Módulo 1

Volume 1

Ana Lúcia Vaz da Silva
Andreia Carvalho Maciel Barbosa
Rosana de Oliveira
Maria Tereza Serrano Barbosa

Matemática na Educação 2

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Fundação
CECIERJ
Consórcio cederj
Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Matemática na Educação 2

Volume 1 - Módulo 1

Ana Lúcia Vaz da Silva
Andreia Carvalho Maciel Barbosa
Rosana de Oliveira
Maria Tereza Serrano Barbosa

GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Ministério da Educação
BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Apoio:
FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001
Tel.: (21) 2299-4565 Fax: (21) 2568-0725

Material Didático

ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO
Ana Lúcia Vaz da Silva
Andreia Carvalho Maciel Barbosa
Rosana de Oliveira
Maria Tereza Serrano Barbosa

COORDENAÇÃO DE DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL
Cristine Costa Barreto

DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL E REVISÃO
Alexandre Rodrigues Alves
Anna Carolina da Matta Machado

Departamento de Produção

EDITORA
Tereza Queiroz

COORDENAÇÃO EDITORIAL
Jane Castellani

REVISÃO TIPOGRÁFICA
Kátia Ferreira dos Santos
Patrícia Paula

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO
Jorge Moura

PROGRAMAÇÃO VISUAL
Katy Araujo

ILUSTRAÇÃO
Morvan de Araújo Neto

CAPA
Fabiana Rocha

PRODUÇÃO GRÁFICA
Andréa Dias Fiães
Fábio Rapello Alencar

V393m

Silva, Ana Lúcia Vaz da
Matemática na educação 2. v.1. / Ana Lúcia Vaz da Silva. — Rio de Janeiro : Fundação CECIERJ, 2008.
262p.; 19 x 26,5 cm.

ISBN: 85-7648-068-9

1. Educação matemática. 2. Números. 3. Frações. 4. Números racionais. I. Barbosa, Andreia Carvalho Maciel. II.Oliveira, Rosana de . III. Barbosa, Maria Tereza Serrano. IV. Título.

CDD: 372.7

2008/1

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador
Sérgio Cabral Filho

Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia
Alexandre Cardoso

Universidades Consorciadas

UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Vieiralves

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Reitor: Roberto de Souza Salles

UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Aloísio Teixeira

UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Motta Miranda

UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitora: Malvina Tania Tuttman

Matemática na Educação 2

Volume 1 – Módulo 1

SUMÁRIO

AULA 1

Números indo além da sua história...

Meta da aula

Explicar a história dos sistemas de numeração dos povos antigos e mostrar como utilizá-la com fins pedagógicos.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- Aplicar os conhecimentos da História da Matemática dos números na formulação de problemas e atividades envolvendo as quatro operações.
- Exemplificar situações-problema de Matemática utilizando a História da Matemática.

Pré-requisitos

Para o desenvolvimento desta aula, é necessário que você releia a Aula 11 da disciplina Matemática na Educação 1, para rever as características dos sistemas de numeração apresentados, e a Aula 12, relembrando o processo de construção do sistema de numeração decimal. É também necessário que você saiba manipular as quatro operações, os fatos fundamentais e as propriedades vistas nas Aulas 15, 16, 17 e 18.

CONVERSA INICIAL

Os PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) apontam a História da Matemática como um dos caminhos para fazer Matemática na sala de aula, e destacam que esse uso deve ser feito com o auxílio de outros recursos metodológicos, como por exemplo utilizar os contextos da História na elaboração de atividades e mostrar as dificuldades vividas pelos povos antigos na busca de soluções para seus problemas.

O recurso à História da Matemática serve como motivação para a introdução e o desenvolvimento de conceitos matemáticos, a partir do momento em que revela a Matemática como uma criação humana. Isso acontece porque, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas nos diferentes momentos históricos e estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor tem a possibilidade de desenvolver nos alunos atitudes e valores diante do conhecimento matemático.

Essa metodologia de trabalho parte do princípio de que o estudo da construção histórica do conhecimento matemático leva a uma maior compreensão da evolução do conceito, pois apresenta as dificuldades inerentes a ele. Essas dificuldades históricas, muitas vezes, são notadas ainda hoje nos alunos. Nesse sentido, o trabalho com a História da Matemática pode esclarecer idéias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno e dar subsídios ao professor no que diz respeito às suas dificuldades de aprendizagem.

> Para o estudante, é muito instrutivo aprender não somente o resultado final, a última formulação, mas também a história de seu desenvolvimento. Com isto, não apenas toma conhecimento do processo do desenvolvimento intelectual, mas também constata que as dificuldades que pode encontrar para assimilar novas idéias não se devem necessariamente à falta de condições de sua parte, e sim ao alto grau de sofisticação necessário para captar as idéias em questão. Ao perceber as desventuras de seus predecessores, sentir-se-á menos desanimado pelas suas (ZYGMUND *apud* AABOE, 2002).

O USO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA EM SALA DE AULA

Existem diferentes formas de uso da História da Matemática em sala de aula. Segundo Fossa (2001), esse uso pode ser *ornamental* ou *ponderativo*. Ambos têm características comuns.Vejamos:

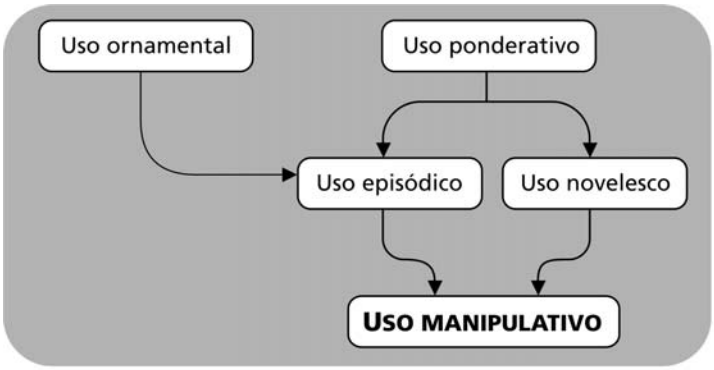
O uso *ornamental* está presente há muito tempo no ensino, e é bastante comum nos livros didáticos. É apresentado como notas históricas, no início ou fim dos capítulos que contam o desenvolvimento da Matemática, ou a biografia de algum matemático importante. O uso ornamental da História da Matemática de maneira isolada não é um recurso para formação de conceitos matemáticos.

Já o uso *ponderativo* não é tão comum no ensino. Ele utiliza a História da Matemática na formação dos conceitos matemáticos. Propõe que esses conceitos sejam apresentados dentro de uma abordagem histórica, promovendo discussões sobre os mesmos. Dentro do uso *ponderativo*, destacam-se o uso *novelesco* e o uso *episódico*, que desencadeiam o uso *manipulativo*.

No uso *novelesco*, o aluno é levado a seguir a trilha da História da Matemática durante todo o desenvolvimento do conteúdo, o que pode ser cansativo dependendo da teoria estudada. O uso *episódico* é menos intenso, propondo que a história seja utilizada de forma ponderada durante alguns tópicos.

O *manipulativo* surge possibilitando a História da Matemática como matéria-prima para atividades de sala de aula. É nesse sentido que os PCN apontam a história como um caminho para fazer matemática em sala de aula. Essa manipulação pode ser fruto de um uso tanto *episódico* quanto *novelesco*, mas prevê a utilização de atividades estruturadas e materiais manipulativos, permitindo ao aluno agir e redescobrir.

O esquema a seguir resume as idéias apresentadas.



(FOSSA, 2001)

RESGATE DE ALGUMAS CARACTERÍSTICAS DOS SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

Na Aula 11 de Matemática na Educação 1, você conheceu sistemas de numeração além dos indo-arábicos. Vamos rever os símbolos desses sistemas.

Alguns são caracterizados por agrupamentos simples. Talvez tenha sido o mais antigo tipo de sistema de numeração. Nesse sistema, adotam-se símbolos para 1, b, b^2, b^3, ... A partir daí qualquer número se expressa pelo uso desses símbolos aditivamente, isto é, repetindo cada um deles o número necessário de vezes. Tomemos como exemplo os hieróglifos egípcios (3400 a .C.). Nesse caso, a base b usada é a base 10. Você se lembra dos números egípcios? Vamos retomá-los agora para uma melhor exposição das idéias.

> A base b está expressa na forma de potências de números naturais.
>
> $b^0 = 1$
>
> $b^1 = b$
>
> $b^2 = b \times b$
>
> $b^3 = b \times b \times b$
>
> e assim por diante...

Observe a tabela a seguir, que indica o nome do símbolo, o símbolo e seu respectivo valor na base 10.

Tabela 1.1: Sistema de numeração egípcio

$10^0 = 1$		Bastão vertical
$10^1 = 10$		Ferradura ou calcanhar
$10^2 = 100$		Rolo de pergaminho ou corda
$10^3 = 1000$		Flor de lótus
$10^4 = 10\,000$		Dedo apontado
$10^5 = 100\,000$		Peixe ou barbato
$10^6 = 1000\,000$		Homem espantado

Você reparou que as classes dos números da tabela estão separadas por espaço? Usamos espaço na escrita desses números para que a leitura aqui fique mais fácil e você perceba que um símbolo difere do anterior por uma multiplicação por 10. Mas essa não é a única maneira de escrevê-los. Podemos usar pontos no lugar do espaço, ou simplesmente omitir o espaço ou o ponto, como faremos daqui por diante.

Por exemplo, o número 4563 = 4000 + 500 + 60 + 3.

Representado pelos egípcios por 4 flores de lótus + 5 rolos de pergaminho + 6 ferraduras + 3 bastões, observe a **Tabela 1.1**.

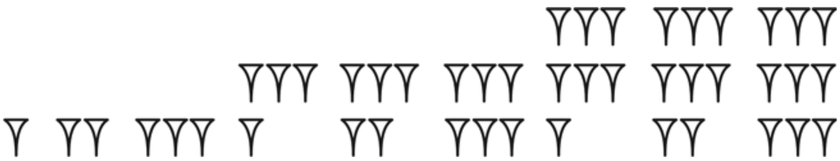
Esse número foi escrito da esquerda para a direita para melhor associação com a escrita atual de números, embora os egípcios os escrevessem, mais freqüentemente, da direita para a esquerda. Na verdade, podemos agrupá-los da forma desejada, pois, como você sabe, o sistema de numeração egípcio não é posicional.

ATIVIDADE

1. Escreva o número 73452 usando os símbolos egípcios.

Os babilônios antigos (2000 a.C. a 200 a.C.) expressavam os números menores do que 60 usando também agrupamentos simples de base 10.

Os algarismos de 1 a 9 eram expressos por



E o 10 era representado por 

Para representar, por exemplo, o número 34 nesse sistema usava-se: 3 (dez) + 4 (um)

Os babilônios também utilizavam o símbolo subtrativo: 

O símbolo subtrativo era utilizado para simplificar a escrita. Por exemplo, o número 48 podia ser representado de duas formas.

40 + 8 50 - 2

ATIVIDADE

2. Escreva o número 37 usando os símbolos babilônios de duas maneiras diferentes.

O sistema de numeração romano é representado por letras do alfabeto. Observe:

Símbolo romano	**I**	**V**	**X**	**L**	**C**	**D**	**M**
Valor em nosso sistema	1	5	10	50	100	500	1000

É um sistema aditivo. Os valores são somados sempre que aparecem letras iguais juntas ou o maior número à esquerda do menor. Por exemplo:

II = 1 + 1 = 2

III = 1 + 1 + 1 = 3

XX = 10 + 10 = 20

XI = 10 + 1 = 11

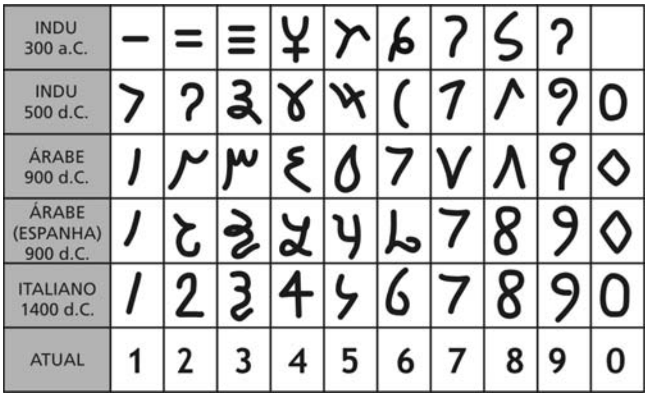
LV = 50 + 5 = 55

Esse sistema também é subtrativo, pois quando o maior número está à direita do menor, temos:

IX = 10 - 1 = 9

XL = 50 - 10 = 40

O sistema de numeração indo-arábico é um sistema decimal caracterizado inicialmente pelos nove algarismos publicados por Al-Khowarizmi. Esses símbolos sofreram muitas modificações, pois eram escritos a mão. O zero aparece no século VI, formando assim o conjunto de dez algarismos que conhecemos atualmente. A partir de 1440, com a invenção da imprensa, a forma desses símbolos é fixada.



OS EGÍPCIOS E SUA FORMA DE MULTIPLICAR

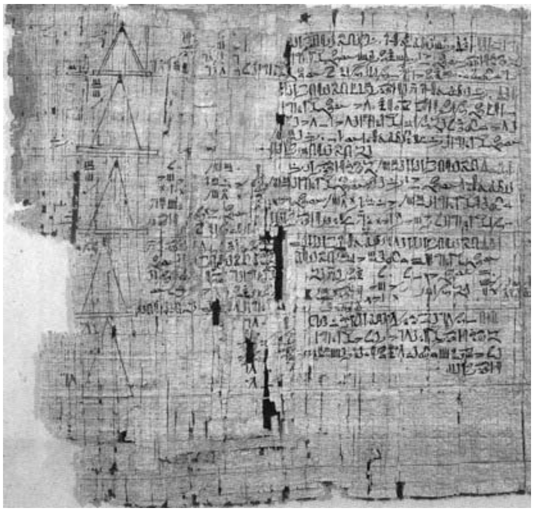


Figura do Papiro de Rhind

As fontes mais antigas sobre os números egípcios são inscrições que datam de 3000 a.C. O Papiro **RHIND** ou **AHMES** (1650 a.C.) é um antigo manual de Matemática. Contém 85 problemas, todos resolvidos, a maioria envolvendo assuntos do dia-a-dia, como o preço do pão, a armazenagem de grãos de trigo, a alimentação do gado. Esse papiro é uma fonte primária rica sobre a Matemática egípcia antiga, descreve os métodos de multiplicação e divisão dos egípcios, o uso que faziam das frações unitárias (que você verá na Aula 2) e muitas aplicações da Matemática a problemas práticos.

Observando e estudando como eram efetuados os cálculos no Papiro **AHMES**, não foi difícil para os cientistas compreender o sistema de numeração egípcio. Além disso, a decifração dos hieróglifos (inscrições sagradas das tumbas e dos monumentos do Egito), no século XVIII, também foi muito útil.

Os egípcios desenvolveram três formas de escrita. A mais antiga, chamada hieroglífica; a hierática, que é uma forma cursiva da hieroglífica, usada nos papiros; e a escrita demótica, de uso geral.

Como já vimos, o sistema de numeração egípcio baseava-se em números-chave: você lembra que a ordem em que são escritos esses símbolos não altera o número escrito? Observe a figura a seguir e diga quais números os três garotos do Antigo Egito estão escrevendo.

! Observe que os alunos escreveram o mesmo número sem preocupação com a posição dos símbolos.

Dessa forma, qualquer número era expresso pelo uso dos símbolos aditivamente, repetindo-se cada um deles o número necessário de vezes.

A operação aritmética fundamental no Egito era a adição. A multiplicação e a divisão eram efetuadas no tempo de Ahmes por sucessivas **DUPLAÇÕES**.

> **DUPLAÇÕES**
>
> É o nome dado ao processo de multiplicação feito pelos egípcios, que consiste em dobrar o número uma certa quantidade de vezes e somar algumas parcelas.

A escrita egípcia dificultava a multiplicação, pois para escrever um número eles usavam muitas vezes uma grande quantidade de símbolos. Achavam que multiplicar por 2 era o menos complicado. Para nós, que vivemos o sistema indo-arábico, a multiplicação por 2 não é complicada, mas a multiplicação por 10 é mais simples de fazer, não é mesmo?

Para efetuar a multiplicação entre dois números naturais, os egípcios primeiro precisavam escrever um dos fatores como a soma de potências de 2.

Potências de 2	Resultado
2^0	1
2^1	2
2^2	4
2^3	8
2^4	16
2^5	32
2^6	64
2^7	128

Vamos usar como exemplo o número 41.

Para fazer isso, procure na tabela das potências de 2 o maior resultado que seja menor que 41. No caso, é o 32 ($32 = 2^5$).

Temos então que $41 = 32 + 9$. Como 9 não é potência de 2, usamos a mesma estratégia, ou seja, procuramos na tabela a maior potência de 2 menor que 9. Vemos que é o 8 ($8 = 2^3$).

Dessa forma, temos que $41 = 32 + 8 + 1$.

Agora só falta o número 1, que é igual a 2^0.

Assim, o número 41, escrito como soma de potências de 2 fica:

$41 = 32 + 8 + 1$

ATIVIDADE

3. Expresse cada número a seguir como potências de 2. Utilize os dados do boxe.

a. 27 =
b. 42 =
c. 37 =
d. 53 =

Vamos ver o processo de duplações.

Suponha que os egípcios quisessem calcular 41 x 53.

Já escrevemos o 41 como potência de 2. Então, temos que

41 x 53 = (32 + 8+ 1) x 53

Usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, obtemos:

41 x 53 = 32 x 53 + 8 x 53 + 1 x 53

Observe agora a **Tabela 1.2**, onde na primeira linha da tabela colocamos o 1 na primeira coluna e o 53 na segunda, e a partir daí vamos dobrando os dois valores em cada linha.

Tabela 1.2: Duplação do 53

1	**53**	
2	53 x 2 = 106	x 2
4	106 x 2 = 212	x 2
8	212 x 2 = **424**	
16	424 x 2 = 848	x 2
32	848 x 2 = **1696**	x 2

Mas o que queremos obter com essa tabela?

Lembre-se, escrevemos 41 x 53 = 32 x 53 + 8 x 53 + 1 x 53.

• Na primeira linha da tabela temos 1 x 53 = 53.

• Na quarta linha temos 8 x 53 = 424. Só que na **Tabela 1.2**, em vez de multiplicarmos por 8 direto, multiplicamos por 2 três vezes. É a mesma coisa não? Porque 2 x 2 x 2 = 8.

• Na sexta linha da tabela temos 32 x 53 = 1696. Novamente, não multiplicamos 32 por 53 direto, mas multiplicamos por 2 cinco vezes, porque 2 x 2 x 2 x 2 x 2 = 32.

Temos:

41 x 53 = 32 x 53 + 8 x 53 + 1 x 53

1696 + 424 + 53

Somando as duplações, encontramos 41 x 53 = 2173.

Você não precisa escrever tanto. Basta marcar na tabela as parcelas do 1, 8 e 32 e depois somá-las.

ATIVIDADES

4. Aproveite os números escritos na Atividade 3 e faça as multiplicações abaixo usando o processo dos egípcios:

a. 27 x 42 =

b. 53 x 27 =

c. 37 x 27 =

d. 53 x 41 =

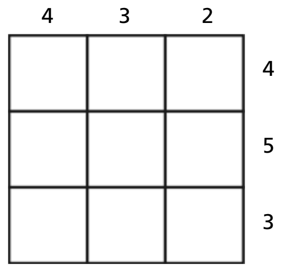
5. Compare o método apresentado com o algoritmo de multiplicação usual e relate aspectos positivos e/ou negativos. Entregue sua resposta e comentários a seu tutor.

A MULTIPLICAÇÃO DO CIÚME

Os árabes inventaram esse processo no século XIII aproximadamente, e foi conhecido como multiplicação pelo quadro, chamado no Ocidente como *per gelosia*, que significa multiplicação pelo ciúme.

Vamos ver como funciona o método a partir de um exemplo prático.

Para multiplicar 432 por 354, construímos um quadro retangular de três linhas e três colunas. Na parte superior do quadro, colocamos o multiplicando 432 da esquerda para a direita, e na lateral direita do quadro dispomos o multiplicador 354 de baixo para cima. Observe a **Figura 1.1**.



Em seguida, traçamos a diagonal de cada casa e colocamos o produto de cada número da parte superior por cada número colocado na parte direita do quadro, como você observa na **Figura 1.2**.

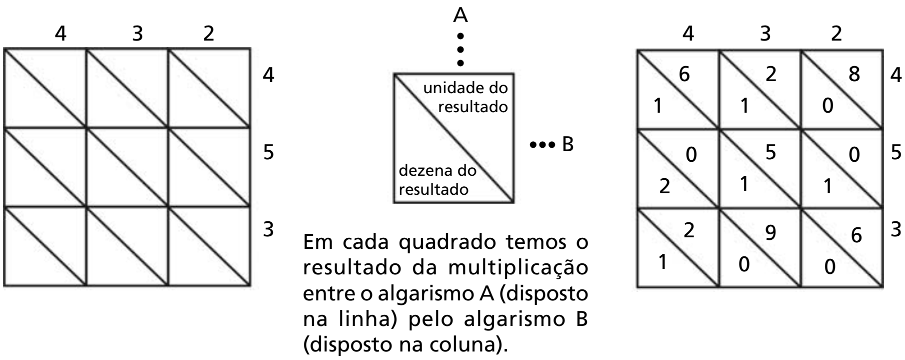


Figura 1.2

O resultado da multiplicação começa a ser escrito no quadrado superior à direita, onde está o algarismo 8; veja na **Figura 1.3**.

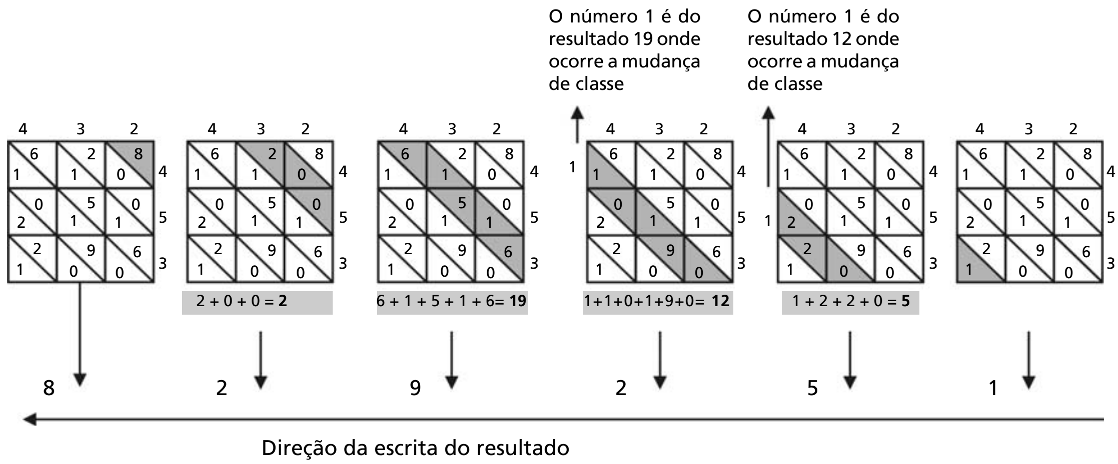


Figura 1.3

O resultado deve ser escrito da direita para a esquerda, contrária à ordem descrita na **Figura 1.3**: **152928**. Confira!

Essa multiplicação pode ser simplificada. Acompanhe o esquema feito na **Figura 1.4**.

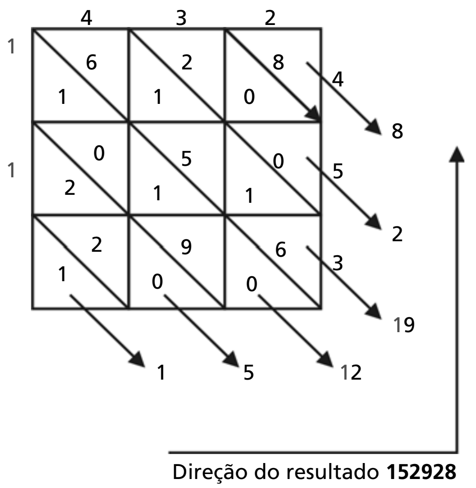


Figura 1.4

ATIVIDADE

6. Compare o processo da multiplicação do ciúme com a multiplicação usual. Para isso, faça a conta 432 x 354 usando o algoritmo tradicional.

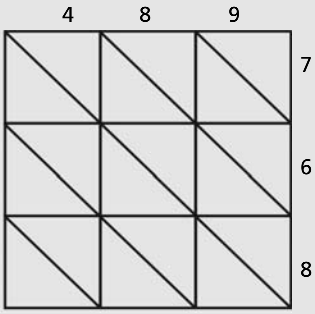
Observe que esse processo é mais sofisticado que o algoritmo de multiplicação, pois os agrupamentos são feitos em uma única etapa, mas muito semelhante. As contas efetuadas são as mesmas, feitas e escritas de maneira diferente. No algoritmo de multiplicação que estudamos, esses grupamentos são feitos em duas etapas: nas parcelas da multiplicação e depois na adição dessas parcelas. Veja na **Figura 1.5:**

```
      4 3 2
  x
      3 5 4
  ---------
    1 7 2 8      7 = 6 + 1
  2 1 6 0        6 = 5 + 1
                 1 = 0 + 1
1 2 9 6
---------
1 5 2 9 3 8
                 19 = 7 + 6 + 6 = (6 + 1) + (5 + 1) + 6
                 12 = 1 + 1 + 1 + 9 = 1 + 1 + (0 + 1) + 9
                 5 = 1 + 2 + 2
```

Figura 1.5

ATIVIDADES

7. Calcule 489 x 867 pelo método do ciúme.



8. Um sistema de numeração muito interessante é o *chinês científico* (ou em barras), que provavelmente existe há mais de dois milênios. O sistema é essencialmente posicional, de base 10. A **Figura A** mostra como se representam os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 quando aparecem em posições ímpares, (unidades, centenas...). Já quando aparecem nas posições pares (dezenas, milhares...), eles são representados como mostra a **Figura B**.

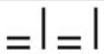
Figura A

Figura B

Por exemplo, veja a tabela a seguir, onde escrevemos alguns números indo-arábicos no *chinês científico*.

Tabela 1.3

a. Escreva, usando esse sistema de numeração, os números 564, 546, 465, 456, 654 e 645.

Indo-arábico	Chinês científico
257	
2 121	
462	

Indo-arábico	Chinês científico
564	
546	
465	
456	
654	
645	

b. Nesse sistema, passou-se a usar um círculo ◯, como o zero, a partir da Dinastia Sung (960 -1126). Escreva, com numerais em barra, os números 5680, 64803 e 250055.

Indo-arábico	Chinês científico
5680	
64803	
250055	

9. Vamos montar um quadro de "adivinhação". Para fazer esse quadro, você precisa escrever os números em potência de 2, da mesma forma que os egípcios faziam.
Vamos formar 5 quadros nos quais escreveremos os números de 1 até 63. Montaremos os quadros decompondo os números em potências de 2 e

se tiver uma parcela igual a	estará no quadro
1	1
2	2
4	3
8	4
16	5
32	6

Assim:
O 1 está apenas no primeiro quadro.
O 2, apenas no segundo.
O 3 = 2 + 1 está no segundo e no primeiro.
O 4 está apenas no terceiro.
O 5 = 4 + 1 está no terceiro e no primeiro.
O 6 = 4 + 2 está no terceiro e no segundo.

a. Acabe de montar os quadros.

b. Agora vamos brincar de adivinhar. Vamos fazer um exemplo primeiro. Eu pensei em um número e digo todos os quadros em que ele está: esse número está no primeiro, no terceiro e no quinto quadros.

Você deve observar que:

Quadro	Número
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16
6	32

Assim, você pode adivinhá-lo fazendo a seguinte conta:
1 (1º quadro) + 4 (3º quadro) + 16 (5º quadro)
Agora responda: se eu pensei em um número que está no terceiro, quarto e quinto quadros, em que número eu pensei?

c. Qual o único número que aparece em todas as tabelas? Por quê?

d. Jogue com três pessoas, mas sem contar como descobriu. Dizem que mágicos não devem contar seus truques. Verifique se você está afiado!

CONCLUSÃO

As atividades dessa aula foram desenvolvidas buscando promover o uso manipulativo da História da Matemática, em que você, além de identificar características dos sistemas de numeração estudados notou que a história pode sugerir inclusive atividades lúdicas. Fizemos algumas atividades usando como recurso pedagógico a história dos sistemas de numeração dos povos antigos e sua maneira de operar.

RESUMO

Nesta aula você:

• Relembrou os sistemas de numeração; egípcios, babilônio, romanos e chinês;

• Viu aspectos para o uso *manipulativo* da História da Matemática;

• Conheceu a maneira como alguns povos manipulavam os sistemas: os egípcios e suas duplações, a multiplicação do ciúme, os romanos e seu sistema aditivo e subtrativo;

• Conheceu mais um sistema de numeração, o sistema chinês científico;

• E foi apresentado a uma brincadeira elaborada por pessoas que compreenderam a forma de os egípcios decomporem o número.

AUTO-AVALIAÇÃO

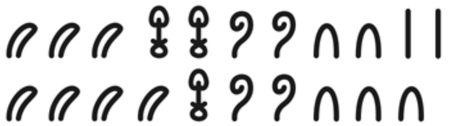
Avalie sua compreensão com relação às principais características das manipulações sugeridas nos sistemas de numeração apresentados. Dê uma atenção especial às opiniões que você emitiu nas atividades como, por exemplo, na Atividade 5, onde além de você compreender o processo deve compará-los e criticá-los.

INFORMAÇÕES SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na Aula 2 você vai conhecer os números racionais, vendo como a idéia de fração começou a ser construída por povos antigos. Verá também algumas idéias de frações utilizadas no nosso dia-a-dia. Além disso, vai ver a multiplicação do ciúme feita para números decimais. Você não pode "faltar" a essa aula!!!

RESPOSTAS

Atividade 1



Atividade 2

Atividade 3

a. $27 = 16 + 8 + 2 + 1 = 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0$

b. $42 = 32 + 8 + 2 = 2^5 + 2^3 + 2^1$

c. $37 = 32 + 4 + 1 = 2^5 + 2^2 + 2^1$

d. $53 = 32 + 16 + 4 + 1 = 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^1$

Atividade 4

a. 27 x 42 = (16 + 8 + 2 + 1) x 42

1	**42**
2	**84**
4	168
8	**336**
16	**672**

Observe na Atividade 3, item a, todas as parcelas que aparecem na escrita do 27. Assim, devemos somar todos os resultados encontrados:

42 + 84 + 336 + 672 = 1134

b. 53 x 27 = (32 + 16 + 4 + 1) x 27

1	**27**
2	54
4	**108**
8	216
16	**432**
32	**864**

864 + 432 + 108 + 27 = 1431

c. 37 x 27 = (32 + 4 + 1) x 27

1	**27**
2	54
4	**108**
8	216
16	432
32	**864**

864 + 108 + 27 = 999

d. 53 x 41 = (32 + 16 + 4 + 1) x 41

1	**41**
2	82
4	**164**
8	328
16	**656**
32	**1312**

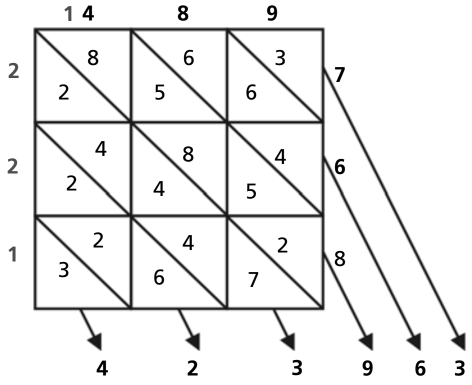
41 + 164 + 656 + 1312 = 2173

Atividade 5

Aqui você deve identificar os aspectos que considera importante. Não há resposta fechada. Mas procure avaliar o tempo gasto. Faça as contas. Veja em qual método você gasta mais tempo. Veja também as idéias dessa multiplicação e compare com as idéias do nosso sistema. Em qual deles você considera as idéias mais simples? Por quê?

Atividade 7

423963



Atividade 8

a.

Indo-arábico	Chinês científico
564	𝍤 𝍮 𝍣
546	𝍤 𝍬 𝍥
465	𝍣 𝍮 𝍤
456	𝍣 𝍭 𝍥
654	𝍥 𝍭 𝍣
645	𝍥 𝍬 𝍤

b.

Indo-arábico	Chinês científico
5680	
64803	
250055	

Atividade 9

a.

1	3	5	7	9	11	13
15	17	19	21	23	25	27
29	31	33	35	37	39	41
43	45	47	49	51	53	55
57	59	61	63			

Quadro 1

2	3	6	7	10	11	14
15	18	19	22	23	26	27
30	31	34	35	38	39	42
43	46	47	50	51	54	55
58	59	62	63			

Quadro 2

4	5	6	7	12	13	14
15	20	21	22	23	28	29
30	31	36	37	38	39	44
45	46	47	52	53	54	55
60	61	62	63			

Quadro 3

8	9	10	11	12	13	14
15	24	25	26	27	28	29
30	31	40	41	42	43	44
45	46	47	56	57	58	59
60	61	62	63			

Quadro 4

16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31	48	49	50	51	52
53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63			

Quadro 5

32	33	34	35	36	37	38
39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52
53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63			

Quadro 6

b. 4 + 8 + 16 = 28

c. O 63, pois as parcelas do 63 tem o número de todos os quadros, ou seja,

63 = 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1

AULA 2

Um pouco de história da Matemática: conhecendo a origem dos números racionais

Meta da aula

Mostrar a História da Matemática como elemento importante na construção do conhecimento matemático.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- Identificar diferentes representações do número racional na escrita dos povos antigos.
- Elaborar situações-problema sobre números racionais inspirados na História da Matemática.
- Relacionar os registros dos sistemas numéricos de antigas civilizações com a forma como se apresenta a Matemática hoje.
- Discutir a importância da História da Matemática como recurso pedagógico.

Pré-requisitos

Para o desenvolvimento desta aula, é necessário que você reconheça os sistemas de numeração dos egípcios, dos babilônios (escrita cuneiforme) e dos romanos, vistos na Aula 11 de Matemática na Educação 1 e na Aula 1 desta disciplina.
É importante também que você saiba utilizar as quatro operações, suas propriedades e os fatos fundamentais, conforme foram apresentados nas Aulas 15, 16, 17 e 18 de Matemática na Educação 1.
Além disso, veja a Aula 12, que fala sobre frações. Nesta aula, resgataremos a idéia de fração, que será aprofundada nas próximas.

CONVERSA INICIAL

Durante o Ensino Fundamental e Médio, são apresentados em primeiro lugar os números naturais, depois os números inteiros e os números racionais e, mais tarde, os números reais. Na História, a necessidade da utilização e da criação dos números não aconteceu necessariamente nessa ordem. Inicialmente, o homem precisou contar; daí surgiram os números naturais. Depois precisou repartir, medir; daí surgiram as frações. Só depois surgiram os números negativos e mais tarde os números reais. Mas essa história toda é muito longa e com bastantes obstáculos; as coisas não foram tão simples nem tão organizadas como são apresentadas nos livros didáticos e nas aulas de Matemática.

De acordo com os PCN é importante:

> compreender o sistema numérico decimal, pela comparação com outros sistemas de numeração, de modo a evidenciar o conjunto de regras e símbolos que o caracterizam e promover a extensão das regras desse sistema para leitura, escrita e representação dos números racionais na forma decimal (MEC, 1997).

Nesta aula, vamos nos deter na origem dos números racionais, que se dá por intermédio das frações egípcias. Vamos mostrar também como era feita a representação das frações pelos povos babilônios.

Esta visão da Matemática, por meio dos seus fatos históricos, é importante de ser abordada e problematizada. Nesta aula, apresentaremos alguns *flashes* de como a Matemática surgiu e se desenvolveu, a partir de atividades ligadas às sociedades humanas e de como alguns conceitos e técnicas foram sendo aprofundados.

FRAÇÕES COM DIFERENTES DENOMINADORES

Desde a Antigüidade, nossos antepassados foram obrigados a recorrer às trocas, e por esta razão tiveram necessidade de contar. Os sistemas de numeração, falado e escrito, foram assim adotados pelas civilizações.

Para os babilônios e egípcios, os números inteiros e fracionários estavam estritamente ligados às necessidades práticas. O caráter abstrato dos números só foi admitido explicitamente pela escola grega dos pitagóricos (500 a.C.). No Papiro de Rhind, guardado no Museu Britânico de Londres, encontra-se uma coleção de problemas de Aritmética e de Geometria. Esses manuscritos remontam a mais de mil anos antes da nossa era; neles se utilizam freqüentemente frações tendo como numerador a unidade.

Como já foi visto no final da Aula 11 de Matemática na Educação 1, no século X, a aritmética trazida pelos árabes começou a penetrar no mundo latino. Nos séculos XI e XII, através dos árabes, o sistema de numeração posicional de base decimal com zero, originário da Índia, difundiu-se no Ocidente. Desde essa época, a Aritmética foi pouco a pouco se desenvolvendo sob a pressão das necessidades práticas do comércio, das finanças e da Astronomia.

A introdução dos números decimais foi atribuída, segundo alguns historiadores, ao astrônomo alemão Johann Muller (1436-1476), mais conhecido sob o nome de Regiomontanus. Outros historiadores a atribuem a Stewin, matemático holandês (1548-1620), que publicou, em 1585, uma das primeiras exposições sobre a teoria das frações decimais.

Aritmética: É a parte da Matemática que investiga as propriedades elementares dos números inteiros e racionais. (*In Dicionário Aurélio*, 2003.) Você se lembra da Aula 14 de Matemática na Educação 1?

Entre os fatos mais importantes da Matemática, naquela época, está a introdução dos números decimais, isto é, a conversão das frações ordinárias em frações decimais. Veja os exemplos:

1) $\frac{1}{5} = \frac{1x2}{5x2} = \frac{2}{10} = 0{,}2$

2) $\frac{3}{4} = \frac{3x25}{4x25} = \frac{75}{100} = 0{,}75$

ATIVIDADE

1. Agora, transforme você as frações em frações decimais e números decimais.

a) $\frac{1}{2} =$

b) $\frac{3}{5} =$

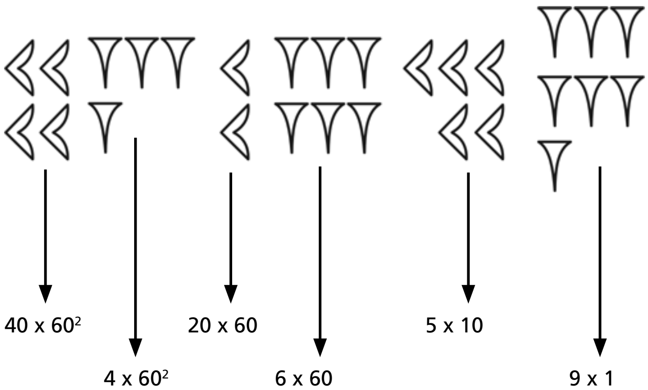
Os babilônios empregaram sistemas decimais e frações sexagesimais, os mais usados nas tabelas para calcular peso e volumes. É provável que o uso do número 60 pelos babilônios se deve ao fato de que é o número menor que 100 com maior quantidade de divisores inteiros.

Antes de mostrar as frações, entenda melhor como eles representavam os números naturais.

Os babilônios antigos fizeram os registros de suas escritas em tábuas de argila úmidas. As tábuas eram cozidas num forno até endurecer, obtendo-se assim registros permanentes. Nas tábuas cuneiformes do período 2000 a.C. a 200 a.C., os números menores que 60 se expressavam por um sistema de agrupamento simples de base 10, conforme você viu na Aula 1 o registro do número 34.

Em contrapartida, os números superiores a 60 foram escritos de acordo com o princípio posicional de base 60. Veja o exemplo:

Em escrita cuneiforme:



No nosso sistema, fazendo as operações, temos então:

9 unidades + 5 dezenas + 6 x 60 + 20 x 60 + 4 x 60^2 + 40 x 60^2 =

9 + 50 + 360 + 1200 + 14400 + 144000 = 160019

Outro exemplo:

Em escrita cuneiforme:

No nosso sistema: 4 unidades + 6 dezenas + 8 x 60 = 4 + 60 + 480 = 544

> Na escrita cuneiforme é preciso ler da direita para a esquerda.

Esse sistema passou a sentir falta de um símbolo para o zero que representasse as potências ausentes de 60, levando assim a possíveis confusões na expressão de um número dado. Introduziu-se então, por volta do ano 300 a.C., um símbolo, formado por duas cunhas, pequenas e inclinadas. Mas esse símbolo só era utilizado para indicar uma potência de 60 dentro de um número, nunca no final.

Exemplos:

1) 304 = 5 x 60 + 4 = ⟶

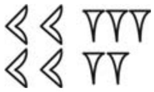
2) 340 = 5 x 60 + 40 ⟶

ATIVIDADE

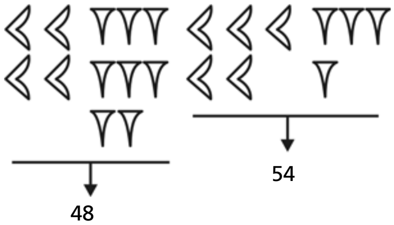
2. Escreva o número 2.456 usando símbolos babilônios.

Por volta da segunda metade do terceiro milênio a.C., os babilônios e os sumérios já utilizavam uma notação racional, como hoje fazemos com as frações de horas, minutos e segundos. Dessa forma, 1 hora e meia é representada, em escrita racional, $1+\frac{30}{60}$, e na escrita cuneiforme .

Acontece que essa mesma notação poderia significar 1 x 60 + 30, como já vimos. Os babilônios representavam as frações utilizando a mesma escrita dos números inteiros; assim, por exemplo,



a representação poderia expressar o número inteiro 45 como também poderia representar a fração $\frac{45}{60}$. O denominador é 60, pois o sistema utilizado é sexagesimal.



Veja outro exemplo:

Essa representação poderia tanto expressar o número 54 + 48 x 60 como também o número $48+\frac{54}{60}$, ou, dependendo do contexto, o número $\frac{48}{60}+\frac{54}{60^2}$.

A forma correta de ler o número dependia do contexto no qual estava inserido. Os babilônios compreendiam a leitura em função da ordem de grandeza em que estavam trabalhando.

> **!** Para essa população, as frações foram importantes nos textos de economia relacionados aos direitos dos herdeiros.

OS RACIONAIS E SEU USO

Sobre um certo rei egípcio Sesóstris, Heródoto, historiador grego, nos disse:

> Esse rei realizou a partilha das terras, concedendo a cada egípcio uma porção igual, com a condição de lhe ser pago todos os anos um certo tributo; se o rio carregava alguma parte do lote de alguém, o prejudicado ia procurar o rei e expor-lhe o acontecido. O soberano enviava agrimensores ao local para determinar a redução sofrida pelo lote, passando o dono a pagar um tributo proporcional a porção restante... (ALMEIDA, 1997)

Estas palavras foram escritas há cerca de 2300 anos e apontam a necessidade de utilizarem-se números que não são inteiros, já que, sempre que o rio Nilo derrubava as cercas de pedra que cada agricultor usava para marcar os limites do terreno, uma nova medição precisava ser feita, com o objetivo de saber a verdadeira medida, a fim de pagar proporcionalmente o tributo ao rei Sesóstris.

Desde a Antigüidade, as águas do rio Nilo fertilizam os campos, beneficiando a agricultura no Egito. Cada metro de terra era precioso e tinha de ser devidamente medido e muito bem cuidado. Os egípcios utilizavam uma corda com a unidade de medida indicada através dos nós. As pessoas encarregadas de medir esticavam a corda e verificavam quantas vezes aquela unidade de medida estava contida nos lados do terreno. Por isso, ficaram conhecidas como estiradores de cordas.

É fácil imaginar que, por mais adequada que fosse a unidade de medida escolhida, dificilmente caberia um número inteiro de vezes nos lados do terreno. Daí surge a idéia geométrica de número decimal.

Fundador da Escola Pitagórica, uma espécie de congregação em busca da sabedoria, Pitágoras foi um importante matemático e filósofo grego que viveu no século VI a. C.

Para Pitágoras, além de uma visão geométrica e mística, os números se formam por abstrações dos objetos. Os pitagóricos (discípulos de Pitágoras) faziam um verdadeiro culto místico ao conceito de número, considerando-o essência das coisas. Acreditavam que tudo no universo estava relacionado a números inteiros ou razões de números inteiros, que na linguagem atual se chamam *números racionais*.

Os *números racionais* são todos aqueles que podem ser escritos sob a forma de fração com numerador e denominador inteiros e, além disso, o denominador diferente de zero.

Esses nomes, numerador e denominador, têm razão de ser: "denominador" significa "aquele que dá o nome", no caso o "nome" tem o significado do todo que se está trabalhando; "numerador" significa "aquele que dá o número de partes consideradas".

Portanto, os nomes das frações dependem do número de partes em que a unidade é dividida e do número de partes que estamos considerando.

Algumas expressões utilizadas no dia-a-dia são de origem fracionária. Veja alguns exemplos:

Meia três quartos: diz-se da meia que chega quase ao joelho. Ela cobre aproximadamente três quartos ($\frac{3}{4}$) da distância do joelho ao pé.

Rezar o terço: o terço é um colar de contas que corresponde a $\frac{1}{3}$ do rosário, que também é um colar de 165 contas, em que 15 dezenas de contas correspondem às ave-marias e 15 contas aos padre-nossos. Os fiéis que rezavam essa grande quantidade de orações usavam as contas do rosário para não errar o número de orações. Sendo assim, o terço também é um colar contendo 55 contas, 5 dezenas correspondendo às ave-marias e 5 aos padre-nossos.

Quarto de boi: é uma parte do corpo do boi; depois de este ser abatido, correspondente a aproximadamente $\frac{1}{4}$ (quarta parte) de seu corpo.

ATIVIDADE

3. Pesquise mais dois exemplos do uso de frações na linguagem do dia-a-dia, esclarecendo seu significado.

____

____

____

DESCOBRINDO A FRAÇÃO. ATÉ A SUA ESCRITA DECIMAL!

Quando o homem percebeu que os números naturais não eram suficientes para indicar partes das coisas inteiras, ou de grupos de coisas, ele teve a necessidade de criar novos números: os números fracionários ou racionais. Surgiram então as frações, palavra que é derivada do latim e significa "parte de um todo".

Os egípcios usaram frações há 4000 anos. Um fato curioso é que eles faziam uso de frações unitárias, ou seja frações com numerador igual a 1.

Já os babilônios usavam as frações com denominadores iguais a 60, pois seu sistema era sexagesimal, conforme visto na Aula 11 de Matemática na Educação 1. O fato de a circunferência ser dividida em 360 graus, cada grau em 60 minutos e cada minuto em 60 segundos, o mesmo acontecendo com a divisão do tempo em horas, minutos e segundos, tem origem no sistema sexagesimal dos babilônios.

Com o passar dos tempos, muitas notações foram usadas para representar frações. Com o sistema de numeração indo, ficou fácil escrever qualquer número, por maior que ele fosse. A criação dos números naturais simplificou muito o trabalho com os números fracionários. A atual maneira de representação, $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}...$, utilizando a barra, data do século XVI. Os números decimais têm origem nas frações decimais (de denominador 10, 100, 1000, ...).

