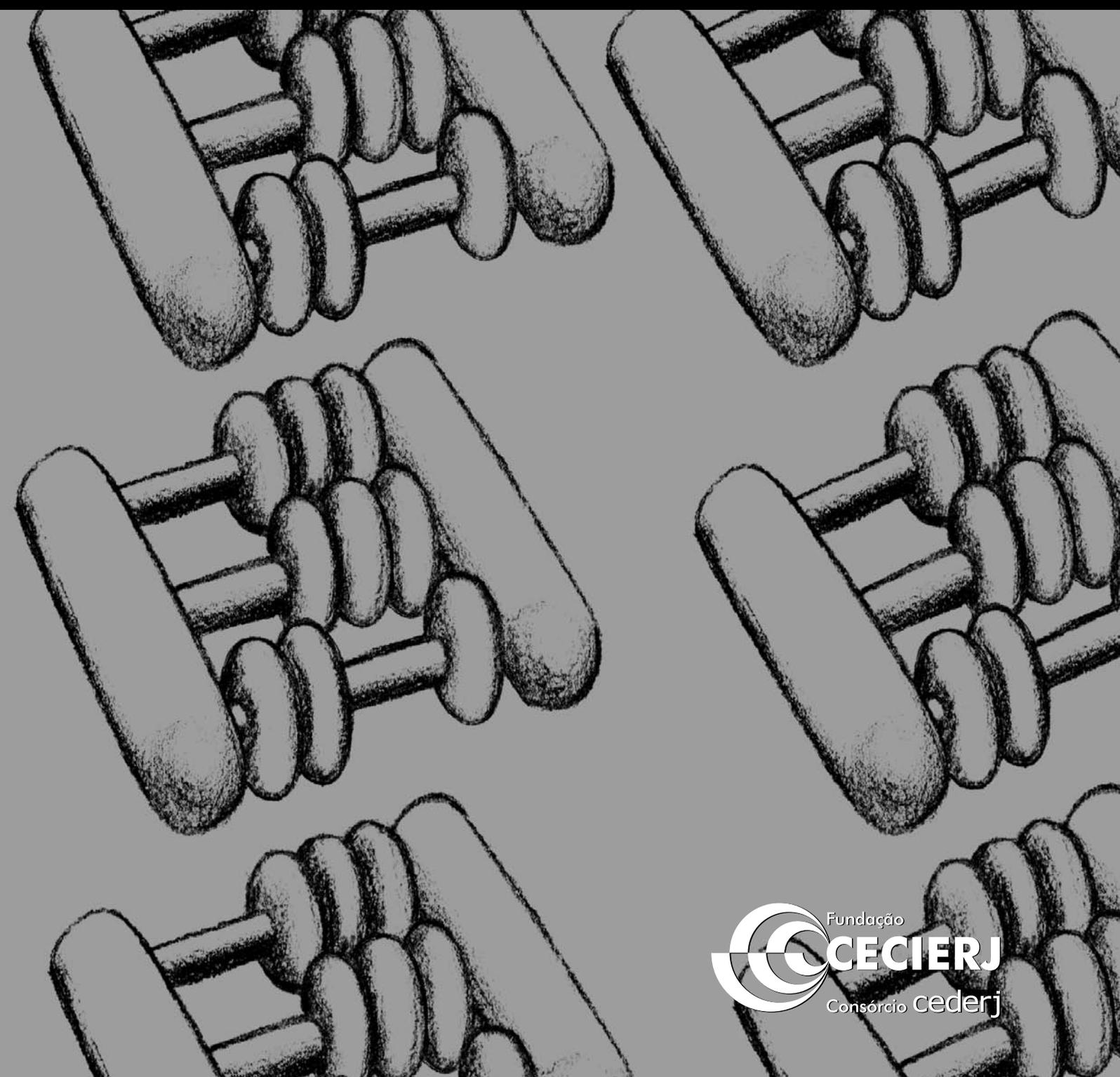


Módulos 1 e 2

Celso Costa

Volume | 1
5ª edição

Pré-Cálculo





Fundação

CECIERJ

Consórcio **cederj**

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Pré-Cálculo

Volume 1 - Módulos 1 e 2
5ª edição

Celso Costa



**GOVERNO DO
Rio de Janeiro**

**SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA**

Ministério
da Educação



Apoio:



FAPERJ

Fundação Carlos Chagas Filho de Ampar
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001
Tel.: (21) 2334-1569 Fax: (21) 2568-0725

Presidente

Masako Oya Masuda

Vice-presidente

Mirian Crapez

Coordenação do Curso de Matemática

UFF - Regina Moreth

UNIRIO - Luiz Pedro San Gil Jutuca

Material Didático

ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO

Celso Costa

Departamento de Produção

EDITORA

Tereza Queiroz

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO

Jorge Moura

PROGRAMAÇÃO VISUAL

Aline Madeira Brondani

Marcelo Freitas

ILUSTRAÇÃO

Aline Madeira Brondani

André Amaral

André Dahmer

CAPA

Eduardo Bordoni

Fabio Muniz

PRODUÇÃO GRÁFICA

Oséias Ferraz

Patricia Seabra

Copyright © 2005, Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da Fundação.

C837c

Costa, Celso.

Pré-cálculo. v. 1 / Celso Costa. – 5. ed. – Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

236p.; 21 x 29,7 cm.

ISBN: 85-7648-361-0

1. Matemática básica. 2. Sistemas de coordenadas.
3. Equação da reta. 4. Plano euclidiano. I. Título.

CDD: 510

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador
Sérgio Cabral Filho

Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia
Alexandre Cardoso

Universidades Consorciadas

**UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO
NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO**
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

**UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO
RIO DE JANEIRO**
Reitor: Ricardo Vieiralves

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Reitor: Roberto de Souza Salles

**UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO
RIO DE JANEIRO**
Reitor: Aloísio Teixeira

**UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL
DO RIO DE JANEIRO**
Reitor: Ricardo Motta Miranda

**UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO
DO RIO DE JANEIRO**
Reitora: Malvina Tania Tuttman

SUMÁRIO

Módulo 1 – Apresentação	7
Aula 1 – Números naturais e inteiros	9
Aula 2 – Números racionais	25
Aula 3 – Números irracionais – enfoque geométrico	41
Aula 4 – Números reais – representação decimal	55
Aula 5 – Números reais: potências, radicais e expressões numéricas	71
Aula 6 – Números reais: relação de ordem, intervalos e inequações	85
Aula 7 – Módulo de um número real, distribuição de números na reta e inequações	105
Aula 8 – Sistemas de coordenadas em um plano	125
Aula 9 – Distância entre pontos do plano euclidiano	145
Aula 10 – Equação da reta e inclinação	153
Módulo 2 – Apresentação	173
Aula 11 – Equação da reta e inclinação – continuação	175
Aula 12 – Mudanças de coordenadas e equações quadráticas	187
Aula 13 – Equações quadráticas – continuação	201
Aula 14 – Inequações lineares quadráticas	211
Aula 15 – Coletânea de exercícios programados	219

Prezado aluno e aluna.

A você que inicia hoje o estudo da disciplina Pré-cálculo, trago as boas vindas e o desejo de que possamos juntos fazer uma feliz e produtiva caminhada.

Este é o primeiro módulo desta disciplina, que possui dois outros módulos, cada um deles contendo dez aulas e, como o próprio nome revela, uma introdução ao cálculo.

O Cálculo Diferencial e Integral é um dos principais pilares da proposta do conteúdo específico de nosso Curso de Licenciatura em Matemática. E para dar conta desta tarefa teremos ainda mais quatro outras disciplinas, cobrindo os conteúdos essenciais desta importante área da Matemática.

Creio que é útil pontuar este início com algumas reflexões sobre as idéias que orientam em geral a Matemática e em particular a proposta desta disciplina.

De um lado, Matemática é um jogo lúdico e, por excelência, a arte de resolver problemas, e este é o oxigênio que vitaliza, desde sempre, sua permanente evolução. No ato de aprender Matemática não existe receita para galgar o entendimento, a não ser no exercício das ferramentas. Como um paciente escultor, que, com seu formão, conquista da madeira bruta a bela obra de arte, resolver problemas em Matemática é a via prazerosa de firmar conceitos e descobrir recônditas belezas.

Num estudo introdutório ao cálculo, a visualização geométrica é especialmente importante. Em todo o desenvolvimento deste módulo é forte o apelo à visualização, seja através da representação dos números reais na reta, da expressão do plano através de coordenadas ou na visualização de retas, semi-retas, hiperplanos e alguns conjuntos especiais do espaço definidos através de equações e inequações. Creio que é uma direção adequada para colocar a visão intuitiva que temos do espaço a favor do entendimento dos conceitos fundamentais, que fazem parte desta etapa inicial.

Desejo a você uma feliz caminhada, e que seu esforço o recompense!

Celso Costa

Aula 1 – Números naturais e inteiros

Objetivos

- rever propriedades básicas dos números naturais e inteiros;
- compreender a representação dos números inteiros sobre uma reta;
- utilizar o algoritmo de Euclides na divisão entre números inteiros.

Números naturais

Vivemos e nos orientamos num mundo de números. Temos horários para ir e voltar do trabalho, nosso endereço tem um número de CEP, nossa identidade e CPF são números. Acrescente-se ainda os números de emergência: polícia, bombeiros, hospitais. Seria exaustivo lembrar tantos números. Os números acompanham a evolução do ser humano primitivo vindo das cavernas e hoje, com o uso dos computadores, são ferramentas fundamentais na revolução que presenciamos na organização de nossa sociedade.

Os números estão de tal modo presentes em nossas vidas, que os usamos automaticamente sem lembrar que são criações abstratas da mente humana.

A mais antiga idéia de número surge da necessidade de contar. No princípio da aventura humana, o antigo pastor ao comparar seu conjunto de ovelhas ao correspondente conjunto de pedrinhas, identificava uma característica comum aos conjuntos. Esta característica quantitativa evolui posteriormente para a idéia abstrata de número e a expressão desta idéia através de símbolos. Por exemplo, o número 5. Pare um pouco e pense na imensa abstração por trás deste símbolo.

O conjunto dos números naturais, representado pela letra \mathbb{N} , é o conjunto

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

Notamos que é indiferente incluímos ou não o número 0 (zero) no conjunto \mathbb{N} . Historicamente, a idéia abstrata de um número zero surge mais tarde, associado à ausência de objetos para contar.

É importante que você pare um pouco e reflita sobre o significado dos três pontinhos que aparecem na definição do conjunto dos números naturais \mathbb{N} . Os pontinhos expressam que \mathbb{N} é um conjunto infinito e que conhecemos de antemão como escrever indefinidamente um após outro os elementos de \mathbb{N} .

Os livros didáticos citam, freqüentemente, a história do ancestral pastor que a cada ovelha de seu rebanho fazia corresponder uma pedrinha em seu bolso. Com este procedimento simples, o pastor “contava” e controlava seu rebanho, evitando o desaparecimento ou comemorando o nascimento de um pequeno animal.



PRÉ-CÁLCULO



Giuseppe Peano
1858-1932

Destacado lógico e matemático italiano, com contribuições importantes em Fundamentos da Aritmética e da Geometria.

Para saber mais sobre Peano e seus axiomas, consulte:

<http://users.hotlink.com.br/marielli/matematica/geniomat/peano.html>

Os negativos de números naturais inicialmente não eram considerados números de verdade. Entretanto eles mostraram indispensáveis aos cálculos práticos, e ganharam direito de integrarem o universo dos números.

Uma reação muito interessante contra os números negativos tinha a seguinte argumentação: se $-1 < 1$, então por que $\frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}$?

O absurdo apontado pelos incrédulos dos números negativos era a igualdade das frações acima. Como isto pode acontecer se a primeira fração tem o numerador menor que o denominador enquanto na segunda fração ocorre justamente o contrário!

A consideração e compreensão do infinito é um grande salto de abstração, só possível pela mente humana!

- Quais são as propriedades fundamentais do conjunto \mathbb{N} de números naturais?

São as propriedades conhecidas como Axiomas de Peano. Dentre elas destacamos duas. A primeira propriedade é a que garante a existência de um primeiro número natural, o número 1. A segunda propriedade garante que todo número natural tem um “sucessor”. O sucessor de 4 é 5, o sucessor de 199 é 200 e, em geral, o sucessor de n é $n + 1$.

Números inteiros

Os números naturais são úteis para resolver problemas de contagem, no entanto insuficientes para solucionar problemas do dia-a-dia, como perda, prejuízo etc ...

No fim do mês passado, dia 28, recebi uma terrível notícia ao pedir, no banco, o extrato de minha conta corrente num terminal eletrônico. Os valores impressos em tinta vermelha (advertência!) sentenciavam

Saldo atual: $-305,00$.

E é isto. Convencionamos para representar, por exemplo, a perda de 2 ovelhas em colocar o sinal “-” antes do número. Assim, -2 expressaria esta perda. Do mesmo modo, meu saldo de $-305,00$ no dia 28, expunha minha desagradável condição de devedor junto ao banco.

Incorporando aos números naturais, os números negativos e o número zero, chegamos ao conjunto dos números inteiros,

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Os números naturais também são chamados de inteiros positivos.

Note que como conjuntos,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}.$$

Adição e multiplicação de números inteiros

No conjunto \mathbb{Z} temos as operações fundamentais de adição e multiplicação. Estas operações permitem construir novos números a partir de pares de números dados, e são essenciais para o processo de contagem.

As propriedades fundamentais da adição (representada por $+$) e da multiplicação (representada por \times ou por \cdot) de números inteiros são as seguintes:

Para números inteiros quaisquer a , b e c :

a) propriedade comutativa:

$$a + b = b + a \quad \text{e} \quad a \cdot b = b \cdot a$$

b) propriedade associativa:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{e} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

c) propriedade distributiva:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

d) o número 1 desempenha o papel de unidade na multiplicação:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

e) o número zero é neutro na adição:

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

O simétrico de um número inteiro

Um número inteiro m é simétrico de um número n se

$$m + n = 0.$$

Note que m ser simétrico de n , é equivalente a n ser simétrico de m . De fato, $m + n = 0$ é equivalente a $n + m = 0$. Observe ainda que sendo m simétrico de n então $m = -n$.

Exemplo 1.1

1. -5 é simétrico de 5 , pois $-5 + 5 = 0$.
2. 5 é simétrico de (-5) , pois $5 = -(-5)$.

Subtrair o inteiro n do inteiro m se escreve $m - n$; equivale a somar m ao simétrico de n . Assim, $m - n = m + (-n)$.

3. de modo geral $-n$ é o simétrico de n (e n é o simétrico de $-n$).
4. O produto de qualquer número inteiro por (-1) é igual ao simétrico do número

$$-1(a) = -a = a(-1).$$

Exemplo 1.2

Simplifique a expressão $5x(-y) + y(-x)$, onde x e y representam inteiros quaisquer.

Solução:

$$\begin{aligned} 5x(-y) + y(-x) &= -5xy - yx = -5xy - xy \\ &= -6xy \end{aligned}$$

Representação de \mathbb{Z} sobre uma reta

É muito útil representar os números inteiros sobre uma reta orientada. Escolha uma reta no plano e sobre ela marque dois pontos, o ponto O e o ponto I . Vamos associar aos pontos O e I , respectivamente, os números 0 (zero) e 1.

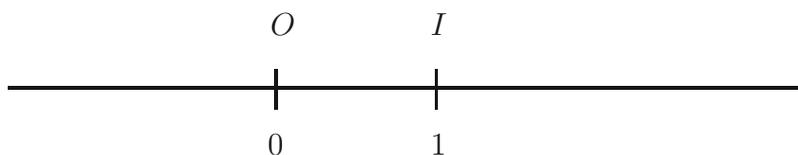


Figura 1.1: O segmento unidade.

O segmento de reta cujos extremos são os pontos O e I é denominado “segmento unidade”. Com este segmento como padrão, definimos a posição de todos os números inteiros sobre a reta!

O segmento OI estabelece dois *sentidos de percurso* sobre a reta: o que vai de O para I e o que vai de I para O . Escolhemos um desses sentidos como sendo o *positivo* e o outro como o *negativo*. A convenção que predomina universalmente é a de escolher como sentido positivo o que vai de O para I . Também é uma convenção universal escolher o ponto I à direita de O , como na **Figura 1.1**.

A partir do ponto 0 (zero), e seguindo no sentido positivo da reta, vamos justapondo sucessivamente o segmento unidade de modo a relacionar cada número natural com um único ponto da reta. Esta construção é feita de tal modo que o segmento de reta cujos extremos são um número natural n

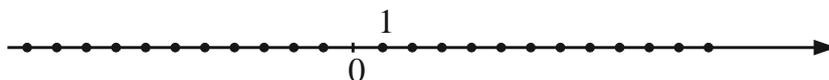
e seu sucessor $n + 1$ tem o mesmo comprimento do *segmento unidade*. Uma construção análoga é feita a partir do ponto 0 (zero) no sentido negativo de percurso sobre a reta, marcando sucessivamente pontos associados aos números inteiros negativos $-1, -2, -3, \dots$. Veja a **Figura 1.2**.



Figura 1.2: Os números inteiros na reta.

Atividade 1.1

Assinale na reta da figura abaixo, os pontos correspondentes aos números $-10, 3, 9, -6, -2$.



Relação de ordem

A representação dos números inteiros sobre uma reta orientada permite estabelecer uma relação de ordem no conjunto \mathbb{Z} .

Definição

Dizemos que o número inteiro m é menor que o número inteiro n se na representação sobre uma reta orientada o ponto que representa m aparecer antes do ponto que representa n .

Utilizamos a notação $m < n$ para indicar que m é menor que n . A notação $n > m$ (que se lê n é maior que m) tem o mesmo significado que $m < n$.

Usamos a notação $m \leq n$ (que se lê m é menor ou igual a n) para significar que m é menor do que ou igual a n , e a notação $n \geq m$ (que se lê n é maior ou igual a m) equivale a $m \leq n$.

Definição

Um número m é dito *positivo* se for maior do que zero, isto é, $m > 0$.
 Um número m é dito *negativo* se for menor do que zero, isto é, $m < 0$.
 O número zero não é positivo nem negativo.

Reforçando: Quaisquer dois pontos consecutivos marcados para representar números inteiros na reta definem segmentos de comprimento unitário.

Note que na definição de ordem usamos a expressão: m aparece antes de n na reta. Isto significa que a direção que aponta de m para n coincide com a direção da reta.

Valor absoluto

Vamos recordar a definição de valor absoluto de um número e usá-la nas “regras de sinal”, muito úteis ao operar com números.

Definição

O valor absoluto de um número inteiro m , o qual representaremos por $|m|$ é definido por

- (i) $|m| = m$ se $m > 0$.
- (ii) $|m| = -m$ se $m < 0$.
- (iii) $|0| = 0$.

Exemplo 1.3

$$|-4| = 4, \quad |2004| = 2004 \quad \text{e} \quad |-743| = 743.$$

Veja na **Figura 1.3** a representação geométrica da primeira igualdade do Exemplo 1.3, mostrando que o módulo representa a distância do número à origem.

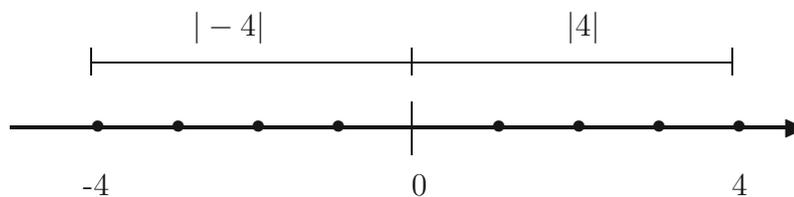


Figura 1.3: O módulo como distância.

Portanto, a **Figura 1.3** ilustra uma propriedade relevante do valor absoluto:

$$|-m| = |m| \text{ para todo número inteiro } m$$

Nota: O *sinal* de um número inteiro não nulo m é *positivo* se $m = |m|$, o que é equivalente a $m > 0$; o sinal de um número não nulo m é *negativo* se $|m| = -m$, o que é equivalente a $m < 0$. O número zero não tem sinal.

Propriedades operacionais para a soma e multiplicação

Veja as propriedades operacionais para a soma e multiplicação de números inteiros, popularmente denominadas “regras de sinais”.

Para adicionar números inteiros de mesmo sinal, adicione seus valores absolutos, e dê ao resultado o mesmo sinal das parcelas.

Exemplo 1.4

Calcule a soma $-6 + (-43)$

Ambas as parcelas são números negativos. Logo a soma resultará um número negativo cujo valor absoluto é a soma dos valores absolutos das parcelas.

$$-6 + (-43) = -6 - 43 = -(6 + 43) = -49$$

Para adicionar números inteiros de sinais diferentes, subtraia o menor valor absoluto do maior. Dê ao resultado o mesmo sinal do inteiro de maior valor absoluto.

Exemplo 1.5

Calcule a soma $-63 + 43$

Temos a adição de um número negativo com um número positivo. O número negativo tem maior valor absoluto. Portanto a soma será um número negativo, cujo valor absoluto é a diferença entre o maior e o menor valor absoluto.

$$\begin{aligned} -63 + 43 &= -(63 - 43) \\ &= -20 \end{aligned}$$

O produto de dois inteiros que têm sinais diferentes é um número negativo cujo valor absoluto é obtido pelo produto do valor absoluto dos números.

Exemplo 1.6

Calcule $(-63) \cdot 43$

$$\begin{aligned} (-63) \cdot 43 &= -(63 \cdot 43) \\ &= -2709 \end{aligned}$$

O produto de dois inteiros de mesmo sinal é um número positivo, cujo valor absoluto é obtido pelo produto dos valores absolutos dos números.

Exemplo 1.7

Calcule $(-3) \cdot (-4)$

$$(-3) \cdot (-4) = +(3 \cdot 4) = +12 = 12$$

Atividade 1.2: Hierarquia das operações aritméticas:

Observe os exemplos **a)** e **b)**:

a) $9 - 2 \times 3 \times 9 - 2 \times 3$

Solução

As multiplicações sempre devem ser efetuadas antes das adições ou subtrações, a menos que a expressão contenha parênteses, chaves, colchetes, etc... que subvertam essa hierarquia.

Expressões numéricas que envolvam apenas adições ou subtrações, podem ser calculadas de acordo com a ordem em que as operações vão surgindo.

Portanto

$$\begin{aligned} 9 - 2 \times 3 \times 9 - 2 \times 3 &= 9 - 54 - 6 \\ &= 9 - 60 \\ &= -51 \end{aligned}$$

b) $(9 - 2 \times 3) \times (9 - 2 \times 3)$

Solução

Agora devemos efetuar primeiro as operações entre parênteses

$$9 - 2 \times 3 = 9 - 6 = 3$$

Assim

$$\begin{aligned} (9 - 2 \times 3) \times (9 - 2 \times 3) &= 3 \times 3 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Note que os exemplos a) e b) contêm os mesmos números e as mesmas operações. Todavia as respostas são completamente diferentes, devido à presença de parênteses.

c) Calcule você mesmo:

i) $3 \times 5 - 2 \times 4 + 3 - 1$

Resposta: _____

ii) $3 \times \{5 - 2 \times [4 + 3 - 1]\}$

Resposta: _____

iii) Você obteve o mesmo resultado nos dois itens acima?

Resposta: _____

Múltiplos e divisores

Definição 1.1 (Múltiplos de um número inteiro)

Dado um número inteiro n , os múltiplos de n são aqueles números obtidos pelo produto de n por um número inteiro arbitrário.

Representamos por $M(n)$ o conjunto de todos os números inteiros múltiplos de n .

Exemplo 1.8

a) $M(2) = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$ é o conjunto dos múltiplos do número 2.

b) $M(0) = \{0\}$. De fato, como $0 = 0 \times m$, para qualquer número inteiro m , então 0 é o único múltiplo de 0.

c) $M(-3) = M(3) = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$

Nota: Veja o que ocorreu nos três exemplos anteriores: o zero aparece em todos os conjuntos. De fato, o número 0 (zero) é múltiplo de qualquer número inteiro n . Pois $0 = 0 \times n$. Em símbolos podemos então escrever,

$$0 \in M(n), \text{ para qualquer } n.$$

Atividade 1.3

a) Escreva dois conjuntos contendo, respectivamente, os sete primeiros múltiplos positivos de 5 e de 7.

b) Identifique o menor número comum aos dois conjuntos do item anterior.

Definição 1.2

Dados dois números inteiros não nulos a e b , o *mínimo múltiplo comum* dos números é o menor número inteiro positivo que é múltiplo de ambos. Usamos a notação $m.m.c(a, b)$ para representar este número.

Atividade 1.4

- a) Encontre o mínimo múltiplo comum de cada um dos seguintes pares de números:

$$m.m.c(5, 7) = \dots, m.m.c(5, 10) = \dots, \quad \text{e} \quad m.m.c(6, 14) = \dots$$

- b) Dois pilotos de Fórmula 1, um alemão e outro brasileiro treinam numa pista em forma de um circuito fechado. O piloto alemão gasta seis minutos para dar uma volta completa, enquanto o piloto brasileiro precisa de dez minutos para fazê-lo. Num dia de treino, ambos saem juntos do grid de largada. Depois de quanto tempo eles voltarão a se encontrar de novo no grid de largada?

Definição 1.3 (Divisores de um número inteiro)

Um número inteiro d , diferente de zero, é divisor do número inteiro m , se existir outro inteiro p tal que

$$m = p \cdot d.$$

Denotamos por $D(m)$ o conjunto dos divisores positivos do número m . Isto é, se $d \in D(m)$ então $d > 0$.

Exemplo 1.9

Os números 1, 2, 3 e 6 são todos os divisores positivos do número 6. Também 1 e 13 são todos os divisores positivos do número 13. Então

$$D(6) = \{1, 2, 3, 6\} \quad \text{e} \quad D(13) = \{1, 13\}.$$

Nota: Dado um número inteiro m qualquer, então 1 e m são divisores de m .

Definição 1.4 (Números primos)

Um número primo p é um número natural diferente de 1 e que admite como divisores positivos apenas os números 1 e p . Isto é,

$$D(p) = \{1, p\}.$$

Denotamos por \mathcal{P} o conjunto dos números primos.

Exemplo 1.10

Escrevemos abaixo, em ordem crescente, os oito primeiros números primos e colocamos os três pontinhos exprimindo que existem infinitos outros números primos.

$$\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots\}$$

Definição 1.5

Dois números inteiros m e n são primos entre si se admitirem apenas o número 1 como divisor positivo comum.

Exemplo 1.11

- a) 3 e 50 são primos entre si. De fato, os divisores positivos de 3 são 1 e 3, e os divisores positivos de 50 são 1, 2, 5, 10, 25, 50. Logo, 1 é o único divisor comum positivo.
- b) -28 e 21 são primos entre si. De fato, 1, 2, 4, 7, 14, 28 são os divisores positivos de -28 , e 1, 3, 7, 21 são os divisores positivos de 21. Logo, 1 é o único divisor positivo de ambos.

Atividade 1.5

a) Qual o menor número natural m , maior que 1, que é primo com $n = 36$?

b) Escreva uma lista com todos os divisores positivos do número 6 e que são menores que 6. Estes são os divisores próprios de 6. Em seguida, calcule a soma dos números da lista. Você encontrou 6? Correto.

Você sabia que um número que tem a propriedade de ser igual à soma de seus divisores próprios chama-se *número perfeito*?

c) A distribuição dos números perfeitos entre os naturais é bem espaçada. Por exemplo, 496 é um número perfeito, pois

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248.$$

Você sabia que existe apenas mais um número perfeito entre 6 e 402. Este número é menor que 50 e você está desafiado a descobri-lo.

Para finalizar esta aula, convido você a estudar um importante resultado.

O algoritmo de Euclides

Vamos tratar a questão da divisibilidade do ponto de vista geométrico. Isto será muito útil mais tarde.

Vamos começar com um exemplo. Considere os números inteiros 17 e 3. Queremos dividir 17 por 3. Tomando os primeiros múltiplos positivos de 3 encontramos

$$3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \dots$$

Na seqüência anterior, identificamos o número 15 como o último número que é menor que 17. O próximo número, 18, já supera 17.

Escrevemos

$$17 = 3 \cdot 5 + 2 \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r} 17 \quad | \quad 3 \\ 2 \quad \quad | \quad 5 \end{array}$$

Na expressão anterior, 17 é o dividendo, 3 é o divisor, 5 é o quociente e 2 é o resto. Preste atenção na relação existente entre o divisor e o resto,

$$0 \leq 2 < 3.$$

O resto é maior ou igual a zero e inferior ao divisor.

Vamos a outro exemplo. Dividir o número -18 pelo número 7. Repetimos o processo anterior, escrevendo em ordem decrescente, da direita para a esquerda, os múltiplos de 7:

$$\dots - 42, -35, -28, -21, -14, -7, 0, 7.$$

Note que lendo a lista da esquerda para a direita, e portanto na ordem crescente dos números, -21 é o número mais próximo de -18 que é inferior a -18 . Escrevemos então

$$-18 = -3 \cdot 7 + 3 \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r} -18 \quad | \quad 7 \\ 3 \quad \quad | \quad -3 \end{array}$$

Note que comparando o resto 3 com o divisor 7, encontramos que

$$0 \leq 3 < 7.$$

De novo vale: o resto é maior ou igual a zero e menor que 7. Moral da história: Estamos realizando divisões entre números inteiros, onde o divisor é “sempre positivo” e estamos exigindo no processo que o resto seja maior ou



Euclides

$\pm 325 / \pm 265$ a.C.

Quase nada se sabe sobre a vida deste notável matemático grego. O que se costuma afirmar é que Euclides fundou uma escola de Matemática em Alexandria e, do conhecimento acumulado à época, escreveu “Os Elementos”.

Para saber mais, acesse:

<http://www.numaboa.com.br/criptologia/historia/euclides.php>

igual a zero e inferior ao divisor. O fato que o divisor é um número positivo e a propriedade que estamos exigindo sobre o resto define um método de divisão, que chamamos de Divisão Euclidiana.

Convido você a olhar geométrica e ludicamente os dois exemplos anteriores. Afinal, Matemática tem muito de jogo e diversão.

Considere as divisões de 17 por 3 e de -18 por 7 e os números inteiros representados sobre uma reta orientada. Imagine dois sapinhos S_1 e S_2 , respectivamente relacionados à primeira e segunda divisão, pulando a partir do zero em direção aos dividendos, com as seguintes características:

Primeiro: S_1 salta para a direita em direção ao dividendo 17, com pulos de comprimento 3 que é o divisor, salta 5 vezes que é o quociente caindo no número 15 para ter uma aproximação máxima de 17. Um próximo pulo superaria 17. Isto é, $3 \times 5 + 2 = 17$. Veja a **Figura 1.4**.

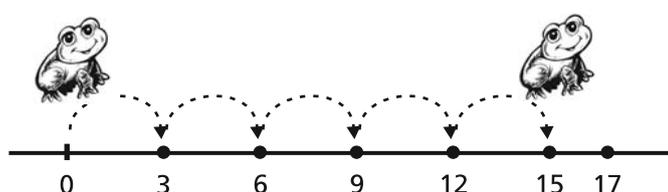


Figura 1.4: Divisão euclidiana I.

Segundo: S_2 salta para a esquerda em direção ao dividendo -18 , com pulos de comprimento 7 que é o divisor, salta 3 vezes até superar pela primeira vez a marca do ponto -18 . Como o salto é para a esquerda, o número de pulos é denotado por -3 e é preciso superar -18 . Isto é, $(-3) \cdot 7 + 3 = -18$. Compare com o primeiro caso e examine a **Figura 1.5**.

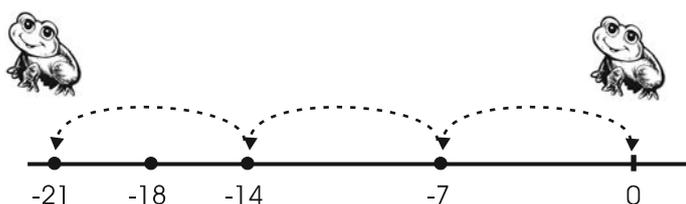


Figura 1.5: Divisão euclidiana II.

Note que neste processo, a diferença entre a posição final dos sapinhos e os pontos de chegada são sempre inferiores ao comprimento do pulo. Esta diferença pode ser nula no caso excepcional em que o sapinho caia exatamente sobre o dividendo.

Atividade 1.6

Realize geometricamente na reta os três exemplos com os dados: a) dividendo 101, divisor 13; b) dividendo -47 , divisor 8; c) dividendo -121 , divisor 11.

Podemos agora olhar de modo geral o problema da divisão. Queremos dividir um número inteiro m por outro número inteiro $d > 0$. Imagine, desde já estes dois números identificados na reta e um sapinho no ponto zero, disposto à cada pulo vencer um comprimento d , saltando para a esquerda se $m < 0$, para a direita se $m > 0$, ou permanecendo imóvel se $m = 0$. Seja então q o número de saltos que mais aproxima o sapinho de m , aproximação por falta. Veja a **Figura 1.6**, onde esta representada uma situação onde $m < 0$. Nesta situação vale

$$m = q \cdot d + r, \quad 0 \leq r < d.$$

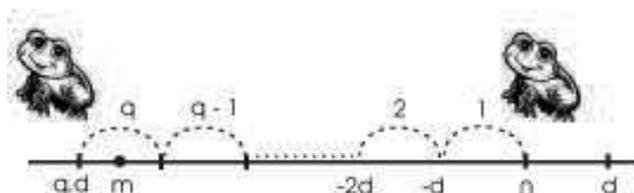


Figura 1.6: Divisão euclidiana III.

Baseados nestas discussões é evidente chegar ao importante resultado denominado algoritmo de Euclides.

Algoritmo de Euclides

Dados $m, d \in \mathbb{Z}$, sendo $d > 0$, podemos escrever m como soma de um múltiplo de d e de um possível resto r menor que d e maior ou igual a zero. Isto é,

$$m = q \cdot d + r.$$

Esta maneira de escrever é única. O número q é o quociente e r é o resto da divisão euclidiana de m por d .

Exercícios

- Escreva, se possível, uma expressão mais simples e equivalente à expressão dada, onde a, b, m, x e y são números inteiros.
 - $13a + 5a$
 - $21x - 10x$
 - $3(5m - 14m)$
 - $3(x + 2y) - 2y$
 - $4(3x + 2) + (2x + 3)$
- Dois números inteiros a e b são tais que $5ab^2 + 2a^2b + a^2b^2 = 99$ e $5b + 2a + ab = 3$. Calcule o produto desses números.

- 3) A soma de dois números é 119. O quociente da divisão do maior pelo menor é 3 e o resto o maior possível. Calcule os números.
- 4) Achar o menor múltiplo de 13 que dividido por 15, 24 ou 40 deixa sempre resto 10.
- 5) Três pessoas viajaram hoje para São Paulo. A primeira faz essa mesma viagem de 15 em 15 dias, a segunda vai a São Paulo de 20 em 20 dias e a terceira de 24 em 24 dias. Daqui a quantos dias elas voltarão a viajar juntas?

Respostas das atividades

- 1) Localização de pontos
- 2) c) 9 d) -21 , não
- 3) a) $\{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35\}$, $\{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49\}$ b) 35
- 4) a) 35, 10, 42 b) 30 minutos
- 5) a) 5 b) $6 = 1 + 2 + 3$ c) 28
- 6) a) $101 = 7 \times 13 + 10$, b) $-47 = -6 \times 8 + 1$, c) $-121 = -11 \times 11$.

Respostas dos exercícios

- 1) a) $18a$, b) $11x$, c) $-27m$, d) $3x + 4y$, e) $14x + 11$
- 2) 33
- 3) 24 e 95
- 4) 130
- 5) 120 dias

Aula 2 – Números racionais

Objetivos

- trabalhar com propriedades operatórias do conjunto dos números racionais;
- recordar a representação dos números racionais na reta numérica;
- revisar a representação decimal dos números racionais.

Você está numa festa de aniversário e o dono da casa oferece um saboroso pedaço de bolo. Em virtude daquele regime que você começou ontem, o pedaço parece exagerado. Você exclama a duras penas:

- É muito grande! Por favor, quero apenas um terço deste pedaço de bolo.

O que aconteceu? O pedaço de bolo representava uma unidade que lhe era oferecida e você solicita que esta unidade seja dividida em três partes iguais, das quais apenas uma será sua parte. Você deseja uma exata parte, ou uma fração da unidade oferecida. A maneira abstrata de representar esta idéia é escrever $\frac{1}{3}$.

Os números racionais surgem para expressar ou medir quantidades onde aparecem envolvidas partes da unidade.

Veja na figura a seguir, um bolo de forma retangular dividido, em partes iguais de dois modos diferentes. Em 3 partes e em 9 partes, respectivamente.



Figura 2.1: Divisão da unidade.

Do ponto de vista da quantidade, uma das partes do bolo dividido na **Figura 2.1**, à esquerda, representa $\frac{1}{3}$, enquanto que uma das partes na **Figura 2.1**, à direita, representa $\frac{1}{9}$. Agora é evidente que um pedaço de bolo representado na **Figura 2.1**, à esquerda, é o mesmo que 3 pedaços de bolo representado na **Figura 2.1**, à direita. Isto sugere que vale a igualdade

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{9},$$

e fica evidente que podemos representar de vários modos uma mesma porção da unidade.

Expressões do tipo $\frac{m}{n}$, onde m e n são números inteiros e $n \neq 0$, são chamadas frações. O termo acima do traço é o numerador e o termo abaixo do traço é o denominador da fração. Note que $\frac{1}{3}$ é igual a $\frac{3}{9}$, pelo simples fato que multiplicamos por 3 o número de divisões da unidade e também multiplicamos por 3 o número das partes que utilizamos para formar a nova fração.

Este exemplo permite induzirmos que ao multiplicarmos o numerador e o denominador de uma fração pelo mesmo número inteiro não nulo, não alteramos o valor da fração. Isto é,

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q},$$

se existe um número inteiro k , não nulo, tal que $p = k \cdot m$ e $q = k \cdot n$.

Igualdade ou equivalência de frações

Duas frações $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ são equivalentes ou iguais se e somente se $mq = pn$.

Em símbolos, vale a regra do produto cruzado:

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \iff mq = pn.$$

A igualdade de frações enunciada acima pode ser provada do seguinte modo: como n e q são números inteiros não nulos podemos escrever

$$\frac{m}{n} = \frac{mq}{nq} \quad \text{e} \quad \frac{p}{q} = \frac{pn}{qn}.$$

Veja que os denominadores das frações transformadas agora coincidem. Então, a igualdade entre $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ ocorre exatamente e apenas quando os numeradores coincidem. Isto é,

$$mq = pn.$$

Números racionais

Agora podemos introduzir o conjunto \mathbb{Q} dos números racionais. \mathbb{Q} é o conjunto de todas as frações $\frac{m}{n}$, onde m e n são números inteiros e $n \neq 0$. Em símbolos:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}.$$

Nota: Duas frações equivalentes representam o mesmo número racional.

Soma e produto de números racionais

Sejam $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{r}$ números racionais quaisquer. Então:

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{r} = \frac{r \cdot m + n \cdot p}{n \cdot r} \quad \text{e} \quad \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{r} = \frac{m \cdot p}{n \cdot r}$$

são respectivamente, a soma e o produto dos números racionais.

Notas

1) Inclusão de conjuntos

Vale a inclusão de conjuntos, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Pois se $m \in \mathbb{Z}$, então $m = \frac{m}{1} \in \mathbb{Q}$.

Comentário: É muito importante poder considerar \mathbb{Z} dentro de \mathbb{Q} . Mais importante ainda é o fato que as operações de adição e multiplicação definidos em \mathbb{Q} herdam todas as propriedades já enunciadas para as mesmas operações em \mathbb{Z} . Reveja estas propriedades na Aula 1.

2) Frações Redutíveis e Irredutíveis

Uma fração $\frac{m}{n}$ é irredutível se não existe nenhum número natural $d > 1$, que seja divisor de m e divisor de n . Caso contrário, a fração é redutível.

Comentário: $\frac{m}{n}$ é uma fração irredutível se m e n são números primos entre si. Por exemplo, $\frac{-33}{5}$ é irredutível e $\frac{10}{4}$ é redutível.

3) Fração Irredutível com denominador positivo

Toda fração redutível é equivalente a uma fração irredutível e com denominador positivo.

Comentário: Para encontrar a fração irredutível na forma desejada, que seja equivalente a uma fração redutível dada, basta efetuar as divisões necessárias no denominador e numerador. Se, ao final das divisões, o denominador for negativo, multiplicamos por (-1) o numerador e o denominador, para encontrar a fração irredutível com denominador positivo.

Veja os dois exemplos a seguir:

$$\frac{120}{150} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}, \quad \frac{81}{-126} = \frac{27}{-42} = \frac{9}{-14} = \frac{-9}{14}.$$

4) Igualdade de números racionais

Dois números racionais $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{r}$ são iguais se e somente se $mr = np$.
Em símbolos:

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{r} \iff m \cdot r = n \cdot p.$$

Comentário: Já tivemos ocasião de falar sobre esta igualdade antes da definição do conjunto \mathbb{Q} . Este resultado é referido como “regra do produto cruzado” para identificar duas frações iguais ou dois números racionais iguais.

5) Divisão de números racionais

Se $\frac{p}{r} \neq 0$, a divisão do número $\frac{m}{n}$ por $\frac{p}{r}$ é definida por

$$\frac{m}{n} \div \frac{p}{r} = \frac{m}{n} \times \frac{r}{p} = \frac{mr}{np}.$$

6) Inverso de números racionais

Se $\frac{p}{r} \neq 0$, o inverso de $\frac{p}{r}$ é o número racional $\frac{r}{p}$. Note que $\frac{p}{r} \cdot \frac{r}{p} = 1$.

7) Simétrico de um número racional

O simétrico de um número racional q é o número racional s tal que

$$q + s = 0.$$

Comentário: Assim, o simétrico de $q = \frac{a}{b}$ é o número racional $-q = -\frac{a}{b}$. O simétrico de 0 é o próprio 0.

Observe que

$$\frac{a}{-b} + \frac{a}{b} = \frac{-a}{b} + \frac{a}{b} = \frac{-a + a}{b} = 0.$$

Tendo em vista a definição de simétrico, concluímos que $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$.

Uma conta parecida mostra que $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$. Assim,

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

8) Expressão Irredutível para números racionais

Todo número racional pode ser expresso na forma $\frac{m}{n}$, onde $n > 0$ e m, n são primos entre si.

Comentário: O que enunciamos acima é equivalente ao que foi dito em (3). De fato, se o denominador do número racional n é negativo, basta multiplicarmos o numerador e o denominador por -1 . Depois simplificamos os fatores comuns para encontrar o número racional expresso como fração irredutível.

Exemplo

$$\frac{26}{-34} = \frac{-26}{34} = \frac{-13}{17}.$$

9) Em vista do item 8) acima, podemos escrever os números racionais não nulos \mathbb{Q}^* como $\mathbb{Q}^* = \left\{ \frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{Z}; m, n \text{ primos entre si e } n > 0 \right\}$.

Exemplo 2.1

Em um grupo de turistas, a sexta parte é de italianos, a metade de franceses e os 10 restantes são americanos. Quantos turistas há no grupo?

Solução

Temos que

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

correspondem a italianos e franceses. Logo $\frac{1}{3}$ dos turistas são americanos.

Como são 10 os americanos, então o total de turistas é $\frac{3}{1} \times 10 = 30$.

Atividade 2.1

Encontre a forma irredutível e com denominador positivo das frações $\frac{-822}{81}$, $\frac{244}{132}$ e $\frac{121}{-143}$.

Representação geométrica dos números racionais

Já sabemos como representar os números inteiros numa reta. Recorde o que foi feito na Aula 1. Vamos ampliar nossa representação colocando sobre a reta todos os números racionais. Vamos começar com alguns exemplos.

Exemplo 2.2

Você se lembra do bolo da festa? Pois é ...

Considere agora o problema de representar o número racional $\frac{2}{3}$ que representa a parte do bolo que você não comeu.

Este número é uma fração da unidade. Basta dividir a unidade em três partes iguais, e “avançar” duas casas a partir do ponto inicial. Veja a **Figura 2.2**.

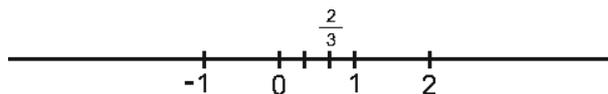


Figura 2.2: Representação do número $\frac{2}{3}$.

Exemplo 2.3

O mesmo procedimento vale quando queremos representar o número racional $\frac{r}{n}$, onde $0 \leq r < n$.

Nesta situação geral, dividimos o segmento que representa a unidade em n partes iguais, e avançamos r casas a partir do ponto inicial.

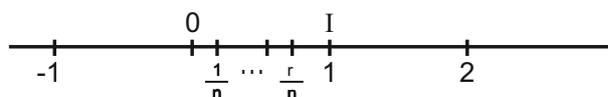


Figura 2.3: Representação do número $\frac{r}{n}$.

Exemplo 2.4

Considere o número racional $\frac{153}{4}$. Usando o algoritmo de Euclides, podemos escrever

$$153 = 4 \times 38 + 1.$$

Então,

$$\frac{153}{4} = \frac{4 \times 38 + 1}{4} = \frac{4 \times 38}{4} + \frac{1}{4} = 38 + \frac{1}{4}.$$

O que fazemos agora?

Bom, em primeiro lugar vamos ao intervalo de comprimento 1 da reta determinado pelos pontos correspondentes aos números inteiros 38 e 39.

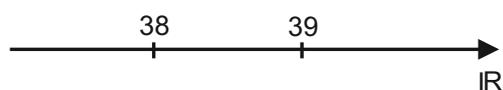


Figura 2.4: Intervalo unitário.

Agora, dividimos o intervalo unitário destacado em quatro partes iguais. Em seguida, a partir do ponto representado pelo número 38 “avancamos” uma casa para encontrar o ponto correspondente ao número procurado. Em destaque, na figura a seguir está indicado o ponto que corresponde ao número $\frac{153}{4}$.

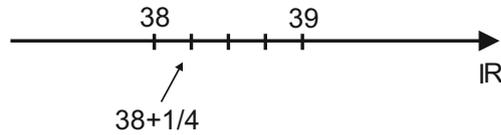


Figura 2.5: Representação do número $\frac{153}{4}$.

Exemplo 2.5

Representar na reta o número racional $\frac{-127}{5}$.

Pelo algoritmo da divisão de Euclides,

$$127 = 5 \times 25 + 2.$$

Daí,

$$-127 = -5 \times 25 - 2.$$

Mas não devemos esquecer que o *resto* na divisão euclidiana é sempre positivo ou nulo.

A fim de obter um resto euclidiano, basta subtrair e adicionar o divisor 5.

$$-127 = -5 \times 25 - 5 + 5 - 2 = -5 \times 26 + 3 = 5 \times (-26) + 3.$$

Portanto, a divisão euclidiana de -127 por 5 resulta um quociente -26 e um resto 3.

Prosseguindo,

$$\frac{-127}{5} = \frac{5 \times (-26) + 3}{5} = \frac{5 \times (-26)}{5} + \frac{3}{5} = -26 + \frac{3}{5}.$$

Portanto, entre os pontos da reta que representam os números -26 e -25 , localizamos o ponto que representa o número racional $\frac{-127}{5}$. Veja a **Figura 2.6**.

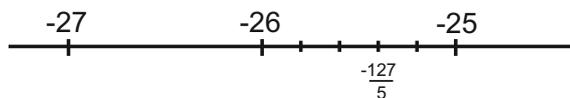


Figura 2.6: Representação do número $\frac{-127}{5}$.

Nota oportuna: Este procedimento fornece um caminho para efetuar a divisão euclidiana quando o dividendo é um número negativo.

De modo geral, usando o algoritmo de Euclides podemos concluir que todo número racional $\frac{m}{n}$, com $n > 0$, se escreve como

$$\frac{m}{n} = p + \frac{r}{n}, \text{ onde } p \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < n.$$

A expressão acima para um número racional permite a representação do número sobre uma reta.

Atividade 2.2

Verifique que na **Figura 2.7** temos uma boa representação dos números $\frac{73}{4}$, $\frac{-3}{2}$ e $\frac{1}{2}$.

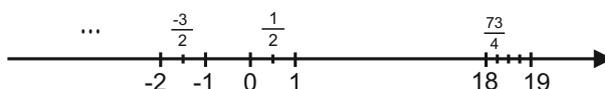


Figura 2.7: Representação de números.

Relação de ordem nos números racionais

A representação dos números racionais sobre uma reta orientada permite estabelecer uma relação de ordem no conjunto \mathbb{Q} . Suponha que os números racionais estão representados sobre uma reta horizontal, estando os números negativos à esquerda e os positivos à direita.

Definição 2.1

Dizemos que o número racional $q = \frac{m}{n}$ é menor que o número racional $s = \frac{p}{r}$ se na representação sobre uma reta orientada o ponto que representa q estiver à esquerda do ponto que representa s .

Para explorar um pouco mais a relação de ordem, suponha que $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{r}$ estão escritos de modo que $n > 0$ e $r > 0$. Note que

$$\frac{m}{n} = \frac{m \cdot r}{n \cdot r} \quad \text{e} \quad \frac{p}{r} = \frac{p \cdot n}{r \cdot n}.$$

Olhando os segundos membros das igualdades vemos que os números racionais estão expressos com o mesmo denominador. Logo, é possível concluir que

$$\frac{m}{n} < \frac{p}{r} \iff m \cdot r < p \cdot n.$$

Exemplo 2.6

Determine o conjunto de todos os racionais r para os quais a expressão

$$\frac{1}{r - \frac{1}{r}}$$

faz sentido. A seguir, simplifique a expressão.

Solução

Em primeiro lugar é preciso que $r \neq 0$, pois caso contrário a parcela $\frac{1}{r}$ no denominador não fica bem definida.

Efetuada a operação $r - \frac{1}{r}$ no denominador, obtemos $\frac{r^2 - 1}{r}$. Assim,

$$\frac{1}{r - \frac{1}{r}} = \frac{1}{\frac{r^2 - 1}{r}} = \frac{r}{r^2 - 1}$$

Vemos agora que é preciso ter $r^2 - 1 \neq 0$. Como $r^2 - 1 = (r - 1)(r + 1)$ e $(r - 1)(r + 1) = 0 \iff r - 1 = 0$ ou $r + 1 = 0$, vem que

$$r^2 - 1 \neq 0 \iff r \neq 1 \text{ e } r \neq -1$$

Resumindo, o conjunto de racionais para os quais a expressão dada está bem definida é

$$\mathbb{Q} - \{-1, 0, 1\}.$$

Atividade 2.3

- Represente numa reta orientada os números $\frac{3}{6}$, $\frac{-12}{5}$, $\frac{9}{13}$ e $\frac{19}{-5}$;
- Escreva estes números em ordem crescente.
- Mostre que

$$\frac{4}{-20} > \frac{-13}{64}$$

Representação decimal de números racionais

Os números racionais expressos em forma de fração, apresentam dificuldades de uso na linguagem mais coloquial. Na prática do comércio, nas medidas de temperatura, em medidas científicas, muitas vezes aparecem números como 12,48 ou 0,267 ou $-3,52$, para representar as medidas de certas grandezas. Esta é a notação decimal para os números racionais. Qual é a convenção adotada? Ou melhor dizendo, que número estamos expressando através da notação decimal?

Vamos explicar isso.

A convenção é a seguinte: o número antes da vírgula é um número inteiro, o primeiro algarismo depois da vírgula expressa os décimos, o segundo algarismo os centésimos, o terceiro algarismo os milésimos e assim por diante. O número representado na notação decimal é a soma dessas quantidades. Assim,

$$12,48 = 12 + \frac{4}{10} + \frac{8}{100} = \frac{1200 + 40 + 8}{100} = \frac{1248}{100} = \frac{312}{25}.$$

Portanto, temos duas maneiras de expressar o mesmo número:

$$12,48 = \frac{312}{25}.$$

Veja outros exemplos:

$$0,267 = 0 + \frac{2}{10} + \frac{6}{100} + \frac{7}{1000} = \frac{200 + 60 + 7}{1000}.$$

Assim,

$$0,267 = \frac{267}{1000}.$$

Também,

$$-3,52 = -\left(3 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100}\right) = -\frac{300 + 50 + 2}{100} = -\frac{352}{100} = -\frac{88}{25}.$$

Logo,

$$-3,52 = -\frac{88}{25}.$$

Então, 12,48, 0,267 e $-3,52$ são outras maneiras de escrever os números racionais $\frac{312}{25}$, $\frac{267}{1000}$ e $-\frac{88}{25}$, respectivamente.

De modo geral, uma expressão do tipo

$$m, n_1 n_2 n_3 \dots n_p, \tag{2.1}$$

onde m é um número inteiro e n_1, \dots, n_p são algarismos, é a representação decimal do número racional obtido pela seguinte soma:

$$m, n_1 n_2 n_3 \dots n_p = m + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{100} + \frac{n_3}{1000} + \dots + \frac{n_p}{10^p}, \text{ se } m \geq 0$$

e

$$m, n_1 n_2 n_3 \dots n_p = - \left(-m + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{100} + \frac{n_3}{1000} + \dots + \frac{n_p}{10^p} \right), \text{ se } m < 0.$$

Basta efetuar a soma das frações e as simplificações convenientes para encontrar, nas expressões acima, à direita, o número racional em forma de fração.

Neste momento é importante formular uma pergunta:

- Todo número racional pode ser expresso em notação decimal?

Ou perguntando de outro modo:

- Partindo de um número racional $\frac{m}{n}$ podemos escrevê-lo na forma

$$\frac{m}{n} = a_0, a_1 a_2 \dots a_p ?$$

Para encontrar uma resposta, voltemos aos três exemplos trabalhados

$$\frac{312}{25} = 12,48, \quad \frac{267}{1000} = 0,267 \quad \text{e} \quad -\frac{88}{25} = -3,52.$$

Partindo das frações e usando o algoritmo de Euclides, encontramos

312	25	267	1000	88	25
- 25	12,48	- 2000	0,267	- 75	3,52
62		6700		130	
- 50		- 6000		- 125	
120		7000		50	
- 100		- 7000		- 50	
200		0		0	
- 200					
0					

As contas acima são auto-explicativas e mostram que partindo de frações, o algoritmo euclidiano é a ferramenta para chegar à representação decimal de um número racional.

Mas, calma lá, não vivemos no melhor dos mundos! E os números $\frac{1}{3}$ e $\frac{8}{33}$? Vamos efetuar a divisão euclidiana para nos surpreender!

$$\begin{array}{r}
 10 \quad \overline{) 3} \\
 - 9 \quad \quad \quad \\
 \hline
 10 \\
 - 9 \quad \quad \quad \\
 \hline
 10 \\
 \vdots
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 80 \quad \overline{) 33} \\
 - 66 \quad \quad \quad \\
 \hline
 140 \\
 - 132 \quad \quad \quad \\
 \hline
 80 \\
 - 66 \quad \quad \quad \\
 \hline
 140 \\
 - 132 \quad \quad \quad \\
 \hline
 80 \\
 \vdots
 \end{array}$$

Os resultados da divisão mostram a necessidade de expressar $\frac{1}{3}$ e $\frac{8}{33}$ através de somas envolvendo infinitas parcelas

$$\frac{1}{3} = 0,333\dots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \dots + \frac{3}{10^n} + \dots$$

e

$$\frac{8}{33} = 0,2424\dots = \frac{2}{10} + \frac{4}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{4}{10000} + \dots$$

Veremos mais adiante, nos conteúdos das disciplinas de Cálculo que somas com infinitas parcelas, como as somas acima no segundo membro das igualdades, representam os números escritos no primeiro membro. Então, é correto escrever,

$$\frac{1}{3} = 0,333\dots \qquad \frac{8}{33} = 0,2424\dots$$

As expressões à direita das igualdades são chamadas representações ou expansões decimais infinitas e periódicas, ou simplesmente dízimas periódicas. A palavra periódica refere-se à repetição indeterminadamente do número 3 e do número 24, respectivamente, na representação de $\frac{1}{3}$ e $\frac{8}{33}$. Agora podemos responder a pergunta:

- Todo número racional pode ser expresso na forma decimal?

Se entendessemos forma decimal, apenas expressões do tipo (2.1), expressão onde aparece apenas um número finito de algarismos após a vírgula, a resposta é não.

No entanto, ao considerarmos somas infinitas e expressões decimais com infinitos algarismos, provaremos na próxima aula, quando tratarmos da representação de números racionais através de dízimas, o seguinte resultado:

“Todo número racional pode ser representado em forma de uma expressão decimal (finita) ou sob forma de uma expansão decimal infinita e periódica.”

Mas lembra de como motivamos a notação decimal? Argumentamos com as necessidades práticas do comércio, da indústria, etc. Pois bem, para estas necessidades são suficientes valores que aproximam o valor real. A aproximação com maior ou menor erro, depende da natureza da operação realizada.

Por exemplo, $\frac{1}{3}$ pode ser aproximado por 0,333. Neste caso, usamos 3 algarismos após a vírgula. O que significa esta escolha?

$$0,333 = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} = \frac{300 + 30 + 3}{1000} = \frac{333}{1000}.$$

Note que

$$\frac{1}{3} - \frac{333}{1000} = \frac{1000 - 999}{3000} = \frac{1}{3000} < \frac{1}{1000}.$$

Isso mostra que

$$\frac{1}{3} \simeq 0,333, \text{ com erro de um milésimo.}$$

O símbolo \simeq lê-se “aproximadamente”. Então $\frac{1}{3}$ é aproximadamente 0,333 e o erro é inferior a um milésimo.

Numa máquina de calcular, quando dividimos 1 por 3 aparece no visor o número zero, seguido de um ponto (substituindo a vírgula) e uma quantidade finita de algarismos 3. Quanto maior for a capacidade da máquina, maior o número de dígitos 3 após o ponto (ou a vírgula) e tanto mais próximo do valor exato $\frac{1}{3}$ é o valor fornecido pela máquina.

Atividade 2.4

- Mostre que $\frac{1}{3} < 0,334$.
- Mostre que $0,334 - \frac{1}{3} < \frac{1}{1000}$.
- Conclua que $\frac{1}{3} \simeq 0,334$ com erro inferior a um milésimo.

Exemplo 2.7

Expressar o número $\frac{29}{17}$ na forma decimal com erro inferior a um décimo de milésimo.

Solução

Usando o algoritmo euclidiano

$$\begin{array}{r}
 29 \quad \left| \begin{array}{l} 17 \\ \hline 1,7058 \end{array} \right. \\
 \underline{-17} \\
 120 \\
 \underline{-119} \\
 100 \\
 \underline{-85} \\
 150 \\
 \underline{-136} \\
 14
 \end{array}$$

Então, $\frac{29}{17} \sim 1,7058$ com erro inferior a um décimo de milésimo.

De fato, veja as contas que comprovam isto:

$$1,7058 = 1 + \frac{7}{10} + \frac{0}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{8}{10000} = \frac{17058}{10000}.$$

Então,

$$\frac{29}{17} - \frac{17058}{10000} = \frac{290000 - 289986}{170000} = \frac{14}{170000} < \frac{17}{170000} = \frac{1}{10000} = \frac{1}{10^4}.$$

Exercícios propostos

- Determine os números naturais n que satisfazem a inequação $\frac{n}{n+2} < \frac{4}{5}$
- Determine para que números racionais x , as expressões abaixo não estão bem definidas:

(a) $\frac{x}{1 - |x|}$

(b) $\frac{x}{1 - x^2}$

(c) $\frac{2x}{2 - x^2}$

3. Assinale as afirmações corretas, onde q representa um número racional arbitrário:
- (a) $q + 37/8$ está à direita de q
 - (b) $q - 12$ está à esquerda de q
 - (c) $5 + q$ está à direita de 5
 - (d) $-6 - q$ está à esquerda de -6.
4. (a) Complete:
 Transladando o ponto correspondente a $-12/8 + q$ para a direita, segundo o racional _____, obtemos o ponto correspondente a $q + 1$.
- (b) Determine os valores de $r \in \mathbb{Q}$ para os quais a expressão $|r - 2| - 2$ é positiva.
5. (a) Escreva em ordem crescente os elementos do conjunto
 $\left\{ 2, 1342; 2, 134201; -0, 3259; -\frac{31}{7}; \frac{21}{10} \right\}$.
- (b) Efetue: $-\frac{2}{5} + 24,70034$
6. Determine o menor inteiro positivo z , tal que os números $\frac{z}{2}, \frac{z}{3}, \frac{z}{4}, \frac{z}{5}$ sejam inteiros.

Respostas

Atividade 2.1: $\frac{-822}{81} = \frac{-274}{27}, \frac{244}{132} = \frac{61}{33}$ e $\frac{121}{-143} = \frac{-11}{13}$.

Atividade 2.2: $\frac{73}{4} = 18 + \frac{1}{4}, \frac{-3}{2} = -2 + \frac{1}{2}$.

Atividade 2.3

a) $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \frac{-12}{5} = -3 + \frac{3}{5}$ e $\frac{19}{-5} = -4 + \frac{1}{5}$.

b) $\frac{19}{-5} < \frac{-12}{5} < \frac{3}{6} < \frac{9}{13}$

c) Basta mostrar que

$$\frac{4}{20} < \frac{13}{64} \Leftrightarrow \frac{1}{5} < \frac{13}{64} \Leftrightarrow 64 < 65.$$

Atividade 2.4

a) $0,334 = \frac{334}{1000} > \frac{1}{3}$, uma vez que $3 \times 334 > 1000$

b) $0,334 - \frac{1}{3} = \frac{334}{1000} - \frac{1}{3} = \frac{1002 - 1000}{3000} = \frac{2}{3000} < \frac{1}{1000}$

c) Basta examinar o resultado em b)

Exercícios propostos

1. $n < 8$

2. a) e b) $x \neq -1$ e $x \neq 1$ c) $x \neq \pm\sqrt{2}$

3. a) e b)

4. a) $\frac{5}{2}$, b) $r > 4$ ou $r < 0$

5. a) $\frac{-31}{7} < -0,3259 < \frac{21}{10} < 2,1342 < 2,134201$

b) 24,30034

6. $z = 60$

Aula 3 – Números irracionais - enfoque geométrico

Objetivos

- concluir que os números racionais são insuficientes para realizar todas as medidas;
- descrever uma infinidade de números irracionais;
- realizar sobre a reta real a representação geométrica de alguns números irracionais.

Estamos acompanhando o desenvolvimento da idéia de número. É um processo longo que pontuou a história do homem sobre a Terra. Relato da necessidade humana de contar objetos que levou à idéia abstrata de números naturais. E a partir daí, a necessidade de considerar números negativos e números racionais, estes últimos como expressões de partes da unidade.

Também trabalhamos nas aulas passadas a representação dos números naturais sobre uma reta orientada. Recorde com a **Figura 3.1**. A representação é tal que a distância entre o ponto 0 e o ponto 1 define uma unidade de medida. Assim dois números inteiros quaisquer consecutivos estão localizados na reta distantes um do outro, exatamente de uma unidade padrão de medida.

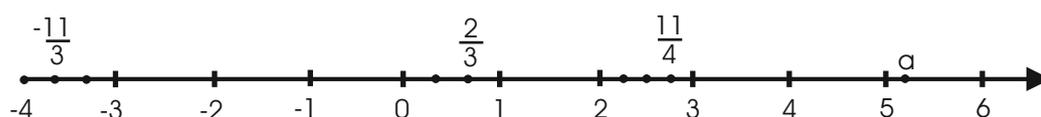


Figura 3.1: Números racionais na reta.

Por exemplo, o número $-\frac{11}{3}$ é tal que

$$-\frac{11}{3} = -\frac{9+2}{3} = -\left(3 + \frac{2}{3}\right).$$

Isto significa que $-\frac{11}{3}$ é um ponto à esquerda da reta, situado entre os pontos -4 e -3 . Para dar conta da posição exata do número $-\frac{11}{3}$, dividimos o intervalo definido pelos números -4 e -3 em três partes iguais e assinalamos a posição procurada naquele ponto mais próximo de -4 . Com isto, localizamos o número $-\frac{11}{3}$ sobre a reta. Volte e observe a **Figura 3.1**.

De modo geral, seja $\frac{m}{n}$ um número racional. Como localizar $\frac{m}{n}$ na reta numérica?

Vamos supor que, inicialmente, m e n são positivos e, portanto $\frac{m}{n}$ é positivo. Temos duas situações para examinar: $m < n$ ou $m \geq n$.

Primeiro caso: $m < n$ ou seja, $\frac{m}{n} < 1$.

Nesta situação, dividindo o intervalo cujos extremos são 0 e 1 em n partes iguais e tomando m destas partes, localizamos o número $\frac{m}{n}$. Veja na

Figura 3.1, a localização do número $\frac{2}{3}$.

Segundo caso: $m > n$ ou seja, $\frac{m}{n} \geq 1$.

Neste caso, podemos efetuar a divisão euclidiana de m por n . Suponha que

$$m = q \cdot n + r, \quad 0 \leq r < n.$$

Logo, $\frac{m}{n} = \frac{q \cdot n + r}{n} = \frac{q \cdot n}{n} + \frac{r}{n} = q + \frac{r}{n}$. Em vista da divisão efetuada, concluímos que o número $\frac{m}{n}$ é um ponto sobre a reta, localizado entre os números inteiros q e $q + 1$. Isto é

$$q \leq \frac{m}{n} < q + 1.$$

Em seguida, dividimos o intervalo de reta definido pelos números inteiros q e $q + 1$ em n partes iguais e tomamos r destas partes. Acompanhe na **Figura 3.1**, o exemplo de localização do número $\frac{11}{4}$. Temos que,

$$\frac{11}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{2 \cdot 4}{4} + \frac{3}{4} = 2 + \frac{3}{4}.$$

Depois desta discussão, podemos descrever geometricamente sobre uma reta todos os números racionais. De fato, considere uma reta orientada sobre a qual estão representados os números inteiros. Selecione dois números inteiros consecutivos, por exemplo, p e $p + 1$, veja a **Figura 3.2**.



Figura 3.2: Um intervalo genérico.

Para encontrar números racionais no intervalo definido pelos números p e $p + 1$, escolhamos um número natural n , dividimos o intervalo em n partes iguais. Cada ponto definido por uma destas divisões representa um número racional.

Note que o número de divisões n pode ser qualquer número natural (por exemplo $n = 10^{10^{10}}$). Este processo descreve todos os pontos da reta que representam números racionais entre p e $p + 1$. Agora fazendo p variar nos números inteiros cobrimos toda a reta. Este é o modo de localizar a posição de qualquer número racional.

Por outro lado, volte e observe o ponto a na **Figura 3.1**.

- Qual é a distância do ponto a ao ponto 0?

Ou, a mesma pergunta feita de dois modos distintos:

- Qual é o número que deve ser gravado no lugar de a ?

- Existe um número racional $\frac{m}{n}$ maior que 5 e menor que 6, tal que

$$a = \frac{m}{n}?$$

Como veremos com exemplos, ainda nesta aula, existem pontos na reta que não podem ser representados por números racionais. O ponto a na **Figura 3.1** poderia ser um destes pontos. Isto significaria que, a medida do segmento de reta cujos extremos são o ponto zero e o ponto a não pode ser expressa por um número racional. Volte a observar a **Figura 3.1**.

Atividade 3.1

- Encontre um número inteiro q tal que $q < -\frac{187}{13} < q + 1$.
- Desenhe a parte da reta onde estão localizados os números q e $q + 1$ e identifique a posição do número $-\frac{187}{13}$.

Números irracionais

Estamos em plena viagem exploratória pelo mundo dos números!

Temos motivação suficiente vendo a importância que os números representam na organização de nossa sociedade. Pitágoras no século V a.C., um dos maiores matemáticos que o mundo conheceu, apregoava: “os números governam o mundo”. Na concepção de Pitágoras, o conjunto de números que deveriam “governar o mundo” eram os números racionais. E já naquele tempo percebeu-se que isto não era suficiente. Vamos aos fatos:

Para Pitágoras, a beleza da estrutura dos números era que a unidade e suas frações eram suficientes para expressar toda a beleza do universo. Naquela época tão remota, a Matemática confundia-se com a religião. Pitágoras e seus seguidores formaram o que hoje denominamos irmandade. O fato sur-

preendente ocorreu quando um discípulo de Pitágoras de nome Hipaso, percebeu que a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem uma unidade, não pode ser expressa por um número racional.

Vamos direto aos fatos: veja a **Figura 3.3** onde representamos um triângulo retângulo ABC cujos catetos AB e AC medem 1.

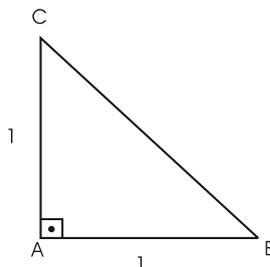


Figura 3.3: Triângulo retângulo de Hipáso.

Segundo o Teorema de Pitágoras temos que,

$$BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Hipaso chamou a atenção para o fato de que não existe um número racional cujo quadrado é 2. Isto é, para todo número racional $\frac{m}{n}$,

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 \neq 2.$$

A afirmação de Hipaso, foi extremo choque para Pitágoras, que não aceitou sua idéia de universo ser contrariada. Incapaz de refutar Hipaso, a história relata que Pitágoras usou seu poder na irmandade para condenar Hipaso à morte por afogamento.

- Mas por que não existe $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, tal que

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2?$$

Vamos manter o suspense! Antes precisamos de uma pequena preparação para responder à pergunta que acaba de ser formulada. Precisamos mostrar uma propriedade muito simples sobre os números naturais.

Proposição 3.1

Seja m um número natural. Se m^2 é par então m é par.

A propriedade sobre números naturais garantida pela proposição pode ser representada simbolicamente por

$$m^2 \text{ é par} \Rightarrow m \text{ é par},$$

Para provar a proposição 3.1, vamos dar um passo é preparatório.

Passo preparatório: Vamos provar que se m é ímpar então m^2 é ímpar.

Veja como é a prova. Se m é ímpar então $m = 2p + 1$, para algum $p \in \mathbb{N}$. Isto é, $m^2 = (2p + 1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$, evidenciando que m^2 é ímpar. Provamos então que

$$m \text{ ímpar} \Rightarrow m^2 \text{ ímpar}.$$

Tendo estabelecido o resultado preparatório voltamos à prova da proposição. Queremos provar que se m^2 é par então m é par. Em símbolos necessitamos provar a implicação

$$m^2 \text{ par} \Rightarrow m \text{ par}. \quad (3.1)$$

Mas, Cuidado!

Leia com atenção a afirmação 3.1 acima! Para qualquer afirmação que se faça, em particular para esta afirmação com a qual estamos trabalhando, existem somente duas possibilidades: a afirmação é falsa ou é verdadeira. Nosso trabalho é mostrar que é verdadeira (...) ou mostrar que ela não é falsa. Isto em Matemática é incrível! E veja como provar que a afirmação escrita em (3.1) não é falsa.

Suponha que é falsa. Então encontraremos algum número natural m tal que m^2 é par e m é ímpar (m^2 par \Rightarrow m ímpar). Uma situação destas pode existir? É claro que não. O passo intermediário, mostrou que se m é ímpar então m^2 é ímpar (m ímpar \Rightarrow m^2 ímpar). Juntando os raciocínios encontramos que

$$m^2 \text{ par} \Rightarrow m \text{ ímpar} \Rightarrow m^2 \text{ ímpar}.$$

Temos uma contradição, evidenciando que a implicação (3.1) não pode ser falsa. Portanto, a afirmação (3.1) é verdadeira.

Isto finaliza a prova da Proposição 3.1. \square

Agora estamos prontos para provar que, não existe um número racional que meça a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos lados medem a unidade. Isto é, não existe $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, tal que

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2. \quad (3.2)$$

O método de prova, usado na proposição 3.1, é chamado de método da contraposição. O método garante que para provar que $A \Rightarrow B$ é suficiente mostrar que a suposição que A é verdadeira e B é falsa induz uma contradição.

Na igualdade anterior podemos supor que $\frac{m}{n}$ é uma fração irredutível. Ou seja, m e n não possuem divisores comuns além da unidade. Agora, se existisse um número racional com as propriedades anteriores, então

$$m^2 = 2n^2.$$

Vamos em frente! Veja a igualdade acima. Ela diz que m^2 é par. Ora se m^2 é par então m é par (proposição 3.1). Isto é, $m = 2p$, para algum $p \in \mathbb{N}$. Então voltando à igualdade escrevemos

$$(2p)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4p^2 = 2n^2 \Rightarrow 2p^2 = n^2.$$

A última igualdade mostra que n^2 é par. Mas então n também é par (usamos aqui de novo a proposição 3.1). Mas daí, m é par e n é par. Uma contradição, pois sendo a fração $\frac{m}{n}$ irredutível não pode ser simplificada por 2. Isto mostra que a igualdade 3.2 não pode acontecer.

Conclusão: Existem medidas que não podem ser expressas por um número racional. Veja a **Figura 3.4**, que localiza sobre a reta orientada o número a , tal que $a^2 = 2$. Denotamos, simbolicamente, este número por $a = \sqrt{2}$ e o denominamos a raiz quadrada de 2.

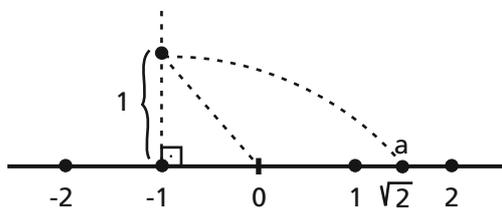


Figura 3.4: O número irracional $\sqrt{2}$.

UFA! Acabamos de subir uma pequena ladeira. Nesta posição um pouco mais elevada, a vista é larga e abrangente. Vale a pena recordar nossa subida e tirar algumas conseqüências.

- Qual foi o procedimento?

Encontramos o primeiro número irracional ao medirmos a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos lados medem 1. Isto foi possível porque provamos que, se a é o número que representa a medida da hipotenusa deste triângulo então

$$a \neq \frac{m}{n}, \text{ quaisquer que sejam } m, n \in \mathbb{Z}.$$

Denotamos $a = \sqrt{2}$ e encontramos nosso primeiro número irracional. Vamos às conseqüências. Observe que se $p \in \mathbb{Z}$ é um inteiro qualquer não nulo, então $p\sqrt{2}$ é também irracional. Vamos provar isto. Suponha, por absurdo, que $p\sqrt{2}$ é racional. Então, para algum m e n inteiros, com $n \neq 0$,

$$p\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{m}{n \cdot p}.$$

Isto implicaria que $\sqrt{2}$ é racional. Isto é uma contradição. Logo $p\sqrt{2}$ é irracional.

Conclusão: temos já um número infinito de números irracionais

$$\dots - 3\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, \dots$$

Afirmamos também que, para qualquer número natural n , $\frac{\sqrt{2}}{n}$ é um número irracional.

De fato, suponha por absurdo que $\frac{\sqrt{2}}{n} = \frac{p}{q}$, onde $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$. Então $\sqrt{2} = \frac{p \cdot n}{q}$ implicando que $\sqrt{2}$ seria racional. Esta contradição garante que $\frac{\sqrt{2}}{n}$ é irracional.

- Como representar na reta numérica $\frac{\sqrt{2}}{n}$?

Tomamos o segmento de reta cujos extremos são os pontos 0 (zero) e $\sqrt{2}$ e dividimos o segmento em n partes iguais. O ponto da divisão mais próximo de zero, representa $\frac{\sqrt{2}}{n}$. Veja na figura o ponto $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

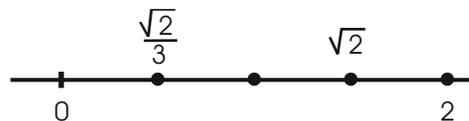


Figura 3.5

O mesmo tipo de argumento desenvolvido acima, é suficiente para provar que $\frac{p}{q}\sqrt{2}$ é um número irracional, onde $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$. Também é fácil de encontrar o ponto que representa $\frac{p}{q}\sqrt{2}$ na reta orientada. Veja como isto é realizado.

Primeiro, note que $\frac{p}{q}\sqrt{2} = p\left(\frac{\sqrt{2}}{q}\right)$. Em seguida, dividimos o segmento cujos extremos são os pontos representados pelo número zero e o número $\sqrt{2}$, e localizamos o ponto que representa $\frac{\sqrt{2}}{q}$. A partir daí, tomamos sucessivamente p destes segmentos um após o outro, para localizar o ponto que representa o número $p\left(\frac{\sqrt{2}}{q}\right)$. Veja na figura os números irracionais $\frac{3}{4}\sqrt{2}$ e $\frac{5}{4}\sqrt{2}$.

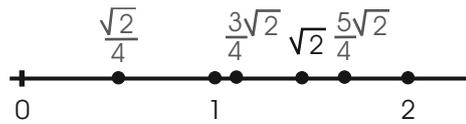


Figura 3.6

Atividade 3.2

Usando o Teorema de Pitágoras, determine as medidas x , y , z e w dos segmentos da **Figura 3.7**.

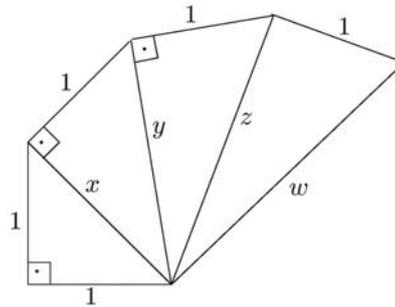


Figura 3.7

Encontramos o primeiro número irracional $\sqrt{2}$ como o número que fornece a medida de um segmento da reta. Esta é a única maneira de obter números irracionais.

Para nossos objetivos agora, podemos enunciar uma definição geométrica:

Definição 3.1

Um número é irracional quando ele é o valor da medida de um segmento de reta e que não pode ser escrito na forma $\frac{m}{n}$, onde m e n são números inteiros.

Nota: Na verdade, definimos acima os números irracionais positivos (uma vez que a medida de um segmento é positivo). Para acrescentar os números irracionais negativos, basta tomar os simétricos (negativos) dos números irracionais positivos.

Se denotarmos por \mathbb{I} o conjunto dos números irracionais, então \mathbb{R} ,

$$\mathbb{R} = \mathbb{I} \cup \mathbb{Q},$$

é o conjunto dos números reais.

O número π

Outra medida importante detectada na antigüidade e que não pode ser expressa por um número racional foi o número π .

Para entender, tome um círculo de diâmetro igual a 1 e force este círculo a rolar sem deslizamento ao longo de uma reta, como na **Figura 3.8**.

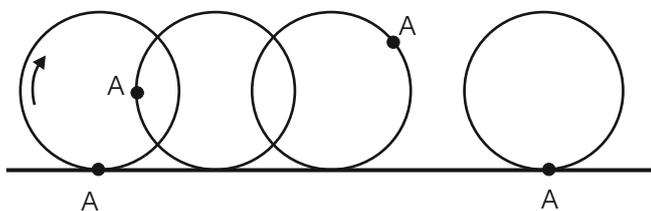


Figura 3.8: O perímetro do círculo.

O segmento de reta, compreendido entre duas posições consecutivas em que um ponto escolhido A toca a reta de rolagem, tem comprimento que denominamos π .

O número π é portanto o comprimento ou perímetro de um círculo cujo diâmetro mede 1.

O número π já era estudado à época do Oriente antigo e era lhe atribuído o valor aproximado de $\frac{256}{81} \simeq 3,16\dots$. Este dado histórico esta registrado no Papiro de Rhind (1650 a.C.).

O grande geômetra da época grega (séc IV a.C.), Arquimedes de Siracusa, desenvolveu métodos geométricos eficientes para calcular valores numéricos ainda mais próximos para π . Usando um polígono de 96 lados inscrito numa circunferência, encontrou $\pi \sim 3,1428$.

No entanto, foram precisos mais de 3400 anos para que, em 1882, o matemático inglês Ferdinand Lindeman pudesse provar que o número π é irracional.

Para encerrar a aula, queremos apresentar ainda dois resultados sobre existência de números irracionais.

Você pode concluir através da Atividade 2 que, para qualquer número natural m existe um segmento cuja medida l é tal que $l^2 = m$. Faz sentido, portanto, definir o comprimento destes segmentos por \sqrt{m} . Com esta definição, \sqrt{m} é a medida de um segmento e vale

$$\sqrt{m} \cdot \sqrt{m} = m.$$

O número \sqrt{m} é dito a raiz quadrada de m e uma questão relevante é a seguinte: dado um número natural m , decidir se \sqrt{m} é racional ou irracional.

Para encerrar esta Aula, provaremos que $\sqrt{3}$ e $\sqrt{2p}$ são números irracionais, se p é qualquer número natural ímpar.

Para provar estes resultados precisamos de preparação. Imitando a Proposição 3.1, vamos provar que:

Proposição 3.2

Seja m um número natural. Se m^2 é divisível por 3 então m é divisível por 3.

Prova: O que queremos provar é:

$$m^2 \text{ divisível por } 3 \Rightarrow m \text{ divisível por } 3.$$

Ora, se m^2 é divisível por 3, então

$$m^2 = 3q,$$

para algum número natural q . Agora, efetuando a divisão euclidiana de m por 3 encontramos que

$$m = 3k + r, \text{ onde } 0 \leq r < 3. \quad (3.3)$$

Isto é, $k > 0$ e o resto r é um dos números 0, 1 ou 2. Então,

$$3q = m^2 = (3k + r)^2 = 9k^2 + 6kr + r^2.$$

Ou seja,

$$q = 3k^2 + 2kr + \frac{r^2}{3} \Rightarrow \frac{r^2}{3} = q - 3k^2 - 2kr.$$

- O que mostra a última igualdade?

Do lado direito temos um número inteiro $q - 3k^2 - 2kr$. Então, do lado esquerdo, o número deve ser inteiro. Mas $0 \leq r < 3$. Isto é, $r = 0, 1$ ou 2 . Note que os valores $r = 1$ e $r = 2$ produzem para $\frac{r^2}{3}$ os valores não inteiros $\frac{1}{3}$ e $\frac{4}{3}$. Logo, $r = 0$ e em (3.3), escrevemos $m = 3k$. Portanto, m é divisível por 3.

□

Usando o resultado da Proposição 3.2, podemos provar que:

Proposição 3.3

O número $\sqrt{3}$ é irracional.

Prova: De fato, suponha, por absurdo, que $\sqrt{3}$ é um número racional. Então

$$\sqrt{3} = \frac{m}{n},$$

onde $\frac{m}{n}$ é uma fração irredutível com $n > 0$. Logo,

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = (\sqrt{3})^2 \Rightarrow m^2 = 3n^2.$$

A última igualdade mostra que m^2 é divisível por 3. Então a Proposição 3.2 garante que m é divisível por 3. Isto é, $m = 3q$, para algum número natural q . Então

$$m^2 = 3n^2 \Rightarrow (3q)^2 = 3n^2 \Rightarrow 3q^2 = n^2.$$

Então n^2 é divisível por 3. De novo, a Proposição 3.2 garante que n é divisível por 3. Mas isto não pode ocorrer, porque m e n divisíveis por 3 contraria o fato que $\frac{m}{n}$ é uma fração irredutível. Este absurdo prova que

$$\sqrt{3} \neq \frac{m}{n},$$

para quaisquer números inteiros m e n . Portanto, $\sqrt{3}$ é irracional.

□

Proposição 3.4

Se p é um número natural ímpar então $\sqrt{2p}$ é irracional.

De fato, vamos supor, por absurdo, que existe uma fração irredutível $\frac{m}{n}$, $n > 0$, tal que

$$\sqrt{2p} = \frac{m}{n}. \quad (3.4)$$

Então,

$$2p = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \Rightarrow m^2 = 2pn^2.$$

logo m^2 é par. Pela Proposição 3.1, m é também par. Isto é, $m = 2k$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Logo,

$$(2k)^2 = 2pn^2 \Rightarrow 4k^2 = 2pn^2 \Rightarrow 2k^2 = pn^2.$$

Isto mostra que pn^2 é par. Mas como p é um número ímpar, para pn^2 ser par a única possibilidade é que n^2 seja par. Pela Proposição 3.1, n^2 sendo par temos que n é par. Ora, m par e n par implica que $\frac{m}{n}$ é redutível (podemos dividir por 2). Isto é uma contradição. Logo não é possível escrever a igualdade (3.4) e $\sqrt{2p}$ é um número irracional.

Atividade 3.3

Prove com auxílio da Proposição 3.4, que são irracionais os números:

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

b) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$

Exercícios

- Assinale verdadeiro (V) ou falso (F) para cada uma das afirmações abaixo e justifique sua resposta.
 - Se r e q são números racionais então $r + q$ é um número racional.
 - Se r e q são números racionais e ambos não inteiros então $r - q$ pode ser um número inteiro.
 - Se r e q são números racionais, com $q \neq 0$, então $r + q\sqrt{2}$ é sempre irracional.
 - Existem infinitos números irracionais.
- A partir de dois segmentos de reta de medidas m e n , mostre como construir um segmento de medida \sqrt{mn} .
- Prove que $\sqrt{2} + \sqrt{p}$ é um número irracional se p é um número primo.

Respostas

Atividade 3.1

$$\text{a) } \frac{-187}{13} = -15 + \frac{8}{13} \Rightarrow, \quad q = -15$$

$$\text{Atividade 3.2 } x = \sqrt{2}, \quad y = \sqrt{3}, \quad z = \sqrt{4} = 2, \quad w = \sqrt{5}$$

Atividade 3.3

- a) Escreva $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{m}{n}$ e eleve ao quadrado. Use a proposição 3.4.
b) Mesma sugestão de a).

Exercícios

- a) V b) V c) V d) V
- Construir um semi-círculo cujo diâmetro mede $m + n$. Sejam A e B os pontos extremos do diâmetro e C um ponto interior ao segmento AB de modo que $AC = m$ e $BC = n$. A semi-reta com origem em C , ortogonal a AB corta o semi-círculo no ponto D . Então CD é o segmento procurado.
- Suponha que $\sqrt{2} + \sqrt{p} = \frac{m}{n}$ eleve ao quadrado e use a proposição 3.4.

Aula 4 – Números reais – representação decimal

Objetivos

- entender os números reais positivos como medida de um segmento da reta real;
- encontrar representações decimais para números racionais;
- distinguir entre os números racionais, aqueles que possuem representação decimal finita daqueles que só possuem representação decimal infinita;
- associar representação decimal infinita e periódica a números racionais;
- entender que um número irracional tem uma representação decimal infinita e não periódica.

Na aula anterior tomamos contato com o primeiro número irracional. Este número foi representado pelo símbolo $\sqrt{2}$ e expressa a medida do comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem a unidade. Este resultado mostrou que os números racionais não são suficientes para medir o comprimento de todos os segmentos. É preciso mais uma vez aumentar o nosso conjunto de números.

Recorde como começamos! Necessidade de contar objetos levou à idéia abstrata do conjunto dos números naturais,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Em seguida, devido à necessidade de expressar contagem negativa (perda, prejuízo) chegamos aos números inteiros \mathbb{Z} ,

$$\mathbb{Z} = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Como $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, o que fizemos foi uma ampliação do conjunto \mathbb{N} .

Indo mais além, a necessidade de considerar partes da unidade levou à formulação dos números racionais,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0 \right\}.$$

Foi mais uma ampliação na nossa capacidade de medir. E neste nível atingido temos que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

No entanto, com a impossibilidade de exprimir o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem uma unidade, por um número racional, somos levados a promover nova ampliação. Ao conjunto dos números racionais \mathbb{Q} , devemos adicionar o conjunto dos números irracionais \mathbb{I} .

- E quais são todos estes números irracionais?

Apelamos para nosso modelo usual, uma reta orientada onde estão localizados os números racionais. Neste modelo os números irracionais são interpretados como medida de segmentos que não podem ser medidos pelos números racionais. Juntando ao conjunto dos números racionais \mathbb{Q} ao conjunto dos números irracionais \mathbb{I} , chegamos ao conjunto dos números reais \mathbb{R} . Então

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Nesta aula vamos aprofundar um pouco nosso conhecimento sobre os números irracionais e por conseqüência sobre os números reais.

Para motivar o desenvolvimento lanço uma pergunta:

- Qual é o comprimento do maior lado da mesa de sua sala?

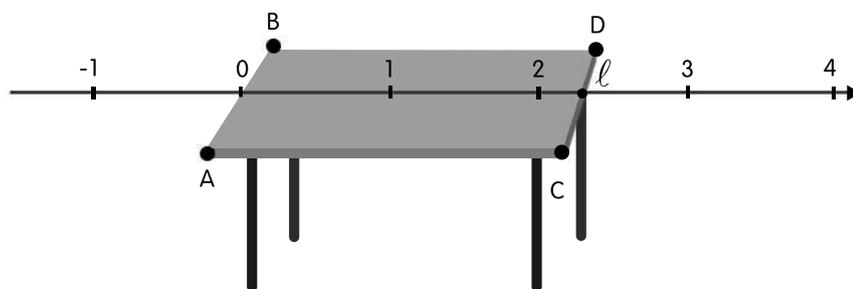


Figura 4.1: Medida da largura da mesa I.

Vamos imaginar que a mesa seja retangular, como ilustrada na **Figura 4.1**. Sobre a mesa está representada uma reta r orientada sobre a qual estão localizados os números inteiros.

Note que a reta r está posta perpendicularmente ao menor lado AB da mesa e o ponto 0 (zero) está localizado sobre este lado. Suponha ainda que o ponto 1 também esteja estrategicamente localizado, de modo que o comprimento do segmento cujos extremos são 0 e 1 vale um metro. Este segmento é o segmento unidade U .

Também, o ponto l , localizado sobre a reta e sobre o segmento CD , representa um número que definirá a medida do comprimento da mesa. Certamente, a medida l será superior a dois metros e inferior a três metros.

- Em que circunstâncias podemos garantir que l é um número racional?

Existe uma resposta muito simples a esta pergunta. Pense um pouco, antes de ler a resposta.

Resposta: O número l é racional se for possível dividir o segmento de extremos 2 e 3 em n partes iguais (n um número natural bem escolhido) de modo que um ponto da divisão caia sobre l .

Para exemplificar uma possibilidade, suponha que após a divisão do segmento de extremos 2 e 3 em 512 partes iguais, um dos pontos da subdivisão cai sobre o ponto l e este é o ponto número 204, quando contamos as subdivisões da esquerda para a direita. Então

$$l = 2 + \frac{204}{512} = \frac{1024 + 204}{512} = \frac{1228}{512} = \frac{307}{128},$$

que é um número racional.

Por outro lado, se a medida l é representada por um número irracional, então para toda divisão do intervalo de extremos 2 e 3 em n partes iguais, nenhum ponto das subdivisões encontradas coincidirá com o ponto l . Esta situação ocorre, por exemplo, se o comprimento l da mesa é $2\sqrt{2}$.

Vamos explorar um pouco esta possibilidade de l ser igual a $2\sqrt{2}$. É claro que a medida $2\sqrt{2}$ metros para a largura da mesa é extremamente precisa, mas nunca utilizada na prática.

Imagine que você está numa loja de móveis e pergunta ao vendedor a largura de uma mesa em exposição na vitrine. Nunca o vendedor responderá $2\sqrt{2}$ metros. Ele responderá uma medida racional muito próxima de $2\sqrt{2}$. Como isto acontece? Como se expressa no dia a dia esta medida? Bem, o vendedor da loja lança mão de um “metro”. Este instrumento de trabalho é uma barra ou régua de madeira expressando a unidade de comprimento usual denominada metro. Este metro está dividido em 10 partes iguais, cada uma destas partes definindo um decímetro e cada decímetro aparece dividido em 10 partes iguais, definindo um centímetro. Se o metro for especial, pode ainda dividir o centímetro em 10 partes iguais, definindo um milímetro.

A unidade U de medida usada pelo vendedor é o metro. A relação entre as outras medidas pelo fracionamento estão assim relacionadas:

$$1 m = 10 dm, 1 dm = 10 cm, 1 cm = 10 mm.$$

Ou ainda,

$$1 dm = \frac{1}{10} m, 1 cm = \frac{1}{100} m, 1 mm = \frac{1}{10^3} m.$$

PRÉ-CÁLCULO

Para medir então o comprimento l da mesa, o vendedor anota quantas vezes, no máximo, o metro cabe no segmento AC (comprimento da mesa), veja a **Figura 4.1**. Isto é feito, colocando sucessivamente o metro sobre a mesa a partir do ponto 0 (zero) em direção ao ponto l (sem justapor as medidas). Depois o vendedor verifica quantas vezes, no máximo, cabe no segmento restante, o decímetro, repetindo a operação para os centímetros e depois para os milímetros.

Agora vamos usar fortemente a suposição que o comprimento da mesa é $l = 2\sqrt{2}$. Se você tem uma máquina de calcular, veja que valor a máquina oferece para $2\sqrt{2}$, ou consulte a lateral desta página. Então, ao medir o comprimento do segmento L , que representa a largura da mesa, veja a **Figura 4.2**, o vendedor constatou o seguinte:

Uma máquina de calcular mostra no visor o resultado da operação $2 \times \sqrt{2}$.



com 7 dígitos de aproximação.
 $2\sqrt{2} \sim 2,8284271$

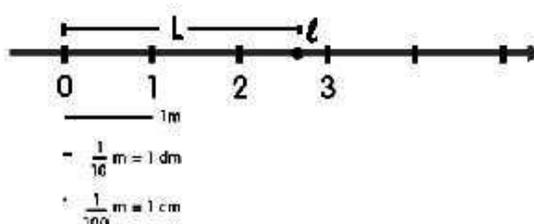


Figura 4.2: Medida da largura da mesa II.

- a) No segmento L cabem 2 metros, mas 3 metros excedem. Então 2 metros é a primeira aproximação grosseira de l .
- b) No segmento que resta a ser medido, cujos extremos são os pontos 2 e o ponto l , cabem 8 vezes $\frac{1}{10} m$, mas 9 vezes $\frac{1}{10} m$ excedem. Então

$$l_1 = 2 + \frac{8}{10} = 2,8$$

é uma medida próxima de l . O erro desta medida é inferior a $\frac{1}{10} m$. Note que o valor de referência 8 usado está inscrito no visor da máquina de calcular.

- c) $l_1 = 2,8$ é um ponto muito próximo de l e à esquerda de l . Entre l_1 e l não cabe $\frac{1}{10} m = 1 dm$. No segmento cujos extremos são os pontos l_1 e l cabem $\frac{2}{100} m = 2 cm$. Mas $\frac{3}{100} m = 3 cm$ excedem.

Então

$$l_2 = 2 + \frac{8}{10} + \frac{2}{100} = 2,82$$

é uma medida aproximada para l , com erro inferior a $\frac{1}{100} m = 1cm$.

- d) No segmento cujos extremos são os pontos l_2 e l cabem $\frac{8}{1000}m = 8\text{ mm}$, mas $\frac{9}{1000}m = 9\text{ mm}$ excedem.

Assim,

$$l_3 = l_2 + \frac{8}{1000} = 2 + \frac{8}{10} + \frac{2}{100} + \frac{8}{1000} = 2,828,$$

é uma medida aproximada de l com erro inferior a $\frac{1}{1000}m = \frac{1}{10^3}m = 1\text{ mm}$.

Em conclusão,

$$l \sim 2,828\text{ m}$$

é a medida aproximada do comprimento da mesa, com erro inferior a um milímetro. E quem se importa com erro de 1 milímetro para medida do comprimento de uma mesa? Portanto, em termos práticos substituímos o número irracional $2\sqrt{2}$, pelo número racional 2,828. Isto é

$$l \simeq 2,828 = \frac{2828}{1000} = \frac{707}{250}.$$

Mas, note. Se o vendedor tivesse meios técnicos continuaria usando $\frac{1}{10^4}m$, $\frac{1}{10^5}m$ etc ... e obtendo valores racionais cada vez mais próximos de l . Por exemplo,

$$l \sim 2,82842712,$$

é uma medida de l com erro menor que $\frac{1}{10^8} = \frac{1}{100000000}$.

Moral da história: Desconfiem quando o noticiário da televisão diz que a temperatura em Brasília atingiu máxima de 39,4 graus no último verão. Este número não é exato. Há probabilidade desta medida de temperatura ser uma aproximação racional do número irracional $28\sqrt{2}$. Neste caso, a notícia um pouco mais exata seria que a temperatura máxima do último verão em Brasília foi de 39,59797968 graus. Esta desconfiança sobre a notícia tem fundamento. Mais tarde, em nossos estudos, poderemos provar que “existem muito mais números irracionais que números racionais”.

Exemplo 4.1

Existem números irracionais muito próximos do número irracional $2\sqrt{2}$. Veja a prova que $a = 2\sqrt{2} + \frac{1}{500}$ é um número irracional.

De fato, suponha por absurdo que a seja racional. Então $a = \frac{m}{n}$ para $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$. Logo

$$2\sqrt{2} + \frac{1}{500} = \frac{m}{n}.$$

Assim

$$2\sqrt{2} = \frac{m}{n} - \frac{1}{500} = \frac{500m - n}{500n},$$

Logo

$$\sqrt{2} = \frac{500m - n}{1000n}.$$

- O que mostra a igualdade anterior?

No segundo membro temos no numerador $500m - n$, que é um número inteiro e no denominador $1000n$, outro número inteiro. Isto leva à conclusão que o segundo membro é um número racional. No entanto, o primeiro membro é $\sqrt{2}$, um número irracional. Isto é uma contradição. Um número irracional não pode ser igual a um número racional.

- O que nos levou a esta contradição?

Foi o fato de supormos, no início de nossa prova que $2\sqrt{2} + \frac{1}{500}$ é um número racional. Então não tem saída, $2\sqrt{2} + \frac{1}{500}$ é um número irracional.

Atividade 4.1

- Use argumentos como no exemplo 4.1 acima para provar o seguinte: Se i é um número irracional e n é um número inteiro então $i + n$ é um número irracional.
- Represente numa reta numérica os números 0 (zero), 1 e os números do conjunto $\{m + \sqrt{2}; m \in \mathbb{Z}\}$.

Representação decimal de números reais positivos

A motivação central desta aula é a representação decimal dos números reais.

Considere uma reta real, como na **Figura 4.3**, onde localizamos um ponto, sobre o qual está identificado o número real b . Temos dois segmentos em destaque, o segmento unidade U , cujos extremos são os pontos (números) 0 (zero) e 1 e o segmento B cujos extremos são os pontos (números) 0 (zero) e b .

Vale a pena destacar que

$$\text{medida}(U) = 1 \quad \text{e} \quad \text{medida}(B) = b.$$

Isto é, os comprimentos dos segmentos U e B são dados pelos números reais 1 e b , respectivamente.

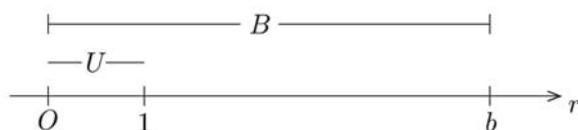


Figura 4.3: Os segmentos B e U .

Vamos medir o segmento B e identificar o número real b . Nesta direção vamos encontrar a representação decimal do número real b . Temos que considerar algumas possibilidades.

1ª possibilidade: b é um número inteiro, por exemplo, $b = 3$. Neste caso,

$$b = 3,0000\dots$$

é a representação decimal de b .

2ª possibilidade: b é um número racional não inteiro ou irracional e, neste caso, também vamos definir o valor de b através de sua representação decimal. Suponha que o ponto b tem localização na reta como na **Figura 4.4**.

Procedemos do seguinte modo. Definimos U como unidade de medida, U mede 1. Você pode imaginar U como sendo o metro do vendedor da loja.

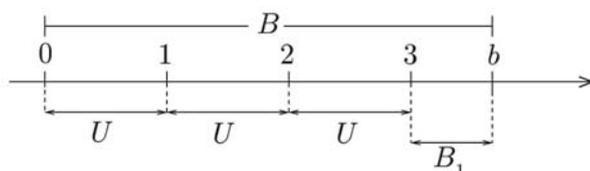


Figura 4.4: A medida do segmento B .

Encaramos o segmento B como um caminho a ser percorrido de 0 (zero) até b . Ou ainda, um caminho que queremos pavimentar ou ladrilhar linearmente com varetas. Varetas são segmentos cujos comprimentos são baseados na unidade U e em suas divisões decimais.

Vamos olhar este processo de pavimentar com varetas o caminho retilíneo de 0 até b como uma brincadeira. Expliquemos melhor nosso jogo.

Temos tantas varetas quanto quisermos de comprimento 1. Temos 9 varetas de comprimento $\frac{1}{10}$, 9 varetas de comprimento $\frac{1}{100}$, 9 de comprimento $\frac{1}{10^3}$, ..., 9 de comprimento $\frac{1}{10^n}$, ... e assim por diante.

- Mas qual é a regra da brincadeira?

Regra: A pavimentação começa no ponto 0 (zero) e vai em direção ao ponto b . Usando em ordem, primeiro as varetas de comprimento 1, depois as de comprimento $\frac{1}{10}$, depois as de $\frac{1}{100}$ e, assim por diante. Só paramos de usar um tipo de vareta se esta não couber mais no caminho, isto é, a vareta se colocada ultrapassa o ponto b . Nesta situação, passamos a usar o tipo seguinte de vareta de comprimento 10 vezes menor.

Para facilitar a linguagem, a vareta (segmento) unidade é denotada por U . Cada uma das varetas seguintes de comprimentos $\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \dots, \frac{1}{10^n}, \dots$, são denotadas por $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n, \dots$. Dentro das regras do jogo, em primeiro lugar, usamos o tipo maior de varetas, representadas pelo segmento unidade U . Acompanhe pela **Figura 4.4** e observe que encontramos que cabem 3 vezes o segmento U no segmento B . Isto significa que podemos escrever que

$$b \sim 3.$$

Isto é, b é um número real próximo a 3. Mas, b é superior a 3, uma vez que se encontra mais à frente no sentido de percurso da reta real. Ou dito em outras palavras, do ponto em que não podemos mais usar varetas de comprimento 1 até chegar ao ponto b , temos ainda um segmento restante a ser percorrido (pavimentado). Este segmento restante está identificado com o segmento B_1 e representado na **Figura 4.4**.

Para cobrir B_1 lançamos mão dos segmentos (varetas) U_1 de comprimento $\frac{1}{10}$. Note que possuímos 9 destas varetas U_1 . E não precisaremos mais que estas, uma vez que 10 segmentos de comprimento $\frac{1}{10}$ resultam comprimento 1 e B_1 tem medida inferior à unidade. Veja a **Figura 4.5**.

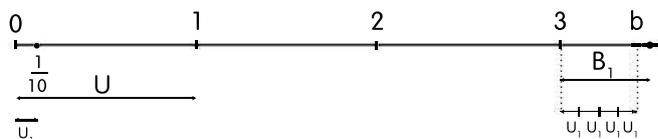


Figura 4.5: Medida do segmento B_1 .

Trabalhando agora com hipóteses, suponha possível colocar 4 segmentos U_1 no segmento restante B_1 e que, no entanto, 5 segmentos U_1 seriam excessivos para cobrir B_1 . Neste caso, escrevemos

$$b \sim 3 + \frac{4}{10} = \frac{30 + 4}{10} = \frac{34}{10}.$$

Ou,

$$b \sim 3 + \frac{4}{10} = 3 + 0,4 = 3,4.$$

Isto é, b pode ser medido aproximadamente por 3,4. Além do mais, o erro que cometemos ao escrever ou ao identificar b com 3,4 é inferior a $\frac{1}{10}$.

Já usamos 3 varetas de comprimento 1 e 4 varetas de comprimento $\frac{1}{10}$. Mas ainda não chegamos lá! Então lançamos mão dos segmentos (varetas) U_2 de comprimento $\frac{1}{100}$ para pavimentar mais à frente nosso caminho até o ponto b . Suponha que podemos colocar 7 segmentos (varetas) U_2 de comprimento $\frac{1}{100}$ no buraco que falta para pavimentarmos o caminho até o ponto b , mas que 8 destes segmentos (varetas) ultrapassam b . Então podemos escrever

$$b \sim 3 + \frac{4}{10} + \frac{7}{100} = \frac{300 + 40 + 7}{100} = \frac{347}{100}.$$

Ou,

$$b \sim 3,47.$$

O valor obtido é muito próximo de b . Ao trocarmos b por 3,47, estaríamos cometendo um erro inferior a $\frac{1}{100}$.

Vamos refletir um pouco sobre esta nossa pavimentação. Temos apenas duas situações futuras a considerar:

1ª situação: Ao prosseguirmos no processo, e tendo usado sucessivamente as subdivisões U_1, U_2, U_3, \dots da unidade U , chegamos a uma situação que ao usarmos varetas de comprimento $\frac{1}{10^n}$, alcançamos exatamente o ponto b .

Vamos considerar um exemplo hipotético desta situação para tirarmos conclusões. Vamos supor, por exemplo, que ao usarmos varetas U_5 de comprimento $\frac{1}{10^5}$ fechamos com

$$b = 3 + \frac{4}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{1}{10^5}.$$

Neste caso,

$$b = 3,47251$$

é a representação decimal do número b .

2ª situação: O processo nunca termina. Ao usarmos sucessivamente as varetas U_1, U_2, \dots, U_n , estas varetas não dão conta de fechar exatamente o processo. Um último segmento (vareta) U_n não atinge o ponto b , enquanto que mais um segmento U_n ultrapassa b . Neste caso, só resta a opção de continuar indefinidamente.

Por exemplo, poderíamos encontrar a situação em que escreveríamos

$$b = 3 + \frac{4}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{0}{10^5} + \frac{8}{10^6} + \frac{2}{10^7} + \dots$$

Ou

$$b = 3,4785082\dots$$

Os pontinhos significam que o processo continua. A igualdade acima expressa a representação decimal de b .

Resumo

Voltamos à reta real orientada como indicada na **Figura 4.6**, onde estão os pontos 0 (zero), 1 e um ponto arbitrário b , para um resumo.

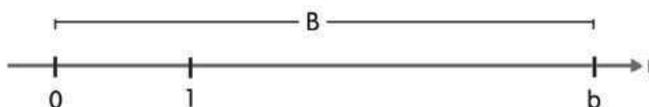


Figura 4.6: Volta ao segmento B .

Note que b é um número real que expressa a medida do segmento B de extremos 0 (zero) e b .

O que vimos na nossa discussão anterior é que dependendo da posição de b , podemos encontrar dois casos:

1^a **caso:** b se expressa como uma soma de um número finito de parcelas,

$$b = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n},$$

onde a_0 é um número inteiro maior ou igual a zero e a_1, a_2, \dots, a_n são números inteiros maiores ou iguais a zero e menores ou iguais a 9.

Neste caso b se escreve como

$$b = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n. \tag{4.1}$$

Note que

$$b = \frac{a_0 \times 10^n + a_1 \times 10^{n-1} + a_2 \times 10^{n-2} + \dots + a_n}{10^n}. \tag{4.2}$$

Portanto, b é um número racional.

2º caso: b se expressa como soma de um número infinito de parcelas,

$$b = b_0 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \dots + \frac{b_m}{10^m} + \dots, \quad (4.3)$$

onde b_0 é um número inteiro maior ou igual a zero e $b_1, b_2, \dots, b_m, \dots$ são números inteiros maiores ou iguais a zero e menores ou iguais a 9.

Ou seja, podemos escrever

$$b = b_0, b_1 b_2 b_3 \dots b_m \dots \quad (4.4)$$

Neste caso não acontece a possibilidade de que a partir de um certo índice m todos os dígitos $b_{m+1}, b_{m+2}, b_{m+3}, \dots$ etc sejam nulos.

E dentro do quadro que até agora pintamos, ficam duas questões. A primeira é identificar os números racionais cuja representação decimal é finita. A segunda questão é identificar dentre os números cuja representação decimal é infinita, aqueles que são racionais.

- Vamos nos dedicar a este assunto?

Números racionais com representação decimal finita

Do que vimos até agora existem números reais b , cuja representação decimal é finita. Isto é,

$$b = a_0, a_1 a_2 \dots a_n,$$

onde $a_0 \in \mathbb{Z}$ e a_1, a_2, \dots, a_n são números inteiros maiores ou iguais a zero e menores ou iguais a 9. Estes números são racionais, como expressa a fórmula 4.2.

Interessante notar que o denominador de (4.2) é $10^n = 2^n \times 5^n$. Isto é, na fatoração do denominador aparecem apenas os primos 2 e 5.

Note que o número racional que aparece em (4.2) pode não ser a expressão de b como uma fração irredutível. Isto acontece se o numerador

$$10^n a_0 + 10^{n-1} a_1 + 10^{n-2} a_2 + \dots + a_n,$$

for divisível por 2 ou por 5.

De qualquer modo, após as simplificações a partir de (4.2), a expressão irredutível de $b = \frac{m}{n}$ é tal que o denominador n de b tem como fatores primos no máximo os números 2 e 5.

Isto motiva uma pergunta e induz a resposta.

- Que números racionais têm representação decimal finita?

Resposta: Aqueles números racionais $b = \frac{m}{n}$, que escritos na forma de uma fração irredutível, o denominador tem como fatores primos, no máximo, o número 2 e o número 5.

Exemplo 4.2

Vamos encontrar a representação decimal de $b = \frac{18}{25}$.

Vemos que a fração é irredutível e a fatoração do denominador fornece $25 = 5^2$. Logo b tem representação decimal finita. Devemos encontrar um denominador como potência de 10. Escrevemos

$$b = \frac{18 \times 4}{25 \times 4} = \frac{72}{100} = \frac{70 + 2}{100} = \frac{70}{100} + \frac{2}{100} = \frac{7}{10} + \frac{2}{10^2}.$$

Logo $b = 0,72$ é a representação decimal.

Números racionais com representação decimal infinita

Vimos em (4.3) e (4.4), a possibilidade da representação decimal de um número se expressar através de uma soma onde comparecem um número infinito de parcelas não nulas. Veja (4.3).

- Tem sentido somas com uma infinidade de parcelas?

A resposta é sim. Estas somas chamam-se séries numéricas e podemos (dependendo da natureza da série) associar um número como soma da série. Só podemos dar sentido à uma soma com infinito número de parcelas se a soma for convergente. Este é um assunto a ser tratado em Cálculo 1. Adiantamos que somas com infinitas parcelas (ou séries) como as escritas em (4.3) são convergentes e então podemos associar um número real à soma.

- Qual é a representação decimal de um número racional $b = \frac{m}{n}$, onde a fração que expressa o número é irredutível e o denominador n possui fatores primos distintos de 2 e 5?

A resposta a esta pergunta pode ser encontrada se olharmos como fica a representação decimal de números racionais como

$$b = \frac{5}{7} \text{ e } c = \frac{19}{11}.$$

As mais elementares séries convergentes são as progressões geométricas de razão positiva e inferior a unidade. Por exemplo, se $a > 0$ e $0 < r < 1$ então $a + \frac{a}{r} + \frac{a^2}{r^2} + \dots + \frac{a^n}{r^n} + \dots = \frac{a}{1-r}$.

Por exemplo,
 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 2$

Para encontrar a representação decimal, usamos repetidas vezes o algoritmo de Euclides para a divisão de números inteiros,

$$\begin{array}{r}
 50 \\
 \rightarrow 10 \\
 30 \\
 20 \\
 60 \\
 40 \\
 50 \\
 \rightarrow 10 \\
 30
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \overline{7} \\
 0,71428571
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 19 \\
 \rightarrow 80 \\
 30 \\
 \rightarrow 80 \\
 30 \\
 \rightarrow 80
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \overline{11} \\
 1,72727
 \end{array}$$

Olhe detalhadamente os exemplos acima e encontre o caminho para a resposta. Os números racionais que tem representação decimal com infinitos algarismos têm na representação decimal obrigatoriamente a partir de uma certa posição, um bloco de algarismos que se repete periodicamente. Nos exemplos tratados

$$\frac{5}{7} = 0,71428571\dots \qquad \frac{19}{11} = 1,7272\dots$$

Para $\frac{5}{7}$ o bloco periódico é 714285 e para $\frac{19}{11}$ o bloco é 72. Podemos usar uma notação simplificada nestes casos, e escrever

$$\frac{5}{7} = 0,\overline{714285} \text{ e } \frac{19}{11} = 1,\overline{72},$$

onde a barra identifica o bloco de algarismos que se repete indefinidamente.

Com estes exemplos estudados, podemos responder como é a representação decimal de um número racional $b = \frac{m}{n}$, escrito em forma de fração irredutível e onde n possui fator primo distinto de 2 ou 5. De fato, como motivado nos exemplos concretos que acabamos de examinar acima, após efetuarmos a divisão euclidiana repetida de m por n , os números que aparecem como restos na divisão estão necessariamente no conjunto $\{1, 2, 3, \dots, n-1\}$. Isto ocorre porque o resto é inferior ao divisor n . Ora, como o processo é infinito, o resto deve se repetir uma primeira vez no processo de divisão. A partir da primeira repetição no resto, tudo acontece de modo automático, repetindo os algarismos no quociente.

Reexamine os exemplos anteriores. No número racional $\frac{5}{7}$, ao dividir 5 por 7 encontramos o resto 1 repetindo uma primeira vez, definindo a repetição do bloco periódico 714285 no quociente. No número racional $\frac{19}{11}$ o resto que se repete pela primeira vez é o resto 8. Esta repetição determina o bloco periódico 72 no quociente.

Números irracionais e representação decimal infinita

Depois das considerações anteriores temos a seguinte conclusão: Um número irracional é exatamente aquele que tem na sua representação decimal infinitos algarismos e nenhum bloco de algarismos repetindo periodicamente.

Conclusão

A representação decimal

$$b = a_0, a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} \dots$$

de um número real é como fosse seu DNA, dois números diferentes tem representações decimais diferentes.

Exercícios

1. Encontre a representação decimal dos seguintes números:

a) $\frac{-27}{12}$ b) $\frac{-135}{21}$ c) $\frac{67}{15}$ d) $\frac{329}{5}$ e) $\frac{7}{10}$

2. Coloque em ordem crescente os números racionais

$$-3, \overline{217}, 0,272, \frac{13}{29}, -3,22$$

3. Calcule o número resultante das operações abaixo e o expresse na representação decimal.

$$\frac{1,3 - \frac{1}{5}}{5} - \frac{0,35}{1,4}$$

4. Apenas examinando o denominador das frações indique quais dos números racionais tem representação decimal finita.

a) $\frac{3041}{238}$ b) $\frac{711}{60}$ c) $\frac{1}{220}$ d) $-\frac{6}{60}$

5. Responda falso (F) ou verdadeiro (V) justificando a resposta.

(a) Números reais muito próximos de 2 são racionais.

(b) Se b é um número irracional então $\frac{1}{b}$ é irracional.

(c) Se s é um número irracional positivo então s^2 é um número racional.

6. Se a é um número real positivo e $r = \frac{1}{a} + 5$, calcule o valor de $\frac{1}{r}$.

7. Construa as representações decimais de $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$.
8. Baseado na resposta da questão 7 e no algoritmo de Euclides, o que você pode deduzir da expansão decimal de um número racional positivo representado pela fração irredutível $\frac{p}{3}$?

Respostas das atividades

Atividade 4.1

- a) Se $i + n$ é racional então $i + n = \frac{p}{q}$, onde p e q são inteiros e $q \neq 0$. Daí, que $i = \frac{p}{q} - n = \frac{p - nq}{q}$. A equação mostra que i é racional, o que é um absurdo. Logo, $i + n$ é irracional.
- b) Localize antes o número $\sqrt{2}$ e após todos os números $m + \sqrt{2}$.

Respostas dos exercícios

1. a) $-2,25$, b) $-6, \overline{428571}$, c) $4,4\overline{6}$, d) $65,8$ e) $0,7$

2. $-3,22 < -3, \overline{217} < 0,272 < \frac{13}{29}$

3. $-0,03$

4. b) e d)

5. a) F $2 + \frac{\sqrt{2}}{n}$ é irracional para todo n .

b) V Se b não se escreve como $\frac{m}{n}$, o mesmo é verdade para $\frac{1}{b}$.

c) F $s = \sqrt{2} + 1$ é irracional e $s^2 = 2\sqrt{2} + 3$ é também irracional.

6. $\frac{1}{r} = \frac{a}{1 + 5a}$

7. $\frac{1}{3} = 0, \overline{3}$, $\frac{2}{3} = 0, \overline{6}$

8. O algoritmo de Euclides permite escrever $p = 3m + r$ onde $r = 1$ ou $r = 2$. Logo $\frac{p}{3} = m + \frac{r}{3}$. Então $\frac{p}{3} = m, \overline{3}$ ou $\frac{p}{3} = m, \overline{6}$.

Conclusão: O período $\frac{p}{3}$ tem comprimento 1 e o algarismo do bloco periódico é 3 ou 6.

Aula 5 – Números reais: potências, radicais e expressões numéricas

Objetivos

Depois de trabalhar esta aula, você:

- compreenderá os conceitos de potenciação e radiciação de números reais;
- estará apto a resolver ou simplificar expressões numéricas.

Você já deve ter experiência desde o Ensino Fundamental e Médio de lidar com o assunto que iniciamos nesta aula: potenciação.

De um lado temos uma questão de notação. Quando escrevemos, por exemplo 3^4 , estamos expressando em símbolos e abreviadamente o produto $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. Notamos vantagem nesta convenção. Imagine se tivermos que expressar através de produto de fatores 3^{500} . É muito fatigante! Daí, o poder da notação.

Doutro lado, o estudo de potências leva, com o aprofundamento, à consideração de importantes classes de funções. Mais especialmente, as funções exponenciais e funções logarítmicas entre outras. Será então o momento de estudarmos funções como e^x , $\log x$, x^n e $x^{m/n}$.

Nesta aula, vamos desenvolver as idéias mais simples de potenciação, no entanto, fundamentais.

Potências de um número real

Antes da primeira definição é bom você recordar nossa escolha. O conjunto dos números naturais não contem o zero. Isto é, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Definição 5.1

Seja b um número real.

- a) Se n é um número natural então

$$b^n = b \cdot b \cdot \dots \cdot b \quad (n \text{ fatores iguais a } b).$$

b) Se $b \neq 0$ e m é um número inteiro negativo,

$$b^m = (b^{-1})^{-m} = \left(\frac{1}{b}\right)^{-m} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b} \cdot \dots \cdot \frac{1}{b}.$$

Acima temos um produto com $-m$ fatores. Note que $-m > 0$.

c) Se $b \neq 0$ então $b^0 = 1$.

Notas

- 1) Na definição 5.1, b é chamado a base e n , m e 0 (zero) são os expoentes.
- 2) Observe, na definição 5.1, a questão da abrangência dos números reais que servem de base. No item a) b é qualquer número real; nos itens b) e c) é necessária à condição $b \neq 0$.

Vamos a alguns exemplos!

Exemplo 5.1

$$\text{a) } \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \left(-\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^{-4} &= \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^4 = \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}\right) = \\ &= \frac{25}{2} \cdot \frac{25}{2} = \frac{625}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{c) } (3, 12)^0 = \left(\frac{312}{100}\right)^0 = 1.$$

Mais algumas observações relevantes

- 1) Atenção! Não tem sentido matemático a expressão 0^0 .
- 2) Aproveito a ocasião para lembrar que, você já deve ter topado com outras expressões matemáticas sem sentido, ou indeterminadas. Recordo mais um exemplo: $\frac{0}{0}$ não tem sentido ou é indeterminado.

Propriedades da potenciação

As propriedades da potenciação que enunciamos a seguir são conseqüências diretas das propriedades fundamentais das operações de adição e multiplicação de números reais.

Suponha que os números reais b e c e os números inteiros m e n , permitam definir todas as potências explicitadas nos itens de a) até d) a seguir. Então valem as propriedades:

$$a) b^m \cdot b^n = b^{m+n}$$

$$b) (b^m)^n = b^{mn}$$

$$c) b^m \div b^n = b^m \cdot \frac{1}{b^n} = b^m \cdot b^{-n} = b^{m-n}$$

$$d) (b \cdot c)^m = b^m \cdot c^m.$$

Atividade 1

Calcule:

$$a) (\sqrt{2} \div \sqrt{3})^{-4}$$

$$b) [(\sqrt{2})^{-2}]^{-3}$$

$$c) (\sqrt{2} - 5)^2$$

Raízes n -ésimas de números reais

Freqüentemente ficamos diante da necessidade de definir que número real x verifica uma equação como

$$x^n = b,$$

onde n é um número natural e b , um número real. Explicando melhor: na equação, b é um número real conhecido e precisamos encontrar um ou mais números reais x tais que

$$b = x \cdot x \cdot x \dots x \quad (n \text{ fatores } x).$$

- Você lembra do surgimento do primeiro número irracional, na aula 3?

Naquela ocasião, o número real x que fornecia a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 1, verificava $x^2 = 2$. Como visto, provamos que x é irracional e usamos a notação $x = \sqrt{2}$ para expressar o número. Portanto, $\sqrt{2}$ tem a propriedade que $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$.

Veja outros exemplos.

Exemplo 5.2

a) Encontre números reais x tais que $x^3 = -8$.

A equação proposta tem como única solução $x = -2$. De fato, $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$.

- b) Encontre números reais x tais que $x^6 = 8$.

Neste caso, as duas soluções possíveis são os números $x_1 = \sqrt[6]{8} = \sqrt{2}$ e $x_2 = -\sqrt{2}$. De fato, $(\sqrt{2})^6 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. O mesmo desenvolvimento valendo para $x_2 = -\sqrt{2}$.

Estamos em condições de definir o conceito de raiz enésima de um número real.

Definição 5.2 (Raízes n -ésimas)

Seja b um número real. Então,

- a) Se $b > 0$ e n um número natural, a raiz n -ésima de b é o número real positivo que elevado à potência n resulta b .

Usamos a notação $\sqrt[n]{b}$ ou $b^{\frac{1}{n}}$ para representar a raiz n -ésima de b . Isto é, $b = \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{b} \dots \sqrt[n]{b}$ (n fatores).

- b) Se $b < 0$ e n é um número natural ímpar, a **raiz enésima de b** é o número real negativo que elevado a potência n resulta b .

Permanecemos com a notação $\sqrt[n]{b}$ ou $b^{\frac{1}{n}}$ para representar a n -ésima raiz de b . Então $b = \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{b} \dots \sqrt[n]{b}$ (n fatores).

- c) Se $b = 0$ e n é um número natural então a **raiz enésima de $b = 0$** é o número zero. Isto é, $\sqrt[n]{0} = 0$.

Notas

- 1) Não definimos $\sqrt[m]{b}$, qualquer que seja o número real b , se m é um número inteiro e $m \leq 0$.
- 2) Na expressão $\sqrt[n]{b}$, o número b é o radicando, o símbolo $\sqrt{\quad}$ é a raiz e n é o índice da raiz.
- 3) No caso $n = 2$, em vez de $\sqrt[2]{\quad}$ escrevemos $\sqrt{\quad}$ e lemos: “raiz quadrada”. Por exemplo, a igualdade $\sqrt{49} = 7$, lê-se “raiz quadrada de 49 é igual a 7”.
- 4) No caso $n = 3$, o símbolo $\sqrt[3]{\quad}$ lê-se raiz cúbica. Por exemplo, a igualdade $\sqrt[3]{-125} = -5$ lê-se: “raiz cúbica de -125 é igual a -5 ”.

Propriedades da radiciação

- a) Se a e b são números reais positivos e n é um número natural, então

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

- b) Se a é um número real negativo, b um número real positivo e n é um número natural ímpar, então

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

A verificação da validade das propriedades a) e b) é imediata. Note que

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \dots \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad (n \text{ fatores } \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}).$$

Usando a propriedade comutativa do produto de números reais, organizamos o segundo membro para encontrar que

$$\begin{aligned} (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n &= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \dots \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{b} \dots \sqrt[n]{b} = \\ &= (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = a \cdot b. \end{aligned}$$

Portanto, $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ é a raiz enésima de $a \cdot b$. Isto é, $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$.

Exemplo 5.3

- a) $\sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}} = 3$. Pois, $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$
- b) Não tem sentido $\sqrt{-4}$ quando trabalhamos com números reais. Uma vez que, não existe um número real x , tal que $x^2 = -4$.
- c) $\sqrt[5]{-32} = -2$. Pois $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$.
- d) $\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
- e) $\sqrt[3]{-81} = \sqrt[3]{(-3)^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{(-3)^3} \cdot \sqrt[3]{3} = -3\sqrt[3]{3}$.

Notas importantes

1. Observe que $(-3)^2 = 9$ e $3^2 = 9$. No entanto $\sqrt{9} = 3$. É errado escrever $\sqrt{9} = -3$!! Pois para todo número real positivo b e todo número natural n , $\sqrt[n]{b}$ é, por definição, um número positivo.
2. Sendo $\sqrt{9} = 3$ então tomando os números simétricos (ou multiplicando por -1) escrevemos $-\sqrt{9} = -3$.

Atividade 2

Verifique as seguintes igualdades:

$$\text{a) } \sqrt[3]{-250} = -5\sqrt[3]{2} \quad \text{b) } \sqrt[4]{48} = 2\sqrt[4]{3} \quad \text{c) } \sqrt[5]{-512} = -2\sqrt[5]{16}$$

Potências racionais de números reais

Dado um número racional r podemos sempre supor que a fração que o representa é irredutível e o denominador é positivo. Isto é, podemos escrever r na forma,

$$r = \frac{m}{n},$$

onde m e n são números inteiros primos entre si (sem fator comum) e $n > 0$.

Dentro destas condições estabelecidas introduzimos a próxima definição.

Definição 5.3

Sejam b um número real e $r = \frac{m}{n}$ tais que uma das condições é satisfeita:

$$\text{a) } b^m < 0 \text{ e } n \text{ é um número natural ímpar. Ou b) } b^m > 0$$

Então,

$$b^r = b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}.$$

Nota: Veja que as condições a) e b) impostas na definição 5.3, são necessárias para que as operações de radiciação e potência fiquem bem definidas. Também, observe que em virtude das propriedades da radiciação vale

$$b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m} = (\sqrt[n]{b})^m.$$

Exemplo 5.4

$$\text{a) } 16^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{16^2} = \sqrt[4]{(4^2)^2} = \sqrt[4]{4^4} = 4^{\frac{4}{4}} = 4^1 = 4.$$

$$\text{b) } (-8)^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{(-8)^5} = \sqrt[3]{(-8)^3 \cdot (-8)^2} = \sqrt[3]{(-8)^3} \cdot \sqrt[3]{(-8)^2} = -8\sqrt[3]{64} = -8 \times 4 = -32.$$

$$\text{c) } (27)^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^{-2}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{27}\right)^2} = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{27}}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

Atividade 3

Mostre que valem as seguintes igualdades:

$$\text{a) } (-500)^{\frac{1}{3}} = -5\sqrt[3]{4} \quad \text{b) } (-32)^{-\frac{1}{5}} = -\frac{1}{2}.$$

A definição 5.3 coloca o conceito de potenciação de modo bem geral, englobando o conceito de radiciação dado na definição 5.2. Por exemplo, para um número real b e um número natural n ímpar

$$\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}.$$

A questão que permanece no ar é a seguinte:

Como definir em toda generalidade b^a , onde b e a são números reais arbitrários?

Chegamos perto desta generalidade. Veja que conseguimos definir b^r , onde b é número real e r é número racional, em grande parte dos casos. No entanto, que sentido dar à expressão $3^{\sqrt{2}}$, ou mesmo, $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$. A técnica para tratar a questão de definir b^a , onde a é irracional, é através de convergência de seqüências. Devemos encontrar seqüências de números racionais $(r_n) = (r_1, r_2, \dots, r_n, \dots)$ que convergem para a ($r_n \rightarrow a$) e definir b^a como o limite de b^{r_n} . Mas estas são questões que envolvem convergência de seqüências de números reais, e você deve aguardar a disciplina de Cálculo 1, para um estudo deste assunto. Além disso, problemas de natureza indeterminada podem ocorrer no processo de convergência. A definição geral é delicada.

Expressões numéricas e simplificações

Uma expressão onde aparecem números reais, operações entre os números e sinais convencionais de organização da ordem das operações é o que chamamos de uma expressão numérica real ou simplesmente expressão numérica.

Por exemplo

$$E = \left\{ -2\sqrt[3]{5} + \left[\left(\frac{1}{2} + \sqrt[3]{5} - \frac{1}{6} \right) \times 3 + 5^2 \right] \div 2 \right\} \times 5,$$

é uma expressão numérica. Na expressão destacada acima aparecem as operações fundamentais, a potenciação, a radiciação e os símbolos organizadores, chaves $\{, \}$, colchetes $[,]$ e os mais populares parênteses $(,)$.

A expressão numérica é, geralmente, a tradução (equacionamento) da solução de um problema qualquer que porventura estejamos resolvendo. Portanto, diante de expressão algébrica, o objetivo maior é resolvê-la, achando o número real que a representa ou, na impossibilidade, realizar operações para simplificá-la.

Uma expressão numérica, portanto, é uma coisa do tipo decifra-me ou te devo!

Vamos resolver, ou decifrar, a expressão anterior!

A hierarquia é bem conhecida: primeiro resolvemos o que está entre parênteses, depois o colchete e, finalmente, as chaves. Quanto às operações, resolveremos primeiro o produto, depois a divisão e finalmente soma e subtração. Então, vamos ao ataque da expressão E ! Acompanhe passo a passo as contas.

$$\begin{aligned}
 E &= \left\{ -2 \cdot \sqrt[3]{5} + \left[\left(\frac{3-1}{6} + \sqrt[3]{5} \right) \cdot 3 + 25 \right] \div 2 \right\} \times 5 = \\
 &= \left\{ -2 \cdot \sqrt[3]{5} + \left[\left(\frac{1}{3} + \sqrt[3]{5} \right) \cdot 3 + 25 \right] \div 2 \right\} \times 5 = \\
 &= \left\{ -2 \cdot \sqrt[3]{5} + \left[1 + 3 \cdot \sqrt[3]{5} + 25 \right] \div 2 \right\} \times 5 = \\
 &= \left\{ -2 \cdot \sqrt[3]{5} + \left[26 + 3 \cdot \sqrt[3]{5} \right] \div 2 \right\} \times 5 = \\
 &= \left\{ -2\sqrt[3]{5} + 13 + \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{5} \right\} \times 5 = \\
 &= \left\{ -2\sqrt[3]{5} + 13 + \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{5} \right\} \times 5 = \\
 &= \left\{ \frac{-4+3}{2}\sqrt[3]{5} + 13 \right\} \times 5 = \left\{ -\frac{1}{2}\sqrt[3]{5} + 13 \right\} \times 5 = \\
 &= \frac{-5}{2}\sqrt[3]{5} + 65.
 \end{aligned}$$

Compare o resultado encontrado com a expressão original. Convenhamos, o resultado que encontramos é um valor numérico muito mais palatável para E .

Com o objetivo de resolver expressões numéricas, vamos abrir nossa caixa de truques e retirar dali a ferramenta chamada racionalização. Veja os exemplos típicos:

Exemplo 5.5

Racionalize ou simplifique expressões do tipo:

$$\text{a) } \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}, \quad \text{b) } \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}},$$

onde a e b são números reais positivos e $a \neq b$.

Solução

Para efetuar as operações recordamos uma igualdade importante envolvendo números reais x e y ,

$$(x - y)(x + y) = x^2 - y^2.$$

Esta igualdade é chamada popularmente “um produto notável”. Vamos usá-lo. Então,

$$a) \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b},$$

$$b) \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}$$

Veja alguns exemplos numéricos.

Exemplo 5.6

Simplifique (racionalize) as expressões numéricas:

$$a) E_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$b) E_2 = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$$

$$c) E_3 = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$d) E_4 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3}}$$

Solução de a)

$$E_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{(1 - \sqrt{5}) \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 5}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5} - 1.$$

Solução de b)

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{12} + \sqrt{18}}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{\sqrt{3 \cdot 4} + \sqrt{2 \cdot 9}}{2 - 3} = \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{-1} = -2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Solução de c)

$$\begin{aligned} E_3 &= \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \\ &= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{5 - 3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{6}. \end{aligned}$$

Solução de d)

$$\begin{aligned} E_4 &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{\sqrt{3}}}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{\sqrt{3}}}} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{2} - \sqrt{\sqrt{3}}}}{\sqrt{\sqrt{2} - \sqrt{\sqrt{3}}}} = \\ &= \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{\sqrt{2} - \sqrt{\sqrt{3}}})}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{3}. \end{aligned}$$

Exemplo 5.7

Racionalize ou simplifique a expressão $E = \frac{2}{\sqrt{7} - \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$.

Solução

$$\begin{aligned} E &= \frac{2}{\sqrt{7} - \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2(\sqrt{7} + \sqrt{2})}{(\sqrt{7} - \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{2})} - \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2}} = \\ &= \frac{2(\sqrt{7} + \sqrt{2})}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{2})^2} - \frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{2(\sqrt{7} + \sqrt{2})}{7 - 2} - \frac{\sqrt[3]{25}}{5} = \\ &= \frac{2\sqrt{7} + 2\sqrt{2} - \sqrt[3]{25}}{5}. \end{aligned}$$

Chegamos ao fim de mais uma aula. O conteúdo fundamental foi o estudo de potenciação e de suas propriedades básicas. Definimos (demos sentido) a uma expressão do tipo b^r , onde r é um número racional e b é um número real. Algumas restrições foram exigidas de b , dependendo do valor de r . Você deve conhecer bem até onde b pode se “espalhar” na reta condicionado ao valor de r . Só para lembrar: $(-2)^{\frac{1}{4}}$ não tem sentido.

Lembre que a equação fundamental envolvendo a simbologia introduzida é $b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$.

Agora trabalhe os exercícios, procure seus colegas para discussão em grupo. Não deixe acumular as dúvidas. Procure as tutorias presencial e a distância.

Exercícios

1. A expressão numérica

$$E = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} - 3 \right) \div \sqrt{3} - 2 \left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right]$$

é igual a:

- a) $\frac{\sqrt{3} - 3}{3}$ b) $\frac{\sqrt{3} + 9}{3}$ c) $\frac{\sqrt{3} - 9}{3}$

2. Mostre que são verdadeiras as igualdades:

$$\text{a) } (\sqrt{2} - 1)^3 = 5\sqrt{2} - 7 \qquad \text{b) } \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - 1 \right) \div \frac{\sqrt{2} - 2}{2} = \frac{3 + \sqrt{2}}{2}$$

3. Determine o valor de x em cada uma das equações abaixo:

$$\text{a) } 5^{3x-2} = 1 \qquad \text{b) } 16^{x+2} = 2^{3x-1}$$

$$\text{c) } (x^2 + 3)^{x^2-x} = 1$$

4. O número $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt[3]{-3}}$ é igual a:

$$\text{a) } \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt[3]{9}}{3} \qquad \text{b) } \frac{3\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + \sqrt[3]{9}}{3}$$

$$\text{c) } \frac{3\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + \sqrt[3]{9}}{3} \qquad \text{d) } \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt[3]{9}$$

5. Verifique que as seguintes igualdades são verdadeiras:

$$\text{a) } \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \qquad \text{b) } \frac{3}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{3^3}$$

$$\text{c) } \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{8} - \sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8} + \sqrt{5}} = \frac{17 + \sqrt{10}}{3}$$

6. Considere a e b números reais diferentes de zero. Mostre que são verdadeiras as afirmações e igualdades abaixo:

$$\text{a) } a^2 = b^2 \text{ então } a = b \text{ ou } a = -b$$

$$\text{b) se } a \neq b \text{ então } (a^3 - b^3) \div (a - b) = a^2 + ab + b^2$$

$$\text{c) se } a < 0 \text{ então } (\sqrt{1 - \sqrt[3]{a}})^6 = 1 + 3\sqrt[3]{a}(\sqrt[3]{a} - 1) - a.$$

7. Mostre que são negativos os números:

$$\text{a) } 3 - 2\sqrt{3} \qquad \text{e} \qquad \text{b) } \sqrt{3 + \sqrt{3}} - \sqrt{3\sqrt{3}}$$

Auto-avaliação

Antes de passar a aula seguinte você deve:

- Ter resolvido todas as atividades propostas e os exercícios;
- Poder definir dado um número racional $r = \frac{m}{n}$, com $n > 0$, qual é o domínio de variação do número real b , para ter sentido a expressão b^r .

Respostas das atividades

$$1. \text{ a) } (\sqrt{2} \div \sqrt{3})^{-4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^{-4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{9}{4}$$

$$\text{ b) } ((\sqrt{2})^{-2})^{-3} = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$$

$$\text{ c) } (\sqrt{2} - 5)^2 = (\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot (-5) + (-5)^2 = \\ = 2 - 10\sqrt{2} + 25 = 27 - 10\sqrt{2}$$

$$2. \text{ a) } \sqrt[3]{-250} = \sqrt[3]{-2 \cdot 5^3} = \sqrt[3]{2 \cdot (-5)^3} = -5\sqrt[3]{2}$$

$$\text{ b) } \sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{2^4 \times 3} = 2\sqrt[4]{3}$$

$$\text{ c) } \sqrt[5]{-512} = \sqrt[5]{-2^9} = \sqrt[5]{(-2)^5 \cdot 2^4} = -2\sqrt[5]{2^4} = -2\sqrt[5]{16}$$

$$3. \text{ a) } (-500)^{\frac{1}{3}} = (-4 \cdot 5^3)^{\frac{1}{3}} = [4 \cdot (-5)^3]^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{3}} \cdot (-5)^{\frac{3}{3}} = -5\sqrt[3]{4}$$

$$\text{ b) } (-32)^{-\frac{1}{5}} = (-2^5)^{-\frac{1}{5}} = [(-2)^5]^{-\frac{1}{5}} = (-2)^{-1} = \left(\frac{1}{-2}\right)^1 = -\frac{1}{2}$$

Respostas dos exercícios

$$1. \text{ E} = \frac{\sqrt{3}}{3} \left[\left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 - 3} - 3 \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - 2 \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{6}}{6} \right) \right] = \\ = \frac{\sqrt{3}}{3} \left[-(\sqrt{2} - \sqrt{3} + 3) \frac{\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{6}}{3} \right] = \\ = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(-\frac{\sqrt{6}}{3} + 1 - \sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{6}}{3} \right) = \frac{\sqrt{3} - 9}{3}$$

$$2. \text{ a) } (\sqrt{2} - 1)^3 = (\sqrt{2} - 1)^2 \cdot (\sqrt{2} - 1) = (2 - 2\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = \\ = (3 - 2\sqrt{2})(\sqrt{2} - 1) = 5\sqrt{2} - 7$$

$$\text{ b) } \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - 1 \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{2} - 2} = \frac{\sqrt{2} - 4}{4} \cdot \frac{2(\sqrt{2} + 2)}{(\sqrt{2} - 2)(\sqrt{2} + 2)} = \\ = \frac{\sqrt{2} - 4}{4} \cdot (-\sqrt{2} - 2) = \frac{3 + \sqrt{2}}{2}$$

$$3. \text{ a) } 5^{3x-2} = 5^0 \Rightarrow 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$\text{b) } x = -9 \qquad \text{c) } x = 0 \text{ ou } x = 1$$

4. d

5. Verificação

$$6. \text{ a) } a^2 = b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow (a - b)(a + b) = 0 \Rightarrow a - b = 0 \text{ ou } a + b = 0 \Rightarrow a = b \text{ ou } a = -b.$$

b) Basta verificar que

$$a^3 - b^3 = (a^2 + ab + b^2)(a - b).$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \left(\sqrt{1 - \sqrt[3]{a}}\right)^6 &= (1 - \sqrt[3]{a})^3 = (1 - \sqrt[3]{a})^2 \cdot (1 - \sqrt[3]{a}) = \\ &= (1 - 2\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2})(1 - \sqrt[3]{a}) = 1 - 3\sqrt[3]{a} + 3\sqrt[3]{a^2} - a = \\ &= 1 + 3\sqrt[3]{a}(\sqrt[3]{a} - 1) - a \end{aligned}$$

7. a) Veja que

$$(3 - 2\sqrt{3})(3 + 2\sqrt{3}) = 3^2 - (2\sqrt{3})^2 = 9 - 12 = -3$$

é um número negativo. Como $3 + 2\sqrt{3} > 0$ então $3 - 2\sqrt{3}$ é negativo.

b) Veja que

$$\left(\sqrt{3 + \sqrt{3}} - \sqrt{3\sqrt{3}}\right) \left(\sqrt{3 + \sqrt{3}} + \sqrt{3\sqrt{3}}\right) = 3 + \sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 3 - 2\sqrt{3},$$

é um número negativo (use o item a). Como $\sqrt{3 + \sqrt{3}} + \sqrt{3\sqrt{3}}$ é positivo então $\sqrt{3 + \sqrt{3}} - \sqrt{3\sqrt{3}}$ é negativo.

Aula 6 – Números reais: relação de ordem, intervalos e inequações

Objetivos

Após estudar esta aula, você terá condições de:

- compreender a estrutura de ordem dos números reais e suas principais propriedades;
- compreender o conceito de intervalo de números reais, realizar operações com intervalos e representá-los graficamente na reta;
- utilizar as propriedades de ordem dos números reais para resolver inequações e usar os intervalos para expressar os conjuntos soluções.

A representação dos números reais sobre uma reta é uma poderosa ferramenta. É como se construíssemos uma ponte ligando a aritmética e a álgebra à geometria. Além disso, permite fazer uma representação mental unificada dos números reais. Isto é extremamente útil. Quando nos é colocado um problema sobre números reais vamos verificar como funciona no modelo geométrico construído sobre uma reta.

Operações com números reais

A adição e a multiplicação são as operações fundamentais entre números reais. Elas gozam de propriedades similares já enunciadas para os números inteiros. Convido você a recordar estas propriedades relendo-as na Aula 1. As operações fundamentais podem ser definidas ou interpretadas geometricamente sobre a reta real. Vamos lá!

Soma de dois números reais a e b

Vamos supor que os números reais a e b sejam positivos. Isto é, a e b pertencem à semi-reta real positiva. Veja a **Figura 6.1**.

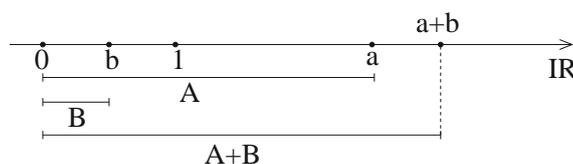


Figura 6.1: Soma de dois números.

Os números reais a e b correspondem às medidas dos comprimentos dos segmentos A e B , respectivamente. A soma $a + b$ é a medida do comprimento do segmento $A + B$, obtido pela justaposição (soma) dos segmentos A e B .

O caso de soma de dois números reais negativos é similar ao caso de dois números positivos. A única diferença é que a operação é realizada na semi-reta real negativa.

O caso de soma de um número real negativo com um número real positivo é representado geometricamente por subtração de segmentos e também não apresenta dificuldade. Veja a atividade 1 logo adiante.

Produto de dois números reais a e b

Em primeiro lugar temos a “regra dos sinais” para o produto de dois números reais: $a \cdot b$ é positivo se a e b são ambos positivos ou ambos negativos; $a \cdot b$ é negativo se a for positivo e b negativo ou se a negativo e b positivo. Com estas observações em mente vamos interpretar geometricamente apenas a multiplicação de dois números reais positivos. Veja a **Figura 6.2**.

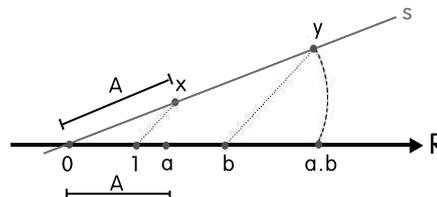


Figura 6.2: Multiplicação de dois números.

Os números a e b estão representados sobre a reta \mathbb{R} . Usamos uma semi-reta auxiliar s com início no ponto 0 (zero). Transportamos, a partir de 0, sobre s o segmento A , encontrando o ponto x . O ponto y é determinado sobre s de modo que os segmentos $1x$ e by sejam paralelos. Finalmente assinalamos o ponto ab sobre \mathbb{R} para representar o número igual a medida do segmento Oy . Veja que a linha tracejada que une o ponto y ao ponto ab é um arco de círculo de centro no ponto O . Nesta situação, usando a semelhança dos triângulos $Ox1$ e Oyb , podemos verificar que,

$$\frac{b}{1} = \frac{Oy}{Ox} \Rightarrow b = \frac{Oy}{a} \Rightarrow Oy = ab.$$

E aí está a construção geométrica que permite multiplicar dois números positivos a e b .

Não é demais recordar mais uma vez as propriedades fundamentais da adição e da multiplicação de números reais. Para o enunciado das propriedades 1 até 5, considere números reais a , b e c arbitrários. Então:

Propriedade 1: A adição e a multiplicação são comutativas.

$$a + b = b + a \quad \text{e} \quad a \cdot b = b \cdot a.$$

A Propriedade 1 estabelece que mudar a ordem das parcelas não altera a soma e mudar a ordem dos fatores não altera o produto.

Propriedade 2: Associatividade

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \text{e} \quad a(bc) = (ab)c.$$

A Propriedade 2 estabelece que agrupar as parcelas de diferentes modos não altera a soma e agrupar os fatores não altera o valor do produto.

Propriedade 3: Elementos neutros

Os números 0 (zero) e 1 satisfazem,

$$a + 0 = a \quad \text{e} \quad a \cdot 1 = a.$$

Propriedade 4: Simétrico e inverso de um número

$$a + (-a) = 0 \quad \text{e} \quad a \cdot a^{-1} = 1, \quad (a \neq 0).$$

A Propriedade 4 estabelece que os números $-a$ e a^{-1} são, respectivamente, o simétrico e o inverso do número real a . Portanto, a^{-1} , o inverso de a , verifica $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Propriedade 5: Distributividade

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

A Propriedade 5 estabelece que o produto se distribue em relação à soma.

Atividade 6.1

Represente geometricamente, na reta real, a soma e o produto dos números $\frac{3}{2}$ e -2 .

Relação de ordem em \mathbb{R}

A representação dos números reais sobre uma reta orientada é tão importante que é corriqueiro em Matemática chamarmos o conjunto dos números reais de reta real. Ou para os mais íntimos \mathbb{R} é a reta!

Outro aspecto importante da representação dos números reais sobre uma reta é o fato que os números aparecem de maneira organizada, possibilitando comparar as ordens de grandeza de dois números por suas posições. Para motivar esta última observação proponho uma atividade para começar.

Atividade 6.2

Após tomar um banho, coloque uma roupa legal, pra cima, borrifadas de um agradável perfume ajuda. Pronto. Saia a rua. Você vai à uma loja comprar uma televisão nova, de tela grande, a Copa do Mundo se aproxima e estão oferecendo garantia de 10 anos, controle remoto e o escambau. Só falta garantir a vitória do seu time.

De volta à casa, televisão instalada. Você liga. O canal 10 é automaticamente sintonizado e o som está muito baixo. O jogo da seleção já começou, está passando no canal 12 e você precisa também entrar em campo! Você está com o controle na mão, aconchegado no sofá e o manual de instruções longe. Observando o controle remoto, você identifica o ícone de volume (VOL) e o ícone dos canais (CH). Veja o controle na **Figura 6.3** a seguir.



Figura 6.3: Controle remoto.

- Que tecla apertar para passar ao canal 12? Duas vezes a tecla acima do ícone canal (CH) ou duas vezes aquela abaixo?

-Que tecla comprimir para aumentar o volume? Aquela à direita (➡) ou aquela à esquerda (⬅) do ícone volume?

Pense um pouco e responda! Acredite, sua resposta definirá sua condição de pessoa bem ou mal orientada em relação às convenções de comunicação gráfica adotadas.

Se você já se decidiu, consulte a resposta à esta atividade 2 no fim desta aula.

E aí? Acertou a resposta? Pois é, são convenções que tem o seu fundamento.

Veja porque! Ao representarmos os números reais sobre uma reta horizontal eles crescem, da esquerda para a direita e, evidentemente, decrescem da direita para a esquerda. Se a reta, representando os números reais, fosse posicionada verticalmente, a representação dos números seria crescente para cima e decrescente para baixo!

Para tornar um pouco mais rigorosa esta idéia, vamos introduzir a relação de ordem nos números reais.

Considere os números reais representados sobre uma reta real orientada, como na **Figura 6.4**.

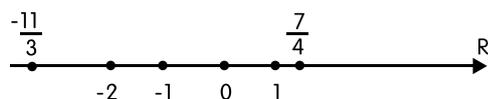


Figura 6.4: Números reais sobre a reta.

Dados dois números reais a e b representados sobre a reta escrevemos que

$$a < b,$$

para significar que o sentido que vai de a para b coincide com a orientação da reta.

A expressão $a < b$ é uma desigualdade e lê-se: “ a é menor do que b ”.

Observando a **Figura 6.4**, concluímos que

$$-\frac{11}{3} < -2, \quad 0 < \frac{7}{4}, \quad -2 < -1.$$

Se $a < b$, equivalentemente, podemos escrever que $b > a$, lê-se b é maior que a .

Também as notações $x \leq y$ e $z \geq w$ são permitidas entre números reais x , y , z e w . A primeira expressão $x \leq y$ traduz que o número x é menor do que ou igual ao número y . A segunda expressão $z \geq w$ traduz que o número z é maior do que ou igual a w .

A relação de ordem introduzida nos números reais tem propriedades muito interessantes. Vamos recordar cinco delas ao longo desta aula.

Para o enunciado das propriedades considere que, a , b e c são números reais arbitrários.

Propriedade 6: Entre dois números reais a e b apenas uma das três possibilidades abaixo acontece:

$$a < b \quad \text{ou} \quad b < a \quad \text{ou} \quad a = b.$$

O enunciado da Propriedade 6 é evidente por si, se os números já estão representados na reta. Dados dois números ao acaso, suas posições na reta real \mathbb{R} coincidem ou então um deles está à esquerda do outro. No entanto, a afirmação contida na propriedade merece a seguinte pergunta:

- Dados dois números reais distintos, como identificar o menor deles? Ou melhor, como identificar aquele que deve ser representado à esquerda do outro na reta?

Primeiro, é evidente a resposta se os números são inteiros. Os números inteiros estão bem espalhados sobre a reta real e é fácil identificar o menor dentre os dois, aquele número que deve ser assinalado à esquerda. Por exemplo, se os números são 5 e 8, 5 está à esquerda. Se os números são -12 e -8 , -12 está à esquerda. Isto é, $5 < 8$ e $-12 < -8$.

Para dois números racionais, os quais podemos supor escritos com denominadores positivos, temos o seguinte resultado, chamado regra do produto cruzado:

$$\frac{m}{n} < \frac{p}{q} \quad \text{se e somente se} \quad mq < np.$$

Veja porque vale a afirmação. Como os denominadores são positivos, então

$$\frac{m}{n} = \frac{mq}{nq} \quad \text{e} \quad \frac{p}{q} = \frac{pn}{nq}.$$

Logo,

$$\frac{m}{n} < \frac{p}{q} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{mq}{nq} < \frac{pn}{nq} \quad \Leftrightarrow \quad mq < pn,$$

provando a equivalência prometida.

Agora vamos atacar o problema bem geral. Como escolher entre dois números reais distintos a e b aquele que é menor?

Temos três casos a considerar:

Primeiro Caso: Os números tem sinais contrários. Por exemplo, a é negativo e b positivo. Neste caso, óbvio, o número negativo é menor ($a < b$).

Segundo Caso: Um dos números é zero. Por exemplo, $a = 0$. Neste caso, $a < b$ se b é positivo ou $b < a$ se b é negativo.

Terceiro Caso: Os números possuem o mesmo sinal. Neste caso, precisamos considerar a expansão decimal.

Suponha, em primeiro lugar que a e b são positivos. Então

$$a = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots, \quad b = b_0, b_1 b_2 b_3 \dots b_n \dots$$

Nestas expansões estamos supondo a possibilidade que a partir de um certo índice todos os dígitos sejam nulos. Nesta situação, $a < b$ se uma das seguintes situações ocorrerem:

- 1) $a_0 < b_0$ ou 2) existe um número natural k tal que $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_{k-1} = b_{k-1}$ e $a_k < b_k$.

Exemplo

$$3,0125 < 3,01312111 \dots$$

Por outro lado, se a e b são negativos, então

$$a = -a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots, \quad b = -b_0, b_1 b_2 b_3 \dots b_n \dots$$

Nestas expansões estamos também considerando a possibilidade de que a partir de certo índice todos os algarismos sejam nulos. Nesta situação, $a < b$ se uma das seguintes situações ocorrerem.

- 1) $a_0 > b_0$ ou 2) existe um número natural k tal que $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_{k-1} = b_{k-1}$ e $a_k > b_k$.

Propriedade 7. Se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$.

Veja um exemplo.

$$-3 < 5 \text{ e } 5 < 25 \Rightarrow -3 < 25.$$

Propriedade 8. Se $a < b$ então $a + c < b + c$.

A propriedade 8 é muito útil para resolver inequações, assunto que trataremos adiante. Veja um exemplo! Queremos determinar todos os valores inteiros x que satisfazem a desigualdade, $x - 12 < -9$. Usando a Propriedade 8, temos que

$$x - 12 < -9 \Rightarrow x - 12 + 12 < -9 + 12 \Leftrightarrow x < 3.$$

Logo, os valores são $x = 2, 1, 0, -1, -2, \dots$

Propriedade 9. Se $a < b$ e $c > 0$ então $a.c < b.c$.

Esta propriedade é enunciada ressaltando que multiplicando ambos os membros de uma desigualdade por um número positivo a desigualdade **permanece**. Exemplo:

$$-250 < -32 \Rightarrow -500 < -64.$$

Propriedade 10. Se $a < b$ e $c < 0$ então $a.c > b.c$.

Esta propriedade é enunciada ressaltando que multiplicando ambos os membros de uma desigualdade por um número negativo a desigualdade **inverte de sentido**.

Intervalos de números reais

Intervalos são subconjuntos de números reais que expressam um *continuum* dos números reais. Esta caracterização implica que se dois números a e b estão num intervalo I e $a < b$, então qualquer número entre a e b está em I . Mais tarde, ao estudar cálculo, você poderá apreciar melhor esta caracterização de intervalos. Mas falamos do *bicho* intervalo, sem apresentá-lo. Vamos às definições.

Definição 6.1

Dados os números reais a e b , com $a < b$, definimos os seguintes conjuntos de números reais:

- a) $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$, b) $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$,
 c) $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$, d) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$,

Os intervalos acima definidos são referidos como intervalos abertos (a), fechado à esquerda e aberto à direita (b), aberto à esquerda e fechado à direita (c), e intervalo fechado (d). Os números a e b são os extremos do intervalo.

Localizando os números a e b sobre a reta real temos representações gráficas dos intervalos definidos.

Exemplo 6.1

Representação gráfica dos intervalos $(-3, -2)$, $[-1, 0)$, $(1, 2]$ e $\left[3, \frac{7}{2}\right]$. Veja a **Figura 6.5**.

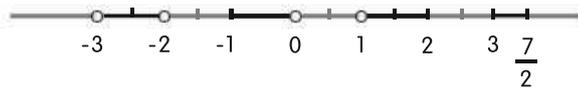


Figura 6.5: Representação de intervalos.

Se a é um número real podemos usar o símbolo $+\infty$ e $-\infty$ para expressar intervalos infinitos.

Definição 6.2

Os subconjuntos de números reais

- a) $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$, b) $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$,
- c) $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}; x < a\}$, d) $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq a\}$,

são os intervalos infinitos.

Exemplo 6.2

Representação gráfica dos intervalos $(2, \infty)$, $(-\infty, 0]$. Veja a **Figura 6.6**.



Figura 6.6: Representação de intervalos infinitos.

Notas

- 1) Na definição de um intervalo, o número que fica no extremo esquerdo é menor que o número que fica no extremo direito. Assim $(-1, \sqrt{2})$ é um intervalo, mas $(3, 0]$ não tem sentido.
- 2) Usando o recurso de representar subconjuntos da reta por intervalos, podemos escrever $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

Exemplos

- a) $[2, 3] \cap [3, 7) = \{3\}$ e b) $(-1, 2) \cap (0, 5) = (0, 2)$.

Vamos resolver o item a). Note que

$$[2, 3] = \{x \in \mathbb{R}; 2 \leq x \leq 3\} \text{ e } [3, 7) = \{x \in \mathbb{R}; 3 \leq x < 7\}.$$

Como se trata de uma interseção de conjuntos, as desigualdades mostram que $x = 3$ é o único número que aparece em ambos conjuntos. Logo é válida a igualdade a).

Note que a validade da igualdade de conjuntos expressa no item b) pode ser observada graficamente na **Figura 6.7**. Nas cópias da reta real estão representados, respectivamente os subconjuntos $(-1, 2)$, $(0, 5)$ e $(-1, 2) \cap (0, 5)$.

Também,

$$(-1, 2) = \{x \in \mathbb{R}; -1 < x < 2\} \text{ e } (0, 5) = \{x \in \mathbb{R}; 0 < x < 5\}.$$

Logo, todo x tal que $0 < x < 2$ pertence a ambos os conjuntos. Provando a igualdade b).

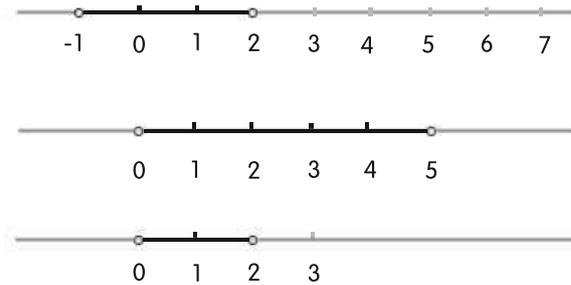


Figura 6.7: Interseção de intervalos.

Atividade 6.3

Prove que,

- a) $(-1, \sqrt{2}) \subset (-\infty, 3)$
- b) $(-\sqrt{3}, 10) \cap [0, 10\sqrt{2}) = [0, 10)$.

Represente geometricamente as operações entre os intervalos.

Inequações de uma variável real

Inequações são expressões onde aparecem números, desigualdades e uma variável freqüentemente representada por x . A inequação define todos os valores reais que podem ser assumidos pela variável.

Resolver a inequação é explicitar o subconjunto de números reais onde a variável pode assumir valores, de modo que a inequação seja satisfeita. A linguagem dos intervalos é muito útil para expressar o conjunto solução de uma inequação.

Veja alguns exemplos.

Exemplo 6.3

Encontre o conjunto solução das inequações abaixo:

$$\text{a) } 6 - 2x \leq 8x \quad \text{e} \quad \text{b) } -x^2 + x > -6$$

Solução de a)

$$6 - 2x \leq 8x \Rightarrow 6 \leq 8x + 2x \Rightarrow 6 \leq 10x$$

Então

$$\frac{6}{10} \leq x \Rightarrow x \geq \frac{3}{5}.$$

Logo o conjunto solução S da inequação é

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}; x \geq \frac{3}{5} \right\} = \left[\frac{3}{5}, \infty \right).$$

Solução de b)

Multiplicando ambos os membros da inequação por -1 e invertendo o sinal da desigualdade, a inequação é equivalente a

$$x^2 - x < 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 < 0.$$

Olhando para a equação do segundo grau $x^2 - x - 6 = 0$, encontramos

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) \Rightarrow \Delta = 25.$$

Logo,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2},$$

definem as raízes, como sendo

$$x_1 = 3 \quad \text{e} \quad x_2 = -2.$$

Logo,

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2).$$

Assim, a inequação que precisamos resolver é

$$(x - 3)(x + 2) < 0.$$

Ora as soluções possíveis ocorrem apenas quando os fatores do primeiro membro da inequação possuem sinais contrários. Então

$$x - 3 > 0 \text{ e } x + 2 < 0 \text{ ou } x - 3 < 0 \text{ e } x + 2 > 0$$

são as soluções. Desenvolvendo, encontramos

$$x > 3 \text{ e } x < -2 \text{ ou } x < 3 \text{ e } x > -2.$$

Como não existe número x tal que $x > 3$ e $x < -2$, ficamos somente com a segunda possibilidade $x < 3$ e $x > -2$. Portanto, o conjunto solução é representado pela interseção de intervalos,

$$S = (-\infty, 3) \cap (-2, \infty) = (-2, 3).$$

Atividade 6.4

- a) Use a Propriedade 9 para descrever todos os números reais tais que:
 $2x < -7$.
- b) Use a propriedade 10 para descrever os números reais x tais que:
 $-13x < -5$.

Exemplo 6.4

Para que valores reais de x a desigualdade abaixo faz sentido e é verdadeira.

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} > 0.$$

Solução Primeiramente é preciso que

$$x \neq 1 \text{ e } x \neq -1,$$

para que faça sentido as frações que aparecem na desigualdade.

Podemos escrever

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1 - (x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{(x-1)(x+1)} > 0.$$

Ora para que a desigualdade seja verdadeira é suficiente que

$$(x-1)(x+1) > 0.$$

Vamos fazer uma tabela para identificar os sinais de $x - 1$ e $x + 1$. Veja a **Figura 6.8**.

	$-\infty$	-1	$+1$	$+\infty$	→
$(x - 1)$	-	-	+	+	
$(x + 1)$	-	+	+	+	
$(x - 1)(x + 1)$	+	-	+	+	

Figura 6.8: Os sinais de $x - 1$ e $x + 1$.

Note que

$$x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1 \quad \text{e} \quad (x - 1) > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

Também,

$$x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1 \quad \text{e} \quad (x - 1) < 0 \Leftrightarrow x < 1.$$

Com isto, concluímos, a partir da **Figura 6.8** que

$$(x + 1)(x - 1) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -1 \quad \text{ou} \quad x > 1.$$

Portanto, o conjunto solução S da inequação é

$$S = (-\infty, -1) \cup (1, \infty) = \mathbb{R} - [-1, 1].$$

Para encerrar esta aula, vamos provar uma proposição muito útil sobre desigualdades de números reais. Você certamente já conhece e usa este resultado para resolver suas contas. Aprecie.

Proposição 6.1

Sejam a e b números reais positivos. Então $a < b$ se e somente se $a^2 < b^2$.

Prova: Em símbolos, a proposição garante que para números reais positivos a e b

$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad a^2 < b^2.$$

Outra maneira de escrever a equivalência é

$$a - b < 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - b^2 < 0.$$

Veja como ainda podemos melhorar o retrato de nossa equivalência:

$$a - b < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a - b)(a + b) < 0.$$

A proposição traduzida na forma desta última equivalência pode agora ser provada.

Como a e b são positivos, então temos mais uma informação:

$$a + b > 0.$$

Isto deixa evidente que

$$a - b < 0 \Rightarrow (a - b)(a + b) < 0$$

e que

$$(a - b)(a + b) < 0 \Rightarrow (a - b) < 0.$$

□

Atividade 6.5

a) Mostre que, para quaisquer números reais a e b vale a igualdade:

$$a^3 - b^3 = (a^2 + ab + b^2)(a - b).$$

b) Imitando os argumentos da proposição 6.1, mostre que se a e b são números reais positivos então vale a equivalência

$$a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3.$$

Conclusão

Vencemos mais uma aula, onde de importante trabalhamos com a noção de ordem nos números reais e com a interpretação geométrica deste conceito sobre a reta real. Assim, para dois números reais a e b , representados como pontos sobre a reta, $a < b$, significa que a direção que aponta de a para b coincide com a orientação da reta.

Nesta aula também estudamos 10 propriedades sobre os números reais. As primeiras cinco são propriedades ligadas às operações fundamentais de adição e multiplicação. E estas, creio, são bem conhecidas de vocês. As últimas cinco propriedades são de correntes da estrutura de ordem e são importantes para a resolução de inequações.

Você já deve ter resolvido todas as cinco atividades ao longo da aula. Agora após uma pausa para recomposição de forças, resolva os exercícios que vem a seguir.

Sucesso na tarefa e até a próxima aula!

Exercícios

1. Coloque em ordem crescente os seguintes números reais: $\frac{-13}{12}, \frac{-18}{17}, \frac{13}{12}, \frac{18}{17}$.

2. Coloque em ordem crescente os números

$$-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{2}, \frac{7}{5}$$

3. Mostre que

$$3 < \sqrt{10} < 3,2$$

4. Descreva todos os números naturais n para os quais

$$\frac{\sqrt{5}}{n} > \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

5. Represente na reta real os seguintes intervalos:

a) $(-\sqrt{2}, 2]$, b) $\left(\frac{7}{8}, \frac{10}{4}\right)$ c) $[\pi, \infty)$.

6. Efetue as seguintes operações com intervalos:

a) $[-6, 0) \cap [-2, 5]$ b) $(-\infty, 1) \cap (-1, \infty)$
 c) $\mathbb{R} - (1, \infty)$ d) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{3}\right) \cup (0, \infty)$

7. Apresente na forma de intervalo de números reais o conjunto solução das inequações:

a) $\frac{x}{\sqrt{2}} - 1 < \sqrt{2}x - 1$ b) $\frac{1}{x} - 1 > 0$

8. Responda Falso (F) ou Verdadeiro (V) para as sentenças abaixo. Justifique a resposta.

a) $(-2, \infty) \cup (-\infty, -2) = \mathbb{R}$

b) $\mathbb{N} = [1, \infty)$

c) $1 \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right) \cap \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

9. Encontre o maior número natural n para o qual

$$-\frac{1}{\sqrt{5}} + n < \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

10. Prove que são verdadeiras as desigualdades:

a) $\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} < 2\sqrt{2}$, b) $\sqrt{3\sqrt{3}} < \frac{7}{3}$.

11. Mostre que se n é um número natural então existe um outro número natural m tal que $\frac{n}{2} - \sqrt{2} < m < \frac{n}{2} + \sqrt{2}$.

Auto-avaliação

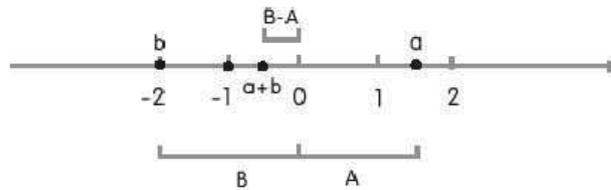
Antes de passar à aula seguinte, veja se você:

- Resolveu e não tem dúvidas sobre as atividades desta aula.
- Domina as dez propriedades operacionais dos números reais enunciadas.
- Sabe definir todos os tipos de intervalos e fazer as operações de soma e interseção de conjuntos.
- Resolveu os exercícios da série A.

Respostas das atividades

Atividade 6.1

Se $a = \frac{3}{2}$ e $b = -2$, então como os sinais são diferentes, devemos subtrair segmentos.



O segmento B cuja medida é 2 e maior que o segmento A de medida $\frac{3}{2}$. Logo, o resultado da soma é negativo e representa, em módulo, o comprimento de $B - A$.

Quanto ao produto, usamos a mesma resolução baseada na **Figura 6.2**. Para trabalhar com dois números positivos, buscamos o valor de $a \cdot (-b)$. Este número é positivo e colocado à direita na reta. Faça a construção como na **Figura 6.2**. O número $a \cdot b$ é o simétrico e situado à esquerda na reta.

Atividade 6.2

Você acertou se respondeu  para o canal e  para o volume.

Atividade 6.3

- a) Se $x \in (-1, \sqrt{2}) \Rightarrow -1 < x < \sqrt{2}$. Em particular, $x < 3$. Logo, $x \in (-\infty, 3)$. Isto prova a).
- b) Se $x \in (-\sqrt{3}, 10)$ então $-\sqrt{3} < x < 10$. Se $x \in [0, 10\sqrt{2})$ então $0 \leq x < 10\sqrt{2}$. Como $10 < 10\sqrt{2}$, um número real x para estar simultaneamente em ambos os conjuntos deve satisfazer $0 \leq x < 10$.

Atividade 6.4

a) Usando a Propriedade 9, encontramos que

$$2x < -7 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2x < \frac{1}{2} \cdot (-7) \Rightarrow x < -\frac{7}{2}.$$

Logo, todos os números reais menores que $-\frac{7}{2}$ são soluções. Deste modo, o conjunto solução S é dado por $S = \left(-\infty, -\frac{7}{2}\right)$.

b) Usando a Propriedade 10, encontramos que

$$-13x < -5 \Leftrightarrow 13x > 5 \Leftrightarrow x > \frac{5}{13}.$$

Logo, $S = \left(\frac{5}{13}, \infty\right)$ é o conjunto solução.

Atividade 6.5

- a) Basta fazer a multiplicação.
- b) Use a proposição 6.1 e o item a).

Respostas dos exercícios

1. Note que

$$\frac{-13}{12} = -\frac{13 \times 17}{12 \times 17} = -\frac{221}{12 \times 17} \quad \text{e} \quad -\frac{18}{17} = \frac{-18 \times 12}{17 \times 12} = \frac{-216}{17 \times 12}.$$

Sendo $-221 < -216$, então $\frac{-13}{12} < \frac{-18}{17}$.

PRÉ-CÁLCULO

Do mesmo modo, aproveitando as contas já feitas, vem que $216 < 221$ e então $\frac{18}{17} < \frac{13}{12}$. Logo,

$$\frac{-13}{12} < \frac{-18}{17} < \frac{18}{17} < \frac{13}{12}.$$

2. Note que

$$-\frac{1}{2} = \frac{-3}{2 \times 3} \quad \text{e} \quad -\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{-2\sqrt{3}}{3 \times 2}.$$

Agora, $-2\sqrt{3} < -3$. Portanto $-\frac{\sqrt{3}}{3} < -\frac{1}{2}$.

Do mesmo modo $\frac{7}{5} < \sqrt{2}$, uma vez que $\left(\frac{7}{5}\right)^2 < (\sqrt{2})^2$. Ou seja, $\frac{49}{25} < 2$. Portanto,

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} < -\frac{1}{2} < \frac{7}{5} < \sqrt{2}.$$

3. Mostrar que $3 < \sqrt{10}$ é equivalente a mostrar que $3^2 < (\sqrt{10})^2$ (veja a Proposição 6.1) e isto é verdade, pois $9 < 10$.

Por outro lado, $\sqrt{10} < 3,2$ é equivalente a $(\sqrt{10})^2 < (3,2)^2 = 10,24$. Portanto,

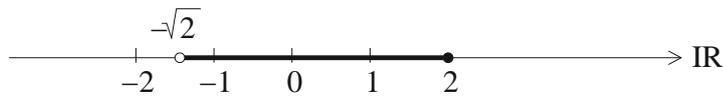
$$3 < \sqrt{10} < 3,2.$$

4. Veja que

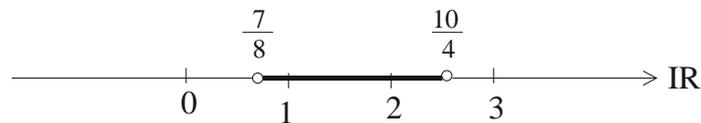
$$\frac{\sqrt{5}}{n} > \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}}{n} \cdot \sqrt{5} > \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{5}{n} > 1.$$

Ou seja, $5 > n$. Portanto, $n = 1, 2, 3$ e 4 , satisfazem a desigualdade original.

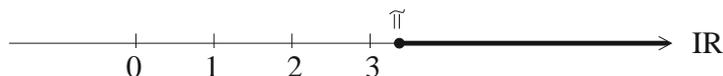
5. a)



b)



c)



6. a) $[-2, 0)$, b) $(-1, 1)$, c) $(-\infty, 1]$, d) $\left[\frac{-\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$

$$7. \text{ a) } \sqrt{2} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - 1 \right) < \sqrt{2}(\sqrt{2}x - 1) \Rightarrow x - \sqrt{2} < 2x - \sqrt{2} \Rightarrow -x < 0 \Rightarrow x > 0.$$

Conjunto solução: $S = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\} = (0, \infty)$.

b) Em primeiro lugar temos que ter $x \neq 0$. Temos

$$\frac{1}{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} > 0.$$

As soluções portanto ocorrem quando x e $(1-x)$ possuem o mesmo sinal. Vamos fazer a tabela de sinais.

$-\infty$	0	1	∞
$1-x$	+	+	-
x	-	+	+
$\frac{1-x}{x}$	-	+	-

Logo o conjunto solução é $S = \{x \in \mathbb{R}; -1 < x < 1\} = (-1, 1)$.

8. a) Falso. Note que $-2 \notin (-2, \infty) \cup (-\infty, -2)$.

b) Falso. Note que $\frac{3}{2} \in [1, \infty)$ e $\frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$.

c) Verdadeiro. O número 1 pertence a ambos os conjuntos.

9. Note que

$$-\frac{1}{\sqrt{5}} + n < \frac{5}{\sqrt{2}} \iff n < \frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \iff n^2 < \left(\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2 = \frac{25}{2} + \frac{10}{\sqrt{10}} + \frac{1}{5} = \frac{25}{2} + \frac{1}{5} + \sqrt{10}.$$

Ou seja, é preciso encontrar o maior natural n tal que

$$n^2 < \frac{127}{10} + \sqrt{10}.$$

Usando o exercício 3 vemos que

$$12,7 + 3 < \frac{127}{10} + \sqrt{10} < 12,7 + 3,2 \iff 15,7 < \frac{127}{10} + \sqrt{10} < 15,9.$$

Com estes dados concluímos que $n = 3$ é o maior número natural tal que

$$-\frac{1}{\sqrt{5}} + n < \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

10. a) Como os números envolvidos são positivos, multiplicando ambos os membros por $\sqrt{5} + \sqrt{3}$, a desigualdade fica equivalente a

$$1 < 2\sqrt{2}(\sqrt{5} + \sqrt{3}) = 2(\sqrt{10} + \sqrt{6}).$$

É claro que a desigualdade é verdadeira.

$$b) \sqrt{3\sqrt{3}} < \frac{7}{3} \Leftrightarrow 3\sqrt{3} < \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{49}{9}. \text{ Ou ainda,}$$

$$27\sqrt{3} < 49 \Leftrightarrow (27\sqrt{3})^2 < 49^2 \Leftrightarrow 27^2 \times 3 < 49^2.$$

A última desigualdade sendo verdadeira, em vista das equivalências também $\sqrt{3\sqrt{3}} < \frac{7}{3}$.

11. Vamos chamar de I_n , o intervalo,

$$I_n = \left(\frac{n}{2} - \sqrt{2}, \frac{n}{2} + \sqrt{2} \right).$$

I_n tem comprimento $2\sqrt{2} = \left(\frac{n}{2} + \sqrt{2}\right) - \left(\frac{n}{2} - \sqrt{2}\right)$. Como $2\sqrt{2} > 1$ então em todo intervalo I_n existem números inteiros. Veja o caso particular $n = 1$. Neste caso, $1 \in I_1$, pois $I_1 = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{2}, \frac{1}{2} + \sqrt{2}\right)$ e $\frac{1}{2} - \sqrt{2} < 1 < \frac{1}{2} + \sqrt{2}$. Faça as contas para provar estas últimas desigualdades. Também $1 \in I_2 = (1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$, pois $1 - \sqrt{2} < 1 < 1 + \sqrt{2}$. Agora, se $n \geq 3$ então $\frac{n}{2} > 0$, o que implica que $I_n \subset (0, \infty)$. Logo, existem números naturais dentro de I_n , uma vez que existem nestes intervalos números inteiros como já mostrado.

Aula 7 – Módulo de um número real, distribuição de números na reta e inequações

Objetivos

Nesta aula, você:

- compreenderá o conceito de módulo de um número real e relacionará este conceito com a distância entre 2 pontos da reta;
- distinguirá entre os conjuntos de números reais aqueles que são intervalos;
- entenderá os conceitos de conjunto denso e conjunto discreto;
- saberá provar a densidade dos números racionais e irracionais.

Nesta aula continuamos a aumentar nosso conhecimento acerca dos números reais com três tópicos a mais explicitados, no título da aula. Vamos ao primeiro tópico.

Módulo de um número real

Definição 7.1

Dado um número real x , o módulo de x , representado por $|x|$, é definido por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Veja os seguintes exemplos de módulos de números:

$$|\sqrt{2}| = \sqrt{2}, \quad \left| -\frac{1}{2} \right| = -\left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad |0| = 0.$$

Observe algumas propriedades básicas do módulo que decorrem diretamente da definição:

Propriedades

1. Para qualquer número real x ,

$$|x| \geq 0 \quad \text{e} \quad |x| \geq x.$$

2. Se x, y são números reais então

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|.$$

3. Se x, y são números reais e $y \neq 0$, então

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Vamos comentar estas três propriedades.

Propriedade 1. Retorne com atenção à definição de módulo de um número real. Veja que na coluna após a chave estão escritos números positivos nas duas primeiras linhas e o número zero na terceira linha. Isto mostra que o módulo é sempre positivo ou nulo. Isto é $|x| \geq 0$ para qualquer x . Também se x for positivo então $|x| = x$ e no caso de x negativo ou nulo então $|x| \geq x$.

Propriedade 2. Veja que se um dos números x ou y for nulo, então a igualdade é verdadeira. Precisamos mostrar, portanto, a validade da igualdade nos casos em que $x \neq 0$ e $y \neq 0$. O quadro da **Figura 7.1** fornece as possibilidades de sinais para os números.

x	+	-	+	-
y	-	+	+	-
x.y	-	-	+	+

Figura 7.1: Sinal de um produto.

Para a primeira coluna temos que $x \cdot y < 0$. Logo, $|x \cdot y| = -x \cdot y = x \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$.

Para a segunda coluna temos que $x \cdot y < 0$. Logo, $|x \cdot y| = -x \cdot y = (-x) \cdot y = |x| \cdot |y|$.

Para a terceira coluna temos que $x \cdot y > 0$. Logo, $|x \cdot y| = x \cdot y = |x| \cdot |y|$.

Para a quarta coluna, temos que $x \cdot y > 0$. Logo, $|x \cdot y| = x \cdot y = (-x) \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$.

Propriedade 3. Vamos deixar esta propriedade para você fazer como atividade.

Atividade 7.1 Verifique a igualdade proposta pela propriedade 3, nos casos das colunas 2, 3, 4 e 5 da **Figura 7.1**.

Caracterização geométrica do módulo

Vamos usar a representação dos números reais sobre uma reta para caracterizar geometricamente o módulo de um número. Veja na **Figura 7.2**, sobre a reta real, dois números reais x e y , onde $x > 0$ e $y < 0$.

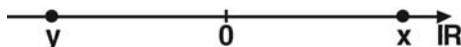


Figura 7.2: Módulo como distância à origem.

Como $x > 0$, então $|x| = x$. Por outro lado, como $y < 0$, então $|y| = -y$.

Em um ou outro caso $|x|$ e $|y|$ representam, respectivamente, a medida da distância de x até a origem O ou de y até a origem O .

Com esta interpretação geométrica em mente, enunciaremos mais uma propriedade para o módulo.

Propriedade 4: Sejam x e y números reais representados geometricamente na reta real. Então

$$|x - y| = d(x, y), \quad (7.1)$$

onde $d(x, y)$ significa a distância do ponto x ao ponto y ou o que é a mesma coisa, $d(x, y)$ é o comprimento do segmento cujos extremos são os pontos x e y .

Veja como funciona a prova da igualdade 7.1 para o caso em que $x < 0$ e $y > 0$. Veja a **Figura 7.3**.



Figura 7.3: Distância entre números.

Como $x < 0$ e $y > 0$ então $x - y < 0$. Logo

$$|x - y| = -(x - y) = y - x = |y| + |x|.$$

Esta última igualdade mostra que $d(x, y)$ é obtida somando o comprimento dos segmentos Ox e Oy .

Atividade 7.2 Considere outras posições para x e y na reta e comprove a validade da igualdade 7.1.

Desigualdade triangular

Agora vamos provar uma proposição fundamental sobre números reais, chamada desigualdade triangular.

Proposição 7.1

Sejam a e b números reais quaisquer. Então

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Prova: Em primeiro lugar, note que a desigualdade vale obviamente se um dos números ou os dois são nulos. Desenvolva este caso particular. Vamos provar a validade da desigualdade triangular examinando, caso a caso, as várias possibilidades de sinais para os números a e b . Veja na tabela (**Figura 7.4**) as possibilidades de sinais para a e b .

	sinal de a	sinal de b
caso 1	+	+
caso 2	-	-
caso 3	+	-
caso 4	-	+

Figura 7.4: Sinal de dois números.

Prova do caso 1. $a > 0$ e $b > 0$. Neste caso $a + b > 0$ e escrevemos

$$|a + b| = a + b = |a| + |b|,$$

Isto é

$$|a + b| = |a| + |b|,$$

provando a desigualdade triangular no caso 1.

Prova do caso 2. $a < 0$ e $b < 0$. Neste caso $a + b < 0$ e então,

$$|a + b| = -(a + b) = -a + (-b) = |a| + |b|,$$

Isto é,

$$|a + b| = |a| + |b|,$$

provando a desigualdade triangular no caso 2.

Prova do caso 3. $a > 0$ e $b < 0$. Nesta situação temos que trabalhar com duas situações: $a + b \geq 0$ ou $a + b < 0$. Na primeira situação ($a + b \geq 0$) escrevemos

$$|a + b| = a + b = a - (-b) = |a| - |b|.$$

Então,

$$|a + b| = |a| - |b| < |a| - |b| + 2|b| = |a| + |b|.$$

Na segunda situação ($a + b < 0$) escrevemos

$$|a + b| = -(a + b) = -a + (-b) = -|a| + |b|.$$

Logo,

$$|a + b| < -|a| + 2|a| + |b| = |a| + |b|.$$

Portanto em uma situação ou em outra a desigualdade é verificada também no caso 3.

Prova do caso 4. A prova do caso 4 é muito parecida com a do caso 3. Basicamente, basta trocar a com b .

□

A desigualdade triangular que acabamos de provar pode aparecer expressa de outras maneiras. Por exemplo:

Para quaisquer dois números reais a e b valem as seguintes desigualdades:

$$1) |a| - |b| \leq |a - b|$$

$$2) |b| - |a| \leq |a - b|$$

Prova: Veja como as desigualdades acima são consequência direta da desigualdade triangular que aparece na Proposição 7.1. De fato

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|.$$

Logo

$$|a| - |b| \leq |a - b|,$$

provando a primeira desigualdade.

Você mesmo pode construir a prova da segunda desigualdade. Mãos à obra!

Atividade 7.3

a) Prove que para quaisquer números a e b ,

$$|b| - |a| \leq |a - b|$$

b) Prove que se a_1, a_2, a_3 são números reais então

$$|a_1 + a_2 + a_3| \leq |a_1| + |a_2| + |a_3|$$

Definição 7.2

Dados os números reais a e r , onde $r > 0$, os intervalos

$$(a - r, a + r) \quad \text{e} \quad [a - r, a + r]$$

são ditos, respectivamente, o intervalo aberto de centro em a e raio r e o intervalo fechado de centro em a e raio r .

Na **Figura 7.5** representamos os intervalos centrados em $\sqrt{2}$ e -2 de raios iguais a 1, o primeiro aberto e o segundo fechado.

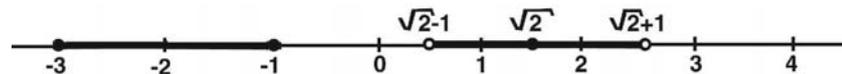


Figura 7.5: Intervalos aberto e fechado.

Nota: O intervalo $(a - r, a + r)$ é constituído por todos os números reais que estão a uma distância inferior a r do número a . Veja porque

$$(a - r, a + r) = \{x \in \mathbb{R}; a - r < x < a + r\}.$$

Vamos separar a dupla desigualdade que aparece na definição do intervalo em

$$a - r < x \quad \text{e} \quad x < a + r.$$

Estas desigualdades são equivalentes por sua vez a

$$-(x - a) < r \quad \text{e} \quad x - a < r.$$

Logo o número $x - a$ e seu simétrico $-(x - a)$ são inferiores a r . Então

$$|x - a| < r.$$

Portanto, podemos escrever o intervalo aberto de centro a e raio r , como

$$(a - r, a + r) = \{x \in \mathbb{R}; |x - a| < r\} = \{x \in \mathbb{R}; d(x, a) < r\}.$$

Esta maneira de representar o intervalo é geometricamente relevante. Podemos dizer que $(a - r, a + r)$ é o conjunto dos números (pontos) da reta que estão a uma distância inferior a r do número (ponto) que é o centro do intervalo.

Exemplo 7.1

Encontre o conjunto obtido pela interseção dos intervalos abertos I_1 e I_2 , de centros $\frac{1}{3}$ e $\frac{-5\sqrt{3}}{4}$ e raios $r_1 = 1$ e $r_2 = 3$, respectivamente.

Solução: Veja como se expressam os intervalos por I_1 e I_2 . Respectivamente,

$$I_1 = \left(\frac{1}{3} - 1, \frac{1}{3} + 1 \right) \quad \text{e} \quad I_2 = \left(\frac{-5\sqrt{3}}{4} - 3, \frac{-5\sqrt{3}}{4} + 3 \right).$$

Também, veja na **Figura 7.6** a representação geométrica dos intervalos em duas cópias da reta. Para ajudar a visualização observe o valor aproximado $\sqrt{3} \simeq 1,7$ e então $\frac{-5\sqrt{3}}{4} \simeq -2,12$.

Também

$$I_1 = \left(\frac{-2}{3}, \frac{4}{3} \right) \quad \text{e} \quad I_2 = \left(\frac{-5\sqrt{3}}{4} - 3, \frac{-5\sqrt{3}}{4} + 3 \right).$$

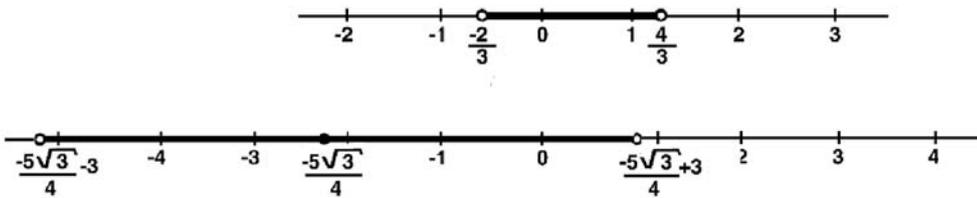


Figura 7.6

$$\text{Então } I_1 \cap I_2 = \left(\frac{-2}{3}, \frac{-5\sqrt{3}}{4} + 3 \right) = \left(\frac{-2}{3}, \frac{12 - 5\sqrt{3}}{4} \right).$$

Distribuição de números na reta

Você já sabe como são distribuídos na reta real os números inteiros. É uma distribuição que determina que, para cada número inteiro n , existem um número inteiro sucessor $n + 1$ e um número inteiro antecessor $n - 1$, igualmente distantes de n . Isto é, em termos de distância entre números, escrevemos,

$$d(n, n + 1) = d(n, n - 1) = 1.$$

Veja a **Figura 7.7**.



Figura 7.7: Distribuição dos inteiros.

O fato explicado acima mostra uma propriedade importante do conjunto dos números inteiros \mathbb{Z} . Os números inteiros são isolados, ou se distribuem de maneira isolada. Para ver este isolamento, basta ver a seguinte igualdade de conjuntos

$$\left(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{Z} = \{n\}. \quad (7.2)$$

A igualdade acima garante que no intervalo aberto centrado em n e de raio $r = \frac{1}{2}$, não existe outro número inteiro além de n . O número n está isolado no conjunto \mathbb{Z} . Veja o caso do isolamento dos números 4 e -2 , na Figura 7.8.

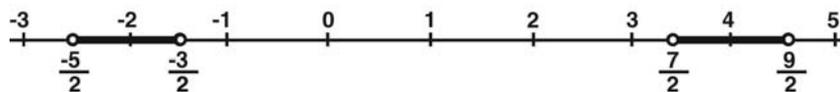


Figura 7.8: Intervalos isolando números.

$$\begin{aligned} \left(4 - \frac{1}{2}, 4 + \frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{Z} &= \left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right) \cap \mathbb{Z} = \{4\}, \\ \left(-2 - \frac{1}{2}, -2 + \frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{Z} &= \left(\frac{-5}{2}, \frac{-3}{2}\right) \cap \mathbb{Z} = \{-2\}. \end{aligned}$$

Subconjuntos de números reais com propriedade como \mathbb{Z} são chamados de conjuntos discretos.

Vamos a uma definição rigorosa.

Definição 7.3

Um subconjunto X de números reais é chamado um conjunto discreto se para todo $x \in X$, existir um intervalo aberto I centrado em x tal que

$$I \cap X = \{x\}.$$

Em outras palavras, existe um $r > 0$ tal que

$$(x - r, x + r) \cap X = \{x\}.$$

Exemplo 7.2

Se a é um número real fixado, são discretos os seguintes conjuntos:

$$1) M(a) = \{n \cdot a; n \in \mathbb{Z}\}$$

$$2) S(a) = \{n + a; n \in \mathbb{Z}\}$$

De fato,

1) Se $a = 0$ então $M(0) = \{0\}$ e $S(0) = \mathbb{Z}$ e estes conjuntos são discretos.

2) Se $a \neq 0$, escolha $r_1 = \frac{|a|}{2}$ e $r_2 = \frac{1}{2}$. Com estes raios encontramos que

$$(a - r_1, a + r_1) \cap M(a) = \{a\} \quad \text{e} \quad (a - r_2, a + r_2) \cap S(a) = \{a\}.$$

Atividade 7.4

Escolha um número real $a < 0$ e represente geometricamente na reta os conjuntos $M(a)$ e $S(a)$. Convença-se que eles são conjuntos discretos.

Veja um novo exemplo de conjunto discreto.

Exemplo 7.3

O conjunto $A = \left\{ \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$ é um conjunto discreto na reta.

De fato,

1) Tomando um elemento qualquer $\frac{1}{n} \in A$, devemos, segundo a definição achar $r > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{n} - r, \frac{1}{n} + r \right) \cap A = \left\{ \frac{1}{n} \right\}.$$

Veja a **Figura 7.9** onde está representado o conjunto A .



Figura 7.9

Note que

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \dots$$

Então os elementos de A mais próximos de $\frac{1}{n}$ são $\frac{1}{n-1}$ à direita e $\frac{1}{n+1}$ à esquerda. Veja que

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{e} \quad \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n-1)n}.$$

Também como $n(n+1) > (n-1)n$, então $\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{(n-1)n}$. Logo se escolhermos para raio r a metade do menor comprimento, isto é, $r = \frac{1}{2n(n+1)}$ teremos que,

$$\left(\frac{1}{n} - r, \frac{1}{n} + r \right) \cap A = \{n\}.$$

Veja a **Figura 7.10** ilustrando a situação.

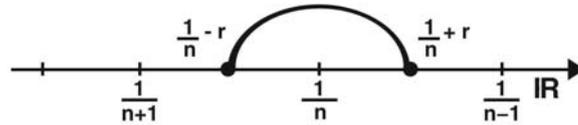


Figura 7.10: Isolamento do elemento $\frac{1}{n}$.

- Qual é a idéia geométrica que você construiu sobre um conjunto X discreto de números reais?

Você está correto se interpreta um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ discreto como um conjunto espalhado pela reta, ocupando pouco espaço e cujos pontos são isolados uns dos outros.

Vamos agora virar radicalmente o jogo e tratar de conjuntos de números reais densos em \mathbb{R} .

Definição 7.4

Um subconjunto $Y \subset \mathbb{R}$ é um conjunto denso em \mathbb{R} se para todo intervalo aberto I acontecer de $Y \cap I \neq \emptyset$.

Vamos reler a definição para tomarmos posse de todo seu significado. Dizer que um subconjunto $Y \subset \mathbb{R}$ é um conjunto denso na reta significa que para qualquer escolha de um intervalo $I = (a, b)$ existe $y \in Y$ tal que $y \in I$. E note que o tamanho do intervalo I pode ser arbitrariamente minúsculo.

Veja a **Figura 7.11** que ilustra a densidade do conjunto Y .



Figura 7.11: Conjunto denso.

Agora vamos dar um corte no nosso desenvolvimento e lembrar a época dos Pitagóricos onde correu sangue pela descoberta do número irracional $\sqrt{2}$. Cremos que se o pobre Hipaso, descobridor do primeiro irracional que perdeu a vida, tivesse evidenciado a existência de infinitos números irracionais e que, além disso, estes números estão presentes em qualquer intervalo aberto, por mais microscópico que seja este intervalo, não restaria à comunidade Pitagórica a não ser a imolação coletiva.

Eis o resultado surpreendente e fundamental:

Teorema 7.1

Os seguintes subconjuntos são conjuntos densos na reta:

- a) o subconjunto dos números irracionais
- b) o subconjunto dos números racionais.

Antes de provar o resultado expresso no Teorema 7.1, pedimos licença para preparar o terreno. As Notas 1 e 2 a seguir, são resultados preparatórios.

Nota 1. Se $I = (a, b)$ é um intervalo aberto então $a < b$ e $d = b - a$ é o diâmetro do intervalo I . Veja a **Figura 7.12**, onde o diâmetro d é representado.

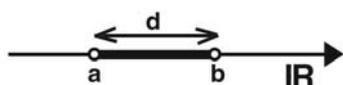


Figura 7.12: Diâmetro de um intervalo.

Nota 2. Dado qualquer número positivo $d > 0$, existe um número natural n tal que

$$2\sqrt{2} < nd.$$

Veja a **Figura 7.13** ilustrando a Nota 2. O resultado expresso nesta nota recebe o nome de “Princípio Arquimediano” em homenagem ao geômetra grego Arquimedes, que viveu no século IV a.C.

Justificativa da Nota 2.

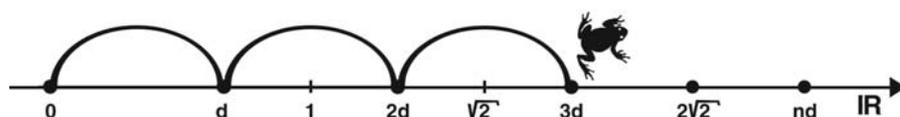


Figura 7.13: Princípio Arquimediano.

Observe em primeiro lugar que $2\sqrt{2}$ é um número fixo. O número $d > 0$ pode ser imaginado como o tamanho do pulo de um sapinho que sai da origem 0 (zero) e quer alcançar e ultrapassar o marco $2\sqrt{2}$, como na **Figura 7.13**.

É claro que se o tamanho do pulo $d > 0$ do sapinho for muito pequeno, o número de pulos n tem que ser grande para superar $2\sqrt{2}$. Inversamente, se o tamanho do pulo $d > 0$ for grande, o número de pulos n será pequeno. Em outras palavras, o número de pulos n é inversamente proporcional ao tamanho $d > 0$ do pulo. De qualquer modo o sapinho pulará, tanto quanto necessário, para ultrapassar a marca $2\sqrt{2}$.

Isto é,

$$d + d + d + \dots + d > 2\sqrt{2} \quad (n \text{ parcelas } d).$$

Atividade 7.5

Se $d = 0,001 = 10^{-3}$, qual é o menor n tal que $2\sqrt{2} < n \cdot d$?

Sugestão: Use que $14141 \times 10^{-4} < \sqrt{2} < 14142 \times 10^{-4}$.

Juntando os resultados das notas 1 e 2 podemos provar agora o Teorema 7.1.

Prova do Teorema 7.1

Queremos mostrar que qualquer que seja o intervalo $I = (a, b)$, onde $a < b$, existem dentro de I números racionais e números irracionais.

Por incrível que pareça, para provar o teorema, no contexto em que estamos, é suficiente promover uma corrida de sapos!

Veja porque! Suponha, inicialmente que o intervalo está na parte positiva da reta. Isto é, $I = (a, b)$, onde $0 < a < b$. Temos que $d = b - a > 0$ é o diâmetro do intervalo. A Nota 2 assegura que existe n tal que

$$2\sqrt{2} < n \cdot d \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{n} < \frac{d}{2}.$$

Serão dois sapinhos saindo da origem 0 (zero) na direção positiva e com pulos de comprimentos $\frac{\sqrt{2}}{n}$ e $\frac{1}{n}$ respectivamente. Note que ambos os pulos

são menores do que a metade do diâmetro d do intervalo I , pois vale,

$$\frac{1}{n} < \frac{\sqrt{2}}{n} < \frac{d}{2}.$$

Ora, nestas condições os sapinhos após um número finito de pulos têm a máxima aproximação do ponto a e daí no próximo pulo caem dentro da armadilha representada pelo conjunto $I = (a, b)$. O fato dos sapinhos caírem dentro do intervalo decorre que seus pulos não cobrem o diâmetro do intervalo. Veja a **Figura 7.14**.

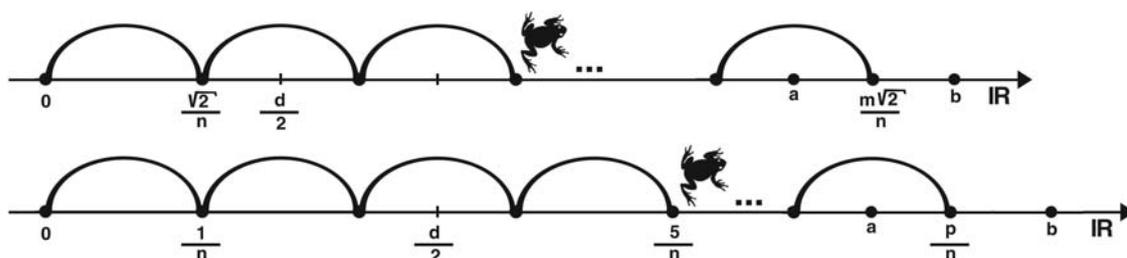


Figura 7.14: A corrida de sapos.

Portanto com $(m - 1)$ pulos de comprimento $\frac{\sqrt{2}}{n}$, o sapinho irracional tem a máxima aproximação do ponto a e, assim o m -ésimo pulo cai dentro do intervalo. Logo

$$a < \frac{m\sqrt{2}}{n} < b \Rightarrow \frac{m\sqrt{2}}{n} \in I = (a, b).$$

Também com $(p - 1)$ pulos de comprimento $\frac{1}{n}$, o sapinho racional tem a máxima aproximação de a e, assim o p -ésimo pulo cai dentro de I . Logo,

$$a < \frac{p}{n} < b \Rightarrow \frac{p}{n} \in I = (a, b).$$

Como $\frac{m\sqrt{2}}{n}$ é um número irracional e $\frac{p}{n}$ um número racional, e estes números estão dentro do intervalo I está encerrada a prova do Teorema 7.1, no caso em que $I = (a, b)$ e $0 < a < b$.

Por outro lado, se $I = (a, b)$ ocupa uma posição qualquer na reta, certamente existe um número inteiro k tal que $k < a$. Então colocamos nossos sapinhos pulando a partir de k . Novamente após s pulos e r pulos respectivamente os sapinhos caem na armadilha. Isto é,

$$k + \frac{s\sqrt{2}}{n} \in I = (a, b) \quad \text{e} \quad k + \frac{r}{n} \in I = (a, b).$$

Os números $k + \frac{s\sqrt{2}}{n}$ e $k + \frac{r}{n}$ são, respectivamente, um número irracional e um número racional. Isto completa nossa prova que os subconjuntos dos números racionais e os irracionais são densos em \mathbb{R} .

Atividade 7.6

- a) Considere o intervalo $I = (a, b)$, $a = \sqrt{2}$ e $b = \frac{36}{25}$. Calcule o diâmetro de I .
- b) Encontre um número racional e um número irracional dentro de I ?

Inequações com módulo

Para encerrar esta aula vamos praticar, em alguns exemplos, a solução de inequações onde aparecem módulos.

Exemplo 7.4

Determine o conjunto de números reais, tais que $|x + 1| < 5$.

Solução. Usando a definição de módulo, a desigualdade proposta corresponde a duas desigualdades

$$x + 1 < 5 \text{ e } -(x + 1) < 5.$$

Ou seja, $x < 4$ e $-6 < x$. Portanto $S = (-6, 4)$ é o conjunto solução.

Exemplo 7.5

Determine o conjunto solução da inequação $|x - 1| > 6$.

Solução. A desigualdade é equivalente a

$$x - 1 > 6 \text{ e } -(x - 1) > 6.$$

Ou seja, $x > 7$ e $-5 > x$. Logo o conjunto solução S é dado pela união de dois intervalos abertos infinitos: $S = (-\infty, -5) \cup (7, \infty)$.

Exemplo 7.6

Determine o conjunto solução da inequação $|x + 1| < |x - 1|$.

Solução. O problema consiste em identificar todos os números reais x tais que a distância até -1 é inferior à distância até 1 . Temos três casos a examinar.

1º caso: $x > 1$.

Neste caso, $x + 1 > 0$ e $x - 1 > 0$ e a equação se torna $x + 1 < x - 1 \Leftrightarrow 1 < -1$, o que é absurdo.

2º caso: $-1 \leq x \leq 1$.

Neste caso, $x + 1 \geq 0$ e $x - 1 \leq 0$. Então a desigualdade se expressa como

$$x + 1 < -(x - 1) \Leftrightarrow 2x < 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

Logo, $-1 \leq x < 0$ é solução neste caso.

3º caso: $x < -1$.

Neste caso, $x + 1 < 0$ e $x - 1 < 0$ e a desigualdade se expressa como $-(x + 1) < -(x - 1)$. Ou seja, $-1 < 1$. Portanto, todo $x < -1$ verifica a desigualdade.

Juntando as possibilidades representadas pelo 2º e 3º casos temos que

$$S = [-1, 0) \cup (-\infty, -1) = (-\infty, 0),$$

é o conjunto solução procurado.

Exercícios

1. Existe algum número real a tal que $|a - 2| = |a + 1|$? Interprete sua solução em termos de distância.
2. Determine os números $x \in \mathbb{R}$ que estão à distância 3 do número -3 .
3. Dado intervalo aberto I , determine o centro c e o raio r . Isto é, escreva I na forma $I = (c - r, c + r)$, onde

(a) $I = (-3, 2)$

(b) $I = \left(\frac{-5}{2}, \frac{8}{3}\right)$

$$(c) I = (2 - \sqrt{2}, \sqrt{3} + 2)$$

4. Calcule o diâmetro de cada um dos intervalos do exercício 3.

5. Determine e represente na reta real o conjunto solução de

$$(a) \left| x + \frac{1}{5} \right| = 2$$

$$(b) |x - 3| = -1$$

$$(c) |x + 6| < 3$$

Respostas das atividades

7.1: Para a segunda coluna $\frac{x}{y} < 0$ e $\left| \frac{x}{y} \right| = -\frac{x}{y} = \frac{x}{-y} = \frac{|x|}{|y|}$. Para a terceira coluna $\frac{x}{y} < 0$ e $\left| \frac{x}{y} \right| = -\frac{x}{y} = \frac{-x}{y} = \frac{|x|}{|y|}$. Para a quarta coluna $\frac{x}{y} > 0$ e $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{x}{y} = \frac{|x|}{|y|}$. Para a quinta coluna $\frac{x}{y} > 0$ e $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{x}{y} = \frac{-x}{-y} = \frac{|x|}{|y|}$.

7.2: Se $0 < x < y$ então $d(x, y) = y - x = |x - y|$. Faça o desenho deste caso e discuta outras possibilidades

7.3: a) A desigualdade básica é $|a + b| \leq |a| + |b|$. Note que $|b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a|$. Logo, $|b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|$.

$$b) |a_1 + a_2 + a_3| \leq |a_1 + a_2| + |a_3| \leq |a_1| + |a_2| + |a_3|.$$

7.4: Para $a = \frac{1}{3}$, faça o desenho na reta dos conjuntos

$$M\left(\frac{1}{3}\right) = \left\{ \dots - \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \dots \right\} \text{ e } S(a) = \left\{ \dots - \frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \dots \right\}$$

7.5: Usando a sugestão, basta encontrar o menor n tal que $nd > 2 \times 14142 \times 10^{-4}$. Ou seja, $n \cdot 10^{-3} > 28284 \times 10^{-4}$. Logo, $n > 2828,4$. Portanto $n = 2829$.

$$7.6: a) d = \frac{36}{25} - \sqrt{2};$$

b) Como $d = \frac{144}{100} - \sqrt{2} = 14400 \times 10^{-4} - \sqrt{2}$ e $14141 \times 10^{-4} < \sqrt{2} < 14142 \times 10^{-4}$ então $258 \times 10^{-4} < d < 259 \times 10^{-4}$.

Então se $c = 10^{-4}$ temos que $0 < c < d$ e os números $\sqrt{2} + c$ e $\frac{36}{25} - c$ são números, respectivamente, irracional e racional e que pertencem ao intervalo I .

Respostas do exercícios

1. A igualdade significa que a está igualmente distante dos pontos (números) 2 e -1 .

Se $a \leq -1$ a igualdade é equivalente a $-(a-2) = -(a+1) \Rightarrow 2 = -1$, sem solução.

Se $-1 < a \leq 2$ a igualdade é equivalente a $-(a-2) = a+1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

Se $a > 2$ a igualdade é equivalente a $a-2 = a+1 \Rightarrow -2 = 1$, sem solução.

Logo, $a = \frac{1}{2}$ é a única solução.

2. $x = -6$ e $x = 0$.

3. (a) $I = \left(-\frac{1}{2} - \frac{5}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \right)$

(b) $I = \left(\frac{1}{12} - \frac{31}{12}, \frac{1}{12} + \frac{31}{12} \right)$

(c) $\left(\frac{4 + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}, \frac{4 + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2} \right)$

4. a) 5, b) $\frac{31}{6}$, c) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$

5. (a) $x + \frac{1}{5} = 2$ ou $-\left(x + \frac{1}{5}\right) = 2 \Rightarrow x = \frac{9}{5}$ ou $x = -\frac{11}{5}$.

(b) $x - 3 = -1$ ou $-(x - 3) = -1 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 4$

(c) $x + 6 < 3$ ou $-(x + 6) < 3 \Rightarrow x < -3$ ou $x > -9$.



“... partindo das árvores baobás gêmeas, andar 3200 pés na direção do sol poente, aguardar a meia noite da lua nova de março...”

Aula 8 – Sistemas de coordenadas em um plano

Objetivos

Nesta aula, você:

- identificará que coordenadas em uma reta ou em um plano são ferramentas que permitem representar graficamente subconjuntos da reta e do plano;
- compreenderá que numa reta com coordenadas a noção de módulo de um número real conduz à noção de distância entre pontos de uma reta;
- entenderá a construção de coordenadas polares num plano e a relação destas com coordenadas cartesianas.

Veja a inscrição encontrada num pergaminho de uma biblioteca na antigüidade, dando referências para encontrar um tesouro enterrado.

“Na ilha de Samos, partindo das árvores baobás gêmeas, andar 3200 pés na direção do sol poente e aguardar a meia noite de uma lua nova de março. Caminhar mais 7.280 pés na direção da estrela Sirius, para ter o tesouro estará a seus pés. “

Considerando o espaço descrito pelo “Mapa do tesouro” como um plano, as indicações referem-se a pontos com localizações precisas e direções que ligam estes pontos.

A **Figura 8.1** a seguir, poderia ser uma representação esquemática do “Mapa do tesouro”. Os pontos A , B e C seriam, respectivamente, o ponto de partida, a primeira parada para aguardar a lua nova de março e finalmente o tesouro no ponto C . As direções indicadas de A para B e de B para C representam as direções do sol poente e da estrela Sirius num céu de lua nova de março.

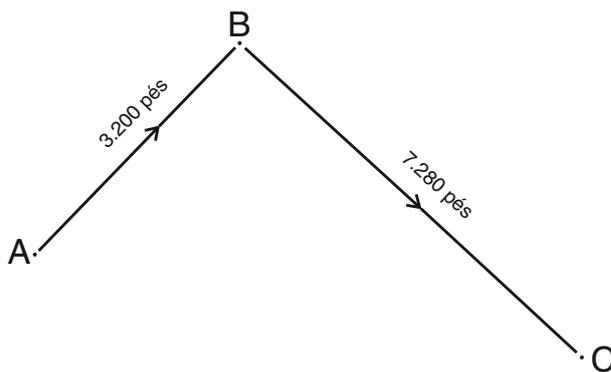


Figura 8.1: O mapa do tesouro.

Nesta aula vamos introduzir um sistema de coordenadas no plano para resolver problemas ligados à localização de pontos, descrição de lugares geométricos (regiões do plano) e oferecer uma ferramenta para resolver problemas que permitam uma expressão geométrica.

Como teremos ocasião de estudar, a introdução de um sistema de coordenadas em um plano constroeu uma ponte entre a Álgebra e a Geometria, estabelecendo um método eficaz para resolver problemas.

O método funciona mais ou menos assim: queremos resolver um problema e traduzimos seu enunciado em termos algébricos. Em seguida, as expressões algébricas são interpretadas ou expressadas como lugares geométricos num plano com sistema de coordenadas. Resolve-se o problema geometricamente. Após, interpreta-se as soluções à vista da proposição algébrica original do problema, selecionando as soluções compatíveis.

Coordenadas em uma reta

Dada uma reta r indicamos os pontos sobre a reta por letras maiúsculas A , B , C etc ...

A idéia de introduzir coordenadas em uma reta é a de associar a cada ponto da reta um número real de maneira tão organizada que possam ser conseguidas as seguintes propriedades:

- fica definido uma unidade de medida;
- todo ponto representa um e apenas um número real e, todos os números reais são representados;
- a distância entre dois pontos é dada pelo módulo da diferença dos números inscritos sobre o ponto.

Uma vez introduzido o sistema de coordenadas sobre a reta, está estabelecido uma representação geométrica dos números reais. A partir daí, pontos da reta e números reais são a mesma coisa. Problemas envolvendo números reais podem ser resolvidos geometricamente e propriedades de números reais podem ser interpretadas geometricamente.

Este assunto coincide com a representação geométrica dos números reais sobre uma reta, assunto visto nas aulas anteriores. Não é demais repetir a construção, agora com foco no sistema de coordenadas.

Mas vamos à ação!

Dada uma reta r escolha um ponto origem O e o represente pelo número 0 (zero), escolha outro ponto diferente para localizar o número 1. Neste ponto estamos aptos a representar sobre a reta todos os números reais. Veja a **Figura 8.2**.

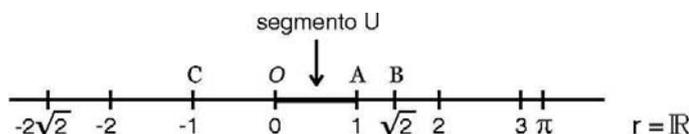


Figura 8.2: A reta real.

O segmento OA cujas extremidades são os pontos 0 (zero) e 1 (um), indicado como segmento U , define a unidade de medida que permite localizar todos os números reais sobre a reta.

De que modo? Sobre a reta r estão definidas duas semi-retas opostas com origem comum O . Sobre aquela semi-reta que contém o número 1 representaremos todos os números reais positivos e sobre a semi-reta oposta representaremos todos os números reais negativos. Este modo de proceder, faz com que a todo número real corresponda um e apenas um ponto da reta r e a cada ponto da reta corresponda um e apenas um número real. Outro modo de dizer a mesma coisa: “entre os pontos da reta e os números reais estabeleceu-se uma identificação biunívoca”.

Este modo de representar os números reais sobre uma reta faz com que o segmento de reta em cujos extremos estão representados números inteiros consecutivos n e $n + 1$ tenha comprimento igual a do segmento unitário U .

Para recordar os detalhes sobre a localização dos números reais sobre a reta a partir dos números inteiros depois racionais e enfim os irracionais, retorne à leitura da Aula 3.

Reforçando e estruturando a idéia! A todo ponto A da reta r está associado um único número real digamos, a , que é a coordenada do ponto.

Uma identificação biunívoca entre dois conjuntos X e Y é uma relação que associa a cada elemento de X um único elemento de Y , e de modo que a relação pode ser invertida associando a cada elemento de Y , igualmente, um único elemento de X .

Na **Figura 8.2**, os pontos A e B têm como coordenadas, respectivamente, os números 1 e $\sqrt{2}$.

Mas, qual é a propriedade geral que determina a posição relativa entre números sobre a reta? É a seguinte: “se os pontos P e Q tem como coordenadas os números p e q então o comprimento do segmento PQ é $|p - q|$.”

Uma reta com estrutura de coordenadas é dita uma reta numérica ou a reta real. Estamos autorizados a representar esta reta por \mathbb{R} . Veja esta notação na **Figura 8.2**.

Distância entre dois pontos da reta

Conforme já observado, numa reta com coordenadas é muito fácil calcular a distância entre dois pontos A e B . Se a e b são respectivamente os números que representam as coordenadas dos pontos A e B , então o comprimento do segmento de reta AB é a distância entre os pontos, a qual pode ser calculada por

$$d(A, B) = AB = |b - a|.$$

Vamos entender bem o que está escrito na fórmula acima. A distância entre A e B é o comprimento do segmento cujos extremos são estes pontos. Este comprimento está indicado por AB e pode ser calculado pelo módulo do número $b - a$.

Coordenadas em um plano

Mas, pretendemos ir além, introduzindo coordenadas em um plano. De que modo? Considere um plano α e um par de retas t e s perpendiculares, cuja interseção ocorre no ponto O . Veja a **Figura 8.3**.

Considere em cada uma dessas retas sistemas de coordenadas de modo que r e s se tornem retas numéricas, com a mesma unidade U de medida.

Afirmamos que, com a ajuda deste par de retas (ou eixos), existe uma identificação biunívoca entre os pontos P do plano α e os pares (x, y) , onde x, y são números reais.

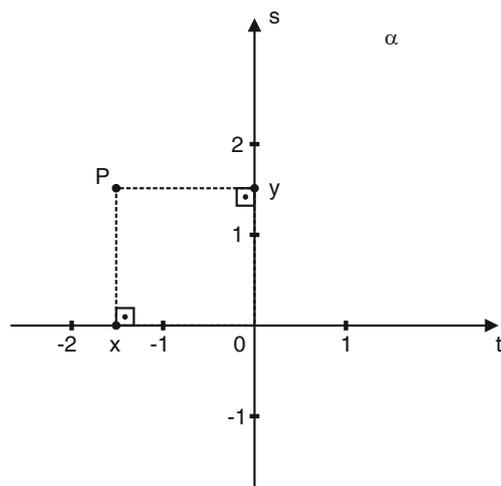


Figura 8.3: Eixos ortogonais no plano.

Como funciona? Tome um ponto P arbitrário e trace perpendiculares às retas t e s obtendo, respectivamente os pontos x e y . Assim, legitimamente, podemos denotar

$$P = (x, y).$$

Os números x e y são chamados, respectivamente, a abscissa e a ordenada do ponto P . As retas t e s são ditas, respectivamente, o eixo horizontal ou das abscissas e o eixo vertical ou das ordenadas.

Retorne a **Figura 8.3**, para visualizar a representação do ponto P .

O plano euclidiano

Veja o passo fundamental que demos! Ao introduzir adequadamente um par de eixos (retas) no plano α provocamos uma identificação biunívoca entre os pontos P de α e os pares ordenados (x, y) de números reais. Esta identificação é escrita como $P = (x, y)$ e permite expressar o plano α como o conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x \text{ e } y \text{ são números reais}\},$$

que é o produto cartesiano de duas cópias do conjunto dos números reais \mathbb{R} .

Portanto é útil ao invés de dizer que α tem um sistema de coordenadas, escrevermos simplesmente \mathbb{R}^2 para o plano α .

Então está estabelecida nossa convenção. Quando escrevermos,

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\},$$

estamos nos referindo a um plano com um sistema de coordenadas retangulares. O plano \mathbb{R}^2 com esta estrutura recebe o nome de Plano Euclidiano, em homenagem ao ilustre geômetra grego.

A identificação biunívoca entre pontos P do plano e pares de números reais significa que dois pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ são iguais se e somente se $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

Representação gráfica

No plano euclidiano \mathbb{R}^2 temos o local ideal para representar graficamente objetos geométricos, como pontos, segmentos, retas e figuras planas em geral. Mais tarde na Aula 19, a idéia de representar geometricamente objetos no plano \mathbb{R}^2 , atinge um ponto importante, com a representação gráfica de funções.

Vamos começar mostrando casos bem simples.

Exemplo 8.1

Descreva algebricamente e represente no plano o segmento de reta cujos extremos são os pontos $A = (2, 1)$, $B = (-1, 1)$.

Solução: Na **Figura 8.4** temos a representação gráfica do segmento AB .

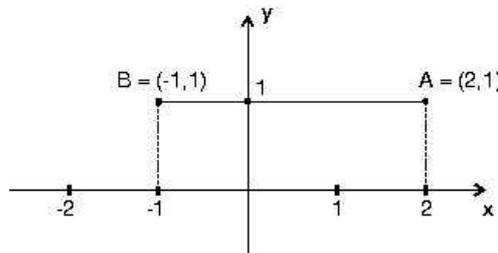


Figura 8.4: Um segmento em \mathbb{R}^2 .

Em termos algébricos,

$$AB = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 2, y = 1\}.$$

Exemplo 8.2

Represente graficamente os conjuntos

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1\} \quad \text{e}$$

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq y \leq 1\}$$

Solução: Para representar graficamente U , levamos em conta a variação da abscissa x e o fato que não há restrição à variação da ordenada y . Para a representação gráfica de V , levamos em conta a variação da ordenada y e o fato que não há restrição à variação da abscissa x . Veja a **Figura 8.5**.

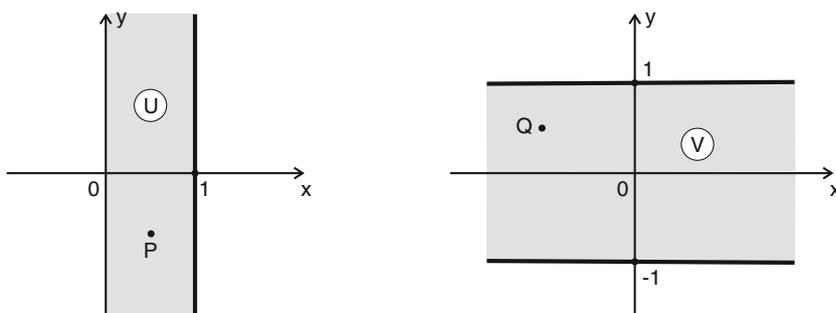


Figura 8.5: Faixas vertical e horizontal.

Exemplo 8.3

Represente graficamente o conjunto

$$Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1 \text{ e } -1 \leq y \leq 1\}.$$

Solução: Para construir o gráfico de Z , levamos em conta as variações da abscissa x e da ordenada y . Mas antes de tudo, veja que $Z = U \cap V$. Isto facilita tudo para a representação pois conhecemos os gráficos de U e V . A **Figura 8.6** representa Z através dessa interseção.

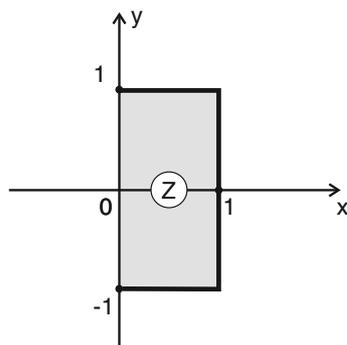


Figura 8.6: Um retângulo em \mathbb{R}^2 .

Semi-planos e quadrantes

Vamos continuar explorando coordenadas para descrever importantes subconjuntos de \mathbb{R}^2 . Considere \mathbb{R}^2 , como na **Figura 8.7**, \mathbb{R}^2 com seu sistema de coordenadas,

onde estão representados os pontos $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3)$ e $P_4 = (x_4, y_4)$.

O eixo x das abscissas divide o plano em dois semi-planos, um deles posicionado acima do eixo e outro abaixo do eixo. Por exemplo, poderíamos nos referir a estes semi-planos, respectivamente pelos símbolos H_+ e H_- .

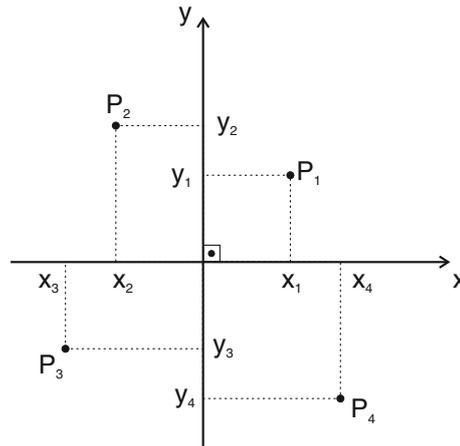


Figura 8.7: Pontos no plano \mathbb{R}^2 .

Veja como se expressam estes semi-planos em termos de conjuntos,

$$H_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\} \quad \text{e}$$

$$H_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq 0\}.$$

Veja na **Figura 8.8** a representação gráfica de H_+ .

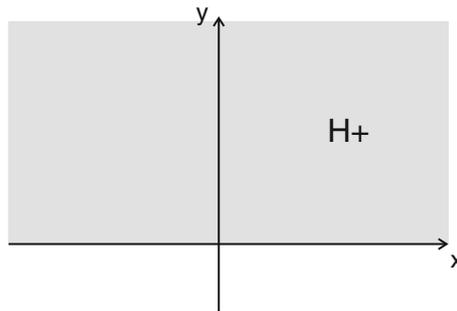


Figura 8.8: Semi-planos em \mathbb{R}^2 .

Se você comparar a **Figura 8.8** com a **Figura 8.7** verá que os pontos P_1 e P_2 pertencem a H_+ e os pontos P_3 e P_4 não pertencem a H_+ .

Veja diretamente na definição de H_+ para concluir que todos os pontos sobre o eixo x pertencem a H_+ . Isto é, $(x, 0) \in H_+$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

O conjunto H_- teria uma representação gráfica análoga. Isto faz parte da atividade que propomos:

Atividade 8.1

Construa um sistema ortogonal de coordenadas num plano e

- Represente os pontos $A = (0, -2)$, $B = (5, 3)$, $C = (-1, 2)$, $D = (-3, 0)$.

b) Responda falso (F) ou verdadeiro (V) para cada uma das perguntas abaixo:

1) $(0, -2) \in H_+$

3) $(5, 3) \in H_-$

2) $(-7, 2) \in H_-$

4) $(-3, 0) \in H_-$

5) $(-3, 0) \in H_+$

c) Descreva o conjunto $H_+ \cap H_-$.

Você realizou a atividade? Então podemos continuar nosso caminho explorativo na identificação de novos conjuntos de \mathbb{R}^2 , expressos através de desigualdades. Veja os dois próximos exemplos.

Exemplo 8.4

$$L_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0\} \quad \text{e} \quad L_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq 0\},$$

são semi-planos de \mathbb{R}^2 , obtidos quando o plano todo é repartido pelo eixo das ordenadas y . O primeiro ficando à direita do eixo y e o segundo à esquerda do eixo y . Veja na **Figura 8.9**, a representação gráfica de L_- .

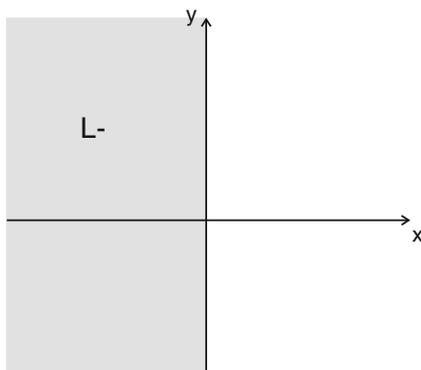


Figura 8.9: Representação de semi-plano.

Veja que vale a seguinte propriedade:

$$L_+ \cap L_- = \{(0, y); y \in \mathbb{R}\} = \text{eixo } y.$$

Quadrantes de \mathbb{R}^2

Principalmente quando estudamos trigonometria e enfrentamos a abstrata (complicada) definição de ângulo, é útil naquele contexto a divisão do plano em quadrantes.

Veja como fica simples a representação dos quadrantes através do uso de coordenadas!

Represente os quadrantes pelos símbolos Q_1 , Q_2 , Q_3 e Q_4 , para se referir, respectivamente, ao primeiro, segundo, terceiro e quarto quadrantes do plano.

Temos que

$$Q_1 = \{(x, y); x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\},$$

$$Q_2 = \{(x, y); x \leq 0 \text{ e } y \geq 0\},$$

$$Q_3 = \{(x, y); x \leq 0 \text{ e } y \leq 0\} \text{ e}$$

$$Q_4 = \{(x, y); x \geq 0 \text{ e } y \leq 0\}.$$

Veja na **Figura 8.10** a representação gráfica de Q_2 , o segundo quadrante.

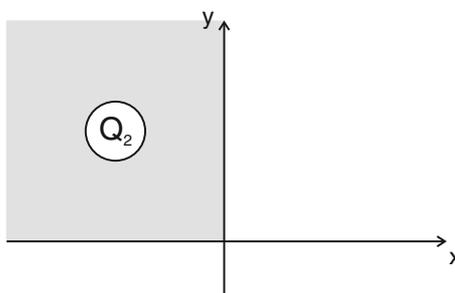


Figura 8.10: O segundo quadrante de \mathbb{R}^2 .

Notas

- 1) A origem $O = (0, 0)$ é comum a todos os quadrantes, $O \in Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 \cap Q_4$.
- 2) $Q_1 \cap Q_2 = \{(0, y); y \geq 0\}$, é a parte não negativa do eixo y .

Atividade 8.2

- a) Identifique graficamente num plano com coordenadas os quadrantes Q_1 , Q_2 , Q_3 e Q_4 .
- b) Represente graficamente os conjuntos

i) $Q_2 \cap Q_3$, ii) $Q_3 \cap Q_4$ e iii) $Q_4 \cap Q_1$.

Coordenadas polares

Estamos trabalhando com o problema de introduzir em um plano um sistema de coordenadas que permita referências seguras, que possam relacionar os vários lugares do plano.

Esta idéia é antiga na mente dos homens. Lembra daquela história infantil? João e Maria, filhos de um pobre lenhador, seriam abandonados na floresta pelo pai, na manhã seguinte, por causa da penúria de alimentos. Este foi o tom da conversa entre os pais ouvida à noite pelas crianças. Na manhã seguinte, João pega pequenos pedaços de pão e joga no caminho que ele faz na vã esperança de poder refazer o percurso de volta à casa após ser abandonado pelo pai. Mas houve uma falha no plano. Os passarinhos comeram as migalhas... bem você sabe a história! Recordei apenas para referir a um sistema infantil de orientação, uma coordenada muito elementar introduzida pelas crianças para se orientar no plano de seu mundo.

Mas, com as abelhas ocorre diferente, elas se orientam em busca do néctar através de coordenadas polares. Estes insetos têm apurada percepção geométrica, recorde a estética estrutura hexagonal dos favos. Mas guarde a curiosidade! Antes de revelar o segredo da orientação das abelhas, vamos introduzir as coordenadas polares no plano.

Num plano, fica definido um sistema de coordenadas polares com a escolha de dois elementos:

- um ponto O origem
- uma semi-reta E com início na origem O , definindo um eixo orientado, onde estão representados os números reais positivos.

Veja a **Figura 8.11** onde estes elementos estão definidos no plano.

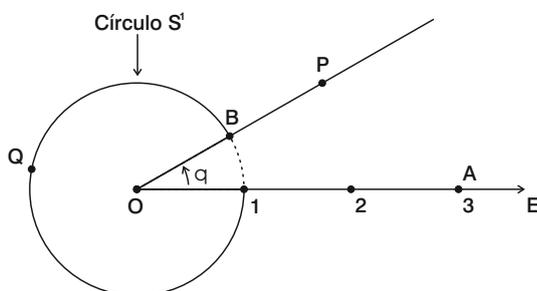


Figura 8.11: Coordenadas polares.

Sobre o eixo E está definida uma unidade de medida de comprimento.

PRÉ-CÁLCULO

Todos os pontos Q que estão sobre o círculo S^1 , de centro na origem e raio 1, tem a propriedade que $d(Q, O) = OQ = 1$.

Um ponto P arbitrário do plano, $P \neq 0$, é expresso em coordenadas como

$$P = (r, \theta),$$

onde θ é a medida do ângulo que o eixo E faz com a semi-reta OP , medido no sentido anti-horário, e r é a igual distância entre P e O . Isto é,

$$r = d(O, P) = OP, \quad \theta = \text{medida do arco } \widehat{1B}.$$

Note, por exemplo, que as coordenadas do ponto A se expressam como

$$A = (r, \theta) = (3, 0).$$

Notas

- 1) Para expressar todos os pontos do plano em coordenadas, o ângulo θ deve variar no intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$ ou, o que é a mesma coisa, expressa em graus, $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$.
- 2) O ponto origem O não pode ser expresso em coordenadas polares, uma vez que é impossível a definição de um ângulo para esse ponto.

Transição entre coordenadas cartesianas e polares

Considere sobre o plano os dois sistemas de coordenadas, o cartesiano e o polar, de modo que:

- a origem O dos dois sistemas de coordenadas coincidam;
- o eixo E do sistema polar coincide com o eixo x positivo do sistema cartesiano.

Veja a **Figura 8.12**.

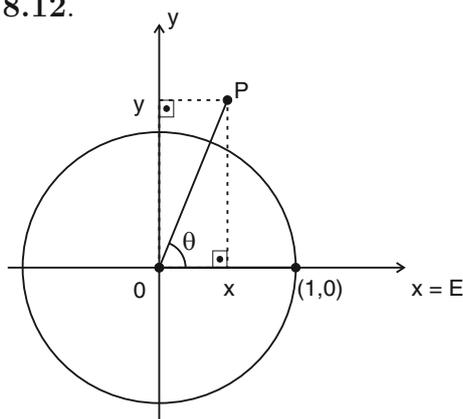


Figura 8.12

Examinando a **Figura 8.12**, note que no triângulo retângulo OPx cuja hipotenusa mede $OP = r$, vale

$$Ox = OP \cos \theta, \quad Px = OP \operatorname{sen} \theta.$$

Ou seja,

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta.$$

As equações definem a relação entre as coordenadas de um ponto P nos sistemas cartesiano e polar. Isto é

$$P = (x, y) = (r, \theta), \quad \text{onde} \quad \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \end{cases}.$$

Note que $x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta = r^2$. Isto é,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Exemplo 8.5

- a) O hiperplano superior $H_+ = \{(x, y), y \geq 0\}$, em coordenadas polares, se expressa como

$$H_+ = \{(r, \theta); r > 0, 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

- b) Considere o conjunto A do plano que, em coordenadas polares, se expressa como

$$A = \{(r, \theta); 0 < \theta < \pi, r \sen \theta \leq 2\}.$$

Como fica a representação gráfica do conjunto A ?

Para responder à pergunta é conveniente usar a conversão de coordenadas polar - cartesiana. Veja que para um ponto P expresso como $P = (x, y)$ em coordenadas cartesianas ou $P = (r, \theta)$ em coordenadas polares, a equação $0 < \theta < \pi$ é equivalente a $y > 0$.

Por outro lado, a conversão de coordenadas, onde $x = r \cos \theta$ e $y = r \sen \theta$, mostra que a equação $r \sen \theta \leq 2$ é equivalente a $y \leq 2$. Logo, podemos escrever, em coordenadas cartesianas

$$A = \{(x, y), 0 < y \leq 2\}.$$

Portanto o conjunto A , representa uma faixa no plano, como representado na **Figura 8.13**.

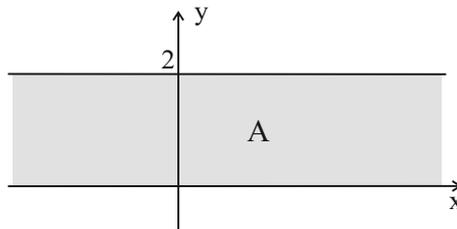


Figura 8.13: A faixa A no plano.

Atividade 8.3

- a) Expresse em coordenadas polares o primeiro quadrante Q_1 de \mathbb{R}^2 , excluindo o ponto origem.
- b) Exprima em coordenadas polares o conjunto

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x, x < 0\}.$$

- c) Represente no plano, os pontos $A = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, $B = \left(3, \frac{\pi}{4}\right)$, os quais estão expressos em coordenadas polares.

Vamos voltar ao caso das abelhas! Seres antigos na Terra, precursores na intuição sobre o uso das coordenadas polares na definição de posições (pontos) sobre um plano.

Na verdade, o sistema das abelhas são coordenadas polares no espaço. Considere um ponto O , representando a colméia e centre neste ponto uma esfera de raio 1. Veja a **Figura 8.14**.

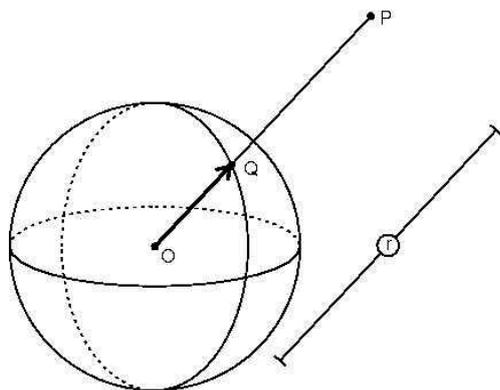


Figura 8.14: Orientação das abelhas.

Todo ponto P do espaço está definido, em termos de direção por um único ponto Q sobre a esfera de centro O . A direção \overrightarrow{OQ} será a direção de tiro para a abelha sair da colméia em busca do néctar na posição P , onde está uma flor.

- Como isto acontece?

É o fenômeno da dança das abelhas. Uma operária chega com as patinhas carregadas de néctar e promove uma dança em torno da colméia para comunicar às outras operárias a direção do tiro para o vôo. Esta é a direção θ do sistema polar. Depois a operária deve voar nesta direção até encontrar o ponto P , percorrendo uma distância $r = OP$.

Nota Histórica

A introdução de um sistema de coordenadas no plano estabelece, como dissemos, uma providencial ponte entre a Álgebra e a Geometria, e abre caminho para a Geometria Analítica.

A Geometria Analítica surgiu no século XVII com trabalhos de Pierre de Fermat e Rene Descartes. Interessante que, como é comum ocorrer com grandes idéias na Matemática, elas surgiram de modo independente de descobertas pelos dois autores e com ponto de vista também diferentes.

Fermat ia da Álgebra à Geometria. A partir de uma equação, se propunha a estudar suas propriedades geométricas. Descartes fazia o caminho da

Geometria para a Álgebra. Partindo de propriedades geométricas de pontos e figuras geométricas, Descartes procura uma tradução algébrica para seus problemas. Fermat e Descartes algebrizaram a Geometria. A ponte entre estas duas áreas nobres da Matemática é o sistema de coordenadas.

Exercícios

- Os pontos $(-2, 3)$, $(3, 3)$ são vértices consecutivos de um quadrado que não intercepta o eixo OX . Quais são as coordenadas dos outros vértices?
- Os pontos $A = (2, 3)$, $B = (-2, 7)$ são vértices opostos de um quadrado. Determine os outros vértices.
- Um sistema de coordenadas no plano está orientado de modo que o eixo x aponta para o leste e o eixo y para o norte. A unidade de comprimento é o km. Um caminhante sai do ponto $(-1, 2)$ caminha 5 km na direção sul, em seguida 13 km na direção leste, 2 km na direção norte e finalmente 11 km na direção oeste. Quais as coordenadas do ponto P de chegada do caminhante?
- Considere os pontos $A = (-2, 3)$ e $B = (3, -2)$. Encontre as coordenadas de M , o ponto médio de AB .
- Represente graficamente em \mathbb{R}^2 o conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 2 \text{ e } y \leq x\}.$$

- Represente em coordenadas polares (r, θ) os pontos $A = (2, 2)$, $B = (-2, 2)$, $C = (-3, -3)$, $D = (3, \sqrt{3})$ e $E = (-3, \sqrt{3})$.
- Represente graficamente num plano com coordenadas polares os conjuntos

$$(a) X = \left\{ (r, \theta); \theta = \frac{\pi}{4} \right\}$$

$$(b) Y = \{(r, \theta); 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

8. Considere dois números reais a e b . Responda falso (F) ou verdadeiro (V) às afirmações justificando brevemente a resposta.

(a) Se $a, b \geq 0$ então $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$.

(b) Se $a \leq b$ então $a^2 - b^2 \leq 0$.

(c) Se $a \geq 2$ então $a^3 - 1 \geq a^2 + a + 1$.

9. Os pontos $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$ e $C = (2, a)$ são vértices consecutivos de um retângulo. Encontre a ordenada do terceiro vértice e escreva as coordenadas do quarto vértice D .

10. Considere dois números reais a e b tais que $a > |b|$. Mostre que $a^2 - b^2 > 0$.

11. (Questão desafio) Represente em \mathbb{R}^2 o conjunto

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } x + y \leq 1\}.$$

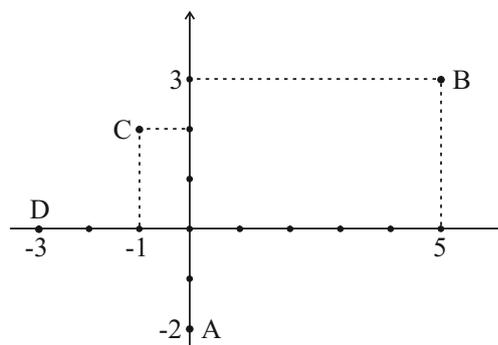
12. Represente, graficamente, num plano com coordenadas polares os conjuntos

(a) $X = \{(r, \theta); 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, r \cos \theta \leq 1\}$

(b) $Y = \{(r, \theta); 0 \leq \theta < \pi, r \sin \theta \leq 1\}$

Respostas das atividades

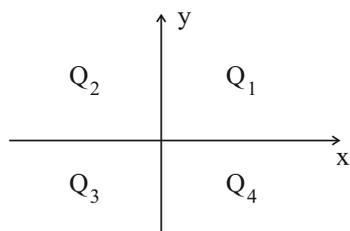
8.1. a)



b) 1- F, 2- F, 3- F, 4- V, 5- V

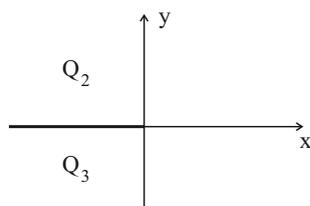
c) $H_+ \cap H_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 0\}$ é o eixo x .

8.2. a)



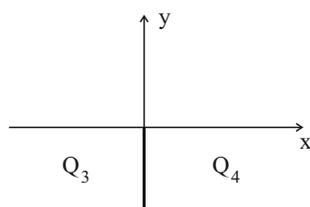
b)

(i)



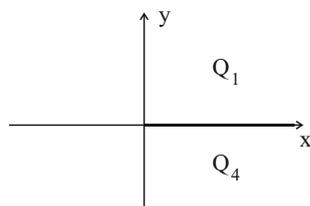
$Q_2 \cap Q_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 0 \text{ e } x \leq 0\}$, representa o eixo x não positivo.

ii)



$Q_3 \cap Q_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 0 \text{ e } y \leq 0\}$, representa o eixo y não positivo.

iii)

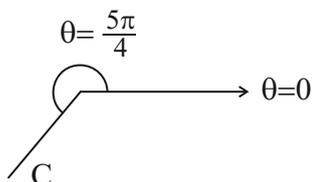


$Q_4 \cap Q_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 0 \text{ e } x \geq 0\}$, representa o eixo x não negativo.

$$8.3. \text{ a) } Q_1 = \left\{ (r, \theta); 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

b) Se $y = x < 0$, então $r \operatorname{sen} \theta = r \cos \theta < 0$. Como $r > 0$ vem que $\operatorname{sen} \theta = \cos \theta < 0$. Portanto, $\frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = 1$ e $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$. Finalmente, $\operatorname{tg} \theta = 1$, $\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ e $C = \left\{ (r, \theta); \theta = \frac{5\pi}{4} \right\}$.

Veja a figura



Respostas dos exercícios

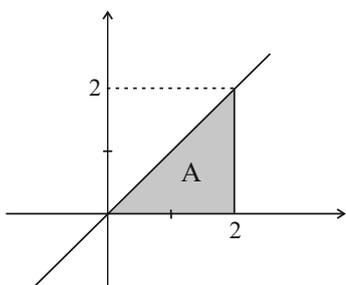
1. $(-2, 8)$ e $(3, 8)$

2. $(-2, 3)$ e $(2, 7)$

3. $P = (1, -1)$

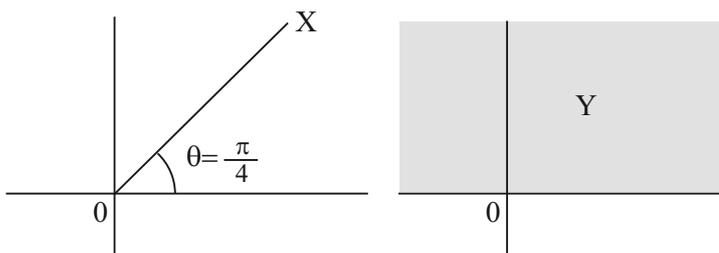
4. $M = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$

5.



6. $A = \left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right)$, $B = \left(2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4} \right)$, $C = \left(3\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4} \right)$, $D = \left(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6} \right)$
e $E = \left(2\sqrt{3}, \frac{5\pi}{6} \right)$

7.



8. a) V. Como os números são positivos, é suficiente mostrar que $(a+b)^2 \geq (2\sqrt{a \cdot b})^2$ ou, equivalentemente, que $a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$. Ou ainda, que $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$. Ou seja $(a-b)^2 \geq 0$. Esta desigualdade vale sempre.

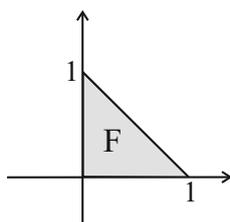
b) F. Tome $a = -1$ e $b = 0$.

c) V. Veja que $a^3 - 1 = (a^2 + a + 1)(a - 1) \geq a^2 + a + 1$.

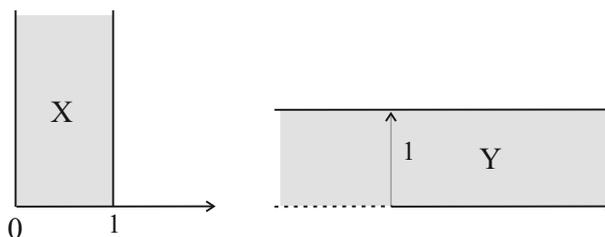
9. $a = 3$, $D = (3, 2)$

10. Como $a > b$ e $a > -b$ então $a + b > 0$ e $a - b > 0$. Logo, $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) > 0$.

11.



12.



Aula 9 – Distância entre pontos do plano euclidiano

Objetivos

Nesta aula, você:

- usará o sistema de coordenadas para calcular a distância entre dois pontos;
- descreverá, lugares geométricos mais simples, com o uso de coordenadas e distância.

Um sistema de coordenadas permite representar graficamente objetos geométricos no plano, mas também permite a realização de medidas. Com a possibilidade de medir entramos no ramo da Geometria. Aqui se trata da Geometria Analítica. Estas medidas podem ser as mais simples como a distância entre dois pontos, áreas de polígonos regulares, até áreas de regiões mais complicadas do plano como interseções de figuras. Tudo, até onde o limite do método não cause sofrimento! Senão temos que recorrer a ferramentas mais sofisticadas. A mais importante destas sendo as técnicas do Cálculo Diferencial e Integral.

Já foi dito que a Matemática é a arte de resolver problemas. Um matemático sem problemas é um ser em ócio. Mas basta um pequeno problema para entusiasmar seu desejo de endorfina através da ginástica mental.

Às ferramentas!! Bem, o matemático precisa de uma caixa de ferramentas para trabalhar, atacar, seus problemas. Nesta caixa acabamos de introduzir a ferramenta “coordenadas no plano” ou mais amplamente as ferramentas de Geometria Analítica.

Distância entre dois pontos da reta

Recorde da aula anterior que a distância entre dois pontos A e B sobre a reta real é dada pelo valor absoluto da diferença entre as coordenadas dos pontos. Assim, se A tem coordenada a e B tem coordenada b , então a distância entre A e B , que escrevemos como $d(A, B)$ é

$$d(A, B) = AB = |b - a| = \sqrt{(a - b)^2}.$$

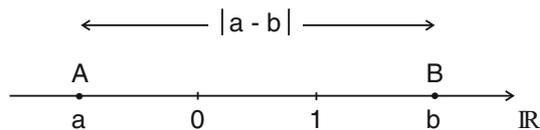


Figura 9.1

Distância entre dois pontos do plano

Considere dois pontos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$. A distância entre P e Q é o comprimento do segmento PQ . Em termos das coordenadas dos pontos, a distância $d(P, Q)$ é dada pela equação

$$d(P, Q) = PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \quad (9.1)$$

Vamos ver porque esta fórmula funciona. Considere quatro casos:

- a) Os pontos P e Q coincidem. Isto é, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. Neste caso, a distância é zero. Este resultado é compatível com a fórmula (9.1) da distância.
- b) Os pontos P e Q são distintos e situados numa reta paralela ao eixo x . Isto é, $x_1 \neq x_2$ e $y_1 = y_2$. Veja a **Figura 9.2**, à esquerda, onde os pontos P e Q definem um segmento paralelo ao eixo x . Como P, Q, x_1 e x_2 são vértices de um retângulo então

$$PQ = |x_1 - x_2|.$$

Portanto, a fórmula (9.1) é válida, neste caso.

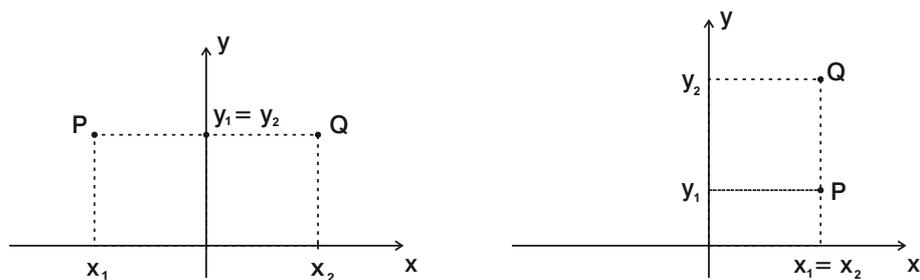


Figura 9.2

- c) Os pontos P e Q são distintos e situados numa reta paralela ao eixo y . Isto é, $x_1 = x_2$ e $y_1 \neq y_2$. Este caso é similar ao anterior e aparece representado na **Figura 9.2** à direita. Temos que

$$PQ = |y_1 - y_2|.$$

De novo a fórmula (9.1) continua válida.

- d) Os pontos P e Q são distintos, $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$. Este é o caso geral e está representado na **Figura 9.3**.

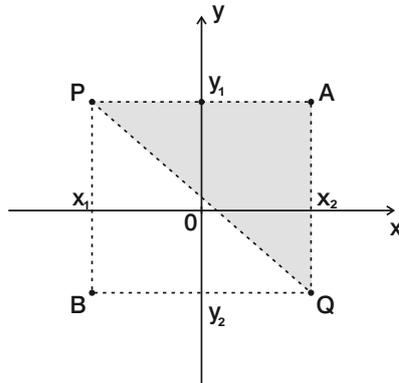


Figura 9.3

Note que P e Q são vértices opostos de um retângulo cujos lados medem $|x_1 - x_2|$ e $|y_1 - y_2|$. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo APQ , encontramos que

$$PQ^2 = |x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

ou

$$d(P, Q) = PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

que é a fórmula (9.1).

Exemplo 9.1

- a) A distância entre os pontos $P = (3, 2)$ e $Q = (1, 6)$ é,

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= \sqrt{(3 - 1)^2 + (2 - 6)^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

- b) A distância entre os pontos $P = (-1, 3)$ e $Q = (-7, -7)$ é

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= \sqrt{[-1 - (-7)]^2 + [3 - (-7)]^2} = \sqrt{6^2 + 10^2} = \sqrt{136} \\ &= \sqrt{4 \times 34} = 2\sqrt{34}. \end{aligned}$$

Exemplo 9.2

Quais são os pontos do plano equidistantes dos pontos $A = (-1, 0)$ e $B = (-1, 3)$.

Solução: Se $P = (x, y)$ é um ponto arbitrário e equidistante de A e B , então

$$d(P, A) = d(P, B) \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2}.$$

Desenvolvendo ambos os membros da última igualdade, vem que

$$(x+1)^2 + y^2 = (x+1)^2 + (y-3)^2 \Leftrightarrow y^2 = (y-3)^2 \Leftrightarrow 0 = -6y + 9$$

Logo

$$d(P, A) = d(P, B) \Leftrightarrow y = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

Portanto, o conjunto S dos pontos equidistantes de A e B verificam

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; y = \frac{3}{2} \right\}.$$

Ora este conjunto S é uma reta paralela ao eixo x a uma altura $y = \frac{3}{2}$. Veja a **Figura 9.4**.

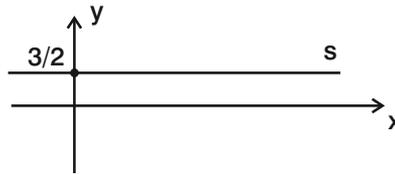


Figura 9.4

Atividade 9.1. Calcule a distância do ponto $A = (-2, 3)$ até o eixo x .

Atividade 9.2. Encontre os pontos do eixo y que estão à distância 1 do ponto $(-\frac{1}{2}, 1)$.

Exemplo 9.3

Quais são os pontos do plano equidistantes dos pontos $A = (-1, 0)$ e $B = (0, -1)$?

Solução: Se $P = (x, y)$ é um ponto arbitrário equidistante de A e B , então

$$d(P, A) = d(P, B) \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y+1)^2}.$$

Isto é,

$$(x+1)^2 + y^2 = x^2 + (y+1)^2.$$

Logo,

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 + 2y + 1 \Leftrightarrow x = y.$$

Então o conjunto S ,

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = y\}$$

são todos os pontos equidistantes dos pontos $A = (-1, 0)$ e $B = (0, -1)$.

Confira na **Figura 9.5** que S é a reta bissetriz comum ao ângulo formado pelos eixos positivos do sistema de coordenadas.

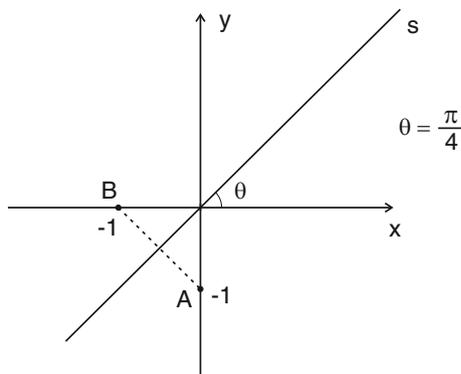


Figura 9.5

Exemplo 9.4

Um círculo S_r no plano de raio $r > 0$ e com centro no ponto $C = (a, b)$ é descrito pela equação,

$$S_r = \{(x, y); x^2 + y^2 - 2ax - 2by = r^2 - a^2 - b^2\}.$$

Veja como encontrar este resultado, acompanhando pela **Figura 9.6**.

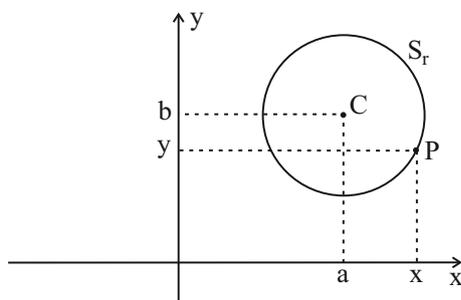


Figura 9.6

A distância de um ponto $P = (x, y)$ até o centro $C = (a, b)$ é constante e igual a r . Então

$$d(P, C) = r \Rightarrow \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r.$$

Agora, elevando ao quadrado ambos os membros da igualdade e isolando os termos independentes no segundo membro encontramos

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = r^2 - a^2 - b^2.$$

Atividade 9.3. Encontre a equação do círculo de raio 2 com centro no ponto $C = (-2, 1)$.

Exercícios

1. Numa reta com coordenadas,
 - (a) determine todos os números reais x tais que $d(x, -2) = 3x$
 - (b) existe algum número real x tal que $d(x, -2) = d(x, 5)$?
 - (c) determine todos os números reais x tais que $d(x, -1) \geq d(x, 8)$
 - (d) determine o conjunto de números reais x para os quais vale a igualdade

$$\frac{1}{d(x, 2)} = \frac{1}{d(x, -4)}$$

2. Os pontos $A = (-1, 0)$ e $C = (2, -3)$ são vértices opostos de um quadrado $ABCD$.
 - (a) Calcule o comprimento da diagonal do quadrado.
 - (b) Encontre as coordenadas dos outros vértices B e D .
3. Encontre um ponto $P = (0, a)$ sobre o eixo y e equidistante dos pontos $A = (-2, 3)$ e $B = (3, 0)$.
4. Encontre a equação de um círculo situado no terceiro quadrante, de raio $r = 2$ e que tangencia o eixo y no ponto $A = (0, -3)$.
5. Determine o centro C e o raio r do círculo $x^2 + 2x + y^2 - 3 = 0$.

Solução das atividades

9.1. A reta perpendicular ao eixo x e que passa pelo ponto $A = (-2, 3)$ encontra o eixo x no ponto $P = (-2, 0)$. Então,

$$d(A, P) = \sqrt{[-2 - (-2)]^2 + (3 - 0)^2} = 3.$$

9.2. Os pontos do eixo y são do tipo $P = (0, a)$ onde $a \in \mathbb{R}$. A distância do ponto P procurado até o ponto $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ vale 1. Então

$$\left(0 + \frac{1}{2}\right)^2 + (a - 1)^2 = 1^2 \Rightarrow a = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Logo $\left(0, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $\left(0, 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ são os pontos procurados.

9.3. Temos que

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$$

Respostas dos exercícios

1. (a) $x = 1$; (b) $x = \frac{3}{2}$; (c) $x \geq \frac{7}{2}$; (d) $x = -1$.

2. (a) $3\sqrt{2}$; (b) $B = (2, 0)$, (c) $D = (-1, -3)$

3. $P = \left(0, \frac{2}{3}\right)$

4. $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0$

5. $C = (-1, 0)$, $r = 2$.

Aula 10 – Equação da reta e inclinação

Objetivos

Após estudar esta aula, você será capaz de:

- encontrar a equação de uma reta que passa por um ponto e tem inclinação definida em relação ao eixo x ;
- encontrar a equação de uma reta que passa por dois pontos pré-determinados;
- entender e trabalhar com o conceito de inclinação de uma reta.

Introdução

Ao introduzir coordenadas em uma reta r , identificamos r com o conjunto dos números reais \mathbb{R} . Ao introduzir coordenadas em um plano α identificamos α com \mathbb{R}^2 . Isto é, o plano α é identificado com o produto cartesiano de \mathbb{R} por \mathbb{R} ,

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Com esta estrutura, \mathbb{R}^2 é denominado Plano Euclidiano ou Plano Cartesiano e as coordenadas introduzidas referidas como coordenadas retangulares ou coordenadas cartesianas.

Na Aula 8 começamos a usar as coordenadas para descrever algebricamente e representar graficamente muitos subconjuntos do plano \mathbb{R}^2 . Vamos continuar este trabalho com o mais simples destes subconjuntos que são as retas.

Como preparação aos estudos desta aula vamos recordar três resultados importantes. O primeiro refere-se a dois axiomas básicos da Geometria Euclidiana:

- Por dois pontos distintos P_1 e P_2 do plano passa uma única reta.
- Por um ponto P fora de uma reta r passa uma única reta paralela à reta r .

O segundo resultado que recordamos é sobre paralelogramos. Lembre que um paralelogramo $ABCD$ é um quadrilátero onde os lados opostos são

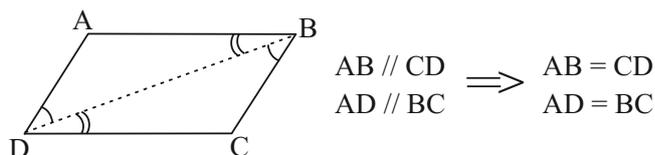


Figura 10.1: Congruência de lados opostos no paralelogramo.

paralelos. Veja a **Figura 10.1**. Temos o seguinte resultado: num paralelogramo o comprimento dos lados opostos coincidem.

O terceiro resultado a ser lembrado é sobre semelhança de triângulos.

Dois triângulos ABC e DEF que possuem ângulos correspondentes com mesma medida ($\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$ e $\hat{C} = \hat{F}$) são triângulos semelhantes. A semelhança implica que

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}.$$

Com estes resultados estabelecidos voltamos ao nosso objetivo principal que é expressar, através de equações, qualquer reta do plano \mathbb{R}^2 . Vamos começar com os exemplos mais elementares.

Retas horizontais

É tradição introduzir no plano um sistema de coordenadas cartesianas de modo que o eixo das abcissas seja horizontal e o eixo das ordenadas vertical. Em vista disto, uma reta paralela ao eixo das abcissas é chamada uma reta horizontal.

Uma reta horizontal fica determinada pelo ponto de interseção com o eixo y . Veja na **Figura 10.2** a representação de duas retas s e t horizontais.

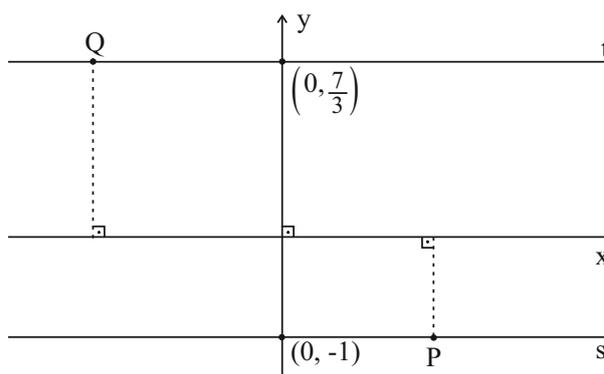


Figura 10.2: Retas horizontais.

As retas s e t cortam o eixo y respectivamente, nos pontos $(0, -1)$ e $(0, \frac{7}{3})$. É claro que todo ponto $P = (x, y) \in s$, deve verificar $y = -1$.

Assim,

$$y = -1 \quad \text{ou} \quad y + 1 = 0,$$

é a equação de s . Como conjunto, escrevemos

$$s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = -1\}.$$

Do mesmo modo, todo ponto $Q = (x, y)$ pertencente à reta t deve verificar $y = \frac{7}{3}$. Então

$$y = \frac{7}{3} \quad \text{ou} \quad 3y - 7 = 0,$$

é a equação da reta t . Como conjunto,

$$t = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; y = \frac{7}{3} \right\}.$$

O que fizemos até aqui permite descrever a equação de qualquer reta horizontal.

Retas horizontais

Se m é um número real arbitrário

$$y = m \quad \text{ou} \quad y - m = 0,$$

é a equação da reta h_m paralela ao eixo x e que intercepta o eixo y no ponto $(0, m)$.

Em termos de conjunto, a reta h_m se escreve,

$$h_m = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = m\} = \{(x, m); x \in \mathbb{R}\}.$$

Nota: A equação $y = 0$ define a reta horizontal que coincide com o eixo x . Na linguagem de conjuntos e coordenadas escrevemos

$$\text{eixo } x = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}.$$

Retas verticais

Toda reta paralela ao eixo y é chamada de reta vertical. Uma reta vertical fica determinada pelo ponto de interseção com o eixo x . Veja na **Figura 10.3** exemplos de duas retas verticais r e u .

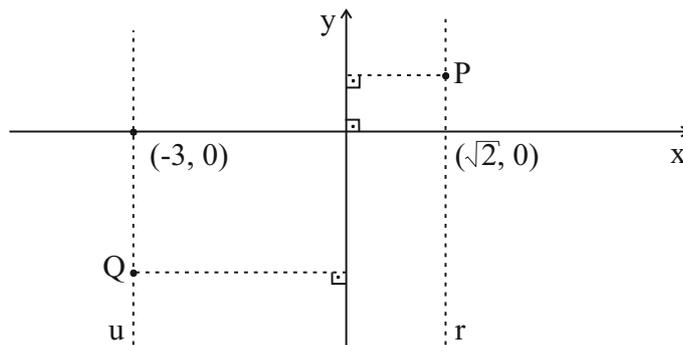


Figura 10.3: Retas verticais.

As retas r e u cortam o eixo das abscissas x nos pontos $(\sqrt{2}, 0)$ e $(-3, 0)$, respectivamente.

Todo ponto $P = (x, y)$ sobre a reta r deve verificar $x = \sqrt{2}$ e todo ponto $Q = (x, y)$ sobre a reta u deve verificar $x = -3$. Então,

$$x = \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x - \sqrt{2} = 0,$$

é a equação que define r , enquanto que

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = \sqrt{2}\} = \{(\sqrt{2}, y); y \in \mathbb{R}\}$$

são descrições de r como conjunto.

Também,

$$x = -3 \quad \text{ou} \quad x + 3 = 0,$$

é a equação da reta u , enquanto que

$$u = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = -3\} = \{(-3, y); y \in \mathbb{R}\},$$

descrevem u como conjunto.

Neste ponto, podemos identificar todas as retas verticais do plano \mathbb{R}^2 .

Retas verticais

Se n é um número real arbitrário,

$$x = n \quad \text{ou} \quad x - n = 0$$

é a equação da reta vertical v_n paralela ao eixo y e que intercepta o eixo x no ponto $(n, 0)$.

Em termos de conjunto, a reta v_n se define como

$$v_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = n\} = \{(n, y); y \in \mathbb{R}\}.$$

Nota: A equação $x = 0$ define a reta vertical que coincide com o eixo y . Na linguagem de conjuntos e coordenadas,

$$\text{eixo } y = \{(0, y) ; y \in \mathbb{R}\}.$$

Feixe de retas passando pela origem

Fixado um ponto $P = (x, y)$ do plano \mathbb{R}^2 , o conjunto de todas as retas do plano que passam pelo ponto P é denominado feixe de retas pelo ponto P .

Nosso objetivo agora é encontrar as equações de todas as retas que passam pelo ponto origem $(0, 0)$. Isto é, descrever o feixe de retas pela origem.

A primeira iniciativa que devemos tomar quando nos propomos a resolver um problema é encontrar uma forma, a mais simples possível, para expressar este problema.

- Como caracterizar todas as retas que passam pela origem $(0, 0)$?

Veja uma possível resposta, e mais tarde um pouco você vai entender esta escolha. Considere no plano a reta r vertical cuja equação é $x = 1$. Então qualquer reta que passe pela origem intersecta a reta r , salvo a reta representada pelo próprio eixo y . Então toda reta distinta do eixo y que passa pela origem é definida por dois pontos, um deles a origem e o outro um ponto do tipo $(1, m)$ que está sobre a reta r vertical, $x = 1$. Vamos chamar de s_m a reta que passa pela origem e pelo ponto $(1, m)$.

Na **Figura 10.4** veja representados no plano \mathbb{R}^2 a reta vertical r , assim como a reta s_m , definida pelos pontos $O = (0, 0)$ e $B = (1, m)$.

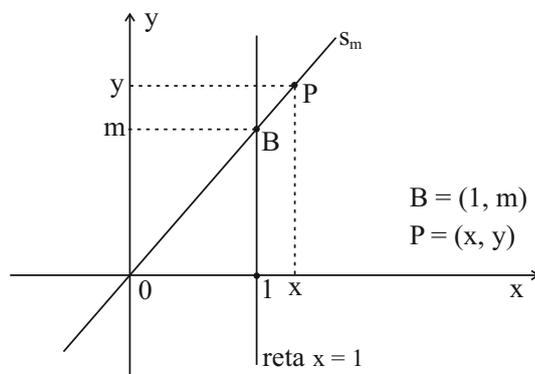


Figura 10.4: Retas de inclinada pela origem.

Agora uma parada técnica para duas perguntas:

- Quais são as equações das retas s_m , quando m varia em \mathbb{R} ?
- As retas s_m , com m variando arbitrariamente sobre os números reais, representam todas as retas do plano que passam pelo ponto $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$?

Vamos responder à primeira pergunta. Volte a examinar a reta s_m na **Figura 10.4**, onde $m > 0$.

Usando a semelhança entre os triângulos $O1B$ e OxP escrevemos

$$\frac{Ox}{O1} = \frac{xP}{1B} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y}{m} \Rightarrow y = mx.$$

Portanto, como $P = (x, y)$ é um ponto arbitrário da reta, podemos escrever que

$$s_m = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = mx\}.$$

Ou simplesmente, s_m é a reta

$$y = mx \text{ ou } y - mx = 0.$$

Veja o que ocorre se $m < 0$, como representado na **Figura 10.5**.

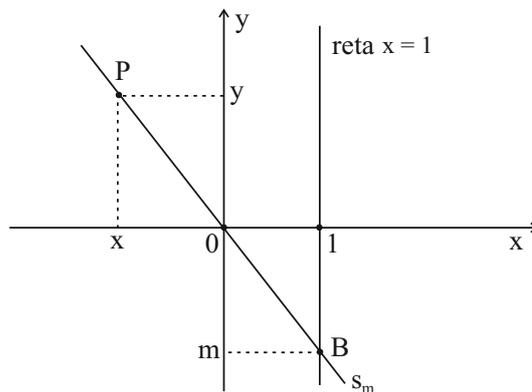


Figura 10.5: Reta de inclinada pela origem.

Usando a semelhança dos triângulos OPy e OBm escrevemos,

$$\frac{Oy}{Om} = \frac{Py}{Bm} \Rightarrow \frac{y}{|m|} = \frac{|x|}{1} \Rightarrow \frac{y}{-m} = \frac{-x}{1} \Rightarrow y = mx.$$

Portanto, ainda no caso $m < 0$, temos que

$$s_m = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = mx\} \text{ ou } y = mx, \quad y - mx = 0,$$

é a equação da reta que passa por $(0, 0)$ e $(1, m)$. Note que no caso em que $m = 0$, então s_m se realiza como a reta $y = 0 \cdot x = 0$. Ou seja a reta $y = 0$. Esta reta é o eixo x das abscissas.

Agora vamos responder à segunda pergunta formulada: as retas s_m , com m percorrendo todos os números reais descrevem todas as retas que passam pelo ponto origem?

Resposta: Todas, menos uma. Fica faltando a reta $x = 0$, reta que coincide com o eixo y .

Do que vimos até agora sai um resumo em dois pontos:

Retas inclinadas passando pela origem

- Para cada número real m , a equação

$$y = mx \text{ ou } y - mx = 0$$

representa uma reta que passa pela origem.

- As retas

$$x = 0 \text{ e } y = mx, \text{ onde } m \in \mathbb{R},$$

representam todas as retas de \mathbb{R}^2 que passam pela origem.

Temos fortes motivos para destacar o número real m que define a reta $y = mx$, que estamos estudando.

Definição 10.1

O número real m é chamado o **coeficiente angular** ou a **inclinação da reta** $y = mx$.

Interpretação geométrica de m

Considere três retas $y = mx$, $y = nx$ e $y = 0$ com inclinações $m > 0$, $n < 0$ e nula, conforme representadas na **Figura 10.6**. Associado a estas três retas temos os ângulos θ_1 , θ_2 e o ângulo nulo.

Queremos mostrar que,

$$\operatorname{tg} \theta_1 = m, \operatorname{tg} \theta_2 = n \text{ e } \operatorname{tg} 0 = 0,$$

onde tg é a função tangente da trigonometria. Veja na **Figura 10.6** as retas representadas:

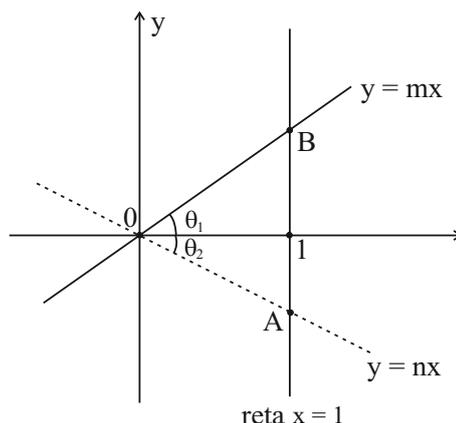


Figura 10.6: Ângulos de retas inclinadas.

O que queremos mostrar é que o **coeficiente angular** de uma reta que passa pela origem é igual ao valor da tangente do ângulo que a reta forma com o eixo positivo das abcissas. O valor da tangente resultando positivo ou negativo, segundo o ângulo é medido, a partir do eixo x , no sentido anti-horário ou horário, respectivamente.

Volte a observar a **Figura 10.6** para concluir que, de modo geral,

A reta $y = kx$, com $k \neq 0$ é uma reta que

- está contida no primeiro e terceiro quadrantes se $k > 0$;
- está contida no segundo e quarto quadrantes se $k < 0$.

- Vamos dar uma parada para entender a relação entre o coeficiente angular e a tangente do ângulo?

- Você se lembra da construção baseada no círculo trigonométrico das funções seno, cosseno e tangente?

Este assunto será revisado nas Aulas 21 e 22. No entanto, correndo o risco de colocar *o carro na frente dos bois*, vamos usar a tangente para a interpretação, que queremos. Como funciona?

Na **Figura 10.7**, o círculo de raio $r = 1$ está centrado na origem e a reta tangente ao círculo no ponto $A = (1, 0)$ é usada para definir $\operatorname{tg} \theta$, para todo ângulo $-90^\circ < \theta < 90^\circ$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$.

Veja como funciona acompanhando pela **Figura 10.7**. Tomando o eixo x positivo como referência, os ângulos medidos, a partir do eixo Ox , no sentido anti-horário são positivos (ângulo θ_1) e ângulos medidos no sentido horário são negativos (ângulo θ_2).

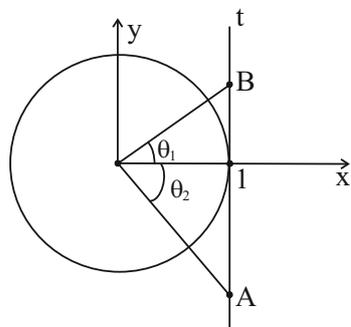


Figura 10.7: A tangente de um ângulo.

Veja que a reta t tangente ao círculo, esta definida pelo segmento AB é a referência para medir $\text{tg } \theta$, para qualquer ângulo $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Por exemplo, $\text{tg } \theta_1 = 1B$ (comprimento do segmento) e $\text{tg } \theta_2 = -1A$ (o simétrico do comprimento do segmento).

Vamos agora produzir uma nova **Figura 10.8**, a partir das **Figuras 10.6** e **10.7** para interpretar os coeficientes angulares m e n .

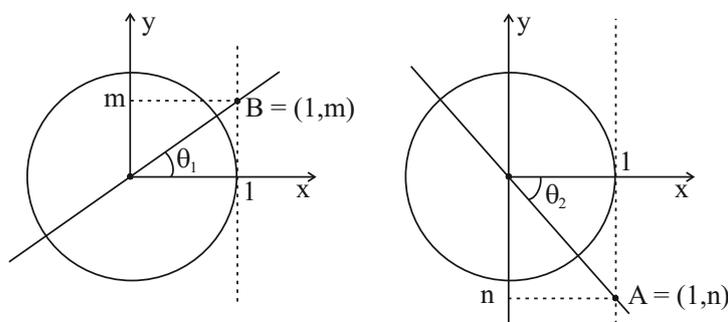


Figura 10.8: Tangentes de retas inclinadas.

Na representação à esquerda da **Figura 10.8**, para a reta $y = mx$, temos que

$$\text{tg } \theta_1 = m > 0 \text{ (comprimento do segmento } 1B).$$

Enquanto que na direita temos que, para a reta $y = nx$,

$$\text{tg } \theta_2 = n < 0 \text{ (o simétrico do comprimento do segmento } A1).$$

Neste momento, é prudente uma parada técnica para resumir o que nós conseguimos até agora e fazer o balanço do que falta.

Se a , b e m são números reais arbitrários, as equações

- $x = a$ ou $x - a = 0$ representa uma vertical, portanto paralela ao eixo y e cortando o eixo x no ponto $(a, 0)$;
- $y = b$ ou $y - b = 0$ representa uma reta horizontal, portanto paralela ao eixo x e cortando o eixo y no ponto $(0, b)$;
- $y = mx$ ou $y - mx = 0$, onde $m > 0$, representa uma reta que passa pela origem $(0, 0)$ e pelo ponto $(1, m)$. O ângulo θ que a reta faz com o eixo x é dado por $\operatorname{tg} \theta = m$.

Atividade 10.1

- Encontre a equação da reta que passa pelo ponto $(0, 0)$ e faz um ângulo de 60° com o eixo x .
- Encontre a equação da reta que passa pelo ponto $(0, 0)$ e faz um ângulo de 315° com o eixo x (medido no sentido anti-horário).

Dados: $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, $\operatorname{tg} (-45^\circ) = -1$.

Retas inclinadas não passando pela origem

Vamos voltar ao nosso caminho em direção ao objetivo principal desta Aula. Dada uma reta no plano queremos sua equação.

Suponha agora uma reta t em uma posição tal no plano que é distinta de qualquer uma das retas que constam no quadro destacado antes da atividade 10.1. Então acontece o seguinte: t intercepta os eixos coordenados em 2 pontos distintos.

Sejam $A = (a, 0)$ e $B = (0, b)$, os pontos de interseção de t com os eixos coordenados. Veja a **Figura 10.9**, onde apresentamos uma possibilidade para t .

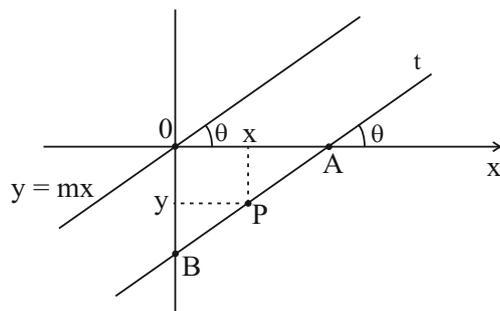


Figura 10.9: Reta não passando pela origem.

Veja assinalado na **Figura 10.9**, o ângulo θ que a reta faz com o eixo x . Suponha que $m = \operatorname{tg} \theta$. Note, também, a reta paralela a t que passa pela origem. Esta reta é expressa pela equação $y = mx$, devido ao paralelismo das retas e ao fato que $m = \operatorname{tg} \theta$. Considere um ponto arbitrário $P = (x, y)$ sobre a reta t .

Como os triângulos retângulos AxP e AOB são semelhantes e lembrando que $A = (a, 0)$, $B = (0, b)$, podemos escrever,

$$\frac{AO}{Ax} = \frac{OB}{xP} \Rightarrow \frac{a}{a-x} = \frac{|b|}{|y|} \Rightarrow \frac{a}{a-x} = \frac{-b}{-y}.$$

Logo,

$$ay = -bx + ab \Rightarrow y = \frac{-b}{a}x + b.$$

Note ainda que no triângulo retângulo OAB , usando que ângulos opostos pelo vértice são congruentes, resulta que

$$m = \operatorname{tg} \theta = \frac{OB}{OA} = \frac{|b|}{|a|} = \frac{-b}{a} = -\frac{b}{a}.$$

Finalmente encontramos a equação para a reta t ,

$$y = -\frac{b}{a}x + b \quad \text{ou} \quad y = mx + b.$$

A primeira forma da equação anterior também pode ser escrita como

$$bx + ay = ab.$$

Esta última equação tem uma forma muito elegante como expressão da reta que passa pelos pontos $A = (a, 0)$ e $B = (0, b)$.

A equação da reta na forma $y = mx + b$, não é menos elegante e expressa t como reta que intersecta o eixo y no ponto $B = (0, b)$ e faz com o eixo x um ângulo θ , tal que $m = \operatorname{tg} \theta$.

Exemplo 10.1

Encontre a equação da reta r que passa por $A = (-1, 2)$ e é paralela à reta bissetriz do primeiro quadrante.

Solução. A reta r bissetriz do primeiro quadrante faz um ângulo $\theta = 45^\circ$ com o eixo x . Como $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, então

$$y = x$$

é a equação de r .

Portanto, toda reta paralela a reta r tem equação

$$y = x + b,$$

onde $b \in \mathbb{R}$. Como a reta que procuramos passa pelo ponto $A = (-1, 2)$, substituindo na última equação, temos que

$$2 = -1 + b \Rightarrow b = 3.$$

Logo, $y = x + 3$ é a reta procurada.

Exemplo 10.2

Encontre a equação da reta t que passa pelo ponto $(2\sqrt{3}, -1)$ e faz um ângulo de 330° com o eixo positivo dos x .

Solução. Veja na **Figura 10.10** a representação do plano com um sistema de coordenadas e o ponto A localizado. Precisamos encontrar a posição para a reta t , que passa por A fazendo ângulo de 350° com a direção positiva do eixo x .

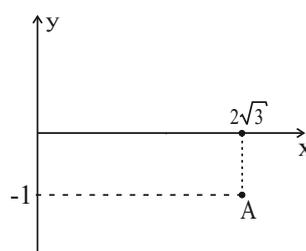


Figura 10.10

Como $y = mx + b$ é a equação geral de uma reta inclinada e

$$m = \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} 330^\circ = \operatorname{tg} (-30^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

vem que

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b.$$

Além disso, a reta contém o ponto $A = (2\sqrt{3}, -1)$. Logo,

$$-1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(2\sqrt{3}) + b \Rightarrow b = 1.$$

Donde, $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$ é a equação da reta procurada.

Atividade 10.2

- Dada a reta $2y = -3x + 2$ encontre os pontos de interseção da reta, respectivamente com o eixo x e com o eixo y .
- Qual é o coeficiente angular da reta do item a)?
- Encontre a equação da reta que passa por $A = (-\sqrt{3}, -1)$ e é paralela à reta $2y = -\sqrt{3}x - 1$.

Reta por dois pontos

A pergunta é a seguinte:

- Qual é a equação da reta r que passa por dois pontos distintos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ do plano?

A resposta à pergunta pelo menos, para duas posições especiais dos pontos, é imediata. A primeira posição especial para os pontos P_1 e P_2 ocorre quando $x_1 = x_2$ e a reta é vertical. A segunda ocorre quando $y_1 = y_2$ e a reta é horizontal. Na primeira situação a equação da reta é $x = x_1$ e no segundo caso a equação é $y = y_1$. veja a **Figura 10.11**.

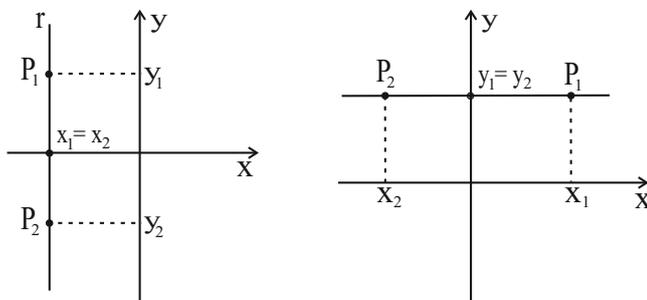


Figura 10.11: Retas por dois pontos em posições especiais.

Agora se $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$ então a reta r estaria numa posição geral como, por exemplo, representada na **Figura 10.12**.

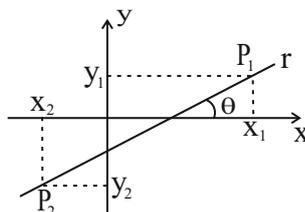


Figura 10.12: Reta por dois pontos em posição geral.

Então se $\operatorname{tg} \theta = m$, onde θ é o ângulo que a reta faz com o eixo x , a equação da reta r tem a forma

$$y = mx + b. \quad (10.1)$$

Note que a inclinação $m = \operatorname{tg} \theta$ é a mesma da reta paralela que passa pela origem.

Vamos determinar m e b sabendo que a reta passa por P_1 e P_2 . Substituindo as coordenadas de $P_1 = (x_1, y_1)$ e de $P_2 = (x_2, y_2)$, respectivamente na equação da reta escrita em (10.1) encontramos que

$$y_1 = mx_1 + b \text{ e } y_2 = mx_2 + b. \quad (10.2)$$

Fazendo a diferença entre as equações vem que

$$y_2 - y_1 = mx_2 - mx_1 \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (10.3)$$

O valor encontrado de m substituindo na equação $y_1 = mx_1 + b$ fornece,

$$y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1 + b \Rightarrow b = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1. \quad (10.4)$$

Com os valores de m e b , substituídos em (10.1) encontramos que

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1.$$

Simplificando, obtemos

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ ou } \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Em resumo,

Se os pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ definem uma reta r não horizontal e não vertical, então a reta tem inclinação

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

e equação

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Atividade 10.3

- Encontre a equação da reta definida pelos pontos $A = (-\sqrt{2}, \sqrt{3})$ e $B = (\sqrt{3}, \sqrt{2})$.
- Determine o coeficiente angular da reta do item a)

Resumo

Nesta Aula você aprendeu a encontrar equações de uma reta nas seguintes situações:

- retas paralelas a um dos eixos coordenados;
- retas passando pela origem;
- retas determinadas por dois pontos quaisquer.

Também você trabalhou com o conceito de coeficiente angular de uma reta e aprendeu seu significado geométrico.

Exercícios

- Fixado um sistema de coordenadas no plano, trace o gráfico das retas:

a) $y = 3x$

b) $y = \frac{1}{2}x - 1$

c) $y = -2x$

d) $2y - 3 = -x$

- Determine a equação da reta que passa pela origem e pelo ponto $(-1, 0)$.

3. Determine
- A reta que passa pelo ponto $A = (-2, 1)$ e é paralela à reta $y = -2x$.
 - A reta que passa pelos pontos $A = (-1, 0)$ e $B = (3, -5)$.
 - Os pontos de interseção da reta $2y = 3x - 2$ com os eixos coordenados.
 - A inclinação da reta que passa pelos pontos $A = (-\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ e $B = (2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.
4. Determine a equação da reta
- que passa por $A = (-2, 1)$ e faz um ângulo de 30° com o eixo x .
 $\left(\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
 - que passa por $A = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ e faz um ângulo de 300° com o eixo positivo das abcissas. $(\operatorname{tg} (-60^\circ) = -\sqrt{3})$
5. Calcule a área do triângulo determinado pelos eixos coordenados e pela reta $y = -\sqrt{3}x + 2$.
6. Calcule o ponto de interseção das retas $2y = -x + 2$ e $y = x + \sqrt{3}$
7. Considere a reta $y = x - 2$ e o círculo de centro $C = (0, 2)$ e raio $r = \sqrt{26}$. Calcule o comprimento da corda determinada pela interseção da reta com o círculo.
8. Encontre a equação da reta que passa pela interseção dos círculos

$$x^2 + x + y^2 = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 - y = 0, .$$

Solução das atividades

Atividade 10.1

- Como $\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\operatorname{sen} 60^\circ}{\operatorname{cos} 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$, então $y = \sqrt{3}x$ é a equação da reta.
- Como $\operatorname{tg} (315^\circ) = \operatorname{tg} (-45^\circ) = -1$, então $y = -x$ é a equação da reta.

Atividade 10.2

- a) Se $x = 0$ é substituído na equação da reta vem que $2y = -3 \times 0 + 2 \Rightarrow y = 1$. Logo $(0, 1)$ é a interseção da reta com o eixo y .

Se $y = 0$ na equação, vem que $2 \times 0 = -3x + 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$. Logo $(\frac{2}{3}, 0)$ é a interseção da reta com o eixo x .

- b) Como $y = \frac{-3}{2}x + 1 \Rightarrow m = -\frac{3}{2}$ é o coeficiente angular.

- c) A reta dada é $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}$, cujo coeficiente angular é $m = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Toda reta paralela a essa reta tem equação do tipo $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + b$.

Substituindo o ponto $A = (-\sqrt{3}, -1)$ nesta última equação vem que

$$-1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}(-\sqrt{3}) + b \Rightarrow b = -\frac{5}{2}.$$

Então $2y = -\sqrt{3}x - 5$ é a equação procurada.

Atividade 10.3

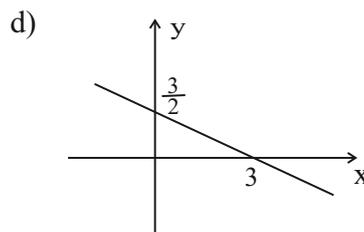
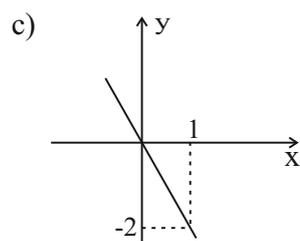
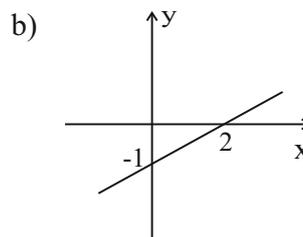
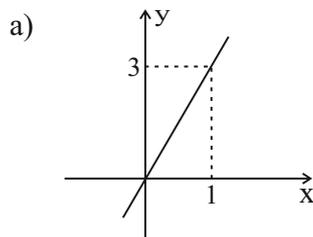
- a) A equação da reta é $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$, onde $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$. Substituindo encontramos a equação

$$y = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}x + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \sqrt{3} \Rightarrow y = (2\sqrt{6} - 5)x + 5\sqrt{3} - 5\sqrt{2}.$$

- b) $m = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = 2\sqrt{6} - 5$

Respostas dos exercícios

1.

2. $y = 0$ (eixo x)3. a) $y = -2x + b \Rightarrow 1 = -2 \times (-2) + b \Rightarrow b = -3 \Rightarrow y = -2x - 3$.

$$b) y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Rightarrow y = \frac{-5}{4}x - \frac{5}{4}$$

$$c) (0, -1) \text{ e } \left(\frac{2}{3}, 0\right).$$

$$d) m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + \sqrt{2}} = -\frac{4}{3}$$

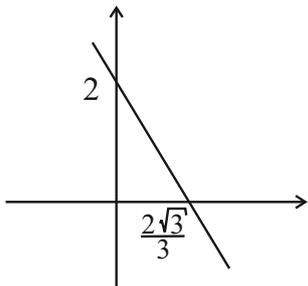
$$4. a) y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b \Rightarrow 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(-2) + b \Rightarrow b = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}. \text{ Logo,}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}.$$

$$b) y = -\sqrt{3}x + b \Rightarrow 1 = -\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} + b \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3} + 2}{2}. \text{ Logo,}$$

$$y = -\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3} + 2}{2}.$$

$$5. \text{Área} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \times 2\right) \times \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$



$$6. \left(\frac{2 - 2\sqrt{3}}{3}, \frac{2 + \sqrt{3}}{3}\right).$$

7. As soluções (x, y) do sistema

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ x^2 + (y - 2)^2 = 26 \end{cases}$$

são os pontos $A = (-1, -3)$ e $B = (5, 3)$.

O comprimento da corda é $d(A, B) = 6\sqrt{2}$.

8. Estes são pontos de interseção: $A = (0, 0)$ e $B = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Logo, $y = -x$ é a reta.

Prezado aluno e prezada aluna

Com este segundo módulo, damos continuidade à disciplina Pré-cálculo. Na Aula 11, continuamos a explorar a equação da reta, com foco sobre a posição relativa de pontos e retas do plano. Assim pudemos caracterizar a equação geral da reta, bem como estabelecer uma relação entre coeficientes de retas perpendiculares e trabalhar a distância de um ponto a uma reta. Nas Aulas de 12 até 14, apresentamos as equações quadráticas, através das cônicas, e o importante conceito de mudanças de coordenadas. As cônicas, parábola, elipse e hipérbole são identificadas geometricamente num plano sem coordenadas e, em seguida, são deduzidas suas equações algébricas, com a introdução de coordenadas cartesianas. O conceito de mudança de coordenadas é apresentado na mais simples das situações: a translação. Deixamos para tratar o caso geral, em que também serão consideradas rotações e reflexões. Como você verá mais à frente nesta disciplina, bem como em toda a seqüência de disciplinas da área de cálculo, mudança de coordenadas é uma ferramenta preciosa para resolver problemas. Você deve entender bem este conceito, o qual carrega uma boa dose de abstração. Finalmente, a Aula 15 é um conjunto de exercícios resolvidos extraídos da coleção de Exercícios Programados (EP), elaborados pelo professor Edson Cataldo durante a coordenação desta disciplina no segundo semestre de 2005. Um bom proveito e sucesso no estudo!

Celso Costa

Aula 11 – Equação da reta e inclinação – continuação

Objetivos

Após estudar esta aula, você será capaz de:

- identificar, através dos coeficientes angulares, retas perpendiculares;
- identificar e trabalhar com a equação geral das retas;
- calcular a distância de um ponto até uma reta.

Nesta aula, vamos continuar explorando as posições relativas das retas e pontos no plano. Nossa ferramenta para as conclusões geométricas é o sistema de coordenadas. Para começar uma pergunta:

– Qual é a relação entre os coeficientes angulares de duas retas perpendiculares entre si?

Vamos abrir nossa caixa de ferramentas e construir a resposta.

Coeficientes angulares de retas perpendiculares entre si

Seja r uma reta inclinada em relação a um sistema de coordenadas do plano. Portanto r não é paralela a nenhum dos eixos Ox ou Oy do sistema de coordenadas e portanto intersecta cada um deles. Temos duas conclusões geométricas como consequência:

Em primeiro lugar, que r forma com o eixo Ox um ângulo θ , tal que é um dos ângulos

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < 0 \quad \text{ou} \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2},$$

de acordo com que a reta r tenha inclinação negativa ou positiva em relação ao eixo Ox das abcissas. Lembre que o ângulo θ define o coeficiente angular $m = \operatorname{tg} \theta$ da reta. Não é demais também lembrar porque eliminamos de nossa consideração o valor $\theta = 0$. Note para este ângulo, $m = \operatorname{tg} \theta = 0$ seria o coeficiente angular e a reta seria paralela ao eixo Ox , portanto deixando de ser inclinada.

Em segundo lugar, que r intersecta o eixo y num ponto $(0, p)$, onde p é um número real. Juntando o coeficiente $m = \operatorname{tg} \theta$, e o número p , temos que dois parâmetros, m e p , que variando no conjunto dos números reais, com a

condição suplementar que $m \neq 0$, determinam todas as retas inclinadas. Ou seja,

$$y = mx + p, \text{ onde } m, p \in \mathbb{R}, m = \operatorname{tg} \theta, \theta \neq 0,$$

são todas as retas inclinadas do plano.

Estamos agora em condição de provar o resultado que relaciona os coeficientes angulares de duas retas inclinadas do plano e que são perpendiculares entre si.

Proposição 11.1

Sejam duas retas inclinadas do plano e perpendiculares entre si, cujas equações são, respectivamente,

$$y = mx + p, \text{ onde } m = \operatorname{tg} \theta, p \in \mathbb{R},$$

e

$$y = nx + q, \text{ onde } n = \operatorname{tg} \alpha, q \in \mathbb{R}.$$

Então,

$$n = -\frac{1}{m}.$$

Prova. Denominando por r e s , respectivamente, as retas inclinadas e perpendiculares entre si, considere também o par de retas r^* e s^* que passam pela origem e que são paralelas, respectivamente, às retas r e s , originais. Veja isto representado na **Figura 11.1**. Note que o deslocamento paralelo do par de retas r e s para obter o correspondente par de retas r^* e s^* , com as retas passando pela origem, preserva a condição de perpendicularidade.

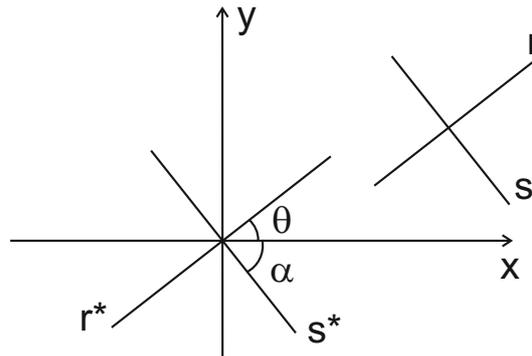


Figura 11.1: Retas perpendiculares.

Note que como r^* e s^* passam pela origem e são paralelas, respectivamente às retas r e s então temos para a reta r^* a equação

$$y = mx, m = \operatorname{tg} \theta,$$

e para a reta s^* a equação

$$y = nx, \quad n = \operatorname{tg} \alpha.$$

Agora acompanhe pela **Figura 11.2**, a representação do par de retas r^* e s^* , onde destacamos alguns pontos estratégicos para nossa demonstração. Note que a partir do ponto $A = (1, 0)$ encontramos na reta r^* o ponto $B = (1, m)$. Isto é feito substituindo na equação da reta r^* , a abscissa $x = 1$, para encontrar

$$y = mx \text{ e } x = 1 \Rightarrow y = m \cdot 1 \Rightarrow y = m \Rightarrow B = (1, m).$$

Localizamos diretamente sobre o eixo x o ponto $C = (-m, 0)$ e a partir daí encontramos as coordenadas do ponto $D = (-m, -m \cdot n)$ sobre a reta s^* . Verifique as contas.

$$y = nx \text{ e } x = -m \Rightarrow y = n \cdot (-m) \Rightarrow y = -n \cdot m \Rightarrow D = (-m, -n \cdot m).$$

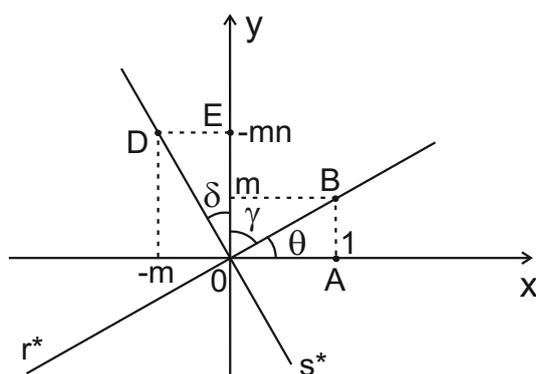


Figura 11.2: Par de retas perpendiculares pela origem.

Considere também na **Figura 11.2**, sobre o eixo Oy o ponto $E = (0, -m \cdot n)$. Com todos estes dados sobre a **Figura 11.2**, estamos em condições de continuar a prova da proposição. A chave para continuar a argumentação é perceber que os triângulos ABO e EDO são retângulos e congruentes. A congruência é garantida pelo caso ALA. De fato, em termos de comprimento, por construção temos que

$$AB = ED.$$

Por outro lado, observe a **Figura 11.2**, onde alguns ângulos estão destacados. Veja que

$$\theta + \gamma = 90^\circ,$$

pois os eixos coordenados são perpendiculares e que

$$\delta + \gamma = 90^\circ,$$

pois as retas são perpendiculares. Estas equações resultam que

$$\delta = \theta.$$

Ora, os ângulos δ e θ , são ângulos agudos de mesma medida, respectivamente, dos triângulos retângulos ABO e EDO . Isto é suficiente para garantir que quando comparados, os triângulos possuem ângulos de mesma medida. Como já foi observado que $AB = ED$, podemos concluir a congruência dos triângulos pelo caso ALA. Então, os lados de um e de outro triângulo coincidem em comprimento e podemos estabelecer a seguinte conclusão

$$EO = AO \Rightarrow -n \cdot m = 1 \Rightarrow n = -\frac{1}{m},$$

o que prova a relação desejada entre os coeficientes angulares das retas que passam pela origem, e em consequência também para as retas perpendiculares r e s arbitrárias.

Vamos destacar este resultado:

Considere no plano duas retas perpendiculares, entre si, onde

$$y = mx + p \text{ e } y = nx + q,$$

onde, m, n, p e $q \in \mathbb{R}$ e $m, n \neq 0$. Então,

$$n = -\frac{1}{m}.$$

Exemplo. Considere a reta r de equação $y = -2x + 1$ e o ponto $A = (-1, 0)$. Vamos determinar a reta s que passa por A e é perpendicular à reta r .

Solução. O coeficiente da reta r é $m = -2$. Portanto a reta s perpendicular tem coeficiente $n = -\frac{1}{m} = \frac{1}{2}$. Logo,

$$y = \frac{1}{2}x + p,$$

para algum número real p , é a equação da reta s . Como $A = (-1, 0)$ é um ponto da reta, substituindo vem que

$$0 = \frac{1}{2} \times (-1) + p \Rightarrow p = \frac{1}{2}.$$

Logo,

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2y = x + 1,$$

é a reta s .

Veja a **Figura 11.3**.

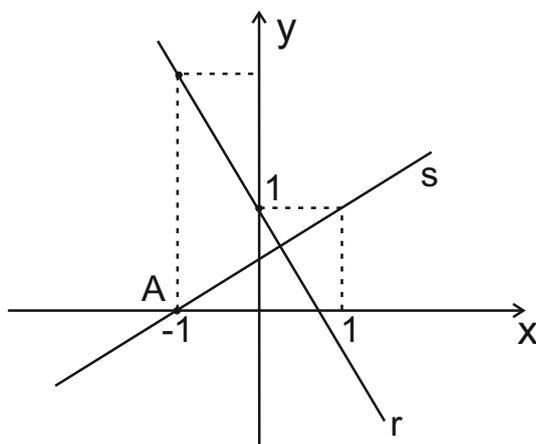


Figura 11.3: Reta por um ponto e perpendicular a uma reta dada.

Atividade. Encontre a equação da reta r que é mediatriz do segmento AB , onde $A = (-3, 2)$ e $B = (0, -1)$.

Equação geral de uma reta no plano: $ax + by + c = 0$

Vamos continuar nosso trabalho sobre o plano cartesiano, onde temos um sistema de coordenadas xOy . Considere agora, uma reta t arbitrária. Temos duas possibilidades para a posição da reta em relação ao sistema de coordenadas.

- t é uma reta paralela ao eixo Oy . Nesta situação, existe um número real d tal que $x = d$, é a equação da reta t ;
- a reta t intersecta o eixo y . Nesta situação, existem dois números reais m e b tais que $y = mx + b$ é a equação da reta.

Veja a **Figura 11.4**, onde são apresentadas estas retas genéricas.

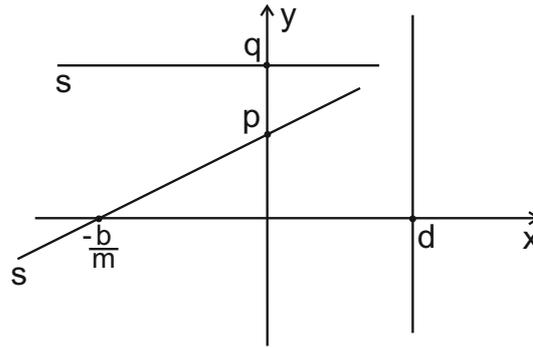


Figura 11.4: Possíveis posições de retas r e s no plano.

No entanto, existe uma maneira unificada de escrever o conjunto completo de retas do plano, o qual evidentemente engloba os dois subconjuntos que vem de ser destacados na classificação anterior.

Considere três números reais arbitrários a , b e c , com a única condição adicional que a e b não sejam nulos simultaneamente. Então as equações

$$ax + by + c = 0,$$

descrevem todas as retas do plano.

Veja, a seguir, porque isto é verdade!

Note que toda reta vertical $x = d$, pode ser reescrita como $x - d = 0$, ou ainda como $0 \cdot y + 1 \cdot x + (-d) = 0$. Ou seja, na forma $ax + by + c = 0$, onde $a = 0$, $b = 1$ e $c = -d$.

Igualmente, se a reta não é vertical e portanto intersecta o eixo Oy , então pode ser representada pela equação $y = mx + n$. Esta equação pode ser reescrita como $(-m)x + 1 \cdot y + (-n) = 0$ e assim expressa na forma $ax + by + c = 0$, onde $a = 1$, $b = -m$ e $c = -d$.

Para completar a caracterização, observe que nas duas situações consideradas o par de números a e b não são nulos simultaneamente, isto é $(a, b) \neq (0, 0)$.

Nota

Mais duas observações importantes para sua caixa de ferramentas:

Primeiro note que dada uma equação genérica do tipo $ax + by + c = 0$, onde a , b e c são números reais arbitrários, sujeitos à condição $(a, b) \neq (0, 0)$, ocorrem duas possibilidades:

- se $b \neq 0$ a equação é equivalente a $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, que representa uma

reta inclinada, fazendo um ângulo θ com o eixo $0x$, onde $\operatorname{tg} \theta = -\frac{a}{b}$ e intersectando o eixo $0y$ no ponto $P = \left(0, -\frac{c}{b}\right)$;

- se $b = 0$ então necessariamente $a \neq 0$ e a equação é equivalente a $x = -\frac{c}{a}$ que representa uma reta paralela ao eixo $0y$ cortando o eixo $0x$ no ponto $Q = \left(-\frac{c}{a}, 0\right)$.

Em segundo lugar, dada uma reta r no plano considere sua equação geral $ax + by + c = 0$. Note que se λ é um número real não nulo então $\lambda ax + \lambda by + \lambda c = 0$ é outra equação que representa a mesma reta r . De fato, considere um ponto P do plano de coordenadas $P = (x_0, y_0)$. Então o par de números $x = x_0$ e $y = y_0$ é uma solução da primeira equação se e somente se é também solução da segunda equação.

Exemplo. Calcule o coeficiente angular de uma reta t cuja equação é $2x - 3y + \frac{1}{2} = 0$, encontre os pontos de interseção da reta com os eixos coordenados e represente graficamente.

Solução. A equação é equivalente a $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}$. Portanto o coeficiente angular mede $\frac{2}{3}$. Fazendo $x = 0$ na equação da reta encontramos que $y = \frac{1}{6}$. Logo o ponto $A = \left(0, \frac{1}{6}\right)$ fornece a interseção da reta com o eixo $0y$. Por outro lado, fazendo $y = 0$ na equação da reta encontramos que $x = -\frac{1}{4}$. Logo o ponto $B = \left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ fornece a interseção da reta com o eixo $0x$. Veja a representação gráfica na **Figura 11.5** a seguir.

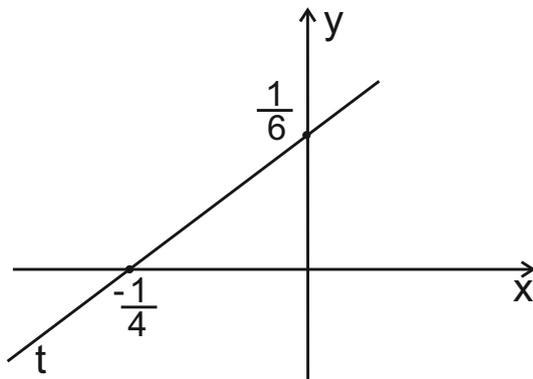


Figura 11.5: A reta $2x - 3y + \frac{1}{2} = 0$.

A equação geral e retas perpendiculares

Considere um problema muito interessante que pode ser formulado sobre retas, a partir da representação geral que acabamos de estudar.

Problema. Dadas duas retas r e s , perpendiculares entre si e com equações gerais, $ax + by + c = 0$ e $mx + ny + p = 0$, respectivamente, qual é a relação entre os coeficientes das retas?

Solução do Problema. A resposta a este problema vai fornecer para você mais uma boa ferramenta para resolver exercícios envolvendo retas no plano. Por isto colocamos o resultado em destaque:

duas retas $ax + by + c = 0$ e $mx + ny + p = 0$ são perpendiculares entre si, se e somente se $a \cdot m + b \cdot n = 0$.

Veja porque vale o resultado. De fato, suponha que as retas são perpendiculares entre si. Temos três situações possíveis para as retas:

- $ax + by + c = 0$ é uma reta horizontal e $mx + ny + p = 0$ é uma reta vertical. Neste caso, então $a = 0$ e $n = 0$. Ou seja, as retas tem como equações $y = -\frac{c}{b}$ e $x = -\frac{p}{m}$. Como $a = 0$ e $n = 0$ então automaticamente vale a equação $a \cdot m + b \cdot n = 0$;
- $ax + by + c = 0$ é uma reta vertical e $mx + ny + p = 0$ é uma reta horizontal. Neste caso, então $b = 0$ e $m = 0$. Ou seja, as retas tem como equações $x = -\frac{c}{a}$ e $y = -\frac{p}{n}$. Como $b = 0$ e $m = 0$ então automaticamente vale a equação $a \cdot m + b \cdot n = 0$;
- $ax + by + c = 0$ e $mx + ny + p = 0$ são ambas retas inclinadas. Logo, temos que os coeficientes angulares são respectivamente $-\frac{a}{b}$ e $-\frac{m}{n}$. Ora como as retas são perpendiculares então calculando o produto dos coeficientes angulares encontramos que

$$\left(-\frac{a}{b}\right) \cdot \left(-\frac{m}{n}\right) = -1 \Rightarrow a \cdot n = -b \cdot m \Rightarrow a \cdot n + b \cdot m = 0.$$

Nota

As retas $ax + by + c = 0$ e $-bx + ay + d = 0$ são perpendiculares entre si. Basta verificar que os coeficientes verificam a equação em destaque no box anterior, o qual garante a perpendicularidade. Portanto para definir uma

reta perpendicular a uma reta de equação geral $ax + by + c = 0$, basta trocar os coeficientes de x com y e inverter um dos sinais.

Veja a aplicação deste fato no exemplo a seguir.

Exemplo. Considere a reta r de equação $2x - 3y + \frac{1}{2} = 0$ e o problema de encontrar a reta s que passa pelo ponto $A = (-1, 2)$ e que seja perpendicular a r .

Solução. Usando o resultado destacado em nota anteriormente, encontramos que para qualquer número real p , a reta $3x + 2y + p = 0$ é perpendicular à reta r . Além disso, como a reta passa pelo ponto $A = (-1, 2)$, encontramos que

$$3 \cdot (-1) + 2 \cdot (2) + p = 0 \Rightarrow p = -1.$$

Logo, a reta s procurada tem como equação geral $3x + 2y - 1 = 0$.

Distância de um ponto a uma reta

Nosso objetivo neste exemplo é fornecer um caminho universal para calcular a distância de um ponto $P = (x_0, y_0)$ até uma reta r , cuja equação é $ax + by + c = 0$. Antes de resolver um exemplo concreto, veja a solução geométrica deste problema.

Considere como representado na **Figura 11.6**, o ponto $P = (x_0, y_0)$, a reta r e a reta auxiliar s que passa pelo ponto P e é perpendicular à reta r . As retas r e s possuem um único ponto comum Q . Ora, o comprimento do segmento PQ representa a distância do ponto $P = (x_0, y_0)$ até a reta r . Em símbolos podemos escrever que

$$d(P, r) = PQ.$$

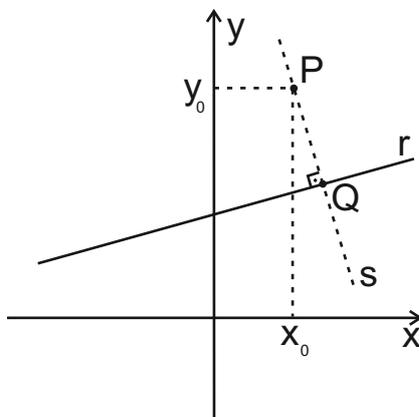


Figura 11.6: Distância do ponto $P = (x_0, y_0)$ até a reta r .

Exemplo. Encontre a distância do ponto $P = (-3, 1)$ até a reta r cuja equação geral é $2x + y - 5 = 0$.

Solução. Veja na **Figura 11.7**, representado o problema, onde s é a reta que passa pelo ponto $P = (-3, 1)$ e é perpendicular a r .

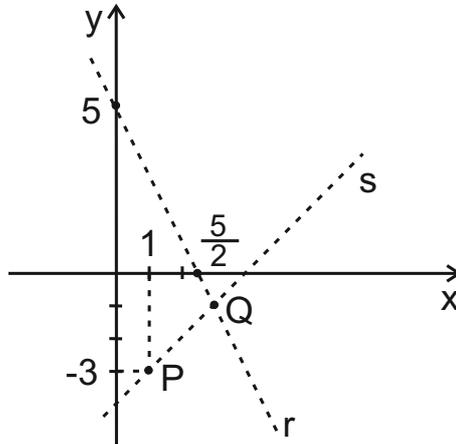


Figura 11.7: Distância de $P = (-3, 1)$ à reta $2x + y - 5 = 0$.

Note o ponto Q obtido pela interseção das retas. A distância procurada é representada pelo segmento PQ . A reta s tem como equação $x - 2y + p = 0$, para algum número real p . Como s contém o ponto $P = (-3, 1)$ então

$$-3 - 2 \cdot (1) + p = 0 \Rightarrow p = 5.$$

Logo, $x - 2y + 5 = 0$ é a equação da reta s procurada. As equações das retas r e s fornecem o sistema de duas equações com duas incógnitas. Multiplicando a primeira equação por (-2) e somando encontramos que $x = 5$ na segunda equação. Veja os detalhes a seguir

$$\begin{array}{r} -4x + 2y + 10 = 0 \\ + \quad x - 2y + 5 = 0 \\ \hline -3x + 15 = 0 \Rightarrow x = 5. \end{array}$$

Substituindo o valor $x = 5$ na segunda equação encontramos a coordenada y do ponto Q :

$$5 - 2y + 5 = 0 \Rightarrow y = -5.$$

Portanto, o ponto Q de interseção das retas r e s está definido como $Q = (5, -5)$. Finalmente usamos a fórmula da distância entre dois pontos para calcular o comprimento do segmento PQ e assim a distância do ponto P até a reta r .

$$d(P, r) = PQ = \sqrt{(-3 - 5)^2 + (1 + 5)^2} = \sqrt{64 + 36} = 10.$$

Aula 12 – Mudanças de coordenadas e equações quadráticas

Objetivos

Após estudar esta aula, você:

- compreenderá o conceito de mudança de coordenadas;
- será capaz de expressar a parábola através de uma equação quadrática.

A introdução de coordenadas em um plano permite, como vimos nas aulas anteriores, descrever os objetos geométricos através de equações. Assim, problemas acerca dos objetos geométricos são traduzidos por questões envolvendo equações.

Considere, por exemplo, a situação de uma reta num plano, como mostrado à esquerda da **Figura 12.1**. E considere, agora, na representação à direita, a mesma reta, com o plano munido de um sistema de coordenadas cartesianas.

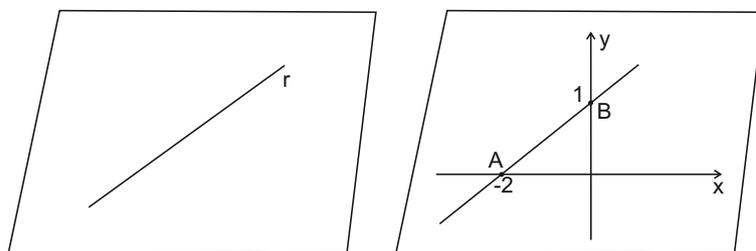


Figura 12.1: Reta num plano.

Ora, com a introdução de coordenadas a reta que é um objeto geométrico ganha um retrato algébrico. No caso representado na **Figura 12.1**, a reta r passa pelos pontos $A = (-2, 0)$ e $B = (0, 1)$, tem como equação

$$x - 2y + 2 = 0.$$

Este é o retrato algébrico da reta r .

Nota

Conforme vimos na aula passada, multiplicando a equação da reta r por um número real não nulo, por exemplo -3 , a nova equação $-3x + 6y - 6 = 0$, continua a representar a mesma reta.

A mudança de coordenadas

A partir do que foi discutido até agora, fica evidente que a mesma reta r na representação à esquerda da **Figura 12.1**, pode ter várias representações em termos de equações. Conforme visto na nota anterior, mesmo com o sistema de coordenadas fixado, temos várias equações, uma múltipla da outra, representando a reta.

Nesta seção vamos ver com muda a equação que representa a reta quando muda o sistema de coordenadas. Vamos partir do exemplo concreto que estamos trabalhando.

Exemplo. Considere o plano com sistema de coordenadas xOy , como na **Figura 12.1** à direita, e a reta r representada pela equação

$$x - 2y + 2 = 0.$$

Suponha neste plano um novo sistema de coordenadas $u\bar{O}v$, onde o eixo $\bar{O}u$ é paralelo ao eixo Ox e o eixo $\bar{O}v$ é paralelo ao eixo Oy . Além disso, em relação ao sistema de coordenadas original xOy , a origem \bar{O} do novo sistema de coordenadas se escreve como $\bar{O} = (1, -2)$. Veja esta situação representada na **Figura 12.2**.

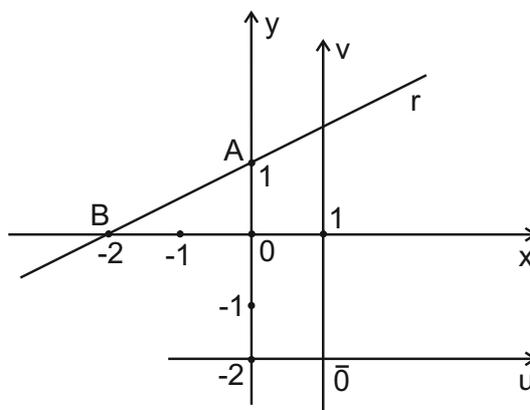


Figura 12.2: O novo sistema de coordenadas $u\bar{O}v$.

Em resumo, o novo sistema de coordenadas $u\bar{O}v$ é obtido do antigo por uma translação. A pergunta importante aqui é a seguinte:

- Qual é a equação da reta r no sistema de coordenadas $u\bar{O}v$?

Para responder a esta questão vamos em primeiro lugar ver como atua a mudança de coordenadas em alguns pontos. Veja a tabela da **Figura 12.3**, a seguir.

Ponto	Expressão em xOy	Expressão em $u\bar{O}v$
O	$(0, 0)$	$(-1, 2)$
A	$(0, 1)$	$(-1, 3)$
B	$(-2, 0)$	$(-3, 2)$
\bar{O}	$(1, -2)$	$(0, 0)$
P	(x, y)	(u, v)
$u = x - 1$ e $v = y + 2$		

Figura 12.3: A mudança de coordenadas.

Examinando a tabela, principalmente comparando a segunda com a terceira coluna, concluímos que para passar das coordenadas xOy para as coordenadas $u\bar{O}v$ devemos somar -1 à primeira coordenada e somar 2 à segunda coordenada. Isto justifica a expressão de mudança de coordenadas escrita na última linha da tabela. Isto é,

$$\begin{cases} u = x - 1 \\ v = y + 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = u + 1 \\ y = v - 2 \end{cases} \quad (*)$$

são as equações que traduzem a mudança de coordenadas entre os sistemas xOy e $u\bar{O}v$. Veja que, como se trata de uma translação de coordenadas, a posição da origem $\bar{O} = (1, -2)$ do novo sistema, escrito em função do sistema de coordenadas antigo, fornece a chave para as equações de mudança de coordenadas (*).

Agora vamos voltar à **Figura 12.2** e à reta r cuja equação no sistema xOy é

$$x - 2y + 2 = 0.$$

Usando a mudança de coordenadas (*), ou seja que $x = u + 1$ e $y = v - 2$, encontramos que

$$(u + 1) - 2(v - 2) + 2 = 0.$$

Assim,

$$u - 2v + 7 = 0,$$

é a equação da reta r no novo sistema de coordenadas $u\bar{O}v$.

Equações quadráticas – as parábolas

Na Aula 9, como uma aplicação do conceito de distância entre dois pontos, deduzimos a equação que representa um círculo no plano. Por exemplo, a equação

$$x^2 + y^2 = 4,$$

representa um círculo no plano, com centro $0 = (0, 0)$ coincidindo com a origem do sistema de coordenadas e com raio igual a 2. Este é o primeiro exemplo de uma equação quadrática, representando uma curva muito conhecida: o círculo. Mais tarde daremos uma caracterização geral de equação quadrática, mas, por enquanto, você já deve desconfiar que o termo quadrático é por conta do fato que as variáveis x e y na equação do círculo estão elevadas ao expoente 2. Não custa também recordar que nas Aulas 10 e 11, e no início desta aula, tratamos de equações do tipo $ax + by + c = 0$, onde a , b e c são números reais e tais que $a^2 + b^2 \neq 0$. Estas equações que representam retas no plano, são ditas equações lineares.

Para concluir esta aula, vamos enriquecer nosso conhecimento estudando mais um tipo de equação quadrática, que representa uma curva importante do plano, já conhecida desde a antiguidade. Trata-se da parábola.

Parábolas aparecem, freqüentemente, na natureza. Quando o jogador chuta a bola ao gol, a curva descrita pela bola é muito próxima de uma parábola. A diferença entre a curva ideal e a trajetória real da bola é consequência da resistência do ar. Nosso objetivo é usar as técnicas da geometria analítica de Descartes, para expressar algebricamente, as parábolas em coordenadas cartesianas e estudar suas propriedades geométricas.

Parábolas

A parábola pode ser descrita como o conjunto $P = (x, y)$ do plano que são soluções de uma equação do tipo

$$y = ax^2 + bx + c,$$

onde a , b e c são números reais e $a \neq 0$. Primeiramente vamos caracterizar geometricamente a curva parábola num plano sem coordenadas, e após, encontrar a equação que a traduz, quando no plano é considerado um sistema de coordenadas.

Geometricamente uma parábola é obtida a partir de uma reta r no plano e um ponto F fora da reta. A parábola é então o conjunto dos pontos

Quando temos dois números reais a e b com a condição que não são nulos simultaneamente, isto é equivalente a que $(a, b) \neq 0$, ou ainda equivalente a que $a^2 + b^2 \neq 0$.

do plano que estão igualmente distantes da reta r e do ponto F . A reta r é denominada a diretriz e o ponto F o foco da parábola. Veja a **Figura 12.4**, onde no plano representamos a reta diretriz e o foco F para uma parábola. Note também a localização de um ponto P da parábola. Lembre que o ponto P está determinado pela condição que a distância de P até r é igual à distância de P até o foco F .

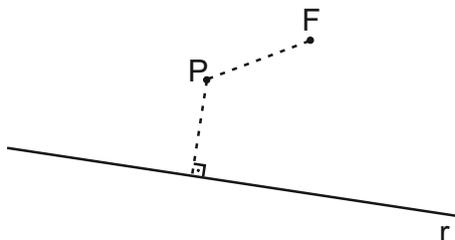


Figura 12.4: Um ponto da parábola.

Vamos determinar a equação da parábola, a partir da reta r e do ponto fixo F , respectivamente, a diretriz e o foco da parábola. Para descrever algebricamente a curva, do modo mais simples possível, é importante escolher bem o sistema de coordenadas:

- será escolhido como o eixo Oy a reta que passa por F e é perpendicular à reta r ;
- denote por G o ponto de interseção destas retas perpendiculares – portanto, G é um ponto que está no eixo Oy e na reta r diretriz;
- o ponto médio do segmento FG , denotado por O , será a origem do sistema de coordenadas.

Com a origem e o eixo y identificados, o eixo x fica definido, através da reta paralela à diretriz r e contém o ponto O .

Em virtude das escolhas, existe um número $c > 0$, tal que $F = (0, c)$. Também, $y = -c$ é a equação cartesiana da diretriz. Veja na **Figura 12.5**, o gráfico da parábola, com foco e diretriz identificados e onde $P = (x, y)$ é um ponto genérico da curva.

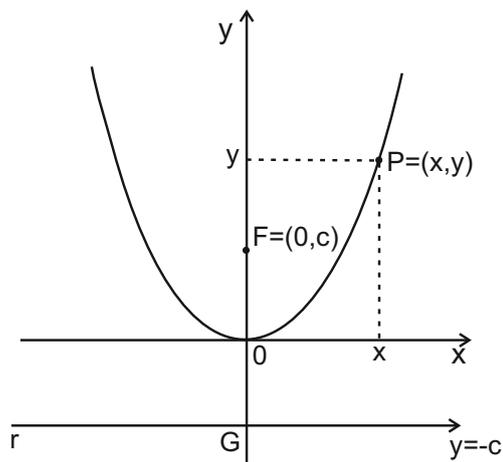


Figura 12.5: Parábola de foco F e diretriz $y = -c$.

Como o ponto $P = (x, y)$ da parábola é equidistante da reta r e do foco F , isto significa que $d(P, r) = d(P, F)$, onde d representa a distância. Então

$$d(P, r) = d(P, F) \Rightarrow y + c = \sqrt{x^2 + (y - c)^2}.$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da última igualdade e simplificando, encontramos

$$y = \frac{x^2}{4c},$$

que é a equação da parábola com diretriz r e foco F .

Examine de novo a **Figura 12.5** e observe que, em virtude da boa escolha do sistema de coordenadas, a equação da parábola ficou muito simples, dependendo apenas de um parâmetro $c > 0$. Geometricamente, c representa a metade da distância do foco até a diretriz. Agora, escolhendo um novo parâmetro $b > 0$, tal que $b = 1/4c$, encontramos que

$$y = bx^2, \quad b > 0$$

é a equação canônica de uma parábola, descrita em um sistema de coordenadas adaptado.

Nota

Em relação ao sistema de coordenadas a parábola tem sua concavidade voltada para cima, em relação ao eixo y escolhido. Se na hora da escolha fosse invertido o sentido de orientação do eixo y , a equação da parábola teria a forma

$$y = -bx^2, \quad b > 0,$$

e a parábola teria a concavidade para baixo em relação ao eixo y .

A curva parábola

Como representar geometricamente o traço da curva parábola no plano?

Do ponto de vista concreto, isto pode ser feito utilizando a propriedade geométrica que define a parábola, identificando no plano um número suficiente de pontos para intuir a forma da curva.

Veja como uma construção elementar pode localizar pontos da parábola. Acompanhe na **Figura 12.6**, onde é construído um ponto P de uma parábola cuja diretriz é r e o foco é F . Veja que foi traçada uma reta arbitrária s perpendicular à diretriz r . Em seguida o destaque é o segmento FE , onde E é o ponto de encontro da reta s com a diretriz r .

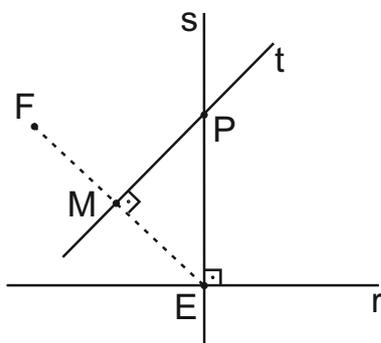


Figura 12.6: Determinação geométrica de pontos da parábola.

A reta t é perpendicular ao segmento FE e passa pelo ponto médio M deste segmento. O ponto P de encontro das retas s e t pertencente à parábola. Para verificar que $d(P, F) = d(P, r)$, basta usar as propriedades do triângulo isósceles $EF P$.

Note que a operação conduzida para localizar sobre a reta s um ponto P da parábola é um método geral. Este método garante que em toda reta perpendicular à diretriz r existe um ponto da parábola e fornece o caminho para localizá-lo.

Após a construção de um número suficiente de pontos é possível esboçar o traço da parábola.

Este método de deduzir a forma da curva através de um número finito de pontos não é uma estratégia menor, pois, mesmo os mais possantes computadores, ao construir qualquer gráfico, o fazem através de um número finito de pontos. É evidente que o número de pontos desenhados é suficientemente grande para produzir uma ilusão de continuidade quando observamos estes gráficos na tela do computador ou mesmo impressos em papel.

Mudança de eixos coordenados

A equação de uma parábola pode ser expressa através de uma equação do tipo $y = bx^2$, graças à escolha de um sistema de eixos coordenados adaptado à parábola. Este cuidado é importante, pois resulta numa equação muito simples. Mas, e se o sistema de coordenadas fosse outro e arbitrário, como ficaria a equação?

Suponha uma parábola definida pela equação $y = 4x^2$ e considere um novo sistema de coordenadas $u\bar{O}v$ tal que os eixos $\bar{O}u$ e $\bar{O}v$ são paralelos, respectivamente, aos eixos $0x$ e $0y$ e cuja origem \bar{O} tem coordenadas $\bar{O} = (-2, 4)$ referenciado pelo sistema de coordenadas antigo. Qual é a equação da parábola no novo sistema de coordenadas $u\bar{O}v$? Veja a **Figura 12.7**.

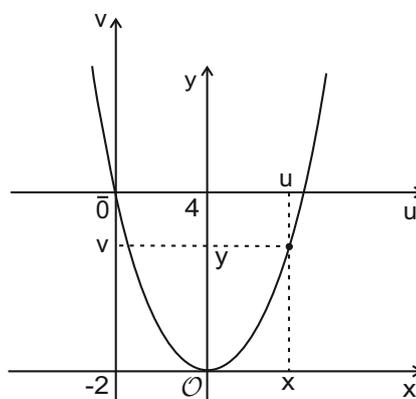


Figura 12.7: Mudança de coordenadas.

Considere um ponto P qualquer do plano. Este ponto, em relação ao sistema de coordenadas $x0y$ e $u\bar{O}v$, se expressa por $P = (x, y)$ e $P = (u, v)$, respectivamente. O ponto é o mesmo, apenas as coordenadas mudam. Como $\bar{O} = (-2, 4)$ o que vale de modo geral é que

$$x = u + 2, \quad y = v - 4.$$

O sistema de coordenadas $x0y$ e $u\bar{O}v$ diferem por uma translação de coordenadas. Veja como fica a equação da parábola $y = 4x^2$, agora no sistema $u\bar{O}v$:

$$y = 4x^2 \Rightarrow v - 4 = 4(u + 2)^2 \Rightarrow v = 4u^2 + 16u + 20.$$

Em resumo as duas equações $y = 4x^2$ e $v = 4u^2 + 16u + 20$, representam a mesma parábola, expressas algebricamente em sistemas de coordenadas distintos $x0y$ e $u\bar{O}v$, respectivamente.

Exemplo. Vamos mostrar que a equação $y = 4x^2 - 24x$ representa uma parábola no plano e encontrar um sistema de coordenadas $u\overline{O}v$ tal que esta parábola se expresse na forma mais simples possível, $v = b.u^2$, onde b é um número real não nulo.

Completando quadrados, escrevemos que

$$y = 4x^2 - 24x \Rightarrow y + 36 = 4(x - 3)^2.$$

Portanto, se

$$x = u + 3 \text{ e } y = v - 36 \iff u = x - 3 \text{ e } v = y + 36,$$

está configurada a mudança de coordenadas que permite representar a parábola nas coordenadas $u\overline{O}v$ por,

$$v = 4u^2.$$

Até aqui consideramos apenas mudanças de coordenadas através de translação. Este procedimento introduz o benefício do movimento no estudo da geometria. É evidente que a relação entre sistemas de coordenadas pode ser mais complexa, como é o caso de dois sistemas xOy e $u\overline{O}v$ diferirem por meio de rotações. Nesta situação, a equação da parábola seria mais complicada, podendo assumir uma forma geral do tipo,

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0, \text{ onde } a, b, c \text{ e } d \text{ são números reais.}$$

Não vamos nos aprofundar neste assunto, uma vez que será tema de estudo na disciplina Geometria Analítica 1.

Atividade 12.1. Considere a parábola $2x^2 - 3x + y + 1 = 0$. Descreva um sistema de coordenadas $u\overline{O}v$ para o qual a equação da parábola é do tipo $v = ku^2$, para algum número real k . Determine, também, o valor de k .

Discussão sobre o gráfico da parábola

Toda equação quadrática do tipo

$$y = ax^2 + bx + c$$

onde a, b e c são números reais e $a \neq 0$, representa uma parábola, cuja reta r diretriz é paralela ao eixo Ox . Uma parábola representada por uma equação do tipo $y = ax^2 + bx + c$, tem sua concavidade voltada para cima ou para baixo segundo tenha o coeficiente a positivo ou negativo. Também, existe uma reta

t que é paralela à diretriz e tangencia a parábola num ponto V . Este ponto é denominado o vértice da parábola. A reta s paralela ao eixo Oy e que passa pelo vértice V é um eixo de simetria da parábola. Dito de outro modo, o lado esquerdo da parábola coincide com o lado direito através de uma reflexão em torno da reta de simetria s . Veja estes elementos representados na **Figura 12.8**, onde aparece uma parábola com concavidade para baixo. Note que a reta de simetria s é mediatriz do segmento AB .

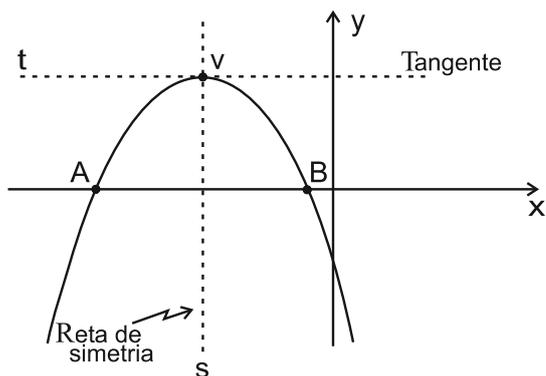


Figura 12.8: Elementos geométricos das parábolas.

Um elemento importante para definir a posição do gráfico da parábola é o trinômio do segundo grau ou a equação quadrática associada,

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

A existência ou não de solução do trinômio define elementos geométricos importantes. Vamos considerar nos três exemplos seguintes as várias possibilidades.

Exemplo. Construir o gráfico da parábola $y = x^2 + 2x - 3$.

Solução

Para o trinômio $x^2 + 2x - 3 = 0$ temos o seguinte valor para o discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 > 0.$$

Logo o trinômio tem duas raízes distintas. Ou seja,

$$x = \frac{-3 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

são as raízes. E isto significa que os pontos $P_1 = (1, 0)$ e $P_2 = (-3, 0)$ são os pontos de interseção da parábola com o eixo x . Além disso se o vértice V

tem como coordenada $V = (x_v, y_v)$ então devido a simetria da parábola, x_v é o ponto médio do segmento cujos extremos são os pontos $x_1 = 1$ e $x_2 = -3$. Portanto,

$$x_v = \frac{1 - 3}{2} = -1.$$

Identificado o valor da abscissa x_v do vértice $V = (x_v, y_v)$, podemos calcular a ordenada y_v usando a equação da parábola. Ou seja,

$$y = x^2 + 2x - 3 \text{ e } x_v = -1 \Rightarrow y_v = (-1)^2 + 2(-1) - 3 \Rightarrow y_v = -4 \Rightarrow V = (-1, -4).$$

Veja todos estes elementos geométricos identificados no gráfico da parábola representado na **Figura 12.9** a seguir.

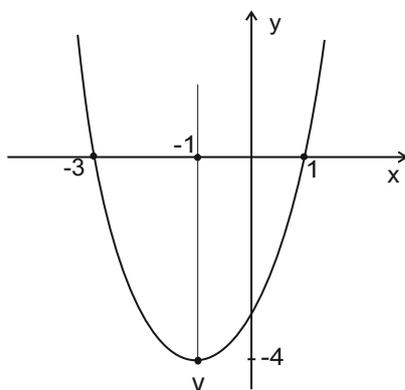


Figura 12.9: A parábola $x^2 + 2x - 3$.

Exemplo. Construir o gráfico da parábola $y = -4x^2 + 12x - 9$.

Solução

Para o trinômio $-4x^2 + 12x - 9 = 0$ temos o seguinte valor para o discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-9) = 0.$$

Logo o trinômio tem duas raízes coincidentes. Ou seja

$$x_1 = x_2 = \frac{-12 \pm 0}{2 \cdot (-4)} = \frac{-12}{-8} = \frac{3}{2},$$

são as raízes. E isto significa que o ponto $P = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$ é o único ponto em que a parábola corta o eixo $0x$. Isto significa que o eixo $0x$ é tangente à parábola e que este ponto P de tangência é também o vértice da parábola. Ou seja, $V = P = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$. Por outro lado, veja que o termo de maior grau do trinômio é $-4x^2$, com um coeficiente negativo. Isto implica que a

parábola tem a concavidade para baixo, em relação ao eixo $0y$. Note também que para $y = -1$ temos duas soluções $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$ para a equação $y = -4x^2 + 12x - 9$. Logo, os pontos $(1, -1)$ e $(2, -1)$ estão na parábola. Com estes elementos geométricos em mãos podemos representar o gráfico da parábola que segue na **Figura 12.10**.

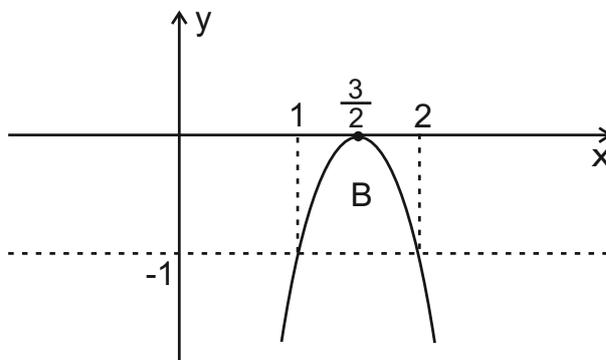


Figura 12.10: Gráfico da parábola $y = -4x^2 + 12x - 9$.

Exemplo. Construir o gráfico da parábola $y = 2x^2 + 2x + 1$.

Solução

Para o trinômio $2x^2 + 2x + 9 = 0$ temos o seguinte valor para o discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -4 < 0.$$

Portanto, o trinômio não tem nenhum número real como raiz. Isto significa que a parábola não intersecta o eixo $0x$. No entanto uma análise rápida da equação mostra que

$$y = 1 \text{ em } y = 2x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x = 0 \text{ e } x = -1.$$

Portanto, $A = (0, 1)$ e $B = (-1, 1)$ são pontos da parábola. Veja a **Figura 12.11**. Por simetria e usando as coordenadas dos pontos A e B , podemos localizar o vértice $V = (x_v, y_v)$. Temos que

$$x_v = \frac{0 - (-1)}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Também

$$x_v = -\frac{1}{2} \text{ em } y = 2x^2 + 2x + 1 \Rightarrow y_v = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Logo, } V = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

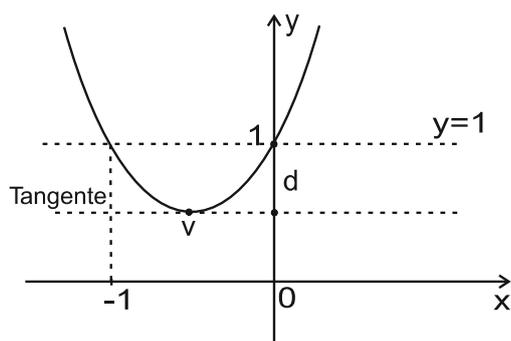


Figura 12.11: Esboço da parábola $y = 2x^2 + 2x + 1$.

Aplicações

As aplicações práticas das parábolas são inúmeras. Citamos uma de grande impacto. Indo além da idéia de parábola, vamos identificar uma superfície no espaço \mathbb{R}^3 , denominada parabolóide. Se (x, y, z) são as coordenadas de \mathbb{R}^3 , considere uma parábola $y = bx^2$, contida no plano xy . Um parabolóide é a superfície em \mathbb{R}^3 gerada pela rotação de uma dessas parábolas em torno do eixo z .

Parabolóides têm propriedades físicas importantes. Um exemplo de utilização prática de parabolóides ocorre nos sistemas de telecomunicação por satélites. Num sistema deste tipo, a estrutura receptora do sinal que vem do espaço são as antenas parabólicas, enquanto o agente emissor é geralmente um satélite artificial em órbita estacionária em torno da Terra. O satélite emite um conjunto de ondas eletromagnéticas, captadas pela antena parabólica. A superfície da antena parabólica é uma parte limitada de um parabolóide. O que garante o máximo aproveitamento do sinal recebido por uma antena parabólica é a propriedade que todo feixe de raios que atinge a superfície do parabolóide, incidindo paralelamente ao eixo da antena, reflete exatamente para um único lugar, denominado o foco do parabolóide. No foco está situado o aparelho receptor com função de converter as ondas eletromagnéticas em um sinal, de rádio ou TV, e, assim, você pode assistir confortavelmente a seu programa preferido.

Veja a **Figura 12.12**, representando uma antena parabólica e um feixe de raios refletindo para o foco.

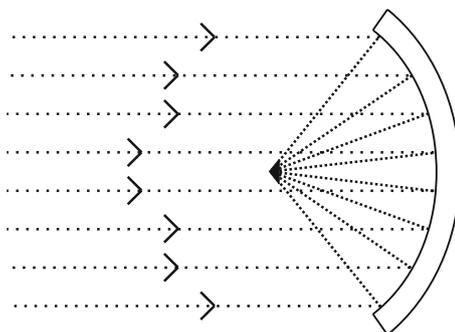


Figura 12.12: Antena parabólica.

Note que os raios incidentes sobre a antena são emitidos por um satélite longínquo e, daí, o fato que destes raios chegarem em forma de feixe praticamente paralelo ao eixo da antena.

Aula 13 – Equações quadráticas – continuação

Objetivos

Após estudar esta aula, você será capaz de:

- compreender o conceito de mudança de coordenadas;
- expressar a parábola através de uma equação quadrática.

Na aula passada você teve ocasião de estudar a parábola, e agora é o momento de apresentar outras curvas: a elipse e a hipérbole. Essas duas curvas mais a parábola são conhecidas desde a época clássica da Matemática grega, com o nome de cônicas, e têm lugar nobre na história da Matemática. O grande matemático da antiguidade Apolônio de Perga (262 - 190 a.C.) registrou, em um genial livro denominado *seções cônicas*, todo o conhecimento matemático da época sobre estas curvas. Cada uma delas pode ser obtida através da interseção de um plano com um duplo cone circular reto, daí o nome cônicas. A obtenção de uma ou outra cônica fica na dependência da posição geral do plano em relação ao eixo e as geratrizes do cone duplo. Veja representado na **Figura 13.1**, a obtenção de cada cônica. No caso da parábola, o plano é paralelo a uma das geratrizes do cone superior e intersecta o cone inferior. No caso da elipse, o plano intersecta o eixo do cone com um ângulo diferente de 90° e intersecta todas as geratrizes do cone inferior. No caso da hipérbole, o plano é paralelo ao eixo e intersecta os cones superior e inferior.



Figura 13.1: Parábola, elipse e hipérbole, respectivamente.

A elipse

Uma elipse fica definida no plano a partir da escolha de dois pontos F_1 e F_2 e de uma medida m maior que a distância entre estes pontos. Aqui m é um número positivo. Se como de costume denotarmos por $d(F_1, F_2)$ a distância entre os pontos, a condição prescrita é que $m > d(F_1, F_2)$.

A elipse é então por definição o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ do plano tal que a soma da distância de P até F_1 com a distância de P até F_2 é igual a m . Em outras palavras fixados F_1 e F_2 e uma medida m maior que a distância entre estes pontos, a equação da elipse é definida pela condição geométrica

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = m.$$

Na linguagem de conjuntos, se α é um plano, então

$$\text{elipse} = \{P \in \alpha; d(P, F_1) + d(P, F_2) = m\}.$$

A partir da definição você pode desenhar uma elipse no papel escolhendo um barbante com comprimento m e fixando as extremidades dos barbante por duas tachinhas localizadas nos pontos F_1 e F_2 . Agora basta esticar o barbante com um lápis e deslizar mantendo o barbante esticado de modo que é possível desenhar a elipse. Veja a ilustração na **Figura 13.2**.

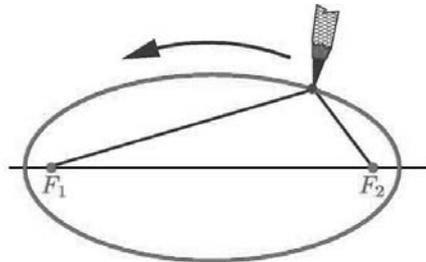


Figura 13.2: Uma elipse desenhada num papel.

Agora, num plano onde está representado uma elipse, introduzimos um sistema de eixos ortogonais adaptados à elipse com o intuito de encontrar uma equação a mais simples possível que a represente. Este sistema de coordenadas é tal que o eixo $0x$ contém os focos F_1 e F_2 e o ponto médio do segmento F_1F_2 é a origem do sistema de coordenadas. Como os focos estão sobre o eixo $0x$ então podemos escrever, nas coordenadas $x0y$ que

$$F_1 = (c, 0) \text{ e } F_2 = (-c, 0), \text{ onde } c > 0.$$

Também, vamos escrever a distância $m > d(F_1, F_2)$ como

$$m = 2a, \text{ onde } a > 0.$$

Assim, se $P = (x, y)$ é um ponto arbitrário da elipse, temos que

$$\begin{aligned} d(P, F_1) + d(P, F_2) &= m \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a. \end{aligned}$$

A última equação pode ser escrita como

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}.$$

Agora elevando ao quadrado ambos os membros da igualdade vamos encontrar que

$$4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 = (x+c)^2 + y^2.$$

Desenvolvendo os quadrados, temos

$$4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2.$$

Cancelando as parcelas iguais e somando $-4a^2 + 2cx$ a ambos os membros da igualdade, obtemos

$$-4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4cx - 4a^2.$$

Cancelando o fator comum, temos

$$-a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx - a^2.$$

Elevando ao quadrado ambos os membros desta igualdade, temos

$$a^2((x-c)^2 + y^2) = c^2x^2 - 2a^2cx + a^4.$$

Desenvolvendo o lado esquerdo desta igualdade, obtemos

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 - 2a^2cx + a^4.$$

Somando $-c^2x^2 + 2a^2cx - a^2c^2$ a ambos os membros desta igualdade, reescrevemos a equação como

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 = a^2(a^2 - c^2),$$

Como $a > c > 0$, temos que $a^2 > c^2$. Assim, $a^2 - c^2$ é um número real positivo e podemos escrevê-lo como o quadrado de um número real $b > 0$, logo $b^2 = a^2 - c^2$. Observe que $b < a$. A equação anterior se reescreve como $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ que, dividindo por $a^2b^2 \neq 0$, é equivalente a

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ onde } c^2 = a^2 - b^2.}$$

Esta equação é chamada *equação reduzida da elipse*.

Observe a representação gráfica da elipse na **Figura 13.3** e acompanhe através das notas o destaque de pontos relevantes.

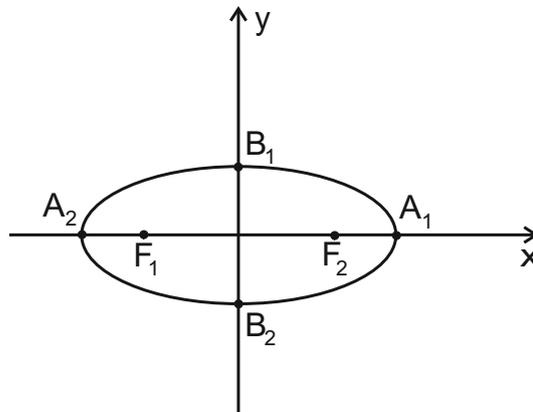


Figura 13.3: Elipse: eixos maior e menor, focos e vértices.

Notas

1. Os pontos $A_1 = (a, 0)$ e $A_2 = (-a, 0)$ pertencem à elipse. Basta substituir os pontos na equação reduzida da elipse para confirmar. Estes pontos representam a interseção da elipse com o eixo $0x$. O segmento A_1A_2 é dito o eixo maior da elipse e estes pontos são denominados vértices.
2. Os pontos $B_1 = (0, b)$ e $B_2 = (0, -b)$ pertencem à elipse. Uma substituição direta destes pontos na equação da elipse confirma esta afirmação. Estes pontos representam a interseção da elipse com o eixo $0y$. O segmento B_1B_2 é o eixo menor da elipse.
3. Observe que os focos da elipse estão sobre o eixo maior A_1A_2 .
4. Na construção para obter a equação reduzida da elipse os focos foram colocados sobre o eixo $0x$ e deste modo o eixo maior da elipse fica sobre o eixo $0x$, enquanto que o eixo menor fica sobre o eixo $0y$. A equação da elipse tem a forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ onde } a > b > 0.$$

Neste caso o eixo maior da elipse tem comprimento $2a$, enquanto que o eixo menor tem comprimento $2b$.

5. Por outro lado, é possível realizar o mesmo desenvolvimento de modo que os focos fiquem sobre o eixo $0y$ e evidentemente o eixo $0x$ encontrando perpendicular o segmento focal F_1F_2 no ponto médio. Nesta

situação o eixo menor da elipse fica sobre o eixo $0x$, enquanto que o eixo maior fica sobre o eixo $0y$. A equação da elipse tem a forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ onde } b > a > 0.$$

Neste caso o eixo maior da elipse tem comprimento $2b$, enquanto que o eixo menor tem comprimento $2a$.

Exemplo

A equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ representa uma elipse cujos eixos maior e menor medem, respectivamente, 3 e 2 e possuem os eixos coordenados como eixos de simetria. Veja a **Figura 13.4**, representando esta elipse.

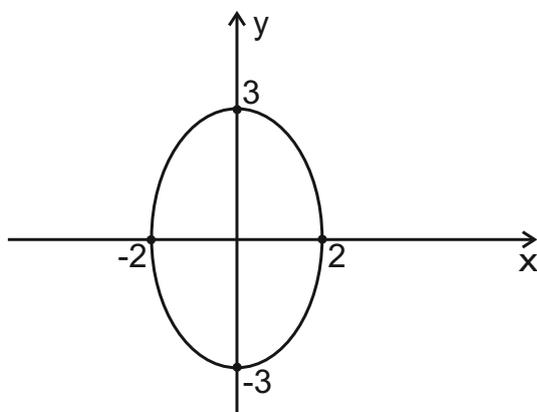


Figura 13.4: A elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Mudança de coordenadas

Considere a elipse trabalhada no último exemplo, cuja equação é $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ e o gráfico está representado na **Figura 13.4**. Considere um novo sistema de coordenadas $u\bar{v}$ obtido do sistema $x0y$ por translação de modo que $\bar{o} = (-1, 3)$, com estas coordenadas referidas ao sistema $x0y$. Então como conhecemos, a mudança de coordenadas funciona com

$$\begin{cases} x = u - 1 \\ y = v + 3 \end{cases}$$

Substituindo estas novas coordenadas na equação da elipse encontramos que

$$\frac{(u-1)^2}{4} + \frac{(v+3)^2}{9} = 1 \Leftrightarrow 9(u-1)^2 + 4(v+3)^2 = 36.$$

Desenvolvendo encontramos que

$$9u^2 + 4v^2 - 18u + 24v + 9 = 0$$

é a equação quadrática que representa a elipse no novo sistema de coordenadas. Acompanhe este trabalho como representado na **Figura 13.5**.

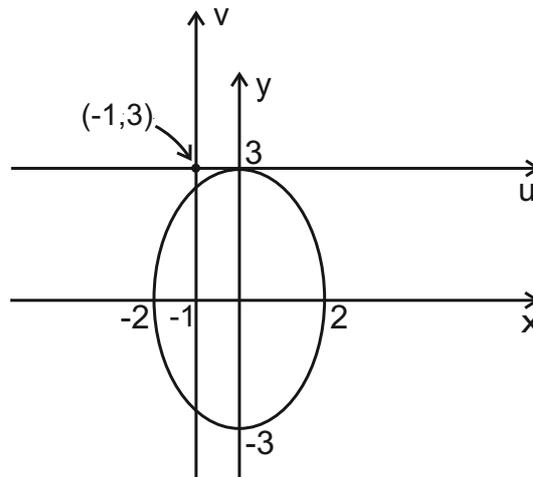


Figura 13.5: Mudança de coordenadas na equação da elipse.

Nota

O círculo pode ser considerado como uma elipse degenerada, isto é, uma elipse com os eixos maior e menor com o mesmo comprimento. Considere a equação da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e o caso limite, onde os comprimentos dos eixos coincidem. Ou seja, $a = b$. Com esta condição encontramos que $x^2 + y^2 = a^2$ que é uma equação quadrática e representa um círculo de raio $r = a$ e centrado na origem.

Exemplo.

Considere a equação $x^2 + y^2 - 4 = 0$, a qual representa um círculo de raio $r = 2$ e com centro na origem $0 = (0, 0)$. Veja que podemos escrever a equação na forma

$$x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1,$$

que é uma “elipse degenerada” cujos eixos maior e menor medem 2.

A hipérbole

Do ponto de vista estrutural, uma hipérbole tem uma definição geométrica muito similar à da elipse. O ponto de partida são dois pontos fixos do plano denominados focos da hipérbole e de uma medida m menor que a distância entre estes pontos. Aqui m é um número positivo. Se como de costume denotarmos por $d(F_1, F_2)$ a distância entre os pontos, a condição que acabamos de estabelecer prescreve que

$$d(F_1, F_2) > m.$$

A hipérbole é então por definição o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ do plano tal que o valor absoluto da diferença entre a distância de P até F_1 e a distância de P até F_2 é igual a m .

Em outras palavras fixados F_1 e F_2 e uma medida m maior que a distância entre estes pontos, a equação da elipse é definida pela condição geométrica

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = m.$$

Na linguagem de conjuntos, se α é um plano, então, em termos de conjunto de pontos,

$$\text{hipérbole} = \{P \in \alpha; |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = m\}.$$

Veja na **Figura 13.6**, a representação no plano α de uma hipérbole de focos F_1 e F_2 .

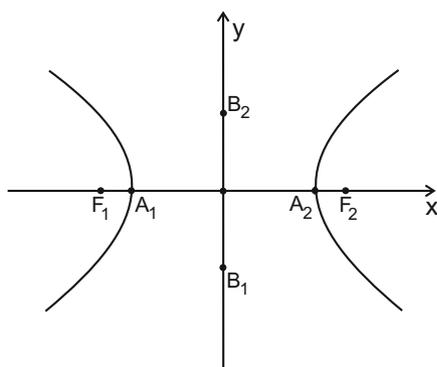


Figura 13.6: Hipérbole do focos F_1 e F_2 .

Do mesmo modo como procedemos para o caso da elipse, podemos encontrar a equação reduzida da hipérbole se escolhermos um par de eixos adaptado. Assim se o eixo $0x$ contém os focos, de modo que a origem do eixo

coincida com o ponto médio do segmento focal F_1F_2 e de modo que o foco F_1 fica na parte positiva do eixo $0x$ e o eixo $0y$ encontra o segmento focal no ponto médio. Se $2c$ é a distância entre os focos e escrevendo $m = 2a$, então por construção como os focos estão sobre o eixo $0x$, encontramos que

$$F_1 = (c, 0) \text{ e } F_2 = (-c, 0), \text{ onde } c > 0.$$

Também, a título de simplificar a equação escrever a distância $m < d(F_1, F_2)$ como

$$m = 2a, \text{ onde } a > 0.$$

Assim, se $P = (x, y)$ é um ponto arbitrário da elipse, temos que

$$\begin{aligned} |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = m &\Leftrightarrow \left| \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-(-c))^2 + y^2} \right| = 2a \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \pm 2a \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da última igualdade, obtemos

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2.$$

Desenvolvendo os quadrados, temos

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2.$$

Cancelando as parcelas iguais e deixando apenas a raiz quadrada do lado direito, obtemos

$$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Dividindo por 4, temos

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando ao quadrado ambos os membros desta igualdade, temos

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x-c)^2 + y^2$$

Desenvolvendo o lado direito desta igualdade, obtemos

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2.$$

Somando $2a^2cx - a^4 - a^2x^2 - a^2y^2$ a ambos os membros desta igualdade, reescrevemos a equação como

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4 = a^2(c^2 - a^2).$$

Como $0 < a < c$, temos $a^2 < c^2$. Assim, $c^2 - a^2$ é um número real positivo e podemos escrevê-lo como o quadrado de um número real $b > 0$, logo $b^2 = c^2 - a^2$. Observe que $b < c$. Finalmente, a equação anterior se escreve como $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ que, dividindo por $a^2b^2 \neq 0$, é equivalente a

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ onde } c^2 = a^2 + b^2.$$

Esta equação é chamada *equação reduzida da hipérbole*.

A interpretação geométrica para a e b será relevante para desenhar o gráfico da hipérbole. Fazendo $y = 0$ nesta equação, obtemos $\frac{x^2}{a^2} = 1$, que é equivalente a $x^2 = a^2$. Portanto, $x = \pm a$ e os pontos $A_1 = (-a, 0)$ e $A_2 = (a, 0)$ são pontos da hipérbole, chamados *vértices*. O segmento de reta A_1A_2 tem comprimento $2a$ e é chamado de *eixo real ou transverso*.

Fazendo agora $x = 0$, obtemos $\frac{y^2}{b^2} = -1$, uma equação não admite solução em números reais. Isto significa que o eixo y e a hipérbole não se intersectam. A origem O é chamada de *centro* da hipérbole. Os pontos $B_1 = (0, -b)$ e $B_2 = (0, b)$ não estão na hipérbole, mas desempenham um papel importante para traçar o seu gráfico. O segmento de reta B_1B_2 tem comprimento $2b$ e é chamado *eixo imaginário* da hipérbole. Não se esqueça que os focos da hipérbole estão situados no eixo x e são $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$.

As retas verticais passando por A_1 e A_2 e as retas horizontais passando por B_1 e B_2 determinam um retângulo de vértices C, D, E e F cujas diagonais passam pela origem e têm equações $y = \pm \frac{b}{a}x$, chamadas *assíntotas* da hipérbole.

As assíntotas da hipérbole têm a seguinte propriedade: um ponto da hipérbole muito afastado do centro O está a uma distância muito pequena (próxima de zero) da assíntota. Na prática, isto significa que o desenho do gráfico da hipérbole se aproxima da assíntota quando o ponto da hipérbole se afasta do centro, conforme a **Figura 13.7**.

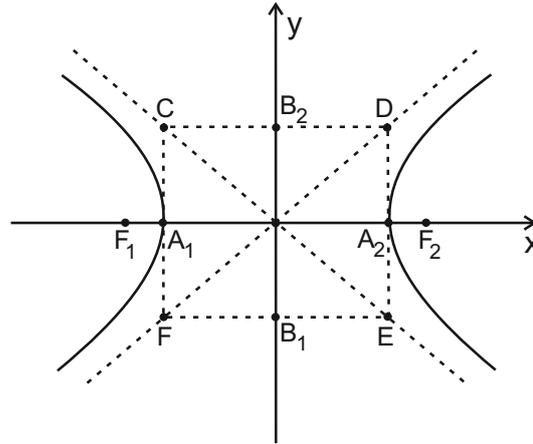


Figura 13.7: Desenho das assíntotas da hipérbole.

Mais precisamente:

- (1) Pontos da hipérbole do primeiro e terceiro quadrantes com $|x|$ muito grande estão próximos de $y = \frac{b}{a}x$.
- (2) Pontos da hipérbole do segundo e quarto quadrantes com $|x|$ muito grande estão próximos de $y = -\frac{b}{a}x$.

Exemplo

A equação $x^2 - y^2 = 1$, representa uma hipérbole, cujos eixos medem 1 e as bissetrizes dos eixos coordenados são as assíntotas. Veja a **Figura 13.8**, representando esta hipérbole.

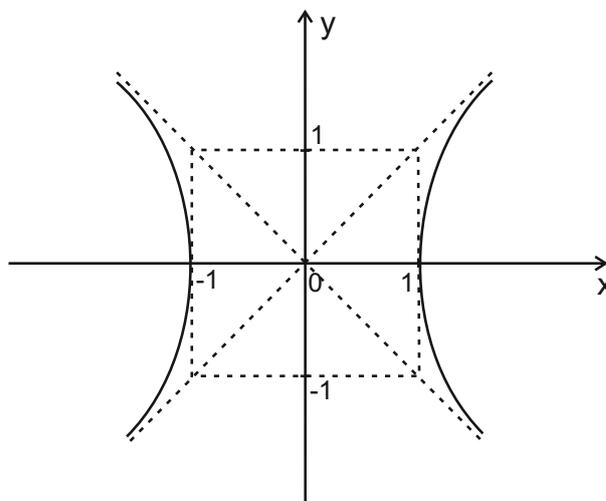


Figura 13.8: A hipérbole $x^2 - y^2 = 1$.

Aula 14 – Inequações lineares e quadráticas

Objetivos

Depois de estudar esta aula, você poderá:

- encontrar os subconjuntos do plano que representam soluções de uma ou mais inequações;
- resolver e representar geometricamente a solução de sistemas de equações lineares e quadráticas.

Nas aulas anteriores exploramos a ligação entre geometria e álgebra através das equações lineares e quadráticas. Assim retas foram expressas em termos de equações lineares, parábolas, círculos, elipses e hipérbolas expressas em termos de equações quadráticas.

Nesta aula vamos expandir os resultados estudados com o objetivo de representar no plano conjuntos determinados como soluções de equações e inequações quadráticas.

Inequações lineares: semi-planos

Considere uma reta r cuja equação é $ax + by + cz = 0$. A reta r divide o plano em dois semi-planos H_1 e H_2 , veja a **Figura 14.1**.

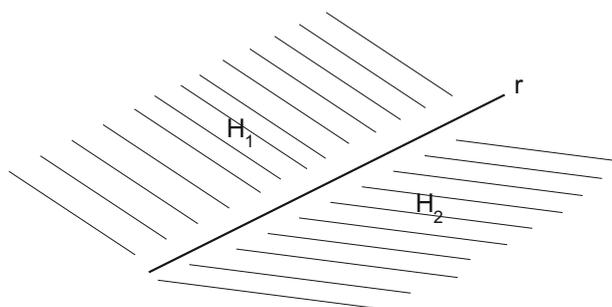


Figura 14.1: Semi-planos H_1 e H_2 determinados por uma reta.

Tecnicamente, dizemos que a reta r provoca uma partição do plano em dois semi-planos H_1 e H_2 tais que valem as propriedades:

$$H_1 \cap H_2 = \emptyset \text{ e } H_1 \cup H_2 = \mathbb{R}^2.$$

Observe que os semi-planos H_1 e H_2 definidos através da reta r não contém a reta r como um subconjunto. Em topologia estes semi-planos

seriam ditos abertos. Também é útil considerar os semi-planos fechados, $\overline{H_1}$ e $\overline{H_2}$, tais que

$$\overline{H_1} = H_1 \cup r \text{ e } \overline{H_2} = H_2 \cup r.$$

Note que para os semi-planos fechados vale

$$H_1 \cap H_2 = r$$

Após estas considerações geométricas é imperativa a pergunta:

– Como expressar algebricamente, cada um dos conjuntos H_1 e H_2 ?

Dentro da filosofia que esta disciplina deve ser eminentemente operacional, em preparação às outras disciplinas de cálculo que virão, vamos responder à questão formulada examinando exemplos concretos. Acompanhe a seqüência de exemplos.

Exemplo

Vamos descrever o conjunto do plano definido pela inequação $x + 2 > 0$.

Solução

A reta r , cuja equação é $x - 2 = 0$, define dois semi-planos H_1 e H_2 . Considere H_1 o conjunto definido pela inequação $x + 2 > 0$. Ou equivalentemente pela inequação $x > -2$. Portanto,

$$H_1 = \{x; x + 2 > 0\}.$$

Um exame direto na representação gráfica apresentada na **Figura 14.2**, identifica o conjunto H_1 como a região hachurada.

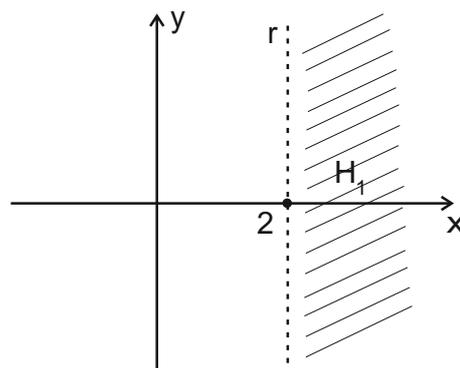


Figura 14.2: H_1 o semi-plano $x + 2 > 0$.

Exemplo

Considere a inequação $2x - 3y + 6 \geq 0$. Vamos determinar o conjunto $\overline{H_1}$ do plano tal que

$$\overline{H_1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2x - 3y + 6 \geq 0\}.$$

Solução

Veja que a reta r cuja equação é $2x - 3y + 6 = 0$ separa o plano em dois semi-planos $\overline{H_1}$ e $\overline{H_2}$. Na **Figura 14.3**, está identificado o semi-plano $\overline{H_1}$.

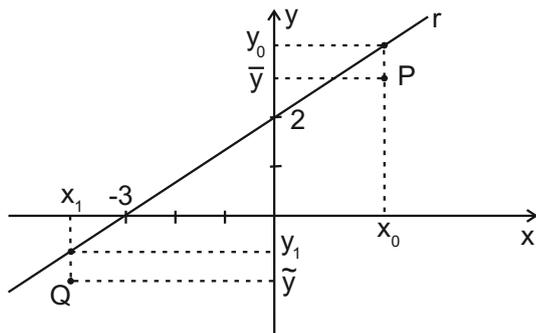


Figura 14.3: O semi-plano $2x - 3y + 6 \geq 0$.

Veja porque o conjunto $\overline{H_1}$ está bem identificado na **Figura 14.3**. Como,

$$2x - 3y + 6 \geq 0 \Leftrightarrow -y \geq \frac{2}{3}x - \frac{6}{3} \Leftrightarrow y \leq \frac{2}{3}x + 2.$$

Note o ponto P anotado no conjunto H_1 . Na **Figura 14.3** o ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ pertence à reta r . Portanto,

$$y_0 = \frac{2}{3}x_0 + 2.$$

Note que para o ponto $P = (x_0, \bar{y})$ temos que

$$y \leq \frac{2}{3}x + 2 \text{ e } \bar{y} < y_0 \Rightarrow \bar{y} < \frac{2}{3}x_0 + 2 \Rightarrow P = (x_0, \bar{y}) \in \overline{H_1}.$$

O mesmo raciocínio pode ser aplicado para mostrar porque o ponto Q está no semi-plano $\overline{H_1}$. Veja que, como $Q_1 = (x_1, y_1)$ está na reta r então

$$y_1 = \frac{2}{3}x_1 + 2.$$

Para o ponto $Q = (x_1, \tilde{y})$ temos que

$$y_1 = \frac{2}{3}x_1 + 2 \text{ e } \tilde{y} < y_1 \Rightarrow \tilde{y} < \frac{2}{3}x_1 + 2 \Rightarrow Q = (x_1, \tilde{y}) \in \overline{H_1}$$

Sistemas de inequações lineares

O trabalho desenvolvido para identificar o semi-plano definido por uma inequação linear, pode ser estendido para determinar a região do plano definido por um sistema de inequações lineares. Acompanhe o exemplo.

Exemplo

Vamos determinar o conjunto A de pontos definidos pelo sistema de inequações

$$\begin{cases} x + y + 1 \geq 0 \\ -2x + y + 2 \leq 0 \end{cases} \quad (*)$$

Solução

Note que as retas r e s definidas, respectivamente, pelas equações

$$x + y + 1 = 0 \text{ e } -2x + y + 2 = 0$$

são retas inclinadas, com respeito ao sistema de coordenadas xOy . Veja na **Figura 14.4**, os gráficos destas retas.

Note, também, que o sistema de inequações pode ser expresso, de modo equivalente, por

$$\begin{cases} x + y + 1 \geq 0 \\ -2x + y + 2 \leq 0 \end{cases} \quad (*) \Rightarrow \begin{cases} y \geq -x - 1 \\ y \leq 2x - 2 \end{cases} \quad (**)$$

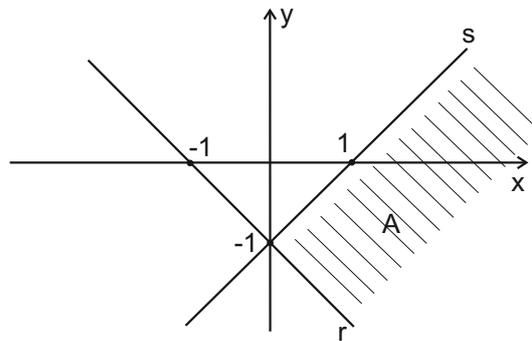


Figura 14.4: O conjunto $A = \{(x, y); x + y + 1 \geq 0 \text{ e } -2x + y + 2 \leq 0\}$.

Agora observe que os pontos $P = (x, y)$ do plano que verificam a primeira inequação do sistema $(**)$ estão acima da reta r , enquanto que os pontos $P = (x, y)$ que verificam a segunda inequação estão abaixo da reta s . Portanto, os pontos que satisfazem simultaneamente as inequações do sistema é fornecido pela interseção dos conjuntos. Identifique este conjunto solução com a região hachurada na **Figura 14.4**.

Inequações quadráticas

No nosso estudo as inequações quadráticas são eficientes para determinar conjuntos de pontos que formam o interior ou exterior de círculos e elipses e, também, identificar regiões do plano determinadas pelos traços de parábolas e hipérbolas. Acompanhe os próximos exemplos.

Exemplo

Vamos determinar a região do plano associada à inequação

$$x^2 + 2x + y^2 - 3 \geq 0.$$

Solução

Veja que

$$x^2 + 2x + y^2 - 3 = (x - 1)^2 + y^2 - 4.$$

Portanto, a inequação em estudo é equivalente a

$$(x - 1)^2 + y^2 \geq 2^2.$$

Uma vez que $(x - 1)^2 + y^2 = 2^2$ é a equação do círculo de centro $C = (1, 0)$ e raio $r = 2$. Então $(x - 1)^2 + y^2 \geq 2^2$ representa os pontos do círculo (por conta da igualdade) adicionados a todos seus pontos exteriores (por conta da desigualdade). Veja a **Figura 14.5**.

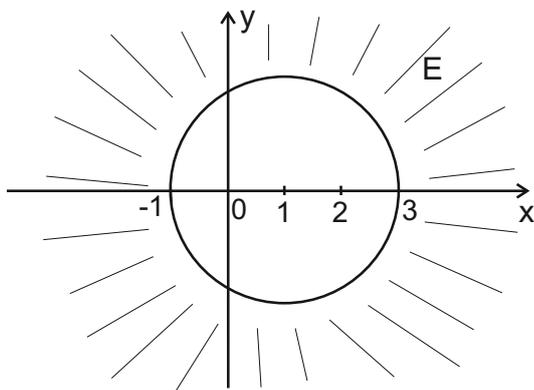


Figura 14.5: O conjunto $E = \{(x, y); x^2 + 2x + y^2 - 3 \geq 0\}$.

Exemplo

Vamos encontrar o conjunto determinado pela inequação

$$-9x^2 + 4y^2 + 36 \leq 0.$$

PRÉ-CÁLCULO

Solução

Note que

$$-9x^2 + 4y^2 + 36 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - 1 \geq 0.$$

Ou seja,

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \geq 1.$$

Os pontos $P = (x, y)$ do plano que verificam esta inequação estão representados pela região hachurada na **Figura 14.6**.

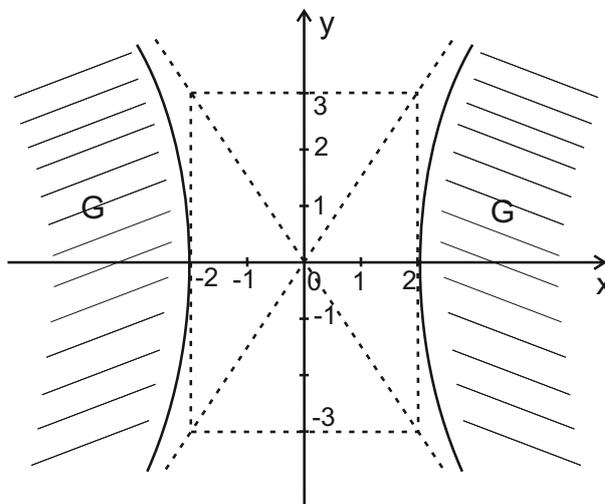


Figura 14.6: Região $G = \left\{ (x, y); \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \geq 1 \right\}$.

Exemplo

Vamos identificar o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$x^2 - 2x \geq y + 3.$$

Solução

Note que a inequação é equivalente a

$$x^2 - 2x - y - 3 \geq 0 \Leftrightarrow -y \geq -x^2 + 2x + 3 \Leftrightarrow y \leq x^2 - 2x - 3.$$

Uma vez que $y = x^2 - 2x - 3$ representa uma parábola, como esboçada na **Figura 14.7**, identificamos no conjunto hachurado o que procuramos.

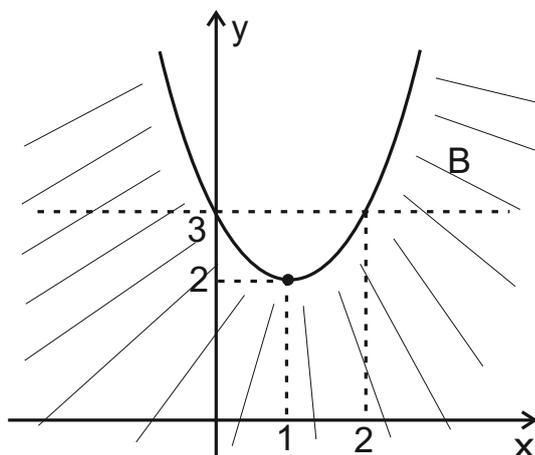


Figura 14.7: O conjunto $B = \{(x, y); y \leq x^2 - 2x + 3\}$.

Sistemas de equações lineares e quadráticas

Continuando a explorar as possibilidades de expressar geometricamente através de conjuntos do plano as soluções de inequações, vamos tratar a situação onde aparecem sistemas de inequações. Acompanhe o exemplo.

Exemplo

Dadas a reta r e a parábola P , onde

$$\begin{aligned} r &\longrightarrow 2x - y - 1 = 0; \\ P &\longrightarrow x^2 - 2x + y = 0. \end{aligned}$$

Determine

- Os pontos de interseção da reta com a parábola;
- O conjunto solução do sistema de inequações

$$\begin{cases} 2x - y \leq 1 \\ x^2 \leq 2x - y \end{cases} \quad (*)$$

Solução

Para resolver o item a) partimos da equação da reta r para encontrar que

$$y = 2x - 1.$$

Este resultado substituído na equação da parábola resulta que

$$x^2 - 2x + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ e } x_2 = -1.$$

Estes dois valores para a variável x , substituídos em $y = 2x - 1$, resultam que

$$y_1 = 1 \text{ e } y_2 = -3.$$

Portanto, os pontos $A = (1, 1)$ e $B = (-1, -3)$ são a interseção da reta com a parábola. Veja a **Figura 14.8**.

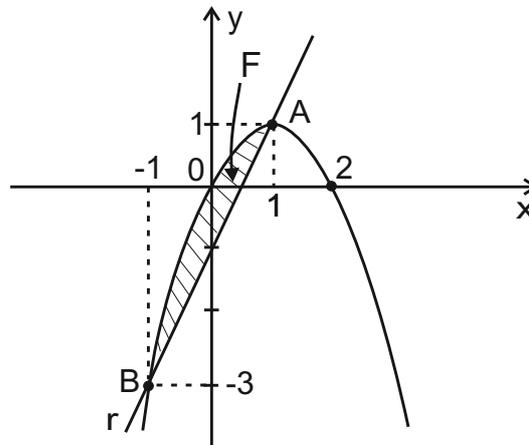


Figura 14.8: O conjunto $F = \{(x, y); 2x - y \leq e x^2 \leq 2x - y\}$.

Note que o sistema de inequações (*) é equivalente a

$$\begin{cases} y \geq 2x - 1 \\ y \leq -x^2 + 2x \end{cases} \quad (**)$$

Portanto o conjunto F é obtido pela interseção do semi-plano abaixo da parábola (interior da parábola) e acima da reta.

Aula 15 – Coletânea de exercícios programados

Objetivo

- revisar os conceitos até agora estudados, através de exercícios resolvidos.

A proposta desta aula, como expressa seu objetivo, é fazer uma revisão da matéria estudada até aqui, no intuito de fixar conceitos, exercitar a capacidade em resolver problemas e sobretudo como uma preparação geral para a primeira prova presencial da disciplina Pré-cálculo.

Os exemplos selecionados fazem parte do conjunto de Exercícios Programados (EPs) do segundo semestre de 2005, quando foi coordenador da disciplina o professor Edson Cataldo.

É muito importante que você tenha uma atitude pró-ativa e de autonomia, para um bom aproveitamento do material desta aula. Diante de cada exercício, leia o enunciado, compreenda as perguntas e tente resolver, antes de estudar a solução proposta.

Você sabe, na solução de um problema, temos freqüentemente vários caminhos. Se você resolve a questão antes, pode comparar qualitativamente sua solução com a que é apresentada no texto da aula. Se você encontra dificuldades em caminhar na resolução de uma questão, não desanime logo. Lute um pouco com o problema. Depois disto, então se você não consegue avançar, pode consultar a solução. Veja que nesta situação, sua dúvida está consolidada e, portanto, sua consulta à solução que aparece no texto terá qualidade muito superior, àquela efetuada após uma simples leitura do enunciado da questão!

Passemos às questões!

PRÉ-CÁLCULO

Exercício 1. Efetue o cálculo das expressões:

$$(a) \quad 3 \times \{5 - 2 \times [4 + 3 - 1^2] - (-3)^2\} + (2 + 5 - 1)^3$$

Solução

$$\begin{aligned} & 3 \times \{5 - 2 \times [4 + 3 - 1^2] - (-3)^2\} + (2 + 5 - 1)^3 \\ &= 3 \times \{5 - 2 \times [4 + 3 - 1] - 9\} + 6^3 = 3 \times \{5 - 2 \times 6 - 9\} + 6^3 \\ &= 3 \times \{5 - 12 - 9\} + 216 = 3 \times \{-16\} + 216 = -48 + 216 = 168 \end{aligned}$$

$$(b) \quad \frac{\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{4}{5} + 1} \div 2$$

Solução

$$\frac{\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{4}{5} + 1} \div 2 = \frac{5}{12} \times \frac{5}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{25}{108} \times \frac{1}{2} = \frac{25}{216}$$

Exercício 2. Determine os números inteiros que divididos por 7 deixam resto 2.

Solução

Para determinar esses números, basta somar 2 aos múltiplos de 7. Assim, são todos os números da forma $7k + 2$, para todo inteiro k .

Exercício 3. Efetue a decomposição em produto de potências de primos do número 5145.

Solução

$$\begin{array}{r|l} 5145 & 3 \\ 1715 & 5 \\ 343 & 7 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\text{Logo, } 5145 = 3 \times 5 \times 7^3.$$

Exercício 4. Determine a fração irredutível equivalente à fração $\frac{3150}{1400}$.

Solução

Decompondo o número 3150 em produtos de potências de primos, obtemos

$$\begin{array}{r|l} 3150 & 2 \\ 1575 & 3 \\ 525 & 5 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Decompondo o número 1400 em produtos de potências de primos, obtemos

$$\begin{array}{r|l} 1400 & 2 \\ 700 & 2 \\ 350 & 2 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\text{Assim, } \frac{3150}{1400} = \frac{2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7}{2^3 \times 5^2 \times 7} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$$

Exercício 5. Diga quais das afirmações são falsas ou verdadeiras, justificando a sua resposta.

(a) A fração $\frac{121}{169}$ é irredutível, pois os números 121 e 169 são primos entre si.

Solução

Verdadeira. Temos que $121 = 11^2$ e $169 = 13^2$. Observamos que os números 121 e 129 não possuem divisores (ou fatores) positivos em comum diferentes de 1. Logo, são primos entre si.

(b) A soma de um número par com um número ímpar é um número par.

Solução

Falso. Considere, por exemplo, a soma do número par 2 com o número ímpar 3. Obtemos 5, que é um número ímpar.

PRÉ-CÁLCULO

Exercício 6. Em um grupo de turistas, a sexta parte é de italianos, a metade de franceses e os 10 restantes são americanos. Quantos turistas há no grupo?

Solução

$$\text{Temos que } \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Portanto, $\frac{2}{3}$ do grupo é formado por turistas italianos e franceses.

Logo, $1 - \frac{2}{3} = \frac{3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ do grupo é constituído de turistas americanos.

Como são 10 turistas americanos, concluímos que há 30 turistas no grupo. Pois $\frac{1}{3} \times 30 = \frac{30}{3} = 10$.

Exercício 7. Diga quais das desigualdades abaixo são verdadeiras e quais são falsas, justificando sua resposta.

$$\text{a) } \frac{4}{20} \geq \frac{1}{5}$$

Solução

$$\text{Verdadeira. Pois, } \frac{1}{5} = \frac{1 \times 4}{5 \times 4} = \frac{4}{20}.$$

$$\text{b) } \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} > \frac{5}{3}$$

Solução

$$\text{Falsa. Temos que } \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}.$$

Assim, queremos comparar $\frac{3}{2}$ com $\frac{5}{3}$. O mínimo múltiplo comum entre 2 e 3 é 6.

$$\text{Logo, } \frac{3}{2} = \frac{3 \times 3}{2 \times 3} = \frac{9}{6} \text{ e } \frac{5}{3} = \frac{5 \times 2}{3 \times 2} = \frac{10}{6}.$$

Como $\frac{9}{6} < \frac{10}{6}$, temos que $\frac{3}{2} < \frac{5}{3}$.

$$\text{c) } \left(\frac{1}{-3}\right)^3 > (-2)^2$$

Solução

Falsa. Temos que $\left(\frac{1}{-3}\right)^3 = -\frac{1}{27}$ e $(-2)^2 = 4$. Como $-\frac{1}{27} < 4$, segue que

$$\left(\frac{1}{-3}\right)^3 < (-2)^2.$$

Exercício 8. Determine o número de elementos do conjunto

$$S = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid -\frac{28}{3} \leq x \leq \frac{4928}{40}\right\}.$$

Solução

Temos que $-\frac{28}{3} = -\frac{27+1}{3} = -9 - \frac{1}{3}$.

Assim, $\left\{x \in \mathbb{Z} \mid -9 - \frac{1}{3} \leq x\right\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid -9 \leq x\}$.

Temos que $\frac{4928}{40} = 123,2$.

Assim, $\left\{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq \frac{4928}{40}\right\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 123\}$.

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid -\frac{28}{3} \leq x \leq \frac{4928}{40}\right\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid -9 \leq x \leq 123\}$.

O conjunto S possui $123 - (-9) + 1 = 133$ elementos.

Exercício 9. O denominador de uma certa fração é 1 unidade a mais do que o valor do numerador. Se o numerador aumentar de $\frac{5}{2}$, o valor da nova fração será igual ao inverso da fração inicial. Qual a fração inicial?

Solução

Seja N o numerador da fração inicial. Assim, a fração inicial é $\frac{N}{N+1}$.

Aumentando o numerador de $\frac{5}{2}$, temos $\frac{N + \frac{5}{2}}{N+1}$. O inverso da fração inicial é igual a $\frac{N+1}{N}$.

PRÉ-CÁLCULO

Temos,

$$\frac{N + \frac{5}{2}}{N + 1} = \frac{N + 1}{N}.$$

Logo,

$$N \left(N + \frac{5}{2} \right) = (N + 1)^2 \Leftrightarrow N^2 + \frac{5}{2}N = N^2 + 2N + 1.$$

E,

$$\frac{5}{2}N = 2N + 1 \Leftrightarrow \frac{5}{2}N - 2N = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}N = 1 \Leftrightarrow N = 2.$$

Portanto, a fração inicial é $\frac{2}{3}$.

Exercício 10. Determine a expansão decimal da fração $\frac{41}{12}$.

Solução

A fração $\frac{41}{12} = \frac{41}{2^2 \times 3}$ tem expansão decimal infinita.

$$\begin{array}{r} 41 \\ 050 \\ 020 \\ 080 \\ 080 \\ \vdots \end{array} \Bigg| \begin{array}{r} 12 \\ \hline 3,4166\dots \end{array}$$

Pelos cálculo acima, $\frac{41}{12} = 3,41\bar{6}$.

Exercício 11. Determine a fração irredutível correspondente à expansão decimal $1,2\bar{15}$.

Solução

$$\begin{aligned}
 1,2\overline{15} &= 1,2 + \frac{15}{10^3} + \frac{15}{10^5} + \frac{15}{10^7} + \dots \\
 &= 1,2 + \frac{\frac{15}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^2}} = 1,2 + \frac{15}{10^3} \times \frac{10^2}{99} \\
 &= \frac{12}{10} + \frac{15}{99 \times 10} = \frac{1188 + 15}{99 \times 10} \\
 &= \frac{1203}{99 \times 10} = \frac{1203}{2 \times 3^2 \times 5 \times 11} = \frac{401}{2 \times 3 \times 5 \times 11}.
 \end{aligned}$$

Como 2, 3, 5 e 11 não dividem 401, a fração é irredutível.

Exercício 12. Dê exemplo de um número racional r tal que $5,\overline{1} < r < 5,\overline{12}$.

Solução

Escolhemos $r = 5,12$. Temos,

$$5,\overline{1} = 5,111\dots < 5,12 < 5,1222\dots = 5,\overline{12}.$$

Exercício 13. Diga quais das afirmações são verdadeiras ou falsas, justificando a sua resposta:

(a) $4 + \sqrt{7}$ é um número irracional.

Solução

Verdadeira.

$4 \in \mathbb{Q}$ e $\sqrt{7} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. A soma de um número racional r com um irracional s é sempre um número irracional ℓ . Vamos provar isso.

Suponhamos, por absurdo, que $r + s = \ell \in \mathbb{Q}$. Então, $s = \ell - r \in \mathbb{Q}$, pois é a soma de dois números racionais, contradizendo a hipótese de que $s \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

(b) O número 3,45 é racional.

Solução

Verdadeira.

3,45 é uma expansão decimal finita. Logo, é um número racional.

(c) O número $2,333\dots$ é irracional.

Solução

Falsa.

O número $2,333\dots$ é uma expansão decimal infinita periódica. Logo, é um número racional.

Observe que

$$\begin{aligned} 2,333\dots &= 2 + 0,333\dots = 2 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots = 2 + \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= 2 + \frac{3}{10} \frac{10}{9} = 2 + \frac{3}{9} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

(d) $\sqrt{3} - 1 < \frac{7}{10} + \sqrt{2}$.

Solução

Verdadeira.

$$\sqrt{3} < \sqrt{4} = 2 \Rightarrow \sqrt{3} - 1 < 2 - 1 \Rightarrow \sqrt{3} - 1 < 1.$$

$$\text{Mas, } 1^2 < 2 \Rightarrow 1 < \sqrt{2} \Rightarrow 1 < \frac{7}{10} + \sqrt{2}.$$

$$\text{Assim, } \sqrt{3} - 1 < 1 < \frac{7}{10} + \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{3} - 1 < \frac{7}{10} + \sqrt{2}.$$

Exercício 14. Coloque em ordem crescente os números reais:

$$\sqrt{8}, \pi, 1 + \sqrt{2}, \frac{4}{5}, 1 - \sqrt{2}.$$

Solução

$$1 - \sqrt{2} < \frac{4}{5} < 1 + \sqrt{2} < \sqrt{8} < \pi$$

O número $1 - \sqrt{2}$ é um número negativo, pois $1^2 = 1 < 2 \Rightarrow 1 < \sqrt{2}$.

Todos os outros números são positivos.

Também,

$$\frac{4}{5} < 1 < 1 + \sqrt{2},$$

$$1 + \sqrt{2} < \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2}$$

e

$$2\sqrt{2} = 2 \times 1,41\dots < 3 < \pi.$$

Exercício 15. Resolva, em \mathbb{R} , a desigualdade a seguir. Represente o conjunto-solução usando intervalos.

$$\frac{4x - 7}{4x - 3} \geq \frac{3 - 2x}{7 - 2x}.$$

Solução

$$\frac{4x - 7}{4x - 3} \geq \frac{3 - 2x}{7 - 2x} \iff \frac{4x - 7}{4x - 3} - \frac{3 - 2x}{7 - 2x} \geq 0$$

Vamos escrever o lado esquerdo da desigualdade equivalente como um quociente.

$$\begin{aligned} \frac{4x - 7}{4x - 3} - \frac{3 - 2x}{7 - 2x} &= \frac{(4x - 7)(7 - 2x) - (3 - 2x)(4x - 3)}{(4x - 3)(7 - 2x)} \\ &= \frac{28x - 8x^2 - 49 + 14x - (12x - 9 - 8x^2 + 6x)}{(4x - 3)(7 - 2x)} \\ &= \frac{42x - 8x^2 - 49 - 18x + 8x^2 + 9}{(4x - 3)(7 - 2x)} = \frac{24x - 40}{(4x - 3)(7 - 2x)} \geq 0 \end{aligned}$$

Para resolver a desigualdade equivalente, vamos estudar o sinal de cada uma das expressões na reta real.

Os pontos da reta real que anulam cada uma das expressões desempenham um papel importante. Não podemos esquecê-los.

Note que $x_0 = \frac{40}{24} = \frac{5}{3}$ é raiz do numerador e $x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = \frac{7}{2}$ são raízes do denominador. Também, temos que

$$\frac{3}{4} < \frac{5}{3} < \frac{7}{2}.$$

Tabela de estudo do sinal:

	$x < \frac{3}{4}$	$x = \frac{3}{4}$	$\frac{3}{4} < x < \frac{5}{3}$	$x = \frac{5}{3}$	$\frac{5}{3} < x < \frac{7}{2}$	$x = \frac{7}{2}$	$x > \frac{7}{2}$
$24x - 40$	-	-	-	0	+	+	+
$4x - 3$	-	0	+	+	+	+	+
$7 - 2x$	+	+	+	+	+	0	-
$\frac{24x - 40}{(4x - 3)(7 - 2x)}$	+	*	-	0	+	*	-

O símbolo $*$ significa que a expressão não é um número real.

Consultando a tabela, obtemos o conjunto solução

$$S = \left(-\infty, \frac{3}{4}\right) \cup \left[\frac{5}{3}, \frac{7}{2}\right).$$

PRÉ-CÁLCULO

Exercício 16. Determine os números reais x tais que a distância de x a 4 é igual a 1.

Solução

$$d(x, 4) = |x - 4| = 1 \iff x - 4 = 1 \text{ ou } x - 4 = -1$$

$$\text{Assim, } x - 4 = 1 \iff x = 5 \text{ e } x - 4 = -1 \iff x = 3.$$

Logo, os números reais x tais que a distância de x a 4 é igual a 1 são 3 e 5.

Exercício 17. Determine os números reais x tais que a distância de x a 4 é no máximo 1.

Solução

$$\begin{aligned} d(x, 4) = |x - 4| \leq 1 &\iff -1 \leq x - 4 \leq 1 \\ &\iff -1 + 4 \leq x \leq 1 + 4 \\ &\iff 3 \leq x \leq 5 \\ &\iff x \in [3, 5]. \end{aligned}$$

Exercício 18. Resolva, no conjunto dos reais, a desigualdade $|2x-3|+|3x-2| \leq 12$. Dê o conjunto-solução na forma de intervalos.

Solução

Primeiramente, observe que:

$$|2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3, & \text{se } x \geq \frac{3}{2} \\ -2x + 3, & \text{se } x < \frac{3}{2} \end{cases} \quad |3x - 2| = \begin{cases} 3x - 2, & \text{se } x \geq \frac{2}{3} \\ -3x + 2, & \text{se } x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

Além disso, $\frac{2}{3} < \frac{3}{2}$ e vamos olhar a reta real de maneira conveniente, para resolver a desigualdade proposta, a saber:

$$\mathbb{R} = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right) \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right).$$

Temos três casos a considerar.

$$\text{Caso 1: } x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$$

$$\begin{aligned}
|2x - 3| + |3x - 2| \leq 12 &\iff (-2x + 3) + (-3x + 2) \leq 12 \\
&\iff -5x + 5 \leq 12 \\
&\iff -5x \leq 7 \\
&\iff x \geq -\frac{7}{5} \\
&\iff x \in \left[-\frac{7}{5}, +\infty\right)
\end{aligned}$$

Nesse caso, o conjunto solução é

$$S_1 = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cap \left[-\frac{7}{5}, +\infty\right) = \left[-\frac{7}{5}, \frac{2}{3}\right).$$

Caso 2: $x \in \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$

$$\begin{aligned}
|2x - 3| + |3x - 2| \leq 12 &\iff (-2x + 3) + (3x - 2) \leq 12 \\
&\iff x + 1 \leq 12 \\
&\iff x \leq 11 \\
&\iff x \in (-\infty, 11]
\end{aligned}$$

Nesse caso, o conjunto solução é

$$S_2 = \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right) \cap (-\infty, 11] = \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$$

Caso 3: $x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$

$$\begin{aligned}
|2x - 3| + |3x - 2| \leq 12 &\iff (2x - 3) + (3x - 2) \leq 12 \\
&\iff 5x - 5 \leq 12 \\
&\iff 5x \leq 17 \\
&\iff x \leq \frac{17}{5} \\
&\iff x \in \left(-\infty, \frac{17}{5}\right]
\end{aligned}$$

Nesse caso, o conjunto solução é

$$S_3 = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right) \cap \left(-\infty, \frac{17}{5}\right] = \left[\frac{3}{2}, \frac{17}{5}\right].$$

O conjunto solução S é

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left[-\frac{7}{5}, \frac{2}{3}\right) \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right) \cup \left[\frac{3}{2}, \frac{17}{5}\right] = \left[-\frac{7}{5}, \frac{17}{5}\right].$$

Exercício 19. Suponha que o sistema de coordenadas xOy do plano tem o eixo Ox horizontal orientado para a direita e o eixo Oy vertical orientado para cima. Dê as coordenadas do ponto Q , do plano, obtido a partir de $P = (0, 1)$ andando 1 (uma) unidade horizontalmente para a direita e 2 (duas) unidades verticalmente para cima.

Solução

Se $Q = (a, b)$, onde $a = 0 + 1$ e $b = 1 + 2$, então $Q = (1, 3)$.

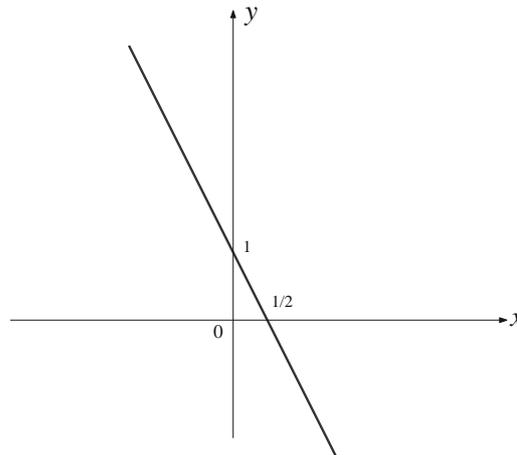
Exercício 20. Determine a equação da reta de que passa pelos pontos $P = (0, 1)$ e $Q = (-1, 3)$. Esboce o seu gráfico.

Solução

A equação da reta que passa por $P = (0, 1)$ e $Q = (-1, 3)$ é dada por:

$$y - 1 = \frac{3 - 1}{-1 - 0}(x - 0) \iff y - 1 = -2x \iff y = -2x + 1.$$

O esboço do gráfico da reta é dado na figura a seguir:



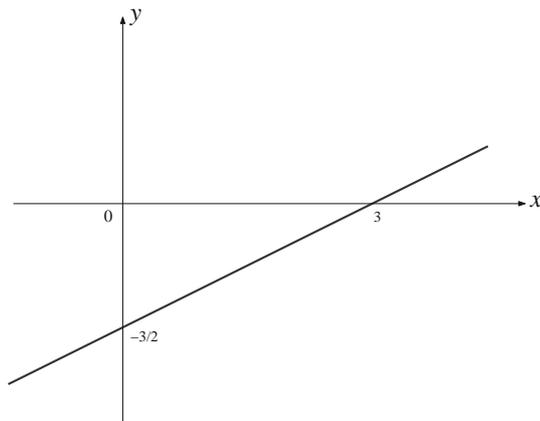
Exercício 21. Determine a equação da reta r que passa pelo ponto $P = (1, -1)$ e é perpendicular à reta s de equação $2x + y = 5$. Esboce seu gráfico.

Solução

A reta s , de equação $2x + y = 5 \iff y = -2x + 5$, tem coeficiente angular (inclinação) -2 . Logo, a reta r , perpendicular à reta s , tem coeficiente angular (inclinação) $-\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$.

Portanto, a equação da reta s é dada por $y - (-1) = \frac{1}{2}(x - 1) \iff y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

O esboço do gráfico dessa reta é dado na figura a seguir:



Exercício 22. Considere o triângulo $\triangle ABC$, onde $A = (2, 2)$, $B = (4, 1)$ e $C = (6, 3)$. Determine a altura h do triângulo $\triangle ABC$ medida a partir do vértice B .

Solução

Consideremos a reta r que passa por A e C . A equação de r é

$$y - 2 = \left(\frac{3-2}{6-2}\right)(x-2) = \frac{1}{4}(x-2) \iff y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}.$$

Portanto, a sua inclinação é $m = \frac{1}{4}$.

A altura h do triângulo $\triangle ABC$ medida a partir do vértice B é $h = d(B, H)$, onde H é o ponto de interseção da reta r com a reta s , que passa por B e é perpendicular à reta r .

A inclinação de s é $n = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{\frac{1}{4}} = -4$.

Logo, a equação de s é $y - 1 = -4(x - 4) \iff y = -4x + 17$.

Para determinar o ponto H , devemos resolver o sistema de duas equações a duas incógnitas:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \\ y = -4x + 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \\ -4x + 17 = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \\ 17 - \frac{3}{2} = \frac{1}{4}x + 4x \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \\ \frac{31}{2} = \frac{17}{4}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \\ x = 4 \times \frac{31}{2} \times \frac{1}{17} = \frac{62}{17} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4} \times \frac{62}{17} + \frac{3}{2} = \frac{31}{34} + \frac{3}{2} = \frac{31 + 51}{34} = \frac{82}{34} = \frac{41}{17} \\ x = \frac{62}{17} \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, $H = \left(\frac{62}{17}, \frac{41}{17}\right)$ e

$$\begin{aligned} h = d(B, H) &= d\left((4, 1), \left(\frac{62}{17}, \frac{41}{17}\right)\right) \\ &= \sqrt{\left(\frac{62}{17} - 4\right)^2 + \left(\frac{41}{17} - 1\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{62 - 68}{17}\right)^2 + \left(\frac{41 - 17}{17}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{-6}{17}\right)^2 + \left(\frac{24}{17}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{36}{17^2} + \frac{576}{17^2}} \\ &= \sqrt{\frac{612}{17^2}} = \frac{\sqrt{2^2 \times 3^2 \times 17}}{\sqrt{17^2}} = \frac{6\sqrt{17}}{17} \end{aligned}$$

Exercício 23. Determine o centro e o raio do círculo de equação $x^2 + y^2 + x + 4y + 3 = 0$.

Solução

Completando os quadrados na equação, temos:

$$x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + y^2 + 4y + 4 - 4 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 2)^2 = \frac{5}{4}.$$

Logo, o círculo tem centro em $\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$ e raio $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Exercício 24. Identifique as cônicas, cujas equações são dadas a seguir, e esboce seus gráficos:

(a) $x^2 + y^2 - 4x = 0$.

Solução

Completando os quadrados, temos:

$$x^2 + y^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4.$$

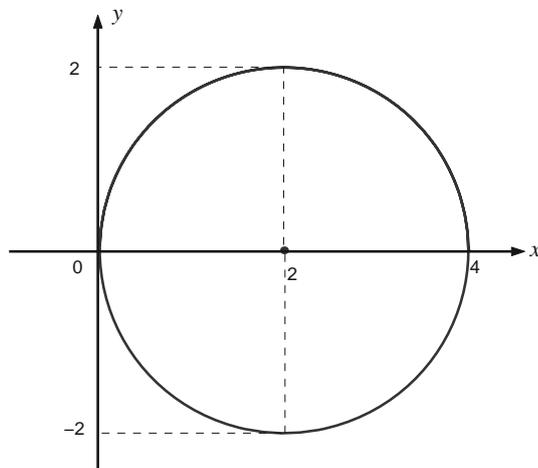
A cônica é uma circunferência de centro em $C = (2, 0)$ e raio igual a 2.

$$\text{Se } y = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 4 \Rightarrow x - 2 = \pm 2 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 4.$$

$$\text{Se } x = 0 \Rightarrow 4 + y^2 = 4 \Rightarrow y = 0.$$

Assim, os pontos de interseção com o eixo x são $(0, 0)$ e $(4, 0)$. Com o eixo y o único ponto de interseção é $(0, 0)$.

O gráfico da circunferência é mostrado na figura a seguir.



Nota: Um círculo é uma cônica degenerada, uma vez que esta curva pode ser considerada como uma elipse cujos eixos maior e menor coincidem em medida.

$$(b) \ y = 2x - x^2.$$

Solução

Completando os quadrados na equação, temos:

$$y = -x^2 + 2x \Leftrightarrow y = -(x^2 - 2x + 1 - 1)$$

$$\Leftrightarrow y = -(x - 1)^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow y - 1 = -(x - 1)^2.$$

A cônica é uma parábola, com eixo paralelo ao eixo y , vértice em $V = (1, 1)$ e concavidade voltada para baixo.

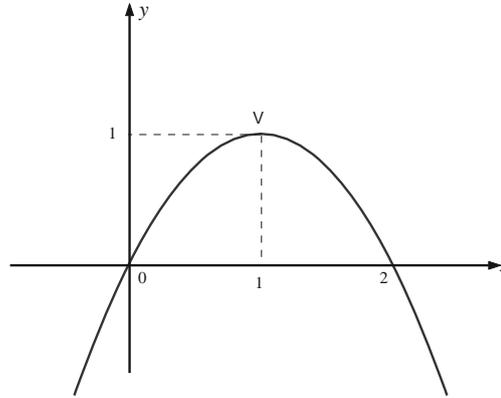
$$\text{Se } y = 0 \Rightarrow -(x - 1)^2 = -1 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2.$$

$$\text{Se } x = 0 \Rightarrow y = 2(0) - (0)^2 = 0.$$

PRÉ-CÁLCULO

Os pontos de interseção com o eixo x são $(0, 0)$ e $(2, 0)$. O único ponto de interseção com o eixo y é $(0, 0)$.

O gráfico da parábola é mostrado na figura a seguir.



(c) $x = y^2 - 2y + 1$.

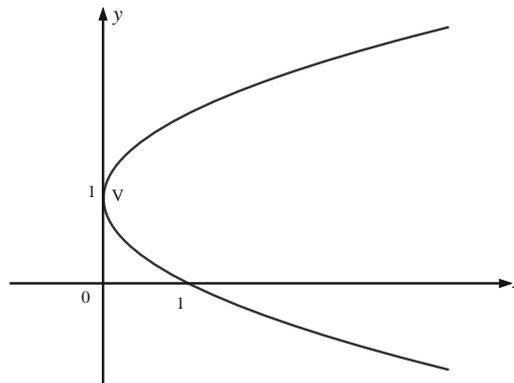
Solução

Temos, $x = y^2 - 2y + 1 = (y - 1)^2$. A cônica é uma parábola, com eixo paralelo ao eixo x , concavidade voltada para a direita e vértice em $V = (0, 1)$.

Se $y = 0 \Rightarrow x = 1$. O único ponto de interseção com o eixo x é $(1, 0)$.

Se $x = 0 \Rightarrow y = 1$. O único ponto de interseção com o eixo y é $(0, 1)$.

O gráfico da parábola é mostrado na figura a seguir.



Exercício 25. Identifique e esboce o gráfico da cônica $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$.

Solução

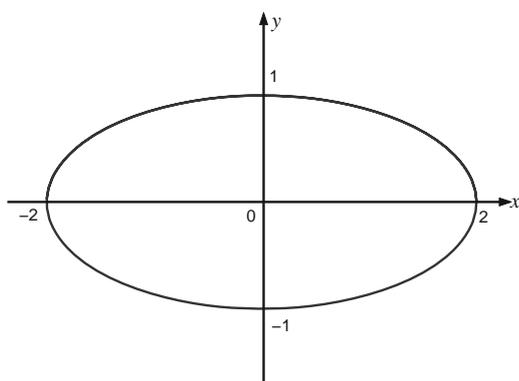
A cônica é uma elipse, com eixo maior paralelo ao eixo x e centro em $(0,0)$.

O eixo maior vale 4, pois $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow 2a = 4$ e o eixo menor vale 2, pois $a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow 2a = 2$.

Se $y = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$. Os pontos de interseção com o eixo x são $(-2, 0)$ e $(2, 0)$.

Se $x = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$. Os pontos de interseção com o eixo y são $(0, -1)$ e $(0, 1)$.

O gráfico da elipse é mostrado na figura a seguir.





UENF
Universidade Estadual
do Norte Fluminense



Ministério
da Educação

