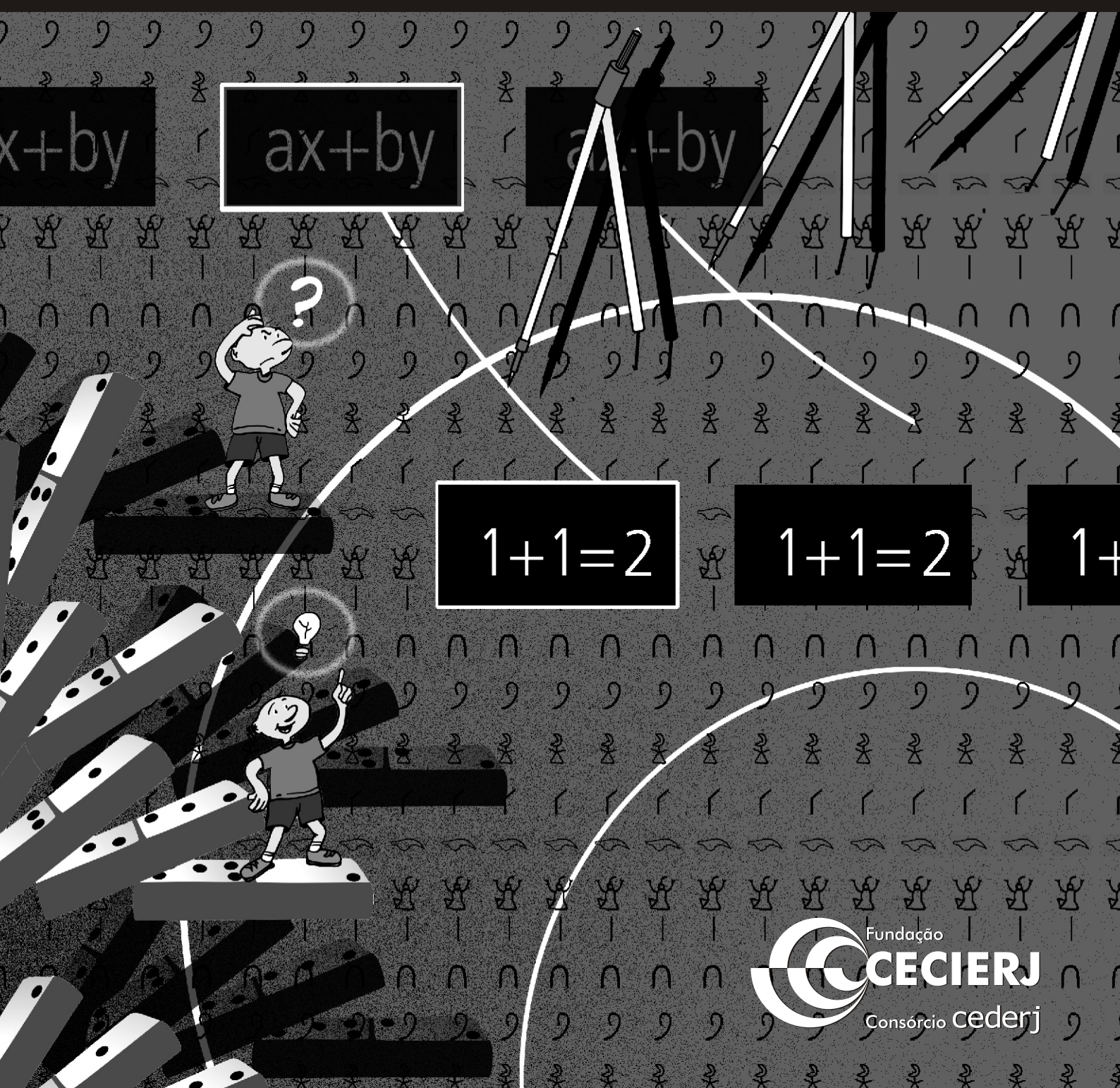


Ana Lúcia Vaz da Silva
 Andréa Zander Vaiano
 Andreia Carvalho Maciel Barbosa
 Marcelo Almeida Bairral
 Rosana de Oliveira

Instrumentação do Ensino da Aritmética e da Álgebra





Fundação

CECIERJ

Consórcio **cederj**

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Instrumentação do Ensino da Aritmética e da Álgebra

Volume 1 – Módulo 1

Ana Lúcia Vaz da Silva
Andréa Zander Vaiano
Andreia Carvalho Maciel Barbosa
Marcelo Almeida Bairral
Rosana de Oliveira



**GOVERNO DO
Rio de Janeiro**

**SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA**

**Ministério
da Educação**



Apoio:



FAPERJ

Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001

Tel.: (21) 2334-1569 Fax: (21) 2568-0725

Presidente

Masako Oya Masuda

Vice-presidente

Mirian Crapez

Coordenação do Curso de Matemática

UFF - Regina Moreth

UNIRIO - Luiz Pedro San Gil Jutuca

Material Didático

ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO

Ana Lúcia Vaz da Silva

Andréa Zander Vaiano

Andreia Carvalho Maciel Barbosa

Marcelo Almeida Bairral

Rosana de Oliveira

COORDENAÇÃO DE AVALIAÇÃO DO MATERIAL DIDÁTICO

Cristine Costa Barreto

AVALIAÇÃO DO MATERIAL DIDÁTICO

Anna Carolina da Matta Machado

Anna Maria Osborne

José Meyohas

COORDENAÇÃO DE LINGUAGEM

Maria Angélica Alves

Departamento de Produção

EDITORA

Tereza Queiroz

COORDENAÇÃO EDITORIAL

Jane Castellani

COPIDESQUE

Nilce Rangel Del Rio

REVISÃO TIPOGRÁFICA

Patrícia Paula

Luciana Nogueira Duarte

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO

Jorge Moura

PROGRAMAÇÃO VISUAL

André Freitas de Oliveira

Katy Araújo

Yozo Kono

ILUSTRAÇÃO

Fabiana Rocha

CAPA

Eduardo Bordoni

PRODUÇÃO GRÁFICA

Oséias Ferraz

Patricia Seabra

Copyright © 2005, Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da Fundação.

S586i

Silva, Ana Lúcia Vaz da.

Instrumentação do ensino da aritmética e da álgebra.

v. 1 / Ana Lúcia Vaz da Silva. – Rio de Janeiro: Fundação
CECIERJ, 2010.

276p.; 19 x 26,5 cm.

ISBN: 85-7648-235-5

1. Aritmética. 2. Álgebra. 3. Instrumentação. I. Vaiano,
Andréa Zander. II. Barbosa, Andréia Carvalho Maciel. III.
Bairral, Marcelo Almeida. IV. Oliveira, Rosana de. V. Título.

CDD: 510.028

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador
Sérgio Cabral Filho

Secretário de Estado de Ciência, Tecnologia e Inovação
Alexandre Cardoso

Universidades Consorciadas

**UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO
NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO**
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

**UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO
RIO DE JANEIRO**
Reitor: Ricardo Vieir Alves

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Reitor: Roberto de Souza Salles

**UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO
RIO DE JANEIRO**
Reitor: Aloísio Teixeira

**UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL
DO RIO DE JANEIRO**
Reitor: Ricardo Motta Miranda

**UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO
DO RIO DE JANEIRO**
Reitora: Malvina Tania Tuttman

Instrumentação do Ensino da Aritmética e da Álgebra

Volume 1 – Módulo 1

SUMÁRIO

Aula 1 - Matemática na escola x Matemática na rua	7
Aula 2 - Sistemas de numeração e bases	29
Aula 3 - Fique ligado na base 2!	59
Aula 4 - Mas... O que são números racionais?	77
Aula 5 - Os números negativos também são racionais	101
Aula 6 - Você sabe o que é um número irracional?	141
Aula 7 - Pensamento algébrico e senso numérico	167
Aula 8 - Um pouco de magia! A dos quadrados	185
Aula 9 - Números, posições e coisas mais... estudando regularidades	203
Aula 10 - Mais regularidades... os números notáveis	229
Referências	255
Módulo Prático	263

Matemática na escola x Matemática na rua

AULA 1

Meta da aula

Apresentar características sobre a Matemática utilizada na rua e contrapor com a ensinada nas escolas.

objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Enumerar características da Matemática da rua e da escola.
- Dar exemplos sobre a importância do uso da simbologia matemática.
- Diferenciar os aspectos que envolvem o uso da calculadora na sala de aula e na rua.

Pré-requisitos

Nesta aula você usará conteúdos do Ensino Fundamental, tais como operações matemáticas básicas com números naturais e racionais, expressões, equações do 1º grau, e conteúdos trabalhados em Geometria Básica, como o cálculo da área do círculo. Tenha uma calculadora simples à mão.

INTRODUÇÃO

Existem pesquisas na área de Educação Matemática que sinalizam para fato de a Matemática ser considerada um “bicho-papão” pela maioria dos alunos. Podemos dizer que a Matemática ensinada nos Ensinos Fundamental e Médio se divide em três grandes áreas: Geometria, Álgebra e Aritmética. Nosso foco, nesta disciplina, está voltado, para questões pertinentes à formação do futuro professor nas áreas de Aritmética e Álgebra.

Como sabemos, da matemática escolar do Ensino Básico, a Aritmética envolve o estudo dos números e das operações matemáticas, enquanto a Álgebra se encarrega de resolver equações, inequações e estudar funções.

Nos programas de ensino de grande parte das escolas, a organização começa priorizando o estudo de números e operações; só a partir do 3º ciclo, 5ª e 6ª séries, se introduz o estudo de equações e generalizações.

Uma outra questão pertinente ao ensino de Aritmética e de Álgebra são as inter-relações existentes entre elas, como defendem Lins e Gimenez (1997), aspectos que estudaremos nas próximas aulas.

Ainda hoje, o ensino da Álgebra restringe-se quase que exclusivamente a transmitir métodos; ou seja, há uma ênfase excessiva nos procedimentos algébricos. Os alunos resolvem os mais variados problemas, expressões e equações com o objetivo de encontrar o valor da incógnita, geralmente x , ou aplicar os procedimentos aprendidos nos problemas apresentados. É fácil perceber que a maioria dos alunos não entende o que faz e, em pouco tempo, esquece tudo o que “aprendeu”.

Percebendo tal situação, professores, muitas vezes, querem mudar as metodologias e não sabem como fazê-lo; vão a um outro extremo, trabalhando só o que entende por vivência do aluno, não conseguindo fazer com que ele avance no conhecimento matemático.

Enquanto isso, os anos vão passando e a história se repetindo, ou melhor, as práticas vão se reproduzindo... Mas quem sabe você, futuro professor de Matemática, poderá se aventurar a modificar essa história? Não existe “receita de bolo” ou “fórmula milagrosa” para o ensino, mas existem muitos caminhos para o professor que alia o conhecimento matemático a metodologias.

A MATEMÁTICA NAS RUAS

Vamos dar uma de Peter Pan? Então, imagine-se voando à luz do dia. Lá embaixo há muita gente circulando pelas ruas: há gente preocupada com o reajuste no aluguel do imóvel, calculando os rendimentos futuros de suas aplicações, contando quantos dias faltam para o casamento, conferindo o troco que receberam dos comerciantes, fazendo medições para a compra de materiais de construção... É!... Na vida de todos nós, a Matemática está bastante presente e nem nos damos conta disso...

E olhe o feirante: ele vende o quilo da banana a R\$ 1,50. Há uma pessoa que escolhe uma penca de bananas e dá ao feirante para pesá-la. Ele a põe na balança de dois pratos e, por meio de pesos, faz a pesagem. “Deu 400 gramas” – responde ele; e continua: “São R\$ 0,60.” Puxa! Como ele responde tudo isso com tanta facilidade, se muitas vezes não tem escolaridade? Por que tantas pessoas que fazem conta quase o tempo todo sentem tanta dificuldade na matemática ensinada pela escola?

Pense na seguinte situação: um menino **na rua** vende laranjas. Ele compra um saco com 130 laranjas por R\$ 70,00 (setenta reais) para serem revendidas. Separa em lotes de 10 laranjas e vende cada lote por R\$ 0,50. Com o dinheiro da venda de todas as laranjas ele poderá comprar outro saco de laranja? Sobrará algum dinheiro para ele? Esse erro **na rua** é irreparável; por isso, é pouco provável que essa situação aconteça.

Trazer os problemas da matemática **da rua** para a escola, a fim de facilitar a aprendizagem, nem sempre atende aos objetivos do professor. Se a situação das laranjas for proposta como um problema para ser resolvido pelo mesmo menino **na escola**, pode ser que ele erre, e não haverá nenhuma consequência “grave” nisso; ou seja, no problema da escola ele não perde dinheiro; este problema aproxima a realidade desse aluno, embora não a reproduza.

O que queremos dizer, segundo Gimenes, é que estamos falando de duas matemáticas distintas. A matemática da escola apresenta situações cotidianas para exemplificar seus conteúdos. A utilidade disso é a fácil apreensão do conteúdo, a possibilidade de estabelecer analogias que podem ser exploradas pelo professor. A Matemática **da escola** é um mundo de conceitos e resultados que tem por finalidade a aprendizagem



da Matemática como Ciência. A Matemática **da escola** privilegia atitudes mentais bastante diferentes das usadas no dia-a-dia.

É importante levar em conta o “conhecimento prévio” dos alunos, como afirmam os PCN de Matemática (1997), mas temos de ter em mente que trazer o cotidiano não significa reproduzi-lo **na escola** exatamente como ele ocorre **na rua**. Isso seria impossível. Também é preciso ter em mente que na escola queremos, a partir desses contextos, construir um conhecimento que envolve capacidade de generalização e abstração características do pensamento matemático.

ATIVIDADES



1. Através de uma história, a *Revista do Professor de Matemática* mostra uma situação que exemplifica algumas diferenças entre a matemática **da rua** e a **da escola**. Trata-se de um advogado que precisa de água e sabe que seu vizinho, um caipira, tem de sobra.

Um dia, esse advogado que comprara um sítio, constatou que nele não havia nascente de água. Descobriu que seu vizinho, um caipira, tinha em sua propriedade uma nascente de água boa e farta. Fez-lhe, então, uma proposta:

– *Eu instalo um cano de uma polegada de diâmetro na sua nascente, conduzo água para o meu sítio e lhe pago x reais por mês.*

A proposta foi aceita. O tempo passou, o advogado precisou de mais água e fez uma nova proposta ao caipira. Propôs trocar o cano de *uma polegada por um de duas polegadas de diâmetro e paga-lhe 2x reais por mês* a ele. O caipira, após pensar bastante, não aceitou a proposta.



Após analisar a paródia do advogado e do caipira:

1.a. Escreva o problema apresentado em linguagem matemática.

1.b. Se o advogado pagou x reais pelo cano de 1 polegada, quanto deveria pagar pelo cano de 2 polegadas? (Considerando as áreas do cano). Justifique sua resposta usando argumentos matemáticos.

1.c. Analise a solução dada pelo caipira e o modelo matemático. Comente algumas diferenças.

2. Resolva mentalmente cada um dos problemas a seguir. Depois, descreva, por escrito, a estratégia utilizada.

2.a. Uma urna contém 3 bolas vermelhas, 2 amarelas e o restante brancas. Se o total de bolas na urna é 10, quantas são as bolas brancas?

2.b. Uma costureira tem 3 caixas com a mesma quantidade de botões. Se o total de botões nessas três caixas é 33, qual a quantidade de botões por caixa?

2.c. Abre-se uma garrafa de refrigerante de 2L. Toma-se a metade do conteúdo. No dia seguinte, toma-se a metade do que sobrou. Quantos mililitros ficaram na garrafa?

COMENTÁRIO

Você pode ter pensado diversas maneiras para solucionar esses problemas. Para cada um deles você encontrará duas resoluções diferentes nas respostas ao fim da aula, porém não são as únicas. Você pode resolver usando outras estratégias de pensamento.

REFLEXÕES SOBRE A MATEMÁTICA UTILIZADA NA RUA E A ENSINADA NA ESCOLA

Um professor de Ensino Médio de uma escola noturna pediu aos alunos para descrever uma situação que houvesse ocorrido com eles, em que a matemática estivesse presente. Um aluno chamado João, que trabalha na construção civil, como auxiliar de pedreiro, descreveu a seguinte situação:

“Foi mais ou menos assim que aconteceu: eu cheguei à casa de ferragens e pedi 3 metros de cano de $2\frac{1}{2}$ polegadas. Fui ao caixa pagar; reparei que, apesar da temperatura de -2°C , a moça que recebeu meu dinheiro usava somente uma blusa de manga $\frac{3}{4}$. Peguei o troco e fui para casa, que ficava a 1,5 quilômetro de lá.”



Após ouvir todos os relatos dos alunos, o professor destacou que nas descrições não havia situações diárias visíveis envolvendo números irracionais ou complexos.



Vocês repararam que, na descrição de João e dos outros colegas, não houve compra de $\sqrt{3}$ metros de tecido, nem de um cano de $4 - \pi$ polegadas. Você já se questionou por que se estudam números irracionais e complexos na escola?

Nas ruas, apesar de não vermos presentes esses números, eles são de grande importância, para a sociedade. Mas nem sempre o conceito matemático surge para ser aplicado. Um exemplo disso é o estudo de números complexos, atualmente muito importantes por sua aplicação geométrica, fato que historicamente surgiu depois de sua origem.

Entende-se por **ENTE MATEMÁTICO** tudo aquilo que supomos existir na Matemática.

Embora seja interessante buscar aplicações dos **ENTES MATEMÁTICOS**, nem sempre isso é possível, pois uma das características dessa ciência é seu caráter abstrato, que, muitas vezes, só possui significado no universo das idéias.

É preciso que você, futuro professor, compreenda esse fato. Muitos conceitos matemáticos podem e devem ser aplicados, mas outros, embora existindo aplicação para eles, envolvem um conhecimento muito além do apreendido até o Ensino Médio. Em qualquer situação, é preciso desenvolver na escola o gosto pela matemática, e isso pode se dar através da construção de significado aos conteúdos estudados e abordagens históricas que motivem o aprendizado.

CÁLCULO MENTAL NA ESCOLA E NA RUA

Grande parte dos professores preocupa-se exclusivamente com métodos algorítmicos, quando deveriam dar ênfase à compreensão e abrir espaço para as idéias prévias que os alunos trazem sobre determinado conteúdo matemático, além de mostrar a eles que essas idéias são, por vezes, equivocadas ou limitadas para a explicação da realidade.

Por exemplo, quando o assunto for subtração de números decimais, o professor pode e deve explorar procedimentos usados no dia-a-dia das pessoas: um aluno pode argumentar que calcula o troco sem que precise utilizar os métodos de subtração aprendidos na escola; embora a operação envolvida seja subtração, a ação envolve um raciocínio aditivo.

Para você entender melhor, digamos que uma pessoa faça uma compra de R\$ 8,56 e pague com uma nota de R\$ 20,00. O caixa certamente sabe dar o troco exato para a pessoa, juntando primeiro os centavos até chegar aos R\$ 9,00, juntando uma nota de R\$ 1,00 até chegar a R\$ 10,00 e, finalmente, juntando uma nota de R\$ 10,00 até chegar a R\$ 20,00. É provável, porém, que ele não saiba responder de quanto foi o troco.

Os cálculos mentais feitos pelo aluno ou qualquer outro processo utilizado por ele devem ser valorizados pelos professores, através de questionamentos sobre tais estratégias. Os professores devem também mostrar aos alunos que a Matemática, como ferramenta, possui procedimentos que buscam a generalização, ou seja, resolve diferentes problemas com um único modelo.



ATIVIDADES

3. Faça, mentalmente, os cálculos a seguir e registre as suas estratégias de cálculo:

- a. $40 \times 53 =$
- b. $15 \times 9 =$
- c. $315 \div 3 =$
- d. $396 \div 4 =$



Os cálculos mentais devem ser incentivados pelos professores, explorando também a noção de cálculo aproximado.

COMENTÁRIO

Existem várias maneiras de fazer contas de cabeça. Nas respostas, ao final da aula, você encontrará uma. Procure outros caminhos.

4. Sem usar lápis, papel ou calculadora, encontre o *resultado aproximado* das expressões numéricas a seguir:

- a. $127,38 + 213,49 + 12,85 =$
- b. $3,1 - 0,11 - 1,78 - 0,05 =$
- c. $25,1 \times 40,05 =$
- d. $4,59 \div 9 =$

COMENTÁRIO

Esta atividade desenvolve o cálculo por estimativas.



VOCÊ SABE POR QUE AS MÁQUINAS DE CALCULAR TÊM A TECLA DE PONTO EM VEZ DA TECLA DE VÍRGULA?

No Brasil há uma Resolução que diz que nos números decimais põe-se uma vírgula para separar a parte inteira da parte decimal e põem-se pontos para separar a parte decimal, de três em três algarismos, da esquerda para a direita, e a parte inteira, de três em três algarismos, da direita para a esquerda. Já nos Estados Unidos e Inglaterra, o ponto e a vírgula têm funções opostas ao uso em nosso país.

Por exemplo, veja a representação do número quatro mil quinhentos e vinte e dois inteiros e mil cento e onze décimos de milésimos nesses países.

- 4.522,111.1 (Brasil)
- 4,522.111,1 ou 4522.1111 (EUA e Inglaterra)

USAR OU NÃO A CALCULADORA NA RUA E NA ESCOLA?

Consideramos esta uma discussão bastante pertinente. As calculadoras estão cada vez mais acessíveis e é possível encontrar as mais simples a preços reduzidos.

Na escola, muitos professores do Ensino Fundamental não permitem que os alunos utilizem a máquina de calcular, pois acreditam que o aluno deve memorizar as operações básicas com números de zero a dez; ou seja, que saibam, com prontidão, a famosa tabuada e utilizar os algoritmos que envolvem as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão.

Por outro lado, muitos defendem que, com o uso desse instrumento, os alunos aprendem a manipular os sinais matemáticos e descobrem inúmeras propriedades numéricas, principalmente no que diz respeito aos números decimais. Defendem também que o aluno deve saber como usá-la, já que vai fazer parte de sua vida cotidiana.

Na rua, podemos usar as calculadoras na hora que quisermos, que decidirmos, desde que as tenhamos disponíveis. Na sala de aula, podemos decidir em que atividades elas vão ser utilizadas. Ao trabalhar com a máquina de calcular em suas aulas, o professor dá condições ao aluno de compreender as regras das expressões numéricas. Pode mostrar que os resultados de determinadas expressões revelam-se diferentes quando usadas a calculadora comum e a calculadora científica.

Vamos supor que o professor peça ao aluno para calcular $2+3 \times 5$ usando as máquinas de calcular dos dois tipos. Digitando na ordem em que aparecem os números e sem usar a tecla de memória na calculadora comum, o resultado será 25, enquanto na científica, será 17. Ao mesmo tempo que a calculadora comum resolve as operações matemáticas na ordem em que aparecem, sem levar em conta a importância de uma operação sobre a outra, a calculadora científica respeita as regras das expressões numéricas.

Quando se efetua a divisão de 1 por 3, multiplicando em seguida o resultado por 3, aparece 0,9999999 no visor da calculadora comum, enquanto o resultado na calculadora científica é 1. O resultado na calculadora comum não está errado, pois aparecem no visor geralmente oito dígitos, que é uma quantidade limitada. Assim, podemos entender que o resultado obtido é $0,9999999\dots$ e $0,999\dots = 1$. Por quê?

Podemos mostrar esse fato, pensando no número $0,999\dots$ como a soma infinita de uma progressão geométrica infinita:

$$0,999\dots = 0,9 + 0,09 + 0,009 + \dots$$

Assim $S = 0,9 + 0,09 + 0,009 + \dots$ é uma soma infinita de termos que estão em PG de razão 0,1.

$$\text{E assim temos: } S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{0,9}{1 - 0,1} = 1.$$





As máquinas de calcular podem ser usadas para acelerar os cálculos quando o foco é que ele investigue uma situação ou encontre regularidades. Dessa maneira, tiramos o foco do problema da conta feita e exploramos a capacidade de raciocinar.

ATIVIDADES

5. Todo número racional tem uma representação numérica decimal, podendo ser um decimal exato ou decimal infinito periódico (as chamadas dízimas periódicas).

Dadas as frações a seguir, verifique quais são decimais exatos e quais são dízimas periódicas. Utilize a máquina de calcular, se achar necessário. Se for a calculadora básica, fique atento, pois a máquina possui um número limitado de casas e você deve avaliar com cuidado caso ela utilize todas as casas decimais.

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}$$

6. Uma professora quer comprar lápis para seus 45 alunos. Quando chegou à papelaria, observou que cada lápis custava R\$ 0,20, porém o preço da caixa de 50 lápis era R\$ 8,50.

- A professora ficou na dúvida sobre o que levar: 45 lápis avulsos ou a caixa de 50 lápis. O que você sugeriria a ela? Por quê?
- Qual seria o valor unitário do lápis da caixa?

SINAIS, CÓDIGOS E SÍMBOLOS

Na sociedade moderna, estamos cercados de símbolos, sinais e códigos.

Num ônibus, na parte da frente, junto ao motorista, existem placas indicando que é proibido fumar e a quantidade de passageiros que o ônibus comporta. No primeiro banco, há um ícone indicando que o lugar é reservado para deficientes físicos. Enquanto o ônibus faz seu percurso, passa por diversas placas e sinais de trânsito. Os passageiros acenam para que os amigos sentem-se junto deles e, ao saltarem do ônibus, usam gestos para se despedir. Não é raro entrar surdos-mudos, que se comunicam através de uma linguagem própria.

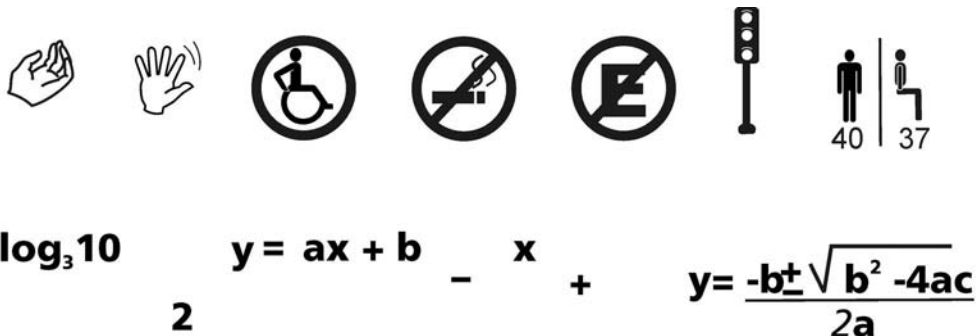
Os sujeitos são indivíduos e indivíduos vivem socialmente e partilham uma linguagem. Esta linguagem modifica-se na interação com o outro, isto é, ela se reconstrói a cada momento (OLIVEIRA, 1997, p. 18).

A Matemática apresenta uma forma própria de se comunicar, utiliza-se de sinais e símbolos próprios que chamaremos aqui “língua” matemática. No ensino da Matemática, professor e aluno se comunicam através de uma linguagem matemática. Chamamos linguagem o conjunto dos símbolos e sinais acrescido das analogias, das metáforas e do uso da língua materna. Os símbolos matemáticos são universais e reconhecidos nos diferentes países do mundo.

Mas esses mesmos símbolos podem ser um obstáculo para a aprendizagem da Matemática, pois em muitos casos são vistos pelos alunos como desprovidos de significado.

Segundo os PCN do Ensino Médio:

É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas (BRASIL, MEC, 1998, pp. 40-41).



Os PCN de Ensino Médio caracterizam três aspectos da Matemática que o aluno deve perceber, ao longo de sua formação: a Matemática é uma *linguagem* com características e regras de funcionamento; é instrumento para outras ciências como Estatística, Economia, Arquitetura, Engenharia, vista como um sistema de técnicas e estratégias; é também uma *Ciência*, com suas características estruturais específicas.



ATIVIDADE

7. Expresse, usando a linguagem matemática:

- a. O número de pacientes atendidos por João em seu consultório.
- b. A idade de meu pai é o dobro da de minha idade.
- c. A soma de um número com 213 é igual a 5.020.
- d. A soma de dois números desconhecidos.
- e. O triplo da idade de João.
- f. O número de meninas numa turma de 40 alunos, dos quais 25 são meninos.

Nesta atividade, estamos trabalhando com expressões algébricas e equações. Vale lembrar que *expressão algébrica* é uma seqüência de operações matemáticas em que alguns números são representados por letras. Já *equação* é qualquer igualdade em que estão envolvidos letras e números. Pode acontecer de a equação ser impossível de se resolver ou de se satisfazer com um ou mais valores.

UM POUCO DE HISTÓRIA...

Falando em símbolos e sinais, a simbologia da Álgebra chegou ao auge no início do século XX. A partir daí, a Álgebra, que era privilégio de poucos, por causa da dificuldade, passou a ser entendida por pessoas comuns.

Os gregos foram os primeiros a explicar os métodos de resolver problemas algébricos, porém os apresentavam usando palavras e diagramas. Por causa disso, levavam muito tempo para solucionar um problema. E ainda havia um fator agravante: às vezes, era difícil entender o que estavam querendo dizer.

O primeiro matemático a abreviar a Álgebra, com letras desenvolvidas por ele mesmo, foi Diofante, entre os anos 100 e 400.

Em 825, al-Khwarizmi, um sábio de Bagdá, escreveu o primeiro texto claro sobre a Álgebra. O título era: *Al-jabr w'al-mugabalah*, cuja tradução era “A arte de reunir desconhecidos para igualar uma quantidade conhecida”.

A palavra-chave do título era *al-jabr*, que significa reunião. Essa palavra deu origem à palavra *Álgebra*.

Apesar de Diofante ter introduzido as letras, passaram-se mais de 1.000 anos até que seu uso fosse popularizado.



A palavra *algoritmo* é derivada do nome de al-Khwarizmi.



ATIVIDADE

8. Não conhecemos muito a vida de Diofante, porém sabemos a idade que tinha quando morreu, baseados num enigma de mais de 1.500 anos.

A infância de Diofante durou $\frac{1}{6}$ de sua vida.

Sua adolescência, $\frac{1}{12}$ de sua vida.

Passados mais $\frac{1}{7}$ de sua vida, Diofante casou-se.

Cinco anos depois de casar-se, nasceu seu filho.

O filho morreu 4 anos antes de seu pai e viveu $\frac{1}{12}$ do que viveu seu pai.

A partir dessas informações, você consegue descobrir quantos anos Diofante tinha quando morreu?

CONCLUSÃO

Os professores de Matemática, ainda hoje, possuem uma forte tendência a seguir uma metodologia em que os conceitos matemáticos não são explorados. Entretanto, é necessário conhecer outras propostas metodológicas que estejam próximas de uma nova dinâmica do mundo atual. É importante considerar as experiências de vida que os alunos trazem da rua para a escola e, principalmente, fazer da matemática da escola um conhecimento significativo para que o aluno aplique os conteúdos matemáticos no cotidiano e em outras ciências. Respeitar o conhecimento do aluno significa considerar legítimas tanto a matemática da rua como a da escola.

RESUMO

A Matemática está presente em nosso dia-a-dia. Isso é constatado em situações como medição de temperatura, pesagens, preços, dentre outras. No entanto, a matemática da escola não é a mesma que a aplicada na rua; é muito mais do que desenvolver de maneira científica as práticas empíricas. É um encadeamento de conceitos lógicos visando à construção de outros conceitos e teorias.

ATIVIDADE FINAL

Alguns números têm características bastante interessantes. Observe:

- O quadrado do número 12 é $12^2 = 144$.
- Escrevendo esse resultado de trás pra frente obtemos o número 441.
- Calculando a raiz quadrada de 441 encontramos $\sqrt{441} = 21$, que é o número 12 escrito de trás pra frente.

Vamos dizer que esses tipos de números têm *quadrados invertidos*.

Então, para que dois números naturais possuam *quadrados inversos* eles devem respeitar duas propriedades.

- Um dos números deve ser igual ao outro escrito de *trás pra frente*.
- O quadrado de um dos números deve ser igual ao quadrado do outro número escrito de *trás pra frente*.

a. Usando uma calculadora, responda:

Os números 1.002 e 2.001 possuem quadrados invertidos?

E os números 1.004 e 4.001?

b. Os números 33 e 99 têm quadrados inversos.

c. Com uma calculadora, pesquise entre números de 10 a 50 quais os quadrados que podem ser invertidos.

d. Sabendo que $47.812^2 = 2.285.987.344$, é possível que exista um número x de forma que x^2 e 47.812^2 sejam quadrados invertidos? Justifique.

e. O que você pensa sobre o uso da calculadora? Você é contra ou a favor? Em que situações você é contra? E a favor? Registre seus comentários e entregue a seu tutor.

COMENTÁRIO

Se tiver conhecimento do Excel, você pode montar uma planilha para acelerar ainda mais os cálculos. No item d, com uma calculadora comum, você não consegue encontrar o quadrado do número 47.812. O objetivo desse item é que você responda sem o uso da calculadora.

AUTO-AVALIAÇÃO

Se você teve alguma dificuldade nas atividades propostas, consulte livros do Ensino Fundamental e Médio para relembrar alguns conceitos e conteúdos. Lembre-se de que é importante que você esclareça suas dúvidas. Como futuro professor de Matemática, é fundamental saber discutir com profundidade os aspectos aqui levantados.



RESPOSTAS

Atividade 1

a. Área do cano de uma polegada de diâmetro: $\pi r^2 = \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi$

Área do cano de duas polegadas de diâmetro: $\pi r^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi$

Soma das áreas dos dois canos de uma polegada de diâmetro:

$$2 \cdot \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi.$$

b. O pagamento deve ser proporcional à área:

Um cano de uma polegada de diâmetro: $\frac{\pi}{4} \cdot x$ reais

Cano de duas polegadas de diâmetro: $\pi \cdot x$ reais,

ou seja, o advogado deveria pagar quatro vezes mais.

c. Observe que o caipira resolveu seu problema comparando com os dedos os canos, ou seja, analisando a forma e os raios dos círculos. Nesse caso, ele não precisou calcular as áreas, pois teve a percepção de que a área ocupada pelo novo cano era maior do que o dobro, o que foi suficiente para resolver seu problema. Provavelmente, comparando as áreas quando fez os círculos com a mão, ele não viu que esta era na verdade 4 vezes a área anterior, fato que é possível identificar quando sabemos calcular as áreas.

Atividade 2

a. 1ª resolução: Na urna só existem bolas de cor branca, vermelha e amarela. Como as bolas vermelhas e amarelas são 5, no total, para chegar a 10 bolas deve haver 5 bolas brancas.

2ª resolução: Considerando que são 10 bolas, dentre elas 3 vermelhas, 2 amarelas e o restante de cor branca, concluímos que o total de bolas brancas é $10 - 3 - 2 = 5$.

b. 1ª resolução: Para descobrir a quantidade de botões em cada caixa, podemos pensar em fazer $33 \div 3 = 11$.

2ª resolução: Chamemos de x o número de botões por caixa. Devemos encontrar o valor de x . Equacionando o problema, temos

$3x = 33$, o que resulta em $x = 11$.

c. 1ª resolução: No 1º dia tomou-se a metade de 2 litros, o que corresponde a 1 litro. Na garrafa ficou 1 litro. Como no dia seguinte voltou-se a tomar a metade do que sobrou, tomou-se 500 mL. Portanto, sobraram 500 mL na garrafa.

2ª resolução: Sobrou metade da metade de 2 litros, ou seja, $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \right) = \frac{1}{2} = 0,5$ litro.

Atividade 3

a. Para calcular mentalmente 40×53 podemos pensar em efetuar 40×50 e depois 40×3 , somando posteriormente os resultados. O que estamos fazendo é decompondo o 53 (em $50 + 3$) e utilizando a propriedade distributiva: $40 \times 53 = 40 \times (50 + 3) = 40 \times 50 + 40 \times 3 = 2.000 + 120 = 2.120$.

b. Neste caso, poderíamos ter pensado em calcular 15×10 e subtrair 15 do produto. De fato, $15 \times 9 = 15 \times (10 - 1) = 15 \times 10 - 15 \times 1 = 150 - 15 = 135$.

c. A divisão pode ser pensada da mesma forma que a multiplicação. Decompomos o 315 como $300 + 15$, calculamos $300 \div 3$ e $15 \div 3$, e somamos os resultados obtidos:

$$315 \div 3 = (300 + 15) \div 3 = 300 \div 3 + 15 \div 3 = 100 + 5 = 105.$$

d. Podemos pensar em calcular da seguinte forma:

$$396 \div 4 = (400 - 4) \div 4 = 400 \div 4 - 4 \div 4 = 100 - 1 = 99.$$

Atividade 4

Veja se sua conta estimada está próxima dos resultados exatos:

- a. 353,72;
- b. 1,16;
- c. 1005,255;
- d. 0,51.

Atividade 5

5. Decimais exatos: $\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{3}{4} = 0,75$; $\frac{4}{5} = 0,8$; $\frac{7}{8} = 8,75$; $\frac{9}{10} = 0,9$

Dízimas periódicas: $\frac{2}{3} = 0,666\dots$; $\frac{5}{6} = 0,8333\dots$; $\frac{6}{7} = 0,857142$; $\frac{8}{9} = 0,888\dots$

Atividade 6

a. A caixa de 50 lápis, por sair por um preço menor do que o que se pagaria comprando os 45 lápis avulsos; Você pode ter feito isso calculando o valor unitário pedido na letra b, ou por estimativa.

b. $8,50 \div 50 = 0,17$. R\$ 0,17.

Atividade 7

- a. x ;
- b. $y = 2x$;
- c. $x + 213 = 5.020$;
- d. $x + y$;
- e. $3x$;
- f. $x + 25 = 40$, podendo ser adotada outras letras nos lugares de x e y .

Atividade Final

- a. Sim, 1.002 é igual a 2.001 escrito de *trás pra frente* e seus quadrados também: $1.002^2 = 1.004.004$ e $2.001^2 = 4.004.001$. Não, 1.004 é o 4.001 escrito de trás pra frente, mas seus quadrados não: $1.004^2 = 1.008.016$ e $4.001^2 = 16.008.001$.
- b. Não, observe que apesar de os quadrados de 33 ($33^2 = 1.089$) e 99 ($99^2 = 9.801$) serem iguais se escritos de *trás para frente*, o número 33 não é o 99 escrito de *trás pra frente*.
- c. 10 (com o quadrado de 1); 20 (com o quadrado de 2); 30 (com o quadrado de 3); 12 (com o quadrado de 21) e 21 (com o quadrado de 12); 13 (com o quadrado de 31), 31 (com o quadrado de 13), 11 (com o quadrado do próprio 11) e 22 (com o quadrado do próprio 22).
- d. Todos os números naturais elevados ao quadrado terminam em 0, 1, 4, 5, 6, ou 9. O número 2.285.987.344 invertido é 4.437.895.822, que termina em 2. Logo, ele não pode ser um quadrado perfeito.
- e. Resposta do aluno.

Sistemas de numeração e bases

AULA 2

Meta da aula

Apresentar diferentes sistemas de numeração e ressaltar as características do sistema decimal.

objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Diferenciar o sistema de numeração decimal dos demais sistemas de numeração.
- Representar números em diferentes bases numéricas.
- Utilizar a estrutura multiplicativa nos sistemas de numeração decimal e não-decimal.

Pré-requisitos

Nesta aula, será necessário que você saiba as operações matemáticas – as quatro operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão) – além da potenciação.

INTRODUÇÃO

A “simplicidade” com que fazemos hoje cálculos e representamos os números às vezes esconde a riqueza e o esforço da humanidade na construção do nosso sistema de numeração. O sistema de numeração atual permitiu um grande desenvolvimento de cálculos matemáticos e, conseqüentemente, o avanço da Ciência.

Até chegarem a resultados precisos os pesquisadores matemáticos levantaram hipóteses, utilizaram tentativa e erro, fizeram inferências. Dentro desta perspectiva é que entendemos o ensino da Matemática como uma atividade constante de interrogações, de levantamento de conjecturas, em particular, no Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

Hoje vamos conhecer e compreender a complexidades das representações dos números feitas pelos povos da Antigüidade. Depois aprofundaremos o estudo sobre a representação e as operações com números escritos em bases decimais e não-decimais.

AS SIMBOLOGIAS USADAS PELOS DIVERSOS POVOS NA ANTIGÜIDADE

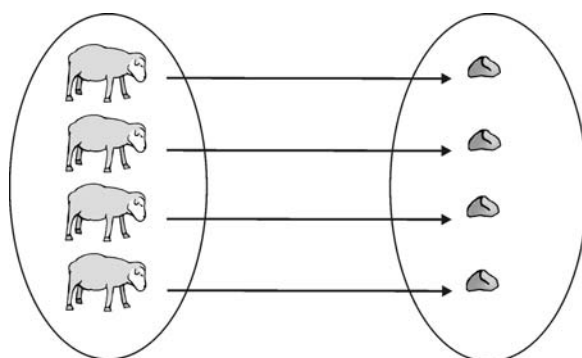
Na época primitiva, a espécie humana, apesar de não saber contar, tinha um relativo senso numérico: reconhecia maiores e menores quantidades; percebia diferença quando se acrescentavam ou se retiravam alguns objetos de uma coleção pequena.

Acredita-se que, com o crescimento da população, ficaria difícil alimentar todas as pessoas. Por isso, os homens primitivos deixaram a condição de caçadores para criar animais e domesticá-los, além de se dedicar à agricultura. Com isso, tornou-se necessário fazer contagens simples. Por exemplo, uma tribo tinha de saber quantos eram seus membros e seus inimigos; um pastor precisava registrar a quantidade de ovelhas que possuía.

Para que você entenda como era o processo de contagem, vamos nos fixar no modo como o pastor realizava a contagem de ovelhas. Ele devia saber se o seu rebanho havia diminuído ou aumentado com o nascimento de ovelhas. Então, para cada ovelha que desfilava na sua frente, abaixava um dedo. Quando já tinha dobrado o décimo dedo, colocava uma pedra no chão e reiniciava o processo. No dia seguinte, fazia a mesma coisa, comparando com o monte de pedras reunido no dia anterior.



Podemos dizer que já havia, naquele momento, uma idéia de função nesta ação de correspondência entre os dedos e as ovelhas e depois entre cada grupo de 10 ovelhas e uma pedra. Tanto que alguns livros didáticos atuais contam a história do pastor e das ovelhas, apresentando o seguinte esquema.



Com o aumento da população, do comércio, das relações entre diferentes povos, o homem teve necessidade de contar quantidades mais numerosas: tâmaras, estrelas, dias. Surgiram, então, os registros dos sistemas de numeração: nós em cordas, entalhes na madeira, ranhuras no barro, na pedra, em bambus, em ossos, em pergaminhos (peles de animais, em geral de carneiros e cordeiros) e em **PAPIROS**.

Cada povo adotou uma simbologia numérica diferente. Nos Quadros 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4, que aparecerão mais adiante, apresentamos representações usadas por alguns povos.

S. m. 1. Bot. Grande erva da família das ciperáceas (**CYPERUS PAPYRUS**), própria das margens alagadiças do rio Nilo, na África, cujas compridas folhas forneciam hastes das quais se obtinha o papiro, material sobre o qual se escrevia. [Sin., bras.: periperiaçu.]

Fonte: www.toligado.futuro.vap.br

REPRESENTAÇÃO EGÍPCIA

A representação numérica egípcia surgiu em 3400 a.C. Veja sua simbologia no Quadro 2.1.

Quadro 2.1: Simbologia egípcia

1		(bastão vertical)
10	∩	(ferradura)
10 ²	🌀	(rolo de pergaminho)
10 ³	🪷	(flor-de-lótus)
10 ⁴	👉	(dedo curvado)
10 ⁵	👤	(barbato ou frade de barba comprida)
10 ⁶	👤	(homem espantado)

Esta é independente da posição ocupada pelos símbolos, ou seja, é um sistema não-posicional. Assim, o mesmo número pode ser representado sob mais de uma forma; o número 101, por exemplo, tanto pode ser representado por $\text{🌀}|$ como por $\text{🌀} \text{🌀}$.

Com base no Quadro 2.1, observe o exemplo a seguir:

$$13.015 = \text{👉} \text{🌀} \text{🌀} \text{🌀} \text{🌀} = 1 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 1 \times 10 + 5 \times 1$$

REPRESENTAÇÃO GREGA

O sistema de numeração grego surgiu em 300 a.C. No Quadro 2.2 você observa os símbolos utilizados.

Quadro 2.2: Simbologia grega

1		
10 ¹	Δ	(deka = dez)
10 ²	Η	(hexaton = cem)
10 ³	Χ	(kilo = mil)
10 ⁴	Μ	(myriad = dez mil)

É interessante ressaltar que nesse sistema há um símbolo especial para o 5: $\overline{\text{V}}$. Este símbolo pode ser utilizado sozinho ou em combinação com outros símbolos. A finalidade é reduzir a escrita de números. Por exemplo:

O número 8: $\overline{\text{V}}$ III

O número 50 (5×10): $\overline{\text{L}}$

O número 500 (5×10^2): $\overline{\text{D}}$

O número 5.000 (5×10^3): $\overline{\text{V}}$ $\overline{\text{D}}$

Veja como fica o número 3.756 na escrita grega

3000 – XXX 700 – $\overline{\text{H}}$ HH 50 – $\overline{\text{V}}$ 6 – $\overline{\text{V}}$ I

Assim, o número 3.756 na escrita grega é expresso por: XXX $\overline{\text{H}}$ $\overline{\text{H}}$ $\overline{\text{V}}$ I

Como o sistema grego é não-posicional, a ordem em que escrevemos os símbolos pode ser alterada, assim, HHXXXHHI $\overline{\text{H}}$ $\overline{\text{V}}$ $\overline{\text{V}}$ também representa o número 3.756.

REPRESENTAÇÃO ROMANA

O sistema de numeração dos romanos surgiu em 500 a.C. Esse sistema é mais difundido e utilizado, e você pode recordar sua simbologia no Quadro 2.3.

Quadro 2.3: Simbologia romana

I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1000



Ainda hoje, os algarismos romanos são usados em artigos de leis, decretos de portaria, na escrita dos séculos, na indicação de capítulos de livros, nos mostradores do relógio etc.

A representação dos números nesse sistema de numeração caracteriza-se pelo fato de que quando os algarismos têm o mesmo valor ou valores menores eles são escritos à direita dos algarismos maiores.

Adicionando os valores desses algarismos encontramos o valor do número representado. Veja:

$$XV = 10 + 5 = 15$$

$$MMM = 1.000 + 1.000 + 1.000 = 3.000$$

$$CCCVIII = 100 + 100 + 100 + 100 + 5 + 1 + 1 + 1 + 1 = 409$$

Muito mais tarde, os romanos criaram uma regra para simplificar a escrita numérica. Os algarismos menores colocados à esquerda de algarismos maiores indicam que devemos subtrair os valores desses algarismos. Esta regra se aplica exclusivamente aos algarismos I, X, C e:

o I só pode vir antes do V e do X;

o X, antes do L e do C;

o C, antes do D e do M.

Desse modo,

IV passou a representar o número $5 - 1 = 4$;

IX passou a representar o número $10 - 1 = 9$;

XL passou a representar o número $50 - 10 = 40$;

XC passou a representar o número $100 - 10 = 90$;

CD passou a representar o número $500 - 100 = 400$;

CM passou a representar o número $1000 - 100 = 900$.

Sendo permitido escrever:

$$2.909 = MMCMIX$$

Esse sistema é posicional, ou seja, cada número tem representação única. O número 90, por exemplo, só pode ser escrito como XC, quando trocamos a ordem CX estamos representando o número 110.

REPRESENTAÇÃO HINDU

Surgiu em 300 a.C. Por volta do ano 500 d.C., os hindus aboliram os símbolos que usavam para algarismos maiores que 9 e padronizaram os números de 1 a 9. Até então, o zero não fazia parte dessa simbologia, uma vez que não podia se conceber o nada como um número. A grande invenção dos hindus foi criar um símbolo para o zero em torno de 800 d.C.

O criador desse número é desconhecido pela Ciência. Esse fato contribuiu de forma significativa para a escrita dos números no sistema decimal como hoje conhecemos, visto que esse símbolo representa a ausência de quantidades que ocupa uma determinada ordem.

Conforme o tempo foi passando, os algarismos sofreram várias modificações. Somente com o surgimento da imprensa em 1440, a grafia dos algarismos foi padronizada.

Quadro 2.4: Evolução da simbologia hindu

INDO 300 a.C.	—	=	≡	୪	୮	୯	୭	୫	୩	
INDO 500 d.C.	୭	୮	୯	୩	୪	୫	୬	୭	୮	୯
ÁRABE 900 d.C.	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٠
ÁRABE (ESPANHA) 1000 d.C.	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٠
ITALIANO 1400 d.C.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ATUAL	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Nosso sistema de numeração decimal, proveniente da representação hindu, utiliza 10 símbolos para denotar qualquer número que se desejar expressar, por maior que ele seja.

É um sistema posicional. Observe que 101 é diferente de 110.



ATIVIDADE

1.1. Represente cada um dos números a seguir com as simbologias egípcia, grega e romana:

1. 1. a. 589 _____

1. 1. b. 2.960 _____

1.2. Liste algumas diferenças nas representações adotadas por esses povos.

1.3. Qual o maior número que pode ser escrito utilizando a simbologia:

1. 3. a. egípcia? _____

1. 3. b. grega? _____

1. 3. c. hindu? _____



Você encontrará essa resposta comentada ao final da aula.

O último item da Atividade 1 deixa claro que nas simbologias egípcia e grega, a representação numérica era limitada, ou seja, com essas simbologias não é possível representar o número 3.000.000.000.000.000.000.000 (três sextilhões), por exemplo. Quanto aos romanos, eles inventaram regras de multiplicação para estender a representação numérica: quando colocavam um traço em cima de algarismos, indicavam que estes deveriam ser multiplicados por 1.000, porém a representação numérica continuava limitada. Por exemplo,

$$\overline{\text{L}} = 50 \times 1.000 = 50.000$$

$$\overline{\text{XCV}} = 90 \times 1.000 + 5 = 90.005$$

$$\overline{\text{XII}} = 12 \times 1.000 = 12.000$$

BASES NUMÉRICAS

Dentre os sistemas de numeração que existiram em diferentes povos, os agrupamentos de 10 objetos, ou seja, a base decimal é aquele que se difundiu e permanece em vigor até os dias atuais.

Para os egípcios cada objeto representava um bastão; cada 10 bastões, uma ferradura; cada 10 ferraduras, um rolo de pergaminho; e assim por diante. O mesmo processo era adotado pelos gregos e romanos, porém, esses povos utilizavam símbolos intermediários (tais como 5, 50 e 500) para fazer representações mais simplificadas.

Quando realizamos agrupamentos de 10 em 10, dizemos que o número está escrito na **BASE NUMÉRICA 10** ou simplesmente base 10.

Chamamos **BASE NUMÉRICA** o número que determina quantos símbolos usamos para contar. Por exemplo, na base 2, usamos o 0 e o 1 e na base 10, os símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, e 9.



O termo base significa fundamento, sustentação, apoio. Aparece em outros contextos da Matemática, além do estudo de *base de numeração*. Utilizamos base com o sentido de apoio ou sustentação quando falamos de prismas, cilindros, pirâmides. A base vetorial gera o espaço, pois, usando-a, expressamos qualquer vetor do espaço considerado. Aparece também na função exponencial, em que os expoentes geram as potências de um número em uma determinada base.

Mas será que a base 10 foi a única a ser utilizada pelos povos da Antigüidade?

A resposta é NÃO. Apesar de ter sido a mais freqüentemente utilizada, pois os dedos do homem constituíam um dispositivo de correspondência conveniente, não foi a única. Alguns povos contavam objetos juntando-os de 2 em 2 (caracterizando, desta maneira, a base 2); outros dividiam a quantidade de objetos em grupos de 5 (caracterizando, assim, a base 5).



Ainda hoje, há nativos de Queensland, na Austrália, que usam a base 2; contam: "Um, dois, dois e um, dois e dois, muitos".

Há evidências de que outras bases foram utilizadas:

- Base 5, primeira a ser utilizada extensivamente, certamente por ser a quantidade de dedos de uma mão.

Algumas tribos da América do Sul contam: "Um, dois, três, quatro, mão, mão e um..."

- Base 12, utilizada, principalmente, em relação a medidas, pelo fato de o número de lunações de um ano ser, aproximadamente, 12. Ou pelo fato de o número 12 ter uma quantidade maior de divisores inteiros (1, 2, 3, 4, 6, 12).

Ainda hoje, esta base é muito usada.

- 12 é o número de polegadas em um pé;
- 12 é o número de horas num relógio;
- 12 são os meses de um ano;
- 12 é a quantidade de ovos numa caixa.

- Base 20, utilizada pelos maias por volta do ano 500 d.C. pelo fato de o homem, além de usar os dedos das mãos, utilizar também os dedos dos pés.

- Base 60, utilizada pelos babilônios (por volta de 2000 a.C.).

Esta base, atualmente, é empregada na medida de tempo e de ângulos, em minutos e em segundos.

Uma hora tem 60 minutos.

Um minuto tem 60 segundos.

A maioria dos sistemas de numeração usava a base decimal. Alguns matemáticos dizem que a base 12 é mais conveniente do que a base 10, pois, como falamos, o 12 tem mais divisores que o 10. Você concorda com isso?

Na verdade, a afirmação se justifica pelo fato de podermos dividir o 12 em 1, 2, 3, 4, 6 ou 12 partes, enquanto que o 10 em 1, 2, 5 ou 10 partes. Porém, a base 10 é mais natural pelo fato de termos 10 dedos nas mãos.

ESTUDANDO AS BASES NÃO-DECIMAIS...

No dia-a-dia, as representações numéricas são feitas na base 10. Nessa base, escrevemos os números usando dez símbolos, os algarismos que você conhece: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

Assim como na base 10, na base 5, por exemplo, são usados cinco símbolos distintos para representação numérica: 0, 1, 2, 3 e 4. Na base 7, são usados sete símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

Mas o que dizer quando a base for maior que 10? Nesses casos, como só existem 10 algarismos decimais (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9), é necessário usarmos outros símbolos além desses. Convencionou-se que esses símbolos seriam as primeiras letras maiúsculas do alfabeto. Essa “regra” foi adotada para que não haja confusão na escrita numérica, uma vez que, depois do 9, os números têm dois algarismos e perderíamos a característica posicional. Essa representação é usualmente utilizada em sistemas de computação.

Por exemplo, na base 16 são usados os algarismos de 0 a 9 e as letras maiúsculas A, B, C, D, E e F, cujos valores são, respectivamente, 10, 11, 12, 13, 14 e 15.

Apresentamos a seguir algumas bases e os caracteres utilizados para a representação de um número em determinada base.

Tabela 2.1: As bases e seus caracteres

Bases	Nome	Quantidade de caracteres utilizados	Caracteres utilizados
2	Binária	2	0 e 1
8	Octal	8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7
10	Decimal	10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9
16	Hexagesimal	16	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E e F

**ATIVIDADE**

2.1. Considere as bases 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Para quais dessas bases, faz sentido o número indicado em cada um dos itens?

2. 1. a. 120 _____

2. 1. b. 806 _____

2.2. Sejam X, Y e Z algarismos decimais, com $X < Y < Z$. Quantos números da forma XYZ podem ser escritos:

2. 2. a. na base 2? _____

2. 2. b. na base 3? _____

2. 2. c. na base 4? _____

2. 2. d. na base 5? _____

UM POUCO MAIS SOBRE NOSSO SISTEMA DE NUMERAÇÃO

Quando fazemos agrupamentos, as contagens ficam mais fáceis. Veja o exemplo a seguir:

Para contabilizar o total de notas de R\$1,00 ao fim do expediente, um bancário as agrupa em montes de 10 notas. Cada 10 montes de 10 notas são agrupados formando-se um único bolo de notas. E, finalmente, cada 10 bolos de 100 notas de R\$1,00 são agrupados e postos num saco.

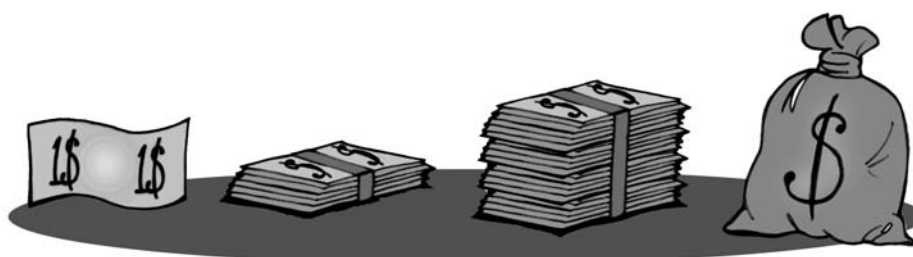


Figura 2.1:
1 nota de R\$1,00

Figura 2.2:
10 notas de R\$1,00

Figura 2.3:
10 grupos de 10
notas de R\$1,00

Figura 2.4:
10 grupos de 100
notas de R\$1,00

Olhando para a figura a seguir você consegue adivinhar qual foi o total de dinheiro acumulado até o final do expediente bancário?



Calculamos como $1 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 1 \times 10^0 = 1231$ notas de R\$1,00.

Este mesmo número poderia ser representado em um Quadro Valor de Lugar (QVL), mais conhecido por professores do primeiro segmento do Ensino Fundamental.

UNIDADE DE MILHAR (quantidade de grupos de 1000 notas)	CENTENA (quantidade de grupos de 100 notas)	DEZENA (quantidade de grupos de 10 notas)	UNIDADE
1	2	3	1

No sistema de numeração decimal, 1 grupo de 10 é chamado dezena, 1 grupo de 100 é chamado centena, 1 grupo de 1.000 é chamado unidade de milhar etc., porém, em outras bases, esses termos não são usados. Generalizamos esses termos para qualquer base como:

Elemento de 4ª ordem	Elemento de 3ª ordem	Elemento de 2ª ordem	Elemento de 1ª ordem
----------------------	----------------------	----------------------	----------------------



ATIVIDADE

3. Maria tem uma coleção de botões e arrumou-os em uma caixa pequena, uma caixa média e uma caixa grande. Ela agrupou os botões da seguinte forma: pôs dois botões em uma caixa pequena. Em seguida, colocou duas caixas pequenas em uma caixa média; e, finalmente, duas caixas médias em uma caixa grande.

Maria já guardou todos os seus botões nas caixas, a arrumação ficou assim:

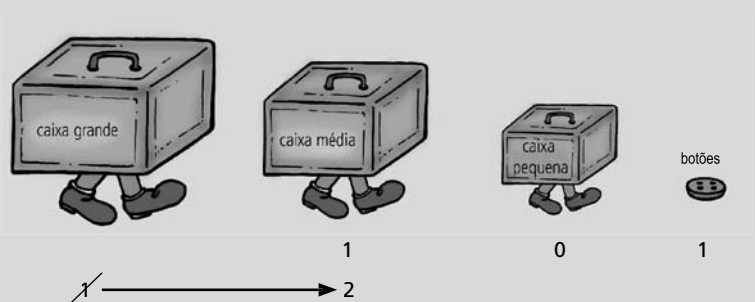


Analisando a arrumação, quantos botões Maria possui?

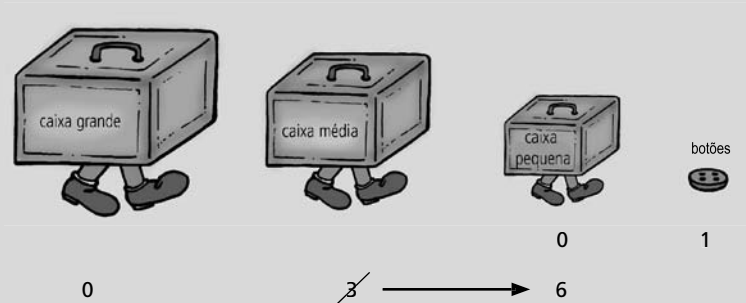
Conseguiu adivinhar? Como você achou o resultado? Veja se foi assim:



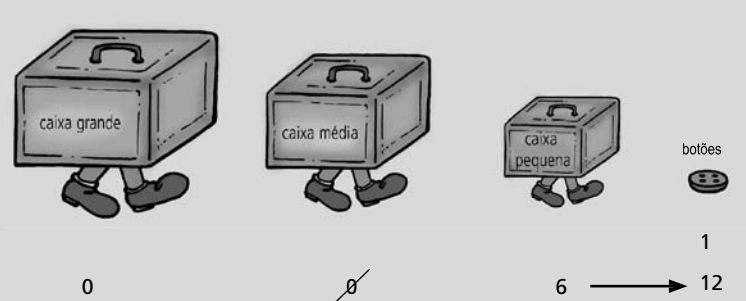
A caixa grande corresponde a 2 médias, e, portanto,



Em cada caixa média há duas pequenas. Temos assim:



Como em cada caixa pequena há 2 botões



O total é de 13 botões.



Usamos a notação $(\text{número})_b$ para deixar claro que o número está sendo expresso na base b . Quando não utilizarmos nenhum índice subscrito, fica subentendido que o número está expresso na base decimal.

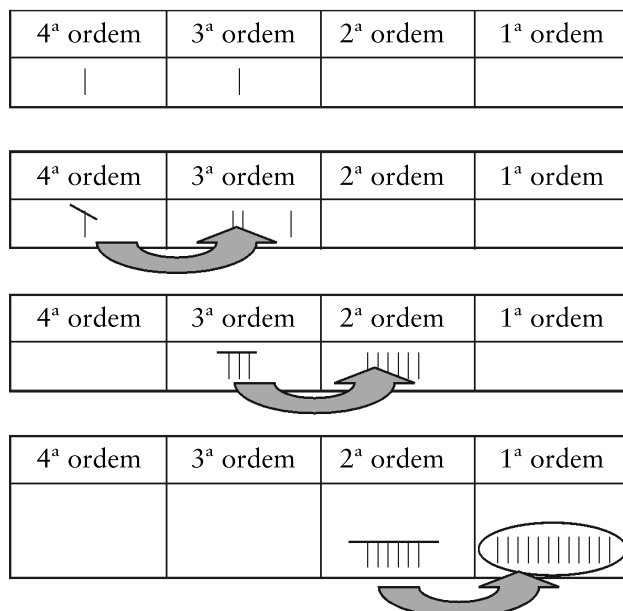
Resolver esse problema é o mesmo que descobrir o número da base decimal que corresponde a $(1101)_2$. Veja a representação no desenho anterior.

E isso, você descobre fazendo o seguinte cálculo:

$$(1101)_2 = 1 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^3 = 1 + 4 + 8 = 13.$$

Vamos ver mais um exemplo: Que número da base decimal corresponde ao número $(1.100)_2$?

Basta pensar nas seguintes transformações representadas no esquema:



Concluimos que $(1.100)_2 = 0 + 0 \times 2 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^3 = 0 + 4 + 8 = 12$.

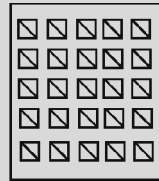
Esse é o processo usado para passar qualquer número da base binária para a base decimal.



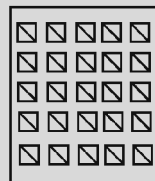
O processo de transformar qualquer número na base b para a base decimal é o mesmo que o descrito anteriormente. Basta escrevê-lo como soma de potências de b .

**ATIVIDADES**

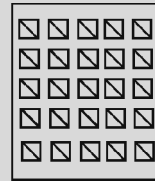
4. Uma equipe está encarregada de descobrir a quantidade de alunos que receberam o uniforme da escola. Para isso, fez um acompanhamento com uma marcação padronizada pela escola: em cada linha colocar cinco símbolos completos até passar para a linha seguinte. Passar para a página seguinte quando completarem cinco linhas, segundo mostra o desenho a seguir:



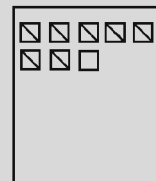
1ª página



2ª página



3ª página



4ª página

O diretor da escola, curioso e conhecedor do sistema de marcação, quis saber o total de crianças que tinham pego o uniforme até aquele momento.

A equipe informou que, ao final da contagem, o total encontrado foi:

- 3 páginas completamente preenchidas;
- 1 linha completa;
- 2 símbolos completos;
- 4 traços.

Qual foi a quantidade de alunos deduzida pelo diretor?

COMENTÁRIO

Essa atividade trata de agrupamentos de 5, ou seja, estamos trabalhando na base 5.

O resultado que você encontrará é a representação dessa quantidade na base 10.

5. Represente, por meio de desenhos, cada um dos passos que você irá seguir nesta atividade.

5. a. Pegue 13 palitos e junte-os de 2 em 2. Quantos conjuntos de 2 palitos você formou? Quantos palitos ficaram de fora?

5. b. Considere, agora, somente esses conjuntos de 2 palitos. Agrupe-os de 2 em 2. Quantos novos conjuntos você formou? Quantos conjuntos de 2 palitos ficaram de fora?

5. c. Olhando, agora, apenas para os conjuntos que você acabou de formar, una-os de 2 em 2. Quantos conjuntos foram formados? Quantos dos conjuntos formados na letra (b) ficaram de fora?

5. d. Quantos grupos de cada ficaram formados no total?


Depois de resolver esta atividade, acompanhe a resposta comentada ao longo do texto, onde discutiremos mais algumas idéias que exploram os agrupamentos. Agrupar nesse contexto significa passar para uma ordem superior.

Ao resolver a Atividade 5 transformamos o número 13 da base decimal para a base binária.


Vimos que na base binária os únicos símbolos existentes são o 0 e o 1. Para que você entenda melhor o que está sendo dito vamos montar um esquema de resolução.

4ª ordem (grupos de 2^3)	3ª ordem (grupos de 2^2)	2ª ordem (grupos de 2)	1ª ordem
			13



Agrupando de 2 em 2 palitos

4ª ordem (grupos de 2^3)	3ª ordem (grupos de 2^2)	2ª ordem (grupos de 2)	1ª ordem
			
		6	1

Como não tem sentido o algarismo 6 no sistema binário, ou seja, só podemos contar até 2 pois esse é o sistema de numeração que estamos tratando, continuamos a juntar os grupos de 2 palitos, de 2 em 2.

4ª ordem (grupos de 2^3)	3ª ordem (grupos de 2^2)	2ª ordem (grupos de 2)	1ª ordem
			
	3	0	1

Novamente, não faz sentido o algarismo 3 no sistema binário. Reagrupamos o conjunto de 4 palitos, de 2 em 2.

4ª ordem (grupos de 2^3)	3ª ordem (grupos de 2^2)	2ª ordem (grupos de 2)	1ª ordem
			
1	3	0	1

Logo, o número 13, na base decimal é equivalente ao número 1.101 na base binária.

Podemos reescrever $13 = (1101)_2$

Esse procedimento justifica um algoritmo relativamente simples que fazemos, mas que na maioria das vezes não entendemos o porquê. O procedimento são divisões sucessivas, começando pelo número 13, dividido por 2 até que o quociente seja igual a zero.

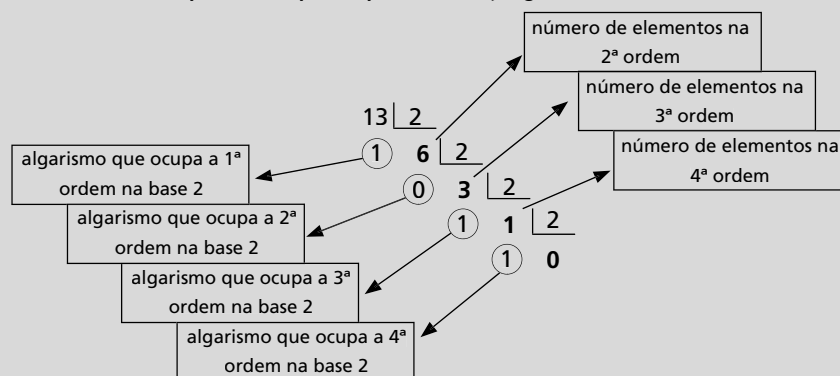


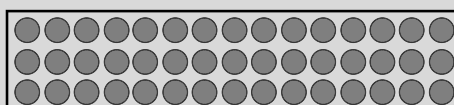
Figura 2.5: Esquema da mudança da base decimal para a binária.

Tomando-se os restos das divisões na ordem inversa que apareceram, forma-se, nessa ordem, o número binário desejado, ou seja, 1.101.



O processo descrito é o mesmo para qualquer base b . Isso quer dizer que basta realizar sucessivas divisões do número da base decimal por b até que o quociente seja zero.

6. Agrupe as bolas existentes na caixa usando as bases indicadas a seguir, escrevendo o número correspondente na base:



6. a. decimal _____

6. b. binária _____

6. c. octal _____

6. d. hexadecimal _____

7. Faça a conversão de cada um dos números a seguir para a base indicada:

7. a. $12 = (?)_2$ _____

7. b. $309 = (?)_8$ _____

7. c. $(100.110)_2 = ?$ _____

7. d. $(13)_8 = (?)_2$ _____

7. e. $(AEEA)_{16} = ?$ _____

7. f. $679 = (?)_{16}$ _____

8. Com relação à letra (e) da Atividade 7, pode-se concluir que o sistema hexadecimal não é posicional? Justifique.

9. a. Expresse os 20 primeiros números naturais na base binária.

9. b. Que regularidades você observa com os números da base binária à medida que aumentam os números da base decimal?

9. c. Encontre, usando a seqüência de números binários registrados na letra (b), o número da base decimal correspondente a $(11111)_2$. Que argumentos você utilizou?

10. Se pedíssemos para você encontrar um número natural tal que $n^2=100$, com certeza sua resposta seria 10.

10. a. Mas, e se considerarmos a base 2, será que existiria um número binário cujo quadrado é $(100)_2$?

10. b. Em caso afirmativo, que número seria esse?

10. c. Será que para qualquer base essa igualdade é válida? Por quê?

COMENTÁRIO

Poderíamos generalizar esse problema para $n^2=10.000$, $n^2=1.000.000$, $n^2=100.000.000$...

ATIVIDADE FINAL

Essa atividade é um desafio para você! Arrisque-se a tentar resolvê-la!

O problema a seguir, aplicado na 36ª Olimpíada Internacional de Matemática, mostra a importância da posição dos algarismos no sistema que utilizamos hoje em dia.

“Considere inicialmente um número de três algarismos distintos, nenhum dos quais igual a zero.

Quando trocamos de lugar dois de seus algarismos, encontramos um outro número menor do que o primeiro.

Além disso, a diferença entre o 1º e o 2º número é um número de dois algarismos, e a soma do primeiro com o segundo é um número **CAPICUA** menor que 500.

Descubra todos os números **CAPICUA** que podem ser obtidos.”

Um número **CAPICUA** (ou palíndromo) é um número que pode ser lido indiferentemente da frente para trás e de trás para a frente, como por exemplo o número 191. A palavra palíndromo significa também uma frase ou palavra que podemos ler, indiferentemente, da esquerda para a direita ou vice-versa.

COMENTÁRIO

Para resolver esse problema, comece observando o que deve acontecer com os primeiros algarismos dos números para que a soma seja menor do que 500. Descarte as possibilidades em que a diferença não dê um número de dois algarismos. Atente também para o fato de que se os primeiros algarismos desses números forem iguais, é porque o 2º e o 3º algarismos foram trocados. Caso contrário, isso significa que o 1º algarismo foi trocado com o 2º ou com o 3º algarismo. Faça os testes e conclua quais são os números capicuas. Divirta-se!

CONCLUSÃO

O ensino da história da Matemática, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), é um dos modos de fazer matemática em sala de aula. O mais importante é que você compreenda que o sistema de numeração e os símbolos que usamos hoje são produtos de uma construção da humanidade.

Há algum tempo acreditava-se que era importante aprender bases não-decimais para só depois passar para a base decimal. Hoje em dia, é mais comum trabalhar diretamente com a base decimal. Mas é importante que você, professor, conheça esta estrutura e desenvolva com seus alunos diferentes atividades, com diferentes materiais, para que ele compreenda todas as características do sistema de numeração decimal.

- Nosso sistema de numeração decimal é posicional; no número 121, os algarismos 1 ocupam a 1ª ordem e a 3ª ordem, portanto, possuem valores relativos diferentes, 1 e 100.

- Nosso sistema de numeração possui uma composição aditiva, assim $123 = 100 + 20 + 3$.

- O zero é um elemento de fundamental importância, por sua causa, diferenciamos 75 de 705 e de 7.005.

RESUMO

Na Antigüidade, cada povo criou uma simbologia diferente para fazer representações numéricas. O sistema de numeração que usamos hoje em dia é o mais econômico em sinais. Com esse sistema, denota-se qualquer número que se deseje, por maior que seja e é possível fazer operações matemáticas. Apesar de ter sido adotada a base 10 para nosso sistema de numeração, as bases não decimais são de larga utilidade na vida do homem. Por isso, é importante que as pessoas saibam fazer conversões de um número da base decimal em um número de uma outra base e vice-versa, investigando e levantando questionamentos.

AUTO-AVALIAÇÃO


Nesta aula, assim como em toda a disciplina, você precisa saber por que está ensinando determinados conteúdos. Ou visto de uma outra forma, ser o mediador entre o aluno e os conceitos que ele terá de adquirir. Por isso, seja cuidadoso, retome todas as atividades, pontue suas dúvidas e procure saná-las com seu tutor. É fundamental que você tenha compreendido a ação de agrupar e o fato de cada ordem corresponder à ordem anterior multiplicada pela base dada, conceitos presentes na Atividade 3.

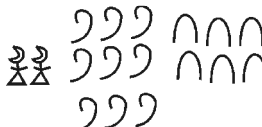


RESPOSTAS


Atividade 1

1.1. Representação egípcia:

a. 

b. 

Representação grega:

a. 

b. 

Representação romana:

a. DLXXXIX

b. MMCMLX

1. 2. Colocamos aqui algumas diferenças, porém talvez você tenha descoberto outras também válidas. Em caso de dúvida, discuta com seu tutor.

Os egípcios utilizavam uma grande quantidade de símbolos para fazer a representação de um número relativamente pequeno. Os gregos contornaram o problema do excesso da quantidade de símbolos, introduzindo símbolos intermediários de multiplicações por 5. Já os romanos simplificaram a escrita numérica usando apenas sete letras. Além disso, em todos esses casos, a representação numérica é limitada e há dificuldade de realizar contas.

1. 3.

1. 3. a. 9 999 999

1. 3. b. 99 999

1. 3. c. Não existe um número maior. Podemos representar qualquer número que quisermos.

Atividade 2

2. 1. a. Os únicos algarismos da base binária são o 0 e o 1. Portanto, não faz sentido falar 120 na base binária. Entretanto 0,1 e 2 são algarismos de todas as outras bases.
2. 1. b. Das bases citadas, a base 9 é a única que inclui o algarismo 8.
2. 2. a. Nenhum, pois a base binária tem apenas 2 algarismos: o 0 e o 1.
2. 2. b. Como os únicos algarismos da base 3 são o 0, o 1 e o 2, somente o número 210 pode ser escrito nessa base.
2. 2. c. Na base 4, são usados 4 algarismos: 0, 1, 2 e 3. Basta, então, vermos os possíveis números que podem ser escritos com esses algarismos e que satisfaçam a condição $X < Y < Z$. São eles: 210, 310, 320 e 321.
2. 2. d. Nesta base, são usados os algarismos 0, 1, 2, 3 e 4. Portanto, os possíveis números que podem ser escritos na base 5 são: 210, 310, 320, 321, 410, 420, 421, 430, 431, 432.



O professor deve oferecer atividades de generalização, em que não tomamos números em particular. Essas atividades promovem discussões que favorecem o desenvolvimento de aspectos do pensamento matemático, em particular do pensamento algébrico. Atividades desse tipo e contrapõem àquelas que se baseiam apenas em repetições de técnicas e procedimentos.

Atividade 4

O diretor fez a seguinte conta: $3 \times 5^3 + 1 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 4 = 414$. Na verdade, o diretor utilizou o processo da mudança de base: do número $(3124)_5$ para a sua representação na base 10.

Atividade 6

6. a. 45
6. b. $(101.111)_2$
6. c. $(55)_8$
6. d. $(2D)_{16}$

Atividade 7

7. a. $(1.100)_2$

7. b. $(465)_8$

7. c. 38

7. d. $(1.101)_2$

7. e. 44.778

7. f. $(2A7)_{16}$

Na letra (a) existe uma forma mais direta de fazer a representação do número 12 na base decimal. Basta escrever o número 12 como uma soma de potências de 2, ou seja,

$$12 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = (1.100)_2$$

O mesmo pensamento poderia ser aplicado para (b) e (f):

$$\text{b) } 309 = 4 \times 8^2 + 6 \times 8^1 + 5 \times 8^0 = (465)_8$$

$$\text{f) } 679 = 2 \times 16^2 + 10 \times 16^1 + 7 \times 16^0 = (2A7)_{16}$$

E na letra (d) como você raciocinou? Passando o número para a base 10 e, em seguida, para a base 2, através de sucessivas divisões por 2? Você poderia também ter pensado em expressar o número da base 8 para a base 10 e reescrevê-lo como soma de potências de 2, ou seja,

$$(13)_8 = 1 \times 8 + 3 = 1 \times 2^3 + 2^1 + 2^0 = (1.011)_2.$$

Atividade 8

Não. As letras maiúsculas A, B, C, D, E e F são representações dos algarismos 10, 11, 12, 13, 14 e 15 no sistema de numeração hexadecimal. Assim como no sistema de numeração decimal, em qualquer sistema de numeração posicional, a posição que um algarismo ocupa é imprescindível.

Atividade 9

9. a.

0 →	0	11 →	1011
1 →	1	12 →	1100
2 →	10	13 →	1101
3 →	11	14 →	1110
4 →	100	15 →	1111
5 →	101	16 →	10000
6 →	110	17 →	10001
7 →	111	18 →	10010
8 →	1000	19 →	10011
9 →	1001		
10 →	1010		

9. b.

A seguir estão algumas respostas possíveis:

- Quanto maior for o número natural, maior é a quantidade de algarismos da base binária.
- Todo número natural é expresso de modo único na base binária.

Discuta com seu tutor caso tenha dado uma resposta diferente dessas

9. c.

Primeiro, vamos ver quantos números de até 6 algarismos podem ser escritos na base binária.

Há 2 possibilidades para o último algarismo; 2 para o penúltimo; ... ; 2 para o primeiro, o que perfaz um total de 26 números que podem ser escritos na base binária.

Atividade 10

10. a e b.

Repare que $(100)_2 = 0 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^2 = 4$.

Logo, $n^2 = 4$, o que implica que

$$n = 2 = (10)_2.$$

10. c.

Sim. Pois, para a base b , teríamos $n^2 = 0 \times b^0 + 0 \times b^1 + 1 \times b^2 = b^2$.

Logo, $n = b = (10)_b$.

Atividade Final

Como a soma dos números é menor que 500, o primeiro algarismo do primeiro número somado com o primeiro algarismo do segundo número deve ser, no máximo, igual a 4. Usando a hipótese de todos os algarismos serem distintos, devemos ter:

1º número: 3 ? ? e 2º número: 1 ? ?

ou

1º número: 2 ? ? e 2º número: 2 ? ?

ou

1º número: 1 ? ? e 2º número: 1 ? ?

ou

1º número: 2 ? ? e 2º número: 1 ? ?

O 1º caso está descartado, uma vez que a diferença entre os dois números deve ser um número de dois algarismos.

Vamos analisar o 2º caso: como os primeiros algarismos dos dois números são iguais, a troca deve ser feita entre o 2º e 3º algarismos

2 y z

+ 2 z y

5 ? 5

ou

2 y z

+ 2 z y

4 ? 4

Observe que $y + z$ não pode ser igual a 15, pois, caso fosse, a soma dos números seria maior do que 500. Por outro lado, para que a soma seja um número capicua, $y + z = 4$, e, portanto, $y = 3$ e $z = 1$ e a soma será igual a **444**.

Vejamos agora o 3º caso: para que tenhamos um número capicua

$$\begin{array}{r} 1 \ y \ z \\ + \ 1 \ z \ y \\ \hline 3 \ ? \ 3 \end{array} \quad \text{ou} \quad \text{se } y = z = 1 \quad \begin{array}{r} 1 \ y \ z \\ + \ 1 \ z \ y \\ \hline 2 \ 2 \ 2 \end{array}$$

Para que se tenha $y + z = 13$:

$$y = 7 \text{ e } z = 6$$

ou

$$y = 8 \text{ e } z = 5$$

ou

$$y = 9 \text{ e } z = 4$$

A 1ª hipótese está descartada, pois $176 - 167 = 9$, que não é um número de dois algarismos.

A 2ª hipótese nos remete ao capicua **333**.

A 3ª hipótese nos remete ao capicua **343**.

Só nos resta agora verificar o que acontece se um dos números começar por 1 e o outro por 2.

Que algarismos devem ser trocados a fim de termos um segundo número cuja soma é um capicua?

Suponha que a troca seja entre o primeiro e o segundo algarismos. Teremos

$$\begin{array}{r} 21z \\ +12z \\ \hline 3?? \end{array}$$

o que não é possível, já que a soma é um número capicua e o terceiro algarismo dessa soma jamais poderá ser o 3 (pois $2z$ é um número par).

A troca entre o primeiro e o terceiro algarismo resulta

$$\begin{array}{r} 2y1 \\ +1y2 \\ \hline 3?3 \end{array}$$

Para que seja um número capicua, o algarismo do meio deve ser, no máximo, igual a 4. Sabendo-se que y deve ser diferente de 1 e 2, ou $y = 3$ (e nesse caso o capicua será 363) ou $y = 4$ (e, nesse caso, o capicua será **383**).

Fique ligado na base 2!

AULA 3

Meta da aula

Aprofundar o ensino de bases numéricas, em particular da base 2.

objetivos

Ao final desta aula você deverá ser capaz de:

- Utilizar o material dourado e o material multibase no ensino de bases de numeração.
- Aplicar a história da matemática em sala de aula.

Pré-requisitos

Para acompanhar esta aula você deve ter estudado a Aula 2. Além disso, será necessário que você saiba as operações fundamentais.

INTRODUÇÃO

No sistema binário, cada algarismo é chamado bit, que é uma abreviatura de *binary digit* (dígito binário).

A base binária é de grande importância para a Ciência, devido à simplicidade de seu uso: é constituída de apenas dois algarismos, e as tabelas de soma e multiplicação são de fácil memorização. Grande parte dos circuitos eletrônicos funciona por meio dessa base: um circuito elétrico conta apenas com dois números: 1 para “ligado” e 0 para “desligado”. Já os computadores recebem instruções com as bases 2, 8, 16, 32, 64. O programa é montado, e o chip interpreta e converte este programa para a linguagem computacional.

Nesta aula, vamos aliar o estudo da base 2 com a multiplicação feita pelos egípcios. Nessa perspectiva, o pano de fundo é o uso da História da Matemática em sala de aula.

Os PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) apontam a História da Matemática como um dos caminhos para fazer Matemática em sala de aula, e destacam que esse uso deve ser feito com o auxílio de outros recursos metodológicos, como, por exemplo, utilizar os contextos da História na elaboração de atividades e analisar as dificuldades vividas pelos povos antigos na busca de soluções para seus problemas.

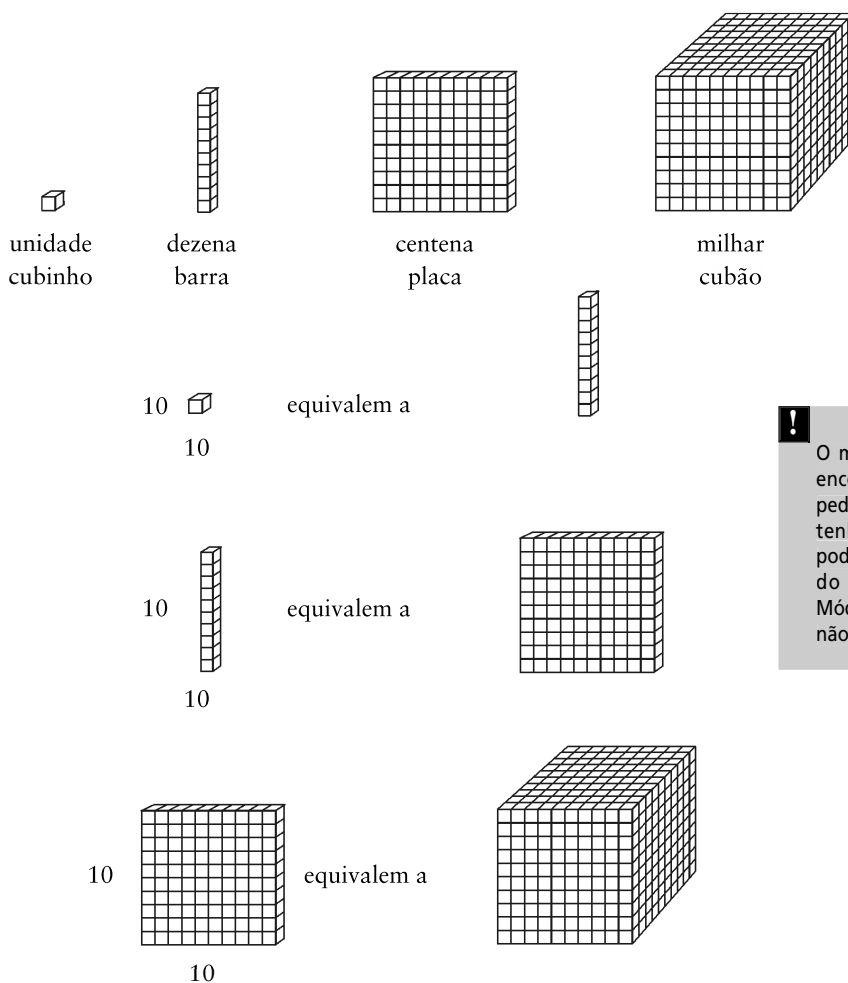
Recorrer à História da Matemática serve como motivação para a introdução e o desenvolvimento de conceitos matemáticos, a partir do momento em que revela a Matemática como uma criação humana. Isso acontece porque, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas nos diferentes momentos históricos e estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor tem a possibilidade de desenvolver nos alunos atitudes e valores diante do conhecimento matemático.

Essa metodologia de trabalho parte do princípio de que o estudo da construção histórica do conhecimento matemático leva a uma maior compreensão da evolução dos conceitos, pois apresenta as dificuldades inerentes à sua obtenção. Essas dificuldades históricas, muitas vezes, ainda são notadas nos alunos. Nesse sentido, o trabalho com a História da Matemática pode esclarecer idéias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno e dar subsídios ao professor no que diz respeito às dificuldades de aprendizagem do aluno.

Para o estudante, é muito instrutivo aprender não somente o resultado final, a última formulação, mas também a história de seu desenvolvimento. Com isto, não apenas toma conhecimento do processo do desenvolvimento intelectual, mas também constata que as dificuldades que pode encontrar para assimilar novas idéias não se devem necessariamente à falta de condições de sua parte, e sim ao alto grau de sofisticação necessário para captar as idéias em questão. Ao perceber as desventuras de seus predecessores, sentir-se-á menos desanimado pelas suas (ZYGmund *apud* AABOE, 2002).

O USO DO MATERIAL MULTIBASE PARA EXPLICAR A MUDANÇA DE BASE

Um material bastante interessante para trabalhar o ensino da representação dos números na base 10 e operar com eles é o material dourado, que apresentamos a seguir:



! O material dourado é facilmente encontrado em lojas de material pedagógico. No entanto, caso não tenha uma em sua cidade, você pode providenciar uma adaptação do mesmo. Veja o modelo no Módulo Prático. Nele você somente não explorará os milésimos.

Figura 3.1: Material dourado.

A representação do número 34 com material dourado será:

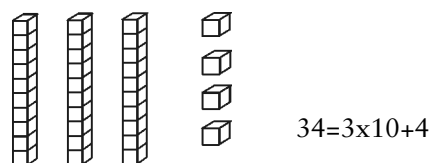


Figura 3.2: Representação do número 34 com material dourado.

Para entender o processo de conversão de um número da base decimal para a base b temos como opção o material multibase, que é uma extensão do material dourado. Para cada base b existe um conjunto de blocos de potências de b .

Daremos o exemplo da base binária. O material é constituído dos seguintes blocos:

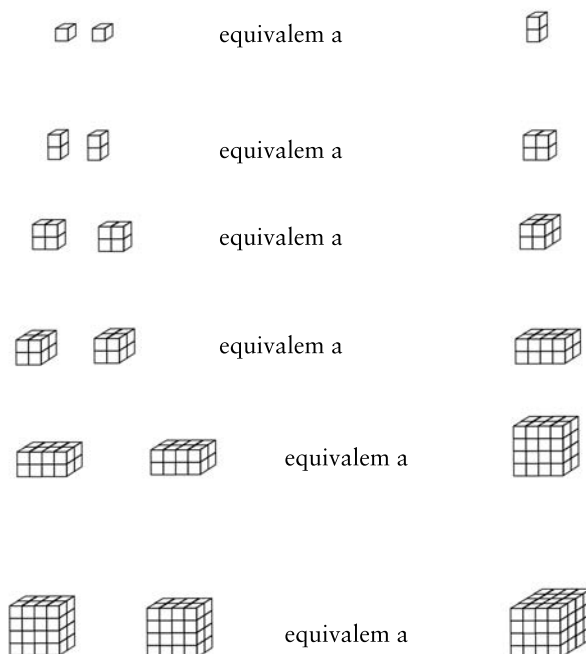
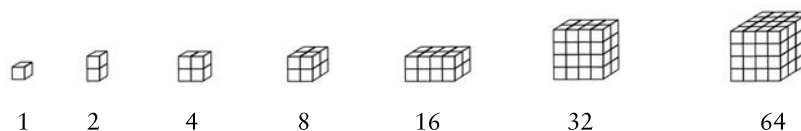









Figura 3.3: Material multibase.



ATIVIDADE

1. O quadro a seguir mostra alguns números do sistema decimal representados na base binária com o auxílio deste material. Complete-o:

Número na base decimal	 $64=2^8$	 $32=2^5$	 $16=2^4$	 $8=2^3$	 $4=2^2$	 $2=2^1$	 $1=2^0$	Número na base binária
3						1	1	11
5								
29								
67								
126								

O USO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA EM SALA DE AULA

Existem diferentes formas de aplicar a História da Matemática em sala de aula. Segundo Fossa (2001), o uso da História pode ser *ornamental* ou *ponderativo*. Essas duas maneiras de apresentar a história têm características em comum.

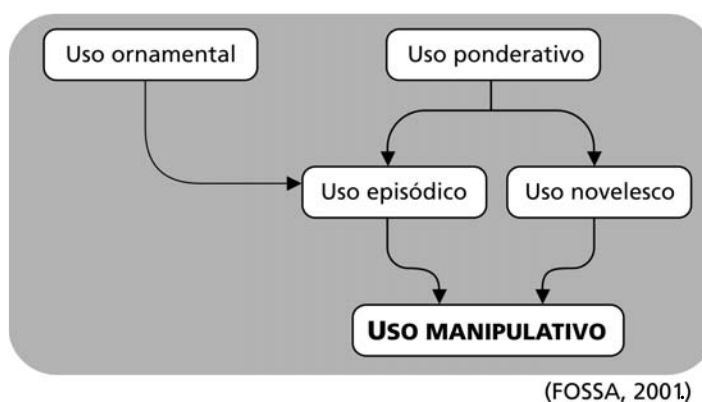
O uso *ornamental* está presente há muito tempo no ensino, e é bastante comum nos livros didáticos. É apresentado como notas históricas, no início ou fim dos capítulos, que contam o desenvolvimento da Matemática ou narram a biografia de algum matemático importante. O uso *ornamental* da História da Matemática de maneira isolada, no entanto, não é um recurso para formação de conceitos matemáticos.

O uso *ponderativo* não é tão comum no ensino. Ele utiliza a História da Matemática na formação dos conceitos matemáticos. Propõe que esses conceitos sejam apresentados dentro de uma abordagem histórica, promovendo discussões sobre os mesmos. Dentro do uso *ponderativo*, destacam-se os usos *novelesco* e *episódico*, que desencadeiam o uso *manipulativo*.

No uso *novelesco*, o aluno é levado a seguir a trilha da História da Matemática durante todo o desenvolvimento do conteúdo; tal estratégia pode ser cansativa, dependendo da teoria estudada. O uso *episódico* é menos intenso; propõe que a História seja utilizada de forma ponderada durante alguns tópicos.

O uso *manipulativo* surge possibilitando o uso da História da Matemática como matéria-prima para atividades de sala de aula. É nesse sentido que os PCN apontam a História como um caminho para fazer Matemática em sala de aula. Essa prática pode ser fruto de um uso tanto *episódico* quanto *novelesco*, mas prevê o desenvolvimento de atividades estruturadas e a utilização de materiais manipulativos, permitindo ao aluno agir e redescobrir. O esquema a seguir resume as idéias apresentadas.

Quadro 3.1: O uso da história da Matemática



OS EGÍPCIOS E SUA FORMA DE MULTIPLICAR

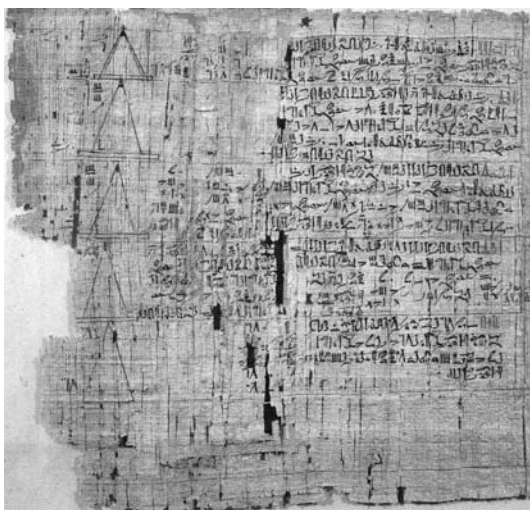


Figura 3.4: Papiro Rhind.

As fontes mais antigas sobre os números egípcios são inscrições que datam de 3000 a.C. O papiro Rhind ou AHMES (1650 a.C.) é um antigo manual de Matemática. Contém 85 problemas, todos resolvidos, a maioria envolvendo assuntos do dia-a-dia, como o preço do pão, a armazenagem de grãos de trigo, a alimentação do gado. Esse papiro é uma fonte primária rica sobre a Matemática egípcia antiga; descreve os métodos de multiplicação e divisão dos egípcios, o uso que faziam das frações unitárias e muitas aplicações da Matemática a problemas práticos.

Observando e estudando como eram efetuados os cálculos no papiro **AHMES**, não foi difícil para os cientistas compreender o sistema de numeração egípcio. Além disso, a decifração dos hieróglifos (inscrições sagradas das tumbas e dos monumentos do Egito), no século XVIII, também foi muito útil. Os egípcios desenvolveram três formas de escrita: a mais antiga, chamada hieroglífica; a hierática, que é uma forma cursiva da hieroglífica, usada nos papiros; e a escrita demótica, de uso geral.

Como já vimos na aula passada, o sistema de numeração egípcio baseava-se em números-chave: você lembra que a ordem em que são escritos esses símbolos não altera o número escrito? Observe a figura a seguir e diga quais números os três garotos do antigo Egito estão escrevendo.



Observe que os alunos escreveram o mesmo número sem preocupação com a posição dos símbolos.

Dessa forma, qualquer número era expresso pelo uso dos símbolos aditivamente, repetindo-se cada um deles o número necessário de vezes.

A operação aritmética fundamental no Egito era a adição. A multiplicação e a divisão eram efetuadas no tempo de Ahmes por sucessivas **DUPLAÇÕES**.

A escrita egípcia dificultava a multiplicação, pois para escrever um número eles usavam muitas vezes uma grande quantidade de símbolos. Achavam que multiplicar por 2 era o menos complicado. Para nós, que vivemos o sistema indo-arábico, a multiplicação por 2 não é complicada, mas a multiplicação por 10 é mais simples de fazer, não é mesmo?

Para efetuar a multiplicação entre dois números naturais, os egípcios primeiro precisavam escrever um dos fatores como a soma de potências de 2.

Vamos usar como exemplo o número 41.

Para fazer isso, procure na tabela das potências de 2 o maior resultado de que seja menor que 41. No caso, é o 32 ($32 = 2^5$).

DUPLAÇÕES

É o nome dado ao processo de multiplicação feito pelos egípcios, que consiste em dobrar o número uma certa quantidade de vezes e somar algumas parcelas.



Observe que para escrever um número como soma de potências de 2 podemos encontrar sua representação na base 2. Assim, obteremos as potências desejadas.

Por exemplo, o número 32 escrito na base 2 é $(32)_2 = (101001)$. Isso nos diz que $32 = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 2^5 + 2^3 + 2^0$.

Temos então que $41 = 32 + 9$. Como 9 não é potência de 2, usamos a mesma estratégia, ou seja, procuramos na tabela a maior potência de 2 menor que 9. Vemos que é o 8 ($8 = 2^3$).

Dessa forma, temos que $41 = 32 + 8 + 1$.

Agora só falta o número 1, que é igual a 2^0 .

Assim, o número 41, escrito como soma de potências de 2, fica $2^5 + 2^3 + 2^0$.



ATIVIDADE

2. Expresse cada número a seguir como potências de 2.

2. a. $27 =$ _____

2. b. $42 =$ _____

2. c. $37 =$ _____

2. d. $53 =$ _____

Vamos ver o processo de duplicações.

Suponha que os egípcios quisessem calcular 41×53 .

Já escrevemos o 41 como potência de 2. Então, temos que

$$41 \times 53 = (2^5 + 2^3 + 2^0) \times 53 = (32 + 8 + 1) \times 53$$

Usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, obtemos:

$$41 \times 53 = 2^5 \times 53 + 2^3 \times 53 + 2^0 \times 53 = 32 \times 53 + 8 \times 53 + 1 \times 53$$

Observe agora a **Tabela 3.1**, onde na primeira linha da tabela colocamos o 1 na primeira coluna e o 53 na segunda coluna, e a partir daí vamos dobrando os dois valores em cada linha.

Tabela 3.1: Duplicação do 53

1	53	
2	$53 \times 2 = 106$	$\swarrow \times 2$
4	$106 \times 2 = 212$	$\swarrow \times 2$
8	$212 \times 2 = 424$	$\swarrow \times 2$
16	$424 \times 2 = 848$	$\swarrow \times 2$
32	$848 \times 2 = 1.696$	

Mas o que queremos obter com essa tabela?

Lembre-se de que escrevemos $41 \times 53 = 32 \times 53 + 8 \times 53 + 1 \times 53$.

- Na primeira linha da tabela temos $1 \times 53 = 53$.

- Na quarta linha temos $8 \times 53 = 424$. Só que na **Tabela 3.1**, em vez de multiplicarmos por 8 direto, multiplicamos por 2 três vezes. É a mesma coisa, não? Porque $2 \times 2 \times 2 = 8$.

- Na sexta linha da tabela temos $32 \times 53 = 1696$. Novamente, não multiplicamos 32 por 53 direto, mas multiplicamos por 2 cinco vezes, porque $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$.

Temos:

$$41 \times 53 = 32 \times 53 + 8 \times 53 + 1 \times 53$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1.696 & + & 424 & + & 53 \end{array}$$

Somando as duplações, encontramos $41 \times 53 = 2.173$.

Você não precisa escrever tanto. Basta marcar na tabela as parcelas do 1, 8 e 32 e depois somá-las.



ATIVIDADES

3. Aproveite os números escritos na Atividade 2 e faça as multiplicações a seguir usando o processo dos egípcios:

3. a. $27 \times 42 =$ _____

3. b. $53 \times 27 =$ _____

3. c. $37 \times 27 =$ _____

3. d. $53 \times 41 =$ _____

4. Compare o método apresentado com o algoritmo de multiplicação usual e apresente aspectos positivos e/ou negativos. Entregue sua resposta e comentários a seu tutor.

COMENTÁRIO

Aqui você deve identificar os aspectos que considera importantes. Não há resposta fechada. Mas, procure avaliar o tempo gasto. Faça as contas. Veja em qual método você gasta mais tempo. Veja também as idéias dessa multiplicação e compare com as idéias do nosso sistema. Em qual deles você considera as idéias mais simples? Por quê?

O DUPLATION/MEDIATION

Outro método de multiplicação egípcia é o *Duplation/Mediation*, um dos fatores era multiplicado sucessivas vezes por 2, ao mesmo tempo em que o outro era dividido por 2.

Digamos que os egípcios quisessem saber o produto de 26 por 33.

Faziam duas colunas:

- uma correspondente ao número que seria dividido sucessivas vezes por 2 e
- outra correspondente ao número que seria multiplicado sucessivas vezes por 2.

1º– Colocavam um dos números, digamos o 26, na coluna das divisões por 2 e o outro, no caso o 33, na coluna das multiplicações por 2.

2º– Dividiam o 26 por 2 sucessivas vezes, até que o quociente fosse 1. Neste caso, foram necessárias 4 divisões por 2 (veja tabela a seguir).

3º– A quantidade de divisões por 2 feitas com um dos fatores representava a quantidade de multiplicações a ser feita com o outro número. Isso quer dizer que o 33 devia ser dobrado 4 vezes.

4º– O produto de 26 por 33 era a soma dos múltiplos de 33 correspondentes aos números ímpares da coluna das divisões por 2.

Tabela 3.2: Produto de 36 por 33

Coluna das multiplicações por 2	Coluna das divisões por 2
33	26
66	13
132	6
264	3
528	1

**ATIVIDADES**

5. Faça as multiplicações, usando o *Duplation/Mediation*.

5. a. 37×43 .

5. b. 23×57 .

5. c. 32×64 .

6. Explique, por meio de um exemplo, a validade desse método.

COMENTÁRIO

Uma das maneiras de explicar o método é relacionado-o com a escrita do número na base 2.

Os egípcios também usavam o método das divisões. Nesse método, utilizavam duas colunas: a coluna das duplicações, em que se dobrava o divisor sucessivas vezes, e a coluna da quantidade de multiplicações do divisor.

Se queriam, por exemplo, dividir 659 por 16, procediam da seguinte forma (acompanhe os procedimentos):

1º – Duplicavam o 16 sucessivas vezes até o valor imediatamente antes de ultrapassar 659. (Nesse caso, 512.)

2º – Faziam a diferença entre o dividendo e o maior valor da coluna das duplicações ($659 - 512 = 147$).

3º – O resultado (147) era diminuído do maior valor da coluna das duplicações imediatamente abaixo de 147 ($147 - 128 = 19$).

4º – Pegava-se o valor da coluna das duplicações imediatamente anterior a 19, fazendo a sua subtração de 19 ($19 - 16 = 3$).

5º – Não existe nenhum outro número da coluna das duplicações que ultrapasse 3. Isso significava que o resto da divisão é 3.

6º – Já o quociente era obtido fazendo a soma dos fatores multiplicados por 16, correspondentes aos valores subtraídos na coluna das duplicações ($1 + 8 + 32 = 41$).

Tabela 3.3: Divisão do 659 por 16

Coluna das duplicações	
16	16×1
32	16×2
64	16×4
128	16×8
256	16×16
512	16×32



ATIVIDADES

7. Usando o processo de divisão egípcia, calcule o quociente e o resto de cada uma das divisões a seguir:

7. a. $3.252 \div 53$.

7. b. $1.454 \div 27$.

8. Use o método de divisão egípcia para fazer a divisão de 858 por 33. Compare com o método de multiplicação desenvolvido por esse povo. O processo egípcio de multiplicação é o inverso do processo de divisão? Por quê?

COMENTÁRIO

No processo de multiplicação somam-se os valores correspondentes na coluna das duplicações, enquanto que no processo de divisão subtraem-se esses valores do total.

RESUMO

O material dourado e o material multibase são importantes no apoio às metodologias que você utiliza em sala de aula. Esses materiais são mais difundidos no primeiro segmento do Ensino Fundamental (até a 4ª série), mas permitem também a exploração de conteúdos da 5ª série em diante, e o futuro professor deve conhecê-los.

O uso da História da Matemática como metodologia de sala de aula ainda é muito pouco compreendido pelos professores. Este pode ser *ornamental* ou *ponderativo*, possuindo características em comum. O uso *ponderativo* subdivide-se em dois outros usos, o *novelesco* e *episódico*, que desencadeiam o uso *manipulativo*, em que o aluno deve utilizar a história realizando atividades.

Os métodos que os egípcios utilizavam para realizar a multiplicação: duplações e *Duplation/Mediation*, são um exemplo tanto da utilização histórica da base 2, quanto da possibilidade de propostas pedagógicas em que a História da Matemática tenha um caráter manipulativo.

ATIVIDADE FINAL

Vamos construir um quadro de “adivinhação”? Para fazer esse quadro, você precisa escrever os números em potência de 2 da mesma forma que os egípcios faziam.

Vamos montar seis quadros, nos quais escreveremos os números de 1 até 63.

Um mesmo número pode estar em mais de um quadro.

Primeiro decompõe cada um desses números em potências de 2.

A regra para colocar o número no quadro é a seguinte:

Se tiver uma parcela igual a	Estará no quadro
$1 = 2^0$	1
$2 = 2^1$	2
$4 = 2^2$	3
$8 = 2^3$	4
$16 = 2^4$	5
$32 = 2^5$	6

Assim, por exemplo:

O 1 está apenas no primeiro quadro.

O 2, apenas no segundo.

O $3 = 2 + 1$ está no segundo e no primeiro.

O 4 está apenas no terceiro.

O $5 = 4 + 1$ está no terceiro e no primeiro.

O $6 = 4 + 2$ está no terceiro e no segundo.

a. Com base nessa regra, complete os seis quadros a seguir:

1	3	5				

Quadro 1

2	3	6				

Quadro 2

4	5	6				

Quadro 3

Quadro 4

Quadro 5

Quadro 6

b. Vamos brincar de adivinhar? Vamos fazer um exemplo. Eu pensei em um número e digo todos os quadros em que ele está: esse número está no primeiro, no terceiro e no quinto quadros.

Você observa que:

Quadro	Número
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16
6	32

Assim, você pode adivinhá-lo fazendo a seguinte conta:

$$1 \text{ (1º quadro)} + 4 \text{ (3º quadro)} + 16 \text{ (5º quadro)}$$

Agora responda: se eu pensei em um número que está no terceiro, quarto e quinto quadros, em que número eu pensei?

c. Qual o único número que aparece em todas as tabelas? Por quê?

d. Jogue com três pessoas, mas sem contar como descobriu. Dizem que mágicos não devem contar seus truques. Verifique se você está afiado!

CONCLUSÃO

As atividades desta aula foram desenvolvidas buscando promover o uso manipulativo da História da Matemática, em que você, além de perceber a importância da base 2, viu que a História pode pautar atividades lúdicas. Fizemos algumas atividades usando como recurso pedagógico a história dos sistemas de numeração dos povos antigos e sua maneira de operar.

AUTO-AVALIAÇÃO








É importante que você tenha compreendido o uso da História da Matemática em sala de aula e relacionado os processos apresentados com a base 2. É interessante que você tenha compreendido a Atividade Final. Perceba que o número de quadros não é limitado, você pode montar sete quadros, em vez de seis, para ampliar os números do jogo. Nesse caso, o número final do quadro não será mais o 63, mas o

$2^7 - 1 = 127$. Observe também as regularidades dos quadros. No primeiro quadro, os números pulam de dois em dois; no segundo, entre um par de números, pula-se quatro. Essas seqüências podem ser exploradas até no Ensino Médio, em vários contextos, como no estudo das Progressões Aritméticas. Caso tenha tido alguma dificuldade, observe os comentários e discuta com seu tutor.



RESPOSTAS

Atividade 1

Número na base decimal	 $64=2^6$	 $32=2^5$	 $16=2^4$	 $8=2^3$	 $4=2^2$	 $2=2^1$	 $1=2^0$	Número na base binária
3						1	1	11
5					1	0	1	101
29			1	1	1	0	1	11101
67	1	0	0	0	0	1	1	1000011
126	1	1	1	1	1	0	1	1111101

Atividade 2

2. a. $27 = 16 + 8 + 2 + 1 = 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0$.

2. b. $42 = 32 + 8 + 2 = 2^5 + 2^3 + 2^1$.

2. c. $37 = 32 + 4 + 1 = 2^5 + 2^2 + 2^0$.

2. d. $53 = 32 + 16 + 4 + 1 = 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^0$.

Atividade 3

3. a. $27 \times 42 = (16 + 8 + 2 + 1) \times 42$

1	42
2	84
4	168
8	336
16	672

Observe na Atividade 3, item a, todas as parcelas que aparecem na escrita do 27. Assim, devemos somar todos os resultados encontrados:

$$42 + 84 + 336 + 672 = 1.134$$

3. b. $53 \times 27 =$

$(32 + 16 + 4 + 1) \times 27 =$

1	27
2	54
4	108
8	216
16	432
32	864

$$864 + 432 + 108 + 27 =$$

$$1.431$$

3. c. $37 \times 27 =$

$(32 + 4 + 1) \times 27 =$

1	27
2	54
4	108
8	216
16	432
32	864

$$864 + 108 + 27 = 999$$

3. d. $53 \times 41 =$

$(32 + 16 + 4 + 1) \times 41 =$

1	41
2	82
4	164
8	328
16	656
32	1.312

$$41 + 164 + 656 + 1312 =$$

$$2.173$$

Atividade 5

5. a.

43	37
86	18
172	9
344	4
688	2
1376	1

$$43 \times 37 = 1376 +$$

$$172 + 43 = 1591$$

5. b.

57	23
144	11
228	5
456	2
912	1

$$57 \times 23 = 912 +$$

$$228 + 114 + 57 =$$

$$1311$$

5. c.

64	32
128	16
256	8
512	4
1024	2
2048	1

$$64 \times 32 = 2048$$

Atividade 6

Por exemplo, vamos trabalhar a multiplicação 57×23 .

$57 \times 23 = (2 \times 57) \times (23 \div 2) = 2 \times 57 \times (11 + 1/2) = 2 \times 57 \times 11 + 57$. Veja que a primeira linha ficou (correspondente ao ímpar 23)

$$= (2 \times 2 \times 57) \times (11 \div 2) + 57 = 2 \times 2 \times 57 \times (5 + 1/2) + 57$$

$= 2 \times 2 \times 57 \times 5 + 2 \times 57 + 57$. Veja que a segunda linha ficou (correspondente ao ímpar 11)

$$= (2 \times 2 \times 2 \times 57) \times (5 \div 2) + 2 \times 57 + 57 = 2 \times 2 \times 2 \times 57 \times (2 + 1/2) + 2 \times 57 + 57 =$$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 57 + 2 \times 2 \times 57 + 2 \times 57 + 57$. Veja que a terceira linha ficou (correspondente ao ímpar 5)

$= 2^4 \times 57 + 2^2 \times 57 + 2^1 \times 57 + 57$. Veja que a quarta linha não ficou (correspondente ao par 2) e a última linha ficou correspondente ao ímpar 1.

$$\text{Dessa forma, } 57 \times 23 = 2^4 \times 57 + 2^2 \times 57 + 2^1 \times 57 + 57 = 912 + 228 + 114 + 57 = 1311.$$

Quando fazemos sucessivas divisões por 2 com o 23, estamos na verdade expressando este número na base binária: $23 = (10111)_2$, pois $23 = 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0$.

Logo, usando a propriedade distributiva, temos:

$$23 \times 57 = (2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0) \times 57 = 2^4 \times 57 + 2^2 \times 57 + 2^1 \times 57 + 57 = 912 + 228 + 114 + 57 = 1311.$$

Atividade 7

7. a.

53×1	53
53×2	106
53×4	212
53×8	424
53×16	848
53×32	1696

$$3252 - 1696 = 1556$$

$$1556 - 848 = 708$$

$$708 - 424 = 284$$

$$284 - 212 = 72$$

$$72 - 53 = 19$$

Logo, o quociente é $1 + 4 + 8 + 16 + 32 = 61$, e o resto é 19.

7. b.

27×1	27
27×2	54
27×4	108
27×8	216
27×16	432
27×32	864

$$1454 - 864 = 590$$

$$590 - 432 = 158$$

$$158 - 108 = 50$$

$$50 - 27 = 23$$

Logo, o quociente é $1 + 4 + 16 + 32 = 53$, e o resto é 23.

Atividade Final

a.

1	3	5	7	9	11	13
15	17	19	21	23	25	27
29	31	33	35	37	39	41
43	45	47	49	51	53	55
57	59	61	63			

Quadro 1

2	3	6	7	10	11	14
15	18	19	22	23	26	27
30	31	34	35	38	39	42
43	46	47	50	51	54	55
58	59	62	63			

Quadro 2

4	5	6	7	12	13	14
15	20	21	22	23	28	29
30	31	36	37	38	39	44
45	46	47	52	53	54	55
60	61	62	63			

Quadro 3

8	9	10	11	12	13	14
15	24	25	26	27	28	29
30	31	40	41	42	43	44
45	46	47	56	57	58	59
60	61	62	63			

Quadro 4

16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31	48	49	50	51	52
53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63			

Quadro 5

32	33	34	35	36	37	38
39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52
53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63			

Quadro 6

b. $4 + 8 + 16 = 28$.

c. O 63, pois as parcelas do 63 tem o número de todos os quadros, ou seja,

$$63 = 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1.$$

Mas... O que são números racionais?

AULA

4

Meta da aula

Instrumentalizar o ensino de números racionais.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- Conceituar e definir número racional.
- Distinguir e relacionar as diferentes formas de representação dos números racionais.
- Identificar o conceito de número racional em diferentes contextos.
- Conhecer possibilidades de trabalho com o material para as frações decimais.

Pré-requisitos

Antes de iniciar esta aula, sugerimos que você releia as Aulas 1, 2 e 3 de Pré-Cálculo e a Aula 1 desta disciplina. Verifique como os livros didáticos de 6ª ou 7ª série abordam o ensino dos números racionais. Além disso, deve ler as Aulas 2 a 8 de Matemática na Educação 2, pois isso enriquecerá significativamente o seu aprendizado nesta aula. Será importante que tenha em mãos uma régua e uma folha de papel.

INTRODUÇÃO

No contexto da História da Matemática, você já deve ter lido que a humanidade necessitou utilizar outros números, além dos números naturais. A evolução

histórica dos números está relacionada à necessidade que temos de medir e repartir. Com os números racionais não é diferente!

Sabemos que os números racionais, tanto na sua representação decimal como na sua representação fracionária, costumam ser responsáveis por muitas das dificuldades que as pessoas têm, durante toda a vida, com a Matemática. É por isso que nesta aula vamos revisar o conceito de número racional buscando discutir alguns entraves do ensino deste conteúdo.

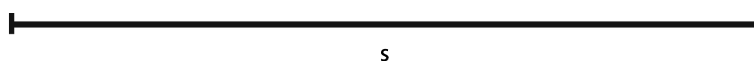


Lembre-se de acessar a página desta disciplina na Plataforma Cederj e utilizar o Módulo Prático.

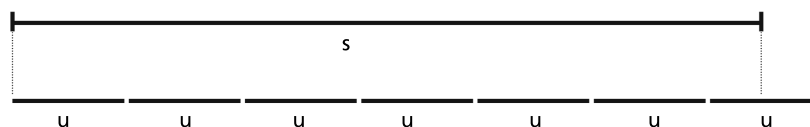
CONCEITUANDO NÚMERO RACIONAL

Na Aula 2 de Pré-Cálculo, você conheceu o procedimento utilizado pelos gregos para dividir um segmento em partes iguais, e na Aula 3 construiu uma representação gráfica do conjunto dos números racionais (**Q**). Vamos, agora, relembrar a conceituação de número racional comparando segmentos.

Imagine que você quer medir este segmento, usando como unidade de medida o segmento **u**.



Como medir significa comparar duas grandezas, veremos quantos segmentos **u** cabem no segmento **s**. Neste caso, o segmento **s** não corresponde a uma quantidade inteira de segmentos **u**. Observe:

**Q**

A letra **Q** tem sido usada para designar o Conjunto dos Números Racionais por ser a letra inicial da palavra quociente.

Portanto, é preciso criar um outro número, diferente do inteiro, que represente esse “pedaço” ou “parte” de u .

Poderíamos representar essa medida de diferentes formas:

- A medida de s corresponde a $6u$ mais metade de u .
- A medida de s corresponde a $6u$ mais meio u .
- A medida de s corresponde a $6u$ e $\frac{1}{2}u$.
- A medida de s corresponde a $6u$ e $0,5u$.
- A medida de s corresponde a $6,5u$.
- A medida de s corresponde a $\frac{13}{2}u$.

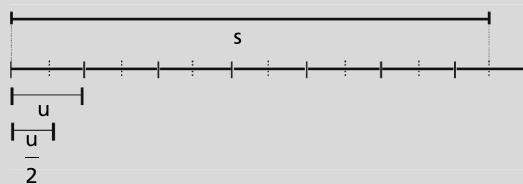
Todas essas representações estão corretas e servem para informar a medida de s considerando u como unidade; porém, algumas são mais usuais e familiares e outras bastante improváveis.

Mas o principal obstáculo que impede a comparação da medida do segmento s , usando u como unidade, força o aluno a buscar uma solução. Um dos caminhos seria diminuir o tamanho de u ou dividir o u . Nas representações escritas anteriormente, a maior parte delas utiliza a segunda estratégia, que é dividir o u , isto é, $6u$ e $\frac{1}{2}u$ ou $6,5u$ ou $\frac{13}{2}u$.

Se diminuíssemos o tamanho de u , ou seja, se considerássemos uma outra unidade t que medisse a metade de u , teríamos como medida para s uma quantidade inteira de unidades t ; neste caso, s mediria $13t$.

Era dessa forma que os gregos “fugiam” do conceito de número racional e conseguiam reestruturar o problema no trabalho com números inteiros positivos.

Para visualizar a fração $\frac{13}{2}u$, devemos dividir u em duas partes iguais.



Comparando com o segmento s , temos um total de 13 metades da unidade u que foi dividida em duas partes.

Como você sabe, a quantidade $\frac{13}{2}u$ é um **número racional**.

Números racionais são todos aqueles que podem ser escritos sob a forma de fração, com numerador e denominador inteiros e denominador diferente de zero. Dito de uma outra forma, um número racional é aquele que pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$ em que a e b são números inteiros, e $b \neq 0$.

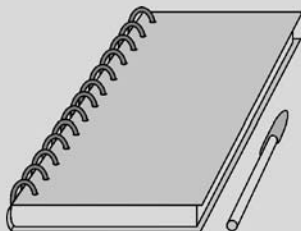


!

Lembre-se de que medir é comparar duas grandezas. Por isso, atividades desse tipo devem ser exploradas com os alunos.

ATIVIDADES

1. Meça a maior dimensão do seu caderno usando sua caneta. Represente esta medida da maneira que achar conveniente. Procure ser o mais preciso possível.



COMENTÁRIO

Essa resposta pode variar de aluno para aluno, vai depender do tamanho do caderno e do tamanho da caneta. Por exemplo, se as medidas aproximadas da caneta e da maior dimensão do caderno forem 15cm e 28cm, respectivamente, podemos expressar essa medida por $\frac{28}{15}$ ou $\frac{13}{15}$.

2. Meça cada um dos segmentos abaixo usando o segmento **a** como unidade.

a

2. a. $\frac{q}{\dots}$

2. b. $\frac{p}{p}$

2. c. S

2. d. p

COMENTÁRIO

Não se esqueça de expressar a quantidade de **a** em cada caso.



Lembre-se de que as palavras não surgem ao acaso! Denominador significa “aquele que dá o nome”; no caso, “nome” tem o significado do *todo* que se está trabalhando; numerador significa “aquele que dá o *número de partes consideradas*”.

A representação mais usual do número racional dentro da escola é a fração. Isso se justifica, pois a definição de número racional envolve essa representação.

CONVERSANDO SOBRE EPISÓDIOS DA HISTÓRIA DAS FRAÇÕES

Quando o homem percebeu que os números naturais não eram suficientes para indicar partes e inteiros, ou parte de uma coleção de objetos, ele necessitou criar novos números: os números fracionários ou racionais. Surgiram, então, as **FRAÇÕES**. Como você viu na Aula 1 de Pré-Cálculo, os gregos já conheciam bem as frações. De fato, quando Pitágoras de Samos disse que “os números governam o mundo”, pensava nos números naturais e nas razões entre eles, ou seja, nas frações.



Os egípcios, por meio de tabelas apropriadas e métodos engenhosos, conseguiam lidar muito bem com as frações unitárias. Esse hábito, embora pesado e inconveniente no nosso ponto de vista, sobreviveu até a Idade Média.

Os egípcios usaram frações há 4000 anos. Um fato curioso é que eles utilizavam frações unitárias, ou seja, frações com numerador igual a 1. Por exemplo, a fração $\frac{2}{3}$ era escrita como $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$. Confirme este fato, fazendo a soma das frações unitárias.

Os babilônios usavam as frações com denominadores iguais a 60, pois seu sistema era sexagesimal. Esse fato ocorreu porque a circunferência pode ser dividida em 360 partes iguais, e cada parte corresponde a 1 grau, cada grau a 60 minutos e cada minuto a 60 segundos. Os submúltiplos da unidade de medida de ângulo são os mesmos submúltiplos do tempo, ou seja, horas, minutos e segundos. Essa forma de medir ângulo e tempo tem origem no sistema sexagesimal dos babilônios.

Com o passar do tempo, muitas notações passaram a ser usadas na representação de frações. Com o sistema de numeração hindu ficou mais simples escrever qualquer número por maior que ele fosse. A criação dos números naturais simplificou muito o trabalho com os números fracionários. A representação atual, $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \dots$, utilizando a barra, data do século XVI. Os números decimais têm origem nas frações decimais (denominador 10, 100, 1000, ...).

FRAÇÃO

A palavra fração deriva das raízes latinas *fractio* e *minutum* ruptus, traduzidas pelos autores ingleses de livros antigos de Aritmética como *broken numbers* (números quebrados). A palavra árabe usada para nomear essas quantidades é *al-kasr*, derivada do radical do verbo quebrar.



Na Aula 2, você estudou diferentes bases. Os babilônios faziam grupamentos de 60 em 60, por isso sua base é chamada sexagesimal.

AS FRAÇÕES QUE CIRCULAM POR AÍ...

Existe uma discussão, por parte dos pesquisadores em Educação Matemática, sobre a importância ou não de dedicar um tempo significativo das aulas de Matemática para ensinar o conceito de frações e as operações com frações. Alguns defendem que a representação decimal do número racional deve ser explorada de forma mais efetiva, uma vez que é mais utilizada nas relações de nosso dia-a-dia. É importante que o professor estabeleça um equilíbrio no ensino das diferentes representações, explore as relações entre essas representações, investigue regularidades nas operações e estabeleça um elo com a resolução de problemas. No Ensino Fundamental, as operações do tipo $\frac{7}{342} + \frac{6}{245}$, ou $2,3456 \times 5,71398$, se não estiverem inseridas em um contexto, acrescentarão muito pouco para uma aprendizagem significativa de nosso aluno.

A seguir, veja alguns exemplos de expressões utilizadas no cotidiano que envolvem a noção de medida nos racionais.

Meia três quartos: diz-se da meia que chega quase ao joelho. Ela cobre aproximadamente três quartos ($\frac{3}{4}$) da distância do joelho ao pé.

Rezar o terço: o terço é um colar de contas que corresponde a $\frac{1}{3}$ do rosário, que também é um colar de 165 contas, em que 15 dezenas de contas correspondem às Ave-Marias e 15 contas aos Padre-Nossos. Os fiéis que rezavam essa grande quantidade de orações usavam as contas do rosário para não errar o número de orações. Sendo assim, o terço também é um colar contendo 55 contas, 5 dezenas correspondendo às Ave-Marias e 5 aos Padre-Nossos.

Quarto de boi: é uma parte do corpo do boi; depois de este ser abatido, correspondente a aproximadamente $\frac{1}{4}$ (quarta parte) de seu corpo.



É provável que alguns de vocês conheçam essas e outras expressões, mas talvez ainda não tenham pensado no significado delas. Essa atitude de curiosidade deve fazer parte da sua prática como licenciando em Matemática e futuro professor.



ATIVIDADE

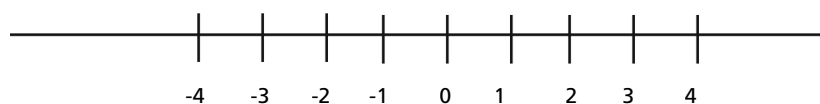
3. Converse com pessoas de sua cidade e apresente mais dois exemplos do uso de frações na linguagem do dia-a-dia, esclarecendo seu significado.

COMENTÁRIO

Esta é uma atividade de resposta aberta. É importantíssimo que você analise as respostas encontradas e converse com o tutor.

UM OLHAR RACIONAL SOBRE A RETA NUMÉRICA

Pegue uma folha de papel e uma régua, trace uma reta numerada e represente nela alguns números inteiros positivos e negativos. Considere o número zero como sendo a origem; defina a distância entre o 0 e o 1 como a unidade de medida e represente-a, por exemplo, como 1cm, 10cm ou outra medida qualquer da sua escolha. Essa distância é denominada escala; ela é definida por você e deve ser adequada para todos os números que você pretende representar. Essa reta é denominada reta numérica, e é nela que fazemos a representação geométrica dos números racionais.



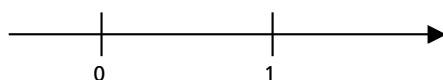
Observe a reta numérica, pegue sua régua e verifique qual a escala utilizada. Se ao medir a distância entre o 0 e o 1, ou entre dois inteiros quaisquer consecutivos, você verificar que mede 1cm, isso significa que, nesta escala, 1cm corresponde a 1.

Apesar de podermos construir uma reta numérica apenas para representar os números inteiros, você deve perceber que ela é adequada para representar muitos outros números, visto que é formada por um conjunto infinito de pontos.

Vamos ilustrar uma idéia que trouxe desdobramentos importantes e complexos dentro da Matemática: a essência da continuidade em um segmento de reta (a noção de que cada ponto da reta representa algum número) se deve à possibilidade da sua divisão em duas partes.

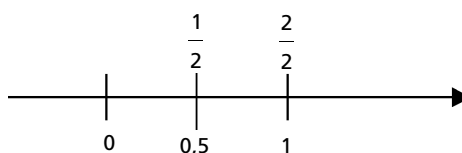
Entre dois números inteiros existem números pertencentes a outros conjuntos numéricos. Na reta numérica “materializamos” esta idéia pelos “espaços” entre dois números inteiros. Nesta aula, vamos nos referir apenas ao conjunto dos números racionais. Devemos esclarecer, por enquanto, que estes não preenchem completamente a reta numérica. Entretanto, essa idéia é bem complexa para a compreensão do aluno do Ensino Fundamental, pois visualmente, na reta numérica, ele não consegue marcar mais pontos a partir de certa quantidade de elementos.

Vamos identificar, na reta numérica, alguns números racionais compreendidos entre os números 0 e 1 para mostrar esse fato.



Divida o espaço entre 0 e 1 ao meio. Com essa ação, você encontra um número racional que pode ser representado de muitas maneiras. Nesse momento, vamos pensar apenas em duas: a forma decimal 0,5 ou a forma fracionária $\frac{1}{2}$.

! Lembre que a representação do número 1 como decimal é sempre com 1 na parte inteira e 0 nas casas decimais, e que a representação do número 1 como fração poderia ser de infinitas formas, $\frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4}$ e assim por diante.



O 0,5 não é o único número racional entre 0 e 1. Podemos determinar outros números decimais entre 0 e 0,5 e entre 0,5 e 1. Vamos dividir esses “espaços” novamente por dois? Que números representam essas novas quantidades? Se você respondeu que são o 0,25 e o 0,75, você está certo!

Se representamos 0,5 e 1,0 como números fracionários, temos: $\frac{1}{2}$ e 1. Neste caso, que frações representam 0,25 e 0,75?



Como você pode perceber, poderíamos continuar a dividir cada segmento por dois indefinidamente. Isso acontece porque a reta numérica é um conjunto de infinitos pontos, e entre dois números racionais existe sempre um outro número racional.

O que você achou dessa representação fracionária? Não seria mais natural se marcássemos na segunda reta os números $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{4}$?

Por que poderíamos fazer isso? Você acertou se lembrou que $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ são duas frações equivalentes e que podem também ser representadas pelo número decimal 0,5.

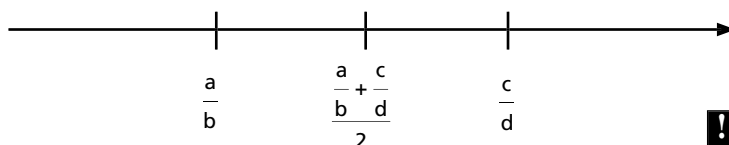
Uma característica importante dos números racionais, que pode ser verificada por meio de sua representação na reta numérica, é a não-existência do número sucessor. Assim, se você quiser, por exemplo, encontrar o número racional mais próximo de 2 e pensar no 2,1, verificará que entre o 2 e o 2,1 existe o 2,01 e que entre o 2 e o 2,01, existe o 2,001 e assim por diante. Essa idéia, de que entre dois racionais existe outro racional, é o que chamamos em Matemática de densidade. O conjunto dos números racionais é um conjunto denso. Tal fato não acontece no conjunto dos números inteiros, pois, por exemplo, entre os números 2 e 3 não há nenhum número inteiro.

Para a formalização do conceito de densidade, sejam dois números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ (a, b, c e d inteiros e b e d não-nulos), sempre podemos encontrar o número que está exatamente na metade, isto é, o ponto médio deles. Esse número é obtido calculando-se a média aritmética entre eles.

Neste caso, teremos:

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{2} = \frac{\frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd}}{2} = \frac{ad + bc}{2bd}$$

que é o número equidistante aos números $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$.



Esta idéia foi utilizada no começo da aula, quando localizamos os pontos médios na reta numérica racional. Lembra? Pegamos um segmento e encontramos sua metade. Pensar em metades pode nos remeter a idéias e atividades muito interessantes. Veja!

Você observou também que um mesmo número racional pode ser representado por um número decimal ou por uma fração. A representação fracionária reforça a idéia de divisão. Por exemplo, a distância entre os inteiros 0 e 1 é 1, e a metade dessa distância é $1 \div 2$, que representamos pela fração $\frac{1}{2}$. O que você achou dessa representação fracionária? Não seria mais natural se marcássemos na segunda reta os números $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{4}$? Por que poderíamos fazer isso? Você acertou se lembrou que $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ são frações equivalentes.



Na verdade, para que um conjunto seja denso, basta que exista um número desse conjunto entre quaisquer outros dois números desse mesmo conjunto. O conjunto dos números racionais é denso, e, entre dois números racionais, não só existe outro número racional, como infinitos números racionais.

Considerando as frações equivalentes, cada número racional terá infinitas representações. Não se esqueça de que as frações equivalentes são aquelas que representam a mesma quantidade e são obtidas se multiplicamos ou dividimos o numerador e denominador por um mesmo número.



É usual trabalharmos com frações irredutíveis, pois dessa forma encontramos os menores números p e q que expressam a fração $\frac{p}{q}$. Apesar de o professor destacar isso para o aluno, existe, por parte do professor de Matemática, uma espécie de “hábito” de considerar apenas a fração irredutível como solução correta de um problema. Vale ressaltar ainda que essa cobrança excessiva não faz com que o aluno compreenda as ações das operações que realizou no problema e nem sempre é a representação mais conveniente.

A reta numérica é um instrumento muito importante, e precisamos ter muita familiaridade com ela e com a representação dos números racionais. Se os números que queremos representar na reta numérica estão em *forma fracionária e possuem o mesmo denominador*, podemos ordená-los observando apenas o numerador. Essa ordenação equivale à ordenação dos números inteiros.

Quando os números racionais possuem o mesmo numerador e denominadores diferentes, devemos analisar com mais cautela. A comparação é um importante instrumento.

Por exemplo, o que é maior $\frac{1}{5}$ ou $\frac{1}{6}$? Observe que na fração $\frac{1}{5}$, o 1 foi dividido em menos partes que na fração $\frac{1}{6}$. Assim, $\frac{1}{6}$ está mais próximo do 0 que $\frac{1}{5}$. Portanto, o $\frac{1}{6}$ é menor.

Por outro lado, a representação decimal nos possibilita uma visualização mais rápida da localização do número. Agora, se eles possuem *numeradores e denominadores diferentes*, tanto a ordenação quanto a representação na reta numérica podem apresentar mais dificuldades. Neste caso, você tem dois caminhos a seguir:

- transformar todos os números fracionários em frações equivalentes com o mesmo denominador ou,
- transformar todos os números fracionários em decimais.

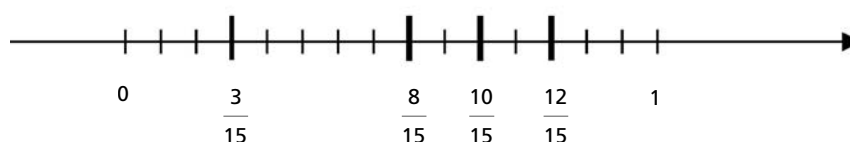
Veja um exemplo!

Ordenamos e representamos na reta numérica a seguir os números $\frac{1}{5}, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}$ e $\frac{4}{5}$.

Para ordenar e representar os números fracionários, precisamos, primeiramente, achar as frações equivalentes de mesmo denominador.

O menor denominador comum de 5, 3, 15 e 5 é o 15, e as frações equivalentes que iremos trabalhar são $\frac{3}{15}, \frac{10}{15}, \frac{8}{15}$ e $\frac{12}{15}$, pois $\frac{1}{5} = \frac{3}{15}, \frac{2}{3} = \frac{10}{15}, \frac{8}{15} = \frac{8}{15}$ e $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$.

Como todos esses números são positivos e menores que $\frac{15}{15}$, todos estão entre 0 e 1. Assim, a representação desses números na reta numérica fica dessa forma:



Observe que dividimos o segmento de 0 a 1 em 15 partes iguais e marcamos a terceira, a oitava, a décima e a décima segunda partes.

Se fôssemos utilizar a representação decimal, teríamos que:

$$\frac{1}{5} = 0,2, \frac{2}{3} = 0,666..., \frac{8}{15} = 0,5333... \text{ e } \frac{4}{5} = 0,8$$

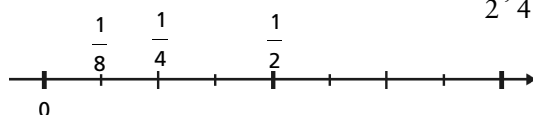
Nesse caso, a dificuldade seria diferente, já que dois desses números têm representação decimal infinita, isto é, a divisão continua infinitamente. Quando nos deparmos com números desse tipo, para marcá-los na reta numérica sem usar a representação fracionária é necessário fazer uma aproximação.

Os números gerados a partir de frações em que a divisão é um processo infinito são chamados dízimas periódicas. Você terá, em outras aulas desta disciplina, outros momentos em que voltaremos a trabalhar com esses números.

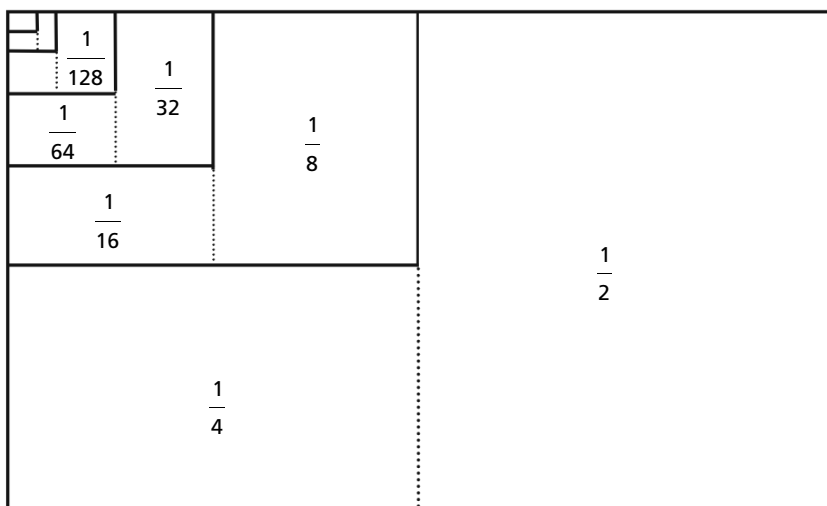
METADES, FRAÇÕES E O INFINITO PARA DENTRO

Geralmente, a idéia comum de um conjunto infinito é aquela do “infinito para fora”, ou seja, pensamos no horizonte, ou mesmo no conjunto dos números naturais, em que não existe o maior número natural. Mas que tal pensarmos na idéia do “infinito para dentro”?

Trace um segmento de reta de qualquer tamanho, marque o ponto médio desse segmento. Desse ponto até uma das extremidades temos outro segmento. Marque, então, o ponto médio desse novo segmento, e repita o processo até onde for possível. O registro do valor dessas metades em relação ao inteiro inicial gera a sequência $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32} \dots$



Podemos nos remeter à mesma idéia usando um retângulo de papel e dobras, encontrando metade, metade da metade, metade da metade da metade,... dobrando e escrevendo no retângulo a fração correspondente. Assim, fica visível que esses tamanhos vão diminuindo...



ATIVIDADES

4. Observe, nas duas ilustrações anteriores, que a soma desses segmentos ou das áreas dos retângulos resulta em 1. Discuta com seu tutor uma justificativa para esse fato.

COMENTÁRIO

Os números encontrados formam uma sequência de primeiro termo 1 e razão $\frac{1}{2}$, denominada também Progressão Geométrica (P.G.),

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$ Para provar que a soma desses termos é igual

a 1, pesquise sobre a soma de termos de uma PG.

5. Era uma vez um rei que deixou como herança uma barra de ouro para ser dividida igualmente entre seus dois filhos. Para que não houvesse grande perda de ouro, deveriam fazer um único corte contínuo.

Pegue uma folha de papel retangular e descubra diferentes formas de dividi-la em partes iguais. Você poderá utilizar a tesoura para recortar a folha de papel que representa a barra de ouro.

COMENTÁRIO

Você deve ter percebido que esse tipo de tarefa relaciona o senso numérico (frações) com o aspecto geométrico (áreas).



Lembre-se de que, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), no Ensino Fundamental, os conteúdos matemáticos estão agrupados nos seguintes blocos: Grandeza e Medida, Espaço e Forma, Números e Operações e Tratamento da Informação. Procure, sempre que possível, desenvolver atividades que relacionem os blocos. Acesse www.mec.gov.br e leia os PCN.

COMPARAÇÃO E ORDENAÇÃO NA RETA NUMÉRICA RACIONAL

Observando a reta numérica, notamos que a ordem que os números racionais obedecem é crescente e da esquerda para a direita, razão pela qual se convencionou que a reta seja indicada com uma seta para a direita. Do ponto de vista geométrico, um número que está à esquerda é menor do que um número que está à direita na reta numerada.



A representação geométrica dos números racionais em uma reta numérica é muito importante. Auxilia no entendimento do seu significado e permite comparar esses números.

No entanto, se os conceitos relacionados aos números racionais não estão bem entendidos, sua ordenação pode parecer contraditória.

Uma criança pode se perguntar:

Se $4 > 2$ por que $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$? Se $2 < 3 < 4 < 5 < 6$, por que $\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{6}$?

Se $4 > 2$ por que $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$? Se $2 < 3 < 4 < 5 < 6$, por que $\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{6}$?

Uma forma de desenvolver o conceito de ordenação dos racionais é começarmos a ordenar as frações com numerador igual à unidade e utilizar a sua posição na reta numérica.

Lembre que isso é estranho para os alunos das séries iniciais e, até mesmo, da 5ª ou 6ª séries, que muitas vezes estão familiarizados apenas com a idéia de contagem, com a representação dos números naturais e com sua ordenação “natural”.



Revise as regras básicas da relação de ordem no conjunto \mathbb{Q} , visto na Aula 3 de Pré-Cálculo.



Os alunos apresentam, comumente, essa dificuldade na aprendizagem inicial dos números racionais. Ou seja, além de estarem pautados no raciocínio com os números naturais, eles não percebem a fração como um novo número. Para eles, são dois números separados por um traço.

Se a unidade é dividida em duas, três, quatro, cinco e seis partes iguais, respectivamente, os números

fracionários $\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{6}$ expressam o tamanho

de cada parte. Assim, quanto maior o número de

partes, menor a quantidade. $\frac{1}{10} > \frac{1}{20} > \frac{1}{100}$.



Lembre-se de que atividades em que se fatoram números inteiros em produto de primos e o conceito de divisor de um inteiro são muito importantes para entender as frações.

Quando ordenamos os números racionais que não representam quantidades inteiras, não podemos nos guiar pela grandeza dos algarismos, e sim pelo seu significado. Veja a seguir a importância de saber o significado dos números decimais, muito presentes em nosso cotidiano e na Matemática; lembre que a reta numérica é comumente utilizada para a representação dos números racionais em forma decimal.

OS NÚMEROS DECIMAIS TAMBÉM SÃO RACIONAIS

Para ajudar no entendimento dos números decimais, é preciso reforçar duas idéias: a primeira é de que entre quaisquer dois números decimais existe sempre um outro número decimal que se encaixa ali. A segunda é de que o significado da grandeza do número decimal parece ser diferente do significado do número natural, mas não é.

A contradição aparente que acontece na ordenação dos números fracionários, que muitas vezes confunde os que estão começando a aprender o significado dos números, também acontece com a representação decimal dos números racionais. Por exemplo, pode parecer a um iniciante na aprendizagem dos números decimais que 1,1 é menor do que 1,008 ou que 2,4 é menor do que 2,36.



As crianças costumam dizer que 1,008 é maior que 1,1 porque a quantidade de algarismos usada no primeiro caso é maior. Utilizam a mesma lógica que é válida para os números naturais.



A comparação entre números naturais difere da comparação entre os decimais. Estes últimos são compostos por uma parte inteira e uma parte fracionária que é menor do que o inteiro.

Veja a seguir uma atividade que envolve a operação com números decimais.



ATIVIDADE

6. Um professor apresenta aos alunos de Ensino Fundamental ou Médio as questões a seguir:

1. Qual o resultado da operação $1,7 - 0,9$?
2. Eu tenho um real e setenta centavos, comprei um biscoito que custou noventa centavos, quanto me sobrou de troco?

6. a. Como você acredita que os alunos resolveriam essas questões?

6. b. Em qual eles teriam mais dificuldade?

COMENTÁRIO

Na primeira questão é provável que os alunos recorram ao algoritmo da subtração de decimais e, por não compreender seu significado, encontrem um valor errado. Na questão 2, as chances de acerto aumentam. O fato de a operação envolver o contexto monetário leva o aluno a criar um significado para a situação apresentada. Pense mais nisso, converse com seus colegas, com professores em exercício e com seu tutor.

CONVERSANDO SOBRE O LABORATÓRIO DE ARITMÉTICA E ÁLGEBRA

As frações decimais com o material dourado

Utilizando o material dourado, vamos fazer uma correspondência entre a representação do número racional em forma de fração decimal e de número decimal. Assim, considerando o cubão como 1 inteiro, podemos representar o número decimal como:

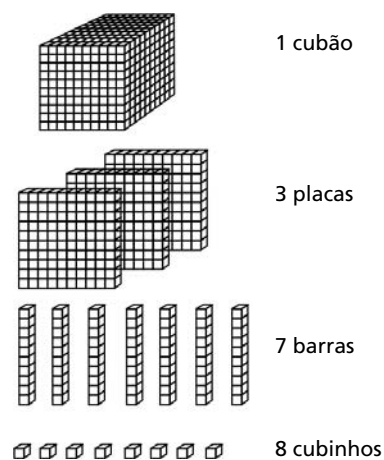
1,378

1 inteiro

3 décimos

7 centésimos

8 milésimos

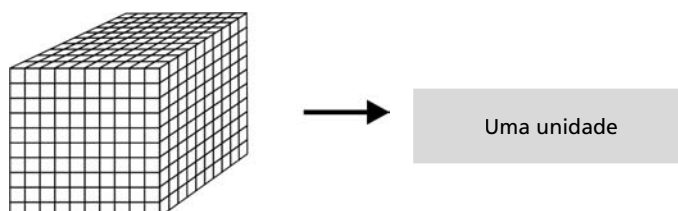


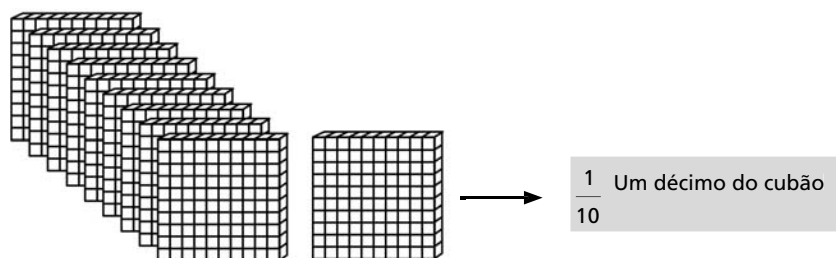
Há algumas frações que consideramos bastante especiais: são aquelas em que o denominador é dez, cem, mil ou qualquer múltiplo de dez. Estamos considerando essas frações especiais por duas razões: uma delas é porque nossa base é decimal; a outra, porque as frações decimais estão diretamente relacionadas às unidades-padrão de medida, seus múltiplos e submúltiplos. Vamos tomar o material dourado para conversar sobre os décimos, centésimos e milésimos.

Vamos considerar o cubão como **nossa unidade**.

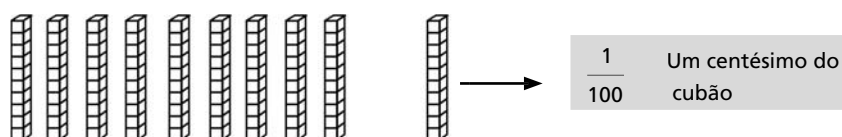


Não confunda a palavra unidade (do sistema de numeração decimal), com a unidade de medida (de referência). O cubão, neste caso.





Se dividirmos o cubão em dez partes iguais, teremos 1 placa representando $\frac{1}{10}$ da unidade considerada.



Se dividirmos 1 barra em 10 partes iguais, teremos 1 cubinho que representa $\frac{1}{10}$ da barra, $\frac{1}{100}$ da placa e $\frac{1}{1000}$ do cubão.



Fizemos aqui uma leitura diferente do material dourado. Quando trabalhamos com as operações no sistema decimal, o cubinho foi considerado como unidade.

Esta tabela resume as informações trabalhadas:

	Em relação à unidade (cubão)	Em relação à figura imediatamente maior
1 placa	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
1 barra	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$
1 cubinho	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10}$



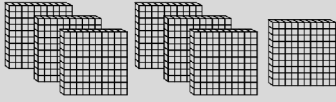

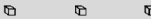
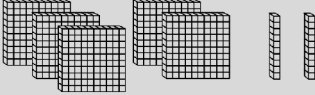
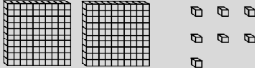
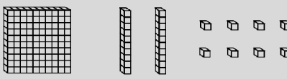
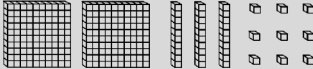
Lembre-se de que no material dourado é possível visualizar duas outras representações dos racionais, não muito desenvolvidas nesta aula: a mista (parte inteira e fração) e a percentual (%).

**ATIVIDADES**

7 Complete a tabela seguindo as indicações das colunas.

Quantidades	Representação com o material	Número misto	Fração decimal	Número Decimal			
				Unidade	Décimo	Centésimo	Milésimo
Um inteiro		–	–	1			
Um décimo		–	$\frac{1}{10}$	0,	1		
Um centésimo		–	$\frac{1}{100}$	0,	0	1	
Um milésimo		–	$\frac{1}{1000}$	0,	0	0	1
Três décimos							
Cinco décimos							
Três centésimos							
Nove milésimos							
Um inteiro e três centésimos							
Dois décimos, um centésimo e três milésimos							
Catorze milésimos							
Um inteiro, dois décimos e quatro milésimos							
Dois inteiros, um décimo, cinco centésimos e três milésimos							
Um inteiro, três décimos e quatro centésimos							

8. Dê a representação das figuras a seguir em fração decimal, considerando o cubão como 1 inteiro.

Formas	Fração
	
	
	
	
	
	
	

COMENTÁRIO

Observe que você poderá escrever sua resposta em número misto, decimal ou fracionário. Quanto mais trabalhamos com diferentes representações para uma mesma quantidade, melhor assimilamos o conceito.



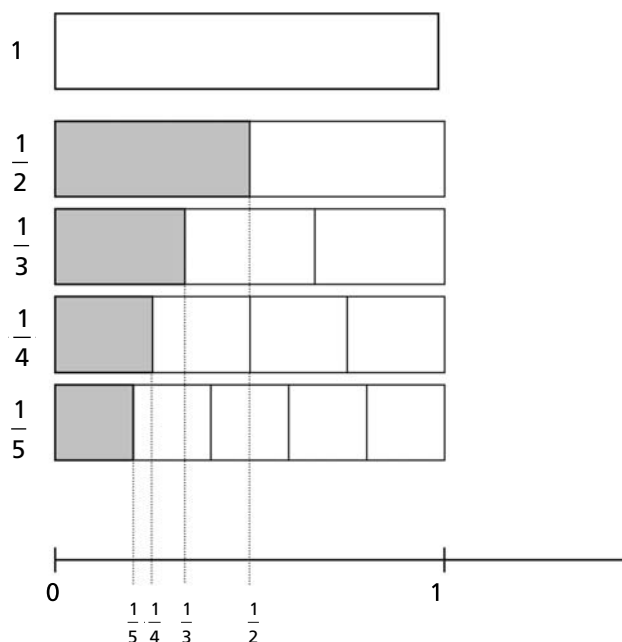
Quando usamos o material adaptado, geralmente falamos tiras em vez de placas (material original).

RESUMO

O número racional é todo número que pode ser escrito em forma fracionária e cuja construção conceitual do campo numérico está estreitamente relacionada às suas diferentes representações. Por exemplo, no que se refere à sua representação na reta, cabe destacar: (1) a reta numérica racional possui infinitos pontos, e utilizando-a representamos geometricamente os números racionais; (2) entre dois números racionais existem infinitos outros números racionais, por isso não faz sentido falar de sucessor de um número racional; e (3) podemos representar os números racionais na reta usando a forma fracionária ou a forma decimal; além disso, cada número fracionário pode ser representado de infinitas maneiras.

ATIVIDADE FINAL

Para você perceber como podemos representar, de diferentes maneiras, os números racionais, imagine que tenha pego cinco tiras de papel de mesmo comprimento. Deixe uma inteira e vá dividindo cada uma das demais da seguinte forma: ao meio, em três partes iguais, em quatro e em cinco. Vá escrevendo essas representações por meio de frações, números decimais e percentuais. Localize, também, as quantidades encontradas na reta numérica. É possível que você tenha chegado a alguma das seguintes representações.



Ao escrever as quantidades encontradas, você deve ter escolhido alguma das seguintes ou outras.

Representação fracionária	Representação decimal	Representação centesimal	Representação percentual
1/1	1,0	1,00	100%
1/2	0,5	0,50	50%
1/3	0,3...	0,33 ... ou	~33%
1/4	0,25	0,25	25%
1/5	0,2	0,20	20%

Se você conseguiu compreender diferentes representações dos números racionais envolvidas nesta atividade, e está convencido de que este tipo de tarefa é viável em suas aulas, alcançou os objetivos desta aula. Parabéns!

CONCLUSÃO

As tarefas matemáticas devem favorecer o desenvolvimento constante das diferentes representações (fracionária, mista, decimal, dízimas, percentual) envolvidas na compreensão conceitual e na definição dos números racionais. Utilizar a reta numérica é imprescindível, uma vez que ela permite desenvolver conceitos complexos e importantes (ordenação, comparação, existência, densidade, infinitude).

AUTO-AVALIAÇÃO

Esperamos que você tenha revisado criticamente sua conceituação para número racional e que tenha percebido a importância de representá-lo diferentemente.

Consideramos que as atividades propostas foram fáceis, mas, caso tenha apresentado dificuldades, não deixe de esclarecer suas dúvidas com o tutor.

INFORMAÇÃO SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, estudaremos os números inteiros negativos, outros números racionais.



RESPOSTAS

Atividade 2

2. a. 2

2. b. $\frac{1}{2}$

2. c. $3\frac{1}{2}$ ou $\frac{7}{2}$ ou 3,5

2. d. $1,7:2 = 0,85$ ou $\frac{17}{20}$

Atividade 5

Geralmente pensamos em dividir um retângulo em partes iguais, conforme as Figuras 1, 2, 3 e 4.



Figura 1

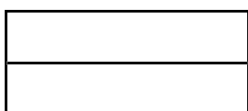


Figura 2

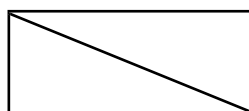


Figura 3

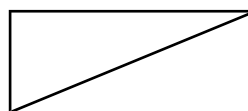
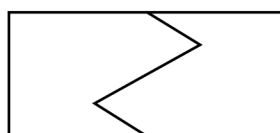
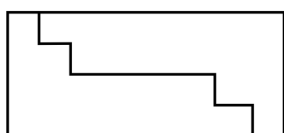
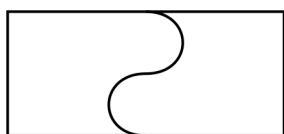
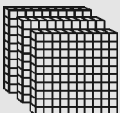
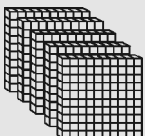


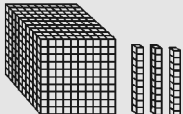
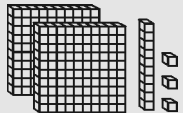

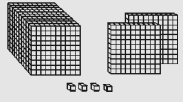
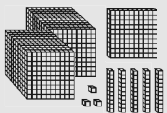
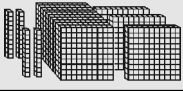


Figura 4

Saindo dos cortes usuais, podemos criar outros; é importante a preocupação com a simetria, pois nenhum dos dois herdeiros pode receber menos ouro que o outro. Observe que interessantes esses outros cortes, onde exploramos a simetria. Além destes, crie você um outro corte.



Atividade 7

Quantidades	Representação com o material	Número misto	Fração decimal	Número Decimal			
				Unidade	Décimo	Centésimo	Milésimo
Um inteiro		–	–	1			
Um décimo		–		0,	1		
Um centésimo		–		0,	0		
Um milésimo		–	$\frac{1}{1000}$	0,	0	0	
Três décimos		–	$\frac{3}{100}$	0,	3		
Cinco décimos		–	$\frac{5}{100}$	0,	5		
Três centésimos		–	$\frac{9}{1000}$	0,	0	3	
Nove milésimos		–	$\frac{103}{100}$	0,	0	0	9
Um inteiro e três centésimos		$1\frac{3}{100}$	$\frac{213}{100}$	1,	0	3	
Dois décimos, um centésimo e três milésimos			$\frac{14}{1000}$	0,	2	1	3
Catorze milésimos		$1\frac{204}{1000}$	$\frac{1204}{1000}$	0,	0	1	4
Um inteiro, dois décimos, quatro milésimos		$2\frac{153}{1000}$	$\frac{1153}{1000}$	1,	2	0	4
Dois inteiros, um décimo, cinco centésimos e três milésimos		–		2,	1	5	3
Um inteiro, três décimos e quatro centésimos		$1\frac{34}{100}$	$\frac{134}{1000}$	1,	3	4	

Atividade 8

Frações: $\frac{7}{10}, \frac{2}{100}, \frac{3}{1000}, \frac{52}{100}, \frac{107}{1000}, \frac{128}{1000}$ e $\frac{239}{1000}$.

Os números negativos também são racionais

AULA 5

Meta da aula

Instrumentalizar o ensino dos números racionais: os inteiros.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- Relembrar o conceito de número inteiro.
- Utilizar diferentes situações para trabalhar as operações com números inteiros.
- Construir significado para as operações que envolvam números inteiros.

Pré-requisitos

Para o desenvolvimento desta aula, é necessário que você relembre o conjunto dos números inteiros e suas propriedades. A leitura da Aula 1 de Pré-Cálculo também o ajudará. Tenha à mão uma tesoura.

INTRODUÇÃO

Os números inteiros negativos estão bastante presentes em diversas situações do nosso cotidiano: operações com dinheiro, temperaturas, altitudes, dentre outros. No entanto, em sua evolução histórica, eles só foram considerados como conjunto numérico no século XIX.



No Boletim do Gepem nº. 17, você poderá conhecer um interessante trabalho sobre a história dos números relativos. Acesse www.gepem.ufrj.br e encomende o seu exemplar da revista.



Você se lembra da nossa conversa, iniciada na Aula 1, sobre a Matemática da escola e a da rua? Gostaríamos de lhe apresentar outro exemplo para enriquecer sua reflexão. Se você utiliza cartão de crédito com frequência deve ter passado por essa experiência.

Geralmente, quando pagamos uma conta com cartão de crédito, o atendente nos pergunta: crédito ou débito? Não é estranho? Na verdade, ambos são formas de débito! O que acontece é que no último caso (débito), pagamos à vista, ou seja, temos o valor debitado diretamente em nossa conta; já no outro, é um débito que pagamos a prazo.

Esse é um novo exemplo de significado que a tecnologia do cartão de crédito passa a inserir em nosso cotidiano e que precisamos discutir no contexto matemático da sala de aula. Caso contrário, seremos meros usuários da tecnologia e consumidores acríticos! Pense nisso.

Além da presença no nosso dia-a-dia os números negativos são uma ampliação do conjunto dos números naturais, recebendo o nome de conjunto dos números inteiros. Mas antes de continuar essa conversa, vamos jogar!



Lembre-se de que cada recurso lúdico deve compor o seu laboratório pessoal de Aritmética e Álgebra.

VAMOS JOGAR?

Esse jogo é uma introdução de nossa aula. Você deve jogá-lo antes de continuar a leitura da aula. Pode ser com um amigo, um familiar, tanto faz!

O tabuleiro da **Figura 5.1** e os quatro tipos de peças (reproduza 16 de cada tipo, para não faltar) da **Figura 5.2** estarão disponíveis em anexo, neste volume, após a Aula 10, junto às peças das atividades desta aula. Recorte-o ou faça uma cópia para jogar.

4	1	3	2	2	3	1	4
3	2	1	4	4	1	2	3
2	3	4	1	1	4	3	2
1	4	2	3	3	2	4	1
1	4	2	3	3	2	4	1
2	3	4	1	1	4	3	2
3	2	1	4	4	1	2	3
4	1	3	2	2	3	1	4

Figura 5.1: Tabuleiro do jogo.

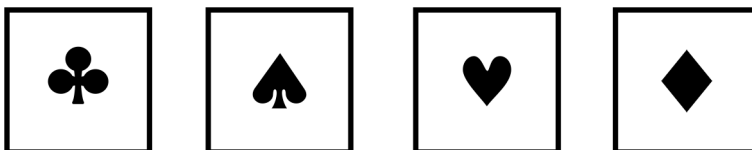


Figura 5.2: As quatro peças do jogo.

Entenda agora o jogo!

O número de jogadores pode variar de 2 a 4.

As casas brancas correspondem aos pontos ganhos e as casas cinzas, aos pontos perdidos.

Cada jogador deve pegar um dos 4 tipos de peças.

O primeiro jogador escolhe uma casa para colocar sua peça e registra seus pontos em uma tabela. A casa escolhida **não pode mais ser usada** por nenhum jogador.

Dando continuidade, o segundo jogador, a partir da casa em que está a peça do jogador anterior, escolhe onde colocar sua peça, e, a partir dessa casa, ele deve escolher uma outra que deverá estar na vertical ou na horizontal da casa correspondente.

O procedimento descrito no último parágrafo deve ser repetido pelos jogadores.

Quando um jogador não mais puder movimentar sua peça, o jogo acaba. Calcula-se, então, o número de pontos dos jogadores. Vence quem ganhar mais pontos ou perder menos.

Vamos simular uma partida para que você entenda melhor.

Suponha que Mariana e Juliana vão jogar.

A peça de Mariana é  e a de Juliana é  .

Mariana começa e escolhe o lugar onde colocar sua peça; marca então o número 4, na posição indicada na figura e registra seus pontos na tabela.

4	1	3	2	2	3	1	4
3	2	1	4	4	1	2	3
2	3	♣	1	1	4	3	2
1	4	2	3	3	2	4	1
1	4	2	3	3	2	4	1
2	3	4	1	1	4	3	2
3	2	1	4	4	1	2	3
4	1	3	2	2	3	1	4

Mariana	
Pontos ganhos	Pontos perdidos
4	

Esta casa não poderá mais ser ocupada.

Agora é a vez de Juliana: ela pode andar na vertical ou na horizontal, para cima ou para baixo, para a esquerda ou para a direita da casa que foi escolhida. Veja:

4	1	3	2	2	3	1	4
3	2	↑	4	4	1	2	3
2	←	♣	→	1	4	3	2
1	4	↓	3	3	2	4	1
1	4	2	3	3	2	4	1
2	3	4	1	1	4	3	2
3	2	1	4	4	1	2	3
4	1	3	2	2	3	1	4

Juliana escolhe o 2, na vertical para baixo, coloca sua peça no local escolhido e registra seus pontos ganhos.

4	1	3	2	2	3	1	4
3	2	1	4	4	1	2	3
2	3	♣	1	1	4	3	2
1	4	2	3	3	2	4	1
1	4	♠	3	3	2	4	1
2	3	4	1	1	4	3	2
3	2	1	4	4	1	2	3
4	1	3	2	2	3	1	4

Juliana	
Pontos ganhos	Pontos perdidos
2	

4	1	3	2	2	3	1	4
3	2	1	4	4	1	2	3
2	3	♣	1	1	4	3	2
1	4	2	3	3	2	4	1
1	4	♠	3	3	2	♣	1
2	3	4	1	1	4	3	2
3	2	1	4	4	1	2	3
4	1	3	2	2	3	1	4

Mariana agora escolhe o 4, na horizontal à direita.

Mariana	
Pontos ganhos	Pontos perdidos
4	
4	

4	1	3	2	2	3	1	4
3	2	1	4	4	1	2	3
2	3	♣	1	1	4	♠	2
1	4	2	3	3	2	4	1
1	4	♠	3	3	2	♣	1
2	3	4	1	1	4	3	2
3	2	1	4	4	1	2	3
4	1	3	2	2	3	1	4

Juliana escolhe o 3, na vertical acima.

Juliana	
Pontos ganhos	Pontos perdidos
2	
3	

4	1	3	2	2	3	1	4
3	2	1	4	4	1	2	3
♣	3	♣	1	1	4	♠	2
1	4	2	3	3	2	4	1
1	4	♠	3	3	2	♣	1
2	3	4	1	1	4	3	2
3	2	1	4	4	1	2	3
4	1	3	2	2	3	1	4

Mariana escolhe o 2, na horizontal à esquerda.

Mariana	
Pontos ganhos	Pontos perdidos
4	
4	
2	

Acompanhe algumas jogadas seguintes:

♠	1	3	2	2	3	1	4
↑	2	1	4	4	1	2	3
♣	3	♣	1	1	4	♠	2
1	4	2	3	3	2	4	1
1	4	♠	3	3	2	♣	1
2	3	4	1	1	4	3	2
3	2	1	4	4	1	2	3
4	1	3	2	2	3	1	4

Juliana, 4, na vertical para cima.

♠	1	3	2	2	3	1	4
↓	2	1	4	4	1	2	3
♣	3	♣	1	1	4	♠	2
1	4	2	3	3	2	4	1
1	4	♠	3	3	2	♣	1
↓	3	4	1	1	4	3	2
♣	2	1	4	4	1	2	3
4	1	3	2	2	3	1	4

Mariana, 3, na vertical para baixo.

♠	1	3	2	2	3	1	4
3	2	1	4	4	1	2	3
♣	3	♣	1	1	4	♠	2
1	4	2	3	3	2	4	1
1	4	♠	3	3	2	♣	1
2	3	4	1	1	4	3	2
♣	2	1	4	4	1	2	3
4	1	3	2	2	3	1	4

Juliana, 4, na horizontal à direita.

♠	1	3	2	2	3	1	4
3	2	1	4	4	1	2	3
♣	3	♣	1	1	4	♠	2
1	4	2	3	3	2	4	1
1	4	♠	3	♣	2	♣	1
2	3	4	1	↑	4	3	2
♣	2	1	4	♠	1	2	3
4	1	3	2	2	3	1	4

Mariana, 3, na vertical para cima.

♠	1	3	2	♠	3	1	4
3	2	1	4	↑	1	2	3
♣	3	♣	1	1	4	♠	2
1	4	2	3	3	2	4	1
1	4	♠	3	♣	2	♣	1
2	3	4	1	1	4	3	2
♣	2	1	4	♠	1	2	3
4	1	3	2	2	3	1	4

Juliana, 2, na vertical para cima.

♠	1	♣	2	♠	3	1	4
3	2	1	4	4	1	2	3
♣	3	♣	1	1	4	♠	2
1	4	2	3	3	2	4	1
1	4	♠	3	♣	2	♣	1
2	3	4	1	1	4	3	2
♣	2	1	4	♠	1	2	3
4	1	3	2	2	3	1	4

Mariana, 3, na horizontal à esquerda.

O jogo continua e acaba ao fim de 22 rodadas. Veja o tabuleiro com o fim do jogo e utilize o tabuleiro limpo, para verificar a pontuação de Mariana e Juliana.

♠	♣	♣	2	♠	3	♠	4
3	♠	1	♠	4	1	♣	♣
♣	♠	♣	1	♣	4	♠	2
♠	♠	2	♣	3	♣	4	♠
♣	♠	♠	♣	♣	♠	♣	♣
♠	♣	4	♣	♣	♠	3	♠
♣	♣	♠	4	♠	1	♣	3
4	♠	3	♣	♠	♣	♠	♠

4	1	3	2	2	3	1	4
3	2	1	4	4	1	2	3
2	3	4	1	1	4	3	2
1	4	2	3	3	2	4	1
1	4	2	3	3	2	4	1
2	3	4	1	1	4	3	2
3	2	1	4	4	1	2	3
4	1	3	2	2	3	1	4

Os pontos estão registrados nas tabelas abaixo.

Mariana	
Pontos ganhos	Pontos perdidos
4	1
4	2
2	2
3	1
3	1
3	3
2	
3	
3	
3	
3	
2	
1	
1	
1	
2	
Total de pontos: 28 pontos ganhos	

Juliana	
Pontos ganhos	Pontos perdidos
2	1
3	3
4	2
4	2
2	1
1	2
1	4
4	
4	
4	
4	
4	
2	
1	
2	
1	
Total de pontos: 24 pontos ganhos	

Agora que você viu como se joga, jogue uma partida, depois continue a aula.

Observe que até certo momento do jogo, a estratégia que cada jogador deve usar para ganhar é pegar os maiores números das casas brancas; quando essas casas começarem a acabar, o jogador procura pegar os menores números das casas cinzas. Nesse caso, escolher o menor número é importante para que o jogador possa ganhar.



ATIVIDADE

1. Andréia, Ana e Rosana escolheram suas peças, jogaram uma partida; a configuração ao final de 13 rodadas está conforme mostra a figura a seguir. Complete a tabela com os registros dos pontos de Ana e Rosana. Para isso, utilize o tabuleiro limpo, para saber os respectivos pontos. Dê o total de pontos de cada jogadora e diga quem está ganhando até agora. Represente os pontos ganhos usando um sinal de "mais" antes dos números e os pontos perdidos usando um sinal de "menos".

♥	1	♠	2	♣	3	♥	4	4	1	3	2	2	3	1	4
3	♠	1	♠	4	♥	2	♣	3	2	1	4	4	1	2	3
♥	3	♣	1	♠	4	♥	2	2	3	4	1	1	4	3	2
♥	♠	2	♣	♠	♣	4	♠	1	4	2	3	3	2	4	1
♣	4	♠	3	♣	2	♠	1	1	4	2	3	3	2	4	1
2	♥	4	♣	♠	♣	3	♥	2	3	4	1	1	4	3	2
♣	2	♣	4	♥	♠	♠	3	3	2	1	4	4	1	2	3
4	♣	♥	♥	♣	♠	♥	♥	4	1	3	2	2	3	1	4

Se você quiser terminar o jogo, ele parou na linha 4, na coluna 1, com a jogada de Rosana; a ordem das jogadas é Andréia, Ana e Rosana.

Andréia ♣	Ana ♠	Rosana ♥
+ 2		
+ 3		
+ 4		
+ 3		
+ 2		
+ 1		
+ 3		
+ 1		
+ 4		
+ 3		
+ 1		
+ 1		
- 2		
+ 28 - 2 → 26 pontos ganhos		

CONVERSANDO SOBRE HISTÓRIA

Gostou do jogo, manipulou um pouco os valores negativos? Vamos agora fazer um breve histórico sobre os números negativos, mostrando que, entre a aparição e a aceitação do número negativo, passaram-se mais de 1.000 anos.

As questões levantadas por alunos e professores suscitaram dúvidas e investigações de matemáticos do passado. Por isso, ensinar números negativos não é tarefa fácil!

Foi na China que encontramos a primeira referência histórica sobre a utilização dos números negativos. No seu sistema de cálculo, eles utilizavam barras numéricas pintadas de vermelho e de preto para representar os números positivos e negativos, respectivamente. Das poucas informações que chegaram sobre a Matemática chinesa antiga, a mais importante consta do livro *Nove capítulos da arte matemática* (250 a.C.). Trata-se de um conjunto de problemas sobre agricultura, engenharia, impostos, cálculo, resolução de equações, dentre outros. Nele, é apresentada pela primeira vez a resolução de sistemas de equações em que são utilizados números negativos.

Diofanto (século III), quando resolvia equações, encontrou uma resposta negativa. Ele a recusou, pois achava absurda a idéia de uma quantidade negativa; considerava somente as raízes positivas das equações, mostrando o seu desconhecimento pelos números negativos.

Os matemáticos hindus detinham um cálculo aritmético e algébrico. Isso lhes permitiu conceber um novo tipo de símbolo para representar dívidas. Posteriormente, o Ocidente chamou esse símbolo de **NEGATIVO**.

NEGATIVO

Esta palavra pode ter vindo daquela época em que os valores eram NEGADOS, quando se obtinham raízes negativas de uma equação.

A primeira vez que as regras aritméticas com números negativos apareceram explicitamente foi em uma obra do matemático hindu do século VII, Brahmagupta, que data do ano 628 d.C. Ele não só utilizou os negativos em seus cálculos, como os considerou e deu a esses números uma aritmética semelhante à dos inteiros positivos.

Muitos séculos se passaram para que o interesse pelos números negativos fosse retomado. Alguns historiadores escreveram que foram problemas com dinheiro que interpretaram o número negativo como perda.

Nos séculos XVI e XVII, muitos matemáticos europeus não apreciavam os números negativos e se eles apareciam em seus cálculos, eram considerados falsos ou impossíveis.

Na época do Renascimento, os matemáticos sentiram cada vez mais a necessidade de um novo tipo de número que pudesse solucionar problemas simples; ou seja, como encontrar um número que, somado com 2, desse 0 como resultado.

As Ciências precisavam de símbolos para representar temperaturas acima e abaixo de 0°C , por exemplo. Astrônomos e físicos procuravam uma linguagem matemática para expressar a atração entre dois corpos. Quando um corpo age com uma força sobre outro, esse outro reage com uma força de mesma intensidade e sentido contrário. Mas a tarefa não ficava somente em criar um novo número; era preciso encontrar um símbolo que permitisse operar com esse número criado, de modo prático e eficiente.

Nessa época, abriu-se uma nova etapa para os números negativos, pois Stevin (1548-1620) aceitou esses números como raízes e coeficientes de equações.

Foi o matemático Albert Girard (1590-1639) o primeiro a reconhecer explicitamente a utilidade algébrica de admitir as raízes negativas como soluções formais das equações, porque permitia uma regra geral de resolução na construção de equações através de suas raízes.

No final do século XVII, surgiu a obra de Viète, mais tarde ampliada por Descartes em 1637, em que admitiu que as expressões literais pudessem tomar valores negativos.

Hermann Hankel (1839-1873) garantiu a legitimidade dos números negativos na Matemática, em uma publicação em 1867.

Hoje em dia, os números negativos são muito comuns, pois estão presentes nos jogos, nas medidas de temperatura, nos fusos horários, nos saldos bancários, nas taxas de inflação. Frequentemente tais números saem nos jornais. Vejamos alguns exemplos.

OS NÚMEROS NEGATIVOS NAS SITUAÇÕES DO DIA-A-DIA

Convivemos com os números negativos em várias situações, tanto de contagem (saldo bancário, saldo de gols, total de pontos de um jogo), quanto de natureza física (temperatura, fuso horário). Vamos ver inicialmente três situações: saldo de gols, temperatura e fuso horário.

Uma boa aplicação de números inteiros é o saldo de gols de um campeonato de futebol, pois temos saldo de gols positivo e saldo de gols negativo.

No Campeonato Brasileiro de Futebol, cada vitória significa 3 pontos para o time; se empatar, 1 ponto e se for derrotado não ganha nenhuma pontuação. Veja a seguir a tabela final de classificação dos 24 times que participaram do Campeonato de 2003, em que:

J – número de jogos;

V – número de vitórias;

E – número de empates;

D – número de derrotas;

GP – gols pró (que o time fez);

GC – gols contra (que o time levou);

SG – saldo de gols (diferença entre o número de gols feitos e o número de gols sofridos por um clube, isto é, $SG = GP - GC$).

Tabela 5.1: Classificação no Campeonato Brasileiro

Colocação final	Time	PG	J	V	E	D	GP	GC	SG
1°	Cruzeiro	100	46	31	7	8	102	47	55
2°	Santos	87	46	25	12	9	93	60	33
3°	São Paulo	78	46	22	12	12	81	67	14
4°	São Caetano	74	46	19	14	13	53	37	16
5°	Coritiba	73	46	21	10	15	67	58	9
6°	Internacional	72	46	20	10	16	59	57	2
7°	Atlético-MG	72	46	19	15	12	76	62	
8°	Flamengo	66	46	18	12	16	66	73	-7
9°	Goiás	65	46	18	11	17	78	63	15
10°	Paraná	65	46	18	11	17	85	75	10
11°	Figueirense	65	46	17	14	15	62	54	8
12°	Atlético-PR	61	46	17	10	19	67	72	-5
13°	Guarani	61	46	17	10	19	64	70	-6
14°	Criciúma	60	46	17	9	20	57	69	-12
15°	Corinthians	59	46	15	12	19	61	63	-2
16°	Vitória	56	46	15	11	20	50	64	
17°	Vasco	54	46	13	15	18	57	69	-12
18°	Juventude	53	46	12	14	20	55	70	-15
19°	Fluminense	52	46	13	11	22	52	77	
20°	Grêmio	50	46	13	11	22	54	66	-12
21°	Ponte Preta	50	46	11	18	17	63	73	-10
22°	Payssandu	49	46	15	12	19	74	77	
23°	Fortaleza	49	46	12	13	21	58	74	-16
24°	Bahia	46	46	12	10	24	59	92	-33

O saldo de gols é um dos critérios de desempate na classificação dos times, por isso a sua importância. Copiamos da tabela a pontuação dos 12° e 13° colocados; os dois tiveram 61 pontos ganhos, com 17 vitórias e 10 empates ($17 \times 3 + 10 = 61$). Veja:

12° – Atlético – PR

17 vitórias

10 empates

19 derrotas

67 GP

72 GC

$SG = 67 - 72 = -5$, isto é, um saldo negativo de 5 gols.

13° – Guarani

17 vitórias

10 empates

19 derrotas

64 GP

70 GC

$SG = 64 - 70 = -6$, isto é, um saldo negativos de 6 gols.

Nesse caso, como o número de vitórias dos dois times foi o mesmo, o critério de desempate utilizado foi o saldo de gols. O time que obteve o maior saldo de gols ficou mais bem colocado. Vimos, no caso, que foi o Atlético-PR.

Vamos analisar dois fatos importantes. O primeiro é sobre o resultado das operações $67 - 72$ e $64 - 70$, pois ao efetuarmos a subtração de dois números naturais não encontramos como resposta um número natural, mas sim um número negativo.

Nas duas operações, o resultado numérico foi obtido por meio de subtrações do maior número pelo menor. Veja:

$67 - 72 = -5 \rightarrow$ o 5 é o resultado de $72 - 67$, só que o resultado é negativo, pois o Atlético-PR levou mais gols do que fez!

$64 - 70 = -6 \rightarrow$ o 6 é o resultado de $70 - 64$, porém o resultado é negativo, pois o Guarani levou mais gols do que fez!

Por isso, o resultado das duas operações é um número negativo.

O segundo fato é que o número -5 é maior do que o número -6 ; por isso, o Atlético-PR ficou na frente do Guarani. Mais adiante, veremos essa ordenação na reta.



ATIVIDADE

2. Determine os valores referentes ao saldo de gols dos times com as seguintes classificações:

7º: _____

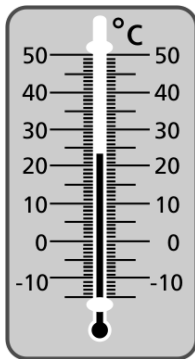
16º: _____

19º: _____

22º: _____

Falando de medidas e fusos horários

Você já deve ter observado que nem sempre podemos caracterizar o estado térmico de um objeto (quente, frio, morno etc.) através das sensações transmitidas pelos órgãos dos sentidos, pois estas dependem tanto do material de que é feito o objeto tocado como das condições que precederam o contato com o nosso corpo.



Para caracterizar tais estados térmicos, isto é, a medida de temperatura, utilizamos termômetros.

Existem vários tipos de termômetros, por exemplo: os clínicos, para medir a temperatura do corpo, e os de medição de temperatura do ar. Veja a ilustração ao lado, de um termômetro que mede a temperatura do ar.

Observe que temos números acima e abaixo do zero. Esse termômetro marca a temperatura em graus **CELSIUS** e vai desde 15 graus Celsius abaixo de zero até 50 graus Celsius acima de zero, isto é, de -15°C até 50°C . Uma variação correspondente a 65°C .



A temperatura em que a água vira gelo é 0°C (zero grau Celsius) e a temperatura em que ela entra em ebulição é 100°C .

Em 1741, **ANDERS CELSIUS**, físico e astrônomo sueco, fixou em 0 a temperatura de ebulição da água e, em 100, a da fusão do gelo (ao contrário do que acontece hoje). Em 1745, Lineu inverteu as graduações da escala de Celsius. Essa escala foi largamente utilizada na França e foi escolhida pela Convenção em 1794, quando da adoção do Sistema Métrico. Sua unidade é o grau Celsius.

Quando a temperatura está acima de zero, dizemos que ela é positiva, e, nesse caso, falamos simplesmente o número. Por exemplo: “No verão do Rio de Janeiro, a temperatura pode chegar a 42°C .”. Queremos dizer que a temperatura é de 42 graus Celsius acima do zero, ou 42 graus Celsius positivos.

Já quando fazemos referência a temperaturas abaixo de zero, é necessário ou falar graus Celsius negativos, ou escrever a temperatura precedida do sinal de menos. Por exemplo: “Nas serras gaúchas, a temperatura pode chegar a -5°C , ou 5 graus Celsius negativos.”

Veja as tabelas a seguir, que mostram a temperatura em algumas cidades do mundo num determinado dia de dezembro e num determinado dia de junho.

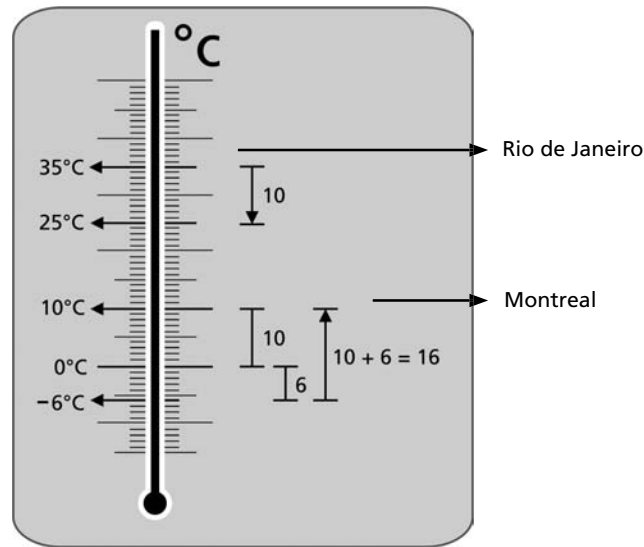
Tabela 5.2: Temperaturas em várias cidades

Cidade	Temperatura em dezembro	Cidade	Temperatura em junho
Rio de Janeiro	35°C	Rio de Janeiro	25°C
Porto Alegre	21°C	Porto Alegre	8°C
Madri	6°C	Madri	28°C
Londres	-2°C	Londres	18°C
Montreal	-6°C	Montreal	10°C

Sobre esta tabela, em relação ao mês de dezembro, pode-se dizer que a cidade que apresenta a temperatura mais alta é o Rio de Janeiro, e a mais baixa é a cidade de Montreal, no Canadá. Já em junho, a temperatura mais alta está ocorrendo em Madri e a mais baixa em Porto Alegre. Quanto maior a quantidade de graus negativos, mais baixa é a temperatura; conseqüentemente, mais frio está o ar.

Comparando as duas tabelas, observamos que no Rio de Janeiro, do mês de dezembro para o mês de junho, ocorre uma diminuição de 10°C na temperatura; dizemos que ocorreu uma variação de -10°C .

Verificando o mesmo na cidade de Montreal, a temperatura passa de -6°C para 10°C , neste caso, houve um aumento de 16°C na temperatura, que corresponde a uma variação de $+16^{\circ}\text{C}$. Veja no desenho a seguir:



Observando o processo você verifica que o cálculo da variação de temperatura é obtido por meio de uma subtração. Veja:

Variação de temperatura = temperatura final – temperatura inicial

Usando essa expressão para o cálculo das variações feitas acima, temos:

Rio de Janeiro: variação = $25^{\circ}\text{C} - 35^{\circ}\text{C} = -10^{\circ}\text{C}$

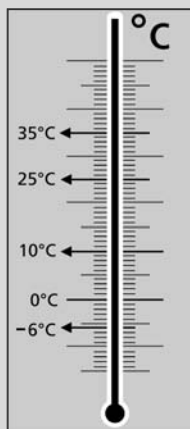
Montreal: variação = $10^{\circ}\text{C} - (-6^{\circ}\text{C}) = 16^{\circ}\text{C}$

Veja que para encontrarmos a variação de temperatura utilizamos a subtração.



ATIVIDADE

3. Localize no termômetro a seguir as temperaturas em dezembro e em junho das cidades de Porto Alegre e Londres, e determine a variação dessas temperaturas, a partir das indicações de dezembro e junho.



Veja que os números negativos estão presentes na análise de temperaturas, em que percebemos uma utilidade cotidiana. No entanto, como enfatizaram **LINS** e **GIMÉNEZ**, (1997) no cotidiano, não somamos a temperatura de duas cidades para saber a previsão do tempo. Por exemplo, somar a temperatura de Niterói com a da cidade de São Paulo e dizer que a soma equivale a $\pm x$ graus. Algumas operações com número não têm sentido fora do contexto escolar!

ROMULO LINS é professor da Universidade Estadual Paulista (Unesp-Rio Claro, SP). Foi presidente da SBEM (Sociedade Brasileira de Educação Matemática).

JOAQUIN GIMÉNEZ é professor da Universidade de Barcelona e pesquisador muito atuante na área de Educação Matemática brasileira.



Refletindo sobre a matemática da rua e a da escola, Lins e Giménez (1997) ressaltam que no processo ensino-aprendizagem o professor deve:

- explicitar, na escola, os modos de produção de significados da rua;
- produzir legitimidade, dentro da escola, para os modos de produção de significado da rua (ato político, ato pedagógico);
- propor novos modos de produção de significados, que se juntem aos da rua, ao invés de substituí-los.

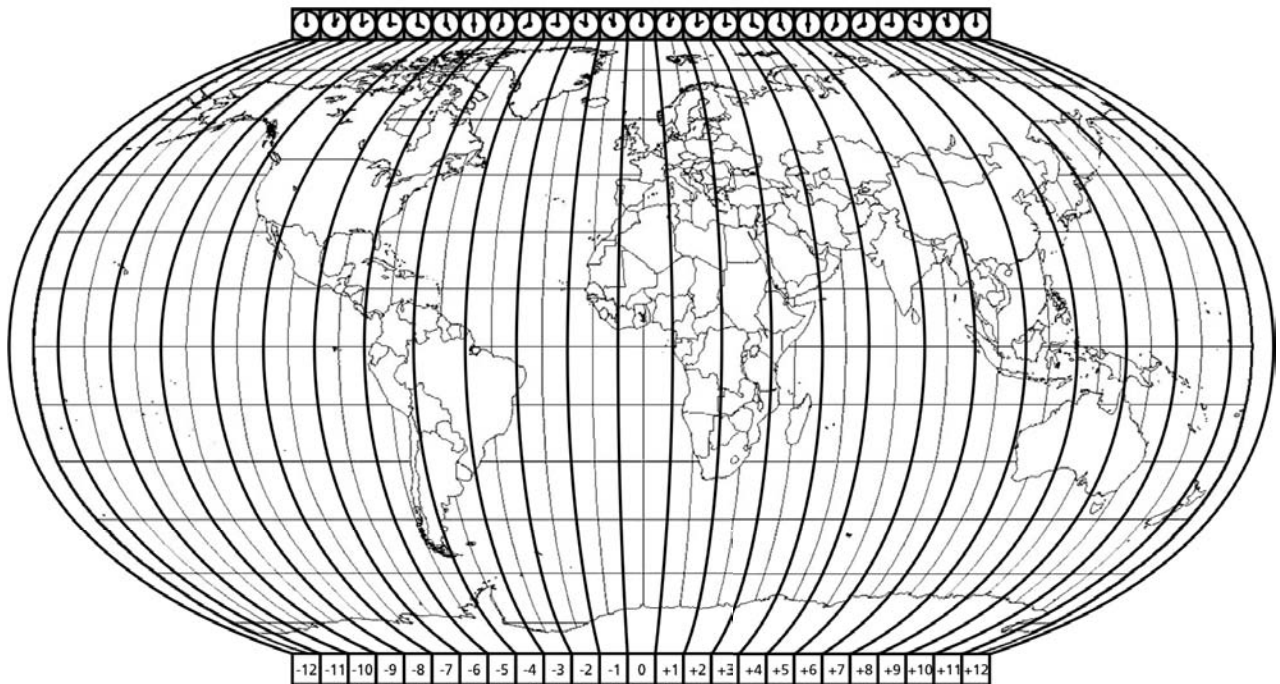
Finalizando, sublinham os autores que a Matemática produzida por um sujeito não é independente de seu pensamento, mas pode vir a ser cristalizada e tornar-se parte de uma Ciência, a Matemática, ensinada na escola e aprendida dentro e fora dela.

No mapa da figura a seguir estão esquematizadas as 24 regiões, pela quais a Terra foi dividida; cada região é chamada **fuso**. Cada fuso tem o seu horário local. Em duas cidades de um mesmo fuso horário, os relógios marcam a mesma hora.

Observe, no mapa, que na parte de baixo aparecem números positivos e negativos. Eles significam, por exemplo, que as cidades que estão no fuso -3 os relógios marcam 3 horas a menos do que nas cidades de fuso 0 (zero). Assim, quando em Londres (fuso 0) são 10h, no Rio de Janeiro são 7h, pois o Rio de Janeiro encontra-se no fuso -3 .

No fim do século XIX, foi criado o sistema de **FUSOS**, para ajudar a organizar o referencial de horas ao redor do mundo.

Esse sistema relaciona as 24 horas, correspondentes a um dia, com 360° , pois a Terra dá uma volta (gira 360°) em um dia (24 horas).





ATIVIDADE

4. a. As cidades Nova York e Los Angeles estão situadas nos Estados Unidos. Indique os fusos em que essas cidades estão e determine o horário delas quando no Rio de Janeiro os relógios marcam 17h.

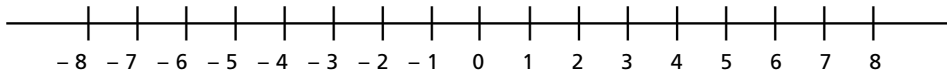
4. b. Carolina está fazendo um curso na cidade de Tóquio, capital do Japão, que está situada no fuso +9, e deseja telefonar para sua mãe, que mora no Rio de Janeiro. Sabendo que em Tóquio são 21h, qual o número que Joana deverá adicionar ao horário de Tóquio para saber que horas são no Rio de Janeiro?

O CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS E A RETA NUMÉRICA

Mostramos algumas situações em que aparecem os números negativos. Vamos agora formalizar um dos conjuntos ao qual esses números pertencem. Ele é chamado conjunto dos números inteiros e é obtido fazendo a união do conjunto dos números naturais, com o conjunto dos números inteiros negativos e com o zero.

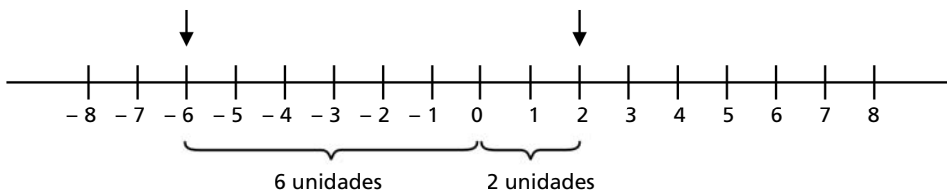
Tal conjunto é denotado pela letra Z (Zahlen, que significa número em alemão) e pode ser escrito por: $Z = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Assim como localizamos os números naturais e as frações na reta numérica, faremos o mesmo com os números negativos. O zero assume a posição de origem; à direita do zero localizamos os números naturais, também chamados de inteiros positivos; e à esquerda localizamos os negativos. Observe que foi utilizada a mesma unidade de medida para localizar os números vizinhos. Veja:



Baseando-se ainda na reta numerada, podemos afirmar que todos os números inteiros possuem um e somente um antecessor e também um e somente um sucessor. O sucessor de um número inteiro é o número inteiro que se encontra imediatamente à sua direita na reta, e o antecessor de um número inteiro é o número inteiro que está imediatamente à sua esquerda na reta. Dessa forma, dizemos que o conjunto dos números inteiros é um conjunto ordenado.

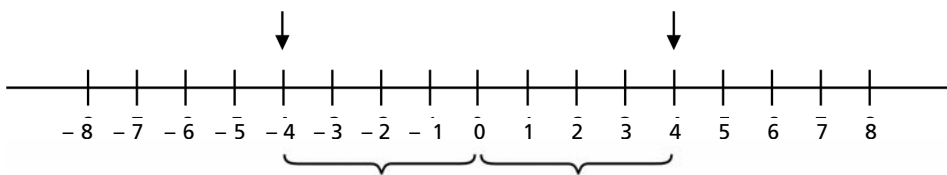
A distância entre um número e o zero é chamada **módulo** de um número inteiro. Por exemplo: Qual é o módulo de -6 ? E o módulo de 2 ?



O módulo de -6 é 6 , pois a distância desse número ao zero é de 6 unidades, e o módulo de 2 é o próprio 2 . Podemos indicar $|-6| = 6$ e $|2| = 2$. Como estamos falando de distância, podemos concluir que o módulo é sempre positivo.

Outra conclusão que podemos tirar é que o módulo de 0 é 0 , pois este dista 0 unidades dele mesmo.

Agora responda: quais são os números que têm módulo 4 ?



Esses números são chamados opostos ou simétricos. Assim, 4 é o oposto de -4 e -4 é o oposto de 4 , e escrevemos assim: $-4 = -4$ e $-(-4) = 4$. O oposto é representado pelo sinal de menos à esquerda do número.

Voltando ao exemplo da variação de temperatura da cidade de Montreal, temos que: $10 - (-6) = 10 + [-(-6)] = 10 + 6 = 16$.

É dessa forma que, matematicamente, definimos a subtração de dois números inteiros, isto é, $a - b$ é o mesmo que a somado com o oposto de b , isto é, $a - b = a + (-b)$, para quaisquer números inteiros a e b .

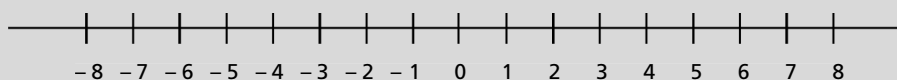


ATIVIDADE

5. Localize na reta numérica os números -7 , 7 , -5 , -3 , 4 , -2 e 0 e responda:

5. a. Qual deles possui o maior módulo?

5. b. Qual deles possui o menor módulo?



USANDO O SALDO BANCÁRIO PARA ADICIONAR E SUBTRAIR NÚMEROS INTEIROS

Para trabalharmos a adição e a subtração, vamos partir de uma situação real e formalizar a matemática adequada a ela. Para isso usaremos a reta numérica.

Como a subtração $a - b$ é a adição do número a com o oposto do número b , vamos nos concentrar na adição.

Quando vamos ao banco e imprimimos o extrato bancário, estamos querendo saber muitas coisas, entre elas, se o dinheiro ainda está suficiente para pagar todas as contas. Caso o dinheiro não tenha sido suficiente, aparecerão no saldo total números negativos. O que significa isso? Significa que estamos devendo dinheiro ao banco. Nesse sentido, aparecem a idéia do número negativo e a idéia de estar devendo. Veja o extrato bancário do Sr. João, correspondente à movimentação do dia 5 de maio ao dia 14 de maio.

Tabela 5.3: Extrato bancário do Sr. João

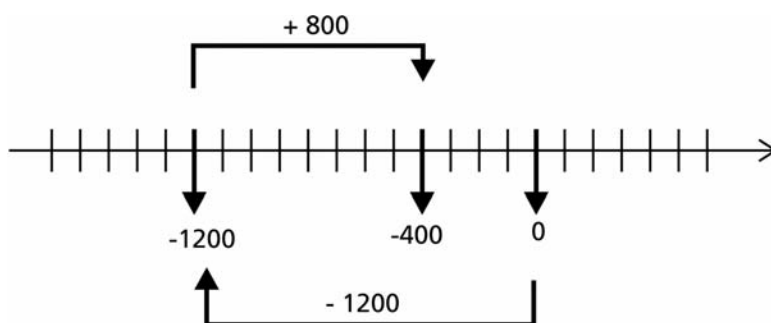
Data	Descrição	Movimentação	Saldo
5/5	Saldo anterior		1.200,00–
6/5	Depósito	800,00	400,00–
7/5	CPMF	2,00–	402,00–
10/5	Tarifa pacote preferencial	18,00–	420,00–
11/5	Depósito	60,00	
11/5	Cheque compensado	340,00–	700,00–
13/5	Depósito	450,00	250,00–
13/5	CPMF	3,00–	253,00–
14/5	Cheque eletrônico	47,00–	

Para fazer a leitura correta dessa tabela, você precisa saber que na coluna de movimentação o sinal de menos à direita do número indica que este vai ser retirado do total anterior, pois indica alguma quantidade que se deve. Quando o sinal de menos está na coluna do saldo, o significado é de dívida; em 15 de maio, o Sr. João devia ao banco R\$300,00.

Em relação ao dia 5 de maio, o Sr. João estava devendo ao banco R\$1.200,00, mas como fez um depósito de R\$800,00 no dia 6, sua dívida diminuiu R\$800,00. Com isso, seu saldo parcial passou a ser de R\$400,00 negativos. Sua dívida ficou menor!

Usando os símbolos matemáticos, representamos assim:
 $-1.200 + 800 = -400$.

A representação na reta numérica fica assim:



Observe que, nesse caso, foi preciso fazer a **subtração** $1.200 - 800$ para chegarmos ao 400, pois o saldo devedor diminuiu. As ações feitas são contrárias.



Lembre-se que a palavra débito e crédito devem surgir naturalmente no trabalho com os números negativos. Essas palavras nem sempre são familiares aos alunos de 6ª série.

O contexto do saldo bancário pode ser usado para formalizar com os alunos a adição de inteiros!

- Se as ações são contrárias (perde x ganha), devemos fazer a subtração e verificar se o saldo final é positivo ou negativo. Para isso, basta ver o sinal do maior.
- Se as ações são iguais (perde x perde), devemos fazer a adição e manter o sinal dos números.

Veja alguns exemplos de adição de inteiros.

Expressão	Operação realizada	Cálculo	Sinal do resultado	Resultado final
$-56+10=$	subtração	$56-10= 46$	negativo	-46
$-125+200=$	subtração	$200-125= 75$	positivo	75
$-32+(-68)=$	adição	$32+68= 100$	negativo	-100
$358+(-200)=$	subtração	$358-200= 158$	positivo	158
$-300+(-45)=$	adição	$300+45= 345$	negativo	-345
$10+(-56)=$				
$200+(-125) =$				
$-68+(-32) =$				
$-200+358 =$				
$-454+(-300) =$				



ATIVIDADES

6. Complete a tabela, onde nas expressões foram trocadas as ordens dos termos. A operação adição é comutativa?

$$-47 + 7 =$$

Para subtrair números inteiros, por exemplo, $a - b$, transformamos a subtração numa adição da seguinte forma, conforme visto no elemento oposto: $a - b = a + (-b) \rightarrow$ somamos o primeiro número com o oposto do segundo número.

7. Calcule os valores referentes aos espaços vazios da tabela, que dizem respeito aos dias 11 e 14 de maio. Explique como você fez a conta. Não se esqueça de colocar o sinal de menos, caso o saldo seja devedor.



A idéia de débitos e créditos fazem sentido quando queremos produzir significado para a adição e subtração de números inteiros negativos. No entanto, para a multiplicação de dois números negativos essa idéia não nos serve. Como convencer nosso aluno de que uma dívida multiplicada por outra resulta em crédito? Não é estranho?

Como você sabe, utilizar a idéia de débito e crédito não serve se queremos produzir significado para a multiplicação e divisão de dois números inteiros negativos. Esses significados devem ser produzidos somente no contexto matemático. O cotidiano não responde! Precisamos lançar mão de outras estratégias. Veja!

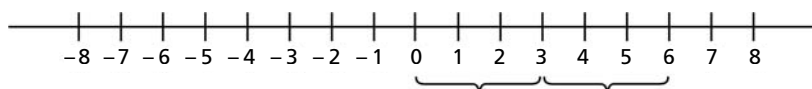
MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DE NÚMEROS INTEIROS

Vamos utilizar a reta numerada para trabalhar a multiplicação de inteiros. Acompanhe os exemplos, observando que sempre partimos do zero para localizar os números e, quando o número é negativo, estaremos usando o conceito de oposto.

Quando os dois números são positivos temos:

$$2 \times 3 \quad \text{duas vezes o } 3$$

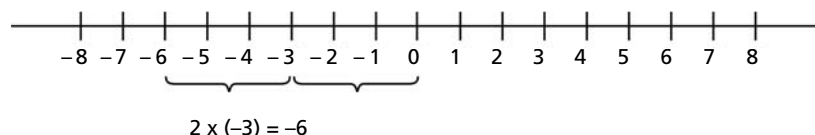
$$2 \times 3 = 6$$



Esse caso é a multiplicação de números naturais que você já conhece.

Quando temos um número positivo multiplicado por um número negativo, por exemplo $2 \times (-3)$:

$2 \times (-3)$ significa duas vezes o -3

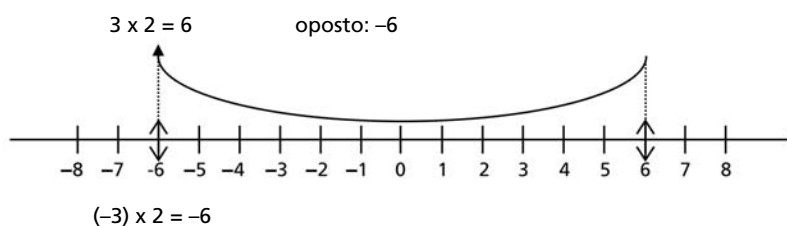


Encontramos -6 como resultado do produto.

O conjunto dos números inteiros forma uma estrutura algébrica chamada anel que, com relação à adição, é associativa, comutativa, tem elemento neutro (e todo elemento tem oposto); com relação à multiplicação é associativa; e ainda vale a propriedade distributiva da multiplicação com relação à adição, à direita e à esquerda. Para entender a multiplicação de um número positivo por um negativo, usamos o fato de $(-a) \times b = a \times (-b) = -axb$, onde a e b são números inteiros. Isso nos permite interpretar $(-a) \times b$ como o oposto do resultado de axb . Assim podemos interpretar $(-2) \times 3$ como o oposto de 2×3 . Para interpretar o produto de dois números negativos, usamos o fato de $(-a) \times (-b) = -(a \times (-b)) = ab$. Com isso interpretamos $(-2) \times (-3)$ como o oposto do oposto de 2×3 . As propriedades utilizadas decorrem direto da definição de anel, na qual usamos fortemente a propriedade distributiva.

Quando temos um número positivo multiplicado por um número negativo, por exemplo $(-3) \times 2$, o significado dessa operação é o oposto de 3×2 . Veja:

$(-3) \times 2$ significa o oposto de 3×2

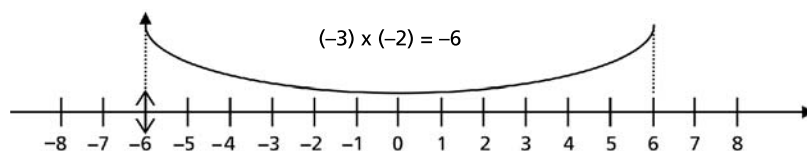


No conjunto dos números inteiros, a operação de multiplicação é comutativa, isto é, $axb = bxa$, onde a e b representam quaisquer números inteiros. Dizemos, assim, que \mathbb{Z} é um anel comutativo.

Você observou que $2 \times (-3)$ deu o mesmo resultado que $(-3) \times 2$. Ao trocarmos a ordem dos fatores, o produto não foi alterado!

$(-3) \times (-2) =$ oposto: de $3 \times (-2) = -6$ oposto: $+6$

Quando dois números negativos são multiplicados, por exemplo $(-3) \times (-2)$, o significado dessa operação é o oposto de $3 \times (-2)$. Representando na reta numerada:



Na divisão de números inteiros, o significado dos sinais é o mesmo da multiplicação e a operação entre os números é feita da mesma maneira como a que se faz com os naturais.

Veja alguns exemplos:

$$4 \div (-2) = -2$$

$$(-9) \div 3 = -3$$

$$(-20) \div (-5) = 4.$$

Podemos concluir que o resultado da multiplicação de dois números inteiros é positivo quando os números multiplicados têm o mesmo sinal. E é negativo, quando os números multiplicados têm sinais contrários. Mas cuidado, a divisão não é uma operação fechada em \mathbb{Z} .

Outra situação comumente pensada pelos alunos refere-se aos lados de uma roupa. Ou seja, o avesso do avesso é o lado normal etc. Enfim, gostaríamos de enfatizar que esses tipos de situação, embora importantes para serem utilizados e discutidos em aula, não resolvem a compreensão das operações. Tais procedimentos precisam ser analisados no contexto matemático.



ATIVIDADE

8. Complete os espaços vazios da tabela a seguir. Observe as regularidades e responda às perguntas.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
-3		6		0	-3	-6	-9
-2	6	4			-2	-4	-6
-1		2	1	0	-1	-2	-3
0	0		0			0	
1		-2			1	2	
2	-6	-4	-2		2	4	6
3		-6		0		6	

8. a. O que acontece quando um número é multiplicado por 1?

8. b. E quando é multiplicado por -1?

8. c. E quando é multiplicado por zero?

8. d. Utilize a tabela para resolver as três expressões a seguir:

$3x(-2)x4$ _____

$3x(-2)]x4$ _____

$3x[(-2)x4]$ _____

O que você observou?

8. e. Qual o sinal do produto quando os dois fatores têm o mesmo sinal?

8. f. Qual o sinal do produto quando os dois fatores têm sinais diferentes?

8. g. Quando multiplicamos por 2 (linha 7 da tabela), o que acontece com a sequência dos resultados?

8. h. Quando multiplicamos por -2 (linha 3 da tabela), o que acontece com a sequência dos resultados?

COMENTÁRIO

Veja a resposta ao final da aula. Como você observou, identificar e analisar regularidades numéricas deve ser uma constante nas aulas de desenvolvimento do pensamento aritmético e algébrico.



O pensamento aritmético e o algébrico têm relações intrínsecas e podem desenvolver-se concomitantemente, bastando, para isso, tarefas que objetivem tal desenvolvimento.

Então, o que fizemos até agora foi a multiplicação de inteiros. Você viu exemplos na reta numérica, ilustrações de uso lingüístico no cotidiano e regularidades. Veja outra possibilidade na construção e análise de seqüências numéricas em tabelas. O que você observa com os números da primeira coluna nas tabelas seguintes? E com os números da segunda?

Tabela 5.4: Tabelas de regularidade

$3 \cdot (-4)$	-12	\downarrow	$+(+3)$	$(-3) \cdot (+4)$	-12	\downarrow	$+(+3)$
$3 \cdot (-3)$	-9	\downarrow	$+(+3)$	$(-3) \cdot (+3)$	-9	\downarrow	$+(+3)$
$3 \cdot (-2)$	-6	\downarrow	$+(+3)$	$(-3) \cdot (+2)$	-6	\downarrow	$+(+3)$
$3 \cdot (-1)$	-3	\downarrow	$+(+3)$	$(-3) \cdot (+1)$	-3	\downarrow	$+(+3)$
$3 \cdot 0$	0	\downarrow	$+(+3)$	$(-3) \cdot 0$	0	\downarrow	$+(+3)$
$3 \cdot (+1)$	+3	\downarrow	$+(+3)$	$(-3) \cdot (-1)$	+3	\downarrow	$+(+3)$
$3 \cdot (+2)$	+6	\downarrow	$+(+3)$	$(-3) \cdot (-2)$	+6	\downarrow	$+(+3)$
$3 \cdot (+3)$	+9	\downarrow	$+(+3)$	$(-3) \cdot (-3)$	+9	\downarrow	$+(+3)$
$3 \cdot (+4)$	+12	\downarrow	$+(+3)$	$(-3) \cdot (-4)$	+12	\downarrow	$+(+3)$

É importante que você observe a utilização de tabelas como as apresentadas, em que os alunos podem gerar e analisar seqüências numéricas; isso enriquece o entendimento das operações com números inteiros.

CONVERSANDO SOBRE O SEU LABORATÓRIO DE ARITMÉTICA E ÁLGEBRA

Seu laboratório pessoal pode ser enriquecido com quebra-cabeças e livros paradidáticos. Como você viu na disciplina Instrumentação do Ensino de Geometria, os livros paradidáticos constituem recursos importantes nas aulas de Matemática. Por exemplo, relacionados ao estudo dos números inteiros, podemos citar:

Outros títulos da série *A Descoberta da Matemática* da editora Ática: *O segredo dos números*, *Uma raiz diferente*, *O que fazer primeiro*, *Frações em mistérios*, *Saída pelo triângulo*.



CONVERSANDO SOBRE O SEU LABORATÓRIO DE ARITMÉTICA E ÁLGEBRA

O Jogo dos Caracóis

Este jogo foi proposto pelo professor Baldino (1996), permite trabalhar operações com números inteiros.



Você poderá substituir os peões por tampa de refrigerante de cores diferentes ou qualquer outro objeto conveniente.

- Material necessário

2 dados (planificação no Módulo Prático)

2 peões para cada jogador

1 tabuleiro do jogo (Módulo Prático)

1 máquina operadora (Módulo Prático)

- Objetivo do jogo

O objetivo deste jogo é colocar um de seus peões na casa 30 e outro na casa -30.

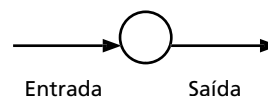
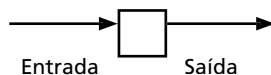
- Como jogar

Cada jogador escolhe dois peões de sua cor preferida e os coloca na casa de número zero do tabuleiro.

O jogador lança o dados e, em função dos números que saírem, escolhe o peão que quer mover e qual das quatro combinações da máquina vai usar. Coloca os dados tirados sobre as máquinas escolhidas, que determinarão o cálculo a ser feito. O resultado desse cálculo será a casa em que o jogador posicionará o peão.

A partir dos resultados dos dados, o jogador escolherá, então, qual a melhor combinação das máquinas que poderá mover seu peão.

Existem dois tipos de máquinas, as aditivas, representadas por um quadrado, e as multiplicativas, representadas por um círculo. Cada máquina tem uma entrada e uma saída, indicadas por setas.

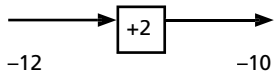
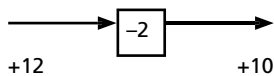
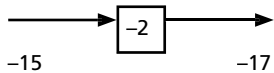
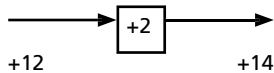


As máquinas funcionam assim: um número colocado na entrada é transformado em outro, em função do número tirado no dado que está dentro da máquina.

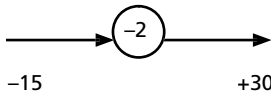
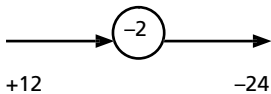
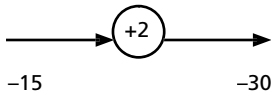
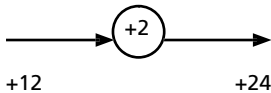
Por exemplo, suponha que o jogador tenha um peão na casa +12 e tira no dado +2. Se escolher a máquina aditiva, moverá o peão para a casa +14. Se escolher a máquina multiplicativa, deverá mover o peão para a casa +24. Se ao contrário, for tirado o número -2, e ele escolher a máquina aditiva, seu peão irá para a casa +10; se optar pela máquina multiplicativa, seu peão irá para a casa -24.

Exemplos:

Máquinas aditivas



Máquinas multiplicativas



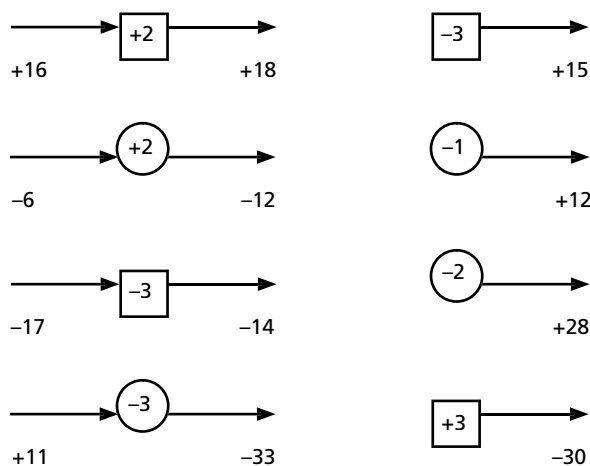
Temos as seguintes regras:

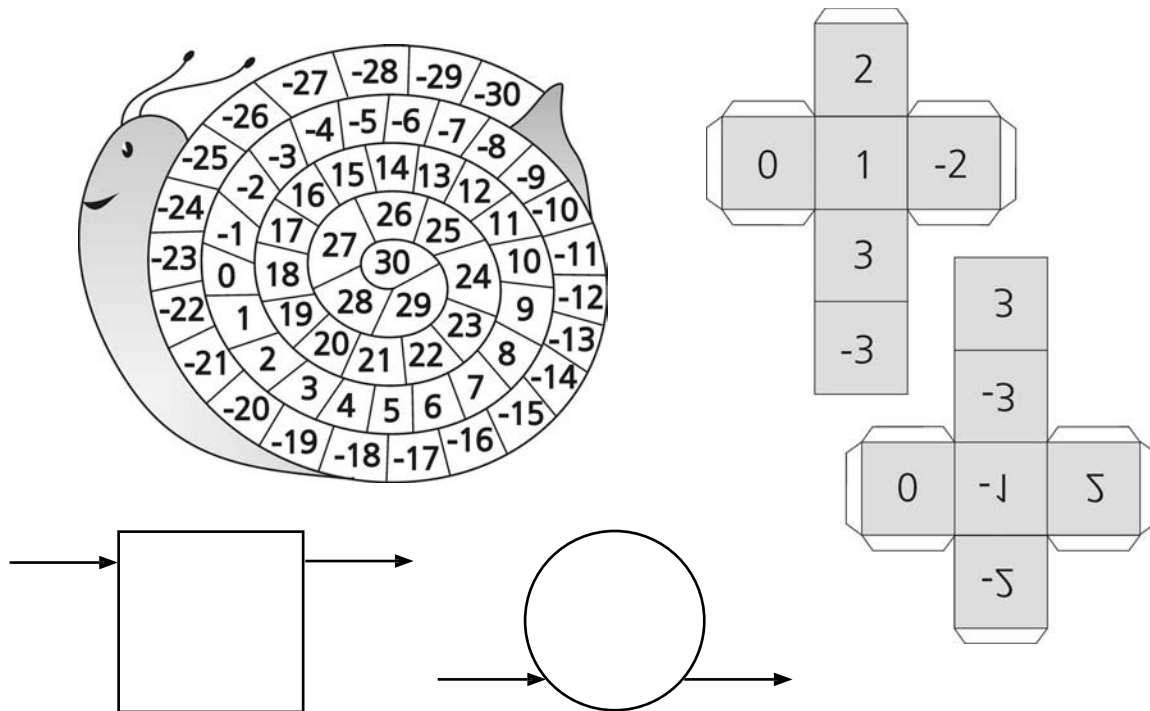
- Nas máquinas aditivas, o número do dado é somado ou diminuído com o número de entrada para dar o número de saída.
- Nas máquinas multiplicativas, o número do dado é multiplicado pelo número de entrada para determinar o número de saída.
- Se o número do dado de uma máquina multiplicativa for com sinal negativo (-), o sinal do número de saída será diferente do de entrada. Se o número do dado for positivo (+) os sinais serão iguais.

Assim, o sinal negativo prevalece nas máquinas multiplicativas, mudando o sinal do número que passa por ela.

Note que o número zero na máquina aditiva e o número +1 em uma máquina multiplicativa não produzem movimento com peão; neste caso, o número de saída é idêntico ao de entrada. O -1 na máquina multiplicativa só muda o sinal do número de saída. O número zero na máquina multiplicativa leva o peão para a cada inicial (zero).

Os jogadores receberão uma seqüência de máquinas. Nesse caso, a saída da primeira máquina coincide com a entrada da seguinte. Ao escolher uma das quatro combinações em série possíveis, o jogador coloca os números que saíram nos dados nas máquinas escolhidas. Ele precisa realizar um cálculo para descobrir em que casa posicionará seu peão. Isso acontece em duas etapas. Primeiro, o jogador entra na máquina com o número daquela em que está seu peão e calcula o número de saída com esse valor. O resultado é operado de acordo com a máquina da direita, que determina o número de saída. O resultado obtido nesta última operação corresponde à casa em que o jogador deve posicionar seu peão. Veja o exemplo:





ATIVIDADE FINAL

Na Aula 28 de Instrumentação do Ensino de Geometria, você viu que a homotetia é uma transformação no plano que associa um polígono $A'B'C'D'$ ao polígono original $ABCD$. Razão de homotetia r é o número racional que diz quando uma figura foi copiada ($|r| = 1$, temos uma identidade), ampliada ($|r| > 1$) ou reduzida ($0 < |r| < 1$). Quando a razão de homotetia é positiva ($r > 0$), temos uma homotetia direta; e quando é negativa ($r < 0$), temos a inversa. A seguir, veja um exemplo de uma homotetia direta de razão $|r| > 1$ (**Figura a**) e uma homotetia inversa de razão $|r| > 1$ (**Figura b**).

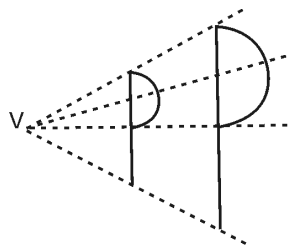


Figura a

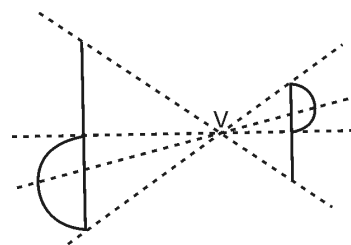
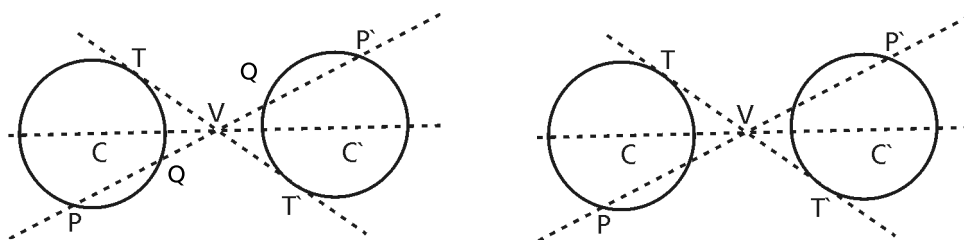


Figura b

Como vimos, tarefas envolvendo homotetias são alternativas para ilustrar a multiplicação de números negativos. Por exemplo, qual é a inversa da inversa?

Utilizando régua e compasso, construa as figuras seguintes e identifique que tipo (direta ou inversa) e a razão de homotetia.



CONCLUSÃO

Os números negativos levaram cerca de 1500 anos para serem aceitos como números, ou melhor, como quantidade. Para alguns, eles eram “números fictícios”. Operar números inteiros é mais do que decorar regras de sinais. É muito comum ouvirmos a frase “menos com menos dá mais”. Mas o “com” significa adição, e “o menos com menos” se aplica na multiplicação. É importante operar com números, mas é essencial compreender a ação das operações e o significado dos sinais nessas operações. É na variedade de situações que vamos enriquecendo nosso senso numérico racional.

RESUMO

O número inteiro é um racional. Nesta aula exemplificamos como os números negativos se apresentam nas situações do cotidiano, apesar de muitas delas não serem suficientes para dar significados aos conceitos na matemática escolar. Por exemplo, você viu que entender o produto $(-3) \times (-2)$ como multiplicação de duas dívidas não faz sentido. Utilizamos a reta numérica com o objetivo de localizar os números inteiros e auxiliar no entendimento das operações feitas.

COMENTÁRIO

Não é necessário construir as figuras para identificar o tipo de homotetia. Como você pode ver, este tipo de tarefa, além de envolver construções geométricas, também inter-relaciona os seguintes blocos de conteúdo: Grandeza e Medida, Espaço e Forma, e Operações.

AUTO-AVALIAÇÃO

Esperamos que a sua motivação tenha sido mantida nas diferentes situações que desenvolvemos nesta aula. Caso tenha alguma dificuldade, procure o assunto em livros da 6ª série do Ensino Fundamental. Refaça com seus colegas ou com seu tutor as atividades em que tenha encontrado alguma dificuldade ou que não soube fazer. Dê uma atenção especial às Atividades 6, 7 e Final, elas exploram características importantes da adição e da multiplicação de números inteiros. Lembre-se de que a multiplicação de números inteiros negativos não é simples e que situações do cotidiano não são suficientes para exemplificá-la. É importante que você saiba como desenvolvê-la de diferentes maneiras com seus alunos.

Procure também fazer os elos com os conceitos da Álgebra. Você estudou que o conjunto \mathbb{Z} é um anel. Em que atividades desta aula você aplicou esse conhecimento? Existe alguma delas que lhe permite trabalhar todas as condições, para que um conjunto e determinadas operações sejam um anel? Se houver, exemplifique e converse com seu tutor.

INFORMAÇÕES SOBRE A PRÓXIMA AULA



Na próxima aula, revisaremos os conjuntos dos números irracionais. Aproveite para reler o que você estudou na Aula 7 de Pré-Cálculo.



RESPOSTAS

Atividade 1

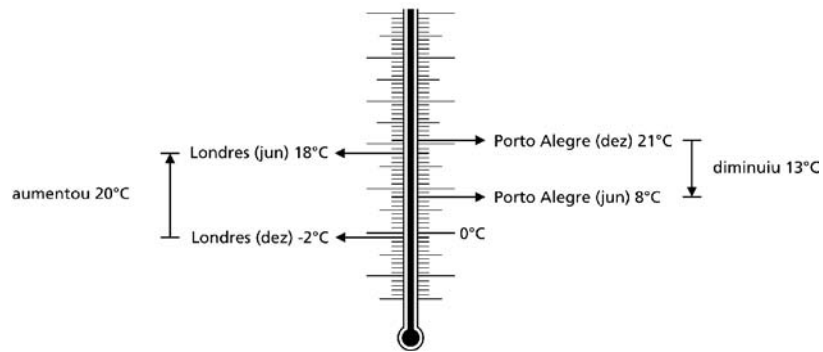
Já sabemos que Andréia obteve 26 pontos ganhos. Vamos somar os pontos de Ana e de Rosana.

Ana 	Rosana 
3	4
2	1
4	1
1	2
4	3
-3	-1
1	3
2	2
4	4
-1	-3
-1	2
2	-1
3	4
+26-5=21 pontos ganhos	+26-5+21 pontos ganhos

Até essa etapa do jogo, Andréia é a vencedora.

Atividade 2

7° – Atlético-MG	$SG = 76 - 62 = 14$
16° – Vitória	$SG = 50 - 64 = -14$
19° – Fluminense	$SG = 52 - 77 = -25$
22° – Payssandu	$SG = 74 - 77 = -3$

Atividade 3

Porto Alegre (dez à jun)

$$\text{Variação} = 8^{\circ} \text{C} - 21^{\circ} \text{C} = -13^{\circ} \text{C}$$

Londres (dez à jun)

$$\text{Variação} = 18^{\circ} \text{C} - (-2^{\circ} \text{C}) = 20^{\circ} \text{C}$$

Atividade 4

4. a. Nova York: fuso -5.

Los Angeles: fuso -8.

Como o Rio de Janeiro está localizado no fuso -3, e Nova York no fuso -5, a diferença de horário é de 2h. Logo, em Nova York são 15h.

Já em Los Angeles, são 5 horas antes do Rio de Janeiro, pois a variação de fuso entre essas cidades é de 5h. Portanto em Los Angeles marcam 12h no relógio.

4. b. Tóquio: fuso +9.

Rio de Janeiro: fuso -3.

Variação de +12h do Rio para Tóquio e de -12 de Tóquio para o Rio.

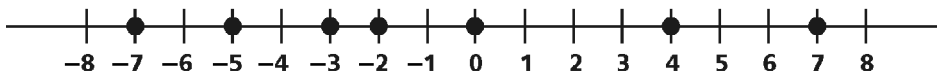
Horário de Tóquio: 21h.

Horário no Rio: $21 + (-12) = 9\text{h}$.

Resposta: -12.

Atividade 5

A localização pode ser feita com pontos.



5. a. O 7 e o -7 possuem o maior módulo, pois estão mais distantes do zero. Os dois possuem o mesmo módulo que é 7.
5. b. O zero possui o menor módulo, pois sua distância do zero é zero. O módulo de zero é zero.

Atividades 6 e 7

Expressão	Operação realizada	Cálculo	Sinal do resultado	Resultado final
$10+(-56)=$	subtração	$56-10= 46$	negativo	-46
$200+(-125)=$	subtração	$200-125= 75$	positivo	75
$-68+(-32)=$	adição	$32+68= 100$	negativo	-100
$-200+358=$	subtração	$358-200= 158$	positivo	158
$-45+(-300)=$	adição	$300+45= 345$	negativo	-345

A adição de inteiros é comutativa, isto é, não importa a ordem em que somamos os termos.

Atividade 8

8. a. O resultado é o próprio número.

8. b. O resultado é o oposto.

8. c. O resultado é zero.

8. d. $3x(-2)x4 = -24$.

$[3x(-2)]x4 = -6x4 = -24$ $3x[(-2)x4] = 3x(-8) = -24$.

O resultado foi o mesmo.

8. e. positivo.

8. f. negativo.

8. g. Aumenta de dois em dois.

8. h. Diminui de dois em dois.

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
-3	9	6	3	0	-3	-6	-9
-2	6	4	2	0	-2	-4	-6
-1	3	2	1	0	-1	-2	-3
0	0	0	0	0	0	0	0
1	-3	-2	-1	0	1	2	3
2	-6	-4	-2	0	2	4	6
3	-9	-6	-3	0	3	6	9

Você sabe o que é um número irracional?

AULA 6

Meta da aula

Apresentar exemplos de números irracionais e algumas de suas propriedades.

objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Identificar os números irracionais.
- Explorar situações que levem à descoberta das propriedades dos irracionais.
- Justificar algumas propriedades dos conjuntos dos números irracionais.
- Refletir sobre a importância de utilizar diferentes atividades de sala de aula.

Pré-requisitos

Nesta aula, você deve saber as operações básicas no conjunto dos números racionais e ter conhecimentos de Geometria Plana, especificamente os conceitos de congruência e semelhança de triângulos, e o Teorema de Pitágoras. É fundamental que saiba calcular a área de um triângulo e os ângulos internos de um pentágono regular. Você também vai precisar de papel milimetrado, papel manteiga (vegetal), tachinhas, cartolina, compasso, régua e tesoura.

INTRODUÇÃO

Abordar os números irracionais não é uma tarefa fácil para o professor, pois se trata de um assunto bastante abstrato, não encontrado no dia-a-dia. O aluno não compreende bem o conceito, afinal as regras para a verificação da irracionalidade não são práticas. Para completar, a maioria dos livros didáticos tem se limitado a exemplificar números irracionais com raízes quadradas ($\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ etc.), explorando o número π . Dessa maneira, o aluno fica convencido de que os números irracionais se resumem a esses casos e associam a idéia de raiz a número irracional.

É importante, portanto, que o professor entenda a complexidade desse assunto e, a partir daí, promova atividades que façam os alunos perceberem o conceito e as propriedades dos números irracionais.

Nesse contexto, como o professor deve trabalhar esse assunto? Nesta aula, vamos mostrar algumas atividades que podem facilitar a compreensão dos números irracionais pelos alunos.

Possivelmente contribui para as dificuldades na aprendizagem dos irracionais a inexistência de modelos materiais que exemplifiquem os irracionais (BRASIL. MEC, 1997, p. 106).

CONVERSANDO SOBRE A DESCOBERTA DE UM NÚMERO NÃO RACIONAL

Ao longo de alguns séculos, pensou-se que todos os pontos da reta seriam números racionais.

Pitágoras fundou, em 540 a.C., uma espécie de seita que envolvia religião e Matemática, em que os discípulos aprendiam a Matemática. Os membros da chamada Escola Pitagórica adoravam os números, pois achavam que eles eram a essência da vida. O teorema mais conhecido da época era o Teorema de Pitágoras.

Os Pitagóricos não aceitavam a existência de números que não fossem naturais e racionais, pois toda a sua teoria estava pautada nessa idéia. A aceitação de outros números, portanto, significaria ir contra esse pensamento.

Assim, a Escola Pitagórica teve conhecimento da ilustração da **Figura 6.1**, cuja descoberta alguns historiadores atribuem a Tales de Mileto, que foi o responsável pela divulgação dessa ilustração na Grécia, apresentando-a a Pitágoras.

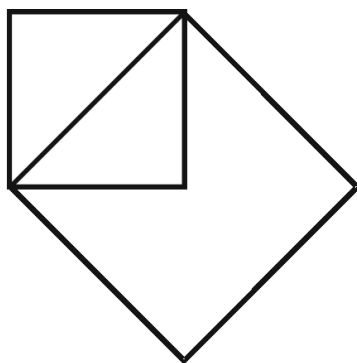


Figura 6.1: Quadrados cuja diagonal de um é o lado do outro.

O que nos diz a figura? Observe-a com linhas pontilhadas a seguir.

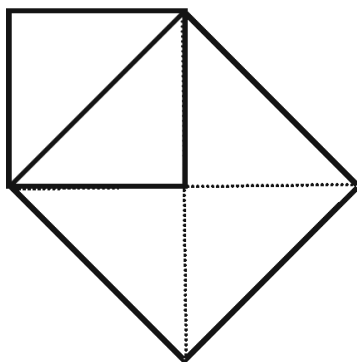


Figura 6.2: Figura 6.1 pontilhada.

Os triângulos retângulos que aparecem na figura são todos congruentes. Além disso, um dos quadrados é formado por dois triângulos retângulos congruentes e o outro, por quatro triângulos retângulos congruentes. Assim, podemos concluir que a área de um quadrado é o dobro da área do outro. Algebricamente, se o quadrado menor tem lado de medida a e o maior, lado de medida b , temos $b^2 = 2a^2$. Essa razão $\frac{b}{a}$ é o número irracional $\sqrt{2}$.

Com tal descoberta, os pitagóricos procuraram manter esse número em segredo. Como a Escola tinha um caráter religioso, acreditavam que a descoberta provocaria a fúria dos deuses. Por muito tempo $\sqrt{2}$ ficou sendo o único número irracional conhecido. Em 425 a.C.,

Teodoro de Cirene descobriu outros números irracionais, tais como $\sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}$ etc.; porém, eles não eram vistos como números, apenas como áreas e comprimentos.

O problema dos números irracionais se estendeu por muito tempo; só foi resolvido em 1858, quando Dedekind, em aulas de Cálculo Diferencial, percebeu que faltava uma fundamentação dos números reais, construindo, então, uma teoria para esses números.

Analisando o surgimento dos números irracionais e a dificuldade em aceitá-los, o professor pode compreender os entraves que tais números representam também para aprendizagem.



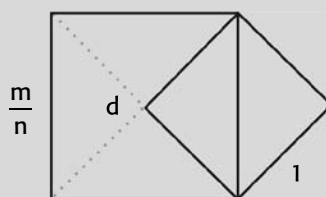
ATIVIDADES

1. O número $\frac{\sqrt{2}}{3}$ está escrito sob a forma de fração. Como toda fração é um número racional, então, o número $\frac{\sqrt{2}}{3}$ é racional. Porém, sabemos que o número $\frac{\sqrt{2}}{3}$ é irracional. Onde está o erro?

COMENTÁRIO

Os PCN ressaltam que o aluno deve reconhecer que os números irracionais não podem ser expressos como a razão de inteiros. É importante realizar atividades que confrontem essa representação.

2. Veja a figura em que a medida do lado do quadrado menor é 1 e a do lado do quadrado maior é $\frac{m}{n}$, em que $\frac{m}{n}$ é uma fração irredutível com m e n naturais e não nulos.



2. a. Qual a área do quadrado menor?

2. b. Escreva a área do quadrado maior a partir da área do quadrado menor.

2. c. Compare a área escrita em (b) com a área onde é dado o lado $\frac{m}{n}$. Qual a relação existente entre m^2 e n^2 ?

2. d. Deduza do item (c), que m deve ser par.

2. e. Substitua $m = 2k$ na relação que você achou e conclua que n também deve ser par. Você acaba de mostrar que é impossível conseguir uma fração irredutível, $\frac{m}{n}$, com m e n naturais não nulos, que seja a medida do

lado do quadrado maior.

2. f. Calcule a medida que deveria possuir o lado do quadrado maior.

2. g. Conclua que $\sqrt{2}$ não é racional, ou seja, é irracional.

2. h. Podemos mostrar $\sqrt[3]{2}$ de maneira similar. Como?



A demonstração de que $\sqrt{2}$ é um número irracional foi feita no século III a.C. e deveu-se a Euclides de Alexandria.

COMENTÁRIO

No item (d) você deve saber que o quadrado de um número natural par deve ser também um número par.



Da mesma forma, podemos demonstrar que $\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7} \dots$ são irracionais.

3. Suponha agora que exista um quadrado, de área igual a 3, cujo lado meça $\frac{m}{n}$, fração irredutível, com m e n naturais não-nulos.

$$\frac{m}{n}$$



3. a. Qual é a relação existente entre m^2 e n^2 ?

3. b. Essa relação é possível? Por quê?

PENTAGRAMA

É uma estrela regular de cinco pontas.

4. Você conhece o símbolo da Escola Pitagórica?... Pois é! A Escola Pitagórica era identificada por um símbolo: o PENTAGRAMA. O pentagrama simbolizava boa saúde.

Esse símbolo permitiu a descoberta de um número que pode ter sido o primeiro irracional conhecido: o número $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Tal número foi descoberto

mediante a inscrição do pentagrama no pentágono. Como? Você descobrirá ao fazer a próxima atividade.

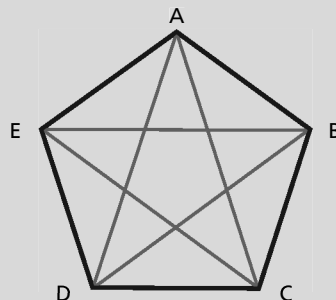


Figura 6.3: Pentagrama.

4. a. Mostre que os triângulos isósceles ACD, CAE e DAB são congruentes.

4. b. Determine os ângulos BAE e DAC, usando a letra (a). Conclua que os triângulos ABE e ACD são semelhantes.

4. c. Verifique que a razão entre um lado e a diagonal de um pentágono regular é $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ a partir da letra (b).

4. d. Você já sabe que a soma de dois números racionais é sempre um racional. A partir da propriedade de fechamento dos números racionais para a soma, deduza que $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ é irracional.

COMENTÁRIO

Nos itens (a), (b), (c) você não deve encontrar dificuldade; no item (d) use a redução ao absurdo, ou seja, suponha, por absurdo, que o número é racional.

5. Você sabe que vale a propriedade de fechamento em relação à soma e à multiplicação de racionais. Mas será que essa propriedade também é válida para os irracionais? Em outras palavras:

5. a. Será que a adição de dois irracionais é sempre um irracional?

5. b. Será que o produto de dois irracionais é sempre um irracional?

COMENTÁRIO

Depois de estudar o conjunto dos racionais, o aluno aprende o conjunto dos irracionais, deduzindo, erroneamente, que propriedades válidas para racionais são também válidas para irracionais; dentre elas, a do fechamento em relação à adição e à multiplicação. Nem sempre essas propriedades valem para dois números irracionais. Como você calculou com os irracionais $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$, encontrou $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$ e $\sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2}) = -2$ ambos os resultados são racionais.

6. Você sabe por que:

6. a. $3 + 5\sqrt{2}$ é um número irracional?

6. b. $\sqrt[4]{2}$ é um número irracional? Descubra!

COMENTÁRIO

Em cada item, suponha, por absurdo, que esse número seja racional e lembre-se de que a adição e a multiplicação de dois racionais é sempre um racional e que $\sqrt{2}$ é um irracional.

Você se lembra da propriedade do fechamento? Ela nos diz que quando operamos dois elementos quaisquer de um conjunto, o resultado também é elemento deste conjunto.

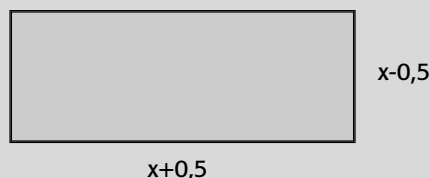


Na adição entre um número racional e um irracional, o resultado é um irracional. O mesmo acontece com a multiplicação de um racional por um irracional.

7. Um professor pede a um aluno para resolver o seguinte problema: calcular as dimensões de um terreno retangular, cuja área mede $6m^2$, como mostra a figura a seguir.



Muitos alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio têm a convicção de que a raiz quadrada pode assumir dois valores: um positivo e outro negativo. "É importante deixar claro que a equação $x^2 = a$ onde a é positivo, possui duas soluções \sqrt{a} e $-\sqrt{a}$, mas \sqrt{a} corresponde a um único número real, que é um número positivo cujo quadrado é a ."



Observe a resposta do aluno:

$$(x-0,5)(x+0,5) = 6,0$$

$$x^2 - 0,25 = 6,0$$

$$x^2 = 6,25$$

$$x = \sqrt{6,25}$$

$$x = -2,5 \rightarrow x = 2,5 \text{ ou } x = -2,5$$

Logo, as dimensões do terreno são de 3,0m por 2,0m.

Você agora está encarregado de analisar a solução desse problema. Você acha que o aluno cometeu algum erro na resolução? Justifique.

8. Complete as tabelas a seguir:

8. a.

x	x^2
	49
1,1	
$-\frac{16}{9}$	
	-169

8. b.

x	\sqrt{x}
81	
	16
	-4
$\frac{9}{1024}$	



O professor deve elaborar atividades para desfazer o equívoco que o aluno faz na associação de raiz a um número irracional, através de situações que mostrem que isso nem sempre é verdade. Muitos alunos pensam que todo número com radical é necessariamente um irracional.

8. c.

x	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{x}$ é irracional?
	-3	
$-\frac{1}{5}$		
	0,5	
	$\frac{\sqrt[3]{16}}{3}$	

9. Resolva a equação: $\sqrt{16-x} = x-4$

10. Veja a espiral de Arquimedes construída em 225 a.C.

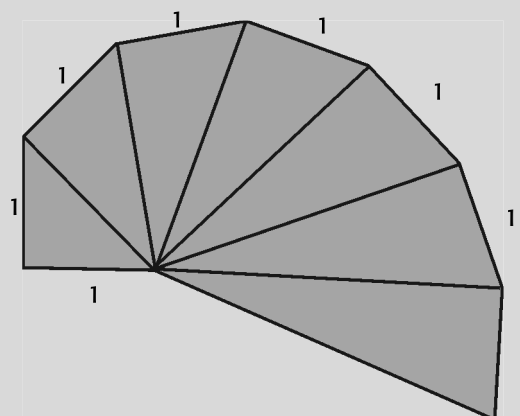


Figura 6.4: Espiral de Arquimedes.

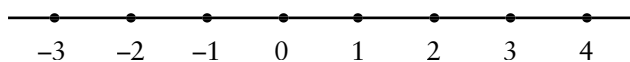
10. a. Calcule as medidas das hipotenusas de cada um de seus triângulos retângulos.

10. b. O que você percebeu de curioso?

10. c. Quais dessas medidas são números irracionais?

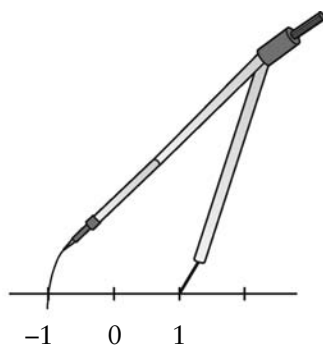
CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

Você estudou na Aula 5 a localização dos números racionais na reta, usando somente uma linha reta e compasso. Mas, e quanto aos números irracionais? De que modo podemos determinar sua posição na reta?

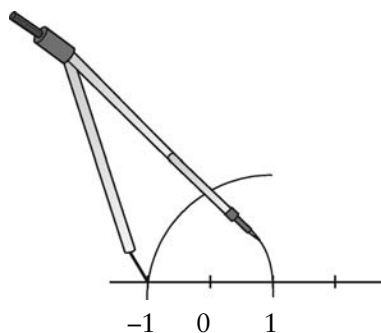


A partir da espiral de Arquimedes, podemos encontrar a posição referente a $\sqrt{2}$, usando compasso. Basta construir um triângulo retângulo de catetos iguais a unidade (1). Pelo Teorema de Pitágoras, a hipotenusa desse triângulo medirá $\sqrt{2}$.

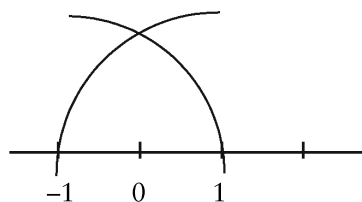
Ponha a ponta seca do compasso em 1, abrindo-o até que a ponta de grafite encoste em -1 . Trace um arco.



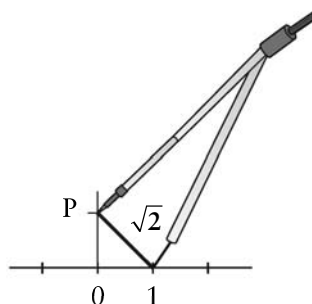
Repita o procedimento mantendo a abertura, mas agora com a ponta seca em -1 .



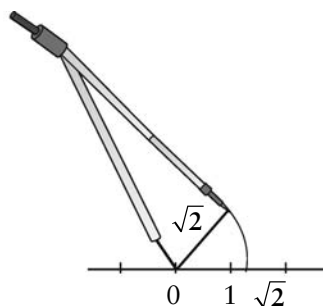
Trace a reta passando pela interseção dos arcos e pelo zero.



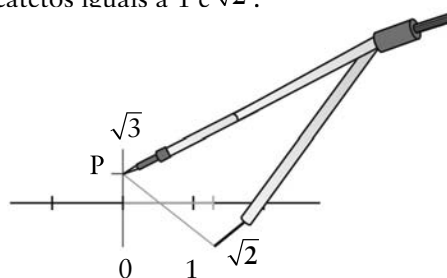
Com a ponta seca em 1 e abertura igual à unidade (isto é, a medida de cada segmento menor) faça a ponta de grafite passar sobre a reta construída. Seja P o ponto de interseção. O triângulo retângulo está pronto. Agora é só transferir essa distância para a reta.



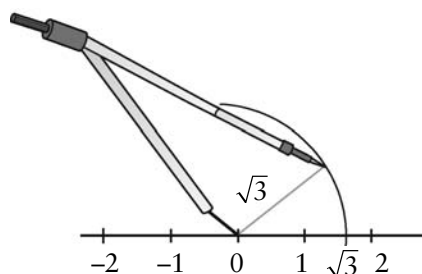
Então, abra o compasso com essa medida e, com a ponta seca em zero, marque $\sqrt{2}$.



Para marcar a posição de $\sqrt{3}$ na reta, basta construir um triângulo retângulo de catetos iguais a 1 e $\sqrt{2}$.



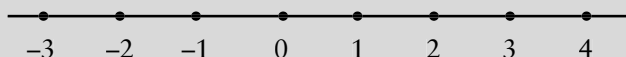
E, com essa mesma abertura e ponta seca no zero, marcar $\sqrt{3}$.



ATIVIDADES

11. Agora é sua vez! Marque na reta a seguir as seguintes posições de:

- a. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ b. $\sqrt{5}$ c. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ d. $2\sqrt{2}$ e. $1 - 2\sqrt{3}$ f. $\sqrt{6}$ g. $\sqrt{8}$



COMENTÁRIO

Use o processo da espiral de Arquimedes, apresentado na Atividade 11, se necessário. Divirta-se!!!

Essas construções permitem ao aluno perceber as propriedades que são válidas e as que não são válidas no conjunto dos números irracionais. Por exemplo, $\sqrt{2} + \sqrt{3} \neq \sqrt{5}$; $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$; $2\sqrt{2} = \sqrt{8}$

A respeito das operações aritméticas e algébricas com os irracionais quando eles aparecem em representações simbólicas ($\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \pi$ etc.), o aluno pode ser conduzido a efetuar-las seguindo regras operatórias análogas às que são válidas para os racionais (BRASIL, MEC, 1997, p. 84).

12. Você viu, na Atividade 11, que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \neq \sqrt{5}$. Para quais valores de x e y temos $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x+y}$?

13. Você viu, na Atividade 11, que $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$. Mas será que $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}$ para quaisquer x e y naturais?

CALCULANDO A RAIZ QUADRADA DE NÚMEROS NATURAIS SEM USAR LÁPIS OU CALCULADORA...

Vamos construir agora um instrumento que forneça a raiz quadrada de um número natural?

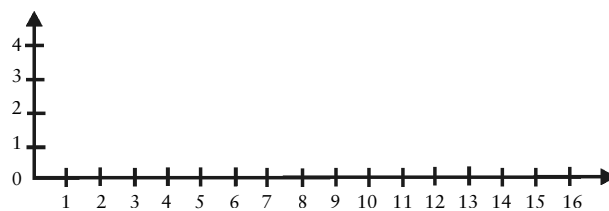
Você vai precisar de:

- papel milimetrado;
- papel manteiga;
- tachinha.

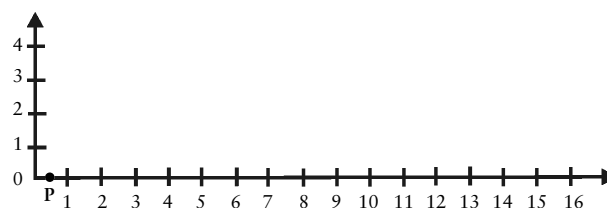
No papel milimetrado, trace um par de eixos coordenados.



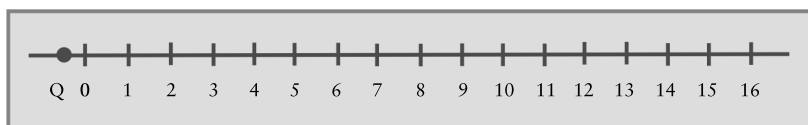
Escolha uma unidade de medida e gradue o eixo horizontal de 0 a 16 e, o eixo vertical, de 0 a 4, conforme mostra a figura.



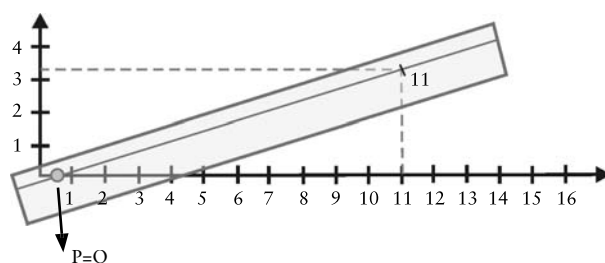
Marque o ponto $P = \left(\frac{1}{4}, 0\right)$



Pegue agora o papel manteiga e construa uma linha reta graduando-a de 0 a 16, usando a mesma unidade de medida anterior. Marque sobre a reta o ponto Q, distando $\frac{1}{4}$ de zero, à sua esquerda.



Sobreponha o ponto Q ao ponto P, prendendo-os com uma tachinha.



Está pronto! Para você calcular a raiz quadrada de 11, gire a régua até encontrar o ponto do plano em que a abscissa seja 11. A ordenada desse ponto é a raiz quadrada de 11, ou seja, aproximadamente 3,3.



ATIVIDADES

14. Veja se você entendeu o processo:

14. a. Utilizando esse instrumento, qual o resultado aproximado de $\sqrt{7}$?

14. b. Descubra por que esse mecanismo funciona.

COMENTÁRIO

O professor deve tomar o cuidado de não passar ao aluno a idéia de que existem poucos irracionais; por isso, é importante que o aluno identifique o número irracional como um número de infinitas casas decimais não periódicas.

(...) quando se estuda a reta numérica racional e se constrói o conhecimento da densidade dos números racionais – entre dois racionais há uma infinidade de racionais – parece não haver mais lugar na reta numérica para nenhum tipo de número além dos racionais (BRASIL. MEC, 1997, p. 106)

15. Há infinitos irracionais entre dois racionais. Dê três exemplos de números irracionais que estejam entre:

15. a. $1e\frac{3}{2}$,

15. b. 0,01 e 0,02.

O NÚMERO IRRACIONAL MAIS CONHECIDO

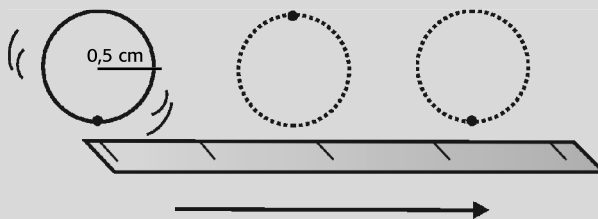
Desde 2000 a.C., muitos tentaram calcular o valor exato de π , porém só conseguiam aproximá-lo através de frações. A descoberta de que o número π é irracional ocorreu em 1761. A demonstração é atribuída ao matemático francês Lambert.

Mas, afinal, quanto vale π ? Descubra o seu valor aproximado fazendo a atividade a seguir.

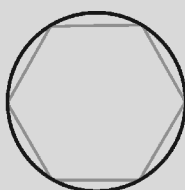
ATIVIDADES

16. Nesta experiência, você vai precisar de cartolina, compasso, régua e tesoura. Construa um círculo de raio igual a 0,5cm, marcando um ponto na borda. Ponha o círculo em pé e, com a régua deitada, faça-o girar, sem deslizar, com o ponto marcado sobre a origem da régua no mesmo sentido da régua, até alcançar o ponto marcado novamente. Qual foi a distância aproximada que o círculo percorreu?

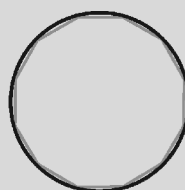
Lembre-se de que essa distância corresponde ao comprimento da circunferência, ou seja, π .



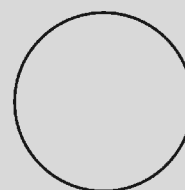
17. A seguir, estão representados três polígonos regulares inscritos em uma circunferência de raio igual a 1. O 1º polígono, de 6 lados; o 2º, de 12 lados; o 3º, de 24 lados.



$n=6$



$n=12$



$n=24$

17. a. Calcule as áreas desses polígonos.

17. b. O que você espera que aconteça com os valores da área dos polígonos regulares inscritos, à medida que aumenta o número de lados?

COMENTÁRIO

Use a fórmula da área do triângulo em função de dois lados e do seno compreendido entre eles. Lembre-se também de que $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$.



É impossível a construção do número π com régua e compasso.

A verificação da irracionalidade de um dado número só é possível, naturalmente no âmbito da própria Matemática. Nenhuma verificação empírica, nenhuma medição de grandezas, por mais precisa que seja, provará que uma medida tem valor irracional (BRASIL, MEC, 1997, p. 106).

VOCÊ JÁ OUVIU FALAR EM COMENSURABILIDADE?

COMENSURÁVEL

1. Que se pode medir.
2. Mat. Diz-se de uma grandeza que contém certo número de vezes exatamente uma unidade convenientemente escolhida.

A maioria dos livros didáticos não trata desse assunto ou, quando o aborda, o faz de maneira superficial. Mas do que se trata? Bom, sabendo o significado da palavra **COMENSURÁVEL**, talvez você possa descobrir. Vamos ao dicionário:

Isso quer dizer que dois segmentos são comensuráveis se existir uma unidade de medida que caiba um certo número de vezes nos dois segmentos.

Os antigos gregos faziam medições utilizando tiras de bronze sem graduação. Acreditavam que, dados dois segmentos de reta, \overline{AB} e \overline{CD} , sempre existiria uma unidade de medida, por menor que fosse, cabendo um número inteiro de vezes em \overline{AB} e \overline{CD} .



ATIVIDADE

18. Mas será que dados dois segmentos de reta quaisquer, \overline{AB} e \overline{CD} , sempre será possível um segmento \overline{EF} cuja medida caiba um número exato de vezes em \overline{AB} e \overline{CD} ? Faça o teste em cada um dos itens, exemplificando a medida de \overline{EF} , caso seja possível.

18. a. $\overline{A} \text{---} \overline{B}$ 1cm

$\overline{C} \text{---} \overline{D}$ 2cm

18. b. $\overline{A} \text{---} \overline{B}$ $\frac{1}{5}$ cm

$\overline{C} \text{---} \overline{D}$ 3cm

18. c. $\overline{A} \text{---} \overline{B}$ $\frac{1}{5}$ cm

$\overline{C} \text{---} \overline{D}$ $\frac{3}{7}$ cm

18. d. $\overline{A} \text{---} \overline{B}$ 1.2cm

$\overline{C} \text{---} \overline{D}$ 0.67cm

Se existir \overline{EF} tal que sua medida caiba um número exato de vezes em \overline{AB} e \overline{CD} diremos que \overline{AB} e \overline{CD} são comensuráveis. Caso contrário, serão ditos incomensuráveis.

Podemos ter idéia da comensurabilidade com duas tiras de cartolina de quaisquer tamanhos. Vamos chamar o comprimento dessas tiras de X e Y .

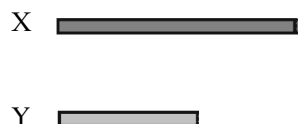


Figura 6.5: Verificar segmentos comensuráveis.

Colocando tiras de tamanho Y e de tamanho X , lado a lado, se conseguirmos equipar em algum momento, os segmentos serão comensuráveis. Veja:

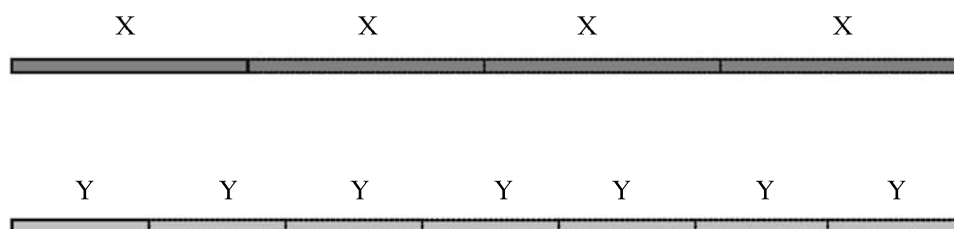


Figura 6.6: Verificar segmentos comensuráveis.

Caso contrário, X e Y são incomensuráveis. Observe que por esse processo não podemos afirmar concretamente que dois segmentos são incomensuráveis, pois o número de vezes que podemos dispor tais segmentos lado a lado é limitado.

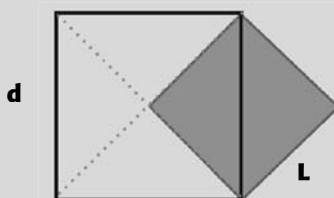
Mas será que não existe uma maneira mais fácil de verificar que dois segmentos são incomensuráveis, em vez de ficar fazendo testes? E se nunca conseguirmos um exemplo de incomensurabilidade?



ATIVIDADE

19. Para deixá-lo convencido do fato de que existem segmentos que são incomensuráveis, você fará uma demonstração.

Seja L o lado do quadrado menor e d o lado do quadrado maior.



19. a. O que a medida d representa no quadrado menor?

19. b. Qual a relação existente entre d e L ?

19. c. Não existirá um segmento de comprimento c que caiba um número inteiro de vezes nos lados desses quadrados, ou seja, os lados desses quadrados são incomensuráveis. Por quê?

COMENTÁRIO

Nessa atividade, você pôde observar que o lado de um quadrado e sua diagonal possuem medidas incomensuráveis. Da mesma forma como foi feito na letra (c), você pode verificar se a razão entre os comprimentos dos segmentos por você escolhidos é um número racional. Se for, os segmentos são comensuráveis. Caso contrário, serão incomensuráveis. Com isso, conclui-se que, se todo par de segmentos fosse comensurável, só existiriam os números racionais. No item (C), suponha que exista o segmento e chegue a uma contradição! Você encontra essa resposta comentada ao final da aula.

CONCLUSÃO

Uma explicação para as dificuldades encontradas pelos alunos para assimilação desse conceito tão complexo é o alto grau de abstração e a falta de regularidades. É necessário que o professor ofereça atividades para desmistificar a idéia que o aluno tem de que propriedades válidas para os números racionais são válidas também para os irracionais. Por isso, o professor deve abordar essas questões constantemente no decorrer do Ensino Fundamental e Médio.

RESUMO

As propriedades válidas no conjunto dos racionais nem sempre são válidas no conjunto dos irracionais. Se construirmos alguns números irracionais com régua e compasso, veremos que nem todos podem ser construídos assim. π é um exemplo. Quanto a comensurabilidade e icomensurabilidade é importante saber que nem sempre existe um segmento que caiba um número exato de vezes em outros dois.

ATIVIDADE FINAL

O número $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots}}}}$ é racional ou irracional? Por quê?

COMENTÁRIO

Chame $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots}}}}$ de x e eleve ambos os membros ao quadrado.

AUTO-AVALIAÇÃO

Uma forma de você verificar se atingiu os objetivos desta aula é responder à seguinte pergunta: todo número irracional pode ser escrito usando-se radicais? Se você não sabe responder, não desista: volte e reveja a Atividade 9. É muito importante que você tenha feito todas as atividades apresentadas nesta aula para poder prosseguir. Portanto, se ainda ficou alguma dúvida ou se você ficou inseguro em algum aspecto, procure os tutores. Em seguida passe para próxima aula! Até lá!



RESPOSTAS

Atividade 1

É incorreto dizer que $\frac{\sqrt{2}}{3}$ está escrito, sob forma de fração. O número $\frac{\sqrt{2}}{3}$ é uma razão e não uma fração, pois $\sqrt{2}$ não é um número inteiro. Os números racionais são aqueles que podem ser escritos sob a forma $\frac{m}{n}$, com m e n inteiros e $n \neq 0$. $\sqrt{2}$ é irracional.

Atividade 2

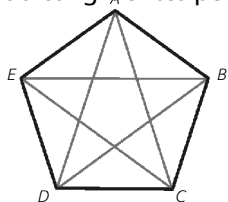
- 1.
- 2.
- $m^2 = 2n^2$.
- Pela letra (c), m^2 é par. Logo m é par.
- Fazendo $m^2 = 2k^2$, temos que $4k^2 = 2n^2$. Logo, n^2 é par, e portanto, n é par.
- $\sqrt{2}$.
- Sendo $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, com m e n naturais não nulos, temos que $\sqrt{2}$ é irracional.
- É o mesmo tipo de demonstração, prova por absurdo. Suponha que $\sqrt[3]{2} = \frac{m}{n}$, m e n primos entre si. E use o fato que se m^3 é par então m é par.

Atividade 3

- a. $m^2 = 3n^2$.
- b. O fator 3 aparece uma quantidade ímpar de vezes no lado direito da igualdade encontrada em (a), enquanto aparecerá uma quantidade par de vezes do lado esquerdo.

Atividade 4

- a. São congruentes pelo caso LLL.
- b.



Do triângulo ACD, obtemos que $2x + 3y = 180^\circ$, (*)

e, do triângulo ABE, $4x + y = 180^\circ$.

Assim, e da afirmação (*), $x = 72^\circ$ e $y = 36^\circ$.

Concluimos que $\widehat{EAD} = 36^\circ$ e $\widehat{AEC} = 72^\circ$.

Dividimos a equação por d^2 , e resolvemos a equação do segundo grau cuja variável é $\frac{L}{d}$.

4. c. Da semelhança dos triângulos AB'E e ADC, temos $\frac{L}{d} = \frac{c}{L}$ (*)

Porém, $c = d - L$. Daí e de (*), $\frac{L}{d} = \frac{d-L}{L}$

ou seja $L^2 + Ld - d^2 = 0$.

Logo, $\frac{L}{d} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

4. d. Se fosse racional, existiria $\frac{m}{n}$, com m e n naturais não-nulos, tal que $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{m}{n}$

Assim, pela propriedade de fechamento dos racionais, $\sqrt{5} = 2\frac{m}{n} + 1 \in \mathbb{Q}$, o que é um absurdo.

Atividade 6

6. a. Suponha que exista fração irredutível $\frac{m}{n}$, com m, n inteiros positivos e $n \neq 0$ tal que $3 + 5\sqrt{2} = \frac{m}{n}$.

Como \mathbb{Q} é fechado em relação à soma e à multiplicação $5\sqrt{2} = \frac{m}{n} - 3$, portanto, $\sqrt{2} = \frac{1}{5} \times \frac{m}{n} - \frac{3}{5} \in \mathbb{Q}$ o que é uma contradição.

6. b. De fato, se $\sqrt[4]{2}$ fosse racional, o quadrado também seria um racional pelo fechamento do produto. Mas isso nos daria $\sqrt{2}$ como racional, o que é um absurdo. Logo $\sqrt[4]{2} \notin \mathbb{Q}$.

Atividade 7

Quando temos $x = \sqrt{6,25}$ não implica $x = -2,5$.

Atividade 8

a.

x	x ²
7 ou -7	49
1,1	1,21
$-\frac{16}{9}$	$\frac{256}{81}$
Não existe	-169

b.

x	\sqrt{x}	\sqrt{x} é irracional?
81	9	NÃO
256	16	NÃO
Não existe	-4	-
$\frac{512}{9}$	$\frac{16\sqrt{2}}{3}$	SIM

C.

x	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{x}$ é irracional?
-27	-3	NÃO
$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$	SIM
0,125	0,5	NÃO
$\frac{16}{27}$	$\frac{\sqrt[3]{16}}{3}$	SIM

Atividade 9

Elevando ao quadrado os dois membros da igualdade, chegamos na equação $x^2 - 7x = 0$, que nos dá como solução $x = 0$ ou $x = 7$. A solução $x = 0$ deve ser descartada, pois não atende à equação, porque chegamos na igualdade $4 = -4$, o que é falso.

Atividade 10

10. a. As medidas das hipotenusas são as seguintes do menor para o maior triângulo retângulo: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}$.

10. b. São raízes de números naturais consecutivos.

10. c. Todas, com exceção de $\sqrt{4}$. Um número é dito irracional se sua representação decimal for infinita não periódica.

Atividade 12

Elevando ambos os membros da igualdade $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x+y}$ ao quadrado $x + 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} + y = x + y$ o que equivale dizer que $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 0$.

Assim, $x = 0$ ou $y = 0$.

Atividade 13

Sim. Temos que $(\sqrt{x} \cdot \sqrt{y})^2 = x \cdot y$. Por outro lado, $(\sqrt{x \cdot y})^2 = x \cdot y$, o que nos conduz à igualdade desejada.

Atividade 14

14. a. 2,6.

14. b. Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo QRS, obtemos:

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 \Rightarrow y^2 = x \Rightarrow y = \sqrt{x}$$

Atividade 15

15. a. 1,010010001...; $\sqrt{2}$; 1,323334... .

15. b. 0,010011000111...; $\frac{\sqrt{2}}{10}$, $\frac{\sqrt{3}}{10}$

Atividade 16

3,14cm, aproximadamente.

Atividade 17

17. a. Área do hexágono: $A_1 = \frac{1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ}{2} \cdot 6 \cong 2,6$.

Área do dodecágono: $A_2 = \frac{1 \cdot 1 \cdot \sin 30^\circ}{2} \cdot 12 \cong 3$.

Área do polígono de 24 lados: $A_3 = \frac{1 \cdot 1 \cdot \sin 15^\circ}{2} \cdot 24 \cong 3,1$.

17. b. Vão se aproximar da área do círculo de raio 1, π .

Atividade 18

Em todos os casos é possível encontrar um segmento \overline{EF} que caiba um número inteiro de vezes em \overline{AB} e \overline{CD} . A seguir, estão exemplos.

18. a. 1 cm.

18. b. $\frac{1}{5}$ cm.

18. c. Como $\frac{1}{5} = \frac{7}{35}$ e $\frac{3}{7} = \frac{15}{35}$, uma medida para \overline{EF} poderia ser $\frac{1}{35}$.

18. d. 0,01.

Atividade 19

19. a. A diagonal do quadrado menor.

19. b. Pelo Teorema de Pitágoras, $d = L\sqrt{2}$.

19. c. Suponha que $L = k_1c$ e que $d = k_2c$, onde k_1 e k_2 são inteiros positivos. Como

19. d. $d = L\sqrt{2}$, temos que $k_2c = \sqrt{2}k_1c$, ou seja, $\frac{k_2}{k_1} = \sqrt{2}$, o que é um absurdo.

Atividade Final

Como $x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots}}}}$ então $x^2 = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots}}}}$

Assim, $x^2 = 2 + x$, e portanto, $x = 2$.

Pensamento algébrico e senso numérico

AULA

7

Meta da aula

Apresentar diferenças entre pensamento algébrico e sentido numérico.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- Reconhecer e identificar as principais características do pensamento algébrico.
- Estabelecer diferenças entre sentido numérico e pensamento algébrico.

Pré-requisitos

Para o bom desenvolvimento desta aula, é necessário refletir sobre o que se entende por Educação Algébrica atualmente. Ter à mão uma calculadora pode ser útil. A leitura do livro de Lins e Giménez (1997) e dos PCN do Ensino Médio também é recomendada.

INTRODUÇÃO

Antes de iniciarmos esta aula, reflita e responda: se você tivesse de definir o que é Álgebra para um aluno seu, o que você diria?

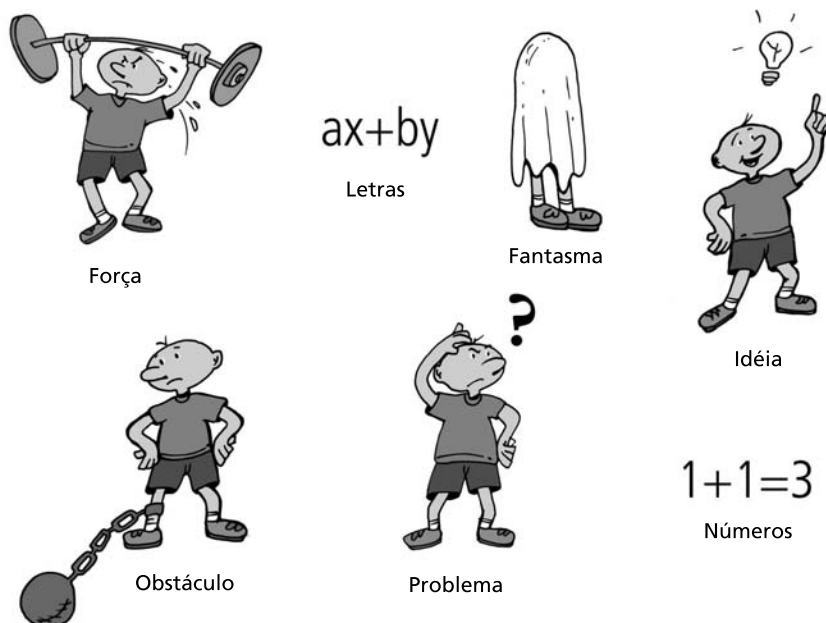
Não vá adiante ainda, pense um pouco mais, anote sua resposta. Essa não é uma pergunta simples de ser respondida. Mas, vale a pena sua reflexão.

Já tivemos a oportunidade de fazer essa pergunta pessoalmente para professores que estão atuando em sala de aula e para futuros professores, que, como você, estão fazendo o curso de Licenciatura em Matemática. Veja algumas de suas respostas:

- É a parte da Matemática que procura resolver a *todas* ou *quase todas* as situações-problemas que surgem atrás de expressões literais.
- É um ramo da Matemática que “formaliza” a matéria, utilizando a letra para às vezes generalizar, demonstrar.
- Álgebra é o inferno na Terra!
- Álgebra é a disciplina que utiliza as equações para resolver problemas da Matemática.
- É um dos alicerces dos conhecimentos matemáticos.
- Álgebra é abstrata, de difícil entendimento e visualização prática.
- Álgebra é um estudo detalhado e profundo dos números, de uma forma de organizá-los, ou seja, em anéis, corpos etc.
- É o estudo abstrato do cálculo, onde os valores numéricos são considerados variáveis.
- É linguagem matemática, sempre pensei nisso, (o signo) mas já estou acreditando que é também uma forma de pensar, de associar idéias, enfim, algo mais amplo.

Identificou semelhança de sua resposta com alguma delas? Observe que o que esses professores ou futuros professores entendem por Álgebra envolve múltiplos conceitos e idéias.

Estas imagens representam as múltiplas facetas relacionadas ao ensino da Álgebra.



Durante a escolaridade, no estudo de Matemática, você teve contato com a Álgebra, a Aritmética e a Geometria. De maneira geral, com mais ênfase nas duas primeiras disciplinas. Historicamente, a Geometria foi, durante um longo período de tempo, deixada de lado na maioria das aulas de Matemática.

Esperamos que em sua prática docente você atue de forma integradora. (www.mec.gov.br). Como foi apresentado na Aula 30 de Instrumentação do Ensino de Geometria, no 3º e 4º ciclos os Parâmetros Curriculares Nacionais organizam os objetivos em habilidades de pensamento diferentes: Pensamento Algébrico, Pensamento Geométrico, Sentido Numérico, Competência Métrica, Raciocínio Proporcional, Pensamento Estatístico e Probabilístico.

Ressaltando que há relações intrínsecas entre os objetivos, naquela disciplina os autores apresentaram palavras que traduziam idéias inerentes a cada um deles. Nesta aula, aprofundaremos as características do pensamento algébrico e do sentido (senso) numérico.



Defendemos a idéia de que no Ensino Médio tais objetivos também devam ser considerados e desenvolvidos.

Não há hierarquia entre os objetivos. Eles não devem ser vistos isoladamente. De acordo com a atividade proposta, pode haver relações distintas entre eles.

COMO ANDA SEU SENTIDO NUMÉRICO?

O significado das expressões *sentido numérico* ou *senso numérico* nos remete a uma discussão sobre o ensino da Aritmética na escola.

Segundo Lins e Giménez (1997), nos últimos anos, diversas pesquisas têm mostrado que os alunos não valorizam, nem a escola desenvolve, um conhecimento intuitivo sobre os números. Orientados pelo trabalho de Judith Sowder, os autores sublinharam que o sentido numérico implica diferentes ações cognitivas, a saber:

- a. Embora reconheça uma operatividade de técnicas, não se trata de executar um pensamento algorítmico.*
- b. Não existe sentido numérico sem um processo de auto-regulação do pensamento, incerteza nos dados e resultados que se tem.*
- c. Dá-se uma multiplicidade de caminhos e diversidade de soluções, de forma que a produção de juízos correspondentes não pode afirmar que tal ou qual raciocínio seja melhor do que o outro.*
- d. Inclui complexidade, necessita atribuir significados e requer um esforço (p. 60).*

Entre as características consideradas como fundamentais para um bom sentido numérico, os autores destacam:

- *identificar significados para números e as operações;*
- *reconhecer o valor relativo dos números;*
- *descobrir relações e padrões;*
- *imaginar e descrever uma quantidade em função de outras, de formas diversas;*
- *intuir e estabelecer raciocínios na resolução de problemas (p. 60).*

Os autores complementam ainda que há os fatores de atitude e valor, como saber situar-se no “mundo dos números” e reconhecer o valor e os limites do uso do cálculo mental, escrito e com calculadora.

Muitas são as atividades que envolvem os aspectos anteriores. Mas, para que você possa entender melhor, veja alguns exemplos nas próximas atividades.



Para que o indivíduo construa um senso numérico, o professor precisa oferecer atividades que envolvam cálculos mentais, generalizações e uma certa intuição no trato com os números.

ATIVIDADE



1. Observe estas tabelas. Elas apresentam em suas colunas valores que relacionam \square com Δ . Elabore estratégias para encontrar uma relação entre esses valores e registre todas as suas respostas.



Registrar estratégias e observações deve ser uma ação constante em qualquer atividade matemática.

\square	Δ
0	5
1	7
2	9
3	11
4	12
5	14
6	16
7	18

Tabela a

\square	Δ
0	7
1	9
2	11
3	13
4	15
5	17
6	19
7	21

Tabela b

Veja o registro de alunos da 6ª série e algumas de suas repostas; analise as duas respostas.

Tabela a

\square	Δ
0	5
1	7
2	9
3	11
4	12
5	14
6	16
7	17

$\Delta = 2\square + 5$
 $\Delta = 2\square + 4$

Tabela b

\square	Δ
0	7
1	9
2	11
3	13
4	15
5	17
6	19
7	21

7
 8
 9
 10

Tabela a: A regra escrita foi $\Delta = 2\square + 5$

Tabela b: A regra criada foi $\Delta = 2\square + 7$

COMENTÁRIO

Compare as respostas dos alunos com as suas. Veja as observações que eles fizeram, ao lado de cada tabela, e procure entender o porquê de suas respostas. Observe que na Tabela b eles construíram uma seqüência ao encontrar a diferença entre o Δ e o \square . Converse com colegas e com o tutor a respeito.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR 1

Olhando, atentamente, estas tabelas, descubra relações entre o \square e o Δ . Registre suas descobertas.

Tabela c

\square	Δ
0	1
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
6	13
7	15

Tabela d

\square	Δ
0	5
1	9
2	13
3	17
4	21
5	25
6	29
7	33

Tabela e

\square	Δ
0	7
1	14
2	21
3	28
4	35
5	42
6	49
7	56

Veja o que os alunos de 6ª série responderam:

Tabela c: A regra criada foi $\Delta = 2\square + 1$

Tabela d: A regra foi $\Delta = 4\square + 1$

Tabela e: A regra foi $\square = 7\Delta + 3$

Analise, como professor, as três respostas anteriores.

COMENTÁRIO

Você deve ter identificado erros na segunda e na terceira respostas. Não basta identificar o erro. É preciso conversar com o aluno para entender o que ele pensa, fala e escreve. Nesses dois tipos de tarefa, o estudante descobre relações de uma quantidade em função de outras.

MAS, AFINAL, O QUE É ÁLGEBRA?

No início da aula, levantamos essa questão e agora voltamos a ela, trazendo a definição de Álgebra de alguns autores. De maneira geral, esses autores dizem que não é tarefa simples definir essa área da Matemática, mas refletir sobre isso contribui, de forma significativa, para o ensino da Álgebra, área intrinsecamente relacionada à Aritmética, como podemos constatar na afirmação de Lane e Birkhoff, 1967 *apud* Usiskin, 1994:

A álgebra começa como a arte de manipular somas, produtos e potência de números. As regras para essas manipulações valem para todos os números, de modo que as manipulações podem ser levadas a efeito com letras que representem os números. Revela-se então que as mesmas regras valem para diferentes espécies de números [...]

e que as regras inclusive se aplicam a coisas [...] que de maneira nenhuma são números. Um sistema algébrico, como veremos, consiste em um conjunto de elementos de qualquer tipo sobre os quais operam funções como a adição e a multiplicação, contanto apenas que essas operações satisfaçam certas regras básicas (p1) (p. 9 do livro do artigo do Usiskin)

Os autores afirmam que a primeira parte da citação refere-se à Aritmética, enquanto a segunda trata da Álgebra.

No entendimento de Lins e Giménez (1997), a Álgebra:

consiste em um conjunto de afirmações, para as quais é possível produzir significados em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade ou desigualdade (p. 150).

Assim, as atividades anteriores não são “algébricas” pelo simples fato de incluir símbolos.

Segundo os autores, há distintos modos de produzir significados para a disciplina Álgebra: o pensamento algébrico é um deles. Os autores ressaltam que pensar algebricamente significa:

1. *produzir significados apenas em relação a números e operações aritméticas;*
2. *considerar números e operações apenas segundo suas propriedades, e não “modelando” números em outros objetos, por exemplo, objetos “físicos” ou geométricos;*
3. *operar sobre números não conhecidos como se fossem conhecidos (p. 151).*

Um objeto físico difere de um geométrico. Os objetos geométricos são idealizações. Assim, uma caixa de sapato é um objeto físico, ao passo que um prisma reto retângulo (paralelepípedo) é um objeto geométrico.



Na visão de Lins e Giménez (1997), as operações e propriedades numéricas ganham vida e sentido na medida em que são especificadas, em sua particularidade, no interior de uma atividade.

ATIVIDADE



2. Lembra-se das brincadeiras de adivinhar um número? Dependendo de como são exploradas, elas têm importante valor didático no desenvolvimento do pensamento algébrico. Vamos conferir?

1. Pense em um número.
 2. Multiplique-o por 2.
 3. Acrescente 5 ao resultado.
 4. Multiplique o resultado por 5.
 5. Some 10.
 6. Diga-me o resultado e lhe direi o número que pensaste.
- Encontre uma forma de registrar a seqüência de passos anterior e justifique por que é possível “adivinhar” o resultado.

COMENTÁRIO

As atividades de adivinhação que envolvem números e operações estimulam a imaginação e favorecem a análise, a descoberta de relações numéricas e, nesse caso em especial, o trabalho com as operações inversas, diretamente relacionadas à resolução de equações.

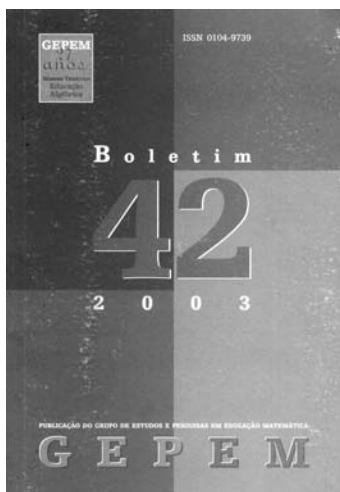
CONVERSANDO SOBRE HISTÓRIA E SEU LABORATÓRIO DE ARITMÉTICA E ÁLGEBRA

Circe Mary da **SILVA** é educadora matemática e professora da Universidade Federal do Espírito Santo (UFES). Seus diferentes trabalhos de pesquisa em História da Matemática têm trazido contribuições significativas para a sala de aula.

Conheça o livro paradidático *Explorando as Operações Aritméticas com Recursos da História da Matemática* (**SILVA**, 2003). Nele a autora enriquece o trabalho com as quatro operações com fatos históricos. É um livro recomendável para você e seus alunos.



Uma obra recentemente publicada pelo Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (www.gepem.ufrrj.br) oferece diferentes alternativas para o trabalho com a Educação Algébrica em sala de aula.



Ao ler o Boletim 42 do Gepem, você irá aprofundar seu conhecimento acerca do processo ensino-aprendizagem da Álgebra na Educação Básica. Leia, em especial, os seguintes artigos:

- "Educação Algébrica e a resolução de problemas".
- "Alfabetização algébrica nas séries iniciais. Como começar?"
- "Significados e modelagem na atividade algébrica."
- "Álgebra, Geometria e Aritmética de mãos dadas no ensino fundamental."
- "As equações e gráficos – representações e metáforas."
- "As equações e o conceito de função."
- "Uma introdução ao estudo de funções utilizando softwares educativos."

ATIVIDADE



3. Você sabe calcular o produto 25×30 ? Mas, veja como os escribas egípcios faziam (tradução de registros do papiro de Rhind, $\cong 1650$ a.C.). Na tabela temos o início do procedimento desta multiplicação. Complete a última linha da tabela a seguir com o resultado. Analise e comente o procedimento utilizado por esse antigo povo.

$$25 \times 30 = ?$$

Total de parcelas	Resultado
1	30
2	60
4	120
8	240
16	480



Retorne à Aula 2, caso sinta dificuldade!

COMENTÁRIO

O resultado encontrado foi 750? O que nos interessa aqui é a análise do procedimento de cálculo utilizado e sua justificativa. Conforme a Aula 2, veja uma possível justificativa que poderíamos utilizar nos dias de hoje.

$$25 = (1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1)_2, \text{ isto é, } 25 = 2^4 + 2^3 + 2^0$$

$$25 \times 30 = (2^4 + 2^3 + 2^0) \times 30 =$$

$$2^4 \times 30 + 2^3 \times 30 + 2^0 \times 30 =$$

$$480 + 240 + 30 = 750$$

O ENSINO DA ÁLGEBRA DESDE AS SÉRIES INICIAIS E CONTRIBUIÇÃO DOS PCN

O Ensino da Álgebra é realizado de formas diferentes de acordo com os níveis de ensino. É provável que, ao falar em Álgebra, a idéia mais presente em você seja a disciplina de Álgebra I, do seu curso em Licenciatura em Matemática, cujo foco está no estudo das estruturas algébricas. Esse conteúdo pode parecer árido e sem significado. Mas sem a evolução da linguagem algébrica, não teríamos avançado tanto em vários ramos das Ciências, em especial na Tecnologia da Informação.

Hoje já há pesquisas que exploram o ensino da Álgebra e Aritmética desde muito cedo, ainda nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Sobre esse assunto, veja Falcão (2004), Boletim Gepem 42, intitulado *Alfabetização algébrica nas séries iniciais. Como começar?*

Os PCN do 2º segmento do Ensino Fundamental apresentam um quadro-resumo sobre as diferentes interpretações da Álgebra Escolar e as diversas funções da letra.

Álgebra no Ensino Fundamental (BRASIL, MEC, 1998, p. 116)

Dimensão da Álgebra	Aritmética generalizada	Funcional	Equações	Estrutural
Uso das Letras	Letras como generalizações.	Letras como variáveis para expressar relações e funções.	Letras como incógnitas.	Letras como símbolo abstrato.
Conteúdos (conceitos e procedimentos)	Propriedades das operações; generalizações de padrões aritméticos.	Variação de grandezas.	Resolução de equações.	Cálculo algébrico. Obtenção de expressões equivalentes.

Os Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Médio sugerem como objetivos:

- compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam o desenvolvimento de estudos posteriores e a aquisição de uma formação científica geral;
- aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da Ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
- analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, de outras áreas do conhecimento e da atualidade;
- desenvolver as capacidades de raciocínio e de resolução de problemas, e de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
- utilizar, com confiança, procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
- expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações nessa área de estudo;
- estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
- reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;
- promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação (BRASIL, MEC, 1999, pp. 84-85).





Lembre-se de que você também poderá conhecer um pouco mais sobre a Educação Matemática hoje e sobre a organização curricular no 1º e 2º ciclos lendo as Aulas 1 e 2 de Matemática na Educação 1 do curso de Pedagogia.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR 2

Para efetuar a multiplicação de 435 por 23, ou seja, 435×23 , um aluno apresentou o seguinte procedimento de cálculo:

$$435 \times 23 = ?$$

$$435 \times 23 = 435 \times 22 + 435$$

$$435 \times 22 = 870 \times 11$$

$$870 \times 11 = 870 \times 10 + 870$$

$$870 \times 10 = 1740 \times 5$$

$$1740 \times 5 = 1740 \times 4 + 1740$$

$$1740 \times 4 = 3480 \times 2$$

$$3480 \times 2 = 6960$$

$$435 \times 23 = 435 + 870 + 1740 + 6960 = 10005$$

- Faça uma análise e justifique o procedimento de cálculo.
- Utilizando o mesmo procedimento, encontre o resultado de 625×43 .

COMENTÁRIO

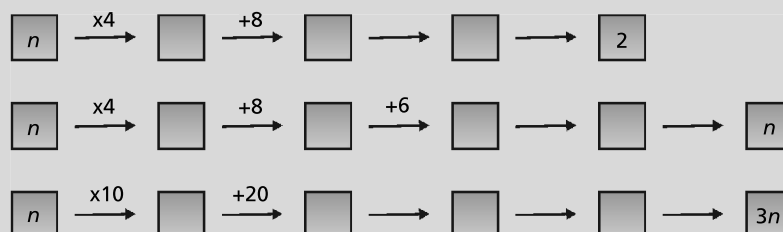
Esse tipo de atividade explora a observação e compreensão de diferentes formas de pensar. Assim, você, futuro professor, deve agir com seus alunos, procurando entender os diferentes caminhos que eles constroem para chegar a um resultado. Modelos de resolução são importantes nas atividades propostas em Matemática, mas o professor deve incentivar seus alunos a buscar caminhos originais, eles refletem a maneira de pensar de cada um. Procurar entendê-los nem sempre é tarefa fácil, mas esse é um grande desafio do professor e que vale a pena enfrentar. Assim, você estará contribuindo para que seu aluno construa o conhecimento matemático.



Observe que na terceira situação a resposta não é única. Pense em mais de uma maneira de completar e discuta com seu tutor!

ATIVIDADE

4. Atribuindo diferentes valores para n , complete cada uma das seqüências numéricas:

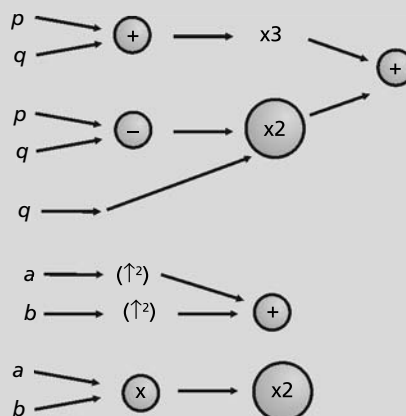


Escreva observações, descobertas e justifique o porquê de cada resultado.

COMENTÁRIO

Neste tipo de tarefa, você deixa seu aluno imaginar uma quantidade e estudar suas variações em função de operações ocorridas. Outro tipo de escrita e representação é desenvolvido.

5. Colocando diferentes valores para as letras, complete os caminhos a seguir e mostre que o resultado encontrado em cada caso é sempre válido.



COMENTÁRIO

A seta voltada para cima indica elevar ao expoente. É importante que você converse com seu tutor sobre semelhanças e diferenças entre as Atividades 4 e 5. Um possível desdobramento é pedir que os alunos elaborem suas próprias cadeias numéricas, compartilhem-nas e discutam os diferentes resultados. Essas seqüências numéricas são outro tipo de representação dos clássicos problemas "pense em um número, multiplique-o por 2 etc.", como vimos na Atividade 2.

CONVERSANDO SOBRE O LABORATÓRIO DE ARITMÉTICA E ÁLGEBRA

O Hex

Na Aula 29 de Instrumentação da Ensino da Geometria, você conheceu o *Hex*, um jogo de tabuleiro que desenvolve estratégias geométricas. Vamos recordar as regras do jogo:

1. Sorteio, para saber que jogador começa a partida.
2. Cada jogador – um de cada vez – desenha, sobre uma casa do tabuleiro, o símbolo que lhe corresponde (um círculo ou uma cruz).
3. Linhas de símbolos (círculos ou cruzes) não podem cruzar-se.
4. As quatro casas que formam os vértices do losango pertencem a ambos os lados.
5. Ganha a partida o jogador que primeiro conseguir unir dois lados opostos, mediante um alinhamento contínuo de símbolos feitos por ele.

Reveja o exemplo de um tabuleiro, em cuja partida o jogador que utilizou círculos foi o vencedor.

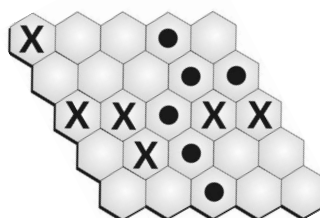


Figura 7.1: Exemplo de jogada no *Hex*: estratégia geométrica.

Há também a possibilidade de utilizarmos o *Hex*, porém com números. Desta forma, o objetivo, que era desenvolver habilidades geométricas, agora fica enriquecido com a inserção de explorações numéricas (operações e cálculos estimados). Veja o tabuleiro.



Lembre-se de que este tabuleiro está disponível no Módulo Prático.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR 3

7

AULA

Jogue uma partida do Hex com um colega.

COMENTÁRIO

Identificar potencialidades e limitações do jogo é uma função docente importante. Esta é mais uma situação de aprendizagem em que a calculadora deve ser utilizada. Fazer estimativas de resultados e efetuar cálculos estarão sempre presentes nas escolhas dos pares de números. Lembre-se de anotar os resultados em seu caderno. Você deve perceber que uma estratégia importante é bloquear as possíveis casas a serem escolhidas pelo seu adversário.



Essencial é a atenção que devemos dar ao desenvolvimento de valores, habilidades e atitudes dos alunos quando se trata da construção do conhecimento e das relações entre alunos e professores. A preocupação com esses aspectos da formação dos indivíduos estabelece uma característica distintiva das propostas contemporâneas, pois valores, emoções, habilidades e atitudes são, a um só tempo, objetivos centrais da Educação Matemática. São elas que também permitem ou impossibilitam a aprendizagem, quaisquer que sejam os conteúdos e as metodologias de trabalho.

CONCLUSÃO

Em um mundo em que as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos olhares e contornos, todas as áreas do conhecimento requerem alguma competência em Matemática. A possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessária tanto para se tirar conclusões e fazer argumentações quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional.



No Ensino Médio, em especial, os estudantes devem desenvolver, de modo mais amplo, capacidades de abstração, resolução de problemas de qualquer tipo, investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e de interpretação crítica da realidade que o envolve.

É necessário que o aluno desenvolva progressivamente os pensamentos abstratos, evitando a memorização indiscriminada de algoritmos. As Atividades que preconizam o desenvolvimento de habilidades de caráter gráfico, geométrico, algébrico, estatístico, probabilístico, devem estar presentes no currículo escolar.

RESUMO

O currículo atual de Matemática deve implementar atividades que desenvolvam o pensamento algébrico e o sentido numérico. Estes, intrinsecamente relacionados, envolvem as seguintes ações: deduzir, relacionar, induzir, predizer, estimar, iterar, calcular, operar, classificar, medir, comparar, comunicar, dentre outras.

ATIVIDADE FINAL

Dentre os objetivos fundamentais para que atividades desenvolvam o sentido numérico, conforme citação de Lins e Giménez (1997), apresentamos o quadro a seguir:

Quadro 7.1: Identificando objetivos e atividades associadas em aulas diversas

Objetivo	Aula	Atividade(s)	Seu(s) comentário(s)
Identificar significados para números e as operações	7		
Reconhecer o valor relativo dos números			
Descobrir relações e padrões			
Imaginar e relacionar uma quantidade em função de outras, de formas diversas	1	7	Aquela atividade é importante porque me permitiu traduzir diferentes enunciados da linguagem corrente para a linguagem matemática. Essa tradução nem sempre é fácil para os alunos.
Intuir e estabelecer raciocínios na resolução de problemas			
Saber situar-se no “mundo dos números”			Os quadrados mágicos (aula seguinte) trazem diferentes olhares sobre os números. Arrumá-los e perceber suas regularidades é importante para analisar cada tipo de quadrado.
Reconhecer o valor e os limites do uso do cálculo mental, escrito e com calculadora			

Está na hora de dar uma parada e revisar as atividades até aqui desenvolvidas. Para isso, termine de completar o quadro anterior.

Para cada atividade pode haver mais de um objetivo e vice-versa. É importante tecer seus comentários.

AUTO-AVALIAÇÃO

Se você consegue determinar as características do pensamento algébrico e do sentido numérico e identificá-las nas atividades, atingiu os objetivos da aula. Entretanto, temos consciência de que não esgotamos este assunto. Ao longo da disciplina, você terá outras oportunidades de rever algumas dúvidas nesta temática, caso existam. Esperamos também que tenha compreendido que o pensamento algébrico não deve ser reduzido a meras atividades de manipulação algébrica. Por exemplo, lembra-se da fórmula para o cálculo do número de diagonais de um polígono convexo? Como você sabe, algebricamente, ela pode ser escrita de diferentes modos:

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

$$D = \frac{n^2-3n}{2}$$

$$2D = n(n-3)$$

Então, dizemos que as expressões anteriores são equivalentes. Agora, se falamos de cada uma delas, podemos interpretá-las diferentemente. Por exemplo, podemos “ler” a segunda representação do seguinte modo: *para encontrar o número total de diagonais, calculo a metade do número de lados do polígono e multiplico o resultado pela diferença entre o número de lados e 3*. Faz sentido? Essa interpretação seria válida sempre, ou seja, para qualquer n ? Reflita sobre as duas respostas anteriores e sobre suas interpretações para cada equivalência apresentada anteriormente.

INFORMAÇÕES SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, você poderá desenvolver seu senso numérico e o pensamento algébrico mediante a realização de atividades que exploram a identificação e a análise de regularidades.

Um pouco de magia! A dos quadrados

AULA 8

Meta da aula

Instrumentalizar o trabalho com os Quadrados Mágicos.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- Identificar um Quadrado Mágico (QM).
- Utilizar os QM como recursos para desenvolver os pensamentos aritmético e algébrico.
- Estudar regularidades numéricas nos QM.
- Construir significados numéricos.

Pré-requisitos

Para o desenvolvimento desta aula, é fundamental que você continue interessado em aprender e em encontrar diferentes alternativas didáticas para suas aulas. Se possível, tenha à mão um jogo de dominó (aquele que se pode comprar nas lojas de R\$1,99). Dispor de calculadora pode ser útil, mas não é imprescindível. Relembre, em um livro didático do Ensino Médio, a fórmula para o cálculo da soma dos termos de uma Progressão Aritmética.

INTRODUÇÃO

A construção de Quadrados Mágicos tem sido objeto de constante admiração e estudo pelos matemáticos e místicos. Apesar disso, pouco se sabe sobre a história dos QM. Acredita-se que a formação de QM era conhecida dos chineses e dos hindus, em aproximadamente 5000 a.C. Uma das mais conhecidas representações pictóricas dos QM é a seguinte:

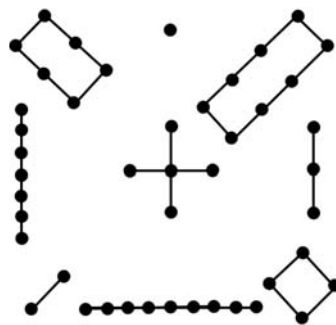


Figura 8.1: Primeiro registro de Quadrado Mágico.

EMANUEL MOSCUPOLO

Matemático grego que viveu no século XIV, construiu um QM de 64 casas, com constante mágica igual a 260, revelando muitas singularidades desse quadrado.

A Astrologia e a Quiromancia, por exemplo, são consideradas **PSEUDOCIÊNCIAS** porque, na visão de teóricos e pesquisadores, não constituem um corpo de conhecimento cientificamente (empiricamente) validado.

EMANUEL MOSCUPOLO divulgou os QM conhecidos na Europa. Na Europa Ocidental, os Quadrados Mágicos foram, durante a Idade Média, patrimônio dos representantes das chamadas **PSEUDOCIÊNCIAS**, dos alquimistas e dos astrólogos. Destes últimos, os quadrados formados por combinações numéricas específicas receberam o nome de Mágicos.

É possível que você esteja intrigado(a). Mas, afinal, o que são Quadrados Mágicos? Muito bem, vejamos!

DEFININDO QUADRADOS MÁGICOS

Concentre-se no seguinte quadrado. Verifique que a soma em cada linha, coluna ou diagonal é a mesma, ou seja, 34.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Figura 8.2: Quadrado A.

Trata-se, de fato, de um Quadrado Mágico! Sua soma (ou constante) mágica é 34. Este quadrado data de 1514, como pode ser lida nas células centrais da última linha.

Vejamos outras regularidades neste quadrado!

Adicione os números representados nos *quatro cantos* ($16+13+4+1$) do quadrado principal. A soma é, ainda, 34. Adicione, agora, os números que figuram nas *quatro células centrais*. A soma também é 34. Experimente com as *células centrais da primeira e da última linhas*. A soma continua sendo 34. Faça o mesmo com as células interiores da primeira e da quarta colunas. Novamente, você encontrou 34. Parabéns!

Adicione, também, *as duas primeiras células da coluna um com as duas últimas da coluna quatro*. Não nos diga que ficou admirado(a) ao encontrar a soma 34!

Calcule *a soma das duas diagonais de cada um dos quatro quadrados de 2×2* com um dos vértices coincidente com um vértice do quadrado principal. Por exemplo:

16	3
5	10

Figura 8.3: Quadrado B.

Você deve ter percebido que esses quatro “quadrinhos” não são mágicos. No entanto, é possível que tenha encontrado um tipo interessante de regularidade numérica quando os compara. Converse com seu tutor!

Um quadrado de ordem 3, possui 3 linhas e 3 colunas. Logo, possui 9 casas, que poderão ser preenchidas com os inteiros de 1 a 9. Um quadrado com 16 elementos tem ordem 4, um de 25 elementos possui ordem 5 e, assim, sucessivamente. Quando os elementos de um QM não são números considerados em sua ordem natural (1, 2, 3, 4, ..., n^2) o quadrado é denominado Quase-Mágico. Veja!

18	99	86	61
66	81	98	19
91	16	69	88
89	68	11	96

Figura 8.4: Quadrado C.

Um quadrado é denominado Bi-Mágico quando, elevando-se todos os seus elementos ao quadrado, ele continua sendo Quase-Mágico. É Tri-Mágico, quando elevando-se ao cubo todos os seus elementos, ele se torna Quase-Mágico.

CONVERSANDO SOBRE UM EPISÓDIO DA HISTÓRIA

Segundo Cornélio Agripa (1486-1535), matemático e médico, o QM de ordem 1 simbolizava a eternidade. O quadrado de ordem 2 com quatro casas não poderia existir, pois este simbolizaria o mundo material com os quatro elementos: o ar, a terra, o fogo e a água. Por causa das imperfeições desses elementos, o quadrado não poderia ter constante certa. Apontado pelas autoridades como feiticeiro, Agripa foi preso várias vezes.

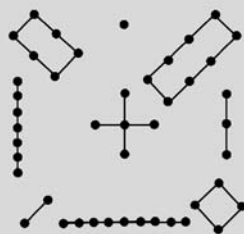
Acreditamos que você, neste momento da aula, já tenha compreendido o que significa um Quadrado Mágico. Ou seja, que se trata de um tipo especial de quadrado em que a soma dos números de cada linha, coluna ou diagonal, é sempre a mesma. Essa soma é também denominada mágica.

Voltemos, agora, ao quadrado ilustrado na **Figura 8.1**. Aquela ilustração representa um QM?



ATIVIDADE

1. Encontre, inicialmente, os números associados e o respectivo quadrado. Veja!



Contando os pontos e
montando o quadrado.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Figura 8.5: Quadrado D.

Em seguida, verifique se o quadrado é mágico.

Você sabe que a sala de aula de Matemática deve ser um espaço onde compartilhamos experiências, ensinamos e aprendemos. Com esse espírito, continuaremos desenvolvendo nossas atividades com os QM.



Existe uma vasta bibliografia sobre Quadrados Mágicos de ordem 3×3 , 4×4 , 5×5 etc. Porém, nesta aula priorizaremos atividades que nos possibilitem analisar, detalhadamente, QM de ordem 3 e soma 15.



ATIVIDADE

2. Complete o quadrado a seguir com os números de 1 a 9 sem repeti-los, de forma que a soma dos números nas linhas, colunas e diagonais seja igual a 15. Faça três observações.

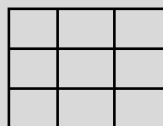


Figura 8.6: Quadrado E.

COMENTÁRIO

Registre todas as soluções encontradas. Troque idéias com colegas e apresente suas observações ao tutor.

Como você, nossos estudantes, inclusive os de 5ª série, fazem observações interessantes. Veja o que fizeram os alunos da professora Rosana de Oliveira. O objetivo dela era perceber como eles desenvolviam o pensamento algébrico e descobrir os argumentos que eles utilizavam na busca pela resposta.

Após algumas tentativas, dois estudantes encontraram respostas que satisfaziam a condição do problema. Tais respostas foram mostradas aos demais, e a professora perguntou se a partir delas seria possível encontrar outras.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Figura 8.7: Quadrado F.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Figura 8.8: Quadrado G.

Ao observarem estas respostas, os estudantes (E) disseram:

E₁– São iguais, agora é fácil encontrar outras respostas, basta trocar os números.

P– Ótimo, então troquem os números e encontrem outras respostas “iguais” a estas.

Após algumas tentativas, os estudantes perceberam que essa troca não poderia ser feita de maneira aleatória. Observaram que o número 5 deveria ficar sempre no centro do quadrado e que para obter novas respostas deveriam ser feitas rotações especiais. Os estudantes estabeleceram o seguinte diálogo:

E₁– O número 5 está sempre no meio.

E₂– Não, se puder repetir números.

P– Então, vamos tentar encontrar outras respostas podendo repetir números.

E₁– Se puder repetir números, fica muito fácil e tem-se a seguinte resposta:

5	5	5
5	5	5
5	5	5

Figura 8.9: Quadrado H.

O estudante E₂ continua buscando uma resposta com repetição de números em que o 5 não esteja no centro. Outros estudantes envolvem-se com seu argumento e aderem a essa busca. Após muitas tentativas, os estudantes se convencem de que o 5 estará sempre no meio, mesmo que possamos repetir números.

De maneira geral, os estudantes afirmam que depois de conhecerem algumas respostas foi possível encontrar outras com facilidade. Os discentes que percebem algumas regularidades encontram outras possibilidades de respostas que diferem de alguma *transformação*.

No exemplo anterior, as respostas diferem de uma “rotação axial ou em torno de um eixo” de 180° , tendo a diagonal 2, 5 e 8 como eixo, ou diferem de duas “rotações no plano” de 90° ao redor do centro. Essa discussão, dependendo do público-alvo com quem a atividade está sendo trabalhada, pode ser simplesmente sobre as ações de rodar e registrar ou debates sobre grupos de simetria ou teoria das matrizes.



Nesta aula, você viu e ainda verá respostas de alunos de diferentes séries, inclusive do Ensino Médio. Trata-se de um bom exemplo para que você reconheça que um mesmo tipo de atividade pode ser trabalhado em séries distintas. Vai depender apenas do objetivo e do grau de aprofundamento que deseja o professor.

Vejamos outras três observações de outros estudantes.

Observação 1: Todos os números ímpares não ficam no vértice, mas nos centros das linhas e colunas das extremidades; já os números pares estão sempre nos vértices do quadrado.

Essas posições estão relacionadas com as possibilidades de somas com resultado 15, sem repetição de números.

2+7+6
9+5+1
4+3+8
2+9+4
7+5+3
6+1+8
2+5+8
6+5+4

Observando as possibilidades de somas podemos concluir que: 1, 3, 7 e 9 aparecem cada um em duas somas; o 2, 4, 6, 8 aparecem cada um em três somas; e o 5 aparece quatro vezes. O número de vezes que esses números aparecem está diretamente relacionado à posição que eles ocupam no Quadrado Mágico.

Observação 2: Temos “sempre” dois pares e um ímpar.

Sendo a soma 15 (um número ímpar), para que três números somados obtenham como resultado um número ímpar, há duas possibilidades: ou três números ímpares ou dois pares e um ímpar. As respostas possíveis com três ímpares implica repetição de números, por exemplo: $5 + 5 + 5$ ou $7 + 7 + 1$... Sem repetição de números, temos apenas duas possibilidades: 3, 5, 7 e 1, 5, 9. Podemos mais uma vez diversificar o trabalho, fazendo um levantamento numérico, ou mostrando algebricamente.

Sejam x , y e z três números ímpares naturais e distintos. Portanto, eles podem ser escritos da seguinte forma:

$$x = 2a + 1$$

$$y = 2b + 1$$

$$z = 2c + 1$$

Como

$$x + y + z = 15, \text{ então,}$$

$$2a + 1 + 2b + 1 + 2c + 1 = 15$$

$$\text{onde } a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$2(a + b + c) + 3 = 15$$

$$2(a + b + c) = 15 - 3$$

$$2(a + b + c) = 12$$

$$a + b + c = 6$$

Logo a , b e c podem ser: 0, 2 e 4 ou 1, 2, 3

Substituindo esses valores de a , b e c em x , y e z , encontramos os trios $\{1, 5, 9\}$ e $\{3, 5, 7\}$, portanto duas somas possíveis sem incluir as permutações.

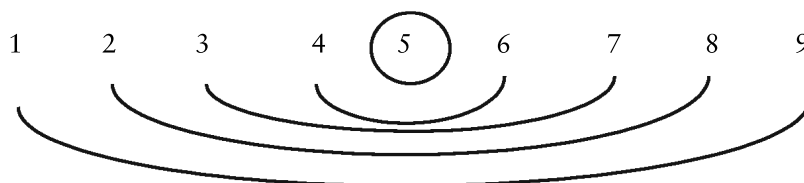
Observação 3: O número 5 está “sempre” no meio.

A palavra *meio* pode ter pelo menos duas interpretações possíveis: meio do quadrado:

	5	

Figura 8.10: Quadrado J.

ou meio da seqüência de 1 a 9. Observe:



Muitas outras observações foram registradas. Você deve estar consciente de que cada uma delas gera uma série de discussões importantes e pode ser propulsora de novas atividades e conteúdos. O tipo de registro é importante nas descobertas que podemos fazer. Na análise desse tipo de tarefa, podemos abordar média aritmética, termo médio e progressões aritméticas.



ATIVIDADES

3. Compare suas respostas com as dos alunos. Analise, como professor, as justificativas dadas para cada uma das três observações por eles levantadas. Identifique semelhanças e diferenças entre suas respostas e a dos estudantes. Preencha o quadro seguinte e mostre sua análise ao tutor.

	Seus comentários
Observação 1	
Observação 2	
Observação 3	

COMENTÁRIO

A resposta a esta atividade é aberta e vai depender do grau de profundidade na análise que você realizou. Este é um importante tipo de atividade em que a avaliação tem caráter de sondagem e de processo. Para construir seus comentários, não deixe de revisar as observações anteriores.

4. Complete o quadrado a seguir usando os números de 0 a 8, de maneira que a soma em todas as linhas, colunas e diagonais seja 12.

	4	
1		3

Figura 8.11: Quadrado K.

COMENTÁRIO

Os estudantes afirmam que essa atividade é fácil, pois para começar basta completar o quadrado com os números que faltam. Os alunos buscam outras soluções e afirmam que em todos os resultados o número 4 estará no centro do quadrado. Percebem que existe alguma relação entre a soma e o número do centro. Mas no debate, eles não sentem a necessidade de justificar essa relação e ficam convencidos após alguns exemplos em que tenham tido sucesso.

Continuando a propiciar a seus alunos condições para criar argumentos que justifiquem suas conjecturas, a professora Rosana, inspira-se então nas sugestões de Arcavi (1995) a fim de propor novas estratégias de raciocínio.

ATIVIDADES

5. Complete o quadrado a seguir de maneira que a soma nas linhas, colunas e diagonal seja 8.

	4	
2		2

Figura 8.12: Quadrado K.

COMENTÁRIO

Você deve ter percebido que essa atividade é impossível de se realizar. Os alunos, após algumas tentativas, não chegam a uma resposta e, então, percebem a impossibilidade de obtê-la. Um deles utilizou o seguinte argumento:

E – Este é impossível porque $4+4+4$ não é igual a 8 e não existem três números cuja soma seja 8.

6. Se a soma do quadrado a seguir for **S**, qual a relação entre **S** e o número **b**? Sugestão: comece atribuindo uma expressão algébrica para o quadrado cinza.

	b	
a		c

COMENTÁRIO

*Cuidado para não se perder nos símbolos. É preciso encontrar um bom caminho para chegar a uma relação geral entre **S** e **b**. Por exemplo:*



$S-(b+c)$?
	b	
a		c

Continue preenchendo o quadro com as expressões literais que você possui. Encontre a expressão para a casa (?), e assim por diante.

COMENTÁRIO

Lembre-se de que você está buscando a relação entre S e b . Dessa forma, encontre valores algébricos para casas que estejam numa das fileiras que os contenha (S e B). Essa atividade é muito importante, porque explora a relação entre a soma mágica e o número central do quadrado. A resposta está no final da aula.

A partir do desenvolvimento de atividades como as anteriores, Oliveira (1997) ressalta:

- Os estudantes, mesmo na 5ª série, quando postos a argumentar, levantam **CONJECTURAS** e pensam em generalizações.
- As situações em que existem regularidades são interessantes para que os alunos levantem conjecturas, mas não são suficientes para criar nos estudantes a necessidade de justificar tais conjecturas. Alguns exemplos bem-sucedidos são suficientes para que eles se sintam convencidos.
- As situações ou problemas que não possuem respostas podem ser mais apropriados para criar nos estudantes a necessidade de argumentar.

Veja, a seguir, outras informações sobre os Quadrados Mágicos.

CONJECTURA

É uma opinião fundada em aparências, em possibilidades; hipótese, presunção, suposição.

CONSIDERAÇÕES HISTÓRICAS SOBRE QUADRADOS MÁGICOS

- O primeiro Quadrado Mágico foi chamado de io-shu pelos chineses. Conta a lenda que, enquanto caminhava ao longo do rio Lo, o imperador chinês Yu viu o QM e o registrou no casco de uma tartaruga.
- Para os chineses, os números pares significam o princípio feminino do universo (*Yin*) e os números ímpares o princípio masculino do universo (*Yang*).
- Os chineses usavam os Quadrados Mágicos para estudar horóscopos.

- Os Quadrados Mágicos possuíam um significado religioso.
- Os QMs tiveram uma maior divulgação no século XIV, quando se espalharam pela Europa. Nessa época, possuíam um sentido místico: quando gravados num quadro tinham o poder de afastar a peste da casa.

CALCULANDO A CONSTANTE MÁGICA DOS QUADRADOS MÁGICOS

Você percebeu que a constante mágica vai depender da ordem do QM? Por exemplo:

Ordem do QM	Soma (S)
3	15
4	34
5	65

Como você viu na Atividade 6, o valor S pode ser facilmente encontrado se somarmos os números do quadrado e os dividirmos pela sua ordem. Por exemplo, no quadrado de ordem 3, com as casas numeradas de 1 a 9, teremos:

$$S_3 = (1 + 2 + 3 + \dots + 9) : 3 = 45 : 3 = 15$$

Podemos generalizar esses procedimentos para um QM de ordem n qualquer. Vejam!

$$S_n = (1 + 2 + 3 + \dots + n^2) : n$$

Você deve ter lembrado que a seqüência 1, 2, 3, ..., n^2 é uma Progressão Aritmética (PA) de razão 1. Logo, podemos calcular a soma dos k termos dessa PA. Desta forma, teremos:

$$S_k = (a_1 + a_k) k : 2$$

Como $S_n = S_k : n$, podemos concluir que: $S_n = (1 + n^2) n^2 : 2n$, ou seja,

$$S_n = (1 + n^2) n : 2$$



Essa fórmula é válida quando tomamos a sequência 1, 2, 3, 4.... n^2 . Porém, lembre-se de que podemos construir QM com outras seqüências de números.



ATIVIDADE

7. Começando do QM de ordem 3, encontre a constante mágica dos 10 primeiros quadrados mágicos e complete a tabela seguinte:

Ordem	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Constante mágica	15									

COMENTÁRIO

Interessa-nos, neste momento, que você tenha compreendido como encontrar a constante mágica. A maior dificuldade neste tipo de tarefa é organizar os números de modo que atendam à condição necessária de um QM. Com esse grau de aprofundamento, você deve ter percebido que se trata de um tipo de atividade que pode ser explorada em turmas do Ensino Médio. Bom trabalho!

INTEGRAÇÃO EM MATEMÁTICA: QUADRADOS MÁGICOS E A RELAÇÃO PITAGÓRICA

Na disciplina Instrumentação do Ensino de Geometria, você revisou a relação pitagórica, construindo quadrados sobre os catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo. Podemos, também, construir Quadrados Mágicos que tenham relações com a propriedade pitagórica. Veja!



ATIVIDADE

8. Calcule a soma de qualquer coluna, linha e diagonal do quadrado A, do B e do C. Eles são mágicos? Agora, você deve verificar que a soma de todos os números do quadrado B mais o C resulta na soma de todos os números de A. Há alguma relação com a propriedade pitagórica?

The diagram illustrates a geometric arrangement of numbers. It features three main components: a 4x4 grid of numbers (Set A), a 4x4 grid of numbers (Set B), and a 3x3 grid of numbers (Set C). These sets are arranged such that they form a large triangle. The numbers in Set A are arranged in a 4x4 grid. The numbers in Set B are arranged in a 4x4 grid. The numbers in Set C are arranged in a 3x3 grid. The overall shape formed by these three sets is a large triangle.

Set A (Top Right):

15	16	33	30	31
37	22	27	26	13
36	29	25	21	14
18	24	23	28	32
19	34	17	20	35

Set B (Bottom Left):

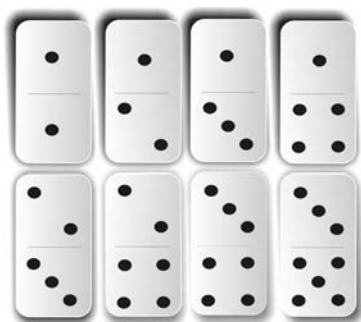
4	18	17	7
15	9	10	12
11	13	14	8
16	6	5	19

Set C (Bottom Center):

48	53	46
47	49	51
52	45	50

ATIVIDADE COMPLEMENTAR 1

Usando as oito peças a seguir, forme um quadrado em que a soma das peças na horizontal, na vertical e na diagonal seja a mesma.



Além de somas, podemos calcular produtos. Por exemplo, no quadrado seguinte, o produto dos pontos extremos de cada lado é sempre o mesmo: 18. Veja.



Confira você mesmo!

CONCLUSÃO

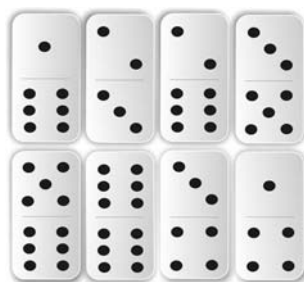
É possível tornar a sala de aula um espaço de aprendizagem, de construção e de análise de diferentes textos matemáticos. Há de se ouvir o que o aluno tem a dizer sobre estes, levantar novas questões, fazê-lo refletir sobre suas conjecturas, e criar condições para que possa produzir um leque de significados que, na maioria das vezes, não se restringe àqueles produzidos (falados) pelo professor. A escolha da atividade adequada é fundamental para que sua aula faça sentido, mas não é o suficiente. Ouvir o outro e estar atento para perceber que conteúdos matemáticos estão nas entrelinhas é uma boa “dica” para que sua aula seja mais envolvente. O conhecimento não está nos livros didáticos, não está no seu quadro bem escrito ou numa exposição oral bem feita; o conhecimento está na fala de quem aprende, nas observações aparentemente ingênuas e absurdas, nas interjeições, no olhar. Eis um grande desafio docente: saber ler e analisar essas falas, interferir e atuar junto com seu aluno no aprimoramento desse saber.

RESUMO

Devemos oferecer ao aluno oportunidades de produzir significados e construir o seu próprio conhecimento. Em um QM, a soma dos elementos de cada linha, coluna ou diagonal é sempre a mesma. Existem QM de várias ordens. Dependendo da ordem do quadrado, haverá uma determinada constante (ou soma) mágica. Os Quadrados Mágicos devem ser utilizados como recursos para identificar e analisar regularidades numéricas. Esses são objetivos importantes que devem estar contemplados no currículo atual de Matemática.

ATIVIDADE FINAL

Utilizando as peças seguintes, forme quadrados cujo produto dos pontos extremos de cada lado seja igual a: **(a)** 12, **(b)** 30, e **(c)** 36.



COMENTÁRIO

Troque idéias com um colega e apresente a resposta de vocês ao tutor. Não dispenda muito tempo na realização desta tarefa, já que você poderá voltar a ela em outros momentos deste curso.

AUTO-AVALIAÇÃO

Se você concluiu, sem dúvidas, as Atividades 2 e 6, nossos parabéns! Você alcançou o objetivo principal da aula. Compreender como se encontra a constante mágica e sua relação com a ordem do QM, e o que significa levantar conjecturas e perceber regularidades são outros pontos importantes que esperamos que você tenha compreendido nesta aula.

INFORMAÇÃO SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, você irá identificar e analisar erros muito frequentes em atividades algébricas.



RESPOSTAS

Atividade 1

Você percebeu que se trata de um QM de 3 x 3 e de soma 15. Muito bem!

Atividade 6

Como a soma de cada linha, coluna ou diagonal é S , então os outros quadrados podem ser preenchidos da seguinte forma :

$S-(b+c)$		$S-(a+b)$
$S-[S-(b+c)+a]$	b	
a		c

Somando os valores da 2ª linha temos:

$$S - [S - (b + c) + a] + b + S - [S - (a + b) + c] = S$$

$$S - S + b + c - a + b + S - S + a + b - c = S$$

$$\text{Como } S - S = 0, +c - c = 0, -a + a = 0$$

$$\text{Então, } b + b + b = S$$

$$3b = S \text{ ou } S = \frac{S}{3}$$

Atividade 7

Ordem	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Constante magia	15	34	65	111	175	260	369	505	671

Números, posições e coisas mais... estudando regularidades

AULA 9

Meta da aula

Instrumentalizar o trabalho com regularidades.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- Conceituar padrão e regularidade.
- Identificar e analisar regularidades em tarefas, envolvendo: múltiplos, números pares e ímpares, números de Fibonacci, ternos pitagóricos e diagonais de polígonos convexos.
- Refletir sobre o significado de atividade de investigação matemática.
- Utilizar a calculadora em atividades para descoberta de regularidades.
- Desenvolver diferentes atividades para trabalhar regularidades variadas.

Pré-requisitos

Para o bom desenvolvimento desta aula é necessário que você relembre a *seqüência de Fibonacci* (disciplina Álgebra 1), os *ternos pitagóricos* (Instrumentação do Ensino de Geometria) e a *razão áurea* (Pré-Cálculo). Tenha à mão uma calculadora de bolso.

INTRODUÇÃO

No terceiro ciclo do Ensino Fundamental, 5ª e 6ª séries, os alunos têm o seu espírito questionador mais aguçado. Assim, torna-se importante que o professor busque canalizar para a aprendizagem toda a ebulição desse comportamento instigador, propondo atividades que estimulem os estudantes a buscar explicações e finalidades para os fatos matemáticos. Além disso, cabe ao docente levantar questões relativas à utilidade da Matemática: como ela foi construída? Como pode contribuir para a solução de problemas simples do cotidiano ou até para problemas complexos ligados à investigação científica? É fundamental explorar, ao máximo, o potencial crescente do raciocínio abstrato, fazendo, por exemplo, com que os alunos descubram regularidades e propriedades numéricas, geométricas e métricas. Dessa forma, eles estarão ampliando os significados que possuem acerca dos números e das operações, buscando relações existentes entre eles e aprimorando sua capacidade de análise e de tomada de decisões, que começam a se manifestar. Com isso, criam-se condições para que o aluno perceba que a atividade matemática estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas.

Embora em Matemática existam diferenças singulares entre o significado da palavra **PADRÃO** e **REGULARIDADE**, utilizaremos tais palavras como sinônimos. Veja como um dicionário as define.

REGULARIDADE: s.f.

Qualidade ou estado do que é regular. /Conformidade com as leis, com as normas: regularidade do movimento dos corpos celestes. /Justa proporção, harmonia: regularidade dos traços. /Pontualidade: regularidade das refeições. /Exata observância dos deveres: a regularidade da vida familiar. /Ordem; método.
Fonte: Koogan e Houaiss (1995).

PADRÃO: s.m.

Metrologia. Grandeza-tipo que serve para definir uma unidade. /Modelo-tipo legal dos pesos e das medidas. /Tipo, modelo. /Desenho de estamparia. //Padrão monetário, metal cujo valor comercial corresponde, em regime de cunhagem livre, ao valor nominal. Padrão: s.m. Monumento de pedra que os portugueses erigiam nos lugares que descobriam. /Marco, baliza, para assinalar limites ou divisas.
Fonte: Koogan e Houaiss (1995).



Ampliar os procedimentos de cálculo – mental, escrito, exato, aproximado – pelo conhecimento de regularidades dos fatos fundamentais, de propriedades das operações e pela antecipação e verificação de resultados, é um objetivo importante da matemática a ser desenvolvido no Ensino Fundamental da Matemática.

Começemos com uma atividade!



Lembre-se de que as respostas de algumas atividades serão apresentadas ao final da aula.



ATIVIDADES

1. Escreva em colunas os 20 primeiros múltiplos de 5.

O que você pode observar nos algarismos das unidades?

E nos das dezenas? Justifique sua resposta.

A partir do que você destacou, verifique se acontece o mesmo com os múltiplos de 4 e de 6.

Preencha o quadro a seguir para organizar suas observações.

Quadro 9.1: Observações sobre a Atividade 1

Múltiplos de 5	Nos algarismos das unidades, observo que__ _____
	Nos algarismos das dezenas, observo que__ _____
Múltiplos de 4	Nos algarismos das unidades, observo que__ _____
	Nos algarismos das dezenas, observo que__ _____
Múltiplos de 6	Nos algarismos das unidades, observo que__ _____
	Nos algarismos das dezenas, observo que__ _____
Outros múltiplos (de sua escolha)	_____ _____

COMENTÁRIO

Identificar regularidades (números que se repetem, números que se alternam etc.) em seqüências numéricas é o objetivo principal desta atividade. Registre suas observações (pelos menos umas duas para cada conjunto de múltiplos).

2. Realizando esta atividade, você confirmará suas respostas anteriores e descobrirá novas. Veja o que alunos de 5ª série respondem!

Sobre os múltiplos de 5:

- O algarismo das unidades é sempre 0 ou 5.
- O algarismo das dezenas se repete: 0-0, 1-1, 2-2, 3-3 ...
- 0 com 5 dá 5, 0 com 0 dá 0, 1 com 5 dá 6, 1 com 0 dá 1, 2 com 5 dá 7, 2 com 0 dá 2, 3 com 5 dá 8. Há uma seqüência. Dá 5, salta um, dá 6, salta um, dá 7 ... ou dá 0, salta um, dá 1, salta um, dá 2 ... Veja!

0	0	
0	5	5
1	0	0
1	5	6
2	0	1
2	5	7
3	0	2
3	5	8

Colocando os múltiplos em três colunas, os alunos analisam e descobrem.

Tabela 9.1: Organização dos 20 primeiros múltiplos de 5, 4 e 6 em colunas

20 primeiros múltiplos de 5	20 primeiros múltiplos de 4	20 primeiros múltiplos de 6
0	0	0
5	4	6
10	8	12
15	12	18
20	16	24
25	20	30
30	24	36
35	28	42
40	32	48
45	36	54
50	40	60
55	44	66
60	48	72
65	52	78
70	56	84
75	60	90
80	64	96
85	68	102
90	72	108
95	76	114



Veja a importância da organização e do registro em colunas. Tradicionalmente, os professores escrevem os múltiplos apenas pela representação horizontal $M(5) = \{0, 5, 10, 15, \dots\}$. Nessa atividade é evidente a contribuição da disposição tabular dos números para as descobertas que os alunos fizeram; na apresentação horizontal, não seria tão simples identificar tais regularidades.

Sobre os múltiplos de 4:

- *Terminam sempre em 0, 4, 8, 2 e 6.*
- *Termina sempre em número par. O algarismo das dezenas repete-se 2 vezes, 3 vezes, alternadamente. O algarismo das dezenas que se repete três vezes é sempre par e o que se repete duas vezes é sempre ímpar.*

Sobre os múltiplos de 6:

- *O algarismo das unidades é sempre 0, 6, 2, 8 e 4.*
- *O algarismo das unidades é sempre um número par.*
- *O algarismo das dezenas não se repete de 5 em 5.*
- *Há múltiplos de 4 que também são múltiplos de 6.*
- *Os múltiplos de 6 a partir do 12 são alternadamente também múltiplos de 4.*

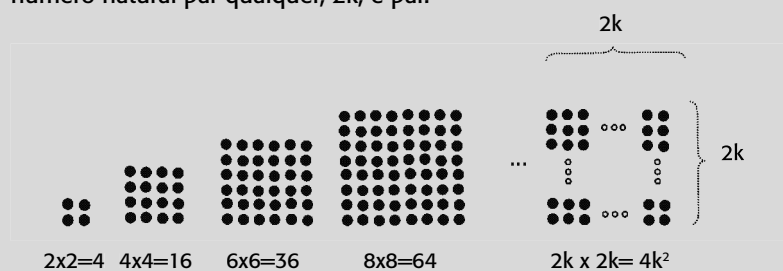
Agora, após ler e conferir as respostas dos alunos, faça o seguinte:

- Verifique a veracidade de cada uma delas.
- Compare-as com as suas respostas.

COMENTÁRIO

Lembre-se de que compartilhar respostas com seus colegas, discutilas e apresentá-las ao tutor deve ser uma prática constante em seu aprendizado. A análise mais detalhada e o estudo do Mínimo Múltiplo Comum (M.M.C) e do Máximo Divisor Comum (M.D.C) será feita na Aula 12. Nosso interesse aqui foi exemplificar como esse tipo de tarefa contribui para o desenvolvimento do pensamento aritmético e algébrico mediante o estudo de regularidades.

3. Observe a sequência seguinte e explique por que o quadrado de um número natural par qualquer, $2k$, é par.

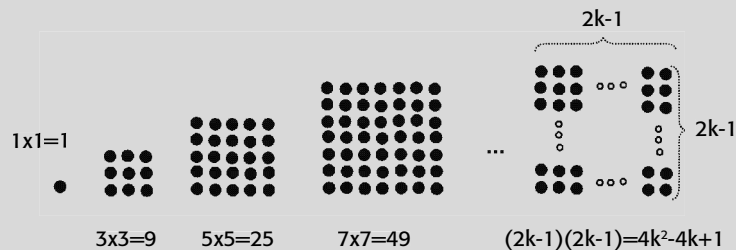


COMENTÁRIO

Este tipo de atividade o ajudará a verificar, por exemplo, por que $\sqrt{2}$ é um número irracional. Para ver uma prova disso, revise a Aula 7 da disciplina de Pré-Cálculo.

Observe agora outra seqüência:

4.



4. a. Explique por que o quadrado de um número natural ímpar qualquer, $2k-1$, é ímpar.

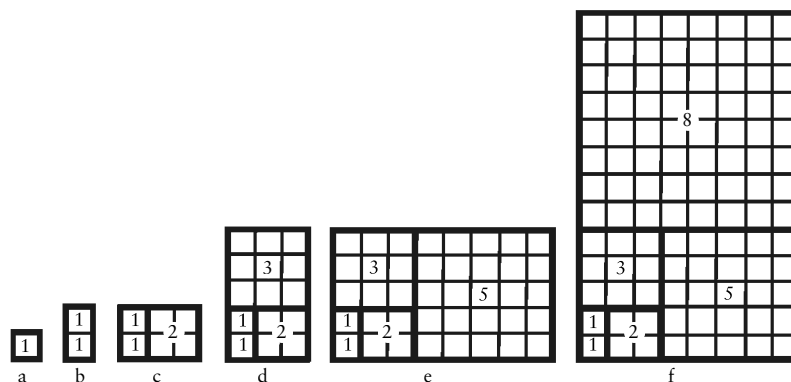
4. b. Será que se um quadrado de um número for par, esse número também será par? Por quê?

COMENTÁRIO

Este tipo de atividade também auxilia no desenvolvimento de tarefas, envolvendo a construção do conceito de número irracional, como as desenvolvidas na Aula 6 desta disciplina.

ESTUDANDO REGULARIDADES EM OUTRAS DISPOSIÇÕES

A partir da seqüência de números 1, 1, 2, 3, 5, 8... foram construídos os retângulos a seguir. Tendo o quadrado de lado igual a 1, podemos construir uma seqüência de retângulos cuja medidas dos lados são os números de Fibonacci de acordo com a seguinte ordem. Veja!



Como você viu na Aula 35 de Álgebra 1 a sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233 ... é conhecida como sucessão de **FIBONACCI**.

A sucessão de **FIBONACCI** assim foi chamada em homenagem ao matemático italiano Leonardo de Pisa (1170-1250), conhecido por Leonardo Fibonacci (abreviação de *filio Bonacj* ou *filij Bonacij*, filho de Bonaccio). Os termos na sequência de Fibonacci satisfazem a seguinte relação:
 $a_i = a_{i-1} + a_{i-2}$, para $i \geq 2$ e $a_0 = a_1 = 1$.



ATIVIDADE

5. Explique como foi feita essa construção de retângulos e encontre (desenhe) os retângulos g e h .

COMENTÁRIO

Para contar, você pode utilizar como unidade de medida o quadradinho. É possível que você tenha percebido que cada retângulo foi construído considerando a quantidade (soma) anterior e que tenha associado os números que representam a quantidade em cada retângulo com a sequência de Fibonacci. Na figura f , observe que os números que aparecem são os respectivos lados dos quadrados e que: $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 = 8 \times 13$.

A partir das dimensões desses retângulos (utilizando como unidade de medida do lado de um quadrado) e chamando x o comprimento do lado maior e y o do lado menor, complete a tabela a seguir de acordo com os retângulos dados.

Tabela 9.2: Quociente entre números de Fibonacci

Retângulo	a	b	c	d	e	f	g	h
x/y								

Essa seqüência quociente tende para algum número que você conhece? Qual? Caso não se lembre, não se preocupe, siga em frente.

Com a seqüência de Fibonacci, conseguimos formar o que chamamos de **RETÂNGULOS ÁUREOS**.

Diz-se **ÁUREO**, quando o retângulo resultante da extração do quadrado construído sobre o seu lado menor também é áureo, ou seja, está na secção áurea. Os retângulos áureos estão em diversas obras e construções gregas. O Paternon é o exemplo mais antigo.



Um segmento AB está dividido na seção áurea por um ponto C se:

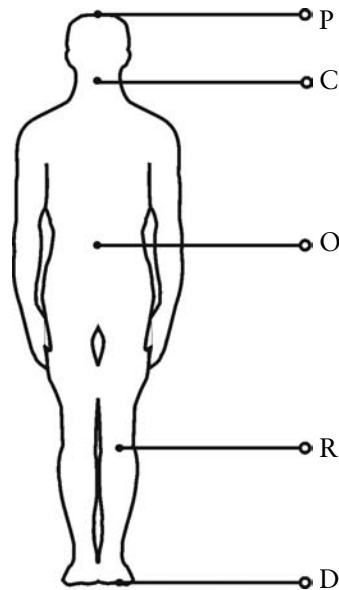
$$\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC} \text{ isto é, } \frac{\text{segmento maior}}{\text{segmento menor}} = \frac{\text{segmento total}}{\text{segmento maior}}$$

ATIVIDADE COMPLEMENTAR 1

Verifique se segmentos de seu corpo estão divididos na razão áurea. Meça os segmentos OD, OP, RO, RD, CO e PC, e calcule os quocientes: OD/OP, RO/RD, CO/PC.



Lembre-se de que você estudou sobre a razão áurea na Aula 8 da disciplina Pré-Cálculo.

**COMENTÁRIO**

Se o quociente se aproximou do número áureo, as medidas em seu corpo estão na proporção áurea. Se não estiverem, não se preocupe, o que importa é que você tenha compreendido quando um segmento está dividido na secção áurea. Sigamos!

Se dividirmos um segmento na secção áurea infinitamente, os quocientes obtidos na **Tabela 9.3** se aproximarão do número de ouro representado pela letra grega ϕ (ϕ).

Tabela 9.3: Encontrando o número áureo mediante razões em segmentos de retângulo de ouro

Retângulo	a	b	c	d	e	f	g	h
x/y	1	2	1,5	1,666...	1,6	1,625	1,6153	1,6190



O número de ouro ou número áureo é denominado pela letra grega ϕ (fi) devido a um escultor grego chamado Fídias que, em suas obras, utilizou muito a razão áurea.

No retângulo ABCD da figura a seguir, se você calcular os quocientes comprimento/largura na sequência de retângulos, perceberá uma tendência ao número de ouro (**Tabela 9.3**). Ache o quociente entre as dimensões (comprimento/largura) ABCD. Tirando o quadrado BCEF do retângulo ABCD obteremos o retângulo AFED. Calcule o quociente entre as dimensões (comprimento/largura) em AFED. Do retângulo AFHG tiramos o quadrado DGHE e ficamos com o retângulo AFHG. Calcule também o quociente neste retângulo e compare com os resultados obtidos anteriormente.

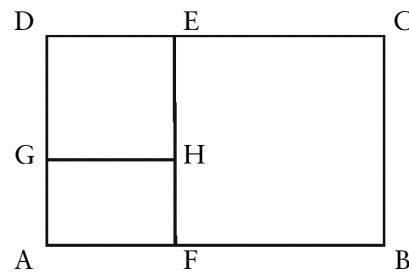


Figura 9.1: Construção de retângulos áureos.



Como você viu na Aula 8 de Pré-Cálculo, o número de ouro (ϕ) é irracional.

COMENTÁRIO

Você deve ter observado também que os retângulos ABCD, AFED e AFHG são semelhantes. O quociente obtido é denominado número áureo, secção áurea ou divina proporção. Seu valor é: $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803$.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR 2

Por comodidade, vamos denominar as seqüências de Fibonacci pela notação: F para a seqüência; f_1 para o primeiro termo; f_2 para o segundo; f_3 para o terceiro; f_n para um termo geral. Assim, de acordo com os quocientes obtidos anteriormente, temos:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \dots \leftrightarrow \frac{f_2}{f_1}, \frac{f_3}{f_2}, \frac{f_4}{f_3}, \frac{f_5}{f_4}$$

$$V_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$$

Esta seqüência converge? Se a resposta for afirmativa, diga para quanto?

COMENTÁRIO

Com esta atividade podemos concluir que quando tivermos números grandes da seqüência de Fibonacci, a razão entre o maior e o menor número será o número áureo.

TERNOS PITAGÓRICOS

Chamamos três números naturais a , b e c de terno pitagórico quando: $a^2 + b^2 = c^2$.

Se um terno (x, y, z) é pitagórico e $k > 0$, então o terno (kx, ky, kz) é pitagórico; ou seja, uma vez obtido um terno pitagórico, seus múltiplos também o serão.

Tabela 9.4: Construção de ternos pitagóricos

x	y	$a=x^2+y^2$	$b=x^2-y^2$	$c=2xy$
2	1	5	3	4
3	1	10	8	6
3	2	13	5	12
4	1	17	15	8
4	2	20	12	16
4	3	25	7	24
5	1	26	24	10



Os ternos da forma $2xy$, $x^2 + y^2$ e $x^2 - y^2$ foram fornecidos pelo matemático hindu Brahmagupta (século VII), que trabalhou em Ujjain, centro de estudos onde mais tarde Bhaskara veio a trabalhar.

Com base nas informações da **Tabela 9.4**, podemos encontrar qualquer terno pitagórico a partir de dois números inteiros x e y ($x > y$). Considerando um terno pitagórico qualquer (a, b, c) , também podemos encontrar os números (x, y) que os formaram.



O terno pitagórico mais conhecido é, sem dúvida, 5, 3 e 4. Porém, outros não tão conhecidos também podem ser lembrados, é o caso de 10, 8 e 6, dentre outros.

Um terno pitagórico é primitivo se e somente se os seus elementos são primos entre si. Exemplo: o terno (3, 4, 5).

ATIVIDADE COMPLEMENTAR 3

Lembra-se da Atividade 8, da Aula 18 de Instrumentação do Ensino de Geometria?

Você pode voltar à sua resolução e complementar observações e descobertas.

a. Prove que $(2m, m^2-1, m^2+1)$ é, de fato, um terno pitagórico.

b. Dê exemplos de ternos pitagóricos que não satisfaçam ao modelo do item a.

c. O terno $(n^2 - m^2, 2mn, m^2+n^2)$ é sempre um terno de números primos entre si.
Por quê?

d. No terno do item c, por que devemos ter $m > n$?

e. No terno do item c, o que aconteceria se m e n fossem negativos? E se tivessem sinais contrários?

f. No terno do item c, por que não podem m e n ser ambos pares ou ímpares?

g. Você acha que o terno do item c representa a totalidade dos ternos pitagóricos?

h. Encontre os ternos pitagóricos com termos de até dois dígitos.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR 4

Analise a veracidade de cada enunciado a seguir.

(1) Se o terno é pitagórico primitivo, então não existem dois elementos pares.

(2) Se o terno é pitagórico primitivo, então o maior elemento é ímpar (e só um dos outros é par).

(3) Se o terno de inteiros é pitagórico, então não é isósceles.

RUY MADSEN BARBOSA

Foi professor da Universidade Estadual Paulista (UNESP). É um reconhecido matemático e autor de vários livros didáticos. Seus trabalhos têm contribuído muito para a melhoria das aulas de Matemática.

COMENTÁRIO

*Se você teve dificuldades em resolver as duas atividades anteriores, pesquise, consulte seu tutor. Além disso, o que é realmente importante é observar a riqueza dessa discussão para o amadurecimento matemático de alunos de 7ª ou 8ª séries, e, até mesmo, do Ensino Médio. Para saber mais leia **BARBOSA** (1993).*



Lembre que na disciplina Instrumentação do Ensino de Geometria exploramos a relação pitagórica numa perspectiva mais geométrica, ou seja, associada ao conceito de área e de figuras semelhantes. Aqui, estamos enriquecendo essa temática, fazendo um aprofundamento numérico/algébrico. Em sua sala de aula, o trabalho nas três perspectivas deve ser, sempre que possível, concomitante.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR 5

Será que podemos identificar alguma relação entre os números da sucessão de Fibonacci e os ternos pitagóricos?

ESTUDANDO RELAÇÕES ENTRE NÚMEROS DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E NÚMEROS DOS TERNOS PITAGÓRICOS

Sejam os números de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233. Alguns deles apareceram nos ternos pitagóricos, na Tabela 9.4, como elementos correspondentes à hipotenusa. Assim, ocorre com o 5 no terno (3, 4, 5) e com o 13 no (5, 12, 13). Será casualidade? Aconteceria com o 34, o 89 etc. Vejamos!

Nos primeiros quatro números consecutivos da sucessão, não existe elemento correspondente à hipotenusa, e logo depois vem o 5, do terno fundamental. Vamos então considerá-los: 1, 1, 2, e 3.

Calculando o *produto dos extremos* ($1 \times 3 = 3$) e o *dobro do produto dos termos intermediários* ($2 \times 1 \times 2 = 4$), você obtém, justamente, os outros elementos do terno: o 3 e o 4.

Se considerarmos o segundo grupo de quatro termos consecutivos 1, 2, 3 e 5, e fizermos os mesmos cálculos: $1 \times 5 = 5$ e $2 \times 2 \times 3 = 12$, teremos o terno (5, 12, 13).



6. Verifique se o padrão identificado anteriormente é válido para os números 2, 3, 5, 8.

Produto dos extremos = ____ x ____ = ____

Dobro do produto dos termos intermediários = 2 x ____ x ____ = ____

Terno formado:

COMENTÁRIO

Lembre-se de que o terno (16, 30, 34) é equivalente ao terno (8, 15, 17), que é primitivo. Verifique se os produtos encontrados nesta atividade estão na **Tabela 9.4**. Apesar de esse padrão tornar-se credível, precisamos aumentar a confiabilidade em relação a tal processo de validação. Faça o mesmo procedimento para outros grupos de quatro números consecutivos.

DESCOBRINDO A HIPOTENUSA NA SUCESSÃO DE FIBONACCI

Indicando com f_n o número de Fibonacci que ocupa a ordem n na sucessão, temos:

- Para o primeiro grupo $f_1 f_2 f_3 f_4$, encontramos $5 = f_5$.
- Para o segundo grupo $f_2 f_3 f_4 f_5$, encontramos $13 = f_7$.
- Para o terceiro grupo $f_3 f_4 f_5 f_6$, encontramos $34 = f_9$.

O que podemos observar? O índice de cada valor encontrado é ímpar (a partir de 5). Isso é uma regularidade importante a ser observada. Dessa forma, podemos escrevê-lo como: da forma $2n + 3$. Pode ser que essa observação nos ajude a descobrir alguma propriedade interessante. Tente, agora, fazer novas descobertas.



ATIVIDADE

7. Encontre o f_{11} .

COMENTÁRIO

Lembre-se de considerar os termos f_4 f_5 f_6 f_7 . Assim, facilmente você calculará o número procurado!

Veja que outra curiosidade!

1º grupo: f_1 f_2 f_3 f_4 , obtivemos $5 = f_{5(1+4; 2+3)}$.

2º grupo: f_2 f_3 f_4 f_5 , obtivemos $13 = f_{7(2+5; 3+4)}$.

3º grupo: f_3 f_4 f_5 f_6 , obtivemos $34 = f_{9(3+6; 4+5)}$.

4º grupo: f_4 f_5 f_6 f_7 , obtivemos $89 = f_{11(4+7; 5+6)}$.



É a soma dos índices extremos ou intermediários. A partir daí, podemos dizer que o número de Fibonacci para a hipotenusa é f_{2n+3} . Vamos agora descobrir os catetos.

DESCOBRINDO OS CATETOS NA SUCESSÃO DE FIBONACCI

De acordo com o padrão, para um grupo qualquer, de ordem n ; f_n f_{n+1} f_{n+2} f_{n+3} , teremos:

- Para o 1º cateto: $f_n \cdot f_{n+3}$ (produto dos extremos).
- Para o 2º cateto: $2 \cdot f_{n+1} \cdot f_{n+2}$ (o dobro do produto dos intermediários).

Que tal encontrarmos os catetos no 5º grupo, ou seja, na sequência f_5 f_6 f_7 f_8 ?

**ATIVIDADE**

8. Encontre os catetos no 5º grupo de números da sequência de Fibonacci.

COMENTÁRIO

A hipotenusa será 233 (o f13). O terno que você encontrou é primitivo? E o terno seguinte a este também será? Converse com o tutor e com seus colegas sobre esses questionamentos. Saiba mais em Barbosa (1993).

CONVERSANDO SOBRE O SEU LABORATÓRIO DE ARITMÉTICA E ÁLGEBRA:

Descobrimo regularidades numéricas usando calculadora



Dependendo do tipo de uso da calculadora que é feito em sala de aula, no Ensino Fundamental ou no Ensino Médio, esse recurso pode ser muito importante para o aprendizado dos alunos. Além disso, o aluno tem a oportunidade de conhecer e dominar os procedimentos de uso desse instrumento.



Com base em uma atividade que teve como objetivo discutir alguns aspectos da densidade dos números racionais (veja detalhes em Kindel, 1998), continuaremos discutindo sobre a importância da identificação de regularidades numéricas. Aproveitaremos para falar sobre **ATIVIDADES DE INVESTIGAÇÃO**.



Uma das alternativas didáticas para desenvolvermos o pensamento aritmético/algébrico são as atividades de investigação.

ATIVIDADES DE INVESTIGAÇÃO

Geralmente têm enunciados abertos (do tipo "O que acontece se ...?"), algumas vezes, pouco precisos e estruturados. Exigem que os próprios alunos tracem objetivos, realizem experiências, formulem e testem conjecturas. A forma aberta do enunciado de uma atividade, que não necessariamente aparece sob a forma de pergunta resulta no aparecimento de novas propostas.

O desenvolvimento de atividades de investigação em aulas tem sido objeto de estudo de diferentes pesquisadores portugueses da Associação de Professores de Matemática (www.apm.pt). A experiência da professora **SORAIA**, realizada numa turma de 7ª série, será, em parte, socializada a seguir.

DORA SORAIA KINDEL

Professora da Universidade Federal do Tocantins (UFT). Educadora matemática atuante, essa pesquisadora foi uma das fundadoras do G-Rio, acompanhou a fundação da SBEM (www.sbem.com.br) e é atualmente membro da diretoria do Gepem (www.gepem.ufrrj.br).



ATIVIDADE

9. O que acontece quando representamos $\frac{n}{2}, \frac{n}{4}, \frac{n}{8}$ variando o numerador n .

Em outras palavras: o que ocorre quando dividimos números naturais por dois, depois por quatro e por oito? Escreva em seu caderno cada uma das frações escolhidas e o seu resultado. Compare a representação decimal de cada uma das frações com o seu numerador? O que você observa?

COMENTÁRIO

O objetivo desta atividade era verificar que tipo de relações os alunos estabeleceriam entre as frações e sua representação decimal. Para operacionalizar essas observações foi sugerido o uso da calculadora como forma de agilizar e propiciar o maior número possível de frações a serem analisadas. Os alunos trabalharam em grupos de três ou quatro e possuíam pelo menos uma calculadora por dupla. Foi acordado ainda que deveriam anotar cada fração escolhida e seu respectivo resultado individualmente e, ao final da aula, deveriam entregar ao professor um relatório com todas as observações feitas e discutidas pelo grupo. Faça você agora! Apresente ao tutor suas descobertas.



Dessa forma, o professor assume duas funções importantes: planejar o tipo de atividade a ser proposta e investigá-la, em conjunto, com seus alunos.

Veja o relato de alunos de 7ª série.

“Primeiro analisamos as metades, as quarta partes e depois os oitavos.”

I - Metades

1. Se o numerador for par, o resultado é um número inteiro.
2. Se o numerador for ímpar, o resultado não é inteiro, dá "vírgula cinco".
3. Se aumentarmos um no numerador, o resultado aumenta meio.

II - Quarta parte

1. Se o numerador for múltiplo de 4, dá inteiro.
2. Se o numerador não for múltiplo de 4, aí depende:
 - a. vai dar "vírgula vinte cinco", se for múltiplo de quatro mais um.
 - b. vai dar "meio", se estiver entre dois múltiplos de quatro consecutivos.
 - c. vai dar "vírgula setenta e cinco", se for múltiplo de quatro menos um.

III - Oitavos

1. Se aumentar um no numerador, aumenta 0,125 no resultado.
2. Se o numerador for múltiplo de oito, o resultado é um número inteiro.
3. Se o numerador for múltiplo de oito mais um, o resultado é "vírgula cento e vinte e cinco".
4. Se o numerador for múltiplo de oito mais dois, o resultado é "vírgula 25" e assim vai.
5. Observamos também que vai ter três algarismos depois da vírgula.
6. Observamos que de oito em oito a parte decimal se repete. Isso também acontece quando os numeradores são múltiplos de 8.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR 6

Utilizando a calculadora, verifique as observações anteriores, apresentando um exemplo numérico para cada justificativa.

Na discussão com a turma toda, cada uma das observações foi cuidadosamente analisada e refeita. Um dos alunos sugeriu que *múltiplo de quatro* fosse escrito como $4m$. Assim, as observações sobre *quartos* foram reescritas como: para $\frac{n}{4}$, temos:

i. Se $n = 4m$ então $\frac{n}{4} = i$; i de inteiro.

ii. Se $n = 4m + 1$ então $\frac{n}{4} = i,25$.

iii. Se $n = 4m + 2$ então $\frac{n}{4} = i,5$.

iv. Se $n = 4m + 3$ então $\frac{n}{4} = i,75$.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR 7

Verifique você também as observações anteriores.

A seguir, os alunos resolveram denominar a parte inteira dos números decimais com a letra a . Outra notação usada por eles para representar múltiplos de quatro foi $M(4)$. Essa mesma nomenclatura foi usada para reescrever as observações sobre metades e oitavos. Conclusões gerais apresentadas pelos alunos:

- Se o numerador for múltiplo do denominador, o resultado é um número inteiro.
- Se o numerador não for múltiplo do denominador, o resultado dá um número decimal.
- O número de casas depois da vírgula depende do valor do denominador, “quanto mais se multiplica mais casas vão sendo colocadas”. Em outras palavras, o número de algarismos depende do expoente do denominador, se este for potência de dois, como é o caso.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR 8

Confira você também as observações anteriores.

Para a classificação geral das frações segundo sua representação decimal, verificou-se que se voltava para a mesma representação decimal de acordo com o valor do denominador. Assim, nos *quartos*, teríamos a seguinte representação: de quatro em quatro obtém-se resultado inteiro ou o decimal, dependendo de onde se comesasse a contar. Segundo Kindel (1998), as observações levantadas pelos estudantes mostram que eles:

- Ainda usavam propriedades dos números naturais para estabelecer relação nos números racionais.
- Estabeleceram relação entre os numeradores das frações, com a representação decimal das frações como se fossem duas seqüências comparadas termo a termo, determinando a lei de formação de cada uma delas.
- Perceberam a disposição circular $\left(\frac{\text{inteiro}}{a}, \frac{25}{a}, \frac{50}{a}, \frac{75}{a}, \text{inteiro}, \dots \right)$
- Verificaram que, para identificar a lei de formação das frações que determinam uma parte decimal específica, pode-se usar a idéia de intervalos, por exemplo, disseram “*vai dar meio se estiver entre dois múltiplos de quatro consecutivos*”. Descobriram ainda, que esta idéia era válida para outros intervalos.
- Utilizaram a representação algébrica como forma de resumir o que descobriram.

Como desdobramento desta atividade foi sugerido que pesquisassem as frações cujo denominador fosse 5, 25 e 125, ou seja, $\frac{n}{5}, \frac{n}{25}$ e $\frac{n}{125}$, e verificassem se aplicariam as propriedades válidas para dois, quatro e oito. Caso contrário, deveriam apresentar um contra-exemplo.



Como pudemos observar, a dinâmica adotada pela professora Soraia corresponde a uma prática de aula com atividades de investigação.

A professora:

- (1) propôs uma tarefa aberta e estimulou questionamentos iniciais;
- (2) acompanhou o seu desenrolar (individualmente ou em pequenos grupos);
- (3) deu oportunidade aos alunos de falarem, escreverem e apresentarem suas descobertas, propiciando o surgimento de novas questões para futuras investigações.

ATIVIDADE FINAL

Na Aula 3 de Instrumentação do Ensino de Geometria, você trabalhou com o geoplano e realizou a Atividade 2, que o permitiu chegar à expressão algébrica para calcular o número de diagonais de um polígono convexo de n lados, isto é $D = \frac{n(n-3)}{2}$:

Agora, resolva as questões a seguir, justificando suas respostas:

a. Esta fórmula serve para qualquer número inteiro n ?

b. Para todo n inteiro, a expressão sempre resulta em um número inteiro?

COMENTÁRIO

É importante você perceber que na letra (a) você está encontrando o domínio de validade da expressão e, na (b), basta pensar em n par e em n ímpar que descobrirá e justificará facilmente que a fórmula vale para qualquer n inteiro.

Para entender a fórmula, um procedimento indicado foi que você começasse com um polígono de menor número de lados e fosse preenchendo o quadro sugerido. Além da fórmula encontrada, você também pode descobrir outras relações importantes entre os números do quadro!

Tabela 9.5: Tabela auxiliar para estudar regularidades numéricas no cálculo de diagonais em polígonos convexos

Número de lados	Diagonais traçadas a partir de um vértice	Número total de diagonais traçadas	Número total de diagonais distintas, do polígono
3	0	0	0
4	1	4	2
5	2	10	5
6	3	18	9
7			

No Ensino Fundamental, o professor pode deixar o aluno desenhar quantos polígonos quiser para preencher a tabela. Com essa atividade, temos a oportunidade de desenvolver o pensamento algébrico, o senso numérico e o raciocínio geométrico, concomitantemente.

Escreva e compare razões, converse com seus colegas e com o tutor, mostrando-lhes suas descobertas a partir do preenchimento da Tabela 9.5.



Ao identificarmos o número de diagonais de um polígono, nessa atividade, desenvolvemos o seguinte objetivo no currículo: construção de procedimentos pela observação de regularidades entre o número de lados e o de diagonais.

CONCLUSÃO

Dentre os objetivos do pensamento algébrico a serem desenvolvidos no currículo atual de Matemática, ressaltamos: (1) reconhecer que escritas algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações-problema e favorecer sua solução; e (2) traduzir informações contidas em tabelas, gráficos em linguagem algébrica e vice-versa, generalizando regularidades e identificar funções das letras. No que se refere especificamente à atenção aos padrões, concluímos com as palavras de **HARDY**:

G.H. HARDY
(1877-1947)

Matemático inglês,
autor de várias obras
concernentes à Teoria
dos Números.

Um matemático, como um pintor ou um poeta, é um criador de padrões, (modelos). Se seus padrões são mais permanentes do que os deles é porque são obtidos com idéias. Os padrões matemáticos, como os dos pintores ou poetas, precisam ser belos; as idéias, como as cores ou palavras, precisam se ajustar em um caminho harmonioso. Beleza é o primeiro teste, não há lugar permanente no mundo para matemática desagradável.

RESUMO

Identificar regularidades numéricas significa estudar certos comportamentos de um conjunto de números. Uma habilidade importante desenvolvida nesta aula foi utilizar os conhecimentos sobre os números, as operações e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico. Atividades sobre múltiplos, números pares e ímpares, números da seqüência de Fibonacci e sobre ternos pitagóricos fornecem-nos um vasto campo para explorar padrões. Nessa perspectiva, a calculadora passa a ser utilizada como um recurso que nos poupará tempo na realização de cálculos: o importante é o estudo de relações e propriedades numéricas.

AUTO-AVALIAÇÃO

Se você compreendeu o que significa estudar regularidades e ampliou seu conhecimento sobre o tipo de atividades que podem ser desenvolvidas com essa finalidade, você alcançou o objetivo principal desta aula. Parabéns! É importante ter percebido que tarefas que desenvolvam o pensamento aritmético/algébrico por meio da identificação e da análise de padrões devem ter uma dinâmica investigativa, isto é, devem instigar, gerar questionamentos e envolver alunos e professor na busca de respostas, ainda que previsíveis.

Esperamos, também, que a realização da atividade final tenha feito você ficar mais convencido da importância da relação entre os diferentes blocos de conteúdo em Matemática.

INFORMAÇÕES SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, estudaremos regularidades nos números notáveis ou números figurados. Revise a Aula 4 da disciplina Álgebra 1 sobre o princípio da indução matemática.



RESPOSTAS

Atividade 3

$4k^2 = 2(2k^2)$, em que $2k^2 \in \mathbb{N}$.

Atividade 4

4. a. $4k^2 - 4k + 1 = 2(2k^2 - 2k) + 1$, em que $2k^2 - 2k \in \mathbb{N}$.

4. b. Sim, pois caso o número fosse ímpar, seu quadrado também o seria, pela letra (a).

Atividade 8

Catetos: 105 e 208

Mais regularidades... os números notáveis

AULA 10

Meta da aula

Instrumentalizar o trabalho com regularidades.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- Revisar a definição de regularidade.
- Identificar e analisar regularidades em tarefas envolvendo os números notáveis (figurados).
- Entender a diferença entre iteração e recursividade.
- Utilizar diferentes atividades para trabalhar regularidades variadas.

Pré-requisitos

Para o desenvolvimento desta aula, é necessário que você tenha compreendido a definição de regularidade e de padrão (Aula 9).

INTRODUÇÃO



Lembre-se de que estamos utilizando padrão e regularidade como sinônimos.

Na última aula, exploramos atividades que ajudam a desenvolver o pensamento algébrico e aritmético mediante a análise de regularidades numéricas. Como você estudou, regularidade envolve comportamento obedecendo a certas leis e normas. Em Matemática, é comum nos referirmos ao termo *padrão* quando determinamos uma unidade para medir (comparar) certa grandeza ou analisamos pavimentações e estamparias variadas.

O pensamento algébrico está, muitas vezes, distante das idéias que o aluno consegue concretizar no Ensino Fundamental. O trabalho do professor deve levar o aluno a compreender as características desse pensamento e aprender a pensar algebricamente. Uma das maneiras de fazer isso consiste em trabalhar conjuntamente a álgebra e a geometria na descoberta de regularidades. Dessa forma, os padrões ou regularidades geométricas favorecem a visualização e a conexão com a álgebra.

Dentre os educadores que defendem essas idéias, vale mencionar Antonio José Lopes, o famoso Bigode. É um reconhecido educador matemático e autor de livros didáticos. Dentre eles, destacamos *Matemática Hoje é Feita Assim* da Editora FTD. Em cada volume da coleção você encontrará idéias para desenvolver atividades com os números figurados. Acesse a página do autor e conheça seus trabalhos: <http://www.matematicahoje.com.br>

Falando mais especificamente, é importante que o aluno amplie os procedimentos de cálculo, compreenda as propriedades das operações, faça conjecturas e busque validar seus resultados através da argumentação. Para atingir esse objetivo, ao longo do Ensino Fundamental, a exploração das regularidades é um importante aliado à prática docente. Nesta aula, veremos que este objetivo também deve ser contemplado no Ensino Médio e para que você verifique, na prática, essa afirmação, estudaremos padrões em números figurados, também denominados números notáveis.

CONSTRUINDO NÚMEROS TRIANGULARES

Vamos formar uma sequência de números triangulares usando círculos.

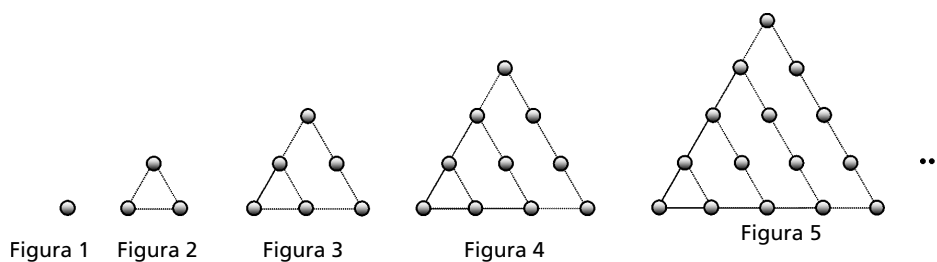


Figura 10.1: Números triangulares.

O número de círculos de cada figura da sequência de figuras forma a sequência de números triangulares.



ATIVIDADE

1. Volte à **Figura 10.1**, observe-a e preencha a tabela a seguir com o número de círculos dos números triangulares.

Número triangular	Figura	Número de círculos
1º	1	1
2º	2	
3º	3	
4º	4	
5º	5	
6º	6	

COMENTÁRIO

Para preencher a tabela até o quinto número triangular, basta que você conte o número de círculos de cada figura. Para encontrar o sexto número triangular, você deve visualizar a próxima figura com esse mesmo padrão. Caso ainda não tenha percebido como obtê-la, acompanhe o processo de construção dos números triangulares e volte à atividade.

Nessa atividade, não buscamos, ainda, a generalização. Da primeira à quinta figura você precisa apenas contar os círculos. Para a sexta figura, você poderá ter generalizado ou simplesmente desenhado a figura correspondente.



Você pode conferir suas respostas da Atividade 1 na última coluna da **Tabela 10.1**.

Vamos construir a seqüência dos números triangulares. Para formar essa seqüência, comece com uma figura inicial, pode ser qualquer uma; no caso, vamos utilizar um círculo e considerá-lo a **Figura 1** desse processo.



Figura 1

Essa figura representa o número 1, pois nela temos um único círculo.

Primeiramente, vamos construir os números triangulares, utilizando um triângulo equilátero. Para construir um triângulo são necessários três pontos; precisamos de mais dois círculos que, junto com o primeiro, farão o papel de “vértices”. Essa figura será a **Figura 2** do padrão que estamos formando. Observe:

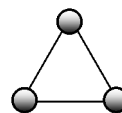
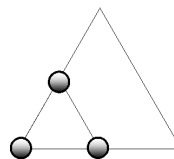


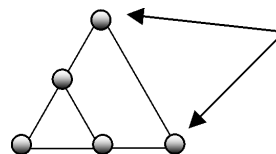
Figura 2

Ela está associada ao número 3, que corresponde ao número total de círculos.

Continuando o processo, a **Figura 3** será formada pelos círculos da **Figura 2** com mais três círculos. Para obter esses novos círculos construiremos um triângulo equilátero com o dobro da medida do lado do triângulo da **Figura 1**, de forma que dois de seus lados, contenham o lado do triângulo anterior. Veja:



Dois dos três círculos que desejamos obter são os vértices desse triângulo.



O terceiro é o ponto médio do lado que não contém círculos. Assim, formamos a **Figura 3** dessa sequência:

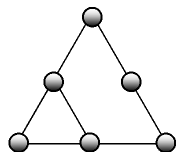
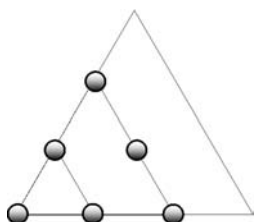


Figura 3

De forma semelhante, na **Figura 4**, o objetivo é construir um triângulo equilátero com o triplo da medida do lado do triângulo feito na **Figura 2**, de forma que dois de seus lados contenham os dois triângulos anteriores.



No lado que não contém os outros dois lados dos triângulos anteriores, vamos marcar quatro círculos. Dois são vértices e outros dois são os pontos que dividem o segmento, agora, em três partes iguais.

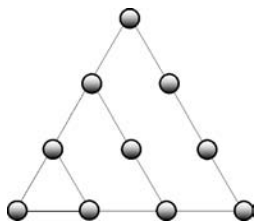


Figura 4

Mantendo esse padrão, a **Figura 5** será:

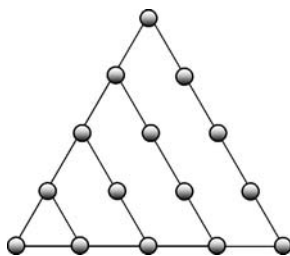
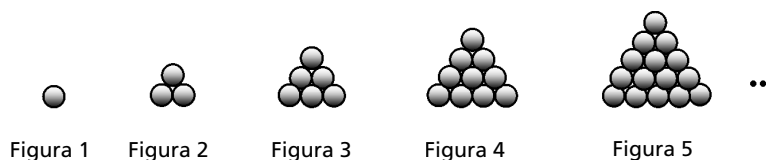


Figura 5

Assim, no total de círculos de cada figura da seqüência formada, temos, os números triangulares:

Podemos também explorar os números triangulares, através de “pilhas”.



Entretanto, essa visualização não é possível para os números pentagonais em diante por causa das características dos polígonos.

!

Você já tinha feito alguma observação a respeito do número das bolas de um jogo de bilhar e de sua organização? A configuração da Figura 5 na seqüência dos números triangulares está presente na arrumação de bolas do jogo de bilhar.

NÚMEROS QUADRADOS

Com base na mesma idéia, passaremos aos números quadrangulares ou quadrados. Sendo que, neste caso, a partir do círculo inicial, formaremos um quadrado e os círculos que correspondem aos vértices darão origem ao segundo número quadrangular; você encontra essa formação na **Figura 2** da seqüência dos números quadrados.

A partir daí formaremos quadrados com o dobro, o triplo, o quádruplo, ..., da medida do lado do quadrado da **Figura 2**. O número correspondente a cada figura é o total de círculos que ela contém. Observe:

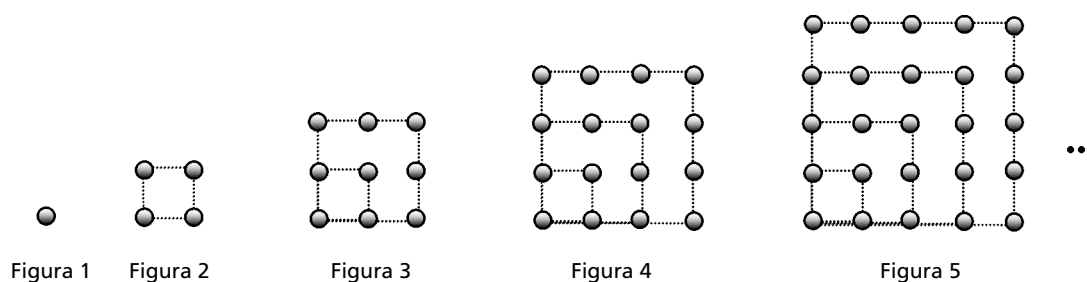
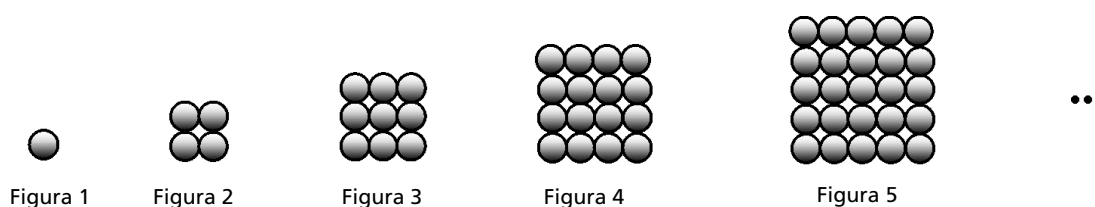


Figura 10.2: Números quadrados.

Dispondo os números quadrados em pilhas temos:



ATIVIDADE

2. Complete a última coluna da tabela a seguir com o número de círculos dos números quadrados.

Número quadrado	Figura	Número de círculos
1º	1	1
2º	2	
3º	3	
4º	4	
5º	5	
6º	6	

COMENTÁRIO

Esta atividade tem como objetivo fazer com que você associe aspectos geométricos, algébricos e aritméticos. Confira a resposta desta atividade na última coluna da **Tabela 10.2**.



No terceiro ciclo do Ensino Fundamental, 5ª e 6ª séries, devemos explorar os padrões com alunos, de forma que eles possam construir um raciocínio indutivo para a formação das próximas etapas.

Observe a sequência de números pentagonais e hexagonais; ela obedece a mesma forma de construção.

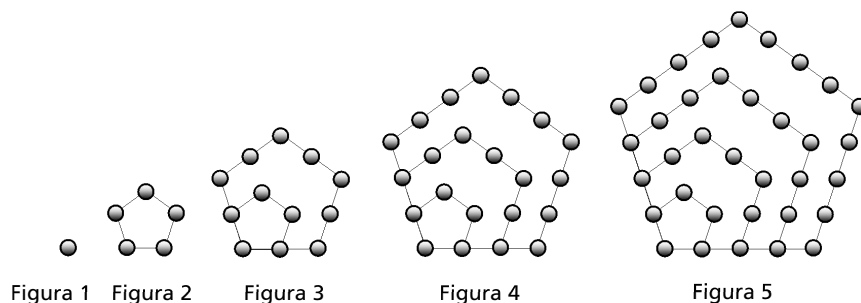


Figura 10.3: Números pentagonais.

Aqui não conseguimos formar uma pilha, como no caso dos triângulos ou dos quadrados.



ATIVIDADES

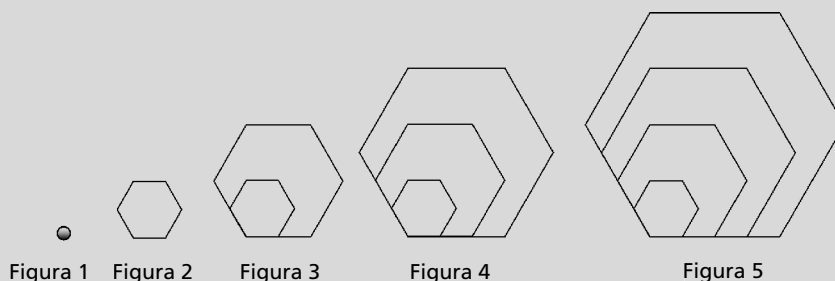
3. Observe a **Figura 10.3** e complete a última coluna desta tabela com o número de círculos que os números pentagonais formam.

Número pentagonal	Figura	Número de círculos
1º	1	1
2º	2	
3º	3	
4º	4	
5º	5	
6º	6	

COMENTÁRIO

*Esta atividade tem o mesmo objetivo que a anterior; mas, neste caso, estamos explorando os números pentagonais. Você encontrará a resposta desta atividade na segunda linha da **Tabela 10.3**.*

4. Encontre os números hexagonais. Para isso, utilize os seguintes hexágonos e desenhe os círculos necessários em cada figura.



Observando a sequência de figuras que você construiu, preencha a tabela:

Número hexagonal	Figura	Número de círculos
1º	1	1
2º	2	
3º	3	
4º	4	
5º	5	
6º	6	

COMENTÁRIO

Atenção! Nesta atividade, você deve construir os números hexagonais e só depois completar a tabela. Confira as respostas desta atividade na **Figura 10.4** e na **Tabela 10.3**.

Você reparou que em todas as seqüências construídas o primeiro número é o 1. Uma única bola não dá a idéia do triângulo, nem do quadrado, do pentágono e tão pouco do hexágono etc., entretanto, na relação numérica que se estabelece entre os termos, ele se organiza, logicamente, junto aos outros. O número 1 é um número triangular, quadrangular, pentagonal, hexagonal, ...



Podemos construir números heptagonais, octogonais etc. Estes podem ser obtidos pelo mesmo processo, ainda que sua organização não seja usual e o desenho seja mais complexo. Cabe um desafio a você: o primeiro número heptagonal é o 1, o segundo o 7. Quais são os três próximos números dessa seqüência? Ao fim do próximo tópico, você verá a generalização do processo. Por meio dele, você chegará a resposta. Caso alguma dúvida ainda persista, procure o tutor no pólo.

EXPLORANDO AS SEQÜÊNCIAS DOS NÚMEROS FIGURADOS

Agora, nosso objetivo é analisar a formação do número de elementos dos números triangulares, quadrados, pentagonais e hexagonais. Para obter o sexto ou sétimo número das seqüências apresentadas, você poderá desenhar. Você conseguirá, entretanto, imaginar, com facilidade, o vigésimo número triangular ou o décimo número pentagonal? É provável que não, mas se sua resposta foi sim, você deve ter feito generalizações que foram além dos casos particulares apresentados.

Esse é o objetivo desse tópico: explorar padrões de formação dos números triangulares, quadrangulares, pentagonais e hexagonais. Começaremos pelos números triangulares.

O primeiro número triangular é o 1.



Figura 1

O segundo é o 3. Para encontrá-lo, formamos o primeiro triângulo, ou seja, colocamos mais dois círculos na **Figura 1**.

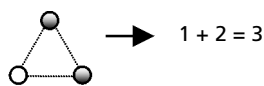
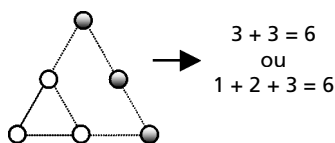


Figura 2

O terceiro número triangular é o 6. Para encontrá-lo, juntamos mais três círculos à **Figura 2**. Veja:



Você deve ter observado a relação aditiva entre os termos consecutivos dessa seqüência.

Vamos montar uma tabela com os números triangulares para deixar essa idéia mais clara:

Tabela 10.1: Generalizando números triangulares

Número triangular	Expressão	Resultado
1º	1	1
2º	1+2	3
3º	1+2+3	6
4º	1+2+3+4	10
5º	1+2+3+4+5	15
6º	1+2+3+4+5+6	21
⋮	⋮	⋮
n-ésimo	1+2+3+4+...+n	?
⋮	⋮	⋮

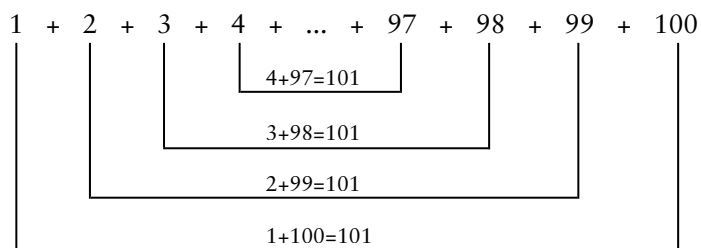
Para obter uma expressão para essa soma, você pode pensar como **GAUSS!**

CARL FRIEDRICH GAUSS

Foi um alemão que viveu entre 1777 e 1855. Ele se tornou um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Além disso, foi astrônomo e físico. São dele essas palavras: “A Matemática é a rainha das ciências. A teoria dos números é a rainha das matemáticas.”

A história diz que Gauss tinha 8 ou 10 anos e seu professor ordenou que os alunos somassem os números de 1 a 100. Em poucos minutos, Gauss chegou à soma 5050. O professor esperou que outros alunos terminassem para conferir as respostas e constatou que a única correta era a de Gauss. Acredita-se que ele tenha usado para descobrir essa soma o raciocínio da soma dos termos de uma Progressão Aritmética.

Para somar os números de 1 a 100, o processo conhecido como soma de Gauss envolve o número de termos e os termos equidistantes dessa soma. Sabemos que temos 100 números inteiros de 1 a 100. E qual é a soma de dois termos equidistantes da sequência dos números inteiros de 1 a 100? Veja:



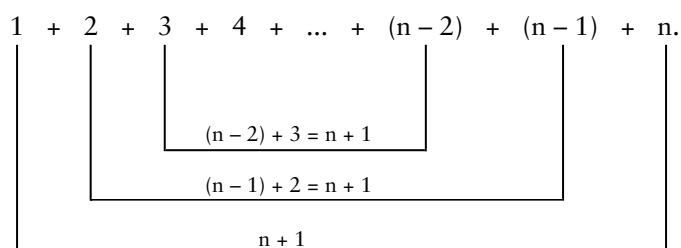
Como temos 100 números, teremos 50 parcelas de somas 101. Para obter o resultado devemos multiplicar 50 por 101, encontrando 5050.



Lançando esse problema como desafio, em turmas de 5ª e 6ª séries, em que se deve pedir aos alunos que encontrem a soma sem realizar mais do que cinco operações, o professor poderá perceber como os alunos elaboram estratégias interessantes, iguais ou parecidas a estratégia de Gauss.

Vamos usar o raciocínio de Gauss para chegar ao resultado da soma $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$.

Para isso precisamos fazer as somas parciais do primeiro com o último, do segundo com o antepenúltimo e assim por diante.



Essas somas resultam sempre no mesmo número que é $n + 1$.

Temos dois casos para analisar.

Se o número de parcelas é par e as agrupamos de duas em duas, temos o número $n + 1$ somado a metade de n vezes.

$$\text{Logo, } 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n}{2}(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$

Se o número de parcelas é ímpar, agrupamos, novamente, de duas em duas, temos o número a soma $n + 1$, $\frac{n-1}{2}$ vezes e sobrar um número no “meio” da sequência.

Esse número do meio será o termo médio da sequência, ou seja $\frac{n+1}{2}$.

$$\text{Nesse caso, } 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{(n+1)(n-1)}{2} + \frac{n+1}{2} = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Dessa forma o n -ésimo número triangular é $\frac{n^2 + n}{2}$.



Você poderia ter encontrado pela soma de termos de uma PA, $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

Entretanto, o raciocínio apresentado aqui permite a exploração numérica desse problema antes do Ensino Médio. Desde a 5ª série, podemos explorar soma de seqüências como estas diferenciando o raciocínio para seqüências cujo número de termos é par ou ímpar. Nas 7ª e 8ª séries podemos explorar a escrita algébrica, valor numérico etc.

Lembre-se de que não estamos fazendo Álgebra apenas quando utilizamos letras. O pensamento algébrico é mais que o uso de letras. Para ficar mais convencido desta idéia, leia Lins e Giménez (1997), e **ARCAVI** (1995).

ABRAHAM ARCAVI

É um reconhecido educador matemático. Argentino membro atuante no grupo internacional Psicologia da Educação Matemática (www.igpme.org), trabalha atualmente no Weissman Institute of Science, em Israel.

A tabela a seguir apresenta os números quadrados com a mesma idéia utilizada para a formação dos termos dos números triangulares.

Tabela 10.2: Generalizando números quadrados

Número quadrado	Expressão	Resultado
1º	1	1
2º	1+3	4
3º	1+3+5	9
4º	1+3+5+7	16
5º	1+3+5+7+9	25
6º	1+3+5+7+9+11	36
⋮	⋮	⋮
n-ésimo	1+3+5+7+...+(2n-1)	n²
⋮	⋮	⋮



Você observou que o n-ésimo termo dessa seqüência é a soma dos termos de uma PA de razão 2, cujo primeiro termo é 1, assim a última parcela da soma é o termo $a_n = 1 + (n - 1)2$, ou seja $a_n = 2n - 1$. A expressão n^2 é encontrada

na soma dos termos da PA, ou seja, por $S_n = \frac{(1 + (2n - 1))n}{2} = n^2$.

É importante entender que o raciocínio necessário para se chegar à fórmula não é a mesma coisa que sua utilização, ou seja, não é o mesmo que ter a fórmula para encontrar o valor numérico através de substituições de letras por números e cálculos.

A expressão que determina os números pentagonais também são somas de termos de uma PA. Veja na **Tabela 10.3**.

Tabela 10.3: Generalizando números pentagonais

Número pentagonal	Expressão	Resultado
1º	1	1
2º	1+4	5
3º	1+4+7	12
4º	1+4+7+10	22
5º	1+4+7+10+13	35
6º	1+4+7+10+13+16	51
⋮	⋮	⋮
n-ésimo	1+4+7+10+...+?	?
⋮	⋮	⋮



ATIVIDADES

5. a. Na linha do n-ésimo termo da **Tabela 10.3**, o n-ésimo termo é dado pela soma $1 + 4 + 7 + 10 + \dots + ?$

Qual a expressão do último termo dessa seqüência em função de n?

5. b. Escreva uma fórmula, em função de n, para obter qualquer número pentagonal.

6. A **Figura 10.4** refere-se à disposição dos números hexagonais.

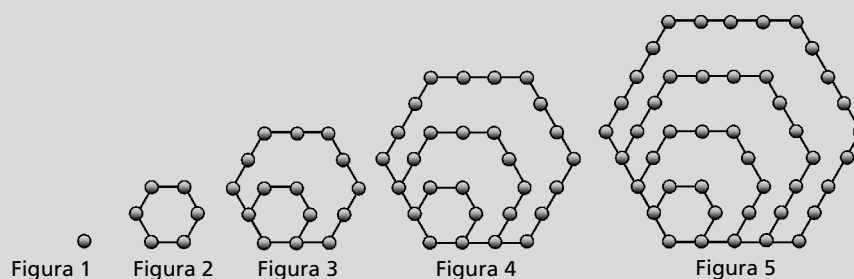


Figura 10.4: Números hexagonais.

6. a. Complete a tabela:

Número hexagonal	Expressão	Resultado
1º	1	1
2º	1+5	6
3º		
4º		
5º		
6º		
⋮	⋮	⋮
n-ésimo		$H_n =$
⋮	⋮	⋮

6. b. Explique como representar algebricamente o último termo da soma H_n e sua expressão.

COMENTÁRIO

A **Figura 10.4** e a Atividade 4 poderão ajudá-lo a resolver esta atividade, pois um caminho para a generalização é a representação numérica.

Podemos ainda, buscar uma outra regularidade no estudo dos números figurados notáveis. Observe a Tabela 10.4:

Tabela 10.4: Generalização dos números figurados notáveis.

Números triangulares	Números quadrados	Números pentagonais	...	Números de um polígono regular de r lados
1	1	1		1
1+2	1+3	1+4		r-1
1+2+3	1+3+5	1+4+7		1+ (r-1) + (2r-3)
1+2+3+4	1+3+5+7	1+4+7+10		1+ (r-1) + (2r-3) + (3r-5)
1+2+3+4+5	1+3+5+7+9	1+4+7+10+13		1+ (r-1) + (2r-3) + (3r-5) + (4r-7)
⋮	⋮	⋮		⋮
Cada termo é obtido pela soma de uma seqüência (PA) cujo primeiro termo é 1 e a razão é 1	Cada termo é obtido pela soma de uma seqüência (PA) cujo primeiro termo é 1 e a razão é 2	Cada termo é obtido pela soma de uma seqüência (PA) cujo primeiro termo é 1 e a razão é 3		Cada termo é obtido pela soma de uma seqüência (PA) cujo primeiro termo é 1 e a razão é (r - 2)
⋮	⋮	⋮		⋮

Agora, você já pode responder ao desafio deixado ao fim do tópico anterior sem desenhar as figuras. E então, quais são os cinco primeiros números heptagonais?

Na disciplina Álgebra I, você viu que o princípio da indução matemática é muito usual na demonstração de propriedades numéricas. Podemos aplicar o princípio da indução finita ou matemática para analisar padrões em seqüências de números figurados. Não o faremos nesta aula, mas você pode enriquecer seu conhecimento estudando sobre esta utilização.

ITERAR: v.t.

Tornar a fazer ou a dizer; repetir, reiterar (KOOGAN e HOUAISS, 1995)

RECURSIVIDADE s.f.

Propriedade do que pode ser repetido.

ITERATIVIDADE E RECURSIVIDADE

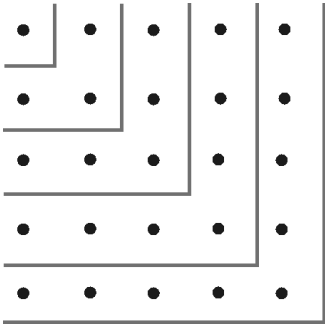
São dois processos de raciocínio importantes no desenvolvimento do pensamento algébrico/aritmético. Os alunos não precisam saber da definição destas palavras. O professor é quem deve conhecer esta diferença quando for elaborar e propor tarefas.

A **RECURSIVIDADE** trata de uma maneira especial de resolver problemas. A idéia-chave consiste em resolvê-los em termos de uma instância mais restrita. Para entender a diferença entre iteração e recursividade, vamos voltar ao exemplo dos números quadrangulares.

Já vimos na formação dos números quadrangulares a regularidade de somarmos o próximo número ímpar, isto é:

$Q_1 = 1, Q_2 = 1 + 3, Q_3 = 1 + 3 + 5, Q_4 = 1 + 3 + 5 + 7, ...$

Veja ao lado onde visualizamos bem esse fato.

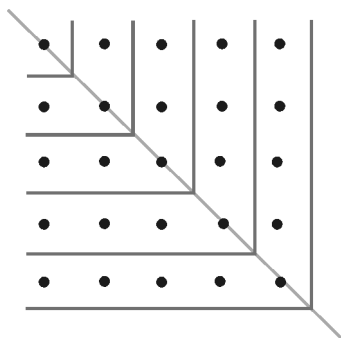


Escrevendo essa construção em termos gerais, temos que

$$Q(n) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1).$$

Este tipo de formação envolve o raciocínio iterativo, pois nesse caso a quantidade anterior é considerada.

Agora, visualizaremos essa mesma figura com outro ponto de vista, dividindo-a em duas disposições triangulares representadas pelas somas $1 + 2 + 3 + 4$ e $1 + 2 + 3 + 4 + 5$.



Esses são o quarto e o quinto números triangulares. Lembra-se?

Podemos então escrever que o quinto número quadrangular pode ser escrito com a soma do quarto e do quinto números triangulares, ou seja, $Q_5 = T_4 + T_5$.

É fácil perceber que podemos fazer isso para qualquer número quadrangular a partir do segundo. Dessa forma podemos generalizar que $Q_n = T_{n-1} + T_n$, mas para isso precisamos provar e, nesse caso, utilizaremos o que já sabemos sobre os números triangulares.

Mostrar que $Q_n = T_{n-1} + T_n$ é o mesmo que mostrar que $Q_{n+1} = T_n + T_{n+1}$. Vamos trabalhar com a segunda identidade.

Já mostramos que o n -ésimo número triangular é dado por $T_n = \frac{n^2 + n}{2}$, dessa forma o número triangular $n+1$ é dado por

$$T_{n+1} = \frac{(n+1)^2 + (n+1)}{2} = \frac{n^2 + 2n + 1 + n + 1}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2}, \text{ temos}$$

$$\text{então que } T_n + T_{n+1} = \frac{n^2 + n}{2} + \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{2n^2 + 4n + 2}{2} = n^2 + 2n + 1.$$

Por outro lado, sabemos que o n -ésimo número quadrangular é dado por $Q_n = n^2$, logo o número quadrangular $n+1$ será dado por $Q_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$. Desta forma, está demonstrado com o auxílio da álgebra que $Q_{n+1} = T_n + T_{n+1}$.



Esse teorema foi demonstrado por Nicômaco de Gerasa no século I d.C.

Este tipo de raciocínio que acabamos de ver é recursivo, pois utilizamos os números triangulares para obter os números quadrangulares.



Nestas duas formas que utilizamos para chegar numa expressão que nos dê o número quadrangular, caminhamos conjuntamente com a Álgebra e a Geometria. A Geometria nos ajudou a visualizar as regularidades que os números apresentavam e a partir daí utilizamos a Álgebra para mostrarmos genericamente que o que foi observado é verdadeiro para qualquer figura.

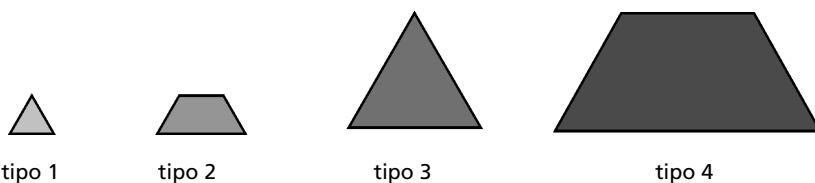
NÚMEROS FIGURADOS NÃO TÃO FAMOSOS

Veremos, neste tópico, outros números figurados e alguns não são tão famosos, mas são igualmente importantes para explorar a matemática contida neles, por meio do estudo dos padrões observados.

Você sabia que os números figurados foram elaborados pelos pitagóricos com o objetivo de compreender a natureza íntima dos números? Esses números são expressos como reunião de pontos que estão numa determinada configuração geométrica e a quantidade de pontos de cada figura representa um número, denominado número figurado.

Apresentaremos alguns exemplos a seguir, mas agora trabalhando com as formas geométricas e não mais com os pontos.

A seguir, temos quatro figuras iniciais que possuem a forma de triângulo ou trapézio, conforme mostra o desenho.



A regra de formação das figuras é a seguinte:

- usando apenas peças do tipo 1, construímos a peça do tipo 2;
- usando apenas peças do tipo 2, construímos a peça do tipo 3;
- usando apenas peças do tipo 3, construímos a peça do tipo 4;
- e assim sucessivamente.

Veja as quatro figuras iniciais dessa seqüência:



Figura 1



Figura 2



Figura 3

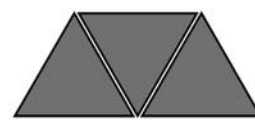


Figura 4

ATIVIDADES

7. Com base na construção das figuras anteriores, responda:

7. a. Para construirmos a Figura 5, quantas peças iguais a Figura 4 seriam necessárias?

7. b. Quantas peças iguais a Figura 1 seriam necessárias para construir a Figura 5?

7. c. Se existisse a Figura 20, que forma ela teria?

7. d. Observe a tabela a seguir, onde a segunda coluna representa o número de triângulos iguais a figura 1 que cada figura contém. Complete-a.

Figura	Total de triângulos	Figura	Total de triângulos
1	1	6	
2	3	...	
3	9	10	
4	27	...	
5		n	

COMENTÁRIO

Observe que as figuras formadas obedecem ao seguinte padrão de formas: a primeira é um triângulo, a segunda é um trapézio, a terceira é um triângulo, a quarta é um trapézio, e assim por diante.

8. Observe a seqüência de figuras a seguir. Cada figura representa uma fração.



Figura 1

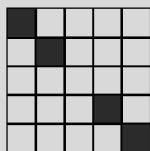


Figura 2

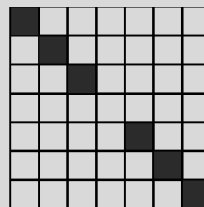


Figura 3

...

Olhe, agora, a tabela, na qual indicamos como encontrar as frações representadas por essas figuras.

Figura	Numerador	Denominador	Fração
1	2	$(2+1)^2 = 9$	$\frac{2}{9}$
2	4	$(4+1)^2 = 25$	$\frac{4}{25}$
3	6	$(6+1)^2 = 49$	$\frac{6}{49}$
4	8	$(8+1)^2 = 81$	$\frac{8}{81}$

Continuando a tabela...

8. a. Qual será o numerador na Figura 5?

8. b. Qual a fração escrita na Figura 9?

8. c. Escreva uma lei, em função de "n". para expressar a fração correspondente à figura "n".

CONCLUSÃO

Há muitas alternativas didáticas que podemos implementar no currículo do Ensino Fundamental ou Ensino Médio para explorar os números figurados. Identificar e analisar regularidades significa estudar certos comportamentos de um determinado conjunto de números ou configuração geométrica. Nesse processo de análise, vamos aprofundando nosso conhecimento sobre os números, as operações e suas propriedades para construir diferentes estratégias de cálculo algébrico.

O trabalho com números figurados (triangulares, quadrados, poligonais, ...), além de possibilitar uma aplicação mais interessante de fatos e regras algébricas (produtos notáveis, fatoração, potências etc.), desenvolve as capacidades de visualização, argumentação e o raciocínio algébricos dos estudantes e explicita as ricas conexões entre as várias subáreas da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, ..). Contribui ainda para preparar os alunos para o estudo de temas mais complexos que serão estudados no Ensino Médio como funções, seqüências, PA, PG.

RESUMO

O estudo da Álgebra não deve estar reduzido ao uso de letras. O aprendizado de regularidades (numéricas, figurais ou algébricas) contribui significativamente para o desenvolvimento do pensamento matemático, especificamente o pensamento algébrico. Recursividade e iteratividade são processos importantes relacionados ao desenvolvimento do raciocínio algébrico e aritmético, ou seja, ao uso de letras, operações inversas e generalizações e no estudo de números e suas operações. Além disso, estabelecemos relações entre variáveis. Outro ponto importante é descrever e elaborar situações que envolvam o estudo de padrões.

ATIVIDADE FINAL

Observe a seqüência de figuras a seguir. Cada uma indica em quantas regiões o plano é dividido, respectivamente, por 1, 2, 3 e 4 circunferências, *sendo que duas quaisquer sempre se interceptam*.

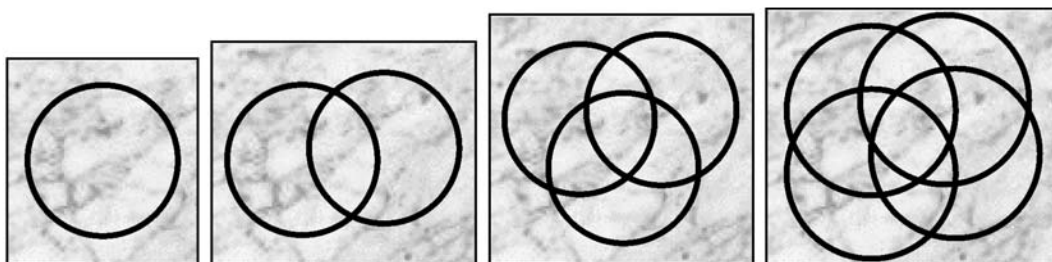


Figura 1

Figura 2

Figura 3

Figura 4

AUTO-AVALIAÇÃO

Esperamos que você esteja convencido(a) de que tarefas que desenvolvam o pensamento aritmético/algébrico por meio da identificação e da análise de regularidades exigem uma prática – docente e discente – de investigação. É relevante ter compreendido a diferença entre iteração e recursividade. Se entendeu a construção dos números triangulares e dos quadrados, você alcançou um dos nossos objetivos.

É importante, também, que você tenha percebido que há momentos em nossas aulas nas quais a utilização da calculadora se revela uma poderosa ferramenta para nos auxiliar nos cálculos. Realizar descobertas e analisá-las devem ser objetivos constantes na Matemática escolar. As aulas não devem se restringir apenas a efetuar cálculo, seja aritmético, seja algébrico. Dê uma atenção especial à atividade final, nela você encontra muitas idéias trabalhadas nessa aula, faça essa reflexão e discuta suas dúvidas com seu tutor.

Considere esta sequência infinita.

a. Complete a tabela:

Figura	Número de círculos	Número de regiões do plano
1	1	2
2	2	4
3	3	8
4	4	
5	5	
...
10	10	

b. Seja $f(n)$ o número de regiões do plano, quando o número de circunferências desenhadas é igual a n . Escreva a relação existente entre $f(n+1)$ e $f(n)$.

c. Encontre a lei que determina o número de regiões obtidas no plano, em função do número de circunferências desenhadas.

d. Apresente o menor valor de n que divida o plano em mais do que 2002 regiões.

COMENTÁRIO

O preenchimento das linhas da tabela dependerá de suas observações. Nesse tipo de atividade é importante a troca com outros colegas ou tutor, pois isso pode ajudá-lo a ampliar seu olhar sobre a atividade.

INFORMAÇÃO SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, trabalharemos com as Régua de Cuisenaire.

**RESPOSTAS****Atividade 5**

5. a. $a_n = 1 + (n-1)3 = 3n-2$

5. b. $p_n = s_n = \frac{(1+3-2)n}{2} = \frac{3^2 - n}{2}$

Atividade 6

6. a.

Número Hexagonal	Expressão	Resultado
1º	1	1
2º	1+5	6
3º	1+5+9	15
4º	1+5+9+13	28
5º	1+5+9+13+17	45
6º	1+5+9+13+17+21	66
⋮	⋮	⋮
n-ésimo	1+5+9+...+ (4n-3)	$H_n = 2n^2 - n$
⋮	⋮	⋮

6. b. Observando que cada número hexagonal é uma soma de uma PA de razão 4, encontramos a expressão $(4n - 3)$ descobrindo o termo geral a_n e H_n pela soma dos termos dessa PA. Mas saiba que você não precisa seguir, obrigatoriamente, esse processo para obter o resultado.

Atividade 7

7. a. 3

7. b. 81

7. c. seria um trapézio

7. d.

Figura	Total de triângulos	Figura	Total de triângulos
1	1	6	243
2	3	...	
3	9	10	19683
4	27	...	
5	81	n	3^{n-1}

Atividade 8

8. a. 10

8. b. $\frac{18}{361}$ 8. c. $F_n = \frac{2n}{(2n+1)^2}$ **Atividade Final**




a. 3

Figura	Número de círculos	Número de regiões do plano
1	1	2
2	2	4
3	3	8
4	4	14
5	5	22
...
10	10	92

b. $f(n+1) = f(n) + 2n$ c. $f(n) = n^2 - n + 2$

d. 46

Instrumentação do Ensino da Aritmética e da Álgebra



Referências

Aula 1

BARBOSA, Andreia Carvalho Maciel. *Investigando e justificando problemas geométricos com o Cabri Géomètre II*. 2001. 114f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro, 2001.

BERGAMINI, David. *As matemáticas*. Rio de Janeiro: J. Olympio, 1982 (Biblioteca Científica Life).

BRASIL. MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Médio*. Brasília, DF, 1998.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. 3.ed. São Paulo: Ed. da Unicamp, 2002.

IMENES, Márcio Pereira; JAKUBOVIC, José. Para que serve? *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 1, p. 3-4, 1982.

LIMA, Elon Lages. Deve-se usar calculadora na escola? *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 7, p. 20-22, 1985.

LINS, Rômulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. 4.ed. São Paulo: Papirus, 2001.

OLIVEIRA, Rosana. *Pensando algebricamente antes da 7ª série: uma outra perspectiva nos processos de construção do conhecimento*. 1997. 157f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro, 1997.

PONTO ou vírgula? *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 21, p. 2-5, 1992.

Aula 2

AABOE, Asger. *Episódios da história antiga da matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 1984. 170p.

BOYER, Carl. *História da matemática*. 9.ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. 488p.

BRASIL. MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática*. Brasília, DF: MEC, 1997. 148p.

ENCICLOPÉDIA Life: as matemáticas. Rio de Janeiro: J. Olympio, 1982. 200p.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. 3.ed. Campinas, SP: Ed. da Unicamp 2002. 844p.

VAZ, Ana Lúcia *et al.* *Matemática na educação 2*. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2004.

Aula 3

AABOE, Asger. *Episódios da história antiga da matemática*. 2.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2002, 178p.

BEKKEN, Otto B. *Equações de Ahmes até Abel*. Rio de Janeiro: USU/GEPEM, 1994, 113p.

BOYER, Carl. *História da matemática*. 9.ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1974, 488p.

BRASIL. MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática*. Brasília, DF: MEC, 1997, 148p.

ENCICLOPÉDIA Life: as matemáticas. Rio de Janeiro: J. Olympio, 1982. 200p.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. 2.ed. Campinas, SP: Unicamp, 1997, 843p.

IFRAH, Georges. *História universal dos algarismos*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997, v.2, 1045p.

FOSSA, Jonh A. *Ensaio sobre educação matemática*. Belém: EDUEPA, 2001, 181p.

SILVA, Glória. *Materiais manipulativos na construção do sistema de numeração decimal considerando aspectos históricos, psicopedagógicos e estruturais*, 2003. 130f. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Educação Matemática). Campos: FAFIC, 2003.

SISTEMA de numeração. Disponível em: <http://www.matematicasociety.hpg.ig.com.br/sistema_de_numeracao.htm>. Acesso em : 11 abr. 2004.

VAZ, Ana Lúcia *et al.* *Matemática na educação 2*. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2004.

Aula 4

GIMENEZ, Joaquim e BAIRRAL, Marcelo. Frações no currículo do ensino fundamental: conceituação, jogos e atividades lúdicas. Seropédica: EDUR/GEPEM, 2005.

BRASIL. MEC. *Parâmetros curriculares nacionais para o 3º e 4º ciclos*. Brasília, DF, v. 3, 1997.

SILVA, Ana Lúcia *et al.* *Matemática na Educação 2*. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2004. Módulo 1, v.1.

GÓMEZ, Jorge J.D. e VILLELA, Maria Lúcia T. *Pré-cálculo?* v.1 - 3.ed. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2002.

LINS, Romulo C. e GIMÉNEZ, Joaquin. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Campinas: Papirus, 1997.

SANTOS, Vânia M.P. e REZENDE, Jovana F. (Coords.) *Números: linguagem universal* Rio de Janeiro: Ed. UFRJ, 1996.

TINOCO, Lúcia A. e LOPES, Maria Laura M.L. Frações: dos resultados de pesquisa à prática em sala de aula. *A educação matemática em revista*, Blumenau, n. 2, 1994, p. 13-18.

Aula 5

BALDINO, R. Roberto. *Las cuatro operaciones con enteros através de juegos. Uno* *Revista de Didáctica de las Matemáticas*. Barcelona, n. 7, p. 37-59.

BEKKEN, Otto B. *Equações de Ahmes até Abel*. Rio de Janeiro: USU/GEPEM, 1994.

BARBOSA, Andreia C. M. *et al.* *Matemática na Educação 2*. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2004. Módulo 1, v.1.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. 2.ed. Campinas, SP: Ed. da Unicamp, 1997.

FRANÇA, Elizabeth *et al.* *Matemática na vida e na escola -5ª série*. São Paulo: Ed. do Brasil, 1999.

FRANÇA, Elizabeth *et al.* *Matemática na vida e na escola -6ª série*. São Paulo: Ed. do Brasil, 1999.

Boletim GEPEM, Rio de Janeiro, n. 17, 1998.

GÓMEZ, Jorge J. D.; VILLELA, Maria Lúcia T. *Pré-cálculo*. 3.ed. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2002. v.1.

LINS, Romulo C.; GIMÉNEZ, Joaquin. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Campinas, SP: Papirus, 1997.

RAMOS, Luzia F. *História de sinais*. São Paulo: Ática, 1989. (Série A Descoberta da Matemática).

PARA SABER MAIS SOBRE A HISTÓRIA DOS NÚMEROS INTEIROS E DIFICULDADES ASSOCIADAS

GERT, Schubring. Rupturas no estatuto matemático dos números negativos. *Boletim do GEPEM*, Rio de Janeiro, n. 38, p. 73-93, fev. 2001.

Aula 6

BOYLER, Carl. *História da Matemática*. 9.ed., São Paulo: Edgard Blücher, 1974. 488p.

BRASIL. MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática*. Brasília, 1997. 148p.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. 3.ed. Campinas, SP: Ed. da UNICAMP, 2002. 844p.

MELLO, José Luiz Pastore. Raiz quadrada sem contas ou calculadoras. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 39, p. 41-43, 1999.

O FASCÍNIO da raiz quadrada. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 21, p. 6-21, 1984.

REVISTA do Professor de Matemática, n. 4. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

Aula 7

ALONSO, Fernando et al. *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Madrid: Síntesis, 1993.

BAIRRAL, Marcelo A.; KINDEL, Dora S.; OLIVEIRA, Rosana de. *Uma Proposição entre matemática e PCNs*. Rio de Janeiro: GEPEM, 2000.

_____.; SILVA, Miguel Ângelo da. *Instrumentação do Ensino de Geometria*. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2004.

BRASIL. MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o 3º e 4º ciclos*. Brasília, DF, 1997.

BRASIL. MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Médio*. Brasília, DF, 1999.

LINS, Romulo C.; GIMÉNEZ, Joaquin. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Campinas: Papirus, 1997.

MAGNO, Beatriz; MANDARINO, Monica; JURKIEWICZ, Samuel. *Matemática na Educação 1*. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2004.

SILVA, Circe Mary da. *Explorando as operações aritméticas com recursos da história da matemática*. Brasília: Plano Editora, 2003.

Aula 8

ARCAVI, Abraham. *Álgebra, História e Representação*. Rio de Janeiro: MEM/USU, 1995. (Série Reflexões Educação Matemática; v. 2.)

BAIRRAL, Marcelo (Coord.); GUIMARÃES JÚNIOR, Lourenço; PEREIRA, Geminiano. *Quadrados mágicos*. Seropédica: Ed. UFRural RJ, 2003. Material do IV Ciclo de Oficinas “Do Lúdico ao Sério em Matemática”. Apostila.

BARRANTES, Manuel (Ed.) *La geometría y la formación del profesorado en primaria y secundaria*. Extremadura: Universidade de Extremadura, 1998.

LINS, Rômulo; GIMÉNEZ, Joaquin. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Campinas, SP: Papirus, 1997.

LOOMIS, Scott. *The Pythagorean Proposition*. Washington: NCTM, 1927.

OLIVEIRA, Rosana de. Notas de aula: quadrados mágicos. *Boletim GEPEM*, Rio de Janeiro, n. 36, p. 103-108, 2000.

OLIVEIRA, Rosana de. *Pensando algebricamente antes da 7ª série: uma outra perspectiva sobre os processos de construção do conhecimento*. 1997. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro, 1997.

OLIVEIRA, Rosana de; FRANT, Janete; GOTTLIEB, Frana. *Algebraic Thinking: using magic square with 5th grade students*. PME-1996.

BAIRRAL, Marcelo A.; DA SILVA, Miguel A. *Instrumentação do ensino de geometria*. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2004.

BAIRRAL, Marcelo A. *Material de apoio para didática da matemática*. Seropédica: Imprensa da UFRuralRJ, 2002.

BARBOSA, Ruy M. *Descobrimos padrões pitagóricos*. São Paulo: Atual, 1993.

FIGUEIREDO, Luiz Manoel e GONÇALVES, Adilson. *Álgebra I*. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2004.

GÓMEZ, Jorge J.D. e VILLELA, Maria Lúcia T. *Pré-cálculo*. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2003.

KINDEL, Dora Soraia. *Discutindo os racionais na 7ª série visando à noção de densidade*. Rio de Janeiro: MEM/USU, 1998. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática.

KOOGAN, Abrahão e HOUAISS, Antônio. *Enciclopédia e dicionário ilustrado*. Rio de Janeiro: Edições Delta, 1995.

SUGESTÃO DE LEITURA PARA APROFUNDAMENTO SOBRE ATIVIDADES DE INVESTIGAÇÃO EM AULAS DE MATEMÁTICA

ABRANTES, Paulo *et al.* *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. Lisboa: APM, 1999.

PONTE, João Pedro da, BROCARD, Joana e OLIVEIRA, Hélia. *Investigações matemáticas em sala de aula*. MG, Autêntica, 2003.

ARCAVI, Abraham. *Álgebra, história e representação*. Rio de Janeiro: MEM/USU, 1995. (Série Reflexões em Educação Matemática; v. 2.)

BOYER, Carl B. *História da matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BIGODE, Antonio José Lopes. *Matemática hoje é feita assim*. São Paulo: Editora FTD, 2003.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Ed. Unicamp, 1994.

FIGUEIREDO, Luiz Manoel; GONÇALVES, Adilson. *Álgebra I*. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2004.

KOOGAN, Abrahão; HOUAISS, Antônio. *Enciclopédia e dicionário ilustrado*. Rio de Janeiro: Edições Delta, 1995.

LINS, Romulo C.; GIMÉNEZ, Joaquin. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Campinas: Papirus, 1997.

SANTOS, Fabiano; MORGADO, Augusto. Examinando casos particulares. Problema 1. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 55, p. 34-35, 2004.

SHOKRANIAN, Salahoddin. *Números Notáveis*. Brasília: Ed. UnB, 2002.

SITES

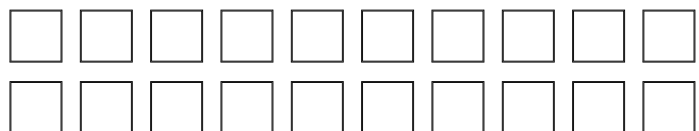
BIGODE, Antônio José Lopes. *Matemática Hoje*. Disponível em: <http://www.matematicahoje.com.br/telas/Autor/artigos/artigos_publicados.asp?aux=NFigurados>. Acesso em: 17 out. 2004.

**Instrumentação do Ensino
da Aritmética e da Álgebra**

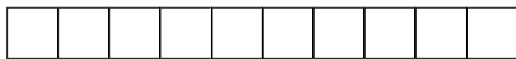
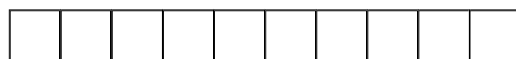
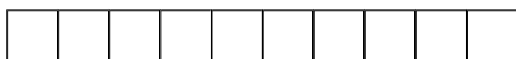
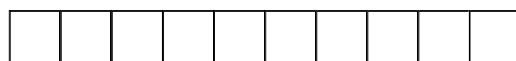
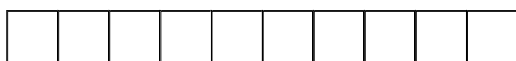
Módulo Prático

Aula 5

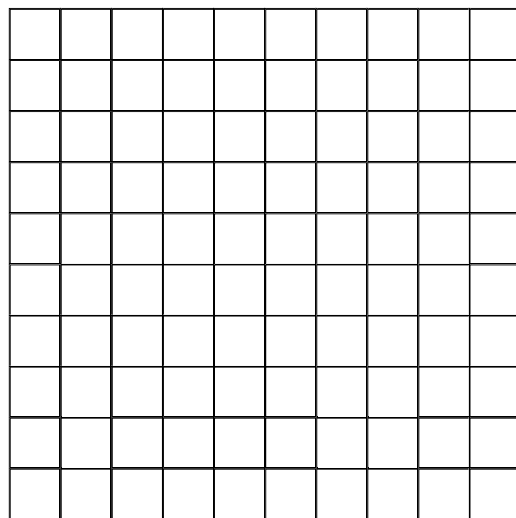
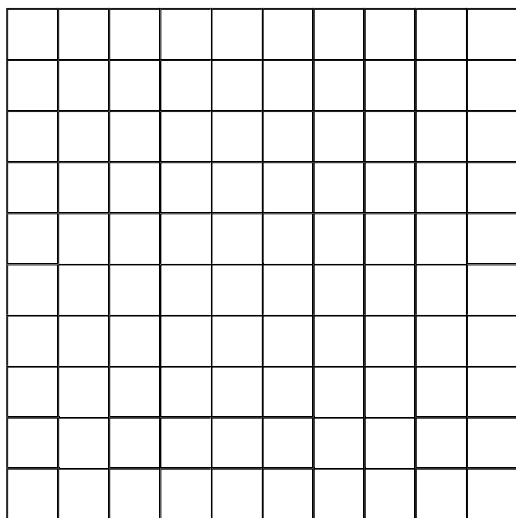
Cubinhos



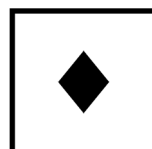
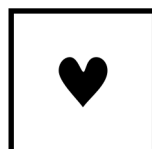
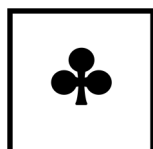
Barras

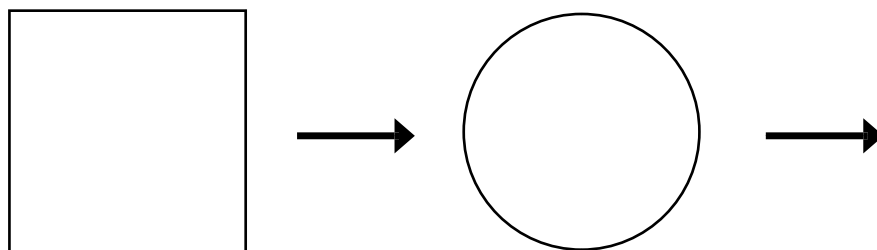
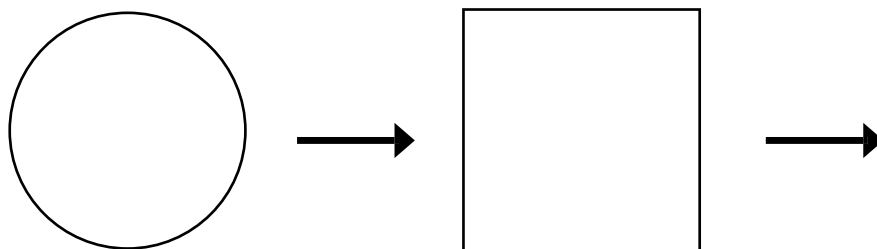
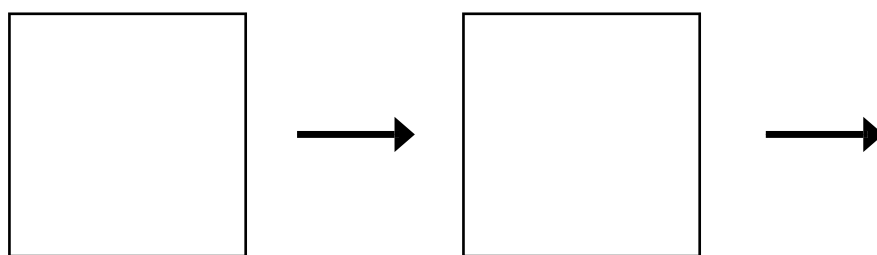
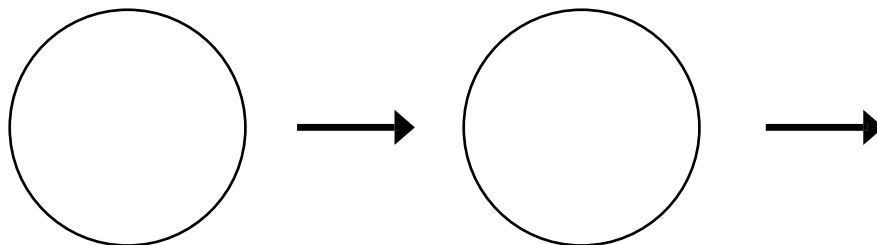


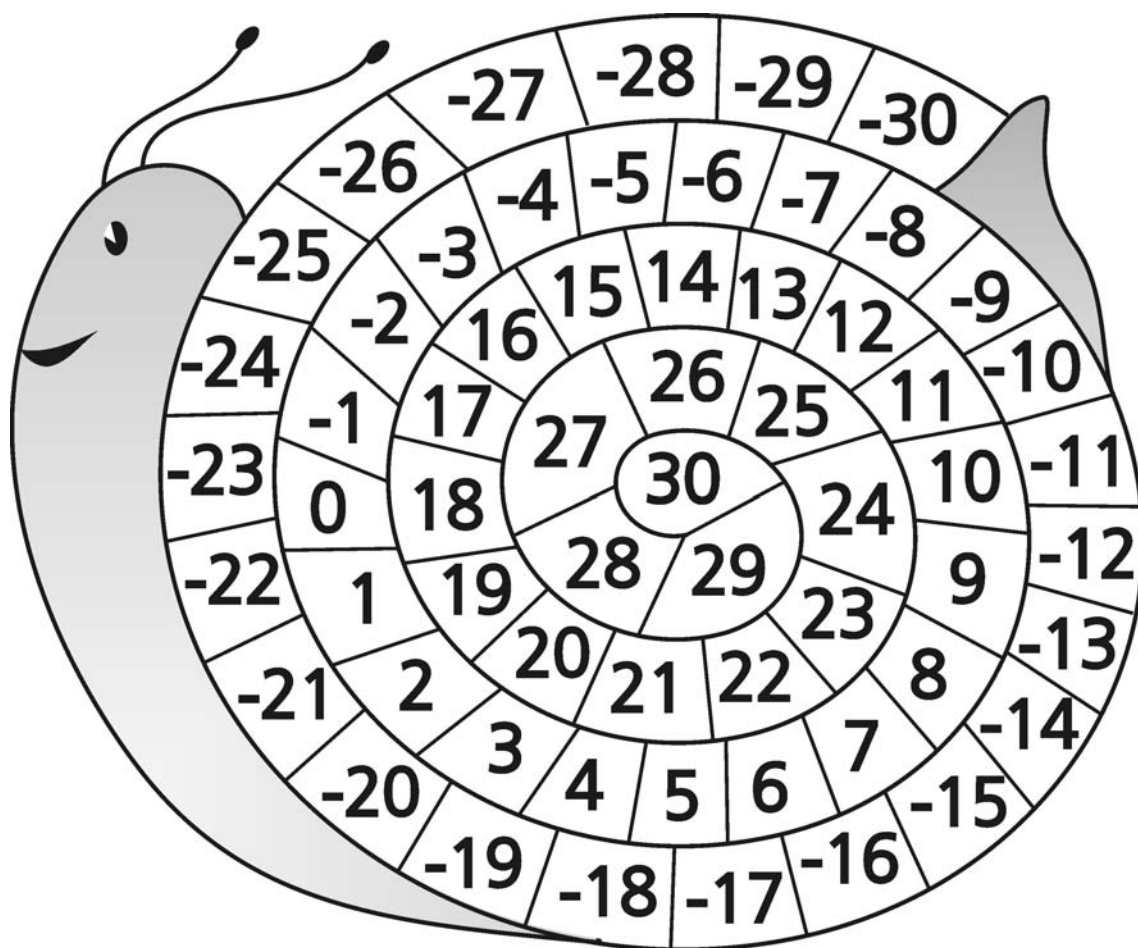
Placas

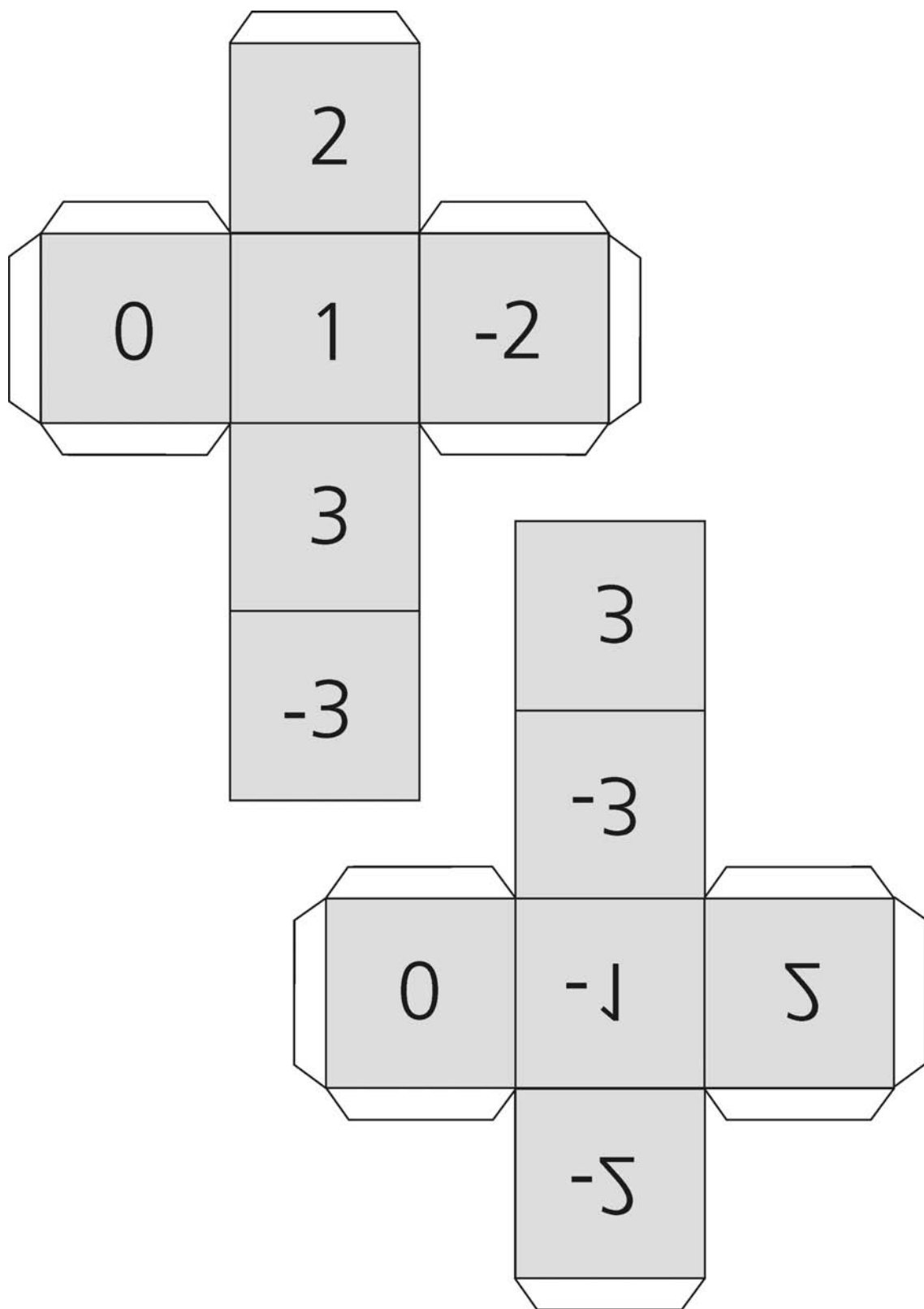


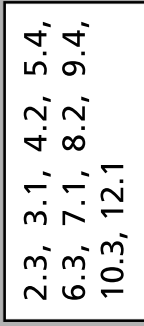
4	1	3	2	2	3	1	4
3	2	1	4	4	1	2	3
2	3	4	1	1	4	3	2
1	4	2	3	3	2	4	1
1	4	2	3	3	2	4	1
2	3	4	1	1	4	3	2
3	2	1	4	4	1	2	3
4	1	3	2	2	3	1	4











ISBN 85-7648-235-5



9 788576 482352



UENF
Universidade Estadual
do Norte Fluminense



SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Ministério
da Educação

