Módulo 1

Dinamérico Pereira Pombo Jr.
Paulo Henrique C. Gusmão

Volume 1
3ª edição

Cálculo II

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Fundação
CECIERJ
Consórcio cederj
Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Cálculo II

Volume 1 - Módulo 1
3ª edição

Dinamérico Pereira Pombo Jr.
Paulo Henrique C. Gusmão

GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
Ministério da Educação
BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Apoio:
FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001
Tel.: (21) 2334-1569 Fax: (21) 2568-0725

Material Didático

ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO
Dinamérico Pereira Pombo Jr.
Paulo Henrique C. Gusmão

COORDENAÇÃO DE DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL
Cristine Costa Barreto

DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL E REVISÃO
Anna Maria Osborne
Ana Tereza de Andrade
Jane Castellani
Leonardo Villela
Nilce P. Rangel Del Rio

COORDENAÇÃO DE LINGUAGEM
Maria Angélica Alves

Departamento de Produção

EDITORA
Tereza Queiroz

COORDENAÇÃO EDITORIAL
Jane Castellani

REVISÃO TIPOGRÁFICA
Equipe Cederj

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO
Jorge Moura

PROGRAMAÇÃO VISUAL
Marcelo Freitas

ILUSTRAÇÃO
Equipe Cederj

CAPA
Eduardo Bordoni
Fábio Muniz

PRODUÇÃO GRÁFICA
Patricia Seabra

P784c

Pombo Júnior, Dinamérico P.
Cálculo II. v.1 / Dinamérico P. Pombo Júnior -- 3.ed.-- Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.
128p.; 21 x 29,7 cm.

ISBN: 85-7648-045-X

1. Cálculo. 2. Técnicas de integração. 3. Cálculo integral. I. Gusmão, Paulo Henrique C. II. Título.

CDD: 515.43

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.

2010/1

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador
Sérgio Cabral Filho

Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia
Alexandre Cardoso

Universidades Consorciadas

UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Vieiralves

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Reitor: Roberto de Souza Salles

UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Aloísio Teixeira

UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Motta Miranda

UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitora: Malvina Tania Tuttman

Cálculo II | Volume 1

SUMÁRIO

Módulo 1: A integral definida ____ 7

Aula 1 – A integral definida. Motivação. ____ 9
Dinamérico Pereira Pombo Jr.

Aula 2 – A integral definida. ____ 17
Dinamérico Pereira Pombo Jr.

Aula 3 – O Teorema Fundamental do Cálculo. ____ 27
Dinamérico Pereira Pombo Jr.

Aula 4 – O Teorema Fundamental do Cálculo. Continuação. ____ 33
Dinamérico Pereira Pombo Jr.

Aula 5 – Cálculo de áreas. O teorema do valor médio para integrais. ____ 43
Dinamérico Pereira Pombo Jr.

Aula 6 – Exercícios resolvidos. ____ 55
Dinamérico Pereira Pombo Jr.

Aula 7 – A função logarítmica. ____ 61
Dinamérico Pereira Pombo Jr.

Aula 8 – A função logarítmica. Continuação. ____ 71
Dinamérico Pereira Pombo Jr.

Aula 9 – A função exponencial. ____ 79
Dinamérico Pereira Pombo Jr.

Aula 10 – A função exponencial. Continuação. ____ 87
Dinamérico Pereira Pombo Jr.

Aula 11 – Exercícios resolvidos. ____ 93
Dinamérico Pereira Pombo Jr.

Aula 12 – Outras indeterminações da regra de L'Hôpital. ____ 101
Paulo Henrique C. Gusmão

Aula 13 – Gráficos de funções. ____ 107
Paulo Henrique C. Gusmão

Aula 14 – Exercícios resolvidos. ____ 115
Paulo Henrique C. Gusmão

Aula 15 – Exercícios resolvidos. ____ 123
Paulo Henrique C. Gusmão

Módulo 1

A Integral Definida

O principal objetivo deste módulo é o estudo da integral definida de funções reais definidas em intervalos fechados e limitados, com ênfase no caso em que as funções consideradas são contínuas. O resultado central aqui apresentado é o Teorema Fundamental do Cálculo para funções contínuas, o qual permite a obtenção da integral definida de certas funções de maneira automática. Enfatizamos também como a integral definida é uma ferramenta importante para o cálculo de áreas de regiões planas.

Usamos a integral definida para introduzir, de maneira rigorosa, a função logarítmica, cujas propriedades básicas são discutidas detalhadamente. Finalmente, definimos a função exponencial como a inversa da função logarítmica e discutimos detalhadamente as suas propriedades básicas.

Aula 1 – A integral definida. Motivação.

Referências: Aulas 1 e 2 de Cálculo I.

Objetivos

Compreender um argumento, de caráter geométrico, que permitirá calcular a área de certas regiões planas.

Consideremos uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a,b]$ e tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Vamos discutir a seguinte pergunta:

Como calcular a área da região R compreendida entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e as retas $x = a$ e $x = b$? (Ver a Figura 1.1).

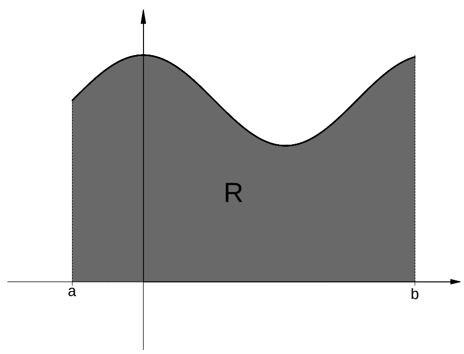


Figura 1.1

Por exemplo, se $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = 1$ para todo $x \in [0,2]$, então os nossos conhecimentos de Geometria Plana nos dizem que a área da região compreendida entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e as retas $x = 0$ e $x = 2$ é 2 (ver a Figura 1.2).

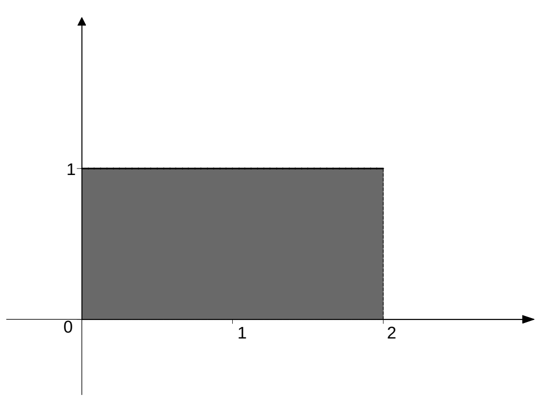


Figura 1.2

Os nossos conhecimentos de Geometria Plana também nos garantem que se $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = |x|$ para todo $x \in [-1,1]$, então a área da região compreendida entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e as retas $x = -1$ e $x = 1$ é 1 (ver a Figura 1.3).

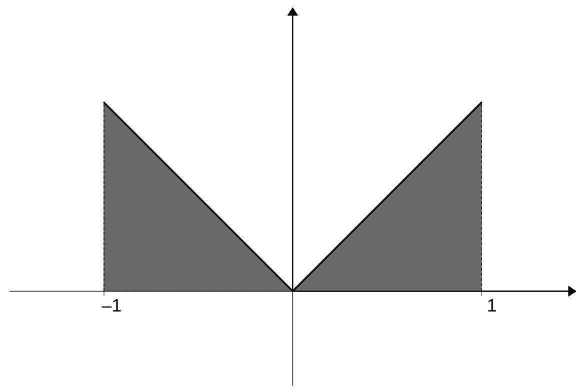


Figura 1.3

No entanto, a Geometria Plana é insuficiente para responder a nossa pergunta no caso geral. Por exemplo, seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ para todo $x \in [0,1]$ e consideremos a região compreendida entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e a reta $x = 1$ (ver a Figura 1.4).

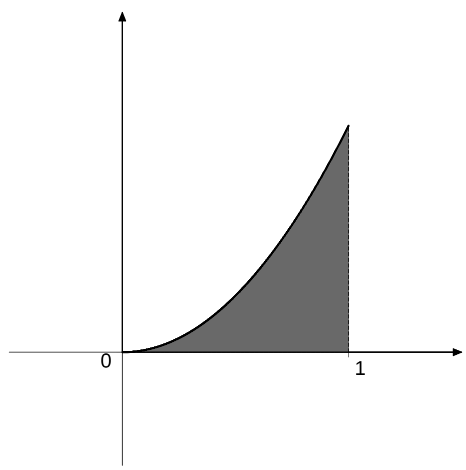


Figura 1.4

Não há, na Geometria Plana, ferramenta que nos permita calcular a área da região indicada. Para tentar atacar o problema, vamos usar o procedimento que passaremos a descrever a partir de agora.

Para cada inteiro $n \geq 1$, dividamos o intervalo $[0,1]$ em n subintervalos iguais, obtendo assim os intervalos $\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \ldots, \left[\frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n}\right]$ e $\left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$, cada um deles possuindo comprimento $\frac{1}{n}$. Observemos que se $n = 2$ teríamos os intervalos $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ e $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, se $n = 3$ teríamos os intervalos $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ e $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$, se $n = 4$ teríamos os intervalos $\left[0, \frac{1}{4}\right]$, $\left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right]$, $\left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right]$ e $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$, e assim por diante.

Para cada inteiro $n \geq 1$, vamos definir três números, T_n, U_n e V_n, da seguinte forma:

$$T_n = \frac{f(0)}{n} + \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{n} + \cdots + \frac{f\left(\frac{n-1}{n}\right)}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f\left(\frac{k-1}{n}\right)}{n},$$

$$U_n = \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{n} + \frac{f\left(\frac{2}{n}\right)}{n} + \cdots + \frac{f(1)}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f\left(\frac{k}{n}\right)}{n}$$

e

$$V_n = \frac{f(t_1)}{n} + \frac{f(t_2)}{n} + \cdots + \frac{f(t_{n-1})}{n} + \frac{f(t_n)}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(t_k)}{n},$$

onde $t_1 \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$, $t_2 \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$, $\ldots$, $t_{n-1} \in \left[\frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n}\right]$ e $t_n \in \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$ são tomados de maneira arbitrária.

Antes de prosseguir, observemos que os números T_n, U_n e V_n têm um significado geométrico bastante simples. De fato, para cada $k = 1, \ldots, n$, o número $\dfrac{f\left(\frac{k-1}{n}\right)}{n}$ representa a área do retângulo de base $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ e altura $f\left(\frac{k-1}{n}\right)$, o número $\dfrac{f\left(\frac{k}{n}\right)}{n}$ representa a área do retângulo de base $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ e altura $f\left(\frac{k}{n}\right)$ e o número $\dfrac{f(t_k)}{n}$ representa a área do retângulo de base $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ e altura $f(t_k)$. Assim, cada um dos números T_n, U_n e V_n representa a soma das áreas dos retângulos que acabamos de mencionar. Por exemplo, os números T_4, U_4 e V_4 representam as áreas das regiões hachuradas nas Figuras 1.5a, 1.5b e 1.5c, respectivamente, enquanto os números T_8, U_8 e V_8 representam as áreas das regiões hachuradas nas Figuras 1.6a, 1.6b e 1.6c, respectivamente. É fácil observar que T_8, U_8 e V_8 são uma melhor aproximação para o valor da área procurada do que T_4, U_4 e V_4. Veremos, a seguir, que esta afirmação é menos ingênua do que possa parecer.

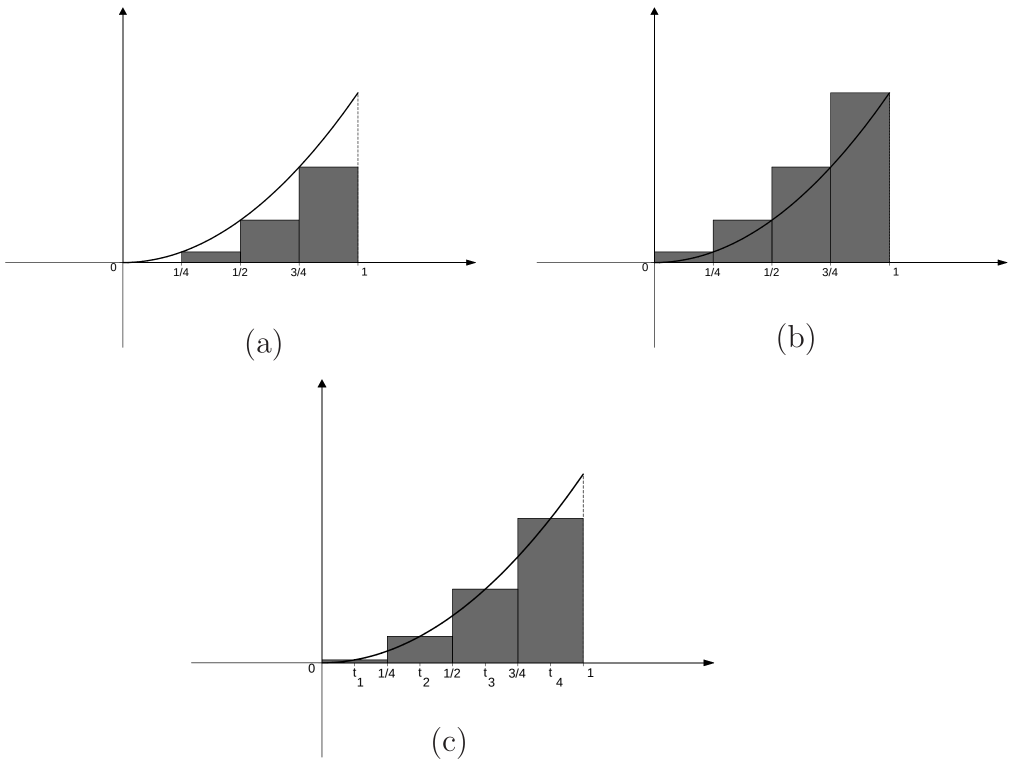


Figura 1.5

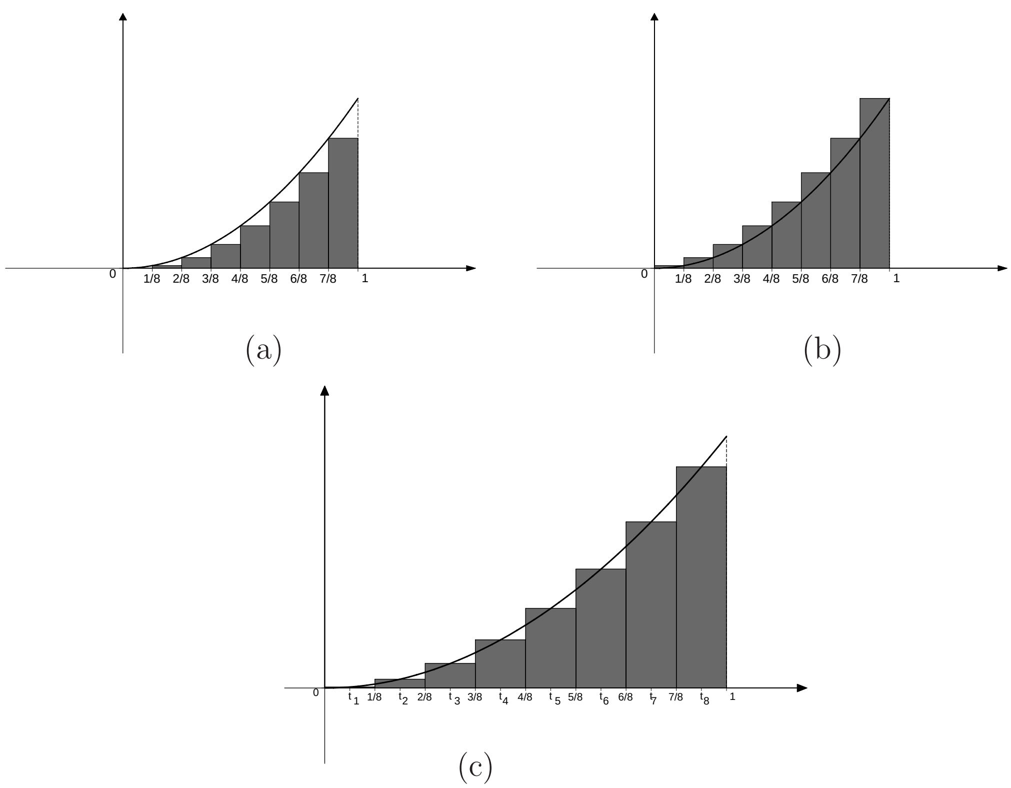


Figura 1.6

Notemos que, como $t_k \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ para $k = 1, \ldots, n$ e como f é crescente, então

$$f\left(\frac{k-1}{n}\right) \leq f(t_k) \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$$

para $k = 1, \ldots, n$. Conseqüentemente,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f\left(\frac{k-1}{n}\right)}{n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{f(t_k)}{n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{f\left(\frac{k}{n}\right)}{n},$$

isto é,

$$T_n \leq V_n \leq U_n.$$

Notemos ainda que, para cada inteiro $n \geq 1$,

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{f\left(\frac{k-1}{n}\right)}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)^2}{n^3} = \frac{1}{n^3}\left(\sum_{k=1}^{n} (k-1)^2\right)$$

e

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{f\left(\frac{k}{n}\right)}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3} = \frac{1}{n^3}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right).$$

Façamos agora um parênteses para provar que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

Para isto, vamos usar o princípio de indução finita. É claro que a afirmação acima é válida para $n = 1$. Seja m um inteiro positivo e admitamos a afirmação verdadeira para m, ou seja, suponhamos que

$$1^2 + 2^2 + \cdots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Então

$$\begin{aligned}
1^2+2^2+\cdots+m^2+(m+1)^2 &= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}+(m+1)^2 = \\
&= (m+1)\left(\frac{m(2m+1)}{6}+(m+1)\right) = \\
&= (m+1)\left(\frac{2m^2+m+6m+6}{6}\right) = \\
&= (m+1)\left(\frac{2m^2+7m+6}{6}\right) = \\
&= (m+1)\left(\frac{(m+2)(2m+3)}{6}\right) = \\
&= \frac{(m+1)\,((m+1)+1)\,(2(m+1)+1)}{6}.
\end{aligned}$$

Isto mostra que a afirmação é válida para $m+1$. Pelo princípio de indução finita a nossa afirmação é válida para todo inteiro $n \geq 1$.

Em vista do que acabamos de provar, segue que

$$\begin{aligned}
T_n = \frac{1}{n^3}\left(\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2\right) &= \frac{1}{n^3}\left(1^2+\cdots+(n-1)^2\right) = \\
&= \frac{(n-1)((n-1)+1)(2(n-1)+1)}{6n^3} = \\
&= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} = \\
&= \frac{2n^3-3n^2+n}{6n^3}
\end{aligned}$$

e

$$U_n = \frac{1}{n^3}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}$$

para todo inteiro $n \geq 1$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-3n^2+n}{6n^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

E, como $T_n \leq V_n \leq U_n$ para todo $n \geq 1$, podemos também afirmar que

$$\lim_{n\to\infty} V_n = \frac{1}{3}.$$

Em resumo, acabamos de mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} V_n = \frac{1}{3}.$$

Isto significa que, para n suficientemente grande, os números T_n, U_n e V_n estão bem próximos de $\frac{1}{3}$. Ou, em outras palavras, se dividirmos o intervalo $[0,1]$ em subintervalos de comprimento $\frac{1}{n}$ bem pequeno, as somas das áreas dos retângulos obtidos das três maneiras mencionadas anteriormente, que são precisamente os números T_n, U_n e V_n, estarão bem próximas de $\frac{1}{3}$. Seria natural admitir que a área procurada valesse $\frac{1}{3}$. Na próxima aula veremos que é este precisamente o caso e que, a bem da verdade, o argumento utilizado se aplica a qualquer função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$.

Finalmente, cabe mencionar que nesta aula também tivemos a oportunidade de preparar o terreno para introduzir a noção de integral definida, a ser estudada a partir da próxima aula.

Resumo

Nesta aula você foi apresentado a um argumento que permitirá calcular a área de certas regiões planas.

Exercícios

1. Mostre, por indução, que

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

2. Seja $f(x) = x^3$ para todo $x \in [0,1]$ e considere as seqüências (T_n), (U_n) e (V_n), onde

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{f\left(\frac{k-1}{n}\right)}{n}\ , \quad U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{f\left(\frac{k}{n}\right)}{n} \ \text{ e } \ V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(t_k)}{n}$$

$\left(t_1 \in \left[0, \frac{1}{n}\right],\, t_2 \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \ldots,\, t_{n-1} \in \left[\frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n}\right] \text{ e } t_n \in \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]\right).$

Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} V_n = \frac{1}{4}.$$

Sugestão: Raciocine como fizemos para a função $f(x) = x^2$.

Auto-avaliação

Nesta aula discutimos a idéia na qual repousa a noção de integral definida. Como esta noção desempenha um papel central em tudo o que veremos a seguir, só passe para a próxima aula após fazer o segundo exercício proposto.

Aula 2 – A integral definida.

Referências: Aulas 2 de Cálculo I e 1 de Cálculo II.

Objetivos

- *Compreender a noção de integral definida.*
- *Estudar algumas propriedades da integral definida.*

Nesta aula, apoiados no germe lançado na aula passada, vamos introduzir a noção de integral definida de uma função real cujo domínio é um intervalo fechado e limitado e cuja imagem é um conjunto limitado.

Inicialmente, lembremos que um subconjunto não vazio $T \subset \mathbb{R}$ é *limitado* quando existem $m, M \in \mathbb{R}$ (não necessariamente em T) tais que $m \leq t \leq M$ para todo $t \in T$.

O teorema de Weierstrass, visto na aula 7 de Cálculo I, nos garante que se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a,b]$, então sua imagem $f([a,b]) = \{f(x);\ x \in [a,b]\}$ é um conjunto limitado.

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), notável matemático alemão, professor em Göttingen, foi uma das figuras centrais da Matemática no século XIX. Riemann foi um dos fundadores da Teoria das Funções Analíticas, mas também fez importantes contribuições à Geometria, à Teoria dos Números e à Física Matemática. Ele formulou a *hipótese de Riemann*, conjectura a respeito da função zeta que continua em aberto até hoje e que, se provada, daria informações importantes sobre a distribuição dos números primos.

Definição 2.1 Suponhamos $a < b$ e seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $f([a,b])$ é um conjunto limitado. Para cada inteiro $n \geq 1$, consideremos os pontos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = b$ tais que $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ para $k = 1, \ldots, n$ e tomemos arbitrariamente pontos $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ e t_n tais que $t_1 \in [x_0, x_1]$, $t_2 \in [x_1, x_2]$, $\ldots$, $t_{n-1} \in [x_{n-2}, x_{n-1}]$ e $t_n \in [x_{n-1}, x_n]$. Consideremos então a soma

$$\begin{aligned} S_n &= f(t_1)(x_1 - x_0) + f(t_2)(x_2 - x_1) + \cdots + \\ &+ \cdots + f(t_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2}) + f(t_n)(x_n - x_{n-1}) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\right), \end{aligned}$$

usualmente conhecida como uma *soma de Riemann* de f em $[a,b]$.

Notemos que, se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, então S_n representa a soma das áreas de n retângulos (o primeiro de base $[x_0, x_1]$ e altura $f(t_1)$, o segundo de base $[x_1, x_2]$ e altura $f(t_2)$, $\ldots$, o penúltimo de base $[x_{n-2}, x_{n-1}]$ e altura $f(t_{n-1})$ e o último de base $[x_{n-1}, x_n]$ e altura $f(t_n)$), como indicamos na Figura 2.1.

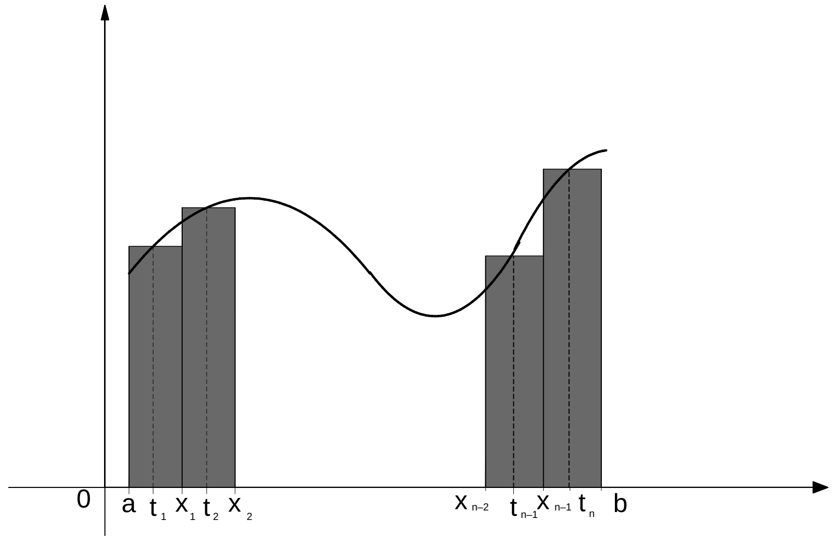


Figura 2.1

Se existir um número real S tal que $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, *para toda seqüência* (S_n) *assim construída*, diremos que a função f *é integrável em* $[a,b]$ e escrevemos

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Pode-se provar que S, caso exista, é único.

O número $\int_a^b f(x)dx$ é dito a *integral* (ou a *integral definida)* de f em $[a,b]$. Ele também é conhecido como a *integral de Riemann* de f em $[a,b]$.

As notações $\int_a^b f(t)dt$, $\int_a^b f(s)ds$, $\int_a^b f(u)du$, ... são também usadas para representar a integral de f em $[a,b]$.

Se $a > b$, definimos $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. Definimos, ainda, $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Na aula anterior consideramos as somas

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{f\left(\frac{k-1}{n}\right)}{n} \quad , \quad U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{f\left(\frac{k}{n}\right)}{n}$$

e $V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(t_k)}{n}$ as quais, como é fácil notar, são somas de Riemann da função $f(x) = x^2$ no intervalo $[0,1]$. Admitindo, por um instante, a integrabilidade de f em $[0,1]$ (ver o teorema a seguir), teríamos

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} V_n,$$

em vista da Definição 2.1. Por outro lado, vimos na referida aula que os números T_n, U_n e V_n se aproximam da área compreendida entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e a reta $x = 1$ à medida que n cresce. Isto motiva a definição a seguir.

Definição 2.2 Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a,b]$ tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Definimos a *área* da região compreendida entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e as retas $x = a$ e $x = b$ como sendo o número $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Por outro lado, se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função integrável em $[a,b]$ e $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a,b]$, definimos a *área* da região compreendida entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e as retas $x = a$ e $x = b$ como sendo o número $-\left(\displaystyle\int_a^b f(x)dx\right)$.

Um resultado muito importante, cuja demonstração será vista na disciplina de Análise, é o seguinte

Teorema 2.1

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a,b]$, então f é integrável em $[a,b]$.

Mais geralmente, é possível provar que se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ possui imagem $f([a,b])$ limitada e é contínua, exceto em um número finito de pontos de $[a,b]$, então f é integrável em $[a,b]$.

Exemplo 2.1

Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ para todo $x \in [0,1]$. Como f é contínua em $[0,1]$, o Teorema 2.1 nos garante que f é integrável em $[0,1]$. Logo, pela Definição 2.1,

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

para qualquer seqüência (S_n) de somas de Riemann de f em $[0,1]$. Em particular, como $\displaystyle\lim_{n\to\infty} V_n = \frac{1}{3}$, segue que

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Portanto, a área da região compreendida entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e a reta $x = 1$ é $\frac{1}{3}$, respondendo assim à pergunta formulada na aula anterior.

Exemplo 2.2

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = c$ para todo $x \in [a,b]$. Então $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$.

Notemos que a integrabilidade de f segue imediatamente do Teorema 2.1. Mas, neste caso, ela pode ser provada facilmente, como veremos a seguir.

De fato, para cada inteiro $n \geq 1$, sejam $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = b$ como na Definição 2.1 e $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ para $k = 1, \ldots, n$. Então

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} c\,(x_k - x_{k-1}) = c\,\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})\right) = \\ &= c\left((x_1 - a) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (b - x_{n-1})\right) = \\ &= c(b-a). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = c(b-a).$$

Isto mostra que f é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b c\,dx = c(b-a).$$

No caso em que $c > 0$, $c(b-a)$ é precisamente a área do retângulo de lado $[a, b]$ e altura c, que coincide com a área da região compreendida entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e as retas $x = a$ e $x = b$ (ver a Figura 2.2).

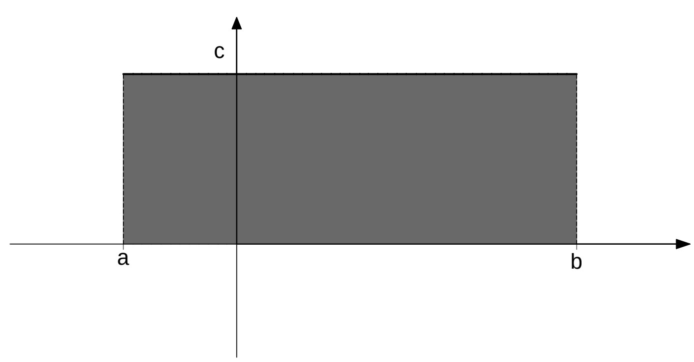


Figura 2.2

Vejamos, agora, um exemplo de uma função que não é integrável.

Exemplo 2.3

Seja $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=0$ se $x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]$ e $f(x)=1$ se $x\in(\mathbb{R}-\mathbb{Q})\cap[0,1]$. Mostremos que f não é integrável em $[0,1]$.

Com efeito, para cada inteiro $n\geq 1$, sejam $0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-2}<x_{n-1}<x_n=1$ tais que $x_k-x_{k-1}=\frac{1}{n}$ para $k=1,\dots,n$ e tomemos pontos $t_k,{t_k}'\in[x_{k-1},x_k]$ tais que $t_k\in\mathbb{Q}\cap[x_{k-1},x_k]$ e ${t_k}'\in(\mathbb{R}-\mathbb{Q})\cap[x_{k-1},x_k]$ para $k=1,\dots,n$ (aqui estamos usando o fato importante segundo o qual entre dois números reais há sempre um número racional e um número irracional). Como $f(t_k)=0$ e $f({t_k}')=1$ para $k=1,\dots,n$, obtemos

$$S_n=\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}f(t_k)\right)=0$$

e

$$S'_n=\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}f(t'_k)\right)=1.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty}S_n=0\quad\text{e}\quad\lim_{n\to\infty}{S_n}'=1.$$

Assim, f não é integrável em $[0,1]$.

Na proposição a seguir veremos algumas propriedades elementares da integral definida.

Proposição 2.1

Sejam $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ duas funções integráveis em $[a,b]$ e α um número real. Valem as seguintes propriedades:

(a) se $f(x)\geq 0$ para todo $x\in[a,b]$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)dx\geq 0$;

(b) a função αf é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b(\alpha f)(x)dx=\int_a^b\alpha f(x)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx;$$

c) a função $f+g$ é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b(f+g)(x)dx=\int_a^b(f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx.$$

Demonstração: Provaremos (a) e (b).

Inicialmente, provemos (a). Com efeito, para cada inteiro $n \geq 1$, sejam $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = b$ como na Definição 2.1 e $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ para $k = 1, \ldots, n$. Então

$$S_n = \frac{b-a}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\right) \geq 0,$$

pois $f(t_k) \geq 0$ para $k = 1, \ldots, n$. Portanto, pelo Exercício 2(a), da aula 11 de Cálculo I, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} S_n \geq 0, \quad \text{ou seja,} \quad \int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Agora, provemos (b). Com efeito, para cada inteiro $n \geq 1$, sejam $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = b$ como na Definição 2.1 e $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ para $k = 1, \ldots, n$. Definamos

$$S_n{}' = \frac{b-a}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} (\alpha f)(t_k)\right).$$

Então

$$S_n{}' = \frac{b-a}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha f(t_k)\right) = \alpha\left(\frac{b-a}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\right)\right) = \alpha S_n,$$

onde $S_n = \dfrac{b-a}{n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\right)$. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} S_n{}' = \alpha\left(\lim_{n\to\infty} S_n\right) = \alpha \int_a^b f(x)dx.$$

Isto mostra que αf é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b (\alpha f)(x)dx = \int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$$

Façamos, agora, um comentário a respeito da noção de área. Para uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável e tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, definimos a área da região compreendida entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e as retas $x = a$ e $x = b$ como sendo o número $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$. Acabamos de ver, na Proposição 2.1(a), que, sob as condições mencionadas, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Assim, a referida área é um número maior ou igual a zero, como seria de se esperar.

Por outro lado, para uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável e tal que $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a,b]$, definimos a área da região compreendida entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e as retas $x = a$ e $x = b$ como sendo $-\left(\int_a^b f(x)dx\right)$. Mas, pela Proposição 2.1(b), $-f$ é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b (-f)(x)dx = -\left(\int_a^b f(x)dx\right).$$

Como $(-f)(x) = -f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, a Proposição 2.1(a) nos garante que

$$\int_a^b (-f)(x)dx \geq 0.$$

Assim, a referida área é um número maior ou igual a zero, como seria de se esperar. Como conseqüência imediata do Exemplo 2.2 e da Proposição 2.1(c), obtemos:

Exemplo 2.4

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável em $[a,b]$ e $c \in \mathbb{R}$, então a função $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) + c$ para todo $x \in [a,b]$, é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) + c)dx = \int_a^b f(x)dx + c(b-a).$$

Exemplo 2.5

Se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são integráveis em $[a,b]$ e $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

De fato, pela Proposição 2.1(b),(c), $f - g = f + (-g)$ é integrável em $[a,b]$. E, como $(f-g)(x) = f(x) - g(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, segue da Proposição 2.1(a) que

$$\int_a^b (f-g)(x)dx \geq 0.$$

Mas,

$$0 \leq \int_a^b (f-g)(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx.$$

Portanto,

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

Na próxima proposição enunciaremos um resultado que não será demonstrado neste curso.

Proposição 2.2

Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável em $[a, b]$ e $a < u < b$. Então $f|_{[a,u]}$ (a restrição de f a $[a, u]$) é integrável em $[a, u]$, $f|_{[u,b]}$ (a restrição de f a $[u, b]$) é integrável em $[u, b]$ e

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^u f(x)dx + \int_u^b f(x)dx.$$

Exemplo 2.6

Definamos $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 + 1$ se $x \in [0, 1]$ e $f(x) = 2$ se $x \in [1, 2]$ (o gráfico de f é esboçado na Figura 2.3). Calculemos $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx$.

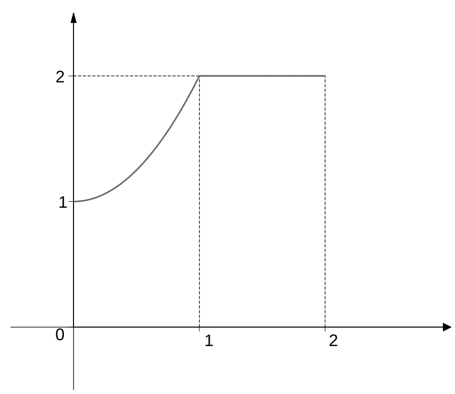


Figura 2.3

De fato, como f é contínua em $[0, 2]$, então f é integrável em $[0, 2]$. Além disso, pela Proposição 2.2,

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx.$$

Mas, pelo que vimos nesta aula,

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x^2 + 1)dx = \int_0^1 x^2 dx + 1(1 - 0) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

e

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 2\, dx = 2(2 - 1) = 2.$$

Portanto,

$$\int_0^2 f(x)dx = \frac{4}{3} + 2 = \frac{10}{3}.$$

Resumo

Nesta aula você foi apresentado à noção de integral definida e viu algumas propriedades elementares da integral definida. O fato importante segundo o qual toda função contínua de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$ é integrável em $[a,b]$ foi também mencionado.

Exercícios

1. Calcule $\int_{-1}^{1} |x| dx$.

2. Seja $f(x) = -x^2$ para todo $x \in [0,1]$. Calcule a área da região compreendida entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e a reta $x = 1$.

3. (a) Mostre, por indução, que $1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ para todo inteiro $n \geq 1$.

   (b) Mostre que $\int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$.

   Sugestão: Você já sabe que a função $f(x) = x$ é integrável em $[a,b]$, pois ela é contínua em $[a,b]$. Para cada inteiro $n \geq 1$, considere a soma de Riemann $S_n = \frac{b-a}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right)$

   e mostre que $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$.

4. Raciocine, como na aula 1, para mostrar que

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

5. Calcule $\int_a^b (x^2 + x + 1)dx$.

6. Seja $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^2$ se $x \in [-1,0]$ e $f(x) = x^2$ se $x \in [0,1]$. Mostre que $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$.

7. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável tal que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$. Mostre que

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Auto-avaliação

Nos exercícios desta aula você teve a oportunidade de fixar a noção de integral definida e algumas de suas propriedades. Caso não tenha conseguido fazer todos os exercícios, releia a aula e depois tente novamente. Caso persista alguma dúvida, consulte o tutor no pólo.

Aula 3 – O Teorema Fundamental do Cálculo.

Referências: Aulas 6, 7, 9, 10, 12 de Cálculo I, e 2 de Cálculo II.

Objetivo

Iniciar o estudo do Teorema Fundamental do Cálculo, que fornece uma maneira simples de se calcular a integral definida de funções contínuas definidas em intervalos fechados e limitados.

Na aula anterior você aprendeu que toda função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável. Entretanto, tendo em vista a complexidade da definição, calcular o número $\int_a^b f(x)dx$ pode não ser simples, como já ficou claro nas duas aulas anteriores. Nesta aula iniciaremos o estudo de um teorema importante que, em certos casos, nos levará ao número $\int_a^b f(x)dx$ de maneira automática: o Teorema Fundamental do Cálculo.

Comecemos enunciando uma proposição cuja demonstração será vista na disciplina de Análise.

Proposição 3.1

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável em $[a,b]$, então a função $|f| : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável em $[a,b]$. Além disso,

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f|(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx.$$

Lembremos que, por definição, $|f|(x) = |f(x)|$ para todo $x \in [a,b]$.

Exemplo 3.1

A recíproca da Proposição 3.1 não é verdadeira em geral, ou seja, podemos ter $|f|$ integrável sem que f seja integrável.

Realmente, consideremos a função $f : [0.1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -1$ se $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ e $f(x) = 1$ se $x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap [0,1]$. Raciocinando como no Exemplo 2.3, concluímos que f não é integrável em $[0,1]$ (faça os detalhes). Entretanto, como $|f|(x) = |f(x)| = 1$ para todo $x \in [0,1]$, então a função $|f|$ é integrável em $[0,1]$.

Sejam $a < b$ e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a,b]$. Para cada $x \in [a,b]$ definamos

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Notemos que, como f é contínua em $[a, b]$, então f é contínua em $[a, x]$, logo integrável em $[a, x]$ para todo $x \in [a, b]$; assim, faz sentido considerar a função F.

Notemos ainda que, se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, então $F(x)$ representa a área da região compreendida entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e as retas $t = a$ e $t = x$; ver a Figura 3.1.

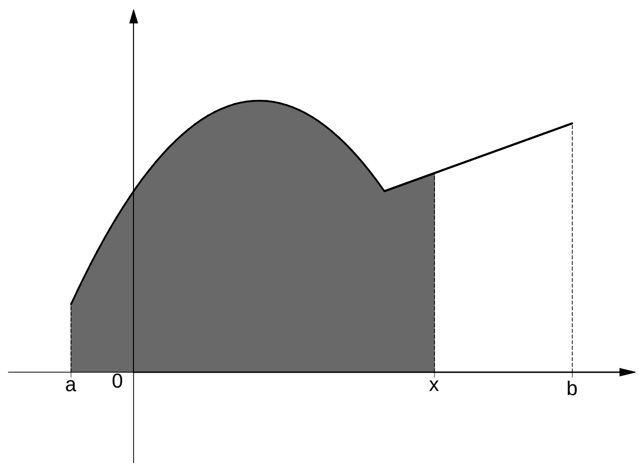


Figura 3.1

Teorema 3.1

[$1^{\underline{a}}$ forma do Teorema Fundamental do Cálculo] Se $a < b$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$, então F é derivável em $[a, b]$ e

$$F'(x) = f(x)$$

para todo $x \in [a, b]$.

Demonstração: Fixemos $x \in (a, b)$. Mostremos que F é derivável em x e $F'(x) = f(x)$. Os casos em que $x = a$ ou $x = b$ são tratados de maneira análoga. Devemos provar que

$$\lim_{t \to x} \frac{F(t) - F(x)}{t - x} = f(x),$$

o que equivale a provar que

$$\lim_{t \to x^-} \frac{F(t) - F(x)}{t - x} = f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{t \to x^+} \frac{F(t) - F(x)}{t - x} = f(x).$$

Provaremos que

$$\lim_{t \to x^+} \frac{F(t) - F(x)}{t - x} = f(x),$$

sendo o caso do limite lateral à esquerda tratado de maneira análoga.

Tomemos então uma seqüência (t_n) arbitrária tal que $x < t_n \leq b$ para todo n e $\lim_{n\to\infty} t_n = x$. Verifiquemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(t_n) - F(x)}{t_n - x} = f(x).$$

Com efeito, segue da Proposição 2.2 que

$$F(t_n) - F(x) = \int_a^{t_n} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{t_n} f(t)dt.$$

Como, pelo Exemplo 2.2, $\int_x^{t_n} f(x)dt = (t_n - x)f(x)$ (como x está fixado, $f(x)$ faz o papel de uma constante), obtemos

$$\frac{F(t_n) - F(x)}{t_n - x} - f(x) = \frac{\int_x^{t_n} f(t)dt}{t_n - x} - \frac{\int_x^{t_n} f(x)dt}{t_n - x}.$$

Por outro lado, pela Proposição 2.1(c),

$$\frac{\int_x^{t_n} f(t)dt}{t_n - x} - \frac{\int_x^{t_n} f(x)dt}{t_n - x} = \frac{\int_x^{t_n}(f(t) - f(x))dt}{t_n - x}.$$

Logo,

$$\frac{F(t_n) - F(x)}{t_n - x} - f(x) = \frac{\int_x^{t_n}(f(t) - f(x))dt}{t_n - x}.$$

Assim, pela Proposição 3.1, obtemos

$$\left|\frac{F(t_n) - F(x)}{t_n - x} - f(x)\right| = \frac{\left|\int_x^{t_n}(f(t) - f(x))dt\right|}{t_n - x} \leq \frac{\int_x^{t_n} |f(t) - f(x)|dt}{t_n - x}.$$

Pelo teorema de Weierstrass, visto na aula 7 de Cálculo I, para cada n existe
$z_n \in [x, t_n]$ tal que

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(z_n) - f(x)|$$

para todo $t \in [x, t_n]$ (estamos aplicando o teorema de Weierstrass à função contínua $t \in [x, t_n] \mapsto |f(t) - f(x)| \in \mathbb{R}$).

Pelo Exemplo 2.5, segue que

$$\int_x^{t_n} |f(t) - f(x)|dt \leq \int_x^{t_n} |f(z_n) - f(x)|dt = (t_n - x)|f(z_n) - f(x)|.$$

Conseqüentemente, temos

$$\left|\frac{F(t_n) - F(x)}{t_n - x} - f(x)\right| \leq |f(z_n) - f(x)|$$

para todo n.

Finalmente, como f é contínua em x e $\lim_{n\to\infty} z_n = x$ (pois $x \leq z_n \leq t_n$ e $\lim_{n\to\infty} t_n = x$), temos que $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(x)$, isto é, $\lim_{n\to\infty} (f(z_n) - f(x)) = 0$, isto é, $\lim_{n\to\infty} |f(z_n) - f(x)| = 0$. Portanto, em vista da desigualdade acima,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(t_n) - F(x)}{t_n - x} = f(x).$$

Como (t_n) é arbitrária, acabamos de mostrar que

$$\lim_{t\to x^+} \frac{F(t) - F(x)}{t - x} = f(x),$$

concluindo assim a demonstração do teorema.

Sejam $a < b$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$. Definamos

$$F_1(x) = \int_x^b f(t)dt$$

para todo $x \in [a, b]$. Pela Proposição 2.2, temos

$$\int_a^x f(t)dt + \int_x^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

para todo $x \in [a, b]$, isto é,

$$F_1(x) = F(b) - F(x)$$

para todo $x \in [a, b]$. Portanto, pelo Teorema 3.1, F_1 é derivável em $[a, b]$ e

$$F_1{}'(x) = -f(x)$$

para todo $x \in [a, b]$.

Exemplo 3.2

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em $\mathbb{R}$ e seja a um número real arbitrário. Definamos $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Afirmamos que F é derivável em $\mathbb{R}$ e $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

De fato, seja $b > a$ arbitrário. Como f é contínua em $[a, b]$, o Teorema 3.1 nos garante que F é derivável em $[a, b]$ e $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Por outro lado, seja $c < a$ arbitrário. Então, para todo $x \in [c, a]$, temos

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt = -\int_x^a f(t)dt = -F_1(x),$$

onde

$$F_1(x) = \int_x^a f(t)dt$$

para todo $x \in [c, a]$. Como vimos logo após o Teorema 3.1, F_1 é derivável em $[c, a]$ e ${F_1}'(x) = -f(x)$ para todo $x \in [c, a]$. Conseqüentemente, F é derivável em $[c, a]$ e $F'(x) = -{F_1}'(x) = -(-f(x)) = f(x)$ para todo $x \in [c, a]$.

Em vista do que acabamos de observar segue que, para quaisquer $c, b \in \mathbb{R}$, com $c < a < b$, a função F é derivável em (c, b) e $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (c, b)$. Finalmente, como todo $x \in \mathbb{R}$ pertence a algum intervalo (c, b) (com $c < a < b$), concluímos que F é derivável em $\mathbb{R}$ e $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Como conseqüência imediata do Exemplo 3.2, obtemos:

Exemplo 3.3

A função $F(x) = \displaystyle\int_0^x \text{sen}\,(t^2)\,dt$ é derivável em $\mathbb{R}$ e $F'(x) = \text{sen}\,(x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, $F'\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = \text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 1$.

O próximo exemplo também decorre do Exemplo 3.2, apesar de exigir um raciocínio adicional.

Exemplo 3.4

A função $H(x) = \displaystyle\int_0^{x^3} \cos t\,dt$ é derivável em $\mathbb{R}$ e $H'(x) = 3x^2\cos(x^3)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

De fato, definamos $h(x) = x^3$ e $F(x) = \displaystyle\int_0^x \cos t\,dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então $F \circ h = H$, pois

$$(F \circ h)(x) = F(h(x)) = F(x^3) = \int_0^{x^3} \cos t\,dt = H(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Como F e h são deriváveis em $\mathbb{R}$, a regra da cadeia nos garante que H é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$H'(x) = (F \circ h)'(x) = F'(h(x))h'(x) = 3x^2\cos(x^3)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Resumo

Nesta aula você começou a estudar o Teorema Fundamental do Cálculo, um dos pilares do nosso curso.

Exercícios

1. Defina $G(x) = \displaystyle\int_0^{\operatorname{sen} x} t^n dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde n é um número inteiro positivo. Mostre que G é derivável em $\mathbb{R}$ e $G'(x) = (\cos x)\,(\operatorname{sen}^n x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. Defina $G(x) = \displaystyle\int_0^{x^3} \sqrt{t}\, dt$ para todo $x \in [0, +\infty)$. Mostre que G é derivável em $[0, +\infty)$ e $G'(x) = 3x^2\sqrt{x^3}$ para todo $x \in [0, +\infty)$.

3. Defina $G(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \cos t\, dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que G é derivável em $\mathbb{R}$ e $G'(x) = 3x^2\cos(x^3) - 2x\cos(x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   Sugestão: Defina $G_1(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{0} \cos t\, dt$, $G_2(x) = \displaystyle\int_0^{x^3} \cos t\, dt$ e note que $G(x) = G_2(x) + G_1(x)$.

Auto-avaliação

Os exercícios desta aula visam, essencialmente, fixar a 1ª forma do Teorema Fundamental do Cálculo. Trata-se, portanto, de uma boa oportunidade para assimilá-la. Caso tenha sentido dificuldades ao tentar fazê-los, releia as aulas 7 e 12 de Cálculo I, e depois volte a eles. Se, porventura, persistirem as dúvidas, procure o tutor no pólo.

Aula 4 – O Teorema Fundamental do Cálculo. Continuação.

Referências: Aulas 9, 10, 12, 16, 17 de Cálculo I, 2 e 3 de Cálculo II.

Objetivo

Estudar uma formulação do Teorema Fundamental do Cálculo que é bastante eficaz no que diz respeito ao cálculo de integrais definidas.

Nesta aula usaremos a 1ª forma do Teorema Fundamental do Cálculo para obter a 2ª forma do Teorema Fundamental do Cálculo, esta última uma ferramenta importante para calcularmos integrais definidas, como ficará claro no decorrer da aula.

A 1ª forma do Teorema Fundamental do Cálculo nos garante que se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então existe $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivável tal que $F' = f$. O próximo resultado nos fornece uma maneira simples de calcular $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Teorema 4.1
[2ª forma do Teorema Fundamental do Cálculo] Sejam $a < b$ e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a,b]$. Se $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ é derivável em $[a,b]$ e $G' = f$, então

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Demonstração: Seja $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ $(x \in [a,b])$ como na aula passada. Pelo Teorema 3.1, F é derivável em $[a,b]$ e $F' = f$. Logo, $G - F$ é derivável em $[a,b]$ e

$$(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

para todo $x \in [a,b]$. Pelo Corolário 17.1, a função $G - F$ é constante, isto é, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $G(x) - F(x) = c$ para todo $x \in [a,b]$. Mas, como $F(a) = 0$, segue que $c = G(a)$. Portanto, fazendo $x = b$, obtemos

$$G(b) - G(a) = G(b) - c = F(b) = \int_a^b f(t)dt,$$

concluindo assim a demonstração do teorema.

Observemos que, para aplicar o Teorema 4.1, basta encontrar uma função derivável $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $G'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 4.1

Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, e para todo inteiro $n \geq 1$, temos

$$\int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

De fato, a função $G(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ tem por derivada a função contínua $f(x) = x^n$. Logo, pelo Teorema 4.1,

$$\int_a^b x^n dx = \int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Exemplo 4.2

Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, temos

$$\int_a^b \text{sen } x \, dx = \cos a - \cos b.$$

De fato, a função $G(x) = -\cos x$ tem por derivada a função contínua $f(x) = \text{sen } x$. Logo, pelo Teorema 4.1,

$$\int_a^b \text{sen } x \, dx = \int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = -\cos b - (-\cos a) = \cos a - \cos b.$$

Exemplo 4.3

Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, temos

$$\int_a^b \cos x \, dx = \text{sen } b - \text{sen } a.$$

De fato, a função $G(x) = \text{sen } x$ tem por derivada a função contínua $f(x) = \cos x$. Logo, pelo Teorema 4.1,

$$\int_a^b \cos x \, dx = \int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = \text{sen } b - \text{sen } a.$$

Exemplo 4.4

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x \, dx = 1.$$

De fato, consideremos a função contínua $f(x) = \sec^2 x$ $\left(x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right)$. Sendo $G(x) = \text{tg } x$, temos $G'(x) = f(x)$ para todo $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Logo, pelo

Teorema 4.1,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = G(\frac{\pi}{4}) - G(0) = tg\frac{\pi}{4} - tg0 =$$

$$= \frac{\text{sen}\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} - \frac{\text{sen}0}{\cos 0} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$$

Exemplo 4.5

Sejam $0 < a < b$ e n um inteiro, com $n \geq 2$. Calculemos $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x^n}$.

Com efeito, a função $f(x) = x^{-n}$ é contínua em $[a, b]$. Além disso, sendo $G(x) = \dfrac{x^{-n+1}}{-n+1}$, temos

$$G'(x) = \frac{-n+1}{-n+1} x^{-n+1-1} = x^{-n} = f(x)$$

para todo $x \in [a, b]$. Portanto, pelo Teorema 4.1,

$$\int_a^b \frac{dx}{x^n} = \int_a^b x^{-n} dx = \int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) =$$

$$= \frac{1}{-n+1}\left(b^{-n+1} - a^{-n+1}\right).$$

Em particular,

$$\int_2^4 \frac{dx}{x^4} = \frac{1}{-4+1}\left(4^{-4+1} - 2^{-4+1}\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4^3} - \frac{1}{2^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{64}\right) = \frac{7}{192}.$$

Raciocinando como no exemplo acima, obtemos:

Exemplo 4.6

Sejam $a < b < 0$ e n um inteiro, com $n \geq 2$. Então

$$\int_a^b \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{-n+1}\ \left(b^{-n+1} - a^{-n+1}\right).$$

Exemplo 4.7

Sejam $0 \leq a < b$ e n um inteiro, com $n \geq 2$. Calculemos $\displaystyle\int_a^b \sqrt[n]{x}\,dx$.

Com efeito, a função $f(x) = \sqrt[n]{x}$ é contínua em $[a, b]$. Além disso, sendo $G(x) = \dfrac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}} = \dfrac{n}{n+1}\, x^{\frac{n+1}{n}}$, temos

$$G'(x) = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}\, x^{\frac{n+1}{n}-1} = x^{\frac{1}{n}} = f(x)$$

para todo $x \in [a, b]$. Portanto, pelo Teorema 4.1,

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt[n]{x}dx &= \int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = \\ &= \frac{n}{n+1}\left(\sqrt[n]{b^{n+1}} - \sqrt[n]{a^{n+1}}\right). \end{aligned}$$

Em particular,

$$\int_1^2 \sqrt[3]{x}\,dx = \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{16} - 1\right).$$

Exemplo 4.8

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, n um inteiro positivo e p um polinômio arbitrário. Calculemos $\displaystyle\int_a^b p'(x)(p(x))^n dx$.

Com efeito, observemos inicialmente que a função $f(x) = p'(x)(p(x))^n$ é contínua em $\mathbb{R}$ (justifique esta afirmação). Além disso, sendo $G(x) = \dfrac{(p(x))^{n+1}}{n+1}$, então G é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$G'(x) = \frac{n+1}{n+1}(p(x))^{n+1-1}p'(x) = p'(x)(p(x))^n = f(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema 4.1,

$$\begin{aligned} \int_a^b p'(x)(p(x))^n dx &= \int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = \\ &= \frac{(p(b))^{n+1}}{n+1} - \frac{(p(a))^{n+1}}{n+1}. \end{aligned}$$

Vamos usar o que acabamos de ver para calcular $\displaystyle\int_0^1 x(x^2+3)^4 dx$. Realmente, fazendo $p(x) = x^2 + 3$, temos $p'(x) = 2x$.

Portanto,

$$\int_0^1 x(x^2+3)^4 dx = \int_0^1 \frac{p'(x)}{2}(p(x))^4 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 p'(x)(p(x))^4 dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(p(1))^5}{5} - \frac{(p(0))^5}{5}\right) =$$

$$= \frac{1}{10}\left(4^5 - 3^5\right).$$

Exemplo 4.9

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, p um polinômio arbitrário e calculemos

$$\int_a^b p'(x)\,\cos(p(x))\,dx$$

Com efeito, observemos inicialmente que a função $f(x) = p'(x)\cos(p(x))$ é contínua em $\mathbb{R}$ (justifique esta afirmação). Além disso, sendo $G(x) = \text{sen}\,(p(x))$, a regra da cadeia nos garante que G é derivável em $\mathbb{R}$ e $G'(x) = p'(x)\cos(p(x)) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema 4.1,

$$\int_a^b p'(x)\cos(p(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = \text{sen}\,(p(b)) - \text{sen}\,(p(a)).$$

Vamos usar o que acabamos de ver para calcular $\int_0^2 x^2\cos(x^3)dx$. Realmente, fazendo $p(x) = x^3$, temos $p'(x) = 3x^2$.

Portanto,

$$\int_0^2 x^2\cos(x^3)dx = \int_0^2 \frac{p'(x)}{3}\cos(p(x))dx = \frac{1}{3}\int_0^2 p'(x)\cos(p(x))dx =$$

$$= \frac{1}{3}(\text{sen}\,(p(2)) - \text{sen}\,(p(0))) =$$

$$= \frac{\text{sen}\,8}{3}.$$

Exemplo 4.10

Seja $f(x) = \text{sen}\,x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Calculemos a área da região compreendida entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e as retas $x = -\frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{\pi}{2}$ (a referida região está hachurada na Figura 4.1).

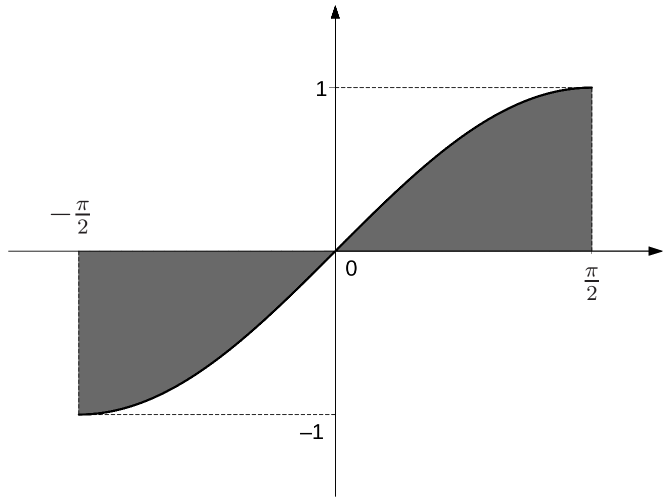


Figura 4.1

É fácil ver que a área em questão é $2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\, dx$. Como, pelo Exemplo 4.2,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\, dx = \cos 0 - \cos \frac{\pi}{2} = 1,$$

a área procurada vale 2.

Por outro lado,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\, dx = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

mostrando que, neste caso, a área da região em questão e a integral definida $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\, dx$ não coincidem.

Exemplo 4.11

Vamos provar a Proposição 2.1(c) no caso particular em que $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são contínuas em $[a, b]$.

Com efeito, como f e g são contínuas em $[a, b]$, então $f + g$ é contínua em $[a, b]$. Pelo Teorema 2.1, $f + g$ é integrável em $[a, b]$.

Agora, sejam $G, H : [a,b] \to \mathbb{R}$ duas funções deriváveis em $[a,b]$ tais que $G' = f$ e $H' = g$. Pelo Teorema 4.1,

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) \quad \text{e} \quad \int_a^b g(x)dx = H(b) - H(a).$$

Por outro lado, pela Proposição 10.2, a função $G + H$ é derivável em $[a,b]$ e $(G+H)'(x) = G'(x) + H'(x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Aplicando novamente o Teorema 4.1, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f+g)(x)dx &= (G+H)(b) - (G+H)(a) = \\
&= (G(b) + H(b)) - (G(a) + H(a)) = \\
&= (G(b) - G(a)) + (H(b) - H(a)) = \\
&= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,
\end{aligned}$$

provando o que desejávamos.

Como já observamos, a aplicabilidade do Teorema 4.1 depende de conhecermos explicitamente uma função derivável G tal que $G' = f$ (uma tal função G é dita uma *primitiva* de f). É claro que se G é uma primitiva de f e c é um número real arbitrário , então $G + c$ também é uma primitiva de f.

Na disciplina de Cálculo II você estudará *métodos de integração* que permitem a obtenção de primitivas de certas funções.

Resumo

Nas duas últimas aulas você aprendeu o Teorema Fundamental do Cálculo, um resultado muito importante que desempenhará um papel central em tudo o que veremos a seguir.

Exercícios

1. Calcule as seguintes integrais definidas:

   (a) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(x^2+|x|+2)dx$; (b) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(5\,\text{sen}\,x-2\cos x)dx$;

   (c) $\displaystyle\int_{0}^{1}\sqrt{x}dx$; (d) $\displaystyle\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{x^2}+x^2\right)dx$;

   (e) $\displaystyle\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)dx$; (f) $\displaystyle\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{x^3}+x^3+\text{sen}\,x\right)dx$;

   (g) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos(3x)dx$; (h) $\displaystyle\int_{a}^{b}\cos(\alpha x)dx\ (\alpha\in\mathbb{R}-\{0\})$;

   (i) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\text{sen}\,(4x)dx$; (j) $\displaystyle\int_{a}^{b}\text{sen}\,(\alpha x)dx\ (\alpha\in\mathbb{R}-\{0\})$;

   (l) $\displaystyle\int_{-1}^{0}\sqrt[3]{x}\,dx$; (m) $\displaystyle\int_{-1}^{0}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x})dx$.

   $\Big($Sugestão para (h): Se $G(x)=\dfrac{1}{\alpha}\,\text{sen}\,(\alpha x)$, então $G'(x)=\cos(\alpha x)\Big)$.

   $\Big($Sugestão para (l): Se $G(x)=\dfrac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}$, então $G'(x)=x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}\Big)$.

2. Sendo $f(x)=\text{sen}\,(3x)$, calcule a área da região compreendida entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e as retas $x=0$ e $x=\dfrac{\pi}{3}$.

3. Sendo $f(x)=\sqrt[5]{x}$, calcule a área da região compreendida entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e as retas $x=-1$ e $x=0$.

4. Calcule $\displaystyle\int_{0}^{1}\left(\int_{2}^{3}t^4\,\text{sen}\,x\,dt\right)dx$.

5. Seja $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ uma função contínua tal que $x^2\le f(x)\le 2x^2+1$ para todo $x\in[0,1]$. Mostre que

   $$\frac{1}{3}\le\int_{0}^{1}f(x)dx\le\frac{5}{3}.$$

   Sugestão: Use o Exemplo 2.5.

6. Argumentando como no Exemplo 4.11, prove a Proposição 2.1(b) no caso particular em que f é contínua em $[a,b]$.

7. Sejam I um intervalo não trivial, $f:I\to\mathbb{R}$ e $G_1,G_2:I\to\mathbb{R}$ duas primitivas de f (isto é, G_1 e G_2 são deriváveis em I e ${G_1}'={G_2}'=f$). Prove que existe $c\in\mathbb{R}$ tal que $G_2=G_1+c$.

Auto-avaliação

Nos exercícios desta aula você teve a oportunidade de assimilar o significado do Teorema Fundamental do Cálculo. Trata-se de uma etapa importante do curso. Caso tenha sentido dificuldade nos exercícios, releia a aula e, em seguida, volte aos exercícios. Caso permaneçam dúvidas, procure o tutor no pólo.

Aula 5 – Cálculo de áreas. O teorema do valor médio para integrais.

Referências: Aulas 7 de Cálculo I, 2, 3 e 4 de Cálculo II.

Objetivos

- *Aprender como usar a integral definida para calcular a área de regiões planas.*

- *Aprender o teorema do valor médio para integrais.*

Nesta aula discutiremos uma das aplicações da integral definida, a saber, o cálculo de áreas de regiões planas. Discutiremos, ainda, o teorema do valor médio para integrais.

Consideremos duas funções contínuas $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$. O nosso objetivo é calcular a área da região compreendida entre os gráficos de f e g e as retas $x = a$ e $x = b$, região esta hachurada na Figura 5.1.

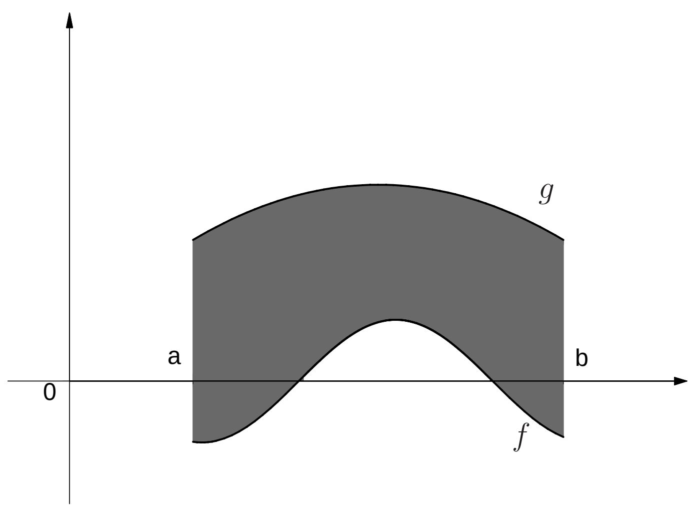


Figura 5.1

Como, pelo teorema de Weierstrass, o conjunto $f([a, b])$ é limitado, podemos encontrar um número real α tal que $f(x) + \alpha \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Então temos $0 \leq f(x) + \alpha \leq g(x) + \alpha$ para todo $x \in [a, b]$. É claro que a área procurada coincide com a área da região compreendida entre os gráficos de $f + \alpha$ e $g + \alpha$ e as retas $x = a$ e $x = b$, sendo esta última região hachurada na Figura 5.2.

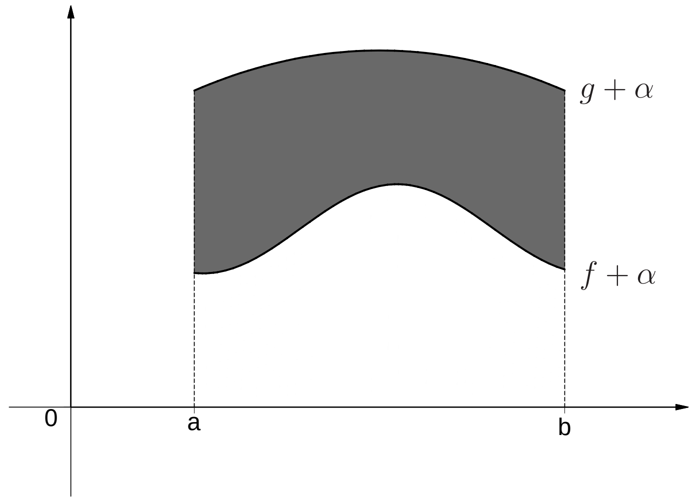


Figura 5.2

Mas a área desta última é a diferença entre a área da região compreendida entre o gráfico de $g+\alpha$, o eixo das abscissas e as retas $x=a$ e $x=b$ e a área da região compreendida entre o gráfico de $f+\alpha$, o eixo das abscissas e as retas $x=a$ e $x=b$, ou seja,

$$\int_a^b (g(x)+\alpha)dx - \int_a^b (f(x)+\alpha)dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b (g(x)-f(x))dx.$$

Assim, a área procurada é

$$\int_a^b (g(x)-f(x))dx.$$

Notemos que, se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$ ou $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a,b]$, então a área da região compreendida entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e as retas $x=a$ e $x=b$ é igual a área da região compreendida entre os gráficos de f e g (onde $g(x)=0$ para todo $x \in [a,b]$) e as retas $x=a$ e $x=b$.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 5.1

Calculemos a área da região limitada pelas retas $x=0$, $x=1$, $y=2$ e pelo gráfico de $f(x)=x^3$ (a região em questão está hachurada na Figura 5.3).

Sendo $g(x)=2$ para todo $x \in [0,1]$, a área procurada é a área da região compreendida entre os gráficos de f e g e as retas $x=0$ e $x=1$ (notemos

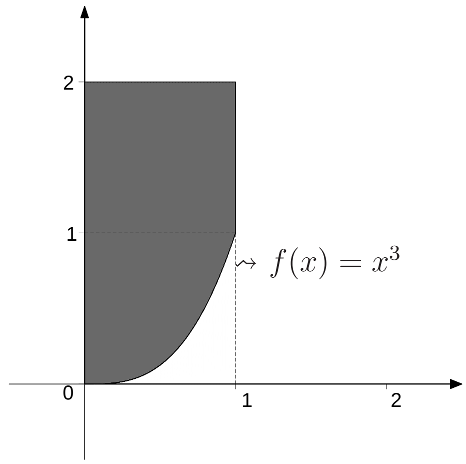


Figura 5.3

que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in [0,1]$). Portanto, a área em questão é

$$\begin{aligned}\int_0^1 (g(x) - f(x))dx &= \int_0^1 (2 - x^3)dx = \int_0^1 2\,dx - \int_0^1 x^3 dx = \\ &= 2(1-0) - \frac{1}{4}(1^4 - 0^4) = \frac{7}{4}.\end{aligned}$$

Exemplo 5.2

Calculemos a área da região limitada pelos gráficos das funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$ (a região em questão está hachurada na Figura 5.4).

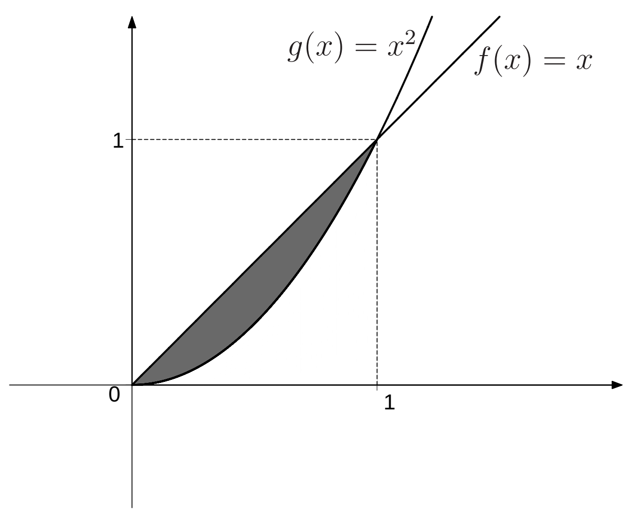


Figura 5.4

Com efeito, como $f(x) = g(x)$ se, e somente se, $x = 0$ ou $x = 1$ e como

$g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in [0,1]$, a área em questão é

$$\int_0^1 (f(x) - g(x))dx = \int_0^1 (x - x^2)dx = \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2}(1^2 - 0^2) - \frac{1}{3}(1^3 - 0^3) = \frac{1}{6}.$$

Exemplo 5.3

Calculemos a área da região compreendida entre os gráficos das funções $f(x) = x$ e $g(x) = \sqrt{x}$ e as retas $x = 0$ e $x = 2$ (a região em questão está hachurada na Figura 5.5).

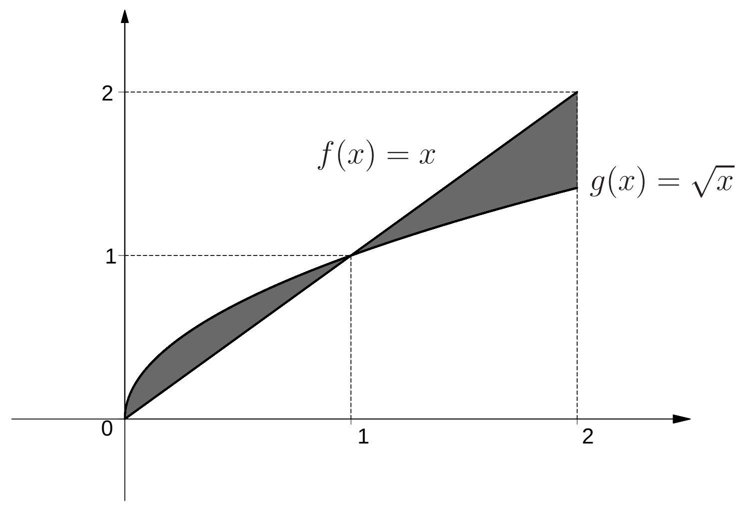


Figura 5.5

Com efeito, como $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [0,1]$ e $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in [1,2]$, a área em questão é

$$\int_0^1 (g(x) - f(x))dx + \int_1^2 (f(x) - g(x))dx =$$

$$= \int_0^1 (\sqrt{x} - x)dx + \int_1^2 (x - \sqrt{x})dx =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{x}\,dx - \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 x\,dx - \int_1^2 \sqrt{x}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}(\sqrt{1^3} - \sqrt{0^3}) - \frac{1}{2}(1^2 - 0^2) + \frac{1}{2}(2^2 - 1^2) - \frac{2}{3}(\sqrt{2^3} - \sqrt{1^3}) =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{3}(5 - 4\sqrt{2}).$$

Exemplo 5.4

Calculemos a área da região compreendida entre o gráfico de $f(x) = x^5$, o eixo das abscissas e as retas $x = -1$ e $x = 1$ (a região em questão está hachurada na Figura 5.6).

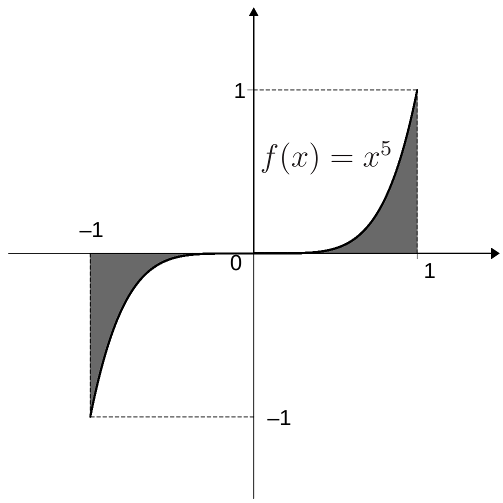


Figura 5.6

Com efeito, como $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [-1, 0]$ e $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [0, 1]$, a área em questão é

$$-\int_{-1}^{0} x^5 dx + \int_{0}^{1} x^5 dx = \frac{2}{6}.$$

Obviamente, poder-se-ia ver diretamente que a área procurada é

$$2\int_{0}^{1} x^5 dx,$$

já que $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 5.5

Calculemos a área do conjunto

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, ; \, 1 \leq x \leq 2 \, , \, 0 \leq y \leq \frac{1}{x^4} \right\},$$

o qual hachuramos na Figura 5.7.

Com efeito, como $\frac{1}{x^4} > 0$ para todo $x \neq 0$ e, em particular, para todo $x \in [1, 2]$, a área procurada é

$$\int_{1}^{2} \frac{1}{x^4} dx = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{1^3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{7}{8}\right) = \frac{7}{24}.$$

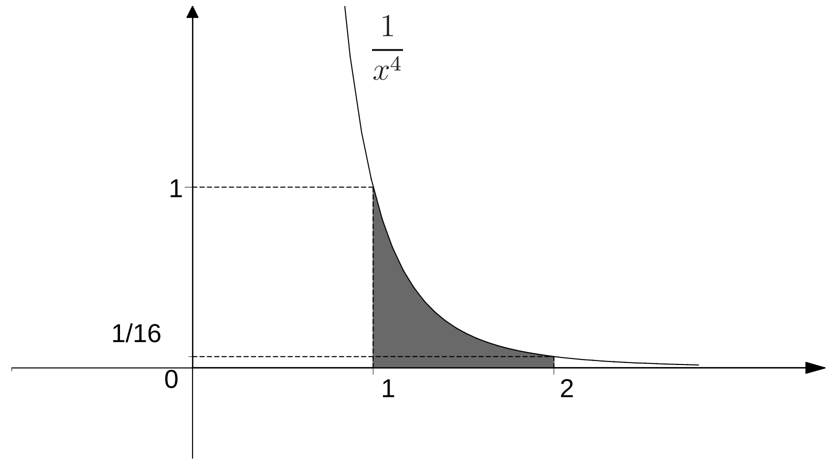


Figura 5.7

Exemplo 5.6

Calculemos a área do conjunto

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x \le y \le \sqrt[4]{x}\},$$

o qual hachuramos na Figura 5.8.

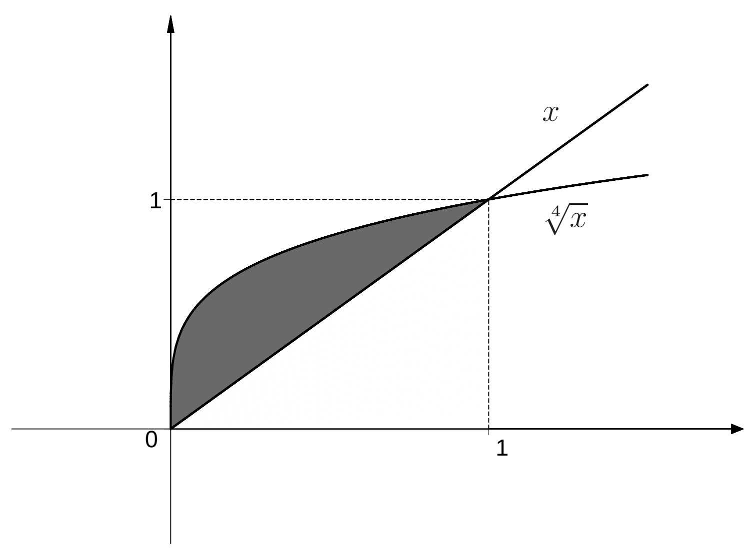


Figura 5.8

Notemos, primeiramente, que para (x, y) pertencer a D devemos ter $x \geq 0$. Além disso, $x = \sqrt[4]{x}$ se, e somente se, $x = 0$ ou $x = 1$. Como $x \leq \sqrt[4]{x}$ para todo $x \in [0, 1]$, a área de D é

$$\int_0^1 (\sqrt[4]{x} - x)dx = \int_0^1 \sqrt[4]{x}\, dx - \int_0^1 x\, dx = \\ = \frac{4}{5}(\sqrt[4]{1^5} - \sqrt[4]{0^5}) - \frac{1}{2} = \frac{3}{10}.$$

Exemplo 5.7

Calculemos a área da região compreendida entre o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $(x > 0)$ e as retas $y = x$ e $y = 4$ (a região em questão está hachurada na Figura 5.9).

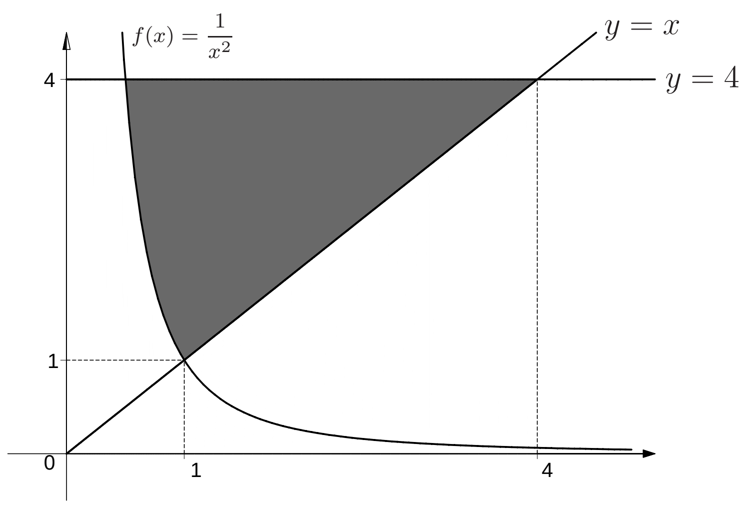


Figura 5.9

Para $x > 0$, $\frac{1}{x^2} = y$ se, e somente se, $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$.

Para explicar este exemplo vamos trabalhar com uma função "da variável y", diferentemente do que vínhamos fazendo. Poderíamos, também, argumentar como antes mas, neste caso, o raciocínio utilizado é efetivamente mais simples (certifique-se de que esta afirmação é verdadeira raciocinando como nos exemplos anteriores).

Como $f(x) = x$ se, e somente se, $x = 1$, $f(1) = 1$ e como $y \geq \frac{1}{\sqrt{y}}$ para todo $y \in [1, 4]$, a área em questão é

$$\int_1^4 \left(y - \frac{1}{\sqrt{y}}\right) dy = \int_1^4 y\, dy - \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{y}}\, dy = \\ = \frac{1}{2}(4^2 - 1^2) - 2(\sqrt{4} - \sqrt{1}) = \frac{15}{2} - 2 = \frac{11}{2}.$$

Exemplo 5.8

Calculemos a área da região hachurada na Figura 5.10, determinada pelos gráficos das funções $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = x - x^3$ e pelo círculo de centro $(0,0)$ e raio 1.

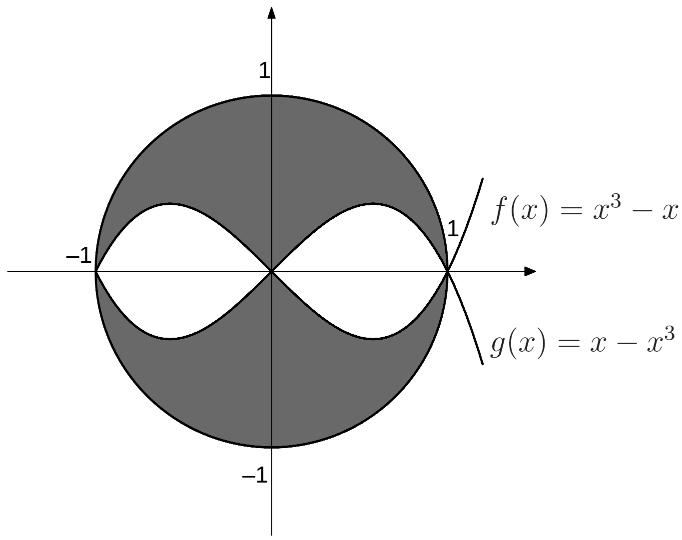


Figura 5.10

A área de um círculo de raio r é πr^2.

Inicialmente, notemos que $f(x) = g(x)$ se, e somente se $x^3 - x = x - x^3$, isto é, se, e somente se, $x = 0$, $x = -1$ ou $x = 1$.

A área em questão é o quádruplo da área da região hachurada que está acima do eixo das abscissas e à direita do eixo das ordenadas (justifique esta afirmação). Logo, basta achar esta última.

Para fazê-lo, basta observar que a área mencionada é

$$\frac{\pi}{4} - \int_0^1 (x - x^3)dx,$$

lembrando que a área de cada quadrante do círculo de centro $(0,0)$ e raio 1 é $\frac{\pi}{4}$. Como

$$\int_0^1 (x - x^3)dx = \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

podemos finalmente afirmar que a área procurada é

$$4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\right) = \pi - 1.$$

Vamos terminar a aula discutindo a seguinte pergunta: dada uma função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, é possível encontrar um ponto $u \in [a,b]$ tal que a área da região compreendida entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e as retas $x = a$ e $x = b$ (que é precisamente $\int_a^b f(x)dx$) coincida com a área do retângulo de base $[a,b]$ e altura $f(u)$ (que é precisamente $f(u)(b-a)$)? A Figura 5.11 ilustra a situação.

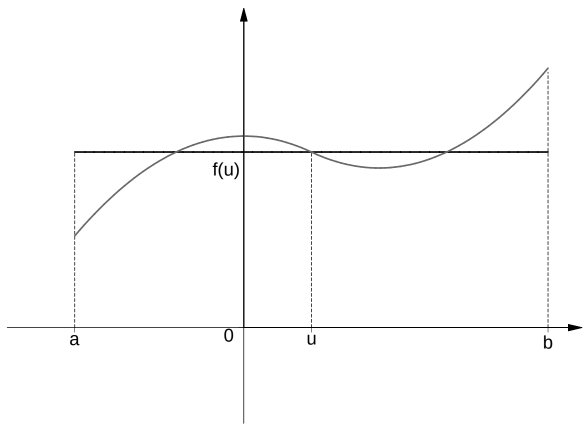


Figura 5.11

Provaremos que a resposta à pergunta formulada é afirmativa, como segue imediatamente do seguinte

Teorema 5.1
[teorema do valor médio para integrais] Se $a < b$ e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a,b]$, existe $u \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(u)(b-a).$$

Demonstração: Pelo teorema de Weierstrass, visto na aula 7 de Cálculo I, existem $x_1, x_2 \in [a,b]$ tais que

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$$

para todo $x \in [a,b]$. Pelos Exemplos 2.2 e 2.5,

$$f(x_1)(b-a) = \int_a^b f(x_1)dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b f(x_2)dx = f(x_2)(b-a),$$

isto é,

$$f(x_1) \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le f(x_2).$$

Se $x_1 = x_2$, f é constante em $[a,b]$ e qualquer $u \in [a,b]$ serve.

Suponhamos, então, $x_1 \neq x_2$ (digamos $x_1 < x_2$). Como f é contínua em $[x_1, x_2]$, o teorema do valor intermediário, visto na aula 7 de Cálculo I, garante a existência de $u \in [x_1, x_2]$ $\big(\subset [a, b]\big)$ tal que

$$f(u) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a},$$

isto é,

$$\int_a^b f(x)dx = f(u)(b-a).$$

Isto conclui a demonstração do teorema.

Exemplo 5.9

Seja $f(x) = x^3$ para todo $x \in [0,1]$. Pelo Teorema 5.1, existe $u \in [0,1]$ tal que

$$\int_0^1 x^3 dx = f(u)(1-0) = u^3.$$

Como $\displaystyle\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$, concluímos que $u = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

Assim, a área da região compreendida entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e a reta $x = 1$ $\big($que é $\frac{1}{4}\big)$ coincide com a área do retângulo de base $[0,1]$ e altura $f\big(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\big) = \frac{1}{4}$; ver a Figura 5.12.

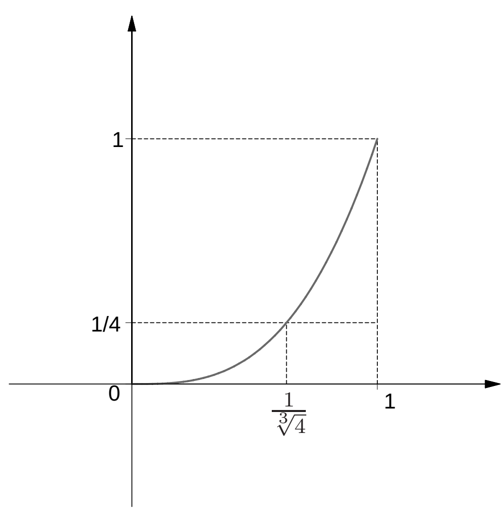


Figura 5.12

Evidentemente, só foi possível encontrar u explicitamente, no exemplo acima, por se tratar de uma situação bastante favorável.

Resumo

Nesta aula você aprendeu a fazer uso da integral definida para calcular a área de regiões planas. O teorema do valor médio para integrais também foi discutido.

Exercícios

1. Esboce a região e ache a área da região compreendida entre:

   (a) os gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = \dfrac{x^2}{2} + 2$;

   (b) os gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = 1 - x^2$;

   (c) os gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = 1 - x^2$ e a reta $y = 2$;

   (d) os gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^2 - 2x + 4$ e a reta $x = 0$;

   (e) os gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x^2$ e as retas $x = -1$ e $x = 1$;

   (f) o gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ e as retas $y = 0$ e $x = a$, onde $a \in (0, +\infty)$ é arbitrário;

   (g) os gráficos de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $g(x) = \dfrac{x^2}{16}$ e $h(x) = x^2$, para $x > 0$;

   (h) os gráficos de $f(x) = x^2 - x - 2$ e $g(x) = x + 6$;

   (i) os gráficos de $f(x) = 1 + \text{sen } x$, $g(x) = 1 + \cos x$ e a reta $x = 0$;

   (j) os gráficos de $f(x) = 1 + \text{sen } x$, $g(x) = 1 + \cos x$ e a reta $x = \pi$;

   (l) o gráfico de $f(x) = \cos x$ e as retas $x = 0$, $x = \pi$ e $y = 0$;

   (m) os gráficos de $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = \cos x$ e as retas $x = 0$ e $x = \dfrac{\pi}{2}$;

   (n) a parábola $x = y^2$ e a reta $x = 4$.

2. Esboce o conjunto D e ache a área de D, nos seguintes casos:

   (a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 - 1 \leq y \leq 0\}$;

   (b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 \leq y \leq 9 - x^2\}$;

   (c) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 \leq x \leq 1\,,\, \sqrt{x} \leq y \leq 3\}$;

   (d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 + 1 \leq y \leq x + 1\}$;

   (e) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 - 1 \leq y \leq x + 1\}$.

3. (a) Use o teorema do valor médio para integrais para mostrar que

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2 + 3} dx \leq \frac{2}{3}.$$

   (b) Chegue à mesma conclusão usando o Exemplo 2.5.

4. (a) Use o teorema do valor médio para integrais para mostrar que

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\,(\sqrt{x})\; dx \le \pi.$$

(b) Chegue à mesma conclusão usando o Exemplo 2.5.

Auto-avaliação

Nos Exercícios 1 e 2 você usou o Teorema Fundamental do Cáculo para determinar a área de regiões planas. Em caso de dúvida, releia esta aula e a aula 4, e tente novamente. Caso persista alguma dúvida, consulte o tutor no pólo.

Aula 6 – Exercícios resolvidos.

Referências: Aulas 7, 10, 12 e 17 de Cálculo I, e 2, 3, 4 e 5 de Cálculo II.

Objetivo

Amadurecer o conteúdo sobre integral definida visto nas aulas 2, 3, 4 e 5, notadamente o Teorema Fundamental do Cálculo.

Exercício 1: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e defina $H(x) = \displaystyle\int_0^x xf(t)\,dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que H é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$H'(x) = \int_0^x f(t)\,dt + xf(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Nos Exercícios 1, 2, 3, 4, 5 usamos o Exemplo 3.2: se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, $a \in \mathbb{R}$ e $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ $(x \in \mathbb{R})$, então F é derivável em $\mathbb{R}$ e $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução: Sejam $g(x) = x$ e $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então

$$H(x) = \int_0^x xf(t)\,dt = x\int_0^x f(t)\,dt = g(x)F(x) = (gF)(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Como g e F são deriváveis em $\mathbb{R}$, então H é derivável em $\mathbb{R}$ (como produto de duas funções deriváveis em $\mathbb{R}$) e

$$H'(x) = g'(x)F(x) + g(x)F'(x) = \int_0^x f(t)\,dt + xf(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 2: Seja $h(x) = 3x + 2\displaystyle\int_1^x \text{sen}^2\big(\tfrac{\pi}{4}t^2\big)\,dt$, $x \in \mathbb{R}$. Determine os coeficientes α, β e γ do polinômio $p(x) = \alpha(x-1)^2 + \beta(x-1) + \gamma$ para que $p(1) = h(1)$, $p'(1) = h'(1)$ e $p''(1) = \frac{h''(1)}{\pi}$.

Solução: Como $p(1) = \gamma$ e $h(1) = 3$, devemos ter $\gamma = 3$. Como $p'(x) = 2\alpha(x-1)+\beta$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $p'(1) = \beta$. Por outro lado, como $h'(x) = 3+2\text{sen}^2\big(\frac{\pi}{4}x^2\big)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $h'(1) = 3+2\text{sen}^2\big(\frac{\pi}{4}\big) = 3+2\big(\frac{\sqrt{2}}{2}\big)^2 = 4$. Logo, devemos ter $\beta = 4$.

Finalmente, como $p''(x) = 2\alpha$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $p''(1) = 2\alpha$. Por outro lado, $h''(x) = 2\pi x\big(\text{sen}\,\big(\frac{\pi}{4}x^2\big)\big)\big(\cos\big(\frac{\pi}{4}x^2\big)\big)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, $h''(1) = 2\pi\big(\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\big)\big(\cos\frac{\pi}{4}\big) = 2\pi \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi$. Logo, devemos ter $2\alpha = 1$, isto é, $\alpha = \frac{1}{2}$.

Exercício 3: Seja $g(x) = \displaystyle\int_0^x t \operatorname{sen} t\, dt$, $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Mostre que g possui apenas um ponto de máximo local em $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Solução: A função g é derivável em $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ e $g'(x) = x \operatorname{sen} x$ para todo $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Temos ainda que $g'(x) = 0$ se, e somente se, $\operatorname{sen} x = 0$; portanto, $g'(x) = 0$ se, e somente se, $x = \pi$. Além disso, como $g''(x) = \operatorname{sen} x + x \cos x$ para todo $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, vem

$$g''(\pi) = \pi \cos \pi = -\pi < 0.$$

Logo, π é o único ponto de máximo local de g em $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Exercício 4: Determine $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\int_0^x f(t)\, dt = x^3 \operatorname{sen}(2x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução: Definamos $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $F(x) = x^3 \operatorname{sen}(2x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então

$$f(x) = F'(x) = 3x^2 \operatorname{sen}(2x) + 2x^3 \cos(2x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular,

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \operatorname{sen} \pi + 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \cos \pi = -\frac{\pi^3}{4}.$$

Exercício 5: Mostre que a função

$$G(x) = \int_1^{x^3+x} \frac{1}{1 + \cos^4 t}\, dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

é crescente.

Solução: Definamos $g(x) = x^3 + x$ e $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{1 + \cos^4 t}\, dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então é claro que $G = F \circ g$. Pela regra da cadeia, G é derivável em $\mathbb{R}$ e $G'(x) = (F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = F'(x^3 + x)\, g'(x) = \frac{3x^2+1}{1+\cos^4(x^3+x)}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, $G'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, e daí resulta que G é crescente em $\mathbb{R}$.

Exercício 6: Calcule $\displaystyle\int_0^3 |x^2-1|\,dx$.

Solução: Inicialmente, observemos que como a função $x \in [0,3] \mapsto |x^2-1| \in R$ é contínua (justifique esta afirmação), então ela é integrável em $[0,3]$. Além disso, como $x^2-1 \leq 0$ para $0 \leq x \leq 1$ e $x^2-1 \geq 0$ para $1 \leq x \leq 3$, temos

$$|x^2-1| = \begin{cases} 1-x^2 & \text{se } \ 0 \leq x \leq 1\ , \\ x^2-1 & \text{se } \ 1 \leq x \leq 3\ . \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^3 |x^2-1|\,dx &= \int_0^1 |x^2-1|\,dx + \int_1^3 |x^2-1|\,dx = \\ &= \int_0^1 (1-x^2)\,dx + \int_1^3 (x^2-1)\,dx = \\ &= \int_0^1 dx - \int_0^1 x^2dx + \int_1^3 x^2dx - \int_1^3 dx = \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(3^3-1^3\right) - 2 = \frac{22}{3}. \end{aligned}$$

Exercício 7: Sejam $a<b$ e $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que existe $u \in [a,b]$ tal que $\displaystyle\int_a^u f(t)dt = \int_u^b f(t)dt$.

Solução: O resultado é claro se $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$ (basta tomar $u=a$ ou $u=b$). Suponhamos então $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \neq 0$, digamos $\displaystyle\int_a^b f(x)dx > 0$. Consideremos a função

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt - \int_x^b f(t)dt,$$

definida para $x \in [a,b]$. Como vimos na aula 3, as funções

$$x \in [a,b] \mapsto \int_a^x f(t)dt \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad x \in [a,b] \mapsto \int_x^b f(t)dt \in \mathbb{R}$$

são deriváveis em $[a,b]$, logo contínuas em $[a,b]$. Conseqüentemente, G é contínua em $[a,b]$. Além disso,

$G(a)=\int_a^a f(t)dt - \int_a^b f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt < 0 < \int_a^b f(t)dt - \int_b^b f(t)dt = G(b)$.

Pelo teorema do valor intermediário, existe $u \in (a,b)$ tal que $G(u)=0$, isto é,

$$\int_a^u f(t)dt = \int_u^b f(t)dt.$$

Exercício 8: Mostre que

$$\frac{3\pi}{24} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \text{sen}^2 x)dx \leq \frac{7\pi}{48}.$$

Solução: Pelo teorema do valor médio para integrais (justifique a aplicabilidade do mesmo), existe $u \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ tal que

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \text{sen}^2 x)dx = (1 + \text{sen}^2 u)\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{12}(1 + \text{sen}^2 u).$$

Por outro lado, como

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \text{sen}\ \frac{\pi}{4} \leq \text{sen}\ x \leq \text{sen}\ \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

para todo $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$, segue que

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} \leq 1 + \text{sen}^2 u \leq 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}.$$

Logo,

$$\frac{3\pi}{24} = \frac{\pi}{12} \times \frac{3}{2} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \text{sen}^2 x)dx = \frac{\pi}{12}(1 + \text{sen}^2 u) \leq \frac{\pi}{12} \times \frac{7}{4} = \frac{7\pi}{48},$$

provando o que desejávamos.

Exercício 9: Calcule a área da região compreendida entre o gráfico de $f(x) = (\sec x)(\text{tg}\ x)$, o eixo das abscissas e as retas $x = -\frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{\pi}{4}$.

Solução: Primeiramente, notemos que $\sec x > 0$ para todo $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, $\text{tg}\ x \leq 0$ para todo $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$ e $\text{tg}\ x \geq 0$ para todo $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Portanto, $f(x) \leq 0$ para todo $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$ e $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Assim, a área em questão é

$$-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} (\sec x)(\text{tg}\ x)dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\sec x)(\text{tg}\ x)dx.$$

Tomemos agora $G(x) = \sec x$ para $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. A função G é derivável em $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ e

$$G'(x) = \frac{-(-\text{sen}\ x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}\frac{\text{sen}\ x}{\cos x} = (\sec x)(\text{tg}\ x)$$

para todo $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec x)(\text{tg } x)dx = G\left(\frac{\pi}{4}\right) - G(0) = \sec\frac{\pi}{4} - \sec 0 = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1.$$

De modo análogo, verifica-se que

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} (\sec x)(\text{tg } x)dx = -(\sqrt{2} - 1)$$

(na verdade, este fato decorre facilmente do que vimos acima, já que $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$).

Podemos então finalmente afirmar que a área procurada é $2(\sqrt{2} - 1)$.

Resumo

Esta aula é dedicada, essencialmente, a exercícios nos quais o Teorema Fundamental do Cálculo está envolvido. Outros resultados importantes, vistos no decorrer do curso, também foram utilizados.

Aula 7 – A função logarítmica.

Referências: Aulas 40, de Pré-Cálculo, 5, 8, 12, 16, 17, 18, 26 de Cálculo I, e 2, 3 e 4 de Cálculo II.

Objetivos

- *Compreender o significado da função logarítmica.*
- *Estudar propriedades básicas da função logarítmica.*

No módulo 4, de Pré-Cálculo, fez-se uma primeira apresentação da função logarítmica. Nesta e na próxima aula, faremos uma apresentação rigorosa da função logarítmica, usando como ferramenta a integral definida.

Definição 7.1 Para cada $x > 0$, definamos

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt\,.$$

O número real $\log x$ é dito o *logaritmo de* x e a função $x \in (0, +\infty) \mapsto \log x \in \mathbb{R}$ é dita a *função logarítmica.*

Observemos que a existência de $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$, para cada $x > 0$, decorre da continuidade da função $t \in (0, +\infty) \mapsto \frac{1}{t} \in \mathbb{R}$.

Tem-se $\log 1 = \displaystyle\int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0$. Além disso, para $x > 1$, $\log x$ é a área da região hachurada na Figura 7.1a; e, para $0 < x < 1$, $\log x$ é o simétrico da área da região hachurada na Figura 7.1b, pois $\log x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt$.

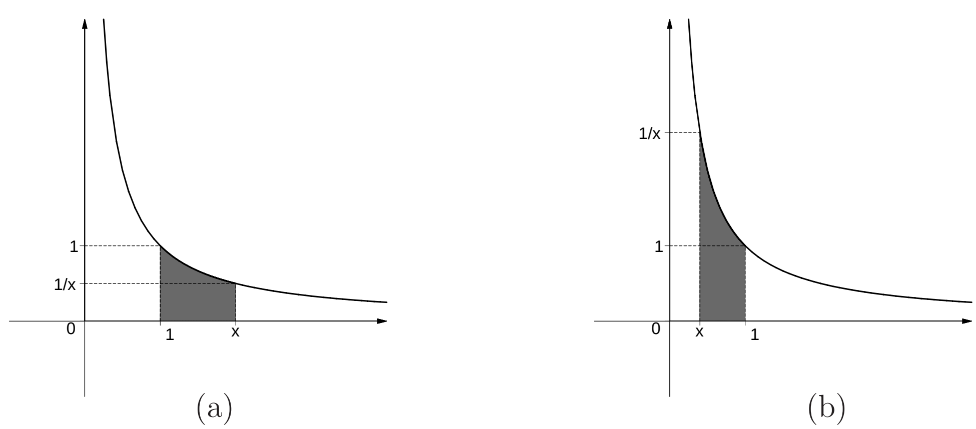


Figura 7.1

Como, para $x > 1$, a área do retângulo de base $[1, x]$ e altura $\frac{1}{x}$ é $\frac{1}{x}(x-1)$, segue da Figura 7.1a que $\log x \geq \frac{1}{x}(x-1) > 0$. Por outro lado, para $0 < x < 1$, a área do retângulo de base $[x, 1]$ e altura 1 é $1 - x$; logo, resulta da Figura 7.1b que $\int_x^1 \frac{1}{t} dt \geq 1 - x$, isto é,

$$\log x = -\int_x^1 \frac{1}{t} dt \leq -(1-x) = x - 1 < 0.$$

Justifiquemos analiticamente a validade das desigualdades $\log x \geq \frac{1}{x}(x-1)$ para $x > 1$ e $\log x \leq x - 1$ para $0 < x < 1$. Com efeito, para cada $x > 1$, tem-se que se $1 \leq t \leq x$, então $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{x}$. Logo,

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \geq \int_1^x \frac{1}{x} dt = \frac{1}{x} \int_1^x dt = \frac{1}{x}(x-1).$$

Por outro lado, para cada $0 < x < 1$, tem-se que se $x \leq t \leq 1$, então $\frac{1}{t} \geq 1$. Logo,

$$\int_x^1 \frac{1}{t}\, dt \geq \int_x^1 dt = (1-x),$$

o que implica

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}\, dt \leq -(1-x) = x - 1.$$

Um fato importante, que decorre do Teorema 3.1, é o seguinte:

Proposição 7.1
A função $\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$ é derivável em $(0, +\infty)$ e

$$\log'(x) = \frac{1}{x}$$

para todo $x \in (0, +\infty)$, onde $\log'(x)$ representa a derivada da função logarítmica no ponto x.

Exemplo 7.1

A função $g(x) = \log(1+x^2)$ é derivável em $\mathbb{R}$ e $g'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

De fato, seja $f(x) = 1 + x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (notemos que $f(x) = 1 + x^2 \geq 1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$). Então $g = \log \circ f$ (onde log denota a função logarítmica), pois $(\log \circ f)(x) = \log(f(x)) = \log(1+x^2) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pela regra da cadeia, g é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$g'(x) = (\log \circ f)'(x) = \log'(f(x))f'(x) = 2x \log'(1+x^2) = \frac{2x}{1+x^2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 7.2

Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, com $0 < a < b$, tem-se

$$\int_a^b \frac{1}{x}\, dx = \log b - \log a.$$

De fato, seja $f(x) = \frac{1}{x}$ para todo $x \in [a, b]$; então f é contínua em $[a, b]$. Seja $G(x) = \log x$ para todo $x \in [a, b]$. Pela Proposição 7.1, G é derivável em $[a, b]$ e $G'(x) = \frac{1}{x} = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_a^b \frac{1}{x}\, dx = \int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = \log b - \log a.$$

Portanto, a área da região compreendida entre o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$, o eixo das abscissas e as retas $x = a$ e $x = b$ (ver a Figura 7.2) é $\log b - \log a$.

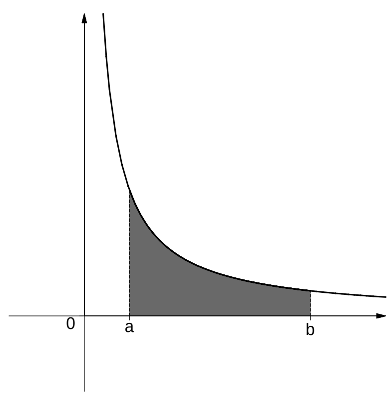


Figura 7.2

A próxima proposição expressa a propriedade fundamental da função logarítmica.

Proposição 7.2

Para quaisquer $x, y \in (0, +\infty)$, tem-se

$$\log(xy) = \log x + \log y.$$

Demonstração: Fixemos $x \in (0, +\infty)$ e consideremos a função $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $g(y) = \log(xy)$ para todo $y \in (0, +\infty)$.

Seja $f(y) = xy$ para todo $y \in (0, +\infty)$; então $g = \log \circ f$, pois $g(y) = \log(xy) = \log(f(y)) = (\log \circ f)(y)$ para todo $y \in (0, +\infty)$. Como

f e log são deriváveis em $(0,+\infty)$, segue da regra da cadeia que g é derivável em $(0,+\infty)$ e

$$\begin{aligned} g'(y) \;=\; (\log\circ f)'(y) &= (\log'(f(y)))\, f'(y) = \\ &= (\log'(xy))\, x = \\ &= \frac{1}{xy}\, x = \frac{1}{y} = \log'(y) \end{aligned}$$

para todo $y \in (0,+\infty)$. Pelo Corolário 17.1, visto em Cálculo I, a função $g - \log$ é constante, isto é, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(y) - \log y = c$ para todo $y \in (0,+\infty)$. Fazendo $y = 1$, obtemos $c = g(1) = \log x$. Portanto,

$$\log(xy) = \log x + \log y$$

para todo $y \in (0,+\infty)$. Finalmente, como x é arbitrário, a demonstração está concluída.

Fazendo $x = y$ na Proposição 7.2, segue que

$$\log(x^2) = \log(xx) = \log x + \log x = 2\log x.$$

Conseqüentemente,

$$\log(x^3) = \log(x^2 x) = \log(x^2) + \log x = 2\log x + \log x = 3\log x.$$

Usando a Proposição 7.2 e o princípio de indução finita podemos afirmar que

$$\log(x^n) = n\log x$$

para todo $x \in (0,+\infty)$ e para todo inteiro $n \geq 1$.

Seja $x \in (0,+\infty)$ arbitrário. Então

$$0 = \log 1 = \log\left(x\,\frac{1}{x}\right) = \log x + \log\left(\frac{1}{x}\right),$$

ou seja,

$$\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log x.$$

Usando a Proposição 7.2 e o que acabamos de ver segue que, para quaisquer $x, y \in (0,+\infty)$,

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log\left(x\,\frac{1}{y}\right) = \log x + \log\left(\frac{1}{y}\right) = \log x - \log y.$$

Vejamos mais algumas propriedades importantes da função logarítmica.

Proposição 7.3

(a) A função logarítmica é crescente.

(b) O gráfico da função logarítmica tem concavidade para baixo.

(c) A imagem da função logarítmica é $\mathbb{R}$, isto é,

$$\{\log x\,;\, x \in (0,+\infty)\} = \mathbb{R}.$$

(d) A função logarítmica é bijetora.

Demonstração: (a): Como $\log'(x) = \frac{1}{x} > 0$ para todo $x \in (0,+\infty)$ (Proposição 7.1), (a) decorre da Proposição 17.1(b), vista em Cálculo I.

(b): Como $\log''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ para todo $x \in (0,+\infty)$, (b) decorre da Proposição 18.1(b), vista em Cálculo I.

(c): Como $2 > 1$, $\log 2 > 0$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \log(2^n) = \lim_{n\to\infty} (n \log 2) = +\infty$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} (-\log(2^n)) = -\infty.$$

Seja $y \in \mathbb{R}$ arbitrário. Então, em vista do que acabamos de observar, podemos encontrar um inteiro $m \geq 1$ tal que $\log\left(\frac{1}{2^m}\right) < y < \log(2^m)$. Como a função logarítmica é contínua em $\left[\frac{1}{2^m}, 2^m\right]$, podemos aplicar o teorema do valor intermediário para obter $x \in \left(\frac{1}{2^m}, 2^m\right)$ tal que $\log x = y$. Portanto, $\{\log x; x \in (0,+\infty)\} = \mathbb{R}$, provando (c).

(d): A função logarítmica é injetora em vista de (a) e sobrejetora em vista de (c). Portanto, a referida função é bijetora, provando (d).

Levando em consideração as informações obtidas na Proposição 7.3, podemos garantir que o gráfico da função logarítmica é como na Figura 7.3.

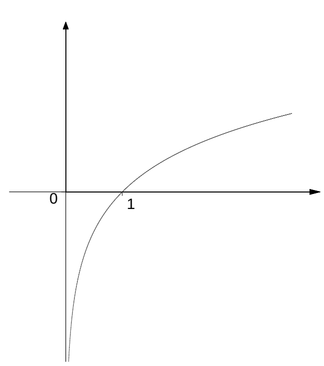
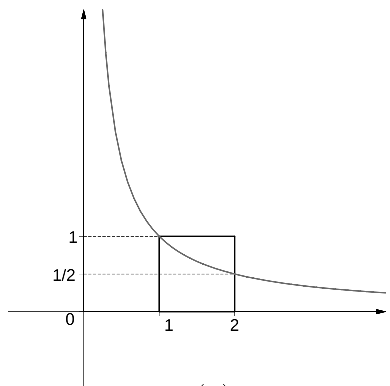


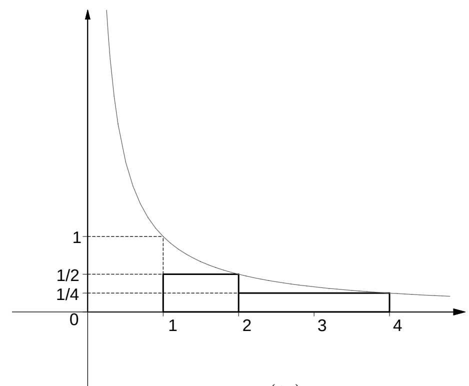
Figura 7.3

Pela Proposição 7.3(d), existe um único número real pertencente a $(0,+\infty)$, denotado por e, tal que $\log e = 1$. É possível mostrar que o número e é irracional (sendo 2,71828183 uma boa aproximação para e), mas não o faremos aqui. Veremos apenas que $2 < e < 4$. Realmente, como a área da região compreendida entre o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$, o eixo das abscissas e as retas $x = 1$ e $x = 2$ é menor do que 1 (ver a Figura 7.4a), $\log 2 < 1$. Por outro lado, como a área da região compreendida entre o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$, o eixo das abscissas e as retas $x = 1$ e $x = 4$ é maior do que 1 (ver a Figura 7.4b), $1 < \log 4$.

Uma demonstração do fato de que e é irracional pode ser encontrada em M. Spivak, Calculus, W. A. Benjamin, Inc. (1967).



(a)



(b)

Figura 7.4

Logo, $\log 2 < 1 < \log 4$, ou seja, $\log 2 < \log e < \log 4$. Como a função logarítmica é crescente, concluímos que $2 < e < 4$.

Já sabemos que $\lim\limits_{x\to+\infty} \log x = +\infty$. Concluiremos esta aula mostrando que a função $f(x) = x$ cresce muito mais rápido do que a função logarítmica.

Proposição 7.4
Para todo $x \in (0,+\infty)$,

$$\log x < x.$$

Demonstração: A asserção é clara se $x \in (0,1)$, pois $\log x < 0$ se $x \in (0,1)$.

Vamos provar a asserção para $x \in [1,+\infty)$. Com efeito, consideremos a função $g(x) = \log x - x$, definida para $x \in [1,+\infty)$. Então g é derivável em $[1,+\infty)$ e $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$ para todo $x \in [1,+\infty)$. Logo, $g'(x) < 0$ para todo $x \in (1,+\infty)$, e daí resulta que g é decrescente em $[1,+\infty)$. Portanto, para todo $x \in (1,+\infty)$, $g(x) < g(1) = \log 1 - 1 = -1 < 0$, isto é, $\log x - x < 0$, isto é, $\log x < x$. Finalmente, como $\log 1 = 0 < 1$, a demonstração está concluída.

Proposição 7.5

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = 0.$$

Demonstração: Para todo $x \in (0,+\infty)$, temos que $\sqrt{x} \in (0,+\infty)$; logo, pela proposição anterior, $\log\sqrt{x} < \sqrt{x}$, isto é, $\frac{\log\sqrt{x}}{\sqrt{x}} < 1$. Por outro lado, pela Proposição 7.2,

$$\frac{\log x}{x} = \frac{\log(\sqrt{x}\sqrt{x})}{x} = 2\,\frac{\log\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

para todo $x > 0$.

Conseqüentemente, podemos afirmar que

$$0 \le \frac{\log x}{x} < 2\,\frac{1}{\sqrt{x}}$$

para todo $x \in [1,+\infty)$. Como $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, segue da desigualdade acima que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = 0$, como queríamos demonstrar.

Decorre da Proposição 7.5 que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^n} = 0$ para todo inteiro $n \ge 1$. Realmente, temos

$$0 \le \frac{\log x}{x^n} \le \frac{\log x}{x}$$

para todo $x \in [1,+\infty)$.

Resumo

Nesta aula você foi apresentado à função logarítmica e estudou algumas propriedades básicas da mesma.

Exercícios

1. Dê o domínio e esboce o gráfico das seguintes funções:

   (a) $f(x) = \log(x+1)$; (b) $f(x) = \log|x|$.

2. Dê o domínio e derive as seguintes funções:

   (a) $f(x) = \log(x+1)$; (b) $f(x) = \log|x|$;

   (c) $f(x) = \log(x^2 - 4x + 5)$; (d) $f(x) = \log(-x)$;

   (e) $f(x) = \text{sen}\,(\log x)$; (f) $f(x) = \log(\text{sen}\, x)$;

   (g) $f(x) = \cos(\log x)$; (h) $f(x) = \log(\cos x)$;

   (i) $f(x) = \log(\log x)$; (j) $f(x) = \log(1 + \text{sen}^2 x)$;

   (l) $f(x) = \log\left(\dfrac{\cos x}{1+x^2}\right)$.

3. Mostre, usando o princípio de indução finita, que $\log(x^n) = n \log x$ para todo $x \in (0, +\infty)$ e para todo inteiro $n \geq 1$. Conclua que $\log\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \dfrac{\log x}{n}$ para todo $x \in (0, +\infty)$ e para todo inteiro $n \geq 1$.

4. Obtenha a Proposição 7.5 a partir da regra de L'Hôpital, estudada na aula 26 de Cálculo I.

5. Use a regra de L'Hôpital para calcular os seguintes limites:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1) - x + \frac{x^2}{2}}{x^2}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3}$;

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}{x^3}$.

6. Mostre, usando a Proposição 7.1, que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

7. Use o exercício anterior para mostrar que

$$\lim_{x\to +\infty} x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1.$$

8. Determine a área da região compreendida entre os gráficos de $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x^2$ e a reta $y = 2$, para $x > 0$.

9. A função derivável $y = f(x)$ está definida implicitamente pela equação $x^3 - x \log y + y^3 = 2x + 5$. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(2, 1)$.

Auto-avaliação

Nos exercícios desta aula você pôde perceber se entendeu os fatos básicos sobre a função logarítmica que acabamos de discutir. Tendo em vista a importância dos referidos fatos, só passe para a próxima aula após fazer todos os exercícios propostos.

Aula 8 – A função logarítmica. Continuação.

Referências: Aulas 10, 12, 16, 17 e 18 de Cálculo I, e 7 de Cálculo II.

Objetivos

- *Entender a noção de logaritmo de um número maior do que zero em uma base dada.*

- *Estudar propriedades básicas a respeito desta noção.*

Na aula anterior, introduzimos a função logarítmica e estudamos algumas de suas propriedades básicas. Nesta aula, nos apoiaremos no que vimos na anterior para definir o logaritmo de um número maior do que zero em uma base dada e estudar propriedades básicas acerca desta noção.

Definição 8.1 Seja $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$. Para cada $x \in (0, +\infty)$ definimos

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}\,.$$

O número $\log_a x$ é dito o *logaritmo de x na base a.*

No caso particular em que $a = e$, temos

$$\log_e x = \frac{\log x}{\log e} = \log x$$

para todo $x \in (0, +\infty)$, ou seja, o logaritmo de x na base e coincide com o logaritmo de x para qualquer $x \in (0, +\infty)$.

Proposição 8.1
Seja $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$. Então valem as seguintes propriedades para quaisquer $x, y \in (0, +\infty)$:

(a) $\log_a x = 0$ se, e somente se, $x = 1$;

(b) $\log_a x = 1$ se, e somente se, $x = a$;

(c) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$;

(d) $\log_a \left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$;

(e) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$;

(f) $\log_a (x^n) = n\log_a x$ para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração:

(a): $\log_a x = 0$ se, e somente se, $\frac{\log x}{\log a} = 0$ se, e somente se, $\log x = 0$ se, e somente se, $x = 1$.

(b): $\log_a x = 1$ se, e somente se, $\frac{\log x}{\log a} = 1$ se, e somente se, $\log x = \log a$ se, e somente se, $x = a$.

(c):

$$\begin{aligned}\log_a(xy) &= \frac{\log(xy)}{\log a} = \frac{\log x + \log y}{\log a} = \\ &= \frac{\log x}{\log a} + \frac{\log y}{\log a} = \log_a x + \log_a y.\end{aligned}$$

(d):

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\log\left(\frac{1}{x}\right)}{\log a} = \frac{-\log x}{\log a} = -\frac{\log x}{\log a} = -\log_a x.$$

(e):

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a\left(x \, . \, \frac{1}{y}\right) = \log_a x + \log_a\left(\frac{1}{y}\right) = \log_a x - \log_a y.$$

(f):

$$\log_a(x^n) = \frac{\log(x^n)}{\log a} = \frac{n\log x}{\log a} = n\,\frac{\log x}{\log a} = n\log_a x$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

Proposição 8.2
A função

$$\log_a : x \in (0, +\infty) \mapsto \log_a x \in \mathbb{R}$$

é bijetora.

Demonstração: De fato, vimos na Proposição 7.3(d) que a função logarítmica é bijetora. Daí resulta facilmente que a função $\log_a$ é bijetora, pois

$$\log_a x = \frac{1}{\log a}\,\log x$$

para todo $x \in (0, +\infty)$.

Proposição 8.3
A função $\log_a$ é derivável em $(0,+\infty)$ e

$$\log_a'(x) = \frac{1}{x\log a}$$

para todo $x \in (0,+\infty)$, onde $\log_a'(x)$ representa a derivada da função $\log_a$ em x.

Demonstração: Como $\log_a x = \frac{1}{\log a}\log x$ para todo $x \in (0,+\infty)$, segue da Proposição 7.1 que a função $\log_a$ é derivável em $(0,+\infty)$ e $\log_a'(x) = \frac{1}{\log a}\log'(x) = \frac{1}{x\log a}$ para todo $x \in (0,+\infty)$.

Exemplo 8.1

Seja $a \in (0,+\infty)$, $a \neq 1$. Então a função $f(x) = \log_a\left(\frac{1}{x^2+3}\right)$ é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = -\frac{2}{\log a}\cdot\frac{x}{x^2+3}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

De fato, definamos $h(x) = \frac{1}{x^2+3}$ para todo $x \in \mathbb{R}$; então $h(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $f = \log_a \circ h$ (pois $(\log_a \circ h)(x) = \log_a(h(x)) = \log_a\left(\frac{1}{x^2+3}\right) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$) e como h é derivável em $\mathbb{R}$ e $\log_a$ em $(0,+\infty)$, segue da regra da cadeia que f é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$\begin{aligned} f'(x) = (\log_a \circ h)'(x) &= \log_a'(h(x))h'(x) = \\ &= \log_a'\left(\frac{1}{x^2+3}\right)\cdot\left(\frac{-2x}{(x^2+3)^2}\right) = \\ &= \frac{1}{\log a}\cdot\frac{1}{\frac{1}{x^2+3}}\cdot\frac{-2x}{(x^2+3)^2} = -\frac{2}{\log a}\cdot\frac{x}{x^2+3} \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Em particular,

$$f'(0) = -\frac{2}{\log a}\cdot\frac{0}{3} = 0$$

e

$$f'(\sqrt{2}) = -\frac{2}{\log a}\cdot\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2+3} = -\frac{2\sqrt{2}}{5\log a}.$$

Exemplo 8.2

Seja $a \in (0,1)$ e consideremos f como no Exemplo 8.1. Então f é decrescente em $(-\infty, 0)$ e crescente em $(0, +\infty)$.

De fato, $\log a < 0$, pois $a \in (0,1)$. Portanto, como $f'(x) = -\frac{2}{\log a} \cdot \frac{x}{x^2+3}$, temos $f'(x) < 0$ para $x \in (-\infty, 0)$ e $f'(x) > 0$ para $x \in (0, +\infty)$. Logo, a nossa afirmação segue da Proposição 17.1(c), (b), vista no Cálculo I.

Analogamente, temos:

Exemplo 8.3

Seja $a \in (1, +\infty)$ e consideremos f como no Exemplo 8.1. Então f é crescente em $(-\infty, 0)$ e decrescente em $(0, +\infty)$.

Proposição 8.4

Seja $a \in (0,1)$. Então valem as seguintes propriedades:

(a) a função $\log_a$ é decrescente;

(b) o gráfico da função $\log_a$ tem concavidade para cima;

(c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$.

Demonstração: Como $0 < a < 1$, $\log a < 0$. Conseqüentemente, $\log_a'(x) = \frac{1}{x \log a} < 0$ para todo $x \in (0, +\infty)$. Pela Proposição 17.1(c), vista em Cálculo I, temos (a).

Como $\log_a''(x) = -\frac{1}{x^2 \log a} > 0$ para todo $x \in (0, +\infty)$, (b) segue da Proposição 18.1(a), vista em Cálculo I.

Finalmente, $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\log x}{\log a} = +\infty$, pois $\lim\limits_{x \to 0^+} \log x = -\infty$. E $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\log x}{\log a} = -\infty$, pois $\lim\limits_{x \to +\infty} \log x = +\infty$. Isto prova (c).

Em vista do que acabamos de ver, podemos esboçar o gráfico da função $\log_a$ quando $0 < a < 1$; ver a Figura 8.1.

Proposição 8.5

Seja $a \in (1, +\infty)$. Então valem as seguintes propriedades:

(a) a função $\log_a$ é crescente;

(b) o gráfico da função $\log_a$ tem concavidade para baixo;

(c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$.

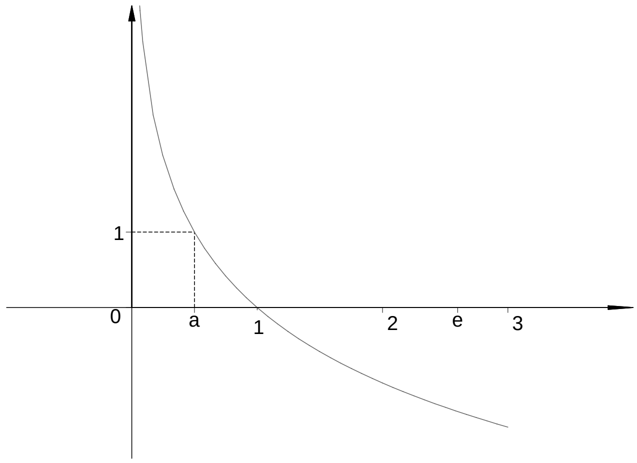


Figura 8.1

Demonstração: Como $a > 1$, $\log a > 0$. Basta, então, raciocinar como na demonstração da proposição anterior para provar (a), (b) e (c) acima.

Em vista do que acabamos de ver, podemos esboçar o gráfico da função $\log_a$ quando $a > 1$; ver a Figura 8.2.

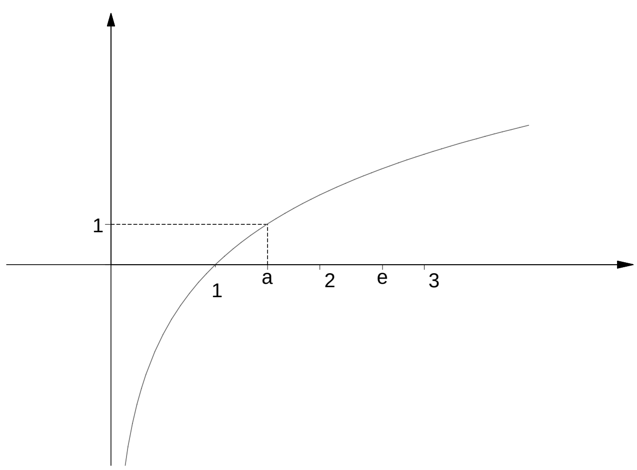


Figura 8.2

Vimos, no final da aula passada, que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^n} = 0$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

Consideremos $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$. Então

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^n} &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\log a} \cdot \frac{\log x}{x^n} \right) = \\ &= \frac{1}{\log a} \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^n} \right) = 0 \end{aligned}$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

Resumo

Nesta aula você estudou o logaritmo de um número maior do que zero em uma base $a \in (0, +\infty) - \{1\}$, bem como algumas propriedades básicas a respeito desta noção.

Exercícios

1. Dê o domínio e esboce o gráfico das seguintes funções:

   (a) $f(x) = \log_3(x-1)$; (b) $f(x) = 1 + \log_{\frac{1}{4}}|2x-1|$.

2. Dê o domínio e derive as seguintes funções:

   (a) $f(x) = \log_3(x-1)$; (b) $f(x) = 1 + \log_{\frac{1}{4}}|2x-1|$;

   (c) $f(x) = \log_2(x^2+x+1)$; (d) $f(x) = \log_{\sqrt{2}}(\log x)$;

   (e) $f(x) = \log(\log_{\sqrt{2}} x)$; (f) $f(x) = \log_e(x^2+x-2)$;

   (g) $f(x) = \log_{\sqrt{3}}\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)$; (h) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\log_{\sqrt{3}} x\right)$;

   (i) $f(x) = \log_5\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$; (j) $f(x) = \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{\text{sen}^2 x}{x^2-1}\right)$.

3. (a) Mostre que a função $f(x) = \log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{1}{x^4}\right)$, definida para $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, é decrescente em $(-\infty, 0)$ e crescente em $(0, +\infty)$.

   (b) Mostre que (a) continua válido se substituirmos $\frac{1}{7}$ por qualquer $a \in (0,1)$.

   (c) O que ocorreria se substituíssemos $\frac{1}{7}$ por qualquer $a \in (1, +\infty)$?

4. Seja $H(x) = \int_{x^2}^{\log_4 x} \cos t \, dt$ para todo $x \in (0, +\infty)$. Mostre que H é derivável em $(0, +\infty)$ e

   $$H'(x) = \frac{\cos(\log_4 x)}{x \log 4} - 2x\cos(x^2)$$

   para todo $x \in (0, +\infty)$.

5. Calcule os seguintes limites:

   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log_{\sqrt{3}} x}{x^2}$; (b) $\lim\limits_{x\to 0^-} \log_\pi(-x)$;

   (c) $\lim\limits_{x\to 0^-} \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^2$; (d) $\lim\limits_{x\to 0} \log_\pi(\text{sen}^2 x)$;

   (e) $\lim\limits_{x\to 0} \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\text{sen}^2 x)$.

Auto-avaliação

Os exercícios desta aula dependem, fundamentalmente, do que acabou de ser visto, das regras de derivação e do conteúdo das aulas 17 de Cálculo I e 3 de Cálculo II. Trata-se, portanto, de mais uma oportunidade para fixar fatos importantes estudados no decorrer do curso. Em caso de dúvida consulte essas aulas ou procure o tutor no pólo.

Aula 9 – A função exponencial.

Referências: Aulas 8, 10, 12, 16, 17, 18, 26 e 27 de Cálculo I, 3, 4 e 7 de Cálculo II.

Objetivos

- *Compreender o significado da função exponencial.*
- *Estudar propriedades básicas da função exponencial.*

No módulo 4, de Pré-Cálculo, fez-se uma primeira apresentação da função exponencial. Nesta e na próxima aula, faremos um estudo rigoroso da função exponencial baseado no que já estudamos sobre a função logarítmica.

Vimos, na aula 7 de Cálculo I, que a função logarítmica é uma função bijetora de $(0, +\infty)$ em $\mathbb{R}$. Portanto, ela possui uma função inversa, cujo domínio é a imagem da função logarítmica (isto é, $\mathbb{R}$) e cuja imagem é o domínio da função logarítmica (isto é, $(0, +\infty)$).

Definição 9.1 A inversa da função logarítmica é dita a *função exponencial.* A imagem de cada $x \in \mathbb{R}$ pela função exponencial será denotada por e^x.

Pela definição de inversa de uma função podemos afirmar que

$$\log(e^x) = x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

e

$$e^{\log x} = x \quad \text{para todo } x \in (0, +\infty).$$

Em particular, $e^0 = e^{\log 1} = 1$ e $e^1 = e^{\log e} = e$.

A proposição a seguir expressa a propriedade fundamental da função exponencial.

Proposição 9.1
Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se

$$e^{x+y} = e^x \, e^y.$$

Demonstração: Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Então existem $u, v \in (0, +\infty)$, necessariamente únicos, tais que $\log u = x$ e $\log v = y$. Conseqüentemente, pela Proposição 7.2,

$$e^{x+y} = e^{\log u + \log v} = e^{\log(uv)} = uv = e^x \, e^y,$$

como queríamos demonstrar.

Vejamos outras propriedades importantes da função exponencial, algumas das quais dependem fortemente da proposição anterior.

Proposição 9.2

(a) A função exponencial é crescente.

(b) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \text{ e } e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}.$$

(c) Para todo $x \in \mathbb{R}$ e para todo inteiro $n \geq 0$, tem-se $e^{nx} = (e^x)^n$.

(d) Para todo $x \in \mathbb{R}$ e para todo inteiro n, tem-se $e^{nx} = (e^x)^n$.

(e) Para quaisquer inteiros p e q, $q \neq 0$, tem-se $e^{\frac{p}{q}} = \left(e^{\frac{1}{q}}\right)^p$.

Demonstração: (a): Basta lembrar que a inversa de uma função crescente é uma função crescente.

(b): Como $1 = e^0 = e^{x+(-x)} = e^x\, e^{-x}$, segue que $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$. Logo, $e^{x-y} = e^{x+(-y)} = e^x\, e^{-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$.

(c): Seja $x \in \mathbb{R}$ arbitrário. Vamos usar o princípio de indução finita para mostrar que $e^{nx} = (e^x)^n$ para todo inteiro $n \geq 0$.

É claro que a afirmação é satisfeita para $n = 0$. Seja $k \geq 0$ e suponhamos a afirmação válida para k, ou seja, admitamos que $e^{kx} = (e^x)^k$. Então

$$e^{(k+1)x} = e^{kx+x} = e^{kx}\, e^x = (e^x)^k\, e^x = (e^x)^{k+1},$$

provando que a afirmação é válida para $k + 1$. Pelo princípio de indução finita, $e^{nx} = (e^x)^n$ para todo inteiro $n \geq 0$.

Finalmente, como x é arbitrário, a demonstração de (c) está concluída.

(d): Seja $x \in \mathbb{R}$ arbitrário e seja n um inteiro, com $n < 0$. Como $-n > 0$, segue de (c) que $e^{(-n)x} = (e^x)^{-n}$. Logo, por (b), obtemos

$$e^{nx} = e^{-((-n)x)} = \frac{1}{e^{(-n)x}} = \frac{1}{(e^x)^{-n}} = (e^x)^n.$$

Como, em vista de (c), a igualdade $e^{nx} = (e^x)^n$ é satisfeita para todo inteiro $n \geq 0$, acabamos de mostrar a validade de (d).

(e): Sejam p e q dois inteiros arbitrários, com $q \neq 0$. Então, por (d),

$$e^{\frac{p}{q}} = e^{p \cdot \frac{1}{q}} = \left(e^{\frac{1}{q}}\right)^p,$$

provando (e).

A próxima proposição diz respeito à derivabilidade da função exponencial.

Proposição 9.3

A função exponencial é derivável em $\mathbb{R}$ e $(e^x)' = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $(e^x)'$ denota a derivada da função exponencial em x.

Demonstração: Para facilitar a compreensão da demonstração escrevamos $f(x) = \log x$, $x \in (0, +\infty)$; logo, $f^{-1}(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Pelo teorema da função inversa, estudado na aula 27 de Cálculo I, f^{-1} é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$(f^{-1})'(f(t)) = \frac{1}{f'(t)} = \frac{1}{\log'(t)} = \frac{1}{\frac{1}{t}} = t$$

para todo $t \in (0, +\infty)$.

Seja $x \in \mathbb{R}$ arbitrário. Então $x = \log t = f(t)$ para um único $t \in (0, +\infty)$. Portanto,

$$(e^x)' = (f^{-1})'(x) = (f^{-1})'(f(t)) = t = f^{-1}(x) = e^x,$$

concluindo assim a demonstração.

Pela proposição acima, a função exponencial é duas vezes derivável em $\mathbb{R}$ e $(e^x)'' = ((e^x)')' = (e^x)' = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mais geralmente, segue da referida proposição e do princípio de indução finita que, para todo inteiro $n \geq 1$, a função exponencial é n vezes derivável em $\mathbb{R}$ e $(e^x)^{(n)} = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 9.1

Seja $f(x) = e^{\text{sen}^2 x}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então f é derivável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = 2(\text{sen}\, x)(\cos x)e^{\text{sen}^2 x}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Com efeito, seja $h(x) = \text{sen}^2 x$ para todo $x \in \mathbb{R}$; h é derivável em $\mathbb{R}$ e $h'(x) = 2(\text{sen}\, x)(\cos x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (justifique esta afirmação). Como $f(x) = e^{h(x)}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, segue da regra da cadeia que f é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = 2(\text{sen}\, x)(\cos x)e^{\text{sen}^2 x}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Proposição 9.4

(a) O gráfico da função exponencial tem concavidade para cima.

(b) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Demonstração:

(a): Como $(e^x)'' = e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, (a) segue da Proposição 18.1(a), vista em Cálculo I.

(b): Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe um único $t \in (0, +\infty)$ tal que $x = \log t$. Além disso, $x \to -\infty$ se, e somente se, $t \to 0^+$ e $x \to +\infty$ se, e somente se, $t \to +\infty$. Portanto,

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{t\to 0^+} e^{\log t} = \lim_{t\to 0^+} t = 0$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = \lim_{t\to+\infty} e^{\log t} = \lim_{t\to+\infty} t = +\infty,$$

como queríamos demonstrar.

Usando o que vimos até agora, podemos garantir que o gráfico da função exponencial é como na Figura 9.1.

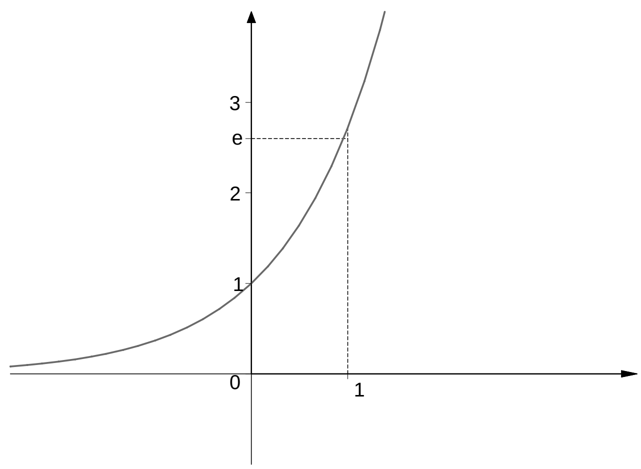


Figura 9.1

Exemplo 9.2

Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, tem-se

$$\int_a^b e^x dx = e^b - e^a.$$

Com efeito, seja $G(x) = e^x$. Pela Proposição 9.3, $G'(x) = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_a^b e^x dx = G(b) - G(a) = e^b - e^a.$$

Logo, a área da região compreendida entre o gráfico de $f(x) = e^x$, o eixo das abscissas e as retas $x = a$ e $x = b$ é $e^b - e^a$ (na Figura 9.2 hachuramos a região mencionada).

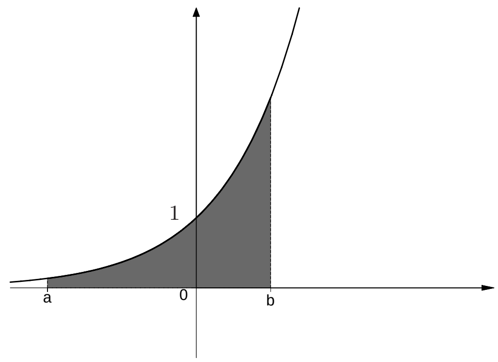


Figura 9.2

Exemplo 9.3

Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, tem-se

$$\int_a^b \cos x \, e^{\operatorname{sen} x} dx = e^{\operatorname{sen} b} - e^{\operatorname{sen} a}.$$

Com efeito, consideremos a função $G(x) = e^{\operatorname{sen} x}$. Pela regra da cadeia, G é derivável em $\mathbb{R}$ e tem por derivada a função contínua $f(x) = \cos x \, e^{\operatorname{sen} x}$. Portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_a^b \cos x \, e^{\operatorname{sen} x} dx = \int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) = e^{\operatorname{sen} b} - e^{\operatorname{sen} a}.$$

A próxima proposição nos diz que a função exponencial cresce muito mais rápido do que qualquer polinômio x^n $(n = 1, 2, \ldots)$. Mais precisamente:

Proposição 9.5

Para todo inteiro $n \geq 1$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

Demonstração: Vamos provar a asserção acima usando o princípio de indução finita.

No caso em que $n = 1$, devemos mostrar que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

De fato, argumentando como na demonstração da Proposição 9.4(b), obtemos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{t \to +\infty} \frac{e^{\log t}}{\log t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{\log t}.$$

Mas, pela Proposição 7.5,

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\log t}{t} = 0,$$

sendo $\frac{\log t}{t} > 0$ para todo $t \in (1, +\infty)$. Conseqüentemente,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{\log t} = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{1}{\frac{\log t}{t}} \right) = +\infty.$$

Seja k um inteiro, $k \geq 1$, e admitamos que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty.$$

Então, como $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{k+1} = +\infty$, podemos aplicar a regra de L'Hôpital para obter

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^{k+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{(k+1)x^k} = \frac{1}{k+1} \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^k} \right) = +\infty,$$

provando que a asserção é válida para $k+1$. Pelo princípio de indução finita, a asserção é válida para todo inteiro $n \geq 1$, isto é,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

Já sabemos que a função derivável $f(x) = e^x$ é tal que $f(0) = 1$ e $f'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Concluiremos esta aula mostrando que tais propriedades caracterizam a função exponencial. Mais precisamente, temos a seguinte

Proposição 9.6

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $f(0) = 1$ e $f'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então $f(x) = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Consideremos a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (notemos que faz sentido considerar a função g, pois $e^x \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$). Como tanto f quanto a função exponencial são deriváveis em $\mathbb{R}$, segue da Proposição 10.4, vista no Cálculo I, que g é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{f'(x)e^x - f(x)(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{(e^x)^2} = \\ &= \frac{f(x)e^x - f(x)e^x}{(e^x)^2} = 0 \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, pela Proposição 17.1(a), vista em Cálculo I, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{R}$, isto é, $f(x) = c\,e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Fazendo $x = 0$, obtemos $1 = f(0) = c\,e^0 = c$. Assim, $f(x) = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, como queríamos demonstrar.

Resumo

Nesta aula você foi apresentado à função exponencial e aprendeu algumas de suas propriedades básicas.

Exercícios

1. Esboce o gráfico das seguintes funções:

   (a) $f(x) = e^{-x}$; (b) $f(x) = e^{|x|}$; (c) $f(x) = e^{x-1}$.

2. Dê o domínio e derive as seguintes funções:

   (a) $f(x) = e^{x^2+x+1}$; (b) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$; (c) $f(x) = e^{\cos x}$;

   (d) $f(x) = e^{\frac{x}{x^2+1}}$; (e) $f(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}}$; (f) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$;

   (g) $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$; (h) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{e^x}$; (i) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{e^x}$;

   (j) $f(x) = \cos^2(e^x)$; (l) $f(x) = \cos\left(e^{x^2}\right)$;

   (m) $f(x) = \log(e^x + \operatorname{sen}^2 x)$.

3. Seja p um polinômio arbitrário. Mostre que a função $f(x) = e^{p(x)}$ é derivável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = p'(x)\, e^{p(x)}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Conclua que, se $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma raiz de p, então $f'(\alpha) = p'(\alpha)$.

4. Defina $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ e $\operatorname{tgh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 - \dfrac{2}{e^{2x}+1}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se:

   (a) $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$;

   (b) $\operatorname{tgh}^2 x + \dfrac{1}{\cosh^2 x} = 1$;

   (c) $\operatorname{senh}\,(x+y) = (\operatorname{senh} x)(\cosh y) + (\cosh x)(\operatorname{senh} y)$;

   (d) $\cosh(x+y) = (\cosh x)(\cosh y) + (\operatorname{senh} x)(\operatorname{senh} y)$.

A função $x \in \mathbb{R} \mapsto \operatorname{senh} x \in \mathbb{R}$ é conhecida como a *função seno hiperbólico*, a função $x \in \mathbb{R} \mapsto \cosh x \in \mathbb{R}$ é conhecida como a *função cosseno hiperbólico* e a função $x \in \mathbb{R} \mapsto \operatorname{tgh} x \in \mathbb{R}$ é conhecida como a *função tangente hiperbólica.*

5. Mostre que as funções senh, cosh e tgh são deriváveis em $\mathbb{R}$ e, além disso, tem-se

   (a) $\operatorname{senh}'(x) = \cosh x$,

   (b) $\cosh'(x) = \operatorname{senh} x$ e

(c) $\text{tgh}'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$
para todo $x \in \mathbb{R}$.

6. Use a regra de L'Hôpital para calcular os seguintes limites:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^2}$;

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}{x^3}$;

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3}$.

7. Para $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, calcule $\displaystyle\int_a^b \text{sen}\, x\, e^{\cos x} dx$.

   Sugestão: Raciocine como no Exemplo 9.3.

8. Calcule $\displaystyle\int_a^b e^{\alpha x} dx$, onde a e b são dois números reais quaisquer, com $a < b$, e $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$.

9. Determine a concavidade do gráfico da função $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$, definida para $x \in \mathbb{R}$.

10. Calcule $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{e^x + 5} dx$.

    Sugestão: Considere $G(x) = \log(e^x + 5)$ e mostre que $G'(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 5}$ para todo $x \in [1, 2]$.

11. Considere a função $f(x) = e^{2x} + 2e^x + 3$, definida para $x \in \mathbb{R}$.

    (a) Mostre que f é bijetora.

    (b) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f^{-1} no ponto $(6, 0)$.

Auto-avaliação

Nos exercícios desta aula você aliou fatos importantes, estudados no decorrer do curso, ao que acabou de aprender a respeito da função exponencial. Tendo em vista a importância da função exponencial, só passe para a próxima aula após fazer todos os exercícios propostos. Caso tenha sentido dificuldades, releia a aula. Permanecendo as dúvidas, consulte o tutor no pólo.

Aula 10 – A função exponencial. Continuação.

Referências: Aulas 10, 12, 16, 17, 18 e 27 de Cálculo I, 4 e 8 de Cálculo II.

Objetivos

- *Compreender o que se entende por a^x, onde $a \in (0, +\infty)$ e $x \in \mathbb{R}$.*
- *Estudar propriedades básicas a respeito desta noção.*

Na aula 8 estudamos as funções $\log_a$, onde $a \in (0, +\infty) - \{1\}$, as quais são bijetoras em vista da Proposição 8.2. Nesta aula nos dedicaremos ao estudo das inversas das funções $\log_a$. No caso particular em que $a = e$, já sabemos que a inversa da função $\log_a$ é a função exponencial, que foi discutida detalhadamente na aula anterior.

Definição 10.1 Seja $a \in (0, +\infty)$. Para cada $x \in \mathbb{R}$ definimos

$$a^x = e^{x \log a}.$$

Como $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, segue que $a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Se $a = 1$, temos $a^x = e^{x \log 1} = e^0 = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Se $a = e$, temos $a^x = e^{x \log e} = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$; isto significa dizer que, neste caso, a função $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x \in (0, +\infty)$ é precisamente a função exponencial.

Suponhamos $a \in (0, +\infty) - \{1\}$. Então temos:

(a) para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\log_a(a^x) = \log_a\left(e^{x \log a}\right) = \frac{\log\left(e^{x \log a}\right)}{\log a} = \frac{x \log a}{\log a} = x$$

e

(b) para todo $x \in (0, +\infty)$,

$$a^{\log_a x} = e^{(\log_a x)\,(\log a)} = e^{\left(\frac{\log x}{\log a}\right)\,(\log a)} = e^{\log x} = x.$$

Segue de (b) que, para cada $a \in (0, +\infty) - \{1\}$, a função $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x \in (0, +\infty)$ é a inversa da função $\log_a$.

Vejamos algumas propriedades importantes das funções $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x \in (0, +\infty)$ que decorrem de propriedades já provadas para a função exponencial.

Proposição 10.1

Seja $a \in (0, +\infty)$. Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se:

(a) $a^{x+y} = a^x \,.\, a^y$;

(b) $(a^x)^y = a^{xy}$;

(c) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$;

(d) $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$.

Além disso, se $a \neq 1$, $a^x = 1$ se, e somente se, $x = 0$.

Demonstração: (a): $a^{x+y} = e^{(x+y)\log a} = e^{x \log a + y \log a} = e^{x \log a} \,.\, e^{y \log a} = a^x \,.\, a^y$.

(b): Inicialmente, notemos que a afirmação a ser provada faz sentido, já que $a^x > 0$. Temos então

$$(a^x)^y = \left(e^{x \log a}\right)^y = e^{y \log\left(e^{x \log a}\right)} = e^{y(x \log a)} = e^{(xy)\log a} = a^{xy},$$

como queríamos provar.

(c): $a^{-x} = e^{(-x)\log a} = e^{-(x \log a)} = \frac{1}{e^{x \log a}} = \frac{1}{a^x}$.

(d): $a^{x-y} = a^{x+(-y)} = a^x \,.\, a^{-y} = \frac{a^x}{a^y}$.

Finalmente, se $a \neq 1$, $a^x = 1$ se, e somente se, $e^{x \log a} = 1 = e^0$ se, e somente se, $x \log a = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

Fazendo $a = e$ na Proposição 10.1(b), obtemos $(e^x)^y = e^{xy}$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, estendendo o que havíamos visto na Proposição 9.2(e).

Proposição 10.2

Seja $a \in (0, +\infty)$. Então a função $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x \in (0, +\infty)$ é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$(a^x)' = (\log a)a^x$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $(a^x)'$ denota a derivada desta função em x.

Demonstração: Já sabemos que a função exponencial é derivável em $\mathbb{R}$ e $(e^x)' = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Conseqüentemente, a função $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x \in (0, +\infty)$ é derivável em $\mathbb{R}$ e $(a^x)' = (\log a)e^{x \log a} = (\log a)a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 10.1

Sejam $a \in (0, +\infty)$ e p um polinômio. Então a função $f(x) = a^{p(x)}$ é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = (\log a)p'(x)a^{p(x)}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Com efeito, pela regra da cadeia, a função f é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = p'(x)(a^{p(x)})' = (\log a)p'(x)a^{p(x)}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Em particular, se $f(x) = 7^{x^3+8x-4}$, então $f'(x) = (\log 7)(3x^2+8)7^{x^3+8x-4}$.

Exemplo 10.2

Seja $a \in (0, +\infty)$. Então a função $f(x) = a^{\cos x}$ é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = -(\log a)\text{sen}\, x\, a^{\cos x}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Com efeito, pela regra da cadeia, a função f é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = -(\text{sen}\, x)\,(a^{\cos x})' = -(\log a)\text{sen}\, x\, a^{\cos x}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Em particular, $f'(0) = -(\log a)\text{sen}\, 0\, a^{\cos 0} = 0$.

Proposição 10.3

Se $a \in (0, 1)$, valem as seguintes propriedades:

(a) a função $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x \in (0, +\infty)$ é decrescente;

(b) o gráfico da função $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x \in (0, +\infty)$ tem concavidade para cima;

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$.

Demonstração: (a): Segue do Teorema 27.1(b), visto no Cálculo I, já que a função $x \in (0, +\infty) \mapsto \log_a x \in \mathbb{R}$ é decrescente (Proposição 8.4(a)).

(b): Pela Proposição 10.2, a função $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x \in (0, +\infty)$ é duas vezes derivável em $\mathbb{R}$ e

$$(a^x)'' = ((a^x)')' = (\log a)(a^x)' = (\log a)(\log a)a^x = (\log a)^2 a^x$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Daí resulta que $(a^x)'' > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, pela Proposição 18.1(a), vista no Cálculo I, temos (b).

(c): Como $a \in (0, 1)$, $\log a < 0$. Por outro lado, sabemos que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Portanto,

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} e^{x\log a} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\log a} = 0.$$

A Proposição 10.3(a) também segue da Proposição 10.2 e da Proposição 17.1(c), vista no Cálculo I, lembrando que $\log a < 0$ se $a \in (0, 1)$.

Raciocinando como na demonstração da proposição anterior, obtemos:

Proposição 10.4

Se $a \in (1, +\infty)$, valem as seguintes propriedades:

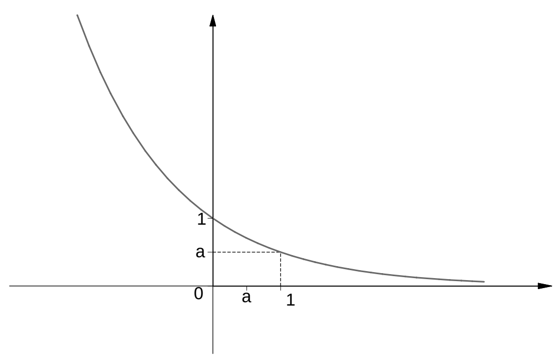
(a) a função $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x \in (0, +\infty)$ é crescente;

(b) o gráfico da função $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x \in (0, +\infty)$ tem concavidade para cima;

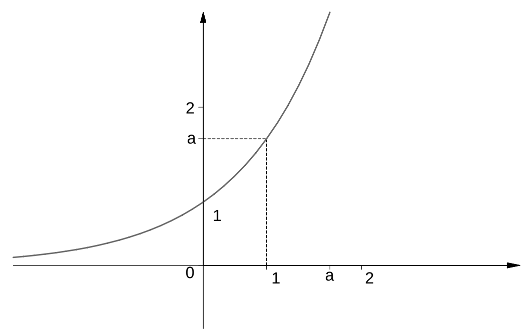
(c) $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$.

A Proposição 10.4(a) também segue da Proposição 10.2 e da Proposição 17.1(b), vista no Cálculo I, lembrando que $\log a > 0$ se $a \in (1, +\infty)$.

Nas Figuras 10.1a e 10.1b esboçamos os gráficos das funções $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x \in (0, +\infty)$ quando $a \in (0, 1)$ e $a \in (1, +\infty)$, respectivamente.



(a)



(b)

Figura 10.1

Proposição 10.5

Sejam I um intervalo não trivial, $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável em I tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in I$ e $g : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável em I. Então a função $h(x) = f(x)^{g(x)}$ é derivável em I e

$$h'(x) = h(x) \left[g'(x) \log(f(x)) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right]$$

para todo $x \in I$.

Demonstração: Seja $v(x) = \log(f(x))$ para todo $x \in I$. Pela regra da cadeia, v é derivável em I e

$$v'(x) = \log'(f(x)) \,.\, f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

para todo $x \in I$.

Seja $w(x) = g(x)v(x)$ para todo $x \in I$. Pela Proposição 10.3, vista no Cálculo I , w é derivável em I e

$$w'(x) = g'(x)v(x) + g(x)v'(x) = g'(x)\log(f(x)) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}$$

para todo $x \in I$.

Finalmente, como $h(x) = e^{g(x)\log(f(x))} = e^{g(x)v(x)} = e^{w(x)}$ para todo $x \in I$, segue da regra da cadeia que h é derivável em I e

$$h'(x) = e^{w(x)}w'(x) = h(x)\left[g'(x)\log(f(x)) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

para todo $x \in I$.

Exemplo 10.3

Sejam r um número real arbitrário e $h(x) = x^r$ $(x \in (0, +\infty))$. Então h é derivável em $(0, +\infty)$ e $h'(x) = rx^{r-1}$ para todo $x \in (0, +\infty)$.

De fato, tomemos $f(x) = x$ e $g(x) = r$; então $h(x) = f(x)^{g(x)}$ para todo $x \in (0, +\infty)$. Pela Proposição 10.5, h é derivável em $(0, +\infty)$ e

$$\begin{aligned} h'(x) &= h(x)\left[g'(x)\log(f(x)) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right] = \\ &= x^r\left[0 \times \log x + r \times \frac{1}{x}\right] = \\ &= r\frac{x^r}{x} = rx^{r-1} \end{aligned}$$

para todo $x \in (0, +\infty)$.

Lembremos que, no caso particular em que r é um número racional não nulo, o Exemplo 10.3 já era conhecido (ver a aula 12 de Cálculo I).

Resumo

Nesta aula você aprendeu o que se entende por a^x $(a \in (0, +\infty)\ ,\ x \in \mathbb{R})$ e estudou propriedades básicas acerca desta noção.

Exercícios

1. Esboce o gráfico das seguintes funções:

   (a) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+2}$; (b) $f(x) = (\sqrt{3})^{|x|+1}$; (c) $f(x) = \left(\frac{e}{3}\right)^{|x-1|}$.

2. Dê o domínio e derive as seguintes funções:

   (a) $f(x) = 2^{\text{sen}\, x}$; (b) $f(x) = 2^{\text{sen}^2 x}$; (c) $f(x) = 2^{\text{sen}\,(x^2)}$;

   (d) $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^3-2x}$; (e) $f(x) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{x}{x^2-4}}$; (f) $f(x) = \dfrac{\cos x}{5^x}$;

   (g) $f(x) = \log(3^x)$; (h) $f(x) = 3^{\log x}$; (i) $f(x) = \pi^{\log(x^2)}$;

   (j) $f(x) = \log_2(3^x)$; (l) $f(x) = \log_3(2^x)$; (m) $f(x) = 2^{\log_3 x}$;

   (n) $f(x) = 3^{\log_2 x}$.

3. (a) Esboce a região compreendida entre o gráfico de $f(x) = \left(\dfrac{1}{7}\right)^{|x|}$, o eixo das abscissas e as retas $x = -1$ e $x = 1$.

   (b) Determine a área da região mencionada em (a).

4. Calcule $\displaystyle\int_a^b 7^{2x} dx$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$. Sugestão: Se $G(x) = \dfrac{1}{2\log 7} 7^{2x}$, então $G'(x) = 7^{2x}$.

5. Calcule $\displaystyle\int_a^b x\, 7^{x^2} dx$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$.

   Sugestão: Se $G(x) = \dfrac{1}{2\log 7} 7^{x^2}$, então $G'(x) = x\, 7^{x^2}$.

6. Mostre que $\displaystyle\int_a^b (\text{sen}\ x) \left(\frac{1}{6}\right)^{\cos x} dx = \frac{1}{\log\left(\frac{1}{6}\right)} \left(\left(\frac{1}{6}\right)^{\cos a} - \left(\frac{1}{6}\right)^{\cos b} \right).$

7. Derive as seguintes funções:

   (a) $f(x) = x^x$, $x \in (0, +\infty)$; (b) $f(x) = x^{x^3-7x^2+6x}$, $x \in (0, +\infty)$;

   (c) $f(x) = (x^2 + 1)^{\cos x}$, $x \in \mathbb{R}$; (d) $f(x) = (\text{sen}^2 x + 1)^{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Auto-avaliação

Os exercícios desta aula dependem, fundamentalmente, do conteúdo da mesma, das regras de derivação e do Teorema Fundamental do Cálculo. Por esta razão, se você teve dúvidas nos exercícios propostos, releia as aulas pertinentes e tente novamente. Caso persista alguma dúvida, consulte o tutor no pólo.

Aula 11 – Exercícios resolvidos.

Referências: Aulas 5, 7, 8, 9, 16, 17, 18, 26 e 27 de Cálculo I, 3, 4, 5, 7 e 9 de Cálculo II.

Objetivo

Fixar o conteúdo das aulas 2 a 9, notadamente aquele referente às aulas 7 e 9.

Exercício 1: Seja R a região compreendida entre os gráficos de

$$f(x) = \frac{1}{x}\ ,\ g(x) = x^2 \ \text{ e }\ h(x) = \frac{x}{4}.$$

(a) Esboce a região R.

(b) Ache a área da região R.

Solução: (a): Evidentemente, a região R em questão está contida no conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$.

Notemos que, como $g(x) - h(x) = x^2 - \frac{x}{4} = x\big(x - \frac{1}{4}\big)$, temos $g(x) \leq h(x)$ para $x \in \big[0, \frac{1}{4}\big]$ e $h(x) \leq g(x)$ para $x \in \big[\frac{1}{4}, +\infty\big]$. Além disso, $g(x) = h(x)$ se, e somente se, $x = 0$ ou $x = \frac{1}{4}$. Por outro lado, $f(x) = g(x)$ se, e somente se, $\frac{1}{x} = x^2$ se, e somente se, $x = 1$; $f(x) = h(x)$ se, e somente se, $\frac{1}{x} = \frac{x}{4}$ se, e somente se, $x = 2$; e, como $f(x) - h(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{4} = \frac{4-x^2}{4x}$, temos $h(x) \leq f(x)$ para $x \in [1, 2]$. Assim, a região R é como na Figura 11.1.

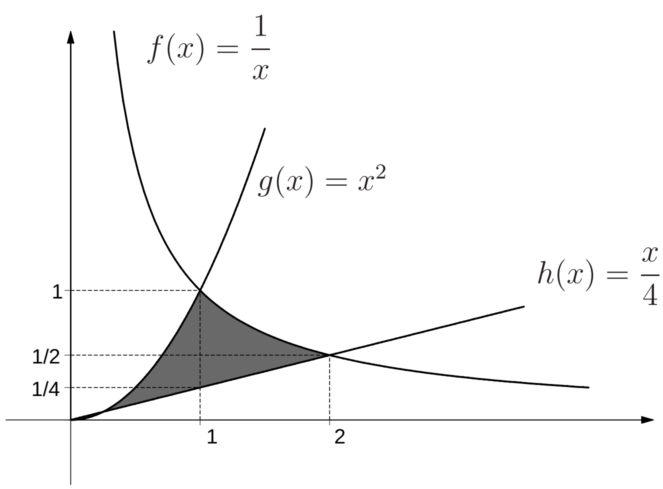


Figura 11.1

(b): Juntando as informações obtidas em (a), concluímos que a área de R é

$$\int_{\frac{1}{4}}^{1} \left(x^2 - \frac{x}{4}\right) dx + \int_{1}^{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{4}\right) dx.$$

Mas

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{4}}^{1}\left(x^2-\frac{x}{4}\right)dx &= \int_{\frac{1}{4}}^{1} x^2 dx - \int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{x}{4}dx = \\
&= \int_{\frac{1}{4}}^{1} x^2 dx - \frac{1}{4}\int_{\frac{1}{4}}^{1} x\,dx = \\
&= \frac{1}{3}\left(1^3-\left(\frac{1}{4}\right)^3\right) - \frac{1}{4}\,.\,\frac{1}{2}\left(1^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right) = \\
&= \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{64}\right) - \frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{16}\right) = \\
&= \frac{1}{3}\,.\,\frac{63}{64} - \frac{1}{8}\,.\,\frac{15}{16} = \frac{21}{64} - \frac{15}{128} = \frac{27}{128}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{4}\right)dx = \int_{1}^{2}\frac{1}{x}dx - \frac{1}{4}\int_{1}^{2} x dx &= \log 2 - \log 1 - \frac{1}{8}(2^2-1^2) = \\
&= \log 2 - \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

Portanto, a área de R é $\dfrac{27}{128} - \log 2 + \dfrac{3}{8} = \dfrac{75}{128} - \log 2$.

Exercício 2: Seja $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + \log x$ para todo $x \in (0,+\infty)$.

(a) Mostre que f é inversível em $(0,+\infty)$.

(b) Mostre que a inversa f^{-1} de f está definida em $\mathbb{R}$, é derivável em $\mathbb{R}$ e $(f^{-1})'(x) = \frac{f^{-1}(x)}{1+f^{-1}(x)}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Forneça $f^{-1}(1)$ e $(f^{-1})'(1)$.

Solução:

(a): A função f é derivável em $(0,+\infty)$, como soma de duas funções deriváveis em $(0,+\infty)$, e $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$ para todo $x \in (0,+\infty)$. Assim, $f'(x) > 0$ para todo $x \in (0,+\infty)$. Logo, f é crescente em $(0,+\infty)$ e, conseqüentemente, f é inversível em $(0,+\infty)$.

(b): Como $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} \log x = -\infty$, então $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$. Por outro lado, como $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to +\infty} \log x = +\infty$, então $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

Como f é contínua em $(0,+\infty)$ (já que é derivável em $(0,+\infty)$), podemos garantir que $f((0,+\infty)) = \mathbb{R}$ (justifique esta afirmação usando o teorema do valor intermediário). Portanto, o domínio de f^{-1} é $\mathbb{R}$. E, como $f(1) = 1 + \log 1 = 1$, então $f^{-1}(1) = 1$.

Finalmente, pelo teorema da função inversa, f^{-1} é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $f'(f^{-1}(x)) = 1 + \frac{1}{f^{-1}(x)} = \frac{1+f^{-1}(x)}{f^{-1}(x)}$, obtemos

$$(f^{-1})'(x) = \frac{f^{-1}(x)}{1+f^{-1}(x)}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, $(f^{-1})'(1) = \frac{f^{-1}(1)}{1+f^{-1}(1)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

Exercício 3 (Exercício 5, da aula 7): Use a regra de L'Hôpital para calcular os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(x+1) - x + \frac{x^2}{2}}{x^2}$; (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(x+1) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(x+1) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}{x^3}$.

Solução: (a): Temos que

$$\lim_{x\to 0}\left(\log(x+1) - x + \frac{x^2}{2}\right) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$

Logo, pela regra de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1) - x + \frac{x^2}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1} - 1 + x}{2x},$$

caso o limite da direita exista. Mas, como

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x+1} - 1 + x\right) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} 2x = 0,$$

segue da regra de L'Hôpital que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1} - 1 + x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{(x+1)^2} + 1}{2},$$

caso o limite da direita exista. Como

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{(x+1)^2} + 1}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0,$$

podemos finalmente concluir que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1) - x + \frac{x^2}{2}}{x^2} = 0.$$

(b): Raciocinando como em (a), podemos garantir que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{(x+1)^2} + 1}{6x},$$

caso o limite da direita exista. Mas, como

$$\lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{(x+1)^2} + 1\right) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} 6x = 0,$$

segue da regra de L'Hôpital que

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{(x+1)^2} + 1}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{(x+1)^3}}{6},$$

caso o limite da direita exista. Como

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{(x+1)^3}}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

podemos finalmente concluir que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

(c): Raciocinando como nos itens anteriores, podemos garantir que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{(x+1)^3} - 2}{6},$$

caso o limite da direita exista. Mas

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{(x+1)^3} - 2}{6} = \frac{2-2}{6} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}{x^3} = 0.$$

Exercício 4: (a) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e defina $G(x) = e^{\int_0^x f(t)dt}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que G é derivável em $\mathbb{R}$ e $G'(x) = f(x)G(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) Suponha que f seja como em (a) e que, além disso, se tenha $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (respectivamente $f(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$). Mostre que G é crescente em $\mathbb{R}$ (respectivamente decrescente em $\mathbb{R}$).

(c) Mostre que a função $G(x) = e^{\int_0^x \frac{1}{t^4+1}dt}$ é crescente em $\mathbb{R}$.

Solução: (a): Sejam $f(x) = e^x$ e $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ $(x \in \mathbb{R})$. Já sabemos que f e F são deriváveis em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = e^x$ e $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $G = f \circ F$, a regra da cadeia nos garante que G é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$G'(x) = (f \circ F)'(x) = f'(F(x))F'(x) = e^{F(x)}f(x) = f(x)G(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b): Se $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $G'(x) = f(x)G(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, já que $G(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, G é crescente em $\mathbb{R}$.

Analogamente, se $f(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $G'(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, G é decrescente em $\mathbb{R}$.

(c): Como $f(x) = \frac{1}{x^4+1} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, segue de (b) que a função $G(x) = e^{\int_0^x \frac{1}{t^4+1}dt}$ é crescente em $\mathbb{R}$.

Exercício 5: (a) Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, é derivável em $\mathbb{R}$.

(b) Esboce o gráfico de f.

Solução: (a): Pela regra da cadeia, f é derivável em $\mathbb{R} - \{0\}$ e $f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Mostremos que f é derivável em 0. Realmente, devemos verificar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$$

existe.

Mas

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\left(\frac{1}{x}\right)^2}} = \lim_{t\to +\infty} \frac{t}{e^{t^2}}.$$

Como $\lim\limits_{t\to +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ e como $\frac{e^{t^2}}{t} \geq \frac{e^t}{t}$ para todo $t \in [1, +\infty)$ (justifique esta afirmação), segue que $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{e^{t^2}}{t} = +\infty$. Logo,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^{t^2}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^{t^2}}{t}} = 0.$$

Por outro lado,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = -\left(\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{(-x)^2}}}{-x}\right) = -\left(\lim_{t\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{t^2}}}{t}\right) = 0.$$

Conseqüentemente, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0$. Isto prova que f é derivável em 0 e $f'(0) = 0$.

Em resumo, temos $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$ se $x \neq 0$ e $f'(0) = 0$.

(b): Inicialmente, notemos que f é par, isto é, $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, para conhecer o gráfico de f, basta conhecer o gráfico de f quando x varia em $[0, +\infty)$.

Como $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} > 0$ para todo $x \in (0, +\infty)$, segue que f é crescente em $[0, +\infty)$; logo, f é decrescente em $(-\infty, 0]$ (este fato também decorre do fato de que $f'(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, 0)$).

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} = 1$ (já que $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$, a função exponencial é contínua em 0 e $e^0 = 1$), a reta $y = 1$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f.

Façamos um estudo da concavidade do gráfico de f.

Com efeito, como $f'(x) = \dfrac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, podemos afirmar que

$$f''(x) = \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^5}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$$

para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} f''(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{x} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{x^4}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{2t^2}{e^t} = 0. \end{aligned}$$

Em resumo, f é duas vezes derivável em $\mathbb{R}$, $f''(x) = \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^5}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$ se $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $f''(0) = 0$. Como $f''(x) = \frac{2}{x^4}e^{-\frac{1}{x^2}}\left(-3 + \frac{2}{x}\right)$ para $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, conclui-se que $f''(x) > 0$ para todo $x \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$ e $f''(x) < 0$ para todo $x \in \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$. Portanto, o gráfico de f tem concavidade para cima em $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ e concavidade para baixo em $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

A partir das informações obtidas, esboçamos o gráfico de f na Figura 11.2.

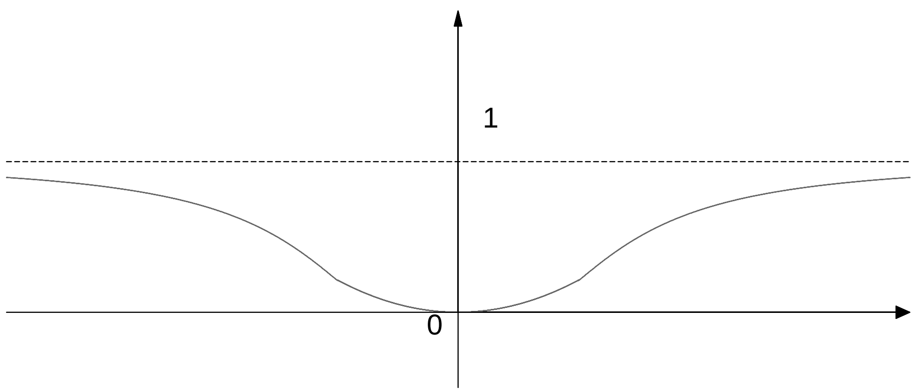


Figura 11.2

Resumo

Nos exercícios resolvidos desta aula você fixou, principalmente, o conteúdo a respeito das funções logarítmica e exponencial, estudado nas aulas 7 e 9. Eles também podem ter contribuído para dirimir eventuais dúvidas sobre as referidas funções.

Aula 12 – Outras indeterminações da regra de L'Hôpital.

Referências: Aulas 26 de Cálculo I, 7, 8, 9 e 10 de Cálculo II.

Objetivo

Estudar algumas outras indeterminações onde a regra de L'Hôpital se aplica.

Na aula 26 de Cálculo I, vimos quatro formas de indeterminação onde a regra de L'Hôpital se aplica: as formas $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty.0$ e $\infty - \infty$. Nesta aula veremos três outros tipos de indeterminação, a saber, 0^0, ∞^0 e 1^∞.

Iniciemos pela **forma indeterminada** 0^0.

Imagine que queiramos determinar o $\lim\limits_{x\to\pi^-}(4\pi-4x)^{\text{sen}x}$. Você pode perceber que, até aqui, nehuma das técnicas para calcular limites são aplicáveis neste caso. Observe que, escrevendo $f(x) = 4\pi - 4x$ e $g(x) = \text{sen}x$, temos $\lim\limits_{x\to\pi^-}(4\pi - 4x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to\pi^-} \text{sen}x = 0$, o que justifica a seguinte

Definição 12.1 Sejam I um intervalo não trivial, $f : I \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in I$ e $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$. Se $g : I \to \mathbb{R}$ é uma função tal que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, dizemos que a função $f(x)^{g(x)}$ tem a forma indeterminada 0^0 em a.

Para determinar o $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ quando $f(x)^{g(x)}$ tem a forma indeterminada 0^0, vamos transformá-la na forma $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ antes de aplicar a regra de L'Hôpital.

Lembre que o domínio da função logarítmica é o intervalo $(0, +\infty)$.

Para fazer isso, lembre inicialmente que $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)} > 0$ para todo $x \in I$. Portanto, escrevendo $y(x) = f(x)^{g(x)}$ $(x \in I)$, segue que $\log y(x)$ está bem definida e $\log y(x) = \log\, e^{g(x)\log f(x)} = g(x).\log f(x)$ para todo $x \in I$. Assim,

$$\lim_{x\to a} y(x) = \lim_{x\to a} e^{\log\ y(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x).\log\ f(x)}.$$

Como a função exponencial é contínua, segue que $\lim\limits_{x\to a} e^{g(x).\log f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x).\log f(x)}$, desde que exista $\lim\limits_{x\to a} g(x).\log f(x)$. Se este for o caso e $\lim\limits_{x\to a} g(x).\log f(x) = L$, segue que

$$\lim_{x\to a} y(x) = \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x).\log f(x)} = e^L.$$

Acabamos de ver que, para determinar o $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$, basta determinar o $\lim_{x\to a} g(x).\log\ f(x)$. Ora, como $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, segue que $g(x).\log\ f(x)$ tem a forma indeterminada $0.\infty$ em a.

Você viu, na aula 26 de Cálculo I, que para transformar esta forma indeterminada na forma $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ usamos o artifício de escrever $g(x).\log f(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{\log\ f(x)}}$, que tem a forma indeterminada $\frac{0}{0}$ em a, ou $g(x).\log\ f(x) = \frac{\log\ f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$, que tem a forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$ em a. Lembremos que a escolha entre as duas formas deverá ser feita levando-se em conta qual delas torna mais fácil a aplicação da regra de L'Hôpital. Vejamos um exemplo.

Exemplo 12.1

Vamos determinar o $\lim_{x\to \pi^-} (4\pi - 4x)^{\text{sen}x}$. Note que, como $4\pi - 4x > 0$ para todo $x \in (-\infty, \pi)$, então $\log(4\pi - 4x)$ está bem definida para tais valores de x.

Pelo que acabamos de ver, devemos determinar o $\lim_{x\to\pi^-} (\text{sen}x).\log(4\pi - 4x)$.

Escrevamos $(\text{sen}x).\log(4\pi - 4x) = \frac{\log(4\pi-4x)}{\frac{1}{senx}} = \frac{\log(4\pi-4x)}{\text{cossec}x}$, a qual tem a forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$.

Aplicando a regra de L'Hôpital duas vezes, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi^-} (\text{sen}x).\log(4\pi - 4x) &= \lim_{x\to\pi^-} \frac{\frac{-4}{4\pi-4x}}{(-\text{cossec}x)(\text{cotg}x)} = \\
&= \lim_{x\to\pi^-} \frac{4\text{sen}^2 x}{(4\pi - 4x)\text{cos}x} = \\
&= \lim_{x\to\pi^-} \frac{8(\text{sen}x)(\text{cos}x)}{(4x - 4\pi)\text{sen}x - 4\text{cos}x} = \\
&= \frac{0}{4} = 0.
\end{aligned}$$

Obtemos, portanto, que

$$\lim_{x\to\pi^-} (4\pi - 4x)^{\text{sen}x} = e^0 = 1.$$

Vejamos, agora, a **forma indeterminada** ∞^0.

Definição 12.2 Sejam I um intervalo não trivial, $f : I \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in I$ e $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$. Se $g : I \to \mathbb{R}$ é uma função tal que $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, dizemos que a função $f(x)^{g(x)}$ tem a forma indeterminada ∞^0 em a.

Analogamente ao caso anterior, devemos determinar o $\lim_{x\to a} g(x)\log f(x)$. Como $\lim_{x\to a} \log f(x) = +\infty$, segue que $g(x)\log f(x)$ tem a forma indeterminada $0.\infty$. De novo, usamos o artifício de escrever $g(x).\log f(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{\log f(x)}}$ ou $g(x).\log f(x) = \frac{\log f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ para, em seguida, aplicar a regra de L'Hôpital.

Exemplo 12.2

Vamos determinar o $\lim_{x\to 2^+} \left(\frac{1}{x-2}\right)^{x-2}$. Como $\frac{1}{x-2} > 0$ para todo $x \in (2, +\infty)$, segue que $\log\left(\frac{1}{x-2}\right)$ está bem definida para tais valores de x.

Pelo que acabamos de ver, devemos determinar o $\lim_{x\to 2^+} (x-2).\log\left(\frac{1}{x-2}\right)$. Escrevendo $(x-2).\log\left(\frac{1}{x-2}\right) = \frac{\log\left(\frac{1}{x-2}\right)}{\frac{1}{x-2}}$ e aplicando a regra de L'Hôpital, obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^+} (x-2).\log\left(\frac{1}{x-2}\right) &= \lim_{x\to 2^+} \frac{\log\left(\frac{1}{x-2}\right)}{\frac{1}{x-2}} = \\
&= \lim_{x\to 2^+} \frac{\left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right)/\left(\frac{1}{(x-2)}\right)}{\frac{-1}{(x-2)^2}} = \\
&= \lim_{x\to 2^+} (x-2) = 0
\end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{x\to 2^+} \left(\frac{1}{x-2}\right)^{x-2} = e^{\lim_{x\to 2^+} (x-2)\log\left(\frac{1}{x-2}\right)} = e^0 = 1.$$

Vejamos, para finalizar, a **forma indeterminada** 1^∞.

Definição 12.3 Sejam I um intervalo não trivial, $f : I \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in I$ e $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to a} f(x) = 1$. Se $g : I \to \mathbb{R}$ é uma função tal que $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, dizemos que a função $f(x)^{g(x)}$ tem a forma indeterminada 1^∞ em a.

Da mesma maneira, devemos determinar o $\lim_{x\to a} g(x).\log f(x)$. Como $\lim_{x\to a} \log f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, segue que $g(x)\log f(x)$ tem a forma indeterminada $\infty.0$. De novo, usamos o artifício de escrever $g(x).\log f(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{\log f(x)}}$ ou $g(x).\log f(x) = \frac{\log f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ para, em seguida, aplicar a regra de L'Hôpital.

Exemplo 12.3

Vamos determinar o $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos x)^{\frac{1}{\text{sen}(x)}}$. Como $\cos x > 0$ para todo $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, segue que $\log(\cos x)$ está bem definida para tais valores de x.

Pelo que acabamos de ver, devemos determinar o $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\text{sen}x}\right).\log(\cos x)$. Escrevendo $\frac{1}{\text{sen}x}.\log(\cos x) = \frac{\log(\cos x)}{\frac{1}{\text{sen}x}}$ e aplicando a regra de L'Hôpital, obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\text{sen}x}\right).\log(\cos x) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\log(\cos x)}{\frac{1}{sen\ x}} = \\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-\text{sen}x}{\cos x}}{\frac{-\cos x}{\text{sen}^2 x}} = \\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\text{sen}^3 x}{\cos^2 x} = 0.\end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{x\to 0^+}(\cos^x)^{\frac{1}{\text{sen}x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\text{sen}x}\right).\log(\cos x)} = e^0 = 1.$$

Resumo

Nesta aula você constatou a importância das funções logarítmica e exponencial para o cálculo de certos limites.

Exercícios

1. Determine os limites abaixo:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\left(1/\log\frac{1}{x}\right)}$ b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\cos x)^{x-\frac{\pi}{2}}$ c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{\cos 2x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} 5x^{\text{sen}x}$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

g) $\lim\limits_{x\to 0}(2x+e^{2x})^{1/x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\log x}$ i) $\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x+2x)^{2/x}$

j) $\lim\limits_{x\to 0}(e^{x^2/2}\cos x)^{4/x^4}$ k) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+x)^{1/x}$ l) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{e^{x-1}})^{1/(x-1)}$

m) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\text{cotg}2x)^{x^2}$ n) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x)^{1/e^x}$ o) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}$

p) $\lim_{x\to 0}(1+tg\ x)^{1/x}$ q) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+1}{x^4+x^3}$ r) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\text{sen}x)^{\sec x}$

s) $\lim_{x\to 0}(e^{1/x})^x$ t) $\lim_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{2e^{x-2}-2}\right)^{x-2}$ u) $\lim_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{1-e^x}\right)^{x^2}$.

2. Encontre o número real c para o qual $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{cx+1}{cx-1}\right)^x = 9$.

3. Encontre o número real c para o qual $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x = 4$.

Auto-avaliação

Entre os exercícos propostos, você encontrará não somente aqueles envolvendo as formas de indeterminação estudadas nesta aula, como também algumas formas de indeterminação estudadas na aula 26 de Cálculo I. Para resolvê-los, você deve demonstrar domínio das regras de derivação e a identificação, em cada caso, da forma de indeterminação da regra de L'Hôpital a ser aplicada. Caso persista alguma dúvida, releia a aula com atenção ou procure o tutor no seu pólo.

Aula 13 – Gráficos de funções.

Referências: Aulas 16 a 29 de Cálculo I, 7, 8, 9 e 10 de Cálculo II.

Objetivos

Estudar algumas funções envolvendo as funções logarítmica e exponencial e esboçar seus gráficos.

Para cada uma das funções f dos exemplos que se seguem, estudaremos:

(i) o domínio e a derivabilidade de f,

(ii) as assíntotas verticais e horizontais ao gráfico de f,

(iii) o crescimento e o decrescimento de f,

(iv) a concavidade do gráfico de f,

(v) os extremos relativos e absolutos de f e

(vi) os pontos de inflexão do gráfico de f.

Finalmente, esboçaremos o gráfico de f.

Exemplo 13.1

Considere a função $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$.

Claramente, vemos que o domínio de f é $\mathbb{R}$. Agora, como $h(x) = e^x$ e $g(x) = -\frac{x}{2}$ são funções deriváveis em $\mathbb{R}$, segue que $(h \circ g)(x) = e^{-\frac{x}{2}}$ é derivável em $\mathbb{R}$. Assim, f é derivável em $\mathbb{R}$, pois é um produto de funções deriváveis em $\mathbb{R}$, a saber, $u(x) = x$ e $(h \circ g)(x) = e^{-\frac{x}{2}}$.

Vejamos as assíntotas verticais e horizontais. Como f é contínua em $\mathbb{R}$ (pois é derivável em $\mathbb{R}$), não existe assíntota vertical ao gráfico de f, visto que, para todo $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Vimos, na aula 9, que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$. Assim, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{x}{2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^{\frac{x}{2}}} = 0$, donde concluímos que f tem a forma indeterminada $\infty.0$. Aplicando a regra de L'Hôpital, obtemos

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-\frac{x}{2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{\frac{x}{2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}} = 0.$$

Como $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\frac{x}{2}} = +\infty$, segue que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Assim, concluímos que a reta $y = 0$ é a única assíntota horizontal ao gráfico de f.

Derivando f, obtemos

$$f'(x) = xe^{-\frac{x}{2}}\Big(-\frac{1}{2}\Big) + e^{-\frac{x}{2}} = e^{-\frac{x}{2}}\Big(1 - \frac{x}{2}\Big)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Sendo $e^{-\frac{x}{2}} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $1 - \frac{x}{2} > 0$ para todo $x \in (-\infty, 2)$ e $1 - \frac{x}{2} < 0$ para todo $x \in (2, +\infty)$, segue que f é crescente em $(-\infty, 2)$ e decrescente em $(2, +\infty)$.

Claramente, f' é derivável e

$$f''(x) = e^{-\frac{x}{2}}\big(-\tfrac{1}{2}\big) - \tfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\big(1 - \tfrac{x}{2}\big) = e^{-\frac{x}{2}}\big(\tfrac{x}{4} - 1\big)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $\frac{x}{4} - 1 > 0$ para todo $x \in (4, +\infty)$, $\frac{x}{4} - 1 < 0$ para todo $x \in (-\infty, 4)$ e $e^{-\frac{x}{2}} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, segue que $f''(x) > 0$ em $(4, +\infty)$ e $f''(x) < 0$ em $(-\infty, 4)$, ou seja, o gráfico de f tem concavidade para cima no intervalo $(4, +\infty)$ e concavidade para baixo no intervalo $(-\infty, 4)$.

Para obter os extremos de f, devemos determinar seus pontos críticos. Sendo f derivável em $\mathbb{R}$ e visto que $f'(x) = 0$ somente se $x = 2$, segue que este é o único ponto crítico de f. Como $f''(2) < 0$, segue do teste da derivada segunda que f possui um máximo relativo em $x = 2$. E, dado que f é crescente em $(-\infty, 2)$ e decrescente em $(2, +\infty)$, concluímos, na verdade, que f possui um máximo absoluto em $x = 2$.

Finalmente, o gráfico de f possui reta tangente no ponto $\big(4, \frac{4}{e^2}\big)$ e dado que f'' muda de sinal somente em $x = 4$, obtemos que o ponto $\big(4, \frac{4}{e^2}\big)$ é o único ponto de inflexão do gráfico de f.

Reunindo todas as informações obtidas, estamos, agora, aptos a esboçar o gráfico de f (ver a Figura 13.1).

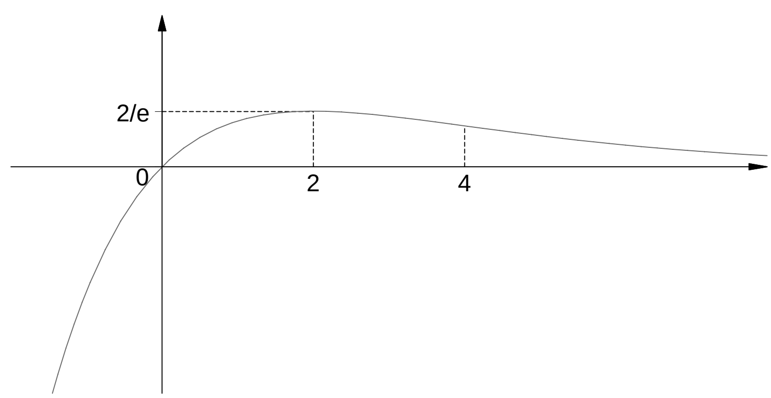


Figura 13.1

Exemplo 13.2

Considere a função $f(x) = x\log(x^2)$.

Claramente, vemos que o domínio de f é $\mathbb{R} - \{0\}$. Agora, como $h(x) = \log x$ é derivável em $(0, +\infty)$ e $g(x) = x^2$ é derivável em $\mathbb{R}$, segue que $(h \circ g)(x) = \log(x^2)$ é derivável em $\mathbb{R} - \{0\}$. Assim, f é derivável em $\mathbb{R} - \{0\}$, pois é um produto de funções deriváveis em $\mathbb{R} - \{0\}$, a saber, $u(x) = x$ e $(h \circ g)(x) = \log(x^2)$.

Vejamos as assíntotas verticais e horizontais. Como f é contínua em $\mathbb{R}-\{0\}$ (pois é derivável em $\mathbb{R}-\{0\}$), para todo $a \in \mathbb{R}-\{0\}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Assim, a reta $x = 0$ é a única candidata a assíntota vertical. Note que $f(x)$ tem a forma indeterminada $0.\infty$ em $x = 0$, pois $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} \log(x^2) = -\infty$. Escrevendo $f(x) = \frac{\log(x^2)}{\frac{1}{x}}$ e aplicando a regra de L'Hôpital, obtemos

$$\lim_{x\to 0} x\log(x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{\log(x^2)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x/x^2}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0}(-2x) = 0.$$

Concluímos, portanto, que não existem assíntotas verticais ao gráfico de f.

Vimos, na aula 7, que $\lim\limits_{x\to+\infty} \log x = +\infty$. Assim, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \log(x^2) = +\infty$, donde $\lim\limits_{x\to+\infty} x\log(x^2) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} x\log(x^2) = -\infty$, ou seja, não existem assíntotas horizontais ao gráfico de f.

Derivando f, obtemos

$$f'(x) = x\Big(\frac{2x}{x^2}\Big) + \log(x^2) = 2 + \log(x^2)$$

para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Como $\log(x^2) < -2$ se, e somente se, $x \in \big(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\big) - \{0\}$, segue que $f'(x) < 0$ em $\big(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\big) - \{0\}$ e $f'(x) > 0$ em $\big(-\infty, -\frac{1}{e}\big) \cup \big(\frac{1}{e}, +\infty\big)$. Assim, f é crescente em $\big(-\infty, -\frac{1}{e}\big) \cup \big(\frac{1}{e}, +\infty\big)$ e decrescente em $\big(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\big) - \{0\}$.

Sendo f' derivável em $\mathbb{R} - \{0\}$ e $f''(x) = \frac{2}{x}$, segue que $f''(x) < 0$ para $x \in (-\infty, 0)$ e $f''(x) > 0$ para $x \in (0, +\infty)$, ou seja, o gráfico de f tem concavidade para baixo em $(-\infty, 0)$ e concavidade para cima em $(0, +\infty)$.

Como $f'(x) = 0$ se, e somente se, $x = -\frac{1}{e}$ ou $x = \frac{1}{e}$, $f''\big(-\frac{1}{e}\big) < 0$ e $f''\big(\frac{1}{e}\big) > 0$, segue do teste da derivada segunda que f possui um máximo relativo em $x = -\frac{1}{e}$ e um mínimo relativo em $x = \frac{1}{e}$. Como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, concluímos que f não possui extremos absolutos.

Finalmente, dado que $f''(x) < 0$ se $x \in (-\infty, 0)$ e $f''(x) > 0$ se $x \in (0, +\infty)$, temos que o gráfico de f não possui ponto de inflexão (lembre que f não está definida em 0).

Reunindo todas as informações obtidas, podemos, agora, esboçar o gráfico de f (ver a Figura 13.2).

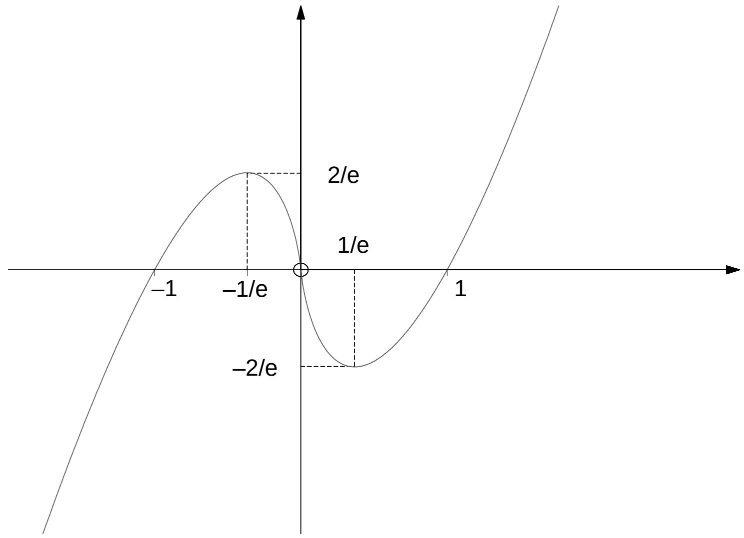


Figura 13.2

Exemplo 13.3

Considere a função $f(x) = \frac{1}{1-e^x}$.

O domínio de f é $\mathbb{R} - \{0\}$. A função f é derivável em $\mathbb{R} - \{0\}$, pois a função $g(x) = 1 - e^x$ é derivável em $\mathbb{R}$ (logo, em $\mathbb{R} - \{0\}$) e $g(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Vejamos as assíntotas verticais e horizontais. Como f é contínua em $\mathbb{R}-\{0\}$ (pois é derivável em $\mathbb{R}-\{0\}$), para todo $a \in \mathbb{R}-\{0\}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Assim, a reta $x = 0$ é a única candidata a assíntota vertical. Note que, como $e^x < 1$ se $x < 0$ e $e^x > 1$ se $x > 0$, então $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$. Assim, a reta $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f.

Agora, dado que $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$ e $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty$, segue que $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1$ e $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$, donde concluímos que as retas $y = 1$ e $y = 0$ são as assíntotas horizontais ao gráfico de f.

Derivando f, obtemos $f'(x) = \frac{e^x}{(1-e^x)^2}$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Assim, $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ e, portanto, f é crescente em $\mathbb{R} - \{0\}$.

A função f' é derivável em $\mathbb{R}-\{0\}$ e $f''(x) = \frac{e^x+e^{2x}}{(1-e^x)^3}$. Como $e^x+e^{2x} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o sinal de f'' fica determinado pelo sinal de $(1 - e^x)^3$. Assim, $f''(x) > 0$ se $x < 0$ e $f''(x) < 0$ se $x > 0$, ou seja, o gráfico de f tem concavidade para cima em $(-\infty, 0)$ e concavidade para baixo em $(0, +\infty)$.

Note que, como f é crescente em $\mathbb{R}-\{0\}$, então f não possui extremos. Analogamente, como $f''(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, o gráfico de f não possui pontos de inflexão.

Reunindo todas as informações obtidas, temos que o gráfico de f é como na Figura 13.3.

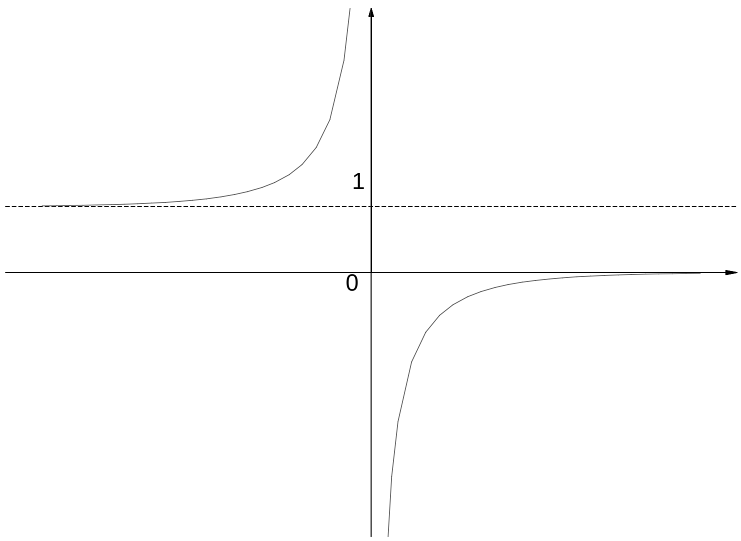


Figura 13.3

Exemplo 13.4

Considere a função $f(x) = \frac{x^2}{\log x}$.

O domínio de f é $(0,1) \cup (1,+\infty)$. Como f é um quociente de funções deriváveis em $(0,1) \cup (1,+\infty)$, f é derivável em $(0,1) \cup (1,+\infty)$.

Vejamos as assíntotas verticais e horizontais. Como f é contínua em $(0,1)\cup(1,+\infty)$ (pois é derivável em $(0,1)\cup(1,+\infty)$), segue que as retas $x=0$ e $x=1$ são as únicas candidatas a assíntotas verticais ao gráfico de f. A reta $x=0$ não é uma assíntota vertical, pois $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2}{\log x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\log x}.x^2 = 0.0 = 0$. Como $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2}{\log x} = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2}{\log x} = +\infty$, segue que a reta $x=1$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f.

Note, também, que f tem a forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$ (em $+\infty$). Aplicando a regra de L'Hôpital, obtemos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\log x} = \lim_{x \to +\infty} 2x^2 = +\infty.$$

Assim, não existem assíntotas horizontais ao gráfico de f.

Derivando f, obtemos $f'(x) = \frac{x((2\log x)-1)}{(\log x)^2}$ para todo $x \in (0,1)\cup(1,+\infty)$. Como $\log x < \frac{1}{2}$ para $x \in (0,1) \cup \left(1, e^{\frac{1}{2}}\right)$ e $\log x > \frac{1}{2}$ para $x \in \left(e^{\frac{1}{2}}, +\infty\right)$, segue que $f'(x) < 0$ para $x \in (0,1) \cup \left(1, e^{\frac{1}{2}}\right)$ e $f'(x) > 0$ para $x \in \left(e^{\frac{1}{2}}, +\infty\right)$, ou seja, f é decrescente em $(0,1) \cup \left(1, e^{\frac{1}{2}}\right)$ e crescente em $\left(e^{\frac{1}{2}}, +\infty\right)$.

Note que f' é derivável em $(0,1)\cup(1,+\infty)$ e $f''(x) = \frac{2(\log x)^2 - 3\log x + 2}{(\log x)^3}$ para todo $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$. Para determinar o sinal de f'', devemos estudar os sinais do numerador e do denominador de f''. Como $(\log x)^3 < 0$ para $x \in (0,1)$ e $(\log x)^3 > 0$ para $x \in (1,+\infty)$, resta estudar o sinal do numerador $2(\log x)^2 - 3\log x + 2$. Mas você pode observar que $2y^2 - 3y + 2 > 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$ (justifique esta afirmação). Portanto, $2(\log x)^2 - 3\log x + 2 > 0$ para todo $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$. Vemos, assim, que $f''(x) < 0$ se $x \in (0,1)$ e $f''(x) > 0$ se $x \in (1,+\infty)$, ou seja, o gráfico de f tem concavidade para baixo em $(0,1)$ e concavidade para cima em $(1,+\infty)$.

Agora, sendo f derivável no seu domínio $(0,1)\cup(1,+\infty)$ e $f'(x) = 0$ se, e somente se, $x = e^{\frac{1}{2}}$, o único ponto crítico de f é $x = e^{\frac{1}{2}}$. Além disso, visto que $e^{\frac{1}{2}} > 1$, segue que $f''(e^{\frac{1}{2}}) > 0$, ou seja, f possui um mínimo relativo em $x = e^{\frac{1}{2}}$ (note que isto também segue do fato, visto acima, de f ser decrescente em $(1, e^{\frac{1}{2}})$ e crescente em $(e^{\frac{1}{2}}, +\infty)$). E, como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, f não possui extremos absolutos.

Finalmente, como $f''(x) < 0$ se $x \in (0,1)$ e $f''(x) > 0$ se $x \in (1,+\infty)$, segue que seu gráfico não possui pontos de inflexão (lembre que f não está definida em 1).

Agora, podemos esboçar o gráfico de f, como indicado na Figura 13.4.

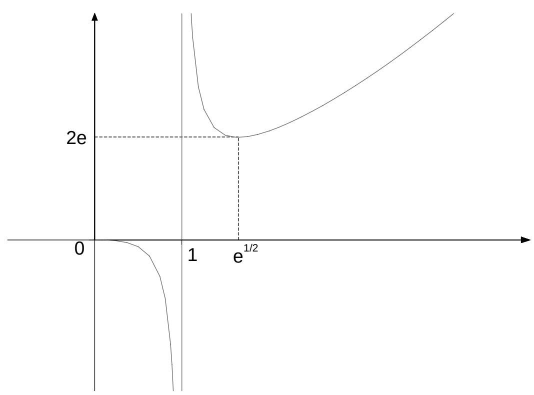


Figura 13.4

Resumo

Nesta aula, aplicamos todo o ferramental estudado no módulo 2 de Cálculo I para esboçar gráficos de funções envolvendo as funções logarítmica e exponencial.

Exercícios

Para cada uma das funções abaixo, estude:

(i) o domínio e a derivabilidade de f,

(ii) as assíntotas verticais e horizontais ao gráfico f,

(iii) o crescimento e o decrescimento de f,

(iv) a concavidade do gráfico de f,

(v) os extremos relativos e absolutos de f e

(vi) os pontos de inflexão do gráfico de f.

Finalmente, esboce o gráfico de f.

a) $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ b) $f(x) = 2x\log x$ c) $f(x) = x^2 e^x$

d) $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - \log(x^2))$.

Auto-avaliação

Os exercícios propostos envolvem todo o conteúdo do módulo 2 de Cálculo I, mais as aulas 7 a 12 . Se tiver dúvida em alguns dos conceitos envolvidos ou técnicas utilizadas na solução dos mesmos, releia com atenção a aula correspondente. Caso persista alguma dúvida, procure o tutor no seu pólo.

Aula 14 – Exercícios resolvidos.

Referências: Aulas 1 a 12.

Objetivo

Fixar o conteúdo do módulo 1 de Cálculo II.

Exercício 1: Defina $H(x) = \int_{x^3}^{x-x^2} \sqrt{t^3+1}\, dt$ para $x \in [-1, +\infty)$. Mostre que H é derivável em $[-1, +\infty)$ e determine $H'(x)$ para $x \in [-1, +\infty)$.

Solução: Defina $F_1(x) = \int_{x^3}^{0} \sqrt{t^3+1}\, dt$ e $F_2(x) = \int_{0}^{x-x^2} \sqrt{t^3+1}\, dt$ para $x \in [-1, +\infty)$. Note que $H(x) = F_1(x) + F_2(x)$ para todo $x \in [-1, +\infty)$.

Mostremos que F_1 e F_2 são deriváveis em $[-1, +\infty)$. Com efeito, defina $g(x) = x^3$ e $G_1(x) = \int_{x}^{0} \sqrt{t^3+1}\, dt$. Então $F_1 = G_1 \circ g$, pois

$$(G_1 \circ g)(x) = G_1(g(x)) = G_1(x^3) = \int_{x^3}^{0} \sqrt{t^3+1}\, dt = F_1(x)$$

para todo $x \in [-1, +\infty)$.

Analogamente, defina $p(x) = x - x^2$ e $G_2(x) = \int_{0}^{x} \sqrt{t^3+1}\, dt$. Então $F_2 = G_2 \circ p$, pois

$$(G_2 \circ p)(x) = G_2(p(x)) = G_1(x - x^2) = \int_{0}^{x-x^2} \sqrt{t^3+1}\, dt = F_2(x)$$

para todo $x \in [-1, +\infty)$.

Como $\sqrt{t^3+1}$ é contínua em $[-1, +\infty)$, segue do Exemplo 3.2 que G_1 e G_2 são deriváveis em $[-1, +\infty)$, ${G_1}'(x) = -\sqrt{x^3+1}$ e ${G_2}'(x) = \sqrt{x^3+1}$ para todo $x \in [-1, +\infty)$. Sendo g e p deriváveis em $\mathbb{R}$, segue da regra da cadeia que F_1 e F_2 são deriváveis em $[-1, +\infty)$,

$$\begin{aligned}
{F_1}'(x) &= (G_1 \circ g)'(x) = {G_1}'(g(x)).g'(x) = \\
&= {G_1}'(g(x)).g'(x) = \\
&= 3x^2 {G_1}'(x^3) = \\
&= -3x^2\sqrt{(x^3)^3+1} = -3x^2\sqrt{x^9+1}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F_2'(x) &= (G_2 \circ p)'(x) = G_2'(p(x)).p'(x) = \\ &= (1-2x)G_2'(x-x^2) = \\ &= (1-2x)\sqrt{(x-x^2)^3+1} \end{aligned}$$

para todo $x \in [-1, +\infty)$. Assim, $H'(x) = F_1'(x) + F_2'(x) = -3x^2\sqrt{x^9+1} + (1-2x)\sqrt{(x-x^2)^3+1}$ para todo $x \in [-1, +\infty)$.

Exercício 2: Determine $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3(6x^4-5)^{1000}\,dx$.

Solução: Vamos usar o que vimos no Exemplo 4.8. Escrevendo $p(x) = 6x^4-5$, temos que $p'(x) = 24x^3$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} x^3(6x^4-5)^{1000}\,dx &= \int_{-1}^{1} \frac{p'(x)}{24}(p(x))^{1000}\,dx = \\ &= \frac{1}{24}\left(\frac{(p(1))^{1001}}{1001} - \frac{(p(-1))^{1001}}{1001}\right) = \\ &= \frac{1}{24}\left(\frac{1}{1001} - \frac{1}{1001}\right) = 0. \end{aligned}$$

Exercício 3: Sejam p um polinômio arbitrário e a, b números reais tais que $a < b$ e $p(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Determine $\displaystyle\int_a^b p'(x)\sqrt[n]{p(x)}\,dx$, onde n é um inteiro maior ou igual a 2 (observe que a condição "$p(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$"só precisa ser imposta no caso em que n é par).

Solução: A função $f(x) = p'(x)\sqrt[n]{p(x)}$ é contínua em $[a,b]$. Além disso, sendo $G(x) = \frac{n}{n+1}(p(x))^{\frac{n+1}{n}}$, G é derivável em $[a,b]$ e

$$G'(x) = \frac{n}{n+1}.\frac{n+1}{n}.p'(x).(p(x))^{\frac{n+1}{n}-1} = p'(x)p(x)^{\frac{1}{n}} = f(x)$$

para todo $x \in [a,b]$. Portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_a^b p'(x)\sqrt[n]{p(x)}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) = \frac{n}{n+1}((p(b))^{\frac{n+1}{n}} - (p(a))^{\frac{n+1}{n}}).$$

Exercício 4: Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1}(2x+3)\sqrt[3]{3x^2+9x+6}\ dx$.

Solução: Se tomarmos $p(x) = 3x^2+9x+6$, temos que $p'(x) = 6x+9$. Assim, $\displaystyle\int_{-1}^{1}(2x+3)\sqrt[3]{3x^2+9x+6}\ dx = \int_{-1}^{1}\frac{p'(x)}{3}\sqrt[3]{p(x)}\ dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}p'(x)\sqrt[3]{p(x)}\ dx$.
Pelo exercício anterior, segue que

$$\int_{-1}^{1}(2x+3)\sqrt[3]{3x^2+9x+6}\ dx = \frac{1}{3}.\frac{3}{4}((p(1))^{\frac{4}{3}} - (p(-1))^{\frac{4}{3}}) = \frac{1}{4}(18)^{\frac{4}{3}}.$$

Exercício 5: Calcule $\displaystyle\int_{0}^{1}\left(\int_{2}^{4}t^3\cos x\ dt\right)dx$.

Solução: Na integral definida $\displaystyle\int_{2}^{4}t^3\cos x\ dt$, a variável de integração é t. Assim, como $\cos x$ não depende de t, segue que

$$\int_{2}^{4}t^3\cos x\ dt = (\cos x)\int_{2}^{4}t^3\ dt.$$

Note que $G(t) = \frac{t^4}{4}$ é tal que $G'(t) = t^3$. Portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\begin{aligned}\int_{2}^{4}t^3\cos x\ dt &= (\cos x)\int_{2}^{4}t^3\ dt = \\ &= (\cos x)\left(\frac{4^4}{4} - \frac{2^4}{4}\right) = (\cos x)(4^3 - 2^2) = 60\cos x.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1}\left(\int_{2}^{4}t^3\cos x\ dt\right)dx &= \int_{0}^{1}60\cos x\ dx = \\ &= 60(\text{sen}1 - \text{sen}0) = 60\text{sen}1.\end{aligned}$$

Exercício 6: Seja $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t}\, dt$ para todo $x > 0$. Mostre que F é uma função constante.

Solução: Para todo $x \in (0, +\infty)$, temos

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^{2x} \frac{1}{t}\, dt = \int_x^{1} \frac{1}{t}\, dt + \int_1^{2x} \frac{1}{t}\, dt = \\ &= \log\,(2x) - \log\, x = \\ &= \log\, 2 + \log\, x - \log\, x = \log\, 2. \end{aligned}$$

Portanto, F é uma função constante.

Exercício 7 (Exercícios 1(h) e 1(l), da aula 5): Esboce a região e ache a área da região compreendida entre:

(a) os gráficos de $f(x) = x^2 - x - 2$ e $g(x) = x + 6$;

(b) os gráficos de $f(x) = cos\ x$ e as retas $x = 0$, $x = \pi$ e $y = 0$.

Solução: (a): Note que $f(x) = g(x)$ se, e somente se, $x = -2$ ou $x = 4$, e que $f(x) \le g(x)$ para todo $x \in [-2, 4]$. Assim, a região em questão é como indicado na Figura 14.1.

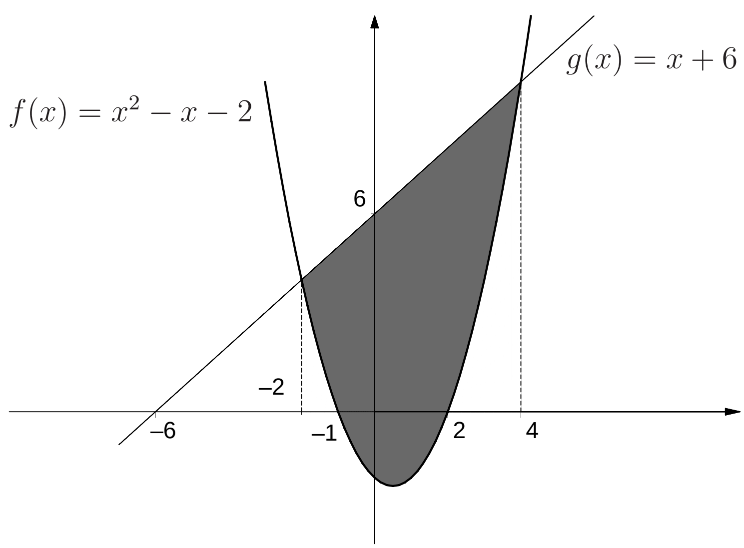


Figura 14.1

A área da região é, portanto,

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{4}(g(x)-f(x))\,dx &= \int_{-2}^{4}(-x^2+2x+8)\,dx = \\ &= \int_{-2}^{4}-x^2\,dx+\int_{-2}^{4}2x\,dx+\int_{-2}^{4}8\,dx = \\ &= \left(-\frac{4^3}{3}+\frac{(-2)^3}{3}\right)+2\left(\frac{4^2}{2}-\frac{(-2)^2}{2}\right)+8(4-(-2)) = \\ &= \frac{108}{3}.\end{aligned}$$

(b): A região em questão é como indicado na Figura 14.2.

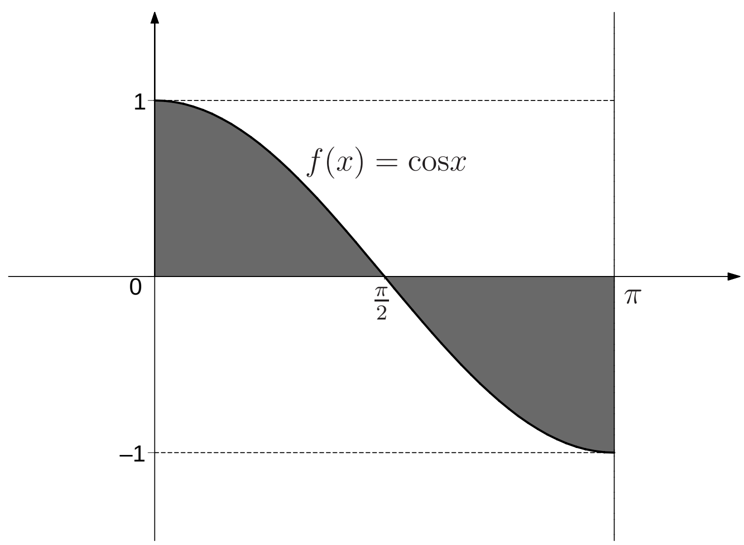


Figura 14.2

Vê-se, facilmente, que a área da região é duas vezes a área da região compreendida entre o gráfico de $f(x) = \cos x$, para $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, e a reta $x = 0$, ou seja,

$$2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx = 2\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}-\operatorname{sen}0\right) = 2.$$

Exercício 8: Mostre, usando o teorema do valor médio para integrais, que

$$\frac{3}{31} \le \int_{0}^{3}\frac{1}{x^3+4}\,dx \le \frac{3}{4}.$$

Solução: A função $f(x) = \frac{1}{x^3+4}$ é contínua em $[0,3]$. Pelo teorema do valor médio para integrais, existe $u \in [0,3]$ tal que

$$\int_0^3 \frac{1}{x^3+4}dx = f(u)(3-0) = 3f(u).$$

Por outro lado, como $4 \leq x^3+4 \leq 31$ para todo $x \in [0,3]$, então $\frac{1}{31} \leq \frac{1}{x^3+4} \leq \frac{1}{4}$ para todo $x \in [0,3]$. Portanto, $\frac{3}{31} \leq 3f(u) = \frac{3}{u^3+4} \leq \frac{3}{4}$, isto é,

$$\frac{3}{31} \leq \int_0^3 \frac{1}{x^3+4}\, dx \leq \frac{3}{4},$$

como queríamos demonstrar.

Exercício 9: Vamos usar as propriedades da função logarítmica e sua derivada para determinar $f^{'}(x)$, onde $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+1}}{(x+2)\sqrt{x+3}}$ para $x \in [0,+\infty)$.

Solução: Como $f(x) > 0$ para todo $x \in [0,+\infty)$, temos que $g(x) = \log f(x)$ está bem definida em $[0,+\infty)$. Aplicando as propriedades da função logarítmica, obtemos

$$g(x) = \frac{1}{3}\log(x+1) - \log(x+2) - \frac{1}{2}\log(x+3).$$

Sendo f e *log* deriváveis em $(0,+\infty)$, segue da regra da cadeia que g é derivável em $[0,+\infty)$ e

$$g^{'}(x) = \frac{1}{f(x)}.f^{'}(x) = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2(x+3)}$$

para todo $x \in [0,+\infty)$.

Multiplicando ambos os lados da igualdade por $f(x)$, obtemos

$$f^{'}(x) =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{x+1}}{(x+2)\sqrt{x+3}}.\frac{2(x+2)(x+3) - 6(x+1)(x+3) - 3(x+1)(x+2)}{(6(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

Finalmente, desenvolvendo o numerador e simplificando a expressão, obtemos

$$f^{'}(x) = \frac{-7x^2 - 23x - 12}{6(x+1)^{\frac{2}{3}}(x+2)^2(x+3)^{\frac{3}{2}}}$$

para todo $x \in [0,+\infty)$.

Exercício 10: Calcule $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+2x+3}{x^3+3x^2+9x+1}\, dx.$

Solução: A função $f(x) = x^3 + 3x^2 + 9x + 1$ é tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in [0,1]$. Assim, $G(x) = \log f(x)$ está bem definida para todo $x \in [0,1]$. Pela regra da cadeia, G é derivável em $[0,1]$ e $G'(x) = \frac{1}{f(x)}.f'(x)$ para todo $x \in [0,1]$, ou seja,

$$G'(x) = \frac{3x^2 + 6x + 9}{x^3 + 3x^2 + 9x + 1} = \frac{3(x^2 + 2x + 3)}{x^3 + 3x^2 + 9x + 1}.$$

para todo $x \in [0,1]$.

Como $\int_0^1 \frac{x^2+2x+3}{x^3+3x^2+9x+1}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{3(x^2+2x+3)}{x^3+3x^2+9x+1}\,dx$, segue do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$\int_0^1 \frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 + 3x^2 + 9x + 1}dx = \frac{1}{3}(G(1) - G(0)) = \frac{1}{3}(\log 14 - \log 1) = \frac{\log 14}{3}.$$

Resumo

Esses exercícios avaliam todo o conteúdo visto neste módulo. A partir dessas resoluções você pode, inclusive, tirar dúvidas de exercícios de aulas anteriores nos quais tenha tido dúvida. Nesse caso, retorne à(s) aula(s) em questão e refaça-os. Se persistir a dúvida, procure o tutor no pólo.

Aula 15 – Exercícios resolvidos.

Referências: Módulos 1, 2 de Cálculo I e o Módulo 1 de Cálculo II.

Objetivo

Fixar os principais conceitos e resultados estudados durante o curso.

Exercício 1 (Exercício 5, da aula 4 de Cálculo I): Mostre que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^3 x}{2x\text{sen } x \cos x} = \dfrac{3}{4}$.

(a) Usando o limite fundamental $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x} = 1$.

(b) Usando a regra de L'Hôpital.

Solução: (a): Para $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1-\cos^3 x}{2x\text{sen}x\,\cos x} &= \frac{1-\cos^2 x}{2x\text{sen}x\,\cos x} + \frac{\cos^2 x}{2x\text{sen}x\,\cos x} - \frac{\cos^3 x}{2x\text{sen}x\,\cos x} = \\
&= \frac{\text{sen}^2 x}{2x\text{sen}x\,\cos x} + \frac{\cos x}{2x\text{sen}x} - \frac{\cos^2 x}{2x\text{sen}x} = \\
&= \frac{\text{sen}x}{2x}\frac{1}{\cos x} + \cos x\left(\frac{1-\cos x}{2x\text{sen}x}\right) = \\
&= \frac{\text{sen}x}{2x}\frac{1}{\cos x} + \frac{\cos x}{1+\cos x}\left(\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{2x\text{sen}x}\right) = \\
&= \frac{\text{sen}x}{2x}\frac{1}{\cos x} + \frac{\cos x}{1+\cos x}\left(\frac{\text{sen}^2 x}{2x\text{sen}x}\right) = \\
&= \frac{\text{sen}x}{2x}\frac{1}{\cos x} + \frac{\cos x}{1+\cos x}\frac{\text{sen } x}{2x}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{2x\text{sen}x\,\cos x} &= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}x}{2x}\right)\left(\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}\right) + \left(\frac{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}{1+\lim\limits_{x\to 0}\cos x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}x}{2x}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

(b): Lembrando que $\text{sen}(2x) = 2\text{sen}x\,\cos x$, temos

$$\frac{1-\cos^3 x}{2x\text{sen}x\,\cos x} = \frac{1-\cos^3 x}{x\text{sen}(2x)}.$$

Como $\lim\limits_{x\to 0}(1 - \cos^3 x) = \lim\limits_{x\to 0}(x\text{sen}(2x)) = 0$, segue da regra de L'Hôpital que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{2x\text{sen}x\ \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{3\cos^2 x\ \text{sen}x}{\text{sen}(2x) + 2x\cos(2x)},$$

caso o limite da direita exista. Mas, como

$$\lim_{x\to 0} 3\cos^2 x\ \text{sen}x = \lim_{x\to 0}(\text{sen}(2x) + 2x\cos(2x)) = 0,$$

segue da regra de L'Hôpital que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{3\cos^2 x\ \text{sen}x}{\text{sen}(2x) + 2x\cos(2x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{3(-2\cos x\ \text{sen}^2 x + \cos^3 x)}{2\cos(2x) + 2\cos(2x) - 4x\text{sen}(2x)} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{3(-2\cos x\ \text{sen}^2 x + \cos^3 x)}{4\cos(2x) - 4x\text{sen}(2x)}\end{aligned}$$

caso o limite da direita exista. Finalmente, como

$$\lim_{x\to 0} \frac{3(-2\cos x\ \text{sen}^2 x + \cos^3 x)}{4\cos(2x) - 4x\text{sen}(2x)} = \frac{3}{4},$$

concluímos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{2x\text{sen}x\ \cos x} = \frac{3}{4}.$$

Exercício 2: Use o teorema do valor intermediário para mostrar que o polinômio $p(x) = x^4 + 7x^3 - 9$ tem pelo menos duas raízes reais.

Solução: Como $p(0) = -9 < 0$ e $p(2) = 63 > 0$, segue do teorema do valor intermediário que existe $\alpha \in (0,2)$ tal que $p(\alpha) = 0$. Logo, $p(x) = q(x)(x - \alpha)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde q é um polinômio de grau 3. Pelo Exercício 3, da aula 8 de Cálculo I, q possui pelo menos uma raiz real β. Escrevendo $q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, temos $x^4 + 7x^3 - 9 = (ax^3 + bx^2 + cx + d)(x - \alpha)$, e daí resulta que $a = 1$, $b = 7 + \alpha$, $c = \frac{9}{\alpha^2}$ e $d = \frac{9}{\alpha}$. Portanto, $q(x) = x^3 + (7+\alpha)x^2 + \frac{9}{\alpha^2}x + \frac{9}{\alpha}$; em particular, $q(\alpha) > 0$. Conseqüentemente, $\beta \neq \alpha$, sendo $p(\beta) = q(\beta)(\beta - \alpha) = 0$. Assim, acabamos de mostrar que p tem pelo menos duas raízes reais, a saber, α e β.

Exercício 3: Seja $D = \left\{\frac{\log(x^5+1)}{x^4+1}; x \in [1,2]\right\}$. Use o teorema de Weierstrass para mostrar que existem $z, w \in D$ tais que $z \leq t \leq w$ para todo $t \in D$.

Solução: Consideremos a função $f(x) = \frac{\log(x^5+1)}{x^4+1}$, que é contínua em $[1,2]$ (justifique esta afirmação). Pelo teorema de Weierstrass, existem $x_1, x_2 \in [1,2]$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in [1,2]$. Então, tomando $z = f(x_1) \in D$ e $w = f(x_2) \in D$, tem-se que $z \leq t \leq w$ para todo $t \in D$ (já que todo $t \in D$ é da forma $t = f(x)$ para algum $x \in [1,2]$).

Exercício 4: Seja $f(x) = |x|^3$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é duas vezes derivável em $\mathbb{R}$ e três vezes derivável em $\mathbb{R} - \{0\}$. Mostre que f'' é contínua em 0, mas que f não é três vezes derivável em 0.

Solução: Como $f(x) = -x^3$ para todo $x \in (-\infty, 0)$ e $f(x) = x^3$ para todo $x \in (0, +\infty)$, segue que $f'(x) = -3x^2$ para todo $x \in (-\infty, 0)$ e $f'(x) = 3x^2$ para todo $x \in (0, +\infty)$. Por outro lado,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x^3}{x} = \lim_{x\to 0^-} (-x^2) = 0$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{x} = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0.$$

Logo, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$, provando que f é derivável em 0 e $f'(0) = 0$.

Em resumo, temos $f'(x) = -3x^2$ para todo $x \in (-\infty, 0)$, $f'(0) = 0$ e $f'(x) = 3x^2$ para todo $x \in (0, +\infty)$. Portanto, $f''(x) = 6x$ para todo $x \in (-\infty, 0)$ e $f''(x) = 6x$ para todo $x \in (0, +\infty)$. Por outro lado,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-3x^2}{x} = \lim_{x\to 0^-} (-3x) = 0$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} 3x = 0.$$

Logo, $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 0$, provando que f' é derivável em 0 e $f''(0) = 0$.

Acabamos de mostrar que f é duas vezes derivável em $\mathbb{R}$, sendo $f''(x) = -6x$ para todo $x \in (-\infty, 0)$, $f''(0) = 0$ e $f''(x) = 6x$ para todo $x \in (0, +\infty)$. Portanto, $f'''(x) = -6$ para todo $x \in (-\infty, 0)$ e $f'''(x) = 6$ para todo $x \in (0, +\infty)$, mostrando que f é três vezes derivável em $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Finalmente, como

$$\lim_{x\to 0^-} f''(x) = \lim_{x\to 0^-} (-6x) = 0$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} f''(x) = \lim_{x\to 0^+} 6x = 0,$$

segue que $\lim_{x\to 0} f''(x) = 0 = f''(0)$, mostrando que f'' é contínua em 0. Por outro lado,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f''(x) - f''(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-6x}{x} = -6$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f''(x) - f''(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{6x}{x} = 6,$$

mostrando que $\lim_{x\to 0} \dfrac{f''(x) - f''(0)}{x - 0}$ não existe. Assim, f não é três vezes derivável em 0.

Exercício 5: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que f é uma função constante.

Solução: Fixemos $x \in \mathbb{R}$. Então, para todo $t \in \mathbb{R}$, $t \neq x$, temos

$$\left| \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \right| = \frac{|f(t) - f(x)|}{|t - x|} \leq |t - x|,$$

pois $|t - x|^2 = (t - x)^2$. Como $\lim_{t\to x} |t - x| = |x - x| = 0$, concluímos que

$$\lim_{t\to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = 0.$$

Isto prova que f é derivável em x e $f'(x) = 0$. Como x é arbitrário, segue que f é derivável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Conseqüentemente, f é uma função constante.

Exercício 6: Mostre, usando o teorema do valor médio, que $\frac{1}{9} < \sqrt{66} - 8 < \frac{1}{8}$.

Solução: Consideremos a função $f(x) = \sqrt{x}$ restrita ao intervalo $[64, 66]$. Já sabemos que o teorema do valor médio é aplicável à função f. Pelo referido teorema, existe $c \in (64, 66)$ tal que $f(66) - f(64) = f'(c)(66 - 64) = 2f'(c)$, isto é,

$$\sqrt{66} - 8 = 2\frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

Mas, como $64 < c < 66 < 81$, então

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{\sqrt{81}} < \frac{1}{\sqrt{c}} < \frac{1}{\sqrt{64}} = \frac{1}{8}.$$

Portanto, $\frac{1}{9} < \sqrt{66} - 8 < \frac{1}{8}$, como queríamos demonstrar.

Exercício 7: Seja $f(x) = e^{x^3 + x}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que f é crescente e $Imf = \{f(x); x \in \mathbb{R}\} = (0, +\infty)$.

(b) Use o teorema da função inversa para mostrar que a inversa f^{-1} de f é derivável em $(0,+\infty)$ e $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{(3x^2+1)e^{x^3+x}}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Forneça $(f^{-1})'(1)$.

Solução: (a): Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, com $x < y$, temos $x^3 + x < y^3 + y$. Logo, como a função exponencial é crescente, $f(x) = e^{x^3+x} < e^{y^3+y} = f(y)$. Isto mostra que f é crescente. Como $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+x) = +\infty$, $\lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0$ e $\lim\limits_{t\to+\infty} e^t = +\infty$, segue que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Como f é contínua em $\mathbb{R}$ e $Imf \subset (0,+\infty)$, o teorema do valor intermediário garante que $Imf = (0,+\infty)$.

(b): Pela regra da cadeia, f é derivável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = (3x^2+1)e^{x^3+x}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (o que também mostra que f é crescente). Pelo teorema da função inversa, f^{-1} é derivável em $(0,+\infty)$ e

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{(3x^2+1)e^{x^3+x}}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, como $f(0) = 1$, temos que

$$(f^{-1})'(1) = (f^{-1})'(f(0)) = \frac{1}{(3\times 0^2+1)e^{0^3+0}} = 1.$$

Exercício 8: Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, e $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ duas funções deriváveis em $[a,b]$ tais que as funções f' e g' são contínuas em $[a,b]$. Mostre, usando o Teorema Fundamental do Cálculo, que

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Solução: Definamos $h(x) = f(x)g(x)$ para todo $x \in [a,b]$. A função h é derivável em $[a,b]$ e

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

para todo $x \in [a,b]$. Além disso, a função $x \in [a,b] \mapsto f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \in \mathbb{R}$ é contínua em $[a,b]$. Portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx = h(b) - h(a) = f(b)g(b) - f(a)g(a),$$

isto é,

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Exercício 9: Use o Exercício 8 para mostrar que, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, com $0 < a < b$, tem-se

$$\int_a^b \log x \, dx = b(\log b - 1) - a(\log a - 1).$$

Solução: Definamos $f(x) = x$ e $g(x) = \log x$ para todo $x \in [a, b]$. Como $f^{'}(x) = 1$ e $g^{'}(x) = \frac{1}{x}$ para todo $x \in [a, b]$, segue que $f^{'}$ e $g^{'}$ são contínuas em $[a, b]$. Podemos, então, aplicar o Exercício 8 para concluir que

$$\int_a^b \log x \, dx + \int_a^b dx = b \log b - a \log a,$$

isto é,

$$\int_a^b \log x \, dx = b \log b - a \log a - b + a = b(\log b - 1) - a(\log a - 1).$$

Resumo

Concluímos nosso curso procurando, mais uma vez, realçar a importância dos conceitos e resultados fundamentais que tivemos a oportunidade de estudar.

ISBN 85-7648-045-X
9 788576 480457

UENF
Universidade Estadual
do Norte Fluminense

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
UERJ

Universidade Federal Fluminense
uff

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

UNIRIO

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

GOVERNO DO
Rio de Janeiro
SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB
UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL

Ministério
da Educação

BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL