Módulo 1

Volume único

Eduardo Picanço Cruz
Guilherme de Azevedo Mendes Corrêa Guimarães
Haroldo da Costa Belo
Luiz Antonio Coelho Lopes

Matemática Financeira para Administração

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Fundação CECIERJ

Consórcio cederj

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Matemática Financeira para Administração

Volume único - Módulo 1

Eduardo Picanço Cruz
Guilherme de Azevedo Mendes Corrêa Guimarães
Haroldo da Costa Belo
Luiz Antonio Coelho Lopes

GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

Apoio:

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

FUNDAÇÃO SANTA CABRINI
Provedora de acesso à Cidadania

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001
Tel.: (21) 2334-1569 Fax: (21) 2568-0725

Material Didático

ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO
Eduardo Picanço Cruz
Guilherme de Azevedo Mendes Corrêa Guimarães
Haroldo da Costa Belo
Luiz Antonio Coelho Lopes

Laboratório de Novas Tecnologias de Ensino
LANTE

COORDENAÇÃO
Prof. Celso José da Costa
Prof. Regina Célia Moreth Bragança

COORDENAÇÃO LATEX
Marcelo Freitas

REVISÃO TIPOGRÁFICA
Patrícia Paula

PROGRAMAÇÃO VISUAL
Roberta Souza S. de Mello

ILUSTRAÇÃO
Ronaldo d'Aguiar Silva

CAPA
Bianca Giacomelli

PRODUÇÃO GRÁFICA
Verônica Paranhos

P585m

Picanço, Eduardo.

Matemática financeira para administração: volume único / Eduardo Picanço Cruz, Guilherme de Azevedo Mendes Corrêa Guimarães, Haroldo da Costa Belo, Luiz Antonio Coelho Lopes - Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

154p.; 19 x 26,5 cm.

ISBN: 978-85-7648-671-8

1. Matemática financeira. 2. Administração. 3. Porcentagem. 4. Juros. 5. Operações de descontos. 6. Sistemas de amortização. 7. Análise de investimentos. 8. Inflação. I. Título.

CDD: 650.01513

2010.2

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT e AACR2.
Texto revisado segundo o novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa.

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador
Sérgio Cabral Filho

Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia
Alexandre Cardoso

Universidades Consorciadas

UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Vieiralves

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Reitor: Roberto de Souza Salles

UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Aloísio Teixeira

UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Motta Miranda

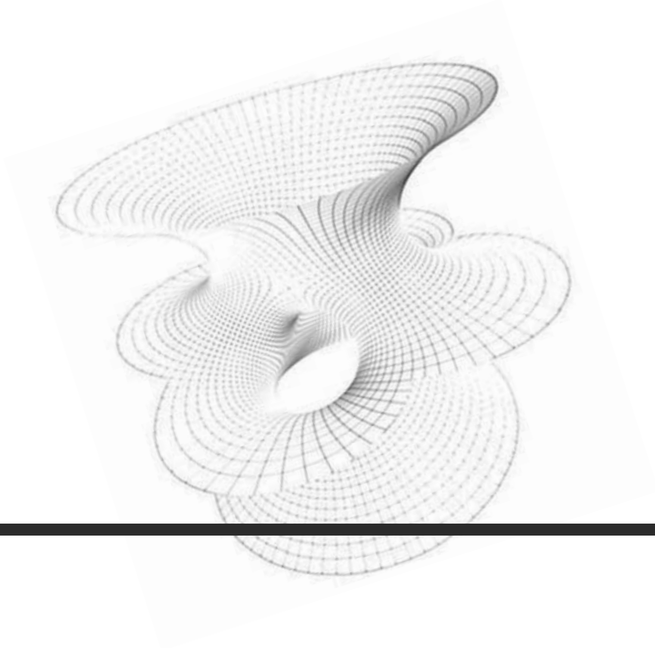
UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitora: Malvina Tania Tuttman

Matemática Financeira para Administração

Volume único - Módulo 1

SUMÁRIO

Aula 1



PORCENTAGEM

Objetivos

1. relembrar os conceitos de razão centesimal, porcentual, unitária;
2. rever os conceitos envolvidos no cálculo da porcentagem;
3. entender e resolver os problemas propostos.

Porcentagem

Introdução

Ao entrar em um shopping center, somos ”bombardeados”com informações do tipo:

Liquidação! Até 40% de desconto.

Descontos de 20%, 40% até 60%!

Além disso, nos telejornais diários também escutamos informações do tipo:

- As mulheres constituem cerca de 53% da população brasileira.
- A alta dos preços no mês de Janeiro foi de $2,5\%$.
- O dólar baixou no mês de Janeiro cerca de $1,5\%$.

Essas expressões envolvem uma razão especial chamada PORCENTAGEM, assunto que passaremos a estudar agora. Esse tema é usualmente encontrado nas questões de concurso público brasileiro, pois envolve fórmulas de simples resolução com questões que, quando bem elaboradas, dão trabalho ao candidato. POR ISSO, SE ESFORCE NESTA ETAPA.

Razão Centesimal

Definição 1.1

Chamamos de razão centesimal a toda razão cujo consequente (denominador) seja igual a 100.

Exemplo 1.1

a. 37 em cada 100 $\rightarrow \dfrac{37}{100}$

b. 19 em cada 100 $\rightarrow \dfrac{19}{100}$

Diversas outras razões não-centesimais podem ser facilmente reescritas na forma centesimal.

Exemplo 1.2

a. 3 em cada 10 $\rightarrow \dfrac{3}{10} = \dfrac{30}{100} \rightarrow$ 30 em cada 100

b. 2 em cada 5 $\rightarrow \dfrac{2}{5} = \dfrac{40}{100} \rightarrow$ 40 em cada 100

c. 1 em cada 4 $\rightarrow \dfrac{1}{4} = \dfrac{25}{100} \rightarrow$ 25 em cada 100

Você, certamente, já deve ter ouvido falar dos outros nomes usados para uma razão centesimal, tais como: **razão porcentual, índice ou taxa porcentual e percentil.**

FORMA PERCENTUAL

Uma razão centesimal pode ser indicada na forma percentual, anotando-se o antecedente (numerador) da razão centesimal seguido do símbolo % (lê-se por cento).

Exemplo 1.3

a. $\dfrac{12}{100} = 12\%$ (12 por cento)

b. $\dfrac{3}{100} = 3\%$ (3 por cento)

FORMA UNITÁRIA

Uma razão centesimal pode ser indicada na forma percentual, anotando-se o antecedente (numerador) da razão centesimal seguido do símbolo % (lê-se por cento).

Exemplo 1.4

a. $23\% = \dfrac{23}{100} = 0,23 = \dfrac{0,23}{1}$

b. $6\% = \dfrac{6}{100} = 0,06 = \dfrac{0,06}{1}$

c. $133\% = \dfrac{133}{100} = 1,33 = \dfrac{1,33}{1}$

d. $0,5\% = \dfrac{0,5}{100} = 0,005 = \dfrac{0,005}{1}$

PORCENTAGEM

Definição 1.2

Dados dois números quaisquer, A e B, dizemos que A **é igual a** p**% de** B quando o valor A for igual a $\dfrac{p}{100}$ do valor B, ou seja, A é $p\%$ de $B \Leftrightarrow A = \dfrac{p}{100} \times B$. B é a referência do cálculo percentual. Dizemos, então, que *A é uma porcentagem do número B*.

!

Todo problema de porcentagem depende, basicamente, de determinarmos um dos valores dados na expressão acima, **A**, **B**, ou **p** em função dos outros dois.

É comum encontrarmos as expressões: *lucro, rendimento, desconto, abatimento, prejuízo* etc. indicando *uma porcentagem* em situações específicas e a expressão *principal* indicando o valor de referência que corresponde a 100%.

Exemplo 1.5

a. Calcular 20% de 250.

Solução: $\dfrac{20}{100} \times 250 = 50$ ou $0,20 \times 250 = 50$

Resposta: 20% de 250 é 50.

b. 30 é igual a 20% de quanto?

Solução: $30 = p \times 0,20 \Rightarrow p = \dfrac{30}{0,20} = 150$

Resposta: 150.

c. 21 representam quanto por cento de 15?

Solução: Da definição de porcentagem, temos que:

21 é x% de 15 $\Leftrightarrow 21 = \dfrac{x}{100} \times 15 \Rightarrow x = \dfrac{21 \times 100}{15}$=140

Resposta: 140%.

Aumentos e Reduções Porcentuais

Quando queremos calcular um aumento ou uma redução de p% sobre determinado valor, normalmente somos levados a calcular o resultado em duas etapas:

1ª - calculamos a porcentagem p% do valor dado:

2ª - adicionamos ou subtraímos do valor original a porcentagem encontrada, para obter, respectivamente, o valor aumentado ou reduzida em p% do valor dado, conforme o caso desejado.

Usando a forma unitária, poderemos calcular aumentos e reduções porcentuais de modo mais rápido, da seguinte forma:

I. Para Calcular um Aumento de p%

Quando aumentamos em p% um valor V, ficamos com $(100+p)\%$ de V. Então, basta multiplicar o valor V pela forma unitária de $(100+p)\%$ para termos o resultado desejado. A forma unitária de $(100+p)\%$ é chamada de **fator de correção**.

Exemplo 1.6

a. Aumentar o valor 230 em 30%.

Solução: $(100+30)\% = 130\% = \dfrac{130}{100} = 1,30$ (fator de correção)

$230 \times 1,30 = 299$

Resposta: 299.

b. Aumentar o valor 400 em $3,4\%$.

Solução: $(100+3,4)\% = 103,4\% = \dfrac{103,4}{100} = 103,4$

Portanto, $400 \times 1,034 = 413,60$

Resposta: $413,60$.

II. Para Calcular uma Redução de p%

Quando reduzimos em $p\%$ um valor V, ficamos com $(100-p)\%$ de V. Então, basta multiplicar o valor V pela forma unitária de $(100-p)\%$ para termos o resultado desejado.

Exemplo 1.7

a. Reduzir o valor 300 em 30%.

Solução: $(100-30)\% = 70\% = \dfrac{70}{100} = 0,70 \Rightarrow 300 \times 0,70 = 210$

Resposta: 210.

b. Reduzir o valor 400 em $2,5\%$.

Solução: $(100-2,5)\% = 97,5\% = \dfrac{97,5}{100} = 0,975 \Rightarrow 400 \times 0,975 = 390$

Resposta: 390.

Aumentos e Reduções Porcentuais Sucessivos

I. Aumentos Sucessivos

Para aumentarmos um valor V sucessivamente em $p_1\%$, $p_2\%$, ..., $p_n\%$, de tal forma que cada um dos aumentos, a partir do segundo, incida sobre o resultado do aumento anterior, basta multiplicar o valor V pelo produto das formas unitárias de $(100+p_1)\%$, $(100+p_2)\%$, ..., $(100+p_n)\%$.

Exemplo 1.8

a. Aumentar o valor 2.000 sucessivamente em 10%, 20% e 30%.

   Solução: $2.000 \times 1,10 \times 1,20 \times 1,30 = 3.432$

   Resposta: 3.432.

b. Se o valor 4.000 sofrer três aumentos sucessivos de 5%, qual o valor resultante?

   Solução: $4.000 \times 1,05 \times 1,05 \times 1,05 = 4.630,50$

   Resposta: $R\$ 4.630,50$.

II. Reduções Sucessivas

Para reduzirmos um valor V sucessivamente em p_1%, p_2%, ..., p_n%, de tal forma que cada uma das reduções, a partir do segundo, incida sobre o resultado da redução anterior, basta multiplicar o valor V pelo produto das formas unitárias de $(100 - p_1)$%, $(100 - p_2)$%, ..., $(100 - p_n)$%.

Exemplo 1.9

a. Reduzir o valor 2.000 sucessivamente em 10%, 20% e 30%.

   Solução: $2.000 \times 0,90 \times 0,80 \times 0,70 = 1.008$

   Resposta: 1.008.

b. Se o valor 4.000 sofrer três reduções sucessivas de 5%, qual o valor resultante?

   Solução: $4.000 \times 0,95 \times 0,95 \times 0,95 = 3.429,50$

   Resposta: $3.429,50$.

OUTROS EXEMPLOS

Exemplo 1.10

a. Multiplicar o preço de uma mercadoria por $1,0428$ equivale a dar-lhe um aumento de quantos por cento?

Solução: $1,0428 = \dfrac{104,28}{100} = 104,28\% = (100+4,28)\,\%$

Resposta: $4,28\%$.

b. A conta de um restaurante indicava uma despesa de $R\$26,00$ e trazia a seguinte observação: *"Não incluímos os* 10% *de serviço"*. Quanto representa, em dinheiro, os 10% de serviço e quanto fica o total da despesa se nela incluirmos a porcentagem referente ao serviço?

Solução: Serviço: 10% de $26,00$, isto é, $0,10 \times 26,00 = 2,60$.
Total da despesa: $26,00+2,60 = 28,60$ ou $26,00 \times 1,1 = 28,60$.

Resposta: $R\$28,60$.

c. Numa pequena agência bancária, 32% dos clientes são pessoas jurídicas e os outros 2.040 são pessoas físicas. Quantos clientes, ao todo,têm essa agência?

Solução: O total de clientes corresponde a 100%.

$(100-32)\,\% = 68\%$ corresponde então ao porcentual de pessoas físicas, portanto 2.040 corresponde então a 68% do total, logo o total de clientes será dado por: $\dfrac{2.040 \times 100}{68} = 3.000$

Resposta: 3.000 clientes.

d. O preço de um produto A é 30% maior que o de B e o preço deste é 20% menor que o de C. Sabe-se que A, B e C custaram juntos, $R\$28,40$. Qual o preço de cada um deles?

Solução: Representaremos os preços de A, B e C por a, b e c respectivamente, portanto tem-se que:

$a = 1,3b$ e $b = 0,8c$ e daí então, $a = 1,3 \times 0,8c$, ou seja, $a = 1,04c$.

Como $a+b+c = 28,40$, temos que: $1,04c+0,8c+c = 28,40 \Rightarrow 2,84c = 28,40$ e, portanto, $\dfrac{28,40}{2,84} \Rightarrow c = 10,00$ e daí, $a = 1,04 \times 10,00 = 10,40$ e $b = 0,8 \times 10,00 = 8,00$.

Resposta: A custa $R\$10,40$, B custa $R\$8,00$ e C custa $R\$10,00$.

e. Uma mercadoria foi vendida com um *lucro* de 20% *sobre a venda*. Qual o preço de venda dessa mercadoria se o seu preço de custo foi de $R\$ 160,00$?

Solução: O termo sobre a venda indica que o valor de referência (principal) deverá ser o preço de venda, portanto devemos fazer esse preço corresponder a 100%. Temos, então, que o preço de custo corresponde a $(100-20)\% = 0,80\%$ do preço de venda, ou seja, $0,80$ correspondem a $160,00$ e daí o preço de venda será dado por $\dfrac{160,00 \times 100}{80} = 200,00$.

Resposta: $R\$ 200,00$.

Resumo

Você reviu os conceitos de razão centesimal, razão porcentual e razão unitária; os conceitos envolvendo o cálculo de porcentagem.

Exercício 1.1

1. Expresse a fração $\dfrac{31}{125}$, em porcentagem.

   Resposta: $24,8\%$.

2. Vidal investiu 30% do seu capital em um fundo de ações e o restante em um fundo de renda fixa. Após um mês, as quotas dos fundos de ações e de renda fixa valorizaram 8% e $2,40\%$, respectivamente. Qual foi a rentabilidade do capital de Vidal nesse mês?

   Resposta: $4,08\%$.

3. Um lucro de 25% sobre o preço de custo de uma mercadoria corresponde a quanto por cento se for calculado sobre o preço de venda?

   Resposta: 20%.

4. Um prejuízo de 50% sobre o preço de custo de uma mercadoria corresponde a quantos por cento se for calculado sobre o preço de venda?

   Resposta: 100%.

5. Se um produto que custa $R\$40,00$ tiver seu preço reajustado sucessivamente em 5% e 10%, qual será o seu preço final?

   Resposta: $R\$46,20$.

6. Se dermos dois descontos sucessivos, um de 5% e outro de 10%, a uma mercadoria que tem preço inicial de $R\$40,00$, qual será o seu preço final?

   Resposta: $R\$34,20$.

7. Antonio ganha 30% a mais que Beatriz e Carlos 20% a menos que Antonio. Se a diferença entre os salários de Antonio e de Carlos é de $R\$130,00$, qual é o salário de Beatriz?

   Resposta: $R\$500,00$.

8. O salário de um vendedor é constituído de uma parte fixa igual a $R\$2.300,00$ e mais uma comissão de 3% sobre o total de vendas que exceder a $R\$10.000,00$. Estima-se em 10% o porcentual de descontos diversos que incidem sobre o salário bruto. Em determinado mês, o vendedor recebeu líquido, o valor de $R\$4.500,00$. Quanto ele vendeu nesse mês?

   Resposta: $R\$100.000,00$.

9. Comprei numa promoção uma calça e uma camisa. Após o término da promoção, a calça ficou 20% mais cara e a camisa, 10% mais cara. Se comprasse as mesmas duas peças pagando esses novos preços, eu gastaria 16% a mais. Quanto me custou a mais a calça em relação à camisa? **Resposta:** 50%.

10. Um certo produto podia ser comprado há alguns meses por 20% do seu valor atual. Qual a porcentagem de aumento sofrido pelo produto neste mesmo período?

    Resposta: 400%.

11. Se os preços sobem 25% ao mês e o seu salário não se altera, em quanto diminui por mês o seu poder de compra?

    Resposta: 20%.

12. Certa categoria de trabalhadores obteve em junho um reajuste salarial de 50% sobre os salários de abril, descontadas as antecipações. Sabendo-se que ela havia recebido em maio uma antecipação de 20%, qual do aumento obtido em junho, sobre os salários de maio?

    Resposta: 25%.

13. Suponha que em certo bimestre a inflação foi de 5% e 4% ao mês, respectivamente. Qual a inflação acumulada nesse bimestre?

    Resposta: $9,2\%$.

14. Humberto, dispondo de certo capital, fez as seguintes aplicações em um trimestre:

    I. aplicou 20% do capital em letra de câmbio; nessa aplicação lucrou 30%;

    II. aplicou $\frac{2}{5}$ do capital em fundo de investimento; nessa aplicação perdeu 25%;

    III. aplicou o restante do capital em caderneta de poupança e seu lucro nessa aplicação foi de 10%. O que se pode dizer relativamente ao total aplicado? Houve lucro? Houve prejuízo? De quanto?

    Resposta: Não houve lucro e nem prejuízo.

15. O preço de um produto sofreu uma redução de 20%. Algum tempo depois, ele sofreu um aumento de 20% e, mais tarde, um novo aumento de 50%. Se o comerciante deseja retornar ao preço inicial, qual o percentual de desconto a ser aplicado sobre este último preço?

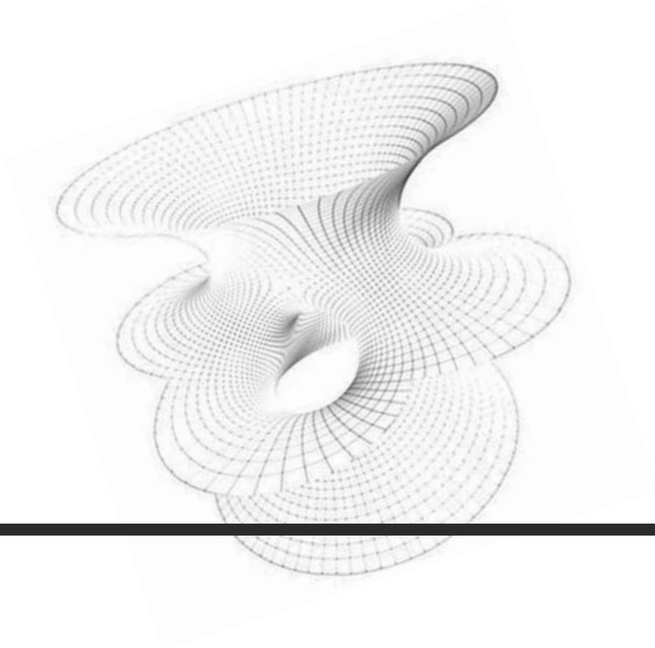
    Resposta: $30,55\%$.

Autoavaliação

Você resolveu todos os exercícios propostos sem dificuldade? Se a resposta foi sim, então você entendeu os conceitos envolvendo a porcentagem. Se não conseguiu, não desista, volte à aula e reveja os conceitos e exemplos antes de começar a Aula 2, procure dirimir suas dúvidas com os colegas do polo e também com os tutores.

Aula 2

JUROS SIMPLES



Objetivos

1. conhecer e entender o valor do dinheiro no tempo;
2. conhecer e entender os termos utilizados na administração financeira;
3. saber calcular as variáveis que envolvem as questões de juros simples.

JUROS SIMPLES

INTRODUÇÃO

Imagine você estar vivendo em tempos antigos e ser o melhor artesão da cidade a fazer blusas, imagine que seus vizinhos, também artesãos, são os melhores em produzir outros bens tais como bolos, maçãs etc. Ao se propor uma festa na cidade, certamente que cada um se aprontaria para oferecer de si o que tem de melhor. E qual o fato gerado nesses encontros que interessa ao nosso estudo? A DEMANDA. É ela que movimenta o comércio até hoje.

Vamos pensar que essa demanda leva as pessoas a um espaço comum para trocar suas mercadorias. Como colocar preço entre elas? Como criar uma tabela com todas as possíveis trocas?

	Produto A	Por	**Produto B**
Troca 1	3 maçãs		1 blusa
Troca 2	2 maçãs		1 bolo
...	...		...
Troca *n*	1 vaca		50 calças

Quantas linhas teria essa tabela de ”PREÇOS”?

É fácil perceber que seria mais produtivo criar um meio de conversão, um fator, ou uma referência que pudesse ser ponte entre todos os produtos ... A MOEDA!

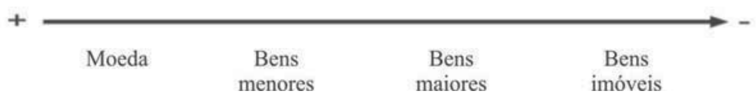
Vejamos como ficaria a tabela de preços agora:

Produto	**Valor**
Maçã	1 moeda
Blusa	10 moedas
Bolo	5 moedas
...	...
Vaca	100 moedas

Certamente é muito mais fácil de se estabelecer ordem entre as trocas. Por exemplo: uma cidade com 5 produtos teria uma tabela de preços com 10 linhas (AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE) se fosse feita da 1^{a} maneira, porém, na segunda proposta seria necessária a metade das linhas (apenas uma para cada produto).

Sem aprofundar em conceitos econômicos, o fato é que em determinado momento a moeda exerceu sua supremacia de ser o único bem que tem troca universal (troca por todos os produtos). Isso se dá porque nem sempre alguém que tem um bem A quer trocar pelo B (eu tenho bolo mas, por exemplo, não quero camisa. Porém, quem produziu a camisa pode querer o bolo), assim, se convertermos tudo para a moeda fica mais fácil agilizar o sistema.

Dessa forma, pode ser estabelecida uma curva de liquidez (termo que significa a capacidade do bem em se tornar moeda):



Vocês já devem ter experimentado essa situação, mas também podem notar que quanto mais a direita na curva, mais difícil é de se vender o produto, logo, costuma-se dizer que ele tem menos liquidez.

Como a moeda tem a maior liquidez de qualquer mercado ela acabe por ser um bem DEMANDADO! E não foi tratando dessa palavra que começamos esse texto?

Pois é, a demanda por moeda faz ela ter valor tal qual os outros bens. Note o esquema abaixo:

$M \rightarrow M'$	Sistema Feudal
$M \rightarrow \$ \rightarrow M'$	Moeda como Troca
$\$ \rightarrow M \rightarrow \$'$	Sistema Mercantil
$\$ \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow \$'$	Sistema Fabril
$\$ \rightarrow \$'$	Sistema Financeiro

Onde:

- M é a mercadoria original

- M’ é a mercadoria que se pretende obter

- $ é a moeda

- $' significa mais moeda que a $

Interessante é perceber como a moeda substitui os meios de produção. Dessa forma, ela merece ser premiadas por duas vias:

- Dinheiro como poupança: prêmio pela economia

- Dinheiro como investimento: prêmio pelo risco

O prêmio a que nos referimos é o JURO.

Estamos acostumados com a ideia de que o valor do dinheiro muda no tempo. Afinal, sempre ouvimos alguma coisa a respeito da inflação. Isso significa que, depois de algum tempo, a quantidade de bens e serviços que determinada soma em dinheiro pode comprar diminui. Outro exemplo é o caso das viagens internacionais. Em alguns momentos, elas estão mais baratas, em outras, mais caras. Dessa forma, achamos natural que ao pedir algum dinheiro emprestado teremos que, em algum momento, devolver a quantia integral acrescida de um determinado valor.

Mas se não houvesse inflação ou variação cambial? Ainda assim ocorreria a mesma coisa. Quem empresta dinheiro abre mão de algo: poderia consumir no presente ou obter uma renda aplicando o recurso em algum investimento. Por isso, faz jus a uma compensação. Chamaremos capital o valor que foi emprestado ou aplicado, e juros a remuneração devida pela utilização do capital. Finalmente, a taxa de juros é a proporção entre os juros pagos e o capital.

REGIMES DE CAPITALIZAÇÃO

O comportamento do capital no tempo depende do modo como foi aplicado, ou seja, do regime de capitalização. Podemos classificar os regimes de capitalização da seguinte forma:

$$\text{Capitalização}\begin{cases}\text{Contínua}\\ \text{Descontínua}\begin{cases}\text{Simples}\\ \text{Composta}\end{cases}\end{cases}$$

As modalidades de capitalização mais comuns são as descontínuas simples e composta. Na primeira, apenas o capital inicial, também chamado principal, rende juros, independentemente do número de períodos da aplicação. Na segunda, os juros são capitalizados a cada período e passam a render juros nos períodos posteriores. Como se diz: juros sobre juros.

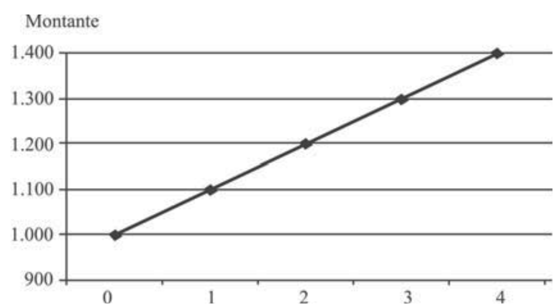
REGIME DE CAPITALIZAÇÃO SIMPLES

É o processo de capitalização no qual, ao final de cada período, o juro é sempre determinado sobre o capital inicial, ou seja, em cada período o juro é obtido pelo produto do capital inicial pela taxa unitária.

A tabela abaixo mostra a evolução de uma aplicação de $\$1.000,00$ por cinco anos, a uma taxa de juro simples de 10% ao ano.

	Juros Simples	
Período	**Juros**	**Montante**
0		1000,00
1	100,00	1100,00
2	100,00	1200,00
3	100,00	1300,00
4	100,00	1400,00

O gráfico a seguir mostra com mais clareza essa evolução.



Conforme podemos observar na tabela e no gráfico, o montante em juros simples cresce linearmente, de acordo com uma progressão aritmética cuja razão é igual ao valor dos juros, isto é, $\$100,00$.

NOTAÇÕES ÚTEIS

A seguir, veremos uma série de letras e símbolos comuns na matemática financeira, tais como:

J - Juros

C - Capital, Principal ou Capital inicial (na calculadora $HP12c$ é PV)

S - Montante (na calculadora $HP12c$ é FV)

n - Número de períodos

i - Taxa de juros no formato unitário $10\% \rightarrow 0,1$

R - Prestação, Parcela ou Renda

O período de capitalização é o prazo ao fim do qual os juros são calculados. No que se refere à periodização, representamos:

$a.a$ - ao ano;

$a.t$ - ao trimestre;

$a.d$ - ao dia;

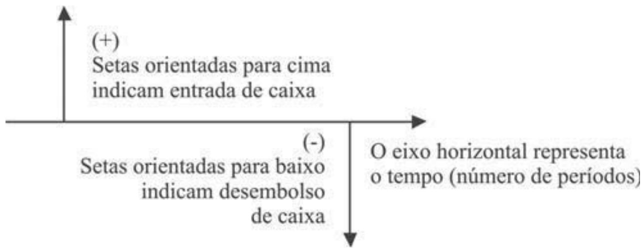
$a.s$ - ao semestre;

$a.b$ - ao bimestre;

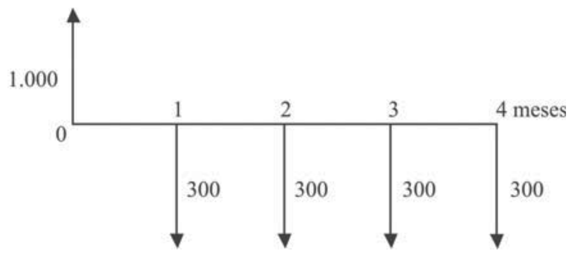
$a.q$ - ao quadrimestre;

$a.m$ - ao mês.

O diagrama de fluxo de caixa é uma ferramenta importante para facilitar a compreensão de elementos da m atemática financeira. Usualmente, as transações financeiras são representadas por diagramas, conforme o seguinte gráfico:



Utilizando um diagrama de fluxo de caixa, podemos, por exemplo, representar da seguinte maneira a operação de compra de um bem no valor de \$1000, para pagamento, com juros e sem entrada, em quatro prestações mensais de \$300:



FÓRMULA GERAL PARA JUROS SIMPLES

Voltando à tabela anterior:

	Juros Simples		
Período	**Montante**	**Juros**	**Fórmula**
0	$1000,00$		
1	$1100,00$	$100,00$	$C.i. \rightarrow 1000 \times 0,1 = 100$
2	$1200,00$	$100,00$	$C.i. \rightarrow 1000 \times 0,1 = 100$
3	$1300,00$	$100,00$	$C.i. \rightarrow 1000 \times 0,1 = 100$
4	$1400,00$	$100,00$	$C.i. \rightarrow 1000 \times 0,1 = 100$
TOTAL	$1400,00$	$400,00$	$C.i.n. \rightarrow 1000 \times 0,1 \times 4 = 400$

!

Não se esquecer das convenções apresentadas!

Dessa forma, pode-se extrair a 1ª fórmula importante, a do juro total:

$$J = Cin(\text{tal qual a última linha da tabela})$$

Vejamos o seguinte exemplo:

- $\$100,00$ aplicados por 5 meses a uma taxa de $10\%a.m.$:

Juro Total	
$J = Cin$	$J = 100 \times 0,1 \times 5 = 50$

Chegando ao Montante (S)	
$S = C + J$	$S = 100 + 50 = 150$

Chegando ao Montante (S), substituindo na 2ª parcela	
$S = C + Cin$	$S = 100 + (100 \times 0,1 \times 5) = 100 + 50 = 150$

Fórmula Geral - Colocando C em evidência na fórmula anterior	
$S = C(1 + in)$	$S = 100(1 + 0,1 \times 5) = 100 \times 1,5 = 150$

Nos textos específicos de finanças, bem como na calculadora financeira $HP12c$, as variáveis S e C são descritas como FV (future value - valor futuro) e PV (present value - valor presente), respectivamente. Assim, a fórmula geral seria:

$$FV = PV(1 + in)$$

Exemplo 2.1

Existem basicamente quatro tipos de exercícios de juros simples:

a. QUERO O MONTANTE (VALOR FUTURO): Qual o montante gerado por um capital de $2000 que rende $3\%a.m.$ por 4 meses?

   Solução: $S = 2000(1 + 0,03x4) = 2240$

   Resposta: 2240

b. QUERO O CAPITAL (VALOR PRESENTE): Qual o capital que gera $2240 se aplicado a $3\%a.m.$ por 4 meses?

   Solução:

$$2240 = C(1 + 0,03x4)$$

$$C = \frac{2240}{1+0,03\times 4} = 2000$$

Resposta: 2000

c. QUERO O PRAZO: Em quanto tempo um capital de \$2000 gera um montante de \$2240 se ele rende $3\% a.m.$?

Solução:

$$2240 = 2000(1+0,03xn)$$
$$\frac{2240}{2000} = 1+0,03n$$
$$1,12-1 = 0,03n$$
$$n = \frac{0,12}{0,03} = 4$$

Resposta: 4

d. QUERO A TAXA: Qual a rentabilidade de um capital de \$2000 que gera um montante de \$2240 em 4 meses?

Solução:

$$2240 = 2000(1+ix4)$$
$$\frac{2240}{2000} = 1+4i$$
$$1,12-1 = 4i$$
$$i = \frac{0,12}{4} = 0,03$$

Resposta: $0,03$

!

DICA IMPORTANTE: como esses exercícios são razoavelmente simples, as bancas de concurso público optam por tentar esconder alguma informação e fazer com que você não saiba quais as variáveis que eles deram e/ou quais eles pedem. VEJAMOS!

e. Três capitais são colocados a juro simples: o primeiro a $25\% a.a.$, durante 4 anos; o segundo a $24\% a.a.$, durante 3 anos e 6 meses e o terceira a $20\% a.a.$, durante 2 anos e 4 meses. Juntos renderam um juro de $Cr\$27.591,80$.

Sabendo que o segundo capital é o dobro do primeiro e que o terceiro é o triplo do segundo, o valor do terceiro capital é de:

Solução: $J_1 + J_2 + J_3 = C_1in + C_2in + C_3in = 27591,80$

Sabendo que $C_2 = 2C_1$ e que $C_3 = 3C_2 \rightarrow$. Logo $C_3 = 6C_1$.

Passando i p/ mês $\rightarrow 1^a(0,25/12) = 0,02083 \rightarrow 2^a(0,24/12) = 0,02 \rightarrow 3^a(0,20/12) = 0,0167$

$$C_1 \times 0,02083 \times 48 + C_2 \times 0,02 \times 42 + C_3 \times 0,0167 \times 28 = 27591,80$$

$$C_1 \times 0,02083 \times 48 + 2C_1 \times 0,02 \times 42 + 6C_1 \times 0,0167 \times 28 = 27591,80$$

$$C_1 + 1,68C_1 + 2,8C_1 = 27591,80\,.$$

Logo $C_1 = 5035$ e $C_3 = 5035 \times 6 = 30210$

Resposta: 30210

Exercício 2.1

1. Um artigo de preço à vista igual a $R\$700,00$ pode ser adquirido com entrada de 20% mais um pagamento para 45 dias. Se o vendedor cobra juros simples de 8% ao mês, qual o valor do pagamento devido?

   Solução: valor à vista $= 700,00$; entrada: 20% de $700,00 = 140,00$;

   valor a financiar $700,00 - 140,00 = 560,00$. Logo, temos que:

   $C = 560,00$, $n = 45\text{dias} = 1,5$ meses e ao mês.

   Resposta: $627,20$

   ✍ O valor a financiar é sempre a diferença entre o valor à vista e a entrada.

2. Qual o juro de um capital de $R\$10.000,00$ que é aplicado por 8 dias à taxa de 3% ao mês?

   Solução: $C = 10.000,00$, $i = 3\%a.m.$ e $n = 8$ meses.

   $$.: J = 10.000,00 \times 0,03 \times 8 = 2400,00$$

   Resposta: $2400,00$

3. Um título de $R\$600,00$, vencido em $10/04/1999$, somente foi pago em $22/06/1999$. Admitindo-se que o banco cobre juros simples de 1% ao dia, calcule o montante desembolsado pelo devedor.

   Solução: $C = 600,00$; $i = 1\%a.d.$, $n = 10/04$ a $22/06 = 73$ dias. Portanto,

   $$S = 600 \times (1 + 0,01 \times 73) = 600 \times 1,73 = 1038,00$$

   Resposta: $1038,00$

4. Uma loja vende um gravador por $R\$1.500,00$ à vista. A prazo, vende por $R\$1.800,00$, sendo $R\$200,00$ de entrada e o restante após um ano. Qual é a taxa anual de juros cobrada?

   Solução: O valor a ser financiado é o valor à vista menos o que é dado de entrada, ou seja, $1500,00 - 200,00 = 1300,00$. O cliente se compromete a devolver, em um ano, $1.600,00$. Logo, o montante é de $1.600,00$, isto é, os juros são de $300,00$ e o período é de um ano. Temos, então, que:

   $$300 = 1300,00 \times i \times 1$$

   $$\Rightarrow i = \frac{300,00}{1300,00} = 0,2307 \text{ao ano ou} 23,07\% \text{ao ano}.$$

   Resposta: $23,07\%a.a.$ou$0,2307$ao ano

5. Qual o valor do juro correspondente a um empréstimo de $R\$3.200,00$, pelo prazo de 18 meses, sabendo que a taxa cobrada é de 3% ao mês?

   Resposta: $1728,00$

6. Calcule o juro simples do capital de $R\$36.000,00$, colocado à taxa de 30% ao ano, de 2 de janeiro de 1990 a 28 de maio do mesmo ano.

   Resposta: $4380,00$

7. Qual a taxa de juro cobrada em um empréstimo de $R\$1.500,00$, a ser resgatado por $R\$2.700,00$ no final de 2 anos?

   Resposta: $40\%a.a.$

8. A que taxa o capital de $R\$24.000,00$ rende $R\$1.080,00$ em 6 meses?

   Resposta: $0,75\% a.m.$

9. Um vestido é vendido por $R\$250,00$ ou então por $R\$80,00$ de entrada, mais uma parcela de $R\$178,50$ após 40 dias. Qual a taxa mensal de juros simples do financiamento?

   Resposta: $3,75\% a.m.$

10. Quanto tempo deve permanecer aplicado um capital de $R\$1.500,00$ a uma taxa simples de $1,4\%$ ao dia para produzir um montante de $R\$1.710,00$?

    Resposta: 10 dias

11. Certo tipo de aplicação a juros simples duplica em dois meses. Em quanto tempo essa aplicação renderá 700% de juros? **Resposta:** 14 meses

12. Um poupador com certo volume de capital deseja diversificar suas aplicações no mercado financeiro. Para tanto, aplica 60% do capital numa alternativa de investimento que paga $34,2\%$ ao ano de juros simples pelo prazo de 60 dias. A outra parte é aplicada em uma conta de poupança por 30 dias, sendo remunerada pela taxa de $3,1\%$ ao mês. O total dos rendimentos auferidos pelo aplicador atinge $R\$1.562,40$. Calcule o valor de todo o capital investido.

    Resposta: $33.527,90$

13. Um empréstimo de $R\$42.000,00$ foi tomado por determinado prazo a uma taxa linear de 7% ao mês. Em determinado momento, o devedor resgata este empréstimo e contrai outro no valor de $R\$200.000,00$ pagando 5% de juros simples ao mês por certo prazo. Após dois anos de ter contraído o primeiro empréstimo, o devedor liquida sua divida remanescente. O total dos juros pagos nos dois empréstimos tomados atinge $R\$180.000,00$. Calcule os prazos referentes a cada um dos empréstimos.

    Resposta: $8,5$ meses e $15,5$ meses, respectivamente.

Autoavaliação

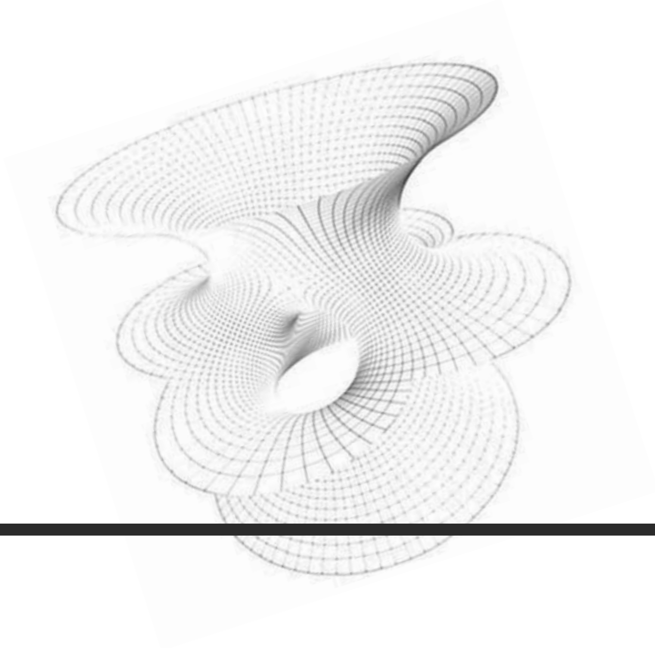
Um investidor aplicou $\$1000,00$ numa instituição financeira que remunera seus depósitos a uma taxa de 5% ao mês, no regime de juros simples. Mostrar o crescimento desse capital no final de cada mês, a contar da data da aplicação dos recursos, e informar o montante que poderá ser retirado pelo investidor no final do 6º mês, após a efetivação do último depósito.

Resposta:

Mês 0	Mês 1	Mês 2	Mês 3	Mês 4	Mês 5	Mês 6
1000	1050	1100	1150	1200	1250	1300

Aula 3

JUROS COMPOSTOS



Objetivos

1. saber calcular as variáveis que envolvem as questões de juros compostos;
2. conhecer e saber utilizar a calculadora financeira *HP*12*c*.

JUROS COMPOSTOS

INTRODUÇÃO

Agora que já avançamos no regime de capitalização simples, temos que apresentar o sistema composto. Cabe aqui ressaltar uma contradição interessante:

Regime simples		**Regime composto**	
Vantagem	**Desvantagem**	**Vantagem**	**Desvantagem**
Mais fácil resolução	Presença certa em concurso público	Normalmente não aparece em concursos	Mais difícil resolução

Podemos notar que a vantagem de um regime é a desvantagem do outro. Como no Brasil é usado o regime composto, muitas vezes os alunos questionam: mas por que estudar o regime simples? Resposta: porque você vai querer passar em uma prova de concurso público!

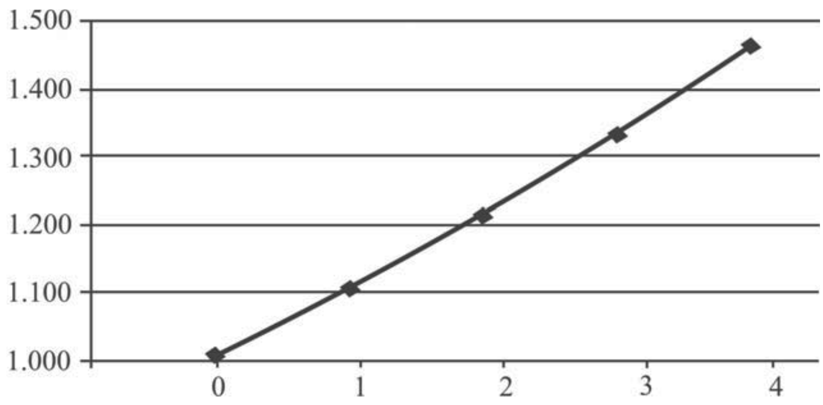
REGIME COMPOSTO

É o regime no qual, ao final de cada período de capitalização, os juros calculados são incorporados ao montante do início do período e essa soma passa a render juros no período seguinte.

Vejamos como ficaria a tabela da aula anterior:

	Juros Compostos	
Período	**Juros**	**Montante**
0		$1000,00$
1	$100,00$	$1100,00$
2	$110,00$	$1210,00$
3	$121,00$	$1331,00$
4	$133,10$	$1464,10$

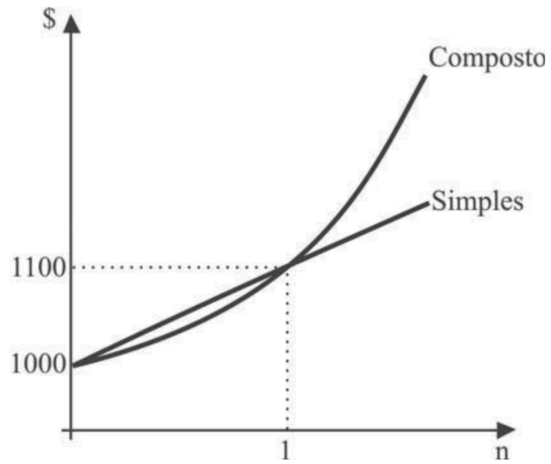
O gráfico a seguir mostra com mais clareza essa evolução.



Vamos agora comparar as duas tabelas?

	Juros Simples		Juros Compostos	
Período	**Juros**	**Montante**	**Juros**	**Montante**
0		$1000,00$		$1000,00$
1	$100,00$	$1100,00$	$100,00$	$1100,00$
2	$100,00$	$1200,00$	$110,00$	$1210,00$
3	$100,00$	$1300,00$	$121,00$	$1331,00$
4	$100,00$	$1400,00$	$133,10$	$1464,10$

O gráfico seria alguma coisa dessa forma:



Conforme podemos observar na tabela e no gráfico, o montante em juros simples cresce linearmente, de acordo com uma progressão aritmética cuja razão é igual ao valor dos juros, isto é, $\$100,00$. Já em juros compostos, o crescimento é exponencial, obedecendo a uma progressão geométrica de razão igual a

1 (um) mais a taxa da operação (Como sabemos, 10% é igual a $0,1$. Logo, a razão é igual a $1,1$).

FÓRMULA GERAL PARA JUROS COMPOSTOS

A fórmula usada para o calculo do juro mensal é a conhecida J = Cin. Porém, como o n = 1, temos J = Ci.

Exemplo 3.1

a. $100,00 aplicados por 5 meses a uma taxa de 10%*a.m.*:

Solução: A fórmula usada para o calculo do juro mensal é a conhecida $J = Cin$. Porém, como o $n = 1$, temos $J = Ci$.

Montante no 1º mês	
$S_1 = C + J$	$S_1 = 100 + 10 = 110$
$S_1 = C + Ci$	$S_1 = 100 + (100 \times 0,1) = 100 + 10 = 110$
$S_1 = C(1+i)$	$S_i = 100(1+0,1) = 100 \times 1,1 = 110$

Montante no 2º mês	
$S_2 = S_1 + J_2$	$S_2 = 110 + (110 \times 0,1) = 110 + 11 = 121$

Note que o valor utilizado para calcular o próximo juro não foi o capital inicial e sim, o montante gerado após o 1º mês. ISSO É O JUROS SOBRE JUROS.

Como $J_2 = S_1 \times i$, temos:

$$S_2 = S_1 + (S_1 \times i) \rightarrow \text{colocando} S_1 \text{em evidência, temos}$$

$$S_2 = S_1 \times (1+i) \rightarrow \text{como} S_1 = C(1+i)$$

$$S_2 = C(1+i) \times (1+i), \text{ou seja,} S_2 = C(1+i)^2$$

Montante no 3º mês	
$S_3 = S_2 + J_3$	$S_3 = 121 + (121 \times 0,1) = 121 + 12 = 133$

Como $J_3 = S_2 \times i$, temos:

$$S_3 = S_2 + (S_2 \times i) \rightarrow \text{ colocando } S_2 \text{ em evidência, temos}$$

$$S_3 = S_2 \times (1+i) \rightarrow \text{ como } S_2 = C(1+i)^2$$

$$S_3 = C(1+i)^2 \times (1+i), \text{ ou seja, } S_3 = C(1+i)^3$$

✍ ALTO LÁ! Estou percebendo algo!

Se para o montante 1	$S = C(1+i)$
Se para o montante 2	$S = C(1+i)^2$
Se para o montante 3	$S = C(1+i)^3$
...	...
Para o montante n	$S = C(1+i)^n$

Estou certo? SIM!

Dessa forma, para calcularmos o montante após 5 meses:

$$S = C(1+i)^5$$

$$S = 100(1+0,1)^5$$

$$S = 100 \times 1,61051 = 161,051$$

Exercício 3.1

Existem basicamente quatro tipos de exercícios de juros compostos:

1. QUERO O MONTANTE (VALOR FUTURO): Qual o montante gerado por um capital de \$2000, que rende 3%$a.m.$, por 4 meses?

   Solução: $S = 2000(1+0,03)^4 = 2251,017$

   Resposta: $2251,017$

2. QUERO O CAPITAL (VALOR PRESENTE): Qual o capital que gera \$$2251,017$, se aplicado a 3%$a.m.$, por 4 meses?

   Solução:

   $$2251,017 = C(1+0,03)^4$$

   $$C = \frac{2251,017}{1,03^4} = 2000$$

   Resposta: 2000

3. QUERO O PRAZO: Em quanto tempo um capital de \$2000 gera um montante de \$$2251,017$ se ele rende 3%$a.m.$?

   Solução: $2251,017 = 2000(1+0,03)^n$

$\frac{2251,017}{2000} = 1 + 0,03^n$

$1,125509 - 1 = 0,03^n \; 0,03^n = 0,125509$

Uma das opções para sair dessa expressão é partir para uma calculadora científica que tenha a função LOG. Isso porque $\log A^B = B \log A$. Assim:

$\log 0,03^n = \log 0,125509$ (essa resposta a máquina dá)

$n log 0,03$ (essa 2ª resposta a máquina dá) $= -0,901325$

$$n \times -1,5228 = -0,901325$$
$$n = \frac{-0,901325}{-1,5228} = 4$$

Resposta: 4 meses

> **!**
>
> Achou essa saída ruim? Prepare-se para a próxima!

4. QUERO A TAXA: Qual a rentabilidade de um capital de \$2000, que gera um montante de \$2251,017 em 4 meses?

   Solução: $2251,017 = 2000(1+i)^4$

   $\frac{2251,017}{2000} = (1+i)^4$

   $1,125509 = (1+i)^4$

   $\sqrt[4]{1,125509} = 1 + i$

   $1,03 = 1 + i$

   $i = 0,03$ ou 3%

   Como nem toda máquina tem a função $\sqrt[x]{y}$ você só tem 2 opções:

   1ª. Lembrar que $\sqrt[x]{y} = y^{1/x}$

   2ª. Ter uma calculadora financeira do tipo $HP12c$

Calma! Não precisa fuçar os *sites* de cotação de preços para buscar a mais barata, você pode baixar um simulador na internet que tem em torno de $200Kb$! Só isso mesmo!

Figura 3.1: HP12c.

Na página *http://superdownloads.uol.com.br/download/160/hp-12c-emulator/* você poderá baixar esse simulador.

ALGUMAS INFORMAÇÕES SOBRE O MANUSEIO DA MÁQUINA!

Para começar, não se assuste com o fato de que a máquina tem sinal de = (igual). Isso faz parte do processo de cálculo dela. O importante é decorar as funções e utilizar da melhor maneira.

1. Ligando e desligando:

   Na tecla $\boxed{\text{ON}}$.

   Muitos se perguntam: por que a máquina tem . (ponto) para separar o inteiro do decimal e , (vírgula) para separar os milhares? Porque é assim que se escreve / formata nos Estados Unidos da América. Para mudar para o modelo brasileiro, basta manter apertada a tecla . quando você ligar a máquina.

2. Acionando as funções coloridas:

   A calculadora possui funções escritas em amarelo e azul. Para acioná-los, basta apertar antes as teclas $\boxed{\text{f}}$ e $\boxed{\text{g}}$, respectivamente.

3. Alterando as casas decimais:

   Basta apertar a tecla $\boxed{\text{f}}$ e, em seguida, o número de casas desejada. Exemplo: para 2 casas, digite $\boxed{\text{f}}$ e 2.

4. Para limpar o que está no visor:

   Basta apertar a tecla $\boxed{\text{clx}}$.

5. Para limpar toda a memória da máquina:

   Basta apertar a tecla $\boxed{\text{f}}$ e depois $\boxed{\text{clx}}$.

   – Esse procedimento é importante quando você estiver fazendo os cálculos financeiros.

6. Operações comuns:

   Para somar $2+2$, faça $\rightarrow$ $\boxed{2}$ $\boxed{\text{ENTER}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{+}$. Vai aparecer no visor o resultado 4.

   Assim para todas as outras três operações.

7. Para função exponencial:

   Se você quiser resolver 53, faça o seguinte $\boxed{5}$ $\boxed{\text{ENTER}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{y^x}$

8. Convenção linear e convenção exponencial:

   Quando fazemos cálculos com períodos (n) não inteiros, podemos contabilizar a fração (por exemplo: em 5 meses e 8 dias - seriam apenas os 8 dias) através de juros simples ou compostos.

   Se for adotada a incidência de juros simples sobre o período não inteiro, dizemos que se adotou a CONVENÇÃO LINEAR.

   Se for adotada a incidência de juros compostos sobre o período não inteiro, dizemos que se adotou a CONVENÇÃO EXPONENCIAL.

   No Brasil utiliza-se a convenção exponencial, mas a $HP12c$ não está configurada para isso. Assim, você deve ajustá-la: basta apertar $\boxed{\text{STO}}$ e depois $\boxed{\text{EEX}}$. Vai aparecer a letra e no canto inferior do visor, isso significa que a convenção exponencial está ativada.

9. Mudando o sinal:

   Para passar um número positivo para o negativo ou o inverso, basta digitar $\boxed{\text{CHS}}$.

FUNÇÕES FINANCEIRAS DA *HP*12*c*

Abaixo do visor, você verá as teclas correspondentes as variáveis financeiras. Para resolver os exercícios, você deve inserir as variáveis que tem, digitando sempre em seguida a tecla que elas correspondem e deixar para última a que você quer saber. Dessa forma, ao clicar sobre a última, aparecerá no visor a resposta. VEJAMOS:

Exercício 3.2

Repetindo os exercícios:

1. QUERO O MONTANTE (VALOR FUTURO): Qual o montante gerado por um capital de \$2000, que rende 3%*a.m.*, por 4 meses?

   Solução: Digite:

   $$2000\,\boxed{\text{PV}}$$

   $$3\,\boxed{\text{i}}$$

   $$4\,\boxed{\text{n}}$$

   E, por fim, digite $\boxed{\text{FV}}$ → aparecerá no visor: $-2251,017$.

   Resposta: $-2251,017$

   ✍ Como a calculadora trabalha com fluxo de caixa, se o PV foi informado como positivo o FV tem que ser negativo. Por isso a resposta é $-2251,017$. Trocando em miúdos: Se você recebeu \$2000 terá que pagar \$2251,017 (por isso negativo).

   ✍ NÃO SE ESQUEÇA DE APERTAR $\boxed{\text{f}}$ e depois $\boxed{\text{clx}}$ AO FINAL, PARA LIMPAR TODO O REGISTRO E NÃO ATRAPALHAR A PRÓXIMA OPERAÇÃO. FAÇA ISSO SEMPRE!

2. QUERO O CAPITAL (VALOR PRESENTE): Qual o capital que gera \$2251,017, se aplicado a 3%*a.m.*, por 4 meses?

   Solução: Digite:

   $$2251,017\,\boxed{\text{FV}}$$

   $$3\,\boxed{\text{i}}$$

$$4\boxed{\text{n}}$$

E, por fim, digite $\boxed{\text{PV}}$ $\rightarrow$ aparecerá no visor: -2000.

Resposta: -2000

3. QUERO O PRAZO: Em quanto tempo um capital de \$2000 gera um montante de $\$2251,017$, se ele rende $3\%a.m.$?

   Solução: Digite:

$$2251,017\boxed{\text{FV}}$$

$$3\boxed{\text{i}}$$

$$2000\boxed{\text{CHS}}\boxed{\text{PV}}$$

   E, por fim, digite $\boxed{\text{n}}$ $\rightarrow$ aparecerá no visor: 4

   Resposta: 4 Mais uma vez: se FV é positivo, o PV é negativo. Por isso $\boxed{\text{CHS}}$ e $\boxed{\text{PV}}$.

REPAREM QUE NÃO TEM MAIS LOG!!!!

4. QUERO A TAXA: Qual a rentabilidade de um capital de \$2000, que gera um montante de $\$2251,017$ em 4 meses?

   Solução: Digite:

$$2251,017\boxed{\text{FV}}$$

$$4\boxed{\text{n}}$$

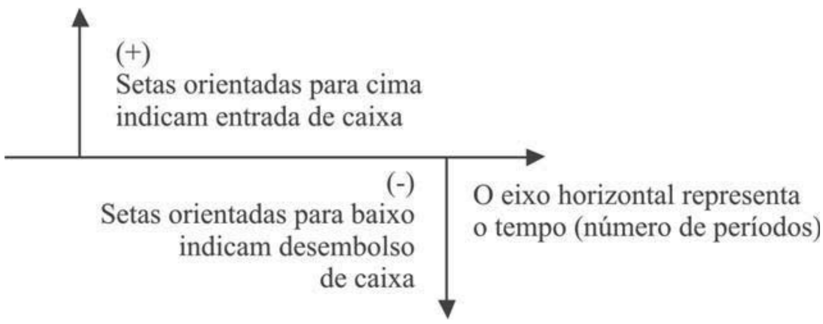
$$2000\boxed{\text{CHS}}\boxed{\text{PV}}$$

   E, por fim, digite $\boxed{\text{i}}$ $\rightarrow$ aparecerá no visor: 3

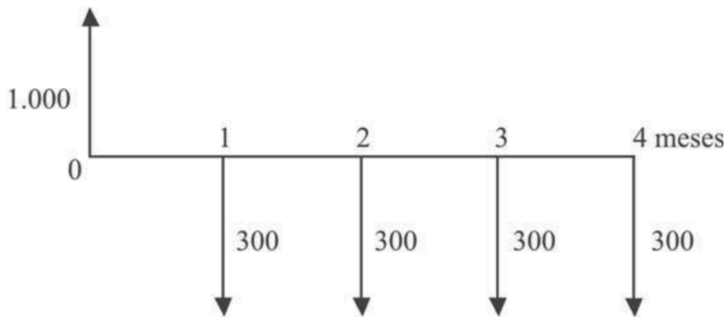
O FLUXO DE CAIXA

O diagrama de fluxo de caixa é uma ferramenta importante para facilitar a compreensão de elementos da matemática financeira. Usualmente, as transações financeiras são representadas por diagramas, conforme o seguinte gráfico:

Utilizando um diagrama de fluxo de caixa, podemos, por exemplo, representar da seguinte maneira a operação de com-



pra de um bem no valor de \$1000, para pagamento, com juros e sem entrada, em quatro prestações mensais de \$300:



Exercício 3.3

1. Uma pessoa toma $R\$1.000,00$ emprestado a juros de 2% ao mês pelo prazo de 10 meses com capitalização composta. Qual o montante a ser devolvido?

   Solução: $C = 1.000,00$; $i = 2\%$ ao mês e $n = 10m$

   $$S = 1000 \times (1 + 0,02)^{10} = 1000 \times 1,218994 \;\Rightarrow\; S = 1.218,99$$

   Resposta: $R\$1.218,99$

   Ou, na $HP12c$

   $$1000\,\boxed{\text{PV}}$$

   $$2\,\boxed{\text{i}}$$

   $$10\,\boxed{\text{n}}$$

   E, por fim, digite $\boxed{\text{FV}}$ $\rightarrow$ aparecerá no visor : $-1218,99$.

2. Qual o capital que, aplicado à taxa composta de 2% ao mês, durante um semestre, gera montante igual a $R\$225.232,40$?

   Solução: $S = 225.232,40$; $i = 2\% a.m.$; $n = 1\,\text{semestre} = 6\,\text{meses}$; $C = ?$

   $$225.232,40 = C \times (1+0,02)^6 \Rightarrow C = \frac{225.232,40}{(1,02)^6} = \frac{225.232,40}{1,126162419}$$

   $$C \cong 200.000,00\,.$$

   Resposta: $R\$200.000,00$

   Ou, na $HP12c$

   $$225232,40\,\boxed{\text{FV}}$$

   $$2\,\boxed{\text{i}}$$

   $$6\,\boxed{\text{n}}$$

   E, por fim, digite $\boxed{\text{PV}} \rightarrow$ aparecerá no visor : $\cong -200000$.

3. Determinar o tempo necessário para o capital de $R\$20.000,00$ gerar um montante de $R\$28.142,00$, quando aplicado à taxa composta de 5% ao mês.

   Solução: $C = 20.000,00$; $S = 28.142,00$; $i = 5\%$ ao mês; $n = ?$

   $$28.142,00 = 20.000,00 \times (1+0,05)^n \;\Rightarrow\; (1,05)^n = \frac{28.142,00}{20.000,00} \;\Rightarrow$$

   $$(1,05)^n = 1,4071 \;\Rightarrow$$

   $$\log(1,05)^n = \log(1,4071) \;\Rightarrow\; n = \frac{\log(1,4071)}{\log 1,05} \;\Rightarrow\; n \cong 7$$

   Resposta: 7 meses

   Ou, na $HP12c$

   $$28142\,\boxed{\text{CHS}}\,\boxed{\text{FV}}$$

   $$5\,\boxed{\text{i}}$$

   $$20000\,\boxed{\text{PV}}$$

   E, por fim, digite $\boxed{\text{n}} \rightarrow$ aparecerá no visor : 7.

4. A que taxa mensal de juros compostos devemos aplicar $R\$40.000,00$, para obtermos montante igual a $R\$56.197,12$ ao fim de um trimestre?

Solução: $C = 40.000,00$; $S = 56.197,12$; $n = l$ trimestre $= 3$ meses; $i =?$

$$56.197,12 = 40.000(1+i)^3 \Rightarrow (1+i)^3 = \frac{56.197,12}{40.000} \Rightarrow$$

$$(1+i)^3 = 1,404928 \Rightarrow 1+i = \sqrt[3]{1,404928} \Rightarrow 1+i = 1,12 \Rightarrow$$

$$i = 1,12 - 1 = 0,12a.m. \text{ ou } 12\% \text{ ao mês}$$

Resposta: 12% ao mês

Ou, na *HP*12*c*

$$56197,12\,\boxed{\text{FV}}$$

$$40000\,\boxed{\text{CHS}}\,\boxed{\text{PV}}$$

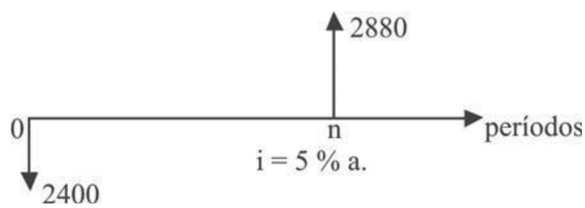
$$3\,\boxed{\text{n}}$$

E, por fim, digite $\boxed{\text{i}}$ $\Rightarrow$ aparecerá no visor: 12.

Exercício 3.4

Fluxo de caixa - Também podem aparecer questões do tipo:

1. Resolva:



Na *HP*12*c*

$$2880\,\boxed{\text{CHS}}\,\boxed{\text{FV}}$$

$$5\,\boxed{\text{i}}$$

$$2400\,\boxed{\text{PV}}$$

E, por fim, digite $\boxed{\text{n}}$ $\rightarrow$ aparecerá no visor: 4.

Exercício 3.5

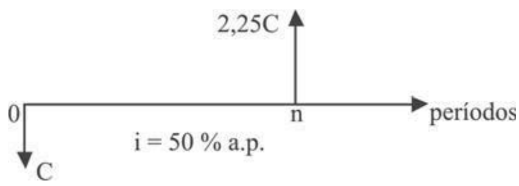
1. Em que prazo um capital de $R\$18.000,00$ acumula um montante de $R\$83.743,00$, à taxa efetiva de $15\%a.m.$?

   Resposta: 11 meses

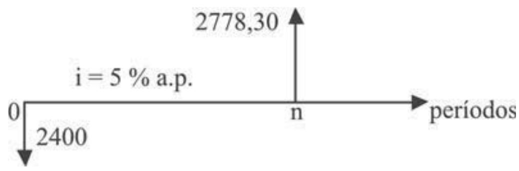
2. A rentabilidade efetiva de um investimento é de $10\%a.a.$ Se os juros ganhos forem de $R\$27.473,00$, sobre um capital investido de $R\$83.000,00$, quanto tempo o capital ficará aplicado?

   Resposta: 3 anos

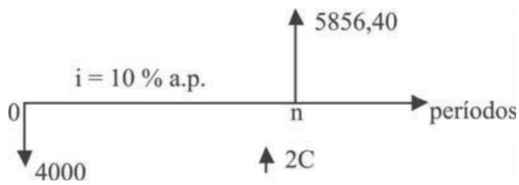
3. Um investidor aplica um capital e obtém um montante, após n períodos, segundo o regime de capitalização composta. Calcule o valor de n em cada operação:



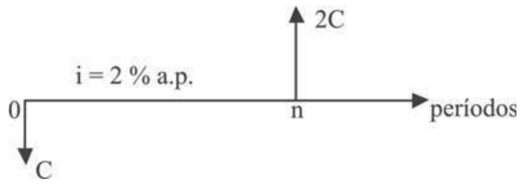
a. **Resposta:** 2 períodos



b. **Resposta:** 3 períodos



c. **Resposta:** 4 períodos



d. **Resposta:** 35 períodos

4. Vera comprou um aparelho e vai pagá-lo em duas prestações; a 1ª, de $R\$180,00$, um mês após a compra e a 2ª, de $R\$200,00$, de dois meses após a compra. Sabendo-se que estão sendo cobrados juros compostos de 25% ao mês, qual era o preço à vista do aparelho?

   Resposta: $R\$272,00$

5. Dois capitais, C_1 e C_2, que estão na razão de três para cinco, foram aplicados a juros compostos e a juros simples, respectivamente. Se a aplicação foi de cinco meses à taxa de 4% ao mês, determine a razão entre os montantes S_1 e S_2.

   Resposta: $0,6083$

6. Um capital de $R\$1.500,00$ esteve aplicado durante 2 meses, produzindo $R\$315,00$ de juros compostos. Qual foi a taxa efetiva mensal aplicada?

   Resposta: 10%

7. Uma pessoa aplicou $R\$15.000,00$ e, após um ano, recebeu $18.782,87$ de juros. Qual foi a taxa de juros mensal (capitalização composta) paga pela financeira onde o dinheiro foi aplicado?

   Resposta: $7\%a.m.$

8. Se eu quiser comprar um carro no valor de $R\$60.000,00$, quando devo aplicar hoje para daqui a dois anos possuir tal valor? Considerar as seguintes taxas de aplicação (capitalização composta):

   a. $2,5\%a.m.$

   Resposta: $R\$33.172,52$

b. $10\% a.s.$

Resposta: $R\$ 40.980,81$

c. $20\% a.a.$

Resposta: $R\$ 41.666,67$

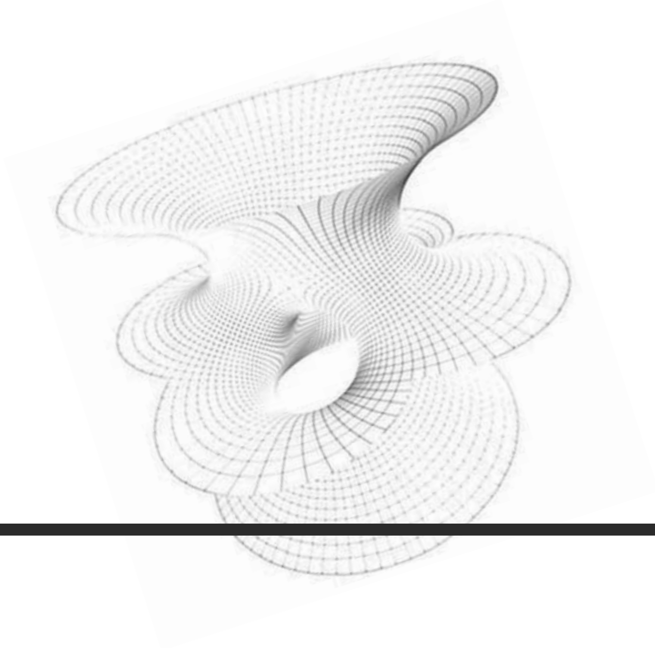
Autoavaliação

1. Um investidor aplicou $\$1.000,00$ numa instituição financeira que remunera seus depósitos a uma taxa de 5% ao mês, no regime de juros compostos. Mostrar o crescimento desse capital no final de cada mês, a contar da data da aplicação dos recursos, e informar o montante que poderá ser retirado pelo investidor no final do 6º mês, após a efetivação do último depósito.
2. O conceito de juros e suas propriedades desempenham um papel fundamental no estudo da Matemática Financeira. Antes de prosseguir, esclareça todas as suas dúvidas. Procure os seus colegas no polo, troque soluções com eles e converse sobre o que você já aprendeu.

Resposta:

Mês 0	Mês 1	Mês 2	Mês 3	Mês 4	Mês 5	Mês 6
1000	1050	1102,5	1157,62	1215,51	1276,28	1340,09

Aula 4



Estudo das Taxas

Objetivos

Ao final desta aula, você será capaz de:

1. entender o conceito de taxa proporcional e taxa equivalente;
2. entender o conceito de taxa nominal e taxa efetiva;
3. interpretar e resolver os problemas propostos.

ESTUDO DAS TAXAS

INTRODUÇÃO

Apesar da dificuldade apresentada por alguns dos exercícios anteriores, até agora, a relação entre o período n e a taxa i sempre estava sendo mantida, ou seja, se a taxa era apresentada ao mês, por exemplo, a resposta do período era em meses e assim ao inverso.

Porém, agora, vamos complicar um pouco. Apresentaremos uma série de relações em que período e taxa estarão desalinhados, precisando assim de um ajuste prévio. Chamamos isso de RELAÇÕES PROPORCIONAIS OU EQUIVALENTES.

TAXAS PROPORCIONAIS

Chamamos proporcionais aquelas que se equivalem no regime de capitalização simples. Como vimos anteriormente, em juros simples temos o crescimento linear do capital (progressão aritmética). A conversão de taxas em juros simples é muito fácil, não requerendo mais do que uma divisão ou multiplicação.

Tomando os valores da tabela abaixo como exemplo, percebemos facilmente que, em uma aplicação trimestral, 10%$a.m.$ é igual a 30%$a.t$. Para determinarmos a taxa trimestral correspondente a uma taxa mensal em juros simples, basta multiplicá-la por 3.

	Juros Simples	
Período	**Juros**	**Montante**
0		1000,00
1	100,00	1100,00
2	100,00	1200,00
3	100,00	1300,00
4	100,00	1400,00

A taxa de 30%$a.t.$ aplicada por um trimestre possui, portanto, no regime de capitalização simples, o mesmo efeito de uma aplicação à taxa de 10%$a.m.$ durante três meses.

Se quisermos, por exemplo, determinarmos a taxa mensal correspondente a uma taxa anual de 24%, basta dividi-la por 12. Assim, $2\% a.m. (= 24\% \div 12)$ corresponde a $24\% a.a.$

✍ Quando desejamos transformar uma taxa anual em taxa diária, devemos estar atentos ao uso do ano civil ou do ano comercial. No primeiro caso, devemos dividir a taxa anual por 365 (ou 366 em anos bissextos), no segundo caso, dividimos por 360.

a. As taxas $72\% a.a.$, $36\% a.s.$ e $18\% a.t$ são proporcionais, pois se tomarmos meses como unidade de tempo, teremos

$$\frac{72\%}{12} = \frac{36\%}{6} = \frac{18\%}{3} = \frac{6\%}{1}$$

Curiosidade

O ano comercial é uma convenção para contornar o problema da variação do número de dias que ocorre no ano civil.

TAXAS EQUIVALENTES

Denominamos taxas equivalentes àquelas que são fornecidas em tempos diferentes e produzem um mesmo montante, ao final de um determinado prazo. Tomemos o exemplo da tabela abaixo:

	Juro Composto	
Período	**Juros**	**Montante**
0		1000,00
1	100,00	1100,00
2	110,00	1210,00
3	121,00	1331,00
4	133,10	1464,10

Observe que a aplicação por três meses, à taxa de $10\% a.m.$, proporciona um rendimento igual a $33,1\% a.t.$ aplicada por um trimestre.

Podemos perceber que não há proporcionalidade no regime de juros compostos pois, sendo exponencial seu crescimento, a relação entre as taxas obedece a uma operação de potência:

$(1+10\%)$ ***elevado a*** 3***, que é igual a*** $(1+33,1\%)$***;***

em juros simples seria $[1+(10\% \times 3)]$***, que é igual a*** $(1+30\%)$

Podemos calcular as taxas equivalentes utilizando a seguinte regra:

1. igualando os fatores das taxas;
2. igualando as relações exponenciais.

Vejamos o exemplo:

Exemplo 4.1

a. SAINDO DE UM PERÍODO MENOR PARA OUTRO MAIOR: uma taxa de 10% ao mês equivale a quantos % ao quadrimestre?

Solução: 1^o passo: igualar os fatores das taxas. Logo, $(1+i)$ é o fator que quero descobrir e $(1+0,1)$, ou melhor, $(1,1)$ é o fator para 10% que eu tenho;

2^o passo: igualar os expoentes. Eu sei que a relação entre quadrimestre e mês é de 4 para 1, respectivamente. Assim, em cima de $(1+i)$ devo escrever 1, relativo a apenas um período. Em cima de $(1,1)$ devo escrever 4, pois 1 quadrimestre tem quatro meses.

	Quero descobrir		**Tenho**
Relação	1 quadrimestre	=	4 meses
Fator	(1 + i)	=	(1 + 0,1)

Dessa forma, a expressão algébrica fica:

$$\begin{aligned}
\text{Quadrimestre} &= \text{Mês} \\
(1+i)^1 &= (1,1)^4 \\
(1+i) &= 1,4641 \\
i &= 1,4641-1 \\
i &= 0,4641 \text{ ou } 46,41\% \text{ ao quadrimestre}
\end{aligned}$$

Para quem quer calcular direto na HP12c:

Digite:

$1,1$ $\boxed{\text{ENTER}}$

4 $\boxed{Y^x}$

1 $\boxed{-}$

100 $\boxed{x}$

Resposta: $46,41$

b. SAINDO DE UM PERÍODO MAIOR PARA OUTRO MENOR: uma taxa de 50% ao semestre equivale a quantos % ao mês?

Solução: A expressão algébrica fica:

$$\begin{array}{rcl} \textbf{QUERO} & & \textbf{TENHO} \\ \text{Mês} & = & \text{Semestre} \\ (1+i)^6 & = & (1,5)^{1*} \\ (1+i) & = & \sqrt[6]{1,5} \\ i & = & 1,069913-1 \\ i & = & 0,069913 \text{ ou } 6,99\% \text{ ao mês} \end{array}$$

$*$ Pois 6 meses equivalem a 1 semestre.

Para quem quer calcular direto na HP12c:

Digite:

$1,5$ $\boxed{\text{ENTER}}$

6 $\boxed{1/x}$ $\boxed{Y^x}$

1 $\boxed{-}$

100 $\boxed{x}$

Resposta: $6,99$

Exemplo 4.2

1. Calcular a taxa anual i_a de juros compostos equivalente às seguintes taxas:

a. $1\%a.m.$

Solução: Seja: $i_m = 1\%$ ao mês (taxa mensal) e i_a a taxa anual equivalente;

Como 1 ano = 12 meses, devemos ter $(1+i_a)^1 = (1+i_m)^{12} \Rightarrow$ $(1+i_a)^1 = (1,01)^1 2 \Rightarrow i_a = 1,126825 - 1 = 0,126825$ ao ano ou $i_a = 12,6825\%$ ao ano.

Resposta: $12,6824\%$ ao ano

b. $2\%a.t.$

Solução: Seja: $i_t = 2\%$ ao trimestre (taxa trimestral) e i_a a taxa anual equivalente;

Como 1 ano = 4 trimestres, devemos ter

$$(1+i_a)^1 = (1+i_t)^4 \Rightarrow$$

$$(1+i_a)^1 = (1,02)^4 \Rightarrow$$

$i_a = 1,082432 - 1 = 0,082432$ ao ano ou $i_a = 8,2432\%$ ao ano.

Resposta: $8,2432\%$ ao ano

c. $5\%a.q.$

Solução: Seja: $i_q = 5\%$ ao quadrimestre (taxa quadrimestral) e i_a a taxa anual equivalente;

Como 1 ano = 3 quadrimestres, devemos ter $(1+i_a)^1 = (1+i_q)^3 \Rightarrow$ $(1+i_a)^1 = (1,05)^3 \Rightarrow i_a = 1,157625 - 1 = 0,157625$ ao ano ou $i_a = 15,7625\%$ ao ano.

Resposta: $15,7625\%$ ao ano

d. $10\%a.s.$

Solução: Seja: $i_s = 10\%$ ao semestre (taxa semestral) e i_a a taxa anual equivalente;

Como 1 ano = 2 semestres, devemos ter

$$(1+i_a)^1 = (1+i_s)^2 \Rightarrow (1+i_a)^1 = (1,1)^{12} \Rightarrow$$

$$i_a = 1,21 - 1 = 0,21 \text{ ao ano ou } i_a = 21\% \text{ ao ano.}$$

Resposta: 21% ao ano

2. Calcular as taxas equivalentes a $20\% a.a.$, conforme solicitado abaixo:

a. taxa semestral

Solução: Seja: $i_a = 20\%$ o ano (taxa anual) e i_s a taxa semestral equivalente;

Como 1 ano $=$ 2 semestres, tem-se, então, que $(1+i_s)^2 = (1+i_a)^1 \Rightarrow (1+i_s)^2 = (1+0,2)^1 \Rightarrow (1+i_s) = \sqrt{1,2} \Rightarrow i_s = 1,095445 - 1 \Rightarrow i_s = 0,095445$ a.s. ou $i_s = 9,5445\,\%$ ao semestre.

Resposta: $9,5445\%$ ao semestre

b. taxa quadrimestral

Solução: Seja: $i_a = 20\%$ ao ano (taxa anual) e N a taxa quadrimestral equivalente;

Como 1 ano $=$ 3 quadrimestres, tem-se, então, que $(1+i_q)^3 = (1+i_a)^1 \Rightarrow (1+i_q)^3 = (1+0,2)^1 \Rightarrow (1+i_q) = \sqrt[3]{1,2} \Rightarrow i_q = 1,062659 - 1 \Rightarrow i_s = 0,062659$ a.q. ou $i_s = 6,2659\%$ ao quadrimestre.

Resposta: $6,2659\%$ ao quadrimestre

c. taxa trimestral

Solução: Seja: $i_a = 20\%$ ao ano (taxa anual) e i_t a taxa trimestral equivalente;

Como 1 ano $=$ 4 trimestres, tem-se, então, que $(1+i_t)^4 = (1+i_a)^1 \Rightarrow (1+i_t)^4 = (1+0,2)^1 \Rightarrow (1+i_t) = \sqrt[4]{1,2} \Rightarrow i_t = 1,046635 - 1 \Rightarrow i = 0,046635$ a.t ou $i_t = 4,6635\%$ ao trimestre.

Resposta: $4,6635\%$ ao trimestre

d. taxa mensal

Solução: Seja: $i_a = 20\%$ ao ano (taxa anual) e i_m a taxa mensal equivalente;

Como 1 ano $=$ 12 meses, tem-se, então, que $(1+i_m)^{12} = (1+i_a)^1 \Rightarrow (1+i_m)^{12} = (1+0,2)^1 \Rightarrow (1+i_m) = \sqrt[12]{1,2} \Rightarrow i_m = 1,015309 - 1 \Rightarrow i_m = 0,015309$ a.m. ou $i_m = 1,5309\%$ ao mês.

Resposta: $1,5309\%$ ao mês

3. Um corretor de títulos propõe a seu cliente uma aplicação cuja rentabilidade é de 40% ao ano. O investidor soube de um outro investimento, em que pode ganhar 9% ao trimestre. Qual será sua escolha?

Solução: Podemos comparar as duas alternativas, verificando se suas taxas são equivalentes. Pode-se calcular, por exemplo, a taxa anual equivalente a $9\% a.t.$. Neste caso, como 1 ano = 4 trimestres, tem-se que:

$$(1+i_a)^1 = (1+0,09)^4 = 1,411582 \Rightarrow i_a = 0,411582\,a.a.$$

$$\text{ou } i_a \cong 41,16\% \text{ ao mês.}$$

Resposta: Portanto, aplicar a $9\% a.t.$ é melhor do que aplicar a $40\% a.a.$

4. O preço de uma mercadoria é de $R\$2.000,00$, sendo financiada até 3 meses. Caso opte por pagar à vista, a loja oferece um desconto de 10%. Sabendo-se que a taxa de mercado é de $40\% a..a.$, vale a pena comprar a prazo?

Solução: O preço da mercadoria à vista é de $R\$1.800,00$, isto é, 90% de $R\$2.000,00$. Devemos calcular a taxa a que está sendo cobrada na operação. Tem-se, então, que:

$$2000 = 1800(1+i)^3 \;\Rightarrow\; 1+i = \sqrt[3]{\frac{2000}{1800}} = \sqrt[3]{1,111111} = 1,035744 \;\Rightarrow$$

$$i = 0,035744 \text{ ou } i \cong 3,57\% a.m.$$

Como 1 ano = 12 meses, a taxa anual i_a, equivalente a esta taxa mensal de $3,57\%$, será dada por:

$$(1+i_a)^1 = (1+0,0357)^{12} \;\Rightarrow\; i_a = 1,52338 - 1 = 0,52338 \text{ ao ano}$$

$$\text{ou } i_a = 52,338\% \text{ ao ano,}$$

Logo, a taxa de financiamento da loja é maior do que a taxa de juros do mercado.

Resposta: É melhor comprar à vista.

Taxas Nominais

Chamamos de taxa nominal a taxa de juros cuja unidade de referência dos períodos não coincide com o período de capitalização, como, por exemplo, $12\% a.a.$ capitalizados mensalmente. Observe que a taxa é anual, mas é informado que a capitalização é mensal.

Este é o dos rendimentos da caderneta de poupança. Você já deve ter ouvido que a poupança rende $6\%a.a.$, mas também deve ter ouvido que rende $0,5\%a.m.$ Devemos expressar a taxa da caderneta de poupança em termos anuais da seguinte forma: $6\%a.a.$, com capitalização mensal.

Ainda utilizando o exemplo da poupança, as taxas nominais devem ser divididas pelo número de períodos de capitalização $(6\% \div 12 = 0,5\%)$ como se fosse uma taxa proporcional de juros simples, mas na verdade ela é capitalizada por juros compostos.

Para chegar à taxa anual equivalente, devemos agir conforme foi explicado em "equivalência de taxas em juros compostos".

$$\begin{array}{rcl} \textbf{QUERO} & & \textbf{TENHO} \\ \text{Ano} & = & \text{Mês} \\ (1+i)^1 & = & (1,005)^{12} \\ (1+i) & = & 1,061678 \\ i & = & 1,061678-1 \\ i & = & 0,061678 \text{ ou } 6,1678\% \text{ ao ano} \end{array}$$

Para quem quer calcular direto na HP12c:

Digite:

$$1,005 \ \boxed{\text{ENTER}}$$
$$12 \ \boxed{Y^x}$$
$$1 \ \boxed{-}$$
$$100 \ \boxed{\text{x}}$$

Resposta: $6,1678$. A resposta de $6,1678\%$ é, na realidade, a taxa efetiva anual da caderneta de poupança. Mas o que é TAXA EFETIVA?

TAXAS EFETIVAS

São muitos os fatores que mascaram o valor efetivo das transações financeiras. Um deles, como acabamos de ver, é expressar a taxa praticada no formato nominal. Nesse caso, o custo efetivo será maior do que o expresso nominalmente.

Por exemplo, qual o custo efetivo anual de uma taxa de 36%$a.a.$, com capitalização mensal? Primeiro, dividimos por 12 para calcular quanto ela representa em termos mensais.

$$36\%/12 = 3\% \text{ ao mês}$$

Depois, com o artifício utilizado para a determinação de taxas equivalentes, lançamos na seguinte conta:

$$\begin{array}{rcl}
\textbf{QUERO} & & \textbf{TENHO} \\
\text{Ano} & = & \text{Mês} \\
(1+i)^1 & = & (1,03)^{12} \\
(1+i) & = & 1,425761 \\
i & = & 1,425761 - 1 \\
i & = & 0,425761 \text{ ou } 42,5761\% \text{ ao ano}
\end{array}$$

Para quem quer calcular direto na HP12c:

Digite:

$$1,03\ \boxed{\text{ENTER}}$$
$$12\ \boxed{Y^x}$$
$$1\ \boxed{-}$$
$$100\ \boxed{\text{x}}$$

Resposta: $42,5761$

!

Você pode estar se perguntando se alguma instituição poderia cobrar de um consumidor uma taxa nominal. Sendo ela dividida pelo número de períodos de capitalização, mas computada em regime de juros compostos, resultará numa taxa maior do que é sugerido. Como consumidor, não se preocupe, pois o Código de Defesa do Consumidor (Lei $n^o 8078/1990$) obriga, em seu art.52, que o fornecedor informe a **taxa efetiva da transação.**

Exercício 4.1

1. Taxa nominal de 60% ao ano, com capitalização mensal.

   Solução: Como 1 ano = 12 meses, então a taxa efetiva mensal será de $N = 2.725,00$.

2. Taxa nominal de 60% ao ano, com capitalização bimestral.

   Solução: Como 1 ano = 6 bimestres, então a taxa efetiva será de $\dfrac{60}{4} = 15\%$ ao trimestre

3. Taxa nominal de 60% ao ano, com capitalização trimestral.

   Solução: Como 1 ano = 4 trimestres, então a taxa efetiva será de N.

4. Se aplicarmos $R\$10.000,00$ à taxa de 36% ao ano, capitalizada mensalmente, qual o montante obtido ano final do ano?

   Solução: A taxa de 36% é nominal, pois seu período, que é anual, é diferente do período de capitalização, que é mensal; logo, considerando a relação entre as unidades de tempo dessas taxas, a taxa efetiva da operação é proporcional a taxa dada, ou seja, como 1 ano = 12 meses , então a taxa efetiva i será dada por $i = \frac{36}{12} = 3\%$ ao mês.

   Portanto, o montante S será obtido por:

$$S = 10000 \times (1 + 0,03)^{12} = 10000 \times 1,42576 \Rightarrow S = 14.257,60$$

Resposta: $R\$14.257,60$

Exercício 4.2

1. Em juros simples, qual é a taxa trimestral equivalente à taxa de 9% ao quadrimestre?

   Resposta: $6,75\%$

2. Qual a taxa anual equivalente à taxa nominal anual de 20%, capitalizados semestralmente?

   Resposta: 21%

3. Uma empresa aplica $R\$20.000,00$ à taxa de juros compostos de $20\% a.a.$, por 36 meses. Qual a taxa que mais se aproxima da taxa proporcional bimestral dessa operação?

   Resposta: $4,04\%$

4. Calcule a taxa equivalente, mensal, de $41,3\% a.a.$

   Resposta: $2,9228602\% a.m.$

5. Calcule a taxa efetiva semestral correspondente a uma taxa nominal de 24% ao ano, com capitalização mensal.

   Resposta: $12,6162419\%$ a.s.

6. Determine a taxa efetiva trimestral correspondente a uma taxa nominal de 18% ao ano, com capitalização bimestral.

   Resposta: $4,5335831\%$ a.t.

7. Qual a taxa efetiva anual correspondente a uma taxa nominal de 6% ao ano, com capitalização mensal?

   Resposta: $6,1677812\%$ a.a.

8. Que taxa efetiva bimestral corresponde à taxa nominal de 9% ao trimestre, com capitalização mensal?

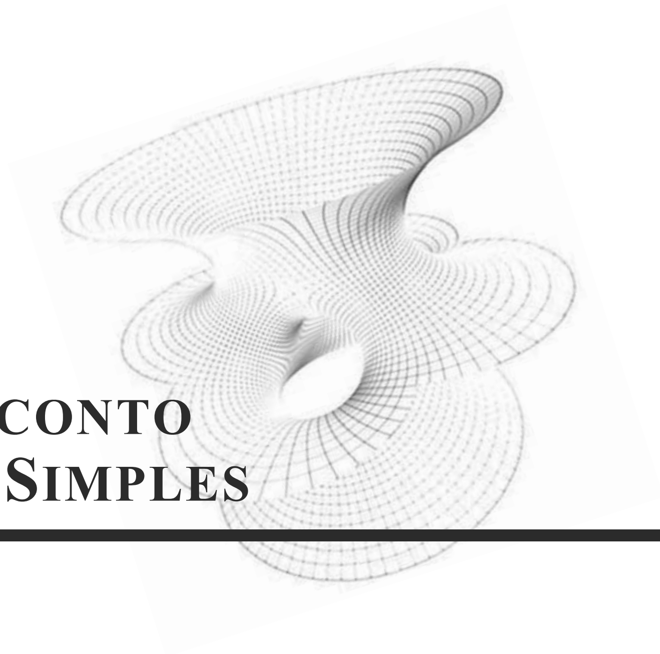
   Resposta: $6,09\%$ a.b.

Autoavaliação

Se você conseguiu resolver os exercícios propostos, parabéns! Caso contrário, não desanime. Reveja os conceitos e os exemplos e procure sanar as dúvidas com os tutores. Não acumule dúvidas, pois muitos desses conceitos aparecerão novamente em outro contexto.

Aula 5

OPERAÇÕES DE DESCONTO NA CAPITALIZAÇÃO SIMPLES



Objetivos

1. entender o conceito de desconto;
2. entender de valor nominal, valor atual e prazo de antecipação de um título;
3. entender os conceitos envolvendo o desconto "por dentro" ou racional e o desconto "por fora" ou comercial na capitalização simples;
4. interpretar e resolver os problemas propostos.

Introdução

Quando uma pessoa física ou jurídica toma uma quantia emprestada, assume uma dívida que deverá ser paga no futuro. Para que esse compromisso seja firmado, o credor recebe um documento chamado título, com o qual pode provar publicamente que é a pessoa que deve receber àquela quantia em determinada data. Os títulos mais usados em empréstimos são: a nota promissória e a duplicata.

A nota promissória é um título de crédito que corresponde a uma promessa de pagamento futuro. Ela e muito usada entre pessoas físicas. A duplicata é um título emitido por uma pessoa jurídica contra o seu cliente (pessoa física ou jurídica) para qual vende mercadoria a prazo ou prestou serviços que serão pagos no futuro.

No dia a dia também costumamos usar um título nas compras, principalmente as de valores mais elevados, que são os cheques pré-datados. Muitas vezes, as empresas que recebem estes cheques optam por ”trocá-los”com alguma instituição financeira para saldar alguma dívida momentânea.

Algumas instituições financeiras apenas pegam o cheque pré-datado como garantia de pagamento futuro. Isso quer dizer que, se o cheque não compensar, a conta da empresa que o descontou será debitada pelo banco e caberá a ela tentar receber o dinheiro do dono do cheque. Por outro lado, algumas instituições COMPRAM o cheque, assumindo para si o risco do não pagamento. Nesse caso, caberá a essa instituição tentar receber o dinheiro.

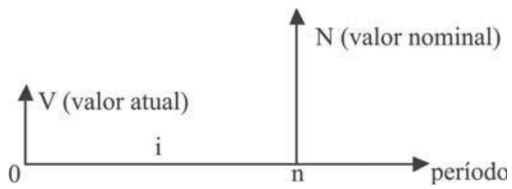
✍ Caberá a você, administrador, decidir entre as opções de trocar ou vender o cheque. Mas lembre-se: na segunda opção, o valor do desconto será maior do que a primeira. Entretanto, para os chamados cheques incobráveis, é uma boa opção.

Valor Nominal, Valor Atual e Prazo de Antecipação

O *valor nominal* (valor de face) de um compromisso é quanto ele vale na data do seu vencimento, enquanto que *valor atual* (*valor descontado* ou *valor líquido* ou ainda *valor pago*) é um valor que ele adquire numa data que antecede ao seu vencimento. O intervalo de tempo entre a data em que o título é negociado e a data de vencimento do mesmo e o *prazo de antecipação*.

DESCONTO

É a diferença entre o valor nominal de um título e seu valor atual. Desconto também pode ser definido como o abatimento a que o devedor faz jus quando antecipa o pagamento de um título.



DESCONTO POR DENTRO (RACIONAL OU REAL)

É o desconto d_r que determina um valor atual **V** que, corrigido nas condições de mercado (taxa, prazo de antecipação e capitalização), tem para montante o valor nominal **N**. Ou seja, d_r são os juros incorporados ao capital **V** para reproduzir **N**. No desconto *"por dentro"*, ou desconto *racional* ou desconto *real*, o valor de referência para o cálculo porcentual do desconto é o *valor atual ou líquido*.

Dessa forma, o valor do desconto será determinado pela fórmula:

DESCONTO = V x d x n, onde:

V = valor atual (ou PV);

d = taxa utilizada (tal qual i);

n = número de períodos.

DESCONTO "POR FORA" OU COMERCIAL

O desconto por fora ou comercial d_c é o juro calculado sobre o valor nominal *N*, a uma taxa chamada taxa de desconto, durante o tempo que decorre da data da transação até a data de vencimento do título. No desconto "por fora" ou comercial, a referência para o cálculo porcentual do desconto é o valor nominal N. Nesse caso, o valor do desconto será determinado pela fórmula:

DESCONTO = N x d x n, onde:

N = valor nominal (ou FV);

d = taxa utilizada (tal qual i);

n = número de períodos.

DESCONTO NA CAPITALIZAÇÃO SIMPLES

DESCONTO "POR DENTRO" RACIONAL OU REAL

Nesse caso, sabe-se que a base do desconto é o valor atual racional V_r, considerando a taxa i e o prazo de antecipação n. Temos, então, que o desconto d_r será dado por $d_r = V_r \times i \times n$, e como

$$V_r = N - d_r \;\Rightarrow\; V_r = N - V_r \times i \times n \;\Rightarrow\; N = V_r + V_r \times i \times n \;\Rightarrow$$

$$N = V_r \times (1 + i \times n) \;\Leftrightarrow\; V_r = \frac{N}{1 + i \times n}.$$

Repare que a fórmula apresentada é a mesma do juro simples (apenas substituindo as letras V e N por PV e FV, respectivamente).

Em muitos exercícios, e principalmente no dia a dia, o que queremos descobrir é o valor de V. Dessa forma, devemos desenvolver outra equação que elimine a incógnita V da fórmula. Nesse caso, seria:

Como D_r = V x d x n,

$D_r = N - V$ e

$V = \frac{N}{1+d\times n}$, então

$D_r = N - \frac{N}{1+d\times n}$. Simplificando:

$D_r = \frac{Ndn}{1+d\times n}$

✍ Os livros de Matemática Financeira usam para simbolizar a taxa de desconto tanto a letra i quanto a letra d. Eles também usam para se referir ao valor do desconto tanto a letra D quanto a combinação D_r (referência ao desconto racional). A mesma diferença de simbologia também é encontrada no valor atual, que pode ser representado por V ou V_r. NESSE LIVRO, VOCÊ DEVERÁ SE ACOSTUMAR COM TODAS ESSAS NOTAÇÕES.

DESCONTO "POR FORA" COMERCIAL OU BANCÁRIO

Nesse caso, sabe-se que a base do desconto é o valor nominal N, considerando a taxa i e o prazo de antecipação n. Temos, então, que o desconto d_c será dado por $d_c = N \times i \times n$.

O valor comercial V_c pode ser obtido através da equação $V_c = N - d_c$, isto é:

$$V_c = N - N \times i \times n \;\Rightarrow\; V_c = N \times (1 - i \times n) \;\Leftrightarrow\; N = \frac{V_c}{1-i\times n}.$$

✍ Se consideradas as mesmas condições, isto é, o mesmo valor nominal N, o mesmo prazo de antecipação n e a mesma taxa de desconto i, o desconto comercial d_c é sempre maior do que o desconto racional d_r, ou seja, o valor atual racional A_r é sempre maior do que o valor atual comercial V_c.

Exemplo 5.1

a. Um título com valor nominal de R$ 8.800,00 foi resgatado dois meses antes do seu vencimento, sendo-lhe por isso concedido um desconto racional simples à taxa 60 % a.m. Nesse caso, qual foi o valor pago pelo título?

Solução: Temos que:

$$\begin{cases} N = 8.800,00\,(\text{valor nominal do título}) \\ n = \text{dois meses}\,(\text{prazo de antecipação}) \\ i = 60\%\text{ao mês}\,(\text{taxa de desconto racional simples}) \end{cases}$$

Como no desconto racional simples a relação entre o valor nominal N e o valor atual V_c é dada por $N = V_r \times (1 + i \times n)$, tem-se que

$$8800,00 = V_r \times (1 + 0,6 \times 2) \Rightarrow V_r = \frac{8.800,00}{2,2} \Rightarrow V_r = 4.000,00$$

Resposta: $R\$4.000,00$

b. Um título, ao ser descontado racionalmente 45 dias antes do vencimento, à taxa linear de 6% ao mês, teve valor atual igual a $R\$2.500,00$. Qual o valor de face desse título?

Solução: Temos que:

$$\begin{cases} V_r = 2.500,00 \, (\text{valor atual racional do título}) \\ n = 45 \, \text{dias} = 1,5 \, \text{mês (prazo de antecipação)} \\ i = 6\% \, \text{ao mês (taxa de desconto racional simples)} \end{cases}$$

Como $N = V_r \times (1 + i \times n)$, temos que:

$$N = 2.500,00 \times (1 + 0,002 \times 45) = 2.500 \times 1,09 \Rightarrow N = 2.725,00$$

Resposta: $R\$2.725,00$

c. Qual o desconto racional simples sofrido por um título de $R\$6.715,60$, descontado a 24% ao ano, em um mês e quinze dias?

Solução: Temos que:

$$\begin{cases} N = 6.715,60 \, (\text{valor nominal do título}) \\ n = 1 \, \text{mês e quinze dias} = 1,5 \, \text{mês} \, (\text{prazo de antecipação}) \\ i = 24\% \, \text{ao ano} \, (\text{taxa de desconto racional simples}) \end{cases}$$

No desconto racional simples, a relação entre o valor nominal N e o valor atual V é dada através da equação $N = V_r \times (1 + i \times n) \Leftrightarrow V_r = \frac{N}{(1+i \times n)}$. $V_r = \frac{6.715,60}{1+0,02 \times 1,5} \Rightarrow V_r = 6.520,00$. Como $d_r = N - V_r$, temos, então, que:

$$d_r = 6.715,60 - 6.520,00 \Rightarrow d_r = 195,60.$$

Resposta: $R\$195,60$

d. Uma letra de valor nominal igual a $R\$2.400,00$ sofre um desconto comercial simples à taxa de 6% ao mês, cem dias antes do seu vencimento. Obter o desconto e o valor descontado.

Solução: Temos que:

$$\begin{cases} N = 2.400,00 \,(\text{valor nominal do título}) \\ n = 100 00 \text{ dias} \,(\text{prazo de antecipação}) \\ i = 6\% \text{ao mês} = 0,2\% \text{ao dia (taxa de desconto comercial simples)} \end{cases}$$

Como $d_c = N \times i \times n$ tem-se, então, que $d_c = 2.400,00 \times 0,002 \times 100 \;\Rightarrow\; d_c = 480,00$. Por outro lado, sabe-se que $V_c = N - d_c$, logo $V_c = 2.400,00 - 480,00 \;\Rightarrow\; V_c = 1.920,00$.

Resposta: $R\$480,00$ e $R\$1920,00$

– Do ponto de vista da instituição financeira, na operação de desconto comercial simples, foi feito um investimento. Ela antecipa o pagamento do título mediante um desconto, para recebê-lo no vencimento o seu valor de face ou valor nominal. Ou seja, o desconto dado é o juro recebido pela instituição financeira na operação. Portanto, a taxa de juros efetiva da operação será dada por $\frac{d_c}{V_c}$. Essa taxa é sempre maior do que a taxa de desconto. No exemplo anterior, a taxa linear efetiva de ganho é dada por $\frac{480}{1920} = 0,25$ em 100 dias ou $0,075$ ao mês, ou ainda $7,5\%$ ao mês. Pode também determinar essa taxa, lembrando que a instituição financeira aplicou $1.920,00$ em 100 dias e recebeu um montante de $2.400,00$. Portanto, a taxa linear i dessa operação será dada por $2.400,00 = 1920,00 \times (1 + i \times 100) \;\Rightarrow\; 100i = 0,25 \;\Rightarrow\; i = 0,0025$ ao dia ou $i = 0,25\%$ ao dia ou ainda $i = 7,5\%$ ao mês.

e. Determinar o valor nominal de um título que, descontado comercialmente sessenta dias antes do vencimento à taxa linear de 12 % ao mês, resultou um valor descontado de $R\$608,00$.

Solução:

$$\begin{cases} V_c = 608,00 \,(\text{valor atual comercial do título}) \\ n = 60 \text{dias} = 2 \text{meses} \,(\text{prazo de antecipação}) \\ i = 12\% \text{ao mês} \,(\text{taxa de desconto comercial simples}) \end{cases}$$

Sabemos que no desconto comercial simples $V_c = N \times (1 - i \times n) \Leftrightarrow N = \frac{V_c}{1-i\times n}$, temos, então, que:

$$608,00 = N \times (1 - 2 \times 0,12) \Rightarrow N = \frac{608,00}{0,76} \Rightarrow N = 800,00\,.$$

Resposta: $R\$800,00$

f. Uma duplicata de valor nominal de $R\$60.000,00$ foi descontada num banco dois meses antes do vencimento. A taxa de desconto comercial simples usada na operação foi de $2,8\%$ ao mês. Sabe-se ainda que o banco cobra um taxa de $1,5\%$ sobre o valor nominal do título, para cobrir despesas administrativas, descontados e pagos integralmente no momento da liberação dos recursos. Determinar o desconto e o valor descontado e a taxa efetiva da operação.

Solução:

$$\begin{cases} N = 60.000,00\,(\text{valor nominal do título}) \\ n = 2\,\text{meses}\,(\text{prazo de antecipação}) \\ i = 2,8\%\,\text{ao mês}\,(\text{taxa de desconto comercial simples}) \end{cases}$$

Como $d_c = N \times i \times n$ então, nesse caso, temos que $d_c = 60.000,00 \times 0,028 \times 2 \Rightarrow d_c = 3.360,00$.

Portanto, o valor atual comercial V_c será dado por $V_c = 60.000,00 - 3.360,00 = 56.640,00$.

Por outro lado, sabe-se que o banco cobra uma comissão de $1,5\%$ sobre o valor nominal do título, ou seja, $60.000,00 \times 0,015 = 900,00$.

Logo, o valor líquido recebido pelo portador da duplicata será dado por $56.640,00 - 900,00 = 55.740,00$.

Do ponto de vista do banco, esta foi uma operação de um empréstimo de $R\$55.740,00$, que renderá os juros simples em dois meses um montante de $R\$60.000,00$, isto é, um juros de $R\$4.260,00$. Logo, a taxa de juros simples mensal i dessa operação será obtida por:

$$4.260,00 = 55.740,00 \times i \times 2 \Rightarrow i = \frac{4.260,00}{111.480,00} \Rightarrow i = 0,038213$$

ao mês. Isto é, $i = 3,82\%$ ao mês.

Resposta: $R\$4.260,00$, $R\$55.740,00$ e $3,82\%$ ao mês.

g. Uma nota promissória foi descontada comercialmente a uma taxa linear de 5% ao mês, quinze meses antes do seu vencimento. Se o desconto fosse racional simples, qual deveria ser a taxa adotada para produzir um desconto de igual valor?

Solução:

$$\begin{cases} i = 5\% \,\text{ao mês}\,(\text{taxa de desconto comercial simples}) \\ n = 15\,\text{meses}\,(\text{prazo de antecipação}) \end{cases}$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $N = 100,00$ e como $d_c = N \times i \times n$, tem-se, então, que, nesse caso, $d_c = 100,00 \times 0,05 \times 15 \Rightarrow d_c = 75,00$.

Por outro lado, sabendo-se que, no desconto racional simples, d_r pode ser obtido através da relação $d_r = V_r \times i \times n$ e como $V_r = \frac{N}{(1+i\times n)}$, temos, então, que

$$d_r = \frac{N}{(1+i\times n)} \times i \times n \Rightarrow d_r = \frac{N \times i \times n}{(1+i\times n)}.$$

Logo, supondo que $d_c = d_r$, tem-se que:

$$75,00 = \frac{100 \times i \times 15}{1+15\times i} \Rightarrow 75,00 + 1125 \times i = 1500 \times i \Rightarrow$$

$$i = \frac{75}{375} \Rightarrow i = 0,2 \,\text{ou}\, 20\% \text{ ao mês.}$$

Resposta: 20% ao mês.

✍ Considerando as mesmas condições, isto é, taxa desconto e prazo de antecipação, o desconto comercial simples d_c é maior que desconto racional simples d_r, e tem-se que $d_c = d_r\,(1+i\cdot n)$, onde i é a taxa de desconto e n, o prazo de antecipação.
De fato: Sabe-se que $d_c = N \times i \times n$. Por outro lado,

$$d_r = N - V = N - \frac{N}{1+i\times n} \Rightarrow d_r = \frac{N\times i\times n}{1+i\times n} \Rightarrow$$

$$N \times i \times n = d_r \times (1+i\times n) \Rightarrow d_c = d_r \times (1+i\times n) \quad .$$

Exemplo 5.2

O desconto comercial simples de um título descontado três meses antes de seu vencimento, à taxa de 40% ao ano, é de $R\$\,550,00$. Qual é o desconto racional?

Solução: $d_c = d_r \times (1 + i \times n) \Rightarrow 550,00 = d_r \times (1 + 0,4 \times 0,25) \Rightarrow$ $d_r = \frac{550,00}{1,1} = 500,00$

Resposta: $R\$500,00$

Exercício 5.1

1. Calcular o desconto por dentro sofrido por uma letra de $R\$8.320,00$, descontada à taxa linear de 6% ao ano, 8 meses antes do seu vencimento.

   Resposta: $R\$320,00$

2. Determinar o valor nominal de uma letra, descontada por dentro à taxa linear de 8% ao mês, um mês e quinze dias antes de seu vencimento, e que apresentou o desconto de $R\$400,00$.

   Resposta: $R\$3.733,33$

3. Um título sofreu desconto racional simples 15 dias antes do vencimento. O valor nominal e o valor atual são inversamente proporcionais a 40 e 44, respectivamente. Qual foi a taxa anual de desconto?

   Resposta: $2,4$ ao ano

4. Aceitei um título vencível a 1 ano, 1 mês e 10 dias. Tendo sido descontado por dentro a 9% ao ano deu $R\$1.000,00$ de desconto. Qual era o valor nominal do título?

   Resposta: $R\$11.000,00$

5. Numa operação de desconto por dentro, a razão entre o valor nominal e o valor atual é igual a $1,08$. Se a taxa de juros simples é de 6% ao mês, qual é o prazo de antecipação?

   Resposta: 40 dias

6. O valor nominal de um compromisso é de cinco vezes o desconto racional simples, caso a antecipação seja de oito meses. Qual é o seu valor nominal, se o valor de resgate é de $R\$1.740,00$?

   Resposta: $R\$2.175,00$

7. Uma duplicata de valor nominal igual a $R\$1.200,00$ é descontada em um banco 60 dias antes do vencimento. Sabendo-se que a taxa de desconto é de 10% ao mês, pede-se:

   a. o desconto comercial simples;

      Resposta: $R\$240,00$

   b. o desconto racional simples;

      Resposta: $R\$200,00$

   c. o valor descontado racionalmente;

      Resposta: $R\$1.000,00$

   d. a taxa efetiva desta operação, considerando o desconto comercial simples.

      Resposta: 25%

8. Um título foi descontado cinco dias antes do seu vencimento, sofrendo um desconto por fora à taxa linear de 36% a.m.. Sabendo-se que o devedor pagou $R\$2.820,00$, qual o seu valor nominal?

   Resposta: $R\$3.000,00$

9. Qual o valor nominal de uma nota promissória, a vencer em 30 de maio, que descontada por fora no dia 3 de abril do mesmo ano à taxa de 6% a.m., produziu um desconto de $R\$1.881,00$?

   Resposta: $R\$16.500,00$

10. Um título, descontado por fora, à taxa linear de $0,5\%$ ao dia, produziu o desconto equivalente a $\frac{1}{8}$ de si mesmo. Determinar o prazo de antecipação.

    Resposta: 25 dias.

11. O valor atual de um título é duas vezes o valor de seu desconto comercial simples. Qual é o vencimento do título expresso em dias, sabendo-se que a taxa de desconto comercial adotada é de 60% ao ano?

    Resposta: 200 dias

12. Um banco oferece empréstimos pessoais, cobrando 5% ao mês de taxa de desconto comercial simples, mais uma comissão de 2%. Se uma pessoa necessita de $R\$4.150,00$,

para pagar daqui a três meses, qual deve ser o compromisso assumido?

Resposta: $R\$5.000,00$

13. Um título de valor nominal de $R\$111,11$ foi descontado em um banco, à taxa de 4% ao mês, cinco meses antes do vencimento (desconto comercial simples). Qual a taxa mensal que representou para o banco esse investimento?

    Resposta: 5%

14. Qual a taxa efetiva mensal de uma operação de desconto comercial simples de um título, realizada à taxa de $18,4\%$ a.a., três meses antes do seu vencimento?

    Resposta: $1,61\%$ a.m.

15. Achar a diferença entre o desconto comercial simples e o racional simples de um título de $R\$2.100,00$, descontada a 3% ao mês, 50 dias antes de seu vencimento.

    Resposta: $R\$5,00$

16. O desconto comercial simples de um título é igual a $\frac{6}{5}$ do desconto racional simples. Calcular o prazo de antecipação do pagamento, sabendo-se que a taxa de desconto é de 10% ao mês.

    Resposta: 2 meses

17. Uma empresa descontou uma duplicata em um banco que adota uma taxa de 84% a.a., com desconto comercial simples. O valor do desconto foi de $R\$10.164,00$. Se na operação fosse adotado o desconto racional simples, o desconto seria reduzido em $R\$1.764,00$. Nessas condições, qual é o valor nominal da duplicata?

    Resposta: $R\$48.400,00$

18. Sabe-se que o valor do desconto racional de um título, à taxa linear de 66% ao ano e prazo de desconto de 50 dias, atinge $R\$28.963,00$. Para estas mesmas condições, determine o valor do desconto desse título, nas mesmas condições, se fosse adotado o critério de desconto comercial simples.

    Resposta: $R\$31.617,94$

19. O desconto de uma duplicata com valor nominal de $R\$77.000,00$ e com prazo de vencimento de 141 dias produz um valor atual de $R\$65.000,00$. Determinar a taxa linear de desconto "por dentro" e "por fora" desta operação.

    Resposta: $3,93\%$ a.m. e $3,32\%$ a.m.

20. Uma pessoa descontou 2 duplicatas em um banco, no regime de desconto comercial, à uma taxa de juros simples de 15% ao ano. O primeiro título vencia em 270 dias e o segundo em 160 dias, sendo que o último era de valor nominal 50% superior ao primeiro. Sabendo-se que os dois descontos somaram o valor de $R\$382,50$, determine o valor nominal do título que produziu o maior desconto.

    Resposta: R$ 1.800,00

Autoavaliação

Você entendeu os conceitos de desconto, valor nominal, valor atual e prazo de antecipação de um título? Esses conceitos serão necessários na próxima aula. Conseguiu resolver todos os exercícios propostos sem dificuldade? Se a resposta foi sim, então você entendeu os conceitos envolvendo o desconto "por dentro" ou racional e o desconto "por fora" ou comercial, em particular, na capitalização simples. Se não conseguiu, não desista. Volte à aula e reveja os conceitos e exemplos. Antes de começar a próxima aula, discuta com seus colegas do polo a solução desses problemas.

Aula 6

Operações de Desconto na Capitalização Composta

Objetivos

1. entender o conceito de desconto composto;
2. entender os conceitos envolvendo o desconto "por dentro" ou racional e o desconto "por fora" ou comercial na capitalização composta;
3. interpretar e resolver os problemas propostos.

Operações de Desconto na Capitalização Composta

Desconto na Capitalização Composta

a. ***Desconto "por dentro"ou racional***

Nesse caso, temos que

$$N = V_r \times (1+i)^n \text{ , e como } d_r = N - V_r \text{ , então}$$

$$d_r = V_r \times (1+i)^n - V_r \Rightarrow d_r = V_r \times [(1+i)^n - 1] \text{ .}$$

Ou, em função de N:

$$d_r = N - V_r \Rightarrow d_r = N - \frac{N}{(1+i)^n} \Rightarrow d_r = \frac{N(1+i)^n - N}{(1+i)^n}$$

$$d_r = \frac{N[(1+i)^n - 1]}{(1+i)^n}$$

Essas são as duas fórmulas mais conhecidas sobre desconto racional composto.

b. ***Desconto "por fora" ou comercial***

Nesse caso, temos que

$$V_c = N \times (1-i)^n \text{, e como } d_c = N - V_c \text{, então}$$

$$d_c = N - N \times (1-i)^n \Rightarrow d_c = N \times [1 - (1-i)^n] \text{ .}$$

Exemplo 6.1

a. Antecipando em dois meses o pagamento de um título, obtive um desconto racional composto que foi calculado com base na taxa de 4% ao mês. Sendo $R\$ 5.408,00$ o valor nominal do título, quanto pagarei por ele?

Solução:

$$\begin{cases} N = 5.408,00 \text{ (valor nominal do título)} \\ n = 2 \text{ meses (prazo de antecipação)} \\ i = 4\% \text{ ao mês (taxa de desconto racional composto)} \end{cases}$$

No desconto racional composto, a relação entre o valor nominal N e o valor atual A_r é dada através da equação $N = V_r \times (1+i)^n \Leftrightarrow V_r = \dfrac{N}{(1+i)^n}$.

Logo, temos que $V_r = \dfrac{5.408,00}{(1+0,04)^2} = \dfrac{5408,00}{1,0826} = 5000,00$

Resposta: $R\$5.000,00$

b. Um título de valor nominal $R\$25.000,00$ é resgatado três meses antes do vencimento pelo critério do desconto racional composto a uma taxa de 24% ao ano, capitalizada mensalmente. Calcule o valor descontado e o desconto.

Solução: A taxa de 24% ao ano é nominal, pois seu período, que é anual, é diferente do período de capitalização, que é semestral. Logo, considerando a relação entre as unidades dessas taxas, a taxa efetiva mensal é proporcional à taxa dada, ou seja, como $1\,\text{ano} = 2\,\text{semestres}$, tem-se, então, que a taxa efetiva semestral i será dada por $i = \dfrac{24}{12} = 2\%$ ao mês .

$$\begin{cases} N = 25.000,00\,(\text{valor nominal do título}) \\ n = 3\,\text{meses}\,(\text{prazo de antecipação}) \\ i = 2\%\text{ao mês}\,(\text{taxa de desconto racional composto}) \end{cases}$$

No desconto racional composto , a relação entre o valor nominal N e o valor atual V_r é dada através da equação $N = V_r \times (1+i)^n \;\Leftrightarrow\; V_r = \dfrac{N}{(1+i)^n}$. Nesse caso, então, temos que: $V_r = \dfrac{25.000,00}{(1+0,02)^3} \;\Rightarrow\; V_r = \dfrac{25.000,00}{1,061208} \;\Rightarrow\; V_r \cong 23.558,06.$

Lembrando que o valor do desconto é a diferença entre o valor de face do título ou valor nominal e o valor descontado ou valor atual, isto é, $d_r = N - V_r$. Nesse caso, então, temos que:

$$d_r = 25.000,00 - 23.558,06 \;\Rightarrow\; d_r = 1.441,94$$

Resposta: $R\$23.558,06$ e $R\$1.441,94$

c. Um título de $R\$1.000,00$ deve ser resgatado três meses antes do seu vencimento, pelo critério do desconto comercial composto, a uma taxa de 10% ao mês. Qual é o valor líquido?

Solução:

$$\begin{cases} N = 1.000,00\,(\text{valor nominal do título}) \\ n = 3\,\text{meses}\,(\text{prazo de antecipação}) \\ i = 10\%\,\text{ao mês}\,(\text{taxa de desconto comercial composto}) \end{cases}$$

No desconto comercial composto, a relação entre o valor atual V_c e o valor nominal N é dada por $V_c = N \times (1-i)^n$. Logo, nesse caso, temos que $V_c = 1.000,00 \times (1-0,10)^3 \Rightarrow V_c \cong 729,00$.

Resposta: $R\$729,00$

d. Um título de $R\$2.000,00$ será resgatado três anos antes do vencimento pelo critério do desconto comercial composto, à taxa de 20% a.a., com capitalizações semestrais. Qual será o valor líquido?

Solução: A taxa de 20% ao ano é nominal, pois seu período, que é anual, é diferente do período de capitalização, que é semestral. Logo, considerando a relação entre as unidades dessas taxas, a taxa efetiva mensal é proporcional à taxa dada, ou seja, como 1 ano = 2 semestres, tem-se, então, que a taxa efetiva semestral i será dada por $i = \frac{20}{2} = 10\%$ ao semestre.

$$\begin{cases} N = 2.000,00 \,(\text{valor nominal do título}) \\ n = 3\,\text{anos} = 6\text{meses}\,(\text{prazo de antecipação}) \\ i = 10\%\,\text{ao semestre}\,(\text{taxa de desconto comercial composto}) \end{cases}$$

No desconto comercial composto, a relação entre o valor atual V_c e o valor nominal N é dada por $V_c = N \times (1-i)^n$. Logo, nesse caso, temos que $V_c = 1.000,00 \times (1-0,10)^6 \Rightarrow V_c \cong 1.062,88$.

Resposta: $R\$1.062,88$

e. Um título de valor $R\$10.000,00$ foi descontado cinco meses antes do vencimento, à taxa de desconto comercial composto de 10% ao mês. Qual a taxa de juros efetivamente cobrada nessa transação?

Solução:

$$\begin{cases} N = 10.000,00 \,(\text{valor nominal do título}) \\ n = 5\,\text{meses}\,(\text{prazo de antecipação}) \\ i = 10\%\text{ao mês}\,(\text{taxa de desconto comercial composto}) \end{cases}$$

No desconto comercial composto, a relação entre o valor atual V_c e o valor nominal N é dada por $V_c = N \times (1-i)^n$. Logo, nesse caso, temos que:

$$\begin{aligned} V_c &= 10.000,00 \times (1-0,10)^5 \\ &= 10.000,00 - 0,590490 \\ &\cong 5.904,90\,. \end{aligned}$$

Lembrando que o valor do desconto é a diferença entre o valor nominal de face ou valor nominal e o valor descontado ou valor atual, isto é, $d_c = N - V_c$, temos, nesse caso:

$$d_c = 10.000,00 - 5.904,90 \Rightarrow d_c = 4.095,10\,.$$

Do ponto de vista do banco, esta foi uma operação de empréstimo de $R\$5.904,90$, que renderá em dois meses um montante de $R\$10.000,00$, isto é, um juros de $R\$4.095,10$. Logo, a taxa de juros composto mensal i dessa operação será obtida por:

$$\begin{aligned}
10.000,00 &= 5.904,90 \times (1+i)^5 \\
(1+i)^5 &= \frac{10.000,00}{5.904,90} \\
(1+i)^5 &= 1,693509 \\
1+i &= \sqrt[5]{1,693509} \\
i &= 1,1111111 - 1 \\
i &= 0,111111 \,\text{ao mês ou} \\
i &\cong 11,11\% \,\text{ao mês}
\end{aligned}$$

Resposta: A taxa efetiva é de $11,11\%$ ao mês.

Definição 6.1

Dizemos que duas taxas de desconto racional e comercial composto são *equivalentes* se, e somente se, *produzem descontos iguais* quando aplicadas a um mesmo título e por um mesmo prazo de antecipação.
Nesse caso, como os descontos são iguais, os valores atuais também são iguais e, portanto:

$$\begin{gathered}
N \times (1 - i_c)^n = \frac{N}{(1+i_r)^n} \\
(1 - i_c)^n \times (1 + i_r)^n = 1 \\
(1 - i_c) \times (1 + i_r) = 1
\end{gathered}$$

Exemplo 6.2

Determinar a taxa mensal de desconto racional equivalente à taxa de desconto comercial de 20% ao mês.

Solução: $\begin{cases} i_C = 20 \\ i_r = ? \end{cases} \Rightarrow (1+i_r)\times(1-0,20) = 1$

$$1 + i_r = \frac{1}{0,8}$$

$$i_r = 0,25 a.m. \text{ ou } i_r = 25\% a.m.$$

Resposta: 25% ao mês.

Exercício 6.1

1. Uma empresa tomou emprestada de um banco, por seis meses, a quantia de $R\$10.000,00$ à taxa de juros compostos de $19,9\%$ ao mês. No entanto, 1 mês antes do vencimento a empresa decidiu liquidar a dívida. Qual o valor a ser pago, se o banco opera com uma taxa de desconto racional composto de 10% a.m.?

   Resposta: Aproximadamente $R\$27.000,00$

2. Uma empresa descontou uma duplicata de $R\$44.276,00$, dois meses antes do vencimento, sob o regime de desconto racional composto. Admitindo-se que o banco adote a taxa de juros efetiva de 84% a.a., qual será o líquido recebido pela empresa?

   Resposta: Aproximadamente $R\$40.000,00$

3. João receberá $R\$6.600,00$ dentro de um ano, como parte de seus direitos na venda de um barco. Contudo, necessitando de dinheiro, transfere seus direitos a um amigo que os compra, entregando-lhe uma nota promissória no valor de $R\$6.000,00$ com vencimento para seis meses. João fez bom negócio, se a taxa de juros compostos do mercado for de 20% ao ano?

   Resposta: Não

4. Numa operação de desconto, o possuidor do título recebeu $R\$10.000,00$ como valor de resgate. Sabendo-se que a

antecipação fora de 6 meses e o desconto de $R\$1.401,75$, qual foi a taxa de juros composta anual adotada?

Resposta: 30%

5. Guilherme tem um compromisso representado por duas promissórias: uma de $R\$100.000,00$ e outra de $R\$200.000,00$, vencíveis em quatro e seis meses, respectivamente. Prevendo que não disporá desses valores nas datas estipuladas, solicita ao banco credor substituição dos dois títulos por um único, a vencer em dez meses. Sabendo-se que o banco adota juros compostos de 8% ao mês, qual o valor da nova nota promissória?

   Resposta: $R\$430.785,00$

6. Qual é o valor do desconto racional composto de um título de um valor nominal de $R\$20.000,00$, com prazo para trinta dias para vencimento e taxa cobrada de 4% ao mês?

   Resposta: $R\$769,00$

7. Uma duplicata no valor de $R\$800.000,00$, com vencimento daqui a três anos, deve ser substituída por duas letras de câmbio, de mesmo valor nominal cada, com vencimentos daqui a dois anos e cinco anos, respectivamente. Calcular os valores nominais das novas duplicatas, sabendo-se que taxa de juro composto utilizada é de 8% ao semestre e a taxa de juro composto do desconto racional é de 10% ao semestre.

   Resposta: $R\$432.569,58$

8. Um título de $R\$5.000,00$ será descontado 2 meses antes do vencimento pelo critério de desconto comercial composto, à taxa de 60% a.a., com capitalização mensal. Qual o valor do desconto?

   Resposta: $R\$487,50$

9. Uma duplicata de $R\$3.000,00$ deverá ser descontada 3 anos do seu vencimento, a uma taxa de 25% ao ano, pelo critério do desconto racional composto. Qual seria taxa anual a ser adotada para obter-se um desconto igual pelo critério de desconto comercial composto?

   Resposta: 20% ao ano

10. Uma duplicata no valor de $R\$2.000,00$ é resgatada dois meses antes do vencimento, obedecendo ao critério de desconto comercial composto. Sabendo-se que a taxa de desconto é de 10% ao mês, qual é o valor do desconto e o valor descontado?

    Resposta: $R\$380,00$ e $R\$1.620,00$

11. Que taxa mensal de desconto comercial composto é equivalente à taxa mensal de 20% de desconto racional composto?

    Resposta: $16,67\%$

12. Um título foi descontado à taxa de 3% a.m., cinco meses de seu vencimento. Sabe-se que essa operação produziu um desconto de $R\$39.000,00$. Admitindo o conceito de desconto composto "por fora", determinar o valor nominal do título.

    Resposta: $R\$276.074,92$

13. A taxa de desconto composto "por fora" do banco A é de $3,1\%$ ao mês, para operações com prazo de 90 dias. O banco B oferece uma taxa de desconto de $2,9\%$ ao mês, com o prazo de 120 dias. Determinar qual banco está cobrando a maior taxa efetiva mensal de juros.

    Resposta: Banco A $= 3,19\%$ ao mês; Banco B $= 2,98\%$ ao mês

14. Uma instituição financeira deseja cobrar uma taxa efetiva de $3,1\%$ ao mês em suas operações de desconto composto "por fora". Determinar a taxa de desconto que deve ser considerada para um prazo de antecipação de três meses.

    Resposta: $3,19\%$ ao mês.

15. Qual a taxa de juros compostos efetiva anual de um título descontado à taxa "por fora" de $4,5\%$ ao mês, 3 meses antes do vencimento?

    Resposta: $4,71\%$ ao mês.

16. Uma pessoa quer descontar hoje um título de valor nominal de $R\$11.245,54$, com vencimento para daqui a 60 dias e tem as seguintes opções:

    a. desconto simples racional, com taxa de 3% ao mês;

    Resposta: $R\$636,54$ e $R\$10.609,00$

b. desconto simples comercial, com taxa de $2,5\%$ ao mês;

   Resposta: $R\$562,28$ e $R\$10.683,26$

c. desconto composto racional, com taxa de 3% ao mês;

   Resposta: $R\$645,54$ e $R\$10.600,00$

d. desconto composto comercial, com taxa de $2,5\%$ ao mês.

   Resposta: $R\$555,25$ e $R\$10.690,29$

   Determine, em cada caso, o valor do desconto e do valor descontado.

Autoavaliação

Você conseguiu resolver todos os exercícios propostos sem dificuldade? Se a resposta foi sim, então você entendeu os conceitos expostos nesta aula. Se não conseguiu, não desista. Volte à aula e reveja os conceitos e exemplos, não deixe que suas dúvidas se acumulem.

Aula 7

Séries de Pagamentos (Anuidades ou Rendas Certas)

Objetivos

1. classificar as diversas séries de pagamento;
2. descrever o comportamento das diversas séries de pagamento;
3. ensinar a calcular anuidades através da HP12C.

Séries de Pagamentos (Anuidades ou Rendas Certas)

Classificação das Anuidades

As anuidades, também chamadas rendas certas, são séries de pagamentos ou recebimentos que objetivam a liquidação de uma dívida ou a constituição de um capital. Como veremos neste capítulo, existem vários tipos de anuidades.

Elas diferem entre si quanto ao início do primeiro pagamento ou recebimento, à periodicidade, à duração e aos valores das séries.

Quanto ao início do primeiro pagamento ou recebimento, elas podem ser:

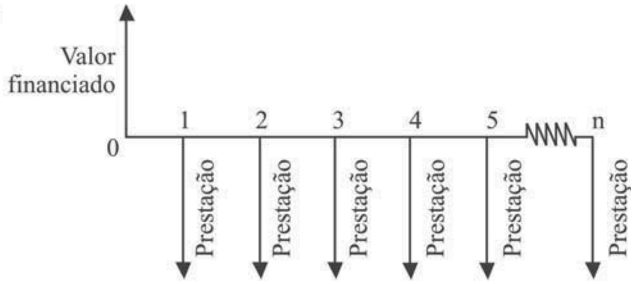
- postecipadas - os fluxos de pagamentos ou recebimentos começam a ocorrer ao final do primeiro período;
- antecipadas - os fluxos começam no início do primeiro período; e
- diferidas - há prazo de carência antes do início do fluxo de pagamentos ou recebimentos.

No nosso dia a dia há vários exemplos de anuidades postecipadas e antecipadas. Quando compramos um bem financiado "sem entrada" ocorre uma série postecipada. Mas se a compra é "com entrada", então se trata de uma série antecipada. Os diagramas de fluxo de caixa (conceito) a seguir representam graficamente as duas possibilidades.

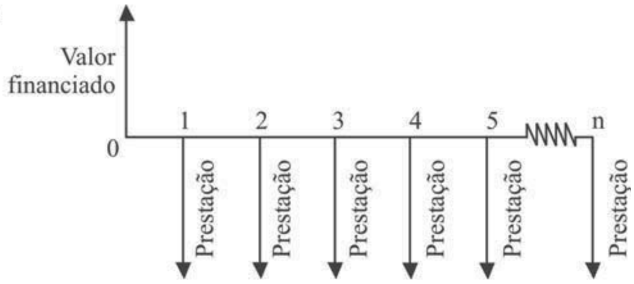
Os empreendedores, muitas vezes, vão se deparar com anuidades diferidas. São os casos dos financiamentos de agentes de desenvolvimento, como o BNDES e a FINEP, por exemplo.

Muitos projetos exigem um tempo para maturar, isto é, leva algum tempo para surgirem os retornos. Durante esse tempo de maturação, o agente financeiro oferece um prazo de carência, possibilitando que o pagamento do principal só comece após o projeto apresentar os primeiros retornos.

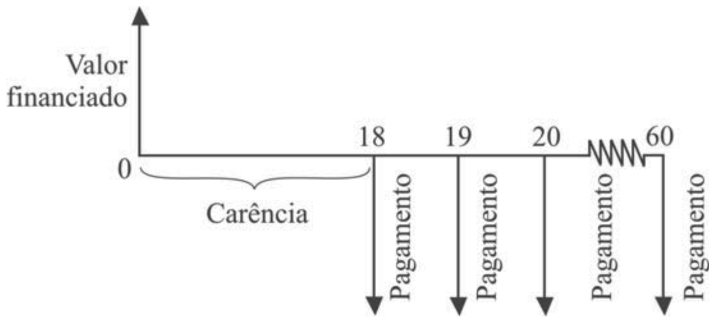
POSTECIPADO
"SEM ENTRADA"



ANTECIPADO
"COM ENTRADA"



O exemplo a seguir ilustra uma série de pagamentos diferida:



Quanto à periodicidade, elas podem ser:

- periódicas – quando os intervalos de tempo entre os pagamentos ou os recebimentos são constantes (mensal, anual, diário etc.);
- aperiódicas – se os fluxos de caixa não obedecem a um intervalo de tempo predeterminado.

Quanto à duração, encontramos anuidades:

- finitas – quando o prazo total do fluxo de pagamentos ou recebimentos é previamente conhecido;

- perpétuas – se o prazo for indeterminado (ou infinito). Tal tipo é utilizado no cálculo de formação de fundos de pensão e na avaliação do preço das ações das empresas.

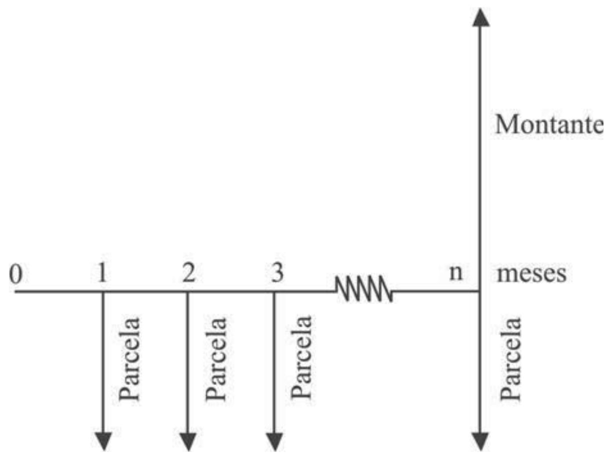
Quanto aos valores, teremos anuidades:

- constantes – se os pagamentos ou recebimentos são iguais em todos os períodos;
- variáveis – quando os pagamentos ou recebimentos mudam de valor nos diferentes períodos. Quando compramos um imóvel financiado, normalmente são solicitadas parcelas intermediárias, fazendo com que o fluxo de pagamentos seja variável.

Formação de Capital

Até aqui representamos o pagamento de dívidas, porém o cálculo de anuidades também é útil na determinação de montantes futuros. Digamos que desejo saber quanto devo depositar periodicamente numa aplicação, de forma a obter ao final de certo tempo um determinado valor, ou seja, um capital.

Esse problema pode ser representado através do seguinte diagrama de fluxo de caixa, e mais à frente vamos resolver alguns casos concretos:

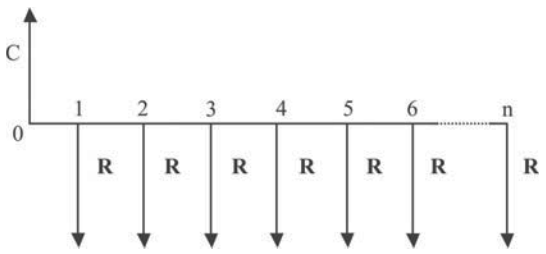


As aplicações matemáticas deste fluxo serão apresentadas na Aula 9.

CALCULANDO ANUIDADES

ANUIDADE PADRÃO - (POSTECIPADA, PERIÓDICA, FINITA E CONSTANTE)

O fluxo de caixa que representa as anuidades mais comuns para pagamento de um capital está abaixo representado:



Pela equivalência financeira, podemos deduzir:

$$C = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{R}{(1+i)^n}$$

$$C = R \qquad \underbrace{\frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{R}{(1+i)^n}}_{\text{Soma de P.G. com razão e primeiro termo iguais a } \frac{1}{1+i}}$$

Chamando $\dfrac{1}{1+i}$ de v, a soma S dos termos entre colchetes será:

$$S = v + v^2 + v^3 + v^4 + \ldots + v^n$$

$$\left\{ \begin{array}{lcccccccccccccl} S & = & v & + & v^2 & + & v^3 & + & v^4 & + & \ldots & + & v^n & & (\times v) \\ Sv & = & v^2 & + & v^3 & + & v^4 & + & v^5 & + & \ldots & + & v^{n+1} & & \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} S - Sv &= v + v^{n+1} \\ Siv &= v + v^{n+1} \\ Si &= 1 + v^n \\ S &= \tfrac{1+v^n}{i} = \tfrac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = a_{n\neg i} \end{aligned}$$

Então, para cálculo de anuidade padrão, temos:

$$C = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i\,(1+i)^n}\right]$$

Porém, nos textos financeiros é comum encontrar a seguinte notação:

$$PV = PMT\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i\,(1+i)^n}\right]$$

Exercícios Clássicos

Tal qual os exercícios dos capítulos anteriores, a fórmula de anuidade padrão envolve oferecer 3 incógnitas e pedir a 4^a. Assim, os exercícios envolvem:

1. QUERO O VALOR PRESENTE: Qual o preço à vista de uma geladeira que foi vendida em 2 prestações iguais de $R\$350,00$, sem entrada, sabendo que a loja cobra juros de 2% am?

   Solução:

   $$PV = 350\left[\frac{(1,02)^2 - 1}{0,02\,(1,02)^2}\right]$$

   Resposta: $PV = 679,55$

2. QUERO A PRESTAÇÃO: Qual prestação cobrar por uma geladeira que custa $R\$679,55$ à vista, e que será vendida em 2 vezes com juros de 2% am?

   Solução:

   $$679,55 = PMT\left[\frac{(1,02)^2 - 1}{0,02\,(1,02)^2}\right]$$

   Resposta: $PMT = 350,00$

3. QUERO O PRAZO: Em quantas prestações mensais deve ser financiada uma geladeira que custa $R\$679,55$, se for para pagar $R\$350,00$ com uma taxa de 2% am?

Solução:

$$\begin{aligned} 679,55 &= 350\left[\frac{(1,02)^n-1}{0,02(1,02)^n}\right] \\ 1,941571 &= \frac{(1,02)^n-1}{0,02(1,02)^n} \end{aligned}$$

Passando o denominador da 2^a parte da igualdade para a 1^a, como uma multiplicação:

$$0,038831(1,02)^n = (1,02)^n - 1$$

Agrupando os termos com $(1,02)^n$, temos:

$$(1,02)^n - 0,038831(1,02)^n = 1$$

Logo:

$$\begin{aligned} 0,961169(1,02)^n &= 1 \\ (1,02)^n &= \frac{1}{0,961169} \\ (1,02)^n &= 1,0404 \end{aligned}$$

Para quem sabe que $1,0404 = 1,02^2$, fica:

$$(1,02)^n = 1,02^2$$

Logo:

$$n = 2$$

✍ Achou essa saída ruim? Prepare-se para a próxima!

4. QUERO A TAXA: Qual a taxa cobrada em um financiamento de uma geladeira que custa $R\$\,679,55$, se foi paga em 2 vezes de $R\$\,350,00$?

Solução:

$$679,55 = 350\left[\frac{(1+i)^2-1}{i(1+i)^2}\right]$$

$$1,941571 = (1+i)^2 - \frac{1}{i(1+i)^2}$$

$$1,941571 = (1+i)^2 - \frac{1}{i(1+2i+i)^2}$$

$$1,941571 = (1+i)^2 - \frac{1}{i+2i^2+i^3}$$

$$1,941571i + 3,883143i^2 + 1,941571i^3 = (1+2i+i^2) - 1$$

$$1,941571i + 3,883143i^2 + 1,941571i3 = 2i + i^2$$

$$1,941571i + 3,883143i^2 + 1,941571i^3 - 2i - i^2 = 0$$

$$1,941571i^3 + 2,883143i^2 + 0,058429i = 0$$

Isso é um polinômio de 3° grau e só existe uma maneira de chegar à taxa, testando:

- 1ª tentativa: Eu ACHO que a taxa é 1% am:

$$\begin{aligned} 1,941571 &= (1,01)^2 - \tfrac{1}{0,01(1,01)^2} \\ 1,941571 &= (1,0201) - \tfrac{1}{0,01(1,0201)} \\ 1,941571 &= 1,970395 \rightarrow \text{INCORRETO} \end{aligned}$$

  Pela experiência, sabemos que temos que aumentar a taxa para diminuir o valor:

- 2ª tentativa: Eu ACHO que a taxa é 3% am:

$$\begin{aligned} 1,941571 &= (1,03)^2 - \tfrac{1}{0,03(1,03)^2} \\ 1,941571 &= (1,0609) - \tfrac{1}{0,03(1,0609)} \\ 1,941571 &= 1,913469 \rightarrow \text{INCORRETO} \end{aligned}$$

  Pela experiência, sabemos que temos que diminuir a taxa para aumentar o valor:

- 3ª tentativa: Eu ACHO que a taxa é 2% am:

$$\begin{aligned} 1,941571 &= (1,02)^2 - \tfrac{1}{0,02(1,02)^2} \\ 1,941571 &= (1,0404) - \tfrac{1}{0,02(1,0404)} \\ 1,941571 &= 1,941571 \rightarrow \text{CORRETO} \end{aligned}$$

  Logo, podemos afirmar que a taxa é 2% am.

Certamente, você já entendeu que não podemos ficar testando taxas infinitamente. Assim, vamos recorrer à HP12C para refazer esses cálculos:

Repetindo os Exercícios

1. QUERO O VALOR PRESENTE: Qual o preço à vista de uma geladeira que foi vendida em 2 prestações iguais de $R\$ 350,00$, sem entrada, sabendo que a loja cobra juros de 2% am?

   Solução: Digite:

   $$350\boxed{\text{PMT}}$$
   $$2\boxed{\text{i}}$$
   $$2\boxed{\text{n}}$$

   E, por fim, digite $\boxed{\text{PV}}$ $\rightarrow$. Aparecerá no visor: $-679,55$.

   ✍ i. como a calculadora trabalha com fluxo de caixa, se o PMT foi informado como positivo, o PV tem que ser negativo. Por isso, a resposta é $-679,55$;

   ii. NÃO SE ESQUEÇA DE APERTAR $\boxed{\text{f}}$ e depois $\boxed{\text{clx}}$ AO FINAL, PARA LIMPAR TODO O REGISTRO E NÃO ATRAPALHAR A PRÓXIMA OPERAÇÃO. **FAÇA ISSO SEMPRE!**

2. QUERO A PRESTAÇÃO: Qual prestação cobrar por uma geladeira que custa $R\$ 679,55$ à vista e que será vendida em 2 vezes, com juros de 2% am?

   Solução: Digite:

   $$679,55\boxed{\text{PV}}$$
   $$2\boxed{\text{i}}$$
   $$2\boxed{\text{n}}$$

   E, por fim, digite $\boxed{\text{PMT}}$ $\rightarrow$. Aparecerá no visor: -350.

3. QUERO O PRAZO: Em quantas prestações mensais deve ser financiada uma geladeira que custa $R\$ 679,55$, se for para pagar $R\$ 350,00$, com uma taxa de 2% am?

Solução: Digite:

$$679,55\,\boxed{\text{PV}}$$

$$2\,\boxed{\text{i}}$$

$$350\,\boxed{\text{CHS}}\,\boxed{\text{PMT}}$$

E, por fim, digite n $\rightarrow$. Aparecerá no visor: 2.

Mais uma vez: Se PV é positivo o PMT é negativo, por isso $\boxed{\text{CHS}}$ e $\boxed{\text{PV}}$.

4. QUERO A TAXA: Qual a taxa cobrada em um financiamento de uma geladeira que custa $R\$\,679,55$, se for paga em 2 vezes de $R\$\,350,00$?

   Solução: Digite:

$$350\,\boxed{\text{PMT}}$$

$$2\,\boxed{\text{n}}$$

$$679,55\,\boxed{\text{CHS}}\,\boxed{\text{PV}}$$

E, por fim, digite i $\rightarrow$. Aparecerá no visor: 2.

MUITO MAIS FÁCIL, E SEM TESTES!!!

TABELAS PRONTAS

Nas lojas de departamento não é possível pagar um curso de Matemática Financeira para todos os funcionários. Assim, é comum o gestor criar tabelas de multiplicadores para que os vendedores possam calcular os valores de prestações. A metodologia é a seguinte:

Partir da fórmula

$$PV = PMT\left[\frac{(1+i)^n-1}{i\,(1+i)^n}\right]$$

Supondo que a empresa que está criando a tabela use uma taxa de financiamento de 2% am. Dessa forma, é preciso fazer os multiplicadores para todas as propostas de financiamento dela $(2x, 3x, 4x, \ldots, Nx)$.

a. Para 2 meses:

$$PV = PMT\left[\frac{(1,02)^2 - 1}{0,02\,(1,02)^2}\right]$$

$$PV = PMTx1,9415$$

Nesse momento, já temos um multiplicador. Entretanto, ele está em função de PMT e nós queremos o contrário: ACHAR **PMT**, A PARTIR DO **PV**. Logo:

$$PMT = PV \times (1/1,9415)$$

$$PMT = PV \times 0,515050$$

Dessa forma, basta o vendedor multiplicar o preço do bem por $0,515050$ que ele terá a prestação para um taxa de juros de 2% am.

b. Para 3 meses:

$$PV = PMT\left[\frac{(1,02)^3 - 1}{0,02\,(1,02)^3}\right]$$

$$PV = PMT \times 2,883883$$

$$PMT = PV \times (1/2,883883)$$

$$PMT = PV \times 0,346755$$

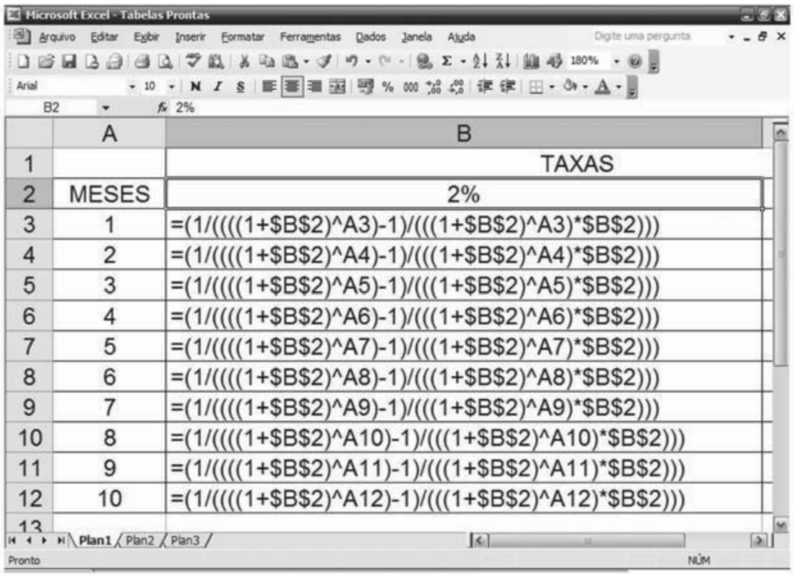
Faça o mesmo para 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 vezes:

Resposta:

4	0,262624
5	0,212158
6	0,178526
7	0,154512
8	0,136510
9	0,122515
10	0,111327

Assim, vocês teriam possibilidade de oferecer as prestações para seus clientes de forma rápida e barata.

Vamos supor que sua empresa trabalhe com outra taxa de juros ou que essa taxa sofra alterações ao longo do ano. Apresentamos, assim, a seguinte fórmula do Excel para resolver essa questão:



	A	B
1		TAXAS
2	MESES	2%
3	1	`=(1/((((1+$B$2)^A3)-1)/(((1+$B$2)^A3)*$B$2)))`
4	2	`=(1/((((1+$B$2)^A4)-1)/(((1+$B$2)^A4)*$B$2)))`
5	3	`=(1/((((1+$B$2)^A5)-1)/(((1+$B$2)^A5)*$B$2)))`
6	4	`=(1/((((1+$B$2)^A6)-1)/(((1+$B$2)^A6)*$B$2)))`
7	5	`=(1/((((1+$B$2)^A7)-1)/(((1+$B$2)^A7)*$B$2)))`
8	6	`=(1/((((1+$B$2)^A8)-1)/(((1+$B$2)^A8)*$B$2)))`
9	7	`=(1/((((1+$B$2)^A9)-1)/(((1+$B$2)^A9)*$B$2)))`
10	8	`=(1/((((1+$B$2)^A10)-1)/(((1+$B$2)^A10)*$B$2)))`
11	9	`=(1/((((1+$B$2)^A11)-1)/(((1+$B$2)^A11)*$B$2)))`
12	10	`=(1/((((1+$B$2)^A12)-1)/(((1+$B$2)^A12)*$B$2)))`

Basta mudar o valor da taxa na célula *B*2, que toda tabela será automaticamente ajustada.

Exercício 7.1

1. Qual é o valor atual de uma anuidade periódica de $R\$1.000,00$, nas hipóteses abaixo:

	Taxa de juros	Prazo	*Resposta*
a.	$1\%a.m.$	24 meses	$R\$21.243,39$
b.	$5\%a.b.$	12 bimestres	$R\$8.863,00$
c.	$8\%a.t.$	10 trimestres	$R\$6.710,08$
d.	$10\%a.s.$	20 semestres	$R\$8.513,56$
e.	$30\%a.a.$	30 anos	$R\$3.332,06$

2. Um carro está à venda por $R\$10.000,00$ de entrada, mais 24 prestações mensais de $R\$2.236,51$. Como opção, a agência o vende em 36 prestações mensais de $R\$1.613,16$ sendo, neste caso, exigida uma entrada de $R\$12.000,00$. Qual é a melhor alternativa, se a taxa de mercado for de 3% ao mês?

   Resposta: A 2ª alternativa possui menor valor atual ($R\$47.218,92$).

3. Uma loja vende uma geladeira por $R\$2.000,00$ à vista ou financiada em 18 meses, a juros de $3,5\%$ ao mês. Qual será a prestação mensal, se não for dada entrada alguma e a primeira prestação vencer após um mês?

   Resposta: $R\$151,63$

4. O gerente financeiro de uma loja deseja estabelecer coeficientes de financiamento por unidade de capital emprestado. O resultado da multiplicação do coeficiente pelo valor financiado é igual a prestação mensal. Sabendo-se que a taxa de juros da loja é de 4% a.m., quais os coeficientes nas hipóteses de prazos abaixo?

   a. 6 meses

      Resposta: $0,190762$

   b. 12 meses

      Resposta: $0,10655$

   c. 18 meses

      Resposta: $0,078993$

   d. 24 meses

      Resposta: $0,065587$

5. Uma motocicleta foi vendida em 4 prestações trimestrais de $R\$1.000,00$, sendo a primeira na compra. Se a taxa de mercado é de 3% ao mês, qual é o preço à vista?

   Resposta: $R\$3.519,04$

6. Uma loja anuncia a venda de um televisor por $R\$6.000,00$, à vista. Um cliente está disposto a comprá-lo por $R\$2.000,00$ de entrada, mais 36 prestações mensais. De quanto serão as prestações, se a taxa de juros cobrada pela loja for de 50% ao ano?

   Resposta: $R\$195,35$

7. Um terreno é vendido por $R\$300.000,00$ à vista ou por $R\$100.000,00$ de entrada, sendo o saldo financiado. Sabendo-se que a taxa de juros da imobiliária é de 45% a.a., de quanto serão as prestações, caso o cliente opte por algum dos planos abaixo:

   a. 24 prestações mensais
      Resposta: $R\$11.994,45$
   b. 8 prestações trimestrais
      Resposta: $R\$37.126,82$
   c. 4 prestações semestrais
      Resposta: $R\$77.867,55$

8. Numa compra efetuada, o cliente teve o saldo devedor financiado em 3 prestações quadrimestrais de $R\$5.000,00$. Contudo, para evitar esta concentração de desembolso, o cliente solicitou a transformação do financiamento em 12 prestações mensais. Se a taxa de juros da loja for de 2% ao mês, qual deverá ser o valor das prestações?

   Resposta: $R\$1.213,12$

9. Na compra de um equipamento de valor à vista igual a $R\$587,57$, um cliente propôs pagar o valor da entrada no decorrer do financiamento e combinou que esse valor seria corrigido a juros compostos de 7% ao mês. O valor financiado será pago em seis prestações mensais iguais e consecutivas de $R\$100,00$, com a primeira vencendo em trinta dias, e a taxa de financiamento de 60% ao ano, capitalizados mensalmente. Qual o valor a ser pago na quarta prestação, se o valor relativo à entrada for pago nesse momento?

   Resposta: Aproximadamente $R\$212,00$

10. Um apartamento é vendido por $R\$1.000.000,00$ à vista ou por 50% de entrada e o restante em 60 meses, à taxa de 12% ao ano, capitalizados mensalmente. Qual é o valor das prestações?

    Resposta: $R\$11.122,22$

11. O preço de um imóvel é de $R\$500.000,00$. Um comprador ofereceu $R\$200.000,00$ de entrada e o pagamento do saldo restante em 12 prestações iguais, mensais. A taxa

de juros compostos é de 5% ao mês. Qual o valor de cada prestação, desprezando-se os centavos?

Resposta: $R\$33.847,00$

12. João pretende comprar uma mansão cujo preço à vista é de $R\$1.000.000,00$. A firma vendedora exige 10% sobre o preço à vista e financia o restante à taxa de juros compostos de 6% ao mês, em prestações iguais e sucessivas. João dispõe para pagar, mensalmente, da quantia de $R\$74.741,01$. Nessas condições, qual é o número de prestações?

    Resposta: 22 meses

13. Uma máquina tem o preço de $R\$2.000.000,00$, podendo ser financiada em 10% de entrada e o restante em prestações trimestrais, iguais e sucessivas. Sabendo-se que a financiadora cobra juros compostos de 28% ao ano, capitalizados trimestralmente, e que o comprador está pagando $R\$205.821,00$, quando vencerá a última prestação?

    Resposta: 3 anos e 6 meses

14. Um indivíduo deve $R\$181.500,00$, vencíveis de hoje a seis meses, e $R\$380.666,00$, vencíveis de hoje a doze meses. Para transformar suas dívidas em uma série uniforme de quatro pagamentos postecipados trimestrais, a partir de hoje, a juros e desconto racional compostos de 10% ao trimestre. Qual o valor do pagamento trimestral?

    Resposta: $R\$129.343,00$

15. Um bem foi adquirido através de um plano de três prestações de $R\$200,00$, sem entrada, e a primeira ocorrendo a trinta dias da data de sua aquisição. A taxa negociada é de 2% ao mês e o regime de capitalização é composta. Qual o valor do bem na data de aquisição?

    Resposta: $R\$576,77$

16. Uma pessoa paga uma entrada no valor de $R\$23,60$ na compra de um equipamento, paga mais 4 prestações mensais, iguais e sucessivas, no valor de $R\$14,64$ cada uma. A instituição financiadora cobra uma taxa de juros de 120% ao ano, capitalizados mensalmente (juros compostos). Com base nestas informações, determine o valor à vista do equipamento adquirido.

Resposta: $R\$70.00$

17. Determinada mercadoria é vendida por $R\$2.500,00$, à vista, ou por 20% de entrada, mais prestações mensais de $R\$309,00$. Sendo de 2% ao mês a taxa corrente de juros, determinar o número de prestações.

    Resposta: 7 meses

18. Uma geladeira, cujo preço à vista é $R\$1.000,00$, deve ser vendida em cinco prestações mensais e iguais, devendo a primeira prestação vencer ao final do primeiro mês. Considerando-se uma taxa de juros compostos igual a 6% ao mês, pergunta-se:

    a. Qual será o valor de cada prestação?

       Resposta: $R\$237,40$

    b. Qual será o valor cobrado a título de juros?

       Resposta: $R\$187,00$

19. Uma loja apresenta duas propostas de venda de um produto eletrônico:

a. entrada de $R\$400,00$, mais 8 prestações mensais de $R\$720,00$ cada;

b. entrada de $R\$650,00$, mais 15 prestações mensais de $R\$600,00$ cada.

Sendo de $3,5\%$ ao mês a taxa corrente de juros, indicar a alternativa mais atraente para o comprador.

Resposta: Alternativa a.

Autoavaliação

Você conseguiu resolver todos os exercícios propostos sem dificuldade? Se a resposta foi sim, então você entendeu os conceitos envolvendo os conceitos de rendas certas ou anuidades, em particular os conceitos do modelo básico. Se não conseguiu, não desista. Volte à aula e reveja os conceitos e exemplos, não deixe que suas dúvidas se acumulem.

Aula 8

SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO

Objetivos

1 classificar as diversas séries de pagamento;

2 descrever o comportamento das diversas séries de pagamento;

3 ensinar a calcular anuidades através da HP12C.

INTRODUÇÃO

Considerando as informações do anúncio abaixo, determine a prestação.

$$1000 = PMT\left[\frac{(1,1)^2 - 1}{0,1\,(1,1)^2}\right]$$
$$1000 = PMT\,1,735537$$
$$PMT = 576,19$$

Em outras palavras, uma televisão de $R\$1000,00$ deve ser paga em duas prestações de $R\$576,19$ se a empresa cobra juros de 10% am.

Mas vamos escutar um bom papo de vendedor:

“Como a televisão custa $R\$1000$ e os juros são de 10% ao mês, logo, $R\$100$ do 1^o mês com $R\$100$ do 2^o dá $R\$200$, somado ao preço da geladeira fica $R\$1200$. Porém, como são dois pagamentos, você terá que pagar duas de $R\$600$.”

Esse papo convence, não é?

Entretanto, você acaba de ver que deve pagar apenas $R\$576,19$. Por que isso acontece? Por que o valor é menor do que o vendedor falou?

Observe a tabela a seguir:

Mês	Saldo inicial	Juros	Saldo parcial	Prestação	Saldo final
0	1000				1000
1	1000	100	1100	576,2	523,8
2	523,8	52,4	576,2	576,2	0,00

O que acontece é que após o 1^o pagamento você não estará ainda devendo $R\$1000$, mas sim $R\$523,80$. Logo, você terá que pagar 10% sobre esse valor.

Em uma linguagem financeria, a dívida foi **amortizada** após o 1^o pagamento. MAS O QUE É AMORTIZAÇÃO?

Em termos genéricos, amortização é a parte da prestação que não corresponde aos juros, ou seja, é parte real que a dívida diminui, neste exemplo, mês a mês.

Como a dívida inicial era de $R\$1000$ e o saldo devedor, após o 1^o pagamento, de $R\$523,8$, podemos dizer que essa dívida foi amortizada em $R\$476,2$. De outra forma, basta subtrair da prestação ($R\$576,2$) o valor do juro ($R\$100$), que você terá os $R\$476,2$.

No 2^o mês, a amortização foi de $R\$523,8$ (valor do saldo devedor), fato que levou a ZERO a dívida. Vejamos:

$R\$576,2$ - $R\$52,3 = R\$523,8$.

✍ A Caixa Econômica Federal possui 30% do mercado nacional de cadernetas de poupança. São quase 150 anos de história, tendo, hoje, mais de vinte milhões de contas de poupança.
A história da Caixa se confunde com a história da caderneta de poupança. Em 1861, Dom Pedro II decretou que

"a Caixa tem por fim receber, a juro de 6%, as pequenas economias das classes menos abastadas e de assegurar, sob garantia do Governo Imperial, a fiel restituição do que pertencer a cada contribuinte, quando este o reclamar".
Dez anos depois, através de Lei, foi estendido aos escravos o direito de depositar em caderneta de poupança.
O longo período de tempo em que se encontra em operação faz da caderneta de poupança um dos ativos de menor risco. Uma frase famosa do ex-ministro Delfim Netto retrata bem essa qualidade: *Ponho meu dinheiro em caderneta de poupança. Para quem não entende de economia, é a melhor coisa. Agora, quem entende tem outros lugares para perder.*

Sistema Francês ou Tabela Price

No Brasil, quando é dito 12% a.a. em tabela Price, o custo efetivo anual é maior do que 12%, pois o formato dado às taxas, neste caso, é o de taxa nominal anual com capitalização mensal.

O sistema de amortização francês, também conhecido como tabela Price, é aquele no qual encontramos parcelas fixas (anuidade constante), o que implica amortizações crescentes e juros decrescentes.

Vamos aproveitar o exercício do financiamento da TV XYZ 42″, para construirmos, passo a passo, uma tabela que mostra os valores de amortização, juros e saldo devedor na tabela Price.

Passo 1. No período 0, ou seja, no momento da compra, o único dado disponível é o saldo devedor da dívida ($1000,00).

Período	Prestação	Juros	Amortização	Saldo
0				1000,00

Passo 2. A partir do período 1, podemos lançar o valor da prestação, $576,8 e o valor dos juros que é igual à taxa de juros de 10% a.m. vezes o saldo devedor.

Período	Prestação	Juros	Amortização	Saldo
0				1000,00
1	576,2	100		

Passo 3. O valor a ser amortizado, isto é, o valor destinado para redução do saldo devedor é a diferença entre o prestação e os juros.

Período	**Prestação**	**Juros**	**Amortização**	**Saldo**
0				1000,00
1	576,2	100	476,2	523,8

Passo 4. As mesmas operações, repetidas no período 2, gera a seguinte tabela:

Período	**Prestação**	**Juros**	**Amortização**	**Saldo**
0				1000,00
1	576,2	100	476,2	523,8
2	576,2	52,3	523,8	0,00

✍ As amortizações no sistema francês crescem a mesma taxa de juros da operação, ou seja, a amortização do período 2 $(\$523,8)$ é equivalente a amortização do período 1 $(\$476,2)$ aplicadas à taxa de 10% a.m.

$$476,2 \times 1,1 = 523,8$$

Vamos supor que uma pessoal pegou esses \$1000 para pagar em 2× com juros de 10% am, de alguém que faz empréstimos de forma autônoma (uma pessoal física e não um banco). Vamos crer que no 1^o mês o devedor não tenha os $R\$576,2$ para pagar, dessa forma, ele oferece um cheque de $R\$400$. A mesma dificuldade de pagamento se apresentou no 2^o mês, porém, nessa data ele só tinha $R\$450$ para pagar. Como será a tabela de amortização, haja vista que o pagamento estava previsto de acordo com a tabela price:

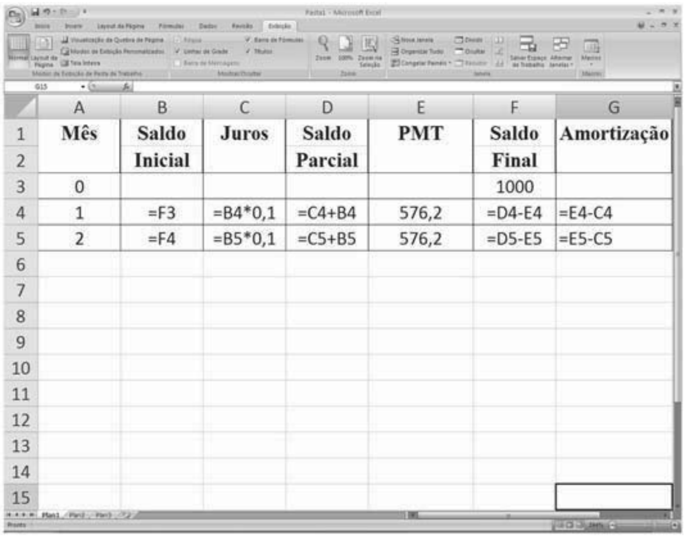
Ao final do 2^o mês, o devedor ainda está devendo $R\$320$ ao credor. Se no próximo mês ele não tiver esse valor, continuará a ter obrigação com esse agente de crédito.

Ao contrário do que muitos imaginam, o nome "Tabela Price" não está relacionado à palavra preço (*price* em inglês). Trata-se de uma homenagem ao matemático inglês Richard Price (1723 – 1791), que desenvolveu, a pedido de uma seguradora inglesa, tábuas de mortalidade que serviram de base para o cálculo de seguros e aposentadorias. A partir deste estudo, as tábuas foram adaptadas, adotadas e universalizadas pelos franceses como forma de amortização de empréstimos.

Por isso, chamamos sistema francês ou tabela Price o processo de amortização de dívidas com prestações iguais.

Mês	Saldo inicial	Juros	Saldo parcial	Pagamento	Saldo final
0					1000
1	1000	100	1100	400	700
2	700	70	770	450	320

A tabela price pode ser feita na planilha eletrônica de seu computador, basta seguir a ordem:



	A	B	C	D	E	F	G
1	Mês	Saldo	Juros	Saldo	PMT	Saldo	Amortização
2		Inicial		Parcial		Final	
3	0					1000	
4	1	=F3	=B4*0,1	=C4+B4	576,2	=D4-E4	=E4-C4
5	2	=F4	=B5*0,1	=C5+B5	576,2	=D5-E5	=E5-C5
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							

Tudo que temos que fazer é mudar, exemplo a exemplo, o número de períodos, a taxa de juros e o saldo inicial.

SISTEMA DE AMORTIZAÇÕES CONSTANTES (SAC)

Como o próprio nome deixa claro, no Sistema de Amortizações Constantes – SAC, as amortizações durante o pagamento da dívida são iguais em todos os períodos. No SAC, as prestações e os juros vão caindo ao longo do tempo. Esse sistema é largamente usado em operações junto a agentes financeiros como a FINEP e o BNDES.

Utilizando como exemplo uma operação de $1.000, a ser paga em 4 parcelas no SAC, a uma taxa de 5% ao período, construiremos uma tabela na qual serão discriminados os juros e as amortizações. O primeiro passo é dividir o valor do financiamento pelo número de parcelas. No caso, as amortizações terão sempre o valor $\$250 (= \$1.000 \div 4)$. Depois, vamos começar a preencher a tabela com os dados conhecidos: os valores da dívida e da amortização.

Período	Prestação	Juros	Amortização	Saldo
0				1.000,00
1			250,00	

Como a taxa de juros é de 5% ao período, então os juros do período 1 serão iguais a \$50 (taxa de juros aplicada sobre o saldo devedor). Dessa forma, a prestação será igual a \$300 (soma dos valores de amortização e de juros), e o saldo devedor cai para \$750 (o saldo devedor anterior menos o valor amortizado).

Período	Prestação	Juros	Amortização	Saldo
0				1.000,00
1	300,00	50,00	250,00	750,00

Repetindo as mesmas operações nos períodos subsequentes, obtemos a tabela completa.

Período	Prestação	Juros	Amortização	Saldo
0				1.000,00
1	300,00	50,00	250,00	750,00
2	287,50	37,50	250,00	500,00
3	275,00	25,00	250,00	250,00
4	262,50	12,50	250,00	0,00

Observe que há uma redução de $\$12,50$ por período sobre os juros e os valores das prestações. Tal valor pode ser calculado pela aplicação da taxa sobre o valor da amortização fixa ($\$12,50 = \$250 \times 5\%$).

SISTEMA AMERICANO

No sistema americano, o que permanece constante no tempo são as parcelas de juros. Se os juros permanecem constantes, então, não há variação do saldo devedor. Neste sistema, o pagamento do principal só ocorre no final da operação, não havendo amortizações nas parcelas intermediárias.

Adotando os mesmos valores referentes aos prazos, ao capital inicial e à taxa, utilizados na construção da tabela SAC, teremos:

Período	Prestação	Juros	Amortização	Saldo
0				1.000,00
1	50,00	50,00	0,00	1.000,00
2	50,00	50,00	0,00	1.000,00
3	50,00	50,00	0,00	1.000,00
4	1.050,00	50,00	1.000,00	0,00

!

Utilize anúncios de bens financiados que foram publicados em jornais e revistas para determinar as taxas praticadas. Lembre-se de que são necessários, no mínimo, três dados para tais cálculos. Caso o anúncio forneça a taxa, verifique se ela corresponde àquela que você calculou.

Exercício 8.1

1. Um estabelecimento comercializa um eletrodoméstico por $R\$3.000,00$. No crediário é exigida uma entrada de 40% do valor da mercadoria. Como os juros cobrados são de 5% am, qual será o valor das prestações se o cliente optar pela liquidação da dívida em 6 parcelas mensais?

   Resposta: $354,63$

2. Uma mercadoria pode ser adquirida em 5 prestações mensais de $R\$630,64$, sendo que a primeira prestação é dada como entrada. Sabendo-se que a taxa de mercado é de 4% am, qual seria o valor dessa mercadoria?

   Resposta: $2.919,80$

3. Parte do pagamento de uma máquina, cujo valor à vista é de $R\$30.000,00$ é financiada em 12 prestações mensais

de $R\$1.500,00$. Calcular o pagamento que deve ser feito de entrada, sabendo-se que a taxa do financiamento é de $1,5\%$ am.

Resposta: $13.638,74$

4. Um aparelho que custa à vista $R\$130,00$, está sendo anunciado por $R\$25,00$ de entrada e mais 6 prestações mensais de $R\$22,30$. Qual a taxa efetiva mensal de juros cobrada pela loja?

   Resposta: $7,39809525\%$ am

5. Em uma loja há uma oferta de um balcão para pagamento em 5 parcelas mensais de $R\$350,00$, sendo a primeira de entrada. Sabendo-se que a taxa cobrada pela loja é de 7% am para vendas a prazo, calcule o valor à vista do balcão.

   Resposta: $1535,52$

6. Uma geladeira de $R\$1000,00$ pode ser paga em $10\times$ com juros de 5% AM. Monte as tabelas de amortização constante e crescente.

   Resposta:

Constante

Período	**Amortização**	**Juros**	**Prestação**	**Saldo**
0				
1	100	1000 x 5% = 50	150	900
2	100	900 x 5% = 45	145	800
3	100	800 x 5% = 40	140	700
4	100	700 x 5% = 35	135	600
5	100	600 x 5% = 30	130	500
6	100	500 x 5% = 25	125	400
7	100	400 x 5% = 20	120	300
8	100	300 x 5% = 15	115	200
9	100	200 x 5% = 10	110	100
10	100	100 x 5% = 5	105	0

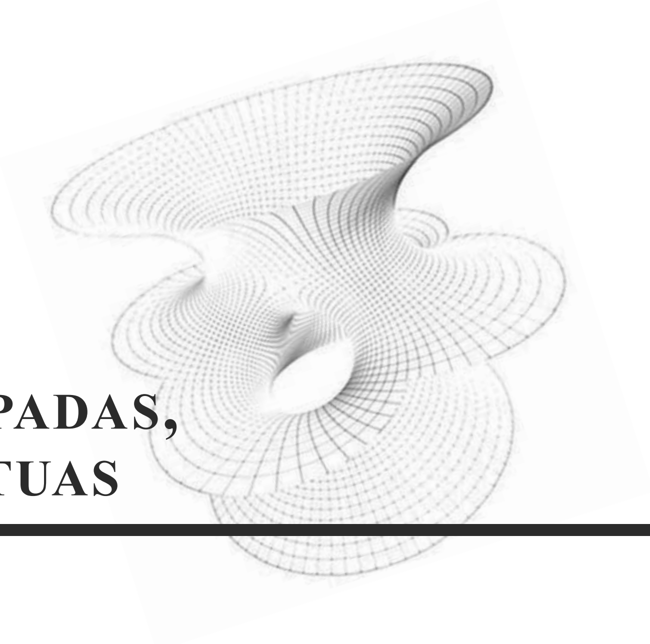
Crescente

Período	Juros	Prestação	Amortização	Saldo
0				
1	50,00	129,50	79,50	920,50
2	46,03	129,50	83,48	837,03
3	41,85	129,50	87,65	749,38
4	37,47	129,50	92,03	657,35
5	32,87	129,50	96,63	560,71
6	28,04	129,50	101,46	459,25
7	22,96	129,50	106,54	352,71
8	17,64	129,50	111,86	240,85
9	12,04	129,50	117,46	123,39
10	6,17	129,50	123,33	0,00

Autoavaliação

Você conseguiu resolver todos os exercícios propostos sem dificuldade? Se a resposta foi sim, então você entendeu os conceitos envolvendo os conceitos de amortização. Se não conseguiu, não desista. Volte à aula e reveja os conceitos e exemplos, não deixe que suas dúvidas se acumulem.

Aula 9



Anuidades Antecipadas, Diferidas e Perpétuas

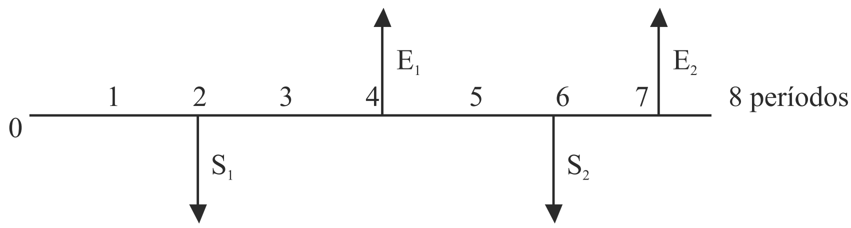
Objetivos

1. entender os conceitos envolvidos no estudo das séries não uniformes;
2. entender o conceito de montante do modelo básico de uma renda uniforme;
3. determinar o fator de valor futuro e montante de uma série uniforme de pagamento;
4. interpretar e resolver os problemas propostos.

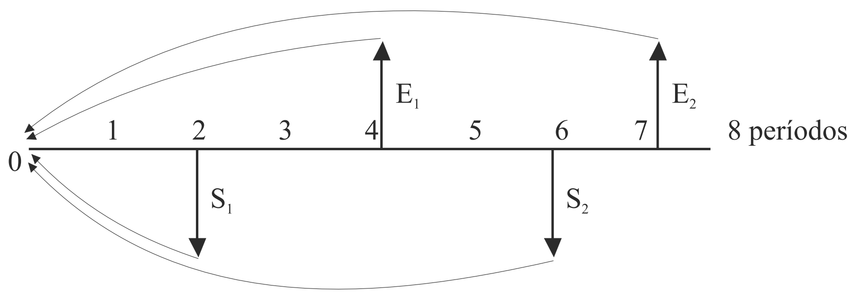
INTRODUÇÃO

O objeto de estudo da matemática financeira é a evolução do dinheiro no tempo. Dois ou mais capitais só podem ser comparados quando na mesma data focal. Conceitualmente, dois ou mais capitais são equivalentes se e somente se sob uma mesma taxa produzem o mesmo resultado numa determinada data comum.

Considere o seguinte diagrama:



Não podemos comparar os valores das entradas de caixa E_1 e E_2 com as saídas de caixa S_1 e S_2 por estarem em períodos de tempo diferentes. Contudo, se tomarmos a data zero como da focal, podemos transferir os valores conforme diagramado abaixo:

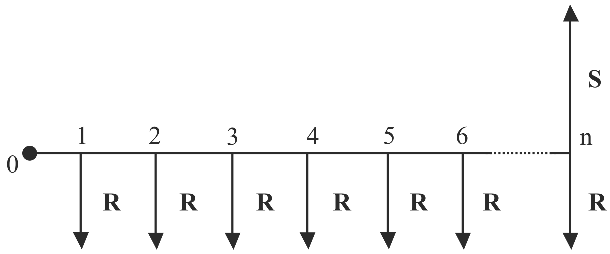


Na data zero a uma determinada taxa i temos em juros compostos:

$$\frac{E_1}{(1+i)^4}+\frac{E_2}{(1+i)^7}=\frac{S_1}{(1+i)^2}+\frac{S_2}{(1+i)^6}$$

Formação de Capital - Periódico, Finito e Constante

Para a formação de um montante, os fluxos das anuidades padrão são assim diagramados:



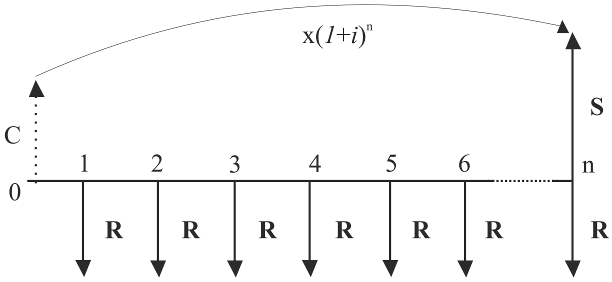
Por equivalência de capitais, na data n, teremos:

$$S = R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-3} + \cdots + R(1+i)^2 + R(1+i) + R$$
$$S = R \underbrace{\left[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}\right]}_{\text{Somatório de P.G. de razão } = (1+i) \text{ e primeiro termo } = 1}$$

Então, para cálculo de anuidade padrão, temos:

$$\boxed{S = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]}$$

Podemos verificar tal relação mais facilmente pelo esquema abaixo:



$$C(1+i)^n = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right](1+i)^n$$

Portanto:

$$\boxed{S = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]} \quad \text{ou} \quad \boxed{FV = PMT\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]}$$

Exemplo 9.1

Você deseja depositar na poupança (que rende em média $0,6\%$ am) $R\$100$ por mês durante 1 ano para realizar uma compra. Quanto terá ao final do prazo?

Solução:

$$FV = 100\frac{(1,006)^{12}-1}{0,006}$$

$$FV = 1240,40$$

Porém, essa resposta pode ser obtida através da calculadora $HP12c$:

Digite:

$100\,\boxed{\text{PMT}}$

$0,6\,\boxed{\text{i}}$

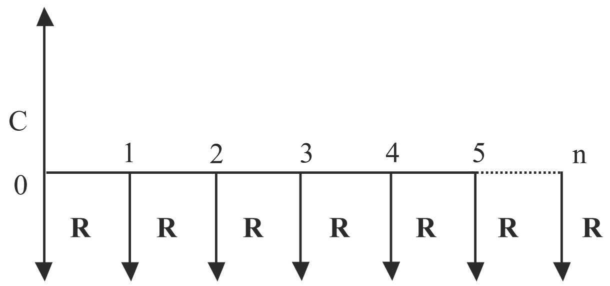
$12\,\boxed{\text{n}}$

E, por fim, digite $\boxed{\text{FV}}$ $\rightarrow$ aparecerá no visor: $-1240,40$

Dessa forma, você será capaz de resolver todos os problemas dessa ordem com a calculadora!!!

ANUIDADES ANTECIPADAS - PERIÓDICAS, FINITAS E CONSTANTES

Esse esquema de pagamento é muito comum no crédito direto ao consumidor. O primeiro pagamento (entrada) é igual aos demais.



Como a série de pagamentos é antecipada um período, ou seja, os pagamentos são realizados no início de cada período, basta multiplicar a prestação calculada no modelo postecipado por $S = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]$ e encontraremos a expressão geral para o esquema antecipado:

$$\boxed{C = Ra\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^{n-1}}\right]} \quad \text{ou} \quad \boxed{PV = PMTa\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^{n-1}}\right]}$$

Exemplo 9.2

Você deseja comprar uma mercadoria de $R\$1000,00$ em 4 prestações iguais e com uma entrada (em outras palavras, 5 pagamentos iguais sendo o 1^o no ato da compra). Se a taxa cobrada pela empresa é de $2\%am$, qual o valor das prestações?

Solução:

$$1000 = PMT\frac{(1,02)^5-1}{0,02(1,02)^4}$$

$$PMT = 208$$

Note bem que o valor indicado como ***n*** foi 5, referente aos 5 pagamentos!

Porém, essa resposta pode ser obtida através da calculadora $HP12c$. Para isso, você deverá ajustar sua máquina para pagamentos antecipados. Isso se dá inserindo a função BEGIN (através das teclas $\boxed{\text{g}}\ \boxed{\text{7}}$). é imprescindível aparecer a palavra BEGIN na parte inferior do visor de sua máquina:

Digite:

$$1000\,\boxed{\text{PV}}$$

$$2\,\boxed{\text{i}}$$

5 $\boxed{n}$

E, por fim, digite $\boxed{\text{PMT}}$ $\rightarrow$ aparecerá no visor: -208

Dessa forma, você será capaz de resolver todos os problemas dessa ordem com a calculadora!!!

Não se esqueça de tirar o BEGIN após o uso: teclas $\boxed{g}$ $\boxed{8}$

Em alguns casos, é possível descontar a 1^a parcela do valor do bem e tratar o fluxo de caixa como uma anuidade padrão de $n-1$. Por exemplo:

- Um bem que custe $R\$1000$ à vista ou em $5x$ com entrada de $R\$220$;

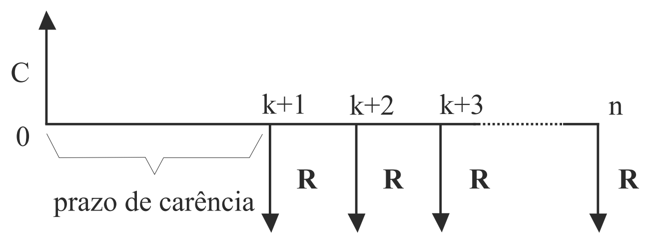
  é igual a:

- Um bem de $R\$780$ à vista em $4x$ sem entrada de $R\$220$.

Nesse caso, ambos os fluxos devem ter a mesma taxa de juros. TESTE PARA VER!

ANUIDADES DIFERIDAS

Chamamos de diferida a anuidade que apresenta prazo de carência anterior ao primeiro pagamento ou recebimento. Para k períodos de carência, o esquema seria diagramado dessa forma:



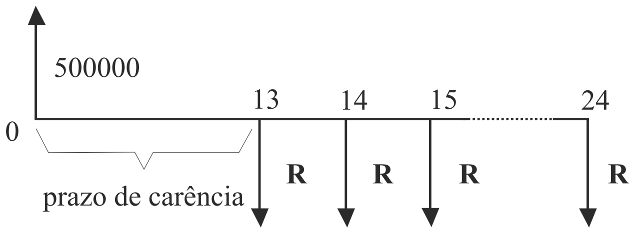
Podemos calcular o capital inicial C através da seguinte expressão:

$$\boxed{C = R\left[\frac{(1+i)^{n-k}-1}{i(1+i)^n}\right]} \quad \text{ou} \quad \boxed{PV = PMT\left[\frac{(1+i)^{n-k}-1}{i(1+i)^n}\right]}$$

Exemplo 9.3

Sua empresa vai pegar um empréstimo de $R\$500000,00$ para pagar em 12 vezes, sabendo que esses pagamentos têm prazo de carência de 1 ano e a taxa de juros cobrada é de $5\%am$ (nesse caso, a empresa fica 12 meses sem pagar. Os desembolsos iniciam-se no 13^o mês e vão até o 24^o). Qual o valor dos pagamentos?

Solução: O fluxo de caixa do exemplo segue o esquema:



Resolvendo:

$$500000 = PMT\left[\frac{(1,05)^{24-12}-1}{0,05(1,05)^{24}}\right] \Rightarrow PMT = 101309,1132$$

Para fazer com a $HP12c$, o primeiro passo é achar o valor da dívida no mês 12 (ou seja, 1 mês antes de completar 1 ano). Nesse caso, podemos usar a fórmula da anuidade padrão e achar o FV:

Digite:

500000 $\boxed{\text{PV}}$

5 $\boxed{\text{i}}$

12 $\boxed{\text{n}}$

E, por fim, digite $\boxed{\text{FV}}$ $\rightarrow$ aparecerá no visor: $-897928,163$

Esse é o valor da dívida 1 mês antes de iniciar os pagamentos. Para achar a prestação mensal, usamos a fórmula de anuidade padrão:

Digite:

897928,163 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PV}}$

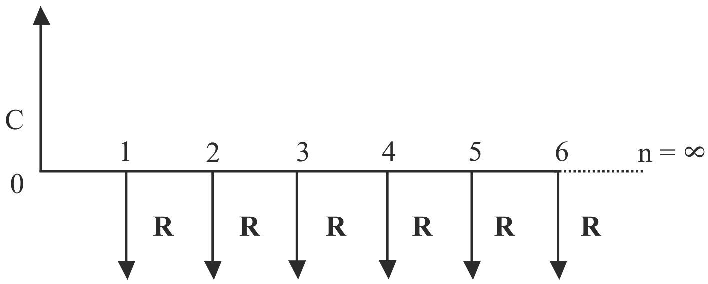
5 $\boxed{\text{i}}$

12 $\boxed{\text{n}}$

E, por fim, digite $\boxed{\text{PMT}}$ $\rightarrow$ aparecerá no visor: $-101309,1132$

ANUIDADES PERPÉTUAS

As perpetuidades indicam um número infinito de períodos como mostrado abaixo:



Para resolver, temos:

$$C = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] = \frac{R}{i}\left[\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n} - \frac{1}{(1+i)^n}\right] = \frac{R}{i}\left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i\,(1+i)^n}\right]$$

Então, temos a seguinte expressão geral para pagamentos ou recebimentos perpétuos:

$$C = \frac{R}{i}$$

Exemplo 9.4

Um estádio de futebol para 20.000 pessoas, que será construído pela iniciativa privada, custa $R\$50.000.000,00$. Sabendo que ele deve ser ocupado por 4 partidas mensais (o ingresso custa $R\$30,00$) e 1 show bimestral (o ingresso custa $R\$100,00$) e que a taxa de juros de mercado é de $10\%aa$, quantas cadeiras perpétuas ele deve ter?

Solução: O 1^o passo é descobrir o valor do benefício anual de quem irá comprar a cadeira:

- 4 partidas por mês a $R\$30$ o ingresso dá $R\$1440$ ao ano;

- 1 show a cada 2 meses com ingresso a $R\$100$ dá $R\$600$ ao ano;

TOTAL DO BENEFÍCIO: $R\$2040$ ao ano.

O 2^o passo é descobrir o valor atual desse benefício perpétuo:

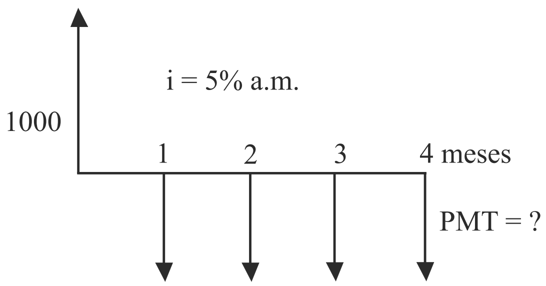
$$PV = \frac{2040}{0,1}$$
$$PV = 20400$$

O 3^o passo é saber quantas cadeiras perpétuas são necessárias para contrução desse estádio:

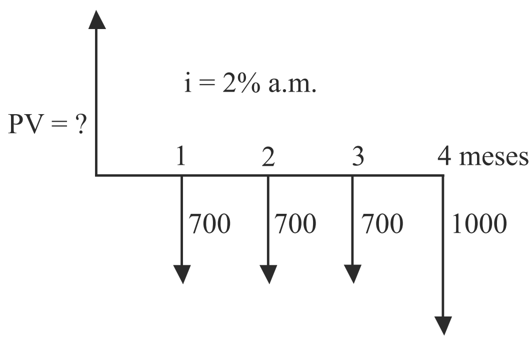
Preço total / valor unitário = Número de cadeiras

$$50000000/20400 = N \approx 2451 \text{ cadeiras}$$

Exercício 9.1



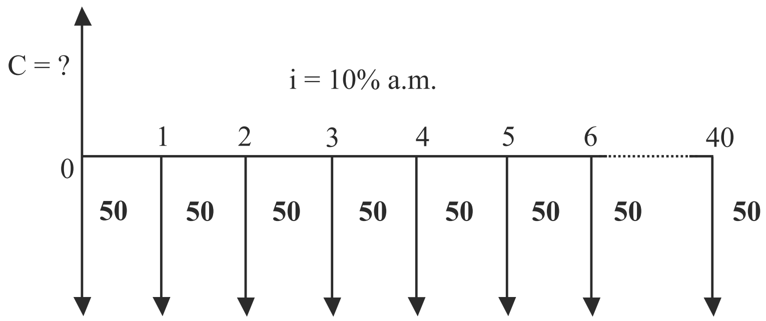
1. **Resposta:** $282,0118$



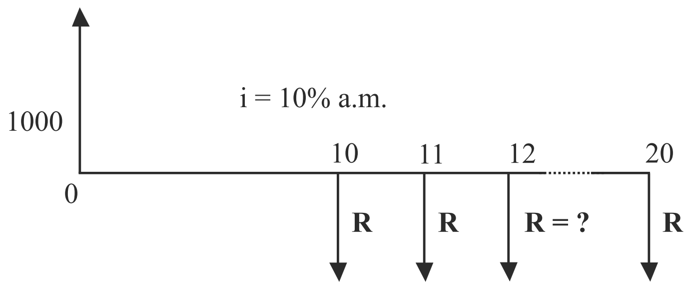
2. **Resposta:** $2942,5637$

3. Um indivíduo deseja criar um fundo de previdência próprio. Decide depositar mensalmente 10% de seu salário durante os 35 anos que permanecer trabalhando. Considere a taxa de caderneta de poupança ($0,5\% a.m.$) e determine o montante que será acumulado por tal aplicação.

   Resposta: $14247,10\%$ do salário ou $142,47$ salários integrais



4. **Resposta:** $538,9525$



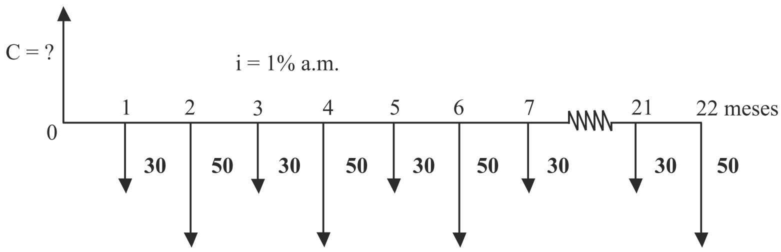
5. **Resposta:** $363,0370$

6. Por quanto tempo poderá o indivíduo do exercício 3 fazer retiradas mensais iguais ao seu salário integral quando na ativa?

   Resposta: 250 meses

7. Recalcule os exercícios 3 e 6 à taxa de $0,4\% a.m.$

   Resposta: R_1 : $10869,01\%$ do salário ou $108,6901$ salários integrais, R_2 : 143 meses



8. **Resposta:** $785,4371$

9. Uma loja tem como norma facilitar os pagamentos, proporcionando aos seus clientes a possibilidade de pagar em três meses sem acréscimo. Nesse caso, o preço à vista é dividido por 3 e a primeira é dada como entrada. Qual o desconto sobre o preço à vista que a loja pode conceder, se a taxa praticada pela loja for de $7,5\%$ ao mês?

   Resposta: $6,8\%$

Autoavaliação

Você conseguiu resolver todos os exercícios propostos sem dificuldade? Se a resposta foi sim, então você entendeu os conceitos envolvendo os conceitos de anuidades fora do padrão. Se não conseguiu, não desista, volte à aula, e reveja os conceitos e exemplos. Não deixe que suas dúvidas se acumulem.

Aula 10

Análise de Investimentos

Objetivos

1. apresentar as principais ferramentas de análise de investimentos;
2. calcular o retorno do investimento em termos de tempo envolvido (payback) e rentabilidade (taxa interna de retorno);
3. calcular a taxa interna de retorno e o valor presente líquido de investimentos através do Excel;
4. interpretar e resolver os problemas propostos.

ANÁLISE DE INVESTIMENTOS

Por Mara Luquet
Valor Econômico - 27/6/2007

Sua família costuma conversar sobre taxas de juro? Quando estão reunidos na hora do jantar ou no carro nas viagens de fim de semana, vocês falam sobre taxas de juro? Não? Tem certeza? Pense um pouco.

Não se trata da taxa básica de juro da economia, aquela que você tem ouvido falar que está em queda. Mas fundamentalmente da taxa de juro que você e sua família estão praticando nas suas decisões cotidianas.

Quando decidem comprar uma televisão de plasma, antecipar ou adiar uma viagem, trocar de carro ou de casa, ou até o tênis novo. Tudo isso, rigorosamente tudo terá impacto na sua vida. São escolhas que você faz e para todas elas haverá um termo de troca, uma taxa de juro, que você vai pagar se tiver antecipando ou vai ganhar se tiver adiando.

Diariamente, vocês utilizam uma taxa de juro, uma taxa de desconto para fazerem suas escolhas. Se não prestam a atenção devida a essas taxas podem estar cometendo erros graves nas suas escolhas. A taxa de juro é a taxa de desconto que você utiliza para fazer suas trocas intertemporais. Trata-se de um prêmio para aqueles que são pacientes e de um custo para os que têm pressa.

Existe um livro, escrito por um brasileiro, o professor Eduardo Giannetti, que simplesmente não pode faltar na sua estante. Mais do que isso, o livro de Giannetti, ”O Valor do Amanhã”, tem que ser lido em família e depois servir de linha condutora de um debate que vai melhorar muito a forma como sua família encara receita e gastos e, principalmente, pensa e planeja o futuro.

A leitura do livro de Giannetti é deliciosa, recheada de exemplos históricos, literatura e uma viagem em diversos ramos do conhecimento, da biologia às próprias finanças. Não se trata de um livro de teoria econômica, mas de filosofia, uma experiência que pode ser enriquecedora para toda família, principalmente para seu filho, que não poderá cometer muitos erros com dinheiro.

Por isso, é fundamental que você o ajude a entender o conceito de taxa de juro.

Como explica Giannetti, a elevada impaciência infantil ocorre porque o equipamento cerebral e mental da criança ainda não está inteiramente constituído.
No entanto, coisa inteiramente distinta é o fenômeno da impaciência juvenil. O jovem, diz Giannetti, ainda que naturalmente impulsivo e entregue às demandas e apelos do momento, tem a faculdade da antevisão. ”Ele figura em sua mente um amanhã. O futuro, entretanto, o que é? Uma abstração, um romance por ser escrito, uma película virgem a ser filmada e roteirizada com a câmera da imaginação”.
Estar ao lado, muito próximo do seu filho nesta fase pode ser fundamental para o sucesso dele, mais até mesmo do que qualquer ajuda financeira que você possa desembolsar. Como explica o próprio Giannetti no livro: “Ocorre que sua antevisão do amanhã é tudo, menos um esforço frio e sóbrio de encarar limites, aceitar a existência de *trade-offs* ou fixar probabilidades minimamente objetivas. Aos olhos de um jovem - e por razões compreensíveis -, conceber o futuro, imaginar tudo o que a vida lhe promete e reserva, não é exercício de previsão - é sonho”.
As chances de seu filho conseguir realizar boa parte desses sonhos que alimenta na juventude têm uma correlação muito forte com o conhecimento dele sobre taxas de juro. Mais uma vez vale repetir: não apenas as taxas de juro praticadas na economia, o que também é extremamente importante, mas fundamentalmente as taxas de juro que ele vai praticar por toda a vida.

ANÁLISE DE INVESTIMENTOS

Suponhamos que você esteja considerando a viabilidade de abrir um negócio ou mesmo ampliar um já existente. Ou, ainda, que você queira fazer as contas para saber se vale a pena substituir um equipamento antigo por um mais moderno. Nesses casos, o que está em jogo é um processo de análise de investimentos.

Desde já, observe que há um forte elemento subjetivo e de risco nessa avaliação. Afinal, quem sabe com certeza como se comportarão os mercados nos próximos anos, ou mesmo, qual será a vida útil dos equipamentos adquiridos?

Um empreendedor mais otimista, ou menos avesso ao risco, pode realizar um investimento que outro, mais pessimista ou avesso ao risco, não realizaria. Uma conjuntura econômica favorável pode tornar os empreendedores mais otimistas, resultando em um *boom* de investimentos.

Apesar da subjetividade que cerca a decisão de investir, há alguns critérios que conferem um maior grau de racionalidade ao processo. O primeiro passo consiste em observar os tipos de avaliação que se pode ser feita. As avaliações estão divididas em:

- Apenas uma proposta – quando o investidor estuda fazer ou não determinado inevstimento. Nesse caso, fator de comparação pode ser um outro empreendimento que ele já realiza, ou o chamado investimento *risk free*, ou seja, aqueles em que o rendimento é certo (poupança, por exemplo);
- Mais de uma proposta – nesse caso, podemos estar diante de duas situações. Na primeira, temos possibilidade de assumir todas as propostas e a análise se assemelha a anterior (avaliação comparativa com outros investimentos). Na segunda situação, as propostas são chamadas mutualmente exclusivas, ou seja, optar por uma significa abrir mão das outras. Dessa forma, a avaliação comparativa se faz entre as alternativas propostas.

O segundo passo envolve o levantamento exaustivo de todas as receitas e gastos, possibilitando a elaboração do fluxo de caixa do negócio.

Por exemplo, a decisão de adquirir uma máquina requer que sejam conhecidos os seguintes itens:

- Vida útil da máquina – quanto tempo ela vai durar em termos físicos ou tecnológicos.
- Valor residual da máquina – por quanto posso vendê-la após sua vida útil, mesmo como sucata.
- Receitas líquidas futuras – qual será o resultado líquido por período (receitas com vendas menos os custos e as despesas) durante a sua vida útil.

Vamos considerar um investimento em uma máquina no valor de \$10.000, com vida útil de 5 anos, valor residual de \$1.250, e cujos produtos gerarão receitas líquidas futuras anuais de \$3.750. Nesse exemplo, teremos o seguinte diagrama de fluxo de caixa:

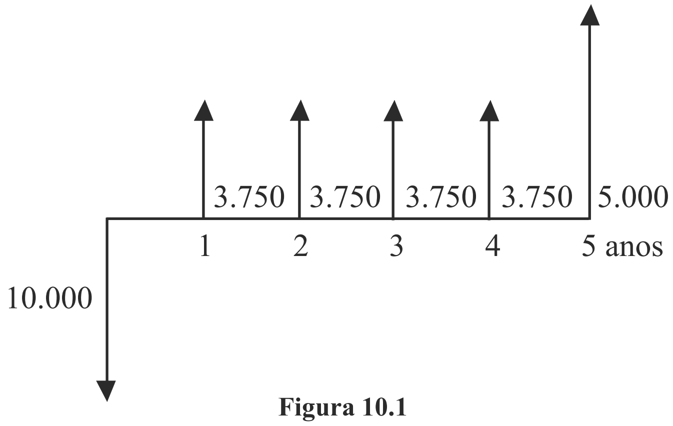


Figura 10.1

Observe que há uma saída de caixa decorrente do investimento na máquina e uma série de entradas periódicas decorrentes das vendas dos produtos, além da venda da própria máquina ao final do quinto ano. Por isso, o fluxo do ano 5 corresponde à soma da receita líquida esperada (\$3.750) mais o valor residual da máquina (\$1.250).

O terceiro passo é utilizar algum critério de análise de investimentos. Aplicaremos ao caso em questão as seguintes ferramentas: *payback*, valor presente líquido e taxa interna de retorno.

PAYBACK

Payback é a ferramenta de análise de investimentos que determina quanto tempo é necessário para que a empresa recupere o valor investido. Este método é muito usado por pequenas empresas, devido à facilidade de cálculo e ao fato de ser bastante intuitivo.

Quanto maior o *payback*, maior o tempo necessário para que o investimento se pague. Além disso, quanto maior o *payback*, maior o risco envolvido, pois o futuro é incerto. Dessa forma, por esse critério, a regra básica é: quanto menor melhor.

Em nosso exemplo, o projeto abate \$3.750 do investimento no primeiro ano, restando \$6.250 a ser pago. No segundo ano, outros \$3.750 reduzem para \$2.500 o saldo do investimento ainda a ser pago. Apenas no final do terceiro ano é que o investimento estará totalmente pago.

Uma forma simples, porém aproximada, de calcular o *payback* no caso de uma série uniforme é dividir o investimento total pela receita líquida anual (\$10.000 $\div$ \$3.750 $= 2{,}67$). No exemplo, o investimento estará pago após $2{,}67$ anos (ou 2 anos e 8 meses).

Embora seja bastante simples o *payback* é muito usado. Experimente, por exemplo, verificar alguma franquia à venda. Uma das informações mais requisitadas é o tempo de retorno do investimento, ou seja, o *PAYBACK*, ele é o indicador do risco do negócio, pois quanto mais alto o *payback*, maior a sucessitibilidade a intempéries do mercado.

Proposta:

Faço aqui uma afirmação: "Qualquer negócio com *payback* próximo de 10 anos não deve ser considerado bom!". Tendo como base a caderneta de poupança, você é capaz de dizer por que? RESPOSTA NO FINAL DESTE CAPÍTULO.

TAXA INTERNA DE RETORNO (TIR)

A segunda ferramenta de análise de investimentos a ser aprendida neste curso é a taxa interna de retorno. Também largamente utilizada nos meios financeiros, ela iguala o valor presente do somatório das receitas líquidas futuras ao valor do investimento.

Ou seja, no nosso exemplo, o somatório das receitas líquidas futuras, quando descontado a taxa interna de retorno, teria que ser igual aos \$10.000 investidos (por equivalência de capitais). Em termos matemáticos:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{FCj}{(1+TIR)^j} = \text{ Investimento}$$

Para expressar a TIR em termos algébricos, teremos:

$$\frac{3750}{(1+TIR)^1}+\frac{3750}{(1+TIR)^2}+\frac{3750}{(1+TIR)^3}+\frac{3750}{(1+TIR)^4}+\frac{5000}{(1+TIR)^5}=10000$$

Como estamos diante de um polinômio de 5^o grau, teremos que testas taxas para descobrir a TIR. Como já provamos em capítulos anteriores, essa metodologia é muito longa e pouco proveitosa. Dessa forma temos que recorrer a nossos intrementos tecnológicos novamente.

Na calculadora $HP12c$, temos que usar as funções de fluxo de caixa (ou *cash flow* – CF, em inglês). Elas estão disponíveis na cor azul sobre as teclas PV, PMT e FV.

Não se esqueça do inglês:

Função	Equivalente à:
NPV	***N**et* ***P**resent* ***V**aluer* (VPL)
IRR	***I**nternal* ***R**ate of* ***R**eturn* (TIR)

Devemos seguir os passo. Digite:

10000 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFo}}$	Ou seja, -10000 é o fluxo na data ZERO
3750 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFj}}$	Ou seja, 3750 é o fluxo na data UM
3750 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFj}}$	Ou seja, 3750 é o fluxo na data DOIS
3750 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFj}}$	Ou seja, 3750 é o fluxo na data TRêS
3750 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFj}}$	Ou seja, 3750 é o fluxo na data QUATRO
5000 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFj}}$	Ou seja, 5000 é o fluxo na data CINCO
Depois, digite $\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{IRR}}$ $\Rightarrow$ e irá aparecer: $27,31$	

Isso significa que a TIR é de $27,31\%$.

Como esse fluxo apresenta alguma repetição, poderíamos usar a tecla $\boxed{\text{Nj}}$:

Digite:

Outra opção seria utilizar a planilha Excel. Digite o fluxo de caixa em uma coluna, por exemplo, e procure (INSERIR $\Rightarrow$ FUNÇÃO $\Rightarrow$ FINANCEIRA $\Rightarrow$ TIR).

10000 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFo}}$	Ou seja, -10000 é o fluxo na data ZERO
3750 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFj}}$	Ou seja, 3750 é o fluxo na data UM
4 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{Nj}}$	Ou seja, o fluxo se repete por 4 vezes
5000 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFj}}$	Ou seja, 5000 é o fluxo na data CINCO
Depois, digite $\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{IRR}}$ $\Rightarrow$ e irá aparecer: $27,31$	

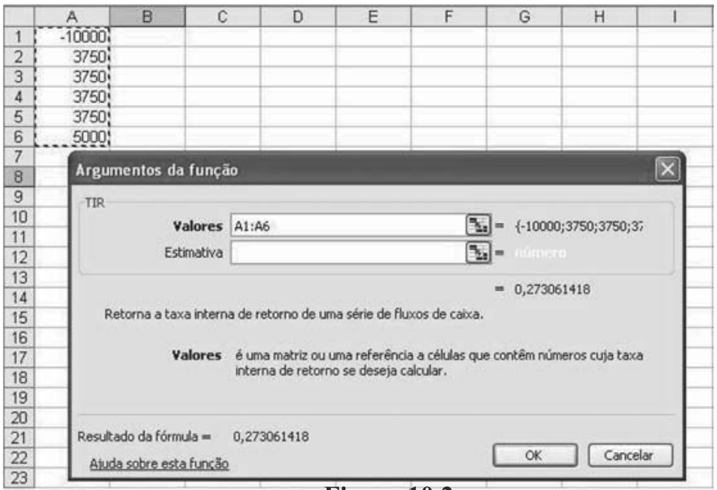


Figura 10.2

Cerque todos os valores conforme a figura. Não precisa colocar nada como estimativa. Clique em OK.

A planilha retorna o valor $27,3\%$ *a.a.*. Por esse critério, o investimento será aceito caso a TIR seja maior do que a taxa mínima de atratividade (*risk free* ou outro investimento que o investidor já tem). Dessa forma, quanto maior a TIR, maior a probabilidade de um investimento ser considerado viável. No nosso exemplo, se ela fosse até $27,0\%$ *a.a.*, esta máquina seria considerada um bom negócio!

A Função XTIR

Em alguns casos, estamos avaliando investimentos cujas datas de desembolsos e recebimentos estão estabelecidas em datas não regulares (diferentes datas nos meses ou alguns meses sem saldo). Nesse caso, fica impreciso usar a ferramenta TIR haja vista que ela implica na aceitação de uma mesma data de desembolso e/ou recebimento todo período.

Por exemplo: Um empréstimo que vence todo o dia 5 de cada mês é facilmente calculado através das teclas da calculadora financeira ou da planilha eletrônica apresentada. Um empréstimo que vença no 1^o dia útil de cada mês terá uma variação na TIR se comparado o valor real (apresentado pela ferramenta XTIR) e a fórmula básica. Vamos observar: No dia 5 de janeiro de 2010, um investidor realizou um empréstimo de $\$10.000,00$ para pagar em 6 prestações de $\$1.000,00$ e mais 6 de $\$1.200,00$. Qual a taxa interna de retorno ao se comparar a opção onde os pagamentos se dão sempre no dia 5 com outro que vence no 1^o dia útil de cada mês?

Pela TIR:

10000 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFo}}$
1000 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFj}}$
1000 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFj}}$
1000 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFj}}$
1000 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFj}}$
1000 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFj}}$
1000 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFj}}$
1200 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFj}}$
1200 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFj}}$
1200 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFj}}$
1200 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFj}}$
1200 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFj}}$
1200 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFj}}$
Depois, digite $\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{IRR}}$ $\Rightarrow$ e irá aparecer: $4,35$

Ou seja, a TIR é $4,35\% a.m.$

PELA XTIR:

A primeira tarefa é levantar as datas dos pagamentos:

Fevereiro de 2010: 02/02

Março de 2010: 01/03

Abril de 2010: 01/04

Maio de 2010: 03/05

Junho de 2010: 01/06

Julho de 2010: 01/07

Agosto de 2010: 02/08

Setembro de 2010: 01/09

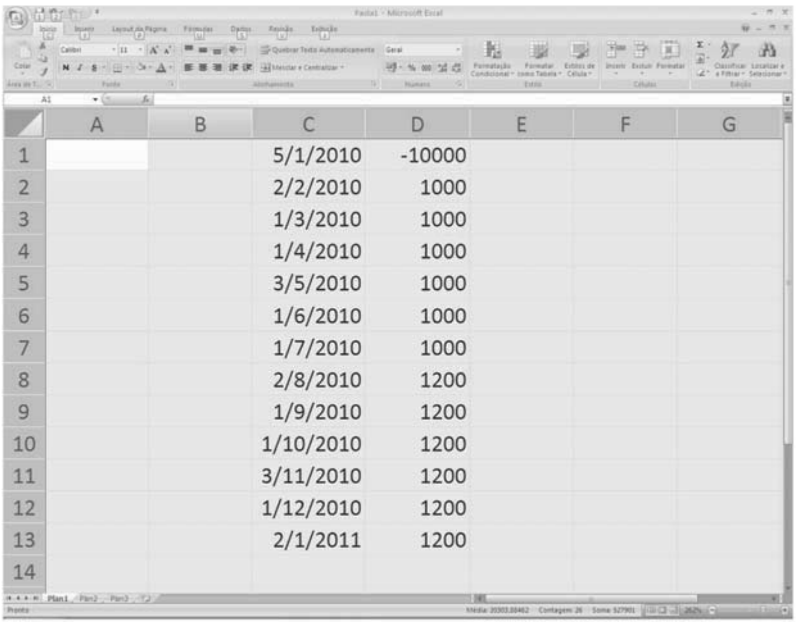
Outubro de 2010: 01/10

Novembro de 2010: 03/11
(como o feriado cai na terça, consideramos o próximo dia)

Dezembro de 2010: 01/12

Janeiro de 2011: 02/01

Em seguida, colocamos as datas e os valores na planilha eletrônica:



	A	B	C	D	E	F	G
1			5/1/2010	-10000			
2			2/2/2010	1000			
3			1/3/2010	1000			
4			1/4/2010	1000			
5			3/5/2010	1000			
6			1/6/2010	1000			
7			1/7/2010	1000			
8			2/8/2010	1200			
9			1/9/2010	1200			
10			1/10/2010	1200			
11			3/11/2010	1200			
12			1/12/2010	1200			
13			2/1/2011	1200			
14							

Figura 10.3

A função XTIR encontra-se no MENU financeiro das funções da planilha. Dessa forma, após digitar datas e valores procure (INSERIR ⇒ FUNÇÃO ⇒ FINANCEIRA ⇒ XTIR).

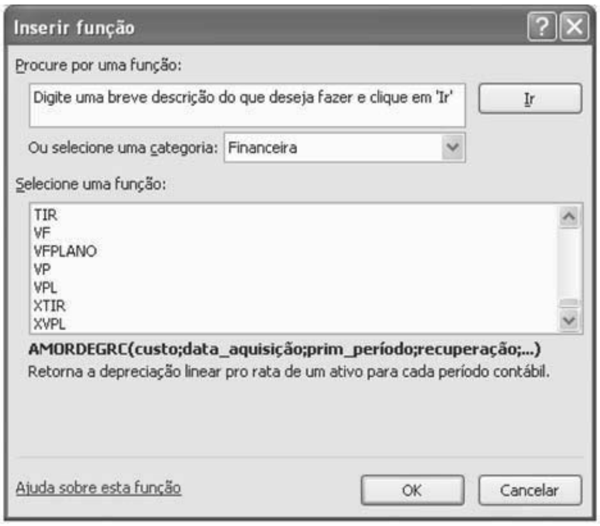


Figura 10.4

Aparecerá a seguinte janela:

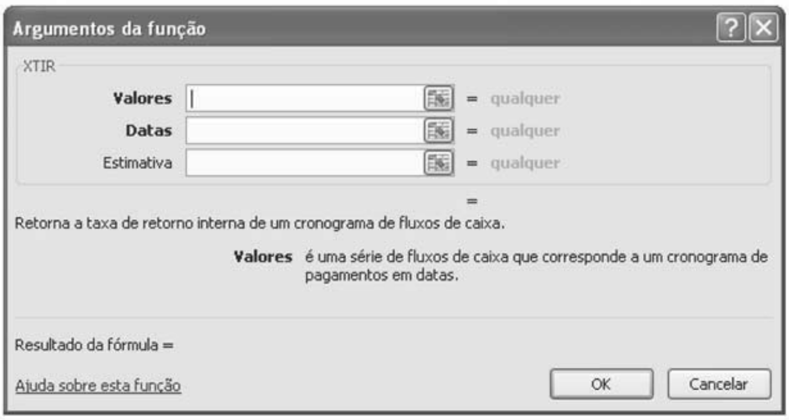


Figura 10.5

Você deverá selecionar as células relativas aos valores e as datas, a estimativa pode ficar em branco. Assim, Nesse caso particular:

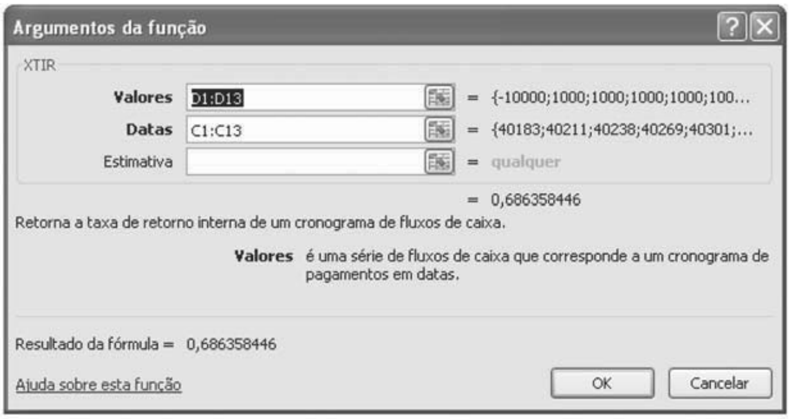
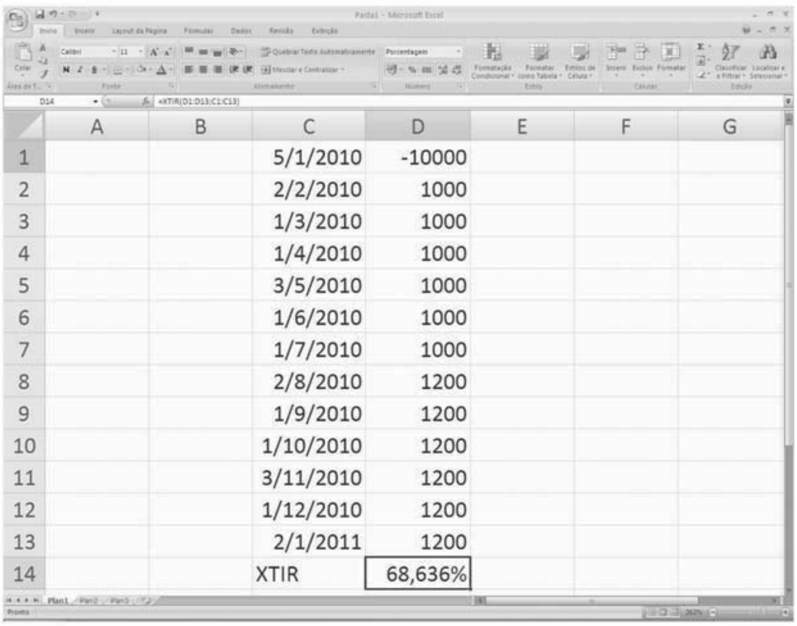


Figura 10.6

O resultado aparecerá:



	A	B	C	D	E	F	G
1			5/1/2010	-10000			
2			2/2/2010	1000			
3			1/3/2010	1000			
4			1/4/2010	1000			
5			3/5/2010	1000			
6			1/6/2010	1000			
7			1/7/2010	1000			
8			2/8/2010	1200			
9			1/9/2010	1200			
10			1/10/2010	1200			
11			3/11/2010	1200			
12			1/12/2010	1200			
13			2/1/2011	1200			
14			XTIR	68,636%			

Figura 10.7

Uma informação fundamental sobre a XTIR é que a resposta sempre estará anualizada, ou seja, a TIR é $68,636\%$ ao ano.

Neste caso, devemos descobrir a taxa equivalente ao mês.

Queremos: mês	=	**Temos:** ano
$(1+i)^{12}$	=	$(1,68636)^{1}$
$(1+i)$	=	$(1,68636)^{\frac{1}{12}}$
$(1+i)$	=	1,04451
i	=	$1,04451-1$
i	=	0,04451 ou $4,451\%$ ao mês

Reparem que a TIR aproximada foi de $4,35\% a.m.$, enquanto que a TIR real (descoberta através da função XTIR da planilha eletrônica) é de $4,45\% a.m.$

Pode parecer uma diferença pequena, mas para grandes projetos essa diferença pode significar a diferença entre aceitar ou rejeitar a proposta.

VALOR PRESENTE LÍQUIDO (VPL)

O valor presente líquido é uma ferramenta de análise de investimentos que considera a mudança de valor do dinheiro no tempo. Nela, todos os fluxos de caixa futuros são descontados utilizando-se valores atuais, ou seja, cada um dos fluxos de caixa é trazido ao valor presente a uma determinada taxa.

Algebricamente:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{FCj}{(1+i)^{j}} - \text{ Investimento} = VPL$$

Que tal voltar a refletir sobre os argumentos do texto da Mara Luquet?

No exemplo que vamos apresentar, adotaremos arbitrariamente a taxa de 15% *a.a.*, que será considerada a taxa mínima de atratividade. Por ora, não vamos entrar em maiores detalhes sobre a taxa a ser usada. Por enquanto, adote o seguinte raciocínio: se há aplicações sem risco (CDB's, por exemplo), qualquer negócio para valer a pena deve ter taxa superior a essas aplicações.

$$\frac{3750}{(1,15)^1}+\frac{3750}{(1,15)^2}+\frac{3750}{(1,15)^3}+\frac{3750}{(1,15)^4}+\frac{5000}{(1,15)^5}-10000$$

$$VPL = 13192,05 - 10000 = 3192,05$$

Na calculadora:

10000 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFo}}$	Ou seja, −10000 é o fluxo na data ZERO
3750 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFj}}$	Ou seja, 3750 é o fluxo na data UM
3750 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFj}}$	Ou seja, 3750 é o fluxo na data DOIS
3750 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFj}}$	Ou seja, 3750 é o fluxo na data TRêS
3750 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFj}}$	Ou seja, 3750 é o fluxo na data QUATRO
5000 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFj}}$	Ou seja, 5000 é o fluxo na data CINCO
$15i$	
Depois, digite $\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{NPV}}$ $\Rightarrow$ e irá aparecer: $3192,05$	

Isso significa que o VPL, usando uma taxa de 15% é de $R\$3192,05$.

Como esse fluxo também apresenta alguma repetição, poderíamos usar a tecla $\boxed{\text{Nj}}$:

Digite:

10000 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFo}}$	Ou seja, −10000 é o fluxo na data ZERO
3750 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFj}}$	Ou seja, 3750 é o fluxo na data UM
4 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{Nj}}$	Ou seja, o fluxo se repete por 4 vezes
5000 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFj}}$	Ou seja, 5000 é o fluxo na data CINCO
$15i$	
Depois, digite $\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{NPV}}$ $\Rightarrow$ e irá aparecer: $3192,05$	

Mas não se preocupe. Você não precisará usar cinco vezes a função VP para trazer cada uma das receitas líquidas futuras para a data zero. Ainda bem, pois imagine o trabalho que daria esse procedimento em um projeto com vida útil de 25 anos. A planilha eletrônica torna bastante simples o que na verdade é um cálculo complexo: basta usar a função VPL.

Para calcular o VPL proceda da seguinte forma:

- Digite, em sequência (em coluna ou em linha), o conjunto dos fluxos de caixa.
- Informe, com o cursor na célula de destino, isto é, onde ficará o resultado, o conjunto das células que compõe as **ENTRADAS DO FLUXO DE CAIXA**.
- Informe a taxa mínima de atratividade.
- Para **VALORES 1**: Informe o conjunto das células que compõe as **ENTRADAS DO FLUXO DE CAIXA**.
- Clicar em **OK**.

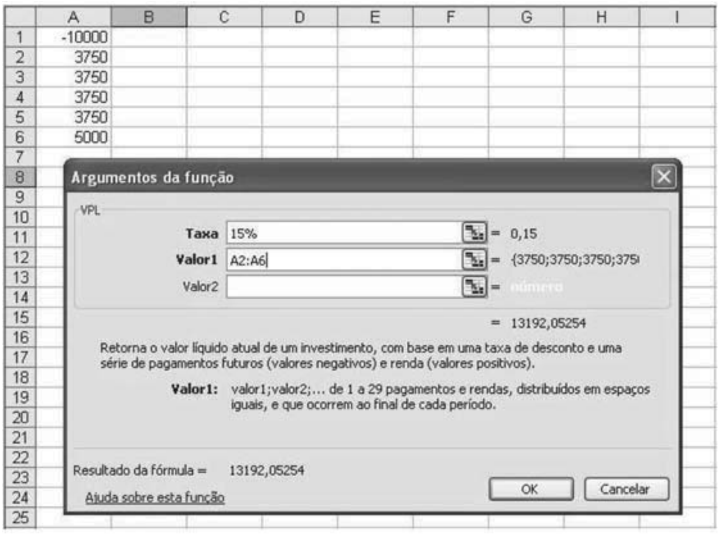


Figura 10.8

Note que não inserimos a célula correspondente ao desembolso de $R\$10.000$. Como interpretar o resultado, no valor de $\$13.192,05$, da planilha?

Simples: considerando a taxa de $15\%a.a.$, o investimento em questão, além de reembolsar os $\$10.000,00$ investidos, gerou uma sobra, cujo valor presente líquido é igual a $\$3.192,05$ (repare que o conjunto de valores usado para o cálculo do VPL não incluiu o investimento). Refaça o exercício utilizando uma taxa de atratividade menor. Qual foi o efeito sobre o cálculo do VPL?

De forma geral, um investimento será aceito caso apresente um VPL positivo. Ao contrário do *payback*, a regra é a seguinte: quanto maior, melhor.

A FUNÇÃO XVPL

Da mesma forma que a função XTIR calcula a taxa interna de retorno exata em investimentos com datas de desembolso e recebimentos pré-definidas, a função XVPL tem a mesma finalidade. Voltemos ao mesmo exemplo da função XTIR apresentado:

No dia 5 de janeiro de 2010, um investidor realizou um empréstimo de $\$10.000,00$ para pagar em 6 prestações de $\$1.000,00$ e mais 6 de $\$1.200,00$. Qual o valor presente líquido (dada uma taxa de desconto de $4\%a.m.$), ao se comparar a opção onde os pagamentos se dão sempre no dia 5 com outro que vence no 1^o dia útil de cada mês?

PELA VPL:

10000 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFo}}$
1000 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFj}}$
1000 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFj}}$
1000 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFj}}$
1000 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFj}}$
1000 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFj}}$
1000 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFj}}$
1200 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFj}}$
1200 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFj}}$
1200 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFj}}$
1200 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFj}}$
1200 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFj}}$
1200 $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{CFj}}$
4 $\boxed{\text{i}}$
Depois, digite $\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{NPV}}$ $\Rightarrow$ e irá aparecer: $213,66$

Ou seja, o VPL é $\$213,66$

PELA XVPL:

A primeira tarefa também será levantar as datas dos pagamentos:

Fevereiro de 2010: 02/02

Março de 2010: 01/03

Abril de 2010: 01/04

Maio de 2010: 03/05

Junho de 2010: 01/06

Julho de 2010: 01/07

Agosto de 2010: 02/08

Setembro de 2010: 01/09

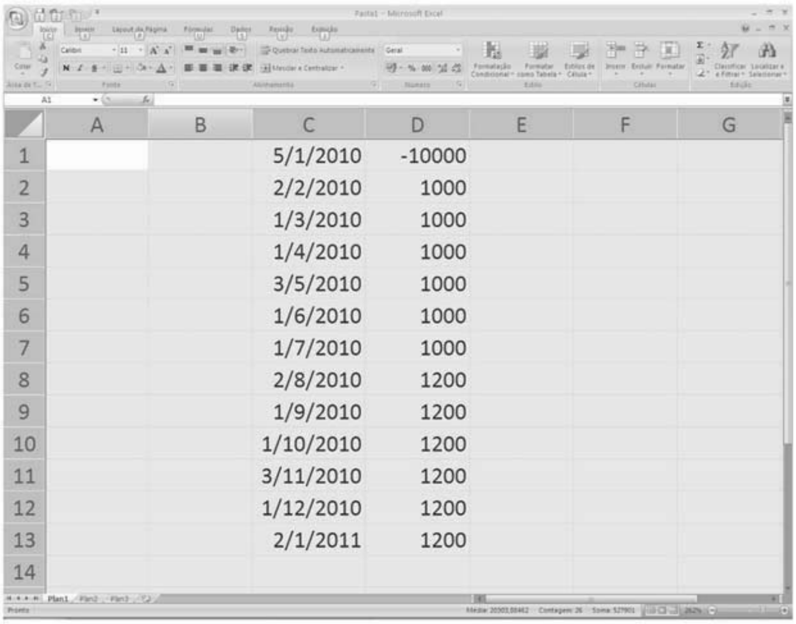
Outubro de 2010: 01/10

Novembro de 2010: 03/11
(como o feriado cai na terça, consideramos o próximo dia)

Dezembro de 2010: 01/12

Janeiro de 2011: 02/01

Em seguida, colocamos as datas e os valores na planilha eletrônica:



	A	B	C	D	E	F	G
1			5/1/2010	-10000			
2			2/2/2010	1000			
3			1/3/2010	1000			
4			1/4/2010	1000			
5			3/5/2010	1000			
6			1/6/2010	1000			
7			1/7/2010	1000			
8			2/8/2010	1200			
9			1/9/2010	1200			
10			1/10/2010	1200			
11			3/11/2010	1200			
12			1/12/2010	1200			
13			2/1/2011	1200			
14							

Figura 10.9

A função XVPL encontra-se no MENU financeiro das funções da planilha. Dessa forma, após digitar datas e valores, procure

(INSERIR ⇒ FUNÇÃO ⇒ FINANCEIRA ⇒ XVPL).

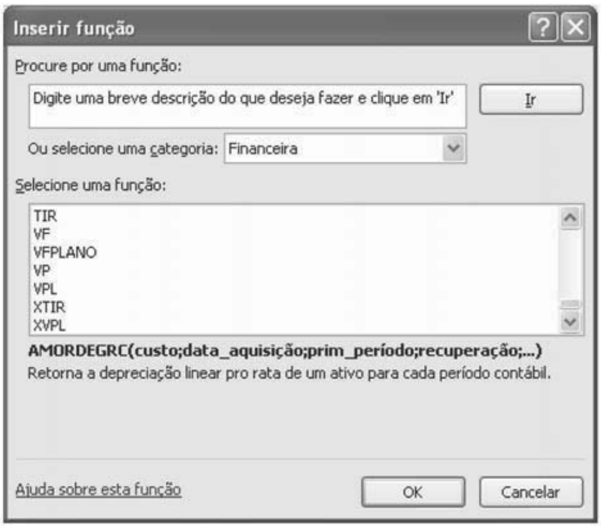


Figura 10.10

Aparecerá a seguinte janela:

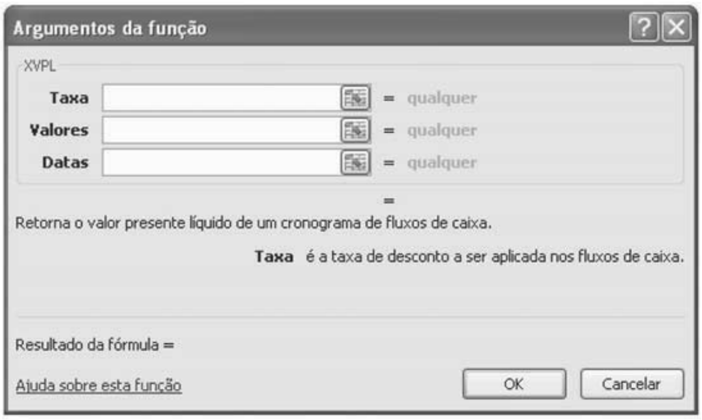


Figura 10.11

Um ajuste necessário será anualizar a taxa de atratividade. Assim:

Queremos: ano	=	**Temos:** mês
$(1+i)^1$	=	$(1,04)^{12}$
$(1+i)$	=	1,601032
i	=	$1,601032-1$
i	=	0,601032 ou $60,1032\%$ ao ano

Inserindo essas informações na janela, o resultado aparecerá $\$269,26$.

Reparem que o VPL aproximado foi de $\$213,66$, enquanto que o VPL real (descoberto através da função XVPL da planilha eletrônica) é de $\$269,26$.

Pode parecer uma diferença pequena, mas para grandes projetos essa diferença pode significar a diferença entre aceitar ou rejeitar a proposta.

Exercício 10.1

1. Calcular o Payback (Investimento: $R\$500$ / Retornos mensais: $145, 110; 100, 145, 120, 150$).

   Resposta: 4 meses

2. Quem tem Payback menor A(Investimento: 230 / Retornos mensais: $80, 80, 80, 80, 80$) B(Investimento: 100 / Retornos mensais: $30, 30, 40, 30$).

   Resposta: Ambos são no 3^o mês.

3. Calcular TIR: Investimento: $R\$150$ / Retornos mensais $R\$30, R\$36, R\$45, R\$65$.

   Resposta: $5,90\%$

4. Qual o melhor investimento, pela TIR: A (Investimento: 100 / Retornos mensais: 3 vezes de $40,21$) B (Investimento: 100 / Retornos mensais: 4 vezes de 30).

   Resposta: A TIR de A é de 10% enquanto que a de B é $7,71\%$

5. Calcular VPL a 10% *am*: Investimento: $R\$200$ / Retornos mensais: $R\$83, R\$84, R\$85, R\$86$.

   Resposta: $R\$67,48$

6. Qual o melhor Investimento, pelo VPL (10%*am*): A (Investimento: 100 / Retornos mensais: $40, 45, 60, 23$) B (Investimento: 100 / Retornos mensais: $45, 52, 20, 30$), pelo VPL.

   Resposta: O VPL de A é de $R\$34,34$ enquanto que a de B é $R\$19,40$.

7. Uma loja oferece um microcomputador portátil com duas alternativas de pagamento. A primeira, $R\$1.000,00$ de entrada e mais duas parcelas mensais de $R\$3.000,00$. A segunda é sem entrada, com quatro parcelas mensais de $R\$1.250,00$, mais uma quinta parcela de $R\$2.000,00$. Se a taxa de juros de mercado (taxa de atratividade) for de 2%*am*, qual a melhor alternativa para o comprador?

   Resposta: Alternativa 2

8. Qual é a melhor alternativa para o comprador, considerando uma taxa de atratividade de 12% am para uma mercadoria que é encontrada a venda nas seguintes condições de pagamento:

   - À vista por $R\$36.000,00$;

   - Duas parcelas mensais, iguais de $R\$21.000,00$, sem entrada;

   - Entrada de $R\$17.600,00$, mais duas parcelas mensais e iguais a entrada.

   Resposta: Alternativa 2

9. Qual o melhor plano de pagamento, para o comprador, de um terreno que é vendido nas duas condições a baixo, considerando uma taxa de atratividade de 3%*am*?

   Plano A: Um único pagamento de $R\$50.000,00$ daqui 12 meses;

   Plano B: Uma entrada de $R\$10.000,00$, mais uma parcela de $R\$33.000,00$ daqui a 6 meses.

   Resposta: Plano A

10. No exercício anterior, se a taxa de mercado fosse 2%*am* e a entrada no plano B, de $R\$5.000,00$, qual deveria ser o valor de uma terceira parcela com vencimento em 12 meses, de tal forma que os planos fossem equivalentes?

    Resposta: $6.495,43$

11. Um aparelho de som é vendido em 3 parcelas mensais e iguais, sem acréscimo, sendo a primeira dada como entrada. Se o pagamento for feito à vista, haverá um desconto de 20%. Qual a melhor alternativa para o comprador, se a taxa de juros de mercado é de 15%*am*?

    Resposta: À vista.

12. Uma loja vende um microcomputador por $R\$2.400,00$ à vista ou na seguinte condição: 20% de entrada; $R\$380,00$ em 30 dias; $R\$600,00$ em 60 dias; $R\$700,00$ em 90 dias e $R\$500,00$ em 120 dias. Considerando que a taxa mínima de atratividade é de $4,8\%$ *am*, determine, através da taxa interna de retorno, qual a melhor alternativa para o vendedor

    Resposta: A prazo ($IRR = 5,046233743\%am$)

CERTIFIQUE-SE DE QUE É CAPAZ!

1. Dentre as opções:

Opções	Investimento	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4
A	100	60	30	35	35
B	100	15	80	43	25
C	100	50	50	20	30

Calcular Payback, TIR e VPL 5%. Na sua opinião, qual o melhor?

Obs: A resposta é verdadeiramente pessoal, pois cada investimento será melhor em um dos métodos.

- Pelo payback C é mais rápido (2 meses)

- TIR: $A = 25\%, B = 23\%$ e $C = 21\%$ (A é melhor)

- VPL (5%): $A = R\$43,38$, $B = R\$44,56$ e $C = R\$34,93$ (B é melhor)

Sobre a proposta do *PAYBACK*:

Considere que a poupança rende em torno de 7% ao ano. Se colocarmos $R\$100$ nesse investimento livre de risco por 10 anos teremos:

$$FV = PV(1+i)^n$$

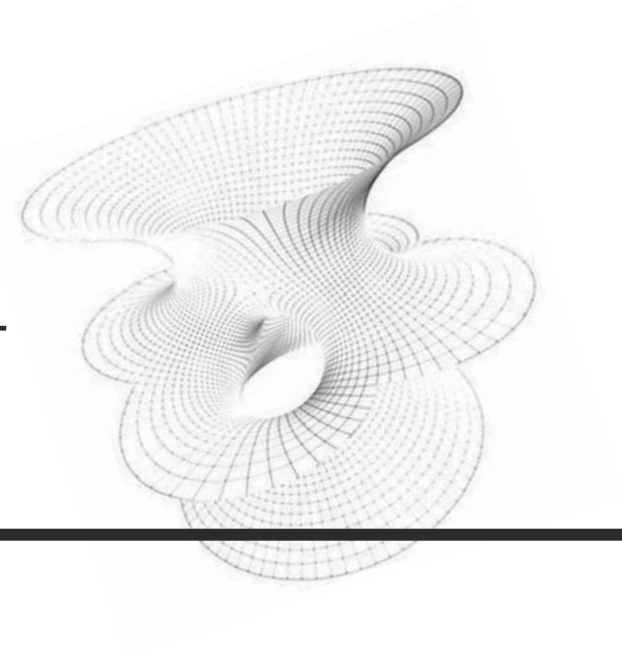
$$FV = 100(1,07)^{10}$$
$$FV = 196,72$$

Em outras palavras, o *payback* da poupança gira em torno de 10 anos. Seria interessante para um empreendedor correr o risco de um negócio para ganhar o mesmo que uma aplicação serm risco? É hora de pensar!

Autoavaliação

Você conseguiu resolver todos os exercícios propostos sem dificuldade? Se a resposta foi sim, então você entendeu os conceitos envolvendo os conceitos de análise de investimentos. Se não conseguiu, não desista. Volte à aula e reveja os conceitos e exemplos, não deixe que suas dúvidas se acumulem.

Aula 11



INFLAÇÃO

Objetivos

1 entender o conceito de inflação;
2 calcular a inflação acumulada e média;
3 entender a construção dos índices de inflação e interpretar suas tabelas;
4 interpretar e resolver os problemas propostos.

TAXA APARENTE E TAXA REAL

Até este ponto, desconsideramos os efeitos das variações no poder aquisitivo interno e/ou externo da moeda nacional sobre os cálculos financeiros. Contudo, havendo inflação (deflação) e/ou desvalorização (valorização cambial), será preciso levar em conta estes fatores, incorporando seus efeitos ao fluxo de caixa.

Caso essas variações sejam levadas em consideração antecipadamente, isto é, no início da transação financeira, ocorre uma operação prefixada. Nesse caso, fica definida desde o início a taxa de juros aparente, sendo que a taxa real vai depender do acerto da previsão quanto às evoluções dos preços e do câmbio.

!

A taxa aparente é, muitas vezes, chamada taxa nominal. Mantendo a coerência ao longo deste material, a taxa nominal continua sendo aquela que **não coincide com o período de capitalização**. Daí decorre a distinção entre **taxas nominal e efetiva**. Por sua vez, a taxa aparente desconsidera os **efeitos das variações dos preços e/ou da taxa de câmbio**. Nesse caso, a **taxa aparente poderá diferir da taxa real.**

Nas operações pós-fixadas, o que se conhece inicialmente é a taxa de juros real, sendo que a taxa de juros aparente será indexada a algum índice de preços e/ou cambial.

Vamos, então, trocar essa questão em miúdos. Imagine que alguém lhe pediu $R\$1.000,00$ para ser pago daqui a um ano. Pois bem, o ano passou, o empréstimo foi renovado, e você recebeu $R\$100,00$. Então a taxa de juros foi de $10\%a.a.$, certo? Bem, mais ou menos... Com certeza a taxa aparente foi de $10\%a.a.$ Mas se no ano houve uma inflação de 6%, a taxa real foi menor do que 4%. Se realmente esperava ganhar $10\%a.a.$, você deveria, quando combinou o empréstimo, ter levado em consideração a possibilidade de inflação. Em um contrato prefixado, considerando os valores acima, a taxa de juros aparente deveria ser de $16,60\%a.a.$ Se a inflação for superior a $6\%a.a.$, a taxa real será menor do que $10,0\%a.a.$ Contudo, se você tiver superestimado a inflação, vai ganhar mais do que o esperado em termos reais.

No caso pós-fixado, combina-se a taxa real, e a taxa aparente vai depender da correção monetária e/ou cambial. Digamos que tenha sido acordado uma taxa real de 10%$a.a.$ reais, e a inflação tenha sido de 3%$a.a.$ Então a taxa aparente vai ser igual a $13,3\%a.a.$. Mas se a inflação for igual a 8%, a taxa aparente vai ser de $18,8\%a.a.$.

Se você entendeu tais exemplos, então não há mais problemas. Caso ocorra uma deflação e/ou variação cambial, o raciocínio é totalmente análogo.

Ah!... Quase nos esquecemos da fórmula relacionada à taxa de juros:

O resultado global (ou aparente) de uma aplicação, ou seja, o ganho real agregado à correção monetária, também é resultante de um produtório. Para separarmos o ganho real da inflação, podemos usar a Expressão de Fisher:

$$(1+i) = (1+p)\times(1+e)\times(1+r), \text{ onde:}$$

i é a taxa aparente,

p é a taxa de inflação,

e é a taxa de desvalorização cambial, e

r é a taxa real.

Aproveite a fórmula para certificar-se de que é capaz de calcular as taxas mencionadas nos casos acima apresentados. Observe, também, que se não houver inflação, ($p = 0$), nem desvalorização cambial, ($e = 0$), as taxas aparente e real são iguais.

a. $(1,1) = (1,06)\times(1+r) \Rightarrow 1+r = 1,0377 \Rightarrow r = 3,77\%$

b. $(1,166) = (1,06)\times(1+r) \Rightarrow 1+r = 1,10 \Rightarrow r = 10\%$

c. $(1+i) = (1,03)\times(1,1) \Rightarrow 1+i = 1,133 \Rightarrow i = 13,3\%$

d. $(1+i) = (1,08)\times(1,1) \Rightarrow 1+i = 1,188 \Rightarrow i = 18,8\%$

e. $(1,1) = (1+0)\times(1+0)\times(1+r) \Rightarrow 1+r = 1,1 \Rightarrow r = 10\%$

f. $(1,166) = (1+0)\times(1+0)\times(1+r) \Rightarrow 1+r = 1,166 \Rightarrow r = 16,6\%$

Como a inflação avalia o crescimento dos preços, ela será medida através dos *índices de preço*. Segundo o Banco Central, índices de preços ”são números que agregam e representam os preços de uma determinada cesta de produtos. Sua variação mede, portanto, a variação média dos preços dos produtos da cesta”.

Simplificando, quando acompanhamos índices como INCC, IGPM, IPCA[1], entre outros, estamos verificando uma média ponderada entre os itens relevantes para aquele setor. No caso do INCC, por exemplo, são levados em conta preços de material de construção, mão-de-obra na construção civil etc.

Uma das maneiras de apresentar os índices é através de uma tabela:

Evolução IGPM – 2007			
Meses	**Variação Mensal (%)**	**Índice Acumulado (%)**	**Média**
jan/07	0,5	0,5	0,5000
fev/07	0,27	0,7713	0,3849
mar/07	0,34	1,114	0,3700
abr/07	0,04	1,1544	0,2874
mai/07	0,04	1,1949	0,2378
jun/07	0,26	1,458	0,2415
jul/07	0,28	1,7421	0,2470
ago/07	0,98	2,7391	0,3384
set/07	1,29	4,0645	0,4437
out/07	1,05	5,1572	0,5041
nov/07	0,69	5,8827	0,5210
dez/07	1,76	7,7463	0,6237

A inflação apresenta crescimento similar ao do regime de capitalização composta, contudo, como não há constância na taxa, não podemos adotar o fator de correção $(1+I)^n$. A taxa de inflação é diferente a cada período, logo a inflação acumulada pode ser assim representada:

Como a inflação acumulada é resultante de um produtório, a média da inflação deve ser calculada através de uma média

[1]INCC: Índice Nacional da Construção Civil;
IGPM: Índice Geral de Preços de Mercado;
IPCA: Índice de Preços ao Consumidor Amplo.

$$I = \left[\prod_{j=1}^{n} \left(1+I_j\right)\right] - 1$$

onde
I = inflação acumulada
I_n = inflação de cada período

geométrica.

$$\bar{I} = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} \left(1+I_j\right)} - 1$$

onde
$\bar{I}$ = inflação média

Vamos, então, entender a tabela:

- Como o índice em janeiro foi de $0,5$ e a variação de fevereiro foi de $0,27$, temos

  $$1+i = 1,005 \times 1,0027 = 1,007713 \text{ ou } 0,7713$$

- Para verificar a inflação acumulada

  $$1+i = \sqrt[2]{1,007713} = 1,003849 \text{ ou } 0,3849$$

- Como o índice acumulado até fevereiro foi de $0,7713$ e a variação de março foi de $0,34$, temos

  $$1+i = 1,007713 \times 1,0034 = 1,01114 \text{ ou } 1,114$$

  Também poderíamos ter multiplicado os 3 índices mensais:

  $$1+i = 1,005 \times 1,0027 \times 1,0034 = 1,01114 \text{ ou } 1,114$$

- Para verificar a inflação acumulada

  $$1+i = \sqrt[3]{1,01114} = 1,003700 \text{ ou } 0,3700$$

- Como o índice acumulado até março foi de $1,114$ e a variação de abril foi de $0,04$, temos

  $$1+i = 1,01114 \times 1,0004 = 1,011544 \text{ ou } 1,1544$$

Também poderíamos ter multiplicado os 4 índices mensais:

$$1+i=1,005\times1,0027\times1,0034\times1,0004=1,011544 \text{ ou } 1,1544$$

- Para verificar a inflação acumulada

$$1+i=\sqrt[4]{1,011544}=1,0028737 \text{ ou } 0,2874$$

✍ Faça as demais contas até o mês de dezembro!

Exercício Resolvido

Dados os índices de preços abaixo, determine a inflação acumulada no quadrimestre e a inflação média mensal.

Mês	**IP (Base 100 = mar/90)**
Jan/99	234,5
Fev/99	236,7
Mar/99	240,0
Abr/99	243,1

Solução: Para achar a inflação acumulada, podemos fazer apenas a diferença entre o 1º e o último:

$$\frac{243,1}{234,5}=1,03667 \Rightarrow i=3,667\% \text{ no quadrimestre}$$

Outra forma seria calcular mês a mês

$$\frac{236,7}{234,5}=1,0093817 \Rightarrow i=0,93817\% \text{ no mês}$$

$$\frac{240}{236,7}=1,0139417 \Rightarrow i=1,39417\% \text{ no mês}$$

$$\frac{243,1}{240}=1,0129167 \Rightarrow i=1,29167\% \text{ no mês}$$

Para achar o acumulado, temos que multiplicar os 3 índices acumulados

$$1+i=1,0093817\times1,0139417\times1,0129167=1,03667$$

$$i = 3,667\% \text{ no quadrimestre}$$

No caso de descobrir a inflação média, faz-se necessário termos as informações anteriores:

$$1+i = \sqrt[3]{1,0093817 \times 1,0139417 \times 1,0129167} = 1,0120781$$

$$i = 1,20781\% \text{ ao mês}$$

Exercício 11.1

1. Um financiamento é realizado pelo prazo de 115 dias a uma taxa de juros de 26%$a.a.$ + a variação da TR. Projetando-se que a TR no período apresentará uma variação constante de $1,74\%$ ao mês, determine a taxa composta da operação.

   Resposta: $15,0220554\%$ *ap*

2. Uma empresa realiza uma operação de empréstimo pelo prazo de 129 dias à taxa de 22%$a.a.$ + TR. Considerando que a TR variou $6,05\%$ no período, calcule a taxa composta desta operação.

   Resposta: $13,8823129\%$ *ap*

3. Um banco oferece recursos à taxa de $2,31\%a.m.$ mais variação da inflação. Supondo um financiamento por 187 dias e uma variação da inflação de $6,56\%$ no período, determine a taxa conjunta desta operação.

   Resposta: $22,8618186\%$ *ap*

4. Uma empresa realizou um empréstimo pelo prazo de 122 dias a uma taxa de juros mais TR, tendo um custo efetivo de $19,4\%$. Sabendo-se que a TR variou $13,8\%$ no período, calcule a taxa real da operação.

   Resposta: $4,9209139\%$ *ap*

5. Um cliente obteve o rendimento de $24,3\%$ ao realizar uma aplicação em CDB, pelo prazo de 235 dias. Considerando a inflação no período de $17,2\%$, determine a taxa real mensal desta aplicação.

   Resposta: $6,0580205\%$ *ap*

6. Certa categoria profissional obteve um reajuste salarial de $19,3\%$. Considerando que a inflação, no mesmo período, foi de $21,4\%$, calcule qual foi a taxa real. Obs.: interprete o resultado.

   Resposta: $-1,72981878\%$ *ap* (prejuízo)

7. Um cliente obteve, em uma aplicação financeira, um rendimento de $17,4\%$. Calcule a taxa real da operação considerando uma inflação de $12,8\%$.

   Resposta: $4,0780142\%$ *ap*

8. A taxa de juros reais do mercado é de 10% ao ano. Nestas condições, uma empresa calcula seus coeficientes de financiamento para 12 prestações mensais, levando em conta a taxa de inflação. Qual será o coeficiente para 12 meses, caso a inflação seja de 15% ao ano?

   Resposta: $0,094433$

9. Um terreno é posto a venda por $R\$100.000,00$ à vista. Qual a prestação mensal para a venda financiada em 24 prestações, se o proprietário quer juros reais de 9% ao ano e se a inflação prevista for de 20% ao ano?

   Resposta: $R\$5.445,76$

Autoavaliação

Você conseguiu resolver todos os exercícios propostos sem dificuldade? Se a resposta foi sim, então você entendeu os conceitos envolvendo os conceitos de inflação. Se não conseguiu, não desista. Volte à aula e reveja os conceitos e exemplos, não deixe que suas dúvidas se acumulem.

ISBN 978-85-7648-671-8

9788576486718

UENF
Universidade Estadual
do Norte Fluminense

UERJ
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Universidade Federal Fluminense
uff

Universidade do Brasil

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

UNIRIO

FUNDAÇÃO
SANTA CABRINI
Provedora de acesso à Cidadania

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

GOVERNO DO
Rio de Janeiro
SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB
UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL