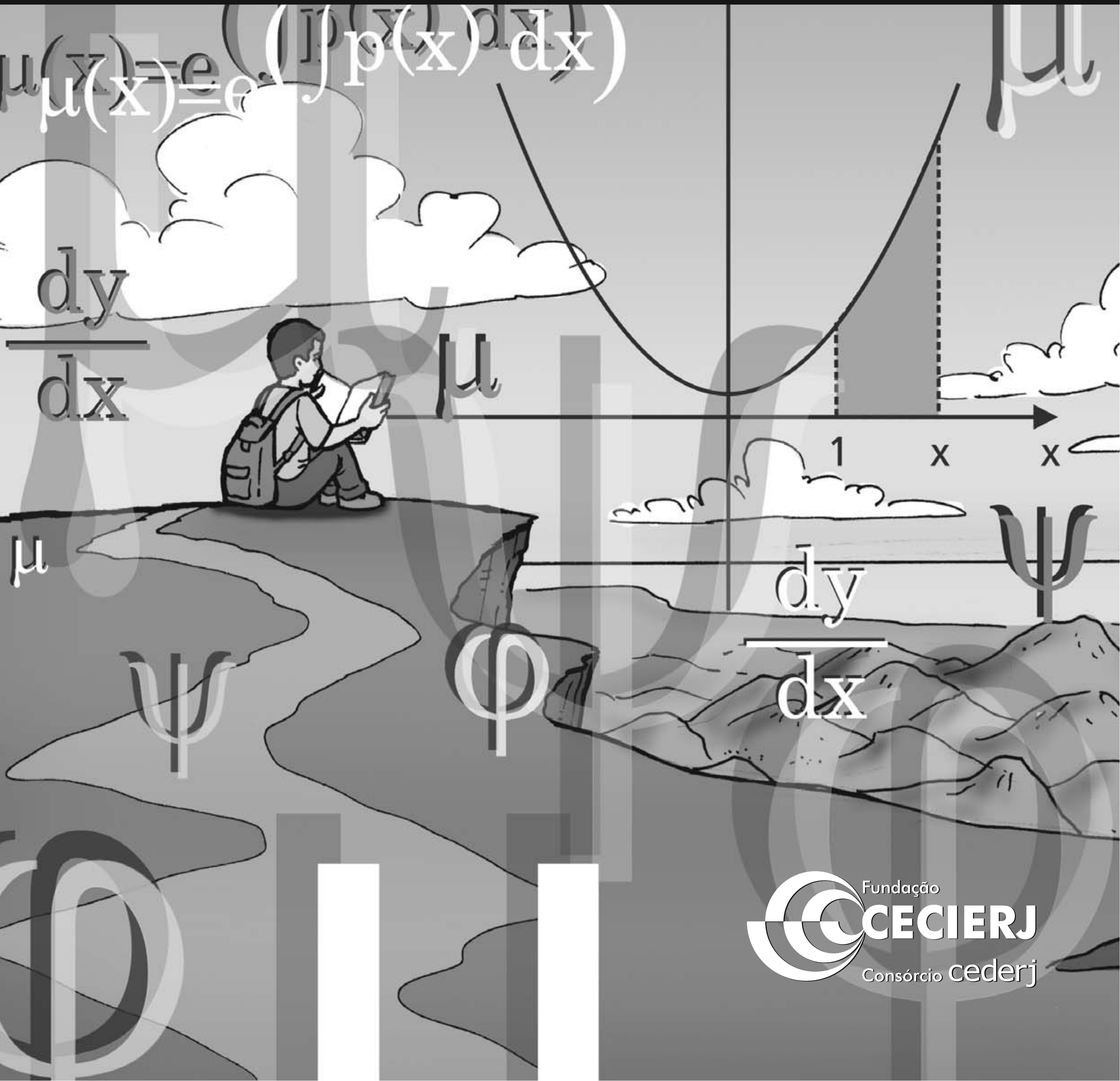
Módulo 1

Pedro do Nascimento Nobrega

Volume 1

Equações Diferenciais



Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Fundação

CECIERJ

Consórcio cederj

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Equações Diferenciais

Volume 1 - Módulo 1

Pedro do Nascimento Nobrega

GOVERNO DO Rio de Janeiro

SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Apoio:

FAPERJ Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001
Tel.: (21) 2334-1569 Fax: (21) 2568-0725

Material Didático

ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO
Pedro do Nascimento Nobrega

COORDENAÇÃO DE DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL
Cristine Costa Barreto

DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL E REVISÃO
Anna Maria Osborne
Ana Tereza de Andrade
Jane Castellani
Leonardo Villela
Nilce P. Rangel Del Rio

COORDENAÇÃO DE LINGUAGEM
Maria Angélica Alves

Departamento de Produção

EDITORA
Tereza Queiroz

COORDENAÇÃO EDITORIAL
Jane Castellani

REVISÃO TIPOGRÁFICA
Equipe Cederj

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO
Jorge Moura

PROGRAMAÇÃO VISUAL
Aline Brondani
Marcelo Freitas

CAPA
Morvan Neto

PRODUÇÃO GRÁFICA
Oséias Ferraz
Patricia Seabra

C837c

Nobrega, Pedro do Nascimento.
Equações diferenciais. v. 1 / Pedro do Nascimento Nobrega. – Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.
124p.; 21 x 29,7 cm.

ISBN: 85-7648-211-8

1. Equações lineares. 2. Equação de Bernoulli. 3. Equação de Ricatti. I. Título.

CDD: 515.35

2010/1

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador
Sérgio Cabral Filho

Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia
Alexandre Cardoso

Universidades Consorciadas

UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Vieiralves

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Reitor: Roberto de Souza Salles

UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Aloísio Teixeira

UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Motta Miranda

UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitora: Malvina Tania Tuttman

Equações Diferenciais

Volume 1 - Módulo 1

SUMÁRIO

Aula 1 – Introdução

SEJA BEM VINDO! Esta parte do curso de Licenciatura em Matemática é dedicada à disciplina Equações Diferenciais.

Para começar, uma boa notícia:

"***Você já vem estudando equações diferenciais há muito tempo***"

De fato, no estudo de Cálculo Diferencial, desde a disciplina de Cálculo I, você vem trabalhando com equações diferenciais. Veja o seguinte problema que você sabe resolver:

"*Dada a função contínua*

$$f : \ \mathbb{R} \ \longrightarrow \ \mathbb{R}, \ f(x) = 3x^2 + 1\,,$$

determinar todas as funções $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tais que*

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1\text{"} \tag{1.1}$$

A equação (7.1) é uma equação diferencial. As *soluções* desta equação são simplesmente as primitivas da função $f(x) = 3x^2+1$. Em outras palavras, uma função $y(x)$ é solução da equação diferencial (7.1) se sua derivada é a função $f(x) = 3x^2 + 1$. Do que conhecemos do Cálculo,

$$y(x) = x^3 + x + c \tag{1.2}$$

onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária, é uma representação convencional do conjunto de todas as funções deriváveis em $-\infty, +\infty$, com derivadas iguais a $3x^2 + 1$.

Dizemos também que para cada $c \in \mathbb{R}$, $y(x) = x^3 + x + c$ é uma função que *resolve* a equação diferencial $y'(x) = 3x^2 + 1$.

Usando a notação de primitivas, podemos escrever

$$y(x) = \int f(x)\,dx = \int \big(3x^2 + 1\big)\,dx = x^3 + x + c\,.$$

Freqüentemente obtemos muitas informações úteis sobre as soluções de uma equação diferencial apenas pelo exame visual de seus gráficos [1] . Veja a figura (7.1) abaixo

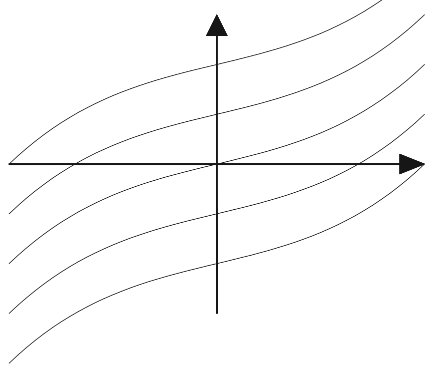


Fig.1.1 Família de soluções $\quad y(x) = x^3 + x + c$

Uma das informações que podemos obter do exame dos gráficos das soluções da equação $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2+1$ é a respeito do comportamento das soluções à medida que $x \to \pm\infty$:

Atividade 1.1
Complete: qualquer que seja o valor de c,

à medida que $x \to +\infty,\ y(x) \to \ldots\ldots$

à medida que $x \to -\infty,\ y(x) \to \ldots\ldots$

Às vezes é necessário particularizar uma função $y(x)$ dentre todas as outras funções do conjunto solução. Uma das maneiras de conseguir isso é especificar um determinado valor para a solução, num ponto dado. Por exemplo podemos estar interessados em descobrir a solução $y(x)$ cujo valor em $x = 0$ é 1; isto é, $y(1) = 0$. Então nosso problema pode ser formulado como:
Encontre uma função $y(x)$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} &= 3x^2 + 1 \\ y(1) &= 0\,. \end{cases} \tag{1.3}$$

[1] quando é possível um tal exame

Olhando para a família de funções $y(x)$ em (1.2) e impondo a condição $y(1) = 0$, encontramos

$$y(1) = 1^3 + 1 + C = 0 \Longrightarrow C = -2\,.$$

Logo,

$$y(x) = x^3 + x - 2\,,$$

é a solução do problema (1.3).

Uma pergunta que cabe aqui é a seguinte: todas as equações diferenciais são equações da forma $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$? Ou será que existem equações diferenciais diferentes daquelas que estudamos no Cálculo I? Se existirem,a pergunta passa a ser: O que é uma equação diferencial geral?

Outra pergunta: o que é uma solução de uma tal equação diferencial geral?

Um dos objetivos deste curso é obter respostas para estas questões. Quer dizer, você vai ter de esperar um pouquinho até poder ter uma resposta mais completa. Por enquanto, vamos apresentar apenas algumas ponderações iniciais. Por exemplo, a palavra *equação* já é nossa conhecida. Falando genericamente, uma equação é uma expressão representando uma igualdade entre elementos de um conjunto fixado. Na expressão aparecem elementos bem determinados do conjunto sobre o qual a equação é estabelecida e aparecem um ou mais elementos incógnitos (isto é, desconhecidos), representados por letras que simbolizam elementos variáveis no conjunto.

Resolver a equação é determinar os valores das variáveis que tornam a igualdade verdadeira.

Exemplo 1.1
Suponha que necessitamos encontrar todos os números reais x tais que

$$x^4 - 1 = 0\,.$$

As soluções são os números reais $x = 1$ e $x = -1$. No entanto, buscar a solução da mesma equação sobre os números complexos fornece como soluções os números $x = 1, x = -1, x = i$ e $x = -i$.

Portanto, vem a primeira lição, reforçando o que escrevemos acima sobre equações: quando procuramos resolver uma equação, temos que ter bem definido o conjunto no qual estamos procurando as soluções.

Dada a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, cuja matriz na base canônica é representada por

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

encontre $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (0, -5)$, ou seja, queremos definir $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (0, -5)\,.$$

A equação acima é definida sobre $\mathbb{R}^2$, e a única solução é o vetor $(x, y) = (-3, 2)$.

Mais uma vez chamamos sua atenção: dada uma equação é preciso estar explicito o conjunto no qual se procura as soluções da equação.

Mas já demos muita volta. Consideremos novamente as questões principais:

“ O que é uma equação diferencial?”,

“O que é resolver uma equação diferencial?”

Podemos tentar algumas respostas, baseadas na nossa experiência com O Cálculo e a Física, sabendo que elas provavelmente precisarão ser aperfeiçoadas e completadas.

Uma equação diferencial é uma equação na qual a incógnita (o elemento desconhecido) é uma função. Para ser uma equação diferencial é preciso que uma ou mais derivadas da incógnita ocorra na equação.

Resolver a equação diferencial é encontrar todas as funções que substituídas nas posições da incógnita tornam a igualdade expressa na equação verdadeira,i.é, uma identidade entre funções.

Volte a examinar a equação diferencial (7.1). A incógnita desta equação é uma função $y(x)$. O conjunto ao qual pertence toda solução $y(x)$ é o conjunto das funções de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$. A equação estabelece que toda solução $y(x)$ é uma função cuja derivada é $3x^2 + 1$.

A solução da equação diferencial (1.3) é uma função função especial: exatamente aquela que satisfaz à condição ($y(1) = 0$). Diz-se que (1.3) é uma equação diferencial com valores iniciais [2].

[2] A denominação *valor inicial* se deve a que, em diversas aplicações, a variável independente x representa uma medida de tempo, e o problema está especificando um valor para a variável y, que depende de x, correspondente a um instante inicial (normalmente, mas nem sempre, o instante em que começam as medições dos fenômenos modelados)

Equações diferencias são muito utilizadas em modelagens (construção de modelos) de problemas da Física, da Química, da Biologia, da Economia, etc... e da própria Matemática, que envolvem variáveis contínuas. Daí a importância do estudo destas equações.

Por exemplo, o problema (1.3)é um modelo para um caso especial de um antigo problema denominado "quadratura de parábolas". A solução $y(x) = x^3 + x - 2$, expressa a área da figura plana sob a parábola $3x^2 + 1$, definida pelo eixo x e duas retas verticais, uma dessas retas sendo a reta $x = 1$. Veja a figura 1.1 a seguir.

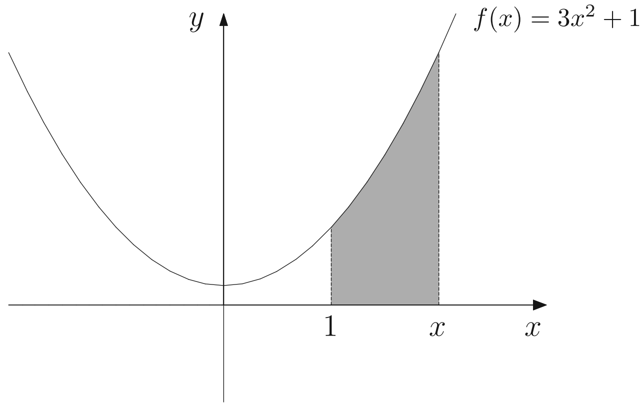


Fig. 1.1 Quadratura da parábola

Temos que $y(x) = \int_1^x (3x^2+1)\ dx = x^3+x$ representa a área hachurada. Por exemplo,

$$y(3) = 3^3 + 3 - 2 = 28\,,$$

expressa a área sob a parábola, limitada pelo eixo x e as retas verticais $x = 1$ e $x = 3$.

Para terminar esta breve introdução, propomos a você um *"compromisso de viagem"*: faremos todo o esforço para que esta jornada seja um passeio agradável, entretanto uma vez ou outra voce terá de "subir uma ladeira", gastando um pouquinho de energia; mas certamente para chegar a um patamar mais alto, onde nossa visão vai se alargar e de onde poderemos apreciar melhor a beleza do panorama. A meta final é ter uma boa compreensão do que são equações diferenciais ordinárias, dominar as técnicas usuais de resolução das mesmas, além de estudar uma série de exemplos significativos que envolvem tais equações. Isto é, vamos abordar diversos problemas, vindo das várias áreas de conhecimento e cuja "tradução matemática" pode ser feita por meio de equações diferenciais ordinárias. Na Aula 1, iniciaremos pela equação que tem a forma mais simples, e que chamamos de *equação fundamental*. É precisamente a equação diferencial do tipo da que aprendemos no curso de Cálculo, sendo $y' = 3x^2 + 1$, um exemplo. As outras equações diferenciais que estudaremos nas primeiras aulas têm formas distintas, mas em última instância se reduzem à equação fundamental.

Aula 2 – A Equação Diferencial Fundamental

Objetivos

Ao terminar de estudar esta aula você estará capacitado a:

1) Definir solução geral e soluções particulares de equações fundamentais em intervalos

2) Utilizar o TFC (Teorema Fundamental do Cálculo) para resolver equações fundamentais

A Primeira Equação

A primeira equação diferencial de que vamos tratar é uma conhecida nossa desde o primeiro curso de Cálculo. Com efeito, a parte do Cálculo chamada de Cálculo de Primitivas se ocupa da determinação de soluções $y(x)$ da equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$, onde $f(x)$ é uma função real de variável real conhecida. Em geral $f(x)$ é contínua e definida num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$.

A qualificação *primeira ordem* para a equação fundamental refere-se ao fato de que a maior ordem da incógnita $y(x)$ na equação é um.

Definição 2.1
Dada uma função contínua $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida no intervalo aberto I, a equação

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \qquad (1.1)$$

é denominada de *equação diferencial fundamental de* 1^a *ordem.*

Solução da Equação Fundamental

Definição 2.2
Uma solução da equação (1.1) é qualquer primitiva da função $f(x)$, isto é, qualquer função $y(x)$ da família

$$\int f(x)\ dx,$$

obtida pelo processo de anti-derivação.

Exemplo 2.1

Obs: Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, podemos explicitar todas as soluções da equação fundamental num intervalo I. Para isto, basta fixar um $x_0 \in I$ e escrever a família de soluções da equação na forma

$$y(x) = \int f(x)\ dx + C,$$

onde C é uma constante arbitrária.

Exemplo 2.2

Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = cos\ x - 2.$$

A família de funções

$$y(x) = \operatorname{sen} x + C \qquad \text{i.é,} \quad y(x) = \int (cos\ x - 2)\ dx$$

representa todas as soluções da equação. Neste caso a equação possui um número infinito de soluções.

Escolhendo o ponto $x_0 = 0$, podemos usar o Teorema Fundamental do Cálculo para explicitar todas as soluções

$$y(x) = \int_0^x (cost - 2)\, dt + C = sen\ x - 2x + C\,,$$

onde C é um número real arbitrário.

Atividade 2.1

[Verificando se uma função é solução de uma equação diferencial]
O quadro abaixo mostra equações diferenciais à esquerda e funções $y(x)$ à direita, candidatas a solução. Assinale V (verdadeiro) ou F (falso) segundo

a função $y(x)$ seja ou não solução.

i) $\dfrac{dy}{dx} - ae^{ax} = 0;$ $\qquad y(x) = e^{ax}\,;\ x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}$ (fixado)

ii) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x[\ln(ex)+x]} + \dfrac{\ln x}{x[\ln(ex)+x]^2}$ $\qquad y(x) = \dfrac{1}{\ln(ex)+x};\qquad x > 0$

iii) $\operatorname{sen} x + \dfrac{dy}{dx} = 0$ $\qquad y(x) = sen\ x;\qquad x \in (0,1)$

Respostas: *i)* ...... *ii)* ...... *iii)* ......

Nota Importante: Uma equação diferencial do tipo fundamental, definida num intervalo aberto I, possui um número infinito de soluções. Qualquer solução da equação determina todas as outras soluções. De fato, se $y_0(x)$ é uma solução de

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

então qualquer outra solução $\varphi(x)$ é obtida de $y_0(x)$ adicionando a ela uma número real adequado c. Basta observar que $\varphi'(x) = y_0'(x)$. Portanto se $y_0(x)$ é solução, $\varphi(x)$ também é. Além disso todas as soluções são obtidas dessa maneira [3].

Todas as soluções da equação diferencial $dy/dx = f(x)$ podem ser representadas pela "integral indefinida" $\int f(x)\ dx$. Dizemos que $y(x)$ é a solução *geral* da equação. A solução é dita *geral* porque contém todas as soluções da equação fundamental no intervalo especificado.

Uma solução é chamada de *solução particular* quando é obtida da solução geral pela especificação de um valor para a constante de integração.

Nos cursos iniciais de Cálculo, foram estudadas diversas "técnicas de integração" para a resolução de integrais indefinidas. Dependendo da função f usava-se substituições, integração por partes, integração de funções racionais, etc. Todas aquelas técnicas serão muito úteis no processo de obtenção de soluções de equações diferenciais.

Existência de Soluções

Como aprendemos em Cálculo I, toda função contínua é integrável. Além disso, a integral indefinida, $\int f(x)\,dx$, de uma função contínua, definida

[3] quem nos garante isso é o Teorema do Valor Médio, do Cálculo I, certo?

num intervalo aberto, é uma família de funções, onde duas funções quaisquer desta família diferem por uma constante real.

Em resumo, toda equação diferencial como dada na Definição 1.1, possui uma família de funções como solução. Além disso, como as funções estão definidas num intervalo aberto, duas quaisquer soluções diferem por uma constante.

Exemplo 2.3

Resolva a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen}(2x) + x^3 + 1,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Solução:

Calculando primitivas, encontramos que

$$\int \big(\operatorname{sen}(2x) + x^3 + 1\big)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{x^4}{4} + x + C\,,$$

onde C é uma constante real arbitrária. Portanto,

$$y(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{x^4}{4} + x + C$$

é a família de funções que resolvem a equação diferencial.

Atividade 2.2

Nesta atividade pretendemos chamar a sua atenção para o conjunto de números reais onde uma equação está definida.

Considere a equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = 0$ definida no conjunto

$$A = (-1,1)\ \cup (2,3).$$

a) É correto afirmar que φ e ψ definidas por

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in (-1,1) \\ 2, & \text{se } x \in (2,3) \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \psi(x) = 4,\ x \in A$$

são duas soluções da equação?

Resposta: ......

b) Existe alguma constante C tal que $\forall\ x \in A \quad \psi(x) = \varphi(x) + C$?

Resposta: ......

Importante comentário sobre a Atividade 1.2:

Se o subconjunto aberto $A \subset \mathbb{R}$ onde uma equação diferencial fundamental está definida não é um intervalo, então a equação pode ter soluções distintas que não diferem por constantes.

Problema de Valor Inicial

Informações adicionais que permitam particularização de soluções são fundamentais no estudo de problemas envolvendo equações diferenciais. É como introduzir um dado da realidade ligado ao problema em estudo que permita identificar a função solução desejada e descartar todo o resto da família.

Exemplo 2.4

Determine uma função real $y(x)$, definida no intervalo $I = (-3, +\infty)$, solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = e^x - 3x^2,$$

sabendo que seu gráfico no plano $\mathbb{R}^2$ contém o ponto (0,-1)

Solução:

As funções cujas derivadas são iguais a $e^x - 3x^2$, no intervalo especificado, são precisamente as soluções da equação acima.
Um cálculo elementar nos mostra que qualquer função $y(x)$,

$$y(x) = e^x - x^3 + C \qquad (1.2),$$

onde C é uma constante, é a solução geral da equação.

Agora utilizamos a informação extra: *o gráfico da função solução passa pelo ponto* $(0, -1)$. Isso significa exatamente que no ponto $x = 0$ o correspondente valor y é igual a -1. E essa observação vai permitir calcular o valor da constante C. Substituindo $x = 0$ e $y = -1$ na solução geral (1.2), encontramos

$$x = 0 \Longrightarrow y = 1\,.$$

$$-1 = y(0) = e^0 - 0^3 + C \Longrightarrow C = -2\,.$$

Conclusão: Dentre todas as funções definidas em $(-3, +\infty)$ com derivadas iguais a $e^x - 3x^2$, aquela cujo gráfico passa por $(0, 1)$ é $y(x) = e^x - x^3 - 2$.

Comentário: O exemplo acima é freqüentemente enunciado da forma suscinta como: Resolva a equação diferencial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} &= e^x - 3x^2 \\ y(0) &= -1\,. \end{cases}$$

Na primeira linha da expressão indicada pela chave temos a equação diferencial propriamente dita. Na segunda linha está explicitada uma propriedade da solução procurada.

Utilizamos também a denominação *Equação Diferencial com Valores Iniciais* (EDVI) ou *Problema com Valores Iniciais* (PVI) para indicar uma equação diferencial junto com com uma informação adicional sobre o valor da solução procurada em um ponto especificado.

Portanto a maneira adequada de apresentar uma equação diferencial com valores iniciais é utilizando uma chave, como segue:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x), \;\; x \in I \subset \mathbb{R} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Repetindo o que já foi dito, repare que na primeira linha escreve-se a equação diferencial cuja solução é procurada, e na linha seguinte, os dados iniciais, determinando em geral, apenas uma solução.

Comentário: O último exemplo acima nos dá a estratégia de obtenção de soluções de equações, satisfazendo condições iniciais especificadas;

L.A. Cauchy
1789 - 1857

Um dos maiores matemáticos de sua época,teve atuação decisiva no processo de fundamentar a Análise Matemática em bases rigorosas. Cauchy foi um dos primeiros matemáticos a estudar os PVI's.

1^0 - Obtenha a solução geral, isto é, a família de todas as soluções.

2^0 - Substituindo os valores de x_0 e y_0 que definem os dados iniciais, calculamos o valor da constante C.

Esta estratégia em geral funciona muito bem. No entanto, ao tentar aplicá-la a algumas equações, podemos sofrer um certo desconforto . Expliquemos melhor: muitas vezes não conseguimos, por métodos elementares, resolver explicitamente certas integrais indefinidas. Nessas situações o remédio é indicar a função por meio de uma integral definida, cujo significado compreendemos perfeitamente.

Veja a seguinte pedra no nosso sapato:

Exemplo 2.5

Resolver a seguinte equação diferencial com valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} &= \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \\ y(\pi) &= 1 \qquad x \in I = (0, +\infty) \end{cases}$$

Solução: : Você pode abrir sua caixa de ferramentas onde se lê a etiqueta "cálculo de primitivas" e tentar todos os truques, substituições, macetes, ... Simplesmente não existe nenhuma combinação finita de funções elementares cuja derivada seja igual a $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Quer dizer,no nosso nível de estudo, nem sempre é possível calcular a família de todas as primitivas de uma da função.

E agora?

Use o sétimo pulo do gato :

Mesmo quando não sabemos, ou não podemos, determinar explicitamente uma solução "calculando a integral" em termos de uma combinação finita de "funções elementares" (racionais, exponenciais, trigonométricas, etc, e suas inversas) o Teorema Fundamental do Cálculo nos permite escrever uma solução explicitamente [4].

Veja como funciona: já que $(f(x) = \dfrac{sen\ x}{x}, x > 0$ é uma função contínua, escolha um ponto $x_0 > 0$ arbitrariamente. Temos que

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{sen\ t}{t}\ dt + C$$

é o conjunto de todas as soluções da equação, sendo C uma constante arbitrária.

Usando o valor inicial especificado $y(\pi) = 1$, isto é $x_0 = \pi$ e $y_0 = 1$ encontramos a solução desejada, satisfazendo o valor inicial dado.

Alternativamente, podemos expressar a solução geral usando o valor $x_0 = \pi$

$$y(x) = \int_{\pi}^{x} \frac{sen\ t}{t}\ dt + C,$$

e como $y(\pi) = 1$, calculamos o valor de C:

$$1 = y(\pi) = \int_{\pi}^{\pi} \frac{sen\ t}{t}\ dt + C \Longrightarrow C = 1$$

Logo

$$y(x) = \int_{\pi}^{x} \frac{sen\ t}{t}\ dt + 1$$

é a solução procurada.

Resumo

Nesta aula:

- Vimos que o estudo de equações diferenciais ordinárias nasce junto com o Cálculo, de cujso resultados e técnicas ele se utiliza amplamente
- Introduzimos as Equações Diferenciais Ordinárias Fundamentais de Primeira Ordem : $dy/dx = f(x)$ e definimos as suas soluções

[4]Não esqueça que a função f, na equação, é contínua

- Introduzimos a noção de Problema de Valor Inicial para equações do tipo fundamental e vimos que é possível usar o Teorema Fundamental do Cálculo para resolvê-lo.

Avaliação

Nesta primeira aula, além de introduzir um pouco do jargão de equações diferenciais: equação, solução , problema de valor inicial, etc., procuramos chamar bastante a atenção para o importantíssimo Teorema Fundamental do Cálculo, evidenciando a sua importância, realmente fundamental. O grande matemático, professor e historiador da Matemática Jean A. Dieudonné disse em um de seus últimos e mais acessíveis livros (Pour l'honneur de l'sprit hmain)mais ou menos assim: "a potência do Cálculo provém justamente da relação expressada no TFC, entre teorias tão diversas quanto o Cálculo Diferencial e Cálculo Integral". Vale a pena meditar continuamente sobre essa afirmação. Acabamos de ter a oportunidade de ver o TFC em ação. Aprecie. Não seja moderado.

Exercícios

Os exercícios a seguir têm uma dupla finalidade:

i) Fixar as idéias novas

ii) Revisar técnicas de resolução de algumas equações do tipo fundamental, (que antes chamávamos de Técnicas de Integração), que serão usadas em todo o nosso curso. Não deixe de fazê-los.

Exercício 2.1
Calcule $\int f(x)\ dx = F(x) + c$. Em seguida calcule c para que a solução y satisfaça à condição extra apresentada, para

a) $f(x) = x^2, \quad y(2) = 0;$ b) $f(x) = \cos^2 x, \quad y(\pi) = \pi/2$

Respostas: a) $y = \dfrac{1}{3}(x^3 - 8);$ b) $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(2x)$

Exercício 2.2
Determine as soluções gerais de:

a) $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x \ \cos x$ b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x^2(1+x)}$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$ d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(4x-2)}{x^3 - x^2 - 2x}$

e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\ln x}{x}$ f) $\dfrac{dy}{dx} = xe^x$

Respostas: a) $y(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C$; b) $y(x) = \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) - \frac{1}{x} + C$; c) $y(x) = \operatorname{arcsen} x + C$; d) $y = \ln\left|\frac{x(x-2)}{(x+1)^2}\right| + C$; e) $y(x) = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$; f) $y(x) = xe^x - e^x + C$.

Exercício 2.3
Resolva

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \qquad x \in \mathbb{R}$$

(**Sugestão**: Você pode escolher um ponto x_0 à sua vontade.Por que?)

Resposta: $y(x) = C + \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{1+t^2}}\, dt$

Exercício 2.4
Usando uma substituição trigonométrica adequada, calcule

a) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2}\, dx$

Resposta: $\frac{1}{4}\left(\pi + \sqrt{3}\right)$

b) a área da região do interior da elipse de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

(**Sugestões**:
(1): A área da elipse é igual a quatro vezes a área sob o gráfico da curva $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq a$.
(2): A mudança de variáveis $x = cos\ \theta, \quad dx = -sen(\theta)\ d\theta$ pode ser útil na solução do exercício.)

Resposta: πab

Aula 3 – Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem

Objetivos

Ao final desta aula você será capaz de determinar se uma equação diferencial é uma equação linear de primeira ordem, classificá-la como homogênea ou não-homogênea e também a utilizar um método sistemático para obter todas as soluções de qualquer equação linear de primeira ordem.

Introdução

Uma equação diferencial frequentemente está associada a um fenômeno que estamos investigando na natureza. Assim, a equação é um modelo que criamos para investigar o fenômeno. Um bom modelo (isto é, uma boa equação) é aquele que, uma vez criado, é capaz de prever situações relacionadas ao fenômeno antes insuspeitadas.

Mesmo quando criamos modelos incorretos é útil. A incorreção evidencia idéias falsas que tinhamos acerca do fenômeno. Vamos mostrar através de um exemplo esta última afirmação.

Vamos traduzir em equação diferencial (modelo) a seguinte crença antiga acerca da queda livre de corpos no vácuo.

Problema*: Anteriormente a Galileu, acreditava-se que a velocidade de um corpo em queda livre era diretamente proporcional à sua distância até a posição inicial de repouso.*

Mostremos que esta suposição é insustentável

Solução:

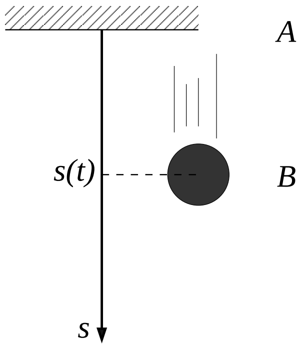


Figura 3.1 Queda livre de corpos

Admitamos que a suposição é verdadeira. Designemos pot t o tempo de queda do corpo a partir do ponto A e por $s(t)$ a distância percorrida desde a posição A de repouso depois do tempo t de queda. Veja a figura 2.1.

- No ponto A temos $t = 0$ e $s(0) = 0$.
- No ponto B, corpo em queda após um tempo t.
- Distância de A até B é igual a $s(t)$.

Em cada instante $t > 0$, o valor $s = s(t) > 0$ marcado no eixo vertical, mede a distância percorrida pelo objeto ao longo da trajetória vertical,i.é, a distância medida a partir do ponto A.

Seja v a velocidade instantânea do corpo depois de um tempo t. Como estamos admitindo (crença antiga) que v é proporcional a $s(t)$, então existe uma constante $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{v}{s(t)} = k, \quad k = \text{constante.}$$

Ou seja,

$$v = k \cdot s(t) \tag{3.1}$$

Na figura (3.1), que estamos usando para representar o problema, escolhemos um eixo s, orientado positivamente para baixo.

Lembrando da Física que a velocidade instantânea v é a taxa de variação da posição $s(t)$ com relação ao tempo t, escrevemos

$$v = \frac{ds}{dt}\,.$$

Juntando este resultado com (7.1) acima, concluimos que

$$\frac{ds}{dt} = ks\,.$$

Esta é a equação diferencial que modela o fenômeno que estamos estudando.

Indo além, vamos agregar à equação diferencial encontrada as condições iniciais. A posição A da figura indica o início da contagem do tempo e o corpo não se deslocou ainda. Isto corresponde a $s = 0$ e $t = 0$. Assim, encontramos o modelo matemático para o fenômeno:

$$\begin{cases} \dfrac{ds}{dt} &= ks, \quad k = \text{cte} \\ s(0) &= 0 \end{cases}$$

Veja como se resolve esta equação diferencial, onde a variável é o número real $t > 0$, representando a medida do tempo e a função incógnita procurada é $s(t)$.

$$\frac{ds}{dt} = ks \iff \frac{ds/dt}{s} = k \iff \frac{d}{dt}[ln(s(t))] = k \iff$$
$$\iff ln(s(t)) = kt + k_1 \iff s(t) = e^{kt+k_1} = e^{kt}e^{k_1}, \qquad k \text{ e } k_1 \text{ constantes)}$$

Portanto

$$s(t) = ce^{kt}, \qquad c = e^{k_1} \quad \text{e} \quad k \quad \text{constantes}$$

é a solução geral da equação.

Com o intuito de particularizar uma solução entre todas as soluções $s(t) = ce^{kt}$ com c e k constantes, usamos os valores iniciais. Se $t = 0$ então $s(0) = 0$. Portanto,

$$0 = s(0) = ce^0 = c \Longrightarrow c = 0\,.$$

Mas daí, substituindo $c = 0$ na solução geral vemos que a solução que obedece às condições iniciais é identicamente nula.

A solução obtida mostra que *o corpo em queda livre não se movimenta.* Isso é um absurdo. Conseqüentemente a suposição não estava correta. A partir dos trabalhos de Galileu no século XVII, conhecemos que a velocidade é proporcional ao tempo de queda e não ao espaço percorrido, como pensava a antiguidade grega.

Equações Lineares de Primeira Ordem Homogêneas

Definição 3.1
Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $p : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, uma função contínua. Toda a equação diferencial que pode ser posta, na forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0\,,$$

é chamada *uma equação diferencial linear homogênea de* 1^a *ordem*

Nota: É importante sabermos porque a equação diferencial que acabamos de definir se chama linear de primeira ordem, e homogênea. Bem ela é linear porque dadas quaisquer duas funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ tais que, individualmente

$$\frac{dy_1}{dx} + p(x)y_1 = 0\,,$$

$$\frac{dy_2}{dx} + p(x)y_2 = 0\,,$$

e dado qualquer número real α, então, para todo $x \in I$,

$$\frac{d(y_1+y_2)}{dx} + p(x)(y_1+y_2) = \left(\frac{dy_1}{dx} + p(x)y_1\right) + \left(\frac{dy_2}{dx} + p(x)y_2\right) = 0+0 = 0\,,$$

e

$$\frac{d(\alpha \cdot y)}{dx} + p(x)(\alpha \cdot y) = \alpha \cdot \left(\frac{dy}{dx} + p(x)y\right) = \alpha \cdot 0 = 0\,,$$

As duas igualdades acima mostram que somas de funções que verificam a equação e produtos de funções que verificam a equação por números reais, são também funções que verificam a equação. Esses são os quesitos básicos que caracterizam processos lineares. Discutiremos esses processos mais detalhadamente a partir da aula 11.

A equação é homogênea no sentido das funções homogêneas de duas variáveis. Também aqui, vamos precisar esperar até a aula 8 para definir funções homogêneas. Por hora, observe que

$$\frac{d(\alpha \cdot y)}{dx} + p(x)(\alpha \cdot y) = \alpha^1 \cdot \left(\frac{dy}{dx} + p(x)y \right)$$

Finalmente é de primeira ordem porque a maior ordem de derivação da incógnita que aparece na equação é um.

Exemplo 3.1

A equação do problema de queda-livre examinado na introdução é linear homogênea de primeira ordem. Basta identificar $p(x)$ com a função $-k$, constante.

Exemplo 3.2

Aí vão dois outros exemplos de equações diferenciais lineares homogêneas:

a) $\dfrac{dy}{dx} + \operatorname{sen}(2x)y = 0$ e b) $y' - 3xy = 0$

Soluções de Equações Lineares Homogêneas

Inicialmente, observamos que a função identicamente nula $y \equiv 0$ é uma solução trivial da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \tag{3.2}$$

No que se segue vamos procurar soluções $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ da equação (7.2), com a condição que $y(x) \neq 0$, para todo $x \in I$. No entanto, este mesmo método é válido em condições mais gerais. Logo depois de explicitar as soluções com a restrição que estamos impondo, iremos analisar situações em que a função solução $y(x)$ se anula em pontos isolados do intervalo I ou se anula em subintervalos $J \subset I$.

Supondo, portanto, $y(x) \neq 0$, para todo $x \in I$, encontramos a partir de (7.2) que

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \Longleftrightarrow \frac{\frac{dy}{dx}}{y} = -p(x) \Longleftrightarrow \frac{d}{dx} \ln[y(x)] = -p(x)\,.$$

Observe que essa última é uma equação do tipo da fundamental. Portanto admite uma solução *geral*, que pode ser expressa em função de uma integral indefinida. Temos a seguinte seqüência de equivalências:

$$\frac{d}{dx}\ln[y(x)] = -p(x) \Longleftrightarrow \ln[y(x)] = -\int p(x)\,dx \Longleftrightarrow y(x) = e^{\left(-\int p(x)\,dx\right)}.$$

Portanto $y(x) = e^{-\int p(x\ dx)}$ é a solução geral da equação.

A solução acima é dita *geral* porque a expressão $\int p(x)\ dx$ engloba **todas** as primitivas da função $p(x)$ no intervalo I. Conhecida uma primitiva, qualquer outra primitiva é obtida daquela pela adição de uma constante [5].

Lembramos do Cálculo que como $p(x)$ está definida no intervalo I, podemos escrever, para um $x_0 \in I$ fixado,

$$\int p(x)\ dx = \int_{x_0}^{x} p(t)\ dt + c \qquad c \text{ uma constante}$$

Portanto, usando um ponto x_0 auxiliar, escrevemos a solução geral da equação (5) na forma

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\ dt - c} = e^{-c}e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\ dt}$$

Logo,denotando e^{-c} por $k$temos que

$$y(x) = ke^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\ dt} \tag{3.3}$$

é a solução geral da equação.

Problemas de Valor Inicial com Equações Lineares Homogêneas

Nas aplicações, ao resolver uma equação diferencial, normalmente temos informações adicionais sobre a solução que procuramos: são os valores iniciais. A solução procurada $y(x)$ assume um valor conhecido y_0 quando a variável independente vale x_0. Procuramos, portanto, a função $y(x)$ que seja solução do *Problema de Valor Inicial (PVI)*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + p(x)y &= 0 \\ \quad y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

Para resolver o problema com valor inicial acima, partimos da solução geral da equação diferencial, como dada em (7.3) e usamos os dados iniciais para definir a função solução procurada.

[5]Posteriormente veremos que é necessário aperfeiçoar essa noção de solução geral

Exemplo 3.3

Obtenha *uma* solução $y(x)$ da equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = -e^{x^4}y$, tal que $y(1) = 2$.

Solução:

Não sabemos obter, com métodos elementares, uma primitiva de $p(x) = -e^{x^4}$. Mas, conforme visto acima, após a escolha de um número real x_0, (6) representa a solução geral. Usando o valor $x_0 = 1$, encontramos que)e formar a função

$$y(x) = k \cdot e^{-\displaystyle\int_1^x e^{t^4}\, dt}$$

representa a solução geral da equação proposta.

Para determinar a constante k, impomos que $y(1) = 2$. Assim

$$2 = y(1) = ke^{-\int_1^1 e^{t^4}\, dt} = k \cdot 1 \Longrightarrow k = 2$$

Portanto

$$y(x) = 2e^{-\displaystyle\int_{x_0}^x e^{t^4}\, dt}$$

é a solução procurada.

Atividade 3.1

Complete a tabela abaixo de modo que cada linha se converte numa frase verdadeira:

Equação	Solução Geral	Solução Particular	Dados Iniciais
$y' + 2xy = 0$	......	$y(x) = \pi e^{-x^2/2}$	$x_0 = \ldots,\ y_0 = \ldots$
$x^2y' = y\ (x > 0)$	......	......	$x_0 = -1/ln\ 3,\ y_0 = 2$
......	$y = Ce^{-\displaystyle\int_{-1}^x e^t\, dt/\sqrt{t^2+2}}$	......	$x_0 = \ldots,\ y_0 = 2\pi$
$y' = 3y$	......	$y(x) = 0$	$x_0 = 1,\ y_0 = \ldots$

Equações Lineares de Primeira Ordem Não-homogêneas

Definição 3.2

Dadas as funções reais contínuas e não nulas $p, q : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, toda equação que pode ser reduzida à forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{3.4}$$

é chamada *equação diferencial linear não homogênea de* 1^a *ordem*

Nota: Leia de novo a nota que aparece logo após a definição de equação diferencial linear homogênea de primeira ordem (Definição 1). O que foi dito lá não se aplica às equações não-homogêneas que acabamos de definir. O que faz a diferença é a função não-nula $q(x)$ no segundo membro da igualdade. Com todo o rigor, deveríamos chamar a equação acima de equação *afim* de primeira ordem. Todavia a denominação *linear não-homogênea* é universalmente adotada para essas equações, e será mantida ao longo do nosso curso.

Soluções de Equações Lineares Não-homogêneas

Para obter soluções da equação não homogênea, vamos utilizar nossos conhecimentos sobre equações homogêneas e mais alguns truques novos. É evidente que não fomos nós que inventamos esses truques na semana passada. O assunto Equações Diferenciais vem sendo estudado intensivamente desde o século XVII, à luz de velas lampiões. Portanto não se surpreenda com a nossa criatividade.

Uma idéia para abordar a equação (5.4) é procurar uma função $\mu(x)$ conveniente e multiplicar ambos os lados da equação pela função. O objetivo é transformar a equação não-homogênea essencialmente numa equação do tipo fundamental.

Multiplicando ambos os membros da equação (5.4) por uma função $\mu(x)$ encontramos

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + p(x)\mu(x)y = \mu(x)q(x) \tag{3.5}$$

Suponha por um instante que a função $\mu(x)$ satisfaz a relação

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = p(x)\mu(x) \tag{3.6}$$

Esta Substituindo (5.6) na equação (5.5) mostra que,

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \frac{d\mu(x)}{dx}y = \mu(x)q(x)\,.$$

Ou seja, a equação original assume a forma

$$\frac{d}{dx}\Big(\mu(x)y\Big) = \mu(x)q(x) \tag{3.7}$$

que é uma função do tipo fundamental.

Mas cabe uma pergunta:
Existe alguma função $\mu(x)$ com a propriedade (5.6)?

Bem, a relação (5.6) diz exatamente que μ é solução da equação linear homogênea $\frac{dy}{dx} = p(x)y$. Portanto para calcular μ, basta achar uma solução dessa equação linear homogênea. Do que estudamos anteriormente, sabemos que

$$\mu(x) = e^{\left(\int p(x)\ dx\right)}$$

é uma solução de (5.6).

Substituindo em (3.7) e integrando, obtemos

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)\ dx} \cdot y\right) = e^{\int p(x)\ dx} \cdot q(x)$$

de onde

$$e^{\int p(x)\ dx} \cdot y = \int e^{\int p(x)\ dx} \cdot q(x)\ dx$$

Portanto

$$y = e^{\left(-\int p(x)\ dx\right)} \left[\int e^{\int p(x)\ dx} q(x)\ dx + C\right] \tag{3.8}$$

é a solução geral da equação não-homogênea que estamos estudando.

Obs: Quando $q(x)$ é a função nula, a equação não-homogênea se reduz a uma equação diferencial homogênea. Consistentemente a fórmula acima se reduz à solução geral da homogênea. Essa equação homogênea é dita ser a *homogênea associada.*

Obs: A função $\mu(x) = e^{\left(\int p(x)\ dx\right)}$ é chamada de *fator de integração* para a equação não-homogênea. Note que esta função nunca se anula

Problemas de Cauchy com Equações Lineares Não-homogêneas

Como sempre, se estivermos interessados numa solução específica da equação linear não-homogênea satisfazendo a uma condição inicial $y(x_0) = y_0$, devemos resolver o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{3.9}$$

Temos dois caminhos possíveis:

- Primeiro, podemos tentar calcular explicitamente as integrais indefinidas que aparecem na solução geral (3.8) da equação não-homogênea e posteriormente determinar o valor da constante que se adapta à condição inicial.

Na impossibilidade de calcular primitivas, temos uma segunda via:

Integrando, entre x_0 e x, ambos os lados de

$$\frac{d}{dx}\Big(\mu(x)y\Big) = \mu(x)q(x)$$

obtemos

$$\mu(x)y - \mu(x_0)y_0 = \int_{x_0}^{x} \mu(t)q(t)\ dt$$

E já que $\mu(x) \neq 0$, pois $\mu(x) = e^{\int p(x)\ dx}$ para todo x, podemos explicitar a solução y da equação (3.9) desejada:

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\Big[\mu(x_0)y_0 + \int_{x_0}^{x} \mu(t)q(t)\ dt\Big]$$

Um exercício fácil com o Teorema Fundamental do Cálculo nos mostra que esta é de fato, a solução do problema de valor inicial (3.9).

Exemplo 3.4

Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2e^{x^2} + y \\ \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Solução:

Os dados do exemplo são: $p(x) = -1$, $q(x) = 2e^{x^2}$. Aplicando as fórmulas acima, obtemos $\mu(x) = e^{-x}$, e

$$y = e^{x}\Big\{1 \cdot 1 + \int_0^x e^{-t}2e^{t^2}de\Big\}$$

Isto é,

$$y = e^{x}\Big(1 + 2\int_0^x e^{t^2-t}\ dt\Big)$$

Exemplo 3.5

A função definida por

$$\mathrm{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\ dt$$

é chamada de *função erro*. Mostre que

$$y(x) = e^{x^2} + \frac{1}{2}e^{x^2}\sqrt{\pi}\ \mathrm{Erf}(x)$$

é a solução de

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2xy + 1 \\ \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Solução:

Por um lado

$$\begin{aligned} y'(x) &= 2xe^{x^2} + xe^{x^2}\sqrt{\pi}\ \mathrm{Erf}(x) + \frac{1}{2}e^{x^2}\sqrt{\pi}\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2} \\ &= 2xe^{x^2} + xe^{x^2}\sqrt{\pi}Erf(x) + 1 \end{aligned}$$

Por outro lado, é imediato que

$$2xy + 1 = 2xe^{x^2} + xe^{x^2}\sqrt{\pi}Erf(x) + 1$$

Além disso, claramente

$$e^{x^2} + \frac{1}{2}e^{x^2}\sqrt{\pi}\ \mathrm{Erf}(x)\Big|_{x=0} = e^{0^2} + \frac{1}{2}e^{0^2}\sqrt{\pi}\ \mathrm{Erf}(0) = 1$$

o que conclui o exemplo.

Exercícios

Exercício 3.1

1. Faça o que se pede:

a) Calcule a solução geral de $\dfrac{dy}{dx} + 3xy = 0$

Resposta: $y = Ce^{\left(-\frac{3}{2}\right)x^2}$

b) Determine o comportamento, quando $x \to +\infty$ das soluções da equação $\dfrac{dy}{dx} + axy = 0$, sedo a uma constante real.

Resposta: Se $a > 0$ as soluções tendem a zero. Se $a < 0$ e $C < 0$ as soluções tendem a $-\infty$. Se $a < 0$ e $C > 0$ as soluções tendem a $+\infty$

c) Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + (\operatorname{sen} t)y &= 0 \\ y(0) = \dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

Resposta: $y = \frac{3}{2}e^{(\cos t - 1)}$

d) Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -e^{t^2} y \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Resposta: $y = 2e^{\left(\int_1^t e^{-u^2}\ du\right)}$

Exercício 3.2

Calcule a solução geral de $\left(\frac{dy}{dx}\right) - 2xy = x$

Resposta: $y = ce^{x^2} - 1/2$

Exercício 3.3

Calcule a solução geral de cada uma das seguintes equações:

(i) $\left(1 + t^2\right) \dfrac{dy}{dt} + 2ty = 1$

(ii) $\dfrac{dy}{dx} + y\ \sqrt{x}\ \operatorname{sen} x = 0$

(iii) $\dfrac{dy}{dt} + y\ \cos t = 0$

(iv) $\dfrac{dy}{dx} + y\ x^2 = x^2$

(v) $\dfrac{dy}{dx} + y = xe^x$

Respostas: (i) $y = \frac{t+C}{1+t^2}$; (ii) $y = Ce^{-\int_0^x \sqrt{u}\ \operatorname{sen} u\ du}$; (iii) $y = ce^{-\operatorname{sen} t}$; (iv) $ce^{-\frac{x^3}{3}} + 1$; (v) $y = Ce^{-x} + e^{2x}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)$

Exercício 3.4

Resolva os PVI's:

$a) \begin{cases} dy/dx + \sqrt{1+x^2}\ y = 0 \\ y(0) = \sqrt{5} \end{cases}$ $\quad b) \begin{cases} y' + \sqrt{1+x^2}\ e^{-x}\ y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$c) \begin{cases} y' + \sqrt{1+x^2}\ e^{-x}\ y = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $\quad d) \begin{cases} y' = -xy + x + 1 \\ y\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \end{cases}$

$e) \begin{cases} y' + y = \dfrac{1}{x^2+1} \\ y(1) = 2 \end{cases}$ $\quad f) \begin{cases} y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{1}{x^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$

Respostas: a) $y = \sqrt{5}e^{\left(-\int_0^x \sqrt{1+u^2}\ du\right)}$; b) $y = e^{-\left(\int_0^x \frac{\sqrt{1+u^2}}{e^u}\ du\right)}$; c) $y \equiv 0$; d) $y = e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{\frac{3}{2}}^x e^{\frac{t^2}{2}}(t+1)\ dt$; e) $y = e^{-x}\left(2e + \int_1^x \dfrac{e^t}{1+t^2}\ dt\right)$; f) $y = 1 + \dfrac{\ln x}{x}$

Exercício 3.5

Estude o comportamento das soluções das equações abaixo quando $t \to +\infty$:

a) $\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{1}{t}y = \cos t + \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$ b) $\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{1}{\sqrt{t}}y = e^{-2\sqrt{t}}, \qquad y(0) = 1$

Respostas: (a) A solução geral é $y = Ct^{-1} + sen\ t$, a qual oscila em torno de $y_0 = 0$, quando $t \to +\infty$.

(b) A solução do PVI é $y = \dfrac{1+t}{e^{2\sqrt{t}}}$.

Utilizando a regra de L'Hôpital, vemos que $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$.

Exercício 3.6

Mostre que toda solução da equação $\left(\frac{dy}{dt}\right) + ay = be^{-ct}$ onde a e c são constantes positivas e b é um real arbitrário tende a zero à medida que $t \to +\infty$.

Exercício 3.7

Dada a equação $\frac{dy}{dt} + a(t)y = f(t)$ com $a(t)$ e $f(t)$ contínuas em $-\infty < t < +\infty$, $a(t) \geq c > 0$, e $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$, mostre que toda solução tende a zero à medida que t tende a $+\infty$.

Exercício 3.8

Determine as soluções gerais de :

a) $\dfrac{dy}{dx} - y\ \operatorname{tg} x = \operatorname{sen} x$ b) $(1+x^2)\dfrac{dy}{dx} + y = \operatorname{arctg} x$

c) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{x}{y} - ds\dfrac{\operatorname{cotg} x}{x} = 0$ *d)* $x\dfrac{dy}{dx} - y = x^2$

e) $y' + 2yx^{-1} - x^3 = 0$ f) $y^2 - (2xy+3)y' = 0$

g) $x\ ln\ (x)\dfrac{dy}{dx} + (y - 2\ \ln x) = 0$ *h)* $\dfrac{dx}{dy} - x\ln y = y^y$

Respostas: a) $y = \sec x \cdot \left(\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + c\right)$; b) $y = \operatorname{arctg} x + c \cdot e^{-\operatorname{arctg} x}$; c) $y = \dfrac{1}{x}[\ln(\operatorname{sen} x) + c]$; d) $y = cx + x^2$; e) $y = \dfrac{x^4}{6} + Cx^{-2}$; f) $x = Cy^2 - 1/y$; g) $y = \ln x + \dfrac{C}{\ln x}$; h) $x = y^y\left(1 + Ce^{-y}\right)$

Resumo

Nesta aula aprendemos a identificar e resolver as equações diferenciais de uma família importante, a família das equações lineares de primeira ordem. Apresentamos exemplos de problemas concretos envolvendo essas equações.

Dividimos as equações lineares em dois grupos, homogêneas e não-homogêneas. Por meio de um fator de integração, aprendemos a resolver equações não-homogêneas reduzindo-as a equações do tipo fundamental.

Nosso contato com as equações lineares mal está começando. Uma boa parte do nosso curso será um estudo sistemático de equações lineares. Aguardem!

Avaliação

As equações diferenciais lineares são objetos matemáticos que surgem no estudo de diversos problemas. Na próxima aula vamos ampliar nosso repertório de situações concretas envolvendo equações lineares. As equações diferenciais lineares são de importância muito grande também nos domínios da própria Matemática.

É bem importante ter uma idéia clara do processo de "montar" equações, resolvê-las e interpretar suas soluções. Voltaremos seguidamente a essa "filosofia de trabalho".

Para manter as turbinas aquecidas, procure resolver o maior número possível de exercícios. Procure a Tutoria a distância para tirar dúvidas. O telefone 0800 está à sua disposição e as perguntas pela plataforma fornecem outra ferramenta preciosa para você avançar nos estudos.

Aula 4 – Equação de Bernoulli

Objetivos

Ao terminar de estudar esta aula você vai saber

1) Identificar as equações de Bernoulli

2) Mostrar como as equações de Bernoulli podem ser "transformadas" em equações lineares, e então resolvidas explicitamente.

Introdução

A equação de Bernoulli apareceu pela primeira vez na investigação de um problema bem famoso: o do cálculo da curva isócrona.

Nota Histórica

Em maio de 1690 num artigo publicado no periódico científico Acta Eruditorum, Jacob Bernoulli mostrou que o problema de determinar a curva isócrona era equivalente a resolver uma certa equação diferencial de primeira ordem, não-linear.
A isócrona, ou curva de descida constante, é a curva ao longo da qual uma partícula deve se movimentar sob a ação da gravidade, partindo de qualquer ponto até o ponto mais baixo (da curva) sempre gastando o mesmo tempo, não importando o ponto de partida. Tal curva tinha sido estudada por Huygens em 1687 e Leibniz em 1689. Ela fundamenta a construção de relógios de pêndulo. Qualquer que seja o balanço do pêndulo, o tempo de execução está fixado.
O artigo, de 1690, de Jacob Bernoulli é importante para a história do Cálculo , pois foi onde o termo integral apareceu pela primeira vez com o significado hoje consagrado na literatura.

Jacob Bernoulli
1654 - 1705

Jacob era o mais velho de uma família de talentosos matemáticos suíços, contemporâneos de Newton e Leibniz, e que viviam competindo entre si, propondo desafios e disputando quem era melhor. Um terceiro Bernoulli, de uma geração posterior, também produziu contribuições significativas à Matemática e a Física de seu tempo.

Equação de Bernoulli

Definição 4.1
Chama-se *Equação de Bernoulli* a toda equação diferencial de primeira ordem que pode ser posta na forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n,$$

onde $p(x)$ e $q(x)$ são funções contínuas definidas num intervalo aberto I e n um número real não nulo, diferente de zero e de um, fixado.

Solução da equação de Bernoulli:

Observe a equação de Bernoulli

$$y' + p(x)y = q(x)y^n.$$

A função nula $y \equiv 0$ é sempre uma solução da equação, chamada de *solução trivial.*

Nosso objetivo agora é procurar soluções não triviais:

Em primeiro lugar, vamos supor que existe uma solução y da equação que não se anula em ponto algum: $y(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Nesta situação, dividindo os dois lados da equação por y^n

$$y'y^{-n} + p(x)y^{1-n} = q(x) \qquad (1)$$

Agora olhe devagar e com atenção para a equação encontrada. Veja que maravilha pode produzir a mudança de variável

$$z = y^{1-n} \quad \text{ou} \quad z(x) = [y(x)]^{1-n.}$$

Como $z' = (1-n)y^{-n}y'$ substituindo as expressões de z e z' em (1), encontramos uma nova equação, equivalente à original, agora na variável z:

$$\frac{z'}{1-n} + p(x)z = q(x)$$

Esta nova equação é de um tipo já estudado. Trata-se de uma equação linear de primeira ordem não-homogênea, que já sabemos resolver. A partir das soluções $z(x)$encontradas, chegamos às soluções $y(x)$ da equação original através da substituição inversa

$$y = z^{1/(1-n)}$$

Vamos aplicar este procedimento de obtenção de soluções de equações de Bernoulli num exemplo concreto:

Exemplo 4.1
Determine a solução da equação

$$\frac{dy}{dx} - 2\frac{y}{x} = 3xy^2, \qquad x > 0$$

Solução: Temos uma equação de Bernoulli, com $p(x) = -\dfrac{2}{x}$, $q(x) = 3x$ e $n = 2$

A substituição $z = y^{1-2} = y^{-1}$ transforma a equação original na equação de primeira ordem não-homogênea

$$-\frac{dz}{dx} - 2\frac{z}{x} = 3x.$$

Conforme aprendemos na Aula 2, a solução geral desta pultima equação é

$$z = \frac{1}{x^2}\left(-\frac{3x^4}{4} + \frac{c}{x^2}\right) = \frac{4c - 3x^4}{4x^2} \qquad c \text{ constante}$$

Como $y = z^{-1}$ então (fazendo $4c = k$)

$$y = \frac{4x^2}{k - 3x^4}$$

Atividade 4.1

Determine a solução geral de

$$(1 - x^2)\frac{dy}{dx} = xy + xy^2$$

Resposta: ___________________

Atividade 4.2

Modelagem na piscicultura

Hoje é muito comum encontrarmos "fazendas de criação de peixes", nas quais existem grandes tanques onde determinadas espécies de peixes são criadas e se desenvolvem até alcançarem o tamanho e o peso comercializáveis, seja na venda aos mercados atacadistas, seja nos pesque-e-pague (em geral nos dois). Existem modelos matemáticos que permitem determinar o peso ideal que os animais de uma dada safra devem ter para serem comercializados.

O peso $p(t)$ dos peixes de uma dada espécie, em cada instante t, é dado pela equação (obtida experimentalmente)

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p^{2/3} - \beta p,$$

onde α e β são constantes, chamadas respectivamente de *constante de anabolismo* e *constante de catabolismo*, e têm a ver com os processos de assimilação e de eliminação de alimentos, representando as taxas de síntese e de diminuição de massa por unidade de superfície do animal.

Trata-se de uma equação de Bernoulli, a qual estabelece que o aumento de peso dos peixes é proporcional à área de sua superfície.

i)Mostre que a equação de Bernoulli acima, tem como solução

$$p(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \left(1 + \frac{c\beta}{\alpha}e^{-\beta t/3}\right),$$

onde c é uma constante de integração arbitrária.

ii) Assumindo que no instante inicial $t = 0$ (quando começa a criação) o peso é insignificante, determine o valor da constante de integração.

Resposta:______________

iii) Calculando o valor de $p(t)$ quando t tende a infinito (na prática: quando t se torna muito grande) estabeleça o peso ideal para venda (o peso máximo).

Resposta:______________

Exercícios

Exercício 4.1

Dar as soluções gerais de:

$a)\ x\dfrac{dy}{dx} + y = x^3y^3$

$b)\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4}{x}y + x\sqrt{y}$

$c)\ 2xy\dfrac{dy}{dx} - y^2 + x = 0$

Respostas: a) $-2x^3y^2 + Cx^2y^2 = 1$, b) $y = x^4\left(\dfrac{1}{2}ln\ x + C\right)^2$, c) $y^2 = x\ ln\ \left(\dfrac{C}{x}\right)$

Resumo

Nesta aula aprendemos a identificar e resolver equações de Bernoulli

$$y' + p(x)y = q(x)y^n.$$

e a resolver esta equação por meio da mudança de variáveis

$$z = y^{1-n}.$$

Avaliação

Esta foi uma aula relativamente simples. Entretanto a Equação de Bernoulli não é apenas uma “curiosidade histórica”, um daqueles desafios que os matemáticos do século XVIII gostavam de propor a seus colegas. Além de aparecer na modelagem de muitos problemas atuais, como exemplificou o problema da criação de peixes, na próxima aula, vamos ter a oportunidade de utilizar a equação de Bernoulli para nos ajudar a resolver um outro tipo de equação muito importante, a equação de Riccati.

Aula 5 – Equação de Riccati

Objetivo

Ao final desta aula você será capaz de identificar as equações de Riccati e calcular suas soluções após transformá-las em equações lineares

Jacopo Riccati
1676 - 1754

Riccati efetuou trabalhos sobre hidráulica que foram muito úteis para a cidade de Veneza. Ele próprio ajudou a projetar os diques ao longo de vários canais . Ele considerou diversas classes de equações diferenciais, mas é conhecido principalmente pela Equação de Riccati, da qual ele fez um elaborado estudo e deu soluções em alguns casos especiais.

Introdução

A equação de Riccati, como tantas outras,também surgiu ligada a um problema bem concreto. Começaremos esta aula relembrando sua história.

As equações diferenciais do tipo Riccati são importantes para a construção de modelos para monitorar fenômenos associados a linhas de transmissão, teoria de ruídos e processos aleatórios, teoria do controle, problemas d difusão, etc.

Após carcterizarmos as equações de Riccati, veremos, na busca de soluções para elas, a sua estreita relação com as equações de Bernoulli. De fato, nesta aula, com a ajuda das equações de Bernoulli, vamos desenvolver técnicas para obter as soluções de equações de Riccati. Em aulas posteriores, quando estudarmos equações diferenciais lineares de segunda ordem, as equações de Riccati reaparecerão,

Resolver equações diferenciais é o objetivo maior de nosso trabalho. Portanto quando estabelecemos relações entre diferentes tipos de equações, a teoria se enriquece enormemente, abrindo novas portas para que avancemos.

Nota Histórica

Na noite de ano novo de 1720,o Conde Jacopo Francesco Riccati, um nobre que vivia na República de Veneza, escreveu uma carta a seu amigo Giovanni Rizzetti,onde propunha duas novas equações diferenciais

$$y' = \alpha y^2 + \beta x^m \tag{5.1}$$

$$y' = \alpha y^2 + \beta x + \gamma x^2 \tag{5.2}$$

sendo m, α, β e γ constantes e x a variável independente. Esse é provavelmente o primeiro documento testemunhando os primórdios da Equação de Riccati. $(\cdots)$ Até então,o principal interesse de Riccati na área de equações diferenciais era nos métodos de solução por separação de variáveis. Possivelmente seu interesse por equações se originou com a leitura do livro "De constructione aequationum differentialium primi gradus", de Gabriele Manfredi, impresso em Bologna em 1707 (Manfredi ocupou a Cátedra de Matemática na Universidade de Bolonha por vários anos). Com respeito à equação que leva o seu nome, inicialmente a atenção de Riccati estava concentrada no seguinte problema de natureza geométrica: suponha que um ponto de coordenadas $(\alpha(x), \beta(x))$ descreve uma trajetória no plano submetida às equações lineares simultâneas de primeira ordem :

$$\begin{cases} d\alpha/dx &= w_{11} \cdot \alpha + w_{12} \cdot \beta \\ d\beta/dx &= w_{12} \cdot \alpha + w_{22} \cdot \beta \end{cases}$$

A questão que Riccati se propôs foi a de determinar o coeficiente angular m da reta tangente a cada ponto da trajetória do ponto

$$m = \beta/\alpha$$

Para solucionar o problema, Riccati teve de resolver preliminarmente a equação de coeficientes constantes $\dot{x} = ax^2 + bx + c$, a qual é normalmente referida como *A Equação de Riccati de coeficientes constantes.* Entretanto o próprio Riccati considerou equações com coeficientes tanto constantes quanto variáveis,com especial atenção devotada a (7.1) e (7.2), bem como a

$$\dot{x} = \alpha t^p x^2 + \beta t^m \tag{5.3}$$

e apresentou diversos métodos de obtenção de soluções para elas.

Equação de Riccati

Definição 5.1

Uma equação diferencial de primeira ordem da forma

$$\frac{dy}{dx} = a_2(x)y^2 + a_1(x)y + a_0(x) \qquad (1)$$

em que $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ são funções contínuas num intervalo I e $a_2(x) \neq 0$ em I, é chamada *equação de Riccati.*

Exemplo 5.1

Observe que as equaçãoes (7.1),(7.2) e (7.3) são exemplos de equações de Riccati.

Para desenvolvermos métodos de solução da equação (1), começamos por destacar uma importante propriedade relativa a pares de soluções dela:

Proposição 5.1

Se duas funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da equação (1), então $z = y_1 - y_2$ é solução da equação de Bernoulli

$$z' - [a_1(x) + 2y_1(x)a_2(x)]z = a_2(x)z^2.$$

Solução: : De fato, se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são duas soluções da equação

$$\frac{dy}{dx} = a_2(x)y^2 + a_1(x)y + a_0(x)$$

então

$$y_1 \text{ é solução } de(1) \Longleftrightarrow y_1' = a_2(x)y_1^2 + a_1(x)y_1 + a_0(x) \qquad (5.4)$$

$$y_2 \text{ é solução } de(1) \Longleftrightarrow y_2' = a_2(x)y_2^2 + a_1(x)y_2 + a_0(x) \qquad (5.5)$$

Subtraindo o lado direito do símbolo $\Longleftrightarrow$ em (5.5) do lado direito do símbolo $\Longleftrightarrow$ em (5.4), obtemos

$$(y_2 - y_1)' = a_2(x)(y_2^2 - y_1^2) + a_1(x)(y_2 - y_1),$$

isto é

$$(y_2 - y_1)' = a_2(x)[(y_2 - y_1)(y_2 + y_1)] + a_1(x)(y_2 - y_1) \qquad (5.6)$$

Fazendo $z = y_2 - y_1$, e notando que $y_2 + y_1 = y_2 - y_1 + 2y_1 = z + 2y_1$, a igualdade (5.6) se transforma em

$$z' = a_1(x)z + a_2(x)[z(z + 2y_1)].$$

Ou seja,

$$z' - [a_1(x) + 2y_1a_2(x)]z = a_2(x)z^2$$

que é a equação de Bernoulli na variável z especificada. ∎

Obtenção de soluções para a Equação de Riccati

A fim de resolver uma equação de Riccati é preciso conhecer uma solução particular. Se não conhecermos pelo menos uma solução particular, não teremos absolutamente nenhuma chance de resolver uma tal equação.

Seja y_1 uma solução particular de $\dfrac{dy}{dx} = a_2(x)y^2 + a_1(x)y + a_0(x)$.

Conforme a propriedade que acabamos de estabelecer, para qualquer outra solução y da equação de Riccati tem-se que $z = y - y_1$ é solução da equação de Bernoulli

$$z' = p(x)z + q(x)z^2, \qquad p(x) = a_1(x) + 2y_1a_2(x), \qquad q(x) = a_2(x)$$

Procurando soluções não-nulas da equação de Bernoulli promovemos mudança de variáveis

$$v = 1/z.$$

Esta mudança transforma a equação de Bernoulli numa linear de 1^a ordem, para a qual sabemos calcular a solução geral $v(x)$. Portanto a solução geral da equação de Bernoulli associada é

$$z = \frac{1}{v}$$

Conseqüentemente a solução geral da equação de Riccati é

$$y = y_1 + \frac{1}{z}$$

Vejamos um exemplo:

Exemplo 5.2

Empregue a técnica que acabamos de desenvolver, isto é faça a mudança de variáveis $y = y_1 + \dfrac{1}{z}$, para transformar a equação de Riccati $y' - xy^2 + (2x-1)y = x - 1$ numa linear, e encontre sua a solução geral. Note que $y_1(x) \equiv 1$ é uma solução particular

Solução:

Resposta: $y = 1 + \dfrac{1}{1 - x + ce^{-x}}$

Exercícios

Exercício 5.1

Resolva as seguintes equações:

(a) $y' + xy^2 - 2x^2y + x^3 = x + 1;$ solução particular $y_1 = x - 1$

(b) $2y' - (y/x)^2 - 1 = 0;$ solução particular $y_1 = x$

(c) $y' + y^2 - (1 + 2e^x)y + e^{2x} = 0;$ solução particular $y_1 = e^x$

(d) $y' - (sen^2x)y^2 + \dfrac{1}{senx\ cosx}y + cos^2x = 0;$ solução particular $y_1 = \dfrac{cosx}{senx}$

Respostas: (b) $y = x + \dfrac{2x}{c - ln|x|}$, (d) $y = \dfrac{cos\ x}{sen\ x}[1 + (ce^{-sen^2x} - 1/2)]^{-1}$

Exercício 5.2

(a) Mostre que uma equação de Riccati com coeficientes constantes

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 + by + c = 0$$

tem uma solução da forma $y = m$, sendo m uma constante se, e somente se, m é uma raiz da equação do segundo grau

$$am^2 + bm + c = 0$$

(b) Empregue este resultado para encontrar a solução geral de cada uma das seguintes equações de Riccati

(i) $y' + y^2 + 3y + 2 = 0$

(ii) $y' + 4y^2 - 9 = 0$

(iii) $y' + y^2 - 2y + 1 = 0$

(iv) $6y' + 6y^2 + y - 1 = 0$

Resumo

Nesta aula estudamos a equação

$$\frac{dy}{dx} = a_2(x)y^2 + a_1(x)y + a_0(x)$$

Vimos que é possível transformar esta equação numa equação linear de primeira ordem mediante a mudança de variáveis

$$y = y_1 + \frac{1}{z},$$

desde que conheçamos, de antemão, uma solução particular y_1.

Quando a equação de Riccati tem coeficientes constantes, podemos calcular soluções particulares através da resolução de uma equação polinomial. Em seguida fazemos a mudança de variáveis do parágrafo anterior.

Avaliação

Com respeito à equação de Riccati, cabe um comentário parecido com o que fizemos ao final da aula anterior relativamente à equação de Bernoulli: não é apenas uma equação curiosa para a qual aprendemos um procedimento de solução, reduzindo-a a uma equação linear de primeira ordem. Esta equação ocorre em um número muito grande de contextos, tanto aplicados quanto dentro dos domínios da própria Matemática. Como já dissemos, ela tem uma ligação interessante com as equações diferenciais lineares de segunda ordem, que vamos começar a estudar a partir da aula 11.

Aula 6 – Equações Separáveis

Objetivos

Os objetivos que você deve alcançar nesta aula são

1) Ampliar o conjunto das equações diferenciais de primeira ordem que você conhece, acrescentando a ele as equações separáveis

2) Estudar uma aplicação de equações separáveis a um problema de geometria.

Introdução

Nesta aula ampliaremos o conjunto de equações diferenciais de primeira ordem introduzindo um novo tipo de equação: as equações diferenciais com variáveis separáveis.

Como você terá ocasião de verificar, muitas equações diferenciais de primeira orde que temos estudado se enquadram como equações de variáveis separáveis. São exemplos a equação fundamental, as equações lineares de primeira ordem homogêneas (e algumas não- homogêneas também, mas não todas) e algumas equações de Bernoulli e Riccati. Mas certamente encontrareos novas equações, ainda não tratadas.

Equações Diferenciais de Variáveis Separáveis

Definição 6.1

Sejam I, J intervalos abertos, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, e $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas, onde $g(y) \neq 0$ para todo $y \in J$.

Uma equação diferencial que pode ser posta na forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

é chamada de *equação de variáveis separáveis*, ou simplesmente *equação separável*

Exemplo 6.1

i) A equação diferencial

$$y' = (1+y^2)/xy \qquad x > 0,$$

é uma equação separávelem $I = J = (0, +\infty)$. Neste caso temos

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad g(y) = \frac{y}{1+y^2}.$$

ii) Toda equação linear homogênea de primeira ordem $y' + p(x)y = 0$ pode ser escrita como uma equação separável $y' = -\dfrac{p(x)}{1/y}$ em qualquer intervalo J onde $y \neq 0$.

iii) A equação linear não-homogênea $y' - (1+x)y = 1 + x$ pode ser escrita como a equação separável $y' = (1+x)\cdot(1+y) = \dfrac{1+x}{1/1+y}$.

Obs: Ao escrever a equação $y' - (1+x)y = 1+x$ na forma padrão de uma equação de variáveis separáveis, $y' = \dfrac{1+x}{1/(1+y)}$, precisamos (em princípio) restringir a variável y a pertencer a um intervalo que não contenha -1.

Exercício 6.1

Resolva as equações $y' - (1+x)y = 1+x, \quad x \in \mathbb{R}$ e $y' = \dfrac{1+x}{1/(1+y)}$ $x > -1$ e compare suas soluções

Atividade 6.1

Mostre que as seguintes equações diferenciais são separáveis. Identifique, em cada item, as funções $f(x)$ e $g(y)$, bem como os correspondentes intervalos maximais I e J onde elas estão definidas

1) $\dfrac{dy}{dx} = x^3y^2 - x^3y - xy^2 + xy$

2) $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{\dfrac{x-1}{(y^2+1)^2}}$

3) $\dfrac{dy}{dx} = e^{x+y}$

Respostas:

Solução de uma equação diferencial separável

Uma solução da equação separável $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f(x)}{g(y)}$, caracterizada na definição 5.1, é uma função $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$com as seguintes propriedades:

1) - Para todo $x \in I$ $\quad \varphi(x) \in J$,

2) - Para todo $x \in I$ $\quad \dfrac{d\varphi}{dx}(x) = \dfrac{f(x)}{g(\varphi(x))}$

Quais são os procedimentos para encontrar uma solução φ da equação? Acompanhe o seguinte desenvolvimento:

Inicialmente multiplicamos a equação dada por $g(y)$ obtendo

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x) \qquad (1)$$

Em seguida observamos que se g tiver uma primitiva G definida em J, ainda podemos escrever a equação como

$$\frac{d}{dt}G[y(x)] = f(x) \qquad (2)$$

Para ver porque (1) e (2) são equivalentes, basta efetuar a derivação indicada em (2), usar a regra da cadeia e o fato de que $G' = g$ Portanto, reduzimos a equação dada a uma equação diferencial fundamental.
A solução agora é imediata. "Integrando" com relação a x no intervalo I encontramos:

$$G[y(x)] = \int f(x)\ dx.$$

Se F é uma primitiva de f em I, então

$$G[y(x)] = F(x) + C,$$

onde c uma constante arbitrária.

Obs: A fórmula acima define implicitamente as soluções $y(x)$ da equação separável.

Se, além disso, G for invertível poderemos explicitar a solução $y(x)$, obtendo

$$y(x) = G^{-1}\Big(F(x) + c\Big)$$

Exemplo 6.2

Calcule soluções de $\quad y' = -\dfrac{x}{y}, \qquad x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad y > 0.$

Solução: Identificando as funções que aparecem na equação com as da forma padrão da definição 5.1, temos

$$f(x = -x) \quad \text{e} \quad g(y) = y.$$

Multiplicando a equação por y, ela se reescreve como

$$yy' = -x;$$

ou ainda

$$\frac{1}{2}2yy' = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}[y(x)^2] = -x$$

Integrando os dois lados com relação a x:

$$y(x)^2 = -x^2 + c$$

onde c é uma constante arbitrária. Portanto,

$$x^2 + y(x)^2 = c$$

A natureza da resposta impõe que a constante c seja positiva. Para cada $c > 0$, a fórmula acima define de soluções $y(x)$, contínuas em intervalos abertos convenientes. Por exemplo, a figura (5.1) exibe duas possíveis soluções distintas de $y' = -\dfrac{x}{y}$.

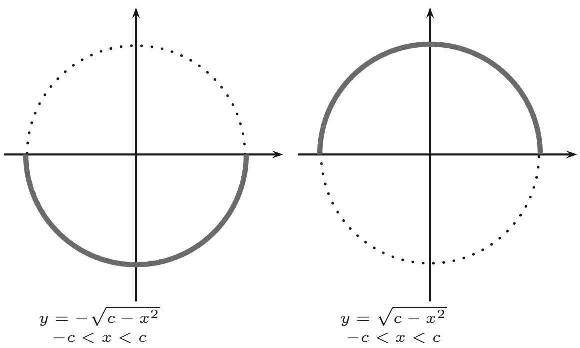


Figura 6.1 Soluções de $x^2 + y(x)^2 = c$

Para finalmente escolher a boa solução, lembramos que a equação é definida para $x \in \mathbb{R}$ e $y > 0$. Portanto a solução compatível é o gráfico da direita na figura (5.1).

Moral da história: *Não basta resolver tecnicamente uma equação. É sempre recomendável fazer uma análise das respostas obtidas, para verificar a compatibilidade da resposta com os dados da equação diferencial.*

Atividade 2: Marque as afirmações corretas:

i) A equação $dy/dx = -y^2$ é linear
ii) A equação $dy/dx = -y^2$ é separável
iii) Uma equação pode ser simultâneamente linear e separável
iv) Toda equação linear homogênea de primeira ordem é separável
v) A equação $dy/dx = 2y - y^3$ é simultâneamente de Bernoulli e separável
vi) Toda equação de Bernoulli é separável

Respostas: São corretas apenas as afirmações de ii) a v).

Método das diferenciais na solução de equações diferenciais separáveis

Freqüentemente encontramos a seguinte "mágica" (matemágica) sendo empregada na solução de equações diferenciais separáveis.

Partindo de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

operamos simbolicamente para encontrar

$$f(x)dx = g(y)dy.$$

A seguir "integramos o lado esquerdo com relação a x, e o lado direito com relação a y", obtendo

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

Isso não lá muito justificável nos padrões do rigor da Matemática que estamos praticando. Desde o Cálculo I sabemos que dx não é um número; logo não faz sentido a multiplicação cruzada que efetuamos acima. No entanto, o método sempre funciona.

O detalhe agora é que tratamos x e y no mesmo pé de igualdade. Integramos "um lado" com relação a y, e, independentemente, integramos o "outro lado" com relação a x, sem a preocupação de saber qual era a variável dependente e qual a variável independente. Na prática, dá certo.

A pergunta é: Por quê?

A rigor, o que justifica o método utilizado é a teoria de *formas diferenciais*, um assunto avançado que foge aos nossos objetivos. Nessa teoria, expressões do tipo $g(y)\ dy = f(x)dx$, ou, mais geralmente, do tipo

$$M(x,y)\ dx + N(x,y)\ dy$$

são definidas e estudadas rigorosamente. Neste curso não vamos usar a teoria de formas diferenciais. Fica estabelecido que uma equação com (formas) diferenciais do tipo :

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

corresponde a uma equação diferencial

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

ou

$$M(x,y)\frac{dx}{dy} + N(x,y) =, 0$$

se for possível expressar y em termos de x, e vice-versa.

Observação: Escrevendo a equação $y' = \dfrac{f(x)}{g(y)}$ na forma

$$f(x)\ dx = g(y)\ dy,$$

fica claro o porquê do nome *equação com variáveis separáveis*. As variáveis x e y são efetivamente *separadas* em lados distintos da igualdade.

Para resolver uma equação separável basta integrar os dois lados separadamente, tratando x e y como variáveis independentes entre si.

Ilustremos a matemágica com um exemplo.

Exemplo 6.3

Resolva novamente a equação

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

agora reescrita na forma diferencial

$$x\ dx + y\ dy = 0$$

Solução: :

$$x\ dx + y\ dy = 0 \iff x\ dx = -y\ dy \iff \int x\ dx = -\int y\ dy$$

(integrando independentemente com relação a x e a y

$$\iff \frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + c \iff \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c$$

Isto é $x^2+y^2 = c$, exatamente o mesmo resultado calculado antes pelo método do Exemplo 2.

Exemplo 6.4

Resolva a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$$

Solução: A equação dada pode ser escrita na forma

$$y\ \frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{(1+x^2)x}$$

Integrando o lado esquerdo com relação a y e o direito com relação a x, obtemos

$$\int \frac{y}{1+y^2}\,dy = \int \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx,$$

ou seja

$$\frac{1}{2}\,ln(1+y^2) + c = \int \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx, \qquad c \text{ constante} \qquad (3)$$

Para resolver a integralda direita precisamos decompor o integrando em frações parciais,

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(1+x^2)}, \qquad A, B, C \in \mathbb{R}$$

Igualando os numeradores:

$$A + B = 0, \qquad C = 0 \qquad \text{e} \qquad A = 1$$

Assim, os valores das constantes são

$$A = 1, \qquad B = -1 \qquad \text{e} \qquad C = 0,$$

e

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

Portanto,

$$\int \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{1+x^2} = ln(x) - \frac{1}{2}\,ln(1+x^2) + c_1,$$

onde c_1 é uma constante.

Adicionando uma constante de integração k_1 e substituindo em (3), chegamos a

$$\frac{1}{2}\,ln(1+y^2) = ln(x) - \frac{1}{2}\,ln(1+x^2) + k_1.$$

Finalmente, observando que o contra-domínio da função $x \mapsto ln(x)$ é o conjunto $\mathbb{R}$, podemos garantir que $k_1 = ln(k)$ para algum número positivo k. Assim, a última igualdade pode reescrita como

$$\frac{1}{2}\,ln(1+y^2) \;\; = \;\; ln(x) - \frac{1}{2}\,ln(1+x^2) + ln(k).$$

Ou seja,

$$
\begin{aligned}
ln(1+y^2) &= 2\cdot ln(x) - ln(1+x^2) + 2\cdot ln(k),\\
ln(1+y^2) &= ln\left(\frac{x^2k^2}{x^2+1}\right)\\
1+y^2 &= \frac{x^2c}{x^2+1}, \qquad c=k^2
\end{aligned}
$$

Observe que não é possível explicitar y em função de x de maneira única. Temos

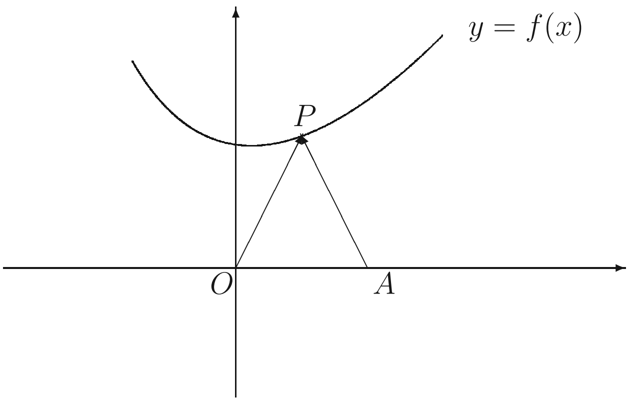
$$y = \pm\sqrt{\frac{cx^2}{x^2+1} - 1}$$

Num problema específico, precisamos de alguma informação extra (um dado inicial), mediante o qual possamos escolher qual das duas possibilidades representa a solução procurada.

Atividade 6.2
Desenhe o gráfico da solução de $\dfrac{dy}{dx} = -y^2$ que passa pelo ponto $(0,1)$.

Aplicação 6.1
Um modelo geométrico com uma equação separável

A reta normal em cada ponto do gráfico de uma função $y = f(x)$ e a reta que liga esse ponto à origem formam os lados de um triângulo isósceles, cuja base está sobre o eixo dos x. Determine a função. Ela é única?



Solução: : Baseados na figura acima, calculemos a equação da reta normal ao gráfico de $y = f(x)$ num ponto $P = (x_0, y_0)$.

Note que o gráfico é o traço de uma curva α no plano, cujas equações paramétricas podem ser dadas por $\alpha(x) = (x, f(x))$. Como $\alpha'(x) = (1, f'(x))$, o ponto (x_0, y_0), o vetor

$$\vec{v_P}(1, f'(x_0))$$

representa a direção da reta tangente . Portanto $\vec{v_P}$ é um vetor orotgonal à direção da reta normal à curva no ponto P. Estamos com a faca, o queijo e a marmelada nas mãos para encontrart a equação da reta normal.

É a reta que passa por (x_0, y_0)e é ortogonal a $\vec{v_P} = (1, f'(x_0))$. Portanto a euação da reta normal é

$$1 \cdot (x - x_0) + f'(x_0) \cdot (y - y_0) = 0.$$

Seja $A = (x_A, 0)$ a interseção da normal com o eixo $x = 0$. Impondo a condição $y = 0$ na equação da reta normal, encontramos

$$x - x_0 - f'(x_0) \cdot (y - y_0) = 0 \Longrightarrow x_A = x_0 + f'(x_0) \cdot y_0$$

A seguir acrescentamos a informação de que $d(P, O) = d(P, A)$, isto é:

$$\sqrt{\Big(y_0 f'(x_0)\Big)^2 + y_0^2} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

Elevando ao quadrado e simplificando,

$$|f'(x_0) \cdot y_0| = |x_0|$$

Essa relação deve ser satisfeita em cada ponto $(x_0, f(x_0))$ da curva. Podemos abandonar o índice inferior, uma vez que a expressão vale para todos os pontos.

Notamos ainda que

$$|f'(x_0) \cdot y_0| = |x_0| \Longleftrightarrow |f'(x_0) \cdot f(x_0)| = |x_0|.$$

Assim, abandonando índice inferior,

$$|f'(x) \cdot f(x)| = |x| \quad \text{i.é,} \quad |y' \cdot y| = |x|$$

Ou seja,

as funções $y = f(x)$ procuradas são as soluções das equações separáveis

$$y' \cdot y = x \qquad \text{ou} \qquad y' \cdot y = -x$$

- A primeira equação tem como solução a coleção de curvas

$$y^2 - x^2 = C.$$

- A segunda equação tem como solução a origem, ou a coleção de círculos

$$x^2 + y^2 = C,$$

conforme seja $C = 0$ ou $C > 0$. A hipótese $C < 0$ não corresponde a nenhuma curva do plano real.

Análise das soluções As normais em cada ponto de cada círculo $x^2+y^2 = C$ coincidem com as retas unindo esses pontos à origem. Portanto não podem ser os lados de triângulos isósceles (não-degenerado) e temos de eliminar a família de círculos. As curvas da primeira família são as retas $y = \pm x$ ou hipérboles equiláteras. Mais exatamente, as soluções da equação são:

- quatro semi-retas (caso $c = 0$)

- quatro arcos de hipérboles (um em cada quadrante)se $c > 0$

- dois ramos de hipérbole (um no semi-plano superior e outro no inferior), se $c < 0$

Atividade 4: Desenhe soluções do problema acima correspondentes aos casos $c = 0$, $c = 1$ e $c = -1$

Solução:

Exercícios

Exercício 6.2

Determine as soluções das equações diferenciais abaixo:

$a)\ (x-1)y' - y = 0$

$b)\ y' + y\ cos(x) = 0$

$c)\ sec^2x \cdot tgy\ dx + sec^2y \cdot tgx\ dy = 0$

$d)\ a \cdot \left(x\dfrac{dy}{dx} + 2y\right) = xy\dfrac{dy}{dx}$

$e)\ (1+x^2)y^3\ dx - y^2x^3\ dy = 0$

$f)\ (x^2+a^2)(y^2+b^2) + (x^2-a^2)(y^2-b^2)y' = 0$

$g)\ \dfrac{1}{x} - tg\ (y)y' = 0$

$h)\ 4xy^2\ dx + (x^2+1)\ dy = 0$

$i)\ xy - 3(y-2)\dfrac{dy}{dx} = 0$

$j)\ x\ dx + y\ e^{-x^2}\ dy = 0$

$l)\ (2+y)\ dx - (3-x)\ dy = 0$

$m)\ xy\ dx - (1+x^2)\ dy = 0$

$n)\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{-2y}}{x^2+4}$

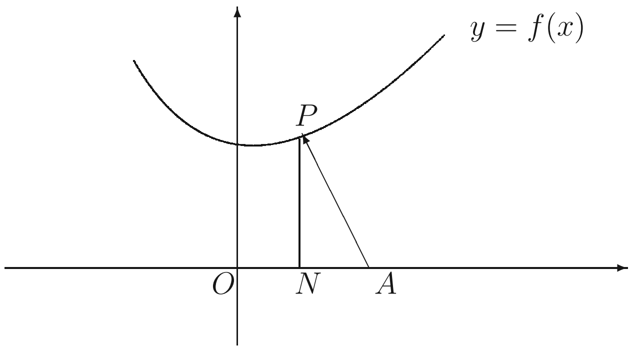
Respostas: $a)\ y = K(x-1)$; $b)\ y = \dfrac{C}{e^{sen(x)}}$; $c)$; $d)\ y = ln(C\ x^{2a} \cdot y^a)$ $e)\ ln\left(\dfrac{x}{y}\right) - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}\right) = C$; $f)\ x + a\ ln\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right) + y - 2b\ arctg\left(\dfrac{y}{b}\right) = C$; $g)\ xcos\ (y) + C$; $h)\ ln(x^2+1)^2 - \dfrac{1}{y} = C$; $i)\ 6y - x^2 = ln(C\ y)^{12}$; $j)\ e^{x^2} + y^2 = C$; $l)\ (2+y)(3-x) = C$; $m)\ y^2 = C(1+x^2)$; $n)\ e^{2y} = arctg(\dfrac{x}{2}) + C$

Exercício 6.3

Determinar as equações das curvas $\alpha = (x, f(x))$, cujo comprimento do segmento da normal compreendido entre a curva e a interseção com o eixo x constante.

Exercício 6.4
Dar a equação das curvas $C : y = f(x)$, que têm subnormal constante.

Obs: A subnormal no ponto P é a projeção, sobre o eixo OX, do segmento da reta normal (em P) entre P e OX.



Resposta:

Resumo

Nesta aula:

1) Definimos as equações separáveis

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)},$$

e aprendemos a calcular suas soluções

2) Introduzimos a notação utilizando diferenciais dx, dy

3) Estudamos um problema geométrico cuja solução veio a ser uma aplicação de equações separáveis

Avaliação

As equações separáveis, apesar da simplicidade de sua formulação, constituem uma das classes mais importantes de equações diferenciais de primeira ordem. Literalmente, centenas de problemas de naturezas as mais diversas, são traduzidos matematicamente por problemas de valor inicial com equações separáveis. Nas próximas aulas teremos oportunidade de estudar mais alguns exemplos interessantes.

Aula 7 – Aplicações das Equações Separáveis

Objetivos

Trabalhar exercícios e modelos matemáticos com equações diferenciais separáveis.

Introdução

Começamos esta aula exatamente onde parou a última aula do volume um. Apresentamos alguns exemplos de equações separáveis e estudamos modelos matemáticos de problemas do mundo real que envolvem equações separáveis. A intenção é fixar melhor o conteúdo e poder analisar melhor o alcance e as limitações da teoria.

Exemplos

Exemplo 7.1

A equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2 - y^2}$$

é separável.

Calculamos facilmente as soluções, escrevendo a equação na forma $(2 - y^2)\ dy = x^2\ dx$, e integrando separadamente em y e em x, o que nos dá $x^3 + y^3 - 6y + c = 0$.

A figura 7.1 mostra algumas das curvas-solução, correspondentes a algumas escolhas da constante c

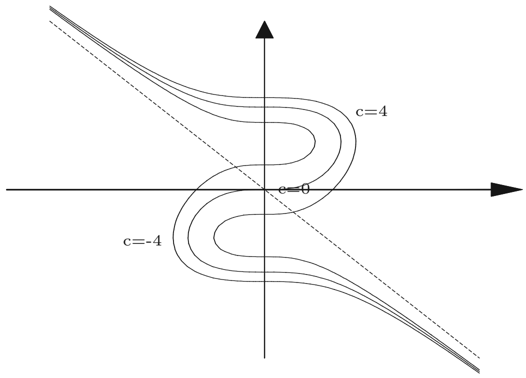


Figura 7.1

Análise das soluções corresponde4ntes a c= 0,-4,4

- Todas as soluções são curvas não-limitadas no plano $\mathbb{R}^2$.
- À medida que x cresce desde $-\infty$ até $+\infty$ as curvas vão sendo percorridas da esquerda para a direita, até alcançar o primeiro ponto onde a reta tangente é vertical. Daí, até o segundo ponto onde a reta tangente é vertical, as curvas vão sendo percorridas da direita para a esquerda. A partir de então voltam a ser percorridas da esquerda para a direita.
- Nenhuma das curvas-solução pode ser o gráfico de uma função definida em todo o eixo $\mathbb{R}$.
- Para cada valor de c, estão definidos três intervalos onde é possível determinar soluções y como função de x. A dica é que os pontos extremos desses intervalos correspondem a pontos da curva-solução que têm reta tangente vertical.
- Para qualquer escolha de c, as curvas-solução tendem para a reta $y = -x$ quando $x \longrightarrow \pm\infty$, o que significa que , para valores de x muito grandes ou muito pequenos, o valor da solução $y(x)$ é essencialmente igual ao simétrico de x

Atividade 7.1

a) Verifique que as ordenadas dos pontos "de retorno" (i.é, dos pontos onde o sentido de percurso se inverte) são todas iguais a $\sqrt{2}$ (a positiva) e $-\sqrt{2}$ (a negativa), independentemente da escolha de c. As abcissas variam de acordo com a escolha de c
Solução:

b) Calcule o(s) ponto(s) de interseção com os eixos coordenados, da curva correspondente a $c = -4$
Solução:

c) Determine os pontos extremos do maior intervalo limitado onde está definida uma solução $y(x)$ da equação proposta, correspondente a $c = 0$.
Solução:

Comentário: Veja como é útil poder dispor de um desenho das soluções de uma equação. Não seria nada trivial tirar todas as conclusões que tiramos acima diretamente e só a partir da expressão da família de curvas-solução.

Como já chamamos a atenção antes, em geral não basta achar o conjunto de soluções de uma equação. É fundamental interpretá-las, e extrair informações delas.

Exemplo 7.2

Consideremos agora a equação separável $\dfrac{d}{dx}e^{y(x)} = 2x$. Usando a regra da cadeia e uma "matemágica" bem simples, escrevemos a equação na forma $e^y\,dy = 2x\,dx$ e calculamos as soluções $y(x) = ln(x^2 + c)$.

A figura 7.2 mostra algumas das curvas-solução, correspondentes a algumas escolhas da constante c

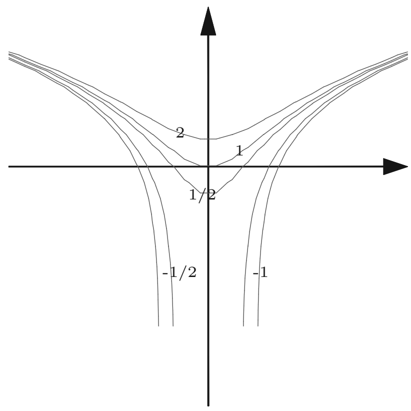


Figura 7.2

Análise das soluções

- Ao contrário do exemplo anterior, todas as soluções são funções definidas explicitamente.

- Para valores negativos de c, as soluções só estão definidas nos intervalos $(-\infty, c)$ e $(-c, +\infty)$. Ocorre também que $\lim_{x\to c^-} = -\infty$ e $\lim_{x\to(-c)^+} = -\infty$.

- Para valores positivos de c as soluções são contínuas, definidas em todo $\mathbb{R}$, admitindo um ponto de mínimo em $x_0 = 0$ (independentemente da escolha de $c > 0$

- Para qualquer $c \in \mathbb{R}$ tem-se $\lim_{|x|\to\pm\infty} = +\infty$

Atividade 7.2

Desenhe a solução correspondente a $c = 0$,(é uma curva logarítmica junto com sua simétrica em relação ao eixo das ordenadas).

Usando seus conhecimentos de Cálculo, verifique todas as afirmações precedentes.

Solução:

Comentário: O comportamento das soluções da equação do exemplo 2 muda drasticamente quando a constante passa de valores menores ou iguais a zero para valores positivos. Para todo $c \leq 0$ a solução não é definida no intervalo $(c, -c)$ e "explode" para $-\infty$ à medida que $x \to c^-$ ou $x \to (-c)^+$. Já para valores positivos de c, por menores que sejam, a solução é contínua em todo $\mathbb{R}$, tendo um ponto de mínimo absoluto em $x_0 = 0$.

Ocorre uma enorme mudança qualitativa, uma *bifurcação catastrófica* (no sentido matemático) no conjunto das soluções. Estas noções (mudança qualitativa, bifurcação) são muito importantes no estudo moderno de equações diferenciais, mas estão fora dos nossos objetivos imediatos. Entretanto, vemos que desde os nossos primeiros estudos em equações, elas já estão presentes.

Um par de modelos com equações separáveis

Aplicação 7.1

Dinâmica Populacional

Passamos à análise de alguns modelos com equações diferenciais criados para descrever a variação temporal de uma população. Os modelos serão obtidos considerando a taxa de crescimento da população.

Se $p(t)$ denota o tamanho de uma determinada população de seres vivos no instante t, a *taxa de crescimento (ou taxa de crescimento relativa, ou específica)* daquela população é definida pela quantidade

$$\frac{dp/dt}{p}.$$

O modelo de Malthus

Nesse modelo supõe-se que a taxa de crescimento é uma constante (positiva) λ. A equação do modelo é simplesmente

$$\frac{dp}{dt} = \lambda p$$

cuja solução é

$$p(t) = p(t_0)e^{\lambda(t-t_0)}.$$

Análise da solução: Este modelo concorda razoavelmente com a observação, quando temos certas populações de micro-organismos que se reproduzem por mitose, e mesmo assim durante intervalos limitados de tempo. De modo geral, em casos de superpopulação, levando em conta os efeitos prejudiciais

Thomas Malthus 1766-1834)

Malthus foi um economista político preocupado com o que ele via como o declínio das condições de vida na Inglaterra do século XIX.
Ele afirmava que a população tendia a ter um crescimento de ordem geométrico, ao passo que os meios de subsistência cresciam em ordem aritmética. Fatalmente chegaria o ponto onde não haveria como sustentar toda a população, que definharia devido à falta de alimentos, abrigos, etc.

EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS

Pierre Verhulst 1804-1849)

O trabalho do matemático belga Verhulst sobre a lei de crescimento populacional é importante . Verhulst mostrou em 1846 que existiam forças que impediam que o crescimento fosse em progressão geométrica, como se pensava até então.

do (ou sobre o) meio ambiente, como poluição e alta demanda por alimentos (competição) e combustível (no caso de populações humanas), freqüentemente há um efeito inibidor no crescimento populacional, pelo menos a partir de um certo valor da população.

O modelo de Verhulst

Já que crescimentos exponenciais de populações não são modelos muito realísticos devido principalmente aos recursos limitados do meio ambiente e taxas de mortalidade (devidas a fatores variáveis), precisamos modificá-los de tal modo que a taxa de crescimento específica se torne decrescente a partir de um certo número limite alcançado pela população.

O modelo abaixo pretende levar conta esses dados inibidores. Entretanto, vamos manter a hipótese de que a taxa de crescimento específico dependa somente do números de indivíduos presentes e não (explicitamente) do tempo; não sendo portanto influenciada por fenômenos sazonais. Essa hipótese pode ser escrita como

$$\frac{dp/dt}{p} = f(p)$$

ou

$$\frac{dp}{dt} = pf(p). \tag{7.1}$$

Suponhamos agora que o ambiente seja capaz de sustentar no máximo um número fixo K de indivíduos. K é chamada de **capacidade de suporte** do meio ambiente. Assim, quando $p = K$, f se anula ($f(K) = 0$). Seja $f(0) = r$. Procuramos então uma função decrescente $f(p)$ com $f(0) = r$ e $f(K) = 0$. O modelo proposto por volta de 1840 pelo matemático e biólogo belga P. F. Verhuslt, para predizer a população humana em diversos países, consiste em supor $f(p)$ linear

$$f(p) = c_1 p + c_2.$$

As condições $f(0) = r$ e $f(K) = 0$ nos dão $f(p) = r - (r/K)p$. A equação (7.1) torna-se

$$\frac{dp}{dt} = p\Big(r - (r/K)p\Big),$$

que é do tipo

$$\boxed{\frac{dp}{dt} = p(a - bp) \qquad a > 0, b > 0,}$$

e sob essa forma é conhecida como **equação logística**. Sua solução é chamada de **função logística** e o gráfico dessa função é a **curva logística**.

Observação: Esse ainda não é um modelo ideal.Por exemplo, ele não leva em conta que a taxa de produção de novos membros da espécie depende da idade dos pais, i.é, membros recém-nascidos não contribuem de imediato para o aumento da espécie. Existem outros modelos que levam em conta esses fatores.

Solução da equação logística:

Observe que as funções constantes $p \equiv 0$ e $p \equiv a/b$ são soluções da equação logística. Separando variáveis, temos:

$$\frac{1}{p(a-bp)}dp = dt$$

decompondo o lado esquerdo em frações parciais:

$$\left(\frac{1/a}{p} + \frac{b/a}{a-bp}\right) = dt,$$

de onde

$$\frac{1}{a}lnp - \frac{1}{a}ln(a-bp) = t + c, \qquad c = \text{constante}.$$

I.é,

$$ln\frac{p}{a-bp} = at + ac$$

ou

$$p = (a-bp)e^{at}e^{ac} \tag{7.2}$$

Sendo $p(0) = p_0$

$$p_0 = (1 - bp_0)e^{ac}$$

se $p_0 \neq 0$ e $p_0 \neq a/b$ então

$$e^{ac} = \frac{p_0}{a - bp_0} \tag{7.3}$$

Substituindo (7.3) em (7.2), e tirando o valor de p, obtemos

$$\boxed{p(t) = \frac{ap_0}{bp_0 + (a-bp_0)e^{-at}}}$$

Atividade 7.3

a) Faça um desenho do gráfico de $f(p) = r - (r/K)p = a - bp, \qquad p \in [0, K]$ e conclua que o intervalo em que o ambiente consegue sustentar a população é $[0, K]$, que corresponde a $a - bp > 0$

Solução:

b) Desenhe agora o gráfico de $g(p) = p(a - bp)$ e conclua que $dp/dt > 0$ para $0 < p < a/b$, e que $dp/dt < 0$ se $p > a/b$.

Solução:

Em particular, se $p_0 > a/b$ então, por continuidade de p, $p(t) > a/b$ numa vizinhança de $t = 0$. Logo $p(t)$ é decrescente.

c) Verifique que $\dfrac{dg}{dt} = \dfrac{d^2p}{dt^2}$.

Usando a regra da cadeia temos: $\left(\dfrac{dg}{dt} = \dfrac{dg}{dp}\,\dfrac{dp}{dt} = \dfrac{dg}{dp}\;p = p(a - bp)(a - 2bp)\right)$.

Mostre então que $p = b/2a$ é ponto de inflexão da curva logística (no intervalo onde o ambiente consegue sustentar a população).

Solução:

d) Faça um esboço dos gráficos de $p(t)$ para os casos $0 < p_0 < a/b$ e $p_0 > a/b$.

Solução:

Resumindo:
Quando $t \to +\infty, p(t) \to a/b$. Esse valor é chamado de *população limite* e é o valor assintótico da população , seja qual for a população inicial $p_0 > 0$.

- Se $p_0 > a/b$, a população $p(t)$ decresce, tendendo a a/b (veja a atividade abaixo).

- Se $0 < p_0 < a/b$, $p(t)$ cresce tendendo assintoticamente para a/b.

  Neste caso o gráfico de $p(t)$ estará entre as retas $p = 0$ e $p = a/b$, possuindo uma inflexão quando a população alcança o valor $a/2b$. Isso quer dizer que até atingir o valor $b/2a$a população cresce com derivada positiva e a partir daí, o crescimento se dá com velocidade cada vez menor (e nunca ultrapassa o valor da população limite).

Aplicação 7.2
Reações Químicas

Um composto C é formado pela combinação de duas substâncias químicas A e B. suponha que **a** gramas de A sejam combinadas com **b** gramas de B. Se $x(t)$ é o número de gramas de C no instante t, sendo cada grama de C constituída por M partes de A e N partes de B, introduzindo as quantidades relativas de substâncias A e B em cada grama de mistura C por

$$\frac{M}{M+N} \quad \text{e} \quad \frac{N}{M+N}\ ,$$

respectivamente, em x gramas do composto C teremos

$$\frac{M}{M+N}\cdot a \quad \text{e} \quad \frac{N}{M+N}\cdot b$$

gramas das substâncias A e B.

Conseqüentemente as quantidades das substâncias A e B que ainda não foram transformadas (i.é, que são remanescentes) no instante t são dadas por:

$$a - \frac{M}{M+N}\,x \qquad b - \frac{N}{M+N}\,x.$$

A *lei de ação das massas* diz que, quando não há mudanças na temperatura, a taxa segundo a qual as duas substâncias reagem é proporcional ao produto das quantidades de A e B remanescentes no instante t:

$$\frac{dx}{dt} \propto \left(a - \frac{M}{M+N}\, x\right)\left(b - \frac{N}{M+N}\, x\right).$$

O que pode ser reescrito como

$$\frac{dx}{dt} = k' \frac{M}{M+N}\left(\frac{M+N}{M}\, a - x\right) \frac{N}{M+N}\left(\frac{M+N}{N}\, b - x\right)$$

ou ainda

$$\frac{dx}{dt} = k(\alpha - x)(\beta - x), \qquad (**)$$

onde $k = k' \dfrac{M}{M+N} \dfrac{N}{M+N}, \quad \alpha = \dfrac{M+N}{M}\, a, \quad \beta = \dfrac{M+N}{N}\, b.$

Uma reação cujo modelo é a equação (**) é chamada de **reação de segunda ordem**.

Exemplo 7.3

Um composto C é formado pela combinação de duas substâncias A e B, de tal forma que para cada grama de A quatro gramas de B são usados. É observado que 30 gramas do composto C são formadas em 10 minutos. Sabendo que inicialmente havia 50 gramas de A e 32 gramas de B, determinar a quantidade de C em qualquer instante t.Quanto do composto C se terá formado em 15 minutos? Interprete a solução quando $t \to \infty$

Solução:

Seja $x(t)$ o número de gramas do com posto C após t minutos. Temos

$$x(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad x(10) = 30.$$

A equação diferencial associada ao problema é da forma

$$\frac{dx}{dt} = k(\alpha - x)(\beta - x).$$

Como em cada grama de C temos uma parte de A e 4 partes de B, então (com a notação acima), $M = 1$ e $N = 4$. Assim,

$$\frac{M}{M+n} = \frac{1}{5} \qquad \text{e} \qquad \frac{N}{M+N} = \frac{4}{5},$$

de sorte que

$$\alpha = \frac{M+N}{M}\, a = \frac{5}{1} \cdot 50 = 250 \qquad \text{e} \qquad \frac{M+N}{N}\, b = \frac{5}{4} \cdot 32 = 40.$$

A equação do problema fica

$$\frac{dx}{dt} = k(250 - x)(40 - x). \qquad (*)$$

(uma equação separável).

A esta equação devemos acrescentar as condições

$$x(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad x(10) = 30.$$

Separado as variáveis da equação (*), e utilizando frações parciais, obtemos a equação

$$-\left(\frac{1/210}{250-x} + \frac{1/210}{40-x}\right)\ dx = k\ dt,$$

a qual, integrada, nos dá:

$$ln\ \left|\frac{250-x}{40-x}\right| = 210\ kt + c_1.$$

Tomando exponenciais dos dois lados:

$$\frac{250-x}{40-x} = c_2 e^{210\ kt}. \qquad (**)$$

e como $x(0) = 0$, tiramos $c_2 = 25/4$, de modo que

$$\frac{250-x}{40-x} = \frac{25}{4}\ e^{210\ kt}$$

E finalmente como $x(10) = 30$, substituindo na última equação, e usando uma calculadora, obtemos (com quatro decimais significativas)

$$k = 0,1258$$

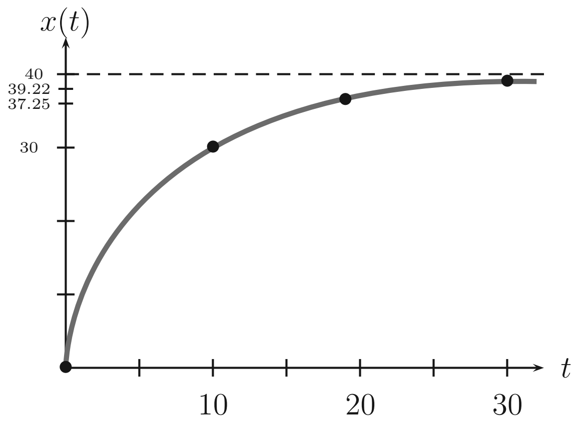
Levando $c_2 = 25/4$ e $k = 0,1258$ na equação (*), e tirando o valor de $x(t)$ chega-se a

$$\boxed{x(t) = 100\ \frac{1 - e^{-0,1258\ t}}{25 - 4e^{-0,1258\ t}}}$$

que é a resposta da primeira parte do problema.

Análise da solução: Para ter uma idéia do comportamento de $x(t)$, podemos construir uma tabela e desenhar um gráfico aproximado:

t (min)	$x(t)$ (gr)
10	30
15	34,78
20	37,25
25	38,54
30	39,22
35	39,59



Observamos que quando $t \to \infty$, $x(t) \to 40$, isto é, no final do processo são formadas 40 grs. do composto C.

Utilizando as fórmulas para os remanescentes de substâncias A e B obtidas acima, calculamos que- no final- sobram respectivamente $50-\frac{40}{5}=32$ gramas de substância A e $32-\frac{4\times 40}{5}=0$ gramas da substância B.

Se for o caso, os engenheiros químicos precisarão separar o composto C da substância A, e adotar um procedimento para dispor do excedente de A.

Exercícios

Exercício 7.1
Resolva o PVI

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+3x^2}{3y^2-6y}\ , \qquad y(0)=1$$

e determine o maior intervalo onde a solução é definida.

Exercício 7.2
Resolva o PVI

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\ cos(2x)}{3+2y}\ , \qquad y(0)=0$$

e determine onde a solução atinge seu valor máximo.

Exercício 7.3
Faça um esboço do gráfico de da função logística $p(t)=\dfrac{ap_0}{bp_0+(a-bp_0)e^{-at}}$.

Exercício 7.4
Uma certa empresa contratou um serviço de assessoria para ajudar a programar as vendas de um produto. Examinando o mercado, a linha de produção e a disponibilidade de caixa para investimentos em propaganda, a firma de assessoria chegou aos seguintes dados: sendo $N(t)$ o número de pessoas que vêem os anúncios da empresa no instante t,

- $N(t)$ satisfaz a uma equação logística

$$\frac{dN}{dt} = N(a - bN)$$

- Uma pesquisa de mercado registrou que

$$N(0) = 500 \quad \text{e} \quad N(1) = 1000$$

- A previsão máxima para o número de pessoas que verão os anúncios veiculados é 50.000.

A partir daí os assessores garantiram ser possível calcular o número de pessoas expostas aos anúncios em cada instante t. Alegando problemas contratuais, a Assessoria se recusou a concluir o trabalho
Dê uma mãozinha à firma e determine uma expressão para $N(t)$, de modo que ela possa fazer a melhor programação de produção e distribuição do produto.

Exercício 7.5
Dois reagentes A e B produzem uma terceira substância C de tal modo que a taxa instantânea de criação de C é proporcional, em cada instante, ao produtos das quantidades de A e B que ainda não se transformaram. Inicialmente havia $40gr$ de A e $50gr$ de B. A reação é de tal forma que para formar $1gr$ de C são necessárias $2gr$ de A e $1gr$ de C. Finalmente, observou-se que ao final dos primeiros $10min$ necessários formam-se $10gr$ de C. Qual a quantidade máxima de C que se produzirá após um longo período?

Exercício 7.6
A equação

$$\frac{dA}{dt} = A\sqrt{4 - 2A}$$

fornece um modelo simplificado para a altura $A(x) > 0$ de um ponto a x quilômetros da costa, situado sobre um *tsunami* (onda gigantesca, provocada por um maremoto ou tempestade).

- Determine, por inspeção (i.é, por tentativa), as soluções constantes da equação acima.
- Resolva a equação diferencial do item anterior (se necessário, use um sistema de computação algébrica)
- Use um programa de computação para desenhar o gráfico da solução que satisfaz a condição inicial $A(0) = 2$

Resumo

Esta aula não introduziu nenhum conceito matemático novo. Em compensação foi uma aula de exploração das potencialidades das técnicas de cálculo para a análise geométrica de soluções de equações diferenciais.

A mensagem mais importante, e que não custa repetir, é que não basta resolver analiticamente uma equação. A parte mais interessante em geral é a análise/interpretação das soluções.

Estudamos:

- Exemplos de resolução e análise de soluções de duas equações separáveis
- modelos populacionais de Malthus e de Werhulst
- um modelo para reações químicas de segunda ordem

Avaliação

Apesar de não conter nenhuma matemática nova, esta aula seguramente foi uma das mais exigentes, tanto na preparação, quanto no estudo. Numa primeira leitura, sugerimos que você procure entender os exemplos e modelos apresentados, buscando uma visão panorâmica . Depois então você pode voltar e "divertir-se" à vontade com as contas, os desenhos das soluções e muitas outras questões que podem lhe ocorrer. Se você fizer uma pesquisa Internet,vai se surpreender com a quantidade de aplicações de equações diferenciais. E olhe que estamos só no começo.

Não deixe de consultar o seu tutor a distância, sempre que achar necessário.

Não desanime com o tamanho dos exemplos e problemas. Uma das tarefas mais importantes (e difíceis) é extrair um modelo matemático de uma situação concreta, resolvê-lo matematicamente, e depois entender e interpretar os resultados.

Aula 8 – Equações de Coeficientes Homogêneos

Objetivos

Ao final desta aula você será capaz de

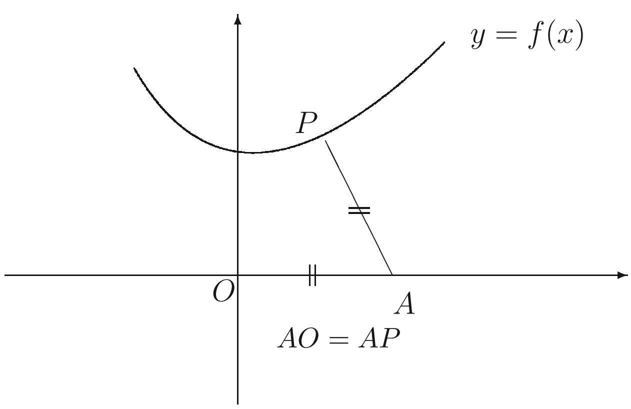
1) Identificar e resolver as equações diferenciais de coeficientes homogêneos

2) Resolver equações do tipo $\dfrac{dy}{dx} = F\Big(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\Big)$

Introdução

Nesta aula, introduziremos as equações de coeficientes homogêneos e certas equações que dependem de funções racionais de x e y. A característica comum dessas equações é que elas são redutíveis a equações separáveis. Neste sentido, esta aula desempenha o mesmo papel que a aula sobre equações de Bernoulli e Riccati desempenhou com relação às equações lineares.

Problema *Calcular a equação da curva $C : y = f(x)$ em que o comprimento do segmento da perpendicular traçada da origem à reta tangente em cada ponto é igual ao módulo da abcissa do ponto de tangência.*



Solução: :

Como o gráfico da função $y = f(x)$ descreve a curva C procurada, então

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \alpha(x) = (x, f(x))$$

é uma parametrização da curva C, onde I é um intervalo aberto. Note que num ponto arbitrário $P = (x, y) = (x, f(x))$ o vetor tangente $\vec{v_P}$ é dado por

$$\vec{v_P} = (1, f'(x)) = (1, dy/dx).$$

Então um vetor normal $\vec{n_P}$ à reta tangente é

$$\vec{n_P} = \left(-\frac{dy}{dx}\ ,\ 1\right).$$

Considere agora (X, Y) as coordenadas dos pontos da reta tangesnte à curva no ponto $P = (x, y) = (x, f(x))$. Então,

$$< (X - x, Y - y), \vec{n_P} >= 0,$$

onde a operação acima é o produto interno.

Logo

$$-\frac{dy}{dx} \cdot (X - x) + 1 \cdot (Y - y) = 0,$$

ou seja,

$$-\frac{dy}{dx}X + Y + x\frac{dy}{dx} - y = 0 \qquad (*)$$

é a equação da reta tangente.

Recordemos agora que a fórmula da distância de um ponto (x_0, y_0) à reta de equação $AX + BY + C = 0$ é

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|.$$

Aplicando esta fórmula à equação (*) com $(x_0, y_0) = (0, 0)$ e simplificando, obtemos

$$|x| \left|\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right| = \left|y - x\frac{dy}{dx}\right|.$$

Elevando os dois lados ao quadrado :

$$x^2 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = y^2 + x^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\frac{dy}{dx}$$

ou ainda

$$x^2 - y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} = 0,$$

que é a equação diferencial do problema.

Apesar de não ser separável, usando uma mudança de variáveis simples, podemos converter a última equação numa equação separável. Para ver como se faz isso, vamos manipular um pouco a equação, escrevendo-a na forma

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 - y^2}{2xy} = -\frac{x^2\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)}{2xy}$$

ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 - (y/x)^2}{2(y/x)} \qquad (**)$$

Considere a mudança de variáveis $v = y/x$. Ela equivale a $y = vx$. Derivando em relação a x, encontramos que

$$y' = v + xv'.$$

Substituindo em (**), temos uma nova equação na variável v:

$$v + xv' = -\frac{1 - v^2}{2v}.$$

Simplificando,

$$\frac{2v\ dv}{1 + v^2} = -\frac{dx}{x}.$$

Esta última equação é de variáveis separáveis.
Assim,

$$\int \frac{2v}{1 + v^2}\ dv = -\int \frac{dx}{x}$$

Ou seja,

$$ln(1 + v^2) = -lnx + \tilde{k}, \qquad \tilde{k} = \text{ constante.}$$

Fazendo $\tilde{k} = ln\ k$, obtemos que

$$ln(1 + v^2) + ln\ x = ln\ k, \qquad k = \text{constante } > 0,$$

ou ainda que

$$x(1 + v^2) = k.$$

Recordando que $v = y/x$, obtém-se que

$$1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{k}{x}.$$

Finalmente, escrevemos a equação da curva solução na forma

$$x^2 + y^2 = kx,$$

a qual é facilmente reconhecível como sendo a família de círculos com centros nos pontos $(k/2, 0)$ e raios $= k/2$.

Definição 8.1
(Funções homogêneas / Equações de coeficientes homogêneos)

$$G : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

é *homogênea de grau* k se

$$\forall (x, y) \in U, \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ tal que } (tx, ty) \in U \qquad G(tx, ty) = t^k G(x, y).$$

Uma equação diferencial

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0, \qquad M, N : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

é de coeficientes homogêneos quando ambas $M(x, y)$ e $N(x, y)$ são funções homogêneas de mesmo grau.

Exemplo 8.1
A função $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ é homogênea em $\mathbb{R}^2$?

Solução: Seja $t \in \mathbb{R}$ t.q. $(tx, ty) \in \mathbb{R}^2$. Se t é um número um real *qualquer*. Tem-se

$$\sqrt{(tx)^2 + (ty)^2} = |t|\sqrt{x^2 + y^2}$$

Vemos então que a função *não* é homogênea em todo o $\mathbb{R}^2$.

Entretanto, restringindo o domínio ao primeiro quadrante é fácil ver que obtemos uma função homogênea de grau 1.

Atividade 8.1

Diga quais das funções abaixo são homogêneas em todo seu domínio, indicando o grau de homnogeneidade:

a) $f(x,y) = x^4 + 3x^2y^2 + y^4, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$

Resposta: ______________________________

b) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$

Resposta: ______________________________

c) $f(x,y) = sen\Big(\dfrac{xy}{x^2 - y^2}\Big), \qquad (x,y) \in A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \neq \pm y\}$

Resposta: ______________________________

d) $g(x,y) = y - xcos^2\Big(\dfrac{x}{y}\Big), \qquad (x,y) \in \{(x,y) \in \ \mathbb{R}^2; y \neq 0\}$

Resposta: ______________________________

Solução da equação de coeficientes homogêneos

Considere a equação de coeficientes homogêneos

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Suponha que $N(x,y) \neq 0$ em todos os pontos do domínio de N. Podemos escrever

$$\frac{dy}{dx} = -\ \frac{M(x,y)}{N(x,y)}.$$

Dividindo o numerador e denominador do lado direito por x^k, onde k é o coeficiente de homogeneidade da equação, resultará uma função de y/x. Assim,

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right) \qquad\qquad (***)$$

Fazemos agora a substituição

$$\frac{y}{x} = v,$$

de modo que

$$y = vx, \qquad y' = v + xv'$$

e a equação (***) se transforma em

$$v + x\frac{dv}{dx} = F(v)$$

ou ainda

$$\frac{dv}{F(v) - v} = \frac{dx}{x},$$

que é uma equação separável.

Exemplo 8.2
Determine as soluções de $(x^2 + y^2) + (2x + y)y\,\dfrac{dy}{dx} = 0$

Solução:

$$y = vx \quad \therefore \quad y' = v + xv'$$

$$(x^2 + v^2x^2) + (2x + vx)vx(v + xv') = 0$$

$$(1 + v^2) + (2v + v^2)(v + xv') = 0$$

$$1 + v^2 + 2vx + v^3 + v^2xv' = 0$$

Separando as variáveis:

$$\frac{dx}{x} + \frac{2v + v^2}{1 + 3v^2 + v^3} = 0$$

Integrando

$$ln(x) + \frac{1}{3}\,ln(1 + 3v^2 + v^3) = k_1 = -lnk$$

$$3(lnk + lnx) + ln(1 + 3v^2 + v^3) = 0 = ln1$$

$$3ln(kx) + ln(1 + 3v^2 + v^3) = ln1$$

$$ln[k^3x^3(1 + 3v^2 + v^3)] = ln1 \qquad (\text{substituindo} \quad v = y/x)$$

$$cx^3\left(1 + 3\frac{y^2}{x^2} + \frac{y^3}{x^3}\right) = 1 \qquad (\text{onde fizemos} \quad k^3 = c)$$

As equações $\dfrac{dy}{dx} = F\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$

Um dos fundadores do estudo moderno de aerodinâmica foi o matemático Nikolai E. Zhukovskii, nascido em 1847. Em sua tese de mestrado (Moscou - 1876), entitulada "Cinemática de um Fluido", ao estudar o problema das trajetórias de um fluxo bidimensinal em uma vizinhança de um ponto onde as componentes da velocidade se anulam, Zhukovskii se deparou com o problema de estudar o comportamento das curvas integrais da equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + dy} \qquad (ad - bc \neq 0),$$

em vizinhanças da origem, e deu uma classificação dos *pontos críticos* de tais equações.

Equações do tipo acima, e outras mais gerais cujos coeficientes são funções racionais de x e y, foram estudadas por Poincaré em seus artigos fundamentais, dos anos de 1881 a 1886, que inauguraram um novo campo de estudo de equações diferenciais: a chamada teoria qualitativa de equações diferenciais.

Não vamos, neste curso, penetrar nesta vasta área da Matemática. O comentário acima serve apenas para chamar a atenção sobre a importância das equações que são funções racionais (i.e, quocientes de polinômios) nas variáveis x e y. Poincaré, na verdade, considerou primeiramente equações lineares (com coeficientes racionais e/ou algébricos), e depois equações não-lineares, para as quais - via de regra - não sabemos calcular soluções explícitas.

Utilizando mudanças de coordenadas convenientes podemos transformar equações do tipo

$$\frac{dy}{dx} = F\Big(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\Big)$$

em equações de coeficientes homogêneos ou em equações separáveis.

De fato, se efetuarmos a mudança das variáveis x e y para as variáveis X e Y por meio das fórmulas

$$y = Y + k, \qquad x = X + h \qquad\qquad \text{onde } h, k \quad \text{são constantes,}$$

então, pela regra da cadeia

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dY}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dX} = \frac{d}{dy}(y + K) \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d}{dX}(X - h) = 1 \cdot \frac{dy}{dx} \cdot 1 = \frac{dy}{dx}$$

Consideremos então a equação

$$\frac{dy}{dx} = F\Big(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\Big)$$

Temos duas possibilidades:

$$(i)\ det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0 \qquad (ii)\ det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = 0$$

Suponhamos que ocorre o caso (i). Então o sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 & = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 & = 0 \end{cases}$$

possui solução única, digamos

$$x_0 = h, \qquad y_0 = K$$

Façamos a mudança de variáveis $X = x - x_0$ e $Y = y - y_0$. Então

$$x = X + h, \qquad y = Y + K$$

Substituindo x e y por $X + h$ e $Y + K$ respectivamente, na equação dada:

$$\frac{dy}{dx} = F\Big[\frac{a_1(X+h) + b_1(Y+K) + c_1}{a_2(X+h) + b_2(Y+K) + c_2}\Big]$$

isto é

$$\frac{dY}{dX} = F\Big[\frac{a_1X + b_1Y + a_1h + b_1K + c_1}{a_2X + b_2Y + a_2h + b_2K + c_2}\Big]$$

ou ainda

$$\frac{dY}{dX} = F\Big[\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\Big]$$

que é uma equação de coeficientes homogêneos.

Suponhamos agora que vale o caso (ii):

$$det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = 0$$

Então

$$a_1b_2 = a_2b_1$$

isto é

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = m$$

Assim

$$a_2 = ma_1, \qquad\qquad b_2 = mb_1$$

e substituindo na equação obtemos

$$\frac{dy}{dx} = F\Big(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{m\ a_1x + mb_1y + c_2}\Big)$$

Fazemos agora a mudança de variáveis

$$t = a_1x + b_1y$$

de modo que

$$y = \frac{1}{b_1}(t - a_1 x)$$

e

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b_1}\Big(\frac{dt}{dx} - a_1\Big).$$

Substituindo na equação

$$\frac{1}{b_1}\Big(\frac{dt}{dx} - a_1\Big) = F\Big(\frac{t + c_1}{m\ t + c_2}\Big)$$

isto é

$$\frac{dt}{dx} = \underbrace{b_1 F\Big(\frac{t + c_1}{m\ t + c_2}\Big) + a_1}_{G_1(t)}$$

que é uma equação separável.

Exemplo 8.3

Resolva

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 3y - 1}{4x + 6y + 4}$$

Solução: Temos

$$det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = 12 - 12 = 0$$

Façamos a mudança $2x + 3y = t$. Então

$$y = \frac{1}{3}(t - 2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left(\frac{dt}{dx} - 2\right)$$

Substituindo na equação

$$\frac{1}{3}\left(\frac{dt}{dx} - 2\right) = \frac{t - 1}{2t + 4}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{3t - 3}{2t + 4} + 2 = \frac{7t + 5}{2t + 4}$$

$$\frac{2t + 4}{7t + 5}\ dt = dx$$

$$\left(\frac{2}{7} + \frac{18/7}{7t + 5}\right)\ dt = dx$$

Integrando

$$\frac{2}{7}\ t + \frac{18}{49}\ ln(7t + 5) = x + c$$

ou

$$2t + 18\ ln(7t + 5) = 49x + k$$

e como $t = 2x + 3y$,

$$4x + 6y + 18\ ln(14x + 21y + 5) = 49x + k$$

$$2y - 15x + 6\ ln(14x + 21y + 5) = k$$

Exercícios

Exercício 8.1
Determine as soluções gerais de :

a) $(x^2 - y^2) - 2xy\ y' = 0$

b) $(x^2 + y^2) - xy\ y' = 0$

c) $(x - y)\ dx - (x + y)\ dy = 0$

d) $x\ dy - y\ dx = \sqrt{x^2 + y^2}\ dx$

e) $\dfrac{dy}{dx} = e^{(y/x)} + \dfrac{y}{x}$

f) $\Big(x\ sen\Big(\dfrac{y}{x}\Big) + x + y\Big) - x\ \dfrac{dy}{dx} = 0$

Respostas: a) $x^3 - 3xy^2 = c$; **b)** $cx = e^{(\frac{y^2}{2x^2})}$ **c)** $x^3 + 3xy^2 + y^3 = c$; **d)** $\sqrt{x^2 + y^2} + y = C\ x^2$;
e) $y = -x\ ln\Big[ln\Big(\dfrac{c}{x}\Big)\Big]$; **f)** $ln\ (Cx) = tg\ \Big(\dfrac{y}{x}\Big) - sec\ \Big(\dfrac{y}{x}\Big)$

Exercício 8.2
Empregue a técnica do exercício anterior para resolver:

1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x - 3y - 1}{3x + y - 2}$
Resposta: $2x^2 - 6xy - y^2 - 2x + 4y + C = 0$

2) $(x + 2y - 4) - (2x + y - 5)y' = 0$
Resposta:$(x - y - 1)^3 = C(x + y - 3)$

3)$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x - y + 1}{6x - 3y - 1}$
Resposta: $5x - 15y + 4ln(10x - 5y - 3) = C$

4) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + 2y + 1}{2x + 4y + 3}$
Resposta: $ln(4x + 8y + 5) + 8y - 4x = C$

Resumo

Nesta aula estudamos duas classes de equações cujas soluções recaem na solução de equações separáveis, a saber:

- As equações de coeficientes homogêneos

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$$

tais que ambas $M(x,y)$ e $N(x,y)$ são funções homogêneas de mesmo grau (o que equivale a $\dfrac{-M(x,y)}{N(x,y)}$ poder ser escrita como uma função da variável $z = y/x$, e que transforma a equação original numa equação separável)

- As equações
$$\frac{dy}{dx} = F\Big(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\Big),$$
cujo estudo recai no das equações de coeficientes homogêneos, ou então diretamente no das equações separáveis.

Avaliação

Continuamos na linha geral estabelecida desde a primeira aula, onde o foco principal tem sido na obtenção de métodos de obtenção de soluções (métodos para "integrar") equações. Ainda estamos em pleno século XVIII, onde grandes sucessos foram obtidos na integração de certos tipos particulares de equações diferenciais.

Nesta aula vimos mais dois tipos de equações que podem ser integradas diretamente, com auxílio de substituições adequadas.

Aula 9 – Definições Gerais. Famílias de Curvas a um parâmetro

Objetivos

Ao terminar de estudar esta aula você estará apto a

1) Definir equações diferenciais gerais de primeira ordem e estabelecer as primeiras classificações das mesmas, visando a estudar sistematicamente o conceito de solução

2) Definir soluções gerais e soluções particulares de equações diferenciais de primeira ordem a partir do conceito de família de curvas planas a um parâmetro.

3) Associar a uma equação de primeira ordem a uma família de curvas a um parâmetro

4) construir, com auxílio da teoria de equações diferenciais, uma coleção de curvas ortogonais a uma dada coleção de curvas planas.

Introdução

Depois dos problemas e equações de tipos particulares examinados nas aulas anteriores, convém fazer uma pausa para balanço, e abordar algumas questões de natureza mais teórica. Por exemplo:

-Pergunta: O que é uma equação diferencial ordinária?

- Bem $\cdots$ Se você me apresentar uma equação que envolve funções, derivadas, e se ela for de um dos tipos que estudamos até agora (lineares, Bernoulli, etc.) então eu sei dizer que estamos diante de uma equação diferencial, mas assim de modo geral $\cdots$

-Pergunta: O que se entende por resolver uma equação diferencial ordinária?

É sempre possível calcular todas as soluções de uma equação diferencial ordinária qualquer?

- Olha, francamente isso eu não sei. Eu acho que entendo bem o que é uma solução de uma equação, mas, tirando os tipos de equações que estudamos até agora, não tenho idéia de como calcular soluções.

-Pergunta: Será que teremos de ficar definindo "tipos" de equações e descobrindo métodos para resolver cada tipo?

- Equações de tipos especiais existem, motivadas pelos mais diversos tipos de problemas e, tal como no passado, continuam merecendo estudos em separado. Todavia nossa capacidade de inventar equações que não se enquadram em nenhum tipo visto antes parece inesgotável. Além disso, não foi formulando equações abstratas e tentando resolvê-las por si mesmas o que fez a teoria de equações diferenciais avançar.Ao contrário, equações e problemas bem concretos foram os principais motivadores do desenvolvimento da teoria.

Por outro lado responder a certas questões, como as perguntas acima, é fundamental. Até para nos dar um balizamento, umas referências quando estivermos diante de equações específicas.

Vamos estabelecer então um compromisso intermediário: fazer uma pausa e tentar destacar um certo número de conceitos gerais presentes nas equações que já estudamos, e organizar (classificar)o material visto até agora. Entretanto continua válida a filosofia de trabalho que temos adotado: os modelos com equações devem ser o mais possível relacionados com questões relevantes, tanto da matemática quanto das outras ciências.

A pausa que estamos propondo é muito importante para que você possa organizar o material estudado e acompanhar os próximos desenvolvimentos.

Nosso "cardápio principal" será constituído pela noção de *equação diferencial de primeira ordem (abstrata)*, acompanhada da respectiva noção de *solução* de equação diferencial. Em particular estaremos interessados em saber se é possível calcular *todas* as soluções de uma equação. E como fazê-lo.

Quadro resumo: O quadro abaixo resume o nosso trabalho até agora:

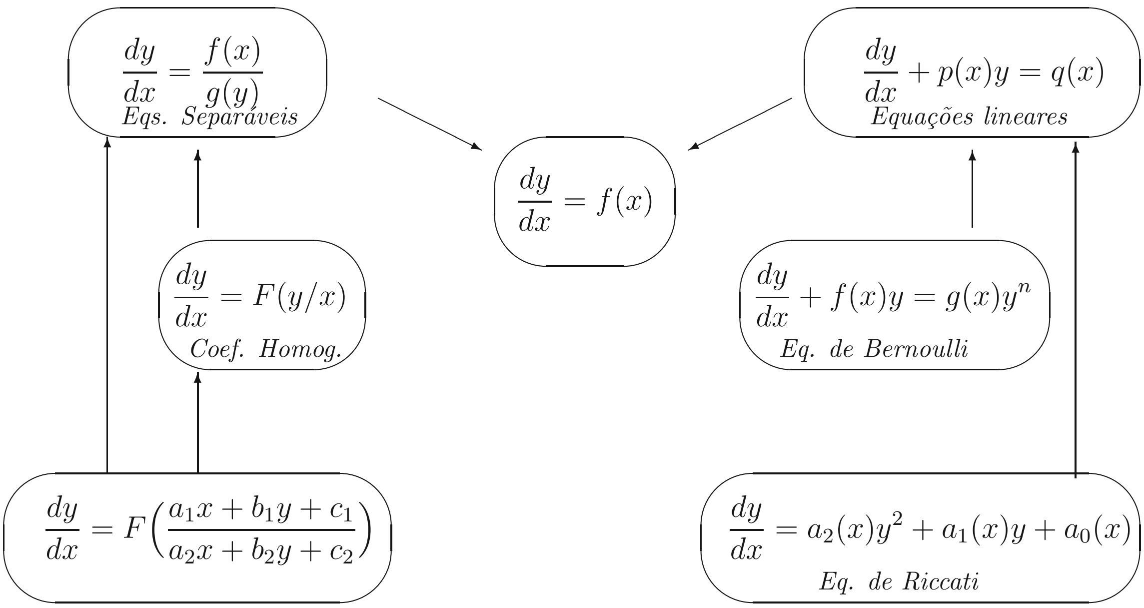


Diagrama 9.1

Observações sobre o diagrama:

1. As setas indicam que, por exemplo, as equações de coeficientes homogêneos e de Bernoulli se reduzem respectivamente a equações separáveis e a equações lineares de 1^a ordem, as quais - por sua vez - se reduzem à equação Fundamental.

   Observação semelhante vale para as equações $\frac{dy}{dx} = F\Big(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\Big)$ e para as equações de Riccati.

2. **ATENÇÃO!ATENÇÃO!** O diagrama pode levar a pensar que, por exemplo, o conjunto das equações de Riccati não tem elementos comuns com o conjunto de equações separáveis, ou que o conjunto das equações separáveis é disjunto do das lineares de primeira ordem. Isso é falso! Considere os seguintes exemplos:

Exemplo 9.1

A equação $y' = y + xy + 1 + x$ é simultâneamente uma equação separável e uma linear de primeira ordem.

Com efeito, fatorando o lado direito obtemos

$$y' = (y + 1) \cdot (x + 1)$$

mostrando que a equação é separável.

Por outro lado a equação pode ser posta na forma

$$y' - (1+x)y = 1+x$$

que está na forma geral das lineares não homogêneas.

O diagrama 9.1 pretende apenas representar a cadeia de dependências lógicas em que as equações foram apresentadas, ressaltando que, no fundo, tudo acaba se rementendo ao Cálculo Diferencial.

Além de - é claro! - indicar a unidade da teoria.

Atividade 9.1

Resolva a equação do exemplo 9.1 tanto como equação separável quanto como equação linear. Você obteve as mesmas soluções?

Atividade 9.2

A equação $y' = \sigma + \sigma y^2$ é simultâneamente uma equação separável e uma equação de Riccati. Certo ou errado? Justifique.

Caso você conclua que a afrimação é verdadeira, obtenha as soluções da equação por dois métodos diferentes e compare-as.

Uma outa observação útil para continuarmos nosso trabalho é que todas as equações que estudamos podem ser englobadas numa forma padrão, a saber:

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

onde M e N são funções diferenciáveis definidas em abertos do plano (x,y).

Exemplo 9.2

Vejamos o caso das equações lineares de 1^a ordem:

$$\begin{aligned} y' + p(x)y = q(x) \quad &\Longrightarrow \quad y' + [p(x)y - q(x)] = 0 \\ &\Longrightarrow \quad 1 \cdot \frac{dy}{dx} + [p(x)y - q(x)] = 0 \end{aligned}$$

Podemos tomar $N(x,y) = 1 \qquad M(x,y) = [p(x)y - q(x)]$.

Por sua vez, as equações $M(x,y) + N(x,y)\dfrac{dy}{dx} = 0$ ainda podem ser reescritas na forma $G(x,y,\dfrac{dy}{dx}) = 0$, que é a forma mais geral de uma equação envolvendo uma função incógnita y da variável x e sua derivada de primeira ordem.

Definição 9.1

Uma *Equação Diferencial Ordinária* de 1^a ordem é uma equação da forma

$$F(x, y, y') = 0$$

definida por uma função F cujo domínio é num aberto $A \subset \mathbb{R}^3$ com valores em $\mathbb{R}$

Exemplo 9.3

Alguns exemplos de equações diferenciais de primeira ordem:

- $m\dfrac{dy}{dt} = mg - \gamma\, y$, que é a equação que governa o movimento de um objeto caindo na atmosfera, próximo ao nível do mar. m é a massa, γ é o coeficiente de resitência do ar e g a aceleração da gravidade.
- $\sqrt{xyy' - 3} + y = 32$
- $e^{\sqrt{y}} + x^2\; tg(y') = 2\; sen(x)$
- $y' = 2x/y^3$

Atividade 9.3

Construa três exemplos de equações diferenciais de primeira ordem, sendo que no primeiro a derivada está elevada à quinta potência, no segundo apareça um logaritmo da função $y(x)$ e no terceiro a soma das $x + y$ seja proporcional à raiz sétima do produto de y pelo log de xy'

Solução:

i) ____________________

ii) ____________________

iii) ____________________

Os poucos exemplos acima deixam claro que podemos inventar um número infinito de equações de de primeira ordem. É portanto conveniente que estabeleçamos alguns critérios para agrupar as sequações em subcoleções que sejam mais tratáveis.

Classificações

Em primeiro lugar, a denominação equação *ordinária* se deve ao fato de que nas equação só ocorrem derivadas ordinárias, isto é derivadas de funções de uma só variável. Em contraposição às equações ordinárias, temos as equações a derivadas parciais, ou simplesmente *equações parciais*, onde aparecem funções que dependem de duas ou mais variáveis e suas derivadas (parciais).

Exemplo 9.4

A carga elétrica $Q(t)$ de um circuito formado de uma única malha onde estão presentes uma resistência R, um capacitor com capacitância C, ema bobina com indutância L, alimentadas por uma bateria de $f.e.m$ E é governada pela seguinte equação diferencial

$$L\,\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + +R\,\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C}\,Q(t) = E(t)$$

Trata-se de uma equação diferencial ordinária.

Observação: Apesar de só estarmos estudando equações onde a ordem máxima das derivadas que ocorrem é UM, daí a denominação equação de ordem um, ou de primeira ordem, é fácil estender a definição dada para equações ordinárias (ou parciais) de ordem $n \geq 2$.

O último exemplo acima é o de uma equação ordinária de ordem dois

Um exemplo famoso de equação diferencial parcial é o da equação que governam a distribuição de temperatura u nos pontos (x, y, z) de um sólido, num instante de tempo t:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \alpha^2 \frac{\partial u}{\partial t}$$

Obs: Neste curso, estaremos restritos ao estudo de equações diferenciais ordinárias somente.

Outra classificação que é útil no estudo das equações diferenciais é

> Definição 9.2
> O *grau* de uma equação diferencial ordinária de 1^a ordem é o expoente ao qual está elevada a derivada da função incógnita que aparece na equação

Exemplo 9.5

O grau de $y = 2tg(y') - x^2$ é um, ao passo que o grau de $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 - xy^{10} + 2 = 0$ é três.

Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias

Como destacamos na introdução a esta aula, um conceito central no estudo de equações diferenciais é o de solução. Até agora, seguindo a linha principal de pesquisa desenvolvida até fins do século XVIII, nossos esforços principais tem sido dirigidos à questão de obter todas as soluções de uma equação diferencial dada, ou de todas as equações de um tipo especial. Na verdade, temos sido movidos por alguma espécie de fé que nos faz acreditar que é sempre possível calcular todas a soluções, englobar todas as soluções numa única fórmula, envolvendo constantes arbitrárias, a partir da qual - atribuindo-se valores às constantes arbitrárias - poderemos obter todas as soluções específicas que desejarmos.

Tirando a equação fundamental,onde o Cálculo garante que duas soluções quaisquer sobre um intervalo diferem por uma constante, não temos a menor garantia de que seja possível estabelecer uma relação envolvendo todas as soluções possíveis de uma dada equação.

Nosso objetivo principal é discutir criticamente o conceito de solução de equação diferencial de primeira ordem. Nosso guia nessa parte da jornada será a Geometria, que vai nos emprestar diversas noções muito importantes para o sucesso de nosso empreendimento.

Definição 9.3
Uma *solução* da equação $F(x, y, y') = 0$, num intervalo $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ é uma função $\psi(x)$ definida em (α, β) tal que:

- $\forall x \in (\alpha, \beta) \qquad (x, \varphi(x)) \in U$

- $F(x, \psi(x), \psi'(x)) \equiv 0$ idênticamente em x.

Inicialmente vamos testar soluções de equações, sem nos preocuparmos com a manneira com que foram calculadas.

Exemplo 9.6

(Testando as soluções de equações diferenciais dadas)

Mostre que a função $\varphi(x) = \dfrac{1}{ln[12\ (1-x)]}$ é uma solução da equação $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{1-x}$. Indique os intervalos onde esta solução é válida.

Solução: A verificação consiste em substitui y e suas derivadas que aparecem na equação, por $\varphi(x)$ e as correspondentes derivadas. Se obtivermos uma igualdade verdadeira para todos os valores de x num intervalo, então φ será uma solução naquele intervalo. Vejamos:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) = \frac{1}{12\ ln(1-x)} \quad &\Longrightarrow \quad \varphi'(x) = \frac{1}{1\ ln^2(1-x)} \cdot \left(-\frac{1}{12(1-x)}\right) \cdot (-12) \\
&\Longleftrightarrow \quad \varphi'(x) = \frac{1}{(1-x)\ ln^2(12\ (1-x))} \qquad (i)
\end{aligned}$$

Por sua vez

$$\frac{\varphi^2(x)}{(1-x)} = \frac{1/ln^2\ (12(1-x))}{(1-x)} = \frac{1}{(1-x)\ ln^2(12\ (1-x))} \qquad (ii)$$

Claramente $(i) = (ii)$ de modo que somos tentados a afirmar que φ é uma solução da equação.

Mas $\cdots$

a função log só é bem definida para valores positivos do argumento. Além disso, como ela está aparecendo num denominador, devemos evitar os valores do argumento que anulam log, isto é os valor de x tais que $log(12\ (1-x)) = 0$.

Assim, para que φ seja uma função bem definida, devemos ter $12\ (1-x) > 0$ e portanto $x < 1$ e, além disso, $12\ (1-x) \neq 1$, ou seja $x \neq 11/12$.

Os intervalos onde a solução está bem definida são $(-\infty, 11/12)$ e $(11/12, 1)$. **Atenção:** Não basta obter uma fórmula. É preciso analisá-la.

Exemplo 9.7

(Soluções explícitas e soluções implícitas) Freqüentemente não é possível (ou é muito trabalhoso) conseguir uma solução de uma equação diferencial que seja da forma explícita $y = \varphi(x)$. É bem mais comum encontrar como solução uma equação envolvendo tanto a variável independente x, como funções de x e a variável dependente y e funções de y. Já encontramos vários exemplos de tais 'soluções" a partir do estudo de equações de Bernoulli. Por exemplo, ao procuras as soluções da equação de coeficientes homogêneos

$$(x^2 - y^2)\ dx - 2xy\ dy = 0$$

chega-se à fórmula

$$x^3 - 3xy^2 = c$$

como sendo a fórmula que define as soluções.

Neste caso a solução, ou melhor, as soluções $y = y(x)$ estão definidas implicitamente pela equação acima. Para determinar uma solução e seu intervalo de validade, em geral precisamos acrescentar uma informação extra, um dado inicial, que nos permita escolher um pedacinho de gráfico escondido na fórmula que dá a solução $y = f(x)$.

Voltaremos a esse ponto.

Exemplo 9.8

(Uma solução definida "aos pedaços")

É fácil verificar que $\varphi(x) = cx^4$ é um conjunto de soluções da equação $xy' = 4y$ definida no intervalo $(-\infty, +\infty)$.

Mas a função

$$\psi(x) = \begin{cases} -x^4, & \text{se } x < 0 \\ x^4 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Também é uma solução da equação.

Um bom exercício de Cálculo I, para recordar, é mostrar que ψ é derivável em $x = 0$ e que ψ é realmente uma solução definida em todo o $\mathbb{R}$.

E repare que ψ não pode ser obtida do primeiro conjunto de soluções pela mera escolha de um valor para c.

Trata-se de uma solução "especial".

E este exemplo já deixa "balançando" a idéia de uma fórmula que contenha todas as soluções de uma equação diferencial.

Comentário: Passamos agora a investigar a possibilidade de obtenção de todas as soluções de uma equação por meio de uma expressão.

Discussão do conceito de solução geral de uma equação de primeira ordem

Nas aulas anteriores usamos diversas vezes a expressão *solução geral*, com o significado intuitivo de ser uma expressão que "contém" todas as soluções possíveis de uma dada equação.

Para obter uma solução específica, basta calcular o valor adequado do parâmetro.

Também desde o início do estudo de equações diferenciais, a estratégia de resolução de problemas de valor inicial com equações diferenciais tem sido a seguinte: primeiro, obtenha uma expressão contendo uma constante, que engloba todas as soluções possíveis da equação sob exame; em seguida, escolha a solução apropriada para o seu problema, calculando o valor da constante.

Algumas vezes é isso mesmo o que fazemos.

Todavia veja a atividade seguinte:

Atividade 9.4
Considere a equação de grau dois

$$(y')^2 = \frac{1 - y^2}{y^2}, \qquad y < 0$$

- a) Verifique que a função constante $y = -1$ é solução.
  (Observe que $y' = 0 = \dfrac{1-(-1)^2}{(-1)^2}$)

- b) Verifique também que, para cada $c \in \mathbb{R}$, o semicírculo $y = -(1 - (x+c)^2)^{1/2}$ situado abaixo do eixo dos x também é solução da equação $(y')^2 = \dfrac{1-y^2}{y^2}$.

- c) Repare que além da coleção de soluções definidas por $(x+c)^2 + y^2 = 1$ ainda temos uma solução especial, $y = -1$, que não pode obtida pela simples escolha de um valor para a constante.

Solução:

A conclusão que podemos tirar desta atividade é que nem todas as soluções de uma equação têm de estar englobadas numa única fórmula envolvendo uma constante arbitrária.

Reforço: É necessário examinar criticamente a noção de solução geral de uma equação diferencial

Famílias de curvas planas a um parâmetro

Uma *família de curvas a um parâmetro* é uma equação

$$F(x, y, p) = 0$$

onde $F : \Omega \times I \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, Ω é um aberto do plano e J um intervalo da reta.

Diz-se também que a família está indexada pelo parâmetro p.

Exemplo 9.9

Consideremos a famíia de parábolas $y^2 = 4px$, indexada pelo parâmetro p.

Para cada $p \in \mathbb{R}$ tem-se uma parábola de diretriz $x = -p$ e foco $F = (p, 0)$.

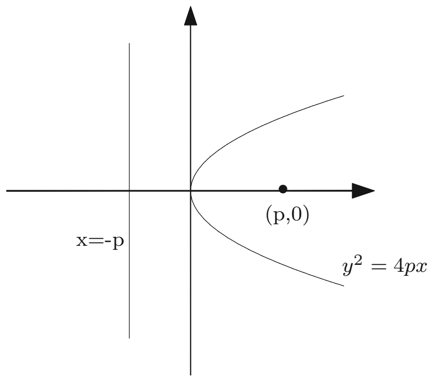


Figura 9.1

Todas as parábolas dessa família definem soluções da mesma equação diferencial.

Com efeito,

$$y^2 = 4px$$

$$\therefore \quad 2yy' = 4p$$

Substituindo o valor $4p$ da segunda equação na primeira:

$$y^2 = 2yy'x$$

ou seja

$$y = 2y'x.$$

Resolvendo esta equação separável, tira-se:

$$\frac{2dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

de onde

$$ln(y^2) = ln(Kx)$$

E portanto , fazendo $K = 4p$, segue-se a afirmação.

Uma classe particular de conjunto de curvas planas contendo um parâmetro é obtida por seções de gráficos de funções reais de duas variáveis.

Muitas das equações que definem implicitamente soluções de equações diferenciais de primeira ordem são da forma

$$\varphi(x, y) = c.$$

A interpretação geométrica dessas soluções é a seguinte :

Dada

$$\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

diferenciável, a fórmula

$$\varphi(x, y) = c$$

define o conjunto de nível da função φ, o qual é o conjunto das curvas obtidas pela interseção do gráfico de φ com planos $z = c$.

Exemplo 9.10

A figura 9.2 mostra uma parte do gráfico da função $\varphi(x, y) = (x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}$.

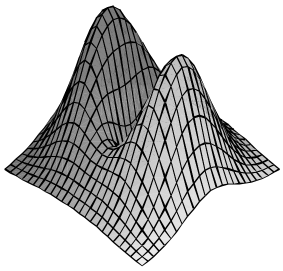


Figura 9.2

A figura 9.3 mostra o gráfico da função $\varphi(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ seccionado por alguns planos horizontais $z = c$

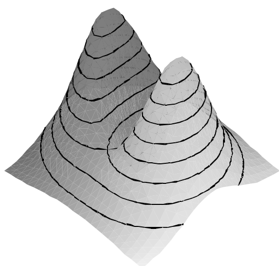


Figura 9.3

As projeções dessas curvas no plano xy serão referidas simplesmente como curvas $\varphi(x, y) = c$.

O *mapa de contorno* de φ é a coleção das projeções das curvas de nível de φ no plano xy e define um *conjunto de curvas planas indexado por um parâmetro.*

No caso, o parâmetro é o nível c. A figura 9.4 mostra algumas das curvas de nível correspondentes à função φ da figura 9.2.

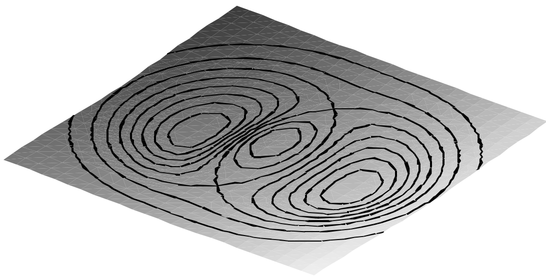


Figura 9.4

Exemplo 9.11

A tabela abaixo mostra que as soluções das principais equações que estudamos até agora cabem no "formato" $\varphi(x, y) = c$:

Equação	Soluções	Soluções na forma (ii)
$y' = f(x)$	$y = \int f(x)\ dx + c$	$\underbrace{y - \int f(x)\ dx - c = 0}_{H(x,y,c)=0}$
$y' + p(x)y = q(x)$	$y = [\mu(x)]^{-1}\Big(\int \mu(t)q(t)\ dt + c\Big)$	$\underbrace{y\mu(x) - \int \mu(x)q(x)\ dx - c = 0}_{H(x,y,c)=0}$
$dy/dx = f(x)/g(y)$	$G(y(x)) = \int f(x)\ dx + c$	$\underbrace{G(y) - \int f(x)\ dx - c = 0}_{H(x,y,c)=0}$

Tabela 10.1

Solução geral e soluções particulares de uma equação diferencial de primeira ordem

Dispondo da noção de família de curvas planas, podemos propor uma definição para solução geral de uma equação diferencial de primeira ordem.

Definição 9.4
Uma *solução geral* de uma equação diferencial de primeira ordem

$$F(x, y, y') = 0$$

definida em um aberto $I \times \Omega \subset \mathbb{R}^3$, onde I é um intervalo real e Ω é um aberto do $\mathbb{R}^2$, é uma coleção de funções $\{\varphi_p\}_{p\in\Lambda}$, definidas (explicita ou implicitamente) pelas curvas de uma família a um parâmetro $G(x, y, p) = 0$ (no sentido de que, para cada p fixado, $G(x, \varphi_p(x), p) = 0$) e tal que, para cada p,

$$\begin{cases} (x, \varphi_p(x), \varphi_p'(x)) \in \Omega \\ F(x, \varphi_p(x), \varphi_p'(x)) = 0 \end{cases}$$

Obs: É, sem dúvida, uma definição complicada. No entanto procuremos lembrar que soluções de equações saõ *funções* . Dizer, por exemplo, que $x^2 + y^2 = c$ é a solução geral da equação $x + yy' = 0$ realmente não é correto. Esta fórmula (mesmo fixando um valor para c) não representa o gráfico de enhuma função. O que podemos dizer que as soluções da equação estão definidas implicitamente pela família definida pela fórmula.

Definição 9.5
Uma *solução particular* de uma equação diferencial de primeira ordem

$$F(x, y, y') = 0$$

é qualquer uma das funções φ_λ pertencentes a uma solução geral $\{\varphi_p\}_{p\in\Lambda}$ da mesma.

Exemplo 9.12
A solução geral da equação fundamental

$$\frac{dy}{dx} = f(x), x \in (a, b) \subset \mathbb{R},$$

onde f é contínua sobre (a, b), é

$$F(x) = c + \int_{x_0}^{x} f(t)\ dt,$$

x_0 sendo um ponto qualquer de (a, b)

Comentário: Calcular uma solução geral para uma equação pode ser uma questão bem difícil. Os exemplos anteriores mostram que pode ser que não exista uma fórmula que abarque todas as soluções de uma dada equação. Por outro lado, ao estudarmos equações lineares, veremos que uma mesma equação pode ter uma infinidade de soluções gerais (todas equivalentes num sentido a ser precisado).

Não vamos nos aprofundar nestas questões.

Está claro que existe uma correspondência entre equações diferenciais ordinárias e famílias de curvas planas indexadas por um parâmetro.

Nos exercícios, examinaremos a questão inversa de determinar uma equação diferencial que corresponda a uma família de curvas planas dada.

Vamos investigar agora um problema famoso na história da Matemática, envolvendo equações diferenciais e famílias de curvas planas.

Trajetórias ortogonais

Nota Histórica

O problema das trajetórias ortogonais foi proposto pela primeira vez por Johann Bernoulli no ano de 1694, quando ele pediu a Leibniz que considerasse a seguinte questão

> "Conhecidas as posições de um número infinito de curvas dadas, ache a curva que intersecta todas elas segundo ângulos retos."

Bernoulli afirmou que o problema lhe era familiar há muito tempo, e comentou que tinha recomeçado a pensar nele ao deparar com um artigo de Leibniz, de 1694, a respeito da envoltória de famílias de curvas [6]. Ele motivou o problema das trajetórias ortogonais referindo-se à teoria ondulatória da luz de Huyghens desenvolvida no livro *Traité de la lumiére* (1690); lá os raios de luz são vistos como as trajetórias ortogonais às frentes de onda, e assim, Johann Bernoulli sugeria que métodos de calcular trajetórias ortogonais a famílias de curvas seriam importantes para determinar os raios de luz. Bernoulli só tinha conseguido resolver o problema para alguns casos particulares, como por exemplo o de algumas famílias de parábolas, e assim ele estava pedindo a Leibniz que descobrisse uma regra analítica geral para calcular tais trajetórias , exatamente como ele havia acabado de desenvolver para as envoltórias.

Vejamos a versão de Lagrange para o algoritmo geral que Leibniz produziu para resolver a questão. Hoje em dia, a questão é considerada como um exercício, cuja primeira parte é exatamente o de formar uma equação diferencial apropriada, a partir de uma família de curvas, (não será a equação da própria família, mas sim uma outra) num processo análogo ao que temos feito nesta aula. A segunda parte do exercício é de certa forma mais sutil, qual seja, a de resolver a equação que construímos, o que pode ser expressado como associar uma família de curvas à equação,i.é, resolvê-la. Voltaremos a esse ponto, sistematicamente, a partir da próxima aula.

O método de Leibniz/Lagrange pode ser ilustrado da seguinte maneira:

Se duas curvas C_1 e C_2 se intersectam ortogonalmente em um ponto P e se ambas possuem retas tangentes com inclinações m e m' respectivamente, então sabe-se da Geometria Analítica que

$$m \cdot m' = -1.$$

Utilizaremos essa propriedade para calculara a família de curvas (trajetórias) orotognais a todas as curvas de uma famíia dada. Dada uma família de curvas

$$G_1(x, y, p) = 0,$$

obtemos primeiramente a equação diferencial satisfeita por todas as curvas dessa família:

$$F(x, y, y') = 0.$$

A seguir, constrói-se a equação diferencial

$$F(x, y, -1/y') = 0$$

e calcula-se uma solução geral para ela, digamos

$$G_2(x, y, p) = 0.$$

Todas as curvas desta família G_2 intersectam ortogonalmente as curvas da família G_1.

Exercícios

Exercício 9.1

Refaça a atividade considerando a equação $y' = \dfrac{1-y^2}{y^2}$ definida para $y > 0$. Mostre que $y \equiv 1$ é uma solução. Mostre que os semicírculos superiores $(x+c)^2 + y^2 = 1$ também são soluções.

Exercício 9.2

Determine a ordem de cada uma das equações abaixo :

1) $x\dfrac{d^3y}{dx^3} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0$

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$

3) $t^5 \dfrac{d^4y}{dt^4} - \pi \dfrac{d^2y}{dt^2} + 6y = 0$

Respostas: 1) Ordem 3. 2) Ordem 2.
3) Ordem 4.

Exercício 9.3
Mostre que $y = \frac{6}{5}(1 - e^{-20t})$ é uma solução explícita para a equação diferencial linear de primeira ordem $\frac{dy}{dx} + 20y = 24$.
Determine o maior intervalo de validade dessa solução.

Resposta: O maior intervalo de validade é $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

Exercício 9.4
Podemos afirmar que a fórmula $2x^2 - 6xy + y^2 + 2y + c = 0$ define implicitamente soluções da equação diferencial

$$(2x - 3y)\ dx - (3x - y - 1)\ dy = 0$$

sem resolver a equação?

Resposta: Sim. Basta calcular dy/dx derivando implicitamente a fórmula dada e verificar que obtemos a solução apresentada.

Exercício 9.5
Mostre que a expressão $x + \sqrt{x^2 + y^2} - c = 0$ define implicitamente soluções da equação

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{dy}{y} = \frac{xdy}{y\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Sugestão: Mostre que a equação apresentada é equivalente a $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x - \sqrt{x^2 + y^2}}$. Depois, derivando implicitamente a fórmula $x + \sqrt{x^2 + y^2} - c = 0$ obtenha a mesma expressão para $\dfrac{dy}{dx}$.

Exercício 9.6
(a) Verifique que $\phi_1(x) = x^2$ e $\phi_2(x) = -x^2$ são soluções da equação diferencial $xy' - 2y = 0$ no intervalo $(-\infty, +\infty)$.

(b) Verifique que a função definida por partes

$$y = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

também é solução de $xy' - 2y = 0$ no mesmo intervalo $(-\infty, +\infty)$.

Exercício 9.7
Mostre que a função indicada é solução da equação diferencial dada e indique um intervalo de definição dessa solução:

(a) $y' = 25 + y^2; \qquad y = tg\ 5x$

(b) $2y' - y^3\ cos(x) = 0; \qquad y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - sen(x)}}$

Respostas:
(a) Um dos intervalos de validade da solução é $\left(-\dfrac{\pi}{10}, \dfrac{\pi}{10}\right)$

(b) Um dos intervalos de validade da solução é $(0, \pi)$

Exercício 9.8
Obtenha uma equação diferencial para a família de retas passando pelo ponto (a, b), excetuando a reta vertical.

Resposta: $y - b = y'(x - a)$.

Exercício 9.9
Obtenha uma equação diferencial correspondente à família $\dfrac{x^2}{p^2} + \dfrac{y^2}{1 - p^2} = 1$

Resposta: $x(x - yy') + \dfrac{y^2(x - yy')}{x - yy' - x^2} = 1$

Exercício 9.10
Obtenha as equações diferenciais que admitem como soluções as famílias

$a)\ y = ax + tgh(a) \qquad (b)\ y^2 = 2ax + a^2$

Respostas: (a) $y = xy' + tgh(y')$ $\qquad (b)\ y = 2xy' + (yy')^2$

Exercício 9.11
Determine todas as curvas ortogonais a cada uma das seguintes famílias:

$(a) y = \lambda x^n \qquad (b) x^3 - 3xy^2 = \lambda.$

Respostas:$(a)\ x^2 - y^2 = xyy' \qquad (b)\ xy' = ny.$

Exercício 9.12
Achar as trajetórias ortogonais das famílias seguintes:

$a)\ x^2 + y^2 = p$	|	R : feixe de retas $y = kx$
$b)\ xy = p$	|	R : família de hipérboles $x^2 - y^2 = c$
$c)\ x^{2/3} + y^{2/3} = p^{2/3}$	|	R : $y^{4/3} - x^{4/3} = c^{4/3}$

Resumo

Nesta aula:

- Vimos a definição formal de uma equação diferencial de primeira ordem:

$$F(x, y, y') = 0$$

- Aprendemos a definição do que vem a ser uma solução de uma equação de primeira ordem
- Apresentamos o conceito de família de curvas planas indexada por um parâmetro.
- Definimos soluções gerais e soluções particulares de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem com a ajudo da noção de família de curvas indexadas por um parâmetro.
- aprendemos a calcular famílias orogonais a famílias de curvas planas dadas.

Avaliação

Procuramos nesta aula, começar a "arrumação da casa", percebendo que diversas noções que estivemos empregando mais ou menos livremente carecem de uma definição adequada. Não examinar criticamente as noções envolvidas pode nos deixar sem o necessário embasamento teórico,o que pode inclusive acarretar erros no processo de análise de equações e busca de suas soluções.

Estamos só no começo dessa tarefa de fundamentação. É uma parte bastante básica na nossa formação como profissionais da Matemática.

A aula prosseguiu em torno da questão das soluções gerais de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

Foi introduzido de maneira coerente o tópico clássico das famílias de curvas indexadas por um parâmetro e estabelecida sua relação com as equações diferenciais de primeira ordem.

Ao contrário do que nossa intuição e nossos primeiros exemplos poderiam sugerir, uma equação diferencial pode ter outras soluções além da solução geral. Como pode também ter muitas soluções gerais.

O melhor é falar em *uma* solução geral de uma equação.

Aula 10 – Equações Exatas e Fatores de Integração

Objetivos

1) Definir equações diferenciais fechadas e exatas e dar uma condição necessária e suficiente para que uma equação seja exata em uma região

2) Obter soluções de equações exatas

3) Transformar equações que não são exatas em equações localmente exatas através da multiplicação por funções convenientes.

Introdução

Sob condições apropriadas, utilizando o Teorema da Função Implícita, podemos destacar três classes no conjunto das equações de primeira $F(x, y, y') = 0$

$$
F(x,y,y') = 0 \quad \begin{array}{lll} \nearrow & y = f(x,y') & (I) \\ \longrightarrow & x = f(y,y') & (II) \\ \searrow & y' = f(x,y) & (III) \end{array}
$$

Intuitivamente a classe (I) corresponde às equações, obtidas da equação geral, ao tirar o valor de y em termos de x e de y'. Nem sempre podemos fazer isso; e mesmo quando podemos, em geral só é possível numa vizinhança limnitada[7].

Observações semelhantes valem para as equações dos tipos (II) e (III).

Podemos aplicar às duas primeiras sub classes de equações o método de substituição e derivação, que consiste em fazer a substituição $y' = p$ e derivar as equações resultantes, ora com respeito a x, ora com respeito a y).

Assim,

[7] você é convidado a rever o Teorema da Função Implícita

- derivando a equação (I) com relação a x, obtivemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} = p \ , \tag{10.1}$$

Após uma manipulação simples, chega-se a

$$\underbrace{\left(p - \frac{\partial f}{\partial x}\right)}_{M(x,p)} + \underbrace{\left(-\frac{\partial f}{\partial p}\right)}_{N(x,p)} \frac{dp}{dx} = 0 \tag{10.2}$$

- derivando a equação (II) com relação a y, obtivemos

$$\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{1}{p}\right)}_{M(y,p)} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial p}}_{N(y,p)} \ \frac{dp}{dy} = 0 \tag{10.3}$$

Nesta aula, vamos nos dedicar às equações da forma

$$M(x,y) + N(x,y)\ \frac{dy}{dx} = 0.$$

Observação: até as equações de tipo (III) podem ser postas nesse formato.

Atividade 10.1
Mostre como uma equação da classe (III) pode ser escrita sob a forma

$$M(x,y) + N(x,y)\ \frac{dy}{dx} = 0$$

Solução:

Equações Fechadas e Exatas

Suponha que

$$\varphi(x,y) = C$$

define soluções de

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0 \tag{10.4}$$

implicitamente.

Isto é, para toda solução y,

$$\varphi(x, y(x)) = C.$$

Daí
$$\frac{d}{dx}\varphi(x, y(x)) = \frac{d}{dx}C = 0.$$
Mas então,
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (10.5)$$
Comparando (9.5) com (9.4), vemos que $\varphi_x = M$ e $\varphi_y = N$.

Definição 10.1
A equação
$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0 \qquad M, N : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
é *exata* na região U se existe uma função $\varphi(x, y)$ definida em U tal que para todo $(x, y) \in U$
$$\varphi_x(x, y) = M(x, y) \quad \text{e} \quad \varphi_y(x, y) = N(x, y).$$
A função φ é chamada de função potencial para a equação.

Exemplo 10.1
A equação $3x^2y + 8xy^2 + (x^3 + 8x^2y + 12y^2)\frac{dy}{dx} = 0$ é exata, pois existe $\varphi(x, y) = x^3y + 4x^2y^2 + 4y^3$ tal que
$$\varphi_x = 3x^2y + 8xy^2 \quad \text{e} \quad \varphi_y = x^3 + 8x^2y + 12y^2$$

Exemplo 10.2
Toda equação diferencial separável $dy/dx = f(x)/g(y)$, é exata.
Tome $\varphi(x, y) = -\int f(x)\ dx + \int g(y)\ dy$.

Mas como saber se existe existe uma tal função φ?

A resposta mais direta seria: exiba uma $\varphi(x, y)$. Mas issso já seria resolver a equação, e o que estamos querendo saber é se é possível saber se a equação tem soluções (sem ter de resolvê-la a priori).

Definição 10.2
A equação
$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0 \qquad M, N : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
é *fechada* na região U se em todo ponto $(x, y) \in U$
$$M_y(x, y) = N_x(x, y).$$

O seguinte resultado é fácil de constatar :

Teorema 10.1
Se uma equação

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0 \qquad \text{onde } M, N : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

são duas vezes continuamente deriváveis, é exata na região U então ela é fechada em U.

Demonstração: Usando o teorema de Schwarz sobre a igualdade de derivadas parciais mistas de funções duas vezes continuamente deriváveis, sempre que as soluções são dadas por $\varphi(x,y) = C$ valem $\varphi_x = M$ e $\varphi_y = N$,e como a função φ é duas vezes continuamente diferenciável, então

$$M_y = \varphi_{xy} = \varphi_{yx} = N_x.$$

Assim,

$$\boxed{\begin{array}{c}\exists\ \varphi \text{ e as soluções são definidas por} \\ \varphi(x,y) = C\end{array}} \Longrightarrow \boxed{\forall\ (x,y) \quad M_y(x,y) = N_x(x,y)}$$

Para nós, a recíproca é especialmente importante:

Teorema 10.2
Se uma equação

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0 \qquad M, N : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

é fechada em todos os pontos de uma região U então ela é localmente exata naquela região.

Questão: O que significa localmente exata?

Significa que, dado qualquer ponto $(x_0, y_0) \in U$, existe um retângulo $\mathcal{R}_{(x_0,y_0)} \subset U$ e uma função $\varphi_{(x_0,y_0)}$ que é solução da equação naquele retângulo $\mathcal{R}_{(x_0,y_0)}$.

Dizendo de outro modo: Podemos ter uma equação

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

com $M(x,y)$ e $N(x,y)$ definidos numa certa região $U \subset \mathbb{R}^2$, sendo que a condição $M_y = N_x$ vale em todos os pontos de U.

Para um certo ponto $(x_0, y_0) \in U$, existe um retângulo retângulo $\mathcal{R}_0 \subset U$ e uma função φ_0 definida em $\mathcal{R}_0$ que é solução da equação.

Para um outro ponto $(x_1, y_1) \in U$, existe um outro retângulo retângulo $\mathcal{R}_1 \subset U$ e uma função φ_1 definida em $\mathcal{R}_1$ que também é solução da equação. Mas não é obrigatório que $\varphi_0 = \varphi_1$.

as soluções podem variar de retângulo para retângulo

Comentário: O problema é que a região U pode conter lacunas que impedem a definição de uma função φ em todos os seus pontos.

Digressão:

Usando um pouquinho de Cálculo podemos entender porquê é importante que não haja lacunas na região U:

Partindo da equação diferencial $M(x,y) + N(x,y)\,\dfrac{dy}{dx} = 0$ constrói-se o campo de vetores $\overrightarrow{F}(x,y) = (M(x,y), N(x,y))$. Podemos calcular a integral de linha do campo $\overrightarrow{F}$ ao longo de qualquer curva (continuamente derivável) contida em U.

Pois bem, fixado um ponto qualquer $(x_0, y_0) \in U$, para cada outro ponto $(x,y) \in U$ podemos calcular a integral de linha de $\overrightarrow{F}$ ao longo de uma curva ligando (x_0, y_0) a (x,y): $\displaystyle\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \overrightarrow{F} \cdot ds$ O fato importante a lembrar é que se a região U não contém lacunas, então a integral de linha não depende da curva escolhida para ligar (x_0, y_0) a (x,y).

Conseqüentemente podemos definir uma função $\varphi(x,y)$ por $\varphi(x,y) = \displaystyle\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \overrightarrow{F} \cdot ds$

Esta função φ satisfaz à equação diferencial $M(x,y) + N(x,y)\,\dfrac{dy}{dx} = 0$.

Mas veja, a própria φ só fica bem definida se a região não possuir "buracos"

Quando a região possui lacunas, o máximo que podemos fazer é, para cada ponto $(x_0, y_0) \in U$, escolher um pequeno retângulo $\mathcal{R}_0$, contendo (x_0, y_0), e que esteja totalmente contido em U (sem faltar um só ponto). Aí, dentro deste retângulo, poderemos construir uma solução φ.

Comentário: O próximo teorema afirma que equações fechadas são exatas em regiões "equivalentes" a retângulos. ($\mathbb{R}^2$ pode ser pensado como um retângulo de lados infinitos)

Teorema 10.3

- Toda equação fechada em um semiplano aberto é exata nele.

- Toda equação fechada em $\mathbb{R}^2$ é exata (em $\mathbb{R}^2$)

- Toda equação fechada em uma bola aberta é exata

- Toda equação fechada em uma faixa infinita (veritcal ou horizontal) é exata

Obtendo soluções de equações exatas

Nota: Os resultados precedentes, nos dão condições (dependendo dos coeficientes da equação, e - em particular - da região onde eles estão definidos) para sabar se uma equação é exata, ou não.

É como uma espécie de teste que realizamos com os coeficientes da equação.

Resta ainda calcular as funções potenciais para as equações que tiverem passado no teste.

Neste curso, não vamos utilizar integrais de linha para construir funções potenciais.

Os exemplos a seguir nos dão um procedimento alternativo para obter φ. [8]

Exemplo 10.3

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x-y^2}$$

Solução: $M(x,y) = -(x-y), \qquad N(x,y) = x - y^2.$

Então

$$M_y = 1 = N_x$$

de modo que a equação é fechada em $\mathbb{R}^2$. Portanto é exata.

Existe uma $\varphi(x,y)$ tal que $\varphi_x = M$ e $\varphi_y = N$.

[8] Quando não for definida explicitamente, a região U é a maior região onde as funções M e N estão bem definidas e são continuamente diferenciáveis.

$$\varphi_x = M = -x + y \quad \Longrightarrow \quad \varphi(x,y) = \int [-x+y]\, dx + h(y)$$
$$\Longleftrightarrow \quad \varphi(x,y) = -\frac{x^2}{2} + yx + h(y)$$

Ora, $\varphi_y = N = x - y^2$.
Isto é $\dfrac{d}{dy}\Big[-\dfrac{x^2}{2} + yx + h(y)\Big]$ é igual a $x - y^2$. Assim,

$$x + h'(y) = x - y^2$$

de onde concluímos que $h'(y) = -y^2$ e portanto

$$h(y) = -\frac{y^3}{3} + C_1$$

Então

$$\varphi(x,y) = -\frac{x^2}{2} + yx - \frac{y^3}{3} + C_1$$

E as soluções da equação dada são definidas por

$$-\frac{x^2}{2} + yx - \frac{y^3}{3} + C_1 = C_2$$

ou (englobando as duas constantes numa só)

$$-\frac{x^2}{2} + yx - \frac{y^3}{3} = C$$

Exemplo 10.4

Resolva

$$(2x\ sen\ y + e^x cos\ y)\ dx + (x^2\ cos\ y - e^x\ sen\ y)\ dy = 0, \qquad y(0) = \pi/4$$

Solução: $M(x,y) = 2x\ sen\ y + e^x cos\ y$ e $N(x,y) = x^2\ cos\ y - e^x\ sen\ y$

$M_y = 2x\ cos\ y - e^x sen\ y = N_x$, portanto a equação é fechada em $\mathbb{R}^2$, logo é exata.

Existe uma $\varphi(x,y)$ tal que $\varphi_x = M$ e $\varphi_y = N$.

$$\varphi_y = N = x^2\ cos\ y - e^x\ sen\ y \Longrightarrow \varphi(x,y) = \int [x^2\ cos\ y - e^x\ sen\ y]\ dy + g(x)$$
$$\therefore \qquad \varphi(x,y) = x^2\ sen\ y + e^x\ cos\ y + g(x)$$

Ora, $\varphi_x = M = 2x\ sen\ y + e^x cos\ y$.
Isto é $\dfrac{d}{dx}\Big[x^2\ sen\ y + e^x\ cos\ y + g(x)]$ é igual a $2x\ sen\ y + e^x cos\ y$. Assim,

$$2x\ sen\ y + e^x cos\ y + g'(x) = 2x\ sen\ y + e^x cos\ y$$

de onde concluímos que $g'(x) = 0$ e portanto

$$g(x) = C_1$$

Então as soluções ficam definidas por

$$x^2 \; sen \; y + e^x \; cos \; y = C$$

E como $y(0) = \pi/4$,

$$0^2 \; sen \; \pi/4 + e^0 cos \; \pi/4 = C$$

logo $C = 2/\sqrt{2}$ E assim a solução é

$$x^2 \; sen \; y + e^x \; cos \; y = 2/\sqrt{2}$$

Obs.: No primeiro exemplo partimos de $\varphi_x = M$ e integramos com relação a x. No segundo, partimos de $\varphi_y = N$ e integramos com relação a y. Os dois procedimentos são equivalentes.

Fatores de Integração

Reconsideremos por um instante a equação linear de 1^a ordem, não homogênea: $y' + f(x)y = g(x)$, que vamos reescrever como

$$\underbrace{[f(x)y - g(x)]}_{M} + \underbrace{1}_{N} \cdot y' = 0$$

Temos

$$M_y = f(x) \qquad \text{ao passo que} \quad N_x = 0$$

e a equação não é exata.

Todavia, multiplicando-a por

$$\mu(x) = e^{\int f(x) \; dx}$$

a equação se torna

$$\underbrace{e^{\int f(x) \; dx}\Big([f(x)y - g(x)\Big]}_{\tilde{M}} + \underbrace{e^{\int f(x) \; dx}}_{\tilde{N}} y' = 0$$

a qual , como se vê facilmente, é exata.

Então $\exists \; \varphi(x, y)$ tal que

$$\varphi_x = e^{\int f(x) \; dx}\Big([f(x)y - g(x)\Big] \qquad (*)$$

e

$$\varphi_x = e^{\int f(x) \; dx} \qquad (**)$$

Daí ,

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y) &= \int e^{\int f(x)\ dx}[f(x)y - g(x)]\ dx + h(y) \\
&= \int \underbrace{e^{\int f(x)\ dx} f(x)}_{\frac{d}{dx}e^{\int f(x)dx}}\ dx - \int e^{\int f(x)dx} g(x)\ dx + h(y) \\
&= ye^{\int f(x)dx} - \int e^{\int f(x)dx} g(x)\ dx + h(y)
\end{aligned}$$

Logo

$$\frac{d}{dy}\Big[ye^{\int f(x)dx} - \int e^{\int f(x)dx} g(x)\ dx + h(y)\Big] = e^{\int f(x)dx} + h'(y)$$

E como, de acordo com a eq. (**), $\varphi_y = e^{\int f(x)\ dx}$, então $h'(y) = 0$.

Assim

$$\varphi(x,y) = ye^{\int f(x)dx} - \int e^{\int f(x)dx} g(x)dx + C_1$$

e as soluções são dadas por

$$\varphi(x,y) = ye^{\int f(x)dx} - \int e^{\int f(x)dx} g(x)dx = C,$$

isto é

$$\boxed{y = e^{-\int f(x)dx} \cdot \Big[\int e^{\int f(x)dx} g(x)dx + C\Big]}$$

exatamente como antes.

Questão: *Dada a equação*

$$M(x,y)\ + N(x,y)\ y' = 0,$$

existe $\mu(x,y)$ não identicamente nula tal que

$$\mu(x,y) \cdot M(x,y)\ + \mu(x,y) \cdot N(x,y)\ y' = 0$$

seja exata?

Resposta: *Caso exista uma tal função, que chamamos de fator de integração, teremos*

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x$$

ou seja

$$\frac{1}{\mu}\Big(N\mu_x - M\mu_y\Big) = M_y - N_x \tag{10.6}$$

Comentário: A equação acima é uma *equação diferencial parcial*, pois envolve derivadas parciais de $\mu(x, y)$. Nem sempre sua solução é simples. Entretanto, em muitas situações, é possível obter um fator de integração, como mostram os exemplos a seguir:

Exemplo 10.5

Suponha que μ seja função de x somente. Neste caso $\mu_y \equiv 0$, e a equação (14.6) se reduz a

$$\frac{1}{\mu}N\mu_x = M_y - N_x$$

Daí

$$\frac{\mu_x}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{N} \tag{10.7}$$

o que nos mostra que o lado direito é função só de x.

Reciprocamente, se $\dfrac{M_y - N_x}{N}$ é função somente de x Então a equação $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ tem fator integrante dependente só de x, dado por

$$\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}\ dx}$$

Prova:Basta verificar que

$$e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}\ dx} \cdot M(x, y) + e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}\ dx} \cdot N(x, y)y' = 0$$

é exata. Com efeito:

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}\ dx} \cdot M(x, y)\Big) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}\ dx} \cdot M_y$$

(pois o expoente é função somente de x).

Por sua vez

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}\ dx} \cdot N(x, y)\Big) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}\ dx} \cdot \frac{M_y - N_x}{N} \cdot N + e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}\ dx} \cdot N_x$$

$$= e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}\ dx} \cdot M_y \qquad \blacksquare$$

Exemplo 10.6

Considere a equação

$$(x^2y - x)y' + y = 0$$

Temos $M(x, y) = y, \quad N(x, y) = x^2y - x$. Logo

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-2}{x}$$

Então $\mu(x) = e^{\int \frac{-2\ dx}{x}} = x^{-2}$.
De fato, multiplicando a equação por μ obtemos uma equação exata (exercício).

Exemplo 10.7

Se $\dfrac{N_x - M_y}{M}$ é função somente de y, a equação $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ tem um fator integrante função somente de y, dado por

$$\mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M}\ dy}.$$

Exemplo 10.8

Suponha que μ seja função de $z = xy$. Então

$$\mu(x, y)M(x, y) + \mu(x, y)N(x, y)y' = 0$$

é exata se e só se

$$\mu_z yN + \mu N_x = \mu_z xM + \mu M_y$$

ou seja

$$\frac{\mu_z}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{yN - xM}$$

o que mostra que o lado direito é função de $z = xy$.

revertendo o raciocínio:

Se $\dfrac{M_y - N_x}{yN - xM}$ *é função de* $z = xy$ *a equação* $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ *tem um fator integrante função de* z*, dado por*

$$\mu(z) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{yN - xM}\ dz}.$$

Exercícios

Exercício 10.1

Resolva;

$$3t^2y + 8ty^2 + (t^3 + 8t^2y + 12y^2)\frac{dy}{dt} = 0 \qquad y(2) = 1$$

Resposta: $t^3y + 4t^2y^2 + 4y^3 = 56$

Exercício 10.2

Resolva;

$$4t^3e^{t+y} + t^4e^{t+y} + 2t + (t^4e^{t+y} + 2y)y' = 0 \qquad y(0) = 1$$

Resposta: $t^4e^{t+y} + t^2 + y^2 = 1$

Exercício 10.3

Determine se as equações abaixo são exatas ou não. Calcule as soluções das exatas:

$i)\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ax+by}{bx+cy}$

$ii)\quad \dfrac{x\ dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \dfrac{y\ dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

$iii)\quad (ye^{xy}cos\ 2x - 2e^{xy}sen\ 2x + 2x)\ dx + (xe^{xy}cos\ 2x - 3)\ dy$

Exercício 10.4

Determine o valor de b para o qual a equação

$$(xy^2 + bx^2y)\ dx + (x + yx^2)\ dy = 0$$

é exata. Resolva a equação para aquele valor de b.

Exercício 10.5

Determine as soluções de :

$a)\ (2x - y + 1)\ dx - (x + 3y - 2)\ dy = 0$

Resposta: $2x^2 - 2xy + 2x - y^2 + 4y = k$

$b)\ \left[y\ cos\ xy + \dfrac{y}{\sqrt{x}}\right]\ dx + \Big[x\ cos\ xy + 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{y}Big]\ dy = 0$

Resposta: $sen\ xy + 2y\sqrt{x} + ln\ y = C$

$c)\ (3x^2 + 6xy^2)\ dx + (6x^2y + 4y^3)\ dy = 0$

Resposta: $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$

$d)\ \dfrac{2x}{y^3}\ dx + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}\ dy = 0$

Resposta: $\dfrac{x^2}{y^3} - \dfrac{1}{y} = C$

$e)\ x\ dx + y\ dy = \dfrac{x\ dy + y\ dx}{x^2 + y^2}$

Resposta: $(x^2 + y^2)^2 - 4xy = k$

$f)\ (1 + y\ sen\ x)\ dx + (1 - cos\ x)\ dy = 0$

Resposta: $x - y\ cos\ x + y = C$

$g)\ [sec\ t \cdot tg\ t - w]\ dt + [sec\ w \cdot tg\ w - t + 2]\ dw = 0$

Resposta: $sec\ t - wt + sec\ w + 2w = C$

$h)\ 2t\ sen\ y + y^3e^t + (t^2\ cos\ y + 3y^2e^t)\dfrac{dy}{dt} = 0$

Resposta: $t^2sen\ y + y^3e^t = C$

Exercício 10.6

Determine fatores integrantes para as seguintes equações:

$a)(x^3y - x^2) + xy' = 0$

Resposta: $\mu = 1/xe^{(x^3)/3}$

$b)y\ dx + (ye^yx - y^2)\ dy = 0$

Resposta:$\mu = 1/ye^{e^y}$

$c)[y\ cos\ x - tg\ x]\ dx + sen\ x\ dy = 0$

Resposta: $\mu = cossec^2\ x$

Exercício 10.7

Verifique que $\mu(x,y) = \dfrac{1}{xy^3}$ é um fator de integração para

$$x^2y^3 + x(1+y^2)y' = 0.$$

A seguir "integre" a equação.

Resposta: $x^2 - 1/y^2 + ln\ y^2 = C$

Exercício 10.8

Resolva:

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2\ ln\ x + x^2 - y}{x} \qquad y(1) = 5$

Resposta: $x(3y - x^2\ ln\ x^3 + x^2) = 16$

Exercício 10.9

Determine as soluções das equações

$$(3x^2 - y^2)y' - 2xy = 0$$

$$(x^2 - xy)y' + (xy - 1) = 0$$

Exercício 10.10

Calcule uma função f tal que $\lambda(x,y) = xy$ seja um fator integrante da equação $(2y^2 - 6xy)\ dx + (3xy + f(x))\ dy = 0$

Resposta: $f(x) = -4x^2 + \dfrac{c}{x}$, $c \equiv$ constante

Resumo

Nesta aula abordamos as equações diferenciais da forma $M(x, y) + N(x, y)\,\dfrac{dy}{dx} = 0$, para as quais procuramos soluções determinadas por funções potenciais $\varphi(x, y)$.

Quando tais funções potenciais existem, dizemos que a equação $M(x, y) + N(x, y)\,\dfrac{dy}{dx} = 0$ é exata. Existem procedimentos padronizados para construir funções potenciais para equações exatas.

Uma condição necessária e suficiente para que uma equação $M(x, y) + N(x, y)\,\dfrac{dy}{dx} = 0$ seja exata num retângulo é que $M_y(x, y) = N_x(x, y)$ em todos os pontos do retângulo.

Se vale a condição $M_y(x, y) = N_x(x, y)$ em todos os pontos, a equação é dita ser fechada.

Em muitos casos, multiplicando uma equação que não é fechada por uma função conveniente $\mu(x, y)$, ela se torna uma equação fechada. Nestes casos, se a região é um retângulo (ou uma bola aberta, ou o plano todo) a equação multiplicada é uma equação exata. Se a região contém lacunas, a equação se torna apenas localmente exata.

Avaliação

Para encerrar esta aula, precisamos responder às seguintes perguntas: "Toda equação $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ admite um multiplicador?"

"Existe algum procedimento prático para calcular multiplicadores para uma equação?"

Repare que, se as respostas forem afirmativas, então, pelo menos em princípio, temos um técnica geral para resolver equações diferenciais localmente: basta calcular o multiplicador adequado e achar a função potencial correspondente.

Todavia o melhor resultado que temos é o seguinte:

> Teorema 10.4
> Se as funções M e N possuem derivadas parciais contínuas em todos os pontos da região U, e se $N(x_0, y_0) \neq 0$ em U então existe um fator integrante numa vizinhança de (x_0, y_0).

No próximo módulo, iniciaremos o estudo de uma classe de equações -

as lineares -, para as quais (usando o Teorema de Cauchy, é claro) pode-se mostrar que sempre existem soluções gerais, não existem soluções singulares, e todas as soluções gerais são equivalentes entre si (qualquer solução particular de uma das soluções gerais é também solução particular de qualquer outra solução geral, com outras constantes.Isto é, no mínimo, supreendente). Para culminar, tais equações são extremamente freqüentes e de enorme importância nas aplicações.

ISBN 85-7648-211-8

9 788576 482116

UENF
Universidade Estadual
do Norte Fluminense

UERJ
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Universidade Federal Fluminense
uff

Universidade do Brasil

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

UNIRIO

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

GOVERNO DO
Rio de Janeiro
SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB
UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL

Ministério
da Educação

BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL