Módulo 1

Haroldo da Costa Belo

Volume 1
2ª edição

Matemática Financeira

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Fundação
CECIERJ
Consórcio cederj
Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Matemática Financeira

Volume 1 - Módulo 1
2ª edição

Haroldo da Costa Belo

GOVERNO DO
Rio de Janeiro
SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB
UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL

Ministério
da Educação

BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL

Apoio:

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001
Tel.: (21) 2334-1569 Fax: (21) 2568-0725

Presidente
Masako Oya Masuda

Vice-presidente
Mirian Crapez

Coordenação do Curso de Matemática
UFF - Regina Moreth
UNIRIO - Luiz Pedro San Gil Jutuca

Material Didático

ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO
Haroldo da Costa Belo

COORDENAÇÃO DE DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL
Cristine Costa Barreto

Departamento de Produção

EDITORA
Tereza Queiroz

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO
Jorge Moura

REVISÃO TIPOGRÁFICA
Cristina Freixinho
Daniela Souza
Elaine Bayma
Patrícia Paula

PROGRAMAÇÃO VISUAL
Marcelo Freitas

ILUSTRAÇÃO
Marcelo Freitas
Jefferson Caçador

CAPA
André Dahmer

PRODUÇÃO GRÁFICA
Oséias Ferraz
Patricia Seabra

Copyright © 2008, Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da Fundação.

B452m

Belo, Haroldo da Costa.
Matemática financeira. v. 1 / Haroldo da Costa Belo.
2. ed. – Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.
150p.; 19 x 26,5 cm.

ISBN: 978-85-7648-467-7

1. Porcentagem. 2. Juros. 3. Taxas. I. Título.

CDD: 513.24

2010/1

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador
Sérgio Cabral Filho

Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia
Alexandre Cardoso

Universidades Consorciadas

UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Vieiralves

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Reitor: Roberto de Souza Salles

UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Aloísio Teixeira

UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Motta Miranda

UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitora: Malvina Tania Tuttman

Matemática Financeira

Volume 1 - Módulo 1

SUMÁRIO

Aula 1 – Porcentagem ____ **7**

Aula 2 – Juros ____ **19**

Aula 3 – Estudos das Taxas ____ **39**

Aula 4 – Desconto na Capitalização Simples ____ **53**

Aula 5 – Desconto na Capitalização Composta ____ **65**

Aula 6 – Equivalência Financeira na Capitalização Simples ____ **75**

Aula 7 – Equivalência Financeira na Capitalização Composta ____ **87**

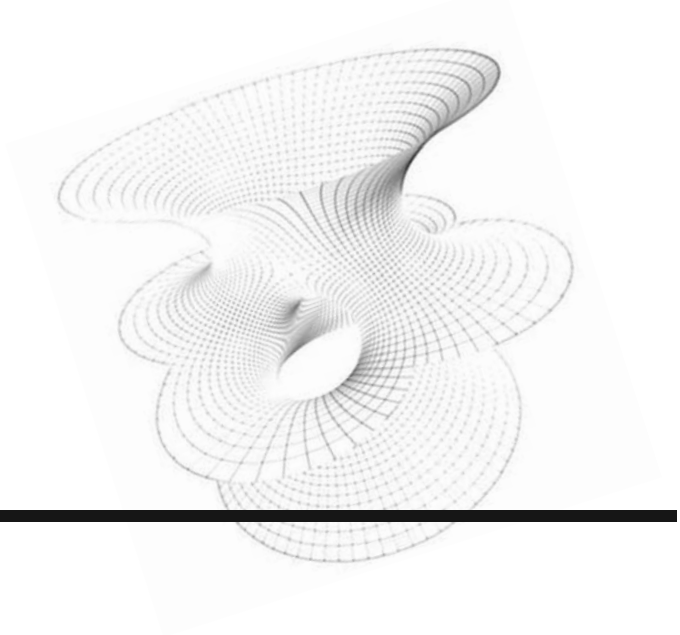
Aula 8 – Séries, rendas ou anuidades uniformes de pagamentos (modelo básico - valor atual) ____ **97**

Aula 9 – Séries, rendas ou anuidades uniformes de pagamentos (modelo básico - montante) ____ **113**

Aula 10 – Séries, rendas ou anuidades uniformes de pagamentos (modelo genérico) ____ **121**

Aula 11 – Sistemas de amortização de empréstimos (sistema de amortização francês) ____ **137**

Aula 1



PORCENTAGEM

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. relembrar os conceitos de razão centesimal, porcentual, unitária;
2. rever os conceitos envolvidos no cálculo da porcentagem;
3. entender e resolver os problemas propostos.

INTRODUÇÃO

No nosso cotidiano é comum ouvir expressões do tipo:

- liquidação de verão, descontos de até 40%;
- as mulheres constituem cerca de 53% da população brasileira;
- a alta dos preços no mês de janeiro foi de $2,5\%$;
- o dólar baixou no mês de janeiro cerca de $1,5\%$.

Essas expressões envolvem uma razão especial chamada porcentagem, assunto que passaremos a estudar agora.

RAZÃO CENTESIMAL

Definição 1.1

Chamamos de *razão centesimal* toda razão cujo conseqüente (denominador) seja igual a 100.

Exemplo 1.1

a. 37 em cada 100 $\rightarrow \dfrac{37}{100}$.

b. 19 em cada 100 $\rightarrow \dfrac{19}{100}$.

Diversas outras razões não centesimais podem ser facilmente reescritas na forma centesimal;

Exemplo 1.2

a. 3 em cada 10 $\rightarrow \dfrac{3}{10} = \dfrac{30}{100} \rightarrow$ 30 em cada 100.

b. 2 em cada 5 $\rightarrow \dfrac{2}{5} = \dfrac{40}{100} \rightarrow$ 40 em cada 100.

c. 1 em cada 4 $\rightarrow \dfrac{1}{4} = \dfrac{25}{100} \rightarrow$ 25 em cada 100.

Outros nomes usados para uma razão centesimal são: **razão porcentual**, **índice ou taxa porcentual** e **percentil**.

FORMA PORCENTUAL

Uma razão centesimal pode ser indicada na **forma porcentual** anotando-se o antecedente (numerador) da razão centesimal seguido do símbolo % (lê-se *por cento*).

Exemplo 1.3

a. $\dfrac{12}{100} = 12\%$ (doze por cento)

b. $\dfrac{3}{100} = 3\%$ (três por cento)

FORMA UNITÁRIA

Além da forma porcentual, existe uma outra forma de expressarmos uma razão porcentual a qual chamamos de *forma unitária*.

A *forma unitária* da razão $\frac{p}{100}$ é o número decimal que obtemos dividindo o valor p por 100.

Exemplo 1.4

a. $23\% = \dfrac{23}{100} = 0,23 = \dfrac{0,23}{1}$.

b. $6\% = \dfrac{6}{100} = 0,06 = \dfrac{0,06}{1}$.

c. $133\% = \dfrac{133}{100} = 1,33 = \dfrac{1,33}{1}$.

d. $0,5\% = \dfrac{0,5}{100} = 0,005 = \dfrac{0,005}{1}$.

PORCENTAGEM

Definição 1.2

Dados dois números quaisquer, A e B, dizemos que *A é igual a p% de B* quando o valor A for igual a $\frac{p}{100}$ do valor B, ou seja, A é p% de $B \Leftrightarrow A = \frac{P}{100} \times B$. B é a referência do cálculo porcentual. Dizemos então que *A é uma porcentagem do número B*.

✍ *Todo problema de porcentagem depende, basicamente, de determinarmos um dos valores dados na expressão anterior,* A, B, *ou* p *em função dos outros dois.*

É comum encontrarmos as expressões: *lucro, rendimento, desconto, abatimento, prejuízo* etc. indicando uma *porcentagem* em situações específicas e a expressão *principal* mostrando o valor de referência que corresponde a 100%.

Exemplo 1.5

a. Calcular 20% de 250.

Solução: $\frac{20}{100} \times 250 = 50$ ou $0,20 \times 250 = 50$.

Resposta: 50.

b. 30 equivale a 20% de quanto?

Solução: $30 = p \times 0,20 \Rightarrow p = \frac{30}{0,20} = 150$.

Resposta: 150.

c. 21 representa que percentual de 15?

Solução: Da definição de porcentagem temos:

21 é x% de 15 $\Leftrightarrow 21 = \frac{x}{100} \times 15 \Rightarrow x = \frac{21 \times 100}{15}$.

$x = 140$.

Resposta: 140%.

AUMENTOS E REDUÇÕES PORCENTUAIS

Quando queremos calcular um aumento ou uma redução de $p\%$ sobre determinado valor, normalmente somos levados a calcular o resultado em duas etapas:

1ª. calculamos a porcentagem $p\%$ do valor dado;

2ª. adicionamos ou subtraímos do valor original a porcentagem encontrada, para obter, respectivamente, o valor aumentado ou reduzido em $p\%$ do valor dado, conforme o caso desejado.

Usando a forma unitária, poderemos calcular aumentos e reduções porcentuais de modo mais rápido, da seguinte forma:

I - PARA CALCULAR UM AUMENTO DE P%:

Quando aumentamos em $p\%$ um valor V, ficamos com $(100+p)\,\%$ de V.

Então, basta multiplicar o valor V pela forma unitária de $(100+p)\,\%$ para termos o resultado desejado.

Exemplo 1.6

a. Aumentar o valor 230 em 30%.

Solução: $(100+30)\,\% = 130\% = \dfrac{130}{100} = 1,30$ (*fator de correção*).

$230 \times 1,30 = 299$

Resposta: 299.

b. Aumentar o valor 400 em $3,4\%$.

Solução: $(100+3,4)\,\% = 103,4\% = \dfrac{103,4}{100} = 1,034$, portanto,

$400 \times 1,034 = 413,60$.

Resposta: $413,60$.

II - Para calcular uma redução de p%:

Quando reduzimos em $p\%$ um valor V, ficamos com $(100-p)\%$ de V.

Então, basta multiplicar o valor V pela forma unitária de (100-p)% para termos o resultado desejado.

Exemplo 1.7

a. Reduzir o valor 300 em 30%.

   Solução: $(100-30)\% = 70\% = \dfrac{70}{100} = 0,70 \Rightarrow 300 \times 0,70 = 210$.

   Resposta: 210.

b. Reduzir o valor 400 em $2,5\%$.

   Solução: :$(100-2,5)\% = 97,5 = \dfrac{97,5}{100} = 0,975 \Rightarrow 400 \times 0,975 = 390$.

   Resposta: 390.

Aumentos e reduções porcentuais sucessivos

I - Aumentos sucessivos

Para aumentarmos um valor V sucessivamente em $p_1\%$, $p_2\%, \cdots, p_n\%$, de tal forma que cada um dos aumentos, a partir do segundo, incida sobre o resultado do aumento anterior, basta multiplicar o valor V pelo produto das formas unitárias de $(100+p_1)\%, (100+p_2)\%, \cdots, (100+p_n)\%$.

Exemplo 1.8

a. Aumentar o valor 2.000 sucessivamente em 10%, 20% e 30%.

   Solução: $2.000 \times 1,10 \times 1,20 \times 1,30 = 3.432$.

   Resposta: 3.432.

b. Se o valor 4.000 sofrer três aumentos sucessivos de 5%, qual o valor resultante?

Solução: $4.000 \times 1,05 \times 1,05 \times 1,05 = 4.630,50$.

Resposta: $R\$\ 4.630,50$.

II - REDUÇÕES SUCESSIVAS

Para reduzirmos um valor V sucessivamente em p_1%, p_2%, $\cdots$, p_n%, de tal forma que cada uma das reduções, a partir da segunda, incida sobre o resultado do aumento anterior, basta multiplicar o valor V pelo produto das formas unitárias de (100 - p_1)%, (100 - p_2)%, $\cdots$, (100 - p_n)%.

Exemplo 1.9

a. Reduzir o valor 2.000 sucessivamente em 10%, 20% e 30%.

Solução: $2.000 \times 0,90 \times 0,80 \times 0,70 = 1.008$.

Resposta: 1.008.

b. Se o valor 4.000 sofrer três reduções sucessivas de 5%, qual será o valor resultante?

Solução: $4.000 \times 0,95 \times 0,95 \times 0,95 = 3.429,50$.

Resposta: $3.429,50$.

Exemplo 1.10

a. Multiplicar o preço de uma mercadoria por $1,0428$ equivale a lhe dar um aumento de que porcentual?

Solução: $1,0428 = \dfrac{104,28}{100} = 104,28\% = (100 + 4,28\%)$.

Resposta: $4,28\%$.

b. A conta de um restaurante indicava uma despesa de $R\$\ 26,00$ e trazia a seguinte observação: *"não incluímos os* 10% *de serviço"*. Quanto representa, em dinheiro, os 10% de serviço e quanto fica o total da despesa se incluirmos nela a porcentagem referente ao serviço?

Solução: Serviço: 10% de $26,00$, isto é, $0,10 \times 26,00 = 2,60$.

Total da despesa: $26,00 + 2,60 = 28,60$ ou $26,00 \times 1,1 = 28,60$.

Resposta: $R\$\ 28,60$.

c. Numa pequena agência bancária, 32% dos clientes são pessoas jurídicas e os outros 2.040 são pessoas físicas. Quantos clientes, ao todo, tem essa agência?

Solução: O total de clientes corresponde a 100%.

$(100-32)\% = 68\%$ correspondem então ao porcentual de pessoas físicas, portanto 2.040 correspondem então a 68% do total, logo o total de clientes será dado por:

$$\frac{2.040 \times 100}{68} = 3.000$$

Resposta: 3.000 clientes.

d. O preço de um produto A é 30% maior que o de B e o preço deste é 20% menor que o de C. Sabe-se que A, B e C custaram juntos, $R\$\ 28,40$. Qual o preço de cada um deles?

Solução: Representaremos os preços de A, B e C por a, b e c, respectivamente, portanto, tem-se que:

$a = 1,3b$ e $b = 0,8c$, então, $a = 1,3 \times 0,8$, ou seja, $a = 1,04c$. Como $a+b+c = 28,40$, temos que:

$1,04c + 0,8c + c = 28,40 \Rightarrow 2,84c = 28,40$ e, portanto,

$c = \dfrac{28,40}{2,84} \Rightarrow c = 10,00$, com

$a = 1,04 \times 10,00 = 10,40$ e $b = 0,8 \times 10,00 = 8,00$.

Resposta: A custa $R\$\ 10,40$; B custa $R\$\ 8,00$ e C custa $R\$\ 10,00$.

e. Uma mercadoria foi vendida com um *lucro* de 20% *sobre a venda*. Qual o preço de venda dessa mercadoria se o seu preço de custo foi de $R\$\ 160,00$?

Solução: O termo *sobre a venda* indica que o *valor de referência (principal)* deverá ser o preço de venda, portanto devemos fazer o preço de venda corresponder a 100%. Temos, então, que o preço de custo corresponde a $(100-20)\% = 0,80\%$ do preço de venda, ou seja, $0,80$ corresponde a $160,00$ e daí o preço de venda será dado por $\dfrac{160,00 \times 100}{80} = 200,00$

Resposta: $R\$\ 200,00$.

Resumo

Você reviu os conceitos de razão centesimal, razão porcentual e razão unitária, além dos conceitos envolvendo o cálculo de porcentagem.

Exercício 1.1

1. Expresse a fração $\frac{31}{125}$, em porcentagem.

   Resposta: $24,8$.

2. Vidal investiu 30% do seu capital em um fundo de ações e o restante em um fundo de renda fixa. Após um mês, as quotas dos fundos de ações e de renda fixa haviam se valorizado 8% e $2,40$%, respectivamente. Qual foi a rentabilidade do capital de Vidal nesse mês ?

   Resposta: $4,08$.

3. Um lucro de 25% sobre o preço de custo de uma mercadoria corresponde a que percentual se for calculado sobre o preço de venda?

   Resposta: 20%.

4. Um prejuízo de 50% sobre o preço de custo de uma mercadoria corresponde a que percentual se for calculado sobre o preço de venda?

   Resposta: 100%.

5. Se um produto que custa $R\$\ 40,00$ tiver seu preço reajustado sucessivamente em 5% e 10%, qual será o seu preço final?

   Resposta: $R\$\ 46,20$.

6. Se dermos dois descontos sucessivos, um de 5% e outro de 10%, a uma mercadoria que tem preço inicial de $R\$\ 40,00$, qual será o seu preço final?

   Resposta: $R\$\ 34,20$.

7. Antonio ganha 30% a mais que Beatriz; e Carlos, 20% a menos que Antonio. Se a diferença entre os salários de

Antonio e de Carlos é de $R\$\ 130,00$, qual é o salário de Beatriz?

Resposta: $R\$\ 500,00$.

8. O salário de um vendedor é constituído de uma parte fixa igual a $R\$\ 2.300,00$ e mais uma comissão de 3% sobre o total de vendas que exceder a $R\$\ 10.000,00$. Estima-se em 10% o porcentual de descontos diversos que incidem sobre o salário bruto. Em determinado mês, o vendedor recebeu líquido o valor de $R\$\ 4.500,00$. Quanto ele vendeu nesse mês?

   Resposta: $R\$\ 100.000,00$.

9. Comprei numa promoção uma calça e uma camisa. Após o término da promoção, a calça ficou 20% mais cara e a camisa, 10% mais cara. Se comprasse as mesmas duas peças, pagando estes novos preços, eu gastaria 16% a mais. A calça em relação à camisa quanto me custou a mais?

   Resposta: 50%.

10. Um certo produto podia ser comprado há alguns meses por 20% do seu valor atual. Qual a porcentagem de aumento sofrido pelo produto neste mesmo período?

    Resposta: 400%.

11. Se os preços sobem 25% ao mês e o seu salário não se altera, em quanto diminui por mês o seu poder de compra?

    Resposta: 20%.

12. Certa categoria de trabalhadores obteve em junho um reajuste salarial de 50% sobre os salários de abril, descontadas as antecipações. Sabendo-se que ela havia recebido em maio uma antecipação de 20%, qual foi o percentual do aumento obtido em junho, sobre os salários de maio?

    Resposta: 25%.

13. Suponha que em certo bimestre a inflação foi de 5% e 4% ao mês, respectivamente. Qual a inflação acumulada nesse bimestre?

    Resposta: $9,2\%$.

14. Humberto, dispondo de certo capital, fez as seguintes aplicações em um trimestre:

(1) aplicou 20% do capital em letra de câmbio; nessa aplicação lucrou 30%;

(2) aplicou $\frac{2}{5}$ do capital em fundo de investimento; nessa aplicação perdeu 25%;

(3) aplicou o restante do capital em caderneta de poupança e seu lucro nessa aplicação foi de 10%.

O que se pode dizer relativamente ao total aplicado? Houve lucro? Houve prejuízo? De quanto?

Resposta: Não houve lucro, nem prejuízo.

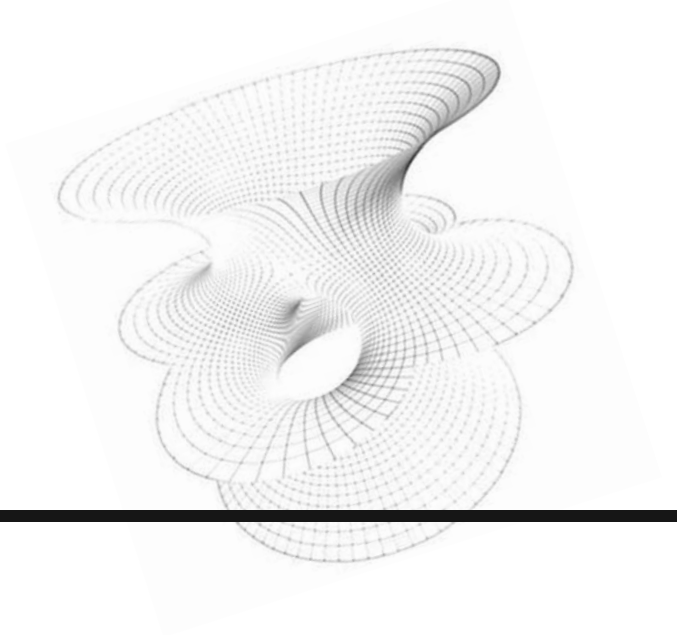
15. O preço de um produto sofreu uma redução de 20%. Algum tempo depois, ele sofreu um aumento de 20% e, mais tarde, um novo aumento de 50%. Se o comerciante deseja retornar ao preço inicial, qual o percentual de desconto a ser aplicado sobre esse último preço?

    Resposta: $30,55\%$.

Auto-avaliação

Você resolveu todos os exercícios propostos sem dificuldade? Se a resposta foi sim, então você entendeu os conceitos envolvendo a porcentagem. Se não conseguiu, não desista! Volte à aula e reveja os conceitos e exemplos antes de começar a Aula 2. Procure dirimir suas dúvidas com os colegas do pólo e também com os tutores.

Aula 2



JUROS

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. entender e definir o conceito de juros, taxa de juros e período de capitalização;
2. entender e fazer o discernimento entre os regimes de capitalização;
3. interpretar e resolver os exercícios propostos.

INTRODUÇÃO

É comum no nosso dia a dia ouvirmos expressões como estas:

- vou depositar meu dinheiro na poupança, pois ele renderá juros;
- se eu comprar esta geladeira a prazo terei que pagar juros;
- tudo bem, eu empresto, mas você vai ter que pagar juros por esse empréstimo.

O assunto que estudaremos agora tratará exatamente do crescimento de uma certa quantia em dinheiro quando aplicada, isto é, dos juros.

Definição 2.1

Chamamos de *JUROS* a remuneração recebida pela aplicação de um capital, durante determinado período, a uma certa taxa, isto é, o custo do crédito obtido, ou ainda pode ser entendido como sendo o aluguel pelo uso do dinheiro.

Quando aplicamos um capital ou principal (C) durante um período de tempo (n), esperamos obter um rendimento ou juros (J). Após este período, o capital se transformará em valor capitalizado ou montante (M), que será o capital aplicado acrescido dos juros obtidos durante o período de aplicação.

TAXA DE JUROS

Definição 2.2

A taxa de juros (i) é a razão entre o juros (J) e o capital aplicado (C).

A taxa está sempre relacionada a uma unidade de tempo (dia, mês, trimestre, semestre, ano, etc.).

$$\text{Taxa} = \frac{Juros}{Capital}$$

A taxa pode ser:

a) **Unitária**

Quando representar os rendimentos de uma unidade de capital, durante o período de tempo a que este se referir.

Exemplo 2.1

0,08 ao mês, significa que cada R$ 1,00 de capital aplicado, rende R$ 0,08 de juro a cada mês de aplicação.

b) **Porcentual**

Quando representar os rendimentos de 100 unidades de capital durante o período de tempo a que esta se referir.

Exemplo 2.2

14% ao ano, significa que cada R$ 100,00 de capital aplicado, rende R$ 14,00 de juro a cada ano de aplicação.

✍ Neste texto, a taxa de juros será sempre indicada na forma centesimal no enunciado ou na resposta dos problemas, quando esta for, respectivamente, um dado ou um termo desconhecido do problema e na forma unitária quando utilizada nas fórmulas.

PERÍODO DE CAPITALIZAÇÃO

Definição 2.3

Período de capitalização é o período ao fim do qual os juros são calculados.

REGIMES DE CAPITALIZAÇÃO

Quando um capital é aplicado a uma determinada taxa por período ou por vários períodos, o montante pode ser calculado segundo dois critérios:

REGIME DE CAPITALIZAÇÃO SIMPLES

Definição 2.4

Regime de capitalização simples é o processo de capitalização no qual, ao final de cada período, o juro é sempre determinado sobre o capital inicial, ou seja, em cada período o juro é obtido pelo produto do capital inicial pela taxa unitária.

Exemplo 2.3

Calcular os juros simples obtidos e o montante de uma aplicação de R$ 1.000,00 à taxa de 10% ao mês, durante 4 meses.

Solução:

Juros no 1° mês	Juros no 2° mês
$0,1 \times 1000 = 100$	$0,1 \times 1000 = 100$

Juros no 3° mês	Juros no 4° mês
$0,1 \times 1000 = 100$	$0,1 \times 1000 = 100$

$$J_T = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = 100 \times 4 = 400$$

$$M = C + J_T = 1000 + 400 = 1400$$

✍ A cada mês o montante é acrescido de R$ 100,00 e podemos afirmar, então, que os montantes formam um P. A. de razão 100.

No caso geral, para um capital C que aplicado a juros simples durante n períodos a uma taxa unitária i referida nesse período, tem-se uma PA cujo primeiro termo é

$$C + i \times C$$

e a razão é

$$(i \times C)$$

logo, lembrando que a equação que relaciona um termo qualquer a_n de PA com o primeiro termo a_1 e a razão r é dada por

$$a_n = a_1 + (n-1) \times r,$$

tem-se então que o montante M será dado por

$$M = (C + i \times C) + (n-1) \times (i \times C)$$
$$M = C + i \times C + C \times i \times n - i \times C = C + C \times i \times n$$
$$M = C\,(1 + i.n)$$

Regime de Capitalização Composta

Definição 2.5

Regime de capitalização composta é o regime no qual ao final de cada período de capitalização, os juros calculados são incorporados ao montante do início do período e essa soma passa a render juros no período seguinte.

Exemplo 2.4

a. Calcular o capital acumulado (montante) de uma aplicação de R$ 1.000,00 à taxa de 10% ao mês, durante 4 meses.

Solução:

Juros no 1° mês: $0,1 \times 1000 = 100$
Montante após esse mês = 1100

Juros no 2° mês: $0,l \times 1100 = 110$
Montante após esse mês = 1210

Juros no 3° mês: $0,1 \times 1210 = 121$
Montante após esse mês = 1331

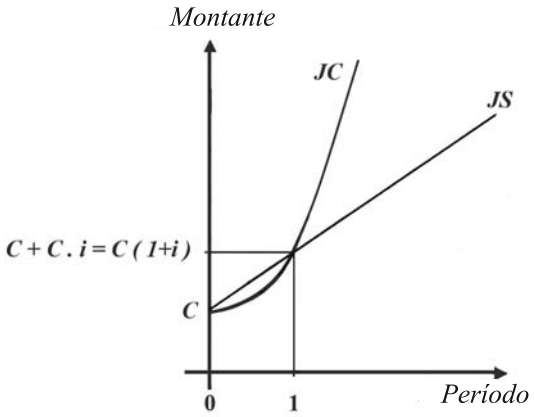
Juros no 4° mês: $0,1x1331 = 133,10$
Montante após esse mês (final)= 1464,10

Os montantes formam uma P.G. de razão $(1 + 0,1) = 1,1$.

De uma maneira geral, para um capital C que aplicado a juros compostos durante n períodos a uma taxa unitária i referida nesse período, tem-se uma PG cujo primeiro termo é $C\,(1+i)$ e a razão é $(1+i)$ logo, lembrando que a equação que relaciona um termo qualquer a_n de uma P.G. com o primeiro termo a_1 e a razão q é dada por $a_n = a_1 \times q^{((n-1))}$, tem-se então que o montante M dado por

$$M = C\,(1+i)\,(1+i)^{n-1} \Rightarrow \quad M = C\,(1+i)^n$$

O fator $(1+i)^n$ é denominado ***fator de acumulação de capital***. Ele permite determinar o montante M sabendo-se o capital inicial ou principal C. O seu inverso, isto é, $\frac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-n}$ é chamado de fator de atualização. Ele permite determinar o capital inicial C, sabendo-se o montante, ou seja, o seu valor numa data futura.



✍ Comparando o regime de capitalização simples com o regime de capitalização composta, verifica-se que o primeiro cresce em P.A. de razão $i \times C$, e o segundo, em P.G. de razão $(1+i)$.

✍ Verifica-se pelo gráfico anterior que:
para $n = 1 \Rightarrow J_s = J_c$
para $n > 1 \Rightarrow J_s < J_c$
para $n < 1 \Rightarrow J_s > J_c$

b. O fluxo de caixa de uma operação é uma representação esquemática muito útil na resolução de problemas. Basicamente, consta de um eixo horizontal onde é marcado o tempo a partir de um instante inicial (origem). A unidade de tempo pode ser qualquer (ano, mês, etc.). As entradas de dinheiro num determinado instante são indicadas por setas perpendiculares ao eixo horizontal, no instante considerado e orientadas para cima; as saídas de dinheiro são indicadas da mesma forma, só que orientadas para baixo.

Definição 2.6

Chamamos de ***juros exatos*** aqueles calculados em relação ao ano *civil*, que é o ano de 365 ou 366 dias, caso o ano seja bissexto.

✍ Os juros calculados sobre o ano comercial de 360 dias (mês de 30 dias) são chamados de ***juros comerciais*** ou ***ordinários***.

Nos exemplos estudados até agora de juros compostos, o tempo de aplicação do capital foi um número inteiro de períodos de capitalização. Mas é possível que em algumas situações esse tempo não seja inteiro. Considere o seguinte exemplo:

Exemplo 2.5

Um capital de R$ 10.000,00 é aplicado à taxa de juros compostos de 6% ao mês, durante 5 meses e 20 dias. Calcule o montante final deste período.

Neste exemplo, temos 5 períodos (meses) inteiros de capitalização e mais 20 dias, que não chegam a completar um período (mês). Nesse caso, com relação aos 5 meses não resta dúvida, será aplicado o critério da capitalização composta obtendo-se um montante M_1. Com relação aos 20 dias restantes pode-se proceder de três maneiras possíveis: *não incidência de juros, incidência de juros simples* ou *incidência de juros compostos* sobre M_1, obtendo-se assim o montante final M.

A adoção de uma dessas hipóteses dependerá exclusivamente do que for acordado entre as partes interessadas.

A primeira possibilidade não oferece nenhum interesse. Vamos nos concentrar nas outras duas possibilidades.

Se for adotada a incidência de juros simples sobre o período não inteiro, dizemos que se adotou a **convenção linear**.

Se for adotada a incidência de juros compostos sobre o período não inteiro, dizemos que se adotou a **convenção exponencial**.

Vamos, então, resolver o exemplo considerado segundo as duas convenções.

Solução:

Adotando-se a convenção linear:

Nesse caso, o capital de R$ 10.000,00 será capitalizado a juros compostos durante 5 meses, e o montante assim adquirido será capitalizado durante 20 dias a juros simples, ambos a uma taxa de 6% ao mês. Temos então que:

$M_1 = 10.000\,(1+0,06)^5 \cong 13.382,26$

e, portanto, o montante M da aplicação será dado por:

$$M = 13.382,26\left(1+\frac{0,06}{30}\times 20\right) = 13.382,26\times 1,04 \Rightarrow M = 13.917,55$$

Adotando-se a convenção exponencial:

Nesse caso, o capital será capitalizado tanto no período inteiro quanto no período não inteiro, segundo a capitalização composta, a uma taxa de 6% ao mês, o período n será dado por:

$$n = 5+\frac{20}{30} = \frac{17}{3} \text{ meses}$$

e, portanto, o montante M será obtido de:

$$M = 10.000\,(1+0,06)^{\frac{17}{3}} = 10.000\times 1,391233 \cong 13.912,33$$

Observe que o montante é maior na convenção linear. Isto se deve ao fato de que o juro simples é maior que o juro composto quando calculado num tempo menor de 1 período de capitalização.

Na utilização da fórmula $M = C\times(1+i)^n$ devemos calcular o valor do fator de acumulação de capital $(1+i)^n$, ou do seu inverso $\frac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-n}$. Com objetivo de facilitar esses cálculos, é comum o uso de tabelas onde o valor desses fatores é fornecido para vários valores de i e de n. O uso da tabela é muito simples: sabendo-se a taxa e o período da operação, se ambos fizerem parte da tabela, basta procurar na coluna do fator de interesse o valor correspondente.

Exemplo 2.6

a. Um artigo de preço à vista, igual a R$ 700,00, pode ser adquirido com entrada de 20% mais um pagamento para 45 dias. Se o vendedor cobra juros simples de 8% ao mês, qual o valor do pagamento devido?

Solução:

valor à vista = $700,00$;

entrada: 20% de $700,00 = 140,00$;

valor a financiar: $700,00 - 140,00 = 560,00$

Tem-se então que:

$C = 560,00$, $n = 45$; dias = 1,5 meses e $i = 8\%$ ao mês, portanto, $M = 560 \times (1 + 0,08 \times 1,5) = 627,2$

Resposta: 627,20.

✍ O valor a financiar é sempre a diferença entre o valor à vista e a entrada.

b. Qual o juro exato de um capital de R$ 10.000,00 que é aplicado por 40 dias à taxa de 36% ao ano?

Solução:

$C = 10.000,00 i = 36\%$ a.a. e $n = 40$ dias $= \dfrac{40}{365}$ ano.

$J = 10.000,00 \times 0,36 \times \dfrac{40}{365} = 394,52.$

Resposta: 394,52.

c. Um título de R$ 600,00, vencido em $10/4/1999$, somente foi pago em $22/6/1999$. Admitindo-se que o banco cobre juros simples exatos de 60% ao ano, calcule o montante desembolsado pelo devedor.

Solução:

$C = 600,00$; $i = 60\%$ a.a.; $n = 10/4$ a $22/6 = 73$ dias $= \dfrac{73}{365}$ do ano, portanto

$$M = 600 \times \left(1 + \frac{73}{365} \times 0,6\right) = 600 \times 1,12 = 672,00.$$

Resposta: 672,00.

d. Uma loja vende um gravador por R$ 1.500,00 à vista. A prazo vende por R$ 1.800,00, sendo R$ 200,00 de entrada e o restante após um ano. Qual é a taxa anual de juros cobrada?

Solução:

O valor a ser financiado é o valor à vista menos o que é dado de entrada, ou seja, $1.500,00 - 200,00 = 1.300,00$. O cliente se compromete a devolver em um ano 1.600,00, logo o montante é de 1.600,00, isto é, os juros são de 300,00, e o período é de um ano, temos então que:

$300 = 1.300 \times i \times 1 \Rightarrow i = \dfrac{300}{1.300} = 0,2307$ ao ano ou $23,07\%$ ao ano.

Resposta: $23,07\%$ a.a. ou 0,2307 ao ano.

e. Uma pessoa toma R$ 1.000,00 emprestado a juros de 2% ao mês pelo prazo de 10 meses com capitalização composta. Qual o montante a ser devolvido?

Solução:

$C = 1.000,00$; $i = 2\%$ ao mês e $n = 10m$.

$M = 1000\,(1 + 0,02)^{10} = 1000 \times 1,218994 = 1.218,99.$

Resposta: R$ 1.218,99.

f. Qual o capital que aplicado à taxa composta de 2% ao mês, durante um semestre gera montante igual a R$ 225.232,40?

Solução:

$M = 225.232,40$

$i = 2\%$ a.m.

$n = 1$ semestre = 6 meses

C = ?

$$225.232,40 = C\,(1+0,02)^6$$

$$C = \frac{225.232,40}{(1,02)^6} = \frac{225.232,40}{1,12162419} \cong 200.000,00$$

Resposta: R$ 200.000,00.

g. Determinar o tempo necessário para o capital de R$ 20.000,00 gerar um montante de R$ 28.142,00 quando aplicado à taxa composta de 5% ao mês?

Solução:

$C = 20.000,00$

$M = 28.142,00$

$i = 5\%$ ao mês

$n = ?$

$$28.142 = 20.000\,(1+0,05)^n$$

$$(1,05)^n = \frac{28.142}{20.000}$$

$$(1,05)^n = 1,4071$$

$$\log\,(1,05)^n = \log(1,4071)$$

$$n = \frac{\log(1,4071)}{\log 1,05} \cong 7.$$

Resposta: 7 meses.

h. A que taxa mensal de juros compostos devemos aplicar R$ 40.000,00 para obtermos montante igual a R$ 56.197,12 ao fim de um trimestre?

Solução:

$C = 40.000,00;$
$M = 56.197,12;$
$n = 1$ trimestre = 3 meses;
$i = ?$
$56.197,12 = 40.000\,(1+i)^3$

$$(1+i)^3 = \frac{56.197,12}{40.000} = 1,404928$$

$1 + i = \sqrt[3]{1,404928} = 1,12$
$i = 1,12 - 1 = 0,12$ a.m. ou 12% ao mês.

Resposta: 12% ao mês.

i. Luiza aplicou seu capital a juros simples durante 90 dias à taxa de 5% a.m. Se tivesse aplicado a juros compostos nas mesmas condições, teria recebido R$ 305,00 a mais de montante. Determine o capital inicial aplicado por Luiza.

Solução:

$n = 90$ dias $= 3$ meses; $i = 5\%$ ao mês.

Juros simples: $M_1 = C\,(1 + 0,05 \times 3) = 1,15C$

Juros compostos: $M_2 = C\,(1 + 0,05)^3 = C\,(1,05)^3 = 1,157625C$

Como

$M_2 - M_1 = 305$

temos então que:

$$31,157625C - 1,15C = 305$$

$$0,007625C = 305$$

$$C = \frac{305}{0,007625} = 40.000$$

Resposta: R$ 40.000,00.

j. Considere um empréstimo que envolve os seguintes pagamentos: $15.000,00$ de hoje a 2 meses; $40.000,00$ de hoje a 5 meses; $50.000,00$ de hoje a 6 meses e $70.000,00$ de hoje a 8 meses. O devedor deseja apurar o valor presente (na data zero) desses pagamentos, pois está negociando com o banco a liquidação imediata de toda a dívida. A taxa de juros compostos considerada nessa antecipação é de 3% ao mês. Determine o valor atual da dívida.

Solução:

$$P = \frac{15.000}{(1+0,03)^2} + \frac{40.000}{(1+0,03)^5} + \frac{50.000}{(1+0,03)^6} + \frac{70.000}{(1+0,03)^8} =$$

$$14.138,94 + 34.504,35 + 41.874,21 + 55.258,65 = 145.776,15$$

Resposta: R$ 145.776,15.

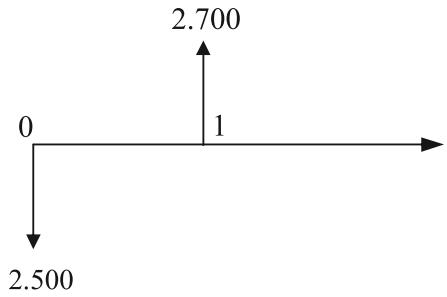
Resumo

Apresentamos o conceito de juros, taxa de juros, período de capitalização e regimes de capitalização, chamando a atenção que a determinação do montante é uma simples aplicação do estudo de progressões. Resolvemos alguns problemas envolvendo o cálculo de juros e propusemos outros para que você resolva.

Exercício 2.1

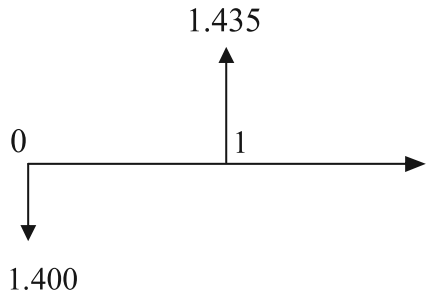
1. Um investidor aplica um capital e obtém um montante após um trimestre, segundo as situações dadas pelos fluxos de caixa. Calcule a taxa trimestral de juros de cada operação.

a)



Resposta: 8%.

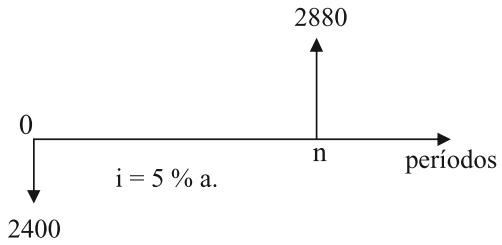
b)



Resposta: 2,5%.

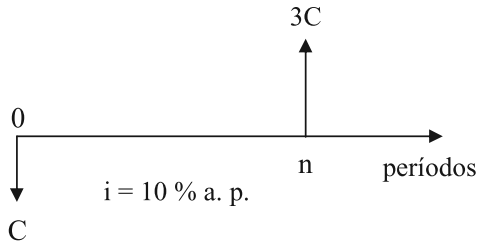
2. Vidal aplica um capital e obtém um montante após *n* períodos, segundo o regime de capitalização simples. Calcule o valor de *n* de cada operação.

a)



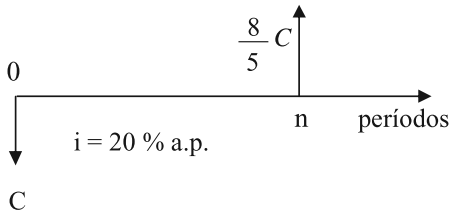
Resposta: 4 períodos.

b)



Resposta: 20 períodos.

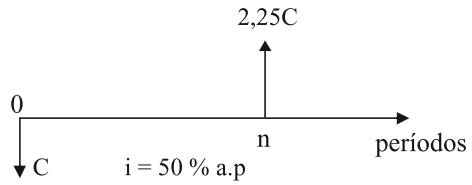
c)



Resposta: 3 períodos.

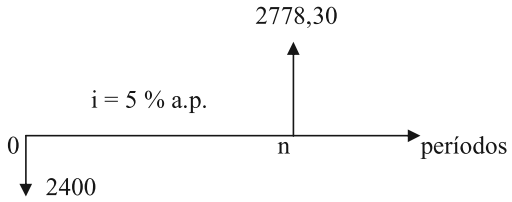
3. Um investidor aplica um capital e obtém um montante após *n* períodos, segundo o regime de capitalização composta. Calcule o valor de *n* em cada operação:

a)



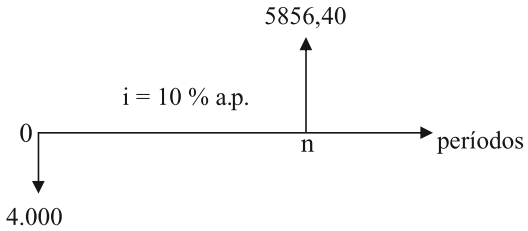
Resposta: 2 períodos.

b)



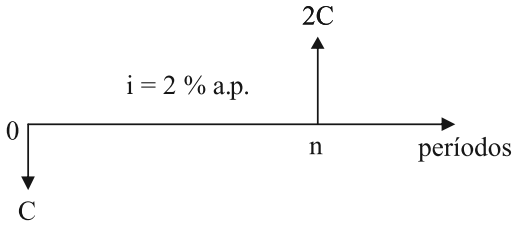
Resposta: 3 períodos.

c)



Resposta: 4 períodos.

d)



Resposta: 35 períodos.

4. Um vestido é vendido por R$ 250,00 ou então por R$ 80,00 de entrada mais uma parcela de R$ 178,50 após 40 dias. Qual a taxa mensal de juros simples do financiamento?

   Resposta: $3,75\%$ a.m.

5. Quanto tempo deve permanecer aplicado um capital de R$ 1.500,00 a uma taxa linear de $1,4\%$ ao dia para produzir um montante de R$ 1.710,00?

   Resposta: 10 dias.

6. Um certo tipo de aplicação a juros simples duplica em dois meses. Em quanto tempo essa aplicação renderá 700% de juros?

   Resposta: 14 meses.

7. Vera comprou um aparelho e vai pagá-lo em duas prestações; a 1ª, de R$ 180,00, um mês após a compra e a 2ª, de R$ 200,00, dois meses após a compra. Sabendo-se que estão sendo cobrados juros compostos de 25% ao mês, qual era o preço à vista do aparelho?

   Resposta: R$ 272,00 meses.

8. Um eletrodoméstico é vendido em três pagamentos iguais. O primeiro pagamento é efetuado no ato da compra, e os demais são devidos em 30 e 60 dias. Sendo $4,4\%$ ao mês a taxa linear de juros, pede-se calcular até que valor interessa adquirir o bem à vista.

   Resposta: Interessa adquirir o produto à vista por até $95,9\%$ de seu valor.

9. Um poupador com certo volume de capital deseja diversificar suas aplicações no mercado financeiro. Para tanto, aplica 60% do capital numa alternativa de investimento que paga $34,2\%$ ao ano de juros simples pelo prazo de 60 dias. A outra parte é aplicada numa conta de poupança por 30 dias, sendo remunerada pela taxa linear de $3,1\%$ ao mês. O total dos rendimentos auferidos pelo aplicador atinge R$ 1.562,40. Pede-se calcular o valor de todo o capital investido.

   Resposta: 33.527,90.

10. Um empréstimo de R$ 42.000,00 foi tomado por determinado prazo a uma taxa linear de 7% ao mês. Em determinado momento o devedor resgata esse empréstimo e contrai

outro no valor de R$ 200.000,00 pagando 5% de juros simples ao mês por certo prazo. Dois anos depois de ter contraído o primeiro empréstimo, o devedor liquida sua dívida remanescente. O total dos juros pagos nos dois empréstimos tomados atinge R$ 180.000,00. Pede-se calcular os prazos referentes a cada um dos empréstimos.

Resposta: 8,5 meses e 15,5 meses respectivamente.

11. Guilherme aplicou seu capital à taxa de juros simples de 7% ao mês durante quatro meses. Se tivesse aplicado nas mesmas condições no regime de capitalização composta, teria recebido R$ 615,92 a mais de montante. Qual montante auferido pelo capital de Guilherme se aplicado à taxa composta de 2% ao mês em dez meses?

    Resposta: R$ 24.379,88.

12. Dois capitais C_1 e C_2, que estão na razão de três para cinco, foram aplicados a juros compostos e a juros simples, respectivamente. Se a aplicação foi de cinco meses à taxa de 4% ao mês, determine a razão entre os montantes M_1 e M_2.

    Resposta: 0,6083.

13. Um capital de R$ 1.500,00 esteve aplicado durante 2 meses, produzindo R$ 315,00 de juros compostos. Qual foi a taxa efetiva mensal aplicada?

    Resposta: 10%.

14. Uma pessoa aplicou R$ 15.000,00 e após um ano recebeu R$ 18.782,87 de juros. Qual foi a taxa de juros mensal (capitalização composta) paga pela financeira onde o dinheiro foi aplicado?

    Resposta: 7% a.m.

15. Se eu quiser comprar um carro no valor de R$ 60.000,00, quanto devo aplicar hoje para daqui a dois anos possua tal valor? Considerar as seguintes taxas de aplicação (capitalização composta):

    a) $2,5\%$ a.m. **Resposta:** R$ 33.172,52.

    b) 10% a.s. **Resposta:** R$ 40.980,81.

    c) 20 % a.a. **Resposta:** R$ 41.666,67.

16. O preço de uma mercadoria é de R$ 2.400,00 e o comprador tem um mês para efetuar o pagamento. Caso queira pagar à vista, a loja dá um desconto de 20%. O mercado financeiro oferece rendimentos de 35% ao mês. Qual a melhor opção para o comprador: o pagamento à vista ou a prazo? Por quê?

    Resposta: A prazo, pois nesse caso ele lucraria R$ 192,00.

17. Um sítio é posto à venda por R$ 50.000,00 de entrada e R$ 100.000,00 em um ano. Como opção o vendedor pede R$ 124.000,00 à vista. Se a taxa de juros de mercado é de $2,5\%$ ao mês, qual é a melhor alternativa? Por quê?

    Resposta: Comprar à vista.

18. Certa loja tem como política de vendas a crédito exigir 30% do valor da mercadoria à vista como entrada e o restante a ser liquidado em até três meses. Neste caso, o valor da mercadoria sofre um acréscimo de 10% a título de despesas administrativas. Qual é a taxa de juros anual dessa loja?

    Resposta: $70,60\%$ ao ano.

19. Uma pessoa deve a outra a importância de R$ 12.400,00. Para liquidar essa dívida, propõe os seguintes pagamentos: R$ 3.500,00 ao final de dois meses; R$ 4.000,00 ao final de cinco meses; R$ 1.700,00 ao final de sete meses e o restante em um ano. Sendo de 3% ao mês a taxa de juros cobrada no empréstimo, pede-se calcular o valor do último pagamento.

    Resposta: R$ 6.085,47.

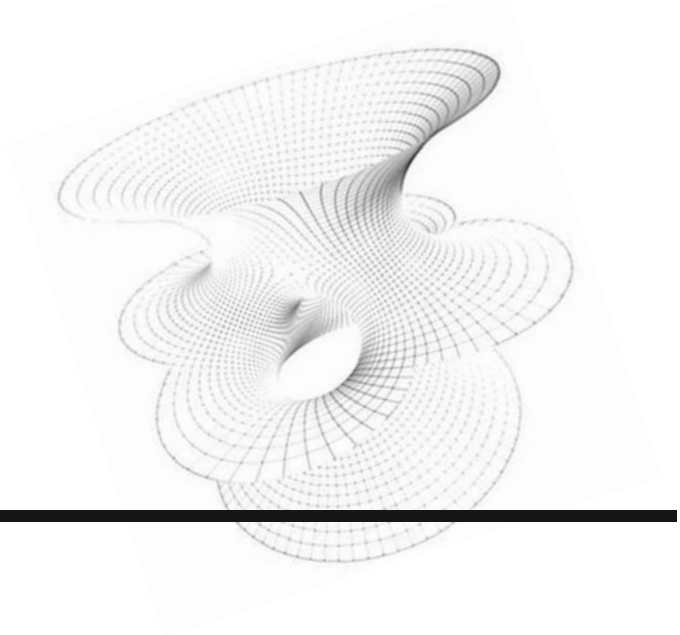
20. Uma dívida tem este esquema de pagamento: R$ 3.900,00 vencíveis em três meses a partir de hoje e R$ 11.700,00 de hoje a cinco meses. O devedor propõe ao credor refinanciar estas dívida mediante cinco pagamentos bimestrais, iguais e sucessivos, vencendo o primeiro de hoje a um mês. Sendo de $2,1\%$ ao mês a taxa de juros da dívida original e $3,0\%$ ao mês a taxa a ser considerada no refinanciamento, pede-se determinar o valor de cada pagamento bimestral.

    Resposta: R$ 3.283,06.

Auto-avaliação

O conceito de juros e suas propriedades desempenham um papel fundamental no estudo da Matemática Financeira. Antes de prosseguir, esclareça todas as suas dúvidas. Procure os seus colegas no pólo, troque soluções com eles e converse sobre o que você já aprendeu.

Aula 3



Estudo das Taxas

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. entender o conceito de taxa proporcional e taxa equivalente;
2. entender o conceito de taxa nominal e taxa efetiva;
3. entender o conceito de taxa real e taxa aparente;
4. interpretar e resolver os problemas propostos.

TAXAS PROPORCIONAIS

Definição 3.1

As taxas i_1 e i_2 são ditas proporcionais se, relativamente aos períodos n_1 e n_2, expressos na mesma unidade de tempo, ocorrer $\frac{i_1}{n_1} = \frac{i_2}{n_2}$.

Exemplo 3.1

As taxas 72% a.a., 36% a.s., 18% a.t. são proporcionais, pois se tomarmos meses como unidade de tempo, teremos $\frac{72\%}{12} = \frac{36\%}{6} = \frac{18\%}{3} = \frac{6\%}{1}$.

TAXAS EQUIVALENTES

Definição 3.2

Duas taxas são ditas equivalentes quando, aplicadas a um mesmo capital durante um mesmo prazo, produzem o mesmo montante e, portanto, o mesmo juro.
A definição de taxas equivalentes é válida tanto para juros simples quanto para juros compostos. A juros simples, duas taxas equivalentes são também proporcionais; entretanto, isso não acontece quanto se trata de juros compostos.

Exemplo 3.2

a. Qual a taxa de juros simples mensal equivalente à taxa anual de 36% ao ano?

   Solução:

   Seja: i_m = taxa mensal e $i_a = 36\%$ ao ano (taxa anual). Essas taxas devem produzir o mesmo montante (juros) quando aplicadas ao mesmo capital C pelo mesmo período. Se considerarmos um prazo de 1 ano, ou seja, 12 meses, tem-se que:

   $C \times i_m \times 12 = C \times i_a \times 1 \Rightarrow C \times i_m \times 12 = C \times 0,36 \times 1$

$i_m = \dfrac{0,36}{12} \Rightarrow i_m = 0,03$ ao mês,

ou $i_m = 3\%$ ao mês. Logo, 36% ao ano e 3% ao mês a juros simples são equivalentes. Por outro lado, tem-se que $\dfrac{36}{12} = \dfrac{3}{1}$ e, portanto, essas taxas também são proporcionais.

Resposta: 3% ao mês.

b. Qual a taxa de juros compostos mensal equivalente à taxa de 36% ao ano?

Solução:

Seja: $i_m =$ taxa mensal e $i_a = 36\%$ ao ano (taxa anual). Essas taxas devem produzir o mesmo montante (juros) quando aplicadas ao mesmo capital C pelo mesmo período. Se considerarmos um prazo de 1 ano, ou seja, 12 meses, tem-se que:

$C(1+i_m)^{12} = C(1+i_a)^1 \Rightarrow (1+i_m)^{12} = 1,36 \Rightarrow (1+i_m) = \sqrt[12]{1,36}$

$i_m = \sqrt[12]{1,36} - 1 = 1,0259955 - 1 = 0,0259955$ ao mês

ou $i_m = 2,60\%$ ao mês.

Portanto, $2,6\%$ ao mês é a taxa equivalente a juros compostos à taxa de 36% ao ano.

Resposta: $2,60\%$ ao mês.

c. Qual a taxa de juros compostos anual equivalente à taxa de 3% ao mês?

Solução:

Seja: $i_m = 3\%$ ao mês (taxa mensal) e i_a a taxa anual equivalente. Essas taxas devem produzir o mesmo montante (juros) quando aplicadas ao mesmo capital C pelo mesmo período. Se considerarmos um prazo de 1 ano, ou seja, 12 meses, tem-se que:

$C(1+i_m)^{12} = C(1+i_a)^1 \Rightarrow (1+0,03)^{12} = (1+i_a) = (1,03)^{12}$

$i_a = 1,425761 - 1 = 0,425761$ ao ano ou $i_a = 42,576\%$ ao ano.

Portanto, 3% ao mês é a taxa equivalente a juros compostos à taxa de $42,576\%$ ao ano.

Resposta: $42,576\%$ ao ano.

✍ *Para o cálculo da taxa equivalente a juros compostos, basta comparar os fatores de capitalização* $(1+i)^n$.

Exemplo 3.3

a. Calcular a taxa anual i_a de juros compostos equivalente às seguintes taxas:

1. 1% a.m.
2. 2% a.t.
3. 5% a.q.
4. 10% a.s.

Solução:

1. Seja: $i_m = 1\%$ ao mês (taxa mensal) e i_a a taxa anual equivalente.
   Como 1 ano = 12 meses, devemos ter
   $(1+i_a)^1 = (1+i_m)^{12} \Rightarrow (1+i_a)^1 = (1,01)^{12}$
   $i_a = 1,126825 - 1 = 0,126825$ ao ano, ou
   $i_a = 12,6825\%$ ao ano.

Resposta: $12,6824\%$ ao ano.

Solução:

2. Seja: $i_t = 2\%$ ao trimestre (taxa trimestral) e i_a taxa anual equivalente.
   Como 1 ano = 4 trimestres, devemos ter
   $(1+i_a)^1 = (1+i_t)^4 \Rightarrow (1+i_a)^1 = (1,02)^4$
   $i_a = 1,082432 - 1 = 0,082432$ ao ano, ou $i_a = 8,2432\%$ ao ano.

Resposta: $8,2432\%$ ao ano.

Solução:

3. Seja: $i_q = 5\%$ ao quadrimestre (taxa quadrimestral) e i_a taxa anual equivalente.
   Como 1 ano = 3 meses, devemos ter
   $(1+i_a)^1 = (1+i_q)^3 \Rightarrow (1+i_a)^1 = (1,05)^3$
   $i_a = 1,157625 - 1 = 0,157625$ ao ano, ou $i_a = 15,7625\%$ ao ano.

Resposta: $15,7625\%$ ao ano.

Solução:

4. Seja: $i_s = 10\%$ ao semestre (taxa semestral) e i_a a taxa anual equivalente.
   Como 1 ano = 2 semestres, devemos ter
   $(1+i_a)^1 = (1+i_s)^2 \Rightarrow (1+i_a)^1 = (1,1)^2$
   $i_a = 1,21 - 1 = 0,21$ ao ano, ou $i_a = 21\%$ ao ano.

Resposta: 21% ao ano.

b. Calcular as taxas equivalentes a 20% a.a., conforme solicitado abaixo:

   1. taxa semestral.
   2. taxa quadrimestral.
   3. taxa trimestral.
   4. taxa mensal.

Solução:

1. Seja: $i_a = 20\%$ o ano (taxa anual) e i_s a taxa semestral equivalente.
   Como 1 ano = 2 semestres, tem-se então que
   $(1+i_s)^2 = (1+i_a)^1 \Rightarrow (1+i_s)^2 = (1+0,2)^1 \Rightarrow (1+i_s) = \sqrt{1,2}$
   $i_s = 1,095445 - 1 = 0,095445$ a.s. ou $i_s = 9,5445\%$ ao semestre.

Resposta: $9,5445\%$ ao semestre.

Solução:

2. Seja: $i_a = 20\%$ ao ano (taxa anual) e i_q a taxa quadrimestral equivalente.
   Como 1 ano = 3 quadrimestres, tem-se então que
   $(1+i_q)^3 = (1+i_a)^1 \Rightarrow (1+i_q)^3 = (1+0,2)^1 \Rightarrow (1+i_q) = \sqrt[3]{1,2}$
   $i_q = 1,062659 - 1 \Rightarrow i_s = 0,062659$ a.q. ou $i_q = 6,2659\%$ quadrimestre.

Resposta: $6,2659\%$ ao quadrimestre.

Solução:

3. Seja: $i_a = 20\%$ ao ano (taxa anual) e i_t a taxa trimestral equivalente.

   Como 1 ano = 4 trimestres, tem-se então que

   $(1+i_t)^4 = (1+i_a)^{11} \Rightarrow (1+i_t)^4 = (1+0,2)^1 \Rightarrow (1+i_t) = \sqrt[4]{1,2}$

   $i_t = 1,046635 - 1 = 0,046635$ a.t. ou $i_t = 4,6635\%$ ao trimestre.

Resposta: $4,6635\%$ ao trimestre.

Solução:

4. Seja: $i_a = 20\%$ ao ano (taxa anual) e i_m a taxa mensal equivalente.

   Como 1 ano = 12 meses, tem-se então que

   $(1+i_m)^{12} = (1+i_a)^1 \Rightarrow (1+i_m)^{12} = (1+0,2)^1$

   $(1+i_m) = \sqrt[12]{1,2}$

   $i_m = 1,015309 - 1 = 0,015309$ a.m. ou $i_m = 1,5309\%$ ao mês.

Resposta: $1,5309\%$ ao mês.

c. Um corretor de títulos propõe a seu cliente uma aplicação cuja rentabilidade é de 40% a.a. Se o investidor souber de outra alternativa onde possa ganhar 9% a.t., qual será sua escolha?

Solução:

Podemos comparar as duas alternativas, verificando se suas taxas são equivalentes. Pode-se calcular por exemplo a taxa anual equivalente a 9% a.t. Nesse caso, como 1 ano = 4 trimestres, tem-se que:

$(1+i_a)^1 = (1+0,09)^4 = 1,411582$

$i_a = 0,411582$ a.a. ou $i_a \cong 41,16\%$ a.a.

Resposta: Portanto, aplicar a 9% a.t. é melhor do que aplicar a 40% a.a.

d. O preço de uma mercadoria é de R$ 2.000,00, sendo financiada até 3 meses. Caso opte por pagar à vista, a loja oferece um desconto de 10%. Sabendo-se que a taxa de mercado é de 40% a.a., vale a pena comprar a prazo?

Solução:

O preço da mercadoria à vista é de R$ 1.800,00, isto é, 90% de R$ 2.000,00. Devemos calcular a taxa que está sendo cobrada na operação. Tem-se então que:

$$2.000 = 1.800\,(1+i)^3 \Rightarrow 1+i = \sqrt[3]{\frac{2.000}{1.800}} = \sqrt[3]{1,111111} = 1,035744$$

$i = 0,035744,$ ou $i \cong 3,57\%$ a.m.

Como 1 ano = 12 meses, a taxa anual i_a equivalente a esta taxa mensal de $3,57\%$ será dada por:

$(1+i_a)^1 = (1+0,0357)^{12} \Rightarrow i_a = 1,52338 - 1 = 0,52338$ ao ano, ou

$i_a = 52,338\%$ ao ano.

Logo, a taxa de financiamento da loja é maior do que a taxa de juros do mercado.

Resposta: É melhor comprar à vista.

TAXA NOMINAL E TAXA EFETIVA

Definição 3.3

Taxa nominal é aquela que está definida em período de tempo diferente do período de capitalização.

Exemplo 3.4

Exemplos de taxas nominais:

a. 8% a.a., capitalizados trimestralmente.

b. 12% a.a., conversíveis mensalmente.

c. 10% a.q., capitalizados bimestralmente.

A taxa nominal não representa a taxa de juros que efetivamente está sendo utilizada na operação.

Definição 3.4

Taxa efetiva é aquela utilizada no cálculo dos juros.

✍ *Adota-se convenção de que a taxa efetiva por período de capitalização é proporcional à taxa nominal.*

Exemplo 3.5

a. Taxa nominal de 60% ao ano com capitalização mensal. Como 1 ano = 12 meses, então, a taxa efetiva mensal será de $\frac{60}{12} = 5\%$ ao mês.

b. Taxa nominal de 60% ao ano com capitalização bimestral. Como 1 ano = 6 bimestres, então, a taxa efetiva será de $\frac{60}{6} = 10\%$ ao bimestre.

c. Taxa nominal de 60% ao ano com capitalização trimestral. Como 1 ano = 4 trimestres, então, a taxa efetiva será de $\frac{60}{4} = 15\%$ ao trimestre.

d. Se aplicarmos R$ 10.000,00 à taxa de 36% ao ano, capitalizada mensalmente, qual o montante obtido no final do ano?

Solução:

A taxa de 36% ao ano é nominal, pois seu período que é anual é diferente do período de capitalização que é mensal; logo, considerando a relação entre as unidades de tempo dessas taxas,a taxa efetiva da operação é proporcional a taxa dada, ou seja, como 1 ano = 12 meses, então a taxa efetiva i será dada por $i = \frac{36}{12} = 3\%$ ao mês. Portanto o montante M será obtido por:

$$M = 10.000 \times (1 + 0,03)^{12} = 10.000 \times 1,42576 \Rightarrow M = 14.257,60$$

Resposta: R$ 14.257,60.

✍ *A taxa efetiva da operação em que a unidade de referência é a mesma da taxa nominal será maior do que esta.*

No exemplo, a taxa efetiva anual i_a será à taxa equivalente a taxa efetiva mensal de 3%; portanto, temos que

$$(1+i_a) = (1+0,03)^{12} \Rightarrow i_a = 1,42576 - 1 = 0,42576 \text{ ao ano}$$

ou $i_a = 42,576\%$ ao mês.

Taxa de Juro Real x Taxa de Juro Aparente

Se um capital C é aplicado durante certo prazo, à taxa i por período, o capital acumulado será $M_1 = C \times (1+i)$.

Se no mesmo período a taxa de inflação for θ, o capital corrigido pela inflação será $M_2 = C \times (1+\theta)$.

Se $M_1 = M_2$, então, a taxa de juros i apenas recompôs o poder aquisitivo do capital C.

Se $M_1 > M_2$, houve um ganho real; se $M_1 < M_2$, ocorreu uma perda real.

Chama-se valor real à diferença $(M_1 - M_2)$, que poderá ser positiva (ganho real), nula ou negativa (perda real).

Definição 3.5

Chama-se taxa real de juros (e indica-se por r) ao valor real expresso como porcentagem do capital corrigido monetariamente.

Assim:

$$r = \frac{M_1 - M_2}{M_2} = \frac{M_1}{M_2} - 1 \Rightarrow 1 + r = \frac{C(1+i)}{C(1+\theta)} = \frac{1+i}{1+\theta}$$

onde: $i =$ taxa de aplicação ou taxa aparente, $\theta =$ taxa de inflação e $r =$ taxa real.

Exemplo 3.6

a. Que taxa de inflação anual deve ocorrer para que um aplicador ganhe 5% a.a. de juros reais, caso a taxa aparente seja de $9,2\%$ a.a.?

Solução:

Temos que: $i = 9,2\%$ a.a. e $r = 5\%$ a.a. Como $1 + r = \dfrac{1+i}{1+\theta}$, temos que:

$1 + 0,05 = \dfrac{1+0,092}{1+\theta} \therefore 1 + \theta = \dfrac{1,092}{1,05} = 1,04 \Rightarrow \theta = 0,04$ a.a. ou $\theta = 4\%$ ao ano.

Resposta: 4% ao ano.

b. Um capital de R$ 1.000,00 foi aplicado por 3 anos, à taxa de 10% ao ano, com capitalização semestral. Calcular o montante e a taxa efetiva anual da operação.

Solução:

A taxa dada é anual, mas a capitalização é semestral. Portanto, essa taxa é nominal e, como 1 ano = 2 semestres, temos que a taxa mensal efetiva da operação será dada por $i = \dfrac{10}{2} = 5\%$ a.s. Por outro lado, 3 anos = 6 semestres, logo, o montante M será dado por:

$M = 1.000\,(1 + 0,05)^6 = 1.000 \times 1,340096 \Rightarrow M \cong 1.340,10.$

A taxa efetiva anual i_a é dada por

$(1 + i_a)^1 = (1 + 0,05)^2 \Rightarrow i_a = 1,10250 - 1 \Rightarrow i_a = 0,10250$

ou $i_a = 10,25\%$ ao ano.

Resposta: R$ 1.340,10; $10,25\%$ a.a.

c. Calcular a taxa aparente anual que deve cobrar uma financeira para que ganhe 8% a.a. de juros reais sabendo-se que a taxa de inflação foi de 40% a.a.

Solução:

$1 + i = (1 + \theta)\,(1 + r)\,,$

onde i = taxa de aplicação ou taxa aparente;

θ = taxa de inflação;

$r =$ taxa real.

Nesse caso, $\theta = 40\%$ a.a.; $r = 8\%$ a.a. Portanto,

$1 + i = (1 + 0,40)\,(1 + 0,08)$

$1 + i = 1,512 \Rightarrow i = 0,512$ ao ano ou $i = 51,2\%$ ao ano.

Resposta: $51,2\%$ ao ano.

Resumo

Você aprendeu, nesta aula, o significado das diferentes taxas de juros, ou seja, a diferença entre taxa proporcional, equivalente, nominal, real e aparente. Durante o restante do curso, com certeza, em várias oportunidades você aplicará esses conceitos.

Exercício 3.1

1. Em juros simples, qual é a taxa trimestral equivalente à taxa de 9% ao quadrimestre?

   Resposta: $6,75\%$.

2. Qual a taxa anual equivalente à taxa nominal anual de 20% capitalizados semestralmente?

   Resposta: 21%.

3. Uma empresa aplica R$ 20.000,00 à taxa de juros compostos de 20% a.a., por 36 meses. Qual a taxa que mais se aproxima da taxa proporcional bimestral dessa operação?

   Resposta: $4,04\%$.

4. Uma financeira ganha 12% a.a. de juros reais em cada financiamento. Supondo que a inflação anual seja de 40%, qual a taxa de juros nominal anual que a financeira deverá cobrar?

   Resposta: $56,8\%$.

5. João investiu R$ 5.000,00 em títulos de um banco pelo prazo de 1 ano, tendo sido fixado o valor de resgate em R$ 7.200,00 quando do vencimento da aplicação. Entretanto, necessitando de dinheiro, descontou o título 3 meses antes do vencimento, recebendo a quantia líquida de R$ 6.400,00. Que taxa real João recebeu, se a inflação mensal nos primeiros nove meses tiver sido de $2,5\%$?

   Resposta: $3,34\%$ a.a.

6. Uma pessoa comprou um casa por R$ 80.000,00 e vendeu-a, após um ano, por R$ 120.000,00. De quanto deve ser a inflação mensal para que o investidor ganhe 10% a.a. como juros reais?

   Resposta: $2,62\%$ a.m.

7. Uma loja anuncia a venda de um conjunto de som por 3 parcelas quadrimestrais seqüenciais de R$ 3.000,00, R$ 4.000,00 e R$ 5.000,00 mais uma entrada de R$ 500,00. Qual deve ser o preço à vista se a taxa de juros real for de 2% a.q. e se a inflação for de 8% no primeiro quadrimestre, 7% no segundo e 6% no terceiro?

   Resposta: R$ 10.396,72.

8. Qual o valor que deverá ser investido hoje, para que se obtenha um montante de R$ 242,00 ao final de seis meses, à taxa de juros de 40% ao ano, capitalizados trimestralmente?

   Resposta: R$ 200,00.

9. A taxa de juros cobrada pelo banco A é de 30% ao ano, sendo sua capitalização anual. O banco B, numa campanha promocional, informa que sua taxa é de 27% ao ano, tendo a diferenciá-la apenas o fato de sua capitalização ser mensal. Qual é a melhor taxa para o cliente?

   Resposta: banco A.

10. Qual é a taxa nominal anual, com capitalização semestral, que conduz à taxa efetiva de 40% ao ano?

    Resposta: $36,64\%$ a.a.

11. Que taxa de inflação anual deve ocorrer para que um aplicador ganhe 12% ao ano de juros reais, caso a taxa de juros aparente seja de 45% ao ano?

    Resposta: $29,46\%$ ao ano.

12. O preço à vista de um carro é de R$ 20.000,00. A agência o vende por R$ 5.000,00 de entrada e o restante após seis meses a juros efetivos de 12% ao ano, mais a correção monetária. Sabendo-se que a correção do primeiro trimestre do financiamento foi de 6% e que a do segundo trimestre foi de 10%, pergunta-se qual o valor pago ao fim dos seis meses?

    Resposta: R$ 18.510,00.

13. Quanto deve ser aplicado em caderneta de poupança em primeiro de janeiro de 19X6 para que se tenha R$ 100.000,00 no dia primeiro de janeiro de 19X7? Considerar a taxa de 6% ao ano mais correção monetária, conforme hipóteses abaixo:

Trimestre	Correção monetária
primeiro	6,675%
segundo	8,690%
terceiro	8,000%
quarto	7,000%

Resposta: R$ 70.410,00.

14. Se a inflação prevista para um ano for de 6% no primeiro quadrimestre, 7% no segundo e 8% no terceiro e se os juros reais forem de 2% ao quadrimestre, qual será a taxa aparente para:

    a) o primeiro quadrimestre?
    Resposta: $8,12\%$ a.q.

    b) os primeiros oito meses?
    Resposta: 18%.

    c) os doze meses?
    Resposta: $29,99\%$ a.a.

    d) considerando os dados anteriores, qual é a taxa nominal equivalente mensal para os doze meses?
    Resposta: $2,21\%$ ao mês.

15. Um terreno é posto à venda por R$ 50.000,00 à vista ou por R$ 37.500,00 a prazo, sendo que nesse segundo caso o comprador deverá dar R$ 20.000,00 de entrada e o restante em 1 ano. Se a taxa de inflação prevista for de 25% a.a., qual será a taxa de juros real recebida pelo vendedor?

    Resposta: Nula.

Auto-avaliação

Se você conseguiu resolver os exercícios propostos, parabéns! Caso contrário, não desanime. Reveja os conceitos e os exemplos e procure sanar as dúvidas com os tutores. Não acumule dúvidas, pois muitos desse conceitos aparecerão novamente em outro contexto.

Aula 4

Desconto na Capitalização Simples

Objetivos

Ao final desta aula, você será capaz de:

1. entender o conceito de desconto;
2. entender os conceitos de valor nominal, valor atual e prazo de antecipação de um título;
3. entender os conceitos envolvendo o desconto “por dentro” ou racional e o desconto “por fora” ou comercial na capitalização simples;
4. interpretar e resolver os problemas propostos.

INTRODUÇÃO

Quando uma pessoa física ou jurídica toma uma quantia emprestada, assume uma dívida que deverá ser paga no futuro.

Para que esse compromisso seja firmado, o credor recebe um documento chamado título, com o qual pode provar publicamente que é a pessoa que deve receber aquela quantia em determinada data. Os títulos mais usados em empréstimos são a nota promissória e a duplicata.

A nota promissória é um título de crédito que corresponde a uma promessa de pagamento futuro. Ela é muito usada entre pessoas físicas.

A duplicata é um título emitido por uma pessoa jurídica contra o seu cliente (pessoa física ou jurídica) para o qual vende mercadoria a prazo ou prestou serviços que serão pagos no futuro.

VALOR NOMINAL, VALOR ATUAL E PRAZO DE ANTECIPAÇÃO

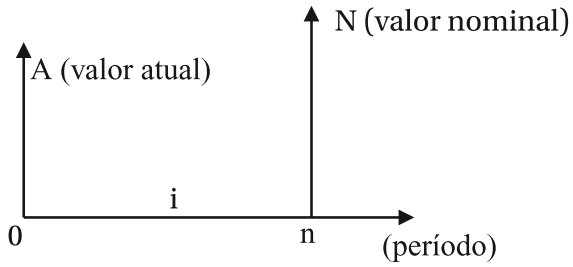
Definição 4.1

O *valor nominal* (valor de face) de um compromisso é quanto ele vale na data de vencimento, enquanto *valor atual* (*valor descontado ou valor líquido ou ainda valor pago*) é o valor que ele adquire numa data que antecede o seu vencimento. O intervalo de tempo entre a data em que o título é negociado e a data de vencimento do mesmo é o *prazo de antecipação*.

DESCONTO

Definição 4.2

Desconto é a diferença entre o valor nominal de um título e seu valor atual. Desconto, também, pode ser definido como o abatimento a que o devedor faz jus quando antecipa o pagamento de um título.



DESCONTO POR DENTRO (RACIONAL OU REAL)

Definição 4.3

Desconto por dentro é o desconto d_r que determina um valor atual **A** que, corrigido nas condições de mercado (taxa, prazo de antecipação e capitalização), tem para montante o valor nominal **N**, ou seja, d_r são os juros que são incorporados ao capital **A** para reproduzir **N**. No desconto "*por dentro*", ou desconto *racional* ou desconto *real*, o valor de referência para o cálculo porcentual do desconto é o *valor atual ou líquido*.

DESCONTO "POR FORA" OU COMERCIAL

Definição 4.4

O desconto por fora ou comercial d_c é o juro calculado sobre o valor nominal A a uma taxa chamada taxa de desconto, durante o tempo que decorre da data da transação até a data de vencimento do título. No desconto "por fora" ou comercial, a referência para o cálculo porcentual do desconto é o valor nominal N.

DESCONTO NA CAPITALIZAÇÃO SIMPLES

DESCONTO "POR DENTRO" RACIONAL OU REAL

Nesse caso, sabe-se que a base do desconto é o valor atual racional A_r considerando a taxa i e o prazo de antecipação n; temos, então, que o desconto d_r será dado por $d_r = A_r \times i \times n$

e como $A_r = N - d_r$, então:

$$A_r = N - d_r \Rightarrow A_r = N - A_r \times i \times n \Rightarrow N = A_r + A_r \times i \times n$$
$$N = A_r \times (1 + i \times n) \Leftrightarrow A_r = \frac{N}{1 + i \times n}.$$

DESCONTO "POR FORA" COMERCIAL OU BANCÁRIO

Nesse caso, sabe-se que a base do desconto é o valor nominal N considerando a taxa i e o prazo de antecipação n; temos, então, que o desconto d_c será dado por $d_c = N \times i \times n$. O valor comercial A_c pode ser obtido através da equação $A_c = N - d_c$, isto é, temos, então, que:

$$A_c = N - N \times i \times n \Rightarrow A_c = N \times (1 - i \times n) \Leftrightarrow N = \frac{A_c}{1 - i \times n}$$

✍ Se consideradas as mesmas condições, isto é, o mesmo valor nominal N, o mesmo prazo de antecipação n e a mesma taxa de desconto i, o desconto comercial d_c é sempre maior do que o desconto racional d_r, ou seja, o valor atual racional A_r é sempre maior do que o valor atual comercial A_c.

Exemplo 4.1

1. Um título com valor nominal de R$ 8.800,00 foi resgatado dois meses antes do seu vencimento, sendo-lhe por isso concedido um desconto racional simples à taxa de 60% a.m. Nesse caso, qual foi o valor pago pelo título?

   Solução:

   Temos que:

   $$\begin{cases} N = \text{ 8.800,00 (valor nominal do título)} \\ n = \text{ dois meses (prazo de antecipação)} \\ i = 60\% \text{ ao mês (taxa de desconto racional simples)} \end{cases}$$

   Como no desconto racional simples a relação entre o valor nominal N e o valor atual A_c é dada por $N = A_r \times (1 + i \times n)$, tem-se que

   $$8.800{,}00 = A_r \times (1 + 0,6 \times 2) \Rightarrow A_r = \frac{8.800,00}{2,2} \Rightarrow A_r = 4.000,00$$

   Resposta: R$ 4.000,00.

2. Um título, ao ser descontado racionalmente 45 dias antes do vencimento, à taxa linear de 6% ao mês, teve valor atual igual a R$ 2.500,00. Qual o valor de face desse título?

   Solução:

   Temos que:

   $$\begin{cases} A_r = \text{ 2.500,00 (valor atual racional do título)} \\ n = 45 \text{ dias = 1,5 mês (prazo de antecipação)} \\ i = 6\% \text{ ao mês (taxa de desconto racional simples)} \end{cases}$$

   Como $N = A_r \times (1 + i \times n)$, temos que:

   $$N = 2.500,00 \times (1 + 0,002 \times 45) = 2.500 \times 1,09 \Rightarrow N = 2.725,00$$

   Resposta: R$ 2.725,00.

3. Qual o desconto racional simples sofrido por um título de R$ 6.715,60 descontado a 24% ao ano em um mês e quinze dias?

   Solução:

   Temos que:

   $$\begin{cases} N = 6.715,60 \text{ (valor nominal do título)} \\ n = \text{ um mês e quinze dias} = 1,5 \text{ mês (prazo de antecipação)} \\ i = 24\% \text{ ao ano (taxa de desconto racional simples)} \end{cases}$$

   No desconto racional simples, a relação entre o valor nominal N e o valor atual A é dada através da equação:

   $$N = A_r \times (1 + i \times n) \Leftrightarrow A_r = \frac{N}{(1 + i \times n)}.$$

   $$A_r = \frac{6.715,60}{1 + 0,02 \times 1,5} \Rightarrow A_r = 6.520,00.$$

   Como $d_r = N - A_r$, temos então que:

   $$d_r = 6.715,60 - 6.520,00 \Rightarrow d_r = 195,60$$

   Resposta: 195,20.

4. Uma letra de valor nominal igual a R$ 2.400,00 sofre um desconto comercial simples à taxa de 6% ao mês, cem dias antes do seu vencimento. Obter o desconto e o valor descontado.

   Solução:

   Temos que:

   $$\begin{cases} N = 2.400,00 \text{ (valor nominal do título)} \\ n = 100 \text{ dias (prazo de antecipação)} \\ i = 6\% \text{ ao mês} = 0,2\% \text{ ao dia (taxa de desconto comercial simples)} \end{cases}$$

Como $d_c = N \times i \times n$, tem-se então que

$d_c = 2.400,00 \times 0,002 \times 100 \Rightarrow d_c = 480,00.$

Por outro lado, sabe-se que $A_c = N - d_c$, logo

$A_c = 2.400,00 - 480,00 \Rightarrow A_c = 1.920,00.$

Resposta: R$ 480,00 e R$ 1.920,00.

✍ Do ponto de vista da instituição financeira, na operação de desconto comercial simples foi feito um investimento. Ela antecipa o pagamento do título mediante um desconto, para recebê-lo no vencimento o seu valor de face. Ou seja, o desconto dado, é o juro recebido pela instituição financeira na operação. Portanto, a taxa de juros efetiva da operação será dada por $\frac{d_c}{A_c}$. Esta taxa é sempre maior do que a taxa de desconto. No exemplo anterior, a taxa linear efetiva de ganho é dada por $\frac{480}{1.920} = 0,25$ em 100 dias ou 0,075 ao mês, ou ainda $7,5\%$ ao mês.

Pode também determinar essa taxa, lembrando que a instituição financeira aplicou 1.920,00 em 100 dias e recebeu um montante de 2.400,00, portanto a taxa linear i dessa operação será dada por $2.400,00 = 1920,00$ $(1 + i \times 100) \Rightarrow 100i = 0,25 \Rightarrow i = 0,0025$ ao dia ou $i = 0,25\%$ ao dia ou ainda $i = 7,5\%$ ao mês.

5. Determinar o valor nominal de um título que, descontado comercialmente 60 dias antes do vencimento à taxa linear de 12% ao mês, resultou um valor descontado de R$ 608,00.

Solução:

$$\begin{cases} A = 608,00 \text{ (valor atual comercial do título)} \\ n = 60 \text{ dias} = 2 \text{ meses (prazo de antecipação)} \\ i = 12\% \text{ ao mês (taxa de desconto comercial simples)} \end{cases}$$

Sabemos que no desconto comercial simples

$$A_c = N \times (1 - i \times n) \Leftrightarrow N = \frac{A_c}{1 - i \times n},$$

temos então que:

$$608,00 = N \times (1 - 2 \times 0,12) \Rightarrow N = \frac{608,00}{0,76} \Rightarrow N = 800,00$$

Resposta: R$ 800,00.

6. Uma duplicata de valor nominal de R$ 60.000,00 foi descontada num banco dois meses antes do vencimento. A taxa de desconto comercial simples usada na operação foi de $2,8\%$ ao mês. Sabe-se ainda que o banco cobra uma taxa de $1,5\%$ sobre o valor nominal do título, para cobrir despesas administrativas descontados e pagos integralmente no momento da liberação dos recursos administrativos. Determinar o desconto e o valor descontado e a taxa efetiva da operação.

   Solução:

   $$\begin{cases} N = \text{ 60.000,00 (valor nominal do título)} \\ n = 2 \text{ meses (prazo de antecipação)} \\ i = 2,8\% \text{ ao mês (taxa de desconto comercial simples)} \end{cases}$$

   Como $d_c = N \times i \times n$, então temos que nesse caso,

   $d_c = 60.000,00 \times 0,028 \times 2 \Rightarrow d_c = 3.360,00.$

   Portanto, o valor atual comercial A_c será dado por $A_c = 60.000,00 - 3.360,00 = 56.640,00$.

   Por outro lado, sabe-se que o banco cobra uma comissão de $1,5\%$ sobre o valor nominal do título, ou seja, $60.000,00 \times 0,015 = 900,00$.

   Logo, o valor líquido recebido pelo portador da duplicata será dado por $56.640,00 - 900,00 = 55.740,00$.

   Do ponto de vista do banco, esta foi uma operação de um empréstimo de R$ 55.740,00 que renderá os juros simples em dois meses um montante de R$ 60.000,00, isto é, um juro de R$ 4.260,00. Logo, a taxa de juros simples mensal i dessa operação será obtida por:

   $4.260,00 = 55.740,00 \times i \times 2 \Rightarrow i = \dfrac{4.260,00}{111.480,00} \Rightarrow i = 0,038213$ ao mês, isto é, $i = 3,82\%$ ao mês.

   Resposta: R$ 4.260,00, R$ 55.740,00 e $3,82\%$ ao mês.

7. Uma nota promissória foi descontada comercialmente a uma taxa linear de 5% ao mês, quinze meses antes do seu vencimento. Se o desconto fosse racional simples, qual deveria ser a taxa adotada para produzir um desconto de igual valor?

   Solução:

   $$\begin{cases} i = 5\% \text{ ao mês (taxa de desconto comercial simples)} \\ n = 15 \text{ meses (prazo de antecipação)} \end{cases}$$

Podemos supor sem perda de generalidade que $N = 100,00$ e como $d_c = N \times i \times n$, tem-se então que, nesse caso, $d_c = 100,00 \times 0,05 \times 15 \Rightarrow d_c = 75,00$.

Por outro lado, sabendo-se que o desconto racional simples d_r pode ser obtido através da relação $d_r = A_r \times i \times n$ e como $A_r = \dfrac{N}{(1+i\times n)}$, então temos que

$$d_r = \frac{N}{(1+i\times n)} \times i \times n$$

$$d_r = \frac{N \times i \times n}{(1+i\times n)}.$$

Logo, supondo que $d_c = d_r$, tem-se que:

$$75,00 = \frac{100 \times i \times 15}{1+15\times i} \Rightarrow 75,00 + 1.125 \times i = 1.500 \times i$$

$$i = \frac{75}{375} = 0,2 \text{ ao mês ou } i = 20\% \text{ ao mês.}$$

Resposta: 20% ao mês.

✍ Sabemos que considerando as mesmas condições, isto é, taxa de desconto e prazo de antecipação, o desconto comercial simples d_c é maior que o desconto racional simples d_r, e tem-se que $d_c = d_r\,(1+i\times n)$, onde i é a taxa de desconto e n o prazo de antecipação.

De fato: sabe-se que $d_c = N \times i \times n$, por outro lado,

$$d_r = N - A = N - \frac{N}{1+i\times n}$$

$$d_r = \frac{N \times i \times n}{1+i\times n} \Rightarrow N \times i \times n = d_r \times (1+i\times n)$$

$$d_c = d_r \times (1+i\times n)\,.$$

Exemplo 4.2

O desconto comercial simples de um título descontado três meses antes de seu vencimento à taxa de 40% ao ano é de R$ 550,00. Qual é o desconto racional?

Solução:

$$d_c = d_r \times (1+i\times n) \Rightarrow 550,00 = d_r \times (1+0,4\times 0,25)$$

$$d_r = \frac{550,00}{1,1} = 500,00$$

Resposta: R$ 500,00.

Resumo

Nesta aula, você aprendeu os conceitos de desconto, valor nominal, valor atual e prazo de antecipação de um título. Esses conceitos serão ainda utilizados na próxima aula. Aprendeu também a determinar o desconto "por fora" ou comercial e o desconto "por dentro" ou racional na capitalização simples, assim como a relação entre eles.

Exercício 4.1

1. Calcular o desconto por dentro sofrido por uma letra de R$ 8.320,00, descontada à taxa linear de 6% ao ano, 8 meses antes do seu vencimento?

   Resposta: R$ 320,00.

2. Determinar o valor nominal de uma letra, descontada por dentro à taxa linear de 8% ao mês, um mês e quinze dias antes de seu vencimento, e que apresentou o desconto de R$ 400,00.

   Resposta: R$ 3.733,33.

3. Um título sofreu desconto racional simples 15 dias antes do vencimento. O valor nominal e o valor atual são inversamente proporcionais a 40 e 44, respectivamente. Qual foi a taxa anual de desconto?

   Resposta: 2,4 ao ano.

4. Aceitei um título vencível a 1 ano, 1 mês e 10 dias. Tendo sido descontado por dentro a 9% ao ano, deu R$ 1.000,00 de desconto. Qual era o valor nominal do título?

   Resposta: R$ 11.000,00.

5. Numa operação de desconto por dentro, a razão entre o valor nominal e o valor atual é igual a 1,08. Se a taxa de juros simples é de 6% ao mês, qual é o prazo de antecipação?

   Resposta: 40 dias.

6. O valor nominal de um compromisso é de cinco vezes o desconto racional simples, caso a antecipação seja de oito meses. Qual é o seu valor nominal, se o valor de resgate é de R$ 1.740,00?

   Resposta: R$ 2.175,00.

7. Uma duplicata de valor nominal igual a R$ 1.200,00 é descontada em um banco 60 dias antes do vencimento. Sabendo-se que a taxa de desconto é de 10% ao mês, pede-se:

   a) o desconto comercial simples;

      Resposta: R$ 240,00.

   b) o desconto racional simples;

      Resposta: R$ 200,00.

   c) o valor descontado racionalmente;

      Resposta: R$ 1.000,00.

   d) a taxa efetiva dessa operação, considerando o desconto comercial simples.

      Resposta: 25%.

8. Um título foi descontado cinco dias antes do seu vencimento, sofrendo um desconto por fora à taxa linear de 36% a.m. Sabendo-se que o devedor pagou R$ 2.820,00, qual o seu valor nominal?

   Resposta: R$ 3.000,00.

9. Qual o valor nominal de uma nota promissória, a vencer em 30 de maio, que descontada por fora no dia 3 de abril do mesmo ano à taxa de 6% a.m. produziu um desconto de R$ 1.881,00?

   Resposta: R$ 16.500,00.

10. Um título, descontado por fora, à taxa linear de $0,5\%$ ao dia, produziu o desconto equivalente a $\frac{1}{8}$ de si mesmo. Determinar o prazo de antecipação.

    Resposta: 25 dias.

11. O valor atual de um título é duas vezes o valor de seu desconto comercial simples. Qual é o vencimento do título expresso em dias, sabendo-se que a taxa de desconto comercial adotada é de 60% ao ano?

    Resposta: 200 dias.

12. Um banco oferece empréstimos pessoais, cobrando 5% ao mês de taxa de desconto comercial simples, mais uma comissão de 2%. Se uma pessoa necessita de R$ 4.150,00 para pagar daqui a três meses, qual deve ser o compromisso assumido?

    Resposta: R$ 5.000,00.

13. Um título de valor nominal de R$ 111,11 foi descontado em um banco à taxa de 4% a.m., cinco meses antes do vencimento (desconto comercial simples). Qual a taxa mensal que representou para o banco esse investimento?

    Resposta: 5%.

14. Qual a taxa efetiva mensal de uma operação de desconto comercial simples de um título realizada à taxa de $18,4\%$ a.a., três meses antes do seu vencimento?

    Resposta: 1,61% a.m.

15. Achar a diferença entre o desconto comercial simples e o racional simples de um título de R$ 2.100,00, descontada a 3% ao mês, 50 dias antes de seu vencimento.

    Resposta: R$ 5,00.

16. O desconto comercial simples de um título é igual a $\frac{6}{5}$ do desconto racional simples. Calcular o prazo de antecipação do pagamento, sabendo-se que a taxa de desconto é de 10% ao mês.

    Resposta: 2 meses.

17. Uma empresa descontou uma duplicata em um banco que adota uma taxa de 84% a.a. e o desconto comercial simples. O valor do desconto foi de R$ 10.164,00. Se na operação fosse adotado o desconto racional simples, o desconto seria reduzido em R$ 1.764,00. Nessas condições, qual é o valor nominal da duplicata?

    Resposta: R$ 48.400,00.

18. Sabe-se que o valor do desconto racional de um título à taxa linear de 66% ao ano e prazo de desconto de 50 dias atinge R$ 28.963,00. Para estas mesmas condições, determine o valor do desconto desse título, nas mesmas condições, se fosse adotado o critério de desconto comercial simples.

    Resposta: R$ 31.617,94.

19. O desconto de uma duplicata de valor nominal de R$ 77.000,00 e com prazo de vencimento de 141 dias produz um valor atual de R$ 65.000,00. Determinar a taxa linear de desconto "por dentro" e "por fora" desta operação.

    Resposta: $3,93\%$ a.m. e $3,32\%$ a.m..

20. Uma pessoa descontou duas duplicatas em um banco, no regime de desconto comercial, a uma taxa de juros simples de 15% ao ano. O primeiro título vencia em 270 dias e o segundo em 160 dias, sendo que o último era de valor nominal 50% superior ao primeiro. Sabendo-se que os dois descontos somaram o valor de R$ 382,50, determine o valor nominal do título que produziu o maior desconto.

    Resposta: R$ 1.800,00.

Auto-avaliação

Você entendeu os conceitos de desconto, valor nominal, valor atual e prazo de antecipação de um título? Eles serão necessários na próxima aula. Conseguiu resolver todos os exercícios propostos sem dificuldade? Se a resposta foi sim, então você entendeu os conceitos envolvendo o desconto "por dentro" ou racional e o desconto "por fora" ou comercial, em particular na capitalização simples. Se não conseguiu, não desista, volte à aula e reveja os conceitos e exemplos antes de começar a próxima aula e discuta com seus colegas de pólo a solução desses problemas.

Aula 5

Desconto na Capitalização Composta

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. entender os conceitos envolvendo o desconto “por dentro” ou racional e o desconto “por fora” ou comercial na capitalização composta;
2. interpretar e resolver os problemas propostos.

DESCONTO NA CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA

DESCONTO "POR DENTRO" OU RACIONAL

Nesse caso temos que $N = A_r \times (1+i)^n$ e como $d_r = N - A_r$, então, $d_r = A_r \times (1+i)^n - A_r \Rightarrow d_r = A_r \times [(1+i)^n - 1]$.

DESCONTO "POR FORA" OU COMERCIAL

Nesse caso temos que $A_c = N \times (1-i)^n$ e como $d_c = N - A_c$, então, $d_c = N - N \times (1-i)^n \Rightarrow d_c = N \times [1-(1-i)^n]$.

Exemplo 5.1

a. Antecipando em dois meses o pagamento de um título, obtive um desconto racional composto que foi calculado com base na taxa de 4% ao mês. Sendo R$ 5.408,00 o valor nominal do título, quanto pagarei por ele?

Solução: $\begin{cases} N = 5.408,00 \text{ (}\textit{valor nominal do título)} \\ n = \ 2 \text{ meses (}\textit{prazo de antecipação)} \\ i = 4\% \text{ ao mês (}\textit{taxa de desconto racional composto)} \end{cases}$

No desconto racional composto, a relação entre o valor nominal N e o valor atual A_r é dada através da equação $N = A_r \times (1+i)^n \Leftrightarrow A_r = \dfrac{N}{(1+i)^n}$.

Logo, temos que $A_r = \dfrac{5.408,00}{(1+0,04)^2} = \dfrac{5408,00}{1,0826} = 5000,00$.

Resposta: R$ 5.000,00.

b. Um título de valor nominal R$ 25.000,00 é resgatado três meses antes do vencimento pelo critério do desconto racional composto a uma taxa de 24% ao ano, capitalizada mensalmente. Calcule o valor descontado e o desconto.

Solução:

A taxa de 24% ao ano é nominal, pois seu período que é anual é diferente do período de capitalização semestral. Logo, considerando a relação entre as unidades dessas taxas, a taxa efetiva mensal é proporcional a taxa dada, ou seja, como 1 ano = 2 semestres, tem-se então que a taxa efetiva semestral i será dada por $i = \dfrac{24}{12} = 2\%$ ao mês.

$$\begin{cases} N = 25.000,00 \textit{ (valor nominal do título)} \\ n = 3 \text{ meses } \textit{(prazo de antecipação)} \\ i = 2\% \text{ ao mês } \textit{(taxa de desconto racional composto)} \end{cases}$$

No desconto racional composto, a relação entre o valor nominal N e o valor atual A_r é dada através da equação $N = A_r \times (1+i)^n \Leftrightarrow A_r = \dfrac{N}{(1+i)^n}$.

Nesse caso, temos então que:

$$A_r = \frac{25.000,00}{(1+0,02)^3} = \frac{25.000,00}{1,061208} \Rightarrow A_r \cong 23.558,06.$$

Lembrando que o valor do desconto é a diferença entre o valor de face do título ou valor nominal e o valor descontado ou valor atual, isto é, $d_r = N - A_r$, nesse caso então, temos que:

$$d_r = 25.000,00 - 23.558,06 \Rightarrow d_r = 1.441,94$$

Resposta: R$ 23.558,06 e R$ 1.441,94.

c. Um título de R$ 1.000,00 deve ser resgatado três meses antes do seu vencimento, pelo critério do desconto comercial composto a uma taxa de 10% ao mês. Qual é o valor líquido?

Solução:

$N = 1.000,00$ (valor nominal do título)
$n = 3$ meses (prazo de antecipação)
$i = 10\%$ ao mês (taxa de desconto comercial composto)

No desconto comercial composto, a relação entre o valor atual A_c e o valor nominal N é dada por $A_c = N \times (1-i)^n$, logo, nesse caso, temos que $A_c = 1.000,00 \times (1-0,10)^3 \Rightarrow A_c \cong 729,00$.

Resposta: R$ 729,00.

d. Um título de R$ 2.000,00 será resgatado três anos antes do vencimento pelo critério do desconto comercial composto à taxa de 20% a.a. com capitalizações semestrais. Qual será o valor líquido?

Solução:

A taxa de 20% ao ano é nominal, pois seu período que é anual é diferente do período de capitalização que é semestral. Logo, considerando a relação entre as unidades dessas taxas, a taxa efetiva mensal é proporcional a taxa dada, ou seja, como 1 ano = 2 semestres, tem-se, então, que a taxa efetiva semestral i será dada por $i = \dfrac{20}{2} = 10\%$ ao semestre.

$N = 2.000,00$ *(valor nominal do título)*
$n = 3$ anos $= 6$ meses *(prazo de antecipação)*
$i = 10\%$ ao semestre *(taxa de desconto comercial composto)*

No desconto comercial composto, a relação entre o valor atual A_c e o valor nominal N é dada por $A_c = N \times (1-i)^n$, logo nesse caso temos que $A_c = 1.000,00 \times (1-0,10)^6 \Rightarrow A_c \cong 1.062,88$.

Resposta: R$ 1.062,88.

e. Um título de valor R$ 10.000,00 foi descontado cinco meses antes do vencimento à taxa de desconto comercial composto de 10 % ao mês. Qual a taxa de juros efetivamente cobrada nessa transação?

Solução:

$$\begin{cases} N = 10.000,00 \text{ \textit{(valor nominal do título)}} \\ n = 5 \text{ meses \textit{(prazo de antecipação)}} \\ i = 10\% \text{ ao mês \textit{(taxa de desconto comercial composto)}} \end{cases}$$

No desconto comercial composto, a relação entre o valor atual A_c e o valor nominal N é dada por $A_c = N \times (1-i)^n$, logo nesse caso temos que:

$$A_c = 10.000,00 \times (1-0,10)^5 = 10.000,00 - 0,590490$$

$$A_c \cong 5.904,90.$$

Lembrando que o valor do desconto é a diferença entre o valor nominal de face ou valor nominal e o valor descontado ou valor atual, isto é, $d_c = N - A_c$, temos então que nesse caso,

$$d_c = 10.000,00 - 5.904,90 \Rightarrow d_c = 4.095,10.$$

Do ponto de vista do banco, esta foi uma operação de um empréstimo de R$ 5.904,90 que renderá em dois meses um montante de R$ 10.000,00, isto é, um juros de R$ 4.095,10. Logo a taxa de juros composto mensal i dessa operação será obtida por:

$$10.000,00 = 5.904,90 \times (1+i)^5$$

$$(1+i)^5 = \frac{10.000,00}{5.904,90} = 1,693509$$

$$1+i = \sqrt[5]{1,693509} = 1,1111111 - 1$$

$i = 0,111111$ ao mês ou $i \cong 11,11\%$ ao mês.

Resposta: A taxa efetiva é de 11,11% ao mês.

Definição 5.1

Dizemos que duas taxas de desconto racional e comercial composto são *equivalentes* se, e somente, se *produzirem descontos iguais* quando aplicadas a um mesmo título e por um mesmo prazo de antecipação.

Nesse caso, como os descontos são iguais, então os valores atuais também são iguais e portanto:

$$N \times (1-i_c)^n = \frac{N}{(1+i_r)^n} \Rightarrow (1-i_c)^n \times (1+i_r)^n = 1$$

$$(1-i_c) \times (1+i_r) = 1$$

Exemplo 5.2

Determinar a taxa mensal de desconto racional equivalente à taxa de desconto comercial de 20% ao mês.

Solução:

$$\begin{cases} i_C = 20 \\ i_r = ? \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} (1+i_r) \times (1-0,20) = 1 \therefore 1+i_r = \dfrac{1}{0,8} \\ \\ i_r = 0,25 \text{ a. m. ou } i_r = 25\% \text{ a.m.} \end{array}$$

Resposta: 25% ao mês.

Resumo

Nesta aula, encerramos a Unidade 4 – descontos. Os conceitos gerais sobre descontos, aprendidos na Aula 4, foram novamente utilizados e você assimilou os conceitos envolvendo a determinação do desconto "por fora" ou comercial e do desconto "por dentro" ou racional na capitalização composta. Aprendeu também o conceito de taxas equivalentes de desconto racional composto e de desconto comercial composto.

Exercício 5.1

1. Uma empresa tomou emprestada de um banco, por seis meses, a quantia de R$ 10.000,00 à taxa de juros compostos de 19,9% ao mês. No entanto, 1 mês antes do vencimento a empresa decidiu liquidar a dívida. Qual o valor a ser pago, se o banco opera com uma taxa de desconto racional composto de 10% a.m.?

   Resposta: Aproximadamente R$ 27.000,00.

2. Uma empresa descontou uma duplicata de R$ 44.276,00, dois meses antes do vencimento, sob o regime de desconto racional composto. Admitindo-se que o banco adote a taxa de juros efetiva de 84% a.a., qual será o líquido recebido pela empresa?

   Resposta: Aproximadamente R$ 40.000,00.

3. João irá receber R$ 6.600,00 dentro de um ano, como parte de seus direitos na venda de um barco. Contudo, necessitando de dinheiro, transfere seus direitos a um amigo que os compra, entregando-lhe uma nota promissória no valor de R$ 6.000,00 com vencimento para seis meses. João fez bom negócio, se a taxa de juros compostos do mercado for de 20% ao ano?

   Resposta: Não.

4. Numa operação de desconto, o possuidor do título recebeu R$ 10.000,00 como valor de resgate. Sabendo-se que a antecipação fora de 6 meses e o desconto de R$ 1.401,75; qual foi a taxa de juros composta anual adotada?

   Resposta: 30%.

5. Guilherme tem um compromisso representado por duas promissórias: uma de R$ 100.000,00 e outra de R$ 200.000,00 vencíveis em quatro e seis meses, respectivamente. Prevendo que não disporá desses valores nas datas estipuladas, solicita ao banco credor a substituição dos dois títulos por um único, a vencer em dez meses. Sabe-se que o banco adota juros compostos de 8% ao mês. Qual o valor da nova nota promissória?

   Resposta: R$ 430.785,00.

6. Qual é o valor do desconto racional composto de um título de valor nominal de R$ 20.000,00, com prazo para trinta dias para vencimento e taxa cobrada de 4% ao mês?

   Resposta: R$ 769,00.

7. Uma duplicata no valor de R$ 800.000,00, com vencimento daqui a três anos, deve ser substituída por duas letras de câmbio, de mesmo valor nominal cada, com vencimentos daqui a dois anos e cinco anos respectivamente. Calcular os valores nominais das novas duplicatas, sabendo-se que taxa de juro composto utilizada é de 8% ao semestre e a taxa de juro composto do desconto racional é de 10% ao semestre.

   Resposta: R$ 432.569,58.

8. Um título de R$ 5.000,00 será descontado 2 meses antes do vencimento pelo critério de desconto comercial composto à taxa de 60% a.a. com capitalização mensal. Qual o valor do desconto?

   Resposta: R$ 487,50.

9. Uma duplicata de R$ 3.000,00 deverá ser descontada 3 anos antes do seu vencimento a uma taxa de 25% ao ano pelo critério do desconto racional composto. Qual seria taxa anual a ser adotada para obter-se um desconto igual pelo critério de desconto comercial composto?

   Resposta: 20% ao ano.

10. Uma duplicata no valor de R$ 2.000,00 é resgatada dois meses antes do vencimento, obedecendo ao critério de desconto comercial composto. Sabendo-se que a taxa de desconto é de 10% ao mês, qual é o valor do desconto e o valor descontado?

    Resposta: R$ 380,00 e R$ 1.620,00.

11. Que taxa mensal de desconto comercial composto é equivalente a taxa mensal de 20% de desconto racional composto?

    Resposta: 16,67%.

12. Um título foi descontado à taxa de 3% a.m. cinco meses antes de seu vencimento. Sabe-se que essa operação produziu um desconto de R$ 39.000,00. Admitindo o conceito de desconto composto "por fora", determinar o valor nominal do título.

    Resposta: R$ 276.074,92.

13. A taxa de desconto composto "por fora" do banco A é de 3,1% ao mês para operações com prazo de 90 dias. O banco B oferece uma taxa de desconto de 2,9% ao mês com o prazo de 120 dias. Determinar qual banco está cobrando a maior taxa efetiva mensal de juros.

    Resposta: Banco A = 3,19% ao mês; Banco B = 2,98% ao mês.

14. Uma instituição financeira deseja cobrar uma taxa efetiva de 3,1% ao mês em suas operações de desconto composto "por fora". Determinar a taxa de desconto que deve ser considerada para um prazo de antecipação de três meses.

    Resposta: 3,01% ao mês.

15. Qual a taxa de juros composto efetiva anual de um título descontado à taxa "por fora" de 4,5% ao mês, 3 meses antes do vencimento?

    Resposta: 4,71% ao mês.

16. Uma pessoa quer descontar, hoje, um título de valor nominal de R$ 11.245,54, com vencimento para daqui a 60 dias e tem as opções a seguir. Determine, em cada caso, o valor do desconto e o valor descontado.

    a) desconto simples racional com taxa de 3% ao mês;

       Resposta: R$ 636,54 e R$ 10.609,00.

    b) desconto simples comercial, com taxa de 2,5% ao mês;

       Resposta: R$ 562,28 e R$ 10.683,26.

    c) desconto composto racional, com taxa de 3% ao mês;

       Resposta: R$ 645,54 e R$ 10.600,00.

d) desconto composto comercial, com taxa de 2,5% ao mês.

Resposta: R$ 555,25 e R$ 10.690,29.

Auto-avaliação

Você conseguiu resolver todos os exercícios propostos sem dificuldade? Se a resposta foi sim, então você entendeu os conceitos expostos nesta aula. Se não conseguiu, não desista! Volte à aula e reveja os conceitos e exemplos, não deixe que suas dúvidas se acumulem.

Aula 6

Equivalência Financeira na Capitalização Simples

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. entender o conceito de equivalência financeira;
2. entender o conceito de data focal;
3. entender o conceito de equivalência financeira na capitalização simples;
4. interpretar e resolver os problemas propostos.

INTRODUÇÃO

O problema da equivalência financeira de capitais, constitui-se no raciocínio básico da Matemática Financeira. Considere o problema da substituição de uma ou mais obrigações financeiras por outras obrigações, com datas diferentes de vencimentos das anteriores sem prejuízo para credores ou devedores. Esse problema será resolvido pela *equivalência financeira de capitais.*

Definição 6.1

Chama-se *data focal* ou *data de referência,* ou ainda *data de avaliação* a data que é considerada como base para comparação de capitais referidos a datas diferentes.

Definição 6.2

Considere dois ou mais conjuntos de capitais, cada um deles com suas datas de vencimento a uma mesma taxa de juros a partir da mesma data de origem. Esses conjuntos são ditos equivalentes se a soma de seus respectivos valores for igual para uma mesma data focal.

✍ Na determinação da equação de equivalência de capitais, leva-se em consideração o fato de o regime de capitalização ser de juros simples ou composto e também é necessário saber se o critério do desconto a ser utilizado é o do desconto comercial, "por fora", ou o do desconto racional, "por dentro". Essas opções serão estabelecidas *a priori* entre as partes envolvidas.

✍ Se o problema não especificar o regime a ser considerado, deverá ser utilizado o regime de juros composto e se não for estabelecido o critério a ser utilizado, deverá ser utilizado o critério do desconto racional.

✍ Nos problemas de equivalência financeira, você utilizará a equação que se relaciona com o valor nominal N de um título (Capital) e o seu valor atual A, que dependerá do critério a ser utilizado, o do desconto comercial ou racional. A dificuldade é saber em cada caso o que será calculado, se N ou A. Se o capital for deslocado para o futuro, o valor dado é o valor atual, e você deve determinar o valor nominal. Por outro lado, se o capital for deslocado para o passado, o valor dado é o valor nominal, e você deve determinar o valor atual.

EQUIVALÊNCIA NA CAPITALIZAÇÃO SIMPLES

Considere dois conjuntos de capitais, a uma mesma taxa de juros simples i, com seus respectivos prazos, contados a partir da mesma data de origem.

1º Conjunto		**2º Conjunto**	
Capital	*vencimento*	*Capital*	*vencimento*
C_1	m_1	C'_1	m'_1
C_2	m_2	C'_2	m'_2
.....	.....	.....	.....
C_n	m_n	C'_j	m'_j

Esses conjuntos de capitais são *equivalentes* quando for utilizado o critério do desconto:

a) racional ou "por dentro" se:

$$\frac{C_1}{(1+i\times m_1)}+\frac{C_2}{(1+i\times m_2)}+.....+\frac{C_n}{(1+i\times m_n)}=$$

$$\frac{C'_1}{\left(1+i\times m'_1\right)}+\frac{C'_2}{\left(1+i\times m'_2\right)}+.....+\frac{C_j}{\left(1+i\times m'_j\right)}$$

b) comercial ou "por fora" se:

$$C_1\times(1-i\times m_1)+.....+C_n\times(1-i\times m_n)=$$

$$C'_1\times(1-i\times m'_1)+.....+C'_j\times\left(1-i\times m'_j\right)$$

✍ Nos dois casos, foi considerado a data zero como data focal.

Exemplo 6.1

a. Um título com valor nominal de R$ 7.200,00 vence em 120 dias. Para uma taxa de juros linear de 31,2 % ao ano, pede-se calcular o valor deste título.

   1. hoje;
   2. dois meses antes do vencimento;
   3. um mês após o seu vencimento.

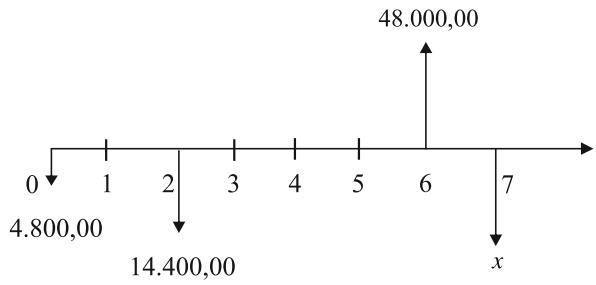
   Solução:

   1. $C_0 = \dfrac{7.200}{\left(1 + \dfrac{0,312}{12} \times 4\right)} = \dfrac{7.200}{1,104} = 6.521,74$
   2. $C_1 = \dfrac{7.200}{\left(1 + \dfrac{0,312}{12} \times 2\right)} = \dfrac{7.200}{1,052} = 6.844,74$
   3. $C_5 = 7.200\left(1 + \dfrac{0,312}{12} \times 1\right) = 7.200 \times 1,026 = 7.387,20$

b. Uma dívida no valor de R$ 48.000,00 vence daqui a seis meses. O devedor pretende resgatar a dívida pagando R$ 4.800,00 hoje e R$ 14.000,00 de hoje a dois meses, e o restante um mês após a data de vencimento. Sendo o momento desse último pagamento definido como a data focal da operação, e sabendo-se ainda que é de 34,8 % ao ano a taxa linear de juros adotada nessa operação, determinar o valor do último pagamento, se for adotado o critério do:

   1. desconto racional ou “por dentro”;
   2. desconto comercial ou “por fora”.

Solução:



No diagrama acima, a seta para cima representa o conjunto formado por um único capital da dívida original; e as setas para baixo, o conjunto de capitais da nova proposta de pagamento.

Para que não haja prejuízo para nenhuma das partes, é necessário que esses conjuntos sejam equivalentes.

Sabemos que dois ou mais capitais diferidos, isto é, com vencimentos em datas diferentes, são equivalentes, em certa data de referência "data focal" quando a soma dos seus valores nessa data for igual. Nesse problema, a data de referência é a data "sete".

A taxa considerada no problema é de 34,8% ao ano no regime de juros simples, o que equivale à taxa de $\frac{34{,}8}{12} = 2,9\%$ ao mês (na capitalização simples as taxas equivalentes são proporcionais).

1. Sabe-se que no desconto racional simples a relação entre o valor atual A e o valor nominal N é dada pela equação $N = A \times (1 + i \times n) \Leftrightarrow A = \frac{N}{1+i\times n}$ logo, considerando esse critério, temos que a equação de equivalência será dada por:

$$\begin{aligned}
&48.000,00 \times (1 + 0,029 \times 1) = 4.800,00 \times (1 + 0,029 \times 7)\\
&+14.000,00 \times (1 + 0,029 \times 5) + x \Rightarrow 49.392,00\\
&= 5.774,40 + 16.030,00 + x \Rightarrow 49.392,00\\
&= 21.804,40 + x \Rightarrow x = 27.587,60
\end{aligned}$$

2. Sabe-se que no desconto comercial simples a relação entre o valor atual A e o valor nominal N é dada pela equação $A = N \times (1 - i \times n) \Leftrightarrow N = \frac{A}{1-i\times n}$ logo, considerando esse critério, temos que a equação de equivalência será dada por:

$$\frac{48.000,00}{1 - 0,029 \times 1} = \frac{4.800,00}{1 - 0,029 \times 7} + \frac{14.000,00}{1 - 0,029 \times 5} + x$$

$$x = 27.036,72$$

Respostas:

1. R$ 27.587,60.
2. R$ 27.036,72.

Vamos refazer o exemplo anterior, considerando a data zero como data focal e o critério do desconto racional. Nesse caso, a equação de equivalência será dada por:

$$\frac{48.000,00}{(1+0,029\times 6)} = 4.800,00 + \frac{14.000,00}{(1+0,029\times 2)} + \frac{x}{(1+0,029\times 7)}$$

$$\frac{48.000,00}{1,174} = 4.800,00 + \frac{14.000,00}{1,058} + \frac{x}{1,203} \Rightarrow x = \frac{22.853,35}{0,831255}$$

$$x = 27.492,57$$

✍ Na questão da equivalência financeira a juros simples, é importante ressaltar que o saldo se altera quando a data focal é modificada. Essa característica é típica da capitalização simples (em juros compostos, como veremos mais tarde, este comportamento não existe), sendo explicada pelo fato de não ser aceito o desmembramento (fracionamento) dos prazos. Por exemplo, se você considerar uma capital de R$ 100,00, a uma taxa linear de 20% ao ano, ele renderá em dois anos um montante de R$ 140,00. Agora se você apurar o montante ao final do primeiro ano, ele será de R$ 120,00 e reaplicá-lo, nas mesmas condições por mais um ano, você obterá um montante de 144,00, ou seja, o fracionamento dos prazos levou a resultados diferentes. Na prática, a definição da data focal, em problemas de substituição de pagamento no regime de juros simples, deve ser decidida naturalmente pelas partes.

c. Qual é o capital equivalente hoje a R$ 4.620,00 que vence dentro de 50 dias, mais o capital de R$ 3.960,00 que vence dentro de cem dias e mais o capital de R$ 4.000,00 que venceu há vinte dias, à taxa de juros simples de 0,1% ao dia?

Solução:

Devemos encontrar um capital C que seja equivalente na data focal zero (hoje) ao conjunto de capitais dados à taxa linear de 0,1%

ao dia e utilizando o critério do desconto racional, pois o problema não indicou qual o critério a ser utilizado, e nesses casos convenciona-se utilizar o critério do desconto racional.

$$C = \frac{4.620{,}00}{(1+0{,}001\times 50)} + \frac{3.960{,}00}{(1+0{,}001\times 100)} + 4.000{,}00 \times (1 + 0{,}001 \times 20)$$

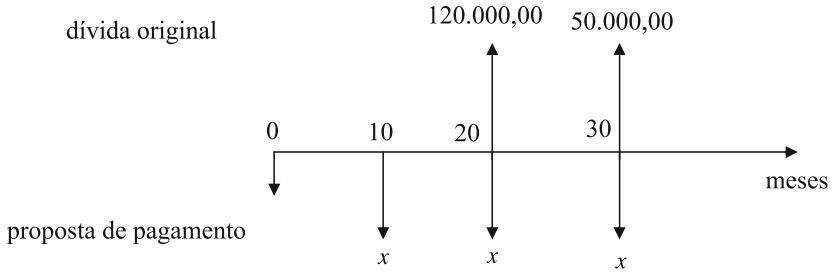
$$C = 4.400{,}00 + 3.600{,}00 + 4.080{,}00$$

$$C = 12.080{,}00.$$

Resposta: R$ 12.080,00.

d. Queremos substituir dois títulos, um de R$ 50.000,00 para 90 dias e outro de R$ 120.000,00 para 60 dias, por outros três, com os mesmos valores nominais, vencíveis, respectivamente, em 30, 60 e 90 dias. Considerando a data "zero" como data focal, determine o valor nominal comum, sabendo-se que a taxa de desconto comercial simples da transação é de 3% ao mês.

Solução:



No diagrama acima, as setas para cima representam o conjunto formado pelos capitais da dívida original, e as setas para baixo, o conjunto de capitais da nova proposta de pagamento.

Para que não haja prejuízo para nenhuma das partes, é necessário que esses conjuntos sejam equivalentes.

Sabemos que dois ou mais capitais diferidos, isto é, com vencimentos em datas diferentes, são equivalentes, em certa data de referência ("data focal") quando a soma dos seus valores nessa data for igual. Nesse problema, a data de referência é a data "zero".

Sabe-se que no desconto comercial simples a relação entre o valor atual A e o valor nominal N é dado pela equação

$$A = N \times (1 - i \times n) \Leftrightarrow N = \frac{A}{1 - i \times n}$$

logo, considerando esse critério, temos que a equação de equivalência será dada por:

$$x \times (1 - 0,03 \times 1) + x \times (1 - 0,03 \times 2) + x \times (1 - 0,03 \times 3) =$$

$$120.000,00 \times (1 - 0,03 \times 2) + 50.000,00 \times (1 - 0,03 \times 3)$$

$$2,82x = 158.300,00 \Rightarrow x = \frac{158.300,00}{2,82} \Rightarrow x \cong 56.134,75$$

Resposta: R$ 56.134,75.

Resumo

Nesta aula, iniciamos o estudo da equivalência financeira de capitais. Você aprendeu o conceito da equivalência financeira e de data focal. Esses conceitos serão utilizados na próxima aula. Nesta aula, você aprendeu a utilizar esses conceitos na capitalização simples.

Exercício 6.1

1. Uma dívida é composta de três pagamentos no valor de R$ 2.800,00, R$ 4.200,00 e R$ 7.000,00; vencíveis em 60, 90 e 150 dias, respectivamente. Sabe-se ainda que a taxa de juros simples de mercado é de 4,5% ao mês. Determinar o valor da dívida se o devedor liquidar os pagamentos:

   a) hoje;

   b) daqui a sete meses.

   Respostas:

   a) R$ 11.983,53.

   b) R$ 16.016,00.

2. Uma máquina calculadora está sendo vendida a prazo nas seguintes condições: R$ 128,00 de entrada; R$ 192,00 em trinta e sessenta dias. Sendo de 1,1 % ao mês a taxa linear de juros, calcule até que preço é interessante comprar a máquina à vista.

   Resposta: R$ 505,78.

3. Uma firma deseja alterar as datas e os valores de um financiamento contratado. Esse financiamento foi contratado, a uma taxa de juros simples de 2% ao mês. A instituição financiadora não cobra custas nem taxas para fazer estas alterações. A taxa de juros não sofrerá alterações.

   Condições pactuadas inicialmente: pagamento de duas prestações iguais e sucessivas de R$ 11.024,00 a serem pagas em 60 e 90 dias;

   Condições desejadas: pagamento em três prestações iguais; a primeira ao final do 10° mês, a segunda ao final do 30° mês e a terceira ao final do 70° mês.

   Caso sejam aprovadas as alterações e considerando como data focal a data zero, qual o valor unitário de cada uma das novas prestações?

   Resposta: R$ 11.200,00.

4. Um título de valor nominal igual a R$ 6.300,00 para noventa dias, deverá ser substituído por outro para 150 dias. Calcule o valor nominal do novo título, à taxa linear de 2,5% ao mês, considerando como data focal, a data zero.

   Resposta: R$ 6.593,00.

5. Um industrial deve pagar dois títulos: um de R$ 14.400,00, para dois meses, e outro de R$ 19.200,00, para três meses. Entretanto, não podendo resgatá-los no vencimento, propõe ao credor substituí-los por um novo título para 4 meses, sendo a data desse pagamento definida como data focal. Qual o valor nominal do novo título considerando a taxa de juros simples de 3,8% ao mês?

   Resposta: R$ 35.424,00.

6. Substitua três títulos, um de R$ 40.000,00, para 30 dias, outro de R$ 100.000,00, para 60 dias e outro de R$ 160.000,00, para 90 dias, por dois outros títulos de iguais valores nominais, vencíveis em 90 e 120 dias, respectivamente. Qual o valor nominal comum dos novos títulos sabendo que a taxa de desconto comercial simples da transação é de 13,5% ao mês. Considere a data cinco como data focal.

   Resposta: 156.581,00.

7. Um indivíduo deverá liquidar suas dívidas, expressas por dois títulos, um de R$ 37.000,00 e outro de R$ 49.800,00, vencíveis respectivamente em 8 e 11 meses a partir de hoje. A taxa de juros simples é de 6% ao mês. Utilizando-se do critério do valor atual racional, qual deve ser o prazo de vencimento de uma promissória de R$ 59.950,00 para que ela seja equivalente, hoje, aos dois títulos especificados?

   Resposta: 45 dias.

8. Um microempresário tem três títulos, R$ 20.000,00, R$ 100.000,00 e R$ 80.000,00, descontados em um banco e com vencimentos para 90, 150 e 180 dias, respectivamente. Desejando substituí-los por dois outros de valores nominais iguais para 60 e 120 dias, calcular o valor nominal comum, supondo-se que a taxa de desconto racional simples seja de 3,2% ao mês para as transações desse tipo. Considere a data cinco como data focal.

   Resposta: R$ 93.940,00.

9. Uma pessoa deve dois títulos no valor de R$ 25.000,00 e de R$ 56.000,00 cada. O primeiro título vence de hoje a 2 meses; e o segundo, um mês após. O devedor deseja propor a substituição dessas duas obrigações por um único pagamento ao final do quinto mês. Considerando 3 % ao mês a taxa corrente de juros simples, determine o valor desse pagamento único. Considere a data cinco como data focal.

   Resposta: R$ 86.610,00.

10. Uma dívida no valor de R$ 48.000,00 vence daqui a 6 meses. O devedor pretende resgatar a dívida pagando R$ 4.800,00 hoje, R$ 14.000,00 de hoje a dois meses, e o restante um mês após a data de vencimento. Sendo o momento deste último pagamento definido como a data focal da operação e sabendo-se ainda que é de 34,8% ao ano a taxa linear de juros adotada nessa operação, determinar o montante do pagamento.

    Resposta: R$ 27.587,60.

Auto-avaliação

Você conseguiu resolver todos os exercícios propostos sem dificuldade? Se sua resposta foi sim, então você entendeu os conceitos envolvendo a equivalência de capitais ou financeira na capitalização simples. Se não conseguiu, não desista! Volte à aula e reveja os conceitos e exemplos. Não deixe que suas dúvidas se acumulem.

Aula 7

Equivalência Financeira na Capitalização Composta

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. entender o conceito de equivalência financeira na capitalização composta;
2. interpretar e resolver os problemas propostos.

EQUIVALÊNCIA NA CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA

Considere dois conjuntos de capitais, a uma mesma taxa de juros compostos i com seus respectivos prazos, contados a partir da mesma data de origem;

1º Conjunto		**2º Conjunto**	
Capital	***Data de vencimento***	***Capital***	***Data de vencimento***
C_1	m_1	C'_1	m'_1
C_2	m_2	C'_2	m'_2
.....	.....	.....	.....
C_n	m_n	C'_j	m'_j

Esses conjuntos de capitais são ***equivalentes*** quando for utilizado o critério do desconto:

a) racional ou "por dentro" se:

$$\frac{C_1}{(1+i)^{m_1}} + \frac{C_2}{(1+i)^{m_2}} + \ldots\ldots + \frac{C_n}{(1+i)^{m_n}}$$

$$= \frac{C'_1}{(1+i)^{m'_1}} + \frac{C'_2}{(1+i)^{m'_2}} + \ldots\ldots + \frac{C'_j}{(1+i)^{m'_j}}$$

b) comercial ou "por fora" se:

$$C_1 \times (1-i)^{m_1} + \ldots\ldots + C_n \times (1-i)^{m_n}$$

$$= C'_1 \times (1-i)^{m'_1} + \ldots\ldots + C'_j \times (1-i)^{m'_j}.$$

✍ Nos dois casos, foi considerada a data zero como data focal.

Exemplo 7.1

a. Uma pessoa tem uma nota promissória a receber com valor de R$ 15.000,00 que vencerá em 2 anos. Além disso, possui R$ 20.000,00 hoje, que irá aplicar à taxa de 2% a.m., durante 2 anos. Considerando que o custo de oportunidade do capital hoje é de 2% a.m., pergunta-se:

1. quanto possui hoje?
2. quanto possuirá daqui a um ano?
3. quanto possuirá daqui a dois anos?

Solução:

Considere que x é a quantia na data zero; y é a quantia na data l; z é a quantia na data 2.

1. $x = 20.000,00 + \dfrac{15.000,00}{(1+0,02)^{24}} = 29.325,82$
2. $y = 20.000,00 \times (1+0,02)^{12} + \dfrac{15.000,00}{(1+0,02)^{12}} = 37.192,23$
3. $z = 20.000,00 \times (1+0,02)^{24} + 15.000,00 = 47.168,74$

b. Considerando-se a taxa de juros de 4% ao mês, será que R$ 8.000,00 hoje são equivalentes a R$ 10.000,00 em 6 meses?

Solução:

$$C_6 = 8.000\,(1+0,04)^6 = 10.122,55$$

Resposta: A uma taxa de 4% ao mês, 8.000,00 hoje é melhor do que 10.000,00 em 6 meses.

c. A que taxa de juros anuais R$ 2.000,00 em 1 ano são equivalentes a R$ 2.300,00 em 2 anos?

Solução:

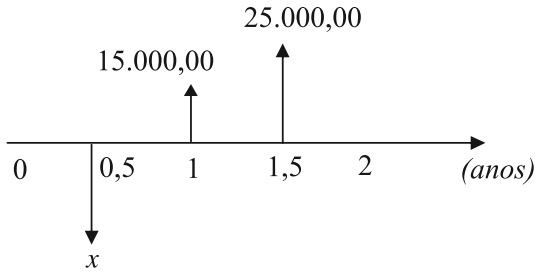
$$2.000,00 = \frac{2.300,00}{(1+i)^1} \Rightarrow 1+i = \frac{2.300,00}{2.000,00} = 1,15$$

$i = 0,15$ a.a. ou $i = 15\%$ a.a.

Resposta: 15% ao ano.

d. Uma financeira oferece a um cliente dois títulos, vencendo o primeiro em um ano no valor de R$ 15.000,00, e o segundo em um ano e meio, no valor de R$ 25.000,00. O cliente aceita assinando uma nota promissória, com vencimento para 6 meses. Sabendo-se que a taxa de juros considerada na operação foi de 30% a.a., qual é o valor da nota promissória em seu vencimento?

Solução:



$$x = \frac{15.000,00}{(1+0,30)^{0,5}} + \frac{25.000,00}{(1+0,30)^{1}} \Rightarrow x = \frac{15.000,00}{1,140175} + \frac{25.000,00}{1,30}$$

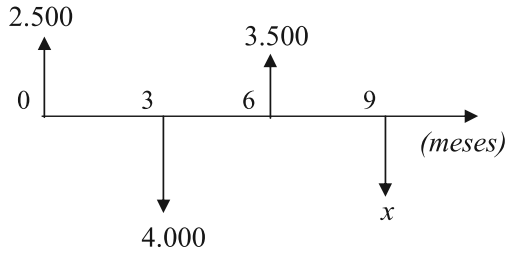
$$x = 32.386,64$$

Resposta: R$ 32.386,64.

e. Uma pessoa contraiu uma dívida, comprometendo-se a saldá-la em dois pagamentos: o primeiro de R$ 2.500,00 e o segundo de R$ 3.500,00, seis meses após o primeiro. Contudo, no vencimento da primeira parcela, não dispondo de recursos, o devedor propôs adiamento de sua dívida. O esquema apresentado foi: pagamento de R$ 4.000,00 daqui a três meses e o saldo em nove meses. Se a taxa de juros composto considerada foi de 2,5% ao mês, determine o saldo restante se for adotado na operação o critério do desconto:

1. racional ou por "dentro";
2. comercial ou "por fora".

Solução:



No diagrama anterior, as setas para cima representam o conjunto formado pelos capitais da dívida original e as setas para baixo, o conjunto de capitais da nova proposta de pagamento.

Para que não haja prejuízo para nenhuma das partes, é necessário que esses conjuntos sejam equivalentes.

Sabemos que dois ou mais capitais diferidos, isto é, com vencimentos em datas diferentes, são equivalentes, em certa data de referência ("data focal"), quando a soma dos seus valores nessa data for igual. Nesse problema, o regime de capitalização é o de juros compostos, e, portanto, a solução do problema não depende da escolha dessa data.

1. Sabe-se que no desconto racional composto a relação entre o valor atual A e o valor nominal N é dado pela equação
   $N = A \times (1+i)^n \Leftrightarrow A = \dfrac{N}{(1+i)^n}$.
   Logo, considerando esse critério e a data focal 9, temos que a equação de equivalência será dada por:
   $$4.000,00 \times (1+0,025)^6 + x =$$
   $$2.500,00 \times (1+0,025)^9 + 3.500,00 \times (1+0,025)^3$$
   $$\Rightarrow x = 2.252,50$$
2. Sabe-se que no desconto comercial composto a relação entre o valor atual A e o valor nominal N é dada pela equação
   $A = N \times (1-i)^n \Leftrightarrow N = \dfrac{A}{(1-i)^n}$.
   Logo, considerando esse critério e a data focal 9, temos que a equação de equivalência será dada por:
   $$\frac{4.000,00}{(1-0,025)^6} + x = \frac{2.500,00}{(1-0,025)^9} + \frac{3.500,00}{(1-0,025)^3}$$
   $$\Rightarrow x = 1.496,00$$

Respostas:

1. R$ 2.252,50.
2. R$ 1.496,01.

Resumo

Nesta aula, encerramos a Unidade 5 – Equivalência Financeira ou de Capitais. Os conceitos gerais sobre equivalência aprendidos na Aula 6 foram novamente empregados e você aprendeu a utilizá-los na capitalização composta.

Exercício 7.1

1. Para viajar daqui a um ano, uma pessoa vende seu carro hoje e seu apartamento daqui a seis meses, aplicando o dinheiro em uma instituição que paga 40% ao ano. O carro será vendido por R$ 30.000,00 e o apartamento por R$ 250.000,00, sendo que na viagem ela pretende gastar R$ 300.000,00. Que saldo poderá deixar aplicado?

   Resposta: R$ 37.803,99.

2. Um conjunto de dormitório é vendido em uma loja por R$ 5.000,00 à vista ou a prazo em dois pagamentos trimestrais iguais, não se exigindo entrada. Qual o valor dos pagamentos, se a taxa de juros considerada for de 8% ao trimestre?

   Resposta: R$ 2.803,85.

3. Uma butique vende um vestido por R$ 1.800,00, podendo este valor ser pago em três prestações mensais iguais, sendo a primeira paga na compra. Um cliente propõe o pagamento de R$ 1.000,00 como terceira parcela. De quanto devem ser as duas primeiras parcelas, se forem iguais e a taxa de juros adotada pela butique for de 8% ao mês?

   Resposta: R$ 489,46.

4. Um empréstimo de R$ 20.000,00 foi realizado com uma taxa de juros de 36% a.a., capitalizados trimestralmente, e deverá ser liquidado através do pagamento de duas prestações trimestrais iguais e consecutivas. Qual o valor que mais se aproxima do valor unitário de cada prestação?

   Resposta: R$ 11.369,38.

5. Um carro está à venda por R$ 20.000,00 de entrada e R$ 20.000,00 após seis meses. Um comprador propõe pagar R$ 25.000,00 como segunda parcela, o que será feito

após oito meses. Nesse caso, quanto ele deverá dar de entrada, se a taxa de juros de mercado for de 2% ao mês?

Resposta: R$ 16.422,16.

6. Um sítio é posto à venda em uma imobiliária por R$ 500.000,00 à vista. Como alternativa, a imobiliária propõe: entrada de R$ 100.000,00, uma parcela de R$ 200.000,00 para um ano e dois pagamentos iguais, vencendo o primeiro em seis meses e o segundo em um ano e meio. Qual será o valor desses pagamentos, se a taxa de juros cobrada for de 5% a.m.?

   Resposta: 248.449,30.

7. Na venda de um barco, a Loja Náutica S. A. oferece duas opções a seus clientes:

   1ª R$ 30.000,00 de entrada mais duas parcelas semestrais, sendo a primeira de R$ 50.000,00 e a segunda de R$ 100.000,00;

   2ª sem entrada, sendo o pagamento efetuado em quatro parcelas trimestrais: R$ 40.000,00 nas duas primeiras, e R$ 50.000,00 nas duas últimas. Qual é a melhor alternativa para o comprador, se considerarmos a taxa de juros de 3% ao mês?

   Resposta: A primeira.

8. Uma loja tem como norma facilitar os pagamentos, proporcionando aos seus clientes a possibilidade de pagar em três meses sem acréscimo. Nesse caso, o preço à vista é dividido por 3 e a primeira parcela é dada como entrada. Qual o desconto sobre o preço à vista que a loja pode conceder, se sua taxa for de 7,5% ao mês?

   Resposta: 6,8%.

9. Um imóvel está à venda por quatro parcelas semestrais de R$ 50.000,00, vencendo a primeira em seis meses. Um financista propõe a compra desse imóvel pagando-o em duas parcelas iguais, uma no ato da compra e outra após um ano. Qual é o valor das parcelas, se a taxa de juros ajustada for de 20% ao semestre?

   Resposta: 76.388,89.

10. Para viajar daqui a um ano, Maria vende seu carro hoje e seu apartamento daqui a 6 meses, aplicando o dinheiro em uma instituição financeira que paga 40% ao ano. O carro será vendido por R$ 30.000,00 e o apartamento, por R$ 250.000,00, sendo que na viagem ela pretende gastar R$ 300.000,00. Que saldo poderá deixar aplicado?

    Resposta: R$ 37.803,99.

11. O Sr. Carlos vendeu um carro para um amigo seu, pelo preço de R$ 50.000,00. Quanto às condições de pagamento, ele disse que o amigo pagar-lhe-ia na medida do possível, sendo os juros de 40% ao ano. Os pagamentos efetuados foram: R$ 5.000,00 no terceiro mês, R$ 10.000,00 no quinto mês e R$ 20.000,00 no sexto mês. No fim do décimo segundo mês, o comprador diz querer saldar seu débito total. Qual é o valor do acerto final?

    Resposta: R$ 27.731,80.

12. Uma dívida de R$ 150.000,00 para doze meses e de R$ 300.000,00 para vinte e quatro meses foi transformada em quatro parcelas iguais semestrais, vencendo a primeira a seis meses. Qual é o valor das parcelas, se considerarmos a taxa de 25% ao ano?

    Resposta: R$ 102.296,12.

13. Uma empresa imobiliária está vendendo um terreno por R$ 200.000,00 de entrada e um pagamento adicional de R$ 200.000,00 no sexto mês após a compra. Um determinado comprador propõe alterar o valor do pagamento adicional para R$ 250.000,00, deslocando-se para o oitavo mês após a compra. A uma taxa de juros compostos de 2% ao mês, qual o valor da entrada no esquema proposto?

    Resposta: R$ 164.221,00.

14. Uma empresa tem um compromisso de R$ 100.000,00 para ser pago dentro de trinta dias. Para ajustar o seu fluxo de caixa, propõe ao banco a seguinte forma de pagamento: R$ 20.000,00 antecipados, à vista, e dois pagamentos iguais para sessenta e noventa dias. Admitindo-se a taxa de juros compostos de 7% ao mês, qual deve ser o valor dessas parcelas?

    Resposta: R$ 43.473,00.

15. Uma firma toma emprestada por 3 anos, a juros compostos de 24% ao ano, capitalizada bimestralmente, a importância de R$ 300.000,00. Decorrido 1 ano, a firma faz um acordo pagando R$ 100.000,00 no ato e assinando uma promissória com vencimento para 1 ano após a data do acordo. Calcule o valor nominal dessa promissória, sabendo-se que o desconto racional composto concedido é de 24% ao ano, capitalizados anualmente.

    Resposta: R$ 366.116,98.

Auto-avaliação

Você conseguiu resolver todos os exercícios propostos sem dificuldade? Se a resposta foi sim, então você entendeu os conceitos envolvendo a equivalência de capitais ou financeira na capitalização composta. Se não conseguiu, não desista! Volte à aula e reveja os conceitos e exemplos. Não deixe que suas dúvidas se acumulem.

Aula 8

Séries, Rendas ou Anuidades Uniformes de Pagamentos (modelo básico – valor atual)

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. entender os conceitos envolvidos no estudo das séries uniformes;
2. entender o conceito do modelo básico da série uniforme de pagamentos;
3. entender o conceito do valor atual de uma série de pagamento;
4. determinar o fator de valor atual e o valor atual de uma série uniforme de pagamento;
5. interpretar e resolver os problemas propostos.

INTRODUÇÃO

Nas aplicações financeiras, o capital pode ser pago ou recebido de uma só vez ou através de uma sucessão de pagamentos ou de recebimentos.

Quando o objetivo é constituir um capital em certa data futura, tem-se um processo de *capitalização*. Caso contrário, quando se quer pagar uma dívida, tem-se um processo de *amortização*.

Pode ocorrer também o caso em que se tem o pagamento pelo uso, sem que haja amortização, que é o caso de aluguéis.

Esses exemplos caracterizam a existência de rendas ou anuidades, que podem ser basicamente de dois tipos:

a) **Rendas certas ou determinísticas:** São aquelas cuja duração e pagamentos são predeterminados, não dependendo de condições externas. Os diversos parâmetros, como o valor dos termos, prazo de duração, taxa de juros etc., são fixos e imutáveis.

   Esses são os tipos de rendas a serem estudados neste texto.

b) **Rendas aleatórias ou probabilísticas:** Os valores e/ou as datas de pagamentos ou de recebimentos podem ser variáveis aleatórias. É o que ocorre, por exemplo, com os seguros de vida: os valores de pagamentos (mensalidades) são certos, sendo aleatório o valor do seguro a receber e a data de recebimento. Rendas com essas características são estudadas pela Matemática Atuarial.

✍ Serão abordadas apenas as *rendas certas ou anuidades*, sob o regime de juros compostos, a menos que explicitado o contrário.

Definição 8.1

Considere a série seguinte de capitais referidos às suas respectivas datas, que por sua vez são referidos a uma data focal.

$$\boxed{\begin{array}{c} R_1 \longrightarrow n_1 \\ R_2 \longrightarrow n_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_m \longrightarrow n_m \end{array}}$$

Esses capitais que podem ser pagamentos ou recebimentos, referidos a uma dada taxa de juros **i,** caracterizam uma *anuidade ou renda certa.*
Os valores que constituem a renda são os termos da mesma. O intervalo de tempo entre dois termos chama-se *período* e a soma dos períodos define a *duração* da anuidade.
O *valor atual* de uma anuidade é a soma dos valores atuais dos seus termos, soma esta feita para uma mesma data focal e à mesma taxa de juros. De modo análogo, o *montante* de uma anuidade é a soma dos montantes de seus termos, consideradas uma dada taxa de juros e uma data focal.

CLASSIFICAÇÃO DAS ANUIDADES

Quanto à periodicidade

a) **Periódicas:** se todos os períodos são iguais.

b) **Não-periódicas:** se os períodos não são iguais entre si.

Quanto ao prazo

a) **Temporárias:** quando a duração for limitada.

b) **Perpétuas:** quando a duração for ilimitada.

Quanto ao valor dos termos

a) **Constante:** se todos os termos são iguais.

b) **Variável:** se os termos não são iguais entre si.

Quanto à forma de pagamento ou de recebimento

a) **Imediatas:** quando os termos são exigíveis a partir do primeiro período.

   1) **Postecipadas ou vencidas:** se os termos são exigíveis no fim dos períodos
   2) **Antecipadas:** se os termos são exigíveis no início dos períodos

b) **Diferidas:** se os termos forem exigíveis a partir de uma data que não seja o primeiro período.

   1) **Postecipadas ou vencidas:** se os termos são exigíveis no fim dos períodos.
   2) **Antecipadas:** se os termos são exigíveis no início dos períodos.

MODELO BÁSICO DE ANUIDADE

Por modelo básico de anuidades entendem-se aquelas que são simultaneamente:

- temporárias;
- constantes;
- imediatas e postecipadas;
- periódicas.

E que a taxa de juros *i* seja referida no mesmo período dos termos.

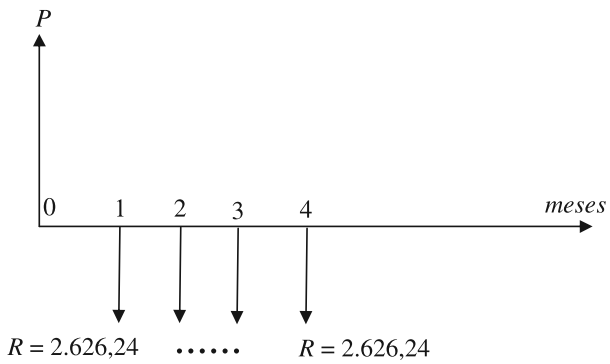
Exemplo 8.1

João compra um carro, que irá pagar em quatro prestações mensais de R$ 2.626,24, sem entrada. As prestações serão pagas

a partir do mês seguinte ao da compra e o vendedor afirmou estar cobrando uma taxa de juros compostos de 2% ao mês. Qual é o preço do carro à vista?

Solução:

O preço do carro à vista corresponde à soma dos valores atuais das prestações na data focal zero (data da compra), calculados à taxa de 2% ao mês. Seja P o valor do carro à vista e R o valor das prestações. O seguinte fluxo representa então o problema proposto. Temos que determinar um capital aqui chamado de P, que na data zero é equivalente ao conjunto de capitais R, portanto temos que:



$$P = \frac{R}{(1,02)^1} + \frac{R}{(1,02)^2} + \frac{R}{(1,02)^3} + \frac{R}{(1,02)^4}$$

$$P = R\left[\frac{1}{(1,02)^1} + \frac{1}{(1,02)^2} + \frac{1}{(1,02)^3} + \frac{1}{(1,02)^4}\right]$$

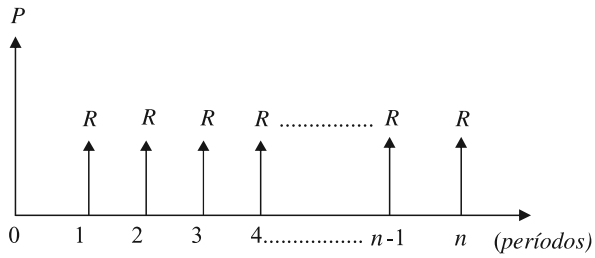
$$P = R\left[\frac{1}{(1,02)^1} + \frac{1}{(1,02)^2} + \frac{1}{(1,02)^3} + \frac{1}{(1,02)^4}\right]$$

$$P = R \times [3,807728]$$

Como $R = 2.626,24$, tem-se que $P = 2.626,24 \times 3,807728 \cong$ R$ 10.000,00.

VALOR ATUAL DO MODELO BÁSICO

Considere um principal P a ser pago em n termos iguais a R, imediatos, postecipados e periódicos, uma taxa i, referida ao mesmo período dos termos.



A soma do valor atual dos termos da data zero é dada por:

$$P = \frac{R}{(1+i)^1} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + \frac{R}{(1+i)^4} + \ldots\ldots\ldots + \frac{R}{(1+i)^{n-1}} + \frac{R}{(1+i)^n}$$

$$P = R\left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \frac{1}{(1+i)^4} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

Indica-se o fator entre colchetes por $FVP(i;n)$ ou $a_{n\rceil i}$ (lê-se: "a n cantoneira i" ou simplesmente "a,n,i") e este corresponde à soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{1+i}$, cujo termo inicial é $\frac{1}{1+i}$. Assim, aplicando a fórmula da soma dos termos de uma P.G., temos que:

$$FVP(i;n) = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

ou

$$FVP(i;n) = \frac{(1+i)^n - 1}{i \times (1+i)^n}$$

O fator $FVP(i;n)$ ou $a_{\rceil ni}$ é denominado *fator de valor atual* ou *fator de valor presente* de uma série uniforme, estabelece a equivalência entre P e R e encontra-se tabelado para diversos valores de i ou de n.

Pode-se, então, expressar o *valor atual* do modelo básico como sendo:

$$P = R \times FVP(i;n)$$

ou

$$P = R \times a_{n\rceil i}$$

Exemplo 8.2

a. Considerando o exemplo feito anteriormente, tem-se que:

Solução:

$n = 4m; i = 2\%$ a.m.; $R = 2.626,24$

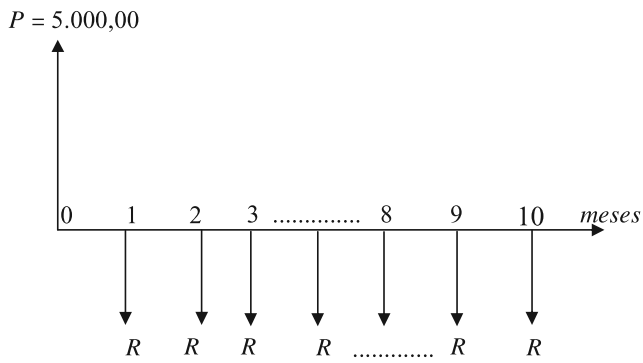
$$FVP(2;4) = \frac{(1,02)^4 - 1}{0,02 \times (1,02)^4} \cong 3,807729$$

$$P = 2.626,24 \times 3,807729 \cong 10.000,00.$$

Resposta: R$ 10.000,00.

b. Um televisor custa R$ 5.000,00 à vista, mas pode ser financiado sem entrada em 10 prestações mensais à taxa de 3% ao mês. Calcular a prestação a ser paga pelo comprador.

Solução:



Sabemos que $P = R \times FVP(i,n) \Leftrightarrow R = \dfrac{P}{FVP(i;n)}$,

portanto, nesse caso, temos que: $R = \dfrac{5.000,00}{FVP(3\%;10)}$.

Utilizando uma tabela financeira ou a equação

$FVP(i;n) = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, tem-se que:

$$FVP(3\%;10) = \frac{1-(1,03)^{-10}}{0,03} \Rightarrow FVP(3\%;10) \cong 8,530203.$$

Portanto, $R = \dfrac{5.000,00}{8,530203} \cong 586,15$

Resposta: R$ 586,15.

c. Uma aparelhagem de som está anunciada nas seguintes condições: R$ 150,00 de entrada e três prestações mensais iguais de R$ 122,55. Sabendo-se que o juro cobrado nas lojas de som é de 2,5% ao mês, calcular o preço à vista.

Solução:

Chamando a entrada de E e as prestações de R, temos que o valor à vista P será dado por $P = E + R \times FVP(i;n)$, isto é, $P = 150,00 + 122,55 \times FVP(2,5\%;3)$.

Utilizando uma tabela financeira ou a equação

$FVP(i;n) = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, tem-se que:

$FVP(2,5\%;3) = \dfrac{1-(1,025)^{-3}}{0,025} \Rightarrow FVP(2,5\%;3) \cong 2,856024.$

Portanto, $P = 150,00 + 122,55 \times 2,856024 \Rightarrow P \cong 500,00$

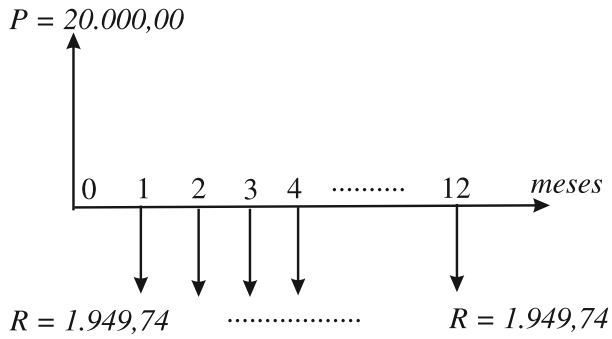
Resposta: R$ 500,00.

d. Um carro é vendido por R$ 20.000,00 à vista, ou em 12 prestações mensais de R$ 1.949,74. Qual é a taxa de juros mensal que está sendo cobrada?

Solução:

Nesse problema temos uma série uniforme modelo básico em que se quer determinar a taxa i da operação, sabendo-se que o seu valor atual P é igual a $20.000,00$, os termos mensais R (prestações) são iguais a $1.949,74$ e o prazo n é de 12 meses.

O diagrama abaixo representa essa série:



Sabemos que $P = R \times FVP(i,n)$. Logo, nesse caso temos então que:

$$20.000,00 = 1.949,74 \times FVP(i;12)$$

$$FVP(i;12) = \frac{20.000,00}{1.949,74} \Rightarrow FVP(i;12) \cong 10,257778$$

Fazendo uso de tabela financeira, tem-se que $i \cong 2,5\%$ ao mês.

Resposta: 2,5% ao mês.

e. Um tapete persa é vendido por R$ 15.000,00 à vista. Pode ser adquirido também em prestações mensais de R$ 885,71 a juros de 3% ao mês. Sabendo que as prestações vencem a partir do mês seguinte ao da compra, qual é o número de prestações?

Solução:

Nesse problema temos uma série uniforme modelo básico cujo valor atual P é igual a $15.000,00$, os termos mensais R (prestações) são iguais a $885,71$, a taxa i da operação é de 3% ao mês, e queremos determinar o número n de períodos (meses).

Como $P = R \times FVP(i,n)$ temos, então, que

$$15.000,00 = 885,71 \times FVP(3\%;n)$$

$$FVP(3\%;n) = \frac{15.000,00}{885,71} \Rightarrow FVP(3\%;n) \cong 16,935566.$$

Como $FVP(i,n) = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, temos então que

$$FVP(3\%;n) = \frac{1-(1,03)^{-n}}{0,03} = 16,935566$$

$$(1,03)^{-n} = 1 - 16,935566 \times 0,03 = 0,491933.$$

Aplicando logaritmos a ambos os membros da última igualdade, temos que:

$$\log\left[(1,03)^{-n}\right] = \log(0,621719)$$

$$-n \times \log(1,03) = \log(0,491933)$$

$$n = -\frac{\log(0,491933)}{\log(1,03)} \Rightarrow n \cong 24.$$

Ao determinar n utilizando uma tabela financeira, temos que:

$(1,03)^{-n} = 0,491933$, ou seja, $\dfrac{1}{(1,03)^n} = 0,491933$ e daí

$(1,03)^n = 2,032797$

Procurando na tabela, utilizando a coluna do fator de capitalização $(1+i)^n$, para uma taxa de 3%, encontramos $n = 24$.

Resposta: 24 meses.

f. Uma loja vende um tapete em 12 prestações mensais de R$ 97,49 ou em 24 prestações mensais de R$ 61,50. Nos dois casos, o cliente não dará entrada alguma. Sabendo-se que a taxa de juros do crédito pessoal é de 2,5% ao mês, qual é a melhor opção para o comprador?

Solução:

Nesse problema temos duas séries uniforme modelo básico cuja taxa é de 2,5% ao mês, com prazos e termos diferentes. A melhor opção para o comprador é a que apresentar menor valor atual P, isto é, valor à vista.

$1^{\underline{o}}$ *Caso:*

Nesse caso, como $R = 97,49$ e $n = 12$ meses, temos que

$P = 97,49 \times FVP\,(2,5\%; 12)$.

Utilizando uma tabela financeira ou a equação

$FVP\,(i;n) = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, tem-se que:

$FVP(2,5\%;12) = \dfrac{1-(1,025)^{-12}}{0,025} \Rightarrow FVP(2,5\%;12) \cong 10,257765.$

Portanto, $P = 97,49 \times 10,257765 \Rightarrow P \cong 1.000,03$.

$2^{\underline{o}}$ *Caso:*

Nesse caso, como $R = 61,50$ e $n = 24$ meses, temos que

$P = 61,50 \times FVP\,(2,5\%; 24)$.

Utilizando uma tabela financeira ou a equação

$FVP\,(i;n) = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, tem-se que:

$FVP(2,5\%;24) = \dfrac{1-(1,025)^{-24}}{0,025} \Rightarrow FVP(2,5\%;12) \cong 17,884986.$

Portanto, $P = 61,50 \times 17,884986 \Rightarrow P \cong 1.099,93$.

Resposta: O $1^{\underline{o}}$ caso é a melhor alternativa para o comprador.

Resumo

Nesta aula, iniciamos o estudo das rendas certas ou anuidades. Você aprendeu o conceito de rendas certas ou anuidade. Aprendeu também o conceito de modelo básico de uma anuidade e o valor atual do modelo básico. Aprendeu a usar esses conceitos na determinação do valor atual, utilizando o fator de valor atual ou presente através de uma relação que envolve o valor da taxa *i* e do período da série, valores esses que podem também ser encontrados em tabelas.

Exercício 8.1

1. Determine o valor atual de uma anuidade periódica de R$ 1.000,00, nas seguintes:

Taxa de juros	*Prazo*	*Resposta*
a) 1% a.m.	24 meses	R$ 21.243,39
b) 5% a.b.	12 bimestres	R$ 8.863
c) 8% a.t.	10 trimestres	R$ 6.710,08
d) 10% a.s.	20 semestres	R$ 8.513,56
e) 30% a.a.	30 anos	R$ 3.332,06

2. Um carro está à venda por R$ 10.000,00 de entrada mais 24 prestações mensais de R$ 2.236.51. Como opção, a agência o vende em 36 prestações mensais de R$ 1.613,16, sendo neste caso exigida uma entrada de R$ 12.000,00. Qual é a melhor alternativa, se a taxa de mercado for de 3% ao mês?

   Resposta: A 2ª alternativa possui menor valor atual (R$ 47.218,92).

3. Uma loja vende uma geladeira por R$ 2.000,00 à vista ou financiada em 18 meses, a juros de 3,5% ao mês. Qual será a prestação mensal, se não for dada entrada alguma e a primeira prestação vencer após um mês?

   Resposta: R$ 151,63.

4. O gerente financeiro de uma loja deseja estabelecer coeficientes de financiamento por unidade de capital emprestado. O resultado da multiplicação do coeficiente pelo valor financiado é igual à prestação mensal. Sabendo-se que a taxa de juros da loja é de 4% a.m., quais os coeficientes nas hipóteses de prazos abaixo?

a) 6 meses **Resposta:** 0,190762.

b) 12 meses **Resposta:** 0,10655.

c) 18 meses **Resposta:** 0,078993.

d) 24 meses **Resposta:** 0,065587.

5. Uma motocicleta foi vendida em 4 prestações trimestrais de R$ 1.000,00, sendo a primeira na compra. Se a taxa de mercado é de 3% ao mês, qual é o preço à vista?

   Resposta: R$ 3.519,04.

6. Uma loja anuncia à venda de um televisor por R$ 6.000,00 à vista. Um cliente está disposto a comprá-lo por R$ 2.000,00 de entrada, mais 36 prestações mensais. De quanto serão as prestações, se a taxa de juros cobrada pela loja for de 50% ao ano?

   Resposta: R$ 195,35.

7. Um terreno é vendido por R$ 300.000,00 à vista ou por R$ 100.000,00 de entrada, sendo o saldo financiado. Sabendo-se que a taxa de juros da imobiliária é de 45% a.a., de quanto serão as prestações, caso o cliente opte por algum dos planos abaixo:

   a) 24 prestações mensais **Resposta:** R$ 11.994,45.
   b) 8 prestações trimestrais **Resposta:** R$ 37.126,82.
   c) 4 prestações semestrais **Resposta:** R$ 77.867,55.

8. Numa compra efetuada, o cliente teve o saldo devedor financiado em 3 prestações quadrimestrais de R$ 5.000,00. Contudo, para evitar esta concentração de desembolso, o cliente solicitou a transformação do financiamento em 12 prestações mensais. Se a taxa de juros da loja for de 2 % ao mês, qual deverá ser o valor das prestações?

   Resposta: R$ 1.213,12.

9. Na compra de um equipamento de valor à vista igual a R$ 587,57, um cliente propôs pagar o valor da entrada no decorrer do financiamento e combinou que esse valor seria corrigido a juros compostos de 7% ao mês. O valor financiado será pago em seis prestações mensais iguais e consecutivas de R$ 100,00, com a primeira vencendo em trinta dias, e à taxa de financiamento de 60% ao ano, capitalizados mensalmente. Qual o valor a ser pago na quarta prestação, se o valor relativo à entrada for pago nesse momento?

   Resposta: Aproximadamente R$ 212,00.

10. Um apartamento é vendido por R$ 1.000.000,00 à vista ou por 50% de entrada e o restante em 60 meses à taxa de 12% ao ano capitalizados mensalmente. Qual é o valor das prestações?

    Resposta: R$ 11.122,22.

11. O preço de um imóvel é de R$ 500.000,00. Um comprador ofereceu R$ 200.000,00 de entrada e o pagamento do saldo restante em 12 prestações iguais, mensais. A taxa de juros compostos é de 5% ao mês. Qual o valor de cada prestação, desprezando-se os centavos?

    Resposta: R$ 33.847,00.

12. João pretende comprar uma mansão cujo preço à vista é de R$ 1.000.000,00. A firma vendedora exige 10% sobre o preço à vista e financia o restante à taxa de juros compostos de 6% ao mês, em prestações iguais e sucessivas. João dispõe para pagar, mensalmente, da quantia de R$ 74.741,01. Nessas condições, qual é o número de prestações?

    Resposta: 22 meses.

13. Uma máquina tem o preço de R$ 2.000.000,00, podendo ser financiada em 10% de entrada e o restante em prestações trimestrais, iguais e sucessivas. Sabendo-se que a financiadora cobra juros compostos de 28% ao ano, capitalizados trimestralmente, e que o comprador está pagando R$ 205.821,00, quando vencerá a última prestação?

    Resposta: 1 ano e 2 meses.

14. Um indivíduo deve R$ 181.500,00, vencíveis de hoje a seis meses, e R$ 380.666,00, vencíveis de hoje a doze meses. Para transformar suas dívidas em uma série uniforme de quatro pagamentos postecipados trimestrais, a partir de hoje, a juros e desconto racional compostos de 10% ao trimestre, qual o valor do pagamento trimestral?

    Resposta: R$ 129.343,00.

15. Um bem foi adquirido, através de um plano de três prestações de R$ 200,00, sem entrada, e a primeira ocorrendo a trinta dias da data de sua aquisição. A taxa negociada é de 2% ao mês e o regime de capitalização é composto. Qual o valor do bem na data de aquisição?

    Resposta: R$ 576,77.

16. A taxa de juros reais do mercado é de 10% ao ano. Nestas condições, uma empresa calcula seus coeficientes de financiamento para 12 prestações mensais, levando em conta a taxa de inflação. Qual será o coeficiente para 12 meses, caso a inflação seja de 15% ao ano?

    Resposta: 0,094433.

17. Um terreno é posto à venda por R$ 100.000,00 à vista. Qual a prestação mensal para à venda financiada em 24 prestações, se o proprietário quer juros reais de 9% ao ano e se a inflação prevista for de 20% ao ano?

    Resposta: R$ 5.445,76.

18. Uma pessoa paga uma entrada no valor de R$ 23,60 na compra de um equipamento, paga mais 4 prestações mensais, iguais e sucessivas, no valor de R$ 14,64 cada uma. A instituição financiadora cobra uma taxa de juros de 120% ao ano, capitalizados mensalmente (juros compostos). Com base nestas informações, determine o valor à vista do equipamento adquirido.

    Resposta: R$ 70.00.

19. Determinada mercadoria é vendida por R$ 2.500,00 à vista ou por 20% de entrada mais prestações mensais de R$ 309,00. Sendo de 2% ao mês a taxa corrente de juros, determinar o número de prestações.

    Resposta: 7 meses.

20. Uma geladeira, cujo preço à vista é R$ 1.000,00, deve ser vendida em cinco prestações mensais e iguais, devendo a primeira prestação vencer ao final do primeiro mês. Considerando-se uma taxa de juros compostos igual a 6% ao mês, pergunta-se:

    a) Qual será o valor de cada prestação?
    b) Qual será o valor cobrado a título de juros?

    Resposta: R$ 237,40 e R$ 187,00.

21. Uma loja tem como norma facilitar os pagamentos, proporcionando aos seus clientes a possibilidade de pagar em três meses sem acréscimo. Nesse caso, o preço à vista é dividido por 3 e a primeira prestação é dada como entrada. Qual o

desconto sobre o preço à vista que a loja pode conceder, se a taxa praticada pela loja for de 7,5% ao mês?

Resposta: 6,8%.

22. Uma loja apresenta duas propostas de venda de um produto eletrônico:

    a) entrada de R$ 400,00 mais 8 prestações mensais de R$ 720,00 cada;

    b) entrada de R$ 650,00 mais 15 prestações mensais de R$ 600,00 cada.

    Sendo de 3,5 % ao mês a taxa corrente de juros, indicar a alternativa mais atraente para o comprador.

    Resposta: Alternativa (a).

Auto-avaliação

Você conseguiu resolver todos os exercícios propostos sem dificuldade? Se a resposta foi sim, então você entendeu os conceitos envolvendo rendas certas ou anuidades, em particular os conceitos do modelo básico. Se não conseguiu, não desista, volte à aula e reveja os conceitos e exemplos, não deixe que suas dúvidas se acumulem.

Aula 9

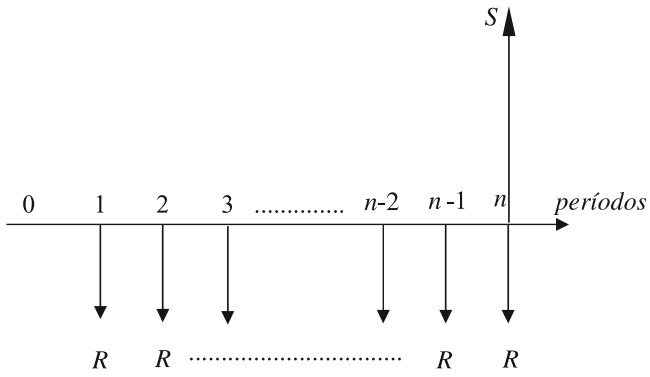
Séries, Rendas ou Anuidades Uniformes de Pagamentos (modelo básico – montante)

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. entender os conceitos envolvidos no estudo das séries uniformes;
2. entender o conceito do modelo básico da série uniforme de pagamentos;
3. entender o conceito de montante do modelo básico de uma renda uniforme;
4. determinar o fator de valor futuro e o montante de uma série uniforme de pagamento;
5. interpretar e resolver os problemas propostos.

MONTANTE DO MODELO BÁSICO



Chamamos de montante da seqüência na data n ao capital único equivalente à seqüência, e o representamos por S.

O cálculo de S é muito fácil, pois sabemos que o valor atual P_0 da série (valor na data zero) é dado por: $P_0 = R \times FVP\,(i;n)$. Como S é equivalente a P_0, devemos ter $S = P_0 \times (1+i)^n$.

Logo, $S = R \times FVP\,(i;n) \times (1+i)^n$ ou

$$S = R \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} \cdot (1+i)^n \Rightarrow S = R \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right].$$

O fator $\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$, denominado *fator de acumulação de capital* de uma anuidade, ou *fator de valor futuro*, será representado por $FVF\,(i;n)$ ou $S_{n\rceil i}$ (lê-se: "S, n cantoneira i", ou, simplesmente, "S, n, i"), que estabelece a equivalência entre S e R.

Portanto, temos que:

$$S = R \times FVF\,(i;n) \text{ ou } S = R \times S_{n\rceil i} \text{ com } FVF\,(i;n) = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Exemplo 9.1

a. Uma pessoa deposita R$ 1.000,00 mensalmente. Sabendo-se que ela está ganhando 2% ao mês, quanto possuirá em dois anos?

Solução:

As aplicações mensais constituem uma série uniforme modelo padrão em que os termos constantes R são iguais a $1.000,00$, o prazo da operação é de dois anos, ou seja, 24 meses, e queremos determinar o montante S dessa série.

Sabemos que $S = R \times FVF\,(i;n)$. Nesse caso então, temos que $S = 1.000,00 \times FVF\,(2\%;24)$. Utilizando a expressão $FVF\,(i;n) = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$ ou uma tabela financeira, temos que:

$$FVF\,(2\%;24) = \frac{(1+0,044)^{24} - 1}{0,02} \Rightarrow FVF\,(2\%;24) \cong 30,421862.$$

Portanto, $S = 1.000,00 \times 30,421862 \Rightarrow S = 30.421,86$.

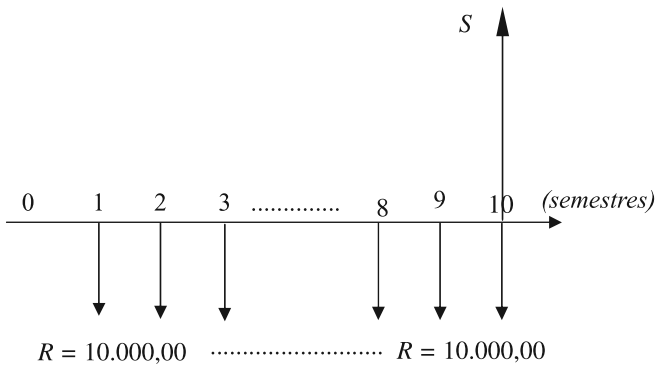
Resposta: R$ 30.421,86.

b. Uma empresa irá depositar R$ 10.000,00 no fim de cada semestre, durante cinco anos, em uma instituição financeira que paga juros de 12% ao ano, capitalizados semestralmente. Qual será o montante?

Solução:

A taxa de 12% ao ano é nominal, pois seu período, que é anual, é diferente do período de capitalização, que é semestral; logo, considerando a relação entre as unidades dessas taxas, a taxa efetiva semestral da operação é proporcional à taxa dada, ou seja, como 1 ano = 2 semestres, tem-se então que a taxa efetiva mensal i será dada por $i = \dfrac{12}{2} = 6\%$ ao semestre.

As aplicações semestrais constituem uma série uniforme modelo padrão em que os termos constantes R são iguais a $10.000,00$, o prazo da operação é de cinco anos, ou seja, 10 semestres, e queremos determinar o montante S dessa série.



Sabemos que $S = R \times FVF\,(i;n)$. Nesse caso então, temos que $S = 10.000,00 \times FVF\,(6\%;10)$. Utilizando uma tabela financeira ou a expressão $FVF\,(i;n) = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$, temos que:

$$FVF\,(6\%;12) = \frac{(1+0,06)^{10} - 1}{0,06} \Rightarrow FVF\,(6\%;12) \cong 13,180795.$$

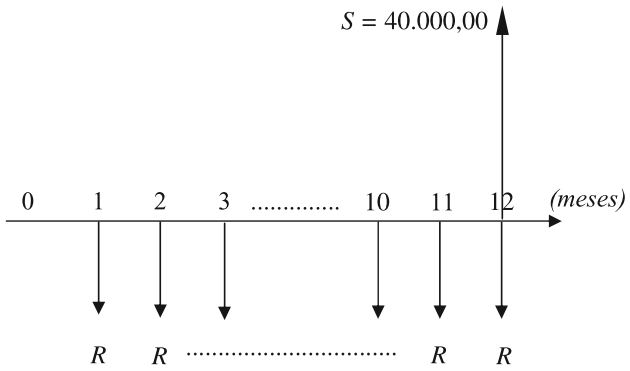
Portanto, $S = 10.000,00 \times 13,180795 \Rightarrow S \cong 131.807,95$.

Resposta: R$ 131.807,95.

c. Uma pessoa deseja comprar um carro à vista por R$ 40.000,00 daqui a 12 meses. Admitindo-se que ela vá poupar certa quantia mensal que será aplicada em uma instituição financeira que paga juros de $2,2\%$ ao mês (juros compostos), determine quanto deve ser poupado mensalmente.

Solução:

Os depósitos mensais constituem uma série uniforme modelo padrão em que o montante S é igual a $40.000,00$, o prazo n é de 12 meses e queremos determinar os termos constantes R da série.



Sabemos que $S = R \times FVF\,(i;n) \Leftrightarrow R = \dfrac{S}{FVF\,(i;n)}$. Logo, nesse caso, tem-se que: $R = \dfrac{40.000,00}{FVF\,(2,2\%;12)}$.

Utilizando a equação relação $FVF\,(i;n) = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$, temos que:

$$FVF\,(2,2\%;12) = \frac{(1+0,022)^{12} - 1}{0,022}$$

$$FVF\,(2,2\%;12) \cong 13,563955.$$

Portanto, $R = \dfrac{40.000,00}{13,563955} \Rightarrow R \cong 2.948,99.$

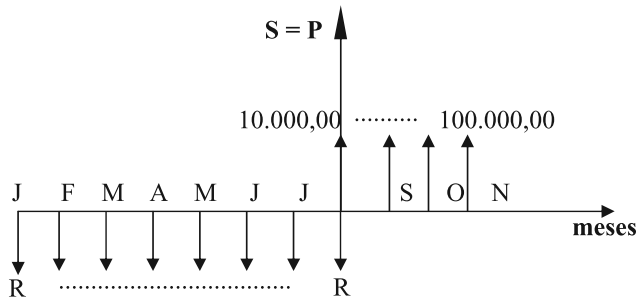
Resposta: R$ 2.948,99.

d. Uma pessoa, planejando a construção de uma casa, prevê dispêndios mensais de R$ 100.000,00 nos meses de setembro, outubro e novembro. Quanto deve ser depositado mensalmente de janeiro a agosto, do mesmo ano, para que seja possível efetuar tais retiradas? Considerar remuneração de 3% ao mês sobre os depósitos.

Solução:

Os depósitos formam uma série uniforme modelo básico com oito termos iguais a R, e os saques formam uma outra série uniforme modelo básico com três termos iguais a $100.000,00$. O montante da primeira série tem de ser igual ao valor atual da segunda. Por outro lado, sabemos que o valor atual P e o montante S de uma série uniforme modelo básico em função dos seus termos R, taxa i e prazo n, são dados por $P = R \times FVP\,(i,n)$ e $S = R \times FVF\,(i;n)$ respectivamente.

O problema pode ser visualizado no seguinte fluxo de caixa:



Como $S = P$, então,

$$R \times FVF\,(3\%;8) = 100.000,00 \times FVP\,(3\%;3)$$

$$R = \frac{100.000,00 \times FVP\,(3\%;3)}{FVF\,(3\%;8)}.$$

Utilizando uma tabela financeira ou as expressões

$$FVP\,(i,n) = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \text{ e } FVF\,(i;n) = \frac{(1+i)^{n}-1}{i},$$

temos que $FVF\,(3\%;8) = \dfrac{(1+0,03)^{3}}{0,03}$

$FVF\,(3\%;8) \cong 8,892336$ e $FVP\,(3\%;3) = \dfrac{1-(1+0,03)^{-3}}{0,03}$

$FVP\,(3\%;3) \cong 2,828611.$

Portanto, $R = \dfrac{100.000,00,00 \times 2,828611}{8,892336} \Rightarrow R = 31.809,53.$

Resposta: R$ 31.809,53.

Resumo

Nesta aula, continuamos o estudo das rendas certas ou anuidades. Você aprendeu o conceito do montante do modelo básico de uma renda ou anuidade ou ainda série uniforme de pagamentos. Aprendeu a determinar esse montante por meio do fator de valor futuro, fator este que pode ser determinado cálculo através de uma relação que envolve o valor da taxa i e do período da série ou por meio de tabelas financeiras.

Exercício 9.1

1. Uma pessoa investe R$ 1.000,00 mensalmente. Qual o montante acumulado imediatamente após o 10º depósito, se a taxa de remuneração do capital é de 21% ao trimestre, capitalizada mensalmente?

   Resposta: R$ 13.816,45.

2. Que importância constante deve ser depositada em um banco ao final de cada ano, à taxa de 6% ao ano, capitalizados anualmente, de modo que, ao fazer o décimo depósito, forme o capital de R$ 400.000,00?

   Resposta: R$ 30.347,19.

3. Quantas prestações mensais imediatas de R$ 5.000,00 devem ser colocadas, a uma taxa de 2% ao mês, a fim de se constituir o montante de R$ 67.060,00?

   Resposta: 12.

4. Quanto devo depositar, mensalmente, para obter um montante de R$ 12.000,00 ao fim de um ano, sabendo-se que a taxa mensal de remuneração do capital é de 4% e que o primeiro depósito é feito ao fim do primeiro mês?

   Resposta: R$ 798,62.

5. Uma pessoa aplicou R$ 15.000,00 e, após 3 anos, recebeu R$ 61.558,99. Que depósitos mensais nesse período produziriam a mesma soma, se os juros sobre o saldo credor fossem beneficiados com a mesma taxa da primeira hipótese?

   Resposta: R$ 793,30.

6. Certo executivo, pretendendo viajar durante doze meses, resolve fazer seis depósitos mensais em uma financeira, para que sua esposa possa efetuar doze retiradas mensais de R$ 20.000,00 durante o período de sua viagem. A primeira retirada ocorrerá um mês após o último depósito. Se a financeira paga 3% ao mês, de quanto devem ser os depósitos?

   Resposta: R$ 30.777,28.

7. Uma pessoa, prevendo a sua aposentadoria, resolve efetuar, durante quatro anos, depósitos mensais iguais a uma taxa de 2,5% ao mês. Este pecúlio deverá permitir cinco retiradas anuais de R$ 500.000,00, ocorrendo a primeira dois anos após o último depósito. De quanto devem ser os depósitos mensais?

   Resposta: R$ 9.167,56.

8. Um economista, tendo recebido R$ 300.000,00 como prêmio de loteria, imaginou o seguinte esquema: "Aplico esse dinheiro em uma instituição que pague 2% a.m. e durante os próximos 24 meses efetuo retiradas mensais de R$ 15.000,00. O saldo será retirado em 2 parcelas anuais iguais. A primeira um ano após o último saque mensal, e a segunda, no ano seguinte." Qual será o valor das parcelas anuais?

   Resposta: R$ 18.580,99.

9. Uma pessoa pretende depositar R$ 100,00 todo final de mês durante 13 meses em uma aplicação que rende juros efetivos de 4% ao mês. Se o montante das aplicações for resgatado por meio de três saques mensais iguais e consecutivos, o primeiro saque um mês depois do último depósito, qual o valor de cada saque?

   Resposta: R$ 599,14.

10. Um cidadão efetuou 100 depósitos mensais iguais num fundo de investimentos que rende 12% ao ano, com capitalização mensal. Do montante poupado, ele efetuou saques de R$ 2.000,00 por mês durante 100 meses, sendo o primeiro um mês após o último depósito. No último saque, ele zerou o saldo de sua conta. Qual o valor dos depósitos?

    Resposta: R$ 739,42.

Auto-avaliação

Você conseguiu resolver todos os exercícios propostos sem dificuldade? Se a resposta foi sim, então você entendeu os conceitos de rendas certas ou anuidades, em particular os conceitos do modelo básico. Se não conseguiu, não desista. Volte à aula e reveja os conceitos e exemplos. Não deixe que suas dúvidas se acumulem.

Aula 10

Séries, Rendas ou Anuidades Uniformes de Pagamentos (modelo genérico)

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. entender os conceitos envolvidos no estudo dos modelos genéricos de rendas;
2. interpretar e resolver os problemas propostos.

MODELOS GENÉRICOS DE ANUIDADES

Por modelo genérico, entendem-se as anuidades que não se enquadram em algum dos conceitos que caracterizam as anuidades do modelo básico. Ao estudá-las, na maioria das vezes tenta-se reduzi-las sempre que possível ao *modelo básico* já estudado. Daremos, a seguir, alguns exemplos dessas séries.

ANUIDADES DIFERIDAS

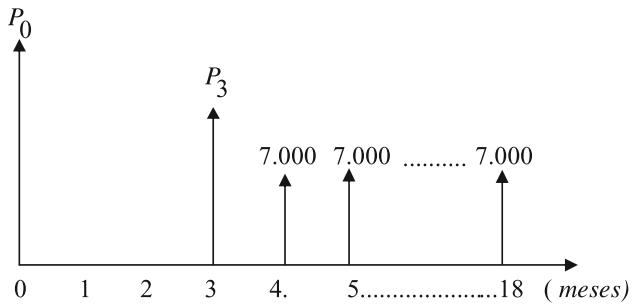
Neste caso, a exigência do primeiro pagamento ou recebimento dar-se-á após uma certa quantidade de períodos, que é chamada de *carência*. Se a série é antecipada, isto é, o primeiro termo da serie ocorre no início do primeiro período-data 0, então a carência será contada a partir do período 0. Se for postecipada,, isto é, o primeiro termo da série ocorre no final do primeiro período-data 1, então a carência será contada a partir do período 1. Podemos pensar como se os termos da série tivessem sido transladados de um intervalo de tempo igual à *carência.*

✍ Se não for dito nada em contrário, consideraremos sempre que a série é postecipada.

Exemplo 10.1

a. Qual o valor atual de uma renda de 15 termos mensais de R$ 7.000,00, com 3 meses de carência, à taxa de 1,5% ao mês?

Solução:



Podemos resolver esse problema, considerando duas séries do modelo básico. A primeira com 18 termos de R$ 7.000,00 sem carência e a segunda com 3 termos de R$ 7.000,00 também sem carência. O valor atual da primeira menos o valor atual da segunda será o valor atual da série dada no problema considerando a carência, ou seja:

$$P_0 = 7.000,00 \times FVP(1,5\%;18) - 7.000,00 \times FVP(1,5\%;3)$$

$$P_0 = 7.000,00 \times [FVP(1,5\%;18) - FVP(1,5\%;3)]$$

Utilizando uma tabela financeira ou a relação $FVP(i;n) = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, temos que:

$$FVP(1,5\%;18) = \frac{1-(1+0,015)^{-18}}{0,015} \Rightarrow FVP(1,5\%;18) \cong 15,672561$$

e

$$FVP(1,5\%;3) = \frac{1-(1+0,015)^{-3}}{0,015} \Rightarrow FVP(1,5\%;3) \cong 2,912200$$

$$P_0 = 7.000,00 \times (15,672561 - 2,912200) = 7.000 \times 12,760360 = 89.322,52.$$

✍ Podemos também tratar este problema considerando que o termo inicial da série dada será o valor de P_0 no mês 3 que chamaremos de P_3, e este será dado por:

$P_3 = P_0(1+0,015)^3$ e portanto, temos que

$$P_3 = P_0(1+0,015)^3 = 7.000 \times FVP(1,5;15)$$

$$P_0 = \frac{7.000 \times FVP(1,5;15)}{(1,015)^3} = \frac{7.000 \times 13,34323}{1,04568} \cong 89.322,52$$

Resposta: R$ 89.322,52.

b. Uma pessoa vai receber 16 prestações mensais iguais a R$ 400,00 com um diferimento de 15 meses. Sendo a taxa de juros igual a 2% ao mês, pergunta-se:

1. Qual o valor atual das prestações na data zero?
2. Qual o montante na data focal 40?

Solução:

1. $P_0 = 400,00 \times [FVP(2;31) - FVP(2;15)] =$
   $400,00(22,937702 - 12,849264)$

   $P_0 = 400 \times 10,088438 = 4.035,38.$
2. $P_{40} = 4.035,38(1+0,02)^{40} = 4.035,38 \times 2,208040 =$
   $8.910,28.$

Respostas:

1. R$ 4.035,38.
2. R$ 8.910,28.

ANUIDADE EM QUE O PERÍODO DOS TERMOS NÃO COINCIDE COM AQUELA A QUE SE REFERE A TAXA

Neste caso, se os termos são constantes e periódicos, basta calcular a taxa equivalente ao período dos termos e recai-se assim no modelo básico.

Exemplo 10.2

a. Um aparelho de som estereofônico é vendido em cinco prestações de R$ 2.000,00 a serem pagas a cada 2 meses.

   1. Sendo a taxa de juros cobrada de 3% ao mês, qual o valor do aparelho à vista?
   2. Se o mesmo aparelho pudesse ser pago em uma única vez após 10 meses, qual a quantia que a loja cobraria, admitida a mesma taxa de juros?

Solução: Cálculo da taxa equivalente bimestral:

$1 + i_b = (1,03)^2 \Rightarrow i_b = 1,0609 - 1 = 0,0609$ a.b. ou$i_b = 6,09\%$ a.b.

1. Preço à vista: $P_0 = 2.000,00 \times FVP(6,09\%;\ 5)$.

   $FVP(6,09\%;5) = \dfrac{1-(1,0609)^{-5}-1}{\times 0,0609} \Rightarrow FVP(6,09\%;5) \cong$
   $4,202070.$

   Portanto $P_0 = 2.000 \times 4,202070 \Rightarrow P_0 = 8.404,14.$

2. Preço após 10 meses:
$P_{10} = P_0\,(1,03)^{10} = P_0\,(1,0609)^5$
$P_{10} = 8.404,14 \times 1,343916 \Rightarrow P_{10} = 11.294,46$

Respostas:

1. R$ 8.404,14.
2. R$ 1.294,46.

ANUIDADES COM TERMOS CONSTANTES SEGUNDO O MODELO BÁSICO, MAIS PARCELAS INTERMEDIÁRIAS IGUAIS

Neste caso, a anuidade se apresenta com termos iguais e, além disso, tem parcelas intermediárias eqüidistantes e de mesmo valor; a solução é feita em duas etapas:

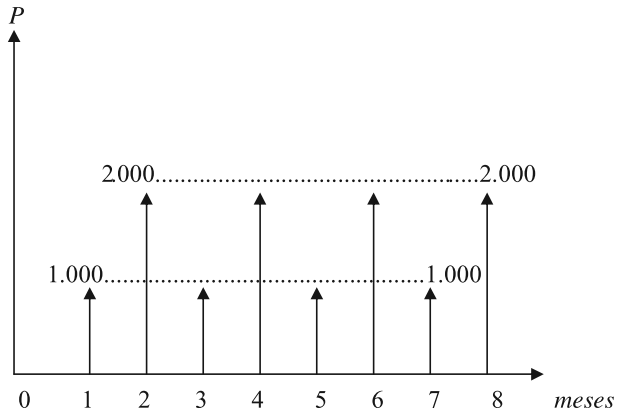
1º) Uniformiza-se a anuidade, de modo que todos os termos sejam iguais e com a taxa de juros *i* referida ao período dos termos.

2º) Por diferença, determina-se o valor das parcelas intermediárias, que são iguais entre si.

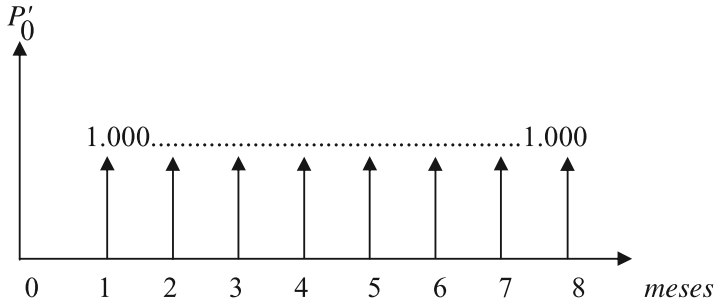
Exemplo 10.3

Um carro é vendido em oito prestações mensais. As prestações de ordem ímpar são iguais a R$ 1.000,00, enquanto que as de ordem par são iguais a R$ 2.000. Considerando-se a taxa de juros de 2% ao mês, qual o preço à vista?

Solução:

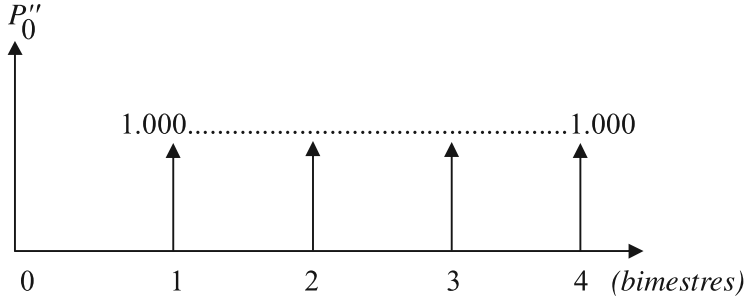


1º) Uniformizando a anuidade, tem-se a seguinte série:



$P'_0 = R \cdot FVP\,(2\%;8)$, onde $R = 1.000,00$. Portanto $P'_0 = 1.000,00 \times 7,325481 = 7.325,48$

2º) Considerando a série com os valores intermediários, temos:



$P''_0 = R \cdot FVP\,(i;4)$, onde $R = 1.000,00$ e i é a taxa equivalente bimestral. Logo,

$1+i=(1,02)^2 \Rightarrow i=1,0404-1 \Rightarrow i=0,0404$ a.m ou $i=4,04\%$ a.m. e, portanto,

$P_0''=1.000,00\times FVP(4,04\%;4)$, como

$FVP(4,04\%;4)=\dfrac{1-(1,0404)^{-4}}{0,0404}\cong 3,626476$, temos que,

$P_0''=1.000,00\times 3,626476=3.626,48$. Portanto, o preço do carro à vista será $P=P_0'+P_0''$, ou seja

$P=7.325,48+3.626,48 \Rightarrow P=10.951,96$.

Resposta: R$ 10.951,96.

ANUIDADE COMPOSTA POR DUAS ANUIDADES DIFERIDAS EM SEQÜÊNCIA

Neste caso, podemos proceder como visto no item 10, considerando cada série separadamente, calculando o seu valor atual no período imediatamente anterior ao primeiro termo da respectiva série e a seguir atualizar esses termos na data zero somando estes valores.

Exemplo 10.4

Uma pessoa comprou um gravador para pagar em sete prestações do seguinte modo:

1. 3 prestações de R$ 100,00 no 7º, 8º e 9º mês;
2. 4 prestações de R$ 100,00 no 13º, 14º, 15º, e 16º mês.

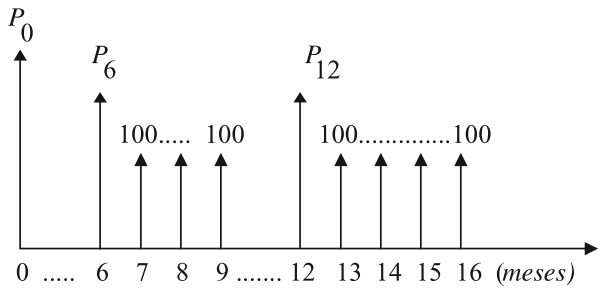
A taxa de juros cobrada foi de 2% ao mês. Qual o valor do gravador à vista?

Solução:

$$P_6=100,00\times FVP(2\%;3)=100,00\times 2,883883 \Rightarrow P_6=288,39.$$
$$P_{12}=100\times FVP(2\%;4)=100,00\times 3,807729 \Rightarrow P_{12}=380,77.$$

$$P_0=\frac{288,39}{(1,02)^6}+\frac{380,7}{(1,02)^{12}}=256,08+300,23 \therefore P_0=556,31.$$

Resposta: O preço à vista do gravador é R$ 556,31.



ANUIDADES VARIÁVEIS

São anuidades cujos termos não são iguais entre si. Podemos resolvê-las calculando-se o *valor atual* da série, como sendo a soma dos valores atuais de cada um dos seus termos. O montante da série pode ser determinado capitalizando-se o valor atual obtido ou pela soma da capitalização de cada termo no último período.

Exemplo 10.5

Um terreno foi comprado para ser pago em cinco prestações trimestrais, com os seguintes valores:

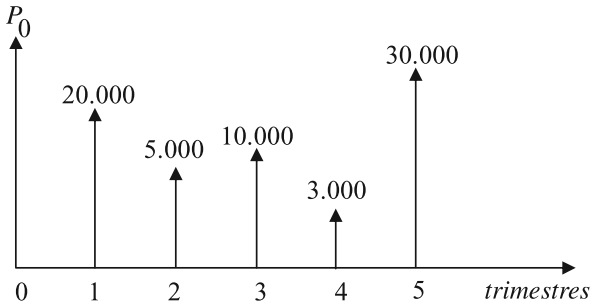
1º *trimestre*: R$ 20.000,00 2º *trimestre*: R$ 5.000,00.

3º *trimestre*: R$ 10.000,00 4º *trimestre*: R$ 3.000,00.

5º *trimestre*: R$ 30.000,00.

Sendo a taxa de juros para aplicações financeiras vigente no mercado de 2,5% a.m., qual é o valor do terreno à vista?

Solução:



$$P_0 = \frac{20.000,00}{(1+i)^1} + \frac{5.000,00}{(1+i)^2} + \frac{10.00,00}{(1+i)^3} + \frac{3.000,00}{(1+i)^4} + \frac{30.000,00}{(1+i)^5},$$

onde i é a taxa equivalente trimestral, logo,

$1+i = (1,025)^3 \therefore i = 1,07689 - 1 \therefore i = 0,07689$ a.t ou $i = 7,689\%$ a.t., portanto:

$$P_0 = \frac{20.000,00}{(1,07689)^1} + \frac{5.000,00}{(1,07689)^2} + \frac{10.000,00}{(1,07689)^3} + \frac{3.000,00}{(1,07689)^4} + \frac{30.000,00}{(1,07689)^5}$$

$$P_0 = 18.572,00 + 4.311,49 + 8.007,30 + 2.230,67 + 20.714,03$$

$$P_0 = 53.835,49.$$

Resposta: O preço à vista do terreno é R$ 53.835,49.

Outros Exemplos

a. Uma dívida de R$ 200.000,00 deve ser amortizada com 4 pagamentos bimestrais consecutivos, sendo de 4% ao bimestre a taxa de juro. Calcule essa prestação, sabendo que o pagamento da primeira delas deve ser efetuado 3 bimestres após a realização do empréstimo.

Solução: O prazo de carência, nesse caso é de dois bimestres, portanto:

$$200.000,00 = R \times [FVP(4\%;6) - FVP(4\%;2)]$$

$$R = \frac{200.000,00}{FVP(4\%;6) - FVP(4\%;2)}.$$

Utilizando uma tabela financeira ou a relação

$FVP(i;n) = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, temos que:

$$FVP(4\%;6) = \frac{1-(1+0,04)^{-6}}{0,04} \Rightarrow FVP(4\%;6) \cong 5,242137 \text{ e}$$

$$FVP(4\%;2) = \frac{1-(1+0,04)^{-2}}{0,04} \Rightarrow FVP(4\%;2) \cong 1,886095.$$

Portanto, temos que:

$$R = \frac{200.000,00}{(5,242147 - 1,886095)} \Rightarrow R = \frac{200.000,00}{3,356042}$$

$R \cong 59.594,00$.

Resposta: R$ 59.593,86.

b. Para dinamizar o setor de vendas, o gerente deseja publicar tabelas dos coeficientes de financiamento por unidade de capital. Desse modo, seus vendedores poderão apresentar os múltiplos planos de financiamento, informando ao cliente qual é a prestação em cada um, bastando, para isso, multiplicar o valor a ser financiado pelo coeficiente. Qual é o coeficiente em cada uma das hipóteses, se a taxa de juros for de 3,5% ao mês?

Carência	**N$^{\underline{o}}$** de prestações
3 meses	12
4 meses	12
6 meses	24
6 meses	36

Solução: $P = R \times FVP(i;n) \Leftrightarrow R = P \times \dfrac{1}{FVP(i;n)}$,

portanto, $R = P \times \alpha$ onde $\alpha = \dfrac{1}{FVP(i;n)}$.

Com carência de k períodos, temos que:

$P_k = P_0 \times (1+i)^k$

$R = P_0 \times (1+i)^k \times \dfrac{1}{FVP(i;n)} \Rightarrow R = P_0 \times \dfrac{(1+i)^k}{FVP(i;n)}$, ou seja,

$R = P_0 \times \alpha$ com $\alpha = \dfrac{(1+i)^k}{FVP(i;n)}$

1. $\alpha = \dfrac{(1,035)^3}{FVP(3,5;12)} = \dfrac{1,108718}{9,663334} \therefore \alpha = 0,114735;$
2. $\alpha = \dfrac{(1,035)^4}{FVP(3,5;12)} = \dfrac{1,147523}{9,663334} \therefore \alpha = 0,118750;$
3. $\alpha = \dfrac{(1,035)^6}{FVP(3,5;24)} = \dfrac{1,229255}{16,058368} \therefore \alpha = 0,076549;$
4. $\alpha = \dfrac{(1,035)^6}{FVP(3,5;36)} = \dfrac{1,108718}{20,290494} \therefore \alpha = 0,060583$

c. Uma imobiliária oferece, em lançamento, uma pequena chácara nas seguintes condições:

1. R$ 20.000,00 de entrada;

2. 36 prestações mensais de R$ 1.000,00;
3. 6 parcelas semestrais de R$ 4.000,00.

Qual é o preço à vista da chácara, uma vez que a taxa de mercado é de 3% ao mês?

Solução: $P_0 = 20.000,00 + 1.000,00 \times FVP(3\%;36) + 4.000 \times FVP(i;6)$,

onde i é a taxa equivalente semestral, portanto como 1 semestre = 6 meses, temos que:

$(1+i)^1 = (1,03)^6 \therefore i = 1,19402 - 1 \Rightarrow i = 0,19402$ ao semestre

ou $i = 19,402\%$ ao semestre.

Logo, utilizando uma tabela financeira ou a equação

$FVP(i;n) = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, temos que:

$FVP(19,402\%;6) = \dfrac{1-(1,19402)^{-6}}{0,19402}$

$FVP(19,402\%;6) \cong 3,375214$ e

$FVP(3\%;36) = \dfrac{1-(1+0,03)^{-36}}{0,03}$

$FVP(3\%;36) \cong 21,832252$. Portanto,

$P_0 = 20.000 + 1.000,00 \times 21,832253 + 4.000,00 \times 3,375214$

$P_0 = 55.333,11$.

Resposta: R$ 55.333,11.

Resumo

Nesta aula, continuamos o estudo das rendas certas ou anuidades. Você aprendeu a trabalhar com séries genéricas, procurando se possível associar o seu estudo aos conceitos aprendidos no estudo do modelo básico de anuidades.

Exercício 10.1

1. Um magazine oferece, em sua promoção, um televisor por 24 prestações de R$ 300,00, ocorrendo o primeiro pagamento após quatro meses da compra. Qual seria o preço à vista deste televisor, uma vez que a taxa de mercado é de 2,5% ao mês?

   Resposta: R$ 4.982,40.

2. O preço à vista de um carro é de R$ 80.000,00. A revendedora exige 30% como entrada, financiando o saldo em 36 pagamentos, com seis meses de carência. Sabendo-se que a taxa de juros da agência é de 3,5% ao mês, qual é o valor das prestações?

   Resposta: R$ 3.392,64.

3. Uma pessoa depositou R$ 1.000,00, abrindo uma conta em uma instituição que paga 2% ao mês, sobre o saldo credor. Em seguida efetuou uma série de 24 depósitos mensais de R$ 300,00, sendo que o primeiro foi feito 4 meses após a abertura da conta. Supondo-se que não seja efetuada nenhuma retirada, quanto terá em 5 anos após a abertura da conta?

   Resposta: R$ 20.824,39.

4. O gerente financeiro de um magazine, atendendo à nova política de venda a prazo com carência, resolve publicar os coeficientes para facilitar o trabalho do vendedor no cálculo do valor das prestações. Estes coeficientes serão aplicados sobre unidade de capital financiado, correspondendo à taxa de 4% ao mês. Calcular os coeficientes nas seguintes hipóteses:

Carência	nº	Resposta
3 meses	12	0,119857
3 meses	24	0,073776
4 meses	24	0,076727
6 meses	24	0,082988

5. Uma bicicleta foi vendida em 4 prestações trimestrais de R$ 1.000,00, sendo a primeira na compra. Se a taxa de mercado é de 3% ao mês, qual é o preço à vista?

   Resposta: R$ 3.519,04.

6. Uma pessoa resolve efetuar depósitos mensais de R$ 100,00 durante 3 anos em um banco que paga 1,5% ao mês. Os depósitos serão feitos todo fim do mês, de janeiro a junho apenas. Quanto possuirá esta pessoa no dia 31 de dezembro do último ano de depósitos?

   Resposta: R$ 2.469,33.

7. A compra de um apartamento no valor de R$ 250.000,00 foi feita mediante entrada de 20% e o restante em prestações trimestrais durante cinco anos. Qual o valor da prestação, já que a taxa acertada foi de 1,5% ao mês?

   Resposta: R$ 15.465.

8. A compra de um carro foi feita a prazo em oito prestações trimestrais de R$ 3.000,00. O comprador, entretanto solicitou o pagamento em 24 parcelas mensais, para que houvesse diluição dos compromissos. De quanto deveriam ser as prestações mensais, uma vez que a taxa de juros era de 7,689% ao trimestre?

   Resposta: R$ 975,38.

9. Que porcentagem do valor à vista deve ser dada como entrada para que 4 prestações trimestrais tenham o mesmo valor que 12 prestações mensais sem entrada? Considerar a taxa de juros de 50% ao ano.

   Resposta: 67,79% do preço à vista.

10. Uma casa é posta à venda por R$ 500.000,00 à vista. Financiada, ela é vendida por 50% de entrada e o restante em 48 prestações mensais a juros de 2,5% ao mês. Tendo encontrado certa dificuldade em vendê-la, o construtor resolveu também financiar 80% do valor referente à entrada, facilitando em 4 parcelas trimestrais iguais, à mesma taxa de juros. Qual é o valor da entrada, da parcela trimestral e da prestação mensal?

    Resposta:

    entrada = R$ 50.000,00;

    parcelas trimestrais = R$ 59.966,81;

    parcelas mensais = R$ 9.001,50.

11. Na venda de um imóvel, o proprietário pede R$ 100.000,00 de entrada, 36 prestações mensais de R$ 3.000,00 e três

parcelas anuais de R$ 20.000,00. Uma contraproposta lhe é feita no seguinte esquema: entrada de R$ 80.000,00; 12 prestações mensais de R$ 4.000,00, seguidas de mais 12 prestações mensais de R$ 9.000,00. Sabendo-se que a taxa de juros vigente é de 2,5% ao mês, qual é a melhor alternativa para o vendedor?

Resposta:

Proposta = R$ 204.819,25.

Contraproposta = R$ 189.676,05.

Para o vendedor, a melhor alternativa é a proposta.

12. Tendo comprado um eletrodoméstico em 24 prestações mensais de R$ 210,00, o cliente propôs sua substituição para 12 prestações bimestrais. Qual será o valor desta nova prestação, se a taxa de juros considerada for de 2% ao mês?

    Resposta: R$ 424,20.

13. Quanto deve ser depositado em 31/12/X6 de maneira que seja possível retirar mensalmente 10.000,00 de julho a dezembro 19X7, 15.000,00 de julho a dezembro 19X8 e 20.000,00 de julho a dezembro 19X9? Considerar que os depósitos serão remunerados a 3% ao mês.

    Resposta: R$ 137.734,82.

14. Certa pessoa abre uma conta em um banco que paga 2% ao mês, com depósito inicial de R$ 5.000,00. Após 6 meses inicia uma série de 20 depósitos mensais de R$ 150,00, interrompendo-se por 4 meses, para novamente reiniciá-la com seis depósitos trimestrais de R$ 600,00. Quanto possui após o último depósito trimestral e que depósito inicial e único geraria o mesmo montante ao fim do mesmo período?

    Resposta:

    Montante = R$ 21.457,71.

    Depósito inicial = R$ 8.977,92.

15. Um terreno é vendido mediante entrada de R$ 10.000,00 e 3 parcelas, sendo a primeira de R$ 2.000,00 para 3 meses, a segunda de R$ 6.000,00 para 8 meses e a última de R$ 20.000,00 para 12 meses. Sabendo-se que a taxa vigente no mercado é de 35% ao ano, qual é o preço à vista do terreno?

    Resposta: R$ 31.582,30.

Auto-avaliação

Você conseguiu resolver todos os exercícios propostos sem dificuldade? Se a resposta foi sim, então você entendeu os conceitos e as técnicas de resolução dos problemas que envolvem anuidades genéricas. Se não conseguiu, não desista, volte à aula e reveja os conceitos e exemplos. Não deixe que suas dúvidas se acumulem.

Aula 11

Sistemas de Amortização de Empréstimos (Sistema de Amortização Francês)

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. entender os conceitos envolvidos no estudo dos sistemas de amortização de empréstimos;
2. entender o Sistema de Amortização Francês;
3. interpretar e resolver os problemas propostos.

INTRODUÇÃO

Os empréstimos classificam-se em *curto*, *médio* e de *longo prazo*.

Os empréstimos de curto e médio prazo (saldados em até três anos) foram estudados no assunto *anuidades*. Os empréstimos de longo prazo sofrem um tratamento especial, porque existem várias modalidades ou sistemas de amortização, restituição do principal e juros.

O processo de amortização de um empréstimo consiste nos pagamentos das prestações em épocas predeterminadas. Cada prestação é subdividida em duas partes, a saber:

- juros do período, calculado sobre o saldo devedor no início do período;
- amortização do capital, obtida pela diferença entre o valor da prestação e o valor dos juros do período.

Alguns termos de uso corrente serão explicitados para maior clareza:

a) ***Mutuante ou credor:*** aquele que concede o empréstimo.

b) ***Mutuário ou devedor:*** aquele que recebe o empréstimo.

c) ***Taxa de juros:*** é a taxa de juros contratada entre as partes. Pode referir-se ao custo efetivo do empréstimo ou não, dependendo das condições adotadas.

d) ***IOF:*** imposto sobre operações financeiras.

e) ***Prazo de utilização:*** corresponde ao intervalo de tempo durante o qual o empréstimo é transferido do credor para o mutuário (um empréstimo pode ser transferido do credor para o mutuário em uma ou mais parcelas). Caso o empréstimo seja transferido em uma só parcela, o prazo de utilização é dito *unitário*.

f) ***Prazo de carência:*** corresponde a uma quantidade de períodos nos quais não haverá amortização do empréstimo. Durante o prazo de carência, o devedor só paga os juros.

Considera-se que existe carência quando esse prazo é superior ou igual a pelo menos o dobro do menor período de amortização das parcelas. É possível também que as partes concordem que os juros devidos no prazo de carência sejam capitalizados e pagos posteriormente. É importante observar que a carência será contada a partir da data 0 ou da data 1, conforme o pagamento das amortizações for respectivamente antecipada ou postecipada.

g) ***Parcelas de amortização:*** corresponde às parcelas de devolução do principal, isto é, do capital emprestado.

h) ***Prazo de amortização:*** é o intervalo de tempo durante o qual são pagas as amortizações.

i) ***Prestação:*** é a soma da amortização acrescida de juros e outros encargos pagos em um dado período.

j) ***Planilha:*** é um quadro padronizado ou não, em que são colocados os valores referentes ao empréstimo, ou seja, é um cronograma dos valores de recebimento e de pagamentos.

l) ***Prazo total do financiamento:*** é a soma do prazo de carência com o prazo de amortização.

m) ***Saldo devedor:*** é o estado da dívida do débito em determinado instante de tempo.

n) ***Período de amortização:*** é o intervalo de tempo existente entre duas amortizações.

Nos sistemas de amortização que estudaremos a seguir, serão utilizadas as seguintes notações:

$Sd_0 \rightarrow$ saldo devedor da data zero (saldo devedor inicial).

$Sd_k \rightarrow$ saldo devedor no k-ésimo período (após o pagamento da k-ésima prestação).

$P_k \rightarrow$ valor da prestação do k-ésimo período.

$A_k \rightarrow$ valor da amortização do k-ésimo período.

$J_k \rightarrow$ valor dos juros do k-ésimo período.

Portanto, a prestação no k-ésimo período corresponde a

$$\boxed{P_k = A_k + J_k}$$

✍ Nos sistemas de amortizações de que trataremos aqui, a menos que seja estabelecido o contrário, as prestações são postecipadas, ou seja, o primeiro pagamento, caso não haja carência, será devido no final do primeiro período, isto é, na data 1. Serão vistos também alguns exemplos em que a primeira prestação é diferida, isto é com carência.

Alguns dos principais e mais utilizados sistemas de amortização são:

a) **Sistema Francês de Amortização (*SFA*)** (Também denominado **Sistema Price**).

b) **Sistema de Amortização Constante *(SAC)***.

c) **Sistema Americano *(SA)***.

Qualquer um dos sistemas pode ter, ou não, carência. Durante o prazo de carência, os juros podem ser pagos ou capitalizados, dependendo do contrato de financiamento.

SISTEMA FRANCÊS DE AMORTIZAÇÃO (SFA)

É um sistema onde no fim de cada período, o devedor paga uma prestação constante e calculada de forma que uma parcela da prestação paga os juros do período e outra parcela amortiza parte do capital financiado. Essas parcelas são variáveis, já que a cada pagamento os juros diminuem e a quota amortizada aumenta, o que é compreensível, visto que os juros são calculados sobre o saldo devedor.

Exemplo 11.1

a. Um banco empresta R$ 100.000,00, entregues no ato, sem prazo de carência. Sabendo-se que o banco utiliza o Sistema Francês de Amortização, que a taxa contratada foi de 10% a.a. e que o banco quer a devolução em 5 prestações anuais, construir a planilha.

Solução:

Se o principal vai ser devolvido em 5 prestações iguais e postecipadas, temos então uma anuidade que se encaixa no modelo básico:

$$P = 100.000,00;\ n = 5; i = 10\% \text{ ao ano.}$$

Temos então que $R = \dfrac{100.000,00}{FVP(10\%;5)}$.

Por outro lado, $FVP(10\%;5) = \dfrac{1-(1+0,1)^{-5}}{0,1} \cong 3,790787 \Rightarrow$ $R = \dfrac{100.000}{3,790787} \Rightarrow R = 26.379,75$.

Para a construção da planilha seguimos os seguintes passos:

1º No período "zero", que corresponde ao momento inicial do financiamento, não há qualquer prestação a pagar, tendo em vista que a primeira prestação será paga na data 1;

2º No período "um", os cálculos serão feitos da seguinte forma:

a) o juro devido, incidente sobre o saldo devedor inicial, ou seja, 10% de 100.000,00, será dado por $0,1 \times 100.000,00 = 10.000,00$;

b) a amortização será obtida pela diferença entre o valor da 1ª prestação e o valor do juro pago, ou seja, a amortização do 1º mês será dada por $26.379,75 - 10.000,00 = 16.379,75$.

c) o saldo devedor, que será obtido subtraindo-se do saldo devedor inicial o valor amortizado nesse mês, ou seja, $100.000,00 - 16.379,75 = 83.620,25$.

3º Nos períodos subseqüentes, repetem-se os procedimentos do período "um".

Planilha do financiamento

Anos (k)	***Saldo devedor*** (Sd_k)	***Amortização*** (A_k)	***Juros*** (J_k)	***Prestação*** $(P_k = A_k + J_k)$
0	100.000,00	-	-	-
1	83.620,25	16.379,75	10.000,00	26.379,75
2	65.602,53	18.017,72	8.362,03	26.379,75
3	45.783,03	19.819,50	6.560,25	26.379,75
4	23.981,58	21.801,45	4.578,30	26.379,75
5	-	23.981,58	2.398,16	26.379,74
TOTAL	**-**	**100.000,00**	**31.898,74**	**131.898,74**

✍ Em geral é necessário um pequeno ajuste na prestação do último período para zerar o saldo devedor.

b. Um empréstimo de R$ 10.000,00 será pago pelo *Sistema Francês de Amortização* em 4 prestações mensais, sem período de carência. Se a taxa de juros contratada for de 10% ao mês, construir a planilha.

Solução:

$$R = \frac{10.000,00}{FVP(10\%;4)} = \frac{10.000,00}{3,169865} \Rightarrow R = 3.154,71.$$

Anos (k)	***Saldo devedor*** (Sd_k)	***Amortização*** (A_k)	***Juros*** $(J_k = i \times Sd_k)$	***Prestação*** $(P_k = A_k + J_k)$
0	10.000,00	-	-	-
1	7.845,29	2.154,71	1.000,00	3.154,71
2	5.475,11	2.370,18	784,53	3.154,71
3	2.867,91	2.607,20	547,51	3.154,71
4		2.867,91	286,68	3.154,59
TOTAL	**-**	**10.000,00**	**2.618,72**	**12.618,72**

✍ **Saldo devedor após o pagamento de uma prestação qualquer:**
Algumas vezes, interessa-nos saber o saldo devedor (Sd_k) em um determinado período k, $0 \leqslant k \leqslant n$. Existindo a planilha relativa ao financiamento em questão, não há dificuldade alguma. Mas na maioria das vezes, a confecção da planilha torna-se extremamente trabalhosa. Podemos, então, obter uma relação que nos permita determinar o saldo devedor após o pagamento da k-ésima prestação. Basta considerar a anuidade formada pelas $n-k$ prestações a serem pagas. O saldo devedor Sd_k no período k será igual ao valor atual desta anuidade considerando a taxa i dada, desse modo tem-se que:

$$\boxed{Sd_k = R \times FVP(i;m) \text{ com } m = n-k.}$$

✍ **Juros pagos em um período qualquer:**
Como os juros de um período são sempre determinados sobre o saldo do período anterior, temos que:

$$\boxed{J_k = i \times Sd_{k-1}.}$$

✍ Valor da amortização em um período qualquer em função da primeira parcela de amortização
Sabemos que a prestação R pode ser dada por $R = A_1 + J_1$ ou $R = A_2 + J_2$, logo,

$$\begin{aligned}
&A_1 + J_1 = A_2 + J_2 \Rightarrow A_1 + i \times Sd_0 = A_2 + i \times Sd_1 \\
&A_1 + i \times Sd_0 = A_2 + i \times (Sd_0 - A_1) \\
&A_1 + i \times Sd_0 = A_2 + i \times Sd_0 - i \times A_1 \\
&A_2 = A_1 + i \times A_1 \Rightarrow A_2 = A_1 \times (1+i).
\end{aligned}$$

De forma análoga temos que $A_3 = A_2 \times (1+i)$, isto é, $A_3 = A_1 \times (1+i)^2$. Continuando neste processo até a *k-ésima* amortização, tem-se que

$$\boxed{A_k = A_1 (1+i)^{k-1}.}$$

c. Uma dívida de R$ 50.000,00 vai ser amortizada, através do Sistema Francês de Amortização, em oito prestações anuais à taxa de juros de 20% ao ano. Calcule o saldo devedor após ter sido paga a terceira prestação.

Solução:

$$R = \frac{50.000,00}{FVP(20\%;8)} = \frac{50.000,00}{3,837160}$$

$$\begin{aligned}
&R = 13.030,47 \Rightarrow Sd_3 = 13.030,47 \times FVP(20\%;5) \\
&Sd_3 = 13.030,47 \times 2,990612 \Rightarrow Sd_3 = 38.969,08.
\end{aligned}$$

Resposta: R$ 38.969,08.

✍ ***Sistema Price***: Esse sistema constitui um caso particular o Sistema Francês de Amortização e apresenta as seguintes características:

1. a taxa é nominal e geralmente é dada em termos anuais;
2. em geral as prestações são mensais.

d. Uma financeira emprestou R$ 100.000,00, sem prazo de carência. Sabendo que a taxa de juro cobrada pela financeira é de 18% ao ano (Tabela Price) e que a amortização deve ser feita em seis meses, calcule o valor da prestação.

Solução:

a taxa de 18% ao ano é nominal, pois seu período que é anual é o período de capitalização é mensal. Logo, considerando a relação entre essas unidades de tempo, a taxa efetiva da operação é proporcional a taxa dada, ou seja, como 1 ano = 12 meses, tem-se então que a taxa efetiva i será dada por $i = \frac{18}{12} = 1,5$ ao mês. Logo,

$$R = \frac{100.000,00}{FVP(1,5\%;6)}.$$

Utilizando uma tabela financeira ou a equação

$$FVP(i;n) = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}, \text{ tem-se que}$$

$$FVP(1,5\%;6) = \frac{1-(1+0,015)^{-6}}{0,015i} \Rightarrow FVP(1,5\%;6) \cong 5,697187$$

e, portanto, $R = \dfrac{100.000,00}{5,697187} \Rightarrow R \cong 17.552,52.$

Resposta: R$ 17.552,52.

e. Um banco empresta R$ 100.000,00, entregues no ato, com três anos de carência. Sabendo-se que o banco utiliza o *SFA*, que a taxa contratada foi de 10% a.a. e que o banco quer a devolução em 5 prestações, construir a planilha.

Solução:

Com prazo de carência, podemos ter duas alternativas:

1ª O mutuário paga os juros durante a carência.

Nesse caso, o valor da prestação será estabelecido da forma usual, ou seja:

$P = 100.000,00$
$n = 5$
$i = 10\%$ a.a.

$$R = \frac{100.000,00}{FVP(10\%;5)} = \frac{100.000,00}{3,790787} \Rightarrow R = 26.379,75.$$

A carência é de 3 anos, significa, então, que a primeira amortização será paga no ano 4, mas durante a carência, ou seja, nos anos 1, 2 e 3 o mutuário pagará os juros que será determinado sobre o saldo do período anterior. Como o saldo dos períodos 0,

1 e 2 é igual a 100.000,00, o juro durante a carência será de $0,1 \times 100.000,00 = 10.000,00$. A partir do período 4 a planilha será trabalhada da maneira usual. Assim:

Planilha do financiamento

Anos (k)	***Saldo devedor*** (Sd_k)	***Amortização*** (A_k)	***Juros*** $J_k = iSd_{k-1}$	***Prestação*** $(P_k = A_k + J_k)$
0	100.000,00	-	-	-
1	100.000,00	-	10.000,00	10.000,00
2	100.000,00	-	10.000,00	10.000,00
3	100.000,00	-	10.000,00	10.000,00
4	83.620,25	16.379,75	10.000,00	26.379,75
5	65.602,53	18.017,72	8.362,03	26.379,75
6	45.783,03	19.819,50	6.560,25	26.379,75
7	23.981,58	21.801,45	4.578,30	26.379,75
8	-	23.981,58	2.398,16	26.379,74
TOTAL	**-**	**100.000,00**	**51.898,74**	**151.898,74**

2^a Os juros são capitalizados durante a carência e incorporados ao principal, para ser amortizado nas prestações.

O juro do primeiro período é $0,1 \times 100.000,00 = 10.000,00$. Este valor não será pago pelo mutuário, e sim incorporado ao saldo devedor do período 1, ou seja, o saldo do período 1 será de 110.000,00, portanto o juro do período 2 será dado por $0,1 \times 110.000,00 = 11.000,00$ e também incorporado ao saldo devedor. Temos, então, que o saldo do período 2 é de 121.000,000. De forma análoga, tem-se que o saldo do período 3 é 133.000,00. Como o mutuário irá pagar a amortização a partir do período 3, tem-se, então, que no cálculo das prestações o saldo a ser considerado será de 133.100,00, logo:

$P = 133.100,00$
$n = 5$
$i = 10\%$ a.a.

$$R = \frac{133.100,00}{FVP(10\%;5)} = \frac{133.100}{3,790787}$$

$R = 35.111,44.$

Planilha do financiamento

Anos (k)	***Saldo devedor*** (Sd_k)	***Amortização*** (A_k)	***Juros*** $(J_k = iSd_{k-1})$	bfitPrestação $(P_k = A_k + J_k)$
0	100.000,00	-	-	-
1	110.000,00	-	10.000,00	-
2	121.000,00	-	11.000,00	-
3	133.100,00	-	12.100,00	-
4	111.298,56	21.801,44	13.310,00	$35.111,44$
5	87.316,98	23.981,58	11.129,86	$35.111,44$
6	60.937,24	26.379,74	8.731,70	$35.111,44$
7	31.919,52	29.017,72	6.093,72	$35.111,44$
8	0,00	31.919,52	3.191,95	$35.111,47$
TOTAL		**100.000,00**	**75.557,23**	**175.557,23**

✍ É comum a instituição financeira cobrar, além do juro declarado, outros tipos de encargos, tais como IOF (Imposto sobre Operações Financeiras), comissões, taxas administrativas, etc. Estas despesas adicionais devem ser consideradas na planilha de desembolsos financeiros, onerando o custo efetivo da operação.

f. A uma pequena empresa são emprestados R$ 50.000,00, a serem pagos pelo Sistema Francês de Amortização. As condições do financiamento são as seguintes:

   – Prazo: 10 semestres.
   – Juros: 6 % ao semestre.
   – Despesas contratuais: 2 % sobre o valor do financiamento a serem pagos no ato.
   – Imposto sobre Operações Financeiras (IOF): 1% sobre o valor do financiamento mais encargos, pagos no ato.

   Construir a planilha do financiamento.

   Solução:

   1. Cálculo da prestação R:

      $$50.000,00 = R \times FVP(6\%;10) \Rightarrow R = \frac{50.000,00}{FVP(6\%;10)}.$$

Utilizando uma tabela financeira ou a equação $FVP(i;n) = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, temos que:

$$FVP(6\%;10) = \frac{1-(1+0,06)^{-10}}{0,06} \Rightarrow FVP(6\%;10) \cong 7,36009.$$

Portanto $R = \dfrac{50.000,00}{7,36009} \Rightarrow R \cong 6.793,40.$

2. Cálculo das despesas contratuais:

   2% de 50.000,00, isto é, $0,02 \times 50.000,00 = 1.000,00$.

3. Cálculo do IOF: como nas prestações estão incluídos os juros e a amortização do principal, o total do financiamento mais os encargos serão de $10 \times 6.793,40 + 1.000,00 = 68.934,00$. O IOF, então, incidirá sobre este valor. Logo, o IOF devido será de $0,01 \times 68.934,00 = 689,34$.

Planilha do financiamento

Semestres (k)	**Saldo devedor** (Sd_k)	**Amortização** (A_k)	**Juros** (J_k)	**Prestação** $(A_k)+(J_k)$ **(1)**	**IOF** **(2)**	**Despesas contratuais**	**Desembolso total (1)+(2)+(3)**
0	50.000,00	-	-	-	689,34	1.000,00	1.689,34
1	46.206,60	3.793,40	3.000,00	6.793,40	-	-	6.793,40
2	32.185,60	4.021,00	2.772,40	6.793,40	-	-	6.793,40
3	37.923,34	4.262,26	2.531,14	6.793,40	-	-	6.793,40
4	33.405,34	4.518,00	2.275,40	6.793,40	-	-	6.793,40
5	28.616,26	4.789,08	2.004,32	6.793,40	-	-	6.793,40
6	23.593,84	5.076,98	1,716,98	6.793,40	-	-	6.793,40
7	18.158,83	5.381,01	1.412,39	6.793,40	-	-	6.793,40
8	12.454,96	5.703,87	1.089,53	6.793,40	-	-	6.793,40
9	6.408,86	6.046,10	747,3384	6.793,40	-	-	6.793,40
10	-	6.408,86		6.793,40	-	-	6.793,40
TOTAL	-	**50.000,00**	**17.934,00**	**67.934,00**	**689,34**	**1.000,00**	**69.623,34**

Resumo

Nesta aula, iniciamos o estudo dos sistemas de amortização de empréstimos. Você aprendeu os conceitos envolvidos nesse estudo, assim como também aprendeu a utilizar esses conceitos no estudo do Sistema de Amortização Francês.

Exercício 11.1

1. Um empréstimo no valor de R$ 400.000,00, entregue no ato e sem prazo de carência, deve ser pago em cinco prestações mensais, utilizando o Sistema Francês de Amortização, a uma taxa nominal de 60% ao ano. Qual o valor da amortização do saldo devedor embutida na primeira prestação mensal?

   Resposta: R$ 72.389,91.

2. Considere a planilha abaixo referente à amortização pelo sistema francês,

Mês	*Saldo devedor*	*Amortização*	*Juros*	*Prestação*
0	25.000,00	-	-	-
1			250,00	2.918,51
2				2.918,51
.				
.				

   Qual o valor dos juros relativos ao mês dois?

   Resposta: 223,31.

3. Uma dívida de R$ 50.000,00 vai ser amortizada, através do Sistema Francês de Amortização, em oito prestações anuais à taxa de juros de 20% ao ano. Calcule o saldo devedor após ter sido paga a terceira prestação.

   Resposta: R$ 38.967,64.

4. Um apartamento é comprado por R$ 25.000,00, sendo R$ 5.000,00 de entrada, e o restante a ser pago pelo Sistema Francês de Amortização em 12 prestações mensais, à taxa de 2% ao mês, com 4 meses de carência. Construir a planilha para:

   a) pagamento dos juros devidos durante a carência;

   b) capitalização dos juros no saldo devedor durante a carência.

5. O financiamento de um equipamento no valor de R$ 10.000.000,00 é feito pelo Sistema Francês em 20 trimestres, com 5 trimestres de carência. A operação foi contratada à taxa nominal de 20% ao ano, sendo os juros capitalizados durante a carência. Qual é o saldo devedor no 16º trimestre?

   Resposta: R$ 3.631.483,60.

6. Um microcomputador é vendido pelo preço de R$ 2.000,00, mas pode ser financiada com 20% de entrada e a uma taxa de juros de 96% ao ano (Tabela Price). Sabendo-se que o financiamento deve ser amortizado em 5 meses, qual o total de juros pagos pelo comprador?

   Resposta: R$ 403,65.

7. Um equipamento, no valor de R$ 50.000,00, é financiado pelo sistema francês em 8 semestres, com 3 semestres de carência, sendo os juros capitalizados durante a carência. Sabendo-se que a taxa contratada é de 20% ao semestre, determine o valor de cada prestação.

   Resposta: R$ 21.650,81.

8. Um equipamento é vendido através de um financiamento em 12 prestações mensais e iguais, sendo que a loja exige 20% sobre o preço à vista como entrada. A taxa de juros compostos da loja é de 18% ao ano (Tabela Price). A primeira prestação no valor de R$ 500,00 vence um mês após a compra. Determine o valor do equipamento.

   Resposta: R$ 6.817,19.

9. Um financiamento no valor de R$ 900.000,00 é amortizado em 30 parcelas mensais pelo Sistema Francês de Amortização sem carência. A taxa de juros contratada é de 2,8% ao mês. Determinar:

   a) o valor de cada prestação mensal;
   b) o valor da amortização e dos juros referentes aos 19º mês.

   Respostas:

   a) R$ 44.738,24.
   b) R$ 19.538,24.

10. Um empréstimo de R$ 200.000,00 foi contratado à taxa de 10% ao ano para ser quitado em 5 prestações anuais pelo Sistema Francês de Amortização. Calcular a planilha respectiva, considerando-se o IOF de 1% sobre o principal mais encargos descontados no ato.

Auto-avaliação

Você conseguiu resolver todos os exercícios propostos sem dificuldade? Se a resposta foi sim, então, você entendeu os conceitos e as técnicas de resolução dos problemas que envolvem o Sistema Francês de Amortização. Se não conseguiu, não desista. Volte à aula e reveja os conceitos e exemplos. Não deixe que suas dúvidas se acumulem.

ISBN 978-85-7648-467-7

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense

UERJ
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Universidade Federal Fluminense
uff

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

UNIRIO

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

GOVERNO DO
Rio de Janeiro
SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

Ministério da Educação

BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL