Módulo 1

Volume 1
2ª edição

Cláudio Santos de Souza
Milene Maria D. Pimenta
Roberto Geraldo Tavares Arnaut

Construções Geométricas

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Fundação

CECIERJ

Consórcio cederj

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Construções Geométricas

Volume 1 - Módulo 1
2ª edição

Cláudio Santos de Souza
Milene Maria D. Pimenta
Roberto Geraldo Tavares Arnaut

GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Apoio:

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001
Tel.: (21) 2334-1569 Fax: (21) 2568-0725

Material Didático

ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO
Cláudio Santos de Souza
Milene Maria D. Pimenta
Roberto Geraldo Tavares Arnaut

COORDENAÇÃO DE DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL
Ana Tereza de Andrade

DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL E REVISÃO
Carmen Irene Correia de Oliveira
Nilce P. Rangel Del Rio

Departamento de Produção

EDITORA
Tereza Queiroz

COORDENAÇÃO EDITORIAL
Jane Castellani

REVISÃO TIPOGRÁFICA
Equipe CEDERJ

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO
Jorge Moura

PROGRAMAÇÃO VISUAL
Marcelo Freitas

COORDENAÇÃO DE ILUSTRAÇÃO
Eduardo Bordoni

ILUSTRAÇÃO
Equipe CEDERJ

CAPA
Eduardo Bordoni
Fábio Muniz

PRODUÇÃO GRÁFICA
Patricia Seabra

S729c

Souza, Cláudio Santos de.
Construções geométricas. v.1 / Cláudio Santos de Souza. – 2.ed. – Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.
196 p.; 21 x 29,7 cm.

ISBN: 85-89200-85-X

1. Construções geométricas. I. Pimenta, Milene Maria D. II. Arnaut, Roberto Geraldo Tavares. III. Título.

CDD: 516.15

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.

2010/1

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador
Sérgio Cabral Filho

Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia
Alexandre Cardoso

Universidades Consorciadas

UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Vieiralves

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Reitor: Roberto de Souza Salles

UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Aloísio Teixeira

UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Motta Miranda

UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitora: Malvina Tania Tuttman

SUMÁRIO

Aula 1 – Apresentação do Curso

Objetivos

Conhecer um breve histórico do assunto.
Conhecer os instrumentos fundamentais para construções geométricas, bem como sua manuntenção e manipulação.

Objetivos gerais

Construções Geométricas têm por finalidade representar as figuras planas e resolver, utilizando régua e compasso, os problemas de Geometria Básica. A régua é usada para traçar retas, semi-retas e segmentos de reta e o compasso descreve circunferências e arcos de circunferências. Dizemos que a solução gráfica de um problema é puramente geométrica, quando nela utilizamos, como instrumentos de desenho, apenas régua e compasso.

As construções contidas neste trabalho foram, em geral, justificadas e nas construções aproximadas calculamos os erros cometidos, pois devemos saber o grau de precisão dessas construções.

Um Breve Histórico

No Antigo Egito, os sacerdotes eram os homens mais poderosos do país.

Eram eles que fixavam os dias de festa e que exigiam a construção dos templos. Foram eles também que exigiram a construção das majestosas pirâmides que serviam de túmulos para os faraós.

Para realizar construções tão gigantescas, os arquitetos daquela época tinham que saber como fazer a planta dessas obras, como talhar, mover e colocar nos seus lugares enormes blocos de pedra.

Para saber tudo isso, os arquitetos das pirâmides realizaram diversas descobertas sobre a "arte de medir", isto é, sobre o que nós chamamos atualmente de Geometria.

Mas, não foi apenas no Egito que a Geometria se desenvolveu. A cerca de mil quilômetros a leste do Egito, entre os rios Tigre e Eufrates, e um pouco além, floresceu a civilização mesopotâmica, que muito se assemelhava à egípcia. Lá, também, os sacerdotes continuaram a estudar a Geometria, fazendo maravilhosos progressos no campo da Astronomia. E, assim, começou o processo de desenvolvimento da Geometria.

Na Grécia, a Matemática também se desenvolveu bastante. Segundo a tradição grega, foi Tales de Mileto quem, no início do sexto século a.C. trouxe a Matemática do Egito para a Grécia, e quem principiou a dar à Matemática a forma que ela sempre teve, desde a Antigüidade grega. Nosso conhecimento e estima da matemática grega estão baseados principalmente nos trabalhos de Euclides, Arquimedes e Apolônio. Estes três matemáticos viveram e trabalharam em um período de somente uns cem anos: Euclides em torno de 300 a.C.; Arquimedes, de mais ou menos 287 a 212 a.C. e Apolônio, em torno de 200 a.C.. Isso foi bem após a influência política grega ter entrado em decadência (Alexandre Magno morreu em 323 a.C.), e mesmo depois que a literatura e a arte gregas tinham atingido seu zênite. Convém ainda ressaltar que nenhum dos três viveu na Grécia continental. Euclides e Apolônio trabalharam em Alexandria, Apolônio tendo nascido em Perga, na Ásia Menor, enquanto que Arquimedes viveu na colônia grega de Siracusa, na Sicília, e foi morto em 212 a.C. durante o saque desta cidade pelos romanos.

Um dos problemas mais importantes e difíceis para os historiadores da Matemática grega é a reconstrução do que aconteceu antes de Euclides; com exceção de um pequeno trabalho sobre Astronomia de Autolico.

Os Elementos de Euclides são, portanto, o mais antigo texto matemático grego que nos chega completo, e a natureza deste trabalho impressionante mostra claramente porque isso aconteceu. Euclides conseguiu incorporar, neste único trabalho, de forma bem disposta e apresentada, praticamente todo o conhecimento matemático acumulado por seus antecessores. Os Elementos transformaram os escritos dos matemáticos anteriores em assuntos de simples interesse histórico, e desta maneira não foram copiados e assim não foram preservados para nós. É característico que um outro trabalho de Euclides, sobre seções cônicas, tenha sofrido destino semelhante; com efeito, foi tornado obsoleto pelo tratado brilhante de Apolônio.

Os Elementos de Euclides consistem de treze livros. Nestes treze livros, Euclides incorpora todo o conhecimento matemático acumulado em sua época, com algumas exceções notáveis, como as seções cônicas e a geometria esférica, e possivelmente algumas descobertas próprias. Seu grande feito é a apresentação do material sob uma bela forma sistemática e seu tratamento como um todo orgânico. No livro I ele apresenta cinco postulados e cinco axiomas, que formam as hipóteses sobre as quais repousa a teoria.

Os postulados e os axiomas são:

I) **Postulados**

Postulemos o seguinte:

1. É possível traçar uma linha reta de um ponto qualquer a um ponto qualquer.

2. É possível prolongar arbitrariamente um segmento de reta.

3. É possível traçar um círculo com qualquer centro e raio.

4. Dois ângulos retos quaisquer são iguais entre si.

5. Se uma reta, interceptando duas outras retas forma ângulos interiores do mesmo lado menores do que ângulos retos, então as duas retas , caso prolongadas indefinidamente, se encontram do mesmo lado em que os ângulos são menores do que dois ângulos retos.

II) **Axiomas**

1. Grandezas iguais a uma mesma grandeza são iguais entre si.

2. Se a grandezas iguais forem adicionadas grandezas iguais, as somas serão iguais.

3. Se grandezas iguais forem subtraídas de grandezas iguais, os resultados serão iguais.

4. Grandezas que coincidem entre si são iguais.

5. O todo é maior do que suas partes.

Os postulados são as hipóteses básicas relativas ao ramo específico do saber, neste caso a geometria plana, enquanto os axiomas são aceitos em todos os campos. Hoje, a maioria dos matemáticos não vêem mais a necessidade de tal distinção, mas chamam ambos os tipos de hipóteses de axiomas ou postulados.

Quanto às construções geométricas com régua e compasso, elas surgiram no século 5 a.C. e tiveram grande importância no desenvolvimento da Matemática grega. Nesse período, nasceu uma nova álgebra, completamente geométrica, quando a palavra resolver era sinônimo de construir. Nessa álgebra, por exemplo, a equação

$$d = ax = bc$$

não tinha significado porque o lado direito era associado à área de um retângulo e o lado esquerdo a um segmento de reta, e um segmento não pode ser igual a uma área. Entretanto, resolver a equação $ax = bc$ significava encontrar a altura x de base a que tivesse a mesma área de um retângulo de dimensões b e c. Esse problema era resolvido da seguinte forma, na Grécia Antiga:

Em primeiro lugar, constrói-se o retângulo $OABC$ com $AO = a$ e $OC = b$.

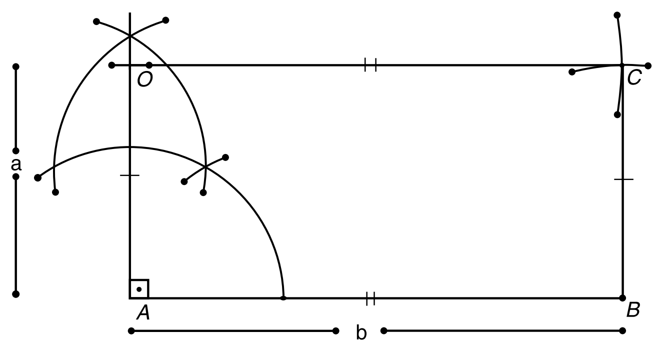


Figura 1: Resolução de $ax = bc$.

Sobre o lado AO toma-se um ponto D tal que $AD = c$ (no caso de $c > a$, D está no prolongamento do segmento AO).

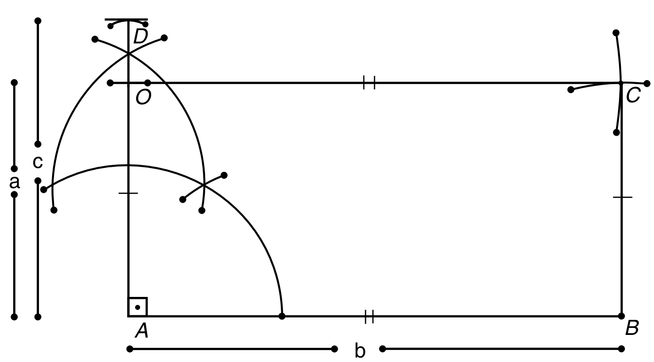


Figura 2: Resolução de $ax = bc$.

Traça-se DE paralelo a OC que intercepta o prolongamento de AC em E. O segmento DE é a solução do problema.

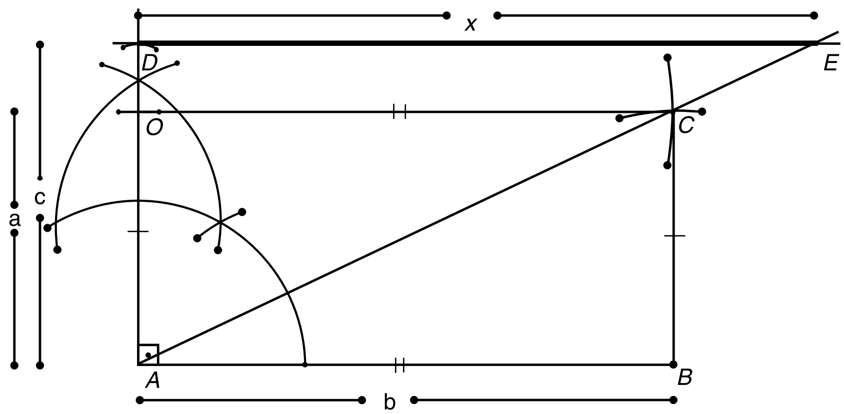


Figura 3: Resolução de $ax = bc$.

Justificativa: Os triângulos AOC e ADE são semelhantes, visto que são triângulos retângulos que possuem um ângulo agudo congruente, a saber $O\hat{A}C$ e $D\hat{A}E$. Portanto $\frac{\overline{AO}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{DE}}$, ou seja, $bc = ax$.

Para executar tal construção, foi necessário o traçado de segmentos de retas paralelos e perpendiculares, que são os primeiros problemas que precisamos resolver.

Construções Euclidianas

Até bem pouco tempo atrás, o nome de Euclides e a palavra geometria eram sinônimos. Foi Euclides, o primeiro a escrever as bases axiomáticas da Matemática. Ele o fez tão bem que praticamente descartou todos os trabalhos feitos anteriormente. Achamos que Euclides estudou em Atenas e foi um membro do famoso Museu/Livraria em Alexandria. Alexandria se tornou a cidade mais importante do mundo ocidental após a morte de Alexandre, o Grande; e permaneceu com esta importância até César de Roma dominar a cidade de Cleópatra. Mesmo com o crescimento de Roma, Alexandria continuou sendo a capital intelectual do Império. O poder de Alexandria se estendeu por cerca de mil anos, desde a época de Euclides em 300 a.C. até ser dominada pelos árabes em 641 d.C.. Atualmente localizada no Egito, a cidade de Alexandria era grega e seu nome completo era Alexandria-próxima-Egito.

O compasso e o Teorema de Mohr-Mascheroni

Problema de Napoleão: Encontrar quatro pontos P,Q,R e S que dividem a circunferência de centro O em quatro arcos congruentes somente utilizando o compasso.

Solução:

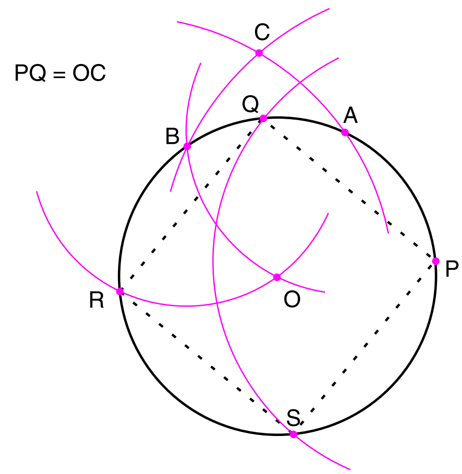


Figura 4

Caso haja um interesse maior de sua parte neste trabalho, é possível encontrá-lo em (bibliografia: Geometric Constructions, autor: George E. Martin, editora: Springer, 1997.)

Napoleão propôs aos matemáticos franceses o problema de dividir um círculo em quatro partes congruentes utilizando somente o compasso. Este problema ficou conhecido como Problema de Napoleão, apesar da formulação inicial não ter sido feita por ele. Durante sua campanha no norte da Itália, Napoleão encontrou o poeta e geômetra Lorenzo Mascheroni (1750 - 1800). Mascheroni era um professor da Universidade de Pávia. O trabalho matemático mais importante de Mascheroni foi Geometria del Compasso, publicado em 1797. Este trabalho, que foi dedicado a Napoleão, mostrou que todas as construções de régua e compasso podem ser feitas utilizando-se compasso somente. Surpreendentemente, qualquer ponto que pode ser construído usando régua e compasso, pode também ser construído sem a utilização da régua. Nas construções com compasso somente, uma reta (ou um segmento de reta) é considerada construída quando dois pontos distintos pertencentes a esta reta (ou segmento) estão determinados. Na prática, não podemos desenhar uma reta utilizando somente o compasso, mas podemos determinar algum ponto particular da reta a partir de interseções de círculos que foram desenhados com o compasso. Convém lembrar que não se espera que todos os pontos da reta construída sejam determinados.

O geômetra dinamarquês Johannes Hjelmslev (1873 - 1950) verificou a importância do trabalho "Euclides Danicus", que um estudante seu obteve em um sebo. Hejmslev tinha o livro republicado em 1928. Euclides Danicus surgiu por acidente cerca de dois séculos e meio após a sua primeira publicação, em 1672. O autor, Georg Mohr (1640 - 1697), se antecipou a Mascheroni por 125 anos. Entretanto, ele nasceu em Copenhagen, e deixou a Dinamarca quando jovem, para viver na Holanda. O livro foi escrito em 1672 em duas edições, uma dinamarquesa e a outra em alemão. As referências que existiam em relação a Euclides Danicus antes de 1928, incorretamente tratavam o pequeno livro como um comentário dos Elementos de Euclides ou somente como uma edição de uma parte do trabalho de Euclides.

Os geômetras Mohr e Mascheroni viveram em diferentes países e em diferentes épocas e de forma independente demonstraram que é possível dispensar o uso da régua nas construções geométricas clássicas.

Instrumentos de desenho geométrico

I) A Régua

A partir desse momento devemos entender a régua tanto como instrumento de medida como um instrumento que nos permite traçar linhas retas, e é essencialmente no segundo sentido que ela será utilizada nas construções. Devemos ressaltar que não será permitido o uso da escala da régua para executar operações, como por exemplo transferência de segmentos. A escala da régua somente será utilizada quando for exigida pelo enunciado do problema.

II) Lápis e Borracha

Pode-se utilizar lápis ou lapiseira com grafite, de preferência HB ou F. Sendo lapiseira, o grafite deve ser 0,3mm ou 0,5mm. A lapiseira tem a vantagem que nunca precisará apontar, o que é extremamente necessário para o lápis.

III) O Compasso

O compasso é um aparelho que nos permite construir circunferências ou arcos de circunferência, sendo conhecidos o centro e o raio. Tal aparelho é formado por dois "braços", unidos por uma extremidade, aos quais se permite movimentos de abrir e fechar os braços. Dividimos o compasso em três partes:

a) O apoio para a mão, que é exatamente na junção dos braços;

b) A ponta com grafite;

c) E a segunda ponta sem grafite, também chamada de “ponta seca” do compasso.

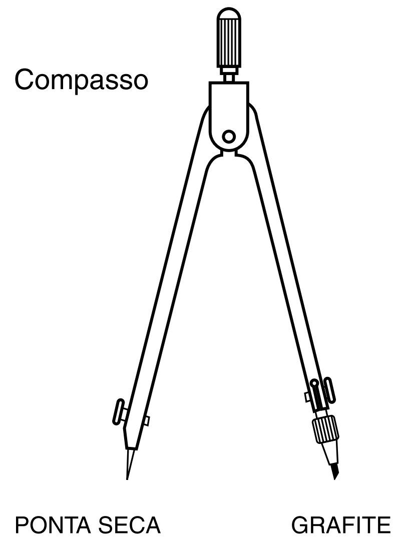


Figura 5

É importante para perfeição das construções que o grafite esteja sempre bem apontado. A ponta do grafite pode ser da forma cônica ou na forma de cunha como nas figuras abaixo:

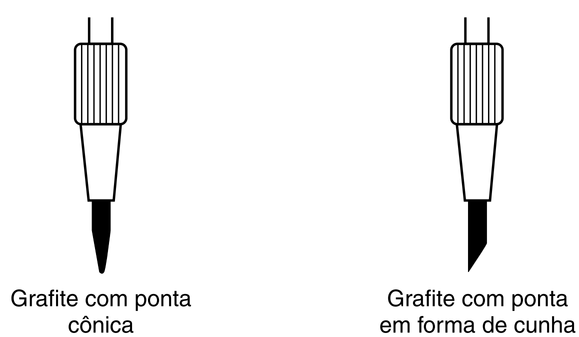


Figura 6

Na escolha de seu compasso de trabalho você deve considerar rigidez no suporte dos braços, que não devem ser muito curtos.

A construção de uma circunferência é feita apoiando-se a ponta seca num ponto(marcado)(1) escolhido como centro e girando o compasso com a mão no apoio e a ponta do grafite sobre o papel. A abertura dos braços do compasso pode ser determinada por um segmento qualquer previamente construído, basta apoiar as pontas sobre as extremidades.

(1): Antes de construir a circunferência não esqueça de marcar o centro com um lápis de grafite, pois sem este procedimento após a construção não será possível enxergar o centro, e em muitas construções o centro é fundamental.

Existem outros aparelhos também úteis em construções geométricas, que são o esquadro e o transferidor. Porém sua utilização não é fundamental e não será permitida, já que aprenderemos construções com régua e compasso que os substituirão.

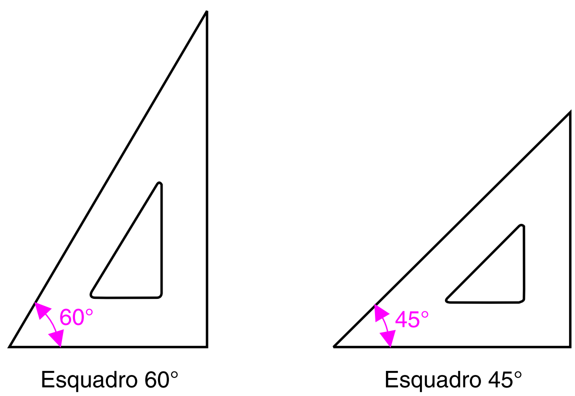


Figura 7

Existem dois modelos de transferidores:

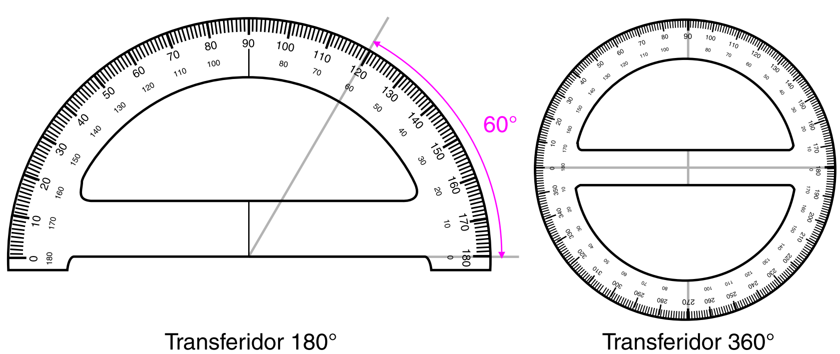


Figura 8

Denominamos por **lugar geométrico** um conjunto de pontos, de um espaço escolhido, onde todos respeitam uma propriedade determinada e somente eles a respeitam. Por exemplo, a **circunferência** é o lugar geométrico dos pontos do plano que estão a uma distância fixa, chamada de raio, de um ponto fixo, chamado centro da circunferência. Outro exemplo é chamado **mediatriz** de um segmento dado AB, que é definido como lugar geométrico dos pontos do plano que são eqüidistantes aos extremos do segmento. Uma reta determinada por dois pontos também pode ser vista como um lugar geométrico: é o lugar geométrico dos pontos do plano ou do espaço que estão alinhados com eles.

Observe na Figura 9 que o triângulo ACB é um triângulo isósceles de base AB, já que $AC = BC$. É claro que o ponto médio do segmento AB pertence à mediatriz, pois é eqüidistante de A e B. Assim a reta mediatriz é a reta suporte da mediana deste triângulo relativo à base, que coincide com a reta suporte da altura, visto que o triângulo é isósceles(reveja aula 3, de Geometria Básica.). Logo a mediatriz intercepta AB perpendicularmente em seu ponto médio.

Alguns problemas de construções, considerados como fundamentais podem ser considerados como problemas de obtenção de lugar geométrico. Um exemplo importante é a construção de uma reta paralela a outra dada. Tal problema pode ser escrito da seguinte forma:

- Obter o lugar geométrico dos pontos do plano que estão a uma distância fixa d de uma reta dada r.

O segredo do desenho geométrico é interpretar os entes geométricos, através de suas principais propriedades, afim de que possamos tirar bom proveito em outras construções, visto que toda construção geométrica feita neste curso será baseada em interseções de lugares geométricos. Em alguns casos as construções podem ter mais de um objetivo. Um exemplo clássico é a mediatriz de um segmento AB que respeita três propriedades:

- É perpendicular ao segmento AB;
- Intercepta o segmento no ponto médio;
- E conseqüentemente divide o segmento ao meio.

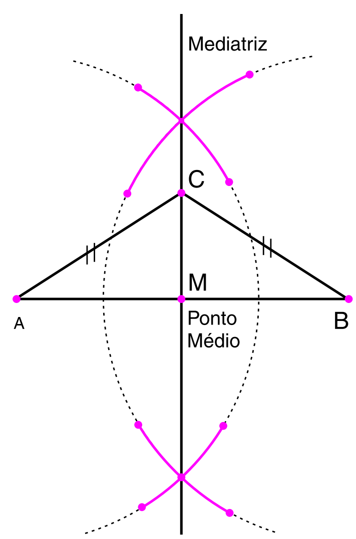


Figura 9: Reta mediatriz de um segmento AB.

Devido a isso devemos saber também interpretar os problemas relatados através de situações que envolvam certos lugares geométricos, que em geral são circunferências ou retas. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1

Construa um triângulo isósceles, com base BC sobre r, de vértice em A e sabendo que suas laterais têm comprimento a.

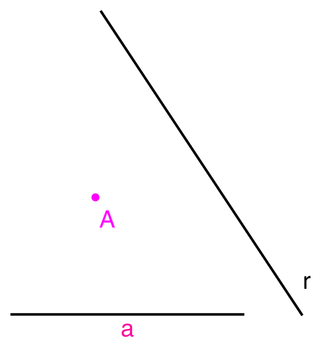


Figura 10: Exemplo 1.

Solução:

Sabemos que o triângulo isósceles possui dois lados iguais que são chamados laterais e o terceiro lado de base. Como a base é o lado BC, então os vértices B e C estão a uma distância de comprimento a do vértice A. Neste caso eles devem estar em uma circunferência λ de centro A e raio a. Como o segmento BC está sobre a reta r, então os pontos B e C são obtidos pela interseção de dois lugares geométricos: a reta r e a circunferência λ.

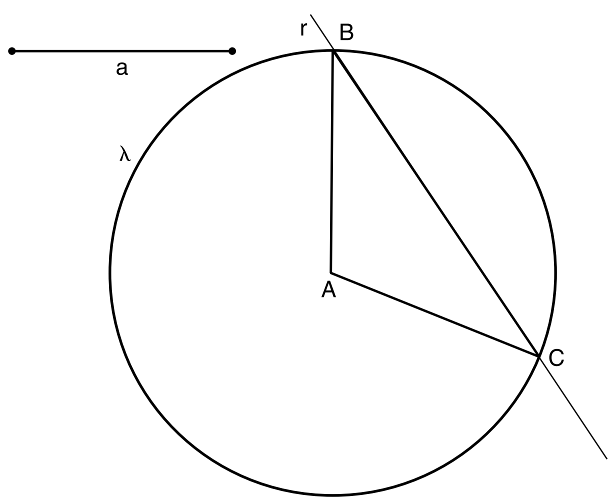


Figura 11: Exemplo 1.

Exemplo 2

Construir o lugar geométrico dos pontos médios das cordas de comprimento c da circunferência λ de centro O abaixo:

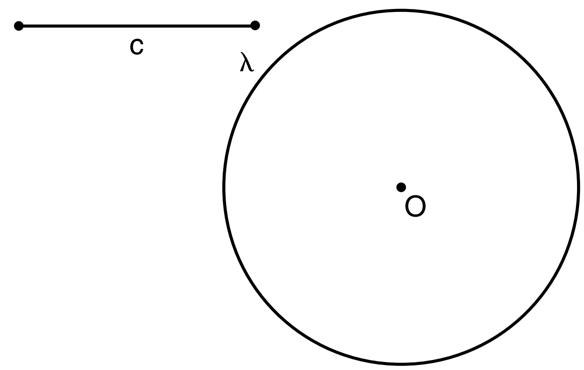


Figura 12

Solução:

Uma técnica muito utilizada para resolução de um problema de construção é supor o problema resolvido, quando no problema é dito qual é o objetivo final da construção, ou seja, é sabido qual é a figura final. No entanto neste exemplo precisamos investigar qual é a solução final, para isto observemos algumas cordas de tamanho c. Note que os pontos médios dessas cordas devem ser eqüidistantes do centro O(Ver aulas de círculos da disciplina Geometria Básica). Portanto todos os pontos médios devem estar sobre uma circunferência concêntrica a λ cujo raio é esta distância comum. E reciprocamente, todos os pontos dessa circunferência serão pontos médios de uma corda de tamanho c.

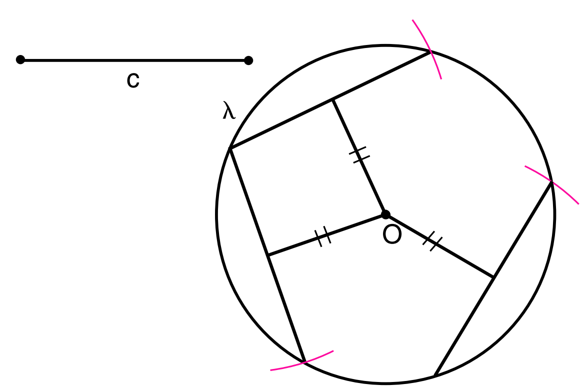


Figura 13

Desse modo para construir o lugar geométrico basta determinar um único ponto que lhe pertence. Para obter tal ponto, seguimos o seguinte processo:

Notação: É comum escrevermos L.G. para indicar lugar geométrico.

I) Escolhemos uma ponto A qualquer sobre a circunferência;

II) Com um abertura no compasso de tamanho c, apoiamos a ponta seca sobre A e construímos um arco para interceptar a circunferência em um ponto B;

III) Construímos a mediatriz do segmento AB;

IV) Com a ponta seca sobre O e abrindo o compasso até o ponto médio de AB(interseção da mediatriz com AB), giramos o compasso e construímos o L.G..

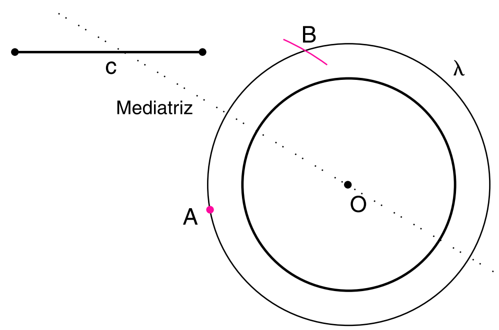


Figura 14

Resumo

Nesta aula você aprendeu...

- Que a construção geométrica era vista em tempos remotos como meio de solucionar geometricamente certos problemas algébricos;
- Que toda construção deve ser fundamentada pela Geometria Euclidiana;
- Que devido ao fato de dependermos de certos instrumentos, então devemos conservá-los objetivando o máximo de perfeição nas construções.

Para efetuarmos as resoluções de alguns problemas mais sofisticados é necessário, inicialmente, aprendermos algumas construções geométricas, chamadas construções fundamentais. Como por exemplo, retas paralelas e retas perpendiculares, que são temas de nossas próximas aulas.

Exercícios:

1. Dados um ponto A, uma reta r e um segmento de comprimento m, construa uma circunferência de centro sobre a reta r, que passe pelo ponto A e tenha raio m. Quantas soluções podemos obter?

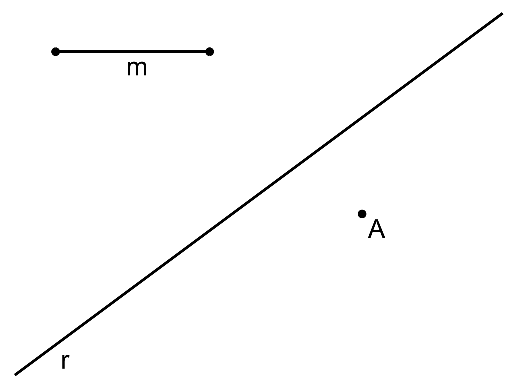


Figura 15

Dica: Lembre que o centro deve estar a uma distância m do ponto A. Quantos centros você pode obter?

2. Construir o triângulo ABC, conhecendo a medida m de um dos lados e sabendo que o vértice A pertence à reta r dada. Quantas soluções podemos obter?

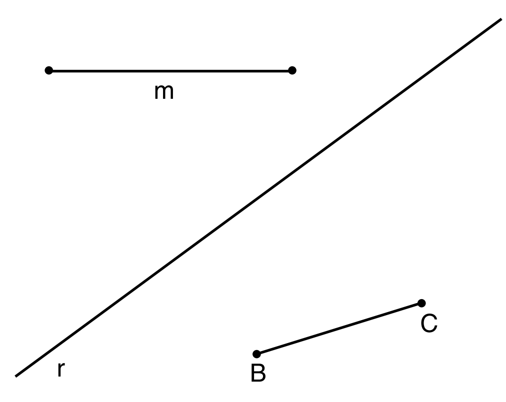


Figura 16

Dica: Suponha que o lado de medida m tenha extremidades em A e B, assim o ponto A deve estar sobre r a uma distância m de B. Quantas soluções você pode obter para este caso? O mesmo raciocínio você pode utilizar com os pontos A e C.

Aula 2 – Traçados de Perpendiculares

Objetivos

Desenvolver técnicas variadas de construções de retas e segmentos perpendiculares a uma reta ou um segmento, considerando pontos pertencentes ou não-pertencentes à reta ou ao segmento;
Resolver os primeiros problemas algébricos através de construção geométrica.

Problema 1: Traçar a mediatriz de um segmento dado **AB**.

Solução:

Como sabemos, a mediatriz é uma reta, então basta encontrarmos dois pontos que pertencem a esta reta para construirmos. Tais pontos devem ser eqüidistantes das extremidades do segmento AB. Assim podemos construi-la da seguinte maneira:

1.1. Fixa-se uma abertura qualquer, maior que a metade do comprimento do segmento $AB^{(1)}$, podendo ser do comprimento de AB;

1.2. Em seguida constróiem-se duas circunferências com centros em cada uma das extremidades do segmento AB;

1.3. Tais circunferências devem se cortar em dois pontos C e D que são eqüidistantes dos pontos A e B, visto que os raios das circunferências são iguais;

1.4. Unindo os pontos C e D, obtemos a mediatriz.

(1)Sendo a abertura do compasso menor que a metade do segmento AB os arcos não poderiam se interceptar, devido a condição de existência de triângulos.

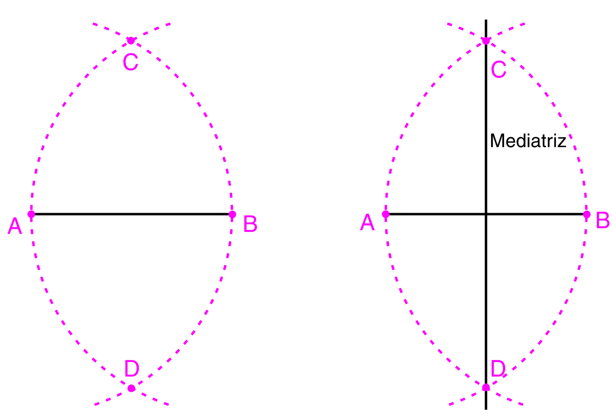


Figura 17: Mediatriz do segmento

Exemplo 3

Dada a figura a seguir, obtenha o ponto D sobre a reta r que seja eqüidistante dos pontos A e B.

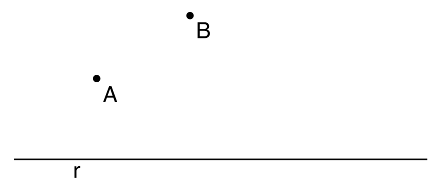


Figura 18

Solução:

Como o ponto D procurado é eqüidistante dos pontos A e B, então ele deve pertencer à mediatriz do segmento AB. Por outro lado, ele tem que estar sobre a reta r. Logo, o ponto D é a interseção dessas duas figuras.

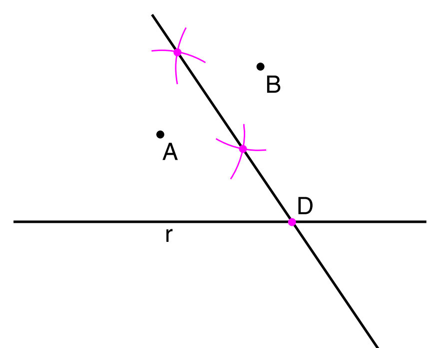


Figura 19

Exercícios:

1. São dados dois pontos B e C e uma circunferência λ. Construa um triângulo ABC isósceles, de base BC, sabendo que o vértice A pertence à λ.

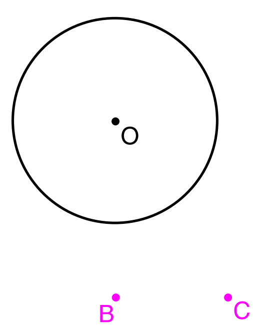


Figura 20

2. Encontre a quarta parte do segmento AB, abaixo, utilizando a mediatriz.

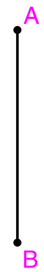


Figura 21

Problema 2: Traçar uma reta perpendicular passando pelo ponto **C** não-pertencente à reta determinada pelos pontos **A** e **B** dados.

Solução:

Note que neste problema são dados uma reta, construída a partir dos pontos A e B, e um ponto C que não lhe pertence. Os procedimentos para a construção da reta perpendicular passando por C são os seguintes:

2.1. Constrói-se uma circunferência de centro em C utilizando uma abertura no compasso de maneira que ela toque na reta dada em dois pontos distintos. Objetivando menos pontos a marcar na construção pode-se tomar o raio do comprimento de CA ou CB. Por exemplo CA;

2.2. Tal circunferência deve tocar a reta em um novo ponto D (que não coincide necessariamente com B);

2.3. Basta agora construir a mediatriz do segmento AD utilizando o processo visto no problema 1.

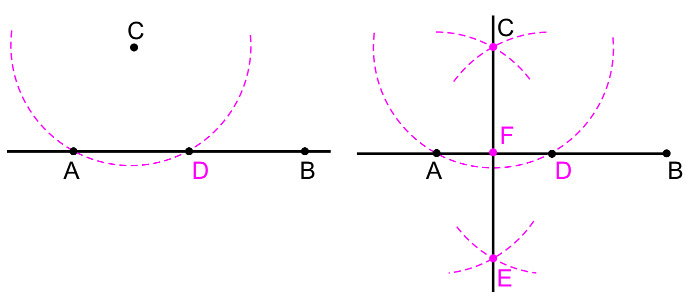


Figura 22

Justificativa: Observe que a reta construída pelo ponto C é a mediatriz do segmento AD, logo é perpendicular ao mesmo. Como o ponto D pertence à reta que passa por A e B, então as retas suportes dos segmentos AB e AD devem ser coincidentes. Portanto, a reta construída é perpendicular à reta que contém os pontos A eB.

No problema anterior, o ponto F de interseção da reta perpendicular com a reta dada r é chamado *pé da perpendicular baixado do ponto* **C** *sobre* **r**.

Exercícios:

3. Traçar a altura relativa ao vértice A do triângulo ABC, abaixo:

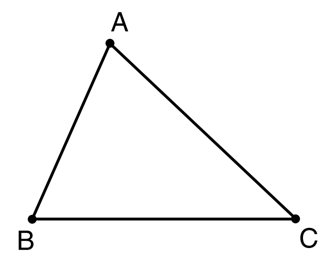


Figura 23

4. Construir o lugar geométrico dos pontos que são pés das perpendiculares baixados do ponto A sobre as retas que passam pelo ponto B.

Figura 24

Problema 3: Por um ponto, **C** situado em uma reta dada, passar uma outra reta perpendicular a esta reta.

Solução:

Já que o objetivo é construir uma reta que passe pelo ponto C, então, basta determinarmos um ponto D de maneira que o segmento CD seja perpendicular à reta dada. Para isso, siga os seguintes passos:

3.1. Com uma abertura qualquer no compasso, construa uma circunferência de centro em C, objetivando obter dois pontos A e B sobre a reta dada;

Note que o ponto C será ponto médio do segmento AB.

3.2. Com uma abertura agora um pouco maior do que a abertura já feita, construa dois arcos de circunferências, de mesmos raios, com centros nos pontos A e B para que se encontrem em um ponto D;

Note que os segmentos AD e BD possuem o mesmo comprimento.

3.3. Unindo os pontos C e D, obtemos a solução para o problema.

Observe que o triângulo ABD é um triângulo isósceles de base AB e que CD é a mediana relativa à base, logo coincide com a altura.

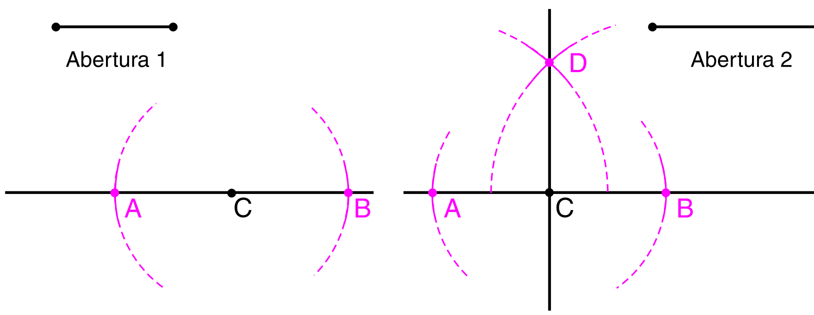


Figura 25

Exercícios:

5. Considerando a figura, determine o vértice A do triângulo ABC, sabendo que está situado na reta r e o pé da altura que lhe refere é o ponto D.

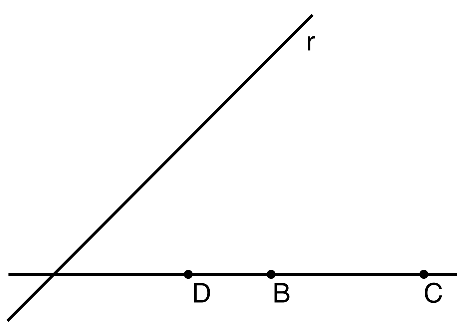


Figura 26

Para resolver os Exercícios 6 e 7 lembre que a reta tangente deve ser perpendicular ao raio que tem extremidade no ponto de tangência. Observe que, no caso do Exercício 6, teremos duas soluções.

6. Considerando a figura, construa a reta tangente à circunferência λ, de centro O no ponto A.

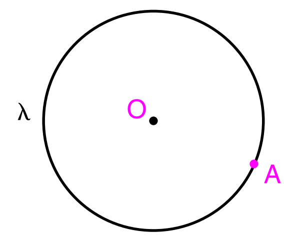


Figura 27

7. São dadas uma circunferência λ de centro O e uma reta r. Trace uma reta t tangente à circunferência e paralela à reta r.

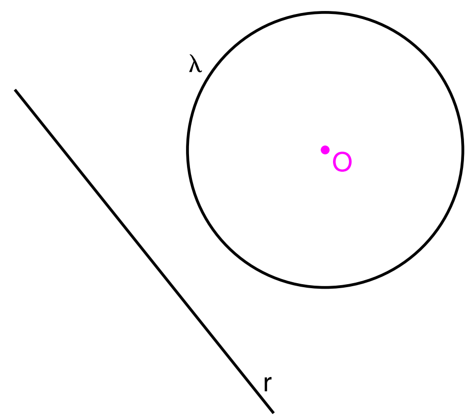


Figura 28

8. Construa o lugar geométrico dos pontos médios das cordas determinadas pelas retas que passam pelo ponto A e que são secantes à circunferência λ.

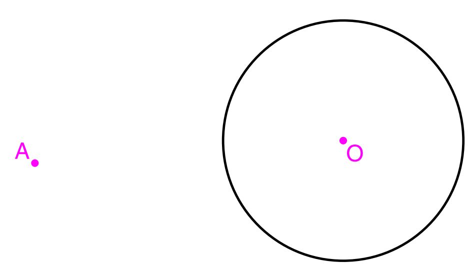


Figura 29

Note que, com as técnicas até agora adquiridas, a construção do Problema 3 será possível somente no caso em que se é permitido o prolongamento da reta. Se por uma eventualidade do problema não for possível o prolongamento da reta (por exemplo o ponto escolhido sobre a reta, pelo qual se deseja traçar a perpendicular, se encontra muito próximo à margem do papel), então devemos fazer a seguinte construção:

Problema 4: Construir uma reta perpendicular à extremidade de um segmento AB sem prolongá-lo.

4.1. Escolhe-se um ponto O qualquer, não-pertencente ao segmento AB;

4.2. Se desejamos construir a perpendicular na extremidade A do segmento AB, então, com centro em O e raio OA, constrói-se uma circunferência. Se OA não é perpendicular a AB, então a circunferência deverá tocar o segmento AB em outro ponto E;

4.3. Unindo o ponto E ao centro O, obtemos um diâmetro onde a outra extremidade E' está sobre a perpendicular ao segmento AB, que passa por A. Basta então unirmos o ponto A ao ponto E' que resolvemos o problema.

Justificativa: O segmento AE' é perpendicular ao segmento AB, pois o ângulo $E'\hat{A}B$ é um ângulo inscrito que subtende uma semicircunferência, logo sua medida é a metade de 180^o, isto é, $E'\hat{A}B = 90^o$.

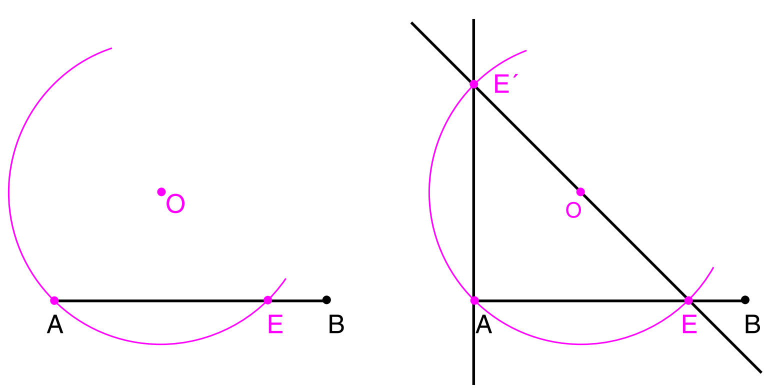


Figura 30

A seguir, daremos um exemplo onde utilizaremos a construção 4.

Exemplo 4

Dado um segmento de comprimento a, obtenha o segmento de medida $a\sqrt{2}$ e $a\sqrt{3}$.

Observe que o segmento de medida $a\sqrt{2}$ pode ser obtido através da diagonal de um quadrado de lado a, ou pode ser visto como a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem a. Neste caso construímos $a\sqrt{2}$ da seguinte forma:

1. Identificamos o segmento dado, de comprimento a, por AB e por uma de suas extremidades, digamos A, construímos uma reta perpendicular;

2. Marcamos com o compasso um segmento de extremidade em A e comprimento a. Obtemos um ponto C sobre a perpendicular.

Pelo Teorema de Pitágoras, o segmento BC tem o comprimento igual $a\sqrt{2}$.

Para construir o segmento $a\sqrt{3}$, utilizar o segmento BC no primeiro passo da construção anterior e obteremos $BC' = a\sqrt{3}$.

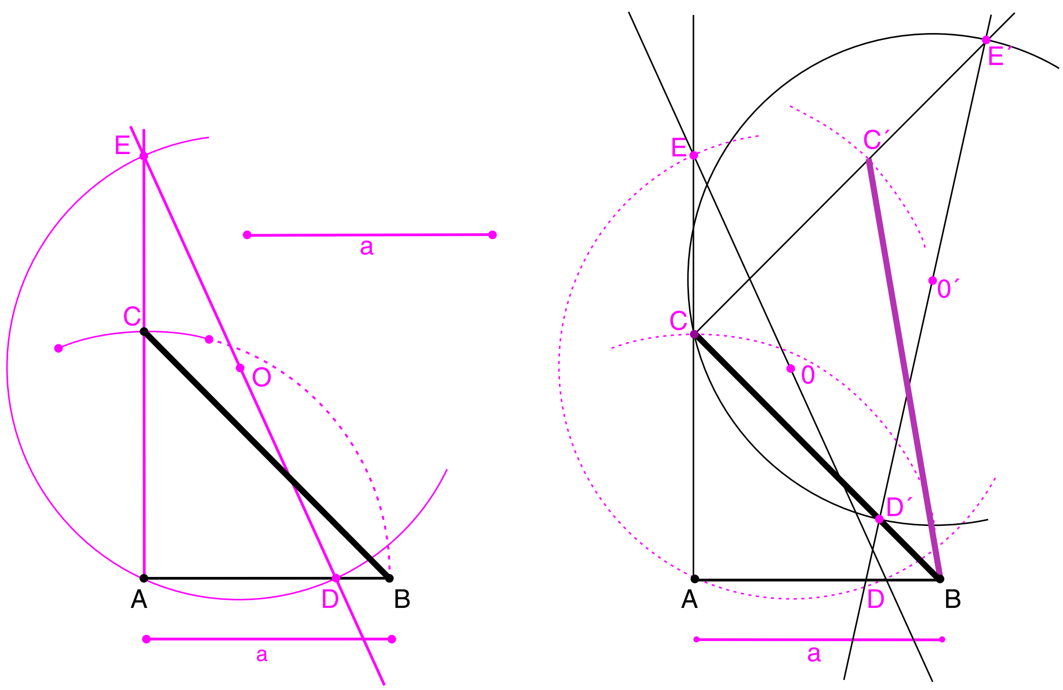


Figura 31

Exercícios:

9. Dado um segmento AB de medida a dado no exemplo anterior, obtenha um segmento de comprimento $a\sqrt{5}$;

a) Será que é necessário fazer quatro construções para resolver este problema? Descubra uma forma de obter construindo apenas um triângulo retângulo.

b) Utilize o mesmo raciocínio para obter um segmento de medida $a\sqrt{37}$.

Resumo

Nesta aula você aprendeu...

- A construir uma reta perpendicular através de diversos métodos;
- A interpretar alguns lugares geométricos que envolvem perpendicularidade;
- A solucionar os primeiros problemas algébricos através de construções geométricas.

Aula 3 – Transporte de ângulo, simetria de um ponto em relação a uma reta, e retas paralelas.

Objetivos

Transferir um ângulo qualquer;
Obter a simetria de um ponto em relação a uma reta;
Construir retas paralelas através de diversas técnicas;
Aplicar paralelismos em problemas de translações de segmentos.

Transporte de ângulo.

Sabemos que um ângulo é formado por duas semi-retas de mesma origem (vértice) e que dois ângulos são ditos congruentes se suas medidas em graus são iguais. Em muitas construções será necessário a construção de ângulos de mesma medida em um outro vértice, é o que chamamos de transporte de ângulo.

Problema 1: Transportar o ângulo dado $B\hat{A}C$ para o vértice O, considerando como lado do novo ângulo a semi-reta de origem em O que contém D.

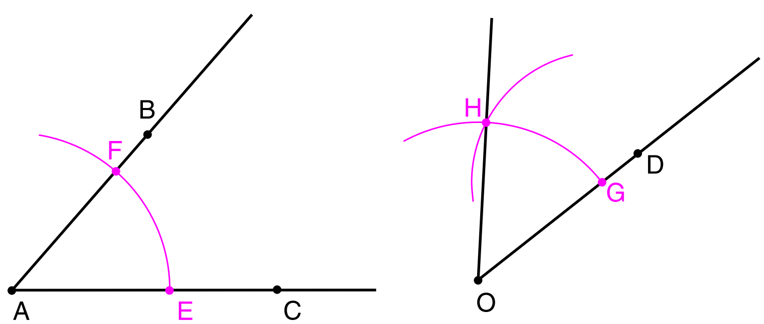


Figura 32

1.1. Com uma abertura qualquer no compasso traçamos um arco de centro em A que intercepta os lados do ângulo $B\hat{A}C$ nos pontos E e F;

1.2. Com a mesma abertura do compasso, feita no passo anterior, traçamos um outro arco de centro em O que intercepta o lado OD num ponto G;

1.3. Transfere-se agora o arco $\widehat{EF}$ para o arco construído a partir do lado OD apoiando a ponta seca do compasso sobre o ponto G, obtendo assim um ponto H.

Com isso temos que o ângulo $G\hat{O}H$ tem a mesma medida do ângulo $B\hat{A}C$.

Justificativa: Os passos 1.1 e 1.2 garantem que os arcos de circunferências construídos possuem o mesmo raio. Portanto ângulos centrais de mesma medida compreendem arcos de mesma medida e reciprocamente.

Exercícios

1. Dados os ângulos abaixo de medida α, β e γ , construa os ângulos de medida $\alpha + \beta + \gamma$ e $\alpha + \gamma - \beta$.

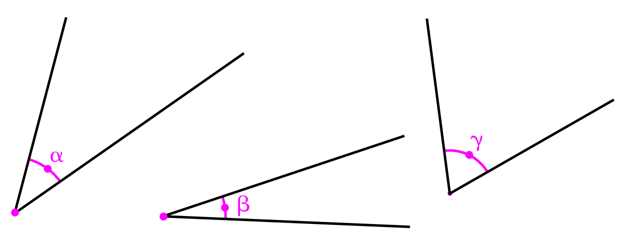


Figura 33

Simetria de ponto em relação a uma reta

Toda reta divide o plano em duas regiões chamadas **semi-planos**. Dado um ponto A em um semi-plano determinado por uma reta r, chamamos de **simétrico** de A, em relação à reta r, o ponto A' situado no semi-plano oposto ao de A, sobre a perpendicular em relação a r passando por A, e sua distância em relação a r igual a distância de A em relação a r, ou seja, A e A' são eqüidistantes de r. É claro que se um ponto $A \in r$ então A coincide com seu simétrico.

Problema 2: Obtenha o ponto simétrico de um ponto $A \notin r$ em relação à r.

Resolução: Este problema pode ser resolvido utilizando a reta perpendicular a r passando por A, em seguida transferindo a distância de A a r para o semi-plano oposto ao que contém A. No entanto, também pode ser resolvido de uma maneira mais prática e direta, economizando traços na construção, tal processo é feito como se segue:

2.1. Com o centro em um ponto B qualquer sobre a reta r, constrói-se um arco de circunferência, de raio AB, cortando r em um ponto C;

2.2. Com o compasso transfere-se o arco $\widehat{AC}$ para o outro lado da reta sobre o arco construído, obtendo assim um ponto A'.

O ponto A' é o simétrico de A em relação a r.

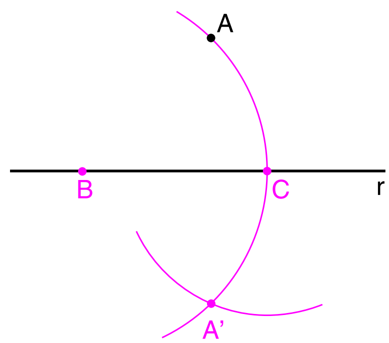


Figura 34

Justificativa: Como o arco $\widehat{AC}$ tem o mesmo comprimento do arco $\widehat{CA'}$, então os ângulos centrais $A\hat{B}C$ e $C\hat{B}A'$ são iguais, daí a reta r é suporte da bissetriz do ângulo $A\hat{B}A'$, que é o ângulo de topo(1) do triângulo isósceles ABA' de base AA'. Logo, r também é suporte da altura e da mediana, isto é, AA' é perpendicular a r e além disso r divide AA' ao meio.

(1): Em um triângulo isósceles os lados iguais são chamados laterais, o terceiro lado é chamado de base, os dois ângulos iguais são chamados ângulos da base e o ângulo oposto à base é chamado ângulo de topo.

Observe que o problema 2 nos dá uma nova técnica para construir uma reta perpendicular a uma reta dada, que passe por um externo a esta. Isso nos mostra que a resolução de um problema de construção geométrica não é necessariamente de maneira única.

Exercícios:

2. Determine o lugar geométrico dos pontos do plano que são simétricos dos pontos da reta r em relação à reta s.

   Sugestão: Basta encontrar apenas o simétrico de um ponto sobre r em relação à s.

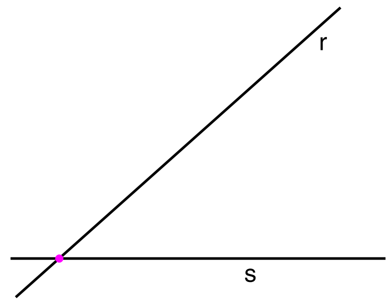


Figura 35

3. Encontre um ponto C sobre a reta r dada, de maneira que a soma $\overline{AC} + \overline{CB}$ seja o menor possível.

   Sugestão: Lembre que o menor caminho percorrido por três pontos é uma linha reta (condição de existência de triângulo), se traçarmos o simétrico de um dos pontos, os três pontos estarão alinhados e a distância permanece a mesma.

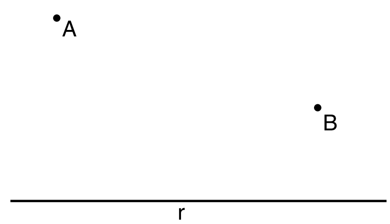


Figura 36

Traçado de retas paralelas

Uma das construções mais importantes e mais utilizadas nas resoluções de problemas diversos é a construção de reta paralela, que pode ser feita utilizando várias técnicas. Vejamos algumas:

Problema 3: Dados uma reta r e um ponto A que não lhe pertence, traçar uma reta s, paralela a r, que passe por A.

Primeiro Método

3.1. Constrói-se um arco de circunferência de centro em A com um raio que seja suficiente para que o arco intercepte a reta r num ponto B;

3.2. Mantendo a abertura do compasso, constrói-se um outro arco de centro em B cortando a reta r num ponto C e passando pelo ponto A;

3.3. Transfere-se o arco $\widehat{CA}$ para o arco contendo o ponto B, obtendo um ponto D sobre este arco no mesmo semi-plano determinado por r que contém o ponto A.

Unindo os pontos A e D, obtemos a reta paralela s.

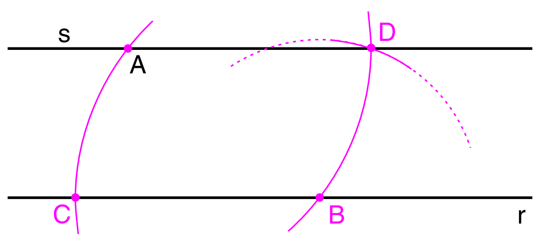


Figura 37

Justificativa: O segmento AB representa o raio dos dois arcos construídos. Nesse caso temos $AD = AB = CB$ e, por construção, temos que $AC = BD$. Logo, o quadrilátero $ADBC$ é um paralelogramo pois possui lados opostos iguais. Assim, lados opostos também são paralelos. Portanto s e r são duas retas paralelas.

Segundo Método

3.1. Escolhe-se um ponto B qualquer sobre a reta r que não seja a projeção do ponto A sobre r;

3.2. De raio AB e centro em B, constrói-se um arco de circunferência passando por A, cortando a reta r em dois pontos C e D de tal forma que B esteja entre C e D;

3.3. Transfere-se o arco CA para a outra extremidade da semi-circunferência anteriormente construída, obtendo assim um ponto E situado no mesmo semi-plano determinado pela reta r que contém o ponto A. Unindo os pontos A e E, obtemos a reta paralela s.

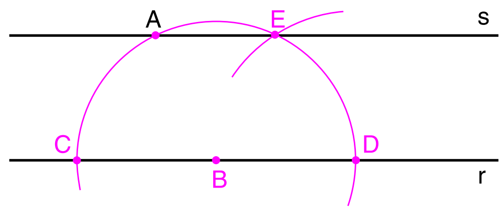


Figura 38

Justificativa: Como B é o centro da circunferência que passa pelos pontos C, A, E e D, temos que $BC = BA = BE = BD$. Logo os triângulos ABC, ABE e EBD são triângulos isósceles cujos ângulos de topo estão sempre no vértice B. Além disso temos, por construção, $CA = DE$. Então podemos concluir que $\Delta ABC = \Delta EBD$ pelo caso de congruência LLL. Neste caso, pela correspondência entre os vértices A e E, suas alturas relativas são iguais e assim os pontos A e E estão a uma mesma distância da reta r. Portanto, a reta determinada por esses pontos é paralela a r.

Terceiro Método

3.1. Escolhe-se um ponto C qualquer sobre r;

3.2. Unindo os pontos A e C, obtemos uma reta transversal a r, formando com ela dois ângulos suplementares de vértices em C;

3.3. Transfere-se um dos ângulos para a extremidade em lado alternado do segmento AC;

O segundo lado do novo ângulo é a reta s paralela a r.

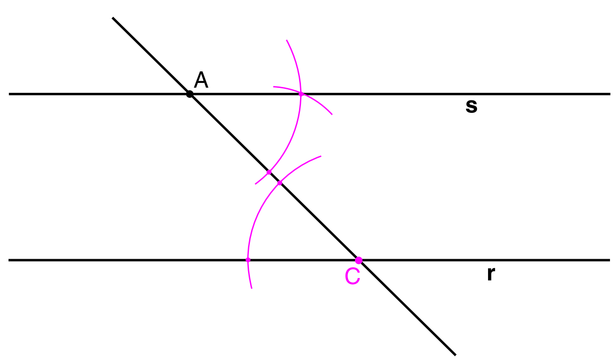


Figura 39

Justificativa: A reta s é construída de tal forma que os ângulos alternos e internos, determinados pela reta AC, sejam iguais. Portanto, s deve ser paralela a r.

Observe que para esse problema encontramos três maneiras diferentes de solucioná-lo. Cabe a cada um escolher o método mais adequado ou até mesmo obter novos métodos.

A construção de retas paralelas é utilizada em diversos problemas e um dos problemas clássicos que envolvem paralelismo é a chamada **translação de segmentos.** Vejamos um exemplo para ilustrar o conceito de translação.

Exemplo 5

Dadas duas retas paralelas, r e s, e um ponto A qualquer, como na figura abaixo. Traçar pelo ponto A as retas transversais às retas paralelas de modo que os segmentos compreendidos entre elas tenham um comprimento dado a.

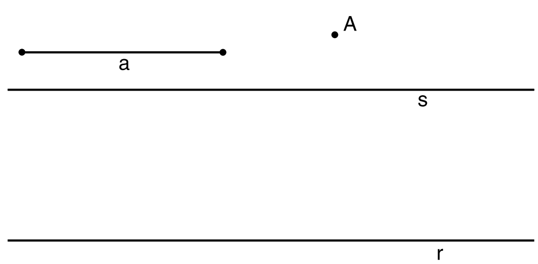


Figura 40

Solução:

Escolhe-se um ponto qualquer sobre r e indicamos por B. Construindo dois arcos de circunferência de centro em B e raio a, determinamos dois pontos, C e C', sobre a reta s. Os segmentos BC e BC' têm comprimentos a. Basta agora traçar as retas paralelas aos segmentos BC e BC', passando por A, para obter a solução do problema, pois os quadriláteros $EDC'B$ e $CGHB$ são paralelogramos.

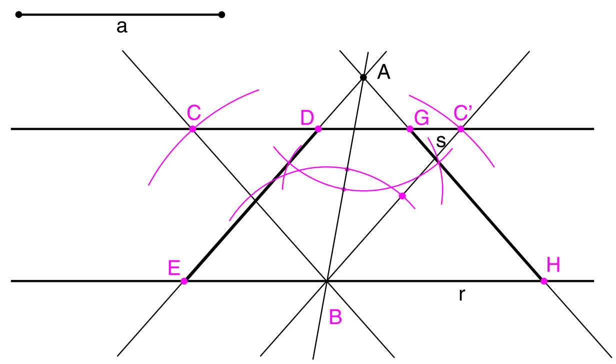


Figura 41

Exercícios:

4. Sendo dados duas retas concorrentes r e s, e o ponto C como na figura abaixo, encontre dois pontos D e E, respectivamente sobre r e s, tais que C seja ponto médio de DE.

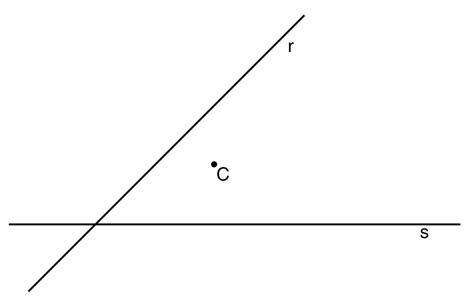


Figura 42

5. Construir um segmento CD, congruente a AB dado, entre as duas diagonais do trapézio abaixo paralelamente às bases.

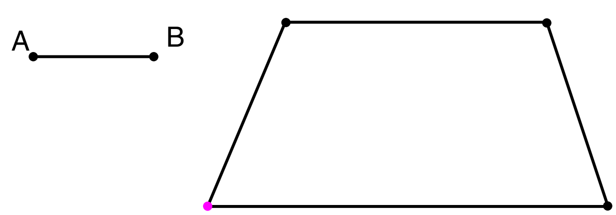


Figura 43

6. Dados um ponto A, uma reta r e duas distâncias m e n. Determine o ponto B que esteja a uma distância m de A e a uma distância n de r. Quantas soluções este problema admite?

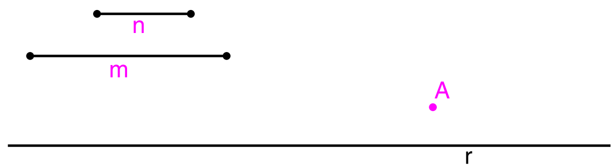


Figura 44

Sugestão: Para traçar uma paralela a uma distância d qualquer, primeiro traça-se uma perpendicular e apoia-se sobre essa perpendicular a distância d, obtendo assim um ponto numa distância d. Basta agora traçar a paralela por este ponto.

7. Dadas duas retas concorrentes r e s encontre um ponto que esteja a uma distância m de r e a uma distância n de s. Quantas soluções este problema admite?

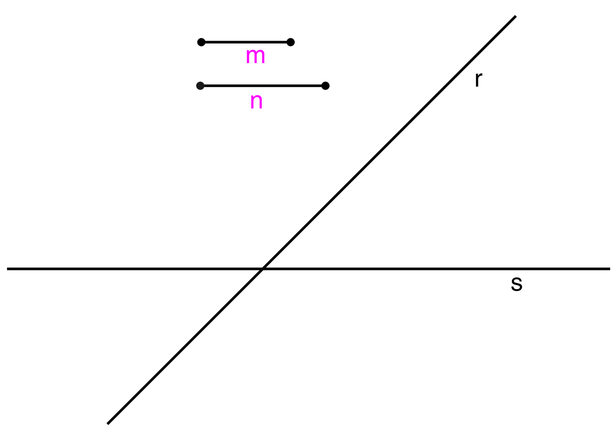


Figura 45

Veremos em alguns problemas a necessidade de construir várias paralelas a uma reta fixa. Porém, o problema se tornaria muito trabalhoso se construirmos uma a uma. No entanto, utilizando a proporcionalidade de segmentos determinados por duas retas transversais a um feixe de retas paralelas, podemos obter uma técnica de construção de várias retas paralelas simultaneamente.

Problema 4: Dados um segmento AB, traçar várias retas paralelas a AB, mantendo uma distância fixa entre elas.

4.1. Pelos pontos A e B tracemos, respectivamente, duas retas r e s quaisquer;

4.2. Fixemos um segmento CD qualquer como unidade e a partir do ponto A, construímos vários segmentos, sobre r, de mesmo comprimento de CD, obtendo os pontos $A_1, A_2, A_3, ...$;(na Figura 47, construímos quatro segmentos)

4.3. Pelo ponto A_1 traçamos uma reta paralela a AB. Esta reta deve interceptar a reta s em um ponto B_1;

4.4. Tomando agora o segmento BB_1 como unidade, construímos a mesma quantidade de segmentos, sobre s, de mesmo comprimento de BB_1, obtendo os pontos $B_2, B_3, ...$ no mesmo semi-plano de B_1 em relação a AB.

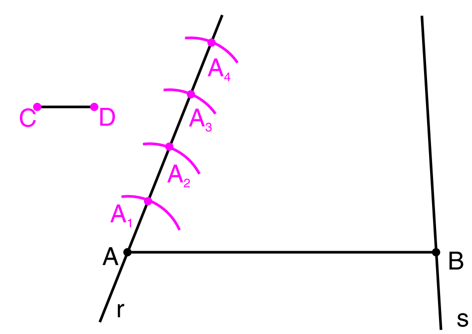


Figura 46

Basta unir segmentos $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ...$, que teremos as retas paralelas.

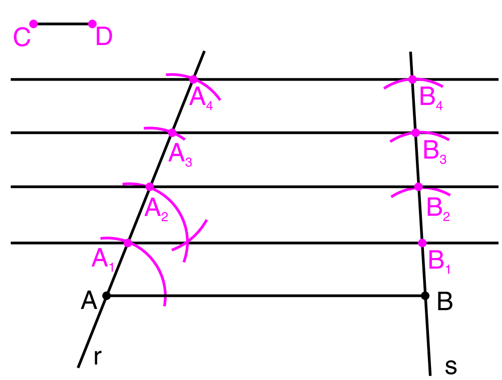


Figura 47

Justificativa: Pelo ponto B_2 traçemos uma reta r' paralela a r. Tal reta intercepta os segmentos A_1B_1 e AB, respectivamente nos pontos C_1 e C. Observando o triângulo CBB_2 vemos que B_1 é ponto médio de BB_2 e C_1B_1 é paralelo a CB. Logo C_1 é ponto médio de CB_2, isto é, $CC_1 = C_1B_2$. Por outro lado, $AA_1 = A_1A_2$ por construção e $AA_1 = CC_1$ pois A_1C_1CA é um paralelogramo. Assim, $A_1A_2 = C_1B_2$ e são paralelos, ou seja, $A_2B_2C_1A_1$ é um paralelogramo. Portanto $A_2B_2//A_1C_1//AB$. Da mesma forma mostramos o paralelismo de A_3B_3 e A_4B_4.

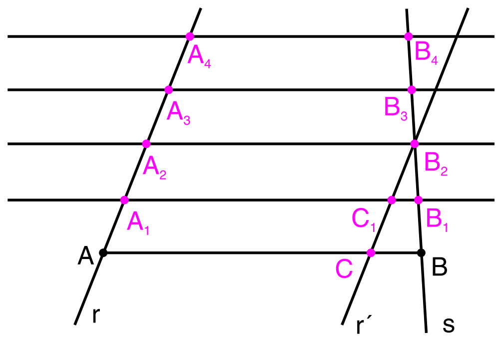


Figura 48

Resumo

Nesta aula você aprendeu ...

- Simetria de ponto em relação a uma reta;
- Diversas técnicas de construção de retas paralelas;
- Que o paralelismo pode ser aplicado em translações de segmentos.

Aula 4 – Divisão de segmentos retilíneos

Objetivos

Conhecer métodos de divisão de segmentos em partes iguais ou proporcionais a segmentos dados;
Obter a terceira e quarta proporcionais de uma dada proporção de segmentos;
Aplicar a construção da terceira e da quarta proporcionais para resoluções de problemas algébricos como média geométrica de dois números positivos.
Obter o ponto de média e extrema razão de um segmento dado;

Noções Iniciais

Sabemos que uma proporção é a igualdade de duas razões ou, simplificando, é uma igualdade entre duas frações.

Assim,

$$\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$$

é uma proporção, e que poderemos escrever também:

$$5 : 3 :: 10 : 6$$

e que se lê: cinco está para três assim como dez está para seis.

Cada um desses valores chama-se termo, donde se conclui que uma proporção possui sempre quatro termos. Em qualquer proporção, os lugares ocupados pelos termos 5 e 6 da proporção acima chamam-se extremos enquanto que os que ocupam os lugares dos termos 3 e 10, naquela mesma proporção, chamam-se meios. Então toda proporção tem dois extremos e dois meios, pode ser expressa graficamente e onde cada um de seus termos pode ser descrito como o comprimento de um segmento de reta.

Da proporcionalidade de frações tiramos três propriedades:

- O produto dos meios é igual ao produto dos extremos;

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d = b.c$$

- A troca de ordem dos extremos não altera a proporção;

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

- A troca de ordem dos meios não altera a proporção.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

Supondo que sejam conhecidos três valores, a, b e c, diferentes entre si, chamamos de **quarta proporcional** o valor x para o qual vale a seguinte proporção:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \Leftrightarrow a.x = b.c \Leftrightarrow x = \frac{b.c}{a}$$

Se os valores dados acima são tais que $b = c$, então são dados somente dois valores, a saber a e b. Neste caso o valor x procurado acima é chamado de **terceira proporcional.**

Se numa proporção $a : b :: c : d$ temos que $b = c$ e então dizemos que o valor b é a **média proporcional** ou **média geométrica** dos valores a e d. E neste caso a proporção é chamada de proporção **contínua**.

Considerando um eixo orientado, isto é, uma reta onde temos um sentido positivo de orientação, chamamos de grandeza de um segmento desta reta o número real, cujo valor absoluto corresponde ao comprimento do segmento, que recebe um sinal (positivo ou negativo) de acordo com o sentido do segmento. Se dois segmentos de uma reta orientada possuem sentidos opostos, então suas grandezas terão sinais trocados.

Duas grandezas diferentes, a e b, e somente duas, podem fornecer uma proporção contínua, como na seguinte proporção:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

ou equivalentemente, $(a + b) : a :: a : b$ que é uma proporção célebre e que se denomina na seção ou corte de ouro. Esta proporção diz que a relação entre a soma de duas grandezas e uma delas (a maior no caso é a) é igual a relação entre esta (a) e a outra (b) . Isto de fato só se obtém quando $\frac{a}{b} \simeq 1,618$. Que é o que Euclides definiu como número de ouro, **segmento áureo** ou **relação áurea**.

A razão formada por dois segmentos AC e CB é por definição a razão entre as grandezas correspondentes, que neste caso o sinal dessa razão depende da orientação dos mesmos. Indicaremos esta razão por:

$$\frac{AC}{CB}.$$

- Se os segmentos possuem o mesmo sentido, a razão é positiva;

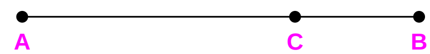


Figura 49: $\frac{AC}{CB} > 0$

- Se os segmentos possuem sentidos opostos, a razão é negativa.

Figura 50: $\frac{AC}{CB} < 0$

Observe pelas figuras 49 e 50 que:

- $\frac{AC}{CB} > 0 \Leftrightarrow C \in AB$
- $\frac{AC}{CB} < 0 \Leftrightarrow C \notin AB$

Dado um segmento AB chamamos de ponto de **média e extrema razão** deste segmento o ponto C colinear aos pontos A e B para o qual seja válida a proporção $\frac{CB}{AC} = \frac{AC}{AB}$.

Que é uma proporção contínua equivalente à relação áurea. De fato, considerando a figura abaixo temos que $\frac{x}{a} = \frac{a-x}{x}$ ou $x^2 + ax - a^2 = 0$. Resolvendo a equação do 2^0 grau obtemos as soluções $x_1 = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) \simeq 0,618a$ e $x_2 = \frac{a}{2}(-\sqrt{5} - 1) \simeq -1,618a$.

- Para $x_1 = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) \simeq 0,618a$ temos $\frac{x+a}{a} = \frac{x}{a} + 1 \simeq 1,618$. Como a razão $\frac{CB}{AC} > 0$ então $C \in AB$.

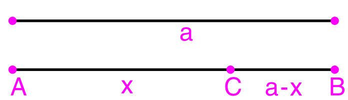


Figura 51

- Para $x_2 = \frac{a}{2}(-\sqrt{5} - 1) \simeq -1,618a$. Como a razão $\frac{CB}{AC} < 0$ então $C \notin AB$.

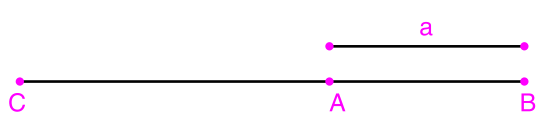


Figura 52

Estamos aptos agora a interpretar todas essas operações, até então conhecidas algebricamente, de forma geométrica e em seguida daremos algumas conseqüências imediatas.

Divisão de segmentos retilíneos

Este problema consiste em dividir um segmento qualquer em quantas partes forem necessárias.

Problema 1: Divida o segmento AB, em n-partes iguais.

Apesar do problema ser enunciado de maneira geral, faremos, por exemplo, a divisão em 5 partes, o que não perde a generalidade, pois qualquer divisão é feita maneira análoga.

Veremos dois métodos distintos de igual trabalho, já que consistem na construção de uma única reta paralela, como veremos.

1^o Método

1.1. Por uma das extremidades do segmento AB, digamos A, traça-se uma reta qualquer que não passe pela outra extremidade;

1.2. Com uma abertura qualquer no compasso, marcamos 5 segmentos de igual medida, a partir da extremidade escolhida, nesse caso A. Obtendo os pontos C,D,E,F e G.

1.3. Unindo os pontos B e G, encontramos uma reta r.

1.4. Traçando pelo ponto F uma reta paralela a r, obtemos um ponto K no segmento AB tal $KB = \frac{1}{5}AB$;

1.5. Com uma abertura no compasso na medida de KB e marcando seguidamente sobre AB, a partir do ponto A, encontramos os quatro pontos H,I,J e K que dividem AB em cinco partes iguais.

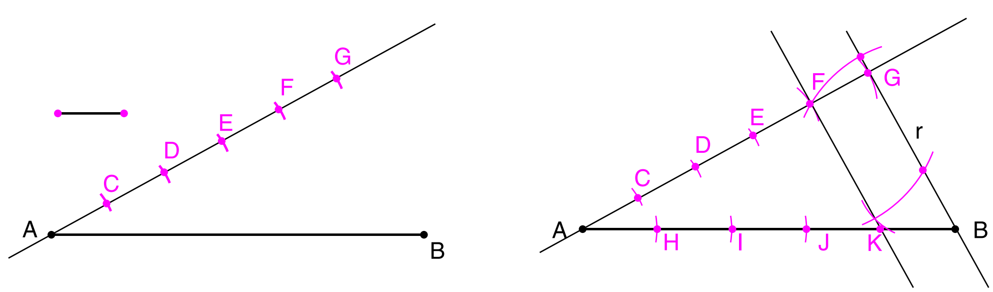


Figura 53

Justificativa: Como a reta que passa por F é paralela à reta r, então os triângulos ABG e AKF são semelhantes. Por construção $FG = \frac{1}{5}AG$, logo $KB = \frac{1}{5}AB$.

2º Método

1.1. Por uma das extremidades dos segmento AB, digamos A, traça-se uma reta r qualquer que não passe pela outra extremidade;

1.2. Pela outra extremidade, neste caso pelo ponto B, traça-se uma reta s paralela a r;

1.3. Com uma abertura fixa no compasso, marcam-se quatro pontos, C, D, E e F sobre r, a partir do ponto A ;

1.4. Com a mesma abertura no compasso, marcam-se outros quatro pontos, G, H, I e J sobre a reta s, a partir do ponto B no sentido contrário ao dos segmentos obtidos em r;

1.5. Unindo os pares de pontos (C, J), (D, I), (E, H) e (F, G), obtemos quatro retas paralelas;

1.6. Tais retas interceptam o segmento AB em quatro pontos K, L, M e N que o dividem em cinco partes iguais.

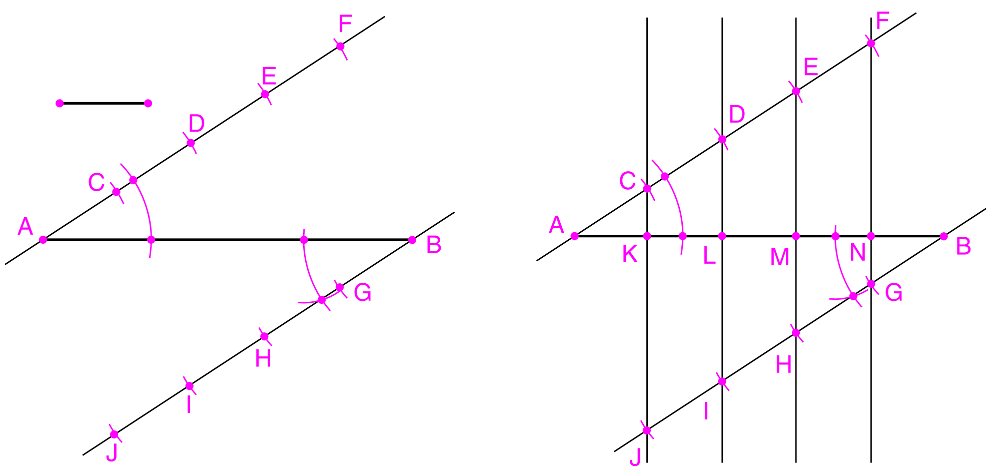


Figura 54

Justificativa: Como as retas r e s são paralelas e os segmentos CD, DE, EF, JI, IH e HG possuem a mesma medida, então os quadriláteros $CDIJ$, $DEHI$ e $EFGH$ são paralelogramos. Assim temos que $CJ//DI//EH//FG$. Portanto, pelo Teorema de Tales tais retas devem dividir o segmento transversal AB na mesma proporção que divide os segmentos AF ou BJ.

Em algum momento será necessário a divisão de vários segmentos simultaneamente em partes iguais. No entanto, podemos obter todas as divisões a partir da divisão de um único segmento.

Problema 2: Dividir em cinco partes iguais os segmentos de medidas a, b, c e d, simultaneamente.

2.1. Sobre uma reta qualquer constrói-se um segmento AB sendo sua medida o maior dos valores dados, suponhamos que seja d;

2.2. Com abertura de comprimento d no compasso contrói-se dois arcos de circunferência de centros nas extremidades do segmento AB, de modo que se encontrem num ponto O. Tracemos as retas OA e OB, indicando-as por r e s, respectivamente;

O triângulo ABO é eqüilátero.

2.3. Utilizando abertura no compasso de medida a, construímos um arco de centro O, interceptando as retas r e s, respectivamente nos pontos C e D. Utilizando abertura b, encontramos os pontos E e F. E finalmente utilizando abertura c, encontramos os pontos G e H;

Dessa forma os triângulos CDO, EFO e GHO são também triângulos eqüiláteros que, evidentemente, são semelhantes ao triângulo ABO.

2.4. Divida qualquer um dos segmentos AB, CD, EF e GH em cinco partes iguais. Neste problema dividimos o segmento AB e obtemos os pontos I, J, K e L;

2.5. Unimos o ponto O a cada um dos pontos obtidos no item anterior.

Após o quinto procedimento da construção, obtemos quatro retas que passam pelo ponto O. Tais retas devem interceptar os segmentos CD, EF e GH, dividindo-os em cinco partes iguais.

Justificativa: Pela divisão feita no segmento AB, sabemos que AI tem medida correspondente a $\frac{1}{5}$ da medida do segmento AB. Mostraremos que a medida do segmento CM corresponde a $\frac{1}{5}$ da medida do segmento CD.

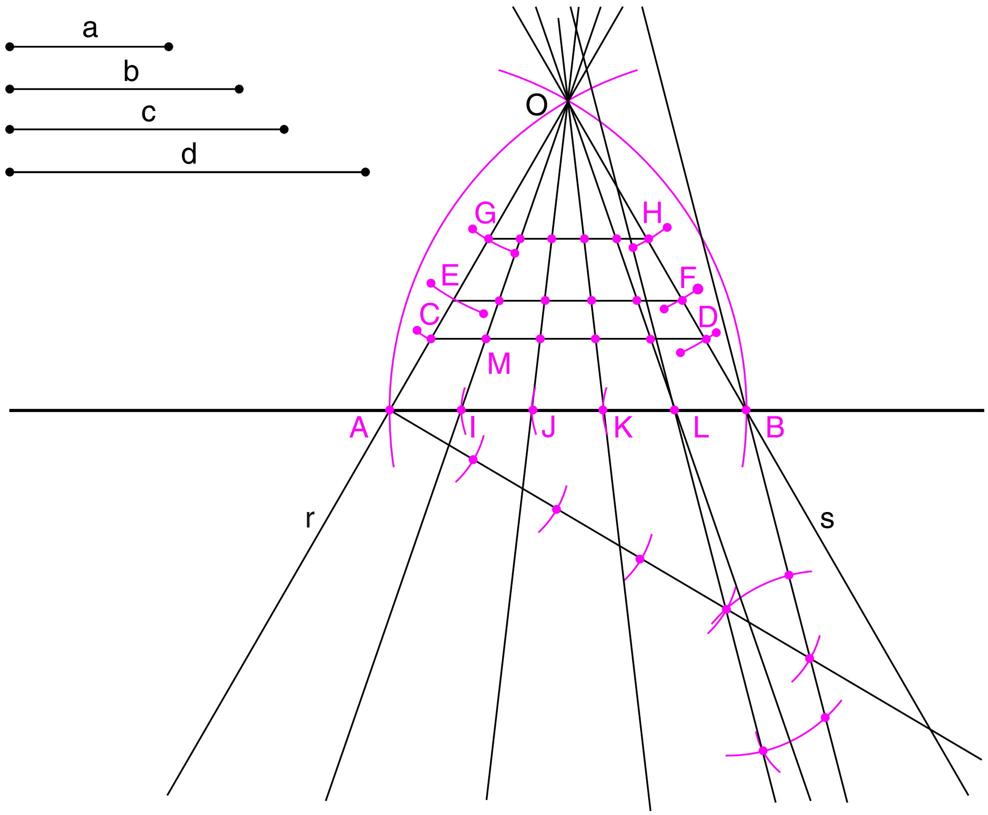


Figura 55

De fato, os triângulos COM e AOI são semelhantes e nesse caso temos a seguinte proporção:

$$\frac{c}{d} = \frac{x}{\frac{1}{5}d} \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}c$$

As outras proporções são demonstradas de maneira semelhante.

A idéia aplicada para resolver o problema 1 pode ser também utilizada para dividir um segmento qualquer dado em n-segmentos diretamente proporcionais a outros n-segmentos dados de medidas a_1, a_2, a_3, ..., a_n. Embora este problema possa ser resolvido de maneira geral faremos, a seguir, a divisão proporcional a três segmentos dados.

Problema 3: Sendo dados um segmento AB e três segmentos com respectivas medidas a, b e c, divida o segmento AB em segmentos de medidas proporcionais aos valores a, b e c.

Utilizaremos o segundo método do problema 1 resolução. Como exercício, utilize o primeiro processo para resolver o mesmo problema.

3.1. Por uma das extremidades do segmento AB, digamos A, traça-se uma reta r qualquer que não passe pela outra extremidade;

3.2. Pela outra extremidade, neste caso pelo ponto B, traça-se uma reta s paralela a r;

3.3. Com uma abertura de comprimento a no compasso, marca-se na reta r, a partir do ponto A, o ponto C sobre r, tal que AC tenha medida a. Com uma abertura de comprimento b, marca-se o ponto D, sobre r, tal que CD tenha medida b;

3.4. Sobre a reta s, no sentido contrário ao feito na reta r, marcam-se os pontos E e F , tais que BE tenha medida c e EF tenha medida b;

3.5. Unindo os pontos C e F, D e E obtemos duas retas paralelas;

3.6. Tais retas interceptam o segmento AB em dois pontos G e H dividindo-o em três partes proporcionais aos segmentos de medidas a, b e c.

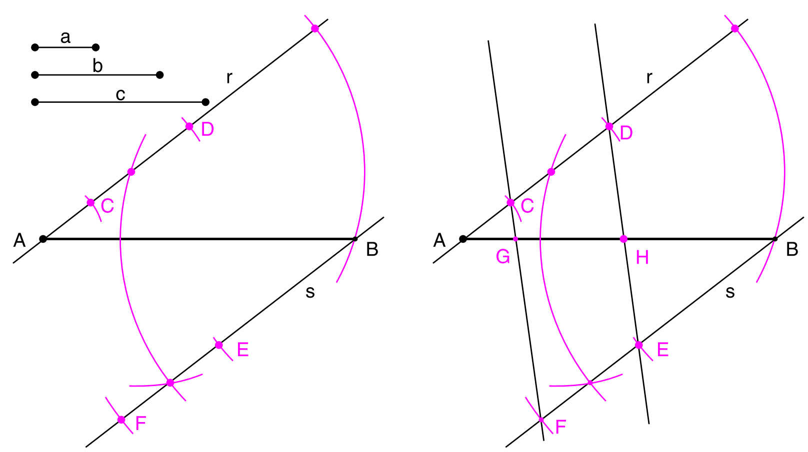


Figura 56

A justificativa para o problema 3 é a mesma do problema 2.

Exercícios:

1. Dado o segmento abaixo, divida-o em partes proporcionais aos valores 2, 3, 4 e 5.

Sugestão: Crie um segmento qualquer(não muito grande)para representar a unidade, isto é, sua medida é 1. A partir desse segmento, construa os segmentos de medida 2, 3, 4 e 5, e utilize-os na divisão.

Figura 57

A divisibilidade de um segmento em partes proporcionais pode ser aplicada em outras construções que têm como objetivo resolver novos problemas algébricos por métodos geométricos.

Terceira e Quarta Proporcionais

Como já foi dito, a quarta proporcional é o quarto termo de uma proporção. Isto é, dados três valores a, b e c, a quarta proporcional é o valor x tal que vale a proporção:

$$a : b :: c : x$$

O método para obtenção da quarta proporcional é baseado na divisão de segmentos em partes proporcionais.

Problema 4: Dados três segmentos, com medidas a, b e c, obtenha a quarta proporcional.

4.1. Construa duas semi-retas de origem comum num ponto O;

4.2. Em uma semi-reta marque um ponto A tal que OA tenha medida a, e na outra semi-reta marque um ponto B tal que OB tenha medida b;

4.3. Na semi-reta que ponto A pertence marque a partir desse ponto um ponto C tal que AC tenha medida c;

4.4. Construa a reta r que passa pelos pontos A e B, e pelo ponto C trace uma reta s paralela a r.A reta s deve interceptar a semi-reta que contém o ponto B em um ponto D. O segmento BD é a quarta proporcional.

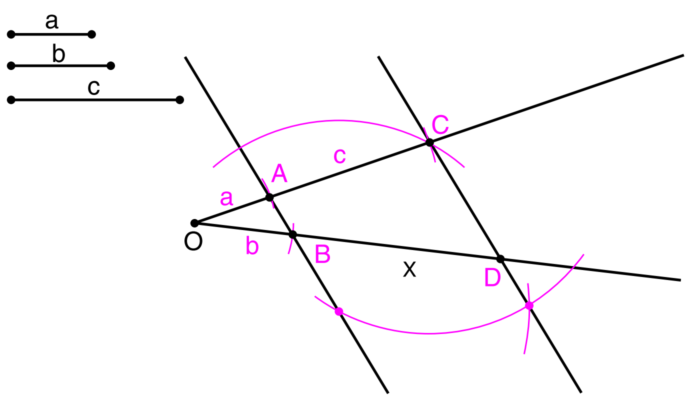


Figura 58

Justificativa: Os triângulos OAB e OCD são semelhantes e por isso, observando a figura anterior, é válida a seguinte proporção:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+x} \Leftrightarrow a.b + a.x = a.b + b.c \Leftrightarrow a.x = b.c \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{x}.$$

Portanto, o segmento BD tem a medida x que é a quarta proporcional dos valores a, b e c.

Exemplo 6

Dado o segmento de comprimento a, como na figura abaixo, obtenha o segmento de comprimento x tal que $x = \frac{5.a}{6}$.

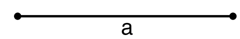


Figura 59

Solução:

Podemos resolver este exercício de duas formas: a primeira maneira é feita dividindo o segmento em 6 partes iguais e a seguir tomando 5 destas partes; o outro método é trabalhando com a quarta proporcional, visto que temos a seguinte eqüivalência

$$x = \frac{5.a}{6} \Leftrightarrow \frac{x}{5} = \frac{a}{6} \Leftrightarrow \frac{6}{5} = \frac{a}{x}.$$

Ou seja, x é a quarta proporcional dos valores 6, 5 e a.

Neste caso, para resolver o exercício é necessário que estipulemos um segmento "unidade"[1], e a partir desse segmento criarmos os segmentos de medida 6 e 5.

(1) Sabemos que existem várias unidades de medida de comprimento como o "metro", a "polegada" e outros. Em desenho geométrico é comum criarem-se segmentos ditos "unidades" e todo o problema em questão é considerado nesta "unidade".

- Indicamos as extremidades do segmento a pelos pontos A e B. Tomando o segmento u como unidade no prolongamento do segmento a, a partir de B, construímos o segmento $6u$, obtendo um ponto C;

- No ponto C traçamos uma semi-reta qualquer e nesta semi-reta construímos o segmento $5u$, obtendo um ponto D;

- Unimos os pontos D e B por uma reta r;

- Pela extremidade A do segmento a traçamos uma paralela à reta r que intercepta a semi-reta construída num ponto E.

O segmento DE tem medida x.

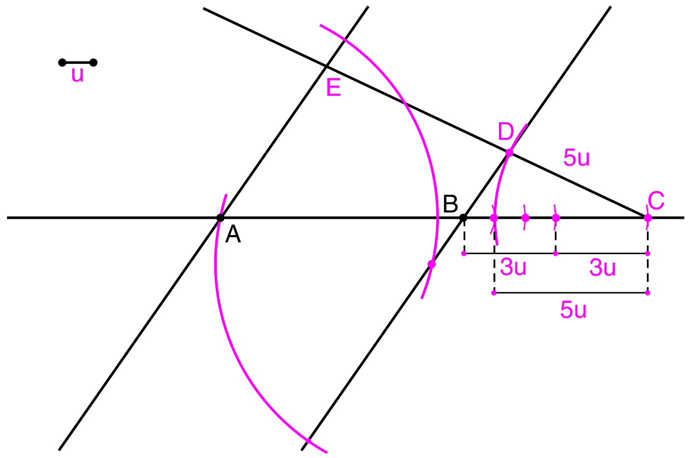


Figura 60

Exercícios:

2. Dado o segmento de comprimento k abaixo, encontrar o segmento de medida x tal que $3x = 5k$.

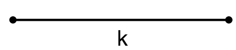


Figura 61

3. Dados os segmentos abaixo de medidas x, y e z, obtenha o segmento de medida $m = \frac{(x+z).y}{z}$.

Figura 62

Lembremos também que quando os meios de uma proporção são iguais, isto é, $a : b :: b : c$, então dizemos o último termo é a terceira proporcional. Note que neste caso serão dados somente dois segmentos. E quando se pede a terceira proporcional, o segundo segmento deve ser repetido. Por isso a ordem dos segmentos é importante na determinação da terceira proporcional.

Exemplo 7

Obtenha a terceira proporcional dos segmentos de medidas a e b nesta ordem e, a seguir, na ordem b e a.

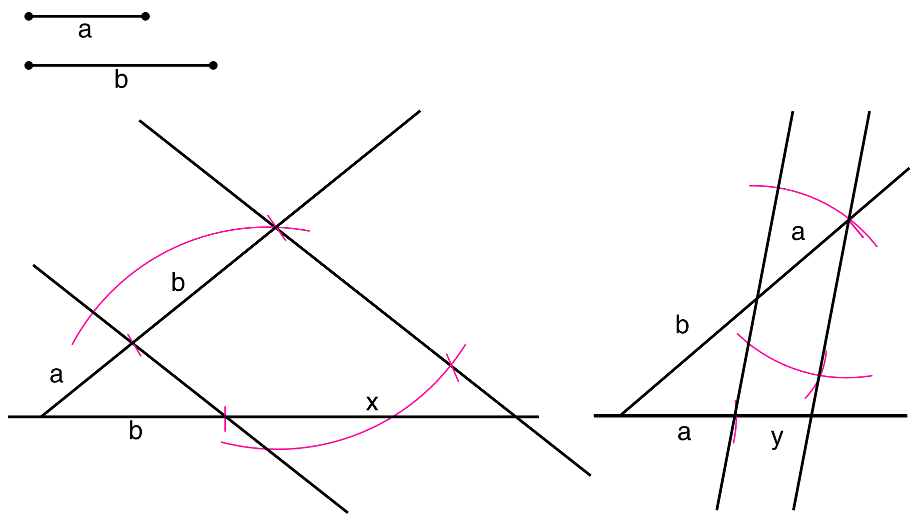


Figura 63

Média Proporcional ou Média Geométrica

Como sabemos, numa proporção $a : b :: c : d$ onde $b = c$ temos que d é chamado de terceira proporcional. Além disso o meio que se repete, neste o termo b, é chamado de média proporcional ou média geométrica. Algebricamente expressamos a média de dois termos positivos, b e c, por:

$$x = \sqrt{b.c}$$

Para resolvermos esse problema de forma geométrica, um caminho razoável é pensarmos nas relações métricas no triângulo retângulo.

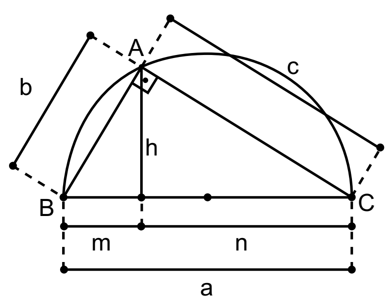


Figura 64

Observando a figura acima, através de resultados determinados em Geometria Básica, obtemos as seguintes relações:

- $b^2 = a.m$;
- $c^2 = a.n$;
- $h^2 = m.n$;
- $m + n = a$;
- $b.c = a.h$.
- $a^2 = b^2 + c^2$;

As duas primeiras relações métricas nos dizem que cada cateto é a média geométrica da hipotenusa com sua projeção ortogonal sobre a hipotenusa. A terceira relação nos diz que a altura relativa à hipotenusa é a média geométrica das projeções dos catetos sobre a hipotenusa. E a última relação é o famoso Teorema de Pitágoras.

Observe que necessitamos construir triângulos retângulos sob certas condições dadas. Mas uma importante propriedade do triângulo retângulo vem do fato de que sempre é inscritível em uma semicircunferência, isto é, a hipotenusa pode ser vista como um diâmetro de uma circunferência.

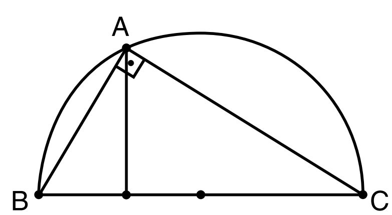


Figura 65

A partir desses resultados podemos desenvolver algumas técnicas para obtenção da média geométrica de dois segmentos dados.

Problema 1: Sendo dados os segmentos abaixo, de medidas a e b, obtenha o segmento de medida $x = \sqrt{a.b}$.

Pelo que vimos nas relações métricas do triângulo retângulo, podemos ter duas maneiras distintas de se resolver este problema.

Primeiro Método

Neste método utilizaremos o segmento maior como hipotenusa e o menor como uma projeção de um dos catetos.

1.1. Supondo $a > b$, construímos, sobre uma reta suporte qualquer, um segmento de medida a obtendo os pontos B e C;

1.2. Com origem em uma das extremidades de BC, digamos B, construímos um segmento de medida b, obtendo um ponto D entre B e C;

1.3. Encontramos o ponto médio M do segmento BC, para isto basta construir a mediatriz;

1.4. Construímos a semicircunferência de raio BM com centro em M;

1.5. Traçamos a perpendicular à reta suporte de BC no ponto D. Tal reta deve interceptar a semicircunferência no ponto A.
O segmento BA tem medida $\sqrt{a.b}$

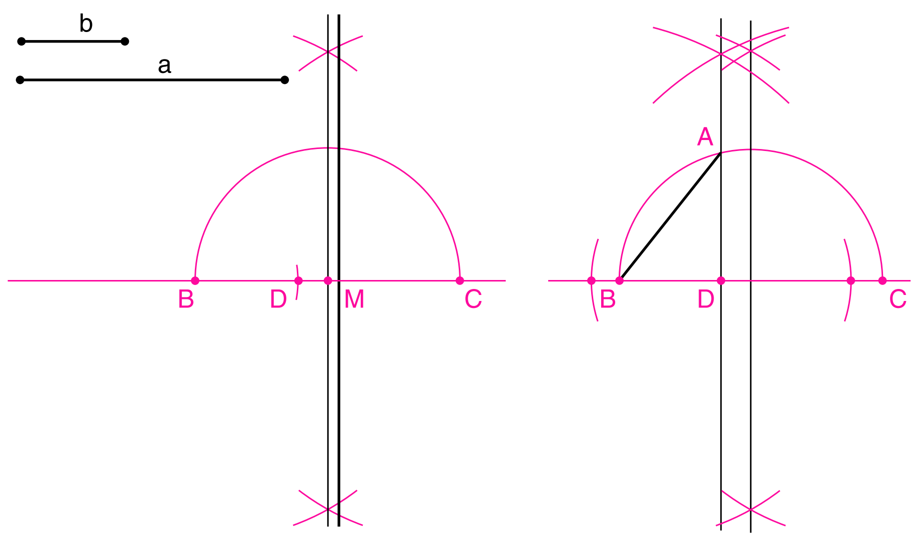


Figura 66

Segundo Método

Neste método utilizaremos os dois segmentos como projeções dos catetos sobre a hipotenusa. E neste caso a soma das medidas a e b será a medida da hipotenusa.

1.1. Construimos, sobre uma reta suporte qualquer, dois segmentos consecutivos de medidas a e b, respectivamente, obtendo os pontos B, D e C, tais que BD tenha medida a e DC tenha medida b e o ponto D esteja entre B e C;

1.2. Encontramos o ponto médio M do segmento BC, para isto basta construir a mediatriz;

1.4. Construimos a semi-circunferência de raio BM com centro em M;

1.5. Traçamos a perpendicular à reta suporte de BC no ponto D. Tal reta deve interceptar a semi-circunferência no ponto A.

O segmento AD tem medida $\sqrt{a.b}$

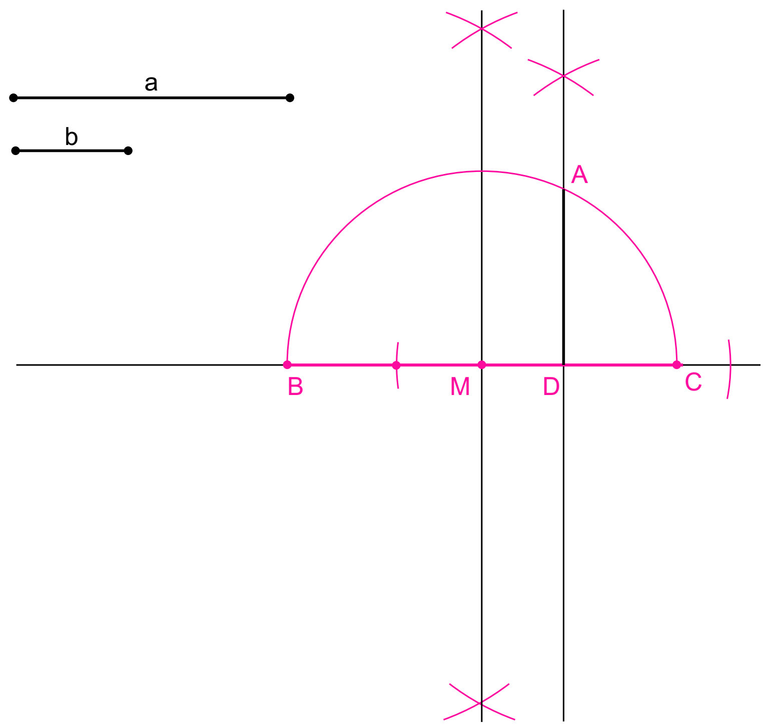


Figura 67

Exercícios:

4. Dado os segmentos de comprimentos b e c abaixo, determine o segmento de comprimento $x = \frac{b^2}{c}$

Figura 68

Sugestão: $x = \dfrac{a^2}{b} \Leftrightarrow \dfrac{b}{a} = \dfrac{a}{x}$.

5. Considerando os segmentos de medidas a, b e c abaixo, obtenha os segmentos nas seguintes medidas:

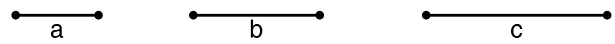


Figura 69

(a) x tal que $x^2 = (a+b).c$;

(b) y tal que $y = \frac{b\sqrt{b.c}}{a}$

(c) z tal que $z^2 = c.\sqrt{a^2+b^2}$

(d) w tal que $w = \frac{a\sqrt{5}.\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{b.c}}$

Sugestão:

(a) x é a média geométrica dos segmentos de medida $a+b$ e c.

(b) Primeiro encontre o segmento de medida $x' = \sqrt{b.c}$ (é a média geométrica de b e c) em seguida lembre $y = \frac{b.x'}{a} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{x'}{y}$.

(c) Primeiro use o Teorema de Pitágoras para encontrar $\sqrt{a^2+b^2}$.

(d) Utilize o Exercício 9 da aula 2.

Média e Extrema Razão

Obter o ponto de média e extrema razão de um segmento AB ou dividi-lo em média e extrema razão é encontrar o ponto C colinear aos pontos A e B tal tenhamos a proporção $AC : AB :: CB : AC$ ou equivalentemente $CB : AC :: AC : AB$, isto é AC é média geométrica de AB e CB. No entanto, este problema não é tão simples como resolver uma média geométrica.

Sabemos que se AB (ver noções iniciais) tem medida a o segmento AC tem medida x que satisfaz a equação $x^2 + ax - a^2 = 0$. Tal equação equivale à:

$$x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Assim $x + \frac{a}{2}$ é a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos a e $\frac{a}{2}$.

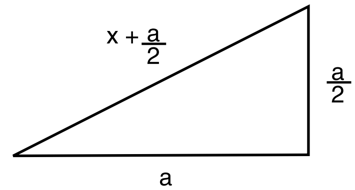


Figura 70

Problema 1: Obter os pontos de média e extrema razão do segmento AB dado.

Sabemos que existem dois pontos e que vamos encontrá-los da seguinte forma:

1.1. Sobre uma reta suporte r qualquer, construímos um segmento AB de medida a;

1.2. Após dividir o segmento AB em duas partes iguais, construímos um segmento BD de medida $\frac{a}{2}$ na perpendicular a r que passa por B;

1.3. Construímos a semi-reta de origem A que passa por D;

1.4. Com centro em D e raio DB construímos uma circunferência que intercepta a semi-reta, construída no item anterior, nos pontos E e E', sendo E entre A e D;

1.5. Com centro em A e raio AE, construímos uma circunferência que intercepta o interior do segmento AB no ponto C;

1.6. Com centro em A e raio AE', construímos uma circunferência que intercepta o exterior do segmento AB no ponto C';

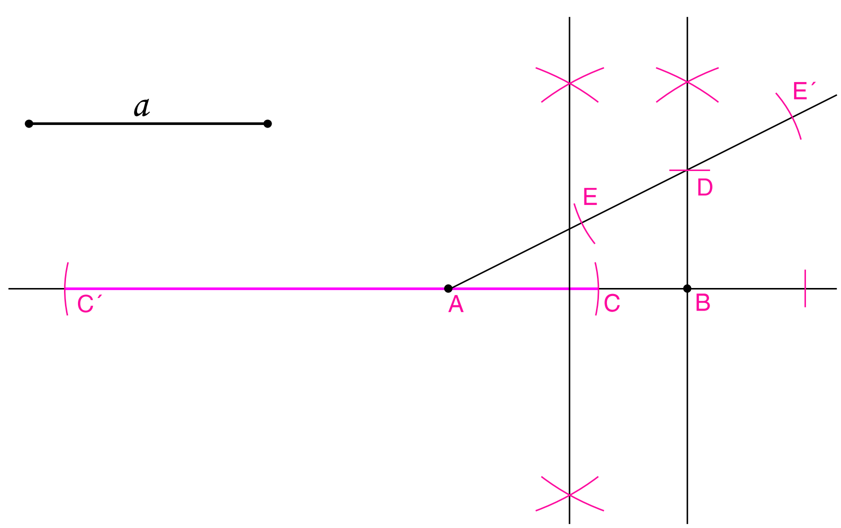


Figura 71

Justificativa: Como AD tem medida $x+\frac{a}{2}$, ED e $E'D$ possuem medidas iguais a $\frac{a}{2}$, então AC tem medida x e AC' tem medida $x+a$. Assim como C está no interior do segmento AB, então o ponto C já satisfaz a condição. Por outro lado, como AC' e AB têm sentidos opostos, temos que:

$$\frac{AC'}{AB} = -\frac{x+a}{a} \simeq -1,618$$

Você sabia que...

O emprego da seção áurea se torna mais sedutor nas relações existentes no corpo humano. No rosto feminino há proporções invariáveis, prevalecendo sempre a seção áurea:

a) na distância entre a base do nariz e a do queixo;

b) na divisão da altura da cabeça pela linha das sobrancelhas;

c) na divisão, pela boca, da distância entre a base do nariz e a do queixo.

Em muitas outras partes do corpo pode ser encontrada a divisão áurea:

d) o umbigo divide o corpo do adulto em média e extrema razão;

e) no dedo médio da mão, o comprimento da falangeta é o segmento áureo do comprimento da falanginha, e este, por sua vez, é o segmento áureo do comprimento da falange;

f) a linha dos ombros divide em média e extrema razão a distância que vai do umbigo até o alto da cabeça;

g) a linha dos olhos divide o comprimento do rosto em média e extrema razão.

Observe que na figura 72 as igualdades do tipo "a:b :: c:d", onde a, b, c e d são números de 1 a 16, estão dizendo que a razão formada pelos segmentos "a" e "b" é proporcional a razão formada pelos segmentos "c" e "d". Por exemplo, "1:2 :: 2:3" está dizendo que a razão formada pelos segmentos "1" e "2" é proporcional a razão formada pelos segmentos "2" e "3".

O segmento áureo pode ser encontrado na arte e na pintura, como por exemplo o quadro de Leonardo da Vinci, "Monalisa", segue a proporção áurea. Muitas obras de arte se enquadram dentro da razão áurea como é o caso também do Parthenon.

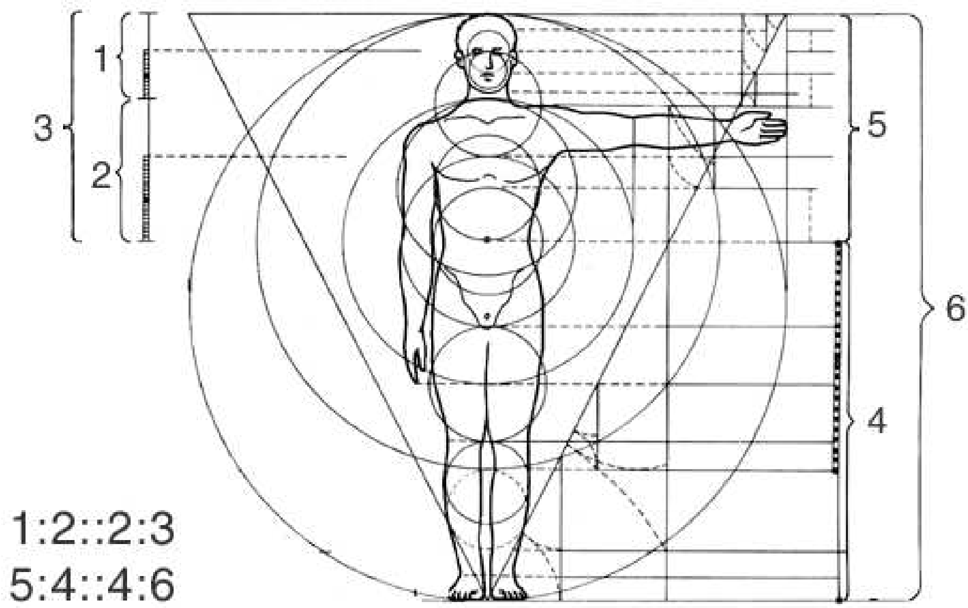


Figura 72

Resumo

Nesta aula você aprendeu...

- A dividir um segmento em partes iguais ou proporcionais a outros segmentos dados;
- A resolver de forma geométrica algumas equações algébricas;
- A obter o ponto de média e extrema razão de um segmento dado.

Aula 5 – Divisão de ângulos em partes iguais.

Objetivos

Efetuar a divisão de um ângulo qualquer em 2^n partes iguais;
Obter a divisão de um ângulo em três partes iguais.

Ângulos

Vimos na terceira aula como efetuar o transporte de um ângulo qualquer apoiando um de seus lados sobre uma semi-reta com seu vértice na origem.

As medidas de ângulos são associados a números reais e desta forma podem ser somados, subtraídos ou multiplicados e divididos por um número diferente de zero, graficamente. Em outras palavras, podemos, de um modo geral, operar graficamente os ângulos. E como conseqüência, podemos efetuar algumas operações gráficas, como:

- adição e subtração;
- multiplicação por um número natural;

Outras operações necessitam de processos distintos dos utilizados para resolução das operações supracitadas, como a divisão de um ângulo em partes iguais, por exemplo.

A divisão gráfica exata dos ângulos por um número não é sempre possível. Podemos dividir graficamente com precisão um ângulo qualquer em duas partes, em quatro, em oito etc.; no entanto, não poderemos dividi-lo em três partes, exceto quando o ângulo for reto.

Na próxima seção veremos a divisão de um ângulo qualquer em uma potência de 2(2,4,8,16,...), através do uso sucessivo da construção de bissetrizes.

Divisão de um ângulo em 2^n partes iguais

Dividir um ângulo em duas partes corresponde a determinar a sua bissetriz. Antes de obtermos a construção da bissetriz de um ângulo, lembremos que ela é um lugar geométrico definido da seguinte forma:

Definição 1: A bissetriz de um ângulo determinado por duas retas concorrentes $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, é o lugar geométrico dos pontos do plano que eqüidistam dessas retas.

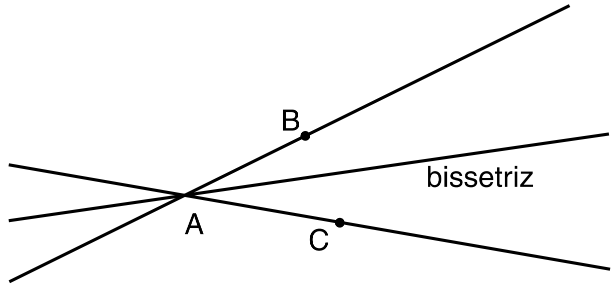


Figura 73

Embora nesta aula o nosso objetivo seja mostrar a divisão de um ângulo, é sempre válido lembrar que duas retas concorrentes formam quatro ângulos: dois pares de ângulos iguais opostos pelo vértice, e dois pares de ângulos adjacentes suplementares. Neste caso, o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes às retas concorrentes são as duas bissetrizes dos ângulos distintos que tais retas determinam. Essas bissetrizes são perpendiculares.

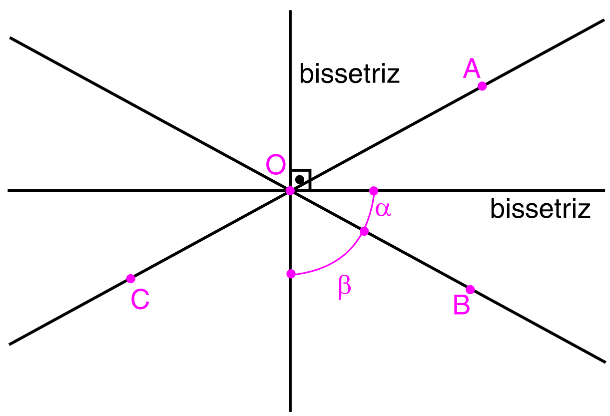


Figura 74

Justificativa: Note, pela Figura 2, que a medida do ângulo entre as bissetrizes é dado por $\alpha + \beta$, onde $\alpha = \frac{A\widehat{O}B}{2}$ e $\beta = \frac{B\widehat{O}C}{2}$. Assim

$$\alpha + \beta = \frac{A\widehat{O}B}{2} + \frac{B\widehat{O}C}{2} = \frac{A\widehat{O}B + B\widehat{O}C}{2} = \frac{180^o}{2} = 90^o.$$

Vamos agora trabalhar um pouco com demonstrações que auxiliarão na compreensão destes conceitos.

Problema 1: Achar a bissetriz de um ângulo dado $\mathbf{A\widehat{B}C}$ qualquer .

Resolução:

1.1 Com uma medida qualquer do compasso e fazendo centro em B, descrevemos um arco de circunferência que corte os lados do ângulo dado. Marque os pontos como D e E;

1.2 Com centro em E e com a mesma abertura do compasso, descrevemos um arco no interior do ângulo para o qual deseja-se traçar a bissetriz;

1.3 Com centro em D e mesma abertura do compasso, descrevemos outro arco voltado para o interior do ângulo, interceptando o arco descrito em 1.2 num ponto F;

1.4 Unindo B e F você tem a bissetriz do ângulo $A\widehat{B}C$.

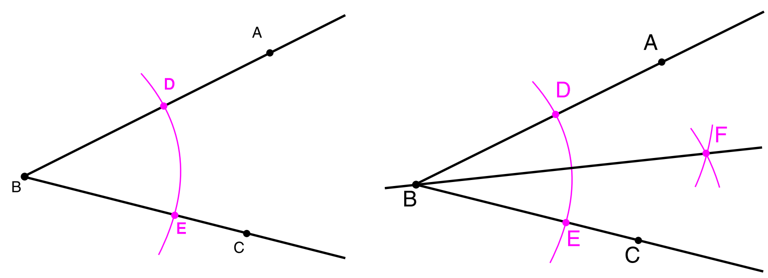


Figura 75

Justificativa: O quadrilátero $BDFE$ é um losango, visto que $BD = BE = DF = EF$, portanto a diagonal BF é bissetriz do ângulo $D\widehat{B}E = A\widehat{B}C$(veja aula de quadriláteros da disciplina Geometria Básica).

Muitas vezes não conhecemos o vértice do ângulo e mesmo assim temos necessidade de dividi-lo em duas partes iguais. Veja qual o procedimento adequado nessa situação.

Problema 2: Achar a bissetriz de um ângulo formado pelas retas concorrentes r e s sem utilizar o ponto de interseção destas retas.

Resolução:

2.1 Traçamos uma reta t que intercepte as duas retas r e s, respectivamente nos pontos $A \in r$ e $B \in s$;

2.2 Construímos as bissetrizes dos ângulos formados pelas retas r e t;

2.3 Construímos as bissetrizes dos ângulos formados pelas retas s e t;

Os passos 2.2 e 2.3 são possíveis, pois são conhecidos os pontos de interseção entre as retas.

2.4 As bissetrizes se encontram e obtemos dois pontos C e D no interior do ângulo formado pelas retas r e s;

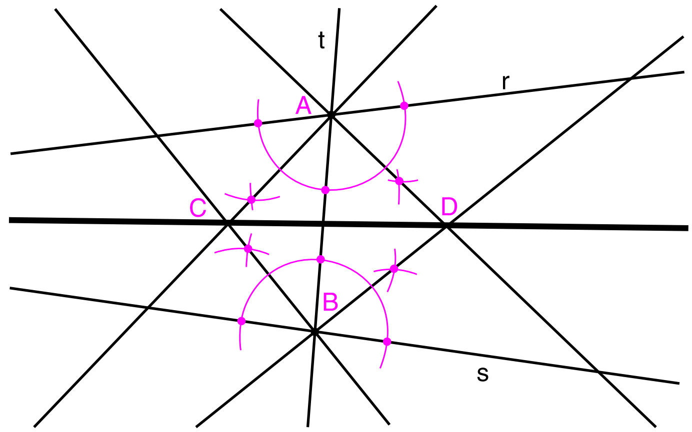


Figura 76

2.4 Unindo os pontos C e D obtemos a bissetriz do ângulo entre r e s.

Justificativa: Como o ponto D pertence à bissetriz do ângulo formado pelas retas r e t, e também à bissetriz do ângulo formado pelas retas s e t, temos que D é eqüidistante das retas r e t e também s e t, isto é, D é eqüidistante das retas r e s. Logo D pertence à bissetriz do ângulo formado pelas retas r e s.

Da mesma forma podemos concluir que o ponto C também pertence à bissetriz do ângulo formado pelas retas r e s. Portanto, a reta que passa por C e D deve ser a bissetriz procurada.

Exemplo 8

Construa uma circunferência que seja tangente simultaneamente às retas r e t, e que tenha centro pertencente à reta s, dadas a seguir.

(1) Qual seria a posição da reta s para que o problema tenha uma única solução?

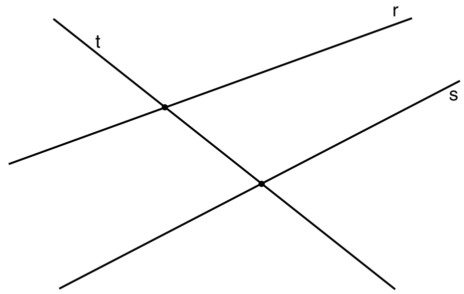


Figura 77

Resolução:

Como a circunferência procurada é tangente às retas r e t então o centro, por ser eqüidistantes a estas retas, deve pertencer à uma das bissetrizes dos ângulos formados por elas. Neste caso o problema pode apresentar até duas soluções[(1)] que dependerão da possibilidade de interseções de s com tais bissetrizes, visto que o centro pertence a s. Pela figura, nota-se que teremos duas soluções. Neste caso os centros são os pontos C e C' obtidos pela interceptação de com as bissetrizes. Pelos pontos C e C' traçamos as perpendiculares à reta r para obter os raios das circunferências e assim construí-las.

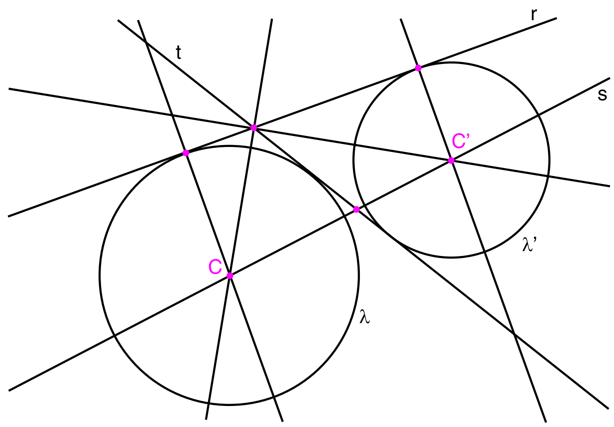


Figura 78

Exercícios:

1. Obtenha a circunferência inscrita no triângulo ABC (figura 79).

   Sugestão: Lembre-se que o centro da circunferência inscrita num triângulo é o incentro do mesmo, que é obtido pela interseção das bissetrizes.

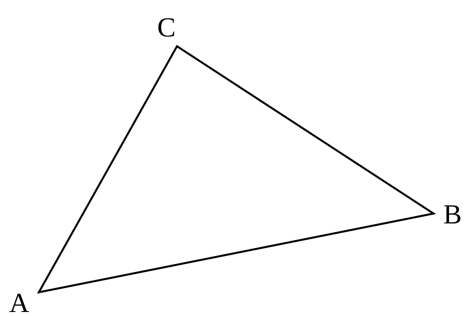


Figura 79

2. Encontre o ponto P eqüidistante das retas r e s, que seja também eqüidistante dos pontos A e B (figura 80).

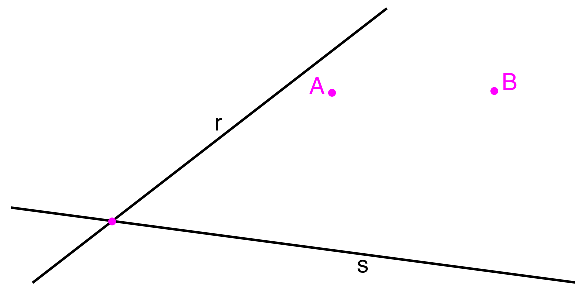


Figura 80

3. Construa os ângulos de 75^o e 135^o.

   Sugestão: Lembre-se que $75^o = 60^o + 15^o$ ou $75^o = 90^o - 15^o$.

Como já conseguimos obter a bissetriz de um ângulo qualquer, dividindo-o ao meio, para efetuarmos a divisão de um ângulo por 2^n basta aplicar o mesmo método n vezes seguidas.

Divisão de um ângulo em três partes iguais

No início desta aula dissemos que era possível a divisão de um ângulo em três partes iguais ou a sua trissecção. No entanto, ela é possível somente no de ângulos retos, e alguns de seus múltiplos ou divisores(180^o; 45^o; etc).

A impossibilidade da divisão em três partes iguais de ângulos com outras medidas é justificada por argumentos fortemente algébricos(1), os mesmos utilizados na comprovação da impossibilidade da duplicação do cubo por métodos geométricos ou ainda a quadratura do círculo(2).

(1) Estes argumentos surgem como conseqüência de uma teoria algébrica, conhecida como Teoria de Galois.
(2) A quadratura do círculo equivale a obter um quadrado de mesma área de um círculo dado.

No caso em que não é possível a divisão e um ângulo em três partes iguais, existem métodos aproximados para obtê-lo. No problema a seguir daremos um exemplo, com os dois procedimentos possíveis.

Problema 3: Dividir, se possível, um ângulo dado em três partes iguais. Quando for impossível efetue um processo aproximado para obter a divisão.

a) O ângulo é reto:

O objetivo dessa divisão é obter o ângulo de 30^o. Para isso basta construir um ângulo de 60^o e dividi-lo ao meio pela bissetriz. Vamos então construir um ângulo de 60^o.

a.1) Marca-se um segmento AB qualquer sobre uma reta suporte r qualquer;

a.2) Com abertura do compasso no comprimento de AB, descrevemos dois arcos de circunferência com centros respectivamente em A e B;

a.3) Os arcos devem se interceptar num ponto C, com o qual devemos unir o ponto A ou B. Façamos com A;

a.4) O ângulo $C\widehat{A}B$ mede 60^o.

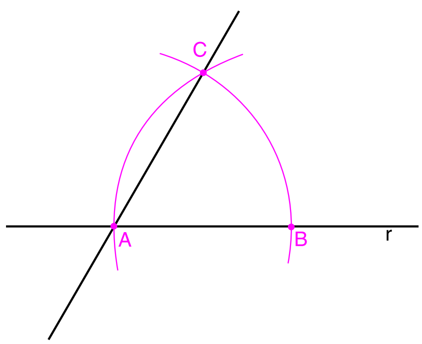


Figura 81

Portanto basta agora traçar a bissetriz do ângulo $C\widehat{A}B$ para obtermos o ângulo de 30^o.

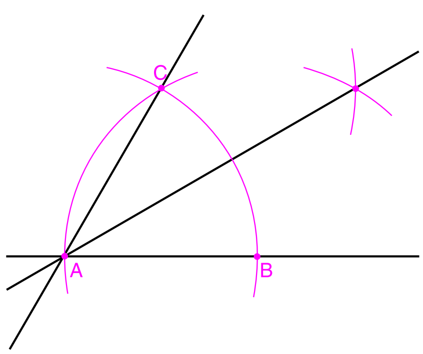


Figura 82

b) O ângulo não é reto.

Neste caso, a construção não pode ser feita com régua e compasso. Será dada uma solução aproximada.

Consideremos um ângulo com lados sobre as retas r e s que concorrem em O.

b.1) Com centro no vértice do ângulo, indicado por O, construímos uma circunferência com raio qualquer. Tal circunferência intercepta os lados do ângulo nos pontos A e B;

b.2) Prolongamos os lados do ângulo no sentido oposto ao das semiretas que o definem e que devem interceptar a circunferência construída nos pontos C e D. Consideremos D sobre a reta que passa por A e O e C sobre a reta que passa por B e O;

b.3) Traçamos a bissetriz do ângulo dado, que deve interceptar a circunferência no ponto E que está no interior do ângulo $A\widehat{O}B$;

b.4) Sobre a bissetriz tomamos um ponto F de modo que E seja ponto médio de OF, isto é, $OE = EF$;

b.5) Unimos o ponto F com os pontos C e D. Os segmentos devem interceptar a circunferência nos pontos G e H respectivamente.

Os pontos G e H dividem o ângulo $A\widehat{O}B$ em três partes aproximadamente iguais.

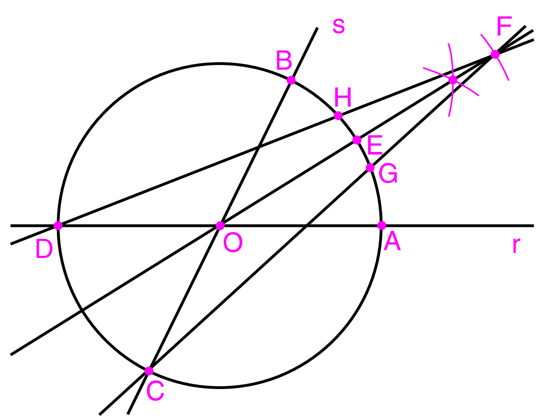


Figura 83

Justificativa: Vamos considerar $A\widehat{O}B = 2a$ e $H\widehat{O}G = 2x$.

Note que no triângulo OCF temos que $O\widehat{C}F = \frac{1}{2}(a + x)$, pois é um ângulo inscrito na circunferência que compreende um arco de medida $a + x$, e também temos que $C\widehat{F}O = \frac{1}{2}(a - x)$, pois ao prolongarmos a bissetriz obtemos um ângulo oposto ao ângulo $E\widehat{O}B = a$ pelo vértice, que, por outro lado, ele é ângulo externo ao triângulo OCF não-adjacente aos ângulos

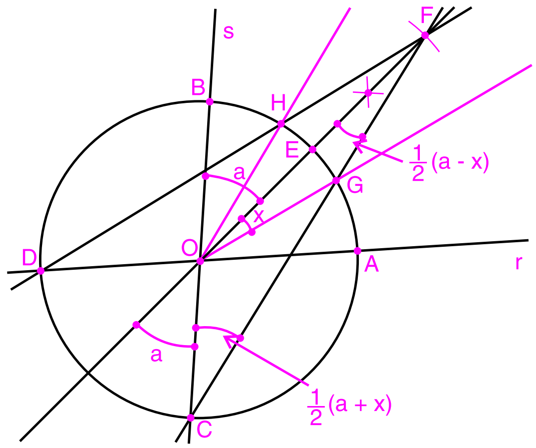


Figura 84

$O\widehat{C}F = \frac{1}{2}(a+x)$ e $C\widehat{F}O$, assim:

$$C\widehat{F}O = a - \frac{1}{2}(a+x) = \frac{1}{2}(a-x).$$

Aplicando a lei dos senos no triângulo OCF, considerando os lados OF e OC que medem respectivamente $2r$ e r, onde r é o raio da circunferência construída, temos que;

$$\frac{2r}{sen\frac{1}{2}(a+x)} = \frac{r}{sen\frac{1}{2}(a-x)} \Leftrightarrow \frac{sen\frac{1}{2}(a-x)}{sen\frac{1}{2}(a+x)} = \frac{1}{2}.$$

Desenvolvendo a segunda igualdade, obtemos:

$$\frac{sen\frac{a}{2}.cos\frac{x}{2} - sen\frac{x}{2}.cos\frac{a}{2}}{sen\frac{a}{2}.cos\frac{x}{2} + sen\frac{x}{2}.cos\frac{a}{2}} = \frac{1}{2} \qquad (1).$$

Dividindo o numerador e o denominador do primeiro membro de (1) por $cos\frac{a}{2}.cos\frac{x}{2}$, temos:

$$\frac{tg\frac{a}{2} - tg\frac{x}{2}}{tg\frac{a}{2} + tg\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Por um simples cálculo, mostramos que $tg\frac{x}{2} = \frac{1}{3}tg\frac{a}{2}$. E isso nos diz que x é aproximadamente $\frac{a}{3}$.

OBS: Para $2a = 45^o$ a equação anterior nos dá $2x \cong 15^o08'$ e deveria ser 15^o.

Problema 4: De dois pontos distintos A e B , traçar retas que se encontrem em uma outra reta dada r, formando com esta última ângulos iguais.

Resolução:

4.1 Construímos um ponto simétrico a A ou B em relação à reta r. Faremos aqui para o ponto A;

Nota: O problema 4 é chamado de **Problema de Posto Brilhante**. Se A é um foco luminoso e C um refletor, o raio luminoso A, tocando em C, irá refletir-se no ponto B. É também caminho o mais curto entre os pontos A e B, e tal caminho deve tocar a reta r.

4.2 Unindo o simétrico A' de A com o ponto B, obtemos um ponto C sobre a reta r;

4.3 As retas definidas pelos pares de pontos A e C, e B e A' formam com r ângulos iguais.

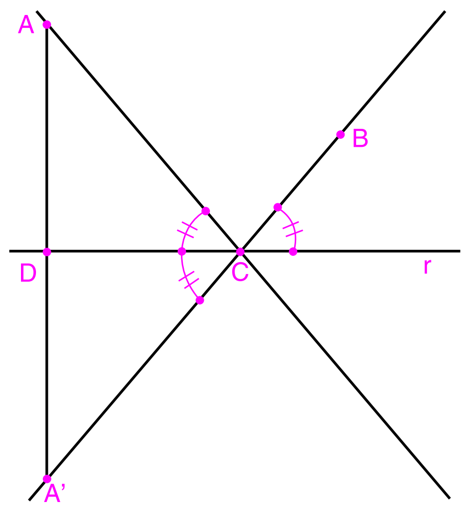


Figura 85

Justificativa: Como ACA' é um triângulo isósceles e a reta r divide o segmento AA' no ponto médio D, temos que r é bissetriz de $A\widehat{C}A'$, isto é, $A\widehat{C}D = D\widehat{C}A'$ que é oposto pelo vértice ao ângulo formado por r e a semi-reta determinada de origem em C que passa por B, que, neste caso, devem ser iguais.

Problema 5: Traçar a reta que passa por um ponto A e pela interseção de duas retas r e s, sem usar a interseção destas retas.

(1) Lembremos que o ortocentro de um triângulo é o ponto de encontro das alturas deste triângulo.

A idéia é considerar o ponto A como ortocentro(1) de um triângulo com dois vértices situados respectivamente sobre as retas r e s e terceiro vértice sendo a interseção destas retas.

5.1 Traçamos por A uma perpendicular à r. Tal perpendicular intercepta s em um ponto B;

5.2 Traçamos por A uma perpendicular à s. Tal perpendicular intercepta r em um ponto C.

5.3 Unindo os pontos B e C obtemos o lado oposto ao vértice desconhecido do triângulo;

5.4 Traçamos a reta que passa por A perpendicular ao segmento BC. Tal reta é a reta suporte da altura relativa ao vértice desconhecido, assim, obrigatoriamente passará pela interseção das retas r e s.

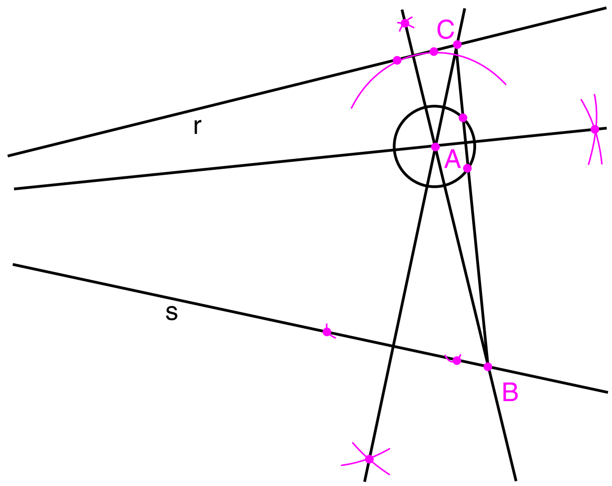


Figura 86

Justificativa: A idéia inicial justifica a construção.

Exercícios:

4. Construa um octógono regular inscrito em uma circunferência de raio r.

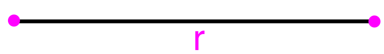


Figura 87

5. Construa um eneágono regular(aproximado) inscrito em uma circunferência de raio r.

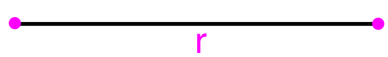


Figura 88

6. Em um jogo de bilhar, para uma determinada jogada, o jogador encontra somente uma possibilidade para efetuá-la. Ele deve utilizar as tabelas esquerda, superior e direita da mesa para que a bola saia do ponto A e bata na bola que está no ponto B. Observando a figura da

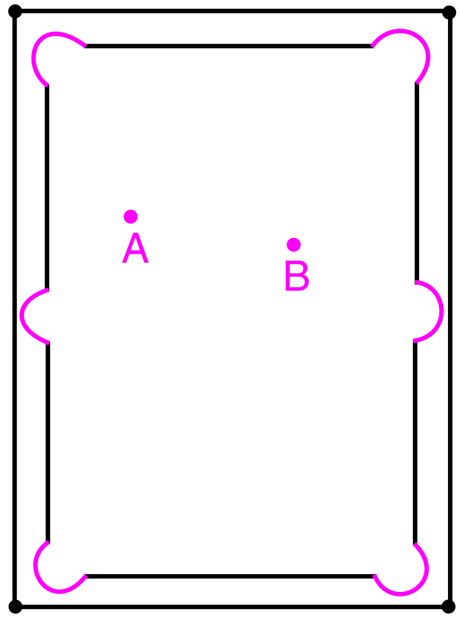


Figura 89

mesa de bilhar, encontre os pontos nas tabelas pelos quais a bola deve passar antes de chegar ao objetivo final.

Sugestão: Lembre-se que a bola, ao bater na tabela da mesa, prossegue em linha reta, formando um ângulo com a tabela igual ao ângulo pela linha reta percorrida antes de bater, semelhante ao reflexo de um espelho. Utilize o problema 4.

Resumo

Nesta aula você aprendeu ...

- A dividir um ângulo qualquer em duas partes iguais;
- A utilizar um processo aproximado de divisão de um ângulo qualquer em três partes iguais.

Aula 6 – Arco capaz e construções básicas de circunferência.

Objetivos

Efetuar as construções básicas de circunferências;
Construir o arco capaz de um ângulo dado sobre um segmento dado.

Circunferências e Círculos

Definição 1: Denominamos circunferência o lugar geométrico dos pontos do plano que estão a uma distância r, chamada raio, de um ponto fixo C, chamado centro. Chama-se círculo a porção de plano limitada por uma circunferência.

Você vê círculos mais comumente, talvez, do que outras figuras geométricas. Não acredita?...

Repare nos círculos nas faces das moedas, no prato onde come e no copo em que bebe. Até no céu você vê círculos no sol e na lua cheia.

Em relação à circunferência existem alguns elementos e propriedades que no decorrer das aulas estaremos sempre recordando.

- corda de círculo é o segmento que une dois pontos da circunferência desse círculo.
- diâmetro de um círculo é qualquer corda que passe pelo centro.
- a distância do centro a qualquer ponto da circunferência chama-se raio.
- o diâmetro é o dobro do raio.

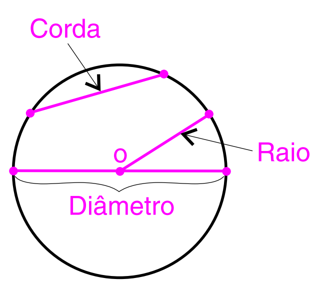


Figura 90

- o comprimento de uma circunferência é calculado, multiplicando-se seu diâmetro pelo valor de π (Veja Geometria Básica).

- a área de um círculo é calculada multiplicando-se o quadrado de seu raio pelo valor de π (Veja Geometria Básica).

Ângulo Inscrito e Ângulo Central

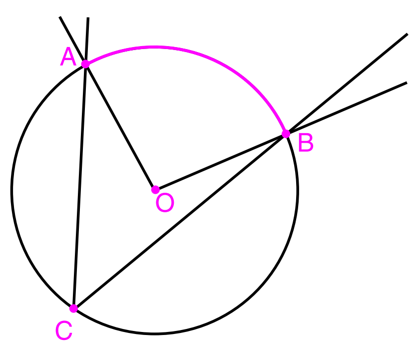
Definição 2: Seja um arco $\widehat{AB}$ de uma circunferência de centro O. Um ângulo

- cujo vértice seja um ponto C da circunferência;

- que não pertence a $\widehat{AB}$;

- cujos lados passem pelos extremos de $\widehat{AB}$, é denominado ângulo inscrito que compreende o arco $\widehat{AB}$.

As semi-retas de origem O que passam respectivamente pelos pontos A e B formam um ângulo chamado ângulo central que compreende $\widehat{AB}$.

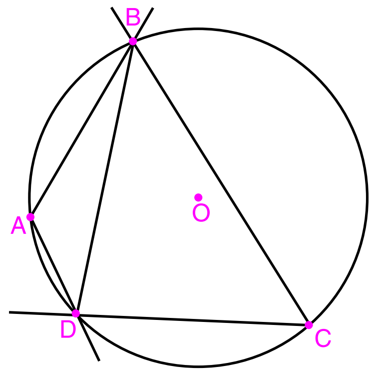


$A\hat{O}B$ é o ângulo central $A\hat{C}B$ é o ângulo inscrito que compreendem o arco $\widehat{AB}$

Figura 91

Já foi visto em Geometria Básica que todo ângulo central tem a mesma medida do arco por ele compreendido, e que todo ângulo inscrito tem por medida a metade do arco por ele compreendido, e conseqüentemente, todos os ângulos inscritos em um mesmo arco são iguais à metade do ângulo central.

Além disso, ângulos inscritos em cada um dos arcos determinados por uma corda são suplementares.



$B\widehat{A}D + B\widehat{C}D = 180°$

Figura 92

Arco capaz de um segmento sob um ângulo

Um ângulo inscrito em uma circunferência pode ser agudo, reto ou obtuso, segundo compreenda um arco menor, igual ou maior que uma semi-circunferência.

Definição 3: Consideremos dois pontos A e B sobre um circunferência. Para todo ponto M sobre um mesmo arco determinado por A e B, o ângulo $A\widehat{M}B = q$, ou seja, ele é constante. Este arco chama-se arco capaz do ângulo q sobre o segmento AB.

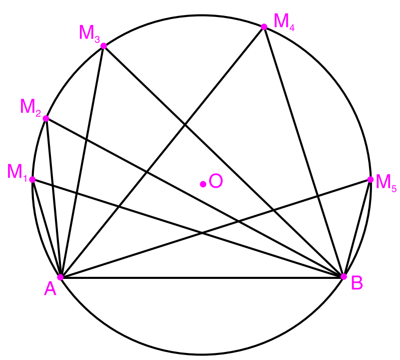


Figura 93 :$A\widehat{M_1}B = A\widehat{M_2}B = A\widehat{M_3}B = A\widehat{M_4}B = A\widehat{M_5}B$

Um observador, portanto, que se mova sobre esse arco, consegue ver o segmento AB sempre sob o mesmo ângulo. Neste caso, é natural definirmos o arco capaz como o lugar geométrico dos pontos do plano de onde se vê um segmento sob um ângulo dado.

É ainda interessante notar que se M é qualquer ponto da circunferência de diâmetro AB, o ângulo $A\widehat{M}B$ é reto e, portanto, cada semicircunferência é também chamada de arco capaz de 90^o sobre AB.

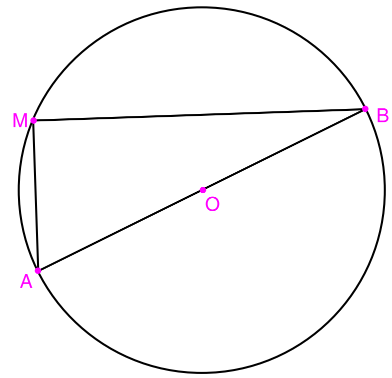


Figura 94 :$A\widehat{M}B = \frac{180^o}{2} = 90^o$

Problema 1: Construir o arco capaz de onde se vê o segmento AB sob um ângulo $\alpha = C\widehat{D}E$.

Resolução:

1.1 Dado o segmento AB, traçamos a sua mediatriz, que intercepta AB em um ponto M;

1.2 Em uma das extremidades do segmento AB, transportamos o ângulo α, considerando AB como lado do novo ângulo. Façamos isso considerando a extremidade B. O novo lado do ângulo intercepta a mediatriz num ponto P;

1.3 No vértice B do novo ângulo construído, traçamos uma perpendicular ao novo lado do ângulo;

1.4 A perpendicular construída interceptará a mediatriz de AB em um ponto O, que deve ser o centro do arco a ser construído;

1.5 Com a ponta seca do compasso em O, com abertura OA, giramos o compasso no semiplano, definido pela reta suporte de AB, oposto ao semiplano do ângulo novo construído.

Qualquer ponto sobre tal arco forma com A e B ângulo igual a α.

Justificativa: Note que o ângulo central $A\widehat{O}B$ mede 2α, pois $A\widehat{O}M = M\widehat{O}B = M\widehat{B}P = \alpha$. Portanto, qualquer ângulo inscrito que compreenda o segmento AB e que tenha o vértice sobre o arco $\widehat{AB}$, terá medida $\frac{A\widehat{O}B}{2} = \alpha$.

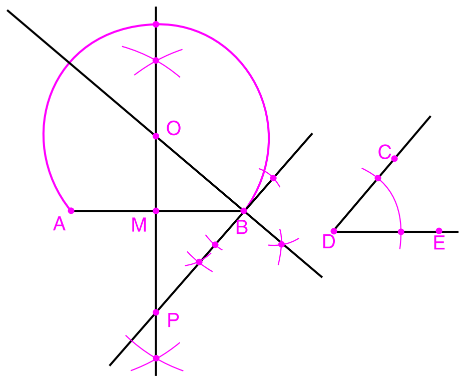


Figura 95

Exercício:

1. Construa um triângulo isósceles que tenha a base igual a ℓ e que tenha o ângulo oposto à base igual $A\widehat{B}C$.

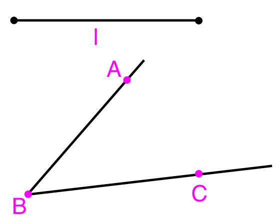


Figura 96

Construções Básicas em Circunferências.

Problema 1: Determinar o centro de uma circunferência.

Resolução:

1.1 Traça-se uma corda AC, qualquer, na circunferência;

1.2 Traça-se a mediatriz do segmento AC. A mediatriz deve interceptar a circunferência nos pontos E e F;

1.3 Encontramos o ponto médio O de EF utilizando a mediatriz.

O ponto O é o centro da circunferência (Figura 97).

Justificativa: Como EF é perpendicular à corda AC e passa pelo seu ponto médio, então EF é um diâmetro da circunferência. Portanto, o ponto médio de EF é o centro da circunferência. Para maiores detalhes veja aula sobre circunferências, da disciplina Geometria Básica.

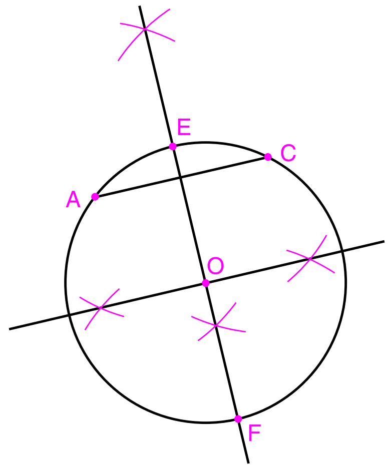


Figura 97

Problema 2: Construir uma circunferência de raio r que passa por dois pontos A e B.

2.1 Traça-se a mediatriz do segmento AB;

2.2 Com raio r descreve-se uma circunferência de centro em A;

2.3 Tal circunferência interceptará a mediatriz nos pontos C e D.

Observe que este problema possui duas soluções (Figura 98).

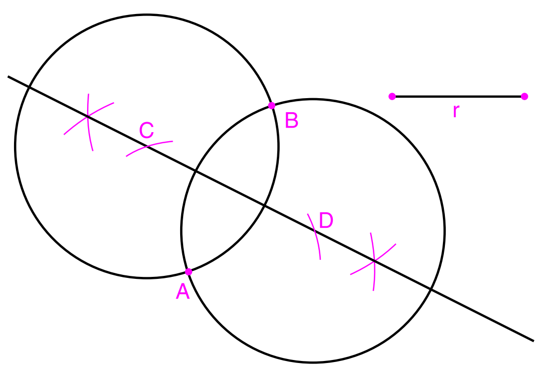


Figura 98

Justificativa: Sabemos que os pontos da mediatriz são eqüidistantes das extremidades A e B. Logo C e D são eqüidistantes dos pontos A e B, e como estão a uma distância r do ponto A, então são centros de circunferências de raio r que contêm os pontos A e B.

Problema 3: Construir uma circunferência que passe por três pontos A, B e C não-alinhados.

3.1 Traça-se as mediatrizes dos segmentos AB e BC;

3.2 As mediatrizes se encontrarão em um ponto D, que é o centro da circunferência procurada.

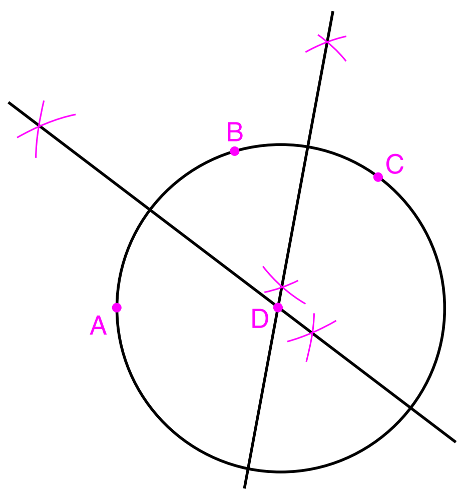


Figura 99

Justificativa: Como o ponto D é a interseção das mediatrizes dos segmentos AB e BC, então ele é eqüidistante dos pontos A, B e C. Logo é o centro da circunferência que passa por esses pontos.

Exercícios:

2. Construa o lugar geométrico dos pontos do plano que são centros das circunferências de raio R e que determinam com a reta r cordas iguais a c.

Figura 100

3. Construa o lugar geométrico dos pontos do plano que são centros das circunferências de raio R e que determinam com a circunferência λ cordas iguais a c.

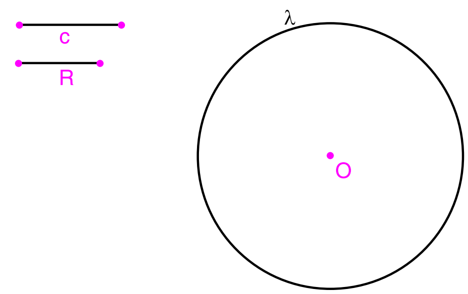


Figura 101

4. Construa o lugar geométrico dos pontos do plano que são pontos médios das cordas, da circunferência λ, que são iguais a c.

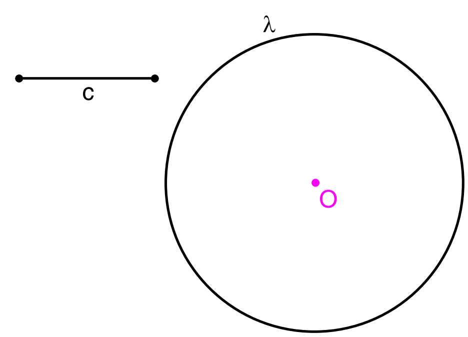


Figura 102

Tangência entre reta e circunferência.

Dizemos que uma reta é tangente a uma circunferência quando a interseção da reta com a circunferência é um único ponto. Os problemas de tangência se resolvem baseados na seguinte propriedade:

Considere uma circunferência λ de centro O e raio R e seja r uma reta tangente a λ num ponto de tangência A, então OA é perpendicular a r.

Problema 4: De um ponto dado em uma circunferência, traçar a reta tangente a ela.

Resolução:

Sejam λ uma circunferência de centro 0 e $A \in \lambda$.

4.1 Traçamos a reta r que passa pelo centro e pelo ponto A;

4.2 Construímos a reta t, perpendicular à r, que passa pelo ponto A.

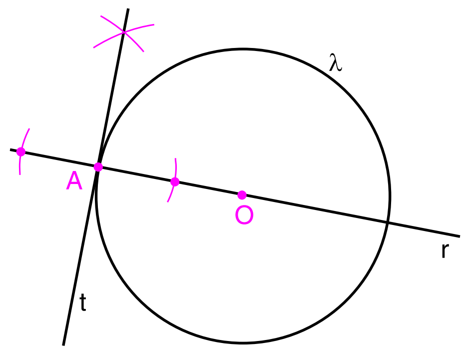


Figura 103

Justificativa: A reta t é tangente à λ no ponto A, pois é perpendicular ao raio OA.(Veja Geometria Básica)

Problema 5: Por um ponto externo a uma circunferência, traçar as retas tangente a ela.

Resolução:

Sejam λ uma circunferência de centro 0 e A um ponto que lhe é externo.

5.1 Encontramos o ponto médio M do segmento OA, utilizando a mediatriz do mesmo;

5.2 Com centro em M, construímos a circunferência de raio $MA = MO$;

5.3 Esta circunferência interceptará λ nos pontos C e D, que são os pontos de tangência;

5.4 Basta unir os pontos C e D ao ponto A.

Justificativa: Os ângulos inscritos $O\widehat{C}A$ e $O\widehat{D}A$ compreendem, cada um deles, uma semicircunferência. Logo, medem 90^o, isto é, os segmentos DA e CA são perpendiculares aos raios nos pontos, D e C, respectivamente. Portanto, DA e CA são tangentes à λ.

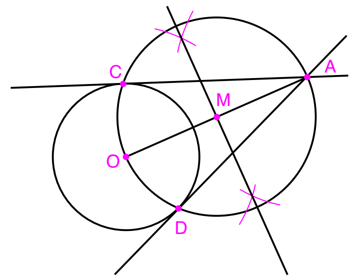


Figura 104

Problema 6: Dadas duas circunferências de raios R e R' e centros O e O', respectivamente, traçar suas tangentes comuns.

Primeiro caso: Tangentes exteriores

Se $R = R'$, então basta traçar as perpendiculares em relação ao segmento OO' em suas extremidades e unir os pontos de interseção com as circunferências. As retas obtidas devem ser paralelas a OO' e perpendiculares aos raios OA e $O'B$. Portanto, são tangentes às circunferências.

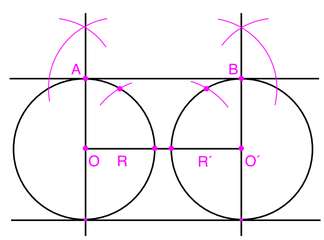


Figura 105

Se $R < R'$, construímos as tangentes comuns exteriores através dos seguintes passos:

(i) Construímos os raios OA e $O'B$, respectivamente, sobre as circunferências de centro O e O';

(ii) Transportamos o raio OA e o colocamos sobre o raio $O'B$, a seguir, tomando como origem o ponto B, e rebatendo para o interior da circunferência de centro O' e obtemos um ponto C;

(iii) De centro em O' e raio $O'C$, construímos uma outra circunferência;

(iv) Traçamos as tangentes a essa nova circunferência que passam pelo ponto O, obtendo os pontos de tangências E e F;

(v) Unimos o ponto O' aos pontos E e F, interceptando a circunferência maior nos pontos G e H;

(vi) Com centros em G e H, construímos dois arcos de circunferências de raio iguais a OE, interceptando a circunferência de centro O nos pontos I e J.

Os pontos G e I formam uma tangente comum e os pontos H e J formam outra tangente comum.

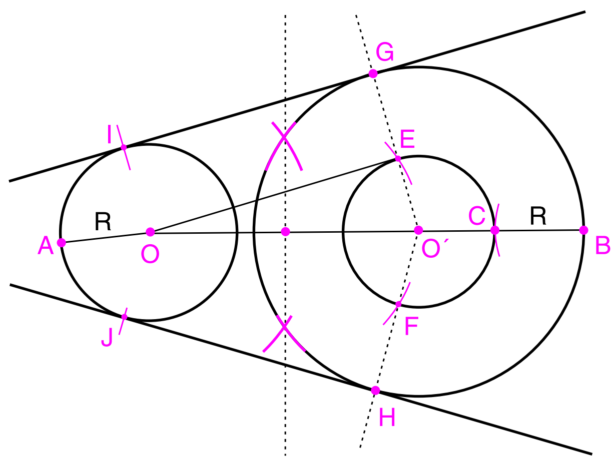


Figura 106

Justificativa: Observe que o quadrilátero $OEGI$ é um retângulo, pois OE e GI são iguais e perpendiculares às retas suportes dos raios $O'E$ e $O'G$. Dessa forma $OI = EG$ e assim $O'E = R' - R$.

Segundo caso: Tangentes interiores

Se $R < R'$, construímos as tangentes comuns interiores através dos seguintes passos:

(i) Construímos os raios OA e $O'B$, respectivamente, nas circunferências de centro O e O';

(ii) Transportamos o raio OA e o colocamos sobre o prolongamento do raio $O'B$, em seguida, tomando como origem o ponto B, rebatendo para o exterior da circunferência de centro O' e obtemos um ponto C;

(iii) De centro em O' e raio $O'C$, construímos uma circunferência;

(iv) Traçamos as tangentes a essa nova circunferência que passam pelo ponto O, obtendo os pontos de tangências E e F;

(v) Unimos o ponto O' aos pontos E e F, interceptando a circunferência interna nos pontos G e H;

(vi) Com centros em G e H, construímos dois arcos de circunferências de raio iguais a OE, interceptando a circunferência de centro O nos pontos I e J, de maneira que GI e HJ estejam entre as circunferências de centros O e O'.

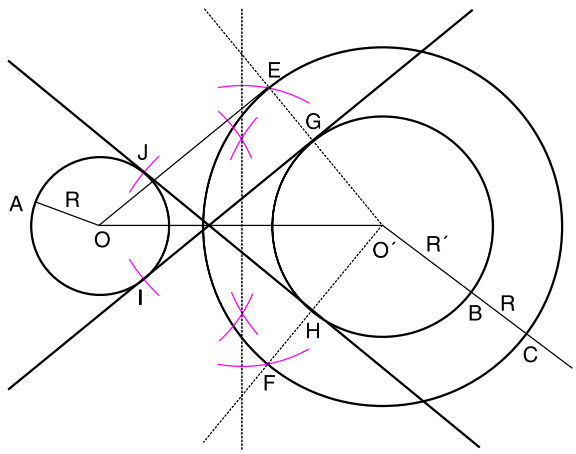


Figura 107

Justificativa: A justificativa é análoga à do problema anterior.

Exercícios:

5. Construa duas circunferências de raios iguais a R que não se interceptem e, em seguida, construa as retas tangentes comuns interiores.

Figura 108

Tangência de retas podem ser aplicadas em situações diversas. Vejamos um exemplo.

Exemplo 9

Dados dois pontos A e B não pertencentes a uma reta r, obtenha o ponto C sobre r de tal forma que o segmento AC forme com r o dobro do ângulo formado por CB e r.

Figura 109

Sabemos que por um ponto P fora de uma circunferência podemos traçar duas retas tangentes a ela. Além disso, se unirmos o ponto P ao centro O da circunferência, obtemos a bissetriz do ângulo formado pelas retas tangentes(veja aula sobre circunferência, em Geometria Básica).

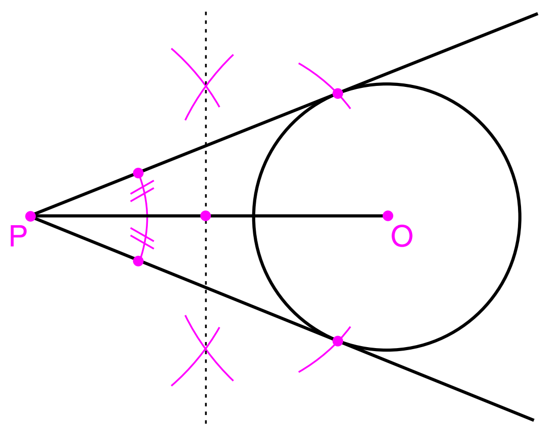


Figura 110

Assim, se considerarmos o ângulo entre CB e r como α, então o ângulo entre AC e r deve ser $2.\alpha$ que coincide com ângulo formado pelo prolongamento de AC com r, já que são ângulos opostos pelo vértice. Traçando a bissetriz do ângulo entre AC e r, obtemos o lugar geométrico de todos os centros das circunferências que são tangentes à r e ao prolongamento de AC. Traçando a perpendicular à r pelo ponto B, tal reta interceptará a bissetriz no ponto simétrico de B em relação à r. Isto é, o simétrico de B em relação à r é o centro da circunferência tangente à r e ao prolongamento de AC. Neste caso para obtermos o ponto C, devemos seguir os seguintes passos:

(i) Achamos o ponto simétrico B' de B em relação à r;

(ii) Construímos a circunferência de centro em B' e raio a metade de BB';

(iii) Traçamos por A uma reta tangente a essa circunferência que interceptará a reta r em C.

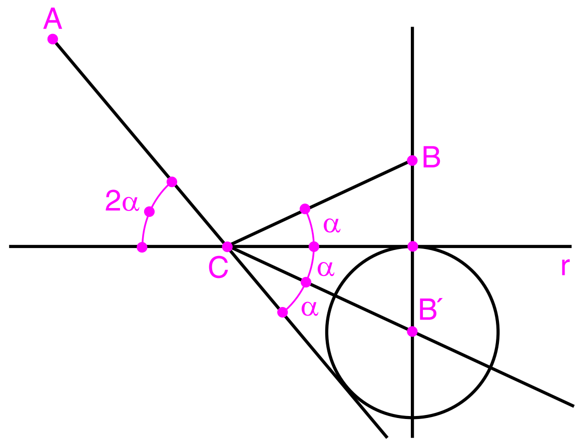


Figura 111

Exercícios:

6. Considerando a figura abaixo, construa a circunferência que passe pelo ponto B e que seja tangente à reta r no ponto A.

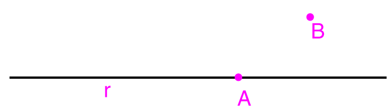


Figura 112

Sugestão: Lembre que o centro da circunferência procurada deve ser eqüidistante dos pontos A e B, e sendo r tangente, ela é perpendicular ao raio no ponto A.

7. Considerando a figura abaixo construa uma circunferência que passe pelo ponto B e que seja tangente à circunferência λ no ponto A (veja Figura 113).

Sugestão: Lembre-se que se duas circunferências são tangentes, os centros e o ponto de tangência devem estar numa mesma reta.

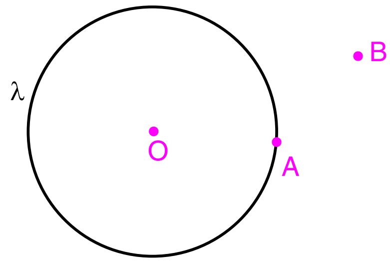


Figura 113

8. Construa as circunferências tangentes à circunferência λ e à reta r e que tenham raio R.

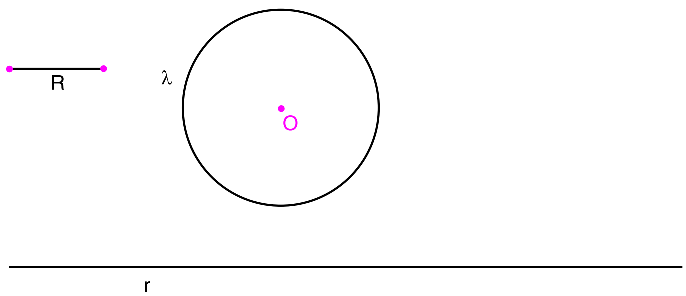


Figura 114

Sugestão: Os centros das circunferências procuradas devem estar a uma distância R da circunferência λ e da reta r.

Resumo:

Nesta aula, você aprendeu a...

- Construir o arco capaz de um segmento sob um ângulo;
- Efetuar as construções básicas de circunferências;
- Solucionar problemas de tangência entre reta e circunferência e entre circunferências.

Aula 7 – Retificação de circunferências e de arcos.

Objetivos

Retificar circunferências e arcos de circunferências;
Obter geometricamente o valor aproximado de π;
Obter aproximadamente um quadrado equivalente a um círculo.

Retificar uma curva é construir um segmento de reta que tenha o comprimento desta curva.

Intuitivamente, significa encontrar um segmento de reta, supostamente flexível como um fio de aço, tal que possa-se curvar ajustando-se perfeitamente sobre a curva em questão.

Preocuparemo-nos, nesta aula, com a retificação de circunferência ou arcos de circunferências.

A construção exata da circunferência ou do arco de circunferência retificado é impossível por meio de régua e compasso, podendo-se, no entanto, fazê-lo de modo aproximado com esses instrumentos. Assim, como o comprimento da circunferência de raio R é igual a $2\pi R$, podemos obter um segmento de medida próxima a $2\pi R$.

Existem diversos processos aproximados de se retificar uma circunferência e veremos a seguir, alguns deles.

Primeiro Processo:

Trata-se de um processo que perde um pouco em precisão, mas ganhando em praticidade no que se refere à construção. Tal processo é baseado na obtenção dos lados de um quadrado e de um triângulo eqüilátero inscrito na circunferência.

Consideremos uma circunferência de centro O e raio R.

1.1 Traçamos dois raios perpendiculares AO e OB.

1.2 Com centro em um ponto G qualquer da circunferência e raio AO, igual ao da circunferência, marcamos dois pontos D e E.

1.3 Traçamos os segmentos AB e DE.

O comprimento da circunferência é aproximadamente igual ao comprimento de MN, onde:

$$MN = 2(AB + DE).$$

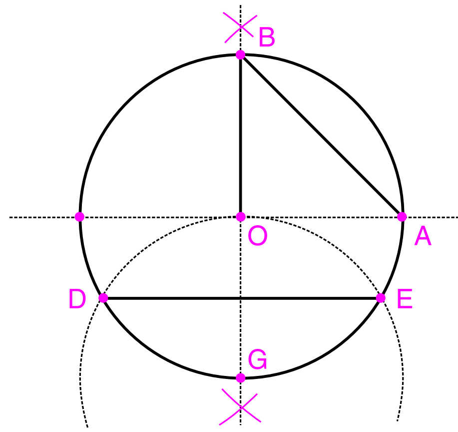


Figura 115

Justificativa: Seja R o raio da circunferência. Observe que: $AB = R\sqrt{2}$(lado de um quadrado de diagonal $2R$) e $DE = R\sqrt{3}$(lado de um triângulo eqüilátero de altura $R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}$). Então, $MN = 2R(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cong 2R(1,4142 + 1,732)$. Logo, $MN \cong 2R(3,1462)$. O erro cometido é por excesso e vale aproximadamente $0,0046(2R)$, sendo, portanto, inferior a cinco milésimos do diâmetro.

Segundo Processo:

Consiste em adotar o número $\frac{22}{7}$ para o valor de π. Toma-se então para comprimento da circunferência o segmento $MN = 2R\frac{22}{7} = 2R(3 + \frac{1}{7})$ ou, equivalentemente, $MN = 3,14285(2R)$

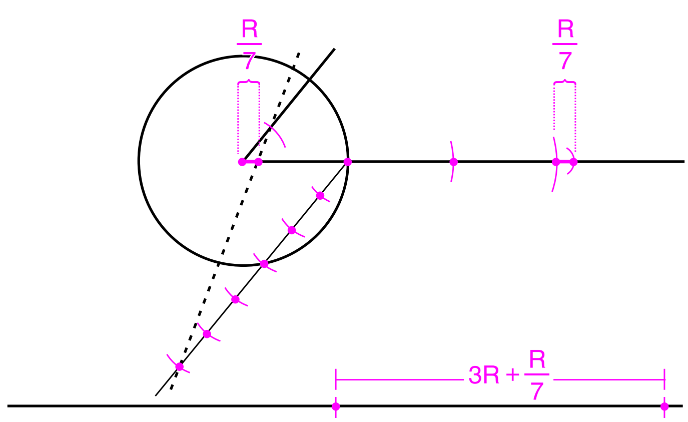


Figura 116

O erro cometido é por excesso e vale aproximadamente $0,00126(2R)$, isto é, inferior a dois milésimos do diâmetro do círculo.

Exercícios:

1. Considerando o segmento abaixo, com unidade de medida de comprimento, determine, pelos dois processos de retificação anteriores, um segmento de medida π, aproximadamente.

Figura 117

Sugestão: Retifique uma circunferência de raio igual a unidade dada, lembrando que $C = 2\pi.R$ é a fórmula do comprimento de uma circunferência de raio R.

Terceiro Processo:

3.1 Tome um diâmetro qualquer AB e trace por B a perpendicular a AB;

3.2 Com centro em B e raio BO, trace o arco OC;

4.3 Trace a mediatriz de BC e obtenha o ponto D na perpendicular a AB;

4.4 Marque $DE = 3R$;

4.5 Unindo E à A obtemos aproximadamente metade do comprimento da circunferência, ou seja, $AE = \pi R$.

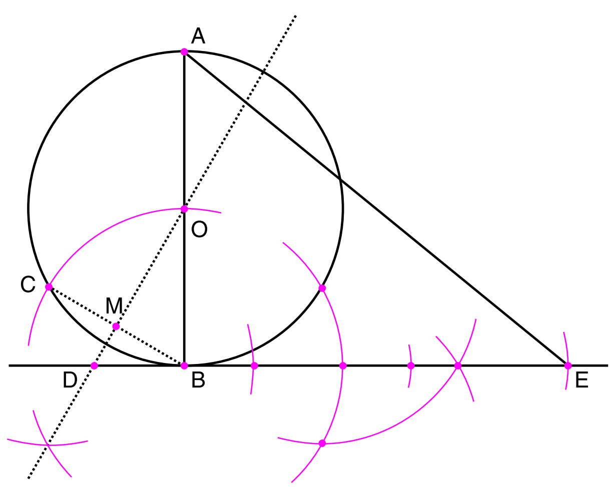


Figura 118

Justificativa: No triângulo BMD, o ângulo $M\widehat{B}D$ vale 30^o, pois OCB é eqüilátero, logo $BD = 2MD$ e $BM = \frac{R}{2}$.

O Teorema de Pitágoras nos fornece:

$$(BD)^2 = (MD)^2 + (BM)^2$$

ou chamando BD de x:

$$x^2 = (\frac{x}{2})^2 + (\frac{R}{2})^2,$$

donde $x = \frac{R.\sqrt{3}}{3}$.

No triângulo ABE:

$$(AE)^2 = (AB)^2 + (BE)^2 \Leftrightarrow (AE)^2 = (2R)^2 + (3R - \frac{R.\sqrt{3}}{3})^2,$$

donde

$$AE = R.\sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} = R.\sqrt{9,869231719} \text{ ou } AE = 3,14153R.$$

O erro é por falta e é inferior a um décimo milésimo do raio. O erro aproximado é de $6x10^{-5}R$.

Quarto Processo:

Devemos a Specht o processo a seguir que dá um resultado com uma aproximação muito boa.

4.1 Traça-se um diâmetro qualquer AB. Por A, traça-se a perpendicular ao diâmetro AB;

4.2 Toma-se AC, nesta perpendicular, igual ao diâmetro AB, isto é, $AC = 2R$;

4.3 Divide-se o raio AO em cinco partes iguais e toma-se $CD = \frac{1}{5}R$ e $DF = \frac{2}{5}R$, nesta perpendicular;

4.4 Toma-se $AE = OD$ e traça-se por E a paralela à reta OF;

4.5 Obtém-se então o ponto G na perpendicular.

O segmento AG é uma aproximação razoável para $2\pi R$.

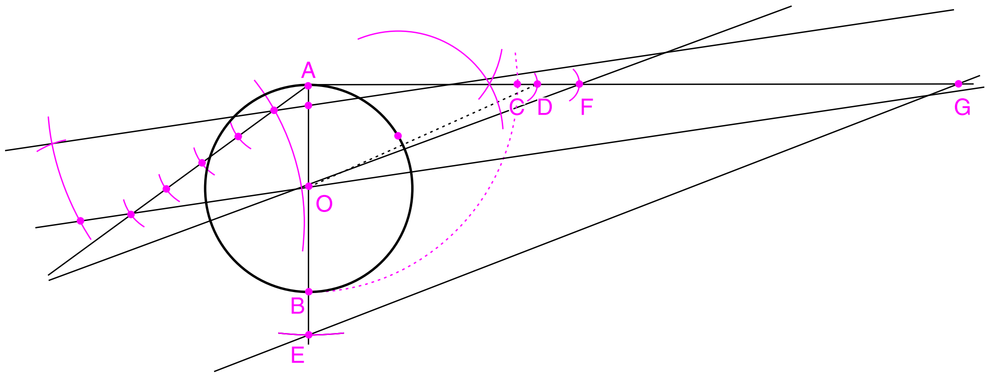


Figura 119

Justificativa: Observe que :

$$AC = 2R,\ CD = \frac{R}{5} \text{ e } DF = \frac{2R}{5}.$$

Logo,

$$AD = 2R + \frac{R}{5} = \frac{11R}{5}$$
$$AF = 2R + \frac{3R}{5} = \frac{13R}{5}.$$

Portanto,

$$AE = OD = \sqrt{(AO)^2 + (AD)^2} = \sqrt{R^2 + \frac{121R^2}{15}} = \sqrt{\frac{146R^2}{25}} = \frac{R\sqrt{146}}{5}.$$

Como os triângulos AOF e e AEG são semelhantes temos que,

$$\frac{AF}{AG} = \frac{AO}{AE} \Leftrightarrow AG = AF\frac{AE}{AO}.$$

Substituindo AF, AE e AO pelos seus valores indicados, teremos:

$$AG = \frac{13\sqrt{146}}{25}R = 2R(\frac{13\sqrt{146}}{50}).$$

Calculando a expressão entre parênteses, obtemos o número 3,1415919 para o valor de π, em vez de 3,1415926 que é o valor de π com sete casas decimais. Vemos assim que o erro cometido é por falta e é inferior a um milionésimo do diâmetro.

Exercícios:

2. Construa um quadrado cuja área seja aproximadamente igual a área do círculo de raio R, isto é, obtenha um quadrado equivalente a um círculo.

Sugestão: Considere o raio como unidade e encontre um segmento de tamanho aproximado de π. Se o raio é a unidade, isto é, $R = 1$, então a área do círculo é π. Assim basta encontrar $\sqrt{\pi} = \sqrt{\pi . R}$. Portanto basta encontra a média geométrica entre π e R para ter o lado do quadrado.

Figura 120

Retificação de um Arco de Circunferência

O processo para retificar um arco de circunferência a seguir nos dá um elo de ligação(aproximado) entre arco de circunferência e segmento. Isto é, ele servirá para solucionar problemas geométricos de arcos a partir da solução em segmentos. Por exemplo, podemos dividir um arco de forma aproximada pela divisão do arco retificado em segmento.

Consideremos um arco $\widehat{AB}$ de circunferência menor ou igual a 90^o.

a) Traça-se o diâmetro AC e toma-se CD igual a $\frac{3}{4}$ do raio da circunferência;

b) Traça-se por A uma perpendicular ao diâmetro AC;

c) Une-se o ponto D ao ponto B e obtém-se o ponto E na perpendicular traçada;

d) Tem-se que AE é aproximadamente o comprimento do arco $\widehat{AB}$ dado.

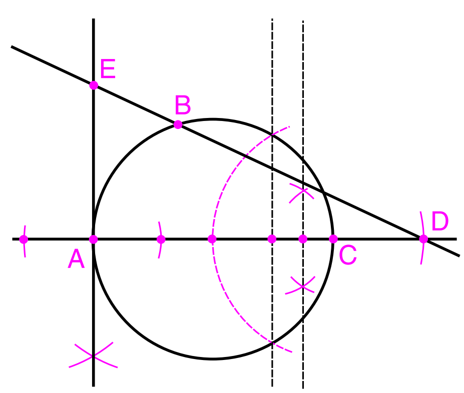


Figura 121

Justificativa: Sejam $\beta = O\widehat{D}B$, $\alpha = A\widehat{O}B$ e $\gamma = O\widehat{B}D$. De acordo com a construção feita, temos $AD = 2R + \frac{3}{4}R = \frac{11}{4}R$ e $OD = \frac{11}{4}R - R = \frac{7}{4}R$.

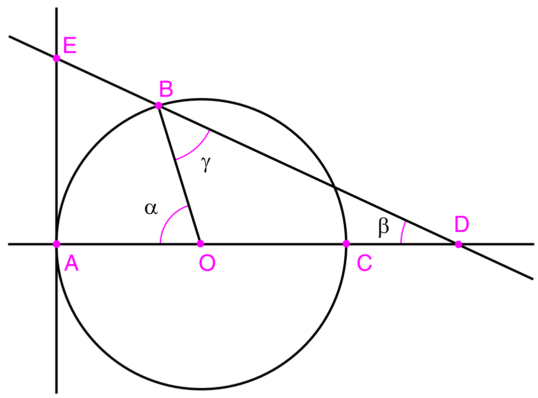


Figura 122

No triângulo ADE, tem-se:

$$(1) \qquad AE = ADtg\beta = \frac{11}{4}Rtg\beta$$

A lei dos senos no triângulo OBD indica que:

$$\frac{OD}{sen\gamma} = \frac{OB}{sen\beta} \Leftrightarrow \frac{7R}{4sen\gamma} = \frac{R}{sen\beta} \Leftrightarrow \frac{sen\gamma}{sen\beta} = \frac{7}{4}$$

No triângulo OBD, $\alpha = \beta + \gamma$ ou, equivalentemente, $\gamma = \alpha - \beta$. Logo,

$$\frac{7}{4} = \frac{sen(\alpha - \beta)}{sen\beta} = \frac{sen\alpha.cos\beta - sen\beta.cos\alpha}{sen\beta} = \frac{sen\alpha}{tg\beta} - cos\alpha,$$

donde

$$(2) \qquad tg\beta = \frac{4sen\alpha}{7 + 4cos\alpha}.$$

Substituindo (2) em (1), obtém-se:

$$AE = \frac{11sen\alpha}{7 + 4cos\alpha}R.$$

Observação: Pela Geometria plana, temos $m(\widehat{AB}) = \frac{\pi R\alpha}{180^o}$. Para se ter uma idéia da aproximação pelo processo visto, verificar-se-á para $\alpha = 90^o$, $\alpha = 45^o$ e também $\alpha = 30^o$.

(i) Para $\alpha = 90^o$, tem-se que: $AE = \frac{11}{7}R \cong 1,57142R$ e $m(\widehat{AB}) = \frac{\pi}{2}R \cong 1.57079R$.

O erro na construção é, portanto, por excesso e inferior a 0,0007R.

(ii) Para $\alpha = 45^o$, tem-se que $AE \cong 0,7909R$ e $m(\widehat{AB}) \cong 0,7854R$.

O erro é, portanto, aproximadamente 0,0055R.

(iii) Para $\alpha = 30^o$, tem-se $AE \cong 0,5256065R$ e $m(\widehat{AB}) \cong 0,5235988R$.

O erro na construção é, portanto, por excesso aproximadamente $0,002$.

Retificação de um arco com medida maior do que 90^o

Através do conhecimento de diversos métodos para retificar uma circunferência e utilizando o processo anterior para retificar um arco entre 0^o e 90^o, podemos retificar somando ou subtraindo arcos, semicircunferências e circunferências retificados, pois:

(i) Se α está entre 90^o e 180^o, basta dividí-lo ao meio ou subtraí-lo da semicircunferência;

(ii) Se α está entre 180^o e 270^o, basta subtrair a semicircunferência;

(ii) Se α está entre 270^o e 360^o, basta subtrair da circunferência;

Exemplo 10

Retifique o arco $\widehat{AB}$ da circunferência abaixo:

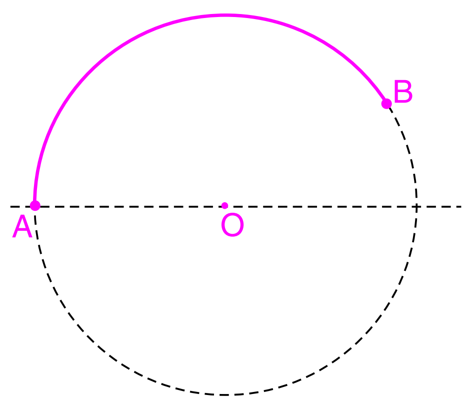


Figura 123

Note que o arco $\widehat{AB}$ está entre 90^o e 180^o. Faremos a retificação considerando inicialmente o arco suplementar. Ou seja, primeiro vamos retificar o arco suplementar e, logo após, subtrair a retificação da semicircunferência retificada. A seguir, ilustramos uma resolução utilizando retificação de arco entre 0^o e 90^o e a retificação da semicircunferência pelo terceiro processo.

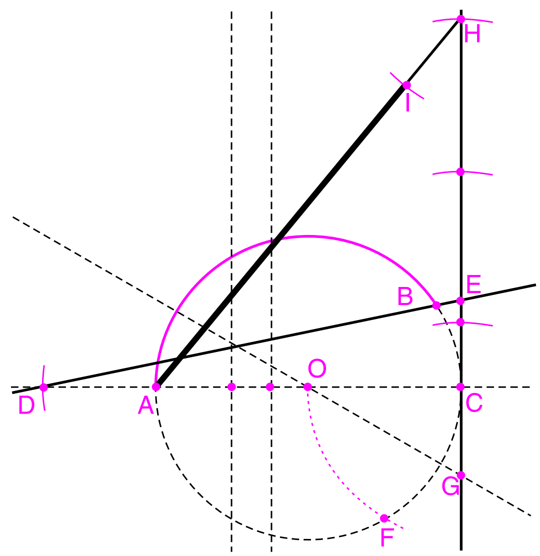


Figura 124 :$m(\widehat{BC}) \equiv m(CE)$, $m(\widehat{AC}) \equiv m(AH)$, $m(HI) = m(CE)$ e $m(\widehat{AB}) \equiv m(AI) = m(AH) - m(HI)$.

Um outra forma de retificar o arco entre 90^o e 180^o é através de uma extensão do processo de retificação de um arco entre 0^o e 90^o. Para isto, basta que o dividamos em duas partes iguais, utilizando a mediatriz das extremidades do arco.

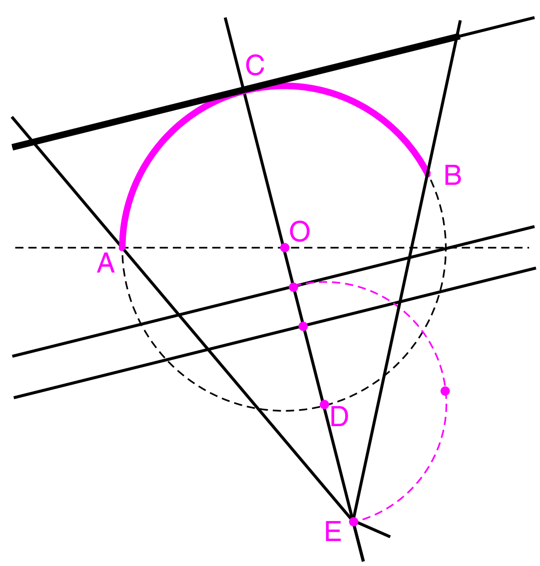


Figura 125

Podemos utilizar tal processo de retificação para dividir um arco, por exemplo, em n-partes (aproximadamente) iguais. Para isto, dividimos o arco retificado em n-partes iguais e, em seguida, obtemos as extremidades dos arcos correspondentes às divisões. Na construção a seguir, você pode ter o arco dividido em 3 partes iguais.

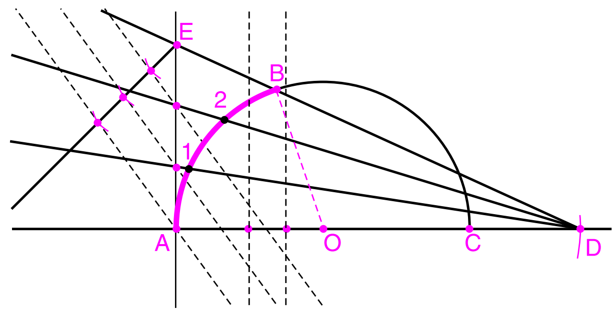


Figura 126

Exercícios:

3. Dado um segmento AE, determine numa circunferência de raio R um arco cujo comprimento seja aproximadamente igual ao de AE.

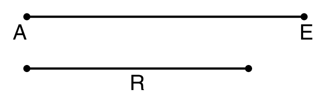


Figura 127

4. Divida o arco $\widehat{AB}$ em partes (aproximadamente) proporcionais aos segmentos de medidas a, b e c.

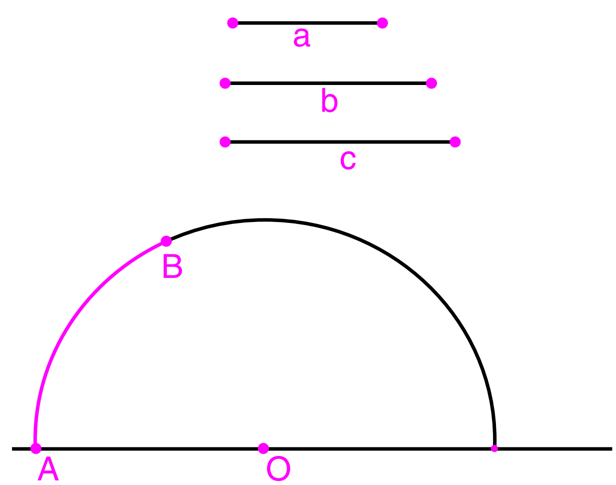


Figura 128

5. Construa um ângulo de 24^o(aproximado) utilizando régua e compasso.

   Sugestão: Lembre que $24^o = \frac{1}{5}120^o$.

Resumo

Nesta aula, você aprendeu a...

- Retificar uma circunferência;
- Obter a aproximação geométrica de π;
- Retificar um arco de circunferência;
- Aplicar o processo de retificação de arcos para efetuar divisões do mesmo.

Aula 8 – Divisões de circunferências

Objetivos

Obter as possíveis divisões exatas de uma circunferência;
Obter algumas divisões aproximadas de uma circunferência;
Construir polígonos regulares e polígonos estrelados.

A divisão da circunferência em partes iguais é a operação básica para a inscrição de polígonos regulares. Isso equivale a dizer que se dividirmos uma circunferência em um número natural $n > 2$ de partes iguais e se unirmos o primeiro ponto da divisão com o segundo, o segundo com o terceiro e assim por diante, acabaremos por ter construído um polígono regular inscrito de n lados.

A divisão de uma circunferência em 2 ou até 20 partes iguais é realizada por uma série de processos, onde se encontram processos exatos e aproximados.

Esta aula será dividida em duas etapas: Divisões exatas e Divisões Aproximadas de Circunferências.

Divisões exatas de circunferência

Nos casos a seguir consideramos uma circunferência de centro O e raio R.

Problema 1: Dividir uma circunferência em 2, 4, 8, 16 etc partes iguais.

Resolução:

1.1 Trace um diâmetro AB qualquer, dividindo a circunferência em duas partes;

1.2 Trace outro diâmetro CD, perpendicular a AB. Os dois diâmetros AB e CD dividem a circunferência em 4 partes;

1.3 Trace, em seguida, as bissetrizes dos ângulos $A\widehat{O}C$ e $A\widehat{O}D$, respectivamente, ficando a circunferência dividida em 8 partes iguais;

1.4 O processo segue, assim, sucessivamente.

(Veja a Figura 129).

A justificativa desta construção é bem simples que dispensa detalhes.

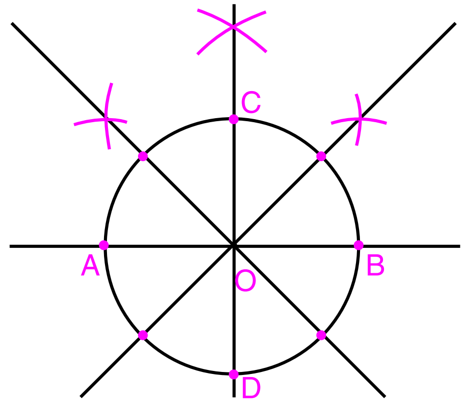


Figura 129

Problema 2: Dividir uma circunferência em 3, 6, 12 etc partes iguais.

Resolução:

2.1 Trace o diâmetro AB da circunferência;

2.2 Trace a mediatriz de AO;

2.3 Esta mediatriz intercepta a circunferência nos pontos C e D;

2.4 Os pontos C, D e B dividem a circunferência em 3 partes iguais;

2.5 Ao determinarmos as bissetrizes de $C\widehat{O}D$, $D\widehat{O}B$ e $C\widehat{O}B$, estaremos determinando os pontos E, F e G e, assim, dividindo a circunferência em 6 partes iguais;

2.6 O processo segue, assim, sucessivamente.

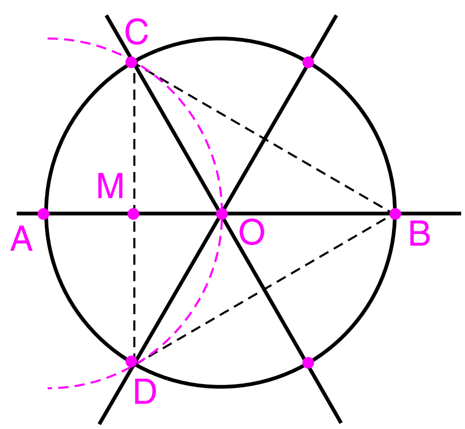


Figura 130

Justificativa: Observando o triângulo retângulo AMC de hipotenusa AC, temos que $CM = MD = \sqrt{R^2 - (\frac{R}{2})^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, logo $CD = R\sqrt{3}$ que corresponde ao lado do triângulo eqüilátero inscrito na circunferência de raio R.

Problema 3: Dividir uma circunferência em 5, 10, 20 etc partes iguais.

Resolução:

3.1 Trace o diâmetro AB na circunferência. Em seguida, trace outro diâmetro CD perpendicular à AB;

3.2 Divida ao meio o raio AO em um ponto E;

3.3 Com centro em E e raio ED, descreva um arco que corte o diâmetro AB em G;

3.4 Com centro em D e raio DG, descreva um arco que corte a circunferência em I;

3.5 O arco $\widehat{DI}$ determinado é a quinta parte da circunferência;

3.6 Dividindo-se o arco $\widehat{DI}$ ao meio, obtem-se então a décima parte da circunferência;

3.7 O processo segue sucessivamente.

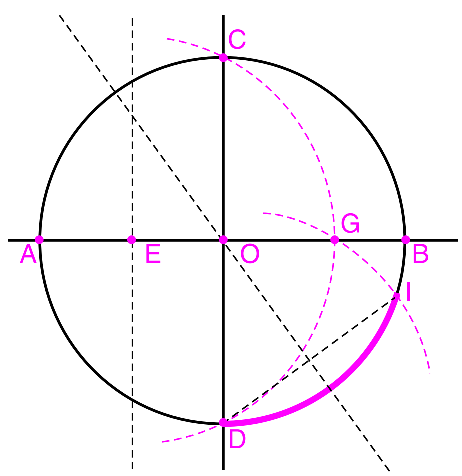
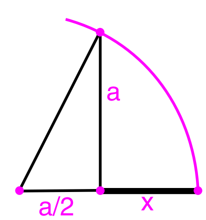


Figura 131

Justificativa: A justificativa deste processo decorre de duas afirmações:

Afirmação 1: O lado de um decágono regular inscrito em uma circunferência é o segmento áureo[1] do raio.

(1) Vimos na quarta aula, que o segmento áureo de um segmento dado de medida a possui medida x, tal que $\frac{x}{a} = \frac{a-x}{x}$ e que sua construção é obtida pelo rebatimento da hipotenusa de um triângulo retângulo, de catetos a e $\frac{a}{2}$, sobre o cateto de medida $\frac{a}{2}$.



Sendo R o raio da circunferência de centro O e L_{10} o lado do decágono regular inscrito em uma circunferência de raio R, devemos provar que $\frac{L_{10}}{R} = \frac{R-L_{10}}{L_{10}}$.

Seja $\widehat{AB}$ o arco que corresponde a décima parte da circunferência de raio R.

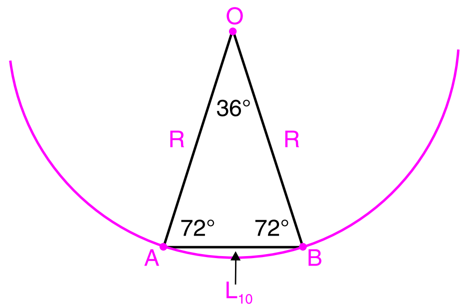


Figura 132

Temos que:

$$O\widehat{A}B = O\widehat{B}A = 72^o \text{ e } A\widehat{O}B = 36^o$$

Tomamos um ponto D sobre ao lado OB tal que $AD = L_{10}$. Formamos um triângulo isósceles ADB de base DB. Assim $A\widehat{D}B = A\widehat{B}D = 72^o$, donde $D\widehat{A}B = D\widehat{A}O = 36^o = A\widehat{O}D$. Logo o triângulo ADO é isósceles de base AO, daí $DO = DA = L_{10}$. Neste caso, como $OB = R$, então $DB = OB - OD = R - L_{10}$.

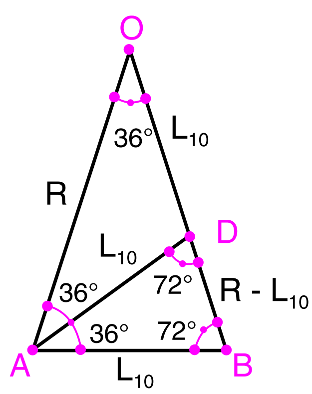


Figura 133

Como os triângulos ADB e OAB possuem os mesmos ângulos internos, então eles são semelhantes gerando a seguinte proporção:

$$\frac{AB}{OB} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \frac{L_{10}}{R} = \frac{R - L_{10}}{L_{10}}$$

Como queríamos demonstrar.

Identificando por $L_6 = R$ o lado do hexágono regular e por L_5 o lado do pentágono inscritos na mesma circunferência de raio R e centro O temos a seguinte afirmação.

Afirmação 2: $L_6 = R$ e L_{10} são os catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa é L_5.

Já sabemos pela afirmação 1, que:

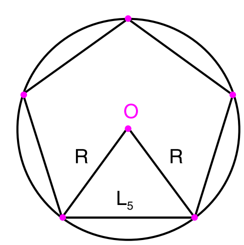
$$\frac{L_{10}}{R} = \frac{R - L_{10}}{L_{10}} \Rightarrow L_{10}^2 = R(R - L_{10}). \qquad (1)$$

Numa circunferência de centro O e raio R, construímos um segmento AB de comprimento L_{10}, prolongamos o segmento AB a um ponto C tal que AC seja igual a R.

Como o triângulo ACO é isósceles de ângulo oposto à base igual a 72^o e lados iguais a R, então a base OC é igual a L_5 (1).

Pelo ponto C traçamos uma tangente à circunferência e chamamos D o ponto de tangência. Assim, o triângulo ODC é retângulo em D, onde a hipotenusa é $OC = L_5$ e um dos catetos é $OD = R = L_6$. Resta mostrar que o outro cateto CD tem a mesma medida de L_{10}.

(1)Em um pentágono regular inscrito em uma circunferência de raio R e centro O, se unirmos o centro a dois vértices consecutivos, formamos um triângulo isósceles de ângulo oposto à base igual $\frac{360^o}{5} = 72^o$.



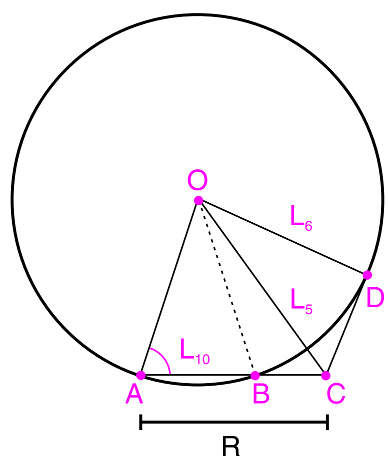


Figura 134

Da potência de C em relação à circunferência (Veja Geometria Básica) temos:

$$(CD)^2 = CA.CB \Rightarrow (CD)^2 = R(R - L_{10}). \qquad (2)$$

Das igualdades (1) e (2), obtemos:

$$(CD)^2 = L_{10}^2 \Rightarrow CD = L_{10}\ .$$

O último caso de divisão exata, que é a divisão em 15 partes iguais, não recomendamos que seja feita pela construção exata, visto que é necessário um número muito grande de passos. Isto porque, embora seja considerada exata a construção, estamos sujeitos a acúmulos de erros humanos durante a construção, que podem acarretar uma imprecisão maior do que por um processo aproximado, porém com poucos passos. Dessa forma, veremos tal construção na próxima fase desta aula.

O arco exato da décima quinta parte da circunferência corresponde a $\frac{360^o}{15} = 24^o = 60^o - 36^o$ que equivale à subtração do arco L_{10} do arco L_6.

Exercícios:

1. Construa um pentágono regular e um decágono regular inscritos em uma circunferência de raio R.

   Sugestão: Construa um pentágono regular qualquer, inscrito em uma circunferência. Em seguida, prolonge as semi-retas de origem no centro de forma que passem por dois vértices consecutivos. Apoie sobre o lado compreendido entre estas retas o lado pedido, partindo por um dos vértices considerados. Pela extremidade deste novo lado, trace uma paralela interceptando a semi-reta que passa pelo outro vértice. Este ponto de interseção é um dos vértices do pentágono requerido.

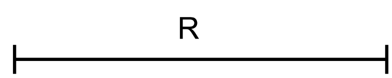


Figura 135

2. Construa um pentágono regular de lado com medida de L dado abaixo.

Figura 136

Divisões aproximadas de circunferência.

Nesta seção, veremos algumas das divisões exatas com seus erros de aproximação. Ainda estaremos considerando, em cada caso, a circunferência de centro O e raio R.

Problema 4: Dividir uma circunferência em 7, 14, 28,... partes iguais.

Note que, assim como nos casos anteriores, para efetuarmos todas estas divisões basta obtermos a divisão por 7 partes iguais.

4.1 Trace um diâmetro AB;

4.2 Com centro em B, construímos uma circunferência de raio OB, interceptando a circunferência dada nos pontos C e D;

4.3 O segmento CD interceptará OB em seu ponto médio M;

4.4 O segmento MC tem a medida aproximada do heptágono inscrito.

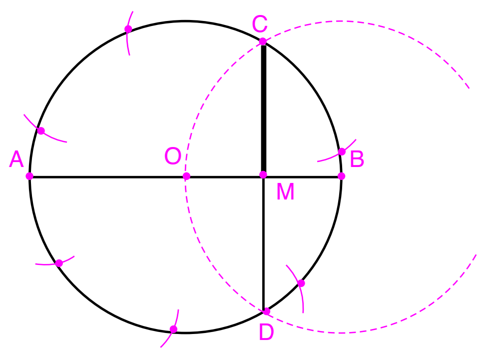


Figura 137

A medida exata para o lado do heptágono regular, inscrito em uma circunferência de raio R, é de $2R.sen(\frac{180^o}{7}) \cong 0,867767R$, pela construção $CM = \frac{R\sqrt{3}}{2} \cong 0,866R$, o que dá um erro por falta de aproximadamente 0,001767 de raio, que é menor que 2 milésimos do raio.

Problema 5: Dividir uma circunferência em 9, 18, 36,... partes iguais.

5.1 Trace duas retas suportes de dois diâmetros perpendiculares AB e CD;

5.2 Com centro em A e raio OA, construímos uma circunferência que intercepta a circunferência dada num ponto E;

5.3 Com centro em B e raio BE, construímos uma circunferência que intercepta a reta suporte de CD em um ponto F externo à circunferência dada;

5.4 Com centro em F e raio FB, construímos um arco de circunferência que intercepta o diâmetro CD num ponto G;

5.5 O segmento CG tem medida aproximada do lado do eneágono inscrito na circunferência.

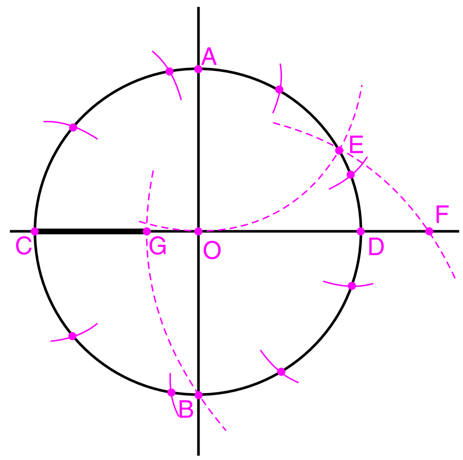


Figura 138

A medida exata para o lado do enágono regular, inscrito em uma circunferência de raio R é de $2R.sen(\frac{180^o}{9}) \cong 0,68404R$. Pela construção, temos:

- $BF = BE = GF = 2R.cos30^o = R.\sqrt{3}$
- $OF = \sqrt{(BF)^2 - R^2} = R\sqrt{2}$
- $CF = CO + OF = R + R\sqrt{2}$
- $CG = CF - GF = R + R\sqrt{2} - R\sqrt{3} \cong 0,68216R$

Gerando um erro por falta de aproximadamente 0,00188 de raio.

Problema 6: Dividir uma circunferência em 11, 22, 44,... partes iguais.

6.1 Trace dois diâmetros: primeiro AB e, em seguida, CD perpendiculares à AB;

6.2 Unindo o ponto médio M de OD à A e você encontrará o ponto médio N de AM;

6.3 O segmento AN tem a medida aproximada do lado polígono regular de 11 lados, inscrito na circunferência.

A medida exata para o lado do polígono de 11 lados regular, inscrito em uma circunferência de raio R, é de $2R.sen(\frac{180^o}{11}) \cong 0,563465R$. Pela

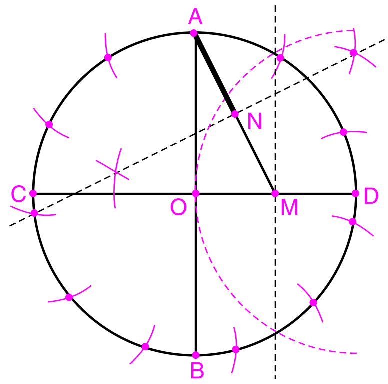


Figura 139

construção, temos que $AN = \frac{\sqrt{(\frac{R}{2})^2+R^2}}{2} = \frac{R\sqrt{5}}{4} \cong 0,559017R$, o que dá um erro por falta de aproximadamente 0,004448 de raio, que é menor que 5 milésimos do raio.

Problema 7: Dividir uma circunferência em 13, 26, 52,... partes iguais.

7.1 Trace dois diâmetros: primeiro AB e, em seguida, CD perpendiculares à AB;

7.2 Tome E no raio OA tal que $OE = \frac{OA}{4}$;

7.3 Trace uma semi-reta de origem em D, que passa por E e que intercepte a circunferência no ponto F;

7.4 O segmento CF tem medida aproximada do lado do polígono regular de 13 lados, inscrito na circunferência.

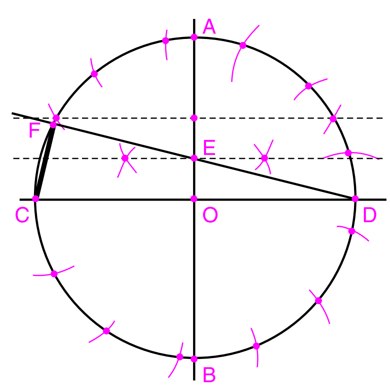


Figura 140

A medida exata para o lado do polígono de 13 lados regular, inscrito em uma circunferência de raio R, é de $2R.sen(\frac{180^o}{13}) \cong 0,478631R$. Pela construção temos:

- Os triângulos retângulos CFD e EOD são semelhantes e geram a proporção
$$\frac{CF}{CD} = \frac{OE}{ED} \Leftrightarrow CF = \frac{CD.OE}{ED};$$
- No triângulo retângulo EOD, aplicando o Teorema de Pitágoras, temos
$$ED = \sqrt{R^2 + (\frac{R}{4})^2} = \frac{R\sqrt{17}}{4};$$
- Como $CD = 2R$ e $OE = \frac{OA}{4}$, então temos que:
$$CF = \frac{2R.\frac{R}{4}}{\frac{R\sqrt{17}}{4}} = \frac{2R\sqrt{17}}{17} \cong 0,485071R;$$

O que nos dá um erro por excesso de aproximadamente 0,00644 de raio, que é menor que 7 milésimos do raio.

Problema 8: Dividir uma circunferência em 15, 30, 60,... partes iguais.

8.1 Trace dois diâmetros: primeiro AB e, em seguida, CD perpendiculares à AB;

8.2 Com centro em A e abertura AC, construímos uma circunferência que intercepta o raio OB no ponto E;

8.3 O segmento OE tem medida aproximada do lado do polígono regular de 15 lados, inscrito na circunferência.

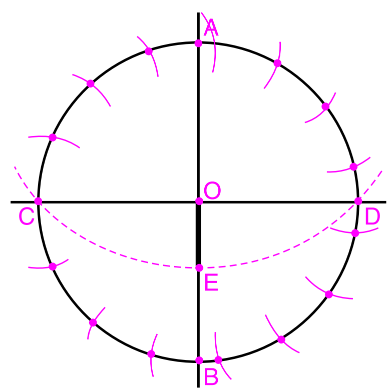


Figura 141

A medida exata para o lado do polígono de 15 lados regular, inscrito em uma circunferência de raio R, é de $2R.sen(\frac{180^o}{15}) \cong 0,4158233R$. Pela construção, temos $OE = R\sqrt{2} - R \cong 0,4142135R$, gerando um erro por falta de aproximadamente 0,0016098 de raio.

Existem diversas técnicas para a divisão aproximada de uma circunferência em n-partes iguais. Apresentaremos, nesta aula, duas das mais importantes: o Processo de Bion e o Processo de Tempier.

Processo de Bion

B.1 Divida um diâmetro AB em n- partes iguais;

B.2 Construa as circunferências com centros em A e B e raios $2R$ que se encontram num ponto P;

B.3 Tome um ponto C no diâmetro AB tal que $AC = \frac{2.AB}{n}$;

B.4 Construa a semi-reta de origem em P que passe por C e intercepte a circunferência no ponto D tal que C esteja entre P e D;

B.5 O segmento AD tem a medida aproximada do lado do polígono de n-lados.

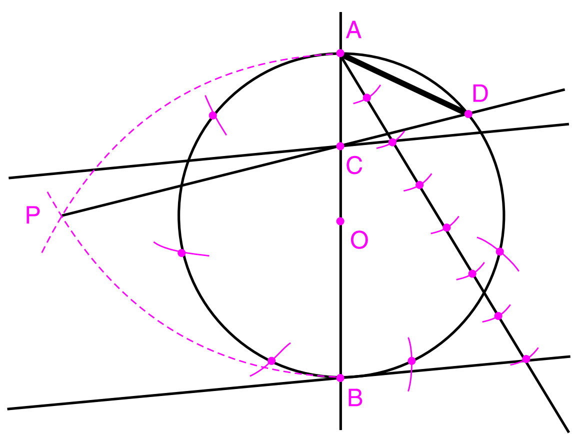


Figura 142

Esta aproximação acarreta os seguintes erros:

- $n = 5 \Rightarrow$ erro$= -0,0007$;
- $n = 8 \Rightarrow$ erro$= +0,004$;
- $n = 16 \Rightarrow$ erro$= +0,04$;

Percebe-se que, então, que os erros vão aumentando à medida que a quantidade de lados do polígono inscrito aumenta. No próximo processo, que pode ser visto como uma variação do Processo de Bion, ocorre o inverso.

Processo de Tempier

T.1 Divida um diâmetro AB em n- partes iguais;

T.2 Construa as circunferências com centros em A e B e raios $2R$ que se encontram num ponto P;

T.3 Tome um ponto C no diâmetro AB tal que $OC = \frac{2.AB}{n}$;

T.4 Construa as semi-retas de origem em P que passam por C e O, interceptando a circunferência nos ponto D e E, respectivamente;

T.5 O segmento DE tem a medida aproximada do lado do polígono de n-lados.

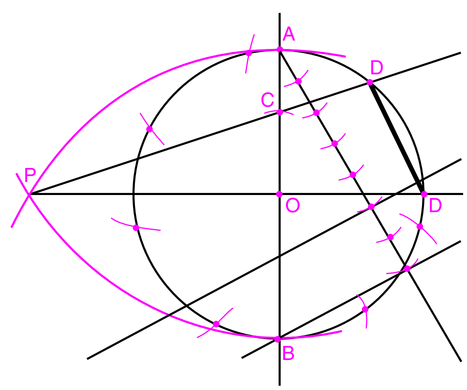


Figura 143

Polígonos estrelados

O polígono estrelado é formado por uma linha contínua e se obtém quando, partindo-se de um ponto de divisão qualquer, volta-se ao mesmo ponto de partida após as uniões p a p, isto é, pulando p divisões. Veja na figura 144 um polígono estrelado de 7 pontas, 2 a 2.

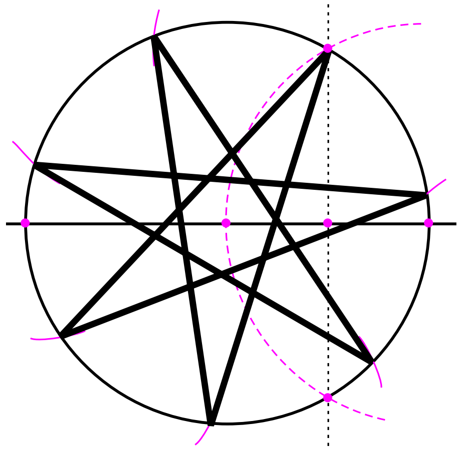


Figura 144

Exercícios:

3. Construa um ângulo de 64^o aproximadamente.

4. Construa um polígono estrelado de 9 pontas pulando 4 a 4 vértices.

5. Construa um polígono de 11 lados circunscrito a uma circunferência de raio R.

Figura 145

Resumo

Nesta aula, você aprendeu...

- a dividir circunferência por processos exatos e por processos aproximados;

- a construir polígonos regulares aproximados ou exatos, inscritos ou circunscritos a uma circunferência;

- a construir polígonos estrelados.

Aula 9 – Construções de Triângulos I

Objetivos

Efetuar as construções fundamentais de triângulo utilizando suas propriedades iniciais;
Desenvolver construções de triângulos utilizando sua altura.

Os triângulos são polígonos que se classificam de acordo, com a natureza de seus ângulos, e proporcionalidade de seus lados. Antes de iniciarmos as construções fundamentais de triângulos, faremos algumas observações históricas sobre os triângulos retângulos.

Você sabia que:

- ...o famoso teorema de Pitágoras já era conhecido pelos antigos egípcios, no caso particular do triângulo de lados 3, 4 e 5?
- ...o triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5 é conhecido como "triângulo egípcio"?
- ...segundo Plutarco, a trindade divina egípcia Osíris, Íris e Orus, era simbolizada por esse "triângulo egípcio"?
- ...a maneira mais simples de traçar um ângulo reto, que é por meio de uma esquadro, já era conhecida dos antigos egípcios?
- ...para construir-se um esquadro, era necessário saber traçar um triângulo retângulo?
- ...não se sabe quem primeiro traçou um triângulo retângulo?

Problema 1: Construir um triângulo sendo dados os três lados.

Resolução:

São dados os segmentos L_1, L_2 e L_3.

1.1 Sobre uma reta r trace o segmento AC igual a L_1;

1.2 Com centro em A e raio igual a L_2 dado, descreva um arco;

1.3 Com centro em B e raio igual ao L_3 dado, trace outro arco que corte o primeiro em C;

1.4 Ligue os pontos A, B e C e obtenha o triângulo pedido.

Observação: Pela condição de existência de triângulos (veja Geometria Básica), este problema é impossível se a soma de dois lados não for maior que o terceiro.

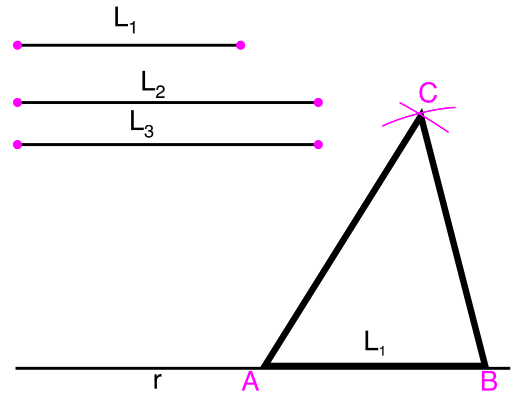


Figura 146

O próximo problema é um axioma da Geometria Básica.

Problema 2: Construir um triângulo sendo dados dois lados e o ângulo determinado por eles.

Resolução:

São dados os segmentos L_1, L_2 e um ângulo α.

2.1 Sobre uma reta r trace o segmento AB igual a L_1;

2.2 Na extremidade A, construa um ângulo igual ao ângulo α dado;

2.3 Prolongue este lado construindo o segmento AC de mesma medida que L_2;

2.4 Ligue os pontos A, B e C e obtenha o triângulo pedido (veja a Figura 147).

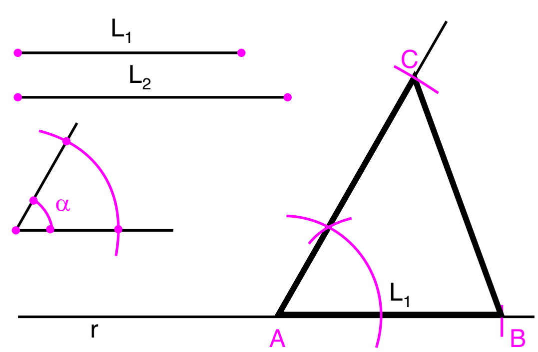


Figura 147

Exercícios:

1. Construa um triângulo conhecendo dois ângulos internos e o lado entre eles (veja a Figura 148).

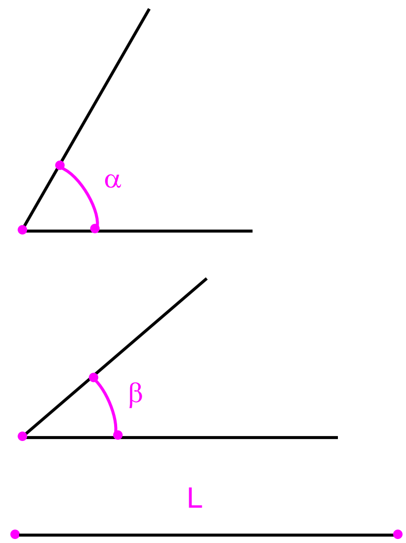


Figura 148

O exercício anterior é dado com um teorema (caso de congruência ALA).

Problema 3: Construir um triângulo sendo dados dois lados e uma altura.

Chamamos de altura de um triângulo qualquer, a perpendicular traçada de um de seus vértices ao lado oposto; então, nessa construção, o lado oposto pode ser um dos lados conhecidos ou não. Resolveremos o caso em que a altura é relativa a um dos lados conhecidos e deixamos como exercício o outro caso.

Resolução:

São dados os segmentos L_1, L_2 e h_1 a altura relativa ao lado L_1.

3.1 Sobre uma reta r trace o segmento AB igual a L_1;

3.2 Por um ponto R de r, trace uma reta s perpendicular a r, e sobre s marque um ponto S tal que RS tenha medida igual a h_1;

3.3 Pelo ponto S, trace uma reta t paralela a r;

3.4 Com centro em A e raio igual a L_2 construa um arco de circunferência que intercepta t nos pontos C_1 e C_2;

3.5 Temos então duas soluções: os triângulos ABC_1 e ABC_2.

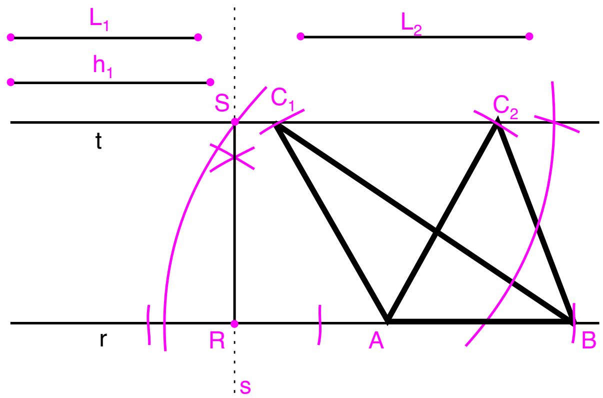


Figura 149

Justificativa: Observe que, se os pontos C_1 e C_2 estão sobre t, então eles devem estar uma distância h_1 de r que é a reta suporte da base AB. Logo, as alturas relativas a AB nos triângulos ABC_1 e ABC_2 é a altura dada. Além disso, por construção $AB = L_1$ e $AC_1 = AC_2 = L_2$ que são os lados dados.

Exercícios:

2. Construir um triângulo conhecendo dois lados e a altura relativa ao lado desconhecido.

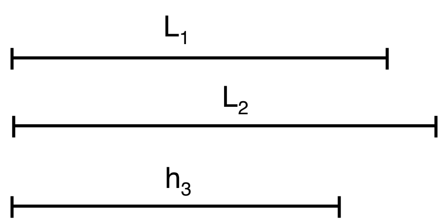


Figura 150

Sugestão: Construa a altura perpendicular a uma reta r, logo a seguir construa os lados utilizando a extremidade da altura que não pertence a r obtendo os outros vértices sobre r. Este exercício possui duas soluções.

Problema 4: Construir um triângulo conhecendo dois lados e uma mediana.

Chamamos de mediana de um triângulo qualquer, segmento traçado de um de seus vértices ao ponto médio do lado oposto; então, nessa construção, o lado oposto pode ser um dos lados conhecidos ou não. Resolveremos o caso em que a mediana é relativa ao lado desconhecido e deixamos como exercício o outro caso.

Resolução:

Vamos investigar o problema supostamente resolvido.

Seja ABC o triângulo solução para o problema, onde AB e AC são os lados dados. Efetuemos as seguintes construções no triângulo ABC:

- Unindo o vértice A ao ponto médio M do lado BC obtemos a mediana dada;
- Prolonguemos a mediana AM até um ponto D tal $MD = AM$;
- Observe que M é ponto médio de BC e AD. Assim BC e AD são as diagonais do paralelogramo $ABDC$, logo $BD = AC$;
- Do triângulo ABD são conhecidos os três lados: AB, $BD = AC$ e $AD = 2.AM$, onde AM é a mediana, são dados do problema. Neste caso é possível construir o triângulo ABD.

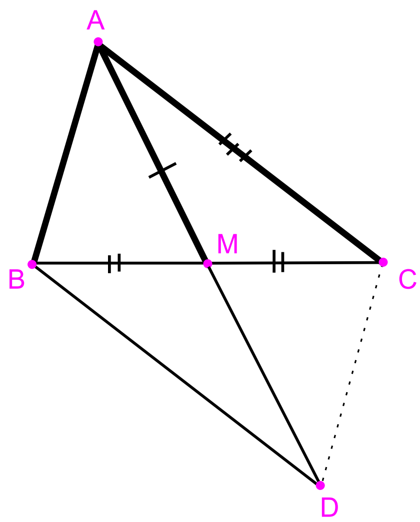


Figura 151

Pela análise feita anteriormente podemos solucionar o problema através dos seguintes passos:

4.1 Constrói-se o triângulo ABD onde AB e BD são os lados dados do problema e AD é o dobro da mediana dada do problema, utilizando o processo que resolveu o problema 1;

4.2 Une-se o vértice B ao ponto médio, M, do lado AD;

4.3 Prolonga-se o segmento BM até o ponto C tal que $MC = BM$;

4.4 O triângulo ABC é a solução do problema;

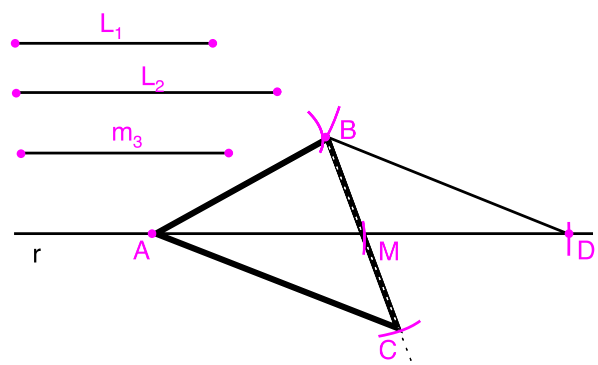


Figura 152

Exercícios:

3. Construir um triângulo conhecendo dois lados, L_1 e L_2, e a mediana, m_1, relativa a L_1.

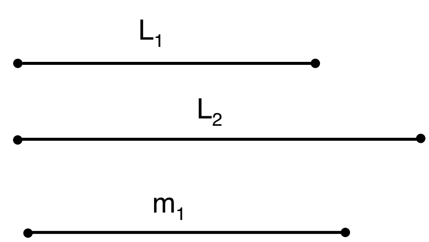


Figura 153

Sugestão: Marque o lado L_1 sobre uma reta obtendo assim dois vértices do triângulo, a seguir utilizando a metade deste lado, a mediana e o outro lado construa um triângulo obtendo o terceiro vértice do triângulo desejado.

Problema 5: Construir um triângulo conhecendo os pontos médios dos três lados.

Resolução:

Vamos investigar o problema supostamente resolvido.

Seja ABC o triângulo solução para o problema, M_1, M_2 e M_3 os pontos médios dos lados BC, AC e AB, respectivamente. Efetuemos as seguintes construções em ABC:

- Unindo os pontos M_1, M_2 e M_3, formamos um triângulo onde $M_1M_2 = \frac{AB}{2}$, $M_1M_3 = \frac{AC}{2}$ e $M_2M_3 = \frac{BC}{2}$, pela propriedade de base média de triângulo;

- Os quadriláteros $AM_3M_1M_2$, $BM_3M_2M_1$ e $CM_1M_3M_2$ são paralelogramos.

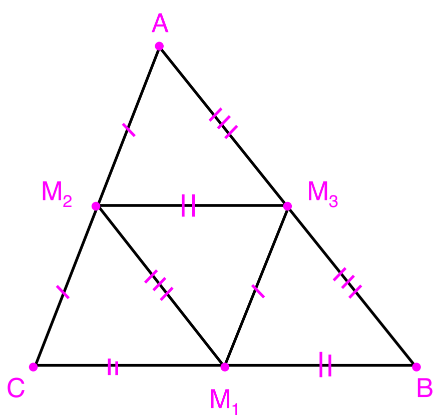


Figura 154

Neste caso podemos solucionar o problema através dos seguintes passos:

5.1 Constrói-se o triângulo $M_1M_2M_3$ unindo os três pontos;

5.2 Constrói-se o triângulo AM_2M_3, considerando $AM_2 = M_1M_3$ e $AM_3 = M_1M_2$;

5.3 No prolongamento de AM_3 tomamos o ponto B tal que $AM_3 = BM_3$;

5.4 Prolongando os segmentos AM_2 e BM_1 obtemos o ponto C;

5.5 O triângulo ABC é a solução do problema;

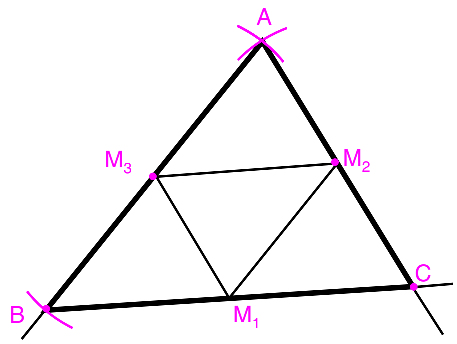


Figura 155

Problema 6: Construir um triângulo conhecendo um lado e duas alturas.

Este problema apresenta dois casos:

Primeiro Caso: As alturas dadas são relativas aos lados desconhecidos;

Segundo Caso: Uma das alturas é relativa ao lado dado.

Faremos o primeiro caso e deixamos como exercício o segundo caso.

Resolução:

Vamos investigar o problema supostamente resolvido.

Seja ABC o triângulo solução para o problema. Estamos supondo que o lado AB e as alturas relativas aos lados AC e BC são dados.

- Sejam P_1 e P_2 os pés das alturas relativas aos lados AC e BC;
- Assim $A\widehat{P_1}B$ e $A\widehat{P_2}B$ são ângulos retos. Dessa forma P_1 e P_2 devem pertencer à semicircunferência de diâmetro AB, que é o arco capaz do segmento AB sob um ângulo de 90^o.

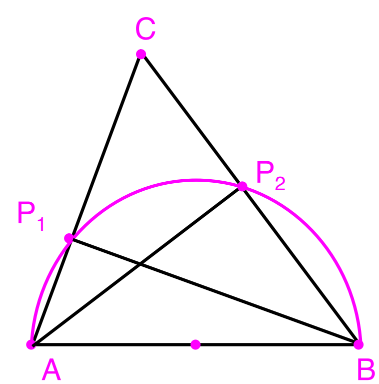


Figura 156

Neste caso podemos solucionar o problema através dos seguintes passos:

6.1 Sobre uma reta r constrói-se um segmento igual ao lado dado;

6.2 Constrói-se a semicircunferência cujo diâmetro seja AB;

6.3 Com centros em A e B constróiem-se dois arcos de circunferências de raios iguais a primeira e a segunda alturas dadas, respectivamente que interceptam a semicircunferência construída nos pontos P_2 e P_1, respectivamente;

6.4 Constrói-se as semi-retas de origem em A que passe por P_1 e de origem em B que passe por P_2. Tais semi-retas devem se encontrar no ponto C que é o terceiro vértice do triângulo ABC desejado.

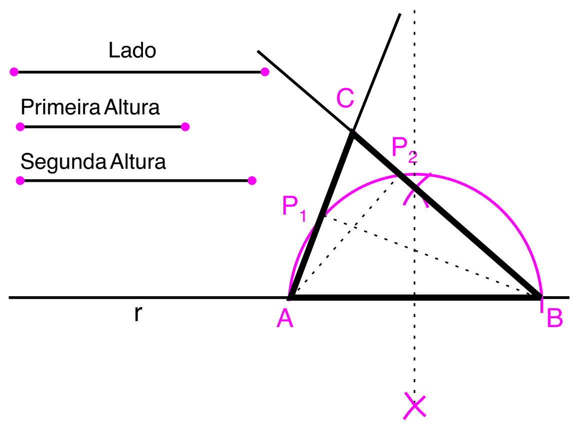


Figura 157

Exercícios:

4. Construir um triângulo conhecendo um lado L, a altura relativa a esse lado, h_1, e a altura relativa a um lado desconhecido, h_2.

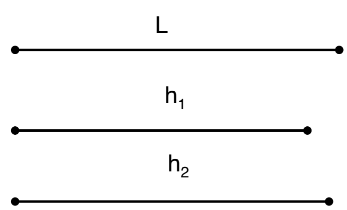


Figura 158

Sugestão: Sugestão para o exercício 4: Construa uma reta suporte do lado conhecido e trace uma paralela a esta reta a uma distância igual a altura relativa, e utilize o mesmo raciocínio do problema 6 para a outra altura.

Existem alguns problemas de construções de triângulos que exigem conhecimento de certas propriedades que não são muito comuns.

Os pés das alturas de um triângulo formam um triângulo chamado triângulo órtico. Chama-se ortocentro o ponto de encontro das alturas e incentro o ponto de encontro das bissetrizes internas. Você sabia que o ortocentro de um triângulo coincide com o incentro de seu triângulo órtico? Vejamos a demonstração deste fato.

Sejam ABC um triângulo, D, E e F os pés das alturas relativas aos vértice A, B e C, respectivamente, e O o ortocentro deste triângulo. Devemos provar que O é o incentro do triângulo DEF. Neste caso AD é bissetriz de $E\widehat{D}F$, BE é bissetriz de $D\widehat{E}F$ e CF é bissetriz de $E\widehat{F}D$.

Mostraremos que AD é bissetriz de $E\widehat{D}F$, os outros casos são análogos. Isso equivale mostrar que $A\widehat{D}F = E\widehat{D}A$ ou $O\widehat{D}F = E\widehat{D}O$.

Comparando os triângulos ABE e ACF notamos que o ângulo em A é comum e além disso são triângulos retângulos. Logo são semelhantes e daí $F\widehat{C}A = E\widehat{B}A = \alpha$ ou $O\widehat{C}E = O\widehat{B}F = \alpha$.

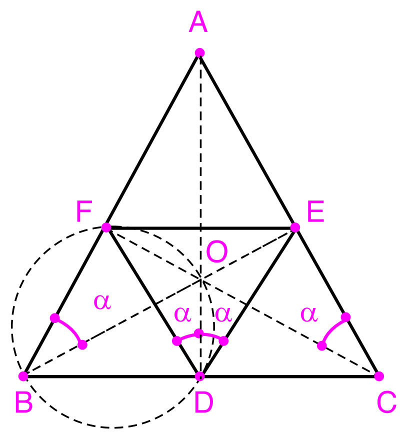


Figura 159

Como o quadrilátero $FODB$ possui dois ângulos opostos retos, a saber, nos vértices F e D, então este quadrilátero é inscritível em uma circunferência. Em tal circunferência os ângulos inscritos $O\widehat{B}F$ e $O\widehat{D}F$ compreendem o mesmo arco, logo $O\widehat{B}F = O\widehat{D}F$. Da mesma forma mostra-se que $O\widehat{D}E = O\widehat{C}E$.

Assim temos $O\widehat{D}F = O\widehat{B}F = O\widehat{C}E = O\widehat{D}E$ como queríamos demonstrar.

Observe que se o ortocentro de um triângulo coincide com o incentro de seu triângulo órtico, então as alturas do triângulo possuem a mesma reta suporte das respectivas bissetrizes do triângulo órtico. Assim os lados do triângulo, por serem perpendiculares às alturas, devem ser perpendiculares às bissetrizes dos triângulo órtico. Logo são bissetrizes externas do triângulo órtico.

Problema 7: Construir um triângulo conhecendo os pés das três alturas.

Sejam D, E e F os pés das três alturas. A propriedade anterior justifica a seguinte construção:

7.1 Constrói-se o triângulo órtico;

7.2 Traça-se as bissetrizes externas do triângulo órtico. Tais bissetrizes se interceptam duas a duas em três A, B e C, que são os vértices do triângulo procurado.

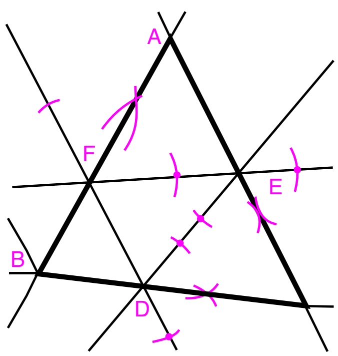


Figura 160

Pela Geometria Básica, sabemos que a área de um triângulo corresponde à metade do produto da medida de um de seus lados por sua altura relativa. Neste caso, se um triângulo possui os lados de medidas a, b e c de alturas relativas h_a,h_b e h_c, então temos que:

$$a.h_a = b.h_b = c.h_c \Leftrightarrow \frac{a}{\frac{1}{h_a}} = \frac{b}{\frac{1}{h_b}} = \frac{c}{\frac{1}{h_c}}.$$

Isto é, os lados de um triângulo são inversamente proporcionais às suas alturas.

Assim, para construírmos um triângulo conhecendo as três alturas é necessário que saibamos o processo de inversão de um segmento, isto é, determinar o segmento de medida $\frac{1}{h}$ sendo dado o segmento de medida h. Para isso, precisamos estabelecer o segmento que representa a unidade, u.

Lembremos que, em um triângulo retângulo, a altura relativa a hipotenusa é a média geométrica das projeções dos catetos sobre a hipotenusa (veja a Figura 161).

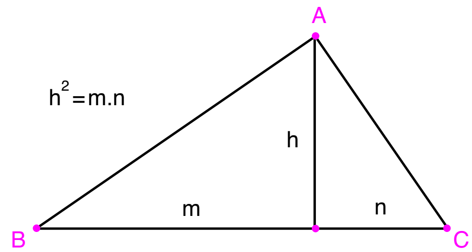


Figura 161

Neste caso, tomando a altura do triângulo retângulo como a unidade e a projeção m como o segmento de medida h, a projeção n será o segmento inverso de h, pois

$$1 = 1^2 = h.n \Rightarrow n = \frac{1}{h}$$

Dessa forma, estamos em condições de solucionar o seguinte problema.

Problema 8: Construir um triângulo conhecendo as três alturas.

Sejam h_1, h_2 e h_3 as três alturas.

Esta construção se separa em duas etapas

Primeira Etapa: Encontrar os inversos de h_1, h_2 e h_3.

Escolhe-se um segmento AB qualquer como o segmento unidade.

8.1 Traça-se uma reta r qualquer e em um de seus pontos, C, traça-se uma perpendicular a r;

8.2 Nesta reta perpendicular marca-se um ponto D, tal que $CD = AB$;

8.3 Sobre uma mesma semi-reta de r, determinada por C, marca-se os segmentos A_1C, A_2C e A_3C de medidas h_1, h_2 e h_3, respectivamente;

8.4 Traça-se a reta r_1 que passa por A_1 e D;

8.5 No ponto D traça-se a perpendicular a r_1 que interceptará r no ponto B_1;

8.6 O segmento CB_1 é o inverso de h_1;

8.7 Utilizando-se os passos 8.4, 8.5 e 8.6 para os ponto A_2 e A_3 obtemos CB_2 e CB_3, que são os inversos de h_2 e h_3, respectivamente (veja Figura 162).

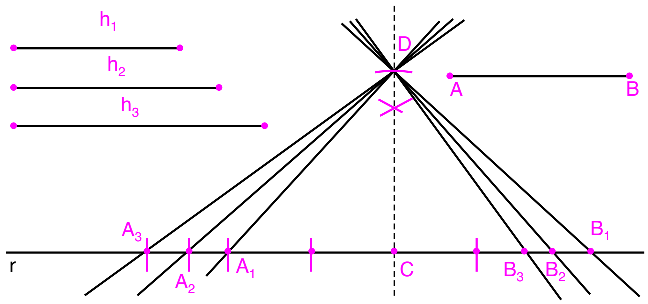


Figura 162

Segunda Etapa: Construir o triângulo utilizando os inversos das alturas.

Se os lados de um triângulo são inversamente proporcionais às alturas relativas, então tais lados são diretamente proporcionais aos inversos das alturas relativas. Assim, o triângulo procurado é semelhante ao triângulo construído com os inversos das alturas.

8.8 Constrói-se um triângulo utilizando os inversos das alturas como lados, obtidos na primeira etapa, apoiando $\frac{1}{h_1}$ sobre uma reta s;

8.9 Traça-se a altura relativa a $\frac{1}{h_1}$, neste triângulo;

8.10 No prolongamento desta altura marque um segmento de medida h_1, a partir do pé da altura, obtendo o vértice A;

8.11 Pelo ponto A traça-se as retas paralelas aos lados $\frac{1}{h_2}$ e $\frac{1}{h_3}$, obtendo os vértices B e C. O triângulo ABC é o triângulo pedido.

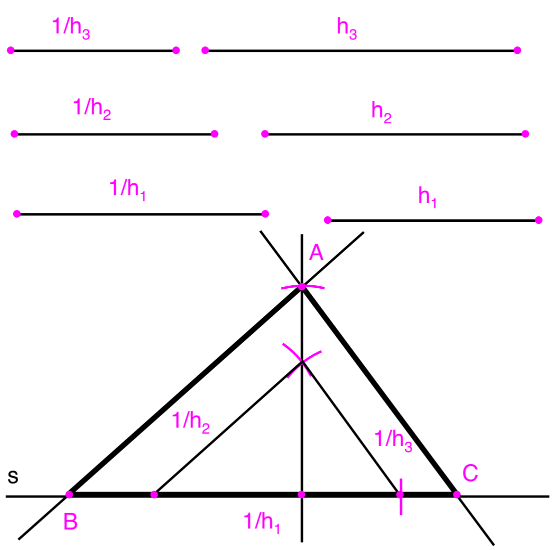


Figura 163

Exercícios:

5. Construir um triângulo retângulo conhecendo a hipotenusa e um cateto.

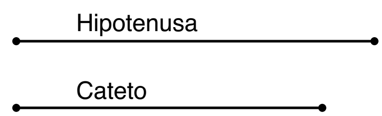


Figura 164

6. Construir um triângulo retângulo conhecendo a hipotenusa e um ângulo agudo.

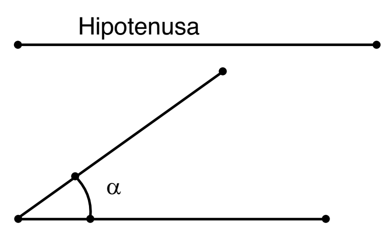


Figura 165

Resumo

Nesta aula você aprendeu...

- Algumas construções fundamentais de triângulos;
- Que certos problemas de construção de triângulos exigirão conhecimentos profundos de Geometria Básica.

Aula 10 – Construções de Triângulos II

Objetivos

Aplicar conceitos de Geometria Básica para construções de triângulos.

Sabemos pela Geometria Básica que dado um triângulo ABC, chama-se mediana relativa ao vértice A, o segmento que une A com o ponto médio M do lado BC. Também sabemos pela Geometria Básica que as medianas de um triângulo se encontro num único ponto chamado baricentro ou centro de gravidade, e em geral indicamos por G. Relativo ao baricentro existe uma importante propriedade que será utilizada no próximo problema:

- O baricentro de um triângulo divide cada mediana na razão 2 para 1, isto é, dado um triângulo ABC com baricentro G e medianas AM_1, BM_2 e CM_3 temos que:

  1. $AG = \frac{2}{3}AM_1$;
  2. $BG = \frac{2}{3}BM_2$;
  3. $CG = \frac{2}{3}CM_3$.

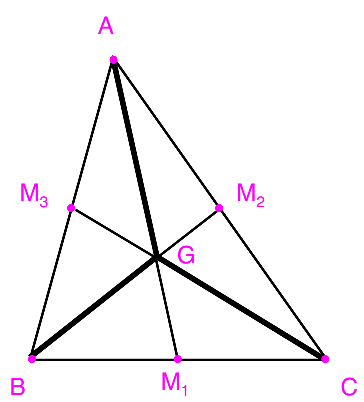


Figura 166

Vamos provar esta propriedade.

Consideremos as medianas BM_2 e CM_3 e seu ponto de encontro G. Tomemos os pontos médios de B e G, e C e G, indicandos por P e Q, respectivamente.

Como M_3 e M_2 são os pontos médios dos lados AB e AC, respectivamente, então pelo Teorema de Tales temos que $M_3M_2//BC$. Observando o triângulo GBC, por construção, P e Q são pontos médios dos lados GB e GC, respectivamente, logo pelo mesmo motivo temos que $PQ//BC$. Assim, por transitividade, $M_2M_2//PQ$.

Observe que, por semelhança dos triângulos AM_3M_2 e ABC, temos que $M_3M_2 = \frac{BC}{2}$, e por semelhança dos triângulos GPQ e GBC, temos que $PQ = \frac{BC}{2}$. Logo, $M_2M_3 = PQ$. Assim temos,

$$M_3M_2//PQ \text{ e } M_3M_2 = PQ.$$

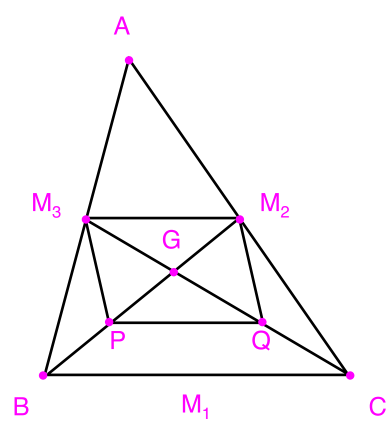


Figura 167

Neste caso, o quadrilátero M_3M_2QP é um paralelogramo, daí $M_2G = GP = PB$ e $M_3G = GQ = QC$. Portanto, $BG = \frac{2}{3}BM_2$ e $CG = \frac{2}{3}CM_3$.

Pelo mesmo raciocínio, mostra-se que $AG = \frac{2}{3}AM_1$. E isto conclui a demonstração.

Ainda no triângulo ABC anterior, prolongando o a mediana AM_1 até o ponto R tal que $M_1R = GM_1$, formamos um paralelogramo $BGCR$ onde os lados deste paralelogramo correspondem a $\frac{2}{3}BM_2$ e $\frac{2}{3}CM_3$ e a diagonal $GR = \frac{2}{3}AM_1$. Logo, o triângulo BGR tem seus lados correspondentes a $\frac{2}{3}$ de cada mediana e a mediana relativa ao vértice B tem medida igual a metade do lado BC.

Este fato justifica a resolução do seguinte problema.

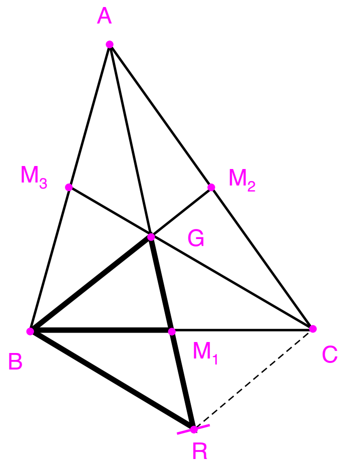


Figura 168

Problema 1: Construir um triângulo conhecendo as três medianas.

Sejam m_1, m_2 e m_3 as três medianas.

Resolução:

1.1 Divide-se as medianas m_1, m_2 e m_3 em três partes iguais;

1.2 Constrói-se o triângulo BGR considerando os lados iguais a $\frac{2}{3}$ de cada mediana;

1.3 Encontra-se o ponto médio M do lado GR, utilizando $\frac{1}{3}$ da mediana correspondente a este lado;

1.4 Prolonga-se o segmento BM duplicando-o, obtendo o ponto C;

1.5 Prolonga-se o lado GR duplicando-o, obtendo o ponto A;

1.6 O triângulo ABC é o triângulo pedido.

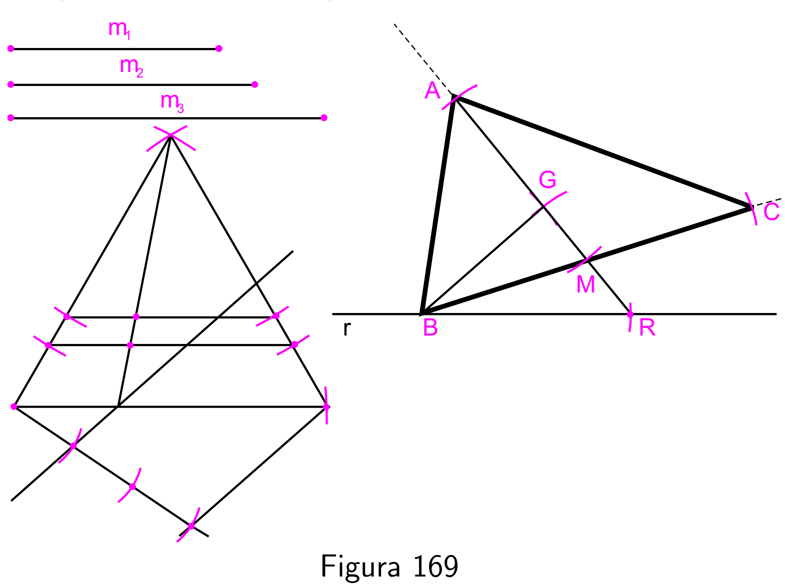


Figura 169

Problema 2: Construir um triângulo sendo dados dois lados e o ângulo oposto a um deles.

Sejam L_1, L_2 e α o ângulo oposto a L_1. Neste caso, α é adjacente a L_2.

Primeiro caso: α é agudo.

Resolução:

2.1 Constrói-se sobre uma reta r um segmento AB igual a L_2;

2.2 Na extremidade A constrói-se um ângulo igual a α;

2.3 Com centro em B e raio L_1 constrói-se uma circunferência que interceptará o lado em um ponto, dois pontos ou nenhum ponto;

(a) Dois pontos se L_1 é maior que a distância do ponto B ao lado do ângulo e menor que L_2;

(b) Um ponto se L_1 é maior que a distância do ponto B ao lado do ângulo e maior que L_2;

(c) Nenhum ponto se L_1 é menor que a distância do ponto B ao lado do ângulo;

A construção aqui feita está no caso (a).

2.4 Os pontos C_1 e C_2 são os terceiros vértices das duas soluções obtidas.

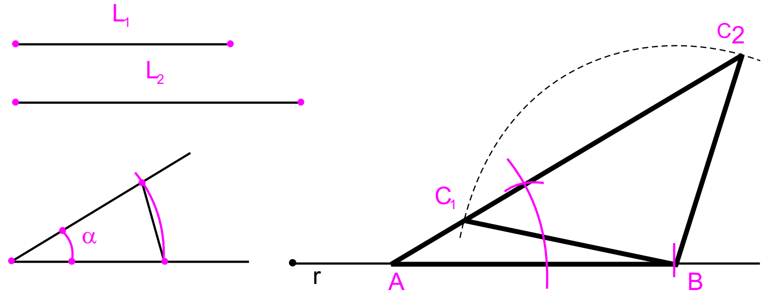


Figura 170

Segundo caso: α é obtuso.

Neste caso, o problema admitirá solução somente quando L_1 é maior que L_2 e assim, sempre terá solução.

Resolução:

2.1 Constrói-se sobre uma reta r um segmento AB igual a L_2;

2.2 Na extremidade A constrói-se um ângulo igual a α;

2.3 Com centro em B e raio L_1 constrói-se um circunferência que interceptará o lado em um ponto C;

2.4 O triângulo ABC é a solução.

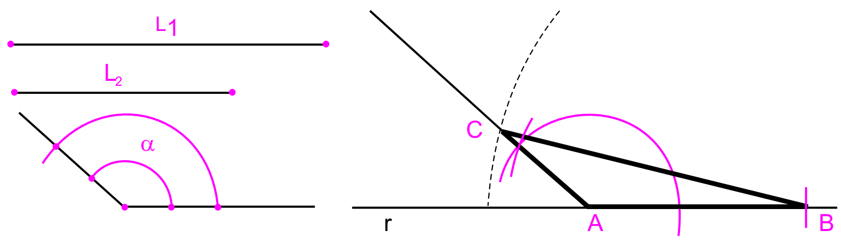


Figura 171

Exercícios:

1. Construir um triângulo conhecendo um lado L, o ângulo α adjacente a esse lado e a altura correspondente ao lado oposto deste ângulo.

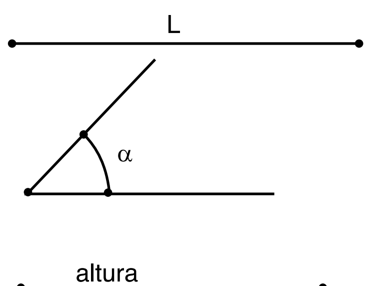


Figura 172

Sugestão: Construa numa reta r um segmento igual ao lado dado e numa das extremidades deste segmento construa o ângulo dado e uma circunferência de raio igual a altura. O lado oposto deve ser tangente a esta circunferência.

2. Construir um triângulo conhecendo dois lados e uma mediana relativa a um dos lados dados.

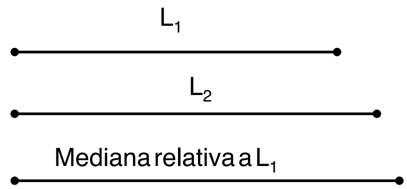


Figura 173

Sugestão: Suponha o problema resolvido e note que a mediana divide um triângulo em dois triângulos onde um dos lados é metade do lado relativo a esta mediana. Um desses triângulos pode ser construído a partir de seus lados.

3. Construir um triângulo conhecendo dois lados e a mediana relativa ao lado desconhecido.

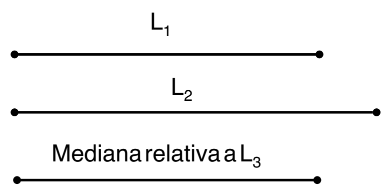


Figura 174

Sugestão: Suponha o problema resolvido e prolongue, na figura, a mediana ao seu dobro e ligue a extremidade a um dos outros vértices do triângulo, obtendo um triângulo de lados conhecidos.

4. Construir um triângulo conhecendo um lado, a mediana relativa a este lado e o ângulo oposto a este lado.

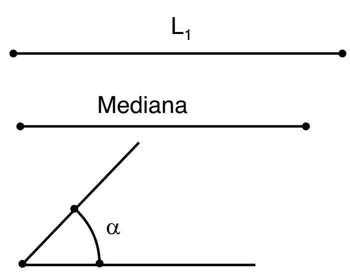


Figura 175

Sugestão: Utilize o arco capaz do ângulo dado sobre o lado oposto dado, e pelo ponto médio do lado construa a mediana dada apoiando-a no arco.

Problema 3: Construir um triângulo conhecendo um lado , um ângulo adjacente e a diferença dos outros dois lados.

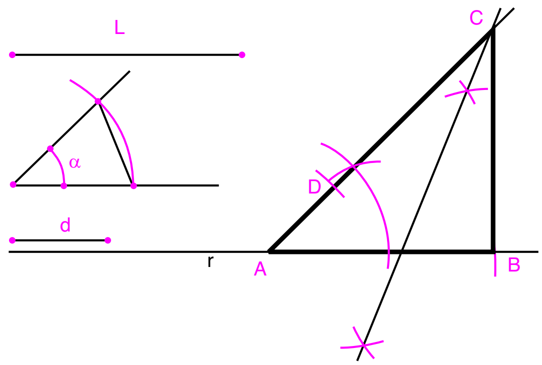


Figura 176

Sejam L_1 o lado dado, α um ângulo adjacente a este lado e d a diferença entre os outros lados.

Vamos supor o problema resolvido, isto é, seja ABC o triângulo nas condições dadas anteriormente. Neste triângulo consideramos AB e $C\widehat{A}B$ dados. Façamos a análise do problema da seguinte forma:

- Rebatemos o lado CB sobre o lado AC em seu interior. Em outras palavras obtemos um ponto $D \in AC$ tal que $CD = CB$;

- Desta forma o ponto C é eqüidistante dos pontos D e B, logo, é a interseção da mediatriz do segmento DB com o prolongamento do lado do ângulo α dado.

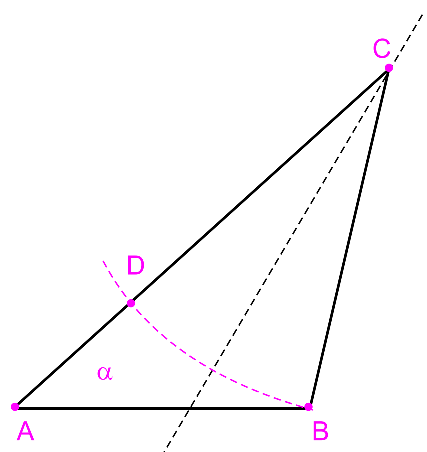


Figura 177

Assim, podemos resolver o sistema seguindo os passos abaixo:

3.1 Sobre uma reta r constrói-se um segmento AB de medida igual ao lado dado;

3.2 Constrói-se um ângulo igual ao ângulo α dado e sobre o lado novo do ângulo constrói-se um segmento AD igual à diferença dada;

3.3 Traça-se a mediatriz do segmento DB, que deve interceptar o lado novo do ângulo no ponto C. Assim, ABC é o triângulo pedido (veja a Figura 176.

Problema 4: Construir um triângulo conhecendo um lado , o ângulo oposto e a soma dos outros dois lados.

Sejam L_1 o lado dado, α o ângulo oposto e s a soma dos outros dois lados.

Vamos supor o problema resolvido, isto é, seja ABC o triângulo nas condições dadas anteriormente. Neste triângulo consideramos AB e $A\widehat{C}B$ dados. Façamos a análise do problema da seguinte forma:

- Rebatemos o lado CB sobre o lado AC em sua parte externa. Em outras palavras obtemos um ponto $D \notin AC$ tal que $CD = CB$;

- Desta forma o triângulo BCD é isósceles, de base BD, e AD é a soma dos outros dois lados;

- Note que $A\widehat{C}B$ é ângulo externo do triângulo BCD não adjacentes aos ângulos da base, que são iguais. Neste caso, o ângulo da base deste triângulo possui a metade da medida do ângulo dado;

- Além disso, uma lateral do triângulo isósceles possui a mesma reta suporte da soma dois lados não dados e os pontos B e D são eqüidistantes do ponto C, isto é, pertence a mediatriz do segmento BD.

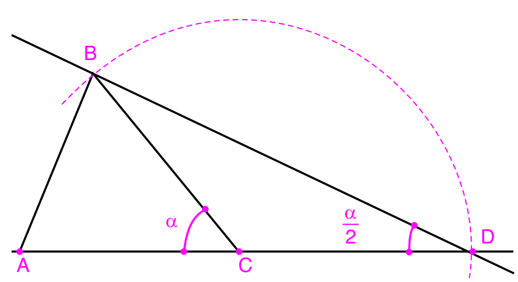


Figura 178

Assim, podemos resolver o sistema seguindo os passos abaixo:

4.1 Sobre uma reta r constrói-se um segmento AD de medida igual à soma dos lados desconhecidos;

4.2 Constrói-se um ângulo igual a metade do ângulo α, na extremidade D do segmento construído onde um dos lados seja o segmento AD;

4.3 Com centro em A constrói-se um arco de circunferência de raio igual ao lado dado, que interceptará o novo lado do ângulo construído nos pontos B_1 e B_2;

4.4 Traçam-se as mediatrizes dos segmento DB_1 e DB_2, que devem interceptar o segmento AD nos pontos C_1 e C_2, respectivamente. Assim, os triângulos AB_1C_1 e AB_2C_2 são as soluções para o problema.

Quando dois triângulos ΔABC e ΔDEF são congruentes escrevemos $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$. Em construções geométricas é comum, neste caso, dizer que os triângulos são iguais e escrevemos $\Delta ABC = \Delta DEF$.

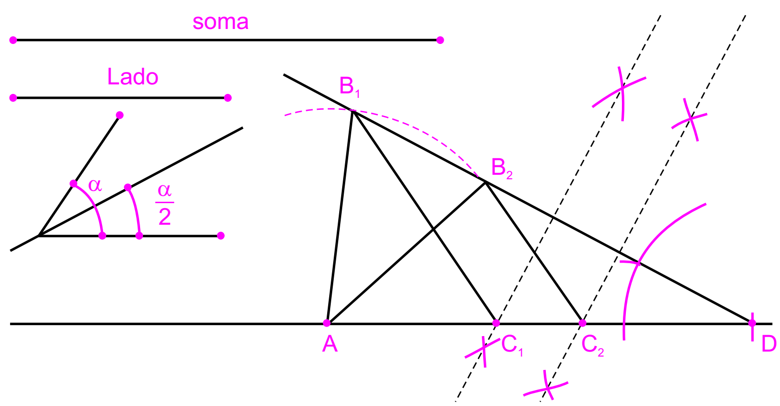


Figura 179

Note que na resolução do problema anterior obtemos duas soluções que são idênticas, pois os triângulos AB_1C_1 e AB_2C_2 são iguais. Vamos demonstrar esta afirmação.

Observando a Figura 179, basta mostrarmos que $AC_2 = C_1B_1$, pois sabemos que as somas $AC_2 + C_2B_2$ e $AC_1 + C_1B_1$ são iguais a soma dada no problema, e isto implicaria a igualdade $AC_1 = C_2B_2$, e pelo caso de congruência L.L.L. temos a igualdade $\Delta AB_1C_1 = \Delta B_2AC_2$.

Como $C_1B_1 = C_1D$, então precisamos mostrar que $AC_2 = C_1B_1$.

Na Figura 179 trace a mediatriz do segmento B_2B_1 que o interceptará no ponto M. As três mediatrizes construídas na figura são paralelas por serem perpendiculares à mesma reta, além disso a mediatriz de B_2B_1 deve passar por A, pois A é eqüidistantes das extremidades deste segmento.

Indiquemos por N o ponto médio de B_2D e por O o ponto médio de B_1D, como na figura a seguir.

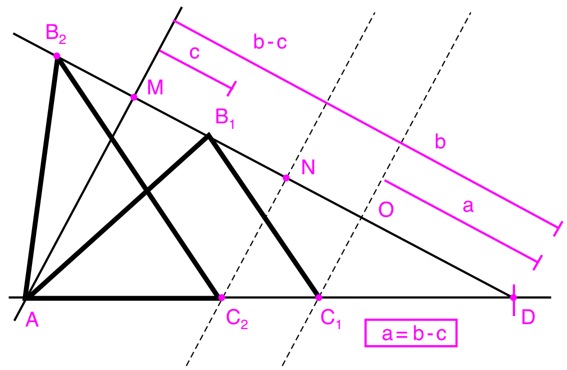


Figura 180

Assim temos, $B_1O = OD = a$, $B_2N = ND = b$ e $B_2M = MB_1 = c$. Dessa forma temos que $a = \frac{2b-2c}{2} = b - c$, isto é, $OD = b - c$. Por outro lado, $MN = B_2N - B_2N = b - c$. Logo, $OD = MN$.

Pelo Teorema de Tales, como as mediatrizes são paralelas, temos que: $\frac{OD}{MN} = \frac{C_1D}{AC_2} \Rightarrow AC_2 = C_1B_1$. Como queríamos demonstrar.

Exercícios:

5. Construa um triângulo conhecendo um lado L, um ângulo adjacente α e a soma dos outros dois lados S.

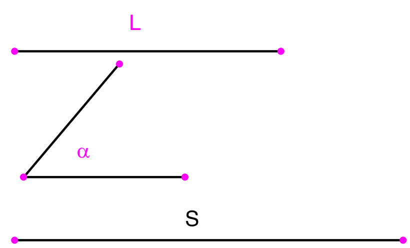


Figura 181

Sugestão: O exercício 5 é resolvido de maneira análoga ao problema 3, rebatendo-se o lado no sentido contrário.

6. Construir um triângulo conhecendo um lado L, o ângulo oposto α e a diferença d dos outros dois lados.

Sugestão: O exercício 6 é resolvido de maneira análoga ao problema 4, rebatendo-se o lado no sentido contrário.

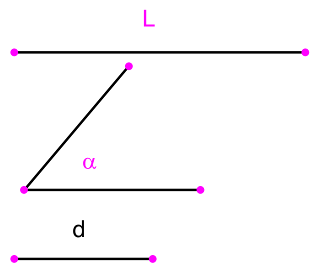


Figura 182

7. Construir um triângulo sendo dados um lado, um dos ângulos adjacentes e a altura correspondente ao lado dado.

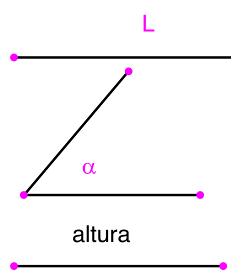


Figura 183

Sugestão: Construa o lado, o ângulo adjacente e trace uma paralela ao lado na altura dada.

Problema 5: Construir um triângulo sendo dados dois ângulos da base e a altura.

Sejam α e β os dois ângulos e h a altura dados.

Resolução:

5.1 Trace o segmento AB igual à altura h, e pelas extremidades A e B do segmento AB as retas r e s, respectivamente, perpendiculares ao segmento AB;

5.2 Fazendo centro em A descreva uma semicircunferência de diâmetro em r;

5.3 Obtenha em A os ângulos iguais a α e β dados, voltados para semiplanos opostos determinados por AB;

5.4 Prolongando os lados deste ângulos, determina-se os pontos C e D na reta s. Obtemos assim, ACD que é o triângulo pedido.

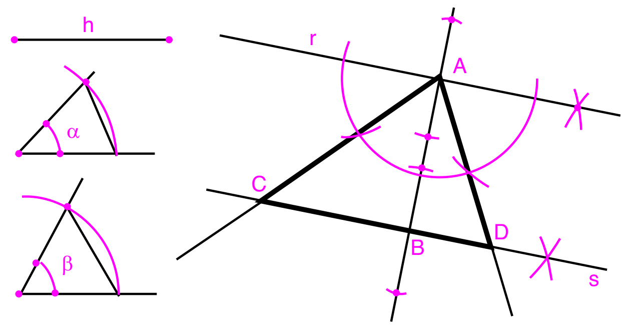


Figura 184

Exercícios:

8. Construir um triângulo, sendo dados os ângulos α e β e o lado L, sendo aqueles adjacentes a este.

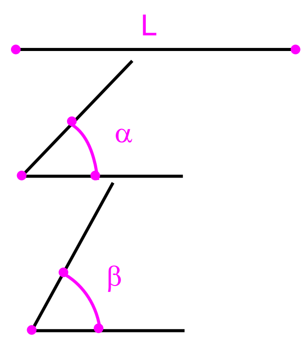


Figura 185

9. Construir um triângulo conhecendo-se dois ângulos e o lado oposto a um deles.

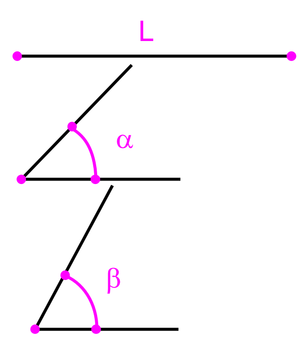


Figura 186

Problema 6: Construir um triângulo sendo dados dois ângulos α e β e o perímetro $2p$.

Supondo o problema resolvido, seja ABC a solução deste problema. Consideramos $C\widehat{A}B = \alpha$ e $C\widehat{B}A = \beta$. Rebatendo os lados AC e BC para o lado externo do triângulo sobre a reta suporte do lado AB obtemos, respectivamente, os ponto E e F tais que $EF = 2p$. Note também que os triângulos ECA e FCB são isósceles de respectivas bases EC e FC. Além disso, os ângulo $C\widehat{A}B = \alpha$ e $C\widehat{B}A = \beta$ são seus respectivos ângulos externos, não-adjacente aos ângulos da base. Assim, $C\widehat{E}A = \frac{\alpha}{2}$ e $C\widehat{F}B = \frac{\beta}{2}$. Também temos que o ponto A é eqüidistante dos pontos E e C e o ponto B é eqüidistante dos pontos C e F.

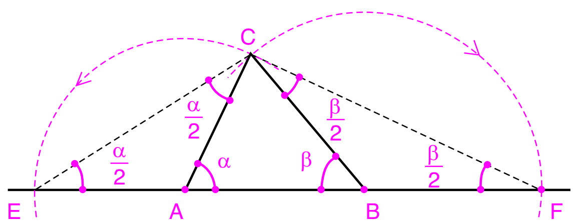


Figura 187

Resolução:

6.1 Trace o segmento EF igual ao perímetro $2p$ sobre uma reta r;

6.2 Pelas extremidade E e F construa as metades dos ângulos dados. Os lados destes ângulos se encontrarão no ponto C;

6.3 Trace as mediatrizes dos pontos E e C, e F e C. Estas mediatrizes interceptarão o segmento EF, respectivamente, nos pontos A e B;

6.4 O triângulo ABC é a solução para o problema.

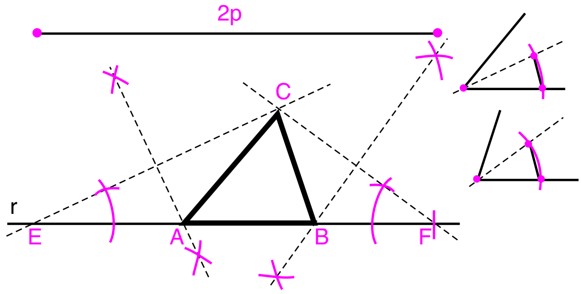


Figura 188

Exercícios:

10. Construir o triângulo isósceles sendo dados o perímetro e a altura relativa à base.

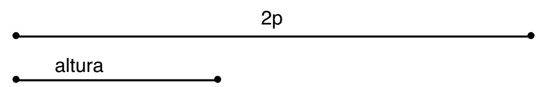


Figura 189

Sugestão: Utilize a mesma idéia do problema 6, lembrando que a altura relativa à base de um triângulo isósceles coincide com a mediana.

Resumo

Nesta aula você aprendeu...

- A desenvolver construções de triângulos utilizando o problema supostamente resolvido.

Aula 11 – Construções de Triângulos III

Objetivos

Aplicar conceitos de Geometria Básica para construções de triângulos;
Construir triângulos isósceles sob diversas condições;
Construir triângulos retângulos sob diversas condições.

Problema 1: Construir um triângulo equilátero , conhecendo-se a sua altura.

Seja h a altura dada.

Resolução:

1.1 Trace um segmento MB perpendicular à uma reta r, qualquer, de medida igual à altura h, sendo $M \in r$;

1.2 Em um ponto $D \in r$ construa um ângulo de 60^o;

1.3 Pelo ponto B trace uma reta paralela ao lado deste ângulo, interceptando r em um ponto A;

1.4 Com centro em B e raio BA descreva um arco interceptando r em outro ponto C;

1.5 O triângulo ABC é a solução do problema.

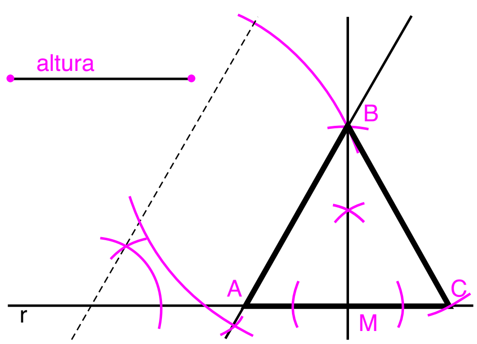


Figura 190

Justificativa: Observe que, por paralelismo, $B\widehat{A}M = 60^o$, e conseqüentemente $A\widehat{B}M = 30^o$. Assim AM é a metade de AB, pois $sen 30^o = \frac{1}{2}$. Por construção, $BC = BA$. Como ABM e CBM são triângulos retângulos de cateto comum e hipotenusas iguais temos que tais triângulos devem ser iguais. Logo, $MC = MA$, e assim, $CA = AB = BC$.

Problema 2: Construir um triângulo isósceles conhecendo-se a base e a altura relativa a essa base.

Sejam b a base e h a altura.

Resolução:

2.1 Trace sobre uma reta r um segmento AB igual à base;

2.2 Trace a mediatriz do segmento AB, interceptando AB no ponto médio;

2.3 Sobre a mediatriz construa um segmento MC igual a altura dada. O triângulo ABC é a solução para o problema.

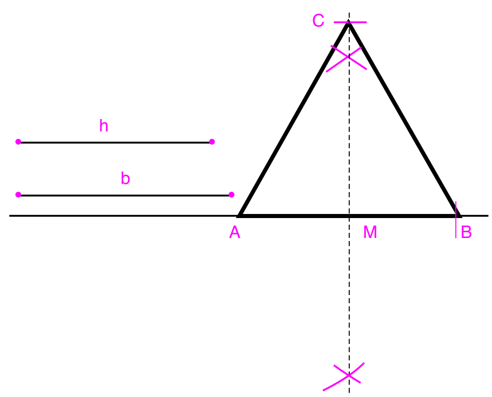


Figura 191

Justificativa: Lembre que a altura, relativa à base de um triângulo isósceles, coincide com a mediana e a bissetriz.

Exercícios:

1. Construir um triângulo isósceles conhecendo-se a base e um ângulo a ela adjacente.

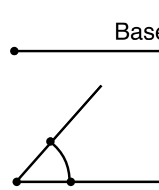


Figura 192

Problema 3: Construir um triângulo isósceles conhecendo-se a altura e um dos ângulos da base.

Sejam h a altura e α o ângulo dados.

Resolução:

3.1 Trace sobre uma reta r e sobre qualquer ponto $M \in r$ trace uma reta s perpendiculara a r;

3.2 Construa sobre s um segmento $MA = h$;

3.3 Sobre um ponto $E \in r$ construa o ângulo α dado;

3.4 Trace por A um reta paralela ao lado do ângulo construído, interceptando r num ponto B;

3.4 Com centro em A e raio AB construa um arco de circunferência que interceptará a reta r em outro ponto C.

O triângulo ABC é o triângulo pedido.

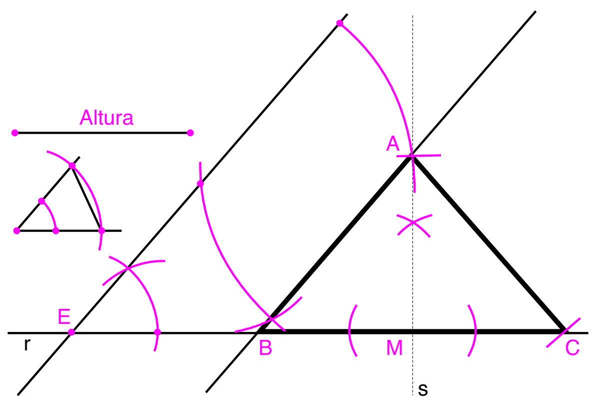


Figura 193

Justificativa: A justificativa deste problema é análoga ao do problema 1.

Exercícios:

2. Construir um triângulo isósceles conhecendo-se a base e o ângulo oposto a ela (ver a Figura 194).

   Sugestão: Utilize o arco capaz da base dada sob o ângulo dado e a mediatriz da base.

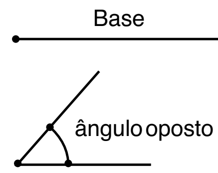


Figura 194

3. Construir um triângulo isósceles, conhecendo-se a lateral e o ângulo da base.

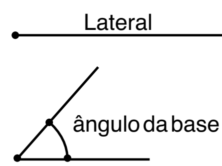


Figura 195

4. Construir um triângulo isósceles, conhecendo-se a base e um lado.

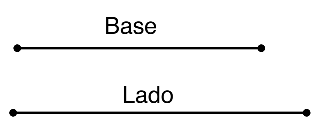


Figura 196

5. Construir um triângulo retângulo, sendo dados os seus catetos AB e CD

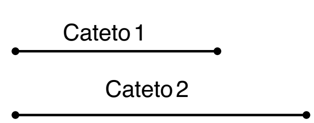


Figura 197

Problema 4: Construir um triângulo retângulo sendo dados a hipotenusa e a soma dos catetos.

Supondo o problema resolvido, seja ABC o triângulo retângulo obtido com ângulo reto em A. Efetuemos a seguintes construções.

- Rebatendo o cateto AB sobre a reta suporte do cateto AC, para o lado externo do triângulo, obtemos um ponto D, de tal forma que DAB é um triângulo retângulo isósceles, e DC é a soma dos catetos;

- Observe que o ângulo da base do triângulo isósceles DAB mede 45^o, e que o vértice A é eqüidistante dos pontos B e D.

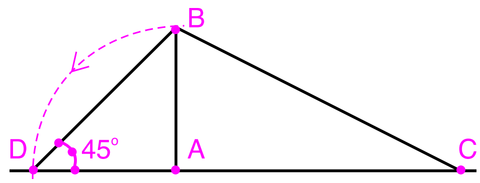


Figura 198

Isso justifica a seguinte resolução deste problema.

4.1 Sobre uma reta r constrói-se um segmento DC igual a soma dos catetos e na extremidade D constrói-se um ângulo de 45^o;

4.2 Constrói-se um arco de circunferência com centro em C e utilizando a hipotenusa como raio, interceptando o lado do ângulo de 45^o nos pontos B_1 e B_2. Façamos somente a construção utilizando o ponto B_1;

4.3 Traça-se a mediatriz do segmento DB_1, obtendo o ponto A sobre r. O triângulo AB_1C é a solução do problema.

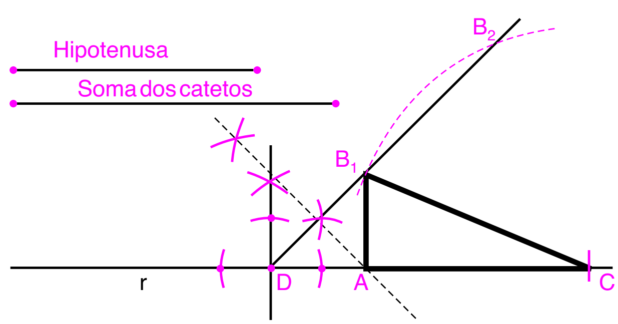


Figura 199

Exercícios:

6. Construir um triângulo retângulo sendo dados a hipotenusa e a diferença entre os catetos.

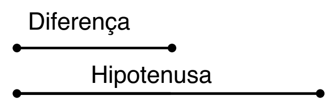


Figura 200

Sugestão: Siga a idéia do problema 4 rebatendo o cateto no sentido contrário.

7. Construir um triângulo retângulo, conhecendo um cateto e a soma da hipotenusa e outro cateto.

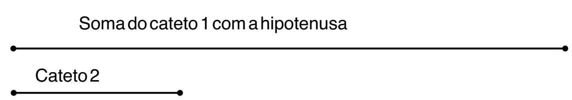


Figura 201

Sugestão: Supor o problema resolvido e rebater a hipotenusa sobre o cateto desconhecido, obtendo assim um triângulo retângulo cujos catetos são o cateto dado e a soma dada. Em seguida traçar a mediatriz da hipotenusa desse triângulo auxiliar.

8. Construir um triângulo retângulo conhecendo a mediana relativa à hipotenusa e um cateto.

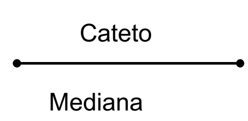


Figura 202

Sugestão: A mediana relativa à hipotenusa é igual a metade dela.

9. Construir um triângulo retângulo conhecendo a mediana relativa à hipotenusa e um ângulo agudo (ver Figura 203).

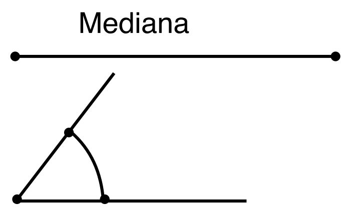


Figura 203

Problema 5: Construir um triângulo retângulo conhecendo os raios das circunferências inscrita e circunscrita a este triângulo.

Suponhamos o problema resolvido e seja ABC o triângulo retângulo, com ângulo reto em A, solução do problema.

Construindo a circunferência circunscrita notamos que a hipotenusa do triângulo é um diâmetro, logo a medida da hipotenusa é o dobro do raio da circunferência circunscrita.

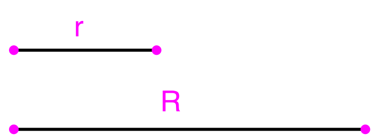


Figura 204

Construindo a circunferência inscrita temos:

- Indiquemos por E, F e G os pontos de tangência dos catetos, AB e AC, e da hipotenusa, BC, respectivamente, C o centro da circunferência inscrita, r o raio da circunferência inscrita e R o raio da circunferência circunscrita;

- Observe que o quadrilátero $AFCE$ é um quadrado, pois $EC = CF$, $AE = AF$ e os quatro ângulos internos são retos. Assim, $AE = AF = r$;

- Como BE e BG são tangentes a mesma circunferência nos pontos E e G, então $BE = BG$. Da mesma forma $CG = CF$. Por outro lado

$2R = BC = BG + GC = BE + CF$. Assim, $AB + AC = AE + EB + CF + AF = 2R + 2r$, isto é, a soma dos catetos é $2(R + r)$.

Assim, podemos resolver este problema utilizando o problema 4 onde a hipotenusa é o diâmetro da circunferência circunscrita e a soma dos catetos é o dobro da soma dos raios. Deixamos como exercício.

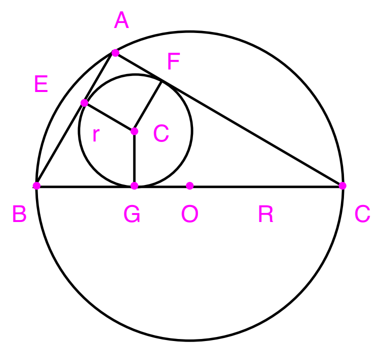


Figura 205

Exercícios:

10. Construir um triângulo retângulo conhecendo a soma dos dois catetos e o diâmetro da circunferência inscrita.

Figura 206

11. Construir um triângulo retângulo conhecendo a hipotenusa e a altura que lhe corresponde.

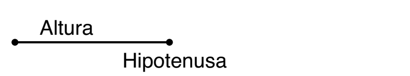


Figura 207

12. Construir um triângulo conhecendo a altura relativa à hipotenusa e um cateto.

Figura 208

13. Construir um triângulo retângulo conhecendo a altura relativa à hipotenusa e um ângulo agudo.

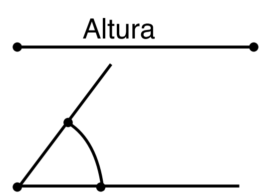


Figura 209

14. Construir um triângulo conhecendo um lado L, o ângulo oposto e a altura h relativa ao lado L.

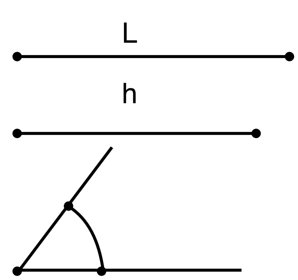


Figura 210

15. Construir um triângulo isósceles conhecendo a base e a altura relativa a lateral.

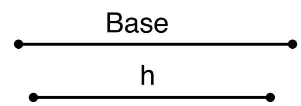


Figura 211

16. Construir um triângulo conhecendo o perímetro e sabendo que os lados são proporcionais aos segmentos a, b e c.

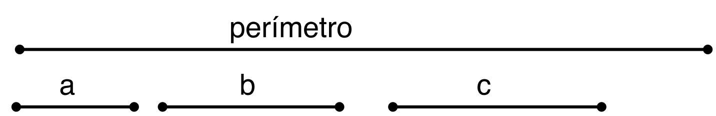


Figura 212

17. Construir um triângulo retângulo conhecendo um cateto e o raio da circunferência inscrita.

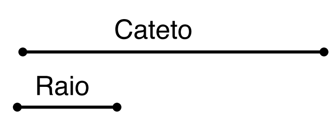


Figura 213

Resumo

Nesta aula você aprendeu...

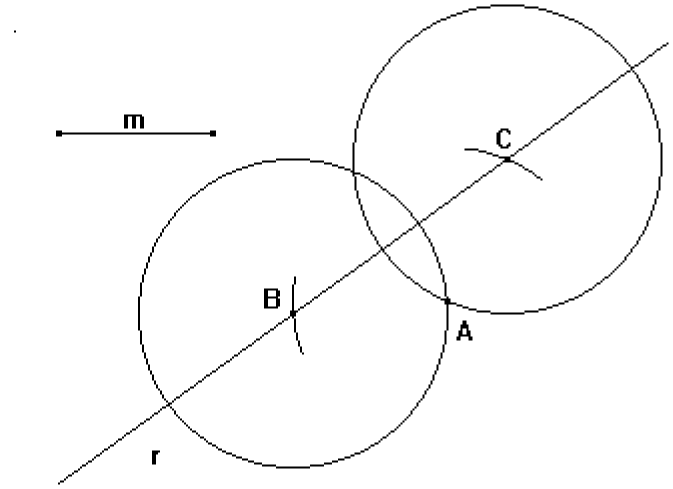
- A construir triângulos isósceles sendo dadas algumas condições;
- A construir triângulos retângulos sendo dadas algumas condições.

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Exercícios Resolvidos

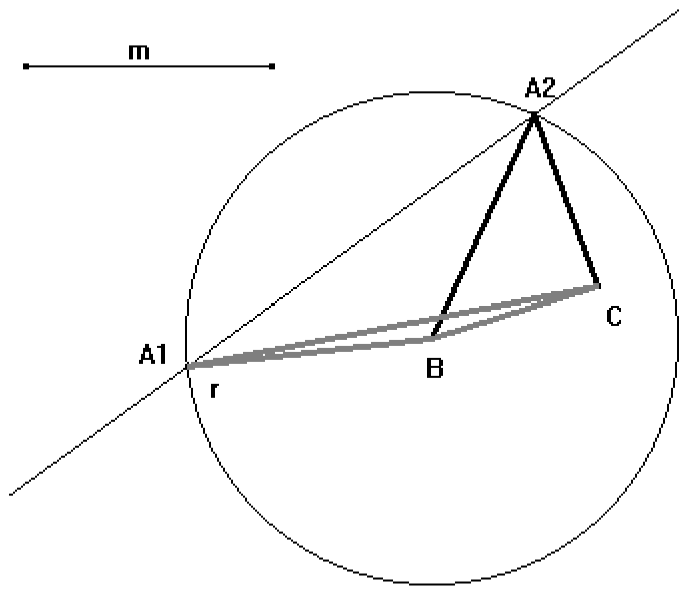
Aula 1

Exercício 1:



Com centro em A e raio de medida m achamos dois pontos B e C na reta, esses dois pontos são os centros das circunferências pedidas (2 soluções).

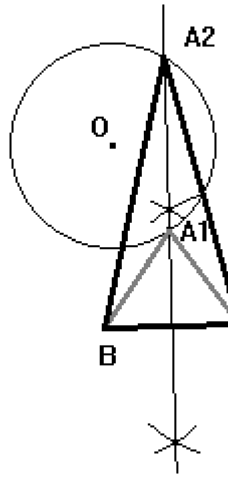
Exercício 2:



Com centro em B e raio m traçamos uma circunferência e achamos A_1 e A_2 pertencentes a r e assim temos dois triângulos. De forma análoga, com centro em C e raio m traçamos outra circunferência.

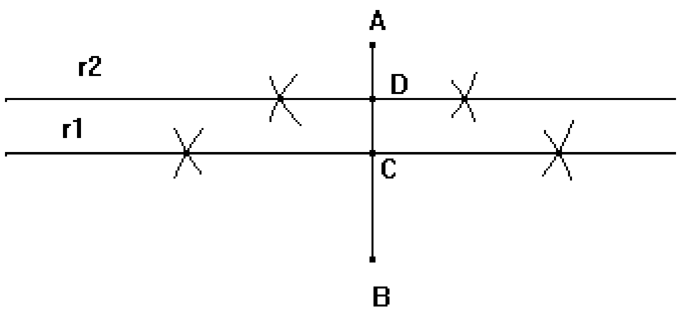
Aula 2

Exercício 1:



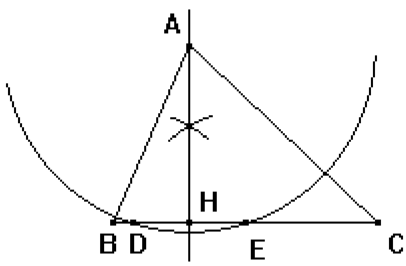
Achar a mediatriz do segmento BC.Esta mediatriz intercepta λ em dois pontos A_1 e A_2 e daí, temos dois triângulos isósceles A_1BC e A_2BC.

Exercício 2:



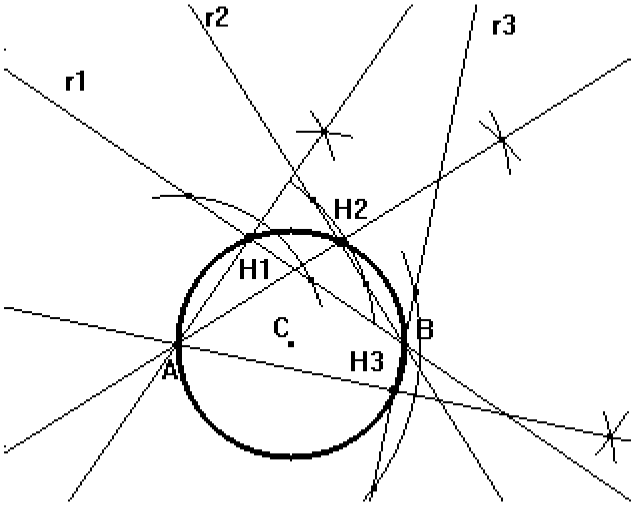
Achar a reta r_1 mediatriz do segmento AB, a intersecção desta reta com o segmento AB é o ponto C, achar a reta r_2 mediatriz do segmento AC, a intersecção desta reta com o segmento AC é o ponto D e assim AD é a quarta parte do segmento AB.

Exercício 3:



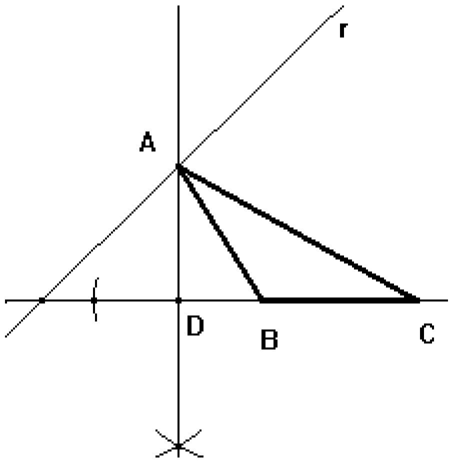
Trace uma circunferência de cento A e raio AD (AE), D e E pertencem ao segmento BC, trace a mediatriz de DE e assim encontramos a altura AH pedida.

Exercício 4:



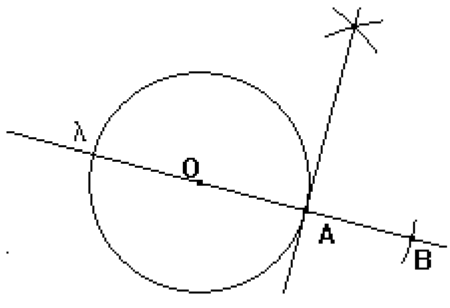
Traçar AH_1 perpendicular a r_1, AH_2 perpendicular a r_2 e AH_3 perpendicular a r_3. Note que temos três triângulos retângulos em que AB é a hipotenusa, daí $CH_1 = CH_2 = CH_3 = AB/2$. O lugar geométrico será,então, uma circunferência de cento em C e raio CH_1. Onde C é o ponto médio de AB.

Exercício 5:



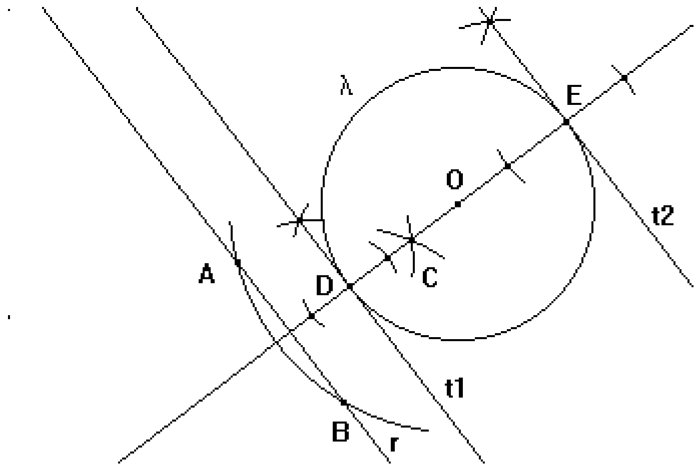
$A \in r$. Basta traçar a perpendicular a reta BC passando por D.

Exercício 6:



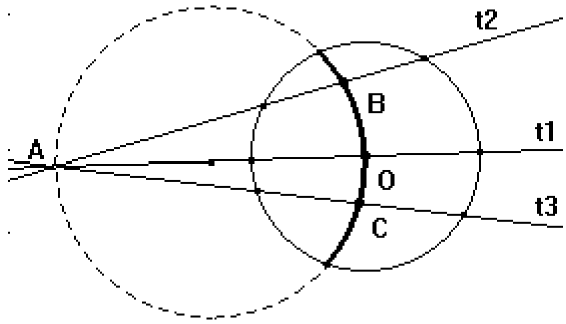
Trace a reta OA.
Com centro em A e raio OA trace a circunferência determinando B sobre a reta OA, tal que OA = AB. Com centro em O e B e raio maior que OA determine a reta r tangente a circunferência λ em A.

Exercício 7:



Traçando uma circunferência de centro em O e raio suficiente para cortar a reta r, determinamos os pontos A e B e com centro em A e B e raio AB determinamos C e daí a reta OC. Achamos então, na reta OC os pontos D e E de tangência, (ache as reta t_1 e t_2) e usando a mesma técnica do exercício 5 aula 2 ache as reta t_1 e t_2.

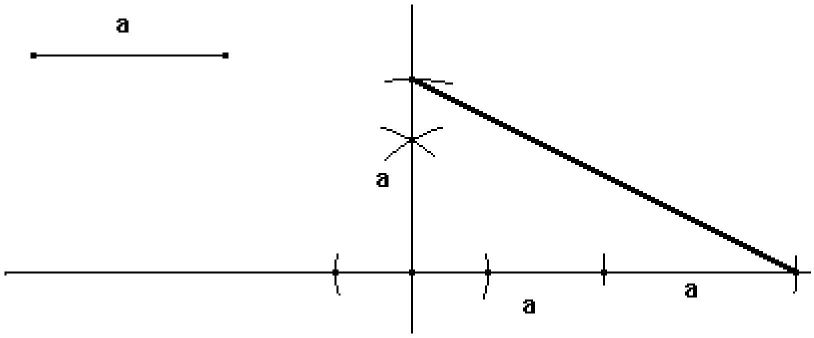
Exercício 8:



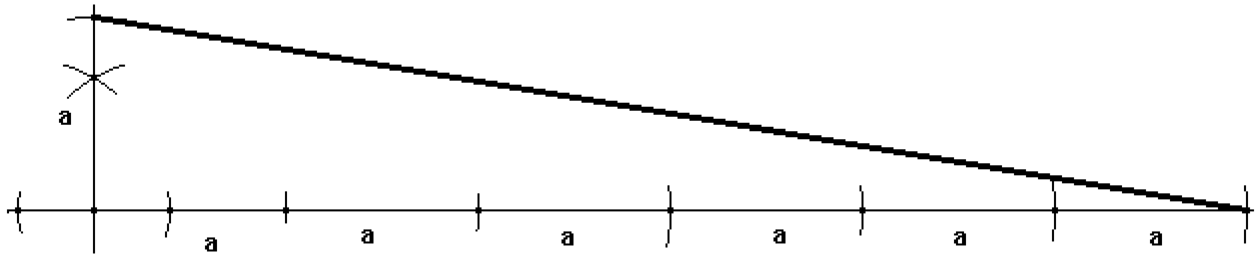
Traçar a reta t1 que passa pelo centro O (O é o ponto médio).
Traçar a reta t2, determine o ponto médio da corda achando B.
Traçar a reta t3, determine o ponto médio da corda achando C e assim por diante. Note que os triângulos AOB e AOC são retângulos em B e C, respectivamente. Portanto, B e C pertencem ao arco de circunferência de diâmetro AO.

Exercício 9:

a) Não é necessário, basta construir um triângulo retângulo de catetos 2a e a, pois assim a hipotenusa terá comprimento $a\sqrt{5}$.

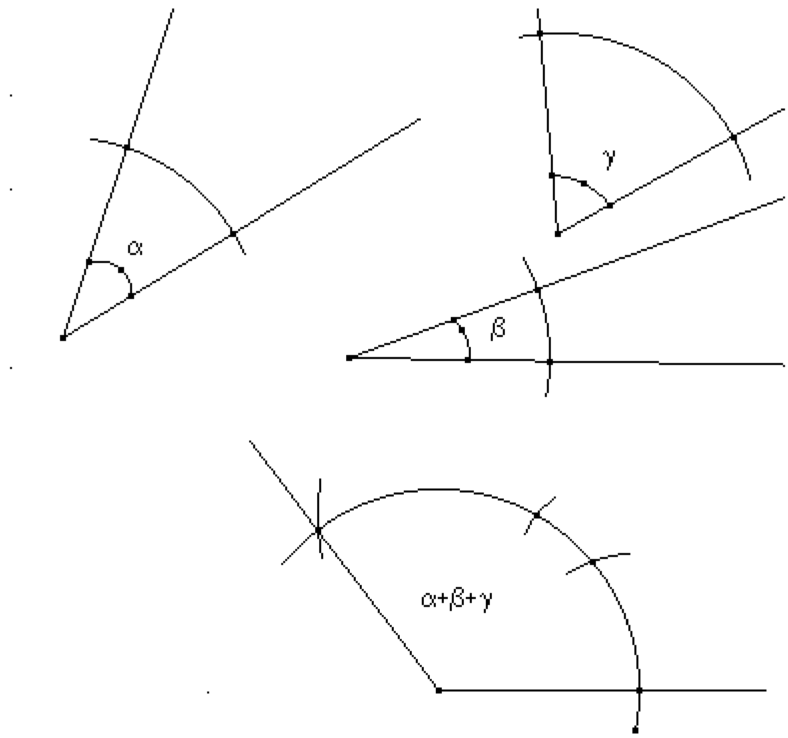


b) Utilizando o raciocínio anterior basta construir um triângulo retângulo cujos catetos medem 6a e a.

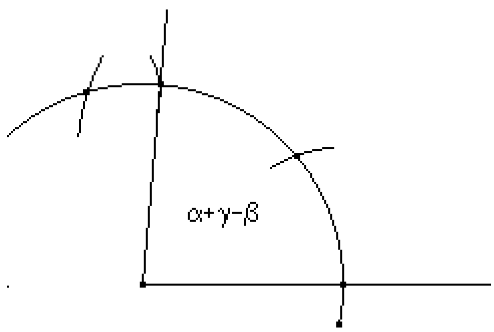


Aula 3

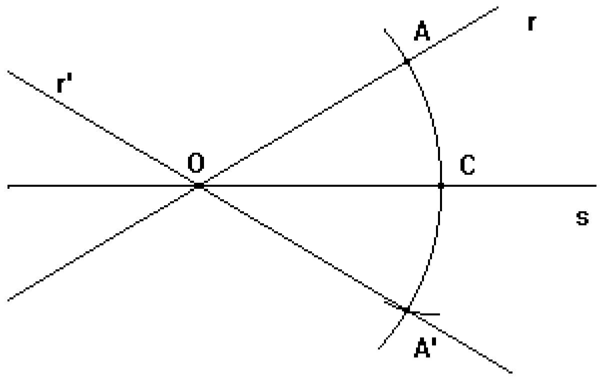
Exercício 1:



Transporte os ângulos α ,β e γ para um mesmo vértice de maneira que um seja consecutivo ao outro e encontramos $\alpha+\beta+\gamma$.
Transporte α e γ consecutivamente e β para parte interna obtendo assim $\alpha+\gamma-\beta$

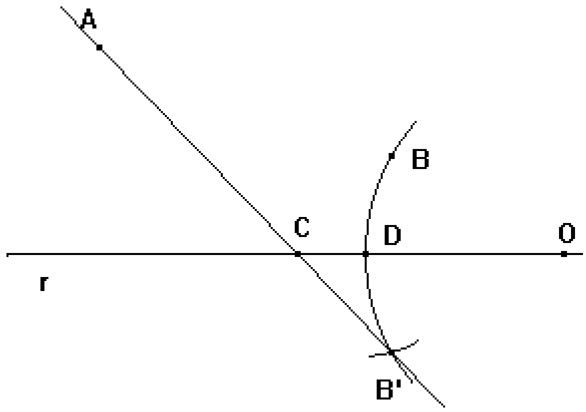


Exercício 2:



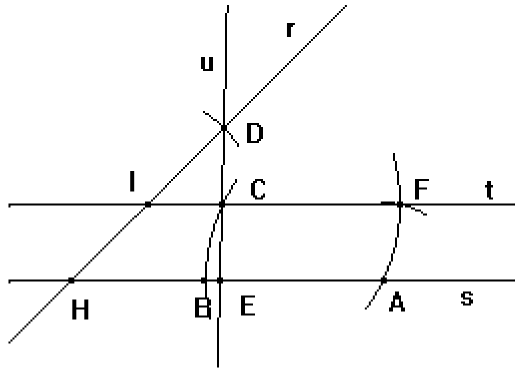
Basta apenas encontrar o simétrico de um ponto sobre r em relação à s.
Seja A ∈ r, com centro em O e raio OA achamos um ponto C ∈ s. Achar a distância de A a C e marcar achando A' (simétrico de A em relação a r). A reta OA' é o lugar geométrico pedido.

Exercício 3:



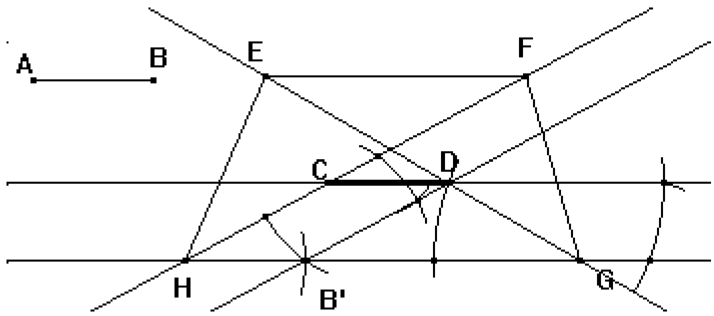
Determine o ponto simétrico de B em relação a *r*.
Seja O ∈ *r*, trace a circunferência de centro O e raio OB.
D ∈ *r* e D pertence a circunferência de centro O e raio OB e assim achamos B' simétrico de B em relação *r*.
Ligamos A a B', o ponto de intersecção com *r* encontramos C ∈ *r*.

Exercício 4:



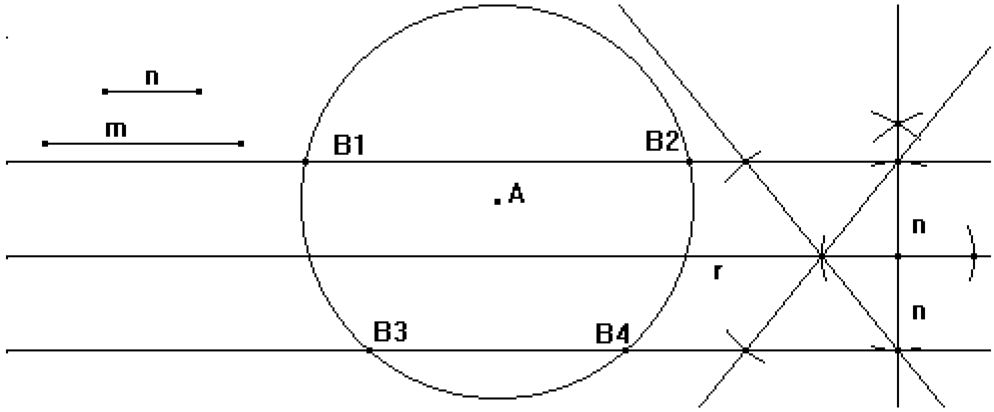
Trace uma reta *t* passando por C paralela a *s*.
Seja um arco com centro em C que intercepta *s* em A.
Mantendo a abertura do compasso constrói-se um outro arco de centro em A cortando *s* em B.Transfere o arco CB para o arco contendo A obtendo o ponto F. Une C e F e temos a reta *t* paralela a *s*. Seja H a intersecção das retas *r* e *s* e I a intersecção de r e t. Seja a medida HI, marcamos esta medida em *r* de I a um ponto que vamos chamar de D.
Ligando D a C temos a reta *u* que vai interceptar a reta *s* em E (uso do teorema de Tales).

Exercício 5:



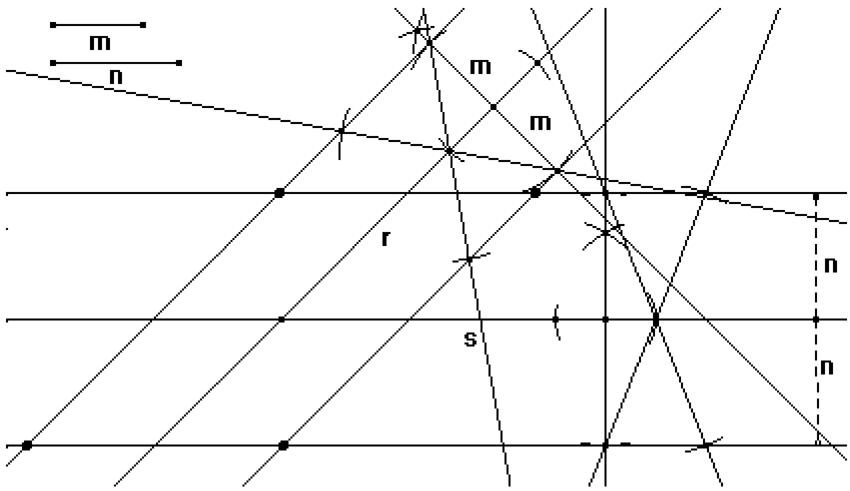
Considere o segmento HB’ congruente ao segmento AB na base maior do trapézio EFGH, de base maior HG. Vamos traçar uma reta *a* paralela a HF passando por B’. A intersecção da reta a com a diagonal EG temos o ponto D. Passando por D uma reta paralela a HG, vamos encontrar o segmento CD congruente a AB, compreendido entre as diagonais.

Exercício 6:



Trace as retas paralelas a *r* a uma distância n de *r* .Trace uma perpendicular e marque os pontos sobre a perpendicular que estejam a distância n de r em seguida trace por estes pontos as paralelas a r). Construa agora a circunferência de centro em A e raio m. Tal circunferência quando interceptar as paralelas (se possível) determinará os pontos que serão solução para B. Neste caso, podemos obter quatro soluções.

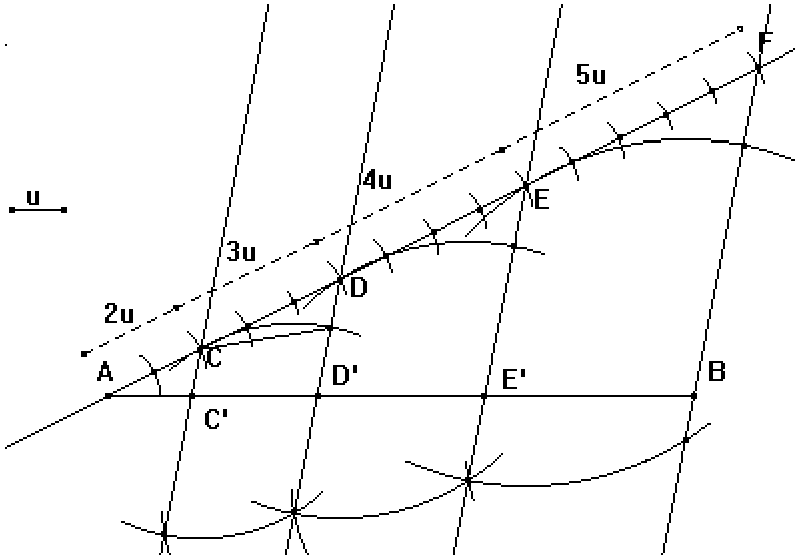
Exercício 7:



Como no exercício anterior trace as retas paralelas a r a uma distância m e trace as retas paralelas a s a uma distância n. As interseções destas retas serão as soluções para o exercício. Este problema admite quatro soluções.

Aula 4

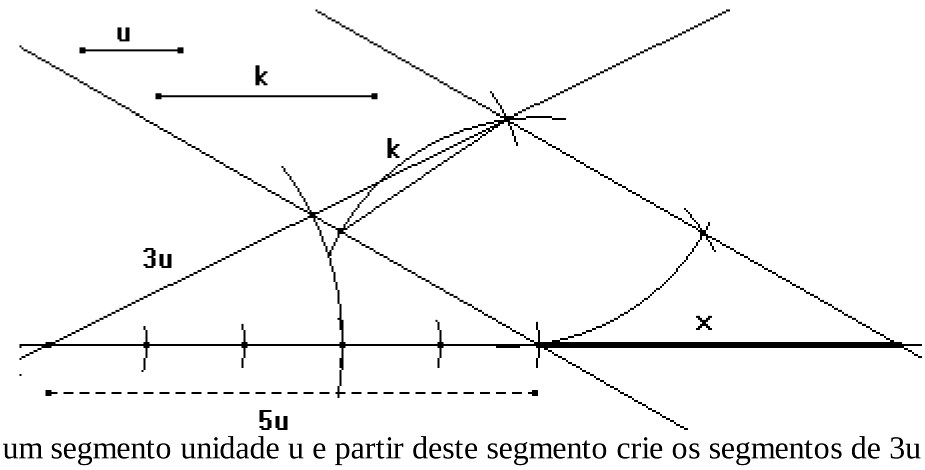
Exercício 1:



Considere uma reta r passando por A, seja uma medida u no compasso. Marcar a partir de A, sobre r, as medidas 2u, 3u,4u e 5u encontrando os pontos C,D,E e F. Ligando B a F e determinando paralelas a BF passando por E, D e C encontramos C', D' e E' no segmento AB e daí temos os segmentos AC', C'D', D'E' e E'B que são as divisões pedidas.

Exercício 2:

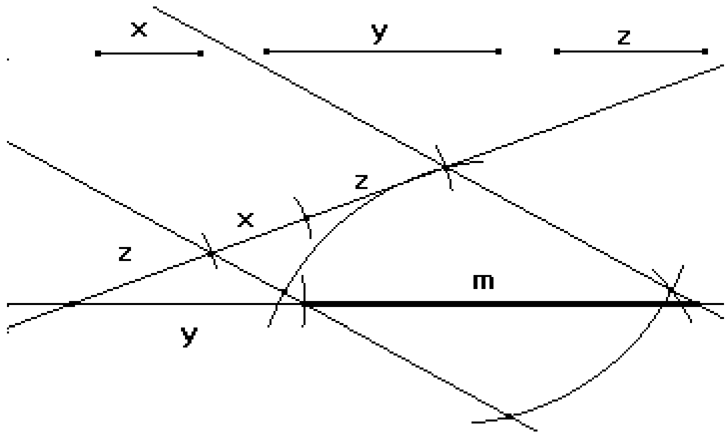
$$\frac{5}{3} = \frac{x}{k} \Leftrightarrow \frac{3}{5} = \frac{k}{x}$$



Determine um segmento unidade u e partir deste segmento crie os segmentos de 3u e 5u. Agora basta olhar o problema 4 (pág.: 51)

Exercício 3:

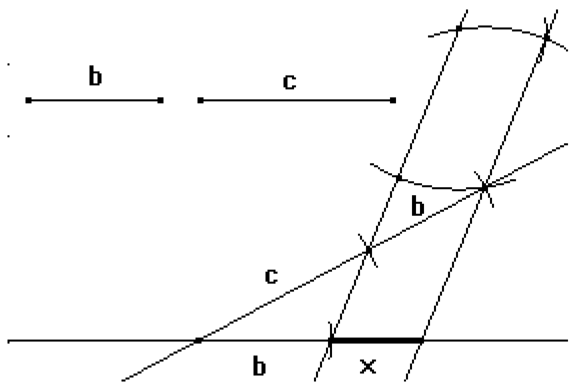
$$m = \frac{(x+z)y}{z} \Leftrightarrow \frac{z}{y} = \frac{x+z}{m}$$



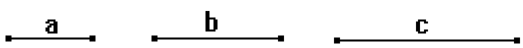
A resolução é semelhante ao exercício 2.

Exercício 4:

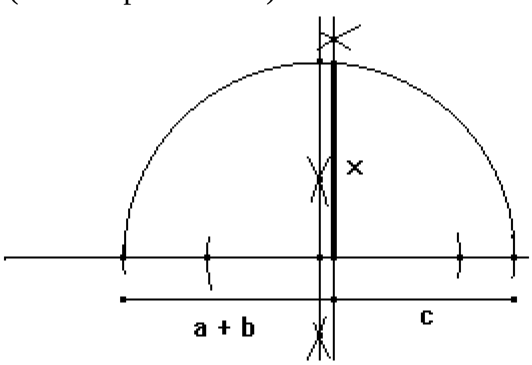
$$\frac{c}{b} = \frac{b}{x}$$ (Construção do problema 4)



Exercício 5:



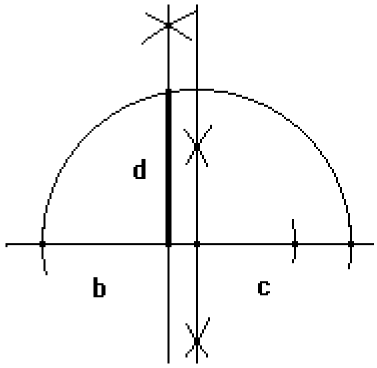
a) x = $\sqrt{(a+b)c}$ (Olhar o problema 1)



b)

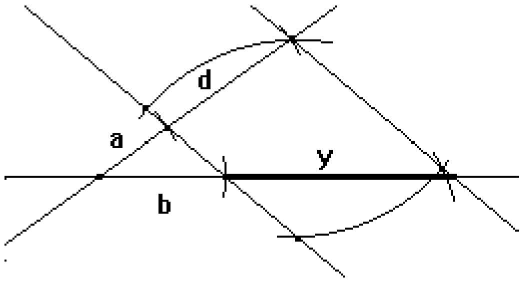
$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{bc}}{y}$$

Vamos encontrar o segmento de medida $d = \sqrt{bc}$ (média geométrica de b e c.)

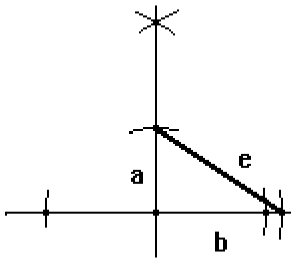


Utilize a construção do problema 4 e encontre facilmente y.

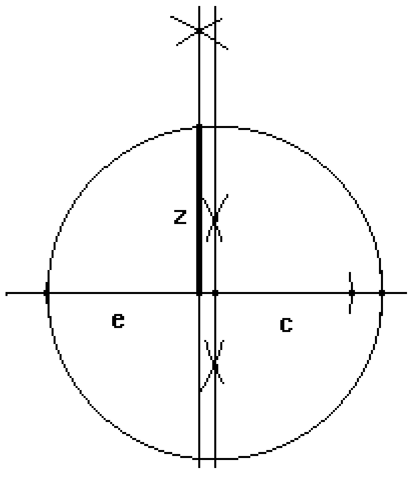
$$y = \frac{b\sqrt{b.c}}{a} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{b.c}}{y}$$



c) Primeiro vamos encontrar $e = \sqrt{a^2 + b^2}$ usando o teorema de Pitágoras.

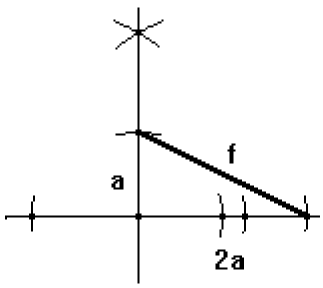


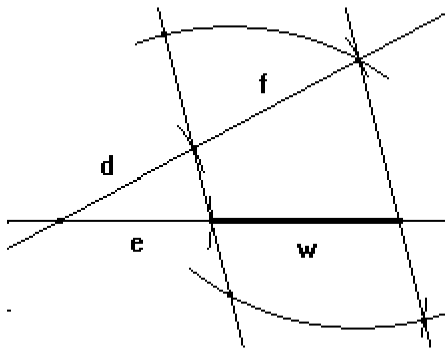
Assim, $z = \sqrt{c.\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{c.e}$



d) Em c) obtemos o segmento de medida e = $\sqrt{a^2+b^2}$ e em b) obtemos o segmento de medida d = $\sqrt{bc}$, falta obtermos o segmento de medida f = $a\sqrt{5}$. Assim,

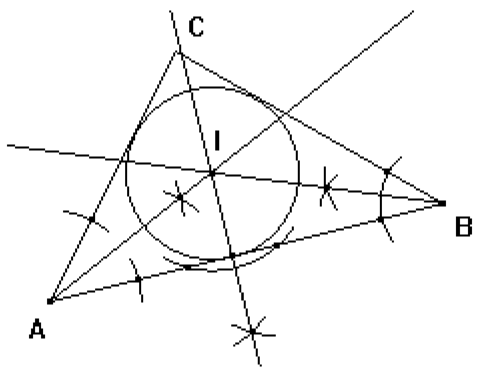
$$w = \frac{a\sqrt{5}.\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{bc}} = \frac{f.e}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{e} = \frac{f}{w}$$



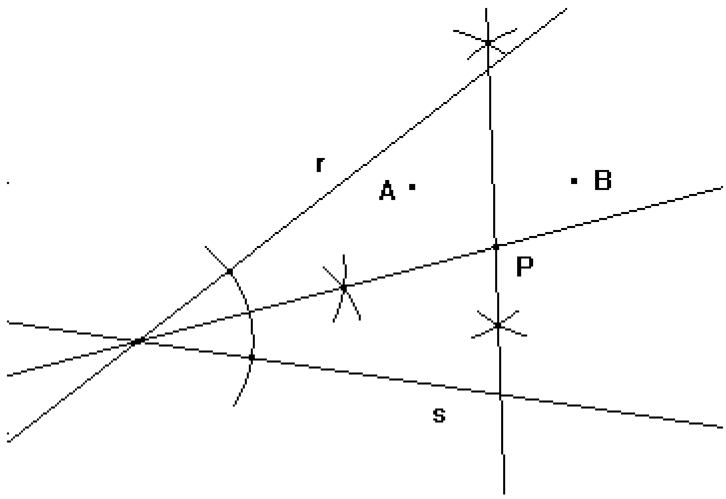


Aula 5

Exercício 1:
Estudar o problema 1 (pág.: 64)
Basta achar duas bissetrizes que vamos achar o centro da circunferência I e para achar o raio é só traçar uma perpendicular ao lado AB passando por I.

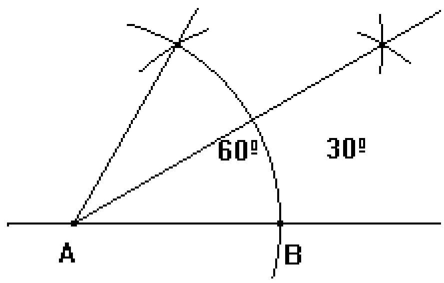


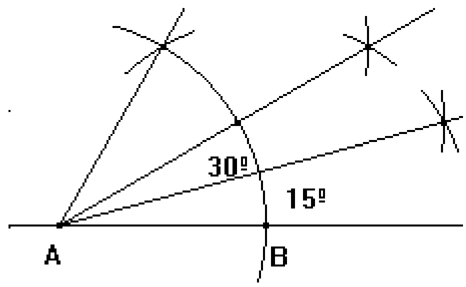
Exercício 2:

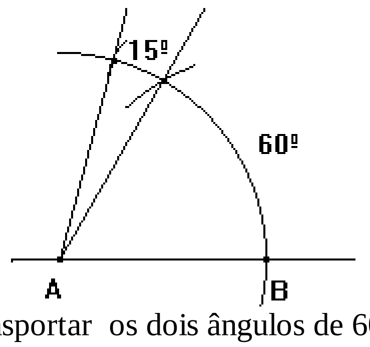


Vamos primeiro encontrar a bissetriz das retas r e s (problema 1, pág.: 64). Agora vamos achar a mediatriz do segmento AB. A intersecção da bissetriz com a mediatriz é o ponto P procurado.

Exercício 3:
75°
Considere a medida do segmento AB e determine o ângulo de 60° (pág.: 69).Vamos achar o ângulo de 30° (basta achar a bissetriz do ângulo de 60°)
Para achar o ângulo de 15° (traçar a bissetriz do ângulo de 30°)

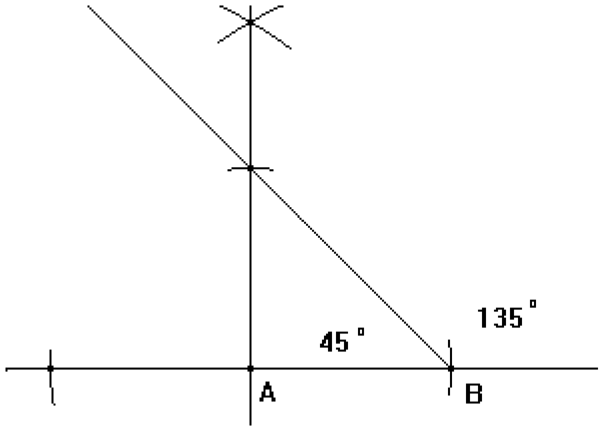






Daí, 75° = 60° + 15°, basta transportar os dois ângulos de 60° e 15°.
135°
135 = 180° - 45°

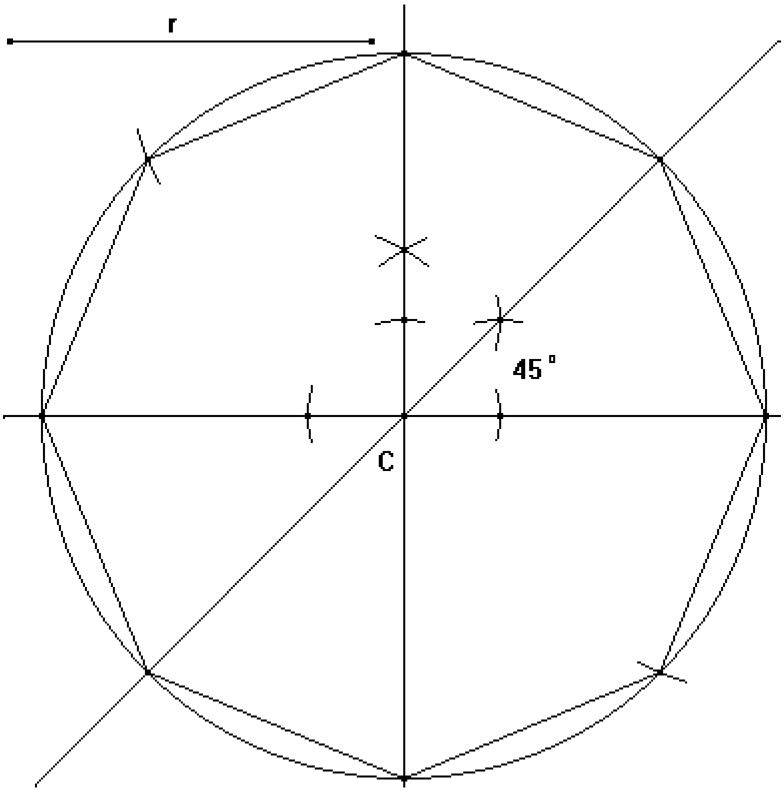
Vamos traçar o ângulo de 45°.



É só determinar um triângulo retângulo isósceles.
Primeiro trace duas retas perpendiculares. Marque sobre as perpendiculares dois segmentos iguais. Una as extremidades obtendo 45º e seu suplementar 135º.
OBS: Outra maneira de achar 45° é considerar um ângulo de 90° e determinar a bissetriz.

Exercício 4:

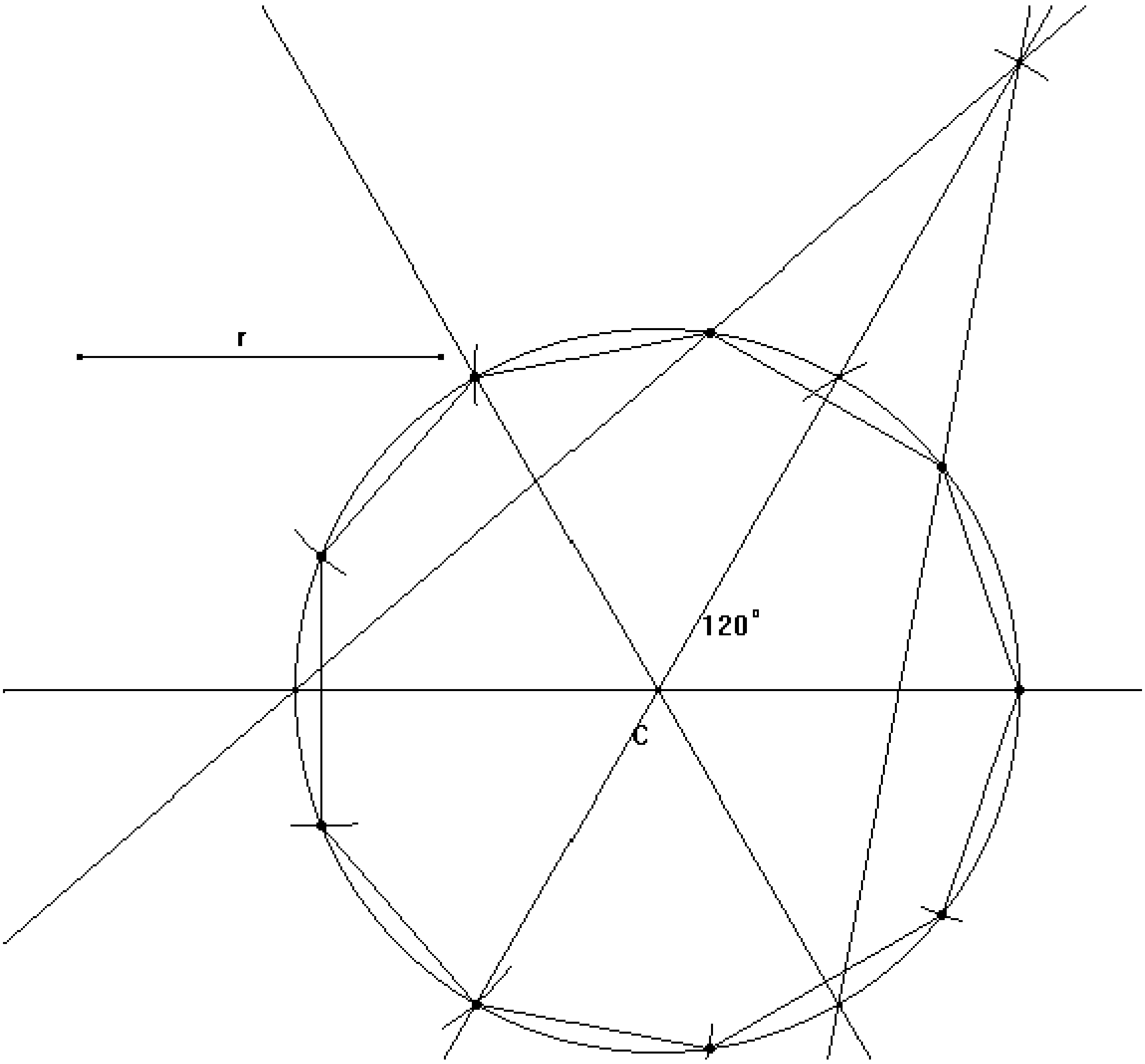
Construir um octógono regular é transportar a medida de 45 °, determinado no ex 3 da aula 5 e depois achar os outros vértices do octógono.



OBS: Para achar 45°, determinei um ângulo de 90° e achei a bissetriz.

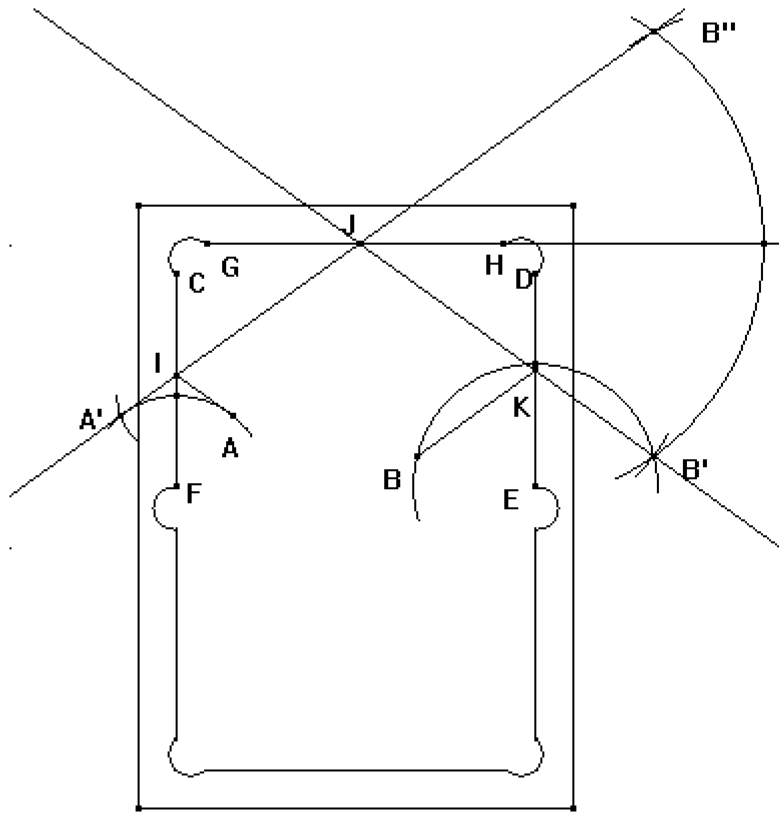
Exercício 5:

Construir um eneágono regular é obter o ângulo de 40º e para isto dividimos o ângulo de 120° em três partes aproximadamente iguais. (*Olhar essa construção nas págs. 69 e 70*)



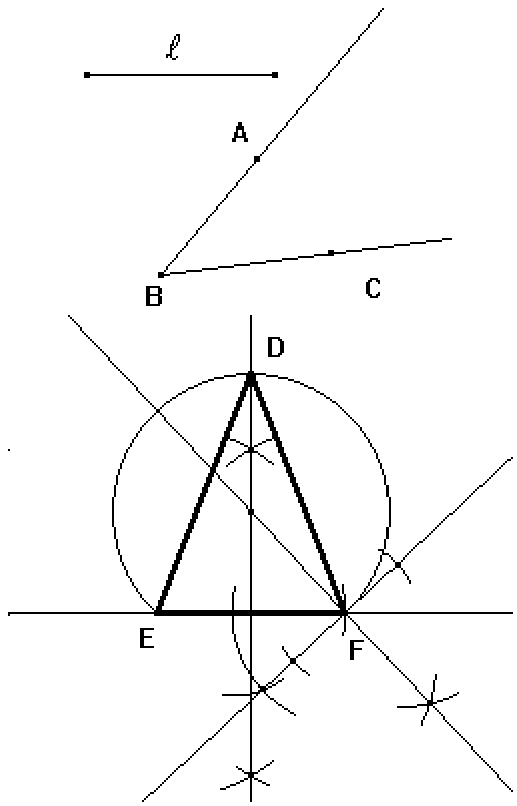
Exercício 6:

Achar o simétrico A' de A em relação a CF.
Achar o simétrico B'de B em relação a DE.
Achar o simétrico B'' de B' em relação a GH.
(Antes de fazer esse exercício estudar o problema 4).
Ligando A' a B'' encontramos os pontos I e J, respectivamente em CF e GH, e ligando J a B' encontramos o ponto K em DE.
Os pontos procurados são I, J e K.



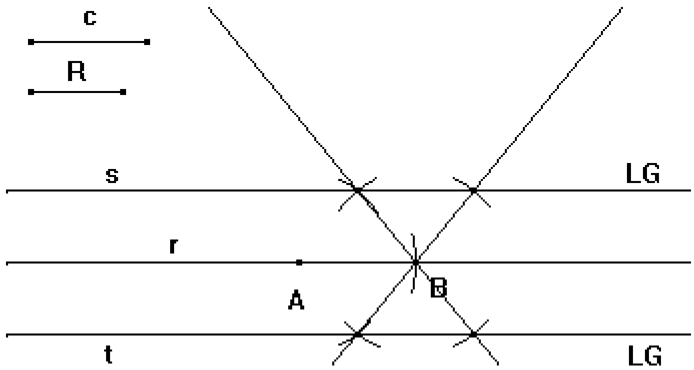
Aula 6

Exercício 1:



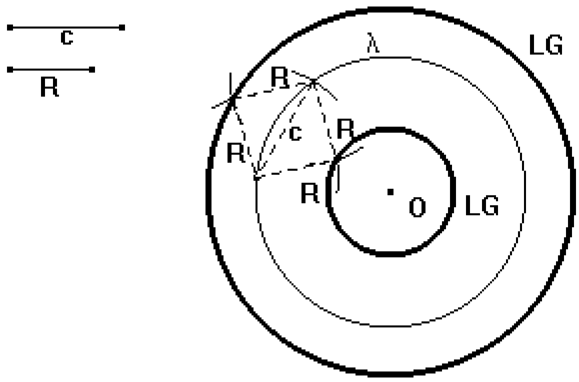
Considere a base igual a l , vamos construir o arco capaz de onde se vê o segmento de comprimento l , sob um ângulo ABC.
A construção é feita da mesma maneira do problema 1.
O triângulo isósceles pedido é DEF. Note que $\overline{ED} = \overline{DF}$ (D é a interseção da mediatriz com o arco capaz).

Exercício 2:



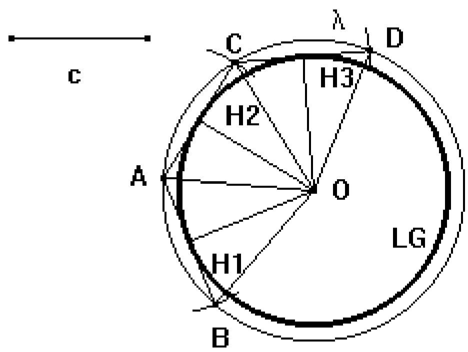
Marcar a corda AB de medida c e usar o problema 2 já que temos dois pontos e o raio R, podemos obter um centro acima e outro abaixo da reta r.
Variando a corda AB de medida c, os centros obtidos sempre estarão a uma mesma distância de r. Assim o LG são duas retas paralelas s e t.

Exercício 3:



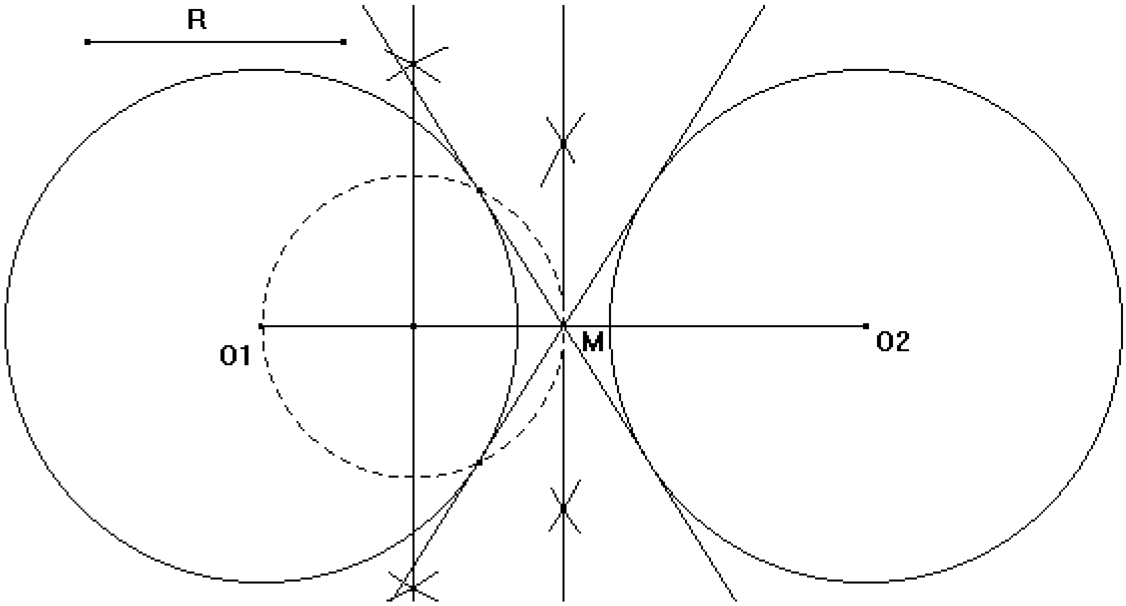
Vamos considerar a circunferência λ e uma corda AB de medida igual a c, obtendo os pontos de distância R de A e B obtemos os centros de duas circunferências nas condições pedidas. Variando a corda AB de medida c sobre a circunferência λ obtemos duas circunferências (uma interna e outra externa) concêntricas com λ (possuem o mesmo centro de λ).

Exercício 4:



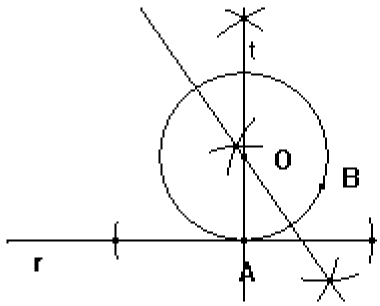
Note que os triângulos OAB , OAC, OCD etc... são congruentes então $OH_1 = OH_2 = OH_3$ (alturas desses triângulos).
Daí o lugar geométrico é uma circunferência de centro O e raio OH_1 .

Exercício 5:



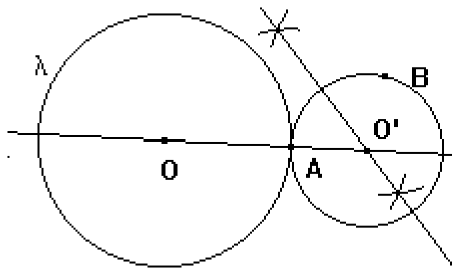
Neste caso, como as duas circunferências possuem o mesmo raio as tangentes comuns interiores devem se encontrar no ponto médio dos centros das circunferências dadas. Assim, basta encontrar o ponto médio dos centros e por ele traçar as retas tangentes a uma das circunferências que automaticamente será em relação a outra circunferência.

Exercício 6:



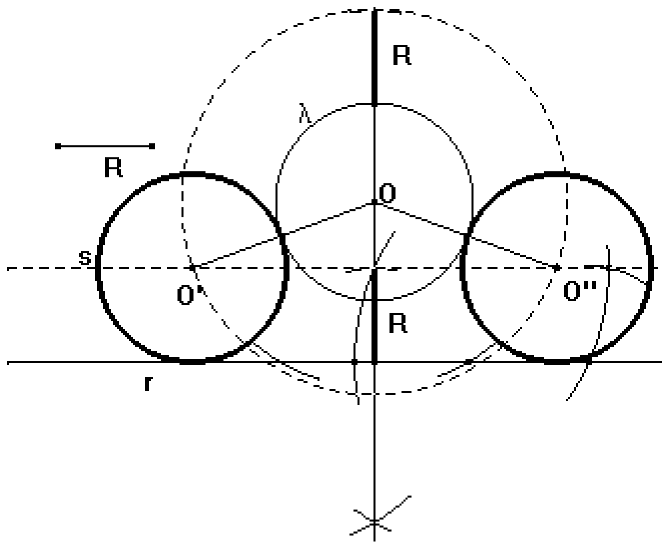
Determinar a mediatriz s do segmento AB. Traçar a reta t perpendicular a r passando por A. A interseção das retas s e t é o centro O da circunferência procurada, o raio desta circunferência é a medida do segmento AO.

Exercício 7:



Trace a reta que passa por OA. Trace a mediatriz de AB. O centro O' da circunferência vai estar na intersecção dessas duas retas. A circunferência pedida é então de centro O' e raio O'A.

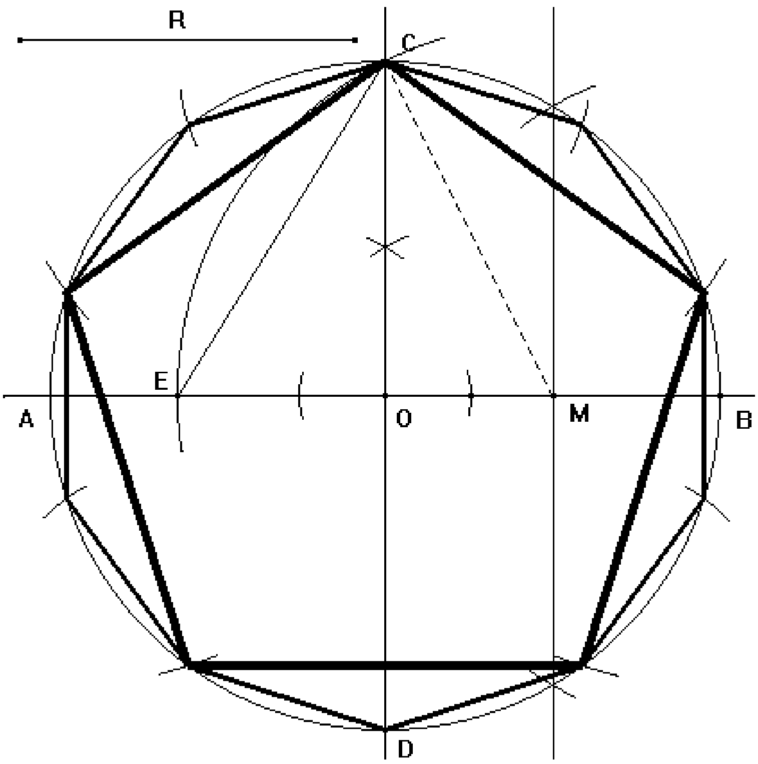
Exercício 8:



Trace uma reta s paralela a r a uma distância R de r. Trace uma circunferência de centro O e raio obtido pela soma do raio da circunferência λ e R. Esta circunferência interceptará a reta s nos centros das duas circunferências que são soluções do problema.

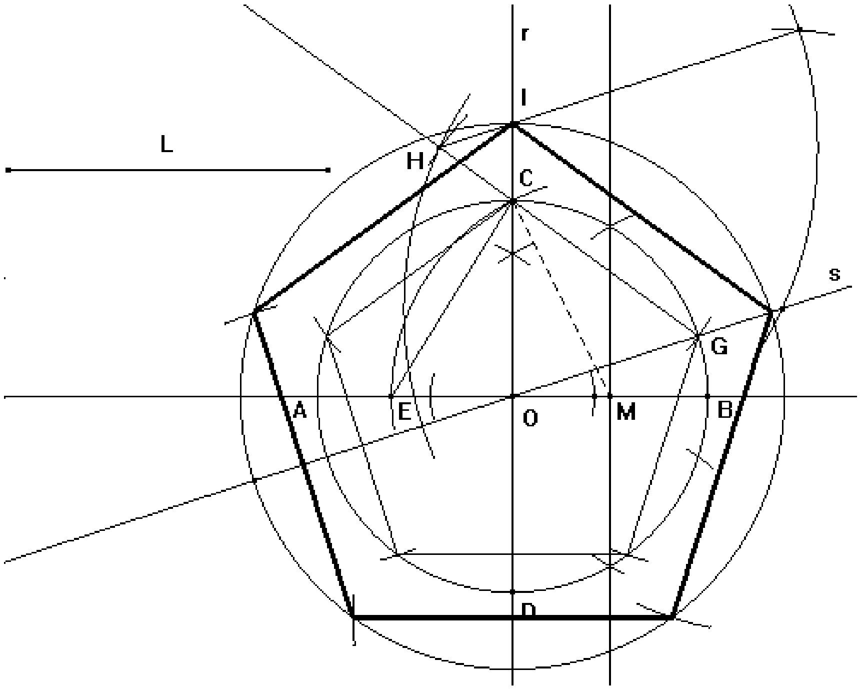
Aula 8

Exercício 1:



Traçar os diâmetros $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ perpendiculares.
Com centro no ponto M, médio de $\overline{OB}$ e raio $\overline{MC}$, descreve-se o arco que intercepta $\overline{OA}$ em E . $\overline{OE}$ é segmento o áureo de raio l_{10} .
Fazendo raio igual a l_{10}, a partir de C, efetua-se a divisão. O segmento EC tem o comprimento de l_5.

Exercício 2:



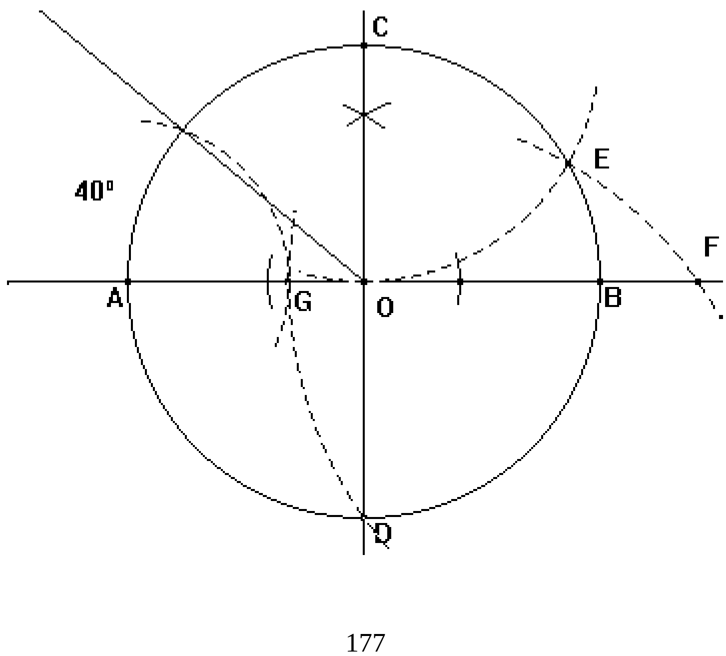
Construa um pentágono regular qualquer como no exercício 1. Em seguida trace duas retas r e s que passem pelo centro O e por dois de seus vértices C e G. Prolongue o lado determinado por estes vértices apoiando o lado dado partindo do vértice G. Pela extremidade H do segmento construído trace a paralela à reta s. Esta paralela interceptará a reta r no vértice I do pentágono desejado. Construa agora a circunferência de centro O passe por I e complete o pentágono.

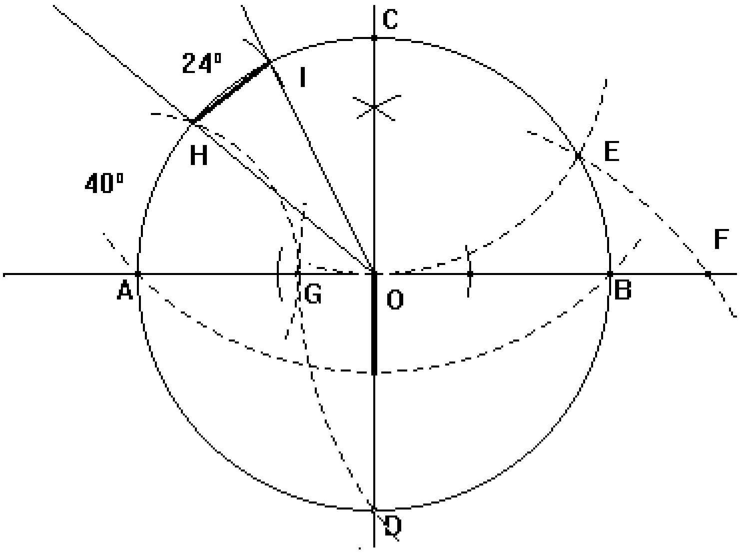
Exercício 3:

64° = 40° + 24°

$\frac{360}{9} = 40°$ e $\frac{360}{15} = 24°$ (ângulo central)

Vamos então traçar o eneágono e o polígono de 15 lados (regulares).
Transportamos o ângulo central de cada um desses polígonos e vamos obter 64° aproximadamente.
A construção do eneágono, olhar o problema 5, pág.: 109. A construção do polígono de 15 lados, olhar o problema 8, págs.: 112, 113

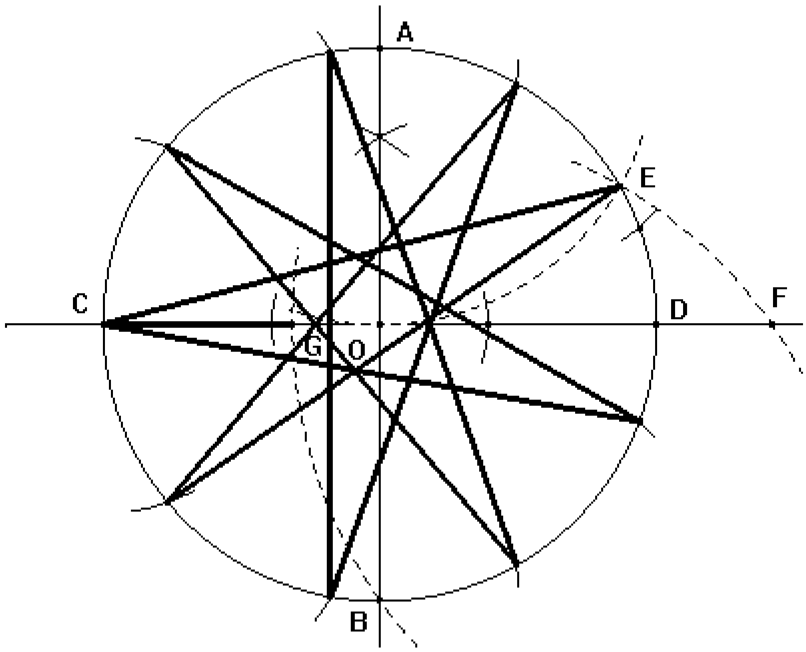




AÔH ≈ 40º e HÔI ≈ 24°

Exercício 4:

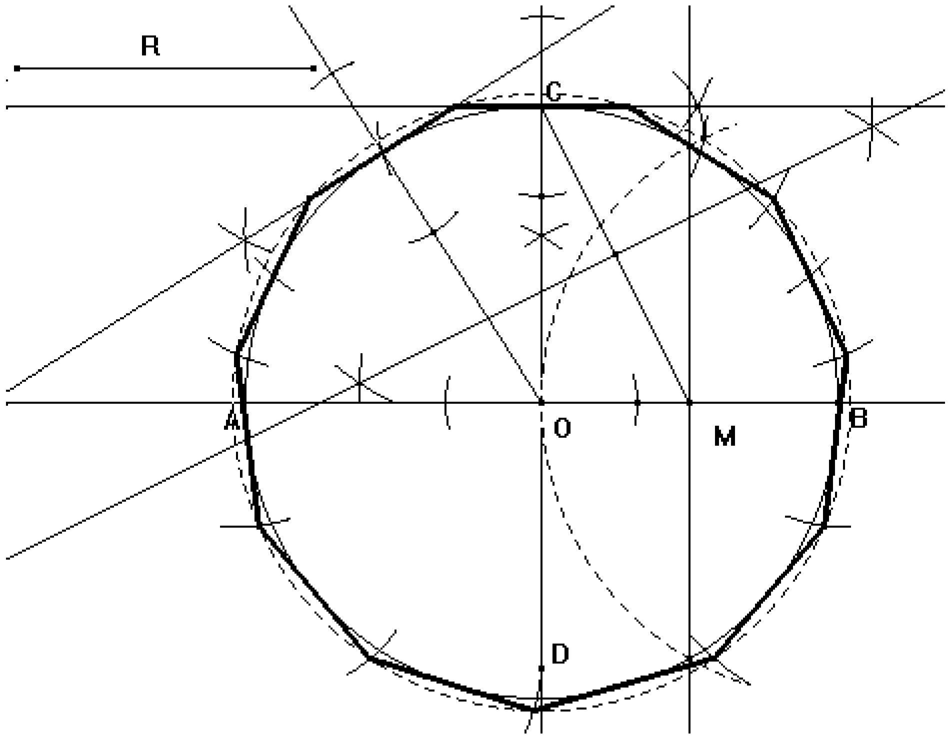
Vamos dividir a circunferência em nove partes iguais. (Problema 5, pág.: 109)



O segmento CG tem medida aproximada do lado do eneágono inscrito.
Marcando o eneágono inscrito e a partir de E nós pulamos de 4 em 4, obtendo assim o polígono pedido.

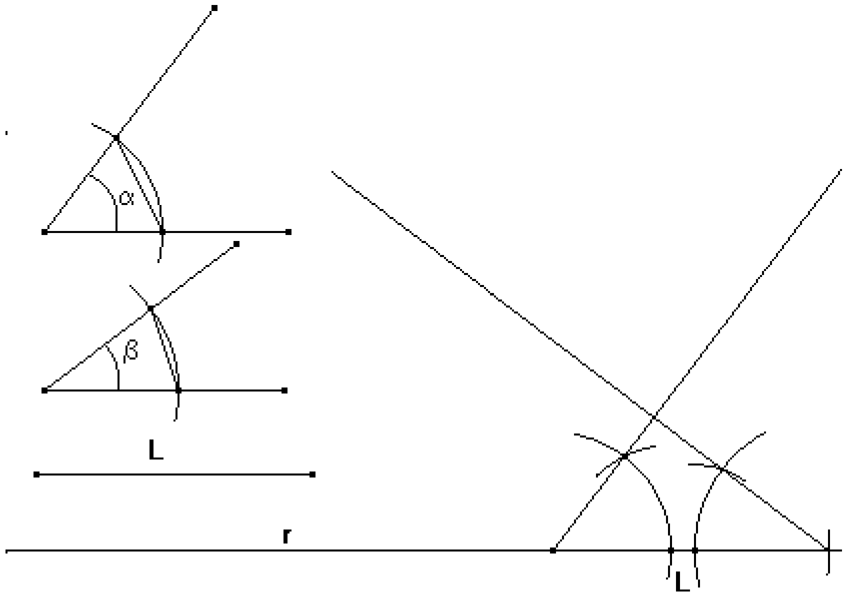
Exercício 5:

Basta construir o polígono de onze lados inscrito na circunferência, pois seus vértices serão os pontos de tangência do polígono circunscrito.



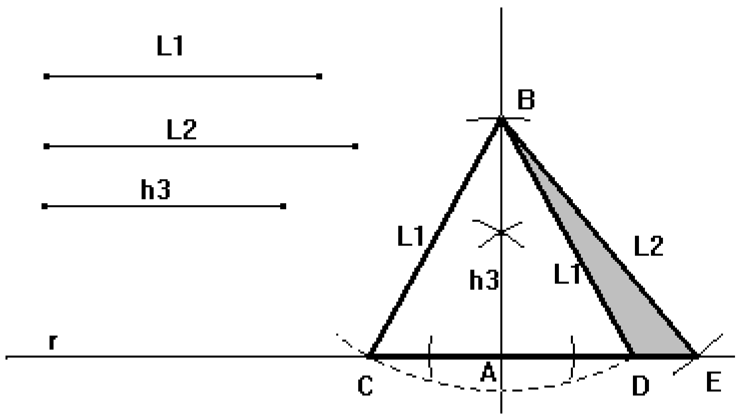
Aula 9

Exercício 1:



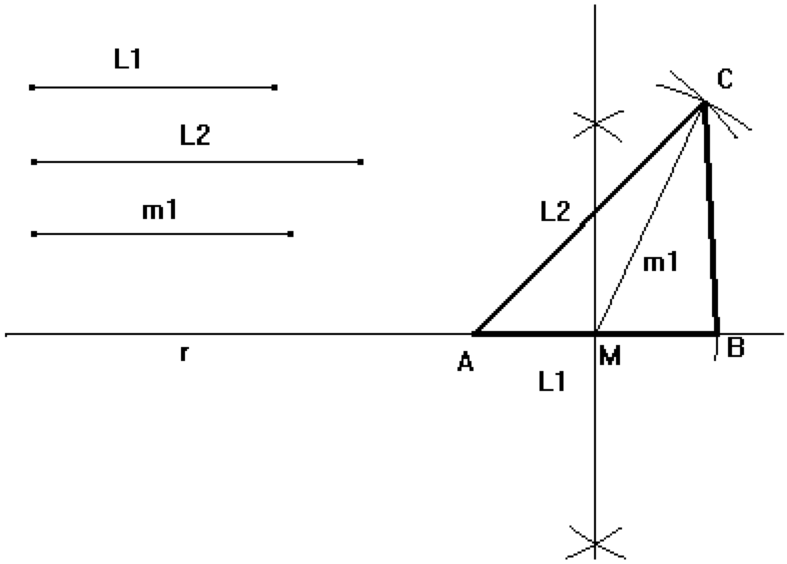
Trace o segmento L sobre uma reta suporte r, transporte os ângulo α e β nos extremos do segmento L.
Daí, temos o triângulo.

Exercício 2:



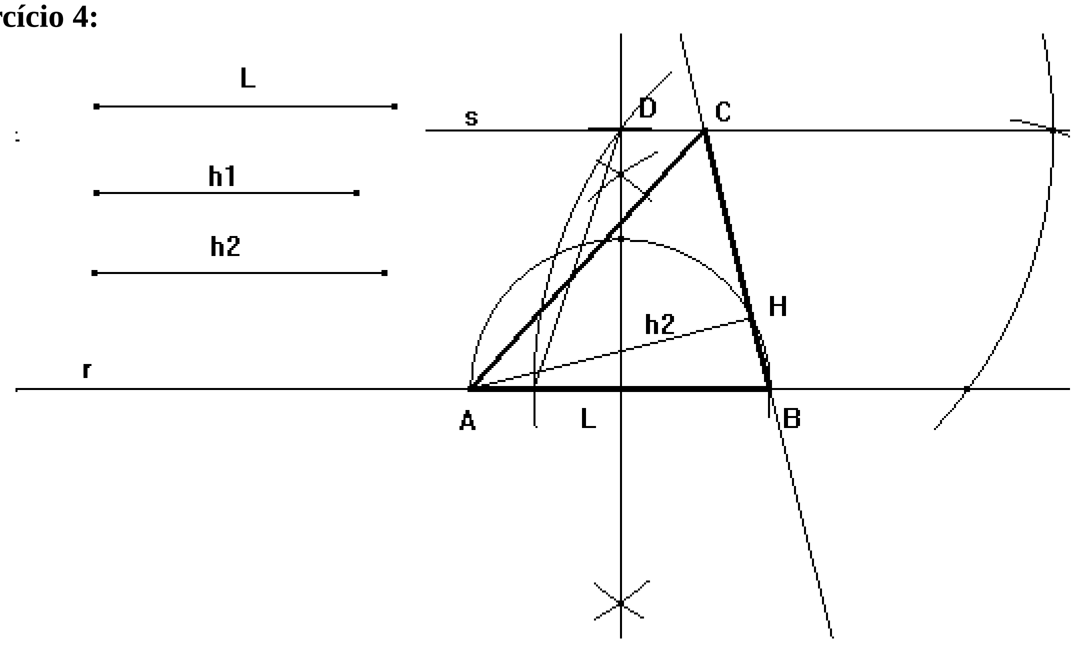
Trace uma reta r, trace por um ponto $A \in r$ uma perpendicular. Marcar nesta perpendicular a altura h_3 a partir de A achando um ponto B. Com ponta seca do compasso em B e raio L_1 determinamos em r os pontos C e D, e com raio L_2 marcamos sobre r o ponto E. Daí temos os triângulos BCE e BDE que são soluções.

Exercício 3:



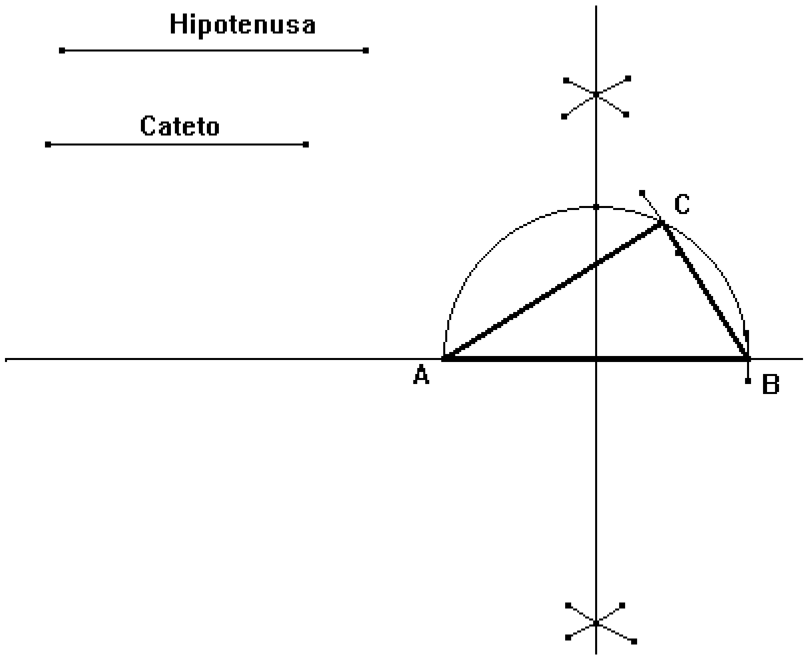
Traçar o lado AB de medida L_1 sobre uma reta suporte r. Achar o ponto médio M de L_1. Traçar um arco com centro em A e raio L_2 e traçar um arco com centro em M e raio m_1 determinando o ponto C. Daí, temos o triângulo ABC.

Exercício 4:



Construa uma reta r e marque nesta reta o segmento L de extremidades A e B.
Trace a mediatriz de AB, marque na mediatriz a altura h_1 determinando D. Construa o arco capaz com centro no ponto médio de AB e raio $\frac{AB}{2}$.
Com a ponta seca do compasso em A e raio h_2 constrói o arco cortando a semicircunferência no ponto H.
Liga o ponto B a H até a reta s paralela a r passando por D , na intersecção da reta BH com a reta s temos o ponto C e daí o triângulo ABC é a solução para o problema.

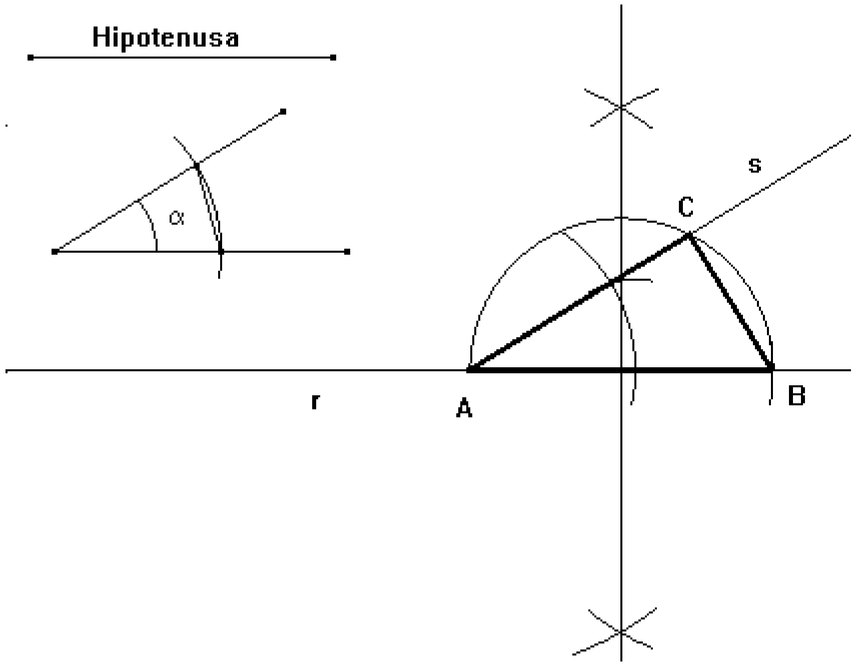
Exercício 5:



Construir uma semicircunferência de raio $\frac{AB}{2}$ onde AB é a hipotenusa.

Com a ponta seca do compasso em A e raio igual a medida do cateto, marcar o terceiro vértice e daí temos o triângulo ABC.

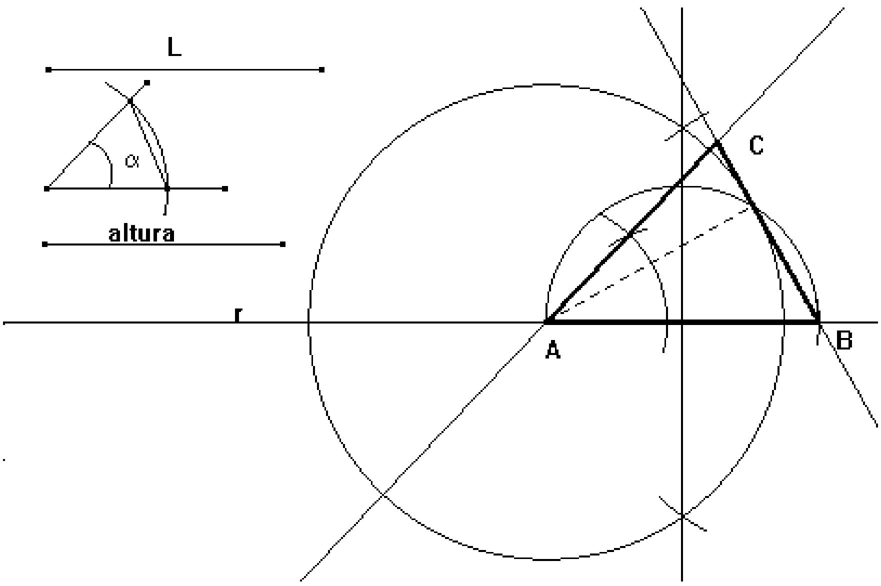
Exercício 6:



Construir numa reta r, o segmento AB igual a hipotenusa, transportar o ângulo α para o vértice A obtendo a semi-reta s. Traçar uma semicircunferência de diâmetro AB interceptando a semi-reta no terceiro vértice C.

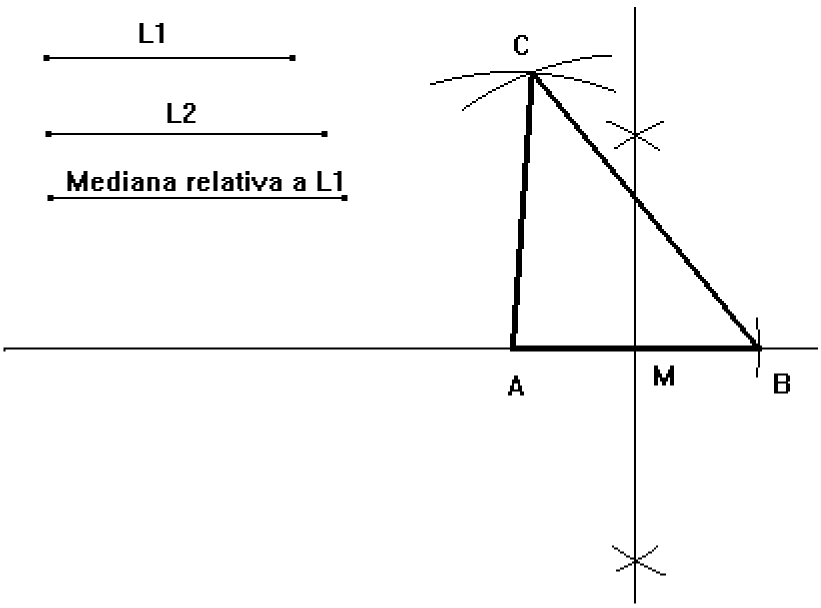
Aula 10

Exercício 1:



Considere numa reta r um segmento AB de comprimento L e na extremidade A deste segmento construa o ângulo dado α e nesta mesma extremidade construa uma circunferência de raio igual a altura. O lado oposto a este ângulo é tangente a esta circunferência.
Daí, temos o triângulo ABC pedido.

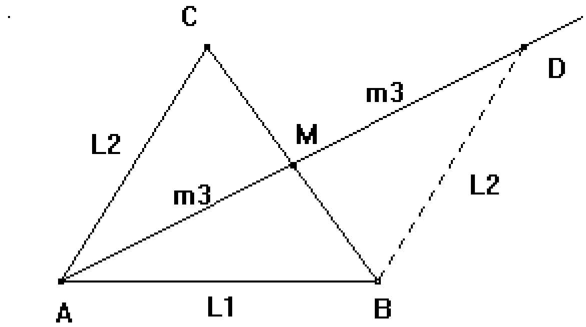
Exercício 2:



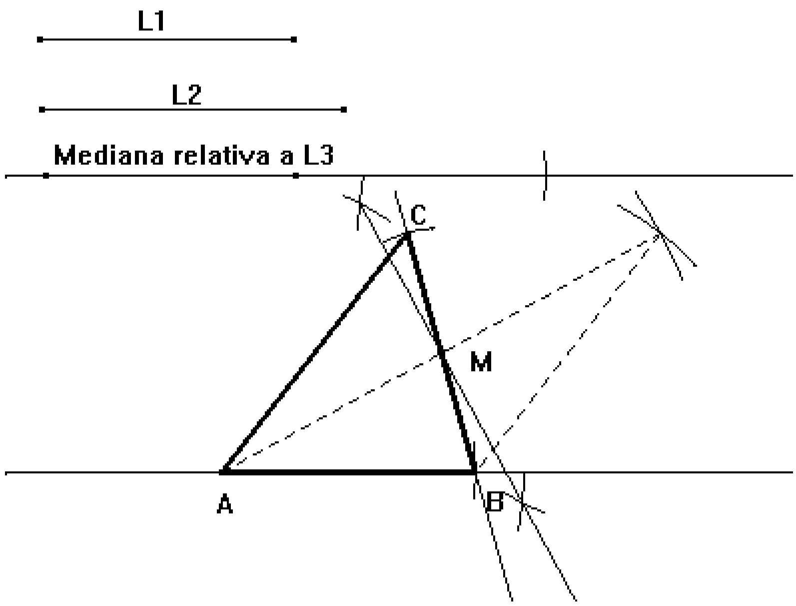
Trace o segmento AB de medida L_1.
Achar o ponto médio M do segmento AB.
Com a ponta seca do compasso em M e raio igual a mediana dada trace um arco, finalmente com o compasso em A e raio L_2 trace um outro que interceptará o anterior no ponto C.
Temos o triângulo ABC pedido.

Exercício 3:

Problema resolvido

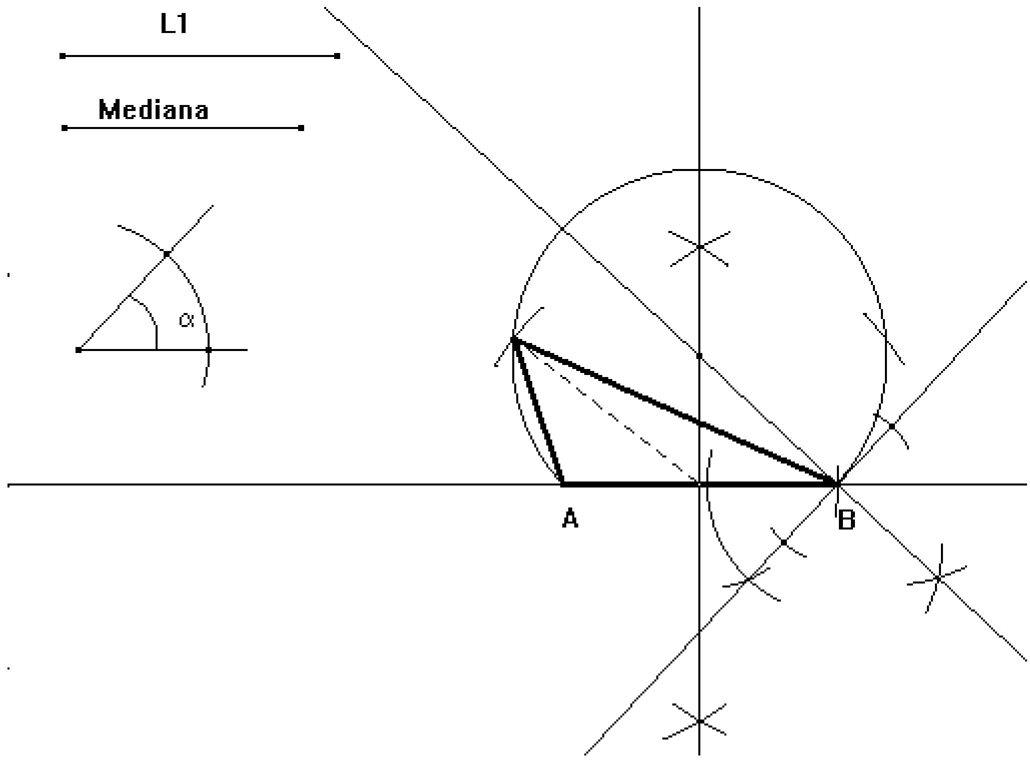


Solução:



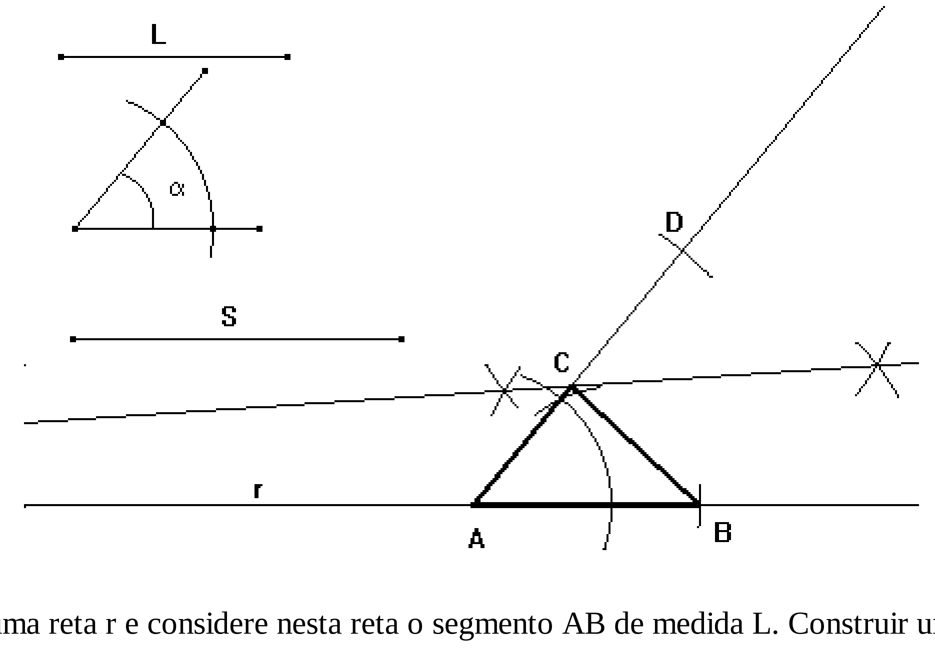
Construa um triângulo ABD de lados L_1, L_2 e $2m_3$.
Considere o segmento AB de medida L_1.
Considere o segmento BD de medida L_2.
Considere o segmento AD de medida $2m_3$.
Determinar o ponto médio M de AD. Duplique o segmento BM obtendo o ponto C.
O triângulo ABC é a solução para o problema.

Exercício 4:



Construir o segmento L1 de extremidades AB.
Determinar o arco-capaz de AB sob o ângulo α (olhar a pág.: 78, módulo 1, volume 1).
Marcar um arco de centro em M e raio de medida m e determinar C, daí temos o triângulo ABC.

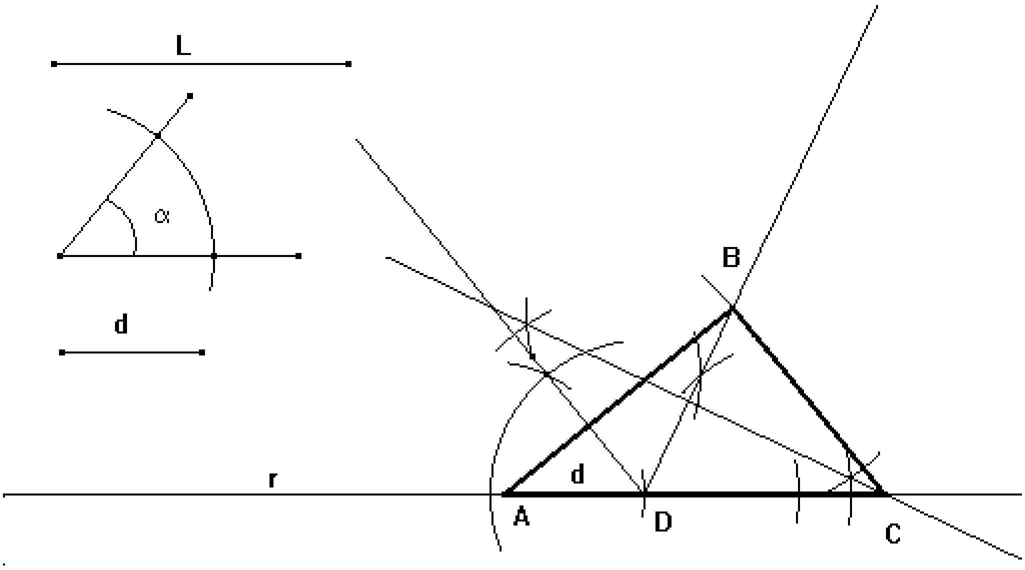
Exercício 5:



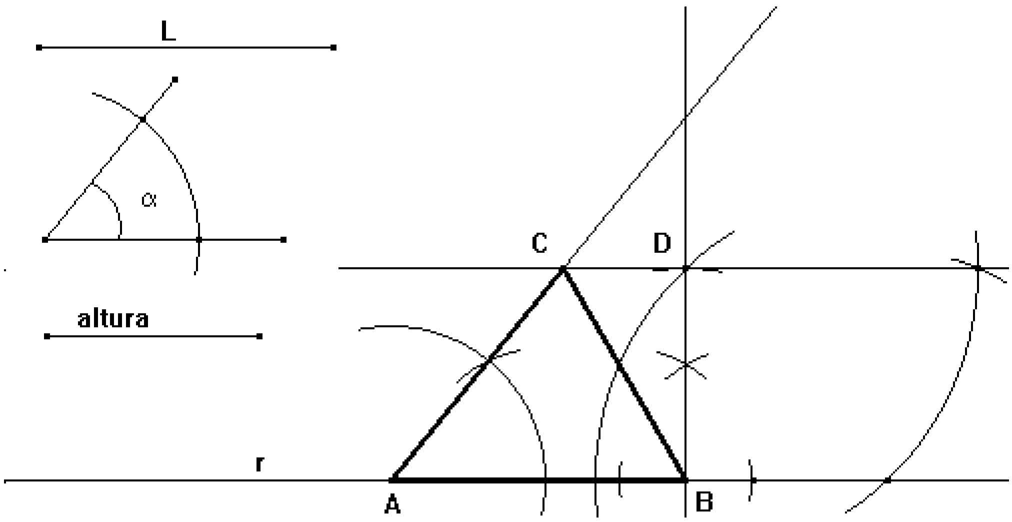
Seja uma reta r e considere nesta reta o segmento AB de medida L. Construir um ângulo igual ao ângulo α dado de vértice em A e sobre o lado novo do ângulo constrói-se um segmento AD igual a soma dada. Traçar a mediatriz do segmento DB que intercepta AD em C. Assim, ABC é o triângulo pedido.

Exercício 6:

Seja na reta r a medida do segmento AD igual a d. Transfira o ângulo α para a extremidade D do segmento de tal forma que AD seja um dos lados deste ângulo.
Trace a bissetriz do suplemento deste ângulo.
Com centro em A e raio igual ao lado do L construa um arco que interceptará a bissetriz em B. Trace a mediatriz de BD interceptando r em C. O triângulo ABC é solução do problema.

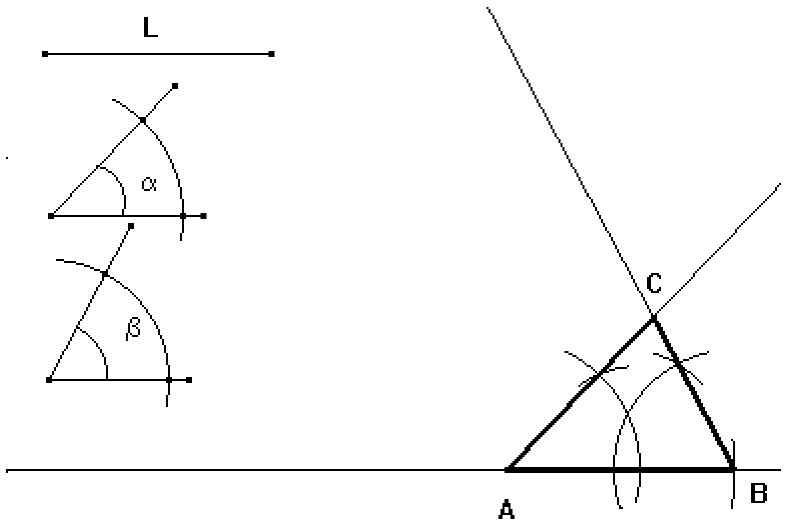


Exercício 7:



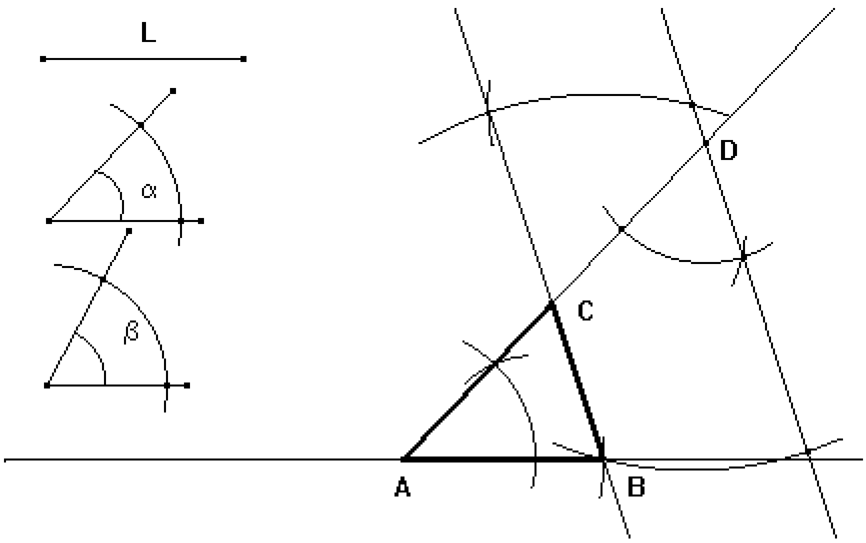
Construa o lado AB de medida L sobre uma reta r.
Considere o ângulo α no extremo A adjacente a AB.
Trace uma perpendicular por B em relação à r e sobre esta perpendicular construa um segmento BD igual a altura dada. Por D trace uma paralela a AB determinando o ponto C sobre o lado do ângulo construído.
Temos , então o triângulo ABC pedido.

Exercício 8:



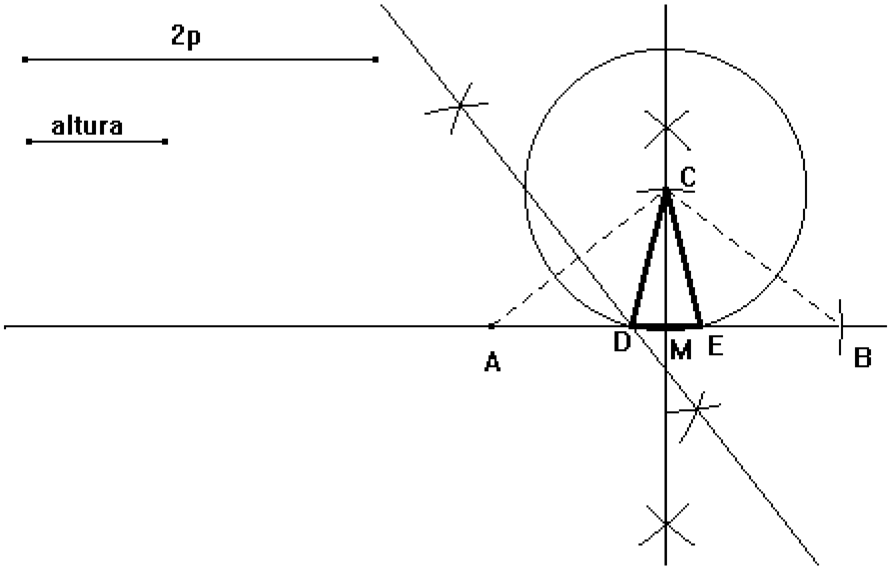
Construa o lado AB de medida L.
Construa um ângulo igual a α em A.
Construa um ângulo igual β em B.
Encontramos o ponto C e o triângulo ABC.

Exercício 9:



Considere um reta r , trace em um ponto A $\in$ r, o ângulo α. Trace em um ponto D $\in$ r, o ângulo β. Marcar no lado do ângulo α a medida L encontrando um ponto B. Trace finalmente por B uma reta paralela a reta que passa por D encontrando o triângulo ABC.

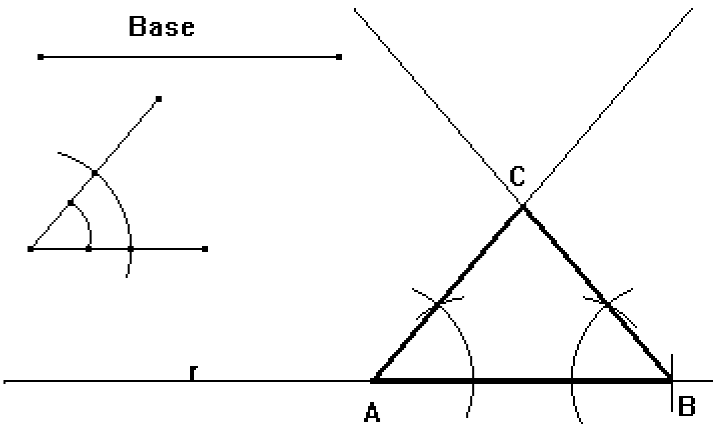
Exercício 10:



Traçar o segmento AB de medida 2p.
Traçar a mediatriz do segmento AB e determinar o ponto médio M de AB.
Traçar a partir de M na mediatriz a medida MC = h .
Ligar C nas extremidades de AB.
Determinar as mediatrizes de AC e BC determinando, respectivamente, os pontos D e E.
Daí, temos o triângulo CDE.

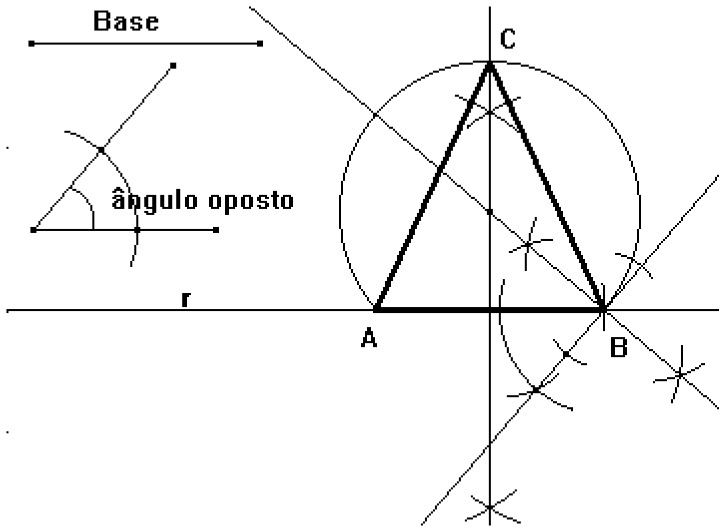
Aula 11

Exercício 1:



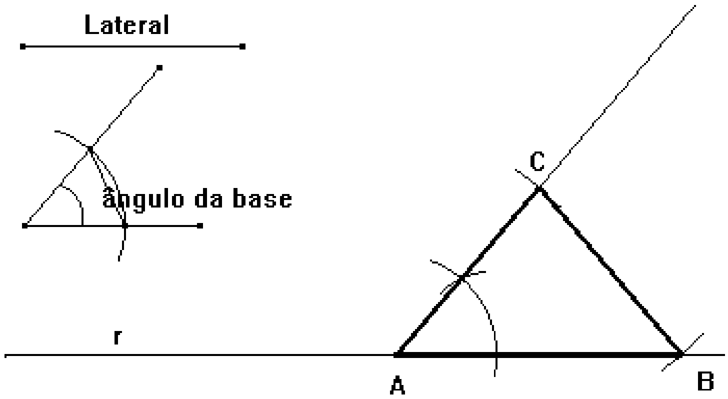
Traçar uma reta r, nesta reta traçar a medida de AB (base), transporte o ângulo dado
(os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais).
Encontramos um ponto C e daí o triângulo ABC isósceles.

Exercício 2:



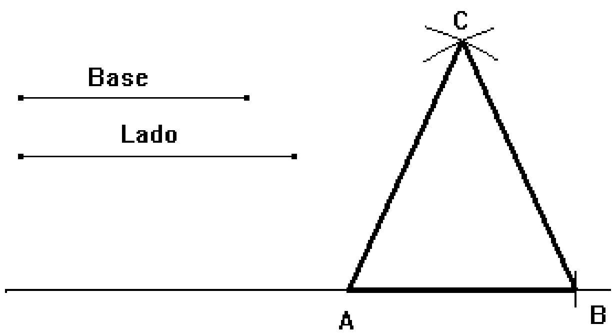
Seja uma reta r, nesta reta r traçar a medida da base AB. Achar o arco capaz de AB achando C (sobre a mediatriz de AB). Temos, então o triângulo ABC.

Exercício 3:



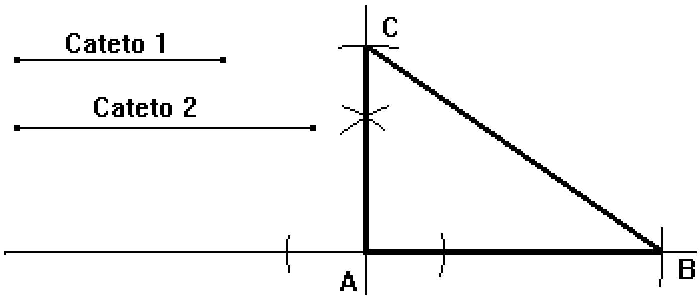
Traçar a reta r suporte da base AB. Transportar o ângulo da base em A. A partir de A transportar a medida do segmento L_1 para o novo lado do ângulo achando C. Com centro em C e raio AC, achar o ponto B na reta r. Temos, então o triângulo ABC.

Exercício 4:



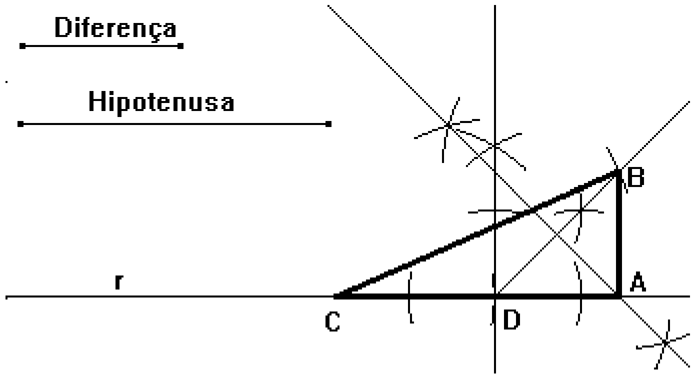
Traçar a base AB.Com centro em cada uma das extremidades e raio igual a medida do lado, achar o terceiro vértice C. Temos, então o triângulo ABC.

Exercício 5:



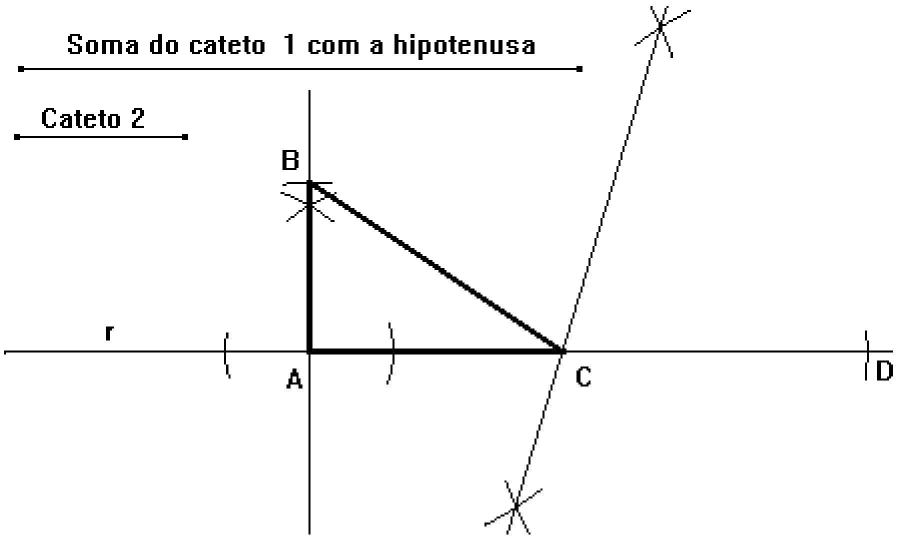
Seja a reta r. Sobre a reta r transporte um cateto AB. Em A, traçar uma reta perpendicular, marcar o outro cateto AC. Trace a hipotenusa CB. Temos, então o triângulo ABC.

Exercício 6:



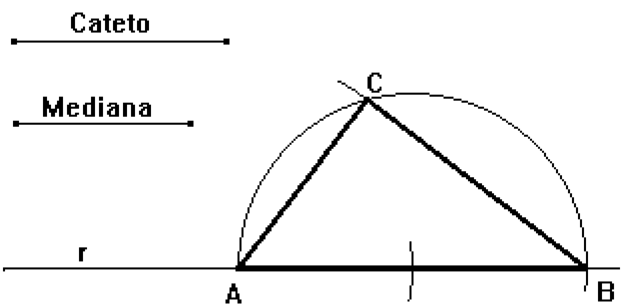
Considere a reta r, nesta reta considere CD a medida da diferença entre os catetos. Marcar 45° a partir de D . Com centro em C e raio com a medida da hipotenusa ache B no lado do ângulo de 45°. Ache a mediatriz de BD achando A que pertence a r e a esta mediatriz. Temos, então o triângulo ABC retângulo.

Exercício 7 :



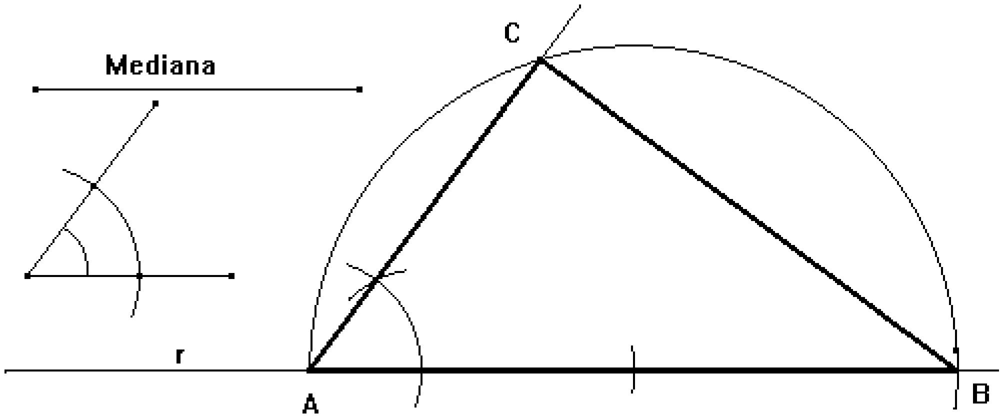
Considere a reta r , nesta reta considere a medida da soma (AD). Trace a perpendicular em A. A partir de A marcar o cateto obtendo B. Ache a mediatriz de BD achando o ponto C em AD. O triângulo pedido será ABC.

Exercício 8:



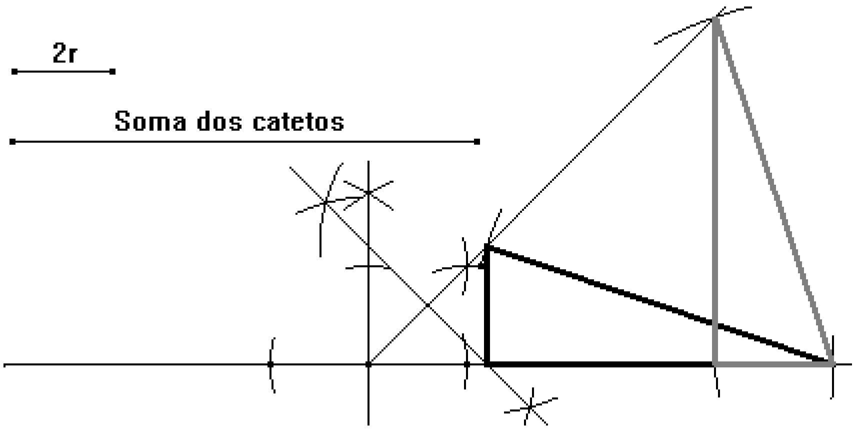
Construa sobre uma reta r um segmento AB de medida igual ao dobro da mediana. Tal segmento corresponde a hipotenusa do triângulo retângulo desejado. Trace o arco capaz deste segmento sob o ângulo de 90º, isto é, a semicircunferência de diâmetro AB. Trace um arco de centro A e raio igual ao cateto dado obtendo na semicircunferência o ponto C. Encontramos o triângulo ABC.

Exercício 9:



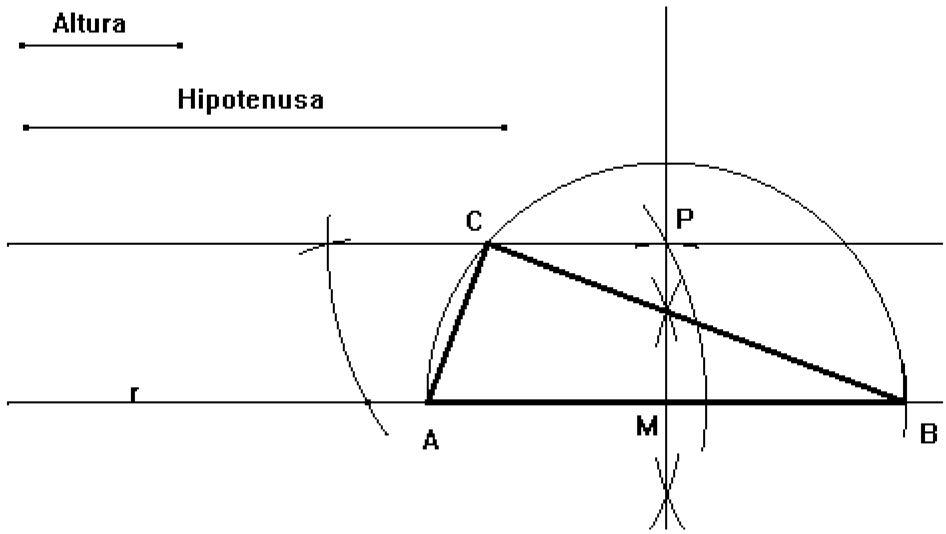
Construa sobre uma reta r um segmento AB de medida igual ao dobro da mediana. Tal segmento corresponde a hipotenusa do triângulo retângulo desejado. Trace o arco capaz deste segmento sob o ângulo de 90º, isto é, a semicircunferência de diâmetro AB. Transfira o ângulo dado para a extremidade A obtendo na semicircunferência o ponto C. Encontramos o triângulo ABC.

Exercício 10:



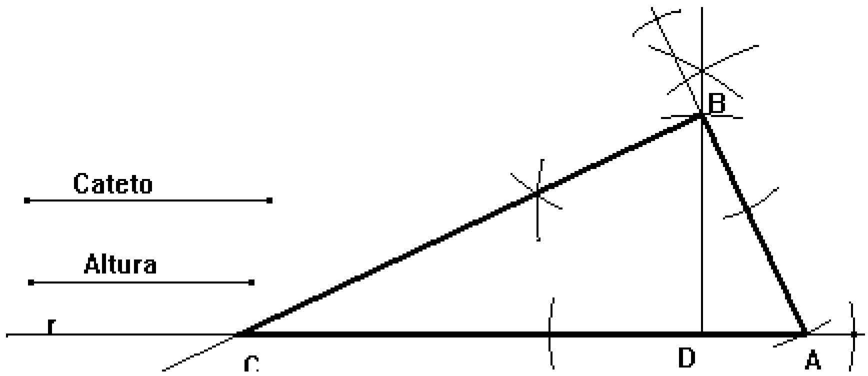
Numa reta, transporte a medida do segmento soma dos catetos que vamos achar a hipotenusa. Como Soma dos catetos = 2R + 2r, retiramos da soma dos catetos a medida do segmento 2r, restando 2R diâmetro da circunferência circunscrita , onde 2R é a hipotenusa do triângulo. Temos, então a hipotenusa e a soma dos catetos, basta utilizar o problema 4.

Exercício 11:



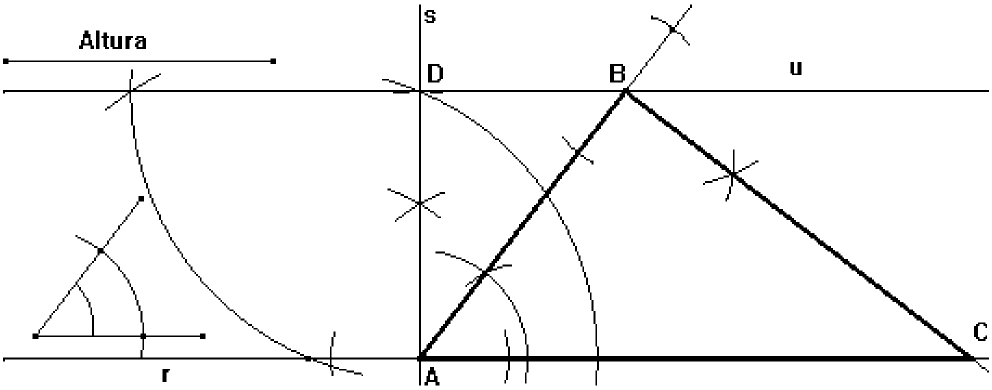
Numa reta r transpor a medida do segmento AB igual a hipotenusa. Traçar uma reta perpendicular no ponto médio de AB e marcar a altura h_1, achando P. Traçar uma reta s paralela a AB passando por P. Construir uma semicircunferência de raio $\frac{AB}{2}$ com centro no ponto médio M de AB. A interseção da semicircunferência e a reta s será o vértice do triângulo (temos dois vértices na figura acima).

Exercício 12:



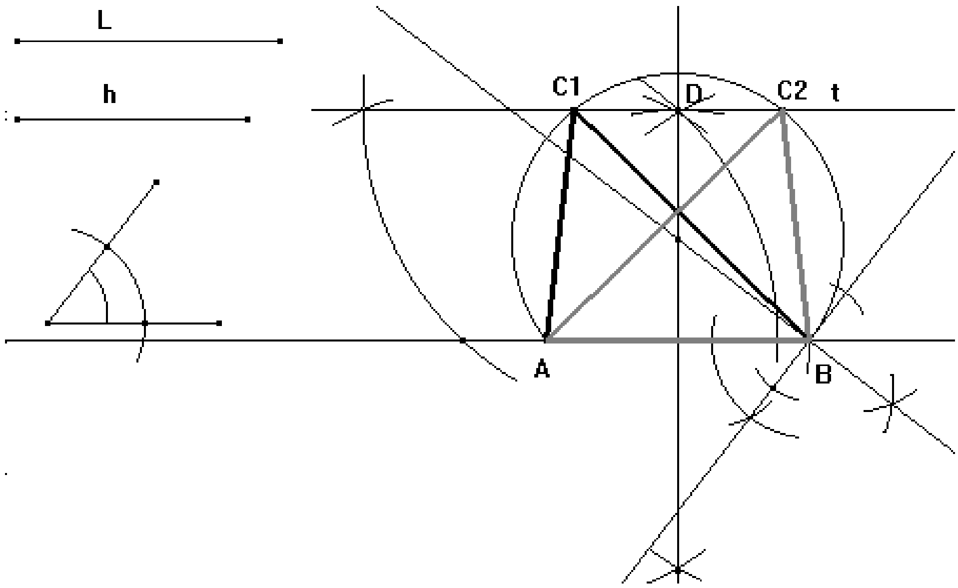
Construir uma reta r, traçar em um ponto D $\in$ r uma perpendicular s a reta r marcando a medida da altura h = $\overline{BD}$. A partir de B marcar o cateto dado cortando r em A. Traçar uma perpendicular a este cateto passando por B e cortando r em C. Temos então o triângulo ABC.

Exercício 13:



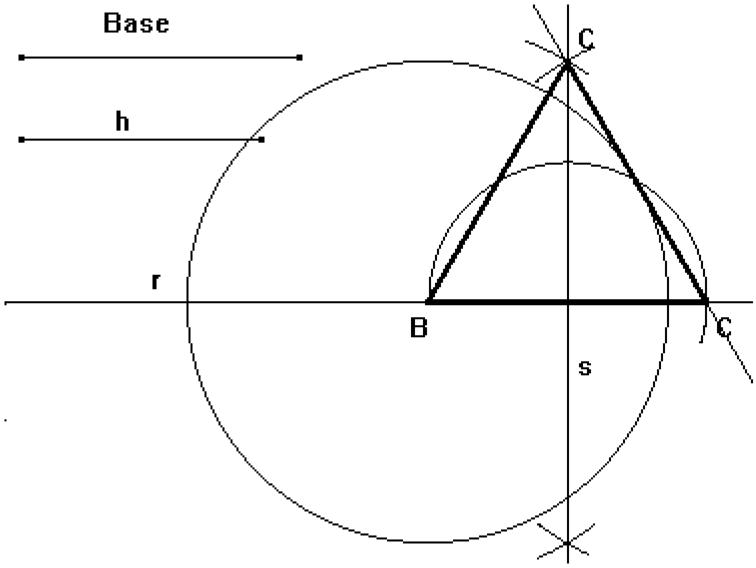
Construir uma reta r, traçar uma reta s perpendicular a r .Marcar a altura h1 de medida AD nesta perpendicular. Traçar uma reta u paralela a *r* passando por D. Em r , através de A transpor o ângulo agudo dado, interceptando u em B. Traçar por B uma reta perpendicular ao lado do ângulo cortando r em C. Daí, temos o triângulo ABC retângulo em B.

Exercício 14 :



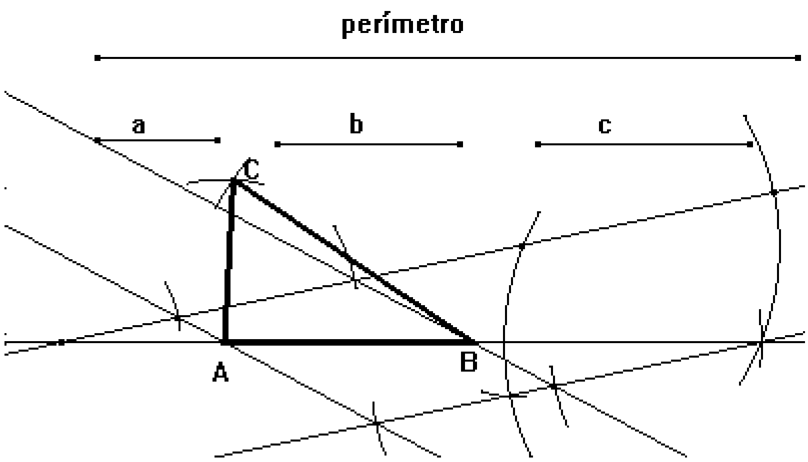
Considere o lado AB de medida L, determine o arco capaz de AB com o ângulo agudo dado. Na mediatriz de AB marque a altura h, obtendo D. Por D trace uma reta t paralela ao segmento AB. Encontramos C_1 e C_2 no arco capaz (2 soluções). Daí, temos os triângulos AC_1B e AC_2B.

Exercício 15:



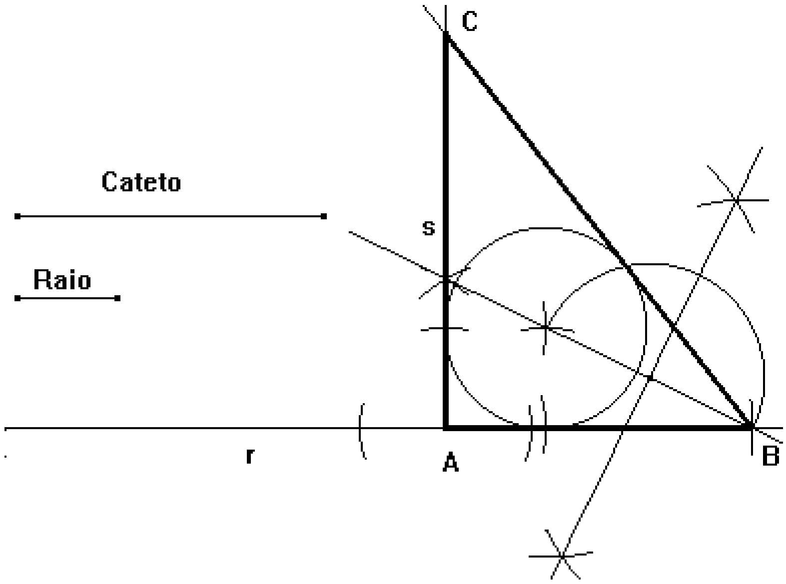
Seja a reta r, nesta reta marcar a base BC. Ache a mediatriz de BC, achando s. Trace a circunferência de centro B e raio h. Trace a tangente a circunferência que passe por C interceptando s em A. O triângulo ABC é solução do problema. ***No desenho, trocar C por A, na retas.***

Exercício 16:



Dividir o perímetro em partes proporcionais aos lados a, b,c. Obtemos os lados AB, AC e BC. Basta marcar estas três medidas obtendo o triângulo ABC.

Exercício 17:



Seja uma reta r, nesta reta marcar o cateto AB (dado).
Traçar uma reta s perpendicular a r em A.
Marcar em r e s a partir de A um segmento de medida igual ao raio (dado). Daí, encontramos o centro da circunferência inscrita.
Traçar uma reta tangente a circunferência a partir de B cortando s em C. Daí, temos o triângulo retângulo ABC.

ISBN 85-89200-85-X
9 788589 200851

UENF
Universidade Estadual
do Norte Fluminense

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
UERJ

Universidade Federal Fluminense
uff

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

UNIRIO

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

GOVERNO DO
Rio de Janeiro
SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB
UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL

Ministério
da Educação

BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL