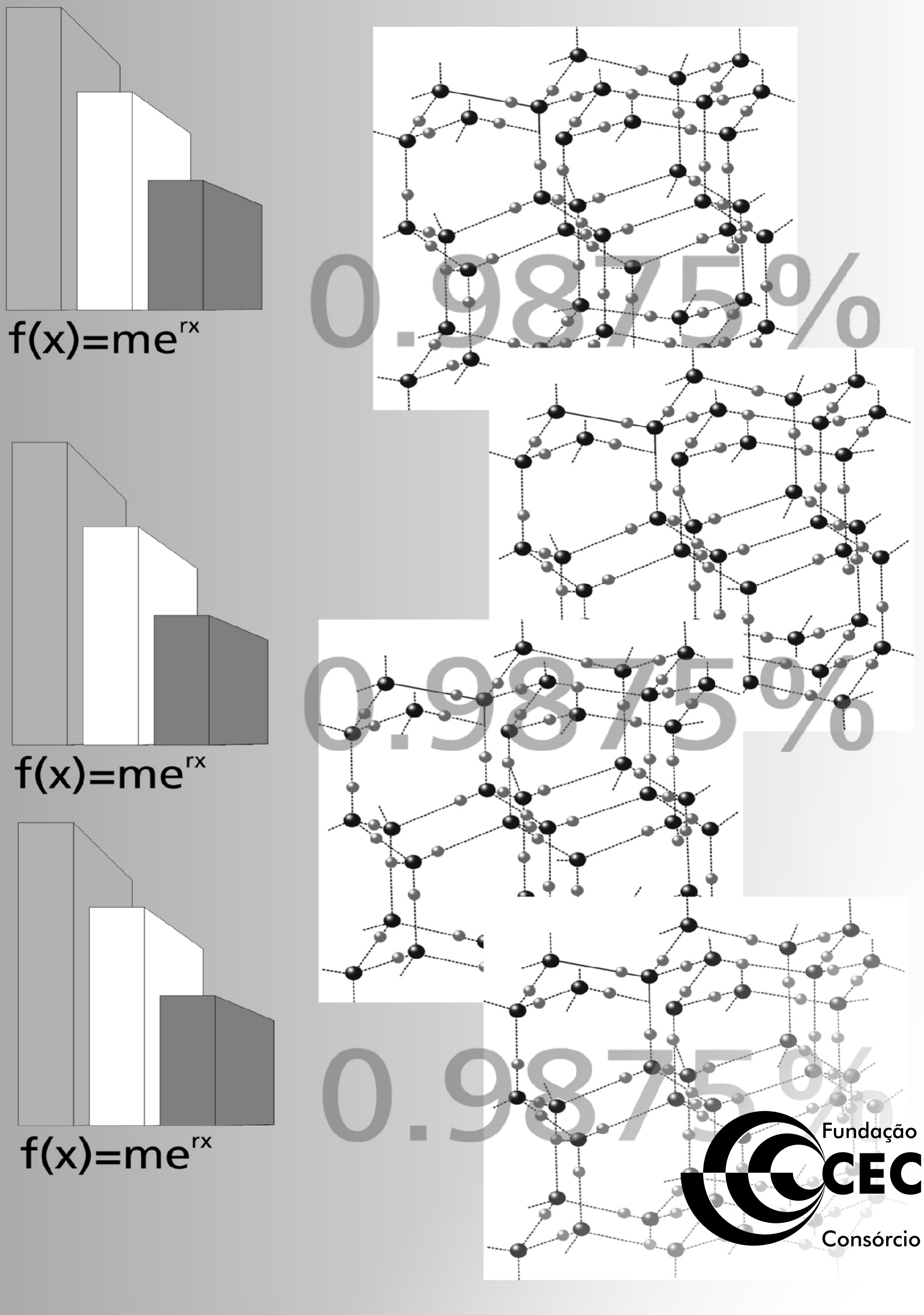
Módulos 1 e 2

Volume 1

3ª edição

Luiz Manoel Figueiredo
Mario Olivero
Mariza Ortegoza

Elementos de Matemática e Estatística



Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Fundação
CECIERJ
Consórcio cederj
Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Elementos de Matemática e Estatística

Volume 1 - Módulos 1 e 2
3ª edição

Módulo 1
Luiz Manoel Figueiredo

Módulo 2
Luiz Manoel Figueiredo
Mario Olivero
Mariza Ortegoza

GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Ministério da Educação
BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Apoio:
FAPERJ Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro
FUNDAÇÃO SANTA CABRINI Provedora de acesso à Cidadania

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 - Mangueira - Rio de Janeiro, RJ - CEP 20943-001
Tel.: (21) 2299-4565 Fax: (21) 2568-0725

Material Didático

ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO
Luiz Manoel Figueiredo
Mario Olivero
Mariza Ortegoza

COORDENAÇÃO DE DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL
Cristine Costa Barreto

DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL E REVISÃO
Anna Maria Osborne
Márcia Elisa Rendeiro

COORDENAÇÃO DE LINGUAGEM
Ana Tereza de Andrade

Departamento de Produção

EDITORA
Tereza Queiroz

COORDENAÇÃO EDITORIAL
Verônica Lessa

REVISÃO TIPOGRÁFICA
Jane Castellani
Sandra Valéria F. de Oliveira

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO
Jorge Moura

PROGRAMAÇÃO VISUAL
Equipe CEDERJ

COORDENAÇÃO DE ILUSTRAÇÃO
Eduardo Bordoni

ILUSTRAÇÃO
Jefferson Caçador
Morvan de Araujo Neto

CAPA
Eduardo Bordoni

PRODUÇÃO GRÁFICA
Andréa Dias Fiães
Fábio Rapello Alencar

F972e

Figueiredo, Luiz Manoel.
Elementos de matemática e estatística. v. 1. / Luiz Manoel Figueiredo. 3 ed. – Rio de Janeiro : Fundação CECIERJ, 2008.
147p.; 21 x 29,7 cm.

ISBN: 85-7648-043-3

1. Matemática estatística. 2. Funções. 3. Probabilidade. 4. Teorema de Bayes. I. Olivero, Mário. II. Ortegoza. Mariza. III. Título.

CDD: 519.5

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.

2008/1

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador
Sérgio Cabral Filho

Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia
Alexandre Cardoso

Universidades Consorciadas

UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Nival Nunes de Almeida

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Reitor: Roberto de Souza Salles

UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Aloísio Teixeira

UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Motta Miranda

UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitora: Malvina Tania Tuttman

Elementos de Matemática e Estatística | Volume 1

SUMÁRIO

Aula 1 – Funções

Objetivos

Apresentar o conceito de modelo matemático.
Apresentar funções, funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras, composição de funções e funções inversas.

Modelos matemáticos

Para aplicarmos a Matemática ao estudo de problemas das diversas áreas da ciência, devemos começar formulando estes problemas em linguagem matemática. Este processo é conhecido como modelagem matemática do problema.

Um modelo matemático normalmente se inicia especificando as grandezas envolvidas no problema, tais como tempo, distância, área, população, concentração de reagente etc. A partir daí, o modelo determina como estas grandezas se relacionam, o que normalmente é descrito pela linguagem das funções.

O modelo matemático de um problema pode dar uma descrição bem precisa do problema, ou em alguns casos, apenas uma aproximação razoável.

A forma como nós chegamos a um modelo matemático envolve uma variedade de técnicas, tais como considerações teóricas e exame de resultados de experiências.

Em quase todos os casos, estamos interessados em determinar como uma certa grandeza depende de outras. Por exemplo, um biólogo pode querer saber como a população de bactérias de uma certa cultura depende do tempo, ou como a população de uma espécie A, em certo habitat, depende do tempo e da população de uma espécie B, que lhe serve de alimento. Um químico pode estar interessado em saber como a concentração final de uma substância, após uma reação química, depende da concentração inicial dos reagentes.

O conceito matemático mais importante para descrever como uma grandeza varia com outra é o conceito de função, que estudaremos a seguir.

Funções

O conceito de função tem um papel central na matemática. De maneira geral, uma função é uma associação entre objetos de dois conjuntos.

Por exemplo, podemos associar um conjunto de carros com um conjunto de cores, associando cada carro a uma cor.

No entanto, nem toda associação entre dois conjuntos é uma função. Exigimos que uma função atenda a dois quesitos básicos, presentes no exemplo acima.

Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma função f de A em B é uma associação de elementos de A em B que satisfaz ao seguinte:

Cada elemento de A está associado a exatamente um elemento de B.

Em outras palavras, por um lado, cada elemento de A está associado a alguém (no exemplo das cores dos carros, seria dizer todo carro tem alguma cor). Por outro lado, cada elemento de A está associado a somente um elemento de B (todo carro tem somente uma cor). Observe, porém, que elementos de B podem estar associados a vários elementos de A (podem haver vários carros com a mesma cor). Note, também, que podem haver elementos de B não associados a nenhum elemento de A. (Há uma cor para a qual não há nenhum carro com aquela cor).

Se f é função de A em B, escrevemos

$$\boxed{f : A \to B}$$

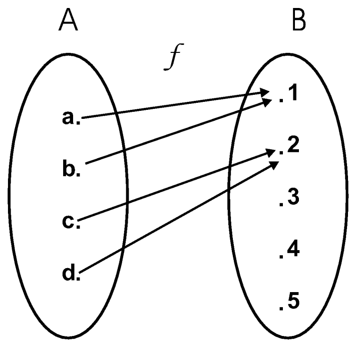
e chamamos o conjunto A de domínio de f e o conjunto B de contradomínio de f.

Se x é elemento de A, então denotamos por $f(x)$ o elemento de B associado a x pela função f. Chamamos imagem de f, denotado por $Im(f)$, o subconjunto de B formado pelos elementos y tais que $y = f(x)$ para algum $x \in A$,

$$Im(f) = \{y \in B \mid y = f(x) \text{ para algum } x \in A\}.$$

Exemplo 1

Observe a função representada pelo esquema a seguir.



Observe a distinção entre imagem e contradomínio.

As setas indicam o seguinte:

$$f(a) = f(b) = 1 \text{ e } f(c) = f(d) = 2.$$

Temos $Im(f) = \{1, 2\}$.

Podemos representar esta função por um esquema com conjuntos e setas, como na figura anterior, ou através de pares ordenados:

$$\{(a, 1), (b, 1), (c, 2), (d, 2)\},$$

onde um par ordenado $\{(x, y)\}$ indica que $y = f(x)$.

Uma outra possibilidade é definir uma função por uma regra ou fórmula, como no exemplo a seguir:

Os conjuntos numéricos mais utilizados são:

$\mathbb{N}$ = o conjunto dos números naturais.
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

$\mathbb{Z}$ = o conjunto dos números inteiros.
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

$\mathbb{Q}$ = o conjunto dos números racionais.
$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0\right\}$

$\mathbb{R}$ = o conjunto dos números reais.

$\mathbb{C}$ = o conjunto dos números complexos.

Exemplo 2

Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, a função dado por $f(x) = x^2$. Então, por exemplo, $f(1) = 1$, $f(2) = 4$ etc.

Na próxima aula estudaremos uma representação de funções dada por gráficos no plano. Antes, porém, devemos estudar a noção de par ordenado e eixos cartesianos.

Funções injetoras e sobrejetoras

Vimos que, se $f : A \to B$ é uma função, então todo $x \in A$ está associado a um único $f(x) \in B$. No entanto, pode acontecer de vários elementos de A estarem associados ao mesmo elemento B, como no esquema abaixo:

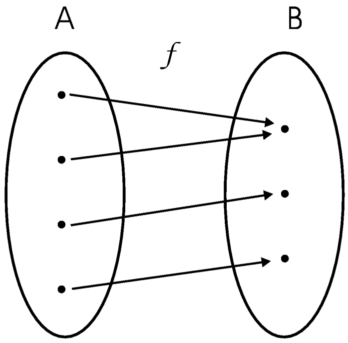


Figura 1

Uma função é chamada <u>injetora</u> quando isto <u>não</u> acontece, isto é, $f : A \to B$ é injetora se

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

o que é o mesmo que dizer que $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

A função abaixo é injetora

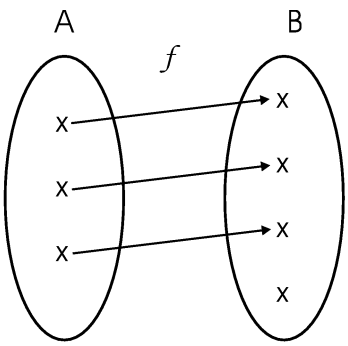


Figura 2

Note, agora, que na função representada pela Figura 1, todo elemento de B está na imagem da função, enquanto que na função da Figura 2 existe um elemento de B fora da imagem de f (isto é, não está associado a nenhum elemento de A).

Para diferenciar estes dois casos dizemos que uma função $f : A \to B$ é <u>sobrejetora</u> quando todo elemento de B está na imagem de f, isto é, f é sobrejetora quando para todo $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Ou, dito de outro modo,

$$f \text{ é sobrejetora quando } Im(f) = B.$$

Exemplo 3

Considere a função f do conjunto A de animais em um zoológico no conjunto B dos nomes de todas as espécies conhecidas de animais. A função f está bem definida, pois todo animal pertence a uma única espécie. f não será injetora se houver pelo menos 2 animais da mesma espécie; f não é sobrejetora se houver alguma espécie animal no mundo que não tem exemplares naquele zoológico (o que é muito provável!).

Uma função é chamada <u>bijetora</u> quando é simultaneamente injetora e sobrejetora.

Exemplo 4

A função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ dada por $f(x) = 2x$ é bijetora.

1. f é injetora, já que

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

2. f é sobrejetora, já que se $y \in \mathbb{Q}$, então $x = \frac{y}{2}$ é levado em y, isto é,

$$f\left(\frac{y}{2}\right) = 2.\left(\frac{y}{2}\right) = y.$$

Exemplo 5

A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dado por $f(x) = x^2$ não é bijetora. Na verdade esta função não é nem injetora nem sobrejetora.

1. f não é injetora. Por exemplo, $f(-1) = f(+1) = 1$.
2. f não é sobrejetora. Por exemplo, -1 não está na imagem de f.

Dos exemplos anteriores, o exemplo 3 lida com uma função definida em um conjunto de animais, os exemplos 4 e 5, com funções "numéricas", isto é, funções definidas em conjuntos numéricos. Geralmente, estas funções são dadas por fórmula matemática.

Nesta aula nos concentraremos nas funções definidas em $\mathbb{R}$, o conjunto dos números reais, com contradomínio $\mathbb{R}$. Estudaremos algumas destas funções: funções lineares, quadráticas, exponenciais e logarítmicas.

Um instrumento fundamental para o estudo destas funções é <u>seu gráfico</u>, como veremos na aula 2.

As funções numéricas são ferramentas muito importantes na modelagem matemática de fenômenos de todas as áreas do conhecimento.

Uma experiência com animais de laboratórios, por exemplo, pode ter resultados que são bem aproximados por uma fórmula numérica.

Exemplo 6

Se uma população de bactérias em uma cultura dobra a cada hora, e não há nenhum outro fator que limite o crescimento desta população, então o número de bactérias após x horas é:

$$P = P_0.2^x,$$

onde P_0 é a população inicial.

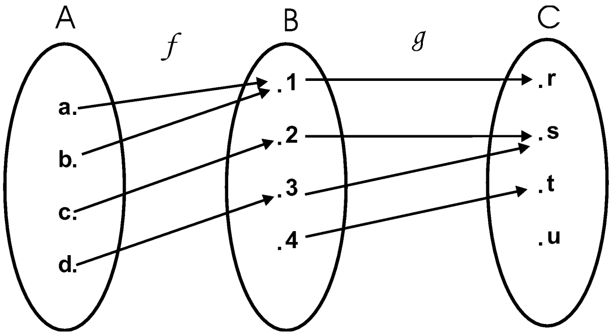
A fórmula obtida é uma função real de variável real, que aproxima bem uma situação de laboratório, em que P_0 e P são números inteiros.

Composição de funções

Dadas duas funções $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ podemos compor uma função com a outra.

Para que possamos compor duas funções, é necessário que a imagem da função f esteja contida no domínio da função g.

O esquema abaixo representa a composição de duas funções f e g.



$gof(a) = r$

Representamos por gof a composição das funções f e g. No esquema acima:

$$\text{como } f(a) = 1 \text{ e } g(1) = r \text{ então } gof(a) = r.$$

Note que,

$$gof(x) = g(f(x)).$$

No exemplo acima, a composição fog não faz sentido, pois a imagem de g não está contida no domínio de f.

Observe que as funções $gof(x)$ e $fog(x)$ podem ser funções totalmente diferentes, mesmo quando ambas fazem sentido.

Exemplo 7

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = 2x$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $g(x) = x^2$ então:

$$gof(x) = g(f(x)) = g(2x) = (2x)^2 = 4x^2$$

e

$$fog(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2.$$

A inversa de uma função

Podemos representar a altura de uma pessoa como função de sua idade. Se uma pessoa tem N meses de vida, altura $A(cm)$ e nasceu com A_0 centímetros, então esta função seria

$$f : [0, N] \;\to\; [A_0, A].$$

Inversamente, podemos também ver a idade desta pessoa como função de sua altura, o que seria uma função

$$g : [A_0, A] \;\to\; [0, N].$$

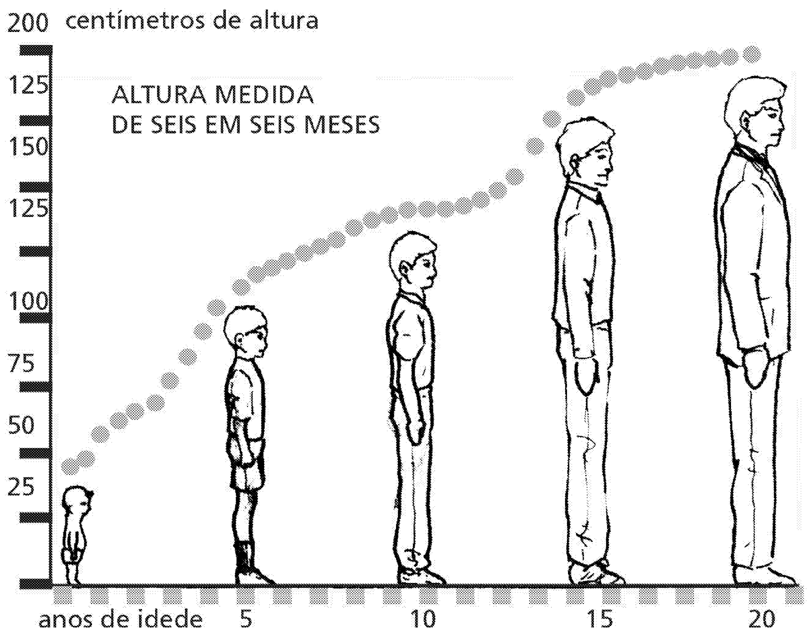
Esta segunda abordagem é comum quando se quer estimar a idade de uma árvore medindo sua altura.

Uma função $f : A \to B$ é chamada <u>inversível</u>, quando existe uma função $g : B \to A$, tal que

$$(gof)(x) = x \text{ e } (fog)(y) = y,$$

para todo $x \in A$ e $y \in B$.

A função g, quando existe, é chamada inversa de f, e é denotada por f^{-1}.



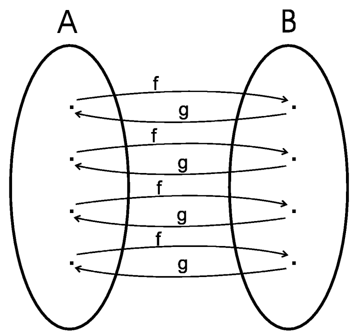
Exemplo 8

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = x^3$, então $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \sqrt[3]{x}$ é a inversa de f.

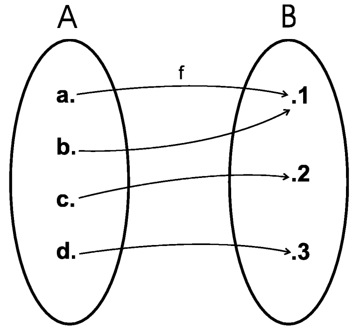
Nem toda função é invertível.

Não é difícil ver que uma função $f : A \to B$ é invertível exatamente quando for bijetora. Veja os esquemas abaixo:

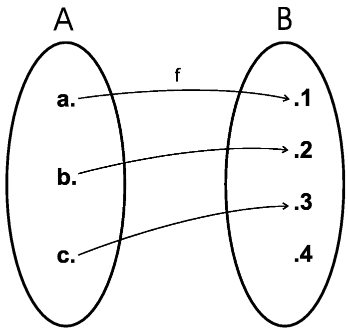
f é invertível



f não é injetora. Portanto, f não é invertível.



f não é sobrejetora. Portanto, f não é invertível.



Funções de várias variáveis

Na maioria das situações, uma grandeza é função de várias outras. Por exemplo, a população de uma espécie A pode ser função da população das espécies B e C, que lhe servem de alimento, e da espécie D que é seu predador natural. A altura de uma planta é função de seu tempo de vida, mas também de diversos fatores ambientais.

Uma função $f : A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to B$ dada por $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, representa a grandeza y como função de variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, onde $x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2,\ \ldots,\ x_n \in A_n$ e $y \in B$.

Resumo

Nesta aula vimos conceitos básicos de funções e sua importância fundamental na modelagem matemática das situações estudadas pelas ciências sociais e da natureza.

Vimos domínio, contradomínio e imagem de funções, funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras. Vimos também a composição de funções e quando duas funções são inversa uma da outra.

Exercícios

1. Liste os conceitos principais estudados nesta aula.

2. Quais das funções abaixo são injetoras e quais são sobrejetoras?

   (a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(x) = \dfrac{x}{2}$.

   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x$.

   (c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$.

3. Modele a situação do exemplo 6, como $f : A \to B$, indicando os conjuntos A e B.

   Esta situação é invertível?

Aulas 2 e 3 – Gráficos de funções. Funções afins

Objetivos

Estudar a representação de uma função $y = f(x)$, onde x é uma variável real, dada pelo seu gráfico.
Estudar as funções afins, que são as funções cujo gráfico é uma reta.

Funções reais de variável real

Quando o domínio de uma função f é o conjunto $\mathbb{R}$ (ou um subconjunto de $\mathbb{R}$), dizemos que esta função é de variável real. Quando o contradomínio de f é o conjunto $\mathbb{R}$, dizemos que f tem valores no conjunto $\mathbb{R}$ ou que f é uma função real. Assim, uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função real de variável real e uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ é dita uma função de variável complexa.

Nas Aulas 2 a 6 desta disciplina, estudaremos alguns tipos particulares de funções reais de variável real, a saber, as funções afins, quadráticas, exponencial e logarítmica. Antes, porém, veremos o que é o gráfico de uma função f e como ele revela diversos aspectos importantes de f.

Plano cartesiano

Nesta seção, estudaremos o plano cartesiano, e como representar nele o gráfico de uma função.

Se A e B são dois conjuntos não vazios, e se $a \in A$ e $b \in B$, o símbolo (a, b) denota um par ordenado, onde entendemos que

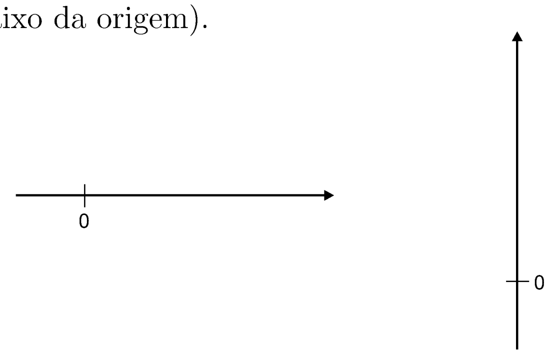
$$(a, b) = (c, d) \text{ quando } a = c \text{ e } b = d.$$

Observe que, em geral, $(a, b) \neq (b, a)$. De fato, $(a, b) = (b, a)$ apenas quando $a = b$.

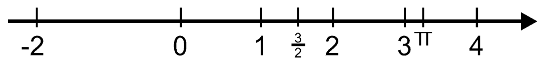
A noção de par ordenado é fundamental em Geometria Analítica, onde pontos em um plano são descritos por pares ordenados de números reais.

Para começar, há uma correspondência entre números reais e pontos na reta. Esta correspondência é estabelecida da seguinte forma: escolhemos um ponto na reta para representar o zero. Este ponto será chamado origem. Escolhemos agora uma orientação para a reta.

Se a reta é horizontal, tradicionalmente ela é orientada para a direita. Isto significa que os números positivos serão representados à direita da origem, enquanto que os negativos estarão à esquerda da origem. Se a reta é vertical, normalmente é orientada para cima (números positivos acima e negativos abaixo da origem).



Após a escolha da orientação dos eixos, escolhemos uma escala: qual a distância da origem que representará uma unidade. Cada número real x será representado pelo ponto situado x unidades do lado positivo (se $x > 0$) ou do lado negativo (se $x < 0$).

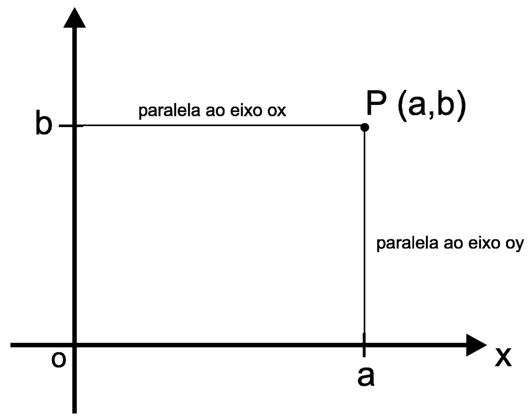


Desta maneira, estabelecemos uma relação biunívoca entre números reais e os pontos de uma reta.

De maneira análoga, podemos associar pares ordenados de números reais a pontos no plano, formando um sistema de coordenadas com 2 retas orientadas.

Normalmente escolhemos retas ortogonais (isto é, que formam um ângulo de 90^0), sendo uma reta horizontal e outra vertical, com as orientações usuais.

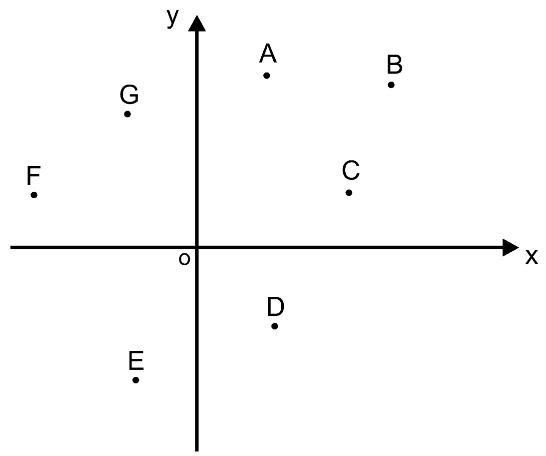
Então, um par ordenado (a, b) é representado pelo ponto P, como na figura a seguir.



A reta horizontal é chamada eixo das abscissas, ou eixo OX. A reta vertical é chamada eixo das ordenadas, ou eixo OY.

Se o par (a, b) é representado pelo ponto P, usamos a notação $P(a, b)$. Chamamos o par (a, b) de coordenadas do ponto P, o número a é a primeira coordenada, ou abscissa, do ponto P, enquanto que o número b é a segunda coordenada ou ordenada, do ponto P.

Na figura abaixo representamos vários pontos no plano.



Observe que as escalas dos eixos não precisam ser as mesmas.

Gráfico de uma função f

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. O conjunto

$$\text{Graf}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

é chamado gráfico de f.

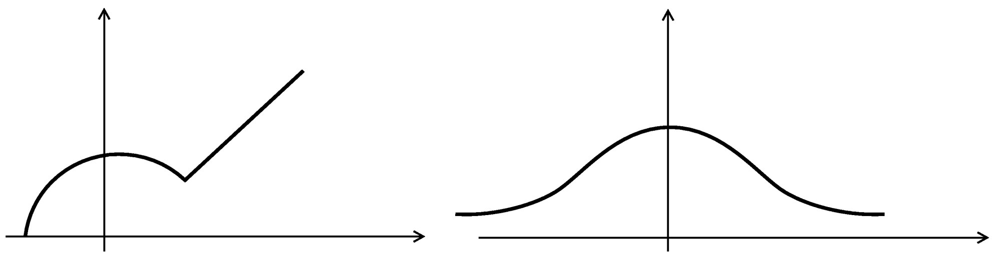
Note que este conjunto Graf(f) é o subconjunto do plano $\mathbb{R}^2$ formado pelos pontos cujas coordenadas são pares $(x, f(x))$.

As funções que estudaremos possuem gráficos que são curvas contínuas. Por exemplo, veremos ainda nesta aula que o gráfico de uma função afim é uma reta. Como veremos na próxima aula, o gráfico de uma função quadrática é uma curva conhecida como parábola.

Um gráfico é uma representação muito interessante de uma função pois fornece uma representação visual da função.

Exemplo 9

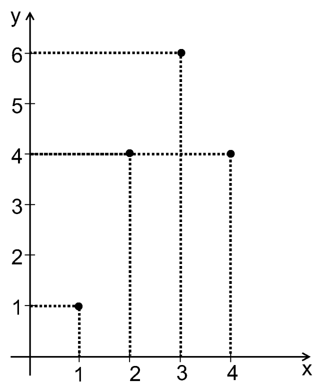
Gráfico de algumas funções.



Alguns gráficos de funções

Se uma função tem como domínio um conjunto finito, por exemplo, $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 4, 6, 4\}$ dada por $f(1) = 1$; $f(2) = 4$; $f(3) = 6$ e $f(4) = 4$. Então o gráfico de f não é uma curva, mas sim um conjunto de pontos.

No caso da função acima, seu gráfico é:



Mesmo quando o gráfico de uma função é apenas um conjunto finito de pontos, algumas vezes é interessante ligar estes pontos por uma linha contínua a fim de melhor visualizar o comportamento da função.

Outro exemplo:

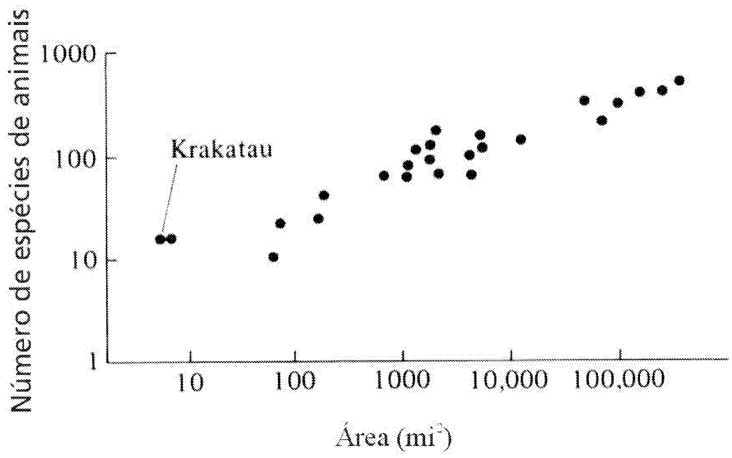
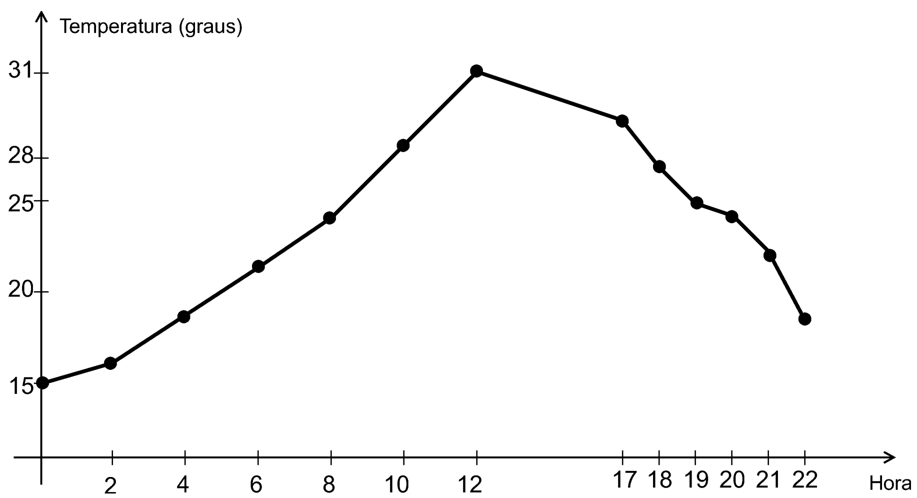


Figura 1: Número de espécies de aves por área de ilhas no sudeste da Ásia. Fonte: Eric Pianka, ¨Evolucionary Ecology¨, 2nd Ed.

Exemplo 10

Foi medida a temperatura média, a cada hora, em um certo ponto da cidade, ao longo de uma semana. O gráfico a seguir representa o resultado obtido.



Podemos perceber, no gráfico acima, que embora o conjunto de pontos do gráfico seja finito, a linha ligando os pontos ajuda a visualizar o comportamento da função.

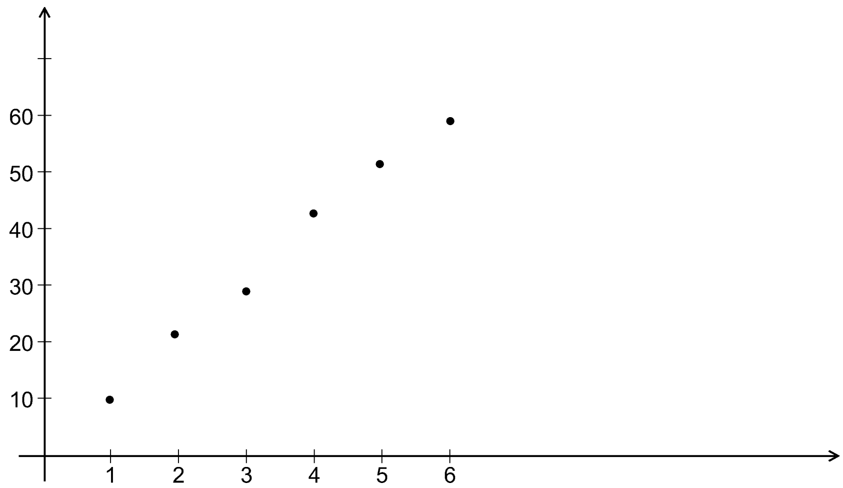
Outro aspecto importante é que muitas vezes um gráfico nos ajuda a visualizar uma possível aproximação de um conjunto de pontos por uma função real.

Exemplo 11

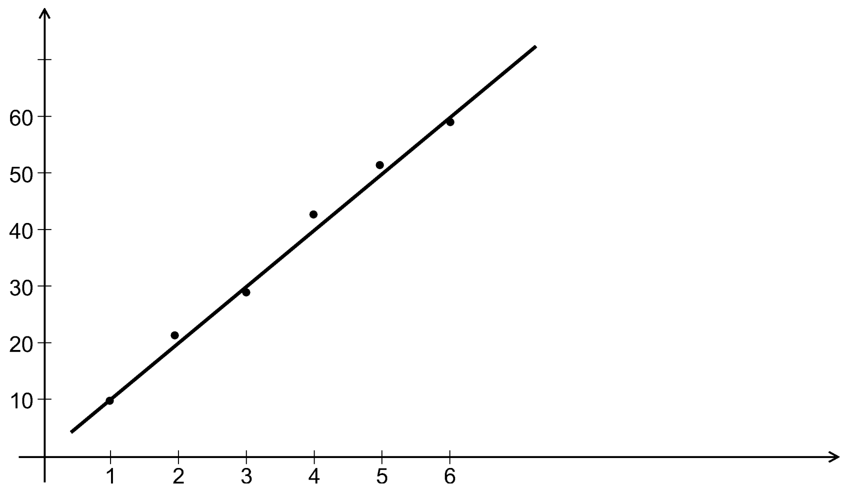
As vendas anuais de uma loja durante seus sete primeiros anos é dada na tabela a seguir:

Ano	Venda (milhões de reais)
1	10
2	22
3	29
4	43
5	51
6	59

Visualizando estes dados em um gráfico, obtemos o seguinte:



Este gráfico mostra claramente que a venda total anual desta loja pode ser bem representada por uma linha reta (mais precisamente, uma função afim do número de anos), como no gráfico:



Muitas vezes, em experimentos científicos, marcamos os pontos correspondentes aos resultados do experimento para então "visualizar" uma função que se ajuste aos dados do experimento.

Exemplo 12

O gráfico a seguir mostra os resultados de uma experiência em que são medidas a temperatura de algumas espécies de lagarto em diversas temperaturas ambiente.

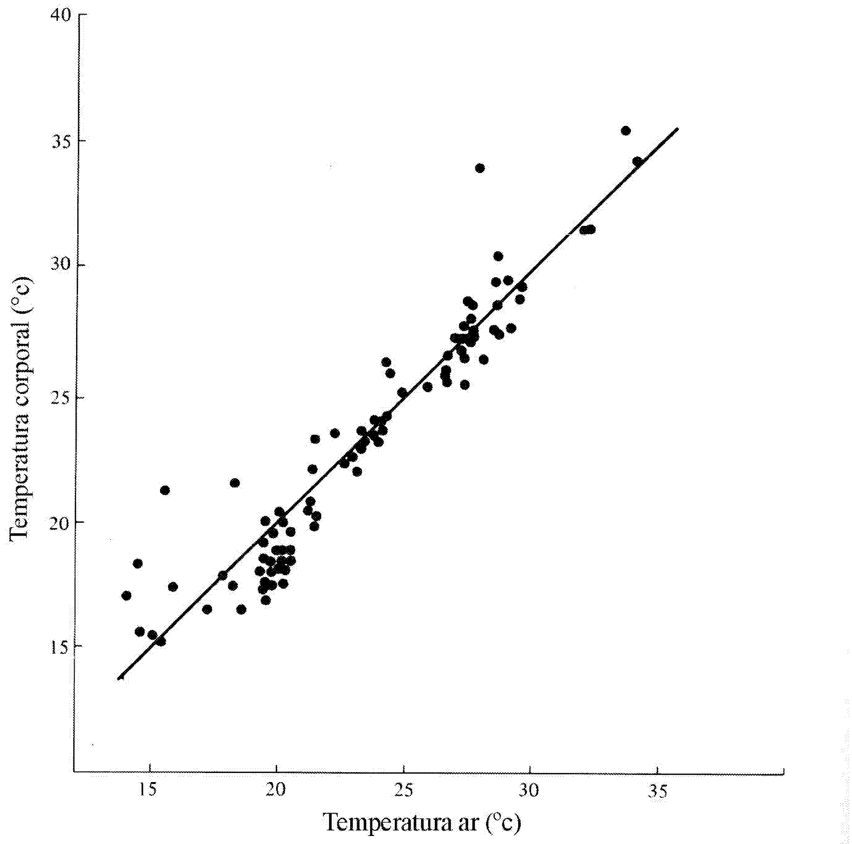


Gráfico da temperatura corporal de 86 lagartos australianos em relação a temperatura do ar. (Fonte: Eric Pianka, ¨Evolucionary Ecology¨, 2nd Ed.).

Funções crescentes e decrescentes

Uma função é crescente (não-decrescente) em um intervalo $I = (a, b)$ quando, se $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$ (respectivamente, $f(x_1) \leq f(x_2)$).

Analogamente, uma função é chamada decrescente (não-crescente) em um intervalo $I = (a, b)$, quando, se $x_1 < x_2$, então $f(x_1) > f(x_2)$ (respectivamente, $f(x_1) \geq f(x_2)$).

É interessante definir este conceito em um intervalo porque, em geral, uma função é crescente em alguns intervalos de seu domínio e decrescente em outros.

Estas definições formalizam a noção intuitiva de que uma função crescente é a que "cresce" ou aumenta quando x "aumenta" e uma função decrescente "diminui" quando x "aumenta".

O crescimento de uma função é um dos aspectos importantes que sempre são abordados quando estudamos uma função e seu gráfico.

Exemplo 13

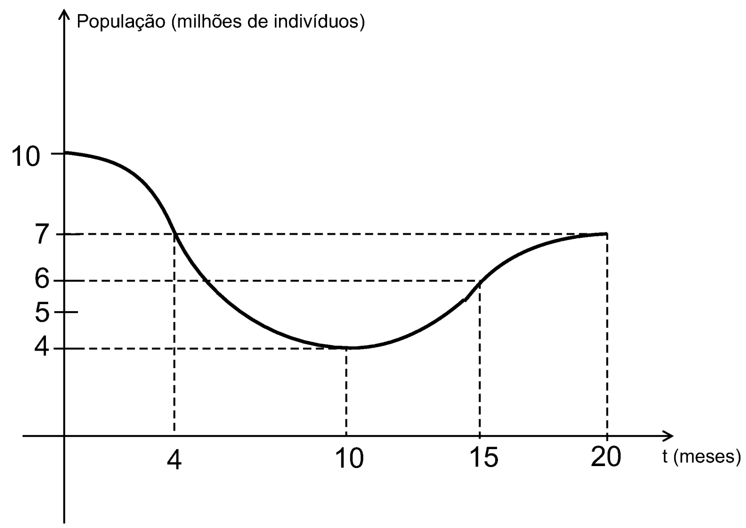


Figura 2: Número de habitantes de uma certa espécie

O gráfico acima representa o número de habitantes de uma certa espécie em uma certa área, medida ao longo dos meses.

No intervalo $(0, 10)$, a população diminui com o tempo, isto é, a função população é decrescente. No intervalo $(10, 20)$ a função população é crescente. Neste gráfico, a população continua crescente, mas parece estar estabilizando em torno de 7 milhões de habitantes.

Uma análise mais detalhada do crescimento de uma função leva naturalmente a outros conceitos, por exemplo, como medir quão rápido a função cresce ou decresce. Por exemplo, no gráfico da Figura 2, acima, a partir de $t = 0$, a população parece diminuir cada vez mais rápido, até $t = 4$, começa a reduzir esta taxa de decréscimo, até $t = 10$, quando atinge seu mínimo e começa a crescer. Este conceito de crescer ou decrescer mais rápido é chamado de taxa de variação.

Para definir de maneira precisa o conceito de taxa de variação, precisamos da noção de derivada. Um estudo mais profundo de derivadas foge dos objetivos desta disciplina. Na Aula 5, veremos um pouco mais sobre derivadas, sua relação com taxa de variação, crescimento de funções e tangentes a um gráfico.

Outro conceito fundamental relacionado ao problema do crescimento é o de máximos e mínimos. A função da Figura 2 possui um mínimo em $t = 10$, isto é, a população da espécie estudada atingiu seu mínimo em $t = 10$ meses.

Funções afins

As funções afins representam, em certo sentido, as funções mais simples de serem escritas e estudadas.

Uma função afim é uma função da forma

$$f(x) = mx + n,$$

onde m e n são números reais.

O número m é chamado coeficiente angular de $f(x)$ e o número n é chamado coeficiente linear. Estes dois coeficientes têm interpretação geométrica que descreveremos logo a seguir.

Quando a função é da forma $f(x) = mx$ então dizemos que a função é linear. Assim, uma função linear é uma função afim de coeficiente linear nulo.

O gráfico de funções lineares são retas que passam pela origem. Quando duas grandezas X e Y são relacionadas por $Y = mX + n$, é comum se dizer que Y varia linearmente com X.

Os gráficos de funções afins são linhas retas. Reciprocamente, toda reta não-vertical é gráfico de uma função afim. Retas verticais não são gráficos de função, pois para um valor de x no domínio corresponde vários valores no contradomínio (ver definição de função na Aula 1).

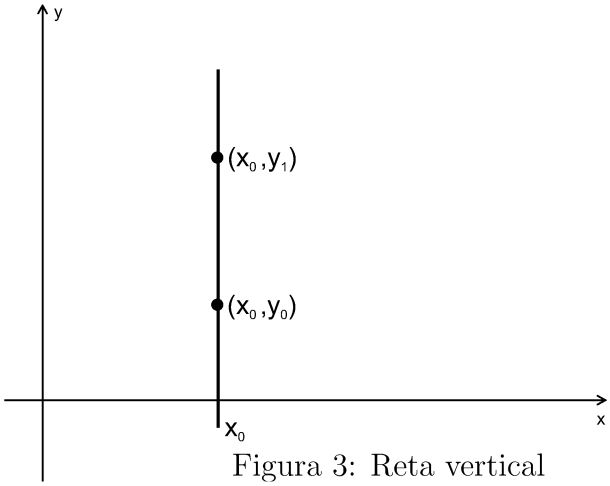


Figura 3: Reta vertical

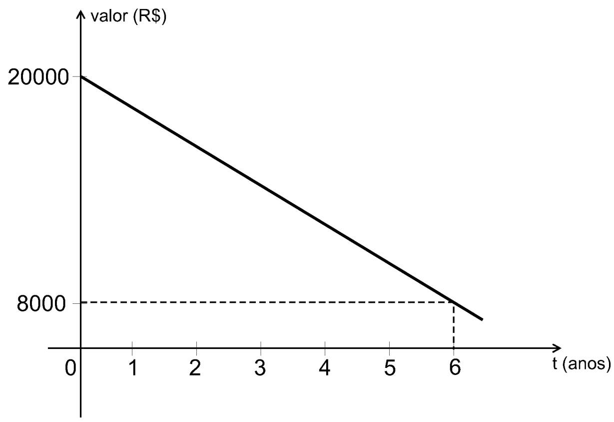
A reta vertical da Figura 3 não é gráfico de função, mas pode ser descrita pela equação $x = x_0$

Chamaremos uma reta não-vertical de inclinada.

Como toda reta inclinada é gráfico de uma função afim, estas são usadas para estudar situações representadas por retas, isto é, situações em que uma grandeza varia linearmente com outra.

Exemplo 14

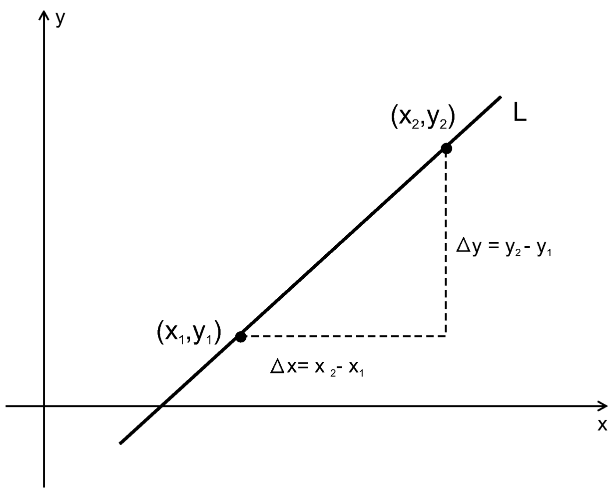
O gráfico a seguir mostra o valor de mercado de um carro ao longo de 6 anos.



Como mostra o gráfico, o valor do carro é função afim (decrescente!) do tempo.

Inclinação de uma reta

Seja L a única reta que passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2). Se $x_1 = x_2$, então L é uma reta vertical e a inclinação não é definida; se $x_1 \neq x_2$, então definimos a inclinação m da reta L por



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

O número $\Delta y = y_2 - y_1$ (o símbolo Δy é lido "delta y") mede a variação de y, e $\Delta x = x_2 - x_1$ mede a variação de x.

A inclinação m da reta L é uma medida da taxa de variação de y com respeito a x.

Uma característica da reta é que esta taxa de variação é constante, isto é, a inclinação de uma reta é a mesma independente do par de pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) que se use para calcular $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Assim, retas representam grandezas que possuem uma taxa de variação constante.

Exemplo 15

A posição de um carro (em km) medida ao longo do tempo (em horas) é dada pela reta (figura a seguir).

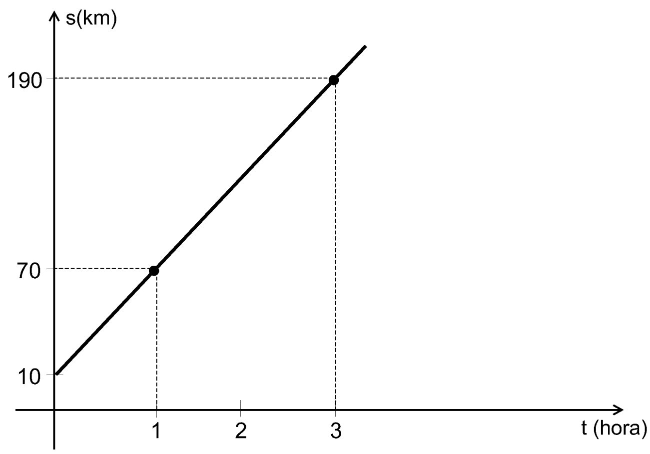


Figura 4: Posição de um carro ao longo do tempo

Calcule a inclinação desta reta.

Tomando os pontos $(1, 70)$ e $(3, 190)$, temos:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{190 - 70}{3 - 1} = \frac{120}{2} = 60\ km/h.$$

A inclinação da reta é 60, isto é, a velocidade, que é a taxa de variação do espaço em relação ao tempo, é de 60 km/h.

A Figura 4 representa um carro viajando a uma velocidade constante de 60 km/h.

Equação da reta

Vimos que a equação de uma reta é dada por:

$$y = mx + n.$$

Se esta reta passa por 2 pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), então vale que:

$$y_1 = mx_1 + n$$

e

$$y_2 = mx_2 + n.$$

Subtraindo estas equações, resulta em:

$$\begin{aligned} & y_2 - y_1 = (mx_2 + n) - (mx_1 + n) \\ & \Rightarrow y_2 - y_1 = mx_2 - mx_1 = m(x_2 - x_1) \\ & \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \end{aligned}$$

Ou seja, o coeficiente angular m é a inclinação da reta L.

Se L é uma reta que passa por um ponto (x_1, y_1) e tem inclinação m (ver Figura 5),

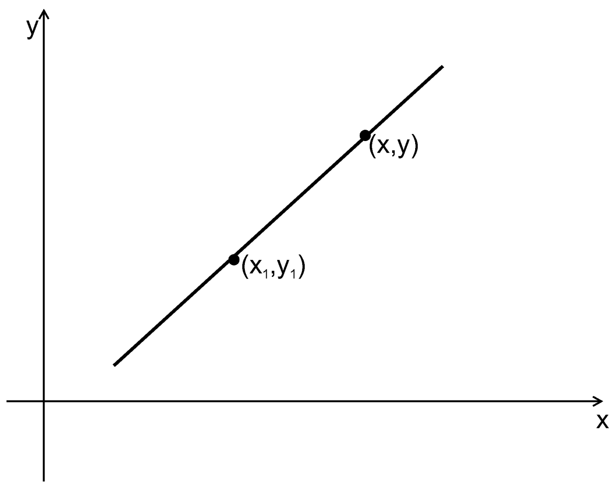


Figura 5: Reta passando por 2 pontos

então seja (x, y) um ponto qualquer da reta (diferente de (x_1, y_1)). Podemos calcular a inclinação m, como antes, fazendo $(x_2, y_2) = (x, y)$. Assim,

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

Multiplicando a equação acima por $(x-x_1)$, obtemos $y-y_1 = m(x-x_1)$. Portanto, a equação de uma reta de inclinação m, que passa pelo ponto (x_1, y_1) é dada por:

$$y - y_1 = m(x - x_1). \quad (*)$$

Exemplo 16

Calcule a equação da reta que tem inclinação 3 e passa pelo ponto $(2, 4)$.

Usando a equação $(*)$, com $m = 3$ e $(x_1, y_1) = (2, 4)$, temos

$$y - 4 = 3(x - 2) \Rightarrow y = 3x - 2 \text{ .(Veja Figura 6)}$$

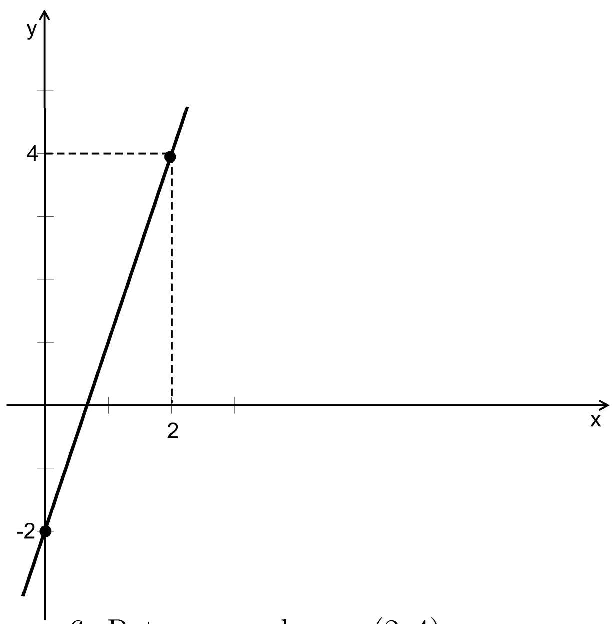


Figura 6: Reta passando por $(2, 4)$

Exemplo 17

Encontre a equação da reta que passa pelos pontos $(1, -2)$ e $(-1, 2)$.

Inicialmente, calculamos o coeficiente angular m. Fazendo $(x_1, y_1) = (1, -2)$ e $(x_2, y_2) = (-1, 2)$, obtemos

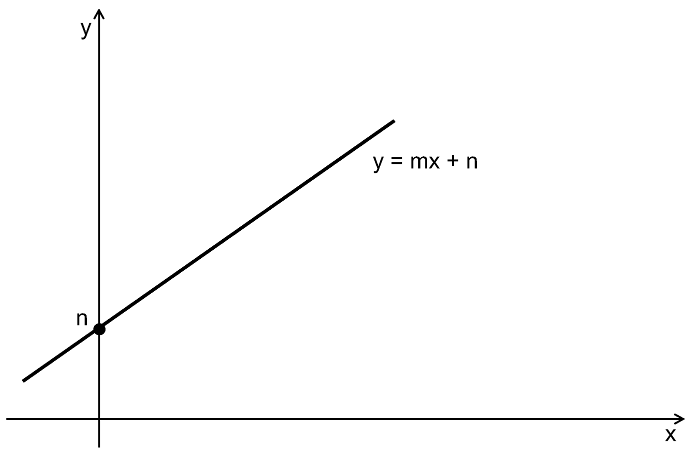
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - (-2)}{-1 - (+1)} = \frac{4}{-2} = -2.$$

Agora calculamos a equação da reta, substituindo $m = -2$ e $(x_1, y_1) = (1, -2)$ na equação (*).

$$y - (-2) = -2(x - 1)$$
$$y + 2 = -2x + 2$$
$$\boxed{y = -2x}$$

Coeficiente linear

Se uma reta L tem equação $y = mx + n$, então, se $x = 0$, temos $y = m.0 + n = n$, o que mostra que o coeficiente linear n é o valor de y onde a reta L corta o eixo Y, isto é, a reta passa por $(0, n)$.



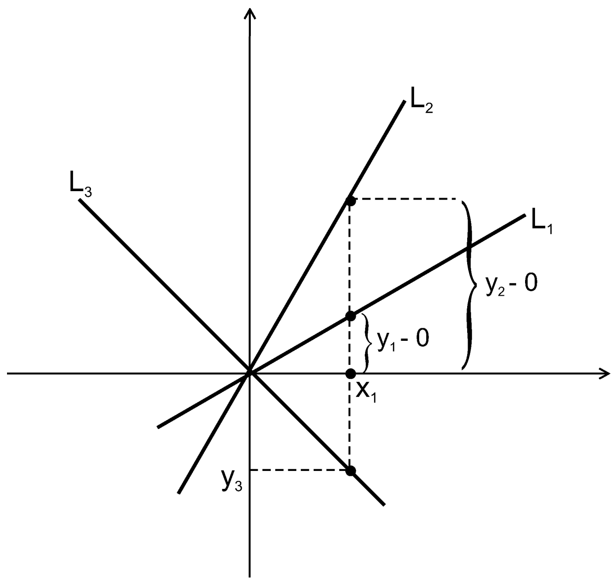
Coeficiente angular

O coeficiente angular m, como vimos, é uma medida de inclinação da reta L que é o gráfico da equação $y = mx + n$.

Se L passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), então

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Observe as três retas L_1, L_2 e L_3 da figura abaixo, todas passando pela origem.



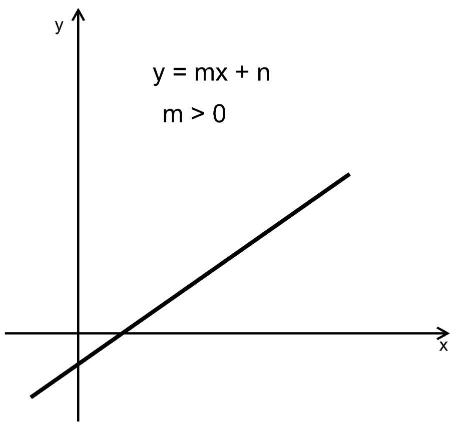
A reta L_2 tem um coeficiente angular m_2, maior que o coeficiente angular m_1 da reta L_1. Note que $m_1 = \frac{y_1-0}{x_1-0} < \frac{y_2-0}{x_1-0} = m_2$.

A reta L_3 tem coeficiente angular negativo. Suponha que ela passa por (x_1, y_3), onde $y_3 < 0$, então

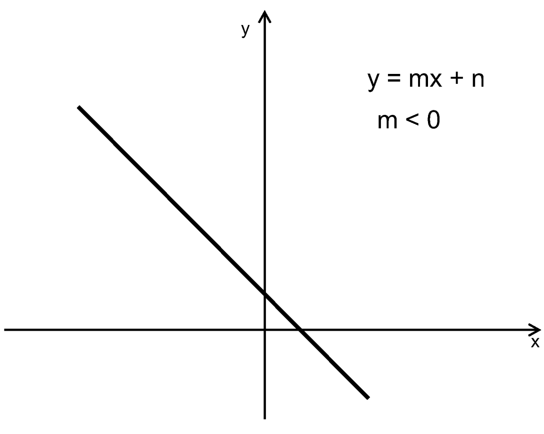
$$m_3 = \frac{y_3 - 0}{x_1 - 0} = \frac{y_3}{x_1} < 0.$$

Com relação ao crescimento, temos o seguinte:

A reta $y = mx + n$ é crescente quando $m > 0$ e decrescente quando $m < 0$.

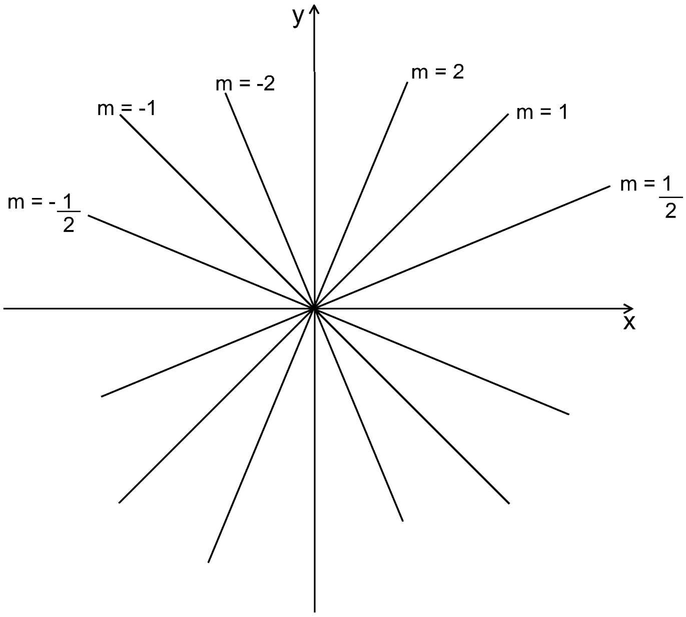


Função crescente



Função decrescente

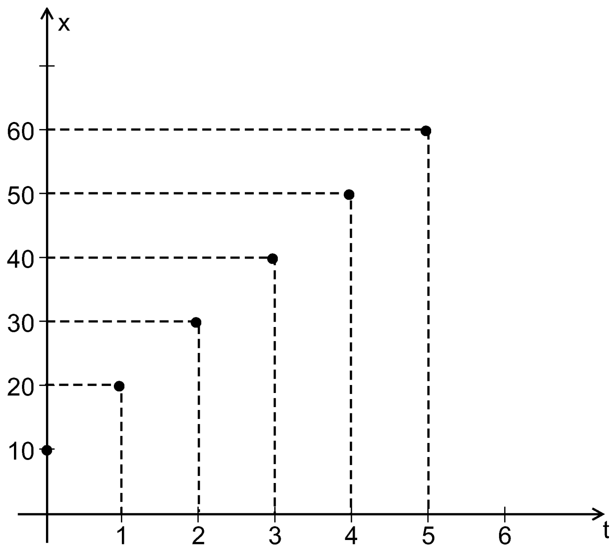
O gráfico abaixo mostra várias retas passando pela origem, com diferentes coeficientes angulares.



Aplicação

Exemplo 18

Em uma certa experiência, um biólogo mede uma grandeza x ao longo do tempo t. Ele representa os resultados no gráfico a seguir:



Como se vê, a grandeza x varia de maneira aproximadamente linear com o tempo.

Utilizando os pontos $(0, 10)$ e $(5, 60)$, obtemos o coeficiente angular da reta

$$m = \frac{60 - 10}{5 - 0} = 10.$$

Usando agora um ponto qualquer, digamos, $(0, 10)$, obtemos a equação

$$x - 10 = 10(t - 0)$$

$$x = 10t + 10.$$

Esta última equação, $x = 10t + 10$ representa, aproximadamente, a variação da grandeza x com o tempo t.

Observe que, na verdade, há métodos mais precisos de se ajustar uma reta a um conjunto de pontos que se dispõe de maneira aproximadamente linear. Um método muito usado é o método dos mínimos quadrados (não estudaremos este método nesta disciplina).

Resumo

Iniciamos esta aula estudando a representação de pontos por pares ordenados em um plano cartesiano e definindo gráfico de uma função. Se uma função tem como domínio um conjunto finito de pontos, seu gráfico é um conjunto de pontos no plano. Se o domínio da função é $\mathbb{R}$ e a função é ¨bem comportada¨, seu gráfico é uma curva.

Nem sempre o gráfico de uma função real é uma curva contínua. Existe um conceito muito importante no estudo de funções chamado *continuidade*. A grosso modo, uma função é contínua quando seu gráfico é uma curva sem saltos e sem buracos. Podemos traçar seu gráfico com um lápis, sem tirar o lápis do papel. É claro que este conceito tem uma definição matemática precisa, que é estudada nos cursos de Cálculo Diferencial.

Estudamos nesta aula as funções afins, que são funções cujo gráfico é uma reta. Estudamos coeficiente angular e linear e como calcular a equação da reta que passa por dois pontos.

Exercícios

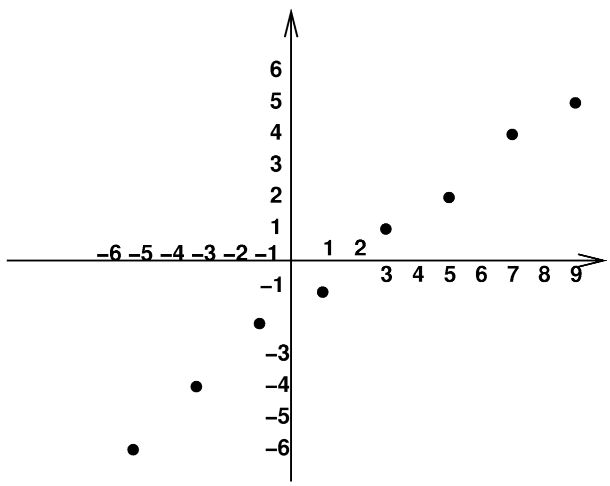
1. Marque, em um plano cartesiano, os pontos $A(1,2)$, $B(2,-1)$, $C(-1,-4)$, $D(-3,-5)$, $E(3,0)$, $F(-3,0)$, $G(0,-3)$, $H(0,2)$.

2. Encontre a equação da reta que passa pelos pontos:

   (a) $P(1,2)$ e $Q(3,4)$.

   (b) $P(1,-2)$ e $Q(3,5)$.

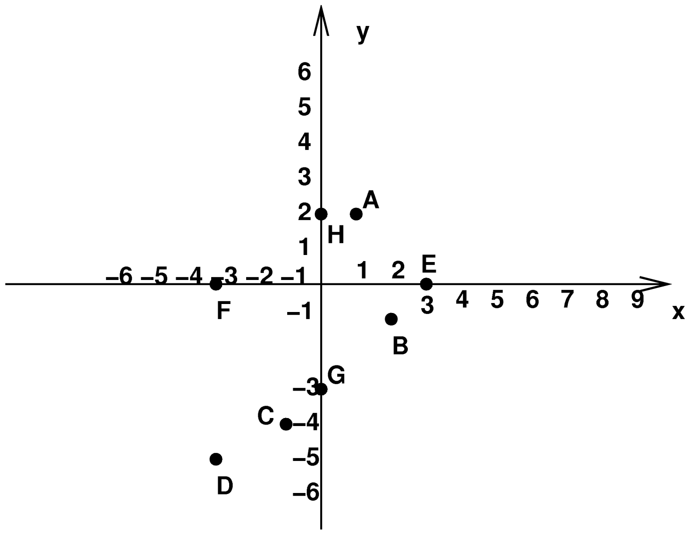
3. O resultado de uma certa experiência foi indicado no gráfico abaixo, que compara as grandezas X e Y.



   Indique uma função afim que relaciona, aproximadamente, as grandezas X e Y.

Soluções do Exercícios

1.



2. (a) $y = x + 1$

   (b) $y = \frac{7}{2}x - \frac{11}{2}$

3. Aproximadamente $y = \frac{11}{14}x - \frac{29}{14}$.

Aula 4 – Funções quadráticas

Objetivo

Estudar as funções quadráticas.

Funções quadráticas são funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = ax^2 + bx + c \ .$$

O nome quadrática vem do fato de que $ax^2 + bx + c$ é uma equação de grau 2. Uma equação de grau 3 é uma cúbica etc.

Exemplo 19

A área de um círculo é dada por $A = \pi R^2$, onde R é o raio do círculo. Podemos dizer que a área é uma função quadrática do raio.

O gráfico de $y = ax^2 + bx + c$ é uma curva chamada parábola, que pode estar voltada para cima (concavidade para cima) ou para baixo (concavidade para baixo), como mostra a figura abaixo.

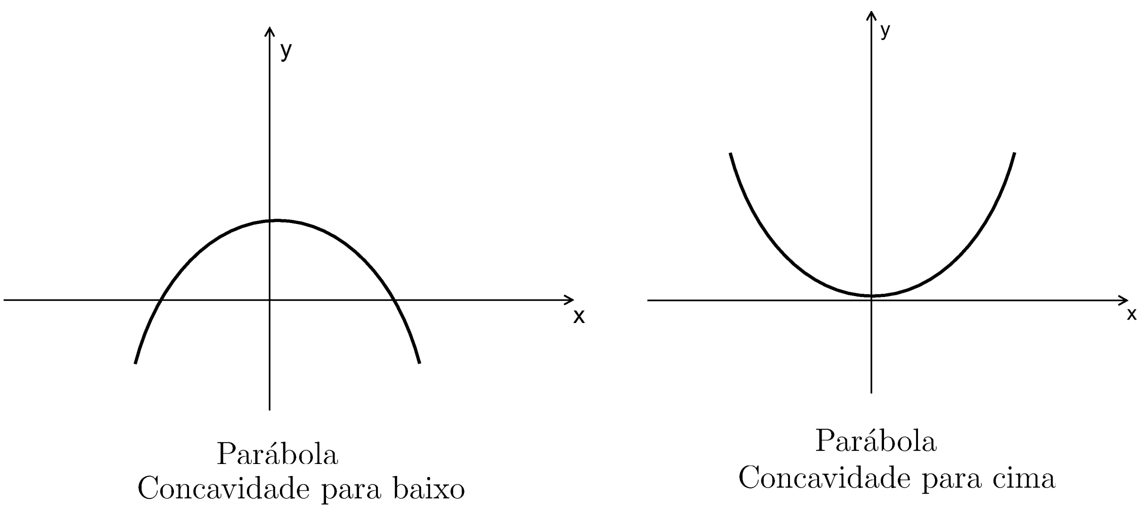


Figura 7: Parábolas

Exemplo 20

Um movimento linear com aceleração constante é descrito por uma função quadrática

$$s = s_0 + v_0 t + at^2 \ ,$$

onde s_0 é a posição inicial, v_0 é a velocidade inicial, s é a posição no tempo t e a é a aceleração.

Um exemplo de tal movimento é o de queda livre, onde $a = g$ é a aceleração da gravidade.

Assim, um objeto largado de uma altura h, cai segundo a equação

$$s = h - gt^2 \ ,$$

onde substituimos na equação (1), os valores $s_0 = h$ e $a = -g$ (o sinal negativo resulta de que a aceleração "empurra" o objeto em sentido contrário ao sentido para cima). (Ver Figura 8)

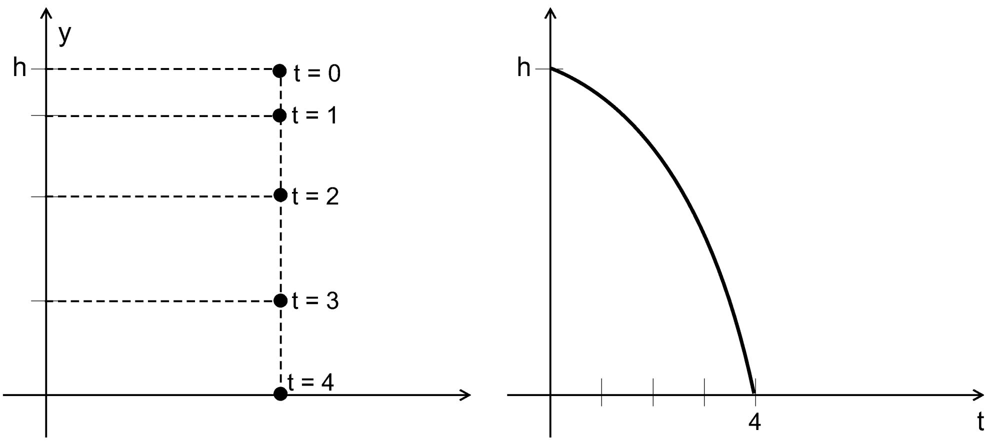


Figura 8: Movimento de queda livre

Marcando os pontos onde $t = 0,\ 1,\ 2, \ldots$ em um gráfico, obtemos uma parábola, como na Figura 9. Pela mesma razão, o movimento de um projétil disparado por um canhão descreve uma trajetória parabólica, como vemos na Figura 9.

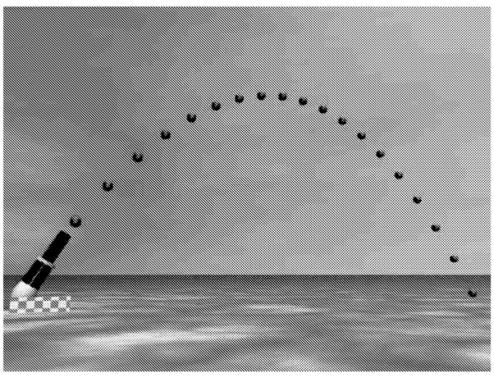


Figura 9: Trajetória de uma bala de canhão.

Exemplo 21

Um biólogo conta o número de animais de uma espécie em área na forma de um quadrado de lado l.

Se a espécie estiver distribuída de maneira homogênea, então o número de habitantes dependeria só da área da região quadrada, isto é, l^2. Portanto a população P, seguiria, aproximadamente, uma equação

$$P = d\ l^2,$$

onde d é uma constante e P é o número de habitantes por km^2 (se l é medido em km).

Concavidade

Como vimos, há dois tipos de parábolas com relação à concavidade: parábola voltada para cima (chamada côncava), e parábola voltada para baixo (chamada convexa). Veja Figura 7.

Exemplo 22

Vamos esboçar o gráfico das funções $y = 2x^2$ e $y = -x^2 + 4$. Para isto, escolhemos alguns valores de x, calculando os valores correspondentes de y, dispondo os resultados em uma tabela. Marcando os pontos, podemos esboçar os gráficos da Figura 10.

x	$y = 2x^2$
-2	$2.(-2)^2 = 8$
-1	$2.(-1)^2 = 2$
0	$2.0^2 = 0$
1	$2.1^2 = 2$
2	$2.2^2 = 8$

x	$y = -x^2 + 4$
-2	$-(-2)^2 + 4 = 0$
-1	$-(-1)^2 + 4 = 3$
0	$-0^2 + 4 = 4$
1	$-1^2 + 4 = 3$
2	$-2^2 + 4 = 0$

Pode-se mostrar que o gráfico de $y = ax^2 + bx + c$ é uma parábola voltada para cima quando $a > 0$ (como $y = 2x^2$) e uma parábola voltada para baixo quando $a < 0$ (como $y = -x^2 + 4$).

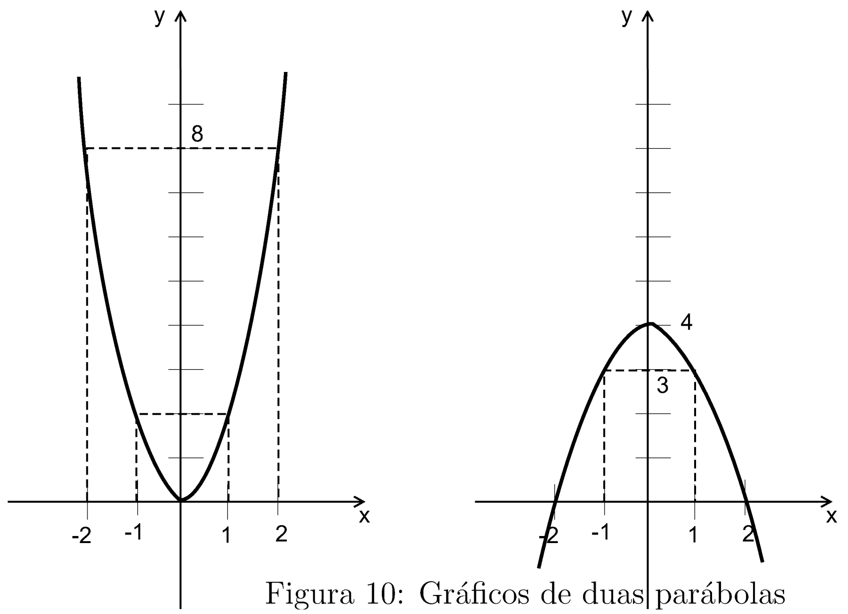


Figura 10: Gráficos de duas parábolas

$y = 2x^2$ $\qquad$ $y = -x^2 + 4$

Raízes de uma equação

Se uma função quadrática é dada por $y = ax^2 + bx + c$, então os pontos onde $y = 0$ (isto é, pontos sobre o eixo x) são os pontos onde

$$ax^2 + bx + c = 0 \ ,$$

ou seja, raízes da equação do 2^o grau dada por $ax^2 + bx + c = 0$.

Recordamos que estas raízes são dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$ é chamado discriminante da equação.

Uma equação do 2^o grau pode ter 0, 1 ou 2 raízes reais, dependendo do valor de Δ. Mais precisamente, temos:

$$\begin{array}{lcl}
\Delta < 0 & \Rightarrow & ax^2 + bx + c = 0 \text{ não tem raízes reais} \\
\Delta = 0 & \Rightarrow & ax^2 + bx + c = 0 \text{ tem única raiz real, que é, } x = \frac{-b}{2a} \\
\Delta > 0 & \Rightarrow & ax^2 + bx + c = 0 \text{ possui duas raízes reais distintas,} \\
 & & \text{a saber, } x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.
\end{array}$$

Uma raiz de $ax^2 + bx + c$ corresponde a um ponto $(x, 0)$ no gráfico de $y = ax^2 + bx + c$, isto é, um ponto onde $y = ax^2 + bx + c$ corta o eixo x. Assim, temos as seguintes possibilidades:

$\Delta < 0 \quad \Rightarrow \quad y = ax^2 + bx + c = 0$ não corta o eixo x (nenhuma raiz real).

$\Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad y = ax^2 + bx + c = 0$ corta o eixo x em apenas um ponto (uma única raiz real).

$\Delta > 0 \quad \Rightarrow \quad y = ax^2 + bx + c = 0$ corta o eixo x em dois pontos (duas raízes reais).

Considerando as possibilidades $a > 0$ e $a < 0$ (concavidade para cima e para baixo, respectivamente) e $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ ou $\Delta < 0$, obtemos o quadro abaixo:

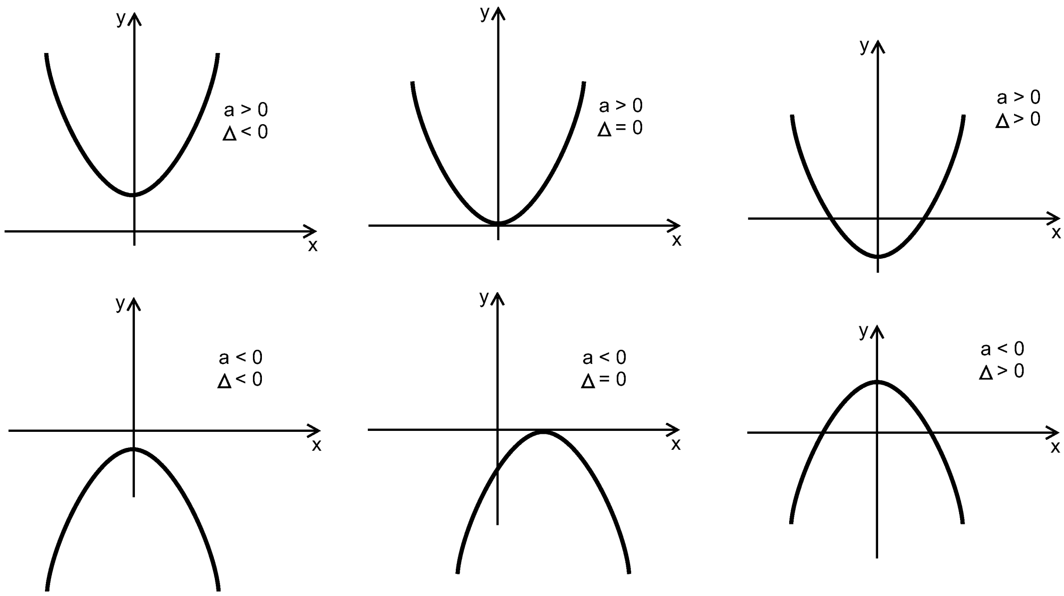
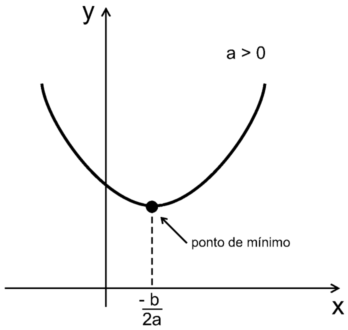


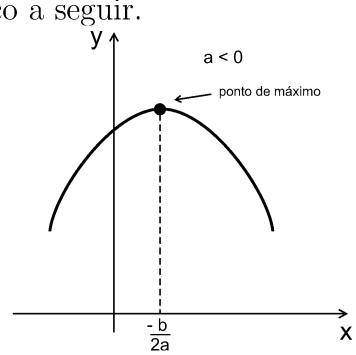
Figura 11: Todas as possibilidades de sinal para a e Δ.

Ponto de máximo e mínimo

Se $a > 0$ então a parábola, voltada para cima, possui um ponto de mínimo, como mostra o gráfico a seguir.



Se $a < 0$ então a parábola, voltada para baixo, possui um ponto de máximo, como mostra o gráfico a seguir.



Em ambos os casos, o ponto de máximo ou mínimo é dado por:

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right).$$

Há várias maneiras de chegarmos ao fato de que o ponto extremo tem $x = \frac{-b}{2a}$. A maneira mais simples envolve derivação, que veremos na próxima aula.

Depois de determinarmos que o valor de x no ponto de máximo (ou mínimo) é $x = \frac{-b}{2a}$, basta substituir em $y = ax^2 + bx + c$ para concluir que $y = \frac{-\Delta}{4a}$ (tente!).

Resumo

Nesta aula estudamos as funções quadráticas, que são as funções reais dadas por $f(x) = ax^2+bx+c$. O gráfico destas funções é uma curva chamada parábola.

Vimos que esta parábola corta o eixo x em dois pontos quando $\Delta > 0$, em um ponto quando $\Delta = 0$ e não corta o eixo x quando $\Delta < 0$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$ é chamado discriminante da equação.

Vimos que a parábola tem concavidade para cima quando $a > 0$ e para baixo quando $a < 0$. Quando $a > 0$ a parábola tem um ponto de mínimo, enquanto que se $a < 0$, tem um ponto de máximo. Em ambos os casos, o ponto extremo é dado por $\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$.

Exercícios

1. Esboce o gráfico das seguintes funções:

   (a) $y = x^2$

   (b) $y = 4 - x^2$.

   (c) $y = 1 - 2x + x^2$.

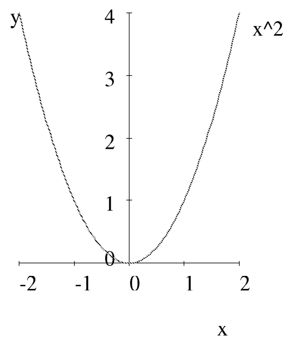
2. Indique os intervalos de crescimento e decrescimento da função $y = x^2 - 3x + 2$.

3. Calcule os pontos de máximo e mínimo das funções:

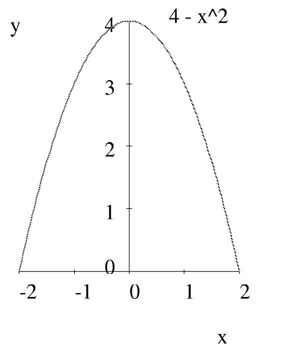
   (a) $y = x^2 + 4x + 3$.

   (b) $y = 2 - x^2$.

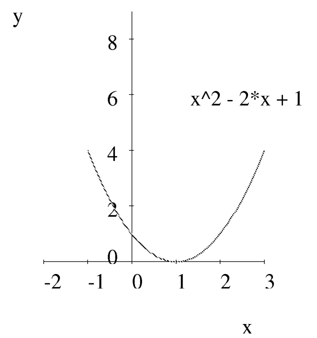
Solução dos exercícios



1. (a)



   (b)



   (c)

2. A função $y = x^2 - 3x + 2$ é crescente quando $x > \frac{3}{2}$ e decrescente quando $x < \frac{3}{2}$.

3. (a) Mínimo no ponto $(2, -1)$.

   (b) Máximo no ponto $(0, 2)$.

Aula 5 – Limites e derivadas

Objetivos

Apresentar os conceitos limite e derivada de uma função.
Mostrar a relação da derivada com a taxa de variação.
Mostrar que a derivada de uma função em um ponto é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função neste ponto.

Taxa de crescimento

Vimos que uma reta tem inclinação constante e que esta inclinação é a taxa de variação de uma grandeza em relação à outra.

Por exemplo, se uma população de 100 micos é introduzida em uma reserva e cresce, nos primeiros 6 anos, a uma taxa constante de 20 animais por ano, então o gráfico da população P pelo tempo t (em anos) é uma reta cuja inclinação é 20.

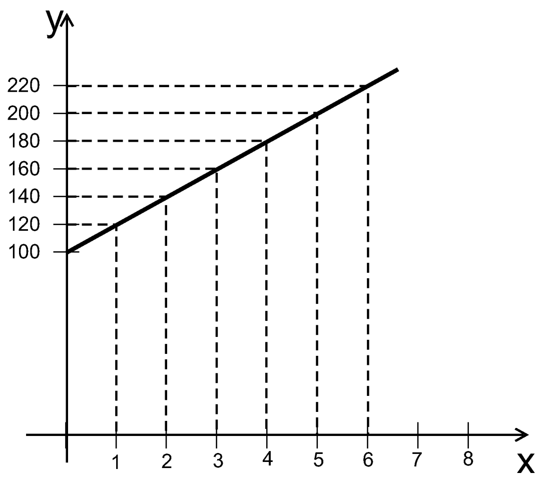


Figura 12: gráfico de população pelo tempo

Mas o que acontece quando esta taxa de crescimento é variável? Por exemplo, o gráfico mostrado na Figura 13. Neste caso a taxa de variação varia a cada ponto. Precisamos de um instrumento para medir a taxa de variação em um ponto. Este instrumento é a derivação.

Um estudo mais profundo sobre limites e derivadas nos levaria muito longe dos objetivos desta disicplina. Vamos apresentar nesta aula, superficialmente, os conceitos de limite e derivada e sua relação com taxa de crescimento e inclinação da reta tangente a uma curva em um ponto.

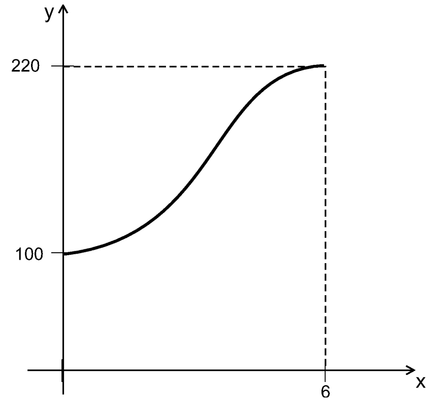


Figura 13: Taxa de crescimento variável

Limite de uma função

Se $y = f(x)$, então

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

mede a taxa de variação no intervalo (x_0, x_1). Se x_1 está muito próximo de x_0, então $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ mede a taxa de variação muito próximo de x_0.

Aqui entra o conceito de "passagem ao limite", um dos conceitos fundamentais do cálculo diferencial e integral. Quando x_1 tende a x_0, então Δx tende a 0 e $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tende à taxa de variação no instante x_0.

Por exemplo, se Δy for a variação de posição no intervalo Δx, então $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é a velocidade média. Quando Δx tende a 0, então $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tende à velocidade instantânea no ponto x_0.

Se ΔP for a variação de uma população no intervalo Δt, quando Δt tende a 0 em um intervalo que contém t_0, então $\frac{\Delta P}{\Delta t}$ tende à taxa de variação da população próximo do instante t_0.

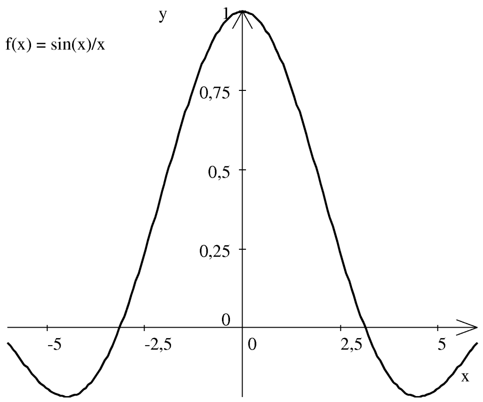
Uma definição matemática mais rigorosa de limite é a seguinte: se $f(x)$ é uma função real então dizemos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ quando para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

Esta idéia de "tender a" é expressa matematicamente pelo conceito de *limite*. Denotamos por

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

(lê-se limite da função f(x) quando x tende a a) ao valor para o qual $f(x)$ tende quando x tende a a. O conceito de limite tem uma definição matemática precisa, a partir da qual podemos deduzir diversas propriedades e aprender a calcular limites, o que normalmente é feito nos cursos de cálculo diferencial.

Vamos a alguns exemplos:



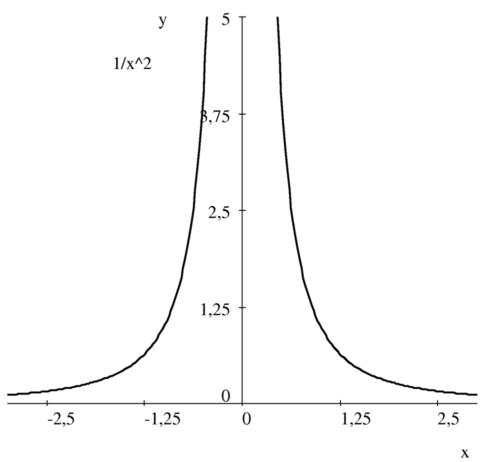
$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1$

Nem sempre existe o limite $\lim_{x\to x_0} g(x)$. Pode acontecer que a função aumente indefinidamente quando x vai para x_0. Neste caso dizemos que $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$. Pode acontecer também que $g(x)$ diminua indefinidamente quando x vai para x_0, neste último caso dizemos que $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$. Estes são casos de *limites infinitos*.

Pode acontecer também que o limite $\lim_{x\to x_0} g(x)$ não exista porque a função oscila quando x vai a x_0.

O exemplo abaixo mostra um caso de limite infinito.

Há definições precisas para os conceitos expostos acima. O objetivo desta aula não é dar as definições matemáticas rigorosas e provar as propriedades, mas sim apresentar os conceitos de *limite* e *derivada*, necessários para compreender o comportamento de certas funções e seus gráficos.



$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

Derivada de uma função

A derivada de uma função $y = f(x)$ no ponto x_0, denotada $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$ ou $f'(x_0)$, é definida por

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

se este limite existir.

A derivada $f'(x_0)$ mede a taxa de variação "no ponto x_0".

Como calcular a derivada de uma função?

A derivada de funções muito simples pode ser calculada diretamente aplicando-se a definição dada acima. A partir da definição pode-se demonstrar fórmulas envolvendo derivação, que auxiliam a calcular a derivada de funções mais complicadas.

A tabela abaixo mostra a derivada de algumas funções.

Função	Derivada
$f(x) = c$ (constante)	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = e^x$ (exponencial)	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln x$ (logaritmo)	$f'(x) = 1/x$

Duas regras de derivação fundamentais são a derivada da soma e do produto:

1. Se $f(x) = g(x) + h(x)$ então $f'(x) = g'(x) + h'(x)$.

2. Se $f(x) = g(x).h(x)$ então $f'(x) = g'(x).h(x) + g(x).h'(x)$.

Exemplo 23

Encontre a derivada das funções $f(x) = x^2 + x + 1$ e $g(x) = xe^x$.

Solução. Usamos as regras da derivada da soma e do produto.

1. $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(x^2 + x + 1) = \frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}1 = 2x + 1 + 0 = 2x + 1.$

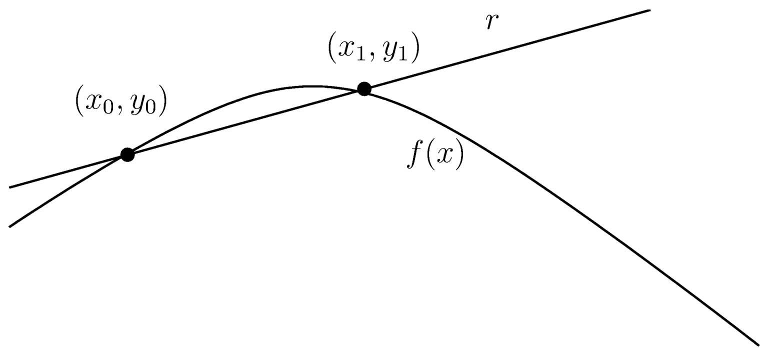
2. $\frac{d}{dx}xe^x = (\frac{d}{dx}x).e^x + x\frac{d}{dx}(e^x) = e^x + xe^x.$

Derivada e tangente ao gráfico de uma função

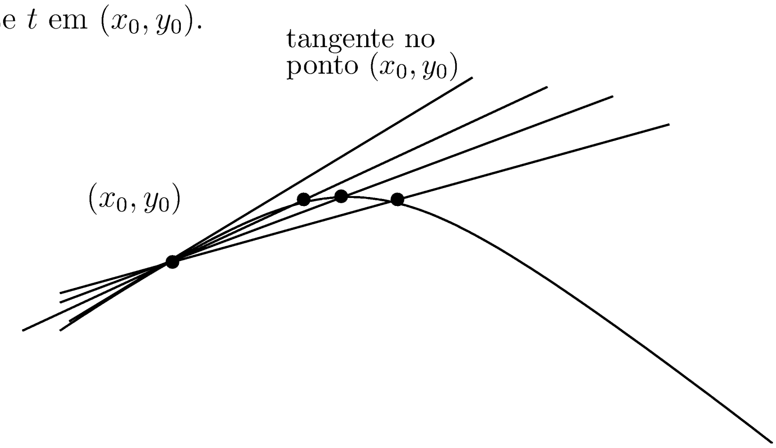
Veremos nesta seção que a derivada $f'(x_0)$ fornece o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ no ponto x_0.

Como vimos na aula 2, a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ é o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1). Se estes são pontos do gráfico de uma função $y = f(x)$, então a reta passando por estes pontos é uma secante à curva. Veja a figura a seguir, onde a reta r é secante ao gráfico de $f(x)$, passando pelos pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1).

Uma reta que corta uma curva em dois ou mais pontos distintos é chamada *secante*. Uma reta que corta uma curva em apenas um ponto P de uma curva C é chamada *tangente* à curva C no ponto P.
Um problema clássico importante na Geometria é o de encontrar a equação da reta tangente a uma curva dada.

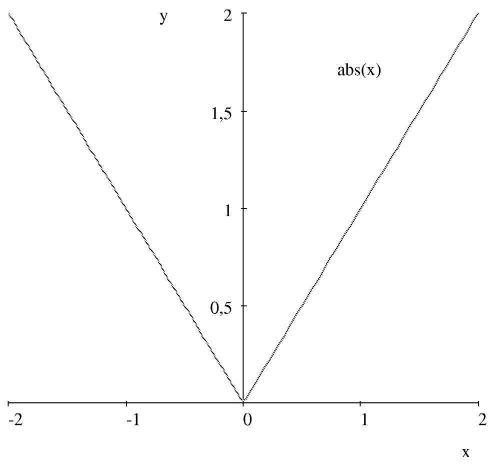


Se aproximamos o ponto (x_1, y_1) do ponto (x_0, y_0), então a reta que passa pelos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) se torna cada vez mais próxima da tangente no ponto (x_0, y_0). A idéia aqui é que quando (x_1, y_1) tende ao ponto (x_0, y_0), então o coeficiente angular da secante r tende ao coeficiente angular da tangente t em (x_0, y_0).



Em resumo, a tangente ao gráfico de uma função $f(x)$, no ponto $(x_0, f(x_0)$, tem coeficiente angular $f'(x_0)$. Isto supondo que exista a derivada $f'(x_0)$.

Há funções que não são deriváveis em alguns dos pontos de seu domínio. Por exemplo: $f(x) = |x|$ (função modular) não possui derivada no ponto $x = 0$. O gráfico desta função não tem uma tangente definida no ponto $x = 0$. Observando o gráfico, vemos que $x = 0$ é um "quina" na curva.



Derivada e Crescimento

O sinal da derivada está intimamente relacionado ao fato de uma função ser ou não crescente.

Não é difícil mostrar que se $f(x)$ é uma função crescente em um intervalo (a, b), então $f'(x) \geq 0$ no intervalo. Se $f(x)$ é decrescente, então $f'(x) \leq 0$.

Reciprocamente, se uma função tem derivada positiva em um intervalo (a, b), então ela é crescente neste intervalo. Por outro lado, se esta função tem derivada negativa, então ela é decrescente neste intervalo.

E os pontos de derivada nula?

Se uma função tem derivada nula <u>em um intervalo</u> (a, b), então ela é constante neste intervalo. Se a função é nula apenas em alguns pontos ela não será constante, mas estes pontos são muito importantes.

Os pontos de derivada nula, chamados pontos críticos da função, estão relacionados aos máximos e mínimos da função e também relacionados aos pontos de equilíbrio, caso a função represente a taxa de variação de uma grandeza.

Os pontos de máximo ou mínimo de uma função derivável são pontos de derivada nula. A recíproca não é verdadeira, podemos ter pontos de derivada nula sem que este ponto seja de máximo ou mínimo.

Exemplo 24

A função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ tem derivada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) = \frac{dax^2}{dx} + \frac{dbx}{dx} + \frac{dc}{dx} = 2ax + b\ .$$

Os pontos de derivada nula são

$$\frac{dy}{dx} = 0\ \Rightarrow 2ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a}\ .$$

Observamos, na Aula 4, que o ponto de máximo (quando $a < 0$) ou mínimo (quando $a > 0$) da parábola $y = ax^2 + bx + c$ é o ponto onde $x = \frac{-b}{2a}$.

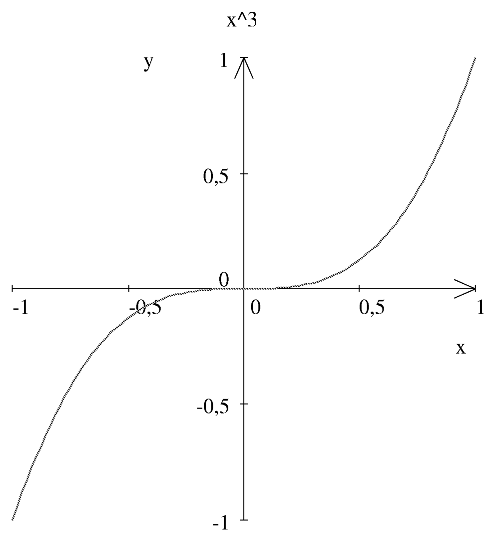
Exemplo 25

A função $y = x^3$ tem derivada nula no ponto $x = 0$, pois

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^3}{dx} = 3x^2\ .$$

Assim, $x = 0 \Rightarrow \frac{dx^3}{dx} = 0$.

No entanto, $x = 0$ não é ponto de máximo ou mínimo da função $y = x^3$, como vemos no gráfico abaixo



Resumo

Nos cursos de Matemática e Física, a disciplina de Cálculo 1 aborda os conceitos de limite e derivada de uma função.

O que você achou desta aula? Um pouco difícil? Realmente foi uma aula em que apresentamos vários conceitos bastante sofisticados, como limite, derivada e taxa de variação. Um estudo mais completo destes conceitos, com as definições matemáticas precisas, preenche uma disciplina inteira.

Então qual o sentido de colocar tudo aqui em uma aula? O sentido é que apresentamos estes conceitos de maneira mais intuitiva, mesmo que superficial, preocupando-nos apenas em expor os conceitos que serão importantes para o entendimento do comportamento de gráficos que aparecem normalmente como resultados de experiências.

Vimos nesta aula os conceitos de taxa de variação, limite e derivada de uma função. Vimos também que a derivada de uma função em um ponto fornece a inclinação da tangente ao gráfico da função naquele ponto.

Finalmente, vimos que os pontos de máximo e mínimo de uma função são os pontos de derivada nula.

Exercícios

1. Encontre a derivada das funções abaixo.

   (a) $y = x$

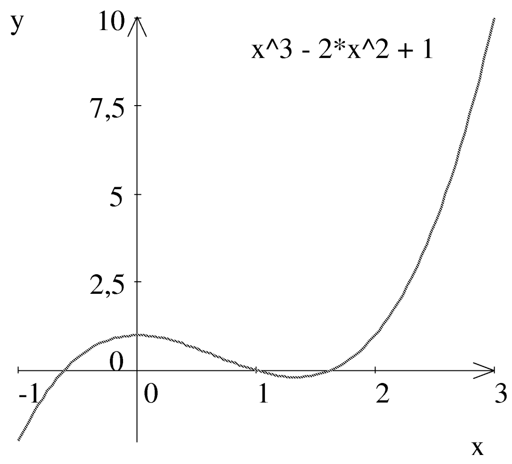
   (b) $y = 2 - x^2$

   (c) $y = e^x$

   (d) $y = x^2 e^x$

2. Faça um esboço do gráfico de $y = 2 + x + x^2$. Desenhe a tangente no ponto $x = 1$ e obtenha, pelo gráfico, um valor aproximado do coeficiente angular desta tangente. Em seguida, calcule a derivada em $x = 1$. Comente o resultado.

3. A figura abaixo mostra o gráfico da função $y = x^3 - 2x^2 + 1$. Encontre os pontos de derivada nula e observe, pelo gráfico, o comportamento da função nestes pontos. Comente.



Respostas dos exercícios

1. (a) $\frac{dy}{dx} = 1$
   (b) $\frac{dy}{dx} = -2x$
   (c) $\frac{dy}{dx} = e^x$
   (d) $\frac{dy}{dx} = 2xe^x + x^2e^x$.

2. O valor obtido do coeficiente angular da tangente em $x = 1$ deve ser aproximadamente igual a 3, que é o valor da derivada em $x = 1$.

3. Os pontos de derivada nula são $x = 0$ e $x = \frac{4}{3}$. Estes pontos correspondem a um máximo local ($x = 0$) e um mínimo local ($x = \frac{4}{3}$).

   Um ponto x_0 é ponto de máximo local (respectivamente, mínimo local) é um ponto que é máximo (resp., mínimo) em um intervalo que o contenha, mesmo que não seja máximo (mínimo) globalmente. Os pontos $x = 0$ e $x = \frac{4}{3}$, da função acima, são pontos de máximo e mínimo local, respectivamente, mas não são máximo e mínimo absolutos.

Aula 6 – Princípio multiplicativo e permutações

Objetivos

Apresentar o princípio multiplicativo que é a base para as técnicas de contagem que estudaremos nesta aula e na próxima. Ao final desta aula o aluno deve:

- Conseguir utilizar o princípio multiplicativo para a solução de problemas simples;
- Identificar casos de permutação e usar a fórmula para a permutação de n elementos.

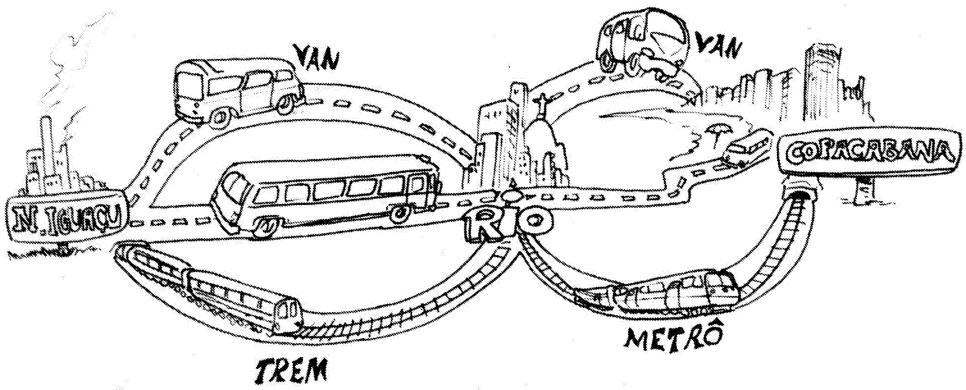
Introdução

Nesta e na próxima aula apresentaremos algumas *técnicas de contagem*: o princípio multiplicativo, permutações, arranjos e combinações. Elas recebem o nome de técnicas de contagem porque oferecem, em certas situações, com quantas maneiras se pode fazer alguma coisa.

Princípio Multiplicativo

Iniciaremos esta aula apresentando uma técnica de contagem: o princípio multiplicativo. Este princípio lida com situações em que uma tarefa se divide em várias etapas. Vamos começar por um exemplo.

Uma pessoa mora em Nova Iguaçu e trabalha em Copacabana. Ela vai trabalhar todos os dias usando apenas transporte coletivo. Esta pessoa vai de Nova Iguaçu ao Centro do Rio tomando ônibus, van ou trem. Do Centro do Rio, pode ir a Copacabana de ônibus, van ou metrô. Levando em conta apenas estas possibilidades, de quantas maneiras ela poderá ir de casa ao trabalho?



Neste caso podemos contar facilmente todas as 9 possibilidades:

$$\{(V, V), (V, O), (V, M), (O, V), (O, O), (O, M), (T, V), (T, O), (T, M)\} \ ,$$

onde usamos uma notação em que, por exemplo, (T, M) indica que ela toma o trem no primeiro percurso e, em seguida, o metrô.

Em geral, a solução de problemas deste tipo se baseia no *princípio multiplicativo*, também chamado de *princípio fundamental da contagem*, que enunciamos a seguir.

Suponha que existam N_1 maneiras de se realizar uma tarefa T_1 e N_2 maneiras de se realizar uma tarefa T_2. Então há $N_1 \times N_2$ maneiras de se realizar a tarefa T_1 seguida da tarefa T_2.

Exemplo 1

Na discussão anterior, T_1 é a tarefa de ir de Nova Iguaçu ao Centro do Rio e $N_1 = 3$ (há 3 possibilidades de se fazer isto). Da mesma forma, T_2 é a tarefa de ir do Centro do Rio a Copacabana, e há $N_2 = 3$ possibilidades de se realizar esta tarefa. No total, há:

$$N_1 \times N_2 = 3 \times 3 = 9 \text{ possibilidades.}$$

Exemplo 2

Um aluno se prepara para ingressar no ensino superior. Ele pode escolher entre 10 universidades. Se cada uma delas tiver 15 cursos, quantas possibilidades de cursos há para este aluno?

Solução:

$$10 \times 15 = 150 \text{ cursos diferentes.}$$

O princípio multiplicativo utilizado na Solução do Exemplo 2 pode ser estendido para a situação em que temos várias tarefas: se uma tarefa T_1 pode ser feita de N_1 maneiras, uma tarefa T_2 de N_2 maneiras, ..., uma tarefa T_k de N_k maneiras, então o número de maneiras de realizar $T_1, T_2, \ldots, T_k$, em seqüência, é $N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_k$.

O índice k no enunciado representa qualquer inteiro maior ou igual a 1. Então, por exemplo, realizar 3 tarefas T_1, T_2 e T_3 em seguida pode ser feito de $N_1 \times N_2 \times N_3$ maneiras.

Exemplo 3

Um restaurante oferece 4 tipos de entrada, 10 pratos principais e 5 tipos de sobremesa. Se um freguês deste restaurante decide tentar uma refeição diferente a cada noite, quanto tempo levará para esgotar todas as possibilidades?

Solução:

A questão é, em outras palavras, quantas combinações de pratos há no total. São 4 tipos de entrada, 10 pratos principais e 5 possibilidades de sobremesa. Portanto, o total de possibilidades é:

$$4 \times 10 \times 5 = 200 \ .$$

Este cliente levaria 200 noites para esgotar todas as possibilidades deste restaurante.

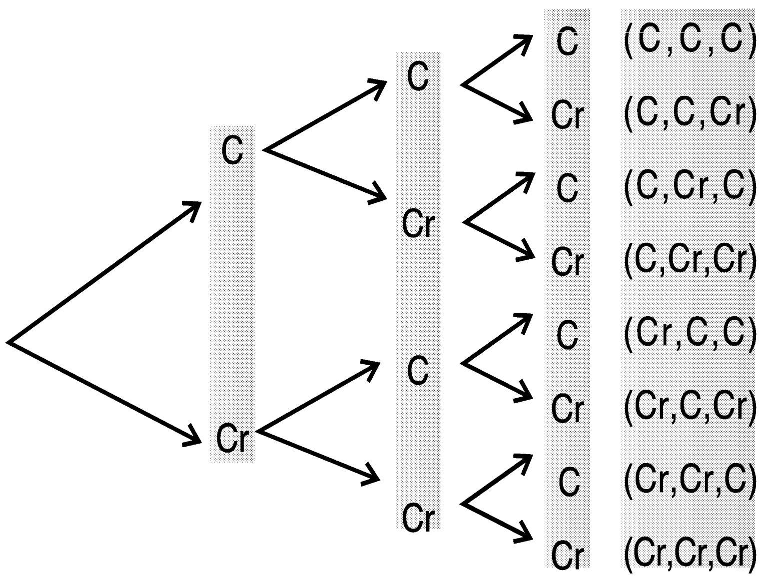
Exemplo 4

Em um jogo de "cara ou coroa", uma moeda é lançada 3 vezes. Qual o número de resultados possíveis?

Solução:

Cada lançamento tem dois resultados possíveis: cara ou coroa, que representaremos por C e Cr, respectivamente.

Como foi lançada 3 vezes, há $2 \times 2 \times 2 = 8$ resultados possíveis. Podemos ver os resultados possíveis no diagrama:



No diagrama anterior foi utilizada uma notação por ternos ordenados em que, por exemplo, (C, Cr, C) indica que os resultados dos 3 lançamentos foram, nesta ordem, cara, coroa e cara.

Permutações

Para entender o que é permutação, vamos começar com um exemplo.

Um pai quer tirar uma fotografia de seus 3 filhos, mas não consegue colocar os 3 garotos em ordem: todos querem ficar no meio.

O pai poderia obrigá-los, mas como é paciente ele decide tirar uma foto de cada ordenação possível dos 3 meninos. Quantas fotos esse pai deverá tirar?

Os garotos se chamam André (A), João (J) e Pedro (P). É fácil *listar* todas as ordenações possíveis. Elas são as seguintes:

$$AJP, \quad APJ, \quad JAP, \quad JPA, \quad PAJ \text{ e } PJA.$$

São, portanto, 6 ordenações possíveis.

Dado um conjunto de objetos distintos, uma *permutação* do conjunto é uma ordenação dos elementos deste conjunto.

No exemplo acima, o conjunto

$$\{A, J, P\},$$

como vimos, possui 6 permutações.

Uma forma de calcular quantas são as permutações de um conjunto sem ter de listá-las é usar o princípio multiplicativo.

Voltando ao exemplo do pai de André, João e Pedro, são 3 posições na foto, as quais representamos com 3 traços:

$$\underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad}$$

De quantas maneiras podemos preencher a primeira posição? De 3 maneiras, pois são 3 crianças. Uma vez escolhido quem fica na primeira posição, temos 2 escolhas possíveis para a segunda posição, pois restaram 2 crianças. Depois disto, resta somente uma criança, o que dá apenas 1 escolha para a terceira posição.

O verbo "permutar" quer dizer trocar. Uma permuta é uma troca de alguma coisa. Em Matemática, o verbo "permutar" tem o sentido de ordenar. Permutar objetos é trocar sua ordem.

Usando o princípio multiplicativo, o número de ordenações possíveis é:

$$\underline{\ 3\ } \times \underline{\ 2\ } \times \underline{\ 1\ } = 6\,.$$

E se fossem 6 crianças, quantas fotos teriam que ser tiradas para que houvesse uma foto de cada ordenação possível das crianças? Em outras palavras, quantas permutações existem para um conjuntos de 6 crianças?

Vamos novamente representar as 6 posições possíveis na foto por 6 espaços vazios:

$$\underline{\quad}\quad\underline{\quad}\quad\underline{\quad}\quad\underline{\quad}\quad\underline{\quad}\quad\underline{\quad}\ .$$

Para preencher a primeira posição temos 6 possibilidades. Uma vez escolhida a criança que vai ficar na primeira posição, restam 5 crianças. Para a segunda posição temos 5 possibilidades. Escolhida a criança da segunda posição, ficam 4 crianças para escolher a próxima posição, e assim por diante...

O número de permutações do conjunto de 6 crianças é:

$$\underline{\ 6\ } \times \underline{\ 5\ } \times \underline{\ 4\ } \times \underline{\ 3\ } \times \underline{\ 2\ } \times \underline{\ 1\ } = \ 720\ .$$

Com este mesmo raciocínio, podemos deduzir o número de permutações de um conjunto de n elementos. Cada permutação é uma ordenação deste conjunto. Temos n espaços vazios e queremos saber de quantas maneiras podemos preenchê-los com os n elementos do conjunto.

São n possibilidades para o primeiro espaço vazio, $n-1$ possibilidades para o segundo, $n-2$ para o terceiro, e assim por diante até que, para o último espaço vazio, resta apenas uma possibilidade.

Pelo princípio multiplicativo temos que o número total de permutações de um conjunto de n elementos é:

$$n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1\ .$$

É interessante apresentar uma notação para o produto acima.

Para qualquer inteiro positivo n, definimos $n!$, que se lê "fatorial", como o produto

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$$

Definimos também:

$$0! = 1\ .$$

O valor que escolhemos para 0! pode parecer um pouco arbitrário, mas simplifica algumas fórmulas que veremos adiante.

Exemplo 5

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ 1! &= 1 \\ 2! &= 2.1 = 2 \\ 3! &= 3.2.1 = 6 \\ 4! &= 4.3.2.1 = 24 \\ 5! &= 5.4.3.2.1 = 120\ . \end{aligned}$$

Note que:

$$n! = n.(n-1)! = n.(n-1).(n-2)! = \ldots = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r)!\ ,$$

para qualquer inteiro r com $1 \leq r \leq n$.

Quando temos fatoriais no numerador e no denominador de uma fração, podemos simplificar a expressão sem ter de calcular todos os fatoriais, da seguinte forma:

$$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)\ .$$

Exemplo 6

$$\begin{aligned} 15! &= 15.14! \\ \frac{14!}{12!} &= \frac{14.13.12!}{12!} = 14.13 \\ \frac{7!}{4!3!} &= \frac{7.6.5.4!}{4!3!} = \frac{7.6.5}{3!} = \frac{7.6.5}{6} = 7.5 = 35\,. \end{aligned}$$

Quando aumentamos n, o valor de $n!$ se torna rapidamente astronômico. Por exemplo, usando um computador podemos calcular que 100! é o inteiro:

93326215443944152681699238856266700490715968264381621468592963895217599993229915608941463976156518286253697920827223758251185210916864000000000000000000000000 ,

que é um inteiro de 157 dígitos!

Vamos a mais uma notação. Chamaremos de $P(n)$ ao número de permutações de um conjunto de n elementos.

Assim, o número de permutações de um conjunto de n elementos é:

$$P(n) = n!$$

Exemplo 7

Qual o número de resultados possíveis em uma corrida de carros, onde 6 deles competem e todos chegam ao final ?

Solução:

Cada resultado possível corresponde a uma permutação do conjunto de 6 carros. O número total de permutações de um conjunto de 6 elementos é:

$$6! = 6.5.4.3.2.1 = 720\,,$$

que é o número de resultados possíveis da corrida.

Exemplo 8

De quantas maneiras 10 livros *distintos* podem ser arrumados na prateleira de uma estante?

Solução:

Cada "arrumação" corresponde a uma ordenação ou permutação do conjunto dos 10 livros. O número total de permutações de um conjunto de 10 livros é:

$$10! = 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 3628800\ .$$

Neste exemplo, o fato dos 10 livros serem *distintos* é muito importante! Se alguns livros fossem idênticos, teríamos um problema de contagem diferente, que será abordado mais adiante.

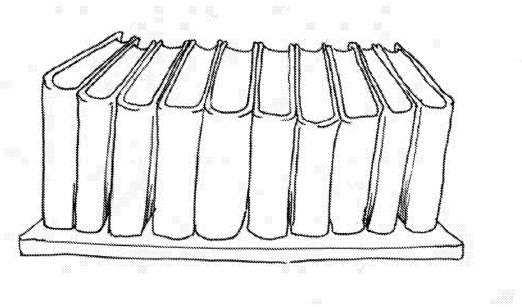
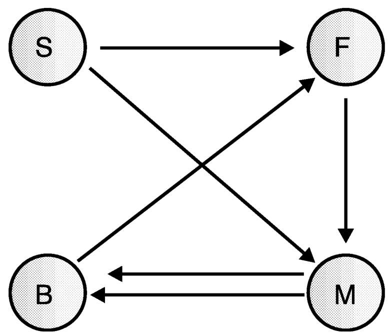


Figura 6.1: 10 livros em uma estante

Exemplo 9

Uma pessoa sai de casa com a incumbência de ir ao supermercado (S), ir à feira (F), ir ao Banco (B) e ir ao mecânico de seu carro (M). Esta pessoa pode realizar estas 4 tarefas em qualquer ordem. De quantas maneiras pode fazê-lo?

Solução:



A ilustração anterior mostra duas ordens possíveis. Uma delas é: supermercado, em seguida mecânico, em seguida banco e por último feira. A outra possibilidade é: supermercado, em seguida feira, em seguida mecânico e por último banco.

O número de ordenações das 4 tarefas é o número de permutações de 4 elementos, que é:

$$P(4) = 4! = 24 .$$

Observe que cada ordenação corresponde a um caminho que passa pelos 4 pontos e passa por cada ponto apenas uma vez. Reciprocamente, cada caminho que passa pelos 4 pontos e passa por cada ponto apenas uma vez corresponde a uma permutação do conjunto dos 4 pontos.

Temos, portanto:

O número de caminhos que passa por n pontos, passando por cada ponto apenas uma vez e começando em qualquer um dos pontos é $n!$

Resumo

Nesta aula iniciamos o estudo das permutações, onde o Princípio Multiplicativo é a ferramenta mais importante. Vimos também a definição de fatorial de um número inteiro.

Vimos que o número de permutações de um conjunto de n elementos é $n!$. Aplicamos esta fórmula a diversos exemplos.

Exercícios

1. Calcule:

   (a) $3!$ (b) $5!$ (c) $\dfrac{10!}{8!}$ (d) $\dfrac{12!}{10!2!}$

2. Se $12! = 479001600$, calcule $13!$.

3. O que é permutação de n elementos? Crie um exemplo de problema de permutação.

4. De quantas maneiras as letras da palavra $NUVEM$ podem ser permutadas?

5. De quantas maneiras 5 pessoas podem sentar em 5 cadeiras em uma fila?

6. Em um ponto de ônibus, 8 pessoas chegam ao mesmo tempo. De quantas maneiras elas podem formar uma fila?

7. Uma prova de natação é disputada por 6 nadadores. Quantos resultados são possíveis?

8. Uma pessoa deve realizar 5 tarefas em um mesmo dia. Se as 5 tarefas podem ser feitas em qualquer ordem, de quantas maneiras esta pessoa pode ordenar as tarefas?

9. Um estudante está planejando ler a trilogia de Machado de Assis, que é formada pelos livros:

   – *Memórias Póstumas de Brás Cubas*
   – *Quincas Borba*
   – *Dom Casmurro*

   Se os livros podem ser lidos em qualquer ordem, quantas ordens possíveis há para se ler a trilogia?

Machado de Assis (1839–1908) é considerado um dos maiores talentos literários brasileiros de todos os tempos.
Suas obras possuem um fino humor irônico e grande elegância de estilo.
Foi o principal fundador da Academia Brasileira de Letras e o seu primeiro presidente.

Aulas 7 e 8 – Arranjos e Combinações

Objetivos

Ao final desta aula, você deve ser capaz de:

Reconhecer situações de arranjo de n elementos tomados r a r, combinação de n elementos tomados r a r e permutações com elementos repetidos e resolver exercícios destas situações utilizando as fórmulas respectivas.

Introdução

Em muitos problemas devemos determinar o número de maneiras de selecionar r objetos em uma certa ordem dentro de um conjunto de n objetos distintos, onde $n \geq r$.

Estes são chamados problemas de *arranjo de n elementos, tomados r a r.*

Portanto, o número de arranjos de n elementos, tomados r a r, é o número de maneiras de selecionar, em ordem, r elementos de um conjunto de n elementos.

Devemos ressaltar que um problema é de arranjo se a *ordem* em que os r elementos são selecionados é importante. Se a ordem não for importante, temos um outro tipo de problema, chamado *combinação*, que veremos mais à frente nesta aula.

Vamos a um exemplo.

Exemplo 10

Em uma classe de 10 alunos, deve-se escolher um representante e seu suplente. De quantas maneiras isto pode ser feito?

Solução:

Trata-se de selecionar 2 dentro de uma turma com 10 alunos. A ordem é importante, pois o primeiro será representante e o segundo será suplente.

Temos 10 possibilidades para a primeira posição. Uma vez feita a escolha, restam 9 alunos, que são as 9 possibilidades para a segunda posição. Portanto, são:

$$\underline{10} \times \underline{\ 9\ } = 90$$

possibilidades para formação desta comissão.

Seja A(n,r) o número de arranjos de n elementos, tomados r a r. Em outras palavras, $A(n,r)$ é o número de maneiras de selecionar, em ordem, r elementos em um conjunto de n elementos distintos.

Em geral, se devemos selecionar, em alguma ordem, r objetos de um conjunto de n objetos ($n \geq r$) distintos, temos n maneiras de preencher a primeira posição, seguido de $n-1$ maneiras de preencher a segunda posição, seguido de $n-2$ maneiras de preencher a terceira posição, e assim por diante. Para a $r-$ésima posição, teremos $n-r+1$ possibilidades de preenchimento.

$$\underline{\quad n \quad} \times \underline{\ n-1\ } \times \underline{\ n-2\ } \times \ldots \times \underline{\ n-r+1\ } \ .$$

Usando o princípio multiplicativo, temos:

$$A(n,r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)\ .$$

Podemos escrever este resultado de uma forma mais compacta usando a notação fatorial:

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{[n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)][(n-r)(n-r-1)\ldots3.2.1]}{(n-r)(n-r-1)\ldots3.2.1} = \frac{n!}{(n-r)!}\ .$$

Temos, portanto, a fórmula:

$$\boxed{A(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}\ .}$$

Exemplo 11

Em uma reunião de condomínio onde 10 moradores estão presentes, deve-se escolher, entre eles, um síndico, um subsíndico, um secretário e um tesoureiro. De quantas maneiras isto pode ser feito?

Solução:

Este problema é o de selecionar, em ordem, 4 pessoas dentro de um conjunto de 10 pessoas. Este número é:

$$A(10,4) = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10.9.8.7.6!}{6!} = 10.9.8.7 = 5040\ .$$

Há, portanto, 5040 possibilidades.

Vamos a mais um exemplo:

Exemplo 12

Um empregador tem 3 tarefas distintas que deve distribuir para 6 empregados. De quantas maneiras ele pode fazer isto, se cada empregado pode realizar apenas uma tarefa e cada tarefa deve ser dada a apenas um empregado?

Solução:

Trata-se de escolher 3 empregados para dar as 3 tarefas. A ordem da escolha é importante porque as tarefas são distintas. Se as tarefas são T_1, T_2 e T_3, então podemos dar a tarefa T_1 ao primeiro empregado selecionado, a tarefa T_2 ao segundo empregado e a tarefa T_3 ao terceiro empregado selecionado.

O número de soluções é, portanto, o número de arranjos de 6 elementos, tomados 3 a 3. Portanto, são:

$$A(6,3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6.5.4.3!}{3!} = 6.5.4 = 120$$

maneiras de distribuir as tarefas.

Observe que os exemplos descrevem situações muito diferentes umas das outras, mas há um padrão: todos eles envolvem determinar o número de maneiras de selecionar, em ordem, um certo número de elementos de um conjunto. Isto é o que caracteriza o problema de arranjo.

Permutações com elementos repetidos

As permutações que estudamos até aqui envolviam conjuntos de objetos *distintos*. Porém, alguns problemas de contagem envolvem permutações com objetos repetidos.

Vamos começar calculando quantas são as permutações das letras da palavra ARARA.

Se passarmos um tempo tentando todas as reordenações possíveis das letras da palavra *ARARA*, encontraremos as 10 palavras abaixo:

$$\begin{array}{ccccc} ARARA & ARAAR & ARRAA & AAARR & AARAR \\ AARRA & RARAA & RAARA & RAAAR & RRAAA\,. \end{array}$$

Mas como poderíamos determinar que são 10 permutações, sem ter de listá-las?

Iniciaremos com uma palavra de 5 letras distintas, como em:

$$A_1R_1A_2R_2A_3 \ ,$$

onde A_1, A_2 e A_3 simbolizam letras distintas nas posições dos $A's$ e R_1, R_2 letras distintas nas posições dos $R's$ da palavra $ARARA$.

Como são 5 objetos distintos, temos $5! = 120$ permutações. Vamos agora contar estas 120 permutações de outra maneira. Seja x o número de permutações de $ARARA$. Para cada posição dos A's e R's, temos $3! = 6$ maneiras de distribuir os A_i's e $2! = 2$ maneiras de distribuir R_1 e R_2. Por exemplo, seja a permutação de $ARARA$ dada por $RARAA$. Então há $3! = 6$ maneiras de colocar os A_i's, que são:

$$\begin{array}{rr} RA_1RA_2A_3 & RA_1RA_3A_2 \\ RA_2RA_1A_3 & RA_2RA_3A_1 \\ RA_3RA_1A_2 & RA_3RA_2A_1 \end{array}$$

Uma vez que escolho a posição dos A_i's, por exemplo $RA_1RA_2A_3$, tenho $2! = 2$ maneiras de colocar R_1 e R_2, que são

$$R_1A_1R_2A_2A_3 \quad R_2A_1R_1A_2A_3$$

São x permutações da palavra $ARARA$, para cada uma delas $3!$ maneiras de colocar os A_i's e $2!$ maneiras de colocar os R_i's. Pelo princípio multiplicativo, o número total de permutações de $A_1R_1A_2R_2A_3$ é

$$x \times 3! \times 2! \, .$$

Por outro lado, este número é simplesmente o número de permutações de 5 objetos distintos, que é $5! = 120$. Portanto,

$$x \times 3! \times 2! = 120 \implies x = \frac{120}{3!2!} = \frac{120}{6.2} = 10 \, .$$

Exemplo 13

Quantas permutações existem para a palavra $BANANA$?

Solução:

Usando o mesmo raciocínio, se fossem 6 letras distintas teríamos $6! = 720$ permutações.

Seja x o número de permutações de $BANANA$. Se os 3 A's e os 2 N's fossem distintos, para cada permutação de $BANANA$, haveria $3! = 6$ maneiras de posicionar os A's e $2! = 2$ maneiras de posicionar os N's.

Portanto, pelo princípio multiplicativo,

$$x \times 3! \times 2! = 6!\,.$$

Logo,

$$x = \frac{6!}{3!2!} = \frac{720}{6.2} = 60\,.$$

Vale, em geral, o seguinte:

Dados N objetos, de modo que
N_1 são de um certo tipo,
N_2 são de tipo diferente dos anteriores,
$\cdots$
N_r são de um tipo diferente dos anteriores e
$N = N_1 + N_2 + \cdots N_r$,
então, o número de permutações destes n objetos é dado pela fórmula

$$\frac{N!}{N_1!N_2!\ldots N_r!}\,.$$

Para provar a fórmula acima, basta repetir o raciocínio que fizemos nos exemplos anteriores.

Se fossem N objetos distintos, teríamos $N!$ permutações. Seja x o número de permutações dos objetos. Então, para cada permutação dos objetos, existem

$N_1!$ maneiras de colocar objetos do primeiro tipo,
$N_2!$ maneiras de colocar objetos do segundo tipo,
$\vdots$
$N_r!$ maneiras de colocar objetos do $r-$ésimo tipo.

Pelo princípio multiplicativo, temos:

$$x.N_1!N_2!\ldots N_r! = N!\,;$$

logo,

$$x = \frac{N!}{N_1!N_2!\ldots N_r!}\,.$$

Exemplo 14

Em uma estante de uma loja de discos serão colocados 15 CD's de música popular brasileira, sendo 10 do Chico Buarque, 3 do Gilberto Gil e 2 do Djavan (sendo o mesmo CD de cada compositor). De quantas maneiras estes 15 CD's podem ser arrumados na estante?

Solução:

O número de maneiras de colocar os CD's é:

$$\frac{15!}{10!3!2!} = \frac{15.14.13.12.11.10!}{10!\,6.2} = \frac{15.14.13.12.11}{12} = 30\,030\,.$$

Exemplo 15

Uma pessoa tem 6 garrafas de vinho para servir em uma festa em sua casa. Os vinhos são de 3 tipos, 2 garrafas de cada tipo. Esta pessoa está preocupada com a ordem em que deve servir os vinhos. Quantas são as possibilidades?

Solução:

O número de ordenações possíveis para as garrafas são as permutações de 6 objetos, sendo os objetos de 3 tipos, 2 objetos de cada tipo. Usando a fórmula, temos:

$$\frac{6!}{2!2!2!} = \frac{720}{2.2.2} = 90\ .$$

Portanto, o dono da festa deve decidir entre 90 ordens diferentes em que pode servir os vinhos.

Combinações

Existem muitas situações em que estamos interessados em selecionar r objetos em um conjunto de n objetos, *sem nenhuma preocupação com a ordem*. Este tipo de problema é chamado de *Combinação*.

Exemplo 16

Um jogo de pôquer utiliza as 52 cartas de um baralho. Cada "mão" é formada por 5 cartas. Quantas "mãos" diferentes são possíveis?

Evidentemente esta pergunta assume grande importância para jogadores de pôquer, mas vamos tentar entender o problema combinatório envolvido.

Note que, neste caso, a ordem da seleção das cartas não é importante, pois as mesmas 5 cartas, independentemente da ordem, farão sempre o mesmo jogo.

O problema pode ser formulado da seguinte maneira:

"dado um conjunto de 52 objetos, de quantas maneiras podemos selecionar 5 objetos deste conjunto, sem levar em conta a ordem?"

Resolveremos este problema um pouco mais tarde, mas ainda nesta aula.

Sejam n e r inteiros, com $n \geq 0$ e $0 \leq r \leq n$. O número de combinações de n elementos tomados r a r, denotado por $C(n, r)$, é o número de maneiras de selecionarmos r objetos de um conjunto de n objetos distintos, não importando a ordem em que os objetos são retirados.

A notação $C(n, r)$ para número de combinações de n elementos tomados r a r é consistente com a notação $A(n, r)$ para número de arranjos. Contudo, usa-se também bastante a notação $\binom{n}{r}$, com o mesmo significado que $C(n, r)$.

Exemplo 17

De quantas maneiras podemos selecionar 3 objetos de um conjunto de 4 objetos distintos?

Solução:

Seja $X = \{a, b, c, d\}$ um conjunto de 4 objetos distintos. Podemos escolher 3 objetos de 4 formas distintas:

$$abc \quad acd \quad abd \quad bcd$$

Concluímos que $C(4, 3) = 4$.

Observe que cada uma destas escolhas corresponde a subconjuntos diferentes de X.

Desta forma, o conjunto X possui 4 subconjuntos com 3 elementos, que são:

$$\{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d\} \text{ e } \{b, c, d\} \ .$$

Assim, selecionar r objetos de um conjunto de n objetos é o mesmo que escolher um subconjunto de r elementos de um conjunto de n elementos, o que resulta em:

Sejam n, r inteiros não negativos, com $0 \leq r \leq n$. Qualquer conjunto de n elementos possui $C(n, r)$ subconjuntos.

Vimos acima que qualquer conjunto de 4 elementos possui 4 subconjuntos de 3 elementos. Logo sabemos que $C(4, 3) = 4$. Mas, em geral, ainda não sabemos como calcular $C(n, r)$.

Exemplo 18

Um grupo de 5 pessoas precisa escolher 2 delas para formar uma comissão. Quantas escolhas são possíveis?

Solução:

Vamos representar por $X = \{a, b, c, d, e\}$ o conjunto de 5 pessoas. As possibilidades para uma comissão de 2 pessoas (sem importar a ordem da escolha) são:

$$\begin{array}{llll} \{a,b\}, & \{a,c\}, & \{a,d\}, & \{a,e\} \\ \{b,c\}, & \{b,d\}, & \{b,e\} & \\ \{c,d\}, & \{c,e\} & & \\ \{d,e\} & & & \end{array}$$

No total, 10 comissões de 2 pessoas podem ser formadas.

No exemplo acima, concluímos que $C(5, 2) = 10$. Equivalentemente, todo conjunto de 5 elementos possui 10 subconjuntos de 2 elementos.

Assim, deduzimos o valor de $C(n, r)$ simplesmente listando todas as escolhas possíveis de r elementos a partir de um conjunto de n elementos. Vamos agora deduzir uma fórmula geral para $C(n, r)$.

Observe que, para cada escolha de r objetos de um conjunto de n objetos distintos, estes r objetos podem ser permutados de $r!$ maneiras.

Portanto, podemos relacionar o número de combinações de n elementos tomados r a r com o número de arranjos de n objetos tomados r a r da seguinte maneira: *cada combinação corresponde a $r!$ arranjos.*

Explicando um pouco melhor: considere um conjunto de n elementos. Cada combinação de r elementos é uma escolha de r elementos, sem importar a ordem. Cada arranjo de r elementos é uma escolha de r elementos, mas com uma ordem. Cada r elementos pode ser ordenado de $r!$ maneiras; logo cada r elementos fornece uma combinação e fornece $r!$ arranjos.

Isto é, temos $r!$ arranjos para cada combinação de r elementos. O número total de arranjos de n objetos tomados r a r é $A(n, r)$. Logo,

$$C(n, r) \times r! = A(n, r), \text{ isto é, } C(n, r) = \frac{A(n, r)}{r!}.$$

Mas vimos que

$$A(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!};$$

logo,

$$C(n,r) = \frac{A(n,r)}{r!} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}\,.$$

O que resulta em

$$\boxed{C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}\,.}$$

Exemplo 19

Um técnico convocou 12 jogadores para um time de basquete. Para armar o time que vai começar o jogo, deve selecionar 5 jogadores. De quantas maneiras pode fazê-lo?

Solução:

O número de combinações de 12 jogadores, tomados 5 a 5, é

$$C(12,5) = \frac{12!}{(12-5)!5!} = \frac{12!}{7!5!} = \frac{12.11.10.9.8.7!}{7!.120} = 11.9.8 = 792\,.$$

O técnico pode, portanto, formar 792 times de 5 jogadores utilizando os 12 jogadores convocados.

Exemplo 20

Voltemos ao exemplo das cartas do jogo de pôquer. Com um baralho de 52 cartas, quantas mãos de 5 cartas são possíveis?

Solução:

São possíveis

$$C(52,5) = \frac{52!}{(52-5)!5!} = \frac{52!}{47!5!} = \frac{52.51.50.49.48.47!}{47!.120} = 2598960$$

jogos diferentes. De todas estas possibilidades, apenas 4 formam um "Royal Flush", um dos jogos mais fortes do pôquer, que é quando as 5 cartas são o dez, valete, dama, rei e ás do mesmo naipe.

Exemplo 21

Uma turma possui 5 alunos e 6 alunas. Uma comissão deve ser formada entre todos os alunos, devendo ter 2 meninos e 2 meninas. Quantas comissões podem ser formadas?

Solução:

Podemos dividir a seleção de uma comissão como esta em duas etapas:

1. Escolher 2 alunos de um conjunto de 5 alunos.
2. Escolher 2 alunas de um conjunto de 6 alunas.

A primeira tarefa pode ser feita de

$$C(5,2) = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5.4.3!}{3!.2} = 10 \quad \text{maneiras},$$

enquanto a segunda etapa pode ser feita de

$$C(6,2) = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6.5.4!}{4!.2} = 15 \quad \text{maneiras},$$

Pelo princípio multiplicativo, temos um total de

$$10 \times 15 = 150$$

comissões possíveis.

Exemplo 22

Uma moeda é jogada 6 vezes. Quantos são os resultados possíveis? Quantos destes resultados têm 3 caras e 3 coroas?

Solução:

Já vimos anteriormente a solução da primeira parte. Temos 6 tarefas, sendo cada tarefa o lançamento de uma moeda. Cada tarefa tem 2 resultados possíveis (cara ou coroa). Portanto, são

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$$

resultados possíveis.

Para responder à segunda pergunta, quantos resultados têm 3 caras e 3 coroas, podemos pensar nos lançamentos como 6 objetos de um conjunto

$$M = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6\} \ ,$$

onde m_1 representa o resultado do primeiro lançamento, m_2 o do segundo lançamento etc.

Cada resultado com exatamente 3 caras corresponde à escolha de 3 elementos no conjunto M. Por exemplo, a escolha $\{x_1, x_3, x_5\}$ corresponde ao resultado de obtermos cara no primeiro, terceiro e quinto lançamentos e coroa nos demais.

Portanto, o número de resultados com exatamente 3 caras corresponde ao número de maneiras de selecionar 3 elementos de um conjunto de 6 elementos.

A solução é:

$$C(6,3) = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6.5.4.3!}{3!3!} = \frac{6.5.4}{6} = 20 \,.$$

Seguindo o mesmo raciocínio do exemplo anterior, obtemos a seguinte tabela, que mostra o número de resultados em que ocorrem os eventos listados na coluna da esquerda.

Evento	Nº de resultados favoráveis
6 coroas	1
1 cara e 5 coroas	$C(6,1) = 6$
2 caras e 4 coroas	$C(6,2) = 15$
3 caras e 3 coroas	$C(6,3) = 20$
4 caras e 2 coroas	$C(6,4) = 15$
5 caras e 1 coroa	$C(6,5) = 6$
6 caras	1
Total dos resultados possíveis	64

Na tabela anterior usamos a palavra *evento* para descrever um resultado, como "2 caras e 4 coroas", por exemplo. Usamos também a expressão "número de resultados favoráveis" para descrever o número de maneiras em que o evento ocorre. Isto é, entre todos os resultados possíveis, o número de resultados "favoráveis" àquele evento.

A expressão "resultados favoráveis" é muito utilizada na *teoria das probabilidades*, que estudaremos a partir da próxima aula.

Exemplo 23

Uma caixa de ovos contém 12 ovos, dos quais 2 estão rachados. Determine o seguinte:

1. De quantas maneiras pode-se selecionar 4 ovos da caixa?
2. Quantas das escolhas do item 1 contêm 2 ovos rachados?
3. Quantas das escolhas do item 1 contêm apenas 1 ovo rachado?
4. Quantas das escolhas do item 1 contêm apenas ovos bons?

Solução:

1. São 12 ovos e devemos selecionar 4 deles, onde a ordem não é importante. Portanto, são

   $$C(12,4) = \frac{12!}{8!4!} = \frac{12.11.10.9.8!}{8!.24} = 495$$

   escolhas possíveis.

2. Para determinarmos o número das escolhas que contêm 2 ovos rachados, podemos dividir a tarefa em duas partes:

   (a) Escolher 2 ovos rachados. Como há no total exatamente 2 ovos rachados, esta parte pode ser feita de apenas 1 maneira.

   (b) Escolher 2 ovos bons em um conjunto de $12 - 2 = 10$ ovos bons. Isto pode ser feito de

   $$C(10,2) = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10.9.8!}{2.8!} = 45$$

   maneiras.

   Assim, há $1 \times 45 = 45$ escolhas com exatamente 2 ovos rachados.

3. Podemos dividir a tarefa de realizar uma escolha com 3 ovos bons e 1 rachado em duas partes:

   (a) Escolher 1 ovo rachado no conjunto de 2 ovos rachados. Isto pode ser feito de 2 maneiras distintas.

   (b) Escolher 3 ovos bons em um conjunto de 10 ovos bons. Isto pode ser feito de

   $$C(10,3) = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10.9.8.7!}{6.7!} = 120$$

   maneiras distintas.

   Usando o princípio multiplicativo, o número total de escolhas com 3 ovos bons e 1 rachado é

   $$2 \times 120 = 240\,.$$

4. Usando as informações já obtidas, temos o seguinte: são 495 escolhas possíveis de 4 ovos. Entre essas, 45 escolhas têm 2 ovos rachados, 240 escolhas têm apenas 1 ovo rachado. Subtraindo, temos

   $$495 - 240 - 45 = 210$$

   escolhas com os 4 ovos bons.

Outra maneira de resolver: o número de escolhas de 4 ovos bons no conjunto de 10 ovos bons é

$$C(10,4) = \frac{10!}{6!4!} = \frac{10.9.8.7.6!}{6!.24} = 210\,.$$

Resumo

Nesta aula vimos a definição de arranjo de n elementos, tomados r a r, denotado $A(n,r)$, que é o número de maneiras de selecionar r elementos em um conjunto de n elementos, onde a ordem da escolha é importante.

Mostramos a fórmula $A(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ e a aplicamos à solução de alguns exemplos.

Vimos também problemas envolvendo permutação com repetição. Vimos que o número de permutações de N objetos, sendo N_1 de um certo tipo, N_2 de um outro tipo etc. onde $N = N_1 + N_2 + \ldots + N_r$, é dado pela fórmula

$$\frac{N!}{N_1!N_2!\ldots N_r!}\,.$$

Por último, vimos os problemas de combinação, onde a ordem da escolha de r elementos em um grupo de n elementos ($r \leq n$) não é importante. Há

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

maneiras desta escolha ser feita.

Exercícios

1. Calcule:

   (a) $A(5,3)$ (b) $A(2,1)$ (c) $A(5,5)$ (d) $A(20,18)$

2. De quantas maneiras 4 pessoas em uma família de 10 podem se colocar em uma foto?

3. Um departamento de uma Universidade tem 10 professores. Estes professores devem escolher um chefe e um vice-chefe do departamento. De quantas maneiras podem fazê-lo?

4. Calcule:

   (a) $C(5,2)$ (b) $C(3,3)$ (c) $C(10,10)$ (d) $C(10,0)$

5. Prove que
$$C(n,n) = C(n,0) = 1\ ,$$
para qualquer n inteiro não negativo.

6. Prove que
$$C(n,r) = C(n,n-r)\,,$$
para quaisquer inteiros não-negativos n, r, $0 \leq r \leq n$.

7. Quantos subconjuntos de quatro elementos têm um conjunto de dez elementos?

8. Uma comissão do Senado tem 12 senadores. Destes, serão escolhidos 4 para formar uma subcomissão. De quantas maneiras isto pode ser feito?

9. Um estudante recebe uma prova contendo 6 questões. Ele deve escolher 4 para resolver. De quantas maneiras ele pode fazer sua escolha?

10. Quantos inteiros de 3 dígitos podem ser formados, usando-se apenas os algarismos $\{2, 4, 5, 8, 9\}$, se não pode haver repetição? (Por exemplo, 552 não é válido).

11. Uma caixa contém 10 bolas numeradas de 1 a 10, sendo 4 azuis e 6 brancas. São retiradas 4 bolas. De quantas maneiras podemos ter os seguintes resultados:

    (a) Todas as bolas retiradas são brancas?

    (b) São retiradas 2 bolas brancas e 2 bolas azuis?

    (c) São retiradas 3 bolas brancas e 1 bola azul?

    (d) Todas as bolas retiradas são azuis?

12. Uma empresa está selecionando 6 novos funcionários a partir de uma lista de 10 candidatos pré-selecionados. Os candidatos são 5 homens e 5 mulheres. De quantas maneiras esta empresa pode fazer a seleção, sabendo-se que:

    (a) O sexo dos candidatos não será levado em conta para a escolha?

    (b) As vagas devem ser preenchidas com 3 homens e 3 mulheres?

Aula 9 – Introdução à Probabilidade: experimentos, espaço amostral e eventos.

Objetivos

Ao final desta aula, você deve ser capaz de:

- Aplicar diversos conceitos básicos da teoria da probabilidade.

  Veremos, especialmente, o que são experimentos determinísticos e experimentos aleatórios, espaço amostral e eventos.

Introdução

Caro aluno, você já se deu conta de que estamos o tempo todo fazendo perguntas, como: "fará sol, amanhã?" "Dará praia no final de semana?" "O professor adiará a prova?"

Estamos freqüentemente formulando questões para as quais não há uma resposta definitiva, pois isso exigiria de nós a capacidade de fazer uma previsão correta. O que podemos fazer, então, numa tentativa de nos aproximarmos do que seria a resposta, é avaliar quais as "chances" de acontecer cada resultado.

Questões desse tipo são tratadas pela Teoria das Probabilidades, que já foi chamada a "ciência da incerteza". Essa teoria descreve modelos apropriados para a explicação de fenômenos observáveis e tenta quantificar a chance desses fenômenos acontecerem.

"Um modelo é uma versão simplificada de algum problema ou situação da vida real destinado a ilustrar certos aspectos do problema sem levar em conta todos os detalhes (que talvez sejam irrelevantes para o problema)."
William J. Stevensen
Estatística Aplicada à Administração
SP: Harper & Row do Brasil, 1981.

Experimento: ação que geralmente pode ser repetida e com resultados observáveis.

Experimentos probabilísticos

Considere o seguinte experimento: uma moeda é lançada de uma determinada altura e o tempo necessário para que ela toque o chão é medido. Antes mesmo de realizar a experiência, temos condições de conhecer a resposta, porque existe uma equação da Física que fornece o tempo necessário para um corpo, em queda livre, percorrer uma certa distância.

Fenômeno...
O tempo que um corpo leva para cair de uma altura h, desprezada a resistência do ar, é $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, onde h é a distância percorrida e g é a aceleração da gravidade no local da realização do experimento.

Um fenômeno desse tipo é chamado de *determinístico*. Um experimento é determinístico quando sua realização tem resultado garantido, determinado por leis físicas ou matemáticas, ou pelas próprias condições nas quais o experimento é executado. Mais rigorosamente, trata-se de um "fenômeno que pode ser descrito" por um modelo determinístico. Se o experimento é repetido, sob as mesmas condições, produz o mesmo resultado. Tipicamente, um modelo determinístico é uma equação ou conjunto de equações relacionando os elementos presentes no experimento.

Em contrapartida, ao abandonar a moeda de uma certa altura e deixá-la cair sobre uma superfície, não podemos afirmar qual face ficará voltada para cima quando ela parar: se cara ou coroa. Sabemos que há somente essas duas possibilidades (descartamos a possibilidade de a moeda cair "em pé"!), mas não temos como garantir qual delas ocorrerá. Experimentos desse tipo são chamados *probabilísticos* ou *aleatórios*. Eles são o objeto de estudo da área da Matemática chamada Teoria das Probabilidades. São fenômenos que podem <u>ser descritos</u> por modelos probabilísticos.

Os experimentos probabilísticos ou aleatórios também são chamados, por alguns autores, de *randômicos*. A palavra *random*, em inglês, significa acaso, destino, e a expressão *at random* significa ao acaso, aleatoriamente.

Os experimentos aleatórios não produzem sempre o mesmo resultado, mas têm um comportamento estatisticamente regular, no sentido de que, considerando um número grande de realizações, cada resultado possível ocorre numa freqüência que pode ser avaliada. Assim, se lançarmos uma moeda equilibrada, repetidamente, um grande número de vezes, nossa intuição e nossa experiência nos levam a esperar que a quantidade de vezes de dar "cara" na face de cima será, aproximadamente, igual à de dar "coroa".

Uma moeda é equilibrada quando, ao ser lançada, a chance de dar cara é igual a de dar coroa. Também chamamos moeda "honesta". O mesmo se aplica a um dado. O contrário é um dado "viciado", isto é, aquele que tem uma chance maior de cair em uma certa face do que em outra.

Esses aspectos de regularidade dos experimentos aleatórios, investigados e analisados, permitem a construção de um modelo matemático e a atribuição, a cada resultado possível, de um número que reflita a "chance de ocorrência" desse resultado. Por exemplo, é comum ouvirmos uma frase como "há uma chance de 65% de chover amanhã". Mas, o que isto quer dizer?

Quando nos referimos a algum experimento, devemos explicitar dois componentes: a <u>ação</u> a ser executada e o <u>resultado</u> a ser observado. Explicando melhor: um experimento é uma ação que pode ser repetida e um certo resultado que queremos observar. Por exemplo, o experimento de jogar um dado (ação) e observar a face que cai voltada para cima (resultado).

Observe que dois experimentos diferentes podem consistir da mesma ação, mas com resultados observáveis diferentes. Por exemplo:

- experimento A: lançamos dois dados e observamos a maior das faces que caem para cima;
- experimento B: lançamos dois dados e observamos a soma das faces que caem para cima.

Os experimentos A e B são diferentes, embora a ação tenha sido a mesma (jogar dois dados).

Exemplo 24

Os experimentos abaixo são determinísticos:

1. Comprar uma dezena de canetas, a 5 reais cada, e determinar o custo total.
2. Percorrer 300km, a uma velocidade constante de 80km/h, e medir o tempo gasto.

Exemplo 25

Os experimentos a seguir são aleatórios:

1. Lançar um dado e observar o número da face de cima.
2. Contar os dias de chuva em determinado período.
3. Jogar duas moedas e anotar o par de resultados.
4. Jogar um dado três vezes e anotar quantos números pares ocorrem.

Espaço Amostral

Como vimos, experimentos aleatórios são aqueles que, mesmo quando realizados em idênticas condições, podem apresentar variações nos seus resultados. Queremos formular uma teoria matemática que descreva o experimento estudado. O primeiro passo no desenvolvimento de uma teoria matemática é construir um modelo matemático. Esse modelo será usado para predizer os resultados do experimento.

O conjunto formado pelos resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de *espaço amostral*. Vamos representá-lo por Ω.

Ω (ômega) é a última letra do alfabeto grego. Os símbolos ω e Ω representam o ômega minúsculo e maiúsculo, respectivamente.

Exemplo 26

Consideremos o experimento de lançar um dado e observar o número da face de cima. Sabemos que os únicos resultados possíveis são 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Para este experimento temos, então, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Exemplo 27

Vamos supor, agora, que jogamos uma moeda e observamos a face de cima. Podemos indicar o espaço amostral desse experimento por $\Omega = \{K, C\}$, onde K indica cara e C indica coroa.

Exemplo 28

Para o experimento "lançar uma moeda duas vezes e anotar o par de faces de cima" temos o seguinte espaço amostral: $\Omega = \{(K,K),(K,C),(C,K),(C,C)\}$.

Lembre-se de que, para identificar o espaço amostral de um certo experimento, devemos levar em conta as duas atividades que o caracterizam:

– a operação realizada, e

- o que queremos observar.

Compare os dois exemplos a seguir.

Exemplo 29

Seja o experimento "lançar uma moeda quatro vezes e anotar a seqüência de faces observadas". O espaço amostral Ω é formado por todas as possíveis quádruplas de resultados:

$$\Omega = \{(K,K,K,K),(K,K,K,C),\ ...,\ (K,C,C,C),(C,C,C,C)\}\ .$$

Neste caso, $\#\Omega = 2^4 = 16$,

isto é, existem 16 resultados possíveis.

$\#\Omega$ lê-se *cardinalidade* de Ω. O símbolo $\#$, precedendo o nome de um conjunto, indica a cardinalidade (número de elementos) desse conjunto.

Exemplo 30

Considere o experimento "lançar uma moeda quatro vezes e anotar o número de caras obtido". Neste caso, o espaço amostral é $\Omega = \{0,1,2,3,4\}$ e $\#\Omega = 5$.

Os exemplos 29 e 30 consistem em experimentos com a mesma ação, mas com a observação de resultados distintos.

Exemplo 31

Consideremos o experimento que consiste em lançar dois dados e anotar o par de números resultantes. Para identificar seu espaço amostral, podemos pensar que o primeiro dado é rosa e que o segundo dado é branco. Teremos, então diferentes resultados se forem observados 2-branco seguido de 3-rosa ou 3-branco seguido de 2-rosa. O diagrama abaixo fornece uma representação gráfica dos elementos de Ω:

branco → rosa ↓	1	2	3	4	5	6	
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	resultados possíveis
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)	(elementos de Ω)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)	
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)	

Por exemplo, o par $(5, 2)$ é a situação da figura a seguir.

Sendo assim, os possíveis resultados são todos os pares ordenados (i, j), com $i = 1, \ldots, 6$ e $j = 1, ..., 6$. Podemos dizer que

$$\Omega = \{(i, j) \mid i = 1, \ldots, 6,\ j = 1, \ldots, 6\} .$$

Exemplo 32

Quantos são os resultados possíveis na loteria esportiva?

Solução:

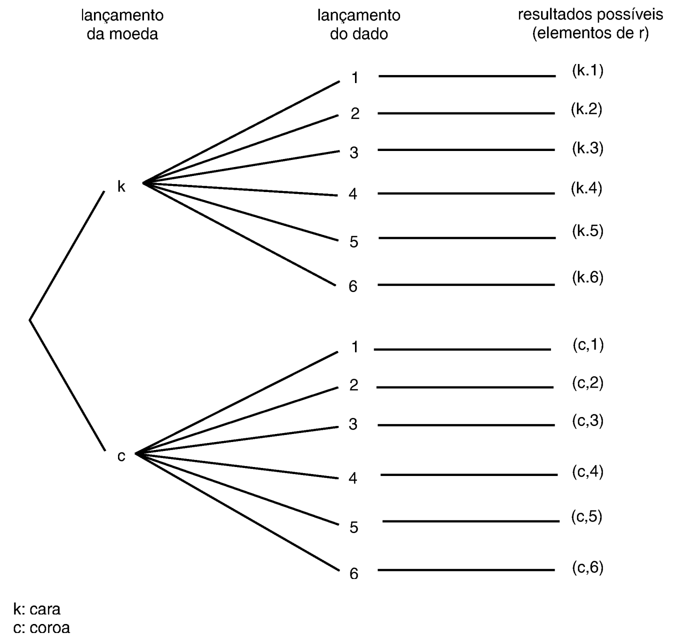
A loteria esportiva é composta de 13 jogos. Para cada jogo, é claro, são possíveis três resultados, que se traduzem em "coluna da esquerda", "coluna do meio"e "coluna da direita". Logo, $\#\Omega = \underbrace{3 \times ... \times 3}_{13\ termos} = 3^{13}$.

Exemplo 33

O lançamento de três dados possui $6 \times 6 \times 6 = 216$ resultados possíveis.

Exemplo 34

Consideremos o experimento "lançar uma moeda e um dado e anotar o par de resultados". Sabemos que para o lançamento da moeda há dois resultados possíveis: cara e coroa. Para o dado, são seis as possibilidades: 1,2,3,4,5,6. Pelo Princípio Multiplicativo, temos um total de $2 \times 6 = 12$ elementos em Ω.



Retirada com e sem reposição

Quando realizamos um experimento em que retiramos algo mais de uma vez, devemos sempre observar se o objeto retirado é ou não reposto antes da próxima retirada. Uma retirada com reposição é um experimento diferente de uma retirada sem reposição.

O próximo exemplo mostra a diferença que pode ocorrer quando uma retirada é feita *com* ou *sem* reposição.

Exemplo 35

Em uma urna há 4 bolas numeradas de 1 a 4. Duas bolas são retiradas, uma em seguida à outra, e seus números são anotados. Dê o espaço amostral em cada caso:

1. as bolas são retiradas sem reposição;

2. a primeira bola é devolvida à urna antes de se retirar a segunda bola.

Solução:

1. Neste caso, temos
$\Omega = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}$ e então $\#\Omega = 12$.

2. Como a primeira bola é devolvida, nas duas retiradas a urna contém o total inicial de bolas. Logo, neste caso,

$$\Omega = \{(i,j) \mid i = 1,2,3,4 \text{ e } j = 1,2,3,4\} \text{ e } \#\Omega = 16 .$$

Freqüência relativa de um resultado

A Teoria das Probabilidades se baseia nos aspectos de regularidade dos experimentos aleatórios. Vamos caracterizar melhor esses aspectos mencionados e responder à pergunta que fizemos na aula anterior: qual o significado de uma frase como "temos uma chance de 30% de ganhar um jogo"?

Se um experimento aleatório é repetido uma certa quantidade de vezes, a **freqüência relativa** de um certo resultado do experimento é a razão entre o número (m) de vezes que este resultado foi obtido e o número (n) de realizações do experimento.

Exemplo 36

Suponhamos que o experimento "lançar uma moeda equilibrada e observar a face de cima" foi realizado n vezes. A tabela abaixo mostra o número de ocorrências do resultado "cara" (m) e a freqüência relativa de caras (m/n).

número de lançamentos (n)	número de caras (m)	freqüência relativa de caras (m/n)
10	6	$0,6000$
100	46	$0,4600$
1.000	524	$0,5240$
10.000	5.100	$0,5100$
20.000	10.026	$0,5013$
50.000	25.025	$0,5005$

Conforme o número de lançamentos vai aumentando, a freqüência relativa vai se aproximando de $0,5 (= \frac{1}{2})$. Como o lançamento de uma moeda possui apenas dois resultados possíveis, sendo a moeda equilibrada, o valor $\frac{1}{2}$ para o resultado "cara" atende à expectativa do observador.

De uma forma mais geral, consideremos que um experimento é repetido, em condições idênticas, um número arbitrariamente grande de vezes. Suponha que, em n realizações desse experimento, um certo resultado E é observado m vezes. A fração m/n é a *freqüência relativa do resultado E após n repetições do experimento.*

Eventos

Na aula anterior, vimos que, em um mesmo experimento, podemos estar interessados em diferentes resultados (como nos exemplos 29 e 30 da Aula 15). Nesta aula vamos caracterizar o conjunto de todos os possíveis alvos de nossa observação na realização de um experimento aleatório.

Consideremos o experimento "lançar um dado e anotar o resultado". Como vimos na Aula 14, o espaço amostral desse experimento é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Se você apostar na ocorrência de um número par, terá sucesso, caso o resultado seja o número 2 ou o número 4 ou o número 6.

Isto é, se ocorrer qualquer resultado do conjunto

$$A = \{2, 4, 6\}$$

A é um subconjunto do espaço amostral Ω. Por isso, dizemos que A é um *evento* associado a esse experimento.

Um evento é qualquer subconjunto do espaço amostral.

Após realizado o experimento, dizemos que *ocorreu um evento* E se o resultado observado for um elemento de E.

Vimos nas aulas 4 e 5 que um conjunto de n elementos possui 2^n subconjuntos. Logo, um experimento cujo espaço amostral possua cardinalidade n admite 2^n eventos distintos.

O conjunto vazio denomina-se *evento impossível*. É um evento que nunca ocorre, o evento $E = \emptyset$.

O conjunto Ω denomina-se *evento certo*. É um evento que sempre ocorre, o evento $E = \Omega$.

Os subconjuntos unitários chamam-se *eventos elementares* (ou *simples*). Eventos com mais de um elemento são compostos de eventos elementares, por isso também são chamados de *eventos compostos*.

Exemplo 37

Consideremos que uma moeda é lançada duas vezes e o par de resultados é anotado. Representando por K e C os resultados "cara"e "coroa", respectivamente, sabemos que $\Omega = \{(K, K), (K, C), (C, K), (C, C)\}$. Como $\#\Omega = 4$, há $2^4 = 16$ eventos associados a Ω, que listamos a seguir, com uma possível interpretação para cada um:

$\emptyset$	obter 3 caras (ou qualquer outro resultado impossível)
$\{(K,K)\}$	obter 2 caras
$\{(K,C)\}$	obter cara no $1^{o.}$ lançamento e coroa no $2^{o.}$
$\{(C,K)\}$	obter coroa no $1^{o.}$ lançamento e cara no $2^{o.}$
$\{(C,C)\}$	obter 2 coroas
$\{(K,K),(K,C)\}$	obter cara no $1^{o.}$ lançamento
$\{(K,K),(C,K)\}$	obter cara no $2^{o.}$ lançamento
$\{(K,K),(C,C)\}$	obter resultados iguais
$\{(K,C),(C,K)\}$	obter resultados diferentes
$\{(K,C),(C,C)\}$	obter coroa no $2^{o.}$ lançamento
$\{(C,K),(C,C)\}$	obter coroa no $1^{o.}$ lançamento
$\{(K,K),(K,C),(C,K)\}$	obter pelo menos uma cara
$\{(K,K),(K,C),(C,C)\}$	não ocorrer o par (C,K)
$\{(K,K),(C,K),(C,C)\}$	não ocorrer o par (K,C)
$\{(K,C),(C,K),(C,C)\}$	obter pelo menos uma coroa
Ω	obter cara ou coroa em cada lançamento

Exemplo 38

Considere o experimento "lançar um dado e observar o número da face de cima". Vamos explicitar, em forma de conjuntos, os seguintes eventos:

1. A: sair o número 5
2. B: sair um número menor que 5
3. C: sair um número maior que 8
4. D: sair um número par
5. E: sair um número primo
6. F: sair um número inteiro positivo menor que 7

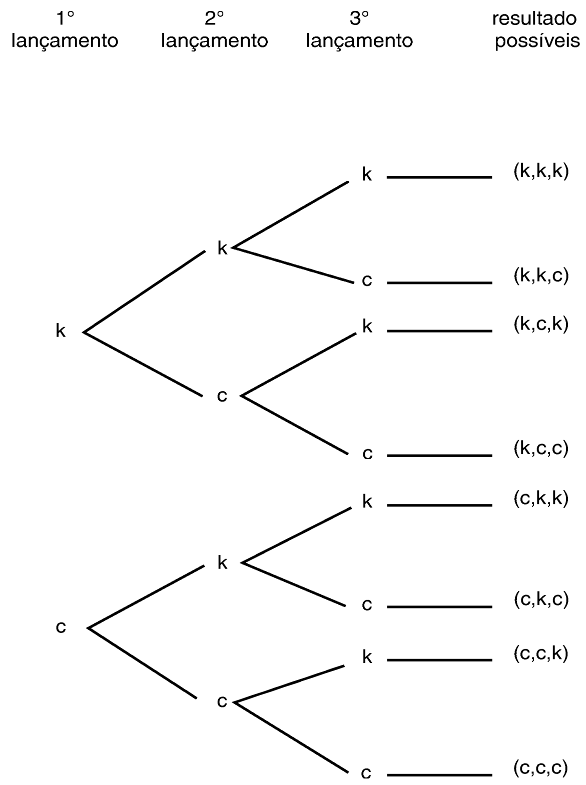
Solução:

O espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Os eventos acima são:

1. $A = \{5\}$. Note que A é um evento elementar.
2. $B = \{1, 2, 3, 4\}$
3. $C = \phi$, pois não há resultado maior do que 8; o maior resultado possível é 6. C é evento impossível.
4. $D = \{2, 4, 6\}$
5. $E = \{2, 3, 5\}$
6. $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$. F é evento certo.

Exemplo 39

O experimento agora é: "lançar uma moeda três vezes e anotar o par de resultados obtidos". Primeiramente, vamos explicitar o espaço amostral desse experimento. Como antes, vamos representar por K o evento "sair cara" e por C o evento "sair coroa", temos:



$\Omega = \{(K,K,K),(K,K,C),(K,C,K),(K,C,C),(C,K,K),(C,K,C),$
$(C,C,K),(C,C,C)\}.$

Note que $\#\Omega = 2^3 = 8$.

A partir daí, vamos explicitar os seguintes eventos:

1. A: sair exatamente uma cara
2. B: sair pelo menos uma cara
3. C: saírem exatamente 2 coroas
4. D: sair, no máximo, uma coroa
5. E: saírem os três resultados iguais

Solução:

1. $A = \{(K, C, C), (C, K, C), (C, C, K)\}$

2. $B = \{K, K, K), (K, K, C), (K, C, K), (C, K, K), (C, C, K),$
   $(C, K, C), (K, C, C)\}$.

   Note que "pelo menos uma"implica uma ou mais. No caso, temos as possibilidades uma, duas ou três.

3. $C = \{(C, C, K), (C, K, C), (K, C, C)\}$.

4. $D = \{(K, K, K), (K, K, C), (K, C, K), (C, K, K)\}$.

   Note que "no máximo uma"implica uma ou menos. Claro que só temos as possibilidades uma ou nenhuma.

5. $E = \{(K, K, K), (C, C, C)\}$

Exemplo 40

Experimento: "sortear um número de 1 a 50".
Neste caso, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, ..., 50\}$. Vamos representar os seguintes eventos:

1. A: sair um número par

2. B: sair um número múltiplo de 10

3. C: sair um número divisível por 3 e por 5

4. D: sair um número divisível por 3 ou por 5

Discutimos sobre "e"(interseção) e "ou"(união) na Ala 4.

Solução:

1. $A = \{2, 4, 6, 8, 10, ..., 50\}$. Note que $\#A = 25$.

2. $B = \{10, 20, 30, 40, 50\}$ e $\#B = 5$.

3. Se um número é divisível por 3 e por 5, simultaneamente, ele é divisível por 15. Logo, $C = \{15, 30, 45\}$ e $\#C = 3$.

4. Neste caso, D é a união do conjunto dos múltiplos de 3 com o conjunto dos múltiplos de 5. Logo,
   $D = \{3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 21, 24, 25, 27, 30, 33, 35, 36, 39, 40,$
   $42, 45, 48, 50\}$ e $\#D = 23$.

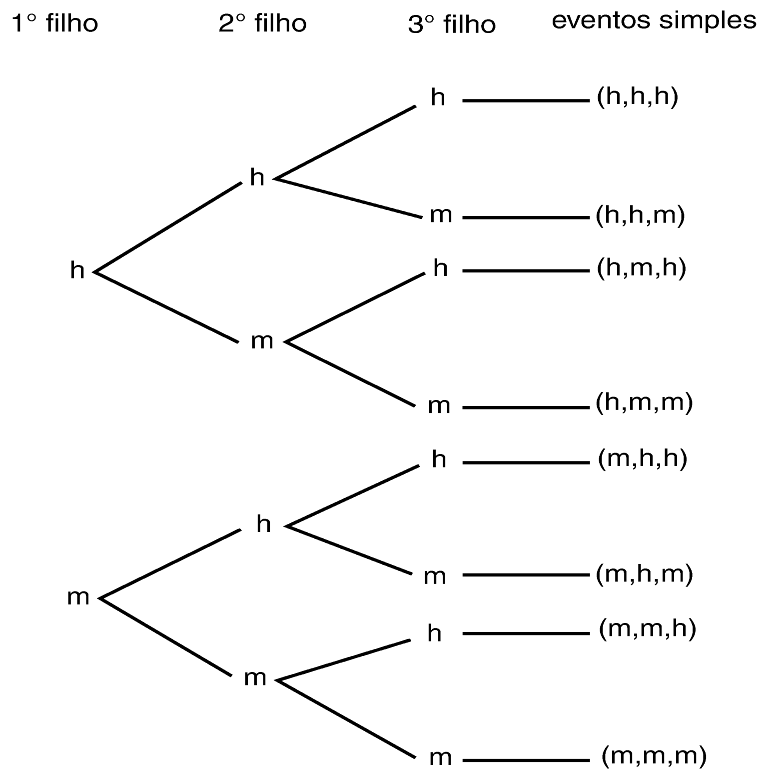
Exemplo 41

Consideremos o experimento: estudar a composição de uma família de três filhos, todos nascidos em datas distintas (ou seja, sem ocorrência de gêmeos).

1. Determine um espaço amostral apropriado para esse experimento.
2. Descreva o evento A: "há um menino e duas meninas na família".
3. Descreva o evento B: "o filho mais velho é um menino".
4. Descreva o evento C: "a criança mais velha é um menino e a mais nova, uma menina".

Solução:

1. Representando "menino" por h e "menina" por m, podemos obter o espaço amostral com o auxílio do seguinte diagrama para famílias com três filhos:



Logo, podemos escrever

$$\Omega = \{(h,h,h),(h,h,m),(h,m,h),(h,m,m),(m,h,h),(m,h,m),\\ (m,m,h),(m,m,m)\}\ .$$

Usando o diagrama, temos o seguinte:

2. A $= \{(h,m,m),(m,h,m),(m,m,h)\}$.
3. B $= \{(h,h,h),(h,h,m),(h,m,h),(h,m,m)\}$.
4. C $= \{(h,h,m),(h,m,m)\}$.

Obtenção de eventos a partir de outros

A partir de eventos (simples ou compostos) podemos obter novos eventos, usando as operações de união, interseção e diferença de conjuntos. Relembrando: sendo A e B dois eventos de um espaço amostral Ω (isto é, A e B subconjuntos de Ω), temos:

Evento **união** de A e B: $A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$

Evento **interseção** de A e B: $A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$

Evento **diferença** de A e B: $A - B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$

Em particular, se $A \subset \Omega$ é um evento, então:

$\overline{A} = \Omega - A = \{x \in \Omega | x \notin A\}$ é o complementar de A (em Ω). O evento $\overline{A}$ é chamado *evento complementar* de A.

Assim, sendo E um experimento e A e B eventos de E, podemos definir os seguintes eventos de E:

$A \cup B$: evento que ocorre quando ocorrem A ou B

$A \cap B$: evento que ocorre quando ocorrem A e B

$\overline{A} = \Omega - A$: evento que ocorre quando não ocorre A

No caso em que $A \cap B = \emptyset$, dizemos que os eventos A e B são *mutuamente exclusivos* (ou mutuamente excludentes). Como o próprio nome indica, eventos mutuamente exclusivos não podem ocorrer simultaneamente. Dois eventos simples distintos, associados a um mesmo experimento, são sempre mutuamente exclusivos, pois se $A = \{a\}$ e $B = \{b\}$, então $A \cap B = \emptyset$, se $a \neq b$.

Exemplo 42

Seja o experimento "lançar um dado e anotar o número da face de cima". Consideremos os seguintes eventos associados a esse experimento:

A: sair número menor que 5 $\rightarrow$ $A = \{1, 2, 3, 4\}$
B: sair número par $\rightarrow$ $B = \{2, 4, 6\}$
$C = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
$D = \{2, 4, \}$
E: sair número ímpar $\rightarrow$ $E = \{1, 3, 5\}$
Observe que:

$C = A \cup B$
$D = A \cap B$
$E = \Omega - B$ (ou seja, $E \cup B = \Omega$)

Então, dado um certo experimento, sempre podemos, a partir de eventos dados, obter outros eventos, usando as operações de união, interseção e complementar de conjuntos vistas na Aula 1.

Freqüência relativa de um evento

Na Aula 15 vimos que a freqüência relativa de cada resultado (ou evento simples) de um experimento realizado n vezes é a razão entre o número m de ocorrências desse resultado e o número n.

Podemos estender essa definição a um evento qualquer associado ao experimento:

> Se em n repetições de um experimento, o evento A ocorre n_A vezes, então, $f_A = \frac{n_A}{n}$ é denominada *freqüência relativa do evento A nas n repetições do experimento.*

A freqüência relativa f_A apresenta as seguintes propriedades:

1. $0 \leq f_A \leq 1$ (pois $n_A \geq 0$ e $n_A \leq n$. Logo, $0 \leq \frac{n_A}{n} \leq 1$).

2. $f_A = 1$ se, e somente se, A ocorre em todas as n repetições do experimento (pois, neste caso, $n_A = n$).

3. $f_A = 0$ se, e somente se, A não ocorre em nenhuma das n repetições do experimento.

4. Se A e B são eventos associados a esse experimento, representando por $f_{A\cup B}$ e $f_{A\cap B}$ as freqüências relativas dos eventos $A \cup B$ e $A \cap B$, respectivamente, então $f_{A\cup B} = f_A + f_B - f_{A\cap B}$. Essa relação parte do *princípio da inclusão-exclusão.*

O princípio da inclusão-exclusão afirma que, dados os conjuntos A, B e C, então $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$.

5. Se A e B são eventos associados a esse experimento, mutuamente exclusivos, representando por $f_{A\cup B}$ a freqüência relativa do evento $A \cup B$, então $f_{A\cup B} = f_A + f_B$. Esta relação deriva imediatamente da propriedade 4, no caso $A \cap B = \emptyset$.

Observação. Para simplificar a notação de freqüência relativa de um evento simples e, em vez de escrever $f_{\{e\}}$, escreveremos simplesmente f_e.

Exemplo 43

Seja $\Omega = \{a, b, c, d\}$ o espaço amostral de um experimento que é realizado repetidamente. A tabela a seguir lista o número de ocorrências de cada evento simples associado ao experimento:

evento	{a}	{b}	{c}	{d}
número de ocorrências	285	280	220	215

;

determine:

1. A freqüência relativa de cada evento simples.
2. A freqüência relativa do evento $\{a\} \cup \{b\}$.
3. A freqüência relativa do evento $\overline{\{c\}}$.

Solução:

Temos um total de $285 + 280 + 220 + 215 = 1000$ repetições do experimento. Então:

1.
$$f_a = \frac{285}{1000} = 0,285$$
$$f_b = \frac{280}{1000} = 0,280$$
$$f_c = \frac{220}{1000} = 0,220$$
$$f_d = \frac{215}{1000} = 0,215$$
2. $f_{\{a\}\cup\{b\}} = f_a + f_b = 0,565$
3. Note que $\overline{\{c\}} = \{a, b, d\}$. Então $f_{\overline{\{c\}}} = f_a + f_b + f_d = 0,780$

Resumo

Nesta aula apresentamos alguns dados sobre a evolução do estudo das probabilidades e você aprendeu a distinguir fenômenos aleatórios de fenômenos determinísticos.

Estudamos o conceito de espaço amostral, definimos eventos como subconjuntos do espaço amostral e aprendemos a explicitar eventos em forma de conjuntos.

Usamos as operações de conjuntos vistas em aulas anteriores para definir os eventos união, interseção e complementar, a partir de eventos dados.

Com isto, estudamos todos os conceitos importantes e necessários para que possamos definir probabilidade. É o que faremos na próxima aula.

Exercícios

1. Dê o espaço amostral de cada um dos experimentos a seguir:
   (a) Lançar duas moedas e anotar o par de faces de cima.
   (b) Lançar duas moedas e anotar o número de "caras".
   (c) Jogar um dado duas vezes e anotar a soma dos números obtidos.

2. Classificar cada experimento a seguir como determinístico ou aleatório:
   (a) Lançar 3 moedas e anotar o número de caras obtidas.
   (b) Obter um número que, somado a 7, resulte 13.
   (c) Rodar a bolinha de uma roleta e observar o número em que ela pára.

3. Em cada caso abaixo é descrita uma ação. Enuncie algo a ser observado, associado a cada ação, de modo a caracterizar um fenômeno aleatório:
   (a) Lançar um dado três vezes.
   (b) Retirar, sem reposição, duas cartas de um baralho de 52 cartas.

4. Dê o espaço amostral e sua cardinalidade, para cada um dos experimentos abaixo.
   (a) Retirar uma bola de uma urna que contém bolas brancas e pretas e verificar sua cor.
   (b) Jogar um dado duas vezes e anotar a seqüência de números obtidos.
   (c) Jogar um dado três vezes e anotar a quantidade de números pares obtidos.

5. Determine o número de resultados em cada um dos seguintes experimentos:
   (a) Um dado verde e um dado vermelho são lançados e é anotado o par de números obtidos.
   (b) Um dado verde e um dado vermelho são lançados e é anotada a soma dos números que aparecem.
   (c) São feitos exames de sangue numa escola. O tipo de sangue (A, B, AB ou O) e a presença ou ausência do fator Rh (Rh^+ ou Rh^-) de cada aluno são anotados.

6. Para cada experimento abaixo, determine o espaço amostral e explicite, em forma de conjuntos, os eventos dados (caso o número de elementos seja muito grande, apenas descreva o conjunto), indicando a cardinalidade de cada um:

   (a) Experimento: "lançar 3 moedas e anotar os ternos de resultados".

   Eventos:
   - A: saírem 3 caras
   - B: saírem, pelo menos, 2 caras
   - C: saírem, no máximo, 2 coroas
   - D: saírem número de caras e coroas iguais
   - E: saírem 3 coroas

   (b) Experimento: "lançar um dado duas vezes e anotar os resultados".

   Eventos:
   - A: obter dois números pares
   - B: obter números somando 10
   - C: obter dois números primos
   - D: obter dois números iguais
   - E: obter números somando 12

7. Considere o lançamento de um dado e a observação do número da face de cima. Sejam os eventos:

   E: número par
   F: número ímpar
   G: número maior ou igual a 5

   (a) Descreva o evento $E \cup F \cup G$
   (b) Descreva o evento $E \cap F \cap G$
   (c) Os eventos E e F são mutuamente exclusivos? Justifique.
   (d) Os eventos F e G são mutuamente exclusivos? Justifique.

8. Seja Ω o espaço amostral de um experimento e A, B e C eventos associados a esse experimento. Descreva os eventos abaixo, usando a notação das operações de conjuntos:

   (a) Ocorrer A ou ocorrer B
   (b) Ocorrerem A e B
   (c) Ocorrer A mas não ocorrer B
   (d) Não ocorrer C
   (e) Não ocorrer nenhum dos eventos A, B e C
   (f) Ocorrer A mas não ocorrer B nem C

Aula 10 – Probabilidades

Objetivos

Definir probabilidade de ocorrência de eventos associados a experimentos aleatórios.

Introdução

Estamos agora em condições de atribuir um número a cada evento associado a um experimento aleatório, que avaliará a chance de ocorrência desse evento. Este número é a probabilidade de ocorrência do evento.

Poderíamos resolver o problema da seguinte forma: repetir o experimento um número grande de vezes, calcular a freqüência relativa de cada evento e adotar esse número como a probabilidade de ocorrência do evento considerado. As propriedades da freqüência relativa demonstram que esse número indica, de maneira bastante precisa, a chance de um dado evento ocorrer. Além disso, aumentando a quantidade de realizações do experimento, é de se esperar que cada freqüência relativa se aproxime, cada vez mais, de um certo número. Esse número seria o candidato ideal para a probabilidade do evento considerado.

Há, porém, duas grandes dificuldades em se adotar a freqüência relativa como valor da probabilidade de um evento:

- quantas vezes se deve repetir o experimento para se ter um valor da freqüência relativa que seja aceitável (ou: o que significa um grande número de vezes)?

- para uma mesma quantidade de repetições do experimento, os valores obtidos para as freqüências relativas podem variar de um experimentador para outro; assim, o número adotado dependeria de experimentação.

Desejamos um meio de obter tal número sem depender de experimentações, mas de modo que o número definido possa refletir o que observamos.

Daremos, a seguir, uma definição formal e, mais tarde, faremos considerações sobre os aspectos que acabamos de mencionar.

Probabilidade de um evento simples

Consideremos um experimento aleatório com espaço amostral finito

$$\Omega = \{e_1, e_2, ..., e_n\} \ .$$

A cada evento simples e_i corresponde um número real representado por $P(\{e_i\})$, ou simplesmente $P(e_i)$, denominado *probabilidade de* $\{e_i\}$, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições:

1. $P(e_i) \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., n$
2. $P(e_1) + P(e_2) + ... + P(e_n) = 1$

Veja que o número real associado ao evento simples $\{e_i\}$ é completamente arbitrário. Por exemplo, considerando o lançamento de um dado, a definição de probabilidade permite que façamos a seguinte associação:

evento	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$
probabilidade	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$

Embora essa atribuição de valores não nos pareça natural, por não refletir o que observamos quando lançamos um dado repetidas vezes (embora possamos admitir a existência de um dado balanceado para isso), é rigorosamente aceitável, do ponto de vista matemático, uma vez que atende à definição.

Exemplo 44

Uma moeda é balanceada de modo que a chance de dar CARA é 5 vezes a chance de dar COROA. Qual a probabilidade de dar CARA?

Solução

Representando por $P(K)$ e $P(C)$ as probabilidades de dar cara e coroa, respectivamente, temos que $P(K) = 5P(C)$. Pela definição de probabilidade, temos também que $P(K) + P(C) = 1$. Daí, $6P(C) = 1$, donde $P(C) = \frac{1}{6}$. Logo, a probabilidade de dar cara é $1 - P(C) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Seja um experimento aleatório com espaço amostral finito Ω. Atribuir uma probabilidade a cada elemento de Ω é definir uma *distribuição de probabilidades* para Ω. A partir de uma distribuição de probabilidades, podemos definir a probabilidade de um evento qualquer associado a esse experimento.

Probabilidade de um evento

Consideremos um experimento aleatório com espaço amostral finito

$$\Omega = \{e_1, e_2, ..., e_n\} \ .$$

Seja E um evento associado a esse experimento. Definimos a probabilidade de ocorrência de E, indicada por $P(E)$, como segue:

1. se $E = \emptyset$, $P(E) = P(\emptyset) = 0$.

2. se E é união de r eventos simples, $E = \{e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}\}$, então

   $P(E) = P(e_{i_1}) + ... + P(e_{i_r})$.

Em particular,

$$P(\Omega) = P(e_1) + ... + P(e_n) = 1 \ .$$

Exemplo 45

Duas moedas são lançadas e as faces de cima anotadas. O espaço amostral desse experimento é $\Omega = \{(K, K), (K, C), (C, K), (C, C)\}$, no qual K representa "cara"e C representa "coroa". Considere o evento A: "sair faces iguais". Determine a probabilidade de A, para cada distribuição de probabilidade a seguir:

1. $P((K, K)) = P((K, C)) = P((C, K)) = P((C, C)) = \frac{1}{4}$.

2. $P((K, K)) = \frac{4}{9}$; $P((K, C)) = P((C, K)) = \frac{2}{9}$; $P((C, C)) = \frac{1}{9}$.

Solução:

O evento A é $\{(K, K), (C, C)\}$. Então,

$$P(A) = P((K, K)) + P((C, C)) \ .$$

Logo,

1. $P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

2. $P(A) = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$.

Exemplo 46

Suponhamos que um dado foi construído de modo que a probabilidade de cada face seja proporcional ao número de pontos dessa face. Qual a probabilidade de se obter um número par de pontos num lançamento desse dado?

Solução:

O espaço amostral desse experimento é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Seja x a probabilidade de sair a face 1. Então:

$$\begin{aligned} P(1) &= x \\ P(2) &= 2x \\ P(3) &= 3x \\ P(4) &= 4x \\ P(5) &= 5x \\ P(6) &= 6x \end{aligned}$$

Pela definição de probabilidades, esses valores têm de satisfazer à relação $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$.
Logo, $x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x = 1 \Rightarrow 21x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{21}$.

Estamos interessados no evento $A = \{2, 4, 6\}$.
Então $P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = 2x + 4x + 6x = 12x = 12 \times \frac{1}{21} = \frac{4}{7}$.

Eventos simples eqüiprováveis

Consideremos um dado equilibrado, isto é, um dado no qual todas as faces têm a mesma chance de sair voltadas para cima.

Para o experimento de lançar esse dado e observar o número da face de cima, sabemos que $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Como $P(e_1) + ... + P(e_6) = 1$, segue que cada probabilidade será $P(e_i) = \frac{1}{6}$.

De maneira análoga, considerando-se o lançamento de uma moeda equilibrada, temos $P(\text{cara}) = P(\text{coroa}) = \frac{1}{2}$.

De modo geral, quando todos os resultados de um experimento aleatório têm a mesma chance de ocorrer, dizemos que são *eqüiprováveis*. O espaço amostral é chamado *espaço amostral eqüiprovável*.

Seja $\Omega = \{e_1, ..., e_n\}$ o espaço amostral de um experimento aleatório.
Se Ω é eqüiprovável, então

$$P(e_i) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, ..., n\,.$$

Neste caso, a distribuição de probabilidades é chamada *distribuição uniforme*.

Exemplo 47

Consideremos o lançamento de um dado equilibrado. Determine a probabilidade de cada evento a seguir:

1. A: sair o número 5 .
2. B: sair um número maior que 4 .
3. C: sair um primo .
4. D: sair um número maior que 7 .

Solução

O espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Como o dado é equilibrado, todos os resultados são eqüiprováveis e adotamos a distribuição de probabilidades uniforme. Assim, a probabilidade de cada evento elementar é $\frac{1}{6}$.

Temos, então:

1. $P(A) = P(\{5\}) = \frac{1}{6}$.
2. $P(B) = P(\{5, 6\}) = P(\{5\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
3. $P(C) = P(\{2, 3, 5\}) = P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
4. $P(D) = P(\emptyset) = 0$.

Exemplo 48

O experimento é o lançamento de duas moedas equilibradas. Determine a probabilidade de cada evento:

1. A: dar duas coroas.
2. B: dar, ao menos, uma coroa.
3. C: dar uma cara e uma coroa.

Solução

Temos $\Omega = \{(K, K), (K, C), (C, K), (C, C)\}$, eqüiprovável. Logo, a probabilidade de cada evento elementar é $\frac{1}{4}$.

Então:

1. $P(A) = P(\{(C, C)\}) = \frac{1}{4}$.
2. $P(B) = P(\{(K, C), (C, K), (C, C)\}) = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
3. $P(C) = P(\{(K, C), (C, K)\}) = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Exemplo 49

No lançamento de dois dados equilibrados, determinemos a probabilidade de cada evento descrito a seguir:

1. A: saírem números com soma 10 .
2. B: saírem dois número maiores que 4.
3. C: saírem dois número primos.
4. D: saírem números com soma menor que 15.
5. E: sair, pelo menos, um "6".
6. F: saírem dois números iguais.

Solução

Neste experimento,

$$\begin{aligned}\Omega = \{ \ & (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ & (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ & (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ & (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ & (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ & (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}.\end{aligned}$$

A probabilidade de cada evento elementar é $\frac{1}{36}$.

Então:

1. $P(A) = P(\{(4,6),(5,5),((6,4)\}) = 3 \times \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}\,.$
2. $P(B) = P(\{(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}) = 4 \times \frac{1}{36} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}\,.$
3. $P(C) = P(\{(2,2),(2,3),(2,5),(3,2),(3,3),(3,5),(5,2),(5,3),(5,5)\}) =$
   $= 9 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{4}\,.$
4. $P(D) = P(\Omega) = 1\,.$
5. $P(E) = P(\{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6),(6,1),(6,2),(6,3),$
   $(6,4),(6,5)\}) = 11 \times \frac{1}{36} = \frac{11}{36}\,.$
6. $P(F) = P(\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}) = 6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6}\,.$

Observando os exemplos, concluímos que:

Se Ω é um espaço amostral eqüiprovável, com n elementos e $A \subset \Omega$, com $\#A = r$, então
$$P(A) = r.\frac{1}{n} = \frac{r}{n} = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

Podemos nos referir aos elementos de A como *casos favoráveis a* A, uma vez que, se algum deles ocorrer, A ocorrerá. Usando essa terminologia, sendo Ω um espaço amostral eqüiprovável, podemos escrever:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis a } A}{\text{número de resultados possíveis do experimento}}$$

Exemplo 50

A distribuição dos tipos de sangue numa certa população é dada na seguinte tabela:

tipo de sangue	A	B	AB	O
número de pessoas	155	105	102	138

Uma pessoa do grupo analisado é sorteada ao acaso. Qual a probabilidade de seu sangue ser AB?

Solução

Podemos supor que a probabilidade de ser sorteada seja a mesma para todas as pessoas da população estudada. Como existem 102 pessoas com sangue do tipo AB num total de 500, a propabilidade pedida é $\frac{102}{500}$.

Exemplo 51

Ao sortear um número inteiro de 1 a 50, qual a probabilidade de ser sorteado um número maior que 30?

Solução

O espaço amostral desse experimento é $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 49, 50\}$. Logo, $\#\Omega = 50$. Seja A o evento "número maior que 30". Então $A = \{31, 32, ..., 50\}$ e $\#A = 20$. Como Ω é eqüiprovável, temos $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$.

Exemplo 52

São lançados dois dados equilibrados. Calcule a probabilidade de cada evento a seguir.

1. A: "os números são menores que 4".

2. B: "a soma dos números é 9".

Solução

Vimos anteriormente que o espaço amostral deste experimento é

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), ..., (6,5), (6,6)\}, \text{ com } \#\Omega = 36\,.$$

Como os dados são equilibrados, a probabilidade de cada evento simples é $\frac{1}{\#\Omega} = \frac{1}{36}$.

Então,

1. $A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$. Logo,
$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}\,.$$

2. $B = \{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\}$. Então, $P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Uma observação importante a respeito da freqüência relativa e da probabilidade de um evento: f_A e $P(A)$ não são a mesma coisa. $P(A)$ é um valor atribuído, arbitrário, atendendo à definição de probabilidade, e f_A é uma aproximação obtida experimentalmente. Ao adotar para $P(A)$ um valor do qual f_A se aproxima (à medida que o número de repetições do experimento aumenta), tentamos fazer com que o modelo probabilístico reflita o que observamos ao longo da nossa experiência.

Usando técnicas de contagem em probabilidade

Consideremos um experimento aleatório de espaço amostral associado Ω. Vimos que, se Ω é eqüiprovável e $A \subset \Omega$, a probabilidade do evento A é dada por:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis a } A}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{\#A}{\#\Omega}\,.$$

Acompanhe, com atenção, as resoluções dos exemplos apresentados a seguir. Depois, resolva os exercícios propostos.

Exemplo 53

Uma moeda equilibrada é lançada seis vezes. Qual a probabilidade de

1. A: saírem exatamente 4 caras?

2. B: saírem, pelo menos, 4 caras?

3. C: sair cara no primeiro, no terceiro e no quinto lançamentos?

Solução

Usando o Princípio Fundamental da Contagem, temos, ao lançar uma moeda seis vezes, um total de $2^6 = 64$ eventos elementares possíveis, sendo cada um representado por uma seqüência de seis símbolos, K (cara) ou C (coroa).

1. O evento A representa a ocorrência de exatamente 4 caras entre esses seis símbolos, não importando a ordem em que ocorrem. Isso caracteriza uma combinação de 6 elementos tomados 4 a 4. Logo, temos:
$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{C_{6,4}}{64} = \frac{\frac{6!}{2!4!}}{64} = \frac{15}{64} = 0,235\ .$$

2. O evento B equivale a se ter "ocorrência de 4 caras" ou "ocorrência de 5 caras" ou "ocorrência de 6 caras". Logo, temos
$$\#B = C_{6,4} + C_{6,5} + C_{6,6} = 15 + 6 + 1 = 22\ .$$
Daí, $P(B) = \dfrac{22}{64} = 0,344$.

3. O evento C é constituído das seqüências $(cara, -, cara, -, cara, -)$, onde os lugares marcados com $-$ podem ser ocupados com *cara* ou *coroa*. Temos, então, um total de $2 \times 2 \times 2$ possibilidades de preenchimento desses lugares. Logo,
$$\#C = 2^3 = 8 \quad \text{e} \quad P(C) = \frac{\#C}{\#\Omega} = 8/64 = 1/8\ .$$

Exemplo 54

Um grupo é formado por 7 rapazes e 5 moças. São escolhidas 4 pessoas desse grupo, ao acaso, sem reposição, para formarem uma comissão. Determine a probabilidade de:

1. serem escolhidos exatamente dois rapazes.

2. serem escolhidos, pelo menos, dois rapazes.

Solução

O espaço amostral desse experimento é formado por todas as combinações (já que a ordem da escolha não importa) das 12 pessoas, tomadas 4 a 4:

$$\#\Omega = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{12!}{8!4!} = 495\,.$$

Além disso, como todas as pessoas têm a mesma chance de serem escolhidas, o espaço amostral é eqüiprovável.

1. O evento A: "serem escolhidos exatamente dois rapazes" é formado pelas combinações constituídas de 2 rapazes e 2 moças. Para determinar o total dessas combinações, dividimos a tarefa em duas etapas:

   - escolhemos 2 entre os 7 rapazes;

   - escolhemos 2 entre as 5 moças.

   Aplicamos, então, o princípio multiplicativo:

   $$\#A = C_{7,2} \times C_{5,2} = \frac{7!}{5!2!} \times \frac{5!}{3!2!} = 21 \times 10 = 210\ .$$

   Logo, $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{210}{495} = \frac{14}{33}$.

2. O evento B: "serem escolhidos, pelo menos, dois rapazes" ocorre se forem escolhidos dois, três ou quatro rapazes. Temos, então, as seguintes possibilidades:

   - 2 rapazes e 2 moças;

   - 3 rapazes e 1 moça;

   - 4 rapazes e 0 moça.
   Aplicando o mesmo raciocínio do item anterior, temos:

   $$(C_{7,2} \times C5,2) + (C_{7,3} \times C5,1) + (C_{7,4} \times C_{5,0}) = 210 + 175 + 35 = 420\ .$$

   Logo, $P(B) = \frac{420}{495} = \frac{28}{33}$.

Exemplo 55

Escolhemos, ao acaso, r objetos de um conjunto de n objetos, com reposição. Qual a probabilidade de que nenhum objeto seja escolhido mais de uma vez?

Solução

Pelo Princípio multiplicativo,

$$\#\Omega = \underbrace{n \times n \times ... \times n}_{r \text{ termos}} = n^r \ .$$

Vejamos as possibilidades de escolha em cada retirada, de forma a não haver repetição do elemento retirado:

$1^{\underline{a}}$ retirada:	n
$2^{\underline{a}}$ retirada:	$n-1$
$3^{\underline{a}}$ retirada:	$n-2$
...	...
r-ésima retirada:	$n-r+1$.

Pelo Princípio multiplicativo, temos um total de $n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$ casos favoráveis. Logo, a probabilidade de que nenhum objeto seja escolhido mais de uma vez é $\frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{n^r}$.

Exemplo 56

Num lote de 20 peças há 6 defeituosas. São escolhidas 5 peças do lote, ao acaso. Qual a probabilidade de serem sorteadas 2 peças defeituosas?

Solução

Uma retirada de 5 peças é uma amostra do lote, não importando a ordem em que a retirada é feita. Trata-se, assim, de combinação. O total de amostras é $\#\Omega = C_{20,5} = \frac{20!}{15!5!} = \frac{20.19.18.17.16}{5.4.3.2.1} = 15.504$, todas eqüiprováveis. Seja o evento A: duas peças defeituosas na amostra.

O total de elementos em A é calculado usando o princípio multiplicativo. Dividimos a tarefa de escolher as 5 peças em duas etapas: selecionamos 2 peças defeituosas entre as 6 existentes no lote e selecionamos 3 peças entre as 14 não-defeituosas do lote.

Assim,

$$\#A = C_{6,2}.C_{14,3} = \frac{6!}{4!2!}.\frac{14!}{11!3!} = \frac{6.5}{1.2}.\frac{14.13.12}{1.2.3} = 15 \times 364 = 5\,460 \ .$$

Logo,

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{5\,460}{15\,504} \simeq 0,3522 \, .$$

Resumo

Nesta aula definimos probabilidade de um evento associado a um experimento aleatório. Definimos eventos simples eqüiprováveis e a distribuição uniforme. Sendo A um subconjunto de um espaço amostral eqüiprovável, definimos a probabilidade de A como a razão entre o número de casos favoráveis a A e o número de resultados possíveis do experimento. Em termos de cardinalidade de conjuntos, isso equivale a dizer que a probabilidade de A ocorrer é a razão entre a cardinalidade de A e a do espaço amostral.

Trabalhamos apenas com espaços amostrais eqüiprováveis e calculamos a probabilidade de um evento A através da razão entre a cardinalidade de A e a do espaço amostral. Para isso, aplicamos as técnicas de contagem estudadas no Módulo 1 na determinação das cardinalidades dos conjuntos envolvidos (espaços amostrais e eventos).

Exercícios

1. Um dado é lançado 300 vezes. As ocorrências dos eventos estão registradas na tabela abaixo:

face	1	2	3	4	5	6
número de ocorrências	60	50	75	60	30	25

   Atribua uma probabilidade a cada evento elementar, igual à freqüência relativa observada. A seguir, determine a probabilidade de cada evento a seguir:

   (a) A: número par.

   (b) B: número maior que 4.

   (c) C: número divisor de 10.

2. Um dado equilibrado é lançado duas vezes. Qual a probabilidade de:

   (a) A soma dos números observados ser menor que 5?

   (b) Pelo menos um dos lançamentos dar 6?

3. Uma urna contém 3 bolas pretas, 2 bolas vermelhas e 5 bolas brancas. Uma bola é retirada ao acaso. Qual a probabilidade de a bola ser preta?

4. Seja $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ o espaço amostral associado a um experimento, com distribuição de probabilidade dada pela tabela:

evento	$\{e_1\}$	$\{e_2\}$	$\{e_3\}$	$\{e_4\}$	$\{e_5\}$
probabilidade	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$

.

Dê a probabilidade de cada evento:

(a) $A = \{e_1, e_2, e_4\}$.

(b) $B = \{e_1, e_5\}$.

(c) $C = \{e_3, e_4\}$.

(d) $D = \Omega$.

5. Um experimento admite apenas três resultados: a, b e c. Suponha que a é duas vezes mais provável de ocorrer que c e que c é duas vezes mais provável de ocorrer que b. Determine $P(a), P(b)$ e $P(c)$.

6. Uma letra é escolhida, ao acaso, entre as que formam a palavra PERNAMBUCO. Qual a probabilidade de ser uma vogal?

7. A tabela a seguir mostra pretensas distribuições de probabilidade para o lançamento de duas moedas. Quais dessas podem ser aceitas?

	{(K,K)}	{(K,C)}	{(C,K)}	{(C,C)}
1	1/4	1/4	1/4	1/4
2	0	0	0	1
3	2/15	4/15	7/15	2/15
4	1/2	1/2	−1/2	1/2
5	1/9	2/9	3/9	4/9
6	1,2	0,8	0,5	0,1

8. São retiradas, sem reposição, 2 cartas de um baralho de 52 cartas e observa-se o par retirado. Qual a probabilidade de o par de cartas ser valete e dama?

9. Um grupo de 10 pessoas se oferece para doar sangue. Dentre elas, 8 possuem sangue tipo A. São escolhidas três pessoas desse grupo, aleatoriamente. Qual a probabilidade de:

(a) Todas as três pessoas terem sangue do tipo A?

(b) Duas dessas pessoas terem sangue do tipo A e uma não?

(c) Pelo menos uma das pessoas ter sangue do tipo A?

10. São retiradas 13 cartas de um baralho de 52 cartas.
    (a) Qual a probabilidade de ser retirado exatamente um ás?
    (b) Qual a probabilidade de ser retirado, pelo menos, um ás?
    (c) Qual a probabilidade de serem retiradas apenas cartas de ouros?
11. Em uma gaveta há 50 pregos bons e 30 pregos enferrujados. São retirados, ao acaso, 10 pregos dessa gaveta. Qual a probabilidade de que todos sejam bons?
12. Dez pessoas vão se sentar em fila. Paulo e Maria estão entre elas. Qual a probabilidade de Paulo e Maria sentarem juntos?
13. Lançando-se 6 vezes uma moeda equilibrada, qual a probabilidade de que ocorra:
    (a) Exatamente 3 caras?
    (b) Pelo menos 2 coroas?
    (c) 3 caras e 3 coroas, alternadas?

Aula 11 – Probabilidade do evento complementar: regra da adição

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de aplicar as propriedades da probabilidade na resolução de problemas.

Introdução

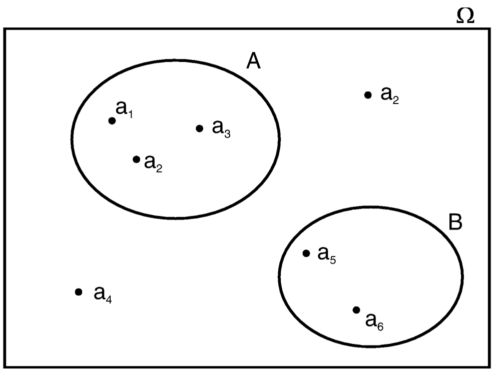
Seja Ω o espaço amostral de um experimento aleatório. Da definição de probabilidade de um evento, seguem as seguintes propriedades:

Propriedade 1. $P(\emptyset) = 0$.

Propriedade 2. $P(A) \geq 0, \ \ \forall A \subset \Omega$

Propriedade 3. $P(\Omega) = 1$

Propriedade 4. Se A e B são eventos associados a esse experimento, mutuamente exclusivos ($A \cap B = \emptyset$), então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.



$A = \{a_1, a_2, a_3\} \quad \Rightarrow \quad P(a_1) = P(a_2) + P(a_3)$

$B = \{a_5, a_6\} \quad \Rightarrow \quad P(B) = P(a_5) + P(a_6)$

$A \cap B = \emptyset$

$A \cup B = \{a_1, a_2, a_3, a_5, a_6\}$

$$P(A \cup B) = \underbrace{P(a_1) + P(a_2) + P(a_3)} + \underbrace{P(a_5) + P(a_6)} =$$

$$= P(A) + P(B)$$

Para verificar a validade da propriedade 4, basta lembrar que $P(A)$ é a soma das probabilidades dos eventos simples que pertencem a A. Analogamente, $P(B)$ é a soma das probabilidades dos eventos simples que pertencem a B. Como A e B não possuem elementos em comum, segue que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

A propriedade 4 pode ser estendida para uma quantidade finita de eventos:

Se $A_1, \ldots, A_n$ são eventos dois a dois mutuamente exclusivos, associados a um certo experimento, então

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum P(A_i), i = 1, ..., n \ .$$

Exemplo 57

Considere o experimento: extrair uma carta de um baralho de 52 cartas e anotar qual seja. Determine a probabilidade de sair uma figura ou um número par.

Solução:

Sejam os eventos:

A: "figura"

B: "número par"

Queremos calcular $P(A \cup B)$.

Como o baralho é dividido em cartas numéricas e figuras, os eventos A e B são mutuamente exclusivos. Por outro lado, cada carta tem a mesma chance de sair, isto é, o espaço amostral associado é eqüiprovável. Assim, $P(A) = \frac{12}{52}$ e $P(B) = \frac{20}{52}$.

Logo, pela propriedade 4 das probabilidades,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{12}{52} + \frac{20}{52} = \frac{32}{52} = \frac{8}{13} \ .$$

Exemplo 58

Uma urna contém 5 bolas assinaladas com sinal "+"e 6 bolas assinaladas com sinal "$-$". Duas bolas são retiradas, sem reposição, e é anotado o par de sinais observados. Qual a probabilidade de o produto dos sinais ser positivo?

Solução:

O número de elementos de Ω é dado pelo total de combinações (uma vez que a ordem dos sinais não vai alterar o sinal do produto) de 11 elementos tomados 2 a 2:

$$\#\Omega = C_{11,2} = \frac{11!}{9!2!} = 55 \ .$$

Queremos $P(A)$, onde $A = \{+\,+, -\,-\}$. Os eventos $\{+\,+\}$ e $\{-\,-\}$ são mutuamente exclusivos. Então $\#A$ é a soma dos totais de elementos de cada um desses eventos.

O número de elementos do evento $\{+\,+\}$ é dado pelas combinações das 5 bolas assinaladas com $+$, tomadas 2 a 2:

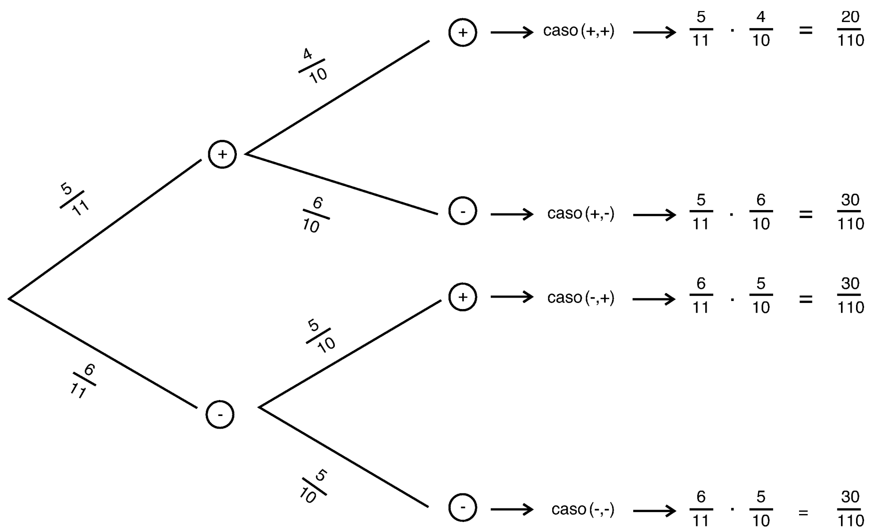
$$C_{5,2} = \frac{5!}{3!2!} = 10\ .$$

Analogamente, o número de elementos do evento $\{-\,-\}$ é dado por

$$C_{6,2} = \frac{6!}{4!2!} = 15\ .$$

Logo, $\#A = 25$ e $P(A) = \frac{25}{55} = \frac{5}{11}$.

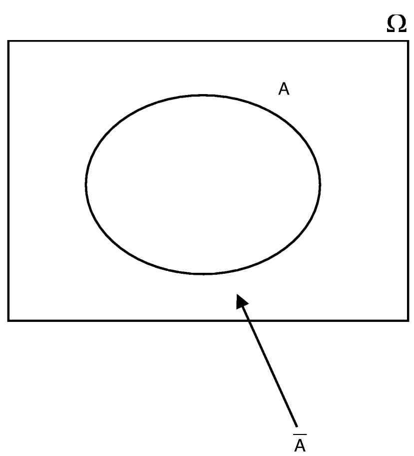
O problema também poderia ser resolvido com o uso de um diagrama, como indicado a seguir:



A partir das propriedades 1 a 4, podemos determinar a probabilidade do evento complementar:

Propriedade 5. (**Probabilidade do evento complementar**)

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, $\forall A \subset \Omega$.



Prova.

Podemos escrever $\Omega = A \cup \overline{A}$ e $A \cap \overline{A} = \emptyset$. Logo, pelas propriedades 4 e 3, $P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A}) = 1$, isto é, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Exemplo 59

Retomemos o experimento do exemplo 57. Qual a probabilidade de sair número ímpar ou figura?

Solução:

O que desejamos é que não saia um número par. Logo, o evento mencionado é o complementar do evento B (sair número par). Pela propriedade 5, $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{20}{52} = \frac{8}{13}$.

Exemplo 60

Sendo $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ o espaço amostral de um experimento aleatório, com $P(e_1) = 3/12$, $P(\overline{e_2}) = 7/12$ e $P(\overline{e_3}) = 10/12$. Vamos determinar $P(e_4)$.

Solução:

Se $P(\overline{e_2}) = 7/12$, então $P(e_2) = 1 - 7/12 = 5/12$.
Se $P(\overline{e_3}) = 10/12$, então $P(e_3) = 1 - 10/12 = 2/12$.
Como $P(e_1) + P(e_2) + P(e_3) + P(e_4) = 1$, temos $P(e_4) = 2/12$.

Exemplo 61

Uma aplicação interessante da regra da probabilidade do evento complementar é o *problema do aniversário*, que consiste em calcular a probabilidade de, num grupo de n pessoas, pelo menos duas aniversariarem num mesmo dia.

Neste caso, temos que a cardinalidade de Ω é

$$\underbrace{365 \times 365 \times ... \times 365}_{n \text{ termos}} = 365^n .$$

Vamos determinar a probabilidade de **não** ocorrerem aniversários num mesmo dia. Seja A esse evento. Então $\#A = 365 \times 364 \times 363 \times ... \times 365 - (n - 1)$. Logo, $P(A) = \frac{365 \times 364 \times ... \times 365 - (n-1)}{365^n}$ e o nosso evento tem probabilidade $1 - P(A)$. A tabela a seguir mostra a probabilidade para alguns valores de n:

n	probabilidade
10	$0,13$
20	$0,42$
30	$0,71$
40	$0,89$
50	$0,97$

Note que para $n = 50$, ou seja, para um grupo razoavelmente pequeno de pessoas, trata-se de um evento praticamente certo! Se você já leciona e sua turma tem cerca de 40 alunos, pode fazer essa experiência na sala de aula.

Exemplo 62

Um número do conjunto $\{1, 2, ..., 200\}$ é escolhido ao acaso. Qual a probabilidade de sair um número que não seja múltiplo de 5?

Solução:

Este é um caso em que devemos usar a regra da probabilidade do evento complementar, pois veja que é muito mais simples determinar a probabilidade de sair um número **que seja** múltiplo de 5. Então seja A o evento "sair número múltiplo de 5". Queremos $P(\overline{A})$. Temos $A = \{5, 10, 15, ..., 195, 200\}$. Para determinar o número de elementos de A, podemos interpretar esses elementos como termos de uma progressão aritmética de primeiro termo 5 e razão 5.

Vamos usar a fórmula do termo geral de uma PA:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

No nosso caso, $a_1 = 5,\ r = 5,\ a_n = 200$ e queremos n.

Então $200 = 5 + 5(n-1) \Rightarrow n = 40$. Como Ω é eqüiprovável e possui 200 elementos, temos $P(A) = \frac{40}{200} = \frac{1}{5}$. Pela regra da probabilidade do evento complementar, a probabilidade pedida é

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}\ .$$

Exemplo 63

Um grupo é formado por 8 rapazes e 6 moças. Seis pessoas vão ser escolhidas ao acaso, para formarem uma comissão. Qual a probabilidade de essa comissão contar com, pelo menos, 1 rapaz?

Solução:

O espaço amostral é formado pelas combinações de 14 elementos, tomados 6 a 6:

$$\#\Omega = C_{14,6} = \frac{14!}{8!6!} = 3003\ .$$

Seja A o evento "pelo menos um rapaz". Se fôssemos determinar o número de elementos de A, teríamos que considerar as possibilidades:

1 rapaz e 5 moças

2 rapazes e 4 moças

3 rapazes e 3 moças

4 rapazes e 2 moças

5 rapazes e 1 moça

6 rapazes e nenhuma moça

Podemos, porém, optar por uma resolução mais simples, determinando a probabilidade do evento complementar, ou seja, a probabilidade de a comissão não contar com nenhum rapaz, o que equivale a dizer que a comissão é formada por 6 moças escolhidas entre as 6:

$$\#\overline{A} = C_{6,6} = 1\ .$$

Logo, $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{3003} = \frac{3002}{3003}$.

Regra da adição

Consideremos um experimento aleatório com espaço amostral $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_{12}\}$ e os eventos

$$A = \{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\} \quad \text{e} \quad B = \{a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}\}\ .$$

Queremos determinar $P(A \cup B)$. Temos:

$\#A = 6$

$\#B = 5$

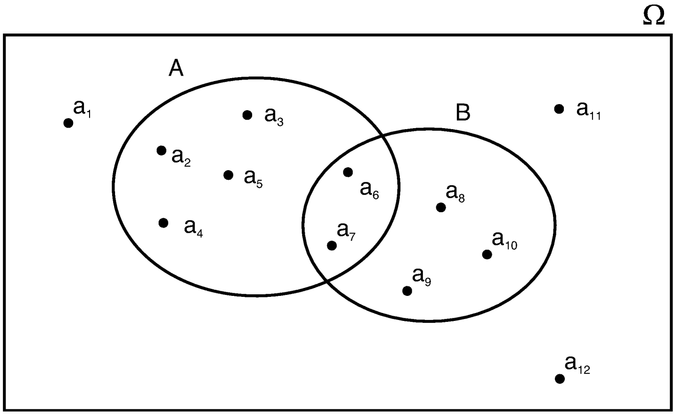
$A \cup B = \{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}\} \Rightarrow \#A \cup B = 9$

$A \cap B = \{a_6, a_7\} \Rightarrow \#A \cap B = 2$

Logo,

$$\#A \cup B = 9 = 6 + 5 - 2 = \#A + \#B - \#(A \cap B)\ ,$$

conforme ilustra o diagrama a seguir:



Podemos generalizar esse resultado, obtendo a seguinte:

Propriedade. (**Regra da adição**)

Seja Ω o espaço amostral de um experimento aleatório e sejam $A, B \subset \Omega$. Então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \; .$$

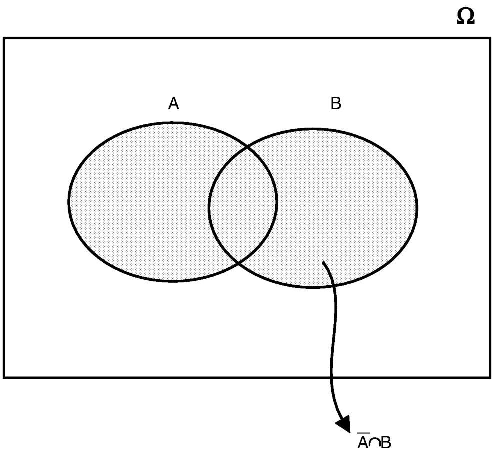
Prova.

Vamos escrever os conjuntos $A \cup B$ e B como uniões de conjuntos disjuntos: $A \cup B = A \cup (\overline{A} \cap B)$ e $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$. Então, pela propriedade 4, vista na Aula 19, temos:

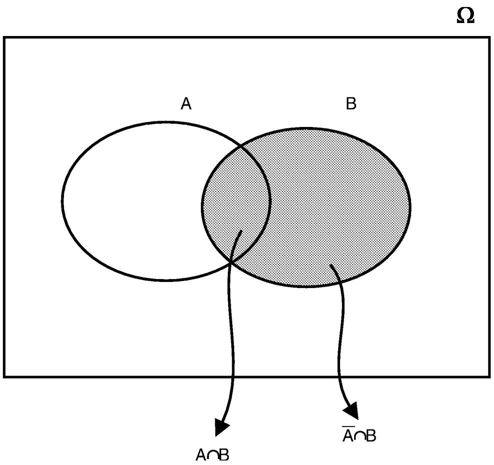
$P(A \cup B) = P(A) + P(\overline{A} \cap B)$.

$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) \Rightarrow P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

Daí, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.



A∪B = A∪(Ā∩B)



B = (A∩B) ∪ (Ā∩B)

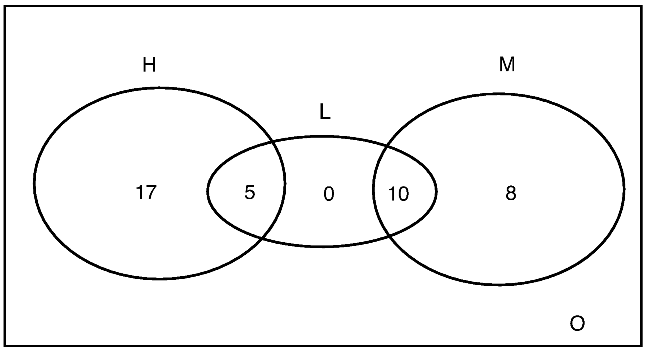
Observação. Se $A \cap B = \emptyset$ então $P(A \cap B) = 0$. Temos, então:

A e B mutuamente exclusivos $\quad \Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exemplo 64

Numa classe de 40 alunos, 22 são homens e 15 são louros. Entre os alunos louros, 10 são mulheres. Um aluno é escolhido ao acaso. Qual a probabilidade de ser homem ou louro?

Solução:



Sejam os eventos H: "homem" e L: "louro". Queremos a probabilidade do evento $H \cup L$.

Então,

$$P(H \cup L) = P(H) + P(L) - P(H \cap L) = \frac{22}{40} + \frac{15}{40} - \frac{5}{40} = \frac{4}{5}\ .$$

Exemplo 65

Consideremos novamente o experimento de retirar uma carta de um baralho de 52 cartas e observar a que sai. Vamos determinar a probabilidade de que a carta retirada seja vermelha ou uma figura.

Solução:

Sejam os eventos A: "figura" e B: "vermelha". Queremos $P(A \cup B)$. Temos:

$\#\Omega = 52$

$\#A = 12$ (4 cartas de cada naipe)

$\#B = 26$ (13 cartas de ouros, 13 de copas)

$\#(A \cap B) = 6$ (3 figuras de ouros, 3 figuras de copas)

Logo, pela propriedade da adição:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{12}{52} + \frac{26}{52} - \frac{6}{52} = \frac{8}{13}\ .$$

Exemplo 66

Um número do conjunto $\{1, 2, ..., 100\}$ é escolhido ao acaso. Vamos determinar a probabilidade desse número:

1. ser múltiplo de 5 e de 6, simultaneamente.
2. ser múltiplo de 5 ou de 6.
3. não ser múltiplo de 5 nem de 6.

Solução:

O espaço amostral desse experimento é o próprio conjunto $\{1, 2, ..., 100\}$ e é eqüiprovável, pois todos os números têm a mesma chance de ser escolhidos.

1. Seja A o evento "o número retirado é múltiplo de 5 e de 6, simultaneamente". Isso significa que esse número é múltiplo de 30 (pois 30 é o menor múltiplo comum de 5 e 6). Logo, $A = \{30, 60, 90\}$ e $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{3}{100}$.

2. Sejam os eventos:

   B: "o número retirado é múltiplo de 5"e

   C: "o número retirado é múltiplo de 6".

   Queremos $P(B \cup C)$. Pela regra da adição, sabemos que essa probabilidade é igual a $P(B) + P(C) - P(B \cap C)$. Observe que $P(B \cap C)$ já foi calculada no item a) ($B \cap C$:"o número retirado é múltiplo de 5 **e** de 6"). Vamos determinar as probabilidades dos eventos B e C:

$$\begin{aligned} B &= \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, \\ &\quad 90, 95, 100\} \\ &\Rightarrow \#B = 20\ . \end{aligned}$$

   Logo, $P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{20}{100}$.

$$\begin{aligned} C &= \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96\} \\ &\Rightarrow \#C = 16 \end{aligned}$$

   Portanto,

$$P(C) = \frac{\#C}{\#\Omega} = \frac{16}{100}\ .$$

   Podemos, agora, calcular a probabilidade pedida:

$$P(B \cup C) = \frac{20}{100} + \frac{16}{100} - \frac{3}{100} = \frac{33}{100}\ .$$

Aqui poderíamos ter usado a fórmula do termo geral de uma PA, como fizemos na Aula 19. Para determinar a cardinalidade de B, a PA é de primeiro termo 5, razão 5 e último termo 100. Para determinar a cardinalidade de C, a PA tem primeiro termo 6, razão 6 e último termo 96.

3. O evento "não é múltiplo de 5 nem de 6" é o evento complementar de $B \cup C$. Portanto, a probabilidade pedida é

$$P(\overline{B \cup C}) = 1 - P(B \cup C) = 1 - \frac{33}{100} = \frac{67}{100} .$$

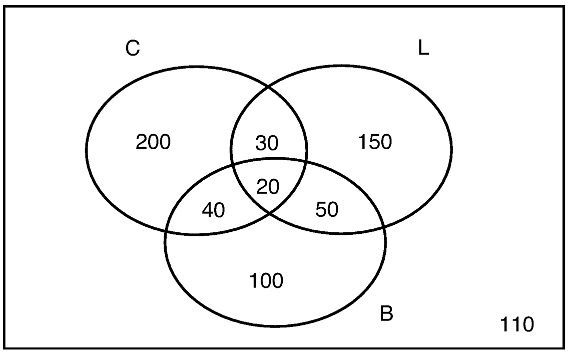
Exemplo 67

Consultando 700 alunos de uma universidade, verifica-se que 250 cursam licenciatura em Matemática, 210 cursam o bacharelado em Matemática e 290 cursam Computação. Além disso, como a universidade permite que um aluno tenha mais de uma matrícula, há alunos cursando mais de um desses cursos: 50 fazem, simultaneamente, Computação e licenciatura; 60, Computação e bacharelado; 70 cursam licenciatura e bacharelado e ainda há 20 deles que são alunos dos três cursos. Um desses alunos é sorteado para representar a universidade num evento. Determine a probabilidade desse aluno:

1. cursar a licenciatura em Matemática.
2. cursar a licenciatura e o bacharelado em Matemática.
3. cursar a licenciatura ou o bacharelado em Matemática.
4. não cursar Computação.
5. cursar, pelo menos, um desses três cursos.

Solução:

Vamos, primeiramente, organizar os dados fornecidos no enunciado num diagrama, como fizemos nas Aulas 4 e 5.



Sejam os eventos:

L: cursar licenciatura em Matemática

B: cursar bacharelado em Matemática

C: cursar Computação

Como todos os alunos têm a mesma chance de ser escolhidos, os resultados possíveis são eqüiprováveis.

Então,

1. $P(L) = \frac{250}{700} = \frac{5}{14}$

2. Queremos $P(L \cap B)$. Pelo diagrama podemos ver que $\#(L \cap B) = 70$. Logo, a probabilidade pedida é $\frac{70}{700} = \frac{1}{10}$.

3. Queremos $P(L \cup B)$. Pela regra da adição, $P(L \cup B) = P(L) + P(B) - P(L \cap B) = \frac{250}{700} + \frac{210}{700} - \frac{70}{700} = \frac{39}{70}$.

4. Queremos $P(\overline{C})$. Como $P(C) = \frac{290}{700}$, pela regra do evento complementar, $P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{290}{700} = \frac{41}{700}$.

5. Neste caso, é mais fácil determinar a probabilidade do evento complementar, ou seja, a probabilidade de o aluno não cursar qualquer desses três cursos. Pelo diagrama, vemos que são 110 alunos nessa situação. Logo, a probabilidade pedida é $1 - \frac{110}{700} = \frac{59}{70}$.

Resumo

Nesta aula vimos as propriedades básicas da probabilidade e aprendemos a determinar a probabilidade do evento complementar de um evento dado e a probabilidade do evento união de dois dados.

Exercícios

1. Um dado equilibrado é lançado. Qual a probabilidade de não se obter 6 pontos?

2. Cinco pessoas vão ser escolhidas, ao acaso, para formar uma banca, num grupo formado por 6 professores e 6 alunos. Qual a probabilidade de essa banca contar com, pelo menos, 1 aluno?

3. Numa cidade, 45% dos homens são casados, 35% solteiros, 15% divorciados e 5% viúvos. Um homem é escolhido ao acaso. Qual a probabilidade desse homem:

   (a) ser solteiro ou divorciado?

   (b) não ser casado?

4. Considere o espaço amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e os eventos $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{2, 4, 5, 6\}$ e $C = \{8, 10\}$. Enumere os seguintes eventos:

   (a) $\overline{A} \cup B$
   (b) $\overline{A} \cap B$
   (c) $A \cap (\overline{B \cap C})$

5. Suponha que A e B sejam eventos tais que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ e $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Determine:

   (a) $P(\overline{A})$
   (b) $P(A \cup B)$

6. Em cada item a seguir, explique o porquê da afirmativa estar INCORRETA:

   (a) A probabilidade de um ônibus passar num determinado ponto na hora prevista é $0,40$. Então, a probabilidade de ele passar no ponto fora da hora prevista é $0,55$.

   (b) Uma pessoa participa de um jogo no qual sua probabilidade de ganhar é $\frac{1}{10}$. Se ela participa de 5 partidas, sua probabilidade de ganhar é $\frac{5}{10}$.

   (c) A probabilidade de um produto ter seu preço aumentado de um determinado mês para o seguinte é $0,7$. Então, a probabilidade de o produto ter seu preço diminuído nesse mesmo período é $0,3$.

   (d) São lançados um dado branco e um dado verde. A probabilidade de sair 6 no dado branco é $1/6$ e a probabilidade de sair 6 no dado verde é $1/6$. Então, a probabilidade de sair 6 em ambos os dados é $1/6 + 1/6 = 2/6$.

   (e) Numa escola há 10 turmas. Se um estudante dessa escola é selecionado ao acaso, a probabilidade de que pertença a uma certa turma é $1/10$.

7. Sejam A, B e C eventos associados a um certo experimento aleatório. Sabendo-se que

   $P(A) = P(B) = P(C) = 1/4$

   $P(A \cap B) = P(B \cap C) = 0 \quad$ e $\quad P(A \cap C) = 1/8$,

   calcule a probabilidade de ocorrer, pelo menos, um dos eventos A, B ou C.

8. Suponha que A, B e C sejam eventos tais que
   $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{5}$
   $P(A \cap B) = P(B \cap C) = \frac{1}{10}$
   $P(A \cap C) = \frac{1}{6}$
   Calcule a probabilidade de ocorrer cada evento abaixo:
   (a) $P(\overline{A})$
   (b) $P(A \cup B)$

9. Uma gaveta contém 100 parafusos, 60 porcas e 40 pregos. Metade dos parafusos, metade das porcas e metade dos pregos estão enferrujados. Uma dessas peças é retirada, ao acaso. Qual a probabilidade de que ela seja um parafuso ou uma porca ou que esteja enferrujada?

10. Dois eventos A e B são tais que $P(A) = 0,30$ e $P(B) = 0,90$.
    (a) Se $P(A \cap B) = 0,20$, quanto é $P(A \cup B)$?
    (b) A e B podem ser mutuamente exclusivos?

Aula 12 – Probabilidade condicional : Regra da multiplicação; eventos independentes

Objetivos

Ao final desta aula, você será capaz de verificar que o fato de um evento ocorrer pode afetar a probabilidade de ocorrência de outro evento e, ainda, a determinar essa probabilidade.

Introdução

Consideremos o experimento de extrair, ao acaso, duas bolas de uma urna contendo bolas pretas e bolas brancas. Vamos analisar a diferença entre fazer a segunda retirada com ou sem reposição da primeira bola.

Para fixar idéias, vamos supor que a urna contenha 80 bolas pretas e 20 bolas brancas. Vamos retirar duas bolas, uma após a outra e verificar suas cores.

Sejam os eventos A: "a primeira bola é preta"e B: "a segunda bola é preta".

1. Retirada com reposição:

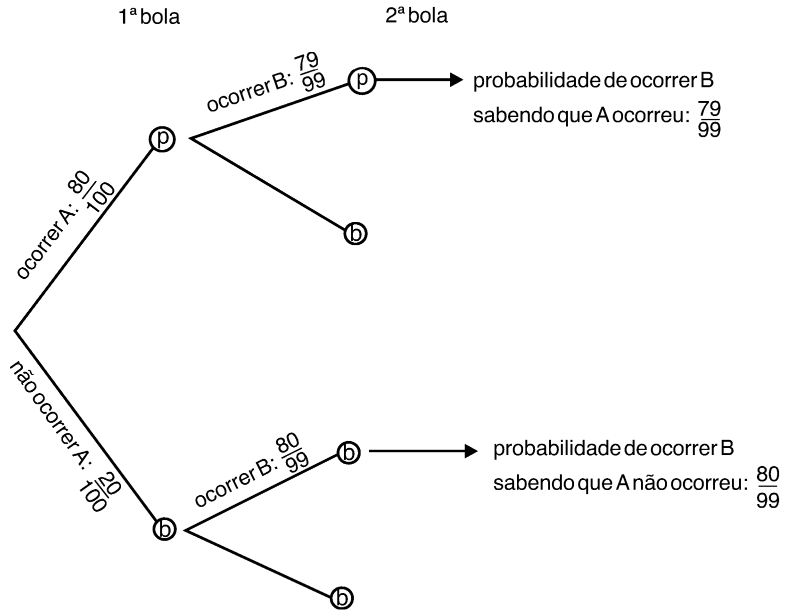
   Neste caso, a cada retirada, haverá 80 bolas pretas num total de 100 bolas. Logo, $P(A) = P(B) = \frac{80}{100}$.

2. Retirada sem reposição:

   Agora não é tão imediato determinar a probabilidade de B ocorrer. A probabilidade do evento A continua sendo $\frac{80}{100}$. Para determinar $P(B)$, precisamos saber a quantidade de bolas de cada cor restante na urna.

   Se A não ocorreu, o número de bolas pretas continua sendo 80 e o total passa a ser 99. Então, a probabilidade de B ocorrer, dado que A não ocorreu, é $\frac{80}{99}$.

   Se A ocorreu, há 79 bolas pretas num total de 99 bolas. Então, a probabilidade de B ocorrer, dado que A ocorreu, é $\frac{79}{99}$.

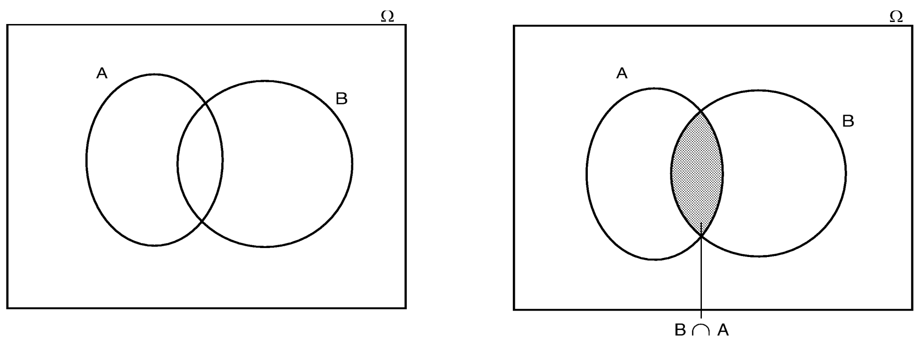


Afinal, qual o valor de $P(B)$? Mais adiante, na Aula 22, veremos como determinar a probabilidade de B.

O fato de a ocorrência ou não de um evento alterar a probabilidade de um outro evento leva à caracterização de *probabilidade condicional*:

Sejam A e B eventos associados a um experimento aleatório. Representamos a *probabilidade condicional de B dado que A ocorreu* por $P(B|A)$ (lê-se “probabilidade de B dado A”).

A figura a seguir ilustra o que ocorre em cada caso:



(a) $P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega}$ y (b) $P(B/A) = \frac{\#(B \cap A)}{\#A}$

(a) Quando calculamos $P(B)$, estamos calculando a chance de estarmos em B, sabendo que estamos em Ω.

(b) Quando calculamos $P(B|A)$, estamos calculando a chance de estarmos em B, sabendo que estamos em A. Neste caso, o nosso espaço amostral se reduz a A, uma vez que o evento A ocorreu.

Supondo Ω eqüiprovável, temos $P(B|A) = \frac{\#(B\cap A)}{\#A}$. Dividindo o numerador e o denominador na expressão de $P(B|A)$ por $\#\Omega$, temos:

$$P(B|A) = \frac{\frac{\#(B\cap A)}{\#\Omega}}{\frac{\#A}{\#\Omega}} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \; .$$

Temos, então:

Probabilidade condicional de B dado A:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \quad \text{(desde que } P(A) > 0)$$

Exemplo 68

Um dado equilibrado é lançado duas vezes. O par de números da face de cima é anotado. Sejam os eventos:

A: "a soma dos números obtidos é 10"

B: "o primeiro número do par é menor do que o segundo".

Vamos determinar $P(A), P(B), P(B|A), P(A \cap B)$ e verificar a relação entre essas probabilidades.

Solução:

Vimos anteriormente que o espaço amostral desse experimento é formado pelos 36 pares (i, j) obtidos fazendo i variar de 1 a 6 e j variar de 1 a 6. Temos também que Ω é um espaço amostral eqüiprovável, pois o dado é equilibrado.

Temos:

$A = \{(4,6), (5,5), (6,4)\}$ e

B = {(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6), $(3,4), (3,5), (3,6),$
$(4,5), (4,6), (5,6)\}$

Assim, $\#A = 3$ e $\#B = 15$.

Logo, $P(A) = \frac{3}{36}$ e $P(B) = \frac{15}{36}$.

Se A ocorre, sabemos que o par obtido é um dos que compõem A : $(4,6), (5,5)$ ou $(6,4)$. Apenas um deles (o par $(4,6)$) pertence a B. Logo, $P(B|A) = \frac{1}{3}$.

O evento $A \cap B$ ocorre somente se um par tem a soma dos elementos igual a 10 e o primeiro elemento menor que o segundo. O único par que satisfaz a essas duas condições é o par $(4,6)$. Logo, $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$.

Podemos constatar, portanto, que

$$\frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{3}{36}} = \frac{1}{3} = P(B|A)$$

e que

$$P(B) \neq P(B|A)\ .$$

Note que temos duas maneiras de calcular a probabilidade condicional $P(B|A)$:

1. diretamente, considerando o espaço amostral reduzido a A;
2. usando a fórmula, onde $P(B \cap A)$ e $P(A)$ são calculadas em relação a Ω.

Exemplo 69

Um número é escolhido ao acaso no conjunto $\{1, 2, 3, ..., 50\}$. Qual a probabilidade de esse número ser par, sabendo-se que é um múltiplo de 5?

Solução:

Sejam os eventos:

A: sair número par

B: sair número múltiplo de 5

Vamos resolver o problema de dois modos:

$1^{o.}$ modo: Considerando que o evento B ocorreu, restringimos o espaço amostral a $B = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}$.

Restrito a esse espaço, $A = \{10, 20, 30, 40, 50\}$.

Logo, a probabilidade pedida é

$$\frac{\#A}{\#B} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}\ .$$

$2^{o.}$ modo: Queremos calcular a probabilidade condicional

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}\ ,$$

sendo $\Omega = \{1, 2, \ldots, 50\}$.

Temos $\#B = 10$, $A \cap B = \{10, 20, 30, 40, 50\}$ e B já foi listado no item anterior.

Daí,

$$P(A \cap B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#\Omega} = \frac{5}{50} = \frac{1}{10} \quad \text{e}$$

$$P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{10}{50}\ .$$

Logo,

$$P(A|B) = \frac{\frac{5}{50}}{\frac{10}{50}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}\ .$$

A expressão da probabilidade condicional permite a obtenção de uma importante relação, conhecida como **teorema da multiplicação de probabilidades**:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A).P(B|A)}$$

O mesmo, expresso em palavras: A probabilidade da interseção de dois eventos é o produto da probabilidade de um deles pela probabilidade do outro ocorrer dado que o primeiro ocorreu.

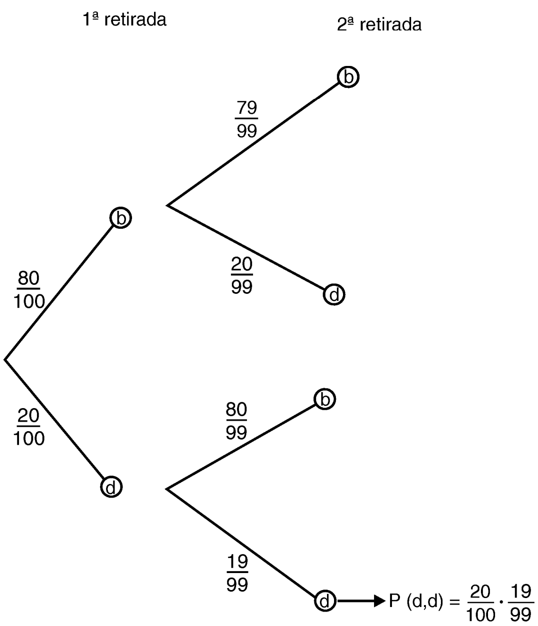
Assim, poderíamos também escrever $P(A \cap B) = P(B).P(A|B)$.

Exemplo 70

Um lote contém 80 peças boas (b) e 20 peças defeituosas (d). Duas peças são retiradas ao acaso, uma após a outra, sem reposição. Qual a probabilidade de ambas serem defeituosas?

Solução:

O espaço amostral é $\Omega = \{(b,b),(b,d),(d,b),(d,d)\}$. A resolução fica mais simples se construirmos a árvore das probabilidades:



Sejam os eventos:

A: "primeira peça defeituosa"

B: "segunda peça defeituosa"

Então, queremos $P(A \cap B) = P(d, d)$.

Temos:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A) = \frac{20}{100}.\frac{19}{99} = \frac{19}{495} \ .$$

Exemplo 71

No lançamento de um dado equilibrado, calcular as seguintes probabilidades:

1. obter mais do que 4 pontos;
2. obter mais do que 4 pontos, sabendo que o resultado foi um número ímpar de pontos;
3. obter mais do que 4 pontos, sabendo que o resultado foi mais do que 3 pontos.

Solução:

Como o dado é equilibrado, os resultados são eqüiprováveis.

Sejam os eventos:

A: sair mais do que 4 pontos

B: sair número ímpar

C: sair número maior do que 3

Então temos:

1. $A = \{5, 6\}$. Logo, $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
2. Queremos $P(A|B)$. Sabemos que essa probabilidade é dada por $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
   Temos:

   $B = \{1, 3, 5\} \ \Rightarrow \ \#B = 3 \ \Rightarrow \ P(B) = \frac{3}{6}$.

   $A \cap B = \{5\} \ \Rightarrow \ \#(A \cap B) = 1 \ \Rightarrow \ P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.

   Logo, $P(A|B) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \dfrac{1}{3}$.
3. Queremos $P(A|C)$. Temos:

   $C = \{4, 5, 6\} \ \Rightarrow \ \#C = 3 \ \Rightarrow \ P(C) = \frac{3}{6}$.

   $A \cap C = \{5, 6\} \ \Rightarrow \ \#(A \cap C) = 2 \ \Rightarrow \ P(A \cap C) = \frac{2}{6}$.

   Logo, $P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \dfrac{2}{3}$.

Exemplo 72

1. Um casal tem dois filhos e sabe-se que um deles é homem. Qual a probabilidade de que o outro seja homem?

2. Um casal tem dois filhos e sabe-se que o mais velho é homem. Qual a probabilidade de que o mais novo seja homem?

Solução:

O espaço amostral é formado pelos pares $(h, h), (h, m), (m, h), (m, m)$, onde representamos homem por h e mulher por m. Como são resultados eqüiprováveis, cada um tem probabilidade $\frac{1}{4}$ de ocorrer.

1. Sabendo que um dos filhos é homem, o espaço amostral se reduz a $\{(h, h), (h, m), (m, h)\}$. O evento "o outro filho é homem"é $\{(h, h)\}$. Logo, a resposta, neste caso, é $\frac{1}{3}$.

2. Como o filho homem é o mais velho, o espaço amostral fica restrito a $\{(h, h), (h, m)\}$. Queremos a probabilidade de o segundo filho ser homem, isto é, queremos que ocorra $\{(h, h)\}$. Logo, a probabilidade pedida é $\frac{1}{2}$.

Eventos independentes

Dados dois eventos A e B, associados a um mesmo experimento, pode acontecer de a ocorrência de A não alterar a probabilidade de B. Quando isso acontece, dizemos que B e A são *eventos independentes*.

Poderíamos estabelecer a independência de B em relação a A, impondo

$$P(B|A) = P(B) \qquad \text{(ou, equivalentemente, que } P(A|B) = P(A)\text{)}$$

Essa relação, porém, exige que $P(A)$ (ou $P(B)$) seja não-nula. O teorema da multiplicação de probabilidades fornece uma outra expressão, usando a igualdade entre as probabilidades condicionais e absolutas:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A) = P(A).P(B)$$

Esta igualdade, mais geral, é a que caracteriza **eventos independentes**. Temos, por definição:

$$\boxed{A \text{ e } B \text{ são eventos independentes} \quad \Leftrightarrow \quad P(A \cap B) = P(A).P(B)}$$

Exemplo 73

Duas pessoas, A e B, e somente elas, estão tentando resolver um mesmo problema, independentemente uma da outra. A probabilidade de A resolver o problema é 3/4 e a probabilidade de B resolver é 1/2.

1. Qual a probabilidade de que ambas resolvam o problema?
2. Qual a probabilidade do problema ser resolvido?

Solução:

Denotemos por $P(A)$ e $P(B)$ as probabilidades de A e B resolverem o problema, respectivamente.

1. Queremos $P(A \cap B)$. Como os eventos são independentes, temos
$$P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{3}{4}.\frac{1}{2} = \frac{3}{8}\ .$$
2. Como somente as pessoas A e B estão tentando resolver o problema, queremos $P(A \cup B)$ que, pela regra da adição, é igual a $P(A)+P(B)-P(A \cap B)$. Do item a) temos $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$. Logo,
$$P(A \cup B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{7}{8}\ .$$

Exemplo 74

Uma moeda equilibrada é lançada 5 vezes. Qual a probabilidade de obtermos cara nos 5 lançamentos?

Solução:

Sejam os eventos:

A_i : ocorre cara no i-ésimo lançamento $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$

Como cada lançamento não afeta os demais, os eventos são independentes. Logo,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_5) = P(A_1).P(A_2).\ \ldots\ .P(A_5) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}\ .$$

Exemplo 75

Sejam A e B eventos associados a um experimento aleatório. Suponha que $P(A) = 0,4,\ P(A \cup B) = 0,7$ e $\ P(B) = p$.

1. Determine p para que A e B sejam mutuamente exclusivos.
2. Determine p para que A e B sejam independentes.

Solução:

1. Queremos $A \cap B = \emptyset$, ou seja, $P(A \cap B) = 0$.

   Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, queremos $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Logo, $0,7 = 0,4 + p \Rightarrow p = 0,3$.

2. Queremos $P(A \cap B) = P(A).P(B)$. (1)

   Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, temos que

   $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$. (2)

   Substiuindo (2) em (1), temos:

$$\begin{array}{rcl} P(A) + P(B) - P(A \cup B) & = & P(A).P(B) \\ 0,4 + p - 0,7 & = & 0,4.p \\ p & = & 0,5 \end{array} .$$

Exemplo 76

Retiram-se duas cartas de um baralho com 52 cartas. Vamos determinar a probabilidade dessas duas cartas serem um ás e um 10, em qualquer ordem.

Solução:

Seja A o evento desejado.

Então podemos dizer que $A = B \cup C$, onde:

B: ás na primeira retirada e 10 na segunda

C: 10 na primeira e ás na segunda.

Os eventos B e C são mutuamente exclusivos. Logo, $P(A) = P(B) + P(C)$. Temos que determinar $P(B)$ e $P(C)$. Podemos escrever:

$$B = B_1 \cap B_2, \quad \text{onde} \quad \begin{cases} B_1: & \text{ás na primeira retirada} \\ B_2: & \text{10 na segunda retirada} \end{cases}$$

$$C = C_1 \cap C_2, \quad \text{onde} \quad \begin{cases} C_1: & \text{10 na primeira retirada} \\ C_2: & \text{ás na segunda retirada} \end{cases}$$

Aplicando o teorema da multiplicação, temos:

$$P(B) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1).P(B_2|B_1) = \tfrac{4}{52}.\tfrac{4}{51}$$

e

$$P(C) = P(C_1 \cap C_2) = P(C_1).P(C_2|C_1) = \tfrac{4}{52}.\tfrac{4}{51} .$$

Então, aplicando a propriedade aditiva, obtemos

$$P(A) = P(B) + P(C) = \frac{4}{52}\frac{4}{51} + \frac{4}{52}\frac{4}{51} = \frac{8}{663} .$$

Resumo

Nesta aula aprendemos a determinar a probabilidade de um evento, considerando que um outro evento, associado ao mesmo experimento, tenha ocorrido. A probabilidade do evento B dado que o evento A ocorreu é dada por

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \ .$$

Vimos que há duas maneiras de calcular a probabilidade condicional $P(B|A)$: diretamente, considerando o espaço amostral reduzido a A ou usando a fórmula, onde $P(B \cap A)$ e $P(A)$ são calculadas em relação ao espaço amostral do experimento.

A partir da fórmula da probabilidade condicional, obtivemos a regra da multiplicação $P(A \cap B) = P(A).P(B|A) = P(B).P(A|B)$.

Exercícios

1. Uma carta é retirada, ao acaso, de um baralho de 52 cartas. Qual a probabilidade de ser de ouros, sabendo que é vermelha?

2. Um dado equilibrado é lançado 2 vezes e é anotado o par de números obtidos. Se a soma dos resultados é 7, qual a probabilidade de ter saído 3 na primeira jogada?

3. Duas cartas são retiradas, sem reposição, de um baralho de 52 cartas. Qual a probabilidade de

   (a) ambas serem de paus?

   (b) ambas serem do mesmo naipe?

4. Num prédio vivem 30 pessoas, das quais 14 são homens. Seis homens e doze mulheres trabalham o dia todo. Os demais moradores são estudantes. Uma dessas pessoas é escolhida ao acaso. Qual a probabilidade dela ser:

   (a) mulher?

   (b) estudante?

   (c) mulher e estudante?

   (d) homem, sabendo que trabalha?

   (e) estudante, sabendo que é mulher?

5. Dois dados equilibrados são lançados. Determine a probabilidade de:

   (a) obter soma de 8 pontos, sabendo que a soma é maior que 7;

   (b) obter soma de 6 pontos, sabendo que os números observados são iguais.

6. A tabela a seguir mostra a resposta de 1000 compradores de carros novos ou usados de um certo modelo, quanto a estarem ou não satisfeitos com a respectiva compra:

	satisfeito	não satisfeito	total
novo	350	130	480
usado	400	120	520
	750	250	1000

   Representando por S e N os eventos "satisfeito" e "novo", respectivamente, determine as probabilidades abaixo.

   (a) $P(S \cap N)$

   (b) $P(\overline{S} \cap N)$

   (c) $P(N|S)$

   (d) $P(\overline{N}|S)$

   (e) $P(S|\overline{N})$

   (f) $P(S|N)$

7. A e B são dois eventos independentes associados a um mesmo experimento aleatório. Se $P(A) = p$ e $P(B) = q$, determine a probabilidade de ocorrer:

   (a) os dois eventos;

   (b) pelo menos um dos eventos.

8. Sejam A e B eventos independentes associados a um experimento aleatório. Sabendo que $P(A) = \frac{1}{4}$ e $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$, calcule $P(B)$.

Aula 13 – Probabilidade total. Teorema de Bayes

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de: Identificar eventos independentes um do outro; Calcular a probabilidade de um evento a partir de sua probabilidade condicionada à ocorrência de outros eventos.

Partição

Considere o lançamento de um dado equilibrado e a observação do número da face de cima. Temos $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Sejam os eventos:

$A_1 = \{1, 2, 3\}$

$A_2 = \{4, 5\}$

$A_3 = \{6\}$

Note que quaisquer dois desses eventos são mutuamente exclusivos. Além disso, a união deles é o evento certo: $A \cup B \cup C = \Omega$. Podemos afirmar, neste caso, que:

- algum deles ocorrerá, e

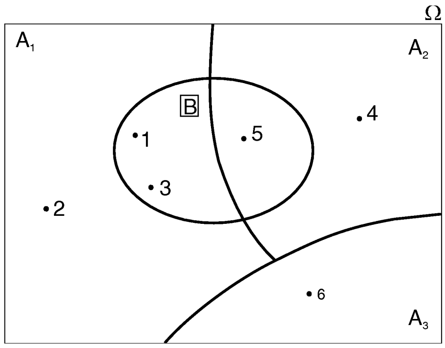
- apenas um deles ocorrerá.

Dizemos que os eventos A_1, A_2 e A_3 formam uma partição do espaço amostral Ω. De modo geral, temos:

> Seja Ω um espaço amostral. Os eventos $A_1, A_2, ..., A_k$ formam uma **partição** de Ω, se:
>
> 1. $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$
> 2. $\cup_{i=1}^{k} A_i = \Omega$
> 3. $P(A_i) > 0$, para todo i

Consideremos novamente os eventos A_1, A_2 e A_3, sendo o evento $B = \{1, 3, 5\}$.

Podemos escrever $B = \{1, 3\} \cup \{5\} = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3)$, como ilustra a figura a seguir.



O conjunto $B \cap A_3$ é vazio, mas isso não invalida a igualdade. Essa decomposição do evento B permite escrevê-lo como união de eventos dois a dois, mutuamente exclusivos. Podemos, então, aplicar a lei da adição:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3)\ .$$

Usando a regra da multiplicação, obtemos:

$$P(B) = P(A_1).P(B|A_1) + P(A_2).P(B|A_2) + P(A_3).P(B|A_3)\ .$$

Vamos fazer os cálculos para verificar a validade dessa expressão. Como o dado é equilibrado, temos:

$$\begin{array}{llll} P(A_1) & = \frac{3}{6} & P(B|A_1) & = \frac{2}{3} \\ P(A_2) & = \frac{2}{6} & P(B|A_2) & = \frac{1}{2} \\ P(A_3) & = \frac{1}{6} & P(B|A_3) & = 0 \end{array}$$

Então,

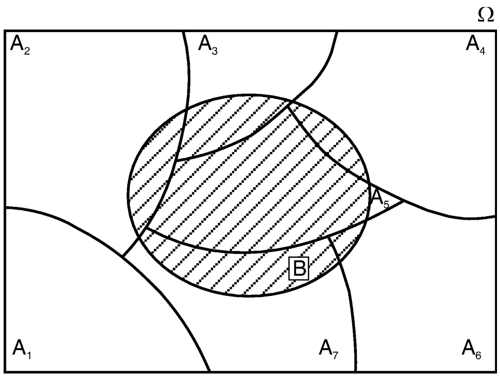
$$P(B) = \frac{3}{6}.\frac{2}{3} + \frac{2}{6}.\frac{1}{2} + \frac{1}{6}.0 = \frac{3}{6}\ ,$$

o que corresponde ao valor esperado (visto que $\#B = 3$ e $\#\Omega = 6$).

De modo geral, temos o seguinte resultado, conhecido como **teorema da probabilidade total**:

> Seja $\{A_1, ..., A_k\}$ uma partição do espaço amostral Ω. Seja $B \subset \Omega$. Então,
>
> $$B = (B \cap A_1) \cup ... \cup (B \cap A_k) \quad \text{e}$$
>
> $$P(B) = P(A_1).P(B|A_1) + ... + P(A_k).P(B|A_k)$$

A figura a seguir ilustra essa situação no caso $k = 7$:

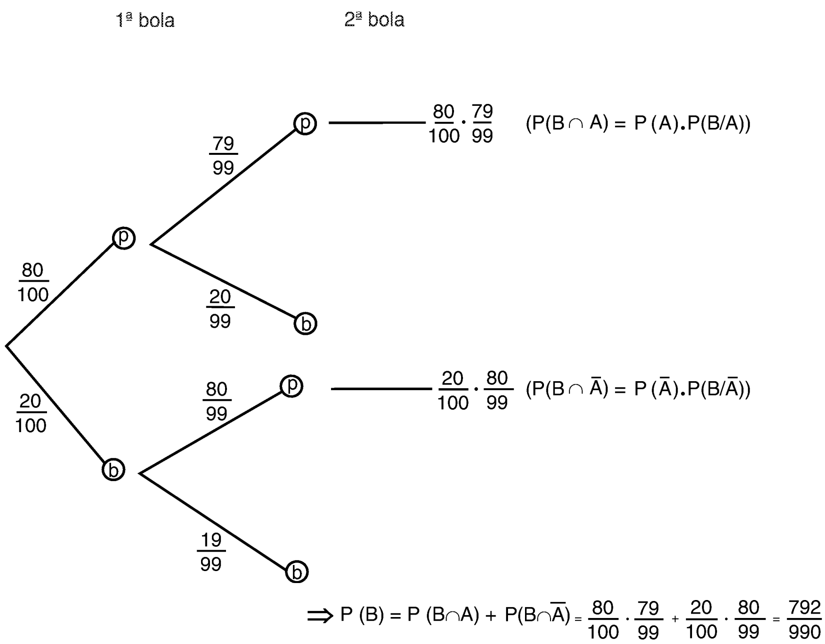


Esse resultado é de grande utilidade nos problemas em que é difícil calcular diretamente a probabilidade de um certo evento. Vamos a um exemplo.

Retiramos, ao acaso, duas bolas de uma urna contendo 80 bolas pretas e 20 bolas brancas, uma após a outra, sem reposição, e observamos suas cores. Queríamos calcular a probabilidade do evento B: "a segunda bola é preta". O evento A: "a primeira bola é preta" e $\overline{A}$ formam, obviamente, uma partição de Ω. Pelo teorema da probabilidade total, temos:

$$\begin{aligned} P(B) = P[(B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})] &= P(A).P(B|A) + P(\overline{A}).P(B|\overline{A}) \\ &= \tfrac{80}{100}.\tfrac{79}{99} + \tfrac{20}{100}.\tfrac{80}{99} = \tfrac{792}{990}\ . \end{aligned}$$

Uma outra maneira de resolver a questão faz uso de uma árvore, na qual vamos escrevendo as probabilidades envolvidas, conforme indica o diagrama a seguir:



Exemplo 77

Três máquinas numa fábrica produzem um mesmo produto. A tabela a seguir esquematiza a produção, ao longo de um mês:

máquina	unidades defeituosas	unidades produzidas
1	40	2000
2	20	1000
3	40	1000

Uma unidade do produto é extraída ao acaso, do lote total produzido nesse mês. Qual a probabilidade de que seja defeituosa?

Solução:

Sejam os eventos:

D: a peça é defeituosa

M_1: a peça foi produzida na máquina 1.

M_2: a peça foi produzida na máquina 2.

M_3: a peça foi produzida na máquina 3.

Queremos $P(D)$.

Temos que $\{M_1, M_2, M_3\}$ forma uma partição do espaço amostral associado ao experimento "extrair uma peça ao acaso e verificar a máquina que a produziu". Pelo teorema da probabilidade total, podemos escrever:

$$P(D) = P(M_1).P(D|M_1) + P(M_2).P(D|M_2) + P(M_3).P(D|M_3) \ .$$

O espaço amostral é eqüiprovável. Assim,

$P(M_1) = \frac{2000}{4000} = \frac{1}{2}$

$P(M_2) = \frac{1000}{4000} = \frac{1}{4}$

$P(M_3) = \frac{1000}{4000} = \frac{1}{4}$

$P(D|M_1) = \frac{40}{2000} = \frac{1}{50}$

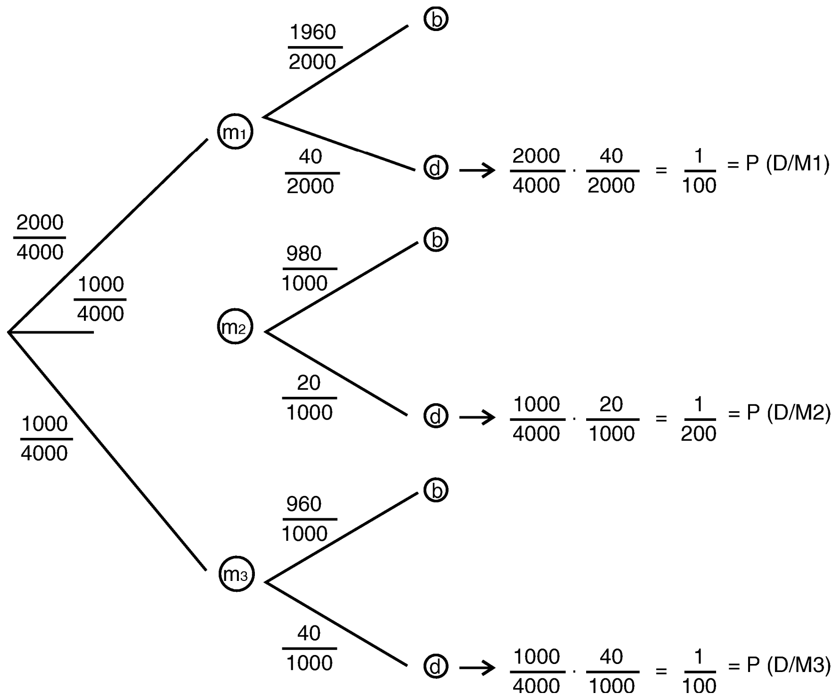
$P(D|M_2) = \frac{20}{1000} = \frac{1}{50}$

$P(D|M_3) = \frac{40}{1000} = \frac{1}{25}$

Logo,

$$P(D) = \frac{1}{2}.\frac{1}{50} + \frac{1}{4}.\frac{1}{50} + \frac{1}{4}.\frac{1}{25} = \frac{1}{100} + \frac{1}{200} + \frac{1}{100} = \frac{1}{40} \ .$$

Uma outra maneira de abordar o problema é construir a árvore de probabilidades:



Logo, $P(D) = \frac{1}{100} + \frac{1}{200} + \frac{1}{100} = \frac{1}{40}$.

Se uma peça é retirada ao acaso e constata-se que ela é defeituosa, qual a probabilidade de que ela tenha sido produzida pela máquina 1? Isto é, qual o valor de $P(M_1|D)$?

Da definição de probabilidade condicional, sabemos que

$$P(M_1|D) = \frac{P(M_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{P(M_1).P(D|M_1)}{P(D)} \; .$$

Portanto,

$$P(M_1|D) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{50}}{\frac{1}{40}} = \frac{2}{5} \; .$$

Teorema de Bayes

Vamos generalizar o procedimento que usamos no exemplo anterior:

Seja $\{B_1, ..., B_k\}$ uma partição do espaço amostral Ω.

Seja $A \subset \Omega$.

Suponhamos conhecidas as probabilidades $P(B_i)$ e $P(A|B_i)$, para $i = 1, ..., k$. Então,

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_i).P(A|B_i)}{P(A)}$$

Mas,

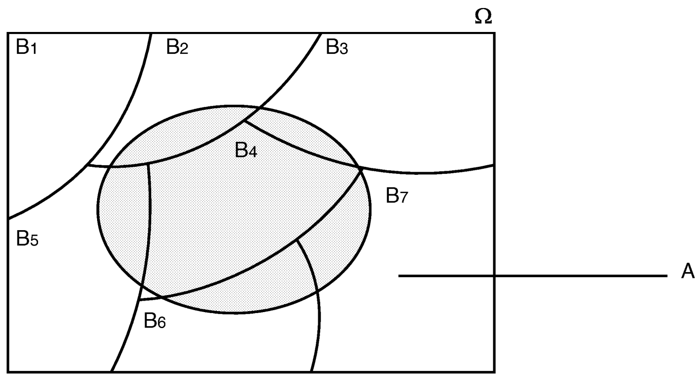
$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup ... \cup (A \cap B_k) \ .$$

Logo,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + ... + P(A \cap B_k) \\ &= P(B_1).P(A|B_1) + P(B_2).P(A|B_2) + ... + P(B_k).P(A|B_k). \end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos o resultado a seguir, conhecido como **Teorema de Bayes**:

$$\boxed{P(B_i|A) = \frac{P(B_i).P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(B_j).P(A|B_j)}, \qquad i = 1, ..., k}$$



A posteriori é uma expressão em latim e significa **após, depois de**. Ela se opõe à expressão *a priori*, que significa **antes de**. Elas não se referem apenas ao tempo, mas à necessidade de haver ou não uma demonstração de sua veracidade.

O Teorema de Bayes segue o seguinte encadeamento lógico: considerando que diferentes causas podem ser responsáveis por um mesmo efeito, se esse efeito ocorre, como determinar a probabilidade de ter sido provocado por uma determinada causa, entre as possíveis? Por usar esse raciocínio, o Teorema de Bayes também é conhecido como "probabilidade das causas" ou "probabilidade **a posteriori**", uma vez que o efeito já foi observado.

Exemplo 78

Numa faculdade, 45% dos alunos fazem licenciatura em Matemática, 35% graduação em Economia e 20% em Administração. Do total de alunos de Matemática, Economia e Administração, 40%, 20% e 50%, respectivamente, são mulheres. Um aluno é escolhido, ao acaso. Determine a probabilidade deste aluno cursar Economia, sabendo que é uma mulher.

Solução:

Sejam os eventos:

L: ser aluno de licenciatura em Matemática.

E: ser aluno de Economia.

A: ser aluno de Administração.

M: ser mulher.

Veja que, pelos dados do enunciado, temos $P(L) = 0,45$; $P(E) = 0,35$; $P(A) = 0,20$; $P(M|L) = 0,40$; $P(M|E) = 0,20$ e $P(M|A) = 0,50$.

Queremos $P(E|M)$.

Sabemos que a probabilidade condicional é dada por

$$P(E|M) = \frac{P(E \cap M)}{P(M)} = \frac{P(E).(P(M|E)}{P(M)} \ ,$$

Os eventos L, E e A formam uma partição do espaço amostral associado ao experimento "escolher um aluno e anotar seu curso"(uma vez que a soma das proporções de cada curso é 100%). Podemos aplicar o teorema da probabilidade total e escrever:

$$\begin{aligned} P(M) &= P(M \cap L) + P(M \cap E) + P(M \cap A) = \\ &= P(L).P(M|L) + P(E).P(M|E) + P(A).P(M|A) = \\ &= (0,45 \times 0,40) + (0,35 \times 0,20) + (0,20 \times 0,50) = \\ &= 0,35 \end{aligned}$$

Substituindo esses valores na expressão da probabilidade pedida, temos:

$$P(E|M) = \frac{0,35 \times 0,20}{0,35} = 0,20 \ .$$

Exemplo 79

Em certa comunidade, 1% da população tem uma doença. Em alguns casos, o exame realizado para detectar a doença pode dar uma indicação positiva para uma pessoa que não a possui. Sabe-se que a probabilidade de ocorrer um resultado positivo, quando a pessoa tem a doença, é de 0,85 e quando não tem é de 0,02. Uma pessoa dessa comunidade é escolhida ao acaso. Qual é a probabilidade de a pessoa ser portadora da doença, se o resultado do seu exame for positivo?

Solução:

Sejam os eventos:

S: o exame da pessoa escolhida dar positivo.

D: a pessoa escolhida ter a doença.

Queremos determinar $P(D|S)$.

Temos:

$P(D) = 0,01$. Logo, $P(\overline{D}) = 0,99$.

$P(S|D) = 0,85$

$P(S|\overline{D}) = 0,02$

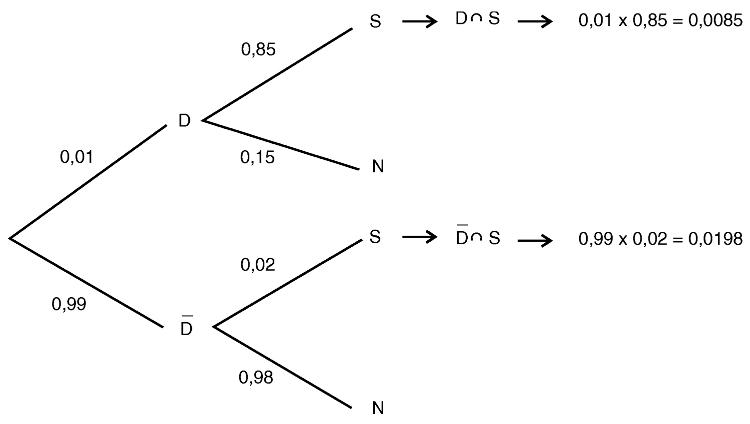
O evento S pode ocorrer estando a pessoa doente ou não, e esses dois eventos (respectivamente $S \cap D$ e $S \cap \overline{D}$) são mutuamente exclusivos. Logo, a probabilidade de ocorrer S é a probabilidade da união dos eventos $S \cap D$ e $S \cap \overline{D}$. Isto é:

$$\begin{aligned} P(D) &= P(S \cap D) + P(S \cap \overline{D}) = \\ &= P(D).P(S|D) + P(\overline{D}).P(S|\overline{D}) = \\ &= (0,01)(0,85) + (0,99).(0,02) = \\ &= 0,0085 + 0,0198 = \\ &= 0,0283 \end{aligned}$$

Então, a probabilidade de uma pessoa ter a doença, por ter ocorrido um resultado positivo é:

$$P(D|S) = \frac{P(S \cap D)}{P(S)} = \frac{P(D).P(S|D)}{P(S)} = \frac{(0,01)(0,85)}{0,0283} = \frac{0,0085}{0,0283} = 0,30035\,.$$

Analise a árvore das probabilidades para chegar à mesma resposta.



P (S) = 0,0085 + 0,0198 = 0,0283

$$P\,(D/S) = \frac{P\,(D \cap S)}{P\,(S)} = \frac{0,0085}{0,0283} = 0,30035$$

Resumo

O teorema da probabilidade total é útil em problemas em que é mais fácil determinar as probabilidades condicionais de um certo evento do que a sua probabilidade absoluta. Para isso, precisamos ter eventos que formem uma partição do espaço amostral.

O Teorema de Bayes analisa a seguinte situação: supondo que um certo efeito pode ter diferentes causas, uma vez observado o efeito, qual a probabilidade de ter sido provocado por uma determinada causa? É como se pensássemos de uma forma “contrária” à usual.

Exercícios

1. Um dado é viciado de maneira que a probabilidade de sair certo número é proporcional ao seu valor (por exemplo, o número 5 é 5 vezes mais provável de sair do que o número 1). Determine a probabilidade :

   (a) de cada evento simples;

   (b) do evento A: “sair número ímpar”;

   (c) de sair 3, sabendo-se que o número é ímpar;

   (d) de sair número par, sabendo-se que saiu um número maior que 3.

2. Duas pessoas participam de uma maratona. A probabilidade da primeira de completar o percurso é 2/3 e a probabilidade da segunda de completar o percurso é 3/5. Qual a probabilidade de:

   (a) ambas completarem o percurso?

   (b) ao menos uma delas completar o percurso?

3. Uma carta é extraída, ao acaso, de um baralho de 52 cartas. Sejam os eventos:

   A: copas

   B: rei

   C: rei ou valete

   Determine $P(A), P(B), P(C), P(A \cap B), P(A \cap C)$ e $P(B \cap C)$. Quais dos pares de eventos são independentes?

4. Um grupo de 100 pessoas é classificado segundo a cor dos olhos e dos cabelos, conforme indica a tabela:

olhos → cabelo ↓	azuis	castanhos
loura	36	12
morena	9	32
ruiva	5	6

Uma dessas pessoas é escolhida ao acaso. Qual a probabilidade dela ser:

(a) ruiva?
(b) loura e de olhos castanhos?
(c) morena e de olhos azuis?
(d) morena, sabendo que possui olhos azuis?
(e) morena ou de olhos azuis?

5. Um experimento aleatório possui espaço amostral $\{e_1, ..., e_7\}$, eqüiprovável. Considere os eventos:

$$A = \{e_1, e_3, e_5, e_7\} \quad e \quad B = \{e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}.$$

Determine $P(A), P(\overline{A}), P(A \cup B), P(A \cap B), P(B|A)$. Os eventos A e B são mutuamente exclusivos? Os eventos A e B são independentes? Justifique suas respostas.

6. Sabe-se que 80% das pessoas que abrem crediário são boas pagadoras. Suponhamos que a probabilidade de um bom pagador possuir cartão de crédito seja de 0,9 e que um mau pagador tenha probabilidade de 0,3 de possuir cartão de crédito. Uma pessoa é escolhida ao acaso entre as que abrem crediário. Calcule a probabilidade:

(a) de que ela tenha cartão de crédito;
(b) de ser boa pagadora, sabendo que tem cartão de crédito;
(c) de ser boa pagadora, sabendo que não tem cartão de crédito.

7. Paulo e Roberto criam cães. Paulo tem 3 vezes mais cães que Roberto. Entre os cães de Paulo, 20% são de raça e entre os de Roberto, 10% são de raça. Um cão é encontrado. Sabe-se que pertence a Paulo ou a Roberto.

(a) Qual a probabilidade de pertencer a Paulo?
(b) Sabendo-se que o cão é de raça, qual a probabilidade de que pertença a Paulo?

8. Foi realizado um teste para detectar uma doença. Sabe-se que o teste é capaz de descobrir a doença em 97% das pessoas afetadas. Sabe-se, também, que o teste, erroneamente, identifica a doença em 5% das pessoas saudáveis. Além disso, sabe-se que, quando aplicado a pessoas que tenham algum outro tipo de doença, 10% são diagnosticados de forma incorreta.

   A população submetida ao teste era composta de 1% de pessoas afetadas pela doença, 96% de pessoas saudáveis e 3% de pessoas apresentando outras doenças.

   Uma pessoa dessa população é escolhida ao acaso e seu teste deu positivo, isto é, foi detectada a doença. Qual a probabilidade de que ela esteja realmente com aquela doença?

9. Um aparelho para testar válvulas sempre detecta uma válvula ruim. No entanto, em 3% das vezes em que ele indica defeito, a válvula, de fato, está perfeita. Sabe-se que, num lote, 95% das válvulas estão boas. Uma válvula é retirada ao acaso desse lote. Ela é testada e é dada como estragada. Qual a probabilidade de se tratar de uma válvula boa?

10. Numa turma de terceiro ano de ensino médio, as quantidades de alunas e de alunos são iguais. Suponha que a probabilidade de um rapaz se dedicar às ciências exatas é de $4/5$ e que a probabilidade de uma moça se dedicar às ciências exatas é de $2/5$. Um estudante dessa turma é escolhido, ao acaso. Qual a probabilidade de :

    (a) ser um rapaz que se dedica às ciências exatas?

    (b) ser um estudante de ciências exatas?

    (c) ser do sexo masculino, sabendo que gosta de ciências exatas?

Serviço gráfico realizado em parceria com a Fundação Santa Cabrini por intermédio do gerenciamento laborativo e educacional da mão-de-obra de apenados do sistema prisional do Estado do Rio de Janeiro.

Fundação CECIERJ Consórcio cederj

FUNDAÇÃO SANTA CABRINI Provedora de acesso à Cidadania

Maiores informações: www.santacabrini.rj.gov.br

ISBN 85-7648-043-3
9 788576 480433

UENF
Universidade Estadual
do Norte Fluminense

UERJ
UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Universidade Federal Fluminense
uff

UNIVERSIDADE DO BRASIL

Universidade Federal Rural
do Rio de Janeiro

UNIRIO

FUNDAÇÃO
SANTA CABRINI
Provedora de acesso à Cidadania

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

GOVERNO DO
Rio de Janeiro
SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Ministério
da Educação

BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL