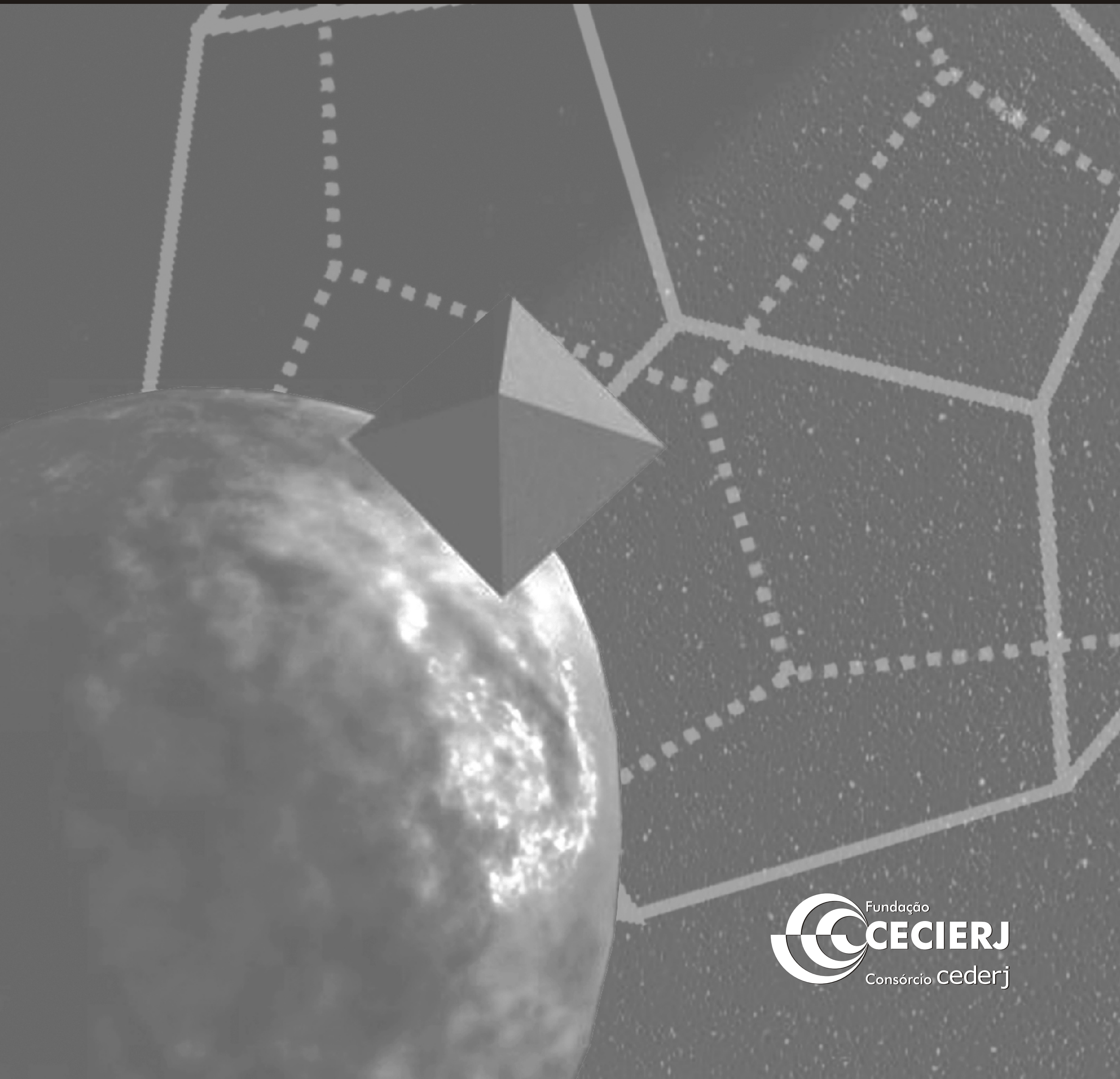
Módulo 1

Volume 1

Marcelo Almeida Bairral
Miguel Angelo da Silva

# Instrumentação do Ensino da Geometria



Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Fundação
CECIERJ
Consórcio cederj
Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

# Instrumentação do Ensino da Geometria

**Volume 1 - Módulo 1**

Marcelo Almeida Bairral
Miguel Angelo da Silva

GOVERNO DO
Rio de Janeiro
SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Ministério
da Educação
BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL

Apoio:
FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

# Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001
Tel.: (21) 2334-1569 Fax: (21) 2568-0725





## Material Didático

**ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO**
Marcelo Almeida Bairral
Miguel Angelo da Silva

**COORDENAÇÃO DE DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL**
Cristine Costa Barreto

**DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL E REVISÃO**
Anna Carolina da Matta Machado
Anna Maria Osborne
José Meyohas

**COORDENAÇÃO DE LINGUAGEM**
Maria Angélica Alves

## Departamento de Produção

**EDITORA**
Tereza Queiroz

**COORDENAÇÃO EDITORIAL**
Jane Castellani

**COPIDESQUE**
Nilce Rangel Del Rio

**REVISÃO TIPOGRÁFICA**
Kátia Ferreira dos Santos
Patrícia Paula

**COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO**
Jorge Moura

**PROGRAMAÇÃO VISUAL**
André Freitas de Oliveira

**CAPA**
Sami Souza

**PRODUÇÃO GRÁFICA**
Oséias Ferraz
Patricia Seabra





B163i

Bairral, Marcelo Almeida.
Instrumentação do ensino da geometria. v.1 / Marcelo Almeida Bairral. – 2ª. reimp. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.
246p.; 19 x 26,5 cm.

ISBN: 85-7648-074-3

1. Geometria. 2. Ângulos. 3. Poliedros. I. Silva, Miguel Angelo da. II. Título.

CDD: 516.15

**2010/1**

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.

# Governo do Estado do Rio de Janeiro

**Governador**
Sérgio Cabral Filho

**Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia**
Alexandre Cardoso

## Universidades Consorciadas

**UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO**
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

**UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO**
Reitor: Ricardo Vieiralves

**UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE**
Reitor: Roberto de Souza Salles

**UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO**
Reitor: Aloísio Teixeira

**UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO**
Reitor: Ricardo Motta Miranda

**UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO**
Reitora: Malvina Tania Tuttman

# Instrumentação do Ensino da Geometria

Volume 1 - Módulo 1

## SUMÁRIO


**Aula 1** – Desenvolvendo o pensamento geométrico ______ **7**
*Marcelo Almeida Bairral / Miguel Angelo da Silva*

**Aula 2** – Conceituando e definindo em Geometria ______ **19**
*Marcelo Almeida Bairral / Miguel Angelo da Silva*

**Aula 3** – Conceituando diagonal de um polígono ______ **29**
*Marcelo Almeida Bairral / Miguel Angelo da Silva*

**Aula 4** – Definição e conceito de ângulo ______ **37**
*Marcelo Almeida Bairral / Miguel Angelo da Silva*

**Aula 5** – Ângulos e integração curricular ______ **47**
*Marcelo Almeida Bairral / Miguel Angelo da Silva*

**Aula 6** – Diferenciando sólidos de poliedros ______ **59**
*Marcelo Almeida Bairral / Miguel Angelo da Silva*

**Aula 7** – Redescobrindo e construindo os poliedros regulares com canudos ______ **69**
*Marcelo Almeida Bairral / Miguel Angelo da Silva*

**Aula 8** – Redescobrindo os poliedros regulares ______ **77**
*Marcelo Almeida Bairral / Miguel Angelo da Silva*

**Aula 9** – Explorando elementos do cubo ______ **85**
*Marcelo Almeida Bairral / Miguel Angelo da Silva*

**Aula 10** – Explorando o tetraedro e o octaedro ______ **97**
*Marcelo Almeida Bairral / Miguel Angelo da Silva*

**Aula 11** – Estudando relações nos icosaedros e dodecaedros ______ **111**
*Marcelo Almeida Bairral / Miguel Angelo da Silva*

**Aula 12** – Inscrição e circunscrição de poliedros: os poliedros duais ______ **119**
*Marcelo Almeida Bairral / Miguel Angelo da Silva*

**Aula 13** – Euler e os poliedros ______ **129**
*Marcelo Almeida Bairral / Miguel Angelo da Silva*

**Aula 14** – Ampliando o mundo dos poliedros regulares:
os poliedros estrelados ____ **137**

*Marcelo Almeida Bairral / Miguel Angelo da Silva*

**Aula 15** – Analisando estruturas:
trabalhando plano e espaço conjuntamente ____ **149**

*Marcelo Almeida Bairral / Miguel Angelo da Silva*

**Referências** ____ **161**

**Módulo Prático** ____ **167**

AULA 1

# Desenvolvendo o pensamento geométrico

## Meta da aula

Apresentar o modelo de van Hiele sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico.

## objetivo

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

• Reconhecer a importância do estudo da Geometria, motivando-se para a sua aprendizagem.

## Pré-requisitos

Para que você encontre maior facilidade na compreensão desta aula, é importante os conceitos de:

– Cubo e cilindro.

– Vista (frontal, lateral, superior) de um objeto.

– Planificação de sólidos.

– Elementos (arestas, faces e vértices) de sólidos.

– Propriedades de polígonos.

– Teoria Piagetiana.

## INTRODUÇÃO

Você estudou Geometria no Ensino Fundamental, no Médio e no Superior? É possível que muito pouco ou nada. Lembra-se de que os conteúdos geométricos sempre ficavam no final dos livros didáticos? Esse fato não era desproposital! A razão desse descaso com o ensino de Geometria surgiu com a **MATEMÁTICA MODERNA**. Felizmente, a situação atual do ensino de Geometria é diferente e muitos cursos, escolas, universidades etc. já desenvolvem um trabalho mais atencioso com esse ramo da Matemática, tão importante e fundamental ao conhecimento humano. A Geometria surgiu como ciência empírica, isto é, para resolver problemas práticos. Nessa perspectiva, podemos pensar que o ser humano começa a aprender Geometria pelo simples fato de **ver**, **sentir** e **se mover** no espaço. À medida que crescem, as crianças começam a perceber características dos objetos desse **MUNDO VISUAL**, tais como: forma, tamanho, posição, movimento, ordem e crescimento. Como professores de Matemática, temos de proporcionar aos nossos alunos várias experiências que possam aumentar a compreensão do espaço que os cerca. Assim, as atividades propostas devem, dentre outros objetivos:

- ressaltar o aspecto formativo da Geometria;
- explorar a visão espacial;
- desenvolver e valorizar o aspecto dedutivo da disciplina;
- possibilitar diferentes caminhos para resolução de situações-problema.

Além disso, tais atividades devem guardar estreita relação com a vivência dos alunos, construindo conceitos utilizados no dia-a-dia, o que geralmente não tem acontecido nas escolas. Ao contrário, nossos alunos vêem a Geometria como um punhado de fórmulas arbitrárias que se aplicam a situações mirabolantes.

Nas décadas de 1960 e 1970, o movimento da **MATEMÁTICA MODERNA** influenciou o ensino de Matemática na maioria dos países ocidentais. Caracterizou-se por enfatizar exageradamente o rigor e o simbolismo próprios da teoria dos conjuntos, priorizar o ensino de Álgebra, em detrimento do ensino de Geometria, desprezar o significado das situações pela pouca atenção às aplicações cotidianas e privilegiar um rigor além das necessidades e capacidades dos alunos.

O **MUNDO VISUAL** é resultado de um processo lento, que cria um mundo de objetos, semelhantes ou diferentes, interdependentes e significativos.

**!**

A inclusão de problemas planejados, estruturados de acordo com o objetivo que se pretende e adequados ao desenvolvimento cognitivo do aluno, permite flexibilização do pensamento e utilização de variadas técnicas de resolução, devidamente fundamentadas. Assim, não estaremos reduzindo o ensino da Geometria à mera repetição e aplicação de fórmulas.

É por meio de um ensino voltado para situações experimentais e problemas desafiadores que podemos saber como a criança vai estruturando seu pensamento. A possibilidade de constituir conceitos permite estruturações cada vez mais complexas do pensamento geométrico. A cada novo problema, o pensamento se estrutura e se reestrutura para dar conta das restrições e peculiaridades da realidade que nele subjazem. As soluções peculiares de cada estudante, para problemas propostos, nos dão elementos para analisar os conceitos que estão sendo construídos. Para isso, o educador deverá procurar problemas de enunciado simples, mas que contenham algo diferente ou solução nova, várias soluções ou, ainda, que não possua solução. Às vezes, o mais importante em um problema não é ele em si, mas o raciocínio, a análise e as técnicas necessárias para sua resolução.

É preciso que o aluno observe, manipule, formule perguntas, hipóteses, relacione conceitos já aprendidos com os que vão surgindo, para chegar a conclusões válidas, desenvolvendo também a sua auto-estima, autoconfiança e autocrítica. Cabe ao professor criar oportunidades para que isso aconteça.

**MATERIAIS DIDÁTICOS** são todos aqueles objetos ou meios de comunicação que podem ajudar a descobrir, entender ou construir conceitos nas diversas fases da aprendizagem escolar.

Porém, o trabalho com a Geometria, explorando o espaço no qual a criança vive (sua casa, sala de aula etc.), seja através de problemas ou, até mesmo, utilizando recursos como pantógrafo, calculadora, computador, de nada adiantará, se não houver preocupação dos educadores com as mudanças necessárias no currículo de Matemática.

Viver a Geometria na escola pode ser uma experiência feliz, se seu processo de ensino-aprendizagem for também fundamentado em atividades lúdicas e construtivas. A construção de conceitos, a dedução de propriedades e a resolução de problemas geométricos oferecem grandes possibilidades de experimentação com **MATERIAIS DIDÁTICOS** adequados, como veremos ao longo do curso de nossa disciplina.

Pensamos que o ensino de Geometria deve iniciar-se pela visualização, pelo desenho e pela manipulação, permitindo familiarizar o aluno com um mundo de formas, figuras e movimentos sobre o qual se deve desenvolver, naturalmente, ao longo do processo, o formalismo e a simbologia específica.

Num **LABORATÓRIO**, os materiais podem ser classificados de muitas maneiras, ou seja: materiais dedicados `a comunicação audiovisual (retroprojetor, vídeos etc.), materiais para desenho (pantógrafo, compasso etc.), materiais de leitura (livros, jornais etc.), materiais para fazer medidas diretas ou indiretas (réguas graduadas, metro quadrado, metro cúbico, escalímetros etc.), materiais que são modelos (poliedros, polígonos, mosaicos etc.) e outros.

!

Elaborar aulas de Geometria através de recursos variados constitui importante base na aquisição de conceitos e suas relações; se desenvolvido de acordo com o nível intelectual do aluno, possibilita ensino construtivo. Assim, além de realizar cada atividade proposta, consideramos imprescindível que você vá construindo cada material sugerido e, desta forma, ao final desta disciplina, terá montado o seu **LABORATÓRIO PESSOAL DE GEOMETRIA**.

Juntamente com a idéia de valorizar características visuais e experimentais, nesta primeira aula também vamos estudar um pouco do modelo de **van Hiele**, sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico.

## DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO, SEGUNDO VAN HIELE

Segundo **PIAGET**, as crianças passam por estágios estáveis (em faixas etárias determinadas) de estruturação do pensamento: o sensório-motor, o pré-operacional, o das operações concretas e o das operações formais.

Dina **VAN HIELE** Gelgof e seu marido Pierre Marie van Hiele estudaram, na Holanda, o nível de maturidade geométrica de seus alunos.

Durante décadas, a teoria de **PIAGET** influenciou o currículo escolar. No início dos anos 1980, um casal de holandeses (os **VAN HIELE**), considerando as dificuldades de seus alunos de Nível Médio em aprender Geometria, propôs um modelo para organizar o ensino de Geometria de acordo com as habilidades psicológicas dos alunos.

Na tentativa de entender melhor e de procurar explicações para o desencontro entre o ensino da Geometria e sua compreensão, por parte dos alunos, o casal van Hiele elaborou um modelo teórico a respeito do desenvolvimento do pensamento geométrico, que teve repercussão no Brasil e no resto do mundo.

!

No Brasil, o modelo obteve divulgação no início de 1990, trazido pela professora Lilian Nasser (Universidade Federal do Rio de Janeiro), que defendeu tese a respeito, na Universidade de Londres. Na Universidade Federal Fluminense, a professora Ana Maria Kaleff também foi uma impulsionadora do modelo, em seus trabalhos de pesquisa sobre formação (inicial e continuada) de professores.

O modelo descreve cinco níveis de raciocínio geométrico: básico, de análise, de dedução informal, de dedução formal e de rigor, que representam avanços na sofisticação da aprendizagem. Cada nível é caracterizado, por exemplo, por relações entre os objetos de estudo e a linguagem apropriada, como sintetizado no quadro seguinte (adaptado de NASSER *et alii*., 1998).

**Quadro 1.1:** Modelo de van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico

| Nível | Características | Exemplo com figuras planas |
|---|---|---|
| Básico | Propõem-se experimentações que verifiquem as propriedades de uma figura, sem relacioná-la com outras. Acentuam-se observações referentes a forma/tamanho. Não são reconhecidas partes que compõem o todo em uma figura geométrica, assim como não são identificadas relações de inclusão de uma classe em outra. Faz-se uso de vocabulário básico e propriedades insuficientes para comparar e ordenar figuras geométricas. | Classificação de quadriláteros (recortes) em grupos de quadrados, retângulos, paralelogramos, trapézios e losangos. |
| de Análise | Inicia-se a compreensão de que figuras geométricas são formadas por partes, e a definição de um conceito consiste numa listagem de propriedades que caracterizam o referente conceito. De modo geral, o aluno começa a estabelecer relações entre figuras geométricas. | Descrição de um quadrado, através de suas propriedades: 4 lados, 4 ângulos retos, lados iguais, lados opostos paralelos. |
| de Síntese ou Dedução informal | Percepção da necessidade de definição precisa e de que uma propriedade pode decorrer de outra; desenvolvimento de argumentação lógica informal, ordenação e inclusão de classes. | Descrição de um quadrado, através de suas propriedades mínimas: 4 lados iguais e 4 ângulos retos. O retângulo é um paralelogramo, pois também possui os lados opostos paralelos. |
| de Dedução | Desenvolvem-se as capacidades para compreender e elaborar deduções. Admite-se a possibilidade de demonstrar resultados de diferentes maneiras, assim como elabora-se a visão da Matemática como sistema axiomático, através de definições e teoremas. | Demonstrações de propriedades dos triângulos e quadriláteros, utilizando congruência de triângulos, proporção etc. |
| de Rigor | Elaboram-se as habilidades de realizar deduções formais abstratas. Pode-se trabalhar em sistemas axiomáticos diferentes, isto é, estudar GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS. | Estabelecimento e demonstração de teoremas em uma Geometria finita. |

**GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS**
São aquelas desenvolvidas a partir do questionamento do quinto postulado de Euclides: o das paralelas. O postulado diz que "por um ponto não pertencente a uma reta dada, passa uma única reta paralela a essa reta".

Observe que em cada atividade há uma indicação de tempo previsto de realização. Cada relógio equivale a um minuto. Lembre-se de que você pode acessar a Plataforma para realizar as atividades da aula e, desta forma, conhecer novas possibilidades para sua auto-aprendizagem.

Um dos aspectos importantes do modelo de van Hiele é que a evolução de um nível para outro depende mais das atividades executadas pelos alunos que da sua maturidade. Para determinar o nível de van Hiele de seus alunos, o professor pode usar testes adequados, como os encontrados em Nasser (1998).

A seguir, realizaremos algumas atividades, para que você possa relembrar elementos geométricos básicos. Na avaliação, vamos praticar o modelo de van Hiele através das atividades que lhe estamos sugerindo. Você não precisa resolver detalhadamente cada atividade e tampouco se preocupar com sua resposta final. No desenvolver deste módulo você terá oportunidade de revisá-las. Nossa proposta é que você conheça cada opção para analisá-la no contexto da teoria de van Hiele.

***ATIVIDADES***

1. Quantos cubos existem na figura?

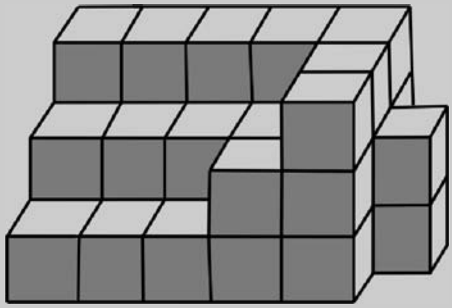


Figura 1.1

2. Desenhe a figura, vista da direção da seta.

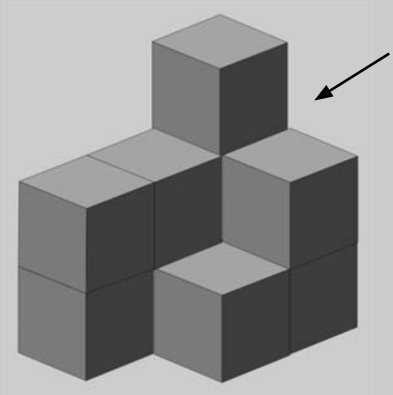


Figura 1.2

3. Das figuras abaixo, a da esquerda representa um sólido. Esse sólido tem arestas que não podem ser vistas. As arestas escondidas podem ser desenhadas, como na figura da direita.

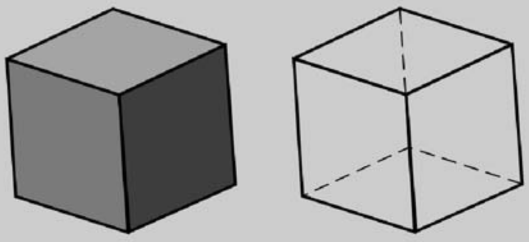


**Figura 1.3**

Dessa maneira, desenhe as arestas escondidas nos sólidos representados nas Figuras A, B, C e D.

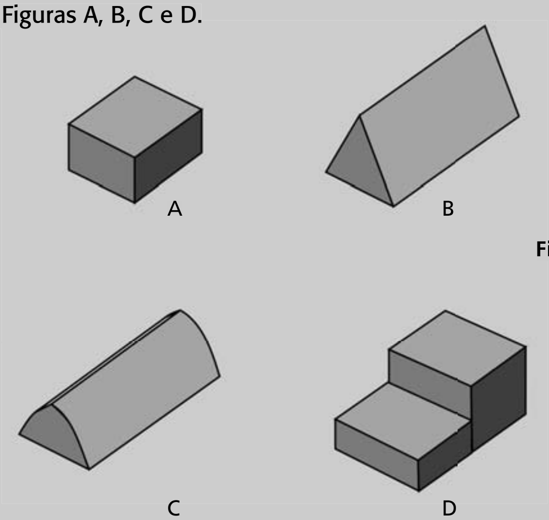



**Figura 1.4**

4. Uma embalagem está sendo desmontada. Cortamos algumas arestas e, finalmente, temos a caixa planificada, como a ilustrada a seguir. Quando a caixa estava montada, F era a tampinha da direita e E, a da esquerda. As faces E e F são opostas. Quais são os outros pares de faces opostas?

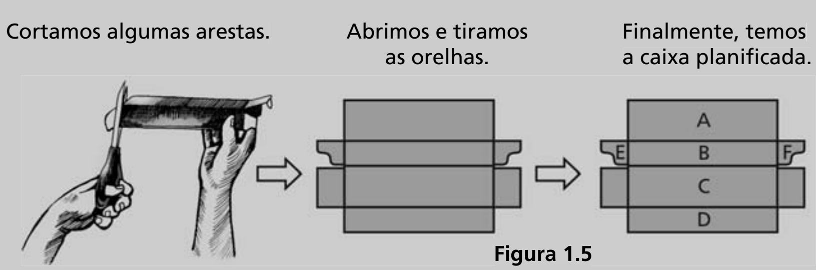



**Figura 1.5**

5. A professora Rosana de Oliveira sugere-nos uma atividade.
Material necessário: folhas de papel A4, fita adesiva, régua, grãos de feijão.
Pegar uma folha de papel e juntar a parte de cima com a de baixo, para formar um cilindro oco e sem tampas. As bordas devem estar bem juntas, sem buracos e sem passar por cima umas das outras. Usar a fita adesiva para fechá-las. Com outra folha, do mesmo tamanho, juntar a borda esquerda com a direita para construir outro cilindro. Colocar os dois cilindros de pé sobre a mesa. Um vai ser mais alto que o outro – chamar de A o mais baixo e de B o outro. Para evitar confusões, escreva uma letra em cada um.

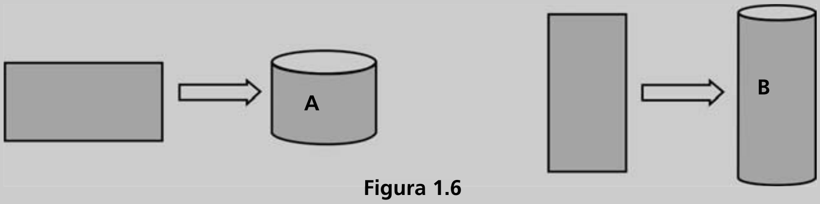



**Figura 1.6**

A mesma quantidade de grãos cabe nos dois cilindros? Justifique sua resposta.
Qual a forma da folha de papel A4? Utilize régua e meça as dimensões da folha e as do cilindro.

***COMENTÁRIO***

*Observe as atividades anteriores; apesar de terem um grande suporte na visualização, aprofundam elementos diferentes. Por exemplo, o primeiro é uma mera contagem e o segundo, a representação plana de uma vista do objeto. Na Atividade 3 há uma exigência de desenho de elementos (arestas) que não podemos ver; as 4 e 5 já envolvem planificação de sólidos, sendo que a quinta aprofunda análise e comparação do volume de cilindros de altura e bases diferentes, mas com a mesma área lateral.*

6. Na atividade anterior, você viu que o cilindro B armazena mais grãos que o A. Mostre o porquê disso.

***COMENTÁRIO***

*Observe que ao solicitar que o aluno compare o volume dos cilindros e justifique o processo de comparação, a tarefa passa a ter outro grau de dificuldade. Caso você tenha dificuldade, é importante construir os modelos.*

7. Quando seccionamos um prisma em três partes, seguindo as linhas marcadas na Figura F, qual das figuras A, B, C, D ou E mostra os três pedaços obtidos? Por quê?

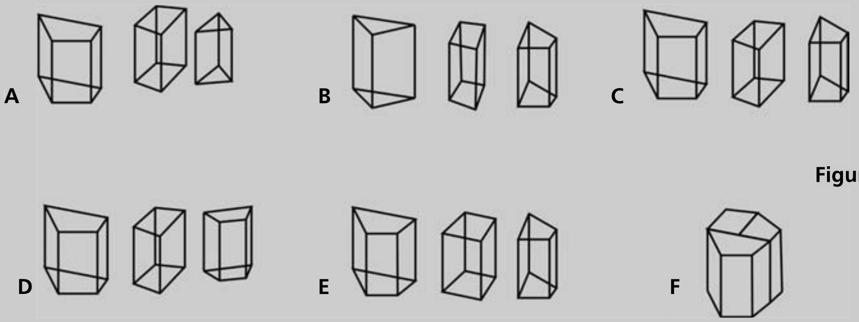



Figura 1.7

***COMENTÁRIO***

*Caso você tenha dificuldade para realizar esta atividade, pode pegar uma barra de sabão e fazer os cortes para visualizar.*

8. Qual(is) da(s) figura(s) seguinte(s) é(são) triângulo(s)?

Figura 1.8

9. Após trabalhar com polígonos, um estudante de 7ª série elaborou o esquema a seguir. Analise-o, identificando a definição utilizada para cada polígono.

Quadriláteros

↑

Trapézio

↑

Paralelogramo

↗ ↖

Retângulo Losango

↖ ↗

Quadrado

→ Significa: "é um tipo especial de"

Esquema 1.1

***COMENTÁRIO***

*Lembre-se de que o esquema foi construído a partir de uma definição que o aluno tinha para os quadriláteros. Assim, é importante que você procure identificá-la para analisar o esquema. Em aulas posteriores você poderá estudar mais sobre a importância da construção de esquemas na aprendizagem da Geometria.*

10. Compare o perímetro com a área das figuras abaixo. Justifique sua resposta.

**Figura 1.9.a**

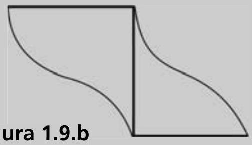


**Figura 1.9.b**

***COMENTÁRIO***

*Resolvida a confusão que nossos alunos têm sobre área e perímetro, a dificuldade maior destA ATIVIDADE é comparar a medida dos segmentos com o traçado curvilíneo. Uma alternativa é relacionar com o comprimento da diagonal.*

## CONCLUSÃO

É importante reconhecermos o momento de aprendizagem em que se encontra nosso aluno. Para isso, torna-se importante elaborarmos atividades variadas e estabelecermos um diálogo constante com ele.

## RESUMO

A construção do pensamento geométrico vai de processos mais simples (identificação de figuras) a outros mais complexos (deduções e demonstrações lógicas). Existem diferentes teorias sobre cognição e formação do raciocínio matemático, porém o modelo de van Hiele, propõe cinco níveis: básico, de análise, de dedução informal, de dedução formal e de rigor.

## ATIVIDADE

Identificar em que nível de van Hiele cada atividade proposta nesta aula estaria mais apropriado. Antes disso, você pode identificar o objetivo principal de cada exercício. Justifique também sua resposta. Lembre-se de que trocar idéia com um colega e conversar com o tutor deve ser uma prática constante em cada módulo.

| Atividade | Objetivo(s) | Nível(is) apropriado(s) | Justificativa |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |
| 5 | | | |
| 6 | | | |
| 7 | | | |
| 8 | | | |
| 9 | | | |
| 10 | | | |

**_COMENTÁRIO_**

*Uma mesma tarefa pode explorar características de um ou mais níveis. Assim, pode haver exercício que contemple habilidades de mais de um nível. Pesquisas que utilizaram o referencial de van Hiele mostraram que os alunos chegam à universidade apresentando características do terceiro nível: dedução informal. Com isso, com exceção da atividade 6, você deve ter percebido que as demais desenvolvem habilidades, predominantemente, do primeiro (visualização) e do segundo níveis (análise) e não há atividade dos níveis dedução formal e rigor.*

## AUTO-AVALIAÇÃO

Esperamos que você tenha se motivado para continuar estudando Geometria de uma maneira diferente e, desta forma, elaborar propostas inovadoras para sua aula. Esse é o nosso grande propósito neste módulo! Sobre as atividades, não se preocupe caso você tenha dúvida na resolução de algumas delas. Acreditamos que, mais adiante, você irá saná-las.

## INFORMAÇÃO SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, discutiremos a diferença entre definição e conceito, utilizando como exemplo a definição de figuras semelhantes e a construção da definição de **trianquad**.

AULA 2

# Conceituando e definindo em Geometria

## Meta da aula

Explicar a diferença entre definição e conceito.

## objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Estabelecer diferenças entre **conceito** e **definição.**
- Conceituar e definir figuras semelhantes.

## Pré-requisito

Para melhor entendimento desta aula, você deve rever a definição de figuras semelhantes.

## INTRODUÇÃO

Definição, teorema, corolário, lema, proposição, conjectura, conceito, axioma etc. são, entre outras, palavras muito utilizadas em Matemática. Um professor de Matemática, muitas vezes, precisa entender e esclarecer o significado dessas palavras para que seus alunos possam compreender melhor o discurso matemático e consigam pensar matematicamente. Nesta aula vamos nos concentrar na diferença entre **conceito** e **definição**.

Como sabemos, todas as idéias e objetos do mundo real são expressos por uma palavra e possuem um conceito, que é o significado que essa idéia ou objeto passa a ter para as pessoas. Podemos dizer que esse significado, ou seja, esse conceito, é intuitivo, tendo origem na experiência e compreensão dos indivíduos: o chamado "senso comum". Este conceito é quase sempre desprovido de rigor científico e geralmente é construído a partir do confronto pessoal entre exemplos e contra-exemplos.

> A convivência entre conceito e definição não é propriedade da Matemática. *Juristas* definem que pessoa é o ser humano que nasce com vida; que amante é a mulher teúda e manteúda. *Biólogos* relacionam ph e colog e que organismo é um conjunto de órgãos; *físicos* definem que trabalho é força vezes deslocamento; que força é massa vezes aceleração. No entanto, todos temos nossos conceitos de pessoa, amante, trabalho, força, ph ou organismo.

Entre matemáticos, no confronto entre conceito e definição, convém frisar que, por sua elegância e precisão, a definição causa grande feitiço nos professores; tal preferência, porém, prejudica grandemente o trabalho do educador matemático.

Consideramos que constitui erro pedagógico pensar que a construção do conhecimento matemático deva ser feita meramente a partir da definição de seus objetos e idéias. Para dizer a verdade, talvez conceito fosse mais importante, uma vez que vários objetos da Matemática (como ponto, reta, plano) não admitem definição. Mas, nada existe, nem na Matemática, nem fora dela, que não admita conceito.

## FORMANDO CONCEITOS E DEFININDO EM GEOMETRIA

> **!** Lembre-se, por exemplo, de quando seu professor de Geometria definiu polígono convexo: todo segmento que une quaisquer dois pontos internos do polígono está contido no próprio polígono. Essa definição é suficientemente esclarecedora do conceito que você tem de polígono convexo?

A construção e a aprendizagem de conceitos têm sido objeto de atenção constante de educadores matemáticos. Para melhor compreensão de como os estudantes constroem as suas **IMAGENS CONCEITUAIS**, bem como os fatores que influenciam esse desenvolvimento, é necessário, segundo **HERSHKOWITZ** (1994), uma análise dos conceitos e de sua estrutura matemática. Para a autora, boa parte dos conceitos geométricos pode ser considerada como uma conjunção. Por exemplo, um triângulo isósceles pode ser visto como a seguinte conjunção: (i) *um triângulo*, (ii) *possuir dois lados* (iii) *que são congruentes.*

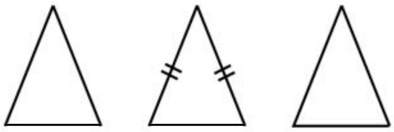


**Figura 2.1:** Triângulo isósceles.

Na idéia de **VYGOTSKY** (1991), um conceito agrupa os objetos de acordo com um atributo. As ligações dos elementos de um complexo ao todo, e entre si, podem ser tão diversas quanto os contatos e as relações que de fato existem entre os elementos.

Ele complementa afirmando que os atributos necessários e suficientes para definir um conceito são estabelecidos pelas características dos elementos encontrados no mundo real, selecionados como relevantes pelos diversos grupos culturais. Os atributos relevantes têm de ser abstraídos da totalidade da experiência. Por exemplo, para que um objeto seja denominado "triângulo", ele deve *ter três lados*, independentemente de sua cor ou tamanho. E mais, a presença de um mesmo conjunto de atributos relevantes permite a aplicação de um mesmo nome a objetos diversos.

> O processo de desenvolvimento conceitual tem início na primeira infância, e crianças mais jovens captam primeiro a aparência total da figura. Isto é feito através de códigos visuais. Tal visualização é um instrumento necessário na formação dos conceitos geométricos. Ao longo do processo ensino-aprendizagem é desejável que os alunos baseiem seus julgamentos e raciocínios nos atributos relevantes (definições) e que superem todas as tendências visuais.

> Enquanto os conceitos matemáticos são derivados de sua definição matemática, a **IMAGEM CONCEITUAL** é o conceito refletido na mente do indivíduo.

> Rina **HERSHKOWITZ** é uma reconhecida educadora matemática e pesquisadora do Weisman Institute (Israel).

> Lev Semyonovich **VYGOTSKY** foi um psicólogo russo que contribuiu valiosamente para a Psicologia do Desenvolvimento. Leia *Pensamento e linguagem*, uma de suas obras mais importantes.

**LADOS HOMÓLOGOS** são os lados correspondentes de duas figuras semelhantes.

Definição não é o mesmo que conceito. Todo conceito tem componentes e se define por eles. Como dissemos, um triângulo isósceles tem componentes (i, ii, iii) e se define por (i)+(ii)+(iii).

Apesar de a Matemática só admitir definições precisas, o processo de construção de uma definição envolve aspectos relevantes (críticos) e não-relevantes (acríticos). Por exemplo, matematicamente falando, duas figuras são semelhantes quando possuem (a) **LADOS HOMÓLOGOS** proporcionais e (b) ângulos correspondentes congruentes. Assim, (a) e (b) são os atributos necessários e suficientes para falar de semelhança de figuras. Qualquer elemento conceitual dito a mais, apesar de ser considerado importante, passa a ser redundante.

Veja, a seguir, duas respostas (sobre semelhança) de alunos de 7ª série, ao comparar figuras.

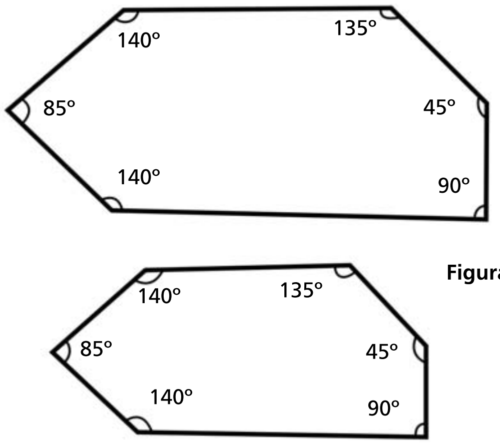



**Figura 2.2:** Hexágonos.

"São semelhantes porque possuem as mesmas características, as mesmas medidas e os mesmos ângulos, mas tamanhos diferentes. O menor é reduzido à metade do maior."

Ao utilizar, intuitivamente, o conceito de semelhança – "possuem as mesmas características"–, o aluno vai construindo também a sua definição de semelhança, falando de tamanhos diferentes (proporcionais) das figuras e da conservação das medidas dos ângulos, mas, ao fazê-lo, refere-se a atributos não relevantes como "o menor é a metade do maior".

> **!**
> O aluno vai conceituando à medida que vai entendendo figuras semelhantes. *Entender*, neste caso, pode significar reconstruir, buscar outros exemplos e redefinir.

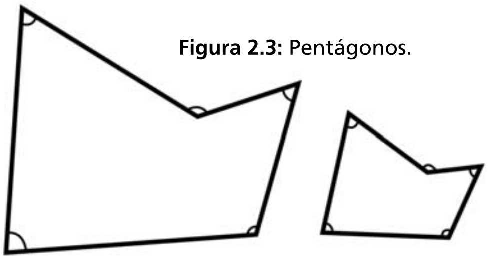


**Figura 2.3:** Pentágonos.

"São semelhantes porque os lados foram reduzidos numa mesma proporção e os ângulos são iguais. O menor foi reduzido duas vezes."

De acordo com a resposta anterior, o estudante se preocupou em fornecer mais duas informações (não-relevantes, no momento), indicando os ângulos agudos e os obtusos no próprio desenho e afirmando: "o menor foi reduzido duas vezes". Como destacou **BAIRRAL** (1998), os atributos não-relevantes têm importância no processo ensino-aprendizagem, pois, a partir deles, o aluno pode construir os relevantes, ou seja, os que realmente caracterizam o conceito.

> Marcelo **BAIRRAL** estudou, em sua pesquisa de mestrado em Educação Matemática, como seus alunos de 6ª e 7ª séries construíam o conceito de semelhança de figuras através de uma variedade de atividades e recursos didáticos.

> **Construímos nossas definições através de exemplos negativos (contra-exemplos) e positivos. Assim, devemos propor aos nossos alunos atividades que explorem não apenas os exemplos positivos de um conceito, mas também os negativos.**

É importante destacar que os atributos não-relevantes para a Matemática foram relevantes para o aluno e, sabendo disso, o professor poderá mediar o processo com outros exemplos e atividades.

***ATIVIDADES***

1. Você conhece um trianquad?
Escreva palavra(s) ou frase(s) que a palavra trianquad lhe faz pensar:
trianquad me lembra:

________________________________________________________
________________________________________________________
________________________________________________________

2. Nesta atividade (adaptada de Hershkowitz, 1994), você irá conceituar e definir um **trianquad** através de exemplos e contra-exemplos. Observe a seqüência de figuras de **1** a **19**. Veja cada uma delas, anote suas observações e, ao final, apresente dois ou mais atributos relevantes do trianquad. À exceção dos quadros 1 e 2, nos demais você encontrará informações que vão ajudá-lo a definir o trianquad.

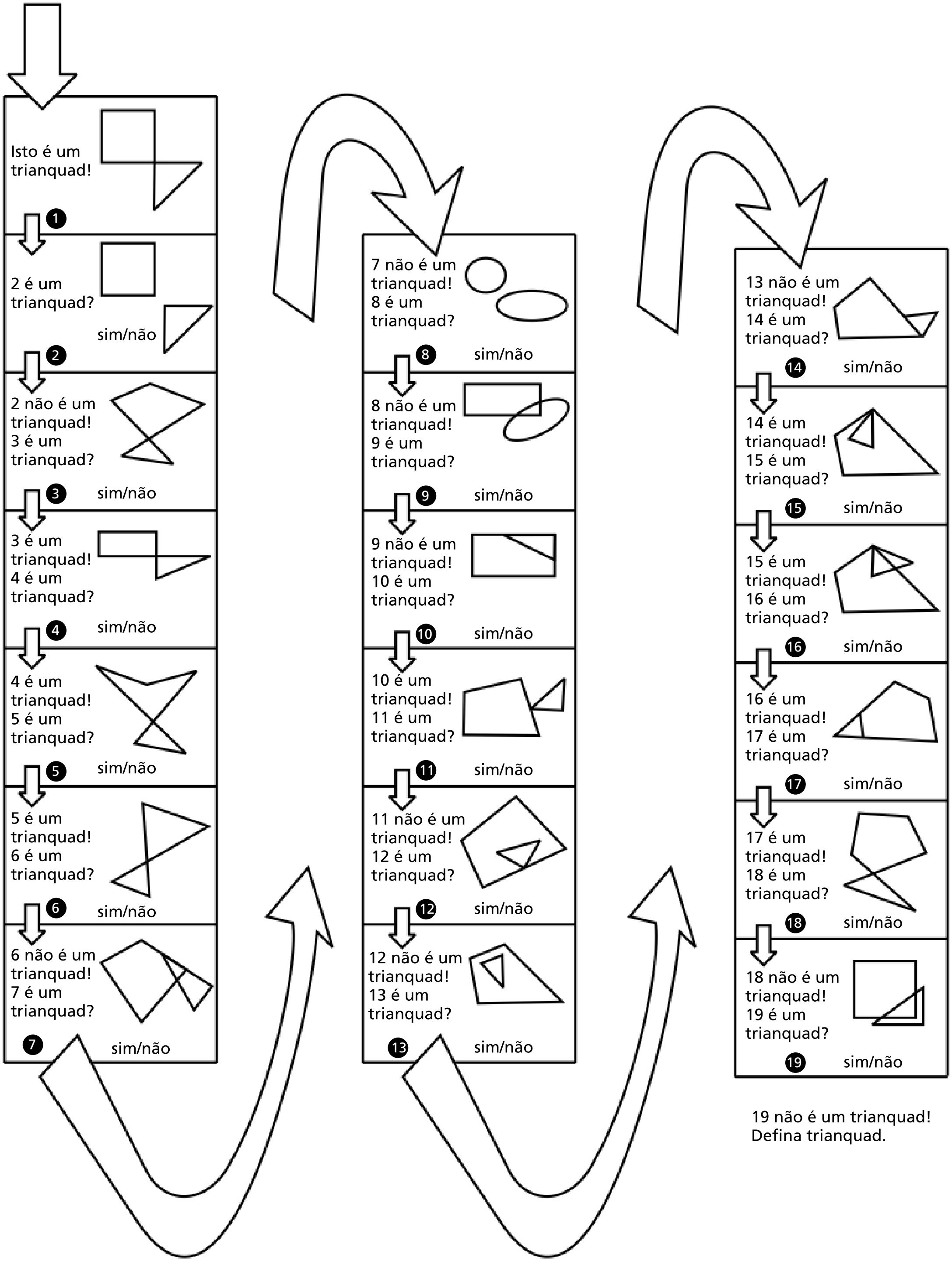



**Figura 2.4:** Atividade do trianquad.

A partir dos atributos que você identificou em cada ilustração, como você definiria um trianquad?

Trianquad é__________________________________________________

***COMENTÁRIO***

*Caso você tenha dificuldade e sinta-se inseguro(a) para definir um trianquad, não se preocupe, pois o exercício seguinte o ajudará. Veja como alguns alunos definiram um trianquad.*

**!**

Você deve ter percebido que irrelevante, acrítico e não-crítico estão sendo utilizados como sinônimos.

3. Agora vamos analisar respostas de alunos sobre o trianquad.

*Aluno 1*: "São figuras que podem estar contidas uma na outra, sobreporem-se ou estarem separadas uma da outra."

*Aluno 2*: "É uma figura geométrica formada por um triângulo e um quadrilátero, sendo que o triângulo é menor que o quadrilátero."

*Aluno 3*: "O trianquad é um polígono de 7 lados."

*Aluno 4*: "É uma figura geométrica constituída de um triângulo e um quadrilátero com um vértice em comum."

*Aluno 5*: "É uma figura geométrica formada por um triângulo e um quadrilátero, ligados por um vértice ou cujos lados passam por uma mesma reta suporte."

Analise, como professor, as cinco definições anteriores. Ou seja, identifique a que apresenta os atributos relevantes do trianquad e faça outras observações que considere necessárias sobre as demais.

| Resposta do | Atributos presentes | Comentários |
|---|---|---|
| Aluno 1 | | |
| Aluno 2 | | |
| Aluno 3 | | |
| Aluno 4 | | |
| Aluno 5 | | |
| Análise e comentário final: | | |

## CONCLUSÃO

Apesar da precisão de uma definição, ela nem sempre garante a compreensão do conceito. Como ressaltamos na aula anterior, você sabe que é importante estabelecer um diálogo constante entre professor e aluno(s), bem como apresentar uma variedade de atividades, exemplos e contra-exemplos.

### RESUMO

Um conceito é derivado de sua definição e, desta forma, possui *atributos relevantes* (críticos) e ***atributos não-relevantes*** (não-críticos). Os primeiros são aqueles que devem ser satisfeitos para termos um ***exemplo positivo*** do conceito, enquanto os não-relevantes são aqueles que possuem apenas ***alguns dos exemplos positivos***. Por exemplo, no caso da semelhança de figuras, são atributos relevantes: lados proporcionais e ângulos correspondentes congruentes. No entanto, podemos encontrar respostas de alunos referindo-se a *ângulo agudo, ângulo obtuso* e o fato de o lado *ser a metade*.

***ATIVIDADE***

No Módulo 1 de Geometria Básica, você estudou diagonal de um polígono.

"Uma diagonal é um segmento que liga dois vértices do polígono que não pertencem a um mesmo lado."

Liste os atributos relevantes desta definição. Reflita sobre outras definições que você conhece.

Atributo(s) relevante(s):______________________________

Liste atributos irrelevantes que não estão presentes na definição, mas que podem surgir na construção do conceito.

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

## AUTO-AVALIAÇÃO

Você conseguiu perceber com clareza a diferença entre conceito e definição? Percebeu que para o conceito de trianquad os alunos apresentaram diferentes definições e que em cada uma delas há elementos relevantes e não-relevantes? Mas se, além disso, você conseguiu realizar todas as atividades com sucesso, parabéns! Você pode e deve seguir em frente. No entanto, se alguma dúvida não foi solucionada, releia a aula, pois seu conteúdo agora já não lhe trará novidades. E se ainda assim, alguma coisa não ficar bem clara, procure um tutor no pólo.

## INFORMAÇÃO SOBRE A PRÓXIMA AULA

Atenção!
Realizar a auto-avaliação desta aula será pré-requisito importante para a próxima, em que iremos trabalhar a definição de diagonal de um polígono.
Na Aula 3 iremos construir um geoplano. Para não perder tempo, você deve providenciar um quadrado de madeira (compensado de 15mm) com 33cm de lado e 100g de pregos sem cabeça, com 4cm de comprimento.

AULA 3

# Conceituando diagonal de um polígono

## Meta da aula

Explicar o conceito de diagonal e instrumentalizar o seu ensino.

## objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Definir e conceituar diagonal de um polígono.
- Construir um geoplano.
- Utilizar o geoplano como recurso para a aprendizagem.

## Pré-requisitos

É importante que você reveja as noções de:

- Polígonos (o conteúdo de polígonos está na página 85 do Módulo 1 de Geometria Básica) e a distinção entre conceito e definição (Aula 2).

## INTRODUÇÃO

Na Matemática, assim como nas outras ciências, a idéia intuitiva de um conceito muitas vezes não é suficiente para descrevê-lo com precisão. Assim, freqüentemente a intuição falha, prejudicando o descobrimento de verdades matemáticas. Por isso, a Matemática tem necessidade de definir, isto é, de descrever com precisão suas idéias e objetos.

O Pentágono (Ministério da Defesa dos EUA) tem esse nome porque o prédio que o abriga tem esse formato.

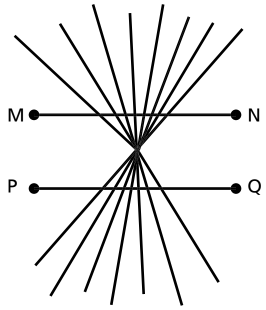



**Figura 3.1:** Ilusão de ótica?

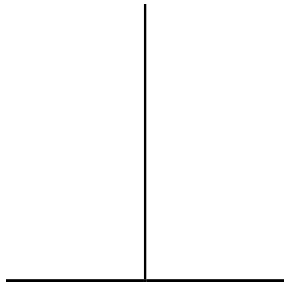


**Figura 3.2:** Qual é a maior linha?

Na Aula 1 você viu que a CONSTRUÇÃO CONCEITUAL é um processo contínuo e que a análise de um conceito difere conforme a experiência de cada indivíduo.
O GEOPLANO (tábua de pregos) é um material didático criado por Caleb Gategno. Gategno (1911-1988) foi um importante matemático e psicólogo, criador de vários materiais e situações didático-pedagógicas, como o *geoplano* e as *réguas de Cuisenaire*. Entre 1944 e 1988, publicou cerca de 120 livros e 500 artigos em revistas científicas de vários países. Nasceu em Alexandria (Egito), trabalhou na Inglaterra e nos Estados Unidos e morreu em Paris.

Por exemplo, todo torcedor do glorioso Vasco sabe o que é diagonal. Se perguntarmos a um deles o que é diagonal, ele responderá que é ***aquela faixa na camisa do time***. Essa resposta pode até esclarecer o que é diagonal, mas não poderia ser utilizada, por exemplo, para explicar que um triângulo não admite diagonal. Um matemático teria respondido que é o ***segmento de reta que une dois vértices não consecutivos de um polígono.*** Repare que a resposta do matemático descreve o objeto "diagonal" com precisão, isto é, nada foi dito que não fosse absolutamente necessário e nada que fosse necessário deixou de ser dito. Isto é uma definição!

**!**

É comum, por exemplo, no vôlei ou no futebol, as pessoas se referirem a "cortadas em diagonal" ou a "cruzamentos em diagonal". Mas, atenção, nem todos os cruzamentos ou cortes são feitos em diagonal!

No entanto, a definição de diagonal a partir de informações provenientes de diferentes contextos, cotidianos ou não, enriquece a CONSTRUÇÃO CONCEITUAL.
Um recurso muito utilizado na construção de conceitos geométricos é o GEOPLANO. Construa seu geoplano, pois você irá utilizá-lo para resolver vários exercícios nesta aula.

!

Gaste um tempo extra de 10 minutos e construa o seu geoplano. Veja como fazê-lo!

O geoplano pode ser confeccionado em tábuas e auxilia no desenvolvimento da criatividade e da visualização dos alunos. Sua utilização permite:

- construir e identificar figuras geométricas;
- identificar elementos, propriedades etc. de figuras geométricas;
- identificar transformações geométricas no plano;
- trabalhar com perímetros, áreas etc.

Como construir um geoplano?

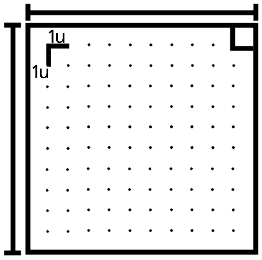



**Figura 3.3:** Exemplo de geoplano com malha quadrada.

Para se construir um geoplano (como o da **Figura 3.3**) deve-se proceder da seguinte maneira:

1º) cortar a madeira na forma de um quadrado, cujo lado meça 33cm;

2º) dividir o lado do quadrado em segmentos de 3cm de comprimento (horizontal e verticalmente);

3º) fixar pregos sem cabeça, com 2cm de altura, em cada uma das interseções.

Como utilizá-lo?

Para trabalharmos com o geoplano, podemos utilizar elástico, barbante ou lã coloridos e de tamanhos diferentes. Para isso, basta fixá-los em um dos pregos e esticá-los até os outros, formando figuras geométricas bem variadas.

Como você pôde observar, a montagem do geoplano pode ser feita pelos próprios alunos, mesmo pelos do terceiro ciclo (5ª e 6ª séries) do Ensino Fundamental, uma vez que é material didático de fácil construção e de baixo custo.

A utilização do geoplano pode ser observada em diversas regiões brasileiras, na confecção de peças de artesanato em geral (pulseiras, redes de pesca etc.). Sendo assim, utilizando o geoplano, o professor pode também integrar as aulas de Matemática às de Artes, por exemplo, construindo mosaicos e trabalhando com polígonos.

!

Acesse http://www.edugraf.ufsc.br/lab/softs/geoplano.html e conheça um geoplano.

***ATIVIDADES***

1. Nesta atividade, você vai construir, em seu geoplano, um hexágono, um pentágono e um octógono. A atividade é a seguinte: imagine que seus alunos irão decorar o pátio de sua escola para uma festa junina. Para pendurar as bandeirinhas de um canto a outro do pátio, eles decidiram que:
1º) nenhuma corda pode ligar cantos vizinhos;
2º) um mesmo par de cantos não pode ser ligado por mais de uma corda.
Se a escola tivesse um pátio em forma hexagonal, quantas cordas seriam penduradas? E se a escola tivesse um pátio pentagonal? E se fosse um pátio em forma octagonal? Qual a forma, com o menor número de lados, que permitiria pendurar cordas? Comente e justifique suas respostas.

2. Você sabe que podemos traçar diagonais em qualquer POLÍGONO CONVEXO e que o número de diagonais depende do número de lados?
Responda quantas diagonais possui: **(a)** um quadrilátero qualquer; **(b)** um hexágono; **(c)** um polígono de 100 lados; **(d)** um polígono convexo qualquer de **n** lados?

***COMENTÁRIO***

*Caso você tenha dúvida para responder às letras anteriores, principalmente a* **(c)** *e a* **(d)**, *não se preocupe. Vamos construir uma tabela que poderá ajudá-lo. Por exemplo, começando com um polígono de menor número de lados, preencha o quadro a seguir, observe-o atentamente, só então responda às perguntas anteriores (a), (b), (c) e (d). Você também pode descobrir outras relações importantes entre os números do quadro!*

| Número de lados | Diagonais traçadas a partir de um vértice | Número total de diagonais traçadas a partir de cada vértice | Número total de diagonais distintas do polígono |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

*Caso necessite, você pode aumentar o número de linhas do quadro. De acordo com o seu interesse e grau de aprofundamento; ou seja, de acordo com outras descobertas e regularidades numéricas que você queira fazer, o tempo de realização desta atividade pode aumentar. Converse com seus colegas e com o tutor, mostrando a eles os seus descobrimentos a partir do preenchimento do quadro.*

3. Utilizando o geoplano, construa um quadrado ($Q_1$) que possua 25 unidades de área. Escolha um vértice e trace sua diagonal. A partir do vértice escolhido, construa outro quadrado ($Q_2$) dentro do $Q_1$. O que você observa? A diagonal dos quadrados construídos está sobre a mesma reta suporte? Compare os lados dos quadrados e escreva a razão entre os lados homólogos dos quadrados. Agora, construa um outro quadrado ($Q_3$) em que um dos vértices seja comum a $Q_1$ e $Q_2$. Qual é a razão entre os lados homólogos dos quadrados? O que você observa com as diagonais dos três quadrados? Ou seja, seguindo esse procedimento, é possível construir outros quadrados que possuam a diagonal sobre a mesma reta suporte? Justifique sua resposta.

No Ensino Fundamental, o professor pode deixar o aluno desenhar quantos polígonos quiser para preencher a tabela. Com essa atividade, temos a oportunidade de associar Geometria, Álgebra e Aritmética entre si.

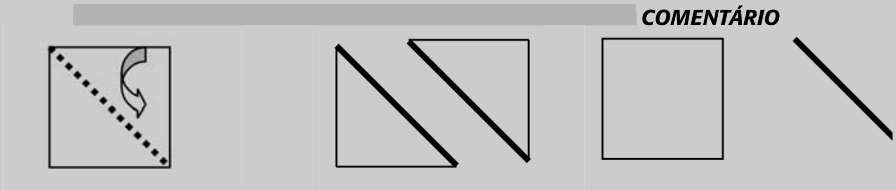
4. Construa no geoplano um retângulo ($R_1$) com 5 unidades de comprimento por 3 de largura e trace uma de suas diagonais. A partir do vértice escolhido anteriormente para traçar a diagonal, construa outro retângulo ($R_2$) que possua 10 unidades de comprimento por 6 de largura. O que você observa em relação à diagonal de $R_1$ e $R_2$? Escreva a razão entre os lados de $R_1$ e $R_2$.
Construa agora um retângulo ($R_3$), com um vértice comum a $R_1$ e $R_2$, que possua 2 unidades de largura por 4 de comprimento. As diagonais passam por alguma mesma reta suporte? Por quê? Escreva a razão entre os lados de $R_1$ e $R_3$ e de $R_2$ e $R_3$. O que você observa?
Se você desenhar um retângulo com 10 unidades de largura por 6 de comprimento, as diagonais estarão sobre uma mesma reta suporte? Por quê?
O que deve acontecer com as dimensões de cada retângulo, para que as diagonais estejam sobre alguma mesma reta? Dê outro exemplo.
A partir das observações acima, como você conceituaria retângulos semelhantes? Quais seriam os atributos relevantes?

***COMENTÁRIO***

*Os retângulos da Atividade 4 são, na verdade, retângulos homotéticos, com centro de homotetia no vértice, que é mantido comum. Reveja as Aulas 16 e 17 do seu módulo de Construções Geométricas.*

5. Você sabe que, além do geoplano, podemos utilizar outros recursos e procedimentos para explorar o conceito de diagonal. Por exemplo, conforme ilustrado a seguir, através de uma simples dobradura e um corte podemos marcar a diagonal de um quadrado e perceber que seu comprimento é maior que a medida do lado do quadrado.

***COMENTÁRIO***



**Passo 1:** Pegue um quadrado e dobre por uma diagonal.

**Passo 2:** Recorte pela dobra.

**Passo 3:** Compare o comprimento dos lados do quadrado com o da diagonal.

*Dependendo do objetivo do professor, ele pode simplesmente querer que seu aluno saiba dessa diferença de comprimento, atividade que pode ser feita por alunos de 5ª e 6ª séries. No entanto, se ele quer que o estudante perceba a relação entre o comprimento da diagonal e o lado do quadrado* ***(diagonal é igual ao lado do quadrado vezes a raiz quadrada de 2)****, a tarefa pode passar a ter outra e maior dificuldade. Como você faria, para mostrar essa relação a seus alunos de 8ª série?*

## CONCLUSÃO

Em Matemática, embora tenhamos sempre a preocupação de definir e descrever com precisão nossos conceitos, devemos ter consciência de que, na escola, esse processo deve ser o mais natural possível, de maneira que o mesmo não prejudique o desenvolvimento das idéias matemáticas de nossos alunos.

## RESUMO

A diagonal de um polígono é um segmento que une vértices não-consecutivos. O geoplano é um recurso que pode ser construído pelos alunos e utilizado na aprendizagem desse conceito e, também, no trabalho com polígonos.

## ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Considere o polígono formado pela linha que une as três varetas de uma pipa. Trata-se de hexágono. As varetas da pipa são diagonais desse polígono? Por quê?

***COMENTÁRIO***

*Um desdobramento interessante desta atividade pode ser: faça essa pergunta para várias pessoas que não sejam matemáticos e observe o atributo não-relevante que interfere nas respostas de cada uma.*

## INFORMAÇÃO SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, vamos conceituar e definir ***ângulo*** através de vários recursos que podem perfeitamente ser utilizados no Ensino Fundamental. Se você estiver esquecido dos conceitos ou da nomenclatura utilizada, reveja o Módulo 1 de Geometria Básica. Até lá!

## SUGESTÃO DE LEITURA COMPLEMENTAR PARA APROFUNDAMENTO

HERSHKOWITZ, R. Rio de Janeiro, Boletim **GEPEM** nº 32. Número Temático sobre Aprendizagem da Geometria, 1994.

A referência sugerida lhe será útil em várias aulas. Conheça o **GEPEM** (Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática) e suas publicações: http://www.gepem.ufrrj.br

AULA 4

# Definição e conceito de ângulo

## Meta da aula

Explicar o conceito de ângulo e instrumentalizar o seu ensino.

## objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Definir e conceituar ângulo.
- Apresentar diferentes didáticas que envolvem o conceito de ângulo.

## Pré-requisitos

Para facilitar o entendimento desta aula, é importante que você reveja a definição de ângulos e os atributos relevantes e não-relevantes em uma definição (Aulas 1 e 2).

## INTRODUÇÃO

Você viu que a construção de um conceito é um processo contínuo, pois nosso entendimento sobre um determinado objeto matemático é dinâmico e pode ser "ressignificado". E nossas definições são construídas através de exemplos negativos e positivos. Nesta aula, continuaremos esta discussão focando-nos nos ângulos. Você poderá refletir sobre sua concepção e conhecer diferentes exemplos que podem enriquecê-la.

## DEFINIÇÃO E CONCEITO DE ÂNGULO

No Módulo 1 de Geometria Básica, você estudou as definições relacionadas ao conceito de ângulo, de acordo com o que freqüentemente costuma constar dos manuais de Geometria do Ensino Fundamental. Para recordar:

> Ângulo é um figura formada por duas semi-retas distintas e não-opostas com a mesma origem. Definição 5, Módulo 1 de Geometria Básica.

Talvez, naquele momento, você não tenha dado importância aos **atributos relevantes** presentes nesta definição. Quais são eles?

Repare, agora, que a definição começa dizendo que um ângulo é uma figura. Isso é relevante para esta definição. Significa que o ângulo é apenas a linha e não a região do plano. A definição continua dizendo que a figura é formada por duas semi-retas, o que significa que, por esta definição, nossa figura se estende infinitamente. Além disso, as semi-retas são distintas e não-opostas, o que significa que os chamados ângulos nulo e raso ainda não estão definidos.

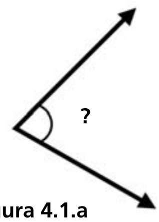



**Figura 4.1.a**

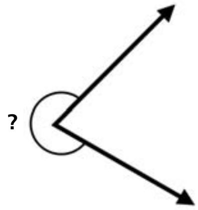



**Figura 4.1.b**

Você pode estar estranhando o detalhamento da definição. Parece que ela não corresponde bem ao que pensamos sobre ângulos. Parece ficar, pelo menos, a dúvida: na figura formada por duas semi-retas distintas, de mesma origem e não-opostas, aparentemente ficam desenhados dois ângulos. Qual vamos considerar, a **Figura 4.1.a** ou a **Figura 4.1.b**?

Esta é uma dúvida que a definição não esclarece, pois, para ela, ângulo é apenas uma figura e nada mais. Os autores do Módulo 1 de Geometria Básica optaram por definir o **interior do ângulo** em separado.

Dado um ângulo BÂC, define-se o interior de BÂC como o conjunto de todos os pontos que pertencem à interseção entre o semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AB}$ que contém C e o semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AC}$ que contém B.

Observe que a definição de interior esclarece qual a **região do plano** vamos considerar cada vez que desenharmos um ângulo.

!

No caso da **Figura 4.1.a**, o que ilustramos é o interior do ângulo ou a região angular.

Agora, dê uma parada e reflita sobre as seguintes questões: Quais são os atributos relevantes na definição de interior de um ângulo? Em sua concepção, ângulo raso e nulo já estão definidos?

***COMENTÁRIO***

*Como atividade complementar, você pode consultar outros autores e verificar como eles definem ângulo. Depois de refletir sobre as várias abordagens deste conceito, construa as suas próprias definições de modo a estabelecer e esclarecer todo o conceito.*

Bom, se você estiver num daqueles dias aborrecidos e sem paciência, você deve estar achando chata toda esta discussão. Afinal, ângulo é ângulo e todo mundo sabe disso! No entanto, sabemos que para os nossos alunos isso não é bem assim.

Por isso, quando nossos alunos vão construir o conceito de ângulo, devemos estar preocupados, principalmente nas primeiras experiências, com algumas questões, que, aliás, devem permear constantemente o trabalho docente. São elas:

Em que momento do currículo devemos introduzir o conceito de ângulo? Como contribuir para que os alunos desenvolvam habilidades de observação, comunicação, representação e comparação, tão importantes na construção do pensamento geométrico? Por que e para que nosso aluno deve aprender este conceito? Quais situações de aprendizagem você deve criar para atender a todas estas preocupações?

Em um trabalho anterior, Bairral (2002) critica o ensino tradicional deste conceito, lamentando:

> Ainda tenho visto, em diferentes espaços de formação em que atuo, que para o professor – ou futuro professor – o trabalho com ângulos somente acontece – ou deveria ocorrer – a partir da 6ª série e muito restrito ao plano (retas paralelas cortadas por transversal e soma dos ângulos internos dos polígonos mais comuns).

Para contribuir com mudanças, o autor propôs uma variedade de situações de aprendizagem que podem ser utilizadas em diferentes momentos do currículo do Ensino Fundamental, dentre as quais destacamos:

## Exemplo 1. Movendo meu corpo e formando ângulos

Movendo meu corpo!

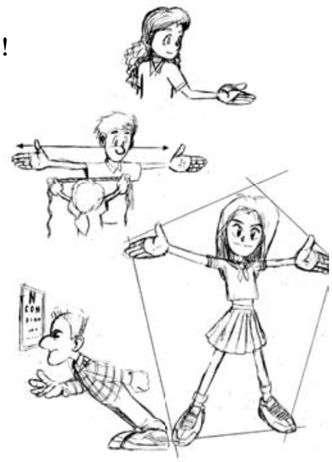


**Figura 4.2:** Formando ângulos com movimentos corporais.

## Exemplo 2. Vendo sombras e associando-as a ângulos

(a) Observando e comunicando o que fizemos:

> Esta manhã saímos para observar nossas sombras no pátio da escola. A primeira observação foi às 10h, quando o sol estava tão alto que fazia de cada aluno uma grande sombra no chão. A sombra do Luís foi a maior de todas. Quando o sol se movimentou e baixou, as sombras diminuíram. Ao meio-dia, as sombras ficaram muito pequenas e a sombra do Luís foi a menor de todas.

Relato do aluno Luan, de 10 anos, após a atividade proposta pela professora.

(b) Observando, representando graficamente e comparando:

É grande a sombra? Veja o gráfico desenhado por José e Pedro, alunos do 3º ciclo, sobre o comprimento das sombras durante o dia. Qual dos gráficos está correto? Por quê?

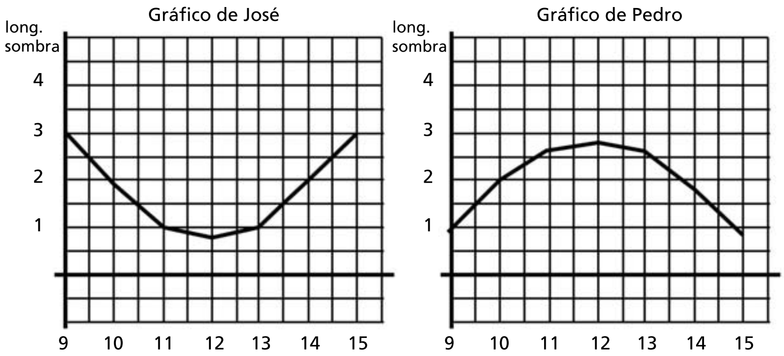



**Figura 4.3:** Ângulos e sombras.

Ângulo grande, sombra pequena; ângulo pequeno, sombra grande.
O ângulo sob o qual vemos um objeto não depende só da distância,
mas também de nossa posição.

Texto do aluno Henrique, de 14 anos.

## Exemplo 3. Característica de objetos, figuras etc.

(a) Medir os ângulos em vários triângulos dados e calcular aproximadamente a soma dos mesmos.

(b) Utilização de diferentes TANGRANs e outros quebra-cabeças.

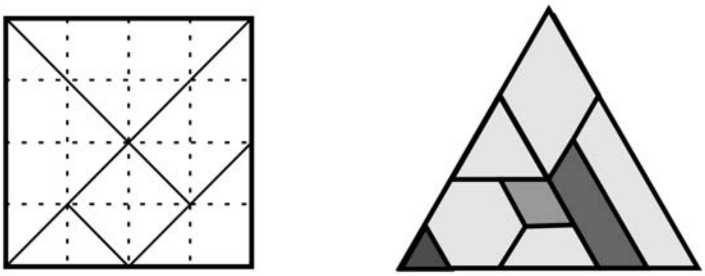


**Figura 4.4:** Ângulos em quebra-cabeças.

(c) Propriedade de polígonos ou sólidos.

## Exemplo 4. Ângulo como mudança de direção

(a) Vamos caminhar! Marque um ponto A de partida e avance em linha reta 10cm. Gire 90º à esquerda, avance 10cm, gire 135º à esquerda e avance 14cm. Quantos graus você tem que girar para voltar ao ponto de partida?

## Exemplo 5. Ângulos e campo de visão

(a) Em qual das embarcações o capitão tem o melhor campo de visão?

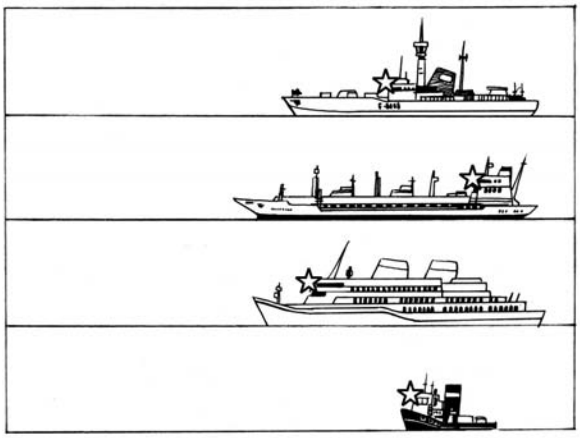


**Figura 4.5:** Ângulo e campo de visão.

(b) O ângulo (canto) da trave, no jogo de futebol.

(c) Ao tirar uma fotografia (de uma pessoa, de uma região para fazer um croqui etc.)

## Exemplo 6. Ângulos para orientação ou referência

A rosa dos ventos. Imagine que um barco está navegando em direção N e quer ir na direção NO. Até onde e quantos graus deve girar?

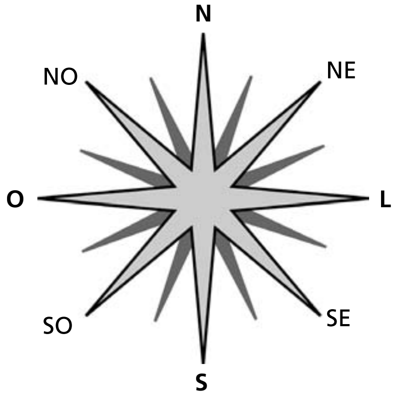



**Figura 4.6:** Rosa dos ventos.

## Exemplo 7. Ângulos e formas de expressão cotidiana

(a) Pergunta do aluno Felipe (11 anos).

> Professora, ontem ouvi minha mãe dizer: este ano vou dar uma virada de 360º em minha vida. Que quer dizer isso? Virar 360º graus? Como? Ela não vai voltar de onde começou?

(b) Os "cantos" dos polígonos. Um polígono é uma figura plana formada por vários ângulos. Em grego, *poli* quer dizer "vários" e *gonos* quer dizer "ângulo".

## Exemplo 8. Ângulos em situações dinâmicas (com possibilidades de movimentos) ou estáticas

(a) Observação do encontro de paredes (estática).

(b) A importância da "triangulação" em estruturas (construções, andaimes etc.) diversas para a rigidez (estática).

(c) Ângulos nos exemplos de "poliedros deslocáveis" com elásticos (dinâmica).

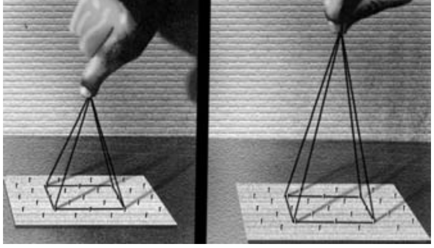


**Figura 4.7:** Ângulos poliédricos.

(d) Ângulos formados na interseção de planos (estática ou dinâmica).

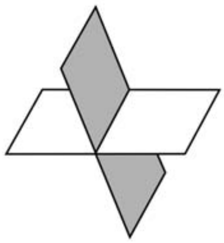


**Figura 4.8:** Ângulos diédricos.

**CABRI GEOMÉTRIE**
É um importante *software* para trabalhar os conceitos geométricos dinamicamente. Foi criado na França (Grenoble) **www.cabri.imag.fr** e atualmente é divulgado no Brasil pela PUC-SP em **www.cabri.com.br**

(e) Observando ângulos em atividades utilizando o *software* **CABRI GEOMÉTRIE** (dinâmica).

### Exemplo 9. Ângulos para analisar e tomar decisões importantes

Porcentagem e construção de gráficos (de setores) para análises variadas. Que tipos de gráficos apresentam nossos jornais? O que eles querem dizer? Como foram construídos? Eles apresentam falhas em sua construção?

Como você viu, cada um dos nove exemplos anteriores pode apresentar contribuições diferentes para o conceito de ângulo; dessa forma, promovem a construção da definição sobre diferentes perspectivas, sejam elas cotidianas ou não.

Vamos trabalhar um pouco mais com os exemplos apresentados, realizando apenas duas atividades.

***ATIVIDADES***

1. Analise cada exemplo apresentado anteriormente e pense em outras situações didáticas, cotidianas ou não, envolvendo ângulos.

| Exemplo | Minhas observações | Outras situações e desdobramentos que posso utilizar em minhas aulas |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 7 | | |
| 8 | | |
| 9 | | |

***COMENTÁRIO***

*Além da organização de um quadro conforme sugerimos, a leitura do texto de Bairral (2002) também pode ajudá-lo.*

2. Escreva outras respostas que os alunos poderiam apresentar para cada exemplo apresentado e pense em como você – como professor – lidaria com as mesmas.

***COMENTÁRIO***

*Após a realização dos exercícios anteriores, sugerimos que você compartilhe suas respostas com um colega e com o seu tutor.*

## AUTO-AVALIAÇÃO

**diário de campo**

Roteiro para elaboração do diário (BAIRRAL, 2001) para auto-avaliação.

Data________________________________________

Nome_______________________________________________________

Tema principal da aula_______________________________________

3 Palavras-chave_____________________________________________

Qual(is) foi(ram) o(s) objetivo(s) da(s) aula(s)?________________________________

O que você aprendeu?

Precisa de esclarecimento (para você, seus alunos etc.)?

Descreva brevemente um momento especialmente significativo no desenvolvimento da aula.

Identifique algo que o surpreendeu, que o fez refletir, levantar perguntas etc.

Procure explicar algo que o deixou confuso, alguma dificuldade encontrada, uma dúvida ou pergunta não esclarecida.

Sugestões e outros comentários que considere importantes.

Comentários sobre a bibliografia utilizada e sugerida.

***Atribua valores de 1 a 10:***

A aula como um todo.

Você, a sua interação com seus colegas e com o tutor.

Os exercícios e os exemplos utilizados.

Os verbetes explicativos e sugestões.

***COMENTÁRIO***

*Você não precisa elaborar o seu diário seguindo todas as perguntas na ordem apresentada. No entanto, procure observá-las em seu texto. Tente utilizar sempre a estrutura de um diário de campo para se auto-avaliar em cada aula. Mostre seu diário ao tutor e troque idéias com ele.*

## INFORMAÇÃO SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na aula seguinte, você verá outras possibilidades de dinamizar o trabalho com ângulos.

AULA 5

# Ângulos e integração curricular

## Meta da aula

Desenvolver o conceito de ângulo e instrumentalizar o seu ensino.

## objetivos

Após aprofundarmos os conhecimentos sobre conceito e definição, esperamos que você esteja habilitado a:

- Reconhecer a importância da definição e da conceituação de ângulo.
- Distinguir os aspectos histórico-metodológicos que podem dinamizar o trabalho docente na formação do conceito de ângulo.

## Pré-requisito

Para que você compreenda mais facilmente o conteúdo desta aula, é importante rever o conceito de ângulo e sua bissecção.

## INTRODUÇÃO

Como vimos na aula anterior, há uma variedade de situações didáticas que podem ser utilizadas pelo professor que trabalha com ângulos, desde as séries iniciais. Nessa perpectiva, nesta aula, você poderá fazer um pequeno passeio pela ***História***, pensar na presença de ângulos em ***contextos artísticos***, na ***determinação de formas geométricas*** (os alvéolos das abelhas), bem como nas possibilidades de ***integração curricular*** numa aula sobre essa temática.

## INTEGRAÇÃO CURRICULAR

Os conceitos, contextos teóricos e procedimentos vivenciados pelos alunos encontram-se organizados em torno de unidades globais, de estruturas conceituais e metodológicas compartilhadas por várias disciplinas. Assim, a integração curricular vai muito além da mera proposta de relacionamento entre as disciplinas; ou seja, devemos também integrar razão e emoção, teoria e prática, indivíduo e sociedade, conhecimento factual e experiência.

## ÂNGULOS AO LONGO DA HISTÓRIA

O desenvolvimento da idéia de ângulo deu-se em conseqüência do desenvolvimento da **CARTOGRAFIA**.

**CARTOGRAFIA** é a ciência da representação plana, parcial ou total, da Terra, segundo uma escala numericamente definida e determinadas convenções.

A cartografia portuguesa dos Descobrimentos, embora herdeira da cartografia náutica medieval do Mediterrâneo, com a chamada **carta-portulano**, apresenta, para além da imensa explosão informativa, algumas inovações e certo desenvolvimento nas técnicas de representação. A grande importância da **carta de rumos** dá-se através de quatro elementos: a introdução da escala de latitudes, os planos hidrográficos com vistas de litorais, a fictícia graduação de longitudes e o registro de sondas.

**Figura 5.1:** Carta de rumos de Cananéia a Ilhabela.

Para saber mais sobre **carta-portulano** e **carta de rumos** visite os *sites* www.aquimaria.com/html/forum-cartografia1.html e www.sportnautica.com.br/nautica/cartanautica.htm

Você sabe como diferentes civilizações utilizavam as noções sobre ângulos, ao longo da História? Por exemplo, há mil anos antes de Cristo, os babilônios já faziam observações baseadas nos ângulos, como podemos ver nos vestígios deixados em placas de argila: as chamadas ***tabletas***.

Então, você poderia se perguntar: Outras culturas utilizavam o conceito de ângulo? Como o faziam? Para quê? Não valeria a pena conversar com um colega e com o seu tutor?

Acesse: www.planeta.terra.com.br/.../mesopotamia/hist2.htm

## ÂNGULOS, PAVIMENTAÇÕES E CONTEXTOS ARTÍSTICOS

Você sabe que podemos pavimentar quaisquer superfícies planas de diferentes modos. No entanto, o padrão que utilizamos para fazê-lo influi, por exemplo, na estética e na quantidade de material necessário. Assim, a propósito da pavimentação de superfícies planas, podemos pensar em situações do tipo: é possível pavimentarmos com qualquer formato de piso, sem deixar "buracos"? É preciso que a cerâmica seja feita no mesmo formato? Se utilizássemos formatos distintos de cerâmica em uma mesma pavimentação, o que aconteceria?

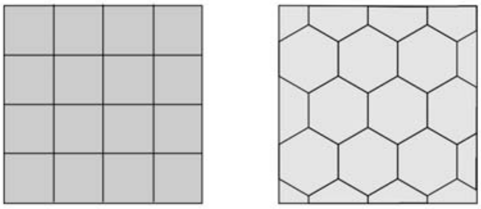


**Figura 5.2:** Pavimentação quadrada e hexagonal.

A seguir vemos, à direita, a malha da esquerda pintada. O que muda, quando fazemos esse tipo de decoração? Que formas geométricas são mais visíveis? Que diferenças podemos identificar entre a malha da esquerda e a da direita?

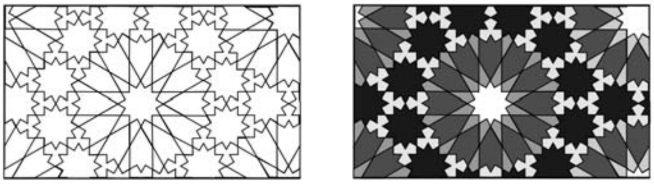


**Figura 5.3**

Enriquecendo esse tipo de dinâmica, podemos também inserir e despertar a atitude de buscar e valorizar ao componente cultural. Por exemplo, segue uma interessante figura demonstrativa de uma tecelagem do Havaí. E os nossos artesãos, que tipo de tecelagem fazem? O que fazem os nossos índios? Como enriqueceriam esse tipo de trabalho?

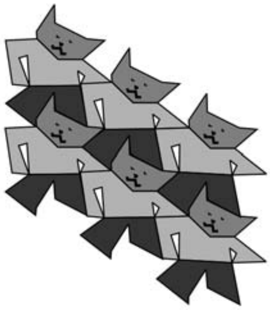


**Figura 5.4:** Tecelagem do Havaí.

## ÂNGULOS NA DETERMINAÇÃO DE FORMAS GEOMÉTRICAS IMPORTANTES

Na construção de seus alvéolos, as abelhas resolvem um problema de "alta matemática". A abelha constrói seus curiosos alvéolos com uma única finalidade: depositar o mel que fabrica de forma mais econômica, isto é, com o maior volume ou capacidade, para a menor porção de material empregado. Esses alvéolos são feitos de cera e, neste plano de construção, é preciso que a parede de cada alvéolo sirva também ao alvéolo vizinho. Logo, o alvéolo não pode ter forma cilíndrica, porque, do contrário, não haveria paredes comuns e o desperdício de material seria enorme. É preciso, pois, utilizar uma forma prismática.

Os prismas (ou alvéolos) devem encher totalmente o espaço sem deixar interstícios. As paredes devem ser comuns. Só há três únicas maneiras de se fechar o espaço com prismas regulares e iguais, sem deixar interstícios. São elas: (**1**) com prismas quadrangulares iguais (ângulos de 90º); (**2**) com prismas triangulares regulares iguais (ângulos de 60º) e (**3**) com prismas hexagonais regulares iguais (ângulos de 120º). Observem que 60º, 90º e 120º são divisores de 360º e também ângulos internos de polígonos regulares. Basta verificar qual das três bases terá maior área para um mesmo perímetro. Assim, as abelhas preferiram o prisma hexagonal, por ser o mais econômico.

**Figura 5.5:** Alvéolos em forma hexagonal.

## ÂNGULOS E INTEGRAÇÃO CURRICULAR: MATEMÁTICA, FÍSICA E EDUCAÇÃO FÍSICA

Refletindo sobre uma possível integração curricular com a Física, também podemos pensar nos ângulos das inclinações (subidas/descidas) de estradas e nas inclinações (alinhamento/balanceamento) das rodas/pneus de um carro.

Em Silva (2000), encontramos uma interessante motivação para discussão sobre ângulos no futebol. **João Saldanha**, comentarista esportivo, sentenciava:

> "Na hora do pênalti, é só o jogador dar um chute forte, rasteiro e no canto, que goleiro nenhum pega. "

Pois é, na sua monografia de graduação, Silva provou que Saldanha estava certo. Considerando que a marca do pênalti fica a 11 metros do goleiro; que a trave tem 7,32m; que o goleiro leva 0,7s para agir e consegue uma impulsão de 24km/h; e, num chute fraco, a bola viaja a uma velocidade de 90km/h, você pode calcular o ângulo de direção do chute?

***ATIVIDADES***

1. Faça as contas para descobrir que pênalti perdido é culpa do cobrador.

***Ângulos no contexto matemático***

Uma vez construído o conceito de ângulo, o professor de Matemática deve estar consciente de que esse conceito é um dos principais pilares do desenvolvimento da Geometria. Bastaria lembrar que, com resultados elementares sobre paralelas cortadas por uma transversal, chegamos à Lei Angular de Tales, daí para a semelhança de triângulos, passando pelo Teorema de Pitágoras, e alcançando a Trigonometria.

No caso de uma seqüência dedutiva para ângulos, Eves (2002) sugere a seguinte atividade:

2. Admita que: (1) a medida de um ângulo central de um círculo é a do arco correspondente; (2) a soma dos ângulos de um triângulo é um ângulo raso; (3) os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais; (4) uma tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência. Prove, então, a seguinte cadeia de teoremas:

a. Um ângulo exterior de um triângulo é igual à soma dos internos não-adjacentes a ele.

b. A medida de um ângulo inscrito num círculo é a metade da medida do arco correspondente.

c. Um ângulo inscrito num semicírculo é reto.

d. A medida de um ângulo formado por duas cordas de um círculo que se interceptam é a semi-soma das medidas dos dois arcos correspondentes.

e. Se duas secantes a um círculo se interceptam, a medida do ângulo formado por elas é a semidiferença das medidas dos arcos correspondentes.

f. A medida do ângulo formado por uma tangente a uma circunferência e uma corda pelo ponto de tangência é a metade da medida do arco correspondente.

g. Se uma tangente e uma secante a uma circunferência se cortam, a medida do ângulo formado por elas é a semidiferença dos arcos correspondentes.

h. Se duas tangentes a uma circunferência se cortam, a medida do ângulo formado por elas é a semidiferença dos arcos determinados.

***COMENTÁRIO***

*Caso você tenha um pouco mais de tempo, verifique a validade de cada letra de (**a**) até (**h**), através de construções geométricas e, até mesmo, no programa **Cabri Geomètrie** (www.cabri.com.br), que será muito importante em seu aprendizado.*

Continuando, sabemos que problemas não resolvidos desde a Antigüidade, e que desafiam os amantes da Matemática até os dias de hoje, foram geradores do desenvolvimento da Geometria. A trissecção do ângulo constitui um dos três problemas famosos da Antigüidade e deve ser o mais popular, considerando-se que sua aparente simplicidade o torna ainda mais desafiador. Como pode ser tão fácil, pergunta-se, dividir um ângulo em duas partes e ser impossível dividi-lo em três, com **RÉGUA E COMPASSO EUCLIDIANOS**?

> A **RÉGUA EUCLIDIANA** não é numerada e o **COMPASSO** não pode ser usado como transferidor, pois ele se desmonta ao ser levantado do papel.

É possível que os gregos tenham tentado construir um polígono regular de nove lados, aquele que acarreta a **TRISSECÇÃO DO ÂNGULO** de 60º, dando origem a um dos três famosos problemas da Geometria Antiga.

> Além da **TRISSECÇÃO DO ÂNGULO**, outros dois problemas famosos foram: a duplicação do cubo, que consistiu em *encontrar o lado do cubo, cujo volume fosse o dobro de um cubo dado*; e a quadratura do círculo, que consistiu em *calcular o lado do quadrado cuja área fosse igual à área de um círculo dado*. Somente no século XIX foi estabelecida a impossibilidade de solução dos três problemas, com mais de 2000 anos de atraso!

As inúmeras tentativas de resolver o problema da trissecção deram origem a várias curvas planas, inclusive transcendentes, entre elas a Concóide de Nicodemus (240 a.C.), a Quadratriz de Hípias (425 a.C.) e a Espiral de Arquimedes (212 a.C.).

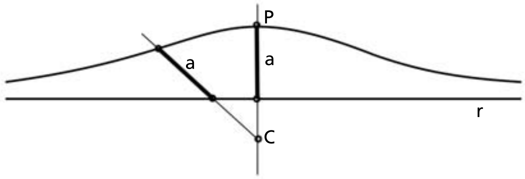



**Figura 5.6:** Concóide de Nicodemus.

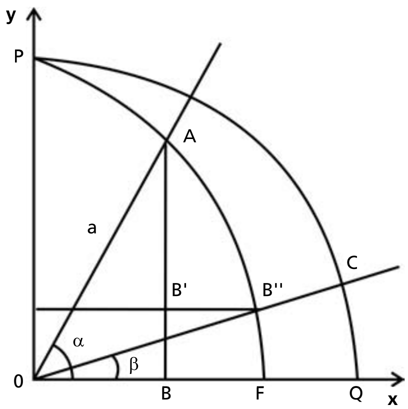



**Figura 5.7:** Quadratriz de Hípias.

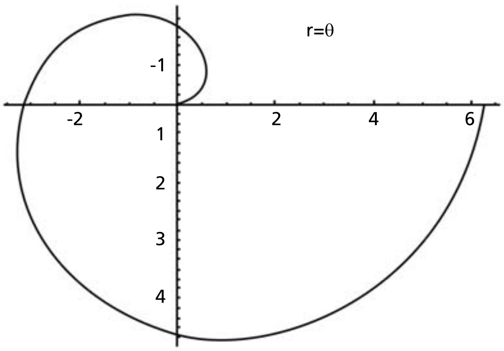



**Figura 5.8:** Espiral de Arquimedes.

**Albert Dürer (1471-1528)**
Foi um importante artista renascentista com preocupações com a perspectiva. De nacionalidade alemã e com longas estadas em Veneza (Itália), Dürer publicou, em 1525, a primeira edição de seu tratado de geometria para artistas.

Conforme Eves (2002), algumas tentativas resultaram em soluções aproximadas de boa precisão. O autor cita a construção feita pelo pintor **Albert Dürer**, em 1525.

Caso você esteja interessado em saber mais sobre a evolução da perspectiva matemática na arte, acesse: http://www.crs4.it/Ars/arshtml/arstoc.html

**!**

A régua e o compasso fixo parecem ter sido instrumentos de artistas dos séculos XV e XVII. Tanto Leonardo da Vinci como Albert Dürer descreveram construções baseadas em apenas uma abertura. Muitas se relacionavam à construção de polígonos regulares, úteis para os artistas em decoração e arquitetura.

Por exemplo, veja os procedimentos de Dürer para a trissecção de um ângulo (EVES, 2002):

> Tome o ângulo AÔB dado como um ângulo central de um círculo. Seja C o ponto que trissecciona a corda $\overrightarrow{AB}$ , mais próximo de B. Por C, erga a perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ e seja D o ponto onde ela corta a circunferência. Com B como centro e $\overrightarrow{BD}$ como raio, trace um arco que irá cortar em E. Seja F o ponto da trissecção de $\overrightarrow{EC}$ mais próximo de E. De novo com B como centro e $\overrightarrow{BF}$ como raio, trace um arco que irá cortar a circunferência em G. Então, $\overrightarrow{OG}$ é a reta que trissecciona aproximadamente AÔB. Para um ângulo de 60º, o erro é de apenas 1".

***ATIVIDADE***

3. Faça a construção acima para um ângulo de 60º e confirme a estimativa de erro.

***COMENTÁRIO***

*Com essa atividade, você pode perceber que as* ***construções geométricas*** *devem permear constantemente o trabalho com a Geometria. Eis uma ótima oportunidade para você relembrar seus conhecimentos sobre construções geométricas. Em aulas futuras, aprofundaremos discussão sobre a importância das construções no currículo de Matemática.*

## Conversando sobre o seu laboratório de Geometria

Você gosta de jogar dominó? Veja, a seguir, uma possibilidade de uso de dominós com conteúdos específicos de Matemática. No exemplo que sugerimos, você terá oportunidade de revisar ângulos na circunferência, ângulos complementares e suplementares e ângulos internos e externos de polígonos. Recorte as 24 peças do dominó abaixo, que consta do Módulo Prático, jogue e aprenda também com um colega!

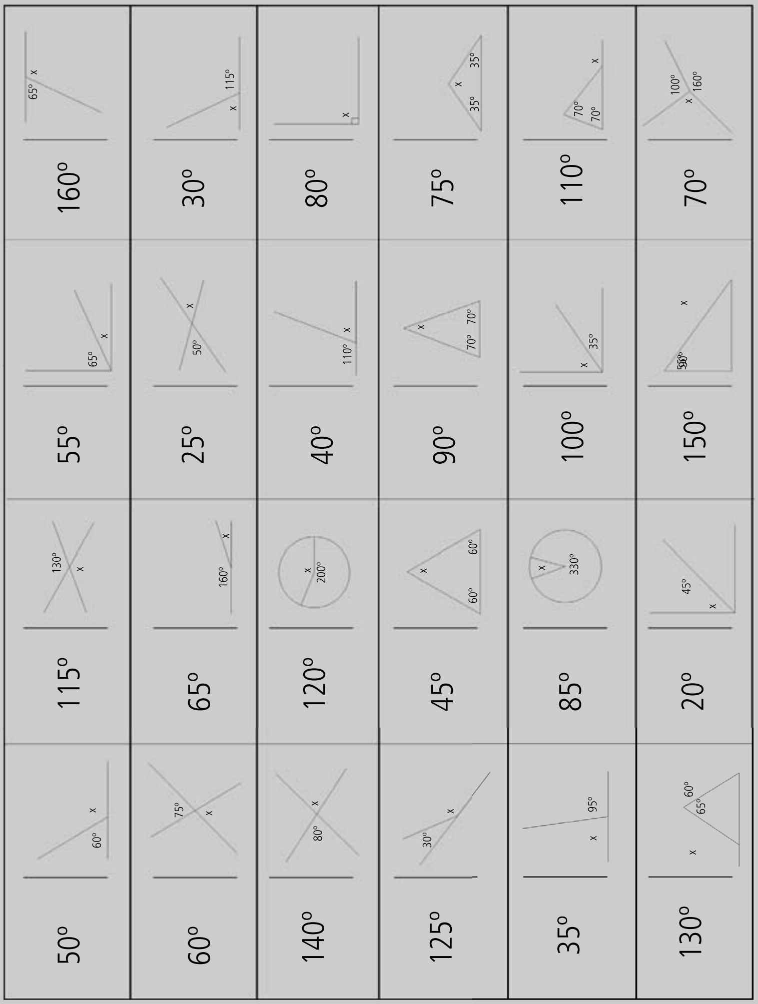


**Figura 5.9:** Dominó.

## CONCLUSÃO

O conceito de ângulo é um dos principais pilares do desenvolvimento da Geometria. Deve ser trabalhado continuamente no currículo escolar e através de uma variedade de situações de aprendizagem. Cada atividade trará diferentes enriquecimentos para a construção conceitual de ângulo. Vale destacar também que o trabalho com ângulos no espaço não pode ser esquecido pelos docentes.

**RESUMO**

É possível integrar Matemática, Arte, História e Cultura. Para isso, há outras situações que podem também inspirar a elaboração de diferentes recursos didáticos para suas aulas de Geometria numa ***prática integradora***. É importante lembrar que há três ***problemas clássicos*** (a duplicação do cubo, a triseccção do ângulo e a quadratura do círculo) da Geometria antiga, bem como perceber que ***História e Matemática*** caminham lado a lado e que a História também pode ser um interessante recurso nas aulas de Geometria.

## ATIVIDADE DE AVALIAÇÃO

Aprofunde seus conhecimentos sobre os dois outros problemas históricos (a duplicação do cubo e a quadratura do círculo). Reescreva seu diário da aula anterior, acrescentando novas informações sobre sua aprendizagem. Se possível, leia o diário de um colega.

## INFORMAÇÕES SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, distinguiremos sólidos de poliedros. Os poliedros possuem vários diedros. Pensar nos diedros significa pensar também em ângulos, porém, no espaço. Construiremos a planificação de alguns poliedros. Você deve ter à mão material de desenho (régua, esquadros, compasso, lápis e borracha) e cartolina. Aguarde nossos próximos encontros!

## SUGESTÃO DE LEITURA PARA APROFUNDAMENTO SOBRE CARTOGRAFIA

SILVA, I. (coord.) *Noções básicas de cartografia*. Rio de Janeiro: IBGE, 1999. Manuais Técnicos em Geociências nº 8.

# Diferenciando sólidos de poliedros

AULA 6

## Meta da aula

Instrumentalizar para o ensino de sólidos e poliedros.

## objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Definir e conceituar sólido e poliedro.
- Diferenciar sólido geométrico e poliedro.
- Utilizar sucatas e planificações como recursos para aprendizagem.

## Pré-requisitos

Para que você compreenda mais facilmente o conteúdo desta aula, é importante conhecer os sólidos geométricos mais comuns (prismas, cilindros, pirâmides, cones, esferas), e saber definir poliedro e polígono. Consideramos também importante que você tenha clareza a respeito dos aspectos relevantes e irrelevantes em uma definição.

## INTRODUÇÃO

O estudo analítico dos sólidos e das formas geométricas no Ensino Fundamental e Médio é imprescindível para o desenvolvimento da visão espacial do aluno. Temos observado, ao longo dos anos, que estudantes recém-chegados à universidade apresentam grande deficiência em visão espacial, o que pode ser responsável, em grande parte, pelo fracasso nas disciplinas iniciais, sobretudo, Cálculo Diferencial e Geometria Analítica. Pior ainda é observarmos que muitos deles concluem seus estudos com as mesmas dificuldades.

Provavelmente, estamos diante de um círculo vicioso de professores que mal conseguem ensinar Geometria a seus alunos, que, por sua vez, mal conseguem aprendê-la e, dessa forma, tornam-se docentes que também não conseguem ensinar Geometria diferentemente. Devemos ter o compromisso pessoal de interromper esse círculo vicioso!

> **!**
>
> O ensino da Geometria deve iniciar-se pelo estudo dos elementos do espaço e, a partir daí, desenvolver os elementos do plano.

Nesta aula, revisaremos o conceito de *sólido* e de *poliedro*, em uma abordagem que prioriza a intuição, a visualização e o aprofundamento de relações conceituais. Assim, acreditamos que você terá novas ferramentas para construir sua própria definição de sólido e de poliedro.

## IDENTIFICANDO E CONCEITUANDO SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Você sabe que qualquer região limitada do espaço é denominada de **sólido geométrico**.

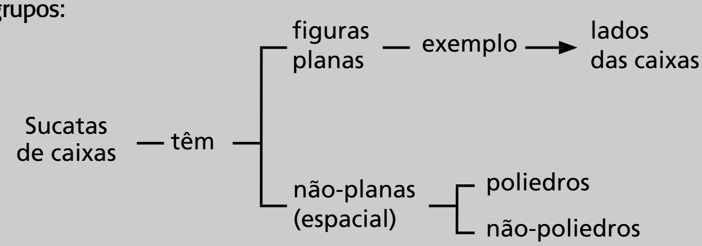
### *ATIVIDADES*

1. O professor Marcelo propôs a seus alunos de 8ª série que trouxessem modelos de caixas e embalagens diversas para a aula de Matemática. Veja alguns dos exemplos trazidos por eles:


**Figura 6.1**

A atividade solicitada foi que os alunos, reunidos em 4, arrumassem os sólidos em grupos, segundo os critérios que estabelecessem e, ao final, construíssem um resumo justificando os agrupamentos feitos.

Veja o resumo, em forma de MAPA CONCEITUAL, elaborado por um dos grupos:




**Esquema 6.1:** Mapa conceitual: grupo 2 – 8ª série

2. A seguir, apresentamos-lhe exemplos de formas geométricas espaciais.


**Figura 6.2.1**

**Figura 6.2.2**

**Figura 6.2.3**

**Figura 6.2.4**

**Figura 6.2.6**

**Figura 6.2.7**


**Figura 6.2.5**

Analise o mapa feito pelos alunos do professor Marcelo, corrigindo-o, reelaborando-o e inserindo novos conceitos e exemplos.

***COMENTÁRIO***

*A **nomenclatura geométrica** deve ser introduzida naturalmente ao longo das atividades. O fato de uma criança de 4 anos identificar – nomeando – um círculo, não significa que ela o compreenda em sua totalidade, ou seja, suas propriedades e demais elementos. No entanto, como vimos na Aula 1 esta identificação é um momento importante em nossa aprendizagem. É bom lembrar também que estamos trabalhando com exemplos de sólidos geométricos ou aproximações dos mesmos. Nesta atividade, por exemplo, temos exemplos com **nomes específicos** (**Figura 6.2.3**: toro; **Figura 6.2.4**: paralelepípedo retângulo**; Figura 6.2.6 pirâmide de base quadrada)** e outros modelos que nos remetem a uma idéia de sólido, isto é, como na **Figura 6.2.2 (idéia de esfera)**, **Figuras 6.2.1** e **6.2.5 (idéia de cilindro).***

**MAPA CONCEITUAL**
É um tipo de esquema cognitivo que relaciona conceitos hierarquicamente. O mapa conceitual permite ao professor identificar conexões que os alunos fazem entre conceitos, a partir de palavras-chave que os caracterizam. Pode ser utilizado no estudo pessoal ou na avaliação. No exemplo apresentado, foi usado como sondagem (avaliação diagnóstica).

**!**

Utilize modelos de embalagens diversas e monte sua coleção de sucatas. Seus alunos o ajudarão com muito entusiasmo!

Escolha **apenas três** modelos, observe-os e apresente 3 características (semelhantes ou diferentes) observáveis entre eles. Se possível, nomeie cada um deles.

| Modelo | Características observadas |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |

Qual(is) deles você classificaria como exemplo de sólido geométrico? E de poliedro?
Caso você esteja com dificuldades para responder a essas perguntas, consulte seus módulos de Geometria; não se preocupe, porém você conseguirá responder com mais segurança quando concluir esta aula.

## Identificando e conceituando poliedros

Veja as PLANIFICAÇÕES a seguir. Que sólido será formado em cada planificação? Justifique sua resposta. Monte cada planificação, confira sua resposta e estabeleça comparações (semelhanças e diferenças) entre os modelos de sólido construídos.

Figura 6.3.1

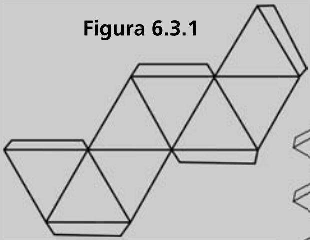


Figura 6.3.2

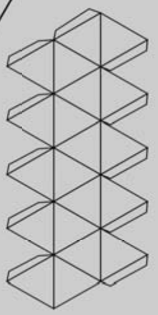


Figura 6.3.3

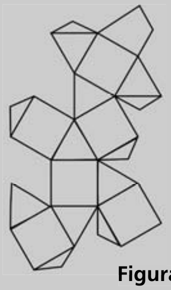


Figura 6.3.4

Que sólido será formado em cada planificação? Monte-os e estabeleça comparações (semelhanças e diferenças) entre os mesmos.

| Figura | Características observadas |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |

***COMENTÁRIO***

*É possível identificar o sólido antes de montá-lo? Caso afirmativo, o que você fez?*
*Se necessitar utilizar as planificações, poderá encontrá-las no Módulo Prático.*

As **PLANIFICAÇÕES** também são recursos importantes na representação de figuras geométricas espaciais. Quando "abrimos" e planificamos um sólido, podemos ter e criar outras imagens e estabelecer novas relações cognitivas, que muitas vezes não conseguimos fazê-los facilmente com um sólido "fechado". Por exemplo, o uso das planificações nos permite:

- construir modelos e identificar figuras geométricas;
- trabalhar a composição e a decomposição de sólidos geométricos;
- identificar relações espaciais;
- desenvolver processos comparativos.

Tenha planificações diversas em seu laboratório de Geometria! Acesse as páginas seguintes e saiba mais sobre as planificações:

http://www.apm.pt/apm/AeR/unipoli/planif.html

http://www.apm.pt/apm/AeR/unipoli/construc.html

Entre os sólidos geométricos, alguns, por sua simplicidade e utilidade geométrica, despertam maior interesse. É o caso dos poliedros. As planificações utilizadas neste exercício são exemplos de poliedros. No Módulo 5 de Geometria Básica você estudou a definição de **POLIEDRO.**

Assim, como você pode observar, os poliedros são casos especiais de sólidos geométricos.

**POLIEDRO**
É a reunião de um número finito de polígonos planos chamados faces, em que:
**a.** cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e somente um, outro polígono;
**b.** a interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia. Cada lado de cada polígono é chamado aresta e cada vértice de cada polígono é chamado vértice do poliedro.

4. Oriente-se pela **Atividade 1** e construa um esquema conceitual com os 7 modelos geométricos utilizados no **Atividade 2**. Você pode se guiar pelos nomes, pela forma, pelo número de faces etc.

5. Você se lembra das nossas **Aulas 1 e 2**, quando discutimos aspectos relevantes e irrelevantes em uma definição matemática? Agora, vamos identificá-los na definição de sólidos e na de poliedros. Ou seja, o que é relevante ou não para identificarmos esses entes matemáticos? Volte à definição de sólido e à de poliedro, identifique os atributos relevantes e irrelevantes nos mesmos e complete o quadro seguinte.

| Definição | Atributos relevantes | Atributos não–relevantes |
|---|---|---|
| Sólido | | |
| Poliedro | | |

## CONCLUSÃO

Na escola, o ensino da Geometria deve iniciar-se, desde as primeiras séries, pela análise das figuras geométricas espaciais e seus elementos característicos (volume, arestas, faces, secções, planificação, composição e decomposição, representações variadas). Conjuntamente, vamos explorando e desenvolvendo os elementos do plano (figuras planas, polígonos, área, perímetro).

**RESUMO**

Através da identificação e construção de modelos variados, estabelecemos diferença entre *sólido* e *poliedro*. Poliedro pode ser considerado um tipo de representação de um sólido, sendo formado pela reunião de um número finito de polígonos planos chamados faces. Podemos trabalhar com *planificações* e *sucatas* diversas, importantes recursos para a *aprendizagem significativa* da Geometria. Neste trabalho você pôde perceber, por exemplo, que nas *planificações*, além de podermos fechar o sólido, também há a possibilidade de visualizar suas faces (contar o número total, identificar formas) e vértices. Sobre as *sucatas*, além da variedade de formas que podemos encontrar em nosso cotidiano, a utilização das mesmas acrescentaria, comparando com as planificações, novas formas de planificar e representar um sólido.

## ATIVIDADE DE AVALIAÇÃO

Como atividade avaliativa desta aula, pedimos que você escreva, com suas próprias palavras, uma definição para sólido e para poliedro. Sugerimos também que você faça desenhos dos mesmos para exemplificar sua resposta.

***COMENTÁRIO***

*Lembre-se de que suas respostas devem ser inseridas em seu diário de campo. O diário é um tipo de instrumento para você se auto-avaliar e mostrá-lo ao seu tutor para que ele possa avaliar seu trabalho continuamente.*

## ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Pense na diferença entre os **recursos** utilizados nesta aula. Qual a contribuição das planificações e dos modelos em sucata para o desenvolvimento do pensamento geométrico? Ou seja, sabemos que eles nos permitem trabalhar elementos do espaço, mas cada um apresenta suas singularidades didático-conceituais.

| Recurso | Contribuição na aprendizagem da geometria do espaço |
|---|---|
| **Sucatas** | – Ao abrir cada caixa posso ver uma possível planificação |
| **Planificação** | – As arestas ficam bem visíveis e posso ver melhor que o vértice é o encontro das mesmas e também quantas arestas chegam a um determinado vértice |

**!**

Você pensou em utilizar a internet como recurso didático e, também, em sua auto-aprendizagem? Acesse http://www.profcardy.com/geodina/espacial_platao.htm e adiante-se para a próxima aula.

## INFORMAÇÕES SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, trabalharemos *poliedros regulares* e *poliedros convexos.* Você também conhecerá um novo recurso para suas aulas de Geometria: os *modelos com canudos.*

Será necessário ter à mão seu material de desenho: cartolina, canudos para refrigerante, linha de pipa e um pedaço de arame fino, com cerca de um palmo de comprimento.

**!**

O uso da História da Matemática também é outro recurso importante para a aprendizagem de nossos alunos. Você sabia que existe a Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat)?

## CONVERSANDO UM POUCO SOBRE A HISTÓRIA DOS POLIEDROS

Não é possível conhecer em que circunstâncias históricas começou e se desenvolveu o interesse pelos poliedros, identificados como sólidos de faces planas. Do ponto de vista matemático, existem fontes egípcias, chinesas e babilônicas contendo a resolução de problemas relativos a pirâmides.

No Papiro de Rhind, há diversos problemas relativos ao declive das faces de uma pirâmide. Como sugere V. Katz, o valor do declive era essencial para os construtores das pirâmides e, na realidade, os valores concretos referidos nesses problemas são aproximadamente iguais aos declives das três pirâmides de Gizé. No Papiro de Moscou é apresentada a fórmula para o cálculo do volume do tronco da pirâmide de base quadrada, embora a fórmula para o volume da pirâmide não apareça em nenhuma fonte egípcia. Assim, não se conhece como os egípcios chegaram àquela fórmula. No texto que acompanha a figura e os cálculos, é dito:

> Coloca-se o seguinte problema: um tronco de pirâmide tem 6 cúbitos de altura; 4 cúbitos de base, por 2 cúbitos no topo.
>
> Calcule com o 4, quadrando. Resultado 16.
> Calcule 2 vezes 4. Resultado 8.
> Calcule com o 2, quadrando. Resultado 4.
> Adicione este 16 com este 8 e com este 4. Resultado 28.
> Calcule 1/3 de 6. Resultado 56.
> É 56. Você encontrou o resultado certo.

Em notações atuais, a fórmula descrita neste texto egípcio corresponde a $V = h/3\ (a^2 + ab + b^2)$, onde $h$ é a altura da pirâmide, e $a$ e $b$ são os comprimentos dos lados das bases quadradas do tronco da pirâmide.

Nos *Nove capítulos da arte matemática (Jiuzhang Suanshu)* aparece a mesma fórmula, e também a fórmula do volume da pirâmide. Da mesma forma, existem tabletes babilônicos contendo problemas de cálculo de volumes de troncos de pirâmides e de outros sólidos (em forma de telhado de quatro águas) que parecem ter resultado da necessidade de calcular o volume de pilhas de grãos de cereal. No que diz respeito às fórmulas utilizadas, algumas são corretas, outras apenas aproximadas.

Em qualquer caso, todos esses documentos demonstram um interesse natural pelas formas poliédricas. Esse interesse não era apenas utilitário. Em escavações arqueológicas próximas a Pádua foi descoberto um dodecaedro etrusco (500 a.C.), do mineral esteatita, que era um objeto de jogo. Os egípcios usavam dados com a forma de icosaedros.

Os matemáticos gregos retomaram a questão do volume da pirâmide. Arquimedes, no livro do *Método*, mostra que Demócrito (que viveu no fim do século V a.C.) foi o primeiro a afirmar que o volume de um cone é 1/3 do de um cilindro tendo a mesma base e a mesma altura, e que o volume da pirâmide é 1/3 do de um prisma com a mesma base e a altura igual. Arquimedes, apoiando-se no método da exaustão, atribui a Eudóxio (409 - 356 a.C.) a demonstração destas duas proposições.

## SUGESTÃO DE LEITURA COMPLEMENTAR PARA APROFUNDAMENTO

LIMA, Elon. L. *et al*. *A Matemática do Ensino Médio.* V. 2, 3ª. ed. Coleção Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, edições 2000.

## SUGESTÃO DE LEITURA COMPLEMENTAR SOBRE MAPAS CONCEITUAIS

FARIA. *Mapas conceituais:* aplicações ao ensino, currículo e avaliação. São Paulo: EPU, 1995.

SANTOS, Vânia Maria P. (coord.) *et al*. *Avaliação de aprendizagem e raciocínio em matemática:* métodos alternativos. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 1997.

# AULA 7

# Redescobrindo e construindo os poliedros regulares com canudos

## Meta da aula

• Instrumentalizar o ensino dos poliedros regulares.

## objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

• Definir ângulo poliédrico.

• Definir e conceituar poliedros regulares.

• Utilizar os modelos com canudos como recurso para aprendizagem.

## Pré-requisitos

Para melhor desenvolvimento desta aula, sugerimos que você relembre a *definição de poliedros* e a *de polígonos regulares*. A *construção de poliedros com planificações* (Aula 6) é outro pré-requisito imprescindível.

## INTRODUÇÃO

Nesta aula, estudaremos os chamados poliedros regulares, também conhecidos como **poliedros de Platão**, fazendo uma abordagem que priorize intuição e visualização espacial. Na aula passada, você conceituou e definiu poliedro. Agora, vamos definir e conceituar poliedros regulares, além de reconhecer e relacionar seus elementos. Você verá que, partindo de nossa experiência com polígonos regulares, teremos algumas surpresas na aula de hoje. Utilizaremos o recurso dos canudos para produzir os esqueletos dos poliedros, que, diferentemente dos modelos de papel, permitem visualização interna. Faremos também breves incursões históricas, que devem ser complementadas na bibliografia e nos *sites* recomendados.

Ao longo do texto, serão introduzidas algumas atividades que devem ser realizadas antes de você dar continuidade à leitura, sob pena de prejudicar o entendimento da aula. Continuaremos construindo nosso laboratório de Geometria. Você deve ter à mão: material de desenho, papel, cartolina, tesoura, canudos para refrigerante (uns 20), linha de pipa e fita adesiva.

**PLATÃO**
**(427-347 A.C.)**
Apesar de não ter dado contribuições técnicas ao desenvolvimento da Matemática, tornou-se grande entusiasta da ciência, criando uma escola em cuja entrada se lia "Que ninguém que ignore a Geometria entre aqui". Seu entusiasmo era tanto, que ficou conhecido como o "criador de matemáticos". Em um dos seus diálogos, publicou longa descrição dos poliedros regulares, associando-os aos quatro elementos do Universo: fogo, ar, água e terra. Ao longo dos séculos, o Universo foi associado ao nome dos cinco poliedros. Leia mais sobre Platão na p. 11 do Módulo 5 de Geometria Básica.

**!**

A construção de planificações, sucatas de caixas, modelos sólidos e modelos vazados constitui recursos didáticos que devem fazer parte do laboratório pessoal de todo professor de Geometria.

## CONSTRUINDO POLIEDROS REGULARES COM CANUDOS

Os modelos de sólidos que normalmente utilizamos, construídos a partir da planificação, ocultam o interior do sólido e dificultam a visualização de diagonais e figuras inscritas, por exemplo. As pesquisadoras Ana Maria Kaleff e Dulce Monteiro Rei nos apresentam (1995) seus modelos confeccionados com **canudos** para refrigerante e linha, que constituem materiais baratos e de fácil acesso.

Além disso, os modelos são construídos de maneira fácil: basta cortar os canudos de um mesmo tamanho, que serão as arestas do poliedro, e uni-los com linha que passe pelo seu interior, de forma a montar o "esqueleto" do poliedro. Veja o belíssimo resultado!

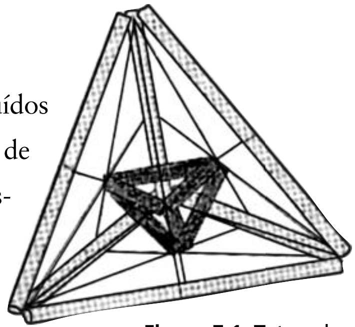


**Figura 7.1:** Tetraedros construídos com linha de pipa e canudos.

Os modelos, ou melhor, os "esqueletos" com canudos (ou similares) são exemplos de construções que podemos fazer para figuras espaciais. Sua utilização permite: (**a**) construir e identificar figuras geométricas; (**b**) representar estruturas em 3D ou 2D; (**c**) formar e representar poliedros e observar características, privilegiando arestas e vértices, dentre outras.

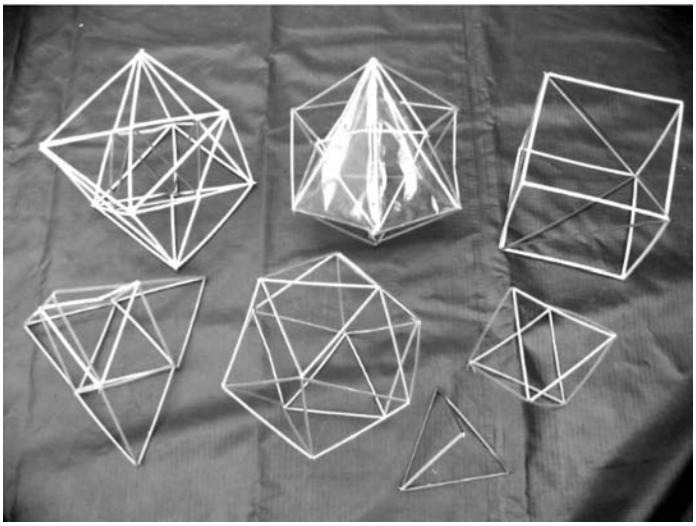


**Figura 7.2:** Exemplo de esqueletos de poliedros construídos com canudos.

***ATIVIDADE***

1. De posse de seu material, vamos agora construir os cinco poliedros regulares com canudos para refrigerante. Você pode realizar esta atividade com um colega.

***COMENTÁRIO***

*Você pode ter sentido dificuldade para unir as arestas. Uma solução fácil é compor todas as faces dos polígonos e depois uni-las, duas a duas, até fechar o poliedro. A maneira mais difícil é perpassar a linha por todas as arestas, de forma a fechar o poliedro com apenas um nó. Isso é um quebra-cabeça interessante! Não se preocupe, caso seu modelo não fique perfeito. Com a prática, você irá aperfeiçoando a construção. Se alguma dificuldade persistir, consulte seu tutor. Além dos modelos, que construímos em tamanhos facilmente manipuláveis, podemos também montar os "esqueletos" em tamanhos maiores e utilizando outros materiais. Veja as fotos seguintes. Você parou para se imaginar no interior de um sólido? Qual a contribuição dos modelos grandes na aprendizagem dos elementos da Geometria Espacial? Não seria importante também utilizarmos tais modelos em nossas aulas?*

**!**

Não deixe de fazer essa atividade, pois o material irá somar-se ao seu laboratório pessoal de Geometria. Seus alunos merecem aprender dessa forma!

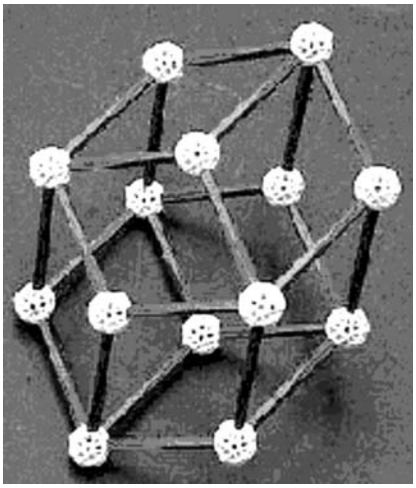


**Figura 7.3:** Exemplos de esqueletos construídos com outros materiais e em tamanhos diferentes. Fotos cedidas por George W. Hart. (http://www.georgehart.com)

**EUCLIDES**
Quase nada se sabe sobre a vida deste notável matemático grego. Até mesmo o período em que viveu, 325 a 265 a.C., não se tem como certo. O que se costuma afirmar é que Euclides fundou uma escola de Matemática em Alexandria e, com o conhecimento acumulado à época, escreveu *Elementos*. São 465 proposições em 13 livros. Além da Geometria, *Elementos* tratam também da teoria dos números e da Álgebra Elementar. Na verdade, a Geometria Elementar estudada hoje é desenvolvida do livro I ao VIII, sendo que o livro II trata das transformações de áreas e da Álgebra Geométrica, temas não estudados em nossas escolas. O livro VIII ocupa-se, também, das proporções contínuas e progressões geométricas. Os livros IX e X tratam da teoria dos números e os demais, da Geometria Espacial. Considera-se que, exceto a Bíblia, nenhum outro livro foi tão estudado quanto *Elementos*, de Euclides. Para saber mais, acesse:

http://www.numaboa.com.br/criptologia/historia/euclides.php;
http://matematica.br/historia/euclides.html;
http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2001/icm35/frames.htm

**!**

Acesse http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/vp.html e conheça outros exemplos de poliedros.

## POR QUE EXISTEM APENAS CINCO POLIEDROS REGULARES?

O fato histórico de que só existem cinco **poliedros regulares** pode nos surpreender, se lembrarmos que existe um número infinito de polígonos regulares; mas nos convenceremos facilmente diante dos argumentos, relativamente simples, que veremos nesta aula e na seguinte.

O livro XIII dos *Elementos*, de **EUCLIDES** (300 a.C.), fazia poucas referências aos poliedros regulares, chamando-os poliedros de Platão, mas ressalvando que, na verdade, três dos poliedros já eram conhecidos dos pitagóricos (500 a. C.): tetraedro, cubo (hexaedro) e dodecaedro e os dois outros, octaedro e icosaedro, deviam-se a Teeteto (369 a.C.).


**!**

Será interessante a leitura do livro paradidático *Os poliedros de Platão* e *os dedos da mão*, da coleção Vivendo a Matemática, Editora Scipione, escrito por Nilson José Machado, educador matemático e professor da Universidade de São Paulo.

**!**

Você está conhecendo outro recurso para suas aulas. O livro paradidático! Tente encontrar e ler o exemplar sugerido anteriormente, bem como outros. Eles são de leitura muito agradável e o auxiliarão bastante em sua aprendizagem e na elaboração de suas aulas. Converse também com o tutor sobre o potencial desse recurso.

Um **ÂNGULO POLIÉDRICO** é um ângulo sólido formado por vários ângulos, um em cada plano, dois a dois, com lados comuns e vértice comum a todos.

Para começar, é fácil notar que a soma dos ângulos internos dos polígonos que concorrem num mesmo vértice do poliedro deve ser menor do que 360º, pois, caso contrário, ou os polígonos estariam no mesmo plano, no caso de a soma ser igual a 360º, ou estariam se sobrepondo, no caso de a soma ser maior que 360º. Nos dois últimos casos, não conseguiríamos formar um **ÂNGULO POLIÉDRICO**.

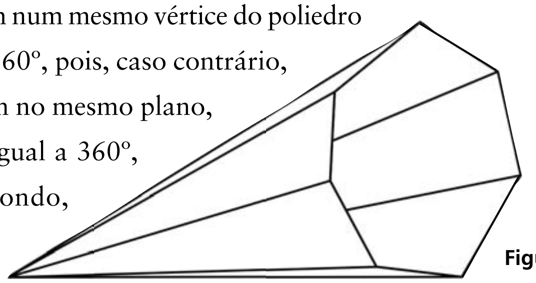


**Figura 7.4:** Ângulo poliédrico.

***ATIVIDADES***

**2. Recorte polígonos regulares congruentes numa folha de papel e verifique se a afirmativa acima é verdadeira. Pode recortar livremente, ou seja, sem fazer um desenho prévio.**

***COMENTÁRIO***

*Você deve ter notado que, como precisamos de pelo menos três faces concorrendo num mesmo vértice, jamais poderíamos montar um poliedro regular com faces hexagonais, por exemplo, pois seu ângulo interno mede 120º.*

*Se você refletiu sobre a atividade anterior, deve ter concluído que somente triângulos eqüiláteros, quadrados e pentágonos regulares podem ser faces de poliedros regulares. Além disso, no caso dos triângulos, podemos ter o concurso de três, quatro ou cinco faces num mesmo vértice, mas, no caso de quadrados e pentágonos, teríamos apenas três.*

*Na verdade, todos os poliedros que conseguiremos construir terão ângulos poliédricos de cinco tipos:*

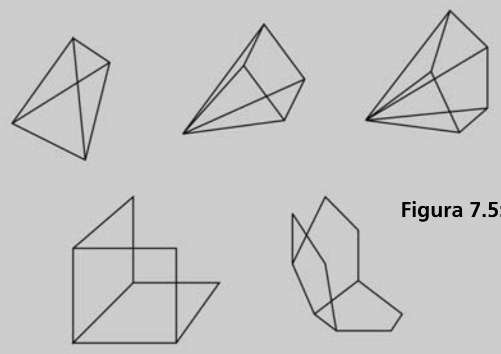


**Figura 7.5:** Ângulos poliédricos.

3. Desenhe, em cartolina, a planificação dos ângulos acima. Recorte e monte o ângulo.

***COMENTÁRIO***

*Certamente, você conseguiu!*

4. Se você encaixar esses ângulos poliédricos neles próprios, até fechar uma região do espaço, construirá poliedros regulares. Quantos poliedros regulares você conseguirá construir? Quantas faces terá cada um?

***COMENTÁRIO***

*Se tudo deu certo, você acabou de confirmar que só existem cinco poliedros regulares: tetraedro (4 faces triangulares), hexaedro ou cubo (6 faces quadradas), octaedro (8 faces triangulares), dodecaedro (12 faces pentagonais) e icosaedro (20 faces triangulares).*

5. Construa um cubo com canudos. Agora, continuando com uma linha, localize o centro de todas as faces do cubo e construa o poliedro inscrito cujas arestas são os centros das faces vizinhas do cubo.

***COMENTÁRIO***

*Se você seguiu corretamente os procedimentos, você construiu um octaedro inscrito no cubo. Caso tenha dificuldades na montagem dos modelos, não se preocupe, aos poucos você irá minimizando-as. É importante ir criando artifícios (construir outros modelos, fazer desenhos etc.) para desenvolver sua visualização.*

## CONCLUSÃO

O conhecimento adquirido sobre poliedros regulares ou poliedros de Platão constitui um fato importante no estudo da Geometria. Além do potencial histórico, eles podem ser conhecidos e construídos pelos alunos, passo a passo, como foi feito nesta aula. Dessa forma, estaremos contribuindo significativamente para o desenvolvimento da visão espacial do aluno.

**RESUMO**

Existem apenas cinco poliedros regulares: tetraedro (4 faces triangulares), hexaedro regular ou cubo (6 faces quadradas), octaedro (8 faces triangulares), dodecaedro (12 faces pentagonais) e icosaedro (20 faces triangulares).

## AUTO-AVALIAÇÃO

Consideramos importante que você tenha praticado a construção dos modelos utilizando canudos. Justificar a existência de cinco poliedros regulares (Atividade 4), bem como construí-los com diferentes materiais (Atividade 1), é de fundamental importância. Caso você ainda tenha dificuldades na montagem, pratique um pouco mais e construa os cinco **poliedros regulares** com canudos, pois eles serão estudados, em detalhes, na próxima aula.

## INFORMAÇÕES SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na aula seguinte, continuaremos estudando os poliedros de Platão, aprofundando aspectos relativos à convexidade e aos atributos relevantes na definição de poliedro regular.

!

Lembre-se de que é imprescindível a construção de modelos dos poliedros. Utilize o Módulo Prático!

AULA 8

# Redescobrindo os poliedros regulares

## Meta da aula

• Instrumentalizar o ensino dos poliedros regulares.

## objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

• Definir ângulo poliédrico.

• Definir e conceituar poliedros convexos.

• Definir e conceituar poliedros regulares.

• Utilizar as planificações como recurso para aprendizagem.

## Pré-requisito

Para que você tenha ótimo desempenho nesta aula, esperamos que tenha construído os cinco poliedros regulares com planificações (veja exemplos no Módulo Prático) e com canudos para refrigerante (Aula 7).

## INTRODUÇÃO

Hoje estudaremos um pouco mais os poliedros regulares, também conhecidos como poliedros de Platão. Para isso, também exploraremos a definição de poliedros convexos e poliedros regulares. A intuição, a descrição, a visualização e as diferentes representações continuarão sendo processos geométricos valorizados nesta aula.

**!**

Lembre-se de utilizar os modelos de planificações disponíveis no Módulo Prático. Você verá que há planificações de sólidos em geral e dos cinco poliedros.

## DEFININDO POLIEDROS REGULARES

Um polígono é dito convexo se, dados dois pontos quaisquer A e B em seu interior, o segmento de reta AB está contido no interior do polígono (*Geometria Básica*, Módulo 1, p. 86, Definição 17).

***ATIVIDADES***

1. Construa uma definição para **poliedro convexo**, a partir da definição de **polígono convexo**.

___________________________________________________________________

___________________________________________________________________

___________________________________________________________________

***COMENTÁRIO***

*Lembre-se de que a definição de poliedro convexo está relacionada à convexidade de seu interior. Veja também como livros didáticos do Ensino Médio desenvolvem essa definição.*

2. Identifique os objetos convexos e não-convexos entre os representados abaixo.

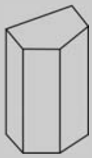


**Figura 8.1**


**Figura 8.2**

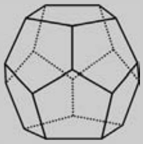


**Figura 8.3**

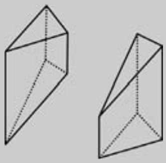


**Figura 8.4**

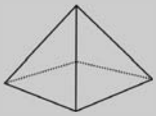


**Figura 8.5**

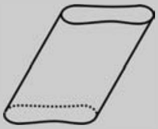


**Figura 8.6:** Cilindro.

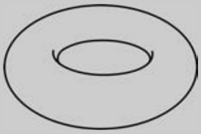


**Figura 8.7:** Toro ou anel.

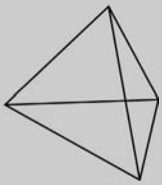


**Figura 8.8**

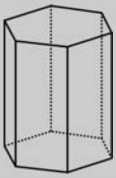


**Figura 8.9:** Prisma hexagonal.

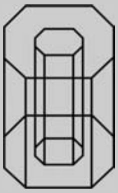


**Figura 8.10**

| Figura | Convexo | Não-convexo | Motivo |
|---|---|---|---|
| 8.1 | | | |
| 8.2 | | | |
| 8.3 | | | |
| 8.4 | | | |
| 8.5 | | | |
| 8.6 | | | |
| 8.7 | | | |
| 8.8 | | | |
| 8.9 | | | |
| 8.10 | | | |

**Quadro 8.1:** Exemplos de objetos do espaço.

***COMENTÁRIO***

*Utilize também os modelos de planificações disponíveis no Módulo Prático.*

Um polígono que é, ao mesmo tempo, eqüilátero e eqüiângulo é chamado regular (*Geometria Básica*, Módulo 3, p. 21).

3. Escreva a seguir sua definição para poliedro regular.

____________________________________________________

____________________________________________________

____________________________________________________

***COMENTÁRIO***

*Agora não é apenas uma mera transcrição, como você fez na Atividade 1. Você terá de ser criativo! Use sua intuição, seus conhecimentos anteriores, e invente! Mais adiante iremos esclarecer os detalhes.*

4. Identifique, segundo sua definição, os poliedros regulares.

| Figura | Regular | Não–regular | Motivo |
|---|---|---|---|
| 8.1 | | | |
| 8.2 | | | |
| 8.3 | | | |
| 8.4 | | | |
| 8.5 | | | |
| 8.6 | | | |
| 8.7 | | | |
| 8.8 | | | |
| 8.9 | | | |
| 8.10 | | | |

***COMENTÁRIO***

*Consideramos importante você justificar sua resposta, ou seja, apresentar os motivos que o levaram a definir um poliedro regular. Você deve ter percebido que **8.6** e **8.7** não são poliedros.*

5. De acordo com sua definição dada na Atividade 3, você acha que existem muitos ou poucos poliedros regulares? Justifique a resposta.

____________________________________________________

____________________________________________________

____________________________________________________

***COMENTÁRIO***

*Essa pergunta parece repetida da aula anterior. No entanto, ela é proposital, para que você possa, se for o caso, desenvolver novas formas de se convencer sobre a existência de apenas cinco poliedros regulares.*

Voltemos a observar as figuras da Atividade 1. De todos os sólidos representados, apenas as **Figuras 8.3** e **8.8** constituem sólidos regulares. Observe-os bem e realize as atividades a seguir.

6. Liste atributos relevantes dos poliedros regulares e corrija, se necessário, a definição que você escreveu na Atividade 3.

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

**COMENTÁRIO**

*Você deve ter observado que as faces do poliedro regular são polígonos regulares; que a cada duas faces há uma aresta comum; que as faces são congruentes, além de outros atributos. Mas poderá não ter identificado, por exemplo, que cada vértice é a intersecção de um mesmo número de arestas.*

*Na verdade, a tarefa de definir um poliedro regular não é tão simples quanto parece.*

7. Compare a definição anterior com a que você escreveu na Atividade 3 e tire conclusões.

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

8. A Figura 8.2 não é um poliedro regular! Por quê?

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

**COMENTÁRIO**

*Pense mais um pouco. Você deve ter reparado que em alguns vértices concorrem (chegam) três arestas e, em outros, quatro. Tal fato contraria a definição.*

Poliedro regular é o poliedro convexo cujas faces são polígonos regulares congruentes e que em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas (*Geometria Básica*, Volume 3, p. 100, Definição 18).

## CONVERSANDO UM POUCO MAIS SOBRE A HISTÓRIA DOS POLIEDROS REGULARES E PLATÃO

Platão e sua escola também estudaram os poliedros regulares; porém, contrariando o que fizeram os pitagóricos, ele não manteve seus estudos em sigilo. Talvez este seja o motivo da denominação "corpos platônicos" atribuída aos poliedros regulares. Não se sabe se Platão tinha certeza da existência de apenas cinco poliedros regulares. No entanto, desde os tempos de Euclides já se sabia, como ficou demonstrado em *Elementos*, que existem apenas cinco poliedros regulares. Apesar de não sabermos se a demonstração era original de Euclides, esta foi a primeira que apareceu escrita. Sabemos que Euclides sistematiza o estudo dos poliedros regulares, incluindo sua construção geométrica ou inscrição na esfera.

O matemático árabe Abul Wefa (940-998) foi o primeiro que demonstrou, na Idade Média, que todos os poliedros regulares podem ser construídos através de uma abertura ou ajuste do compasso.

## CONCLUSÃO

A construção de planificações, modelos sólidos e modelos vazados constitui recursos didáticos que devem ser utilizados no laboratório pessoal de todo professor de Geometria.

**RESUMO**

Podemos definir poliedros convexos regulares através da análise das faces, dos vértices e das arestas. Em um **poliedro convexo regular**, as faces são polígonos regulares, a cada duas há uma aresta comum e em todos os vértices chegam o mesmo número de arestas.

## AUTO-AVALIAÇÃO

Se você finalizou esta aula entendendo a definição de poliedro regular (Atividade 3), de poliedro convexo (Atividade 1), bem como de ângulos poliédricos (Aula 7), meus parabéns!

Além disso, identificar e entender os atributos relevantes na definição de poliedros regulares (Atividade 6) é também importante, pois dessa forma você construirá melhor cada poliedro e poderá analisar seus elementos, o que enriquecerá seu conhecimento geométrico sobre os poliedros.

Para complementar seu estudo dos poliedros regulares, deve também construir as planificações e os modelos sólidos desses poliedros, em diferentes tamanhos. Use cartolina, papel cartão ou outro material, como emborrachados ou madeira, para tornar seus poliedros mais resistentes ao uso em sala de aula.

## INFORMAÇÃO SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, estudaremos o cubo. Utilizaremos, entre outros recursos, a dobradura de papel. É bom que você tenha papel de boa qualidade (sulfite, encartes promocionais de jornais etc.).

AULA 9

# Explorando elementos do cubo

## Meta da aula

• Instrumentalizar para o ensino do cubo.

## objetivos

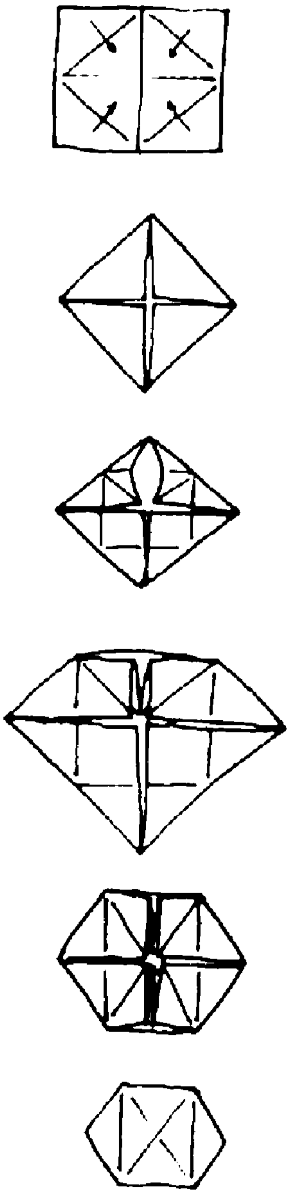
Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- Definir e conceituar cubo.
- Utilizar os policubos, as dobraduras em papel e a internet como recursos para aprendizagem.

## Pré-requisitos

Para melhor desenvolvimento desta aula, sugerimos que você relembre a *definição de cubo* e *tenha um modelo* deste poliedro *construído com planificação* e outro com *canudos para refrigerante*.

## INTRODUÇÃO

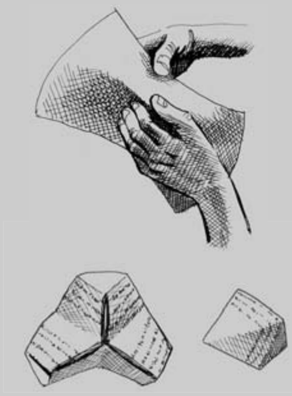


O cubo é uma figura muito comum no espaço tridimensional. Desde pequenos, temos contato com um cubo muito conhecido: o dado. Além dessa familiaridade, podemos encontrar relações matemáticas importantes no cubo e precisamos desenvolvê-las em nossas aulas. Assim, nesta aula, vamos estudar alguns elementos conceituais (secções planas, distâncias, diferentes vistas e representações) envolvidos no cubo (o hexaedro regular), um dos cinco poliedros regulares.

Tenha seus diferentes modelos de cubo (com canudos, com planificações e outros recursos). Você também poderá visualizar e manusear cubos, virtualmente, acessando: http://www.mat-no-sec.org/criar/poliedros/3.html
http://pessoal.iconet.com.br/jlfialho/mat_p.htm

Vamos começar pela construção de um cubo através das **DOBRADURAS** de papel.

As **DOBRADURAS**,ou origâmis (arte de dobrar papéis), são construções que possibilitam a observação de formas diferentes. É um tipo de arte popular no Japão e foi introduzido no Ocidente para diferentes tipos de trabalho, inclusive artesanais. No ensino de Geometria as dobraduras nos permitem, por exemplo:
(a) construir e identificar figuras geométricas;
(b) compor e decompor figuras, e (c) formar polígonos convexos e não-convexos.
Para saber mais, acesse:
http://www.Geometria.com.br/http:
/web.mit.edu?lavin/www/origami.html
http:/www.origami-usa.org/



**!**

Os origâmis têm algumas regras: utilizar folhas quadradas e não realizar cortes. Embora existam papéis próprios para as dobraduras, você pode utilizar um papel qualquer e de fácil manuseio, por exemplo, encartes de propaganda (aqueles contidos nos jornais ou distribuídos em supermercados ou nos sinais de trânsito).

## ATIVIDADES

1. Que sólido é obtido, quando ligamos os centros de todas as faces de um cubo? Qual o comprimento das arestas do poliedro inscrito no cubo? Faça o desenho e justifique sua resposta.

___

___

___

**COMENTÁRIO**

*Lembre-se de que você construiu esses modelos na Atividade 5 da Aula 7.*

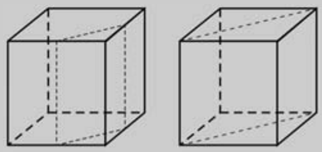
2. Do cubo a seguir, continuando com secções planas, é possível obter um quadrado? Justifique. Qual a posição em que um plano deve ser colocado para que a secção de corte obtida tenha a forma de um retângulo? Qual o perímetro máximo da secção plana retangular obtida? Justifique.

___

___

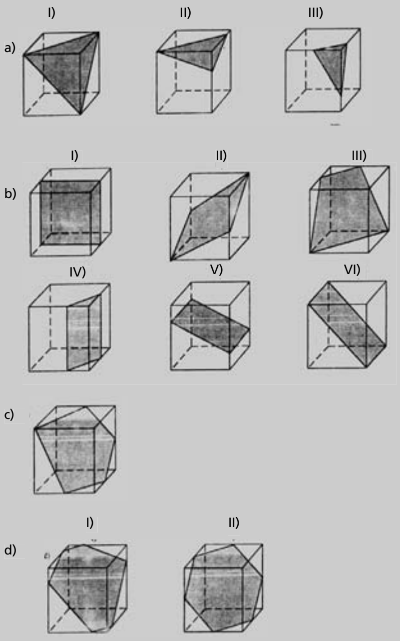
___

Quando fazemos um corte plano em um sólido, a figura que aparece na zona de corte é denominada secção plana.



Por exemplo, a seguir você pode ver outras secções planas do cubo (retirado de Kaleff, 1998, p. 166).

Algumas secções planas do cubo



***ATIVIDADES***

3. Imagine um cubo. Considere um de seus vértices e as arestas que chegam a ele. Fazendo um corte plano que passe pelos três pontos médios das arestas consideradas, o cubo se dividirá em duas partes, uma maior e outra de menor volume. De posse dessas informações, responda às questões a seguir e justifique suas respostas:(a) Qual será a forma do corte? (b) Qual a forma da parte (sólido) de menor volume? (c) Desenhe cada um dos sólidos e apresente duas observações sobres os mesmos.

***COMENTÁRIO***

*As Atividades 1, 2 e 3 podem ser feitas em menos tempo. No entanto, caso necessite, utilize mais tempo construindo os modelos. Para visualizarmos as secções planas, podemos utilizar papel celofane ou folhas de radiografias.*

4. Imagine um cubo pendurado por um dos vértices e um plano horizontal que se desloca de baixo para cima. Desenhe e descreva três secções possíveis (polígonos regulares ou não, etc.) que o plano faz sucessivamenteno cubo.

***COMENTÁRIO***

*Imagine um cubo sendo mergulhado em uma piscina, em que a superfície da água é o plano horizontal de referência. Ou pense em um cubo de acrílico (transparente), parcialmente cheio de água. Ao mexermos o cubo, vamos formando e visualizando várias secções.*

5. Imagine um cubo de madeira e um de seus vértices. Quantas arestas chegam a este vértice? Suponha que você o pintou com caneta hidrocor preta. Seguindo por uma das arestas do vértice pintado, vá a um vértice vizinho e pinte-o também. Deste modo, seu cubo possui uma das arestas com os extremos pintados. (a) Quantas arestas do cubo possuem apenas um extremo pintado de preto? (b) Quantas arestas do cubo não têm extremos pintados? (c) Quantas faces do cubo possuem algum vértice pintado? (d) Quantas faces não têm vértices pintados? Discuta suas respostas com seus colegas e com o tutor!

___

___

___

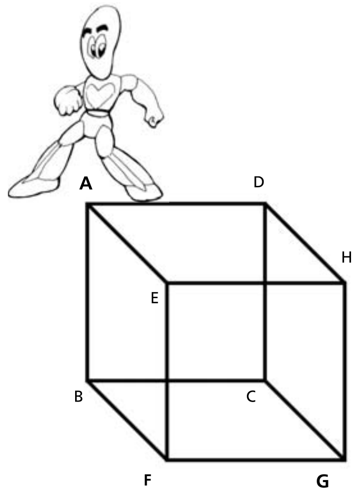
***COMENTÁRIO***

*O desafio será realizar esta atividade sem o manuseio do cubo. No entanto, caso você tenha dificuldade, utilize o modelo que lhe convier.*

6. Como temos observado em nossas aulas, a elaboração de tarefas geométricas distintas para desenvolver um mesmo conceito constitui uma função docente imprescindível. Sendo assim, nesta atividade, vamos analisar **três tarefas** elaboradas pelo professor Marcelo. Elas objetivam calcular e analisar distâncias no cubo. Mesmo tendo um objetivo conceitual principal, as tarefas podem remeter-nos a outros conceitos e procedimentos (maneiras de fazer) distintos que podem estar envolvidos na realização das mesmas. Nisso é que estamos interessados agora!

***COMENTÁRIO***

*Veja as tarefas. Você não precisa realizá-las. O que faremos nesta atividade é apenas analisá-las.*




***TAREFAS***

1. (Adaptada do Boletim do GEPEM nº 42.)

Ajude nosso amiguinho, o Superlápis, a encontrar o caminho mais curto. Ele está no ponto A e deve chegar ao ponto G.

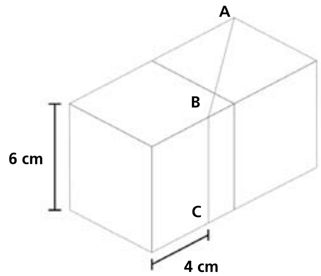
Obs.: (a) a figura representa um cubo de aresta igual a 1m; (b) você pode incluir outros pontos sobre as arestas do cubo.

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

2. (Disponível em http://www.calculando.com.br/jogos/ Acesso: 19/3/2004.)



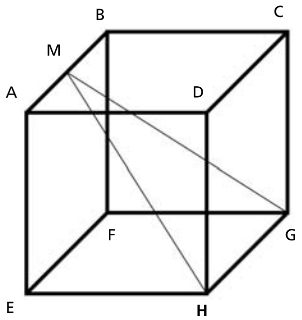

Na ilustração ao lado estão representados dois cubos unidos por uma de suas faces. De acordo com a ilustração, qual é a soma dos comprimentos dos segmentos **AB** e **BC**?

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

3. Na página 136 dos Módulos 3 e 4 de Geometria Básica, você realizou a seguinte atividade: "Na figura ao lado, ABCDEFGH é um cubo de aresta AB e M é o ponto médio de AB. Determine a distância de F ao plano que contém M, H e G."




Vamos analisar as tarefas anteriores, isto é, apresentar dois conceitos que podem estar envolvidos na realização das mesmas. Complete a tabela abaixo.

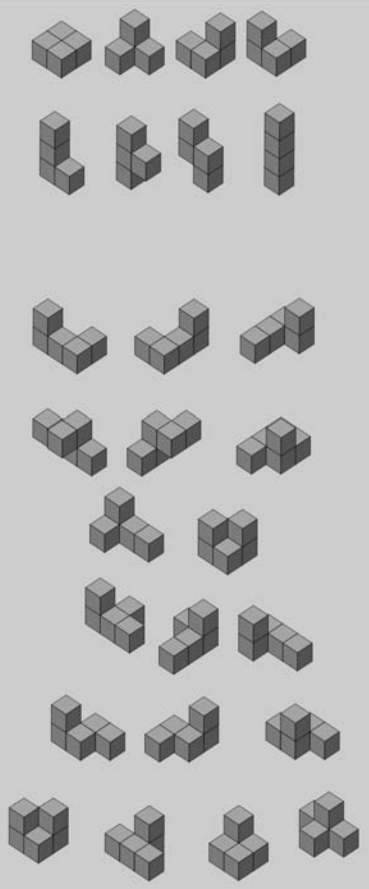
| Tarefa | Objetivos pensados pelo professor Marcelo | Conceitos envolvidos |
|---|---|---|
| 1 | Calcular e analisar distâncias no cubo | – Ponto médio<br>– |
| 2 | | –<br>– |
| 3 | | – Distância de um ponto a um plano<br>– |

***COMENTÁRIO***

*Lembre-se de que não é necessário resolver cada tarefa anterior. É preciso apenas entendê-las. No entanto, realizando-as – inclusive de diferentes maneiras –, você poderá tornar sua análise crítica mais rica. Para facilitar seu entendimento, sugerimos dois conceitos. Converse com um colega e com o tutor. Você também poderá acessar a página do MEC (www.mec.gov.br) para ler os Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Médio e identificar objetivos.*

## Conversando sobre seu Laboratório de Geometria

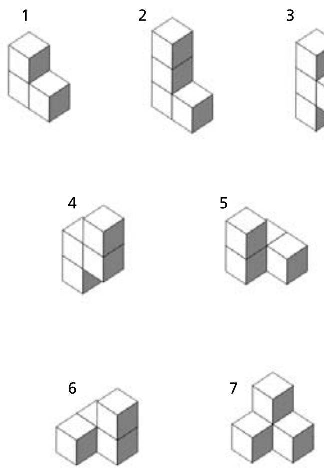
**Policubos** é um tipo de material didático que tem como objetivo desenvolver a visualização e a representação espacial e enfatizar o uso de diferentes tipos de expressão, comunicação e representação de objetos espaciais. A partir de cubos iguais de madeira, por exemplo, e colados por faces, formam-se peças variadas. Sua utilização possibilita construir e identificar figuras geométricas; compor, decompor e planificar figuras; identificar e representar diferentes vistas. Ao lado, você vê exemplos de tetracubos e pentacubos.

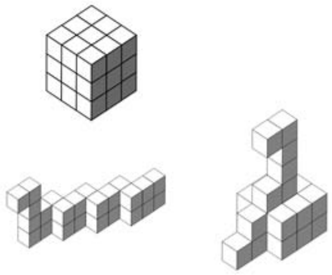


Tetracubos

Pentacubos

Um exemplo bem conhecido de policubos é o **cubo-soma**. Conforme o modelo a seguir, as sete peças que o compõem são seis tetracubos (quatro cubos unidos entre si) e um tricubo (três cubos unidos entre si).





## Veja um exemplo de atividade com o cubo-soma

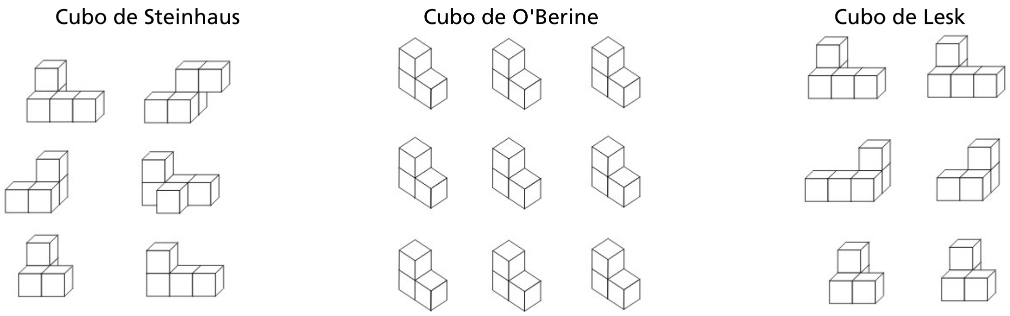
**Objetivos:** montar figuras diversas, descrever e justificar processos de construção e representação.

***COMENTÁRIO***

*Além de formar o cubo utilizando todas as peças, também podem ser formadas muitas outras figuras. Algumas delas podem representar exemplos de animais etc. O professor pode desafiar os alunos a construir figuras atrativas, utilizando todas as peças do cubo-soma e depois propor que eles desafiem seus colegas a descobrir como as peças foram agrupadas.*

*http://www.geocities.com/Area51/Quasar/4600/PPD/PolycBox.htm*

Há outros tipos de policubos que também podem enriquecer nossas aulas na representação e manipulação de objetos em três dimensões. Veja, a seguir, o **cubo de Steinhaus** (que é formado por 6 peças), o **cubo de O'Berine** (cujas peças são todas iguais) e o **cubo de Lesk.**



Além da construção das peças (junção de cubos) por meio de dobraduras, você também pode trabalhar com a representação dos cubos e suas composições na **malha isométrica,** que mostramos a seguir.

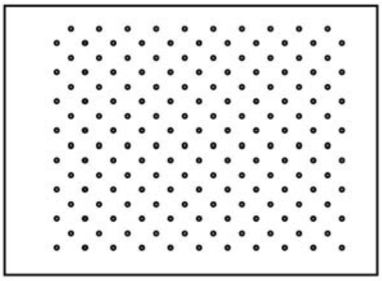


**Figura 9.1:** Exemplo de malha isométrica.

Veja, a seguir, formas de utilizar a malha isométrica.

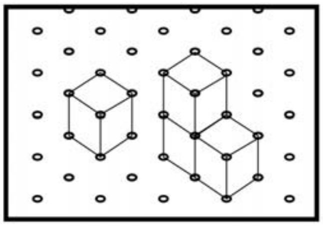


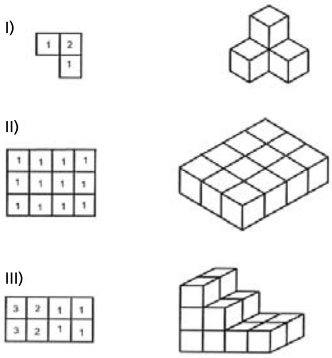
**Figura 9.2:** Representações em perspectiva isométrica do cubo e da peça A do cubo-soma (retirado de Kaleff, 1998, p. 67).

**!**

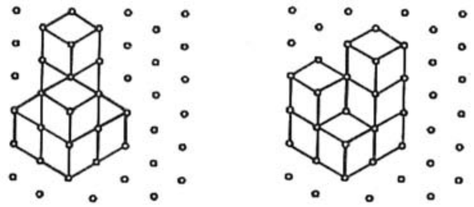
Além dos inovadores trabalhos com canudos, Ana Maria Kaleff apresenta-nos, em seu livro, mais contribuições sobre o trabalho com malhas isométricas.


Por exemplo, podemos encontrar na obra:

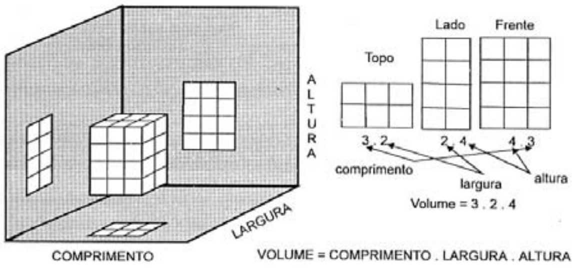
– Trabalho com a representação cotada e em perspectiva (p. 70).



– Atenção sobre a representação adequada para o cálculo de volume (p. 77).

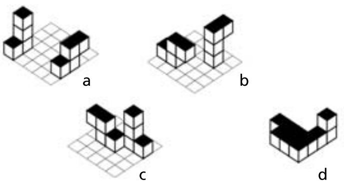


– O trabalho com as diferentes vistas (frontal, superior/inferior, lateral) de um objeto (p. 87).




Veja também outra possibilidade de uso dos policubos e do papel isométrico.

***EXEMPLO DE ATIVIDADE***




Com o objetivo de explorar representações gráficas variadas e desenvolver a visualização, após um trabalho exploratório com os policubos, um professor solicitou aos seus alunos de 6ª série que desenhassem no papel isométrico cada uma das posições (b), (c) e (d), considerando como referência a representação da posição da figura (a).

***COMENTÁRIO***

*Você não precisa resolver esta tarefa. No entanto, se o fizer, você contribuirá para o desenvolvimento de suas habilidades espaciais e no processo de representação de uma figura em perspectiva, nos quais é comum apresentarmos dificuldades. Na verdade, o papel isométrico pode lhe ajudar na representação em perspectiva.*

## CONCLUSÃO

Gostaríamos de concluir esta aula consoantes com a pesquisadora Ana Maria Kaleff (1998), ao enfatizar que devemos ter consciência de que todo processo de representação da figura espacial no plano é construído e vivenciado pela criança através de uma interação com distintos materiais, não lhe sendo exigida nenhuma aptidão inata para a visualização das arestas não-visíveis do sólido geométrico nem para as demais convenções e particularidades dos diferentes desenhos em perspectiva.

**RESUMO**

Através de um interessante passeio pelo mundo do cubo, construindo-o e observando-o cuidadosamente (Atividade 5) em diferentes tamanhos e posições, você viu que podemos: **inscrever** um octaedro no cubo (Atividade 1), **fazer secções planas** (Atividades 2 e 4), **analisar comprimentos/distâncias** (Atividades 2 e 6), **seccionar e comparar volume** (Atividade 3), **construir** um cubo **com dobraduras de papel** e desenvolver outras alternativas didáticas com os **policubos** e a **malha isométrica**. Todas elas nos remetem a diferentes formas de representação em Geometria.

## ATIVIDADE COMPLEMENTAR QUE O AJUDARÁ NAS PRÓXIMAS AULAS

Qualquer poliedro regular pode ser obtido através de secções planas em qualquer um dos poliedros regulares. Por exemplo, o cubo pode ser obtido através de secções no tetraedro. Quantos cubos iguais cabem num tetraedro? Construa os modelos. O que você pode dizer sobre a relação entre a aresta do cubo e a aresta do tetraedro?

## AUTO-AVALIAÇÃO

Esperamos que você tenha estudado e conhecido os diferentes elementos do cubo. Dos recursos, além do livro paradidático, até o momento você conheceu, construiu e trabalhou com: modelos com canudos, sucatas de caixas, planificações, dobraduras de papel, os policubos e a malha isométrica. Sendo assim, é importante que você realmente tenha utilizado cada material. Assim, com a mesma perspectiva de auto-avaliação da aula anterior, apresente uma contribuição da **dobradura**, dos **policubos** e da **malha isométrica** para a aprendizagem de elementos da Geometria espacial. Complete o quadro a seguir:

| Material | Aprendi que esse recurso é diferente dos demais em: |
|---|---|
| Dobradura | |
| Policubos | |
| Malha isométrica | |

Ao justificar sua resposta, verifique se você alcançou os objetivos da mesma. Converse com o tutor e com os colegas.

## INFORMAÇÕES SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na Aula 10, estudaremos os tetraedros e os octaedros. Utilizaremos modelos sólidos (cartolinas), vazados (canudos) e transparentes. Você deve ter o material à mão antes de começar a aula. Para os modelos transparentes, você pode usar transparência para impressão, lavada com água para tirar a goma, ou acetato de raios x, depois de lavado com água sanitária até ficar transparente.

## SUGESTÃO COMPLEMENTAR DE SITES

http://www.cpsimoes.net/puzzle1a5.shtml

http://www.apm.pt/apm/foco98/activ13.html

## SUGESTÃO DE LIVRO PARA DODRADURAS EM GERAL

GUSHIKEM, S. *O mundo encantado do papel.* São Paulo: FTD, 1990.

## SUGESTÃO DE LEITURA COMPLEMENTAR PARA APROFUNDAMENTO

FARIA, Wilson de. *Mapas conceituais*: aplicações ao ensino, currículo e avaliação. São Paulo: EPU, 1995.

# AULA 10

# Explorando o tetraedro e o octaedro

## Meta da aula

• Instrumentalizar o ensino do tetraedro e do octaedro.

## objetivos

Esperamos que, após estudo do conteúdo desta aula, você possa:

- Construir modelos de tetraedros e octaedros regulares.
- Visualizar simetrias e cortes no cubo, no tetraedro e no octaedro.
- Construir diferentes modelos como recurso para sua aprendizagem.

## Pré-requisitos

Para o desenrolar agradável e qualitativo desta aula, consideramos imprescindível que você tenha *construído os poliedros regulares*, especialmente tetraedros e octaedros, em *diferentes materiais*. Além do mais, *revisar a definição de poliedros e de polígonos regulares* também é importante.

## INTRODUÇÃO

Nesta aula, faremos uma viagem pelo mundo do tetraedro e do octaedro regulares. Você deve ter à mão todo o material solicitado na aula passada, isto é: canudos, linha, tesoura, cartolina, cola, fita adesiva, material de desenho, transparências (pelo menos quatro), arame, papel para desenhar.

Começaremos nossa aula construindo modelos vazados (com canudos), sólidos (com cartolina) e transparentes (com transparências). Esses modelos nos ajudarão a visualizar simetrias, cortes, inscrições e secções. Sem eles, nossa aula se tornará um desafio quase insuperável. Além disso, esses modelos se somarão a outros tantos materiais que você vem reunindo em seu laboratório pessoal e que poderá utilizar em suas aulas futuras. Como já dissemos, seus alunos merecem!

Se estiver tudo pronto, vamos à aula!

## OS MODELOS DE POLIEDROS

Nas Aulas 6 e 7 deste módulo, deixamos, como exercício, que você construísse sólidos com planificações e canudos. Pode ter sido uma tarefa difícil! Se você desanimou, vamos dar uma dica para a construção do tetraedro e do octaedro, pois eles são muito necessários nesta aula. Se você já construiu seus modelos, pode pular esta parte.

## CONSTRUINDO O TETRAEDRO

Montagem através da planificação:

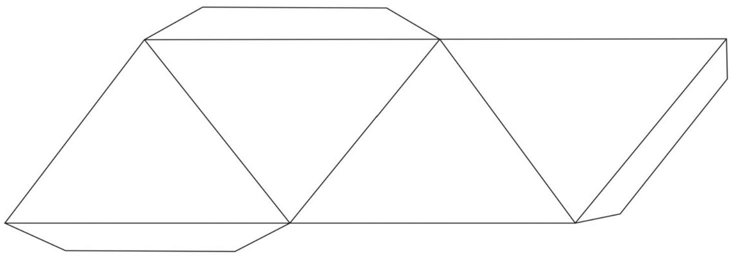


**Figura 10.1:** Planificação do tetraedro.

!

Lembre-se de utilizar o Módulo Prático. Basta recortar, dobrar e colar as abas. Você deve construir um modelo sólido (fechado) e outro em material transparente, como, por exemplo, folhas de radiografia. Colocando-as na água sanitária, elas ficam transparentes.

## CONSTRUÇÃO COM CANUDOS PARA REFRIGERANTE

Para a construção do esqueleto com canudos, você deve ter à mão: seis canudos para refrigerante, de mesmo tamanho (existem canudos mais resistentes, como os que são usados para fixar bolas de gás em festas infantis), linha grossa e um pedaço de arame fino em forma de agulha. Com auxílio de sua "agulha", passe a linha por três canudos, fechando um triângulo com um nó. Deixe duas pontas grandes de linha. Passe uma das pontas por dois canudos e feche um segundo triângulo adjacente ao primeiro. Dirigindo a ponta da linha para um dos vértices não comuns aos dois triângulos, acrescente o último canudo. Introduza esta ponta da linha no outro vértice não comum para encontrar a outra ponta. Basta esticar a linha e dar o último nó. A **Figura 10.2** mostra passo a passo.

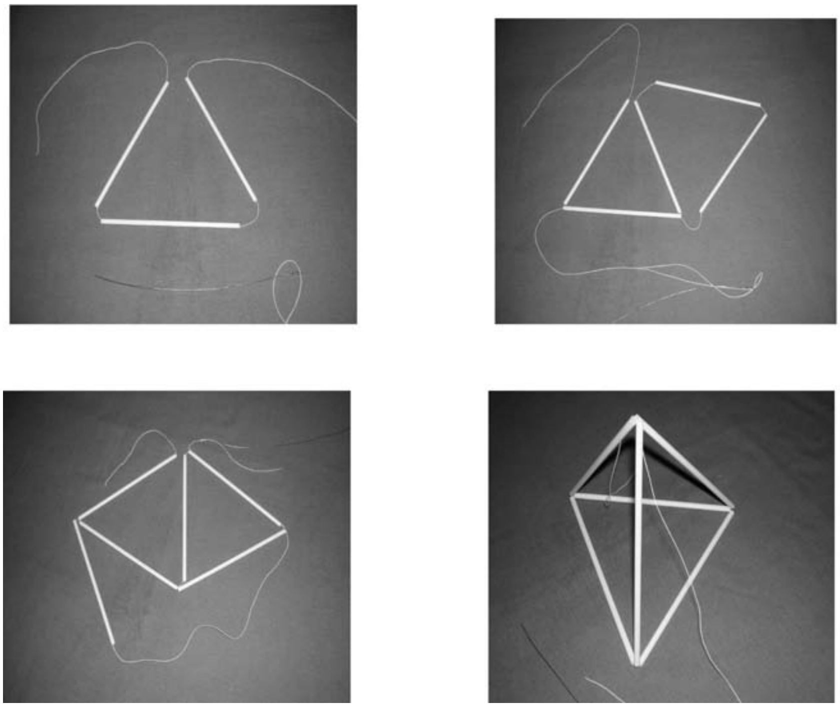


**Figura 10.2:** Construção do esqueleto do tetraedro com canudos.
Fotos: Miguel Angelo da Silva

## CONSTRUINDO UM OCTAEDRO

Montagem através da planificação:

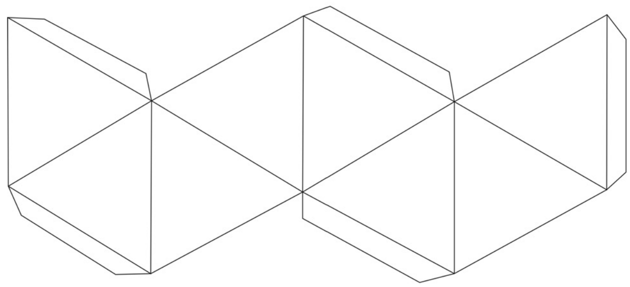
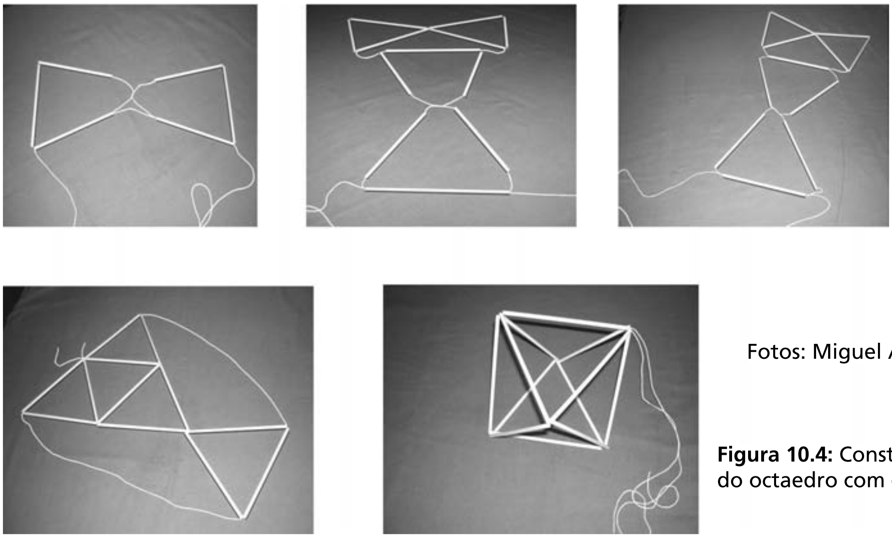


**Figura 10.3:** Planificação do octaedro.

> **!**
>
> Lembre-se de utilizar o Módulo Prático.

## CONSTRUÇÃO COM CANUDOS PARA REFRIGERANTE

Agora, serão doze canudos e quatro metros de linha. Passe a linha por três canudos, fechando o triângulo com uma laçada, e mantendo as duas pontas com o mesmo tamanho. Passe uma das pontas em três canudos, formando outro triângulo com uma nova laçada. Passe cada uma das pontas por um lado de cada triângulo, para atingir vértices não comuns em cada um. Agora, passe as duas pontas por um mesmo canudo, uma por cada extremidade, e comece a construir um novo par de triângulos como o anterior, de modo que as duas pontas terminem uma em cada vértice não comum do último triângulo. Passe cada uma das pontas nos lados dos primeiros triângulos, de modo que terminem no mesmo ponto. Agora, é só esticar a linha e amarrar.



Fotos: Miguel Angelo

**Figura 10.4:** Construção do esqueleto do octaedro com canudos.

Bem, agora você não tem desculpas para não ter seus modelos de tetraedro e octaedro. Podemos, então, continuar o nosso passeio por esses poliedros.

Começaremos observando as simetrias e cortes nos dois poliedros de nossa aula. A discussão desses temas constitui uma oportunidade ímpar para ajudar no desenvolvimento da visão espacial de seus alunos, sobretudo se você utilizar variados modelos e desenhos.

## SIMETRIAS NO TETRAEDRO E OCTAEDRO

Para começar, na Aula 33 do seu curso de Geometria Básica, página 161 do Volume 3, você aprendeu que o tetraedro e o octaedro são inscritíveis numa esfera, o que significa que o centro dessa esfera se constitui num ponto de **SIMETRIA DE ROTAÇÃO** desses sólidos.

> Na **SIMETRIA DE ROTAÇÃO**, os vértices do sólido permanecem na mesma esfera, quando gira em torno do ponto ou da reta de simetria.

Consideramos agora as retas de simetria de rotação, mais conhecidas como eixos de simetria. Como esses poliedros são regulares, esses eixos terão de passar pelo centro do poliedro. Tudo bem? Além disso, se esse eixo interceptar uma face, terá de fazê-lo no seu centro e, se interceptar uma aresta, será no seu ponto médio. Caso contrário, os vértices das faces ou das arestas não girariam numa mesma esfera. Resumindo, de modo geral, poderemos ter três tipos de eixos de simetria num poliedro regular: os que passam por um vértice, ou pelo ponto médio de uma aresta, ou pelo centro de uma face, com todos passando também pelo centro do sólido. Veja, a seguir, os eixos de rotação do octaedro e do cubo.

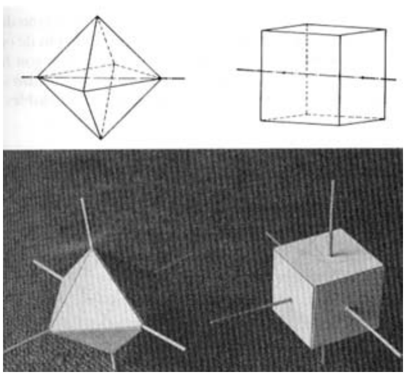


**Figura 10.5**

***ATIVIDADES***

1. Utilizando seu modelo de canudos, desenhe e descreva todos os eixos de simetria do tetraedro regular.

***COMENTÁRIO***

*Você deve ter observado que, no caso do tetraedro, os eixos de simetria que passarem por um vértice também passarão pelo centro da face oposta. Observe também as retas que unem os pontos médios de arestas opostas. Resumindo, teremos seis eixos de simetria de rotação. Procure sempre fazer o desenho, conforme a* ***FIGURA 10.5***.

2. Utilizando seu modelo de papel, descreva todos os eixos de simetria do octaedro regular.

***COMENTÁRIO***

*Facilmente, você deve ter observado que os eixos que passam por dois vértices opostos são de simetria. Além disso, não é possível uma reta passar pelo centro do poliedro e ao mesmo tempo por: um vértice e o ponto médio de uma aresta; um vértice e o centro de uma face; o centro de uma face e o ponto médio de uma aresta. Restam, então, duas possibilidades: retas que passem pelo ponto médio de duas arestas opostas e retas que passem pelos centros de duas faces opostas. Para testar essas possibilidades, você pode fazer pequenos orifícios no centro das faces e no ponto médio das arestas do seu modelo transparente, passar um arame e girar o modelo. Persistindo alguma dúvida, converse com seus colegas ou com seu tutor.*

*Podemos também observar* **PLANOS DE SIMETRIA** *nos poliedros regulares.*

Ao contrário dos eixos de rotação, que nos permitem girar o poliedro e, dessa forma, verificar se os vértices giram em torno de uma mesma esfera, no caso dos planos a simetria é estática. O **PLANO DE SIMETRIA** divide o poliedro em duas regiões idênticas. Veja os planos de simetria do cubo.

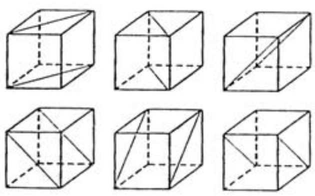


**Figura 10.6.a**

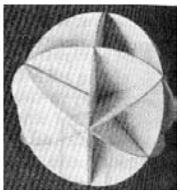


**Figura 10.6.b**

Você deve ter percebido que os planos podem ser vistos e descritos a partir das diagonais das faces do poliedro, das arestas etc. Assim, podemos determinar o número de planos de duas formas:

1. Os planos passam por diagonais de faces opostas. O cubo tem três pares de faces opostas, e a cada par de faces passam duas diagonais, totalizando seis. Portanto, o cubo possui seis planos de simetria.

2. Os planos passam por um par de arestas opostas (quando o plano que forma passa pelo centro do poliedro). Como o cubo tem seis pares de arestas opostas, ele possui seis planos.

Na **Figura 10.6.b**, a bela ilustração mostra a disposição no espaço dos círculos máximos correspondentes aos seis planos de simetria do cubo.

**!**

Os dodecaedros e os icosaedros possuem 15 planos de simetria, sendo um para cada par de arestas opostas. Esses planos ( 10.7. a e b ) passam por um par de arestas opostas e cortam, no ponto médio, outro par de arestas opostas. Veja, a seguir, dois deles. A **Figura 10.7.c** ilustra a posição relativa dos planos no espaço.

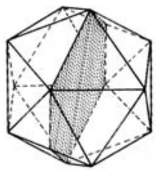


**Figura 10.7.a**

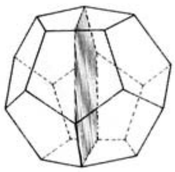


**Figura 10.7.b**

**Figura 10.7.c**

***ATIVIDADE***

3. Encontre e descreva os planos de simetria no tetraedro e no octaedro.

___________________________________________________________________________

___________________________________________________________________________

***COMENTÁRIO***

*Você deve ter observado que, no tetraedro, os planos que contêm uma aresta e interceptam o ponto médio da aresta oposta são planos de simetria. Além disso, os planos que contêm a altura de uma face e o vértice oposto a ela também são de simetria. Quantos planos de simetria teremos?*

*Por outro lado, o octaedro admite, pelo menos, três tipos: passando por quatro vértices, passando por dois vértices ou não passando por vértices. Será que existem outros tipos de planos? Quantos são no total? Converse com seus colegas e com o tutor! As* ***Figuras 10.8.a*** *e* ***10.8.b*** *ilustram dois possíveis planos: um passando por quatro vértices e outro passando por dois vértices e pelo ponto médio de pares de arestas opostas. A* ***Figura 10.8.c*** *mostra-nos um belo modelo das simetrias no octaedro.*

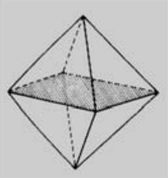


**Figura 10.8.a**

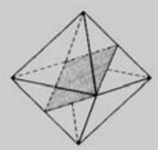


**Figura 10.8.b**

**Figura 10.8.c**

## Conversando sobre o seu laboratório pessoal de Geometria

Com as **Figuras 10.6.b**, **10.7.c** e **10.8.c** você tem outra idéia para a construção de modelos poliédricos. Utilizando cartolina, você poderá representar a disposição no espaço dos círculos máximos correspondentes aos planos de simetria de cada poliedro.

## CORTES NO TETRAEDRO E NO OCTAEDRO

Na aula passada, você aprendeu que um corte é a intersecção de um plano com um sólido e que secção plana é a figura que resulta dessa intersecção. Viu também que podemos visualizar um corte, enchendo um modelo transparente com algum líquido ou mergulhando seu modelo de esqueleto em um líquido.

***ATIVIDADES***

4. Na Atividade 6 (Tarefa 3) da aula passada, você trabalhou com a figura ao lado. O triângulo HMG representa uma secção plana?

***COMENTÁRIO***

*Nem todo polígono inscrito num sólido é o resultado da intersecção de um plano. Observe que o plano que contém o triângulo HMG intersecciona o cubo no quadrado ABHG.*

*No caso do tetraedro, os cortes podem interceptar três ou quatro faces, formando triângulos ou quadriláteros. Confirme!*

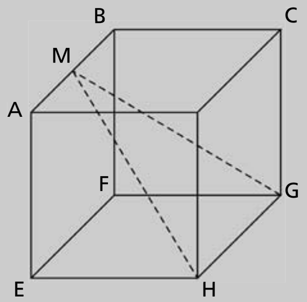



**Figura 10.9**

5. Descreva e desenhe todas as secções planas de um tetraedro. Qual a posição do plano de intersecção, em cada caso?

***COMENTÁRIO***

*Se o plano de intersecção interceptar um eixo de simetria que contenha um vértice, no interior do tetraedro, sendo-lhe perpendicular, teremos triângulos eqüiláteros. Não sendo, o triângulo será isósceles. Se o plano for paralelo a duas arestas opostas, as secções serão retangulares. Resta ainda o caso de um plano que intercepte as quatro faces, mas não seja paralelo às arestas. Qual seria a secção, neste caso?*

*A visualização das secções planas no octaedro é mais complexa. Vejamos!*

**!**

Apesar dos variados recursos que você pode e deve usar em suas aulas de Geometria, o desenho no quadro-de-giz será sempre um recurso necessário. Todo professor deve se esforçar para desenvolver esta habilidade. Você deve desenhar todas as atividades desta aula; será um bom exercício. Além do mais, a construção de um quadro como o seguinte também o ajudará.

| Posição do plano de intersecção | Secção plana |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |

***ATIVIDADES***

6. A seguir, você verá três planos seccionando um octaedro. Em quais deles obtemos secção quadrada? Descreva a posição deste plano.

_______________________________________________

***COMENTÁRIO***

*Uma descrição possível: um plano perpendicular a uma diagonal interna do octaedro. Se você descreveu de outra forma, verifique se essa propriedade também é observável na sua descrição.*

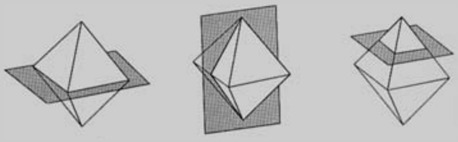


**Figura 10.10**

7. É possível encontrar um losango como secção plana do octaedro?

_______________________________________________

_______________________________________________

***COMENTÁRIO***

*Certamente, você pensou nos planos de simetria do octaedro. Certifique-se de que não há outra possibilidade.*

8. Imagine um plano que corte o octaedro em quatro faces e seja perpendicular a um plano de simetria que passe apenas por dois vértices. Qual será a secção plana?

_______________________________________________

_______________________________________________

***COMENTÁRIO***

*Você deve ter percebido que, cortando quatro faces, a secção será um quadrilátero. Se o plano de intersecção também for perpendicular à diagonal interna, contida no plano de simetria, o quadrilátero será um quadrado; caso contrário, será um trapézio isósceles. Mergulhe seu octaedro de canudo, em um líquido, procure a posição desejada e confirme esta conclusão.*

9. Podemos ter secções planas pentagonais no octaedro? Qual seria a posição do plano de intersecção?

**COMENTÁRIO**

*Mergulhando seu octaedro em um líquido, você pode verificar que o plano de intersecção que contém somente um dos vértices de uma diagonal espacial interceptará cinco faces do octaedro, definindo um pentágono. É possível que esse pentágono seja regular?*

10. Que tipo de secção é produzida quando interceptamos o octaedro por um plano paralelo a duas faces opostas?

**COMENTÁRIO**

*Serão seis faces interceptadas. Neste caso, o hexágono pode ser regular. Basta que o plano seja eqüidistante das duas faces a ele paralelas.*

*As atividades anteriores quase esgotam as possibilidades de corte no octaedro. Deixaremos uma possibilidade para a avaliação final desta aula. Para encerrar, vamos observar algumas* ***inscrições recíprocas*** *entre os poliedros regulares.*

O problema de inscrever os sólidos de Platão uns nos outros desafiou Kepler em 1595, quando criou um modelo de sistema planetário utilizando os sólidos de Platão para representar os seis planetas conhecidos na época. Saiba mais acessando http://centros1.pntic.mec.es/ies.maria.moliner3/

11. Utilize seus modelos vazados de cubo e tetraedro para estudar a possibilidade de inscrever um tetraedro no cubo. Faça um desenho!

**COMENTÁRIO**

*Você deve ter observado que as arestas do tetraedro serão as diagonais das faces do cubo. Esta atividade pode ser enriquecida de várias formas: calculando a aresta do tetraedro; verificando que as faces do tetraedro são secções do cubo; calculando a área lateral e o volume do tetraedro, construindo um modelo vazado que represente o problema etc.*

12. Como poderemos inscrever um cubo num octaedro?

___

___

***COMENTÁRIO***

*Nesta atividade, o ideal será utilizar um modelo sólido transparente. Esse tipo de modelo pode ser feito com transparência, no lugar do papel. Você pode também usar o acetato de raios X. Depois de deixá-lo na água sanitária, ficará transparente e será mais resistente que a transparência. No modelo transparente, será fácil observar que, unindo os centros das faces do octaedro, você obterá um cubo inscrito. Isto é, você obtém um cubo fazendo cortes que passem pelo centro de suas faces, paralelos aos planos de simetria que passam por quatro vértices do octaedro.*

13. Também podemos inscrever um octaedro num tetraedro por meio de cortes. Como fazê-lo?

___

___

***COMENTÁRIO***

*Num modelo transparente, você pode observar que, retirando quatro tetraedros com arestas iguais à metade da aresta original, restará um octaedro.*

14. Na última aula, pedimos que você refletisse sobre a possibilidade de obter um cubo por meio de secções planas num tetraedro. Se você não conseguiu resolver o problema, tente novamente!

___

___

***COMENTÁRIO***

*Uma possibilidade é utilizar as duas atividades anteriores e imaginar o cubo inscrito num octaedro que esteja inscrito no tetraedro.*

## RESUMO

Podemos obter inscrições de tetraedros, cubos e octaedros, uns nos outros, como mostram as figuras a seguir.

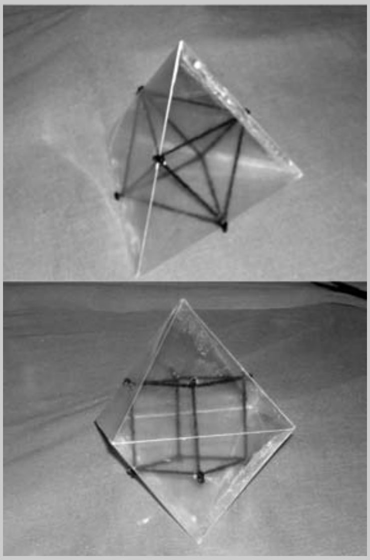


**Figura 10.11:** Octaedro inscrito no tetraedro e cubo inscrito no octaedro.

A observação crítica e a descrição de poliedros são processos geométricos importantes. À medida que vamos descrevendo, encontramos elementos conceituais diferentes e, dessa forma, enriquecemos nosso repertório matemático. Por exemplo, descrevendo tetraedros e octaedros em função de eixos e planos de simetrias e das secções planas, terminamos esta aula apresentando algumas observações no quadro seguinte.

| Poliedro | Sobre eixos e planos de simetria | Sobre os planos de intersecção e as secções |
|---|---|---|
| **Tetraedro** | Possui seis eixos de simetria que passam por um vértice e pelo centro da face oposta.São planos de simetria: os planos que contêm uma aresta e interceptam o ponto médio da aresta oposta, e que contêm a altura de uma face e vértice oposto a ela. | Se o plano de intersecção interceptar um eixo de simetria que contenha um vértice, sendo-lhe perpendicular, teremos triângulos eqüiláteros. Não sendo, o triângulo será isósceles. Se o plano for paralelo a duas arestas opostas, as secções serão retangulares. |
| **Octaedro** | Os eixos que passam por dois vértices opostos são de simetria. | Dependendo da posição do plano de intersecção, as secções podem ser quadriláteros, pentágonos ou hexágonos. |

## AUTO-AVALIAÇÃO

Você viu que, para a descrição de um determinado objeto, nos detemos em algumas de suas características ou propriedades. A visualização de planos e eixos nos poliedros não é uma atividade geométrica simples, principalmente quando não estamos familiarizados com os mesmos. Não se preocupe caso você tenha tido dificuldades em algumas atividades. Com tempo, você poderá refazê-las e sanar suas dificuldades. Se o tempo total da aula tiver sido excessivo, você pode priorizar a realização das Atividades 1, 3, 5, 6 e 14. Como auto-avaliação, consideramos que realizar a atividade seguinte será mais uma oportunidade para você desenvolver sua visualização e habilidade de descrever.

1. Construa modelos com canudos para a Atividade 1.

2. Descreva em que situações podemos ter uma secção plana quadrada num tetraedro. Faça também um desenho.

3. Desenhe e descreva a secção plana obtida num octaedro pela intersecção de um plano que corte quatro faces e seja perpendicular a um plano de simetria que contenha quatro vértices do octaedro.

4. Descreva como obter um octaedro por meio de cortes num cubo.

## INFORMAÇÕES SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, estudaremos os dodecaedros e icosaedros. Utilizaremos modelos sólidos, vazados e transparentes destes poliedros. Providencie o mesmo material que utilizou na aula passada.

AULA 11

# Estudando relações nos icosaedros e dodecaedros

## Meta da aula

Instrumentalizar o ensino dos poliedros regulares.

## objetivos

Nas Aulas 9 e 10, você viu que podemos obter determinado poliedro através de secções planas em outro; ou seja, podemos decompor um poliedro em vários, dependendo de como fazemos a secção. Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Realizar secções planas em poliedros.
- Analisar a obtenção de um poliedro regular através de secções planas em outro poliedro.

## Pré-requisitos

Para o desenvolvimento mais dinâmico e interessante desta aula, sugerimos-lhe revisar a *definição* de **dodecaedro** e de **icosaedro**, bem como tê-los construídos como: canudos para refrigerante, planificação, dobraduras etc.

## INTRODUÇÃO

**ICOSAEDRO**

É o poliedro regular cujas 20 faces são triângulos equiláteros.

**DODECAEDRO**

É o poliedro regular cujas 12 faces são pentágonos regulares.

Quando paramos para analisar a presença dos poliedros regulares nos livros didáticos do Ensino Médio, vemos escassez de atividades. A maioria delas enfatiza o cálculo do volume e das faces laterais. Além do mais, as propostas dos livros ainda forçam o desenvolvimento da visualização somente a partir de modelos basicamente estáticos, isto é, aqueles apresentados no próprio livro. Ainda sobre os exercícios, você verá que há predominância de tarefas relativas a cubos e tetraedros. Sendo assim, nesta aula, você verá que os **ICOSAEDROS** e os **DODECAEDROS** apresentam desafios que contribuem muito para desenvolver o pensamento espacial dos nossos alunos.

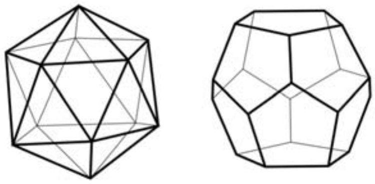


**Figura 11.1:** Exemplo de icosaedro e dodecaedro.

**!**

Em cada atividade que iremos desenvolver, colocaremos a ilustração. No entanto, consideramos imprescindível que você construa seus modelos com algum material. Assim, a visualização e a compreensão de propriedades geométricas, bem como de outras observações, ficarão mais fáceis para você. Com os modelos construídos, o tempo de realização de cada exercício pode ser reduzido.

***ATIVIDADES***

1. Cubo obtido por secções planas no dodecaedro.

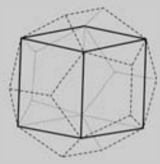


**Figura 11.2**

***COMENTÁRIO***

*Você deve ter percebido que as arestas do cubo são diagonais das faces do dodecaedro. Faça outras observações e converse com seus colegas e com o tutor.*

2. Um dodecaedro admite apenas cinco cubos inscritos, todos iguais entre si. Verifique a veracidade dessa propriedade utilizando o modelo de canudos.

3. Observe o icosaedro obtido por secções planas no octaedro. Descreva as secções planas efetuadas nesta transformação.

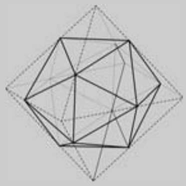


**Figura 11.3**

***COMENTÁRIO***

*Você deve ter percebido que os vértices do icosaedro estão nos pontos médios das arestas do octaedro. Construa um modelo transparente, pois o mesmo o ajudará na visualização desta inscrição.*

4. Observe o dodecaedro obtido por secções planas no cubo.

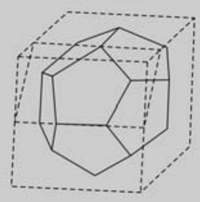


**Figura 11.4**

a) Descreva os cortes.

b) Considerando $\rho$ como o raio da esfera que tangencia as arestas do dodecaedro, contidas nas faces do cubo, podemos calcular $\rho = \frac{3+\sqrt{5}}{4}\ell$, onde $\ell$ é a aresta do dodecaedro; como essa esfera também tangencia as faces do cubo, teremos $\rho = \frac{a}{2}$, onde $a$ é a aresta do cubo; assim, poderemos concluir que $\ell = \frac{2a}{3+\sqrt{5}}$, isto é, $\ell = 0{,}3819a$. Exercite suas habilidades em Geometria dedutiva e verifique essas conclusões.

c) Construa um modelo transparente para a **Figura 11.4**.

***COMENTÁRIO***

*Discutir a dedução do item (b) não é nosso objetivo agora. No entanto, consideramos importante que você a compreenda e, se preferir, construa sua demonstração para verificar a propriedade anterior. Compartilhe-a com um colega e com seu tutor. Analisar e descrever possíveis cortes (a) e construir (c) o modelo da* ***Figura 11.4*** *é o que esperamos que você faça.*

### ATIVIDADE COMPLEMENTAR 1

A visualização de eixos e planos de simetria no dodecaedro e no icosaedro representa grande desafio para nosso raciocínio espacial. Nesse sentido, o uso dos recursos da Geometria Dinâmica podem ser grandes aliados. Jogue o Jogo do Dodecaedro disponível em http://www.tele.ed.nom.br/ion/ico3.html e tire suas conclusões. Quantos e quais são os eixos e planos de simetria? Discuta com seus colegas e com o tutor!

### Conversando sobre seu laboratório de Geometria

**Figura 11.5**

É claro que esperamos que você esteja gostando das sugestões de recursos que estamos apresentando no desenrolar das nossas aulas. Esperamos que você os utilize em suas aulas! Especialmente os alunos que gostam de artesanato poderão ver, a seguir, outro modelo criativos de sólidos construídos com tiras de papel, papel colorido, disquetes e através do encaixe de lápis. Por que você também não tenta construir modelos assim? Leve um exemplo de presente para o seu tutor!

## CONCLUSÃO

A construção do espaço geométrico deve ser feita dinamicamente, a partir da utilização de grande diversidade de materiais e atividades. Assim, as tarefas geométricas devem ajudar o aluno na compreensão e ampliação da sua percepção do espaço e na construção de modelos, mentais ou manipulativos, para interpretar criticamente questões de Matemática e de outras áreas do conhecimento. De fato, perceber as relações entre as representações planas nos modelos e associá-las a outros objetos, formas planas ou espaciais e suas propriedades são essenciais para a leitura do mundo através dos olhos de outras ciências.

**RESUMO**

Construindo e manipulando modelos de poliedros transparentes com canudos para refrigerante, nesta aula você visualizou o cubo obtido por secções planas no dodecaedro, icosaedros obtidos por seções planas no octaedro e dodecaedros obtidos por secções planas no cubo.

## ATIVIDADE FINAL

No quadro a seguir, mostramos alguns elementos dos poliedros regulares convexos (RANGEL, 1982).

| | nº de arestas em cada vértice | nº total de arestas | nº de faces | nº de vértices | nº de diagonais de cada vértice | nº total de diagonais | nº de planos diagonais | nº de eixos de simetria | nº de planos de simetria | nº de faces em cada vértice | nº de lados de cada face |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tetraedro | 3 | 6 | 4 | 4 | 0 | 0 | 0 | 3 | 6 | 3 | 3 |
| Cubo | 3 | 12 | 6 | 8 | 1 | 4 | 0 | 9 | 9 | 3 | 4 |
| Octaedro | 4 | 12 | 8 | 6 | 1 | 3 | 0 | 9 | 9 | 4 | 3 |
| Dodecaedro | 3 | 30 | 12 | 20 | 10 | 100 | 300 | 15 | 30 | 3 | 5 |
| Icosaedro | 5 | 30 | 20 | 12 | 6 | 36 | 60 | 15 | 30 | 5 | 3 |

Entender cada informação contida no quadro é importante.

Utilizando seus modelos de poliedros regulares, você pode confirmar que os elementos do quadro anterior são verdadeiros. Converse com seus colegas e com seu tutor.

## AUTO-AVALIAÇÃO

Até o momento, você conheceu, construiu e trabalhou com modelos com canudos, sucatas de caixas, dobraduras e planificações. Para a aula de hoje, você viu que a montagem dos modelos com canudos, em especial, potencializa significativamente sua aprendizagem. Além das contribuições que sintetizamos no quadro a seguir, você certamente encontrará outras ao longo desta disciplina.

| Recurso | Contribuição |
|---|---|
| Modelos com canudos | • ajuda na visualização e no desenho plano para ilustrar;<br>• contribui na visualização e na compreensão de secções planas e na inscrição de outros poliedros;<br>• facilita a identificação de eixos de simetria. |

**Quadro 11.1:** Modelos com canudos: contribuições

## ATIVIDADE COMPLEMENTAR 2

Os poliedros cujas faces são triângulos eqüiláteros são chamados deltaedros. Existem oito deltaedros convexos, três dos quais são poliedros regulares. Acreditamos que, depois de todas essas aulas em que discutimos os poliedros de Platão sob diferentes aspectos, você poderá imaginar todos os deltaedros, desenhá-los, construir modelos etc. Você encontrará mais detalhes em http://www.apm.pt/pa/index.asp?accao=showtext&id=2353

A seguir, os modelos dos deltaedros. Você poderá recortá-los do Módulo Prático.

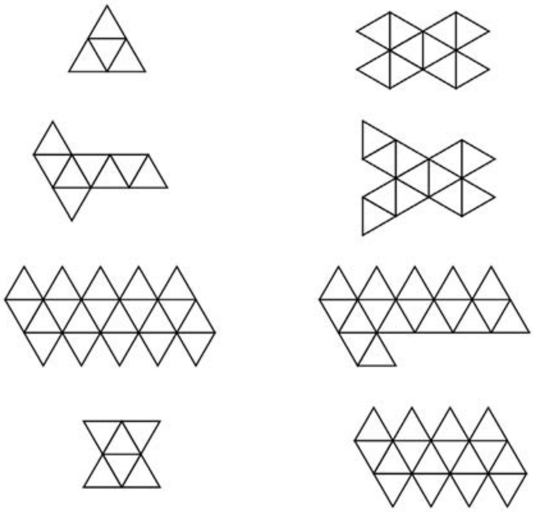


**Figura 11.6**

## INFORMAÇÕES SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, você estudará outra forma de inscrição de poliedros: a dualidade. Antes de começá-la, construa um modelo transparente de cubo com os centros das faces localizados. Você também precisará de linha grossa colorida e um pedaço (aproximadamente um palmo) de arame fino para servir de agulha.

AULA 12

# Inscrição e circunscrição de poliedros: os poliedros duais

## Meta da aula

Instrumentalizar o ensino dos poliedros duais.

## objetivos

Esperamos que, após estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- Construir e definir poliedros duais.
- Utilizar a internet como recurso para aprendizagem.

## Pré-requisitos

Para que seu desempenho nesta aula seja excelente, esperamos que tenha construído os cinco poliedros regulares com canudos para refrigerante (Aula 7). A construção de poliedros inscritos deve ser também praticada. Saber identificar atributos relevantes (Aula 2) em uma definição é outro pré-requisito.

> **!**
>
> Lembre-se de acessar a página da disciplina e seu conjunto de aulas na Plataforma Cederj. Há interessantes animações que auxiliam o desenvolvimento da visualização e representação. Ao acessar também os *sites* sugeridos nesta aula, você terá novas motivações para o estudo dos poliedros duais.

## INTRODUÇÃO

A partir da Aula 7, em especial, você tem percebido que descrição e análise de estruturas poliédricas devem ser outros objetivos do ensino de Geometria. Na aula anterior, vimos que nos modelos das simetrias dos poliedros existem planos de simetria e eixos de rotação com a mesma disposição espacial. Vimos também que os poliedros podem inscrever-se diferentemente. Na aula de hoje, vamos estudar uma inscrição particular: a dualidade.

A seguir, você verá poliedros regulares inscritos em outros ou em si mesmos. As **Figuras 12.1** mostram-nos: (a) tetraedro inscrito em tetraedro; (b) octaedro em cubo; (c) cubo em octaedro; (d) dodecaedro em icosaedro; (e) icosaedro em dodecaedro.

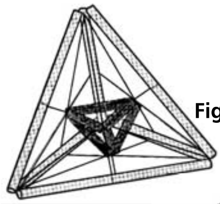


**Figura 12.1.a**

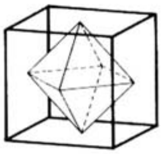


**Figura 12.1.b**

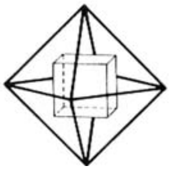


**Figura 12.1.c**

**Figura 12.1.d**

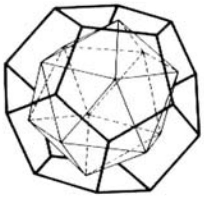


**Figura 12.1.e**

Antes de continuar a leitura desta aula, acesse, se possível, o *site* http://www.atractor.pt/mat/Polied/poliedros.html e veja interessantes imagens e animações dos poliedros duais. Confira!

**Dualidade**

**Dual do tetraedro** | **Dual do cubo** | **Dual do octaedro** | **Dual do dodecaedro** | **Dual do icosaedro**

**Figura 12.2**

Você deve ter notado que as animações apresentadas no quadro seguinte revelam que é possível construir o dual de um dado sólido platônico, truncando-o sucessivamente.

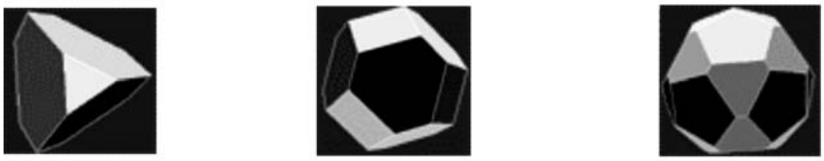


**Figura 12.3**

Após seu passeio pela internet, você deve ter observado uma regularidade na inscrição dos poliedros. Na conceituação de poliedros duais, sugerimos três definições:

Os poliedros duais também são denominados recíprocos.

**Definição 1**: Se considerarmos um sólido platônico qualquer e unirmos os pontos centrais das faces adjacentes, obteremos um novo sólido. Esses dois sólidos são duais um do outro.

**Definição 2**: Poliedros duais são formados por dois poliedros, um dentro do outro, de modo que os vértices do sólido interior coincidam com o centro das faces do sólido exterior.

**Definição 3**: Dois poliedros são duais quando um está inscrito no outro de tal forma que os vértices do poliedro inscrito são centros das faces do poliedro circunscrito.

***ATIVIDADE***

1. Identifique os atributos relevantes em cada definição.

***COMENTÁRIO***

*Esta atividade é importante para que você perceba que podemos definir, diferentemente, determinado conceito. Apesar dos atributos relevantes (poliedros regulares inscritos, de modo que o vértice de um seja o centro da face de outro), cada definição pode utilizar terminologias distintas e, desta forma, nos remeter a outros elementos conceituais. Por exemplo, na primeira definição há referência aos sólidos platônicos e ao ponto central das faces. Estas, enfatiza a definição, são adjacentes.*

**!**

Lembre-se de que, para obter o ponto central de uma face, é necessário determinar o ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos das faces.

***ATIVIDADES***

2. Nesta atividade, construiremos o octaedro dual do cubo. Siga os procedimentos seguintes:

2.1 Construa um modelo de cubo transparente, com os centros das faces localizados.

2.2 Com auxílio de uma agulha aquecida, faça pequenos orifícios nos centros das faces (apenas o suficiente para passar, duas vezes, uma linha grossa).

2.3 Passe uma linha grossa, de cor contrastante, unindo todos os centros das faces (faça um nó em cada orifício, voltando a passar a linha por ele), até formar um octaedro. Veja como ficou (Figura 12.4)!

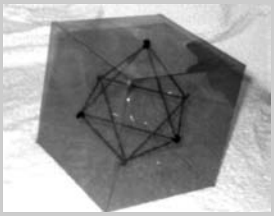


**Figura 12.4**

Agora, verifique, empiricamente, com auxílio de um arame, a relação entre os comprimentos das arestas do cubo e os do seu dual. Construa, agora, um modelo com canudos com o cubo e seu dual.

***COMENTÁRIO***

*É provável que você tenha percebido que há relação de tamanho entre as arestas, ou melhor, entre as medidas dos canudos a ser utilizados. Para construirmos poliedros duais, devemos prestar atenção na relação entre o comprimento das arestas dos poliedros correspondentes.*

3. Na Figura 12.1.a, mostre que a relação entre o comprimento da aresta *a* do dual é a/3 do comprimento da aresta do tetraedro original.

***COMENTÁRIO***

*Construir os dois tetraedros pode ajudá-lo bastante nesta verificação. Uma alternativa aproximada, para entender a relação de comprimento das arestas, é prestar atenção ao tamanho da linha utilizada em cada caso.*

4. Agora que você sabe que há relação entre o comprimento das arestas, vamos construir, nesta atividade, **(1)** um cubo, **(2)** um tetraedro inscrito no cubo, **(3)** um octaedro inscrito no tetraedro. Em seguida, você deve **(4)** inscrever o cubo com os poliedros inscritos em (2) e (3) em um dodecaedro. Agora, **(5)** introduza o dodecaedro no icosaedro. Comprove, segundo a tabela a seguir, o comprimento das arestas em cada poliedro.

| | Cubo | Tetraedro | Octaedro | Dodecaedro | Icosaedro |
|---|---|---|---|---|---|
| Comprimento da aresta | $a$ | $a\sqrt{2}$ | $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$ | $1.14a$ |

**Tabela 12.1: Arestas**

***COMENTÁRIO***

*Se você já tiver cada poliedro construído, o tempo de realização desta atividade pode ser bem menor do que o previsto. Procure descobrir outras relações matemáticas como, por exemplo, simetrias e eixos de rotação. Converse com colegas e com seu tutor.*

!

Não se esqueça de que a internet também lhe dará novas possibilidades de aprendizagem. Além do mais, a rede é uma nova fonte de consulta sobre recursos e atividades matemáticas diversas.

O tetraedro é dual de si mesmo (autodual).

## Conversando mais sobre seu laboratório pessoal de Geometria

O *Geometer's Sketchpad* é um *software* de Geometria dinâmica, ou seja, ele permite aos alunos construções e descobertas que recursos tradicionais (estáticos) não possibilitariam. Esse *software* traz importantes contribuições para o estudo da Matemática. Acesse a página seguinte e saiba mais: http://www.keypress.com/sketchpad/java_gsp/index.html

Visite também a galeria demonstrativa. Lá você poderá conhecer o *software* e algumas de suas aplicações em Matemática, por exemplo: hipercubo, secções cônicas, visualização do icosaedro em 3D.

## ATIVIDADE COMPLEMENTAR

No estudo dos poliedros duais, podemos pensar numa série de conceitos relacionados, fato que nos favorecerá com um processo de visualização de elementos conceituais diferentes. Por exemplo, acessando http://www.terravista.pt/guincho/7673/dual.html você conhecerá **eixos de homologia**, verá secções, projeções e transformadas. Na página principal, http://www.terravista.pt/guincho/7673/formgeo.html, você terá um interessante índice de formas geométricas e inscrições variadas. Por exemplo, em http://www.terravista.pt/guincho/7673/stella.html, você verá a *Stella Octangula* (**Figura 12.5**). Clique no local assinalado, arraste e faça descobertas, ainda que apenas visuais.

**Figura 12.5**

**EIXO DE HOMOLOGIA**

Eixo determinado por dois pontos distintos, ou seja, através de uma transformação pontual.

Para saber mais sobre as possibilidades de integração conceitual nos poliedros duais, clique em *construção do octaedro regular* (**Figura 12.6**) ou cubo (**Figura 12.7**). Vá clicando em cada passo/quadro (octaedro ou cubo – secção – secção rodada – projeção – homologia – quadrado – projeção da secção – transformada – diagonal) e veja o que acontece.

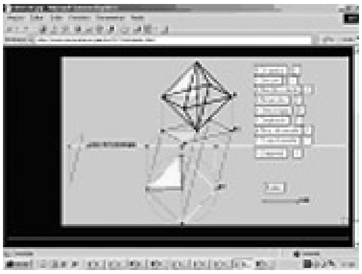


**Figura 12.6**

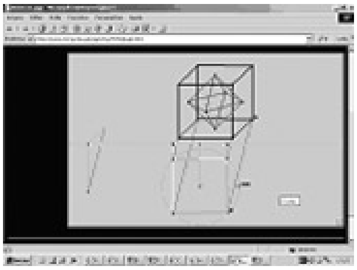


**Figura 12.7**

***COMENTÁRIO***

*Esta atividade, embora opcional, é de extrema importância para que você possa perceber novas possibilidades de integração de conceitos matemáticos que podem surgir no trabalho com poliedros duais.*

!

Ao final desta aula, você vai ler o texto Dualidade e sólidos de **CATALAN,** de Eduardo Veloso. Ele utiliza o conceito de estrelação: ato de estrelar, isto é, prolongar as faces do poliedro até que suas interseções formem pontas sólidas, do tipo estrela.

**EUGÈNE CHARLES CATALAN**
**(1814-1894)**

Matemático belga, foi professor de Geometria Descritiva, na École Polytechnique, de onde tinha sido expulso como aluno antes, devido às suas idéias políticas de extrema esquerda. Trabalhou Frações Contínuas e Teoria dos Números. Estudou os duais dos poliedros arquimedianos, atualmente denominados Sólidos de Catalan.

## CONCLUSÃO

A visualização é um processo cognitivo complexo e de caráter pessoal, no qual a experiência tem grande importância; ou seja, o que uma pessoa observa pode não ser visto por outra. Tal processo deve ser constante no ensino-aprendizagem da Geometria; é desenvolvido, conjuntamente, através da análise e descrição crítica de formas, da escrita e das diferentes representações do objeto analisado.

## RESUMO

A dualidade é um tipo de inscrição/circunscrição de poliedros regulares. O tetraedro é autodual; o octaedro é dual do cubo; o dodecaedro é dual do icosaedro.

## AUTO-AVALIAÇÃO

Consideramos importante que você tenha compreendido a definição de poliedros duais (Atividade 1), construído tais poliedros e prestado atenção na relação entre o comprimento das arestas (Atividades 2 e 3). Esperamos também que você tenha conversado com o tutor sobre novas descobertas e relações (Atividade 4), por exemplo, entre o volume dos poliedros duais, suas diagonais etc. Para tal, a realização da Atividade 5 (opcional) vai ajudá-lo significativamente.

## INFORMAÇÕES SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, estudaremos a Relação de Euler V+F=A+2. Mantenha seus modelos de poliedros à mão, eles serão muito necessários.

## DUALIDADE E SÓLIDOS DE CATALAN

De acordo com J. Malkevitch, o primeiro estudo sistemático da dualidade nos poliedros deve-se a E. C. Catalan, que num texto intitulado *Mémoire sur la théorie des polyèdres*, publicado em 1865, apresenta a lista dos duais dos poliedros arquimedianos.

Uma unificação do conceito de dualidade que seja apropriado por uma categoria muito geral de poliedros não está feita e será mesmo porventura impossível. Vamos limitar-nos a apresentar o conceito de dualidade para os poliedros convexos, e em particular, para os platônicos e arquimedianos.

Qualquer sólido platônico ou arquimediano pode ser inscrito numa superfície esférica. Se, no caso de um sólido platônico, imaginarmos o plano tangente à respectiva superfície esférica em cada um dos vértices e se tomarmos esses planos como os planos das faces de um novo poliedro, este será também platônico. Se partirmos de um tetraedro, obtemos de novo um tetraedro. Se partirmos de um cubo, obteremos um octaedro e vice-versa. Se partirmos de um dodecaedro, obtemos um icosaedro e vice-versa. Assim, dizemos que o cubo é dual do octaedro (e vice-versa), que o dodecaedro é dual do icosaedro (e vice-versa) e que o tetraedro é dual de si próprio, ou autodual. Note-se que, se unirmos os pontos centrais dos pares de faces adjacentes de um cubo, obtemos também um octaedro. Os dois octaedros são semelhantes, pois existem dilatações com centro no centro do cubo que transformam qualquer deles no outro. Qual deles é o dual do cubo? A pergunta não tem sentido, pois o conceito de dualidade não se aplica a poliedros concretos, mas a classes de poliedros. O que podemos dizer é que o dual do cubo (entendendo a palavra cubo como a classe de todos os cubos) é o octaedro (entendendo por octaedro a classe de todos os octaedros). Portanto, os dois métodos que apresentamos para encontrar o "dual" servem para encontrar representantes do poliedro dual.

A mesma construção, a partir dos planos tangentes, no caso dos arquimedianos, leva-nos aos poliedros duais destes, os chamados *sólidos de Catalan*. As faces não são polígonos regulares, mas são todas congruentes. Na **Figura A** está representado um dos sólidos de Catalan, o dual do octaedro. As faces são 12 losangos e, por isso, chama-se *dodecaedro rômbico*.

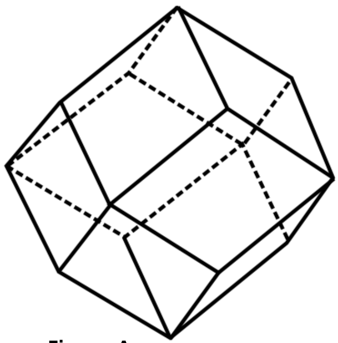


**Figura A**

Relacionados com os poliedros duais, aparecem os *sólidos compostos*. Podem também resultar de estrelações. Por exemplo, da estrelação do octaedro surge a *stella octangula*. Trata-se de um sólido composto de dois tetraedros, portanto pode também considerar-se como composto de um poliedro e do seu dual, numa posição especial. Podemos, da mesma forma, considerar o sólido composto de um octaedro e do seu dual (o cubo), obtido colocando as arestas do cubo concorrentes com as do octaedro e perpendiculares no ponto médio.

A **Figura B** mostra esse sólido composto. À esquerda, está o sólido composto do octaedro e do cubo, seu dual. Na figura do meio, vemos como a intersecção do octaedro e do cubo, nesta posição, tem como resultado o cubo octaedro. Na figura da direita, vemos como o sólido envolvente do sólido composto é o dodecaedro rômbico, dual do cubo octaedro.

Com estrelações do icosaedro podem obter-se vários sólidos compostos, como, por exemplo, o composto de cinco tetraedros. O sólido comum a estes cinco tetraedros é um icosaedro.

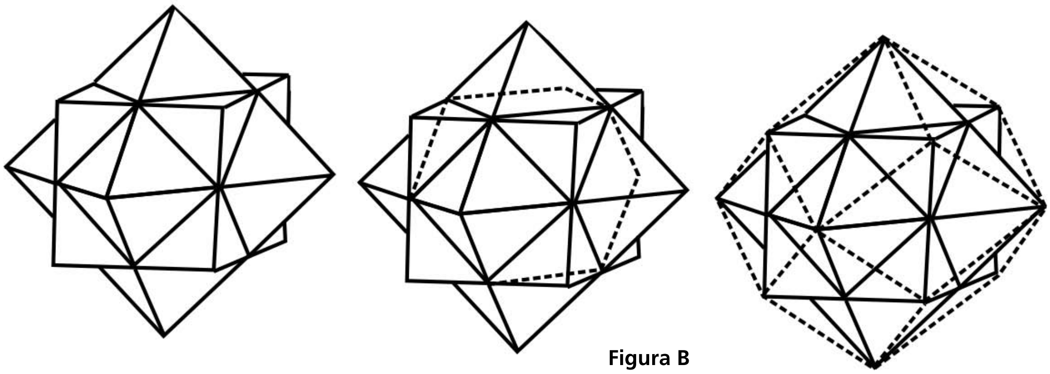


**Figura B**

AULA 13

# Euler e os poliedros

## Meta da aula

Instrumentalizar o ensino dos poliedros.

## objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- Construir modelos de poliedros.
- Utilizar a relação de **Euler** $V - A + F = 2$.
- Verificar a validade da relação de Euler em poliedros regulares convexos.

## Pré-requisitos

Para esta aula, você deve ter em mente a definição de poliedros, poliedros regulares e poliedros convexos, além de ter praticado a montagem de modelos sólidos vazados e transparentes, desenvolvendo sua habilidade de visualização espacial.

**LEONHARD EULER**
**(1707-1783)**

De origem suíça, Euler foi um dos mais ecléticos cientistas. Na Matemática, deu contribuições importantes ao Cálculo Diferencial, de Leibniz, e ao Método de Newton. Aprimorou o conceito de Função, introduzindo as Funções Beta e Gama. Criou notações até hoje utilizadas, como "i", "e", "π", entre outras. Lançou as bases do Cálculo de Variações e da Topologia, colaborando com a Geometria e a Teoria dos Números. Na Física, criou a Teoria dos Movimentos dos Corpos Rígidos, além de importantes contribuições em Mecânica Contínua, Teoria Cinética dos Gases, Teoria Lunar, Elasticidade, Acústica, Teoria da Onda de Luz e Hidromecânica de navios.

## INTRODUÇÃO

Leonhard Euler deu inúmeras contribuições à Matemática e à Física. Calcula-se que, no século em que viveu, um terço do que foi publicado (livros, artigos etc.) sobre Matemática e Física foi de sua autoria.

O teorema de Euler para os poliedros convexos não está entre suas obras mais importantes, mas, certamente, está entre as mais populares, ao lado dos diagramas de Euler para conjuntos.

Na Aula 27 do Módulo 4 de Geometria Básica, você estudou o teorema de Euler e algumas de suas conseqüências. Nesta aula, discutiremos o teorema com vistas à visualização de poliedros convexos ou regulares. Começaremos relembrando o teorema e mostrando a existência de apenas cinco poliedros regulares. Na seqüência, verificaremos a incidência do teorema em outros casos, construindo modelos que poderão ser utilizados em suas futuras aulas. Vamos ao trabalho!

## O TEOREMA DE EULER

Para todo poliedro convexo, tem-se $V - A + F = 2$, onde V é o número de vértices, A, o número de arestas e F, o número de faces do poliedro (Geometria Básica, Módulo 4, Aula 27, p. 99).

Na Aula 7 deste módulo, concluímos, experimentalmente, que só existem cinco poliedros regulares. Você se lembra do caminho que percorremos para justificar essa existência?

**1º PASSO:** Como a definição de poliedro regular diz que as faces são polígonos regulares congruentes, temos como faces: triângulos eqüiláteros, quadrados, pentágonos regulares etc.

**2º PASSO:** Em cada vértice concorre o mesmo número de faces; o número mínimo de faces num mesmo vértice é três; a soma dos ângulos internos das faces, num mesmo vértice, deve ser menor que 360°.

A partir dessas constatações, você pode concluir que as faces dos poliedros regulares só podem ser triângulos, quadrados ou pentágonos regulares. Além disso, os ângulos poliédricos podem admitir três, quatro ou cinco triângulos; somente três quadrados ou somente três pentágonos.

**3º PASSO:** Construímos modelos desses ângulos poliédricos e concluímos que podíamos "fechar" apenas os cinco poliedros regulares.

Essa construção experimental é particularmente importante do ponto de vista didático, pois pode ser desenvolvida pela metodologia da resolução de problemas. Coloca em ação as **INTELIGÊNCIAS** lógica, espacial, cinestésica, interpessoal e intrapessoal do aluno, além de contribuir para o desenvolvimento de sua visão espacial.

**INTELIGÊNCIAS**
O psicólogo americano Howard Gardner desenvolveu, na década de 1980, a chamada Teoria das Inteligências Múltiplas, segundo a qual, contrariando a teoria de Piaget, existem várias inteligências, harmônicas e independentes. No primeiro momento, Gardner relacionou sete inteligências: lingüístico-verbal, lógico-matemática, espacial, corporal-cinestésica, musical, interpessoal e intrapessoal. Hoje, a essas somam-se as inteligências existencial, pictórica e naturalista. O desenvolvimento dessas inteligências se dá através de estímulos apropriados. Saiba mais lendo o livro *Estruturas da Mente*, do próprio Gardner.

O teorema de Euler permite, usando Geometria dedutiva, verificar, rápida e facilmente, que só existem cinco poliedros regulares:

1. Se as faces são triangulares, teremos:

$A=\frac{3F}{2}$; $V=\frac{3F}{3}$, $V=\frac{3F}{4}$ ou $V=\frac{3F}{5}$ . Sendo assim:

a) $\frac{3F}{3}-\frac{3F}{2}+F=2 \longrightarrow F=4$, isto é, **tetraedro**

b) $\frac{3F}{4}-\frac{3F}{2}+F=2 \longrightarrow F=8$, isto é, **octaedro**

c) $\frac{3F}{5}-\frac{3F}{2}+F=2 \longrightarrow F=20$, isto é, **icosaedro**

2. Se as faces são quadradas, teremos: $A=\frac{4F}{2}=2F$ e, $V=\frac{4F}{3}$, assim:

$\frac{4F}{3}-2F+F=2 \longrightarrow F=6$, isto é, **hexaedro (cubo)**

3. Se as faces são pentagonais, teremos: $A=\frac{5F}{2}=2F$ e, $V=\frac{5F}{3}$, assim:

$\frac{5F}{3}-5F+F=2 \longrightarrow F=12$, isto é, **dodecaedro**

Não havendo outras possibilidades, são apenas cinco os poliedros regulares.

***ATIVIDADES***

1. Observando seus modelos dos poliedros de Platão, preencha a tabela a seguir e verifique a validade da fórmula de Euler, em cada caso.

| | Faces | Arestas | Vértices | V-A+F |
|---|---|---|---|---|
| Tetraedro | | | | |
| Octaedro | | | | |
| Hexaedro | | | | |
| Dodecaedro | | | | |
| Icosaedro | | | | |

**Tabela 13.1**

***COMENTÁRIO***

*Essa atividade não demonstra o teorema de Euler, mas convence os alunos do Ensino Fundamental da veracidade do mesmo.*

*Diferentemente dos seus alunos, você não deve se contentar com uma simples confirmação do teorema. Uma demonstração interessante pode ser encontrada em* TINOCO *(1999, p.129-130).*

**LÚCIA TINOCO**

É professora da UFRJ e uma das pesquisadoras do Projeto Fundão, grupo de estudos e pesquisas que, desde 1984, desenvolve atividades com participação de professores e graduandos de Matemática.

**!**

Exemplos não demonstram propriedades matemáticas! Imagine se alguém desejasse provar que "a soma de dois números é sempre igual ao produto entre eles" e escolhesse 2 e 2 como exemplo.

**ANTÔNIO JOSÉ LOPES**

O polular Bigode, é um reconhecido educador matemático do Centro de Educação Matemática (CEM), em São Paulo. Autor de livros de Matemática para o Ensino Fundamental e membro atuante da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM: www.sbem.br).

1. **Lopes** (1995) sugere uma interessante atividade utilizando barra de sabão. Em primeiro lugar, você deve esculpir um cubo numa barra de sabão. Observe e anote o número de faces, arestas e vértices. Agora, corte um pedaço do cubo, deixando uma nova face, por exemplo, triangular. Conte e anote o novo número de faces, arestas e vértices. Faça um novo corte, por exemplo, deixando uma face retangular num dos "cantos" do novo sólido. Conte e anote, novamente, a quantidade de faces, arestas e vértices do novo sólido. Faça novos cortes e continue anotando.

| | Faces | Arestas | Vértices | V-A+F |
|---|---|---|---|---|
| Cubo | 6 | 12 | 8 | 2 |
| 1º corte | | | | |
| 2º corte | | | | |
| 3º corte | | | | |
| 4º corte | | | | |
| 5º corte | | | | |

**Tabela 13.2**

Conte, a cada corte, o número de faces, arestas e vértices suprimidos e acrescentados, e tire suas conclusões.


Figura 13.1


Figura 13.2


Figura 13.3


Figura 13.4

***COMENTÁRIO***

*Você deve ter observado que a característica de Euler se mantém igual a 2. No primeiro corte, o número de faces aumenta em 1; o número de arestas aumenta em 3; perde-se 1 vértice e ganha-se 3, isto é, acrescenta-se 2. Confira os outros cortes.*

## Conversando sobre seu laboratório pessoal de Geometria

Você está conhecendo outro recurso simples que deve fazer parte do seu laboratório. Como viu, o uso da barra de sabão permite várias outras atividades, como determinar eixos e planos de simetria, comparar formas e analisar volumes, estudar as diversas possibilidades de corte etc.

***ATIVIDADES***

3. Na Aula 27 de Geometria Básica (Poliedros), a Atividade 4 é a seguinte: "Um poliedro convexo de onze faces tem seis faces triangulares e cinco faces quadrangulares. Determine o número de arestas e vértices desse poliedro."
Aplicando-se o teorema de Euler, essa é uma atividade relativamente simples, que se resume à manipulação algébrica de uma equação do primeiro grau. Você deve tê-la resolvido à época. Se não o fez, faça agora! Lembre-se de que você já conhecia o teorema de Euler. Tente visualizar tal poliedro. Faça um desenho, depois uma planificação e um modelo desse poliedro.

***COMENTÁRIO***

*Imaginar um poliedro, conhecendo-se o número e tipo das faces, pode ser uma tarefa difícil. Às vezes, é até impossível; Imagine um poliedro com três faces triangulares e três quadrangulares. O teorema de Euler nos ajuda a saber se é possível ou não construir um determinado poliedro convexo, mas não ajuda a construí-lo. Se você ainda não conseguiu visualizar o 11-edro (lê-se onze-edro ou undecaedro) acima, continue tentando.*

4. Considere a planificação a seguir.

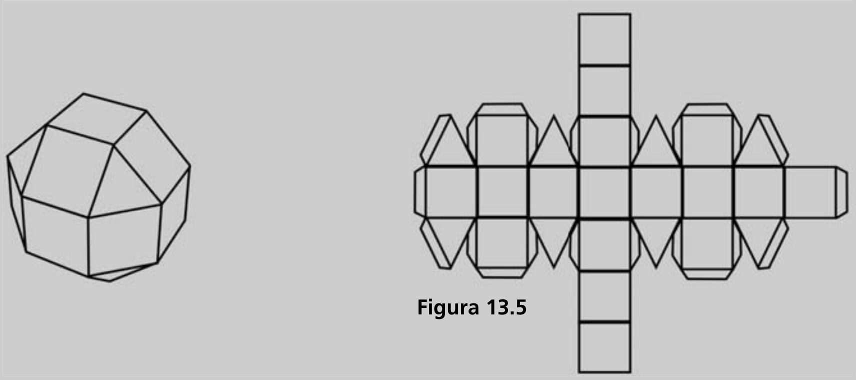


Figura 13.5

a. Calcule o número de faces, arestas e vértices. Essa é uma possível planificação do poliedro à esquerda?
b. Você consegue visualizar e desenhar o tal poliedro?
c. Desenhe as abas da planificação.
d. Recorte e monte o sólido.

***COMENTÁRIO***

*A característica de Euler dirá se é possível montar um poliedro com essa planificação. O desenho das abas pode ser feito de várias maneiras. A montagem do poliedro mostrará se o desenho das abas e do poliedro estavam corretos. Lembre-se de que esta planificação está disponível no Módulo Prático, e você deve utilizá-la.*

5. Ao desenhar a planificação, o desenhista cometeu um erro. Tente descobri-lo.

Figura 13.6

***COMENTÁRIO***

*Você pode encontrar o erro tentando imaginar o poliedro montado a partir da planificação. Pode utilizar a característica de Euler ou recortar e montar o poliedro. Lembre-se de que esta planificação consta no Módulo Prático e você deve utilizá-la. A manipulação do modelo é importante.*

## CONCLUSÃO

O teorema de Euler é um importante aliado para você verificar a possibilidade de construir um poliedro convexo. Você pode manipular o número de faces, arestas e vértices das mais variadas maneiras, de modo a compor um poliedro. Não é nada simples visualizar os poliedros, desenhá-los e montá-los. Esculpir os modelos em sabão ou desenhar sua planificação podem ajudá-lo nesta tarefa.

## RESUMO

Em todo poliedro convexo tem-se que $V - A + F = 2$, onde $V$ é o número de vértices; $A$, o número de arestas, e $F$, o número de faces. Existem várias provas para esta fórmula. Na realidade, ela é válida para uma classe maior de poliedros. Para saber se a fórmula vale para um determinado poliedro, imagine que ele seja feito de borracha. Se, ao inflá-lo, ele assumir a forma de uma esfera, a relação de Euler é válida.

## AUTO-AVALIAÇÃO

Você deve ter observado que, nesta aula, evitamos utilizar ilustrações. Quando as utilizamos, foi para desafiar a sua visualização e não para ajudá-la. Entendemos que, a essa altura, você deve estar apto a ler a descrição de uma situação espacial e imaginá-la. Particularmente, se você ainda não conseguiu imaginar o 11-edro da **Atividade 3** desta aula, significa que você deve retomar as aulas anteriores e (re)fazer as atividades.

**O 11-edro da Atividade 3**

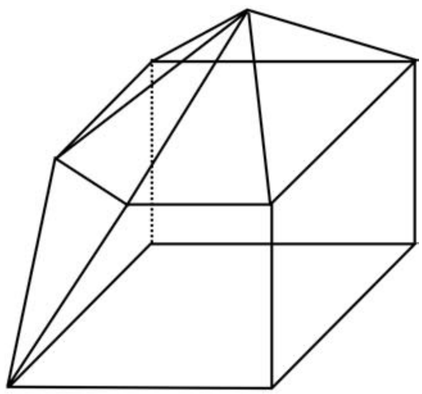


**Figura 13.7**

Se você não teve dificuldade em imaginar os poliedros desta aula, retome a lista de exercícios da Aula 27 de Geometria Básica. Lá são descritos vários poliedros. Visualizá-los e desenhá-los representa desafio bastante interessante para desenvolver sua inteligência espacial.

## INFORMAÇÃO SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, estudaremos os poliedros estrelados.

AULA 14

# Ampliando o mundo dos poliedros regulares: os poliedros estrelados

## Meta da aula

Instrumentalizar o ensino dos poliedros estrelados.

## objetivos

Esperamos que, após estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- Estrelar poliedros e definir poliedros estrelados.
- Utilizar a internet como recurso para sua aprendizagem.
- Reconhecer a importância do uso da internet para o aprendizado de seus alunos e elaboração de suas aulas.

## Pré-requisitos

Para que você tenha excelente desempenho nesta aula, é importante dispor dos poliedros regulares construídos com diferentes materiais, pois eles sempre o ajudarão no desenvolvimento de sua visão espacial. Também, é imprescindível que você acesse a internet e utilize suas ferramentas.

**!**

Lembre-se de acessar a página da disciplina na Plataforma Cederj. Há interessantes animações que auxiliam no desenvolvimento da visualização e representação. Ao acessar também os *sites* sugeridos nesta aula, você terá diferentes motivações para o estudo e reconhecimento dos poliedros estrelados.

## INTRODUÇÃO

Nesta aula, vamos estudar os poliedros estrelados, também denominados poliedros com pontas. Até agora, as formas com pontas que estudamos foram as decorrentes dos poliedros regulares e seus respectivos duais. Sabemos que uma forma bem usual de obtermos poliedros com pontas é colar pirâmides em suas faces. Por exemplo, imagine seis pirâmides, cada uma colada numa face de um cubo. Formamos assim um poliedro com pontas. Você sabe que poliedro ficou formado? Não são esses os que estudaremos nesta aula, pois hoje trataremos apenas dos que podem ser obtidos prolongando as faces até que as mesmas se interceptem, formando um novo sólido. Esse procedimento é denominado de **estrelar** um sólido.

Na linguagem cotidiana, a palavra estrela é utilizada com sentido diferente daquele que, em Matemática, entendemos por estrela ou poliedro estrelado. Uma estrela é a figura que obtemos quando prolongamos os lados de um polígono até que os mesmos se interceptem. Isso pode formar pontas ou não! Assim, o significado cotidiano de estrela é o de polígono com pontas e, de poliedro estrelado, é o de poliedro com pontas. Essa diferença de significado pode gerar dúvidas no entendimento de tais conceitos na Matemática. Sendo assim, estudaremos as formas que se obtêm ao prolongar as faces de alguns poliedros, independentemente de seu aspecto ser o de um sólido com pontas ou não. A seguir, você pode ver diferentes tipos de poliedros estrelados: alguns com pontas, outros não.

### *ATIVIDADES*

**1. Para entendermos melhor como se geram sólidos estrelados, pensamos ser conveniente começarmos pela construção de polígonos estrelados. O que acontece quando prolongamos os lados de um triângulo equilátero e de um pentágono regular? Crie sua imagem mental.**

***COMENTÁRIO***

*Você percebeu que, no triângulo (**Figura 14.1**), os lados prolongados não se encontram e, no pentágono (**Figura 14.2**), eles já se interceptam, permitindo-nos construir um novo polígono com cinco segmentos formados a partir dos lados prolongados. Obtemos, assim, o* **PENTAGRAMA** *dos pitagóricos.*

**Figura 14.1**

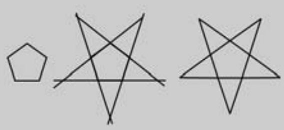


**Figura 14.2**

**PENTAGRAMA**

É um polígono regular (estrelado) não convexo, com cinco lados congruentes. Se considerarmos ainda que é regular o polígono de lados congruentes e ângulos por pares de lados consecutivos também congruentes, estaremos diante de um polígono regular.

2. Nesta atividade, você verá outra possibilidade de estrelar um pentágono. Por exemplo, se você dividir uma circunferência em cinco partes iguais e ligar os pontos de divisão consecutivamente, andando sempre num mesmo sentido, obterá um pentágono regular. Mas se percorrer a circunferência ligando os cinco pontos de dois em dois, formará um pentágono (regular) estrelado após duas voltas.

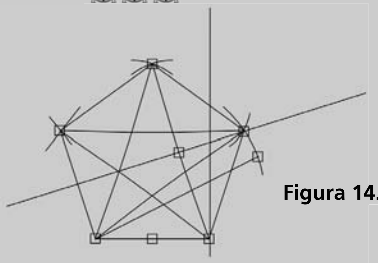


**Figura 14.3**

Se você tiver chance, acesse a página http://www.gregosetroianos.mat.br/poliest.asp para ver uma animação que ilustra essa construção. O ponto azul percorre a circunferência no sentido anti-horário, ligando os pontos de dois em dois.

***COMENTÁRIO***

*Você viu que é mais fácil descrever como se constrói um pentágono regular estrelado do que partir, a priori, de uma definição rigorosa. Esta é uma importante estratégia didática: construir a definição a partir de uma série de procedimentos. Você também deve ter percebido que esse tipo de tarefa pode trabalhar com construções geométricas. Aproveite esta oportunidade para rever como se inscrevem outros polígonos regulares numa circunferência. Para fazer as construções, você precisará de mais tempo do que o previsto.*

3. Um polígono pode admitir mais de uma estrelação. Dê um exemplo de polígono e apresente duas de suas estrelações.

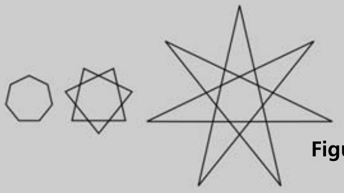


**Figura 14.4**

O processo de obtenção de sólidos estrelados é análogo. Por exemplo: Será possível obter novos poliedros prolongando as faces de um tetraedro, de um cubo ou de um octaedro? Facilmente você verá que não é possível, ou seja, que as faces prolongadas não se interceptam.

***COMENTÁRIO***

*Se você teve dificuldade para fazer essa atividade, a seguir exemplificamos o heptágono e as suas duas estrelações. Uma interessante atividade geométrica é analisar cada uma dessas estrelações. Converse com o tutor e com seus colegas sobre os diferentes exemplos e análises.*

**!**

Caso tenha dificuldade em perceber as estrelações, recorra aos seus modelos, manipule-os, faça desenhos etc.

4. Que poliedros estrelados podemos formar, partindo do dodecaedro? O professor Eduardo Veloso nos dá boas dicas.

**Figura 14.5**

Admitimos que responder a essa pergunta pode ainda não ser fácil para você, o que é normal, pois o processo de estrelar poliedros exige um apurado processo visual. Para isso, além da manipulação dos seus modelos, é imprescindível que você utilize a internet. Assim, acesse http://www.atractor.pt/simetria/matematica/docs/estrel2.html e conheça mais sobre o maravilhoso e instigante mundo dos poliedros estrelados.

Considerando que você tenha acessado o endereço anterior, continuaremos, então, a atividade. Você observou que, se prolongarmos as faces de um dodecaedro e considerarmos suas intersecções, obteremos sua primeira estrelação: o **pequeno dodecaedro estrelado** (**Figura 14.6**).

**Figura 14.6**

Você também deve ter percebido que as faces do pequeno dodecaedro estrelado são pentagramas e que existem doze pentagramas como faces.

O dodecaedro admite ainda outras estrelações. Se prolongarmos as faces (pentagramas) do pequeno dodecaedro estrelado, obteremos o **grande dodecaedro** (**Figura 14.7**), cujas 12 faces são, novamente, pentágonos regulares.

**Figura 14.7**

Se continuarmos o processo, ou seja, se fizermos a terceira estrelação do dodecaedro, obteremos o **grande dodecaedro estrelado** (**Figura 14.8**).

**Figura 14.8**

Você viu que, nas três figuras que representam as estrelações do dodecaedro, foram utilizadas tonalidades para ressaltar as faces e distingui-las. Cada face – pentágonos no grande dodecaedro e pentagramas no pequeno e grande dodecaedros estrelados – tem uma tonalidade. Você deve ter observado também que as faces se interceptam e que para analisar esses sólidos, como verdadeiros poliedros, é essencial visualizar e compreender quais são as faces, as arestas e os vértices. Assim, no **pequeno dodecaedro estrelado**, os lados dos pequenos triângulos equiláteros não são arestas. As *arestas* são os lados das faces e as *faces* são os pentagramas, e não os triângulos equiláteros. Do mesmo modo, existem falsos *vértices* nesse poliedro, que são os vértices dos ângulos sólidos côncavos. Como não estão nas extremidades das arestas, eles não constituem verdadeiros vértices do grande icosaedro. No caso do **grande dodecaedro** e do **pequeno dodecaedro estrelado**, se contarmos suas faces, vértices e arestas, veremos que ambos possuem o mesmo número: 12 faces, 12 vértices e 30 arestas. O grande dodecaedro estrelado possui 12 faces, 20 vértices e 30 arestas.

Para finalizar, pergunta-se: você conseguiu visualizar e identificar as observações anteriores feitas sobre cada um dos poliedros estrelados? Você sabe que para obter uma idéia de como são esses sólidos, é importante construir cada um e observar o modelo. Converse com o tutor e com seus colegas.

Como caminhar virtual extra, você pode acessar http://www.mathconsult.ch/showroom e conhecer estrelações truncadas do dodecaedro. Nesse site você também verá interessantes planificações e colorações de suas vistas.

Você encontrará as planificações no módulo prático.

## Conversando um pouco sobre a história dos poliedros estrelados

Do ponto de vista matemático, os poliedros estrelados foram estudados pela primeira vez, por volta do ano 1600, pelo cientista alemão Kepler (1571-1630), ainda que fossem há muito tempo conhecidos: o pequeno dodecaedro estrelado, por exemplo, encontra-se representado no pavimento da Basílica de São Marcos, em Veneza, num embutido em mármore, de 1420, atribuído a Paolo Uccello. A **Figura 14.9** ilustra o dodecaedro, o pequeno dodecaedro estrelado e o mosaico de Ucello, da Basílica de São Marcos.

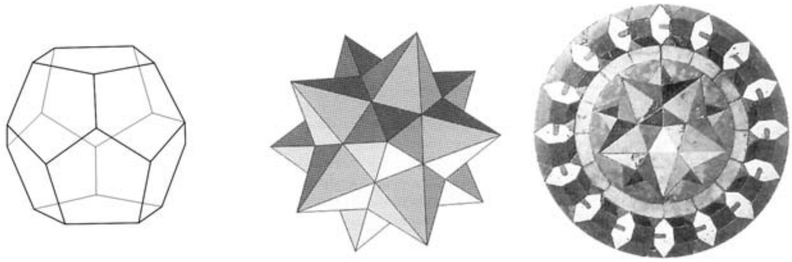
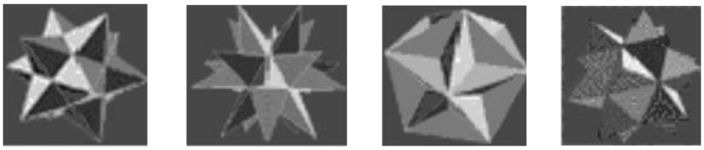


**Figura 14.9**

No início do século XIX, o físico e matemático Louis Poisont (1777-1859) descobriu dois poliedros regulares estrelados desse tipo, o grande dodecaedro e o grande icosaedro, obtidos respectivamente com doze pentágonos e com vinte triângulos, que se encontram cinco a cinco em cada vértice; perto de cada vértice, o poliedro tem a forma de uma pirâmide, cuja base é um pentagrama (o que construímos nas Atividades 1 e 2 desta aula). Estes estão representados no desenho a seguir. Eles são denominados Poliedros de Kepler-Poinsot e podem ser vistos, em detalhes, no endereço http://www.atractor.pt/mat/Polied/poliedros.html



| | | | |
|---|---|---|---|
| Pequeno dodecaedro estrelado | Grande dodecaedro estrelado | Grande dodecaedro | Icosaedro estrelado |

**Figura 14.10:** Poliedros de Kepler-Poinsot.

As áreas em tons diferentes constituem a parte visível de uma das faces. Poucos anos depois, o matemático francês Augustin Cauchy (1789-1857) encerrou este assunto, provando que não existem mais poliedros regulares estrelados.

Para saber mais, acesse

http://www.profcardy.com/geodina/espacial2.htm

!

Existem ainda os poliedros arquimedianos ou poliedros semi-regulares, cujas faces são polígonos regulares de mais de um tipo. Todos os seus vértices são congruentes, isto é, as faces que o compõem são arranjadas numa mesma ordem em torno do vértice. Existem apenas 13 poliedros arquimedianos e, a seguir, temos alguns exemplos deles.
Acesse o endereço seguinte e conheça-os:
http://www.ceamecim.furg.br/~ivane/ivane/Gespacial/polarq.htm

## Conversando sobre seu laboratório de Geometria

Um *software* que nos permite estudar estruturas poliédricas estreladas é o *Mathematica*. Acesse a página http://www.wolfram.com/products/mathematica/index.html e conheça-o.

Além de *softwares* específicos, podemos utilizar os *Applets*. Eles são aplicativos, alguns feitos em Java, outros em Flash, que nos possibilitam realizar descobertas geométricas, alguns com interação e movimentos. Por exemplo, você poderá conhecer o *Polyhedra Stellations Applet* em http://www.mathconsult.ch/showroom/icosahedra/icosahedra.html#Facets

Este aplicativo gera estrelações de vários poliedros e seus respectivos duais. Para funcionar no computador, você precisa da versão cinco do Internet Explorer ou outra mais atual. Tente você mesmo. Clique em iniciar aplicativo ("Start applet").

Mais estrelações podem ser encontradas em http://www.physics.orst.edu/%7Ebulatov/polyhedra/stellation_applet/index.html

Acessando o site http://www.atractor.pt/math-JSP/index.htm, você poderá consultar uma página contendo projeções centrais e paralelas de poliedros (com versões estereoscópicas).

Caso você necessite de informações complementares sobre poliedros ou queira conhecer outras definições etc., além de interessantes materiais como o polydron, armações (Esqueletos) e palhinhas, e poliedros transparentes, acesse http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm21/poliedros.htm

***ATIVIDADE***

5. Um poliedro platônico que dá origem a muitas estrelações é o icosaedro. Você sabia que existem 59 tipos de icosaedro estrelado? Visite http://www.physics.orst.edu/%7Ebulatov/polyhedra/icosahedron/index.html e conheça-as. Clique em cada figura e veja detalhes.

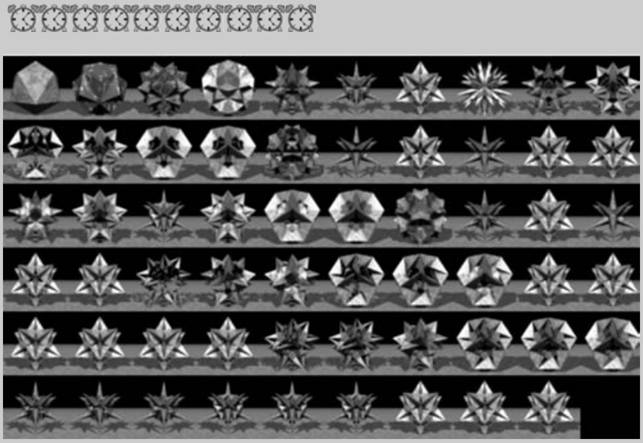


**Figura 14.11**

No endereço seguinte, você também poderá obter várias informações sobre o processo de estrelar um icosaedro: http://www.mathconsult.ch/showroom/icosahedra/icosahedra.html#Facets

***COMENTÁRIO***

*Esta é uma atividade opcional; você poderá obter muitas informações sobre ela se tiver acessado as páginas que sugerimos no transcorrer desta aula. Como fizemos na Atividade 4, você pode fazer nesta. Veja no Módulo Prático um belo exemplo de estrelação do icosaedro.*

## Poliedros, trabalho por projetos e internet

Veja trabalhos desenvolvidos por alunos de 5ª série e que se encontram disponibilizados em http://penta.ufrgs.br/edu/telelab/mundo_mat/ccabri/5serie.html

### Os poliedros e a integração com a Química: eixos de rotação no tetraedro e em moléculas orgânicas

Acessando a página http://www.tele.ed.nom.br/sim5.html, você conhecerá um aplicativo que permite dois estudos: numa opção, o da simetria de eixos de rotação do tetraedro e de objetos em forma de pirâmide, de base triangular, com componentes diversos nos vértices; na outra, o estudo da configuração absoluta, mediante modelos de moléculas de compostos orgânicos com, pelo menos, um carbono saturado.

## CONCLUSÃO

Não foi nosso propósito esgotar todas as formas que correspondem a um poliedro estrelado e tampouco obter sólidos estrelados de todos os poliedros conhecidos. Esperamos que você se sinta motivado para continuar estudando o fascinante mundo desses poliedros. Para isso, a internet será uma grande aliada.

**RESUMO**

Obtemos poliedros estrelados quando as faces prolongadas de um determinado poliedro se interceptam e nos possibilitam formar outro. Tal fato não acontece quando prolongamos as faces do cubo, do tetraedro e do octaedro. Os poliedros regulares estrelados são somente os encontrados por Kepler e Poinsot. Para analisá-los,é essencial identificarmos suas faces, arestas e vértices, cujas quantidades são apresentadas a seguir:

| Poliedro Estrelado | Faces | Vértices | Arestas | Polígono |
|---|---|---|---|---|
| Pequeno dodecaedro estrelado | 12 | 12 | 30 | Estrela pentagonal |
| Grande dodecaedro | 12 | 12 | 30 | Pentágonos |
| Grande dodecaedro estrelado | 12 | 20 | 30 | Estrela pentagonal |
| Grande icosaedro | 20 | 12 | 30 | Triângulos |

**Tabela 14.1:** Poliedros estrelados

## AUTO-AVALIAÇÃO

Consideramos importante que você tenha compreendido o processo de estrelar polígonos e poliedros. Esperamos também que tenha conversado com o tutor sobre novas descobertas e relações feitas nas atividades, em especial na quarta, que aprofunda elementos conceituais dos poliedros estrelados.

## INFORMAÇÕES SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, você vai praticar a análise de estruturas e continuaremos propondo atividades que desenvolvam a visualização.

## SUGESTÃO DE LEITURA COMPLEMENTAR PARA APROFUNDAMENTO

GUILLÉN, G. *Poliedros*. Madrid: Síntesis, 1997.

AULA 15

# Analisando estruturas: trabalhando plano e espaço conjuntamente

## Meta da aula

Instrumentalizar para o ensino de estruturas poliédricas.

## objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- Identificar estruturas simples em três dimensões (3D), a partir de um modelo visual representado.
- Analisar as formas que constituem uma estrutura técnica real.
- Relacionar características técnicas de resistência às características morfológicas.

## Pré-requisitos

Para o bom aproveitamento desta aula, você deve revisar seus conhecimentos sobre a *rigidez do triângulo*, bem como as *propriedades* (*soma de ângulos, paralelismo, perpendicularismo*) das principais *figuras planas e espaciais*. Mantenha o seu material de Geometria Básica à mão!

## INTRODUÇÃO

Continuamente analisamos formas, sejam elas reais e mais próximas do nosso dia-a-dia ou não. Tradicionalmente, o ensino de Geometria tem priorizado a análise de formas no plano, isto é, o trabalho com os polígonos. No entanto, sabemos que os objetos com que convivemos mais freqüentemente nos remetem a uma visão de elementos do espaço, sendo, muitas vezes, mais interessante e complexa.

Nas aulas anteriores analisamos, de alguma forma, estruturas de poliedros. No entanto, na aula de hoje, em especial, você verá que analisar crítica e detalhadamente estruturas oriundas de formas do espaço não-plano deve ser um dos objetivos constantes da Geometria escolar. Por exemplo, nos jornais e encartes é comum você encontrar exemplos de estruturas variadas, tais como:

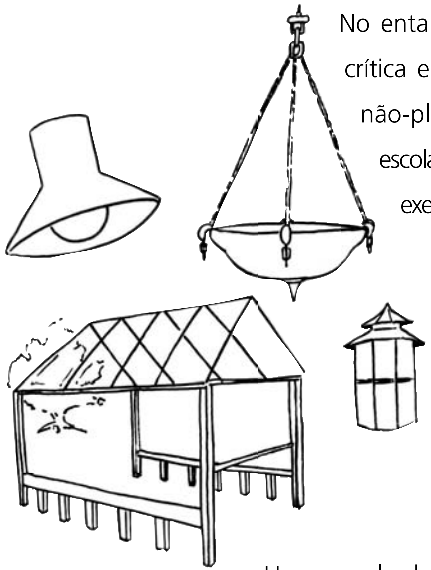


**Figura 15.1:** Exemplos de estruturas.

Um exemplo de estrutura muito comum em nosso cotidiano são as armações e andaimes utilizados na construção civil (**Figura 15.2**). Na Química, temos as estruturas atômicas.

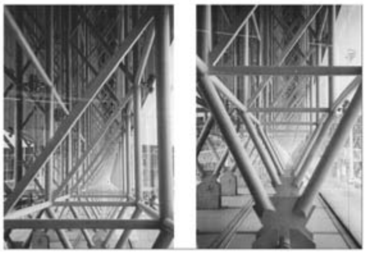


**Figura 15.2:** Estruturas de andaimes

É possível que você tenha percebido a presença de triangulações na maioria das estruturas. Você sabe por quê? Porque os triângulos são figuras geométricas rígidas. Faça um teste.

### *ATIVIDADES*

1. Utilizando alfinetes, colchetes ou palitos para picolé, construa um triângulo, um quadrado e um hexágono. Você vai perceber que os ângulos do triângulo não se modificam. Para que o quadrado ou o hexágono não modifiquem seus ângulos, uma opção é triangulá-los, o que pode ser feito através de uma de suas diagonais.

***COMENTÁRIO***

*Você pode fazer o mesmo para um cubo construído com canudos, ou seja, se você não colocar uma de suas diagonais em um de seus lados, perceberá que ele cairá sobre o plano. O mesmo acontecerá na construção de pirâmides? Eis atividades simples para você desenvolver com seus alunos!*

2. Desenhe a estrutura de cada imagem da **Figura 15.1**. Elas têm a presença de elementos triangulares? Analise cada estrutura. Mostre seus desenhos ao tutor e converse com ele.

Atividades como a anterior, embora aparentemente elementar, são importantes no desenvolvimento do pensamento geométrico; o fato de não serem feitas desde as séries iniciais, contribue para que os alunos, no Ensino Médio, tenham muitas dificuldades.

A professora Angela pediu a seus alunos para desenhar os sólidos geométricos. Veja o interessante que fizeram!

Você pode ver que há confusão entre o nome de pirâmide e triângulo, bem como na nomenclatura *cilindro em forma cônica*. Enquanto na primeira, o aluno detém-se na face da pirâmide, na segunda, ele nomeia o objeto a partir da associação de duas formas espaciais: cilindro e cone.


**Figura 15.3**

A professora Angela utiliza, conjuntamente, em suas aulas de Geometria: exemplos de planificações dos sólidos, os modelos montados e objetos cotidianos. Os alunos trabalham em grupo e dispõem de todos esses recursos para manipulá-los. Cada grupo constrói e cuida dos próprios materiais. Esta é uma importante estratégia didática.

Em outra atividade, Angela pede aos alunos para identificar o sólido que será formado em cada planificação e apresentar características dos sólidos formados. Veja como os alunos descrevem:

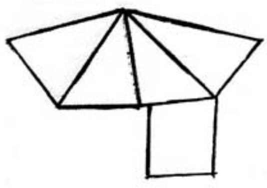



**Figura 15.4.a**

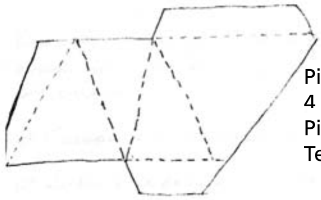



**Figura 15.4.b**

O primeiro aluno (**Figura 15.4.a**) busca associações com formas do cotidiano, enquanto o segundo (**Figura 15.4.b**) se fixa nos aspectos das próprias figuras. Tais observações são importantes. Mesmo sendo trabalho em grupo, cada aluno tem seus desenhos e registros pessoais. A socialização e a discussão entre eles é imprescindível, pois o professor vai entendendo como os alunos estruturam o seu pensamento, e pode pensar em atividades que os auxiliem.

Nos dois exemplos apresentados, **Figuras 15.3** e **15.4**, os alunos fizeram, em diferentes perspectivas, análise de formas e estruturas. Os primeiros, na **identificação** global dos sólidos e os segundos, na **análise e explicitação** de elementos particulares. Em ambos os casos, o apoio visual no material representado é importante, pois os alunos, embora no Ensino Médio, tinham poucas experiências com a Geometria.

Diferentes são as atividades que podemos propor para realizarmos análise de estruturas e formas geométricas, sejam elas oriundas do contexto cotidiano ou apenas do matemático.

## Visualização e análise global de estruturas: o Atômio

Existe, em Bruxelas, capital da Bélgica, um belo monumento e ponto turístico, denominado Atômio.

***ATIVIDADES***

3. A figura representada pelo Atômio é plana ou espacial? Pode ser um hexágono? Por quê? Justifique suas respostas.

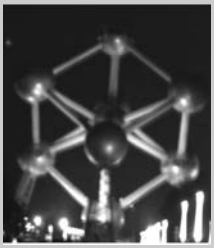


**Figura 15.5**

***COMENTÁRIO***

*O Atômio é o símbolo da molécula do cristal. Você pode obter mais informações em* ***www.atomium.be****. Uma boa opção é tentar representá-lo utilizando palitos e massa.*

4. Analisando as figuras abaixo, o que você pode dizer sobre o Atômio? O que se observa nelas, que não era possível observar na anterior? Dê exemplo de uma constatação que você fez a partir das **Figuras 15.6** seguintes. Como você ordenaria essas figuras? Discuta com seus colegas e com o tutor  outras possibilidades.

**Figura 15.6.a**

**Figura 15.6.b**

**Figura 15.6.c**

**Figura 15.6.d**

***COMENTÁRIO***

*Um interessante trabalho a ser proposto será investigar o Atômio. Seguem alguns de seus dados:*

*Ano de construção: 1958*

*Altura: 102m*

*Peso: 2.400t*

*Número total de esferas: 9*

*Superfície: 240m$^2$*

*Diâmetro do monumento: 18m*

*Número total de tubos: 22*

*Diâmetro dos tubos: 3m*

*Comprimento: 23m*

*Capacidade do elevador: 16 pessoas*

*Velocidade do elevador: 5m/s*

*Tempo para chegar ao topo: 23s*

**Figura 15.7**
Foto: Marcelo Bairral, dezembro de 2002.

Você pode se questionar: A Bélgica é um país desenvolvido e tem condições de construir um monumento imponente, como o Atômio. Consideramos que este argumento não tem sustentação, pois você verá que podemos analisar estruturas variadas em nossa cidade, sejam elas esteticamente bonitas ou não; o que importa é que olhemos e valorizemos nossos elementos artístico-culturais. Por exemplo, em Paracambi (RJ), havia, na entrada da área urbana, uma interessante estrutura de uma antiga fábrica em ruínas (**Figura 15.7**). Não seria importante propor um trabalho de análise das estruturas daquela construção? Além dessa análise, que pode ter um olhar mais matemático, não valeria a pena resgatar a história daquela fábrica para a região e estudá-la? Estes tipos de questionamentos podem resultar em atividades geométricas muito potencializadoras!

Lamentavelmente, nem a fábrica nem sua estrutura existem mais. Teremos de imaginá-las pelas fotos e pelas imagens mentais de quem a viu.

**Figura 15.8:** Praça da Matemática, Itaocara (RJ).

Além de estruturas mais comuns, também podemos encontrar em certas cidades  atrações turísticas que podem constituir objetos de estudo pedagógico, como o *Monumento à Matemática*, localizado em Itaocara (RJ). Saiba um pouco mais sobre episódios históricos desse monumento.

## Conversando sobre História: o Monumento à Matemática

Existe em Itaocara (RJ), graciosa cidade do noroeste fluminense, uma construção original: o Monumento à Matemática. O autor do projeto foi Godofredo Formenti, aluno da Faculdade Nacional de Arquitetura, que ganhou um concurso patrocinado pela prefeitura desse município, coordenado por Júlio César de Mello e Souza, o famoso Malba Tahan. O monumento foi construído em 1943. Primeiro e único no mundo é, em linhas gerais, constituído por duas "pirâmides entrelaçadas", construídas sobre três cilindros de mesma altura e diâmetros diferentes. Sobre os mesmos, encontramos uma esfera, um cone e um cilindro. A pirâmide simboliza a antiga civilização que floresceu no Vale do Nilo. Nas faces da pirâmide superior, estão gravados os principais símbolos e sinais matemáticos.

Várias figuras geométricas lembram teorias e conceitos famosos: Postulado de Euclides, Teorema de Pitágoras, Divisão Áurea, Número Pi, análise combinatória, quadrados mágicos, Binômio de Newton, logaritmos, Trigonometria, raiz quadrada, séries infinitas, limites, Derivadas, Formas Ilusórias, Geometria Analítica e outros. Nas outras faces da primeira pirâmide, podemos admirar vários pensamentos que exaltam a Matemática. Destaca-se a seguinte frase de Leibniz: "O matemático é a honra do espírito humano". Logo abaixo, o pensamento de Kepler: "Medir é saber". Lemos, a seguir, esta afirmação platônica: "Deus é o grande geômetra. Deus geometriza sem cessar". À direita, Pitágoras: "O Número domina o Universo". Platão: "Por toda parte existe a Geometria". Malba Tahan: "A Matemática é a poesia da forma". Na restauração do monumento (1961), esteve presente o ilustre Malba Tahan e sua esposa. A justificativa para a existência do monumento naquele município é a de que o prefeito da época, Dr. Carlos Moacyr de Faria Souto, era um grande simpatizante da Matemática.

O interesse pelo estudo do monumento, como alternativa didática para aprender Matemática, foi iniciado pela Professora Rosangela Nascimento, em 1993, e atualmente é objeto de atenção do Professor Augusto Cesar Aguiar Pimentel, respectivamente, ex-professora e professor da UFF (Santo Antônio de Pádua, RJ).

## Natal, Geometria e monumentos itinerantes

Encontramos cidades que, além de investirem em monumentos históricos, também promovem a construção de decorações e arquiteturas que embelezam épocas específicas do ano. Por exemplo, desde 1996, na cidade do Rio de Janeiro, a árvore de Natal erguida na Lagoa Rodrigo de Freitas enaltece a beleza da Cidade Maravilhosa. Segundo o *Guinness Book*, a Árvore da Lagoa é o maior enfeite de Natal, flutuante, do mundo. Com seus 82m de altura, da base ao topo, é do tamanho de um prédio de 27 andares.

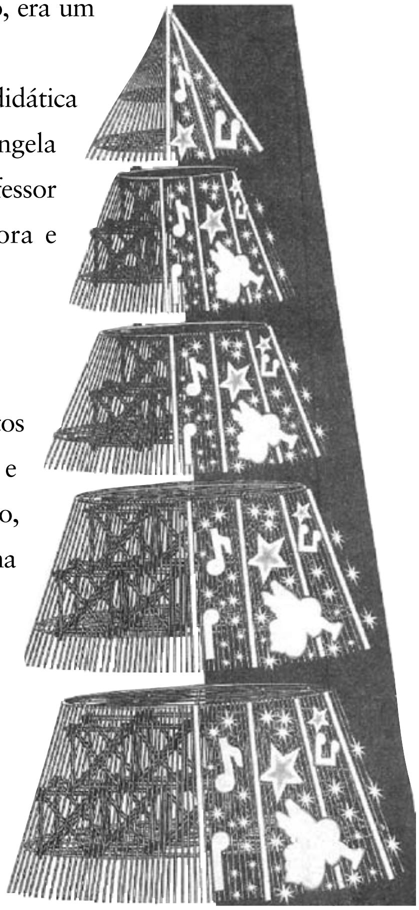


**Figura 15.9**

***ATIVIDADE***

5. Nesta atividade, vamos visualizar e analisar a estrutura da árvore de Natal, da Lagoa. O que você observa na montagem da estrutura da árvore (**Figura 15.10**)? Escreva uma seqüência de procedimentos para a montagem dessa estrutura. Desenhe, se necessário, cada um deles.

**Figura 15.10**

***COMENTÁRIO***

*Na base de 700$m^2$, cabem 80 automóveis de porte médio. A plataforma, composta por 12 flutuadores construídos em blocos de aço naval, garante, junto com o sistema de ancoragem, a estabilidade do conjunto. As 410 toneladas da árvore são sustentadas por uma estrutura tubular cúbica, fixada por braçadeiras que permitem a montagem, como um gigantesco brinquedo de armar. Assim, você deve ter percebido que triangulação é um procedimento matemático presente na estruturação da árvore. Desenhar toda a estrutura da árvore é uma forma de entendê-la melhor.*

A **Figura 15.11** seguinte ilustra a iluminação da árvore. Da sala de controle, no interior da estrutura, um técnico acompanha todo o espetáculo, que é comandado via computador. Os painéis, além de possuírem desenhos iluminados de estrelas, anjos e notas musicais, comportam 2,8 milhões de microlâmpadas. As estrelas são confeccionadas em néon; os anjos e as notas musicais, em mangueiras transparentes com microlâmpadas no interior.

Os tubos que sustentam as imagens recebem revestimento interno de borracha e são isolados da estrutura por peças de madeira. São 12 seqüências de luz, projetadas por refletores com alcance de 3km que, através de movimentos variados, criam reflexos belíssimos no espelho-d'água da Lagoa.

**Figura 15.11**

***COMENTÁRIO***

*Você percebeu que, à medida que analisamos estruturas, também podemos ir descrevendo o objeto formado. Também viu que é possível desenvolver um trabalho integrado com outras disciplinas do currículo. No caso da árvore, podemos inserir conceitos de Física, Química, Artes, Informática, e Engenharia. Outro possível desdobramento é construir a estrutura da árvore em miniatura e montar a sua maquete. Lembre-se de que maquetes também devem compor o seu laboratório de Geometria.*

## Conversando sobre seu laboratório pessoal de Geometria

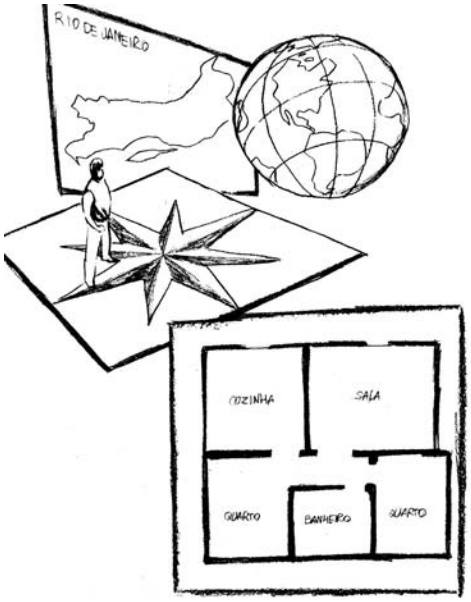



Figura 15.12

Além da análise estrutural, fazendo referências à forma (análise morfológica) das figuras e a outros de seus elementos, podemos também elaborar e desenvolver atividades que favoreçam à análise de elementos e suas posições no espaço (análise topológica). Nesta perspectiva, a utilização de mapas, plantas baixas, fotos, globo terrestre, teodolito, bússola, rosa-dos-ventos etc. poderá enriquecer significativamente o trabalho com a Geometria, integrando análise de elementos do plano e do espaço simultaneamente.

Como se encontra ilustrado no quadro seguinte, você verá que a análise de estruturas pode ser feita considerando quatro diferentes tipos de espaços geométricos (GIMÉNEZ; FORTUNY, 1998). Embora não excludentes, cada espaço envolve processos cognitivos diferenciados e, desta forma, contribui no desenvolvimento do pensamento geométrico.

Há atividades que podem envolver processos de raciocínio de diferentes espaços. Por exemplo, quando você pega o globo terrestre, identifica e analisa determinada localização; embora esteja apoiado no médio espaço, pois está manipulando o globo, você poderá estar variando e comparando distâncias (macroespaço), bem como imaginando movimentos de planetas e demais deslocamentos, já não controlados manipulativamente (cosmo espaço).

| Espaço | Característica | Processos cognitivos |
|---|---|---|
| **Micro (pequeno)** | Corresponde ao trabalho com as atividades no âmbito das estruturas microscópicas: moléculas, vírus, células etc. | Representacional, com observação de detalhes em microescalas |
| **Médio** | Desenvolvido através da manipulação de objetos que, por exemplo, podem ser colocados sobre a mesa | Manipulativo, observação (em escala normal) de um amplo espectro de elementos característicos dos modelos |
| **Macro (grande)** | Trabalho com objetos entre 0,5 e 50 vezes o tamanho do sujeito | Variação escalar. Observação em escalas com representação não-controlável. Movimentos variados e deslocamento do observador |
| **Cosmo** | Coloca em foco problemas de orientação e referência. Corresponde por exemplo, ao estudo de fenômenos ecológicos, geográficos, topográficos e astronômicos | Orientação e referência com relações e representações não-controláveis. Deslocamento virtual (imagens mentais) do observador |

**Quadro 15.1:** Espaços geométricos

Além dos recursos anteriores, o seu laboratório pessoal de Geometria pode conter também os **poliedros "deslocáveis"**.

Os esqueletos de poliedros "deslocáveis" são outros recursos que devem compor o seu laboratório. Basta utilizar linhas ou elásticos e tábuas em formas diversas. Por exemplo, utilizando dois círculos congruentes e linhas, você pode montar um modelo de cilindro. Veja, nas ilustrações seguintes, diferentes pirâmides sendo formadas ao esticarmos os elásticos.

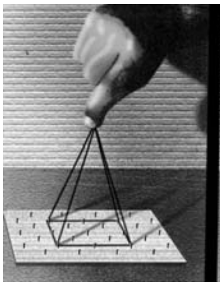
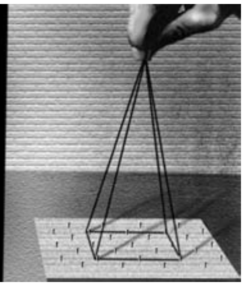



**Figura 15.13.a** **Figura 15.13.b**

***ATIVIDADE***

6. Observe a cobertura seguinte e a representação plana de sua estrutura.

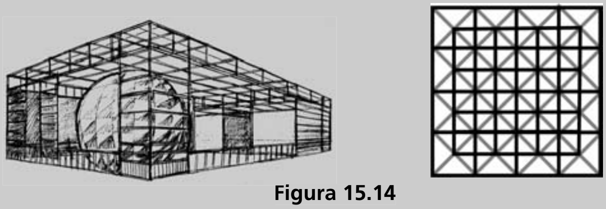


**Figura 15.14**

Veja, agora, o processo de construção de malhas em três dimensões (3D), em duas partes.

***COMENTÁRIO***

*Aconselhamos que você esteja com o Módulo Prático, pois precisará de papel isométrico.*

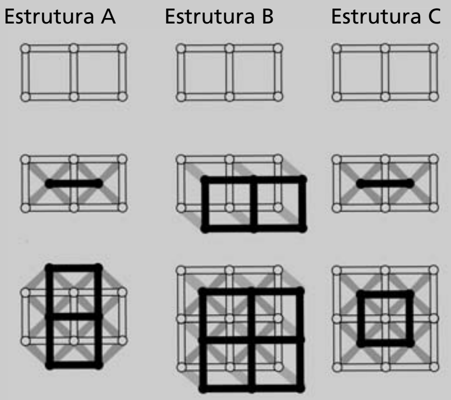



**Figura 15.15**

Observe cada estrutura anterior e descreva, com o maior número de detalhes, as grades que são geradas em cada caso. Sendo A (número de barras ou arestas) e V (número de nós ou vértices), calcule o parâmetro de mobilidade, $m = A - (3V - 6)$, de cada uma. Das três estruturas anteriores, qual é a mais apropriada para construir coberturas? Qual delas cumpre a fórmula $A = 3V - 6$? Justifique suas respostas.

***COMENTÁRIO***

*Lembre-se de que quando o resultado é nulo, a estrutura é totalmente rígida. Se o resultado é positivo, sobram arestas, se é negativo, há movimento, não é rígida.*

## RESUMO

O estudo das estruturas ou dos elementos que compõem uma determinada forma oferece-nos enriquecimentos conceituais variados em Matemática. Em Geometria, a análise de estruturas poliédricas utilizadas em arquitetura constitui um rico universo de aplicações que permite relacionar o conteúdo da Matemática escolar com outras áreas de conhecimento e com a vida prática. O professor deve propor atividades que explorem, simultaneamente, a análise morfológica e a topológica. Nesta aula, priorizamos a primeira. Para desenvolver a segunda, você pode pensar em atividades que utilizem os recursos que comentamos na seção ¨Conversando sobre o laboratório de Geometria”.

## AUTO-AVALIAÇÃO

Se realizou todas atividades e compreendeu o que significa analisar estruturas, você alcançou o que esperávamos. Sobre os quatro tipos de espaço (pequeno, médio, grande e cosmo), não se preocupe, caso não os tenha compreendido em detalhes. Converse com colegas e com o tutor. Pensar em atividades e apresentá-las ao tutor, como exemplos que busquem mostrar sua compreensão sobre a temática da aula, é uma estratégia auto-avaliativa potencial.

## INFORMAÇÕES SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, vamos estudar os sólidos de revolução. Construiremos seus modelos, para utilizar nas atividades da aula. Será imprescindível que você pegue o seu material de desenho (compasso, esquadro, régua, lápis, borracha etc.) e providencie o seguinte material: palitos de churrasco, cartolina colorida, arame, alicate, acetato, areia, cola etc.

# Referências

**Aula 1**

KALLEF, Ana Maria.; REI, Dulce M. O desenvolvimento do pensamento geométrico: O modelo de Van Hiele. *Bolema*, Rio Claro-SP, n. 10, p. 21-30, 1994.

NASSER, Lilian; SANTANA, N. (Coords.). *Geometria segundo a Teoria de van Hiele*. 2.ed. Rio de Janeiro: Projeto Fundão-IM/UFRJ, 1998.

**Aula 2**

BAIRRAL, Marcelo A. Semelhança na 7ª série: algumas dificuldades. B*oletim GEPEM*, Rio de Janeiro, n. 34, p. 35-64, 1998.

HERSHKOWITZ, R. *Boletim GEPEM*, Rio de Janeiro, n. 32, 1994. Número Temático sobre Aprendizagem da Geometría.

VYGOTSKY, L. *Pensamento e linguagem*. Rio de Janeiro: Martins Fontes, 1991.

**Aula 3**

BAIRRAL, Marcelo A. (Org.) *Recursos e inovações para a geometria no currículo*. Seropédica: Imprensa UFrRJ, 2003.

GATTEGNO, Caleb. *The common sense of teaching mathematics*. Nova Iorque: Educational Solutions, 1974.

**Aula 4**

BAIRRAL, Marcelo A. Aulas diferentes de matemática: o caso dos ângulos. *Presença Pedagógica*, Belo Horizonte, v.8, n.45, p.51-57, maio/jun. 2002. [Online]. Disponível em: <http://www.gepeticem.ufrrj.br/publicacoes.php>. Acesso em: 07 jul. 2004.

______. Movendo discos, construindo torres e matematizando com futuros professores. *Boletim GEPEM*, Rio de Janeiro, n. 38, p. 95-110, fev. 2001.

FERREIRA, Edson Luiz. et al. *Geometria Básica*. v.1. 2.ed. rev. atual. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2002.

## Aula 5

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. 3.ed. Campinas,SP: Ed. da UNICAMP, 2002. 844p.

SILVA, J. A. *Motivação na aula de matemática*. 2000. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, DEMAT/ICE, 2000.

## Aula 7

KALLEF, Ana Maria: REI, Dulce M. Vareta, Canudos, Sólidos Geométricos. R*evista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, n. 28, p 29-36, 1995.

## Aula 8

FERREIRA, Edson Luiz. *Geometria básica*. Rio de Janeiro: Fundação Cecierj, 2001. v 1.

KALLEF, Ana Maria; REI, Dulce M.Vareta, canudos, sólidos geométricos. *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, n. 28, p. 29-36, 1995.

RANGEL, Alcir Pinheiro. *Poliedros*. Rio de Janeiro: LTC, 1982.

## Aula 9

Boletim do GEPEM, n. 42, Rio de Janeiro: GEPEM, 2003. Número Temático sobre Educação Algébrica.

FERREIRA, Edson Luiz C. *Geometria básica*. v.3. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2003.

IMENES, Luiz Márcio. *Geometria das dobraduras*. São Paulo: Scipione, 2001.

KALEFF, Ana Maria. *Vendo e entendendo poliedros*. Niterói: EDUFF, 1998.

**Aula 10**

GUILLÉN, Gregoria. *Poliedros*. Madrid: Síntesis, 1997.

KALLEF, Ana Maria; REI, Dulce M. Vareta, Canudos e Sólidos Geométricos. *Revista do Professor de Matemática,* Rio de Janeiro, n. 28, p. 29-36, 1995.

**Aula 11**

ASSOCIAÇÃO de Professores de Matemática. Disponível em: http://www.apm.pt/pa/index.asp?accao+showtext&id=2353>. Acesso em 17 maio 2004.

ELEMENTOS de simetria em ação: jogos do icosadro. Disponível em http://www.tele.ed.nom.br?ico3.html. Acesso em 17 maio 2004.

RANGEL, Alcyr P. *Poliedros*. Rio de Janeiro: LTC, 1982.

**Aula 12**

FORMAS geométricas. Disponível em: http://wwwterravista.pt/guincho/7673/formgeo.html. Acesso em 18 jun. 2004.

JAVA sketchpad: dynamic geometry for the internet. Disponível em: <http://www.keypress.comm/sketchpad/java gsp/index.html> acesso em 18 jun. 2004.

KALLEF, Ana Maria; REI, D. M. Vareta, canudos, e sólidos geométricos. *Revista do Professor de Matemática* – SBM, Rio de Janeiro, n. 28, 1995, p. 29-36.

POLIEDROS duais I. Disponível em: http://www.terravista.pt/guincho/7673/dual.html. Acesso em 18 jun. 2004.

POLIEDROS. Disponível em http://www.atractor.pt/mat/polied/poliedros.html. Acesso em: 18 de jun. 2004.

STELLA Octangula. Disponível em http://www.terravista.pt/guincho/7673/stella.html. Acesso em: 18 jun. 2004.

VELOSO, Eduardo. *Geometria:* temas actuais: materiais para professores. Lisboa: IIE, 1998.

## Aula 13

LOPES, Antônio José. Geometria dos cortes de sabão. *Revista de Educação Matemática da SBEM-SP*, n. 3, p. 7-10, 1995.

TINOCO, Lúcia. *Geometria Euclidiana por meio da resolução de problemas*. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 1999.

## Aula 14

GUILLÉN, Gregoria. *Poliedros*. Madrid: Síntesis, 1997.

VELOSO, E. *Geometria:* temas actuais: materiais para professores. Lisboa: IIE, 1998.

## Aula 15

GIMÉNEZ, Joaquim; FORTUNY, Josep Maria. *Guías praxis para el profesorado de ESO*: matemáticas: contenidos, actividades y recursos. Barcelona: Praxis, 1998.

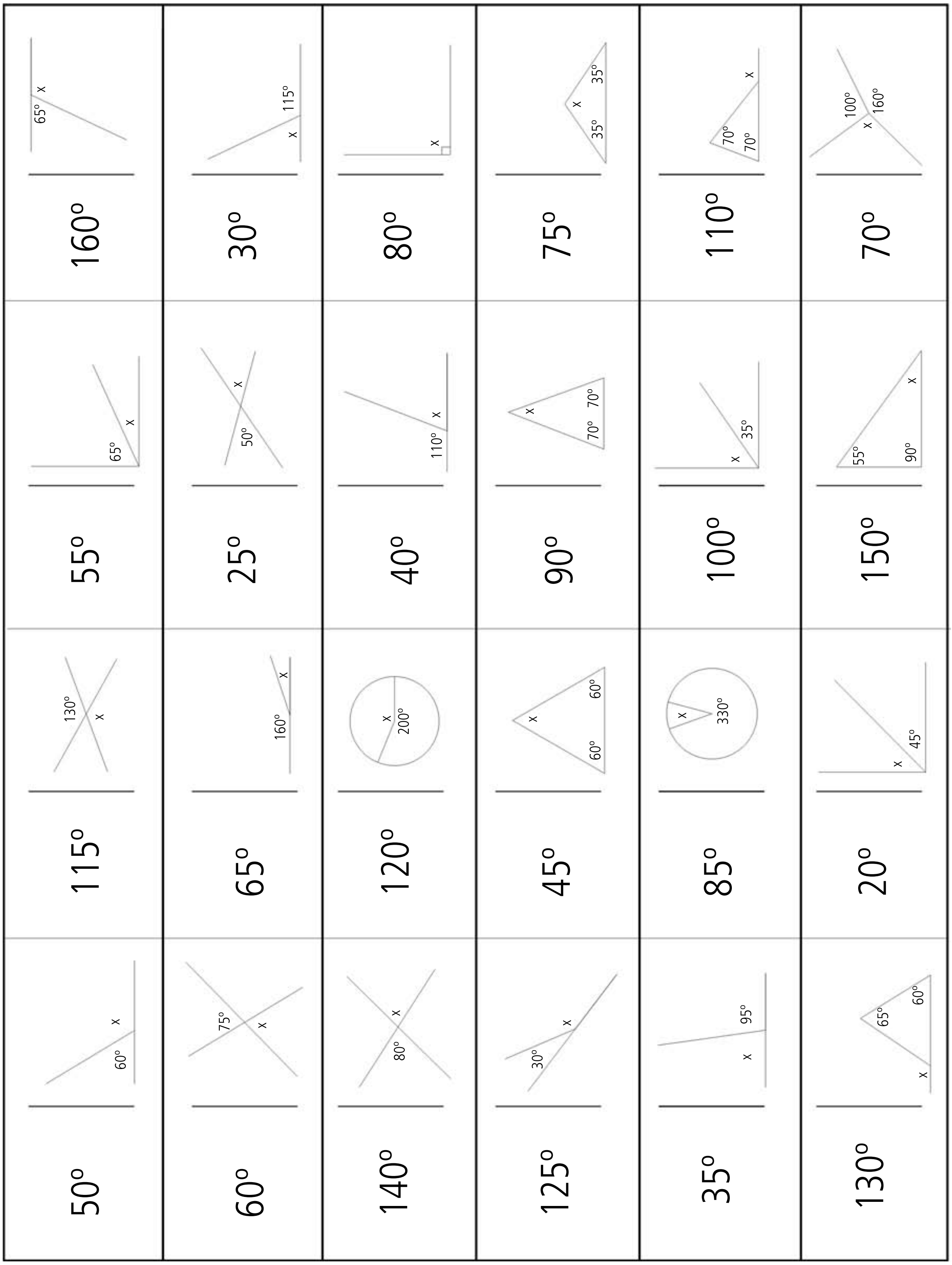
GUILLËN, Gregoria. *Poliedros*. Madrid: Síntesis, 1997.

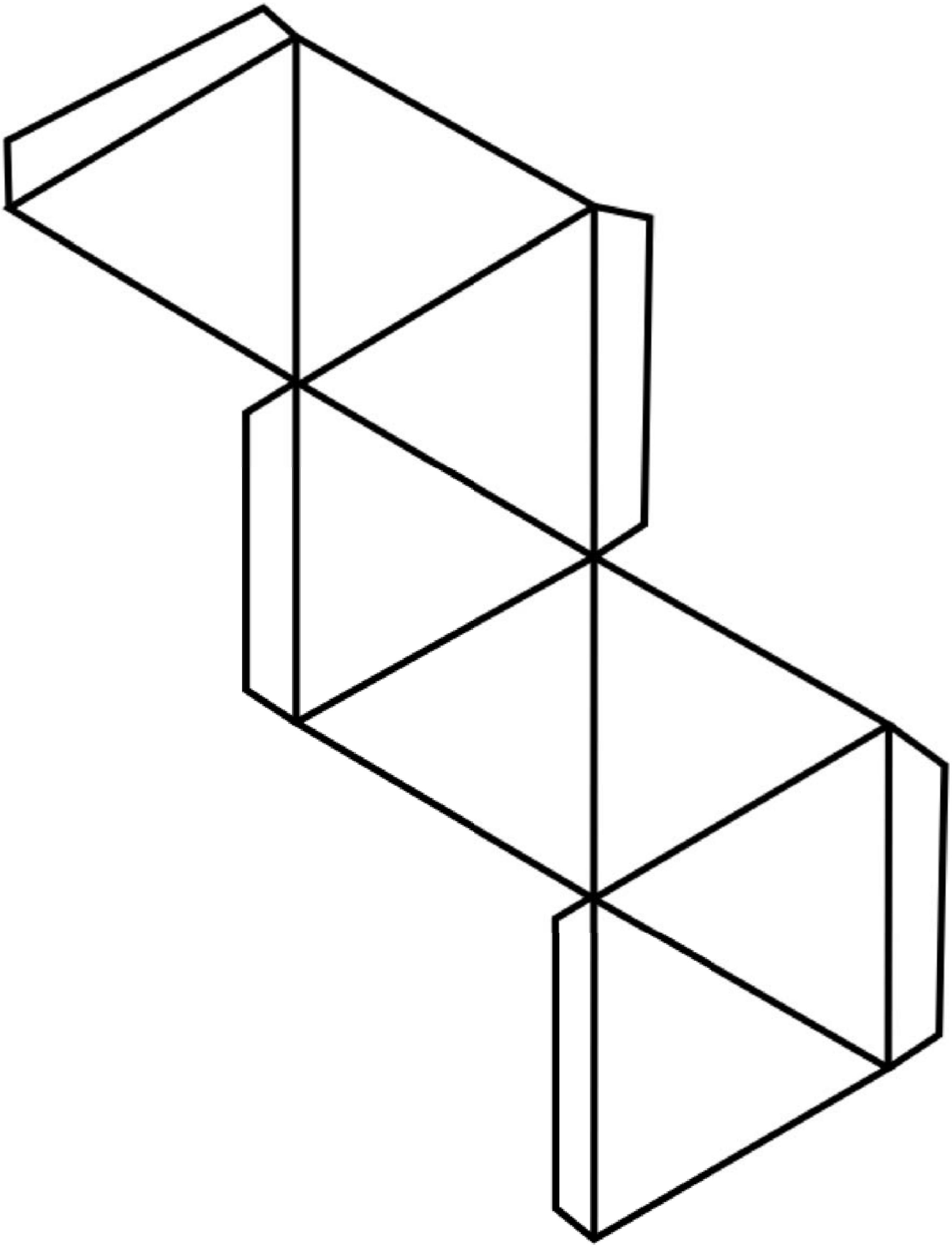
VELOSO, Eduardo. *Geometria: temas actuais: materiais para professores*. Lisboa: IIE, 1998.

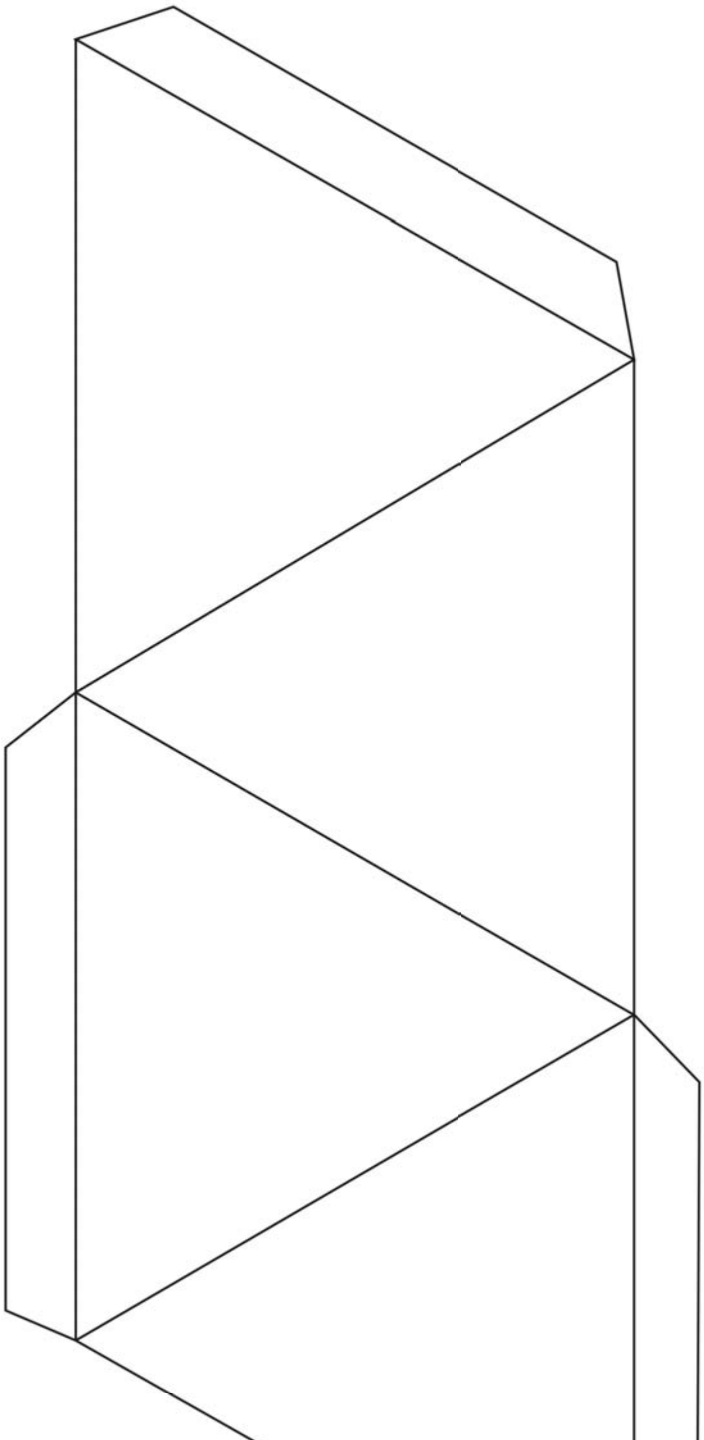
Jornal *O Dia*. Para tirar o fôlego. *Domingo,* 30/11/2003, p.10.

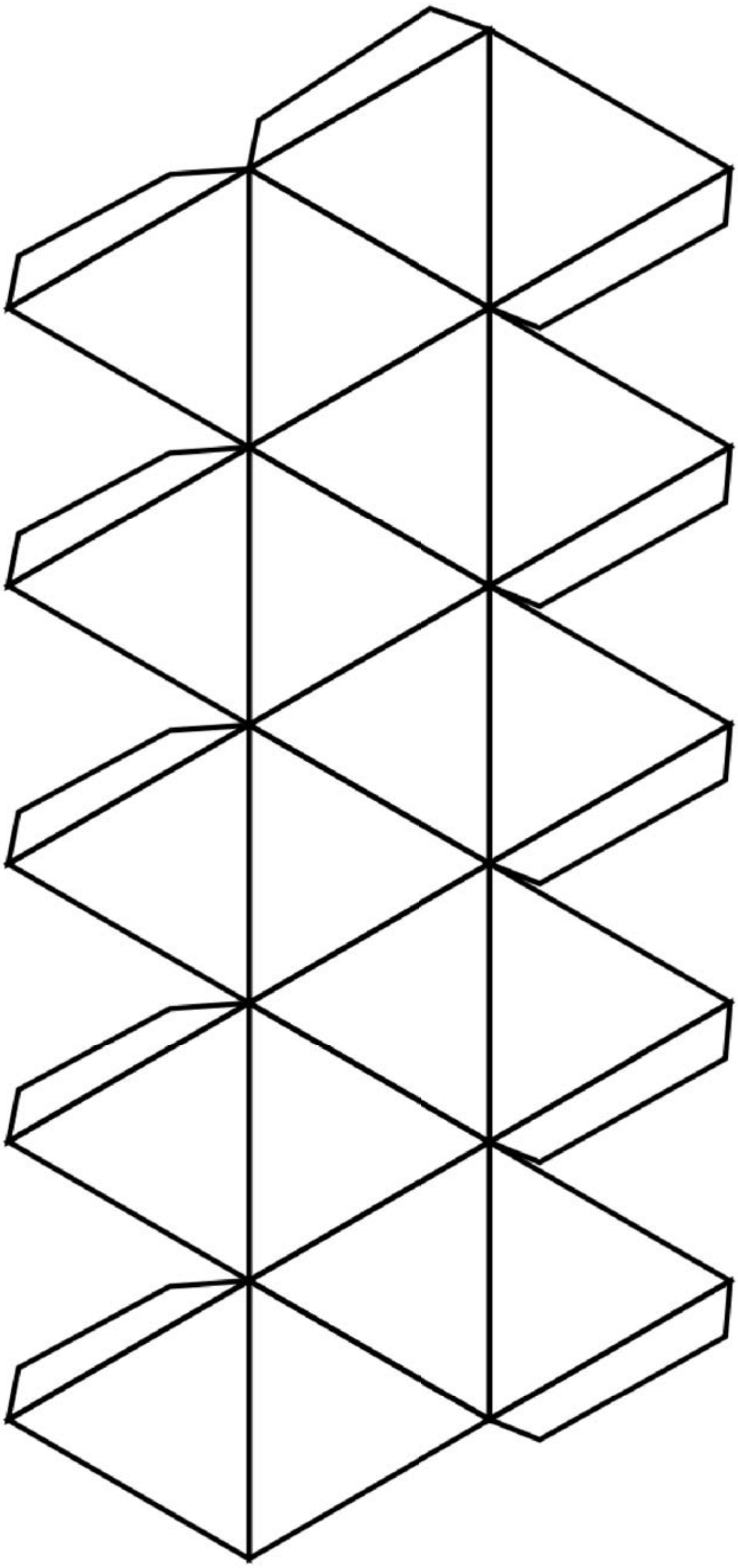
# Instrumentação do Ensino da Geometria

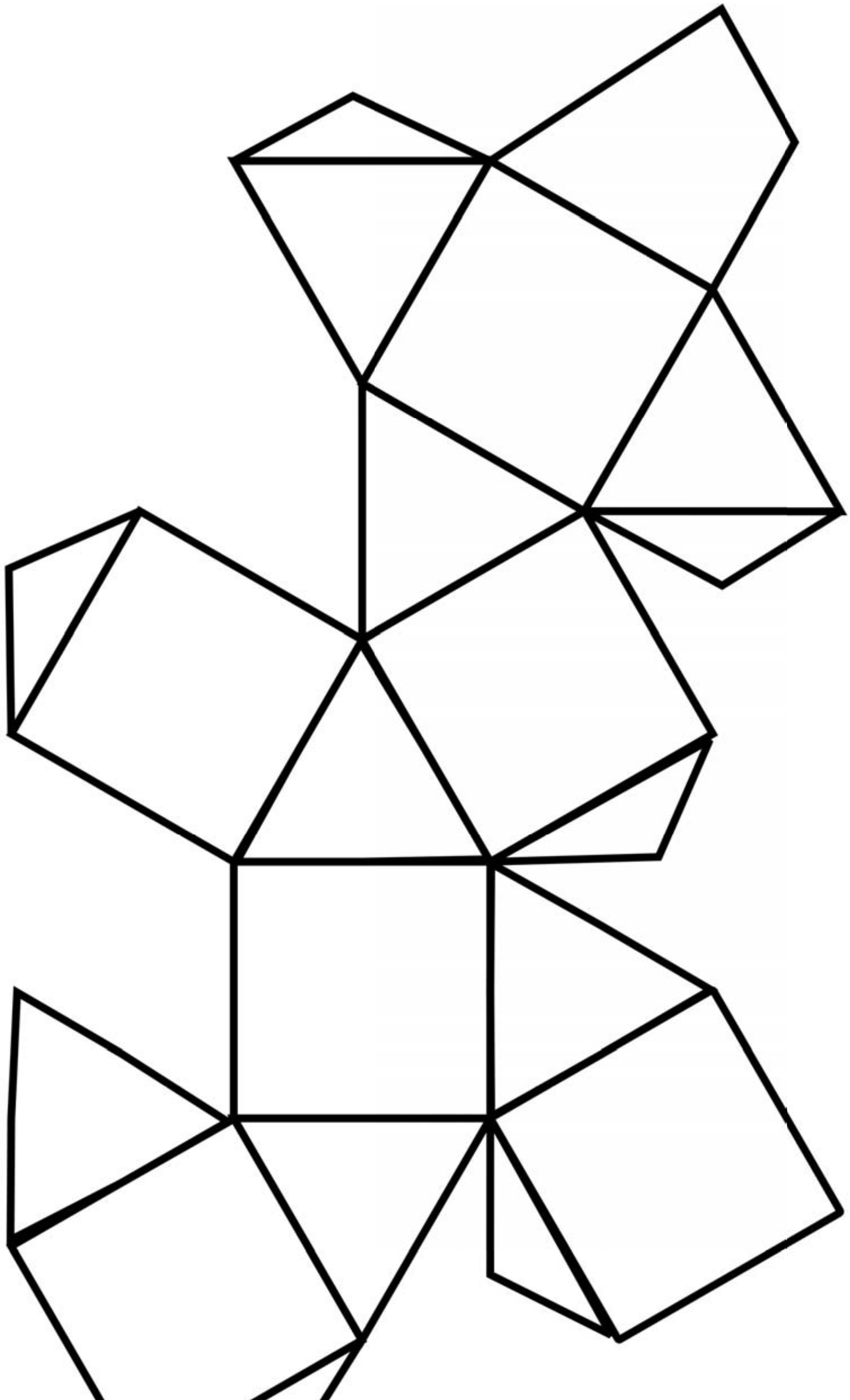
Módulo Prático

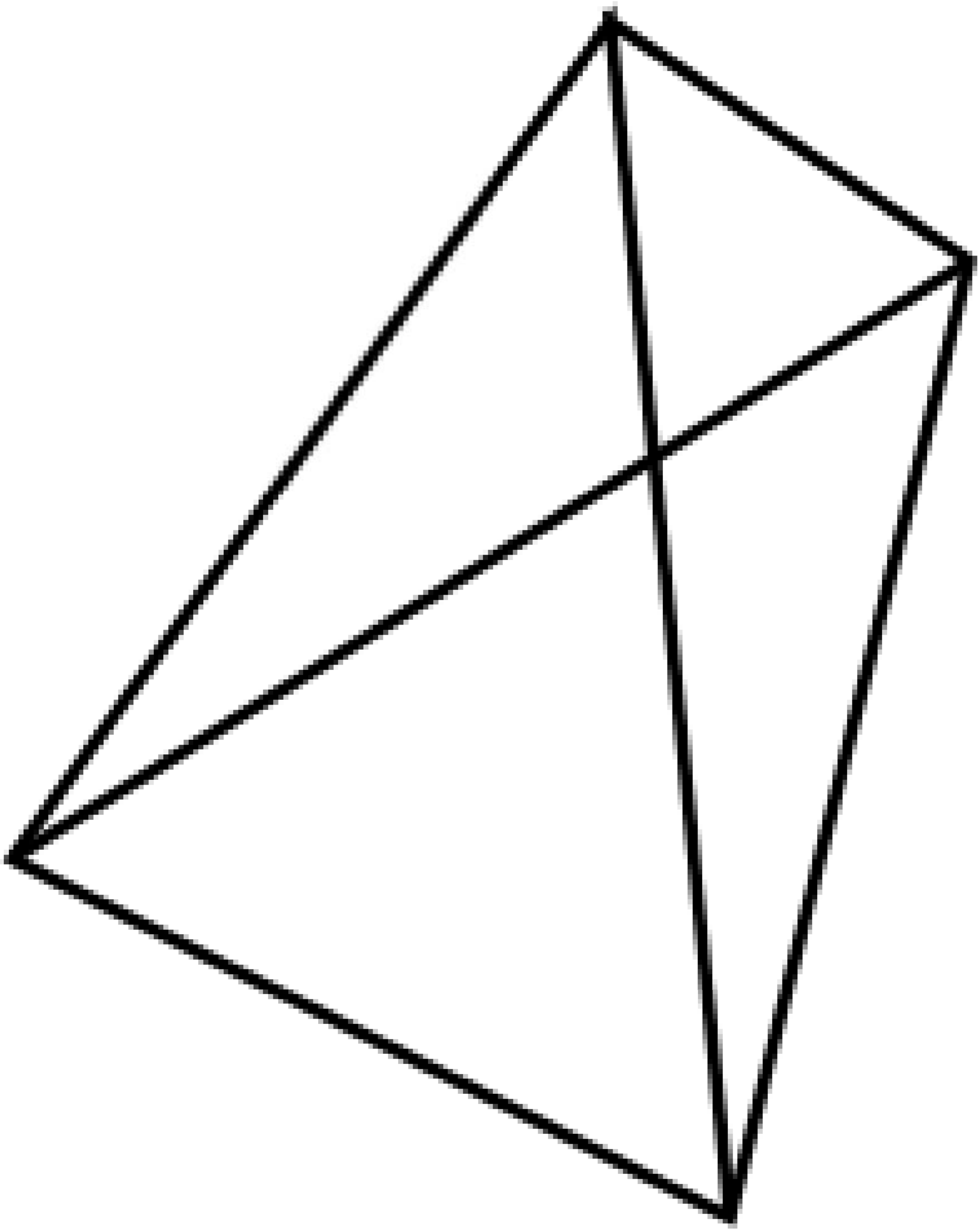

50°
60°
x
115°
130°
x
55°
65°
x
160°
65°
x
60°
75°
x
65°
160°
x
25°
50°
x
30°
115°
x
140°
80°
x
120°
200°
x
40°
110°
x
80°
x
125°
30°
x
45°
60°
60°
x
90°
70°
70°
x
75°
35°
35°
x
35°
95°
x
85°
330°
x
100°
35°
x
110°
70°
70°
x
130°
65°
60°
x
20°
45°
x
150°
55°
90°
x
70°
100°
160°
x

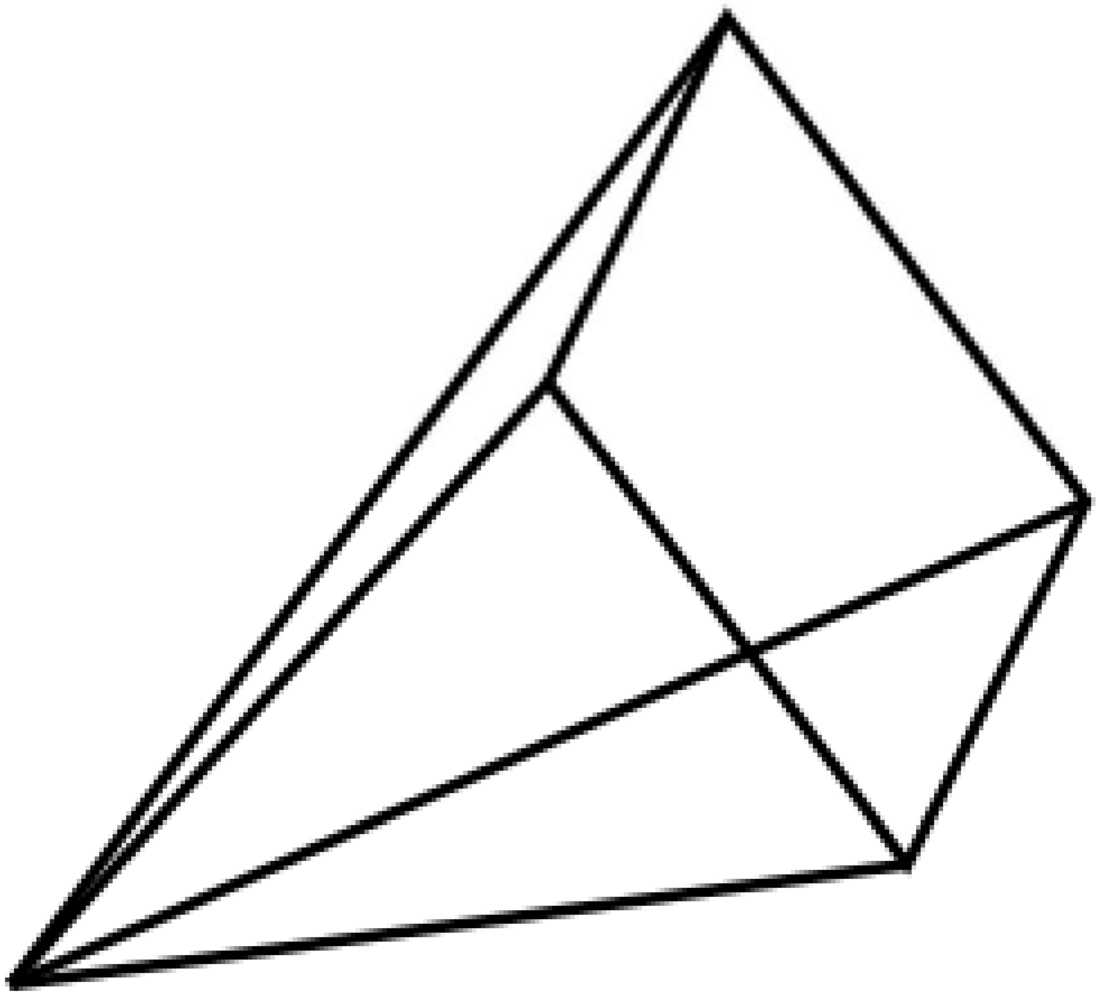


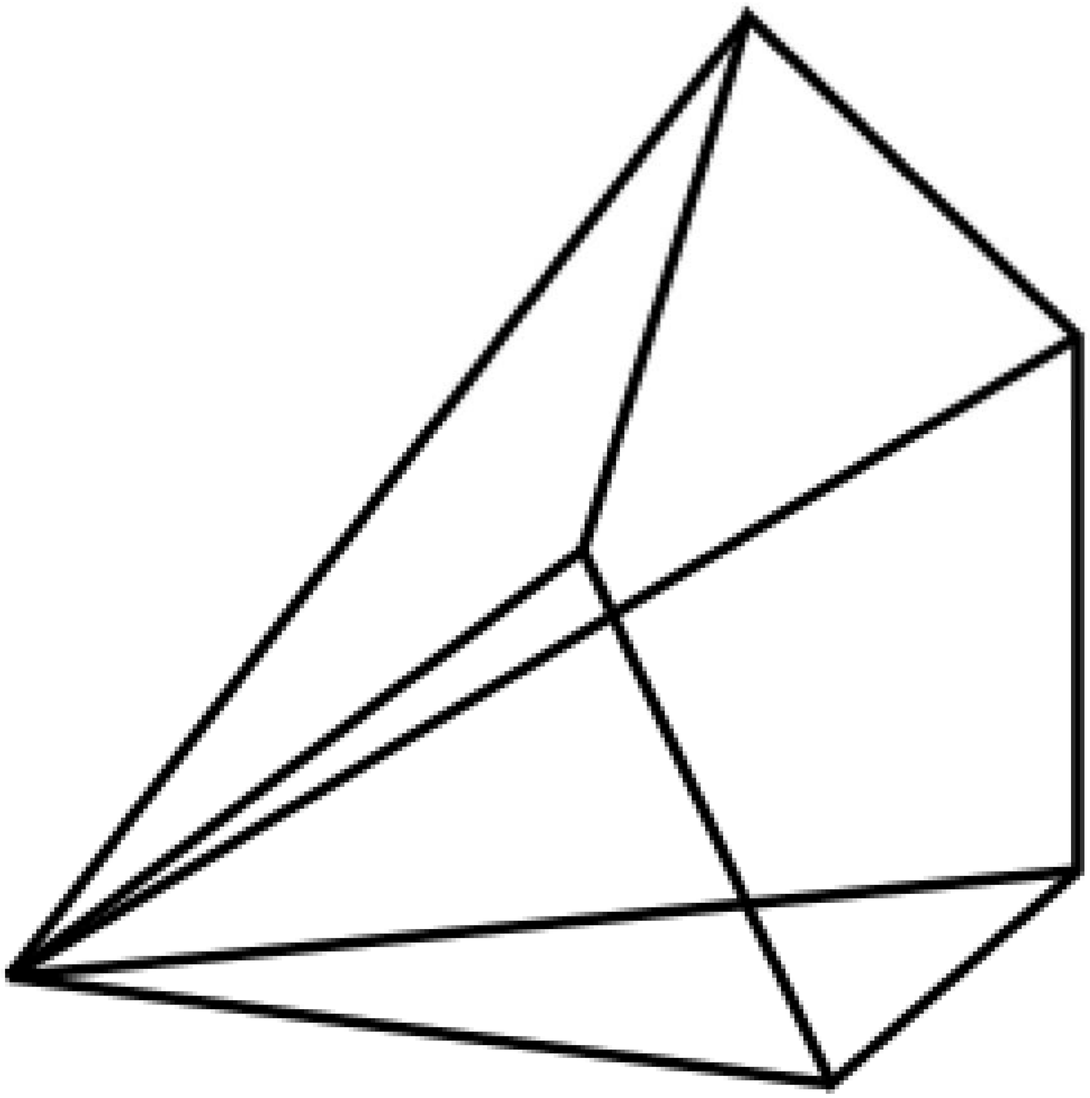


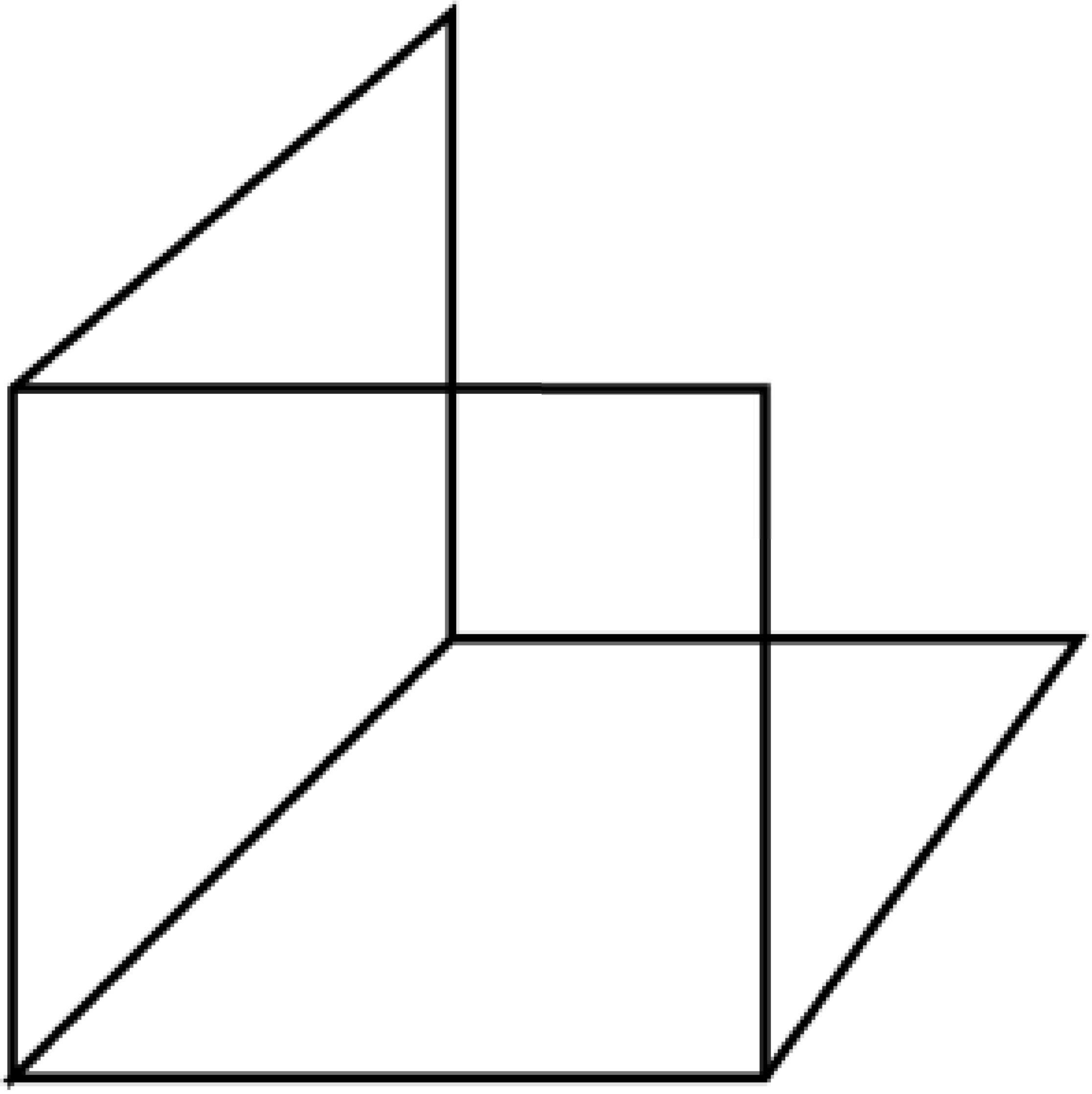


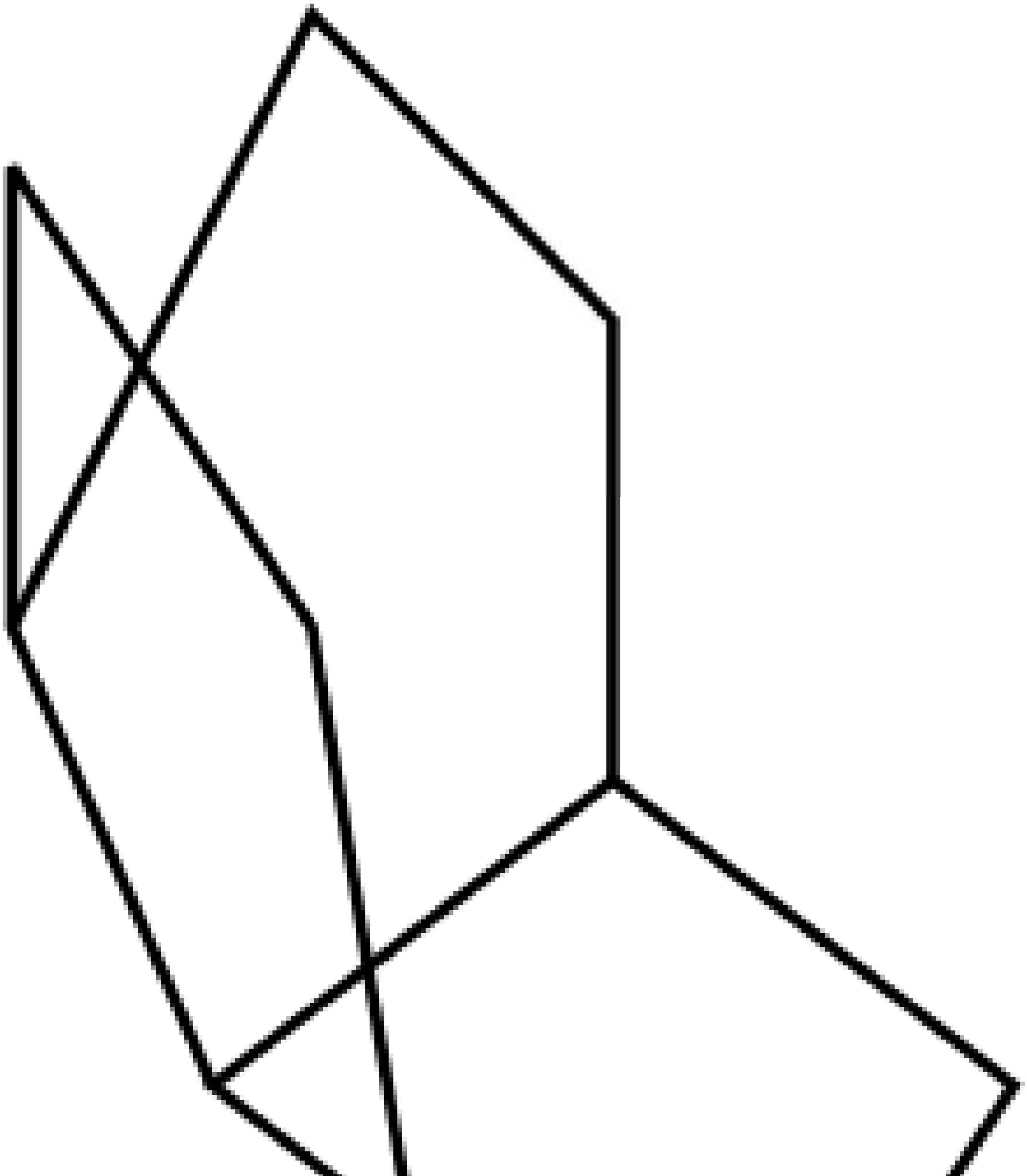


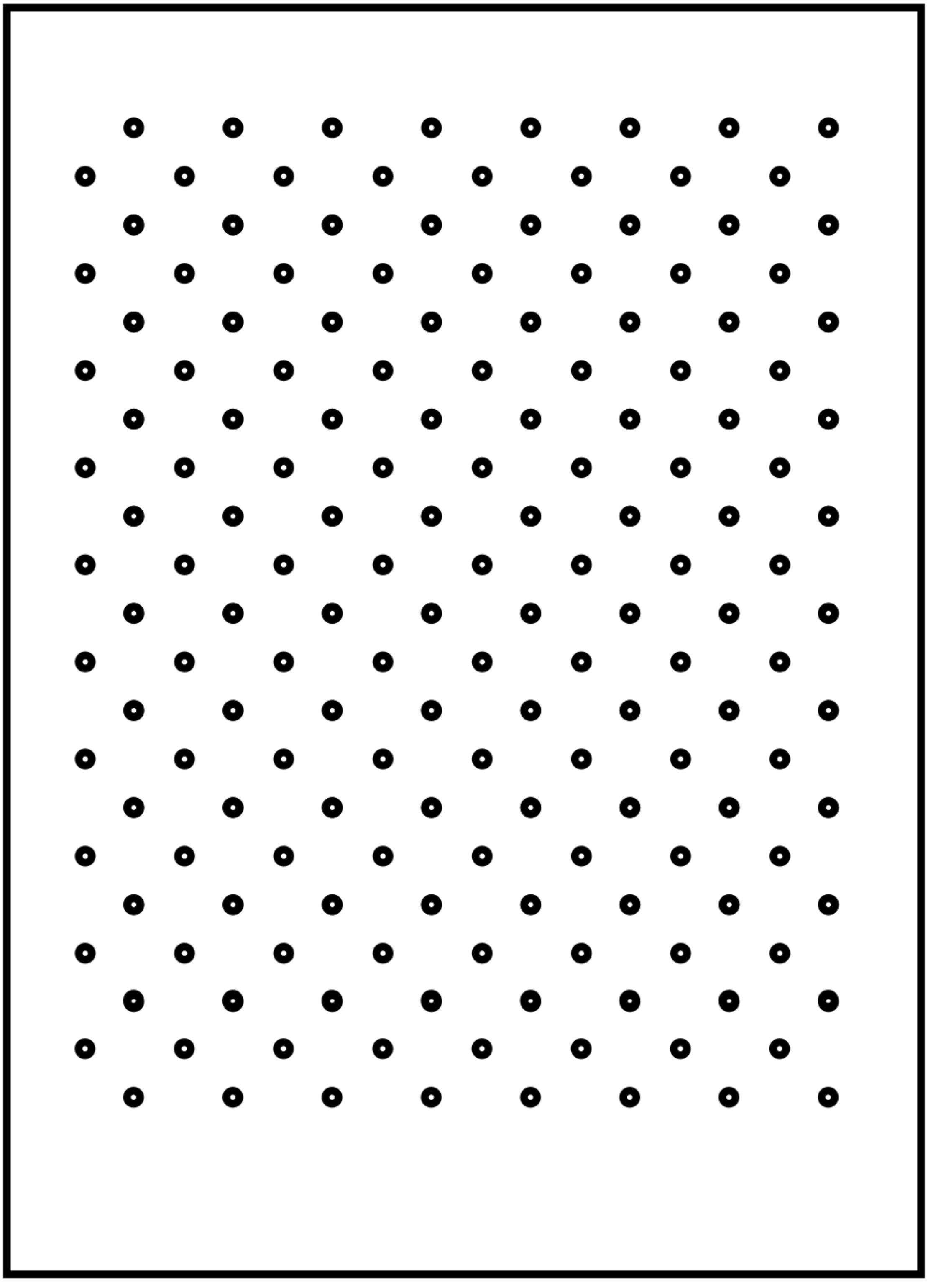


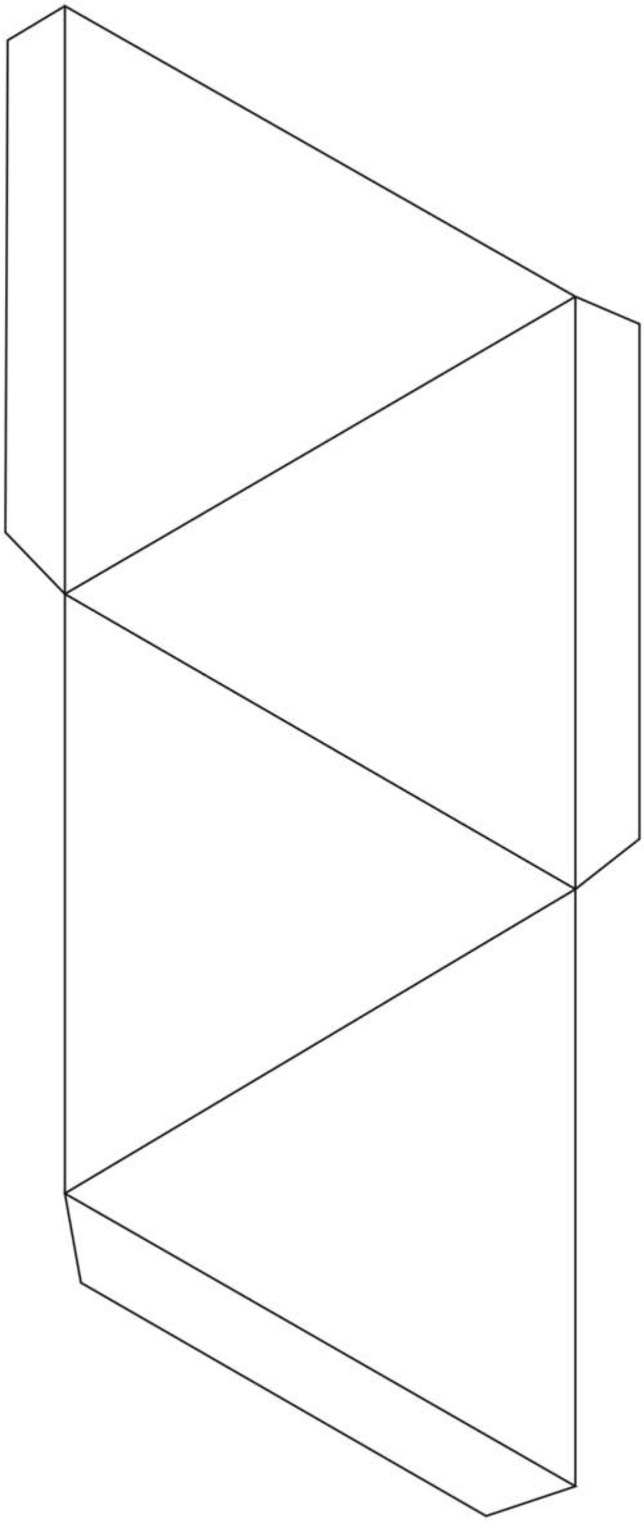


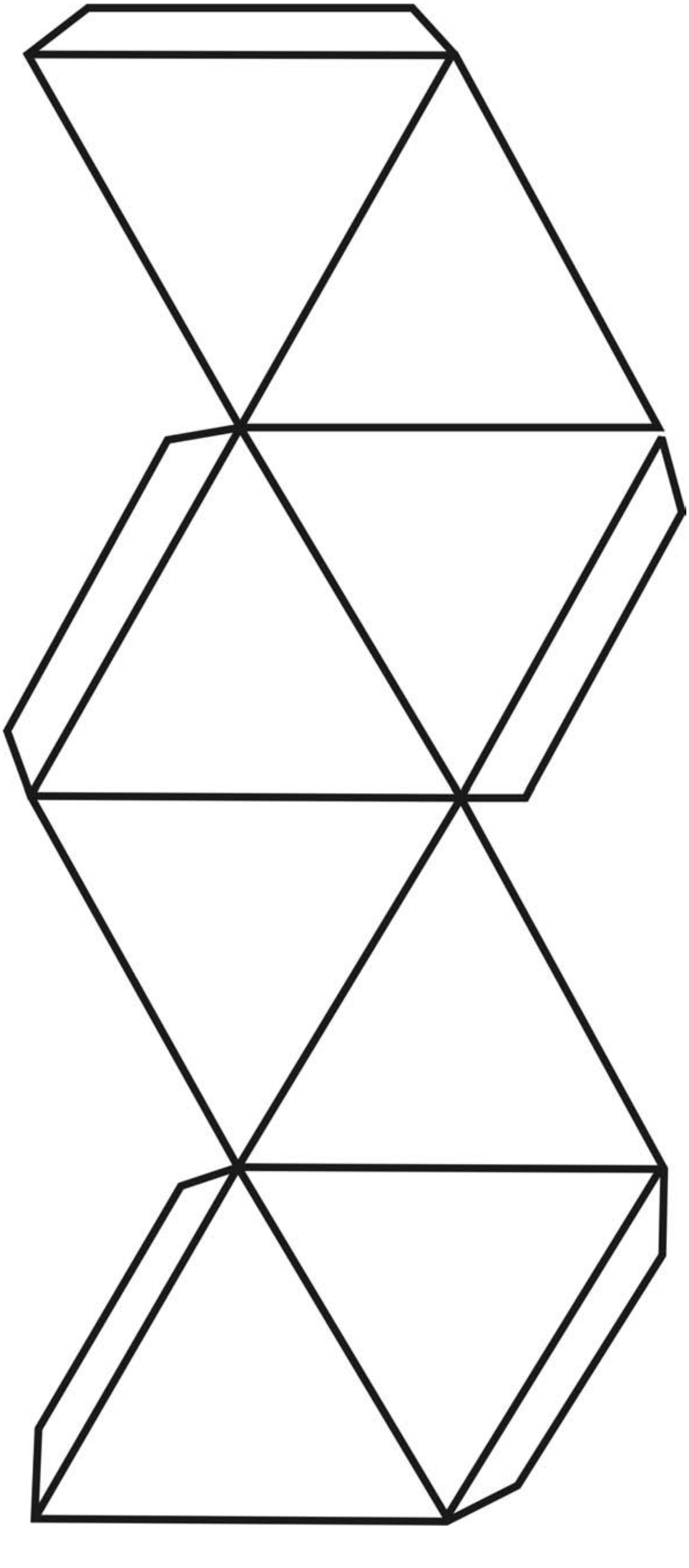


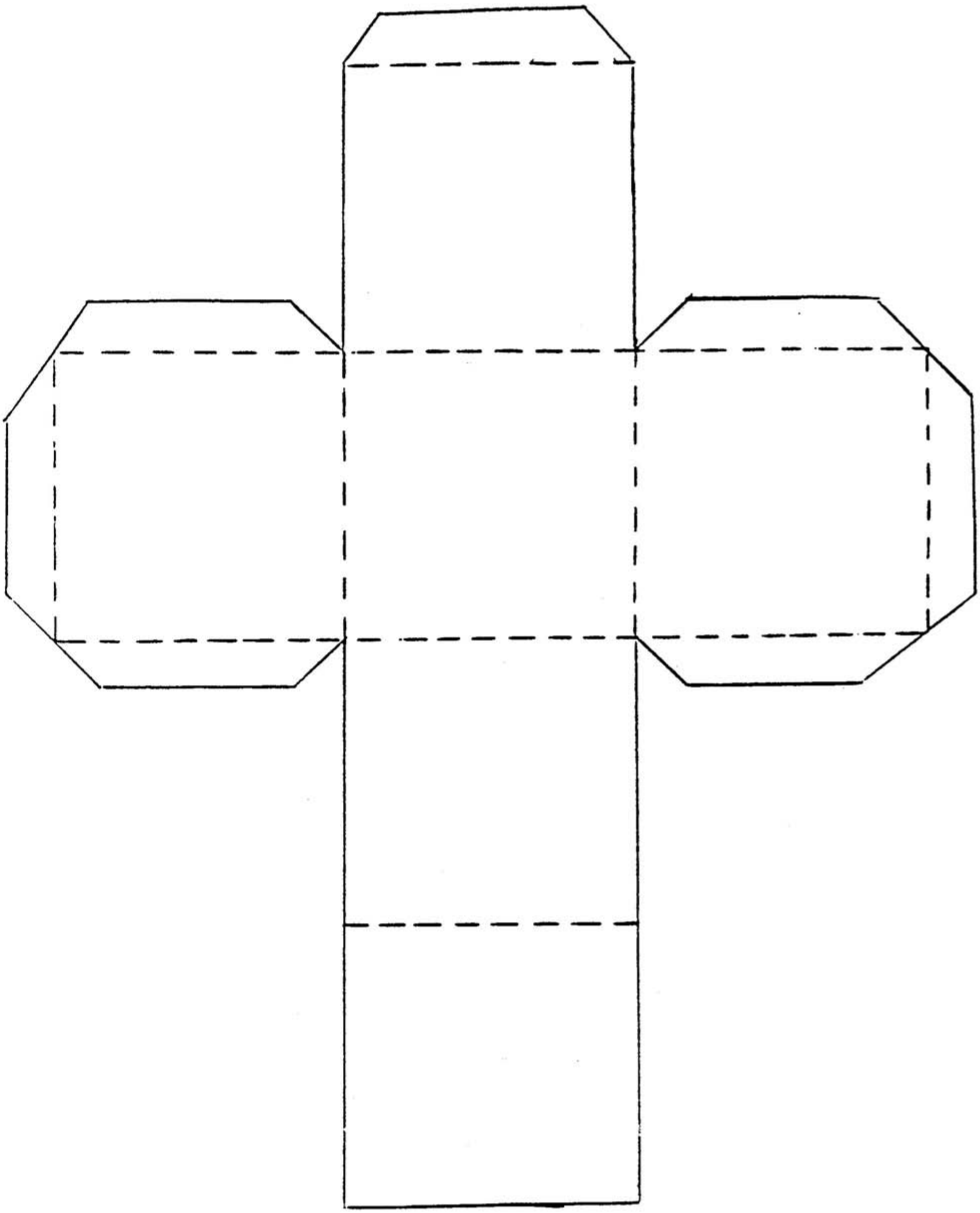


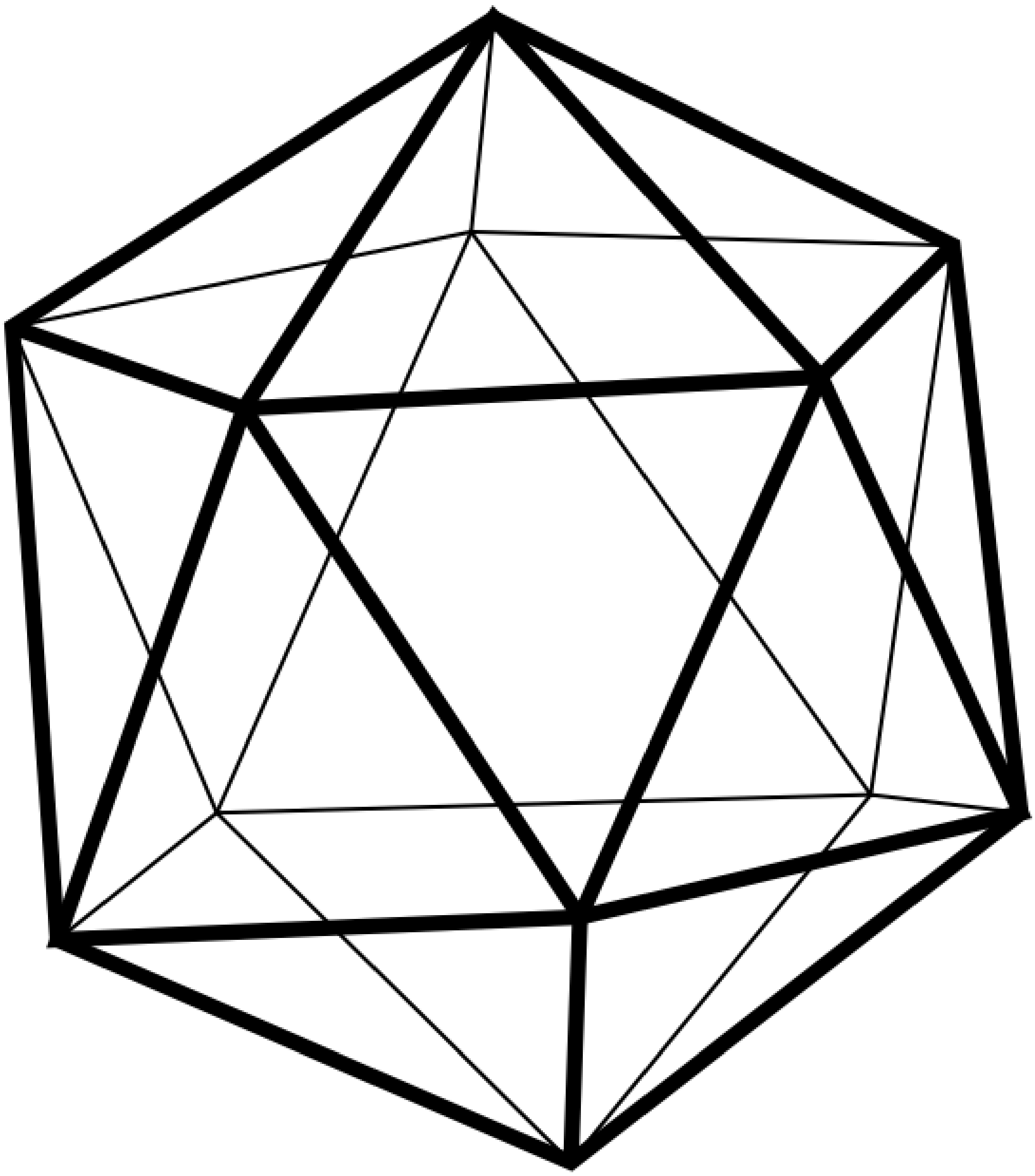


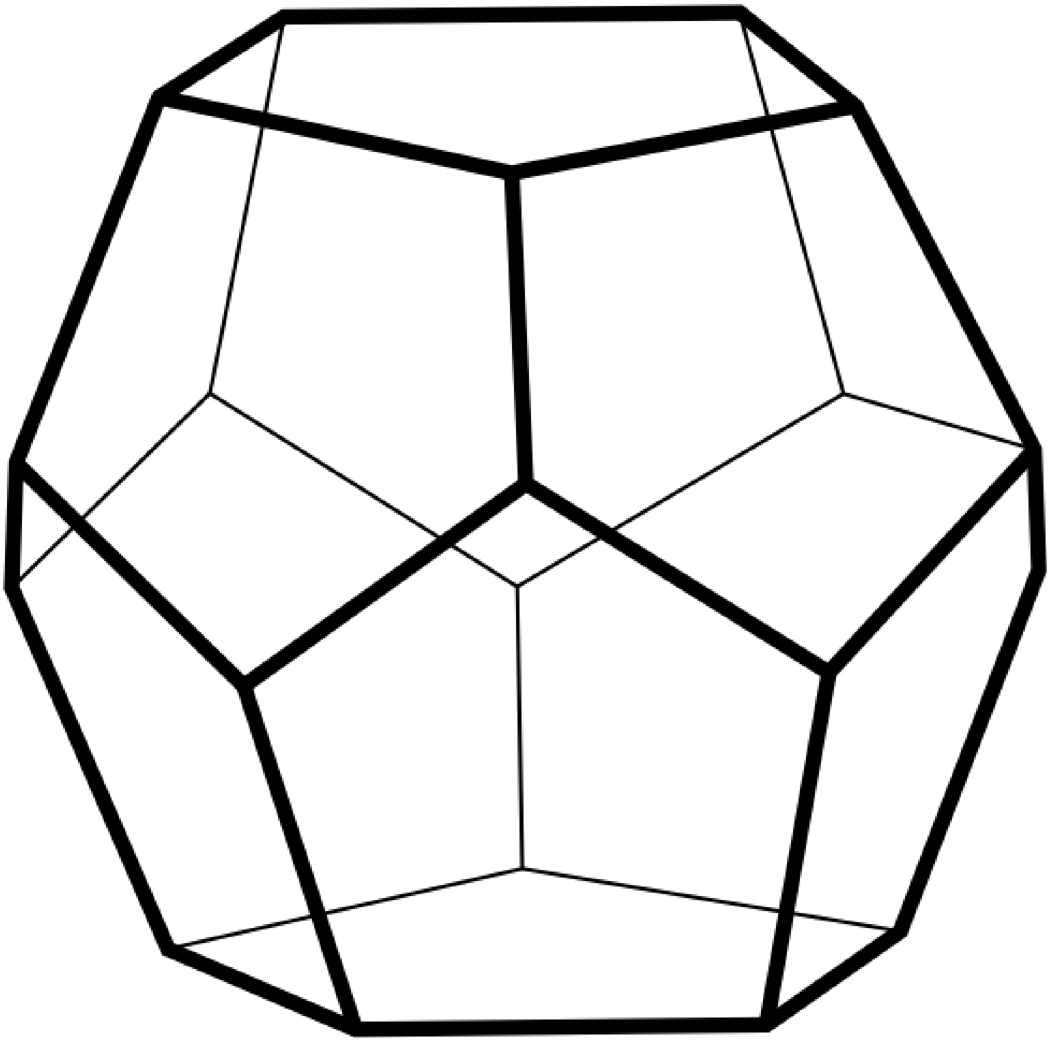


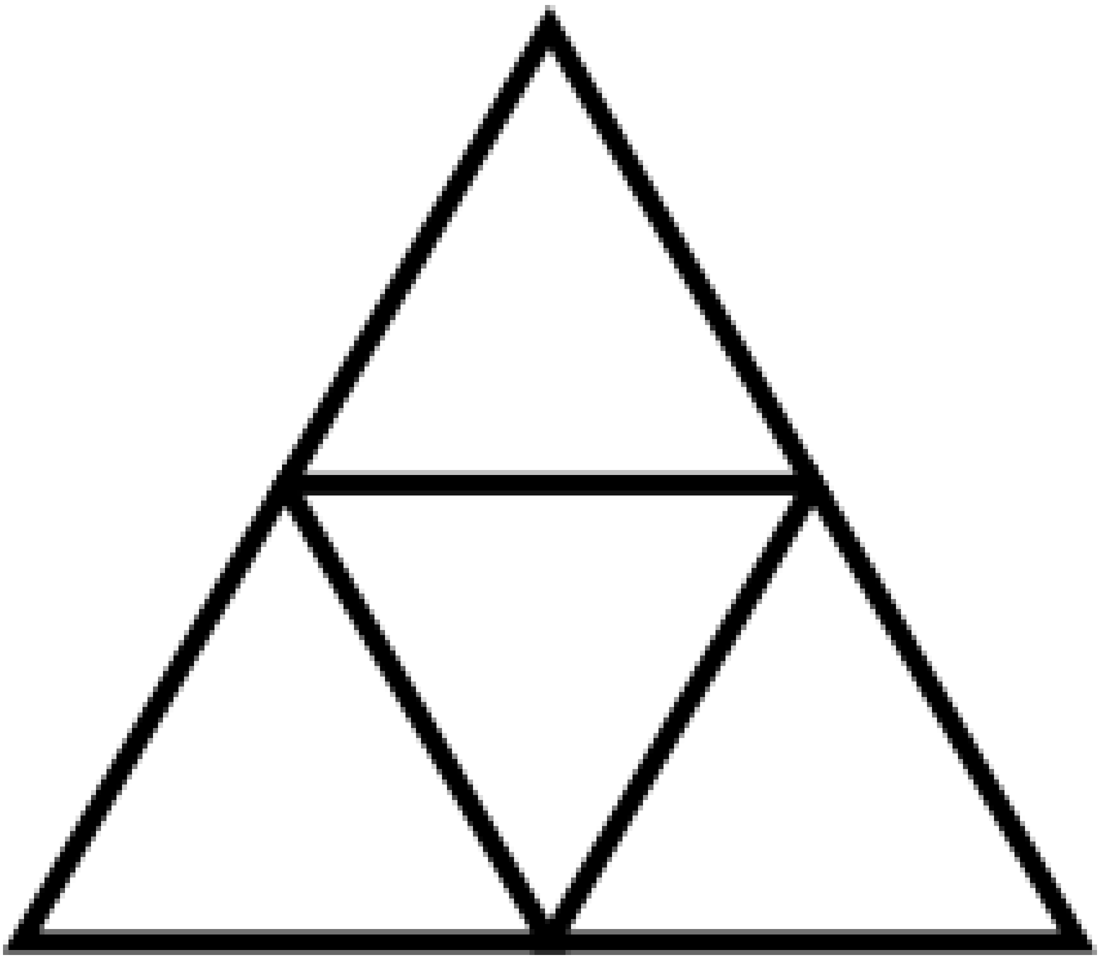


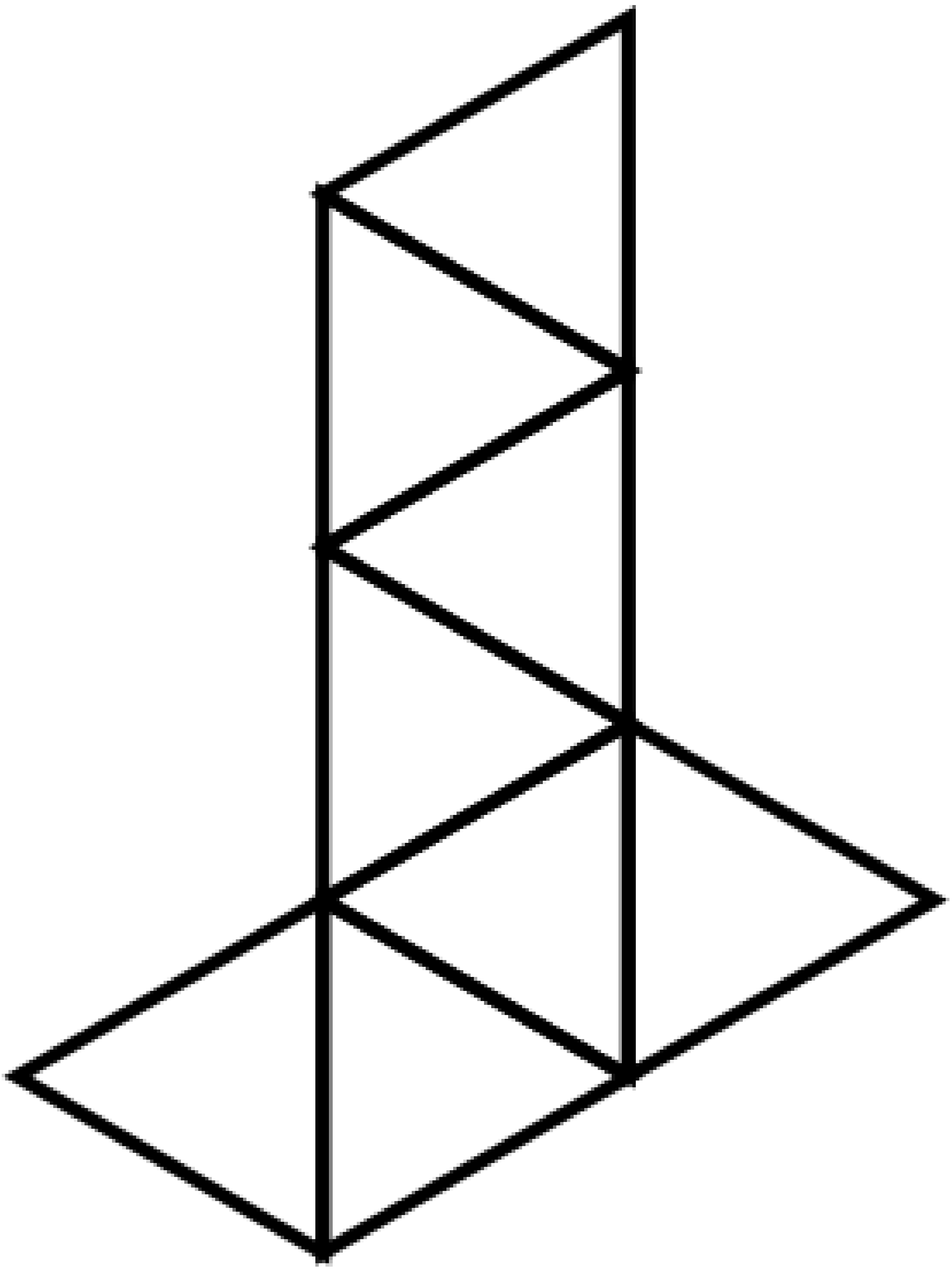


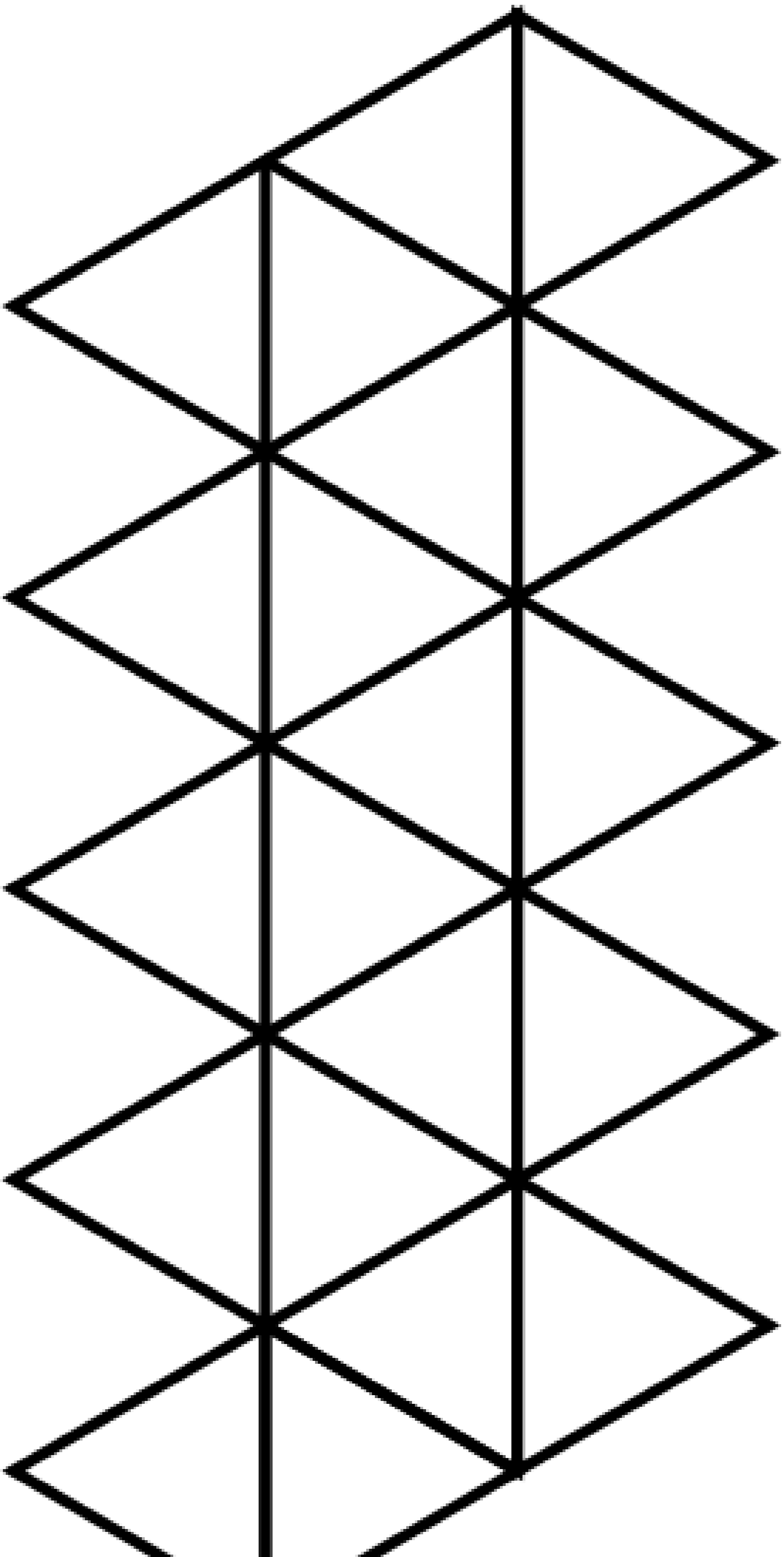


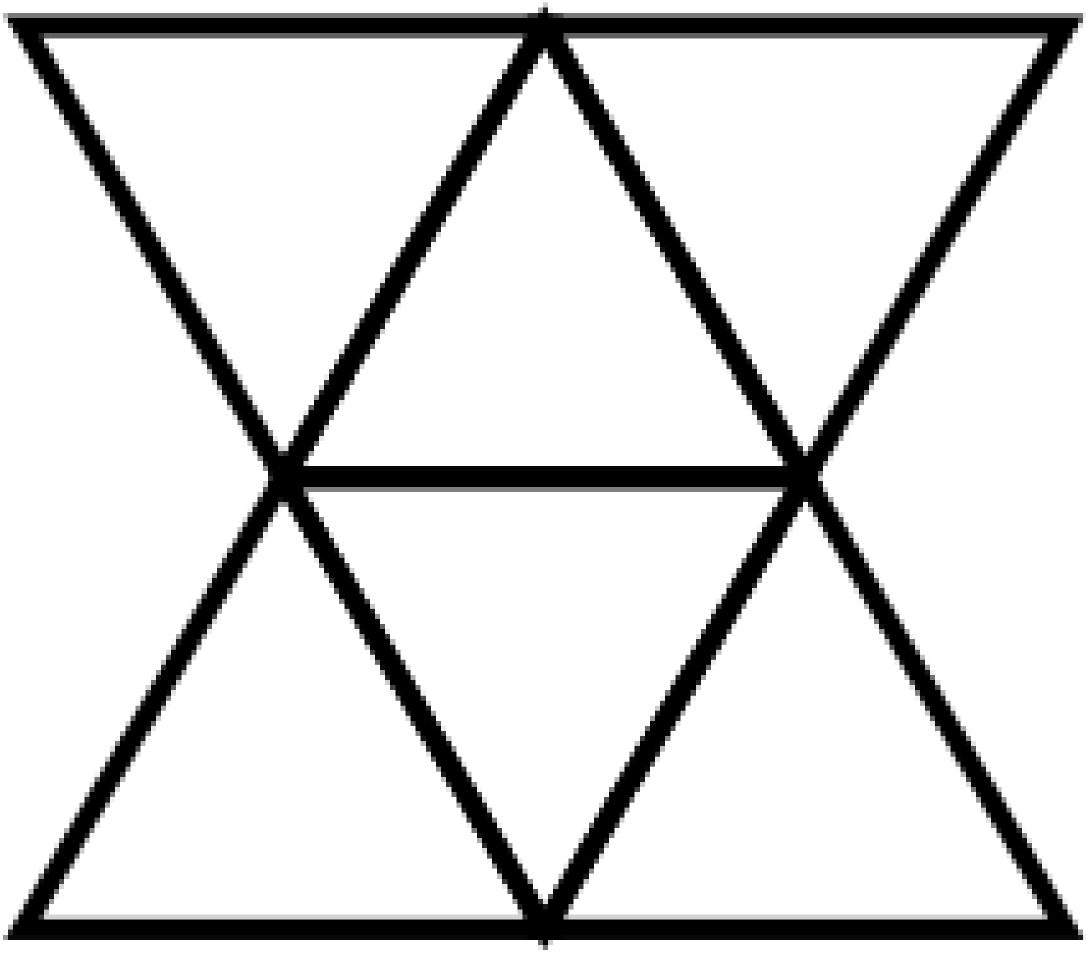


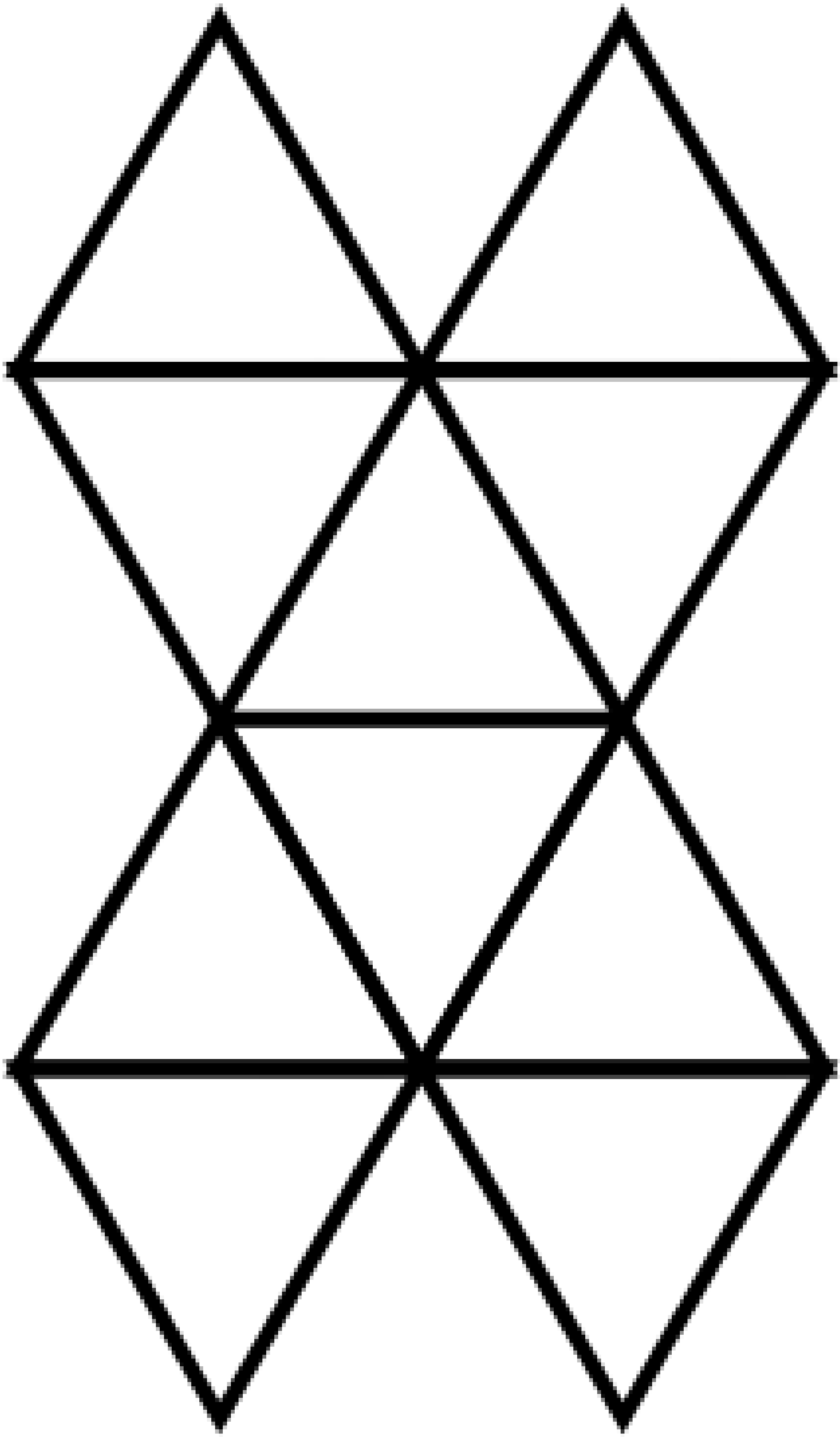


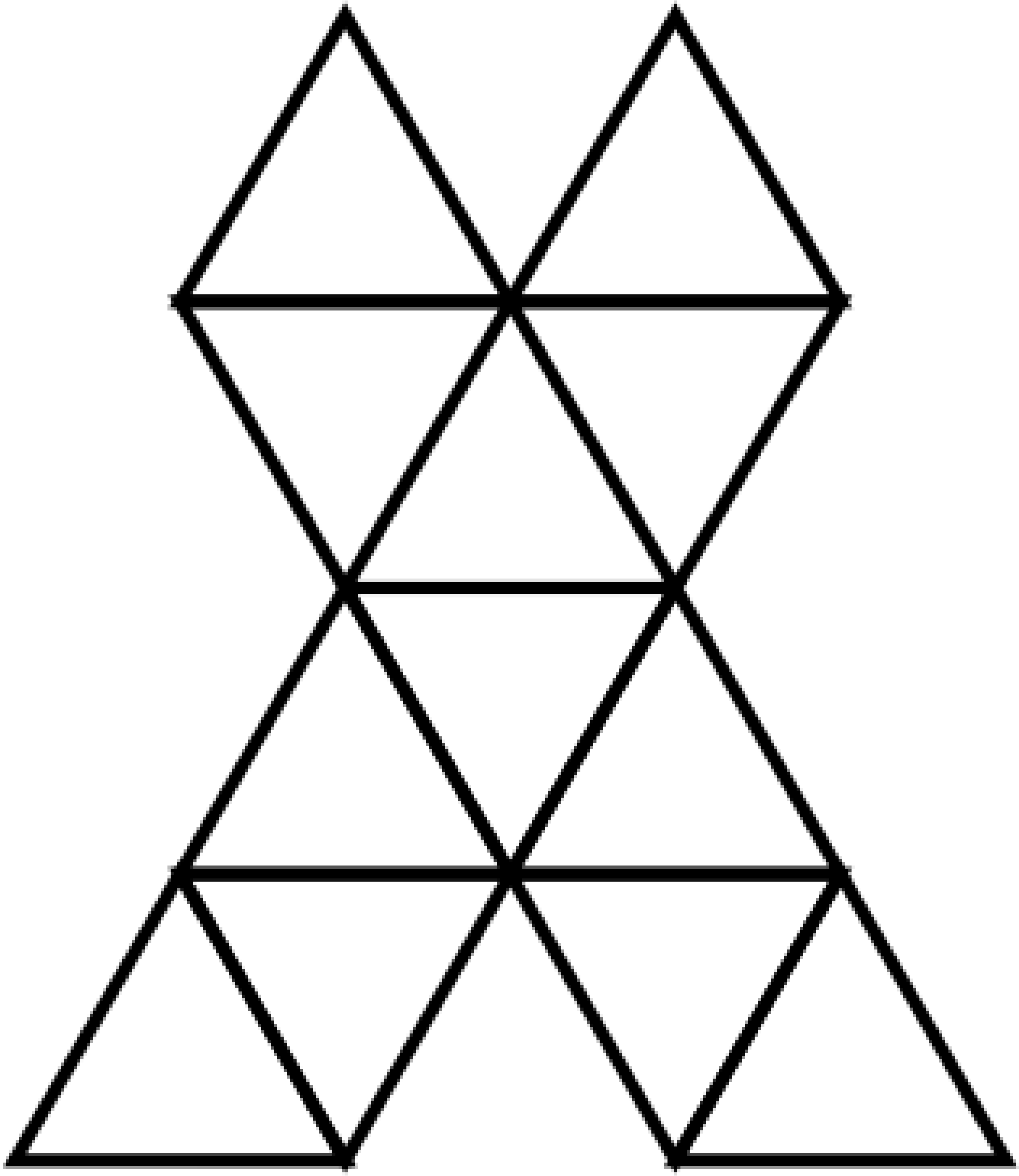


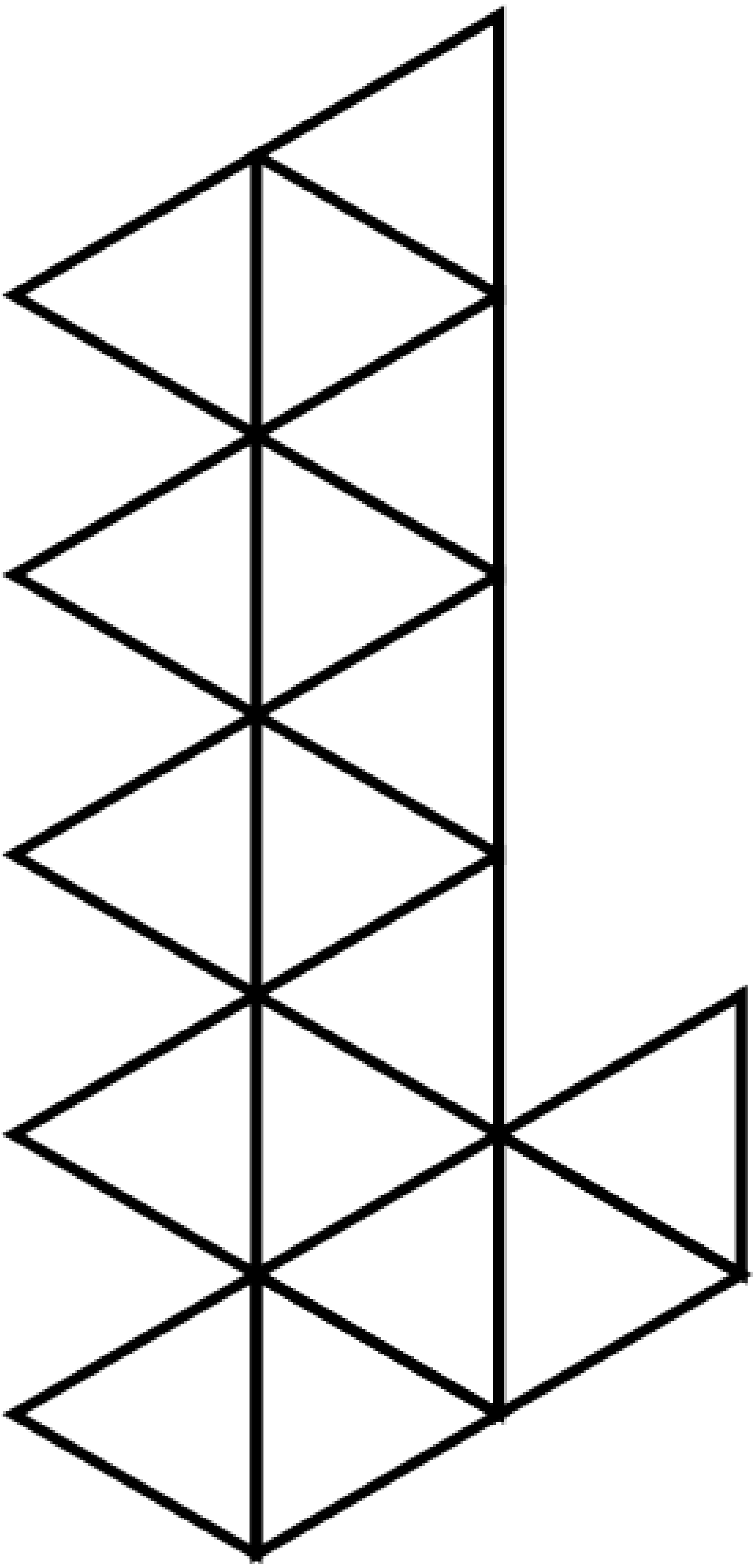


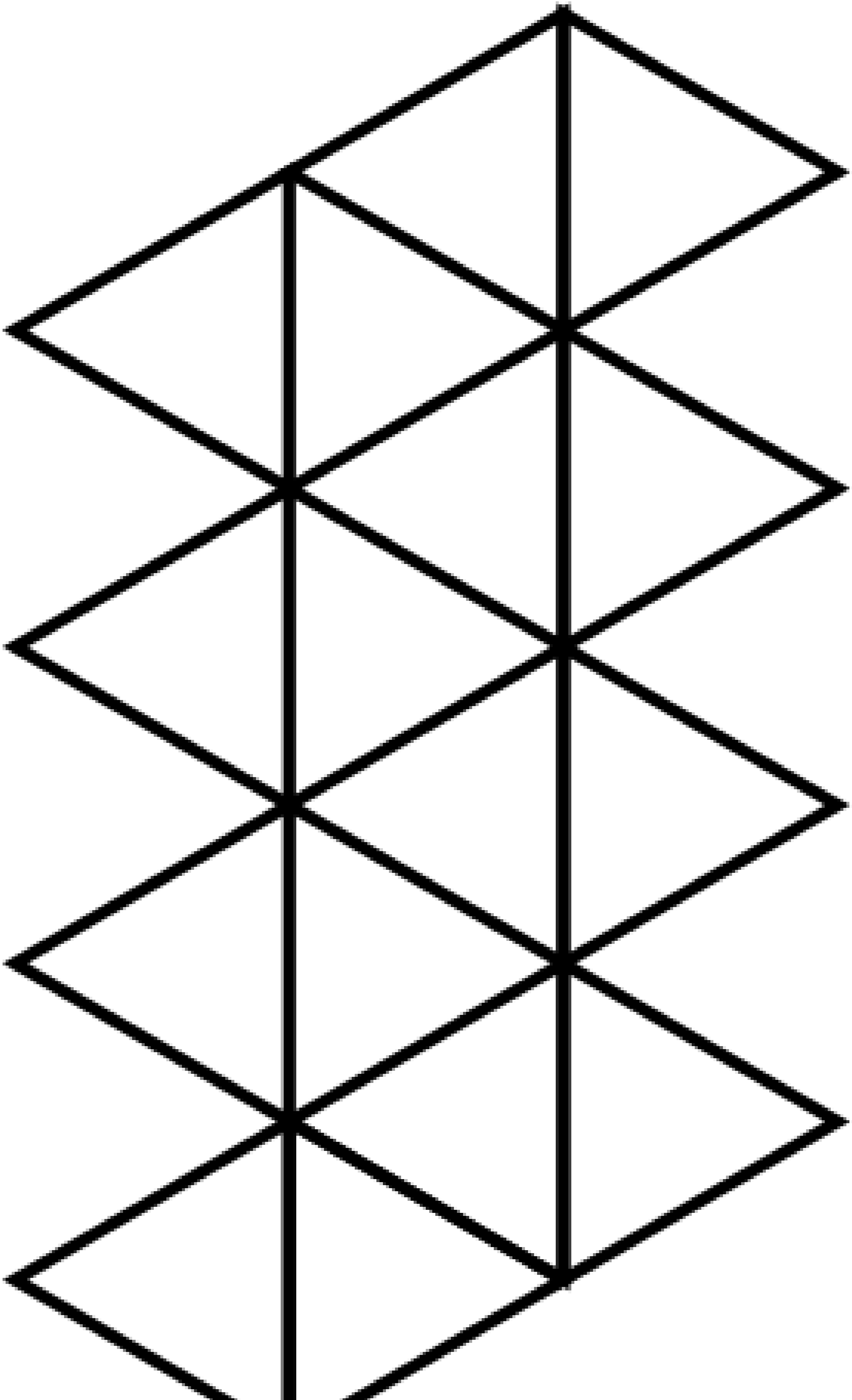


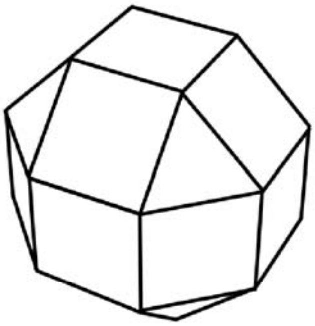


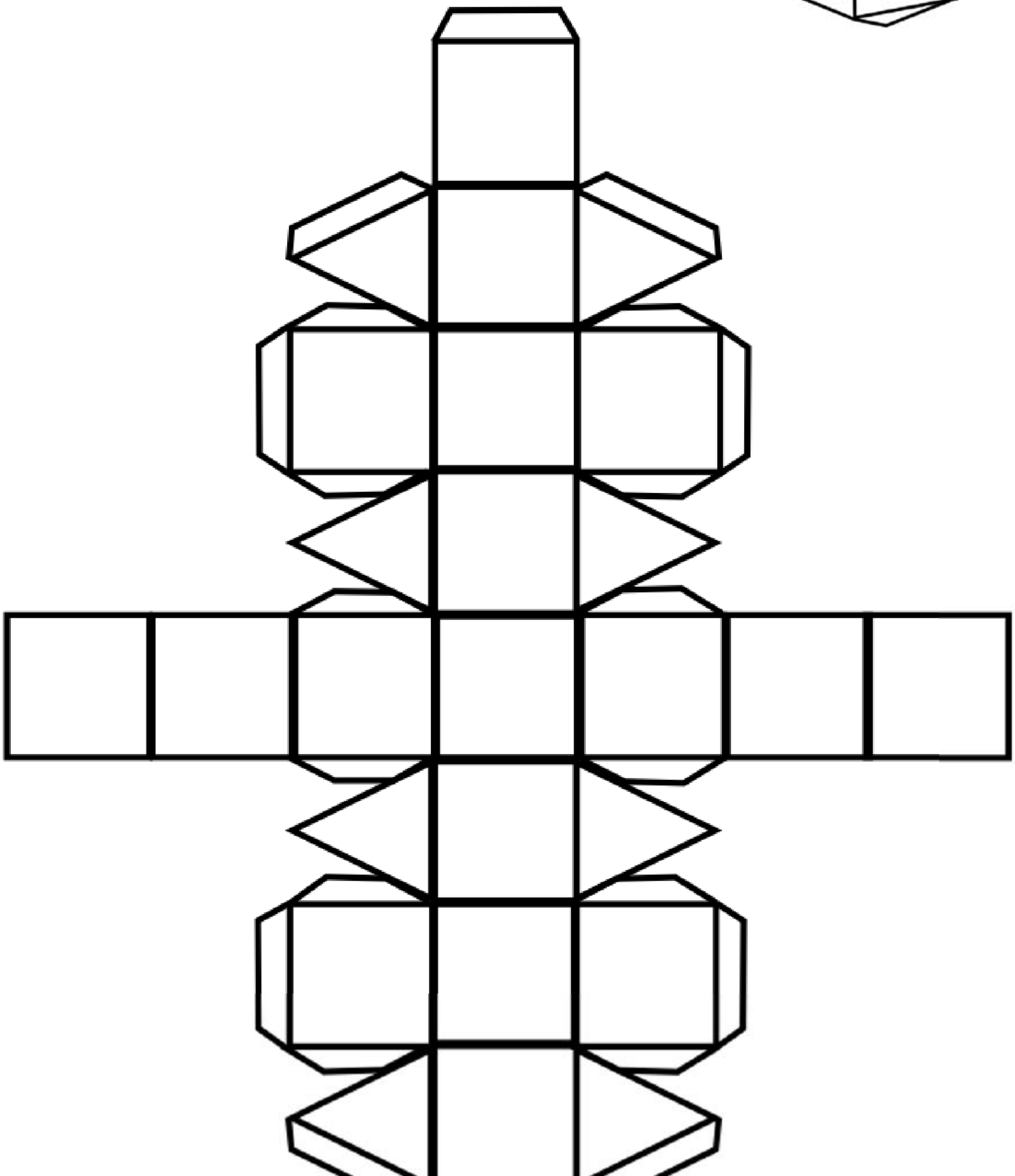


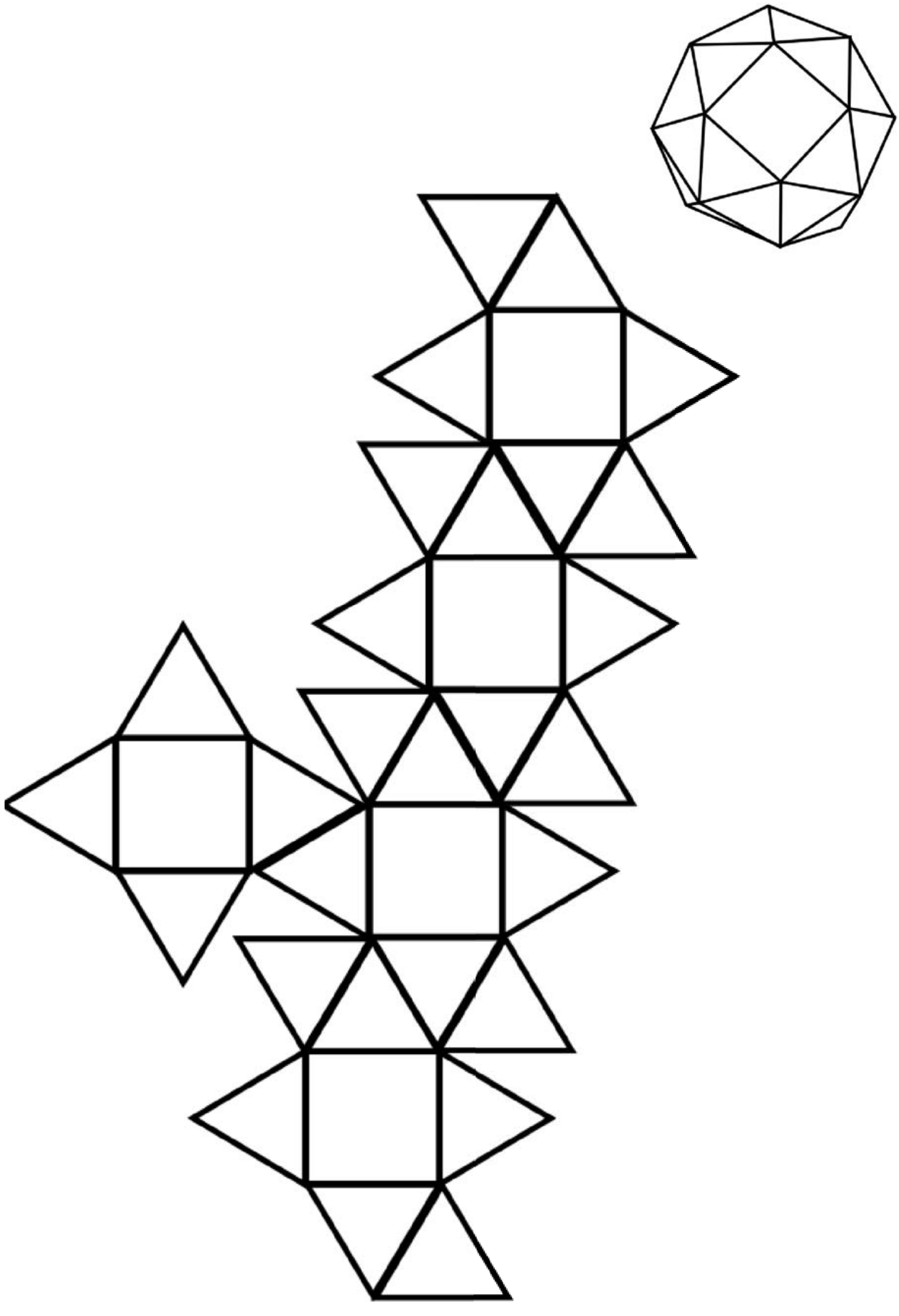




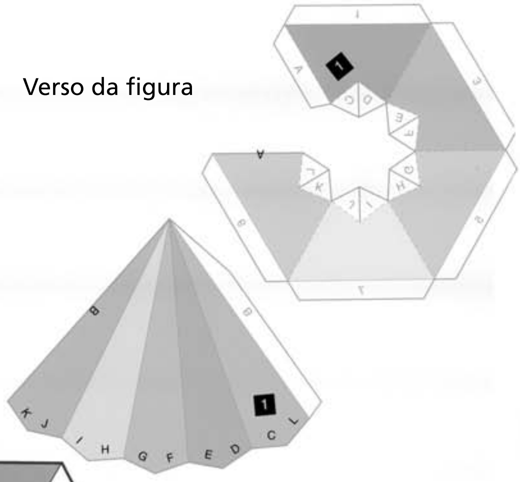


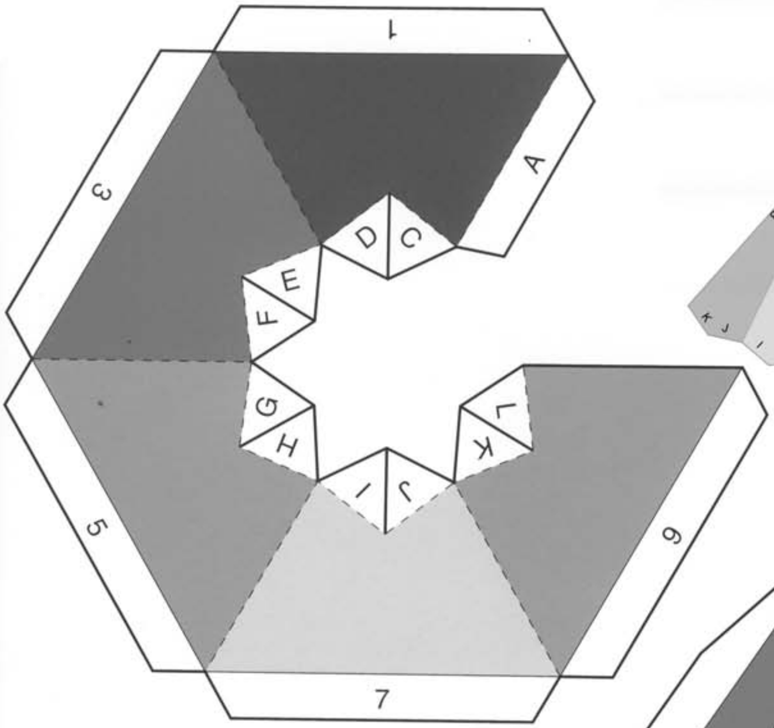


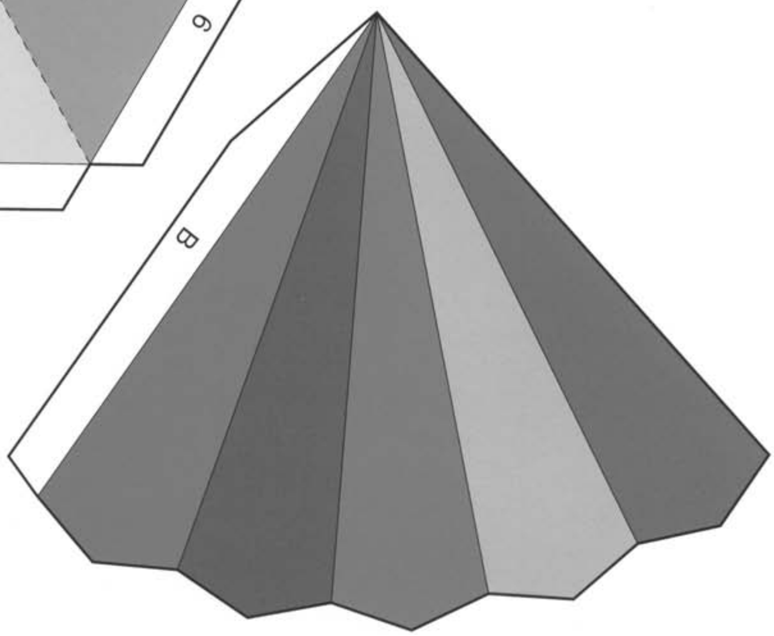


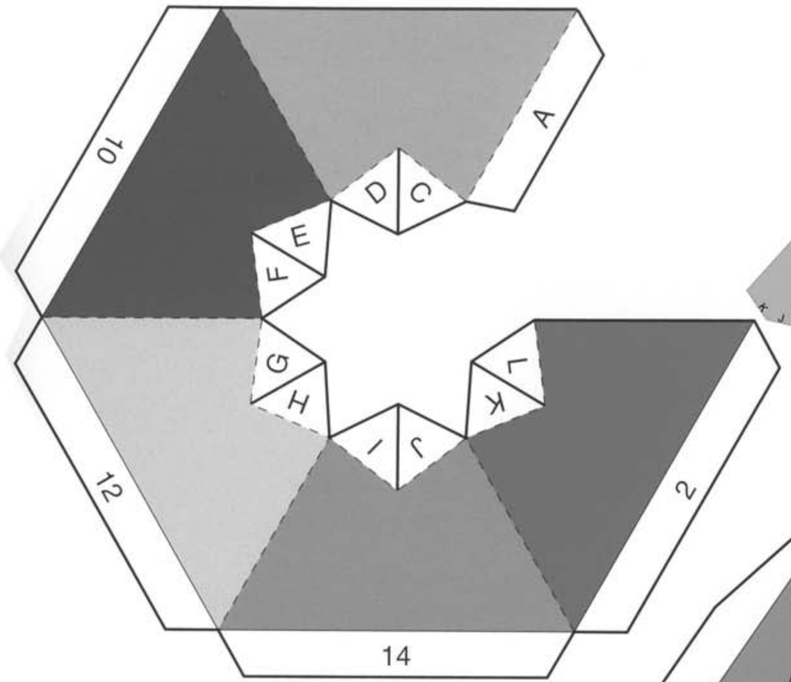


Verso da figura

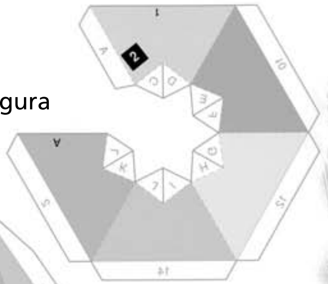


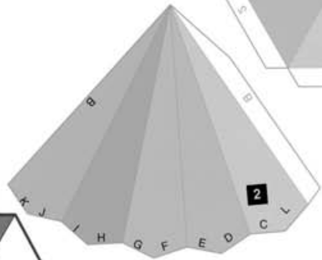


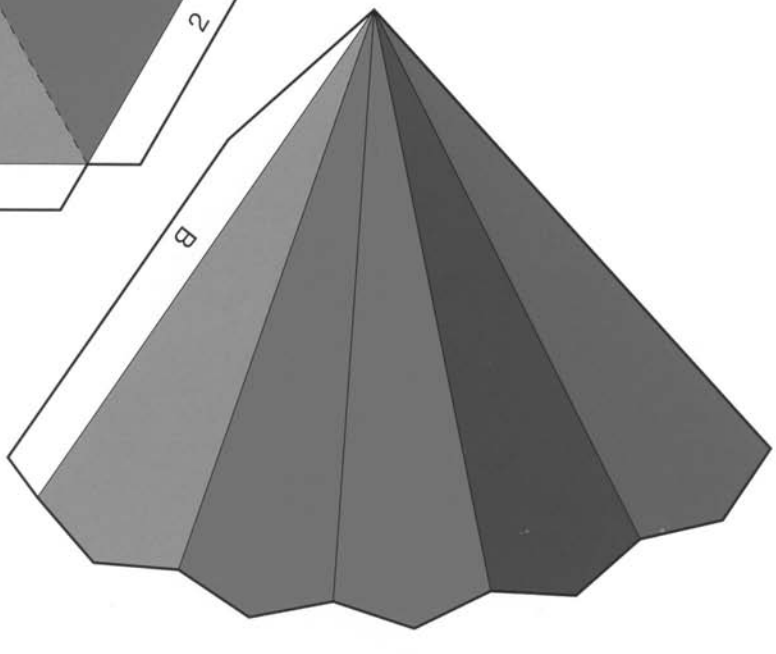





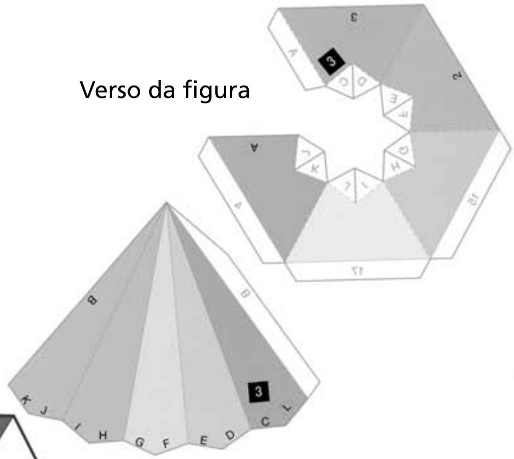

Verso da figura

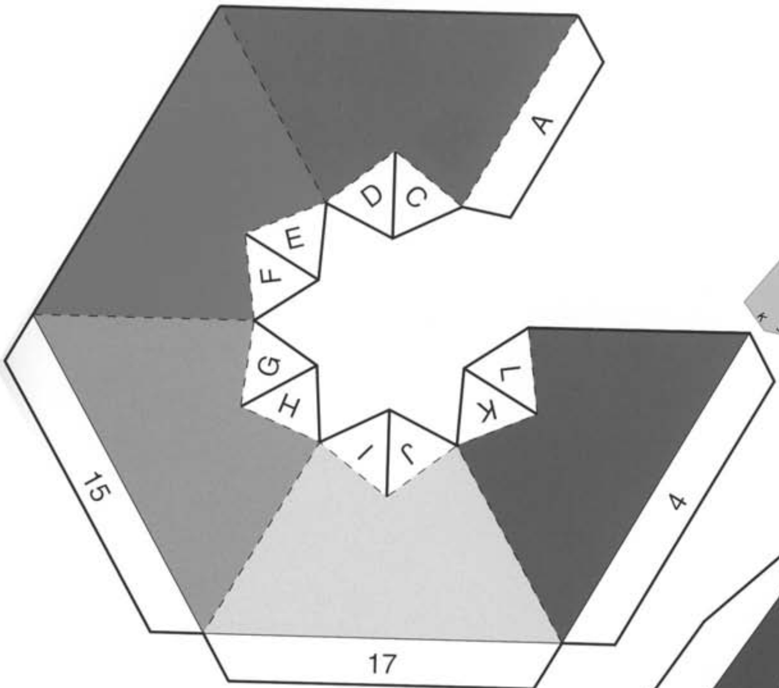


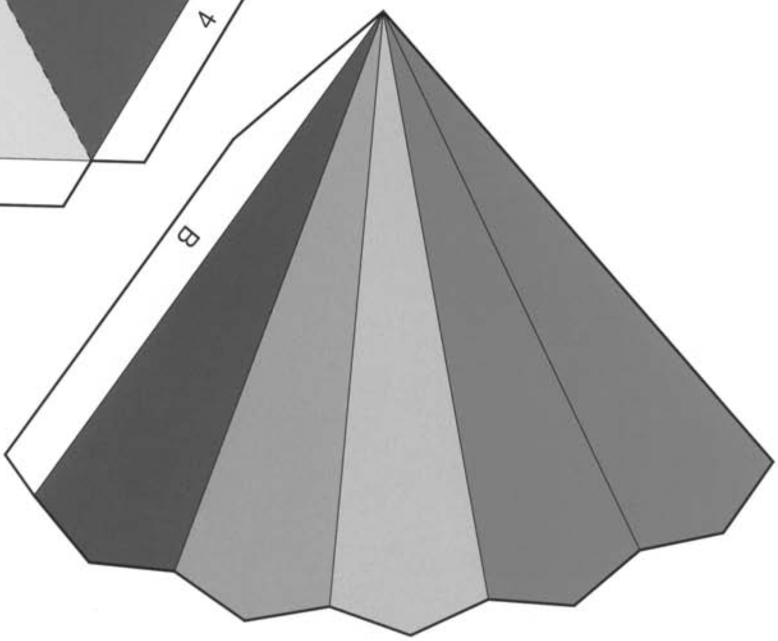


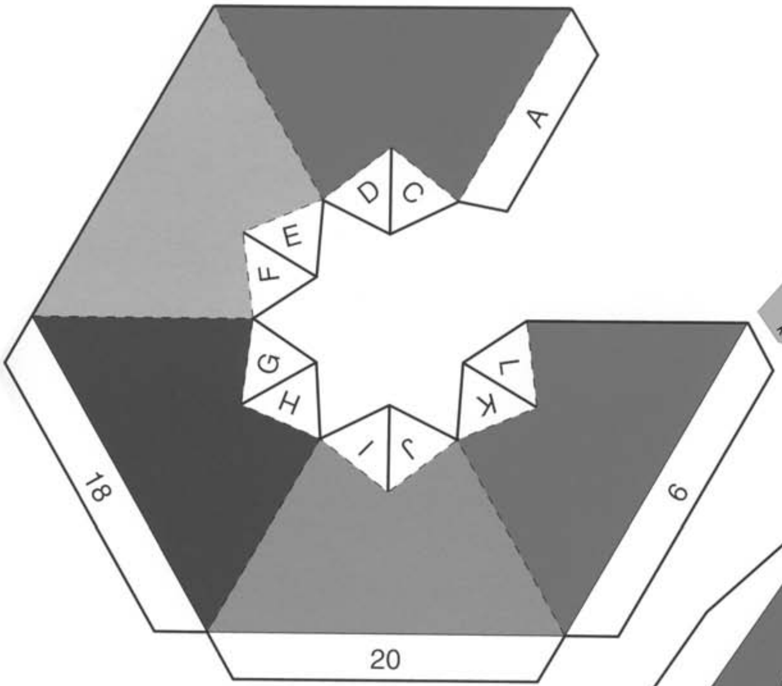


Verso da figura

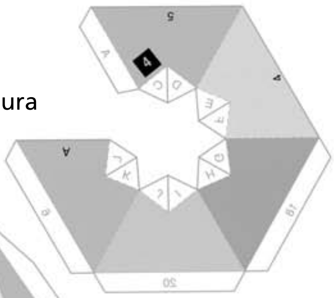


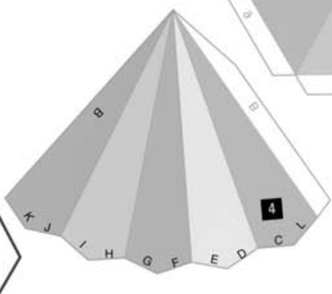


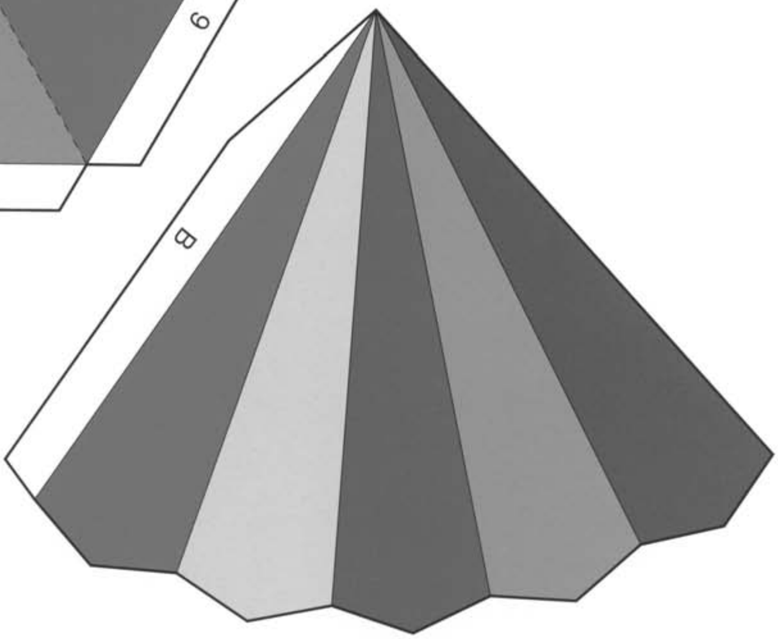



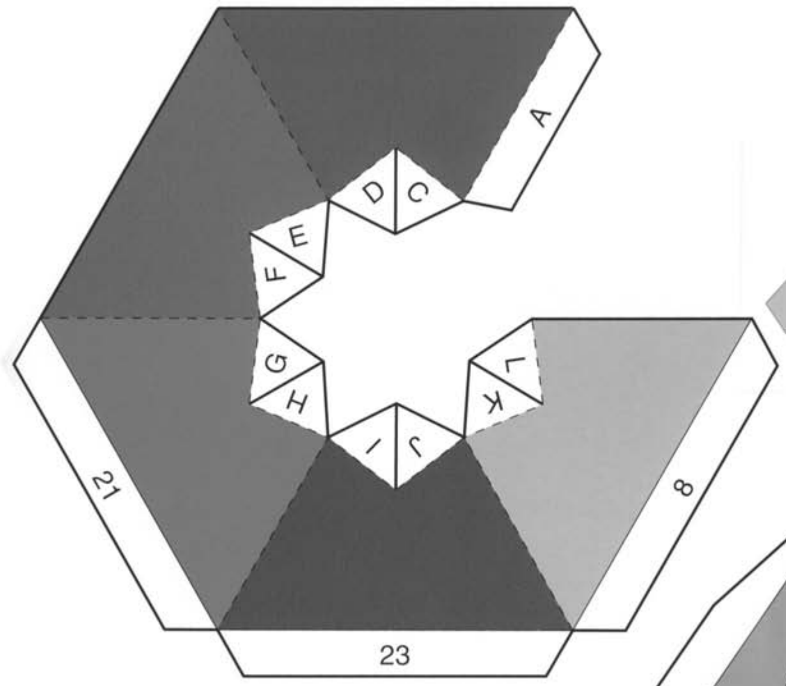



Verso da figura

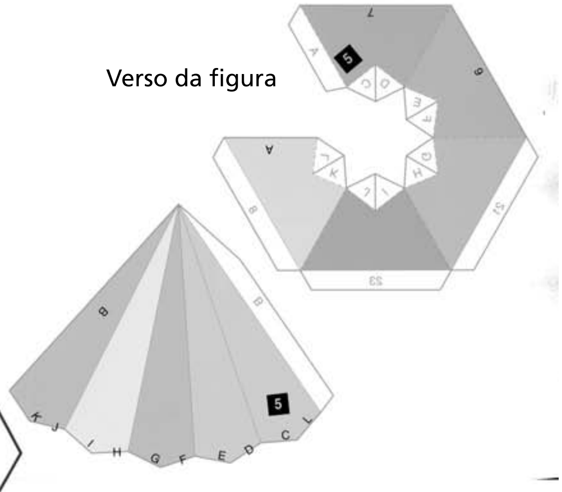


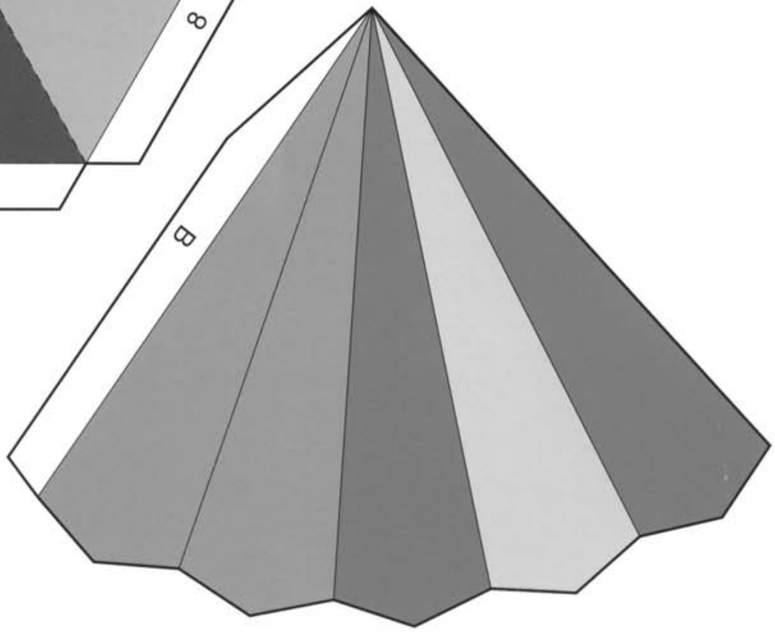


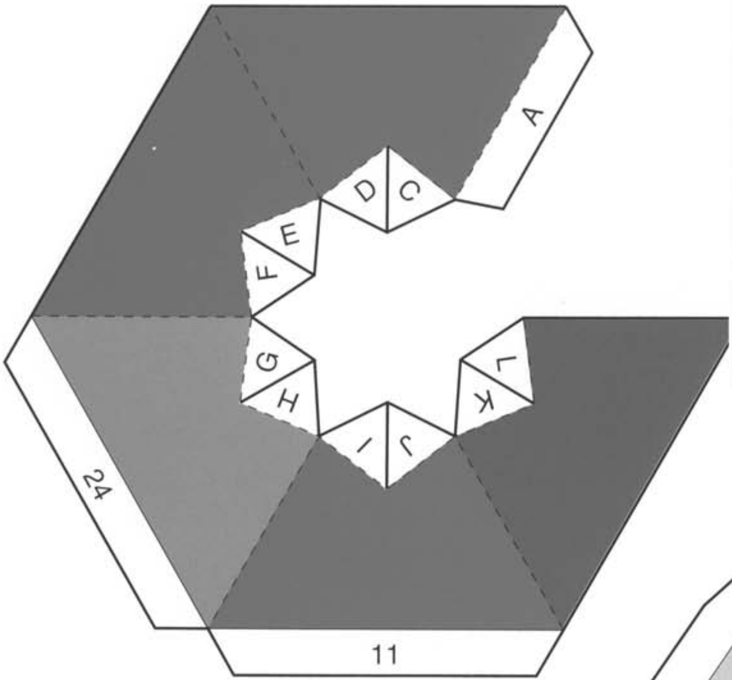




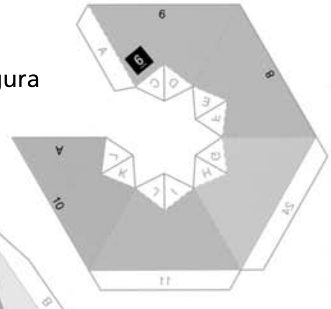

Verso da figura

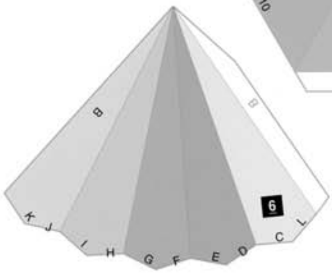


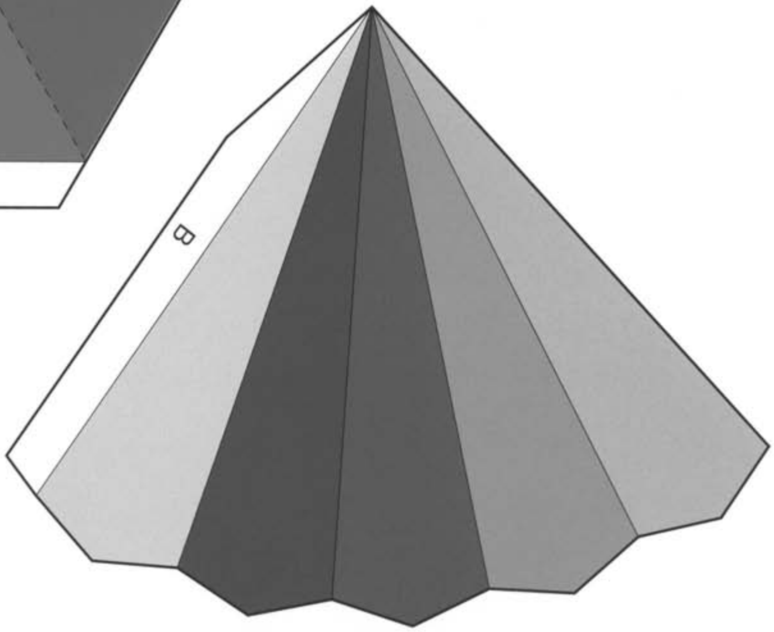


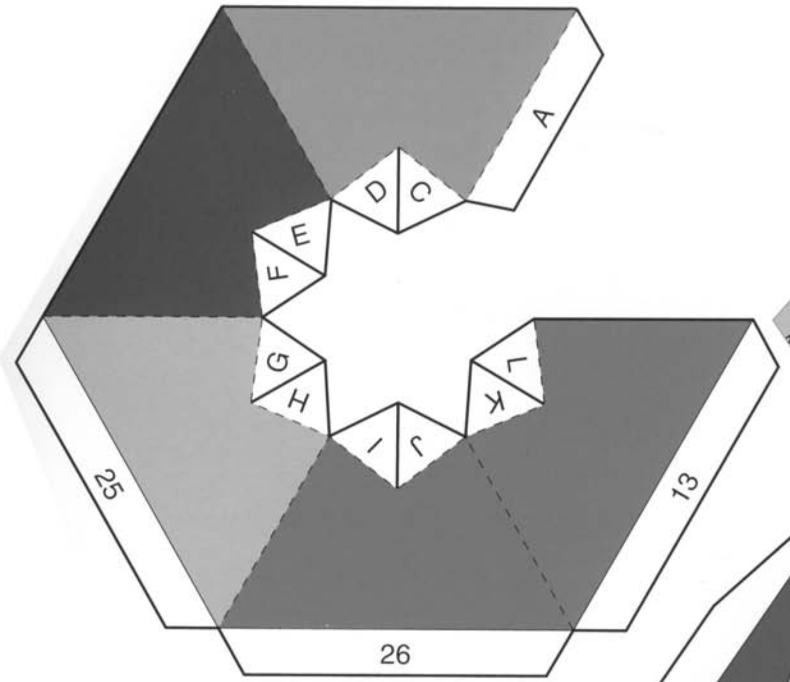



Verso da figura

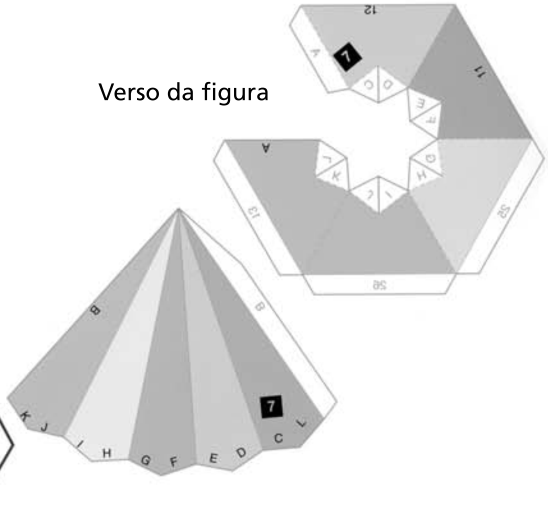


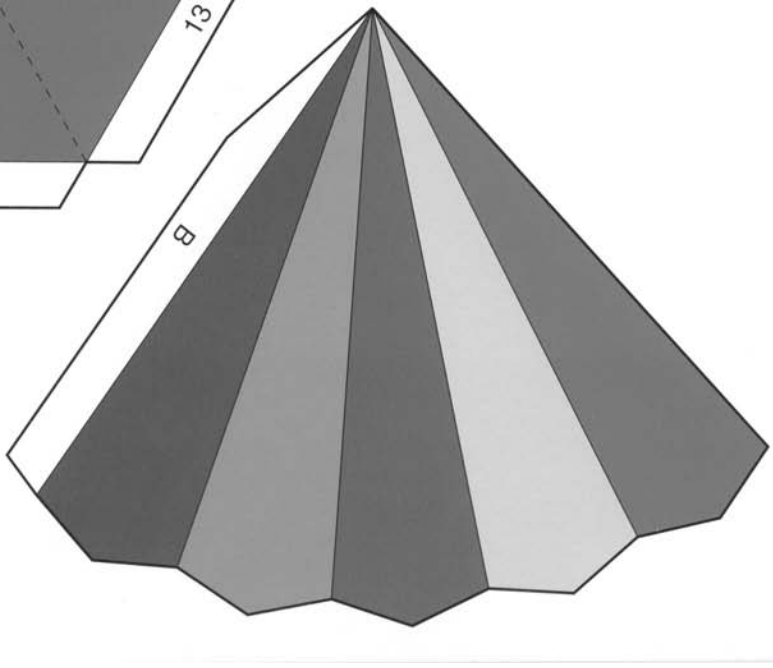


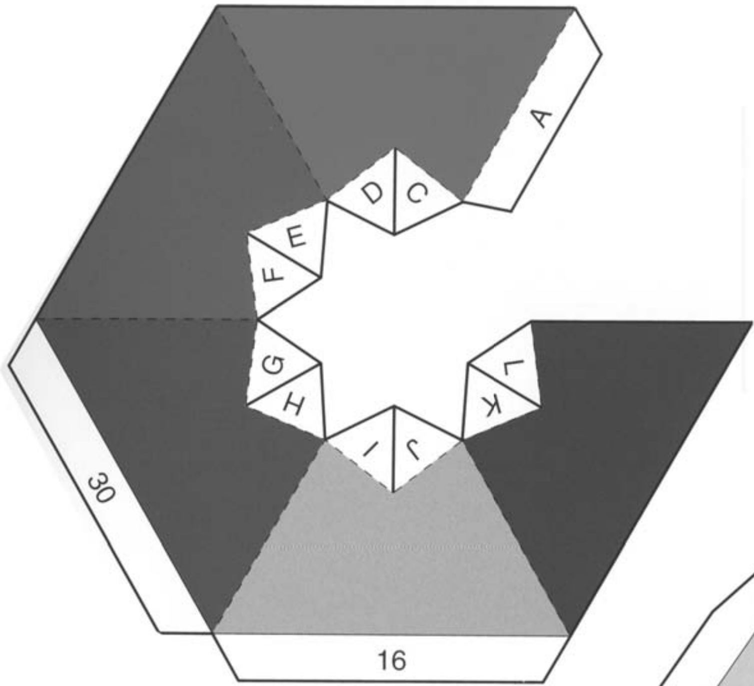





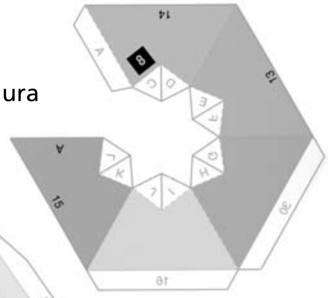

Verso da figura

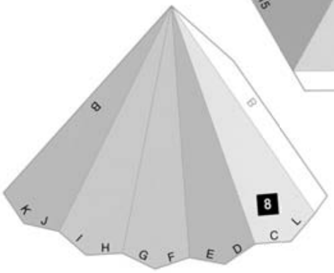


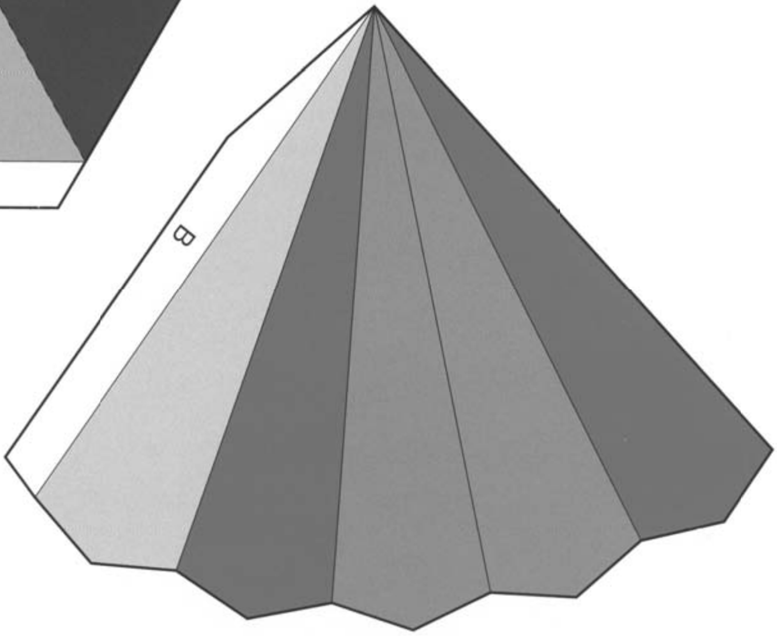


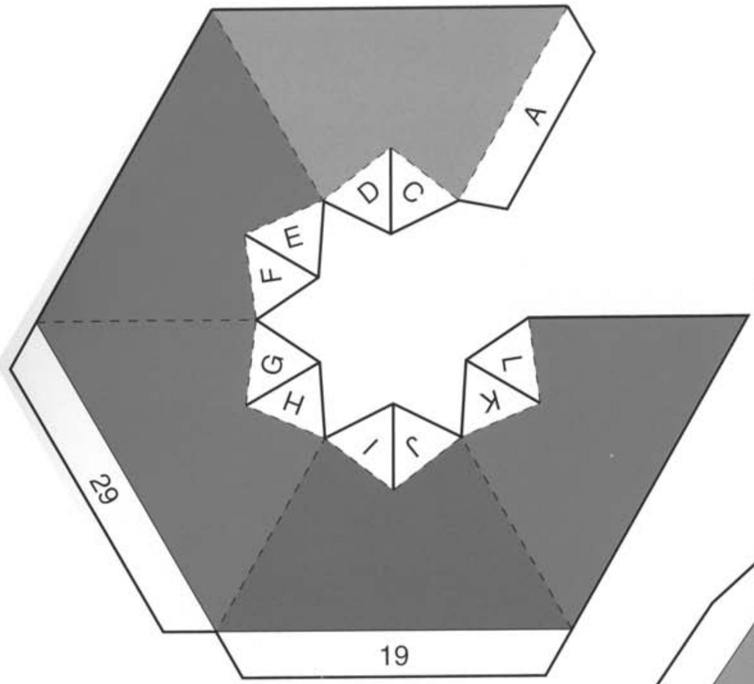



Verso da figura

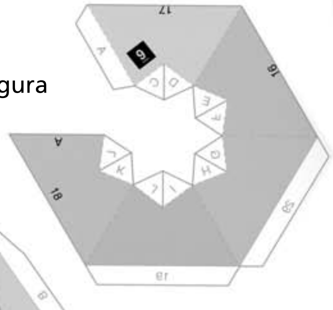


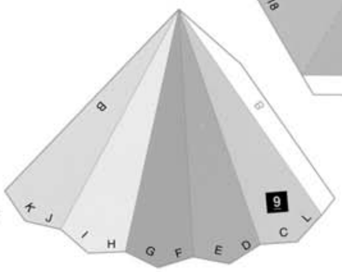


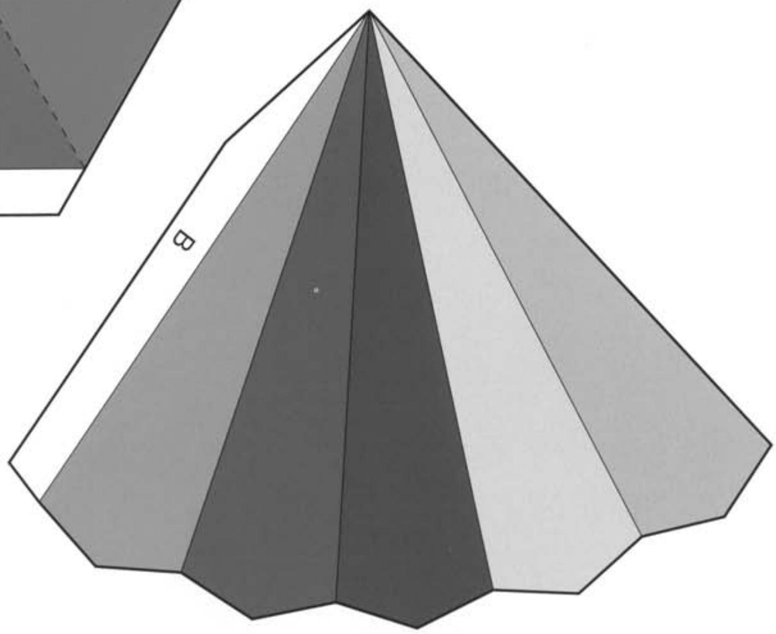


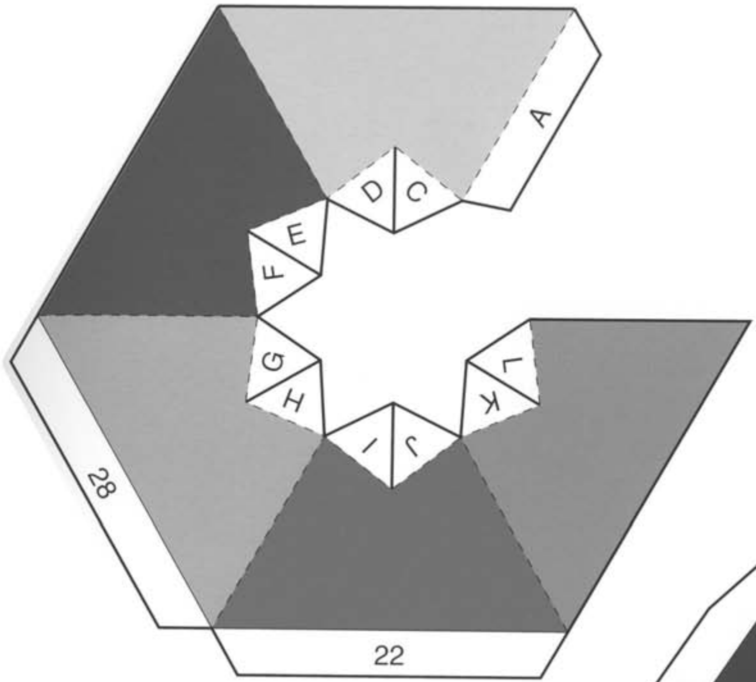



Verso da figura

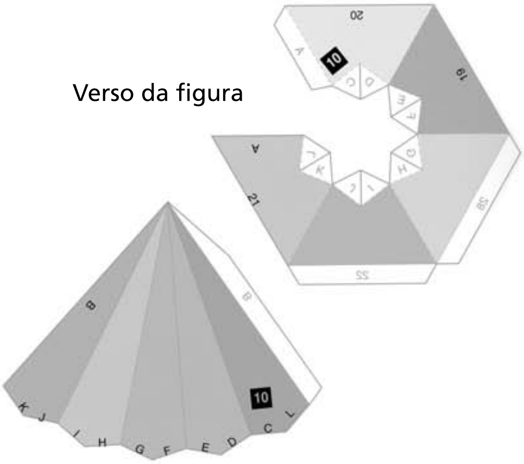


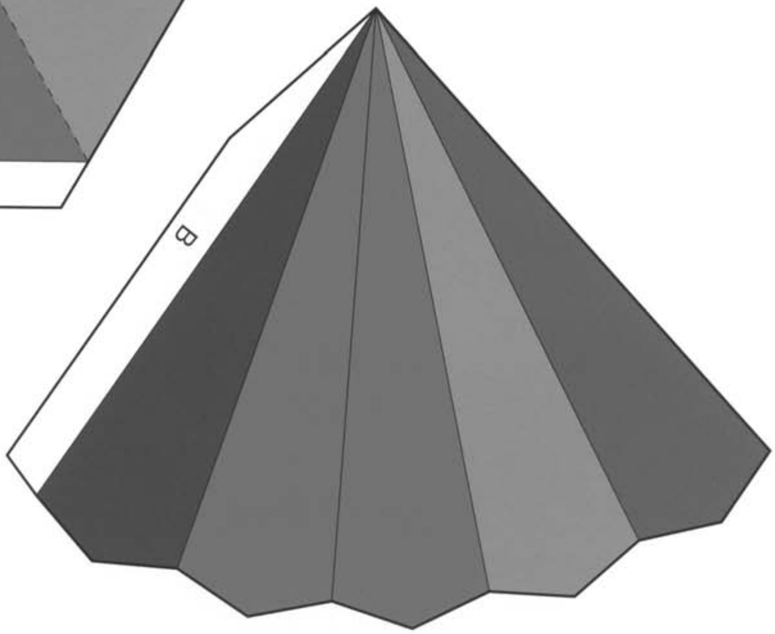


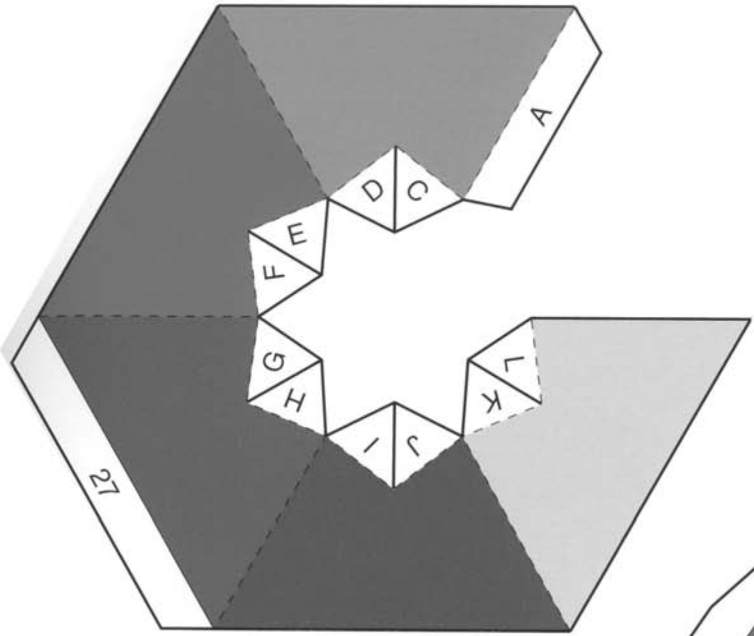




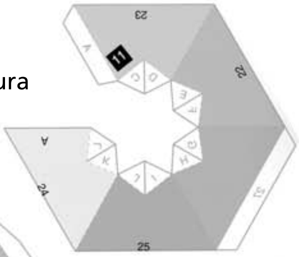

Verso da figura



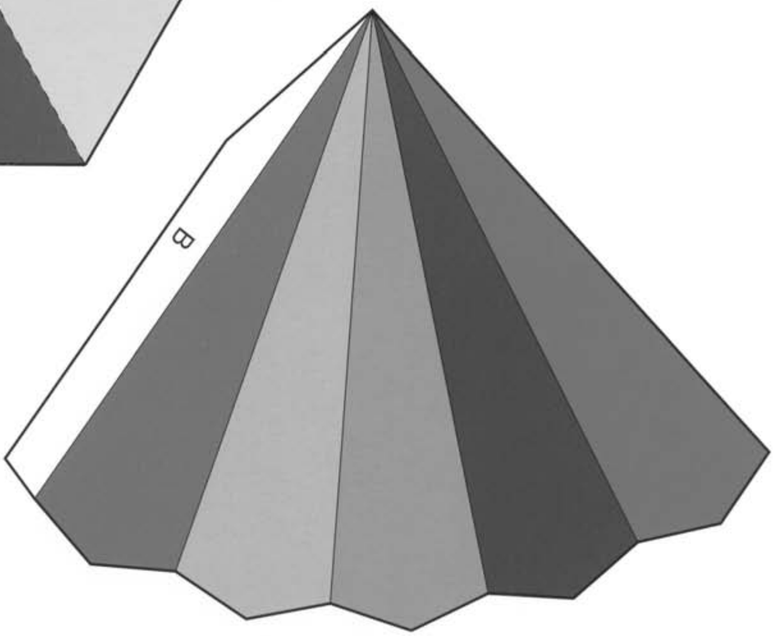


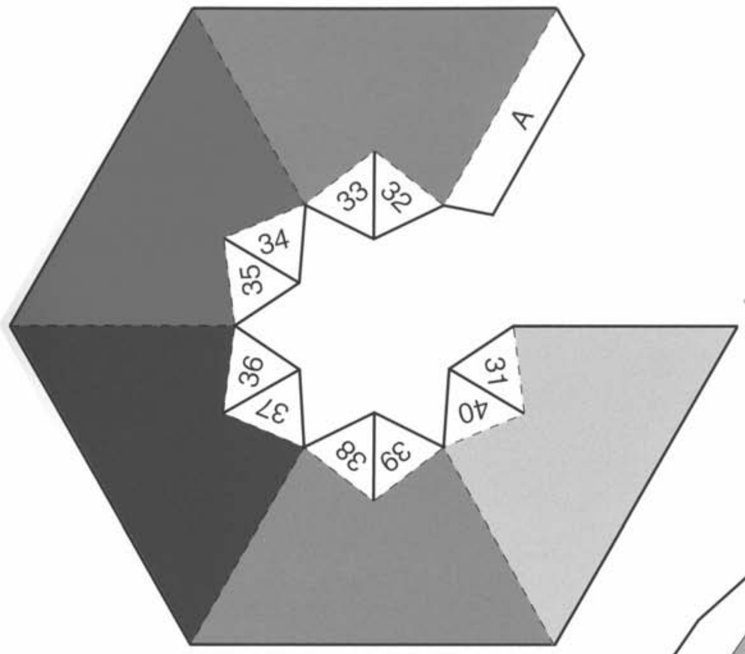



Verso da figura

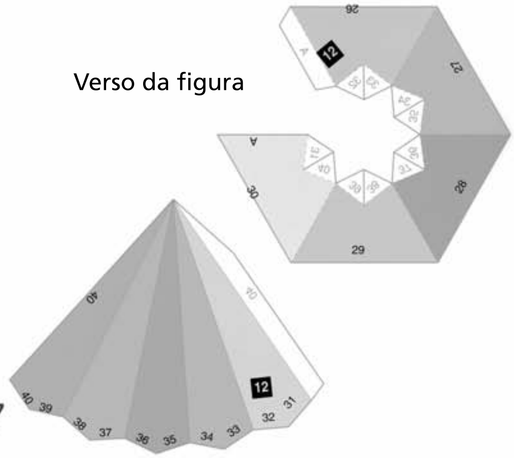


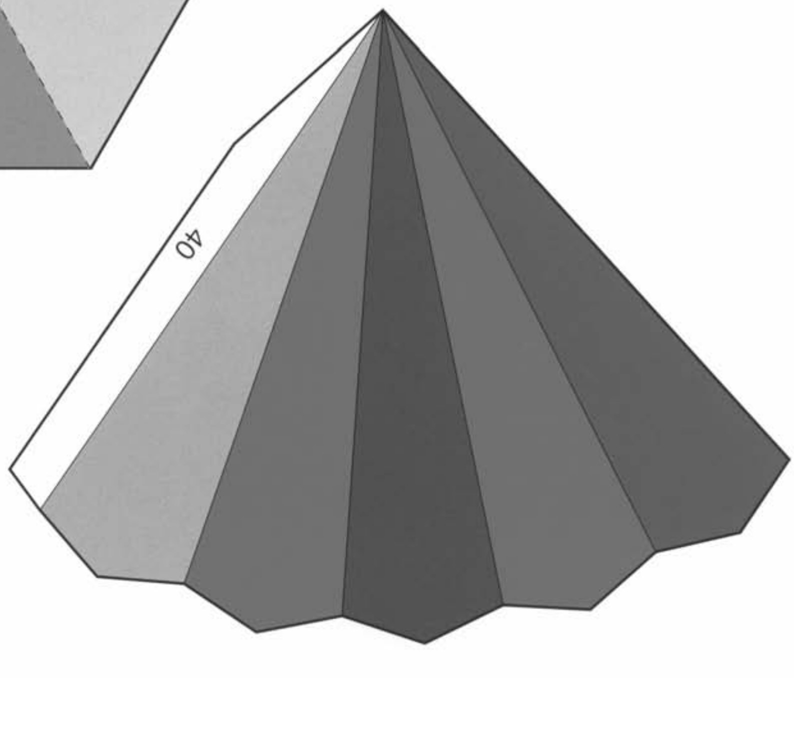


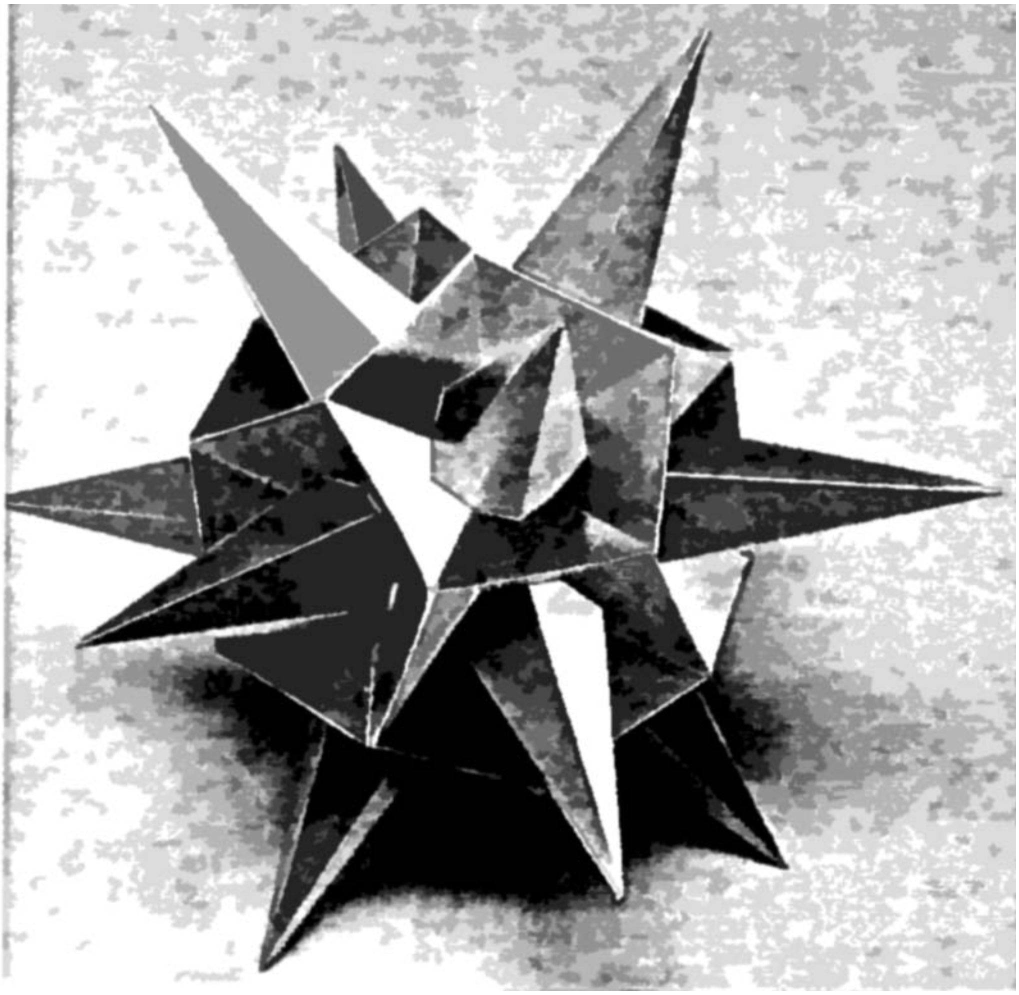





Verso da figura





As seis estrelações do icosaedro.

**Fonte:** Gentilmente cedido por Gerald Jenkins, Magdalen Bear e Tarquin Publications.

ISBN 85-7648-074-3
9788576480747

UENF
Universidade Estadual
do Norte Fluminense

Universidade Federal Fluminense

UNIRIO

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

GOVERNO DO
Rio de Janeiro
SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Ministério
da Educação

BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL