Portanto, o ângulo procurado é aquele que tem cosseno igual a $\frac{1}{3}$ que é 71º aproximadamente.

Prismas

Consideremos dois planos α e *β*, paralelos entre si. Em α, tomemos uma região poligonal $\mathcal{R}$. Seja *s* uma reta que intersecta os dois planos, α e β, e que é exterior à região $\mathcal{R}$. Sendo P um ponto genérico de $\mathcal{R}$, chamemos de *r* a reta paralela a *s*, contendo P e P' o ponto de interseção de *r* com $\mathcal{R}$.

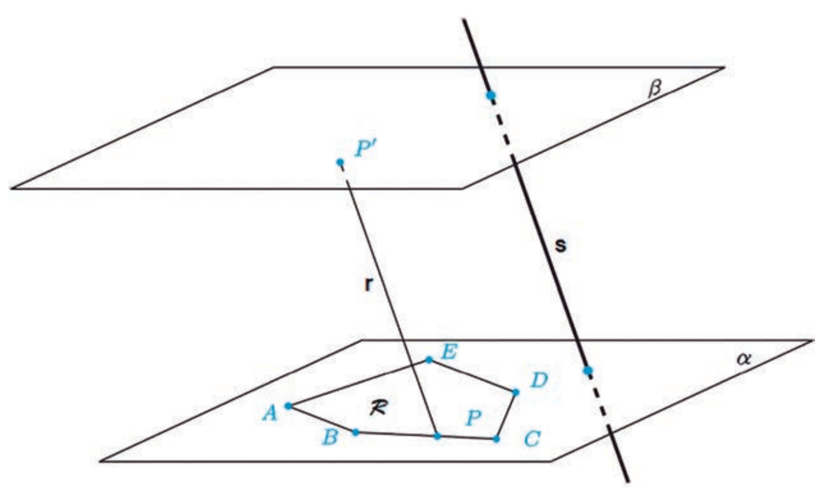


Figura 10.7: Construindo um prisma.

Chama-se *prisma* à união de todos os segmentos cujas extremidades são P e P'.

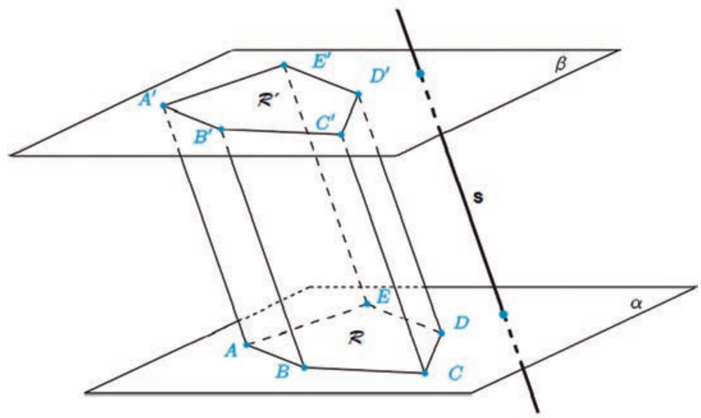


Figura 10.8: Prisma construído.

O conjunto dos pontos P', em β, determina uma região poligonal ℛ' congruente a ℛ. A distância entre os planos α e β é denominada *altura* do prisma.

Os vértices de um prisma são os vértices das regiões poligonais ℛ e ℛ'. As suas arestas são os segmentos paralelos a *s*, que ligam os respectivos vértices de ℛ e de ℛ' e os lados das regiões ℛ e ℛ'.

As suas *faces* são as regiões poligonais determinadas pelos seus vértices consecutivos. Geralmente, as faces ℛ e ℛ' são chamadas de *bases* do prisma, e as outras, de *faces_laterais*. As *arestas_das_faces* que não são as bases são chamadas de *arestas_laterais*. A reta *s* é denominada *diretriz* do prisma. Um prisma será dito *reto*, quando a sua diretriz for perpendicular ao plano da base. Nesse caso, a altura será a medida de qualquer uma das arestas laterais.

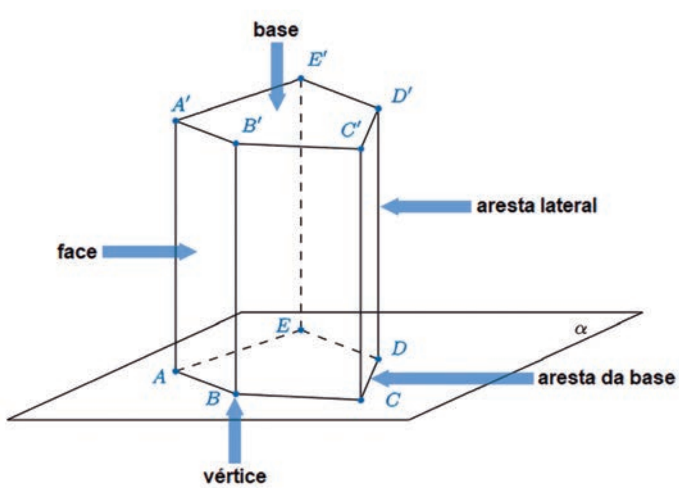


Figura 10.9: Elementos de um prisma.

Um prisma é um paralelepípedo se sua base e, por conseguinte, todas as suas faces são paralelogramos.

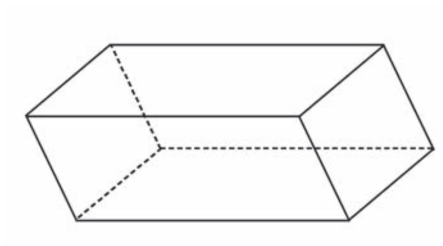


Figura 10.10: Paralelepípedo.

Particularmente, se a base de um paralelepípedo for um retângulo, ele será denominado paralelepípedo retoretângulo ou bloco retangular.

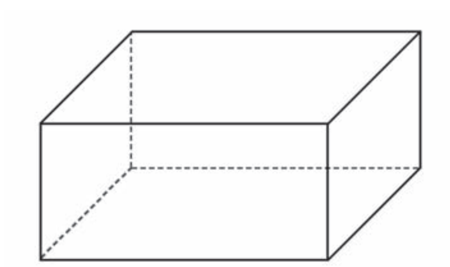


Figura 10.11: Paralelepípedo retoretângulo ou bloco retangular.

Finalmente, se as faces e as bases de um paralelepípedo forem quadrados, ele será nomeado cubo.

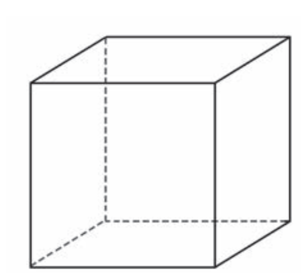


Figura 10.12: Cubo.

Observando os exemplos a seguir, veremos formas de como determinar a área total de um prisma.

Exemplo 1:

O apótema da base de um prisma hexagonal regular mede 4 cm. Determine a área total desse prisma, sabendo que sua altura é 8cm.

Solução:

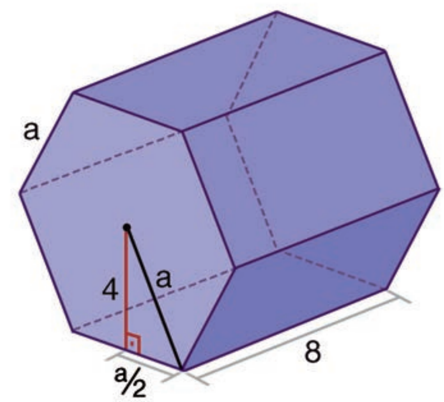


Figura 10.13: Prisma hexagonal regular do enunciado.

Na base destaca-se um triângulo retângulo de catetos medindo 4, e a metade da aresta e a hipotenusa, medindo a. Assim, aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$(4)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow a^2 - \frac{a^2}{4} = 16 \Rightarrow \frac{3 \cdot a^2}{4} = 16 \Rightarrow a^2 = \frac{64}{3} \Rightarrow a = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

A área da base, que é um hexágono regular (assunto tratado na Unidade 8), é:

$$A_{base} = 6 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2} \cdot \frac{64}{3} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow A_{base} = 32\sqrt{3}\ cm^2$$

A área lateral (observe que a superfície lateral de um prisma hexagonal regular é composta por seis retângulos, cujas dimensões são respectivamente iguais à aresta da base e à altura do prisma) é:

$$A_{lateral} = 6 \cdot 8 \cdot \frac{8}{\sqrt{3}} = 128\sqrt{3}\ cm^2$$

Portanto, a área total é:

$$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base} = 64\sqrt{3} + 32\sqrt{3} \Rightarrow A_{total} = 192\sqrt{3}\ cm^2$$

Exemplo 2:

A diagonal de um bloco retangular mede 50 cm. Sabendo que sua largura mede 24 cm e seu comprimento é de 32 cm, calcule a área da superfície desse bloco.

Solução:

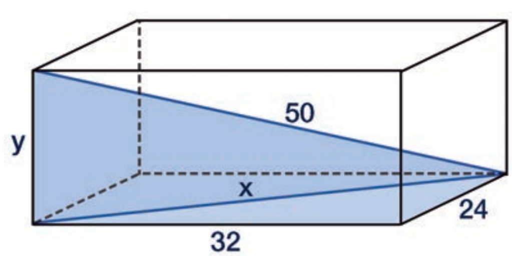


Figura 10.14: Bloco retangular descrito no **Exemplo 2**.

Na **Figura 10.14**, estão destacados dois triângulos retângulos, um com catetos medindo 32 e 24, com hipotenusa x, e o outro, com catetos medindo x e y e a hipotenusa medindo 50. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$x^2 = 32^2 + 24^2$$
$$x^2 + y^2 = 50^2 \Rightarrow 32^2 + 24^2 + y^2 = 50^2 \Rightarrow y^2 = 2500 - 1024 - 576 \Rightarrow y = 30\ cm$$

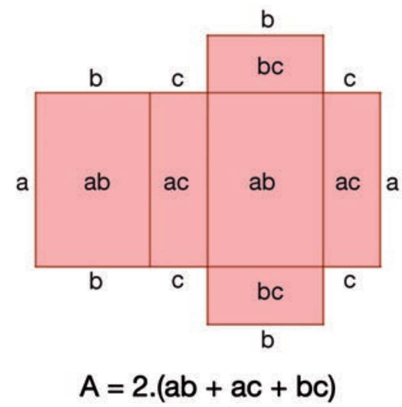


Figura 10.15: Planificação da superfície total do bloco retangular.

$$A = 2 \times (32 \times 24 + 32 \times 30 + 24 \times 30) = 4896\ cm^2$$

Volume de um prisma

Lembremo-nos de que *medir uma grandeza é compará-la com outra de mesma natureza, tomada como unidade de medida*. Assim, intuitivamente, o volume de um poliedro é um número (obtido por meio da comparação) associado à região do espaço ocupada pelo interior desse poliedro.

No contexto em que realizamos nossos estudos, uma unidade de volume é a região do espaço ocupada por um cubo de arestas unitárias. Esse cubo é denomindado *cubo unitário*. Grosso modo, medir o volume de um poliedro significa determinar o número de vezes que o cubo unitário "cabe" dentro desse poliedro.

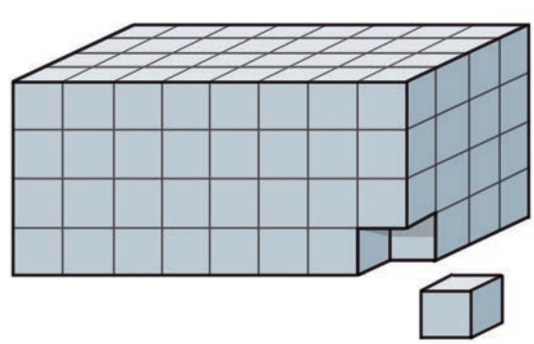


Figura 10.16: Volume do poliedro a partir do cubo unitário.

Volume de um bloco retangular

Sejam *a, b* e *c* as dimensões (comprimento, largura e altura, respectivamente) do bloco retangular (**Figura 10.17**).

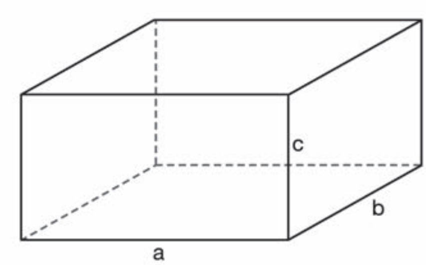


Figura 10.17: Bloco retangular de dimensões a, b e c.

Se considerarmos *a* como variável, com *b* e *c* constantes, podemos afirmar que, para cada valor real positivo de *a*, existe um único valor para a variável de volume (*V*):

$$V = V\,(a,b,c), \text{ tal que:}$$

$$\textit{para todo } x \in IR_+^*, V(x) = V(x,b,c)$$

define uma função f em IR_+^* com valores em IR e ainda, para todo *r* positivo, $V(r \cdot x) = r \cdot V(x,b,c)$.

Notemos que, se dobrarmos ou se triplicarmos ou se quadruplicarmos o valor de *x* e assim por diante, *V* (*x*) dobrará, triplicará quadruplicará etc. (**Figura 10.18**).

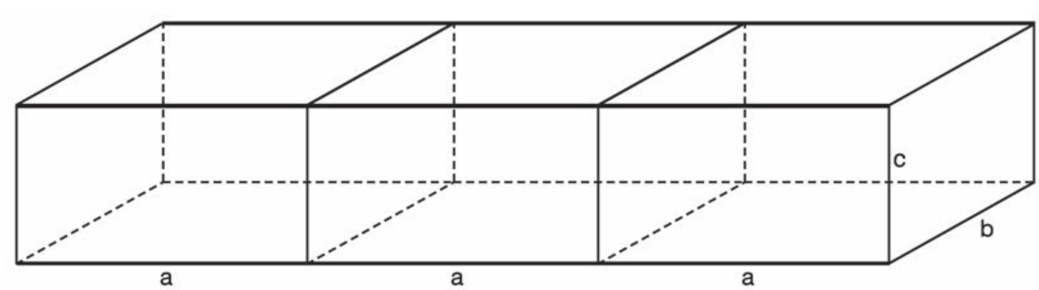


Figura 10.18: Bloco retangular com o comprimento triplicado.

Como vimos na Unidade 3, do Volume 1 deste material, V(*x*) é diretamente proporcional a *x*. De maneira análoga, podemos afirmar que, para cada valor real positivo de b, existe um único valor para a variável volume, *V = V(a,b,c)*, tal que *para todo* $y \in IR_+^*, V(y) = V(a,y,c)$ define uma função V em IR_+^* com valores em IR e ainda, para todo s positivo, $V(s \cdot y) = s \cdot V(a,y,c)$.

Igualmente, considerando *a* e *b* constantes e *c* variável, *para todo* $\in IR_+^*, V(z) = V(a,b,z)$ define uma função V em IR_+^* com valores em IR e ainda, para todo *t* positivo, $V(t \cdot z) = t \cdot V(a,b,z)$.

Decorre daí que:

$$V(x;y;z) = V(x;y;z \cdot 1) = V(x;y;1) \cdot z$$
$$V(x;y;z) = V(x;y \cdot 1;1) \cdot z = V(x;1;1) \cdot y \cdot z$$
$$V(x;y;z) = V(x;1;1) \cdot y \cdot z = V(x \cdot 1;1;1) \cdot y \cdot z = x \cdot y \cdot \underbrace{V \cdot (1;1;1)}_{\text{volume do cubo unitário}}$$

Portanto, como o volume do cubo unitário é, por definição, igual a 1, o volume de um bloco retangular de dimensões *a*, *b* e *c* é dado por:

$$V(a, b, c) = a \cdot b \cdot c$$

Dito de outra forma, tomando o retângulo de dimensões a e b como base, *c* será a altura e, por isso, temos:

$$V_{bloco} = (\text{área da base}) \cdot (\text{altura})$$

Vejamos o seguinte exemplo. Considere um aquário em formato de bloco retangular com dimensões da base respectivamente iguais a 50 cm e 40 cm. Nesse aquário há uma quantidade de água com nível pouco acima da metade de sua altura. Quando se coloca uma pedra de formato irregular, o nível da água nesse aquário sobe 2,5 cm (**Figura 10.19**). Determine o volume dessa pedra.

Solução:

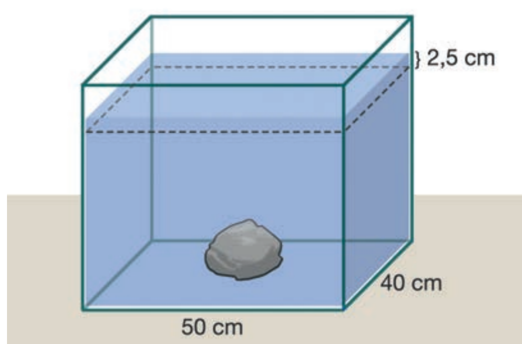


Figura 10.19: Aquário com formato de bloco retangular.

Basta que observemos o seguinte:

$$V_{pedra} = V(50;40;2,5) = 50 \cdot 40 \cdot 2,5 \Rightarrow V_{pedra} = 5000\,cm^3$$

Definição (geral) de volume

O poliedro obtido por meio da reunião finita de blocos retangulares justapostos pelas faces, sendo esta justaposição feita de tal modo que existam três planos perpendiculares, dois a dois, e que qualquer face desse poliedro seja paralela a um desses três planos, é denominado *poliedro retangular*.

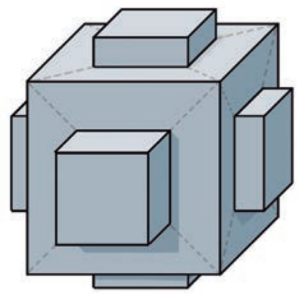


Figura 10.20: Poliedro retangular.

Intuitivamente, podemos considerar que o volume de um poliedro retangular é a soma dos volumes dos blocos retangulares que o constituem.

Assim, definiremos o volume de um sólido genérico S como o número real V, cujas **aproximações por falta** são volumes de poliedros retangulares contidos no sólido e cujas aproximações por excesso são os volumes de poliedros retangulares que contêm o sólido.

aproximação por falta

Substituição do valor exato de um número por um outro, próximo, porém menor do que ele.

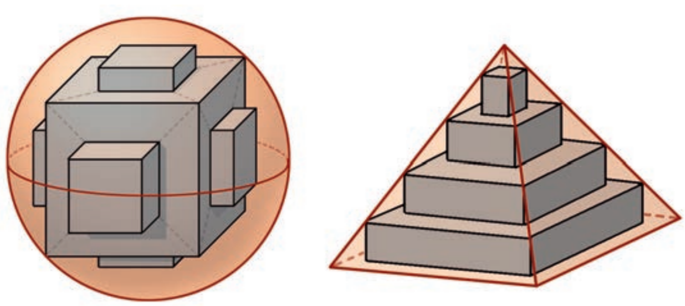


Figura 10.21: Sólidos preenchidos por poliedros retangulares.

Princípio de Cavalieri

Consideremos que as imagens da **Figura 10.22**, sugiram formatos que podemos visualizar em um pacote de pão de forma, desses que são vendidos em padarias e supermercados.

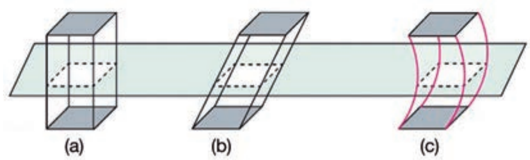


Figura 10.22: Sólidos que apresentam o mesmo volume mesmo tendo formas distintas.

Na **Figura 10.22 (a)**, as fatias estariam bem arrumadas, enquanto que a demais (**Figura 10.22 (b)** e **(c)**) representam deformações da posição inicial.

Em qualquer uma das três posições, o volume do sólido obtido é a soma dos volumes das fatias. Essa, em essência é a idéia do Princípio de Cavalieri que diz o seguinte:

> Se a interseção de dois sólidos com planos paralelos a um plano fixo resultar em figuras de mesma área, qualquer que seja esse plano, então esses sólidos têm mesmo volume.

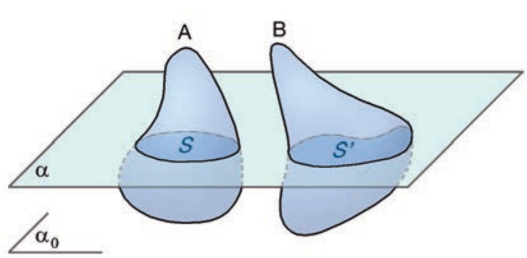


Figura 10.23: Princípio de Cavalieri.

Antes de aplicarmos o princípio de Cavalieri para obter os volumes de outros sólidos, faremos algumas considerações:

- O plano fixo a que nos referimos no princípio de Cavalieri costuma estar na *posição horizontal*, como se os sólidos repousassem sobre uma mesa.
- Esse princípio afirma que, se há uma maneira de dispormos os sólidos, de modo que as secções tenham mesma área, então eles têm mesmo volume. Isso não quer dizer que sólidos de mesmo volume tenham, necessariamente, secções de mesma área, quando interceptados por planos paralelos.
- Para aplicarmos o princípio de Cavalieri, temos que dispor os sólidos em posições convenientes, de maneira que as hipóteses sejam confirmadas.

Ainda com relação à **Figura 10.22**, imaginadas como um pacote de pão de forma, observamos que os sólidos foram cortados em um mesmo número de fatias, todas com mesma altura (espessura) e bases de mesma área. Isso nos leva a intuir que o volume de qualquer prisma será obtido por meio do produto da área de sua base pela sua altura.

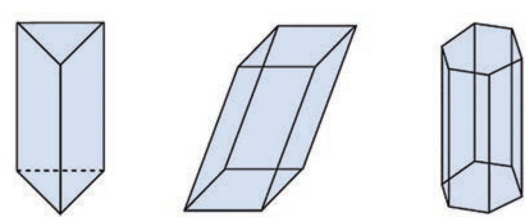


Figura 10.24: Prismas de mesma altura.

$$V_{prisma} = (\text{área da base}) \cdot (\text{altura})$$

lá na plataforma

Quer conhecer mais um pouco sobre o princípio de Cavalieri? Vá à plataforma e assista ao vídeo "Princípio de Cavalieri".

Pirâmides

Consideremos uma região poligonal $\mathcal{R}$ e um ponto V fora do plano que contém $\mathcal{R}$ (**Figura 10.25**). Sendo Q um ponto genérico de $\mathcal{R}$, tomemos o segmento de extremidades Q e V. Chamaremos de pirâmide de vértice V e base $\mathcal{R}$ a união de todos os segmentos de extremidades Q e V. A distância entre V e o plano α é denominada *altura da pirâmide.*

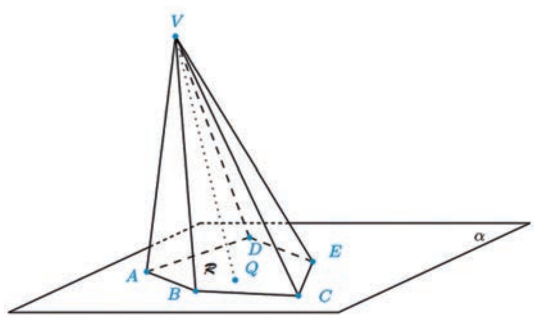


Figura 10.25: Pirâmide.

Os triângulos com o vértice comum V são as faces laterais da pirâmide. A altura de cada face lateral é um *apótema* da pirâmide. Os vértices de $\mathcal{R}$ são também chamados de *vértices da base da pirâmide*. Cada segmento cujas extremidades são o vértice da pirâmide e um vértice da base é denominado *aresta lateral da pirâmide* (**Figura 10.26**).

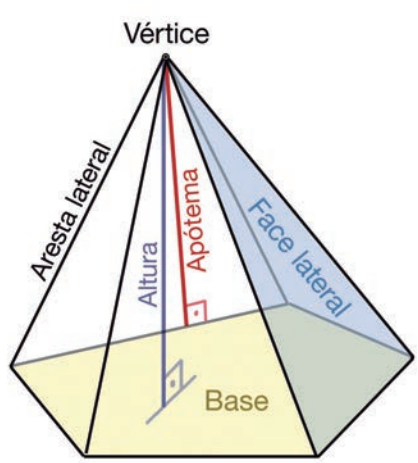
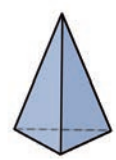
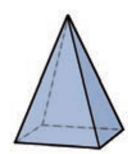
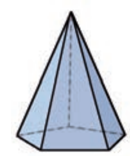
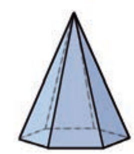


Figura 10.26: Elementos de uma pirâmide.

De modo geral, o nome de uma pirâmide é dado a partir do polígono que é a sua base, como podemos ver na **Tabela 10.4**.

Tabela 10.4: Pirâmides, de acordo com a sua base

Polígono da base	Triângulo	Quadrilátero	Pentágono	Hexágono
Nome da piâmide	Pirâmide triangular ou tetraedro	Pirâmide quadrangular	Pirâmide pentagonal	Pirâmide hexagonal
Representação				

A pirâmide regular é aquela em que a base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro desta. Em uma pirâmide regular as arestas laterais são iguais e, consequentemente, as faces laterais são triângulos isósceles congruentes (**Figura 10.27**).

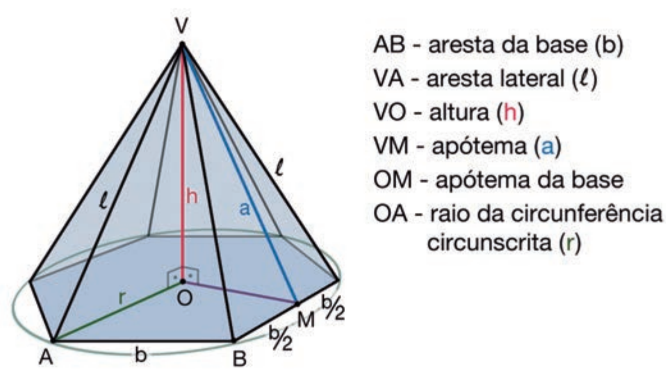


Figura 10.27: Principais elementos de uma pirâmide regular.

A **Figura 10.28** ilustra que todo prisma de base triangular pode ser decomposto em três tetraedros de mesmo volume.

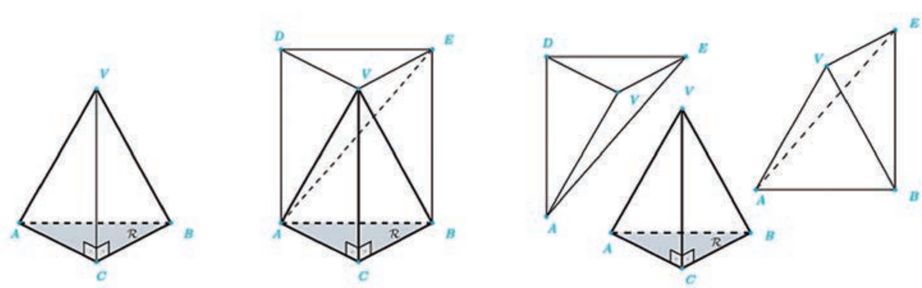


Figura 10.28: Divisão de um prisma triangular em três tetraedros.

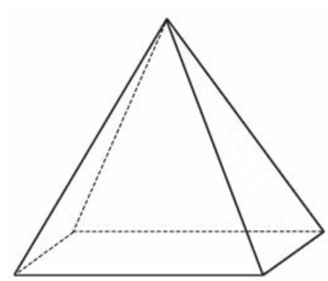
Aplicando o princípio de Cavalieri, podemos demonstrar que:

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot (\text{área da base}) \cdot (\text{altura})$$

A partir dos exemplos a seguir, iremos compreender melhor como calcular volume, área total e calcular os elementos da pirâmide.

Exemplo 1:

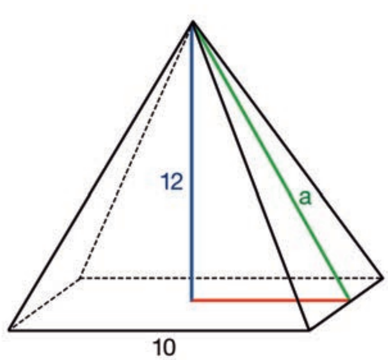
(UFPR, 2020) A pirâmide regular a seguir tem 12 cm de altura e sua base é um quadrado com 10 cm de lado.



a) calcule o volume da pirâmide;

b) calcule a área total da pirâmide.

Solução:



a) o volume da pirâmide é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 12 = 400\, cm^3$$

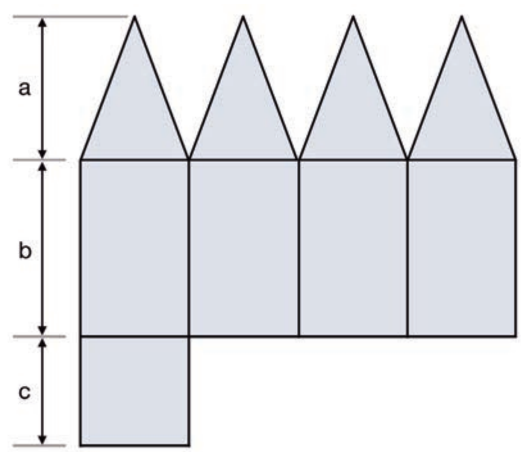
b) na medida em que o apótema da base da pirâmide mede 5 cm (é a metade da aresta da base), o apótema da pirâmide mede 13 cm. De fato, o triângulo retângulo de catetos 5 cm e 12 cm é pitagórico e sua hipotenusa mede 13 cm.

Em consequência, a área total da pirâmide é igual a:

$$A_{total} = 10^2 + 4 \cdot 10 \cdot 13 = 620\ cm^2$$

Exemplo 2:

(Unicamp, 2020) A figura abaixo exibe a planificação de um poliedro convexo, com faces triangulares congruentes e faces retangulares, em que são indicados os comprimentos *a*, *b*, *c*.

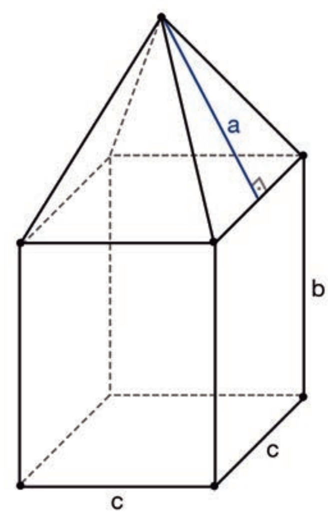


a) determine o número de vértices e de arestas desse poliedro;

b) para $a = 13$ cm, $b = 16$ cm e $c = 10$ cm, calcule o volume desse poliedro.

Solução:

Considere a figura.



a) da figura, segue que o poliedro possui 9 vértices e 16 arestas;

b) seja h a altura da pirâmide. Desde que $\frac{c}{2} = 5\,\text{cm}$ é a medida do apótema da base da mesma e a = 13 cm é a medida do apótema da pirâmide, segue de imediato que h = 12 cm (trata-se do triângulo retângulo pitagórico de lados 5, 12 e 13).

O volume do poliedro corresponde à soma dos volumes do paralelepípedo e da pirâmide que o constituem. Portanto, a resposta é:

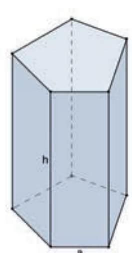
$$V = c^2 \cdot b + \frac{1}{3} \cdot c^2 \cdot h = 10^2 \cdot 16 + \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 12 = 2000\,cm^3$$

Resumo

- Todo poliedro convexo satisfaz a relação de Euler ($V - A + F = 2$), sendo V o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces do poliedro.

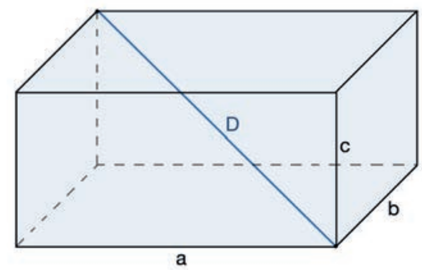
- Existem apenas cinco poliedros regulares, também chamados de *poliedros de Platão*, são eles: o tetraedro, o hexaedro (ou cubo), o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro.

- Podemos dizer que prismas são sólidos que têm duas bases paralelas e iguais e retângulos como faces laterais (prisma reto) com as seguintes características:



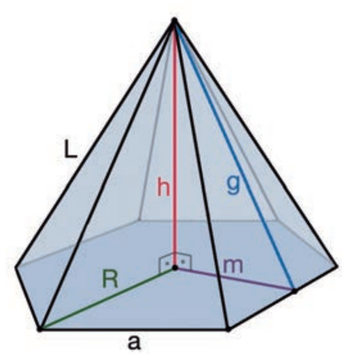
$$\begin{cases} A_{lat} = 2p_{base} \cdot h \\ A_{total} = A_{lat} + 2 \cdot A_{base} \\ V = A_{base} \cdot h \end{cases}$$

- O paralelepípedo retângulo (ou ortoedro) é o prisma cujas bases são retângulos; um ortoedro é definido por suas dimensões (comprimento, largura e altura) geralmente indicadas por a, b e c. O cubo é o paralelepípedo cujas dimensões são iguais (as faces são seis quadrados congruentes). Para paralelepípedos, valem as seguintes afirmativas:



$$\begin{cases} D_{bloco} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \rightarrow D_{cubo} = a\sqrt{3} \\ A_{bloco} = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) \rightarrow A_{cubo} = 6 \cdot a^2 \\ V_{bloco} = a \cdot b \cdot c \rightarrow V_{cubo} = a^3 \end{cases}$$

- Resumidamente, podemos dizer que pirâmides são sólidos que têm uma base e um vértice fora do plano desta base; pirâmides regulares são retas e a base é um polígono regular; nestas, chama-se *apótema da pirâmide* (g), a altura de qualquer face lateral.



$$m^2 + h^2 = g^2$$
$$A_{lat} = p_{base} \cdot g$$
$$A_{total} = A_{lat} + A_{base}$$
$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h$$

Atividades

A geometria espacial é um tema bastante explorado, especialmente em questões que envolvem o cálculo de área, o cálculo de volumes e a determinação de capacidades de recipientes com formato de cilindros, em geral.

1. (Enem, 2021) O projeto de um contêiner, em forma de paralelepípedo reto retangular, previa a pintura dos dois lados (interno e externo) de cada uma das quatro paredes com tinta acrílica e a pintura do piso interno com tinta epóxi. O construtor havia pedido a cinco fornecedores diferentes orçamentos das tintas necessárias, mas, antes de iniciar a obra, resolveu mudar o projeto original, alterando o comprimento e a largura para o dobro do originalmente previsto, mantendo inalterada a altura. Ao pedir novos orçamentos aos fornecedores, para as novas dimensões, cada um deu uma resposta diferente sobre as novas quantidades de tinta necessárias.

Em relação ao previsto para o projeto original, as novas quantidades de tinta necessárias informadas pelos fornecedores foram as seguintes:

- Fornecedor I: "O dobro, tanto para as paredes quanto para o piso."

- Fornecedor II: "O dobro para as paredes e quatro vezes para o piso."

- Fornecedor III: "Quatro vezes, tanto para as paredes quanto para o piso."

- Fornecedor IV: "Quatro vezes para as paredes e o dobro para o piso."

- Fornecedor V: "Oito vezes para as paredes e quatro vezes para o piso."

Analisando as informações dos fornecedores, o construtor providenciará a quantidade adequada de material. Considere a porta de acesso do contêiner como parte de uma das paredes.

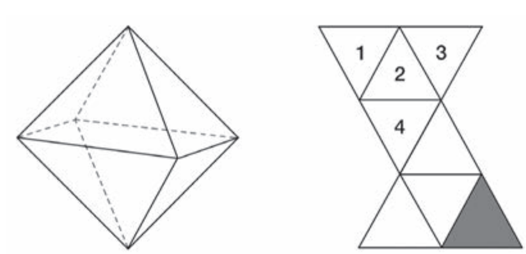
Qual dos fornecedores prestou as informações adequadas, devendo ser o escolhido pelo construtor para a aquisição do material?

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

lá na plataforma

Acesse a plataforma e veja o vídeo com a resolução comentada da Questão 1.

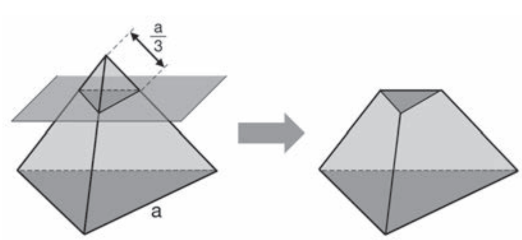
2. (Enem, 2021) Num octaedro regular, duas faces são consideradas opostas quando não têm nem arestas, nem vértices em comum. Na figura, observa-se um octaedro regular e uma de suas planificações, na qual há uma face colorida na cor cinza escuro e outras quatro faces numeradas.



Qual(is) face(s) ficará(ão) oposta(s) à face de cor cinza escuro, quando o octaedro for reconstruído a partir da planificação dada?

a) 1, 2, 3 e 4
b) 1 e 3
c) 1
d) 2
e) 4

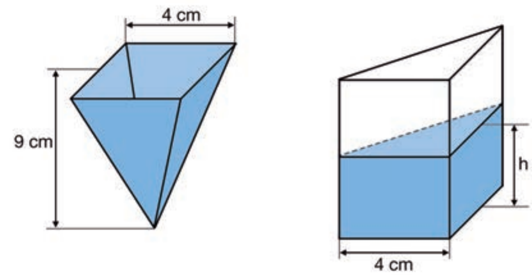
3. (Enem, 2019) As luminárias para um laboratório de matemática serão fabricadas em forma de sólidos geométricos. Uma delas terá a forma de um tetraedro truncado. Esse sólido é gerado a partir de secções paralelas a cada uma das faces de um tetraedro regular. Para essa luminária, as secções serão feitas de maneira que, em cada corte, um terço das arestas seccionadas será removido. Uma dessas secções está indicada na figura.



Essa luminária terá por faces:

a) 4 hexágonos regulares e 4 triângulos equiláteros.
b) 2 hexágonos regulares e 4 triângulos equiláteros.
c) 4 quadriláteros e 4 triângulos isósceles.
d) 3 quadriláteros e 4 triângulos isósceles.
e) 3 hexágonos regulares e 4 triângulos equiláteros.

4. (Uerj, 2021) Um recipiente com a forma de uma pirâmide de base quadrada foi completamente preenchido com um líquido. Sua aresta da base mede 4cm e a altura, 9cm. Em seguida, todo esse líquido foi transferido para outro recipiente, com a forma de um prisma reto, sendo sua base um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 4cm. Observe as imagens:

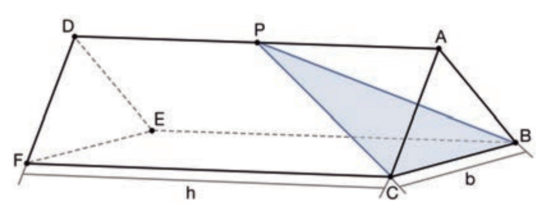


Considere que as espessuras dos recipientes são desprezíveis e que as bases estão em planos horizontais, sendo as alturas definidas em relação às bases.

A altura *h*, em centímetros, que o líquido atingirá no segundo recipiente é:

a) 10
b) 8
c) 6
d) 4

5. (Uerj, 2018) A imagem a seguir ilustra um prisma triangular regular. Sua aresta da base mede *b* e sua aresta lateral mede *h*.



Esse prisma é seccionado por um plano BCP de modo que o volume da pirâmide *ABCP* seja exatamente $\frac{1}{9}$ do volume total do prisma.

Logo, a medida do segmento *AP* é igual a:

a) $\frac{h}{9}$

b) $\frac{h}{3}$

c) $\frac{2h}{3}$

d) $\frac{5h}{6}$

Referências

CARVALHO, P. C. P. *Introdução à geometria espacial*. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de matemática elementar.* v. 10. Geometria espacial. 6. ed. Atual Editora, 2005.

DOWNS JR., F. L.; MOISE, E. E. *Geometria moderna*. v. 2. São Paulo: Blucher, 1971.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E.; MORGADO, A. C. *A matemática do ensino médio*. v. 1, 2 e 4. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

LIMA, E. L. *Medida e forma em geometria*. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, 2009.

POGORELOV, A. V. *Geometría elemental*. Trad. Carlos veja. Moscou: Mir, 1974.

Tá redondo!

11

meta

Introduzir conhecimentos matemáticos relacionados à geometria espacial, em especial, volumes de corpos redondos, como cilindros, cones e esferas, além do cálculo de sua área total e seus volumes.

objetivo

Esperamos que, ao final desta unidade, você seja capaz de:

- resolver problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de corpos redondos (cilindro, cone e esfera) em situações reais.

Introdução

Nesta aula, faremos uma generalização e colocaremos, no mesmo grupo, plano e superfície, mas sabendo que esta última pode ser curva, diferentemente de um plano.

Uma superfície é um espaço bidimensional, ou seja, isso significa que um ponto em movimento em uma superfície pode se mover em duas direções.

As superfícies podem ser *abertas* ou *fechadas*, conforme tenham extremidades ou não (**Figura 11.1**).

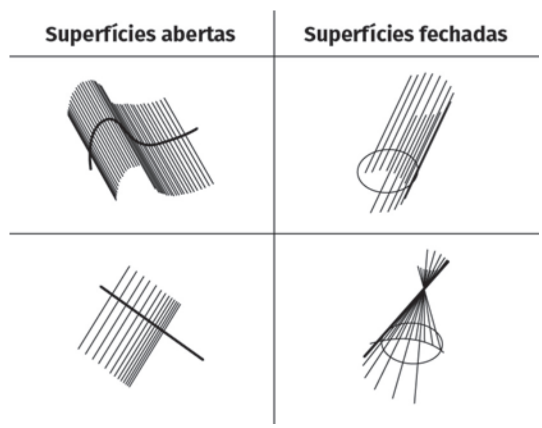


Figura 11.1: Exemplos de superfícies abertas e fechadas.

Podemos obter superfícies por meio de alguns procedimentos, como por exemplo:

(a) movendo-se uma linha reta (*geratriz*) por uma curva, passando por um ponto fixo não pertencente a ela, formando uma superfície cônica (**Figura 11.2 (a)**).

(b) movendo-se uma linha reta (*geratriz*) por uma curva fixada (*diretriz*), sempre de modo paralelo a uma outra linha reta fixa, formando uma superfícia cilíndrica (**Figura 11.2 (b)**).

(c) fazendo um giro de 360° de uma curva (*geratriz*) em torno de uma linha reta fixada (*eixo_de revolução*), formando uma superfície de revolução (**Figura 11.2 (c)**).

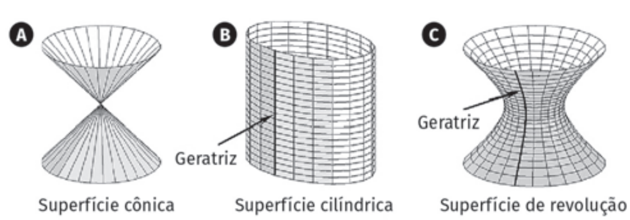


Figura 11.2: Exemplos de superfícies.

Superfície de revolução

As superfícies de revolução são geradas pelo movimento de rotação completa (360º) de uma linha qualquer (geratriz) em torno de um eixo (eixo de rotação ou de revolução).

Este tipo de superfície tem grande aplicação prática e pode ser encontrado em uma variedade muito grande de objetos, tais como: utensílios domésticos, embalagens, componentes mecânicos, elementos arquitetônicos, fuselagens de foguetes e mísseis.

Na **Figura 11.3**, você verá a formação dos sólidos geométricos e das superfícies de revolução.

sólidos geométricos

Corpos contidos dentro de uma superfície fechada e limitada por uma ou mais superfícies planas que os intersectam.

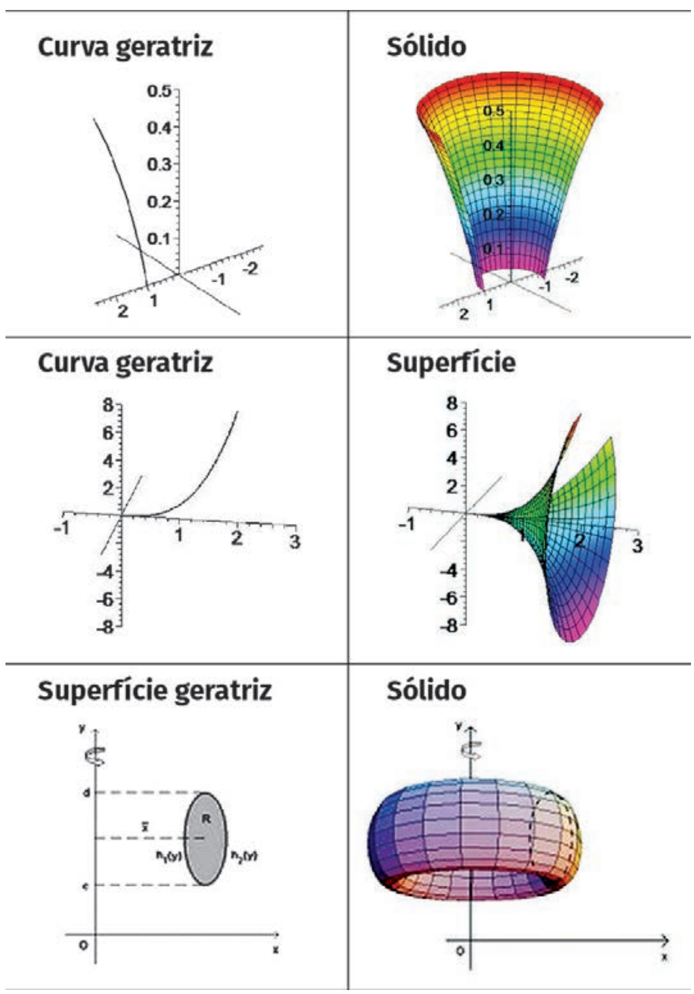


Figura 11.3: Superfícies e sólidos de revolução e a suas geratrizes.

Superfície cilíndrica

A superfície cilíndrica é aquela gerada por uma linha reta que se move, de maneira que seja sempre paralela a uma dada reta fixa e passe sempre por uma curva fixa dada.

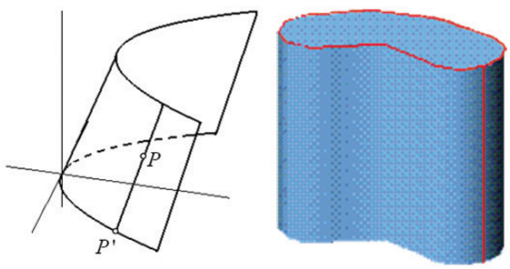


Figura 11.4: Superfícies cilíndricas.

A reta que se move é denominada *geratriz* e a curva dada fixa é a *diretriz* da superfície cilíndrica. Qualquer posição da geratriz é uma geratriz da superfície cilíndrica. O sólido limitado por uma superfície cilíndrica recebe o nome de *cilindro*. O nome da superfície cilíndrica (ou do cilindro) é dado a partir da forma da diretriz.

Na **Figura 11.5**, a geratriz é destacada em negrito. Essa superfície é um *cilindro elíptico reto*.

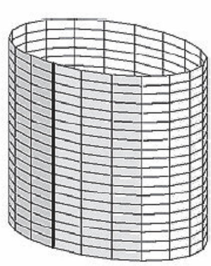


Figura 11.5: Cilindro elíptico reto.

Se ao invés de uma elipse tivéssemos um círculo, a superfície seria um *cilindro circular reto* (**Figura 11.6 (a)**). Se no lugar da elipse ou do círculo tivéssemos uma poligonal simples, a superfície não seria um cilindro e sim um *prisma reto* (**Figura 11.6 (b)**).

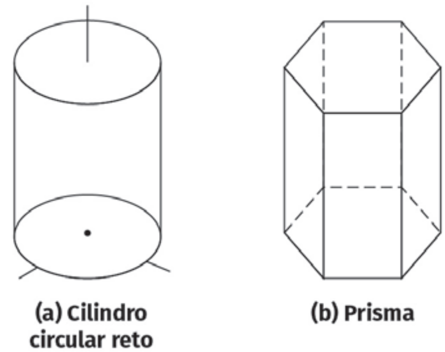


Figura 11.6: Cilindros e Prismas retos.

lá na plataforma

Quer compreender um pouco mais sobre poliedros, prismas e corpos redondos? Vá à plataforma e assista ao vídeo Introdução à Geometria Espacial - Sólidos Geométricos e Planificação.

Superfície cônica

A superfície cônica é aquela gerada por uma reta r que se move ao longo de uma curva α e que passa por um ponto fixo V fora da curva (**Figura 11.7**). A reta móvel é chamada de *geratriz*, a curva α é denominada de *diretriz* e o ponto fixo, de *vértice* do cone.

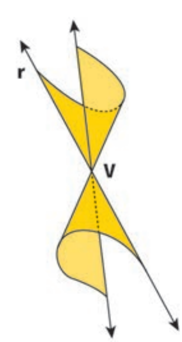


Figura 11.7: Superfície cônica.

O vértice (*V*) da **Figura 11.7** separa o cone em duas partes opostas pelo vértice, denominadas *folhas* e, usualmente, apresentamos apenas uma das folhas. O sólido limitado por uma superfície cônica recebe o nome de *cone*. O nome da superfície cônica (ou do cone) é dado a partir da forma da diretriz (**Figura 11.8**).

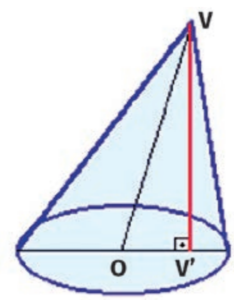


Figura 11.8: Cone.

É chamada de *cônica* toda a linha que se obtém como intersecção de um plano com uma superfície cônica. Na **Figura 11.9**, são mostradas as linhas cônicas clássicas.

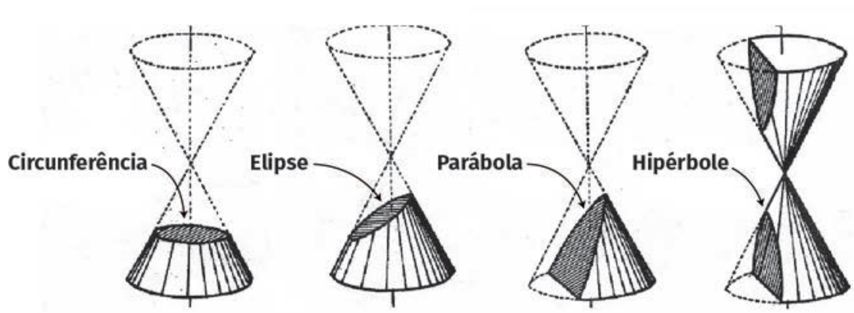


Figura 11.9: Cônicas clássicas.

Cilindros de revolução

O cilindro de revolução, também denominado *cilindro reto*, é o sólido gerado por um retângulo quando o giramos 360º em torno de um de seus lados. Para facilitar a compreensão, observe a **Figura 11.10**.

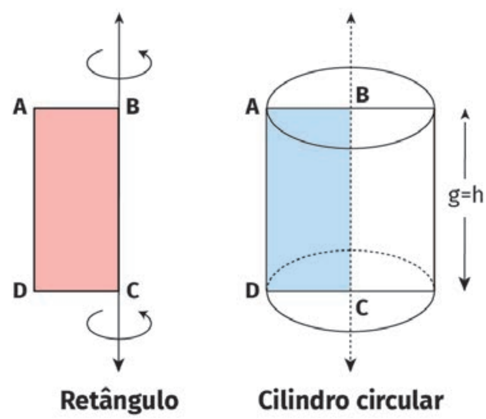


Figura 11.10: Cilindro de revolução.

No cilindro gerado pela rotação do retângulo *ABCD* em torno do lado *BC*. Os lados *AB* e *CD*, perpendiculares ao lado *AD*, geram no cilindro dois círculos congruentes e paralelos de raios R = AB = AC, com centros em *B* e *C*. Os círculos formados são chamados de *bases* do cilindro, e a distância entre os planos que os contêm é a *altura* do cilindro (portanto, a altura é o comprimento do lado *AD* do retângulo, que, por sua vez, é igual ao comprimento de *BC*). O lado *BC* do retângulo é chamado de *eixo* do cilindro, enquanto qualquer segmento paralelo ao lado *AD* e contido na superfície do cilindro é chamado de *geratriz* do cilindro.

Uma *secção meridiana* de um cilindro de revolução é a intersecção do cilindro com um plano que contém o seu eixo (**Figura 11.11**).

Note que há infinitas seções meridianas em um mesmo cilindro e todas elas são retângulos congruentes.

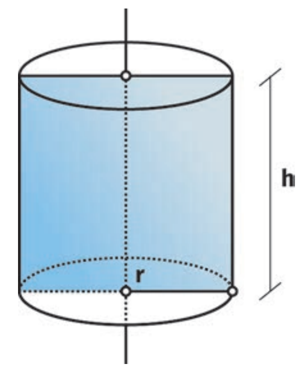


Figura 11.11: Secção meridiana de um cilindro de revolução.

Quando as secções meridianas são quadrados, dizemos que o cilindro de revolução é um *cilindro equilátero*. Portanto, em cilindros equiláteros temos a altura igual ao diâmetro das bases ($h = 2r$).

A superfície de um cilindro de revolução pode ser planificada sem distorções. Nessa planificação, as bases são círculos de raio *r*, enquanto a parte lateral é um retângulo cujos lados medem $2\pi r$ (comprimento) e *h* (largura).

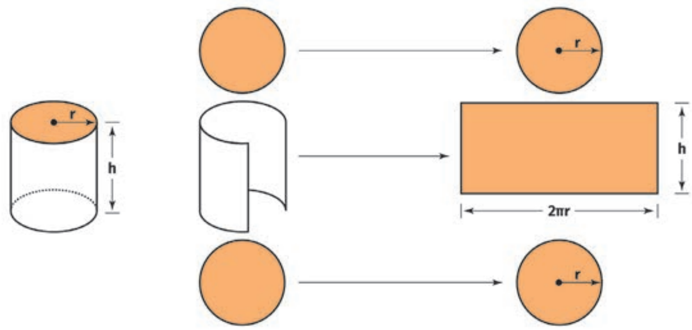


Figura 11.12: Planificação da superfície lateral de um cilindro de revolução.

Donde vem que:

$$A_{total} = 2\pi r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2 \Rightarrow A_{total} = 2\pi r \cdot (h + r)$$

Agora, tomemos um prisma de altura h e área de uma das bases igual a πr^2 e um cilindro de revolução, ambos apoiados pelas bases sobre um mesmo plano α e situados de um mesmo lado de α, conforme a **Figura 11.13**.

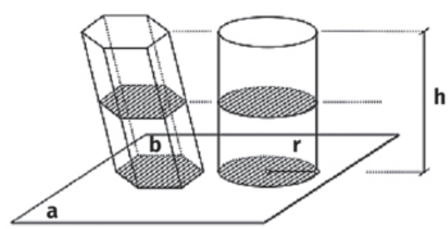


Figura 11.13: Aplicação do Princípio de Cavalieri.

Pelo Princípio de Cavalieri, temos que:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Vejamos os seguintes exemplos.

Exemplo 1:

Considerando um cilindro de revolução equilátero com bases de raio r, encontre as expressões de sua área e de seu volume em função de r.

Solução:

Na medida em que, num cilindro equilátero, $h = 2r$, temos:

$$A_{total} = 2\pi r \cdot (2r + r) \Rightarrow A_{total} = 6\pi \cdot r^2$$
$$V = \pi \cdot r^2 \cdot 2r \Rightarrow V = 2\pi \cdot r^3$$

Exemplo 2:

Um cilindro de revolução tem bases de raio 4 cm. Calcule seu volume, sabendo que a área de sua superfície lateral é igual ao dobro da área de uma de suas bases.

Solução:

Pelo enunciado, temos:

$$A_{lateral} = 2 \cdot A_{base} \Rightarrow 2\pi rh = 2\pi r^2 \Rightarrow h = r = 4cm$$

Logo,

$$V = \pi \cdot 4^2 \cdot 4 = 64\pi cm^3$$

Cones de revolução

O cone de revolução, também chamado de *cone circular reto*, é o sólido gerado por um triângulo retângulo quando o giramos 360º em torno de um de seus catetos. Vamos observar a **Figura 11.14** e considerar *VOB*, um triângulo retângulo.

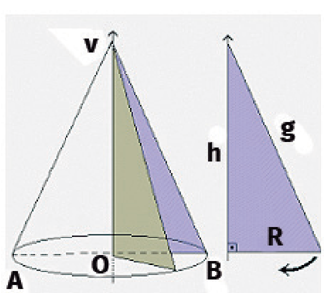


Figura 11.14: Cone de revolução.

No cone gerado pela rotação do triângulo retângulo *VOB* em torno do cateto *VO*, o cateto *OB*, perpendicular ao cateto *VO*, gera no cone um círculo de raio *r = OB*, com centro em *O*. Tal círculo é chamado de *base* do cone, cujo ponto *V* é o vértice. A distância do vértice de um cone ao plano que contém sua base é a *altura* do cone (portanto, a altura é o comprimento do cateto *VO* do triângulo retângulo). O lado *VO* do triângulo retângulo é chamado de *eixo* do cone, enquanto qualquer segmento com extremo em seu vértice, congruente à hipotenusa VB e contido na superfície do cone, é chamado de *geratriz* do cone.

Uma *secção meridiana* de um cone de revolução é a intersecção do cone com um plano que contém o seu eixo (**Figura 11.15**). Desta forma, todas as secções meridianas de um cone de revolução são triângulos isósceles congruentes. Quando as secções meridianas de um cone de revolução forem triângulos equiláteros, diremos que o cone é equilátero.

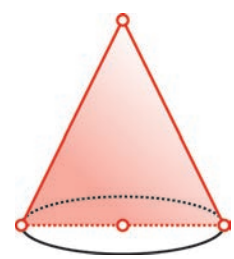


Figura 11.15: Secção meridiana do cone de revolução.

A superfície de um cone de revolução pode ser planificada sem distorções como podemos observar na **Figura 11.15**.

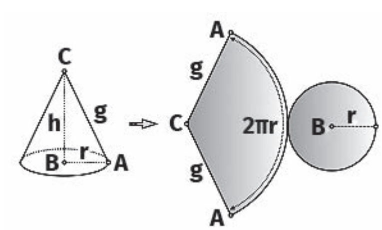


Figura 11.16: Planificação da superfície de um cone de revolução.

Na planificação de um cone de revolução, a base é um círculo de raio *r*, enquanto a parte lateral é um setor circular de raio *g* e comprimento de arco $2 \cdot \pi \cdot r$. Logo, a sua área lateral é dada por:

Tabela 11.1: Determinação do compimento do arco e área do setor de um cone.

Comprimento do arco	Área do setor
$2\pi g$	πg^2
$2\pi r$	$A_{lateral}$

A área total de um cone de revolução de geratrizes medindo e raio da base , será dada por:

$$A_{lateral} = \frac{2\pi r \cdot \pi g^2}{2\pi g} \Rightarrow A_{lateral} = \pi \cdot r \cdot g$$

Agora, tomemos uma pirâmide de altura h e área da base igual a πr^2 e um cone de revolução, ambos apoiados pelas bases, sobre um mesmo plano α e situados de um mesmo lado de α, conforme a **Figura 11.17**.

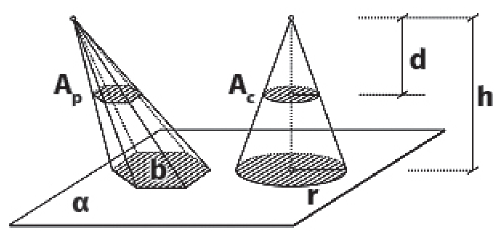


Figura 11.17: Aplicação do Princípio de Cavalieri.

Pelo Princípio de Cavalieri, temos que:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Vejamos os seguintes exemplos.

Exemplo 3:

Dado um cone de revolução equilátero de raio da base r, calcule (em função de r):

a) sua área total;

b) seu volume.

Solução:

a) Sendo um cone equilátero, temos $g = 2r$ e, por conseguinte, $h = \frac{2r \cdot \sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$. Donde vem que:

$$A_{total} = \pi r \cdot (2r + r) = 3\pi \cdot r^2$$

b) Seu volume é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot r\sqrt{3} = \frac{\pi \cdot r^3 \sqrt{3}}{3}$$

Exemplo 4:

A supefície lateral de um cone de revolução, quando planificada, é um setor circular de ângulo que mede 288º e sua área é 20π cm^2. Calcule o volume desse cone.

Solução:

Medida do ângulo central	Área do setor
360º	πg^2
288º	20π

$$\pi g^2 = \frac{360 \cdot 20\pi}{288} = 25\pi \Rightarrow g = 5\,cm$$

Por conseguinte, r = 4 cm e h = 3 cm. Assim,

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 3 = 16\pi\ cm^3$$

Esfera

A esfera é um sólido de revolução, pois pode ser obtida por meio do giro completo de um semicírculo ao redor do diâmetro (**Figura 11.18**).

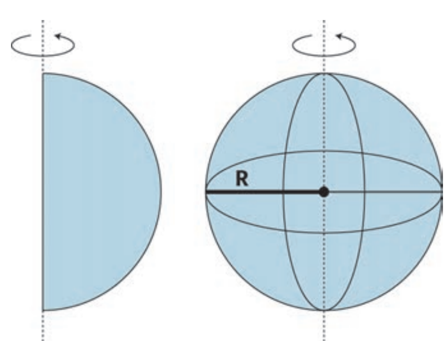


Figura 11.18: Esfera.

Fixado um ponto C no espaço e um número real positivo r, chama-se *superfície esférica* de centro C e raio r o lugar geométrico dos pontos do espaço que estão à distância igual a r do ponto C (**Figura 11.19**).

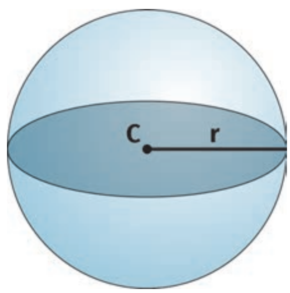
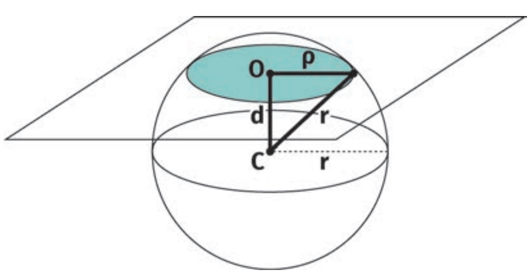


Figura 11.19: Esfera..

A esfera é constituida pelos pontos da superfície esférica e pelos pontos cuja distância até o ponto C é menor do que r. A esfera é um conjunto convexo, por definição.

Toda secção de uma esfera por um plano α situado à distância $d < r$ de seu centro é um círculo de raio ρ (**Figura 11.20**).



$d^2 + \rho^2 = r^2$

Figura 11.20: Secção plana na esfera.

Em uma esfera de raio R é possível tomar dois pontos P_1 e P_2 sobre sua superfície, de tal modo que sejam simétricos em relação ao centro C da esfera. Tais pontos são ditos diametralmente opostos na esfera e, costumeiramente denominados *pólos* (**Figura 11.21**). Podemos destacar também:

- planos perpendiculares ao segmento P_1P_2 que estejam à distância $d < r$ do centro C da esfera intersectam a superfície da esfera em circunferências chamadas de *paralelos* da esfera;
- o paralelo de raio r é chamado de *equador* da esfera;
- planos que contêm o segmento P_1P_2 produzem na superfície da esfera circunferências de raio r chamadas de *meridianos* da esfera.

O segmento P_1P_2 é também chamado de *eixo* da esfera.

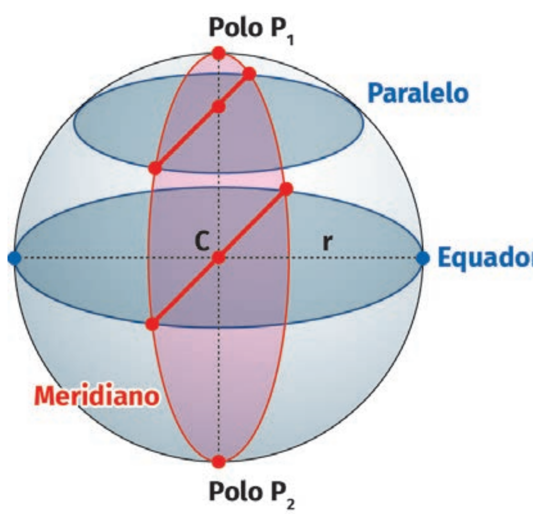


Figura 11.21: Elementos em uma esfera.

O volume de uma esfera de raio r é calculado da seguinte maneira:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

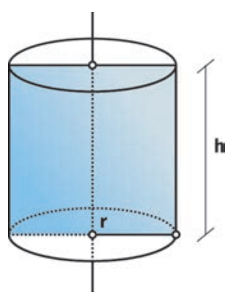
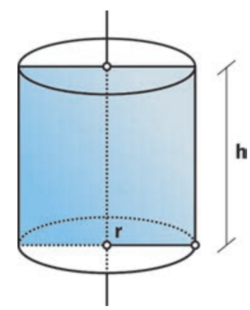
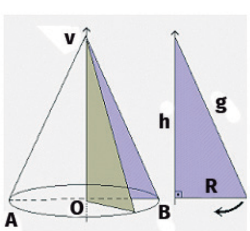
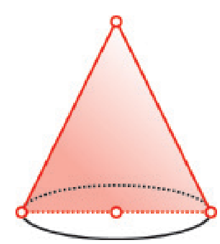
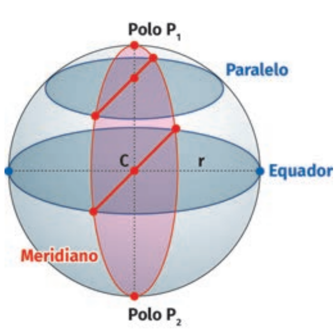
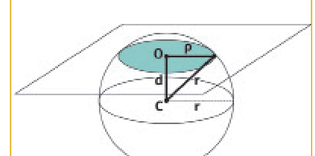
A área da superfície esférica de raio r é calculada da seguinte maneira:

$$A_{sup\ esf} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

lá na plataforma

Quer estudar um pouco mais sobre esferas? Vá à plataforma e assista aos vídeos Volume da esfera e Área de superfície da esfera.

Resumo

	Área da superfície	Volume	Secção meridiana
Cilindro de revolução 	A_{total}= =$2\pi r \cdot (h+r)$	$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$	
Cone de revolução 	$A_{total} = \pi r \cdot (g + r)$	$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$	
Esfera 	$A_{sup\ esf} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$	$V_{esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$	

Atividades

A geometria espacial é um dos temas mais explorados, especialmente em questões que envolvem o cálculo de área e de volumes e a determinação de capacidades de recipientes com formato de cilindros, em geral. Vamos testar um pouco do que aprendemos nesta unidade?

1. (Enem, 2020) Uma loja de materiais de construção vende dois tipos de caixas-d’água: tipo A e tipo B. Ambas têm formato cilíndrico e possuem o mesmo volume. A altura da caixa-d’água do tipo B é igual a 25% da altura da caixa-d’água do tipo A.

Se *R* denota o raio da caixa-d’água do tipo A, então o raio da caixa-d’água do tipo B é:

a) $\frac{R}{2}$

b) $2R$

c) $4R$

d) $5R$

e) $16R$

lá na plataforma

Acesse a plataforma e assista à resolução comentada da Questão 1.

2. (Enem, 2020) No período de fim de ano, o síndico de um condomínio resolveu colocar, em um poste, uma iluminação natalina em formato de cone, lembrando uma árvore de Natal, conforme as figuras 1 e 2.

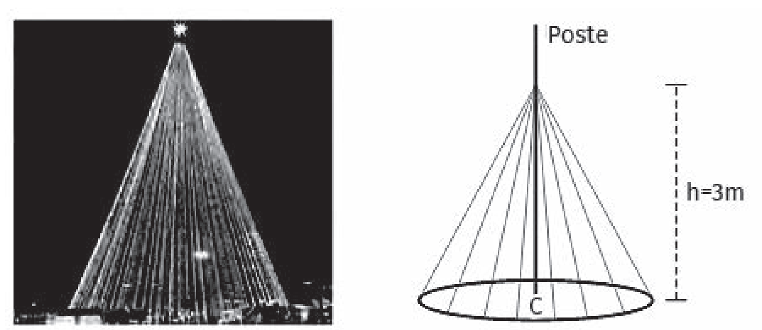


Figura 1 Figura 2

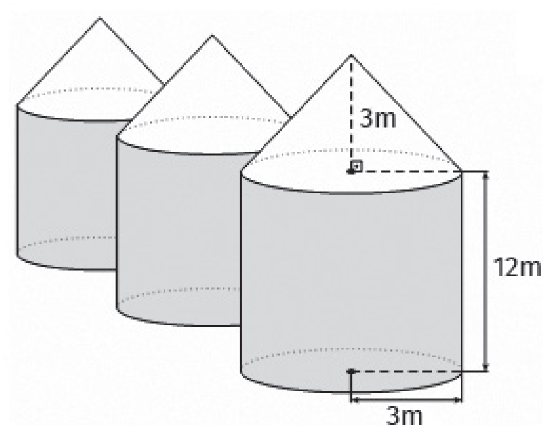
A árvore deverá ser feita colocando-se mangueiras de iluminação, consideradas segmentos de reta de mesmo comprimento, a partir de um ponto situado a 3m de altura no poste até um ponto de uma circunferência de fixação, no chão, de tal forma que esta fique dividida em 20 arcos iguais. O poste está fixado no ponto C (centro da circunferência) perpendicularmente ao plano do chão.

Para economizar, ele utilizará mangueiras de iluminação aproveitadas de anos anteriores, que juntas totalizaram pouco mais de 100m de comprimento, dos quais ele decide usar exatamente 100m e deixar o restante como reserva.

Para que ele atinja seu objetivo, o raio, em metro, da circunferência deverá ser:

a) 4,00.
b) 4,87.
c) 5,00.
d) 5,83.
e) 6,26.

3. (Enem, 2016) Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de cilindros reto, sobrepostos por cones, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga, cuja capacidade é de $20m^3$. Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.



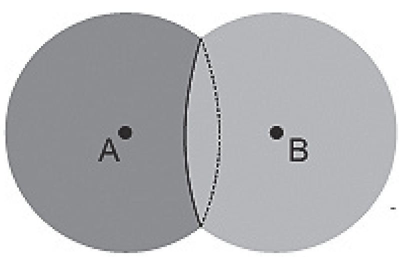
Utilize 3 como aproximação para π.

O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é:

a) 6
b) 16
c) 17
d) 18
e) 21

4. (UERJ, 2013) Na fotografia abaixo, observam-se duas bolhas de sabão unidas.

Quando duas bolhas unidas possuem o mesmo tamanho, a parede de contato entre elas é plana, conforme ilustra o esquema:



Considere duas bolhas de sabão esféricas, de mesmo raio *R*, unidas de tal modo que a distância entre seus centros A e B é igual ao raio *R*. A parede de contato dessas bolhas é um círculo, cuja área tem a seguinte medida:

a) $\frac{\pi R^2}{2}$

b) $\frac{3\pi R^2}{2}$

c) $\frac{3\pi R^2}{4}$

d) $\frac{4\pi R^2}{3}$

5. (FCMSCSP, 2022) A figura indica as medidas internas do diâmetro da base e da altura de um pote, de forma aproximadamente cilíndrica, que está cheio de arroz.

Admitindo-se que a densidade do arroz seja de 1,2g/cm^3 e que a massa de um grão de arroz seja de 0,04g, o número aproximado de grãos de arroz contidos nesse pode está entre

a) 60 e 90 mil
b) 200 e 300 mil
c) 20 e 50 mil
d) 120 e 170 mil
e) 5 e 10 mil

Referências

CARVALHO, P. C. P. *Introdução à geometria espacial.* 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de matemática elementar*. v. 10. Geometria espacial. 6. ed. Atual Editora, 2005.

DOWNS, F. L. Jr.; MOISE, E. E., *Geometria moderna*. V. 2, São Paulo: Ed. Edgar Blucher, 1971.

LIMA, E. L. *Medida e forma em geometria*. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. *A matemática do ensino médio* v. 1, 2, 4. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

POGORELOV, A. V. *Geometría elemental.* Trad.: Carlos Vega. Moscou: Mir, 1974.

Geometria: sólidos semelhantes; inscrição e circunscrição de sólidos

12

meta

Introduzir conhecimentos matemáticos relacionados à geometria espacial, em especial o conceito de sólidos semelhantes, de sólidos circunscritos e o cálculo dos volumes de pirâmides e cones.

objetivo

Esperamos que, ao final desta unidade, você seja capaz de:

- reconhecer sólidos semelhantes;
- resolver problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos (cilindro e cone);
- compreender sobre sólidos inscritos e circunscritos.

Sólidos semelhantes

De modo geral, dizemos que dois objetos são semelhantes quando eles têm a mesma forma, sendo um a ampliação (ou a redução) do outro segundo uma escala (**Figura 12.1**).

Figura 12.1: Exemplo de sólidos semelhantes.

Duas figuras espaciais F e G são ditas *semelhantes* quando existirem uma função bijetora ϕ, definida de F em G, e um número real e positivo k, de modo que, quaisquer que sejam os pontos P e Q (figura 12.2), em F, teremos:

$$P'Q' = k \cdot PQ$$

sendo: $P' = \phi(P)$ e $Q' = \phi(Q)$.

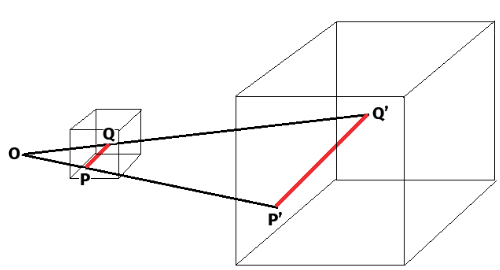


Figura 12.2: Cubos semelhantes e sua demonstração.

A constante k recebe o nome de *razão de semelhança* de F para G. É simples concluir que 1/k é a razão de semelhança de G para F. Particularmente, quando k = 1, as figuras F e G serão ditas *congruentes*.

Sempre que dois sólidos forem semelhantes, sendo k a razão de semelhança, podemos dizer que:

- a razão entre área de suas superfícies é k^2;
- a razão entre os seus volumes é k^3.

 # lá na plataforma

Quer aprender mais sobre sólidos semelhantes e suas razões de proporcionalidade? Vá lá na plataforma e acesse o vídeo.

Troncos de pirâmides

Tomemos uma pirâmide e um plano α que não contém o seu vértice e intersecta todas as suas arestas laterais (**Figura 12.3**).

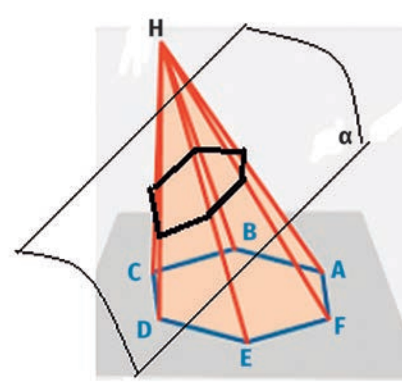


Figura 12.3: Secção de uma pirâmide.

O plano α divide essa pirâmide em dois sólidos:

- uma nova pirâmide, com o mesmo vértice da pirâmide original;
- um sólido chamado de tronco de pirâmide (**Figura 12.4**).

Vamos focar no tronco da pirâmide, considerando que o plano α é paralelo à base da pirâmide original. Dizemos que esse é um *tronco de bases paralelas.*

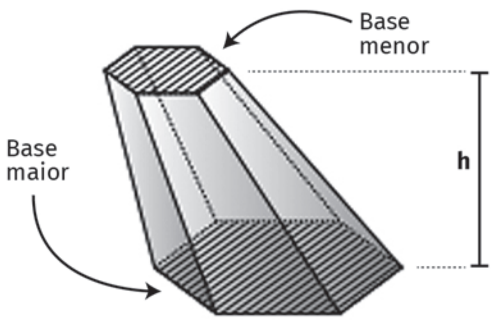


Figura 12.4: Tronco de pirâmide.

Um tronco de pirâmide de bases paralelas é denominado *regular* quando a pirâmide que o originou for regular. A seguir, estão destacados os elementos de um tronco:

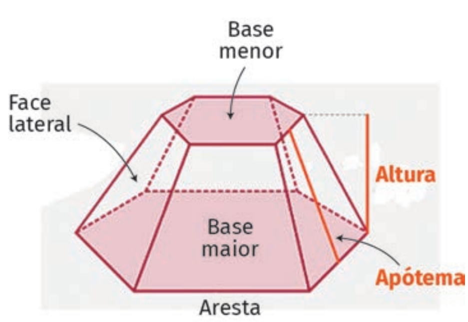


Figura 12.5: Elementos de um tronco de pirâmide.

É possível calcular algumas medidas de um tronco regular. Vejamos o seguinte exemplo. Em um tronco regular de pirâmide quadrangular as arestas da base menor medem 20cm, as arestas da base maior medem 30cm e os apótemas medem 13cm (**Figura 12.6**). De posse dessas informações, vamos calcular a medida da altura, a área e o volume desse tronco.

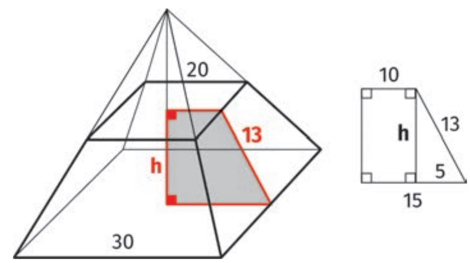


Figura 12.6: Tronco e vista de um trapézio em seu interior.

- Altura do tronco

$$h^2 = 13^2 - 5^2 \quad h = 12 \text{ cm}$$

A partir da informação das medidas das arestas das bases menor e maior, temos a seguinte razão de semelhança, que é:

$$k = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

Sendo *H* a medida da altura da pirâmide maior, temos:

$$\frac{H - 12}{H} = \frac{2}{3} \rightarrow 3H - 36 = 2H \quad H = 36\text{cm}$$

- Volume do tronco

Um tronco é obtido a partir do corte sobre uma pirâmide original. Após o corte, a miniatura do cone original acima do plano de corte é rejeitada e o tronco é o que sobra. O método mais comum para calcular o volume de um tronco é encontrar a diferença entre os volumes dessas duas pirâmides: a original (a que foi cortada) e a miniatura (que foi descartada).

A pirâmide original tem base quadrada de lado 36cm e altura 30cm.

$$V_{pir\ gra} = \frac{1}{3} \cdot 30^2 \cdot 36 = 10800\,cm^3$$

Deteminemos, agora, o volume da pirâmide pequena. Para isso, utilizaremos o *cubo da razão de semelhança*.

$$V_{tronco} = V_{pir\ gra} - V_{pir\ peq} = 10800 - 3200$$
$$V_{tronco} = 7600\,cm^3$$

Donde vem que:

$$V_{tronco} = V_{pir\ gra} - V_{pir\ peq} = 10800 - 3200$$
$$V_{tronco} = 7600\,cm^3$$

- Áreas do tronco

Sendo G a medida do apótema da pirâmide maior, temos:

$$\frac{G-13}{G} = \frac{2}{3} \rightarrow 3G - 39 = 2G \rightarrow G = 39\,cm$$

Na sequência, vamos calcular a área lateral da pirâmide grande. Note que a área lateral é composta por 4 triângulos idênticos, de base medindo 30 e altura igual a 39. É isso mesmo!! Aquilo que para a pirâmide é a *geratriz*, para o triângulo que está em sua lateral é a *altura*.

$$A_{pir\ gra} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 39 = 2340\,cm^2$$

Deteminemos, agora, a área lateral da pirâmide pequena. Entretanto, utilizaremos *o quadrado da razão de semelhança*.

$$\frac{A_{pir\ peq}}{A_{pir\ gra}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \rightarrow A_{pir\ peq} = \frac{4}{9} \cdot 2340 = 1040\,cm^2$$

A diferença entre as áreas laterais das duas pirâmides corresponde à área lateral do tronco.

$$A_{lateral\ tronco} = A_{pir\ gra} - A_{pir\ peq} = 2340 - 1040 = 1300$$

Para obtermos a área total, basta acrescer as áreas das bases.

$$A_{tronco} = A_{pir\ gra} - A_{pir\ peq} + A_{base\ maior} + A_{base\ menor}$$
$$= 2340 - 1040 + 30^2 + 20^2$$
$$A_{tronco} = 2600\,cm^2$$

Troncos de cones

Tomemos um cone circular e um plano α que não contém o seu vértice e intersecta sua superfície lateral, mas não sua base (**Figura 12.7**).

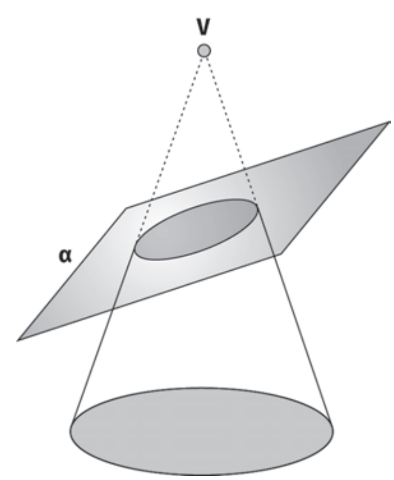


Figura 12.7: Secção cônica.

O plano α divide essa pirâmide em dois sólidos:

- um novo cone, com o mesmo vértice do cone original;
- um sólido chamado de tronco de cone.

Vamos estudar o caso em que o plano α é paralelo à base do cone original, como mostrado na **Figura 12.8**, a seguir.

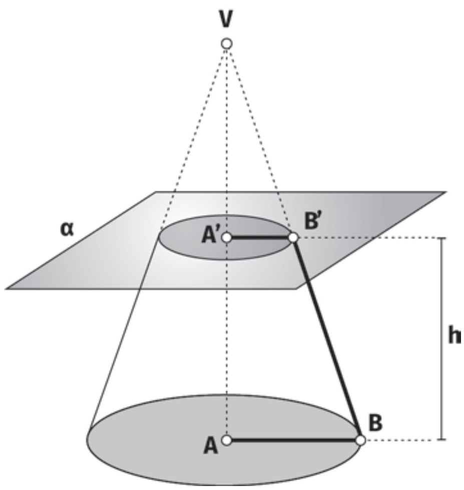


Figura 12.8: Tronco de cone.

No caso de considerarmos um tronco de cone circular reto, com o plano α paralelo à base desse cone, teremos a **Figura 12.9**. Nessa figura, R e r são os raios das bases maior e menor, respectivamente. A altura do tronco é dada por h e a geratriz do tronco é g.

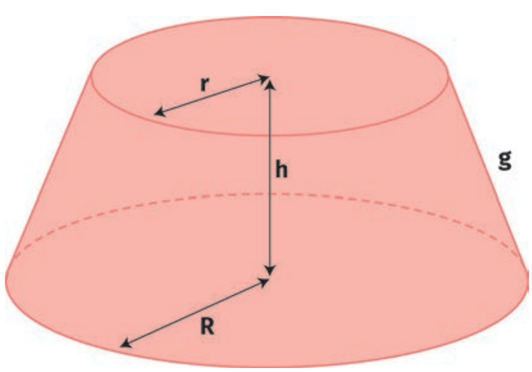


Figura 12.9: Elementos de um tronco de cone.

Considere o seguinte exemplo: em um tronco de cone com geratrizes medindo 10cm e raios das bases valendo 2 cm e 8 cm, calcule a área total e o volume do tronco (**Figura 12.10**).

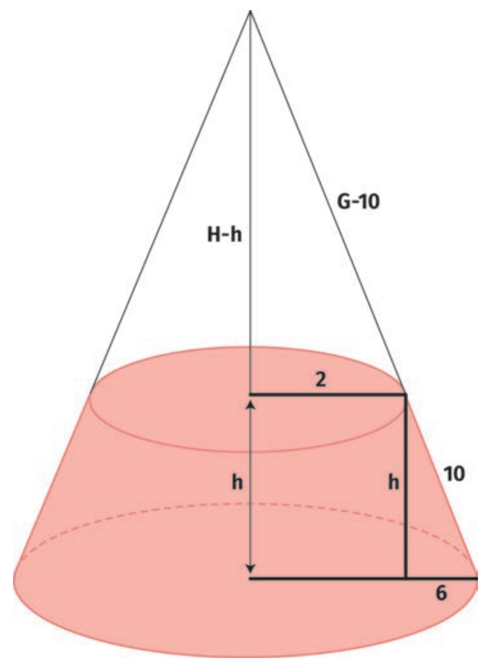


Figura 12.10: Cone semelhante.

- A altura do tronco pode ser encontrada pela aplicação do Teorema de Pitágoras.

$$h^2 = 10^2 - 6^2 \rightarrow h = 8\,cm$$

A partir da informação das medidas dos raios das bases menor e maior, temos a seguinte razão de semelhança:

$$k = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Sendo *H* a medida da altura da pirâmide maior, temos:

$$\frac{H-h}{H} = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{H-8}{H} = \frac{1}{4} \rightarrow 4H - 32 = H \rightarrow H = \frac{32}{3}\,cm$$

- Vamos calcular o *volume do cone maior*.

$$V_{cone\ gm} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 8^2 \cdot \frac{32}{3} = \frac{2048\pi}{9}\,cm^3$$

Utilizaremos, em seguida, a razão de semelhança para calcular o *volume do cone menor*:

$$\frac{V_{cone\ peq}}{V_{cone\ gra}} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \rightarrow V_{cone\ peq} = \frac{1}{64} \cdot \frac{2048\pi}{9} = \frac{32\pi}{9}\ cm^3$$

Finalmente, pode-se obter o *volume do tronco* pela diferença dos volumes dos dois cones:

$$V_{tronco} = V_{cone\ gra} - V_{cone\ peq} = \frac{2048\pi}{9} - \frac{32\pi}{9}$$

$$V_{tronco} = 224\pi\ cm^3$$

- Áreas do tronco

Sendo G a medida de cada uma das geratrizes do cone maior, temos:

$$\frac{G-10}{G} = \frac{1}{4} \rightarrow 4G - 40 = G \rightarrow G = \frac{40}{3} cm$$

$$A_{cone\ gra} = \pi \cdot R \cdot G = \pi \cdot 8 \cdot \frac{40}{3} = \frac{320\pi}{3} cm^2$$

Deteminemos, agora, a área lateral do cone pequeno, com o auxílio da razão de semelhança.

$$\frac{A_{cone\ peq}}{A_{cone\ gra}} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \rightarrow A_{cone\ peq} = \frac{1}{16} \cdot \frac{320\pi}{3} = \frac{20\pi}{3} cm^2$$

Donde vem que, a área total do tronco é:

$$A_{tronco} = A_{(cone\ gra)} - A_{(cone\ peq)} + A_{(base\ maior)} + A_{(base\ menor)}$$

$$= \frac{320\pi}{3} - \frac{20\pi}{3} + \pi \cdot 8^2 + \pi \cdot 2^2$$

$$A_{tronco} = 168\pi\ cm^2$$

Inscrição e circunscrição de esferas em cilindros e em cones

O que faremos nesta seção é estudar situações em que cilindros e cones estão posicionados sob certas condições, dentro ou fora de esferas. O sólido que estiver por fora será chamado circunscrito e o que estiver por dentro, inscrito.

Inscrição e circunscrição de esferas em poliedros regulares

Dizemos que uma esfera está inscrita em um poliedro regular (ou que o poliedro está circunscrito à esfera) quando for a esfera de *maior* raio possível contida no poliedro (**Figura 12.11**).

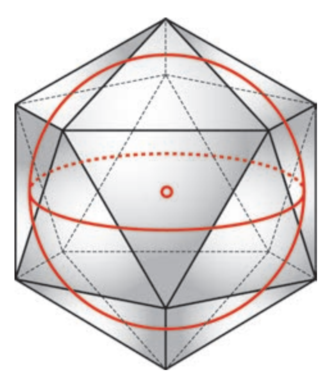


Figura 12.11: Esfera inscrita em um icosaedro regular.

De forma análoga, dizemos que uma esfera está circunscrita a um poliedro regular (ou que o poliedro está inscrito na esfera) quando for a esfera de *menor* raio possível que contém o poliedro (**Figura 12.12**).

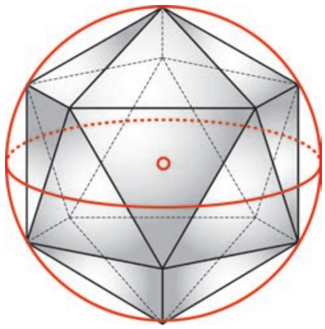


Figura 12.12: Icosaedro regular inscrito em uma esfera.

É importante lembrar algumas características das esferas inscritas e circunscritas:

- a superfície de uma esfera inscrita em um poliedro regular tangencia todas as faces do poliedro em seus respectivos centros;
- a superfície de uma esfera circunscrita a um poliedro regular contém todos os vértices do poliedro;
- a ideia intuitiva de "estar inscrito" não significa *apenas* "estar por dentro", bem como "estar circunscrito" não significa *apenas* “estar por fora”.

lá na plataforma

Quer aprender mais sobre sólidos inscritos e circunscritos? Vá lá na plataforma e assista ao vídeo.

Inscrição e circunscrição de esferas em cilindros equiláteros

Na Unidade 11, vimos o que são cilindros circulares retos, o que são cilindros equiláteros e o que é seção meridiana.

A **Figura 12.13** ilustra um cilindro equilátero de altura e diâmetros das bases medindo l, assim como a sua seção meridiana $ABCD$.

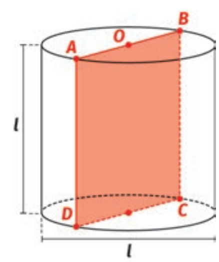


Figura 12.13: Seção Meridiana do cilindro equilátero.

Pode até não parecer, mas $ABCD$ é um quadrado. Tem que ser. Sabe por quê? Vamos explicar:

- AB é certamente um diâmetro porque passa pelo centro O do disco. Logo, $AB = l$. O mesmo vale para o segmento CD;
- AD *é* altura do cilindro. Logo, $AD = l$. O mesmo vale para o segmento BC.

Mas então, por que ao olhar a figura ABCD não parece um quadrado? Simples. Porque na **Figura 12.13**, você está olhando a seção meridiana meio de lado. Tecnicamente, diz-se que a sua visão da meridiana é oblíqua. A figura **Figura 12.14** ilustra uma vista frontal da seção meridiana.

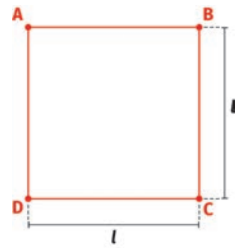


Figura 12.14: Vista frontal da seção reta do cilindro equilátero.

Uma esfera inscrita nesse cilindro tem raio igual à metade do lado do quadrado. Portanto, $R = \frac{l}{2}$

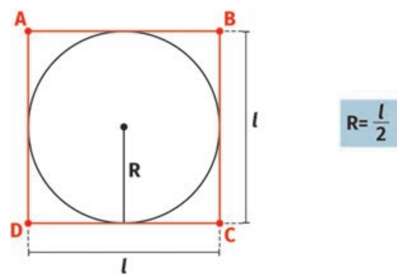


Figura 12.15: Vista frontal do cilindro equilátero com esfera inscrita.

Uma esfera circunscrita a esse cilindro tem raio igual à metade da diagonal do quadrado. Portanto, $R = \frac{d}{2} = \frac{l\sqrt{2}}{2}$.

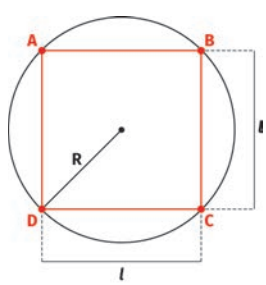


Figura 12.16: Vista frontal do cilindro equilátero com esfera circunscrita.

Inscrição e circunscrição de esferas em cones equiláteros

Na unidade 11, também vimos o que são cones equiláteros. A Figura 12.17 ilustra um cone equilátero de geratriz e diâmetro da base medindo *l*, assim como a sua seção meridiana *ABC*.

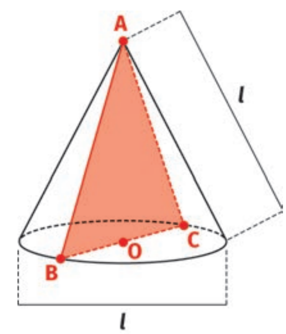


Figura 12.17: Seção Meridiana do cone equilátero.

Pode até não parecer, mas *ABC* é um triângulo equilátero. Segue a justificativa:

- AB é uma das geratrizes do cone. Logo, *AB* = *l*. O mesmo vale para o segmento *AC*.
- *BC* é diâmetro do círculo de centro *O*. Logo, *BC* = *l*.

A figura ABC pode não parecer um triângulo equilátero porque a vista da seção meridiana é oblíqua. A figura a seguir ilustra uma vista frontal da seção meridiana.

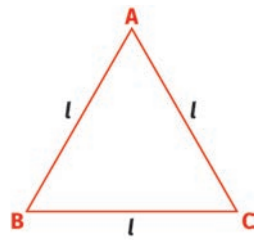


Figura 12.18: Vista frontal da seção reta do cone equilátero.

Uma esfera inscrita nesse cone tem raio igual a $\frac{1}{3}$ da altura do triângulo *ABC*. Portanto, $R = \frac{1}{3} \cdot h$.

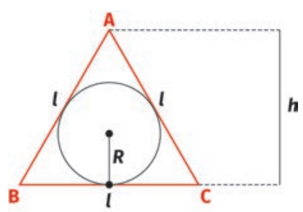


Figura 12.19: Vista frontal do cone equilátero com esfera inscrita.

Mas a altura do triângulo equilátero é dada por $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$. Assim:

$$R = \frac{1}{3} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{6}$$

Já uma esfera circunscrita a esse cone tem raio igual $\frac{2}{3}$ a da altura do triângulo *ABC*. Portanto, $R = \frac{2}{3} \cdot h$.

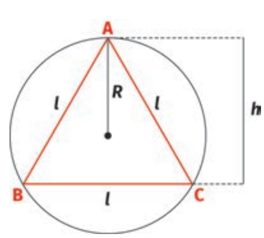


Figura 12.20: Vista frontal do cone equilátero com esfera circunscrita.

Como a altura do triângulo equilátero é dada por $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$, temos:

$$R = \frac{2}{3} \cdot h = \frac{2}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{3}$$

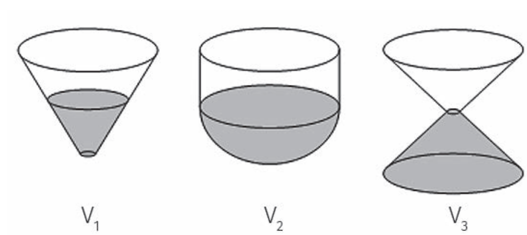
lá na plataforma

Quer aprender mais sobre esferas circunscritas e inscritas em um cilindro? Vá à plataforma e assista a um vídeo sobre o assunto.

Atividade

A geometria espacial é um tema bastante explorado, especialmente em questões que envolvem o cálculo de área, o cálculo de volume e a determinação de capacidades de recipientes com esses formatos.

1. (ENEM, 2005) Os três recipientes da figura têm formas diferentes, mas a mesma altura e o mesmo diâmetro da boca. Neles são colocados líquido até a metade de sua altura, conforme indicado nas figuras. Representando por V_1, V_2 e V_3 o volume de líquido em cada um dos recipientes, tem-se

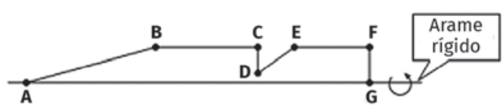


a) $V_1 = V_2 = V_3$
b) $V_1 < V_3 < V_2$
c) $V_1 = V_3 < V_2$
d) $V_3 < V_1 < V_2$
e) $V_1 < V_2 = V_3$

lá na plataforma

Vá à plataforma e assista a um vídeo com a resposta comentada da questão 1..

2. (ENEM, 2010) Numa feira de artesanato, uma pessoa constrói formas geométricas de aviões, bicicletas, carros e outros engenhos com arame inextensível. Em certo momento, ele construiu uma forma tendo como eixo de apoio outro arame retilíneo e rígido, cuja aparência é mostrada na



Ao girar tal forma em torno do eixo, formou-se a imagem de um foguete, que pode ser pensado como composição, por justaposição, de diversos sólidos básicos de revolução.

Sabendo que, a figura, os pontos B, C, E e F são colineares, AB = 4FG, BC = 3FG, EF = 2FG, e utilizando-se daquela forma de pensar o foguete, a decomposição deste, no sentido da ponta para a cauda, é formada pela seguinte sequência de sólidos:

a) pirâmide, cilindro reto, cone reto, cilindro reto.

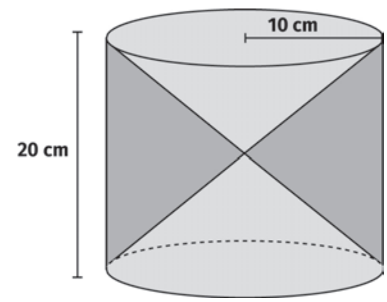
b) cilindro reto, tronco de cone, cilindro reto, cone equilátero.

c) cone reto, cilindro reto, tronco de cone e cilindro equilátero.

d) cone equilátero, cilindro reto, pirâmide, cilindro.

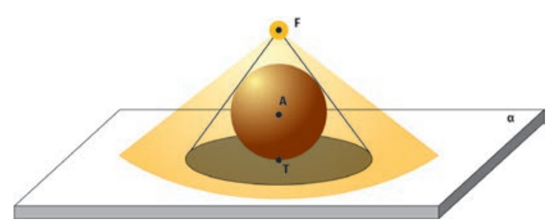
e) cone, cilindro equilátero, tronco de pirâmide, cilindro.

3. (Uerj, 2020) No cilindro circular reto representado a seguir, observam-se dois cones congruentes, de mesmo vértice, cujas bases coincidem com as bases do cilindro. Sabe-se que o cilindro tem raio da base de 10 cm e altura de 20 cm.



Calcule, em centímetros, a altura de um desses cones. Em seguida, determine, em cm^3 o volume da região interior ao cilindro e exterior aos cones.

4. (Uerj, 2014) Uma esfera de centro A e raio igual a 3 dm é tangente ao plano α de uma mesa em um ponto T. Uma fonte de luz encontra-se em um ponto F de modo que F, A e T são colineares. Observe a ilustração:



Considere o cone de vértice F cuja base é o círculo de centro T definido pela sombra da esfera projetada sobre a mesa.

Se esse círculo tem área igual à da superfície esférica, então a distância FT, em decímetros, corresponde a:

a) 10
b) 9
c) 8
d) 7

5. (Uepg, 2019) Sabendo que a área de uma superfície esférica é igual a 256π cm^2 assinale o que for correto.

01) O raio da esfera é um número par.

02) O volume da esfera é igual a $\frac{2^{11}\pi}{3} cm^3$.

04) Se essa esfera estiver inscrita num cubo, então a aresta desse cubo mede 16 cm.

08) Se essa esfera estiver inscrita em um cilindro, então o raio da base do cilindro mede 8 cm.

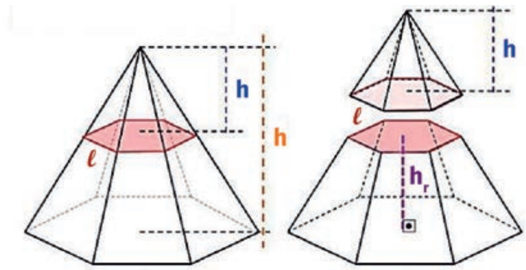
16) Se essa esfera estiver circunscrita em um cubo, então o volume do cubo mede 63 cm^3.

Resumo

1. Sempre que dois sólidos forem semelhantes, sendo k a razão de semelhança, a razão entre:

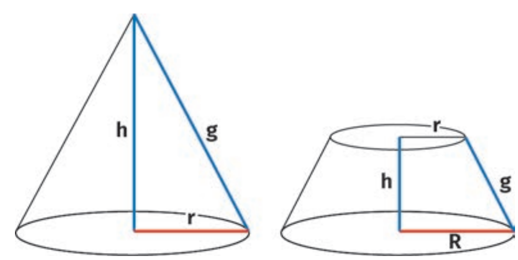
- as áreas de suas superfícies será k^2;
- os seus volumes será k^3.

Exemplo para o tronco de pirâmide



$$\frac{A_b}{A_B} = \frac{\ell^2}{L^2} = \frac{h^2}{H^2} = \ldots \qquad \frac{V_p}{V_T} = \frac{\ell^3}{L^3} = \frac{h^3}{H^3} = \ldots$$

Exemplo para o tronco de cone



2. Inscrição e circunscrição de sólidos

- a secção meridiana de um cilindro equilátero é um quadrado;
- a secção meridiana de um cone equilátero é um triângulo isósceles;

Resposta comentada

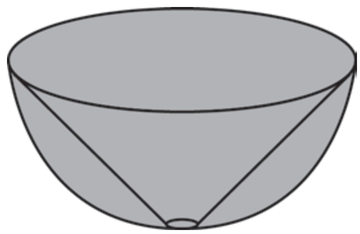
1. b

$$V_1 = \pi \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot \frac{H}{2} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot H}{8}$$

$$V_3 = \pi \cdot R^2 \cdot \frac{H}{2} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot H}{28}$$

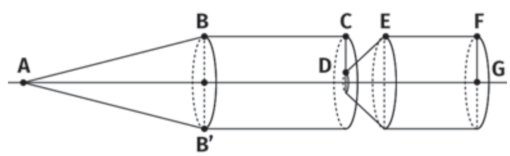
Logo, $V_1 < V_3$.

Por superposição observamos que $V_3 < V_2$



2. c

Girando a forma em torno do arame rígido, obtemos a figura abaixo.



Portanto, a decomposição do foguete, no sentido da ponta para a cauda, é formada pela seguinte sequência de sólidos:

- cone reto ($\overline{AB} = 4 \cdot \overline{FG} \neq \overline{BB'} = 2 \cdot \overline{FG}$)
- cilindro reto ($\overline{BC} = 3 \cdot \overline{FG} \neq 2 \cdot \overline{FG}$)
- tronco de cone e cilindro equilátero ($\overline{EF} = 2 \cdot \overline{FG}$)

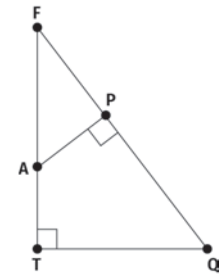
3. Como os cones são congruentes, a altura de cada um tem medida igual a $\frac{20}{2} = 10cm$, ou seja, metade da altura do cilindro.

O volume da região interior ao cilindro e exterior aos cones é dado por

$$\pi \cdot 10^2 \cdot 20 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 10 =$$
$$2000\pi - \frac{2000\pi}{3} = \frac{4000\pi}{3} cm^3$$

4. c

Considere a figura.



Sabendo que a área da superfície esférica é igual à área do círculo de centro T e raio TQ vem

$$4 \cdot \pi \cdot \overline{AP}^2 = \pi \cdot \overline{TQ}^2 4 \cdot 3^2 = \overline{TQ}^2 \ \overline{TQ} = 6\,dm$$

Logo, como FQ é tangente à esfera no ponto P, segue que $\overline{TQ} = \overline{PQ}$ Da semelhança dos triângulos FTQ e FPA, obtemos

$$\frac{\overline{FP}}{\overline{FT}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{TQ}} = \frac{\overline{FP}}{\overline{FT}} = \frac{3}{6} \ \overline{FP} = \frac{1}{2} \cdot \overline{FT}$$

Finalmente, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo FPA, encontramos

$$\overline{FA}^2 = \overline{PA}^2 + \overline{FP}^2 \left(\overline{FT} - \overline{AT}\right)^2 =$$
$$\overline{PA}^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \overline{FT}\right)^2 \ \overline{FT} = 8\,dm$$

5. Se r é o raio da esfera, então:

$$4\pi r^2 = 256\pi \quad r = 8cm$$

[01] Verdadeira. De fato, pois 8 é par.

[02] Verdadeira. Com efeito, pois

$$\frac{2^2\pi}{3} \cdot \left(2^3\right)^3 = \frac{2^{11}\pi}{3} cm^3$$

[04] Verdadeira. De fato, pois a = 2 · 8 = 16 cm em que a é a medida da aresta do cubo.

[08] Verdadeira. Com efeito, pois o raio do cilindro circunscrito é igual ao raio da esfera.

[16] Falsa. Se a esfera estiver circunscrita ao cubo, então o volume do cubo mede

$$\left(\frac{2\cdot 8}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{4096}{3\sqrt{3}}cm^3$$

Referências

CARVALHO, P. C. P. *Introdução à geometria espacial*. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. Fundamentos de matemática elementar. v. 11. Geometria espacial. 6. ed. Atual Editora, 2005.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. A Matemática do ensino médio. v. 1, 2, 4. 6. ed. SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

LIMA, E. L. Medida e forma em geometria. 4. ed. SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, 2009.