



## **Cálculo III**

**Volume Único • 2ª Edição**

Mario Olivero da Silva  
Nancy de Souza Cardim

Secretaria de  
**Ciência, Tecnologia  
e Inovação**



**GOVERNO DO ESTADO  
RIO DE JANEIRO**

**UNIVERSIDADE  
ABERTA DO BRASIL**

MINISTÉRIO DA  
**EDUCAÇÃO**



**PÁTRIA AMADA  
BRASIL**  
GOVERNO FEDERAL

APOIO:



# Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

www.cederj.edu.br

## Presidente

Gilson Rodrigues

## Vice-presidente

Masako Oya Masuda

## Coordenação do Curso de Matemática

Matemática (UFF) - Marcelo da Silva Corrêa

Matemática (UNIRIO) - Luiz Pedro San Gil Jutuca. Vice: Marcelo Rainha

## Material Didático

### Elaboração de Conteúdo

Mario Olivero da Silva

Nancy de Souza Cardim

### Revisão de Conteúdo

Juan Bautista Limaco Ferrel

### Biblioteca

Raquel Cristina da Silva Tiellet

Simone da Cruz Correa de Souza

Vera Vani Alves de Pinho

### Coordenação de Programação Visual

Marcelo Freitas

### Programação Visual

Marcelo Freitas

Nilda Lopes

### Ilustração

André Dahmer

### Coordenação de Produção

Fábio Rapello Alencar

### Assistente de Produção

Bianca Giacomelli

### Capa

Vinícius Mitchell

### Produção Gráfica

Ulisses Schnaider

Copyright © 2016, Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da Fundação.

S586c

Silva, Mario Olivero da.

Cálculo III

Cálculo III. Volume único. 2. ed. / Mario Olivero da Silva, Nancy de Souza Cardim. – Rio de Janeiro : Fundação Cecierj, 2016.

380 p.: 19 x 26,5 cm

ISBN: 978-85-458-0098-9

1. Cálculo. I. Cardim, Nancy de Souza. 1. Título.

CDD: 510

Referências bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.  
Texto revisado segundo o novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa.

# Governo do Estado do Rio de Janeiro

## Governador

Wilson Witzel

## Secretário de Estado de Ciência, Tecnologia e Inovação

Leonardo Rodrigues

## Instituições Consorciadas

### CEFET/RJ - Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca

Diretor-geral: Carlos Henrique Figueiredo Alves

### FAETEC - Fundação de Apoio à Escola Técnica

Presidente: Alexandre Sérgio Alves Vieira

### IFF - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense

Reitor: Jefferson Manhães de Azevedo

### UENF - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Reitor: Luis César Passoni

### UERJ - Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Reitor: Ruy Garcia Marques

### UFF - Universidade Federal Fluminense

Reitor: Antonio Claudio Lucas da Nóbrega

### UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro

Reitora: Denise Pires de Carvalho

### UFRRJ - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Reitor: Ricardo Luiz Louro Berbara

### UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Reitor: Luiz Pedro San Gil Jutuca





# Sumário

|                                                         |     |
|---------------------------------------------------------|-----|
| Aula 1 • Funções vetoriais de uma variável real .....   | 7   |
| Aula 2 • Limite e continuidade .....                    | 21  |
| Aula 3 • Derivadas de funções vetoriais .....           | 39  |
| Aula 4 • Funções vetoriais – integrais .....            | 55  |
| Aula 5 • Funções reais de várias variáveis .....        | 73  |
| Aula 6 • Conjuntos de nível .....                       | 87  |
| Aula 7 • Limites.....                                   | 101 |
| Aula 8 • Limites e continuidade .....                   | 117 |
| Aula 9 • Derivadas parciais.....                        | 133 |
| Aula 10 • Aula de exercícios .....                      | 145 |
| Aula 11 • Diferenciabilidade .....                      | 159 |
| Aula 12 • Diferenciabilidade – continuação.....         | 171 |
| Aula 13 • Plano tangente, diferencial e gradiente.....  | 183 |
| Aula 14 • A regra da cadeia ou a arte de derivar .....  | 195 |
| Aula 15 • A regra da cadeia (segunda parte) .....       | 211 |
| Aula 16 • Funções implícitas .....                      | 225 |
| Aula 17 • O gradiente e a derivada direcional .....     | 239 |
| Aula 18 • Exemplos e complementos .....                 | 255 |
| Aula 19 • Derivadas parciais de ordens superiores ..... | 271 |

|                                                                         |     |
|-------------------------------------------------------------------------|-----|
| Aula 20 • Máximos e mínimos – parte 1 .....                             | 285 |
| Aula 21 • Máximos e mínimos (parte 2) multiplicadores de lagrange ..... | 303 |
| Aula 22 • Multiplicadores de lagrange (parte 3) .....                   | 319 |
| Aula 23 • Soluções de exercícios.....                                   | 337 |

# Aula 1

## FUNÇÕES VETORIAIS DE UMA VARIÁVEL REAL

---

### Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 conhecer as definições básicas de funções vetoriais de uma variável real;
- 2 aprender a parametrizar curvas simples.

## INTRODUÇÃO

Até agora você estudou as funções reais de uma variável real. As equações envolviam apenas duas variáveis, uma dependendo da outra, geralmente denotadas por  $x$  e  $y$ .

Você aprendeu a esboçar gráficos de funções tais como  $f(x) = xe^x$  ou  $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$ , a derivar implicitamente  $y$  como uma função de  $x$  determinada por equações tais como  $x^2 + y^2 - 2x = 0$ .

Tudo isso está prestes a mudar, a partir desta aula. Vamos decolar para dimensões mais altas. Mas, tudo a seu tempo.

Começaremos estudando as funções vetoriais de uma variável real. Essas funções são assim chamadas porque o resultado da função não é mais um número, mas um vetor. Neste curso, esses vetores serão sempre vetores do plano ou do espaço tridimensional. Isto é, nossas funções terão  $\mathbb{R}^n$ , com  $n = 2$  ou  $3$ , como contra-domínio. No entanto, as ideias e conceitos aqui apresentados podem ser generalizados, de maneira muito natural, para outros espaços vetoriais, com dimensões mais altas, porém finitas.

Denotaremos essas funções por letras gregas minúsculas. Elas também podem ser denotadas por letras maiúsculas, como  $F$ , ou ainda, com uma setazinha sobre a letra, para indicar a sua natureza vetorial, como  $\vec{F}$ .

### Exemplo 1.1.

Seja  $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$  a função vetorial definida por

$$\alpha(t) = (2t + 1, 1 - t).$$

A variável independente é denotada por  $t$  e, para cada valor de  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha(t)$  é um vetor de  $\mathbb{R}^2$ . Por exemplo,  $\alpha(0) = (1, 1)$ ,  $\alpha(-1) = (-1, 2)$  etc.

Dada uma função vetorial  $\alpha(t)$ , que toma valores em  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , podemos considerar suas *funções coordenadas*. Isto é, as funções que determinam as coordenadas do vetor  $\alpha(t)$ . Usare-

mos a notação

$$\alpha(t) = (x(t), y(t))$$

ou

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

dependendo do caso. Assim,  $x(t)$ ,  $y(t)$  ou  $z(t)$  são as funções coordenadas.

### Exemplo 1.2.

Dadas  $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$  e  $\beta(t) = (t, t^2, 1 - t^2)$ , suas funções coordenadas são:  $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$  e  $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = 1 - t^2 \end{cases}$ , respectivamente.

A notação  $\alpha_1(t) = \cos t$  e  $\alpha_2(t) = \sin t$  também é muito usada.

Podemos resumir assim: chamamos funções vetoriais de uma variável real as funções da forma

$$\alpha : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n, n = 2 \text{ ou } 3,$$

onde  $A$  é uma união de intervalos. Se  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$  é uma função vetorial, chamamos as funções reais  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  de funções coordenadas.

Além disso, chamamos a imagem de  $\alpha$ ,

$$\alpha(A) = \{ \alpha(t) \in \mathbb{R}^n; t \in A \},$$

de *traço da função*.

### Exemplo 1.3.

No caso de  $\alpha(t) = (2t + 1, 1 - t)$ , o vetor  $(3, 0) \in \alpha(\mathbb{R})$ , pois  $\alpha(1) = (3, 0)$ . Observe que  $(2, 1) \notin \alpha(\mathbb{R})$ .

Realmente, para que isso ocorresse, seria necessário encontrar um número  $t_0$  tal que

$$\begin{cases} 2t_0 + 1 = 2 \\ 1 - t_0 = 1 \end{cases}$$

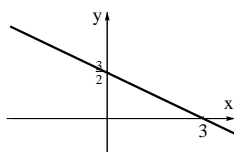
simultaneamente. Isso não é possível.

Vamos esboçar o traço dessa função. Note que as equações que definem a função são bem simples. Temos

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 1 - t. \end{cases}$$

Isolando  $t$  na equação  $y = 1 - t$ , temos  $t = 1 - y$ . Agora, substituindo essa informação na primeira equação, temos

$$x = 2(1 - y) + 1 = 3 - 2y.$$



Assim,

$$x + 2y = 3,$$

que é a equação de uma reta.

Esse exemplo se generaliza da seguinte maneira:

## FUNÇÕES VETORIAIS CUJAS FUNÇÕES COORDENADAS SÃO FUNÇÕES AFINS

Essas funções vetoriais são as mais simples de todas. Ou seja, as funções coordenadas são do tipo  $\alpha_i(t) = a_i t + b_i$ , onde  $a_i$  e  $b_i$  são números reais.

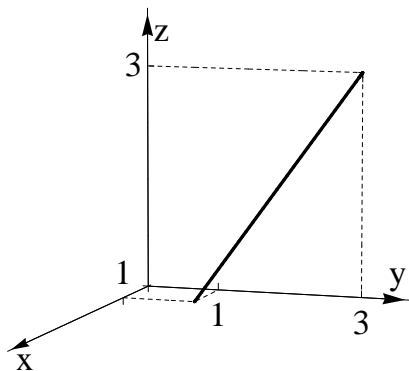
Se existe pelo menos um  $i$ , tal que  $a_i \neq 0$ , o traço da função será uma reta.

### Exemplo 1.4.

Esboce o traço da função  $\alpha(t) = (2 - t, 2t + 1, 3t)$ .

Basta marcar dois pontos na imagem da função e ligá-los por uma reta. Por exemplo,  $\alpha(0) = (2, 1, 0)$  e  $\alpha(1) = (1, 3, 3)$ .

Lembre-se: é comum representarmos o espaço  $\mathbb{R}^3$  com os eixos coordenados  $Oy$  e  $Oz$  dispostos em verdadeira grandeza no plano em que desenhamos, tendo o eixo  $Ox$  perpendicular ao mesmo, apontando em nossa direção.



## EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DE RETAS

A equação

$$\alpha(t) = (1 - t)A + tB,$$

onde  $A$  e  $B$  são dois vetores dados tem por traço a reta determinada por esses vetores, caso  $A \neq B$ .

Além disso,  $\alpha(0) = A$  e  $\alpha(1) = B$ .

Note que os produtos  $(1 - t)A$  e  $tB$  são produtos de escalares (números) por vetores e o sinal  $+$  indica a soma vetorial.

Mais ainda, se restringirmos o domínio ao intervalo  $[0, 1]$ , a imagem  $\alpha([0, 1])$  é, precisamente, o segmento de reta que une  $A$  e  $B$ .

Além disso, podemos reescrever a equação de  $\alpha(t)$  da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= (1 - t)A + tB = A - tA + tB \\ &= A + t(B - A)\end{aligned}$$

Se colocarmos  $\vec{v} = B - A$ , a equação ganha a forma

$$\alpha(t) = t\vec{v} + A.$$

A interpretação geométrica é a seguinte:  $\alpha(t)$  é uma parametrização da reta que contém o ponto  $A$  e é paralela ao vetor não nulo  $\vec{v}$ .

**Exemplo 1.5.**

Expresse as equações que definem as funções vetoriais do tipo  $\alpha(t) = (1-t)A + tB$  e esboce a imagem de  $\alpha([0, 1])$  nos seguintes casos:

- a.  $A = (0, 1)$        $B = (1, 3)$ ;
- b.  $A = (1, 1)$        $B = (1, 3)$ ;
- c.  $A = (1, 0, 2)$      $B = (2, 2, 3)$ .

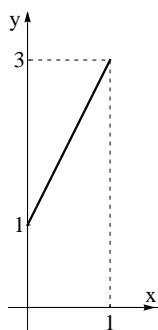
Primeiro, as fórmulas. Vamos usar letras gregas diferentes para cada caso.

$$\begin{aligned} a. \quad \alpha(t) &= (1-t)(0, 1) + t(1, 3) = \\ &= (0, 1-t) + (t, 3t) = \\ &= (t, 1+2t). \end{aligned}$$

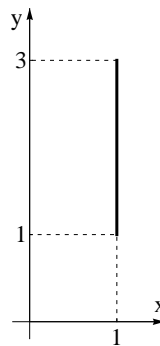
$$\begin{aligned} b. \quad \beta(t) &= (1-t)(1, 1) + t(1, 3) = \\ &= (1-t, 1-t) + (t, 3t) = \\ &= (1, 1+2t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c. \quad \gamma(t) &= (1-t)(1, 0, 2) + t(2, 2, 3) = \\ &= (1-t, 0, 2-2t) + (2t, 2t, 3t) = \\ &= (1+t, 2t, 2+t). \end{aligned}$$

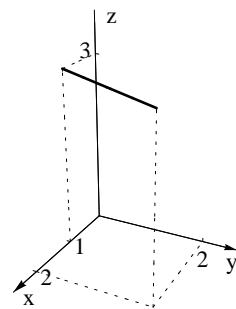
Agora, os segmentos que conectam os pontos que definiram as funções:



a.



b.



c.



Note que o segmento de reta que une  $\beta(0)$  a  $\beta(1)$  é paralelo ao eixo  $Oy$ . Algebricamente isso é indicado pelo fato de a primeira função coordenada da função  $\beta$  ser constante.

### Exercício 1.1.

Determine a equação da função vetorial  $\alpha$  tal que  $\alpha(0) = (1, -1)$  e  $\alpha(1) = (2, 3)$ , cujas coordenadas são funções afins.

De um modo geral, não é fácil traçar a imagem de uma dada função vetorial. Assim como você aprendeu a esboçar gráficos de funções reais de uma variável real, usando limites e derivadas, também há técnicas para traçar imagens de funções vetoriais de uma variável real. Isso é conhecido como traçado de curvas. No entanto, essas técnicas fogem um pouco do objetivo do nosso curso e nos limitaremos a alguns exemplos. Além disso, com o uso de programas de computadores com interface gráfica de excelente qualidade, é possível traçar as curvas com alguma facilidade.

### Exemplo 1.6.

Seja  $\alpha(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$  uma função vetorial definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Vamos descrever a imagem de  $\alpha$ .

Devido à identidade trigonométrica fundamental

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1,$$

sabemos que a imagem de  $\alpha$  está contida no círculo definido pela equação

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Note que para cada valor de  $t$ ,  $\alpha(t)$  é um dos pontos da circunferência do círculo e que para cada ponto da circunferência do círculo há um  $t$  correspondente. Isso decorre da continuidade das funções coordenadas. Além disso, na medida em que  $t$  varia positivamente,  $\alpha(t)$  ‘percorre’ o círculo no sentido anti-horário.

**Exercício 1.2.**

Descreva a imagem da função  $\beta(t) = (2 \operatorname{sen} t, 3 \cos t)$ .

**INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA**

As funções vetoriais de uma variável real têm uma interpretação geométrica muito natural. Elas descrevem movimentos de um ponto num dado espaço vetorial, em função da variável independente.

Sob essa perspectiva, a variável independente é chamada de *parâmetro*. Por isso a notação  $t$  para a variável independente é tão conveniente, deixando os nomes de variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$  para as funções coordenadas que dependem do parâmetro  $t$ . Além disso, tradicionalmente,  $t$  indica, na Física, o parâmetro tempo.

Os traços dessas funções são o que chamamos genericamente de *curvas*. É por isso que, em muitos casos, chamamos as funções vetoriais de uma variável real de curvas. É um abuso de linguagem, pois a curva é, na verdade, a imagem da função. No entanto, o nome é conveniente e passaremos a usá-lo daqui por diante.

**PARAMETRIZAÇÕES**

Usa-se dizer que a função vetorial  $\alpha(t)$  é uma *parametrização* da curva que é a imagem da função.

Veja que a mesma curva pode ser parametrizada de muitas maneiras. Ou seja, há muitas funções vetoriais que têm a mesma curva imagem.

**Exemplo 1.7.**

Todas as funções vetoriais a seguir são parametrizações da circunferência do círculo de raio 1 com centro na origem:

$$\alpha_1(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t);$$

$$\alpha_2(t) = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t);$$

$$\alpha_3(t) = (\cos(at + b), \operatorname{sen}(at + b)), a \neq 0;$$

$$\alpha_4(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t).$$

**Exercício 1.3.**

Mostre que as funções  $\alpha(t) = (4 - 4t, 2t)$  e  $\beta(t) = (2 + 4t, 1 - 2t)$  são parametrizações diferentes da mesma curva.

**TRANSLAÇÕES**

A característica geométrica das curvas que é simples de ser detectada na parametrização é quando ela é uma translação de outra curva. Veja o exemplo a seguir.

**Exemplo 1.8.**

Esboce a curva dada pela parametrização

$$\alpha(t) = (2 + \cos t, 1 + \sin t).$$

Note que podemos reescrever a parametrização da seguinte maneira:

$$\alpha(t) = (2, 1) + (\cos t, \sin t).$$

Portanto, se  $A = (2, 1)$ , a curva é a circunferência de um círculo de raio 1, caracterizada pela parte  $(\cos t, \sin t)$  da fórmula, com centro em  $A$ . A curva  $\alpha$  é uma translação da curva  $\beta(t) = (\cos t, \sin t)$ .

A seguir, você verá uma série de curvas. Isso lhe permitirá ampliar seu repertório de exemplos.

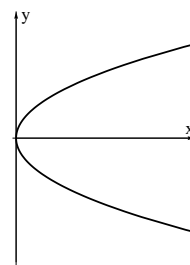
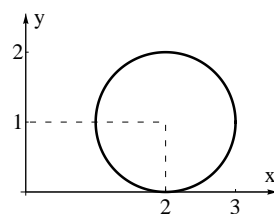
**Exemplo 1.9.**

A curva  $\gamma(t) = (t^2, t)$  está definida para todos os números reais e seu traço é uma parábola.

Realmente, as suas funções coordenadas são  $x(t) = t^2$  e  $y(t) = t$ . Nesse caso, podemos facilmente eliminar o parâmetro  $t$  obtendo uma equação apenas em termos das variáveis cartesianas,

$$x = y^2,$$

que corresponde a uma parábola.



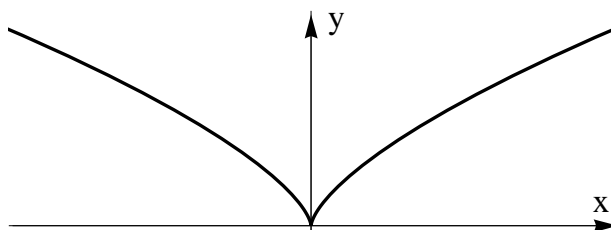
**Exemplo 1.10.**

A curva dada pela equação  $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ , definida para todos os números reais, tem por funções coordenadas funções polinomiais. Curvas desse tipo são chamadas curvas algébricas. O estudo de tais curvas ocupa uma parte da Matemática chamada Geometria Algébrica.

Para determinar seu traço, podemos usar o mesmo expediente que foi usado no exemplo anterior: eliminar o parâmetro. No entanto, a equação agora obtida não é mais tão simples:

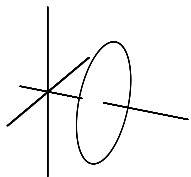
$$y = x^{2/3}.$$

Aqui está o esboço da curva:



Veja que, apesar de estarmos lidando apenas com funções polinomiais, a curva tem uma ‘dobra’ na origem. Esta curva é conhecida por *cúspide*.

**Exemplo 1.11.**



A curva  $\alpha(t) = (\cos t, 1, \sin t)$  toma valores no espaço tridimensional, mas é uma curva plana. Isso porque ela satisfaz a equação  $y = 1$ . A projeção dessa curva no plano  $y = 0$  corresponde à curva  $\beta(t) = (\cos t, \sin t)$ . Sua imagem é a circunferência de um círculo.

**Exemplo 1.12.**

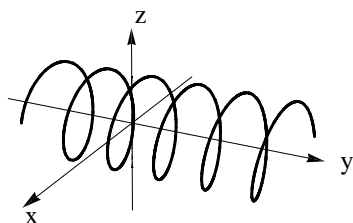
A curva

$$\gamma(t) = (\cos 2\pi t, t, \sin 2\pi t),$$

definida para todos os valores reais de  $t$ , quando projetada no plano  $y = 0$ , corresponde à circunferência do círculo de raio 1 e

centro na origem, parametrizada por  $\alpha(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ . A função coordenada  $y(t) = t$ , da função  $\gamma$ , garante que, na medida em que  $t$  varia, o ponto  $\gamma(t)$  se afasta do plano  $y = 0$ .

Essa curva está contida no cilindro  $x^2 + z^2 = 1$  e é chamada de *helicóide*, pois descreve o movimento de um ponto de uma hélice que se desloca sobre o eixo  $Oy$ .



### Exemplo 1.13.

Como um último exemplo da aula, vamos dar uma parametrização da hipérbole definida pela equação cartesiana

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Lembre-se de que as funções trigonométricas hiperbólicas satisfazem a seguinte identidade hiperbólica:

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1.$$

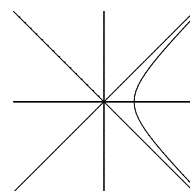
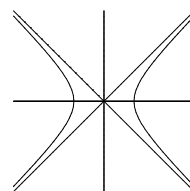
Portanto, a imagem da curva  $\alpha(t) = (\cosh t, \sinh t)$  certamente está contida na hipérbole. Agora, como a função contínua

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \geq 1,$$

$\alpha$  parametriza apenas o ramo da direita da hipérbole. Note também que a função  $f(t) = \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$  é bijetora e, assim,  $\alpha(t)$  recobre toda a extensão desse ramo de hipérbole.

Para parametrizar o outro ramo, basta considerar

$$\beta(t) = (-\cosh t, \sinh t).$$



Agora, os exercícios.

Primeiro, aqueles que foram propostos ao longo da aula.

### Exercício 1.1

Determine a equação da função vetorial  $\alpha$  tal que  $\alpha(0) = (1, -1)$  e  $\alpha(1) = (2, 3)$ , cujas coordenadas são funções afins.

**Solução:**

Basta usar a fórmula  $\alpha(t) = (1-t)A + tB$ , com  $A = (1, -1)$  e  $B = (2, 3)$ .

Assim,

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= (1-t)(1, -1) + t(2, 3) = \\ &= (1-t, t-1) + (2t, 3t) = \\ &= (1+t, 4t-1).\end{aligned}$$

### Exercício 1.2

Descreva a imagem da função  $\beta(t) = (2 \sin t, 3 \cos t)$ .

**Solução:**

A equação que define a função satisfaz a

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

que é a equação de uma elipse centrada na origem, com eixos paralelos aos eixos  $Ox$  e  $Oy$ .

### Exercício 1.3

Mostre que as funções  $\alpha(t) = (4 - 4t, 2t)$  e  $\beta(t) = (2 + 4t, 1 - 2t)$  são parametrizações diferentes da mesma curva.

#### Solução:

As funções coordenadas de  $\alpha$  são  $x = 4 - 4t$  e  $y = 2t$ . Eliminando o parâmetro  $t$ , ganhamos a equação cartesiana  $x = 4 - 2y$ .

As equações correspondentes à função  $\beta$  são  $x = 2 + 4t$  e  $y = 1 - 2t$ . Da segunda equação, obtemos  $t = \frac{1-y}{2}$ . Substituindo na primeira equação, obtemos

$$\begin{aligned} x &= 2 + 4\left(\frac{1-y}{2}\right) = \\ &= 2 + 2(1-y) = \\ &= 2 + 2 - 2y = \\ &= 4 - 2y. \end{aligned}$$

Como as duas equações cartesianas são idênticas (bastava que fossem uma múltipla da outra), as duas funções têm a mesma reta como imagem.

Agora é hora de praticar o que você aprendeu.

### Exercício 1.4.

1. Encontre uma parametrização para a reta que contém os pontos  $(1, -1)$  e  $(-3, 4)$ .
2. Encontre uma parametrização para a reta que é paralela ao vetor  $\vec{v} = (-2, 5)$  e que contém o ponto  $(2, 1)$ .
3. Ache uma parametrização para a reta que é a interseção dos planos  $x - y + z = -3$  e  $2x + y - 2z = 6$ .
4. Encontre a parametrização  $\alpha(t)$  da reta  $r$ , tal que  $\alpha(1) = (-3, 2, 1)$  e  $\alpha(0) = (0, 0, -2)$ .

5. Faça um esboço das seguintes curvas:

- a.  $\alpha(t) = (2t, 3t + 1), \quad t \in [0, 1];$
- b.  $\beta(t) = (1 - t, 3 - 2t, t), \quad t \in [0, 1];$
- c.  $\gamma(t) = (5 \cos 2t, -2 \sin 2t) \quad t \in [0, \pi];$
- d.  $\delta(t) = (t^2 - 1, t^3 + 1), \quad t \in [-2, 2].$

6. Trace a curva  $\alpha(t) = (t, 2 \cos 2\pi t, 2 \sin 2\pi t)$ .

7. Dê uma parametrização para cada uma das seguintes cônicas:

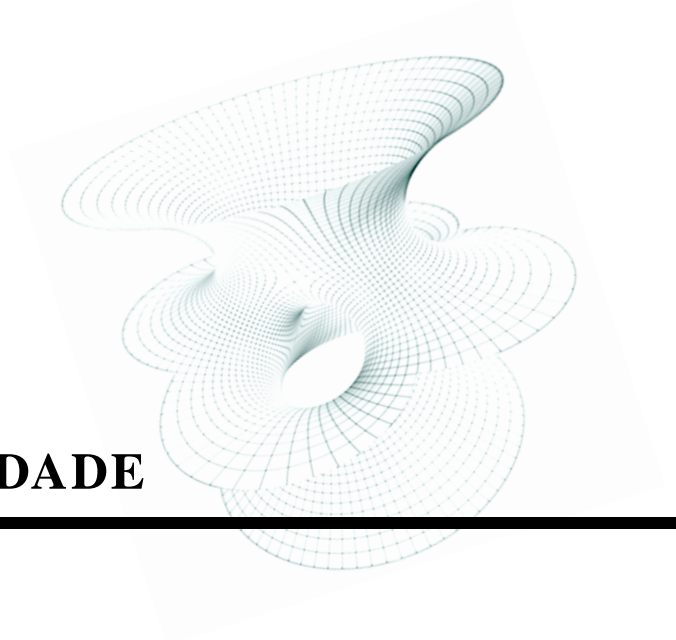
- a.  $x - 3 = (y + 1)^2;$
- b.  $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4;$
- c.  $y^2 - 4x^2 = 1$  (ramo superior);
- d.  $9(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2 = 36.$



# Aula 2

## LIMITE E CONTINUIDADE

---



### Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 aprender a definição de limite de uma função real, de uma variável real, na versão com *épsilon* e *delta*, e estendê-la para uma função vetorial de uma variável real;
- 2 conhecer a noção de continuidade de funções vetoriais.

## INTRODUÇÃO

Épsilon e delta são os nomes de duas letras gregas,  $\varepsilon$  e  $\delta$ , respectivamente.

No curso de Cálculo I você aprendeu uma definição de limite de uma função real de uma variável real em termos de sequências de números. Agora você aprenderá uma outra definição desse conceito, que é equivalente à que você conhece, e que chamaremos de *definição com épsilon e delta*.

Essa definição evita a introdução da noção de sequência e, além do mais, ela será generalizada para o caso das funções vetoriais, objeto de nosso estudo atual, e das funções de várias variáveis, que passaremos a estudar em breve.

Veja a nota sobre Weierstrass na Aula 28, de Cálculo II.

A definição de limite com épsilon e delta foi estabelecida por Karl Weierstrass e é uma pérola da Matemática.

Veja, o nosso objetivo é estabelecer, rigorosamente, o que queremos dizer quando escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Você poderia responder: isso significa que, quando a variável  $x$  assume valores bem próximos de  $a$ , a variável dependente  $y = f(x)$  assume valores bem próximos de  $L$ . Muito bem! É isso mesmo. A questão está no rigor. Ou seja, qual é o significado de ‘ $x$  assume valores bem próximos de  $a$ ’? Essa frase tem valor pois nos ajuda a entender, a dar um sentido para a nossa fórmula. No entanto, do ponto de vista matemático, falta-lhe, exatamente, o rigor. E como você já sabe, o rigor é fundamental na Matemática. Para provar teoremas, chegar a conclusões definitivas, precisamos mais do que a frase oferece.

Vamos adotar um procedimento direto: primeiro apresentamos a definição e depois faremos uma discussão de seus termos, até aproximá-la da noção intuitiva de limite que você já tem.

## DEFINIÇÃO DE LIMITE

Vamos supor que  $A \subset \mathbb{R}$  é uma união de intervalos quaisquer e que  $a \in A$  ou  $a$  é um dos extremos de algum desses intervalos.

Por exemplo,  $A = (-2, 0) \cup (0, 3)$  e  $a = 0$ ;  $A = (-1, 1)$  e  $a = -1$ ;  $A = (-1, 3]$  e  $a = 2$ .

### Definição 2.1.

Seja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

se, e somente se, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que, se  $x \in A$  e  $0 < |x - a| < \delta$ , então  $|f(x) - L| < \varepsilon$ .

Usando a simbologia matemática, temos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que}$$

$$x \in A \text{ e } 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Essa é, provavelmente, a definição mais difícil de apresentar aos alunos dos cursos de Cálculo. Repare bem: quando escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = 3,$$

na verdade, estamos dizendo

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |x + 1| < \delta \implies \left| \frac{x^3 + 1}{x + 1} - 3 \right| < \varepsilon.$$

Vamos agora mostrar que essa simbologia toda nos diz que, para valores de  $x$  próximos de  $-1$ , os valores  $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 1}$  estão próximos de  $3$ .

Para desvendarmos esse segredo devemos avançar passo a passo. O primeiro deles consiste em entender como a noção ‘próximo de’, ‘tende a’ está estabelecida na definição. A chave para isso é a noção de distância, dada pela função módulo ou valor absoluto.

A distância entre  $x$  e  $a$  é igual a  $|x - a|$ . Assim, quando dizemos  $|x - a| < \delta$ , queremos dizer que a distância entre  $x$  e  $a$  é menor do que  $\delta$ , um certo valor positivo.

Por exemplo, a inequação

$$|x - 3| < 2$$

determina os pontos da reta que estão a uma distância menor do que duas unidades do ponto 3. Esses pontos formam o intervalo aberto  $(1, 5)$ .

Em geral, a inequação  $|x - a| < \delta$  caracteriza o intervalo aberto

$$(a - \delta, a + \delta).$$

Usaremos a expressão  $x$  está  $\delta$ -próximo de  $a$  para dizer que  $x$  pertence a esse intervalo.

Analogamente,  $|f(x) - L| < \varepsilon$  significa que  $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$  e diremos que  $f(x)$  está  $\varepsilon$ -próximo de  $L$ .

Note que na definição usamos a frase

$$0 < |x - a| < \delta.$$

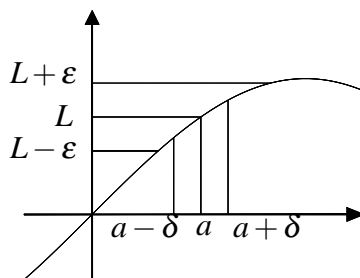
A condição  $0 < |x - a|$  nos garante que  $x \neq a$  pois,  $x = a$  se, e somente se,  $|x - a| = 0$ . Isso é muito conveniente, uma vez que assim excluimos o ponto  $a$  da análise. Logo,  $a$  pode pertencer ou não ao domínio  $A$  da função.

Portanto, a frase

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

pode ser lida da seguinte maneira: se  $x$  está  $\delta$ -próximo de  $a$  e é diferente de  $a$ , então  $f(x)$  está  $\varepsilon$ -próximo de  $L$ .

Veja como isso fica numa figura:



Agora você deve ter notado como a definição tem o sentido que esperamos. Ela trata de distâncias. Mas ainda falta, algo muito importante. A frase completa começa com

‘ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que ...’ Isto é, ‘para cada  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$  (que depende de  $\varepsilon$ ) tal que ...’

Aqui usamos dois quantificadores: o quantificador universal, usado no  $\varepsilon$  e o quantificador existencial, usado nos  $\delta$ . Esses quantificadores animam a definição. Isto é, para cada  $\varepsilon > 0$  devemos arranjar um  $\delta > 0$  tal que, para todos os valores de  $x$  que estão  $\delta$ -próximos de  $a$ , porém diferentes de  $a$ , os valores correspondentes  $f(x)$  estão  $\varepsilon$ -próximos de  $L$ .

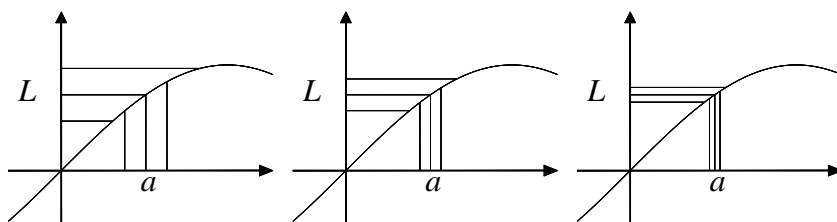
Veja, não é suficiente arranjar um valor para  $\delta$ , digamos  $\delta = 0,0001$ , que torne a frase ‘ $0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$ ’ verdadeira para um certo valor de  $\varepsilon$ , digamos  $\varepsilon = 0,0003$ . Precisamos seguir determinando valores de  $\delta$  correspondentes a valores de  $\varepsilon$  ainda menores. Pelo menos aqui temos uma boa notícia. Apesar do quantificador universal que usamos com  $\varepsilon$ , na verdade, basta que nos preocupemos com os valores pequenos de  $\varepsilon$ . Isso por que, se encontramos um valor de  $\delta$  que funcione para um certo valor de  $\varepsilon$ , digamos  $\varepsilon = 1$ , esse mesmo valor de  $\delta$  também serve para todos os valores de  $\varepsilon$  maiores do que 1.

Em termos mais simples, para que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  seja  $L$ , não basta que a frase

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

seja verdadeira para alguns valores de  $\varepsilon$ . Ela deve ser verdadeira para *todos* os valores de  $\varepsilon$ , especialmente os bem pequenos.

Em termos gráficos, o desenho apresentado na figura anterior deve ser como um quadro de uma animação. Essa animação deveria prosseguir com o mesmo aspecto se a faixa  $L - \varepsilon < y < L + \varepsilon$  se tornasse tão estreita quanto quisermos.



Veja como isso funciona num exemplo.

**Exemplo 2.1.**

Vamos usar a definição de limites que acabamos de apresentar para mostrar que a afirmação

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = 4$$

é verdadeira.

A grande dificuldade que, geralmente, os alunos têm ao lidar inicialmente com a definição que apresentamos é a seguinte: como descobrir os valores de  $\delta$ , em função dos valores de  $\varepsilon$  que tornem a frase verdadeira? Bem, o segredo é o seguinte: em geral, fazemos certas contas de antemão, num rascunho, para depois apresentar o resultado, que então surge como que tirado de uma cartola. Mas hoje é o seu dia de sorte! Você não precisará preocupar-se com esse tipo de coisa, ainda. Isso é assunto do curso de Análise. Tudo a seu tempo.

Vamos começar com o nosso exemplo observando que o domínio da função  $f(x) = \frac{2x^2 - 2}{x - 1}$  é o conjunto  $A = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ .

Vamos lá! Lembre-se: para cada  $\varepsilon > 0$  devemos arranjar um  $\delta$  tal que

$$0 < |x - 1| < \delta \implies |f(x) - 4| < \varepsilon$$

Surpresa! Para cada  $\varepsilon > 0$ , tome  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ .

Veja, se  $x \neq 1$ , então

$$\begin{aligned} |f(x) - 4| &= \left| \frac{2x^2 - 2}{x - 1} - 4 \right| = \left| \frac{2(x - 1)(x + 1)}{x - 1} - 4 \right| = \\ &= |2x + 2 - 4| = |2x - 2| = 2|x - 1|. \end{aligned}$$

Isto é, se  $0 < |x - 1|$ , então  $|f(x) - 4| = 2|x - 1|$ .

Portanto, se  $0 < |x - 1| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ , então

$$|f(x) - 4| = 2|x - 1| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo, para cada  $\varepsilon > 0$ , se  $0 < |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$  então  $|f(x) - 4| < \varepsilon$ . Isso é,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$ .

### Exemplo 2.2.

Vamos usar  $\varepsilon$  e  $\delta$  para mostrar que  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ .

Queremos mostrar que se  $x$  toma valores próximos de 2 então  $x^2$  toma valores próximos de 4. Isso é claro, do ponto de vista do senso comum mas, em Matemática, precisamos de provas. Muito bem, queremos mostrar que se  $0 < |x - 2|$  é um valor próximo de zero, então  $|x^2 - 4|$  também está próximo de zero. Observe que

$$|x^2 - 4| = |x - 2| |x + 2|.$$

Nosso problema está em ‘controlar’ o fator  $|x + 2|$ .

Observe: se os valores que escolhermos para  $\delta$  *não forem maiores do que 1*, teremos a garantia que  $0 < |x - 2| < 1$ . Isto é,  $x \neq 2$  e  $-1 < x - 2 < 1$ . Essa desigualdade é equivalente a  $1 < x < 3$ , que por sua vez é equivalente a

$$3 < x + 2 < 5.$$

Resumindo, se escolhermos valores para  $\delta$  menores ou iguais a 1, teremos  $|x + 2| < 5$ .

Ótimo!

Estamos prontos para mostrar, com epsilon e delta, que  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ .

Para cada  $\varepsilon > 0$  tome  $\delta = \min\{1, \varepsilon/5\}$ . Isto é,  $\delta$  é o menor entre os números 1 e  $\varepsilon/5$ . Dessa forma garantimos que  $\delta$  é menor ou igual a 1 e, com isso, garantimos que  $|x + 2| \leq 5$ .

Então, se  $0 < |x - 2| < \delta$ , temos

$$|f(x) - 4| = |x^2 - 4| = |x - 2| |x + 2| < \delta \cdot 5 \leq \frac{\varepsilon}{5} \cdot 5 = \varepsilon.$$

Vamos agora analisar um exemplo onde não há limite. Na verdade, usaremos a definição para constatar que um “bom candidato a limite” não satisfaz a definição.

**Exemplo 2.3.**

Vamos mostrar que se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq 1, \\ x & \text{se } x < 1, \end{cases}$$

então, apesar de  $f(1) = 2$ , o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende a 1 não é 2.

Antes de mais nada, veja o que devemos fazer. Para provar que o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende a 1 não é 2, devemos *negar* a definição de limite:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que}$$

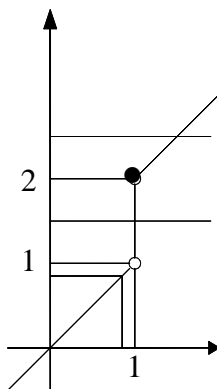
$$0 < |x-1| < \delta \implies |f(x)-2| < \varepsilon.$$

Lembre-se das aulas de lógica: a negação inverte os quantificadores. Portanto, devemos mostrar que

$$\exists \varepsilon > 0, \text{ tal que } \forall \delta > 0 \text{ existe algum valor de } x \text{ com}$$

$$0 < |x-1| < \delta \text{ e } |f(x)-2| \geq \varepsilon.$$

O gráfico de  $f$  numa vizinhança de 1 nos ajudará nessa tarefa. Aqui está:



Veja que podemos tomar valores para  $x$  tão próximos de 1 o quanto quisermos, mas cujas imagens estarão a uma distância maior do que 1 do candidato a limite 2. Para isso basta tomar valores de  $x$  à esquerda de 1.



Logo, o nosso candidato ao valor de  $\varepsilon$  que não satisfará a definição é 1.

Realmente, para  $\varepsilon = 1$  e um  $\delta > 0$  qualquer, escolha um  $x_0$  tal que  $1 - \delta < x_0 < 1$  e  $1/2 < x_0 < 1$ .

A primeira condição garante que

$$0 < |x_0 - 1| < \delta$$

e, como  $x_0 \in (1/2, 1)$ ,  $f(x_0) = x_0$ .

Ora, se  $x_0$  se encontra à esquerda de 1, sua distância até 2 é maior do que 1:

$$|f(x_0) - 2| = |x_0 - 2| \geq 1.$$

Realmente, provar que um certo limite é um dado número ou que um certo valor não é o limite, usando diretamente a definição é trabalhoso. Na verdade, nós só fazemos isso em ocasiões especiais. A prática é a seguinte: usamos a definição para provar as muitas propriedades dos limites e usamos as propriedades de limites para calculá-los.

Para dar uma idéia de como a definição funciona na prova das propriedades de limites, vamos provar o seguinte teorema.

### **Teorema 2.1.**

Sejam  $f$  e  $g$  funções definidas numa vizinhança  $V$  de  $a$ , mas não necessariamente em  $a$ , tais que

a.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

b.  $\exists M > 0$  tal que  $|g(x)| < M$ , para todo  $x \in V$ ,  $x \neq a$ .

Você pode considerar  $V$  como um intervalo aberto  $(x_0, x_1)$  contendo  $a$ .

Então,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0.$$

Isto é, se o limite da função  $f$  é zero e a função  $g$  é limitada, o limite do produto das duas funções também é zero.

### Demonstração

Veja, estamos usando  $\varepsilon'$  e  $\delta'$  para enfatizar que esses valores dizem respeito à função  $f(x)g(x)$ , enquanto que  $\varepsilon$  e  $\delta$  dizem respeito à função  $f(x)$ . Isso é um detalhe importante.

Como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ , sabemos que para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que, se  $x \in V$  e

$$0 < |x - a| < \delta, \text{ então } |f(x)| < \varepsilon. \quad (\text{I})$$

Queremos mostrar que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0$ . Isto é, para cada  $\varepsilon' > 0$ , existe  $\delta' > 0$  tal que, se  $x \in V$  e

$$0 < |x - a| < \delta', \text{ então } |f(x) \cdot g(x)| < \varepsilon'.$$

Muito bem, dado  $\varepsilon' > 0$ , fazemos  $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{M}$  e escolhemos para  $\delta'$  o mesmo  $\delta$  que corresponde ao  $\varepsilon$  e torna a afirmação (I) verdadeira:  $\delta' = \delta$ . Assim, se  $x \in V$  e  $0 < |x - a| < \delta' = \delta$ , então

$$|f(x) \cdot g(x)| \leq |f(x) \cdot M| < \varepsilon M = \frac{\varepsilon'}{M} \cdot M = \varepsilon'.$$

Ou seja, para cada  $\varepsilon'$  arranjamos um  $\delta'$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta' \implies |f(x) \cdot g(x)| < \varepsilon'.$$

Portanto, provamos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0$ .

CQD

Esse teorema é uma poderosa ferramenta de cálculo de limites. Veja, no próximo exemplo, como ela funciona.

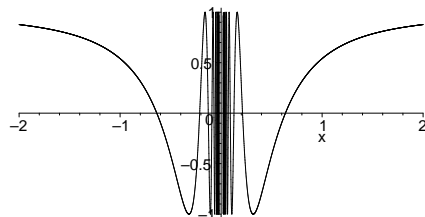
#### Exemplo 2.4.

Vamos calcular o

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x}.$$

Note que a função  $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$  não está definida no

ponto  $x = 0$ . Além disso, o limite de  $h(x) = \cos \frac{1}{x}$ , quando  $x$  tende a zero, não está definido. Veja o seu gráfico na figura a seguir.

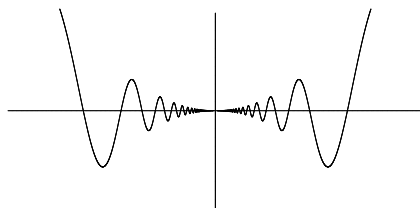


Este limite não existe pois a função se ‘acumula’ em todo o intervalo  $[-1, 1]$  do eixo  $Oy$ .

No entanto,  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ , e portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x} = 0.$$

Veja o gráfico da função  $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ , numa pequena vizinhança da origem:



## CONTINUIDADE

O conceito mais diretamente ligado ao limite é a continuidade. Veja como a definição de limites que acabamos de apresentar se reflete na definição de continuidade.

**Definição 2.2.**

Seja  $A \subset \mathbb{R}$  uma união de intervalos e  $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função. Você aprendeu, no curso de Cálculo I, que a função  $f$  é contínua em  $a \in A$  se, e somente se,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Muito bem, com a definição de limites que você acabou de ver, isso significa o seguinte.

A função  $f$  é contínua em  $a \in A$  se, e somente se, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que, se  $x \in A$  e

$$0 < |x - a| < \delta \text{ então } |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Isto é,  $f$  é contínua em  $x = a$  se para valores de  $x$  próximos de  $a$ , os valores correspondentes  $f(x)$  estão próximos de  $f(a)$ . Essa é a nossa noção geral de continuidade: pequenos acréscimos na variável independente correspondem a pequenos acréscimos na variável dependente. A definição com épsilon e delta dá rigor a essa idéia geral.

Agora estamos prontos para enunciar os correspondentes conceitos de limite e continuidade de funções vetoriais de uma variável real.

## LIMITES DE FUNÇÕES VETORIAIS DE UMA VARIÁVEL REAL

A diferença entre uma função vetorial e uma função real está no contradomínio. Em vez de números obtemos vetores, elementos de  $\mathbb{R}^n$ .

Para estabelecermos a definição de limites no caso dessas funções, basta que tenhamos uma noção de distância em  $\mathbb{R}^n$ . Ou seja, precisamos dizer qual é a distância entre dois vetores, digamos  $v_1$  e  $v_2$ .

Essa noção é dada pela norma da diferença, denotada por  $\|v_2 - v_1\|$ .

Se  $v \in \mathbb{R}^n$  é dado por  $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , então

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

A norma faz em  $\mathbb{R}^n$  o papel que o valor absoluto faz em  $\mathbb{R}$ , para estabelecer a distância. Veja, se  $v_1 = (x_1, y_1)$  e  $v_2 = (x_2, y_2)$ , em  $\mathbb{R}^2$ , por exemplo, a distância entre  $v_1$  e  $v_2$  é dada por

$$\|v_1 - v_2\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Isto é, a distância em  $\mathbb{R}^n$ , estabelecida pela norma, corresponde à nossa tradicional noção de distância.

Estamos prontos, finalmente, para enunciar a definição de limites de funções vetoriais.

Vamos supor que  $A \subset \mathbb{R}$  é uma união de intervalos quaisquer e que  $a \in A$  ou  $a$  é um dos extremos de algum desses intervalos.

### Definição 2.3.

Seja  $\alpha : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função vetorial e  $L \in \mathbb{R}^n$  um vetor. Dizemos que

$$\lim_{t \rightarrow a} \alpha(t) = L$$

se, e somente se, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que, se  $t \in A$  e  $0 < |t - a| < \delta$ , então  $\|\alpha(t) - L\| < \varepsilon$ .

Se você comparar esta definição com a definição de limites, com  $\varepsilon$  e  $\delta$  das funções reais, verá que as diferenças são muito pequenas. O termo  $|f(x) - L| < \varepsilon$  foi substituído por  $\|\alpha(t) - L\| < \varepsilon$  e, enquanto o primeiro  $L$  é um número, o segundo é um vetor.

Do ponto de vista prático, o limite de funções vetoriais é simples. Veja o próximo teorema.

O símbolo  $\langle, \rangle$  representa o produto interno ou produto escalar. Por exemplo, se  $v_1 = (x_1, y_1)$  e  $v_2 = (x_2, y_2)$ , o produto interno de  $v_1$  por  $v_2$  é denotado por  $\langle v_1, v_2 \rangle \in \mathbb{R}$  e definido por

$$\langle v_1, v_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Produtos internos são estudados em Álgebra Linear e são muito usados na Matemática. Nós voltaremos a falar neles nesse curso.

**Teorema 2.2.**

Seja  $\alpha : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  uma função vetorial, onde  $A$  é uma união de intervalos. Seja  $a \in A$  ou  $a$  é um dos extremos dos extremos dos intervalos que formam  $A$ . Então

$$\lim_{t \rightarrow a} \alpha(t) = L \iff \lim_{t \rightarrow a} \alpha_i(t) = L_i$$

para cada uma das funções coordenadas  $\alpha_i$ , onde  $L_i$  é a  $i$ -ésima coordenada do vetor  $L = (L_1, L_2, \dots, L_n)$ .

Este teorema nos diz que, para estudar o limite das funções vetoriais, basta estudar, um a um, os limites das funções coordenadas.

**Exemplo 2.5.**

Vamos calcular  $\lim_{t \rightarrow 1} \alpha(t)$ , onde

$$\alpha(t) = \left( \frac{t^3 - 1}{t^2 - 1}, \frac{\sin(t - 1)}{t - 1}, \ln t \right).$$

Note que o domínio de  $\alpha$  é a interseção dos domínios das funções coordenadas:

$$\begin{aligned} A &= ((-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)) \cap (0, \infty) = \\ &= (0, 1) \cup (1, \infty). \end{aligned}$$

Neste exemplo,  $A$  é uma união de dois intervalos e  $a = 1 \notin A$  é extremo de ambos.

Basta calcularmos os limites das funções coordenadas:

$$\text{a. } \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^3 - 1}{t^2 - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{3t^2}{2t} = \frac{3}{2};$$

$$\text{b. } \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sin(t - 1)}{t - 1} = 1;$$

$$\text{c. } \lim_{t \rightarrow 1} \ln t = 0.$$

Assim,

$$\lim_{t \rightarrow 1} \alpha(t) = (3/2, 1, 0).$$

Esse teorema também nos garante que, a função  $\alpha : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua em  $a \in A$  se, e somente se, cada função coordenada  $\alpha_i : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  for contínua em  $a$ .

Apresentamos aqui a prova do Teorema 2.2, por razões de completicidade. No entanto, você já experienciou uma boa dose de  $\varepsilon$  e  $\delta$  e é recomendável que você a estude agora apenas no caso de ter uma boa folga na sua agenda. Caso contrário, você pode usar o teorema para resolver os problemas e poderá retomar a demonstração no devido tempo. No entanto, não deixe de estudá-la, pelo menos em algum momento.

### **Demonstração : Teorema 2.2**

Por simplicidade, vamos demonstrar o teorema para o caso  $n = 2$ . Isto é, vamos supor que a função  $\alpha$  tenha apenas duas funções coordenadas  $(\alpha_1, \alpha_2)$ . Então,  $L = (L_1, L_2)$ .

Queremos mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow a} \alpha(t) \iff \begin{cases} \lim_{t \rightarrow a} \alpha_1(t) = L_1 \\ \text{e} \\ \lim_{t \rightarrow a} \alpha_2(t) = L_2 \end{cases}$$

Primeiro, vamos mostrar que se a função vetorial tem limite  $L$ , então cada uma das funções coordenadas tem limite  $L_i$ , a correspondente coordenada do vetor limite  $L$ .

Sabemos que, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$  tal que, se  $t \in A$  e

$$0 < |t - a| < \delta \implies \|\alpha(t) - L\| < \varepsilon. \quad (I)$$

Como  $|\alpha_1(t) - L_1| \leq \sqrt{(\alpha_1(t) - L_1)^2 + (\alpha_2(t) - L_2)^2} = \|\alpha(t) - L\|$ , podemos usar o mesmo  $\delta$  para ambas funções coordenadas. Ou seja, dado  $\varepsilon > 0$ , tomemos  $\delta > 0$  tal que (I) seja verdadeiro e, portanto, se  $0 < |t - a| < \delta$  e  $t \in A$ , então

$$|\alpha_i(t) - L_i| \leq \|\alpha(t) - L\| < \varepsilon,$$

para ambos  $i = 1$  e  $i = 2$ .

Agora devemos mostrar que, se cada uma das funções coordenadas tem limite, então a função vetorial também tem limite.

Ou seja, sabemos que, se  $t$  é um valor próximo de  $a$ , cada uma das coordenadas  $\alpha_i(t)$  estará  $\varepsilon$ -próximo de  $L_i$ . Isto é, temos controle sobre os catetos e queremos controlar a hipotenusa. Muito bem, aqui está o que está faltando. Seja  $M$  a maior entre as distâncias  $|\alpha_1(t) - L_1|$  ou  $|\alpha_2(t) - L_2|$ . Então,

$$\begin{aligned}\|\alpha(t) - L\| &= \sqrt{(\alpha_1(t) - L_1)^2 + (\alpha_2(t) - L_2)^2} \leq \sqrt{2M^2} \\ &= \sqrt{2}M.\end{aligned}$$

Sabemos então que, dado  $\varepsilon > 0$ , existem  $\delta_1 > 0$  e  $\delta_2 > 0$  tais que, se  $0 < |t - a| < \delta_i$  e  $t \in A$ , então  $|\alpha_i(t) - L_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ , para  $i = 1$  e  $i = 2$ . Muito bem, agora estamos prontos para terminar a demonstração:

Dado  $\varepsilon > 0$ , escolha  $\delta$  como o menor entre  $\delta_1 > 0$  e  $\delta_2 > 0$ . Então, se  $0 < |t - a| < \delta$  e  $t \in A$ , então  $|\alpha_i(t) - L_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ ,  $i = 1$  ou  $i = 2$ . Assim,  $M < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ . Portanto,  $\|\alpha(t) - L\| \leq \sqrt{2}M < \sqrt{2} \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} = \varepsilon$ .

## COMENTÁRIO FINAIS

Essa foi uma aula bastante atípica. Você foi apresentado a um conteúdo de Cálculo I e a quantidade de informação teórica é muito grande. No entanto, este conteúdo é muito importante para os matemáticos e essa não deverá ser a única oportunidade em que você lidará com essas idéias. Portanto, você não deve esperar um completo domínio do conteúdo numa primeira leitura. A apresentação buscou ser a mais amigável possível, sem deixar de encarar as dificuldades. Não se espera que você seja capaz de desenvolver argumentos como os que foram apresentados nos Exemplos 2.1, 2.2 e 2.3. Nem por isso deixe de lê-los atentamente. Eles o ajudarão a entender as idéias expostas anteriormente.

Do ponto de vista prático, você reviu o Teorema 2.1, que é uma boa ferramenta de cálculo de limites, como você pode ver no Exemplo 2.4, e aprendeu a lidar com os limites e a continui-



dade de funções vetoriais de uma variável real. Basta considerar a situação coordenada a coordenada, segundo o enunciado do Teorema 2.2 e exemplificado em 2.5.

Aqui estão alguns exemplos para você experimentar os seus progressos:

### Exercício 2.1.

1. Use a noção de distância para resolver as seguintes equações e inequações.

- a.  $|x - 3| = 5$ ;
- b.  $|x - 1| \leq 1/2$ ;
- c.  $0 < |x - 2| < 4$ ;
- d.  $|x + 3| > 2$ ;
- e.  $1 < |x + 1| < 2$ ;
- f.  $\|(x, y)\| = \sqrt{2}$ ;
- g.  $0 < \|(x, y) - (1, 0)\| \leq 2$ ;
- h.  $\|(x, y) - (2, 2)\| > 4$ ;
- i.  $1 < \|(x, y) - (2, 0)\| < 2$ ;
- j.  $\|(x, y, z) - (1, 0, 0)\| < 1$ .

2. Calcule os seguintes limites.

- a.  $\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{t^2 - 2}{t + 1}, \frac{\sin t}{t} \right)$ ;
- b.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{t}{t^2 + 1}, \frac{2t - 3}{\sqrt{t^2 + 4}} \right)$ ;
- c.  $\lim_{t \rightarrow \sqrt{2}} \left( \frac{t^2 - 2}{t - \sqrt{2}}, \frac{e^{\sqrt{2}} - e^t}{t^3 - 2\sqrt{2}} \right)$ ;
- d.  $\lim_{t \rightarrow 1} \left( \frac{t^3 - 1}{t^2 - 1}, \frac{t - 1}{\sqrt[3]{t} - 1}, \frac{\operatorname{tg} \pi(t - 1)}{t - 1} \right)$ .

3. Calcule os valores de  $a$  e  $b$  tais que a função

$$\alpha(t) = \begin{cases} (at + b, 4t - 3), & \text{se } t \geq 1 \\ (2t + 3, 2at^2 - b), & \text{se } t < 1 \end{cases}$$

seja contínua.

4. Sejam  $I, J \subset \mathbb{R}$  dois intervalos,  $f : I \longrightarrow J$  uma função contínua em  $a \in I$ , com  $f(a) = b \in J$ . Seja  $\alpha : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$  uma função vetorial contínua em  $b \in J$ . Mostre que a função vetorial  $\alpha \circ f : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  é contínua em  $a \in I$ .

Note que  $\alpha \circ f(t) = (\alpha_1 \circ f(t), \alpha_2 \circ f(t), \alpha_3 \circ f(t))$ .

# Aula 3

## DERIVADAS DE FUNÇÕES VETORIAIS

---

### Objetivo

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

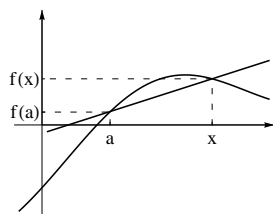
- 1 aprender o conceito de derivada de uma função vetorial, de uma variável real, assim como a sua interpretação geométrica.

## INTRODUÇÃO

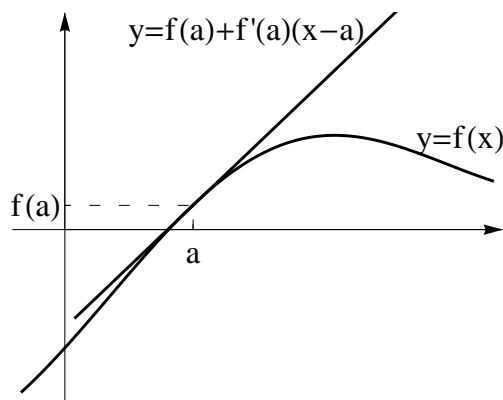
A derivada de uma função  $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ , em um ponto  $x = a \in I$ , é o limite do quociente de Newton

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

e a sua interpretação geométrica é a seguinte: o número  $f'(a)$  é a inclinação, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de  $f$ , no ponto  $(a, f(a))$ .



O termo  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  é conhecido como o quociente de Newton. Ele está definido sempre que  $x \neq a$  e é a inclinação da reta determinada pelos pontos  $(a, f(a))$  e  $(x, f(x))$ . Esta reta é 'secante' ao gráfico de  $f$ .



Em particular, se a função  $s = s(t)$  descreve a posição de uma partícula em movimento sobre uma trajetória retilínea, a derivada de  $s$  em  $t_0$ ,

$$s'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0},$$

é o limite, quando  $t$  tende a  $t_0$ , das velocidades médias

$$v_m = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Portanto, podemos dizer que  $s'(t_0)$  é a velocidade da partícula no preciso instante  $t_0$ . Essa é, basicamente, a interpretação da derivada como uma taxa de variação. Muito bem, queremos agora estender este conceito para as funções vetoriais, de uma variável real.

## DERIVADA

### Definição 3.1.

Seja  $A \subset \mathbb{R}$  uma união de intervalos abertos,  $\alpha : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , uma função vetorial, e seja  $a \in A$ .

Dizemos que  $\alpha$  tem derivada em  $t = a$  se o limite

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{\alpha(t) - \alpha(a)}{t - a}$$

existe. Neste caso, ele será denotado por  $\alpha'(a) \in \mathbb{R}^n$ .

Lembre-se de que o limite anterior é um limite vetorial. Na verdade, ele poderia ser escrito na forma

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{1}{t - a} (\alpha(t) - \alpha(a)),$$

pois o termo  $t - a$  é um número e  $\alpha(t) - \alpha(a)$  é um vetor.

A notação

$$\frac{d\alpha}{dt}(a) = \lim_{t \rightarrow a} \frac{\alpha(t) - \alpha(a)}{t - a}$$

também é usada.

Se  $\alpha$  tem derivada em  $t = a$ , dizemos que  $\alpha$  é *diferenciável* em  $a$ . Se  $\alpha$  tem derivada em todos os pontos de seu domínio, dizemos que  $\alpha$  é diferenciável em  $A$  ou, simplesmente, que  $\alpha$  é diferenciável.

Quando isso ocorre, podemos definir  $\alpha' : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  a *função derivada de  $\alpha$* .

Em termos práticos, é muito fácil calcular a derivada dessas funções. Veja porque:

### Teorema 3.1.

Seja  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$  uma função vetorial definida em  $A \subset \mathbb{R}$ . A função  $\alpha$  é diferenciável em  $a \in A$  se, e somente se, cada uma de suas funções coordenadas  $\alpha_i(t)$  for diferenciável em  $t = a$ . Além disso,

$$\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t), \dots, \alpha'_n(t)).$$

### ***Demonstração***

A prova desse teorema é quase imediata, se lembrarmos do teorema que descreve o limite das funções vetoriais, apresentado na aula anterior.

Realmente, a prova para  $n = 2$  é a seguinte:

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= \lim_{t \rightarrow a} \frac{\alpha(t) - \alpha(a)}{t - a} = \\ &= \lim_{t \rightarrow a} \left( \frac{\alpha_1(t) - \alpha_1(a)}{t - a}, \frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(a)}{t - a} \right) = \\ &= \left( \lim_{t \rightarrow a} \frac{\alpha_1(t) - \alpha_1(a)}{t - a}, \lim_{t \rightarrow a} \frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(a)}{t - a} \right) = \\ &= (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t)).\end{aligned}$$

Resumindo, derivamos coordenada a coordenada.

#### **Exemplo 3.1.**

Vamos calcular a função derivada e a derivada em  $t = 1$  da função

$$\alpha(t) = (\cos 2\pi t, e^{2t}, t^2 + 2t - 1).$$

Primeiro, calculamos a função derivada, usando as regras de derivação aprendidas no Cálculo I.

$$\alpha'(t) = (-2\pi \operatorname{sen} 2\pi t, 2e^{2t}, 2t + 2).$$

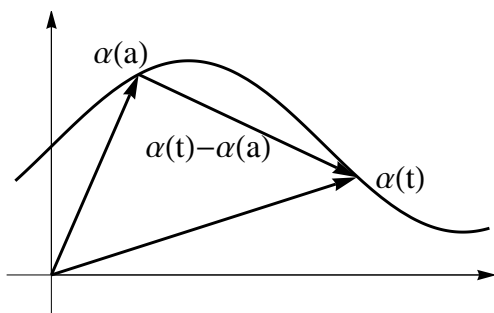
Agora, usando a função derivada, calculamos a derivada em  $t = 1$ :

$$\alpha'(1) = (0, 2e^2, 4).$$

## INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Lembre-se de que associamos a cada curva  $\alpha(t)$  o seu traço, contido em  $\mathbb{R}^n$ .

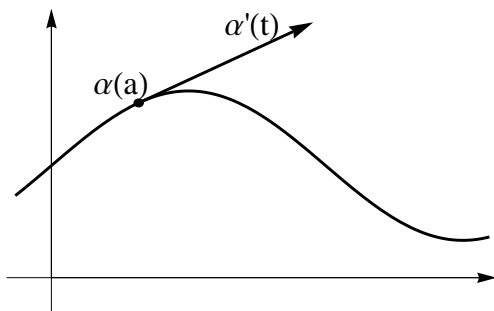
Muito bem, o vetor  $\frac{\alpha(t) - \alpha(a)}{t - a} = \frac{1}{t - a}(\alpha(t) - \alpha(a))$  é um múltiplo de  $(\alpha(t) - \alpha(a))$ . Portanto, eles são paralelos. Veja a figura a seguir.



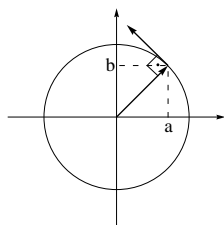
Quando a função  $\alpha$  é diferenciável em  $t = a$ ,

$$\alpha'(a) = \lim_{t \rightarrow a} \frac{\alpha(t) - \alpha(a)}{t - a}$$

pode ser interpretado como o vetor tangente ao traço de  $\alpha$  no ponto  $\alpha(a)$ .



**Exemplo 3.2.**



Do ponto de vista da Álgebra Linear, isto é fácil de ver, pois os vetores  $(a, b)$  e  $(-b, a)$  são ortogonais, uma vez que o produto interno deles é nulo:

$$\langle (a, b), (-b, a) \rangle = -ab + ba = 0.$$

Vamos mostrar que o vetor  $(-b, a)$  é tangente à circunferência do círculo de raio 1, centrado na origem, no ponto  $P$ , de coordenadas  $(a, b)$ .

Seja  $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$  uma parametrização da circunferência do tal círculo e seja  $t_0$  um número tal que  $\alpha(t_0) = (a, b)$ .

$$\text{Isto é, } t_0 \text{ é tal que } \begin{cases} a = \cos t_0 \\ b = \sin t_0. \end{cases}$$

Mas, então,  $\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t)$  e  $\alpha'(t_0) = (-\sin t_0, \cos t_0) = (-b, a)$ , que é tangente a curva.

**Exemplo 3.3.**

Mesmo quando a função  $\alpha$  é diferenciável, o seu traço pode apresentar ‘quinas’ ou ‘dobras’. Isso parece estranho, se levarmos em conta nossa experiência com gráficos de funções reais, de uma variável real, estudadas no Cálculo I.

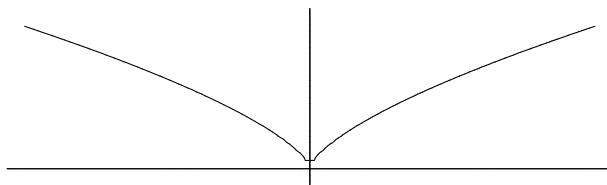
Vamos analisar o exemplo da cúspide

$$\alpha(t) = (t^3, t^2),$$

que é diferenciável em toda a reta real  $\mathbb{R}$  e cuja derivada é

$$\alpha'(t) = (3t^2, 2t).$$

Veja a figura de seu traço.



Apesar de estranho, não há nada errado aqui. Devemos lembrar que a figura é o traço de uma curva e não é o seu gráfico.



Portanto, traços de curvas diferenciáveis podem apresentar, eventualmente, dobras ou quinas.

Está na hora da famosa pergunta: o que ocorre com a interpretação geométrica da derivada num caso como este?

Lembre-se do que dissemos anteriormente: a derivada  $\alpha'(t_0)$  é o vetor tangente ao traço da curva no ponto  $\alpha(t_0)$ . Como podemos achar um vetor tangente à curva  $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ , no ponto  $(0, 0)$ ? Isso é possível se o vetor for nulo. E isso realmente ocorre: como  $\alpha'(t) = (3t^2, 2t)$ ,  $\alpha'(0) = (0, 0)$ .

Note que

$$\alpha'(t) = (0, 0) \iff \begin{cases} 3t^2 = 0 \\ 2t = 0 \end{cases} \iff t = 0.$$

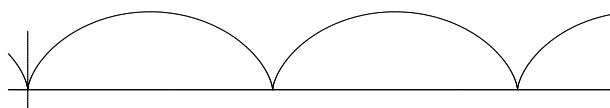
Ou seja,  $(0, 0)$  é o único ponto do traço no qual o vetor ‘tangente’ é o vetor nulo.

Vamos estudar mais um exemplo em que fenômeno ocorre.

#### Exemplo 3.4.

Seja  $\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$  uma cicloide.

Aqui está o traço dessa cicloide.



Vamos descobrir em quais pontos da curva ela toca o eixo  $Ox$ . Isto é, vamos calcular os valores de  $t$  para os quais  $\alpha'(t) = \vec{0}$ .

Primeiro, o cálculo da função derivada:

$$\alpha'(t) = (1 - \cos t, \sin t).$$

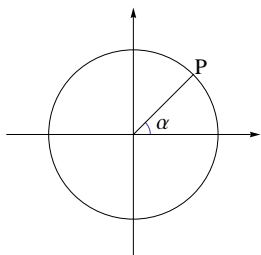
Para que  $\alpha'(t)$  seja igual ao vetor nulo, as funções coordenadas de  $\alpha'(t)$  devem ser, simultaneamente, iguais a zero. Isso

Cicloide é uma curva descrita por um ponto na circunferência de um círculo que gira sobre uma reta. Você deve ter estudado este tipo de curva, em detalhes, no curso de Geometria Analítica.

Estas curvas foram estudadas por, entre outros, Galileu Galilei, que teve sua atenção despertada para elas quando viu passar uma carruagem com um lenço amarrado em uma de suas rodas.

nos dá um sistema de equações:

$$\begin{cases} 1 - \cos t = 0 \\ \sin t = 0. \end{cases}$$



A cada ponto  $P = (a, b)$  da circunferência do círculo de raio 1, centrado na origem, corresponde uma família de ângulos

na forma  $\theta + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , tais que  $\cos(\theta + 2\pi k) = a$  e  $\sin(\theta + 2\pi k) = b$ .  
 $\|\alpha'(t)\|^2 =$   
 $\alpha_1'(t)^2 + \alpha_2'(t)^2 =$   
 $(1 - \cos t)^2 +$   
 $\sin^2 t =$   
 $1 - 2 \cos t + \cos^2 t +$   
 $\sin^2 t = 2 - 2 \cos t.$

Ao considerarmos a interpretação física, onde  $\alpha(t)$  descreve o movimento de uma partícula ao longo do traço da curva, então  $\alpha'(t)$  é a velocidade da partícula, que é tangente a essa trajetória.

Este sistema não é difícil de ser resolvido, pois  $\cos t = 1$  e  $\sin t = 0$  se, e somente se,  $t$  é um múltiplo de  $2\pi$ .

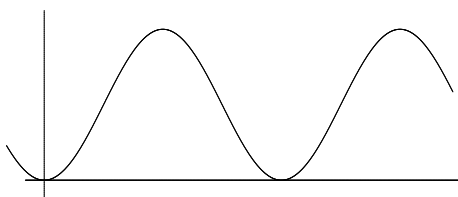
Isto é,  $\alpha'(t) = \vec{0}$  se, e somente se,  $t = 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$ .

Assim, os pontos  $\alpha(2k\pi) = (2k\pi, 0)$  são aqueles nos quais a derivada é igual ao vetor nulo. Estes são os pontos onde o traço da função toca o eixo  $Ox$ , de maneira análoga à cúspide, quando esta toca o eixo  $Ox$ , a origem.

Vamos, agora, considerar a função

$$f(t) = \|\alpha'(t)\|^2 = 2 - 2 \cos t.$$

Veja o gráfico de  $f$ , uma função de período  $2\pi$ :



Essa função assume seu valor mínimo 0 nos pontos onde  $t = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , que são, exatamente, os pontos nos quais a derivada de  $\alpha$  é o vetor nulo.

Em contrapartida,  $f$  assume o seu valor máximo 4 nos pontos onde  $t = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ , os múltiplos ímpares de  $\pi$ .

Estes pontos são aqueles onde a derivada  $\alpha'(t)$  atinge seu comprimento máximo. Se considerarmos que  $\alpha$  esteja descrevendo o movimento de uma partícula, percorrendo a curva, tendo a sua posição determinada por  $\alpha(t)$ , no instante  $t$ , a derivada  $\alpha'(t)$  é a velocidade (vetorial) dessa partícula, nesse mesmo instante. Nossos cálculos indicam que nos instante  $t = 2k\pi$  a partícula teria velocidade nula. Essa seria a única forma da partícula passar, diferencialmente, por cada uma dessas dobras. Isso é, fazendo nesses pontos uma completa parada. Além

disso, nos instantes  $t = (2k + 1)\pi$ , essa velocidade assume o seu comprimento máximo. Esses pontos ocorrem no ponto mais alto de cada arco da cicloide, onde a velocidade é um vetor paralelo ao eixo  $Ox$ .

## RETAS TANGENTES

Na Aula 1, você aprendeu a determinar uma equação paramétrica da reta  $r$  que contém o ponto  $P$  e é paralela ao vetor  $\vec{v} \neq \vec{0}$ . Ela é dada por

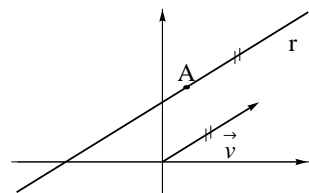
$$r(t) = t\vec{v} + P.$$

Vamos usar essa fórmula para determinar equações paramétricas de retas tangentes aos traços de curvas.

Seja  $\alpha : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função diferenciável em  $t = a$  e tal que  $\alpha'(a) \neq \vec{0}$ .

Uma equação paramétrica da reta tangente a  $\alpha$ , no ponto  $\alpha(a)$ , é

$$r(t) = t\alpha'(a) + \alpha(a).$$



Veja como isso funciona.

### Exemplo 3.5.

Vamos calcular uma equação paramétrica da reta tangente à helicóide

$$\alpha(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t),$$

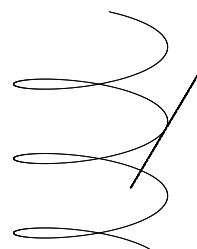
no ponto  $\alpha(1/4)$ .

Primeiro calculamos a função derivada de  $\alpha$ :

$$\alpha'(t) = (-2\pi \sin 2\pi t, 2\pi \cos 2\pi t, 1).$$

Agora, vamos calcular os vetores  $\alpha(1/4)$  e  $\alpha'(1/4)$ .

$$\alpha\left(\frac{1}{4}\right) = \left(0, 1, \frac{1}{4}\right)$$



$$\alpha'\left(\frac{1}{4}\right) = (-2\pi, 0, 1).$$

A equação paramétrica correspondente a esses vetores fica

$$\begin{aligned} r(t) &= \alpha\left(\frac{1}{4}\right) + t\alpha'\left(\frac{1}{4}\right) \\ r(t) &= \left(0, 1, \frac{1}{4}\right) + t(-2\pi, 0, 1) \\ r(t) &= \left(-2\pi t, 1, t + \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

**Exemplo 3.6.**

Vamos calcular as equações para as retas tangentes ao traço da curva

$$\alpha(t) = (t^3 - t, t^2)$$

nos pontos de interseção com os eixos.

A primeira etapa do trabalho consiste em determinar esses pontos. Isso ocorre quando alguma das coordenadas de  $\alpha(t)$  é igual a zero.

Se  $x = 0$ , temos a interseção com o eixo  $Oy$ .

$$x = 0 \iff t^3 - t = t(t^2 - 1) = 0.$$

Portanto, a curva intercepta o eixo  $Oy$  nos pontos  $(0, 0)$  e  $(0, 1)$ , quando  $t = 0, 1$  e  $-1$ . Em particular, observamos que  $\alpha(1) = \alpha(-1)$ .

Se  $y = 0$ , temos a interseção com o eixo  $Ox$ .

$$y = 0 \iff t^2 = 0.$$

Assim, a curva intercepta o eixo  $Ox$  na origem.

Nosso problema consiste em calcular equações de retas tangentes à curva em  $\alpha(1) = \alpha(-1)$  e  $\alpha(0)$ , quando  $t = -1, 0$  e  $1$ .

A derivada de  $\alpha$  é  $\alpha'(t) = (3t^2 - 1, 2t)$ . Consequentemente,  $\alpha'(-1) = (2, -2)$ ,  $\alpha'(0) = (-1, 0)$  e  $\alpha'(1) = (2, 2)$ .

As equações das retas serão dadas pela fórmula

$$r(t) = (x(t), y(t)) = t\alpha'(a) + \alpha(a).$$

$$a = -1 \quad r(t) = t(2, -2) + (0, 1) = (2t, 1 - 2t);$$

$$a = 0 \quad r(t) = t(-1, 0) + (0, 0) = (-t, 0);$$

$$a = 1 \quad r(t) = t(2, 2) + (0, 1) = (2t, 1 + 2t).$$

Lembre-se de que quando  $n = 2$ , podemos achar equações cartesianas para a reta, eliminando o parâmetro  $t$ . Veja:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - 2t \end{cases} \implies y = 1 - x;$$

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 0 \end{cases} \implies y = 0 \text{ (eixo } Ox);$$

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 2t \end{cases} \implies y = 1 + x.$$

Aqui está o desenho da curva e de suas tangentes:



## RETAS TANGENTES A CURVAS DADAS EM COORDENADAS POLARES

Considere o seguinte problema: uma certa curva é dada, em coordenadas polares, pela equação

$$r = r(\theta),$$

na qual  $r(\theta)$  é uma função diferenciável. Como calcular uma equação da reta tangente à curva no ponto determinado por  $\theta = a$ ?

Veja como podemos resolver o problema. Podemos obter uma parametrização da curva, em termos das coordenadas cartesianas, fazendo

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta) \cos \theta \\ y(\theta) = r(\theta) \sin \theta. \end{cases}$$

Portanto, tudo o que precisamos fazer é calcular a equação da reta tangente à curva

$$\alpha(\theta) = (r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin(\theta)).$$

### Exemplo 3.7.

Vamos calcular a equação da reta tangente à limaçon  $r = 1 + 2 \cos(\theta)$ , no ponto onde  $\alpha(\pi/3)$ .

Para isso, consideramos

$$\alpha(\theta) = ((1 + 2 \cos \theta) \cos \theta, (1 + 2 \cos \theta) \sin \theta)$$

e calculamos  $\alpha(\pi/3)$  e  $\alpha'(\pi/3)$ .

$$\alpha(\theta) = ((1 + 2 \cos \theta) \cos \theta, (1 + 2 \cos \theta) \sin \theta)$$

$$\alpha\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\left(1 + 2 \cdot \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2}, \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{2}\right) \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (1, \sqrt{3}).$$

$$\alpha'(\theta) = (-2 \sin \theta \cos \theta - (1 + 2 \cos \theta) \sin \theta, -2 \sin^2 \theta + (1 + 2 \cos \theta) \cos \theta)$$

$$\begin{aligned} \alpha'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \left(-2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{2}\right) \frac{\sqrt{3}}{2}, -2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2}\right) = \\ &= \left(-3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Ou seja, a reta que queremos contém o ponto  $(1, \sqrt{3})$  e é paralela ao vetor  $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ .

Uma equação paramétrica é dada por

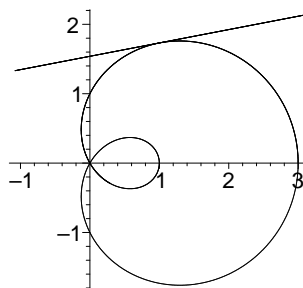
$$\begin{cases} x(t) = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}t \\ y(t) = \sqrt{3} - \frac{t}{2}. \end{cases}$$

Podemos achar uma equação cartesiana dessa reta, eliminando  $t$ . Por exemplo, podemos reescrever a segunda equação como

$t = 2(\sqrt{3} - y)$  e substituí-la na primeira, obtendo

$$y = \frac{\sqrt{3}}{9}(x + 8).$$

Veja a figura da curva e da reta tangente.



## Resumo

Nesta aula, você aprendeu a calcular a derivada de funções vetoriais e como usá-la para determinar retas tangentes a curvas. Do ponto de vista prático, os exercícios não são muito difíceis, pois essencialmente derivamos coordenada a coordenada. A parte mais complicada é, realmente, traçar as curvas a partir das equações. Mas essa parte foge do escopo de nosso curso. Além disso, você já deve ter acumulado alguma experiência com as aulas sobre curvas que já vimos, bem como aquelas vistas ou as que serão vistas, na Geometria Analítica.

Agora é hora de você praticar o que aprendeu.

### Exercício 3.1.

1. Calcule as funções derivadas das seguintes funções.

a.  $\alpha(t) = (t^2 + 2, t^3 - 3t);$

b.  $\beta(t) = (t \cos 2t, 6 \sin 3t);$

c.  $\gamma(t) = (\sinh t, \cosh t, t^2).$

2. Determine os pontos onde a derivada da curva dada é igual ao vetor nulo.

a.  $\alpha(t) = (2x^3 + 3x^2 - 12x, x^3 - 3x);$

b.  $\beta(t) = (3 \cos t + \cos 3t, 3 \sin 3t - \sin 3t);$

c.  $\gamma(t) = (t \ln t^2 - 2t, 2t^3 - 9t^2 + 12t).$

– Você pode resolver uma equação transcendental, como  $\cos t = \cos 3t$ , esboçando os gráficos  $y = \cos t$  e  $y = \cos 3t$  sobrepostos, descobrindo assim os pontos onde eles coincidem. Além disso, como as funções são periódicas, basta considerar um intervalo de periodicidade para determinar completamente as soluções.

3. Determine o(s) ponto(s) onde a curva dada é tangente à reta indicada.

a.  $\alpha(t) = (t^3 + 3t, t^2 + 4t), \quad r(t) = (3t + 3, t - 4);$

b.  $\beta(t) = (\cos \pi t, \sin \pi t), \quad r(t) = (2 + t, t - 1).$



**a. Solução:**

Para que a reta tangente à curva  $\alpha(t)$  seja paralela à reta  $(3t+3, t-4)$ , é preciso que a derivada de  $\alpha(t)$  seja um múltiplo não-nulo do vetor diretriz  $(3, 1)$  da reta  $r$ . Isto é, basta que exista um número  $\lambda$  tal que

$$\alpha'(t) = \lambda(3, 1).$$

Como  $\alpha'(t) = (3t^2 + 3, 2t + 4)$ , isso significa que queremos resolver o sistema

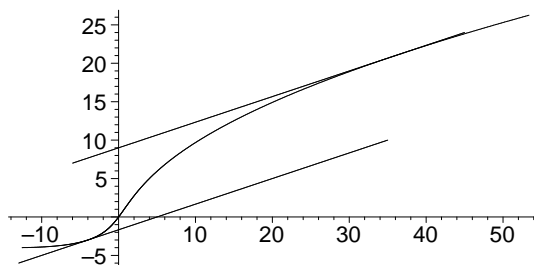
$$\begin{cases} 3t^2 + 3 = 3\lambda \\ 2t + 4 = \lambda. \end{cases}$$

Podemos fazer isso eliminando  $\lambda$ , substituindo  $\lambda = 2t + 4$  na primeira equação:

$$3t^2 + 3 = 3(2t + 4) \implies t^2 - 2t - 3 = 0.$$

Essa equação admite as soluções  $t = -1$  e  $t = 3$ . Portanto, os pontos pedidos no exercício são  $\alpha(-1) = (-4, -3)$  e  $\alpha(3) = (36, 21)$ .

A figura não é, exatamente, interessante. No entanto, aqui está.



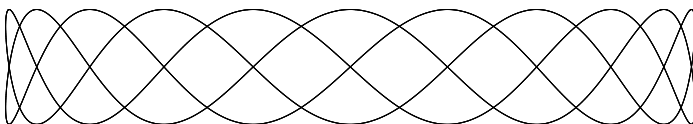
4. Calcule uma equação paramétrica da reta tangente às curvas nos pontos indicados. No caso das curvas planas, encontre também uma equação cartesiana da reta.

a.  $\alpha(t) = (t^2, 3t + 1), \quad t = 1;$

b.  $\beta(t) = \left(\frac{1}{t}, t, t^2\right), \quad t = -1;$

c.  $\gamma(t) = (t, \cos t, \sin t) \quad t = \pi/6;$

d.  $\mu(t) = (\sin 3t, \sin 2t), \quad t = \pi/2.$





# Aula 4

## FUNÇÕES VETORIAIS – INTEGRAIS

---

### Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 conhecer a integral de funções vetoriais;
- 2 aprender a calcular comprimentos de curvas parametrizadas;
- 3 aprender a calcular áreas de regiões delimitadas por curvas planas dadas em coordenadas polares, assim como o comprimento de tais curvas.

## INTEGRAIS DE FUNÇÕES VETORIAIS

Agora que você sabe derivar as funções vetoriais, deve estar fazendo a seguinte pergunta: o que pode ser dito a respeito de suas integrais? Muito bem, veja o próximo exemplo.

### Exemplo 4.1.

Sabendo que uma partícula se move ao longo de uma curva no espaço, com velocidade  $\vec{v} = (2t, -4t, 1)$  e que a sua posição no instante  $t = 0$  era  $(1, 1, 0)$ , o que podemos dizer sobre a sua posição num instante  $t > 0$ ?

Bem, sabemos que  $\vec{v}(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}(t)$  e, portanto, gostaríamos de dizer que

$$s(t) = \int \vec{v}(t) dt$$

com a extra-informação que  $s(0) = (1, 1, 0)$ .

Isto é, queremos calcular uma *primitiva vetorial*. Para isto, basta integrar  $\vec{v}(t)$  coordenada a coordenada:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int (2t, -4t, 1) dt = \left( \int 2t dt, \int -4t dt, \int dt \right) = \\ &= (t^2 + C_1, -2t^2 + C_2, t + C_3). \end{aligned}$$

Para que  $s(t)$  satisfaça a condição inicial  $s(0) = (1, 1, 0)$ , temos que fazer  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 1$  e  $C_3 = 0$ . Assim, a resposta à pergunta inicial é

$$s(t) = (t^2 + 1, 1 - 2t^2, t).$$

A notação  $\vec{v}(t) = 2t\vec{i} - 4t\vec{j} + \vec{k}$ , onde  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$  e  $\vec{k} = (0, 0, 1)$  é conveniente e muito usada.

Nossos cálculos, com essa nova notação, ficam

$$\begin{aligned} s(t) &= \int \vec{v}(t) dt = \int 2t dt \vec{i} - \int 4t dt \vec{j} + \int dt \vec{k} = \\ &= (t^2 + C_1)\vec{i} + (C_2 - 2t^2)\vec{j} + (t + C_3)\vec{k}. \end{aligned}$$

Como  $s(t) = \vec{i} + \vec{j}$ , temos  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 1$  e  $C_3 = 0$ . Portanto,

$$s(t) = (t^2 + 1)\vec{i} + (1 - 2t^2)\vec{j} + t\vec{k}.$$


Ao longo desta aula, estaremos sempre considerando funções que sejam, pelo menos, contínuas.

Realmente, se quisermos calcular a integral de uma função vetorial  $\alpha(t)$ , que será denotada por  $\int \alpha(t) dt$ , basta que integremos coordenada a coordenada. Em particular, se

$$\alpha(t) = \alpha_1(t)\vec{i} + \alpha_2(t)\vec{j} + \alpha_3(t)\vec{k},$$

então

$$\int_a^b \alpha(t) dt = \left( \int_a^b \alpha_1(t) dt \right) \vec{i} + \left( \int_a^b \alpha_2(t) dt \right) \vec{j} + \left( \int_a^b \alpha_3(t) dt \right) \vec{k}. \quad (I)$$

 Na verdade, a integral da função vetorial  $\alpha(t)$ , sobre um intervalo  $[a, b]$ , é definida em termos de somas de Riemann, nos mesmos moldes que as integrais de Riemann de funções reais, de uma variável real, tomando limite de somas sobre as partições do intervalo. A única diferença é que lá fazemos somas de números, enquanto aqui temos somas vetoriais.

Uma vez isto estabelecido, pode-se provar que a igualdade acima, que usamos para calcular as integrais vetoriais, é verdadeira.

Antes de prosseguir, que tal você fazer uma tentativa? Aqui está:

#### Exercício 4.1.

1. A aceleração de uma partícula em movimento, no instante  $t \geq 0$ , é dada por

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t) = 12 \cos 2t \vec{i} - 8 \sin 2t \vec{j} + 12t \vec{k}.$$

Sabendo que  $\vec{v}(0) = \vec{0}$  e que  $s(0) = \vec{0}$ , determine a velocidade e a posição da partícula.

O fato que você verá a seguir se deve às propriedades de limite e do fato

$$|\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_n| \leq |\vec{v}_1| + |\vec{v}_2| + \cdots + |\vec{v}_n|.$$

Ele afirma que, para qualquer função contínua  $\alpha(t)$ , sobre um intervalo  $[a, b]$ ,

$$\left| \int_a^b \alpha(t) dt \right| \leq \int_a^b |\alpha(t)| dt. \quad (II)$$

Você encontrará este tipo de desigualdade diversas vezes em sua carreira de matemático. Por agora, basta observar o seguinte exemplo, que ilustra a situação em que a desigualdade é estrita.

**Exemplo 4.2.**

Vamos mostrar que a desigualdade (II) é estrita no caso em que  $\alpha(t) = (1, t)$ , com  $t \in [0, 1]$ .

Primeiro, calculamos  $\int_0^1 \alpha(t) dt$ .

$$\int_0^1 \alpha(t) dt = \int_0^1 dt \vec{i} + \int_0^1 t dt \vec{j} = \vec{i} + \frac{1}{2} \vec{j}.$$

Portanto,

$$\left| \int_0^1 \alpha(t) dt \right| = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Agora, vamos calcular o outro termo da inequação. Ora, como  $|\alpha(t)| = \sqrt{1 + t^2}$ , temos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |\alpha(t)| dt &= \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt \\
&= \frac{1}{2} \left( t \sqrt{1+t^2} + \ln |t + \sqrt{1+t^2}| \right) \Big|_0^1 = \\
&= \frac{1}{2} (\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})).
\end{aligned}$$

Para resolver esta integral, usamos a substituição trigonométrica  $t = \operatorname{tg} \theta$ .

A desigualdade estrita se verifica, pois

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^1 \alpha(t) dt \right| &= \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,1180 < \int_0^1 |\alpha(t)| dt \\
&= \frac{1}{2} (\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})) \approx 1,1478.
\end{aligned}$$

## INTERPRETAÇÃO FÍSICA DA INTEGRAL – IMPULSO

Seja  $\vec{F}(t)$  uma força que atua sobre uma partícula. Chama-se o *impulso de  $\vec{F}$*  no intervalo  $[t_1, t_2]$  o vetor

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt.$$

Suponha que a partícula tenha uma massa  $m$  e que se move devido à ação da força  $\vec{F}$ . O impulso de  $\vec{F}$  é igual a  $m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$ , onde  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  são as velocidades da partícula nos respectivos instantes  $t_1$  e  $t_2$ .

Realmente, a Lei de Newton nos diz que  $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ . Portanto,

$$\begin{aligned}
I &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} m \vec{a}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\vec{v}}{dt}(t) dt = \\
&= m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{v}}{dt}(t) dt = m \vec{v}(t) \Big|_{t_1}^{t_2} = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1).
\end{aligned}$$

## COMPRIMENTO DE UMA CURVA $\alpha(t)$

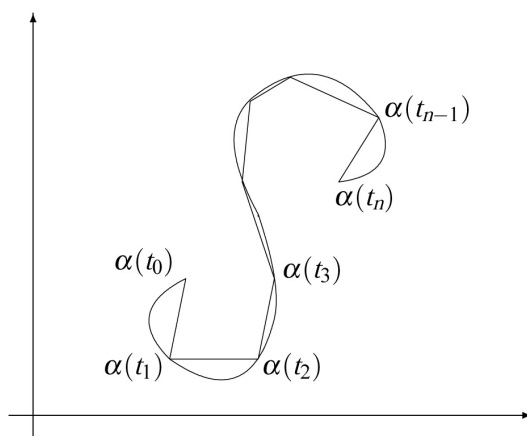
Em Cálculo II, você aprendeu a calcular o comprimento do gráfico de uma função contínua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . A fórmula que define este comprimento é

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Agora, queremos estender esta definição para o caso de traços de curvas. Isto é, dada uma função vetorial  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , de classe  $C^1$ , queremos estabelecer uma fórmula que defina o comprimento de seu traço e que seja uma extensão natural da fórmula que já conhecemos.

A motivação é a mesma que foi usada anteriormente. Vamos considerar, por simplicidade, o caso que  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Vamos aproximar a curva por uma seqüência de segmentos de retas, que chamamos de uma linha poligonal.

Seja  $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$  uma partição  $\mathcal{P}$  do intervalo  $[a, b]$ . Agora, consideramos os segmentos de reta que conectam os pontos  $\alpha(t_{i-1})$  até  $\alpha(t_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Veja a figura.



O comprimento desta poligonal é

$$L(\mathcal{P}) = |\alpha(t_1) - \alpha(t_0)| + |\alpha(t_2) - \alpha(t_1)| + \dots + |\alpha(t_n) - \alpha(t_{n-1})|.$$



Veja uma dessas parcelas:

$$|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| = \sqrt{(\alpha_1(t_i) - \alpha_1(t_{i-1}))^2 + (\alpha_2(t_i) - \alpha_2(t_{i-1}))^2}.$$

Podemos usar o teorema do valor médio para garantir a existência de números  $\xi_i$  e  $\zeta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ , tais que

$$\begin{aligned}\alpha_1(t_i) - \alpha_1(t_{i-1}) &= \alpha'_1(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \\ \alpha_2(t_i) - \alpha_2(t_{i-1}) &= \alpha'_2(\zeta_i)(t_i - t_{i-1}).\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| &= \sqrt{(\alpha'_1(\xi_i)(t_i - t_{i-1}))^2 + (\alpha'_2(\zeta_i)(t_i - t_{i-1}))^2} = \\ &= \sqrt{(\alpha'_1(\xi_i))^2 + (\alpha'_2(\zeta_i))^2} |t_i - t_{i-1}| = \\ &= \sqrt{(\alpha'_1(\xi_i))^2 + (\alpha'_2(\zeta_i))^2} \Delta t_i.\end{aligned}$$

Portanto, o comprimento da linha poligonal pode ser escrita como

$$L(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(\alpha'_1(\xi_i))^2 + (\alpha'_2(\zeta_i))^2} \Delta t_i.$$

Como  $|\alpha'(t)| = \sqrt{(\alpha'_1(t))^2 + (\alpha'_2(t))^2}$ , a equação acima nos motiva a usar a seguinte definição para o comprimento do traço da curva  $\alpha$ , sobre o intervalo  $[a, b]$ :

$$L(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt.$$

A primeira observação é que esta definição é a extensão da definição dada em Cálculo II, pois a curva  $\alpha(t) = (t, f(t))$  é uma parametrização do gráfico de  $f$ , no intervalo  $[a, b]$ . Neste caso,  $\alpha'_1(t) = 1$  e  $\alpha'_2(t) = f'(t)$ .

Veja como ela funciona num exemplo.

**Exemplo 4.3.**

Vamos calcular o comprimento da circunferência do círculo de raio  $r$ .

Primeiro, consideramos a parametrização  $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$ , com  $t \in [0, 2\pi]$ .

Agora, calculamos  $\alpha'(t) = (-r \sin t, r \cos t)$ , para poder calcular

$$\begin{aligned} |\alpha'(t)| &= \sqrt{(\alpha'_1(t))^2 + (\alpha'_2(t))^2} = \\ &= \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} = r. \end{aligned}$$

Portanto, o comprimento do traço de  $\alpha$  é

$$\int_0^{2\pi} |\alpha'(t)| dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r,$$

como sabemos.

**Exercício 4.2.**

Calcule o comprimento da curva  $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ , com  $t \in [0, 2k\pi]$ .

**CURVAS EM COORDENADAS POLARES**

Veja como fica a fórmula do comprimento da curva quando ela é dada em coordenadas polares.

Seja  $r = r(\theta)$  uma curva dada em coordenadas polares, com  $a < \theta < b$ . Para calcularmos seu comprimento, usamos a parametrização

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta) \cos \theta \\ y(\theta) = r(\theta) \sin \theta. \end{cases}$$

Derivando estas equações em relação a  $\theta$ , obtemos

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \sin \theta \\ \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \sin \theta + r \cos \theta. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{dx^2}{d\theta} + \frac{dy^2}{d\theta} &= \frac{dr^2}{d\theta} \cos^2 \theta - 2r \frac{dr}{d\theta} \cos \theta \sin \theta + r^2 \sin^2 \theta + \\ &\quad + \frac{dr^2}{d\theta} \sin^2 \theta + 2r \frac{dr}{d\theta} \sin \theta \cos \theta + r^2 \cos^2 \theta = \\ &= \frac{dr^2}{d\theta} \cos^2 \theta + \frac{dr^2}{d\theta} \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = \\ &= \frac{dr^2}{d\theta} + r^2. \end{aligned}$$

Portanto, a fórmula do comprimento de uma curva dada, em coordenadas polares, pela equação  $r = r(\theta)$ , onde  $\theta \in [a, b]$ , é

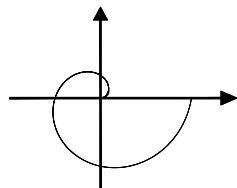
$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} d\theta.$$

Veja no próximo exemplo como ela funciona.

**Exemplo 4.4.**

Vamos calcular o comprimento da espiral de Arquimedes, dada pela equação  $r = \frac{\theta}{2\pi}$ , quando  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

Veja que  $\frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{2\pi}$ . Dessa forma,



$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1}{4\pi^2} + \frac{\theta^2}{4\pi^2}} d\theta = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta = \\
 &= \frac{\sqrt{1 + 4\pi^2}}{2} + \frac{\ln(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2})}{4\pi} \approx 3,383044285.
 \end{aligned}$$

Observe que para integrar  $\int \sqrt{1 + \theta^2} d\theta$  usamos uma substituição trigonométrica. De um modo geral, o cálculo do comprimento de curvas acaba dando em integrais que demandam muito trabalho. No entanto, o próximo exercício não demandará muito esforço.

#### Exercício 4.3.

Use a fórmula do comprimento de curvas dadas em coordenadas polares para calcular o comprimento da circunferência do círculo de raio  $R$ .

### ÁREAS DE REGIÕES LIMITADAS POR CURVAS EM COORDENADAS POLARES

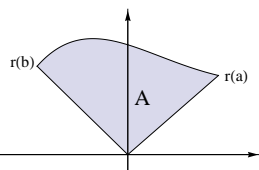
Este tema foge um pouco dos assuntos que estamos cobrindo, mas é tão bonito que vale a pena incluí-lo. Além disso, a partir da próxima aula, nossos temas mudarão completamente, de modo que: lá vai!

Queremos uma fórmula que nos permita calcular a área de uma região limitada por uma curva dada em coordenadas polares, definida por

$$0 \leq r \leq r(\theta) \quad a < \theta < b,$$

onde  $r(\theta)$  é uma função contínua.

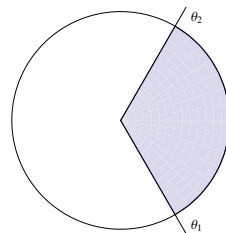
A idéia é a de sempre: arranjar uma aproximação em termos de somas de Riemann e definir a área como uma integral.



Observe que a área do setor circular de raio  $r$  correspondente a uma variação  $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$  é

$$\frac{r^2 \Delta\theta}{2},$$

devido à proporcionalidade com  $\pi r^2$ , a área total do círculo.



Procedemos como antes, em casos semelhantes, tomando uma partição  $\mathcal{P}$  de  $[a, b]$ :  $a = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n = b$ . Se  $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$  é suficientemente pequeno, e  $\xi_i \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$ , a área do setor limitado por  $0 \leq r \leq r(\theta)$ ,  $\theta \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$  é aproximada por

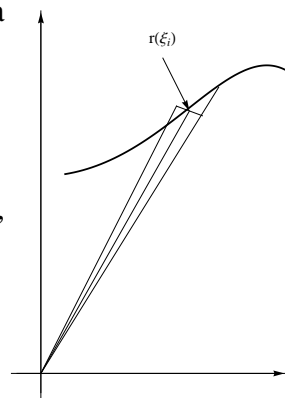
$$A_i = \frac{1}{2} r(\xi_i)^2 \Delta\theta_i.$$

Portanto, uma aproximação para a área que queremos é dada por

$$A \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r(\xi_i)^2 \Delta\theta_i.$$

Assim, definimos a área do setor definido por  $0 \leq r \leq r(\theta)$ , com  $\theta \in [a, b]$ , por

$$A = \frac{1}{2} \int_a^b r(\theta)^2 d\theta.$$

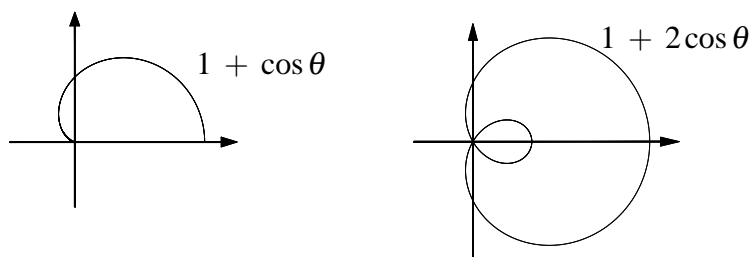


Veja dois exemplos:

**Exemplo 4.5.**

Vamos calcular a área das seguintes regiões:

- a. A região limitada pela curva  $r = 1 + \cos \theta$ , com  $\theta \in [0, \pi]$ , que é a metade de uma cardióide.
- b. A região limitada pela alça menor da limaçon  $r = 1 + 2 \cos \theta$ .



No caso a., sabemos a variação de  $\theta$  pela descrição do problema. Portanto, para calcular a área, basta usar a fórmula:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + 2\cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{3}{4}\pi. \end{aligned}$$

O caso b. demanda um pouco mais de trabalho, pois precisamos encontrar o intervalo de variação de  $\theta$ . A saída é a seguinte: a alça menor da limaçon inicia o momento em que a curva cruza a origem. Isto é, precisamos resolver a equação  $r(\theta) = 0$ . Isto é,

$$1 + 2 \cos \theta = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos \theta = -\frac{1}{2}.$$

Portanto, podemos percorrer a pequena alça fazendo  $\theta \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$ . (Isto é, entre os ângulos  $120^\circ$  e  $240^\circ$ .)

Com isso, o problema tem a seguinte solução:

$$A = \frac{1}{2} \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} (1 + 2\cos \theta)^2 d\theta = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 0,543516442.$$

Terminamos esta aula com um resumo das fórmulas que você aprendeu:

## RESUMO DAS FÓRMULAS

- a. Se  $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ , dada por  $\alpha(t) = \alpha_1(t)\vec{\mathbf{i}} + \alpha_2(t)\vec{\mathbf{j}} + \alpha_3(t)\vec{\mathbf{k}}$ , é contínua, então

$$\int_a^b \alpha(t) dt = \left( \int_a^b \alpha_1(t) dt \right) \vec{\mathbf{i}} + \left( \int_a^b \alpha_2(t) dt \right) \vec{\mathbf{j}} + \left( \int_a^b \alpha_3(t) dt \right) \vec{\mathbf{k}}$$

e

$$\left| \int_a^b \alpha(t) dt \right| \leq \int_a^b |\alpha(t)| dt$$

- b. Se, além disso,  $\alpha$  é uma função de classe  $C^1$ , o comprimento do traço de  $\alpha$  é

$$L(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt.$$

- c. Se uma curva é dada em coordenadas polares pela função contínua  $r = r(\theta)$ ,  $\theta \in [a, b]$ , a área da região delimitada por  $0 \leq r \leq r(\theta)$  é dada pela fórmula

$$A = \frac{1}{2} \int_a^b r(\theta)^2 d\theta$$

e, se além disso,  $r(\theta)$  é uma função de classe  $C^1$ , o comprimento da curva é

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} d\theta.$$

Você pode usá-las para resolver a lista de exercícios a seguir, que começa com as soluções dos exercícios propostos ao longo da aula.

#### Exercício 4.4.

1. A aceleração de uma partícula em movimento, no instante  $t \geq 0$ , é dada por

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t) = 12 \cos 2t \vec{i} - 8 \sin 2t \vec{j} + 12t \vec{k}.$$

Sabendo que  $\vec{v}(0) = \vec{0}$  e que  $s(0) = \vec{0}$ , determine a velocidade e a posição da partícula.

**Solução:**

Veja,  $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}(t)$ .

Portanto, obtemos  $\vec{v}(t)$  integrando  $\vec{a}(t)$ :

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \int 12 \cos 2t \, dt \vec{i} - \int 8 \sin 2t \, dt \vec{j} + \int 12t \, dt \vec{k} = \\ &= (6 \sin 2t + C_1) \vec{i} + (4 \cos 2t + C_2) \vec{j} + (6t^2 + C_3) \vec{k}.\end{aligned}$$

Como  $\vec{v}(0) = \vec{0}$ ,  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = -4$  e  $C_3 = 0$ . Assim,

$$\vec{v}(t) = 6 \sin 2t \vec{i} + 4(\cos 2t - 1) \vec{j} + 6t^2 \vec{k}.$$

Agora, calculamos  $s(t)$ :

$$\begin{aligned}s(t) &= \int 6 \sin 2t \, dt \vec{i} + \int (4 \cos 2t - 4) \, dt \vec{j} + \int 6t^2 \, dt \vec{k} = \\ &= (-3 \cos 2t + D_1) \vec{i} + (2 \sin 2t + D_2) \vec{j} + (2t^3 + D_3) \vec{k}.\end{aligned}$$

Usando a condição inicial  $s(0) = \vec{0}$ , obtemos  $D_1 = 3$ ,  $D_2 = 0$  e  $D_3 = 0$ . Logo,

$$\vec{s}(t) = (3 - 3 \cos 2t) \vec{i} + (2 \sin 2t - 4t) \vec{j} + 2t^3 \vec{k}.$$

2. Calcule o comprimento da curva  $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ , com  $t \in [0, 2k\pi]$ .

**Solução:**

Esta curva é uma helicóide que, quando  $t$  percorre o intervalo  $[0, 2k\pi]$ , gira  $k$  voltas sobre seu eixo de rotação.

Para calcular o comprimento desta curva, calculamos inicialmente a norma de sua derivada:

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Agora, usamos diretamente a fórmula do comprimento para obter

$$L = \int_0^{2k\pi} \sqrt{2} \, dt = 2k\sqrt{2}\pi.$$



3. Use a fórmula do comprimento de curvas dadas em coordenadas polares para calcular o comprimento da circunferência do círculo de raio  $R$ .

**Solução:**

A equação do círculo de raio  $R$  em coordenadas polares é  $r = R$  (isto é, o raio é uma constante). Para completar a circunferência temos que fazer  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

Portanto,  $\frac{dr}{d\theta} = 0$  e o comprimento fica

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{0^2 + R^2} d\theta = R \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi R.$$

Os próximos exercícios ficam ao seu encargo. Divirta-se!

4. Calcule a integral das seguintes funções vetoriais sobre os correspondentes intervalos.
- $\alpha(t) = (t\sqrt{1+t}, \sqrt{1+t}), \quad t \in [0, 1];$
  - $\beta(t) = (te^t, te^{t^2}), \quad t \in [-1, 1];$
  - $\gamma(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t), \quad t \in [0, 1/2];$
5. Uma partícula de massa  $m$  descreve um movimento circular uniforme sobre o círculo de raio 1 e centro na origem. A equação da aceleração do movimento é

$$\vec{a}(t) = 4\pi^2 (-\cos 2\pi t, -\sin 2\pi t).$$

Sabendo que  $\vec{v}(0) = (0, 2\pi)$  e que  $s(0) = (1, 0)$ , mostre que a velocidade é ortogonal à posição e que a aceleração tem a mesma direção que a posição mas aponta no sentido contrário a esta.

Calcule o impulso da força centrípeta  $\vec{F} = m\vec{a}$ , atuando na partícula nos intervalos de tempo  $[0, 1/2]$ ,  $[0, 1]$  e  $[0, 2]$ .

6. Uma partícula com massa de 1 unidade de peso desloca-se num plano devido à ação de uma força  $\vec{F}(t) = 3t^2\vec{i} + t \cos \pi t \vec{j}$ . Sabendo que a velocidade e a posição da partícula no instante  $t = 0$  são iguais a  $\vec{0}$ , calcule a velocidade no instante  $t$ . Calcule o impulso da força  $\vec{F}$  no intervalo de tempo  $[0, 1]$ .

 Use a fórmula  $\vec{F} = m\vec{a}$ .

7. Calcule o comprimento das curvas a seguir, nos correspondentes intervalos.


a.  $\alpha(t) = (4t, 3t), \quad t \in [a, b];$

b.  $\beta(t) = (\sin \pi t, \cos \pi t, e^t), \quad t \in [0, 2]$

c.  $\gamma(t) = (1, t, \ln t), \quad t \in [1, e]$

d.  $\delta(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi];$

e.  $\mu(t) = \left(t, \frac{e^t + e^{-t}}{2}\right), \quad t \in [-1, , 1].$

 No item d.: use a identidade  $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$ .

8. Calcule o comprimento das curvas a seguir, dadas em coordenadas polares, nos correspondentes intervalos.

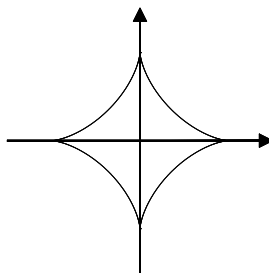
a.  $r(\theta) = \sin \theta, \quad \theta \in [0, \pi];$

b.  $r(\theta) = 1 + \cos \theta, \quad \theta \in [0, \pi/2]$

c.  $r(\theta) = e^{-\theta}, \quad \theta \in [0, k\pi]$

d.  $r(\theta) = e^{-\theta}, \quad \theta \in [0, \infty).$

9. A curva definida pela equação  $\alpha(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$  é chamada hipociclóide. Seu traço pode ser visto na figura. Calcule o seu comprimento.

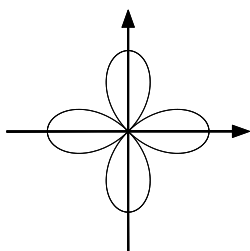


10. Esboce a região definida em coordenadas polares pela inequação

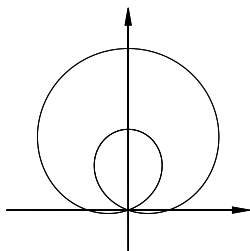
$$1 \leq r \leq 2 \cos \theta.$$

Calcule a sua área.

11. A equação  $r = \cos 2\theta$  define uma rosácea de quatro pétalas. Veja a figura. Calcule a área de uma de suas pétalas.



12. A equação  $r = 1 + 3 \sin \theta$  define uma limaçon. Veja a figura. Calcule a área entre a alça maior e a alça menor desta limaçon.





# Aula 5

## FUNÇÕES REAIS DE VÁRIAS VARIÁVEIS

---

### Objetivo

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 apresentar as funções de várias variáveis.

## INTRODUÇÃO

A partir desta aula, até o fim do semestre, o foco de nossas atenções será as funções de várias variáveis. Você já estudou as funções reais e vetoriais de uma variável que servem para descrever fenômenos que dependem de um único parâmetro ou variável. Como exemplos, você pode tomar a posição de uma partícula, a sua velocidade e a sua aceleração. Nesses casos, os fenômenos variam em função do tempo. No entanto, há diversas situações nas quais o resultado depende de mais de uma variável. Vamos a um exemplo.

Podemos usar uma função para descrever as diversas temperaturas em diferentes pontos de uma dada placa de metal. Isto é, a cada ponto  $P$  da placa associamos a sua temperatura  $T(P)$ , dada em graus Celsius, digamos.

Muito bem; para determinarmos um ponto em uma placa, precisamos de *duas* informações: uma latitude e uma longitude. Isto é, necessitamos de duas coordenadas. Ou seja,  $T$  é uma função de *duas* variáveis.

Veja uma outra situação. Dado um corpo com a forma de um paralelepípedo, podemos associar a cada um de seus pontos  $P$  a densidade  $\delta(P)$  do objeto nesse exato ponto. Isso nos dá uma função  $\delta$ , que depende de *três* variáveis, uma vez que, para localizar um ponto no paralelepípedo, necessitamos de três informações: altura, largura e profundidade.

Você seria capaz de imaginar uma situação que demandasse uma função de quatro variáveis para descrever um determinado fenômeno?

## FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Chamamos funções de duas variáveis as funções do tipo

$$f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

cujas lei de definição tem a forma

$$z = f(x, y).$$

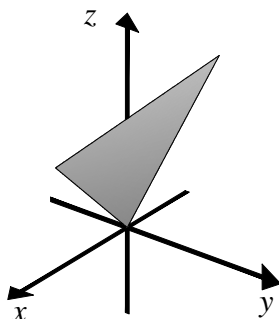
Isto é,  $x$  e  $y$  são as *variáveis independentes*. O subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}^2$  é o domínio da função.

**Exemplo 5.1.**

Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $f(x, y) = x + 2y$ .

Este exemplo é bem simples. Esta função de duas variáveis é chamada, na Álgebra Linear, de um funcional linear.

As funções de duas variáveis têm um papel importante no nosso estudo de funções de várias variáveis, pois podemos esboçar seus gráficos. Em geral, o gráfico de uma função de duas variáveis é uma superfície em  $\mathbb{R}^3$ . No caso em questão, esta superfície é um plano que contém a origem. Sua interseção com o plano  $xOz$  é a reta  $z = x$  e com o plano  $yOz$  é a reta  $z = 2y$ . É claro que na figura representamos apenas parte do plano. Veja a seguir.



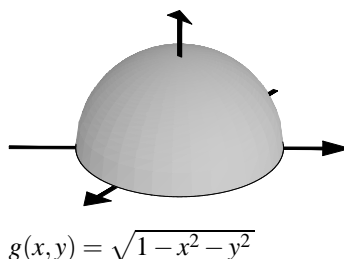
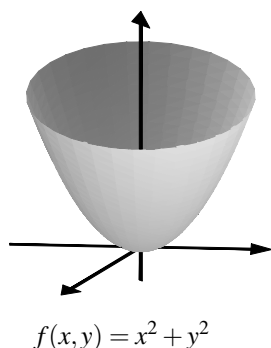
Em geral, representamos o espaço tridimensional com o plano  $z = 0$ , gerado pelos eixos  $Ox$  e  $Oy$ , fazendo o papel de chão onde estamos, o plano  $x = 0$ , gerado pelos eixos  $Oy$  e  $Oz$ , como se fosse uma parede ligeiramente à nossa frente e o plano  $y = 0$ , gerado pelos eixos  $Ox$  e  $Oz$ , como se fosse uma outra parede ligeiramente à nossa esquerda.

Note, também, que representamos apenas parte da superfície. Na verdade, o gráfico da função é um plano e, como tal, deve continuar em todas as direções. No entanto, limitamo-nos a representar sua interseção com o plano  $zOy$ , fazendo  $x = 0$ , obtendo a reta  $z = 2y$ , e a sua interseção com o plano  $zOx$ , fazendo  $y = 0$  e obtendo a reta  $z = x$ . Além disso, na região  $x \geq 0, y \geq 0$ , desenhamos apenas uma parte do plano, sobre um domínio triangular.

É bom acostumar-se com essas representações. Temos de contar com a ajuda delas para visualizar a geometria das funções de várias variáveis.

A seguir, mais duas funções com seus gráficos.

**Exemplo 5.2.**



Note que estas duas superfícies são conhecidas da Geometria Analítica. O gráfico de  $f$  é o parabolóide de revolução definido pela equação  $z = x^2 + y^2$  e o gráfico de  $g$  é uma semi-esfera. Isto é, os pontos  $(x,y,z)$  que pertencem ao gráfico de  $g$  satisfazem à equação

$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  e, portanto, também satisfazem à equação  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , pertencendo, por isso, à esfera de raio 1, centrada na origem.

## DOMÍNIOS DAS FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Seguindo a mesma regra geral usada no Cálculo I, quando dizemos “seja  $z = f(x,y)$  uma função”, estamos subentendendo que seu domínio é o maior subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  no qual a lei esteja bem definida.

### Revisitando Exemplo 5.2

No caso de  $f(x,y) = x^2 + y^2$ , cujo gráfico é um parabolóide, o domínio é todo o plano  $\mathbb{R}^2$ . Esta é uma função polinomial, pois sua lei de definição é um polinômio em duas variáveis.

Nesses casos, costumamos usar a expressão “o plano todo”

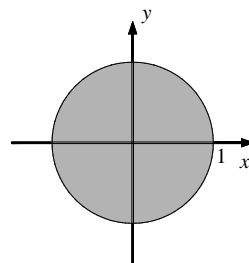
Consideremos agora a função  $g(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ , que está bem definida, desde que  $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ . Em outras palavras,



o domínio de  $g$  é o conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \leq 1\},$$

a que chamamos disco fechado de raio 1, centrado na origem.



### Exercício 5.1.

Determine o domínio de  $f(x, y) = \ln(x + y - 2)$  e faça um esboço, representando-o.

## FUNÇÕES DE TRÊS OU MAIS VARIÁVEIS

No caso das funções com mais do que duas variáveis, não dispomos dos esboços de seus gráficos, senão de maneira simplificada, uma vez que eles são subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ , com  $n \geq 4$ . No entanto, podemos esboçar os domínios de funções de três variáveis, pois eles são subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$ . Veja um exemplo a seguir.

### Exemplo 5.3.

Vamos determinar o domínio da função

$$w = f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$$

e fazer um esboço deste subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ .

Nesse caso, para que a função esteja bem definida, as coordenadas do ponto devem satisfazer a condição

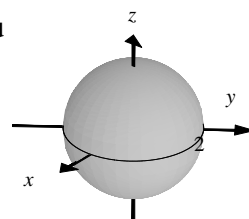
$$4 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0.$$

Ou seja, o domínio de  $f$  é o conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\},$$

que corresponde aos pontos interiores à esfera de raio 2 e o seu bordo.

Quando o domínio da função é um subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ , costumamos usar as letras  $x$ ,  $y$  e  $z$  para indicar as coordenadas de um ponto genérico, estabelecendo, assim, essa nomenclatura para as variáveis independentes, usando, em geral,  $w$  para a variável dependente. Isto é, atribuídos valores para  $x$ ,  $y$  e  $z$ , de modo que  $(x, y, z)$  é um elemento do domínio da função, o valor de  $w = f(x, y, z)$  fica determinado.



**Exercício 5.2.**

Determine o domínio da função

$$g(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2 - 1} + \sqrt{z}$$

e faça um esboço desse conjunto.

## ALGUNS GRÁFICOS DE FUNÇÕES (SIMPLES) DE DUAS VARIÁVEIS

Em geral, esboçar o gráfico de uma função de duas variáveis pode ser uma tarefa trabalhosa, a menos que você disponha de um computador com algum programa próprio para fazer isso. Mas você já acumula uma considerável bagagem matemática, enriquecida nos cursos de Pré-Cálculo, Cálculo I, Geometria Analítica e Álgebra Linear I, que lhe permite lidar com alguns casos mais simples.

## SUPERFÍCIES QUADRÁTICAS

Começemos com os casos que usam as superfícies quadráticas que você estudou na Geometria Analítica.

### Exemplo 5.4.

Vamos determinar o domínio e esboçar o gráfico da função

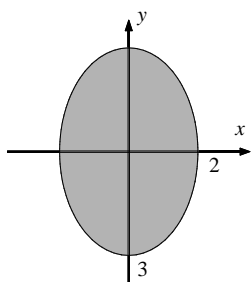
$$f(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}.$$

O domínio é determinado pela condição  $36 - 9x^2 - 4y^2 \geq 0$ , equivalente à inequação

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1,$$

que corresponde ao interior de uma elipse, incluindo o seu bordo.

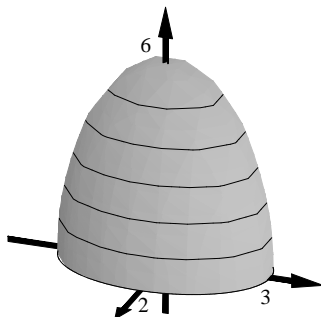
Agora, o gráfico da função. Para determinarmos o gráfico de  $f$ , podemos observar que os pontos cujas coordenadas satisfazem a equação  $z = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$  também satisfazem a



equação

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1,$$

que determina um elipsóide com centro na origem. O gráfico é a parte do elipsóide que está contida no semi-espço determinado por  $z \geq 0$ :



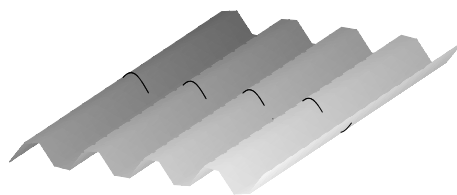
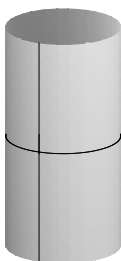
### Exercício 5.3.

Esboce o gráfico da função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} -\sqrt{x^2 + y^2 - 1}, & \text{se } x^2 + y^2 \geq 1, \\ \sqrt{1 - x^2 - y^2}, & \text{se } x^2 + y^2 \leq 1. \end{cases}$$

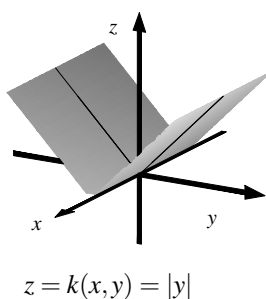
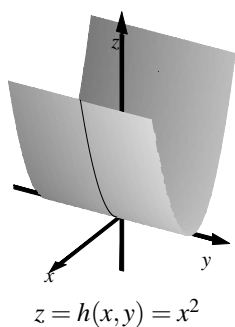
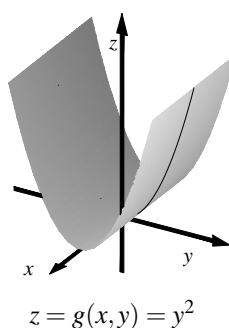
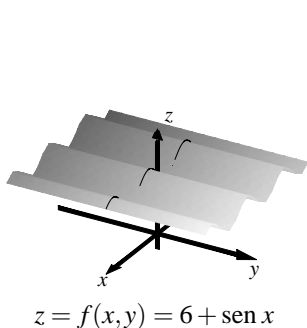
## SUPERFÍCIES CILÍNDRICAS

Veremos, agora, gráficos de funções que são superfícies cilíndricas. Lembre-se, superfícies cilíndricas são aquelas obtidas por um feixe de retas paralelas colocadas ao longo de uma curva plana. Exemplos de tais superfícies do nosso dia-a-dia são um cano de pvc ou uma telha de cobertura.



Os gráficos das funções de duas variáveis cujas leis de definição envolvem apenas uma variável independente são superfícies cilíndricas. O feixe de retas paralelas é paralelo ao eixo correspondente à variável que está faltando. Veja a seguir alguns exemplos.

**Exemplo 5.5.**



## SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO

As funções cujas leis de definição têm a forma

$$z = f(x, y) = g(x^2 + y^2),$$

em que  $g$  é uma função real de uma variável, são relativamente simples. Essas funções são constantes ao longo dos círculos concêntricos na origem. Realmente, se  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  são tais que  $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$ , então

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2).$$

Portanto, os gráficos de tais funções são superfícies de revolução em torno do eixo  $Oz$ .

Para esboçar o gráfico de alguma dessas funções, basta esboçar o gráfico da função

$$z = f(x, 0),$$

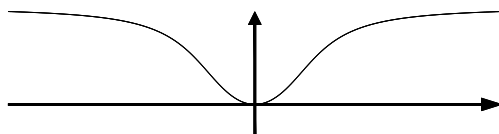
por exemplo, e girar esta curva sobre o eixo  $Oz$ . A superfície obtida será o gráfico da função  $z = f(x, y)$ . O parabolóide e a semi-esfera apresentados no Exemplo 5.2 ilustram essa situação. Vejamos um outro exemplo.

### Exemplo 5.6.

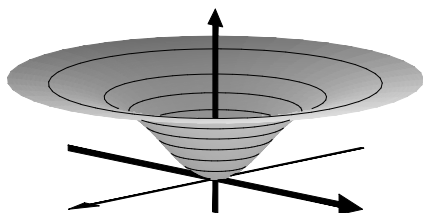
Vamos esboçar o gráfico da função

$$f(x, y) = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2).$$

Usando a técnica que aprendemos no Cálculo I, concluímos que o gráfico da função  $z = h(x) = f(x, 0) = \operatorname{arctg} x^2$  é



Portanto, o gráfico de  $f(x, y) = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2)$  é



Chegamos, assim, ao fim da primeira aula sobre funções de várias variáveis. Você deve ter percebido que a maior parte do conteúdo, de alguma forma, não lhe era estranho. No entanto,

muito provavelmente você reviu essas coisas numa nova perspectiva. As inequações que você estudou no Pré-Cálculo lhe serão úteis no momento em que você for determinar os domínios dessas novas funções. Os conteúdos de Geometria Analítica estarão constantemente servindo como fonte de exemplos, através das cônicas e das quádras. Você usará tudo o que aprendeu no Cálculo I sobre as funções de uma variável real e, nas próximas aulas, verá a importância da Álgebra Linear. Espero que esta aula, assim como as próximas, sejam de grande estímulo para você. Aproveite bem esta experiência.

Agora, as respostas dos exercícios propostos acompanhadas de uma pequena lista de mais alguns.

### Exercício 5.1

Determine o domínio de

$$f(x, y) = \ln(x + y - 2)$$

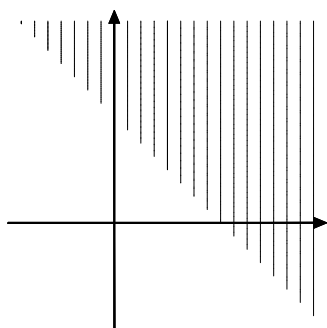
e faça um esboço, representando-o.

**Solução:**

O domínio de  $f$  é o conjunto

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y > 2\}.$$

Este é o conjunto dos pontos do plano que estão acima da reta  $x + y = 2$ .



## Exercício 5.2

Determine o domínio da função

$$g(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2 - 1} + \sqrt{z}$$

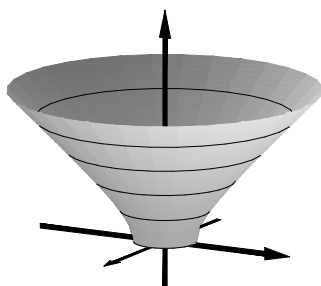
e faça um esboço desse conjunto.

**Solução:**

Nesse caso, temos duas condições que devem ser simultaneamente satisfeitas. Assim, o domínio de  $g$  é a interseção de dois conjuntos:

$$\text{Dom}(g) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \geq z^2 + 1\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z \geq 0\}.$$

A equação  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  determina um hiperbolóide de uma folha. Este hiperbolóide divide o espaço tridimensional  $\mathbb{R}^3$  em duas regiões: uma que contém o eixo  $Oz$ , que chamaremos interior ao hiperbolóide, e a outra, que chamaremos exterior ao hiperbolóide. A condição  $x^2 + y^2 \geq z^2 + 1$ , mais  $z \geq 0$ , determina o subconjunto do espaço que é exterior ao hiperbolóide e que fica acima do plano  $xOy$ :



### Exercício 5.3

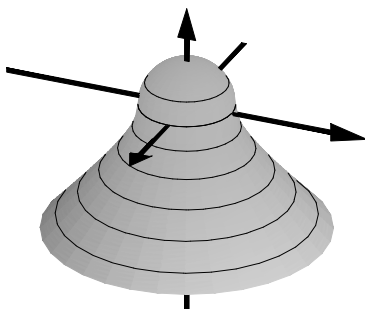
Esboce o gráfico da função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} -\sqrt{x^2 + y^2 - 1}, & \text{se } x^2 + y^2 \geq 1, \\ \sqrt{1 - x^2 - y^2}, & \text{se } x^2 + y^2 \leq 1. \end{cases}$$

#### Solução:

Na região determinada por  $x^2 + y^2 \leq 1$ , a função é dada pela equação  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ . Nesta região, seu gráfico é uma semi-esfera.

Na região  $x^2 + y^2 \geq 1$ , a função é definida por  $z = -\sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ . Esta equação define a parte inferior de um hiperbolóide de uma folha (veja exercício anterior). Combinando as partes das superfícies, chegamos ao gráfico esperado:



### Exercício 5.4.

Determine e faça um esboço do domínio de cada uma das funções a seguir:

- $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 4y^2 - 4}$ .
- $g(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$ .
- $h(x, y) = \sec(x + y)$ .
- $k(x, y, z) = \sqrt{1 + x^2 + y^2 - z^2}$ .



**Exercício 5.5.**

Esboce o gráfico das seguintes funções:

$$\text{a. } f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2-y^2}, & \text{se } x^2+y^2 \leq 4; \\ 0, & \text{se } x^2+y^2 \geq 4. \end{cases}$$

$$\text{b. } g(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}.$$

**Exercício 5.6.**

Esboce o gráfico de cada uma das funções a seguir:

$$\text{a. } f(x,y) = \cos y.$$

$$\text{b. } g(x,y) = e^{1-y^2}.$$

$$\text{c. } h(x,y) = \ln(x).$$

$$\text{d. } k(x,y) = e^{1-x^2-y^2}.$$



# Aula 6

## CONJUNTOS DE NÍVEL

---



## Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 esboçar os gráficos de funções do tipo  $f(x, y) = g(x) + h(y)$ ;
- 2 conhecer o conceito de conjunto de nível – curvas e superfícies.

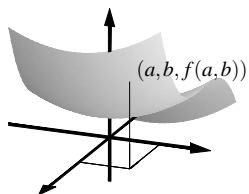
## GRÁFICOS DE FUNÇÕES SIMPLES (CONTINUAÇÃO)

Na aula anterior, você aprendeu a esboçar os gráficos de funções de duas variáveis. Em particular, os gráficos de funções cujas leis de definição envolvem uma única variável. Isto é, funções cujas leis de definição são da forma

$$f(x, y) = g(x) \quad \text{ou} \quad f(x, y) = h(y).$$

Esse tipo de função é *invariante* em relação à variável que está faltando. Vejamos, mais uma vez, o caso  $f(x, y) = g(x)$ . Nesta situação, por exemplo,

$$f(4, -\pi) = f(4, 0) = f(4, \sqrt{2}) = f(4, 21473).$$



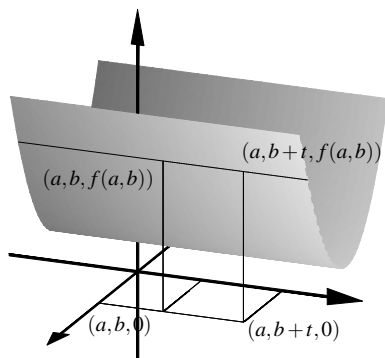
Ou seja, algebricamente, o que determina o valor da função num dado ponto é a sua primeira coordenada. Esta característica faz com que os gráficos dessas funções sejam superfícies cilíndricas. Lembre-se, o que determina o valor de uma certa função num dado ponto  $(a, b)$ , quando observamos o seu gráfico, é a *altura* do ponto que ele determina nesse gráfico, ou seja, a terceira coordenada do ponto  $(a, b, f(a, b))$ . Assim, se *deslizarmos* o ponto  $(a, b, f(a, b))$  na direção  $y$  (no caso em que  $f(x, y) = g(x)$ ), a altura  $f(a, b)$  não muda, fica invariante:

$$(a, b + t, f(a, b + t)) = (a, b + t, f(a, b)).$$

Dito, ainda, de outra maneira, a imagem da reta

$$\alpha(t) = (a, b + t, f(a, b))$$

está contida no gráfico de  $f$ :



### O CASO $f(\mathbf{x}, y) = g(\mathbf{x}) + h(y)$

Vamos considerar uma evolução da situação descrita anteriormente: o caso

$$f(x, y) = g(x) + h(y).$$

Aqui, a lei de definição da função envolve as duas variáveis independentes  $x$  e  $y$ , porém, na lei de definição da função, elas são *separáveis* em duas parcelas. Um exemplo vale por mil palavras.

#### Exemplo 6.1.

Vamos estudar o caso  $f(x, y) = x^2 + \frac{y}{2} + 1$ .

Neste exemplo,  $g(x) = x^2$ , uma parábola, e  $h(y) = \frac{y}{2} + 1$ .

Observe que a interseção do gráfico de  $f$  com o plano  $y = c$  é uma parábola

$$z = f(x, c) = x^2 + \frac{c}{2} + 1.$$

Além disso, para diferentes valores de  $c$ , obteremos parábolas que diferem umas das outras apenas por translações na direção do eixo  $Oz$ :

$$z = x^2 + \frac{c_1}{2} + 1 \quad \text{e} \quad z = x^2 + \frac{c_2}{2} + 1.$$

Em contrapartida, a interseção do gráfico de  $f$  com o plano

$x = d$  é uma reta

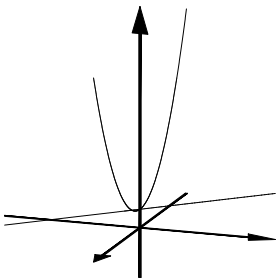
$$z = f(d,y) = \frac{y}{2} + d^2 + 1$$

e diferentes valores de  $d$  produzem retas paralelas.

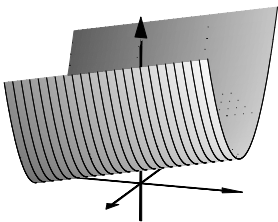
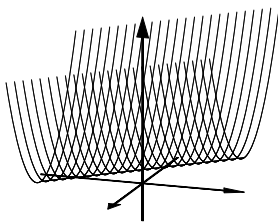
Isso significa que o gráfico de  $f$  é relativamente simples. Na verdade, basta considerar, digamos, as imagens das curvas

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= (x, 0, f(x, 0)) = (x, 0, g(x) + h(0)) = (x, 0, x^2 + 1), \\ \beta(y) &= (0, y, f(0, y)) = (0, y, g(0) + h(y)) = (0, y, \frac{y}{2} + 1),\end{aligned}$$

contidas no gráfico de  $f$ , dispostas ortogonalmente:

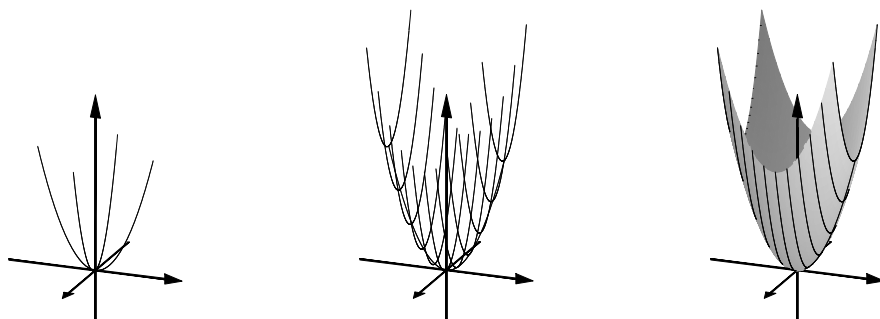


Para obter o gráfico de  $f$ , basta “deslizar”, digamos, a imagem da curva  $\alpha$  ao longo de  $\beta$ :



**Exemplo 6.2.**

Vamos usar esta técnica para esboçar o gráfico de  $f(x,y) = x^2 + y^2$ , uma função que já conhecemos bem.



### Exercício 6.1.

Use essa técnica para esboçar o gráfico das seguintes funções:

$$1. f(x, y) = \frac{x}{2} - y + 1;$$

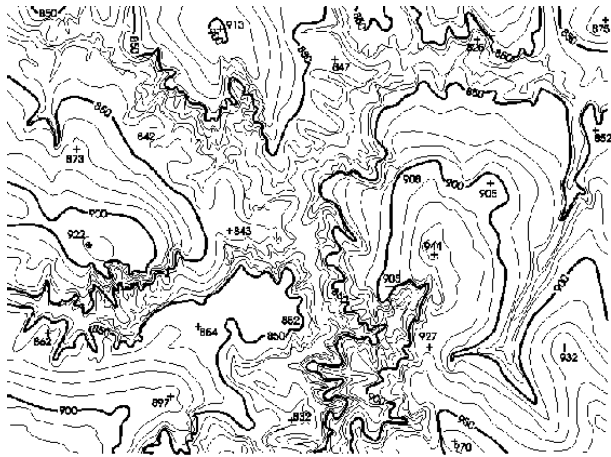
$$2. g(x, y) = \frac{y^3 + y^2}{2} - y - x^2.$$

## CONJUNTOS DE NÍVEL

Você deve ter notado que há uma semelhança entre as noções de gráficos de funções de duas variáveis e os mapas cartográficos. Algumas palavras que são usadas tanto em uma como em outra situação reforçam essa impressão: localização, coordenadas, altura são algumas delas. O assunto que vamos estudar agora acompanha essa tendência.

Em alguns mapas, observamos certas curvas desenhadas como que sobre as regiões demarcadas, e são chamadas curvas de nível. Essas linhas denotam pontos que estão na mesma altura em relação ao nível do mar. Por assim dizer, são pontos que estão no mesmo nível.

Quando passamos de uma curva para outra, sabemos que estamos mudando de nível. Ou seja, estamos subindo ou descendo, em relação ao nível do mar, dependendo do caso.



Nesta situação, o mapa representa o domínio da função altura  $h$ , que associa, a cada ponto  $P$  do mapa, a sua altura em relação ao nível do mar.

Se dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  estão na mesma curva de nível, digamos 558m acima do nível do mar, então

$$h(P_1) = h(P_2) = +558.$$

Veja como é possível colocar tudo isso numa linguagem matemática.

Seja  $f : A \longrightarrow B$  uma função cujo domínio é o conjunto  $A$  e o contradomínio é o conjunto  $B$ . Chamamos *conjunto de nível* a imagem inversa por  $f$  de elementos do contradomínio. São os elementos de  $A$  cujas imagens por  $f$  são iguais e, por isso, dizemos que eles têm o mesmo *nível*. Mais precisamente, dado  $b \in B$ , dizemos que o conjunto de nível  $b$  por  $f$  é o subconjunto do domínio  $A$  determinado pela condição  $f(a) = b$ . Isto é, o subconjunto

$$f^{-1}(b) = \{ a \in A \mid f(a) = b \}.$$

Assim, dizemos que  $f^{-1}(b) = \{ a \in A \mid f(a) = b \}$  é o conjunto de nível  $b$  por  $f$ .

Veja, se  $a_1$  e  $a_2 \in f^{-1}(b)$ , então  $f(a_1) = f(a_2) = b$ .

Vamos considerar um exemplo.

Atenção: não confunda esta notação com a notação de função inversa. Para isso, é preciso estar atento ao contexto.



**Exemplo 6.3.**

Seja  $f(x) = x^2 + 2x$  um função polinomial (típica do Cálculo I). Portanto,  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ , assim como o seu contradomínio.

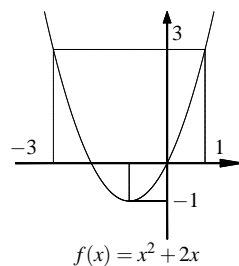
Para determinar o conjunto de um certo nível, digamos  $b$ , temos de *resolver* a equação

$$f(x) = b.$$

Isto é, queremos encontrar todos os elementos  $a \in \mathbb{R}$ , tais que  $f(a) = b$ . Tudo gira em torno dessa equação.

Vamos determinar o conjunto  $f^{-1}(3)$ . Temos de resolver a equação  $f(x) = 3$ :

$$f(x) = x^2 + 2x = 3.$$



Como  $x^2 + 2x - 3 = 0$  tem duas raízes,  $f^{-1}(3)$  tem dois elementos:  $-1$  e  $-3$ . Assim,

$$f^{-1}(3) = \{-1, 3\}.$$

Antes de prosseguir, convença-se de que  $f^{-1}(0) = \{0, -2\}$ .

Para calcular  $f^{-1}(-1)$ , temos de resolver  $f(x) = x^2 + 2x = -1$ . Portanto,  $f^{-1}(-1)$  tem um único elemento:  $-1$ . Isto é,

$$f^{-1}(-1) = \{-1\}.$$

Finalmente,  $f^{-1}(-2) = \emptyset$ . (Por quê?)

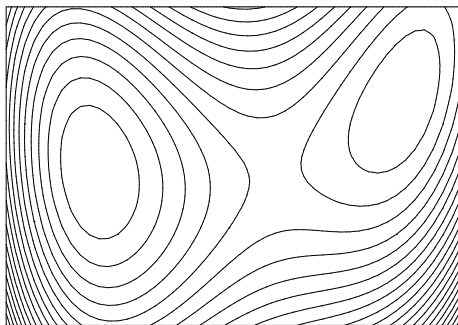
O conceito de conjunto de nível torna-se mais interessante quando lidamos com funções de mais do que uma variável. Lembre-se do exemplo dado no início desta seção, das curvas de nível de um mapa. A Matemática aprendeu muito com a Cartografia e vice-versa.

Aqui está um outro exemplo.

**Exemplo 6.4.**

Considere uma chapa metálica que ocupa, digamos, um retângulo  $C = [0, a] \times [0, b]$  do plano. A cada ponto  $(x, y) \in C$  associamos a sua temperatura, denotada por  $T(x, y)$  em graus Celsius.

Neste caso, os conjuntos de nível são chamados *isotérmicas*. Isto é, se dois pontos estão na mesma linha isotérmica, então eles têm a mesma temperatura.

**CURVAS DE NÍVEL**

Quando lidamos com conjuntos de nível de uma função de duas variáveis, usamos a terminologia *curvas de nível*, pois, de um modo geral, os conjuntos de nível são curvas. Veja o exemplo anterior, das isotérmicas. Neste caso, para determinar as curvas de nível de uma dada função, teremos de resolver uma equação de duas variáveis

$$f(x, y) = b.$$

Observe que as curvas de nível são subconjuntos do domínio. Geometricamente, para determinar a curva de um certo nível  $f^{-1}(b)$ , devemos fazer o seguinte: intersectar o gráfico de  $f$  com o plano horizontal  $z = b$  e projetar no plano  $z = 0$ , segundo a direção do eixo  $Oz$ . Vamos a um exemplo.

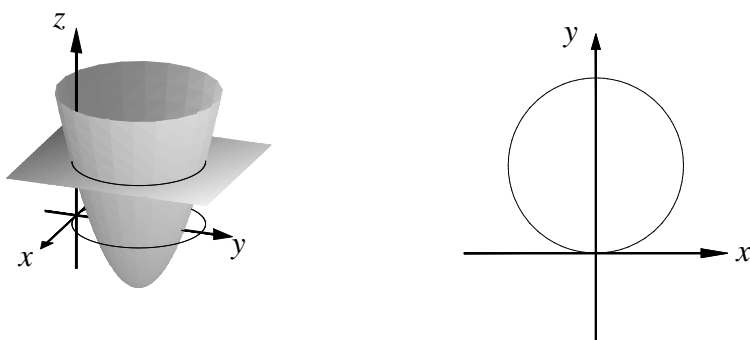
**Exemplo 6.5.**

Vamos determinar a curva de nível 2 da função  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4y + 2$ .

Vejam a solução geométrica. Note que o gráfico da função  $f$  é a superfície determinada pela equação

$$z = x^2 + y^2 - 4y + 2.$$

Essa superfície é um parabolóide de revolução (você aprendeu a lidar com isso na Geometria Analítica). Aqui está o desenho do gráfico de  $f$  intersectado pelo plano  $z = 2$ , a projeção dessa interseção no plano  $z = 0$  e o esboço da curva de nível como um subconjunto do domínio:



Observe atentamente: na figura da esquerda, vemos, em  $\mathbb{R}^3$ , o gráfico de  $f$  (parabolóide), o plano  $z = 2$ , a interseção do plano com o parabolóide e a sua projeção no plano  $z = 0$ , que é um círculo de raio 2 e centro no ponto  $(0, 2, 0)$ .

Na figura da direita, vemos, em  $\mathbb{R}^2$  (domínio de  $f$ ), o círculo de centro em  $(0, 2)$  e raio 2. Este círculo é o conjunto de todos os pontos de  $\mathbb{R}^2$ , cujas imagens por  $f$  são iguais a 2. Isto é, a *curva de nível 2*.

Note também que, devido às convenções, o eixo  $Oy$  na figura da esquerda aparece quase horizontalmente, enquanto na figura da direita o eixo  $Oy$  aparece na posição vertical. É preciso se habituar a essas pequenas coisas, resultado das convenções que adotamos para representar graficamente o plano cartesiano e o espaço tridimensional.

Do ponto de vista das equações, temos o seguinte:

$$f^{-1}(2) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; f(x, y) = x^2 + y^2 - 4y + 2 = 2 \}.$$

Para determinar qual conjunto é este, temos de descobrir qual conjunto do plano é determinado pela equação

$$x^2 + y^2 - 4y + 2 = 2:$$

$$x^2 + y^2 - 4y + 2 = 2$$

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = 4$$

$$x^2 + (y - 2)^2 = 4$$

que corresponde ao círculo já mencionado, como esperávamos.

Note que, do ponto de vista das equações, o problema é bem simples. No entanto, a perspectiva geométrica é muito enriquecedora.

Antes de passarmos às superfícies de nível, vejamos um exemplo um pouco mais elaborado.

### Exemplo 6.6.

Vamos determinar as curvas de nível  $-1$ ,  $0$  e  $1$  da função

$$f(x, y) = \frac{4x^2y}{x^4 + y^2}.$$

Antes de mais nada, observemos que o domínio de  $f$  é o plano todo menos a origem:

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^4 + y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}.$$

Nem sempre o ponto de vista geométrico é o mais prático, pois certos gráficos são mais difíceis de serem visualizados. Este é um caso assim. Portanto, vamos simplesmente abordar o problema via equações.

Curvas de nível 0

Para calcular  $f^{-1}(0)$ , temos de resolver a equação  $f(x, y) = 0$ , que, neste exemplo, é equivalente a

$$4x^2y = 0.$$

Assim, as soluções são  $x = 0$  ou  $y = 0$ . As curvas de nível zero são os eixos cartesianos (menos a origem, que não é elemento do domínio).

Curvas de nível 1

Agora temos de resolver em  $y$  a equação  $\frac{4x^2y}{x^4 + y^2} = 1$ .

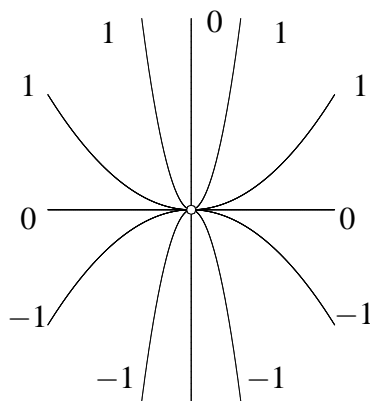
$$\begin{aligned} 4x^2y &= x^4 + y^2 \\ y^2 - 4x^2y + x^4 &= 0 \\ y &= \frac{4x^2 \pm \sqrt{16x^4 - 4x^4}}{2} \\ y &= (2 \pm \sqrt{3})x^2. \end{aligned}$$

Estas equações correspondem a um par de parábolas com vértice em  $(0,0)$ . Como a origem não pertence ao domínio, as curvas de nível 1 são quatro ramos de parábolas correspondentes às equações anteriores.

Curvas de nível  $-1$

De maneira análoga, concluímos que as curvas de nível  $-1$  são os quatro ramos das parábolas definidas pelas equações  $y = (-2 \pm \sqrt{3})x^2$ .

Aqui está um esboço das curvas de nível:



Os números ao lado de cada curva indicam o seu nível.

Este exemplo é relativamente importante. Voltaremos a considerá-lo em outra ocasião.

## SUPERFÍCIES DE NÍVEL

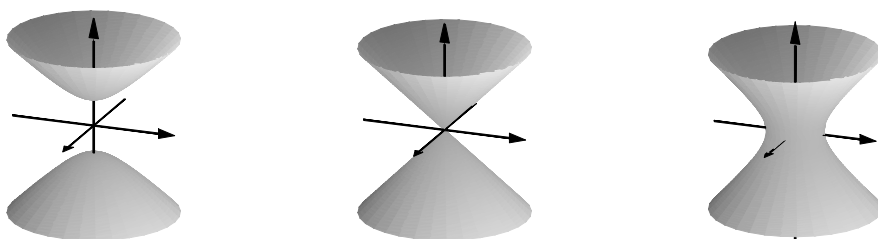
Conjuntos de nível muito interessantes surgem no caso das funções de três variáveis. Eles são particularmente úteis, pois não dispomos dos gráficos de tais funções. Esses conjuntos de nível são chamados *superfícies de nível*, porque esses conjuntos são, em geral, superfícies (há casos em que eles não são superfícies. Considere, por exemplo, uma função constante).

**Exemplo 6.7.**

Vamos determinar as superfícies de nível da função

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

Neste caso, temos de resolver as equações  $x^2 + y^2 - z^2 = c$ , para os diversos valores de  $c$ . As superfícies correspondentes aos diferentes valores de  $c$  serão superfícies de revolução em torno do eixo  $Oz$ , e corresponderão a hiperbolóides de duas folhas, no caso  $c < 0$ , um cone no caso  $c = 0$  e hiperbolóides de uma folha no caso  $c > 0$ .



Assim, chegamos ao fim desta segunda aula sobre funções de várias variáveis. Na próxima aula, você aprenderá a lidar com os limites de tais funções e verá por que elas são bem mais interessantes do que as funções de uma só variável real. Agora, você deve praticar as idéias que aprendeu nesta aula nos exercícios propostos a seguir.

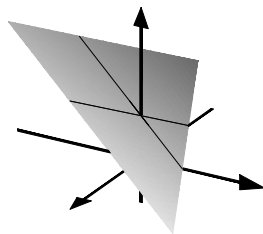
**Exercício 6.2.**

1. Esboce o gráfico das seguintes funções:

a.  $f(x, y) = \frac{x}{2} - y + 1.$

**Solução:**

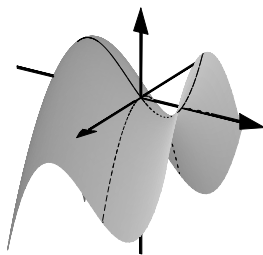
Neste caso,  $\alpha(x) = f(x, 0) = \frac{x}{2} + 1$  e  $\beta(y) = f(0, y) = -y + 1$  têm, por imagens, duas retas. Ao deslizarmos uma delas sobre a outra, obteremos, como esperávamos, o plano correspondente à equação  $z = \frac{x}{2} - y + 1.$



b.  $g(x, y) = \frac{y^3 + y^2}{2} - y - x^2$ .

**Solução:**

Neste caso, as curvas *geradoras* do gráfico são  $z = -x^2$ , correspondente ao plano  $y = 0$ , e  $z = \frac{y^3 + y^2}{2} - y$ , correspondente ao plano  $x = 0$ . A primeira curva é uma parábola com concavidade voltada para baixo e a segunda é uma curva polinomial com um máximo e um mínimo locais. O gráfico é:



2. Esboce o gráfico das seguintes funções:

- a.  $f(x, y) = 4 - y^2$ .      b.  $g(x, y) = 3x^2 - x^3 - 2x$ .  
c.  $h(x, y) = x + 4 - y^2$ .      d.  $k(x, y) = x^2 + \sin y$ .

3. Em cada uma das funções a seguir, esboce os conjuntos de nível  $c$  para os valores indicados.

- a.  $f(x, y) = 3x - y$ ,       $c = -1, 0, 1$ .  
b.  $g(x, y) = \sin(x - y)$ ,  $c = -2, -1, -1/2, 0, \sqrt{3}/2, 1, 3$ .  
c.  $h(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$ ,       $c = \ln 2, 0, -1$ .  
d.  $j(x, y) = \frac{x}{y + 2}$ ,       $c = -2, -1, -1/2, 0, 1/2, 1, 2$ .  
e.  $k(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2x}$ ,       $c = -2, -1, 0, 1, 2$ .  
f.  $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ ,       $c = -1, 0, 1, 4, 9$ .  
g.  $g(x, y, z) = 4 - x^2 - y^2 - z^2$ ,       $c = -5, 0, 3, 4, 5$ .

h.  $h(x, y, z) = e^{x^2 - y^2 - z^2}, \quad c = -1, 0, e, e^4.$

i.  $k(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2, \quad c = 1.$

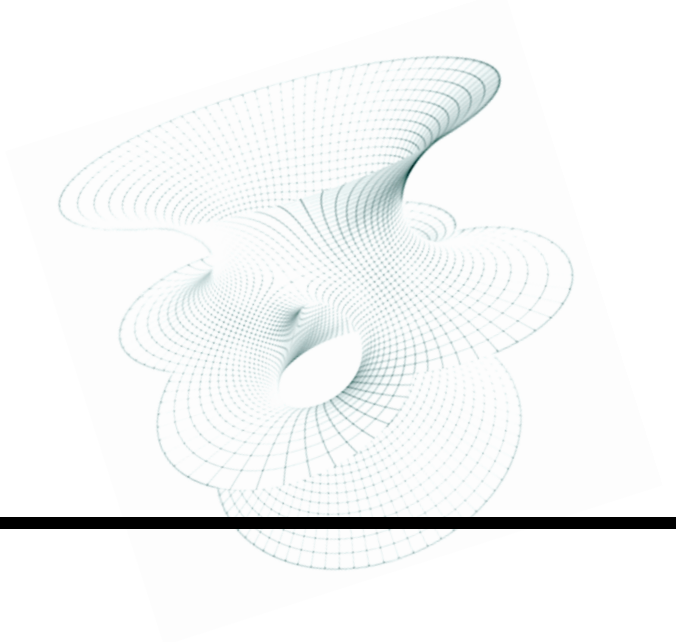
Quem acertar a resposta deste último item merece um doce.  
A dica é a seguinte: esta superfície é de revolução.



# Aula 7

## LIMITES

---



## Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 conhecer o conceito de ponto de acumulação;
- 2 aprender a noção de limites de funções de várias variáveis.

## INTRODUÇÃO

A *topologia* surgiu nos trabalhos de Leonhard Euler (1707 - 1783), como você deve ter visto nas aulas sobre grafos, em Matemática Discreta, e ganhou muita força no início do século XX devido aos trabalhos de, entre outros, Henri Poincaré (1854 - 1912).

Topologia é uma área da Matemática que leva em conta os fenômenos do ponto de vista mais qualitativo do que quantitativo.

Do ponto de vista topológico, não há diferença substancial entre um círculo de raio 1, um círculo de raio 3.000.000 ou uma elipse de qualquer tamanho, contanto que seja uma elipse. No entanto, do ponto de vista topológico, há uma profunda diferença entre um círculo e uma reta. Você já sabe: a retirada de um ponto afeta muito mais uma reta do que um círculo. A reta menos um ponto passa a ser composta de dois pedaços, enquanto o mesmo não se passa com o círculo.

*Vive la différence!*

Ao longo das duas últimas aulas, você aprendeu a esboçar gráficos de algumas funções simples de duas variáveis, além de ter aprendido o conceito de conjunto de nível nas versões curvas (duas variáveis) e superfícies (três variáveis) de nível.

Nesta aula, você aprenderá as noções de limites das funções de duas ou mais variáveis.

O conceito de limite, fundamental na Matemática, não é uma noção exatamente simples, mas você já não é inexperiente nesse assunto. Você já se deparou com esse conceito em pelo menos duas outras ocasiões: no Cálculo I, com as funções reais de uma variável real, e no início de Cálculo III, com as funções vetoriais de uma variável real. Muito bem; a pauta de hoje é com várias (pelo menos duas) variáveis.

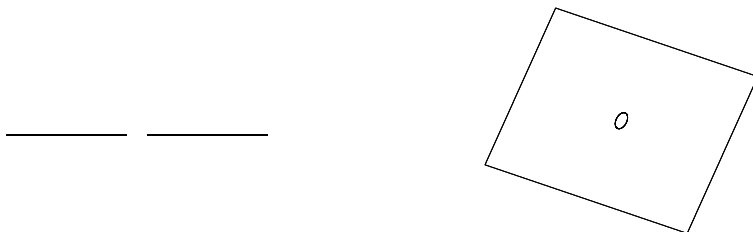
Esta situação guarda similaridades com aquelas vividas anteriormente, embora apresente algumas diferenças marcantes.

Realmente, você perceberá que o universo das funções de várias variáveis é muito mais rico e diverso do que o das funções de uma variável. Literalmente, estamos adicionando novas dimensões em nossas vidas.

De qualquer forma, há uma diferença qualitativa entre passar de uma variável para duas variáveis que não há, essencialmente, entre passar de duas variáveis para mais do que duas variáveis. Isto se deve a um fenômeno que em Matemática chamamos *topológico*.

Para experienciarmos a diferença que há entre a reta real (ambiente dos domínios das funções de uma variável) e o plano, o espaço tridimensional e outros (ambientes dos domínios das funções de várias variáveis), basta que efetuemos uma simples *operação topológica*: a retirada de um ponto.

A reta real menos um ponto, digamos, a origem, é dramaticamente diferente do plano menos um ponto, digamos, a origem. A retirada de um ponto da reta divide-a em dois *pedaços*, enquanto a retirada de um ponto do plano, apesar de alterá-lo topologicamente de maneira substancial, como você verá melhor em Cálculo III, não consegue dividi-lo em dois pedaços:



Use esta operação topológica para convencer-se de que um círculo e uma figura do tipo 8, formada por dois círculos unidos em um ponto comum, são topologicamente diferentes.

Muito bem; vamos ao primeiro tema da aula.

## PONTO DE ACUMULAÇÃO

Recordando: o limite é uma ferramenta que permite estudar o comportamento de uma função nas vizinhanças de um determinado ponto. Vizinhanças e proximidades são palavras que sempre são usadas quando lidamos com esse conceito, como você já deve ter notado. Para que a função tenha algum comportamento a ser estudado nas vizinhanças de algum ponto, é preciso que o seu domínio esteja, de alguma maneira, próximo de tal ponto.

A noção de ponto de acumulação estabelecerá quais pontos são elegíveis para se tomar o limite de uma dada função.

Esse conceito demanda dois objetos: um ponto  $P$  e um conjunto  $D$ . A sintaxe que estabeleceremos será:  $P$  é um ponto de acumulação de  $D$ .

O ponto  $P$  não pertence, necessariamente, a  $D$ ; mas ambos, ponto e conjunto, devem estar no mesmo ambiente que, no nosso caso, será  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$  ou, de modo geral,  $\mathbb{R}^n$ .

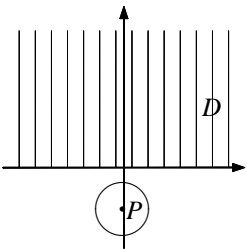
Antes de prosseguir de maneira mais formal, veja alguns exemplos:

Exemplo 7.1.

| $P$         | $D$                                             | $P$ é ponto de acumulação de $D$ |
|-------------|-------------------------------------------------|----------------------------------|
| $(1, 1)$    | $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 2\}$ | sim                              |
| $(1, 1)$    | $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 2\}$    | sim                              |
| $(0, -1)$   | $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}$         | não                              |
| $(0, 1, 0)$ | $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 > 1\}$ | sim                              |
| $(0, 0, 0)$ | $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 > 1\}$ | não                              |

Nos dois primeiros casos, o ponto  $P$  está na borda de um disco que se *acumula* em  $P$ . Na primeira situação, o ponto pertence ao conjunto; na segunda, não. Já na terceira situação, o conjunto  $D$  é o semiplano superior ao eixo  $Ox$ , incluindo esse bordo, mas o ponto  $P = (0, -1)$  não é ponto de acumulação de  $D$ .

Nas duas últimas situações, o ambiente é o espaço  $\mathbb{R}^3$  e o conjunto  $D$  é o complementar do cilindro (cheio) de raio 1 em torno do eixo  $Oz$ . O ponto  $(0, 1, 0)$  não pertence a  $D$ , pois pertence ao bordo do cilindro, mas é um ponto de acumulação, enquanto  $(0, 0, 0)$  não é ponto de acumulação de  $D$ .



A maneira de determinar se um ponto  $P$  é ponto de acumulação de um dado conjunto  $D$ , ou não, é a seguinte: imagine um pequeno *halo* em torno do ponto  $P$ . Caso você consiga um halo que não *toque* o conjunto  $D$ , como no caso  $(0, -1)$  e  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}$ , o ponto não é de acumulação.

Para caracterizar um ponto de acumulação, qualquer halo em torno de  $P$  deve conter pontos de  $D$  diferentes do próprio ponto  $P$ , que eventualmente pode pertencer a  $D$ .

Esta noção intuitiva de *halo* pode ser apresentada de maneira formal, como veremos a seguir.

**Definição 7.1.**

Sejam  $P \in \mathbb{R}^n$  e  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $P$  é ponto de acumulação de  $D$ , se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists Q \in D, \text{ tal que } 0 < |P - Q| < \varepsilon.$$

Isso é mais do que suficiente por agora. Vamos à noção de limites.

## LIMITES DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Vamos considerar o caso das funções de duas variáveis, pois isso simplifica as notações e, como as noções a serem apresentadas se generalizam naturalmente para funções de mais do que duas variáveis, basta acrescentar mais variáveis à lista de duas. Assim, essa prática não oferece maiores limitações à apresentação dos conceitos.

Seja  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $(a, b)$  um *ponto de acumulação* de  $A$ . Da mesma maneira como foi feito na Aula 2, para funções vetoriais de uma variável real, dizemos que o limite da função  $f$ , quando  $(x, y)$  tende a  $(a, b)$  é  $L$ ,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L,$$

se  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} (x,y) \in A \\ \text{e} \\ 0 < |(x,y) - (a,b)| < \delta \end{array} \right. \implies |f(x,y) - L| < \varepsilon.$$

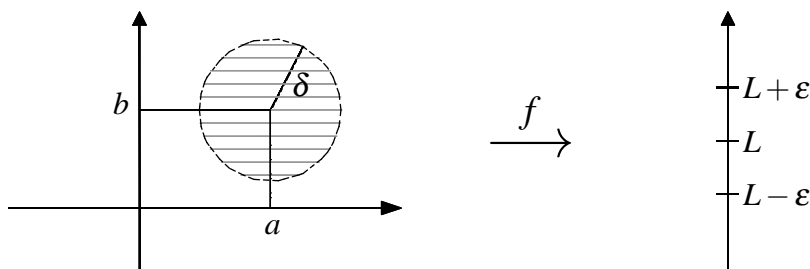
Note que  $|(x,y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ; portanto,  $|(x,y) - (a,b)|$  é a distância, em  $\mathbb{R}^2$ , de  $(x,y)$  até  $(a,b)$ . Assim, a inequação  $|(x,y) - (a,b)| < \delta$  define o conjunto dos pontos que estão a uma distância menor do que  $\delta$  de  $(a,b)$ .

Nenhuma surpresa, não é? Realmente, essa definição é, estruturalmente, a mesma que foi apresentada na Aula 2. O que muda de uma definição para a outra é o ambiente,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^n$ , no qual as variáveis dependentes ou independentes são calculadas. Isto é, o limite de  $f$  quando  $(x,y)$  tende ao ponto  $(a,b)$  de acumulação de  $A$  é  $L$  se, por definição, para todo  $\varepsilon > 0$  existir um número  $\delta > 0$ , tal que para todos os pontos  $(x,y) \in A$ ,  $(x,y) \neq (a,b)$ , com  $(x,y)$   $\delta$ -próximo de  $(a,b)$ , temos  $f(x,y)$   $\varepsilon$ -próximo de  $L$ .

Esquemáticamente, no caso em que  $A = \mathbb{R}^2$ , todo o círculo de raio  $\delta$ , centrado em  $(a,b)$ , menos o bordo e o próprio ponto

O significado da expressão  $\delta$ -próximo foi explicado na Aula 18. Significa que a distância entre os dois pontos é menor do que  $\delta$ .

$(a, b)$ , é aplicado por  $f$  no intervalo aberto  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ :



Realmente, a condição  $0 < |(x, y) - (a, b)| < \delta$  determina o disco de raio  $\delta$  centrado em  $(a, b)$ , perfurado nesse ponto e sem o bordo.

**Exemplo 7.2.**

Você verá que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 2\sqrt{x^2 + y^2} = 0.$$

Realmente, como

$$|(x, y) - (0, 0)| = |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e

$$|f(x, y) - 0| = |f(x, y)| = |2\sqrt{x^2 + y^2}| = 2\sqrt{x^2 + y^2},$$

para cada  $\varepsilon > 0$ , tome  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ .

Assim,

$$0 < |(x, y) - (0, 0)| < \delta = \frac{\varepsilon}{2} \implies |f(x, y) - 0| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

**Exercício 7.1.**

Use o fato

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ e } \forall b \in \mathbb{R}, \quad |x| \leq \sqrt{x^2 + (y - b)^2}$$

para mostrar que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,b)} 3x = 0$ .

## PROPRIEDADES DOS LIMITES

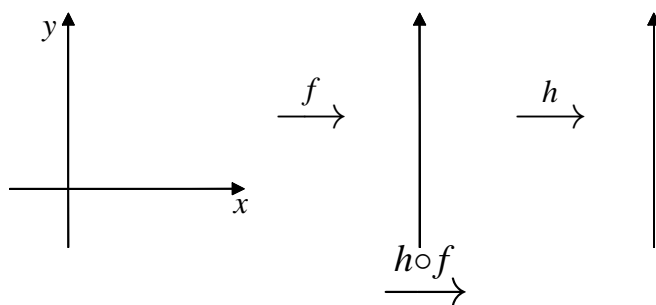
Boas notícias! Continua verdadeira a observação feita na Aula 2: provar que um certo limite é um dado número ou que um certo valor não é o limite, usando diretamente a definição, é trabalhoso. Nós só fazemos isso em ocasiões especiais. A prática é a seguinte: usamos a definição para provar as muitas propriedades dos limites e usamos as propriedades para calculá-los.

Além disso, continuam válidas as propriedades de limites que conhecemos do Cálculo I, guardadas as devidas adaptações. Por exemplo, se  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$  e  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = M$ , então

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) \pm g(x,y) = L \pm M$ ;
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} c f(x,y) = cL$ ;
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) g(x,y) = LM$ ;
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M}$ , desde que  $M \neq 0$ ;
- se  $y = h(x)$  é uma função de uma variável real, tal que  $\lim_{x \rightarrow L} h(x) = N$ , então,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} h(f(x,y)) = N.$$

Aqui está o mapa da composição dessa última propriedade:



Essas propriedades servem para calcular os limites mais simples (aquilo que podemos chamar *trivial variado*). Veja a seguir alguns exemplos.

**Exemplo 7.3.**

- a.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} x^2 + xy - y^2 + 3 = 2;$
- b.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{2x - 3y}{1 + x^2 + y^2} = 1;$
- c.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (e, \pi/2)} \ln x + \operatorname{sen} y = 2;$
- d.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (\pi/4, \pi/4)} \operatorname{sen}(x + y) = 1;$
- e.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \ln(1 + x^2 + y^2) = 0.$

Os dois últimos itens ilustram a propriedade da composição de funções. No primeiro desses casos,  $f(x, y) = x + y$  e  $h(x) = \operatorname{sen} x$ . No segundo deles,  $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$  e  $h(x) = \ln x$ .

Você verá agora três propriedades que darão as principais ferramentas para o cálculo de muitos limites. Elas serão enunciadas na forma de teoremas, que são generalizações de teoremas que foram apresentados anteriormente e suas demonstrações são simples adaptações das demonstrações apresentadas. Você poderá adaptar as argumentações já dadas para essas situações, escrevendo então as provas desses teoremas. No entanto, vá com moderação ao pote, especialmente se sua agenda de estudo anda cheia.

**Teorema 7.1** (Teorema do Confronto).

*Sejam  $f$ ,  $g$  e  $h$  funções reais de duas variáveis e  $(a, b)$  um ponto de acumulação dos domínios de  $f$ ,  $g$  e  $h$ . Se existe um número  $r > 0$ , tal que para todo  $(x, y) \in \operatorname{Dom}(f) \cap \operatorname{Dom}(g) \cap \operatorname{Dom}(h)$*

*$0 < |(x, y) - (a, b)| < r$  vale*

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, y) \leq g(x, y) \leq h(x, y), \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} h(x, y) = L, \end{array} \right.$$

*então,*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) = L.$$



Você viu uma versão desse teorema em Cálculo I, que foi usado para provar o seguinte limite fundamental:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1.$$

**Exemplo 7.4.**

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(x+y)}{x+y} = 1.$$

Agora você conhecerá uma adaptação do Teorema 7.1.

**Teorema 7.2.**

Sejam  $f$  e  $g$  duas funções de duas variáveis,  $(a, b)$  um ponto de acumulação de  $\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$  e

a.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = 0,$

b.  $\exists M > 0$  tal  $|g(x,y)| < M,$

para todo  $(x,y) \in \text{Dom}(g)$  tal que  $0 < |(x,y) - (a,b)| < r$ , para algum  $r > 0$ , então,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)g(x,y) = 0.$$

**Exemplo 7.5.**

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

Realmente,  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$

$$0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2.$$

Se tomarmos  $(x,y) \neq (0,0)$ , então podemos multiplicar a

inequação anterior por  $\frac{1}{x^2 + y^2}$ , obtendo

$$0 \leq \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1.$$

Portanto, a função  $g(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$  é limitada:  
 $\forall (x, y) \neq (0, 0)$ ,

$$|g(x, y)| = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1.$$

Como  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} y = 0$ , temos:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

### Exercício 7.2.

Calcule os seguintes limites:

- $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} xy \sin\left(\frac{1}{x + y}\right);$
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + 4y^2}}.$

## ONDE ESTÁ A DIFERENÇA?

A próxima propriedade será útil para dar respostas negativas. Em outras palavras, ela nos permitirá detectar situações nas quais o limite não existe. Nessas situações, notaremos melhor a diferença que há entre as funções de uma e as funções de mais do que uma variável.

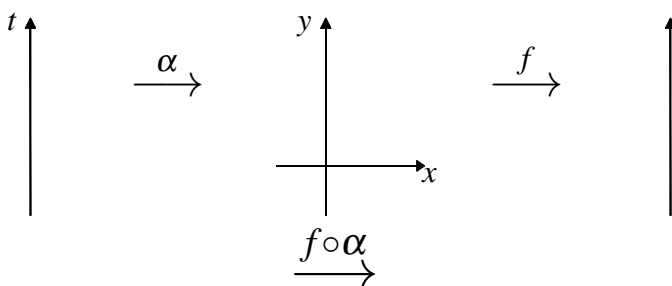
### Teorema 7.3.

Sejam  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva no plano,  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $(a, b)$  um ponto de acumulação de  $A$ . Suponha que  $\alpha(I) \subset A$ . Se  $t_0 \in I$  ou  $t_0$  é um ponto extremo do intervalo  $I$

(isto é,  $t_0$  é um ponto de acumulação de  $I$ ),  $\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = (a, b)$   
e  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$ , então

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(\alpha(t)) = L.$$

Aqui está o mapa da composição:



Do ponto de vista algébrico, estamos substituindo  $x$  e  $y$  por  $x(t)$  e  $y(t)$ . Antes de ler a prova do teorema, veja como ele funciona em um exemplo.

**Exemplo 7.6.**

Sejam  $\alpha(t) = (t, t^2)$  e  $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ . Vimos no Exemplo 7.5 que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ . Além disso,  $\lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) = (0, 0)$ . Portanto, o teorema afirma que

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\alpha(t)) = 0.$$

Realmente,

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\alpha(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4}{2t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{2} = 0.$$

Aqui está a prova do teorema: como  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$ , dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta_1 > 0$ , tal que

$$0 < |(x, y) - (a, b)| < \delta_1 \implies |f(x, y) - L| < \varepsilon,$$

sempre que  $(x, y) \in A$ .

Em contrapartida,  $\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = (a, b)$  implica que, dado  $\delta_1$ , da condição anterior, existe  $\delta > 0$  tal que, para  $t \in I$ ,

$$0 < |t - t_0| < \delta \implies |\alpha(t) - (a, b)| < \delta_1.$$

Portanto, podemos dizer que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$ , tal que

$$0 < |t - t_0| < \delta \implies |\alpha(t) - (a, b)| < \delta_1 \implies |f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

Isto é,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(\alpha(t)) = L.$$

Muito bem; para terminarmos a aula, resta explicar como usamos esse teorema para descobrir que determinados limites *não existem*.

Decorre do teorema que, se tivermos duas funções vetoriais  $\alpha_1(t)$  e  $\alpha_2(t)$ , tais que  $\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha_1(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \alpha_2(t) = (a, b)$  e

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(\alpha_1(t)) \neq \lim_{t \rightarrow t_0} f(\alpha_2(t)),$$

então,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$$

não existe.

Ou ainda, se existe uma função  $\alpha(t)$ , tal que  $\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = (a, b)$  e  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(\alpha(t))$  não existe, então  $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$  também não existe.

A praticidade desse fato é que os limites  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(\alpha(t))$  são limites de funções reais de uma variável real e, portanto, mais simples de calcular.

Vamos a mais um exemplo.

**Exemplo 7.7.**

Você verá que o limite de  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  não existe, quando  $(x, y)$  tende a  $(0, 0)$ .

Realmente, vamos considerar  $\alpha_1(t) = (t, 0)$  e  $\alpha_2(t) = (t, t)$ . Em ambos os casos, temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \alpha_i(t) = (0, 0).$$

Porém,

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\alpha_1(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\alpha_2(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}.$$

Como obtivemos limites diferentes em cada caso, concluímos que

$$\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

A hora já vai avançada e está na hora de parar. A questão das diferenças ainda não foi completamente explorada, mas voltaremos ao tema na próxima aula. Você não perde por esperar. De qualquer forma, você aprendeu muita coisa até agora. Aproveite para aprofundar mais seus conhecimentos praticando com os exercícios a seguir.

### Exercício 7.3.

1. Use o fato

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ e } \forall b \in \mathbb{R}, \quad |x| \leq \sqrt{x^2 + (y - b)^2}$$

para mostrar que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,b)} 3x = 0$ .

**Solução:**

Esse tipo de problema demanda um bocado de rascunho antes de escrever a resposta. Aqui está a folha de rascunho do problema.

Sabemos que:

$$\begin{cases} |f(x, y) - 0| = |f(x, y)| = |3x| = 3|x|; \\ |(x, y) - (0, b)| = \sqrt{x^2 + (y - b)^2}; \\ |x| \leq \sqrt{x^2 + (y - b)^2}. \end{cases}$$

As duas primeiras linhas decorrem das definições das funções, enquanto a última é um fato corriqueiro de Matemática que é muito útil.

É bom ter em mente o objetivo de nosso exercício. Nesse caso, é: queremos encontrar  $\delta$ , em função de  $\varepsilon$ , tal que, ao impormos a condição  $0 < |(x, y) - (0, b)| = \sqrt{x^2 + (y - b)^2} < \delta$ , teremos a certeza de que  $|f(x, y) - 0| = 3|x| < \varepsilon$ .

A chave para o quebra-cabeça é a inequação  $|x| < \sqrt{x^2 + (y - b)^2}$ . Realmente, para obtermos

$$3|x| < 3\sqrt{x^2 + (y - b)^2} < \varepsilon,$$

a partir de  $\sqrt{x^2 + (y - b)^2} < \delta$ , basta dividir toda a inequação por 3:

$$|x| < \sqrt{x^2 + (y - b)^2} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ou seja, se garantirmos  $\sqrt{x^2 + (y - b)^2} < \frac{\varepsilon}{3}$ , teremos  $|x| < \frac{\varepsilon}{3}$ , pois  $|x| < \sqrt{x^2 + (y - b)^2} < \frac{\varepsilon}{3}$ . Portanto, temos nosso candidato a  $\delta$ :  $\frac{\varepsilon}{3}$ . Pronto; agora sabemos a solução do problema e podemos terminar nossa folha de rascunho, escrevendo a resposta:

Dado  $\varepsilon > 0$  tome  $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ . Então,

$$\begin{aligned} 0 < |(x, y) - (0, b)| &= \sqrt{x^2 + (y - b)^2} < \delta = \frac{\varepsilon}{3} \implies \\ |f(x, y) - 0| &= 3|x| \leq 3\sqrt{x^2 + (y - b)^2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Veja quanto rascunho foi necessário para produzir uma resposta curta. É muito comum, em Matemática, vermos apenas as respostas curtas. Isso é parte da nossa cultura e é importante que seja assim. No entanto, não devemos nos esquecer de que por trás de muitas respostas curtas há muitas folhas de rascunho.

2. Calcule os seguintes limites:

a.  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} xy \sin\left(\frac{1}{x + y}\right);$

b.  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + 4y^2}}.$

### Solução:

A função  $f(x, y) = \sin\left(\frac{1}{x+y}\right)$  está definida em todos os pares ordenados  $(x, y)$ , tais que  $x \neq -y$ . Isto é,  $\mathbb{R}^2$  menos a bissetriz do segundo e do quarto quadrantes. Em particular,  $(0, 0) \notin \text{Dom}(f)$ , mas  $(0, 0)$  é ponto de acumulação de  $\text{Dom}(f)$ . Além disso, como  $|\sin \alpha| \leq 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ , a função  $f$  é limitada. Portanto, sendo  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy = 0$ , podemos concluir

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \sin\left(\frac{1}{x+y}\right) = 0.$$

Neste segundo item, vamos usar que  $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 4y^2}}$  é limitada. Realmente, a inequação

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + 4y^2}.$$

Para  $(x, y) \neq (0, 0)$ , o domínio da função, podemos reescrever a inequação anterior como

$$\frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 4y^2}} \leq 1.$$

Pronto! Como  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y = 0$ , podemos concluir que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + 4y^2}} = 0.$$

3. Você viu que a operação *retirar um ponto* divide a reta em dois *pedaços* distintos, mas não causa o mesmo estrago ao plano. Considere, agora, a operação *retirar uma reta* aplicada ao plano e ao espaço tridimensional. Compare os resultados com a situação anterior. Finalmente, que tipo de operação deveríamos usar para dividir o espaço tridimensional?

4. Calcule os seguintes limites:

$$\begin{array}{ll} \text{a. } \lim_{(x,y) \rightarrow (1, \pi/4)} 3 \sin xy; & \text{b. } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sin x^2 + y^2}; \\ \text{c. } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + 4y^2}; & \text{d. } \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{(x-1)y}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}. \end{array}$$

5. Use limites sobre curvas, como foi feito no Exemplo 7.7, para mostrar que a função

$$f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - 4y^2}$$

não admite limite quando  $(x,y)$  tende a  $(0,0)$ .

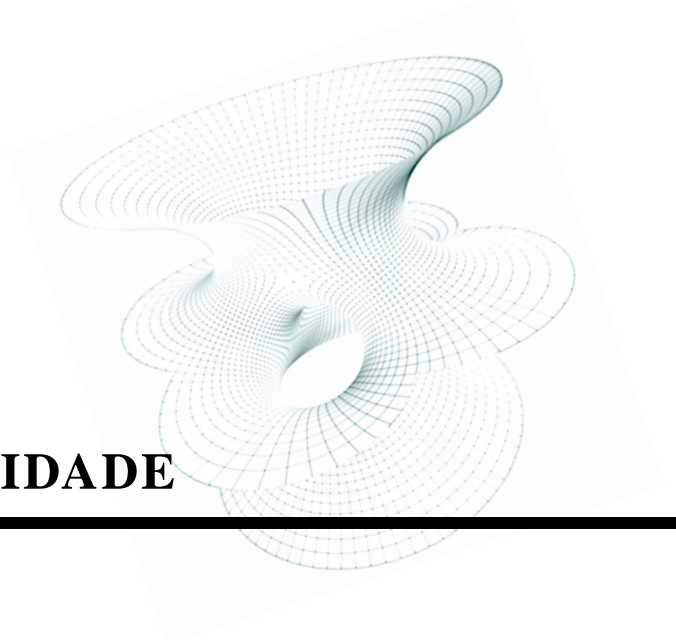
6. Mostre que se  $(a,b)$  é ponto de acumulação de  $A \cap B$ , então  $(a,b)$  é ponto de acumulação de  $A$  e ponto de acumulação de  $B$ .



# Aula 8

## LIMITES E CONTINUIDADE

---



## Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 aprender a técnica de tomar limites de funções de várias variáveis ao longo de curvas;
- 2 conhecer a noção de continuidade de funções de várias variáveis.

## LIMITES E CONTINUIDADE

O último tema apresentado na aula anterior foi restringir o limite de uma função de duas ou mais variáveis ao longo de uma curva. Essa técnica faz o papel dos limites laterais das funções de uma variável, apresentados no Cálculo I.

Realmente, quando os limites laterais,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x),$$

são diferentes, concluímos que a função  $f$  não admite limite quando  $x$  tende a  $a$ .

Na versão do Cálculo III, consideramos os limites de uma função de várias variáveis, em um certo ponto, tomados ao longo de curvas distintas, e eles são diferentes, também concluímos que a função não admite limite nesse ponto, pois, se o limite existisse, o Teorema 7.3 implicaria igualdade dos limites sobre quaisquer curvas convergentes para o ponto. Veja o exemplo a seguir.

### Exemplo 8.1.

A função  $f(x, y) = \frac{|x-2|}{\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2}}$ , definida para todo  $(x, y) \neq (2, -1)$ , não admite limite quando  $(x, y)$  tende a  $(2, -1)$ . Para ver isso, considere  $\alpha_1(t) = (2+t, -1)$  e  $\alpha_2(t) = (2+3t, -1+4t)$ , por exemplo.

Em ambos os casos, temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \alpha_i(t) = (2, -1).$$

No entanto,

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\alpha_1(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|}{\sqrt{t^2}} = 1$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\alpha_2(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|3t|}{\sqrt{9t^2 + 16t^2}} = \frac{3}{5}.$$

Você viu que os limites tomados ao longo de duas curvas

diferentes, mas que convergem para  $(2, -1)$  quando  $t$  tende a zero, são diferentes.

Ou seja, a função  $f$  apresenta um comportamento para valores próximos de  $(2, -1)$ , ao longo da imagem de  $\alpha_1$ , e outro comportamento para valores próximos de  $(2, -1)$ , ao longo da imagem de  $\alpha_2$ .

Nessas circunstâncias, costumamos dizer que  $f$  não tem limite no ponto, apesar de a frase ser canhestra.

Em contrapartida, você deve lembrar-se do Cálculo I, em que a coincidência dos limites laterais assegura a existência do limite. No Cálculo III, porém, estamos em situação bem diferente. Enquanto no caso das funções de uma variável temos apenas dois limites laterais a considerar, no plano, por exemplo, temos uma infinidade de direções a levar em conta. Por exemplo, a equação

$$\alpha(t) = (a + ct, b + dt),$$

com  $c^2 + d^2 > 0$ , parametriza o feixe de retas que contém o ponto  $(a, b)$ , de tal maneira que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) = (a, b).$$

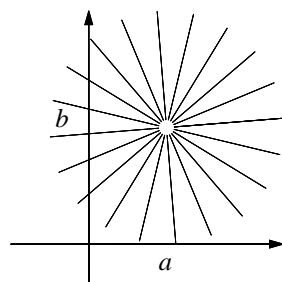
A surpresa, que evidencia a diferença entre as funções de uma variável das funções de duas ou mais variáveis, é que a análise do comportamento da função  $f(x, y)$  no ponto  $(a, b)$ , de acumulação do domínio de  $f$ , ao longo de todos esses caminhos (i.e., todos os possíveis valores de  $c$  e de  $d$ ), não é suficiente para estabelecer a existência do limite de  $f$  em  $(a, b)$ , no caso de todos eles serem coincidentes. Aqui está um exemplo.

**Exemplo 8.2.**

(Exemplo 6.6, revisitado)

Vamos analisar o comportamento da função  $f(x, y) = \frac{4x^2y}{x^4 + y^2}$  em torno da origem.

Considere  $\alpha(t) = (ct, dt)$ , com  $c^2 + d^2 > 0$ , o feixe de retas



A condição  $c^2 + d^2 > 0$  evita que  $c$  e  $d$  sejam tomados simultaneamente nulos, pois nesse caso  $\alpha(t)$  seria a função constante  $\alpha(t) = (a, b)$ .

que concorrem para a origem:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) = \lim_{t \rightarrow 0} (ct, dt) = (0, 0).$$

Vamos calcular  $\lim_{t \rightarrow 0} f(\alpha(t))$ . É preciso dividir a análise em dois casos:  $d = 0$  e  $d \neq 0$ .

Se  $d = 0$ , a condição  $c^2 + d^2 > 0$  garante que  $c \neq 0$ , portanto,

$$f(\alpha(t)) = f(ct, 0) = \frac{4c^2 t^2 0}{c^4 t^4 + 0} = 0,$$

se  $t \neq 0$ . Assim,

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\alpha(t)) = 0.$$

Se  $d \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} f(\alpha(t)) &= \lim_{t \rightarrow 0} f(ct, dt) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4c^2 dt^3}{c^4 t^4 + d^2 t^2} = \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4c^2 dt}{c^4 t^2 + d^2} &= 0, \end{aligned}$$

pois  $\lim_{t \rightarrow 0} (c^4 t^2 + d^2) = d^2 \neq 0$  e  $\lim_{t \rightarrow 0} 4c^2 dt = 0$ .

Conclusão: o limite de  $f$  sobre qualquer direção que tomarmos, tendendo à origem, é zero. Portanto, há evidências de que o limite da função  $f$ , nesse ponto, seria zero, não?

Sim, há evidências, mas em Matemática isso não é suficiente para estabelecer a verdade.

Basta considerar as curvas

$$\beta_1(t) = (t, t^2) \text{ e } \beta_2(t) = (2t, t^2).$$

Em ambos os casos,  $\lim_{t \rightarrow 0} \beta_i(t) = (0, 0)$ .

No entanto,

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\beta_1(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t, t^2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4t^4}{t^4 + t^4} = 2$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\beta_2(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} f(2t, t^2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{16t^4}{16t^4 + t^4} = \frac{16}{17}.$$

Sobre curvas diferentes, a função tem limites diferentes e, portanto,

$$\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x^2y}{x^4 + y^2}.$$

Esse exemplo mostrou que o comportamento da função  $f$ , ao longo da família de retas que concorrem para a origem, não é suficiente para determinar o limite da função nesse ponto. Para entendermos um pouco mais esse fenômeno, vamos estudar um

pouco mais a função  $f(x, y) = \frac{4x^2y}{x^4 + y^2}$ .

Já sabemos que  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ . Vamos determinar as curvas de nível da função. Isto é, queremos resolver a equação

$$f(x, y) = \frac{4x^2y}{x^4 + y^2} = c.$$

Para  $c = 0$ , temos as soluções  $x = 0$  ou  $y = 0$ . Portanto,  $f^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}; x = 0 \text{ ou } y = 0\}$ .

Esse conjunto é formado pelos dois eixos cartesianos menos a origem.

Suponha, agora, que  $c \neq 0$ . Então,

$$f(x, y) = \frac{4x^2y}{x^4 + y^2} = c \iff 4x^2y = cx^4 + cy^4.$$

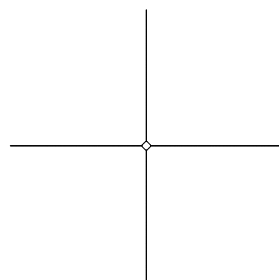
Isto é, vamos resolver a equação

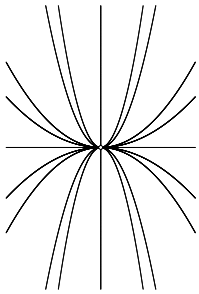
$$cy^2 - 4x^2y + cx^4 = 0$$

em  $y$ , obtendo

$$y = \frac{4x^2 \pm \sqrt{16x^4 - 4c^2x^4}}{2c}$$

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{4 - c^2}}{c} x^2.$$





Dizer que  $f$  é constante ao longo da imagem de  $\beta_1(t)$ ,  $t > 0$ , significa dizer que  $f(\beta_1(t)) = c$ , para algum número  $c$ .

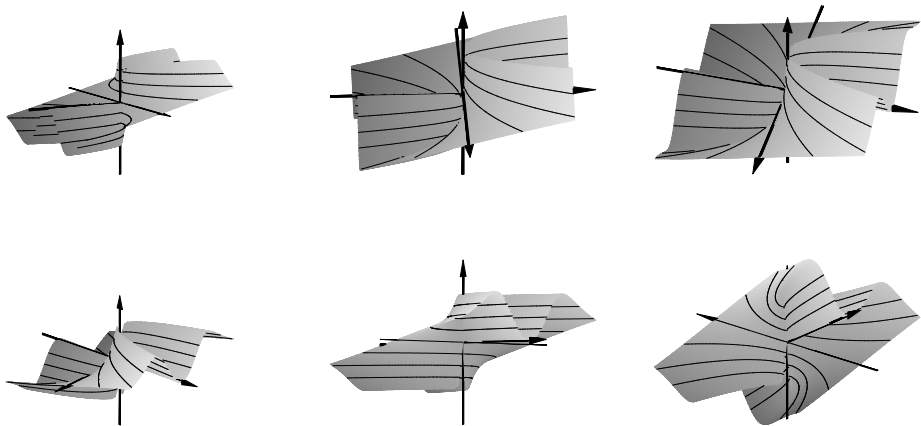
Note que, caso  $c \in [-2, 0) \cup (0, 2]$ , a equação anterior define um par de parábolas cujos vértices coincidem com a origem e são as curvas de nível  $c$ .

Observe, também, que se  $c \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ , então  $f^{-1}(c) = \emptyset$ . Ou seja, a imagem da função  $f$  é o intervalo  $[-2, 2]$  e a função  $f$  é uma função limitada.

Finalmente, podemos observar que a curva  $\beta_1(t) = (t, t^2)$ ,  $t > 0$ , é uma parametrização de um ramo da curva de nível 2. Ou seja,  $f$  é constante e igual a 2 ao longo da imagem de  $\beta_1(t)$ ,  $t > 0$ .

Além disso,  $f$  é constante e igual a  $\frac{16}{17}$  ao longo da imagem de  $\beta_2(t)$ ,  $t > 0$ . Como as imagens dessas curvas convergem para a origem (veja figura anterior), i.e.,  $\lim_{t \rightarrow 0} \beta_i(t) = (0, 0)$ , e  $f$  é constante sobre cada uma delas, porém com valores diferentes,  $f$  não admite limite na origem.

Aqui está uma série de perspectivas do gráfico de  $f(x, y) = \frac{4x^2y}{x^4 + y^2}$ , numa vizinhança da origem.



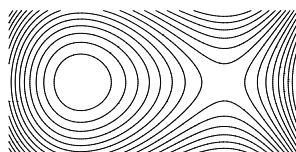
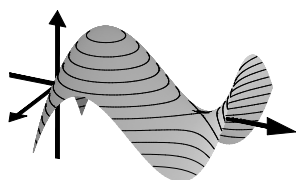
Lembre-se de que esta função não está definida na origem. Observe que os quatro semi-eixos cartesianos  $Ox$  e  $Oy$  estão contidos no gráfico de  $f$ . Repare, também, que se  $y > 0$ , então  $f(x, y) > 0$ , e se  $y < 0$ , então  $f(x, y) < 0$ . Ao longo da parábola  $y = \frac{1}{2}x^2$ , a função assume seu valor máximo, correspondendo ao

nível  $c = 2$ , enquanto ao longo da parábola  $y = -\frac{1}{2}x^2$ , a função assume seu valor mínimo, correspondendo ao nível  $-2$ .

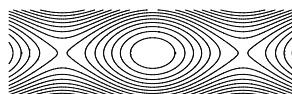
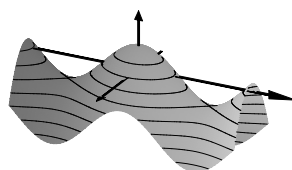
Correspondendo a níveis entre 0 e 2, temos os pares de parábolas na região  $y > 0$  do plano, enquanto para níveis entre  $-2$  e 0 temos os pares de parábolas simétricas em relação ao eixo  $Ox$ , na região  $y < 0$  do plano.

É muito importante conhecer uma gama de funções, com seus gráficos e suas curvas de nível, para perceber a diversidade de situações possíveis quando lidamos com duas variáveis. Nosso próximo exemplo apresentará alguns gráficos de funções com suas respectivas curvas de nível.

### Exemplo 8.3.

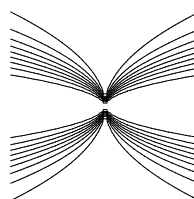
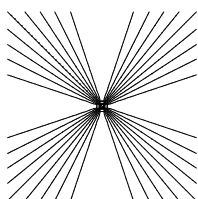
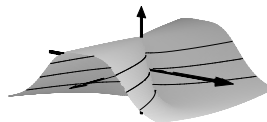
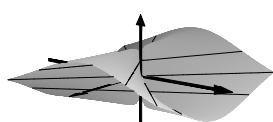


$$f(x, y) = \frac{y^3}{3} - 2y^2 + 3y - x^2$$



$$g(x, y) = \cos y - x^2$$

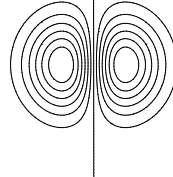
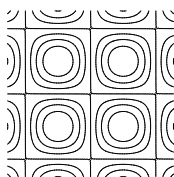
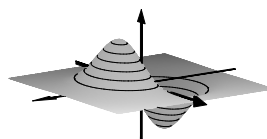
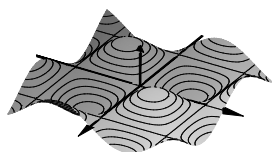
Esses dois exemplos são de funções do tipo  $z = g(x) + h(y)$ . Observe que  $f$  tem um ponto de máximo local. Em torno desse ponto, as curvas de nível lembram círculos. Essa função tem, também, um ponto que chamaremos *ponto de sela*. Em torno desse ponto, as curvas de nível lembram uma família de hipérbolas. Já a função  $g$  apresenta uma infinidade de pontos de máximo absoluto (a origem é um deles) e uma infinidade de pontos de sela.



$$h(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$k(x, y) = \frac{x^2 - y^4}{x^2 + y^4}$$

Essas duas funções são parecidas uma com a outra. Você nota a diferença nas curvas de nível. Enquanto as curvas de nível de  $h$  são pares de retas, as curvas de nível de  $k$  são pares de parábolas.



$$u(x, y) = \sin x \sin y$$

$$v(x, y) = 3xe^{-(x^2+y^2)}$$

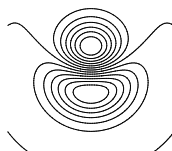
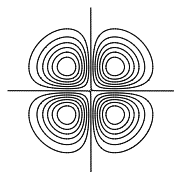
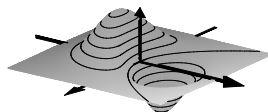
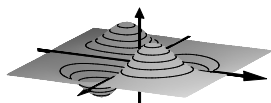
O gráfico da função  $u$  lembra uma bandeja de transportar ovos que se estende infinitamente para todos os lados. As retas  $x = k_1 \pi$  e  $y = k_2 \pi$  formam o conjunto de nível zero. Observe que a função tem uma infinidade de pontos de mínimo absolutos e de máximo absolutos, cada um no centro dos quadrados, cercados por curvas de nível que lembram círculos, e que se alternam numa disposição que lembra um tabuleiro de xadrez. Essa é, definitivamente, uma função bem interessante. Note que ela é uma função *periódica*.

Já a função  $v$  tem um ponto de máximo e um ponto de mínimo absolutos. Note que o eixo  $Oy$  é a curva de nível zero. As curvas de nível à esquerda são curvas de nível negativo e circundam o



ponto de mínimo, enquanto as do lado direito são curvas de nível positivo e circundam o ponto de máximo.

Aqui estão mais duas variações sobre o mesmo tema.



$$z(x,y) = 3xy e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

$$w(x,y) = (x^2 - 3y) e^{-(x^2+y^2)}$$

## CONTINUIDADE

Não há novidades na formulação desse conceito. Note, apenas, que apresentaremos a definição de continuidade de uma função de duas variáveis por uma questão de simplicidade. Essa definição pode ser naturalmente generalizada para os casos de mais do que duas variáveis, bastando acrescentar tantas variáveis quantas forem necessárias.

### Definição 8.1.

Dizemos que uma função  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  é contínua em um ponto  $(a,b)$ , de acumulação de  $A$ , se

- $(a,b) \in A$ ;
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ .

Dizemos que a função  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  é contínua (sem especificar um determinado ponto), se  $f$  for contínua em todos os pontos de acumulação de seu domínio  $A$ .

**Exemplo 8.4.**

Vamos determinar o valor de  $c$  para o qual a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2 + (x-1)^2}{(x-1)^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (1, 0) \\ c, & \text{se } (x, y) = (1, 0) \end{cases}$$

seja contínua.

Note, inicialmente, que  $A = \text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$ ; portanto, todos são pontos de acumulação de  $A$ . Além disso, se  $(a, b) \neq (1, 0)$ ,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = \frac{ab^2 + (a-1)^2}{(a-1)^2 + b^2} = f(a, b).$$

Portanto, como  $f(1, 0) = c$ , temos de calcular

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (1, 0)} \frac{xy^2 + (x-1)^2}{(x-1)^2 + y^2}.$$

Este limite está indeterminado, porque

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 0)} xy^2 + (x-1)^2 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (1, 0)} (x-1)^2 + y^2 = 0.$$

Precisamos de alguma estratégia algébrica que nos permita levantar essa indeterminação. Muito bem; após algum tempo olhando o quociente do limite, chegamos ao seguinte desenvolvimento:

Este truque é velho,  
mas funciona!

$$\begin{aligned} \frac{xy^2 + (x-1)^2}{(x-1)^2 + y^2} &= \frac{xy^2 + (x-1)^2 + y^2 - y^2}{(x-1)^2 + y^2} = \\ &= \frac{xy^2 - y^2 + (x-1)^2 + y^2}{(x-1)^2 + y^2} = \\ &= \frac{(x-1)y^2}{(x-1)^2 + y^2} + 1. \end{aligned}$$

Como  $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 0)} (x-1) = 0$  e  $g(x, y) = \frac{y^2}{(x-1)^2 + y^2}$  é uma função limitada, o Teorema 7.3 garante que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{(x-1)y^2}{(x-1)^2 + y^2} = 0.$$

Assim,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{xy^2 + (x-1)^2}{(x-1)^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \left[ \frac{(x-1)y^2}{(x-1)^2 + y^2} + 1 \right] = 1$$

portanto,  $f$  é contínua se, e somente se,  $c = 1$ .

Um resultado que continua sendo verdadeiro nesse contexto é que a composição de funções contínuas é contínua.

### Teorema 8.1.

*Sejam  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua,  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma função vetorial de uma variável real, onde  $I$  é um intervalo e  $\alpha(I) \subset A$ , e  $g : B \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua tal que  $B$  é uma união de intervalos e  $f(A) \subset B$ . Então, as composições  $f \circ \alpha$  e  $g \circ f$  são funções contínuas.*

A demonstração desse fato é, de certa forma, simples e rotineira. Vamos, portanto, apenas considerar um exemplo.

#### Exemplo 8.5.

- A função  $h(x, y) = \sin(x + y)$  é contínua, pois pode ser vista como a composição  $h(x, y) = g \circ f(x, y)$ , onde  $f(x, y) = x + y$  é uma função contínua (funcional linear, na verdade) e  $g(x) = \sin x$  função contínua (do Cálculo I).
- A composição de  $\alpha(t) = (t, 2t)$ , função contínua, com  $f(x, y) = xy + 2x + y$ , também contínua, resulta na função

$$k(t) = f \circ \alpha(t) = f(t, 2t) = 2t^2 + 4t,$$

claramente uma função contínua.

Um resultado muito interessante e útil, que caracteriza as funções contínuas, em geral, é o seguinte.

**Teorema 8.2** (Da Permanência do Sinal).

Sejam  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e  $(x_0, y_0) \in A$  tal que  $f(x_0, y_0) > 0$  (digamos). Então, existe uma número  $r > 0$  tal que, se  $(x, y) \in A$  é tal que

$$0 < |(x, y) - (x_0, y_0)| < r, \text{ então, } f(x, y) > 0.$$

Ou seja, se o sinal da função contínua  $f$  é positivo num determinado ponto  $(x_0, y_0)$ , então o sinal de  $f$  permanece positivo em uma vizinhança de raio  $r$  em torno do ponto  $(x_0, y_0)$ .

Como o teorema anterior ainda não foi demonstrado, vamos terminar a aula fazendo a demonstração desse teorema.

**Demonstração**

Consideremos, inicialmente, a possibilidade de  $(x_0, y_0)$  ser um elemento de  $A$ , mas não ser um ponto de acumulação de  $A$  (essa situação não ocorre com frequência nas funções mais usadas no Cálculo, mas como é uma possibilidade teórica, devemos incluí-la de qualquer forma).

Se  $(x_0, y_0) \in A$ , mas não é um de seus pontos de acumulação, existe um número  $r > 0$ , tal que  $(x_0, y_0)$  é o único elemento de  $A$  contido no disco de centro em  $(x_0, y_0)$  e raio  $r$ . Neste caso, a afirmação do teorema é verdadeira.

Suponhamos, agora, que  $(x_0, y_0)$  é um elemento de  $A$ , assim como um ponto de acumulação de  $A$ . Logo, podemos reescrever a definição de continuidade em  $(x_0, y_0)$  da seguinte maneira:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , tal que, se  $(x, y) \in A$  e

$$0 < |(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta, \text{ então } |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Como  $f(x_0, y_0) > 0$ , podemos tomar  $\varepsilon = \frac{f(x_0, y_0)}{2}$ . Para esse  $\varepsilon$  existe  $\delta = r > 0$ , tal que, se  $(x, y) \in A$  e

$$0 < |(x, y) - (x_0, y_0)| < r, \text{ então } |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \frac{f(x_0, y_0)}{2}.$$

Isso é suficiente para garantir que  $f(x, y) > 0$ , pois a inequação

é equivalente a dizer que  $f(x, y)$  pertence ao intervalo  $\left(\frac{f(x_0, y_0)}{2}, \frac{3f(x_0, y_0)}{2}\right) \subset \mathbb{R}$ .

Muito bem; com isso terminamos. Na próxima aula, o tema da diferenciabilidade será introduzido através das derivadas parciais.

Aqui estão alguns exercícios para que você pratique os conhecimentos que aprendeu.

### Exercício 8.1.

1. Calcule os seguintes limites.

- a.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,1)} e^{x^2-y^2}.$
- b.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-2)} \frac{4-x^2}{5+xy}.$
- c.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1+xy) \operatorname{sen} xy}{xy}.$
- d.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{1-\cos y}{xy^2}.$
- e.  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,-1,1)} \frac{x^2+y^2+z^2}{2+x+y+z}.$
- f.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(\operatorname{sen} 2x)(\operatorname{tg} xy)}{x^2y}.$
- g.  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2z}{x^2+y^2+2z^2}.$
- h.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

Dica: a resposta do item (h) é zero.

2. Seja  $f(x, y) = \frac{(x+1)y^3}{(x+1)^2+y^6}.$

- a. Determine o domínio de  $f$ .
- b. Considere  $\alpha(t) = (at-1, bt)$ , com  $a^2+b^2 > 0$ .  
Mostre que

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\alpha(t)) = 0.$$

O que isso quer dizer?

c. O que podemos dizer a respeito de  $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,0)} f(x,y)$ ?

3. Calcule os seguintes limites ou mostre quando a função não admite tal limite.

a.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

b.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^4}{x^2 + y^4}.$

c.  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 - y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$

d.  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y}.$

e.  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x(z-1)}{(z-1) - x^2 + y^2}.$

f.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy + xz + yz}{x^2 + y^2 + z^2}.$

g.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2(x+1) + (y-1)^2}{x^2 + (y-1)^2}.$

h.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$

4. Determine o valor de  $c$  para o qual a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y - 3x^2 - (y-1)^2}{x^2 + (y-1)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,1) \\ c, & \text{se } (x,y) = (0,1) \end{cases}$$

seja contínua.

5. Determine qual das seguintes funções é contínua. Para as que não forem contínuas, determine o maior subconjunto do domínio no qual a função é contínua.

a.  $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ .

b.  $g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$ .

c. 
$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

d. 
$$k(x, y) = \begin{cases} \frac{x + 2y}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ c, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

6. Seja  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$  e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, tal que  $f(0, 0) = 1$ .

- a. Mostre que existe um número  $r > 0$ , tal que, se  $x^2 + y^2 < r^2$ , então  $f(x, y) > 0$ .
- b. Sabendo que  $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) < 0$  e  $f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) > 0$ , mostre que existe um número  $a$ , tal que  $f(a, a) = 0$ . (Considere  $\alpha(t) = (t, t)$ ).

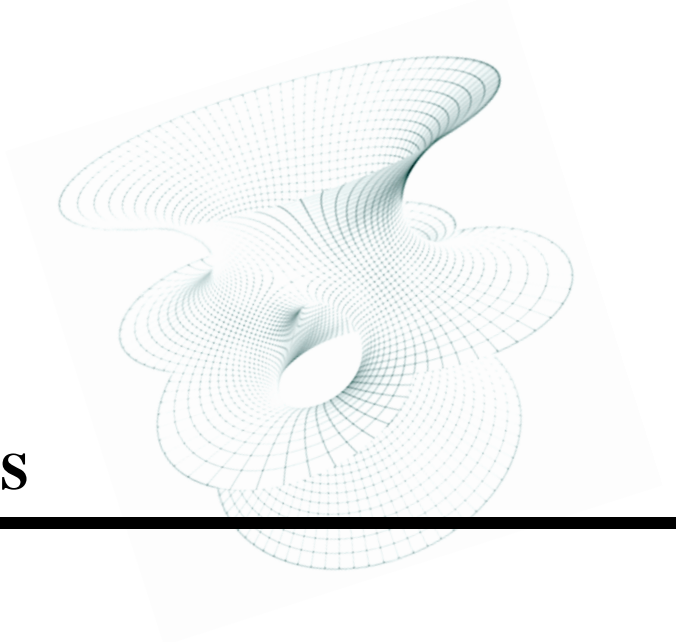




# Aula 9

## DERIVADAS PARCIAIS

---



## Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 aprender a calcular as derivadas parciais de funções de várias variáveis;
- 2 conhecer a interpretação geométrica desse conceito.

## INTRODUÇÃO

Ao longo das quatro últimas aulas você aprendeu os conceitos básicos da teoria das funções de várias variáveis, incluindo o conceito de continuidade.

Nesta aula, iniciaremos uma nova etapa, o estudo das noções de diferenciabilidade das funções de várias variáveis. Na verdade, esse assunto ocupará todas as nossas aulas, de agora em diante.

As derivadas parciais desempenham um papel relevante nesse contexto, especialmente do ponto de vista prático; porém, como veremos um pouco mais adiante, não completamente decisivo. Mas estamos antecipando demais nossa história. Tudo a seu tempo.

Seguindo a prática já rotineira, estabeleceremos os conceitos para os casos das funções de duas e de três variáveis, observando que eles podem ser estendidos para funções com mais variáveis.

Antes de atacarmos o nosso tema principal, no entanto, precisamos de um novo conceito sobre conjuntos.

## CONJUNTOS ABERTOS

Essa noção caracterizará os domínios das funções que estudaremos de agora em diante.

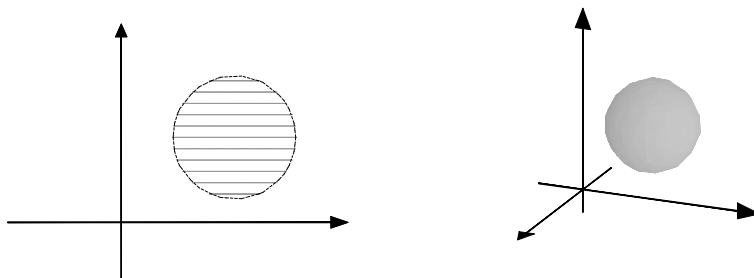
Intuitivamente, podemos dizer que um subconjunto do plano  $\mathbb{R}^2$  ou do espaço  $\mathbb{R}^3$  é aberto se for um conjunto sem fronteiras ou bordos. Exemplos típicos são

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; (x - a)^2 + (y - b)^2 < r \},$$

o disco de centro em  $(a, b)$  e raio  $r$ , aberto em  $\mathbb{R}^2$ ,

$$B = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 < r \},$$

a bola de centro em  $(a, b, c)$  e raio  $r > 0$ , aberta em  $\mathbb{R}^3$ .



Um detalhe importante: a noção *conjunto aberto* é uma noção relativa. Isto é, depende do ambiente. Veja, a sintaxe é:  $A$  é aberto em  $\mathbb{R}^2$ .

Para tornarmos este conceito mais preciso, introduziremos a noção de *ponto interior*. Dizemos que um ponto  $(a, b) \in A \subset \mathbb{R}^2$  é um ponto interior do conjunto  $A$  se existe um disco aberto  $D$  de centro em  $(a, b)$  e raio  $r > 0$  contido em  $A$ . Em símbolos matemáticos,

$$(a, b) \in D \subset A \subset \mathbb{R}^2.$$

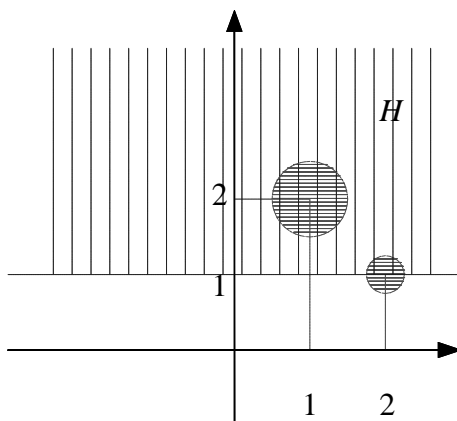
ponto interior

Analogamente, um ponto  $(a, b, c) \in A \subset \mathbb{R}^3$  é um ponto interior de  $A$  se existe uma bola aberta  $B$  de centro em  $(a, b, c)$  e raio  $r > 0$  contida em  $A$ .

Intuitivamente, um ponto  $(a, b)$  é um ponto interior de  $A$  se todos os pontos de  $\mathbb{R}^2$  que o *cercam* também são pontos de  $A$ .

### Exemplo 9.1.

Seja  $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y \geq 1\}$ . O ponto  $(1, 2)$  é um ponto interior de  $H$ , pois o disco aberto de centro em  $(1, 2)$  e raio  $1/2$ , por exemplo, está contido em  $H$ . Já o ponto  $(2, 1) \in H$  não é ponto interior de  $H$ , pois qualquer disco que tomarmos, com centro em  $(2, 1)$ , conterá pontos do tipo  $(2, b)$ , com  $b < 1$  e, portanto, pontos que não pertencem a  $H$ . Em outras palavras,  $(2, 1)$  pertence a  $H$  mas não está *envolvido* por pontos de  $H$ . Veja a ilustração a seguir.



## CONJUNTO ABERTO

Um subconjunto  $A \subset \mathbb{R}^2$  é dito aberto em  $\mathbb{R}^2$  se todos os seus pontos forem pontos interiores.

O conjunto  $H$ , do Exemplo 9.1, não é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$ , pois  $(2, 1) \in H$ , mas não é ponto interior. Aqui estão alguns exemplos de subconjuntos abertos de  $\mathbb{R}^2$ .

### Exemplo 9.2.

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y > 1\};$$

$$A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \neq y\};$$

$$A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 < x < 1, 0 < y < 1\};$$

$$A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; (x, y) \neq (1, 2)\}.$$

O argumento usado no Exemplo 9.1, para mostrar que  $(1, 2)$  é um ponto interior de  $H$ , pode ser adaptado para mostrar que todos os elementos de  $A_1$  são pontos interiores. Note que  $A_1$  se diferencia de  $H$  exatamente por não conter os pontos do tipo  $(a, 1)$ , que estão no bordo.

Para se convencer de que cada ponto  $(a, b) \in A_2$  é ponto interior, basta observar que a distância de  $(a, b)$  até a reta  $x = y$  é positiva, uma vez que  $a \neq b$ . Assim, basta tomar o disco  $D$ , de centro em  $(a, b)$ , com raio igual à metade dessa distância, por exemplo.

Caso  $(a, b) \in A_3$ , sabemos que  $0 < a, b < 1$ . Escolha  $r > 0$ , um número menor do que qualquer um dos números

$|a|, |b|, |a-1|, |b-1|$ . O disco  $D$ , de centro em  $(a, b)$  e raio  $r$ , não tocará nenhum dos bordos do quadrado. Portanto, estará contido em  $A_3$ .

Para constatar que  $A_4$  é um conjunto aberto ( $A_4$  é o plano todo menos um ponto), basta escolher  $r > 0$  menor do que a distância entre  $(a, b)$  e  $(1, 2)$ . O disco  $D$  centrado em  $(a, b)$ , com tal raio, não contém o ponto  $(1, 2)$ . Logo,  $D$  está contido em  $A_4$  e isso mostra que  $A_4$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$ .

Os discos abertos de  $\mathbb{R}^2$  e as bolas abertas de  $\mathbb{R}^3$  fazem o papel dos intervalos abertos de  $\mathbb{R}$ . Além disso, se  $A$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$ , então  $A$  é igual a uma união de discos abertos, pois todos os seus pontos são interiores. Além disso, todos os pontos de  $A$  são, também, pontos de acumulação de  $A$ .

É bom lembrar que o plano  $\mathbb{R}^2$  é, ele mesmo, um aberto em  $\mathbb{R}^2$  e, como é impossível exibir um elemento do conjunto vazio que não seja ponto interior, dizemos que  $\emptyset$  é um conjunto aberto (em qualquer ambiente).

A união qualquer de conjuntos abertos é um conjunto aberto, mas, surpreendentemente, a interseção infinita de conjuntos abertos pode não ser um conjunto aberto.

Terminamos agora essa conversa, que está um pouco longa, e vamos ao nosso tema principal.

## DERIVADAS PARCIAIS

Seja  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que  $A$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$ , e seja  $(a, b) \in A$ . Então, existe um certo número  $r > 0$ , tal que, se  $x \in (a-r, a+r)$ , então  $f(x, b)$  está bem definida.

Assim,  $z = f(x, b)$ , com  $x \in (a-r, a+r)$ , é uma função de uma variável e podemos, portanto, considerar a existência da derivada de tal função em  $x = a$ . Isto é, considere

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}.$$

Se esse limite for um número real, ele será chamado *derivada parcial de  $f$  em relação a  $x$ , no ponto  $(a, b)$* . Nesse caso,

O símbolo  $\partial$  é chamado *derronde*, que é uma corruptela do francês *de rond* que quer dizer *dê* redondo. Isso se deveu ao fato de os franceses, na época da Revolução Francesa, adotarem essa forma especial de escrever a letra d. Esse símbolo é particularmente útil para diferenciar a derivada parcial de uma função de várias variáveis, em relação a alguma delas  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ , da derivada de uma função de uma variável  $\left(\frac{df}{dx}\right)$ .

usamos as seguintes notações para representá-lo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial z}{\partial x}(a, b) = f_x(a, b).$$

Analogamente, podemos considerar a derivada parcial de  $f$  em relação a  $y$  no ponto  $(a, b)$ . Nesse caso, tomamos

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h},$$

e, caso o limite seja um número, denotamos por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \frac{\partial z}{\partial y}(a, b) = f_y(a, b).$$

### Exemplo 9.3.

Vamos calcular a derivada parcial da função  $f(x, y) = \sin xy$ , em relação a  $x$ , no ponto  $(a, b)$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a + h)b - \sin ab}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin ab \cosh b + \cos ab \sin hb - \sin ab}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin ah (\cosh b - 1) + \sin hb \cos ab}{h}. \end{aligned}$$

Observe que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh b - 1}{h} = 0$  e  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin hb}{h} = b$ . Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin ah (\cosh b - 1)}{h} + \frac{\sin hb}{h} \cos ab \right] = \\ &= b \cos ab. \end{aligned}$$

Na verdade, podemos concluir que, se  $f(x, y) = \sin xy$ ,

então, substituindo o termo genérico  $a$  por  $x$  e  $b$  por  $y$ , temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \cos xy.$$

## AS FUNÇÕES $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}$

Seja  $z = f(x, y)$  uma função definida num subconjunto aberto  $A$  de  $\mathbb{R}^2$ . Suponha que  $f$  admita derivadas parciais, em relação a  $x$  e a  $y$ , em todos os pontos  $(x, y) \in A$ . Nesse caso, obtemos duas funções, denotadas por  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , definidas em  $A$ . As notações  $\frac{\partial z}{\partial x}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y}$  também são muito usadas para representar essas funções.

De maneira análoga, se  $w = g(x, y, z)$ , usamos  $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$  e  $\frac{\partial w}{\partial z}$  para denotar as respectivas funções obtidas pela derivação parcial, no caso das funções de três variáveis.

### Exemplo 9.4.

Seja

$$f(x, y, z) = xy^2 + z \operatorname{sen} xyz.$$

Esta função está definida no espaço  $\mathbb{R}^3$ . Vamos calcular  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  e  $\frac{\partial f}{\partial z}$ . Isto é, queremos calcular as derivadas parciais de  $f$ . Podemos fazer isso diretamente, usando as regras de derivação aprendidas no Cálculo I. Basta que derivemos em relação à variável indicada, considerando as outras variáveis como constantes.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = y^2 + yz^2 \cos xyz.$$

Veja que usamos a Regra da Cadeia na segunda parcela.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2xy + xz^2 \cos xyz.$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \operatorname{sen} xyz + xyz \cos xyz.$$

No caso da derivada em relação a  $z$ , a derivada da primeira parcela é nula, pois é constante em relação a  $z$ . A derivada da segunda parcela é calculada com a Regra do Produto de duas funções:  $z \times \operatorname{sen} xyz$ .

### Exercício 9.1.

Calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(1, -1)$ , onde  $f(x, y) = 3x \operatorname{sen}(x + y)$ .

Há situações em que o cálculo da derivada parcial requer a definição. Veja mais um exemplo.

### Exemplo 9.5.

$$\text{Seja } f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Vamos verificar que  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ .

Note que a função não se altera se trocarmos a ordem das variáveis:  $(f(x, y) = f(y, x))$ . Isso significa que, caso a função admita alguma das derivadas parciais em  $(0, 0)$ , a primeira igualdade já estará estabelecida. Portanto, basta calcular, digamos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right) = 0, \end{aligned}$$

pois  $\lim_{h \rightarrow 0} h = 0$  e a função  $g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ , definida em  $\mathbb{R} - \{0\}$ , é limitada.



Concluimos, então, que  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ .

**Exemplo 9.6.**

$$\text{Seja } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 + 2y^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Esse exemplo nos reserva uma surpresa. Vamos calcular  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1. \end{aligned}$$

No entanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3h^2}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{h}. \end{aligned}$$

Como a função  $g(x) = \frac{2}{x}$ , definida em  $\mathbb{R} - \{0\}$ , não admite limite quando  $x \rightarrow 0$ , dizemos que a função  $f$  não admite derivada parcial em relação a  $y$  no ponto  $(0,0)$ .

## INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA DERIVADA PARCIAL

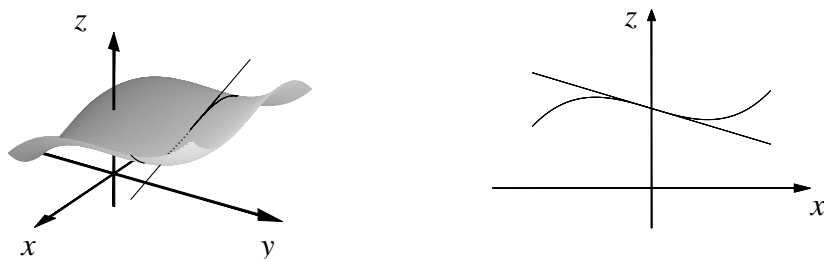
Vamos usar o fato de que a derivada  $g'(a)$ , de uma função  $y = g(x)$ , no ponto  $a$ , pode ser interpretada geometricamente como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de  $g$  no ponto  $(a,b)$ , para uma interpretação geométrica para as derivadas parciais.

Seja  $z = f(x, y)$  uma função que admite derivadas parciais, em relação a  $x$  e em relação a  $y$ , num dado ponto  $(a, b)$  de seu domínio. Ao fixarmos uma das variáveis, digamos  $y = b$ , estamos considerando a restrição da função  $f$  sobre a reta  $y = b$ . Geometricamente, estamos considerando a interseção do gráfico de  $f$  com o plano  $y = b$ . Essa interseção é uma curva do plano e pode ser vista como o gráfico da função  $z = f(x, b)$ .



Na figura da esquerda, vemos o gráfico de  $f$  com o plano  $y = b$  e, na figura da direita, vemos o plano  $y = b$  com curva obtida da sua interseção com o gráfico de  $f$ .

A derivada parcial de  $f$ , em relação a  $x$ , no ponto  $(a, b)$ , pode ser interpretada como o coeficiente angular da reta tangente à curva de interseção do plano com o gráfico de  $f$ , no ponto  $(a, b, f(a, b))$ . Veja, a seguir, mais uma ilustração.



Chegamos ao fim da aula. Aqui está uma série de exercícios para você colocar em prática os conceitos e técnicas que aprendeu.

## Exercício 9.2.

1. Calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(1, -1)$ , onde  $f(x, y) = 3x \sin(x + y)$ .

**Solução:**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3 \sin(x + y) + 3x \cos(x + y).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x \cos(x + y) \implies \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1) = 3.$$

2. Em cada um dos seguintes exercícios, calcule a derivada parcial indicada.

a.  $f(x, y) = 2xy + y^2$ ;  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$

b.  $f(x, y, z) = 2xy(1 - 3xz)^2$ ;  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}.$

c.  $z = x \ln\left(\frac{x}{y}\right)$ ;  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}.$

d.  $x = \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}$ ;  $w_x, w_z, w_y(0, 0, 0).$

e.  $f(u, v) = uv - u^2 + v^2$ ;  $\frac{\partial f}{\partial u}, f_v(0, -1).$

f.  $g(r, \theta) = r \cos \theta + r \sin \theta$ ;  $\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial \theta}.$

g.  $z = \arctg \frac{y}{x}$ ;  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}.$

h.  $f(x, y, z) = (x + y)e^{x-y+2z}$ ;  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}.$

i.  $f(u, v) = u^2 \arcsen v$ ;  $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}.$

3. Seja  $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ .

a. Mostre que  $\text{Dom}(f)$  é um conjunto aberto.

b. Determine a curva de nível 0.

c. Verifique que  $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 1$ .

4. Seja  $f(x, y, z) = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}$ . Verifique que

$$x f_x + y f_y + z f_z = -f.$$

5. Seja  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ .

Calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . (Veja que você deverá usar as regras

de derivação para calcular  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ , no caso

de  $(x, y) \neq (0, 0)$ , e a definição de derivada parcial num ponto específico para calcular  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ ).

As derivadas parciais são usadas para expressar um par de equações muito importantes, na teoria das funções de variável complexa, chamadas Equações de Cauchy-Riemann.

Um par de funções  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  que satisfazem as equações

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

são, respectivamente, a parte real e a parte complexa de uma função diferenciável (num sentido complexo) de uma variável complexa.

6. Mostre que cada par de funções de duas variáveis a seguir satisfaz as Equações de Cauchy-Riemann.

a.  $u(x, y) = x^2 - y^2; \quad v(x, y) = 2xy.$

b.  $u(x, y) = e^x \cos y; \quad v(x, y) = e^x \sin y.$

c.  $u(x, y) = x^3 + x^2 - 3xy^2 - y^2; \quad v(x, y) = 3x^2y + 2xy - y^3.$

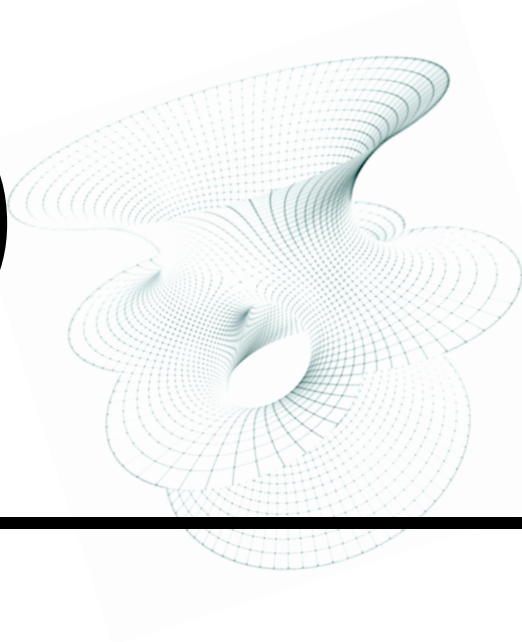
d.  $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$

e.  $u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2); \quad v(x, y) = \arctg \frac{y}{x}.$

# Aula 10

## AULA DE EXERCÍCIOS

---



### Objetivo

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 conhecer uma série de exemplos ilustrativos dos conteúdos apresentados nas Aulas 6 a 9.

## AULA DE EXERCÍCIOS

Para começar, vejamos dois exemplos nos quais noções de Geometria Analítica serão usadas para determinar os conjuntos de nível das funções.

### Exemplo 10.1.

Vamos esboçar as curvas de nível da função

$$f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2.$$

Como a função é polinomial, o seu domínio é o plano  $\mathbb{R}^2$ . Para determinar suas curvas de nível, temos de resolver a equação

$$f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2 = c$$

para diversos valores de  $c$ .

Você aprendeu a identificar esse tipo de cônica na Geometria Analítica. Uma maneira elegante de fazer isso é via Álgebra Linear. Note, primeiro, que

$$x^2 - 3xy + y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

A matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -3/2 & 1 \end{pmatrix}$  é simétrica. Seus autovalores são as soluções da equação  $\det(A - \lambda I) = 0$ , ou seja,  $\lambda^2 - 2\lambda - 5/4 = 0$ , que são  $\lambda_1 = 5/2$  e  $\lambda_2 = -1/2$ .

Sabemos, da Álgebra Linear, que toda matriz simétrica é diagonalizável, de uma maneira especial. Isto é, existe uma matriz  $P$ , tal que

$$P^t A P = D,$$

em que  $D$  é uma matriz diagonal.

Não é difícil ver que os auto-espacos associados aos autovalores  $5/2$  e  $-1/2$  são definidos por  $y = -x$  e  $y = x$ , respectivamente.

Vamos considerar  $\mathcal{B} = \{(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)\}$  uma base de autovetores ortonormais. Então, se fizermos

$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ , obtemos

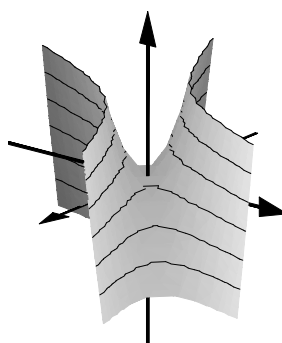
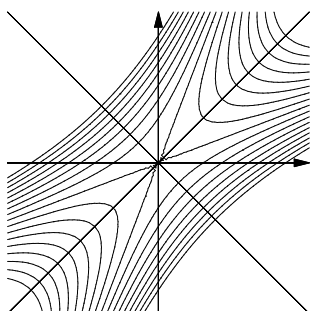
$$P^t A P = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 5/2 \end{pmatrix}.$$

Portanto, vamos fazer  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ .

Como  $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} P^t$ , pois  $(PX)^t = X^t P^t$ , temos

$$\begin{aligned} x^2 - 3xy + y^2 &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} P^t A P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 5/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= -\frac{u^2}{2} + \frac{5v^2}{2}. \end{aligned}$$

Assim, as curvas de nível  $x^2 - 3xy + y^2 = c$  correspondem a hipérbolas  $-\frac{u^2}{2} + \frac{5v^2}{2} = c$ . Note que o sistema de coordenadas  $u, v$  é obtido ao aplicarmos uma rotação de  $45^\circ$  ao sistema  $x, y$ , pois  $P$  é uma matriz de rotação. Aqui estão as curvas de nível e o gráfico da função.



Lembre-se: as curvas de nível são subconjuntos do domínio, e o gráfico de uma função  $f : A \rightarrow B$  é um subconjunto de  $A \times B$ . No desenho das curvas de nível foram sobrepostos os autoespaços associados aos autovalores da matriz  $A$ . Eles não são curvas de nível da função. As curvas de nível são subconjuntos mutuamente disjuntos.

**Exemplo 10.2.**

Neste exemplo, lidaremos com uma função que depende de três variáveis. Vamos determinar o domínio e esboçar as curvas de nível da função

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2x + 2y}.$$

Começamos com o domínio. Para que essa função esteja bem definida, devemos estabelecer a condição  $x \neq -y$ . Assim, o domínio de  $f$  consiste de  $\mathbb{R}^3$  menos o plano  $y = -x$ , que contém o eixo  $Oz$ .

Do mesmo modo que antes, para determinar as superfícies de nível, temos de resolver a equação

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2x + 2y} = c.$$

Sob a condição  $y \neq -x$ , podemos reescrevê-la da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 2cx + 2cy \\ x^2 - 2cx + y^2 - 2cy + z^2 &= 0 \\ x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 2cy + c^2 + z^2 &= 2c^2 \\ (x - c)^2 + (y - c)^2 + z^2 &= 2c^2. \end{aligned}$$

Caso  $c = 0$ , temos  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ . Como este ponto não pertence ao domínio de  $f$ ,

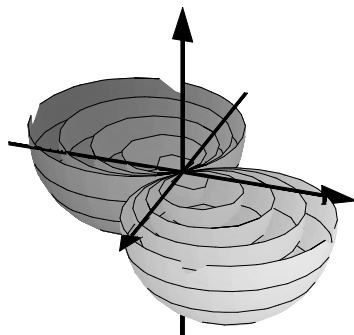
$$f^{-1}(0) = \emptyset.$$

Caso  $c \neq 0$ , a equação  $(x - c)^2 + (y - c)^2 + z^2 = 2c^2$  determina uma esfera, de centro em  $(c, c, 0)$  e raio  $\sqrt{2}c$ . Essa esfera tangencia o plano  $y = -x$ , na origem. Veja um esboço das superfícies de nível, desenhadas apenas na região  $z \leq 0$ , com  $-a \leq x, y \leq a$ . Esse recurso deveria facilitar a visualização dessas superfícies.

Portanto, a superfície de nível  $c \neq 0$  é uma esfera tangente ao plano  $y = -x$  na origem, menos esse ponto. Observe que



esse plano divide o espaço em duas regiões: uma contendo o ponto  $(1, 1, 0)$  e a outra contendo o ponto  $(-1, -1, 0)$ . As esferas contidas na primeira região correspondem aos níveis positivos; aquelas contidas na outra região correspondem aos níveis negativos. Uma última observação a respeito da função  $f$ : sua imagem consiste do conjunto  $\mathbb{R} - \{0\}$ .



O tema do próximo exemplo é o limite.

**Exemplo 10.3.**

Vamos usar o limite para estudar o comportamento das funções

$$f(x, y) = \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{e} \quad g(x, y) = \frac{\sin xy}{x^2 + y^2}$$

para pontos próximos da origem, o único ponto do plano no qual as funções não estão definidas.

Observe que as duas funções têm o termo  $x^2 + y^2$  em sua lei de definição.

Nesse tipo de situação, uma estratégia que pode ser útil é usar coordenadas polares no lugar de coordenadas cartesianas.

Veja: se colocarmos  $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ , obteremos  $x^2 + y^2 = r^2$ , um termo mais simples. Além disso,  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  passa a ser  $r \rightarrow 0$ .

Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen} xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(r^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta)}{r}.\end{aligned}$$

Para calcular esse limite, usamos o limite trigonométrico fundamental. Eis aqui:

$$\begin{aligned}&\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(r^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta)}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(r \cos \theta \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen}(r^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta)}{r^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} r \cos \theta \operatorname{sen} \theta = 0.\end{aligned}$$

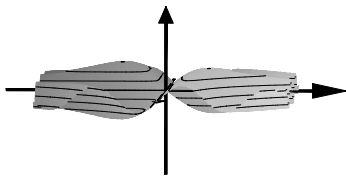
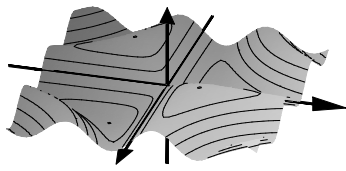
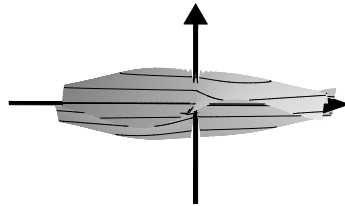
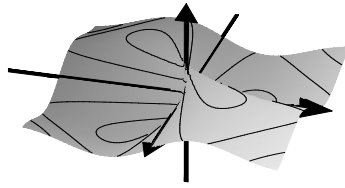
Esta última igualdade se deve ao fato de as funções seno e cosseno serem limitadas.

No entanto, quando fazemos o mesmo tipo de computação com a função  $g(x,y)$ , obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen} xy}{x^2 + y^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(r^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta)}{r^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(\cos \theta \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen}(r^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta)}{r^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta} \\ &= \operatorname{sen} \theta \cos \theta.\end{aligned}$$

Observe que, para diferentes valores de  $\theta$ , obtemos diferentes respostas para o limite. Isso indica que a função  $g$  não admite limite quando  $(x,y) \rightarrow (0,0)$ , mostrando um comportamento diferente de  $f$ .

Para termos uma interpretação geométrica do que está acontecendo, vejamos os gráficos das funções  $f$  e  $g$ , de dois pontos de vista um pouco diferentes. Enquanto o gráfico de  $f$  parece uma folha de papel ligeiramente ondulada em torno da origem, o gráfico de  $g$  “acumula-se” em um intervalo.

Gráfico de  $f$ Gráfico de  $g$ 

A função  $f$  pode ser “estendida” continuamente ao plano todo; isto é, se colocarmos  $f(0,0) = 0$ , teremos uma função contínua definida no plano todo. Qualquer tentativa de estender a função  $g$  resultará numa função não contínua. Isso nos leva ao outro tema da aula: continuidade.

#### Exemplo 10.4.

Vamos calcular o valor de  $a$ , caso exista, tal que a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ a, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

seja contínua.

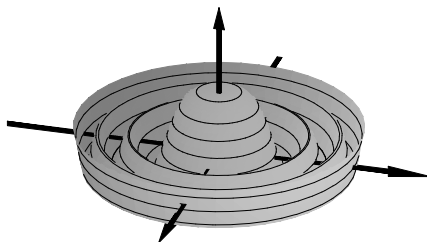
Para isso, devemos calcular  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ . Novamente, vamos usar a técnica aplicada no exemplo anterior: coordenadas polares. Assim,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin r^2}{1 - \cos r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2r \cos r^2}{\sin r} = 2.$$

Veja que nesse cálculo usamos a Regra de L'Hôpital e limite

trigonométrico fundamental.

Portanto, se colocarmos  $a = 2$ , a função  $f$ , definida em todo o plano  $\mathbb{R}^2$ , será contínua. O gráfico dessa função parece um chapéu com as abas muito onduladas. Veja:



Outro exemplo sobre continuidade.

**Exemplo 10.5.**

Vamos mostrar que a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

é contínua.

Realmente, como é um quociente de polinômios, já sabemos que  $f$  é contínua em todos os pontos diferentes da origem. Tudo que temos de fazer é mostrar que  $f$  é contínua na origem. Para isso, temos de calcular  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  e mostrar que esse limite é zero.

A solução consiste em observar que, se  $(x, y) \neq (0, 0)$ , então

$$f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} - \frac{xy^3}{x^2 + y^2}.$$

Vamos calcular os limites das parcelas:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 0,$$

pois a função  $z = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$  é limitada e  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy = 0$ .

Analogamente,

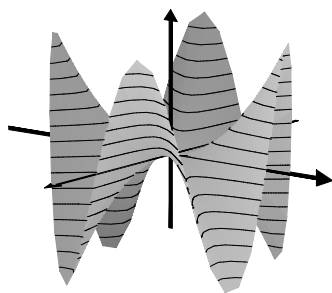
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \frac{y^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

Assim, podemos afirmar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$$

e, portanto,  $f$  é uma função contínua. Essa é uma função interessante; voltaremos a usá-la para exemplificar certos conteúdos que estudaremos nas próximas aulas. Aqui está o seu gráfico.

Este gráfico é uma sela para um ser de quatro patas.



Para terminar, veremos dois exemplos envolvendo as derivadas parciais.

**Exemplo 10.6.**

Dizemos que uma função  $z = f(x,y)$  é *homogênea* se

$$f(tx,ty) = f(x,y), \quad \forall t \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Aqui estão dois exemplos de funções homogêneas:

$$f_1(x,y) = \frac{x}{y} \quad \text{e} \quad f_2(x,y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}.$$

Realmente,

$$\begin{aligned}f_1(tx, ty) &= \frac{tx}{ty} = \frac{x}{y} = f_1(x, y), \\f_2(tx, ty) &= \frac{t^2x^2}{t^2x^2 + t^2y^2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} = f_2(x, y).\end{aligned}$$

Vamos verificar que estas duas funções satisfazem a seguinte equação, que envolve as derivadas parciais:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Para fazer isso, temos de calcular as respectivas derivadas parciais e substituir o resultado na equação.

Caso  $z = f_1(x, y) = \frac{x}{y}$ , então

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{y}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = -\frac{x}{y^2}.\end{aligned}$$

Assim,

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = x \frac{1}{y} - y \frac{x}{y^2} = 0.$$

Caso  $z = f_2(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ , então

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = \frac{2x(x^2 + y^2) - x^2(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = -\frac{2x^2y}{(x^2 + y^2)^2}.\end{aligned}$$

Assim,

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = x \frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} - y \frac{2x^2y}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

A característica algébrica  $f(tx, ty) = f(x, y)$  das funções homogêneas tem sua contrapartida geométrica, que é a seguinte: todos os pontos da forma  $(ta, tb)$ , para um dado  $(a, b)$  e  $\forall t > 0$ , pertencem à mesma curva de nível. Ora, esse conjunto é, precisamente, o raio que parte da origem e contém o ponto  $(a, b)$ .

Veja a função  $h(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ , no **Exemplo 8.3**.

**Exemplo 10.7.**

Dizemos que um ponto  $(a, b)$  é um *ponto crítico* da função  $z = f(x, y)$  se as derivadas parciais  $\frac{\partial z}{\partial x}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , calculadas em  $(a, b)$ , são nulas:  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$ .

Vamos determinar os pontos críticos da função

$$f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3.$$

Para isso, temos de resolver o sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3y - 3x^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x - 3y^2 = 0 \end{cases}.$$

Os pontos críticos da função  $f(x, y)$  são os pontos comuns às duas parábolas  $y = x^2$  e  $x = y^2$ . Esses pontos são  $(0, 0)$  e  $(1, 1)$ .

Agora, uma oportunidade para você praticar esses novos conteúdos, antes de prosseguirmos no nosso programa.

## Exercício 10.1.

1. Determine o domínio e faça um esboço dele, ou de seu complementar, dependendo do caso, das seguintes funções:

$$\begin{aligned} \text{a. } f(x, y) &= \frac{xy}{2x-y}; & \text{b. } g(x, y, z) &= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}; \\ \text{c. } h(x, y) &= \sqrt{xy}; & \text{d. } j(x, y, z) &= \frac{z}{4x^2 - y^2 + 1}; \\ \text{e. } k(x, y) &= \frac{4}{4x^2 - y^2 + 1}; \\ \text{f. } l(x, y, z) &= \sqrt{64 - 16x^2 - 4y^2 - 4z^2}; \\ \text{g. } m(x, y) &= \ln |xy| + \frac{1}{x-y}. \end{aligned}$$

2. Determine o domínio, a imagem e faça um esboço das curvas de nível das funções a seguir:

$$\begin{aligned} \text{a. } f(x, y) &= x^3 - y; & \text{b. } g(x, y) &= x + y^2; \\ \text{c. } h(x, y) &= \sin(x^2 + y^2); & \text{d. } j(x, y) &= \frac{y}{x^2}. \end{aligned}$$

3. Determine o domínio e faça um esboço das superfícies de nível das seguintes funções:

$$\begin{aligned} \text{a. } f(x, y, z) &= \frac{x+y}{z}; & \text{b. } g(x, y, z) &= \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}; \\ \text{c. } h(x, y, z) &= x^2 + 4y^2 - z^2; \\ \text{d. } j(x, y, z) &= \ln \left( \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} \right). \end{aligned}$$



4. Calcule o limite ou mostre que ele não existe.

a.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4}{(x^2 + y^2)^2};$

b.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2};$

c.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{1}{e^{x^2 + y^2} - 1};$

d.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}};$

e.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{(x-1)^2 y}{(x-1)^2 + y^2};$

f.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}}{\operatorname{tg}(x^2 + y^2)};$

g.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{xy + x - y};$

h.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos \sqrt{xy}}{y}.$

5. Seja  $f(x, y) = (x - y)e^y$ . Verifique que  $f$  satisfaz a seguinte equação, envolvendo suas derivadas parciais:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y).$$

6. Verifique que as funções  $f(x, y) = \frac{x}{x+y}$  e  $g(x, y) =$

$\frac{xy^2}{x^3 + y^3}$  são funções homogêneas e satisfazem a seguinte equação, envolvendo suas derivadas parciais:

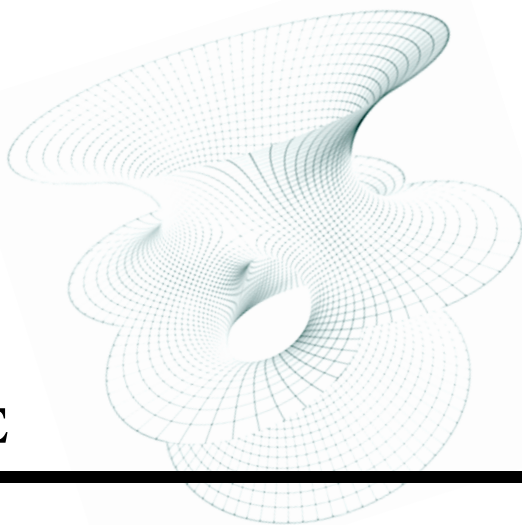
$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$



# Aula 11

## DIFERENCIABILIDADE

---



## Objetivo

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 conhecer o conceito de diferenciabilidade de funções reais de várias variáveis reais.

## INTRODUÇÃO

As disciplinas de Cálculo têm um grande impacto no panorama cultural matemático dos alunos de todos os cursos em que essa matéria é oferecida. Isso ocorre porque o Cálculo disponibiliza um ferramental sofisticado e poderoso, que permite resolver problemas inacessíveis àqueles que não sabem derivar ou integrar.

Na verdade, o Cálculo recria na formação dos matemáticos, engenheiros, físicos etc. o momento em que ideias e conceitos envolvendo infinito (infinitamente grande e infinitamente pequeno) foram colocados em plena ação e geraram muitos frutos. É como reviver uma grande aventura, uma jornada intensa no caminho do conhecimento.

Um bom exemplo disso é a derivada de uma função real, de uma variável real, num determinado ponto, que é, por definição, o limite do quociente de Newton e pode ser interpretada geometricamente como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função no ponto em questão.

De uma só penada, generalizou-se a noção de tangente, que era conhecida no caso do círculo e em algumas outras curvas especiais, para uma infinidade estonteante de outras curvas.

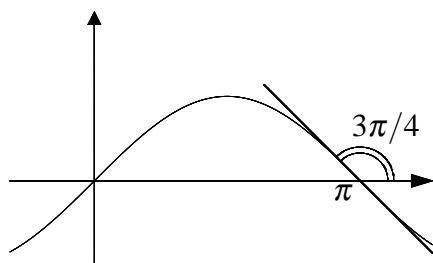
É esse conceito, importante tanto do ponto de vista teórico como do prático, que nos dispomos a estabelecer para o caso das funções reais de várias variáveis.

Nesta aula, definiremos a noção equivalente à de derivada de uma função do Cálculo I, num dado ponto, para as funções de duas ou mais variáveis.

Você aprendeu que a derivada de uma função real, de uma variável real, como  $y = f(x) = \sin x$ , num dado ponto, como  $x = \pi$ , é um número:

$$f'(\pi) = \cos \pi = -1.$$

Esse número pode ser visto como a tangente do ângulo que a reta tangente ao gráfico, no ponto em questão, faz com o eixo  $Ox$ .



No exemplo, esse ângulo é  $3\pi/4$  ou  $135^\circ$ . Além disso, você aprendeu a interpretar este número como uma taxa de variação, como quando derivamos a função deslocamento para obter a velocidade de uma partícula.

No entanto, quando pensamos em estender este conceito (derivada de uma função num ponto) para o caso das funções reais de várias variáveis, nenhuma dessas interpretações é completamente adequada.

Há ainda uma outra forma de interpretar a derivada de uma função num ponto, que é adequada à generalização pretendida e que apresentaremos a seguir.

## A DERIVADA E A MELHOR APROXIMAÇÃO LINEAR DA FUNÇÃO

O título desta seção alude a uma vertente da atividade matemática que é muito forte e muito importante. A ideia é a seguinte: uma maneira de estudar um determinado objeto, digamos, complicado, é “aproximá-lo” usando objetos mais simples. Esse princípio geral não é exclusivo da Matemática e é largamente usado nas ciências, em geral.

Nesse sentido, o erro histórico de muitos povos da Antiguidade de tomar a Terra como um disco plano e não uma esfera é, no mínimo, razoável. Eles estavam fazendo uma certa “aproximação” de algo que desconheciam (que a forma da Terra é esférica) usando algo mais simples.

Retas e planos são os objetos geométricos mais simples que há. No universo das funções, as mais simples possíveis são as aplicações lineares seguidas das aplicações afins, que têm por gráficos, exatamente, retas e planos. Veja: no universo algébrico, as leis de definição de tais funções (as equações de retas e planos) envolvem apenas polinômios de grau um ou constantes, as

equações que chamamos, apropriadamente, lineares.

Observe que tudo isso é estudado meticulosamente na Álgebra Linear, devido à necessidade de entendermos completamente esses que são nossos objetos matemáticos “mais simples”.

Em linhas gerais, diremos que uma função  $f : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável no ponto  $x = c \in I$ , se existir uma *melhor aproximação linear para  $f$*  no ponto  $(c, f(c))$ .

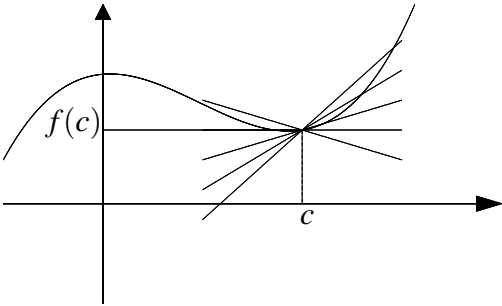
Todo o nosso trabalho consistirá em tornar preciso o significado dessa última frase.

Note que

$$y - f(c) = m(x - c)$$

é a equação do feixe de retas que contém o ponto  $(c, f(c))$ .

Nosso objetivo é eleger, dentre todas essas retas, uma que seja especial, aquela que fornecerá a melhor aproximação para  $f$  nas proximidades do ponto em questão.



Para avançarmos na questão da escolha, devemos estabelecer um critério que nos permita, sem sombra de dúvidas, descartar esta ou aquela reta em favor de uma outra. A maneira de fazermos isso é estudar o erro cometido ao fazer a aproximação; isto é, considerarmos a função original

$$y = f(x)$$

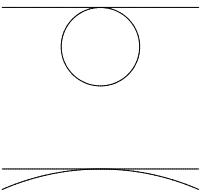
e a candidata à aproximação afim, dada por

$$y = f(c) + m(x - c).$$

Note que ambas satisfazem  $y(c) = f(c)$ .

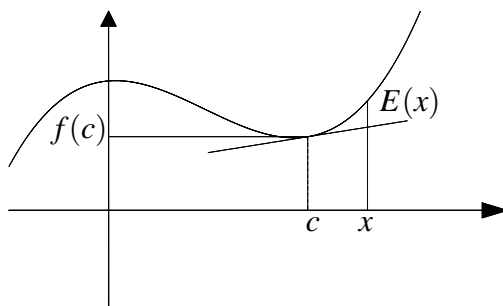
O erro cometido ao fazer a aproximação da função  $y = f(x)$

É importante notar que nesta frase acrescentamos mais uma característica dos fenômenos que estamos estudando, que é a sua característica local. Quando tratamos de aproximações, é bem mais proveitoso abrir mão do quadro geral em favor da perspectiva local. É evidente que uma reta está longe de ser uma aproximação para um círculo, se os olharmos de uma certa distância. No entanto, se considerarmos uma perspectiva local, então a coisa toda muda, como a ilustração a seguir sugere.



pela função afim é a diferença entre elas:

$$E(x) = f(x) - f(c) - m(x - c).$$



Observe que a função  $E$  depende de  $m$  e de  $c$ . Queremos estabelecer que as boas aproximações correspondem a funções erro *pequenas*, pelo menos nas proximidades de  $x = c$ . Mas, para o caso de funções  $f$  “razoáveis”, como, por exemplo, para as funções contínuas, qualquer que seja a inclinação  $m$  escolhida, o erro  $E(x)$  correspondente tende a zero, na medida em que  $x$  tende a  $c$ . Realmente, se  $f$  é contínua,  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ , portanto,  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) - f(c) = 0$ , como  $m(x - c)$  converge para zero, quando  $x$  tende a  $c$ , independentemente do valor  $m$ . Assim,

$$\lim_{x \rightarrow c} E(x) = \lim_{x \rightarrow c} (f(x) - f(c) - m(x - c)) = 0.$$

Conclusão:  $\lim_{x \rightarrow c} E(x) = 0$  não é um critério adequado, uma vez que, no caso das funções contínuas, ele não distinguiu nenhuma reta especial entre as que formam o feixe de retas contendo o ponto  $(c, f(c))$ .

A grande ideia, que faz a mágica funcionar, é considerar a reta que faz o erro  $E(x)$  correspondente convergir para zero *muito* rapidamente, quando  $x$  tende a  $c$ . No jargão matemático, costuma-se dizer que tal erro vai *fortemente* a zero.

Assim, sem mais delongas, dizemos que  $f$  é diferenciável em  $c$ , se existir um número  $m$  (uma inclinação especial), tal que

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{E(x)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c) - m(x - c)}{x - c} = 0.$$

Isso significa que o quociente do erro  $E(x)$  por um termo linear,  $x - c$ , que tende a zero quando  $x$  tende a  $c$ , ainda tende

a zero. Ou seja,  $E(x)$  tende a zero muito rapidamente, quando  $x$  tende a  $c$ .

Para ganharmos fôlego, vejamos como isso funciona num exemplo.

**Exemplo 11.1.**

Vamos usar essa formulação de diferenciabilidade que acabamos de estabelecer para constatar que a função  $y = f(x) = x^2 + x$  é diferenciável no ponto  $x = 1$ . Ou seja, queremos encontrar um número  $m$ , tal que a reta

$$y = f(1) + m(x - 1) = 2 + m(x - 1)$$

seja a melhor aproximação linear da função  $f(x) = x^2 + x$ , nas proximidades de  $x = 1$ .

O erro cometido ao substituirmos  $y = x^2 + x$  por  $y = 2 + m(x - 1)$ , nas proximidades de  $x = 1$ , é

$$E(x) = f(x) - f(1) - m(x - 1) = x^2 + x - 2 - m(x - 1).$$

Ora, o candidato ideal para o coeficiente  $m$  é a derivada de  $f$  no ponto:  $f'(1) = 2 \times 1 + 1 = 3$ .

Realmente, se colocarmos  $m = 3$ , temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{E(x)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2 - 3(x - 1)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 0. \end{aligned}$$

O exemplo indica que a velha formulação de derivada nos dá, precisamente, o candidato ideal a coeficiente  $m$ , que gera o menor erro possível.

Na verdade, essa nova formulação de diferenciabilidade de uma função num dado ponto é equivalente à definição já conhecida anteriormente, a saber, uma função  $f$  é diferenciável em  $x = c$  se, e somente se,

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$



é um número real, que chamamos  $f'(c)$ . Realmente, essa equivalência entre as duas definições se deve ao fato de

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c) - m(x - c)}{x - c} = 0 \text{ se, e somente se,}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = m.$$

Portanto, o que ganhamos com a nova formulação de diferenciabilidade é a diferente perspectiva da derivada como a melhor aproximação afim para a função  $f$ , numa vizinhança do ponto em questão.

Essa noção será bem explorada quando apresentarmos o conceito de diferencial de uma função, que consideraremos para o caso de funções de várias variáveis, em alguma de nossas aulas subsequentes.

Veja um exemplo que ilustra como essa abordagem de derivadas é útil.

### Exemplo 11.2.

(Dilatação Linear e Dilatação de Superfície)

A fórmula

$$l_1 = l_0 + \alpha l_0 (t_1 - t_0) \quad (1)$$

permite calcular a variação do comprimento de um fio, feito de um determinado material, submetido a uma certa variação de temperatura, de  $t_0$  para  $t_1$ . A constante  $\alpha$  é característica do material do qual o fio é feito.

Suponha, agora, que uma chapa quadrada, feita do mesmo material, de lado  $l_0$  à temperatura  $t_0$ , seja submetida à mesma variação de temperatura, de  $t_0$  para  $t_1$ . Queremos calcular a variação ocorrida em sua área. A fórmula usada, nesse caso, é

$$s_1 = s_0 + \beta s_0 (t_1 - t_0), \quad (2)$$

onde  $\beta = 2\alpha$  é o coeficiente de dilatação superficial.

A fórmula (2) nada mais é do que a melhor aproximação linear da real variação da área da superfície. Veja:

O coeficiente de dilatação linear do ferro, por exemplo, é  $\alpha = 1,2 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ , quando a temperatura é medida em graus Celsius.

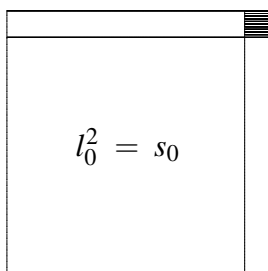
$$\begin{aligned} s_1 &= l_1^2 = (l_0 + \alpha l_0 (t_1 - t_0))^2 = \\ s_1 &= l_0^2 + 2\alpha l_0^2 (t_1 - t_0) + \alpha^2 l_0^2 (t_1 - t_0)^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Como  $s_0 = l_0^2$ , a fórmula (3) difere da fórmula (2) pelo termo  $\alpha^2 l_0^2 (t_1 - t_0)^2$ .

Esse termo nada mais é do que o erro que converge fortemente a zero, quando  $t_1$  tende a  $t_0$ , isto é,

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{\alpha^2 l_0^2 (t_1 - t_0)^2}{t_1 - t_0} = 0.$$

Portanto, quando estabelecemos  $\beta = 2\alpha$ , o coeficiente de dilatação superficial, estamos usando a melhor aproximação linear da dilatação superficial real. Geometricamente, o erro cometido ao usar a aproximação linear é a área do pequeno quadrado do canto superior direito na ilustração a seguir, uma vez que estamos adicionando à área original,  $l_0^2$ , a área dos dois retângulos estreitos: o superior e o da lateral direita.



Nesse momento, a importância dessa formulação de diferenciabilidade é ser ela adequada para a generalização desse conceito, para o caso das funções de várias variáveis.

Vamos reformulá-la mais uma vez.

### Definição 11.1.

Seja  $f: I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $c \in (a, b)$ . Dizemos que  $f$  é diferenciável em  $c$  se, e somente se, existe um número  $f'(c)$ , tal que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} \frac{E(x)}{|x - c|} &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c) - f'(c)(x - c)}{|x - c|} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + h) - f(c) - f'(c)h}{|h|} = 0. \end{aligned}$$

Note que nesta última formulação o denominador do termo no limite foi ligeiramente alterado, de  $x - c$  para  $|x - c|$ . Isso não altera a definição, mas facilita a generalização que estamos prestes a fazer.

### Exercício 11.1.

Mostre que  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{E(x)}{|x - c|} = 0$  se, e somente se,  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{E(x)}{x - c} = 0$ .

Dê um exemplo onde  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{E(x)}{|x - c|} \neq \lim_{x \rightarrow c} \frac{E(x)}{x - c}$ .

## DIFERENCIABILIDADE DE FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Voltamos agora a nossa atenção para as funções de várias variáveis. Como você já sabe, consideraremos o caso das funções de duas variáveis.

Antes de mais nada, a fórmula geral de uma função afim de duas variáveis, cujo gráfico contém o ponto  $(a, b, c)$ , é

$$z - c = m(x - a) + n(y - b).$$

Portanto, se  $z = f(x, y)$  é uma função cujo domínio é um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^2$ , aberto, com o ponto  $(a, b) \in A$  e tal que  $f(a, b) = c$ ,

$$z = c + m(x - a) + n(y - b)$$

é uma aproximação afim de  $f$  em torno do ponto  $(a, b)$ . Muito bem; diremos que  $f$  é diferenciável em  $(a, b)$  se for possível

eleger uma ótima aproximação afim de  $f$ . Mais precisamente, dizemos que  $f$  é diferenciável em  $(a, b)$  se existirem números  $m$  e  $n$ , tais que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \frac{E(x, y)}{|(x, y) - (a, b)|} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \frac{f(x, y) - f(a, b) - m(x - a) - n(y - b)}{|(x, y) - (a, b)|} = 0.$$

Note:  $E(x, y) = f(x, y) - f(a, b) - m(x - a) - n(y - b)$  é o erro cometido ao aproximarmos a função  $z = f(x, y)$  por  $z = f(a, b) - m(x - a) - n(y - b)$  nas vizinhanças de  $(x, y) = (a, b)$ .

Essa definição de diferenciabilidade nos leva, imediatamente, à seguinte pergunta: qual é o papel das derivadas parciais nessa história e como elas se encaixam nesse quebra-cabeça?

A resposta é a seguinte: se  $f$  é diferenciável em  $(a, b)$ , os números  $m$  e  $n$  são, respectivamente,  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ .

Realmente, se

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \frac{f(x, y) - f(a, b) - m(x - a) - n(y - b)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = 0,$$

então, em particular, se fizermos  $y = b$ , por exemplo, obteremos

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b) - m(x - a)}{|x - a|} = 0.$$

Ora, isso significa que  $m$  é a derivada da função  $g(x) = f(x, b)$ , no ponto  $x = a$ . Ou seja,  $m = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ . Analogamente (fazendo  $x = a$ ), obtemos  $n = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ .

Conclusão importante:

A existência das derivadas parciais de  $f$ , no ponto  $(a, b)$ , é uma condição *necessária* para  $f$  ser diferenciável em  $(a, b)$ . Mas, como veremos na próxima aula, não é uma condição suficiente. Essa é a razão de a situação em que há mais do que uma

variável ser tão diferente do caso das funções de uma variável. Lembre-se das aulas de limite!

Portanto, os candidatos naturais a  $m$  e  $n$  são as derivadas parciais.

Vamos terminar esta aula, um tanto teórica, porém muito importante, com um exemplo.

**Exemplo 11.3.**

Vamos mostrar que a função  $f(x, y) = xy$  é diferenciável no ponto  $(1, 2)$ .

Começamos calculando as derivadas parciais:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= y; & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x; \\ \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) &= 2; & \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) &= 1.\end{aligned}$$

O candidato a  $E(x, y)$  é

$$\begin{aligned}E(x, y) &= f(x, y) - f(1, 2) - \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)(x - 1) - \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)(y - 2) \\ &= xy - 2 - 2(x - 1) - (y - 2) \\ &= xy - 2x - y + 2.\end{aligned}$$

Vamos mostrar que esse erro vai fortemente a zero:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} \frac{E(x, y)}{\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} \frac{xy - 2x - y + 2}{\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2}} = 0.$$

A melhor maneira de fazer isso é colocar  $h = x - 1$  e  $k = y - 2$ . Assim,  $x = h + 1$ ,  $y = k + 2$  e  $(x, y) \rightarrow (1, 2)$  se, e somente se,  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ . Nessas condições,

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} \frac{E(x, y)}{|(x, y) - (1, 2)|} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} \frac{xy - 2x - y + 2}{\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2}} = \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \frac{(h + 1)(k + 2) - 2(h + 1) - (k + 2) + 2}{\sqrt{h^2 + k^2}} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \frac{hk + 2h + k + 2 - 2h - 2 - k - 2 + 2}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \\
 &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \frac{hk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0,
 \end{aligned}$$

pois  $z = \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$  é uma função limitada e  $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} h = 0$ .

Aqui estão mais dois exercícios para você testar o quanto entendeu as principais ideias da aula. Não deixe de ler e reler esta aula mais vezes, pois isso lhe renderá frutos. As ideias aqui expostas são importantes e, quanto antes você assimilá-las, melhor.

### Exercício 11.2.

1. Use a melhor aproximação afim da função  $f(x) = \sqrt{x}$ , em torno do ponto  $x = 1$  para aproximar o valor de  $\sqrt{1.02}$  e  $\sqrt{0.99}$ . Use uma calculadora comum para avaliar a aproximação obtida.
2. Mostre que a função  $f(x, y) = x^2 - y^2$  é diferenciável no ponto  $(1, -2)$  e use a melhor aproximação afim, nesse ponto, para aproximar o valor de  $f(1.02, -1.97)$ .

# Aula 12



## DIFERENCIABILIDADE – CONTINUAÇÃO

---

### Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 conhecer as principais implicações decorrentes do conceito de diferenciabilidade de funções reais de várias variáveis reais;
- 2 aprender um critério de identificação de funções diferenciáveis.

## DIFERENCIABILIDADE – CONTINUAÇÃO

A aula anterior foi dedicada ao estabelecimento do conceito de diferenciabilidade de uma função real de duas variáveis em um dado ponto. Foi dada ênfase no ponto de vista da melhor aproximação afim da função, numa vizinhança do ponto em questão.

Ainda na aula passada, observamos que a existência das derivadas parciais é uma condição necessária para a função ser diferenciável.

Iniciaremos esta aula apresentando outra condição necessária para a função  $f$  ser diferenciável em um dado ponto  $(a, b)$ .

### A CONTINUIDADE DA FUNÇÃO COMO UMA CONDIÇÃO NECESSÁRIA PARA A SUA DIFERENCIABILIDADE

Podemos enunciar esse fato da seguinte forma.

#### **Teorema 12.1.**

---

*Seja  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida em um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$ , e seja  $(a, b) \in A$ . Se a função  $f$  é diferenciável em  $(a, b)$ , então  $f$  é contínua em  $(a, b)$ .*

Como  $p \Rightarrow q$  é equivalente a  $\sim q \Rightarrow \sim p$ , se  $f$  não for contínua em  $(a, b)$ , então  $f$  não será diferenciável em  $(a, b)$ . Temos, assim, a continuidade como uma condição necessária para a diferenciabilidade.

#### **Demonstração**

Se  $f$  é diferenciável em  $(a, b)$ , então  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \frac{E(x, y)}{|(x, y) - (a, b)|} = 0$ , onde

$$E(x, y) = f(x, y) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b).$$

Como



$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \frac{E(x,y)}{|(x,y) - (a,b)|} = 0 \implies \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} E(x,y) = 0$$

e

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \right) = 0,$$

concluimos que  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x,y) - f(a,b) = 0$ , pois

$$f(x,y) - f(a,b) = E(x,y) - \left( \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \right).$$

Ora, isso é equivalente a  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x,y) = f(a,b)$ , portanto,  $f$  é contínua em  $(a,b)$ .

Veja, agora, exemplos em que essas duas condições necessárias – existência das derivadas parciais e continuidade – se mostram insuficientes para garantir a diferenciabilidade da função.

### Exemplo 12.1.

Seja  $f(x,y) = x + |y|$ . Essa função está bem definida em todo o  $\mathbb{R}^2$  e é, claramente, contínua em todos os pontos de seu domínio, pois

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x,y) = a + |b| = f(a,b).$$

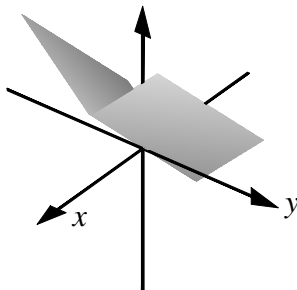
No entanto, essa função não admite derivada parcial em relação a  $y$  na origem, por exemplo. Realmente,

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{|y|}{y} = 1,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{|y|}{y} = -1.$$

Como  $f$  não admite derivada parcial em relação a  $y$ , na origem, e admitir derivadas parciais é uma condição necessária para  $f$  ser diferenciável, concluímos que ela não é diferenciável na origem, apesar de ser contínua.

Veja o gráfico de  $f$ . Note como ele apresenta um vinco sobre o eixo  $Ox$ .



### Exercício 12.1.

Determine o conjunto no qual a função  $f(x, y) = x + |y|$  admite ambas as derivadas parciais.

O fato de a continuidade ser necessária, porém não suficiente, para  $f$  ser diferenciável em um dado ponto não chega a surpreender, uma vez que esse fenômeno ocorre no caso das funções de uma variável. Um pouco mais surpreendente é o fato de uma função admitir ambas as derivadas parciais num dado ponto e, mesmo assim, não ser diferenciável no referido ponto. Isso pode ocorrer devido a diferenciabilidade de  $f$  estar condicionada ao fato de o limite do quociente  $\frac{E(x, y)}{|(x, y) - (a, b)|}$ , quando  $(x, y)$  tende a  $(a, b)$ , ser igual a zero.

Nosso próximo exemplo ilustrará isso.

### Exemplo 12.2.

Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

uma função definida em todo o  $\mathbb{R}^2$ .

Vamos mostrar que  $f$  é contínua, que admite ambas as derivadas parciais na origem e, mesmo assim,  $f$  não é diferenciável na origem.

A função  $f$  é, claramente, contínua nos pontos diferentes da origem. Realmente, se  $(a, b) \neq (0, 0)$ , então

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2} = f(a, b).$$

Considere, agora,  $g(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$  uma função limitada, pois

$$|g(x, y)| = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1.$$

Como  $f(x, y) = yg(x, y)$  e  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} y = 0$ , podemos concluir que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} yg(x, y) = 0 = f(0, 0).$$

Assim,  $f$  é contínua na origem.

E, agora, o cálculo das derivadas parciais de  $f$ , na origem.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{0}{x} = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{0}{y} = 0.$$

Isso comprova que  $f$  admite derivadas parciais na origem (ambas nulas).

Finalmente, vamos analisar o  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{E(x, y)}{|(x, y)|}$ .

Note que

$$E(x, y) = f(x, y) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Portanto,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{E(x,y)}{|(x,y)|} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{E(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Basta considerar a restrição desse limite sobre a reta  $y = x$ .  
Veja:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{(2x^2)^{3/2}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{2\sqrt{2}|x|^3} = \frac{\sqrt{2}}{4}; \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3}{(2x^2)^{3/2}} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3}{2\sqrt{2}|x|^3} = -\frac{\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

Como esses limites laterais são diferentes, o quociente

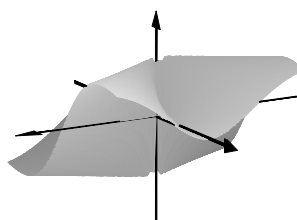
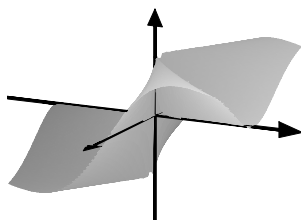
$$\frac{E(x,y)}{|(x,y) - (0,0)|} = \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

não admite limite quando  $(x,y)$  tende a  $(0,0)$ . Logo,  $f$  não é diferenciável na origem.

Veja, sob dois pontos de vista, o gráfico da função

$$h(x,y) = \frac{E(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

que não admite limite na origem.



### Exercício 12.2.

Mostre que a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é diferenciável na origem.

### Exercício 12.3.

Mostre que a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

é contínua, admite derivadas parciais em todos os seus pontos, mas não é diferenciável na origem. O que você pode dizer sobre a continuidade das funções derivadas parciais de  $f$ ?

Para terminar esse tema, vamos estabelecer uma definição.

#### Definição 12.1.

Seja  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função definida num subconjunto aberto  $A$  de  $\mathbb{R}^2$ . Dizemos que  $f$  é *diferenciável* se  $f$  for diferenciável em todos os pontos de  $A$ .

## UMA CONDIÇÃO SUFICIENTE PARA $f$ SER DIFERENCIÁVEL

Após todas essas informações, você deve estar fazendo a seguinte pergunta: sob quais condições poderemos afirmar que uma certa função  $f$  é diferenciável, a partir de uma análise de suas derivadas parciais? Ou seja, há algum critério que permita detectar situações nas quais, claramente, a função é diferenciável, evitando o uso imediato da definição?

Por exemplo, gostaríamos de afirmar que funções tais como  $f(x, y) = xy \cos(x + y)$ , ou  $g(x, y, z) = e^{xyz}$  são diferenciáveis, sem ter de calcular os limites do quociente do erro por  $|(x, y) - (a, b)|$  ou  $|(x, y, z) - (a, b, c)|$ , dependendo do caso.

Para responder a essa questão, vamos precisar estender um conceito que já conhecemos das funções de uma variável.

**Definição 12.2.**

Seja  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida num aberto  $A$  de  $\mathbb{R}^2$ . Se  $f$  admitir derivadas parciais,  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , em todos os pontos do conjunto  $A$  e se além disso as derivadas parciais forem funções contínuas, diremos que  $f$  é uma *função de classe  $C^1$* .

Veremos que ser de classe  $C^1$  é uma condição suficiente para que a função  $f$  seja diferenciável.

**Teorema 12.2.**

*Se  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^1$ , então  $f$  é diferenciável.*

Veja, esse teorema responde à questão que formulamos anteriormente, pelo menos em um número considerável de casos.

**Exemplo 12.3.**

A função  $f(x, y) = xy \cos(x + y)$  é diferenciável. Realmente,  $f$  está definida em todo o  $\mathbb{R}^2$ . Além disso,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= y \cos(x + y) - xy \sin(x + y), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x \cos(x + y) - xy \sin(x + y),\end{aligned}$$

são ambas funções contínuas, definidas em  $\mathbb{R}^2$ . Assim,  $f$  é de classe  $C^1$  e, portanto, diferenciável.

Antes de provarmos o teorema, observe que todas essas definições e resultados também valem para funções de mais de duas variáveis. Use isso para resolver o exercício seguinte.

**Exercício 12.4.**

Mostre que a função  $g(x, y, z) = e^{xyz}$  é diferenciável.

### **Demonstração do Teorema:**

Seja  $(a, b) \in A$  um ponto genérico,  $m = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$  e  $n = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ . Para mostrar que  $f$  é diferenciável em  $(a, b)$ , devemos mostrar que o limite de  $\frac{E(x, y)}{|(x, y) - (a, b)|}$ , quando  $(x, y) \rightarrow (a, b)$ , é zero. Lembre-se:

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \frac{E(x, y)}{|(x, y) - (a, b)|} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \frac{f(x, y) - f(a, b) - m(x - a) - n(y - b)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \frac{f(a + h, b + k) - f(a, b) - mh - nk}{\sqrt{h^2 + k^2}}, \end{aligned}$$

com  $h = x - a$  e  $k = y - b$ .

Note que, devido a  $A$  ser um conjunto aberto, podemos garantir que, para valores pequenos de  $h$  e  $k$ ,  $(a + h, b + k) \in A$ .

Nessa altura, fazer isso não parece ser uma tarefa fácil. Realmente, para isso usaremos algumas estratégias bem conhecidas, mas para quem nunca as viu antes, podem parecer um bocado misteriosas. É algo assim como o ovo que Colombo colocou em pé. Parece impossível antes, mas, depois de feito, parece ser bem simples. Veremos.

Nesse tipo de situação, estaremos sempre tentando dividir o limite em pedaços menores, que possamos controlar, usando o fato de que

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Durante o processo, vamos usar o Teorema do Valor Médio, que afirma: se  $g$  é uma função contínua, definida no intervalo  $[\alpha, \beta]$  e diferenciável no intervalo  $(\alpha, \beta)$ , então existe um número  $\xi \in (\alpha, \beta)$ , tal que

$$g'(\xi) = \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Iniciamos aplicando a velha e famosa jogada de somar e sub-

trair um termo conveniente:

$$\begin{aligned} & f(a+h, b+k) - f(a, b) \\ &= f(a+h, b+k) - f(a+h, b) + f(a+h, b) - f(a, b). \end{aligned}$$

Agora, o Teorema de Valor Médio em dose dupla. Considere  $g_1(y) = f(a+h, y)$ , e  $g_2(x) = f(x, b)$ , funções de uma variável, definidas e contínuas nos intervalos fechados cujos extremos são  $b$  e  $b+k$ , no primeiro caso, e  $a$  e  $a+h$ , no segundo. Além disso, essas funções são diferenciáveis nos intervalos abertos.

Uma vez que fixamos  $a$  e  $h$ ,  $f(a+h, y)$  passa a definir uma função de uma variável,  $y$ , que chamamos  $g_1$ . Analogamente, quando fixamos  $b$ ,  $f(x, b)$  define uma função em  $x$ , de uma variável, que chamamos  $g_2$ .

Como essas funções satisfazem as hipóteses do Teorema do Valor Médio, podemos afirmar que existem números,  $\xi_1$  entre  $b$  e  $b+k$  e  $\xi_2$  entre  $a$  e  $a+h$ , tais que

$$g'_1(\xi_1) = \frac{\partial f}{\partial y}(a+h, \xi_1) = \frac{f(a+h, b+k) - f(a+h, b)}{(b+k) - b}$$

e

$$g'_2(\xi_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_2, b) = \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{(a+h) - a}.$$

Resumindo, para cada  $h$  e  $k$  suficientemente próximos de zero obtemos números  $\xi_1$ , entre  $b$  e  $b+k$  e  $\xi_2$  entre  $a$  e  $a+h$ , tais que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a+h, \xi_1)k = f(a+h, b+k) - f(a+h, b)$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_2)h = f(a+h, b) - f(a, b).$$

Munidos destas duas igualdades, vamos enfrentar o quociente  $\frac{E(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}}$ .

$$\left| \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - mh - nk}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right|$$



$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{f(a+h, b+k) - f(a+h, b) + f(a+h, b) - f(a, b) - mh - nk}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \\
&= \left| \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a+h, \xi_1)k + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_2, b)h - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \\
&= \left| \left( \frac{\partial f}{\partial y}(a+h, \xi_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right) \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} + \left( \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_2, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \right) \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \\
&\leq \left| \frac{\partial f}{\partial y}(a+h, \xi_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right| \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} + \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_2, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \right| \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}}.
\end{aligned}$$

Puxa! Um minuto para respirar!

Agora que você recuperou o fôlego, observe: ganhamos o jogo!

Os números  $\xi_1$  e  $\xi_2$  estão entre  $a$  e  $a+h$ , e entre  $b$  e  $b+k$ , respectivamente. Se fizermos  $h$  e  $k$  tenderem para zero, teremos  $a+h$  e  $\xi_1$  tendendo para  $a$  e  $b+k$  e  $\xi_2$  tendendo para  $b$ . Mas as funções  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  são contínuas (a função  $f$  é de classe  $C^1$ , lembra?) e, portanto,  $\frac{\partial f}{\partial y}(a+h, \xi_1) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$  e  $\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_2, b) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ , fazendo com que  $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(a+h, \xi_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right|$  e  $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_2, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \right|$  tendam para zero. Como as funções  $\frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}}$  e  $\frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$ , de  $h$  e  $k$ , são limitadas, a soma

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(a+h, \xi_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right| \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} + \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_2, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \right| \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

vai para zero, quando  $h$  e  $k$  vão para zero. Ora, isso garante que

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \left| \frac{E(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right|$$

vai a zero. Logo,

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \frac{E(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Podemos concluir: a função  $f$  é diferenciável em  $(a, b)$ . Isso mostra que  $f$  é diferenciável e, assim, terminamos a prova do teorema e a aula.  $\square$

Uma palavra final, uma vez que já há exercícios para você resolver, deixados ao longo da aula.

Realmente, nesse estágio de sua vida acadêmica, não se espera que você venha a fazer demonstrações como a que você acabou de ler. No entanto, esforços para entender argumentações desse tipo acrescentarão muita experiência à sua bagagem, enriquecendo sua cultura matemática. Além disso, você estará fazendo um bom investimento no seu futuro como matemático.

Aqui está um último exercício.

#### Exercício 12.5.

Determine o domínio de continuidade e o domínio de diferenciabilidade da função

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$

Até a próxima aula!

# Aula 13

## PLANO TANGENTE, DIFERENCIAL E GRADIENTE

---

### O b j e t i v o s

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 aprender o conceito de plano tangente ao gráfico de uma função diferenciável de duas variáveis;
- 2 conhecer a notação clássica para a melhor aproximação linear de uma função diferenciável – a diferencial;
- 3 aprender o conceito de vetor gradiente como o dual da diferencial.

## PLANO TANGENTE, DIFERENCIAL E GRADIENTE

As duas últimas aulas apresentaram a noção de diferenciabilidade de uma função de várias variáveis e as suas implicações imediatas. Foram aulas teoricamente mais densas e, portanto, o caráter um pouco mais simples que esta aula pretende ter, deve ser uma bem-vinda mudança de ritmo.

Antes de prosseguir, no entanto, vamos reconhecer um débito que será pago na próxima aula de exercícios. Veja, na aula anterior, foi provado que toda função de classe  $C^1$  é diferenciável. Isto é, ser de classe  $C^1$  é uma condição suficiente para ser diferenciável. Diante disso, você deve considerar a questão da necessidade dessa condição para a diferenciabilidade. Em outras palavras, essa condição suficiente é também necessária? Muito bem, adiantando a resposta: não! Há funções diferenciáveis cujas funções derivadas parciais não são contínuas. Você verá um exemplo na próxima aula de exercícios. Promessa é dívida!

Muito bem, com isso fora da pauta, vamos ao primeiro tema desta aula.

### PLANO TANGENTE

Na definição de diferenciabilidade de uma função  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , no ponto  $(a, b) \in A$ , subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$ , a equação

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) + E(x, y)$$

desempenha um papel fundamental, pois define o erro  $E(x, y)$ , que converge para zero mais rapidamente do que  $|(x, y) - (a, b)|$ . Isso quer dizer que a aplicação afim

$$\mathcal{A}(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b),$$

no caso de  $f$  ser diferenciável em  $(a, b)$ , é aquela que, entre todas as aplicações afins, dá as melhores aproximações aos valores da função  $f$ , em alguma vizinhança do ponto  $(a, b)$ .

Mas, como sabemos, equações do tipo

$$z = c + mx + ny$$

definem planos em  $\mathbb{R}^3$ .

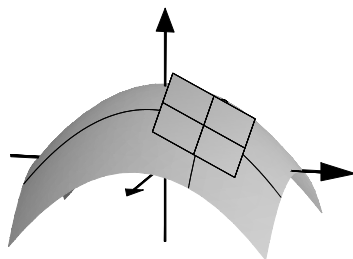
Isso nos motiva a estabelecer o seguinte.

**Definição 13.1.**

Seja  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ , uma função definida no subconjunto aberto  $A$  de  $\mathbb{R}^2$ , diferenciável no ponto  $(a, b)$ . Dizemos que o plano definido pela equação

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

é o *plano tangente ao gráfico da função  $f$ , no ponto  $(a, b)$* .



**Exemplo 13.1.**

Vamos calcular a equação do plano tangente ao gráfico de  $f(x, y) = x^2 - xy - y^2$  no ponto  $(1, 1, -1)$ .

Para isso, calculamos as derivadas parciais:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x - 2y.$$

Substituindo  $(x, y)$  por  $(1, 1)$ , obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = -3.$$

Assim, a equação procurada é

$$z = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1);$$

$$z = -1 + (x-1) - 3(y-1);$$

$$z = x - 3y + 1.$$

### Exemplo 13.2.

Vamos calcular a equação do plano tangente ao gráfico de  $f(x,y) = 2xy - y^2$  que seja paralelo ao plano  $z = 2x + 4y$ .

Para que os planos

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \text{ e } z = 2x + 4y$$

sejam paralelos, é preciso que  $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 2$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 4$ .

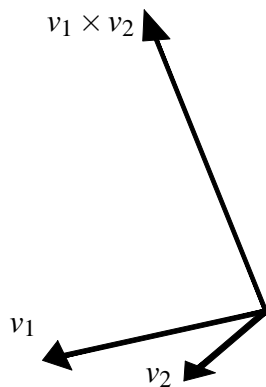
Como  $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2y$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x - 2y$ , temos de achar os valores  $a$  e  $b$  tais que  $2b = 2$  e  $2a - 2b = 4$ . Portanto, o ponto que procuramos é  $(a,b) = (3,1)$ , e a equação do plano tangente procurado é

$$z = f(3,1) + 2(x-3) + 4(y-1);$$

$$z = 2x + 4y - 5.$$

## RETA NORMAL AO GRÁFICO

O espaço tridimensional  $\mathbb{R}^3$  é munido de um produto que o torna muito especial. Dados  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ , podemos efetuar o *produto vetorial*,  $v_1 \times v_2$ , obtendo um terceiro vetor. Se  $v_1$  e  $v_2$  são linearmente independentes, então  $v_1 \times v_2$  é perpendicular ao plano gerado por eles.



Isso está ligado ao fato de todo plano contido em  $\mathbb{R}^3$  ter uma única direção ortogonal. Ou seja, dado um plano  $\pi \subset \mathbb{R}^3$  e um ponto  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ , existe uma única reta  $r$ , tal que  $r$  é perpendicular a  $\pi$  e  $(a, b, c) \in r$ .

E ainda, se a equação cartesiana do plano tem a forma

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta,$$

é fácil obter uma equação paramétrica da reta ortogonal:

$$r(t) = (\alpha t + a, \beta t + b, \gamma t + c).$$

Portanto, reescrevendo a equação do plano tangente ao gráfico de  $f$ , no ponto  $(a, b, f(a, b))$  como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)x + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)y - z = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)a + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)b - f(a, b),$$

obtemos uma equação paramétrica da reta normal ao gráfico de  $f$  no ponto  $(a, b, f(a, b))$ :

$$r(t) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)t + a, \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)t + b, -t + f(a, b) \right).$$

### Exemplo 13.3.

Vamos calcular uma equação paramétrica da reta normal ao gráfico de  $f(x, y) = xy$  no ponto  $(-1, -2, 2)$ .

Começamos calculando as derivadas parciais de  $f$ :

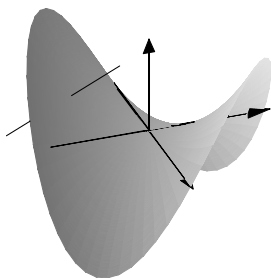
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x,$$

e substituímos  $(x, y)$  por  $(-1, -2)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1, -2) = -2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(-1, -2) = -1.$$

Aqui está uma equação paramétrica da reta normal ao gráfico de  $z = xy$  no ponto  $(-1, -2, 2)$ :

$$r(t) = (-2t - 1, -t - 2, 2 - t).$$



O próximo tema é um clássico da Matemática: a diferencial.

## DIFERENCIAL

Você deve ter notado que, em diversas situações, usamos a terminologia “melhor aproximação linear”, enquanto em outras usamos “a melhor aproximação afim”. Vamos esclarecer a diferença que há entre uma e outra terminologia. No fundo, é uma questão de referencial.

O termo *linear* é usado para caracterizar um tipo especial de funções: as transformações lineares. Uma transformação linear de um espaço vetorial  $V$  no espaço vetorial  $W$  (digamos, reais) é uma função  $T : V \longrightarrow W$ , com as seguintes propriedades:  $\forall v, w \in V$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ,

- $T(v + w) = T(v) + T(w)$ ;
- $T(\lambda v) = \lambda T(v)$ .

Ou seja,  $T$  *preserva* as operações que caracterizam  $V$  como um espaço vetorial, na imagem em  $W$ .



Em particular, as transformações lineares de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}$ , também chamadas *funcionais lineares* de  $\mathbb{R}^2$ , têm a forma geral

$$T(x, y) = \alpha x + \beta y,$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são números reais.

Isto é, cada funcional linear de  $\mathbb{R}^2$  é caracterizado unicamente por um par ordenado  $(\alpha, \beta)$ .

O gráfico de um funcional linear de  $\mathbb{R}^2$  é um plano contido em  $\mathbb{R}^3$  que contém a origem, pois  $T(0, 0) = 0$ .

Já uma aplicação afim de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}$  tem a forma geral

$$\mathcal{A}(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma,$$

onde  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são números reais.

O gráfico de  $\mathcal{A}$  é um plano contido em  $\mathbb{R}^3$  que intersecta o eixo  $Oz$  na altura  $\gamma$ .

No caso das aplicações afins, temos um grau de liberdade a mais em relação aos funcionais lineares, pois temos um número extra  $\gamma$  para determinar a aplicação.

Suponha que  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  seja uma função diferenciável em  $(a, b)$ . A aplicação

$$\mathcal{A}(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

é a melhor aproximação afim da função  $f$ , numa pequena vizinhança do ponto  $(a, b)$ .

Há uma maneira clássica de apresentar este tema, isto é, a noção de diferencial. A terminologia usada é a de *acréscimos*. Usando a notação de acréscimos, mudaremos a aplicação afim para uma linear, que passará a ser chamada *diferencial*.

Coloquemos  $z = f(x, y)$ . Nesses termos,  $x$  e  $y$  são as variáveis independentes e  $z$  é a variável dependente.

Veja: se colocarmos  $h = x - a$  e  $k = y - b$ , podemos reescrever a equação que define a aplicação afim  $\mathcal{A}$  da seguinte maneira:

$$\mathcal{A}(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k.$$

A fórmula do lado direito da igualdade define um funcional linear nas variáveis  $h$  e  $k$ , os respectivos acréscimos de  $x$  e de  $y$ , aplicados em  $(a, b)$ :

$$T(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k,$$

determinada unicamente pelo par ordenado  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right)$ .

Resumindo, dados os acréscimos  $h$  e  $k$ ,

$$T(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k$$

é a melhor aproximação linear ao acréscimo obtido na variável  $z$ . Isto é,  $T(h, k)$  é a melhor aproximação ao acréscimo  $f(a+h, b+k) - f(a, b)$ .

Classicamente, denotam-se os acréscimos em  $x$  e em  $y$  por  $dx$  e  $dy$  ( $h = dx$  e  $k = dy$ ). O acréscimo real,  $f(a+dx, b+dy) - f(a, b)$ , em  $z$ , é denotado por  $\Delta z$ , para diferenciá-lo do acréscimo obtido com a diferencial, denotado por  $dz$ .

Assim, representamos a transformação linear  $T(h, k)$  por

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

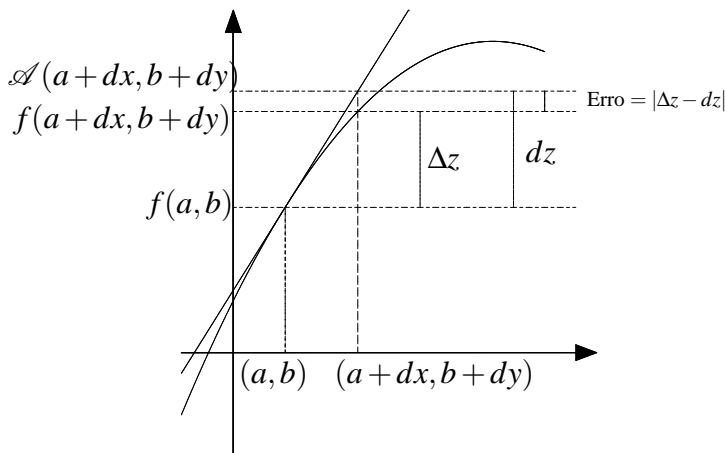
chamada diferencial da função  $z = f(x, y)$ .

Como

$$\begin{aligned} E(h, k) &= f(a+h, b+k) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k \\ &= (f(a+h, b+k) - f(a, b)) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)dy\right) \\ &= \Delta z - dz, \end{aligned}$$

denotamos  $dz \simeq \Delta z$  para indicar que  $dz$  é uma aproximação de

$\Delta z$ . Eles diferem pelo erro  $E(h, k)$  que é tão menor quanto mais  $h$  e  $k$  estiverem próximos de zero.



Veja como usar essa notação no seguinte exemplo.

#### Exemplo 13.4.

Vamos calcular a expressão geral para a diferencial da função

$$f(x, y) = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$$

e usá-la para calcular uma aproximação ao valor  $f(0.99, 1.02)$ .

Para calcular a forma geral da diferencial, precisamos calcular as derivadas parciais de  $f$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{6 - x^2 - y^2}}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{6 - x^2 - y^2}}.$$

Assim, se colocarmos  $z = f(x, y)$ , a diferencial de  $f$  é

$$\begin{aligned} dz &= -\frac{x}{\sqrt{6 - x^2 - y^2}} dx - \frac{y}{\sqrt{6 - x^2 - y^2}} dy \\ dz &= \frac{-x dx - y dy}{\sqrt{6 - x^2 - y^2}}. \end{aligned}$$

Agora, vamos usar essa fórmula para avaliar  $f(0.99, 1.02)$ .

O ponto de referência é, nesse caso,  $(1, 1)$ . Isto é,  $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $a + h = 0.99$  e  $b + h = 1.02$ .

Esta figura é esquemática. Note que o domínio de  $f$ , que está contido em  $\mathbb{R}^2$ , foi representado como um subconjunto de  $\mathbb{R}$ . Dessa forma, o gráfico de  $f$ , que é uma superfície, está representado por uma curva, enquanto o gráfico de  $\mathcal{A}$ , que é um plano, está representado por uma reta. A prática de representar espaços de dimensões maiores por seus similares de dimensões menores é comum em Matemática. Com isso facilita-se a visualização e espera-se ajudar o entendimento.

Calculada em  $(1, 1)$ , a diferencial fica

$$dz = -\frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}dy.$$

Os acréscimos são:  $dx = 0.99 - 1 = -0.01$  e  $dy = 1.02 - 1 = 0.02$ . Portanto,

$$dz = \frac{0.01 - 0.02}{2} = -0.005.$$

Como  $f(1, 1) = 2$ ,  $f(0.99, 1.02) \simeq f(1, 1) + dz = 1.995$ .

Veja, usando uma máquina de calcular, obtemos uma aproximação mais acurada do valor  $f(0.99, 1.02)$ , como 1.994868417. Nada mal para uma aproximação, você não acha?

Chegamos ao último tema da aula.

### O VETOR GRADIENTE

A palavra *dualidade* é usada em circunstâncias bem especiais, na Matemática. Em geral, ela indica a existência de uma bijeção entre certos conjuntos. Mas é mais do que isso.

Por exemplo, podemos dizer que há uma dualidade entre os sólidos de Platão, estabelecida pela relação entre números de vértices e números de faces. Veja, na tabela a seguir, o nome, o número de vértices, o número de arestas e o número de faces desses poliedros regulares.

| Nome            | vértices | arestas | faces |
|-----------------|----------|---------|-------|
| Tetraedro       | 4        | 6       | 4     |
| Hexaedro (cubo) | 8        | 12      | 6     |
| Octaedro        | 6        | 12      | 8     |
| Dodecaedro      | 20       | 30      | 12    |
| Icosaedro       | 12       | 30      | 20    |

Note que o nome do poliedro tem o prefixo grego que indica o número de faces. Assim, por exemplo, o hexaedro é o sólido regular que tem seis faces, todas quadradas. É o nosso popular cubo.

O hexaedro, ou cubo, é dual ao octaedro. Isso porque o cubo tem seis faces e oito vértices ( $f = 6$ ,  $v = 8$ ), enquanto o octaedro

tem oito faces e seis vértices ( $f = 8$ ,  $v = 6$ ).

O dodecaedro é dual ao icosaedro. Assim, não é surpresa que, conhecendo o dodecaedro, os gregos acabaram descobrindo o seu dual, o icosaedro. Veja: se no centro de cada face do dodecaedro marcarmos um ponto, e ligarmos todos esses pontos, obteremos um icosaedro inscrito no dodecaedro original, e vice-versa.

Resta a pergunta: quem é o dual do tetraedro, o mais simples dos sólidos regulares? Ora, sem mais delongas, o tetraedro é auto-dual, pois é o único sólido regular a ter o mesmo número de faces e de vértices.

Depois disso tudo, voltamos à nossa aula.

Há uma bijeção entre o espaço dos funcionais lineares de  $\mathbb{R}^2$  e o próprio  $\mathbb{R}^2$ , que associa o funcional definido por  $T(x, y) = \alpha x + \beta y$  ao par ordenado  $(\alpha, \beta)$ .

Isso é um outro exemplo de uma dualidade. Na verdade, o espaço dos funcionais lineares de  $\mathbb{R}^2$  é um espaço vetorial e é chamado *espaço dual*.

Isso nos faz olhar para o vetor  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)$ , como o dual da diferencial  $dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy$ , num ponto genérico  $(x, y)$  do domínio de  $f$ , e nomeá-lo *gradiente de  $f$* . Usamos a notação

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right).$$

Esse vetor desempenhará um papel importante de agora em diante.

Com isso, chegamos ao fim desta aula. A seguir, uma lista com alguns exercícios para você praticar o que acabou de aprender.

A palavra *gradiente* provém do latim *gradientis*, particípio de *gradi*, que significa caminhar, assim como a palavra *grau* provém de *gradus*, que significa passo, medida, hierarquia, intensidade. A palavra *gradiente* significa, na linguagem comum, a medida da declividade de um terreno. Significa, também, a medida da variação de determinada característica de um meio, tal como pressão ou temperatura, de um ponto para outro desse meio. Como tal, nada mais é do que uma taxa de variação. O símbolo  $\nabla$ , usado para representar esse vetor, é chamado *nabla*.

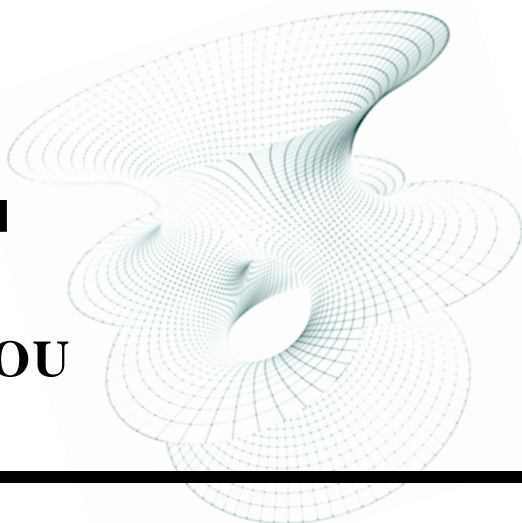
## Exercício 13.1.

- Calcule a equação do plano tangente e uma equação paramétrica da reta normal ao gráfico de  $f$  no ponto indicado.
  - $f(x, y) = x^2 - 2y$   $(1, 0, 1)$ ;
  - $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$   $(1, -1, \ln 2)$ ;
  - $f(x, y) = \sin xy$   $(\pi, 1/2, 1)$ ;
  - $f(x, y) = e^{x^2 y}$   $(1, 0, 1)$ ;
  - $f(x, y) = xy - y^3$   $(1, 1, 0)$ .
- Determine o plano tangente ao gráfico de  $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$ , que é paralelo ao plano  $z = 10x + 5y + 15$ .
- Calcule a diferencial (forma geral) das seguintes funções:
  - $z = 2xy - x^2 + y^2$ ;
  - $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ;
  - $z = e^{xy} - 1$ ;
  - $z = \frac{x - y}{x + y}$ ;
  - $w = xy + xz + yz$ ;
  - $w = \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2)$ .
- Use uma diferencial para calcular uma aproximação ao número  $\sqrt{17} + \sqrt[3]{26}$ .
- Use a diferencial para calcular uma aproximação de  $f(2.997, 4.008)$ , onde  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ .
- Sabendo que o vetor gradiente de  $f(x, y)$ , no ponto  $(1, 2)$ , é  $\nabla f(1, 2) = (1, -1)$  e que  $f(1, 2) = 3$ , calcule o plano tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(1, 2, f(1, 2))$ .

# Aula 14

## A REGRA DA CADEIA OU A ARTE DE DERIVAR

---



### O b j e t i v o s

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 usar a Regra da Cadeia, no caso das funções de várias variáveis;
- 2 conhecer uma aplicação da Regra da Cadeia – uma interpretação geométrica do vetor gradiente.

## MOTIVAÇÃO

É comum ouvir dos alunos com alguma experiência com os conteúdos ensinados nos cursos de Cálculo que *derivar é mais fácil do que integrar*.

Seja lá qual for a sua opinião a esse respeito, é fato que toda a arte de derivar resume-se em aplicar a Regra da Cadeia. Ela nos indica como derivar composições de funções. Vamos a um exemplo.

### Exemplo 14.1.

A função  $f(t) = \sin(t^2 + t)$  é a composição da função  $g(x) = \sin x$  com a função  $h(t) = t^2 + t$ . Isto é,

$$f(t) = g \circ h(t) = g(h(t)) = \sin(t^2 + t).$$

A Regra da Cadeia afirma: *se  $h$  é diferenciável no ponto  $t$  e  $g$  é diferenciável no ponto  $h(t)$ , então  $f = g \circ h$  é diferenciável no ponto  $t$  e*

$$f'(t) = g'(h(t))h'(t).$$

$$\text{Assim, } f'(t) = [\cos(t^2 + t)](2t + 1) = (2t + 1) \cos(t^2 + t).$$

Veja,  $g'(x) = \cos x$  e, portanto,  $g'(h(t)) = g'(t^2 + t) = \cos(t^2 + t)$ .

Neste momento, espera-se que você seja capaz de derivar funções de uma variável com desenvoltura. Aqui estão alguns exemplos para você testar as suas habilidades e praticar um pouco.

### Exercício 14.1.

Calcule as derivadas das seguintes funções:

- |                                    |                                     |
|------------------------------------|-------------------------------------|
| a. $f(x) = (x^2 + 2x + 4)^{1/3}$ ; | b. $g(x) = \frac{\sin x}{e^{2x}}$ ; |
| c. $h(t) = \arctg(t^3)$ ;          | d. $k(t) = \ln(t^3 + 4)$ .          |

Confira as suas respostas com as soluções apresentadas no



fim da aula, junto com os exercícios propostos.

Nesta aula, você aprenderá a usar a Regra da Cadeia para derivar funções cujas compostas envolvam, também, funções de várias variáveis. Antes de prosseguirmos nessa direção, no entanto, vamos lembrar uma outra notação usada para representar as derivadas.

## A NOTAÇÃO $\frac{dy}{dx}$

As notações desempenham papel importante na Matemática. Podemos afirmar, com segurança, que muitos problemas matemáticos só foram resolvidos depois que foram encontradas notações adequadas para que eles fossem claramente formulados. Basta pensar, por exemplo, na maneira como denotamos os números. Os algarismos indo-arábicos se impuseram no lugar dos algarismos romanos por serem mais fáceis de lidar, formando um sistema posicional, com um símbolo para representar o zero.

No caso das funções, uma notação muito usada é a das variáveis dependentes e independentes. Veja como ela funciona no caso do exemplo já citado.

### Revisitando Exemplo 14.1.

As equações  $y = \sin x$  e  $x = t^2 + t$  definem  $y$  como uma função de  $x$  e, por sua vez,  $x$  como uma função de  $t$ . Para reforçar isso, em algumas situações usamos a notação

$$y(x) = \sin x \quad \text{e} \quad x(t) = t^2 + t.$$

Veja, a primeira equação estabelece  $y$  como variável dependente de  $x$ , que é, nesse caso, a variável independente. A segunda equação,  $x = t^2 + t$ , estabelece  $x$  como variável dependente de  $t$ .

Usando essa notação, compor funções significa substituir  $x$  por  $t^2 + t$ , e  $y$  passa a ser visto como uma função de  $t$ :

$$y = \sin(t^2 + t).$$

A notação é conveniente mas demanda atenção. Veja como fica a Regra da Cadeia nesse contexto: *se  $y$  é uma função diferenciável de  $x$  e  $x$  é uma função diferenciável de  $t$ , no domínio onde  $y$  pode ser colocado como função de  $t$ ,  $y$  será diferenciável e*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}.$$

Uma das vantagens dessa notação é a sua compacidade. Por exemplo, ela é muito usada no caso das funções definidas implicitamente por dadas equações. Além disso, ela sugere que a variável  $x$  está sendo suprimida do processo, lembrando uma simplificação. Veja o caso em questão:

$$y = \sin x \quad \text{e} \quad x = t^2 + t.$$

Então,  $\frac{dy}{dx} = \cos x$  e  $\frac{dx}{dt} = 2t + 1$ . Aplicando a fórmula, temos:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = (\sin x)(2t + 1) = (2t + 1) \sin(t^2 + t).$$

Veja, precisamos lembrar que  $x$  está sendo substituído por  $t^2 + t$ , seu valor em termos de  $t$ . Na verdade, podemos usar duas versões da fórmula:

a. forma compacta:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt};$$

b. forma estendida:

$$\frac{dy}{dt}(t) = \frac{dy}{dx}(x(t)) \frac{dx}{dt}(t).$$

Pratique o uso dessa notação fazendo o exercício a seguir.

### Exercício 14.2.

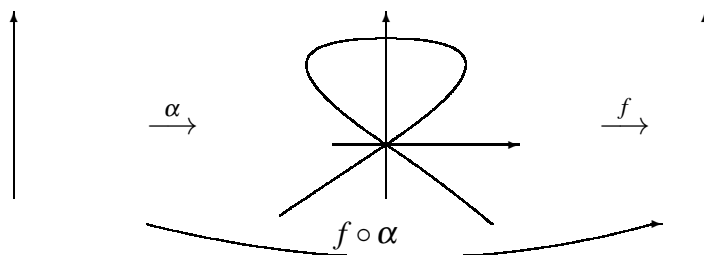
Seja  $y = x \cos(x^2)$  e  $x = \sqrt{\pi}t^3$ .

- Escreva as fórmulas para  $\frac{dy}{dx}$  e  $\frac{dx}{dt}$ .
- Use a Regra da Cadeia para calcular  $\frac{dy}{dt}$ . Calcule  $\frac{dy}{dt}(1)$ .
- Calcule a equação da reta tangente ao gráfico de  $y(t)$  no ponto  $(1, -\sqrt{\pi})$ .

## FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Agora está na hora de aprender a derivar composições que envolvam funções de várias variáveis.

A situação típica é a seguinte: seja  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de duas variáveis, diferenciável, e seja  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva diferenciável, tal que  $\alpha(I) \subset A$ . A composição  $f \circ \alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  será uma função diferenciável, como provaremos em breve. Além disso, expressaremos a derivada dessa composição em termos das derivadas de  $f$  e de  $\alpha$ . Veja um diagrama da composição:



Antes de mais nada, veja um exemplo.

**Exemplo 14.2.**

Seja  $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy$  e  $\alpha(t) = (e^t, e^{-2t})$ . Nesse caso, a composição  $g(t) = f \circ \alpha(t)$  pode ser explicitamente calculada:

$$g(t) = e^{2t} - e^{-4t} + 2e^{-t}.$$

É claro que, dispondo da fórmula de definição, podemos derivar a função  $g$  diretamente:

$$g'(t) = \frac{dg}{dt}(t) = 2e^{2t} + 4e^{-4t} - 2e^{-t}.$$

Para chegar a esse resultado, usando as funções  $f$  e  $\alpha$ , devemos dispor do gradiente de  $f$  e da função derivada de  $\alpha$ :

$$\nabla f(x, y) = (2x + 2y, -2y + 2x) = 2(x + y, x - y);$$

$$\alpha'(t) = (e^t, -2e^{-2t}).$$

A fórmula que combina esses elementos, que define a Regra da Cadeia, nesse caso, é a seguinte:

$$g'(t) = \frac{dg}{dt}(t) = \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t),$$

onde o pontinho representa o produto interno (ou escalar) do vetor gradiente de  $f$  pelo vetor  $\alpha'(t)$ . Veja como ela se aplica no exemplo em questão:

$$\begin{aligned} g'(t) &= 2(x + y, x - y) \cdot (e^t, -2e^{-2t}) = \\ &= 2(e^t + e^{-2t}, e^t - e^{-2t}) \cdot (e^t, -2e^{-2t}) = \\ &= 2(e^t e^t + e^{-2t} e^t + e^t (-2e^{-2t}) - e^{-2t} (-2e^{-2t})) = \\ &= 2e^{2t} + 2e^{-t} - 4e^{-t} + 4e^{-4t} = \\ &= 2e^{2t} - 2e^{-t} + 4e^{-4t}. \end{aligned}$$

Você deve estar atento e se lembrar de que, na composição  $f \circ \alpha(t)$ , devemos substituir  $x$  por  $e^t$  e  $y$  por  $e^{-2t}$ .

Quando nos deparamos com uma fórmula como essa, é quase impossível evitar a pergunta: como alguém consegue chegar a

algo assim? Bem, para certas perguntas, não há resposta curta e simples. Definitivamente, os exemplos cumprem um papel fundamental na indicação dos caminhos corretos a serem seguidos. Em contrapartida, não podemos nos furtar a comparar com a fórmula já conhecida,  $f'(t) = g'(h(t))h'(t)$ , em que o produto de números foi substituído pelo produto interno dos vetores. Antes do fim dos cursos de Cálculo, você voltará a ouvir mais sobre esse tema.

Muito bem; antes de ver a apresentação da teoria que provará a fórmula anterior, tente aplicá-la no exercício a seguir.

### Exercício 14.3.

Sejam  $f(x, y) = \cos(xy)$  e  $\alpha(t) = (t + 1, 2t - 1)$ . Calcule a derivada da função composta  $g(t) = f \circ \alpha(t)$  de ambas as maneiras: usando a fórmula da Regra da Cadeia e diretamente, após o cálculo da lei de definição de  $g$ .

## A REGRA DA CADEIA

### Teorema 14.1 (Regra da Cadeia).

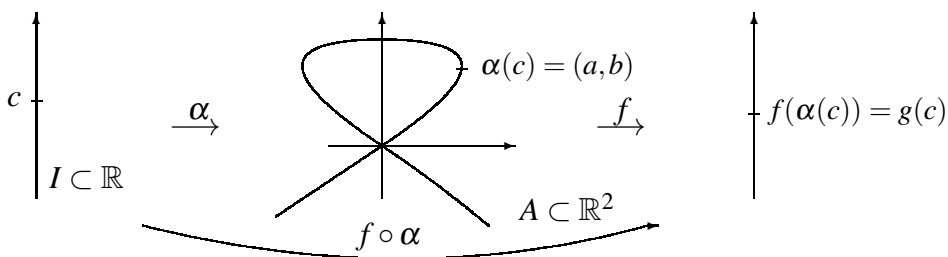
Seja  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável no ponto  $(a, b) \in A$ , um aberto de  $\mathbb{R}^2$ , e seja  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma função vetorial definida no intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$ , tal que  $\alpha(c) = (a, b)$ ,  $\alpha(I) \subset A$ , e  $\alpha$  diferenciável em  $c$ . Então, a função composta

$$g(t) = f \circ \alpha(t)$$

é diferenciável em  $t = c$  e

$$g'(c) = \frac{dg}{dt}(c) = \nabla f(\alpha(c)) \cdot \alpha'(c) = \nabla f(a, b) \cdot \alpha'(c).$$

Veja agora com mais detalhes o diagrama da composição.



A demonstração desse teorema não é difícil, mas trabalhosa. Como usaremos alguns conceitos que você já estudou há algum tempo, vamos relacioná-los a seguir, salientando as propriedades de que necessitaremos na argumentação.

- a. A função composta  $g(t) = f \circ \alpha(t)$  é uma função real, de uma variável real. Assim, para estudar a sua diferenciabilidade no ponto  $t = c$ , devemos analisar o limite (simples) do quociente de Newton:

$$\lim_{t \rightarrow c} \frac{g(t) - g(c)}{t - c} = \lim_{t \rightarrow c} \frac{f \circ \alpha(t) - f \circ \alpha(c)}{t - c};$$

- b. o gradiente  $\nabla f(a, b)$ , da função  $f$  no ponto  $(a, b)$ , é um vetor cujas coordenadas são as derivadas parciais de  $f$ , respectivamente calculadas no ponto  $(a, b)$ :

$$\nabla f(a, b) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right) = (f_x(a, b), f_y(a, b));$$

- c. a derivada da função  $\alpha$ , no ponto  $t = c$ , é um vetor cujas coordenadas são as derivadas das funções coordenadas de  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ :

$$\begin{aligned} \alpha'(c) &= \lim_{t \rightarrow c} \frac{\alpha(t) - \alpha(c)}{t - c} = \\ &= \left( \lim_{t \rightarrow c} \frac{\alpha_1(t) - \alpha_1(c)}{t - c}, \lim_{t \rightarrow c} \frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(c)}{t - c} \right) = \\ &= \left( \lim_{t \rightarrow c} \frac{\alpha_1(t) - a}{t - c}, \lim_{t \rightarrow c} \frac{\alpha_2(t) - b}{t - c} \right); \end{aligned}$$

- d. como  $f$  é diferenciável no ponto  $(a, b)$ , existe uma função  $E(x, y)$ , a função erro, definida em torno do ponto  $(a, b)$ ,

tal que

$$f(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + E(x, y),$$

$$\text{com } \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \frac{E(x, y)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = 0.$$

Nossa (não pequena) tarefa consiste em combinar essas informações para demonstrar o teorema.

### ***Demonstração*** (da Regra da Cadeia)

Começamos com o numerador do quociente de Newton que aparece no item a.:

$$g(t) - g(c) = f(\alpha(t)) - f(\alpha(c)) = f(\alpha(t)) - f(a, b).$$

Como  $f$  é diferenciável em  $(a, b)$ , podemos usar a equação do item d. para escrever

$$\begin{aligned} & f(\alpha(t)) - f(a, b) \\ &= f_x(a, b)(\alpha_1(t) - a) + f_y(a, b)(\alpha_2(t) - b) + E(\alpha(t)). \end{aligned}$$

Note que o produto interno do vetor gradiente  $\nabla f(a, b)$ , descrito no item b., com o vetor  $\alpha(t) - (a, b) = (\alpha_1(t) - a, \alpha_2(t) - b)$  é

$$\begin{aligned} & \nabla f(a, b) \cdot (\alpha(t) - (a, b)) \\ &= f_x(a, b)(\alpha_1(t) - a) + f_y(a, b)(\alpha_2(t) - b). \end{aligned}$$

Combinando essas informações, obtemos

$$\begin{aligned} g(t) - g(c) &= f(\alpha(t)) - f(a, b) \\ &= \nabla f(a, b) \cdot (\alpha(t) - (a, b)) + E(\alpha(t)). \end{aligned}$$

Muito bem, agora vamos cuidar do quociente de Newton. Se  $t \neq c$ ,  $\frac{1}{t - c}$  é um escalar e podemos escrever

$$\frac{g(t) - g(c)}{t - c} = \frac{1}{t - c} \left( \nabla f(a, b) \cdot (\alpha(t) - (a, b)) \right) + \frac{E(\alpha(t))}{t - c}.$$

Neste ponto, usamos a seguinte propriedade do produto interno: se  $\lambda$  é um escalar e  $v$  e  $w$  são dois vetores, então

$$\lambda (v \cdot w) = (\lambda v) \cdot w = v \cdot (\lambda w).$$

Multiplicar o produto interno de dois vetores por um número é igual a multiplicar qualquer um dos dois vetores pelo número e, então, efetuar o produto interno. Com isso, temos

$$\frac{g(t) - g(c)}{t - c} = \nabla f(a, b) \cdot \left( \frac{\alpha(t) - (a, b)}{t - c} \right) + \frac{E(\alpha(t))}{t - c}.$$

Muito bem; agora falta pouco! Vamos tomar o limite desta igualdade quando  $t \rightarrow c$ . Veja que o limite da primeira parcela,

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow c} \left[ \nabla f(a, b) \cdot \left( \frac{\alpha(t) - (a, b)}{t - c} \right) \right] \\ &= \nabla f(a, b) \cdot \left[ \lim_{t \rightarrow c} \left( \frac{\alpha(t) - (a, b)}{t - c} \right) \right], \end{aligned}$$

é, precisamente,  $\nabla f(a, b) \cdot \alpha'(c)$ , o resultado a que esperamos chegar, uma vez que  $\nabla f(a, b)$  é constante.

Realmente, vamos olhar mais detalhadamente essa passagem do limite do produto interno para o produto interno envolvendo o limite em um de seus fatores.

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow c} \left[ \nabla f(a, b) \cdot \left( \frac{\alpha(t) - (a, b)}{t - c} \right) \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow c} \left[ f_x(a, b) \left( \frac{\alpha_1(t) - \alpha_1(c)}{t - c} \right) + f_y(a, b) \left( \frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(c)}{t - c} \right) \right] \\ &= f_x(a, b) \lim_{t \rightarrow c} \frac{\alpha_1(t) - \alpha_1(c)}{t - c} + f_y(a, b) \lim_{t \rightarrow c} \frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(c)}{t - c} \\ &= f_x(a, b) \alpha_1'(c) + f_y(a, b) \alpha_2'(c) = \nabla f(a, b) \cdot \alpha'(c). \end{aligned}$$

O que está faltando para completar a demonstração? Bom, temos de mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow c} \frac{E(\alpha(t))}{t - c} = 0.$$



De que dispomos para fazer isso? Temos a informação do item d., que ainda não usamos:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{E(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0.$$

Veja, para  $t \neq c$ ,  $\frac{E(\alpha(t))}{t-c}$  é igual ao produto

$$\frac{E(\alpha(t))}{\sqrt{(\alpha_1(t)-a)^2 + (\alpha_2(t)-b)^2}} \frac{\sqrt{(\alpha_1(t)-a)^2 + (\alpha_2(t)-b)^2}}{|t-c|} \frac{|t-c|}{t-c}.$$

Como  $\alpha$  é contínua em  $t = c$ , uma vez que é diferenciável em  $t = c$ , sabemos que

$$\lim_{t \rightarrow c} \frac{E(\alpha(t))}{\sqrt{(\alpha_1(t)-a)^2 + (\alpha_2(t)-b)^2}} = 0.$$

Além disso, como  $\frac{|t-c|}{t-c}$  é igual a 1 ou a  $-1$ , esse fator é limitado. Portanto, para garantir que o limite dos três fatores é zero, basta garantir que o limite do fator do meio é um número. Mas, veja,

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow c} \frac{\sqrt{(\alpha_1(t)-a)^2 + (\alpha_2(t)-b)^2}}{|t-c|} \\ &= \lim_{t \rightarrow c} \sqrt{\frac{(\alpha_1(t)-a)^2 + (\alpha_2(t)-b)^2}{(t-c)^2}} \\ &= \sqrt{\left( \lim_{t \rightarrow c} \frac{\alpha_1(t)-a}{t-c} \right)^2 + \left( \lim_{t \rightarrow c} \frac{\alpha_2(t)-b}{t-c} \right)^2} \\ &= \sqrt{(\alpha_1'(c))^2 + (\alpha_2'(c))^2}. \end{aligned}$$

Isto é, o limite do fator que está no meio da fórmula é a norma da derivada de  $\alpha$  em  $t = c$ ,  $|\alpha'(c)| = \sqrt{(\alpha_1'(c))^2 + (\alpha_2'(c))^2}$ . Assim, a demonstração está completa.

Uma argumentação como essa pode lhe causar uma sensação

de desconforto. Isto é, você pode pensar em coisas como *eu nunca serei capaz de fazer uma demonstração como essa ou como isso é difícil*. No entanto, é preciso ter em mente que os primeiros matemáticos que lidaram com isso tiveram dificuldades, precisaram considerar muitos exemplos, tentar diferentes argumentações. Além disso, a demonstração apresentada foi preparada ao longo de muito tempo, até chegar a essa forma final. Portanto, é preciso ter paciência e perseverança. Tudo a seu tempo!

Em Matemática, a importância de um teorema é diretamente proporcional ao número de suas aplicações. Portanto, vamos terminar a aula com uma aplicação do teorema que acabamos de apresentar.

## A ORTOGONALIDADE DO VETOR GRADIENTE COM A CURVA DE NÍVEL

Como uma aplicação da Regra da Cadeia, deduziremos uma importante característica do vetor gradiente: ele é normal à curva de nível que contém o ponto em questão. Aqui está uma formulação mais precisa desse fato.

### **Corolário 14.2** (da Regra da Cadeia).

---

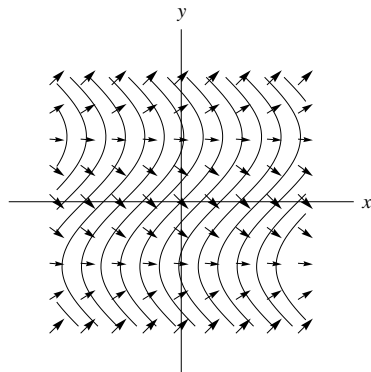
*Seja  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável no aberto de  $A \subset \mathbb{R}^2$  e seja  $(a, b) \in A$ , tal que  $\nabla f(a, b) \neq \vec{0}$ . Seja  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma função vetorial definida no intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$ , tal que  $\alpha(t_0) = (a, b)$ ,  $\alpha(I) \subset A$  e  $\alpha'(t_0) \neq \vec{0}$  e  $f \circ \alpha(t) = c$ ,  $\forall t \in I$ . Então, os vetores  $\alpha'(t_0)$  e  $\nabla f(a, b)$  são ortogonais.*

A condição  $f \circ \alpha(t) = c$ ,  $\forall t \in I$ , nos diz que  $\alpha$  é uma parametrização da curva de nível  $c$  de  $f$ .

O corolário garante que, se sobrepusermos, numa só figura, o conjunto  $A$  com as curvas de nível da função  $f$  e os seus vetores gradientes, naqueles pontos onde esses vetores são não nulos, eles serão ortogonais às curvas de nível. Veja um exemplo.

**Exemplo 14.3.**

Aqui estão algumas curvas de nível e alguns vetores gradientes da função  $f(x, y) = x - \sin y$ , em torno da origem.



**Demonstração** ( Do Corolário)

Estamos supondo  $f \circ \alpha(t) = c, \forall t \in I$ . Portanto,

$$\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}(t) = 0, \forall t \in I,$$

uma vez que a derivada de uma função constante sobre um intervalo é constante e igual a zero.

Em contrapartida, a Regra da Cadeia nos dá

$$\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}(t) = \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t), \forall t \in I.$$

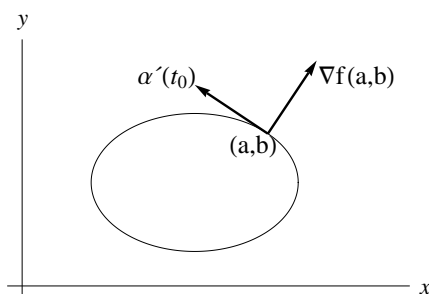
Calculando em  $t_0$ , temos

$$\nabla f(\alpha(t_0)) \cdot \alpha'(t_0) = \nabla f(a, b) \cdot \alpha'(t_0) = 0.$$

Como o produto interno desses dois vetores é igual a zero, eles são ortogonais e  $\alpha'(t_0)$  é tangente à curva  $\alpha$  em  $(a, b)$ .

Veja a ilustração a seguir.

Na figura você observa a curva de nível  $c$  da função  $f$ , uma elipse, o ponto  $(a, b)$ , que pertence a essa curva de nível (uma vez que  $f(a, b) = c$ ), o vetor  $\alpha'(t_0)$ , que é tangente à curva de nível, no ponto  $(a, b)$ , assim como o vetor gradiente de  $f$  em  $(a, b)$ , ortogonal à curva.



Com essa demonstração, terminamos a aula. Agora, os exercícios!

#### Exercício 14.4.

1. Calcule as derivadas das seguintes funções:

- a.  $f(x) = (x^2 + 2x + 4)^{1/3}$ ;      b.  $g(x) = \frac{\sin x}{e^{2x}}$ ;  
 c.  $h(t) = \arctg(t^3)$ ;      d.  $k(t) = \ln(t^3 + 4)$ .

**Solução:**

- a.  $f'(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 2x + 4)^{-2/3} (2x + 2) = \frac{2x + 2}{3(x^2 + 2x + 4)^{2/3}}$ ;  
 b.  $g'(x) = \frac{(\cos x) e^{2x} - (\sin x) 2 e^{2x}}{(e^{2x})^2} = \frac{e^{2x} \cos x - 2 e^{2x} \sin x}{e^{4x}}$ ;  
 c.  $h'(t) = \frac{1}{1 + (t^3)^2} (3t^2) = \frac{3t^2}{1 + t^6}$ ;  
 d.  $k'(t) = \frac{1}{t^3 + 4} (3t^2) = \frac{3t^2}{t^3 + 4}$ .

2. Seja  $y = x \cos(x^2)$  e  $x = \sqrt{\pi} t^3$ .

- a. Escreva as fórmulas para  $\frac{dy}{dx}$  e  $\frac{dx}{dt}$ .  
 b. Use a Regra da Cadeia para calcular  $\frac{dy}{dt}$ . Calcule  $\frac{dy}{dt}(1)$ .  
 c. Calcule a equação da reta tangente ao gráfico de  $y(t)$  no ponto  $(1, -\sqrt{\pi})$ .

**Solução:**

a. Começamos calculando as derivadas das funções  $y(x)$  e  $x(t)$ .

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \cos x^2 + x(-\sin x^2)(2x) = \cos x^2 - 2x^2 \sin x^2; \\ \frac{dx}{dt} = 3\sqrt{\pi} t^2. \end{cases}$$

b. Agora, combinamos as duas fórmulas, usando a Regra da Cadeia, sem esquecer de substituir  $x$  pelo seu valor em  $t$ .

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = (\cos x^2 - 2x^2 \sin x^2)(3\sqrt{\pi} t^2) = \\ &= 3\sqrt{\pi} t^2 (\cos(\pi t^6) - 2\pi t^6 \sin(\pi t^6)) = \\ &= 3\sqrt{\pi} t^2 \cos(\pi t^6) - 6\pi \sqrt{\pi} t^6 \sin(\pi t^6). \\ \frac{dy}{dt}(1) &= 3\pi \cos \pi - 6\pi \sqrt{\pi} \sin \pi = -3\pi. \end{aligned}$$

c.  $y + \sqrt{\pi} = -3\pi(x - 1).$

3. Sejam  $f(x, y) = \cos(xy)$  e  $\alpha(t) = (t + 1, 2t - 1)$ . Calcule a derivada da função composta  $g(t) = f \circ \alpha(t)$  de ambas as maneiras: usando a fórmula da Regra da Cadeia e diretamente, após o cálculo da lei de definição de  $g$ .

**Solução:**

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = (-y \sin(xy), -x \sin(xy)); \\ \alpha'(t) = (1, 2). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g'(t) &= \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = \\ &= (-(2t - 1) \sin(2t^2 + -1), -(t + 1) \sin(2t^2 + -1)) \cdot (1, 2) = \\ &= (1 - 2t) \sin(2t^2 + -1) - 2(t + 1) \sin(2t^2 + -1) = \\ &= -(4t + 1) \sin(2t^2 + -1). \end{aligned}$$

Calculando diretamente, temos:

$$\begin{aligned} g(t) &= \cos(2t^2 + t - 1) \\ g'(t) &= (-\sin(2t^2 + t - 1))(4t + 1) \\ &= -(4t + 1) \sin(2t^2 + t - 1). \end{aligned}$$

4. Use a Regra da Cadeia para calcular  $g'(t)$ , onde  $g(t) = f \circ \alpha(t)$ , nos seguintes casos:

a.  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy$ ,  $\alpha(t) = (\sin 2t, \cos 2t)$ ;

b.  $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$ ,  $\alpha(t) = (t - 1, t^1 + 1)$ ;

c.  $f(x, y) = x + 2y - xy$ ,  $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ ;

d.  $f(x, y, z) = \sin(x + y + z)$ ,  $\alpha(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t, t^2)$ .

# Aula 15



## A REGRA DA CADEIA (SEGUNDA PARTE)

---

### Objetivo

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 usar as fórmulas derivadas da Regra da Cadeia no caso das funções de várias variáveis.

## A REGRA DA CADEIA (SEGUNDA PARTE)– FÓRMULAS GRANDES E PEQUENAS

Não há como evitar o sentimento de que essas  
fórmulas matemáticas têm uma existência  
independente e uma inteligência própria,  
que elas são mais sábias do que nós,  
mais sábias até mesmo do que seus descobridores,  
que nós obtemos mais delas do que o que foi  
originalmente colocado nelas.

Heinrich Hertz

### INTRODUÇÃO

Há uma parte importante da cultura matemática que diz respeito às fórmulas. É impossível folhear os livros e os trabalhos de Matemática sem encontrar, perfilados, seguindo por páginas e páginas, fórmulas e símbolos, em arranjos que vão dos mais simples aos mais elaborados. Não se pode mencionar, por exemplo, o Teorema de Pitágoras sem pensar na fórmula

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Quem não se lembra da famosa Fórmula de Bhaskara, para resolver equações do segundo grau:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} ?$$

Cada um de nós tem algumas que são as suas favoritas:

$$\int u dv = uv - \int v du, \quad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b, \\ d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta \quad \text{etc. Há tantas!}$$

Na aula anterior, você acrescentou ao seu rol de fórmulas matemáticas a da Regra da Cadeia:

$$(f \circ \alpha)'(t) = \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t),$$

que tem a simplicidade como uma de suas características.

Vamos a um exemplo.



**Exemplo 15.1.**

Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável, tal que  $\nabla f(-1, 0) = (1, 2)$  e seja  $\alpha(t) = (\cos(3\pi t), 1 - t^2)$ . Vamos usar a Regra da Cadeia para calcular  $(f \circ \alpha)'(1)$ . Note que  $\alpha(1) = (-1, 0)$ . Aqui está o cálculo de  $\alpha'(1)$ :

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= (-3\pi \operatorname{sen}(3\pi t), -2t), \\ \alpha'(1) &= (0, -2).\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}(f \circ \alpha)'(1) &= \nabla f(\alpha(1)) \cdot \alpha'(1) = \nabla f(-1, 0) \cdot \alpha'(1) = \\ &= (-1, 2) \cdot (0, -2) = -4.\end{aligned}$$

**A FÓRMULA POR EXTENSO**

Quando expressamos as funções usando a notação de variáveis independentes e dependentes, costumamos usar a versão por extenso da fórmula da Regra da Cadeia. Veja como isso funciona na situação a seguir.

Seja  $z(x, y) = f(x, y)$  uma função diferenciável e  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  uma curva diferenciável, tal que  $\operatorname{Im}(\alpha) \subset \operatorname{Dom}(f)$ . Então, a composição de  $f$  e  $\alpha$  fica

$$z(t) = f(x(t), y(t))$$

e a derivada desta função é dada por

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt}(t) &= \nabla f(x(t), y(t)) \cdot \left( \frac{dx}{dt}(t), \frac{dy}{dt}(t) \right) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}(t).\end{aligned}$$

Em Matemática, assim como na vida, muitas vezes o menos é mais. Assim, é comum usarmos a seguinte versão abreviada dessa fórmula:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt},$$

ou

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Note a similaridade com a fórmula

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dx},$$

apresentada no início da aula anterior. Veja, no lugar de  $\frac{dy}{dx}$ , temos as derivadas parciais  $\frac{\partial z}{\partial x}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

É preciso atenção no uso da fórmula, pois omitimos os pontos nos quais cada uma das derivadas envolvidas devem ser calculadas.

Está na hora de observar como isso funciona na prática.

### Exemplo 15.2.

Sejam  $z(x, y) = 2xy^2 - x^2y$ ,  $x(t) = 3t^2$  e  $y(t) = \sin 2t$ . Vamos calcular  $\frac{dz}{dt}$ , a derivada da composta, usando a fórmula da Regra da Cadeia e diretamente, após obter a expressão de  $z(t)$ .

a. Usando a fórmula da Regra da Cadeia:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \\ &= (2y^2 - 2xy)6t + (4xy - x^2)(2 \cos 2t) \\ &= (2 \sin^2 t - 6t^2 \sin 2t)6t + (12t^2 \sin 2t - 9t^4)(2 \cos 2t) \\ &= 12t \sin^2 2t - 36t^3 \sin 2t \\ &\quad + 24t^2 \sin 2t \cos 2t - 18t^4 \cos 2t = \\ &= 12t \sin 2t (\sin 2t - 3t^2) + 3t^2 \cos 2t (8 \sin 2t - 6t^2). \end{aligned}$$

Note que, da equação  $z = 2xy^2 - x^2y$ , calculamos  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2y^2 - 2xy$  e  $\frac{\partial z}{\partial y} = 4xy - x^2$ , e das equações  $x = 3t^2$  e  $y = \sin 2t$  calculamos  $\frac{dx}{dt} = 6t$  e  $\frac{dy}{dt} = 2 \cos 2t$ . Além disso, substituímos  $x$  por  $3t^2$  e  $y$  por  $\sin 2t$ , pois a resposta de  $\frac{dz}{dt}$  deve ser dada apenas em termos da variável  $t$ , a menos que tenhamos de deixar subentendido.

b. Efetuando a composição e, então, o cálculo direto:

$$\begin{aligned} z(t) &= 6t^2 \sin^2 2t - 9t^4 \sin 2t. \\ \frac{dz}{dt} &= 12t \sin^2 2t + (12t^2 \sin 2t)(2 \cos 2t) \\ &\quad - 36t^3 \sin 2t - 18t^4 \cos 2t = \\ &= 12t \sin 2t (\sin 2t - 3t^2) \\ &\quad + 3t^2 \cos 2t (8 \sin 2t - 6t^2). \end{aligned}$$

A rigor, deveríamos ter escrito  $\frac{dz}{dt}(t)$  no lugar de  $\frac{dz}{dt}$ , na última equação.

Quando  $f$  é uma função com mais variáveis do que nossas usuais duas, a fórmula ganha mais parcelas. Veja, no próximo exemplo, como isso acontece.

### Exemplo 15.3.

Seja  $w = f(x, y, z)$  uma função diferenciável e seja

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (t^2, \cos 2t, \sin 2t).$$

Suponha que, para  $t \in \text{Dom}(\alpha)$ ,  $(x(t), y(t), z(t)) \in \text{Dom}(f)$ .

Vamos expressar a derivada da composta  $w(t)$  em termos das derivadas parciais de  $f$ .

Nesse caso, a fórmula da Regra da Cadeia fica

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Uma vez que não dispomos das informações sobre  $f$  (sabemos apenas que é uma função diferenciável e que a composição é possível), suas derivadas parciais serão apenas indicadas.

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} 2t + \frac{\partial f}{\partial y} (-2 \sin 2t) + \frac{\partial f}{\partial z} (2 \cos 2t) = \\ &= 2t \frac{\partial f}{\partial x} - 2 \frac{\partial f}{\partial y} \sin 2t + 2 \frac{\partial f}{\partial z} \cos 2t.\end{aligned}$$

Observe que os símbolos  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  e  $\frac{\partial f}{\partial z}$  representam funções na variável  $t$ , pois devemos substituir  $x$ ,  $y$  e  $z$  pelos seus respectivos valores em  $t$ .

Aqui está uma oportunidade para você experimentar.

### Exercício 15.1.

Seja  $w = f(x, y, z)$  uma função diferenciável, definida em todo o  $\mathbb{R}^3$ . Escreva a fórmula indicada para calcular a derivada de

$$w(t) = f(e^{2t}, t e^{3t}, t^2)$$

e expresse essa derivada,  $\frac{dw}{dt}$ , em termos das derivadas parciais de  $f$ .

## PARCIAIS E PARCIAIS

Até esta altura, temos considerado a situação básica, em que  $f$  é uma função de duas ou três variáveis e  $\alpha$  é uma função vetorial, tomando valores em  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , dependendo do caso, e de uma variável real. O resultado da composição  $f \circ \alpha$  é uma função real de uma variável real.

No entanto, podemos considerar, também, a seguinte situação:

Seja  $z(x, y) = f(x, y)$  uma função diferenciável e suponha que  $x(u, v) = g(u, v)$  e  $y(u, v) = h(u, v)$  sejam funções diferenciáveis, definidas num aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ , tais que, se  $(u, v) \in U$ , então  $(x(u, v), y(u, v)) \in \text{Dom}(f)$ . Então, podemos considerar  $z$  uma

função de  $u$  e  $v$ , fazendo a composição

$$z(u, v) = f(x(u, v), y(u, v)) = f(g(u, v), h(u, v)).$$

Além disso, podemos usar a Regra da Cadeia para calcular as derivadas parciais de  $z$  em relação a  $u$  e a  $v$ , uma vez que para isso basta derivar a função em relação à variável desejada, considerando a outra variável como uma constante.

Portanto,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Veja, no exemplo a seguir, como usar as fórmulas.

**Exemplo 15.4.**

Sejam  $z = f(x, y) = xy - y^2$ ,  $x = g(u, v) = u^2 + v^2$  e  $y = h(u, v) = 3u - v$ . Considerando  $z$  uma função de  $u$  e  $v$ , ou seja, tomando a composição

$$z(u, v) = f(g(u, v), h(u, v)),$$

vamos calcular as derivadas parciais  $\frac{\partial z}{\partial u}$  e  $\frac{\partial z}{\partial v}$  de ambas as maneiras: usando as fórmulas da Regra da Cadeia e, diretamente, após obter a expressão explícita de  $z$  em termos de  $u$  e  $v$ .

a. Usando a Regra da Cadeia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = \\ &= y(2u) + (x - 2y)3 = \\ &= (3u - v)(2u) + (u^2 + v^2 - 6u + 2v)3 = \\ &= 9u^2 - 2uv + 3v^2 - 18u + 6v. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = \\ &= y(2v) + (x-2y)(-1) = \\ &= (3u-v)(2v) + (u^2+v^2-6u+2v)(-1) = \\ &= -u^2 + 6uv - 3v^2 + 6u - 2v.\end{aligned}$$

b. Diretamente da expressão de  $z$  em termos de  $u$  e  $v$ :

$$\begin{aligned}z(u, v) &= (u^2 + v^2)(3u - v) - (3u - v)^2 = \\ &= 3u^3 - u^2v + 3uv^2 - v^3 - 9u^2 + 6uv - v^2; \\ \frac{\partial z}{\partial u} &= 9u^2 - 2uv + 3v^2 - 18u + 6v; \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= -u^2 + 6uv - 3v^2 + 6u - 2v.\end{aligned}$$

Está na hora de você entrar em ação. Eis mais uma atividade para você.

### Exercício 15.2.

Seja  $w(u, v) = f(ue^{2v}, ve^{2u}, uv)$ , onde  $f(x, y, z)$  é uma função diferenciável, definida em todo o  $\mathbb{R}^3$ .

1. Expresse  $\frac{\partial w}{\partial u}$  e  $\frac{\partial w}{\partial v}$  em termos das derivadas parciais de  $f$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  e  $\frac{\partial f}{\partial z}$ .
2. Sabendo que  $\nabla f(e^2, e^2, 1) = (1, -1, 2)$ , calcule  $\nabla w(1, 1)$ .

Você observou que, uma vez conhecida a expressão que define a função composta, é menos trabalhoso derivá-la diretamente. No entanto, nem sempre dispomos de todas as informações para obter as leis de definição explicitamente. Nesse caso, a fórmula é o único recurso de que dispomos.

Além disso, é bom estar preparado para usar uma variedade de diferentes nomenclaturas e notações para as derivadas parciais.

Terminaremos a aula com uma série de exemplos em que exploraremos esses aspectos.

**Exemplo 15.5.**

Seja  $g(x, y, z)$  uma função diferenciável, definida em todo o  $\mathbb{R}^3$ , e suponha que  $x(u, v) = u^2 \cos v$ ,  $y(u, v) = u^2 \sin v$  e  $z(u, v) = uv$ .

Vamos considerar  $G(u, v) = g(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  e expressar as derivadas parciais de  $G$ , em relação a  $u$  e  $v$ , em termos das derivadas parciais de  $g$ , em relação a  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

Nesse caso, as fórmulas que serão usadas são

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}; \\ \frac{\partial G}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial u} &= (2u \cos v) \frac{\partial g}{\partial x} + (2u \sin v) \frac{\partial g}{\partial y} + v \frac{\partial g}{\partial z}; \\ \frac{\partial G}{\partial v} &= (u^2 \sin v) \frac{\partial g}{\partial x} + (u^2 \cos v) \frac{\partial g}{\partial y} + u \frac{\partial g}{\partial z}. \end{aligned}$$

Note que  $\frac{\partial g}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial g}{\partial y}$  e  $\frac{\partial g}{\partial z}$  devem ser vistas, nas duas equações anteriores, como funções de  $u$  e  $v$ , uma vez que substituímos nelas  $x$ ,  $y$  e  $z$  por seus respectivos valores em termos de  $u$  e  $v$ :  $x = u^2 \cos v$ ,  $y = u^2 \sin v$  e  $z = uv$ .

**Exemplo 15.6.**

Vamos calcular  $w_r$  e  $w_t$  sabendo que  $w = xy + 2yz - xz$ ,  $x = re^t$ ,  $y = re^{-t}$  e  $z = t^2$ .

Nesse exemplo, a ênfase está na notação  $w_r$  e  $w_t$ . Isso é uma outra maneira de denotar as funções derivada parcial de  $w$  em relação a  $r$  e a  $t$ , respectivamente. Usando essa notação, as fórmulas ficam

$$\begin{cases} w_r = w_x x_r + w_y y_r + w_z z_r; \\ w_t = w_x x_t + w_y y_t + w_z z_t. \end{cases}$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} w_r &= (y-z)e^t + (x+2z)e^{-t} + (2y-x)0 \\ w_r &= (re^{-t} - t^2)e^t + (re^t + 2t^2)e^{-t} \\ w_r &= r - t^2 e^t + r + 2t^2 e^{-t} = 2r - t^2(e^t - 2e^{-t}); \\ w_t &= (y-z)re^t + (x+2z)(-re^{-t}) + (2y-x)(2t) \\ w_t &= (re^{-t} - t^2)re^t - (re^t + 2t^2)re^{-t} + (2re^{-t} - re^t)2t \\ w_t &= 2rte^{-t}(1-t) - rte^t(t+2). \end{aligned}$$

Vamos a um exemplo onde temos uma composição dupla.

**Exemplo 15.7.**

Seja  $z = f(x, y)$  uma função diferenciável definida em todo o  $\mathbb{R}^2$ ,  $x = 2u - v$ ,  $y = 3u + 2v$ ,  $u = t^2 + 2t$  e  $v = 3 - t$ . Vamos expressar  $\frac{dz}{dt}$  em termos das derivadas parciais de  $f$ .

Sabemos que

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \end{cases}$$

e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt}.$$

Portanto,



$$\begin{aligned}
 \frac{dz}{dt} &= \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \frac{du}{dt} + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \right) \frac{dv}{dt} \\
 \frac{dz}{dt} &= \left( \frac{\partial f}{\partial x} 2 + \frac{\partial f}{\partial y} 3 \right) (2t+2) + \left( \frac{\partial f}{\partial x} (-1) + \frac{\partial f}{\partial y} 2 \right) (-1) = \\
 &= (4t+5) \frac{\partial f}{\partial x} + (6t+4) \frac{\partial f}{\partial y}.
 \end{aligned}$$

Você deve notar que  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  representam, na fórmula anterior, funções de  $t$ . Para isso, devemos calculá-las em  $(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)))$ .

## RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS 15.1 E 15.2

### Exercício 15.1

Seja  $w = f(x, y, z)$  uma função diferenciável, definida em todo o  $\mathbb{R}^3$ . Escreva a fórmula indicada para calcular a derivada de

$$w(t) = f(e^{2t}, t e^{3t}, t^2)$$

e expresse essa derivada,  $\frac{dw}{dt}$ , em termos das derivadas parciais de  $f$ .

#### Solução:

Usamos a fórmula

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt},$$

onde  $x(t) = e^{2t}$ ,  $y = t e^{3t}$  e  $z(t) = t^2$ . Então,

$$\begin{aligned}
 \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} 2e^{2t} + \frac{\partial f}{\partial y} (e^{3t} + 3t e^{3t}) + \frac{\partial f}{\partial z} 2t = \\
 &= 2e^{2t} \frac{\partial f}{\partial x} + e^{3t} (1+3t) \frac{\partial f}{\partial y} + 2t \frac{\partial f}{\partial z}.
 \end{aligned}$$

### Exercício 15.2

Seja  $w(u, v) = f(ue^{2v}, ve^{2u}, uv)$ , onde  $f(x, y, z)$  é uma função diferenciável, definida em todo o  $\mathbb{R}^3$ .

1. Expresse  $\frac{\partial w}{\partial u}$  e  $\frac{\partial w}{\partial v}$  em termos das derivadas parciais de  $f$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  e  $\frac{\partial f}{\partial z}$ .
2. Sabendo que  $\nabla f(e^2, e^2, 1) = (1, -1, 2)$ , calcule  $\nabla w(1, 1)$ .

#### Solução:

Neste caso, usamos as fórmulas

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}, \\ \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}, \end{cases}$$

onde  $x = ue^{2v}$ ,  $y = ve^{2u}$  e  $z = uv$ . Assim,

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial u} = e^{2v} \frac{\partial f}{\partial x} + 2ve^{2u} \frac{\partial f}{\partial y} + v \frac{\partial f}{\partial z}, \\ \frac{\partial w}{\partial v} = 2ue^{2v} \frac{\partial f}{\partial x} + e^{2u} \frac{\partial f}{\partial y} + u \frac{\partial f}{\partial z}. \end{cases}$$

Para determinar  $\nabla w(1, 1)$ , precisamos calcular  $\frac{\partial w}{\partial u}(1, 1)$  e  $\frac{\partial w}{\partial v}(1, 1)$ . Para isso, usaremos

$$\begin{aligned} \nabla f(e^2, e^2, 1) &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(e^2, e^2, 1), \frac{\partial f}{\partial y}(e^2, e^2, 1), \frac{\partial f}{\partial z}(e^2, e^2, 1) \right) \\ &= (1, -1, 2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u}(1, 1) &= e^2 \frac{\partial f}{\partial x}(e^2, e^2, 1) + 2e^2 \frac{\partial f}{\partial y}(e^2, e^2, 1) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial z}(e^2, e^2, 1) = \\ &= e^2 - 2e^2 + 2 = 2 - e^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial v}(1,1) &= 2e^2 \frac{\partial f}{\partial x}(e^2, e^2, 1) + e^2 \frac{\partial f}{\partial y}(e^2, e^2, 1) \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial z}(e^2, e^2, 1) = \\
&= 2e^2 - e^2 + 2 = 2 + e^2
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\nabla w(1,1) = (2 - e^2, 2 + e^2).$$

### Exercício 15.3.

1. Calcule  $\frac{dw}{dt}$ , onde  $w = x^2 + xe^y + \cos(xy)$ ,  $x = t + t^2$  e  $y = t^3$ , das duas maneiras: usando a Regra da Cadeia e diretamente, após obter a expressão que define  $w$  como uma função de  $t$ .
2. Seja  $u = 2xy + x^2$ ,  $v = y^2 - 2xy$  e  $w = e^{2u-v}$ . Calcule  $\frac{\partial w}{\partial x}$  e  $\frac{\partial w}{\partial y}$  usando a Regra da Cadeia e diretamente, após obter a expressão que define  $w$  como uma função de  $x$  e de  $y$ .
3. Sabendo que  $w = \ln \sqrt{4 + x^2 + y^2}$ ,  $x = 2s - t$ ,  $y = -s + 3t$  e  $z = st$ , calcule as derivadas parciais de  $w$  em relação a  $s$  e a  $t$ .
4. Use a Regra da Cadeia para calcular as derivadas parciais  $w_r$  e  $w_s$ , onde  $w = u^2 - v^2 - uv$ ,  $u = e^{3r} \cos(2s)$ ,  $v = e^{-3r} \sin(2s)$ .
5. Seja  $f(x, y)$  uma função diferenciável, definida em todo o conjunto  $\mathbb{R}^2$ . Considere  $z = f(\ln(u^2 - v^2), \arctg(uv))$  e expresse as derivadas parciais  $\frac{\partial z}{\partial u}$  e  $\frac{\partial z}{\partial v}$  em termos das derivadas parciais de  $f$ .
6. Sabendo que  $f(u, v)$  é uma função diferenciável definida em todo o conjunto  $\mathbb{R}^2$ , considere  $w = f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right)$ . Mostre que

$$x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

7. Seja  $f(x, y, z)$  uma função diferenciável tal que

$$\nabla f(1, \sqrt{3}, \sqrt{3}) = (2, -1, 3).$$

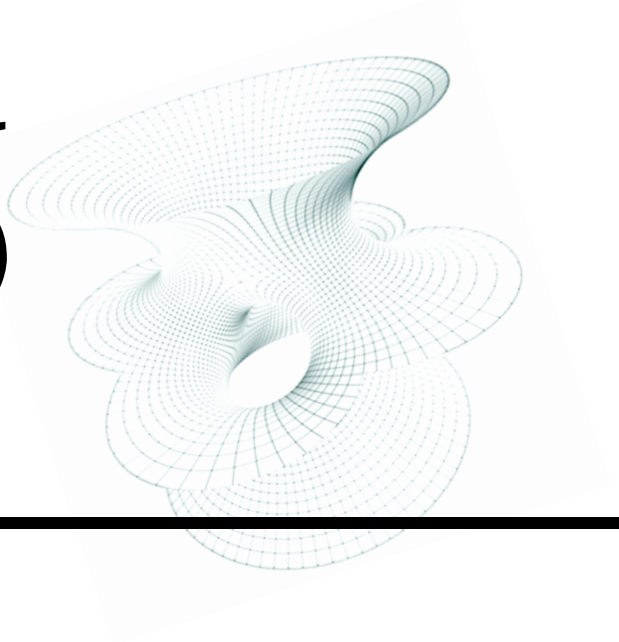
Sabendo que  $x = u \cos 2v$ ,  $y = u \sin 2v$  e  $z = \tan 2v$ , considere  $w(u, v) = f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  e calcule  $\nabla w(2, \pi/6)$ .

8. Seja  $w = t^3 f(x, y)$ , com  $x = \cos t^2$ ,  $y = \sin t^2$ . Expresse  $\frac{dw}{dt}$  em termos da função  $f$  e das suas derivadas parciais.
9. Calcule os valores de  $a$  e  $b$  tais que a curva  $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$  seja uma parametrização da curva de nível  $e^{36}$  da função  $z(x, y) = e^{9x^2 + 4y^2}$ .

# Aula 16

## FUNÇÕES IMPLÍCITAS

---



## Objetivo

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 derivar funções definidas implicitamente.

## INTRODUÇÃO

As funções são o principal objeto de estudo nos cursos de Cálculo. Queremos saber se uma dada função é contínua, se é diferenciável, se admite um valor máximo numa determinada região de seu domínio etc.

Estamos habituados a nos referir a uma certa função e citar, apenas, a sua lei de definição, como, por exemplo, a função  $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ . Isto é, mencionar uma equação que determina, explicitamente, como calcular os diferentes valores da função.

No entanto, é bom lembrar: uma função consiste de mais coisas além de sua lei de definição. É necessário estabelecer seu domínio e seu contradomínio. A prática de citar a lei de definição como se fosse a própria função está respaldada na convenção de que, nessas circunstâncias, o domínio é o maior subconjunto do correspondente espaço euclidiano no qual tal lei faça sentido. Assim, retomando o exemplo citado, quando nos referimos à função  $z = f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ , estamos deixando subentendido que seu domínio é o disco fechado  $B = \{(x, y) ; x^2 + y^2 \leq 4\}$ , com centro na origem e raio 2.

Além das funções definidas explicitamente, temos uma grande fonte de exemplos de funções nas chamadas *funções implícitas*.

Esse tema já foi abordado anteriormente, no estudo das funções reais, de uma variável real. Agora que dispomos de novas ferramentas, tais como as derivadas parciais, vamos retomá-lo e aprofundá-lo um pouco mais. Contudo, como você verá, ele não será esgotado ainda desta vez.

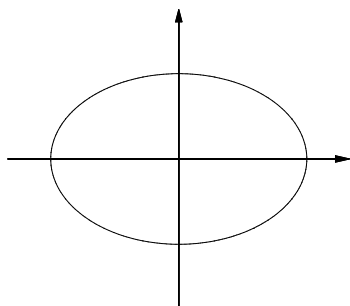
## ALGUNS EXEMPLOS

Você já sabe que, de um modo geral, uma equação da forma  $f(x, y) = c$  define uma curva no plano  $\mathbb{R}^2$  e que uma equação da forma  $G(x, y, z) = d$  define uma superfície em  $\mathbb{R}^3$ .

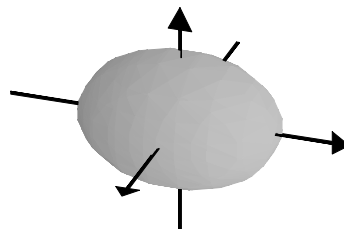
No contexto das funções reais de várias variáveis, tais equações definem os chamados *conjuntos de nível*.

**Exemplo 16.1.**

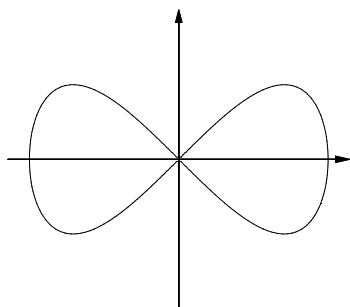
Aqui estão alguns conjuntos de nível com suas correspondentes equações.



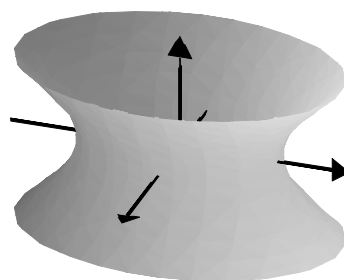
$$F(x, y) = 16x^2 + 36y^2 = 576$$



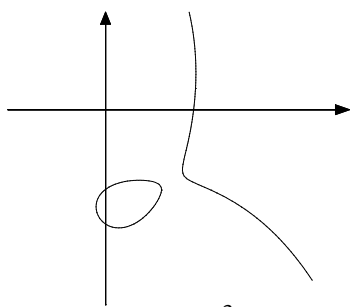
$$G(x, y, z) = 9x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$$



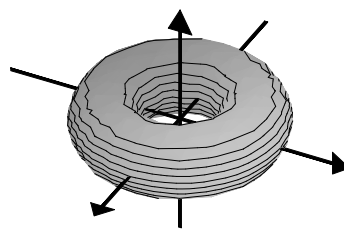
$$F(x, y) = x^4 - 49(x^2 - y^2) = 0$$



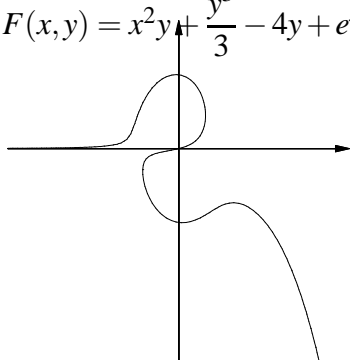
$$G(x, y, z) = 9x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 36$$



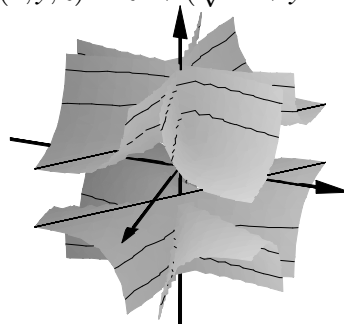
$$F(x, y) = x^2y + \frac{y^3}{3} - 4y + e^x = 6.08$$



$$G(x, y, z) = z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 = 1$$



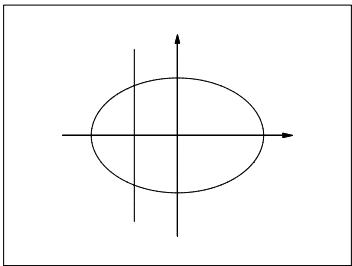
$$F(x, y) = x^2y + \frac{y^3}{3} - 4y + e^x = 1$$



$$G(x, y, z) = (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2z^2 = 0$$

Em cada um dos casos citados no exemplo, você pode perceber que, se considerado globalmente, o conjunto definido pela correspondente equação não é o gráfico de uma função ( $y$  de  $x$ , no caso de duas variáveis,  $z$  de  $x$  e  $y$ , no caso de três variáveis). O problema está na multiplicidade da definição.

Lembre-se de que os gráficos de funções são intersectados uma única vez por retas verticais. Uma elipse, por exemplo, não é o gráfico de uma função.



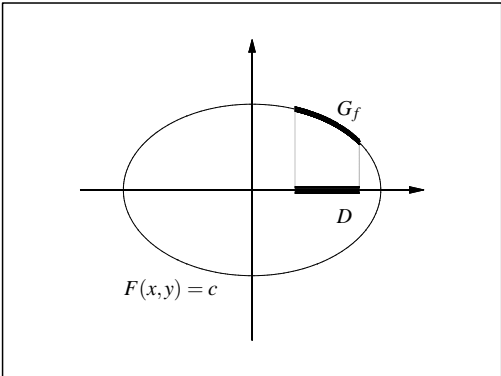
## FUNÇÕES IMPLÍCITAS

Dizemos que uma função  $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  é definida implicitamente pela equação  $F(x,y) = c$  se

$$F(x, f(x)) = c,$$

para todo  $x \in D$ .

Do ponto de vista geométrico, isso significa que um trecho do conjunto definido por  $F(x,y) = c$ , que se projeta sobre  $D$  segundo o eixo  $Oy$ , é o gráfico da função  $f$ .



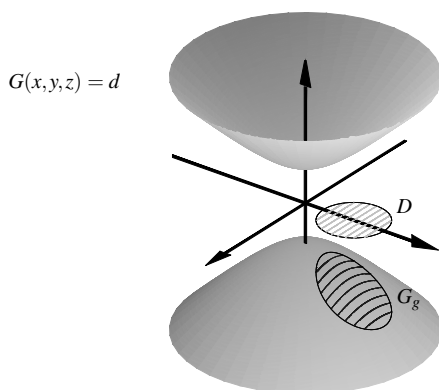


Analogamente, dizemos que a função  $g : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  é definida implicitamente pela equação  $G(x, y, z) = d$  se

$$G(x, y, g(x, y)) = d,$$

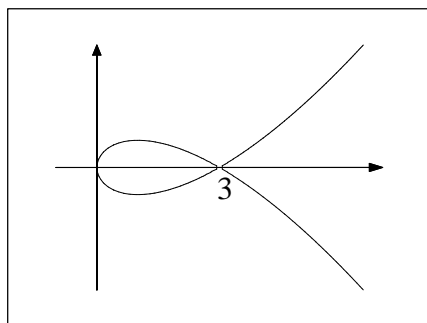
para todo  $(x, y) \in D$ .

Novamente, uma parte da superfície definida por  $G(x, y, z) = d$ , que se projeta em  $D$  segundo o eixo  $Oz$ , é o gráfico da função  $g$ .



### Exemplo 16.2.

A equação  $9y^2 = x(x-3)^2$  define uma curva no plano conhecida como Cúbica de Tschirnhaus. Veja um esboço dessa curva.



Vamos mostrar que as funções  $f, g : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ , definidas por

$$f(x) = \frac{\sqrt{x(x-3)^2}}{3} \quad \text{e}$$

Ehrenfried Walter von Tschirnhaus (1651 – 1708) foi um aristocrata que nasceu em Kieslingswalde, Saxônia (atual Alemanha), e morreu em Dresden. Mas, ao longo de sua vida, viveu em diferentes países da Europa. Estudou Matemática, Filosofia e Medicina em Leiden, na Holanda, e conviveu com vários expoentes das ciências de seu tempo, como Wallis e Collins, em Londres, e Leibniz e Huygens, em Paris. O estudo das equações de terceiro e quarto graus (as cúbicas e quárticas) era uma área de pesquisa de grande interesse na sua época. Alguns nomes que deram contribuições nesse campo são Viète, Euler e Descartes, entre outros. Em 1683, Tschirnhaus publicou o *Método para eliminar todos os termos intermediários de uma dada equação*. Apesar do exagero do título, esse trabalho foi a idéia mais importante para a solução de equações algébricas por um bom tempo. Tschirnhaus também é famoso pela descoberta do processo de produção de porcelana.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x(x-3)^2}}{3}, & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \\ -\frac{\sqrt{x(x-3)^2}}{3}, & \text{se } x > 3, \end{cases}$$

são funções definidas implicitamente por

$$F(x, y) = 9y^2 - x(x-3)^2 = 0.$$

Para fazer isso, basta constatar que as equações

$$F(x, f(x)) = 0 \quad \text{e} \quad F(x, g(x)) = 0$$

são satisfeitas para todo  $x \geq 0$ . Mas, isso é imediato, pois, se  $x \geq 0$ , então

$$9 \left( \pm \frac{\sqrt{x(x-3)^2}}{3} \right)^2 - x(x-3)^2 = x(x-3)^2 - x(x-3)^2 = 0.$$

Veja os gráficos das funções  $f$  e  $g$ :

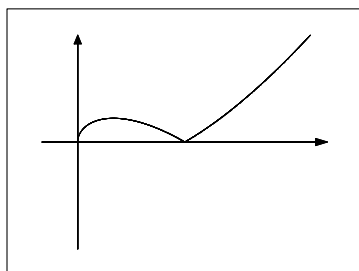


Gráfico de  $f$

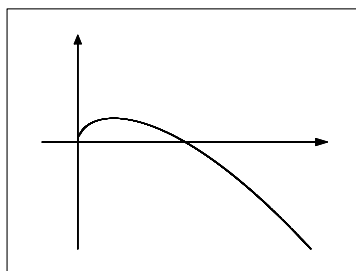


Gráfico de  $g$

### Exercício 16.1.

Considere a equação  $G(x, y, z) = xy^2 - z^2 = 0$  e as funções  $f$  e  $g$ , definidas em  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0\}$ , pelas seguintes leis de definição:

$$f(x, y) = \sqrt{xy^2} \quad \text{e} \quad g(x, y) = \begin{cases} -\sqrt{xy^2}, & \text{se } y \leq 0 \\ \sqrt{xy^2}, & \text{se } y > 0. \end{cases}$$

a. Mostre que  $f$  e  $g$  são funções definidas implicitamente por

$$G(x, y, z) = xy^2 - z^2 = 0.$$

- b. Você poderia dar mais um exemplo de uma função  $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ , também definida implicitamente por  $G(x, y, z) = 0$ ?

## A DIFERENCIABILIDADE ENTRA EM AÇÃO

Agora que você viu vários exemplos, está na hora de considerar a seguinte questão, importante do ponto de vista matemático.

Sob quais circunstâncias podemos afirmar que uma equação  $F(x, y) = 0$  (ou  $G(x, y, z) = 0$ ) define funções implicitamente?

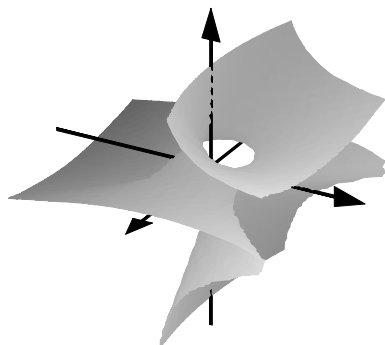
Caso a resposta dessa questão seja positiva, podemos perguntar: quais características teriam essas funções?

Essas questões são típicas de matemáticos. Veja, toda a nossa discussão, até agora, tem sido descritiva, ilustrativa, mas bem pouco precisa.

Note que, nos exemplos dados até agora, era possível “resolver” as equações para encontrar as funções definidas implicitamente por elas. No entanto, há casos em que é difícil, ou impossível, resolver a equação por algum método algébrico, seja porque a equação não é do tipo algébrico, seja por ser de grau mais alto.

### Exemplo 16.3.

Considere  $G(x, y, z) = zx^2 + y^2 - yz^3 = 6$  a equação que define o conjunto esboçado a seguir.



O ponto  $(1, 0, 6)$  satisfaz a equação e, portanto, pertence ao conjunto. Gostaríamos de saber se existe uma função  $z = g(x, y)$ , definida implicitamente em alguma vizinhança  $D$  do ponto  $(1, 0)$  em  $\mathbb{R}^2$ , tal que

$$G(x, y, g(x, y)) = 6,$$

qualquer que seja  $(x, y) \in D$ . Em particular, teríamos  $g(1, 0) = 6$ . Uma maneira de responder positivamente a essa pergunta seria resolver a equação  $zx^2 + y^2 - yz^3 = 6$  em  $z$  e exibir, explicitamente, a lei de definição da função. Isso, no entanto, é difícil (se bem que possível), pois teríamos de resolver uma equação cúbica.

Os dois teoremas que enunciaremos a seguir nos permitirão responder a questões desse tipo.

## TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA

Estamos prestes a enunciar um teorema. Isso, para nós, matemáticos, é uma coisa muito importante. Cada detalhe conta muito, ainda mais sendo um dos teoremas basilares da Matemática. Muito bem, vamos lá!

**Teorema 16.1** (Teorema da Função Implícita, caso  $F(x, y) = c$ ).

---

*Seja  $F(x, y)$  uma função de classe  $C^1$ , definida em um subconjunto aberto  $A$  de  $\mathbb{R}^2$ , e seja  $(a, b) \in A$ , tal que  $F(a, b) = c$ . Se  $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$ , então existem intervalos  $I$  ( $a \in I$ ) e  $J$  ( $b \in J$ ), com  $I \times J \subset A$ , e uma função  $f : I \rightarrow J$ , diferenciável, tal que*

$$F(x, f(x)) = c,$$

*qualquer que seja  $x \in I$ . Além disso,*

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}.$$

Veja como podemos usar o teorema no exemplo a seguir.

**Exemplo 16.4.**

Vamos mostrar que a equação  $x^2 + xy + y^2 + \sin(x^2 - 2y) = 12$  define uma função  $y = f(x)$  em alguma vizinhança do ponto  $(2, 2)$ .

Para isso, vamos colocar

$$F(x, y) = x^2 + xy + y^2 + \sin(x^2 - 2y),$$

que é uma função de classe  $C^1$ , e calcular  $\frac{\partial F}{\partial y}(2, 2)$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= 2y + x - 2 \cos(x^2 - 2y); \\ \frac{\partial F}{\partial y}(2, 2) &= 4.\end{aligned}$$

Como  $\frac{\partial F}{\partial y}(2, 2) = 4 \neq 0$ , o Teorema da Função Implícita nos garante a existência de intervalos  $I$  e  $J$ , tais que  $2 \in I$  e  $2 \in J$ , e uma função diferenciável  $f: I \rightarrow J$ , tal que

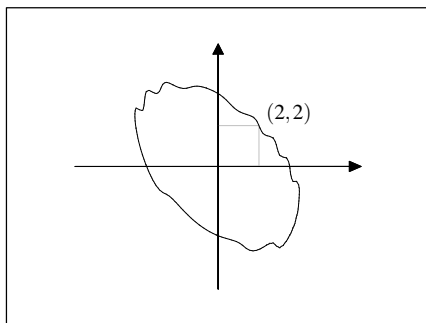
$$x^2 + xf(x) + (f(x))^2 + \sin(x^2 - 2f(x)) = 12$$

para todo  $x \in I$ . Além disso, podemos expressar a derivada de  $f$  em termos de  $x$  e de  $y$ :

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)} = -\frac{y + 2x(1 + \cos(x^2 - 2y))}{2y + x - 2 \cos(x^2 - 2y)},$$

para todo  $x \in I$ .

Veja o esboço do conjunto definido por  $F(x, y) = 12$ .



Podemos ver, na figura, que em torno do ponto  $(2,2)$  este conjunto é o gráfico de uma função  $y$  de  $x$ .

Uma observação antes de prosseguirmos. O teorema garante a existência do intervalo  $I$ , o domínio da função definida implicitamente  $f$ , caso suas hipóteses sejam satisfeitas, mas não nos oferece qualquer estimativa de seu comprimento. Nesse exemplo, podemos perceber que esse domínio não pode ser muito grande.

Está na hora de você se exercitar!

### Exercício 16.2.

Enuncie uma versão do teorema colocando condições para que a equação  $F(x,y) = c$  defina implicitamente uma função  $x = h(y)$ . Use essa versão do teorema para mostrar que

$$x^4 + xy + y^2 = 16$$

define  $x$  como uma função de  $y$  em alguma vizinhança do ponto  $(2,0)$ . Expresse a derivada dessa função em termos de  $x$  e de  $y$ .

Veja, agora, uma versão do teorema que envolve três variáveis.

**Teorema 16.2** (da função implícita, caso  $G(x,y,z) = d$ ).

---

*Seja  $G(x,y,z)$  uma função de classe  $C^1$ , definida em um subconjunto aberto  $B$  de  $\mathbb{R}^3$ , e seja  $(a,b,c) \in B$  tal que  $G(a,b,c) = d$ . Se  $\frac{\partial G}{\partial z}(a,b,c) \neq 0$ , então existe um aberto  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  tal que  $(a,b) \in D$ , e um intervalo  $J$  tal que  $c \in J$ , com*

$D \times J \subset B$ , e uma função  $g : A \longrightarrow J$ , diferenciável, tal que

$$G(x, y, g(x, y)) = d,$$

qualquer que seja  $(x, y) \in D$ . Além disso,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial G}{\partial z}(x, y, g(x, y))} \text{ e } \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial y}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial G}{\partial z}(x, y, g(x, y))},$$

para todo  $(x, y) \in D$ .

### Revisitando Exemplo 16.3

Vamos usar o Teorema da Função Implícita para mostrar que

$$G(x, y, z) = zx^2 + y^2 - yz^3 = 6$$

define uma função  $z = g(x, y)$ , implicitamente, em alguma vizinhança  $D$  do ponto  $(1, 0)$  em  $\mathbb{R}^2$ , tal que  $G(x, y, g(x, y)) = 6$ , qualquer que seja  $(x, y) \in D$ . Como a função  $G(x, y, z) = zx^2 + y^2 - yz^3$  é de classe  $C^1$ , basta calcularmos  $\frac{\partial G}{\partial z}(1, 0, 6)$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial z}(x, y, z) &= x^2 - 3yz^2, \\ \frac{\partial G}{\partial z}(1, 0, 6) &= 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Assim, as hipóteses do teorema são satisfeitas e a existência da função  $g$  está garantida. Além disso, vamos, por exemplo, calcular o seu gradiente. Para isso, precisamos de  $\frac{\partial g}{\partial x}$  e  $\frac{\partial g}{\partial y}$ . Assim, temos de usar as fórmulas apresentadas no enunciado do teorema. Veja:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial z}} = -\frac{2xz}{x^2 - 3yz^2};$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial G}{\partial z}} = -\frac{2y - z^3}{x^2 - 3yz^2}.$$

Portanto, o gradiente da função  $g$  pode ser expresso em termos das variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$ :

$$\nabla g(x, y) = \left( \frac{2xz}{x^2 - 3yz^2}, \frac{2y - z^3}{x^2 - 3yz^2} \right).$$

## COMENTÁRIOS FINAIS

Nesta aula, você aprendeu a usar as derivadas parciais de  $F(x, y)$  para expressar a derivada da função  $y$  de  $x$ , definida implicitamente por  $F(x, y) = c$ , em torno de algum ponto  $(a, b)$ , desde que  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$ .

Essa é uma maneira alternativa àquela que você aprendeu no Cálculo I.

### Revisitando Exemplo 16.4

Admitindo que a equação  $x^2 + xy + y^2 + \sin(x^2 - 2y) = 12$  define uma função  $y = f(x)$  em alguma vizinhança do ponto  $(2, 2)$ , vamos usar a Regra da Cadeia das funções de uma variável para calcular  $\frac{dy}{dx}$ .

Basta derivar a equação *implicitamente*:

$$2x + y + x \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} + (\cos(x^2 - 2y)) \left( 2x - 2 \frac{dy}{dx} \right) = 0.$$

Resolvendo essa equação em  $\frac{dy}{dx}$ , obtemos

$$\left( x + 2y - 2 \cos(x^2 - 2y) \right) \frac{dy}{dx} + 2x + y + 2x \cos(x^2 - 2y) = 0$$



$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x(1 + \cos(x^2 - 2y)) + y}{x + 2y - 2 \cos(x^2 - 2y)}.$$

Apesar de mencionar Teorema da Função Implícita, apresentamos duas “versões”, uma no caso  $F(x, y) = c$  e outra no caso  $G(x, y, z) = d$ . Na verdade, é possível apresentar uma única formulação do teorema, que engloba as duas versões aqui apresentadas. Voltaremos a isso no futuro.

Nessa formulação geral, esse teorema costuma ser demonstrado nos cursos de análise ao lado da apresentação do chamado Teorema da Função Inversa. É possível apresentar uma argumentação para demonstrar essas formulações do Teorema da Função Implícita que apresentamos aqui, mas optamos por não fazê-lo, dando espaço para um número maior de exemplos, especialmente com suas apresentações geométricas. Se você estiver interessado, poderá consultar os exemplos 7, 8 e 9, da seção 27.2 do livro *Um Curso de Cálculo*, Volume 2, de Hamilton Luiz Guidorizzi.

Como as funções  $F(x, y)$  e  $G(x, y, z)$  são de classe  $C^1$ , suas derivadas parciais são contínuas. Assim, a hipótese  $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$ , por exemplo, garante que  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0$  para  $(x, y)$  suficientemente próximos de  $(a, b)$ . Isso permite, por exemplo, estabelecer

$$\frac{df}{dx}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)}.$$

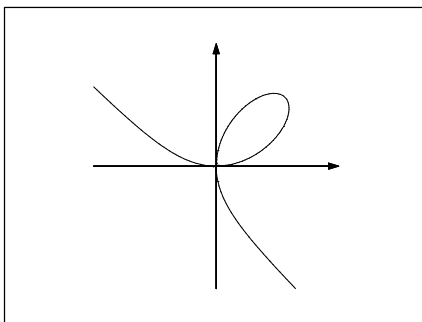
Puxa! isso foi mais comentário do que você esperava, não é? Bem, então, aos exercícios!

### Exercício 16.3.

1. Verifique as hipóteses do Teorema da Função Implícita no ponto  $(1, 1)$ , mostrando que a equação  $\ln(xy) - 2xy + 2 = 0$  define uma função  $y = f(x)$  implicitamente, e calcule  $f'(x)$ .
2. Verifique que os pontos  $(1, 1)$  e  $(0, 0)$  satisfazem a equação  $(x - 2)^3 y + x e^{y-1} = 0$ . Em torno de qual deles a equação define  $y$  como função diferenciável de  $x$ ? Além disso, o

que você pode dizer caso consideremos  $x$  uma função de  $y$ ?

3. A equação  $2x^3 + 2y^3 - 9xy = 0$  define uma curva algébrica chamada *Folium de Descartes*. Veja um esboço.



Mostre que essa equação define implicitamente uma função diferenciável  $y = f(x)$  em torno do ponto  $(1, 2)$ .

Determine o maior intervalo  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  tal que  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $f(1) = 2$ , é diferenciável e definida implicitamente pela equação  $2x^3 + 2y^3 - 9xy = 0$ .

4. Verifique as hipóteses do Teorema da Função Implícita no ponto  $(2, -3, -1)$  e calcule  $\frac{\partial z}{\partial x}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y}$  para  $2x^2 + 4y^2 + z^2 = 45$ .
5. Mostre que a equação  $\sin(xy) + \sin(yz) + \sin(xz) = 1$  define uma função  $z = g(x, y)$  implicitamente em torno do ponto  $(1, \pi/2, 0)$  e calcule o gradiente  $\nabla g$  dessa função.
6. Calcule  $\nabla f$ , o gradiente da função  $z = f(x, y)$ , definida implicitamente pela equação a seguir.
- $\ln(x^2 + y^2 + 1) + e^{xz} = 1$ ;
  - $xz^2 - 3yz + \cos(x + y + z) = 0$ .
7. Suponha que o ponto  $(3, b, c)$  seja solução da equação

$$z^3 - xz - y^2 = 1.$$

Determine condições sobre  $b$  e  $c$  para que a equação defina  $z$  como função de  $x$  e de  $y$  em torno do ponto dado.

# Aula 17



## O GRADIENTE E A DERIVADA DIRECIONAL

---

### Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 calcular derivadas direcionais;
- 2 interpretar geometricamente o gradiente de uma função.

## INTRODUÇÃO

As funções reais, de várias variáveis, são próprias para descrever determinadas características de certos meios. Você já viu, por exemplo, que uma função de duas variáveis  $z = T(x, y)$  pode descrever a distribuição de temperatura de uma chapa de metal. Nesse caso, as curvas de nível são chamadas isotérmicas.

Podemos usar uma função  $w = \delta(x, y, z)$  para descrever a distribuição da massa de um certo corpo. Se a função for constante, por exemplo, dizemos que o corpo é homogêneo. Podemos chamar  $\delta$  de *densidade de massa*.

Veja, essas características descritas nos exemplos são grandezas escalares que podem mudar de ponto para ponto.

Por essa razão, também chamamos essas funções de *campos escalares*.

Nesse contexto, os conjuntos de nível são as regiões do ambiente onde a condição descrita pelo campo escalar, seja temperatura, seja densidade ou outra qualquer, não se altera.

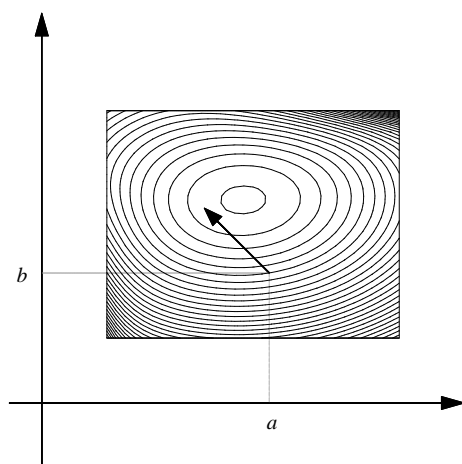
Além disso, conhecemos a interpretação da derivada de uma função real, de uma variável real, como uma taxa de variação. Por exemplo, se  $x = x(t)$  descreve a posição de uma partícula numa trajetória reta, então  $v = x'(t)$  é a função velocidade, que descreve, em cada instante, como a posição da partícula está mudando.

Um dos temas desta aula é a derivada direcional, uma ferramenta que permite medir essa variação instantânea, no caso dos campos escalares. O problema é que, no caso de campos escalares planares (funções de duas variáveis) e no espaço tridimensional, não temos uma direção predeterminada, como é o caso nas funções de uma variável real. Na verdade, no caso das funções de uma variável real, temos duas direções: da esquerda para a direita e vice-versa. No entanto, é conveniente considerar apenas a direção *positiva*, da esquerda para a direita. Assim, precisaremos escolher uma determinada direção para fazer a derivação no caso dos campos escalares.

Por exemplo, se estamos lidando com uma função que descreve a temperatura de uma certa chapa, usamos a derivada direcional para descobrir se a temperatura aumentará ou não, no

Atenção: a palavra *direção* está sendo usada com significado de direção e sentido, como nas grandezas vetoriais.

caso de, a partir de um ponto  $(a, b)$ , haver um deslocamento, digamos, na direção noroeste.



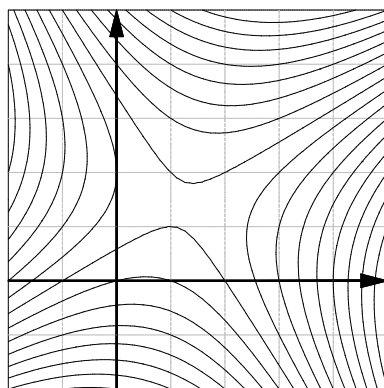
**Figura 17.1.**

Uma vez estabelecida a derivada direcional, ela será usada para interpretarmos geometricamente o gradiente.

Antes de prosseguirmos, tente executar a atividade oferecida a seguir. Ela o ajudará a perceber o sentido das definições que seguirão.

### Exercício 17.1.

Seja  $T(x, y) = 20 + x^2 - 2xy - y^2 + 4y - x$  a função que descreve a temperatura de uma chapa que se encontra sobre um sistema de coordenadas com  $x$  e  $y \in [-2, 5]$ . Veja um esboço de suas isotérmicas.



**Figura 17.2.**

- a. Calcule o gradiente  $\nabla T(x,y)$  e desenhe sobre a **Figura 17.2.** os vetores  $\nabla T(a,b)$ , com origem no ponto  $(a,b)$ , nos seguintes casos:  $(-1,-1)$ ,  $(-1,2)$ ,  $(2,4)$ ,  $(3,1)$  e  $(4,-1)$ .

- b. Considere  $\alpha(t) = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$  uma função cuja imagem está contida na chapa, para valores suficientemente pequenos de  $t$ .

Podemos interpretar

$$f(t) = T \circ \alpha(t)$$

como a função que descreve a temperatura experimentada por uma partícula que percorre o caminho  $\alpha$ .

Mostre que

$$f'(0) = \nabla T(1,1) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Você gostaria de se arriscar a dizer o que esse número mede?

## DERIVADA DIRECIONAL

Vamos definir a derivada direcional de uma função de duas variáveis, por uma questão de comodidade, mas essa definição se estende, de maneira natural, acrescentando mais coordenadas, para as funções de mais do que duas variáveis.

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função, onde  $D \subset \mathbb{R}^2$  é um aberto, tal que  $(a,b) \in D$ . Seja  $\vec{u}$  um vetor unitário (isto é,  $\|\vec{u}\| = 1$ ).

A equação

$$\alpha(t) = (a,b) + t\vec{u}$$

define uma reta paralela ao vetor  $\vec{u}$ , tal que  $\alpha(0) = (a,b)$  e, para valores suficientemente pequenos de  $t$ ,  $\alpha(t) \in D$ .

Veja uma ilustração na **Figura 17.3.** a seguir.

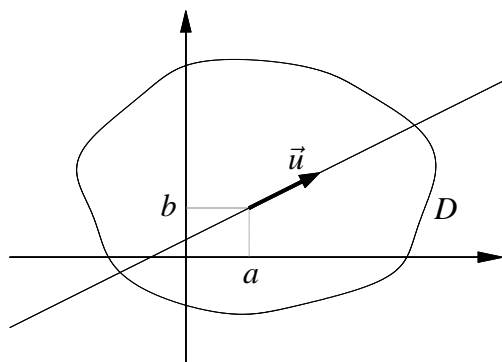


Figura 17.3.

Se existir o

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\alpha(t)) - f(a, b)}{t},$$

ele será denotado por  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b)$  e chamado derivada direcional de  $f$  no ponto  $(a, b)$ , na direção do vetor (unitário)  $\vec{u}$ .

Se  $\vec{u} = (u_1, u_2)$ , com  $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1$ , então

$$\alpha(t) = (a + t u_1, b + t u_2)$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t u_1, b + t u_2) - f(a, b)}{t}.$$

**Exemplo 17.1.**

Vamos considerar  $f(x, y) = x^2 + y^2$  e calcular as derivadas direcionais de  $f$  no ponto  $(1, 1)$ , nas seguintes direções:  $\vec{u} = (3/5, 4/5)$ ,  $\vec{v} = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ ,  $\vec{w} = (0, -1)$ .

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+3t/5, 1+4t/5) - f(1,1)}{t} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{3t}{5}\right)^2 + \left(1 + \frac{4t}{5}\right)^2 - 2}{t} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{6t}{5} + \frac{9t^2}{25} + 1 + \frac{8t}{5} + \frac{16t^2}{25} - 2}{t} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{14t}{5} + t^2}{t} = \frac{14}{5};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1 - \sqrt{2}t/2, 1 + \sqrt{2}t/2) - f(1,1)}{t} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{\sqrt{2}t}{2}\right)^2 + \left(1 + \frac{\sqrt{2}t}{2}\right)^2 - 2}{t} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2}t + \frac{t^2}{2} + 1 + \sqrt{2}t + \frac{t^2}{2} - 2}{t} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t} = 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(1,1) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1, 1-t) - f(1,1)}{t} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + (1-t)^2 - 2}{t} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 - 2t + t^2 - 2}{t} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2t + t^2}{t} = -2.
 \end{aligned}$$

Note que  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1) = \frac{14}{5} > 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1) = 0$  e  $\frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(1,1) = -2 < 0$ . Ou seja, na direção  $\vec{u}$ , a função  $f$  cresce, enquanto na direção  $\vec{w}$ , decresce. Além disso, a derivada direci-



onal nula indica que aquela direção é tangente a um conjunto de nível da função.

Veja, na figura a seguir, as curvas de nível da função  $f$  e os vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ .

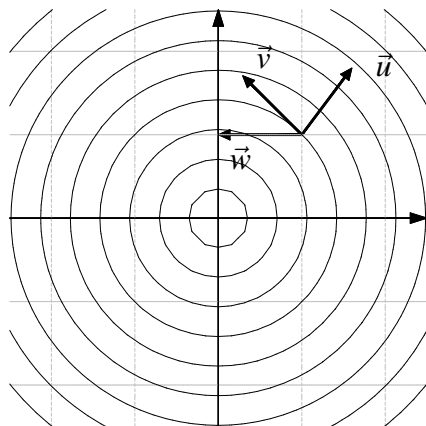


Figura 17.4.

## AS DERIVADAS DIRECIONAIS E AS DERIVADAS PARCIAIS

Observe que, se  $\vec{e}_1 = (1, 0)$  e  $\vec{e}_2 = (0, 1)$ , então  $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_1}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$  e  $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_2}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ . Isto é, as derivadas parciais de  $f$ , definidas anteriormente, são casos particulares de derivadas direcionais, tomadas nas direções dos vetores da base canônica.

Por exemplo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_1}(a, b) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((a, b) + t(1, 0)) - f(a, b)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t, b) - f(a, b)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b). \end{aligned}$$


Aqui está uma oportunidade para você manipular essa fórmula.

**Exercício 17.2.**

Seja  $f$  uma função que admite a derivada direcional no ponto  $(a, b)$ , na direção do vetor unitário  $\vec{u}$ . Mostre que

$$\frac{\partial f}{\partial(-\vec{u})}(a, b) = -\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b).$$

Isto é, a derivada direcional muda de sinal quando invertemos a direção do vetor.

 Use a definição de  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b)$  e substitua  $t$  por  $-h$ .

Muito bem; antes de prosseguirmos, aqui está uma pergunta para você ir pensando: há alguma relação entre a existência das derivadas direcionais e a diferenciabilidade da função?

Em outras palavras, se uma função for diferenciável ela admitirá derivadas direcionais em todas as direções? Pode fazer suas apostas!

Mas poderá existir uma função que admita todas as derivadas direcionais, num dado ponto, e ainda assim não ser diferenciável nesse ponto? Pelo tom da pergunta, você deve achar que a resposta deve ser sim, não é? Veremos.

Vamos considerar, agora, o caso em que  $f$  é diferenciável.

**A DERIVADA DIRECIONAL E O GRADIENTE**

A seguir enunciaremos o teorema que relaciona o gradiente à derivada direcional, no caso das funções diferenciáveis. Esse teorema nos dará uma fórmula para calcular, de maneira simples, as derivadas direcionais.

**Teorema 17.1.**

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em  $(a, b) \in D$ , um aberto de  $\mathbb{R}^2$ , e seja  $\vec{u}$  um vetor unitário. Então,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b) = \nabla f(a, b) \cdot \vec{u}.$$

Isto é, se  $f$  for diferenciável, podemos calcular as derivadas direcionais simplesmente fazendo o produto interno do vetor gradiente pelo vetor unitário que indica a direção indicada.

Além disso, o teorema nos diz que, se  $f$  for diferenciável, então ela admite derivada direcional  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}$  para todo vetor unitário  $\vec{u}$ .

### **Demonstração**

Basta observar que  $\alpha(t) = (a, b) + t\vec{u}$  e

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\alpha(t)) - f(\alpha(0))}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f \circ \alpha(t) - f \circ \alpha(0)}{t} = (f \circ \alpha)'(0).\end{aligned}$$

Agora, usando a Regra da Cadeia, uma vez que  $\alpha(0) = (a, b)$  e  $f$  é diferenciável em  $(a, b)$ , temos

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b) = (f \circ \alpha)'(0) = \nabla f(\alpha(0)) \cdot \alpha'(0) = \nabla f(a, b) \cdot \vec{u}.$$

---

CQD

### **Revisitando Exemplo 17.1.**

Vamos calcular as derivadas direcionais de  $f(x, y) = x^2 + y^2$  no ponto  $(1, 1)$ , nas direções:  $\vec{u} = (3/5, 4/5)$ ,  $\vec{v} = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ ,  $\vec{w} = (0, -1)$ , usando a fórmula dada no teorema.

Como  $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$ ,  $\nabla f(1, 1) = (2, 2)$  e

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1) = (2, 2) \cdot \vec{u} = (2, 2) \cdot (3/5, 4/5) = \frac{6}{5} + \frac{8}{5} = \frac{14}{5};$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1, 1) &= (2, 2) \cdot \vec{v} = (2, 2) \cdot (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) \\ &= -\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0;\end{aligned}$$

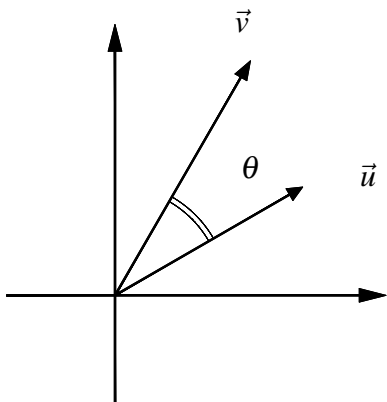
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(1,1) = (2,2) \cdot \vec{w} = (2,2) \cdot (0,-1) = 0 - 2 = -2.$$

## O GRADIENTE COMO O INDICADOR DA DIREÇÃO DE MAIOR CRESCIMENTO

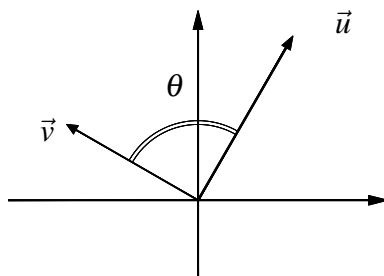
Vamos lembrar que o produto interno de dois vetores não-nulos pode ser expresso da seguinte maneira:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta,$$

onde  $\theta$  é o ângulo (menor do que  $180^\circ$ ) formado pelos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Veja, nas figuras a seguir, duas possibilidades.



**Figura 17.5.**



**Figura 17.6.**

Usando essa fórmula para o produto interno de dois vetores e o fato de  $\vec{u}$  ser um vetor unitário, se  $f$  for uma função diferenciável em  $(a,b)$  e  $\nabla f(a,b) \neq \vec{0}$ ,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a,b) = \|\nabla f(a,b)\| \cos \theta,}$$

onde  $\theta$  é o ângulo formado pelos vetores  $\nabla f(a,b)$  e  $\vec{u}$ .

Essa fórmula nos permite interpretar o gradiente como o vetor que aponta na direção de maior crescimento da função  $f$ , no ponto  $(a,b)$ .

**Teorema 17.2.**

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em  $(a, b) \in D$ , um aberto de  $\mathbb{R}^2$ , tal que  $\nabla f(a, b) \neq \vec{0}$ . O valor máximo de  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b)$  ocorre quando  $\vec{u} = \frac{\nabla f(a, b)}{\|\nabla f(a, b)\|}$ . Além disso, esse valor máximo é  $\|\nabla f(a, b)\|$ .

Em outras palavras, a maior taxa de variação da função  $f$ , num dado ponto, ocorre na direção indicada pelo gradiente da função nesse ponto e esse valor máximo é a norma do gradiente.

**Demonstração**

Como  $f$  é diferenciável e  $\nabla f(a, b) \neq \vec{0}$ , sabemos que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b) = \|\nabla f(a, b)\| \cos \theta.$$

Ora,  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b)$  depende de  $\theta$ , o ângulo que o vetor unitário  $\vec{u}$  faz com o vetor gradiente  $\nabla f(a, b)$ . O maior desses valores ocorre se  $\cos \theta = 1$ . Isso significa que  $\vec{u}$  é o vetor unitário de mesma direção (e sentido) que  $\nabla f(a, b)$ . Esse vetor é

$$\vec{u} = \frac{\nabla f(a, b)}{\|\nabla f(a, b)\|}.$$

Além disso, se  $\cos \theta = 1$ , então

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b) = \|\nabla f(a, b)\|.$$

---

CQD

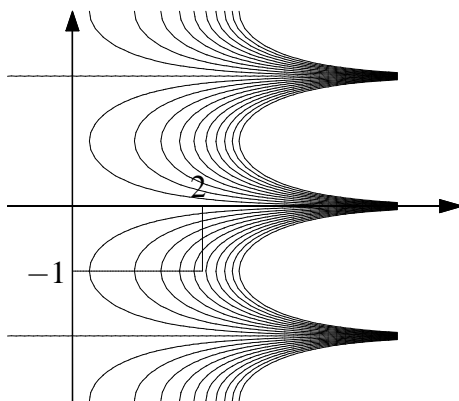
É conveniente chamar *versor* do vetor não-nulo  $\vec{v}$  ao único vetor unitário que tem a mesma direção (e sentido) que  $\vec{v}$ . Ou seja, o versor do vetor não nulo  $\vec{v}$  é o vetor unitário  $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ .

Com essa terminologia, o versor do vetor gradiente indica a direção de maior crescimento da função, a partir de um dado ponto.

**Exemplo 17.2.**

Seja  $f(x, y) = e^x \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)$  uma função cujas curvas de nível estão esboçadas na figura a seguir.

Apenas com essa informação visual, não é possível saber muito sobre a dinâmica de crescimento e decrescimento da função, na medida em que variamos os valores de  $x$  e de  $y$ , digamos, a partir de  $(2, -1)$ .



**Figura 17.7.**

No entanto, se acrescentarmos o gradiente, podemos perceber mais coisas a respeito do comportamento da função  $f$ . Veja:

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= \left( e^x \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right), \frac{\pi}{2} e^x \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) \right); \\ \nabla f(2, -1) &= (-e^2, 0).\end{aligned}$$

O versor de  $\nabla f(2, -1) = (-e^2, 0)$  é o vetor unitário  $(-1, 0)$ . Portanto, a direção *oeste* é a direção de maior crescimento de  $f$ , a partir do ponto  $(2, -1)$ . Além disso,  $\|(-e^2, 0)\| = e^2$  é a maior taxa de variação de  $f$ , a partir de  $(2, -1)$ .

Veja, nas figuras a seguir, as curvas de níveis de  $f$  acompanhadas dos versores dos vetores gradientes de  $f$  nos pontos  $(2, -3)$ ,  $(2, -1)$ ,  $(2, 1)$  e  $(2, 3)$ , assim como o esboço gráfico da função  $f$ . Esses vetores indicam a direção de maior crescimento da função.

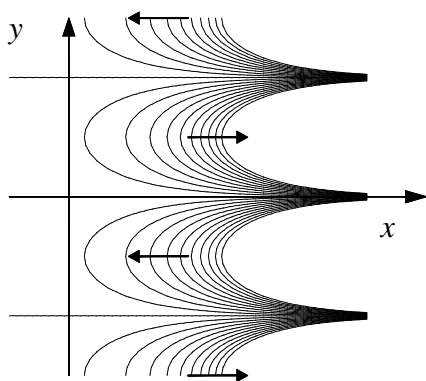


Figura 17.8.

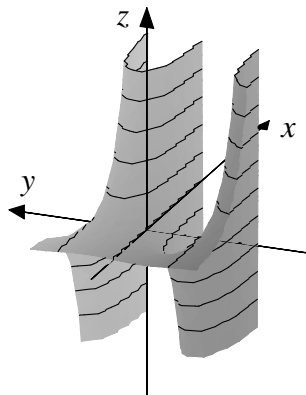


Figura 17.9.

O esboço do gráfico da função  $f$  está numa posição reversa para uma melhor observação.

### Exercício 17.3.

As curvas de nível das funções  $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$  e  $g(x,y) = 1 - x^2 - y^2$  são círculos concêntricos na origem. No entanto, cada uma dessas funções tem uma dinâmica de crescimento diferente. Faça um esboço das curvas de nível (um para cada função) e marque os versores dos vetores gradientes dos pontos  $(1,1)$ ,  $(2,-2)$  e  $(-2,1)$ . Faça um esboço do gráfico de cada uma das funções. Compare a dinâmica de crescimento indicado pelos vetores marcados, tendo em vista os esboços dos gráficos.

Vamos terminar a aula com um exemplo em que o domínio do campo escalar é  $\mathbb{R}^3$ .

### Exemplo 17.3.

Seja  $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z$ .

Vamos calcular:

- $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2,2,1)$ , onde  $\vec{u}$  é o versor do vetor  $\vec{v} = (3,4,12)$ ;
- a direção de *menor* crescimento de  $f$  a partir do ponto  $(2,2,1)$  e a derivada de  $f$  nesta direção.

**Solução:**

- a. Começamos calculando o versor do vetor  $\vec{v}$ :

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{(3, 4, 12)}{\sqrt{9+16+144}} = \left(\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13}\right).$$

Como  $f$  é uma função diferenciável, vamos calcular  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2, 2, 1)$  usando a fórmula

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b, c) = \nabla f(a, b, c) \cdot \vec{u}.$$

Antes de mais nada, vamos calcular o gradiente da função  $f$ :

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)) = \\ &= (2x, -2y, 1); \\ \nabla f(2, 2, 1) &= (4, -4, 1).\end{aligned}$$

Podemos, agora, calcular a derivada de  $f$  no ponto  $(2, 2, 1)$  na direção do vetor unitário  $\vec{u}$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2, 2, 1) &= (4, -4, 1) \cdot \left(\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13}\right) = \\ &= \frac{12}{13} - \frac{16}{13} + \frac{12}{13} = \frac{8}{13}.\end{aligned}$$

- b. A direção de *menor* crescimento da função é oposta à direção de *maior* crescimento da função. Portanto, a resposta a esta questão é o versor de  $-\nabla f(2, 2, 1)$ . Ou seja, o vetor unitário  $\frac{\sqrt{33}}{33}(-4, 4, -1)$  aponta para onde a função apresenta o seu *menor* crescimento. A sua derivada nesse ponto, nessa direção, é  $-\sqrt{33}$ .

**Exercício 17.4.**

1. Calcule a derivada direcional da função dada, no ponto indicado, segundo a direção do versor  $\vec{u}$  do vetor  $\vec{v}$ . Isto é,
- $$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}.$$

a.  $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2; \quad (a, b) = (1, -1); \quad \vec{v} = (3, -4).$



- b.  $f(x, y) = \sin 2x \cos 2y$ ;  $(a, b) = (\pi/6, -5\pi/6)$ ;  $\vec{v} = (1, -1)$ .
- c.  $f(x, y, z) = e^{x+y} \cos z + e^{z-x} \sin y$ ;  $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ ;  $\vec{v} = (1, -1, 2)$ .
- d.  $f(x, y, z) = \ln(1 + x^2 - y^2 + z^2)$ ;  $(a, b, c) = (-1, 1, 1)$ ;  $\vec{v} = (1, 2, -5)$ .
2. Encontre a direção de maior crescimento da função, a partir do ponto indicado. Além disso, determine a derivada da função nessa direção.
- a.  $f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$ ;  $(a, b) = (1, -2)$ .
- b.  $f(x, y) = xe^y - ye^{2x}$ ;  $(a, b) = (0, 0)$ .
- c.  $f(x, y, z) = \ln(xy) - 3 \ln(xz) + \ln(yz)$ ;  $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ .
3. Encontre a direção de maior decrescimento da função a partir do ponto indicado. Além disso, determine a derivada da função nessa direção.
- a.  $f(x, y) = xy^2 - e^y \cos x$ ;  $(a, b) = (0, 1)$ .
- b.  $f(x, y) = x^2 - y^2 + 4 \operatorname{arctg}(xy)$ ;  $(a, b) = (1, 1)$ .
- c.  $f(x, y, z) = xyz - x^2 + y^2 - z^2$ ;  $(a, b, c) = (1, 1, -1)$ .
4. A temperatura do ar em pontos do espaço é dada pela função  $f(x, y, z) = 28 + x^2 - y^2 + z^2$ . Uma abelhinha se encontra na posição  $(1, 2, 1)$  e deseja esfriar-se o mais rápido possível. Em que direção ela deve voar?
5. Em que direção deve-se seguir, partindo da origem, para obter a menor taxa de crescimento da função  $f(x, y, z) = (1 - x + y - z)^2$ ?
6. Seja  $u = (\cos \theta, \sin \theta)$  um vetor unitário. Calcule  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0)$  para a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

7. Calcule a derivada direcional da função  $f(x, y) = x^2 - y^2$  na direção tangente à curva  $\alpha(t) = (2 \cos t, \sin t)$ , quando  $t = \pi/4$ , no ponto  $\alpha(\pi/4)$ .
8. A temperatura de uma chapa de metal é dada por  $T(x, y) = e^{x/2} \cos(\pi y/3)$ . A partir do ponto  $(0, 1)$ , determine:
  - a. o gradiente da temperatura;
  - b. a direção em que a temperatura cresce o mais rápido possível, assim como essa taxa;
  - c. a direção em que a temperatura decresce o mais rápido possível, assim como essa taxa;
  - d. a direção em que a temperatura não varia;
  - e. a taxa de variação  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 1)$ , onde  $\vec{u}$  faz um ângulo de  $60^\circ$  com o eixo  $Ox$ .
9. Seja  $f(x, y, z) = x \sqrt{y^2 + z^2}$ . Prove que  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0, 0) = 0$  para todos os vetores unitários  $\vec{u}$ .
10. Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  um campo escalar diferenciável tal que, para um dado vetor unitário  $\vec{u}$ , temos  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y) = 0$ , para todos os pontos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . O que podemos concluir a respeito de  $f$ ?

# Aula 18



## EXEMPLOS E COMPLEMENTOS

---

### Objetivo

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 conhecer a versão do Teorema do Valor Médio para as derivadas direcionais;
- 2 usar o gradiente para calcular o plano tangente a uma superfície num dado ponto.

## APRESENTAÇÃO

Esta aula consiste de uma coleção de seções independentes que completam alguns temas que foram abordados nas aulas anteriores. Portanto, prepare-se para súbitas mudanças de assunto.

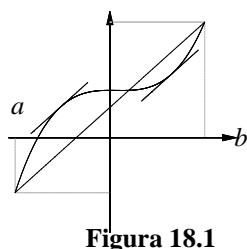
Algumas dessas seções consistem de exemplos que ilustram a Teoria das Funções Diferenciáveis. Um desses exemplos já foi prometido anteriormente.

Você conhecerá, também, uma versão do Teorema do Valor Médio, adaptado às funções de duas variáveis, usando derivadas direcionais. Veja, a seguir, a versão que você já conhece.

### **Teorema 18.1** (Teorema do Valor Médio).

Seja  $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Se  $f$  é diferenciável no intervalo aberto  $(a, b)$ , então existe um número  $\xi \in (a, b)$ , tal que

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



**Figura 18.1**

Nesta ilustração, há dois possíveis valores para  $\xi$ .

O último tema da aula reforçará um tópico apresentado anteriormente: a ortogonalidade do vetor gradiente de uma função em relação ao seu conjunto de nível.

Começemos com os exemplos!

## EXEMPLO DE FUNÇÃO DIFERENCIÁVEL QUE NÃO É DE CLASSE $C^1$

Os exemplos desempenham papel fundamental na Matemática. Há um ditado que soa, em certos contextos, um pouco antipático, mas carrega muita verdade: *quem sabe sabe dar exemplos!*

Podemos dizer que há, basicamente, dois tipos de exemplos. Existem aqueles que caem, com folga, na regularidade das teorias, que são a maioria dos exemplos com os quais lidamos. O exemplo que você conhecerá nesta seção pertence mais à outra categoria de exemplos, que são aqueles que nos ajudam a determinar as fronteiras das teorias. Em geral, eles respondem negativamente a perguntas como: toda função diferenciável é de

classe  $C^1$ ? É por isso que, às vezes, tais exemplos são chamados contra-exemplos.

Lembre-se: uma função  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida num aberto  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ , é dita de classe  $C^1$  se admitir derivadas parciais contínuas em  $D$ . Isto é, ser de classe  $C^1$  é uma condição suficiente para que uma função seja diferenciável. O exemplo desta seção mostra que essa condição suficiente não é necessária.

Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0); \\ (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right), & \text{se } (x, y) \neq (0, 0). \end{cases}$$

Você pode notar:  $f$  é de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2 - \{ (0, 0) \}$ . Realmente, se  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \\ 2x \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right) + (x^2 + y^2) \cos \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right) \cdot \left[ \frac{-2x}{(x^2 + y^2)^2} \right] &= \\ = 2x \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right) - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right). \end{aligned}$$

Analogamente, se  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right) - \frac{2y}{x^2 + y^2} \cos \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right).$$

Assim, para  $(x, y) \neq (0, 0)$ , as funções  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  são contínuas, por serem somas e/ou composições de funções contínuas. Logo, fica estabelecida a diferenciabilidade de  $f$  no conjunto  $\mathbb{R}^2 - \{ (0, 0) \}$ .

Vamos, agora, analisar a diferenciabilidade de  $f$  na origem. Começamos com o cálculo das derivadas parciais de  $f$  na ori-

gem.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0,\end{aligned}$$

pois  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$  e  $g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)$  é uma função limitada.

$$\text{Analogamente, } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Veremos, agora, que  $f$  é diferenciável na origem. Temos de mostrar que o limite de

$$\frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}},$$

com  $(h,k) \rightarrow (0,0)$ , é nulo.

Se  $(h,k) \neq (0,0)$ ,  $f(h,k) = (h^2+k^2) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right)$  e  $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ . Então,

$$\begin{aligned}\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{(h^2+k^2) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \\ &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \sqrt{h^2+k^2} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right) \\ &= 0,\end{aligned}$$

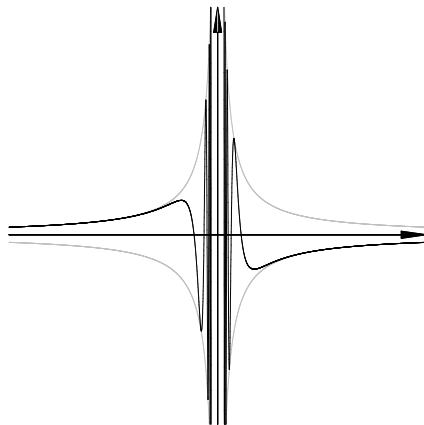
pois  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \sqrt{h^2+k^2}$  é igual a zero e  $g(h,k) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right)$  é uma função limitada.

Ufa! Veja em que pé estamos:  $f$  é uma função diferenciável em  $\mathbb{R} - \{(0,0)\}$ , pois é de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R} - \{(0,0)\}$ , e acabamos de mostrar, pela definição, que  $f$  é diferenciável na origem. Para cumprir o prometido, temos de mostrar que  $f$  não é de classe  $C^1$  (em  $\mathbb{R}^2$ ). Já sabemos que o problema reside na origem. Veja, por exemplo: a função

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } (x,y) = (0,0); \\ 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x}{x^2+y^2} \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

não é contínua na origem.

Realmente,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 2x \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = 0$ , mas a parcela  $\frac{-2x}{x^2 + y^2} \cos \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right)$  não é limitada em torno da origem. Por exemplo, se fizermos  $x = y$ , resulta a função  $l(x) = \frac{-1}{x} \cos \left( \frac{1}{2x^2} \right)$ , cujo gráfico, em torno da origem, está esboçado na figura a seguir.



**Figura 18.2**

### Exercício 18.1.

Você sabe que toda função diferenciável é, necessariamente, contínua. Isto quer dizer que a função dada no exemplo anterior é contínua. Em particular, é contínua na origem. Você pode mostrar isso diretamente, calculando  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ .

## DERIVADAS DIRECIONAIS – UM EXEMPLO INTERESSANTE

Você aprendeu que, se  $f$  é uma função diferenciável em  $(a,b) \in D$ , então

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \vec{u}.$$

(Veja o teorema na aula anterior.) Logo, se  $f$  é diferenciável, ela admite todas as derivadas direcionais. Resta a pergunta: a existência das derivadas direcionais garante a diferenciabilidade da função?

Nesta seção você conhecerá um exemplo de uma função contínua que admite derivadas direcionais em todas as direções em torno de um ponto dado, sem mesmo ser diferenciável nesse ponto.

Seja  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \\ \frac{x^3y}{x^4+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$

Para mostrar que  $f$  é contínua, basta mostrar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^2} = 0.$$

Na verdade, basta mostrar que a função  $g(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ , nossa velha conhecida, é limitada. Para isso, observe que

$$0 \leq (x^2 - |y|)^2 = x^4 - 2x^2|y| + y^2.$$

Assim,  $2x^2|y| \leq x^4 + y^2$  e, se  $(x,y) \neq (0,0)$ ,

$$\frac{x^2|y|}{x^4+y^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Agora, as derivadas direcionais. Vamos começar calculando as derivadas parciais de  $f$  na origem.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0; \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0. \end{aligned}$$

Seja  $\vec{u} = (u_1, u_2)$  um vetor unitário ( $u_1^2 + u_2^2 = 1$ ), tal que

Este argumento matemático foi apresentado a um dos autores, na hora do café, pelo professor José Otávio, do Instituto de Matemática da UFF. É uma verdadeira pérola. Mostra como a simplicidade, também em Matemática, é valiosa.



$u_1 u_2 \neq 0$ . Então,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + t u_1, 0 + t u_2) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^3 u_1^3 t u_2}{t^4 u_1^4 + t^2 u_2^2}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4 u_1^3 u_2}{t^5 u_1^4 + t^3 u_2^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t u_1^3 u_2}{t^2 u_1^4 + u_2^2} = 0.\end{aligned}$$

Observe que, para obter a última igualdade, usamos  $u_2 \neq 0$ .

Assim,  $f$  admite derivadas direcionais em  $(0,0)$  para todo vetor unitário  $\vec{u}$ , e essa derivada é *nula*.

Vamos considerar, agora, a diferenciabilidade de  $f$  na origem. Temos de estudar o limite de  $\frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$ , com  $(h,k) \rightarrow (0,0)$ .

$$\begin{aligned}&\frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \\ &= \frac{f(0+h, 0+k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{h^3 k}{\sqrt{h^2+k^2}(h^4+k^2)}.\end{aligned}$$

No entanto, esse quociente não admite limite quando  $(h,k) \rightarrow (0,0)$ . Basta fazer  $k = h^2$ . Então

$$\frac{E(h,h^2)}{\sqrt{h^2+h^4}} = \frac{h^5}{2|h|\sqrt{1+h^2}h^4} = \frac{h}{2|h|} \frac{1}{\sqrt{1+h^2}}.$$

Os limites laterais  $h \rightarrow 0^+$  e  $h \rightarrow 0^-$  desse quociente são diferentes. Portanto,  $f$  não é diferenciável na origem. Resumindo,  $f$  é uma função definida em todo o plano  $\mathbb{R}^2$ , é contínua em  $\mathbb{R}^2$ , de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$  e, assim, diferenciável em  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ . Como  $f$  admite derivadas direcionais na origem, em todas as direções (todas nulas), concluímos que  $f$  admite derivadas direcionais  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x,y)$ ,  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$  e  $\forall \vec{u}$ , tais que  $\|\vec{u}\| = 1$ . No entanto,  $f$  não é diferenciável na origem.

## TEOREMA DO VALOR MÉDIO E DERIVADAS DIRECIONAIS

Você viu que a existência das derivadas direcionais não garante a diferenciabilidade da função. Ainda assim, esse conceito pode dar muitas informações a respeito da função, como veremos a seguir.

### **Teorema 18.2** (Teorema do Valor Médio).

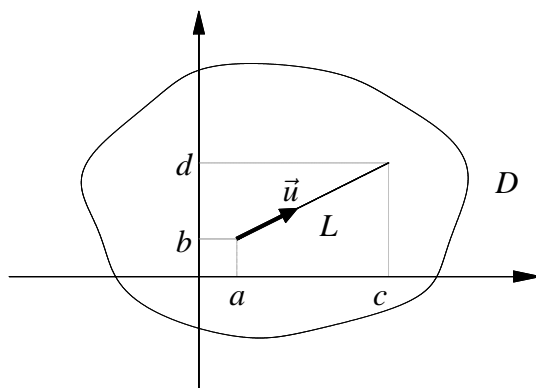
Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida no aberto  $D \subset \mathbb{R}^2$  e sejam  $(a,b)$  e  $(c,d)$  pontos distintos de  $D$ . Considere  $m = \|(c,d) - (a,b)\|$  a distância entre esses pontos, e seja  $\vec{u} = \frac{(c,d) - (a,b)}{m}$  o vetor unitário paralelo ao segmento que une  $(a,b)$  a  $(c,d)$ , dado por

$$L = \{ (a,b) + t\vec{u} ; 0 \leq t \leq m \}.$$

Suponha que  $L \subset D$  e que  $f$  admite derivada direcional  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x,y)$ , para cada  $(x,y) \in L$ . Então, a taxa de variação média de  $f$ , de  $(a,b)$  até  $(c,d)$ , é igual à derivada direcional de  $f$ , em algum ponto do segmento  $L$ . Isto é, existe um ponto  $(\lambda, \xi) \in L$ , tal que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\lambda, \xi) = \frac{f(c,d) - f(a,b)}{\|(a,b) - (c,d)\|}.$$

Veja a ilustração na figura a seguir.



**Figura 18.3**

**Demonstração**

Basta considerar a função  $g$ , definida no intervalo  $[0, m]$  pela equação  $g(t) = f((a, b) + t\vec{u})$ .

Essa função é a composição do caminho  $\alpha(t) = (a, b) + t\vec{u}$ , que percorre o segmento  $L$  de  $(a, b)$  até  $(c, d)$ , na medida em que  $t$  varia de 0 até  $m$ , com a função  $f$ :

$$g(t) = f \circ \alpha(t).$$

Então,  $g(0) = f(a, b)$  e  $g(m) = f((a, b) + m\vec{u}) = f(c, d)$ , pois  $m\vec{u} = (c, d) - (a, b)$ .

Observe que

$$\begin{aligned} g'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((a, b) + t\vec{u} + h\vec{u}) - f((a, b) + t\vec{u})}{h} \\ &= \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}((a, b) + t\vec{u}). \end{aligned}$$

Assim,  $g$  é uma função contínua em  $[0, m]$  e diferenciável no intervalo aberto  $(0, m)$ . Portanto, a função  $g$  satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio, enunciado na apresentação desta aula. Logo, existe um certo  $t_0 \in (0, m)$ , tal que

$$g'(t_0) = \frac{g(m) - g(0)}{m}.$$

Fazendo  $(\lambda, \xi) = (a, b) + t_0\vec{u}$ , obtemos  $g'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\lambda, \xi)$  e, portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\lambda, \xi) = \frac{f(c, d) - f(a, b)}{\|(c, d) - (a, b)\|}.$$

Veja uma aplicação do teorema.

### Corolário 18.3.

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função definida no aberto e convexo  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Suponha que  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y) = 0$ , para todo  $(x, y) \in D$  e todos os vetores unitários  $\vec{u}$ . Então  $f$  é uma função constante.

Precisamos lembrar que um subconjunto  $D \subset \mathbb{R}^2$  é dito *convexo* se o segmento que une quaisquer dois de seus pontos está contido em  $D$ . Aqui estão alguns exemplos de conjuntos convexos.

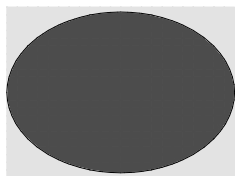


Figura 18.4

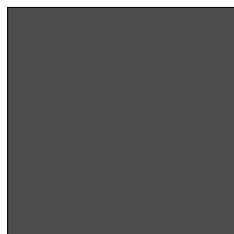


Figura 18.5

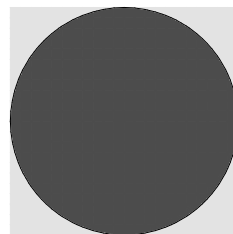


Figura 18.6

**Demonstração** do corolário:

Escolha algum ponto  $(a, b) \in D$  e seja  $f(a, b) = k$ . Vamos mostrar que  $f(x, y) = k$ ,  $\forall (x, y) \in D$ .

Dado  $(x, y) \in D$ , um ponto diferente de  $(a, b)$ , o segmento  $L$  que os une está contido em  $D$ , pois esse conjunto é um convexo. Aplicando o Teorema do Valor Médio, obtemos  $(\lambda, \xi)$ , um ponto pertencente a  $L$ , tal que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\lambda, \xi) = \frac{f(x, y) - f(a, b)}{\|(x, y) - (a, b)\|}.$$

Como  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}$  é nula em todos os pontos de  $D$ , obtemos  $f(x, y) - f(a, b) = 0$  e, portanto,

$$f(x, y) = k.$$

### Exercício 18.2.

Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função que admite derivadas direcionais  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y)$ ,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , para todos os vetores unitários  $\vec{u}$ .

Seja  $C$  uma curva de nível de  $f$  tal que o interior de  $C$  é um conjunto convexo. Suponha que os pontos  $(a, b)$  e  $(c, d) \in C$  sejam distintos e faça  $\vec{u} = \frac{(c, d) - (a, b)}{\|(c, d) - (a, b)\|}$ . Mostre que existe um ponto  $(\lambda, \xi)$  no interior de  $C$  tal que  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\lambda, \xi) = 0$ .

## ORTOGONALIDADE DO GRADIENTE EM RELAÇÃO AO CONJUNTO DE NÍVEL

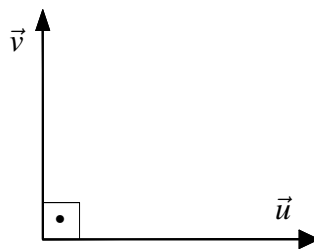
O espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$  tem características que o distingue, de maneira notável, dos outros espaços euclidianos. Ele é munido de certos produtos que lhe são próprios.

Dados os vetores  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  e  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ , podemos efetuar três tipos de produtos com eles.

| Produto  | Notação                                  |
|----------|------------------------------------------|
| Interno  | $\vec{u} \cdot \vec{v}$                  |
| Vetorial | $\vec{u} \times \vec{v}$                 |
| Misto    | $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ |

O produto interno é comum a todos os espaços euclidianos, mas os outros dois produtos são exclusivos do espaço  $\mathbb{R}^3$ . Esses três produtos refletem propriedades geométricas de  $\mathbb{R}^3$  e são muito úteis. Veja as seguintes observações:

a. O produto interno reflete a ortogonalidade dos vetores:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  significa que os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são ortogonais.



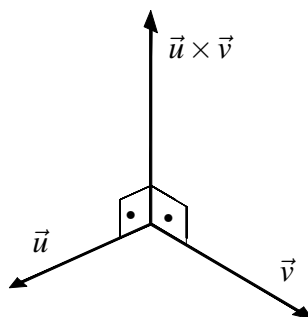
**Figura 18.7**

b. O vetor  $\vec{u} \times \vec{v}$  é determinado pela fórmula

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

que deve ser tomada como um determinante em que a primeira linha é formada pelos vetores da base canônica  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$  e  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ .

O vetor  $\vec{u} \times \vec{v}$  é ortogonal aos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .



**Figura 18.8**

c. O produto misto  $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$  é dado pela fórmula

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Sua interpretação geométrica é a seguinte: o valor absoluto de  $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$  é o volume do paralelepípedo gerado pelos vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ .

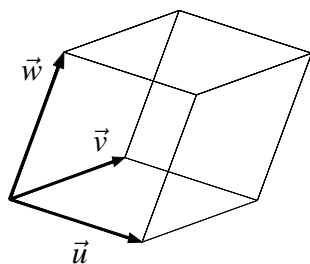


Figura 18.9

Essas informações são úteis. Por exemplo, seja

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \varepsilon$$

a equação de um certo plano. Então, o vetor  $(\alpha, \beta, \gamma)$  é ortogonal a esse plano.

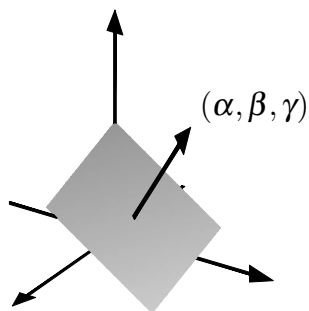


Figura 18.10

Isso porque  $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0 = (\alpha, \beta, \gamma) \cdot (x, y, z)$  é a equação do lugar geométrico dos vetores  $(x, y, z)$ , que são ortogonais ao vetor dado  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . Ora, esse conjunto é, precisamente, o plano normal ao vetor  $(\alpha, \beta, \gamma)$  e que contém a origem. Como  $\alpha x + \beta y + \gamma z = \varepsilon$  é a equação de um plano paralelo a esse, também é ortogonal ao vetor  $(\alpha, \beta, \gamma)$ .

Com essas informações básicas sobre vetores em mente, considere o seguinte teorema.

#### Teorema 18.4.

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável definida no aberto  $D \subset \mathbb{R}^3$  tal que  $\nabla f(a, b, c) \neq \vec{0}$  e seja  $\gamma : I \rightarrow D \subset \mathbb{R}^3$ , uma curva diferenciável, tal que  $\gamma(t_0) = (a, b, c)$  e  $f(\gamma(t)) = k$ ,  $\forall t \in I$ . Então,

$$\nabla f(a, b, c) \cdot \gamma'(t_0) = 0.$$

Isto é, se  $\gamma$  é uma curva contida em alguma superfície de nível de  $f$ , então o vetor tangente à curva é normal ao gradiente de  $f$ .

### Exercício 18.3.

Demonstre o teorema.

Chamaremos *plano tangente* à superfície de nível  $f(x, y, z) = k$ , no ponto  $(a, b, c)$ , o plano normal a  $\nabla f(a, b, c) \neq \vec{0}$  e que contém o ponto  $(a, b, c)$ . A equação desse plano é muito simples:

$$\nabla f(a, b, c) \cdot (x, y, z) = \nabla f(a, b, c) \cdot (a, b, c).$$

### Exemplo 18.1.

Vamos determinar a equação do plano tangente à superfície definida por  $z = 3 - \frac{x^2}{2} - y^2$  no ponto  $(1, 1, 3/2)$ .

Vamos considerar a função  $f(x, y, z) = z + \frac{x^2}{2} + y^2 - 3$ , cuja superfície de nível 0 é, precisamente, a superfície mencionada.

Portanto, como  $\nabla f(x, y, z) = (x, 2y, 1)$ , no ponto  $(1, 1, 3/2)$  temos  $\nabla f(1, 1, 3/2) = (1, 2, 1)$ . Assim, a equação que procuramos é

$$x + 2y + z = 9/2.$$

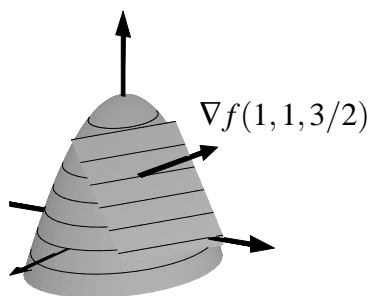


Figura 18.11



**Exercício 18.4.**

$$1. \text{ Seja } g(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0); \\ (xy) \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), & \text{se } (x, y) \neq (0, 0). \end{cases}$$

Determine a função  $\frac{\partial g}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e mostre que ela não é limitada na origem. Será  $g$  uma função diferenciável?

$$2. \text{ Considere } f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0); \\ \frac{xy^2}{x^3 + y^4}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0). \end{cases}$$

Seja  $\vec{u} = (u_1, u_2)$  um vetor unitário, tal que  $u_1 \neq 0$ . Mostre que  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0) = \frac{u_2^2}{u_1^2}$ . No entanto, conclua que  $f$  não é diferenciável, mostrando que  $f$  não é contínua na origem.

3. Seja  $D \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto com a seguinte propriedade: quaisquer dois de seus pontos podem ser unidos por uma linha poligonal. Isto é, há uma sucessão de segmentos de retas que conecta um ao outro ponto. Se substituirmos a propriedade *convexo* por essa condição, no corolário anterior, o resultado continuará valendo?

4. Sejam  $f$  e  $g$  duas funções definidas em todo o  $\mathbb{R}^2$  tais que, para todo vetor unitário  $\vec{u}$  e todo par  $(x, y)$ , vale

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial \vec{u}}(x, y).$$

Mostre que essas duas funções diferem por uma constante.

5. Determine uma função  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que, para todo vetor unitário  $\vec{u}$  e todo par  $(x, y) \in D$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y) = 0,$$

com  $f$  não constante.

6. Calcule a equação do plano tangente à superfície definida por

$$xy + 2xz + yz = x$$

no ponto  $(1, -1, 2)$ .

7. Calcule a equação do plano tangente à superfície definida por

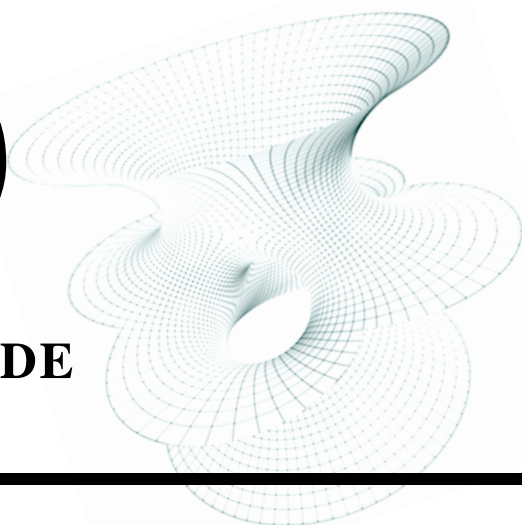
$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2y + 2xz = 4$$

no ponto  $(1, -1, 1)$ .

# Aula 19

## DERIVADAS PARCIAIS DE ORDENS SUPERIORES

---



### O b j e t i v o s

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 usar a Regra da Cadeia para calcular derivadas parciais de ordens superiores;
- 2 conhecer uma condição suficiente para a comutatividade das derivadas parciais.

## INTRODUÇÃO

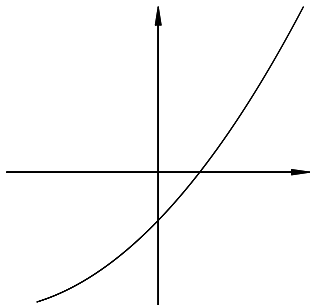
Por que derivar mais do que uma vez?

Antes de responder a esta pergunta, vamos considerar alguns aspectos da derivada. Vejamos: quando alguém menciona o termo *derivada*, o que ocorre a você? Digamos que tenha sido algo como “a derivada é a medida da mudança da função em torno de um certo ponto”. Bom! Em particular, se a função for constante, não há mudança na função e essa medida é nula, o que se encaixa nessa visão geral.

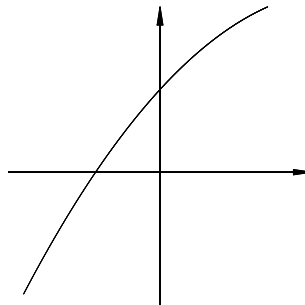
Você aprendeu que, se a derivada de uma função de uma variável real é positiva ao longo de um intervalo, então essa função é crescente nesse intervalo.

Resumindo: o estudo dos sinais da derivada, assim como o seu comportamento em torno de seus zeros, nos dá informações valiosas a respeito da função.

Mas veja: esse estudo de sinais da derivada não detecta a diferença que há entre as duas funções cujos gráficos estão esboçados a seguir, uma vez que ambas são crescentes.



**Figura 19.1.**



**Figura 19.2.**

Enquanto a derivada mede o crescimento do gráfico da função, sua curvatura é detectada pela derivada segunda. Essa é uma motivação para considerarmos derivadas de ordens superiores.

Há outras. Por exemplo, a Fórmula de Taylor, um tema que ainda exploraremos.

Agora, ao assunto da aula!

## PARCIAIS DE PARCIAIS

Você aprendeu a calcular derivadas parciais de uma dada função de duas ou mais variáveis. Essas derivadas são, elas próprias, funções que podem ser, por sua vez, submetidas ao mesmo processo: derivar parcialmente as derivadas parciais. Veja um exemplo.

### Exemplo 19.1.

Vamos calcular as derivadas parciais de segunda ordem da função

$$f(x, y) = x^3y^2 - 3xy^4.$$

Primeiro, as derivadas parciais:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2y^2 - 3y^4; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^3y - 12xy^3.$$

Agora, as parciais das parciais:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (x, y) = 6xy^2; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} (x, y) = 6x^2y - 12y^3. \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (x, y) = 6x^2y - 12y^3; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (x, y) = 2x^3 - 36xy^2. \end{cases}$$

## NOTAÇÕES

No exemplo anterior você já conheceu a principal notação para as derivadas de ordens superiores:  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  significa que estamos derivando duas vezes em relação a  $x$ .

Note que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  significa: derive em relação a  $y$  e, depois, em relação a  $x$ . Ou seja, essa notação deve ser lida da direita para a esquerda.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

A notação  $f_{yx} = (f_y)_x$  também é muito útil, especialmente quando lidamos com fórmulas mais longas. Neste caso, a notação deve ser lida da esquerda para a direita.

$$f_{yx}$$

Há uma terceira maneira de denotar as derivadas parciais de ordens superiores, semelhante a esta última, usando números no lugar das variáveis para indicar a variável respectiva à qual a derivação está sendo feita. Assim,

$$f_1, \quad f_2, \quad f_{11}, \quad f_{12}, \quad f_{22},$$

correspondem, respectivamente, a

$$f_x, \quad f_y, \quad f_{xx}, \quad f_{xy}, \quad f_{yy},$$

por exemplo.

A vantagem dessa notação é que ela não enfatiza o nome da variável ( $x$ , ou  $y$ ,  $u$  ou outra qualquer). Veja mais um exemplo, onde usamos as três notações.

### Exemplo 19.2.

Vamos calcular as derivadas parciais até ordem dois da função

$$f(x, y, z) = ze^{xy} - 3yz^2.$$

Não é incomum, especialmente nos nossos manuscritos, omitirmos da notação o par ordenado  $(x, y)$  (ou a tripla  $(x, y, z)$ , dependendo do caso), deixando subentendido que a função deve ser calculada num ponto genérico. Assim, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yze^{xy}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xze^{xy} - 3z^2; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = e^{xy} - 6yz.$$

Agora, as parciais de ordem dois:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= y^2 z e^{xy}; & f_{xy} &= z e^{xy} + xyz e^{xy}; & f_{13} &= y e^{xy}; \\ f_{21} &= z e^{xy} + xyz e^{xy}; & f_{yy} &= x^2 z e^{xy}; & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} &= x e^{xy} - 6z; \\ f_{zx} &= y e^{xy}; & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} &= x e^{xy} - 6z; & f_{33} &= -6y.\end{aligned}$$

## QUEM DERIVA UMA, DUAS VEZES, DERIVA MUITAS VEZES

As notações se generalizam naturalmente. Por exemplo,  $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$  indica a derivada parcial da função  $f$  em relação a  $y$  e, em seguida, em relação a  $x$  duas vezes.

Além disso, quando dizemos que  $f$  é uma função *de classe*  $C^k$ , significa que  $f$  admite as derivadas parciais de todas as ordens, até  $k$ , e todas essas derivadas são funções contínuas. Em particular, é conveniente usar a notação *função de classe*  $C^0$  para indicar que a função  $f$  é uma função contínua.

### Exercício 19.1.

Aqui está uma oportunidade de você testar essas diferentes notações.

$$\text{Seja } f(x, y, z) = \cos(xy^2) - \sin(yz^2).$$

Calcule as seguintes derivadas parciais:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}; \quad f_{yyz}; \quad f_{321}.$$

## UMA CONDIÇÃO SUFICIENTE PARA A COMUTATIVIDADE DAS DERIVADAS PARCIAIS

Uma coisa deve ter chamado a sua atenção, especialmente no **Exemplo 19.2**. As derivadas de ordem dois, de termos cruzados,

como  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ , são iguais, apesar da diferente ordem de derivação.

No entanto, nem toda função tem essa propriedade. Veja o próximo exemplo.

**Exemplo 19.3.**

Veja agora uma função  $f$  tal que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ .

Na aula anterior, vimos que a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

admite derivadas direcionais em todas as direções, na origem, e todas essas derivadas são iguais a zero. Em particular,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Se  $(x,y) \neq (0,0)$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{3x^2 y (x^2 + y^2) - x^3 y 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 y + 3x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{x^3 (x^2 + y^2) - x^3 y 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^5 - x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Resumindo,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 y + 3x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5 - x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$



Portanto,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5}{(x^2)^2} = 1.$$

Ou seja, pelo menos na origem,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ .

O teorema que enunciaremos a seguir nos dá uma condição suficiente para que as derivadas de ordem dois, em relação às diferentes variáveis, comutem.

### **Teorema 19.1.**

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$  (ou seja,  $f$  admite derivadas parciais de ordem dois e essas funções são todas contínuas), definida em um subconjunto aberto  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ . Então,  $\forall (x,y) \in D$ ,


$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y).$$

Em geral, os textos de Cálculo omitem a demonstração desse teorema. Para provar esse resultado, usamos o Teorema do Valor Médio, de maneira semelhante à que fizemos na aula *Diferenciabilidade – continuação*, para provar que, se a função for de classe  $C^1$ , então ela é diferenciável, porém, em dose dupla. Você poderá encontrar essa demonstração no livro *Cálculo Diferencial e Integral*, Volume II, de Richard Courant (Editora Globo), a partir da página 55.

No entanto, você pode usar o teorema imediatamente. Aqui está uma oportunidade de fazer isso.

**Exercício 19.2.**

Calcule todas as derivadas parciais, até ordem três, da função  $f(x, y) = x^2 e^{-y}$ .

 **Veja:** usando o Teorema 19.1, você poderá concluir que  $f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$ , por exemplo. Isso fará com que você calcule quatro derivadas parciais de ordem três no lugar de oito, certo?

Apresentaremos, agora, uma série de exemplos com os quais você aprenderá a usar a Regra da Cadeia para calcular derivadas parciais de ordens superiores de funções compostas.

**Exemplo 19.4.**

Começaremos com uma composição de uma função de duas variáveis  $f(x, y)$  com uma curva  $\alpha(t)$ .

Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$  e seja  $g(t) = f(t^2 + 1, 2t^3)$ , a composição de  $f$  com  $\alpha(t) = (t^2 + 1, 2t^3)$ .

Vamos expressar  $g''(t) = \frac{d^2g}{dt^2}(t)$  em termos das derivadas parciais de  $f$ . Observe que

$$g'(t) = \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t).$$

Assim,

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(t^2 + 1, 2t^3)(2t) + \frac{\partial f}{\partial y}(t^2 + 1, 2t^3)(6t^2) \\ g'(t) &= 2t \frac{\partial f}{\partial x}(t^2 + 1, 2t^3) + 6t^2 \frac{\partial f}{\partial y}(t^2 + 1, 2t^3). \end{aligned}$$

Muito bem! Antes de prosseguirmos, observe a função obtida após a primeira derivação. Ela é formada por duas parcelas, sendo cada uma o produto de duas funções de  $t$ . Por exemplo,  $h(t) = 2t \frac{\partial f}{\partial x}(t^2 + 1, 2t^3)$  é o produto da função  $k(t) = 2t$  pela composição da função derivada parcial de  $f$  em relação a  $x$  com

a curva  $\alpha(t)$ . Para calcularmos a próxima derivada, temos de levar isso em conta. Ou seja, usaremos a Regra do Produto com mais uma aplicação da Regra da Cadeia. Veja como derivar a primeira parcela,

$$h(t) = 2t \frac{\partial f}{\partial x}(t^2 + 1, 2t^3).$$

$$h'(t) = 2 \frac{\partial f}{\partial x}(t^2 + 1, 2t^3) + 2t \underbrace{\left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t^2 + 1, 2t^3)(2t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(t^2 + 1, 2t^3)6t^2 \right]}_{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(t^2 + 1, 2t^3) \right)}$$

$$h'(t) = 2 \frac{\partial f}{\partial x}(t^2 + 1, 2t^3) + 4t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t^2 + 1, 2t^3) + 12t^3 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(t^2 + 1, 2t^3).$$

Vamos denotar por  $j(t) = 6t^2 \frac{\partial f}{\partial y}(t^2 + 1, 2t^3)$ , a segunda parcela. Aqui está a derivada de  $j(t)$ :

$$j'(t) = 12t \frac{\partial f}{\partial y}(t^2 + 1, 2t^3) + 6t^2 \underbrace{\left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(t^2 + 1, 2t^3)(2t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t^2 + 1, 2t^3)6t^2 \right]}_{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial y}(t^2 + 1, 2t^3) \right)}$$

$$j'(t) = 12t \frac{\partial f}{\partial y}(t^2 + 1, 2t^3) + 12t^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(t^2 + 1, 2t^3) + 36t^4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t^2 + 1, 2t^3).$$

Fórmulas enormes, não? No entanto, note que há muita repetição. Podemos abreviar um pouco se usarmos a notação  $f_{xx}$ , por exemplo. Para expressar a segunda derivada de  $g(t)$ , usaremos que  $g''(t) = h'(t) + j'(t)$ .

$$g''(t) = 2f_x(t^2 + 1, 2t^3) + 4t^2 f_{xx}(t^2 + 1, 2t^3) + 12t^3 f_{xy}(t^2 + 1, 2t^3) + \\ + 12t f_y(t^2 + 1, 2t^3) + 12t^3 f_{yx}(t^2 + 1, 2t^3) + 36t^4 f_{yy}(t^2 + 1, 2t^3).$$

Sabendo que  $f$  é de classe  $C^2$ , podemos somar os termos  $f_{xy}$  e  $f_{yx}$ . Além disso, deixaremos subentendido que as derivadas

parciais são todas calculadas em  $\alpha(t) = (t^2 + 1, 2t^3)$ . Com isso, conseguimos uma expressão bem mais simples para  $g''(t)$ :

$$g''(t) = 2f_x + 12tf_y + 4t^2f_{xx} + 24t^3f_{xy} + 36t^4f_{yy}.$$

### Exercício 19.3.

Suponha que  $f$  seja uma função de classe  $C^2$ , de duas variáveis, e considere  $g(t) = f(e^t, e^{-t})$ .

Expresse a derivada segunda  $g''(t)$  em termos das derivadas parciais de  $f$ , usando a notação  $f_x, f_{xy}$  e omitindo o fato de que essas derivadas parciais devem ser calculadas em  $(e^t, e^{-t})$ .

Uma vez isso feito, faça  $f(x, y) = xy^2$ , efetue a composição e derive a função obtida diretamente, comprovando seus cálculos.

### Exemplo 19.5.

No caso de  $x$  e  $y$  serem, por sua vez, funções de duas variáveis, digamos  $u$  e  $v$ , podemos, novamente, aplicar a Regra da Cadeia para expressar as derivadas parciais.

Mais uma vez omitiremos os pontos onde as parciais devem ser calculadas, por razões de simplicidade.

Digamos que  $z = f(x, y)$ ,  $x = g(u, v)$  e  $y = h(u, v)$  e que todas as funções envolvidas sejam de classe  $C^2$ . Vamos expressar  $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$  e  $\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}$  em termos das outras derivadas parciais.

Começamos derivando a composta em relação a  $u$ :

$$z_u = f_x x_u + f_y y_u.$$

Na próxima etapa, devemos observar que  $f_x, x_u, f_y$  e  $y_u$  são, cada uma delas, funções de  $u$  e de  $v$ . Por exemplo,  $f_x$  simboliza a composição  $f_x(x(u, v), y(u, v))$ .

Então, derivando novamente, em relação a  $u$ , obtemos:

$$\begin{aligned} z_{uu} &= (f_{xx}x_u + f_{xy}y_u)x_u + f_x x_{uu} + (f_{yx}x_u + f_{yy}y_u)y_u + f_y y_{uu} \\ z_{uu} &= f_{xx}(x_u)^2 + 2f_{xy}x_u y_u + f_{yy}(y_u)^2 + f_x x_{uu} + f_y y_{uu}. \end{aligned}$$

Derivando  $z_u$  em relação a  $v$ , temos:

$$\begin{aligned} z_{uv} &= (f_{xx}x_v + f_{xy}y_v)x_u + f_x x_{uv} + (f_{yx}x_v + f_{yy}y_v)y_u + f_y y_{uv} \\ z_{uv} &= f_{xx}x_u x_v + f_{xy}(x_u y_v + x_v y_u) + f_{yy}y_u y_v + f_x x_{uv} + f_y y_{uv}. \end{aligned}$$

Note que, nas fórmulas anteriores,  $f_{xy}$  deve ser calculado em  $(x(u, v), y(u, v)) = (g(u, v), h(u, v))$ , por exemplo, e  $x_{uv}$  deve ser calculado em  $(u, v)$ .

Essas computações causam um certo impacto, devido ao tamanho que costumam alcançar (e olhe que não estamos calculando derivadas de ordens maiores do que dois!). No entanto, uma vez acostumado com a notação abreviada, você perceberá uma imperativa lógica em suas formações.

No próximo exemplo usaremos, de maneira ainda informal, a linguagem das *equações diferenciais*. Uma equação diferencial parcial, EDP para os íntimos, é uma equação que envolve derivadas parciais. Uma *solução* de uma EDP é uma relação que não contém derivadas e que satisfaz a equação em todos os pontos do domínio em questão.

### Exemplo 19.6.

Vamos determinar os valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$  tais que a função  $u(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$  seja uma solução da equação

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Veja: devemos calcular as derivadas correspondentes, substituir na equação e descobrir se há alguma relação a que elas devam obedecer.

$$\begin{aligned} u_x &= 2ax + by; & u_y &= bx + 2cy; \\ u_{xx} &= 2a; & u_{yy} &= 2c. \end{aligned}$$

Portanto, se  $a = -c$  temos  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ .

Na verdade, a função polinomial

$$u(x, y) = ax^2 + bxy - ay^2 + dx + ey + f$$

é uma solução de  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ .

Para ver se você *pegou* mesmo a idéia, determine os valores de  $a, b, c$  e  $d$  tais que a função  $u(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$  seja solução da EDP  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ .

Apresentamos agora, uma série de exercícios para você praticar.

#### Exercício 19.4.

1. Dizemos que uma função de duas variáveis é harmônica se ela satisfaz a equação de Laplace

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Mostre que as seguintes funções são harmônicas:

a.  $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 2x^2 + 2y^2 + 2xy$ ;

b.  $g(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ ;

c.  $h(x, y) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$ ;

d.  $k(x, y) = e^x \sin y + e^y \cos x$ .

$$2. \text{ Considere } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Mostre que  $f_{xy}(0, 0) = -1$  e  $f_{yx}(0, 0) = 1$ .

3. A EDP  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , onde  $c$  é uma constante, é chamada equação da onda e é uma das primeiras EDPs a serem estudadas. Mostre que as funções do tipo

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct),$$

onde  $f$  e  $g$  são funções de uma variável real, de classe  $C^2$ , são soluções para a equação da onda.

4. A EDP  $\frac{\partial w}{\partial t} = k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ , onde  $k$  é uma constante, é chamada equação do calor, e é uma outra EDP bem conhecida. Mostre que as funções do tipo

$$w(x, t) = (a \cos(cx) + b \sin(cx)) e^{-kc^2 t},$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes, são soluções para a equação do calor.

5. Seja  $g(u, v) = f(u + v, uv)$ , onde  $f$  é uma função de classe  $C^2$ . Calcule  $g_u(1, 1)$  e  $g_{vu}(1, 1)$ , sabendo que  $f_x(2, 1) = 3$ ,  $f_y(2, 1) = -3$ ,  $f_{xx}(2, 1) = 0$ ,  $f_{xy}(2, 1) = 1$  e  $f_{yy}(2, 1) = 2$ .
6. Sejam  $z = z(x, y)$ ,  $x = e^u \cos v$ ,  $y = e^u \sin v$ . Suponha que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Calcule  $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ .

7. Expresse  $g''(t)$  em termos das derivadas parciais de  $f$ , sendo  $g(t) = f(1 - t, t^2)$ .
8. Considere  $h(u, v) = f(u^2 - v^2, 2uv)$ , onde  $f(x, y)$  é uma função de classe  $C^2$ . Expresse  $\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}(u, v)$  em termos das derivadas parciais da função  $f$ .
9. Seja  $v(r, \theta) = u(x, y)$ , onde  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ . Mostre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}.$$

10. Encontre uma função  $f$  de uma variável tal que a função  $u(x, y)$  da forma  $u(x, y) = f(x^2 + y^2)$  satisfaça a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$





# Aula 20



## MÁXIMOS E MÍNIMOS – PARTE 1

---

### O b j e t i v o s

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 aprender as definições e a nomenclatura;
- 2 localizar e classificar pontos extremos locais.

## MÁXIMOS E MÍNIMOS – PARTE 1

Aqui está uma tradução (livre) da poesia. Ela é a primeira estrofe de uma canção de John Dowland (1563 - 1626), alaudista e compositor inglês da época de Shakespeare, cuja letra é atribuída a Sir Edward Dyer.

As árvores mais baixas têm suas copas,  
a formiguinha sua ardida ferroadada,  
A mosca pode incomodar,  
a pequenina fagulha pode queimar;  
E mesmo cabelos fininhos fazem sombras apesar de pequeninas;  
Os mares têm suas fontes,  
assim como os minúsculos riachos,  
e o amor é o amor tanto em mendigos como em soberanos.

The lowest trees have tops,  
the ant her gall,  
The fly her spleen,  
the little spark his heat;  
And slender hairs cast shadows  
though but small,  
And bees have stings  
although they be no great;  
Seas have their source,  
and so have shallow springs,  
and love is love  
in beggars and in kings.

### INTRODUÇÃO

Encontrar os pontos extremos de uma função lembra o trabalho de um detetive. A primeira etapa do trabalho consiste em localizar os *suspeitos*. Quem faz esse papel na nossa história são os *pontos críticos*.

A importância dessa etapa consiste em limitar a busca a um conjunto relativamente pequeno.

A segunda etapa é mais sutil e depende muito da situação estudada. Por exemplo, a natureza do domínio considerado pode introduzir complicações deveras interessantes no problema.

Enquanto que no caso das funções de uma variável nosso detetive tinha uma única direção a seguir, subindo e descendo em busca de pontos extremos, no contexto atual, das funções com duas ou mais variáveis, sua busca se estenderá aos mais profundos vales e às mais altas montanhas.

Mas, calma! Estamos nos antecipando um pouco. Nesta aula nos ocuparemos das definições e da análise local.

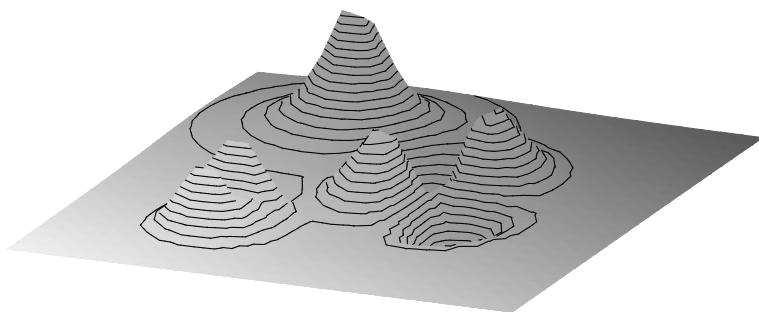


Figura 20.1.

## MÁXIMOS E MÍNIMOS – DEFINIÇÕES

Nesta etapa estabeleceremos as definições para o caso das funções de duas variáveis, mas elas podem ser estendidas naturalmente para o caso das funções com mais variáveis.

### Definição 20.1.

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Dizemos que  $(a, b) \in D$  é um *ponto de máximo local* de  $f$  se existe um número  $r > 0$  tal que, se  $\|(x, y) - (a, b)\| < r$ , então  $(x, y) \in D$  e

$$f(x, y) \leq f(a, b) = M.$$

Neste caso, dizemos que  $M$  é um *valor máximo local* de  $f$ .

Em outras palavras, queremos que haja uma vizinhança em torno do ponto  $(a, b)$  onde a função está definida e, nesta vizinhança, o valor da função em  $(a, b)$  é o maior que ela atinge.

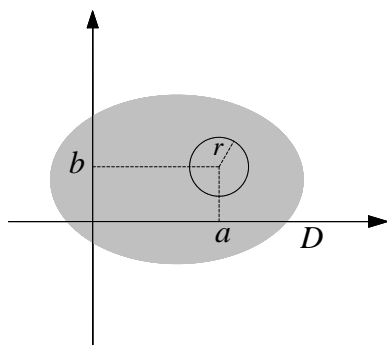


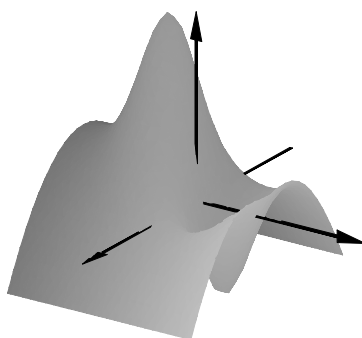
Figura 20.2.

Analogamente, definimos pontos de mínimo local, assim como valor mínimo local, invertendo a desigualdade:

$$f(x,y) \geq f(a,b) = m.$$

**Exemplo 20.1.**

A função  $f$  cujo gráfico está esboçado na figura a seguir admite um ponto de máximo local, assim como um ponto de mínimo local.



**Figura 20.3.**

Em certos problemas, queremos considerar apenas uma parte do domínio da função. Por isso, é conveniente introduzir a definição a seguir.

**Definição 20.2.**

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e seja  $A \subset D$  um subconjunto do domínio de  $f$ . Dizemos que o ponto  $(a,b) \in A$  é um *ponto máximo de  $f$  em  $A$*  se, para todo  $(x,y) \in A$ ,

$$f(x,y) \leq f(a,b) = M.$$

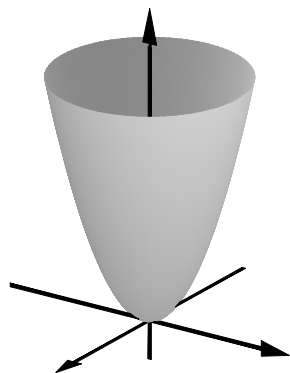
Nesse caso, dizemos que  $M$  é o *valor máximo de  $f$  em  $A$* . Em particular, se  $A = D$ , dizemos que  $(a,b)$  é um *ponto de máximo absoluto da função  $f$*  e  $M$  é o *valor máximo de  $f$* .

Analogamente, definimos pontos de mínimo de  $f$  em  $A$  e pontos de mínimo absolutos de  $f$ .

**Exemplo 20.2.**

A função  $f(x, y) = x^2 + y^2$  está definida em todo o espaço  $\mathbb{R}^2$  e admite um ponto de mínimo local e absoluto em  $(0, 0)$ . Na verdade, neste caso o ponto de mínimo absoluto é único.

Veja que esta função não admite pontos de máximo, sejam absolutos ou locais, pois ela assume valores arbitrariamente grandes.

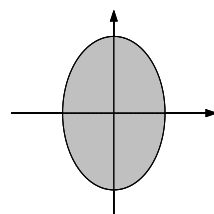
**Figura 20.4.**

Vamos, agora, considerar a mesma função  $f$ , porém restrita a um subconjunto próprio de seu domínio. Seja

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 9x^2 + 4y^2 \leq 36\}.$$

Como o ponto  $(0, 0) \in A$ , este ponto continua sendo o mínimo de  $f$ , agora no conjunto  $A$ . A questão que resta resolver é: há um ponto máximo de  $f$  em  $A$ ?

Bem, considerando a natureza da função  $f$ , devemos buscar os pontos de  $A$  que estejam mais afastados da origem. Esses pontos são  $(0, 3)$  e  $(0, -3)$ . Veja o gráfico.

**Figura 20.5.**

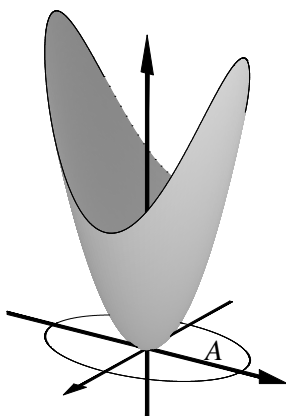


Figura 20.6.

Conclusão: restrita ao conjunto  $A$  a função  $f$  admite um ponto mínimo em  $(0,0)$ , que também é um ponto mínimo local, e dois pontos máximos em  $(0,3)$  e  $(0,-3)$ . O valor mínimo de  $f$  em  $A$  é  $f(0,0) = 0$  e o valor máximo de  $f$  em  $A$  é  $f(0,3) = f(0,-3) = 9$ .

### Exercício 20.1.

Usando o que você aprendeu no exercício anterior, determine os pontos de máximo e de mínimo de  $f(x,y) = x^2 + y^2$  no conjunto

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; 1 \leq x \leq 3, 2 \leq y \leq 5\}.$$

## MÁXIMOS E MÍNIMOS LOCAIS

Nesta seção vamos concentrar nossos esforços no estudo dos pontos de máximo e de mínimo locais das funções diferenciáveis. Observe que os pontos de mínimo da função  $f$  são os pontos de máximo da função  $g = -f$ . Portanto, as considerações que fizermos para os pontos de máximo terão sua formulação correspondente para pontos de mínimo.

Vamos à pergunta que está no ar: Como sabemos que chegamos a um ponto de máximo local? (Como sabemos que atingimos o alto do morro?)

Ora, isso ocorre quando não há mais como subir, não é?

Veja, esse fenômeno deve ser detectado pelas taxas de vari-

ação da função. Ou seja, num ponto  $(a, b)$ , de máximo local da função diferenciável  $f$  teremos, para cada vetor unitário  $\vec{u}$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b) = 0.$$

Em particular,  $\nabla f(a, b) = \vec{0}$ .

Isso nos motiva a introduzir a seguinte definição:

Se  $\nabla f(a, b) = \vec{0}$ , dizemos que  $(a, b)$  é um *ponto crítico* ou *estacionário* da função  $f$ .

A observação que fizemos é que todo ponto extremo local de  $f$  é ponto estacionário de  $f$ . Vamos formular mais precisamente.

### **Teorema 20.1.**

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em  $(a, b) \in D$ , um aberto de  $\mathbb{R}^2$ , tal que  $(a, b)$  é um de máximo ou de mínimo local de  $f$ . Então,

$$\nabla f(a, b) = \vec{0}.$$

### **Demonstração**

Sabemos que  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = h'(a)$ , onde  $h(x) = f(x, b)$ , a restrição de  $f$  à reta  $y = b$ , em alguma vizinhança de  $x = a$ .

Ora, como  $(a, b)$  é extremo local de  $f$ ,  $a$  é extremo local de  $h$ . Como vimos no estudo das funções de uma variável,  $h'(a) = 0$ . Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0.$$

Analogamente,  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$  e, portanto,

$$\nabla f(a, b) = \vec{0}.$$

Isso quer dizer que a busca pelos pontos extremos locais de uma função deve ser feita no conjunto dos pontos estacionários

de  $f$ , quando ela é uma função diferenciável.

Nesse ponto, a pergunta mais natural para um matemático é: serão todos os pontos estacionários máximos ou mínimos locais?

Bem, você já deve ter antecipado a resposta: não! Veja o próximo exemplo.

**Exemplo 20.3.**

Vamos analisar os pontos críticos (ou estacionários) das funções

$$f(x, y) = \lambda x^2 + \mu y^2$$

nas quais  $\lambda \mu \neq 0$ .

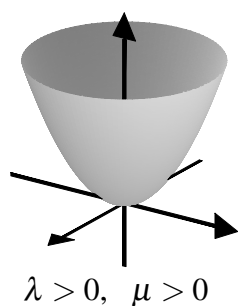
Começamos com a determinação de tais pontos. Para isso, temos de resolver a equação  $\nabla f(x, y) = \vec{0}$ .

$$\nabla f(x, y) = (2\lambda x, 2\mu y) = (0, 0).$$

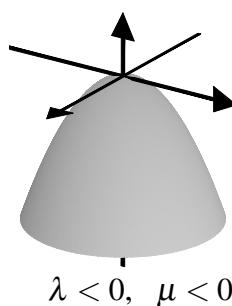
Ou seja, em cada caso,  $(0, 0)$  é o único ponto crítico.

Observe que, se  $\lambda \mu > 0$ , estas duas constantes têm o mesmo sinal. Se as duas constantes forem positivas,  $(0, 0)$  é um ponto de mínimo local de  $f$ . Se as duas constantes forem negativas, o ponto  $(0, 0)$  é um ponto de máximo local de  $f$ . Em ambos os casos, o gráfico de  $f$  é um parabolóide.

No entanto, se  $\lambda \mu < 0$ , o ponto crítico não é um ponto de mínimo nem é um ponto de máximo local de  $f$ . Neste caso, o gráfico de  $f$  é um hiperbolóide e o ponto crítico é chamado ponto de sela.

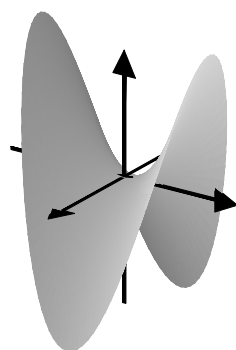


**Figura 20.7.**



**Figura 20.8.**





$$\lambda \mu < 0$$

**Figura 20.9.**

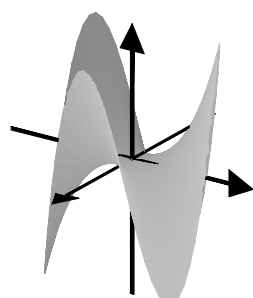
As três *configurações* apresentadas no exemplo anterior são típicas para pontos estacionários. No entanto, há outras, como você poderá constatar no próximo exemplo.

**Exemplo 20.4.**

As funções  $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$  e  $g(x, y) = 2xy(x^2 - y^2)$  têm ponto crítico na origem, pois

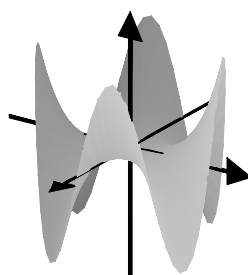
$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= (3x^2 - 3y^2, -6xy); \\ \nabla g(x, y) &= (6x^2y - 2y^3, 2x^3 - 6x^2y).\end{aligned}$$

Na verdade, em ambos os casos a origem é o único ponto crítico. No entanto, nenhum deles o ponto é mínimo ou máximo local. Nem mesmo será um ponto de sela, do tipo hiperbólico, apresentado no exemplo anterior. Veja os gráficos.



$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2$$

**Figura 20.10.**



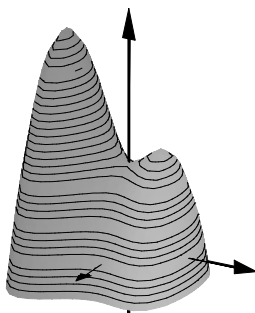
$$g(x, y) = 2xy(x^2 - y^2)$$

**Figura 20.11.**

Aqui está uma oportunidade para você praticar.

**Exercício 20.2.**

A função  $f(x, y) = -\frac{1}{3}y^4 - \frac{4}{9}y^3 + \frac{4}{3}y^2 + \frac{22}{9} - x^2$  tem seu gráfico esboçado na figura a seguir.

**Figura 20.12.**

Determine seus pontos críticos e classifique-os como pontos de máximo ou de mínimo locais ou como pontos de sela.

### TESTE DA DERIVADA SEGUNDA PARA FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

A última questão que consideraremos nesta aula será a seguinte: como podemos diferenciar pontos de sela de pontos de mínimo ou de máximo locais? Há algum critério fácil de calcular que classifique o ponto crítico como ponto de sela, de máximo ou de mínimo local, ou outros? Muito bem, a resposta está na maneira como a função se curva em torno do ponto. E o que mede a curvatura é a derivada de ordem dois. Antes de enunciar o teorema, vamos estabelecer algumas notações.

Observe que ao lidarmos com uma função de duas variáveis, de classe  $C^1$ , em cada ponto temos três derivadas de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \quad e \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b).$$

O que determinará, pelo menos em muitos casos, se o ponto crítico é de sela ou de máximo local ou de mínimo local é uma combinação algébrica desses números, que é chamado de *hessiano da função* calculado no ponto. Aqui está a sua definição.

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$ , definida no aberto  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ . Definimos uma função  $H : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  colocando

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix}$$

chamada *hessiana* da função  $f$ .

Essa notação, do determinante, se deve à tradição e é muito conveniente. Podemos, também, usar a notação mais simples:

$$H(x, y) = f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2.$$

Esse determinante mede a curvatura do gráfico da função em torno desse ponto crítico. Isto é, se é negativo, há duas direções principais com curvaturas diferentes: uma para cima, outra para baixo. Se é positivo, ambas curvaturas estão para o mesmo lado. Se essas curvaturas principais, digamos assim, estão do mesmo lado plano tangente, o ponto crítico é ponto extremo local. Se essas curvaturas são reversas, uma para cada lado do plano tangente, então temos um ponto de sela.

Veja a formulação completa no teorema a seguir.

---

**Teorema 20.2** (Teste das derivadas de ordem dois).

---

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em  $(a, b) \in D$ , um aberto de  $\mathbb{R}^2$ , tal que  $(a, b)$  é um crítico de  $f$ , tal que  $H(a, b) \neq 0$ . Então,

a. se  $H(a, b) > 0$  e  $f_{xx}(a, b) > 0$ , o ponto  $(a, b)$  é ponto de mínimo local de  $f$ ;

b. se  $H(a, b) > 0$  e  $f_{xx}(a, b) < 0$ , o ponto  $(a, b)$  é ponto de máximo local de  $f$ ;

c. se  $H(a, b) < 0$ , o ponto  $(a, b)$  não é um ponto de máximo nem de mínimo local de  $f$ .

Observe que o teorema não afirma coisa alguma, caso  $H(a, b) = 0$ . Nesse caso, devemos recorrer a uma análise di-

reta da função para concluir se o ponto em questão é de máximo ou de mínimo local de  $f$ .

A demonstração deste teorema será adiada até a aula sobre Fórmula de Taylor, onde observaremos como as derivadas de ordens superiores podem ser usadas para se obter aproximações polinomiais para a função.

Terminaremos a aula com um exemplo do uso do teorema para analisar os pontos críticos de uma função.

**Exemplo 20.5.**

Vamos determinar os pontos críticos da função

$$f(x, y) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right)$$

e classificá-los usando o teste das derivadas de ordem dois.

Aqui está o cálculo do gradiente:

$$\nabla f(x, y) = \left( \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right), -\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \right).$$

Note que,  $\nabla f(x, y) = (0, 0)$  se, e somente se,  $x$  for um número inteiro ímpar e  $y$  for um inteiro par. Isto é, os pontos críticos da função são os pontos

$$(2k + 1, 2s), \text{ com } k, s \in \mathbb{Z}.$$

Os pontos da forma  $(3, 2)$ ,  $(5, 0)$ ,  $(-9, -4)$ , e assim por diante. O problema é: quais deles são máximos locais? Quais são mínimos? Haverá ponto de sela? Muito bem, está na hora da hessiana!

$$\begin{aligned}
 H(x,y) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} -\frac{\pi^2}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) & 0 \\ 0 & -\frac{\pi^2}{4} \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$H(x,y) = \frac{\pi^4}{16} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right).$$

Note que, se  $x$  é ímpar e  $y$  é par,  $H(x,y) = \pm \frac{\pi^4}{16}$ , pois  $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$  é igual a 1 ou igual a  $-1$ , assim como  $\cos\left(\frac{\pi y}{2}\right)$ . Realmente, como  $x$  é ímpar,  $\frac{\pi x}{2}$  difere de  $\frac{\pi}{2}$  por um múltiplo de  $\pi$ , e como  $y$  é par,  $\frac{\pi y}{2}$  difere de 0 por um múltiplo de  $\pi$ .

Portanto, sabemos que a análise do sinal do hessiano será decisiva em todos os casos. Para isso, precisamos determinar os pontos críticos nos quais o hessiano é 1 (positivo) e os pontos críticos nos quais o hessiano é  $-1$  (negativo).

### Pontos de sela:

Os pontos de sela são aqueles onde o hessiano é negativo. Isso ocorrerá quando os sinais de  $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$  e  $\cos\left(\frac{\pi y}{2}\right)$  se alternarem. Ou seja, quando a primeira coordenada for da forma  $4n+3$  e a segunda coordenada for um múltiplo de 4. Aqui estão alguns exemplos:  $(-1,0)$ ,  $(3,0)$ ,  $(7,4)$ .

Além desses, os pontos cuja primeira coordenada é da forma  $4m+1$  e a segunda coordenada da forma  $4r+2$  são pontos de sela. Veja alguns exemplos:  $(1,2)$ ,  $(5,2)$ ,  $(9,4)$ .

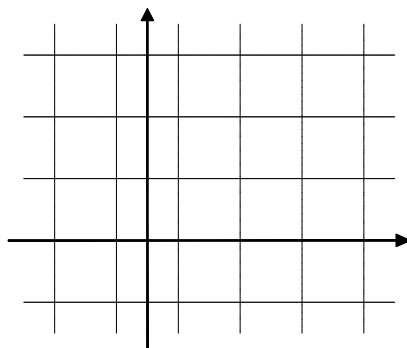
**Pontos de mínimo local:**

Neste caso, queremos  $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = -1 = \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right)$ . Isso ocorre quando  $x$  é da forma  $4j + 3$  e  $y$  é da forma  $4k + 2$ . Aqui estão alguns exemplos:  $(3, 2)$ ,  $(3, 6)$ ,  $(7, 10)$ .

**Pontos de máximo local:**

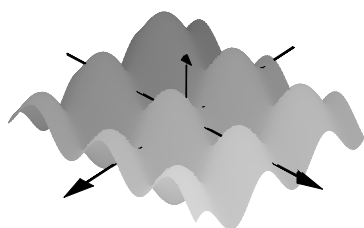
Neste caso, queremos  $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 1 = \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right)$ . Isso ocorre quando  $x = 4j + 1$  e  $y$  é múltiplo de 4. Aqui estão alguns exemplos:  $(1, 0)$ ,  $(5, 4)$ ,  $(9, -8)$ .

Isso parece mais complicado do que realmente é. Veja, vamos dividir o plano em quadrados, cada um de tamanho dois por dois, com vértices nos pontos de coordenadas do tipo (ímpar, par), como um tabuleiro de xadrez.

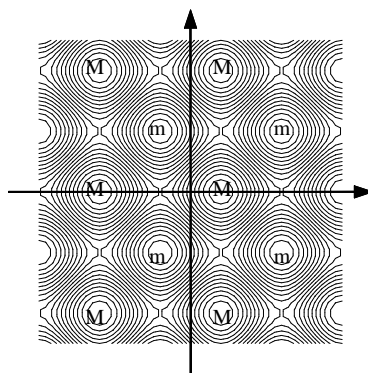


**Figura 20.13:** Localização dos pontos críticos de  $f$

Esses vértices são os pontos críticos. As selas vão se alternando dois a dois. Entre elas, nas linhas verticais do tipo  $y = \dots - 4, 0, 4, 8, \dots$ , aparecem os pontos de máximo local. Ainda alternando com as selas, aparecem os mínimos, nas linhas verticais do tipo  $y = \dots - 6, -2, 2, 6, \dots$ . Veja o gráfico da função assim como as curvas de nível.



**Figura 20.14:** Gráfico de  $f$ .



**Figura 20.15:** Curvas de nível de  $f$  com a localização dos pontos de máximo e de mínimo.

Realmente, denotamos os pontos de máximo com a letra  $M$  e os pontos de mínimo com a letra  $m$ . Os pontos de sela são aqueles que aparecem nas intersecções (em  $X$ ) das curvas de nível que são retas.

Além disso, devido a natureza da função  $f$ , os pontos de máximo local são, também, os pontos de máximo absolutos da função, assim como os pontos de mínimo.

Todos os exemplos que consideramos até agora apresentavam pontos extremos isolados, mas isso não ocorre sempre. Por exemplo, se a função é constante ou tem por gráfico uma superfície cilíndrica, ela poderá ter famílias de pontos extremos. Veja o próximo exemplo.

**Exemplo 20.6.**

As duas funções cujos gráficos estão esboçados nas figuras a seguir, apresentam pontos de máximo e de mínimos não isolados. Num exemplo, temos duas famílias de círculos concêntricos na origem, uma de pontos de máximo e outra de pontos de mínimo, que se alternam uma após a outra. Note que a origem é o único ponto de máximo isolado.

No outro exemplo, temos duas retas de máximos locais e uma reta de mínimos locais.

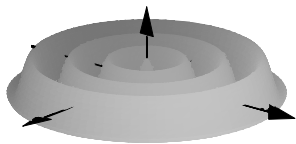


Figura 20.16.

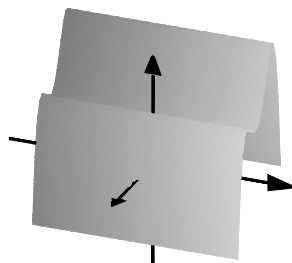


Figura 20.17.

## COMENTÁRIOS FINAIS

Nesta aula você aprendeu as definições da teoria de máximos e mínimos de funções de várias variáveis. Além disso, você recebeu o *kit básico* para lidar com os pontos extremos locais das funções de duas variáveis. Isso é, se a função é de classe  $C^2$ , os pontos extremos locais estão entre os pontos críticos da função. Além disso, o teste da derivada segunda pode ser muito útil. Não deixe de trabalhar os exercícios que serão apresentados a seguir.

A próxima aula trará mais informações sobre máximos e mínimos.

### Exercício 20.3.

1. Determine os pontos de máximo e de mínimo da função  $f(x, y) = (x - 2)^2 + (y + 1)^2$ , caso existam, em cada um dos conjuntos a seguir.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 4, -3 \leq y \leq 1\};$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3\};$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, \};$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2x - 1 \leq y \leq 2x + 1\}.$$

2. Em cada uma das funções a seguir, determine os pontos estacionários e classifique-os como máximos ou mínimo locais, ou como pontos de sela, quando for o caso.

- a.  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6;$

- b.  $g(x, y) = -x^2 - y^2 - 4x + 1;$



c.  $h(x, y) = y^2 - x^2 + 2x + 4y - 4$ ;

d.  $j(x, y) = xy + 2x - y - 2$ ;

e.  $k(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$ ;

f.  $l(x, y) = 4xy - 2x^4 - y^2$ ;

g.  $m(x, y) = y^2 + \sin x$ ;

h.  $n(x, y) = xy e^{-x}$ ;

i.  $p(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y^2} + xy$ ; considere  $x > 0$  e  $y > 0$ .

3. Seja  $g(x, y, z) = ax^2 + by^2 + dz^2$ , com  $a$ ,  $b$  e  $c$  constantes não nulas.

Mostre que  $(0, 0, 0)$  é o único ponto crítico de  $g$ . Determine a natureza deste ponto crítico nos casos em que as constantes  $a$ ,  $b$  e  $c$  têm o mesmo sinal.

O que podemos afirmar sobre tal ponto crítico no caso em que uma dessas constantes tem sinal diferente das outras duas?

4. Dê um exemplo de uma função  $f(x, y)$  que tenha uma família de retas paralelas de pontos extremos locais, alternando-se: uma de máximos e a seguinte de mínimos, mas que não tenha máximo nem mínimo absolutos. Basta esboçar o gráfico.
5. Dê um exemplo de uma função que tenha dois pontos de máximo absolutos, mais um ponto de máximo local, mas que não tenha mínimo absoluto. Basta esboçar o gráfico. Será que todas as funções com essas características têm, necessariamente, um ponto do tipo sela?



# Aula 21

## MÁXIMOS E MÍNIMOS (PARTE 2) MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

---

### Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 usar os multiplicadores de Lagrange para calcular máximos e mínimos.

## MÁXIMOS E MÍNIMOS (PARTE 2) – MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Ao pedir um conselho, estamos, na maioria das vezes,  
buscando um cúmplice.  
*Lagrange*

### INTRODUÇÃO

Na aula anterior, você aprendeu a localizar os pontos críticos de uma função  $f(x, y)$ , além de uma maneira de caracterizá-los como máximos ou mínimos locais, ou eventuais pontos de sela de  $f$ .

Portanto, estávamos interessados em fazer uma análise local dos pontos críticos. Nesta aula, nosso objetivo é encontrar os pontos de máximo e de mínimo (absolutos) de uma função  $f$  num dado conjunto  $A \subset \text{Dom}(f)$ . Ou seja, estaremos considerando um problema de caráter global.

Por exemplo, suponha que  $T(x, y)$  descreve a temperatura de uma chapa de metal, localizada em  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ .

Para determinar os pontos da chapa onde ocorrem as temperaturas extremas, temos de fazer uma análise global do comportamento de  $T$  em  $A$ .

Quando consideramos um problema dessa natureza, a primeira preocupação é saber se o problema tem solução.

Veja, antes de lançarmo-nos na busca de alguma coisa, seria interessante saber se tal coisa existe. A falta dessa informação não impede a busca (como diria Cristóvão Colombo) mas, se sabemos que o objeto da busca existe, poderíamos traçar estratégias de encontrá-lo, levando isso em conta.

O resultado matemático que nos auxilia com essa questão é um teorema da mais alta estirpe, que você já conhece do Cálculo I, o Teorema de Weierstrass.

**Teorema 21.1** (de Weierstrass).

*Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, definida no aberto  $D$  de  $\mathbb{R}^n$ . Seja  $A \subset D$  um conjunto compacto. Então,  $f$  admite ponto de máximo e ponto de mínimo em  $A$ .*

Lembre-se, um conjunto compacto é um conjunto fechado e limitado. Em particular, contém todos os pontos de seu bordo.

Nem todos os problemas que consideraremos recaem nas hipóteses do Teorema de Weierstrass, pois há circunstâncias nas quais o conjunto em questão não é limitado, por exemplo. No entanto, esse resultado é típico da Teoria das Funções Contínuas, e sua demonstração é, geralmente, apresentada nos cursos de Análise Matemática.

O Teorema de Weierstrass afirma, por exemplo, que se considerarmos a função que associa, em um determinado instante, para cada ponto da superfície terrestre, a sua temperatura, essa função admite um máximo e um mínimo.

Em outras palavras, se admitirmos que a temperatura varia continuamente de um ponto para outro, como a superfície da terra, apesar de extensa, é um conjunto compacto, há um ponto no globo terrestre no qual, naquele instante, a temperatura é máxima, e um ponto onde a temperatura é mínima.

Após essas considerações sobre a questão da existência de pontos extremos, vamos considerar a questão da localização de tais pontos. Lembra-se do detetive da aula anterior? Ele precisa encontrar suspeitos.

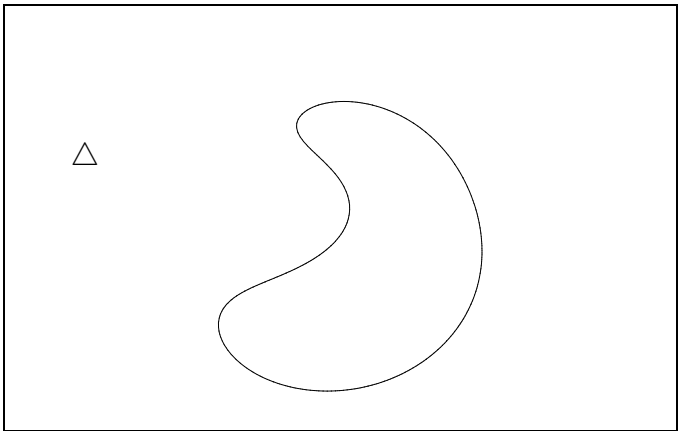
Muito bem! Há dois tipos de suspeitos: os que residem no interior do conjunto  $A$  e os que vivem no bordo de  $A$ . Para encontrar os suspeitos interioranos, usamos a técnica que você aprendeu na aula anterior: pontos críticos e análise local. Veja, se um ponto interior não é extremo local, não pode ser extremo global.

A busca por suspeitos que se localizam no bordo do conjunto  $A$  (pontos críticos no bordo) será feita com o auxílio de uma técnica chamada *Multiplicadores de Lagrange*.

### MOTIVAÇÃO

Vamos considerar a seguinte situação: um lenhador montou seu acampamento nas proximidades de uma lagoa e deparou-se com o problema de descobrir onde iria buscar água.

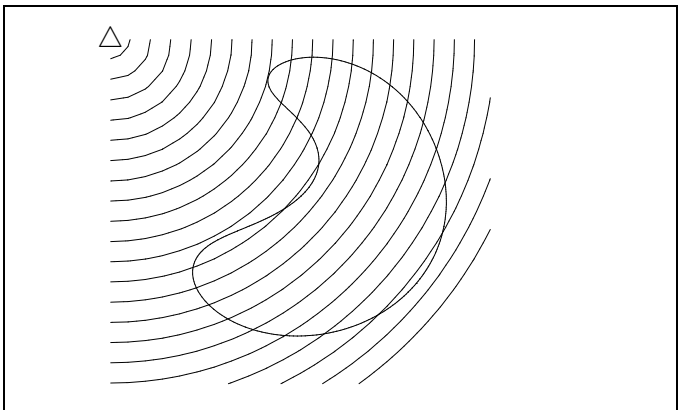
Admitindo que o terreno seja plano e que não haja maiores obstáculos, como poderíamos ajudá-lo nessa tarefa?



**Figura 21.1:** O triângulo indica a posição do acampamento e a curva fechada é a margem da lagoa.

Por sugestão de um aluno do pólo de P., o lenhador munuiu-se de uma longa corda, fixou uma de suas extremidades no acampamento e dirigiu-se para o ponto da margem que ele julgava ser o mais próximo.

Usando a corda esticada, e após algumas comparações, ele teve a certeza de ter encontrado o lugar perfeito.

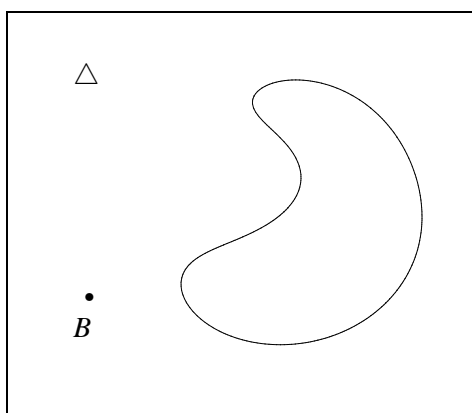


**Figura 21.2:** Os setores de círculos são as curvas de nível da função *distância até o acampamento*. No ponto da margem mais próximo do acampamento, o setor de círculo tangencia a margem.

A sugestão do aluno foi que o lenhador usasse a idéia básica do método matemático conhecido como Multiplicadores de Lagrange, assunto que você estudará nesta aula.

### Exercício 21.1.

Resolva a seguinte variante do problema: o lenhador precisa sair do acampamento, pegar água na lagoa e levá-la até o ponto B, onde ele mantém um lindo canteiro de hortaliças.



**Figura 21.3:** O ponto B indica o canteiro onde o lenhador cultiva as hortaliças.

## MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Nesta seção estaremos considerando o problema de localizar os pontos extremos de uma função  $f$  sobre um específico conjunto de nível de alguma outra função  $g$ .

O problema que consideramos na motivação se encaixa neste contexto. Basta que tomemos um sistema de coordenadas com origem no acampamento, por exemplo. A função  $f$  que queremos minimizar é a distância até a origem. Para completar a modelagem precisaríamos encontrar uma função  $g$  que tivesse a margem da lagoa como uma de suas curvas de nível.

Nessas circunstâncias, os pontos críticos serão os pontos onde os conjuntos de nível de  $f$  e o conjunto de nível específico de  $g$  são tangentes um ao outro.

O resultado que enunciaremos a seguir nos dá um critério analítico que identifica tais pontos, no caso de  $f$  e  $g$  serem funções

de duas variáveis.

**Teorema 21.2** (Multiplicadores de Lagrange).

Sejam  $f$  e  $g$  funções de classe  $C^1$ , definidas num domínio aberto comum  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ . Seja

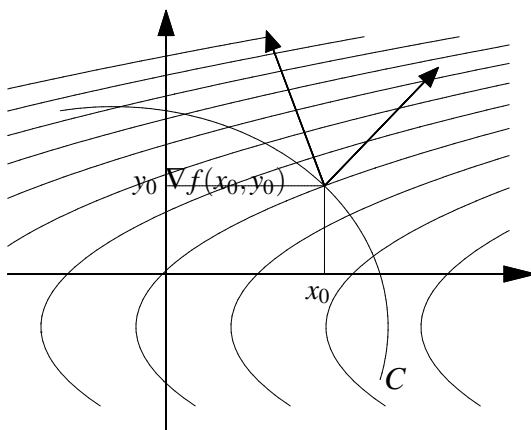
$$C = \{(x, y) \in D; g(x, y) = c\},$$

um conjunto não vazio. Se  $(a, b) \in D$  é um ponto extremo de  $f$  em  $C$  e  $\nabla g(a, b) \neq \vec{0}$ , então existe um número  $\lambda$ , tal que

$$\nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b).$$

Esse teorema nos dá uma condição necessária (mas não suficiente) para que um ponto  $(a, b) \in C$  seja um ponto extremo de  $f$ . Essa condição é que os vetores gradientes de  $f$  e de  $g$  sejam múltiplos um do outro. O escalar  $\lambda$  é o *multiplicador de Lagrange*, nesse caso.

Intuitivamente, em torno de um ponto  $(x_0, y_0)$  da curva  $C$  no qual os vetores gradientes de  $f$  e de  $g$  não estão alinhados, as curvas de nível de  $f$  e a curva  $C$  encontram-se transversalmente. Portanto, neste trecho da curva  $C$ , a função  $f$  é estritamente crescente (ou decrescente). Logo, o ponto não pode ser nem de máximo nem de mínimo local em  $C$ .



**Figura 21.4:** Comportamento de  $f$  em torno de um ponto  $(x_0, y_0)$  onde os gradientes de  $f$  e de  $g$  são linearmente independentes.

Mas, antes de você conhecer a demonstração do teorema,



veja como o método funciona num exemplo.

**Exemplo 21.1.**

Vamos determinar o ponto  $(x, y)$  pertencente à reta definida por  $3x + 2y = 12$ , tal que o produto  $xy$  de suas coordenadas seja o maior possível.

Muito bem! Colocando o problema em termos do método dos Multiplicadores de Lagrange, queremos encontrar o ponto máximo da função  $f(x, y) = xy$  no conjunto

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; g(x, y) = 12\},$$

onde  $g(x, y) = 3x + 2y$ .

O candidato a máximo deve satisfazer o sistema de equações a seguir.

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 12, \end{cases}$$

para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Vejam, como  $\nabla f(x, y) = (y, x)$  e  $\nabla g(x, y) = (3, 2)$ , temos

$$\begin{cases} y = 3\lambda \\ x = 2\lambda \\ 3x + 2y = 12. \end{cases}$$

Calculando  $\lambda$  na primeira equação e substituindo na segunda, obtemos

$$x = \frac{2}{3}y.$$

Substituindo na terceira equação, obtemos

$$2y + 2y = 12 \iff y = 3.$$

Logo, o ponto  $(2, 3)$  é o único candidato a ponto extremo da função  $f(x, y) = xy$  sobre a reta  $C$ , definida por  $3x + 2y = 12$ .

Para terminarmos o exercício devemos fazer uma análise global da situação. Como as extremidades da reta  $C$  pertencem

cem ao segundo e ao quarto quadrantes, nos quais o produto  $xy$  é negativo, podemos concluir que o ponto  $(2,3)$  é o ponto de máximo procurado.

Note que o Teorema de Weierstrass não se aplica nessa situação, uma vez que o conjunto  $C$  não é compacto, pois não é limitado.

Veja um esboço das curvas de nível de  $f$  com o conjunto  $C$ , assim como o gráfico da função  $f$  restrita ao conjunto  $C$ .

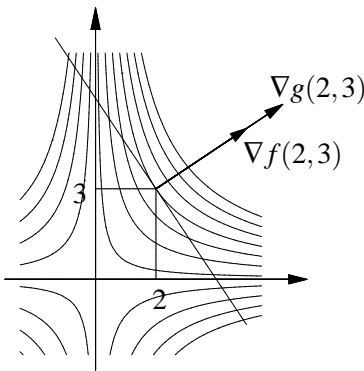


Figura 21.5.

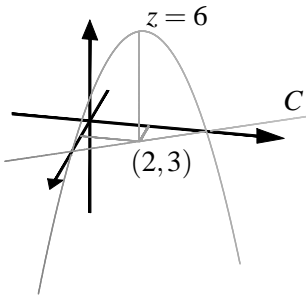
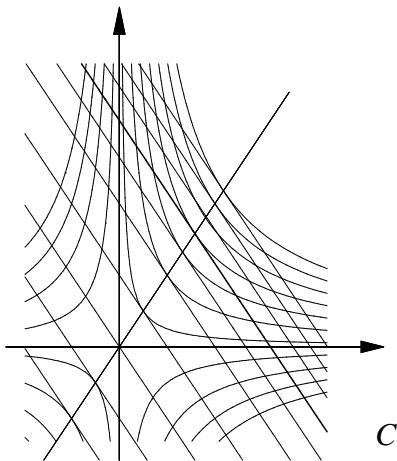


Figura 21.6.

Note que a equação  $3x = 2y$  determina o lugar geométrico dos pontos onde as curvas de nível de  $f$  e as curvas de nível de  $g$  são tangentes umas às outras. Veja a figura.



**Figura 21.7:** As hipérboles são as curvas de nível de  $f$ .  
As retas são as curvas de nível de  $g$ .

Ao resolver o sistema

$$\begin{cases} 3x = 2y \\ 3x + 2y = 12, \end{cases}$$

estamos calculando a intersecção deste tal conjunto com a curva de nível especial de  $g$ , o conjunto  $C$ , apresentado em destaque na figura anterior, relativo ao qual queremos maximizar a função  $f$ .

## SUMÁRIO DO MÉTODO

Para localizar os pontos de máximo e de mínimo de uma função  $f$  sobre o conjunto

$$C = \{(x, y) \in \text{Dom}(f) ; g(x, y) = c\}$$

devemos:

1. Resolver  $\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = c; \end{cases}$
2. Fazer a análise global.

Mas, como diz o ditado, falar é fácil, fazer é que são elas! Do ponto de vista geométrico, ao eliminarmos a variável  $\lambda$  na equação vetorial estamos determinando o lugar geométrico dos pontos nos quais as curvas de nível de  $f$  e de  $g$  são tangentes umas às outras.

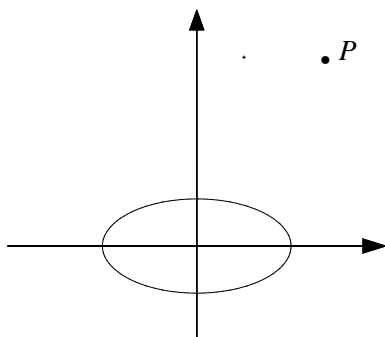
Em seguida, devemos encontrar os pontos comuns a esse lugar geométrico e à curva  $g(x, y) = c$ .

O problema é que, mesmo nos casos mais simples, as contas podem ser muito difíceis. Na verdade, esses problemas são próprios para serem abordados com o auxílio de computadores.

Veja mais um exemplo.

### Exemplo 21.2.

Vamos determinar o ponto da elipse determinada por  $x^2 + 4y^2 = 4$  que se encontram mais próximo do ponto  $P = (1, 4)$ , assim como o mais distante.



**Figura 21.8:** Elipse definida por  $x^2 + 4y^2 = 4$  e o ponto  $P$ .

Queremos determinar os pontos extremos de uma função distância, que é equivalente a determinar os pontos extremos da função quadrado da distância. Em termos de equações, queremos determinar os pontos de máximo e de mínimo da função

$$f(x,y) = (x-1)^2 + (y-4)^2,$$

restrita à condição

$$g(x,y) = x^2 + 4y^2 = 4.$$

Nesse exemplo, podemos usar o Teorema de Weierstrass para concluir que o problema tem solução, uma vez que a função  $f$  é claramente contínua (função polinomial) e a elipse é um conjunto compacto.

Como  $\nabla f(x,y) = (2x-2, 2y-8)$  e  $\nabla g(x,y) = (2x, 8y)$ , temos que resolver o sistema de equações a seguir.

$$\begin{cases} 2x-2 = 2\lambda x \\ 2y-8 = 8\lambda y \\ x^2 + 4y^2 = 4. \end{cases}$$

Resolvendo as duas primeiras equações em  $\lambda$ , obtemos

$$1 - \frac{1}{x} = \lambda = \frac{1}{4} - \frac{1}{y}.$$

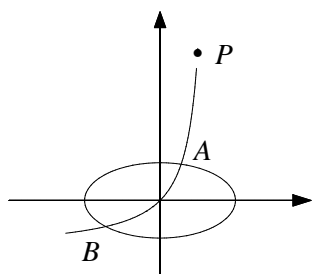
Ao fazermos essas contas, precisamos ter um pouco de cuidado. Note que no processo anterior, precisamos assumir que

$x \neq 0$  e  $y \neq 0$ . Mas, é impossível fazer omeletes sem quebrar ovos!

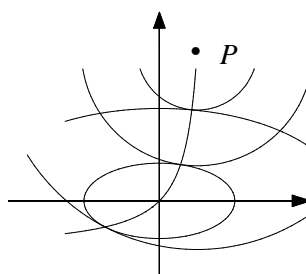
A igualdade anterior, resolvida em  $y$ , fica

$$y = \frac{4x}{4-3x}$$

que determina uma hipérbole. Os candidatos a pontos de máximo e de mínimo são os pontos comuns à essa elipse e à essa hipérbole. Veja o esboço das curvas.



**Figura 21.9:** Os pontos  $A$  e  $B$  são os candidatos a mínimo e máximo.



**Figura 21.10:** Curvas de nível de  $f$  e de  $g$  com seus pontos de tangência.

Do ponto de vista geométrico, o problema está resolvido, pois quanto mais longe de  $P$ , maior o valor de  $f$ . Assim, o ponto  $A$  é o ponto da elipse mais próximo de  $P$  e  $B$  é o mais distante.

Muito bem! No entanto, para determinar as coordenadas dos pontos  $A$  e  $B$  temos que resolver o sistema

$$\begin{cases} y = \frac{4x}{4-3x} \\ x^2 + 4y^2 = 4. \end{cases}$$

Essa tarefa não é, exatamente, fácil. Substituindo a primeira equação na segunda, obtemos

$$x^2 + 4 \left( \frac{4x}{4-3x} \right)^2 = 4,$$

que resulta em resolver a equação

$$\frac{44x^2 - 24x^3 + 9x^4 - 64 + 96x}{(-4 + 3x)^2} = 0.$$

Como sair desse *imbróglio* sem uma máquina? Bem, nem tudo é perfeito. Aqui estão aproximações para as coordenadas dos pontos, calculados num computador portátil, com um programa bastante simples:

$$A \approx (0.5582267850, 0.9602581498)$$

e

$$B \approx (-1.442220237, -0.6928204653).$$

De qualquer forma, não podemos deixar de tentar. Aqui está uma oportunidade para você praticar.

### Exercício 21.2.

Determine o ponto pertencente ao trecho da parábola definida por  $x = 4y - y^2$ , pertencente ao primeiro quadrante, tal que o produto de suas coordenadas seja o maior possível.

Veja, nessa situação vale o Teorema de Weierstrass, pois estamos considerando um trecho limitado da parábola.

Veja, agora, um exemplo onde há pontos críticos no bordo e no interior do conjunto.

### Exemplo 21.3.

Determine os pontos extremos da função  $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2y + 3$  no conjunto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

Vale recordar a estratégia: vamos montar uma lista de suspeitos: pontos críticos interiores (isto é, pontos  $(x, y)$  tais que  $x^2 + y^2 < 1$  e  $\nabla f(x, y) = \vec{0}$ ) e pontos críticos no bordo (pontos  $(x, y)$  tais que  $x^2 + y^2 = 1$ ).

Aqui está o gradiente da função  $f$ :

$$\nabla f(x, y) = (6x - 2y, -2x + 6y + 2).$$

O único ponto crítico ( $\nabla f(x, y) = \vec{0}$ ) é determinado pelo sistema de equações

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ x - 3y = 1. \end{cases}$$

Esse ponto tem coordenadas  $(-\frac{1}{8}, -\frac{3}{8})$ . Como  $(-\frac{3}{8})^2 + (-\frac{1}{8})^2 = \frac{10}{64} = \frac{5}{32} < 1$ , este ponto crítico pertence ao interior de  $A$ . Vamos calcular o hessiano da função neste ponto:

$$H\left(-\frac{1}{8}, -\frac{3}{8}\right) = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 4 = 32 > 0.$$

Como o hessiano é positivo e  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\frac{1}{8}, -\frac{3}{8}) = 6 > 0$ , o ponto  $(-\frac{1}{8}, -\frac{3}{8})$  é um mínimo local, bom candidato a mínimo absoluto de  $f$  e, portanto, bom candidato a mínimo de  $f$  em  $A$ .

Agora, o estudo no bordo, usando o método de Lagrange.

Vamos considerar  $g(x, y) = x^2 + y^2$ . Então, o bordo de  $A$  é determinado por  $g(x, y) = 1$ . Assim, temos que resolver o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Como  $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$ , temos:

$$\begin{cases} 6x - 2y = 2\lambda x \\ -2x + 6y + 2 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Só há uma coisa que um matemático deve temer: dividir por zero! Realmente, ao fazermos esses cálculos, precisamos ter um pouco de cuidado. Queremos eliminar  $\lambda$ , que aparece nas duas primeiras equações, obtendo uma relação envolvendo apenas  $x$  e  $y$ , para, com a terceira equação, determinar os pontos. Essa estratégia parece boa, mas há um pequeno detalhe. Quando isolamos  $\lambda$ , na primeira equação, fazemos:

$$\lambda = \frac{3x - y}{x},$$

que exclui a possibilidade  $x = 0$ . Mas, se  $x = 0$ , a equação  $x^2 + y^2 = 1$  nos diz que  $y = 1$  ou  $y = -1$ . No entanto, em ambos os casos, não existe  $\lambda$  que satisfaça as duas primeiras equações do sistema. Portanto, podemos prosseguir os cálculos já com a

possibilidade  $x = 0$  descartada.

Substituindo  $\lambda$  na segunda equação, obtemos

$$-x + 3y + 1 = \frac{(3x - y)y}{x}$$

Expandindo e simplificando essa equação, obtemos

$$\frac{y^2 - x^2 + x}{x} = 0$$

Queremos descobrir os pontos comuns às quádricas definidas por

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \text{círculo de raio 1} \\ x^2 - x - y^2 = 0 & \text{hipérbole.} \end{cases}$$

Fazendo  $y^2 = x^2 - x$  e substituindo em  $x^2 + y^2 = 1$ , obtemos

$$x(2x - 1) = 1.$$

Logo,  $x = 1$  ou  $x = -1/2$ .

Se  $x = 1$  então  $y = 0$ . Note que nesse caso  $\lambda = 3$ , e que esses valores de  $x$ ,  $y$ ,  $\lambda$  satisfazem as equações  $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$  e  $g(x, y) = 1$ .

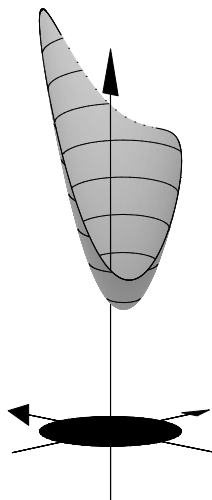
E, se  $x = -1/2$  então  $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Portanto, temos aqui a nossa lista de pontos críticos, com os valores de  $f$ , uma boa aproximação do valor, as suas localizações e a conclusão, se o ponto é máximo ou mínimo.

| $(x, y)$                              | $f(x, y)$                 | Aproximação | Localização | Conclusão |
|---------------------------------------|---------------------------|-------------|-------------|-----------|
| $(-\frac{1}{8}, -\frac{3}{8})$        | $\frac{21}{8}$            | 2.625       | interior    | mínimo    |
| $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  | $6 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$ | 8.598       | bordo       | máximo    |
| $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ | $6 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$ | 3.402       | bordo       |           |
| $(1, 0)$                              | 6                         | 6.0         | bordo       |           |

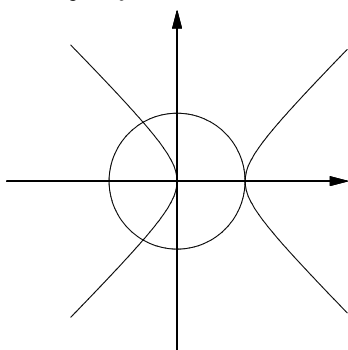


Observe que os pontos críticos  $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$  e  $(1, 0)$ , do bordo de  $A$ , não são máximo nem mínimo. Na verdade, se restringirmo-nos exclusivamente no bordo, o ponto  $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$  será o mínimo e o ponto  $(1, 0)$  uma espécie de ponto de inflexão. Veja o gráfico de  $f$  restrita ao conjunto  $A$ , apresentado numa posição reversa, para melhor observação do seu comportamento no bordo.

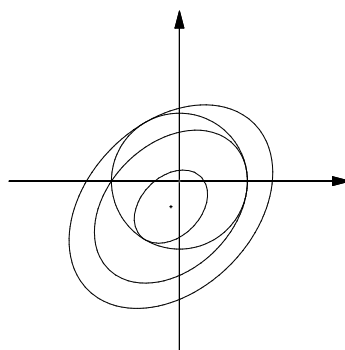


**Figura 21.11:** Gráfico de  $f$  sobre o conjunto  $A$ .

Para terminarmos a seção de figuras, veja o gráfico da condição  $x^2 + y^2 = 1$  com a hipérbole  $x^2 - x - y^2 = 0$ , que determinam os três pontos críticos do bordo e com as principais curvas de níveis da função  $f$ .



**Figura 21.12:** Curvas  $x^2 + y^2 = 1$  e  $x^2 - x - y^2 = 0$  e determinando os pontos críticos do bordo de  $A$ .



**Figura 21.13:** Curvas de nível de  $f$  que tangenciam a curva  $x^2 + y^2 = 1$ .

Puxa! A conversa estava animada e a gente nem se deu pelo avançado da hora! Na próxima aula você verá a demonstração

do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, assim como mais exemplos. Ainda falta considerarmos situações que envolvam funções com mais do que duas variáveis. Além disso, nosso detetive está com uma dúvida: por que o método é denominado Multiplicadores de Lagrange se, até agora, só usamos  $\lambda$ , um multiplicador? Muito bem, tudo isso, e muito mais, na próxima aula.

Aqui está uma lista de exercícios para você praticar.

### Exercício 21.3.

1. Determine os pontos de máximo e de mínimo da função  $f(x, y) = 4 - 2x + 3y$  no conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 4x^2 + 9y^2 \leq 36\}.$$

2. Determine os pontos de máximo e de mínimo da função  $f(x, y) = x^2 + 4y^2$  no conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + 4y = 8\},$$

caso existam.

3. Determine os pontos da curva definida por  $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$  que estão mais próximos e os que estão mais distantes da origem.
4. Determine os pontos de máximo e de mínimo da função  $f(x, y) = xy$  no conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x + 3y \leq 3\}.$$

5. Determine os pontos de máximo e de mínimo da função  $f(x, y) = x^2 + y^2$  no conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - xy + y^2 = 3\}.$$

# Aula 22

## MULTIPLICADORES DE LAGRANGE (PARTE 3)

---

### O b j e t i v o s

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 usar os multiplicadores de Lagrange para calcular máximos e mínimos.

## MULTIPLICADORES DE LAGRANGE - (PARTE 3)

Começamos com um exemplo no qual queremos determinar o máximo e o mínimo de uma função contínua em um conjunto cujo bordo pode conter “esquinas”. Nesses casos, tais pontos também precisam ser levados em conta no momento da análise final. Aqui está o exemplo.

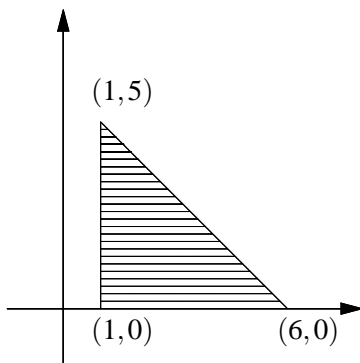
### Exemplo 22.1.

Vamos determinar os pontos de máximo e de mínimo da função

$$f(x, y) = y^2 - 2xy$$

no conjunto

$$A = \{(x, y); \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 6, x \geq 1, y \geq 0\}.$$



**Figura 22.1:** Esboço do conjunto A.

Note que o bordo de A é formado por três segmentos de retas. Precisamos encontrar em quais pontos esses segmentos são tangentes às curvas de nível de  $f$ .

Primeiro, o segmento que está contido no eixo  $Ox$ , e que une os pontos  $(1,0)$  e  $(6,0)$ . Este segmento é caracterizado pela equação

$y = 0$ , com  $1 \leq x \leq 6$ . Aplicamos o método de Lagrange, buscando as soluções do sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g_1(x, y) \\ g_1(x, y) = y = 0, \end{cases}$$

no qual  $f(x, y) = y^2 - 2xy$  e, portanto,  $\nabla f(x, y) = (-2y, 2y - 2x)$ .

Como  $\nabla g_1(x, y) = (0, 1)$ , queremos resolver o sistema

$$\begin{cases} -2y = 0 \\ 2y - 2x = \lambda \\ y = 0, \end{cases}$$

que tem solução  $\lambda = 2x$ . Assim, todos os pontos da forma  $(t, 0)$ , com  $t \in [1, 6]$  são candidatos a máximo ou a mínimo.

Agora o segmento contido na reta  $x = 1$ , com  $0 \leq y \leq 5$ , unindo os pontos  $(1, 0)$  e  $(1, 5)$ . Agora, a condição é  $g_2(x, y) = x = 1$  e queremos resolver o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g_2(x, y) \\ g_2(x, y) = x = 1, \end{cases}$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} -2y = \lambda \\ 2y - 2x = 0 \\ x = 1, \end{cases}$$

pois  $\nabla g_2(x, y) = (1, 0)$ .

A solução é um ponto isolado:  $(1, 1)$ , com  $\lambda = -2$ .

Finalmente consideramos o segmento contido na reta  $x + y = 6$ , unindo os pontos  $(1, 5)$  e  $(6, 0)$ . Agora, a condição é  $g_3(x, y) = x + y = 6$  e queremos resolver o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g_3(x, y) \\ g_3(x, y) = x + y = 6, \end{cases}$$

que é equivalente a

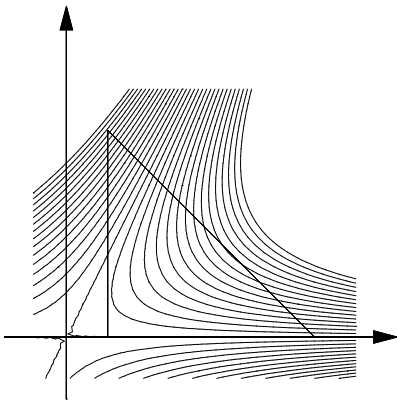
$$\begin{cases} -2y = \lambda \\ 2y - 2x = \lambda \\ x + y = 6. \end{cases}$$

Das duas primeiras equações, obtemos  $2y - x = 0$ . Substituindo  $x = 2y$  na terceira equação, obtemos  $3y = 6$ , ou  $y = 2$ . Portanto, a solução do sistema determina o ponto  $(4,2)$ , com  $\lambda = -4$ .

Podemos estabelecer uma tabela com os pontos “suspeitos” e fazer a análise global, determinando quais pontos são máximos e quais ponto são mínimos de  $f(x,y) = y^2 - 2xy$  em  $A$ .

| $(x,y)$ | $f(x,y)$ | Localização                   | Conclusão            |
|---------|----------|-------------------------------|----------------------|
| $(4,2)$ | $-12$    | Interior do segmento oblíquo  |                      |
| $(1,1)$ | $-1$     | Interior do segmento vertical |                      |
| $(t,0)$ | $0$      | Todo o segmento horizontal    | Máximo de $f$ em $A$ |
| $(1,5)$ | $-15$    | Vértice superior              | Mínimo de $f$ em $A$ |

Veja, todos os pontos do segmento horizontal,  $(t,0)$ , como  $t \in [1,6]$ , são pontos de máximo de  $f$  em  $A$ . Isso ocorre pois  $y = 0$  é uma curva de nível zero. Veja um esboço do bordo do conjunto  $A$  sobre algumas curvas de nível da função  $f$ .



**Figura 22.2:** Curvas de nível de  $f$  e o bordo de  $A$ .

Observe que, nos pontos  $(1, 0)$  e  $(4, 2)$ , as curvas de nível de  $f$  tangenciam os segmentos. Já o segmento horizontal que une os pontos  $(1, 0)$  e  $(6, 0)$  está contido em uma curva de nível.

### Exercício 22.1.

Determine o máximo e o mínimo da função  $f(x, y) = 2x + y$  no conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y \leq 4, y \geq x, x \geq 0\}.$$

E agora, um exemplo envolvendo uma função com três variáveis.

### Exemplo 22.2.

Queremos determinar os pontos de máximo e de mínimo da função  $f(x, y, z) = x^2 - y - z$  no conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 - 4z \leq 0\}.$$

Veja que o conjunto  $A$  é uma bola fechada, limitada pela esfera de centro no ponto  $(0, 0, 2)$  e raio 2, definida pela equação

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 + (z - 2)^2 = 4.$$

Como  $f$  é uma função polinomial, em particular é contínua. Além disso, o conjunto  $A$  é compacto, pois é fechado e limitado. Assim, o Teorema de Weierstrass pode ser aplicado, garantindo que  $f$  tem pontos de máximo e de mínimo em  $A$ .

Agora, achar esses pontos é que são elas!

Colocando o boné de detetive, vamos ao trabalho, começando a busca de eventuais pontos críticos no interior do conjunto  $A$  (determinado pela inequação  $x^2 + y^2 + z^2 - 4z < 0$ ).

Para isso, precisamos do gradiente da função  $f(x, y, z) = x^2 - y - z$ :

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 1, 1).$$

Como  $\|\nabla f(x, y, z)\| = \sqrt{4x^2 + 2} \geq \sqrt{2} > 0$ ,  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , concluímos que  $\nabla f(x, y, z) \neq \vec{0}$ ,  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Portanto,  $f$  não admite pontos extremos locais. Isso significa que toda a nossa ação em busca de pontos extremos se concentrará no bordo do conjunto  $A$ .

Para determinar os pontos críticos de  $f$  no bordo de  $A$ , usamos o teorema enunciado na aula anterior, para funções de duas variáveis, e que será demonstrada logo a seguir, na versão para funções de três variáveis.

Isto é, os pontos extremos da função  $f(x, y, z) = x^2 - y - z$ , no conjunto determinado por

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0,$$

são soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Como  $\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z - 4)$ , temos que encontrar a solução de

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ -1 = 2\lambda y \\ -1 = 2\lambda (z - 2) \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0. \end{cases}$$

Se  $\lambda = 1$ , a primeira equação será satisfeita para todos os valores de  $x$ . As duas outras equações nos dão  $y = -\frac{1}{2}$  e  $z = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$ .

Substituindo esses valores na última equação, obtemos os dois possíveis valores de  $x$ :  $\pm \frac{\sqrt{14}}{2}$ . Assim, os pontos  $(-\sqrt{14}, -1/2, 3/2)$  e  $(\sqrt{14}, -1/2, 3/2)$  satisfazem as quatro equações quando  $\lambda = 1$ .

Agora, de volta à primeira equação, observamos que, se  $x = 0$ , ela será satisfeita para todos os valores de  $\lambda$ . Além disso,



as equações  $2\lambda y = -1$  e  $2\lambda(z-2) = -1$  nos dão:

$$2\lambda y = 2\lambda(z-2),$$

que, se  $\lambda \neq 0$ , gera  $y = z - 2$ .

Substituindo  $x = 0$  e  $y = z - 2$  na quarta equação do sistema, obtemos

$$2y^2 = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad y = \pm \sqrt{2}.$$

Obtemos, assim, mais dois pontos críticos:  $(0, \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$  e  $(0, -\sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$ .

Para determinar quais desses pontos são pontos de máximo ou de mínimo de  $f(x, y, z) = x^2 - y - z$ , no conjunto determinado por  $g(x, y, z) = 0$ , montamos uma tabela e fazemos uma análise global.

| $(x, y, z)$                    | $f(x, y, z)$     | Aproximação | Conclusão       |
|--------------------------------|------------------|-------------|-----------------|
| $(\sqrt{14}, -1/2, 3/2)$       | $5/2$            | 2.5         | ponto de máximo |
| $(-\sqrt{14}, -1/2, 3/2)$      | $5/2$            | 2.5         | ponto de máximo |
| $(0, \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$  | $-2 - 2\sqrt{2}$ | -4.82843    | ponto de mínimo |
| $(0, -\sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$ | $-2 + 2\sqrt{2}$ | 0.82843     | —               |

Poderíamos terminar o exemplo neste ponto, uma vez que já obtemos a informação esperada. De qualquer forma, veja uma série de ilustrações com as diversas situações que ocorreram no exemplo. O objetivo dessa apresentação é ampliar sua visão geométrica desse tipo de situação.

Observe que as soluções do sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

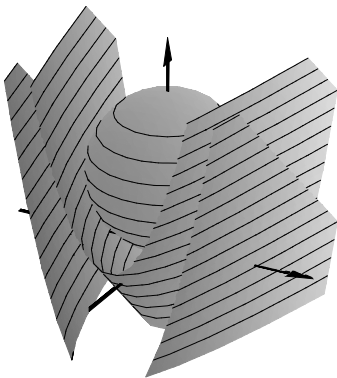
determinam os pontos nos quais as superfícies de nível de  $f$  são tangentes à superfície determinada pela condição  $g(x, y, z) = 0$ , uma vez que nesses pontos os vetores ortogonais aos planos são

múltiplos um do outro.

Você deve ter notado que as superfícies de nível de  $f$  são calhas parabólicas, paralelas umas às outras.

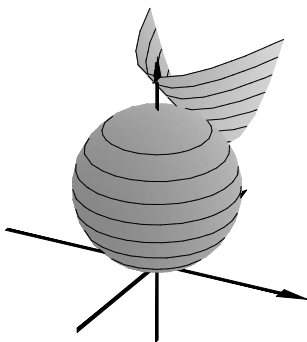
Veja primeiro a superfície de nível  $5/2$ , correspondente ao par de pontos de máximo de  $f$  em  $A$ ,  $(\sqrt{14}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$  e  $(-\sqrt{14}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ .

Esses pontos são comuns à superfície de nível  $5/2$  de  $f$  e à esfera determinada pela condição  $g(x,y,z) = 0$ , onde as duas superfícies se tangenciam.

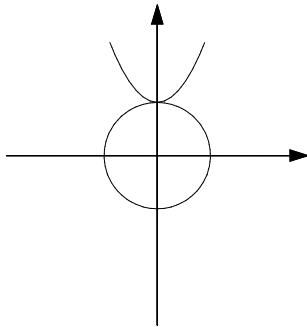


**Figura 22.3:** Superfícies de nível  $5/2$  e  $4$  de  $f(x,y,z) = x^2 - y - z$  e a esfera definida por  $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$ .

Na próxima ilustração você verá a superfície de nível  $-2 - 2\sqrt{2}$ , que tangencia a esfera determinada por  $g(x,y,z) = 0$  no ponto  $(0, \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$ , ponto de mínimo de  $f$  em  $A$ . Veja, também, o corte da esfera e da superfície de nível  $-2 - 2\sqrt{2}$  de  $f$  pelo plano  $z = 2 + \sqrt{2}$ .

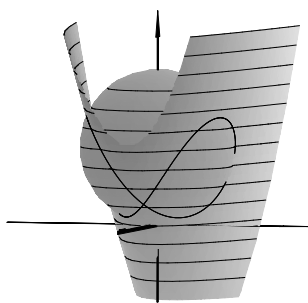


**Figura 22.4:** Superfícies de nível  $-2 - 2\sqrt{2}$ .

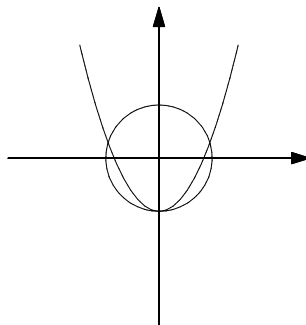


**Figura 22.5** Corte pelo plano  $z = 2 + \sqrt{2}$ .

Finalmente, para entender porque o ponto  $(0, -\sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$  não é máximo nem mínimo de  $f$  em  $A$ , veja na figura a seguir que, apesar dos gradientes de  $f$  e  $g$  serem múltiplos um do outro neste ponto (e, portanto, os respectivos planos tangentes coincidem), as duas superfícies se cortam ao longo de uma curva com a forma de uma figura oito.




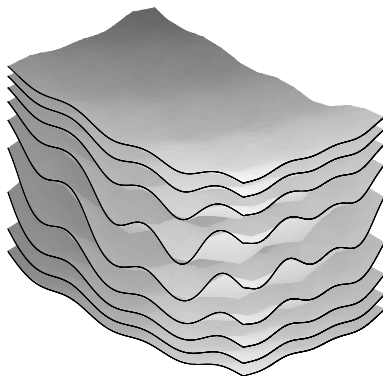
**Figura 22.6:** Superfícies de nível  $-2 + 2\sqrt{2}$ .



**Figura 22.7:** Corte pelo plano  $z = 2 - \sqrt{2}$ .

Isto significa que, em qualquer pequena vizinhança do ponto  $(0, -\sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$  a função  $f$  atinge níveis maiores e níveis menores do que  $-2 + 2\sqrt{2}$ . Portanto, tal ponto não é máximo nem mínimo da função em  $A$ .

 As superfícies de nível de uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $\nabla f(X) \neq \vec{0}, \forall X \in \mathbb{R}^n$ , como é o caso da função dada neste exemplo, estabelecem em  $\mathbb{R}^n$  uma estrutura matemática particularmente interessante, chamada *folheação*. A grosso modo, uma folheação é uma decomposição do espaço ambiente (no caso do exemplo,  $\mathbb{R}^3$ ) em subespaços de uma dada dimensão, a mesma para todos eles, chamados de *folhas*, e que se empilham uns sobre os outros, ocupando todo o espaço ambiente. Isto é, cada ponto do espaço está contido em uma única folha. Além disso, o espaço ambiente localmente se parece com uma barra de *mil folhas*, um desses docinhos que encontramos em toda boa confeitaria.



**Figura 22.8:** Vizinhança folheada de  $\mathbb{R}^3$

### Exercício 22.2.

Considere  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $f(x, y, z) = ze^{-(x^2+y^2)}$ .

Mostre que  $f$  é tal que  $\nabla f(x, y, z) \neq \vec{0}$ ,  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Faça um esboço das superfícies de nível de  $f$ . O conjunto dessas superfícies define uma folheação de  $\mathbb{R}^3$ , na qual cada folha é o gráfico de uma função  $z$  nas variáveis  $x$  e  $y$ .

Você seria capaz de descrever uma outra folheação de  $\mathbb{R}^3$  que não gozasse dessa propriedade (isto é, cada folha é o gráfico de uma função)?

## DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE LAGRANGE

Nesta seção vamos demonstrar o seguinte teorema:

### **Teorema 22.1.**

Sejam  $f$  e  $g$  funções de classe  $C^1$ , definidas num domínio aberto comum  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ . Seja

$$C = \{(x, y) \in D; g(x, y) = c\},$$

um conjunto não vazio. Se  $(a, b) \in D$  é um ponto extremo de  $f$  em  $C$  e  $\nabla g(a, b) \neq \vec{0}$ , então existe um número  $\lambda$ , tal que

$$\nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b).$$

### Demonstração

Sabemos que  $\nabla g(a, b) \neq \vec{0}$ . Podemos supor, sem perda de generalidade, que  $\frac{\partial g}{\partial y}(a, b) \neq 0$ . Isto é, a segunda coordenada de  $\nabla g(a, b)$  é não nula. Assim, o Teorema da Função Implícita garante a existência de um intervalo aberto  $I$ , tal que  $a \in I$ , e de uma função diferenciável  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$g(x, h(x)) = c,$$

e  $h(a) = b$ .

Vamos considerar a função  $F : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$F(x) = f(x, h(x)).$$

$F$  é a composição da curva  $\alpha(x) = (x, h(x))$ , definida em  $I$ , com a função  $f$  que assume um valor extremo em  $(a, b)$  em  $C$ , definido por  $g(x, y) = c$ .

Como  $f$  e  $h$  são funções diferenciáveis,  $F$  é uma função diferenciável e

$$F'(x) = \nabla f(x, h(x)) \cdot (1, h'(x)).$$

Além disso,  $F$  assume um valor extremo (local) em  $a$ . Portanto,

$$F'(a) = \nabla f(a, h(a)) \cdot (1, h'(a)) = 0.$$

Mas,  $h(a) = b$  e  $h'(a) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(a, b)}{\frac{\partial g}{\partial y}(a, b)}$ . Assim,

$$\nabla f(a, b) \cdot \left(1, -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(a, b)}{\frac{\partial g}{\partial y}(a, b)}\right) = 0.$$

Multiplicando esta última igualdade por  $\frac{\partial g}{\partial y}(a, b) \neq 0$ , obtemos

$$\nabla f(a, b) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial y}(a, b), -\frac{\partial g}{\partial x}(a, b)\right) = 0.$$

Os vetores  $\left(\frac{\partial g}{\partial y}(a,b), -\frac{\partial g}{\partial x}(a,b)\right)$  e  $\nabla g(a,b) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(a,b), \frac{\partial g}{\partial y}(a,b)\right)$  são ortogonais, uma vez que o produto interno deles é nulo. Como esses vetores estão todos contidos em  $\mathbb{R}^2$ , concluímos que  $\nabla g(a,b)$  ( $\neq \vec{0}$ ) e  $\nabla f(a,b)$  são colineares. Assim, existe um número  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$\nabla f(a,b) = \lambda \nabla g(a,b).$$

CQD

Você deve ter observado a frase “podemos supor, sem perda de generalidades, que  $\frac{\partial g}{\partial y}(a,b) \neq 0$ ”, bem no início da demonstração. É claro que ela contém uma certa provocação. Quando encontramos uma frase de tal teor numa demonstração, devemos ser capazes de completar a prova, caso a afirmação não seja verdadeira, usando argumentos semelhantes aos da demonstração. É uma maneira que o expositor usa para dizer: olhe, você deve ser capaz de construir a parte da demonstração que está faltando, que não está escrita aqui para economizar tempo, papel, tinta etc.

### Exercício 22.3.

Complete a demonstração anterior, provando que a afirmação é verdadeira no caso em que  $\frac{\partial g}{\partial y}(a,b) = 0$ .

Veja que, como  $\nabla g(a,b) \neq \vec{0}$ , o fato de  $\frac{\partial g}{\partial y}(a,b) = 0$  implica em  $\frac{\partial g}{\partial x}(a,b) \neq 0$ . Assim, você poderá usar o Teorema da Função Implícita para mostrar que  $x$  pode ser escrito como uma função diferenciável  $k$ , de  $y$ , num intervalo aberto  $J$  contendo  $b$ , tal que  $g(k(y), y) = c$  e  $k(b) = a$ .

## UM EXEMPLO COM DUAS RESTRIÇÕES

Você deve ter ficado curioso com a nomenclatura. Seguindo a tradição, usamos a terminologia *multiplicadores de Lagrange* o tempo todo, mas, até agora, só vimos situações onde há um único multiplicador, o  $\lambda$ . Na verdade, podemos usar a técnica

de Lagrange para abordar situações mais complicadas. Se subtermos o domínio de  $f$  a mais do que uma condição, precisaremos de mais multiplicadores, um para cada condição.

Para ilustrar essa situação um pouco mais geral consideraremos o caso em que queremos identificar um ponto extremo local de uma função  $f(x, y, z)$ , de três variáveis, em um subconjunto  $C$  de seu domínio, que é determinado por duas restrições (ou condicionado por duas equações)  $g(x, y, z) = d$  e  $h(x, y, z) = e$ .

Em geral, esse conjunto de condições define uma curva, obtida da intersecção da superfície definida por  $g(x, y, z) = d$  com a superfície definida por  $h(x, y, z) = e$ . Nesse caso, queremos caracterizar os pontos extremos locais de  $f$  ao longo de tal curva.

Isso é estabelecido pelo seguinte teorema, também atribuído a Lagrange.

### **Teorema 22.2.**

*Seja  $f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável, definida no aberto  $A$  de  $\mathbb{R}^3$  e seja*

$$C = \{(x, y, z) \in A; g(x, y, z) = d \text{ e } h(x, y, z) = e\},$$

*um conjunto não vazio, onde  $g$  e  $h$  são funções de classe  $C^1$ , definidas em  $A$ . Suponhamos que os vetores  $\nabla g(x, y, z)$  e  $\nabla h(x, y, z)$  sejam linearmente independentes em  $C$ . Se  $(a, b, c)$  é um ponto extremo (local) de  $f$  em  $C$ , então existem números  $\lambda$  e  $\mu$ , tais que*

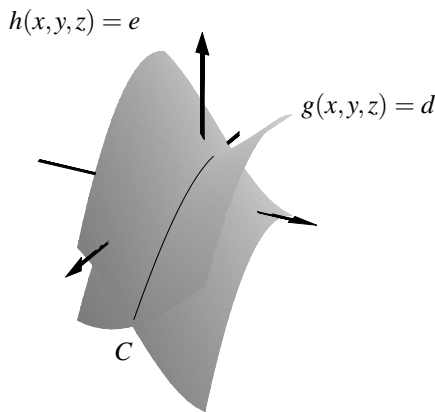
$$\nabla f(a, b, c) = \lambda \nabla g(a, b, c) + \mu \nabla h(a, b, c).$$

## **COMENTÁRIOS SOBRE O TEOREMA**

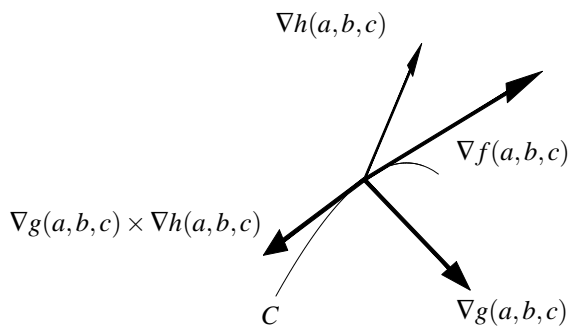
Esse teorema nos dá uma condição necessária para  $(a, b, c)$  ser um ponto extremo (local) de  $f$  em  $C$ . Essa condição é que o vetor gradiente de  $f$ , neste ponto, pertence ao plano gerado pelos vetores gradientes de  $g$  e de  $h$ .

Sabemos que  $\nabla g(x, y, z)$  e  $\nabla h(x, y, z)$  são linearmente independentes ao longo da curva  $C$ . Portanto,  $\nabla g(x, y, z) \times \nabla h(x, y, z)$  é não nulo e tangente a essa curva.

Agora, no ponto  $(a,b,c)$ , extremo de  $f$  em  $C$ , a superfície de nível de  $f$  é tangente a tal curva. Como  $\nabla f(a,b,c)$  é ortogonal a tal superfície, deve ser ortogonal a  $\nabla g(x,y,z) \times \nabla h(x,y,z)$  e, portanto, pertence ao plano gerado pelos vetores  $\nabla g(x,y,z)$  e  $\nabla h(x,y,z)$ . Isto é, existem números  $\lambda$  e  $\mu$ , tais que  $\nabla f(a,b,c) = \lambda \nabla g(a,b,c) + \mu \nabla h(a,b,c)$ . Veja a ilustração a seguir.



**Figura 22.9:** Superfícies definidas por  $g(x,y,z) = d$  e  $h(x,y,z) = e$ , cuja intersecção é a curva  $C$ .



**Figura 22.10:** A curva  $C$  e o referencial definido por  $\nabla g(a,b,c)$ ,  $\nabla h(a,b,c)$  e  $\nabla g(a,b,c) \times \nabla h(a,b,c)$ .

**Exemplo 22.3.**

Vamos determinar os pontos de máximo e de mínimo da função

$$f(x,y,z) = 2x + 2y - z$$



no conjunto

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 + z = 4 \text{ e } x + y - z = 0\}.$$

Antes de começar a fazer contas, vamos pensar um pouco. (Você deve, sempre, pensar antes de começar a fazer as contas.)

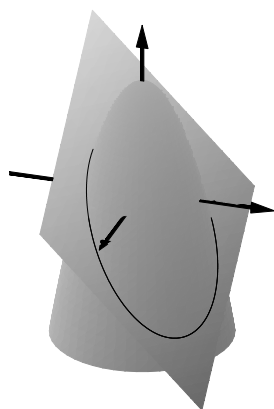
Notamos que  $f$  é uma função contínua. Se o conjunto  $C$  for compacto, poderemos usar o Teorema de Weierstrass para concluir que o problema terá solução. Voltemos, então, nossa atenção para o conjunto  $C$ .

Esse é um subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  determinado por *duas* condições:

$$x^2 + y^2 + z - 4 \text{ e } x + y - z = 0.$$

Essas duas equações determinam um parabolóide de revolução e um plano, respectivamente.

A intersecção de tais subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$  pode ser vazia, pode ser formada por um único ponto (caso o plano seja tangente ao parabolóide) ou pode ser uma curva fechada. Essa última situação é o caso do exemplo. Portanto,  $C$  é um conjunto compacto e podemos fazer as contas sabendo que os pontos procurados existem.



**Figura 22.11:** Conjunto  $C$

Os pontos procurados são soluções do sistema de equações a seguir.

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z) \\ g(x, y, z) = d \\ h(x, y, z) = e. \end{cases}$$

Como  $\nabla f(x, y, z) = (2, 2, -1)$ ,  $\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 1)$  e  $\nabla h(x, y, z) = (1, 1, -1)$ , o sistema que queremos resolver é o seguinte:

$$\begin{cases} 2 = 2\lambda x + \mu \\ 2 = 2\lambda y + \mu \\ -1 = \lambda - \mu \\ x^2 + y^2 + z = 4 \\ x + y - z = 0. \end{cases}$$

A terceira equação nos dá  $\mu = \lambda + 1$ , que substituída nas duas primeiras equações gera

$$\lambda(2x + 1) = 1 \quad \text{e} \quad \lambda(2y + 1) = 1.$$

Se considerarmos  $\lambda \neq 0$ , temos que  $x = y$ , que substituído nas duas últimas equações gera o sistema

$$\begin{cases} 2x^2 + z = 4 \\ 2x - z = 0. \end{cases}$$

Somando essas duas equações, obtemos  $x^2 + x - 2 = 0$ , cujas raízes são  $x = 1$  e  $x = -2$ . Como  $x = y$  e  $z = 2x$ , os pontos  $(1, 1, 2)$  e  $(-2, -2, -4)$  são soluções do sistema inicial com  $\lambda \neq 0$ .

Estas são as únicas soluções possíveis, pois se  $\lambda = 0$ , as três primeiras equações não têm solução em comum.

Assim, terminamos essa aula. Não deixe de praticar os exercícios apresentados a seguir.

**Exercício 22.4.**

1. Determine o máximo e o mínimo, caso existam, da função

$$f(x, y) = xy$$

no conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 4 - 2x\}.$$

2. Determine o máximo e o mínimo, caso existam, da função

$$f(x, y) = ye^{x^2/2}$$

no conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x - 2/3)^2 + y^2 = 4/9\}.$$

3. Determine o máximo e o mínimo, caso existam, da função

$$f(x, y) = x + y$$

no conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, 2y + x \leq 6, y + 2x \leq 6\}.$$

4. Determine o máximo e o mínimo, caso existam, da função

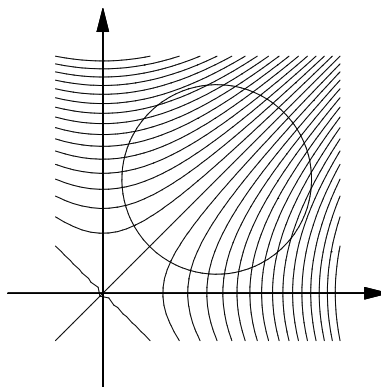
$$f(x, y) = y - (y - 2)^2$$

no conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, 2y + x \leq 8\}.$$

5. A figura a seguir mostra as curvas de nível da função  $f(x, y) = x^2 - y^2$  e a circunferência de centro em  $(3/5, 3/5)$  e raio  $1/2$ . Indique, na figura, o ponto mais provável no qual ocorre o máximo de  $f$  no conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x - 3/5)^2 + (y - 3/5)^2 \leq 1/4\}.$$



Curvas de nível de  $f$  e o conjunto  $A$ .

6. Chamamos a expressão

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

de uma forma quadrática. Suponhamos que alguma das constantes  $A$ ,  $B$  ou  $C$  é não nula e considere

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2.$$

Mostre que  $(0, 0)$  é um ponto crítico de  $f$ .

Dizemos que  $(0, 0)$  é um ponto crítico não-degenerado se o hessiano de  $f$  é não nulo.

Suponha que  $(0, 0)$  é um ponto crítico não-degenerado da função  $f$ . Mostre que as curvas de nível não vazias próximas de 0 são elipses (ou círculos) se, e somente se,  $(0, 0)$  é um ponto máximo ou ponto mínimo local de  $f$ . No caso de  $(0, 0)$  ser um ponto de sela, mostre que as curvas de nível próximas de 0 são hipérboles.

7. Determine o máximo e o mínimo, caso existam, da função

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2$$

no conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 3 \text{ e } x + z = 3\}.$$

8. Determine o máximo e o mínimo, caso existam, da função

$$f(x, y, z) = x + 2y + 3z$$

no conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ e } x + y + z = 1\}.$$

# Aula 23



## SOLUÇÕES DE EXERCÍCIOS

---

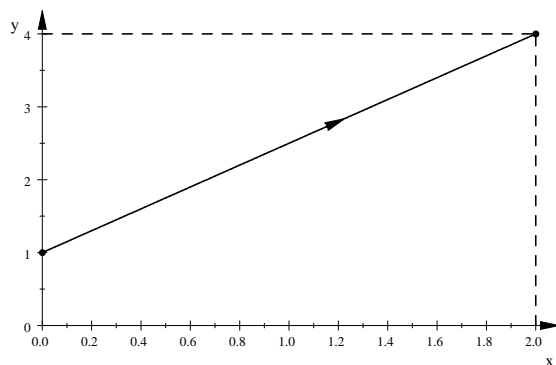
### Objetivo

- 1 Apresentar gabarito de exercícios do módulo.

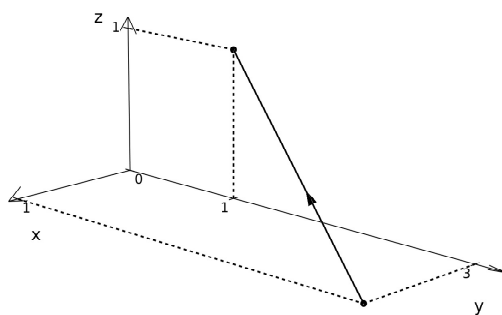
## AULA 1 - FUNÇÕES VETORIAIS DE UMA VARIÁVEL REAL

### Exercício 1.4.

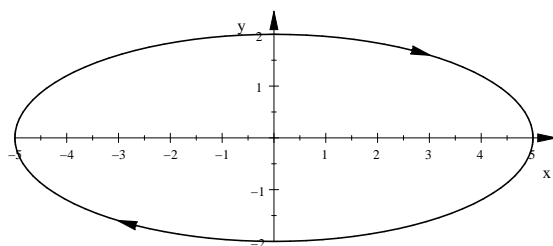
1.  $\alpha(t) = (1 - 4t, -1 + 5t), t \in \mathbb{R}$
2.  $\alpha(t) = (2 - 2t, 1 + 5t), t \in \mathbb{R}$
3.  $\alpha(t) = (1 + \frac{t}{3}, 4 + \frac{4t}{3}), t \in \mathbb{R}$
4.  $\alpha(t) = (-3t, 2t, -2 + 3t), t \in \mathbb{R}$
5. a.  $\alpha(t) = (2t, 3t + 1), t \in [0, 1]$ .



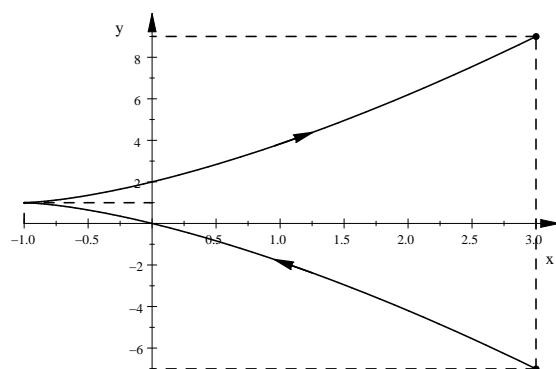
- b.  $\beta(t) = (1 - t, 3 - 2t, t), t \in [0, 1]$ ;



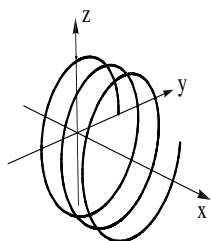
c.  $\gamma(t) = (5 \cos 2t, -2 \sin 2t) \quad t \in [0, \pi];$



d.  $\gamma(t) = (t^2 - 1, t^3 + 1), \quad t \in [-2, 2].$



6. Curva  $\alpha(t)$



7. a.  $\alpha(t) = (3 + (t+1)^2, t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .  
 b.  $\alpha(t) = (-3 + 2\cos t, 4 + 2\sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .  
 c.  $\alpha(t) = (1/2 \sinh t, \cosh t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .  
 d.  $\alpha(t) = (1 + 2\cos t, -2 + 3\sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

## AULA 2 - LIMITE E CONTINUIDADE

### Exercício 2.1.

1. a.  $x = -2, x = 8$ .  
 b.  $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ .  
 c.  $x \in (-2, 2) \cup (2, 6)$ .  
 d.  $x \in (-\infty, -5) \cup (-1, +\infty)$ .  
 e.  $x \in (-3, -2) \cup (0, 1)$ .  
 f.  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tais que  $x^2 + y^2 = 2$ .  
 g.  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - 1, 0$  tais que  $(x-1)^2 + y^2 \leq 4$ .  
 h.  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tais que  $(x-2)^2 + (y-2)^2 \geq 16$ .  
 i.  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tais que  $1 < (x-2)^2 + y^2 < 4$ .  
 j.  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tais que  $(x-1)^2 + y^2 + z^2 < 1$ .
2. a.  $(-2, 1)$   
 b.  $(0, 2)$   
 c.  $(2\sqrt{2}, -\frac{e^{\sqrt{2}}}{6})$   
 d.  $(\frac{3}{2}, 3, \pi)$
3.  $a = 2, b = 3$ .
- 4.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow a} \alpha \circ f(t) &= \left( \lim_{t \rightarrow a} \alpha_1 \circ f(t), \lim_{t \rightarrow a} \alpha_2 \circ f(t), \lim_{t \rightarrow a} \alpha_3 \circ f(t) \right) \\ &= \left( \alpha_1 \left( \lim_{t \rightarrow a} f(t) \right), \alpha_2 \left( \lim_{t \rightarrow a} f(t) \right), \alpha_3 \left( \lim_{t \rightarrow a} f(t) \right) \right) \\ &= (\alpha_1(f(a)), \alpha_2(f(a)), \alpha_3(f(b))) \\ &= \alpha(f(a)) \\ &= \alpha \circ f(a) \end{aligned}$$



## AULA 3 - DERIVADAS DE FUNÇÕES VETORIAIS

### Exercício 3.1.

1.
  - a.  $\alpha'(t) = (2t, 3t^2 - 3)$ .
  - b.  $\beta'(t) = (\cos 2t - 2t \operatorname{sen} 2t, 18 \cos 3t)$ .
  - c.  $\gamma'(t) = (\cosh t, \operatorname{senh} t, 2t)$ .
2.
  - a.  $t = 1$
  - b.  $t = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$
  - c.  $t = 1$
3.
  - a.  $(-4, -3), (36, 21)$
  - b.  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
4.
  - a.  $r(t) = (1 + 2t, 4 + t), t \in \mathbb{R}$   
 $x - 2y + 7 = 0$
  - b.  $r(t) = (-1 - t, -1 + t, 1 - 2t), t \in \mathbb{R}$
  - c.  $r(t) = \left(\frac{\pi}{6} + t, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{t}{2}, \frac{1}{2} + \frac{t\sqrt{3}}{2}\right), t \in \mathbb{R}$
  - d.  $r(t) = (-1, -2t), t \in \mathbb{R}$   
 $x = -1$

## AULA 4 - FUNÇÕES VETORIAIS - INTEGRAIS

### Exercício 4.1.

1.  $\vec{v}(t) = (6 \operatorname{sen}(2t), 4 \cos(2t) - 4, 6t^2),$   
 $\vec{s}(t) = (-3 \cos(2t) + 3, 2 \operatorname{sen}(2t) - 4t, 2t^3).$

### Exercício 4.2.

$$2\sqrt{2}k\pi$$

## Exercício 4.3.

A equação da circunferência em coordenadas polares é  $\gamma =$

$$R. \text{ Assim, } L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\gamma}\right)^2 + r^2} d\gamma = \int_0^{2\pi} R d\gamma = 2\pi R$$

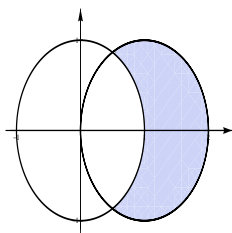
## Exercício 4.4.

4.
  - a.  $(\frac{2}{5}, \frac{2}{3})$
  - b.  $(\frac{2}{e}, 0)$
  - c.  $(0, \frac{1}{\pi}, \frac{1}{8})$
5. Tem-se  $\vec{s}(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$  e  $\vec{v}(t) = 2\pi(-\sin(2\pi t), \cos(2\pi t))$ . Assim,  $\vec{s}(t) \cdot \vec{v}(t) = 0$ , logo  $\vec{s}(t)$  e  $\vec{v}(t)$  são ortogonais. Também  $\vec{a}(t) = -4\pi^2(\vec{s}(t))$ , isto é, a aceleração tem a mesma direção que a posição mas sentido contrário e  $\vec{F} = m\vec{a} = -4\pi^2 m \vec{s}(t)$ , assim o impulso de  $\vec{F}$ :
 

em  $[0, 1/2]$  é  $I_1 = \int_0^{1/2} \vec{F}(t) dt = (0, \frac{1}{\pi})$ ;

em  $[0, 1]$  é  $I_2 = \int_0^1 \vec{F}(t) dt = (0, 0)$ ;

em  $[0, 2]$  é  $I_3 = \int_0^2 \vec{F}(t) dt = (0, 0)$ .
6.  $\vec{v}(t) = \left(t, \frac{\cos(\pi t) + \pi t \sin(\pi t) - 1}{\pi^2}\right)$  e  $I = \left(1, \frac{-2}{\pi^2}\right)$
7.
  - a.  $L(\alpha) = 5(b - a)$
  - b.  $L(\beta) = \sqrt{e^4 + \pi^2} - \sqrt{1 + \pi^2} - \pi \ln \left| \left( \frac{\pi + \sqrt{e^4 + \pi^2}}{e^2(\pi + \sqrt{1 + \pi^2})} \right) \right|$
  - c.  $L(\gamma) = \sqrt{e^2 + 1} - \sqrt{2} - \ln \left| \left( \frac{1 + \sqrt{e^2 + 1}}{e(1 + \sqrt{2})} \right) \right|$
  - d.  $L(\varphi) = 8$
  - e.  $L(\mu) = e + e^{-1} - 2$
8.
  - a.  $\pi$
  - b.  $2\sqrt{2}$
  - c.  $\sqrt{2}(1 - \sqrt{e^{-2k\pi}})$
  - d.  $\sqrt{2}$
9.  $L(\alpha) = 6$
10.  $\frac{1}{6}(3\sqrt{3} + 2\pi)$



11.  $A = \frac{\pi}{8}$

12.  $3\sqrt{2} + \frac{11}{2} \arcsen(1/3)$

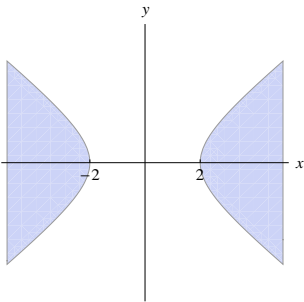
## AULA 5 - FUNÇÕES REAIS DE VÁRIAS VARIÁVEIS

### Exercício 5.4

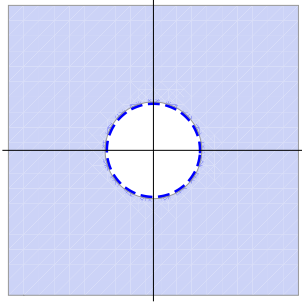
- a.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4y^2 \geq 4\}$
- b.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$
- c.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$
- d.  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 > -1\}$

Gráficos

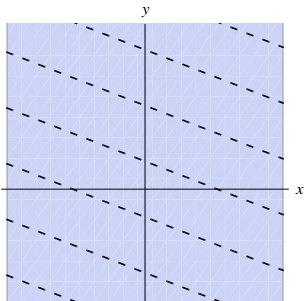
a.



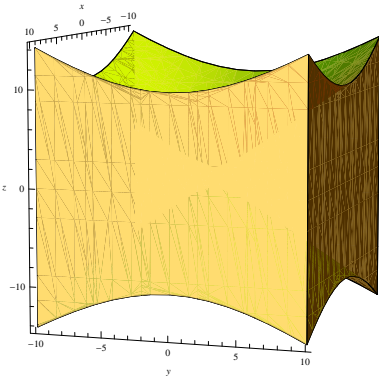
b.



c.

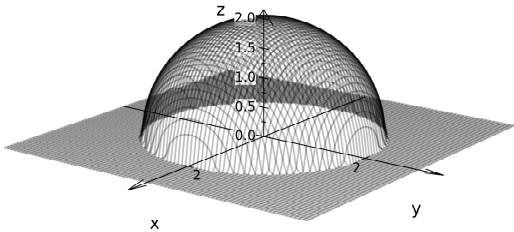


d.

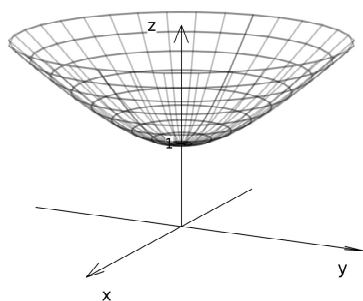


Exercício 5.5

a. 
$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2-y^2}, & \text{se } x^2+y^2 \leq 4; \\ 0, & \text{se } x^2+y^2 \geq 4. \end{cases}$$



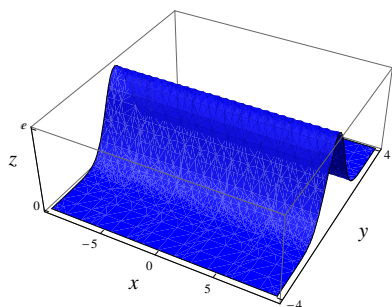
b.  $g(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$ .



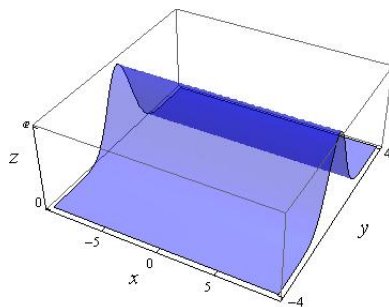
### Exercício 5.6

#### Gráficos

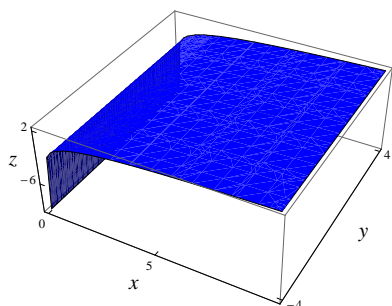
a.



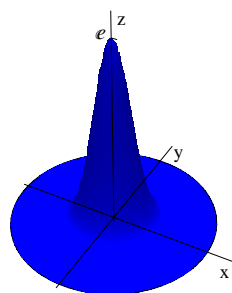
b.



c.



d.



## AULA 6 - CONJUNTOS DE NÍVEL

### Exercício 6.1

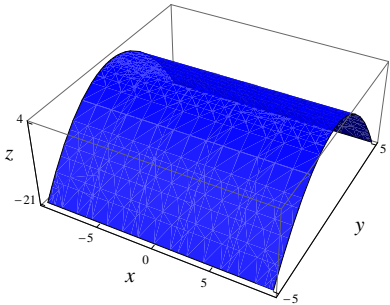
$$1. f(x, y) = \frac{x}{2} - y + 1;$$

$$2. g(x, y) = \frac{y^3 + y^2}{2} - y - x^2.$$

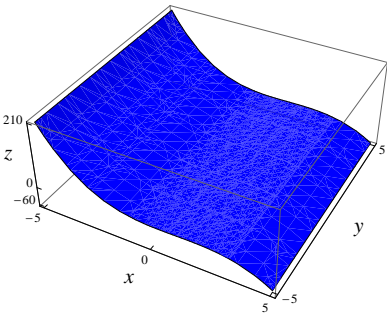
Exercício 6.2

2. Gráficos

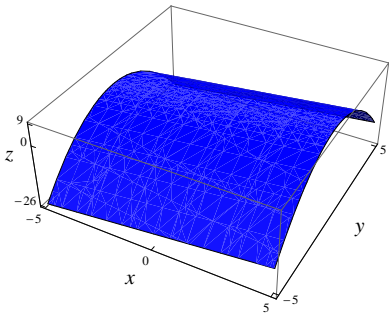
a.



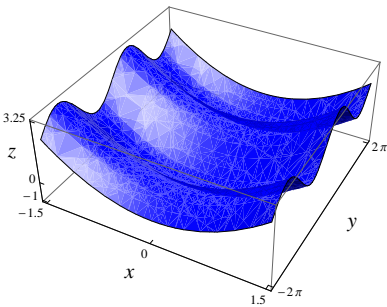
b.



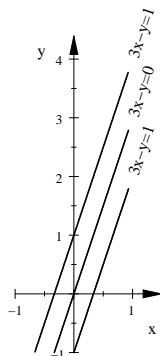
c.



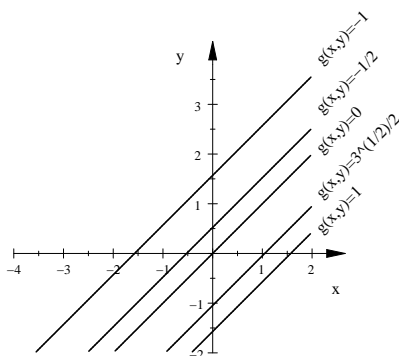
d.



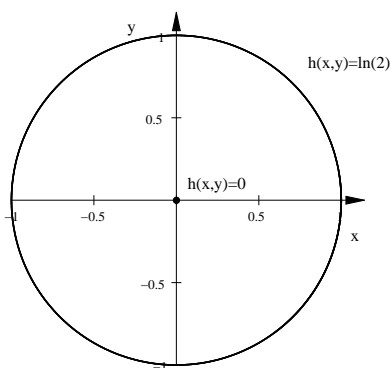
3. a.  $f(x,y) = 3x - y$ ,  $c = -1, 0, 1$ .



b.  $g(x,y) = \sin(x-y)$ ,  $c = -2, -1, -1/2, 0, \sqrt{3}/2, 1, 3$ .  
 Não existe curvas de nível  $g(x,y) = -2$  e  $g(x,y) = 3$

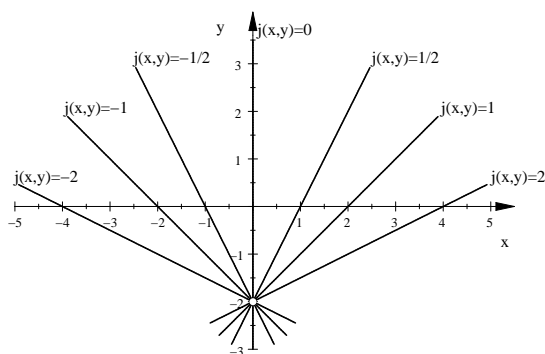


c.  $h(x,y) = \ln(1+x^2+y^2)$ ,  $c = \ln 2, 0, -1$ .  
 Não existe a curva de nível  $h(x,y) = -1$

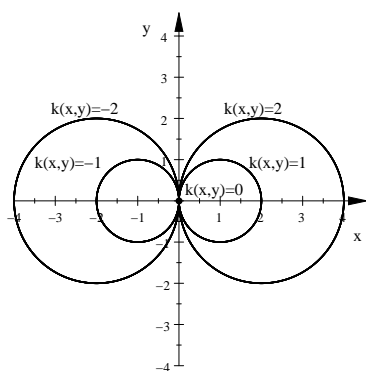




d.  $j(x,y) = \frac{x}{y+2}, \quad c = -2, -1, -1/2, 0, 1/2, 1, 2.$

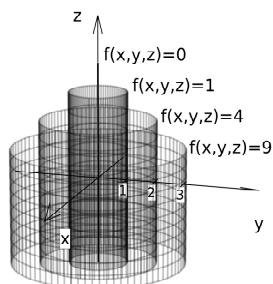


e.  $k(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{2x}, \quad c = -2, -1, 0, 1, 2.$



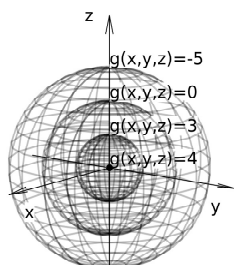
f.  $f(x,y,z) = x^2 + y^2, \quad c = -1, 0, 1, 4, 9.$

Não existe a superfície de nível  $f(x,y,z) = -1$



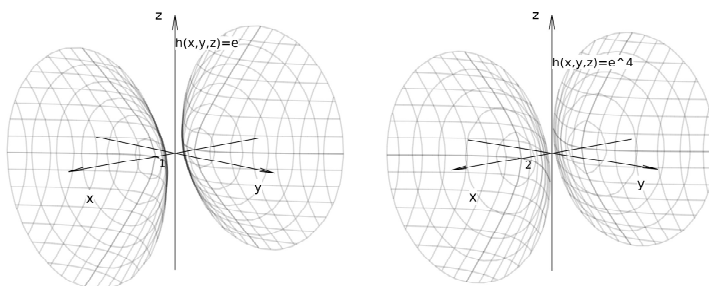
g.  $g(x, y, z) = 4 - x^2 - y^2 - z^2$ ,  $c = -5, 0, 3, 4, 5$ .

Não existe a superfície de nível  $g(x, y, z) = 5$

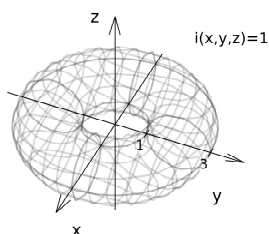


h.  $h(x, y, z) = e^{x^2 - y^2 - z^2}$ ,  $c = -1, 0, e, e^4$ .

Não existe a curva de nível  $h(x, y, z) = -1$



i.  $k(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2$ ,  $c = 1$ .



## AULA 7 - LIMITES

### Exercício 7.1

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,b)} 3x = 0 \leftrightarrow$  dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\exists \delta > 0$  tal que  
 $0 < \sqrt{x^2 + (y-b)^2} < \delta \Rightarrow |3x| < \varepsilon$ .

Assim, considerando  $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$  e tendo em conta que  
 $|x| \leq \sqrt{x^2 + (y-b)^2}$  tem-se que:  
 se  $\sqrt{x^2 + (y-b)^2} \leq \frac{\varepsilon}{3} \rightarrow |x| < \frac{\varepsilon}{3} \rightarrow |3x| < \varepsilon$ .

### Exercício 7.2

a. Como  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy = 0$  e  $\left| \sin\left(\frac{1}{x+y}\right) \right| \leq 1$  então, pelo teorema do anulamento,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \sin\left(\frac{1}{x+y}\right) = 0$ , pois se trata do produto de duas funções, uma com limite zero e a outra limitada.

b. Como  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y = 0$  e  $\left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4y^2}} \right| \leq 1$  então  
 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4y^2}} = 0$  pois se trata do produto de duas funções, uma com limite zero e a outra limitada.

### Exercício 7.3

3. Para dividir o espaço tridimensional precisamos de um plano.
4.
  - a.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
  - b. 1
  - c. 0
  - d. 0
5. Considerando o limite através das retas  $y = x$  e  $y = 2x$  que passam pela origem tem-se:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^2}{x^2 - 4x^2} = -\frac{2}{3}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + (2x)^2}{x^2 - 4(2x)^2} = -\frac{5}{15} = -\frac{1}{3}$$

Logo, pelo Teorema 8.3 não existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ .

6. Como  $(a,b)$  é um ponto de acumulação de  $A \cap B$ , segue que para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $(c,d) \in A \cap B$ , tal que  $0 < |(a,b) - (c,d)| < \varepsilon$ .

Notemos que como  $(c,d) \in A \cap B$ , temos que  $(c,d) \in A$  e  $(c,d) \in B$ .

Assim, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $(c,d) \in A$ , tal que  $0 < |(a,b) - (c,d)| < \varepsilon$ . Também, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $(c,d) \in B$ , tal que  $0 < |(a,b) - (c,d)| < \varepsilon$ . Portanto,  $(a,b)$  é um ponto de acumulação de  $A$  e também é um ponto de acumulação de  $B$ .

## AULA 8 - LIMITES E CONTINUIDADE

### Exercício 8.1

1.
  - a. 1
  - b. 1
  - c. 0
  - d.  $\frac{1}{2}$
  - e. 1
  - f. 2
  - g. 0
  - h. 0
2.
  - a.  $D = \mathbb{R}^2 - \{(-1,0)\}$
  - b. Isso quer dizer que o limite da função  $f$  calculado ao longo das retas que passam pelo ponto  $(-1,0)$  e tem vetor diretor  $(a,b)$ , com  $a^2 + b^2 > 0$ , é igual a zero.
  - c.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,0)} f(x,y)$  não existe. Basta considerar o limite da função ao longo de uma das retas do item (b) e o limite da função ao longo da curva  $\beta(t) = (t^3 - 1, t)$ .  $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,0)} f(\beta(t)) = \frac{1}{2}$

3.
  - a. Não existe limite
  - b. 0
  - c. Não existe limite
  - d. Não existe limite
  - e. 0
  - f. Não existe limite
  - g. Não existe limite
  - h. Não existe limite
4.  $c = -1$
5.
  - a.  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}^2$ .
  - b.  $g$  é contínua em  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + 4y^2 \leq 4\}$ .
  - c.  $h$  é contínua em  $\mathbb{R}^2$ .
  - d.  $K$  é contínua em  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$
6.
  - a.  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}^2$
  - b.  $g$  é contínua em  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + 4y^2 \leq 0\}$
  - c.  $h$  é contínua em  $\mathbb{R}^2$
  - d.  $k$  é contínua em  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$
7.
  - a. Como  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua,  $(0, 0) \in D$  é tal que  $f(0, 0) = 1 > 0$ , segue pelo Teorema da Permanência do Sinal que existe um  $r > 0$  tal que se  $(x, y) \in D$  é tal que  $0 < |(x, y) - (0, 0)| < r$ , isto é,  $x^2 + y^2 < r^2$  então  $f(x, y) > 0$ .
  - b. Considere a função composta  $(f \circ \alpha)$ , onde  $\alpha(t) = (t, t)$ , com  $t \in I$  tal que  $\alpha(I) \in D$ . Note que

$$(f \circ \alpha)(t) = f(\alpha(t)) = f(t, t).$$

Como  $f$  é contínua em  $D$  e  $\alpha$  é contínua em  $I$ , segue que a composta  $(f \circ \alpha)$  é contínua em  $I$ . Além disso, temos que

$$\begin{aligned} (f \circ \alpha)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0 \\ (f \circ \alpha)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema de Bolzano, existe  $a$  no intervalo aberto  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  tal que  $(f \circ \alpha)(a) = f(a, a) = 0$ .

## AULA 9 - DERIVADAS PARCIAIS

### Exercício 9.1

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3 \operatorname{sen}(x + y) + 3x \cos(x + y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1) = 3$$

### Exercício 9.2

1.

2. a.  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2y, \frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 2y$

b.  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2y(1 - 12xz + 27x^2z^2), \frac{\partial f}{\partial y} = 2x(1 - 3xz)^2,$   
 $\frac{\partial f}{\partial z} = 12x^2y(-1 + 3xz),$

c.  $\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + \ln\left(\frac{x}{y}\right), \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y}$

d.  $w_x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}, w_z = \frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}},$   
 $w_y(0, 0, 0) = 0.$

e.  $\frac{\partial f}{\partial u} = -2u + v, f_v(0, -1) = -2$

f.  $\frac{\partial g}{\partial r} = \cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta), \frac{\partial g}{\partial \theta} = r(\cos(\theta) - \operatorname{sen}(\theta))$

g.  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$

h.  $\frac{\partial f}{\partial x} = (1+x+y)e^{x-y+2z}, \frac{\partial f}{\partial y} = (1-x-y)e^{x-y+2z},$   
 $\frac{\partial f}{\partial z} = 2(x+y)e^{x-y+2z}$

i.  $\frac{\partial f}{\partial u} = 2u \operatorname{arcsen}(v), \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{u^2}{\sqrt{1-v^2}}$

3. Domínio  $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 > 0\} = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$
- que é um conjunto aberto pois todo ponto é ponto interior.
  - $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) = 0 \leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$
  - $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$  ;  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$  , logo  
 $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 1$

4.  $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{2yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$

5.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

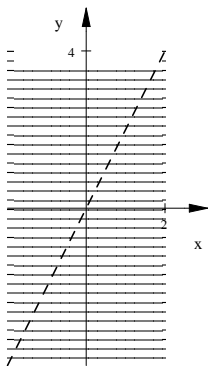
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

6. a.  $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$ .
- b.  $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos(y)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin(y)$ .
- c.  $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 3x^2 - 3y^2$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = -2(y + 3xy)$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x} = 2(1 + 3x)y$ .
- d.  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$ .
- e.  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}$ .

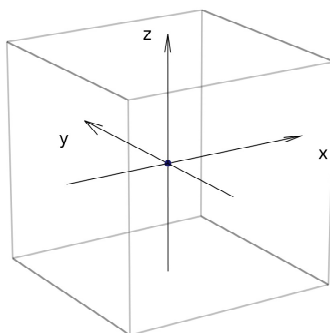
## AULA 10 - AULA DE EXERCÍCIOS

### Exercício 10.1

1. a. Domínio  $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x - y \neq 0\} = \mathbb{R}^2 - \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x = y\}$

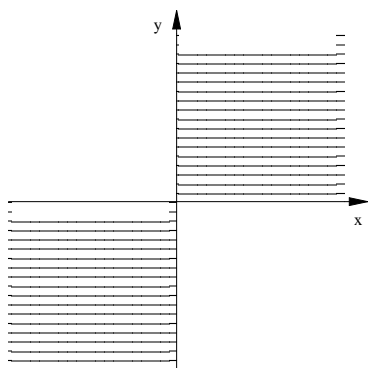


- b. Domínio  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\} = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$

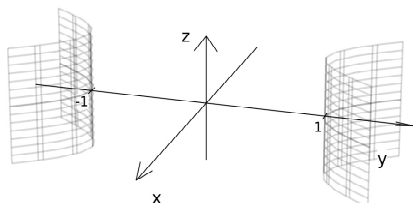




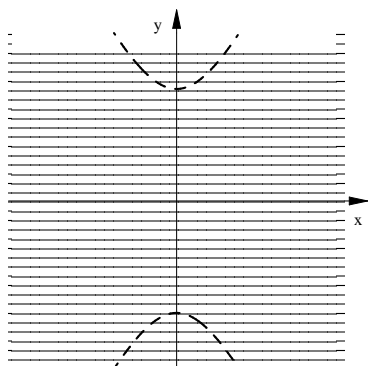
- c. Domínio  $f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy \geq 0\}$   
 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \text{ ou } x \leq 0 \text{ e } y \leq 0\}$



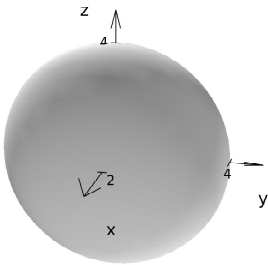
- d. Domínio  $f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 4x^2 - y^2 + 1 \neq 0\}$   
 $\mathbb{R}^3 - \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 4x^2 - y^2 + 1 = 0\}$



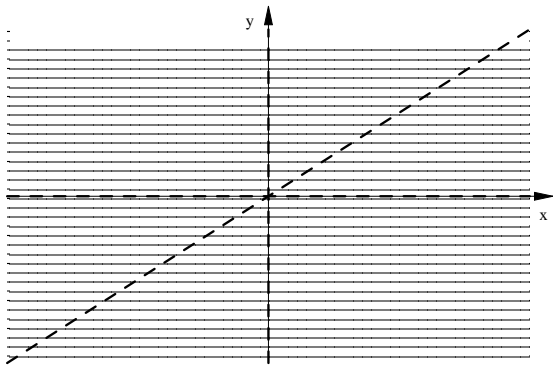
- e. Domínio  $k = \mathbb{R}^2 - \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 4x^2 - y^2 + 1 = 0\}$



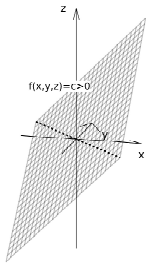
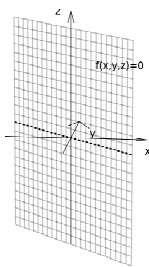
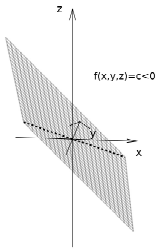
f. Domínio  $l = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 4x^2 - y^2 + z^2 \leq 16\}$



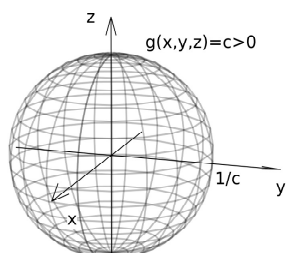
g. Domínio  $m = \mathbb{R}^2 - \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\}$



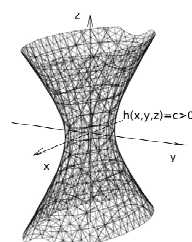
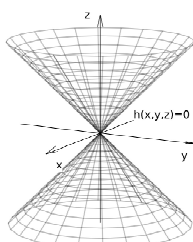
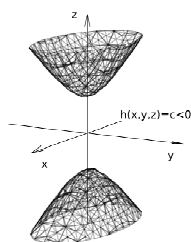
3. a. Domínio  $f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 / z \neq 0\}$   
Superfície de nível  $f(x,y,z) = k \leftrightarrow x + y = kz$



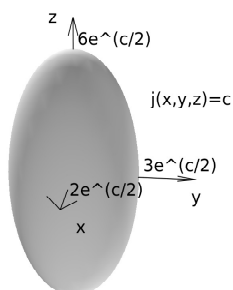
- b. Domínio  $g = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$   
 Curvas de nível  $g(x,y,z) = k \leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{k}, k > 0$ .



- c. Domínio  $h = \mathbb{R}^3$ ,  
 $h(x,y,z) = k \leftrightarrow x^2 + 4y^2 - z^2 = k$



- d. Domínio  $j = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$   
 $j(x,y,z) = k \leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = e^k$ .



4.
  - a. Não existe.
  - b. 0.
  - c. Não existe.
  - d. Não existe.
  - e. 0.
  - f.  $\frac{1}{2}$ .
  - g. Não existe.
  - h. 0.

5. Se  $f(x, y) = (x - y)e^y$  então

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x - y - 1)e^y$$

logo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x - y)e^y = f(x, y)$$

6. Se  $f(x, y) = \frac{x}{x+y}$ ,  $g(x, y) = \frac{xy^2}{x^3+y^3}$ , então

$$f(tx, ty) = \frac{tx}{tx+ty} = \frac{x}{x+y} = f(x, y)$$

$$g(tx, ty) = \frac{(tx)(ty)^2}{(tx)^3(ty)^3} = \frac{t^3(xy^2)}{t^3(x^3+y^3)} = g(x, y).$$

Portanto  $f$  e  $g$  são homogêneas.

Também, se  $z = f(x, y)$  então

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{(x+y)^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x}{(x+y)^2},$$

Daí

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Analogamente para  $z = g(x, y)$  tem-se:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^5 - 2x^3y^2}{(x^3+y^3)^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x^4y - xy^4}{(x^3+y^3)^2}$$

Logo,

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

## AULA 11 - DIFERENCIABILIDADE

### Exercício 11.1

Sabemos que  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0$ , logo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} \frac{E(x)}{|x - c|} = 0 &\iff \lim_{x \rightarrow c} \left| \frac{E(x)}{|x - c|} \right| = 0 \\ \iff \lim_{x \rightarrow c} \left| \frac{E(x)}{(x - c)} \right| = 0 &\longrightarrow \lim_{x \rightarrow c} \frac{E(x)}{x - c} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Assim } \lim_{x \rightarrow c} \frac{E(x)}{|(x - c)|} = 0 \longrightarrow \lim_{x \rightarrow c} \frac{E(x)}{x - c} = 0$$

### Exercício 11.2

1. Tem-se  $f(x + dx) \cong f(x) + f'(x)dx$ .

$$\text{Assim } \sqrt{1,02} = \sqrt{1 + 0,02} \cong \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}(0,02) = 1,01$$

$$\sqrt{0,99} = \sqrt{1 - 0,01} \cong \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}(-0,01) = 0,995$$

2. -2.84.

## AULA 12 - DIFERENCIABILIDADE

### Exercício 12.1

$\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  existe no conjunto  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq 0\}$

## Exercício 12.2

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \quad \text{e} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{E(x,y)}{|(x,y)|} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2 \sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2)^2} = 0\end{aligned}$$

## Exercício 12.3

Tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 + 3x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{-2yx^3}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Observa-se que  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  não são contínuas em  $(0,0)$ .

Também  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h,k)}{|(h,k)|} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^3}{(h^2 + k^2)^{3/2}} - \frac{h}{(h^2 + k^2)^{1/2}}$  não existe, assim  $f$  não é diferenciável em  $(0,0)$ .

## Exercício 12.4

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = yze^{xyz}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xze^{xyz}$  e  $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = xye^{xyz}$  são contínuas em  $\mathbb{R}^3$ . Logo,  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^3$ .

## Exercício 12.5

$f$  é contínua em  $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 9\}$   
 $f$  diferenciável em  $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 9\}$ .

## AULA 13 - PLANO TANGENTE, DIFERENCIAL E GRADIENTE

### Exercício 13.1

1.
  - a.  $2x - 2y - z - 1 = 0$
  - b.  $x - y - z - 2 + \ln 2 = 0$
  - c.  $z = 1$
  - d.  $y - z + 1 = 0$
  - e.  $x - 2y - z + 1 = 0$
2.  $10x + 5y - z - 5 = 0$
3.
  - a.  $dz = (2y - 2x)dx + (2x + 2y)dy$
  - b.  $dz = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dx - \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dy$
  - c.  $dz = ye^{xy}dx + xe^{xy}dy$
  - d.  $dz = \frac{2y}{(x+y)^2}dx - \frac{2x}{(x+y)^2}dy$
  - e.  $dw = (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz$
  - f.  $dw = \frac{2x}{1+x^2+y^2+z^2}dx + \frac{2y}{1+x^2+y^2+z^2}dy$
4. 7.08796.
5.  $dz = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$      $x = 3, dx = -0,003$   
 $y = 4, dy = 0,008$   
 $dz = (0,6)dx + (0,8)dy = 0,0046$ . Assim,  $f(2,997; 4,008) \approx f(3,4) + dz = 5,0046$
6.  $x - y - z = 5$

**AULA 14 - REGRA DA CADEIA OU ARTE DE DERIVAR****Exercício 14.1**

a.  $f'(x) = \frac{2}{3} \frac{(x+1)}{(x^2+2x+4)^{2/3}}$

b.  $g'(x) = e^{-2x}(\cos x - 2 \operatorname{sen} x)$

c.  $h'(t) = \frac{3t^2}{1+t^6}$

d.  $k'(t) = \frac{3t^2}{t^3+4}$

**Exercício 14.2**

a.  $\frac{dy}{dx} = \cos(x^2) - 2x^2 \operatorname{sen}(x^2), \frac{dx}{dt} = 3\sqrt{\pi} t^2$

b.  $\frac{dy}{dt} = 3\sqrt{\pi} t^2 \cos(\pi t^6) - 6\pi^{3/2} t^8 \operatorname{sen}(\pi t^6), \frac{dy}{dt}(1) = -3\sqrt{\pi}.$

c.  $y = 2\sqrt{\pi} - 3\sqrt{\pi} x$

**Exercício 14.3**

$$g'(t) = (4t+1) \operatorname{sen}(2t^2+t-1)$$

**Exercício 14.4**

4. a.  $g'(t) = -4\cos^2(2t) + 4\operatorname{sen}^2(2t)$

b.  $g'(t) = -4e^{-4t}$

c.  $g'(t) = 4t + 3t^2 - 5t^4$

d.  $g'(t) = 2t \cos(t^2+1)$



## AULA 15 - REGRA DA CADEIA (SEGUNDA PARTE)

### Exercício 15.3

$$1. \frac{dw}{dt} = \frac{2(t+t^2)}{1+2t} + e^{t^3}(1+2t+3t^3+3t^4) - (4t^3+5t^4)\text{sen}(t^4+t^5)$$

$$2. \frac{\partial w}{\partial x} = 2(2x+3y)e^{2x^2+6xy-y^2}, \frac{\partial w}{\partial y} = 2(3x-y)e^{2x^2+6xy-y^2}$$

$$3. \frac{dw}{ds} = \frac{5}{2} \frac{(s-t)}{(4+(2s-t)^2+(-s+3t)^2)}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{5}{2} \frac{(-s+2t)}{(4+(2s-t)^2+(-s+3t)^2)}$$

$$4. w_r = 6e^{-6r}(e^{12r}\cos^2(2s) + \text{sen}^2(2s)),$$

$$w_s = -2(\cos(4s) + 2\cosh(6r)\text{sen}(4s))$$

5.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}(\ln(u^2-v^2), \arctg(uv)) \frac{2u}{u^2-v^2} +$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\ln(u^2-v^2), \arctg(uv)) \frac{v}{1+(uv)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{\partial f}{\partial x}(\ln(u^2-v^2), \arctg(uv)) \frac{2v}{u^2-v^2} +$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\ln(u^2-v^2), \arctg(uv)) \frac{u}{1+(uv)^2}$$

$$6. \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}f_1\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y}f_2\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{x}f_1\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y^2}f_2\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right)$$

$$7. \frac{\partial w}{\partial u} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore \frac{\partial w}{\partial v} = -4\sqrt{3} + 22$$

$$8. \frac{dw}{dt} = 3t^2 f(\cos(t^2), \sin(t^2)) + 2t^4 [\cos(t^2) f_2(\cos(t^2), \sin(t^2)) - \sin(t^2) f_1(\cos(t^2), \sin(t^2))]$$

$$9. a = 2, b = 3$$

## AULA 16 - FUNÇÕES IMPLÍCITAS

### Exercício 16.1

- a. Tem-se que  $xy^2 - (f(x, y))^2 = xy^2 - (\sqrt{xy^2})^2 = 0$  e também  $xy^2 - (g(x, y))^2 = xy^2 - (\pm\sqrt{xy^2})^2 = 0$ . Logo  $G(x, y, z) = xy^2 - z^2 = 0$  definem implicitamente as funções  $z = f(x, y)$  e  $z = g(x, y)$ .

$$b. h(x, y) = -\sqrt{xy^2} \text{ e } h(x, y) = \begin{cases} \sqrt{xy^2} & \text{se } y \leq 0 \\ -\sqrt{xy^2} & \text{se } y > 0 \end{cases}$$

### Exercício 16.2

Versão do Teorema da Função Implícita: Seja  $F(x, y)$  uma função de classe  $C^1$ , definida em um subconjunto aberto  $A$  de  $\mathbb{R}^2$ , e seja  $(a, b) \in A$ , tal que  $F(a, b) = c$ . Se  $\frac{\partial F}{\partial x}(a, b) \neq 0$ , então existem intervalos  $I$  ( $a \in I$ ) e  $J$  ( $b \in J$ ), com  $I \times J \subset A$ , e uma função  $h: J \rightarrow I$ , diferenciável, tal que

$$F(h(y), y) = c,$$

qualquer que seja  $y \in J$ . Além disso,

$$h'(y) = \frac{dx}{dy}(y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(h(y), y)}{\frac{\partial F}{\partial x}(h(y), y)}.$$

Seja  $F(x, y) = x^4 + xy + y^2$ . Note que  $F$  é de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2$ . Considerando  $(a, b) = (2, 0)$ , notemos que  $F(2, 0) = 6$ . Temos, também que,  $\frac{\partial F}{\partial x} = 4x^3 + y$  e que  $\frac{\partial F}{\partial x}(2, 0) = 32 \neq 0$ . Então

pela versão acima do Teorema da Função Implícita, existem intervalos  $I$  ( $2 \in I$ ) e  $J$  ( $0 \in J$ ), com  $I \times J \subset \mathbb{R}^2$ , e uma função  $h : J \rightarrow I$ , diferenciável tal que

$$F(h(y), y) = 6$$

qualquer que seja  $y \in J$ . E,

$$h'(y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(h(y), y)}{\frac{\partial F}{\partial x}(h(y), y)} = -\frac{x+2y}{4x^3+y}.$$

### Exercício 16.3

1. Se  $G(x, y) = \ln(xy) - 2xy + z$  tem-se:

$$G(1, 1) = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1}{x} - 2y, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{1}{y} - 2x.$$

Logo,  $\frac{\partial G}{\partial y}(1, 1) = -1 \neq 0$ . Finalmente

$$f'(x, y) = \frac{-\frac{\partial G}{\partial x}(1, 1)}{\frac{\partial G}{\partial y}(1, 1)} = -1$$

2. A equação dada define  $y$  como função de  $x$  em torno do ponto  $(0, 0)$ , pois considerando, no Teorema da Função Implícita, a função de classe  $C^1$ ,  $F(x, y) = (x - 2)^3 y + x e^{(y-1)}$ , temos que  $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = -8 \neq 0$  enquanto  $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1) = 0$ . Por outro, caso consideremos  $x$  como função de  $y$ , a equação dada define  $x$  como função de  $y$  em torno de qualquer um dos dois pontos, já que  $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1) = 4 \neq 0$  e  $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = \frac{1}{e} \neq 0$ .
3. Se  $G(x, y) = 2x^3 + 2y^3 - 9xy$ . Tem-se  $G(1, 2) = 0$  e  $\frac{\partial G}{\partial y} = 6y^2 - 9x$ , logo  $\frac{\partial G}{\partial y}(1, 2) = 15 \neq 0$ . Logo, pelo Teorema da Função implícita,  $G(x, y) = 0$  define implicitamente uma função diferencial  $y = f(x)$  em torno de  $(1, 2)$ .
4. Considerando  $G(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 + z^2 - 45$  no Teorema da Função Implícita, temos que  $\frac{\partial z}{\partial x} = 4$  e  $\frac{\partial z}{\partial y} = -12$

5. Seja  $G(x, y, z) = \sin(xy) + \sin(yz) + \sin(xz)$ , tem-se  $G(1, \pi/2, 0) = 1$  e  $\frac{\partial G}{\partial z}(x, y, z) = y \cos(yz) + x \cos(xz)$ , logo  $\frac{\partial G}{\partial z}(1, \pi/2, 0) = 1 + \pi/2 \neq 0$ . Assim,  $G(x, y, z) = 1$ , define uma função  $z = g(x, y)$  implicitamente em torno do ponto  $(1, \pi/2, 0)$ .

Também  $\frac{\partial G}{\partial x}(1, \pi/2, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial G}{\partial y}(1, \pi/2, 0) = 0$ , assim,  $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$ ,  $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ .

6. a.  $\left( -\frac{2e^{-xz}}{1+x^2+y^2} - \frac{z}{x}, -\frac{2e^{-xz}y}{x+x^3+xy^2} \right)$   
 b.  $\left( \frac{z^2 - \sin(x+y+z)}{3y-2xz+\sin(x+y+z)}, -\frac{3z + \sin(x+y+z)}{3y-2xz+\sin(x+y+z)} \right)$

7. Seja  $G(x, y, z) = z^3 - xz - y^2$ .

$$G(3, b, c) = 1 \Leftrightarrow c^3 - 3c - b^2 = 1$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} = 3z^2 - x, \text{ logo } \frac{\partial G}{\partial z}(3, b, c) = 3c^2 - 3 \neq 0 \rightarrow c \neq 1 \Leftrightarrow c^3 - 3c \neq \pm 2 \rightarrow b^2 = c^3 - 3c - 1 \neq 1, -3 \rightarrow b \neq \pm 1.$$

Assim se  $c \neq \pm 1$  e  $b \neq \pm 1$ , tem-se que  $G(3, b, c) = 1$  define  $z$  como função de  $(x, y)$  em torno de  $(3, b, c)$ .

## AULA 17 - O GRADIENTE E A DERIVADA DIRECIONAL

### Exercício 17.1

- a.  $\nabla T(x, y) = (2x - 2y - 1, -2x - 2y + 4)$   
 b.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \nabla T(\alpha(0)) \cdot \alpha'(0) \\ &= \nabla T(1, 1) \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

## Exercício 17.2

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial(-\vec{u})}(a,b) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f((a,b) + \lambda(-\vec{u})) - f(a,b)}{\lambda} \\
 \text{fazendo } \lambda = -h &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f((a,b) + h(\vec{u})) - f(a,b)}{-h} \\
 &= - \left( \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f((a,b) + h\vec{u}) - f(a,b)}{h} \right) \\
 &= - \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}
 \end{aligned}$$

## Exercício 17.3

Se  $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ ,  $g(x,y) = 1 - x^2 - y^2$  então as curvas de nível de  $f$  são os círculos  $x^2 + y^2 = k + 1$  com  $K \geq -1$  e as curvas de nível de  $g$  são os círculos  $x^2 + y^2 = 1 - k$  com  $k \leq 1$ . Tem-se também:

$$\begin{aligned}
 \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}(1,1) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \quad , \quad \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}(2,-2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1), \\
 \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}(-2,1) &= \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1) \\
 \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}(1,1) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \quad , \quad \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}(2,-2) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1), \\
 \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}(-2,1) &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)
 \end{aligned}$$

## Exercício 17.4

1. a.  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,-1) = \frac{28}{5}$
- b.  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}\left(\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{2}$
- c.  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0,0) = -\frac{1}{\sqrt{6}}$
- d.  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(-1,1,1) = -\frac{8}{\sqrt{30}}$

2.
  - a. Direção de maior crescimento:  $\vec{u} = \left(-\frac{4}{\sqrt{65}}, \frac{7}{\sqrt{65}}\right)$  e  
 $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \sqrt{65}$
  - b. Direção de maior crescimento:  $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  e  
 $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \sqrt{2}$
  - c. Direção de maior crescimento:  $\vec{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$   
e  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = 2\sqrt{3}$
3.
  - a.  $\vec{v} = \nabla f(0, 1) = (1, -e)$   
 $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 1) = \|\nabla f(0, 1)\| = \sqrt{1 + e^2}.$
  - b.  $\vec{v} = \nabla f(1, 1) = (4, 0)$   
 $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1) = \|\nabla f(1, 1)\| = 4.$
  - c.  $\vec{v} = \nabla f(1, 1, -1) = (-3, 1, 3)$   
 $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1, -1) = \|\nabla f(1, 1, -1)\| = \sqrt{19}.$
4.  $(-2, 4, -2)$
5.  $\vec{v} = -\nabla f(0, 0, 0) = (2, -2, 2)$
6.  $\cos^2(\theta) \operatorname{sen}(\theta)$
7.  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \nabla f\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\sqrt{10}$
8.
  - a.  $\nabla T(x, y) = \left(\frac{e^{x/2}}{2} \cos\left(\frac{\pi y}{3}\right), -\frac{\pi e^{x/2}}{3} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{3}\right)\right)$
  - b. Direção:  $\left(\frac{1}{4}, -\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)$   
Taxa:  $\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{\pi^2}{12}}$
  - c. Direção:  $\left(-\frac{1}{4}, \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)$   
Taxa:  $-\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{\pi^2}{12}}$

$$d. \left( -\frac{2\pi}{\sqrt{3+4\pi^2}}, -\sqrt{\frac{3}{3+4\pi^2}} \right), \left( \frac{2\pi}{\sqrt{3+4\pi^2}}, \sqrt{\frac{3}{3+4\pi^2}} \right),$$

$$e. \frac{1}{8} - \frac{\pi}{4}$$

9.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0,0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f((0,0,0) + \lambda(a,b,c)) - f(0,0,0)}{\lambda}$$

$$\begin{aligned} \text{onde } u = (a,b,c) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda a \sqrt{\lambda^2 b^2 + \lambda^2 c^2}}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} a |\lambda| \sqrt{b^2 + c^2} = 0 \end{aligned}$$

10. Como  $\nabla f(x,y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$  é ortogonal as curvas de nível  $f(x,y) = k$  e  $\nabla f(x,y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$  é ortogonal a  $\vec{u} = (a,b)$  então as curvas de nível são retas paralelas a  $\vec{u}$ , isto é,  $bx - ay = k$ . Ou seja,  $f$  é da forma  $f(x,y) = bx - ay + c$ , ou de forma mais geral  $f(x,y) = \lambda(bx - ay + c)$ .

## AULA 18 - AULA DE EXERCÍCIOS

### Exercício 18.1

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = 0 \text{ pois} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 + y^2 &= 0 \text{ e } |\sin(\frac{1}{x^2 + y^2})| \leq 1. \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema do anulamento, o limite do produto de duas funções, um com limite zero e a outra limitada e zero.

### Exercício 18.2

Seja  $C$  a curva de nível  $f(x,y) = k$  pelo Teorema do Valor Médio(18.2) existe  $(\lambda, \xi)$  no segmento que une  $(a,b)$  e  $(c,a)$  e logo no interior de  $C$  pois  $C$  é conexo tal que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\lambda, \xi) = \frac{f(a,b) - f(c,a)}{\|(a,b) - (c,a)\|} = \frac{k - k}{\|(a,b) - (c,a)\|} = 0$$

### Exercício 18.3

A equação do plano com norma  $\vec{M}$  e que passa por  $(a, b, c)$  é dada por  $\vec{M} \cdot ((x, y, z) - (a, b, c)) = 0$ . Com  $\vec{M} = \nabla f(a, b, c)$ . Assim  $\nabla f(a, b, c) \cdot ((x, y, z) - (a, b, c)) = 0$  é a equação do plano tangente.

### Exercício 18.4

1.

$$\frac{\partial S}{\partial x}(0,0) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \\ y \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2} \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Considerando  $x_n = y_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi + \pi/2}}$ , verifica-se que

$$\lim_{x_n, y_n \rightarrow (0,0)} \frac{\partial S}{\partial x}(x_n, y_n) = -\infty, \text{ logo } \frac{\partial g}{\partial x} \text{ é contínua em } (0,0).$$

Também

$$\begin{aligned} \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \frac{hk \cos\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} \cdot \cos\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Logo } \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} \cdot \cos\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right) =$$

$$0, \text{ pois } \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} \text{ e } \left| \cos\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right) \right| \leq 1.$$

Assim  $g$  é diferenciável em  $(0,0)$  e também em  $\mathbb{R}^2 - \{0,0\}$ , logo diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ .

2.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(0,0) + \lambda(u_1, u_2) - f(0,0)}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda^3 u_1 u_2^2}{\lambda^3 u_1^3 + \lambda^4 u_2^2} = \frac{u_2^2}{u_1^2} \end{aligned}$$



mais usando o teste dos dois caminhos com as retas  $y = x$  e  $y = 0$ , vemos que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  não existe, logo  $f$  não é contínua em  $(0,0)$  e portanto não é diferenciável em  $(0,0)$ .

3. Continua valendo sim, e só repetir a demonstração do corolário substituindo um segmento por uma linha poligonal.

4. Tem-se que  $0 = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial \vec{u}}(x,y) = \frac{\partial(f-g)}{\partial \vec{u}}(x,y) = 0$ .  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}$  e  $\forall \vec{u}$  vetor unitário, logo pelo Corolário 18.3  $f - g$  é constante.

5. Sejam

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\},$$

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x-4)^2 + (y-4)^2 < 1\},$$

$$\text{e } D = D_1 \cup D_2$$

define-se  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  por  $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y) \in D_1 \\ 2 & \text{se } (x,y) \in D_2 \end{cases}$

Verifica-se que  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x,y) = 0 \forall (x,y) \in D$  e  $\vec{u}$  vetor unitário e  $f$  não é constante.

6. Consideramos a função  $f(x,y,z) = xy + 2xz + yz - x$  cuja superfície de nível é a superfície mencionada, logo  $\nabla f(1,-1,2) = (2,3,1)$  e o plano tangente é  $2x + 3y + z - 1 = 0$ .
7. Consideremos a função  $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz - 4$  cuja superfície de nível é a superfície mencionada, logo  $\nabla f(1,-1,1) = (4,0,6)$  e o plano tangente é  $4x + 6z - 10 = 0$ .

## AULA 19 - DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR

### Exercício 19.1

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) = 0 \text{ e } f_{yyz}(x, y, z) = 2yz^5 \cos(yz^2) + 4z^3 \sin(yz^2) \therefore f_{321}(x, y, z) = 0$$

### Exercício 19.2

- $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x e^{-y}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 e^{-y}$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 e^{-y}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 e^{-y}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2x e^{-y}$
- $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = -x^2 e^{-y}; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = -2 e^{-y};$   
 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x \partial y} = 2x e^{-y}$

### Exercício 19.3

$$g''(t) = f_{xx}e^{2t} + f_{yy}e^{-2t} + f_x e^t + f_y e^{-t}$$

### Exercício 19.4

1. a.  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6x + 4, \text{ assim } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$
- b.  $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2},$   
 $\text{assim } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$
- c.  $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = -\frac{2yx}{(x^2 + y^2)^2},$   
 $\text{assim } \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$
- d.  $\frac{\partial^2 k}{\partial x^2} = e^x \sin(y) - e^y \cos(x), \quad \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} = -e^x \sin(y) + e^y \cos(x),$   
 $\text{assim } \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} = 0$

2. Mostre que  $f_x(0, y) = -y$  para todo  $y$  e que  $f_y(x, 0) = x$  para todo  $x$ . Em seguida, calcule

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_x(0, 0+k) - f_x(0, 0)}{k} \quad \text{e}$$

$$f_{yx}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(0+h, 0) - f_y(0, 0)}{h}$$

3.  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 f''(x+ct) + c^2 g''(x-ct)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x+ct) + g''(x-ct)$$

$$\text{Assim } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

4.  $\frac{\partial w}{\partial x} = e^{-c^2 kt} (bc \cos(cx) - ac \sin(cx)),$   
 $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = e^{-c^2 kt} (-ac^2 \cos(cx) - bc^2 \sin(cx)),$   
 $\frac{\partial w}{\partial t} = -c^2 e^{-c^2 kt} k (a \cos(cx) + b \sin(cx))$

5.  $g_u(1, 1) = f_x(2, 1) + f_y(2, 1) = 0$

$$g_{uv}(1, 1) = f_{xx}(2, 1) + 2f_{xy}(2, 1) + f_{yy}(2, 1) + f_y(2, 1) = 1$$

6. •  $\frac{\partial z}{\partial u} = e^u \cos(v) \frac{\partial z}{\partial x} + e^u \sin(v) \frac{\partial z}{\partial y}$   
 •  $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = e^u \sin(v) \frac{\partial z}{\partial y} + e^u \cos(v) \frac{\partial z}{\partial x} +$   
 $e^u \sin(v) \left( e^u \sin(v) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + e^u \cos(v) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) +$   
 $e^u \cos(v) \left( e^u \sin(v) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + e^u \cos(v) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)$   
 •  $\frac{\partial z}{\partial v} = e^u \cos(v) \frac{\partial z}{\partial y} - e^u \sin(v) \frac{\partial z}{\partial x}$   
 •  $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = -e^u \sin(v) \frac{\partial z}{\partial y} - e^u \cos(v) \frac{\partial z}{\partial x} +$   
 $e^u \cos(v) \left( e^u \cos(v) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - e^u \sin(v) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)$   
 $- e^u \sin(v) \left( e^u \cos(v) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + e^u \sin(v) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)$

7.  $g''(t) = f_{xx}(1-t, t^2) - 2tf_{xy}(1-t, t^2) - 2tf_{yx}(1-t, t^2)$   
 $+ 4t^2 f_{yy}(1-t, t^2).$

$$8. \quad \bullet \quad \frac{\partial h}{\partial u} = 2v \frac{\partial f}{\partial y} + 2u \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\bullet \quad \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} = 2 \frac{\partial f}{\partial x} + 2v \left( 2v \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2u \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) + 2u \left( 2v \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2u \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)$$

$$9. \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \gamma^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sin^2 \theta$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = \gamma^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cos^2 \theta \right) +$$

$$\gamma \left( -\frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta,$$

$$\text{de onde } \frac{\partial^2 v}{\partial \gamma^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial v}{\partial \gamma} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$10. \quad f(t) = \ln(t)$$

## AULA 20 - MÁXIMOS E MÍNIMOS (PRIMEIRA PARTE)

### Exercício 20.1

Ponto mínimo (1, 2) e Ponto máximo (3, 5).

### Exercício 20.2

(0, -2): ponto de máximo local; (0, 0): ponto de sela; (0, 1): ponto de máximo local

### Exercício 20.3

1. Em A: Ponto de mínimo (2, -1)  
 Ponto de Máximo (0, -3), (0, 1), (4, -3) e (4, 1)
- Em B: Ponto de mínimo (2, 1)  
 Ponto de Máximo (1, 3)

Em  $C$  : Ponto de mínimo  $(1, -1)$   
 Ponto de Máximo não existe

Em  $D$  : Ponto de mínimo  $(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$   
 Ponto de Máximo não existe

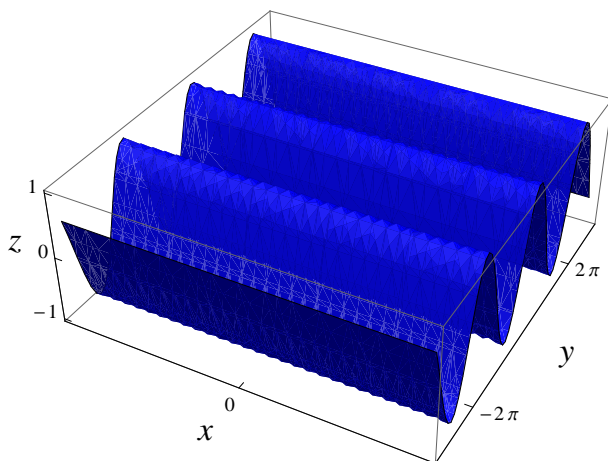
2.
  - a.  $(1, -3)$ : ponto de mínimo local
  - b.  $(-2, 0)$ : ponto de máximo local
  - c.  $(1, -2)$ : ponto de sela
  - d.  $(1, -2)$ : ponto de sela
  - e.  $(-1, -1)$ : ponto de máximo local,  $(0, 0)$ : ponto de sela
  - f.  $(-1, -2)$ : ponto de máximo local,  $(0, 0)$ : ponto de sela,  $(1, 2)$ : ponto de máximo local
  - g.  $(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 0)$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ : ponto de sela,  
 $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 0)$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ : ponto de mínimo local
  - h.  $(0, 0)$ : ponto de sela
  - i.  $(\frac{1}{\sqrt[5]{2}}, \sqrt[5]{4})$ : ponto de mínimo local

3.  $\nabla g(x, y, z) = (2ax, 2by, 2dz) = (0, 0, 0) \rightarrow x = 0, y = 0, z = 0$ .

Se  $a, b, c$  são positivos,  $(0, 0, 0)$  é ponto de mínimo.

Se  $a, b, c$  são negativos,  $(0, 0, 0)$  é ponto de máximo.

#### 4. Gráfico



5.  $f(x, y) = -(x^4 + y^4 - 4xy + 1)$

Sobre o domínio de  $f$   $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y \geq -2\}$

Tem-se máximos absolutos  $(1, 1)$ ,  $(-1, -1)$ , máximos relativos  $(1, 1)$ , ponto de sela  $(0, 0)$ .

Sim tem que ter necessariamente ponto de sela.

## AULA 21 - MÁXIMOS E MÍNIMOS (SEGUNDA PARTE) - MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

### Exercício 21.1

O lenhador deve fixar as extremidades de uma longa corda no acampamento, no ponto  $B$  e percorrer a margem da lagoa. O ponto que sobrar mais corda é o procurado.

### Exercício 21.2

$$\left(\frac{32}{9}, \frac{8}{3}\right)$$

### Exercício 21.3

1. Ponto de Máximo  $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$   
 Ponto de Mínimo  $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$
2.  $\left(\frac{8}{5}, \frac{8}{5}\right)$ : ponto de mínimo
3. Ponto de Máximo  $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right), \left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$   
 Ponto de Mínimo  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
4. •  $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ : ponto de máximo  
 • os pontos de mínimo estão sobre os segmentos de reta  $\{(0, y) : 0 \leq y \leq 1\}$  e  $\{(x, 0) : 0 \leq x \leq 3\}$ .

5. Ponto de Máximo  $(\sqrt{3}, \sqrt{3}), (-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$   
 Ponto de Mínimo  $(1, -1), (-1, 1)$ .

## AULA 22 - MULTIPLICADORES DE LAGRANGE(CONTINUAÇÃO)

### Exercício 22.1

- Ponto de Máximo  $(2, 2)$   
 Ponto de Mínimo  $(0, 0)$ .

### Exercício 22.2

$$\nabla f(x, y, z) = e^{-(x^2+y^2)}(-2xz - 2yz, 1) \neq (0, 0, 0) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

### Exercício 22.3

Está provado no módulo.

### Exercício 22.4

- Ponto de Máximo  $(1, 2)$   
 Ponto de Mínimo Não existe ponto de mínimo
- $\left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ : ponto de máximo;  $\left(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ : ponto de mínimo
- Ponto de Máximo  $(2, 2)$   
 Ponto de Mínimo  $(0, 0)$ .
- $\left(3, \frac{5}{2}\right)$ : ponto de máximo;  $(x, 0)$ , com  $0 \leq x \leq 8$ : pontos de mínimo
- São os pontos de tangencia entre as curvas de nível de  $f$  e a circunferência.
- Se  $f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$   
 implica que  $\begin{matrix} 2Ax + 2By = 0 \\ 2Bx + 2Cy = 0 \end{matrix}$  se  $AC - B^2 \neq 0$

então  $(0, 0)$  é ponto crítico de  $f$ .

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2A, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2C, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2B.$$

$$H(x, y) = 4AC - 4B^2$$

Se  $4AC - 4B^2 > 0$  então, como  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2A$  que pode ser maior ou menor que zero, dando origem a um ponto de mínimo ou máximo local, tem-se  $f(x, y) = k$  é equivalente a  $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = k$  que são elipses ou círculos, pois  $4AC - 4B^2 > 0$ .

Se  $4AC - 4B^2 < 0$  então  $H(0, 0) < 0$ . Assim  $(0, 0)$  é ponto de sela e  $f(x, y) = k$  é equivalente a  $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = k$  que são hipéboles, pois  $4AC - 4B^2 < 0$ .

7. Ponto de mínimo:  $(2, 1, 1)$ .

Não existe ponto de máximo pois sobre  $A$ ,  $f = x^2 + (3 - x)^2 + (3 - x)^2$  que vai para infinito se  $x \rightarrow +\infty$  dentro de  $A$ .

8.  $\left(\frac{2 - \sqrt{66}}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2 + \sqrt{66}}{6}\right)$ : ponto de máximo;

$\left(\frac{2 + \sqrt{66}}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2 - \sqrt{66}}{6}\right)$ : ponto de mínimo