Por exemplo, a fração $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5$, que equivale ao número decimal 0,5. Observe a visualização das duas representações: $\frac{1}{2}$ (uma parte em duas)

e $\frac{5}{10}$ (cinco partes em dez)

ATIVIDADE

4. Utilize as barras a seguir, onde o todo é dividido em 8, 12, 16, 20 e 24, para fazer todas as representações equivalentes à fração $\frac{1}{4} = 0{,}25$. Pinte a parte tomada no todo e represente a fração correspondente.

SIMON STEVIN (1548 - 1620)

Matemático e físico flamengo. Sua matemática foi valiosa para o desenvolvimento do algebrismo. A Stevin se deve a popularização do uso do sistema decimal de frações, o que viabilizou o uso divisionário das moedas, pesos e medidas em geral.

SIMON STEVIN, em 1585, ensinou um método para efetuar as operações por meio de inteiros sem o uso de frações, no qual escrevia os números naturais ordenados em cima de cada algarismo dentro de um círculo. O valor do número no círculo indica a posição ocupada pelo número depois da vírgula. A notação a seguir foi introduzida por Stevin e adaptada por John Näpier, grande matemático escocês.

		0	1	2	3	
$\frac{2.550}{400}$	=	6	3	7	5	= 6,375

Dito de outra forma, Stevin escrevia suas expressões decimais fazendo um círculo acima de cada dígito e escrevia a potência do denominador 10 dentro do círculo. Veja outro exemplo:

0	1	2	3	4
3	1	4	1	6

Este número representa, hoje, o número decimal 3,1416.

A representação dos algarismos decimais provenientes de frações decimais recebia um traço no numerador indicando o número de zeros existentes no denominador. Veja os exemplos:

$$\frac{437}{100} = 4,\underline{37} \qquad \frac{1256}{1000} = 1,\underline{256}$$

ATIVIDADE

5. Escreva as frações decimais utilizando as duas representações históricas.

a. $\frac{145}{100} =$

b. $\frac{3456}{1000} =$

c. $\frac{28}{10} =$

d. $\frac{569}{10} =$

Esse método foi aprimorado em 1617; John Näpier propôs o uso de um ponto ou de uma vírgula para separar a parte inteira da parte decimal.

Por muito tempo os números decimais foram empregados apenas para cálculos astronômicos, em virtude da precisão proporcionada. Os números decimais simplificaram os cálculos e passaram a ser usados com mais ênfase após a criação do sistema métrico decimal.

A MANEIRA EGÍPCIA DE LIDAR COM FRAÇÕES

Os egípcios faziam as divisões privilegiando seu cálculo através de **frações**. Essa aritmética de frações era baseada nas **frações unitárias**, ou seja, com 1 no numerador, na escrita atual, são as frações $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, ...; generalizando, são as frações da forma $\frac{1}{n}$, onde n é um número natural (1, 2, 3, 4, ...). Uma fração era indicada graficamente com o número do denominador sobre o qual se colocava um **símbolo** matemático específico: um ponto ou uma espécie de olho estilizado.

Por exemplo, escreviam:

que significa a fração $\frac{1}{12}$, ou

que significa a $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$.

OTTO NEUGEBAUER

Matemático austríaco, famoso historiador da Ciência e da Matemática antiga.

Usando a notação dos egípcios, segundo o historiador **NEUGEBAUER**, temos uma outra representação, utilizando uma barra em cima do denominador da fração unitária.

Veja:

$= \overline{12} = \frac{1}{12}$

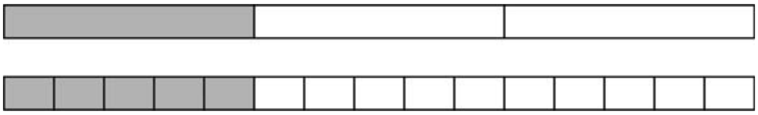
$= \overline{2} + \overline{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

Os egípcios não colocavam o sinal de adição (+) entre as frações porque os símbolos das operações ainda não tinham sido inventados. Como no sistema de numeração egípcio os símbolos repetiam-se com muita freqüência, tanto os cálculos com números inteiros quanto aqueles que envolviam números fracionários eram muito complicados.

A fração $\frac{2}{3}$ era uma exceção, como às vezes as frações da forma $\frac{\text{número}}{\text{sucessor do número}}$, ou seja, $\frac{n}{n+1}$. Por exemplo: $\frac{3}{3+1}=\frac{3}{4}, \frac{4}{4+1}=\frac{4}{5}$. Observe, também a fração $\frac{2}{3}$ é da forma $\frac{n}{n+1}$ (basta fazer n = 2).

Quando nos seus problemas apareciam frações da forma $\frac{m}{n}$, eles as escreviam como somas de frações unitárias. Vamos tomar como exemplo o caso da fração $\frac{2}{5}$, que os egípcios escreviam como $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$.

Para entender melhor esta adição, observe as duas barras a seguir, que representam a mesma fração $\frac{1}{3}$, onde trabalhamos com as partes de uma barra.



A primeira barra representa uma parte de 3 que equivale à fração $\frac{1}{3}$. Já a segunda, representa 5 partes de 15. Vamos utilizar a segunda representação, isto é, 5 em 15.

Agora observe a fração $\frac{1}{15}$:

Quando juntamos $\frac{1}{3} = \frac{5}{15}$ (5 partes de 15) com $\frac{1}{15}$ (uma parte de 15), obtemos a seguinte barra com 6 partes de 15:

Esta barra é representada pela fração $\frac{6}{15}$. Acontece que essa mesma barra pode ser representada de maneira simplificada usando duas parte do 5, observe:

Daí, dizemos que 6 em 15; corresponde a 2 em 5; usando frações, temos que $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$. Dessa forma, mostramos que $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$, pois $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{5}{15} + \frac{1}{15} = \frac{6}{15}$.

A utilização das barras foi uma forma de justificar para você que $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$. Um melhor entendimento sobre frações e da forma de operá-las será visto em algumas das aulas seguintes.

Outros exemplos de frações escritas pelos egípcios como soma de frações unitárias são:

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

Os egípcios, por meio de tabelas apropriadas e métodos engenhosos, conseguiam lidar muito bem com as frações unitárias. Esse hábito, embora pesado e inconveniente no nosso ponto de vista, sobreviveu até a Idade Média.

No Papiro de Rhind, entre outros problemas, aparece uma tabela de decomposição de frações do tipo $\frac{2}{p}$, onde p é um número ímpar, em frações unitárias. Na primeira parte do papiro há uma tabela contendo as frações $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}$, ... até $\frac{2}{101}$. Ao que indicam os registros, tais conversões eram necessárias, pois os egípcios operavam apenas com frações unitárias e não há indícios sobre o processo usado para chegar a essas decomposições.

Veja que decomposição interessante:

$$\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$$

Imagine você tendo de representar essa igualdade utilizando barras, dividir em 606 partes! Mais adiante, mostraremos a você como comprovar esse fato através de frações equivalentes, isto é, frações que representam a mesma quantidade do todo.

ATIVIDADES

6. Utilize a representação por meio de barras, assim como foi visto no exemplo da decomposição da fração $\frac{2}{5}$, para verificar a decomposição $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$.

7. Escreva a fração $\frac{2}{15}$ usando os símbolos egípcios e a notação de Neugebauer.

8. Com 3 bastões, 2 ferraduras e 2 rolos de pergaminho, quantas frações unitárias podemos formar?
Olhe os símbolos egípcios no quadro.

1	𓏺	Bastão vertical
10	𓎆	Ferradura ou calcanhar
100	𓍢	Rolo de pergaminho ou corda

9. Com as frações unitárias $\overline{2}, \overline{3}$ e $\overline{4}$, podemos formar frações não unitárias usando duas delas, como por exemplo as frações $\frac{5}{6}, \frac{3}{4}$ e $\frac{7}{12}$; veja as contas a seguir:

$$\overline{2} + \overline{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$
$$\overline{2} + \overline{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$
$$\overline{3} + \overline{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

Que outras frações que não correspondam a números inteiros podemos formar com essas três frações unitárias?

PROBLEMAS E CURIOSIDADES ANTIGAS SOBRE AS FRAÇÕES

O primeiro problema é para descobrir *aha*. Você sabia que a palavra egípcia *aha* significa quantidade? Nos problemas de 24 a 27 do Papiro de Rhind, encontramos:

Uma quantidade e seu $\overline{7}$ fazem 19.
Uma quantidade e seu $\overline{2}$ fazem 16.
Uma quantidade e seu $\overline{4}$ fazem 15.
Uma quantidade e seu $\overline{5}$ fazem 21.

(BEKKEN, 1994)

Lembra-se de que $\overline{7} = \frac{1}{7} =$? Em cada caso a pergunta é: qual é a quantidade? Hoje em dia, se fôssemos fazer esse problema, certamente recairíamos em uma equação. Para isso, vamos partir de uma pergunta semelhante, cujo resultado é mais simples: "Uma quantidade e seu $\overline{7}$ fazem 24."

E temos a equação $Q + \frac{Q}{7} = 24$.

Mas os antigos egípcios nem sonhavam em resolver o problema dessa forma. Eles atribuíam um valor qualquer para *aha*, por exemplo, o número 7, e faziam os cálculos com esse número, encontrando, no caso do 7, o número 8, pois $7 + \frac{7}{7} = 7 + 1 = 8$.

Para encontrarem o valor de *aha*, usavam proporcionalidade. Veja a tabela a seguir:

Chute	Resultado
7	8
14	16
21	24
28	32

Tabela 2.1

Observe que quando chegamos ao 24 o número que aparece à sua esquerda é a quantidade procurada.

Esse método ficou conhecido como **a regra da falsa posição**.

ATIVIDADE

10. Três dos problemas encontrados no papiro possuem soluções não inteiras; apenas um possui como resultado uma quantidade inteira. Descubra qual é e justifique sua resposta.

Agora, uma curiosidade!

Você sabia que o estabelecimento do ano de 365 dias pertence também aos egípcios? Pois é, veja que fato interessante utilizando frações.

Em épocas remotas, o ano tinha 365 dias. Com o passar do tempo, entretanto, percebeu-se que as estações aconteciam em datas diferentes de ano para ano. Isso significava que o tempo para a Terra completar uma volta em torno do Sol não era de 365 dias, e a defasagem estava se acumulando.

Foi criado então o ano bissexto, para tentar organizar as estações que estavam se deslocando no tempo. Foi no século I a.C que o imperador Júlio César introduziu um ano médio de 365 dias e 6 horas; como 6 horas correspondem à quarta parte do dia, o ano juliano correspondia a 365,25 dias. A partir dessa melhor aproximação, instituiu-se um ciclo de três anos de 365 dias seguidos de um ano de 366 dias. O ano que possui 366 dias passou a ser chamado de ano bissexto.

A colheita estava sendo prejudicada e as festas não eram mais celebradas nas estações próprias. No ano de 46 a.C., Júlio César, sob a orientação do astrônomo Sosígenes, resolveu acertar esse erro. Esse ano teve 80 dias a mais, para corrigir os desvios acumulados, e o ano de 45 a.C. foi bissexto, isto é, teve 366 dias.

Mesmo com o calendário juliano, as estações ainda se deslocavam no tempo. Os astrônomos, melhorando seus conhecimentos e seus instrumentos, concluíram que uma volta da Terra em torno do Sol durava 365,2425 dias. Em vista disso, o Papa Gregório XIII, juntamente com uma comissão, propôs, em 1582, uma reforma no calendário juliano: suprimir três anos bissextos de 400 em 400 anos. Veja a justificativa, utilizando a escrita em frações:

Como $365{,}2425 = 365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400}$, a correção deveria ser de 1 dia a mais a cada 4 anos, menos 1 a cada 100 e mais 1 a cada 400. Daí a regra válida atualmente. Para corrigir discrepâncias que já ocorriam, foram descontados 10 dias no mês de outubro de 1582. O ano de 365,2425 dias passou a ser chamado de ano gregoriano.

O CIÚME COM VÍRGULAS

A multiplicação do ciúme apresentada na Aula 1 também pode ser feita com números decimais.

Vamos multiplicar o número 4,32 por 35,4. Observe que os algarismos usados são os mesmos que usamos na Aula 1.

Quando construímos o quadro retangular de três linhas e três colunas e colocamos os números, marcamos a linha e a coluna onde estão posicionadas as vírgulas.

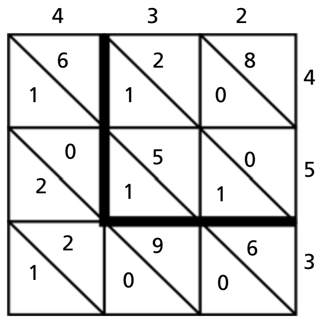


Figura 2.1

A vírgula estará localizada na diagonal que passa pelo ponto de encontro da linha e coluna marcadas. A conta pode ser feita de maneira abreviada desta forma. Veja na **Figura 2.2**.

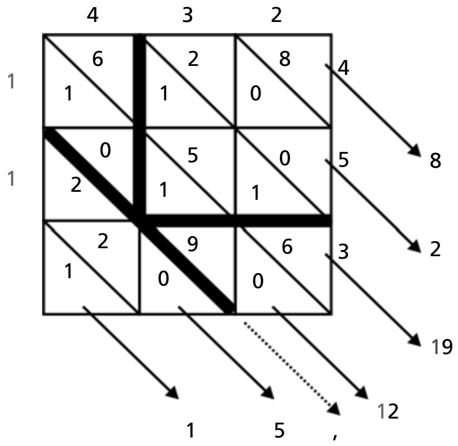


Figura 2.2

E o resultado é escrito da esquerda para a direita e depois de baixo para cima: 15, 2928.

Na Aula 8 você vai compreender o porquê de a vírgula ficar posicionada exatamente aí. Por enquanto, procure pensar sobre isso.

CONCLUSÃO

Esperamos que esta aula tenha apresentado a você alguns momentos importantes da História da Matemática e idéias que você possa utilizar como motivações para o seu estudo, assim como para futuras atividades de sala de aula que você irá preparar.

Você deve ter notado que a quantidade de cálculos que os povos antigos faziam era bem grande, e que na nossa escrita atual muitos desses cálculos se tornaram bem mais simples. Um exemplo bem interessante é o sistema de numeração babilônico, pois além de trabalhar com dois sistemas de numeração, o uso das operações de adição e multiplicação é muito solicitado. É uma boa motivação para, através de atividades criadas por você, levar os alunos a fazer uso das quatro operações.

RESUMO

Nesta aula você viu:

- Formas de trabalhar e operar com as frações utilizadas por povos da Antigüidade;
- As frações unitárias dos egípcios;
- As frações sexagesimais dos babilônios;
- As frações decimais que utilizamos atualmente.

Exemplificamos a grande maioria dos casos e apresentamos algumas curiosidades e problemas antigos trazidos dos registros históricos.

Paralelamente, foi feita uma abordagem histórica, situando os fatos na linha do tempo e trazendo, sempre que possível, algumas justificativas para esses acontecimentos.

AUTO-AVALIAÇÃO

Acompanhe os itens do resumo, faça um retorno às atividades propostas em que você tenha tido alguma dúvida e procure refazê-las. Os sistemas de representação e o uso que faziam das frações possuem semelhanças e diferenças. Algumas foram esclarecidas, outras ficaram para você investigar através de observações e pesquisas.

Se você teve dificuldades na adição de frações unitárias, procure em algum livro de 5ª série esse assunto, leia e desenvolva algumas atividades. Essa é uma boa maneira de fazer uma auto-avaliacão. Caso o problema persista, aguarde a Aula 5, lá você compreenderá o conceito da adição de frações, e depois retome esta aula para sanar as dúvidas que ficaram.

O importante é que você se envolva com o conteúdo e o encaminhamento da aula, questione-se sobre o porquê de alguns passos e procure sempre solucioná-los, seja através de recursos de consulta, do tutor presencial ou de algum colega. O estudo em grupo pode ser uma estratégia interessante. Sempre que for possível, vá a uma biblioteca, ou do seu pólo ou da sua cidade, e faça pesquisas. Use a internet também. Você se surpreenderá com os fatos que irá encontrar!

INFORMAÇÕES SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, que será sobre os números racionais, você aprofundará alguns conceitos já comentados e às vezes até utilizados nesta aula. Verá a importância desse tipo de número nas medições e suas diferentes representações. Dessa forma, a construção do conceito de número racional ficará mais sólida e dúvidas que porventura você teve nesta aula serão sanadas.

RESPOSTAS

ATIVIDADE 1

a) $\frac{1}{2} = \frac{1x5}{2x5} = \frac{5}{10} =$ 0,5

b) $\frac{3}{5} = \frac{3x2}{5x2} = \frac{6}{10} =$ 0,6

ATIVIDADE 2

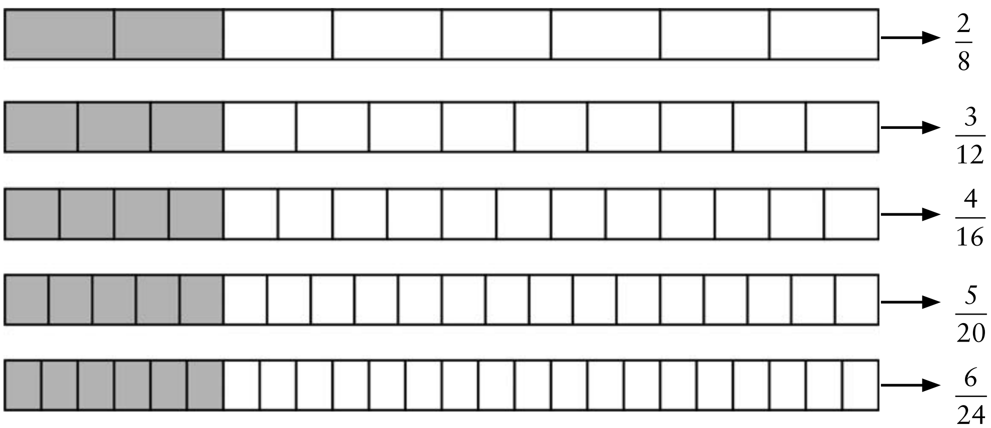
2456 = 2400 + 56 = 40 x 60 + 56

ATIVIDADE 3

Os canos de tubulação usam a linguagem de fração. Cano de meia (1/2) ou 3/4. Isso significa metade de uma polegada ou 3/4 de uma polegada.

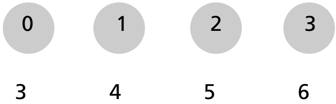
Vá para os quintos!: mandar para os quintos é mandar para longe, para o inferno. A origem da expressão é muito antiga: quando o Brasil pertencia aos portugueses, estes cobravam um imposto que correspondia a $\frac{1}{5}$ do ouro extraído. O imposto era enviado a Portugal no chamado "navio dos quintos", que passou a significar um navio que ia para muito longe, quem sabe até o inferno.

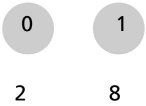
ATIVIDADE 4

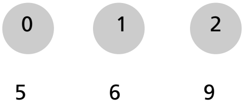


ATIVIDADE 5

a) $\frac{145}{100} = 1,\underline{45}$ **e** 

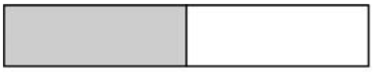
b) $\frac{3456}{1000} = 3,\underline{456}$ **e** 

c) $\frac{28}{10} = 2,\underline{8}$ **e** 

d) $\frac{569}{10} = 5,\underline{69}$ **e** 

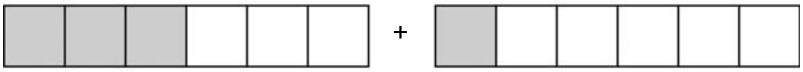
ATIVIDADE 6

Fração $\frac{1}{2}$



Fração equivalente com denominador $\frac{3}{6}$

Fração $\frac{1}{6}$



Resultado: $\frac{4}{6}$

Resultado simplificado: $\frac{2}{3}$

ATIVIDADE 7

$$\frac{2}{15} = \frac{1}{15} + \frac{1}{15}$$

símbolos egípcios: 

notação de Neugebauer: $\overline{15}\ \ \overline{15}$

ATIVIDADE 8

Temos de contar todas as possibilidades de números que podem ser formados no denominador das frações unitárias.

Composições	Denominador	Frações
Somente bastões	2 casos: 2 ou 3	$\overline{2}$ ou $\overline{3}$
Somente ferradura	3 casos: 10, 20 ou 30	$\overline{10}$ ou $\overline{20}$ ou $\overline{30}$
Somente pergaminho	2 casos: 100 ou 200	$\overline{100}$ ou $\overline{200}$
Bastões e ferraduras	9 casos: 11, 12, 13, 21 22, 23, 31, 32 ou 33	$\overline{12}$ ou $\overline{13}$ ou $\overline{22}$ ou $\overline{23}$ ou $\overline{32}$ ou $\overline{33}$ $\overline{11}$ ou $\overline{21}$ ou $\overline{31}$
Pergaminhos e ferraduras	São 6 casos: 110, 120, 130, 210, 220 ou 230	
Bastões, pergaminhos e ferraduras	São 18 casos: 111, 112, 113, 121,122, 123, 131, 132, 133, 211, 212, 213, 221, 222, 223, 231, 232, 233	...

Isso dá um total de 2 + 3+ 2 + 9 + 6 + 18 = 40 frações unitárias.

ATIVIDADE 9

São mais duas: $\bar{3}+\bar{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ e $\bar{4}+\bar{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

ATIVIDADE 10

No primeiro problema, "**Uma quantidade e seu** $\bar{7}$ **fazem 19.**" O número tem de ser divisível por 7 para que o resultado seja inteiro. Observe na Tabela 2.1 que o resultado, quando o número for 21, será 24, e quando o número for 28, será 32. Assim podemos observar que o 19 não é resultado de uma equação de números inteiros. Com o mesmo raciocínio, você verá que no segundo e no quarto problemas, as soluções não são inteiras.

No terceiro problema temos que encontrar um número de forma que $Q+\frac{Q}{4}=15$. Logo, essa quantidade tem que ser um número múltiplo de 4. Começamos "chutando" o 4:

chute	resultado
4	5
8	10
12	15

Assim, 12 é o número procurado, e o problema tem solução inteira.

AULA 3

Mas... O que é o número racional?

Meta da aula

Explicar conceito e as diferentes representações para o número racional positivo.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- Distinguir e relacionar as diferentes representações dos números racionais positivos.
- Dar exemplos de números racionais positivos usando diferentes representações.
- Identificar o conceito de número racional positivo em diferentes contextos.

Pré-requisitos

Antes da leitura desta aula, você deverá recorrer à Aula 12 de Matemática na Educação 1 e rever a construção histórica do número racional que foi apresentada na Aula 2.

CONVERSA INICIAL

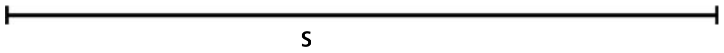
Quando falamos em número, nos vem à cabeça o número natural, aquele usualmente utilizado para contagem. Pensamos em 2, 10, 59, 327 etc. Mesmo aqueles que já passaram pela escolaridade do Ensino Fundamental e Médio pensam dessa forma. Em outras palavras, podemos dizer que o número natural é um protótipo para número, ou seja, é um ótimo exemplar do que seja um número.

Nesta aula, queremos que você amplie sua visão de número; vamos saber um pouco mais sobre o número racional e suas diferentes representações que, dentro da escola, a mais usual é a fração; isso se justifica, pois a definição de número racional envolve tal representação.

O CONCEITO...

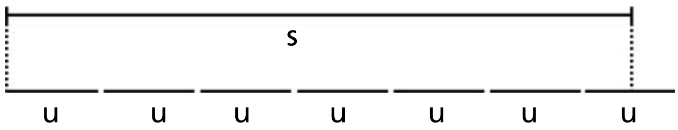
Na Aula 2, no item **Os racionais e seu uso**, já conversamos um pouco sobre esse conceito dentro de um contexto histórico; vamos falar um pouco mais sobre isso.

Imagine que queiramos medir o segmento abaixo,



usando como unidade de medida o segmento **u**.

Como medir significa comparar duas grandezas, veremos quantos segmentos **u** cabem no segmento **s**. Neste caso, o segmento s não corresponde a uma quantidade inteira de segmentos u. Observe:



Portanto, é preciso criar um outro número, diferente do inteiro, que represente esse "pedaço" ou "parte" de **u**. Poderíamos representar essa medida de diferentes formas:

- A medida de **s** corresponde a 6 u mais metade de **u**.
- A medida de **s** corresponde a 6 u mais meio **u**.
- A medida de **s** corresponde a 6 u e $\frac{1}{2}$ **u**.
- A medida de **s** corresponde a 6 u e 0,5 **u**.

- A medida de **s** corresponde a 6,5 **u**.
- A medida de **s** corresponde a $\frac{13}{2}$ **u**.

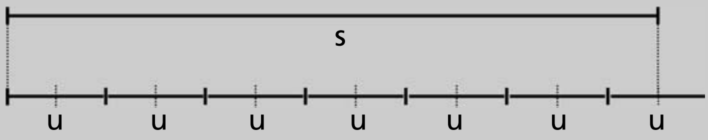
Todas essas representações estão corretas e servem para comunicar a medida de **s** considerando **u** como unidade; porém, algumas são mais usuais e familiares e outras bastante improváveis.

Mas o principal obstáculo que impede comparar a medida do segmento **s**, usando **u** como unidade, força a buscar uma solução. Um dos caminhos seria diminuir o tamanho de **u** ou dividir o **u**. Nas representações escritas acima, a maior parte delas utiliza a segunda estratégia, que é dividir um, isto é, 6 **u** e $\frac{1}{2}$ **u** ou 6,5 **u** ou $\frac{13}{2}$ **u**.

Se diminuíssemos o tamanho de **u**, ou seja, se considerássemos uma outra unidade **t** que medisse a metade de **u**, teríamos como medida para s uma quantidade inteira de unidades **t**; neste caso, **s** mediria **13t**.

Era dessa forma que os gregos "fugiam" do conceito de número racional, acreditando que só existiam os números naturais.

Para visualizar a fração $\frac{13}{2}$ **u** devemos dividir **u** em duas partes iguais.



Comparando com o segmento **s**, temos um total de 13 metades da unidade **u**, que foi dividida em duas partes.

Retomando a definição de número racional, já vista na Aula 2, temos:

Números racionais são os que podem ser escritos sob a forma de fração, com numerador e denominador inteiros e denominador diferente de zero.

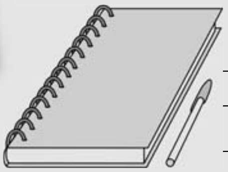
Dito de uma outra forma,

um número racional é aquele que pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$ em que a e b são números inteiros, e $b \neq 0$.

> **!**
>
> Na Aula 9 você vai conhecer melhor os números inteiros, pois nesta aula estaremos trabalhando apenas com os números racionais positivos; nesse caso, estamos utilizando o conjunto dos números inteiros não-negativos, que é igual ao conjunto dos números naturais.

ATIVIDADES

1. Meça a maior dimensão do seu caderno usando sua caneta. Represente essa medida da maneira que achar conveniente. Procure ser o mais preciso possível.



____

____

____

RESPOSTA COMENTADA

Essa resposta pode variar de aluno para aluno, vai depender do tamanho do caderno e do tamanho da caneta. Por exemplo, se as medidas aproximadas da caneta e da maior dimensão do caderno forem 15cm e 28cm, respectivamente, podemos expressar essa medida por $\frac{28}{15}$ *ou* $1\frac{13}{15}$.

2. Meça cada um dos segmentos abaixo usando o segmento **a** como unidade.

a

a. q

b. p

c. s

d. r

QUANDO AS FRAÇÕES REPRESENTAM PARTE DE UM TODO...

A maioria dos livros didáticos apresenta o conceito de fração usando o desenho da barra, algumas vezes chamada de "barra de chocolate", como exemplo de um inteiro, ou seja, o todo. A partir daí podemos dividir esse inteiro em partes iguais.

Para começar, não seremos diferentes, vamos utilizar a idéia das famosas "barras de chocolate".

Tomemos o seguinte inteiro.

Vamos dividi-lo em 5 partes e tomar uma.

Pense na situação em que uma barra de chocolate foi dividida para 5 crianças e cada criança ficou com uma parte de um todo que foi dividido em cinco partes, ou seja, cada criança ficou com $1 \div 5$ partes do chocolate.

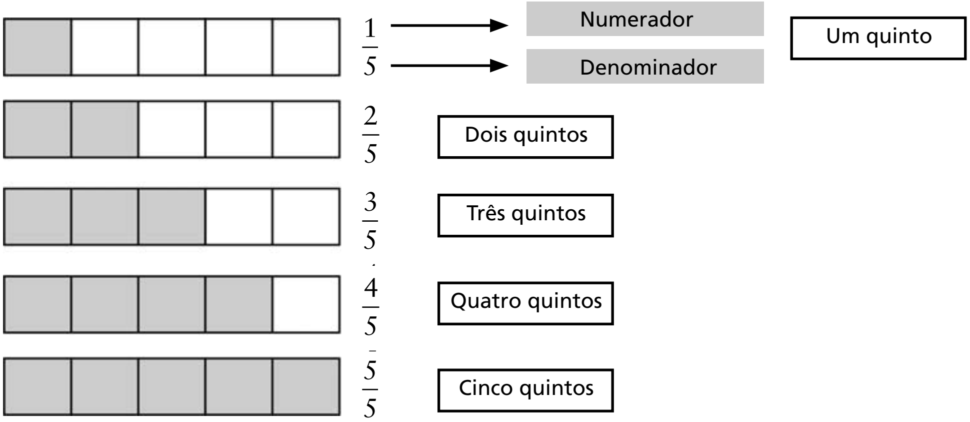
Para representar essa divisão, onde se deseja expressar essa idéia: o todo dividido em 5 partes e foi tomada uma parte, usamos um traço horizontal ao invés do sinal $\div$.

O todo que foi dividido em 5 partes é chamado de **denominador** e fica na parte inferior do traço de fração.

A quantidade de partes consideradas fica representada no **numerador**, ou seja, na parte superior do traço de fração.

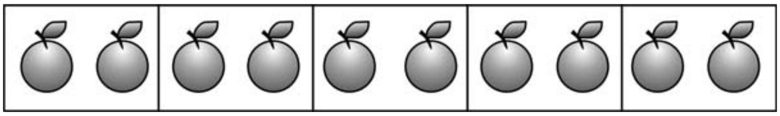
Além disso, como já foi dito na aula anterior, lembre-se de que o denominador é "aquele que dá nome" à fração; quando o dividimos em cinco partes iguais chamamos essas partes de quintos.

Observe na figura a representação de algumas frações obtidas com o todo dividido em 5 partes.



Nem sempre o inteiro é uma "barra de chocolate"; o inteiro pode ser um dado conjunto de objetos, por exemplo, 10 laranjas.

O que seria, nesse caso, $\frac{1}{5}$ do conjunto de 10 laranjas? Precisamos dividi-lo em 5 partes iguais e tomar cada uma das partes.



Nesse caso, embora a fração que representa cada parte considerada seja a mesma da situação anterior, a natureza das partes muda. Observe que estamos aqui trabalhando com quantidades, ou seja,

$\frac{1}{5}$ de 10 laranjas é igual a 2 laranjas. 

$\frac{2}{5}$ de 10 laranjas é igual a 4 laranjas. 

$\frac{3}{5}$ de 10 laranjas é igual a 6 laranjas. 

$\frac{4}{5}$ de 10 laranjas é igual a 8 laranjas. 

$\frac{5}{5}$ de 10 laranjas é igual a 10 laranjas. 

Com estes dois exemplos, queremos que você perceba que existe uma diferença entre trabalhar com um todo **contínuo**, a “barra de chocolate” e a “pizza”: quando mudamos o **tamanho** do inteiro, modificamos o **tamanho** das partes consideradas. Por outro lado, se o inteiro é um conjunto de objetos, temos um todo **discreto**, em que cada parte considerada é uma **quantidade** de objetos que também varia de acordo com a **quantidade** total de objetos que representa o todo.

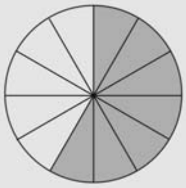
Observe que no texto ao lado destacamos as palavras **contínuo, tamanho, discreto** e **quantidade**. Quando nos referimos a um todo contínuo, estamos dizendo que esse todo tem um tamanho, ou seja, há a idéia de medida. Quando nos referimos a um todo discreto, estamos dizendo que esse todo é formado por uma determinada quantidade de objetos, ou seja, traz a idéia de contagem.

ATIVIDADE

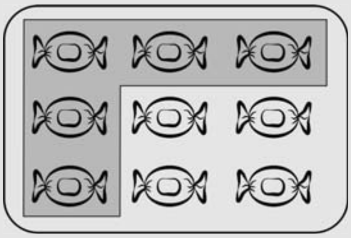
3. Considere as figuras como o todo e as partes hachuradas como as tomadas. Represente-as em forma de fração.

a.

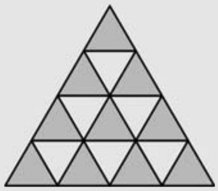
b.



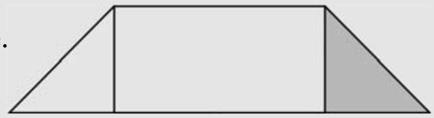
c.



d.



e.



! Observe bem a divisão da figura!

ATIVIDADE

4. Escolha 1 inteiro contínuo e represente as frações abaixo.

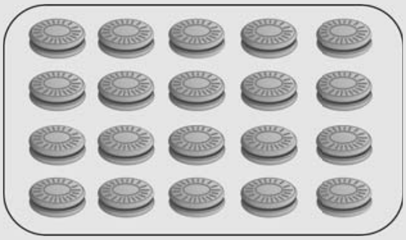
a. $\frac{4}{5}$

b. $\frac{1}{2}$

c. $\frac{3}{4}$

d. $\frac{7}{10}$

Agora represente as frações também usando os biscoitos da figura como 1 inteiro.



a.

b.

c.

d.

Lemos uma fração indicando primeiro o numerador e depois o denominador.

A leitura do numerador é indicada pelo número que aparece nele, mas para o denominador temos leituras diferentes.

Nas frações cujo denominador vai de 1 até 9, os denominadores são lidos como:

Denominador	Leitura
2	meio
3	terço
4	quarto
5	quinto
6	sexto
7	sétimo
8	oitavo
9	nono

Quando os denominadores são acima de 10, lemos o número que está escrito no denominador, acrescentando a palavra avos ao lado:

Denominador	Leitura
11	onze avos
12	doze avos
15	quinze avos
27	vinte e sete avos
53	cinqüenta e três avos

Porém, existe uma notação especial quando os denominadores são múltiplos de 10.

Denominador	Leitura com avos	Leitura usual
10	dez avos	décimo
20	vinte avos	vigésimo
30	trinta avos	trigésimo
⋮	⋮	⋮
90	noventa avos	nonagésimo
100	cem avos	centésimo
1000	mil avos	milésimo
10000	dez mil avos	décimo de milésimo

ATIVIDADE

5. Utilize as tabelas apresentadas e escreva por extenso o modo como se lêem as seguintes frações:

a. $\frac{6}{7}$ ______________________________

b. $\frac{5}{2}$ ______________________________

c. $\frac{2}{5}$ ______________________________

d. $\frac{2}{8}$ ______________________________

e. $\frac{6}{9}$ ______________________________

f. $\frac{4}{3}$ ______________________________

g. $\frac{3}{4}$ ______________________________

h. $\frac{1}{6}$ ______________________________

i. $\frac{2}{12}$ ______________________________

j. $\frac{6}{20}$ ______________________________

l. $\frac{7}{10}$ ______________________________

m. $\frac{53}{100}$ ______________________________

n. $\frac{256}{100}$ ______________________________

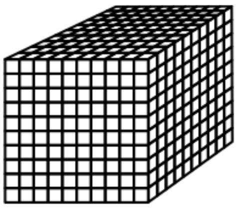
o. $\frac{35}{1000}$ ______________________________

p. $\frac{826}{1000}$ ______________________________

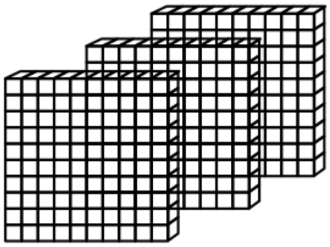
AS FRAÇÕES DECIMAIS E OS NÚMEROS DECIMAIS...

Ainda utilizando o material dourado, vamos fazer uma correspondência entre a representação do número racional em forma de fração decimal e a de número decimal.

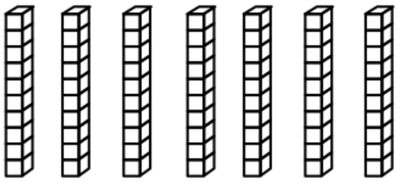
Assim, considerando o cubão como inteiro, podemos representar o número decimal 1,378 como:



1 cubão $\Rightarrow$ 1 inteiro



3 placas $\Rightarrow$ 3 décimos

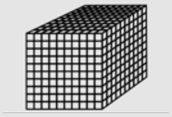
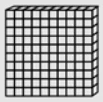


7 barras $\Rightarrow$ 7 centésimos

8 cubinhos $\Rightarrow$ 8 milésimos

ATIVIDADE.

6. Complete a tabela seguindo as indicações das colunas.

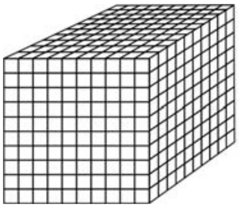
Quantidades	Representação com o material	Número Misto	Fração Decimal	Número Decimal			
				Unidade	Décimo	Centésimo	Milésimo
Um inteiro		–	–	1			
Um décimo		–	$\frac{1}{10}$	0,	1		
Um centésimo		–	$\frac{1}{100}$	0,	0	1	
Um milésimo		–	$\frac{1}{1000}$	0,	0	0	1
Três décimos							
Cinco décimos							
Três centésimos							
Nove milésimos							
Um inteiro e três centésimos							
Dois décimos, um centésimo e três milésimos							
Catorze milésimos							
Um inteiro, dois décimos e quatro milésimos							
Dois inteiros, um décimo, cinco centésimos e três milésimos							
Um inteiro, três décimos e quatro centésimos							

AS FRAÇÕES DECIMAIS

Há algumas frações que consideramos bastante especiais: são aquelas em que o denominador é dez, cem, mil, ou qualquer múltiplo de dez. Estamos considerando essas frações especiais por duas razões: uma delas é porque nossa base é decimal; a outra, porque as frações decimais estão diretamente relacionadas com as unidades padrão de medida, seus múltiplos e submúltiplos.

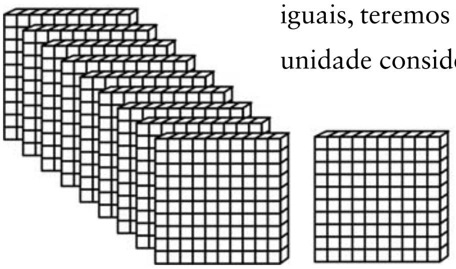
Vamos tomar o material dourado para conversar sobre os décimos, centésimos e milésimos.

Aqui vamos considerar o cubão como sendo nossa unidade.



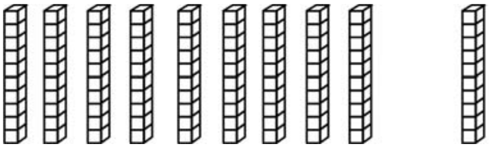
$\rightarrow$ 1 unidade

Se dividirmos o cubão em dez partes iguais, teremos 1 placa representando $\frac{1}{10}$ da unidade considerada.



$\rightarrow$ $\frac{1}{10}$ Um décimo do cubão

Se dividirmos 1 placa em 10 partes iguais, temos 1 barra, que representa $\frac{1}{10}$ da placa e $\frac{1}{100}$ da placa e do cubão.



$\rightarrow$ $\frac{1}{100}$ Um centésimo do cubão

Se dividirmos 1 barra em 10 partes iguais, temos 1 cubinho que representa $\frac{1}{10}$ da barra, $\frac{1}{100}$ da placa e $\frac{1}{1000}$ do cubão.

$\rightarrow$ $\frac{1}{1000}$ Um milésimo do cubão

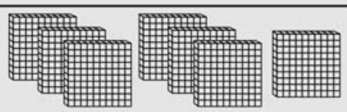
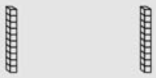
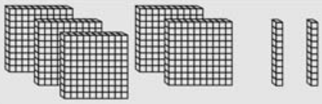
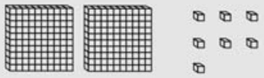
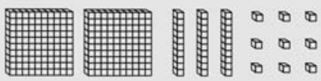
Fizemos aqui uma leitura diferente do material dourado. Quando trabalhamos com as operações no sistema decimal, o cubinho foi considerado como unidade.

A tabela abaixo resume as informações trabalhadas.

	Em relação à unidade (cubão)	Em relação à figura imediatamente maior
1 placa	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
1 barra	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$
1 cubinho	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10}$

ATIVIDADE

7. Dê a representação das figuras abaixo em fração decimal, considerando o cubão como 1 inteiro.

Formas	Fração
	
	
	
	
	
	

QUANDO AS FRAÇÕES SÃO NÚMEROS RACIONAIS...

Algumas vezes, a representação fracionária pode nos levar a acreditar que, como precisamos de dois números inteiros para formar a fração, ela não representa um número e sim dois números.

A própria leitura de uma fração induz a esse tipo de interpretação; por exemplo, se temos $\frac{5}{7}$, alguns professores e, conseqüentemente, seus alunos, lêem "cinco sobre sete". Se por um lado podemos acreditar que isso facilita a compreensão, identificando a fala com o registro, por outro contribui para que o aluno não identifique **uma** fração como **um número**.

O traço de fração indica uma divisão, e é com essa idéia que vamos trabalhar.

Para entender a fração como um número, vamos tomar como exemplo a fração $\frac{3}{4}$. Pense que esses $\frac{3}{4}$ são R$ 3,00 divididos igualmente por 4 pessoas. Quanto cada pessoa receberá?

Acompanhe o algoritmo da divisão com a descrição ao lado.

I	D	C	
3			4
3	0		0,75
	2	0	
		0	

I – Parte inteira
D – Décimos
C – Centésimos

– Não é possível dividir **3** inteiros por **4** e encontrar uma quantidade inteira; por isso vamos "desmanchar" nossos 3 inteiros em décimos.

– Como cada inteiro vale 10 décimos, então **3** inteiros correspondem a **30** décimos.

– Dividindo **30** décimos por **4**, obtemos 7 décimos e ainda sobram **2** décimos.

– Como cada décimo corresponde a 10 centésimos, então **2** décimos correspondem a **20** centésimos.

– Dividindo **20** centésimos por **4**, obtemos 5 centésimos e não sobra nenhum centésimo, ou seja, restará zero (**0**).

Cada pessoa receberá R$0,75, ou seja, 75 centavos. O número 0,75 é um **número decimal**, ou seja, trata-se uma outra forma de representar o número racional. Você pode estar se perguntando: mesmo após a divisão, eu continuo com um número que tem 3 algarismos (0, 7 e 5)? Mas ele é **um** número, assim como 234 tem três algarismos e representa apenas **um** número.

Vamos agora tomar outro exemplo de fração e fazer a divisão para ver o que acontece. Nosso exemplo, será a fração $\frac{1}{3}$.

I	D	C	
1			3
1	0		0,333...
	1	0	
		1	

I – Parte inteira
D – Décimo
C – Centésimos

– Não é possível dividir **1** inteiro por **3** e encontrar uma quantidade inteira por isso vamos "desmanchar" nosso **1** inteiro em décimos.

– 1 inteiro corresponde a **10** décimos.

– Dividindo **10** décimos por **3**, obtemos **3** décimos e ainda sobra **1** décimo.

– 1 décimo corresponde a **10** centésimos.

– Dividindo **10** centésimos por **3**, obtemos **3** milésimos e ainda sobra **1** milésimo.

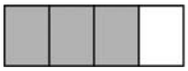
Esse processo vai se repetir indefinidamente, já que o resto **1** pode se transformar em **10** da ordem seguinte. Conseqüentemente, o resultado **3** do quociente da divisão também se repetirá indefinidamente.

Esse número, **0,333...**, resultado da divisão de **1** por **3**, é um número racional, com uma outra representação, chamada **dízima periódica**.

Os números decimais possuem quantidade finita de casas decimais, enquanto as **dízimas periódicas** possuem quantidade infinita de casas decimais, embora, a partir de um determinado ponto haja regularidade; a essa regularidade chamamos período.

As frações representam números racionais e podemos classificá-las. Existem algumas que representam números racionais menores que 1, outras que representam números maiores que 1 e outras que representam o próprio 1. Veja nos desenhos a seguir essas representações.

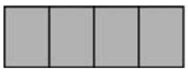
No primeiro caso, a parte considerada é menor que o todo, ou seja, 3 é menor que 4.



$\longrightarrow \frac{3}{4}$ e $3 \div 4 = 0{,}75$

75 centésimos
menor que 1 (um)

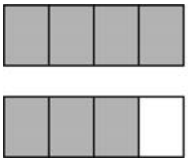
No segundo caso, a parte considerada é igual ao todo, ou seja, 4 igual a 4.



$\longrightarrow \frac{4}{4}$ e $4 \div 4 = 1$

Igual a 1 (um)

No terceiro caso, a parte considerada é maior que o todo, ou seja, 7 é maior que 4. Essa representação fracionária não pode lhe parecer estranha. Quando dividimos um todo em 4 partes, como no nosso exemplo, e consideramos 7 partes, precisamos ter um outro inteiro dividido em 4 partes para podermos tomar as 7 partes.



$\longrightarrow \frac{7}{4}$ e $7 \div 4 = 1{,}75$

Um inteiro e setenta e cinco centésimo maior que 1 (um)

Essas frações recebem nomes especiais; na tabela abaixo relacionamos essa nomenclatura com suas características.

Classificação das frações	Números	Relação entre Numerador e Denominador
Frações próprias	Números menores que 1	Numerador menor que denominador
Frações aparentes	Números iguais a 1	Numerador igual ao denominador
Frações impróprias	Números maiores que 1	Numerador maior que o denominador

ATIVIDADE

8. Em cada par de frações, diga qual é a maior:

a. $\frac{1}{2}$ e $\frac{171}{170}$ b. $\frac{103}{21}$ e $\frac{55}{22}$ c. $\frac{19}{5}$ e $\frac{19}{8}$ d. $\frac{145}{12}$ e $\frac{154}{13}$

!

Observe a parte inteira das frações. Você não precisa fazer muitas contas aqui!

AS METADES... SÃO QUASE NATURAIS

Já falamos que quando pensamos num exemplar para número nos remetemos, na maioria das vezes, a um número natural; porém, as metades também são bastante usuais. Podem ser utilizadas em diferentes contextos.

Tomemos as frações com denominador igual a dois, ou tomemos os meios, ou ainda as metades dos números.

Observe que os números inteiros 1, 2, 3, 4 e 5 de nosso exemplo podem ser representados como $\frac{2}{2}, \frac{4}{2}, \frac{6}{2}, \frac{8}{2}$ e, que são frações; logo, são também números racionais.

Números naturais	Representação fracionária	Representação decimal
1	$\frac{1}{2}$	0,5
2	$\frac{2}{2}$	1 ou 1,0
3	$\frac{3}{2}$	1,5
4	$\frac{4}{2}$	2 ou 2,0
5	$\frac{5}{2}$	2,5
6	$\frac{6}{2}$	3 ou 3,0
7	$\frac{7}{2}$	3,5
8	$\frac{8}{2}$	4 ou 4,0
9	$\frac{9}{2}$	4,5
10	$\frac{10}{2}$	5 ou 5,0
11	$\frac{11}{2}$	5,5

Observe que, quando encontramos a metade de números pares, os resultados são números inteiros e racionais; quando encontramos a metade de números ímpares, os resultados são números racionais e não inteiros.

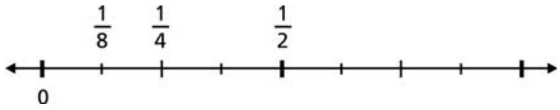
ATIVIDADE

9. Usando a tabela anterior, encontre:

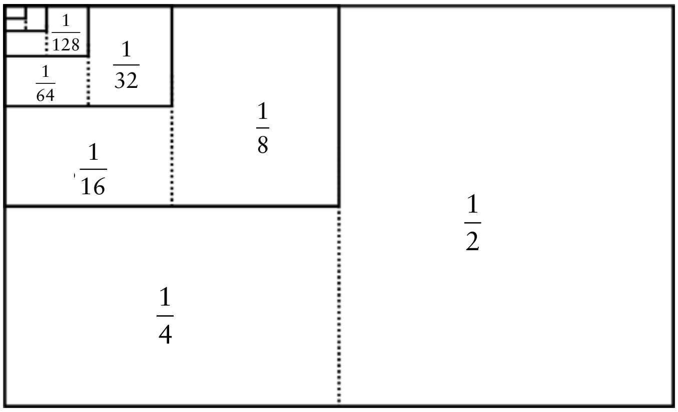
a. a metade da metade de 2
b. a metade da metade de 4
c. a metade da metade de 6
d. a metade da metade de 8
e. a metade da metade de 10

Como dissemos, pensar em metades pode nos remeter a idéias muito interessantes. Geralmente, a idéia comum de um conjunto infinito é aquela do "infinito para fora"; ou seja, pensamos no horizonte, ou mesmo no conjunto dos números naturais, em que não existe o maior número natural. Mas que tal pensarmos na idéia do "infinito para dentro"? Trace um segmento de reta de qualquer tamanho, marque o ponto médio desse segmento. Desse ponto até uma das extremidades temos outro segmento. Marque então o ponto médio desse novo segmento, e repita o processo até onde for possível. O registro do valor dessas metades em relação ao inteiro inicial gera a seqüência:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32} \ldots$$



Podemos nos remeter à mesma idéia usando um retângulo de papel e dobras, encontrando metade, metade da metade, metade da metade da metade... dobrando e escrevendo no retângulo a fração correspondente. Nesse caso, fica visível que esses tamanhos vão diminuindo.



ATIVIDADES

10. Nos dois casos, a soma desses segmentos ou retângulos resulta em 1. Discuta com seu tutor uma justificativa para esse fato.

11. Era uma vez um rei que deixou como herança uma barra de ouro para ser dividida igualmente entre seus dois filhos. Para que não houvesse grande perda de ouro, eles deveriam fazer um único corte contínuo. Pegue uma folha de papel retangular e descubra diferentes formas de dividi-la em partes iguais. Você poderá utilizar a tesoura para recortar a folha de papel que representa a barra de ouro.

RESPOSTA COMENTADA

Geralmente pensamos em dividir um retângulo em partes iguais conforme as figuras 1, 2, 3 e 4.

Figura 1

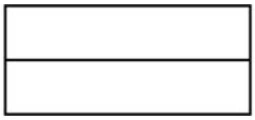


Figura 2

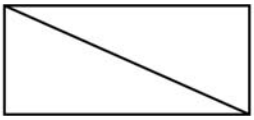


Figura 3

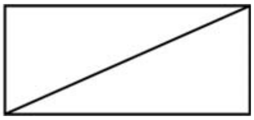
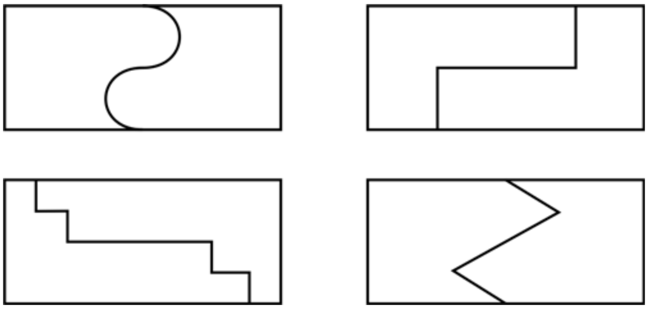


Figura 4

Saindo dos cortes usuais, podemos criar outros; é importante a preocupação com a simetria, pois nenhum dos dois herdeiros pode receber menos ouro que o outro. Observe que interessantes são esses outros cortes, em que exploramos a simetria. Além desses, crie você um outro corte.



AS FRAÇÕES ENVOLVENDO A IDÉIA DE COMPARAÇÃO

A idéia que envolve a representação de fração é bastante interessante.

Vamos imaginar uma determinada situação para você entender essa idéia.

Numa festa estiveram presentes 10 rapazes e 20 moças. Vamos **comparar** o número de rapazes e moças. Para isso, temos duas formas de fazê-lo:

Existem 10 rapazes para 20 moças ou 10 rapazes **está para** 20 moças ou $\frac{10}{20}$; a essa forma de representação chamamos **razão** entre o número de rapazes e moças.

Se simplificarmos $\frac{10}{20}$ teremos $\frac{1}{2}$, e dizemos então que para cada rapaz existem 2 moças.

! Se quisermos a razão entre o número de moças e rapazes (invertemos a ordem), a razão também muda. Teremos 20 está para 10, ou ; $\frac{20}{10}$ simplificando a fração por 10, encontramos $\frac{2}{1}$ e dizemos que para cada 2 moças existe um rapaz.

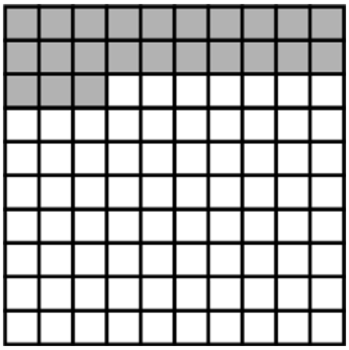
ATIVIDADE

12. Pesquise em livros didáticos duas situações que envolvem a idéia de fração como comparação. Registre o enunciado e resolva. Entregue esse trabalho ao seu tutor.

AS FRAÇÕES DE DENOMINADOR CEM SÃO... POR CENTO OU PORCENTAGEM

Uma representação de número racional bastante utilizada é a porcentagem. Como o próprio nome já diz, encontrar a porcentagem de um valor é encontrar quantos **por cento**, ou seja, é encontrar qual a parte correspondente num todo que está dividido em 100 partes. Por isso, a porcentagem é uma forma de representação das frações de denominadores 100.

Observando a figura ao lado podemos visualizar essa idéia.



Já sabemos representar a fração correspondente a essa figura. É a fração $\frac{23}{100}$, 23 partes em 100. Uma fração centesimal também é conhecida como número percentual quando utilizamos o símbolo %. Indicamos assim que $\frac{23}{100} = 23\%$.

Essa representação como porcentagem é muito comum em notícias de jornais impressos, em gráficos que aparecem nos telejornais.

Além disso, a grande importância da porcentagem é na função de operador, ou seja, utilizando o conceito de porcentagem você pode encontrar um valor correspondente a um porcentual muito utilizado no cálculo de juros e descontos. Em outras aulas vamos voltar a falar sobre esse assunto.

ATIVIDADES

13. Pesquise em jornais e revistas três notícias envolvendo números porcentuais. Escreva-as aqui.

____
____
____
____
____

14. Reescreva as frações que se seguem usando o símbolo %:

a. $\frac{8}{100} =$ b. 0,25 =

c. $= \frac{37}{100}$ d. $\frac{4}{10} =$

e. $\frac{1}{2} =$

ATIVIDADES

15. Considere a seqüência de números no retângulo, em que a regra é dividir por 2.

4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Agora descubra as regras e complete os retângulos com os demais termos das seqüências abaixo:

a.

9	3			$\frac{1}{9}$		

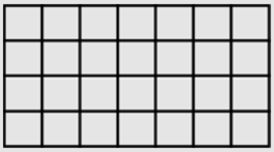
b.

64					$\frac{1}{16}$	

c.

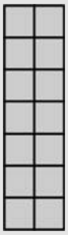
		10				$\frac{1}{1000}$

16. Considere o retângulo como 1 inteiro.



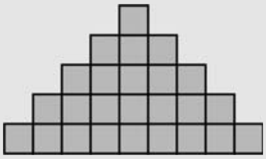
Que fração do retângulo representa cada figura abaixo?

a.

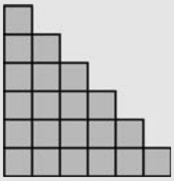


b.

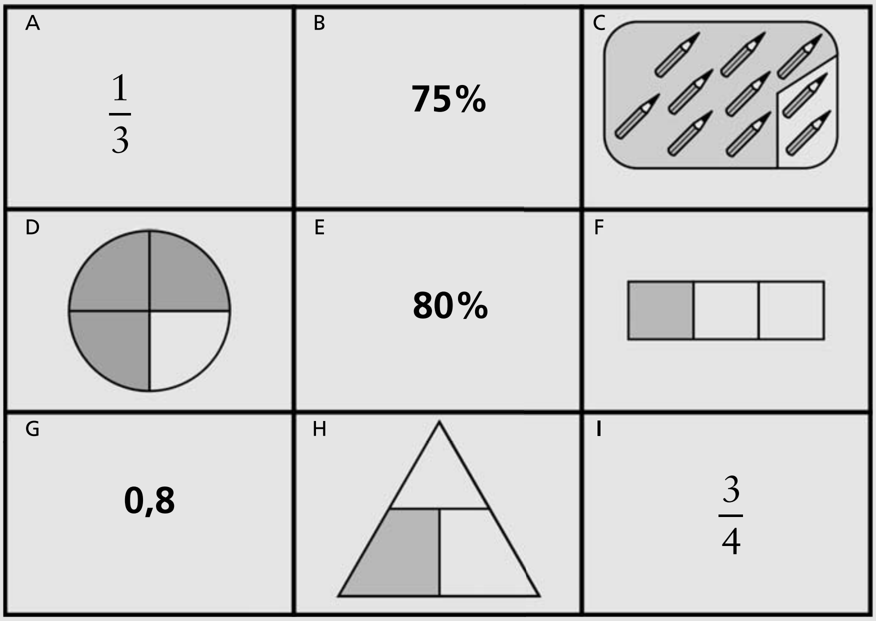
c.



d.

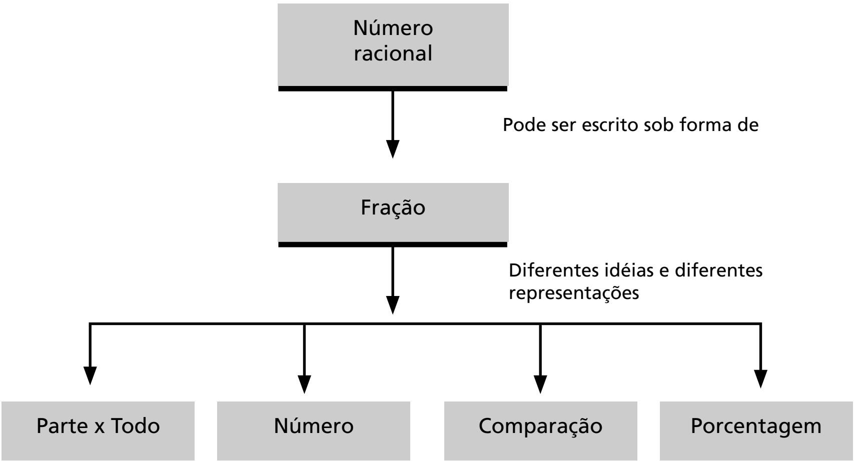


17. Na figura a seguir temos números racionais positivos representados de formas diferentes.
Indique todos os pares que representam o mesmo racional.



CONCLUSÃO

Para concluir, vamos fazer um mapa conceitual sobre os aspectos que envolvem o conceito de número racional e fração.



RESUMO

Nesta aula fizemos um "passeio" sobre as diferentes representações de um número racional. Discutimos o conceito relacionado à idéia de medida e vimos as frações como representação da relação entre parte e todo, sob diferentes características. Além disso, apresentamos as frações decimais com uso do material dourado, discutimos a importância de entender a fração como um número racional e destacamos diferentes formas de pensar as metades. Vimos também a fração, usando a idéia de comparação e identificamos a representação de fração como porcentagem.

AUTO-AVALIAÇÃO

Uma forma de você se auto-avaliar é verificar se atingiu os objetivos; ou seja, dê exemplos de números racionais utilizando as diferentes representações aqui apresentadas. Relacione essas diferentes representações, explorando as equivalências entre elas.

INFORMAÇÃO SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula você vai aprender a localizar os números racionais, utilizando as representações fracionária e decimal na reta numérica.

RESPOSTAS

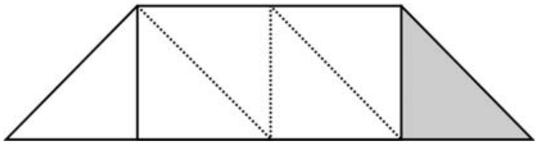
ATIVIDADE 2

a. 2   b. $\frac{1}{2}$ ou 0,5   c. $3\frac{1}{2}$ ou $\frac{7}{2}$ ou 3,5   d. $\frac{17}{10}$ ou $1\frac{7}{10}$ ou 1,7

ATIVIDADE 3

a. $\frac{1}{6}$ b. $\frac{7}{12}$ c. $\frac{5}{9}$ d. $\frac{10}{16}$ e. $\frac{1}{6}$

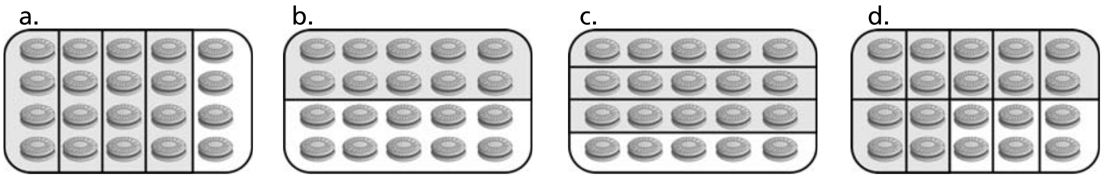
Observe que a figura não está dividida em partes iguais. Os dois triângulos são congruentes (medidas iguais) e as medidas da largura e do comprimento são iguais. Como no retângulo a largura mede o mesmo que a largura dos triângulos e o comprimento é a metade do comprimento do triângulo, podemos dividir a figura em partes iguais traçando três segmentos.



ATIVIDADE 4

Resposta pessoal

Usando os biscoitos:



ATIVIDADE 5

a. seis sétimos   f. quatro terços   l. sete décimos

b. cinco meios   g. três quartos   m. cinqüenta e três centésimos

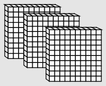
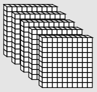
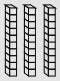
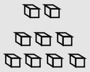
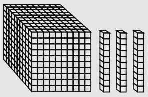
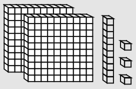
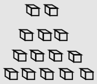
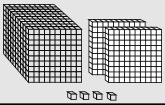
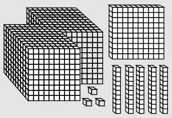
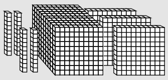
c. dois quintos   h. um sexto   n. duzentos e cinqüenta e seis centésimos

d. dois oitavos   i. dois doze avos   o. trinta e cinco milésimos

e. seis nonos   j. seis vinte avos   p. oitocentos e vinte e seis milésimos

ATIVIDADE 6

Indicação de figuras na tabela:

Quantidades	Representação com o material	Número Misto	Fração Decimal	Número Decimal			
				Unidade	Décimo	Centésimo	Milésimo
Um inteiro		–	–	1			
Um décimo		–		0,	1		
Um centésimo		–		0,	0	1	
Um milésimo		–	$\frac{1}{1000}$	0,	0	0	1
Três décimos		–	$\frac{3}{10}$	0,	3		
Cinco décimos		–	$\frac{5}{10}$	0,	5		
Três centésimos		–	$\frac{3}{100}$	0,	0	3	
Nove milésimos		–	$\frac{9}{1000}$	0,	0	0	9
Um inteiro e três centésimos		$1\frac{3}{100}$	$\frac{103}{100}$	1,	0	3	
Dois décimos, um centésimo e três milésimos		–	$\frac{213}{1000}$	0,	2	1	3
Catorze milésimos		–	$\frac{14}{1000}$	0,	0	1	4
Um inteiro, dois décimos e quatro milésimos		$1\frac{204}{1000}$	$\frac{1204}{1000}$	1,	2	0	4
Dois inteiros, um décimo, cinco centésimos e três milésimos		$1\frac{153}{1000}$	$\frac{2153}{1000}$	2,	1	5	3
Um inteiro, três décimos e quatro centésimos		$1\frac{34}{100}$	$\frac{134}{100}$	1,	3	4	

ATIVIDADE 7

Frações: $\frac{7}{10}, \frac{2}{100}, \frac{3}{1000}, \frac{52}{100}, \frac{107}{1000}, \frac{128}{1000}$ e $\frac{239}{1000}$

ATIVIDADE 8

a. $\frac{171}{170}$ b. $\frac{103}{21}$ c. $\frac{19}{5}$ d. $\frac{145}{12}$

ATIVIDADE 9

Encontrar a metade da metade significa que você terá que encontrar a metade duas vezes. Assim, a metade de 6 é 3 (olhe na tabela) e a metade de 3 é 1,5. Logo, a metade da metade de 6 é igual a 1,5. Com essas informações você já é capaz de fazer os outros casos propostos.

a. $\frac{1}{2}$ ou 0,5 b. 1 c. $\frac{3}{2}$ ou 1,5 d. 2 e. $\frac{5}{2}$ ou 2,5

ATIVIDADE 12

A resposta deve ser entregue ao tutor.

ATIVIDADE 13

Resposta do aluno.

ATIVIDADE 14

a. 8% b. 25% c. 37% d. 40% e. 50%

ATIVIDADE 15

a. Números que faltam, em ordem, 1, $\frac{1}{3}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$

b. Números que faltam, em ordem, 16, 4, 1, $\frac{1}{4}, \frac{1}{64}$,

c. Números que faltam, em ordem, 1000, 100, 1, $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}$

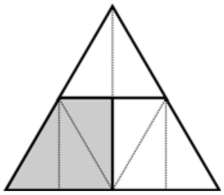
ATIVIDADE 16

a. $\frac{14}{28}$ b. $\frac{17}{28}$ c. $\frac{25}{28}$ d. $\frac{21}{28}$

ATIVIDADE 17

A e F, B e D, B e I, D e I, C e E, C e G, E e G.

Observe que o H não tem correspondente no quadro, pois apesar de aparentar 1 parte de 3, o triângulo não está dividido em partes iguais. Para saber que fração corresponde à parte pintada, temos de traçar linhas auxiliares. Observe:



Assim, a fração correspondente a H é $\frac{3}{8}$.

Como representar e comparar os números racionais na reta numérica?

AULA 4

Meta da aula

Representar e comparar os números racionais positivos na reta numérica.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- Localizar na reta numérica os números racionais positivos na forma fracionária e decimal.
- Comparar e ordenar os números racionais positivos, identificando as aparentes contradições nesta ordenação.
- Distinguir as diferentes e infinitas formas de representação dos números racionais positivos.
- Entender que entre dois números racionais positivos existem infinitos números racionais.

Pré-requisitos

Para acompanhar esta aula, você deve conhecer bem o significado dos números racionais e saber representá-los como frações e como números decimais. Se ainda tiver dúvidas a esse respeito, retorne às Aulas 2 e 3. Serão necessárias folhas de papel e uma régua milimetrada.

CONVERSA INICIAL

Nas aulas anteriores, você viu por que a humanidade precisou usar outros números além dos números naturais. Você conheceu a história da criação dos números racionais e de como ela está relacionada à necessidade da humanidade de medir e repartir.

Os números racionais, tanto na sua representação decimal como na sua representação fracionária, costumam ser responsáveis por muitas das dificuldades que as pessoas têm, durante toda a vida, com a Matemática.

É por isso que nesta aula vamos continuar refletindo e contribuindo para que você construa com seus alunos o conceito de número racional. Para isso, a representação geométrica dos números racionais em uma reta numérica é muito importante. Auxilia no entendimento do seu significado e permite comparar esses números.

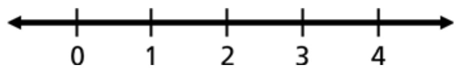
Vamos falar novamente sobre as diferentes formas de representação de um número racional e refletir se esta não é uma das razões das dificuldades que muitos alunos têm ao lidar com ele. Será muito importante que você tenha em mãos uma régua e uma folha de papel para conseguir visualizar e executar algumas das atividades que serão propostas durante a aula.

OS NÚMEROS RACIONAIS E A RETA NUMÉRICA

Nas duas aulas anteriores, você viu que o conceito dos números racionais está relacionado à medida, e assim fica interessante pensarmos em representar esses números numa reta numérica, você não acha?

Pegue uma folha de papel e uma régua, trace uma reta numerada e represente nela os números inteiros positivos. Considere o número zero como sendo a origem; defina a distância entre o 0 e o 1 como a unidade de medida e a represente, por exemplo, como 1cm, 10cm ou outra medida qualquer que você escolha.

Essa distância é denominada escala; ela é definida por você e deve ser adequada aos números que você pretende representar. Essa reta é denominada *reta numérica*, e é nela que fazemos a representação geométrica dos números racionais.



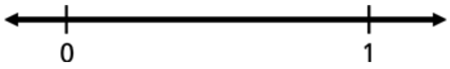
Observe a reta numérica, pegue sua régua e verifique qual a sua escala. Se ao medir a distância entre o 0 e o 1, ou entre dois inteiros quaisquer, você verificou que mede 1cm, essa escala é 1cm = 1.

Apesar de podermos construir uma reta numérica apenas para os números inteiros, você pode perceber que ela é adequada para representar muitos outros números, visto que uma reta é um conjunto infinitos de pontos.

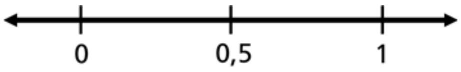
Vamos ilustrar de forma simples uma idéia que trouxe desdobramentos importantes e complexos dentro da Matemática: a essência da continuidade em um segmento de reta (a noção de que todos os pontos da reta podem representar algum número) se deve à possibilidade da sua divisão em duas partes.

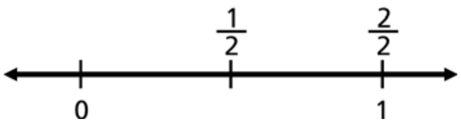
Esses espaços entre dois números inteiros podem ser preenchidos com outros conjuntos numéricos, e nesta aula vamos nos referir apenas ao conjunto dos números racionais positivos, que não preenchem completamente a reta numérica (existem ainda os números inteiros negativos, os irracionais e os números complexos, que não estão dentro dos objetivos desta disciplina).

Vamos iniciar preenchendo o espaço na reta entre o número 0 e o número 1.



Se você dividir esse espaço entre zero e um na metade, você poderá representar o número responsável por essa divisão de várias maneiras diferentes, mas neste momento vamos pensar apenas em duas: a forma decimal 0,5 ou a forma fracionária $\frac{1}{2}$. Lembre que a representação do número 1 como decimal seria 1,0, e que a representação do número 1 como fração poderia ser feita de infinitas formas, $\frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4}$ e assim por diante.

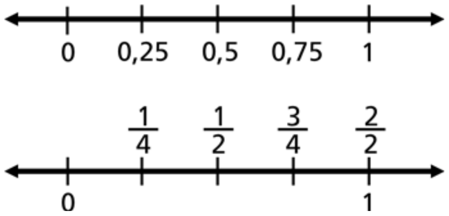




Essas novas retas possuem menos espaços sem representação numérica, mas ainda podemos preencher com números decimais o espaço entre 0 e 0,5 e o espaço entre 0,5 e 1. Vamos dividir esses espaços por dois novamente? Quais números representarão essas novas quantidades? Se você respondeu que são o 0,25 e o 0,75, você está certo.

Agora, vamos dividir o espaço na segunda reta entre o 0 e o $\frac{1}{2}$ e entre $\frac{1}{2}$ e 1 por dois novamente? Que números fracionários representarão essas novas quantidades? Veja sua representação na figura a seguir.

Como você pode perceber, poderíamos continuar a dividir cada segmento por dois indefinidamente. Isso porque a reta numérica é um conjunto de infinitos pontos e entre dois números racionais existe sempre um outro número racional.

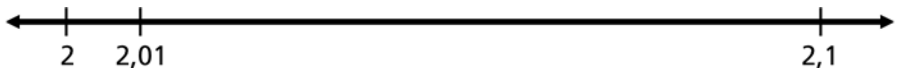


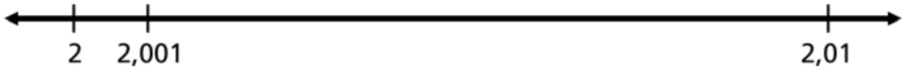
O que você achou dessa representação fracionária? Não seria mais natural se marcássemos na segunda reta os números $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{4}$? Por que poderíamos fazer isso? Você acertou se lembrou que $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ são **FRAÇÕES EQUIVALENTES** e que podem também ser representadas pelo número decimal 0,5.

> **FRAÇÕES EQUIVALENTES**
>
> São aquelas que representam a mesma quantidade e são obtidas se multiplicamos ou dividimos o numerador e o denominador por um mesmo número.

Da mesma forma, se marcássemos $\frac{2}{8}$, $\frac{4}{8}$ e $\frac{6}{8}$ não estaríamos representando as mesmas grandezas? Claro que sim, pois $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$, $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$ e $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$.

Uma outra característica importante dos números racionais, que pode ser verificada através da sua representação na reta numérica, é a não existência do número sucessor. Assim, ao querermos, por exemplo, encontrar o número racional mais próximo de 2 e pensássemos no 2,1, verificaríamos que entre o 2 e o 2,1 existe o 2,01 e que entre o 2 e o 2,01 existe o 2,001, e assim por diante. Essa idéia complementa a noção de continuidade de uma reta numérica, já referida anteriormente.





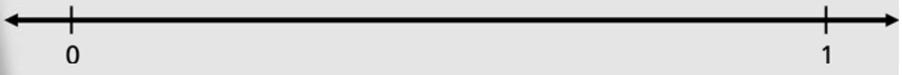
Com esses exemplos, discutimos três conceitos fundamentais relacionados à representação dos números racionais:

- A reta numérica possui infinitos pontos e, utilizando esta reta, representamos geometricamente os números racionais.
- Entre dois números racionais existem infinitos outros números racionais e por isso não faz sentido falar de sucessor de um número racional.
- Podemos representar os números racionais na reta usando a forma fracionária ou a forma decimal; além disso, cada número fracionário pode ser representado de infinitas maneiras.

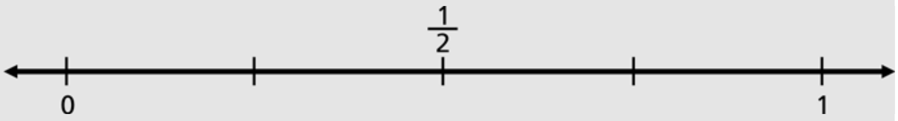
Nas atividades a seguir, você terá oportunidade de verificar se entendeu esses três conceitos. Acompanhe cada passo fazendo o que é sugerido numa folha de papel.

ATIVIDADES

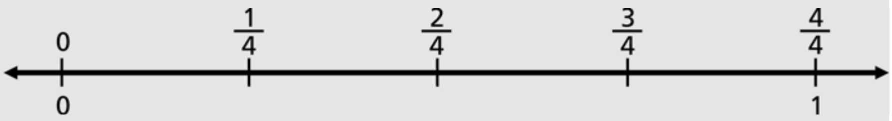
1. Represente um segmento de reta entre os números 0 e 1.



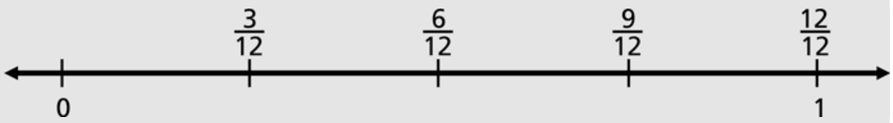
a. Agora divida esse segmento por dois e depois divida os dois segmentos resultantes dessa divisão por dois novamente.



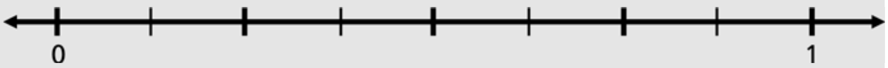
b. Veja como seria a representação de cada ponto dessa divisão por um número fracionário. Observe que você possui quatro segmentos de reta.



c. Agora vamos mostrar uma outra representação fracionária para esses mesmos números.



2 . Repita a atividade anterior de forma que as suas divisões parem quando você tiver dividido o segmento de 0 a 1 em oito partes iguais.



a. Como seria a representação de cada ponto dessa divisão por um número fracionário?

b. Dê outra representação fracionária para esses mesmos números.

3. Desenhe um segmento de reta apropriado para representar os seguintes números:

51,5, 50,5, 52,2 e 53.

b. Qual foi a escala que você definiu?

ORDENANDO E REPRESENTANDO OS NÚMEROS FRACIONÁRIOS NA RETA NUMÉRICA

Ao observar a reta numérica, notamos que a ordem a que os números racionais obedecem é crescente e da esquerda para a direita, razão pela qual se convencionou que a reta seja indicada com uma seta para a direita. Do ponto de vista geométrico, um número que está à esquerda é menor do que um número que está à direita na reta numerada.

No entanto, se os conceitos relacionados aos números racionais não estão bem entendidos, sua ordenação pode parecer contraditória. Uma criança pode se perguntar se 4 > 2 por que $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$? Se 2 < 3 < 4 < 5 < 6, por que $\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{6}$?

Uma forma de entendermos essa idéia é começarmos a ordenar as frações com numerador igual à unidade e utilizarmos a sua posição na reta numérica.

Quando ordenamos os números que não são inteiros, não podemos nos guiar pela grandeza dos algarismos, e sim pelo seu significado.

Lembre que isto é estranho para os alunos dos ciclos iniciais que estão familiarizados apenas com a idéia de contagem, com a representação dos números naturais e com sua "natural" ordenação.

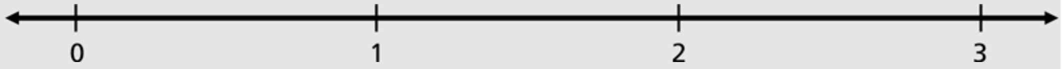
Se a unidade é dividida em duas, três, quatro, cinco e seis partes iguais respectivamente, os números fracionários $\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{6}$ expressam o tamanho de cada parte. Assim, é claro que quanto maior o número de partes, menor a quantidade.

$$\frac{1}{10} > \frac{1}{20} > \frac{1}{100}$$

ATIVIDADE

4. Para ordenar e marcar na reta numérica os números fracionários:

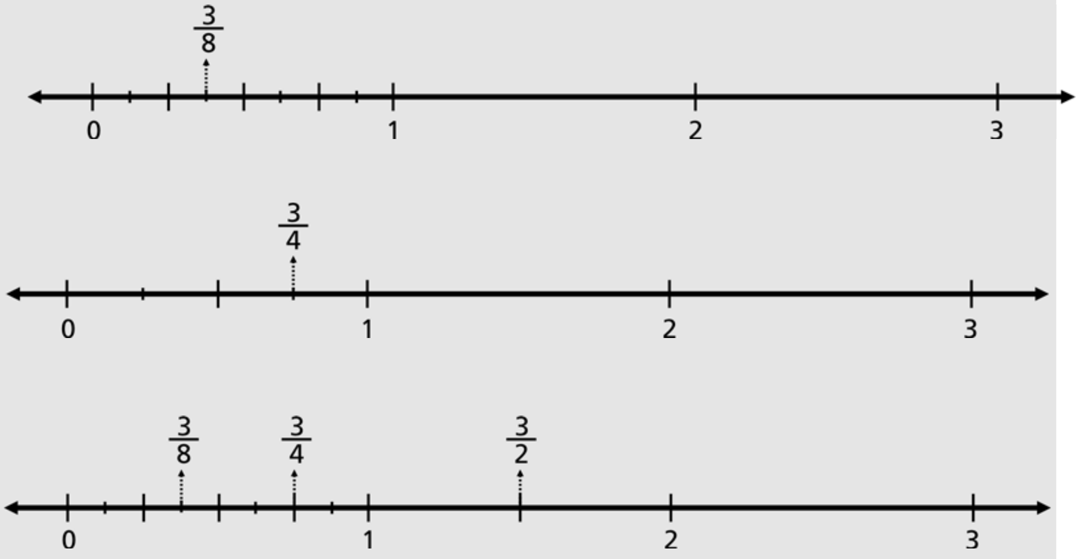
$\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{8}$ e 3, o que devemos fazer?



a. Como todas as frações possuem o mesmo numerador, a ordenação é bem intuitiva, ou seja, quanto maior o denominador, menor o número, não é verdade? $\frac{3}{8} < \frac{3}{4} < \frac{3}{2} < 3$

Agora que já sabemos a sua ordem, como marcá-los na reta? Se partirmos do 0, que é a origem, para irmos marcando cada um deles, teríamos que ir utilizando divisões de tamanhos diferentes, ou seja, para marcar o $\frac{3}{8}$ precisamos dividir o segmento entre o 0 e o 1 em oito pedaços e marcarmos o terceiro; depois, para marcarmos o $\frac{3}{4}$, precisamos dividir em quatro pedaços.

Acompanhe no seu papel a construção dos segmentos abaixo.



É importante que você tenha acompanhado essa forma de representar na reta as frações e a entenda, mas não seria muito mais fácil transformá-las em números decimais? Esse é um dos motivos por que a reta numérica é mais utilizada para a representação dos números racionais em forma decimal.

A reta numérica é um instrumento muito importante; precisamos ter muita familiaridade com ela e com a representação dos números racionais. Você deve perceber que para cada caso a escolha da escala e dos números que serão representados é sua, e, por isso, não é única.

Nas atividades anteriores, os números que queremos representar na reta estão em forma fracionária e possuem o mesmo denominador; podemos ordená-los, encontrando uma escala para representá-los.

Quando os números racionais possuem o mesmo numerador mas denominadores diferentes, podemos analisar e entender "o tamanho" do número que eles estão representando. Por outro lado, se transformamos em números decimais, podemos visualizar este "tamanho".

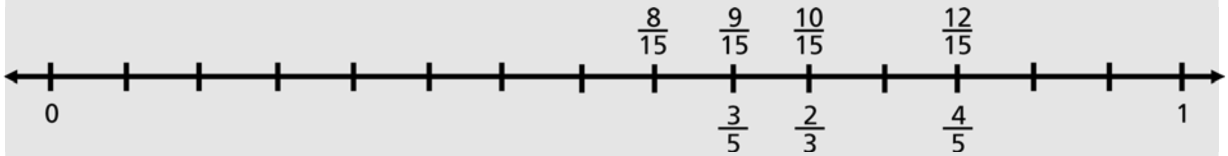
Agora, se eles possuem numeradores e denominadores diferentes, tanto a ordenação quanto a representação na reta numérica podem apresentar maiores dificuldades.

Nesse caso, você tem dois caminhos a seguir:

- Transformar todos os números fracionários em frações equivalentes com o mesmo denominador ou
- Transformar todos os números fracionários em decimais.

ATIVIDADE

5. Para ordenar e representar em uma reta numérica os números fracionários $\frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}$ e $\frac{4}{5}$ precisamos, em primeiro lugar, achar as frações equivalentes de mesmo denominador. Perceba que o menor denominador comum é o 15, e as frações equivalentes seriam: $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$, $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$, $\frac{8}{15}$ e $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$ e colocadas em ordem ficariam: $\frac{8}{15}, \frac{9}{15}, \frac{10}{15}$ e $\frac{12}{15}$.



E A ORDENAÇÃO E COMPARAÇÃO DOS NÚMEROS DECIMAIS?

A contradição aparente que acontece na ordenação dos números fracionários, que muitas vezes confunde os que estão começando a aprender o significado dos números, também acontece com a representação decimal dos números racionais. Por exemplo, um iniciante na aprendizagem dos números decimais pode imaginar que 1,1 é menor do que 1,008 ou que 2,4 é menor do que 2,36.

As crianças costumam dizer que 1,008 é maior que 1,1 porque a quantidade de algarismos usados no primeiro caso é maior.

Para ajudar o entendimento dos números decimais é preciso reforçar duas idéias: a primeira é de que entre dois números decimais quaisquer existe sempre um outro número decimal que se encaixa ali. A segunda idéia é a de que o significado da grandeza do número decimal parece ser diferente do significado do número natural, mas não é.

> A única diferença na comparação entre os números decimais e os números naturais é que estes últimos são compostos por uma parte inteira e uma parte fracionária que é menor do que o inteiro.

Ao compararmos dois números decimais devemos:

1 – Comparar as suas partes inteiras (antes da vírgula). Se os números possuem partes inteiras diferentes, essa comparação é muito fácil: quanto maior a parte inteira maior é o número.

2 – Se os números possuem a parte inteira igual, então a comparação se dá através da sua parte fracionária.

3 – Para facilitar a comparação entre as partes fracionárias, iguale os seus números de algarismos completando com zeros.

Assim, se queremos ordenar os números 1,05; 2,0; 1,005 e 1,5, devemos, em primeiro lugar, identificar que o 2,0 é o maior de todos porque possui o maior inteiro. Para ordenar os três números restantes devemos escrevê-los deixando todos com três casas decimais, ou seja, 1,050, 1,005 e 1,500; e agora ordenamos, observando apenas as partes decimais. Como 005 < 050 < 500, então 1,005 < 1,050 < 1,500 < 2,0

ATIVIDADE

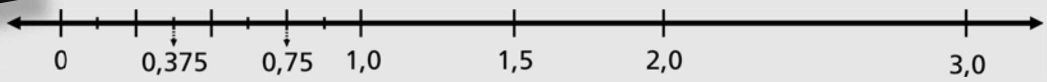
6. Agora, ordene você os números decimais 5,001, 6,12, 5,01, 5,012, 4,0 e 5,0.

As atividades a seguir têm por objetivo que você adquira maior naturalidade na representação do número decimal em uma reta numérica e saiba trabalhar com várias escalas.

Essa representação pode ser bastante útil. Algumas vezes você poderá se deparar com problemas de medida e ter que utilizar réguas, fitas métricas ou outros instrumentos auxiliares cuja representação é feita através de números decimais ou de números inteiros que representam múltiplos e submúltiplos do metro.

ATIVIDADE

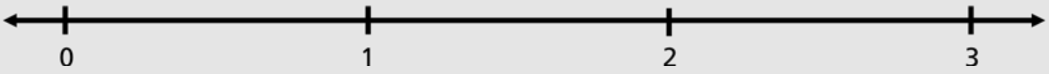
7. Vamos, em primeiro lugar, representar em uma reta numérica os números fracionários da Atividade 2 depois de transformados em números decimais, usando uma calculadora para agilizar seu trabalho.



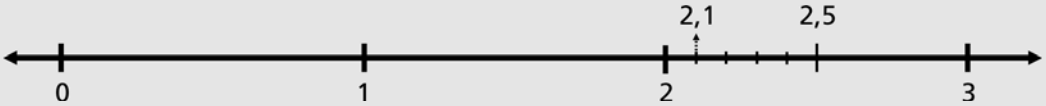
$\frac{3}{8} = 0,375$, $\frac{3}{4} = 0,75$, $\frac{3}{2} = 1,5$ e 3 = 3,0

A comparação entre números decimais, por se aproximar da comparação de números naturais, torna mais fácil sua representação na reta. Você concorda com essa afirmação? Converse com seu tutor e com outros colegas sobre isso.

Vamos representar uma reta numérica e marcar os números inteiros de 0 a 4, usando a escala 2cm = 1.



Marque nesta reta os números decimais 2,5 e 2,1. Preste atenção na escala. Se uma distância de 2cm representa uma medida de 1 unidade, isto significa que a distância de 1cm representa 0,5 unidades e na linguagem decimal 0,5 = 5 décimos. A distância na reta numérica entre 2 e 2,1 será de 0,2cm, ou seja, a nossa escala é de 0,2cm = 0,1, que se lê 1 décimo.



d. Agora, se quisermos marcar na reta numérica os números 2,02, 2,04 e 2,06, precisaríamos fazer uma outra reta numérica a fim de conseguir ver mais claramente o intervalo entre 2 e 2,1.

Para isso, precisamos ampliar a nossa escala. Que tal fazermos agora uma escala em que uma distância de 10cm representará 0,1 ou 1 décimo?

Se você entende a relação entre a distância e a escala em uma reta numérica, você conseguirá escolher em cada caso qual seria a escala apropriada para representar seus números. Esse tipo de atividade deve ser feito muitas vezes com seus alunos. Assim, não importa o "pedaço da reta" ou que intervalos de números ele tenha que representar, isso será feito com maior flexibilidade.

CONCLUSÃO

Esta aula apresentou diversas particularidades dos números racionais, com o objetivo de complementar o seu conhecimento a respeito desses números tão "especiais". Observe que a palavra especial foi utilizada de forma proposital e merece nossa reflexão: os números racionais são considerados especiais porque não são bem entendidos, assim como pode acontecer com uma criança ou um adolescente especial.

Queremos, portanto, que ao final desta aula você esteja entendendo mais as especificidades desse número e seja capaz de contribuir para a redução das dificuldades que envolvem esse conceito ampliado de número.

Espero que você esteja apto a trabalhar com a reta numérica e com os diversos tipos de escalas que podem ser nela definidas e a utilize sempre que ela for ajudar na representação ou ordenação de medidas.

RESUMO

A partir da representação dos números racionais numa reta numérica, é possível discutir e apresentar diversos conceitos relacionados a esses tipos de números. Sabemos da existência de infinitos números entre dois números racionais e as aparentes contradições existentes na sua ordenação, e a inexistência do número sucessor. Dessa forma, a definição de uma escala na representação de uma reta é muito importante para a aprendizagem dos números racionais.

AUTO-AVALIAÇÃO

Nesta aula, você apenas complementou seus conhecimentos a respeito dos números racionais e de suas representações na reta numérica. Se você sentiu alguma dificuldade nessa representação, é aconselhável retornar às duas aulas anteriores para que os conceitos a respeito desses números fiquem mais claros. As atividades propostas partiram de números que poderiam ser mais difíceis de serem representados. Se você sentir necessidade de atividades mais simples, comece com marcações de frações do tipo $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$ etc. e com números decimais 1,2; 1,3; 2,4 etc. Não se esqueça de que quando você for trabalhar esses conceitos com seus alunos, deve começar com representações mais simples.

INFORMAÇÕES SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula você continuará a ver os números racionais na sua forma fracionária e verá como fazer as operações de soma e subtração com eles.

Frações... Uma das representações dos números racionais. Como adicionar e subtrair frações?

AULA 5

Meta da aula

Mostrar e definir o significado da adição e subtração de frações.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- Identificar frações equivalentes.
- Adicionar e subtrair frações com o mesmo denominador.
- Adicionar e subtrair frações com denominadores diferentes.
- Aplicar adição e subtração de frações na resolução de problemas.

Pré-requisitos

Para acompanhar esta aula você deverá saber identificar o número racional positivo na sua forma fracionária em diferentes contextos e conhecer o seu significado envolvendo as diferentes idéias abordadas nas Aulas 2, 3 e 4.

INTRODUÇÃO

Dentro da escola, toda vez que ampliamos nossa visão de número, ou seja, sempre que somos apresentados a um outro conceito de número e suas representações, como conseqüência, apresentamos as operações possíveis de realizar com essa outra representação. Por isso, nas Aulas 2 e 3 você conheceu os números racionais em sua forma fracionária, e nesta aula falaremos sobre como realizar as operações de adição e subtração com frações.

Seguindo a mesma proposta de quando aprendemos a operar números naturais, estaremos preocupados que você compreenda o significado das operações e não apenas reproduza o algoritmo.

QUANDO AS FRAÇÕES TÊM O MESMO DENOMINADOR

> ! Lembre-se de que o denominador é aquele que dá o nome à fração.

Existem adições de frações que envolvem frações de mesmo denominador, isto é, frações de mesmo tipo, com o mesmo nome.

Vamos considerar como exemplo uma situação-problema:

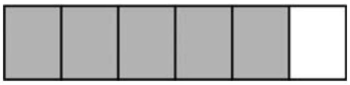
Sr. João resolveu repartir entre sua esposa e seu único filho uma barra de ouro que tinha herdado do seu pai. Decidiu que essa divisão não seria em partes iguais. Daria $\frac{3}{6}$ da barra para a esposa e $\frac{2}{6}$ para seu filho, ficando com o restante. Qual a fração que representa a parte da barra de ouro que Sr. João deu, no total, para sua esposa e para seu filho?

Para resolver a situação-problema proposta, temos que adicionar $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}$, ou seja, três sextos (três partes de seis), com dois sextos (duas partes de seis), que é igual a $\frac{5}{6}$, ou seja, cinco sextos (cinco parte de seis).

Representando cada uma das frações utilizando as barras, teremos:

$\frac{3}{6}$ Três partes de seis

$\frac{2}{6}$ Duas partes de seis



$\frac{5}{6}$ Cinco partes de seis

Logo: $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$

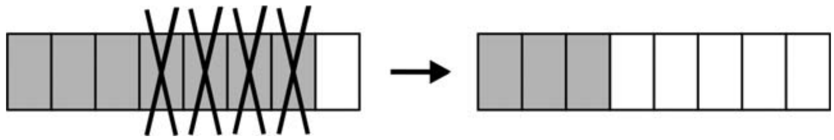
Portanto, Sr. João deu para sua esposa e para seu filho $\frac{5}{6}$ da barra de ouro, restando apenas $\frac{1}{6}$ para ele.

Vamos considerar outra situação-problema:

Regina comprou uma barra de chocolate e deu $\frac{7}{8}$ dela para Mariana. Mariana, por sua vez, deu $\frac{4}{8}$ da barra de Regina para Lúcia. Qual a fração que representa a parte da barra de chocolate que sobrou para Mariana?

Neste caso, o inteiro considerado é a barra de chocolate de Regina. Para resolvermos a situação proposta, temos que subtrair as frações $\frac{7}{8} - \frac{4}{8}$; ou seja, retirar de sete oitavos (sete partes de oito), quatro oitavos (quatro partes de oito), encontrando como resultado $\frac{3}{8}$, isto é, três oitavos (três partes de oito).

Representando cada uma das frações utilizando as barras, teremos:



$$\frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{3}{8}$$

Parte da barra que Regina deu para Mariana

Parte da barra que Regina deu para Lúcia

Parte da barra que sobrou para Mariana

Restou para Mariana $\frac{3}{8}$ da barra de chocolate que Regina lhe deu inicialmente.

ATIVIDADE

1. Calcule:

a) $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} =$

b) $\frac{10}{13} - \frac{3}{13} =$

c) $\frac{9}{16} - \frac{4}{16} =$

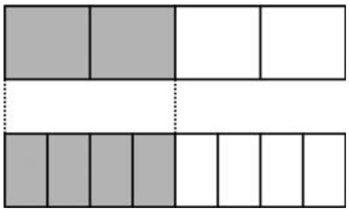
d) $\frac{5}{11} + \frac{4}{11} =$

O QUE SÃO FRAÇÕES EQUIVALENTES?

> **!** O conceito de frações equivalentes já foi abordado na Aula 2, no item Descobrindo a fração, até a sua escrita decimal, e na Atividade 4.
> Uma ação interessante na sua rotina de estudo é voltar à Aula 2, especificamente no item citado, após estudar esse item da Aula 5.

Entender o que são frações equivalentes é o ponto fundamental para a compreensão das operações de adição e subtração com frações de denominadores diferentes e para poder comparar frações. Usaremos, inicialmente, a idéia de parte/todo para falar sobre frações equivalentes.

Considere as frações $\frac{2}{4}$ e $\frac{4}{8}$. É importante que essas frações sejam consideradas a partir de um mesmo inteiro.



Observe que nestes inteiros, embora tenham sido divididos em partes diferentes, as partes consideradas são equivalentes.

Uma forma de verificar se duas frações são equivalentes é simplificá-las. Para isso, basta verificar se o numerador e denominador da fração podem ser divididos por um mesmo número, reduzindo até uma **FRAÇÃO IRREDUTÍVEL**.

> **FRAÇÃO IRREDUTÍVEL**
> É aquela que não pode mais ser simplificada, ou seja, o numerador e o denominador são números primos entre si.
> Lembre-se de que dois números são primos entre si quando o único divisor comum aos dois for 1. Por exemplo, 15 e 16 são primos entre si.

Assim, $\frac{2}{4} = \frac{2 \div 2}{4 \div 2} = \frac{1}{2}$ e $\frac{4}{8} = \frac{4 \div 4}{8 \div 4} = \frac{1}{2}$

Caso as frações irredutíveis encontradas sejam iguais, (como no exemplo citado em que, as duas frações correspondem à metade do todo), elas são equivalentes.

Uma outra forma de verificar se as frações são equivalentes é tornar os denominadores iguais. No exemplo acima, em que queremos verificar se $\frac{2}{4}$ e $\frac{4}{8}$ são equivalentes, podemos proceder da seguinte forma:

Como 8 é múltiplo de 4, fazemos $8 \div 4 = 2$. Então multiplicamos o numerador e denominador da fração $\frac{2}{4}$ por 2. Assim, teremos:

$$\frac{2x2}{4x2} = \frac{4}{8}$$

Logo, as duas frações são equivalentes.

Observe que, simplificando ou multiplicando, para verificar se duas frações são equivalentes, precisamos torná-las iguais.

Vamos ver um exemplo em que as frações não são equivalentes. Considere as frações $\frac{2}{4}$ e $\frac{2}{8}$.

1) Simplificando, teremos:

$$\frac{2 \div 2}{4 \div 2} = \frac{1}{2} \qquad \frac{2 \div 2}{8 \div 2} = \frac{1}{4}$$

Como as frações encontradas são diferentes e irredutíveis, podemos afirmar que $\frac{2}{4}$ e $\frac{2}{8}$ não são frações equivalentes.

De outra maneira...

2) Multiplicando, teremos:

$$\frac{2x2}{4x2} = \frac{4}{8}$$

Como a fração encontrada tem o mesmo denominador e é diferente da outra fração $\left(\frac{2}{8}\right)$, dizemos que as frações não são equivalentes.

ATIVIDADE

2. Verifique, pelo processo que julgar mais conveniente, se as frações abaixo são equivalentes.

a. $\frac{1}{3}$ e $\frac{6}{9}$

b. $\frac{2}{6}$ e $\frac{6}{9}$

c. $\frac{4}{9}$ e $\frac{6}{12}$

d. $\frac{3}{15}$ e $\frac{4}{20}$

e. $\frac{3}{10}$ e $\frac{6}{30}$

ATIVIDADE

3. Juliana e Carlos inventaram uma brincadeira de frações. Cada um retira de uma urna um papel, onde está escrita uma fração. Ganha quem tiver a fração maior.

Diga, em cada caso, quem é o ganhador.

a. Juliana retirou a fração $\frac{2}{5}$ e Carlos $\frac{4}{10}$.

b. Juliana retirou a fração $\frac{1}{7}$ e Carlos $\frac{3}{14}$.

c. Juliana retirou a fração $\frac{4}{5}$ e Carlos $\frac{6}{10}$.

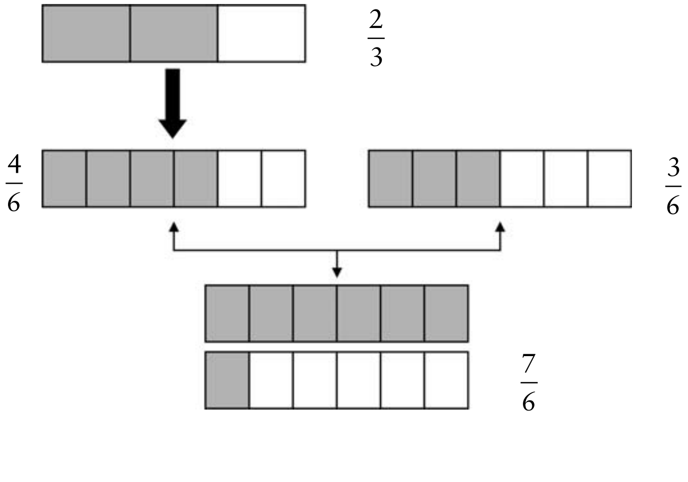
d. Juliana retirou a fração $\frac{6}{21}$ e Carlos $\frac{4}{14}$.

QUANDO AS FRAÇÕES TÊM DENOMINADORES DIFERENTES...

Vamos abordar a adição e a subtração de frações com denominadores diferentes. Como já dissemos, é fundamental que você saiba o que são frações equivalentes e como torná-las equivalentes para compreender o conceito de adição e subtração de frações com denominadores diferentes.

Vamos dividir em **três casos**, que distinguem as relações entre os denominadores.

1º caso – Quando os denominadores são múltiplos uns dos outros. Por exemplo, considere a soma $\frac{2}{3}+\frac{3}{6}$. Para somar essas duas frações, precisamos que elas sejam do mesmo tipo, isto é, que tenham o mesmo denominador. Como 6 é múltiplo de 3, temos que $6 \div 3 = 2$.



Portanto, devemos transformar a fração $\frac{2}{3}$ numa outra equivalente com denominador 6. Fazemos: $\frac{2x2}{3x2} = \frac{4}{6}$. Retomando a adição, fazemos:

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{7}{6}$$

ATIVIDADE

4. Aproveite as representações das frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{6}$ e dê o valor de $\frac{2}{3} - \frac{3}{6}$.

2º caso – Quando os denominadores não são múltiplos, mas são primos entre si. Por exemplo, $\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$.

Neste caso, temos que procurar um número que seja simultaneamente múltiplo de 5 e de 4 para transformar as frações em outras equivalentes, que tenham o mesmo denominador. Para isso, vamos descrever os múltiplos desses dois números.

M(4) = {**0**, 4, 8, 12, 16, **20**, 24, 28, 32, 36, **40**, 44...}

M (5) = {**0**, 5, 10, 15, **20**, 25, 30, 35, **40**, 45, 50, 55...}

Observe que 0, 20 e 40 são múltiplos comuns de 4 e 5; se continuássemos essa enumeração, encontraríamos outros múltiplos. Geralmente usamos o 20, que é o **menor múltiplo comum** diferente de zero, mais conhecido como MMC.

!

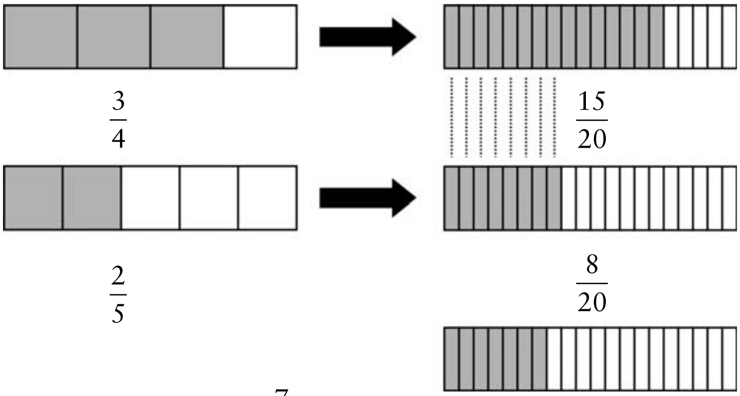
Podemos utilizar qualquer outro múltiplo e encontraremos como resposta frações equivalentes.

Utilizando o 20 como múltiplo comum entre 4 e 5, teremos que $20 \div 4 = 5$ e $20 \div 5 = 4$.

$$\frac{3x5}{4x5} = \frac{15}{20} \qquad \frac{2x4}{5x4} = \frac{8}{20}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{15}{20} - \frac{8}{20} = \frac{7}{20}$$

Veja estas transformações nos desenhos que seguem.



Restam $\frac{7}{20}$

Considerando agora o 40 como múltiplo comum, teremos: $40 \div 4 = 10$ e $40 \div 5 = 8$

$$\frac{3x10}{4x10} = \frac{30}{40} \qquad \frac{2x8}{5x8} = \frac{16}{40}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{30}{40} - \frac{16}{40} = \frac{14}{40}$$

Usando o 20 (menor múltiplo comum), encontramos $\frac{7}{20}$ como resultado. Usando o 40 (outro múltiplo comum), encontramos $\frac{14}{40}$.

Observe que essas duas frações são equivalentes, pois simplificando a fração $\frac{14}{40}$ teremos: $\frac{14 \div 2}{40 \div 2} = \frac{7}{20}$ =

3º caso – Quando os denominadores **não** são múltiplos e **não** são primos entre si.

$$\frac{3}{12}+\frac{4}{15}=$$

M (12) = {0, 12, 24, 36, 48, **60**, 72, 84...}

M (15) = {0, 15, 30, 45, **60**, 75, 90...}

Assim, 60 ÷ 12 = 5 e 60 ÷ 15 = 4

Transformando as frações em frações equivalentes:

$$\boxed{\frac{3\text{x}5}{12\text{x}5}=\frac{15}{60}} \qquad \boxed{\frac{4\text{x}4}{15\text{x}4}=\frac{16}{60}}$$

$$\frac{3}{12}+\frac{4}{15}=\frac{15}{60}+\frac{16}{60}=\frac{31}{60}$$

ATIVIDADE

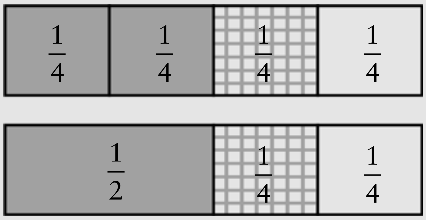
5. Numa escola, os alunos da 4ª série podiam escolher estudar uma das línguas: Inglês, Francês ou Espanhol. Metade dos alunos dessa turma escolheu Inglês, e um quarto dos alunos escolheu Espanhol. Que fração da turma escolheu estudar Francês?

Resposta comentada

Metade dos alunos estuda Inglês; isso corresponde a $\frac{1}{2}$ *dos alunos.*

Um quarto dos alunos estuda Espanhol; isso corresponde a $\frac{1}{4}$ *dos alunos.*

Para resolver esse problema, você pode vê-lo graficamente.



Dessa forma podemos perceber que $\frac{1}{4}$ dos alunos (parte não sombreada) escolheu Francês.

Podíamos utilizar as operações com frações. Assim, faríamos: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$; como um inteiro corresponde a $\frac{4}{4}$, então:

$\frac{4}{4}-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$, fração que corresponde ao número de alunos que escolheu estudar Francês.

ATIVIDADE

6. Roberta está lendo um livro. No primeiro dia, leu $\frac{1}{4}$ do livro. Ela gostou tanto da história que, no 2º dia, leu mais $\frac{2}{5}$ do livro. Que fração do livro Roberta leu nos dois primeiros dias?

USAR OU NÃO O MMC?

! Encontramos usualmente nos livros didáticos a expressão MMC (Mínimo Múltiplo Comum) com o mesmo conceito de Menor Múltiplo Comum.

Como você viu anteriormente, utilizar o menor múltiplo comum ou outro múltiplo não faz diferença para adicionar ou subtrair frações.

Observe que o conjunto de múltiplos de um número é obtido multiplicando o número considerado pelos números naturais.

M(4) = {0, 4, 8, 12, 16, **20**, 24, 28, 32, 36, **40**, 44...}

4 x 0	4 x 1	4 x 2	4 x 3	4 x 4	4 x 5	4 x 6	4 x 7	4 x 8	4 x 9	4 x 10	4 x 11
0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44

Tabela 5.1: Múltiplos de 4

M (5) = {0, 5, 10, 15, **20**, 25, 30, 35, **40**, 45, 50, 55...}

5 x 0	5 x 1	5 x 2	5 x 3	5 x 4	5 x 5	5 x 6	5 x 7	5 x 8	5 x 9	5 x 10	5 x 11
0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55

Tabela 5.2: Múltiplos de 5

Existe um dispositivo para encontrar o MMC que deve ser visto como mais um recurso, e não o único.

Vamos encontrar o MMC entre 4 e 5 usando o dispositivo.

4 , 5	2
2 , 5	2
1 , 5	5
1 , 1	2 x 2 x 5 = **20**

$4 \div \mathbf{2} = 2$
$2 \div \mathbf{2} = 1$
$5 \div \mathbf{5} = 1$

1) Do lado esquerdo do traço colocamos os números considerados.

2) Do lado direito, utilizamos números primos que sejam divisores de pelo menos um dos números considerados.

3) Esse processo de escolha dos números primos e divisão repete-se até encontrarmos 1.

4) Os números que ficam do lado direito, quando multiplicados, resultam no Mínimo Múltiplo Comum (MMC).

Vejamos o que acontece com os múltiplos de 12 e 15:

M (12) = {0, 12, 24, 36, 48, **60**, 72, 84...}

12 x 0	12 x 1	12 x 2	12 x 3	12 x 4	12 x 5	12 x 6	12 x 7
0	12	24	36	48	**60**	72	84

Tabela 5.3: Múltiplos de 12

M (15) = {0, 15, 30, 45, **60**, 75, 90...}

15 x 0	15 x 1	15 x 2	15 x 3	15 x 4	15 x 5	15 x 6
0	15	30	45	60	75	90

Tabela 5.4: Múltiplos de 15

Vamos encontrar o MMC entre 12 e 15

12 , 15	2
6 , 15	2
3 , 15	3
1 , 5	5
1 , 1	2 x 2 x 3 x 5 = **60**

$12 \div \mathbf{2} = 6$
$6 \div \mathbf{2} = 3$
$3 \div \mathbf{3} = 1$
$15 \div \mathbf{2} = 5$
$5 \div \mathbf{5} = 1$

ATIVIDADE

7. Calcule:

a) $\frac{3}{11} + \frac{5}{20} =$

b) $\frac{5}{6} - \frac{1}{3} =$

c) $\frac{8}{9} - \frac{2}{3} =$

d) $\frac{1}{7} + \frac{9}{14} =$

Adicionar e subtrair frações envolve uma série de conceitos e definições. Por isso julgamos interessante trazer esclarecimentos sobre alguns termos utilizados.

E HÁ NÚMEROS QUE SÃO PRIMOS...

O dispositivo para encontrar o MMC usa, do lado direito do traço, números que são chamados primos. Esses números são assim chamados porque só possuem dois divisores, ou seja, são **DIVISÍVEIS** por 1 e por ele mesmo.

> **NÚMEROS DIVISÍVEIS**
> São números inteiros que, ao efetuarmos a divisão do maior número pelo menor, o resto é zero. Por exemplo, 15 é divisível por 3, pois 15 ÷ 3 = 5 e deixa resto zero.

Considerando o conjunto dos números naturais N = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8...}, os números primos são obtidos testando essa propriedade em cada um deles. O 1 não é considerado primo, pois possui apenas um divisor. O menor número primo é o 2; também é o único número primo par, pois qualquer outro número par será divisível por 2 além de ser divisível por um e por ele mesmo.

Assim, os primeiros 10 números primos são: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

É importante você saber que qualquer número inteiro que não seja primo pode ser decomposto em números primos; ou seja, qualquer número pode ser escrito como produto de números primos.

Veja alguns exemplos:

12 = 2 x 2 x 3

15 = 3 x 5

76 = 2 x 2 x 19

ATIVIDADE

8. Entre os números abaixo, indique:

		45		
		17		
23	36		20	97
		1		
39	6		5	63
		12		
	2		72	
		38		
		54		

a) um número primo

b) um número primo de dois algarismos

c) o menor número primo

d) o maior número primo

e) um número que não seja primo.

ALGUMAS VEZES AS FRAÇÕES SÃO IRREDUTÍVEIS!

Como já foi visto, frações irredutíveis são aquelas em que não é mais possível simplificar, ou seja, em que numerador e denominador sejam primos entre si.

Mas o que são números **primos entre si**?

Neste caso, os números não precisam ser primos isoladamente, mas entre eles o único divisor comum é o número um. Assim, podemos dizer que dois números primos são sempre números primos entre si.

Para encontrar o MMC entre dois números que são primos entre si, basta efetuar a multiplicação entre os dois números considerados.

Já vimos anteriormente que 20 é o MMC entre 4 e 5, pois 4 x 5 = 20. Observe que o 4 não é um número primo, porém o único divisor em comum que tem com o 5 é o número 1; portanto, são considerados primos entre si.

ATIVIDADE

9. Complete a tabela abaixo; os números das duas primeiras colunas são números primos entre si.

Número	Número	Produto	MMC
2	3	2 x 3	6
4	9	4 x 9	36
3	7	3 x 7	
	20	13 x 20	
18			630

Tabela 5.5

EXPLORANDO REGULARIDADES!

Sempre que trabalhamos com números e operações, uma importante atividade é explorar regularidades.

Neste item, vamos explorar a soma de frações unitárias, frações que têm numerador 1 e denominadores primos entre si.

ATIVIDADES

10. Observe a regularidade e complete a tabela.

Fração	Fração	Adicionando frações unitárias	Adicionando frações equivalentes	Resultado
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=$	$\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3+2}{6}=$	$\frac{5}{6}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=$	$\frac{5}{15}+\frac{3}{15}=\frac{5+3}{15}=$	$\frac{8}{15}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$			
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$			
$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{b}$			

Tabela 5.6

Observe que podemos trocar b + a por a + b, pois na adição vale a propriedade comutativa, ou seja, b + a = a + b.

Resposta comentada

Primeiro é necessário completar os espaços vazios da tabela, veja:

$\frac{1}{5}+\frac{1}{2}=$	$\frac{2}{10}+\frac{5}{10}=\frac{2+5}{10}=$	$\frac{7}{10}$
$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=$	$\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{3+4}{12}=$	$\frac{7}{12}$
$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=$	$\frac{5}{20}+\frac{4}{20}=\frac{5+4}{20}=$	$\frac{9}{20}$
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=$	$\frac{b}{ab}+\frac{a}{ab}=\frac{b+a}{ab}=$	$\frac{a+b}{ab}$

Observe que os denominadores passam a ser os numeradores das frações equivalentes; no resultado final o numerador é a soma dos denominadores e o novo denominador é o produto destes números.

Assim, $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{5+4}{5x4}=\frac{9}{20}$.

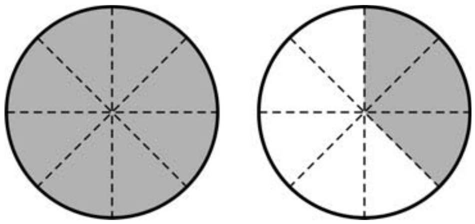
Portanto, no caso geral, temos: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{b+a}{ab}=\frac{a+b}{ab}$.

11. Construa uma tabela análoga à anterior, com objetivo de generalizar a diferença entre duas frações de numerador 1 e denominadores primos entre si.

Fração	Fração	Subtraindo as frações unitárias	Subtraindo as frações equivalentes	Resultado
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$			
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$			
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$			
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$			
$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{b}$			

ESCLARECENDO UMA REPRESENTAÇÃO...

Na Aula 3, estudamos as frações maiores que 1, trata-se daqueles em que o numerador é maior que o denominador. Nesse caso, as frações representam números que são maiores que um inteiro. Uma das representações desses números é denominada **número misto**. Isto porque tal representação mistura número inteiro com número fracionário.



A figura indica a fração imprópria $\frac{11}{8}$, isto é, dividimos nosso inteiro em 8 partes iguais e consideramos 11 partes. Por isso, precisamos de mais de um inteiro. Podemos representar a fração $\frac{11}{8}$ como $1\frac{3}{8}$; esta é a representação denominada número misto, pois mistura 1 (número inteiro) com $\frac{3}{8}$ (número fracionário).

Você pode estar se perguntando por que estamos retomando esse conceito na aula de adição e subtração de frações. Então vamos ver o que significa efetuar a seguinte adição: $1+\frac{3}{8}$. Podemos transformar 1 inteiro em $\frac{8}{8}$ e adicionar $\frac{8}{8}+\frac{3}{8}=\frac{11}{8}$.

Portanto, o número misto $1\frac{3}{8}$ é igual à adição $1+\frac{3}{8}$.

Um outro exemplo, $2+\frac{5}{7}$: 2 inteiros escritos numa fração de denominador 7 será $\frac{14}{7}$. Portanto, $\frac{14}{7}+\frac{5}{7}=\frac{19}{7}$.

São muitas as notações em Matemática; por isso fique atento e saiba que:

$$1\frac{3}{8}=1+\frac{3}{8} \qquad \text{e} \qquad 2\frac{5}{7}=2+\frac{5}{7}$$

!

Um número misto que é formado por um número inteiro e uma fração corresponde à adição desse número inteiro com a fração dada.

ATIVIDADES

12. Encontre a fração imprópria correspondente aos números abaixo.

a) $2\frac{3}{5}$

b) $4\frac{1}{8}$

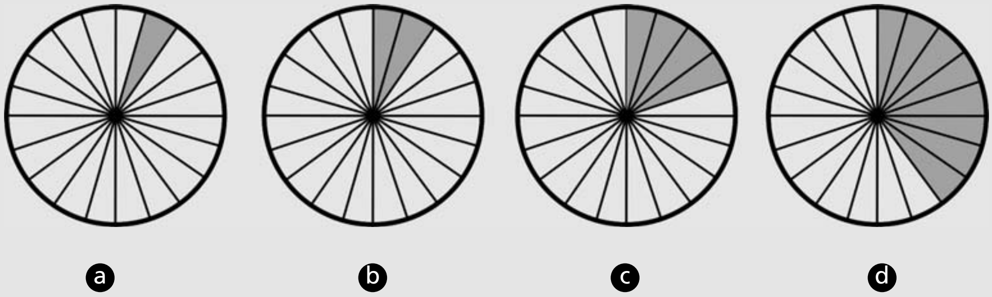
c) $1\frac{1}{2}$

d) $1\frac{1}{4}$

e) $2\frac{1}{10}$

13. Marque a figura que corresponde a 20% de uma pizza.

Lembre-se de que $20\% = \dfrac{20}{100}$.



CONCLUSÃO

Você certamente já estudou adição e subtração de frações. De maneira geral, isso é feito priorizando o algoritmo. Nesta aula, procuramos explorar o significado dessas operações, embora tenhamos introduzido, muitas novas definições. O conceito de frações equivalentes é fundamental para saber adicionar e subtrair frações. Por isso, dedicamos especial atenção a ele. Para encontrar frações equivalentes, você pode simplificá-las (dividir numerador e denominador por um mesmo número) ou multiplicar numerador e denominador por um mesmo número. Esperamos que você possa aproveitar ao máximo o conteúdo desta aula.

RESUMO

Nesta aula você viu:

- Como é feita a adição e a subtração de frações com mesmo denominador;
- O conceito de frações equivalentes e como transformar uma fração em outra equivalente a ela.
- O que são múltiplos de um número, em particular, o cálculo do MMC – Mínimo Múltiplo Comum.
- O que são números primos e primos entre si.
- O conceito de frações irredutíveis, explorando regularidades.

AUTO-AVALIAÇÃO

Acompanhe os itens do resumo, faça um retorno às atividades propostas ao longo desta aula e veja se é capaz de refazê-las. Procure, em outras bibliografias, atividades que envolvem esses conceitos e procure resolvê-las. Essa é uma boa maneira de fazer uma auto-avaliacão. Envolva-se com o conteúdo da aula, interrogue-se sobre o porquê de alguns passos, utilize seus recursos de consulta: tutor presencial e a distância, além da plataforma Cederj.

INFORMAÇÕES SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula você continuará estudando as operações entre frações; no caso, a multiplicação. Estaremos explorando os significados da operação de multiplicação para além dos algoritmos.

RESPOSTAS

Atividade 1

a) $\frac{5}{7}$

b) $\frac{7}{13}$

c) $\frac{5}{16}$

d) $\frac{9}{11}$

Atividade 2

a. não são equivalentes

b. não são equivalentes

c. não são equivalentes

d. são equivalentes

e. não são equivalentes

Atividade 3

a. empatou

b. Carlos ganhou

c. Juliana ganhou

d. empatou

Atividade 4

$$\frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$$

Atividade 6

1º dia leu $\frac{1}{4}$ do livro.

2º dia leu $\frac{2}{5}$ do livro.

Para resolver esse problema, você deverá adicionar $\frac{1}{4}+\frac{2}{5}=\frac{1x5}{4x5}+\frac{2x4}{4x5}=\frac{5}{20}+\frac{8}{20}=\frac{13}{20}$

Assim, Roberta leu $\frac{13}{20}$ (treze vinte avos) do livro nos dois primeiros dias. Observe que isso corresponde a mais da metade do livro.

Atividade 7

a) Como 11 e 20 são primos entre si, fazemos:

$$\frac{3x20}{11x20}+\frac{5x11}{20x11}=\frac{60}{220}+\frac{55}{220}=\frac{115}{220}$$

b) Como 6 é múltiplo de 3, fazemos:

$6 \div 3 = 2$; então, $\frac{5}{6}-\frac{1x2}{3x2}=\frac{5}{6}-\frac{2}{6}=\frac{3}{6}$; posso simplificar dividindo numerador e denominador por 3, encontrando $\frac{1}{2}$.

Atividade 8

a) 2 ou 5 ou 23 ou 97

b) 23 ou 97

c) 2

d) 97

e) Qualquer número do quadro diferente de 2, 5, 23 e 97

Atividade 9

Número	Número	Produto	MMC
2	3	2 x 3	6
4	9	4 x 9	36
3	7	3 x 7	**21**
13	20	13 x 20	**260**
18	**35**	**18 x 35**	630

Atividade 11

Há três exemplos numéricos, você deve criar outros. A generalização está na última linha da tabela.

Fração	Fração	Subtraindo as frações unitárias	Subtraindo as frações equivalentes	Resultado
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$	$\frac{3}{6}-\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$	$\frac{5}{15}-\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{5}$	$\frac{5}{10}-\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$
$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$	$\frac{b}{ab}-\frac{a}{ab}$	$\frac{b-a}{ab}$

Observe que na terceira linha a fração $\frac{1}{5}$ é menor que a fração $\frac{1}{2}$; portanto, você não encontrará como resposta uma fração positiva. Assim, dentro do conjunto dos números racionais positivos esta operação não é possível.

Atividade 12

a) $\frac{13}{5}$

b) $\frac{33}{8}$

c) $\frac{3}{2}$

d) $\frac{5}{4}$

e) $\frac{21}{10}$

Atividade 13

A pizza está dividida em 20 pedaços. Devemos então encontrar uma fração com denominador 20 que seja equivalente a 20%, ou seja, $\frac{20}{100} = \frac{?}{20}$. Encontramos que a fração é $\frac{4}{20}$ e a resposta é a letra (c).

AULA 6

Para além do algoritmo de multiplicação de frações...

Meta da aula

Atribuir significado para o algoritmo de multiplicação de frações.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- Exemplificar situações-problema que envolvam a idéia de multiplicação de frações.
- Construir significado para a multiplicação de frações.
- Utilizar o algoritmo de multiplicação de frações.
- Aplicar a multiplicação de frações na resolução de problemas.

Pré-requisitos

Para o desenvolvimento desta aula é necessário que você saiba multiplicar números naturais e conheça suas propriedades. Você também deve saber o conceito, as diferentes representações, a equivalência e a adição de frações vistos nas Aulas 2, 3, 4 e 5 deste curso. Você deverá utilizar ainda duas ou três folhas de papel.

INTRODUÇÃO

É bastante comum em uma aula de multiplicação de fração um aluno ouvir o seguinte: *para multiplicar duas frações multiplique numerador por numerador e denominador por denominador*. Infelizmente, para muitos, a compreensão da multiplicação de frações não vai além desse procedimento.

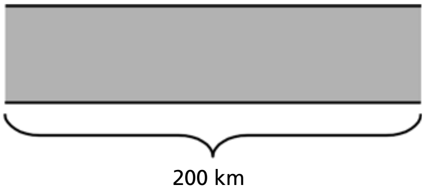
O problema da falta de construção de significado para as operações com fração faz com que, muitas vezes, o aluno utilize o processo que julga mais simples, isto é, da memorização dos algoritmos. No caso do algoritmo da multiplicação, eles memorizam que *basta multiplicar os números que estão em cima e multiplicar os números que estão em baixo*. Após conhecer esse procedimento, muitos alunos passam a somar frações somando numerador com numerador e denominador com denominador. Isso é conseqüência de um trabalho que não enfatiza os conceitos das operações.

Você viu, na Aula 5, a adição de frações. Agora vamos falar da multiplicação. O que significa multiplicar frações? É possível compreender a multiplicação de frações além da técnica do algoritmo? Vamos caminhar juntos e, no fim desta aula, você poderá responder essas perguntas!

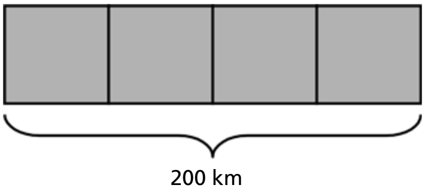
O QUE SIGNIFICA $\frac{2}{3}$ DE... $\frac{1}{4}$ DE... $\frac{3}{5}$ DE...?

Dentre os problemas que envolvem fração, alguns trazem em si a idéia multiplicativa, são problemas que pedem uma fração do todo. Estes podem ser resolvidos apenas com o conceito de fração. Vejamos um exemplo:

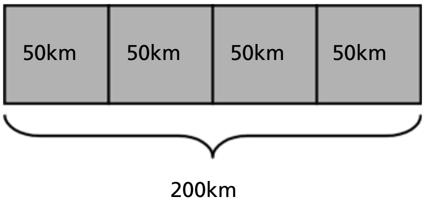
Vou fazer uma viagem de 200km. Percorri $\frac{1}{4}$ da viagem. Quantos quilômetros eu percorri? Podemos resolver o problema graficamente. Observe:



Queremos obter $\frac{1}{4}$ do percurso total, ou seja, uma parte do todo (percurso total) que foi dividido em 4 partes.



Cada parte indicada na figura equivale então a 50km, pois $200 \div 4 = 50$.



Uma outra maneira de resolver esse problema é utilizando a idéia de proporcionalidade. Veja como se procede:

1 inteiro $\Leftrightarrow$ 200km

Lemos 1 inteiro corresponde a 200 km.

Como queremos obter $\frac{1}{4}$ do percurso total da estrada, vamos expressar esse comprimento da estrada usando uma fração de denominador 4. Podemos fazer isso, pois sabemos que $1 = \frac{4}{4}$. Fazemos então o seguinte esquema:

$$\begin{array}{cccc} \div 4 & \frac{4}{4} & \Leftrightarrow 200\text{km} & \div 4 \\ & \frac{1}{4} & \Leftrightarrow 200 \div 4 = 50\text{km} & \end{array}$$

$\frac{4}{4}$ do percurso da estrada correspondem a 200 km, então a fração $\frac{1}{4}$ do percurso da estrada é proporcional ao percurso da estrada inteira. Cuidado, não se pode escrever $\frac{4}{4}$ = 200km , pois $\frac{4}{4}$ está representando o total do percurso que é de 200 km, mas não é igual a 200 km.

A operação que está envolvida nesse problema é a multiplicação, pois $\frac{1}{4}$ de 200, significa x 200. Portanto, representando o resultado final do cálculo, temos a expressão $\frac{1}{4}$ x 200 = 50.

A preposição *de* é utilizada freqüentemente em situações ligadas à multiplicação; veja os exemplos:

6 x 3 representa 6 grupos de 3;

3 x 4 representa o triplo de 4;

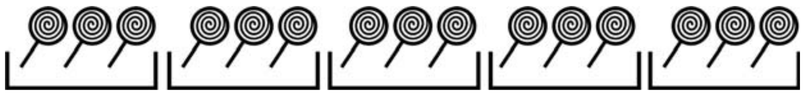
$\frac{1}{4}$x200 representa $\frac{1}{4}$ de 200

Vamos a outro problema.

Mateus tem 15 pirulitos. Deu $\frac{2}{5}$ de seus pirulitos a seu amigo Tiago. Quantos pirulitos Mateus deu a Tiago?

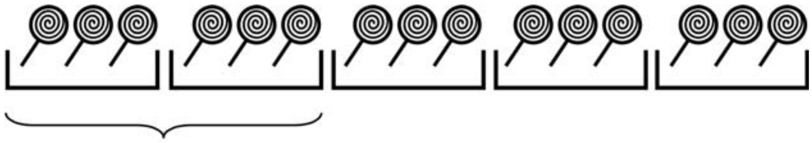
Utilizando a resolução gráfica, partimos dos 15 pirulitos.

Como queremos obter $\frac{2}{5}$ dos 15 pirulitos, vamos dividir os pirulitos em 5 partes iguais.



Cada uma dessas partes, que contém 3 pirulitos, equivale a $\frac{1}{5}$ do total.

Assim, para obter $\frac{2}{5}$ devemos considerar 2 partes.



$\frac{2}{5}$

Concluímos, então, que Mateus deu 6 pirulitos a seu amigo Tiago.

> **!**
>
> Observe que o esquema gráfico de resolução de problemas é necessário para que o aluno visualize inicialmente o problema que está resolvendo. Entretanto, quando trabalhamos com conjuntos discretos (que expressam quantidades), a representação dessas quantidades pode ficar complicada se os números forem muito grandes. Essa é uma perspectiva diferente do modelo contínuo que vimos no exemplo da estrada.

Resolvendo esse mesmo problema através da idéia de proporcionalidade, a primeira coisa que precisamos considerar é que, para obter $\frac{2}{5}$, devemos expressar o inteiro, número total de pirulitos, com denominador 5, ou seja, $1 = \frac{5}{5}$.

$$\begin{array}{lccll} & \frac{5}{5} & \Leftrightarrow & 15 \text{ pirulitos} & \\ \div \mathbf{5} & & & & \div \mathbf{5} \\ & \frac{1}{5} & \Leftrightarrow & 15 \div 5 = \mathbf{3} \text{ pirulitos} & \\ \text{x } \mathbf{2} & & & & \text{x } \mathbf{2} \\ & \frac{2}{5} & \Leftrightarrow & 3 \text{ x } 2 = 6 \text{ pirulitos} & \end{array}$$

Novamente, a operação envolvida nesse problema é a multiplicação, pois $\frac{2}{5}$ de 15, significa $\frac{2}{5}\text{x}15$. Portanto, representando o resultado final do cálculo, temos a expressão $\frac{2}{5}\text{x}15 = 6$.

ATIVIDADE

1. Carolina ganhou de seu avô um pacote contendo 30 balas. Comeu $\frac{2}{5}$ do total das balas no mesmo dia.

a. Quantas balas Carolina comeu no mesmo dia?

b. Como podemos expressar esse resultado, utilizando operações com frações?

Nos problemas anteriores, quando fizemos as operações $\frac{1}{4}\text{x}200$ ou $\frac{2}{5}\text{x}15$, estávamos multiplicando números naturais por frações. Agora, mudaremos a ordem dos fatores, ou seja, multiplicaremos frações por números naturais. Veja como o significado da operação se altera.

MULTIPLICANDO UMA FRAÇÃO POR UM NÚMERO NATURAL

Vamos recordar!

Podemos entender a multiplicação de dois números naturais como adição de parcelas iguais. Por exemplo:

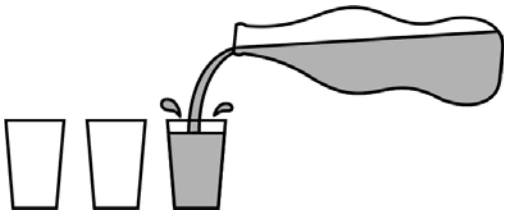
4 x 5 = 5 + 5 + 5 + 5   4 parcelas de 5.

3 x 6 = 6 + 6 + 6   3 parcelas de 6.

Agora uma pergunta:

Se tomo 3 copos de refrigerante de uma garrafa, em que cada copo equivale a $\frac{2}{7}$ do refrigerante da garrafa, que fração da garrafa tomei?

Observe graficamente:



$\frac{2}{7}$ $\frac{2}{7}$ $\frac{2}{7}$

Quando pensamos em 3 vezes alguma coisa, estamos pensando na adição de parcelas iguais. Veja:

$$3\text{x}\frac{2}{7} = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} \; .$$

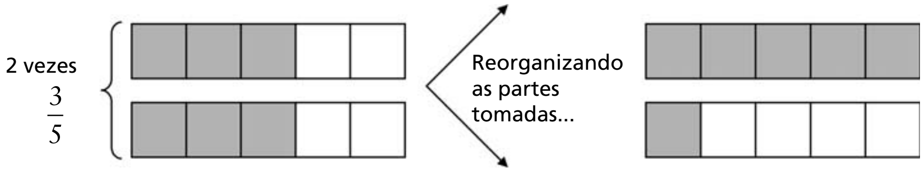
E como as frações são iguais, basta somar os numeradores, ou multiplicá-los por 3. No caso:

$$3\text{x}\frac{2}{7} = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3\text{x}2}{7} = \frac{6}{7} \, .$$

Observe que a multiplicação de um número menor que 1 por um número natural pode ter como resultado um número maior que 1.

Veja o exemplo:

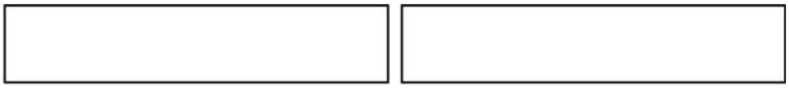
$$2\text{x}\frac{3}{5} = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{2\text{x}3}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5} \, .$$



$$\frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$$

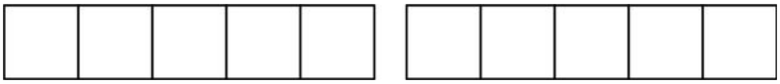
Verifique a ação envolvida na operação e o resultado final, quando operamos, por exemplo, $\frac{3}{5}$ x 2 (lemos como $\frac{3}{5}$ de 2).

Considere 2 inteiros.

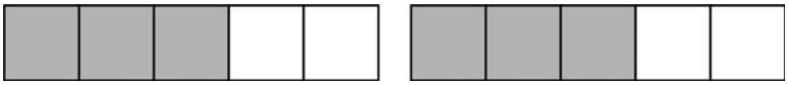


Pegue $\frac{3}{5}$ de cada um desses inteiros.

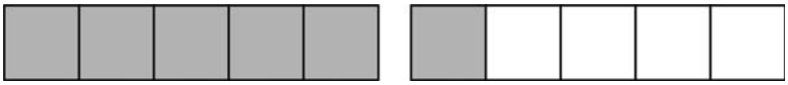
Vamos dividir o inteiro em 5 partes iguais.



Basta tomar, então, 3 partes, das cinco, em cada inteiro.



Reorganizando as partes pintadas, obtemos:



Que pode ser representado pela fração $\frac{6}{5}$ ou por $1\frac{1}{5}$.

Apesar de as operações $2\text{x}\frac{3}{5}$ e $\frac{3}{5}\text{x}2$ terem significados diferentes, os resultados obtidos são iguais, isto é, $2\text{x}\frac{3}{5} = \frac{3}{5}\text{x}2 = \frac{6}{5}$.

! Algebrizando a aritmética dessa situação, temos a propriedade comutativa, que diz: $n\text{x}\frac{a}{b} = \frac{a}{b}\text{x}n$.

ATIVIDADES

2. Represente os resultados graficamente e dê os resultados das operações dadas a seguir.

a. $4 \text{x} \frac{2}{9}$

b. $\frac{1}{10} \text{x} 7$

c. $6 \text{x} \frac{1}{6}$

d. $\frac{2}{9} \text{x} 9$

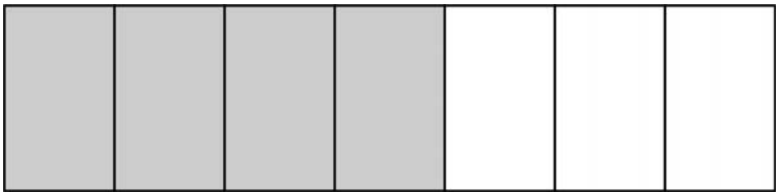
3. Elabore um problema que utilize uma multiplicacão de fração por um número natural. Resolva-o e entregue a seu tutor.

COMO SERÁ ENTÃO A MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÃO POR FRAÇÃO?

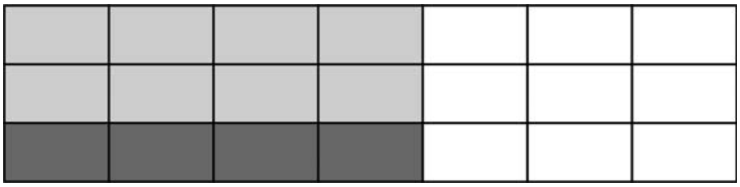
Você viu como se procede na multiplicação de números naturais por frações; vejamos agora alguns exemplos de uma nova situação.

Calcule e faça a representação gráfica da terça parte de $\frac{4}{7}$ de uma folha de papel.

Primeiramente, considere 4 partes de uma folha de papel que foi dividida em sete partes iguais.



Desejamos obter $\frac{1}{3}$ (terça parte) de $\frac{4}{7}$ (parte sombreada). Para isso, dividimos a parte sombreada em 3 e consideramos apenas uma. Veja:



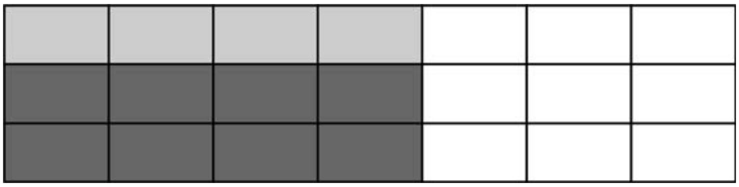
Para expressar esse resultado através de uma fração, é interessante que você tenha observado dois fatos:

- a folha que inicialmente estava dividida em 7 partes iguais passou a ter 21 (3 x 7) partes iguais, no momento em que dividimos a parte sombreada em três.
- a parte escura, que é o resultado final do todo considerado, possui 4 pedaços dos 21 pedaços.

Portanto, o resultado dessa multiplicação é a fração $\frac{4}{21}$. Podemos escrever então que $\frac{1}{3} \text{x} \frac{4}{7} = \frac{4}{21}$.

E se em vez de $\frac{1}{3}$ de $\frac{4}{7}$ da folha, quisermos $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{7}$ da folha?

Nesse caso, dividimos a parte sombreada em três e pegamos duas dessas partes.



A fração que representa esse resultado é $\frac{8}{21}$. Temos então que $\frac{2}{3} \text{x} \frac{4}{7} = \frac{8}{21}$.

ATIVIDADES

4. Desenhe as figuras e pinte as partes indicadas em cada item registrando as frações obtidas.

a. $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{4}$

b. $\frac{3}{5}$ de $\frac{1}{2}$

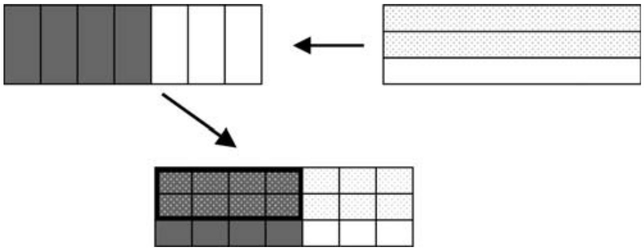
5. Pegue duas folhas e faça a representação gráfica de:

a. $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$ da folha;

b. $\frac{5}{6}$ de $\frac{3}{4}$ da folha.

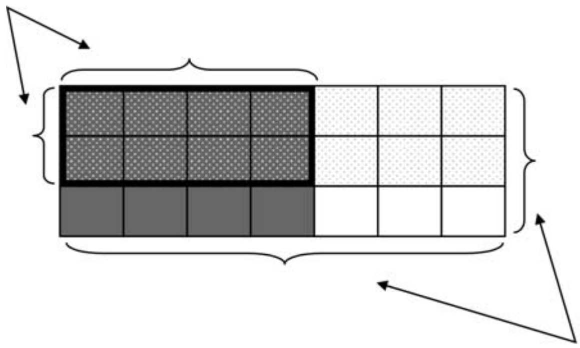
Outra forma de operar $\frac{2}{3} x \frac{4}{7}$ é sobrepondo dois retângulos de mesmo tamanho: um deles representando a fração $\frac{4}{7}$ e o outro representando a fração $\frac{2}{3}$.

Na ilustração a seguir, vamos sobrepor o retângulo representando $\frac{2}{3}$ ao retângulo representando $\frac{4}{7}$, gerando, então, um terceiro retângulo, representando a fração $\frac{2}{3} x \frac{4}{7} = \frac{8}{21}$.



Observe que podemos obter essa fração através de uma multiplicação retangular.

Dimensões do retângulo que formam o numerador 2 x 4

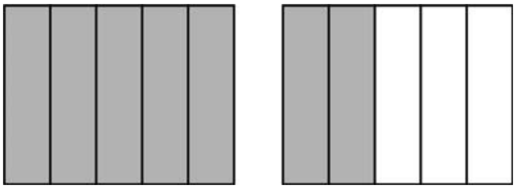


Dimensões do retângulo que formam o denominador 3 x 7

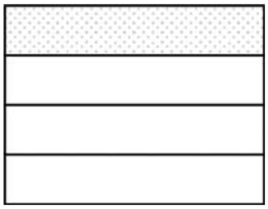
Total de partes: 3 x 7 = 21	denominador
Partes tomadas: 2 x 4 = 8	numerador

Observe que as dimensões dos retângulos que representam o total das partes e a parte tomada definem, respectivamente, o numerador e o denominador da fração que é o resultado da multiplicação. Dessa forma, temos que $\frac{2}{3} x \frac{4}{7} = \frac{2x4}{3x7} = \frac{8}{21}$.

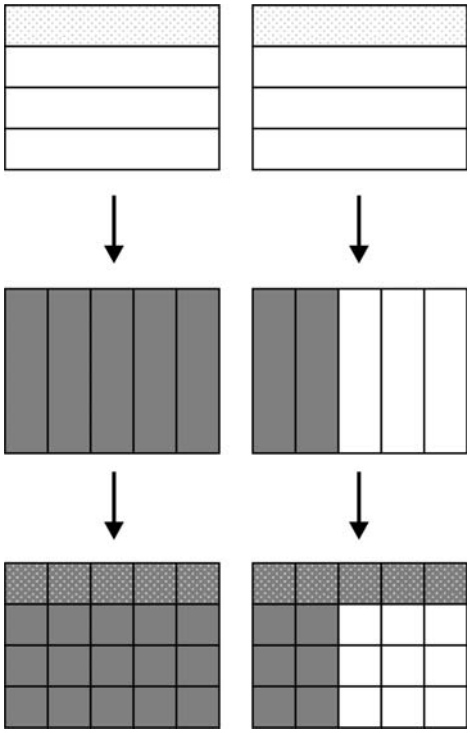
Veja outro exemplo, usando a idéia de sobrepor. Por exemplo, $\frac{1}{4} \times \frac{7}{5}$ ou $\frac{1}{4}$ de $\frac{7}{5}$. Para isso, representamos a fração $\frac{7}{5}$.



Consideramos $\frac{1}{4}$ da região pintada na figura.



Sobrepomos a representação da fração $\frac{1}{4}$ sobre os 2 inteiros. Dessa forma, cada um dos inteiros ficará dividido em 20 partes iguais. Veja:



A fração que representa o resultado de $\frac{1}{4}$ de $\frac{7}{5}$ é $\frac{7}{20}$. Portanto, $\frac{1}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{7}{20}$.

As dimensões dos retângulos que definem o numerador e o denominador são, respectivamente, 1 por 7 e 4 por 5. Portanto, temos:

Numerador = 1 x 7

Denominador = 4 x 5

Assim, $\frac{1}{4}$ de $\frac{7}{5}$ é igual a $\frac{1}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{1 \times 7}{4 \times 5} = \frac{7}{20}$.

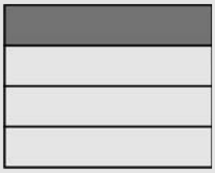
ATIVIDADE

6. Quando multiplicamos $\frac{1}{4} \times \frac{7}{5}$ encontramos $\frac{7}{20}$. Qual será o resultado obtido quando multiplicamos $\frac{7}{5} \times \frac{1}{4}$?

Resposta comentada

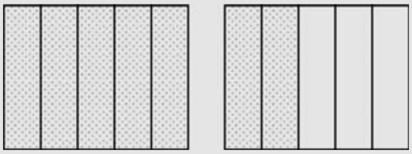
Se sua resposta foi $\frac{7}{20}$, você acertou; mas independente de ter acertado ou não, você sabe o por quê? As situações são aparentemente iguais, mas observe que para obter o produto de $\frac{7}{5} \times \frac{1}{4}$ queremos encontrar $\frac{7}{5}$ de $\frac{1}{4}$.

Considere a fração $\frac{1}{4}$.



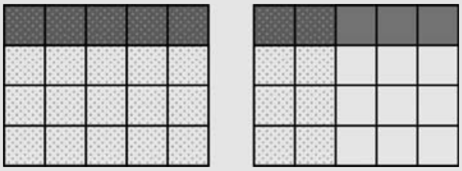
Obter $\frac{7}{5}$ dessa fração nos remete a um pensamento um pouco diferente. Isso porque a fração é imprópria. Nesse caso, vamos escrever $\frac{7}{5} = 1\frac{2}{5} = \frac{5}{5} + \frac{2}{5}$. Desejamos obter então $\frac{5}{5}$ de $\frac{1}{4}$ mais $\frac{2}{5}$ de $\frac{1}{4}$.

Representando as frações $\frac{5}{5}$ e $\frac{2}{5}$.



Devemos justapor esses retângulos à representação de $\frac{1}{4}$.

Dessa forma, obtemos a fração $\frac{7}{20}$ como resultado do produto.



$\frac{5}{5}$ de $\frac{1}{4}$ $\qquad$ $\frac{2}{5}$ de $\frac{1}{4}$

ALGEBRIZANDO A MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÕES: O ALGORITMO

Nos últimos exemplos vistos através da representação retangular, buscamos relacionar o numerador e o denominador da fração resultante com os numeradores e os denominadores das frações que estavam sendo multiplicadas (os fatores).

Com o objetivo de que você visualize o resultado da multiplicação, em função dos numeradores e denominadores das frações, resgataremos aqui a maioria dos exemplos vistos nesta aula e montaremos uma tabela com duas colunas.

Na primeira coluna serão indicadas as operações, conforme foram feitas nos exemplos. Na segunda, faremos a representação dos dados da primeira coluna em forma de multiplicação de duas frações e mostraremos o algoritmo. Fique atento!

> **!**
>
> Você está lembrado de que qualquer número natural pode ser escrito sob a forma de fração? Existem inúmeras frações para representar um mesmo número inteiro. Uma dessas frações, e a mais simples, é a que possui denominador 1. Assim, $200 = \frac{200}{1}$, $2 = \frac{2}{1}, 15 = \frac{15}{1}, 3 = \frac{3}{1} \ldots$

Resgate dos exemplos	Escrito de uma outra forma...
$\frac{1}{4}\text{x}200 = 50$	$\frac{1}{4}\text{x}\frac{200}{1} = \frac{1\text{x}200}{4\text{x}1} = \frac{200}{4} = 50$
$\frac{2}{5}\text{x}15 = 6$	$\frac{2}{5}\text{x}\frac{15}{1} = \frac{2\text{x}15}{5\text{x}1} = \frac{30}{5} = 6$
$2\text{x}\frac{3}{5} = \frac{6}{5}$	$\frac{2}{1}\text{x}\frac{3}{5} = \frac{2\text{x}3}{1\text{x}5} = \frac{6}{5}$
$3\text{x}\frac{2}{7} = \frac{6}{7}$	$\frac{3}{1}\text{x}\frac{2}{7} = \frac{3\text{x}2}{1\text{x}7} = \frac{6}{7}$
$\frac{2}{3}\text{x}\frac{4}{7} = \frac{8}{21}$	$\frac{2}{3}\text{x}\frac{4}{7} = \frac{2\text{x}4}{3\text{x}7} = \frac{8}{21}$
$\frac{1}{4}\text{x}\frac{7}{5} = \frac{7}{20}$	$\frac{1}{4}\text{x}\frac{7}{5} = \frac{1\text{x}7}{4\text{x}5} = \frac{7}{20}$

Veja alguns exemplos:

a) $\frac{4}{7} \text{x} \frac{6}{11} = \frac{4\text{x}6}{7\text{x}11} = \frac{24}{77}$

b) $\frac{8}{5} \text{x} \frac{5}{8} = \frac{8\text{x}5}{5\text{x}8} = \frac{40}{40} = 1$

c) $\frac{6}{10} \text{x} \frac{5}{9} = \frac{6\text{x}5}{10\text{x}9} = \frac{30}{90} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

Você já deve ter observado que, para multiplicar frações, multiplicamos numerador por numerador e denominador por denominador; isto é, dadas duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, com $b \neq 0$ e $d \neq 0$, então $\frac{a}{b} \text{x} \frac{c}{d} = \frac{a\text{x}c}{b\text{x}d}$.

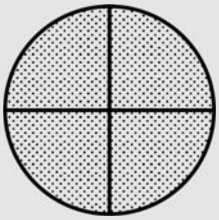
ATIVIDADES

7. Resolva as multiplicações a seguir e escreva o resultado na forma irredutível.

a. $\frac{16}{15} \text{x} \frac{25}{2} =$

b. $42\text{x}\frac{2}{7} =$

8. Observe o desenho a seguir, que representa uma pizza.



$\frac{3}{4}$ da pizza foram divididos igualmente por 6 colegas.

a. Faça um desenho que represente a fração da pizza que cada colega comeu.

b. Qual é a fração da pizza correspondente a cada fatia?

c. Utilizando agora a multiplicação, confira o resultado que você obteve no item b.

> **!**
>
> Como $\frac{a}{b}x\frac{c}{d}=\frac{axc}{bxd}=\frac{cxa}{dxb}=\frac{c}{d}x\frac{a}{b}$, podemos afirmar que a multiplicação de frações é comutativa.
>
> Lembrando: a propriedade comutativa da multiplicação de números naturais diz que a x b = b x a, para todo a e b naturais.
>
> No caso das frações, temos que: $\frac{a}{b}x\frac{c}{d}==\frac{c}{d}x\frac{a}{b}$, com b e d números não nulos.

MAS, NA CALCULADORA, QUANDO SE TRATA DE PORCENTAGEM...

Como calculamos 40% de 80?

Bem, você pode fazer qualquer uma das operações $\frac{40}{100}x80$ ou $80x\frac{40}{100}$, pois a multiplicação é comutativa. Fazendo as contas, encontramos $\frac{40x80}{100x1}=\frac{3200}{100}=32$.

Usando uma calculadora simples você deve digitar sucessivamente as teclas:

Entretanto, na calculadora não podemos digitar ao contrário, ou seja, quando digitamos a seqüência

a calculadora apresenta o 0 no visor como resultado, pois ela processa 40% de 0 (valor inicial do visor) e depois multiplica por 80, encontrando 0. Assim, para efetuar o cálculo corretamente, o valor percentual deve ser digitado depois do outro valor.

ATIVIDADE

9. Digite na calculadora a seqüência de teclas:

a. Qual o resultado encontrado?

b. Indique a conta que a calculadora fez.

A MULTIPLICAÇÃO PRODUZINDO NÚMEROS MAIORES OU MENORES QUE O TODO...

Quando estamos multiplicando números naturais, o resultado encontrado é sempre maior do que os fatores.

Já com frações nem sempre isso acontece. Veja os exemplos $\frac{2}{3}x12$ e $\frac{3}{2}x12$ a seguir. Vamos ver se os resultados encontrados são maiores ou menores que 12.

$$\frac{2}{3}x12 = \frac{2}{3}x\frac{12}{1} = \frac{2x12}{3x1} = \frac{24}{3} = 8 \longrightarrow \text{menor que 12}$$

$$\frac{3}{2}x12 = \frac{2}{3}x\frac{12}{1} = \frac{3x12}{2x1} = \frac{36}{2} = 18 \longrightarrow \text{maior que 12}$$

ATIVIDADE

10. Faça as seguintes operações $\frac{15}{8}x100$, $\frac{3}{4}x100$, $\frac{13}{20}x100$, $\frac{51}{25}x100$ e diga se os resultados encontrados são maiores ou menores que 100.

O que faz com que o resultado de $\frac{a}{b}x100$ seja maior ou menor que 100?

É o fato de a fração ser maior ou menor que a unidade, pois se $\frac{a}{b}$ é maior do que a unidade, quando operamos $\frac{a}{b}x100$, estaremos considerando o todo (no caso o 100) mais alguma coisa. Portanto, esse resultado será maior do que 100.

Agora, se $\frac{a}{b}$ é menor do que a unidade, ao operarmos $\frac{a}{b}x100$, estaremos considerando uma parte menor do que 100. Logo o resultado da multiplicação $\frac{a}{b}x100$ será menor do que 100.

Seja n é um número natural.
Se $\frac{a}{b}$ é um número maior que 1, então $\frac{a}{b} \times n$ será maior que n.
Se $\frac{a}{b}$ é um número menor que 1, então $\frac{a}{b} \times n$ será menor que n.

CONCLUSÃO

Nesta aula a preocupação foi ir além do algoritmo da multiplicação, ou seja, precisamos entender a ação envolvida na operação de multiplicação de frações. Por isso, é importante saber o que estamos fazendo além da técnica. Observe que a idéia de fração surge da necessidade do homem de expressar números que não são naturais; mas algumas regras, porém, como a da multiplicação, são específicas da Matemática como ciência. Assim, precisamos elaborar atividades significativas para que o aluno apreenda as características de conceitos que só terão significado para ele dentro do contexto escolar.

RESUMO

Iniciamos esta aula destacando problemas de frações através da representação gráfica e da idéia de proporcionalidade.

Vimos a multiplicação representada graficamente de duas maneiras: de um número por uma fração e de fração por fração; e depois encaminhamos para o algoritmo, em que foram resgatados os problemas iniciais resolvidos novamente através da multiplicação direta.

Enfatizamos a propriedade comutativa, chamando a atenção para não iniciar o cálculo pela porcentagem, na calculadora, e terminamos mostrando que, ao multiplicarmos um número natural por uma fração produzimos números que podem ser maiores ou menores que 1.

AUTO-AVALIAÇÃO

Avalie seu conhecimento sobre a multiplicação de fração antes e depois de ter lido e feito as atividades desta aula. Levante algumas questões. Por exemplo: Você conhecia o algoritmo de multiplicação? Você compreendia por que o fazia dessa maneira? E agora? A quantidade de exercícios foi suficiente para o amadurecimento das idéias e do algoritmo? Caso seja necessário mais conhecimento sobre o assunto, procure em livros do Ensino Fundamental o tema multiplicação de frações e faça comparações e complementações necessárias. O importante é nunca dar por encerrado um assunto. Sempre temos algo a mais para aprender.

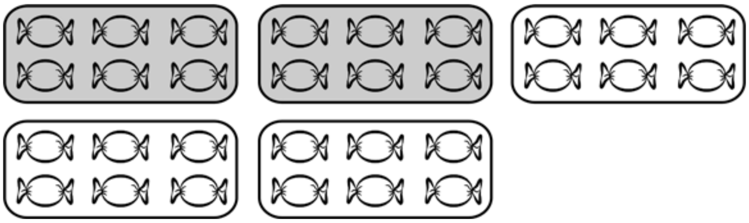
INFORMAÇÕES SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na Aula 7, será abordada a divisão de frações. Você verá como a divisão está fortemente relacionada com a multiplicação. Por isso, quanto mais você entender a Aula 6, mais facilmente compreenderá a próxima aula. Além da construção de significado para a operação divisão, vamos trabalhar o algoritmo, buscando o entendimento do que está sendo feito.

RESPOSTAS

ATIVIDADE 1

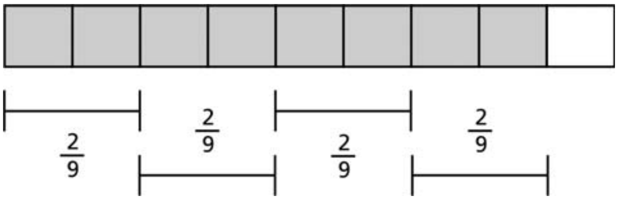
a. $\frac{2}{5}$ de 30, isto é, dividimos as 30 balas por 5 e consideramos 2. Desta forma, obteremos 2 x 6 = 12. Observe o desenho.



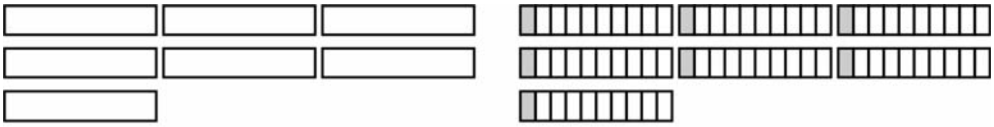
b. $\frac{2}{5}$ x 30 = 12

ATIVIDADE 2

a. $4x\frac{2}{9} = \frac{8}{9}$



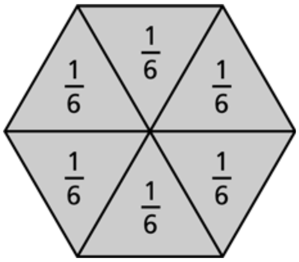
b. Considere 7 inteiros e $\frac{1}{10}$ de cada inteiro.



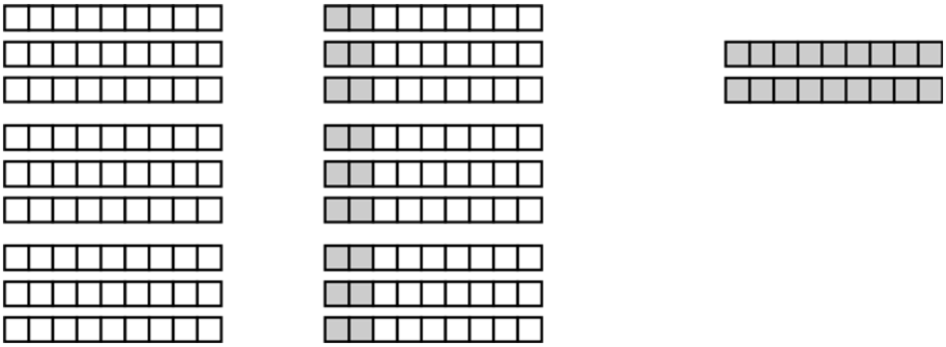
Reorganizando as partes, temos $\frac{7}{10}$ 

$$\frac{1}{10}x7 = \frac{7}{10}$$

c. $6x\frac{1}{6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}=1$



d. Considere 9 inteiros e $\frac{2}{9}$ de cada inteiro. Reorganize as partes, o que dará $\frac{18}{9}$.

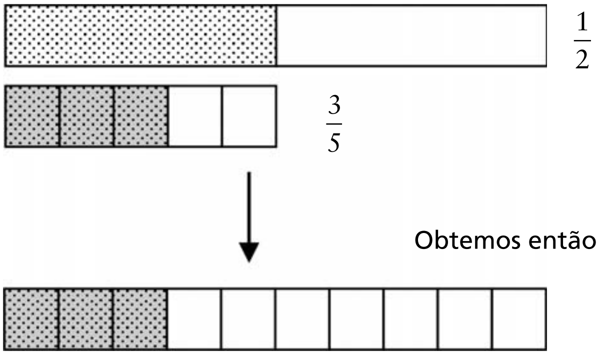


$\frac{2}{9}x9=\frac{18}{9}=2$

ATIVIDADE 4

a. Considere $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{4}$ desse novo inteiro, isto é, divida em quatro e considere apenas uma. Isso nos dará como resultado a fração $\frac{1}{16}$.

b. Considere a fração $\frac{1}{2}$ e pegue $\frac{3}{5}$ dessa metade.

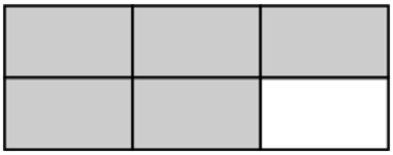


Obtemos então a fração $\frac{3}{10}$

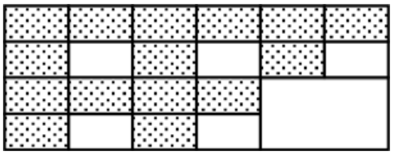
ATIVIDADE 5

Considere a folha de papel.

1º caso) Considere $\frac{5}{6}$ desta folha.



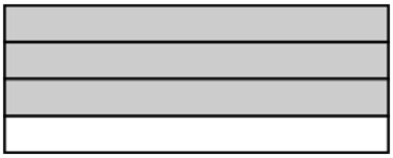
Agora pegaremos $\frac{3}{4}$ de parte toda sombreada, que é o mesmo que pegar $\frac{3}{4}$ de cada uma dessas 5 partes sombreadas.



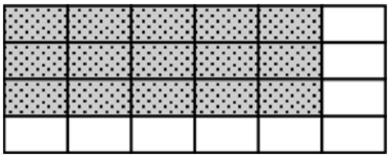
Com isso, são 15 partes que foram tomadas num total de 24, pois a parte que está em branco deve ser contada como quatro partes, já que precisamos trabalhar com partes iguais.

Foram pintados então $\frac{15}{24}$ da folha do caderno.

2º caso) Considere $\frac{3}{4}$ da folha de papel.



Como se querem $\frac{5}{6}$ dos $\frac{3}{4}$ da folha, dividimos a parte sombreada em seis partes e pegamos 6 delas; dessa forma, teremos 15 partes num total de 20. Com isso, a parte pintada é correspondente à fração $\frac{15}{20}$.



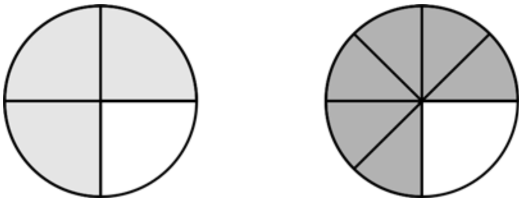
ATIVIDADE 7

a. $\frac{16}{15} x \frac{25}{2} = \frac{16x25}{15x2} = \frac{400}{30} = \frac{40}{3}$

b. $42x\frac{2}{7} = \frac{42}{1} x \frac{2}{7} = \frac{84}{7} = 12$

ATIVIDADE 8

a.



$\frac{3}{4}$ da pizza

$\frac{3}{4}$ da pizza divididos por 6

b. $\frac{1}{8}$

c. $\frac{1}{6} x \frac{3}{4} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$

ATIVIDADE 9

a. 112

b. A calculadora calculou 80 + 40% de 80, em escrita matemática; usando frações; equivale a $80+\frac{40}{100}x80$.

ATIVIDADE 10

a. $\frac{15}{8}x100=\frac{15x100}{8}=\frac{1500}{8}=175 \longrightarrow$ maior que 100

b. $\frac{3}{4}x100=\frac{3x100}{4}=75 \longrightarrow$ menor que 100

c. $\frac{13}{20}x100=\frac{13x100}{20}=\frac{1300}{20}=65 \longrightarrow$ menor que 100

d. $\frac{51}{25}x100=\frac{5100}{25}=204 \longrightarrow$ maior que 100

AULA 7

Dividir frações: entendendo o significado

Meta da aula

Atribuir significado para o algoritmo de divisão de frações.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

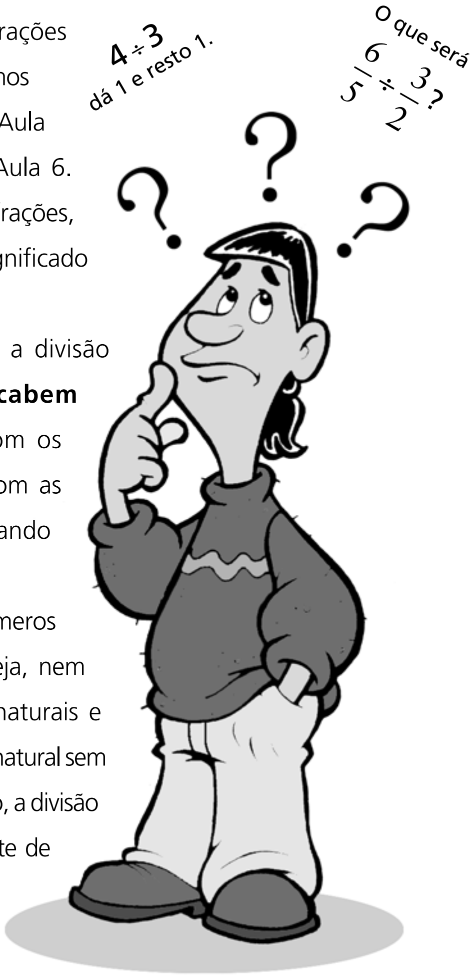
- Utilizar diferentes contextos para desenvolver a idéia de divisão de frações.
- Construir significado para a divisão de frações.
- Utilizar o algoritmo de divisão de frações.
- Aplicar a divisão de frações na resolução de problemas.

Pré-requisitos

É importante, para o desenvolvimento desta aula, que você saiba a adição e a multiplicação dos números naturais e das frações e conheça suas propriedades. Também precisaremos que você tenha compreendido a equivalência de frações e saiba simplificá-las. Para isso, sempre que houver dúvidas em assuntos relacionados às frações recorra às Aulas 3, 4, 5 e 6 desta disciplina.

CONVERSA INICIAL

Esta aula encerra a etapa das operações fundamentais entre frações. Já estudamos a soma e a subtração de frações na Aula 5 e a multiplicação de frações na Aula 6. Agora vamos estudar a divisão de frações, sempre buscando compreender o significado da operação.



Existem duas idéias que envolvem a divisão de números naturais: **quantos cabem** e **repartir em partes iguais**. Com os números racionais, em particular com as frações, também estaremos explorando essas idéias.

Mas atenção! A divisão de dois números naturais nem sempre é exata, ou seja, nem sempre é possível dividir números naturais e encontrar como resultado um número natural sem que essa divisão tenha resto. Entretanto, a divisão de frações quando o divisor é diferente de zero é sempre uma fração.

Outra diferença é que, na divisão de dois números naturais, o resultado é sempre um número menor que o dividendo. Na divisão de frações nem sempre é assim. Você precisa se desprender desse paradigma. Aqui, ao dividir, você verá que podemos encontrar números maiores!

QUANTAS METADES CABEM EM UM INTEIRO?

Nosso primeiro passo para entender o conceito de divisão de frações será utilizar a idéia dos "quantos cabem em...".

Já vimos essa idéia em Matemática na Educação 1, quando estudamos a divisão de números naturais. Só para lembrar, saber quanto é $6 \div 2$ é o mesmo que saber quantas vezes o 2 cabe no 6? O 2 cabe 3 vezes no 6 e escrevemos $6 \div 2 = 3$.

Vamos começar a pensar na divisão de frações por um caso que consideramos mais simples: trabalhar com metades.

Qual a resposta às perguntas:

- Quantas metades cabem em um inteiro?
- Quantos meios cabem em um inteiro?
- Quantos $\frac{1}{2}$ cabem em 1 inteiro?
- Quantos $\frac{1}{2}$ cabem em $\frac{2}{2}$?

Todas as perguntas terão a mesma resposta. Considerando a última pergunta, que envolve duas frações, responder a essa pergunta é o mesmo que dividir $\frac{2}{2}$ por $\frac{1}{2}$, ou seja, efetuar $\frac{2}{2} \div \frac{1}{2}$. Nesse caso, fazemos a seguinte pergunta: quantas vezes $\frac{1}{2}$ (um meio) cabe em $\frac{2}{2}$ (dois meios)?

Na divisão de números naturais, quando temos $10 \div 5$, a pergunta que fazemos é: quantos 5 cabem dentro do 10?

! Você já mudou seu paradigma? Como dissemos na nossa conversa inicial, aqui efetuamos uma divisão e encontramos 2, um número maior que aquele que foi dividido, o 1.

Observando a figura, vemos que $\frac{1}{2}$ cabe **2** vezes em $\frac{2}{2}$.

Assim, $\frac{2}{2} \div \frac{1}{2} = \mathbf{2}$, ou ainda, como $\frac{2}{2} = 1$, podemos escrever que:

um inteiro dividido por meio é igual a **2**, ou seja, $1 \div \frac{1}{2} = \mathbf{2}$.

A atividade a seguir fará você refletir sobre situações semelhantes a essa.

ATIVIDADE

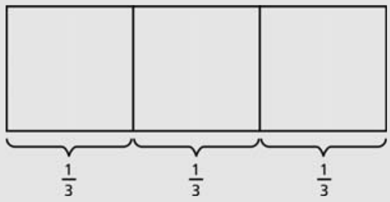
1. Transforme as perguntas em divisão, conforme o exemplo.

Tabela 7.1: Divisão de 1 inteiro por uma fração da forma $\frac{1}{a}$

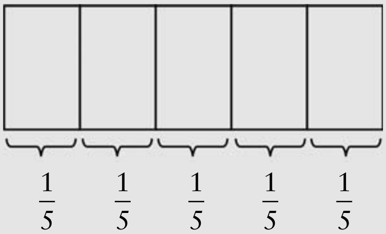
Pergunta	Divisão entre duas frações	Divisão entre o inteiro e a fração.	**Resultado**
Quantos $\frac{1}{2}$ cabem em $\frac{2}{2}$?	$\frac{2}{2} \div \frac{1}{2}$	$1 \div \frac{1}{2}$	2
Quantos $\frac{1}{3}$ cabem em $\frac{3}{3}$?			
Quantos $\frac{1}{5}$ cabem em $\frac{5}{5}$?			
Quantos $\frac{1}{10}$ cabem em $\frac{10}{10}$?			
Quantos $\frac{1}{a}$ cabem em $\frac{a}{a}$?			

Resposta comentada

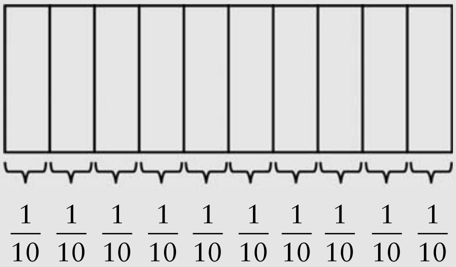
1. Considere 1 inteiro, representado no retângulo.
Quando dividimos esse inteiro em 3 partes, observamos que $\frac{1}{3}$ *cabe 3 vezes no inteiro. Expressando esse fato como divisão de duas frações, temos:* $\frac{3}{3} \div \frac{1}{3}$*; ou como divisão de inteiro por fração* $1 \div \frac{1}{3}$*; e o resultado é 3.*



Quando dividimos esse mesmo inteiro em 5 partes, temos que $\frac{1}{5}$ *cabe 5 vezes no inteiro. Expressando como divisão de duas frações:* $\frac{5}{5} \div \frac{1}{5}$ *; ou como divisão de inteiro por fração* $1 \div \frac{1}{5}$ *; e o resultado é 5.*



Dividindo agora esse inteiro em 10 partes iguais, temos que $\frac{1}{10}$ *cabe 10 vezes no inteiro. Expressando como divisão de duas frações:* $\frac{10}{10} \div \frac{1}{10}$ *; ou como divisão de inteiro por fração* $1 \div \frac{1}{10}$*; e o resultado é 10.*



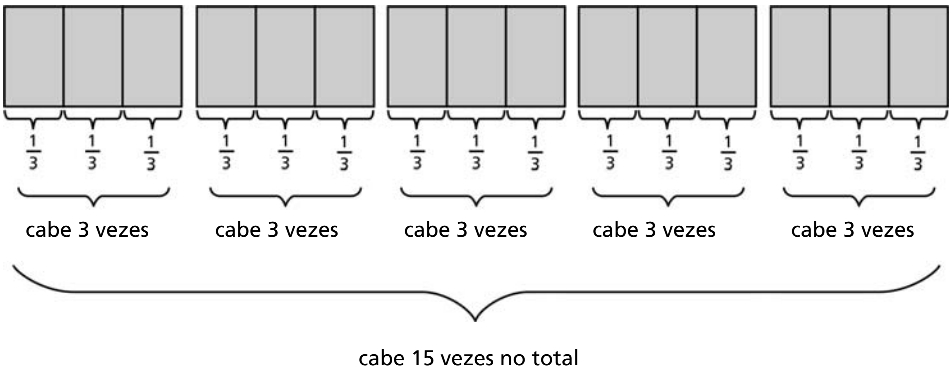
Quando dividimos esse inteiro em **a** *partes, estamos nos referindo a qualquer divisão do inteiro em* **a** *partes. Assim buscamos uma generalização, ou seja, pensar em quantas vezes uma fração da forma* $\frac{1}{a}$ *cabe em 1 inteiro. Pelos exemplos vistos, podemos concluir que esta cabe a vezes. Podemos escrever então que* $\frac{a}{a} \div \frac{1}{a}$ *ou que* $1 \div \frac{1}{a}$ *é igual a* **a***. Através dessa conclusão você pode responder rapidamente quanto é* $1 \div \frac{1}{171}$ *sem precisar dividir 1 inteiro em 171 partes iguais.*

UM POUCO MAIS SOBRE A DIVISÃO DE UM NÚMERO POR UMA FRAÇÃO...

Observe que, na terceira coluna da **Tabela 7.1**, dividimos 1 por uma fração da forma $\frac{1}{a}$. Foi um caso particular de um número dividido por fração. Neste item vamos um pouco mais além, compreendendo a divisão entre qualquer número natural e qualquer fração.

Vamos continuar usando a idéia dos "quantos cabem em...".

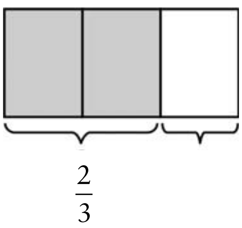
Considere por exemplo $5 \div \frac{1}{3}$. A pergunta que devemos nos fazer é: quantas vezes $\frac{1}{3}$ cabem em 5? Você já sabe que $\frac{1}{3}$ cabe 3 vezes em 1 inteiro; então, quantos $\frac{1}{3}$ cabem em 5 inteiros? Observe:



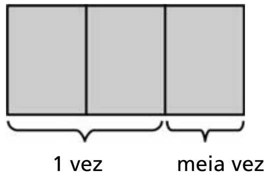
Podemos concluir que $\frac{1}{3}$ cabe 15 vezes em 5 inteiros e, portanto, $5 \div \frac{1}{3} = 15$.

Você pode raciocinar sem a figura pensando que como $\frac{1}{3}$ cabe 3 vezes em 1 inteiro, em 5 inteiros caberá 5 x 3 = 15 vezes.

Considere outra situação: quanto é $1 \div \frac{2}{3}$? Observe que a fração $\frac{2}{3}$ cabe mais de 1 vez e menos de 2 vezes no inteiro.



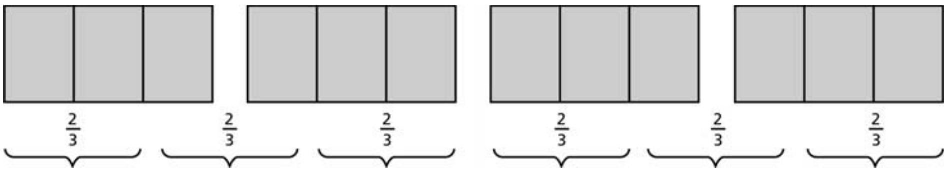
Nesse caso, não conseguimos representar a fração $\frac{2}{3}$ um número de vezes inteiro. Mas como $\frac{2}{3}$ correspondem a 2 retângulos, vemos que $\frac{2}{3}$ cabe 1 vez (2 retângulos) mais meia vez (1 retângulo), ou seja $1\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{3}$. Veja:



Assim, $1 \div \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$.

E quanto é $4 \div \frac{2}{3}$?

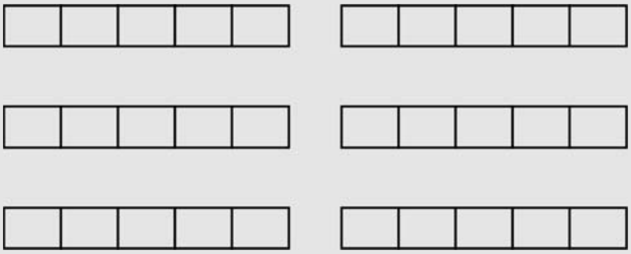
É o mesmo que saber quantas vezes $\frac{2}{3}$ cabe em 4 inteiros. Veja a figura a seguir:



Dessa forma, respondemos que $\frac{2}{3}$ cabem 6 vezes em 4 inteiros, ou $4 \div \frac{2}{3} = 6$.

ATIVIDADE

2. Considere a figura onde estão 6 inteiros divididos em cinco partes iguais cada.



a. Quantas vezes $\frac{2}{5}$ cabem nos 6 inteiros?

b. Qual o valor da operação $6 \div \frac{2}{5}$?

3.Considere um pedaço de tecido de 30cm.

a. Quantas vezes $\frac{1}{2}$ cm cabe nesse tecido?

b. Quantas vezes $\frac{1}{3}$ cm cabe nesse tecido?

c. Quantas vezes $\frac{1}{6}$ cm cabe nesse tecido?

d. Quantas vezes $\frac{5}{6}$ cm cabe nesse tecido?

e. Escreva as expressões dos itens anteriores usando divisão de fração.

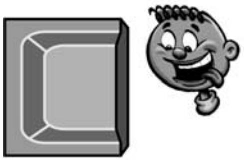
DIVIDINDO FRAÇÃO POR NÚMERO

Lembre-se da aula de divisão de números naturais. A idéia da divisão tem duas ações "quantos cabem" e "repartir em partes iguais".

Podemos encontrar o resultado de algumas divisões de frações utilizando a idéia de **repartir igualmente**. Por exemplo, se repartimos $\frac{1}{3}$ de uma barra de chocolate entre 3 crianças, cada uma receberá a terça parte de $\frac{1}{3}$ da barra. A operação envolvida nessa situação é a divisão, pois queremos repartir $\frac{1}{3}$ da barra por 3 crianças. Dessa forma, a representamos assim: $\frac{1}{3} \div 3$.

Por isso, basta pegarmos $\frac{1}{3}$ da barra, dividir em 3 partes iguais e encontrar a fração da barra que esta nova parte corresponde. Veja, na figura a seguir, $\frac{1}{3}$ da barra dividido por 3.

Cada criança receberá um dos pedaços indicados.



Mas para representar esse "pedaço" em relação ao todo, precisamos dividi-lo em parte iguais; assim, o "pedaço" corresponde à fração $\frac{1}{9}$.

Cada criança receberá $\frac{1}{9}$ da barra de chocolate.

Temos que $\frac{1}{3} \div 3 = \frac{1}{9}$.

ATIVIDADE

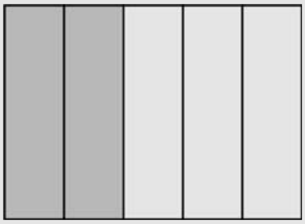
4. A mãe de Pedro fez um bolo. Sua família comeu bastante, mas ainda sobraram $\frac{2}{5}$ do bolo. Pedro recebeu a visita de 5 amigos famintos. Os 6, então, dividiram o bolo igualmente.

a. Que fração do bolo coube a cada amigo?

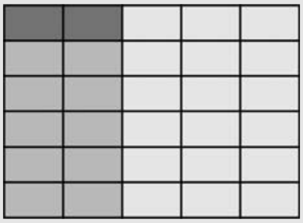
b. Escreva a expressão da conta feita utilizando a divisão.

Resposta comentada

a. A fração que sobrou do bolo $\frac{2}{5}$ *está indicada na figura.*



Dividindo igualmente o bolo por 6 (Pedro e seus 5 amigos):



Assim, a fração que coube a cada amigo foi $\frac{2}{30}$*, ou* $\frac{1}{15}$*, se simplificarmos a fração.*

b. $\frac{2}{5} \div 6 = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$.

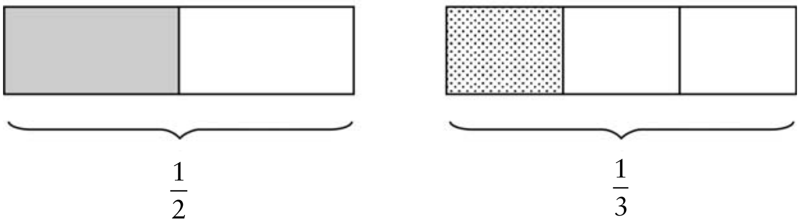
DIVIDINDO FRAÇÃO POR FRAÇÃO...

Aqui vamos dividir fração por fração, como no caso da divisão de $\frac{2}{2} \div \frac{1}{2}$. Já analisamos várias situações em que uma das frações corresponde a um número inteiro; agora, vamos considerar frações com outras especificidades.

Para isso, vamos trabalhar o conceito de divisão de frações utilizando a idéia de "quantos cabem".

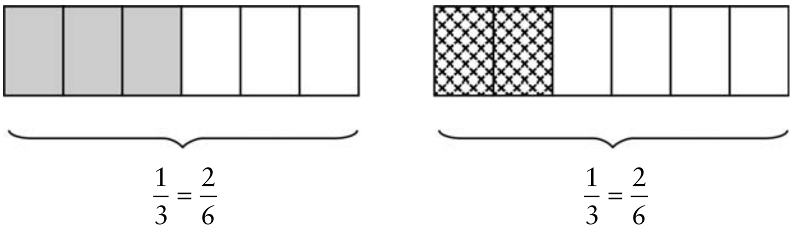
Para dividir $\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{3}$, ou seja, efetuar $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$, fazemos a seguinte pergunta: quantas vezes a fração $\frac{1}{3}$ cabe na fração $\frac{1}{2}$?

Em um primeiro momento, essa pergunta pode parecer estranha. Vamos procurar entendê-la através da representação gráfica.

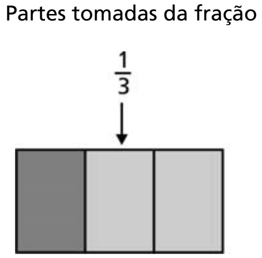


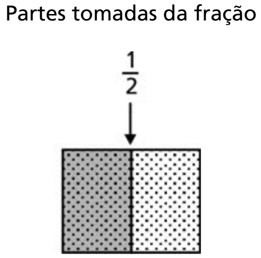
Observando as representações, constatamos a impossibilidade de comparação, pois o todo está divido em partes diferentes. Recorremos, então, à equivalência de fração. Você já sabe que $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ e que $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$. Veja as representações na figura a seguir.

A fração equivalente que desejamos obter não é qualquer fração equivalente às frações dadas, mas uma específica que seja simultaneamente equivalente às frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$. O denominador das frações equivalentes pode ser "descoberto" através da multiplicação dos denominadores (2 x 3 = 6).

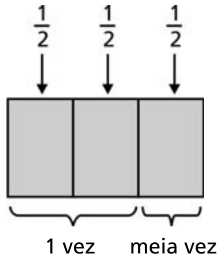


Quando nos perguntamos quantas vezes $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ cabe em $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, desejamos comparar as duas frações, e a equivalência de frações nos permite ver que o todo está dividido em partes iguais. Assim, do todo dividido em 6 partes, a fração $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ indica que foram tomadas 3 partes e da fração $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ foram tomadas duas partes. Podemos então comparar as partes pintadas nas duas frações.





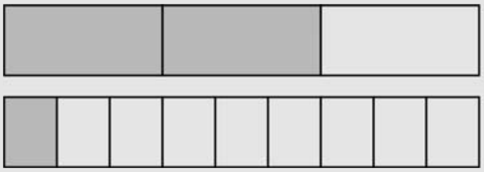
Considerando agora apenas as partes pintadas, nós nos perguntamos quantas vezes a parte pintada da fração $\frac{1}{3}$ cabe na parte pintada da fração $\frac{1}{2}$. Isso é o mesmo que nos perguntar quantas vezes o 3 cabe no 2, e essa pergunta já foi respondida anteriormente nesta aula.



Temos como resposta $1\frac{1}{2}$, ou $\frac{2}{3}$. Logo, $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$.

ATIVIDADES

5. Observe e analise as figuras:

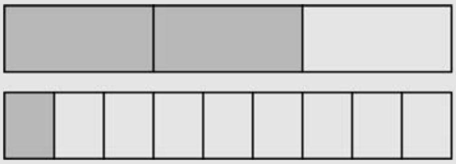


$\frac{2}{3}$

$\frac{1}{9}$

Agora responda:

a. Faça uma divisão adequada às figuras, em partes iguais, de modo que você possa representar as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{9}$ com o mesmo denominador. Escreva também as frações ao lado da representação.



$\frac{2}{3}$ = ______

$\frac{1}{9}$ = ______

b. Analise sua representação e responda: quantas vezes $\frac{1}{9}$ cabe em $\frac{2}{3}$?

c. Qual é o resultado de $\frac{2}{3} \div \frac{1}{9}$?

Resposta comentada

a. O denominador de uma das frações é múltiplo do denominador da outra, ou seja, 9 é múltiplo de 3. Assim, podemos tomar 9 como denominador das frações equivalentes e nesse caso basta dividir cada terço da primeira representação em 3 partes; na segunda representação não precisa mexer. Encontramos, nesse caso:

$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$

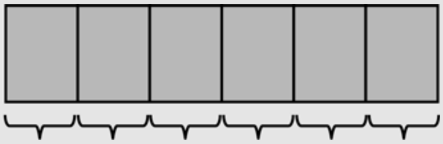
$\frac{1}{9} = \frac{1}{9}$

Poderíamos ter dividido o todo de outras formas. Por exemplo, dividi-lo em 3 x 9 = 27 partes. Nesse caso, teríamos que $\frac{2}{3} = \frac{18}{27}$ e $\frac{1}{9} = \frac{3}{27}$.

A "vantagem" de dividir em 9 partes está na representação, pois dividir o todo em 27 partes é um pouco mais trabalhoso, mas os dois raciocínios estão corretos.

b. Analise as representações. Saber quantas vezes $\frac{1}{9}$ *cabe em* $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ *é o mesmo que saber quantas vezes as partes tomadas da fração* $\frac{1}{9}$ *(1 parte) cabem nas partes tomadas da fração* $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ *(6 partes). A resposta é 6 vezes.*

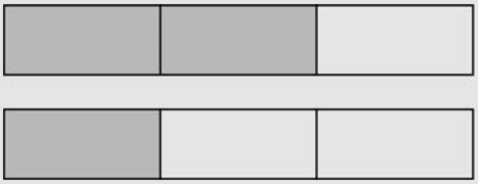
Se você dividiu em 27 partes, sua comparação foi quantas vezes o 3 (da fração $\frac{1}{9} = \frac{3}{27}$) cabe no 18 (da fração $\frac{2}{3} = \frac{18}{27}$). A resposta é a mesma, pois $\frac{18}{3} = 18 \div 3 = 6$.



6 vezes

c. $\frac{2}{3} \div \frac{1}{9} = 6$

6. Observe as barras abaixo e responda:



a. Quantos terços cabem em $\frac{2}{3}$?

b. Qual o resultado de $\frac{2}{3} \div \frac{1}{3}$?

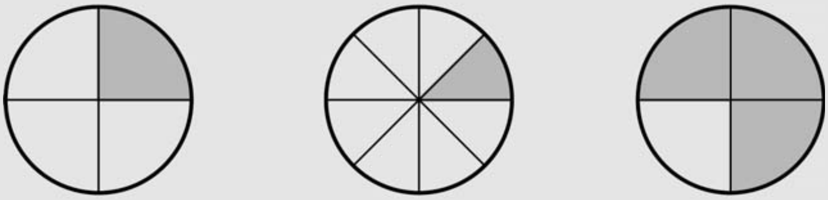
c. Quantos $\frac{2}{3}$ cabem em $\frac{1}{3}$?

d. Qual o resultado de $\frac{1}{3} \div \frac{2}{3}$?

!

Assim como na divisão de números naturais, a divisão de frações não é comutativa. Acabamos de ver nos itens **b** e **d** da Atividade 6.

7. Observe as figuras, e responda aos itens.



$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{3}{4}$

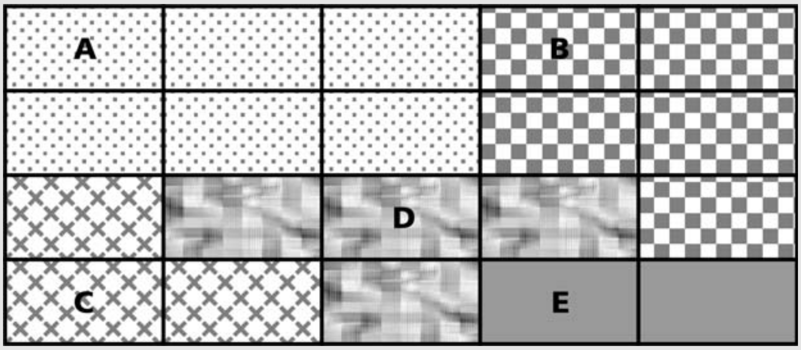
a. Quantas vezes $\frac{1}{8}$ cabe em $\frac{1}{4}$?

b. Qual o resultado de $\frac{1}{4} \div \frac{1}{8}$?

c. Quantas vezes $\frac{1}{8}$ cabe em $\frac{3}{4}$?

d. Qual é o resultado de $\frac{3}{4} \div \frac{1}{8}$?

8. Observe o retângulo a seguir, formado por 5 regiões, onde cada região é formada por retângulos de mesmo tamanho.



a. Que frações do retângulo são representadas por cada região?

região A:

região B:

região C:

região D:

região E:

b. Quantas vezes a região D cabe no retângulo original? Escreva a divisão correspondente a essa pergunta.

c. Quantas vezes a região A cabe na região C? Escreva a divisão correspondente a essa pergunta.

d. Quantas vezes a região E cabe na região B? Escreva a divisão correspondente a essa pergunta.

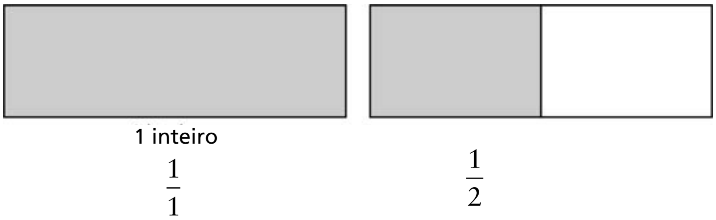
e. Quantas vezes a região D cabe na região A? Escreva a divisão correspondente a essa pergunta.

O ALGORITMO...

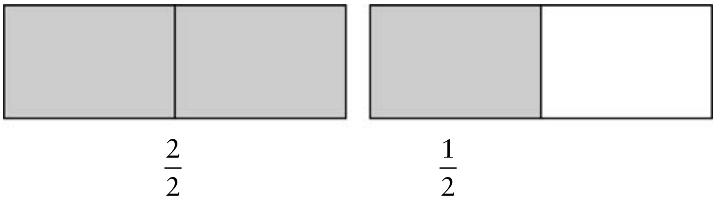
O objetivo neste item é que você compreenda o algoritmo da divisão. Através da idéia de equivalência de frações vamos interpretar a primeira operação, que fizemos no início da aula.

A divisão $1 \div \frac{1}{2}$ pode ser escrita como $\frac{1}{\mathbf{1}} \div \frac{1}{2}$.

Temos então 1 inteiro e desejamos saber quantas vezes $\frac{1}{2}$ cabe no inteiro.



Dividimos, então, o inteiro em duas partes, ou seja, buscamos escrever as frações $\frac{1}{1}$ e $\frac{1}{2}$ com o mesmo denominador. No caso, o 2 = 2 x 1 (o produto dos denominadores). Reescrevemos a fração $\frac{1}{1}$ como $\frac{2}{2}$ e temos:



E agora fazemos uma nova comparação. Quantas vezes 1 (a parte pintada da fração $\frac{1}{2}$) cabe em 2 (os pedaços pintados da fração $\frac{2}{2}$)? Podemos também pensar que foram tomadas **2** partes de **1**.

A forma de pensar a divisão desse exemplo e dos exemplos do item anterior (divisão de fração por fração) nos permite entender o algoritmo da divisão de frações.

Veja a **Tabela 7.2**; nela apresentamos essa idéia feita em diversas situações exploradas ao longo da aula, enfatizando as operações feitas, muitas delas mentalmente. Observe que na construção das frações equivalentes na tabela, seus respectivos denominadores serão o produto dos denominadores das frações anteriores.

Tabela 7.2: Exemplos de divisão de frações

Operação	Operação escrita em fração	Denominador comum: produto dos anteriores	Operação escrita com frações equivalentes	Nova comparação	Resultado
$1 \div \frac{1}{2}$	$\frac{1}{\mathbf{1}} \div \frac{1}{2}$	1 x 2 = **2**	$\frac{2x1}{2} \div \frac{1x1}{2}$	**2** partes de **1**	$\frac{2x1}{1x1} = \frac{2}{1} = 2$
$1 \div \frac{1}{171}$	$\frac{1}{\mathbf{1}} \div \frac{1}{171}$	1 x 171 = **171**	$\frac{171x1}{171} \div \frac{1x1}{171}$	**171** partes de **1**	$\frac{171x1}{1x1} \div \frac{171}{1} = 171$
$5 \div \frac{1}{3}$	$\frac{5}{\mathbf{1}} \div \frac{1}{3}$	1 x 3 = **3**	$\frac{5x3}{3} \div \frac{1x1}{3}$	**15** partes de **1**	$\frac{5x3}{1x1} = \frac{15}{1} = 15$
$1 \div \frac{2}{3}$	$\frac{1}{\mathbf{1}} \div \frac{2}{3}$	1 x 3 = **3**	$\frac{1x3}{3} \div \frac{1x2}{3}$	**3** partes de **2**	$\frac{1x3}{1x2} = \frac{3}{2}$
$\frac{1}{3} \div 3$	$\frac{1}{3} \div \frac{3}{\mathbf{1}}$	3 x 1 = **3**	$\frac{1x3}{3} \div \frac{3x3}{3}$	**3** partes de **9**	$\frac{1x3}{3x3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$
$\frac{2}{5} \div 6$	$\frac{2}{5} \div \frac{6}{\mathbf{1}}$	1 x 5 = **5**	$\frac{2x1}{5} \div \frac{5x6}{5}$	**2** partes de **30**	$\frac{2x1}{5x6} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$
$\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$	$\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$	2 x 3 = **6**	$\frac{3x1}{6} \div \frac{2x1}{6}$	**3** partes de **2**	$\frac{3x1}{2x1} = \frac{3}{2}$
$\frac{1}{4} \div \frac{1}{8}$	$\frac{1}{4} \div \frac{1}{8}$	4 x 8 = **32**	$\frac{8x1}{32} \div \frac{4x1}{32}$	**8** partes de **4**	$\frac{8x1}{4x1} = \frac{8}{4} = 2$
$\frac{3}{4} \div \frac{1}{8}$	$\frac{3}{4} \div \frac{1}{8}$	4 x 8 = **32**	$\frac{8x3}{32} \div \frac{4x1}{32}$	**24** partes de **4**	$\frac{8x3}{4x1} = \frac{24}{4} = 6$
$\frac{2}{3} \div \frac{1}{9}$	$\frac{2}{3} \div \frac{1}{9}$	3 x 9 = **27**	$\frac{9x2}{27} \div \frac{3x1}{27}$	**18** partes de **3**	$\frac{9x2}{3x1} = \frac{18}{3} = 6$

Observe, na **Tabela 7.3**, os registros dos cálculos feitos:

Tabela 7.3

Divisões
$1 \div \frac{1}{2} = \frac{1}{\mathbf{1}} \div \frac{1}{2} = \frac{\mathbf{2x1}}{\mathbf{1x1}} = \frac{2}{1} = 2$
$1 \div \frac{1}{171} = \frac{1}{\mathbf{1}} \div \frac{1}{171} = \frac{\mathbf{171x1}}{\mathbf{1x1}} = \frac{171}{1} = 171$
$5 \div \frac{1}{3} = \frac{5}{\mathbf{1}} \div \frac{1}{3} = \frac{\mathbf{5x3}}{\mathbf{1x1}} = \frac{15}{1} = 15$
$1 \div \frac{2}{3} = \frac{1}{\mathbf{1}} \div \frac{2}{3} = \frac{\mathbf{1x3}}{\mathbf{1x2}} = \frac{3}{2}$
$\frac{1}{3} \div 3 = \frac{1}{3} \div \frac{3}{\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{1x3}}{\mathbf{3x3}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$
$\frac{2}{5} \div 6 = \frac{2}{5} \div \frac{6}{\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{2x1}}{\mathbf{5x6}} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$
$\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{\mathbf{3x1}}{\mathbf{2x1}} = \frac{3}{2}$
$\frac{1}{4} \div \frac{1}{8} = \frac{\mathbf{8x1}}{\mathbf{4x1}} = \frac{8}{4} = 2$
$\frac{3}{4} \div \frac{1}{8} = \frac{\mathbf{8x3}}{\mathbf{4x1}} = \frac{24}{4} = 6$
$\frac{2}{3} \div \frac{1}{9} = \frac{\mathbf{9x2}}{\mathbf{3x1}} = \frac{18}{3} = 6$

Observe que o cálculo feito, antes da simplificação, em todos os casos foi:

$$\frac{\textbf{(numerador da 1ª fração) x (denominador da 2ª fração)}}{\textbf{(numerador da 1ª fração) x (denominador da 2ª fração)}}$$

Mas isso é o mesmo que multiplicar a **1ª fração** pela **2ª fração** **INVERTIDA.**

Assim temos o algoritmo:

Por exemplo:

$$\frac{1}{4} \div \frac{1}{8} = \frac{1}{4} . \frac{8}{1} = \frac{1x8}{4x1} = \frac{8}{4} = 2$$

Chamamos a **FRAÇÃO INVERTIDA** de inverso da fração. O inverso de $\frac{2}{3}$ é $\frac{3}{2}$. Elas são frações inversas, pois multiplicadas dão 1, ou seja, $\frac{2}{3} x \frac{3}{2} = \frac{2x3}{3x2} = \frac{6}{6} = 1.$

!

Para dividir duas frações, multiplicamos a primeira fração pelo inverso da segunda, isto é, dadas duas frações $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$, com $b \neq 0$ e $d \neq 0$ então $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} x \frac{c}{d} = \frac{axd}{bxc}$.

Veja alguns exemplos:

$$\frac{4}{7} \div \frac{6}{11} = \frac{4}{7} x \frac{11}{6} = \frac{4x11}{7x6} = \frac{44}{42} = \frac{22}{21}$$

$$\frac{8}{5} \div \frac{5}{8} = \frac{8}{5} x \frac{8}{5} = \frac{8x8}{5x5} = \frac{64}{25}$$

$$\frac{6}{10} \div \frac{5}{9} = \frac{6}{10} x \frac{9}{5} = \frac{6x9}{10x5} = \frac{54}{50} = \frac{27}{25}$$

ATIVIDADE

9. Resolva as multiplicações usando o algoritmo e escreva o resultado na forma irredutível.

a. $\frac{16}{15} \div \frac{25}{2} =$

b. $42 \div \frac{6}{7} =$

MAIS PROBLEMAS ENVOLVENDO A IDÉIA DE DIVISÃO...

Vamos retornar ao problema dos pirulitos do início da Aula 6 desta disciplina: "Mateus tem 15 pirulitos. Deu $\frac{2}{5}$ de seus pirulitos a seu amigo Tiago. Quantos pirulitos Mateus deu a Tiago?". A operação feita foi $\frac{2}{5}x15 = 6$.

Vamos pegar a mesma situação, mas de maneira inversa.

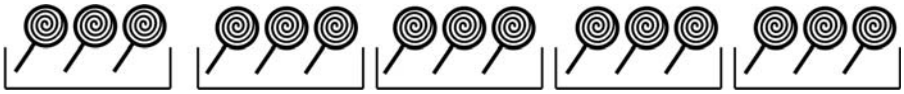
Mateus deu 6 pirulitos para Tiago e disse: "Tiago, eu te dei $\frac{2}{5}$ do total de pirulitos que tenho. Quantos pirulitos eu tenho?"

Vamos ajudar Mateus a resolver o problema, isso é, vamos repartir 6 nos $\frac{2}{5}$. Representaremos, então, a fração $\frac{2}{5}$ (duas partes de cinco), e distribuiremos igualmente 6 pirulitos nessas duas partes.

$\frac{2}{5}$

Cada parte terá 3 pirulitos

Com isso, o total de pirulitos é 5x3 = 15



Quando repartimos 6 por $\frac{2}{5}$, a operação que estamos fazendo é a divisão, e no caso temos que $6 \div \frac{2}{5} = 15$.

ATIVIDADES

10. Mariana tem 20 litros de refresco para sua festa.

a. Quantas garrafas de 2 litros consegue encher?

b. Quantas garrafas de $\frac{1}{2}$ litro consegue encher?

c. Quantas copos de $\frac{1}{4}$ de litro consegue encher?

11. Comprei 50m de tecido para fazer almofadas. Em cada almofada gasto $\frac{1}{5}$ de metro. Quantas almofadas conseguirei fazer com esse tecido?

CONCLUSÃO

O conceito de divisão de frações envolve diferentes casos particulares, cada um deles com significados próprios. Geralmente toda essa riqueza de significados fica perdida com o uso automatizado do algoritmo. Uma forma de explorar os diferentes significados é explorar a resolução de problemas.

Hoje, na área de educação matemática se discute se é importante ou não ensinar frações e operações com frações, visto que seu uso em situações da vida diária é muito pequeno, e a notação decimal é mais utilizada.

No ensino para as crianças, é apropriado que os professores discutam em que momentos esses significados devem ser trabalhados. Mas acreditamos ser de fundamental importância que você, futuro professor, domine todos os significados que envolvem o conceito e os algoritmos de frações.

RESUMO

É possível trabalhar a divisão de frações nos seguintes casos:

– divisão de um número inteiro por uma fração;

– divisão de uma fração por um número inteiro;

– divisão entre duas frações;

– E, a partir da análise desses casos construir o algoritmo da divisão de frações.

AUTO-AVALIAÇÃO

As aulas devem ser lidas mais de uma vez. Esta, em particular, deve ser lida com mais cuidado,tendo em vista a diversidade de conceitos que envolvem a divisão de frações. Por isso, como forma de você se avaliar, retome os itens do resumo e veja se consegue falar sobre esses conceitos em cada caso. Refaça as atividades em que tenha encontrado alguma dificuldade. Preste bastante atenção na Atividade 5. Nela está presente a idéia do algoritmo da divisão de frações. Se você conseguiu compreendê-la, parabéns! Procure não acumular dúvidas, esclareça-as com seu tutor!

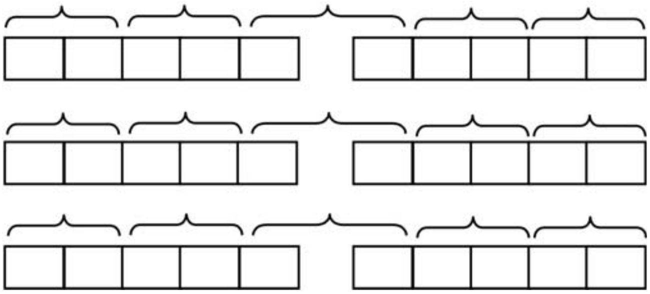
INFORMAÇÃO SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, você verá as operações com números decimais, uma outra representação do número racional, já vista na Aula 3. Os números decimais têm grande aplicação nas situações do dia-a-dia que envolvem medidas.

RESPOSTAS

ATIVIDADE 2

a. $\frac{2}{5}$



Cabe 15 vezes.

b. $6 \div \frac{2}{5} = 15$

ATIVIDADE 3

a. 60 vezes

b. 90 vezes

c. 180 vezes

d. 36 vezes

e. $30 \div \frac{1}{2} = 60$, $30 \div \frac{1}{3} = 90$, $30 \div \frac{1}{6} = 180$ e $30 \div \frac{5}{6} = 36$

ATIVIDADE 6

a. 2 b. 2 c. $\frac{1}{2}$ d. $\frac{1}{2}$

ATIVIDADE 7

a. 2 vezes b. 2 c. 6 vezes d. 6

ATIVIDADE 8

a. região A: $\frac{6}{20}$ ou $\frac{3}{10}$.

região B: $\frac{5}{20}$ ou $\frac{1}{4}$.

região C: $\frac{3}{20}$.

região D: $\frac{4}{20}$ ou $\frac{1}{5}$.

região E: $\frac{3}{20}$.

b. 5 vezes. $\frac{20}{20} \div \frac{4}{20} = 5$

c. $\frac{1}{2}$ vez. $\frac{3}{20} \div \frac{6}{20} = \frac{1}{2}$

d. $\frac{3}{5}.\frac{3}{20} \div \frac{5}{20} = \frac{3}{5}$

e. $\frac{5}{4}.\frac{5}{20} \div \frac{4}{20} = \frac{5}{4}$.

ATIVIDADE 9

a. $\frac{16}{15} \div \frac{25}{2} = \frac{16}{15} x \frac{2}{25} = \frac{32}{375}$

b. $42 \div \frac{6}{7} = \frac{42}{1} x \frac{7}{6} = \frac{294}{6} = \frac{49}{1} = 49$

ATIVIDADE 10

a. 10 garrafas.

b. 40 garrafas.

c. 80 copos.

ATIVIDADE 11

250 almofadas.

AULA 8

Existem números que têm vírgula. Por quê?

Meta da aula

Apresentar as regras, a leitura e a escrita dos números decimais e mostrar como fazer as operações.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- Compreender como as regras do sistema de numeração decimal são estendidas para os números decimais.
- Ler, escrever e ordenar os números decimais de qualquer ordem de grandeza.
- Fazer as quatro operações com os números decimais.
- Reconhecer a importância do número decimal no contexto social.

Pré-requisitos

Para acompanhar esta aula, você deve ter compreendido o significado dos números racionais, deve saber representá-los como frações e como números decimais e deve saber fazer as quatro operações com frações. Se ainda tiver dúvidas a esse respeito, retorne às Aulas de 2 a 7.

CONVERSA INICIAL

Os números decimais são utilizados por você em muitos momentos da vida cotidiana. Esta aula não lhe vai ensinar a trabalhar com números decimais, e sim tentar aumentar sua compreensão a respeito deles.

Nas aulas anteriores, você já teve chance de trabalhar bem os conceitos envolvidos na representação dos números fracionários e o significado de suas operações de multiplicação e divisão. Você viu também que toda fração pode ser escrita como um número decimal e que, muitas vezes, isso pode facilitar o entendimento da grandeza do número e do seu significado.

Os números decimais são reconhecidos e até denominados números "com vírgula" e são mais fáceis de serem entendidos, comparados e representados na reta numérica do que a representação fracionária dos números racionais.

Por isso, a representação decimal vem substituindo a representação fracionária em muitas aplicações. O uso cotidiano das calculadoras e dos computadores também contribui para essa "popularização" de representação.

Aqui, nesta aula, vamos falar dos números decimais, das suas vantagens, de como as regras do nosso sistema de numeração se aplicam a eles, de como são úteis socialmente e aparecem a todo instante em nosso caminho. Vamos comentar a sua leitura, sua escrita, sua ordenação e suas operações.

Você pode estar pensando que, depois desta aula, vai ter argumentos para abandonar de vez os tais números fracionários, responsáveis por tanta dor de cabeça para quem ensina ou quem aprende Matemática. Não vai ser assim porque o entendimento do significado das frações é fundamental e imprescindível para entender o significado dos números decimais.

AS REGRAS DO SISTEMA DECIMAL E OS NÚMEROS COM VÍRGULA

Nas últimas aulas você pôde complementar seus conhecimentos a respeito dos números racionais e de seus vários significados. Você viu e vai continuar vendo nesta aula que um mesmo número pode ser representado de várias formas, e por isso você pode escolher qual a melhor representação para cada situação.

A representação decimal é uma decorrência do sistema de numeração decimal, e vamos destacar suas semelhanças com os números que você já conhece.

Você também já conhece as frações decimais, ou seja, as que possuem denominadores 10, 100, 1000 etc. e cujas representações decimais são respectivamente 0,1; 0,01; 0,001 etc. e que derivam do sistema de numeração decimal.

Vamos lembrar a leitura dessas frações e de como as representamos com um número decimal?

Uma fração com denominador 10 lê-se décimo, ou seja, $\frac{2}{10}$ é 2 décimos e se representa sob a forma decimal como 0,2;

Uma com denominador 100 lê-se centésimo, ou seja, $\frac{5}{100}$ lê-se 5 centésimos e se representa 0,05 e assim por diante.

Por isso, toda fração decimal pode ser transformada em um número decimal e vice-versa.

A segunda coisa que deve ser lembrada é que o nosso sistema de numeração decimal nos leva a representar os números naturais a partir de suas unidades, dezenas (10 unidades), centenas (10 dezenas), milhares (10 centenas) e assim sucessivamente.

	Milhar	Centena	Dezena	Unidade
1000	1	0	0	0
1000/10=100		1	0	0
100/10 = 10			1	0
10/10=1				1

Nas Aulas 19 e 20 de Matemática na Educação 1, que tratavam dos algoritmos da multiplicação e da divisão para os números naturais, ficou clara a importância de reconhecer o valor posicional de cada algarismo no momento das operações. Aqui, você verá que as mesmas regras serão estendidas aos números decimais.

Os números decimais possuem uma parte inteira (antes da vírgula) e uma parte decimal (depois da vírgula), e também poderemos utilizar a mesma representação posicional já vista.

Assim, o primeiro número depois da vírgula representa o décimo (10 décimos = 1 unidade); o segundo número depois da vírgula representa o centésimo (10 centésimos = 1 décimo); o terceiro número depois da vírgula representa o milésimo (10 milésimos = 1 centésimo).

	U ,	Décimo	Centésimo	Milésimo
1	1 ,	0	0	0
$\frac{1}{10} = 0,1$	0 ,	1	0	0
$\frac{0,1}{10} = 0,01$	0 ,	0	1	0
$\frac{0,01}{10} = 0,001$	0 ,	0	0	1

Vamos refletir sobre a representação posicional do número 23,425?

A parte inteira, antes da vírgula, pode ser representada com o algarismo 2 no lugar da dezena e com o algarismo 3 no lugar da unidade, mas quando falamos dizemos vinte e três não é mesmo? Ou seja, 23 unidades.

Na parte decimal, vamos utilizar o mesmo critério: ela será representada com o algarismo 4 no lugar do décimo, com o algarismo 2 no lugar do centésimo e com o algarismo 5 no lugar do milésimo; mas quando falamos, dizemos quatrocentos e vinte e cinco milésimos.

Ao ler esse número ditamos, *vinte e três vírgula quatrocentos e vinte e cinco* ou dizemos *vinte e três inteiros e quatrocentos e vinte e cinco milésimos*.

Quando você estiver ensinando o aluno a entender, escrever e ler um número decimal, deve primeiro mostrar como identificar seu valor posicional. A utilização de um quadro como o apresentado a seguir ajuda muito a esse entendimento.

ATIVIDADE

1. Represente os números abaixo no quadro e depois os leia em voz alta:

a) 325,12;

b) 2,146;

c) 48,3.

Parte Inteira			Parte Decimal		
Centenas	Dezenas	Unidades	Décimos	Centésimos	Milésimos
	2	3 ,	4	2	5

E A ORDENAÇÃO E COMPARAÇÃO DOS NÚMEROS DECIMAIS?

Na Aula 4, foi visto como ordenar os números decimais. Naquele momento, o objetivo era representar os números racionais na reta numérica e foi necessário dar alguns procedimentos de ordenação de números decimais.

Se você está suficientemente esclarecido quanto a isso, pode passar adiante, mas se ainda restam dúvidas a respeito dessa ordenação, faça as atividades a seguir.

Ao compararmos dois números decimais devemos:

1. Comparar as suas partes inteiras (antes da vírgula).

2. Se os números possuem a parte inteira igual, comparar a parte decimal.

3. Para comparar as partes decimais, igualar os números de algarismos, completando com zeros.

ATIVIDADE

2. Observe os números abaixo, coloque-os no quadro e ordene-os.

6,435; 6,1647; 6,0001; 6,4; 6,9999

Parte Inteira			Parte Decimal			
Centenas	Dezenas	Unidades	Décimos	Centésimos	Milésimos	Décimos de milésimos

Resposta comentada

1) Seguindo as instruções do boxe explicativo, verifica-se que todos os números têm a mesma parte inteira, e por isso é necessário verificar apenas as suas partes decimais.

2) O que possui a maior parte decimal é o 6,9999, e o que possui a menor parte decimal é o 6,0001. O maior tem 9999 décimos de milésimos e o menor tem apenas 1 décimo de milésimo.

3) A ordenação é portanto 6,0001 < 6,1647 < 6,4000 < 6,435 < 6,9999, que ao lermos dizemos: 6 inteiros e um décimo de milésimo é menor do que 6 inteiros e 1647 décimos de milésimos, que é menor do que 6 inteiros e 4000 décimos de milésimos, que é menor do que 6 inteiros e 4350 décimos de milésimos, que é menor do que 6 inteiros e 9999 décimos de milésimos.

4) Lembre que o número 6,4 = 6,40 = 6,400 = 6,4000, e ao ser lido dizemos 6 inteiros e 4 décimos é igual a 6 inteiros e 40 centésimos que é igual a 6 inteiros e 400 milésimos que é igual a 6 inteiros e 4000 décimos de milésimos.

!

Acrescentar um, dois, três ou mais zeros à direita de um número decimal não altera o seu valor.

Verifique que, ao colocar cada algarismo no seu lugar no quadro e completar com zeros, esclarece-se ao mesmo tempo qual a sua ordenação e como eles devem ser lidos naquele contexto.

ATIVIDADE

3. Agora, os números decimais estão escritos por extenso e você deve escrevê-los com algarismos no quadro e ordená-los.

a) Um inteiro e oito décimos; mil oitocentos e oitenta e oito décimos de milésimos; oito décimos; um inteiro e oito décimos de milésimos.

b) duzentos milésimos; vinte centésimos; dois mil décimos de milésimos; dois décimos.

Parte Inteira			Parte Decimal			
Centenas	Dezenas	Unidades	Décimos	Centésimos	Milésimos	Décimos de milésimos

Como somar e subtrair os números decimais?

Se você tiver praticado bastante a leitura, a escrita e a ordenação de números decimais, não deve ter nenhuma dificuldade com suas operações. Isto porque as regras do sistema decimal continuarão valendo para os números decimais.

Você pode somar ou subtrair os números decimais a partir de diversos procedimentos (algoritmos). E quando você for trabalhar esses conceitos com seus alunos, lembre-se de que é muito importante que ele compreenda o que está fazendo.

Algoritmo 1

Como todo número decimal pode ser transformado em uma fração decimal, para somar os números 1,8 + 3,4 + 0,8 transforma-se em frações decimais e adiciona-se as frações:

1) 1,8 = 18/10 + 3,4= 34/10+ 0,8 = 8/10

2) 18/10 + 34/10 + 8/10 = 60/10 = 6,0

Algoritmo 2

Escreva os números um embaixo do outro, respeitando as suas posições, ou seja, na parte inteira, os algarismos das unidades abaixo das unidades, os algarismos das dezenas abaixo das dezenas e assim por diante. A vírgula embaixo da vírgula e, na parte decimal siga o mesmo critério, o algarismo representando o décimo abaixo do décimo, o do centésimo abaixo do centésimo, o do milésimo abaixo do milésimo, completando-se com zero quando necessário. Agora some ou subtraia normalmente. Vamos exercitar um pouco?

$$\begin{array}{r} 1{,}8 \\ 3{,}4 \\ 0{,}8 \\ \hline 6{,}0 \end{array}$$

ATIVIDADES

4. Coloque os números no quadro abaixo e faça a operação: 3,45 + 2,3 + 5,002.

Parte Inteira		Parte Decimal		
Dezenas	Unidades	Décimos	Centésimos	Milésimos

Este quadro é apenas auxiliar; agora você já pode abrir mão dele para realizar as operações de adição e subtração.

$$\begin{array}{r} 3{,}450 \\ +2{,}300 \\ 5{,}002 \\ \hline 10{,}752 \end{array}$$

5. Agora efetue 24,34 – 0,425 e escreva por extenso o resultado.

COMO MULTIPLICAR OS NÚMEROS DECIMAIS?

Para multiplicar ou dividir um número decimal é necessário estar bem familiarizado com seu significado e com as regras do nosso sistema de numeração. Lembre-se de que em nosso sistema decimal (base 10), cada ordem vale dez vezes menos do que a ordem anterior (precisamos de 10 unidades para obter 1 dezena, de 10 dezenas para obter 1 centena etc.), e por isso é fácil multiplicar qualquer número por 10, 100 ou 1000.

	Milhar	Centena	Dezena	Unidade
1				1
1 X 10 = 10			1	0
10 X 10 =100		1	0	0
100 X 10 = 1000	1	0	0	0

Para multiplicar números decimais por 10, 100, 1000 ou qualquer outra potência de 10, mantenha os mesmos algarismos e desloque a vírgula para a direita uma, duas, três etc. casas de acordo com a potência de 10. Veja o quadro abaixo.

	U ,	Décimo	Centésimo	Milésimo
0,001	0 ,	0	0	1
0,001X10 = 0,01	0 ,	0	1	0
0,01X 10 = 0,1	0 ,	1	0	0
0,1 X 10 = 1	0 ,	0	0	1

!

Quando multiplicamos um número decimal por 10, 100 ou 1000, andamos com a vírgula para a direita uma, duas ou três casas decimais.

E para multiplicar um número decimal por um número natural diferente de 10 e de suas potências? Existem vários processos para fazer isso. Aqui vamos comentar apenas um deles que o obrigará a refletir mais a respeito das regras envolvidas.

Etapas

1) Você deve multiplicar o número decimal por alguma potência de 10 que o transforme em um número natural.

2) Efetue a multiplicação dos dois números naturais.

3) Divida o produto pela mesma potência de 10 por que você multiplicou o número natural.

ATIVIDADES

6. Vamos exercitar e multiplicar 4,25 X 15?

1) Multiplique 4,25 por 100 para encontrar um número inteiro: 4,25 X 10 = 425.

2) Multiplique os dois números inteiros: 425 X 15 = 6375.

3) Agora divida o resultado por 100: 6375 dividido por 100 = 63,75.

Esses procedimentos podem ser estendidos para a multiplicação de dois números decimais.

!

Em uma multiplicação com dois números naturais, quando se multiplica um dos fatores por um número natural, o produto também fica multiplicado por esse número.

Etapas

1) Você deve transformar cada um dos números em inteiros, multiplicando por 10, 100,1000 etc.

2) Fazer a multiplicação dos números inteiros resultantes da multiplicação anterior.

3) Dividir o resultado pelos mesmos números multiplicados anteriormente, ou seja, se você multiplicou um por 10 e o outro por 100, deve dividir o produto por 10 e depois por 100. Pode também dividir por 1000 (10 X 100).

É claro que você pode e deve utilizar a calculadora como um instrumento para agilizar e dinamizar as aulas, mas os conceitos relacionados ao nosso sistema decimal e aos números decimais são imprescindíveis.

!

Em uma multiplicação com dois números naturais, quando se multiplica cada um dos fatores por um número natural, o produto ficará multiplicado pelo produto dos números.

7. Para multiplicar o número 3,65 por 2,4, acompanhe as etapas realizadas a seguir:

1) Multiplique o primeiro fator por 100, para se tornar inteiro: 3,65 X 100 = 365.

2) Multiplique o segundo fator por 10, para se tornar inteiro: 2,4 X 10 = 24.

3) Multiplique os dois números inteiros: 365 X 24 = 8760.

4) Divida o resultado por 100: 8760 dividido 100 = 87, 6.

5) Agora divida o resultado anterior por 10: 87,6 dividido por 10 = **8,76**.

8. Multiplique o número 12,40 por 3,5 seguindo o algoritmo dado anteriormente, descrevendo cada etapa realizada.

E NA DIVISÃO, AS REGRAS SÃO AS MESMAS?

Na divisão de dois números decimais vamos precisar de outra propriedade: quando multiplicamos o dividendo e o divisor por um mesmo número diferente de zero, o quociente da divisão não se altera. Assim, as etapas para fazer uma divisão são:

1) Multiplicar o dividendo e o divisor por uma mesma potência de 10 (10, 100 ou 1000) de forma que tanto o dividendo quanto o divisor se tornem inteiros.

2) Fazer a divisão dos números inteiros, resultantes da multiplicação anterior. Esse já é o resultado da divisão.

ATIVIDADES

9. Divida o número 2,7 por 0,45 seguindo as etapas descritas:

Você primeiro deve transformar o dividendo e o divisor em inteiros, multiplicando os dois por um mesmo número. Perceba que para o dividendo se transformar em inteiro bastaria multiplicar por 10, mas para o divisor se transformar em inteiro é preciso que seja multiplicado por 100.

Etapas

1) Multiplicar o dividendo por 100 para transformá-lo em inteiro: 2,7 X 100 = 270.

2) Multiplicar o divisor por 100 para transformá-lo em inteiro: 0,45 X 100 = 45.

3) Dividir os resultados encontrados: 270 dividido por 45 = 6.

10. Divida os números 202,5 por 6,25 seguindo e descrevendo as etapas.

QUANDO E ONDE VAMOS UTILIZAR ESSES NÚMEROS?

Você já viu na Aula 3 que os números racionais e sua representação decimal surgiram a partir da necessidade que os homens sentiram de fazer mensurações e, em conseqüência, representar numericamente as partes não inteiras das suas medidas.

Você encontra esses números na sua vida a todo momento e já está acostumado a lidar com eles e a fazer suas operações. Eles aparecem quando queremos medir ou comparar alturas de várias crianças, temperaturas em diversos dias, as áreas de duas salas, os volumes de algumas garrafas, os pesos de produtos ou os preços de duas mercadorias.

Quando vamos apresentar os números decimais para uma criança que não tem ainda a vivência de um adulto, é importante motivá-la com situações do seu contexto social. Aqui, a idéia foi fazer com que você aumentasse seu conhecimento e familiaridade com os números decimais para poder utilizá-los com as diversas unidades de medidas necessárias, para a descrição e comparação de mensurações. Essas medidas serão apresentadas e trabalhadas ainda neste curso.

CONCLUSÃO

Você teve oportunidade de avaliar e complementar seus conhecimentos a respeito dos números decimais. Se você já sabia trabalhar bem com eles, esta aula fez com que você refletisse um pouco mais a respeito dos seus conceitos.

Os conceitos e regras foram apresentados de forma a ressaltar que são extensões dos conceitos e regras do nosso sistema de numeração, que, por ter base 10, é denominado decimal. E, assim, procedimentos que eram talvez realizados mecanicamente sem reflexão do porquê foram revistos, e as regras envolvidas foram relembradas.

Na Aula 4, você pôde fazer exercícios de ordenação de números decimais para representá-los na reta numérica. Aqui, além de ordená-los, você exercitou sua leitura, sua escrita e como fazer as quatro operações.

Os números nos acompanham na vida e os números decimais ainda nos acompanharão por este curso em várias aulas quando formos tratar com as diversas unidades de medida. Quanto mais você conhecer e entender suas características, mais fácil será conseguir que seus alunos tenham desenvoltura ao tratar com eles.

RESUMO

As regras do sistema de numeração decimal podem ser estendidas para os números decimais, e permitem identificar sua leitura, escrita e ordenação. As propriedades da multiplicação e da divisão dos números naturais também são estendidas para os números decimais. Este conhecimento é fundamental, porque todas as unidades de medida na nossa vida cotidiana (tempo, dinheiro, comprimento, peso etc.) precisam de partes do inteiro que são representadas por fração ou por número decimal.

AUTO-AVALIAÇÃO

Os números racionais vêm sendo apresentados desde a Aula 3. Os conceitos relacionados às representações fracionárias decimais dos números racionais foram vistos a partir de várias situações. Aqui, o objetivo era complementar seus conhecimentos a respeito desses números e mostrar como as regras do sistema de numeração decimal se aplicam aos números decimais. Você foi capaz de entender os conceitos que envolvem cada uma das atividades propostas? Reflita se, ao resolver cada uma delas, você sabe as propriedades que foram utilizadas.

Você pode e deve usar uma calculadora para ir conferindo ou ajudando a entender o que acontece com os números decimais durante as operações, mas precisa ter entendido o que foi proposto nesta aula.

E aí, você acha que está preparado para seguir adiante? Se não, releia esta aula ou procure seu tutor, no pólo.

INFORMAÇÃO SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, você verá que os números racionais podem ser negativos.

RESPOSTAS

Atividade 1

a) trezentos e vinte e cinco inteiros e doze centésimos

b) dois inteiros e cento e quarenta e seis milésimos

c) quarenta e oito inteiros e três décimos

Parte Inteira			Parte Decimal		
Centenas	Dezenas	Unidades	Décimos	Centésimos	Milésimos
3	2	5 ,	1	2	
		2 ,	1	4	6
	4	8 ,	3		

Atividade 3

a) Um inteiro e oito décimos; mil oitocentos e oitenta e oito décimos de milésimos; oito décimos; um inteiro e oito décimos de milésimos.

b) duzentos milésimos; vinte centésimos; dois mil décimos de milésimos; dois décimos.

a)

Parte Inteira			Parte Decimal			
Centenas	Dezenas	Unidades	Décimos	Centésimos	Milésimos	Décimos de milésimo
		1,	8			
		0,	1	8	8	8
		0,	8			
		1,	0	0	0	8

b)

Parte Inteira			Parte Decimal			
Centenas	Dezenas	Unidades	Décimos	Centésimos	Milésimos	Décimos de milésimo
		0,	2	0	0	
		0,	2	0		
		0,	2	0	0	0
		0,	2			

Atividade 4

Parte Inteira		Parte Decimal		
Dezenas	Unidades	Décimos	Centésimos	Milésimos
	3	4	5	0
	2	3	0	0
	5	0	0	2
1	0	7	5	2

Atividade 5

Parte Inteira		Parte Decimal		
Dezenas	Unidades	Décimos	Centésimos	Milésimos
2	4	3	4	0
	0	4	2	5
2	3	9	1	5

Vinte e três inteiros e novecentos e quinze milésimos.

Atividade 8

1) Multiplique o primeiro fator por 100, para se tornar inteiro: 12,40 X 100 = 1240;

2) Multiplique o segundo fator por 10, para se tornar inteiro: 3,5 X 10 = 35;

3) Multiplique os dois números inteiros: 1240 X 35 = 43.400;

4) Divida o resultado por 100: 43.400 dividido 100 = 434;

5) Agora divida o resultado anterior por 10: 434 dividido por 10 = **43,4**.

Atividade 10

Etapas

1) Multiplicar o dividendo por 100 para transformá-lo em inteiro: 202,5 X 100 = 20.250.

3) Multiplicar o divisor por 100 para transformá-lo em inteiro: 6,25 X 100 = 625.

4) Dividir os resultados encontrados: 20.250 dividido por 625 = 32,4.

Mais números... você sabia que existem alguns que são negativos?

AULA 9

Meta da aula

Apresentar os números negativos inteiros e explicar o significado das operações.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- Identificar e exemplificar situações que envolvam números negativos.
- Construir significado para as operações que envolvam números inteiros.
- Operar com números inteiros.

Pré-requisito

Para o desenvolvimento desta aula é necessário que você saiba as quatro operações fundamentais e conheça suas propriedades, vistas nas Aulas 15, 16, 17 e 18 de Matemática na Educação 1.

CONVERSA INICIAL

Nesta aula você vai ampliar seu conceito de números e buscar significado para operá-los. Hoje em dia, os números inteiros negativos são bastante incorporados ao nosso cotidiano, devido às operações com dinheiro, temperaturas, altitudes, dentre outras, embora só tenham sido considerados conjunto numérico no século XIX.

Além do cotidiano, os números negativos passaram, então, a ser considerados ampliação do conjunto dos números naturais, recebendo o nome de conjunto dos números inteiros. Mas antes de continuar essa conversa, vamos jogar!

VAMOS JOGAR?

Este jogo é uma introdução de nossa aula. Você deve jogá-lo antes de continuar a leitura da aula. Pode ser com um amigo, um familiar, tanto faz!

O tabuleiro da **Figura 9.1** e os quatro tipos de peças (reproduza 16 de cada tipo, para não faltar) da **Figura 9.2** estarão disponíveis em anexo neste volume, após a Aula 10, junto com as peças das atividades dessa aula. Recorte-os ou faça uma cópia para jogar.

4	1	3	2	2	3	1	4
3	2	1	4	4	1	2	3
2	3	4	1	1	4	3	2
1	4	2	3	3	2	4	1
1	4	2	3	3	2	4	1
2	3	4	1	1	4	3	2
3	2	1	4	4	1	2	3
4	1	3	2	2	3	1	4

Figura 9.1: Tabuleiro do jogo.

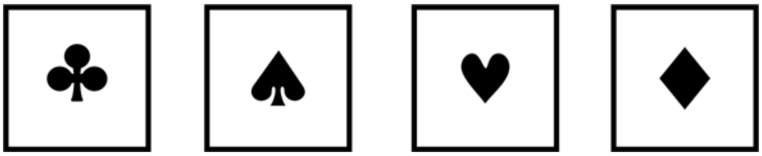


Figura 9.2: As quatro peças do jogo.

Entenda agora o jogo!

O número de jogadores pode variar de 2 a 4.

As casas brancas correspondem aos pontos ganhos e as casas cinzas, aos pontos perdidos.

Cada jogador deve pegar um dos 4 tipos de peças.

O primeiro jogador escolhe uma casa para colocar sua peça e registra seus pontos em uma tabela. A casa escolhida **não pode mais ser usada** por nenhum jogador.

Dando continuidade, o segundo jogador, a partir da casa em que está a peça do jogador anterior, escolhe onde colocar sua peça, a partir dessa casa, ele deve escolher uma outra que deverá estar na vertical ou na horizontal da casa correspondente.

O procedimento descrito no último parágrafo deve ser repetido pelos jogadores.

Quando um jogador não mais puder movimentar sua peça, o jogo acaba. Calcula-se, então, o número de pontos dos jogadores. Ganha quem ganhar mais pontos ou perder menos.

Vamos simular uma partida para que você entenda melhor.

Suponha que Mariana e Juliana vão jogar.

A peça de Mariana é  e a de Juliana é  .

Mariana começa e escolhe o lugar onde colocar sua peça; marca então o número 4, na posição indicada na figura e registra seus pontos na tabela.

4	1	3	2	2	3	1	4
3	2	1	4	4	1	2	3
2	3	♣	1	1	4	3	2
1	4	2	3	3	2	4	1
1	4	2	3	3	2	4	1
2	3	4	1	1	4	3	2
3	2	1	4	4	1	2	3
4	1	3	2	2	3	1	4

Mariana	
Pontos ganhos	**Pontos perdidos**
4	

Essa casa não poderá mais ser ocupada.

Agora é a vez de Juliana: ela pode andar na vertical ou na horizontal, para cima ou para baixo, para a esquerda ou para a direita da casa que foi escolhida. Veja:

4	1	3	2	2	3	1	4
3	2	1	4	4	1	2	3
2	3	♣	1	1	4	3	2
1	4	2	3	3	2	4	1
1	4	2	3	3	2	4	1
2	3	4	1	1	4	3	2
3	2	1	4	4	1	2	3
4	1	3	2	2	3	1	4

Juliana escolhe o 2, na vertical para baixo, coloca sua peça no local escolhido e registra seus pontos ganhos.

4	1	3	2	2	3	1	4
3	2	1	4	4	1	2	3
2	3	♣	1	1	4	3	2
1	4	2	3	3	2	4	1
1	4	♠	3	3	2	4	1
2	3	4	1	1	4	3	2
3	2	1	4	4	1	2	3
4	1	3	2	2	3	1	4

Juliana	
Pontos ganhos	**Pontos perdidos**
2	

4	1	3	2	2	3	1	4
3	2	1	4	4	1	2	3
2	3	♣	1	1	4	3	2
1	4	2	3	3	2	4	1
1	4	♠	3	3	2	♣	1
2	3	4	1	1	4	3	2
3	2	1	4	4	1	2	3
4	1	3	2	2	3	1	4

Mariana agora escolhe o 4, na horizontal à direita.

Mariana	
Pontos ganhos	**Pontos perdidos**
4	
4	

4	1	3	2	2	3	1	4
3	2	1	4	4	1	2	3
2	3	♣	1	1	4	♠	2
1	4	2	3	3	2	4	1
1	4	♠	3	3	2	♣	1
2	3	4	1	1	4	3	2
3	2	1	4	4	1	2	3
4	1	3	2	2	3	1	4

Juliana escolhe o 3, na vertical acima.

Juliana	
Pontos ganhos	**Pontos perdidos**
2	
3	

4	1	3	2	2	3	1	4
3	2	1	4	4	1	2	3
♣	3	♣	1	1	4	♠	2
1	4	2	3	3	2	4	1
1	4	♠	3	3	2	♣	1
2	3	4	1	1	4	3	2
3	2	1	4	4	1	2	3
4	1	3	2	2	3	1	4

Mariana escolhe o 2, na horizontal à esquerda.

Mariana	
Pontos ganhos	**Pontos perdidos**
4	
4	
2	

Acompanhe algumas jogadas seguintes:

♠	1	3	2	2	3	1	4
3	2	1	4	4	1	2	3
♣	3	♣	1	1	4	♠	2
1	4	2	3	3	2	4	1
1	4	♠	3	3	2	♣	1
2	3	4	1	1	4	3	2
3	2	1	4	4	1	2	3
4	1	3	2	2	3	1	4

Juliana, 4, na vertical para cima;

♠	1	3	2	2	3	1	4
3	2	1	4	4	1	2	3
♣	3	♣	1	1	4	♠	2
1	4	2	3	3	2	4	1
1	4	♠	3	3	2	♣	1
2	3	4	1	1	4	3	2
♣	2	1	4	4	1	2	3
4	1	3	2	2	3	1	4

Mariana, 3, na vertical para baixo;

♠	1	3	2	2	3	1	4
3	2	1	4	4	1	2	3
♣	3	♣	1	1	4	♠	2
1	4	2	3	3	2	4	1
1	4	♠	3	3	2	♣	1
2	3	4	1	1	4	3	2
♣	2	1	4	♠	1	2	3
4	1	3	2	2	3	1	4

Juliana, 4, na horizontal à direita;

♠	1	3	2	2	3	1	4
3	2	1	4	4	1	2	3
♣	3	♣	1	1	4	♠	2
1	4	2	3	3	2	4	1
1	4	♠	3	♣	2	♣	1
2	3	4	1	1	4	3	2
♣	2	1	4	♠	1	2	3
4	1	3	2	2	3	1	4

Mariana, 3, na vertical para cima;

♠	1	3	2	♠	3	1	4
3	2	1	4	4	1	2	3
♣	3	♣	1	1	4	♠	2
1	4	2	3	3	2	4	1
1	4	♠	3	♣	2	♣	1
2	3	4	1	1	4	3	2
♣	2	1	4	♠	1	2	3
4	1	3	2	2	3	1	4

Juliana, 2, na vertical para cima;

♠	1	♣	2	♠	3	1	4
3	2	1	4	4	1	2	3
♣	3	♣	1	1	4	♠	2
1	4	2	3	3	2	4	1
1	4	♠	3	♣	2	♣	1
2	3	4	1	1	4	3	2
♣	2	1	4	♠	1	2	3
4	1	3	2	2	3	1	4

Mariana, 3, na horizontal à esquerda;

O jogo continua e acaba ao fim de 22 rodadas. Veja o tabuleiro com o fim do jogo e utilize o tabuleiro limpo, para verificar a pontuação de Mariana e Juliana.

♠	♣	♣	2	♠	3	♠	4
3	♠	1	♠	4	1	♣	♣
♣	♠	♣	1	♣	4	♠	2
♠	♠	2	♣	3	♣	4	♠
♣	♠	♠	♣	♣	♠	♣	♣
♠	♣	4	♣	♣	♠	3	♠
♣	♣	♠	4	♠	1	♣	3
4	♠	3	♣	♠	♣	♠	♠

4	1	3	2	2	3	1	4
3	2	1	4	4	1	2	3
2	3	4	1	1	4	3	2
1	4	2	3	3	2	4	1
1	4	2	3	3	2	4	1
2	3	4	1	1	4	3	2
3	2	1	4	4	1	2	3
4	1	3	2	2	3	1	4

Os pontos estão registrados nas tabelas abaixo.

Mariana	
Pontos ganhos	**Pontos perdidos**
4	1
4	2
2	2
3	1
3	1
3	3
2	
3	
3	
3	
3	
2	
1	
1	
1	
2	
Total de pontos: 28 pontos ganhos	

Juliana	
Pontos ganhos	**Pontos perdidos**
2	1
3	3
4	2
4	2
2	1
1	2
1	4
4	
4	
4	
4	
2	
1	
2	
1	
Total de pontos: 24 pontos ganhos	

Agora que você viu como se joga, jogue uma partida, depois continue a aula.

Observe que até certo momento do jogo, a estratégia que cada jogador deve usar para ganhar é pegar os maiores números das casas brancas; quando essas casas começarem a acabar, o jogador procura pegar os menores números das casas cinza. Nesse caso, escolher o menor número é importante para que o jogador possa ganhar.

ATIVIDADE

1. Andréia, Ana e Rosana escolheram suas peças, jogaram uma partida; a configuração ao final de 13 rodadas está conforme mostra a figura a seguir. Complete a tabela com os registros dos pontos de Ana e Rosana. Para isso, utilize o tabuleiro limpo, para saber os respectivos pontos. Dê o total de pontos de cada jogadora e diga quem está ganhando até agora. Represente os pontos ganhos usando um sinal de "mais" antes dos números e os pontos perdidos usando um sinal de "menos".

♥	1	♠	2	♣	3	♥	4
3	♠	1	♠	4	♥	2	♣
♥	3	♣	1	♠	4	♥	2
♥	♠	2	♣	♠	♣	4	♠
♣	4	♠	3	♣	2	♠	1
2	♥	4	♣	♠	♣	3	♥
♣	2	♣	4	♥	♠	♠	3
4	♣	♥	♥	♣	♠	♥	♥

4	1	3	2	2	3	1	4
3	2	1	4	4	1	2	3
2	3	4	1	1	4	3	2
1	4	2	3	3	2	4	1
1	4	2	3	3	2	4	1
2	3	4	1	1	4	3	2
3	2	1	4	4	1	2	3
4	1	3	2	2	3	1	4

OBS.: Se você quiser terminar o jogo, ele parou na linha 4 e coluna 1, com a jogada da Rosana, a ordem das jogadas é: Andréia, Ana e Rosana.

Andréia ♣	Ana ♠	Rosana ♥
+ 2		
+ 3		
+ 4		
+ 3		
+ 2		
+ 1		
+ 3		
+ 1		
+ 4		
+ 3		
+ 1		
+ 1		
– 2		
+ 28 –2 → 26 pontos ganhos		

UM POUCO DE HISTÓRIA...

Gostou do jogo, manipulou um pouco os valores negativos? Vamos agora fazer um breve histórico sobre os números negativos, mostrando que, entre a aparição e aceitação do número negativo, passaram-se mais de 1.000 anos.

As questões levantadas por alunos e professores suscitaram dúvidas e investigações de matemáticos do passado. Por isso, ensinar números negativos não é tarefa fácil!

Foi na China que encontramos a primeira referência histórica sobre a utilização dos números negativos. No seu sistema de cálculo, eles utilizavam barras numéricas pintadas de vermelho e de preto para representar os números positivos e negativos, respectivamente. Das poucas informações que chegaram sobre a Matemática chinesa antiga, a mais importante é o livro *Nove capítulos da arte matemática* (250 a.C).Trata-se de um conjunto de problemas sobre agricultura, engenharia, impostos, cálculo, resolução de equações, entre outros. Nele, é apresentada pela primeira vez a resolução de sistemas de equações em que são utilizados números negativos.

Diofanto (século III), quando resolvia equações, encontrou uma resposta negativa. Ele a recusou, pois achava absurda a idéia de uma quantidade negativa. Ele considerava somente as raízes positivas das equações, mostrando o seu desconhecimento pelos números negativos.

Os matemáticos hindus detinham um cálculo aritmético e algébrico. Isso lhes permitiu conceber um novo tipo de símbolo para representar dívidas. Posteriormente, o Ocidente chamou esse símbolo de negativo.

A primeira vez que as regras aritméticas com números negativos aparecem explicitamente em uma obra foi na do matemático hindu do século VII, Brahmagupta, que data do ano 628 d.C. Ele não só utilizou os negativos em seus cálculos como os considerou e deu a esses números uma aritmética semelhante à dos inteiros positivos.

Muitos séculos se passaram para que o interesse pelos números negativos fosse retomado. Alguns historiadores escreveram que foram problemas com dinheiro que interpretaram o número negativo como perda.

NEGATIVO

Esta palavra pode ter vindo daquela época em que os valores eram NEGADOS quando se obtinham raízes negativas de uma equação.

Nos séculos XVI e XVII, muitos matemáticos europeus não apreciavam os números negativos e se esses números apareciam em seus cálculos, eles eram considerados falsos ou impossíveis.

Na época do Renascimento, os matemáticos sentiram cada vez mais a necessidade de um novo tipo de número que pudesse ser a solução de problemas simples, como encontrar um número que, somado com 2, desse 0 como resultado.

As Ciências precisavam de símbolos para representar temperaturas acima e abaixo de 0º C, por exemplo. Astrônomos e físicos procuravam uma linguagem matemática para expressar a atração entre dois corpos. Quando um corpo age com uma força sobre outro, este outro reage com uma força de mesma intensidade e sentido contrário. Mas a tarefa não ficava somente em criar um novo número; era preciso encontrar um símbolo que permitisse operar com esse número criado, de modo prático e eficiente.

Nessa época, abriu-se uma nova etapa para os números negativos, pois Stevin (1548-1620) aceitou os números negativos como raízes e coeficientes de equações.

Foi o matemático Albert Girard (1590-1639) o primeiro a reconhecer explicitamente a utilidade algébrica de admitir as raízes negativas como soluções formais das equações, porque permitia uma regra geral de resolução na construção de equações através de suas raízes.

No final do século XVII, surgiu a obra de Viéte, mais tarde ampliada por Descartes em 1637, em que admitiu que as expressões literais pudessem tomar valores negativos.

Hermamn Hankee (1839-1873) garantiu a legitimidade dos números negativos na Matemática, em uma publicação em 1867.

Hoje em dia, os números negativos são muito comuns, pois estão presentes nos jogos, nas medidas de temperatura, nos fusos horários, nos saldos bancários, nas taxas de inflação. Freqüentemente esses números saem nos jornais. Vejamos alguns exemplos.

OS NÚMEROS NEGATIVOS NAS SITUAÇÕES DO DIA-A-DIA

Convivemos com os números negativos em várias situações, tanto de contagem (saldo bancário, saldo de gols, total de pontos de um jogo), quanto de natureza física (temperatura, fuso horário). Vamos ver inicialmente três situações: saldo de gols, temperatura e fuso horário.

Uma boa aplicação de números inteiros é o saldo de gols de um campeonato de futebol, pois temos saldo de gols positivo e saldo de gols negativo.

Nesse esporte, cada vitória significa 3 pontos para o time; se empatar, 1 ponto e se for derrotado não ganha nenhuma pontuação. Veja a seguir a tabela final de classificação dos 24 times que participaram do Campeonato Brasileiro de 2003, em que:

J – número de jogos;

V – número de vitórias;

E – número de empates;

D – número de derrotas;

GP — gols pró (que o time fez);

GC —- gols contra (que o time levou);
SG — saldo de gols (diferença entre o número de gols feitos e o número de gols sofridos por um clube, isto é, SG = GP – GC).

TABELA 9.1: Classificação no campeonato brasileiro.

Colocação final	Time	PG	J	V	E	D	GP	GC	SG
1º	Cruzeiro	100	46	31	7	8	102	47	55
2º	Santos	87	46	25	12	9	93	60	33
3º	São Paulo	78	46	22	12	12	81	67	14
4º	São Caetano	74	46	19	14	13	53	37	16
5º	Coritiba	73	46	21	10	15	67	58	9
6º	Internacional	72	46	20	10	16	59	57	2
7º	Atlético-MG	72	46	19	15	12	76	62	
8º	Flamengo	66	46	18	12	16	66	73	-7
9º	Goiás	65	46	18	11	17	78	63	15
10º	Paraná	65	46	18	11	17	85	75	10
11º	Figueirense	65	46	17	14	15	62	54	8
12º	Atlético-PR	61	46	17	10	19	67	72	-5
13º	Guarani	61	46	17	10	19	64	70	-6
14º	Criciúma	60	46	17	9	20	57	69	-12
15º	Corinthians	59	46	15	12	19	61	63	-2
16º	Vitória	56	46	15	11	20	50	64	
17º	Vasco	54	46	13	15	18	57	69	-12
18º	Juventude	53	46	12	14	20	55	70	-15
19º	Fluminense	52	46	13	11	22	52	77	
20º	Grêmio	50	46	13	11	22	54	66	-12
21º	Ponte Preta	50	46	11	18	17	63	73	-10
22º	Paysandu	49	46	15	12	19	74	77	
23º	Fortaleza	49	46	12	13	21	58	74	-16
24º	Bahia	46	46	12	10	24	59	92	-33

O saldo de gols é um dos critérios de desempate na classificação dos times, por isso, a sua importância. Copiamos da tabela a pontuação dos 12º e 13º colocados; os dois tiveram 61 pontos ganhos, com 17 vitórias e 10 empates (17 x 3 + 10=61). Veja:

12º – Atlético – PR

17 vitórias

10 empates

19 derrotas

67 GP

72 GC

SG = 67 – 72 = -5, isto é, um saldo negativo de 5 gols.

13º – Guarani

17 vitórias

10 empates

19 derrotas

64 GP

70 GC

SG = 64 – 70 = -6, isto é, um saldo negativos de 6 gols.

Nesse caso, como o número de vitórias dos dois times foi o mesmo, o critério de desempate utilizado foi o saldo de gols. O time que obteve o maior saldo de gols ficou mais bem colocado. Vimos, no caso, que foi o Atlético-PR.

Vamos analisar dois fatos importantes. O primeiro é sobre o resultado das operações 67 – 72 e 64 – 70, pois ao efetuarmos a subtração de dois números naturais não encontramos como resposta um número natural, mas sim um número negativo.

Nas duas operações, o resultado numérico foi obtido por meio de subtrações do maior número pelo menor. Veja:

67 – 72 = – 5 → o 5 é o resultado de 72 – 67, só que o resultado é negativo, pois o Atlético-PR levou mais gols do que fez!

64 – 70 = – 6 → o 6 é o resultado de 70 – 64, porém o resultado é negativo, pois o Guarani levou mais gols do que fez!

Por isso, o resultado das duas operações é um número negativo.

O segundo fato é que o número – 5 é maior do que o número –6; por isso, o Atlético-PR ficou na frente do Guarani. Mais adiante, veremos essa ordenação na reta.

Vamos tomar mais dois exemplos: o time campeão e o último colocado.

1º – Cruzeiro
31 vitórias
7 empates
8 derrotas
100 PG = 31 x 3 + 7 x 1
102 GP
47 GC
SG = 102 – 47 = 55, isto é, um saldo positivo de 55 gols.

24º – Bahia
12 vitórias
10 empates
24 derrotas
46 PG = 12 x 3 + 10 x 1
59 GP
92 GC
SG = 59 – 92 = -33, isto é, um saldo negativo de 33 gols.

ATIVIDADE

2. Determine os valores referentes ao saldo de gols dos times com as seguintes classificações:

7º:

16º:

19º:

22º:

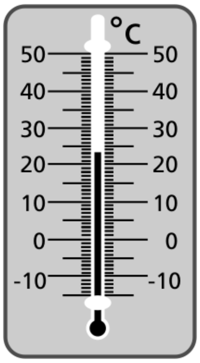
Falando de medidas e fusos horários

Você já deve ter observado que nem sempre podemos caracterizar o estado térmico de um objeto (quente, frio, morno etc.) através das sensações transmitidas pelos órgãos dos sentidos, pois estas dependem tanto do material de que é feito o objeto tocado como das condições que precederam o contato com o nosso corpo.

Em 1741, **Anders Celsius**, físico e astrônomo sueco, fixou em 0 a temperatura de ebulição da água e, em 100, a da fusão do gelo (ao contrário do que acontece hoje). Em 1745, Lineu inverteu as graduações da escala de Celsius. Essa escala foi largamente utilizada na França e foi escolhida pela Convenção em 1794, quando da adoção do Sistema Métrico. Sua unidade é o grau Celsius.

Para caracterizar tais estados térmicos, isto é, a medida de temperatura, utilizamos termômetros.

Existem vários tipos de termômetros, por exemplo: os clínicos, para medir a temperatura do corpo, e os de medição de temperatura do ar. Veja a ilustração a seguir de um termômetro que mede a temperatura do ar.



Observe que temos números acima e abaixo do zero. Esse termômetro marca a temperatura em graus Celsius e vai desde 15 graus Celsius abaixo de zero até 50 graus Celsius acima de zero, isto é, de –15ºC até 50ºC. Uma variação correspondente a 65ºC.

! A temperatura em que a água vira gelo é 0°C (zero graus Celsius) e a temperatura em que ela entra em ebulição é 100ºC.

Quando a temperatura está acima de zero, dizemos que ela é positiva, e nesse caso falamos simplesmente o número. Por exemplo: "No verão do Rio de Janeiro, a temperatura pode chegar a 42ºC.". Queremos dizer que a temperatura é de 42 graus Celsius acima do zero, ou 42 graus Celsius positivos.

Já quando fazemos referência a temperaturas abaixo de zero, é necessário ou falar graus Celsius negativos, ou escrever a temperatura precedida do sinal de menos. Por exemplo: "Nas serras gaúchas, a temperatura pode chegar a –5ºC, ou 5 graus Celsius negativos."

Veja as tabelas a seguir, que mostram a temperatura em algumas cidades do mundo num determinado dia de dezembro e num determinado dia de junho.

Tabela 9.2: Temperaturas em várias cidades.

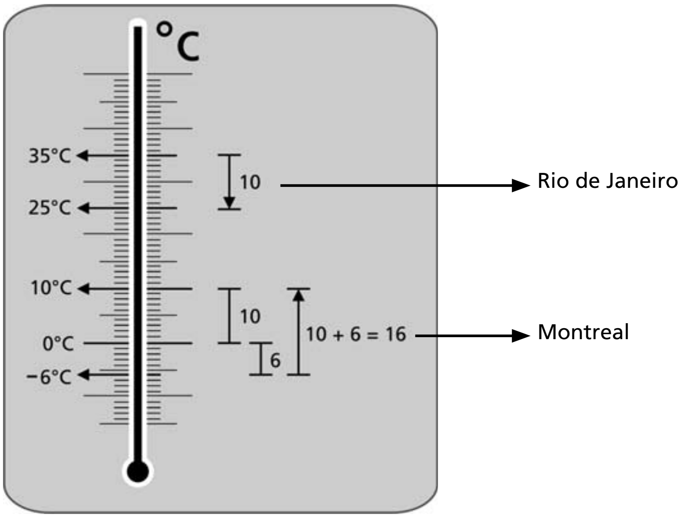
Cidade	Temperatura em dezembro
Rio de Janeiro	35° C
Porto Alegre	21ºC
Madri	6° C
Londres	– 2° C
Montreal	– 6ºC

Cidade	Temperatura em junho
Rio de Janeiro	25° C
Porto Alegre	8° C
Madri	28° C
Londres	18° C
Montreal	10° C

Sobre esta tabela, em relação ao mês de dezembro, pode-se dizer que a cidade que apresenta a temperatura mais alta é o Rio de Janeiro, e a mais baixa é na cidade de Montreal, no Canadá. Já em junho, a temperatura mais alta está ocorrendo em Madri e a mais baixa em Porto Alegre. Quanto maior a quantidade de graus negativos, mais baixa é a temperatura; conseqüentemente, mais frio está o ar.

Comparando as duas tabelas, observamos que no Rio de Janeiro, do mês de dezembro para o mês de junho, ocorre uma diminuição de 10ºC na temperatura; dizemos que ocorreu uma variação de –10ºC.

Verificando o mesmo na cidade de Montreal, a temperatura passa de – 6ºC para 10ºC, neste caso, houve um aumento de 16ºC na temperatura, que corresponde a uma variação de +16ºC. Veja no desenho ao lado:



O cálculo da variação de temperatura é obtido por meio de uma subtração. Veja:

Variação de temperatura = temperatura final – temperatura inicial

Usando essa expressão para o cálculo das variações feitas acima, temos:

Rio de Janeiro: variação = 25º C – 35º C = – 10º C

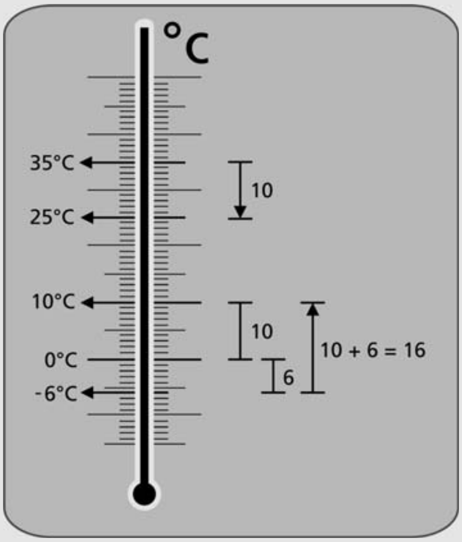
Montreal: variação = 10º C – (– 6ºC) = 16º C

Nas contas feitas, apareceram novidades, pois no cálculo 25 – 35 estamos retirando de 25 um número maior que ele. Já na expressão 10 – (– 6), subtraímos de 10 o número negativo – 6. Até agora, só havíamos feito subtrações de números naturais.

Ao que tudo indica, para efetuar 25 – 35 precisamos fazer uma subtração, pois o resultado encontrado é –10 e 10 = 35 – 25. Já para efetuar a subtração 10 – (– 6), fazemos uma adição, pois obtemos o resultado 16, que é o mesmo que efetuar 10 + 6. Essas operações serão definidas ainda nesta aula!

ATIVIDADE

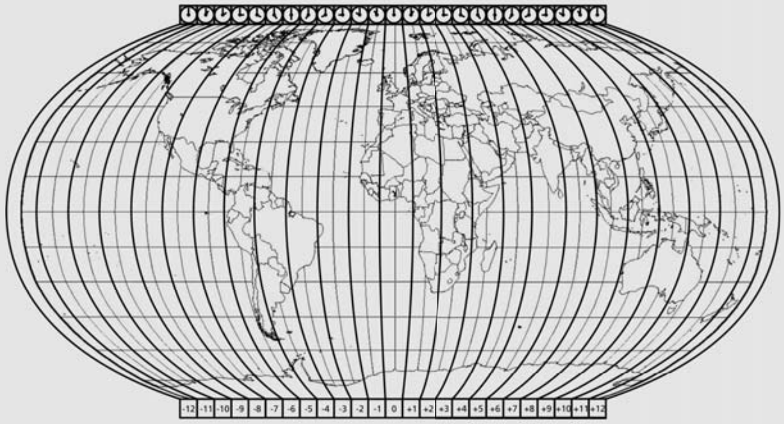
3. Localize no termômetro a seguir as temperaturas em dezembro e em junho das cidades de Porto Alegre e Londres e determine a variação das temperaturas, das indicações de dezembro e junho.



No mapa da figura a seguir estão esquematizadas as 24 regiões, pela quais a Terra foi dividida; cada região é chamada fuso. Cada fuso tem o seu horário local. Em duas cidades de um mesmo fuso horário, os relógios marcam a mesma hora.

Observe no mapa que na parte de baixo aparecem números positivos e negativos. Eles significam, por exemplo, que nas cidades que estão no fuso -3 os relógios marcam 3 horas a menos do que nas cidades de fuso 0 (zero). Assim, quando em Londres (fuso 0) são 10h, no Rio de Janeiro são 7h, pois o Rio de Janeiro encontra-se no fuso -3.

No fim do século XIX, foi criado o sistema de fusos, para ajudar a organizar o referencial de horas ao redor do mundo.
Esse sistema relaciona as 24 horas, correspondentes a um dia, com 360º, pois a Terra dá uma volta (gira 360º) em um dia (24 horas).



4. As cidades Nova York e Los Angeles estão situadas nos Estados Unidos. Indique os fusos em que essas cidades estão e determine o horário delas quando no Rio de Janeiro os relógios marcam 17h.

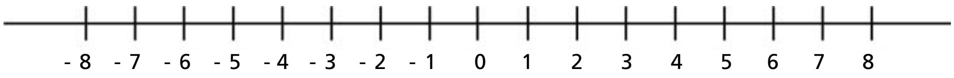
4. a. Carolina está fazendo um curso na cidade de Tóquio, capital do Japão, que está situada no fuso +9, e deseja telefonar para sua mãe, que mora no Rio de Janeiro. Sabendo que em Tóquio são 21h, qual o número que Joana deverá adicionar ao horário de Tóquio para saber que horas são no Rio de Janeiro?

O CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS E A RETA NUMÉRICA

Mostramos algumas situações em que aparecem os números negativos. Vamos agora formalizar um dos conjuntos ao qual esses números pertencem. Esse conjunto é chamado conjunto dos números inteiros e é obtido fazendo a união do conjunto dos números naturais, com o conjunto dos números inteiros negativos e com o zero.

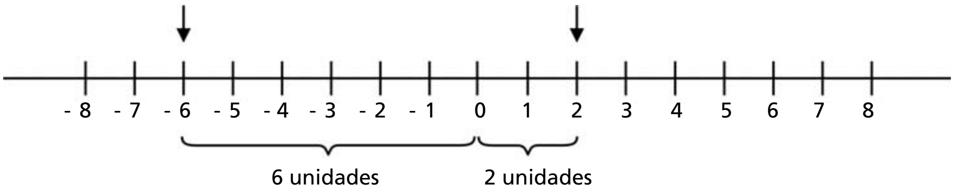
Esse conjunto é denotado pela letra Z (Zahlen, que significa número em alemão) e pode ser escrito por: Z = {..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4...}

Assim como localizamos os números naturais e as frações na reta numérica, faremos o mesmo com os números negativos. O zero assume a posição de origem; à direita do zero localizamos os números naturais, também chamados de inteiros positivos; e à esquerda localizamos os negativos. Observe que foi utilizada a mesma unidade de medida para localizar os números vizinhos. Veja:



Baseando-se ainda na reta numerada, podemos afirmar que todos os números inteiros possuem um e somente um antecessor e também um e somente um sucessor. O sucessor de um número inteiro é o número inteiro que se encontra imediatamente à sua direita na reta, e o antecessor de um número inteiro é o número inteiro que está imediatamente à sua esquerda na reta. Dessa forma, dizemos que o conjunto dos números inteiros é um conjunto ordenado.

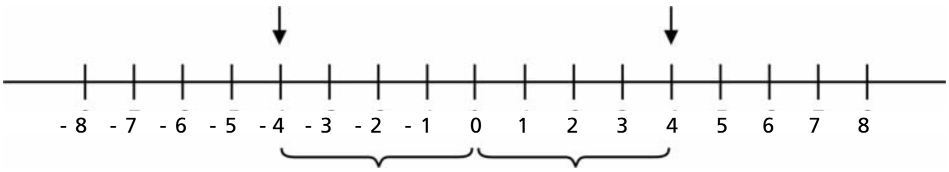
A distância entre um número e o zero é chamada **módulo** de um número inteiro. Por exemplo: Qual é o módulo de -6? E o módulo de 2?



O módulo de -6 é 6, pois a distância desse número ao zero é de 6 unidades, e o módulo de 2 é o próprio 2. Podemos indicar |-6| = 6 e |2| = 2. Como estamos falando de distância, podemos concluir que o módulo é sempre positivo.

Outra conclusão que podemos tirar é que o módulo de 0 é 0, pois este dista 0 unidades dele mesmo.

Agora responda: quais são os números que têm módulo 4?



Esses números são chamados opostos ou simétricos. Assim, 4 é o oposto de – 4 e – 4 é o oposto de 4, e escrevemos assim: – 4 = – 4 e – (– 4) = 4. O oposto é representado pelo sinal de menos à esquerda do número.

Voltando ao exemplo da variação de temperatura da cidade de Montreal, temos que: 10 – (– 6) = 10 + [– (– 6)] = 10 + 6 = 16.

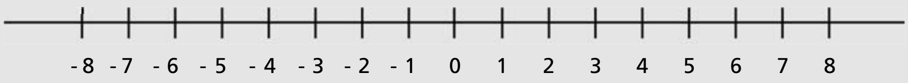
É dessa forma que, matematicamente, definimos a subtração de dois números inteiros, isto é, $a - b$ é o mesmo que a somado com o oposto de b, isto é, $a - b = a + (-b)$, para quaisquer números inteiros a e b.

ATIVIDADE

5. Localize na reta numérica os números –7, 7, -5, -3, 4, -2 e 0 e responda:

a. Qual deles possui o maior módulo?

b. Qual deles possui o menor módulo?



USANDO O SALDO BANCÁRIO PARA ADICIONAR E SUBTRAIR NÚMEROS INTEIROS

Para trabalharmos a adição e a subtração, vamos partir de uma situação real e formalizar a matemática adequada a ela. Para isso usaremos a reta numérica.

Como a subtração a - b é a adição do número a com o oposto do número b, vamos nos concentrar na adição.

Quando vamos ao banco e imprimimos o extrato bancário, estamos querendo saber muitas coisas, entre elas, se o dinheiro ainda está suficiente para pagar todas as contas. Caso o dinheiro não tenha sido suficiente, aparecerão no saldo total números negativos. O que significa isso? Significa que estamos devendo dinheiro ao banco. Nesse sentido, aparecem a idéia do número negativo e a idéia de estar devendo. Veja o extrato bancário do Sr. João, correspondente à movimentação do dia 5 de maio ao dia 14 de maio.

Tabela 9.3: Extrato bancário.

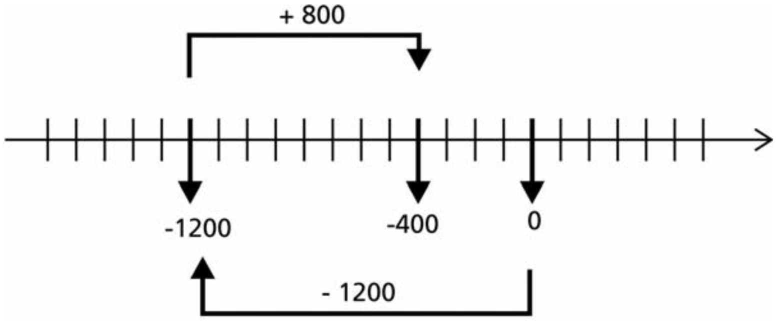
Data	Descrição	Movimentação	Saldo
05/05	Saldo anterior		1.200,00-
06/05	Depósito	800,00	400,00-
07/05	CPMF	2,00-	402,00-
10/05	Tarifa pacote preferencial	18,00-	420,00-
11/05	Depósito	60,00	
11/05	Cheque compensado	340,00-	700,00-
13/05	Depósito	450,00	250,00-
13/05	CPMF	3,00-	253,00-
14/05	Cheque eletrônico	47,00-	

Para fazer a leitura correta dessa tabela, você precisa saber que na coluna de movimentação o sinal de menos à direita do número indica que este vai ser retirado do total anterior, pois indica alguma quantidade que se deve. Quando o sinal de menos está na coluna do saldo, o significado é de dívida; em 15 de maio, o Sr. João devia ao banco R$300,00.

Em relação ao dia 5 de maio, o Sr. João estava devendo ao banco R$1.200,00, mas como fez um depósito de R$800,00 no dia 6, sua dívida diminuiu R$800,00. Com isso, seu saldo parcial passou a ser de R$400,00 negativos. Sua dívida ficou menor!

Usando os símbolos matemáticos, representamos assim: **-1200 + 800 = -400.**

A representação na reta numérica fica assim:

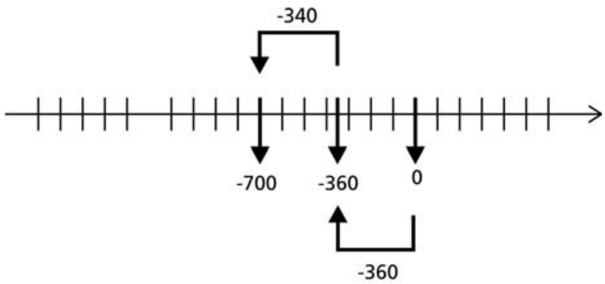


Observe que, nesse caso, foi preciso fazer a **subtração** 1.200 – 800 para chegarmos ao 400, pois o saldo devedor diminuiu. As ações feitas são contrárias.

Já no dia 11 de maio seu saldo era **devedor** de R$360,00, e ainda compensou um cheque de R$340,00; por isso, o saldo total no final do dia era **devedor** de 360,00 + 340,00, ou, usando números negativos, – 700,00. Sua dívida ficou maior!

Usando uma operação, temos: **-360,00 + (-340,00) = -700,00**.

Na reta temos:



Agora, foi preciso somar os valores 360,00 e 340,00, pois o saldo devedor aumentou. Ações iguais.

Vamos então formalizar a adição de inteiros!

- Se as ações são contrárias (perde x ganha), devemos fazer a subtração e verificar se o saldo final é positivo ou negativo. Para isso, basta ver o sinal do maior.

- Se as ações são iguais (perde x perde), devemos fazer a adição e manter o sinal dos números.

Veja alguns exemplos de adição de inteiros. Usaremos uma tabela para organizar melhor as etapas.

Tabela 9.4

expressão	Operação realizada	cálculo	sinal do resultado	Resultado final
-56 + 10 =	subtração	56 – 10 = 46	negativo	-46
-125 + 200 =	subtração	200 - 125 = 75	positivo	75
-32 + (-68) =	adição	32 + 68 = 100	negativo	-100
358 + (-200) =	subtração	358 – 200 =158	positivo	158
-300 + (-45) =	adição	300 + 45 = 345	negativo	-345
10 + (-56) =				
200 + (-125) =				
-68 + (-32) =				
-200 + 358 =				
-45 + (-300) =				

ATIVIDADES

6. Complete a tabela, em que nas expressões foram trocadas as ordens dos termos. A operação adição é comutativa?

– 47 + 7 =

7. Calcule os valores referentes aos espaços vazios da tabela, referentes aos dias 11 e 14 de maio. Explique como você fez a conta. Não se esqueça de colocar o sinal de menos, caso o saldo seja devedor.

Para subtrair números inteiros, por exemplo, a - b, transformamos a subtração numa adição da seguinte forma, conforme visto no elemento oposto:

a - b = a + (-b) → adicionamos o primeiro número com o oposto do segundo número.

Exemplos:

a. 8 – 10 = 8 + (-10) = -2

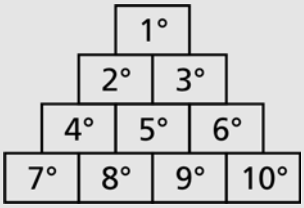
b. 35 - 55 = 35 + (-55) = -25

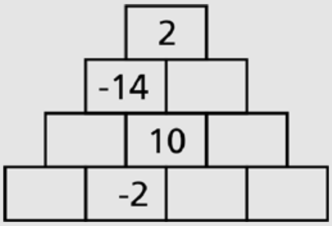
c. –90 - 80 = -90 + (-80) = -170

d. 2 - 5 = 2 + (-5) = -2

8. A pilha a seguir contém 15 tijolos numerados em ordem até o décimo.

A parte de trás de cada tijolo contém um único número. Alguns tijolos foram virados e os números correspondentes aparecem na próxima pilha.





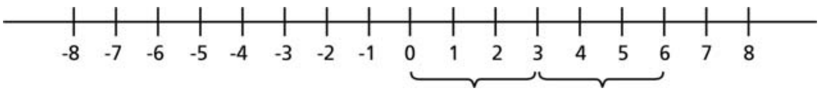
Complete os tijolos que faltam até o 10º, sabendo que o número de cada tijolo é a soma dos números escritos nos dois tijolos em que ele se apóia.

MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DE NÚMEROS INTEIROS

Como você já sabe representar os números inteiros na reta numérica, vamos utilizá-la para trabalhar a multiplicação de inteiros. Acompanhe os exemplos, observando que sempre partimos do zero para localizar os números e, quando o número é negativo, estaremos usando o conceito de oposto.

Quando os dois números são positivos temos:

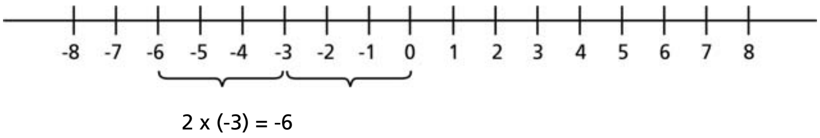
2 x 3 duas vezes o 3 2 x 3 = 6



Esse caso é a multiplicação de números naturais que você já conhece.

Quando temos um número positivo multiplicado por um número negativo, por exemplo 2 x (–3):

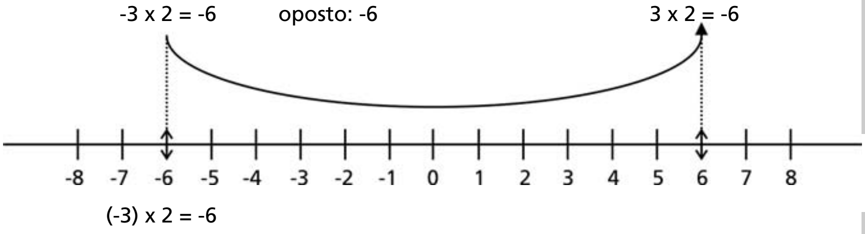
2 x (-3) significa duas vezes o –3



Encontramos – 6 como resultado do produto.

Quando temos um número positivo multiplicado por um número negativo, por exemplo (– 3) x 2, o significado dessa operação é o oposto de 3x2. Veja:

(–3) x 2 significa o oposto de 3x2



Para entender a multiplicação de um número positivo por um negativo e de dois números negativos, usamos o fato de (-a) x b = -a x b, onde *a* e *b* são números inteiros. Isso nos permite interpretar (-a) x b como o oposto do resultado de a x b

Esse fato é conseqüência direta da propriedade associativa.

Assim, podemos interpretar (-2) x 3 como o oposto de 2 x 3 e (-2) x (-3) como o oposto de 2 x (-3).

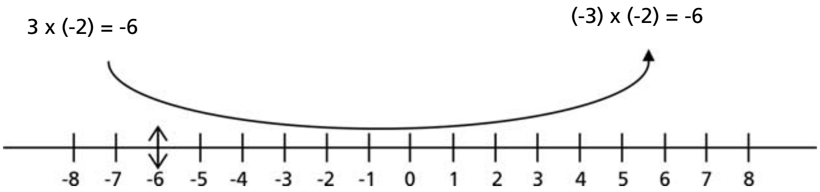
Você observou que 2x (–3) deu o mesmo resultado que (-3) x 2. Ao trocarmos a ordem dos fatores, o produto não foi alterado!

No conjunto dos números inteiros, a operação multiplicação é comutativa, isto é, a x b = b x a, onde *a* e *b* representam quaisquer números inteiros.

(– 3) x (– 2) = oposto: de 3 x (– 2) = – 6 oposto: +6

Podemos concluir que o resultado da multiplicação de dois números inteiros é positivo quando os números multiplicados têm o mesmo sinal. E é negativo quando os números multiplicados têm sinais contrários.

Quando dois números negativos são multiplicados, por exemplo (-3) x (-2), o significado dessa operação é o oposto de 3 x (-2). Representando na reta numerada:



Na divisão de números inteiros, o significado dos sinais é o mesmo da multiplicação e a operação entre os números é feita da mesma maneira que a dos números naturais.

Veja alguns exemplos:

$4 \div (-2) = -2$

$(-9) \div 3 = -3$

$(-20) \div (-5) = 4$.

ATIVIDADE

9. Complete os espaços vazios da tabela a seguir, observe as regularidades e responda às perguntas.

a. O que acontece quando um número é multiplicado por 1?

b. E quando é multiplicado por –1?

c. E quando é multiplicado por zero?

d. Utilize a tabela para resolver as três expressões a seguir:

3 x (-2)x4

3 x (-2)]x4

3 x [(-2)x4]

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
-3		6		0	-3	-6	-9
-2	6	4			-2	-4	-6
-1		2	1	0	-1	-2	-3
0	0		0			0	
1		-2			1	2	
2	-6	-4	-2		2	4	6
3		-6		0		6	

O que você observou?

e. Qual o sinal do produto quando os dois fatores têm o mesmo sinal?

f. Qual o sinal do produto quando os dois fatores têm sinais diferentes?

g. Quando multiplicamos por 2 (linha 7 da tabela), o que acontece com a seqüência dos resultados?

h. Quando multiplicamos por -2 (linha 3 da tabela), o que acontece com a seqüência dos resultados?

CONCLUSÃO

Operar números inteiros é mais do que decorar regras de sinais. É muito comum ouvirmos a frase "menos com menos dá mais". Mas o "com" significa adição, e "o menos com menos" se aplica multiplicação. É importante operar com números, mas é essencial compreender a ação das operações e, nelas, o significado dos sinais.

RESUMO

Nesta aula vimos que os números negativos se apresentam em situações cotidianas, como no saldo bancário e nas temperaturas; a seguir ampliamos o conjunto dos números naturais, através da definição do conjunto Z, dos números inteiros. E a partir daí trabalhamos:

- adição e subtração dos inteiros;
- multiplicação dos inteiros;
- divisão dos inteiros.

Sempre que foi possível, utilizamos a reta numérica com o objetivo de localizar os inteiros e auxiliar no entendimento das operações feitas; utilizamos contextos da vida real para um melhor entendimento e manipulação dos inteiros.

AUTO-AVALIAÇÃO

Aproveite a motivação inicial, que é lúdica, para compreender a adição de inteiros. Jogue com seus colegas e preste atenção nas estratégias utilizadas. Quando você estiver manipulando bem o jogo, aí sim, inicie a leitura com tranqüilidade. Esta se propõe a apresentar os inteiros e a ensinar como se opera com eles. Faça as atividades com atenção e, se for preciso mais treino, procure o assunto em livros da 6ª série do Ensino Fundamental, onde encontrará uma série de exercícios interessantes. Refaça com seus colegas ou com seu tutor as atividades em que tenha encontrado alguma dificuldade ou que não saiba fazer. Dê atenção especial às Atividades 6 e 9; elas exploram características importantes da adição e da multiplicação de números inteiros. Se você tiver dificuldades para resolver os exercícios, releia a aula e tente resolvê-los novamente. No entanto, se as dificuldades persistirem, procure seu tutor no pólo.

INFORMAÇÕES SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula você trabalhará diversos tipos de atividades com as frações positivas e negativas, com números escritos na forma decimal. Será uma aula em que você aplicará todos os conhecimentos apresentados sobre o conjunto das frações até o momento. Aproveite para rever o que você já sabe e para aprender o que ainda não foi assimilado.

RESPOSTAS

ATIVIDADE 1

Já sabemos que Andréia obteve 26 pontos ganhos. Vamos somar os pontos de Ana e de Rosana.

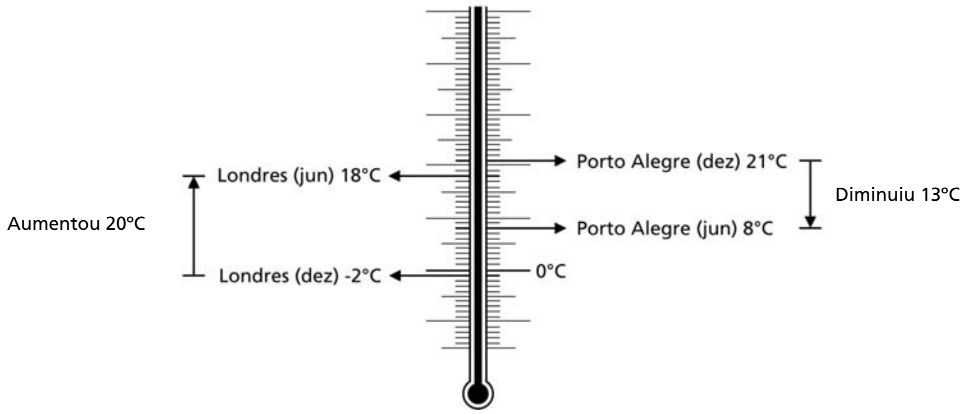
Ana ♠	Rosana ♥
3	4
2	1
4	1
1	2
4	3
-3	-1
1	3
2	2
4	4
-1	-3
-1	2
2	-1
3	4
+26 – 5 =21 pontos ganhos	**+26 – 5 = 21 pontos ganhos**

Até essa etapa do jogo Andréia é a vencedora.

ATIVIDADE 2

7º – Atlético-MG	SG = 76 – 62 = 14
16º – Vitória	SG = 50 – 64 = -14
19º – Fluminense	SG = 52 – 77 = -25
22º – Paysandu	SG = 74 – 77 = -3

ATIVIDADE 3



Porto Alegre (dez a jun)

Variação = 8°C – 21°C = – 13°C

Londres (dez a jun)

Variação = 18°C – (–2°C) = 20°C

ATIVIDADE 4

a. Nova York: fuso – 5

Los Angeles: fuso – 8

Como o Rio de Janeiro está localizado no fuso –3 e Nova York no fuso –5, a diferença de horário é de 2h. Logo em Nova York são 15h.

Já em Los Angeles são 5 horas antes do Rio de Janeiro, pois a variação de fuso entre essas cidades é de 5h. Portanto, em Los Angeles os relógios marcam 12h no relógio.

b. Tóquio: fuso +9

Rio de Janeiro: fuso –3

Variação de +12h do Rio para Tóquio e de –12 de Tóquio para o Rio

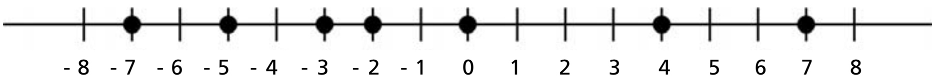
Horário de Tóquio: 21h

Horário no Rio: 21 + (-12) = 9h

Resposta: -12

ATIVIDADE 5

A localização pode ser feita com pontos.



a. O 7 e o –7 possuem o maior módulo, pois estão mais distantes do zero. Os dois possuem o mesmo módulo, que é 7.

b. O zero possui o menor módulo, pois sua distância ao zero é zero. O módulo de zero é zero.

ATIVIDADE 6

Expressão	Operação realizada	Cálculo	Sinal do resultado	Resultado final
10+(-56) =	subtração	56 – 10 = 46	negativo	– 46
200+(-125) =	subtração	200 – 125 = 75	positivo	75
– 68+(-32) =	adição	32 + 68 = 100	negativo	– 100
– 200+358 =	subtração	358 – 200 =158	positivo	158
– 45+(-300) =	adição	300 + 45 = 345	negativo	– 345

A adição de inteiros é comutativa, isto é, não importa a ordem em que somamos os termos.

ATIVIDADE 7

11 de maio: devia 420,00 e abateu 60,00 → agora deve 360,00

– 420,00 + 60,00 = – 360,00

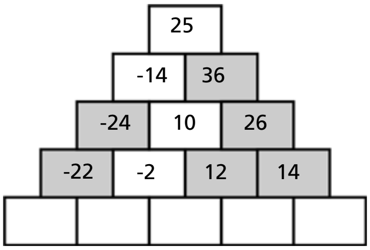
Resposta: 360,00 –

14 de maio: devia 253,00 e vai dever mais 47,00 → agora deve
253 + 47 = 300,00

– 253,00 + (– 47,00) = – 300,00

Resposta: 300,00-

ATIVIDADE 8



ATIVIDADE 9

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
-3	9	6	3	0	-3	-6	-9
-2	6	4	2	0	-2	-4	-6
-1	3	2	1	0	-1	-2	-3
0	0	0	0	0	0	0	0
1	-3	-2	-1	0	1	2	3
2	-6	-4	-2	0	2	4	6
3	-9	-6	-3	0	3	6	9

a. O resultado é o próprio número.

b. O resultado é o oposto.

c. O resultado é zero.

d. 3x(-2)x4 = -24 [3x(-2)]x4 = -6x4 = -24 3x[(-2)x4] = 3x(-8) = -24

O resultado foi o mesmo.

e. Positivo.

f. Negativo.

g. Aumenta de dois em dois.

h. Diminui de dois em dois.

Relaxe... Mas nem tanto... Outros métodos no ensino e aprendizagem dos números racionais

AULA 10

Meta da aula

Mostrar metodologias complementares no processo de ensino e aprendizagem dos números racionais, seus significados e suas representações.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- Utilizar outros materiais manipulativos para ensino e aprendizagem dos números racionais.
- Utilizar jogos na compreensão das relações que se estabelecem entre as diferentes representações dos números racionais.

Pré-requisitos

Antes de iniciar o estudo desta aula você deverá ter em mãos tesoura, lápis de cor, cola, caneta hidrocor e papel ofício. Além disso, você utilizará os conceitos apresentados nas Aulas 2 a 9. Se há duvidas em alguma delas, reveja o texto e retorne o estudo das atividades propostas.

CONVERSA INICIAL

Esta será uma aula diferente das que você já teve até agora. Embora em todas as demais você deve ter se sentido em plena atividade, esta, em particular, pode ser considerada uma aula prática. Aqui você terá a oportunidade de confeccionar jogos e utilizá-los para fazer as atividades propostas.

A partir da Aula 2, você estudou os números racionais. Inicialmente abordamos alguns aspectos históricos e as diferentes representações (Aulas 2 e 3). Depois, estudamos a representação dos racionais na reta numérica (Aula 4). Fizemos um estudo cuidadoso das operações com o conjunto das frações positivas (Aulas 5, 6 e 7).Vimos os números decimais e suas operações (Aula 8). Até então, nosso foco estava nos números racionais positivos. Finalmente, apresentamos a você os números inteiros negativos e as operações (Aula 9).

Os jogos e atividades propostos nesta aula envolverão todos esses conhecimentos de forma inter-relacionada. Estabelecer essas conexões será fundamental para a compreensão dos números racionais.

Em cada um dos jogos ou atividades seguiremos o seguinte roteiro de apresentação:

1) Descrição do material a ser confeccionado.

2) Objetivos a serem explorados com o material.

3) Sugestões de atividades que podem ser desenvolvidas com o material.

Os modelos, em tamanho real, que devem ser recortados, pintados, colados em cartolina (ou papel resistente), você encontrará ao final deste Módulo.

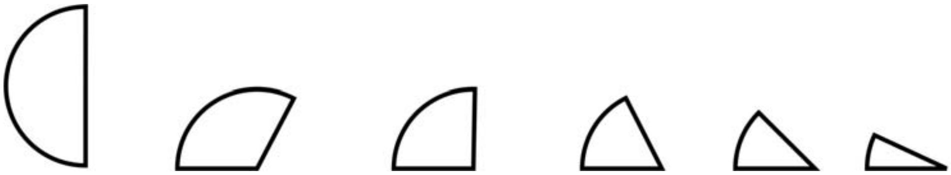
É importante ressaltar que os objetivos e as atividades propostas não são os únicos de cada material. Com sua criatividade, você poderá, encontrar outras formas de explorá-los, criar outras atividades e, portanto, traçar novos objetivos.

Enquanto estiver lendo a descrição do material, você deverá ir confeccionando o material correspondente, que está no anexo.

CÍRCULOS COLORIDOS

Descrição do material:

• 6 discos circulares fracionados em metades ($\frac{1}{2}$), terços ($\frac{1}{3}$), quartos ($\frac{1}{4}$), sextos ($\frac{1}{6}$), oitavos ($\frac{1}{8}$) e um doze-avos ($\frac{1}{12}$).



$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{12}$

Cada círculo deve ser pintado com uma cor distinta, segundo o número de partes em que se encontra dividido, para facilitar na distinção de cada parte visualmente, e não apenas por sua medida.

Escolhemos os denominadores: 2, 3, 4, 6, 8 e 12, já que, além de simples, permitem estabelecer muitas relações de equivalência entre essas partes.

Objetivos:

• Introduzir a noção de partição em partes iguais.

• Visualizar a relação entre as partes e o círculo completo que será tomado como unidade.

• Identificar a representação com o nome correspondente (denominador) assim com o símbolo.

• Reconhecer a relação de ordem entre as partes fracionárias.

• Conhecer algumas relações de equivalência.

• Introduzir a idéia de numerador adicionando partes iguais.

• Introduzir a adição e a subtração de partes diferentes em alguns casos possíveis.

ATIVIDADES

1. **Partes da unidade** – Identifique a fração que representa cada peça separadamente, observando e classificando as peças.

Orientação para a atividade

• Conte e registre quantas peças de cada cor existem.

• Comprove, sobrepondo, se todas as peças de cada cor são iguais.

• Una as peças para formar círculos completos (discos).

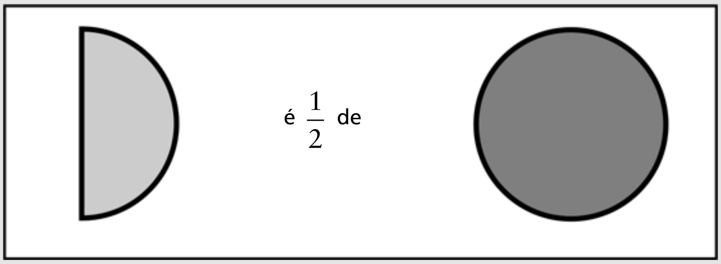
• Comprove que os círculos obtidos são do mesmo tamanho, ainda que se encontrem partidos num número distinto de partes.

• De acordo com as cores que escolheu, escreva todas as frases possíveis conforme o exemplo a seguir.

O círculo verde está dividido em ______ partes.

O círculo vermelho está dividido em ______ partes.

2. **Expressão verbal e simbólica** – Dê nome a cada uma das peças: metade, meio; terço, terça parte, quarto etc. Escreva, simbolicamente, a relação entre cada peça e o círculo completo. Por exemplo:



3. **Ordenação**

• Ordene as peças segundo seu tamanho (área).

• Desenhe as peças de modo que se observe essa ordenação (para desenhar uma peça, basta marcar o seu contorno).

• Escreva a fração correspondente a cada peça mantendo a ordem do desenho de cada parte.

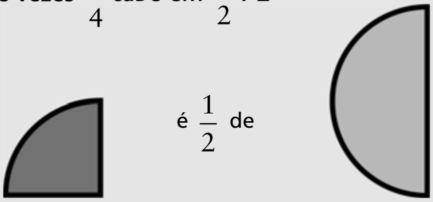
• Observe que as frações maiores possuem denominadores menores.

4. **Relações entre frações** – Relacione algumas peças entre si como fração de fração.

Escreva em forma de fração as relações que encontramos manipulando as peças coloridas.

Por exemplo:

• Quantas vezes $\frac{1}{4}$ cabe em $\frac{1}{2}$? 2



é $\frac{1}{2}$ de

$\frac{1}{4}$ é $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$

• Quantas vezes $\frac{1}{6}$ cabe em $\frac{1}{2}$?

• Quantas vezes $\frac{1}{8}$ cabe em $\frac{1}{2}$?

• Quantas vezes $\frac{1}{12}$ cabe em $\frac{1}{2}$?

• Quantas vezes $\frac{1}{6}$ cabe em $\frac{1}{3}$?

• Quantas vezes $\frac{1}{12}$ cabe em $\frac{1}{3}$?

• Quantas vezes $\frac{1}{8}$ cabe em $\frac{1}{4}$?

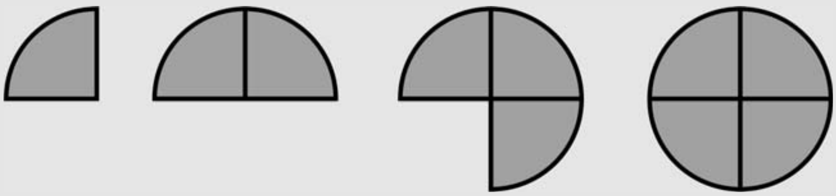
• Quantas vezes $\frac{1}{12}$ cabe em $\frac{1}{4}$?

• Quantas vezes $\frac{1}{12}$ cabe em $\frac{1}{6}$?

5. **Reunião de peças iguais**

Até aqui, você investigou as frações de numerador unitário, ou seja, apenas uma peça. Agora, descubra todas as frações que podemos formar com peças iguais até a unidade completa (disco unitário).

Com as peças de uma mesma cor, construa todas as configurações que podem ser formadas num círculo e desenhe-as. Por exemplo:



No exemplo representamos as seguintes frações: $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{4}$.

• Faça o mesmo com as demais cores, isto é, monte as possíveis partes que se pode formar com cada cor e escreva a fração correspondente a cada montagem.

6. **Equivalência entre frações**

• Construa, com peças de uma mesma cor, uma figura equivalente à metade ($\frac{1}{2}$) do círculo de todas as maneiras possíveis.

• Desenhe as configurações obtidas e escreva a equivalência correspondente às frações.

• Veja o exemplo utilizando a fração $\frac{1}{2}$:

$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{6}{12}$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{6}{12}$$

• Agora faça o mesmo com as frações a seguir, encontrando todas as frações equivalentes:

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{3}{4}$

e) $\frac{1}{6}$

f) $\frac{5}{6}$

7. **Reuniões de peças distintas**

Ainda que pareça simples unir duas peças distintas ao acaso e expressar sua adição em forma simbólica, o resultado de cada operação, em muitos casos, pode não possuir um resultado fácil de ser identificado, visual ou numericamente. Por isso, sugerimos outros exercícios com grau de dificuldade menor.

• Represente, mediante um desenho, uma parte da unidade que será expressa como uma adição de frações.

Por exemplo:

$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$

$\frac{1}{4}=\frac{3}{12}$ e $\frac{1}{6}=\frac{2}{12}$; portanto, $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$.

$\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$; portanto, $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$.

• Encontre a peça ou uma combinação de peças iguais correspondente ao total e escreva as seguintes adições:

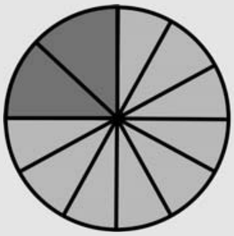
a. $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=$

b. $\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=$

c. $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=$

• Com apenas duas cores, complete a unidade (disco unitário), simbolizando depois a adição com as correspondentes frações.

Por exemplo:



$\frac{2}{8}+\frac{9}{12}=1$

$\frac{2}{3}+\frac{2}{6}=1$

• Complete o disco unitário (unidade) com três cores diferentes, simbolizando depois a soma mediante as frações correspondentes.

Por exemplo:

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$

$\frac{1}{6}+\frac{3}{4}+\frac{1}{12}=1$

• Represente algum resultado (da adição de peças diferentes) com peças de uma mesma cor. Depois, escreva as frações correspondentes a cada uma das expressões.

Por exemplo:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{6}=\frac{3}{4}$$

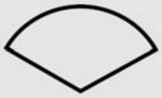
8. **Diferenças entre frações**

A diferença entre as frações pode ser desenvolvida a partir de duas perspectivas distintas:

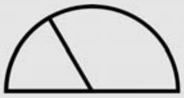
• O que acrescentaria a uma peça para que ela se tornasse a maior?

• O que sobrará da peça maior se retirarmos uma região correspondente à peça menor?

$\frac{1}{2}$



$\frac{1}{3}$



$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$\frac{1}{6}$

BINGOS FRACIONÁRIOS

Descrição do material:

• 24 fichas com as seguintes frações:

$\left(\frac{3}{4}\right)$	3	$\left(\frac{1}{3}\right),\left(\frac{2}{6}\right)$	2
$\left(\frac{2}{3}\right)$	1	$\left(\frac{1}{4}\right)[2],\left(\frac{2}{8}\right)$	3
$\left(\frac{5}{8}\right)$	1	$\left(\frac{1}{6}\right)$	1
$\left(\frac{5}{9}\right)$	1	$\left(\frac{1}{8}\right)$	2
$\left(\frac{1}{2}\right)[2],\left(\frac{2}{4}\right)[2],\left(\frac{3}{6}\right),\left(\frac{4}{8}\right)$	6	$\left(\frac{2}{9}\right)$	1
$\left(\frac{3}{8}\right)[2]$	2	$\left(\frac{1}{9}\right)$	1

• 4 cartões, cada um contendo a representação gráfica de seis das frações anteriores (ver material do bingo em anexo).

A mesma figura – um quadrado – é a unidade em todas as representações e a parte preta corresponde ao valor da fração. A cada fração se associa a representação que permite visualizar seus dois termos: numerador e denominador. Por exemplo:

$\left(\frac{1}{4}\right)$ com

e $\left(\frac{2}{8}\right)$ com

Objetivo:

• Identificar a representação da fração como unidade.

ATIVIDADE

9. **Identificação de frações e frações equivalentes**

As regras são as mesmas de um jogo usual de bingo; ou seja, distribuem-se as cartelas entre os jogadores e uma pessoa fica com todos os cartões, de preferência num saco ou caixa. Essa pessoa vai tirando cada carta e os jogadores vão marcando com grão de feijão ou equivalente as peças correspondentes que possui. Ganha quem primeiro completar a cartela.

JOGOS COM CARTAS

Descrição do material:

• 48 cartas com 12 valores diferentes, cada um expresso de quatro maneiras distintas.

– fração irredutível;

– número decimal;

– parte sombreada de uma tira, placa ou cubo;

– divisão correspondente.

Por exemplo:

$\frac{4}{5}$	0,8		$8 \div 10$

Objetivos:

• Mecanizar a simplificação das frações.

• Conhecer diferentes formas de representação dos racionais positivos.

Com esse material, poderemos explorar diferentes tipos de jogos. Por exemplo, o que veremos na atividade a seguir.

ATIVIDADE

10. **Jogo das famílias**

- Número aconselhável de jogadores: 4 a 6.

- Objetivo do jogo: reunir tantas famílias quanto possível com as quatro cartas de mesmo valor, com diferentes representações.

- Regras:

– Distribuem-se 4 cartas para cada jogador, e as que sobrarem ficam numa pilha.

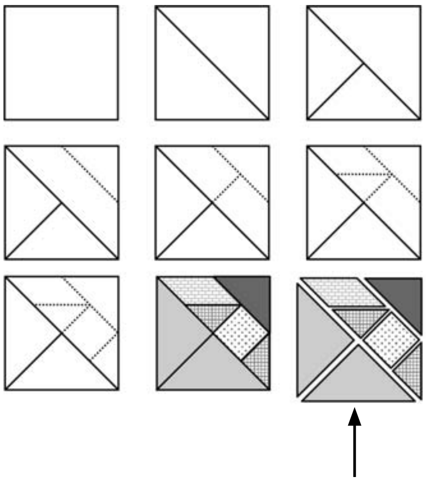
– O jogador que começa (A) pede a outro qualquer (B) uma carta da mesma família que ele possua. Por exemplo, se o jogador possui 0,1 pode solicitar a outro jogador a fração correspondente (1/10) ou a figura pintada ou a divisão 1:10.

– Se o jogador (B) tiver a carta, ele deverá doá-la ao jogador A. Então, o jogador poderá continuar, solicitando uma carta a outro jogador (C). Se o jogador (C) a possui, deverá entregá-la ao jogador (A). Caso o jogador (C) não tenha, o jogador (A) deverá tirar uma carta da pilha e passar a vez ao jogador seguinte.

– Caso algum jogador complete uma família de cartas, deverá colocá-la sobre a mesa e continuar jogando.

– O jogo continua até que acabem de formar todas as famílias.

– Ganha quem tiver formado mais famílias.



As sete peças do Tangram.

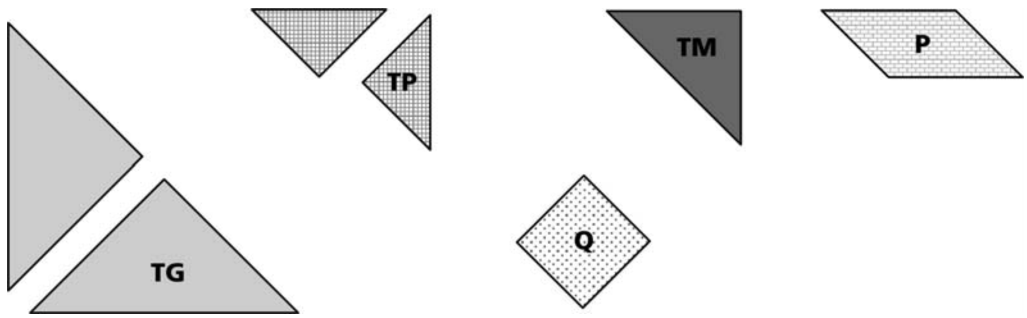
TANGRAM

O Tangram é um jogo milenar, de origem chinesa, que existe há aproximadamente 4.000 anos. O Tangram funciona como um quebra-cabeça que se tornou bastante popular no final do século XVIII e no início do século XX.

Observe, no roteiro a seguir, as etapas da construção de um Tangram. Para isso você pode partir de um quadrado. Veja e construa um, para trabalharmos um exemplo de atividade usando frações.

Das 7 peças, temos 5 triângulos, 1 quadrado e 1 paralelogramo.

Vamos nomeá-las: TG (triângulo grande), TM (triângulo médio), TP (triângulo pequeno), Q (quadrado) e P (paralelogramo).



ATIVIDADE

11. Manipule as peças, escorregando, girando e sobrepondo umas às outras. Você verá que:

– O triângulo pequeno cabe 2 vezes no quadrado.

– O triângulo pequeno cabe 2 vezes no triângulo médio.

– O triângulo pequeno cabe 4 vezes no triângulo grande.

– O triângulo pequeno cabe 2 vezes no paralelogramo.

Com base nessas afirmações, responda:

• O triângulo pequeno corresponde a que fração do quadrado?

____

• O triângulo pequeno corresponde a que fração do triângulo médio?

____

• O triângulo pequeno corresponde a que fração do triângulo grande?

____

• O triângulo médio corresponde a que fração do paralelogramo?

____

• O triângulo pequeno corresponde a que fração do quadrado grande que dá origem às peças?

____

• Considerando que o quadrado formado por todas as peças corresponde a uma unidade, diga qual a fração correspondente ao:

a. Quadrado.

b. Paralelogramo.

c. Triângulo médio.

d. Triângulo grande.

CONCLUSÃO

Esta aula percorreu um caminho diferente das outras. Procuramos oferecer a você, professor, alguns jogos e atividades que contribuam para sua aprendizagem e também para sua prática em sala de aula.

RESUMO

Exploramos nesta aula atividades utilizando os seguintes materiais:

• círculos coloridos;

• bingo de frações;

• jogo de cartas;

• Tangram.

Com essas manipulações, exploramos diferentes maneiras de trabalhar os números racionais.

AUTO-AVALIAÇÃO

Em cada um dos jogos você deve verificar se atingiu os objetivos, relacionando-os aos conceitos envolvidos. É importante que você vivencie cada uma das atividades propostas para rever e reforçar os conceitos vistos nas aulas anteriores e conhecer novas maneiras de explorá-los. Faça uma retrospectiva e verifique se ainda ficou alguma dúvida. Caso seja necessário, consulte o tutor do seu pólo.

INFORMAÇÃO SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula mudaremos nosso foco de atenção para a Geometria. Faremos uma abordagem histórica sobre alguns fatos relevantes.

RESPOSTAS

ATIVIDADE 1

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{4}$

d) 1

e) $\frac{1}{6}$

ATIVIDADE 2

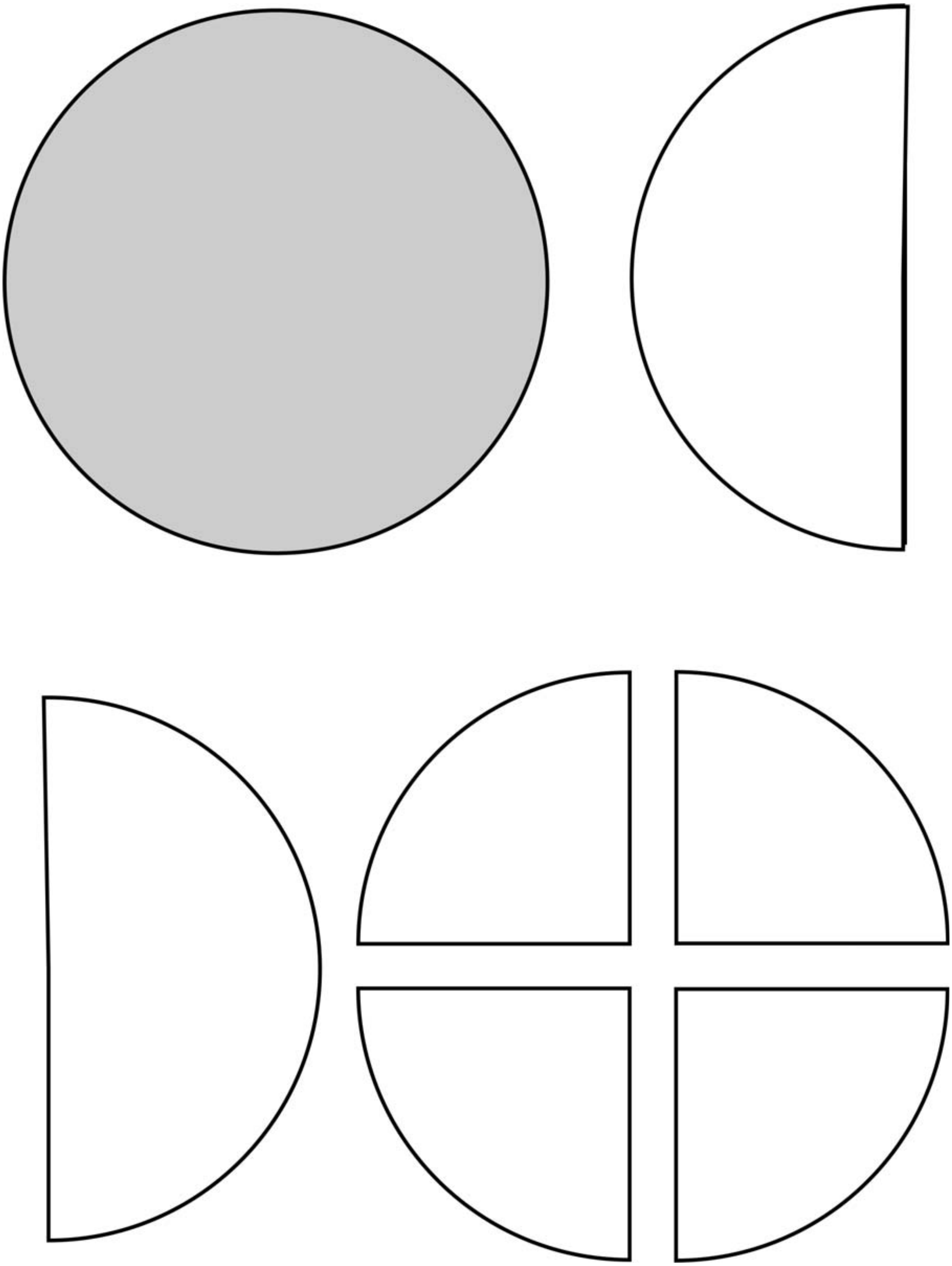
a) $\frac{1}{8}$

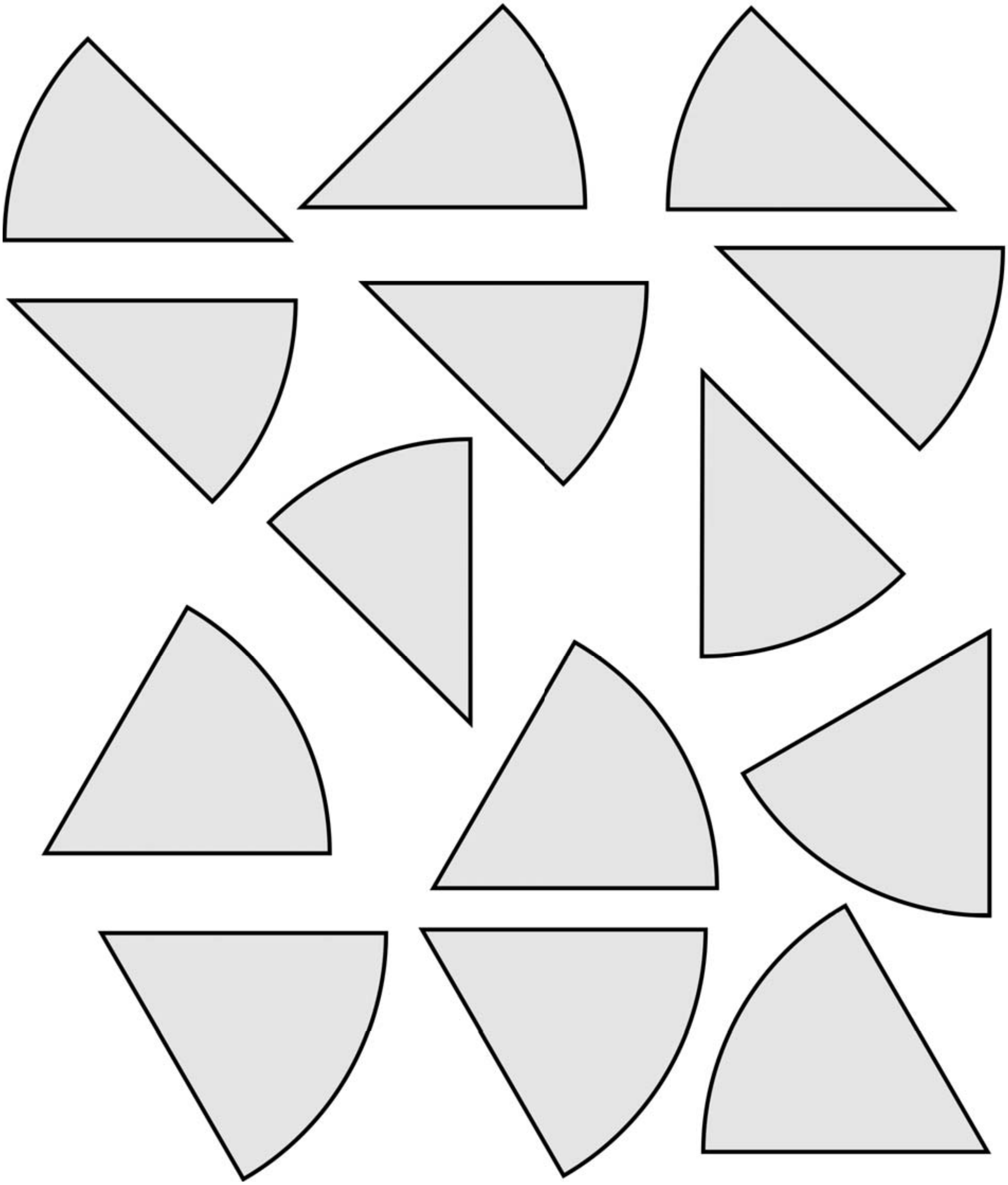
b) $\frac{1}{8}$

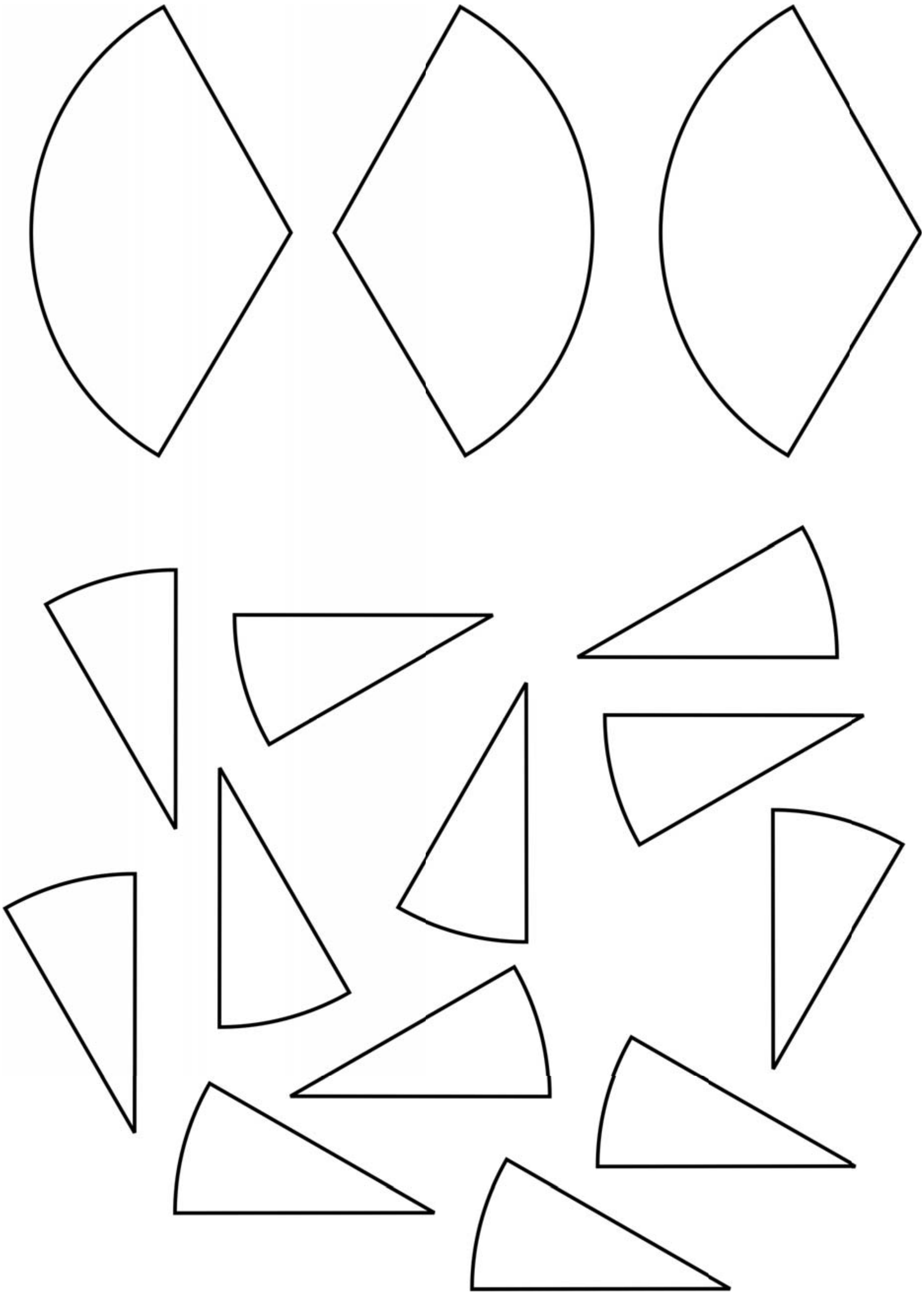
c) $\frac{1}{8}$

d) $\frac{1}{4}$

Círculos Coloridos



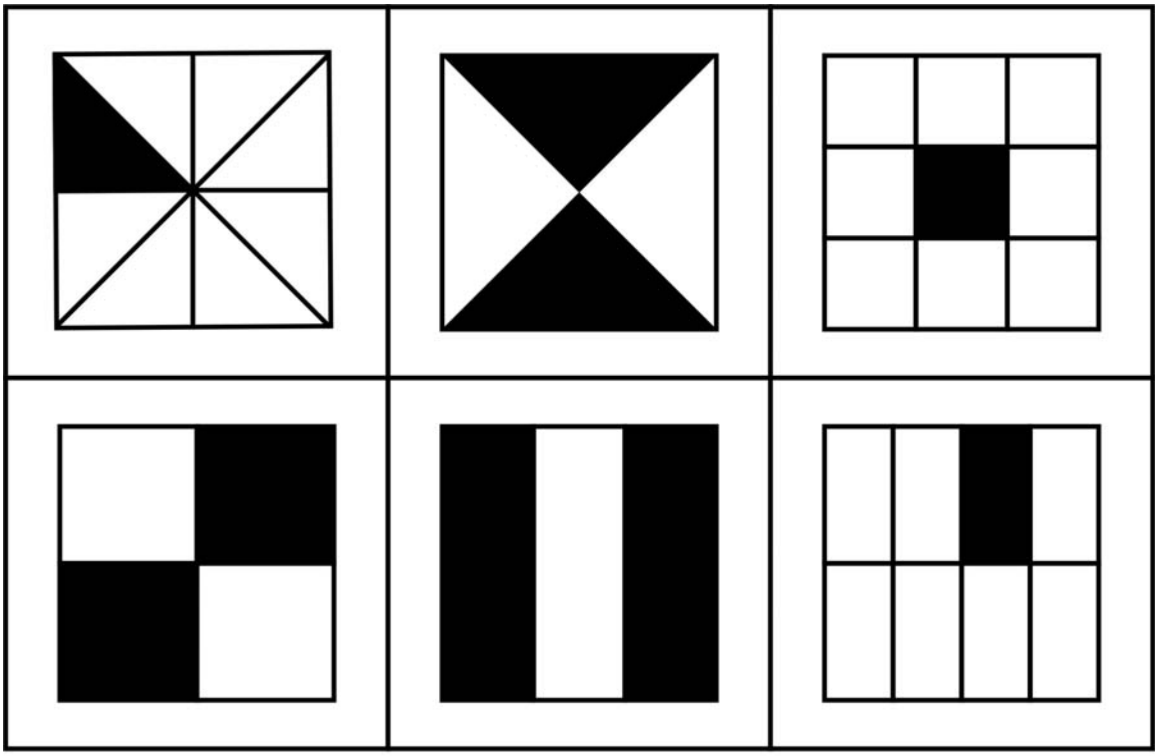


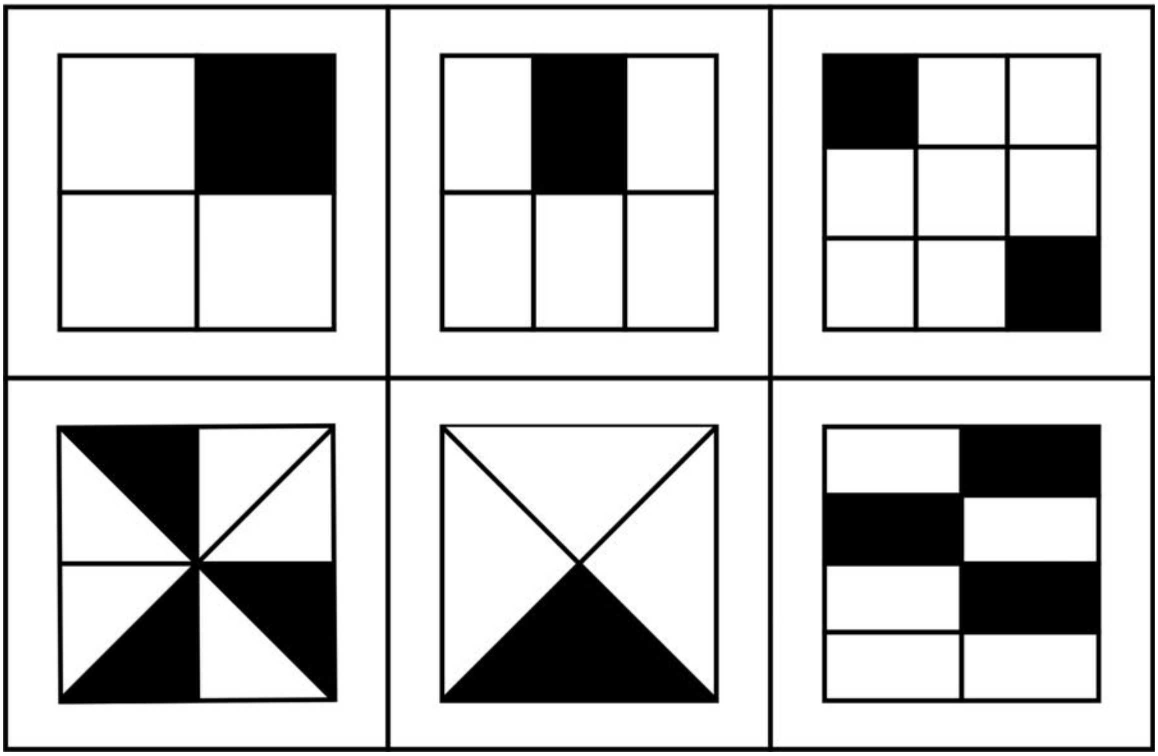


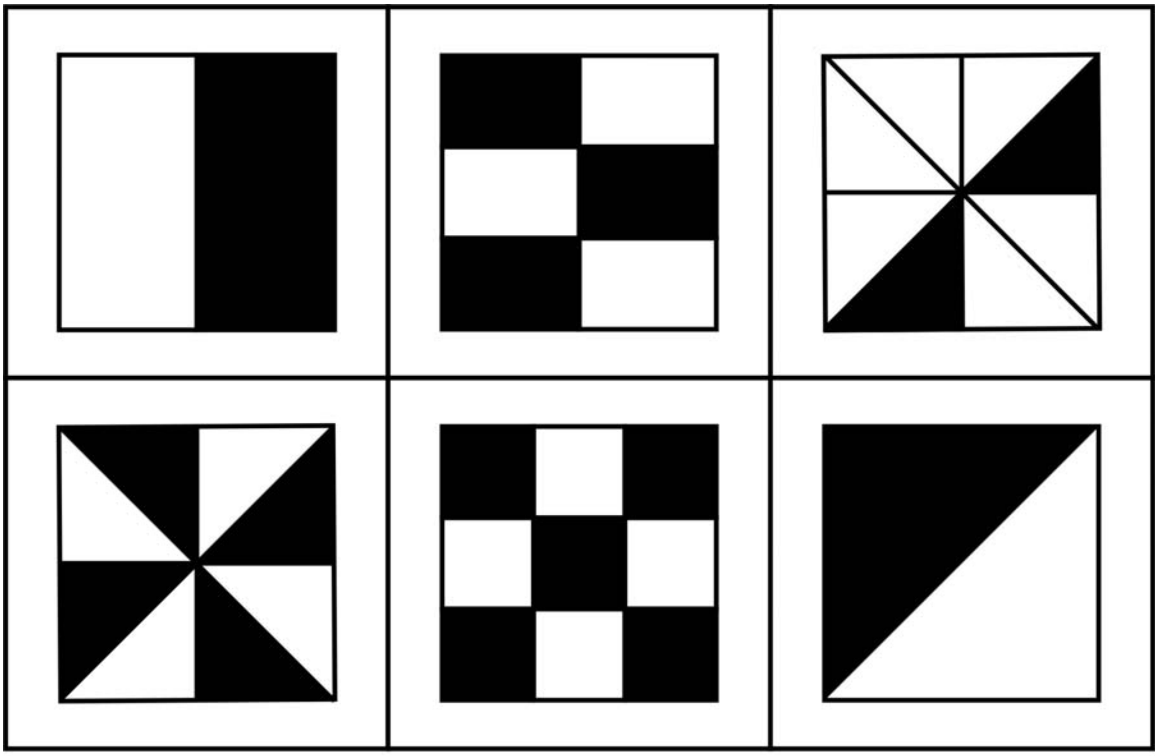
Bingo Fracionário

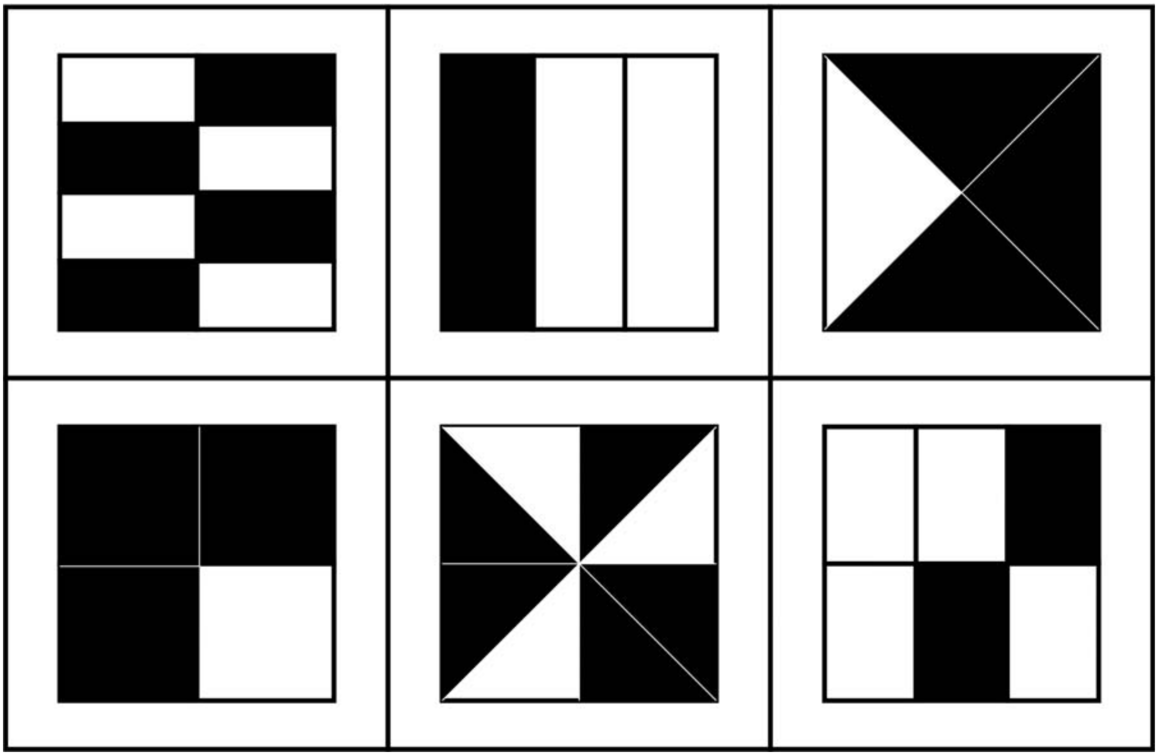
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$
$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{4}$
$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{6}$

$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{6}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{2}$









0,03	0,02	0,9
0,04	0,2	0,5
0,3	0,08	0,1

0,001	0,003	0,01
$\frac{3}{100}$	$\frac{2}{100}$	$\frac{9}{10}$
$\frac{4}{100}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{5}{10}$

$$\frac{3}{10}$$

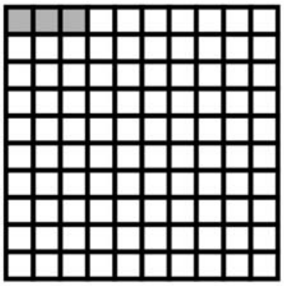
$$\frac{8}{100}$$

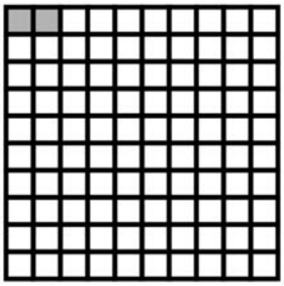
$$\frac{1}{10}$$

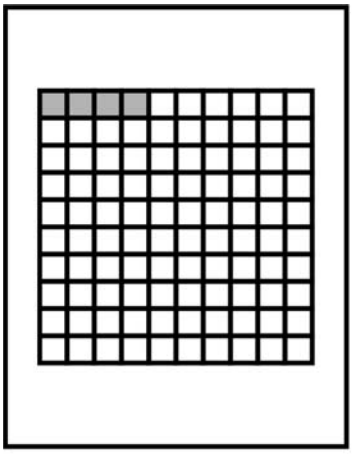
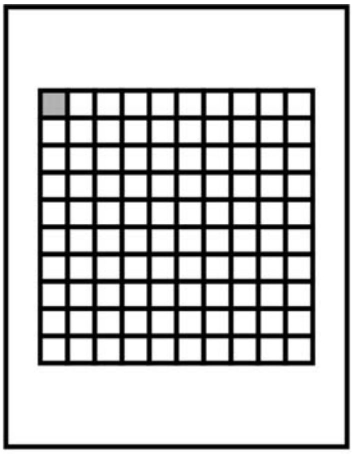
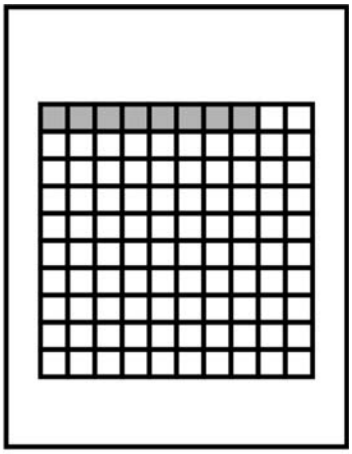
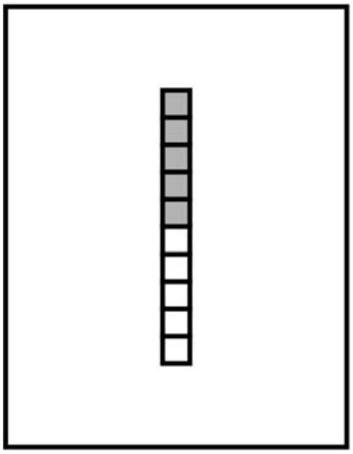
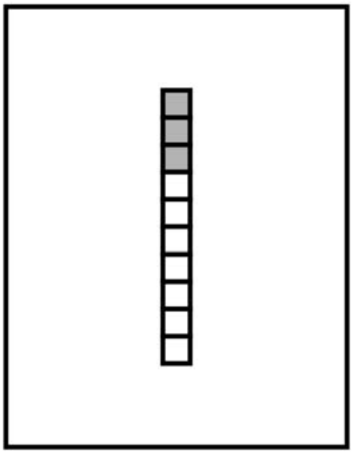
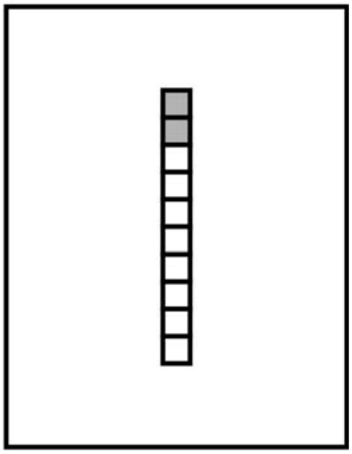
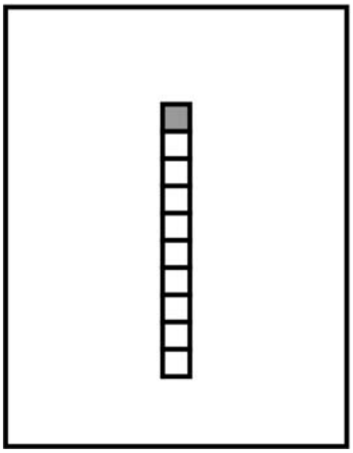
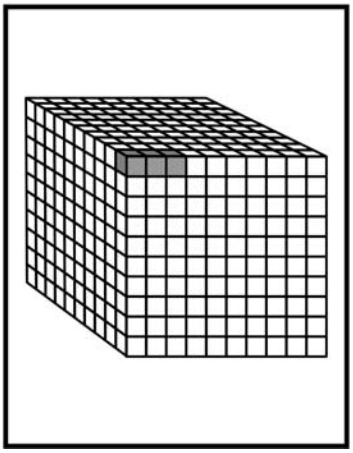
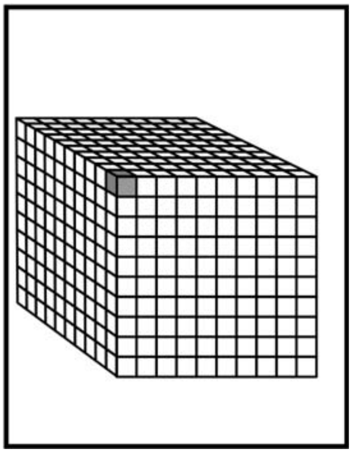
$$\frac{1}{1.000}$$

$$\frac{3}{1.000}$$

$$\frac{1}{100}$$

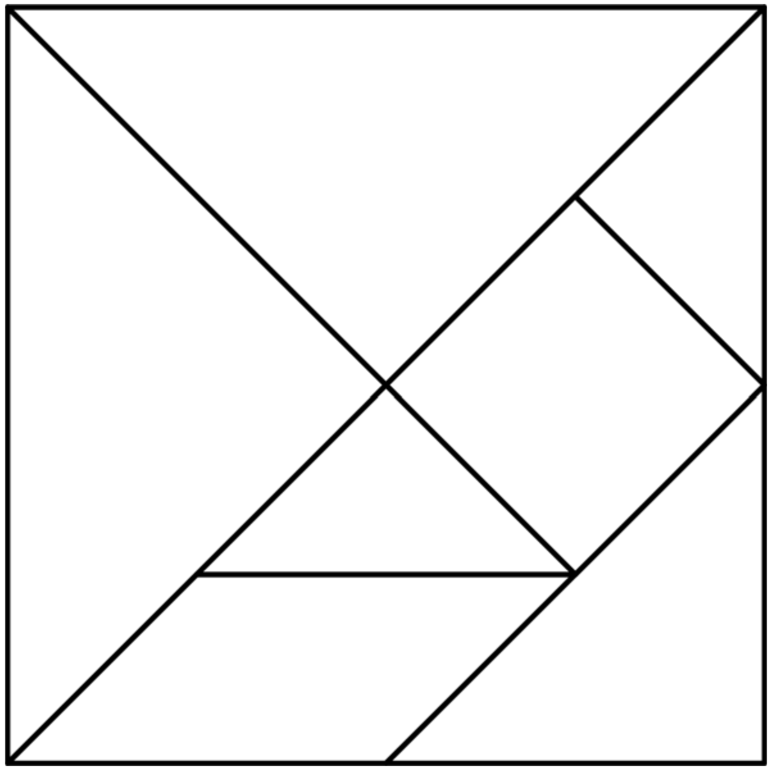




$3 \div 100$	$2 \div 100$	$9 \div 10$
$4 \div 100$	$2 \div 10$	$5 \div 10$
$3 \div 10$	$8 \div 100$	$1 \div 10$
$1 \div 1.000$	$3 \div 1.000$	$1 \div 100$

Tangram



ISBN 85-7648-068-9
9788576480686

UENF
Universidade Estadual
do Norte Fluminense

UERJ
UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Universidade Federal Fluminense
uff

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

UNIRIO

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

GOVERNO DO
Rio de Janeiro

SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Ministério
da Educação

BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL