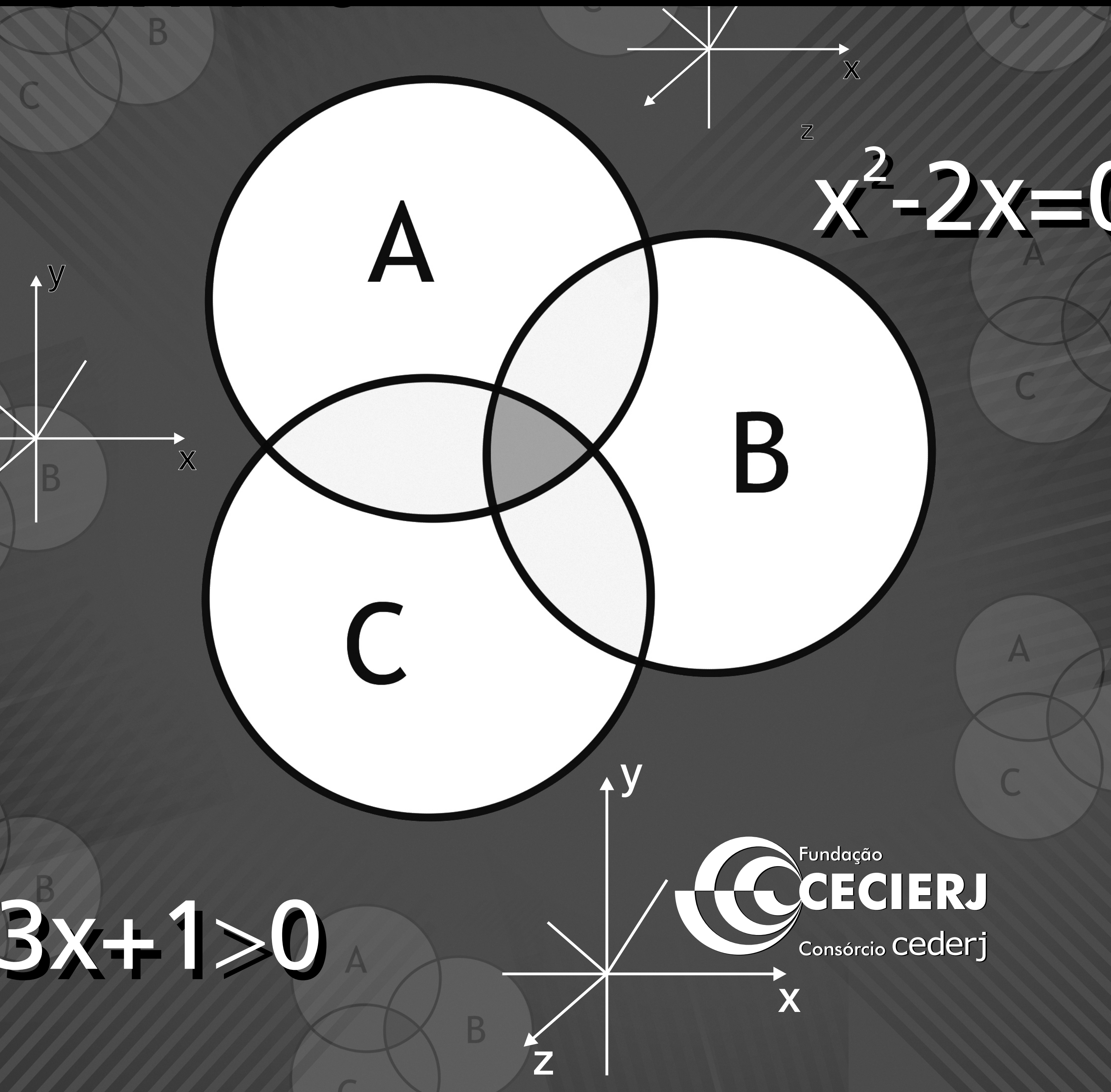
Módulo 1

Celso Costa

Volume único

Métodos Determinísticos I



Fundação
CECIERJ
Consórcio cederj
Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Métodos Determinísticos I

Volume único - Módulo 1

Celso Costa

GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
Ministério da Educação
BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Apoio:
FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001
Tel.: (21) 2334-1569 Fax: (21) 2568-0725

Material Didático

ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO
Celso Costa

REVISÃO DE CONTEÚDO
Ana Cleide Parente
Eliane Amiune Camargo

COLABORADORES
Ana Cleide Parente
Eliane Amiune Camargo
Marcelo Corrêa

COORDENAÇÃO DE DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL
Cristine Costa Barreto

Departamento de Produção

EDITORA
Tereza Queiroz

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO
Jorge Moura

PROGRAMAÇÃO VISUAL
Aline Madeira Brondani
Giuseppe Luigi Toscano
Marcelo Freitas

ILUSTRAÇÃO
André Amaral
André Dahmer
Aline Madeira Brondani
Giuseppe Luigi Toscano

CAPA
Eduardo Bordoni

PRODUÇÃO GRÁFICA
Andréa Dias Fiães
Fábio Rapello Alencar

C837c

Costa, Celso.
Métodos Determinísticos I. v. único / Celso Costa.
Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2009.
243p.; 21 x 29,7 cm.

ISBN: 978-85-7648-496-7

1. Matemática básica. 2. Sistemas de coordenadas.
3. Equação da reta. 4. Plano euclidiano. I. Título.

CDD: 510

2009/1

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador
Sérgio Cabral Filho

Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia
Alexandre Cardoso

Universidades Consorciadas

UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Vieiralves

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Reitor: Roberto de Souza Salles

UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Aloísio Teixeira

UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Motta Miranda

UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitora: Malvina Tania Tuttman

Métodos Determinísticos I

Volume único - Módulo 1

SUMÁRIO

Prezado aluno:

Trago as boas-vindas para você que inicia o estudo de Métodos Determinísticos e os votos de uma feliz e produtiva caminhada.

Esta disciplina tem a finalidade de colocar a Matemática como uma ferramenta de apoio ao curso de Administração.

Neste módulo, o foco principal é uma revisão de conteúdos básicos que fazem parte do currículo do Ensino Médio, mas que aqui são introduzidos numa linguagem adequada aos propósitos da disciplina.

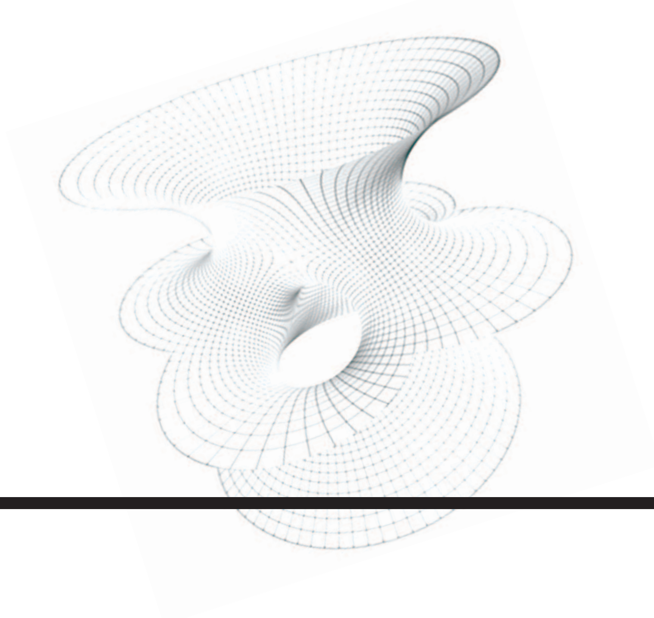
Revelo duas estratégias, entre as principais, que norteiam a proposta da disciplina: a visualização geométrica e a busca de motivação em exemplos práticos.

A visualização geométrica é muito importante para a fixação de conceitos e, além do fato de incorporar a visão intuitiva do espaço, muito auxilia no aprendizado das técnicas do cálculo e na resolução de problemas. Por outro lado, a motivação em exemplos práticos, dentro do universo de interesse do curso de Administração, também é relevante para a contextualização da disciplina.

Desejo a você um bom estudo e uma feliz caminhada nesta disciplina e no curso que se inicia.

Celso Costa

Aula 1



CONJUNTOS

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. entender o conceito de conjunto;
2. realizar operações com conjuntos.

Definição 1.1

Conjunto é um conceito fundamental que está na base de construção da Matemática. Como se trata de um conceito primitivo, conjunto é uma noção que não pode ser definida a partir de outros conceitos da Matemática. Conjunto expressa a idéia intuitiva de reunião de elementos (pessoas, objetos, números, etc.) que podem ser agrupados por possuírem características comuns. São exemplos de conjuntos: o conjunto de todas as letras do alfabeto ou o conjunto de todas as mulheres brasileiras.

Para representar conjuntos, usamos as letras maiúsculas A, $B, C, \cdots$ e para representar elementos do conjunto, usamos letras minúsculas a, b, $c, \cdots$. Existem várias maneiras de representar um conjunto, sendo a mais usual escrever os elementos um a um, separados por vírgulas, ou representar entre chaves um elemento genérico do conjunto através de suas propriedades. Veja alguns exemplos.

Exemplo 1.1

O conjunto A das letras de todas as vogais do alfabeto pode ser representado como

$$A = \{a, e, i, o, u\} \quad \text{ou} \quad A = \{x \mid x \text{ é vogal do alfabeto português}\}.$$

Vamos aproveitar este exemplo para estabelecer a relação entre um elemento e o conjunto que é a relação de pertinência, a qual é representada pelos símbolos $\in$ e $\notin$. Assim, para representar que u está no conjunto A e que um elemento d não está no conjunto A, escrevemos:

$$u \in A \text{ “}u\text{ pertence a }A\text{”} \quad \text{e} \quad d \notin A \text{ “}d\text{ não pertence a }A\text{”}.$$

No estudo de conjuntos, é imprescindível introduzir o conceito de conjunto vazio. Denomina-se conjunto vazio aquele que não possui nenhum elemento. Para representá-lo, usamos o símbolo $\emptyset$. Assim, por exemplo, se

$$B = \{x \mid x \text{ é um dia da semana cuja primeira letra é f}\} \text{ então } B = \emptyset.$$

SUBCONJUNTOS

Considere dois conjuntos A e B. Se todo elemento do conjunto B também for um elemento do conjunto A, diremos que B é um subconjunto do conjunto A. Por outro lado, se existir um único elemento do conjunto B que não pertence ao conjunto A, então B não é subconjunto de A. Veja através de um exemplo.

Exemplo 1.2

Sejam os conjuntos,

$$A = \{a,b,c,d,e,f\};$$
$$B = \{a,e\};$$
$$C = \{a,e,i\}.$$

Então B é um subconjunto de A, uma vez que todo elemento de B é também um elemento do conjunto A. No entanto, C não é um subconjunto de A, já que o elemento i pertence ao conjunto C, mas não pertence ao conjunto A.

Para representar a relação de inclusão entre conjuntos, usamos os símbolos $\subset$ e $\not\subset$. Em relação ao exemplo anterior, escrevemos que $B \subset A$ “B está contido em A”e $C \not\subset A$ “C não está contido em A.”

Exercício 1.1

Dado o conjunto $A = \{x,y,z\}$, associar V (verdadeira) ou F (falsa) a cada uma das sentenças a seguir:

a) $y \notin A$ b) $A = \{y,z,x\}$ c) $\{x\} \in \{x,y,z\}$

d) $x \in A$ e) $\{y,x\} \subset A$

UNIÃO, INTERSEÇÃO E PRODUTO CARTESIANO DE CONJUNTOS

Dados dois conjuntos A e B, podemos formar quatro novos conjuntos:

i) **O conjunto união de** A **e** B é o conjunto formado por todos os elementos de A ou de B. Usamos o símbolo $\cup$ para representar o novo conjunto união e escrevemos

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Veja, na **Figura 1.1**, a representação gráfica da união de dois conjuntos.

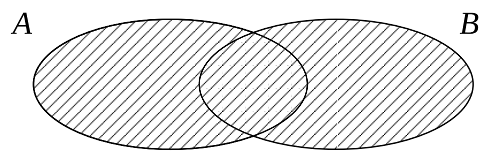


Figura 1.1: União de conjuntos.

ii) **O conjunto interseção de** A **e** B é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a ambos os conjuntos A e B. Usamos o símbolo $\cap$ para representar o novo conjunto interseção e escrevemos

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Veja, na **Figura 1.2**, a representação gráfica da interseção de dois conjuntos.

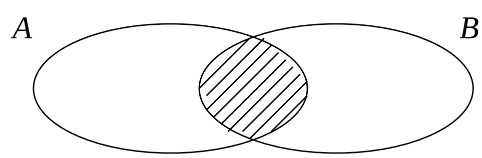


Figura 1.2: Interseção de conjuntos.

iii) **O conjunto produto cartesiano do conjunto** A **pelo conjunto** B, o qual é representado por $A \times B$, é o conjunto

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

iv) **O conjunto diferença entre os conjuntos** A **e** B é formado pelos elementos que pertencem a A e não pertencem a B. Usamos a notação $A - B$ para o conjunto diferença. Portanto,

$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$

Veja, na **Figura 1.3**, a representação gráfica da diferença $A - B$, entre os conjuntos A e B.

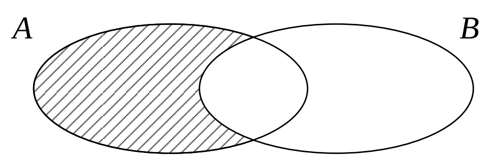


Figura 1.3: Diferença $A - B$ entre conjuntos.

Exemplo 1.3

Sejam os conjuntos,

$$A = \{a,b,c,d,e\},$$
$$B = \{a,e,i\};$$
$$C = \{f,g\}.$$

Então,

$$A \cup B = \{a,b,c,d,e,i\};$$
$$A \cap B = \{a,e\};$$
$$A - B = \{b,c,d\};$$
$$B \times C = \{(a,f),(a,g),(e,f),(e,g),(i,f),(i,g)\}.$$

✍ Quando estamos estudando conjuntos, podemos nos referir ao conjunto universo representado pela letra U. Numa situação especificada, U é o conjunto que contém como subconjuntos os conjuntos estudados. Para um certo conjunto A, escrevemos $A \subset U$, isto é, o conjunto A está contido no conjunto universo U.
Nesta situação, denominamos conjunto complementar do conjunto A ao conjunto formado pelos elementos do conjunto universo U que não pertencem a A. Então, na verdade, este conjunto é representado pela diferença $U - A$. Também é útil a notação A^c para representar o conjunto complementar de A. Assim,

$$A^c = \{x \mid x \in U \text{ e } x \notin A\}.$$

Veja, na **Figura 1.4**, a representação de A^c.

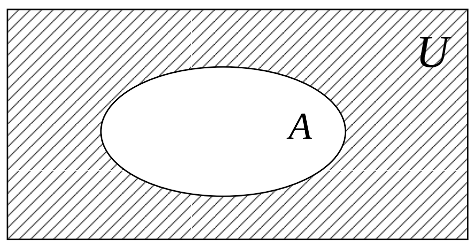


Figura 1.4: Conjunto complementar de A.

Exercício 1.2

No diagrama representado na **Figura 1.5**, assinale, entre as alternativas a seguir, aquela que representa a parte hachurada.

a) $(A \cup C) - B$ b) $(B \cap C) - A$ c) $(A \cap B) - C$

d) $(A \cap C) \cup B$ e) $A - (B - C)$

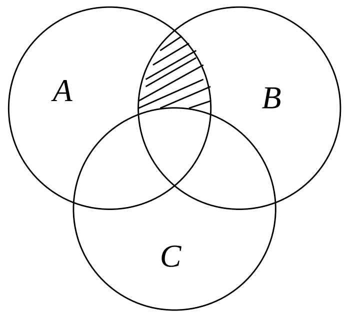


Figura 1.5: Operação entre conjuntos.

Número de elementos de um conjunto

Um conjunto é dito *finito* quando possui um número *finito* n de elementos. Em caso contrário, o conjunto é chamado *infinito*. Dados os conjuntos finitos A e B, representamos por

$n(A)$ o número de elementos de A;

$n(B)$ o número de elementos de B;

$n(A \cup B)$ o número de elementos da união $A \cup B$;

$n(A \cap B)$ o número de elementos da interseção $A \cap B$.

Não é difícil verificar que a fórmula

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \tag{1.1}$$

fornece o número de elementos do conjunto união em função do número de elementos dos conjuntos A e B e do número de elementos da interseção $A \cap B$. Verifique como isto acontece.

Em primeiro lugar, contamos o conjunto A, obtendo $n(A)$, contamos o conjunto B, obtendo $n(B)$. Agora vai uma pergunta: em que circunstância é correto escrever:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$?

A igualdade acima só vale no caso em que $A \cap B = \emptyset$, isto é, quando a interseção dos conjuntos A e B é o conjunto vazio. No caso geral, quando $A \cap B \neq \emptyset$, para encontrar o valor $n(A \cup B)$, devemos retirar da soma $n(A) + n(B)$ o valor $n(A \cap B)$, para não contar duas vezes a contribuição de $A \cap B$ no valor $n(A \cup B)$. Com esta providência, podemos comprovar a validade da fórmula (1.1).

Exemplo 1.4

Considere os conjuntos $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, e, i\}$. Vamos verificar a validade da fórmula (1.1), para este caso particular. Acompanhe pela **Figura 1.6**. Note que $n(A) = 5$, $n(B) = 3$, $n(A \cup B) = 6$ e $n(A \cap B) = 2$. Esses dados levados à fórmula (1.1) confirmam a igualdade.

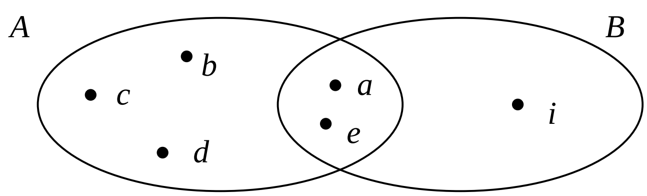


Figura 1.6: Número de elementos do conjunto união.

Mudando levemente de rumo, vamos encontrar agora a fórmula que permite calcular $n(A \times B)$ que representa o número de elementos do produto cartesiano $A \times B$. Não é difícil provar que

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B).$$

Acompanhe como verificar a validade da fórmula para conjuntos A e B, respectivamente, com 4 e 5 elementos. Representando os conjuntos explicitamente, temos que

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \text{ e } B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\},$$

então o conjunto $A \times B$ pode ser lido na tabela que aparece na **Figura 1.7**, a seguir, onde na primeira linha aparecem todos os pares do tipo (a_1, b_j), j variando de 1 até 5; na segunda linha aparecem todos os pares do tipo (a_2, b_j), j variando de 1 até 5 e, assim, sucessivamente, até a última linha. A tabela mostra todos os pares (a_i, b_j), os quais representam todos os elementos de $A \times B$.

(a_1,b_1)	(a_1,b_2)	(a_1,b_3)	(a_1,b_4)	(a_1,b_5)
(a_2,b_1)	(a_2,b_2)	(a_2,b_3)	(a_2,b_4)	(a_2,b_5)
(a_3,b_1)	(a_3,b_2)	(a_3,b_3)	(a_3,b_4)	(a_4,b_5)
(a_4,b_1)	(a_4,b_2)	(a_1,b_3)	(a_1,b_4)	(a_1,b_5)

Figura 1.7: Representação dos elementos de $A \times B$.

A representação de $A \times B$ através de uma matriz retangular permite o cálculo do número de elementos, simplesmente multiplicando o número de linhas pelo número de colunas. Veja que no caso particular representado na **Figura 1.7**,

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = 4 \times 5 = 20$$

.

De modo geral, como o número de linhas é $n(A)$ e o número de colunas é $n(B)$, então vale

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)\,.$$

✍

i. o símbolo $\in$ é usado para relacionar um elemento e seu conjunto, enquanto o símbolo $\subset$ é usado para relacionar dois conjuntos;

ii. o conjunto vazio é um subconjunto de qualquer conjunto. Ou seja, $\emptyset \subset A$, qualquer que seja o conjunto A;

iii. todo conjunto é um subconjunto de si próprio. Ou seja, $A \subset A$, qualquer que seja o conjunto A;

iv. se três conjuntos A, B e C são tais que $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \subset C$.

Exercício 1.3

1. Considere os conjuntos $A = \left\{-1, 1, \frac{2}{3}, \frac{13}{3}\right\}$ e $B = \left\{0, 1, \frac{2}{3}, 4\right\}$. Determine os conjuntos $A - B$ e $A \times (A - B)$.

2. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5\}$. Determine os conjuntos $B \times (B - A)$ e $A \times (A - B)$.

3. Nos exercícios seguintes, assinale nos diagramas que aparecem na **Figura 1.8**, os conjuntos indicados:

   a) $(A \cup C) - B$

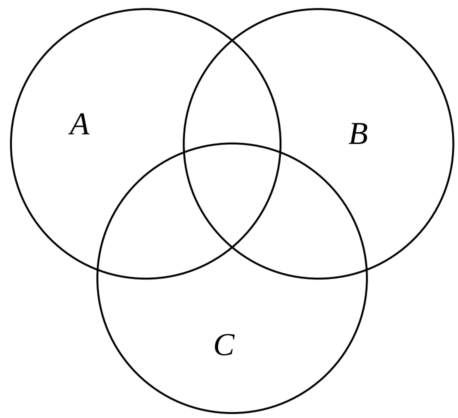


Figura 1.8.a.

   b) $(B \cap C) - A$

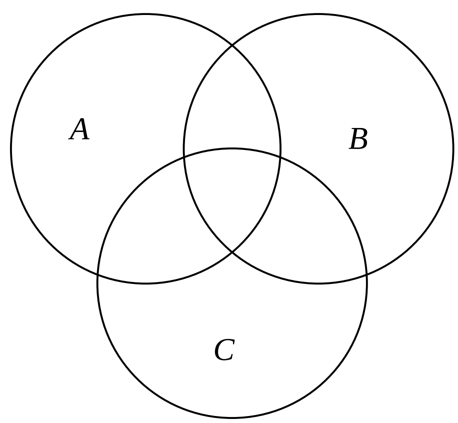


Figura 1.8.b.

Aula 2

OS CONJUNTOS DOS NÚMEROS NATURAIS, INTEIROS E RACIONAIS

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. rever propriedades básicas dos números naturais e inteiros;
2. compreender a representação dos números inteiros sobre uma reta;
3. recordar a representação dos números racionais na reta numérica;
4. trabalhar com propriedades operatórias do conjunto dos números racionais.

NÚMEROS NATURAIS

Vivemos e nos orientamos em um mundo de números. Temos horários para ir e voltar do trabalho, nosso endereço tem um número de CEP, nossa identidade e nosso CPF são números. Acrescente-se ainda os números de emergência: polícia, bombeiros, hospitais. Seria exaustivo lembrar tantos números. Eles acompanham a evolução do ser humano primitivo e hoje, com o uso dos computadores, são ferramentas fundamentais na revolução que presenciamos na organização de nossa sociedade.

Os números estão de tal modo presentes em nossas vidas que os usamos de modo automático, sem lembrar que são criações abstratas da mente humana.

A mais antiga idéia de número surge da necessidade de contar. No princípio da aventura humana, o antigo pastor, ao comparar seu conjunto de ovelhas ao correspondente conjunto de pedrinhas, identificava uma característica comum aos conjuntos. Essa característica quantitativa evolui posteriormente para a idéia abstrata de número e a expressão dessa idéia por meio de símbolos. Veja, por exemplo, o número 5; pare um pouco e pense na imensa abstração por trás desse símbolo.

Os livros didáticos citam, com freqüência, a história do ancestral pastor que a cada ovelha de seu rebanho fazia corresponder uma pedrinha em seu bolso. Com este procedimento simples, o pastor "contava" e controlava seu rebanho, evitando o desaparecimento ou comemorando o nascimento de um novo animal.

O conjunto dos números naturais, representado pela letra $\mathbb{N}$, é o conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$.

Notamos que é indiferente incluírmos ou não o número 0 (zero) no conjunto $\mathbb{N}$. Historicamente, a idéia abstrata de um número zero surge mais tarde, associado à ausência de objetos para contar.

É importante que você pare um pouco e reflita sobre o significado dos três pontinhos que aparecem na definição do conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. Os pontinhos expressam que $\mathbb{N}$ é um conjunto infinito e que conhecemos de antemão como escrever indefinidamente um após outro os elementos de $\mathbb{N}$. A consideração e compreensão do infinito é um grande salto de abstração, possível na mente humana!

Quais são as propriedades fundamentais do conjunto $\mathbb{N}$ de números naturais? São as propriedades conhecidas como ***Axiomas de Peano***. Dentre elas, destacamos duas. A primeira é a que garante a existência de um primeiro número natural, o número 1. A segunda garante que todo número natural tem um "sucessor".

O sucessor de 4 é 5, o sucessor de 199 é 200 e, em geral, o sucessor de n é $n+1$.

NÚMEROS INTEIROS

Os números naturais são úteis para resolver problemas de contagem e, no entanto, são insuficientes para solucionar problemas do dia-a-dia, como perdas, prejuízos etc.

No fim do mês passado, dia 28, recebi uma terrível notícia ao tirar, no banco, o extrato de minha conta corrente num terminal eletrônico. Os valores impressos em tinta vermelha (advertência!) sentenciavam:

$$\text{Saldo atual: } -305,00.$$

E é isto. Convencionamos para representar a perda de 2 ovelhas, por exemplo, colocando o sinal "$-$" antes do número. Assim, -2 expressaria essa perda. Do mesmo modo, meu saldo de $-305,00$ no dia 28 expunha minha desagradável condição de devedor junto ao banco.

Incorporando aos números naturais, os números negativos e o número zero, chegamos ao conjunto dos números inteiros, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Os números naturais também são chamados de inteiros positivos. Note que, como conjuntos, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

REPRESENTAÇÃO DE $\mathbb{Z}$ SOBRE UMA RETA

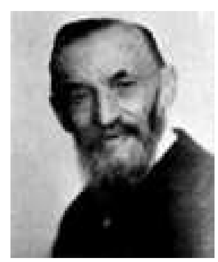
É muito útil representar os números inteiros sobre uma reta orientada. Escolha uma reta no plano e sobre ela marque dois pontos, o ponto O e o ponto I. Em seguida, associe aos pontos O e I, respectivamente, os números 0 (zero) e 1.

Axioma

Enunciado admitido como verdadeiro sem necessidade de provas. Por exemplo, na Física de Einstein, um fato admitido como axioma é que a velocidade da luz no vácuo é constante e independente de qualquer referencial.

Giuseppe Peano

(1858-1932)



Destacado lógico e matemático italiano, com contribuições importantes em Fundamentos da Aritmética e da Geometria. Para saber mais sobre Peano e seus axiomas, consulte: http://users.hotlink.com.br/marielli/matematica/geniomat/peano.html

O segmento de reta cujos extremos são os pontos O e I é denominado "segmento unidade". Com esse segmento como padrão, definimos a posição de todos os números inteiros sobre a reta.

O segmento OI estabelece dois *sentidos de percurso* sobre a reta: o que vai de O para I e o que vai de I para O. Escolhemos um desses sentidos como sendo o *positivo* e o outro como o *negativo*. A convenção que predomina universalmente é a de escolher como sentido positivo o que vai de O para I. Também é uma convenção universal escolher o ponto I à direita de O, como na **Figura 2.1**.

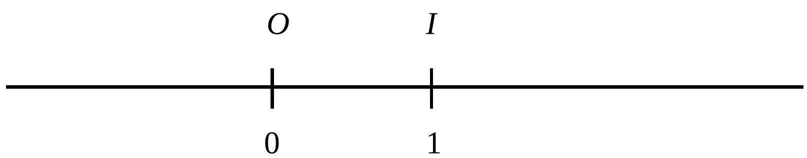


Figura 2.1: O segmento unidade.

A partir do ponto 0 (zero) e seguindo no sentido positivo da reta, vamos justapondo sucessivamente o segmento unidade de modo a relacionar cada número natural com um único ponto da reta. Essa construção é feita de tal modo que o segmento de reta cujos extremos são um número natural n e seu sucessor $n+1$ tem o mesmo comprimento do *segmento unidade*. Uma construção análoga é feita a partir do ponto 0 (zero) no sentido negativo de percurso sobre a reta, marcando sucessivamente pontos associados aos números inteiros negativos $-1, -2, -3, \ldots$ Veja a **Figura 2.2**:

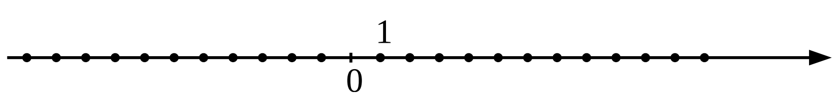
Reforçando

Quaisquer dois pontos consecutivos marcados para representar números inteiros na reta definem segmentos de comprimento unitário.

Figura 2.2: Os números inteiros na reta.

Exercício 2.1

Assinale na reta da figura a seguir os pontos correspondentes aos números $-10, 3, 9, -6, -2$.



RELAÇÃO DE ORDEM

A representação dos números inteiros sobre uma reta orientada permite estabelecer uma relação de ordem no conjunto $\mathbb{Z}$.

Definição 2.1

Dizemos que o número inteiro m é menor que o número inteiro n se na representação sobre uma reta orientada o ponto que representa m aparecer antes do ponto que representa n.

Note que na definição de ordem usamos a expressão: m aparece antes de n na reta. Isso significa que a direção que aponta de m para n coincide com a direção da reta.

Utilizamos a notação $m < n$ para indicar que m é menor que n. A notação $n > m$ (n é maior que m) tem o mesmo significado que $m < n$.

Usamos a notação $m \leq n$ (m é menor ou igual a n) para significar que m é menor ou igual a n, e a notação $n \geq m$ (n é maior ou igual a m) equivale a $m \leq n$.

Definição 2.2

Um número m é dito *positivo* se for maior do que zero, isto é, $m > 0$. Um número m é dito *negativo* se for menor do que zero, isto é, $m < 0$. O número zero não é positivo nem negativo.

PROPRIEDADES OPERACIONAIS PARA A SOMA E MULTIPLICAÇÃO

Veja as propriedades operacionais para a soma e multiplicação de números inteiros, popularmente denominadas “regras de sinais”.

Para melhor acompanhar os enunciados, lembre que o valor absoluto de um número inteiro é o próprio número no caso de um número positivo, e o simétrico do número no caso de número negativo. Assim, o valor absoluto de 2 é 2 e o valor absoluto de -3 é 3.

✍ Para adicionar números inteiros de mesmo sinal, adicione os números conservando o sinal no resultado.

Exemplo 2.1

a) Calcule a soma $-6+(-43)$.

Solução: Ambas as parcelas são números negativos. Logo, o resultado da adição é um número negativo. Ou seja, $-6+(-43)=-6-43=-(6+43)=-49$.

✍ Para adicionar números inteiros de sinais diferentes, subtraem-se os números, dando ao resultado o sinal do inteiro de maior valor absoluto.

b) Calcule a soma $-63+43$.

Solução: Temos a adição de um número negativo com um número positivo. O número negativo tem maior valor absoluto. Portanto, a soma será um número negativo. Acompanhe a conta: $-63+43=-(63-43)=-20$.

✍ O produto de dois inteiros que têm sinais diferentes é um número negativo cujo valor absoluto é obtido pelo produto dos números.

c) Calcule $(-63)\cdot 43$.

Solução: $(-63)\cdot 43=-(63\cdot 43)=-2.709$.

✍ O produto de dois inteiros de mesmo sinal é um número positivo, cujo valor absoluto é obtido pelo produto dos valores absolutos dos números.

d) Calcule $(-3)\cdot(-4)$.

Solução: $(-3)\cdot(-4)=+(3\cdot 4)=+12=12$.

e) Calcule $9-2\times 3\times 9-2\times 3$.

Solução: Antes de começar o cálculo, lembre que as multiplicações sempre devem ser efetuadas antes das adições ou subtrações, a menos que a expressão contenha parênteses, chaves, colchetes, etc... que subvertam essa hierarquia. Expressões numéricas que envolvam apenas adições ou subtrações podem ser calculadas de acordo com a ordem em que as operações vão surgindo ou em qualquer ordem. Portanto, $9-2\times 3\times 9-2\times 3=9-54-6=9-60=-51$.

f) Calcule $(9-2\times3)\times(9-2\times3)$.

Solução: Agora, devemos efetuar primeiro as operações entre parênteses: $9-2\times3=9-6=3$. Assim, $(9-2\times3)\times(9-2\times3)=3\times3=9$.

Note que os exemplos *e* e *f* contêm os mesmos números e as mesmas operações. Todavia, as respostas são completamente diferentes, devido à presença de parênteses. Mais tarde, no cálculo de expressões numéricas, vamos usar, além de parênteses, colchetes e chaves.

Exercício 2.2

Calcule:

1. $5-2\times4+3-1$
2. $5-2\times(4+3-1)$
3. Você obteve o mesmo resultado nos dois itens?

NÚMEROS RACIONAIS

Você está numa festa de aniversário e o dono da casa oferece um saboroso pedaço de bolo. Em virtude do regime que você começou ontem, o pedaço parece exagerado. Você exclama, a duras penas, que é muito grande, e que quer apenas um terço desse pedaço de bolo.

O que aconteceu? O pedaço de bolo representava uma unidade que lhe era oferecida, e você solicita que esta seja dividida em três partes iguais, das quais apenas uma será sua. Você deseja uma exata parte, ou uma fração da unidade oferecida. A maneira abstrata de representar essa idéia é escrever $\frac{1}{3}$.

Os números racionais surgem para expressar ou medir quantidades nas quais aparecem envolvidas partes da unidade.

Veja, na figura a seguir, um bolo de forma retangular dividido em partes iguais de dois modos diferentes. Em 3 partes e em 9 partes, respectivamente.

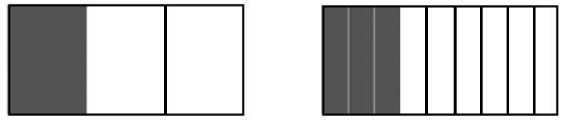


Figura 2.3: Divisão da unidade.

Do ponto de vista da quantidade, uma das partes do bolo dividido na **Figura 2.3**, à esquerda, representa $\frac{1}{3}$, enquanto que uma das partes à direita representa $\frac{1}{9}$. Agora é evidente que um pedaço de bolo representado na **Figura 2.3**, à esquerda, é igual a 3 pedaços de bolo representado à direita. Isso sugere que vale a igualdade $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$, e fica evidente que podemos representar de vários modos uma mesma porção da unidade.

Expressões do tipo $\frac{m}{n}$, onde m e n são números inteiros e $n \neq 0$, são chamadas frações. Note que $\frac{1}{3}$ é igual a $\frac{3}{9}$, pelo simples fato de que multiplicamos por 3 o número de divisões da unidade e de que também multiplicamos por 3 o número das partes que utilizamos para formar a nova fração.

Este exemplo permite induzirmos que, ao multiplicarmos o numerador e o denominador de uma fração pelo mesmo número inteiro não-nulo, não alteramos o valor da fração. Ou seja, $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ se existe um número inteiro k, não-nulo, tal que $p = k \cdot m$ e $q = k \cdot n$.

✍ O que temos visto até agora são frações positivas. No entanto, é necessário considerar frações de um modo geral do tipo $\frac{m}{n}$, onde m e n são números inteiros arbitrários, inclusive números negativos. Assim, por exemplo, as frações $\frac{-2}{3}$ e $\frac{5}{-7}$ são equivalentes, respectivamente, às frações $-\frac{2}{3}$ e $-\frac{5}{7}$.

!

Igualdade ou equivalência de frações
Duas frações $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ são equivalentes ou iguais se e somente se $mq = pn$. Em símbolos, vale a regra do produto cruzado: $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Longleftrightarrow mq = pn$.

A igualdade de frações decorre do seguinte argumento: como n e q são números inteiros não-nulos podemos escrever $\frac{m}{n}=\frac{mq}{nq}$ e $\frac{p}{q}=\frac{pn}{qn}$.

Veja que os denominadores das frações transformadas agora coincidem. Então, a igualdade entre $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ ocorre exatamente e apenas quando os numeradores destas frações coincidem, ou seja, quando $mq = pn$.

Exercício 2.3

Use a regra do produto cruzado para assinalar V (verdadeiro) ou F (falso) para cada uma das igualdades a seguir:

$$(\ )\ \frac{2}{3}=\frac{7}{11} \qquad (\ )\ \frac{5}{-3}=\frac{-10}{6} \qquad (\ )\ \frac{-13}{-2}=\frac{13}{2}$$

Agora, podemos introduzir o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais. $\mathbb{Q}$ é o conjunto de todas as frações $\dfrac{m}{n}$, onde m e n são números inteiros e $n \neq 0$. Em símbolos: $\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n};\ m,n\in\mathbb{Z},\ n\neq 0\right\}$.

✍ Duas frações equivalentes representam o mesmo número racional.

!

Soma e produto de números racionais
Sejam $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{r}$ números racionais quaisquer. Então, $\frac{m}{n}+\frac{p}{r}=\frac{r\cdot m+n\cdot p}{n\cdot r}$ e $\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{r}=\frac{m\cdot p}{n\cdot r}$ são, respectivamente, a soma e o produto dos números racionais.

Exercício 2.4

Efetue as operações indicadas:

1. $\dfrac{-2}{3}+\dfrac{8}{5}=?$
2. $\dfrac{5}{7}\cdot\dfrac{-2}{3}=?$
3. $-\dfrac{1}{3}+3\cdot\left(\dfrac{-2}{7}\right)=?$

✍ i) Inclusão de conjuntos:

Vale a inclusão de conjuntos $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Pois se $m \in \mathbb{Z}$, então $m = \frac{m}{1} \in \mathbb{Q}$.

ii) Igualdade de números racionais:

Dois números racionais $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{r}$ são iguais se e somente se $mr = np$. Em símbolos:

$$\boxed{\frac{m}{n} = \frac{p}{r} \iff m \cdot r = n \cdot p.}$$

Comentário: Já tivemos ocasião de falar sobre essa igualdade antes da definição do conjunto $\mathbb{Q}$. Esse resultado é referido como "regra do produto cruzado" para identificar duas frações iguais ou dois números racionais iguais.

iii) Divisão de números racionais:

Se $\dfrac{p}{r} \neq 0$, a divisão do número $\dfrac{m}{n}$ por $\dfrac{p}{r}$ é definida por

$$\boxed{\frac{m}{n} \div \frac{p}{r} = \frac{m}{n} \times \frac{r}{p} = \frac{mr}{np}.}$$

iv) Inverso de números racionais:

Se $\dfrac{p}{r} \neq 0$, o inverso de $\dfrac{p}{r}$ é o número racional $\dfrac{r}{p}$.

Note que $\dfrac{p}{r} \cdot \dfrac{r}{p} = 1$.

Exemplo 2.2

a) $\dfrac{2}{3} \div \dfrac{1}{5} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{5}{1} = \dfrac{10}{3}$

b) $\dfrac{-12}{5} \div \dfrac{-7}{2} = \dfrac{-12}{5} \times \dfrac{2}{-7} = \dfrac{-24}{-35} = \dfrac{24}{35}$

c) Em um grupo de turistas, a sexta parte é de italianos, a metade de franceses e os 10 restantes são americanos. Quantos turistas há no grupo?

Solução: Temos que $\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{3}{6} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ correspondem a italianos e franceses. Logo, $\dfrac{1}{3}$ dos turistas é americano. Como são 10 os americanos, então o total de turistas é $\dfrac{3}{1} \times 10 = 30$.

REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DOS NÚMEROS RACIONAIS

Anteriormente, nesta aula, mostramos como representar os números inteiros numa reta. Ampliaremos nossa representação colocando sobre a reta todos os números racionais. Vamos começar com alguns exemplos.

Exemplo 2.3

a) Considere agora o problema de representar numa reta o número racional $\frac{2}{3}$, que representa a parte do bolo que você não comeu. Este número é uma fração da unidade. Basta dividir a unidade em três partes iguais e avançar duas casas a partir do ponto inicial. Veja a **Figura 2.4**:

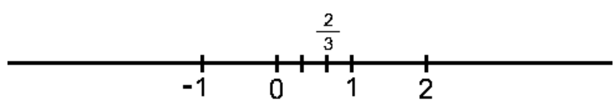


Figura 2.4: Representação do número $\frac{2}{3}$.

b) Considere o número racional $\frac{153}{4}$. A divisão de 153 por 4 dá 38 e deixa resto 1. Assim, podemos escrever

$$\begin{array}{r|l} 153 & 4 \\ \cline{2-2} 1 & 38 \end{array} \quad \Rightarrow \quad 153 = 4 \times 38 + 1\,.$$

Então,

$$\frac{153}{4} = \frac{4 \times 38 + 1}{4} = \frac{4 \times 38}{4} + \frac{1}{4} = 38 + \frac{1}{4}\,.$$

– O que fazemos agora? Bom, em primeiro lugar, vamos ao intervalo de comprimento 1 da reta determinado pelos pontos correspondentes aos números inteiros 38 e 39.

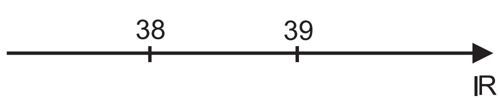


Figura 2.5: Intervalo unitário.

Agora, dividimos o intervalo unitário destacado em quatro partes iguais. Em seguida, a partir do ponto representado pelo número 38, avançamos uma casa para encontrar o ponto correspondente ao número procurado. Em destaque, na figura a seguir, está indicado o ponto que corresponde ao número $\frac{153}{4}$.

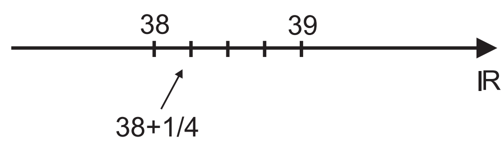


Figura 2.6: Representação do número $\dfrac{153}{4}$.

c) Representar na reta o número racional $\frac{-127}{5}$.

Solução: Primeiramente, ignoramos o sinal negativo e efetuamos a divisão de 127 por 5, encontrando um dividendo 25 e um resto 2. Ou seja,

$$\begin{array}{r|l} 127 & 5 \\ \cline{2-2} 2 & 25 \end{array} \; .$$

Assim,

$$127 = 5 \times 25 + 2\,.$$

Daí,

$$-127 = -5 \times 25 - 2 = 5 \times (-25) - 2\,.$$

Prosseguindo,

$$-\frac{127}{5} = \frac{5 \times (-25) - 2}{5} = \frac{5 \times (-25)}{5} - \frac{2}{5} = -25 - \frac{2}{5}.$$

Note que o número $-25 - \frac{2}{5}$ está à esquerda de -25 e à direita de -26. Portanto, no intervalo unitário cujos extremos são os números -26 e -25, localizamos o ponto que representa o número racional $\frac{-127}{5}$. Veja a **Figura 2.7**:

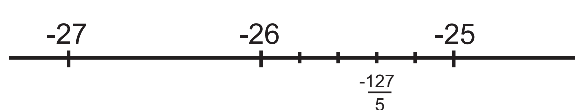


Figura 2.7: Representação do número $\dfrac{-127}{5}$.

Exercício 2.5

Usando a **Figura 2.8**, encontre uma boa representação dos números $\dfrac{73}{4}$, $\dfrac{-3}{2}$ e $\dfrac{1}{2}$.

Figura 2.8: Representação de números.

Relação de Ordem nos Números Racionais

A representação dos números racionais sobre uma reta orientada permite estabelecer uma relação de ordem no conjunto $\mathbb{Q}$. Suponha que os números racionais estão representados sobre uma reta horizontal, estando os números negativos à esquerda e os positivos à direita.

O número racional $\frac{m}{n}$ é menor que o número racional $s = \frac{p}{r}$ se na representação sobre uma reta orientada o número $\frac{m}{n}$ estiver à esquerda do ponto $\frac{p}{r}$.

Para explorar um pouco mais a relação de ordem, suponha que $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{r}$ estão escritos de modo que $n > 0$ e $r > 0$. Note que $\frac{m}{n} = \frac{m \cdot r}{n \cdot r}$ e $\frac{p}{r} = \frac{p \cdot n}{r \cdot n}$. Olhando os segundos membros das igualdades, vemos que os números racionais estão expressos com o mesmo denominador. Logo, é possível concluir que

$$\boxed{\frac{m}{n} < \frac{p}{r} \text{ se, e somente se, } m \cdot r < p \cdot n\,.}$$

!

A conclusão sobre a desigualdade das frações que acabamos de expressar só vale com a condição de que os denominadores n e r sejam positivos.

Exemplo 2.4

O número $-\dfrac{12}{35}$ é menor que o número $\dfrac{3}{-11}$.

Solução: De fato,

$$-\frac{12}{35} = \frac{-12}{35} \quad \text{e} \quad \frac{3}{-11} = \frac{-3}{11}\,.$$

Então,

$$\frac{-12}{35} < \frac{-3}{11} \Leftrightarrow (-12)\times 11 < (-3)\times 35 \Leftrightarrow -132 < -105\,.$$

Como a última desigualdade é verdadeira, vale o enunciado do exemplo.

Exercício 2.6

1. Represente numa reta orientada os números $\dfrac{3}{6}$, $\dfrac{-12}{5}$, $\dfrac{9}{13}$ e $\dfrac{19}{-5}$.
2. Escreva os números acima em ordem crescente.
3. Mostre que $\dfrac{4}{-20} > \dfrac{-13}{64}$.
4. Escreva, se possível, uma expressão mais simples e equivalente à expressão dada, onde $a,\ b,\ m,\ x$ e y são números racionais:
   a) $13a+5a$;
   b) $21x-10x$;
   c) $3(5m-14m)$;
   d) $3(x+2y)-2y$;
   e) $4(3x+2)+(2x+3)$.
5. Dois números racionais a e b são tais que $5ab^2+2a^2b+a^2b^2=99$ e $5b+2a+ab=3$. Calcule o produto ab desses números.

Aula 3

PROPOSIÇÕES E CONECTIVOS

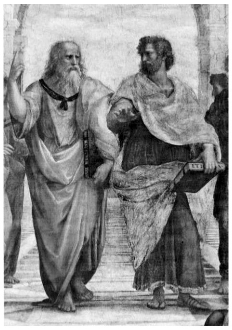
Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. compreender os enunciados dos teoremas e conhecer as principais estratégias usadas em suas demonstrações;
2. raciocinar com algum rigor lógico e escrever melhor os seus próprios textos matemáticos.

O todo é maior do que a soma de suas partes.
Aristóteles

Aristóteles
(384 – 322 a.C.)



Natural de Estagira, aparece aqui à esquerda de Platão, outro grande filósofo que teve muita influência na Matemática. Aristóteles formulou o chamado *método dedutivo*. Este foi adotado por Euclides, ao escrever os seus *Elementos*, por volta de 300 a.C. Desde então, tem sido uma ferramenta essencial na Matemática. Para obter um pouco mais de informação sobre eles, veja a coleção Os Pensadores. Você pode ver, também, o capítulo sobre Aristóteles do livro de Will Durant.

Neste módulo, você ganhará familiaridade com a terminologia usada na Matemática. Parece pouco, mas é um grande passo. Depois de estudar o conteúdo apresentado nas próximas aulas, você estará bem preparado para compreender e usar o discurso matemático.

INTRODUÇÃO

Algumas das principais características da Matemática são a abstração, a precisão, o rigor lógico e a diversidade de aplicações.

A lógica é o assunto que será abordado nesta unidade.
É importante conhecer os conceitos básicos da lógica, não só para estudar, compreender e produzir Matemática, mas também para utilizá-los em muitas outras situações.

Os fundamentos da lógica foram introduzidos na Grécia por Aristóteles, um dos filósofos mais importantes da Antigüidade.

As obras de Aristóteles que versam sobre lógica foram reunidas em um livro que recebeu o nome de *Organon*, que significa instrumento.

PROPOSIÇÕES

A Língua Portuguesa, assim como as outras línguas, é formada por palavras, sentenças, numa teia sutil e complexa. Expressar-se com clareza e precisão não é tarefa fácil. De maneira geral, podemos classificar as sentenças de uma língua da seguinte forma:

Declarativas:	Hoje é domingo.
	Eu não saí de casa o dia todo.
Interrogativas:	Quem vem lá?
	Qual é o seu nome?
Exclamativas:	Lógico!
	Viva!
Imperativas:	Não matarás!
	Fecha a porta!

SENTENÇAS MATEMÁTICAS

A Matemática também é expressa por sentenças. Por exemplo,

$$\pi > 3 \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

são sentenças matemáticas.

As sentenças declarativas podem ser afirmativas ou negativas.

✍ Sob o ponto de vista da lógica, devemos lidar com as sentenças declarativas, às quais podemos atribuir um *valor-verdade*, isto é, cada sentença será *verdadeira* ou *falsa*.

As duas sentenças matemáticas "$\pi > 3$" e "$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$" são verdadeiras.

Exemplo 3.1

Leia as seguintes sentenças. Algumas são verdadeiras e outras são falsas:

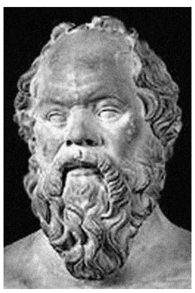
1. A grama é verde.
2. Dezembro tem 31 dias.
3. Uma semana tem 8 dias.
4. O Sol é uma estrela.
5. O verão é a estação mais fria do ano.

Alguns exemplos de sentenças às quais não podemos atribuir valor-verdade:

1. Vá mais devagar!
2. Quanto custa este livro?
3. Fulana é carioca.

Homero foi o autor da *Odisséia*, que narra o retorno de Ulisses (ou Odisseu) da guerra de Tróia. Argos é o cão de Ulisses, e é um modelo de fidelidade pois é o primeiro a reconhecê-lo após uma ausência de vinte anos.

Sócrates



Foi professor de Platão. Mesmo sem deixar nenhum texto, é uma das figuras mais conhecidas da Filosofia. Suas idéias chegaram até nós pelas obras de seus discípulos. Autor de pensamentos como: "Só sei que nada sei" e "Conhece-te a ti mesmo", marcou as gerações futuras por sua modéstia e seu amor pelo conhecimento.

A primeira delas é uma ordem (ou um pedido) e a segunda é uma pergunta. A terceira é um caso interessante. Quando usamos a palavra "fulano" ou "fulana", em geral não estamos considerando uma pessoa específica. Para decidirmos se a sentença é verdadeira ou falsa, precisamos personalizar a fulana. Dependendo de quem for "fulana", a sentença terá seu valor-verdade definido. Uma situação parecida pode surgir no contexto matemático. A frase

$$x+3=11$$

pode ser verdadeira (caso o valor de x seja 8) ou falsa (caso x seja diferente de 8).

FUNÇÕES PROPOSICIONAIS

✍ Expressões que contêm uma ou mais *variáveis* são chamadas de *funções proposicionais*. Quando as variáveis são substituídas por constantes, a expressão torna-se uma proposição (verdadeira ou falsa, conforme as constantes atribuídas).

Por exemplo, "x é homem". Essa função proposicional torna-se uma proposição verdadeira se $x =$ ***Sócrates*** e falsa se $x =$ Argos. Essas expressões também podem ser chamadas de *sentenças abertas*.

AXIOMAS E TEOREMAS

Distinguir o falso do verdadeiro é o objetivo fundamental na Matemática. A lógica aqui tem um papel central. Dito de outro modo, usando as regras da lógica, *provamos* quando uma determinada sentença é verdadeira ou falsa. Nesse esquema, partimos de um conjunto inicial de sentenças básicas que consideramos verdadeiras (as quais chamamos *axiomas*) e, usando as regras definidas pela lógica (que são as regras do jogo), provamos a veracidade de novas sentenças. Essas novas sentenças verdadeiras são chamadas *teoremas*, e podem também ser usadas na demonstração de novos teoremas. É dessa maneira que engendramos a teia que forma a Matemática.

Em lógica, consideramos apenas as sentenças que podem ser qualificadas como falsas ou verdadeiras. Tais sentenças serão chamadas de ***proposições***. Usamos letras minúsculas, como p ou q, para representar proposições.

Resumo

Proposições são sentenças declarativas. Cada uma delas possui *valor-verdade* bem estabelecido, qualificando-a como verdadeira ou falsa. Cada proposição determina, de maneira única, uma outra proposição que é a sua negação e que tem valor-verdade oposto ao seu.

Proposição

A palavra ***proposição*** também é usada em Matemática, fora do contexto estrito da lógica, como sinônimo de *teorema*.

Lembre-se de que atribuir um valor-verdade a uma sentença, ou ainda, determinar a veracidade de uma proposição, pode ser uma questão delicada e difícil.

CONECTIVOS E PROPOSIÇÕES COMPOSTAS

Algumas palavras e certas expressões são usadas insistentemente nos textos matemáticos. Você já encontrou algumas delas nas unidades anteriores. Bons exemplos são os conectivos *e* e *ou*. Usando esses dois conectivos e fazendo também a negação, podemos construir novas proposições a partir de outras proposições dadas inicialmente. Essas novas proposições são chamadas de *proposições compostas*.

✍ Usando duas proposições p e q, podemos construir uma nova proposição p e q, chamada de *conjunção de* p *e* q. Usamos o símbolo

$$p \wedge q$$

para denotá-la. A sentença $p \wedge q$ é verdadeira caso ambas, p e q, sejam verdadeiras. Em qualquer outra situação, ela será falsa.

"Lê-se "p **e** q"

Exemplo 3.2

Apenas uma das sentenças a seguir é falsa. Qual é?

a) A noite é escura e o dia é claro.

b) A rosa é vermelha e o cravo é branco.

c) $\sqrt{16}$ é igual a 4 e 187 é um número primo.

Uma vez que $187 = 11 \times 17$, a proposição "187 é um número primo" é falsa e, apesar de "$\sqrt{16}$ é igual a 4" ser verdadeira, a proposição composta "$\sqrt{16}$ é igual a 4 *e* 187 é um número primo" é falsa.

✍ A partir de duas proposições p e q, também podemos construir a proposição composta p *ou* q, chamada de *disjunção de* p *e* q. Usamos o símbolo

Lê-se "p **ou** q"

$$p \vee q$$

para representá-la. A proposição $p \vee q$ é verdadeira caso *alguma* das proposições p ou q seja verdadeira. Ela será falsa *apenas* quando *ambas* as proposições p e q forem falsas.

Exemplo 3.3

a) A proposição composta "$\sqrt{16}$ é igual a 4 *ou* 187 é um número primo" é verdadeira.

b) Podemos afirmar que a proposição:

π é um número irracional ou $\frac{1}{3} > \frac{1}{2}$

é verdadeira, baseando-nos apenas no fato de que π é um número irracional.

Finalmente, podemos gerar uma nova proposição a partir de uma inicial, simplesmente negando-a.

✍ Usamos a notação $\sim p$ para indicar a *negação da proposição* p. As proposições p e $\sim p$ têm valores-verdade opostos. Este fato é conhecido como o Princípio da Contradição.

Lê-se "**não** p"

Quando ***Aristóteles*** criou a lógica, ele estabeleceu uma série de princípios, isto é, as regras básicas sobre as quais toda a lógica seria desenvolvida. Esses princípios são:

- **Princípio da Identidade:** Todo objeto é idêntico a si mesmo.
- **Princípio da Contradição:** O contrário do verdadeiro é falso.
- **Princípio do Terceiro Excluído:** De duas proposições contraditórias uma é verdadeira e a outra é falsa.

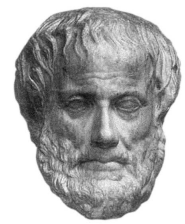
Duas proposições são contraditórias quando uma é a negação da outra.

✍ A palavra **princípio** provém do grego $\alpha\rho\chi\eta$ (*arqué*, como em “arquétipo”) e do latim *principium*, e quer dizer ponto de partida e fundamento de um processo qualquer. Ela é muito usada na Filosofia e na linguagem científica. Em Matemática, pode ser usada como sinônimo de axioma e, nesse caso, é uma proposição cuja veracidade não requer demonstração, como nos Princípios da Identidade, da Contradição e do Terceiro Excluído, enunciados anteriormente.

A Física também usa essa palavra nesse sentido, como em “Princípio da Indeterminação de ***Heisenberg***”, proposto em 1927 por Werner Heisenberg e que faz parte da teoria quântica. Essa teoria é bastante complicada, mas ela explica o comportamento dos átomos. O Princípio da Indeterminação diz que a posição e a velocidade das partículas atômicas não podem ser conhecidas ao mesmo tempo e com precisão.

A palavra “princípio” também pode ser usada como sinônimo de teorema, como no Princípio da Inclusão-Exclusão, enunciado no Módulo 1, Aula 4. Neste caso, trata-se de uma afirmação que deve ser demonstrada.

Aristóteles
_(384 - 322 a.C.)_



Os princípios de Identidade, da Contradição e do Terceiro Excluído, apesar de sua simplicidade, são fundamentais. Aristóteles formulou o Princípio da Contradição de, pelo menos, duas maneiras: “Nada pode ser e não ser simultaneamente” e “É necessário que toda asserção seja afirmativa ou negativa”. O Princípio do Terceiro Excluído foi derivado do Princípio da Contradição muito mais tarde, no século XVIII. Eles se completam para determinar que as proposições simples são ou verdadeiras ou falsas. Por essa razão, diz-se que a lógica clássica é *bivalente*.

QUANTIFICADORES

Vamos aprender agora mais um pouco do jargão matemático. Falaremos sobre *quantificadores*. Os quantificadores são expressões que aparecem, em geral, no início das frases matemáticas, cuja função é indicar o universo sobre o qual será feita a afirmação. Exemplos: “para todo”, “cada”, “existe um”, “existe uma”, “não existe algum”, “não existe alguma”, “nenhum”, “nenhuma”, “qualquer um”, “qualquer uma...”

Werner Karl Heisenberg
(1901 - 1976)

Físico alemão, formulou a *nova teoria da Mecânica Quântica* juntamente com Ernest Jordan, Erwin Schrödinger, Niels Bohr e Paul Dirac. Essa teoria depende muito de Matemática e valeu o prêmio Nobel de Física de 1932.

Exemplo 3.4

As seguintes proposições têm o mesmo significado:

- Todo mundo é racional.
- Todas as pessoas são racionais.
- Cada pessoa é racional.
- Qualquer pessoa é racional.

✍ O quantificador usado nesses exemplos é chamado de *quantificador universal*. Nós o representamos pelo símbolo $\forall$.

Exemplo 3.5

$\forall\alpha \in \mathbb{R},\ sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1.$

Esta proposição é verdadeira.

✍ O exemplo seguinte apresenta o *quantificador existencial*. Mais uma vez, todas as proposições abaixo têm o mesmo significado.

- Alguma pessoa é bonita.
- Existe pessoa bonita.
- Pelo menos uma pessoa é bonita.

Nós representamos esse quantificador pelo símbolo $\exists$.

Exemplo 3.6

$$\exists\alpha \in \mathbb{R},\ sen\ \alpha = 1.$$

Esta afirmação é verdadeira?

A resposta é sim. O seno do ângulo reto, por exemplo, é 1. Isso pode ser expresso da seguinte maneira: sen $\frac{\pi}{2} = 1$.

Os quantificadores universal e existencial são trocados um pelo outro quando fazemos a negação de uma proposição iniciada por um deles. Veja como funciona num exemplo:

Exemplo 3.7

A negação da proposição: p: *Todo* aluno é estudioso; é $\sim p$: *Existe* aluno não-estudioso.

Uma outra maneira de enunciar a proposição $\sim p$ é: Há aluno que não é estudioso. Numa maneira tipicamente matemática, seria: Existe pelo menos um aluno não-estudioso.

!

A proposição q: "Nenhum aluno é estudioso" *não* é a negação de p.

Note a importância do quantificador usado na formação da proposição. As proposições:

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 2$ (Para todo x em $\mathbb{R}$, $x^2 = 2$) e $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 2$ (Existe x em $\mathbb{R}$, tal que $x^2 = 2$) são diferentes.

!

Quantificadores: O *quantificador universal* é representado pelo símbolo $\forall$, que se lê: "Para todo"; o *quantificador existencial* é representado pelo símbolo $\exists$, que se lê: "Existe..." Esses quantificadores são trocados um pelo outro quando fazemos a negação de uma proposição.

Resumo

Estamos chegando ao fim da aula. Bem, você está começando a perceber como a linguagem é **importante**. Matemática é muito sutil, pois um pequeno detalhe pode mudar completamente o sentido da proposição. Por exemplo, uma proposição do tipo $p \vee q$ pode ser verdadeira ao mesmo tempo que $p \wedge q$ é falsa. Isto significa uma simples troca de um "ou" por um "e". Precisamos estar atentos ao que dizemos, ao que o texto diz e, principalmente, a como devemos nos expressar.

Agora é hora de relaxar um pouco antes de seguir para a lista de exercícios. Você conhece aquela do engenheiro, do físico e do matemático? Três amigos, um engenheiro, um físico e um matemático, estavam viajando de trem para o interior de São Paulo. Depois que o trem passou por Rio Claro, eles avistaram uma colina verdejante com uma linda vaca preta pastando. O engenheiro, que estava um pouco aborrecido com o papo um tanto abstrato de seus dois amigos, aproveitou para fazer o seguinte comentário: "Vejam, as vacas aqui são pretas!" O físico olhou pela janela e retrucou: "Calma, aí! As vacas *deste* morro são pretas..." O matemático lançou um olhar de censura sobre seus dois amigos e disse, balançando a cabeça, para enfatizar: "Nada disso, caríssimos! O que realmente podemos afirmar é que neste morro há uma vaca com o lado direito preto..."

Exercício 3.1

1. Determine quais das frases a seguir são proposições:

   a) Cenouras são saudáveis.

   b) O Brasil é um país tropical.

   c) Todos os homens são astutos.

   d) Faça as malas.

   e) A paciência é uma virtude.

   f) Debussy compôs duas sinfonias.

   g) A paciência é um jogo.

   h) Para todo mal há cura.

   i) Todo mundo tem um segredo.

   j) Não fume!

   l) Todo amor é forte.

   m) Quantos anos você tem?

   n) O quadrado de cada número é não-negativo.

   o) Que calor!

   p) Antonio Carlos Jobim, o Tom Jobim, é um compositor brasileiro.

   q) Quanto custa esta mesa?

2. Construa a negação de cada uma das seguintes proposições:

   a) A pêra é uma fruta.
   b) Algumas óperas são longas.
   c) Todos gostam de dançar.
   d) Algumas pessoas não têm carro.
   e) Todos têm televisores e aparelhos de vídeo.
   f) O dinheiro não traz a felicidade.
   g) Todo desfile de escola de samba tem mestre-sala e porta-bandeira.
   h) Dom Quixote é um personagem criado por Miguel de Cervantes.
   i) Todo amor é forte.
   j) Nenhum amor é fraco.

3. Escreva literalmente as seguintes proposições matemáticas:

   a) $\forall\, x \in \mathbb{Z},\ x^2 \leq 0$

      Solução: Qualquer que seja o número inteiro x, $x^2 \leq 0$.

      Esta proposição é falsa.
   b) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ tg^2\, \alpha = sec^2\, \alpha - 1$
   c) $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x} = 4$
   d) $\exists\, x \in \mathbb{N},\ |\ 2|x \vee 3|x$

      Solução: Existe um número natural x tal que 2 divide x ou 3 divide x.

      Solução alternativa: Existe um número natural x divisível por 2 ou divisível por 3.

      A notação $a|b$ é lida da seguinte maneira: a divide b, isto é, b é um múltiplo de a.
   e) $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \text{sen}\ x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
   f) $\forall\, x \in \mathbb{Q},\ \exists\, p,q \in \mathbb{Z},\ x = \frac{p}{q}$.
   g) $\exists\, x \in \mathbb{Q},\ x^2 = \frac{9}{25}$.
   h) $\forall\, r \in \mathbb{R},\ r > 0, \exists\, K \in \mathbb{N},\ n > K \Longrightarrow \frac{1}{n} < r$.

Resumo

Nesta aula, você aprendeu que:

1. Em lógica, lidamos com *proposições* que são sentenças declarativas, cada uma delas possuindo um valor-verdade, verdadeiro ou falso. A representação das proposições se faz por letras minúsculas como p, q etc.

2. Para cada proposição p corresponde a sua negação: $\sim p$. As proposições p e $\sim p$ têm valores-verdade opostos.

3. Dadas duas proposições p e q, podemos construir duas outras proposições:

   $p \wedge q$ (conjunção, p e q)
   $p \vee q$ (disjunção, p ou q)

4. Em Matemática, usamos dois quantificadores:

   $\forall$ (universal, qualquer que seja ...)
   $\exists$ (existencial, existe um ...)

   Esses quantificadores trocam de papéis quando fazemos a negação de uma proposição.

Auto-avaliação

É muito bom que você tenha chegado até aqui. Esta primeira aula sobre lógica contém informações novas, e é natural que você tenha dúvidas. Lembre-se, só não tem dúvidas quem não estuda. Uma boa maneira de avaliar o trabalho é medir relativamente os progressos e as dificuldades. Você pode começar a sua avaliação da seguinte maneira: Releia os objetivos desta aula. Foram alcançados? Comente-os. Releia especialmente os exemplos e tente relacioná-los com os exercícios propostos.
Na próxima aula, você aprenderá mais sobre as regras da lógica e como podemos estabelecer se uma proposição é verdadeira ou não construindo as tabelas-verdade.
Até lá!

Aula 4

TABELAS-VERDADE E LEIS DA LÓGICA

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. construir as **tabelas-verdade** para proposições compostas;
2. explicar as **principais leis da Lógica** e as **implicações ou proposições condicionais**.

TABELAS-VERDADE

Na aula anterior, você deve ter percebido a importância da familiaridade com a terminologia matemática. Dando continuidade a este processo, descubra agora **o que é** e **como é construída** uma **tabela-verdade**.

O valor-verdade de cada proposição é sempre verdadeiro (V) ou falso (F). O valor-verdade de uma proposição composta é determinado pelos valores-verdade de cada uma das proposições que a compõem. Na tabela-verdade, apresentamos todas as possibilidades. Por exemplo, considere a conjunção das proposições p e q, que denotamos por $p \wedge q$. Lembre-se de que $p \wedge q$ é verdadeira apenas quando ambas as proposições, p e q, são verdadeiras. Há quatro possibilidades:

- p é verdadeira e q é verdadeira;
- p é verdadeira e q é falsa;
- p é falsa e q é verdadeira;
- p é falsa e q é falsa.

A tabela-verdade correspondente é:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

As tabelas-verdade correspondentes às proposições $\sim p$ (não p) e $p \vee q$ (p ou q) são:

p	$\sim p$
V	F
F	V

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

EQUIVALÊNCIA LÓGICA E LEIS DA LÓGICA

É possível expressar uma proposição de diferentes maneiras. Por exemplo, podemos negar a proposição "Marcos é pintor e gosta de pescar" dizendo "Não é verdade que Marcos é pintor e gosta de pescar". Uma outra maneira seria "Marcos não é pintor ou não gosta de pescar". Estas duas últimas afirmações são ditas *logicamente equivalentes*.

✍ **Logicamente equivalentes:** duas proposições são ditas *logicamente equivalentes* quando têm os mesmos valores-verdade em todos os casos possíveis. Quando duas proposições, p e q, são equivalentes, usamos a seguinte notação: $p \equiv q$.

A importância prática deste conceito é a seguinte – duas proposições logicamente equivalentes são, sob o ponto de vista da Lógica, a mesma coisa. No entanto, podem apresentar pontos de vista diferentes, facilitando a nossa compreensão, aprofundando o nosso entendimento do conteúdo que ela reveste.

As tabelas-verdade são úteis para detectar quando duas proposições são logicamente equivalentes. O exemplo "Não é verdade que Marcos é pintor e gosta de pescar" é um caso particular da situação $\sim(p \wedge q)$ equivalente a $\sim p \vee \sim q$, em que p é "Marcos é pintor" e q é "Marcos gosta de pescar".

Exemplo 4.1

Vamos mostrar, usando uma tabela-verdade, que as proposições $\sim(p \wedge q)$ e $\sim p \vee \sim q$ são logicamente equivalentes. Aqui, veja como é fácil preencher as tabelas, contanto que o trabalho seja feito por etapas. Antes de mais nada, iniciamos construindo uma tabela que tenha cinco linhas: na primeira delas, alinharemos as diferentes etapas e, nas outras quatro, consideraremos todas as possibilidades, já que contamos com duas proposições básicas, p e q.

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

Agora, para se chegar ao valor-verdade de $\sim(p \wedge q)$, é simples. Primeiro, obtenha o valor-verdade de $p \wedge q$ e depois, num segundo passo, obtenha o valor-verdade de sua negação.

Comece preenchendo, na tabela, os valores-verdade das proposições $p \wedge q$, $\sim p$ e $\sim q$.

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	V		F	F	
V	F	F		F	V	
F	V	F		V	F	
F	F	F		V	V	

Agora, num segundo passo, complete a tabela preenchendo as colunas correspondentes às proposições $\sim (p \wedge q)$ e $\sim p \vee \sim q$.

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Veja que na tabela completa podemos comparar as duas colunas correspondentes às proposições $\sim (p \wedge q)$ e $\sim p \vee \sim q$. Como as duas colunas são iguais, as proposições são logicamente equivalentes.

Resumindo, $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$.

Antes de prosseguirmos, tente você construir a tabela-verdade de $p \wedge (q \vee r)$.

Lembre-se do Princípio Fundamental de Contagem. Quantas linhas seriam necessárias para quatro proposições conectadas? Quantas para n proposições conectadas?

A proposição $p \wedge (q \vee r)$ é composta por três proposições: p, q e r. Sua tabela terá, além da primeira linha, mais $8 = 2^3$ linhas. Preencha primeiro a quarta coluna, usando as colunas dois e três. Depois, usando a primeira e a quarta, preencha a última coluna. Por exemplo, na terceira linha em branco, q é falso e r é verdadeiro. Portanto, o valor-verdade de $q \vee r$ é verdadeiro e marcamos um V na quarta coluna. Agora, na primeira coluna, vemos que p é verdadeiro e, na quarta coluna, $q \vee r$ verdadeiro. Portanto, $p \wedge (q \vee r)$ é verdadeiro, e marcamos outro V na última coluna.

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
V	V	V		
V	V	F		
V	F	V	V	V
V	F	F		
F	V	V		
F	V	F		
F	F	V		
F	F	F		

LEIS DA LÓGICA

Lembre-se das tabelas-verdade das proposições $p \vee q$ e $p \wedge q$:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Usaremos, agora, **o conceito de equivalência lógica para expressar algumas das leis da Lógica**. Elas são usadas para reescrevermos algumas proposições de maneiras diferentes, porém equivalentes do ponto de vista lógico.

A mais simples é a Lei de Idempotência.

✍ i. **Lei de Idempotência:** para qualquer proposição p,

$p \wedge p \equiv p \qquad p \vee p \equiv p.$

Além disso, os conectivos $\wedge$ e $\vee$ são comutativos e associativos.

Expressando as leis da Lógica...

ii. **Leis de Comutatividade:** dadas duas proposições quaisquer, p e q,

$p \wedge q \equiv q \wedge p; \qquad p \vee q \equiv q \vee p.$

iii. **Leis de Associatividade:** dadas três proposições quaisquer, p, q e r,

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r); \qquad (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r).$

As Leis de Associatividade permitem que escrevamos simplesmente $p \vee q \vee r$ em vez de $(p \vee q) \vee r$ ou $p \vee (q \vee r)$.

As leis que veremos a seguir relacionam os dois conectivos $\vee$ e $\wedge$. Vejamos como elas são aplicadas, num exemplo, antes de enunciá-las.

Exemplo 4.2

Consideremos as seguintes proposições:

p: 2 é um número inteiro;

q: 2 é maior do que 3;

r: 2 é um número primo.

Conectando-as, podemos montar as seguintes proposições:

a: 2 é um número inteiro, ou 2 é maior do que 3 e primo.

b: 2 é um número inteiro ou maior do que 3, e 2 é um número inteiro ou primo.

As proposições $a \equiv p \vee (q \wedge r)$ e $b \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ são logicamente equivalentes. Este é um caso particular da Lei de Distributividade. Para completar o exemplo, vamos determinar o valor-verdade das proposições. A proposição a é a proposição $p \vee (q \wedge r)$. É claro que p é verdadeira, q é falsa e r é verdadeira. Como q é falsa, $q \wedge r$ é falsa. Mas, sendo p verdadeira, a proposição final $p \vee (q \wedge r)$ é verdadeira. Por sua vez, a proposição b é a proposição $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$. Então, $p \vee q$ e $p \vee r$ são ambas verdadeiras. Portanto, b é uma proposição verdadeira.

✍ **Leis de Distributividade:** dadas três proposições quaisquer, p, q e r,

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

e

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad .$$

Faça uma nova leitura e uma análise do exemplo 4.2.

A lei que você conhecerá já foi considerada nesse exemplo. Ela é uma das Leis de De Morgan.

Na última aula, você aprendeu que a palavra “princípio” pode ser usada como sinônimo de axioma ou de teorema. A mesma coisa acontece com a palavra “lei”.

Nesta aula, a palavra “lei” está sendo usada como sinônimo de teorema. Isto é, ela está sendo usada para indicar quando determinadas proposições são logicamente equivalentes e, para que essas leis possam "valer", devemos constatar a equivalência usando tabelas-verdade.

✍ **Leis de De Morgan:** para quaisquer proposições, p e q,

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q; \qquad \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q.$$

Lembre-se de que no exemplo 4.1 a construção da tabela-verdade mostrou que as proposições $\sim (p \wedge q)$ e $\sim p \vee \sim q$ são equivalentes. A tabela-verdade abaixo mostrará que as proposições $\sim (p \vee q)$ e $\sim p \wedge \sim q$ também são equivalentes:

p	q	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Vejamos agora o enunciado das Leis de De Morgan na versão da Teoria de Conjuntos:

Sejam A e B conjuntos. Então:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c,$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Vamos mostrar que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Neste caso, o conjunto $A \cup B$ é caracterizado pela afirmação $x \in A$ ou $x \in B$. O seu complementar é caracterizado pela negação dessa afirmação: $\sim (x \in A \ \vee \ x \in B)$. Pela Lei de De Morgan (que acabamos de mostrar) essa afirmação é equivalente a $x \notin A \ \wedge x \notin B$, que caracteriza o conjunto $A^c \cap B^c$. Logo, os conjuntos são iguais.

Agora, a demonstração do segundo caso. Para provar que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ vamos usar a igualdade $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, que acabamos de provar, mais o fato de que o complementar do complementar de qualquer conjunto, é o próprio conjunto: $\left(X^c\right)^c = X$.

Realmente,

$$A^c \cup B^c = \left(\left(A^c \cup B^c\right)^c\right)^c = \left(\left(A^c\right)^c \cap \left(B^c\right)^c\right)^c = (A \cap B)^c.$$

Isto completa a prova das Leis de De Morgan da Teoria de Conjuntos.

Exemplo 4.3

As Leis de De Morgan são usadas para reescrevermos as negações de proposições. Considere a seguinte proposição:

"Todo número par é divisível por 2, *e* existe um número inteiro n tal que $2n = 3$."

Sua negação é:

"Existe um número par que não é divisível por 2 *ou* todo número inteiro n é tal que $2n \neq 3$."

Finalmente veremos como, em certas situações, podemos *compactar* uma proposição.

✍ **Leis de Absorção:** para quaisquer duas proposições, p e q,

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p; \qquad p \wedge (p \vee q) \equiv p.$$

Vamos construir a tabela de $p \vee (p \wedge q)$. Começamos com a tabela de $p \wedge q$ e, depois, usamos as colunas correspondentes às proposições p e $p \wedge q$ para completar a última coluna, que é a correspondente a $p \vee (p \wedge q)$.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	F
F	F	F	F

As colunas de p e de $p \vee (p \wedge q)$ são iguais, provando que as proposições são logicamente equivalentes: $p \vee (p \wedge q) \equiv p$.

Quadro-Resumo

Para finalizarmos esta parte, vamos montar um quadro com o resumo das principais leis da Lógica.

Leis de Distributividade	
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
Leis de De Morgan	
$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$	$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
Leis de Absorção	
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$

Exercício 4.1

1. Construa a tabela-verdade para cada uma das seguintes proposições compostas:

   (a) $p \vee \sim q$

   (b) $(\sim p) \vee (\sim q)$

   (c) $\sim p \wedge \sim q$

   (d) $\sim (\sim p \wedge q)$

   (e) $(p \vee \sim q) \wedge \sim p$

   (f) $p \wedge (q \vee \sim q)$

   (g) $(p \wedge \sim q) \vee r$

   (h) $(\sim p \vee q) \wedge \sim r$

2. Use a tabela-verdade para provar a seguinte lei de distributividade: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$. Para isto, preencha a tabela a seguir por etapas.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee q$	$p \vee r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V					
V	V	F					
V	F	V					
V	F	F					
F	V	V					
F	V	F					
F	F	V					
F	F	F					

3. Faça o mesmo para as Leis de Absorção:

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

e

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p.$$

Implicações ou proposições Condicionais

Há frases que se compõem de uma **condição** e uma **conseqüência**, como se dá no seguinte exemplo:

Se não chover, irei à sua festa.

Frases deste tipo interessam particularmente aos matemáticos. Aqui estão alguns exemplos:

Se n é um inteiro ímpar, então n^2 é ímpar.

Se r é um número real tal que $r^2 = 2$, então r é irracional.

Um triângulo é dito isósceles se tem dois lados de medidas iguais, ou dois ângulos internos de medidas iguais.

Se ABC é um triângulo tal que A está no centro de um círculo e B e C pertencem à circunferência do círculo, então o triângulo ABC é isósceles.

✍ Sejam p e q duas proposições. Chamamos a proposição

Se p, então q

de uma *implicação*. O conectivo *Se* ... , *então* ... caracteriza uma condição. A notação desta proposição é

$$p \Longrightarrow q$$

.

A proposição p é chamada de *hipótese* e a proposição q de *conclusão* ou *tese*. O valor-verdade da proposição $p \Longrightarrow q$ depende dos valores-verdade da hipótese e da conclusão. Ela é falsa apenas quando p é verdade e q é falsa.

Na verdade, a proposição $p \Longrightarrow q$ é logicamente equivalente à proposição $\sim p \vee q$. Aqui está a tabela-verdade de $\sim p \vee q$.

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$p \Longrightarrow q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Observemos, num exemplo, as diferentes possibilidades de valor-verdade de uma proposição do tipo $p \Longrightarrow q$.

Exemplo 4.4

Vamos considerar o seguinte:

Se eu ganhar na loteria, então nós viajaremos para Fortaleza.

Lembre-se da tabela-verdade da proposição $p \Rightarrow q$:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A primeira possibilidade corresponde à situação (ideal) p e q verdadeiras. Eu ganho na loteria, viajamos para Fortaleza, a promessa é cumprida e $p \Longrightarrow q$ é verdadeira.

No caso de ganhar na loteria, e não viajarmos para Fortaleza, a promessa estará quebrada. Isto corresponde ao caso p verdadeira e q falsa. Portanto, $p \Longrightarrow q$ é falsa.

Agora, apesar de eu não ter ganho na loteria, viajamos para Fortaleza. Ótimo! A afirmação $p \Longrightarrow q$ não pode ser contestada. Isto corresponde ao caso p falsa, q verdadeira e $p \Longrightarrow q$ verdadeira.

A última possibilidade – nada de loteria, nada de viagem a Fortaleza, nada de promessa quebrada – corresponde ao caso p e q falsas e $p \Longrightarrow q$ verdadeira.

Note que, quando a hipótese p é falsa, independente do valor-verdade da conseqüência q, a implicação $p \Longrightarrow q$ é verdadeira.

Portanto, a única chance de $p \Longrightarrow q$ ser falsa é quando temos uma situação em que a hipótese é verdadeira, e a conseqüência é falsa.

Faça uma análise semelhante considerando a proposição:

Se o tempo estiver bom, irei à praia.

Observe que, no discurso mais coloquial, a palavra "então" pode ser dispensada.

Há maneiras ligeiramente diferentes de enunciar a proposição $p \Longrightarrow q$. Algumas são:

- Se p, então q.
- p implica q.
- Para que p seja verdadeira, é necessário que q seja verdadeira.
- Para que q seja verdadeira, é suficiente que p seja verdadeira.

Reescreva a proposição abaixo de diferentes maneiras.

Se recebermos uma boa oferta, venderemos o terreno.

✍ Quando trocamos a hipótese pela conseqüência de uma proposição $p \Longrightarrow q$, estamos criando uma nova proposição: $q \Longrightarrow p$ chamada de *conversão* de $p \Longrightarrow q$.

!

Não cometa o erro de pensar que $p \Longrightarrow q$ e sua conversão $q \Longrightarrow p$ são logicamente equivalentes. Veja numa tabela-verdade a comparação das duas proposições:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

Vamos a um exemplo.

Exemplo 4.5

Tomemos a proposição do tipo $p \Longrightarrow q$:

Se Linda é brasileira, então ela gosta de samba.

A conversão desta proposição é outra proposição:

Se Linda gosta de samba, então ela é brasileira.

Considere as diferentes possibilidades. Especialmente a situação em que Linda, caindo numa roda de samba, fazendo inveja às melhores passistas do lugar, acaba confessando ser uma americana de Miami. Isto é, p é falsa mas q é verdadeira. A proposição “Se Linda é brasileira, então ela gosta de samba” é verdadeira (pois não é falsa, coisa de lógica aristotélica), mas a sua conversão “Se Linda gosta de samba, então ela é brasileira” é falsa pois, exatamente como no caso acima, gostar de samba não é coisa apenas de brasileiros ou brasileiras.

Vamos continuar com este exemplo um pouco mais. Tomemos a seguinte proposição:

Se Linda não gosta de samba, então ela não é brasileira.

Essa proposição é da forma $\sim q \Longrightarrow \sim p$. Vamos calcular a sua tabela-verdade e compará-la com $p \Longrightarrow q$.

p	q	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$p \Rightarrow q$
V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V

As proposições $p \Longrightarrow q$ e $\sim q \Longrightarrow \sim p$ são logicamente equivalentes.

✍ **Contrapositiva:** dada a proposição $p \Longrightarrow q$, chamamos de *contrapositiva* a proposição $\sim q \Longrightarrow \sim p$. Elas são logicamente equivalentes.

É útil olhar para a contrapositiva, pois permite um diferente ponto de vista da mesma proposição, uma vez que elas são logicamente equivalentes.

Há um tipo de proposição composta por duas proposições iniciais p e q que ocorre com certa freqüência: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. Isto é, p implica q e q implica p. Damos um nome especial a essa proposição.

✍ O conectivo *se, e somente se* é dito conectivo *bicondicional* e é denotado pelo símbolo $\Longleftrightarrow$. A proposição

$$p \Longleftrightarrow q$$

é equivalente à proposição $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. A proposição $p \Leftrightarrow q$ também pode ser lida como "p é necessário e suficiente para q" e é verdadeira, quando ambas as proposições têm o mesmo valor-verdade.

Usando a versão $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ de $p \Longleftrightarrow q$, vamos montar a sua tabela-verdade.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

TAUTOLOGIAS

Uma tautologia é uma proposição composta que é verdadeira qualquer que seja o valor-verdade das proposições que a compõem. Para averiguarmos se uma proposição composta é uma tautologia, é necessário fazer sua tabela-verdade. Um exemplo bem simples é a proposição

$$p \vee \sim p$$

Sua tabela-verdade é

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
V	F	V
F	V	V

Um outro exemplo de tautologia envolve o conectivo condicional:

$$(p \wedge q) \Longrightarrow p$$

cuja tabela-verdade é:

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Exercício 4.2

Construa as respectivas tabelas-verdade para constatar que as seguintes proposições são tautologias:

a) $\sim (p \wedge \sim p)$

b) $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$

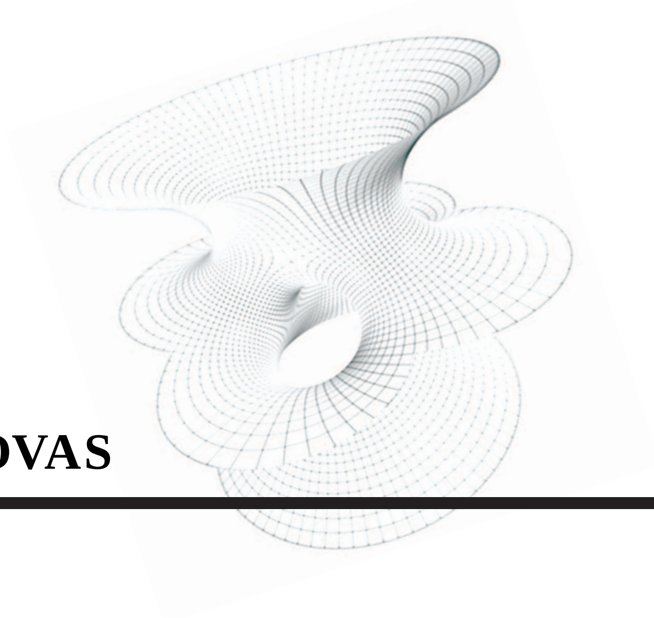
c) $p \Rightarrow (p \vee q)$

d) $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

Auto-avaliação

Esta aula contém bastante informação e, para que você possa familiarizar-se com estas novidades, é muito importante que resolva os exercícios. Ao fazê-lo, anote os que achou mais difíceis. Escolha também aqueles de que você gostou mais.
Bom trabalho!

Aula 5



ARGUMENTOS E PROVAS

Objetivo

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1 compreender as estratégias básicas de argumentação e de demonstração.

DEFININDO ARGUMENTAÇÃO

Uma argumentação constitui-se de uma coleção de proposições (*premissas*) e uma proposição final (*conclusão*). Do ponto de vista da lógica, para que uma argumentação seja *válida*, é necessário que a conclusão seja uma conseqüência das premissas. Isto é, no caso de as premissas serem verdadeiras, sabemos que a conclusão é verdadeira.

Este exemplo tem uma importância histórica e aparece em quase todo texto sobre lógica. Ele é um *silogismo*, que se constitui de duas premissas e uma conclusão, foi formulado por Aristóteles, em seu tratado *Primeiros analíticos*, sobre lógica.

Premissas: Todo homem é mortal.
Sócrates é homem.

Conclusão: Sócrates é mortal.

Consideremos também um exemplo mais prosaico:

Premissas: Todos os brasileiros gostam de feijoada.
Todos os cariocas são brasileiros.

Conclusão: Todos os cariocas gostam de feijoada.

Vamos à definição do que é um *argumento válido*.

✍ Um *argumento* consiste de uma série de proposições chamadas *premissas* e uma proposição chamada *conclusão*. Dizemos que o argumento é *válido* se, sempre que todas as premissas forem verdadeiras, isto é, se a *conjunção* delas for verdadeira, então, a conclusão será verdadeira. Em outras palavras, um argumento com premissas p_1, $p_2, \ldots$, p_n e conclusão c é valido se:

sempre que $p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n$ for verdadeira, então a implicação $p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n \Rightarrow c$ será verdadeira.

Um argumento é *inválido* se a conclusão não é conseqüência das premissas. Isto é, mesmo no caso em que as premissas sejam verdadeiras, a conclusão pode ser falsa. Um argumento inválido também é chamado de *falácia*.

Exemplo 5.1

Vamos considerar o seguinte argumento:

Premissas:

p_1: Se você estudar, você passará no teste.

p_2: Você estuda.

Conclusão:
c: Você passará no teste.

Suponhamos que uma condição suficiente para passar no teste é estudar. Isto é, vamos considerar que caso você estude, então você passará no teste. Você estuda! A conclusão é: você passará no teste.

Vamos analisar mais detalhadamente a situação. Temos apenas duas proposições básicas:

p: Você estuda.
q: Você passa no teste.

Devemos verificar que, quando $p \Rightarrow q$ e q são verdadeiras, a implicação

$$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$$

será verdadeira.

Vamos usar uma tabela-verdade.

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

A primeira linha da tabela mostra que, quando $p_1 = (p \Rightarrow q)$ e $p_2 = p$ são ambas verdadeiras, temos que a conclusão $c = q$ é verdadeira. Isso significa que os argumentos da forma

Premissas: $p \Rightarrow q$
p

Conclusão: q

são válidos.

Esta tabela apresenta uma situação interessante. Note que, independente de qual seja o valor-verdade das proposições p e q, a proposição $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ será verdadeira. Ela é um exemplo de uma *tautologia*.

O argumento que acabamos de exemplificar é chamado de *método direto* ou *modus ponens*.

Exemplo 5.2

Este exemplo ilustrará um outro tipo de argumento muito usado.

Premissas:
p_1: Se não chover, Mateus irá ao parque.
p_2: Se Mateus for ao parque, ele brincará com seus amigos.
Conclusão:
c: Se não chover, Mateus brincará com seus amigos.

Para analisá-lo, vamos considerar as seguintes proposições básicas:

p: Não chover.
q: Mateus vai ao parque.
r: Mateus brinca com seus amigos.

A estrutura deste argumento é

Premissas: $p \Rightarrow q$
$q \Rightarrow r$

Conclusão: $p \Rightarrow r$

Este argumento é válido. Veja a tabela-verdade:

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow r$	$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V

As linhas 1, 5, 7 e 8 indicam que sempre que as premissas são verdadeiras, a conclusão é verdadeira.

A **Lei do Silogismo** afirma que os argumentos do tipo

Premissas: $p \Rightarrow q$
$q \Rightarrow r$

Conclusão: $p \Rightarrow r$

são válidos.

Exemplo 5.3

Vamos agora considerar a seguinte situação:

Premissas:
p_1: Se eu ganhar o prêmio de fim de ano da companhia, nós passaremos um fim de semana em Búzios.
p_2: Passamos um (ótimo) fim de semana em Búzios.

Conclusão:
c: Ganhei o (cobiçado) prêmio da companhia.

Este argumento é formado por apenas duas proposições simples:

p: “Eu ganho o prêmio da companhia”

e

q: “Nós passamos um fim de semana em Búzios”.

A estrutura deste argumento é

Premissas: $p \Rightarrow q$
q

Conclusão: p

Você já deve estar desconfiado de alguma coisa errada nesta história... Realmente, este argumento **não é válido!**

Vejamos a tabela-verdade de $((p \Rightarrow q) \wedge q) \Rightarrow p$.

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge q$	$((p \Rightarrow q) \wedge q) \Rightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	F	V

A terceira linha mostra uma situação onde $p_1 = (p \Rightarrow q)$ e $p_2 = q$ são verdadeiras mas $c = p$ é falsa. Compare este exemplo com o Exemplo 5.1, o chamado método direto. Estes argumentos são parecidos. Cuidado para não os confundir.

Para finalizar, vamos resumir os argumentos válidos que exemplificamos nesta aula:

- Método direto: Se você estudar, então você passará no teste. Você estuda. Então você passará no teste.

Premissas:	$p \Rightarrow q$
	p
Conclusão:	q

- Lei do Silogismo: Se não chover, Mateus irá ao parque e, indo ao parque, ele brincará com seus amigos. Portanto, se não chover, Mateus brincará com seus amigos.

Premissas:	$p \Rightarrow q$
	$q \Rightarrow r$
Conclusão:	$p \Rightarrow r$

Exercício 5.1

Em cada um dos argumentos abaixo, destaque as proposições simples que compõem as premissas e as conclusões. Construa uma tabela-verdade com base nas proposições simples e nas premissas, concluindo com a coluna $(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \Rightarrow c$. Determine, então, a validade ou não do argumento. Os três primeiros exercícios da lista estão com a solução. Dê a sua própria solução e então compare com a solução dada. Vá em frente!

1. Se o cachorro escapar, ele pegará o gato. Se o gato for pego, eu estarei em apuros. Portanto, se o cachorro escapar, eu estarei em apuros.

   Solução: Este argumento têm as proposições básicas:

p:	O cachorro escapa.
q:	O cachorro pega o gato.
r:	Eu estou em apuros.

   O argumento está estruturado da seguinte forma:

$p_1 = p \Rightarrow q$:	Se o cachorro escapa, ele pegará o gato.
$p_2 = q \Rightarrow r$:	Se o gato for pego (pelo cachorro), eu estarei em apuros.
$c = p \Rightarrow r$:	Se o cachorro escapar, eu estarei em apuros.

   Este tipo de argumento é válido. A construção da tabela-verdade está feita no Exemplo 5.2. Este é um argumento validado pela Lei dos Silogismos.

2. Todas as pessoas inteligentes gostam de Matemática. Romeu é uma pessoa. Romeu não gosta de Matemática. Portanto, Romeu não é inteligente.

   Solução: Note que podemos reescrever o argumento da seguinte maneira: Se uma pessoa é inteligente, então esta pessoa gosta de Matemática. Romeu é uma pessoa e não gosta de Matemática. Portanto, Romeu não é inteligente.

   Dessa forma, podemos usar as seguintes proposições básicas para analisar o argumento:

   p: Uma pessoa é inteligente.
   q: Uma pessoa gosta de Matemática.
   r: Romeu é uma pessoa.

   O argumento está estruturado da seguinte maneira:

   Premissas:
   $p_1 = p \Rightarrow q$: Se uma pessoa é inteligente, então esta pessoa gosta de Matemática.
   $p_2 = \sim q \wedge r$: Uma pessoa não gosta de Matemática e esta pessoa é Romeu.
   Conclusão:
   $p_3 = \sim p \wedge r$: Uma pessoa não é inteligente e esta pessoa é Romeu.

   Para analisarmos a validade do argumento temos que saber se, sempre que as premissas forem verdadeiras, a conclusão será verdadeira ou, equivalentemente, se a implicação $(p_1 \wedge p_2) \Rightarrow p_3$ é verdadeira. Ou seja, vamos fazer a tabela-verdade da proposição $((p \Rightarrow q) \wedge (\sim q \wedge r)) \Rightarrow (\sim p \wedge r)$. Vamos chamar de p_1 a proposição $p \Rightarrow q$ e de p_2 a proposiçao $\sim q \wedge r$.

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$\sim q \wedge r$	$p_1 \wedge p_2$	$\sim p \wedge r$	$(p_1 \wedge p_2) \Rightarrow p_3$
V	V	V	V	F	F	F	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	F	V	V
F	V	F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	F	F	V

   A linha sete é a única onde as premissas, $p_1 = p \Rightarrow q$ e $p_2 = \sim q \wedge r$, são ambas verdadeiras. A conclusão p_3, bem como a proposição $(p_1 \wedge p_2) \Rightarrow p_3$, são verdadeiras. Isso quer dizer que o argumento é válido.

3. Se Alfredo comer lagosta, ele ficará feliz. Alfredo come lagosta. Podemos concluir que ele está feliz.

4. Se eu trabalhar com afinco, terminarei de pintar minha cerca. Se eu não ficar batendo papo com os amigos, eu trabalharei com afinco. Eu não terminei de pintar minha cerca. Podemos concluir que fiquei batendo papo com meus amigos.

5. Se eu comer agrião todos os dias, eu viverei mais do que 80 anos. Eu não como agrião todos os dias. Lamentavelmente eu não chegarei à veneranda idade de 80 anos.

6. Se, ao dirigir meu carro, eu não ultrapassar os 80 km por hora, eu não provocarei acidentes. Eu dirijo meu carro a 100 km por hora. Portanto, eu provocarei acidentes.

7. Se fizer bom tempo, dará praia. Se eu levar minha bola de vôlei, Mariana ficará superfeliz. Deu praia, mas Mariana não ficou superfeliz. Podemos concluir que, eu, cabeça de bagre, esqueci minha bola de vôlei.

8. Se Maria vier, Joana virá. Se Carla não vier, Joana não virá. Podemos concluir que, se Maria vier, Carla virá.

9. Se Luiz souber poupar seu dinheiro, ele ficará rico. Se Luiz ficar rico, ele comprará um carro novo. Luiz comprou um carro novo. Podemos, então, concluir que ele soube poupar seu dinheiro.

Auto-avaliação

Você deve ter notado que esta aula foi diferente da aula anterior. Ela contém menos informações, mas estas requerem um tipo diferente de atenção. É necessário um tempo maior de reflexão. Leia os exemplos vagarosamente. Dedique atenção aos exercícios propostos.
Aproveite!

Aula 6

REPRESENTAÇÃO DECIMAL DE NÚMEROS RACIONAIS, PORCENTAGENS E NÚMEROS IRRACIONAIS

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. compreender a representação decimal de números racionais;
2. entender as frações porcentuais;
3. resolver problemas de porcentagens;
4. caracterizar os números irracionais.

Os números racionais expressos em forma de fração apresentam dificuldades de uso na linguagem mais coloquial. Na prática do comércio, principalmente no cálculo de porcentagens, nas medidas de temperatura em medidas científicas, muitas vezes aparecem números como 12,48 ou 0,267 ou $-3,51$ e para representar as medidas de certas grandezas. A notação decimal para os números racionais é uma convenção.

A convenção é a seguinte: o número antes da vírgula é um número inteiro, o primeiro algarismo depois da vírgula expressa os décimos, o segundo algarismo, os centésimos, o terceiro algarismo, os milésimos e assim por diante. O número representado na notação decimal é a soma dessas quantidades. Assim,

$$12,48 = 12 + \frac{4}{10} + \frac{8}{100} = \frac{1.200+40+8}{100} = \frac{1.248}{100} = \frac{312}{25}.$$

Portanto, temos duas maneiras de expressar o mesmo número:

$$12,48 = \frac{312}{25}.$$

Veja outros exemplos:

$$0,267 = 0 + \tfrac{2}{10} + \frac{6}{100} + \frac{7}{1.000} = \frac{200+60+7}{1.000}.$$

Assim, $0,267 = \dfrac{267}{1.000}$.

Também, $-3,52 = -\left(3+\dfrac{5}{10}+\dfrac{2}{100}\right) = -\dfrac{300+50+2}{100} = -\dfrac{352}{100} = -\dfrac{88}{25}$.

Logo, $-3,52 = -\dfrac{88}{25}$.

Então, $0,267$ e $-3,52$ são outras maneiras de escrever os números racionais $\frac{267}{1.000}$ e $-\frac{88}{25}$, respectivamente.

Neste momento é importante formular uma pergunta: "Todo número racional pode ser expresso em notação decimal?"

Ou, perguntando de outro modo: "Partindo de um número racional $\frac{m}{n}$, podemos escrevê-lo na forma $\frac{m}{n} = a_0, a_1\, a_2 \ldots a_p$?"

Para encontrar uma resposta, voltemos aos três exemplos trabalhados $\frac{312}{25} = 12,48$, $\quad \frac{267}{1.000} = 0,267$ e $-\frac{88}{25} = -3,52$.

Partindo das frações e efetuando a divisão, encontramos

$$\begin{array}{r|l} 312 & 25 \\ \cline{2-2} -25 & 12{,}48 \\ \cline{1-1} 62 & \\ -50 & \\ \cline{1-1} 120 & \\ -100 & \\ \cline{1-1} 200 & \\ -200 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 267 & 1.000 \\ \cline{2-2} -2.000 & 0,267 \\ \cline{1-1} 6.700 & \\ -6.000 & \\ \cline{1-1} 7.000 & \\ -7.000 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 88 & 25 \\ \cline{2-2} -75 & 3{,}52 \\ \cline{1-1} 130 & \\ -125 & \\ \cline{1-1} 50 & \\ -50 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

As contas acima são auto-explicativas e mostram que, partindo de frações, o algoritmo da divisão é a ferramenta para chegar à representação decimal dos números racionais considerados. Mas será que funciona para qualquer número racional $\dfrac{m}{n}$?

A pergunta é importante. Calma lá, não vivemos no melhor dos mundos! E os números $\dfrac{1}{3}$ e $\dfrac{8}{33}$? Vamos efetuar a divisão para nos surpreender!

$$\begin{array}{r|l} 10 & 3 \\ \cline{2-2} -9 & 0{,}33\ldots \\ \cline{1-1} 10 & \\ -9 & \\ \cline{1-1} 10 & \\ \vdots & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 80 & 33 \\ \cline{2-2} -66 & 0{,}2424\ldots \\ \cline{1-1} 140 & \\ -132 & \\ \cline{1-1} 80 & \\ -66 & \\ \cline{1-1} 140 & \\ -132 & \\ \cline{1-1} 80 & \\ \vdots & \end{array}$$

Se continuarmos o processo de divisão, no dividendo da primeira conta o algarismo 3 se repete indefinidamente, enquanto que na segunda conta ocorre o mesmo com os algarismos 2 e 4. Temos representações decimais periódicas e infinitas, também denominadas *dízimas*. Assim, $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$ e $\frac{8}{33} = 0,2424\ldots$.

As expressões à direita das igualdades são chamadas representações ou expansões decimais infinitas e periódicas, ou simplesmente dízimas periódicas. A palavra “periódica” refere-se à repetição indeterminada do número 3 e do número 24, respectivamente, na representação de $\frac{1}{3}$ e $\frac{8}{33}$.

Agora, podemos responder à pergunta: "Todo número racional $\frac{m}{n}$ pode ser expresso na forma decimal?"

Foge ao objetivo aprofundarno-nos no tema. Mas o fato de que no algoritmo da divisão o resto é sempre inferior ao divisor implica que, após um certo número de aplicações do algoritmo, o resto se repete e provoca a periodicidade. Veja a seguir o resultado que responde à pergunta.

✍ Todo número racional pode ser representado sob forma de uma expressão decimal (finita) ou sob forma de uma expressão decimal infinita e periódica.

Mas lembra de como motivamos a notação decimal? Argumentamos com as necessidades práticas do comércio, da indústria, etc. Pois bem, para estas necessidades são suficientes valores que aproximam o valor real. A aproximação com maior ou menor erro depende da natureza da operação realizada.

Por exemplo, $\dfrac{1}{3}$ pode ser aproximado por 0,333. Neste caso, usamos 3 algarismos após a vírgula. O que significa esta escolha?

$0,333 = \dfrac{3}{10} + \dfrac{3}{100} + \dfrac{3}{1.000} = \dfrac{300+30+3}{1.000} = \dfrac{333}{1.000}$. Note que

$\dfrac{1}{3} - \dfrac{333}{1.000} = \dfrac{1.000-999}{3.000} = \dfrac{1}{3.000} < \dfrac{1}{1.000}$. Isso mostra que, ao usar o valor 0,333 em lugar de $\dfrac{1}{3}$, o erro é pequeno, ou seja, $\frac{1}{3} \simeq 0,333$, com erro de um milésimo.

O símbolo $\simeq$ lê-se "aproximadamente". Então, repetindo, $\frac{1}{3}$ é aproximadamente $0,333$, e o erro é inferior a um milésimo.

Em uma máquina de calcular, quando dividimos 1 por 3 aparece no visor o número zero, seguido de um ponto (substituindo a vírgula) e uma quantidade finita de algarismos 3. Quanto maior for a capacidade da máquina, maior o número de dígitos 3 após o ponto (ou a vírgula), e tanto mais próximo do valor exato $\dfrac{1}{3}$ é o valor fornecido pela máquina.

Exercício 6.1

1. Mostre que $\frac{1}{3} < 0,334$.
2. Mostre que $0,334 - \frac{1}{3} < \frac{1}{1.000}$.
3. Conclua que $\frac{1}{3} \simeq 0,334$, com erro inferior a um milésimo.

Exemplo 6.1

Expressar o número $\frac{29}{17}$ na forma decimal com erro inferior a um décimo de milésimo.

Solução: Usando o algoritmo da divisão, encontramos

$$\begin{array}{r|l} 29 & 17 \\ \cline{2-2} -17 & 1,7058 \\ \hline 120 & \\ -119 & \\ \hline 100 & \\ -85 & \\ \hline 150 & \\ -136 & \\ \hline 14 & \end{array}$$

Então, $\frac{29}{17} \cong 1,7058$ com erro inferior a um décimo de milésimo. Para conseguir a aproximação desejada, avançamos até a quarta casa à direita da vírgula: a casa dos décimos de milésimo. De fato, veja as contas que comprovam isto:

$$1,7058 = 1 + \frac{7}{10} + \frac{0}{100} + \frac{5}{1.000} + \frac{8}{10.000} = \frac{17058}{10.000}.$$

Logo, $\frac{29}{17} - \frac{17.058}{10.000} = \frac{290.000 - 289.986}{170.000} = \frac{14}{170.000} < \frac{17}{170.000} = \frac{1}{10.000} = \frac{1}{10^4}$.

Exercício 6.2

1. Encontre um número inteiro q tal que $q < -\frac{187}{13} < q+1$.

2. Desenhe a parte da reta em que estão localizados os números q e $q+1$ e identifique a posição do número $-\dfrac{187}{13}$.

PORCENTAGEM OU FRAÇÃO DECIMAL

No cotidiano, é comum aparecer, na TV, no rádio, nos jornais ou em anúncios comerciais, expressões do tipo: "Aproveitem os descontos de 30% nas roupas de inverno"; "O IBGE divulgou em seu anuário que 18% dos brasileiros são analfabetos funcionais" ou que "A bolsa de São Paulo caiu $1,5\%$".

As expressões numéricas $30\%, 18\%$ e $1,5\%$ caracterizam um modo especial de expressar um número racional e são denominadas porcentagens. Trata-se de um conceito que está na base da Matemática Financeira.

Chamamos de **fração centesimal** a toda fração que expressa um número racional e cujo o denominador é igual a 100. Veja dois exemplos de fração centesimal:

$$\frac{13}{100} \quad \text{e} \quad \frac{42}{100}\,.$$

Em Matemática Financeira, toda fração centesimal é representada escrevendo-se o numerador da fração seguido do símbolo %. Assim, os exemplos anteriores são denotados como porcentagens, respectivamente:

$$13\% \text{ (treze por cento)}\,;$$

$$42\% \text{ (quarenta e dois por cento)}\,.$$

Porcentagem constitui uma forma abreviada de escrever frações centesimais. Veja mais um exemplo, partindo de uma situação rotineira.

Ontem pela manhã fui ao mercado comprar frutas. Comprei no total 20 unidades, sendo 8 tangerinas e 12 laranjas. Então, das frutas que comprei, 40% eram tangerinas e 60% eram laranjas. Veja por que essas porcentagens são corretas.

Do ponto de vista da quantidade relativa de tangerinas ou de laranjas no total de frutas, podemos estabelecer o seguinte raciocínio: se tivesse comprado 100 frutas (uma quantidade cinco vezes maior), deveria comprar $5 \times 8 = 40$ tangerinas e $5 \times 12 = 60$ laranjas para ter a mesma proporção de cada uma das frutas em relação ao total. Observe que a maneira de expressar matematicamente estas relações é:

$\frac{8}{20} = \frac{40}{100} = 40\%$ eram tangerinas e $\frac{12}{20} = \frac{60}{100} = 60\%$ eram laranjas.

O exemplo mostra que as frações porcentuais podem se apresentar com um denominador diferente de 100.

Veja outro caso:

$$3 \text{ em cada } 10 \longrightarrow \frac{3}{10} = \frac{30}{100} \longrightarrow 30 \text{ em cada } 100 \longrightarrow 30\%.$$

Note que outras denominações, como **índice** ou **taxa porcentual**, são usadas como sinônimos de porcentagem.

Exercício 6.3

Expresse, em porcentagem, a fração $\frac{31}{125}$.

RELAÇÃO PORCENTUAL ENTRE DUAS QUANTIDADES

Vamos transformar a experiência de ir à feira comprar laranjas e tangerinas em uma situação numérica universal. Dados dois números quaisquer, A e B, então A é igual a $p\%$ de B A **é igual a** $p/100$ **do valor** B se a seguinte igualdade for verificada:

$$A = \frac{p}{100} \times B \text{ ou equivalentemente } A = p\% \times B.$$

Na igualdade anterior, B é a referência para o cálculo porcentual, enquanto A **é uma porcentagem do número** B. Essa igualdade envolve três variáveis – A, B e p – e, no fundo, todo problema de porcentagem depende, basicamente, de determinarmos uma das variáveis dessa equação, quando as duas outras são conhecidas. Observe ainda que, ao efetuar um cálculo com essa equação, B é o valor de referência e, assim, corresponde a 100%. Veja os próximos três exemplos.

Exemplo 6.2

a) Em minha biblioteca particular, 32% dos livros são sobre Administração. Que quantidade possuo desses livros, se tenho no total 250 unidades?

Solução: A porcentagem 32% diz que, a cada cem livros de minha biblioteca, 32 são de Administração. Então, como tenho 250 livros ($2,5 \times 100$), tenho 80 livros ($2,5 \times 32$) de Administração. Veja os cálculos:

$32\% \times 250 = \dfrac{32}{100} \times 250 = 80.$ Mais precisamente, 32% de 250 são 80.

b) Ontem saquei R$ 30,00 de minha conta corrente, o que correspondia a 20% do que possuía. Qual o saldo restante no banco?

Solução: Denominando de C o valor que eu tinha ontem na conta, então

$$20\% \times C = 30,00 \Leftrightarrow \frac{20}{100} \times C = 30,00 \Leftrightarrow C = 150,00.$$

Portanto, ontem, antes do saque, eu tinha R$ 150,00. Como retirei 20%, o que correspondeu a R$ 30,00, o saldo restante no banco é de R$ 120,00.

c) A produção de uma indústria de alumínio alcançou 15 toneladas em 2004 e 21 em 2005. Qual foi o porcentual de crescimento dessa produção?

Solução: Veja que o crescimento de um ano para outro foi de seis toneladas de alumínio. Como a produção era de 15 toneladas e houve um acréscimo de seis toneladas, observe, pelas contas a seguir, como calcular o porcentual p de crescimento.

Da definição de porcentagem e dos dados do problema, temos que

$$p\% \text{ de 15 resulta } 6 \Leftrightarrow p\% \times 15 = 6 \Leftrightarrow \frac{p}{100} \times 15 = 6 \Leftrightarrow p = 40.$$

Logo,

$$p\% = \frac{p}{100} = \frac{40}{100} \Leftrightarrow p\% = 40\%.$$

O percentual de crescimento da produção de alumínio foi de 40%.

Exercício 6.4

Em uma pequena agência bancária, 32% dos clientes são pessoas jurídicas e os outros 2.040 são pessoas físicas. Quantos clientes, ao todo, tem essa agência?

AUMENTOS E REDUÇÕES PORCENTUAIS

Em um dos exemplos, calculamos o aumento percentual da produção de alumínio de uma indústria. Esse tipo de problema é freqüente em nosso cotidiano. Por exemplo, uma conta análoga é realizada quando calculamos o aumento do custo dos produtos da cesta básica de um ano para o outro.

A situação inversa também pode ocorrer, quando precisamos estimar o decréscimo porcentual de um bem móvel ou imóvel: Como estimar, em relação ao preço de seu carro, o percentual de desvalorização ocorrida em um ano?

Para calcular acréscimo ou decréscimo porcentual de uma quantidade, fica mais simples se dividirmos o problema em duas partes.

Por exemplo, para encontrar a quantidade final atingida M, obtida como resultado de um aumento de p% de uma certa quantidade C, desenvolvemos as seguintes etapas:

1ª etapa: um aumento de p% do valor C resulta em $p\% \times C = \frac{p}{100} \times C$.

2ª etapa: o valor final M é obtido pela soma $M = \frac{p}{100} \times C + C = \left(\frac{p}{100} + 1\right) \times C$.

Note que o primeiro fator do último membro da equação pode ser expresso como porcentagem e, assim, a equação tem um novo formato:

$$\frac{p}{100} + 1 = \frac{p+100}{100} = (p+100)\% \Rightarrow M = (p+100)\% \times C.$$

que fornece o valor final M.

Acompanhe, agora, um exemplo numérico.

Exemplo 6.3

Aumentar o valor 230 em 30%.

Solução: O valor M obtido pelo aumento de 30% de 230 pode ser obtido diretamente pela equação $M = (30+100)\% \times 230$.

Observe que

$$(30+100)\% = 130\% = \frac{130}{100} = 1,30 \Rightarrow M = 1,3 \times 230 = 299.$$

✍ Na solução apresentada no exemplo anterior, o fator 1,3 muitas vezes é referido como fator de correção.

Exercício 6.5

1. Aumentar o valor 400 em 3,4%.
2. A conta de um restaurante indicava uma despesa de R$ 26,00 e trazia a seguinte observação: "Não incluímos os 10% de serviço." Quanto representam, em dinheiro, os 10% de serviço e quanto fica o total da despesa se nela incluirmos a porcentagem referente ao serviço?

Seguindo o mesmo tipo de argumentação desenvolvido anteriormente para aumentos porcentuais, chegamos, igualmente, à equação que expressa o valor final M de uma quantidade obtida pela redução de p% de uma quantidade inicial C. Basta multiplicar o valor inicial C pela porcentagem $(100-p)\%$ para obtermos o resultado final M desejado. Ou seja, em caso de redução porcentual, $M = (100-p)\% \times C$. Veja um exemplo prático que ocorre no comércio.

Exemplo 6.4

Na última promoção de Natal, comprei um celular cujo preço normal era R$ 300,00, com uma redução de 30%. Acompanhe os cálculos para descobrir o preço que paguei pelo celular.

Solução: Em primeiro lugar, 30% de 300 é igual a $30\% \times 300 = \frac{30}{100} \times 300 = 90$. Este valor representa a redução. Portanto, o preço que paguei pelo celular foi de R$ 210,00. Note que o valor pago também poderia ser calculado diretamente por

$$(100-30)\% \times 300 = \frac{70}{100} \times 300 = 210.$$

AUMENTOS OU DECRÉSCIMOS PORCENTUAIS SUCESSIVOS

Às vezes, sobre uma quantidade (ou valor de um certo produto) incidem sucessivos aumentos, sucessivas reduções ou uma combinação sucessiva de aumentos e de reduções. Para fazer os cálculos e encontrar a quantidade no fim do processo, basta efetuar os produtos dos fatores de modo conveniente.

Por exemplo, se aumentarmos um valor C, sucessivamente, em $p_1\%$, $p_2\%, \cdots, p_n\%$, de tal forma que cada um dos aumentos, a partir do segundo, incida sobre o resultado do aumento anterior, é suficiente multiplicar o valor C pelo produto dos fatores $(100+p_1)\%, (100+p_2)\%, \cdots, (100+p_n)\%$. Analogamente, se reduzirmos um valor C, sucessivamente, em $p_1\%, p_2\%, \cdots, p_n\%$, de tal forma que cada uma das reduções, a partir da segunda, incida sobre o resultado da redução anterior, basta multiplicar o valor C pelo produto dos fatores $(100-p_1)\%, (100-p_2)\%, \cdots,$ $(100-p_n)\%$.

Veja o exemplo seguinte.

Exemplo 6.5

Calcule o resultado obtido pelos aumentos sucessivos de 10%, 20% e 30% sobre o valor de R$ 2.000,00.

Solução: Seja M o valor final obtido após os aumentos sucessivos. Assim,

$$M = (1+0,1) \times (1+0,2) \times (1+0,3) \times 2.000 = 3.432.$$

Portanto, o resultado final é M = R$ 3.432,00.

Exercício 6.6

1. Qual é o resultado obtido após a redução sucessiva de 10%, 20% e 30% sobre o valor R$ 2.000,00?

2. O preço de um produto A é 30% maior que o de um outro produto B, e o preço deste é 20% menor que o de outro produto C. Sabe-se que A, B e C juntos custam R$ 28,40.

Qual o preço de cada um deles?

Antes de encerrar este texto, vejamos mais um exemplo de composição de porcentuais.

Exemplo 6.6

Visando obter máximo lucro, um investidor, em um determinado mês, diversificou e aplicou 40% do seu capital em um fundo de ações e o restante em um fundo de renda fixa. Após um mês, as quotas dos fundos de ações e de renda fixa haviam se valorizado em 8% e 2%, respectivamente. Qual foi a rentabilidade porcentual do investidor naquele mês?

Solução: Supondo que C é o capital inicial do investidor, que aplicou 40% em ações e 60% em renda fixa. Então, se C_1 e C_2 são, respectivamente, esses capitais, temos que $C = C_1 + C_2$, onde

$$C_1 = 40\% \times C = \frac{40}{100} \times C = 0,4 \times C\ ;$$

$$C_2 = 60\% \times C = \frac{60}{100} \times C = 0,6 \times C\,.$$

Logo, denominando de M_1 e M_2, respectivamente, os capitais finais obtidos com a valorização no fundo de ações e na renda fixa, encontramos

$$M_1 = (100+8)\% \times C_1 = 1,08 \times C_1 = 1,08 \times 0,4 \times C = 0,432 \times C\ ;$$

$$M_2 = (100+2)\% \times C_2 = 1,02 \times C_2 = 1,02 \times 0,6 \times C = 0,612 \times C\,.$$

Portanto, o montante final será

$$M = M_1 + M_2 = (0,432 + 0,612) \times C = 1,044 \times C = (100 + 4,4)\% \times C.$$

Assim, a rentabilidade percentual do investidor foi de 4,4% sobre o capital investido.

Exercício 6.7

1. Num fim de semana, um comerciante anunciou a venda de seu carro por R$ 40.000,00. Como o preço era excessivo, não vendeu e foi preciso que reduzisse o preço em 5% e, depois, em mais 10%. Somente então encontrou um comprador. Qual foi o preço de venda do carro?

2. O salário bruto de um vendedor é constituído de uma parte fixa, igual a R$ 2.300,00, e de mais uma comissão de

3% sobre o total de vendas que exceder a R$ 10.000,00. Estima-se em 10% o porcentual de descontos diversos que incidem sobre o salário bruto. Em determinado mês, o vendedor recebeu, líquido, o valor de R$ 4.500,00. Quanto ele vendeu nesse mês?

NÚMEROS IRRACIONAIS

Estamos em plena viagem exploratória pelo mundo dos números!

Temos motivação suficiente vendo a importância que os números representam na organização de nossa sociedade. Pitágoras, no século V a.C., um dos maiores matemáticos que o mundo conheceu, apregoava: "Os números governam o mundo." Na concepção de Pitágoras, o conjunto de números que deveriam "governar o mundo" eram os números racionais. E já naquele tempo percebeu-se que isto não era suficiente. Vamos aos fatos.

Para Pitágoras, a beleza da estrutura dos números era que a unidade e suas frações eram suficientes para expressar toda a beleza do Universo. Naquela época tão remota, a Matemática confundia-se com a religião. Pitágoras e seus seguidores formaram o que hoje denominamos irmandade. O fato surpreendente ocorreu quando um discípulo de Pitágoras de nome Hipaso percebeu que a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem uma unidade não podia ser expressa por um número racional.

Acompanhe pela **Figura 6.1**, em que representamos um triângulo retângulo ABC cujos catetos AB e AC medem 1, a caracterização da medida do hipotenusa BC.

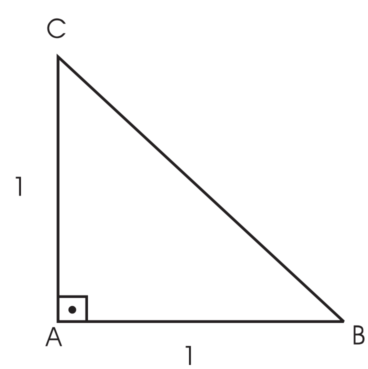


Figura 6.1: Triângulo retângulo de Hipaso.

Segundo o Teorema de Pitágoras, temos que $BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$.

Hipaso chamou a atenção para o fato de que não existe um número racional cujo quadrado é 2. Isso é, para todo número racional $\frac{m}{n}$, sempre ocorre que $\left(\frac{m}{n}\right)^2 \neq 2$.

Não iremos provar esse resultado pois foge ao nosso objetivo, apesar de a demonstração ser muito simples. O estudante interessado pode consultar o livro de Pré-Cálculo, Aula 3, do curso de Matemática.

A História (ou a lenda) relata que a descoberta de Hipaso provocou um grande choque em Pitágoras, que não aceitou sua idéia de Universo ser contrariada. Incapaz de refutar Hipaso, Pitágoras usou seu poder na irmandade para condenar Hipaso à morte por afogamento.

Conclusões

1) Existem medidas que não podem ser expressas por um número racional. Veja a **Figura 6.2**, que localiza sobre a reta orientada o número a, tal que $a^2 = 2$.

   Denotamos, simbolicamente, este número por $a = \sqrt{2}$ e o denominamos a raiz quadrada de 2.

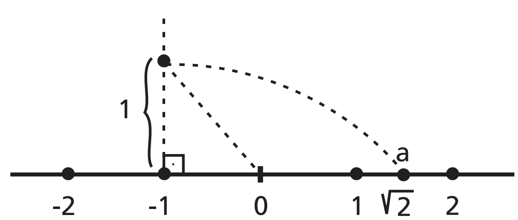


Figura 6.2: O número irracional $\sqrt{2}$.

2) Se $a = \sqrt{2}$ é um número irracional, veja as conseqüências. Para todo número inteiro não-nulo $p \in \mathbb{Z}$, $p\sqrt{2}$ é também irracional. Vamos provar isso. Suponha, por absurdo, que $p\sqrt{2}$ é racional. Então, para algum m e n inteiros, com

   $n \neq 0$ $p\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$ implica que $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n \cdot p}$.

   O argumento anterior mostra que, se $p\sqrt{2}$ é racional, então $\sqrt{2}$ é racional. Isso não é possível. Portanto, $p\sqrt{2}$ é irracional. Logo, temos um número infinito de números irracionais

   $\ldots\ -3\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, \ldots$

Em toda a generalidade, um número é irracional quando é o valor da medida de um segmento de reta e que não pode ser escrito na forma $\dfrac{m}{n}$, onde m e n são números inteiros.

✍ Na verdade, definimos os números irracionais positivos (uma vez que a medida de um segmento é positivo). Para acrescentar os números irracionais negativos, basta tomar os simétricos (negativos) dos números irracionais positivos.

Se denotarmos por $\mathbb{I}$ o conjunto dos números irracionais, então $\mathbb{R}$ $\mathbb{R} = \mathbb{I} \cup \mathbb{Q}$ é o conjunto dos números reais.

O NÚMERO π

Além do número irracional $\sqrt{2}$, outra medida importante detectada na Antigüidade e que não pode ser expressa por um número racional é o número π.

Para entender, tome um círculo de diâmetro igual a 1 e force-o a rolar sem deslizamento ao longo de uma reta, como na **Figura 6.3**.

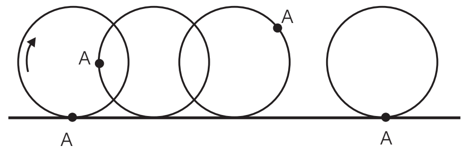


Figura 6.3: O perímetro do círculo.

O segmento de reta, compreendido entre duas posições consecutivas em que um ponto escolhido A toca a reta de rolagem, tem comprimento que denominamos π.

O número π é portanto o comprimento ou perímetro de um círculo cujo diâmetro mede 1.

O número π já era estudado à época do Oriente antigo e lhe era atribuído o valor aproximado de $\frac{256}{81} \simeq 3,16\ldots$. Este dado histórico está registrado no Papiro de Rhind (1650 a.C.).

O grande geômetra grego, Arquimedes de Siracusa (século IV a.C.), desenvolveu métodos geométricos eficientes para calcular valores numéricos ainda mais próximos para π. Usando um polígono de 96 lados inscrito numa circunferência, encontrou $\pi \sim 3,1428$.

No entanto, foram precisos mais de 2.200 anos após Arquimedes para que, em 1882, o matemático inglês Ferdinand Lindeman pudesse provar que o número π é irracional.

Exercício 6.8

1. Encontre a representação decimal dos seguintes números:

   a) $\dfrac{-27}{12}$

   b) $\dfrac{-135}{21}$

   c) $\dfrac{67}{15}$

   d) $\dfrac{329}{5}$

   e) $\dfrac{7}{10}$

2. Coloque em ordem crescente os números racionais:

   a) $-3,\overline{217}$

b) $0,272$

c) $\dfrac{13}{29}$

d) $-3,22$

3. Calcule o número resultante das seguintes operações e o expresse na representação decimal. $\dfrac{1,3-\dfrac{1}{5}}{5}-\dfrac{0,35}{1,4}$.

Aula 7

POTÊNCIAS, RADICAIS E EXPRESSÕES NUMÉRICAS

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. compreender os conceitos de potenciação e radiciação de números reais;
2. resolver ou simplificar expressões numéricas.

Você já deve ter experiência desde o Ensino Fundamental e Médio de lidar com o assunto que iniciamos nesta aula: potenciação.

O ponto de partida é uma questão de notação. Quando escrevemos, por exemplo 3^4, estamos expressando em símbolos e abreviadamente o produto $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. Notamos vantagem nesta convenção. Imagine se tivermos que expressar através de produto de fatores 3^{500}. É muito fatigante! Daí, o poder da notação.

É preciso ressaltar que o assunto potenciação não é apenas uma questão de notação. O estudo de potências leva, por exemplo, às importantes funções exponencial e logarítmica. Mas, vamos devagar e passo a passo, começando com a definição de potências.

POTÊNCIAS DE UM NÚMERO REAL

Antes de tudo, é bom você recordar nossa escolha. O conjunto dos números naturais não contém o zero. Isto é, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Definição 7.1

Seja b um número real.

a) Se n é um número natural, então $b^n = b \cdot b \cdot \ldots \cdot b$($n$ fatores iguais a b).

b) Se $b \neq 0$ e m é um número inteiro negativo, $b^m = (b^{-1})^{-m} = \left(\frac{1}{b}\right)^{-m} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{b}$. Acima temos um produto com $-m$ fatores. Note que $-m > 0$.

c) Se $b \neq 0$, então $b^0 = 1$.

✍ i. Na definição anterior b é chamado a base e n, m e 0 (zero) são os expoentes.

ii. Observe, na definição anterior, a questão da abrangência dos números reais que servem de base. No item a) b é qualquer número real; nos itens b) e c) é necessária à condição $b \neq 0$.

Vamos a alguns exemplos!

Exemplo 7.1

a) $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^3 = \left(-\dfrac{1}{3}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{9}\left(-\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{1}{27}.$

b) $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{5}\right)^{-4} = \left(-\dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)^4 = \left(-\dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(-\dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(-\dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)\cdot$
$\left(-\dfrac{5}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{25}{2}\cdot\dfrac{25}{2} = \dfrac{625}{4}.$

c) $(3,12)^0 = \left(\dfrac{312}{100}\right)^0 = 1.$

✍ i. Atenção! Não tem sentido matemático a expressão 0^0.

ii. Aproveito a ocasião para lembrar que, você já deve ter topado com outras expressões matemáticas sem sentido, ou indeterminadas. Recordo mais um exemplo: $\dfrac{0}{0}$ não tem sentido ou é indeterminado.

PROPRIEDADES DA POTENCIAÇÃO

As propriedades da potenciação que enunciamos a seguir são conseqüências diretas das propriedades fundamentais das operações de adição e multiplicação de números reais.

Suponha que os números reais b e c e os números inteiros m e n permitem definir todas as potências explicitadas a seguir. Então, valem as propriedades:

I. $b^m \cdot b^n = b^{m+n}$

✍ Para efetuar o produto de potências de mesma base, conservamos a base e somamos o expoente.

Exemplo 7.2

$3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7.$

II. $(b^m)^n = b^{mn}$

✍ Para efetuar a potência de uma potência, multiplicamos os expoentes.

Exemplo 7.3

$\left(2^3\right)^5 = 2^{3\cdot 5} = 2^{15}.$

III. $b^m \div b^n = b^m \cdot \dfrac{1}{b^n} = b^m \cdot b^{-n} = b^{m-n}$

✍ Para efetuar a divisão de potências de mesma base, conservamos a base e subtraímos os expoentes.

Exemplo 7.4

$$(-2)^3 \div (-2)^5 = \left(-2\right)^{3-5} = (-2)^{-2} = \left(\frac{1}{-2}\right)^2 = \frac{1^2}{(-2)^2} = \frac{1}{4}.$$

IV. $(b \cdot c)^m = b^m \cdot c^m$

✍ O produto de dois números elevado a uma potência é igual ao produto da potência de cada um dos números.

Exemplo 7.5

$(4 \cdot 2)^3 = 4^3 \cdot 2^3.$

Exercício 7.1

1. Escreva sob a forma de produto e calcule:

   a) 5^3

   b) 25^2

   c) 10^3

   d) 1^{11}

2. Usando as propriedades de potenciação, expresse cada item como uma base elevada a uma única potência.

   a) $3^5 \cdot 3^2 \cdot 3^3$

   b) $\dfrac{2^{11}}{2^9}$

   c) $3^4 \cdot 3 \cdot 3^{-1}$

   d) $\left(\dfrac{6^7}{6^3}\right)^3$

RAÍZES n-ÉSIMAS DE NÚMEROS REAIS

Freqüentemente, ficamos diante da necessidade de definir que número real x verifica uma equação como $x^n = b$, onde n é um número natural e b, um número real. Explicando melhor: na equação, b é um número real conhecido e precisamos encontrar um ou mais números reais x, tais que $b = x \cdot x \cdot x \dots x(n$ fatores $x)$.

– Você se lembra do surgimento do primeiro número irracional, na Aula 3?

Naquela ocasião, o número real x, que fornecia a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 1, verificava $x^2 = 2$. Na ocasião, usamos a notação $x = \sqrt{2}$ para expressar o número. Portanto, $\sqrt{2}$ tem a propriedade que $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$.

Veja outros exemplos.

Exemplo 7.6

Encontre números reais x, tais que $x^3 = -8$.

Solução: A equação proposta tem como única solução $x = -2$. De fato, $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$.

Exemplo 7.7

Encontre números reais x, tais que $x^6 = 8$.

Solução: Nesse caso, as duas soluções possíveis são os números $x_1 = \sqrt{2}$ e $x_2 = -\sqrt{2}$. De fato,

$(\sqrt{2})^6 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. O mesmo desenvolvimento valendo para $x_2 = -\sqrt{2}$.

Estamos em condições de definir o conceito de raiz enésima de um número real.

Definição 7.2

(Raízes n-ésimas)
Seja b um número real. Então,

a) Se $b > 0$ e n um número natural, a raiz n-ésima de b é o número real positivo que elevado à potência n resulta b.

   Usamos a notação $\sqrt[n]{b}$ ou $b^{\frac{1}{n}}$ para representar a raiz n-ésima de b. Isto é, $b = \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{b} \ldots \sqrt[n]{b}$ (n fatores).

b) Se $b < 0$ e n é um número natural ímpar, a **raiz enésima de** b é o número real negativo que elevado a potência n resulta b.

   Permanecemos com a notação $\sqrt[n]{b}$ ou $b^{\frac{1}{n}}$ para representar a n-ésima raiz de b. Então $b = \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{b} \ldots \sqrt[n]{b}$ (n fatores).

c) Se $b = 0$ e n é um número natural, então a **raiz enésima de** $b = 0$ é o número zero. Isto é, $\sqrt[n]{0} = 0$.

✍

i. Não definimos $\sqrt[m]{b}$, qualquer que seja o número real b, se m é um número inteiro e $m \leq 0$. Por exemplo, não tem sentido $\sqrt[-3]{5}$.

ii. Não está definido $\sqrt[n]{b}$, onde n é par e $b < 0$. Por exemplo, não existe nenhum número real que possa ser associado a $\sqrt[4]{-2}$.

iii. Na expressão $\sqrt[n]{b}$, o número b é o radicando, o símbolo $\sqrt{\ }$ é a raiz e n é o índice da raiz.

iv. No caso $n = 2$, em vez de $\sqrt[2]{\ }$ escrevemos $\sqrt{\ }$ e lemos: "raiz quadrada". Por exemplo, a igualdade $\sqrt{49} = 7$, lê-se "raiz quadrada de 49 é igual a 7".

v. No caso $n = 3$, o símbolo $\sqrt[3]{\ }$ lê-se raiz cúbica. Por exemplo, a igualdade $\sqrt[3]{-125} = -5$, lê-se: "raiz cúbica de -125 é igual a -5".

PROPRIEDADES DA RADICIAÇÃO

a) Se a e b são números reais positivos e n é um número natural, então $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

b) Se a é um número real negativo, b um número real positivo e n é um número natural ímpar, então $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Exemplo 7.8

a) $\sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}} = 3$. Pois, $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$.

b) Não tem sentido $\sqrt{-4}$ quando trabalhamos com números reais, uma vez que não existe um número real x, tal que $x^2 = -4$.

c) $\sqrt[5]{-32} = -2$. Pois $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$.

d) $\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

e) $\sqrt[3]{-81} = \sqrt[3]{(-3)^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{(-3)^3} \cdot \sqrt[3]{3} = -3\sqrt{3}$.

✍ i. Observe que $(-3)^2 = 9$ e $3^2 = 9$. No entanto $\sqrt{9} = 3$. É errado escrever $\sqrt{9} = -3$!! Pois para todo número real positivo b e todo número natural n, $\sqrt[n]{b}$ é, por definição, um número positivo.

ii. Sendo $\sqrt{9} = 3$ então tomando os números simétricos (ou multiplicando por -1) escrevemos $-\sqrt{9} = -3$.

Exercício 7.2

1. Calcule:

   a) $(\sqrt{2} \div \sqrt{3})^{-4}$

   b) $[(\sqrt{2})^{-2}]^{-3}$

   c) $(\sqrt{2} - 5)^2$

2. Verifique as seguintes igualdades:

   a) $\sqrt[3]{-250} = -5\sqrt[3]{2}$

   b) $\sqrt[4]{48} = 2\sqrt[4]{3}$

   c) $\sqrt[5]{-512} = -2\sqrt[5]{16}$

POTÊNCIAS RACIONAIS DE NÚMEROS REAIS

Dado um número racional r, podemos sempre supor que a fração que o representa não pode ser simplificada e o denominador é positivo. Isto é, podemos escrever r na forma,

$$r = \frac{m}{n},$$

onde m e n são números inteiros que não possuem divisor em comum e $n > 0$.

Dentro destas condições estabelecidas, introduzimos a próxima definição.

Definição 7.3

Sejam b um número real e $r = \dfrac{m}{n}$ tais que uma das condições é satisfeita:

a) $b^m < 0$ e n é um número natural ímpar. Ou

b) $b^m > 0$

então, $b^r = b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$.

✍ Veja que as condições a) e b) impostas na definição são necessárias para que as operações de radiciação e potência fiquem bem definidas. Observe, também, que em virtude das propriedades da radiciação vale

$$b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m} = (\sqrt[n]{b})^m.$$

Exemplo 7.9

a) $16^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{16^2} = \sqrt[4]{(4^2)^2} = \sqrt[4]{4^4} = 4^{\frac{4}{4}} = 4^1 = 4.$

b) $(-8)^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{(-8)^5} = \sqrt[3]{(-8)^3 \cdot (-8)^2} = \sqrt[3]{(-8)^3} \cdot \sqrt[3]{(-8)^2} =$
$-8\sqrt[3]{64} = -8 \times 4 = -32.$

c) $(27)^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^{-2}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{27}\right)^2} = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{27}}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}.$

Exercício 7.3

Mostre que valem as seguintes igualdades:

a) $(-500)^{\frac{1}{3}} = -5\sqrt[3]{4}$ b) $(-32)^{-\frac{1}{5}} = -\dfrac{1}{2}$

EXPRESSÕES NUMÉRICAS E SIMPLIFICAÇÕES

Uma expressão onde aparecem números reais, operações entre os números e sinais convencionais de organização da ordem das operações é o que chamamos de uma expressão numérica real ou simplesmente expressão numérica.

Por exemplo,

$$E = \left\{ -2\sqrt[3]{5} + \left[\left(\frac{1}{2} + \sqrt[3]{5} - \frac{1}{6} \right) \times 3 + 5^2 \right] \div 2 \right\} \times 5$$

é uma expressão numérica. Na expressão destacada anteriormente, aparecem as operações fundamentais, a potenciação, a radiciação e os símbolos organizadores, chaves $\{,\}$, colchetes [,] e os mais populares parênteses (,).

A expressão numérica é, geralmente, a tradução (equacionamento) da solução de um problema qualquer que porventura estejamos resolvendo. Portanto, diante de expressão algébrica, o objetivo maior é resolvê-la, achando o número real que a representa ou, na impossibilidade, realizar operações para simplificá-la.

Uma expressão numérica, portanto, é uma coisa do tipo decifra-me ou te devoro! Vamos resolver, ou decifrar, a expressão anterior.

Mas, antes de realizar essa tarefa, vamos recordar as regras que devem ser usadas quando queremos simplificar uma expressão algébrica ou calcular seu valor. Eis a hierarquia das operações e a convenção quanto aos símbolos.

✍

i. Antes de qualquer coisa, devemos efetuar primeiro as operações entre parênteses, depois entre colchetes e, finalmente, realizar as operações entre chaves.

ii. Quanto às operações, devem ser resolvidas na seguinte ordem:

   1. em primeiro lugar, as potenciações e as radiciações (esta quando possível);
   2. em segundo lugar, as multiplicações e as divisões;
   3. em terceiro lugar, finalmente as adições e as subtrações.

   Mais algumas recordações são importantes para o trato com expressões algébricas:

iii. Um sinal negativo na frente de um parênteses, colchetes ou chave muda o sinal de todos os termos interiores ao sinal ou muda o resultado obtido quando se efetua as operações internas ao sinal. Por exemplo:

   $-(3\times 2+6) = -3\times 2-6 = -6-6 = -12$

   ou

   $-(3\times 2+6) = -(6+6) = -(12) = -12\,.$

   Agora acompanhe o cálculo do valor da expressão E.

$$
\begin{aligned}
E &= \left\{-2\cdot\sqrt[3]{5}+\left[\left(\frac{3-1}{6}+\sqrt[3]{5}\right)\cdot 3+25\right]\div 2\right\}\times 5 = \\
&= \left\{-2\cdot\sqrt[3]{5}+\left[\left(\frac{1}{3}+\sqrt[3]{5}\right)\cdot 3+25\right]\div 2\right\}\times 5 = \\
&= \left\{-2\cdot\sqrt[3]{5}+\left[1+3\cdot\sqrt[3]{5}+25\right]\div 2\right\}\times 5 = \\
&= \left\{-2\cdot\sqrt[3]{5}+\left[26+3\cdot\sqrt[3]{5}\right]\div 2\right\}\times 5 = \\
&= \left\{-2\sqrt[3]{5}+13+\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{5}\right\}\times 5 = \\
&= \left\{-2\sqrt[3]{5}+13+\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{5}\right\}\times 5 = \\
&= \left\{\frac{-4+3}{2}\sqrt[3]{5}+13\right\}\times 5 = \left\{-\frac{1}{2}\sqrt[3]{5}+13\right\}\times 5 = \\
&= \frac{-5}{2}\sqrt[3]{5}+65.
\end{aligned}
$$

Compare o resultado encontrado com a expressão original. Convenhamos, o resultado que encontramos é um valor numérico muito mais palatável para E.

Exercício 7.4

Resolva as seguintes expressões:

a) $1^4-(-2)^4-(-2)^3+0^7+32^0+8\cdot 2^2$

b) $-(-3)^3-\left(2^2\right)^3$

c) $-(1)^0+2^3$

d) $-2+\{-1-[5-3\cdot(10+1)\div 3]-5\cdot 7\}$

e) $-5+[3-(7-5-3)\cdot 22\div 11]$

PRODUTOS NOTÁVEIS

Os produtos notáveis são equivalências entre expressões algébricas, úteis para simplificar a rotina de cálculos. Veja, em seguida, os casos mais simples de produtos notáveis:

Quadrado da soma de dois termos algébricos

Se a e b são números reais, então

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Para mostrar que o primeiro membro coincide algebricamente com o segundo membro, basta efetuar o desenvolvimento,

$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b = a^2 + 2ab + b^2$.

Quadrado da diferença de dois termos algébricos

Se a e b são números reais, então

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Para mostrar que o primeiro membro coincide algebricamente com o segundo membro, basta efetuar o desenvolvimento,

$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a\cdot a + a\cdot(-b) + (-b)\cdot a + (-b)\cdot(-b) = a^2 - 2ab + b^2$.

Produto da soma pela diferença

Se a e b são números reais, então

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Basta efetuar o desenvolvimento para verificar que o primeiro membro coincide algebricamente com o segundo membro $(a-b)(a+b) = a\cdot a + a\cdot b + (-b)\cdot a + (-b)\cdot(b) = a^2 - b^2$.

Com uma aplicação dos produtos notáveis e com o objetivo de resolver expressões numéricas, vamos abrir nossa caixa de truques e retirar dali a ferramenta chamada racionalização. Veja os exemplos típicos:

Exemplo 7.10

Racionalize ou simplifique expressões do tipo:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

onde a e b são números reais positivos e $a \neq b$.

Solução: Para efetuar a racionalização, vamos usar o produto notável onde, para números reais x e y, $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$. Então,

a) $$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b},$$

b) $$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$$

Veja alguns exemplos numéricos.

c) Simplifique (racionalize) as expressões numéricas:

1. $E_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$
2. $E_2 = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$
3. $E_3 = \dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
4. $E_4 = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3}}$

Solução:

1. $$E_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{(1-\sqrt{5})\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-5}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5} - 1.$$

2. $$\begin{aligned} E_2 &= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{\sqrt{3\cdot 4}+\sqrt{2\cdot 9}}{2-3} = \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{-1} = -2\sqrt{3}-3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} E_3 &= \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \\ &= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{6}. \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} E_4 &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{2}}+\sqrt{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{2}}+\sqrt{\sqrt{3}}} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{2}}-\sqrt{\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{2}}-\sqrt{\sqrt{3}}} = \\ &= \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{3})}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{3}. \end{aligned}$$

d) Racionalize ou simplifique a expressão $E = \dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$.

Solução:

$$\begin{aligned} E &= \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{(\sqrt{7}-\sqrt{2})(\sqrt{7}+\sqrt{2})} - \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5^2}} = \\ &= \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{2})^2} - \frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{7-2} - \frac{\sqrt[3]{25}}{5} = \\ &= \frac{2\sqrt{7}+2\sqrt{2}-\sqrt[3]{25}}{5}. \end{aligned}$$

Para finalizar a aula, resolva os exercícios.

Exercício 7.5

1. A expressão numérica $E = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}-3\right)\div\sqrt{3}-2\left(\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)\right]$ é igual a:

   a) $\dfrac{\sqrt{3}-3}{3}$

   b) $\dfrac{-\sqrt{3}+9}{3}$

   c) $\dfrac{\sqrt{3}-9}{3}$

2. Mostre que são verdadeiras as igualdades:

   a) $(\sqrt{2}-1)^3 = 5\sqrt{2}-7$

   b) $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}-1\right) \div \dfrac{\sqrt{2}-2}{2} = \dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$

3. Determine o valor de x em cada uma das equações abaixo:

   a) $5^{3x-2} = 1$

   b) $16^{x+2} = 2^{3x-1}$

   c) $(x^2+3)^{x^2-x} = 1$

4. O número $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \dfrac{3}{\sqrt[3]{-3}}$ é igual a:

   a) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt[3]{9}}{3}$

   b) $\dfrac{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt[3]{9}}{3}$

   c) $\dfrac{3\sqrt{3}-3\sqrt{2}+\sqrt[3]{9}}{3}$

   d) $\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt[3]{9}$

5. Verifique que as seguintes igualdades são verdadeiras:

   a) $\dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

   b) $\dfrac{3}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{3^3}$

   c) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{8}-\sqrt{5}} - \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}+\sqrt{5}} = \dfrac{17+\sqrt{10}}{3}$

6. *(Desafio)* Prove que se $a<0$ então $\left(\sqrt{1-\sqrt[3]{a}}\right)^6 = 1 + 3\sqrt[3]{a}(\sqrt[3]{a}-1)-a$.

7. *(Desafio)* Mostre que são negativos os números:

   a) $3-2\sqrt{3}$

   b) $\sqrt{3+\sqrt{3}}-\sqrt{3\sqrt{3}}$

Aula 8

NÚMEROS REAIS: RELAÇÃO DE ORDEM, INTERVALOS E INEQUAÇÕES

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. compreender a estrutura de ordem dos números reais e suas principais propriedades;
2. compreender o conceito de intervalo de números reais, realizar operações com intervalos e representá-los graficamente na reta;
3. resolver inequações e usar os intervalos para expressar os conjuntos soluções.

A representação dos números reais sobre uma reta é uma poderosa ferramenta. É como se construíssemos uma ponte ligando a aritmética e a álgebra à geometria.

Outro aspecto importante da representação dos números reais sobre uma reta é o fato de que os números aparecem de maneira organizada, possibilitando comparar as ordens de grandeza de dois números por suas posições. Para motivar esta última observação, proponho uma atividade para começar.

Exercício 8.1

Após tomar um banho, coloque uma roupa legal, pra cima, borrifadas de um agradável perfume ajudam. Pronto. Saia à rua. Você vai a uma loja comprar uma televisão nova, de tela grande, a Copa do Mundo se aproxima, e estão oferecendo garantia de 10 anos, controle remoto e o escambau. Só falta garantir a vitória do seu time.

De volta a casa, televisão instalada. Você liga. O canal 10 é automaticamente sintonizado, e o som está muito baixo. O jogo da seleção já começou, está passando no canal 12, e você precisa também entrar em campo! Você está com o controle na mão, aconchegado no sofá e o manual de instruções longe. Observando o controle remoto, você identifica o ícone de volume (VOL) e o ícone dos canais (CH). Veja o controle na **Figura 8.1** a seguir.

Figura 8.1: Controle remoto.

– Que tecla apertar para passar do canal 10 ao canal 12? Duas vezes a tecla acima do ícone canal (CH) ou duas vezes aquela abaixo?

– Que tecla comprimir para aumentar o volume? Aquela à direita ou aquela à esquerda do ícone volume?

Pense um pouco e responda! Acredite, sua resposta definirá sua condição de pessoa bem ou mal-orientada em relação às convenções de comunicação gráfica adotadas.

Se você já se decidiu, consulte a resposta ao Exercício 8.1 no fim deste módulo.

E aí? Acertou a resposta? Pois é, são convenções que têm o seu fundamento.

Veja por quê! Ao representarmos os números reais sobre uma reta horizontal eles crescem, da esquerda para a direita e, evidentemente, decrescem da direita para a esquerda. Se a reta, representando os números reais, fosse posicionada verticalmente, a representação dos números seria crescente para cima e decrescente para baixo!

Para tornar um pouco mais rigorosa esta idéia, vamos introduzir a relação de ordem nos números reais.

Considere os números reais representados sobre uma reta real orientada, como na **Figura 8.2**.

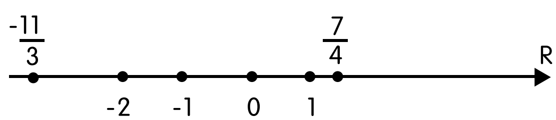


Figura 8.2: Números reais sobre a reta.

Dados dois números reais a e b representados sobre a reta, escrevemos que $a < b$ para significar que o sentido que vai de a para b coincide com a orientação da reta.

A expressão $a < b$ é uma desigualdade "a é menor do que b".

Observando a **Figura 8.2**, concluímos que

$$-\frac{11}{3} < -2\,, \quad 0 < \frac{7}{4}\,, \quad -2 < -1.$$

Se $a < b$, equivalentemente, podemos escrever que $b > a$, b é maior que a.

Também as notações $x \leq y$ e $z \geq w$ são permitidas entre números reais x, y, z e w. A primeira expressão $x \leq y$ traduz que o número x é menor ou igual ao número y. A segunda expressão $z \geq w$ traduz que o número z é maior ou igual a w.

A relação de ordem introduzida nos números reais tem propriedades muito interessantes. Veja duas delas muito importantes:

Para o enunciado das propriedades considere que, a, b e c são números reais arbitrários.

✍ Propriedade 1. Se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$.

Veja um exemplo: $-3 < 5$ e $5 < 25 \Rightarrow -3 < 25$.

✍ Propriedade 2. Se $a < b$ então $a + c < b + c$.

Somar um mesmo número a em ambos os membros de uma igualdade não altera a igualdade. Veja um exemplo.

$-3 < 2 \Rightarrow -3 + 3 < 2 + 3 \Leftrightarrow 0 < 5.$

A Propriedade 2 é muito útil para resolver inequações, assunto que trataremos adiante. No entanto, adiantando ao assunto, veja um exemplo! Queremos determinar todos os valores inteiros x que satisfazem a desigualdade, $x - 12 < -9$. Usando a Propriedade 2, temos que

$x - 12 < -9 \Rightarrow x - 12 + 12 < -9 + 12 \Leftrightarrow x < 3.$

Logo, os valores são $x = 2, 1, 0, -1, -2, \ldots$.

✍ Propriedade 3. Se $a < b$ e $c > 0$ então $a \cdot c < b \cdot c$.

Esta propriedade é enunciada ressaltando que multiplicando ambos os membros de uma desigualdade por um número positivo a desigualdade **permanece**. Veja um exemplo em que o fator de multiplicação é o número 2:

$-250 < -32 \quad \Rightarrow \quad -500 < -64.$

✍ Propriedade 4. Se $a < b$ e $c < 0$ então $a \cdot c > b \cdot c$.

Esta propriedade é enunciada ressaltando que multiplicando ambos os membros de uma desigualdade por um número negativo a desigualdade **inverte de sentido**.

Veja um exemplo em que o fator de multiplicação é o número (-2):

$-250 < -32 \Rightarrow 500 > 64$

INTERVALOS DE NÚMEROS REAIS

Intervalos são subconjuntos de números reais que expressam um *continuum* dos números reais. Esta caracterização implica que se dois números a e b estão num intervalo I e $a < b$, então qualquer número entre a e b está em I. Mais tarde, quando você estudar limite e derivada, poderá apreciar melhor esta caracterização de intervalos. Mas falamos do *bicho* intervalo, sem apresentá-lo. Vamos às definições.

Definição 8.1

Dados os números reais a e b, com $a < b$, definimos os seguintes conjuntos de números reais:

a) $(a,b) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$,

b) $[a,b) = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$,

c) $(a,b] = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$,

d) $[a,b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$.

Os intervalos definidos são referidos como intervalos aberto (a), fechado à esquerda e aberto à direita (b), aberto à esquerda e fechado à direita (c), e fechado (d). Os números a e b são os extremos do intervalo.

Localizando os números a e b sobre a reta real temos representações gráficas dos intervalos definidos.

Exemplo 8.1

Representação gráfica dos intervalos $(-3,-2)$, $[-1,0)$, $(1,2]$ e $\left[3,\dfrac{7}{2}\right]$. Veja a **Figura 8.3**.

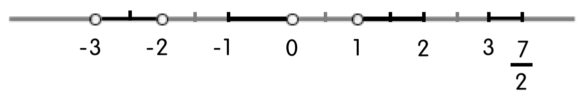


Figura 8.3: Representação de intervalos.

Examine novamente a **Figura 8.3** e note que na representação dos intervalos estamos usando duas convenções. Quando o número extremo do intervalo é representado por um ponto cheio, o número pertence ao intervalo. Quando o número extremo do intervalo é representado por um ponto vazado, o número não pertence ao intervalo.

Se a é um número real podemos usar o símbolo $+\infty$ e $-\infty$ para expressar intervalos infinitos.

Definição 8.2

Os subconjuntos de números reais

a) $(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R};\ x > a\}$,

b) $[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R};\ x \geq a\}$,

c) $(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R};\ x < a\}$,

d) $(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq a\}$.

são intervalos infinitos.

Exemplo 8.2

Representação gráfica dos intervalos $I = (2,\infty)$ e $J = (-\infty,0]$. Veja a **Figura 8.4**.

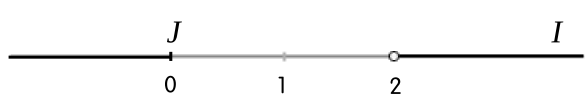


Figura 8.4: Representação de intervalos infinitos.

✍ i. Na definição de um intervalo, o número que fica no extremo esquerdo é menor que o número que fica no extremo direito. Assim $(-1,\sqrt{2})$ é um intervalo, mas $(3,0)$ não tem sentido.

ii. Usando o recurso de representar subconjuntos da reta por intervalos, podemos escrever $(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$.

Exemplo 8.3

a) $[2,3]\cap[3,7)=\{3\}$

b) $(-1,2)\cap(0,5)=(0,2)$.

Solução: Vamos resolver o item a). Note que

$$[2,3]=\{x\in\mathbb{R};\ 2\leq x\leq 3\} \text{ e } [3,7)=\{x\in\mathbb{R};\ 3\leq x<7\}.$$

Como se trata de uma interseção de conjuntos, as desigualdades mostram que $x=3$ é o único número que aparece em ambos conjuntos. Logo, é válida a igualdade a).

Note que a validade da igualdade de conjuntos expressa no item b) pode ser observada graficamente na **Figura 8.5**. Nas cópias da reta real estão representados, respectivamente, os subconjuntos $(-1,2)$, $(0,5)$ e $(-1,2)\cap(0,5)$.

Também $(-1,2)=\{x\in\mathbb{R};\ -1<x<2\}$ e $(0,5)=\{x\in\mathbb{R};\ 0<x<5\}$.

Logo, todo x tal que $0<x<2$ pertence a ambos os conjuntos. Provando a igualdade b).

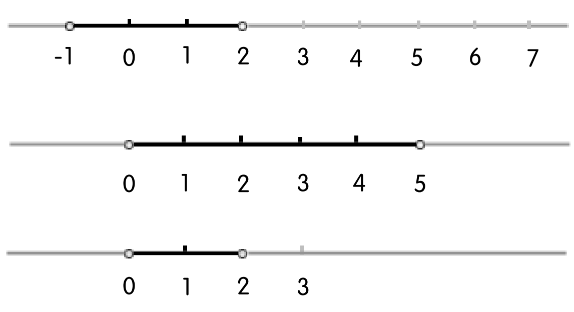


Figura 8.5: Interseção de intervalos.

Exercício 8.2

Prove que

a) $(-1,\sqrt{2}) \subset (-\infty,3)$

b) $(-\sqrt{3},10) \cap [0,10\sqrt{2}) = [0,10)$

e represente geometricamente as operações entre os intervalos.

INEQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU DE UMA VARIÁVEL REAL

Inequações são expressões em que aparecem números, desigualdades e uma variável freqüentemente representada por x. A inequação define todos os valores reais que podem ser assumidos pela variável.

Resolver a inequação é explicitar o subconjunto de números reais em que a variável pode assumir valores, de modo que a inequação seja satisfeita. A linguagem dos intervalos é muito útil para expressar o conjunto solução de uma inequação.

Exemplo 8.4

Encontre o conjunto solução da inequação $6-2x \leq 8x$.

Solução:

$6-2x \leq 8x \Rightarrow 6 \leq 8x+2x \Rightarrow 6 \leq 10x$.

Então, $\dfrac{6}{10} \leq x \Rightarrow x \geq \dfrac{3}{5}$.

Logo, o conjunto solução S da inequação é

$$S = \left\{x \in \mathbb{R};\ x \geq \frac{3}{5}\right\} = \left[\frac{3}{5},\infty\right).$$

Exercício 8.3

1. Use a Propriedade 3 para descrever todos os números reais tais que: $2x < -7$.
2. Use a Propriedade 4 para descrever os números reais x tais que $-13x < -5$.

3. Coloque em ordem crescente os seguintes números reais:
$\frac{-13}{12}, \frac{-18}{17}, \frac{13}{12}, \frac{18}{17}$.

4. Coloque em ordem crescente os números $-\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sqrt{2}$, $\frac{7}{5}$

5. Verifique que $3 < \sqrt{10} < 3,2$

6. Descreva todos os números naturais n para os quais $\frac{\sqrt{5}}{n} > \frac{1}{\sqrt{5}}$.

7. Represente na reta real os seguintes intervalos:

   a) $(-\sqrt{2}, 2]$
   b) $\left(\frac{7}{8}, \frac{10}{4}\right)$
   c) $[\pi, \infty)$

8. Efetue as seguintes operações com intervalos:

   a) $[-6,0) \cap [-2,5]$
   b) $(-\infty, 1) \cap (-1, \infty)$
   c) $\mathbb{R} - (1, \infty)$
   d) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{3}\right) \cup (0, \infty)$

9. Apresente na forma de intervalo de números reais o conjunto solução das inequações:

   a) $\frac{x}{\sqrt{2}} - 1 < \sqrt{2}x - 1$
   b) $\frac{1}{x} - 1 > 0$

10. Responda falso (F) ou verdadeiro (V) para as sentenças abaixo. Justifique a resposta.

   a) $(-2, \infty) \cup (-\infty, -2) = \mathbb{R}$
   b) $\mathbb{N} = [1, \infty)$
   c) $1 \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right) \cap \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

11. Encontre o maior número natural n para o qual $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}+n<\dfrac{5}{\sqrt{2}}$

12. Prove que são verdadeiras as desigualdades:

    a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}<2\sqrt{2}$

    b) $\sqrt{3\sqrt{3}}<\dfrac{7}{3}$

13. Considere dois números reais a e b. Responda falso (F) ou verdadeiro (V) às afirmações justificando brevemente a resposta.

    a) Se $a,b\geq 0$ então $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{a\cdot b}$

    b) Se $a\leq b$ então $a^2-b^2\leq 0$

    c) Se $a\geq 2$ então $a^3-1\geq a^2+a+1$

Aula 9

MÓDULO DE UM NÚMERO REAL E INEQUAÇÕES MODULARES

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. compreender o conceito de módulo de um número real e relacionar este conceito com a distância entre dois pontos da reta;
2. distinguir entre os conjuntos de números reais aqueles que são intervalos;
3. resolver inequações em que aparecem módulos.

Nesta aula, continuamos a aumentar nosso conhecimento acerca dos números reais com dois tópicos a mais explicitados no título da aula. Vamos ao primeiro tópico.

MÓDULO DE UM NÚMERO REAL

Definição 9.1

Dado um número real x, o módulo de x, representado por $|x|$, é definido por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Veja os seguintes exemplos de módulos de números:

$$|\sqrt{2}| = \sqrt{2}, \quad \left|-\frac{1}{2}\right| = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad |0| = 0\,.$$

Observe algumas propriedades básicas do módulo que decorrem diretamente da definição:

Propriedades

- Para qualquer número real x,

$$|x| \geq 0 \quad \text{e} \quad |x| \geq x\,.$$

- Se x, y são números reais então

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|\,.$$

- Se x, y são números reais e $y \neq 0$, então

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}\,.$$

Vamos fazer um breve comentário sobre a propriedade 1. Para acompanhar, retorne com atenção à definição de módulo de um número real e veja que na coluna após a chave estão escritos números positivos nas duas primeiras linhas e o número zero na terceira linha. Isto mostra que o módulo é sempre positivo ou nulo. Isto é $|x| \geq 0$ para qualquer x. Também se x for positivo, então $|x| = x$ e no caso de x negativo ou nulo então $-x \geq x$. Isto mostra que a propriedade 1 é verdadeira.

As outras duas propriedades do módulo são auto-evidentes.

CARACTERIZAÇÃO GEOMÉTRICA DO MÓDULO

Vamos usar a representação dos números reais sobre uma reta para caracterizar geometricamente o módulo de um número. Veja na **Figura 9.1**, sobre a reta real, dois números reais x e y, onde $x > 0$ e $y < 0$.

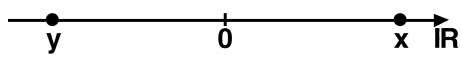


Figura 9.1: Módulo como distância à origem.

Como $x > 0$, então $|x| = x$. Por outro lado, como $y < 0$, então $|y| = -y$.

Em um ou outro caso $|x|$ e $|y|$ representam, respectivamente, a medida da distância de x até a origem O ou de y até a origem O.

Com esta interpretação geométrica em mente, enunciamos a propriedade fundamental que relaciona o módulo de um número com a distância entre dois pontos da reta.

Propriedade: Sejam x e y números reais representados geometricamente na reta real. Então

$$|x-y| = d(x,y)\,, \tag{9.1}$$

onde $d(x,y)$ significa a distância do ponto x ao ponto y ou, o que é a mesma coisa, $d(x,y)$ é o comprimento do segmento cujos extremos são os pontos x e y.

DESIGUALDADE TRIANGULAR

A desigualdade triangular é outra propriedade fundamental sobre números reais. Veja o enunciado:

Se a e b são números reais quaisquer. Então

$$|a+b| \leq |a|+|b|.$$

Veja por que vale a desigualdade triangular.

1) Se $a+b \geq 0$ então

$$|a+b| = a+b \leq |a|+|b|.$$

Nesta última passagem, usamos a propriedade 1, vista anteriormente.

2) Se $a+b < 0$ então

$$|a+b| = -(a+b) = -a-b \leq |a|+|b|.$$

De novo fizemos uso da propriedade 1.

A desigualdade triangular que acabamos de provar pode aparecer expressa de outras maneiras. Veja um exemplo:

Exemplo 9.1

Para quaisquer dois números reais a e b

$$|a|-|b| \leq |a-b|.$$

Veja como esta desigualdade é conseqüência direta da desigualdade triangular. De fato

$$|a| = |a-b+b| \leq |a-b|+|b|.$$

Logo

$$|a|-|b| \leq |a-b|,$$

provando a desigualdade.

Definição 9.2

Dados os números reais a e r, onde $r > 0$, os intervalos

$$(a-r, a+r) \quad \text{e} \quad [a-r, a+r]$$

são ditos, respectivamente, o intervalo aberto de centro em a e raio r e o intervalo fechado de centro em a e raio r.

Na **Figura 9.2**, representamos os intervalos centrados em -2 e $\sqrt{2}$ de raios iguais a 1, o primeiro fechado e o segundo aberto.

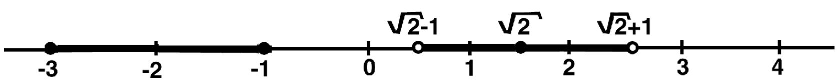


Figura 9.2: Intervalos aberto e fechado.

✍ i. O intervalo $(a-r, a+r)$ é constituído por todos os números reais que estão a uma distância inferior a r do número a. Veja por que

$$(a-r, a+r) = \{x \in \mathbb{R};\ a-r < x < a+r\}\,.$$

Vamos separar a dupla desigualdade que aparece na definição do intervalo em

$$a-r < x \quad \text{e} \quad x < a+r\,.$$

Estas desigualdades são equivalentes por sua vez a

$$-(x-a) < r \quad \text{e} \quad x-a < r\,.$$

Logo, o número $x-a$ e seu simétrico $-(x-a)$ são inferiores a r. Então

$$|x-a| < r\,.$$

Portanto, podemos escrever o intervalo aberto de centro a e raio r, como

$$(a-r, a+r) = \{x \in \mathbb{R};\ |x-a| < r\} = \{x \in \mathbb{R};\ d(x,a) < r\}\,.$$

Esta maneira de representar o intervalo é geometricamente relevante. Podemos dizer que $(a-r, a+r)$

é o conjunto dos números (pontos) da reta que estão a uma distância inferior a r do número (ponto) que é o centro do intervalo.

ii. Se $I = (a,b)$ é um intervalo aberto, então $a < b$ e $d = b - a$ é o diâmetro do intervalo I. Veja a **Figura 9.3**, onde o diâmetro d é representado.

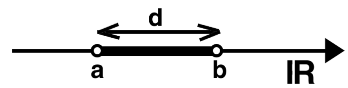


Figura 9.3: Diâmetro de um intervalo.

Exercício 9.1

1. Sejam $I = (a,b)$ um intervalo aberto e $d = b - a$ o diâmetro do intervalo, prove que $c = \dfrac{a+b}{2}$ e $r = \dfrac{d}{2} = \dfrac{b-a}{2}$ são, respectivamente, o centro e o raio do intervalo I.

2. Considere o intervalo $I = (a,b)$, $a = \sqrt{2}$ e $b = \dfrac{36}{25}$. Calcule o raio r de I.

INEQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU COM MÓDULO

Para encerrar esta aula vamos praticar, em alguns exemplos, a solução de inequações onde aparecem módulos.

Exemplo 9.2

a) Determine o conjunto de números reais, tais que $|x+1| < 5$.

Solução: Usando a definição de módulo, a desigualdade proposta corresponde a duas desigualdades

$$x + 1 < 5 \text{ e } -(x+1) < 5\,.$$

Ou seja, $x < 4$ e $-6 < x$. Portanto, $S = (-6,4)$ é o conjunto solução.

b) Determine o conjunto solução da inequação $|x-1| > 6$.

Solução: A desigualdade é equivalente a

$$x-1 > 6 \text{ e } -(x-1) > 6\,.$$

Ou seja, $x > 7$ e $-5 > x$. Logo, o conjunto solução S é dado pela união de dois intervalos abertos infinitos: $S = (-\infty, -5) \cup (7, \infty)$.

c) Determine o conjunto solução da inequação $|x+1| < |x-1|$.

Solução: O problema consiste em identificar todos os números reais x tais que a distância até -1 é inferior à distância até 1. Temos três casos a examinar.

$1^{\underline{o}}$ caso: $x > 1$.

Neste caso, $x+1 > 0$ e $x-1 > 0$ e a equação se torna $x+1 < x-1 \Leftrightarrow 1 < -1$, o que é absurdo.

$2^{\underline{o}}$ caso: $-1 \leq x \leq 1$.

Neste caso, $x+1 \geq 0$ e $x-1 \leq 0$. Então a desigualdade se expressa como

$$x+1 < -(x-1) \Leftrightarrow 2x < 0 \Leftrightarrow x < 0\,.$$

Logo, juntando que $-1 < x < 1$ e $x < 0$ encontramos que $-1 \leq x < 0$ é solução neste caso.

$3^{\underline{o}}$ caso: $x < -1$.

Neste caso, $x+1 < 0$ e $x-1 < 0$ e a desigualdade se expressa como $-(x+1) < -(x-1)$. Ou seja, $-1 < 1$. Portanto, todo $x < -1$ é solução da inequação.

Juntando as possibilidades representadas pelo $2^{\underline{o}}$ e $3^{\underline{o}}$ casos temos que

$$S = [-1, 0) \cup (-\infty, -1) = (-\infty, 0)$$

é o conjunto solução procurado.

Exercício 9.2

1. Existe algum número real a tal que $|a-2| = |a+1|$? Interprete sua solução em termos de distância.

2. Determine os números $x \in \mathbb{R}$ que estão à distância 3 do número -3.

3. Dado intervalo aberto I, determine o centro c e o raio r. Isto é, escreva I na forma $I = (c-r, c+r)$, onde

   a) $I = (-3, 2)$
   b) $I = \left(\frac{-5}{2}, \frac{8}{3}\right)$
   c) $I = (2-\sqrt{2}, \sqrt{3}+2)$

4. Calcule o diâmetro de cada um dos intervalos do exemplo 9.2.

5. Determine e represente na reta real o conjunto solução de

   a) $\left|x+\dfrac{1}{5}\right| = 2$
   b) $|x-3| = -1$
   c) $|x+6| < 3$

Aula 10

SISTEMAS DE COORDENADAS EM UM PLANO

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. identificar que coordenadas em uma reta ou em um plano são ferramentas que permitem representar graficamente subconjuntos da reta e do plano;
2. compreender que numa reta com coordenadas a noção de módulo de um número real conduz à noção de distância entre pontos de uma reta.

Veja a inscrição encontrada num pergaminho de uma biblioteca na Antigüidade, dando referências para encontrar um tesouro enterrado.

> Na ilha de Samos, partindo das árvores baobás gêmeas, andar 3.200 pés na direção do sol poente e aguardar a meia noite de uma lua nova de março. Caminhar mais 7.280 pés na direção da estrela Sirius, e o tesouro estará em seus pés.

Considerando o espaço descrito pelo "mapa do tesouro" como um plano, as indicações referem-se a pontos com localizações precisas e as direções que ligam esses pontos.

A **Figura 10.1** a seguir, poderia ser uma representação esquemática do "mapa do tesouro". Os pontos A, B e C seriam, respectivamente, o ponto de partida, a primeira parada para aguardar a lua nova de março e finalmente o tesouro no ponto C. As direções indicadas de A para B e de B para C representam as direções do sol poente e da estrela Sirius num céu de lua nova de março.

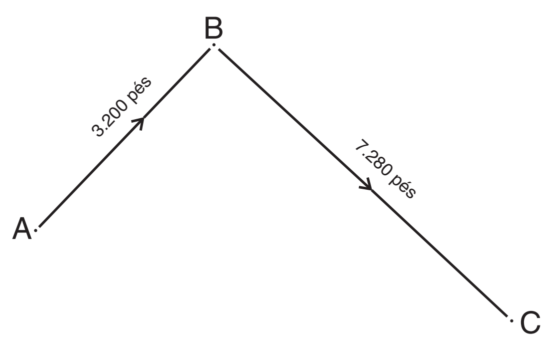


Figura 10.1: O mapa do tesouro.

Nesta aula, vamos introduzir um sistema de coordenadas no plano para resolver problemas ligados à localização de pontos, à descrição de lugares geométricos (regiões do plano) e oferecer uma ferramenta para resolver problemas que permitam uma expressão geométrica.

COORDENADAS EM UMA RETA

Dada uma reta r indicamos os pontos sobre a reta por letras maiúsculas A, B, C etc.

A idéia de introduzir coordenadas em uma reta é a de associar a cada ponto da reta um número real, de maneira tão organizada, que possam ser conseguidas as seguintes propriedades:

- fica definido uma unidade de medida;
- todo ponto representa um e apenas um número real e, todos os números reais são representados;
- a distância entre dois pontos é dada pelo módulo da diferença dos números inscritos sobre o ponto.

Uma vez introduzido o sistema de coordenadas sobre a reta, está estabelelecido uma representação geométrica dos números reais. A partir daí, pontos da reta e números reais são a mesma coisa. Problemas envolvendo números reais podem ser resolvidos geometricamente e propriedades de números reais podem ser interpretadas geometricamente.

Este assunto coincide com a representação geométrica dos números reais sobre uma reta, assunto visto nas aulas anteriores. Não é demais repetir a construção, agora com foco no sistema de coordenadas.

Dada uma reta r, escolha um ponto origem O e o represente pelo número 0 (zero). Escolha outro ponto diferente para localizar o número 1. Neste ponto estamos aptos a representar sobre a reta todos os números reais. Veja a **Figura 10.2**.

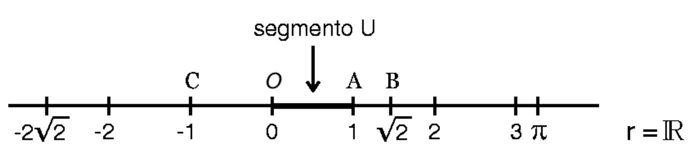


Figura 10.2: A reta real.

O segmento OA cujas extremidades são os pontos 0 (zero) e 1 (um), indicado como segmento U, define a unidade de medida que permite localizar todos os números reais sobre a reta.

Uma identificação biunívoca entre dois conjuntos X e Y é uma relação que associa a cada elemento de X um único elemento de Y, e de modo que a relação pode ser invertida associando a cada elemento de Y, igualmente, um único elemento de X.

Reforçando a idéia. A todo ponto A da reta r está associado um único número real digamos, a, que é a coordenada do ponto. Na **Figura 10.2**, os pontos A e B têm como coordenadas, respectivamente, os números 1 e $\sqrt{2}$.

Uma reta com estrutura de coordenadas é dita uma reta numérica ou a reta real. Estamos autorizados a representar esta reta por $\mathbb{R}$. Veja esta notação na **Figura 10.2**.

DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS DA RETA

Numa reta com coordenadas é muito fácil calcular a distância entre dois pontos A e B. Se a e b são respectivamente os números que representam as coordenadas dos pontos A e B, então o comprimento do segmento de reta AB é a distância entre os pontos, a qual pode ser calculada por

$$d(A,B) = AB = |b-a|\,.$$

A notação AB representa tanto o segmento de reta como a medida de seu comprimento. O contexto no qual é escrito AB deve indicar claramente do que se está falando.

Vamos entender bem o que está escrito na fórmula acima. A distância entre A e B é o comprimento do segmento cujos extremos são esses pontos. Esse comprimento está indicado por AB e pode ser calculado pelo módulo do número $b-a$.

Alguns autores preferem escrever $m(AB)$ ou $\overline{AB}$ para a medida do comprimento do segmento AB. Cremos que esta opção sobrecarrega os textos com quase nenhuma vantagem.

COORDENADAS DO PONTO MÉDIO

Considere na reta os pontos A e B cujas coordenadas são os números a e b, respectivamente. Então

$$m = \frac{a+b}{2}$$

é a coordenada do ponto M, isto é, o ponto médio do segmento AB. Veja porque isto é verdadeiro.

Vamos trabalhar a situação em que $b < a$. O caso em que $b > a$ é totalmente equivalente.

No caso então em que $b < a$, o ponto B está à esquerda do ponto A na representação na reta. Veja a **Figura 10.3**:

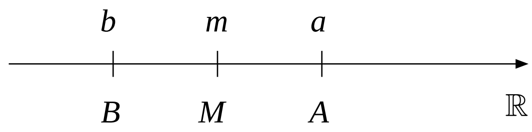


Figura 10.3: Coordenadas do ponto médio.

Nestas condições temos que mostrar que $m = \dfrac{a+b}{2}$ é a coordenada do ponto médio M. Veja que

$$b < m < a\,.$$

De fato,

$$b < m \Leftrightarrow b < \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow 2b < a+b \Leftrightarrow b < a\,.$$

Como $b < a$, a equivalência anterior prova que $b < m$. Também,

$$m < a \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} < a \Leftrightarrow a+b < 2a \Leftrightarrow b < a\,.$$

Do mesmo modo, como $b < a$, a desigualdade anterior mostra que $m < a$.

As desigualdades anteriores confirmam que $b < m < a$. Ou seja, o ponto M está entre A e B.

Para concluir que M é o ponto médio, basta verificar que

$$d(A,M) = d(M,B) \Leftrightarrow AM = MB\,.$$

Esta última igualdade é equivalente a

$$|m-a| = |b-m| \Leftrightarrow m-a = b-m \Leftrightarrow m = \frac{a+b}{2}\,.$$

Isto confirma a coordenada m do ponto médio.

COORDENADAS EM UM PLANO

Mas, pretendemos ir além, introduzindo coordenadas em um plano. De que modo? Considere um plano α e um par de retas t e s perpendiculares, cuja interseção ocorre no ponto O. Veja a **Figura 10.4**.

Considere em cada uma dessas retas sistemas de coordenadas de modo que t e s se tornem retas numéricas, com a mesma unidade U de medida.

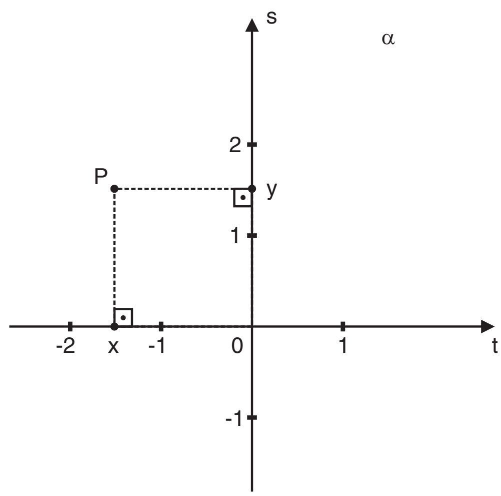


Figura 10.4: Eixos ortogonais no plano.

Afirmamos que, com a ajuda deste par de retas (ou eixos), existe uma ***identificação biunívoca*** entre os pontos P do plano α e os pares (x, y), onde x, y são números reais.

Identificação biunívoca

Uma identificação biunívoca entre dois conjuntos X e Y é uma relação que associa a cada elemento de X um único elemento de Y, de modo que a relação pode ser invertida associando a cada elemento de Y, igualmente, um único elemento de X.

Como funciona? Tome um ponto P arbitrário e trace perpendiculares às retas t e s obtendo, respectivamente, os pontos x e y. Assim, legitimamente, podemos denotar

$$P = (x, y)\,.$$

Os números x e y são chamados, respectivamente, a abscissa e a ordenada do ponto P. As retas t e s são ditas, respectivamente, o eixo horizontal ou das abcissas e o eixo vertical ou das ordenadas.

Retorne a **Figura 10.4**, para visualizar a representação do ponto P.

O PLANO EUCLIDIANO

Veja o passo fundamental que demos! Ao introduzir adequadamente um par de eixos (retas) no plano α, provocamos uma identificação biunívoca entre os pontos P de α, e os pares ordenados (x,y) de números reais. Essa identificação é escrita como $P=(x,y)$ e permite expressar o plano α como o conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y);\ x \text{ e } y \text{ são números reais}\},$$

que é o produto cartesiano de duas cópias do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.

Portanto, é útil ao invés de dizer que α tem um sistema de coordenadas, escrevermos simplesmente $\mathbb{R}^2$ para o plano α.

Então, está estabelecida nossa convenção. Quando escrevermos,

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y);\ x,y \in \mathbb{R}\},$$

estamos nos referindo a um plano com um sistema de coordenadas retangulares. O plano $\mathbb{R}^2$ com esta estrutura recebe o nome de plano Euclidiano, em homenagem ao geômetra grego Euclides.

✍ A identificação biunívoca entre pontos P do plano e pares de números reais significa que dois pontos $P_1=(x_1,y_1)$ e $P_2=(x_2,y_2)$ são iguais se e somente se $x_1=x_2$ e $y_1=y_2$.

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

No plano Euclidiano $\mathbb{R}^2$ temos o local ideal para representar graficamente objetos geométricos, como pontos, segmentos, retas e figuras planas em geral. A partir da Aula 10, a idéia de representar geometricamente objetos no plano $\mathbb{R}^2$ atinge um ponto importante com a representação gráfica de funções.

Vamos começar mostrando casos bem simples.

Exemplo 10.1

a. Descreva algebricamente e represente no plano o segmento de reta cujos extremos são os pontos $A=(2,1)$, $B=(-1,1)$.

   Solução: Na **Figura 10.5** temos a representação gráfica do segmento AB.

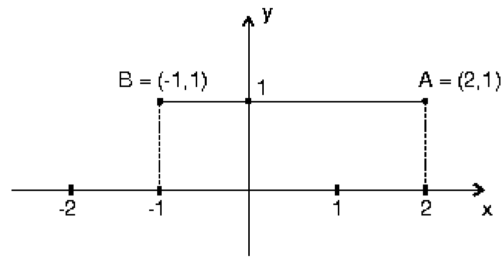


Figura 10.5: Um segmento em $\mathbb{R}^2$.

Em termos algébricos,

$$AB = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ -1 \leq x \leq 2,\ y = 1\}.$$

b. Represente graficamente os conjuntos

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 1\} \quad \text{e}$$
$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ -1 \leq y \leq 1\}$$

Solução: Para representar graficamente U, levamos em conta a variação da abcissa x e o fato que não há restrição à variação da ordenada y. Para a representação gráfica de V, levamos em conta a variação da ordenada y e o fato que não há restrição à variação da abcissa x. Veja a **Figura 10.6**.

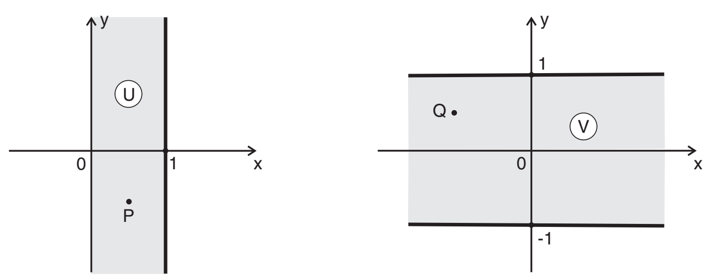


Figura 10.6: Faixas vertical e horizontal.

c. Represente graficamente o conjunto

$$Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 1 \ \text{e}\ -1 \leq y \leq 1\}.$$

Solução: Para construir o gráfico de Z, levamos em conta as variações da abcissa x e da ordenada y. Mas antes de tudo, veja que $Z = U \cap V$. Isto facilita tudo para a representação pois, do exemplo anterior, conhecemos os gráficos de U e V. A **Figura 10.7** representa Z através dessa interseção.

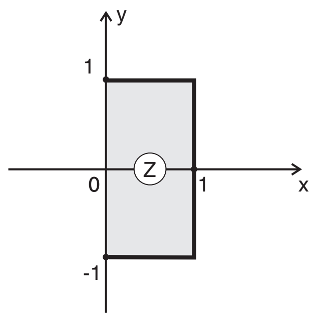


Figura 10.7: Um retângulo em $\mathbb{R}^2$.

SEMIPLANOS E QUADRANTES

Vamos continuar explorando coordenadas para descrever importantes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. Considere, como na **Figura 10.8**, $\mathbb{R}^2$ com seu sistema de coordenadas,

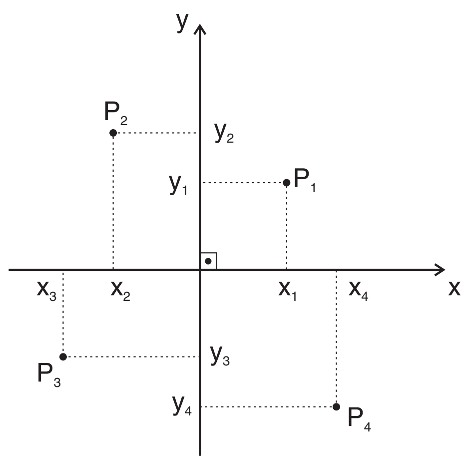


Figura 10.8: Pontos no plano $\mathbb{R}^2$.

onde estão representados os pontos $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3)$ e $P_4 = (x_4, y_4)$.

O eixo x das abcissas divide o plano em dois semiplanos, um deles posicionado acima do eixo e outro abaixo do eixo. Por exemplo, poderíamos nos referir a estes semiplanos, respectivamente pelos símbolos H_+ e H_-.

Veja como se expressam esses semiplanos em termos de conjuntos,

$$H_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \geq 0\} \quad \text{e}$$
$$H_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \leq 0\}\,.$$

Veja na **Figura 10.9** a representação gráfica de H_+.

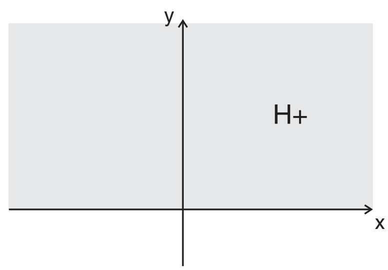


Figura 10.9: Semiplanos em $\mathbb{R}^2$.

Se você comparar a **Figura 10.9** com a **Figura 10.8** verá que os pontos P_1 e P_2 pertencem a H_+, e os pontos P_3 e P_4 não pertencem a H_+.

Veja diretamente na definição de H_+ para concluir que todos os pontos sobre o eixo x pertencem a H_+. Isto é, $(x,0) \in H_+$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

O conjunto H_- teria uma representação gráfica análoga. Isto faz parte da atividade que propomos:

Exercício 10.1

1. Construa um sistema ortogonal de coordenadas num plano e represente os pontos $A = (0,-2), B = (5,3), C = (-1,2), D = (-3,0)$.

2. Responda falso (F) ou verdadeiro (V) para cada uma das perguntas:

   a. $(0,-2) \in H_+$ b. $(5,3) \in H_-$

c. $(-7,2) \in H_-$

d. $(-3,0) \in H_-$

e. $(-3,0) \in H_+$

3. Descreva o conjunto $H_+ \cap H_-$.

Você realizou a atividade? Então podemos continuar nosso caminho explorativo na identificação de novos conjuntos de $\mathbb{R}^2$, expressos através de desigualdades. Veja os dois próximos exemplos.

Exemplo 10.2

$$L_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0\} \quad \text{e} \quad L_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \leq 0\},$$

são semiplanos de $\mathbb{R}^2$, obtidos quando o plano todo é repartido pelo eixo das ordenadas y. O primeiro ficando à direita do eixo y e o segundo, à esquerda do eixo y. Veja na **Figura 10.10**, a representação gráfica de L_-.

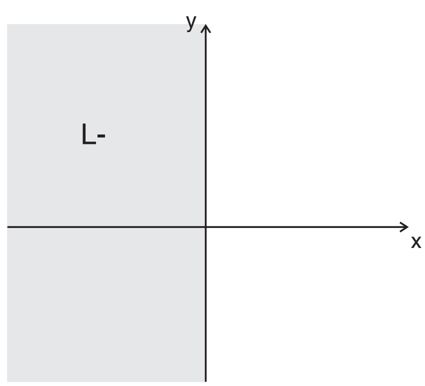


Figura 10.10: Representação de semiplano.

Observe que vale a seguinte propriedade:

$$L_+ \cap L_- = \{(0,y);\ y \in \mathbb{R}\} = \text{eixo } y.$$

QUADRANTES DE $\mathbb{R}^2$

É muito útil considerar a divisão do plano em quadrantes. Veja como fica simples a representação dos quadrantes através do uso de coordenadas!

Vamos representar os quadrantes pelos símbolos Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4, respectivamente, primeiro, segundo, terceiro e quarto quadrantes do plano.

Temos que

$$Q_1 = \{(x,y);\ x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\},$$

$$\begin{aligned} Q_2 &= \{(x,y);\ x \leq 0 \text{ e } y \geq 0\}, \\ Q_3 &= \{(x,y);\ x \leq 0 \text{ e } y \leq 0\}; \\ Q_4 &= \{(x,y);\ x \geq 0 \text{ e } y \leq 0\}. \end{aligned}$$

Veja na **Figura 10.11** a representação gráfica de Q_2, o segundo quadrante.

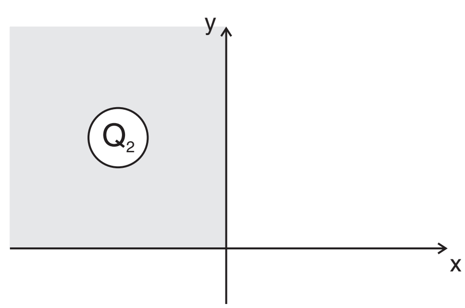


Figura 10.11: O segundo quadrante de $\mathbb{R}^2$.

✍ i. A origem $O = (0,0)$ é comum a todos os quadrantes,

$$O \in Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 \cap Q_4 .$$

ii. $Q_1 \cap Q_2 = \{(0,y);\ y \geq 0\}$, é a parte não negativa do eixo y.

Exercício 10.2

1. Identifique graficamente, num plano com coordenadas, os quadrantes Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4.

2. Represente graficamente os conjuntos

$$\text{i)}\, Q_2 \cap Q_3\,,\ \text{ii)}\, Q_3 \cap Q_4\ \text{ e iii)}\ Q_4 \cap Q_1\,.$$

3. Os pontos $(-2,3),(3,3)$ são vértices consecutivos de um quadrado que não intercepta o eixo OX. Quais são as coordenadas dos outros vértices?

4. Os pontos $A = (2,3),\ B = (-2,7)$ são vértices opostos de um quadrado. Determine os outros vértices.

5. Um sistema de coordenadas no plano está orientado de modo que o eixo x aponta para o leste e o eixo y para o norte. A unidade de comprimento é o km. Um caminhante sai do ponto $(-1,2)$ caminha 5km na direção sul, em seguida 13km na direção leste, 2km na direção norte e finalmente 11km na direção oeste. Quais as coordenadas do ponto P de chegada do caminhante?

6. Considere numa reta numérica os pontos A e B, cujas coordenadas são representadas pelos números $-2+2\sqrt{2}$ e 2, respectivamente. Encontre o número m que representa a coordenada de M, o ponto médio de AB. Represente os pontos sobre a reta.

7. Represente graficamente em $\mathbb{R}^2$ o conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 2\ \text{ e }\ y \leq x\}\,.$$

8. Os pontos $A = (1,0)$, $B = (0,1)$ e $C = (2,a)$ são vértices consecutivos de um retângulo. Encontre a ordenada do terceiro vértice e escreva as coordenadas do quarto vértice D.

9. Represente em $\mathbb{R}^2$ o conjunto

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0\ \text{ e }\ x+y \leq 1\}\,.$$

Aula 11

Distância entre Pontos do Plano Euclidiano

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. usar o sistema de coordenadas para calcular a distância entre dois pontos;
2. descrever lugares geométricos mais simples com o uso de coordenadas e distância.

Um sistema de coordenadas permite representar graficamente objetos geométricos no plano, mas também permite a realização de medidas. Essas medidas podem ser as mais simples como a distância entre dois pontos, áreas de polígonos regulares, até áreas de regiões mais complicadas do plano como interseções de figuras. Tudo até onde o limite do método não cause sofrimento! Para situações mais complexas, temos de recorrer a ferramentas mais sofisticadas. A mais importante dessas sendo as técnicas do Cálculo Diferencial e Integral que será assunto de Métodos Determinísticos II.

DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS DA RETA

Recorde da aula anterior que a distância entre dois pontos A e B sobre a reta real é dada pelo valor absoluto da diferença entre as coordenadas dos pontos. Assim, se A tem coordenada a e B tem coordenada b, então a distância entre A e B, que escrevemos como $d(A,B)$ é

$$d(A,B) = AB = |b-a| = \sqrt{(a-b)^2}\,.$$

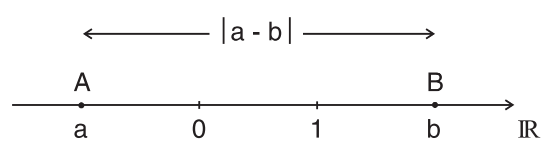


Figura 11.1: Distância na reta.

DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS DO PLANO

Considere dois pontos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$. A distância entre P e Q é o comprimento do segmento PQ. Em termos das coordenadas dos pontos, a distância $d(P,Q)$ é dada pela equação

$$d(P,Q) = PQ = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}\,. \qquad (11.1)$$

Vamos ver por que esta fórmula funciona. Considere quatro casos:

a) Os pontos P e Q coincidem. Isto é, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. Neste caso, a distância é zero. Este resultado é compatível com a fórmula (11.1) da distância.

b) Os pontos P e Q são distintos e situados numa reta paralela ao eixo x. Isto é, $x_1 \neq x_2$ e $y_1 = y_2$. Veja a **Figura 11.2**, à esquerda, onde os pontos P e Q definem um segmento paralelo ao eixo x. Como P, Q, x_1 e x_2 são vértices de um retângulo então

$$PQ = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}\,.$$

Portanto, a fórmula (11.1) é válida, neste caso.

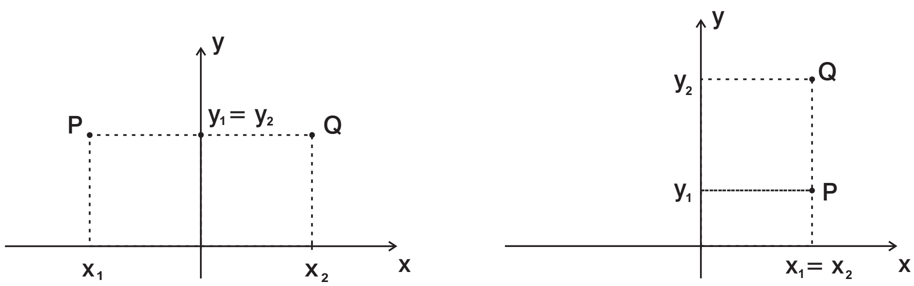


Figura 11.2: Distância no plano I.

c) Os pontos P e Q são distintos e situados numa reta paralela ao eixo y. Isto é, $x_1 = x_2$ e $y_1 \neq y_2$. Este caso é similar ao anterior e aparece representado na **Figura 11.2** à direita. Temos que

$$PQ = |y_1 - y_2| = \sqrt{(y_1 - y_2)^2}\,.$$

De novo a fórmula (11.1) continua válida.

d) Os pontos P e Q são distintos, $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$. Este é o caso geral e está representado na **Figura 11.3**.

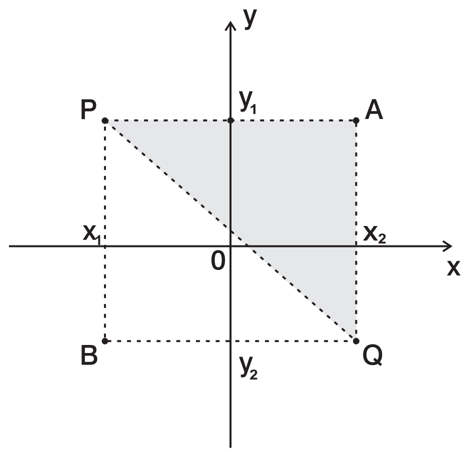


Figura 11.3: Distância no plano II.

Note que P e Q são vértices opostos de um retângulo cujos lados medem $|x_1 - x_2|$ e $|y_1 - y_2|$. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo APQ, encontramos que

$$PQ^2 = |x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

ou

$$d(P,Q) = PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

que é a fórmula (11.1).

Exemplo 11.1

a) A distância entre os pontos $P = (3,2)$ e $Q = (1,6)$ é,

$$\begin{aligned} d(P,Q) &= \sqrt{(3-1)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

b) A distância entre os pontos $P = (-1,3)$ e $Q = (-7,-7)$ é

$$\begin{aligned} d(P,Q) &= \sqrt{[-1-(-7)]^2 + [3-(-7)]^2} = \sqrt{6^2 + 10^2} = \sqrt{136} \\ &= \sqrt{4 \times 34} = 2\sqrt{34}. \end{aligned}$$

Exemplo 11.2

Quais são os pontos do plano equidistantes dos pontos $A = (-1,0)$ e $B = (-1,3)$.

Solução: Se $P=(x,y)$ é um ponto arbitrário e equidistante de A e B, então

$$d(P,A)=d(P,B) \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}\,.$$

Desenvolvendo ambos os membros da última igualdade, vem que

$$(x+1)^2+y^2=(x+1)^2+(y-3)^2 \Leftrightarrow y^2=(y-3)^2 \Leftrightarrow 0=-6y+9$$

Logo,

$$d(P,A)=d(P,B) \Leftrightarrow y=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}\,.$$

Portanto, o conjunto S dos pontos equidistantes de A e B verificam

$$S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\ y=\frac{3}{2}\right\}.$$

Ora, este conjunto S é uma reta paralela ao eixo x a uma altura $y=\dfrac{3}{2}$. Veja a **Figura 11.4**.

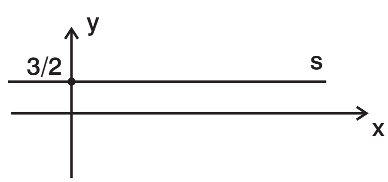


Figura 11.4: Reta $y=3/2$.

Exercício 11.1

1. Calcule a distância do ponto $A=(-2,3)$ até o eixo x.
2. Encontre os pontos do eixo y que estão à distância 1 do ponto $(-\frac{1}{2},1)$.

Exemplo 11.3

a) Quais são os pontos do plano equidistantes dos pontos $A=(-1,0)$ e $B=(0,-1)$?

Solução: Se $P=(x,y)$ é um ponto arbitrário equidistante de A e B, então

$$d(P,A)=d(P,B) \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y+1)^2}\,.$$

Isto é,

$$(x+1)^2+y^2=x^2+(y+1)^2\,.$$

Logo,

$$x^2+2x+1+y^2=x^2+y^2+2y+1 \Leftrightarrow x=y\,.$$

Então, o conjunto S,

$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x=y\}$$

são todos os pontos equidistantes dos pontos $A=(-1,0)$ e $B=(0,-1)$.

Confira na **Figura 11.5** que S é no exercício 11.1 a reta bissetriz comum ao ângulo formado pelos eixos positivos do sistema de coordenadas.

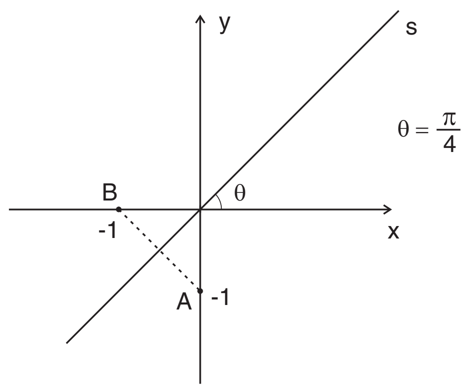


Figura 11.5: Bissetriz dos eixos coordenados.

b) Um círculo S_r no plano de raio $r>0$ e com centro no ponto $C=(a,b)$ é descrito pela equação,

$$S_r=\{(x,y);\ x^2+y^2-2ax-2by=r^2-a^2-b^2\}\,.$$

Veja como encontrar este resultado, acompanhando pela **Figura 11.6**.

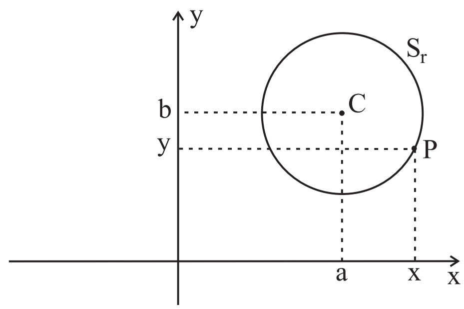


Figura 11.6: Um círculo no plano.

A distância de um ponto $P = (x, y)$ até o centro $C = (a, b)$ é constante e igual a r. Então

$$d(P,C) = r \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r\,.$$

Agora, elevando ao quadrado ambos os membros da igualdade e isolando os termos independentes no segundo membro, encontramos

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = r^2 - a^2 - b^2\,.$$

Exercício 11.2

1. Encontre a equação do círculo de raio 2 com centro no ponto $C = (-2, 1)$.

2. Numa reta com coordenadas,

   a) determine todos os números reais x tais que $d(x, -2) = 3x$.

   b) existe algum número real x tal que $d(x, -2) = d(x, 5)$?

   c) determine todos os números reais x tais que $d(x, -1) \geq d(x, 8)$.

   d) determine o conjunto de números reais x para os quais vale a igualdade

   $$\frac{1}{d(x,2)} = \frac{1}{d(x,-4)}\,.$$

3. Os pontos $A = (-1, 0)$ e $C = (2, -3)$ são vértices opostos de um quadrado $ABCD$.

a) Calcule o comprimento da diagonal do quadrado.

b) Encontre as coordenadas dos outros vértices B e D.

4. Encontre um ponto $P = (0,a)$ sobre o eixo y e equidistante dos pontos $A = (-2,3)$ e $B = (3,0)$.

5. Encontre a equação de um círculo situado no terceiro quadrante, de raio $r = 2$ e que tangencia o eixo y no ponto $A = (0,-3)$.

6. Determine o centro C e o raio r do círculo $x^2 + 2x + y^2 - 3 = 0$.

7. Considere o círculo $x^2 + y^2 - 4y - 12 = 0$.

   a) Determine o centro C e o raio r do círculo.

   b) Encontre as coordenadas dos pontos A e B, onde o círculo encontra o eixo x.

Aula 12

EQUAÇÕES, INEQUAÇÕES E SISTEMAS DE PRIMEIRO E SEGUNDO GRAUS

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. recordar os conceitos e método de solução de equações e sistemas de equações do primeiro e segundo graus;
2. resolver equações e sistemas de equações do primeiro e segundo graus;
3. resolver inequações do segundo grau.

Nesta aula, vamos revisar o conteúdo sobre equações e sistemas de primeiro e segundo graus. São assuntos essenciais de grande aplicação prática e que, certamente, será muito útil em várias disciplinas do curso de Administração.

A EQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU

Toda equação que pode ser escrita na forma

$$ax+b=0\,,$$

onde a e b são números reais e $a \neq 0$ é uma equação do primeiro grau.

Resolver uma equação é usar várias operações para transformá-la em equações equivalentes, mais simples, que permitam determinar os valores da variável x que torna verdadeira a igualdade expressa pela equação. Sempre existe uma única solução numa equação do primeiro grau. Veja as transformações que permitem encontrar a solução.

$$ax+b=0 \Rightarrow ax=-b \Rightarrow x=-\frac{b}{a}\,.$$

O valor $-\frac{b}{a}$, que é único, é a solução, também chamado de raiz da equação. Veja a seguir três exemplos. Note que o terceiro exemplo é uma equação que precisa ser trabalhada para ser escrita como equação do primeiro grau e apresenta uma restrição para a solução.

Exemplo 12.1

Acompanhe as soluções das equações do primeiro grau, a seguir:

a) $3x+5=7$

Solução: $3x+5=7 \Rightarrow 3x=7-5 \Rightarrow 3x=2 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$.

b) $\frac{2x}{3}+\frac{3}{2}=\frac{x}{2}+\frac{5}{3}$.

Solução: Note que 6 é o mínimo múltiplo comum dos números que compõem os denominadores da equação. Assim,

$$\frac{2x}{3}+\frac{3}{2}=\frac{x}{2}+\frac{5}{3}\Rightarrow\frac{4x}{6}+\frac{9}{6}=\frac{3x}{6}+\frac{10}{6}\Rightarrow 4x-3x=10-9\,.$$

Logo, $x=1$ é a solução.

c) $\dfrac{2}{3-x}+\dfrac{3}{2}=0.$

Solução: Note em primeiro lugar que devemos procurar uma solução da equação com a condição que $x\neq 3$, uma vez que o valor $x=3$ anula o denominador da primeira parcela da equação, tornando sem sentido a fração. Feito essa ressalva, veja que $2\cdot(3-x)$ é um múltiplo comum dos denominadores da equação. Esse resultado permite transformar a equação numa equação do primeiro grau. Assim,

$$\frac{2}{3-x}+\frac{3}{2}=0\Rightarrow\frac{2\cdot 2}{2\cdot(3-x)}+\frac{3\cdot(3-x)}{2\cdot(3-x)}=\frac{0\cdot 2\cdot(3-x)}{2\cdot(3-x)}=0\,.$$

Logo,

$$4+3(3-x)=0\Rightarrow 4+9-3x=0\Rightarrow -3x=-13\Rightarrow 3x=13\Rightarrow x=\frac{13}{3}\;.$$

Exercício 12.1

Resolva as equações a seguir:

1. $5(x-2)-2(3x-7)=-45$
2. $5\left(\dfrac{x}{3}-2\right)-\dfrac{2}{3}(3x-7)=-1$
3. $5\left(\dfrac{x-1}{3}-1\right)=\dfrac{1}{2}(3x-7)$
4. $\dfrac{x+1}{3-2x}-1=0$

SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU

Muitas vezes aparece no nosso cotidiano problemas que podem ser equacionados através de equações do primeiro grau com duas variáveis x e y. Veja um exemplo:

Exemplo 12.2

O triplo da idade de Pedro somada ao dobro da idade de seu pai totalizam 135 anos.

Solução: Ora, se representarmos por x a idade de Pedro e por y a idade de seu pai, então,

$$3x+2y=135\,.$$

Se quisermos conhecer as idades de Pedro e seu pai, teremos de resolver a equação apresentada. No entanto, vejam que a equação possui mais de uma solução. Por exemplo, $x=5$ e $y=60$ ou $x=15$ e $y=45$ são soluções. A abundância de soluções é característica de equações que possuem mais de uma variável. Na verdade, a equação olhada de maneira independente possui infinitas soluções. Para ver isto, basta observar que para cada valor de x fixado corresponde um valor de y que resolve o problema. Por exemplo, se $x=-\frac{1}{2}$, então

$$x+2y=135 \Rightarrow 3\left(-\frac{1}{2}\right)+2y=135 \Rightarrow \frac{-3}{2}+2y=135 \Rightarrow y=\frac{273}{4}\,.$$

Evidentemente que os valores de x e y que acabamos de encontrar não servem como idade para Pedro e seu pai, mas são soluções da equação do ponto de vista puro. No entanto, uma nova informação sobre as idades de Pedro e seu pai pode tornar o problema solúvel. Por exemplo, o dado novo, que há cinco anos a idade de Pedro era um quarto da idade do pai. Essa informação fornece mais uma equação envolvendo as idades procuradas. Veja que há cinco anos, a idade de Pedro era $(x-5)$, enquanto a de seu pai era $(y-5)$. Esse dado permite escrever uma outra equação, a saber que

$$(x-5)=\frac{1}{4}(y-5)\,.$$

Portanto, para encontrar as idades precisamos encontrar valores x e y das variáveis que tornam verdadeiras, simultaneamente, ambas as equações:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 135 \\ (x-5) = \dfrac{1}{4}(y-5) \end{cases} \qquad (12.1)$$

O conjunto formado pelas duas equações anteriores é denominado um sistema linear de duas equações com duas variáveis. O nome linear é dado em função que as variáveis das equações serem do primeiro grau. Vamos resolver o sistema de equações. Veja que a segunda equação pode ser transformada resultando numa equação equivalente:

$$(x-5) = \frac{1}{4}(y-5) \Leftrightarrow 4(x-5) = y-5 \Leftrightarrow 4x-20 = y-5 \Leftrightarrow 4x-y = 15\,.$$

Então o sistema de equações (12.1) é equivalente a um sistema mais simples

$$\begin{cases} 3x + 2y = 135 \\ 4x - y = 15 \end{cases} \qquad (12.2)$$

Existem vários métodos para resolver um sistema de duas equações com duas variáveis. Vamos apresentar, em seguida, os métodos de substituição e de adição.

MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO

Para resolver um sistema pelo método da substituição, o primeiro passo é expressar uma variável em função da outra (isolar uma variável). Acompanhe a aplicação desse primeiro passo à segunda das equações em (12.2). Temos que

$$4x - y = 15 \Rightarrow -y = 15 - 4x \Rightarrow y = -15 + 4x\,.$$

O segundo passo consiste em focalizar, agora, a primeira equação e substituir nesta o valor da variável isolada anteriormente na segunda equação. Esse procedimento permite escrever que

$$3x + 2y = 135 \Rightarrow 3x + 2(-15 + 4x) = 135 \Rightarrow 11x = 165 \Rightarrow x = 15\,.$$

Uma vez determinado $x = 15$, este valor é levado na equação anterior $y = -15 + 4x$, com o objetivo de determinar o valor da variável y. Portanto,

$$y = -15 + 4x \quad \text{e} \quad x = 15 \Rightarrow y = -15 + 60 \Rightarrow y = 45\,.$$

A resposta do problema é, portanto, que Pedro tem 15 anos e seu pai 45 anos.

Exercício 12.2

Resolva, a seguir, pelo método da substituição o sistema do primeiro grau:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3} - 2y = -1 \\[2ex] 2x + \dfrac{y}{3} = -6. \end{cases}$$

MÉTODO DA ADIÇÃO

O método da adição para a solução de um sistema de duas equações com duas variáveis (também denominadas incógnitas) é muito útil e mesmo preferível ao método de substituição, pois, em alguns casos, oferece solução direta e mais simples. Vamos mostrar como funciona o método com um exemplo.

Exemplo 12.3

Resolver o sistema do primeiro grau:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -x + y = -2 \end{cases}$$

Solução: O método da adição consiste em multiplicar uma ou as duas equações por números reais não-nulos, de modo que a soma das equações "elimine uma variável". Assim, tendo como objetivo eliminar a variável x, multiplicamos a segunda equação por 3 e somamos com a primeira

$$\begin{array}{rr} + & 3x - 2y = 1 \\ & -3x + 3y = -6 \\ \hline & 0x + y = -5 \end{array}$$

Após a operação de adição encontramos que

$$0x + y = -5 \Rightarrow y = -5\,.$$

Este valor de y substituído na primeira equação (poderia também ser na segunda) resulta que

$$3x-2(-5)=1 \Rightarrow 3x+10=1 \Rightarrow 3x=-9 \Rightarrow x=\frac{-9}{3} \Rightarrow x=-3\,.$$

Portanto,

$$x=-3 \quad \text{e} \quad y=-5\,,$$

são as soluções da equação.

Exercício 12.3

Resolva pelo método da adição o sistema do primeiro grau:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}-2y=3 \\ 2x+y=5. \end{cases}$$

EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU

Toda equação que pode ser colocada na forma

$$ax^2+bx+c=0$$

onde a, b e c são números reais e $a \neq 0$ é uma equação do segundo grau com uma variável.

As constantes reais a, b e c são chamadas de coeficientes da equação. Note a obrigatoriedade de o coeficiente a ser não-nulo. Essa exigência é para garantir o grau dois para a equação.

Uma solução da equação do segundo grau é todo valor particular da variável x que torna verdadeira a igualdade expressa pela equação. Por exemplo, a equação

$$2x^2+3x-2=0\,,$$

tem como raízes os números reais $x=\dfrac{1}{2}$ e $x=-2$.

MÉTODO GERAL DE SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU

As soluções para a equação do segundo grau podem ser encontradas pelo método denominado de completar quadrado, o que vem também a ser uma aplicação de um produto notável que já vimos na Aula 6. Veja como funciona.

Como $a \neq 0$, então podemos dividir todos os membros da equação por a para encontrar

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=\frac{b^2}{4a^2}=0 \Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\ .$$

Na última passagem na seqüência de implicações anteriores, usamos propriedade de produto notável.

Desenvolvendo mais a equação, encontramos que

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}\,,$$

onde,

$$\Delta = b^2-4ac$$

é denominado o discriminante da equação. Assim,

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \\ x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}. \end{cases}$$

A última equação fornece as duas raízes da equação. Esta fórmula resolutiva da equação do segundo grau, foi obtida em termos dos coeficientes a, b e c, onde aparece $\sqrt{\Delta}$, (a raiz quadrada de delta) e é conhecida como **Fórmula de Bhaskara**.

Note que só tem sentido falar em soluções (raízes) x_1 e x_2 se o discriminante Δ é um número positivo ou nulo. Acompanhe, logo a seguir, a discussão sobre a existência de soluções a partir do sinal de Δ.

✍ i. No desenvolvimento da Fórmula de Bhaskara que fornece as raízes da equação do segundo grau, aparece a constante

$$\Delta = b^2-4ac$$

determinada pelos coeficientes da equação. Δ é denominado o discriminante da equação. Temos três situações a considerar decorrente dos possíveis sinais de Δ.

ii. Se $\Delta > 0$, então existe $\sqrt{\Delta}$, um número positivo, e a equação possui duas soluções distintas x_1 e x_2.

iii. Se $\Delta = 0$, então $\sqrt{\Delta} = 0$. Neste caso, a equação possui apenas uma solução. Como se trata de uma equação do segundo grau, é conveniente, nesta situação, dizer que as duas soluções são coincidentes, isto é, $x_1 = x_2$.

iv. Se $\Delta < 0$, então não existe $\sqrt{\Delta}$. Neste caso, a equação não possui solução.

Exemplo 12.4

Resolva a equação $x^2 + 3x - 10 = 0$.

Solução: Para a equação em foco, temos que $a = 1$, $b = 3$, $c = -10$. Portanto,

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times (-10) = 49 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 7\,.$$

Usando, agora, a fórmula de Bhaskara, encontramos que,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-3+7}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{-3-7}{2} = -5 \end{cases}$$

são as duas raízes distintas da equação.

EQUAÇÕES INCOMPLETAS

Lembre que a única restrição imposta sobre os coeficientes da equação geral do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ é que $a \neq 0$. Por isso, em muitas situações particulares, as equações têm um dos coeficientes b ou c nulos, ou mesmo ambos os coeficientes nulos. Tais equações são ditas incompletas. Quando estas ocasiões especiais ocorrem, é conveniente determinar diretamente as soluções da equação, sem o uso da fórmula geral de Bhaskara. Pois como você verá, comparativamente, uma solução direta reduz a quantidade de cálculos. Acompanhe a solução direta em dois exemplos apresentados na seqüência.

Exemplo 12.5

a) Determine as raízes da equação $x^2 - 3x = 0$.

Solução: Esta é uma equação incompleta do tipo $ax^2 + bx = 0$, onde $a = 1$, $b = -3$ e $c = 0$. Colocando a variável x em evidência (fatorando a equação), encontramos

$$x(x-3) = 0\,.$$

Ora, para que um produto de dois fatores resulte nulo, é necessário, e suficiente que um dos fatores seja nulo. Assim,

$$x(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 3\,.$$

Obtemos, portanto, através de uma manipulação algébrica direta da equação, as duas raízes $x_1 = 0$ e $x_2 = 3$ da equação.

b) Determine as raízes da equação $3x^2 - 48 = 0$.

Solução: Esta é uma equação incompleta do tipo $ax^2 + c = 0$, onde $a = 3$ e $c = -48$. Trabalhando diretamente a equação encontramos que

$$3x^2 - 48 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 48 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4\,.$$

Portanto, $x_1 = 4$ e $x_2 = -4$, são as soluções da equação.

c) Determine as raízes da equação $x^2 + 9 = 0$.

Solução: Também essa equação incompleta é do tipo $ax^2 + c = 0$, onde $a = 1$ e $c = 9$. Trabalhando diretamente a equação, encontramos que

$$x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -9 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-9}\,.$$

Observe que a última igualdade expressa as soluções em termos da raiz quadrada de um número negativo. Mas, não existe raiz quadrada de um número negativo. Ou dito de outro modo, não existe nenhum número real que possa ser igualado à raiz quadrada de um número negativo.

Conclusão: a equação $x^2 + 9 = 0$ não possui solução no conjunto dos números reais.

Exercício 12.4

Resolva as equações:

1. $-3x^2+9=0$
2. $(x-2)^2+4x=4$
3. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{2x}{3}=0$
4. $\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x+3}=1$
5. $(x+3)^2=2x(x+7)$
6. $\dfrac{x-3}{2}+\dfrac{1}{x}=-3$

INEQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

Usando a fórmula geral que fornece as soluções da equação do segundo grau e a linguagem dos intervalos de números reais, podemos expressar as soluções de inequações do segundo grau. Acompanhe os exemplos a seguir.

Exemplo 12.6

a) Encontre o conjunto solução da inequação $-x^2+x>-6$.

Solução: Multiplicando ambos os membros da inequação por -1 e invertendo o sinal da desigualdade, a inequação é equivalente a

$$x^2-x<6 \Rightarrow x^2-x-6<0\,.$$

Olhando para a equação do segundo grau $x^2-x-6=0$, encontramos

$$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-6)\Rightarrow \Delta=25\,.$$

Logo,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{1\pm 5}{2}\,,$$

definem as raízes, como sendo

$$x_1=3 \ \text{ e } \ x_2=-2\,.$$

Logo,

$$x^2-x-6=(x-3)(x+2)\,.$$

Assim, a inequação que precisamos resolver é

$$(x-3)(x+2) < 0\,.$$

Ora, as soluções possíveis ocorrem apenas quando os fatores do primeiro membro da inequação possuem sinais contrários. Então

$$x-3>0 \ \text{ e } \ x+2<0 \ \text{ ou } \ x-3<0 \text{ e } \ x+2>0$$

são as soluções. Desenvolvendo, encontramos

$$x>3 \ \text{ e } \ x<-2 \ \text{ ou } \ x<3 \ \text{ e } \ x>-2\,.$$

Como não existe número x tal que $x > 3$ e $x < -2$, ficamos somente com a segunda possibilidade $x < 3$ e $x > -2$. Portanto, o conjunto solução é representado pela interseção de intervalos,

$$S = (-\infty, 3) \cap (-2, \infty) = (-2, 3)\,.$$

b) Para que valores reais de x a desigualdade abaixo faz sentido e é verdadeira.

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} > 0\,.$$

Solução: Primeiramente é preciso que

$$x \neq 1 \ \text{ e } \ x \neq -1\,,$$

para que faça sentido as frações que aparecem na desigualdade.

Podemos escrever

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{(x-1)(x+1)} > 0\,.$$

Ora, para que a desigualdade seja verdadeira é suficiente que

$$(x-1)(x+1) > 0\,.$$

Vamos fazer uma tabela para identificar os sinais de $x-1$ e $x+1$. Veja a **Figura 12.1**.

	$-\infty$ a -1	-1 a $+1$	$+1$ a $+\infty$
$(x-1)$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)$	$-$	$+$	$+$
$(x-1)(x+1)$	$+$	$-$	$+$

Figura 12.1: Os sinais de $x-1$ e $x+1$.

Note que

$$x+1>0 \Leftrightarrow x>-1 \ \text{ e } \ (x-1)>0 \Leftrightarrow x>1\,.$$

Também,

$$x+1<0 \Leftrightarrow x<-1 \ \text{ e } \ (x-1)<0 \Leftrightarrow x<1\,.$$

Com isto, concluímos, a partir da **Figura 12.1** que

$$(x+1)(x-1)>0 \quad \Leftrightarrow \quad x<-1 \ \text{ ou } \ x>1\,.$$

Portanto, o conjunto solução S da inequação é

$$S=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)=\mathbb{R}-[-1,1]\,.$$

Exercício 12.5

1. Resolva a inequação $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}>20\,.$
2. Resolva a inequação $x^2-3x>10$.

Sistemas de Equações do Segundo Grau

Neste ponto de nosso estudo, é conveniente também a consideração de sistemas de equações, onde uma equação é do primeiro grau e a outra de segundo grau. Os métodos de solução (substituição, adição, etc...) seguem a mesma dinâmica de solução do caso de sistemas de primeiro grau.

Acompanhe a solução do exemplo a seguir.

Exemplo 12.7

Resolva o sistema de equações,

$$\begin{cases} x^2+y=3 \\ 3x-y=1. \end{cases}$$

Solução: Usando o método de substituição, encontramos a partir da segunda equação que

$$3x-y=1 \Rightarrow -y=-3x \Rightarrow y=3x-1\,.$$

Substituindo este valor de y na primeira equação, obtemos

$$x^2+y=3 \Rightarrow x^2+3x-1=3 \Rightarrow x^2+3x-4=0\,.$$

Resolvendo esta última equação, onde $a=1$, $b=3$ e $c=-4$, encontramos

$$\Delta=b^2-4ac=3^2-4\times 1\times(-4)=25 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=5\,.$$

Portanto,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{-3+5}{2}=1 \\ x_2=\dfrac{-3-5}{2}=-4 \end{cases}$$

são as soluções da equação $x^2+3x-4=0$.

Agora devemos voltar à primeira equação que expressa a variável y em função da variável x. Ou seja, $y=3x-1$. Lembre que esta equação foi obtida a partir da segunda equação do sistema. Usando os valores $x_1=4$ e $x_2=-1$ nesta equação encontramos que

$$y=3x-1 \quad \text{e} \quad x=x_1=1 \Rightarrow y_1=3\times 1-1 \Rightarrow y_1=2\,.$$

e

$$y=3x-1 \quad \text{e} \quad x=x_2=-4 \Rightarrow y_2=3(-4)-1 \Rightarrow y_2=-13\,.$$

Portanto, os valores são:

$$x_1=1 \ \text{ e } \ y_1=2 \quad \text{ou} \quad x_2=-4 \ \text{ e } \ y_2=-13\,.$$

A substituição destes valores no sistema confirma que realmente se trata das soluções procuradas.

Exercício 12.6

1. Resolva os sistemas de equações:

   a) $\begin{cases} 3x+4y=-5 \\ x+3y=-5 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} \dfrac{x}{6}=\dfrac{y}{4} \\ 5x-3y=36 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} x+y=3 \\ (x+y)^2-2xy=5 \end{cases}$

   d) $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ \dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{1}{7} \end{cases}$

2. Resolva as equações a seguir:

   a) $\dfrac{1}{4}-\dfrac{6-x}{3x-3}=\dfrac{3}{x-1}$

   b) $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)(x+1)=2x^2-11$

   c) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{9x-8}{5x}=\dfrac{5x-6}{x^2-9x}$

   d) $\dfrac{4}{x-3}+\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{5}{x^2-9}$

   e) $\dfrac{x-3}{2}+\dfrac{1}{x}=-3$

Aula 13

INTRODUÇÃO ÀS FUNÇÕES

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. reconhecer os atributos de uma função;
2. conceituar domínio, contradomínio, imagem de uma função;
3. identificar domínios de funções reais.

INTRODUÇÃO

O conceito de função é fundamental em qualquer área da Matemática, seja teórica ou aplicada, oferecendo suporte para modelar aplicações nas diferentes áreas da atividade humana. No curso de Administração, nosso foco principal no momento, a ferramenta função auxilia na formulação de conceitos e na resolução de problemas; e isto você irá constatar no desenvolvimento desta disciplina.

A idéia de função é a de relacionar elementos entre dois conjuntos através de uma regra com propriedades especiais. Essa regra deve associar a cada elemento do primeiro conjunto um único elemento do segundo conjunto. No entanto, antes de entrar em detalhes, vamos levantar algumas situações para que você possa ter a primeira percepção da presença das funções no dia-a-dia.

Exemplo 13.1

O caso da inflação.

Depois de todas as dificuldades econômicas vividas recentemente pelo Brasil, mesmo sem grandes conhecimentos de economia, eu e você, temos uma noção intuitiva do que é a inflação. Em sua generalidade, o fenômeno inflação pode ser visto por dois ângulos equivalentes. Por um lado, inflação é um aumento generalizado, continuado e persistente dos preços. Por outro ângulo, constitui uma diminuição persistente e continuada do poder aquisitivo do dinheiro.

Veja a **Tabela 13.1**, que relaciona as taxas de inflação no Brasil, medida pelo Índice de Preços ao Consumidor (IPC) do IBGE, na primeira metade da década de 1990 do século passado.

Ano	Taxa de inflação (%)
1990	1585,18
1991	475,10
1992	1149,06
1993	2489,11
1994	929,32
1995	21,98

Tabela 13.1: A inflação nos anos 1990-1995.

Essa tabela configura uma função. Veja os atributos principais. Cada coluna da tabela representa um conjunto, em que os elementos são listados um a um. Existe uma regra que associa exatamente a cada elemento do primeiro conjunto (primeira coluna) o elemento correspondente do segundo conjunto (segunda coluna) situado na mesma linha. Neste exemplo, se denominarmos por

$$A = \{x \mid x \text{ é um ano da década 1990-1995}\}$$

e

$$B = \{y \mid y \text{ é uma taxa porcentual}\},$$

então a **Tabela 13.1**, representa uma função do conjunto A no conjunto B.

Além da apresentação em tabelas, como feito no exemplo anterior, no dia-a-dia dos meios de comunicação, as informações sobre as funções aparecem através de gráficos. Mais à frente trataremos especificamente de gráficos, no momento vamos tratar ligeiramente deste tema, mostrando outros modos como podem ser organizados os dados da função taxa de inflação da década 1990-1995, para a comunicação entre as pessoas. Por exemplo, o gráfico da **Figura 13.1** é auto-explicativo e mostra, de uma maneira alternativa à **Tabela 13.1**, o comportamento da inflação na década 1990-1995. Esse é um gráfico que usa colunas.

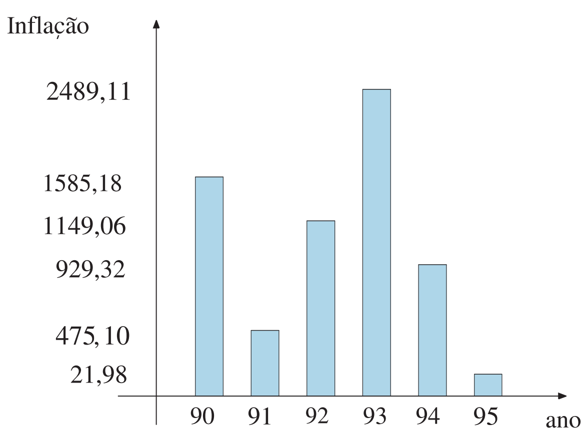


Figura 13.1: As barras representando a inflação.

O exemplo anterior retrata a época do pesadelo da inflação brasileira. No presente ano de 2005, apesar da economia apresentar fraco crescimento, os juros estarem na estratosfera, temos estabilidade na inflação. Os dois últimos índices de 2004 e 2005 registrados pelo IBGE, foram, respectivamente, de 5% e 6%, respectivamente.

Exemplo 13.2

O vôo Rio-São Paulo.

Um cronômetro assinala 50 minutos desde o momento em que um avião decola do Rio de Janeiro até o momento em que toca o solo em São Paulo, em sua chegada. A altura do avião do vôo 3224 em relação ao solo, durante a duração da viagem é uma função do tempo de vôo. Mais precisamente, para qualquer tempo t entre 0 e 50 minutos corresponde um número real que representa a altura do avião. Examine a seguir, na **Figura 13.2**, um possível gráfico para representar essa função. Note que para os tempos $t = 0$ e $t = 50$ (avião no solo) a altura é nula. Para $t = 25$ a altura é 10km e para $t = 5$ a altura é 1km.

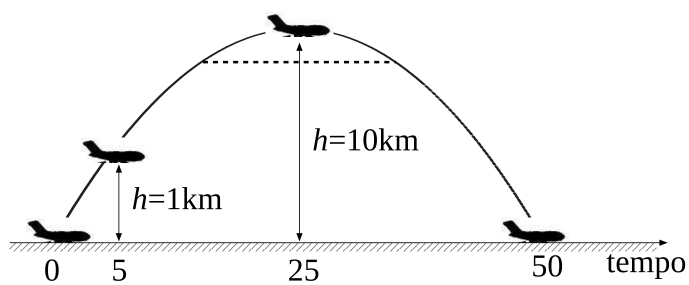


Figura 13.2: A altura do avião em função do tempo.

Essa função tem como conjunto de partida os números do intervalo fechado $[0,50]$ e como conjunto de chegada os números reais positivos ou nulo $[0,\infty]$.

O CONCEITO DE FUNÇÃO

Para definir uma função, precisamos de dois conjuntos e uma regra que estabeleça uma associação entre os elementos dos conjuntos, com propriedades especiais. Acompanhe os detalhes.

Definição 13.1

Uma função entre dois conjuntos A e B fica definida a partir de uma regra que associa a cada elemento do conjunto A à um e apenas um elemento do conjunto B. A notação usada é

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

para representar uma função entre os conjuntos A e B. O conjuntos A e B são denominados, respectivamente, o domínio e o contradomínio da função.

A definição que acabamos de estabelecer envolve muitos detalhes, precisamente definidos, que podem escapar numa primeira leitura. Por prevenção, vamos fazer uma radiografia completa desse conceito.

Na notação usada para representar a função, a primeira seta significa que elementos x do conjunto A são levados pela função a elementos y do conjunto B. A segunda seta especifica, por determinação da regra, qual é o elemento y que corresponde a um elemento x.

Para aprofundar a radiografia do conceito de função, volte a ler a definição anteriormente destacada em box e veja que

✍ i. Todo elemento do conjunto A está envolvido na definição. Ou seja, para todo $x \in A$ existe um único elemento $y \in B$ tal que $y = f(x)$. O elemento y é dito a imagem de x pela função f. Também x é chamado a variável independente e y a variável dependente.

ii. Não existe nenhuma obrigatoriedade de que todo elemento de B seja imagem de um elemento de A. Veja no exemplo de função apresentado a seguir, verificando especialmente no gráfico da função na **Figura 13.3**, que o elemento 4 não é imagem de nenhum elemento do conjunto A.

Exemplo 13.3

Considere os conjuntos $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{0,1,2,3,4,5\}$ e a função

$$\begin{array}{rcl} f : A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & y = f(x) = 2x - 1\,. \end{array}$$

Veja na **Tabela 13.2**, relacionando os valores da variável independente x da função, com aqueles da variável dependente y.

x	y = f(x)
1	1
2	3
3	5

Tabela 13.2: Correspondência entre elementos da função.

Em contrapartida, é possível construir uma outra imagem visual da função. Acompanhe a **Figura 13.3**, a seguir.

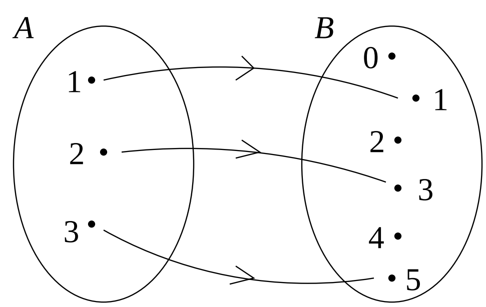


Figura 13.3: Representação diagramática da função.

Este modo de representar deixa evidente que a regra $x \mapsto y = 2x - 1$, que relaciona elementos de A a elementos de B, define uma função. Veja que a cada elemento de A corresponde um e apenas um elemento de B. Observe que de cada elemento de A parte uma única seta que atinge um único elemento de B.

Note na **Figura 13.3**, que nem todo elemento de B faz parte da imagem da função. Por exemplo, os elementos 0, 2 e 4. Aqui fica em evidência mais uma propriedade que você deve ter em mente acerca de funções: todo elemento do domínio participa da função, no entanto podem existir elementos do contradomínio que ficam fora da imagem da função.

✍ Ao examinarmos os detalhes do exemplo anterior, constatamos *in locus*, a partir da **Figura 13.3**, a propriedade fundamental da regra que define a função: de cada elemento de A parte uma única seta que atinge um único elemento de B. E não poderia ser diferente senão a regra não definiria uma função. Por exemplo, uma regra que produzisse um esquema diagramático do tipo como reproduzido na **Figura 13.4** a seguir, não definiria uma função, pois do elemento $1 \in A$ partem duas flechas.

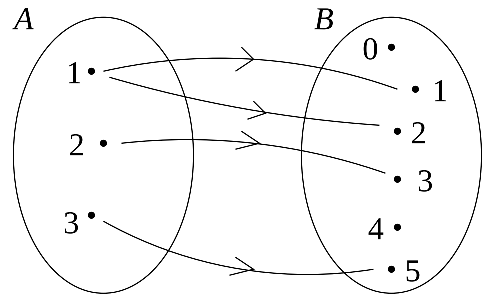


Figura 13.4: Regra que não define função.

Exemplo 13.4

Considere agora a função

$$\begin{array}{rcl} g : A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & y = g(x) = x^2 + 1\,, \end{array}$$

sobre os conjuntos $A = \{-1, 0, 1\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Constate que temos uma nova regra definindo uma nova função. Examine na **Figura 13.5**, a representação diagramática da função g.

Note uma situação nova neste exemplo. Para dois valores distintos $x = -1$ e $x = 1$, corresponde como imagem o mesmo valor para $y = 2$. Isto não aconteceu no exemplo anterior.

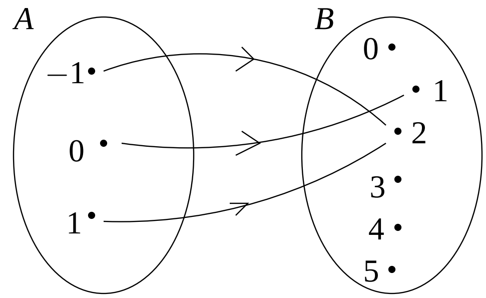


Figura 13.5: Representação da função g.

FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

A partir de agora, passamos ao estudo de funções que fazem parte de nosso objetivo principal: funções reais de variável real. Ou seja, estudaremos apenas funções para quais o domínio D é um subconjunto de números reais, e o contradomínio B é a totalidade dos números reais, isto é $B = \mathbb{R}$. Então, podemos representar a função como

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}\,, \text{ onde } D \subset B\,.$$

Portanto, tanto a variável dependente x quanto a independente $y = f(x)$ são números reais.

Igualdade de funções

Duas funções f e g são iguais quando possuem o mesmo domínio D e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D$.

Operações entre funções

A vantagem de trabalhar com funções é o fato que, como no caso de números reais, podemos somar, subtrair, multiplicar e dividir funções que possuem o mesmo domínio. Veja as definições a seguir, nas quais estamos supondo que f, g são funções definidas num mesmo domínio $D \subset \mathbb{R}$.

Soma de funções

A soma de duas funções f e g é uma nova função s definida no mesmo domínio D, tal que

$$s(x) = f(x) + g(x), \text{ para todo } x \in D.$$

Produto de funções

O produto de duas funções f e g é uma nova função p definida no mesmo domínio D, tal que

$$p(x) = f(x) \cdot g(x), \text{ para todo } x \in D.$$

Exemplo 13.5

Considere as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = -2x$ e $g(x) = x^2 + 1$. Então as funções $s(x)$ e $p(x)$, respectivamente, a soma e o produto das funções são definidas por

$$s(x) = -2x + x^2 + 1 = x^2 + 1 - 2x = (x-1)^2 ;$$
$$p(x) = (-2x) \cdot \left(x^2 + 1\right) = -2x^3 - 2x .$$

Quociente de funções

Dadas duas funções f e g definida no mesmo domínio D e onde $g(x) \neq 0$, para todo x, fica definida a função quociente q, tal que

$$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ para todo } x \in D.$$

Exemplo 13.6

Usando as mesmas funções f e g do exemplo anterior e observando que $g(x) \neq 0$ para todo número real x então, a função quociente $q(x)$ é expressa pela equação

$$q(x) = \frac{-2x}{x^2+1} = -\frac{2x}{x^2+1} .$$

✍ i. As operações entre funções estabelecidas, permitem realizar soma e produtos de um número finito qualquer de funções. Assim, dadas as funções $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_{n-1}(x)$, $f_n(x)$, todas com o mesmo domínio de definição D, as funções soma s e produto p, ficam definidas, respectivamente, pelas fórmulas:

$$s(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_{n-1}(x) + f_n(x)\ ;$$
$$p(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_{n-1}(x) \cdot f_n(x)\,.$$

ii. Às vezes é vantajoso representar o produto de uma função por ela mesma pelo símbolo f^2. Ou seja, a função f^2 é a função que para cada valor da variável x, fornece

$$f^2(x) = f(x) \cdot f(x)\,.$$

A mesma situação se aplicaria à potência enésima, onde o símbolo f^n representa a função produto de n fatores iguais a $f(x)$.

DOMÍNIO DE EXISTÊNCIA DE UMA FUNÇÃO

As funções que estamos estudando, funções reais de variável real, necessitam de dois ingredientes para sua definição:

- O domínio D da função.
- A regra que associa a cada elemento $x \in D$ um único número real $y = f(x)$.

A partir desta dupla necessidade constatamos, por um lado, que, sobre o domínio $D \subset \mathbb{R}$, podemos construir uma infinidade de funções, basta variar a regra.

Por outro lado, se uma regra é especificada, em geral, podemos considerar uma infinidade de domínios diferentes para a mesma regra, obtendo infinitas funções distintas.

Então, não esqueça! É preciso o domínio D e a regra $y = f(x)$, para termos a função.

No entanto, por economia de meios e sem prejuízo do entendimento, nos livros didáticos freqüentemente uma função aparece definida apenas por uma regra. Nesta situação, a convenção é que o domínio D da função é o maior subconjunto de números reais para o qual a regra se aplica, ou faz sentido. Vamos nesta disciplina seguir esta convenção. Veja esta situação no próximo exemplo.

Exemplo 13.7

Se uma função f é definida simplesmente pela regra (fórmula) $y = f(x) = \sqrt{x-3}$, então seu domínio D de definição está subentendido.

Neste caso, para que a função tenha sentido, é preciso que dado um particular número real x exista $\sqrt{x-3}$. Para isto, basta que $x - 3 \geq 0$. Portanto, se $x \geq 3$, a regra está bem definida. Logo $D = [3, +\infty)$ é o domínio da função.

Exemplo 13.8

Considere a função definida pela fórmula $y = f(x) = \dfrac{\sqrt{1-2x}}{x+6}$ e vamos determinar seu domínio D de definição.

Note que precisamos ter $1 - 2x \geq 0$ e $x + 6 \neq 0$, para que estejam bem definidos, respectivamente, o numerador e o denominador da fórmula (regra) pela qual a função se expressa.

Faça então as contas para concluir que é suficiente que $x \leq \frac{1}{2}$ e $x \neq -6$.

Portanto, o domínio D da função é obtido como interseção do intervalo $I = \big(-\infty, 1/2\big]$ com o conjunto $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -6\}$. Logo,

$$D = (-\infty, -6) \cup \big(-6, 1/2\big)$$

é o domínio da função.

Exercício 13.1

Encontre os domínios das funções:

a. $y = f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 - 6}$

b. $y = g(x) = \sqrt[3]{x^2 - 6}$

c. $y = h(x) = \dfrac{2 - x}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$

d. $y = q(x) = \sqrt{\dfrac{x - 3}{2 - 3x}}$

Aula 14

GRÁFICOS DE FUNÇÕES: AS FUNÇÕES LINEAR E QUADRÁTICA

Objetivo

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. compreender o conceito de gráfico de uma função.

A visualização geométrica de funções é muito importante, principalmente para resolver problemas e entender os conceitos. Também porque, ao representar as funções através de gráficos, estamos introduzindo um sistema de coordenadas como ferramenta que certamente auxilia na solução de problemas.

Considere a função $y = f(x)$, $x \in D$, onde $D \subset \mathbb{R}$ é um conjunto de números reais. Ora, a fórmula da função expressa que para cada $x \in D$ existe um único $y \in \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$. Esse par (x,y) define um ponto do plano com coordenadas. O conjunto desses pontos quando x varia em todo o domínio D forma o gráfico da função. Portanto, o gráfico da função $f(x)$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$, o qual é representado simbolicamente por $G(f)$ e como conjunto se expressa como

$$G(f) = \{(x,y) \mid y = f(x)\}.$$

Construção do Gráfico

Dada a função $y = f(x)$, o desafio é fazer uma representação a mais correta possível de seu gráfico. A técnica consiste em dois passos principais que vamos destacar:

- usar uma quantidade suficiente de valores numéricos para a variável x e definir, através da fórmula da função, os pontos (x,y) correspondentes do plano que estão no gráfico da função;
- usar, possivelmente, outros conhecimentos geométricos da função para completar um esboço do gráfico.

Uma pausa para comentar os dois passos anteriormente delineados. Veja que o primeiro passo encerra com o desenho de uma quantidade finita de pontos (x,y) no plano, enquanto o segundo passo corresponde a intuir a forma do gráfico. Nesse segundo passo é muito importante informações gerais conhecidas sobre gráfico de funções. Por exemplo, com o estudo é possível identificar funções cujos gráficos são representados por parábolas, círculos, retas e outras figuras geométricas. Portanto, esses conhecimentos gerais permitem intuir, a partir de um número finito de pontos conhecidos, a forma do gráfico. Acompanhe um exemplo.

Exemplo 14.1

Construa aproximadamente o gráfico da função $y = x+2$.

Solução: Começamos construindo uma tabela de valores (x,y), onde $y = x+2$ e localizando esses pontos no plano. Na **Figura 14.1**, temos à esquerda três colunas onde os pontos $A = (-1,1)$, $B = (0,2)$, $C = (1,3)$ e $D = (2,4)$ foram definidos através da fórmula da função.

	x	$y = f(x)$
A	-1	1
B	0	2
C	1	3
D	2	4

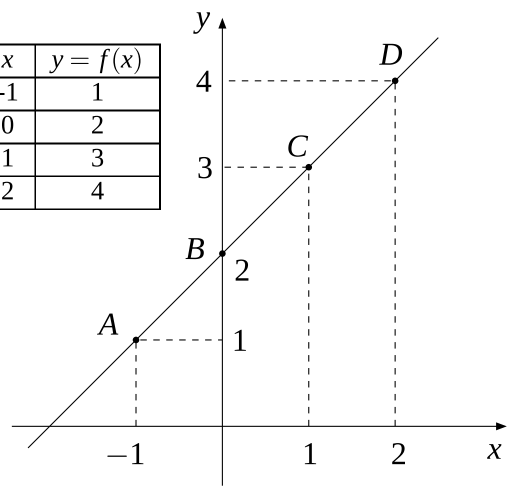


Figura 14.1: Gráfico da função $y = x+2$.

Assim, por exemplo, para a determinação do ponto $A = (-1,1)$, usamos que

$$x = -1 \text{ em } y = x+2 \Rightarrow y = -1+2 \Rightarrow y = 1\,.$$

Para o ponto $B = (0,2)$, usamos que

$$x = 0 \text{ em } y = x+2 \Rightarrow y = 0+2 \Rightarrow y = 2$$

e assim igualmente para os outros pontos.

Na direita da **Figura 14.1**, os pontos A, B, C e D estão localizados no plano $\mathbb{R}^2$ com sistema de coordenadas. A partir das posições dos pontos é possível deduzir que o gráfico é uma reta. Na verdade, um pouco mais adiante estabeleceremos que toda função do tipo $y = ax+b$, onde $a,b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ tem como gráfico uma reta. Veja a **Figura 14.2**, onde temos que $A = (0,b)$ e $B = \left(-\frac{b}{a}\,,0\right)$ e $a \neq 0$.

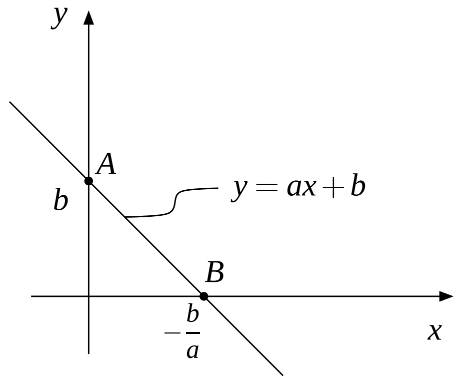


Figura 14.2: Gráfico de uma reta.

Exercício 14.1

Observe que o gráfico da função $y = x + 2$ intersecta o eixo $\mathscr{O}y$ no ponto $B = (0,2)$. Quais são as coordenadas do ponto E de interseção do gráfico com o eixo $\mathscr{O}x$?

Exemplo 14.2

a) Construir a representação gráfica da função $y = \dfrac{4}{5-x}$, $x \in D = [1,4]$.

Solução: Inicialmente construímos uma tabela de pontos, veja a **Figura 14.3**.

	x	$y = \dfrac{4}{5-x}$
A	1	1
B	2	$\dfrac{4}{3}$
C	3	2
D	4	4

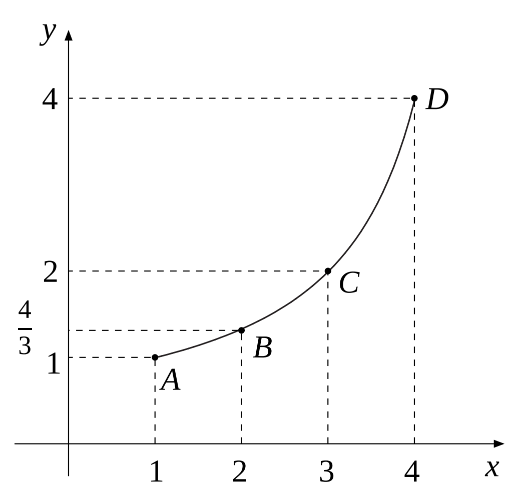


Figura 14.3: Gráfico da função $y = \dfrac{4}{5-x}$.

Unindo um a um os pontos do gráfico e sabendo que a função representa uma hipérbole, chegamos a um esboço do gráfico da função, que está representado à direita da **Figura 14.3**.

b) Construa o gráfico da função f tal que

$$y = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x \leq -1 \\ x & \text{se} \quad -1 < x < 1 \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases} .$$

Solução: O domínio D da função é todo o conjunto dos números reais, isto é, $D = \mathbb{R}$. A definição da função explicita que para qualquer valor $x \in (-\infty, -1]$, o valor $y = f(x)$ assinalado é o mesmo e constante $y = -1$. Portanto, a função é constante nesse intervalo. Também a função é constante $y = 1$ para todo $x \in (1, +\infty)$. Agora precisamos trabalhar os valores y quando x está no intervalo aberto $(-1, 1)$. Para esses casos, veja que $y = x$. Por exemplo, os pontos $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $(0,0)$ e $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ estão no gráfico. Veja a **Figura 14.4** a seguir.

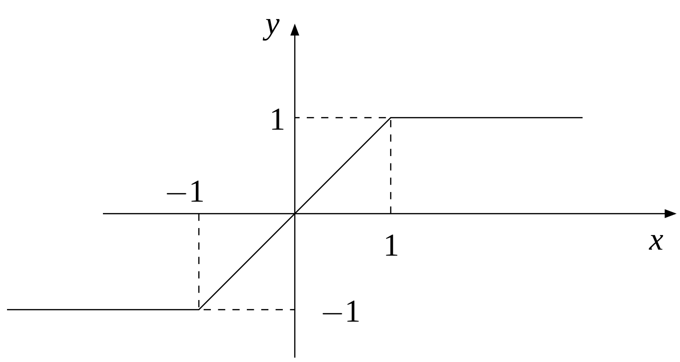


Figura 14.4: Gráfico da função f.

Exercício 14.2

Construa uma representação aproximada dos gráficos das funções:

a) $y = 10 - x$

b) $y = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{2}{x+1} & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$

Nosso próximo objetivo de estudo é destacar algumas funções especiais. Começamos com a mais simples delas: a função constante.

FUNÇÕES CONSTANTES

Dado o número real c, a função $y = c$ é uma função constante. Como para todo $x \in \mathbb{R}$ o valor y correspondente da função permanece constante, então o gráfico da função é uma reta paralela ao eixo $\mathscr{O}x$ e passando pelo ponto $(0, c)$. Examine o gráfico da função na **Figura 14.5**, onde é representada uma função constante donde $c < 0$.

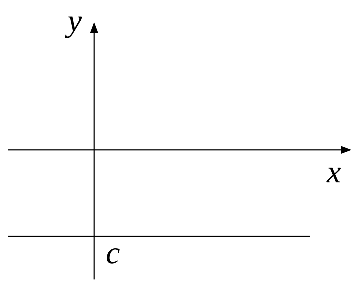


Figura 14.5: Gráfico de função constante.

A FUNÇÃO LINEAR AFIM

Nesse ponto, avançamos mais um degrau na escala de complexidade. Vamos considerar uma função ainda muito simples, que, no entanto, serve para modelar muitos fenômenos que ocorrem na prática. Trata-se da função linear afim.

A função

$$y = ax + b\,,\ a, b \in \mathbb{R}\ a \neq 0\,,$$

é dita uma função linear afim.

O gráfico de qualquer função linear afim é uma reta. No caso especial em que o coeficiente $b = 0$, a função é comumente denominada *função linear*.

Considere então a função linear afim

$$y = ax + b\,,\ a, b \in \mathbb{R}\ a \neq 0\,.$$

Veja a construção do gráfico para o caso em que $a > 0$ e $b < 0$ como representado na **Figura 14.6**.

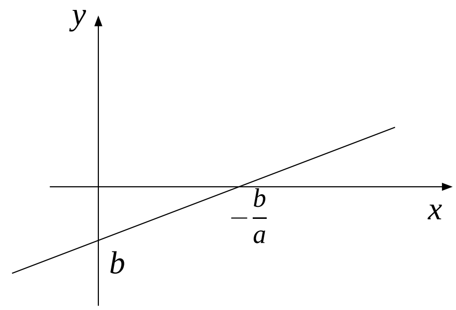


Figura 14.6: Gráfico da função linear.

Note que os pontos $(0, b)$ e $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ estão no gráfico da função linear afim. Como dois pontos determinam uma reta, o gráfico pode ser construído.

INTERPRETAÇÃO DO COEFICIENTE a

Considere uma função linear $y = ax + b$, $a > 0$ e dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) no gráfico da função.

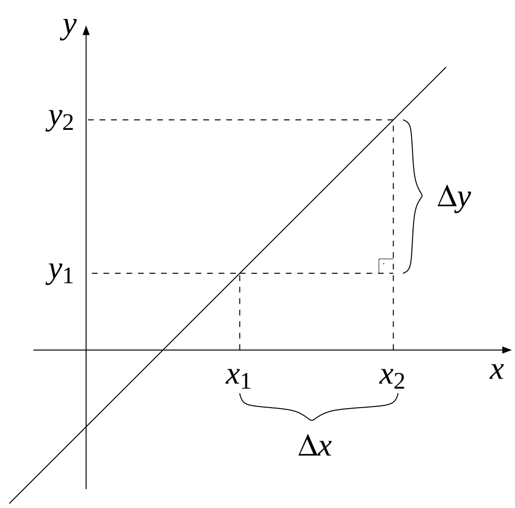


Figura 14.7: Acréscimo nas variáveis.

Veja que $\Delta x = x_2 - x_1$ corresponde ao acréscimo que devemos dar ao valor x_1 para chegar ao valor x_2. De fato, veja que

$$x_2 = x_2 + x_1 - x_1 = x_1 + x_2 - x_1 = x_1 + \Delta x\,.$$

Assim, o acréscimo Δx à variável x_1 resulta no valor x_2. Por outro lado, para passar de y_1 para y_2 a variável dependente sofre um acréscimo de $\Delta y = y_2 - y_1$. Ou seja,

$$y_2 = y_2 + y_1 - y_1 = y_1 + y_2 - y_1 = y_1 + \Delta y\,.$$

Veja que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a\,.$$

Portanto, o coeficiente a representa o quociente entre as variações, ou ainda define que a variação Δy é proporcional à variação Δx com fator de proporcionalidade a. Em função disto, a é chamado o *coeficiente angular da reta*.

Note que, em particular, quando $\Delta x = 1$ então $\Delta y = a$. Ou seja, quando a variável independente passa de x_1 para $x_1 + 1$, a variável dependente oscila de y_1 para $y_1 + a$.

Finalmente, veja que quando $x = 0$ na equação $y = ax + b$ resulta que $y = b$. Isto identifica $(0, b)$ como o ponto onde o gráfico da função corta o eixo y. Portanto o coeficiente b identifica o ponto de interseção da reta com o eixo y.

Exemplo 14.3

a) Equação da reta por dois pontos.

Considere no plano a reta que passa pelos pontos $A = (-1, 2)$ e $B = (0, 5)$ e encontre a função linear afim cujo gráfico é a reta.

Solução: Veja o gráfico da reta representado na **Figura 14.8**. Uma função linear afim se expressa como $y = ax + b$ e precisamos usar os dados do exemplo para definir os coeficientes a e b e encontrar a equação particular que expressa a função procurada.

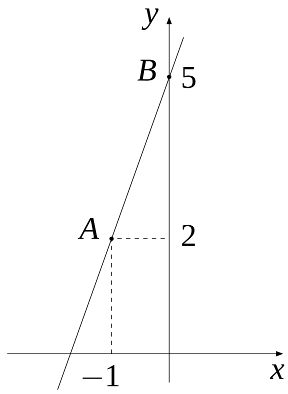


Figura 14.8: Reta por dois pontos.

Portanto, usando os dados encontramos que

$$\begin{array}{llll} A=(-1,2) & \text{em} \quad y=ax+b & \Rightarrow & 2=-a+b \\ B=(0,5) & \text{em} \quad y=ax+b & \Rightarrow & b=5\,. \end{array}$$

Basta então resolver o sistema de equações nas variáveis a e b. Como $b=5$, então

$$2=-a+b \Rightarrow a=3\,.$$

Logo, a função linear afim procurada é

$$y=3x+5\,.$$

b) Sabendo que numa função linear afim, toda vez que a variável independente x sofre um acréscimo $\Delta x=1$, a variável dependente y sofre um acréscimo correspondente de $\Delta y=-2$. Além disso, para $x=3$, $y=-1$, encontre a fórmula que expressa a função linear afim e represente o gráfico correspondente.

Solução: Seja $y=ax+b$ a função linear afim procurada. Como para $\Delta x=1$ corresponde $\Delta y=-2$, encontramos que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=a \Rightarrow \frac{-2}{1}=a \Rightarrow a=-2\,.$$

Por outro lado, o ponto $A=(3,-1)$ pertence ao gráfico da função.

Substituindo todos esses dados na equação vem que

$$y = ax + b \Rightarrow y = -2x + b \Rightarrow -1 = -2(3) + b \Rightarrow b = 5\,.$$

Com os valores $a = -2$ e $b = 5$ definidos, chegamos à expressão da função:

$$y = -2x + 5\,.$$

Como o gráfico da função é uma reta, dois pontos são suficientes para determiná-lo. Já temos o ponto $A = (3, -1)$ e precisamos de mais um ponto B. Fazendo $x = 0$ na equação, vem que

$$y = -2x + 5 \text{ e } x = 0 \Rightarrow y = -2(0) + 5 \Rightarrow y = 5\,.$$

Portanto $B = (0, 5)$ é o outro ponto procurado e o gráfico pode ser construído. Veja a **Figura 14.9**.

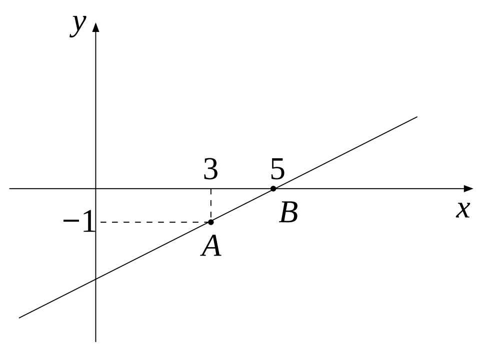


Figura 14.9: Gráfico de função linear afim.

A Função Quadrática

Toda função

$$y = ax^2 + bx + c\,,$$

onde os coeficientes a, b e c são números reais e $a \neq 0$ é uma função quadrática.

Com um pouco de esforço matemático, envolvendo estudo do lugar geométrico num plano eqüidistante de uma reta e de um ponto, pode ser provado que a parábola é a curva que num plano com coordenadas é representada por uma equação quadrática. E pode se ir mais além, mostrando que o eixo de simetria da parábola é uma reta paralela ao eixo $\mathscr{O}y$. Observamos de passagem que esse eixo de simetria contém o vértice da parábola. Vamos destacar os elementos principais que ajudam a elaborar gráficos de funções quadráticas.

1. É importante calcular, caso existam, as raízes da equação

$$ax^2+bx+c=0\,.$$

Pois, se x_0 é uma raiz, então o ponto $(x_0,0)$ pertence à parábola e representa no plano o ponto onde a parábola cruza o eixo $\mathscr{O}x$.

2. Se $a>0$, a concavidade da parábola é voltada para cima (direção positiva do eixo $\mathscr{O}y$) e no caso de $a<0$, a concavidade da parábola é voltada para baixo (direção negativa do eixo $\mathscr{O}y$).

3. O vértice V da parábola tem como coordenadas,

$$V=\left(-\frac{b}{2a}\,,\,-\frac{\Delta}{4a}\right),\ \text{onde}\ \Delta=b^2-4ac.$$

Note que no caso em que a parábola corta o eixo $\mathscr{O}x$, isto é, quando a equação quadrática possui raízes x_1 e x_2, então as coordenadas do vértice podem ser expressas como

$$V=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\,,\,-\frac{\Delta}{4a}\right).$$

4. O ponto $(0,c)$ é a interseção da parábola com o eixo y.

Veja dois exemplos.

Exemplo 14.4

a) Construir o gráfico da função quadrática $y=x^2-x-2$.

Solução: Em primeiro lugar é preciso determinar as raízes da equação $x^2-x-2=0$. Temos que:

$$a=1, b=-1 \text{ e } c=-2 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=9\,.$$

Logo,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}\quad\Rightarrow\quad\left\{\begin{array}{lcr} x_1 & = & 2\\ x_2 & = & -1\end{array}\right.$$

Portanto, os pontos $A = (2,0)$ e $B = (-1,0)$ definem a interseção da parábola com o eixo $\mathscr{O}x$. Calculando as coordenadas do vértice $V = (x_v, y_v)$ encontramos

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}\ .$$

Para $x_v = \dfrac{1}{2}$, encontramos

$$y = x^2 - x - 2 \Rightarrow y_v = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2 \Rightarrow y_v = -\frac{9}{4}\ .$$

Então, as coordenadas do vértice $V = (x_v, y_v)$ fornecem

$$V = \left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right).$$

Por outro lado, se $x = 0$, então a função quadrática $y = x^2 - x - 2$ fornece $y = -2$. Isto mostra que $C = (0,-2)$ é o ponto de encontro da parábola com o eixo $\mathscr{O}y$.

Finalmente, com $a = 1 > 0$, a parábola possui concavidade para cima.

Esses dados permitem traçar o esboço do gráfico da parábola, como mostrado na **Figura 14.10**.

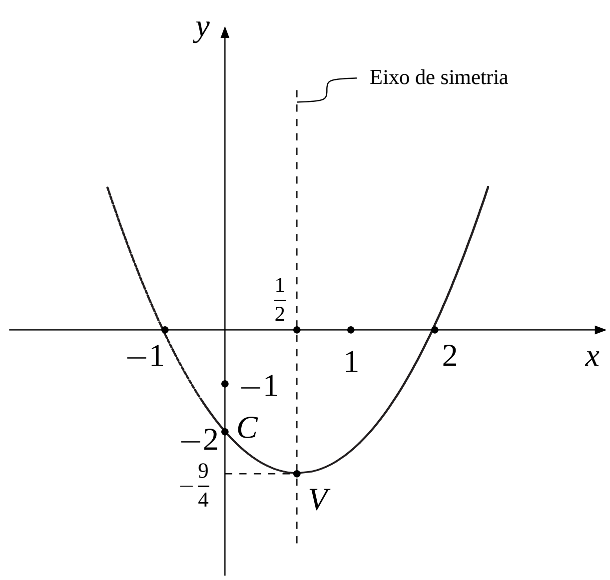


Figura 14.10: Parábola $y = x^2 - x - 2$.

b) Construir, aproximadamente, o gráfico da função quadrática $y = -x^2 + 2x$.

Solução: Em primeiro lugar, a equação $-x^2 + 2x = 0$ pode ser resolvida definindo suas raízes

$$-x^2 - 2x = 0 \Rightarrow -x(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Também

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0+2}{2} = 1$$

e

$$y_v = -x_v^2 + 2x_v \Rightarrow y_v = -1^2 + 2(1) \Rightarrow y_v = 1\,.$$

Então, o vértice $V = (x_v, y_v)$ está definido:

$$V = (1,1)\,.$$

Para encontrar o ponto C onde a parábola corta o eixo $\mathscr{O}y$, colocamos $x = 0$ na equação quadrática. Assim,

$$x = 0 \text{ e } y = -x^2 + 2x \Rightarrow y = -0^2 + 2(0) \Rightarrow y = 0\,.$$

Então $C = (0,0)$.

Veja agora a **Figura 14.11** que pode ser construída a partir desses dados.

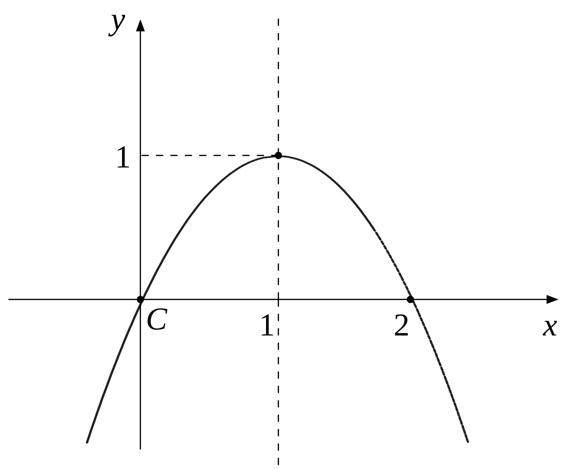


Figura 14.11: Parábola $y = -x^2 + 2x$.

c) Construir, aproximadamente, o gráfico da função quadrática $y = x^2 + 2x + 2$.

Solução: Veja que

$$a = 1, b = 2 \text{ e } c = 2 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = -4 < 0\,.$$

Portanto, a equação $x^2 + 2x + 2 = 0$ não tem solução. Isto evidência que a parábola não corta o eixo $\mathscr{O}x$. Como $a = 1 > 0$, a parábola tem concavidade para cima. Como não corta o eixo $\mathscr{O}x$, a parábola fica toda acima do eixo $\mathscr{O}x$.

Vamos calcular as coordenadas do vértice $V = (x_v, y_v)$. Temos que

$$x_v = -\frac{b}{2a}\,, y_v = \frac{\Delta}{4a} \Rightarrow x_v = -1\,, y_v = 1\,.$$

Logo, $V = (-1, 1)$ é o vértice.

Também fazendo $x = 0$ na equação $y = x^2 + 2x + 2$, encontramos $y = 2$. Logo, $(0, 2)$ é o ponto de encontro da parábola com o eixo $\mathscr{O}y$. Esses dados permitem um esboço da parábola como o da **Figura 14.12:**

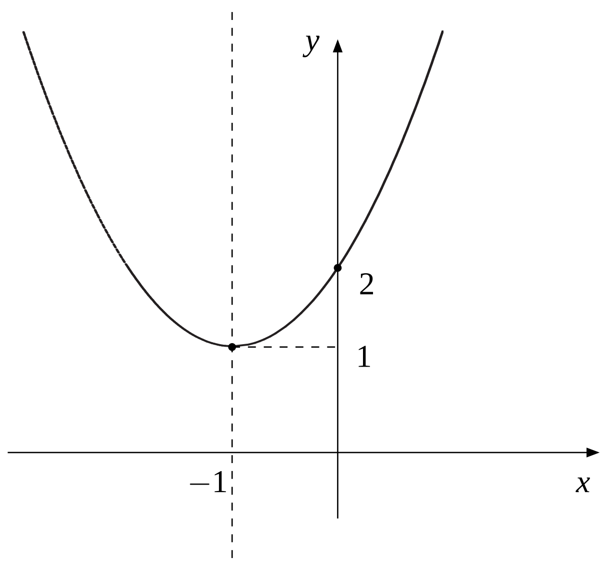


Figura 14.12: Parábola $y = x^2 + 2x + 2$.

Exercício 14.3

Construa, aproximadamente, os gráficos das equações quadráticas:

a) $y = -x^2 + x + 6$

b) $y = x^2 - 3x + 3$

Aula 15

FUNÇÕES POLINOMIAIS: DETERMINAÇÃO DE GRÁFICOS POR SEUS PONTOS E GRÁFICOS DE REGIÕES DO PLANO

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. entender o conceito de função polinomial;
2. saber construir regiões do plano definidas por equações e inequações;
3. poder construir a reta que se ajusta a um conjunto de pontos.

Nas aulas anteriores, introduzimos o conceito de função e tratamos os primeiros exemplos que foram as funções constante, lineares afins e as funções quadráticas. Na verdade, essas funções são casos particulares de uma classe mais ampla: as funções polinomiais. Veja a definição seguinte.

Definição 15.1

Dado um número natural $n \geq 1$, uma função polinomial de grau n é uma função expressa por uma equação do tipo

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 \qquad (15.1)$$

onde x é uma variável real, $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1$ e a_0 são números reais e $a_n \neq 0$.

✍

i. Os números reais $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1$ e a_0 são os coeficientes da função polinomial. Observe a obrigatoriedade $a_n \neq 0$. A não-nulidade desse coeficiente determina o grau da função polinomial.

ii. Associada à função polinomial (15.1), é definida a equação polinomial de grau n

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 = 0\,,\; x \in \mathbb{R}\,.$$

iii. O número real c é uma raiz da equação polinomial se o valor $x = c$ anula o primeiro membro da equação, isto é,

$$a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_2 c^2 + a_1 c^1 + a_0 = 0\,.$$

iv. As funções constantes, linear afim e quadrática são funções polinomiais de grau zero, um e dois, respectivamente. Por exemplo, a função quadrática $y = -3x^2 + 2x - 1$ é uma função polinomial de grau 2, que se identifica com a forma geral $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, onde $a_2 = -3$, $a_1 = 2$ e $a_0 = -1$.

v. É possível definir funções polinomiais a partir de monômios. Assim, por exemplo o produto

$$y = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-2) \Rightarrow y = x^3 - 2x^2 - x + 2\,.$$

Dada uma função polinomial, está colocado o problema de construir no plano, mesmo aproximadamente, o gráfico da função. A técnica que permite a construção desses gráficos é a mesma usada nos casos anteriores de funções lineares afins e quadráticas. É preciso determinar um número suficiente de pontos do gráfico que permitam a forma geral do gráfico. Esse é um modo de construção artesanal. Hoje, com os computadores de que disponho, existem ferramentas que permitem a construção de qualquer gráfico de função polinomial num piscar de olhos e mesmos funções mais complexas. A técnica do computador não foge muito do princípio artesanal que temos usado. A diferença é que o computador pode realizar milhões de operações por segundo e localizar uma quantidade muito grande de pontos. Depois, é só unir esses pontos que estão suficientemente próximos. Na verdade, quando olhamos para a tela do computador para apreciar o gráfico de uma função, temos a impressão de continuidade (não existe espaço entre um ponto e outro do gráfico). Mas isso é resultado da nossa limitada acuidade visual, uma vez que o computador sempre trabalha com um número finito de pontos.

Vamos tratar, apenas a título de ilustração e com o intuito de esquentar os tamborins, um caso simples de função polinomial de grau 3.

Exemplo 15.1

A função $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$ é uma função polinomial de grau 3. Veja que, para essa função, $a_3 = 1$, $a_2 = -2$, $a_1 = -1$ e $a_0 = 2$. Veja que os valores $x = 1$, $x = -1$ e $x = 2$ anulam o valor da função. Isso pode ser visto simplesmente fazendo as contas e verificando que

$$y = x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-2)\,,$$

conforme já trabalhado anteriormente. Esse resultado mostra que os pontos

$$A = (1,0), B = (-1,0) \text{ e } C = (2,0)$$

pertencem ao gráfico da função. Além disso, podemos definir mais alguns pontos, o que faremos na tabela que aparece na **Figura 15.1**, a seguir.

	x	y
D	0	2
E	-2	4
F	3	8
G	-3	4

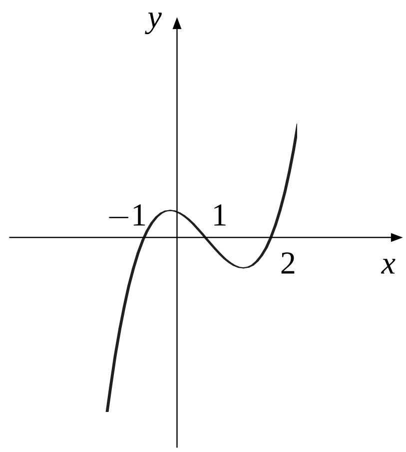


Figura 15.1: Função polinomial $y = x^3 - 2x - x + 2$.

CURVAS QUE SE AJUSTAM A UM CONJUNTO DE PONTOS

As funções com as quais estamos trabalhando, funções lineares afins, quadráticas e mais geralmente polinomiais, são modelos matemáticos que se ajustam a problemas práticos nas áreas de Economia e Administração. Mas, como são modelos, precisam ser ajustados, em maior ou menor precisão, para responder a situações concretas.

Até agora tratamos o problema de construir gráficos de alguns tipos de funções. O objetivo agora é oferecer uma idéia num caso bem simples de como atacar o problema inverso: dado um certo número de pontos no plano, determinar a curva polinomial que mais se ajusta a esses pontos. Um comentário faz sentido sobre a natureza do problema: dependendo da posição dos pontos, a curva polinomial que mais se aproxima pode ser uma reta, ou uma parábola ou o gráfico de um polinômio de grau superior a dois. No entanto, por questão de simplicidade, e para não fugir ao objetivo da disciplina, trataremos de resolver apenas o caso de definir a reta que mais se aproxima de um conjunto de pontos prefixados.

Método dos Mínimos Quadrados

Considere três pontos $A = (0, -1)$, $B = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e $C = (2, 1)$ e o problema de determinar a reta que mais se ajusta a esses pontos. Ou, dito de outra maneira, queremos determinar a reta que passa o mais perto possível dos pontos, do ponto de vista global. Na **Figura 15.2**, a seguir, são apresentadas quatro retas. Note que as retas r, q e t como candidatas a solução do problema possuem a vantagem comum de passar por dois dentre os pontos e a desvantagem comum de deixar um terceiro ponto muito longe da reta.

Por outro lado, a reta s não contém nenhum dos pontos, mas resolve o problema, tratando os três pontos de modo uniforme e portanto possui a melhor proximidade possível em relação aos pontos.

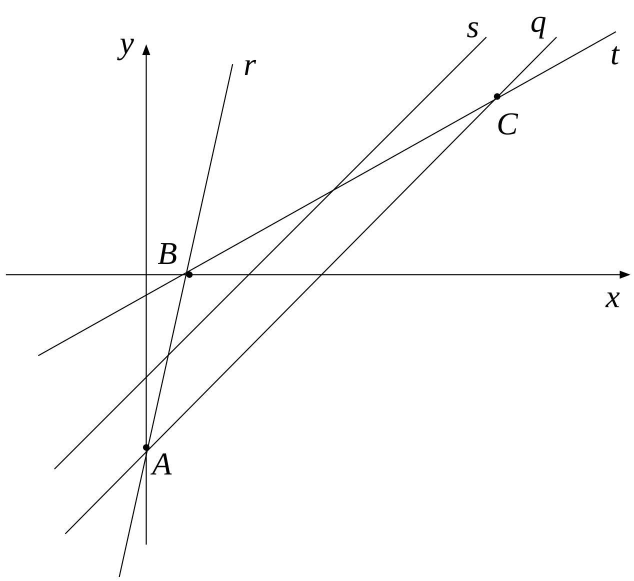


Figura 15.2: Curva ajustando pontos.

O método que permite encontrar a reta s que resolve o problema é denominado método dos mínimos quadrados, cujo enunciado agora apresentamos.

Dado um conjunto de n pontos no plano $A_1(x_1,y_1), A_2(x_2,y_2), \cdots, A_n(x_n,y_n)$, a reta que melhor se aproxima desses pontos é definida por $y = ax+b$, onde

$$a = \frac{\sum xy - n\overline{x}\overline{y}}{\sum x^2 - n\left(\overline{x}\right)^2} \qquad \text{e} \qquad b = \overline{y} - a\overline{x}\,.$$

Nesta fórmula, os símbolos significam:

$\sum xy =$ é a soma dos n produtos $x_i y_i$

$\sum x^2 =$ é a soma dos n quadrados x_i^2

$\overline{x} = \dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}, \overline{y} = \dfrac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}$ são médias aritméticas.

Acompanhe pelo exemplo a seguir a aplicação do método para encontrar a reta que melhor aproxima 4 pontos.

Exemplo 15.2

Vamos encontrar pelo método dos mínimos quadrados a reta que melhor aproxima os pontos $A_1 = (10,27), A_2 = (20,20), A_3 = (30,14)$ e $A_4 = (40,7)$.

Solução: Para melhor organizar os cálculos, tendo em vista calcular os somatórios, lançamos mão de uma tabela. Veja a tabela a seguir.

Pontos	x_i	y_i	$x_i\,y_i$	x_i^2
A_1	10	27	270	100
A_2	20	20	400	400
A_3	30	14	420	900
A_4	40	7	280	1600
$\sum$	100	68	1370	3000

Também

$$\overline{x} = \frac{10+20+30+40}{4} = 25$$

$$\overline{y} = \frac{27+20+14+7}{4} = 17\,.$$

Então:

$$\sum xy - n\overline{x}\overline{y} = 1370 - 4 \times 25 \times 17 = -330$$

$$\sum x^2 - n\left(\overline{x}\right)^2 = 3000 - 4 \times 625 = 500\,.$$

Logo,

$$a = \frac{-330}{500} = -0,66 \qquad \text{e} \qquad b = \overline{y} - a\overline{x} = 17 + \frac{33}{50} \times 25 = \frac{67}{2}$$

e então a reta procurada é $\qquad y = -0,66x + 33,5\,.$

Veja a representação da solução do problema na figura a seguir.

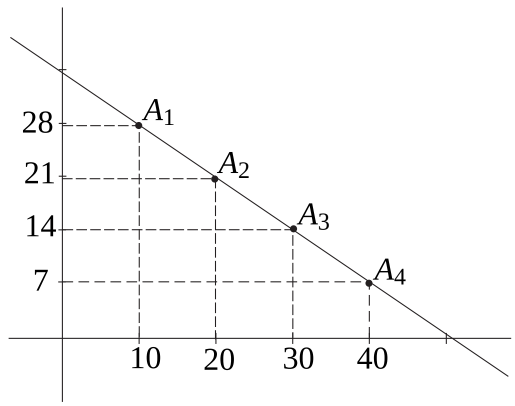


Figura 15.3: Reta que aproxima 4 pontos.

GRÁFICOS DE SEGMENTOS DE RETAS E REGIÕES DO PLANO

Muitas vezes, os dados de um problema exigem a consideração de funções lineares afins ou funções quadráticas definidas em domínios D que são apenas parte dos números reais. Os gráficos das funções, nesses casos, podem ser segmentos de reta, partes de parábolas. Vejam um exemplo.

Exemplo 15.3

Representar graficamente $y = -x - 1$, $x \in (-2, 1]$.

Solução: O gráfico será parte de uma reta, uma vez que $y = -x - 1$ é uma função linear afim. Veja que $x = 0$ e $x = 1$ estão no domínio da função. Então:

$$\begin{array}{lllll} x = 0 & \text{e} & y = -x - 1 & \Rightarrow & y = -1 \\ x = 1 & \text{e} & y = -x - 1 & \Rightarrow & y = -2 \end{array}$$

Logo, $A = (0, -1)$ e $B = (1, -2)$ são pontos que definem o gráfico. Veja a **Figura 15.4**.

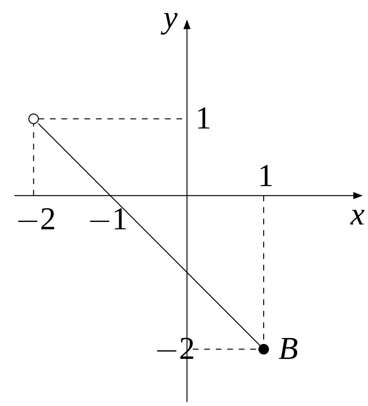


Figura 15.4: Segmento de reta.

Note que o ponto $(-2,1)$ não pertence ao gráfico, uma vez que o domínio $D = (-2,1]$ é aberto à esquerda. Por isso, esse ponto é representado vazado no gráfico. No entanto, o ponto $B = (1,-2)$ é representado cheio, uma vez que esse ponto pertence ao domínio.

Exemplo 15.4

Representar graficamente o conjunto do plano definido por $y \leq 2x - 1$ e $0 \leq x \leq 2$.

Solução: Note que a equação linear afim $y = 2x - 1$ é representada por uma reta. A condição $y \leq 2x - 1$ indica os pontos que ficam abaixo da reta.

Por outro lado, todos os pontos (x,y) do plano que verificam $0 \leq x \leq 2$ são uma faixa vertical. Juntando essas duas condições, chegamos à região hachurada da **Figura 15.5**, que representa o gráfico procurado.

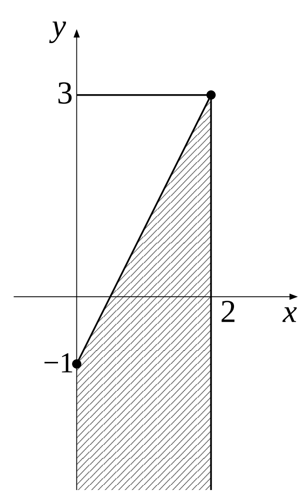


Figura 15.5: Gráfico da região procurada.

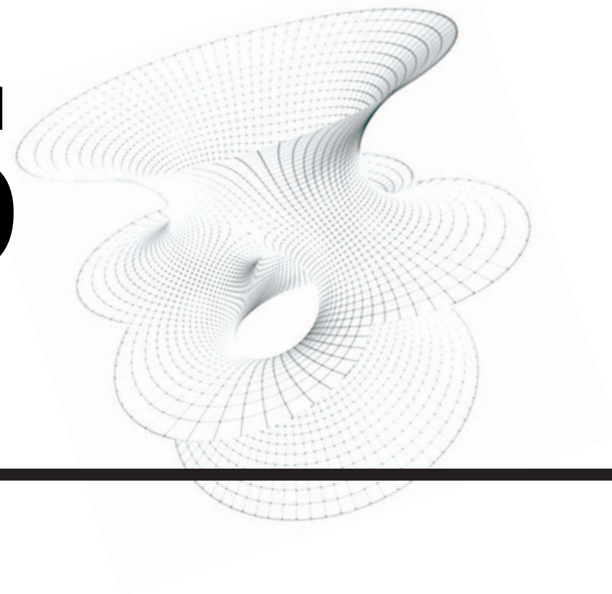
Exercício 15.1

Representar graficamente os conjuntos do plano definido por:

a) $y \leq -x+3$ e $-1 < x < 1$;

b) $-2 \leq y \leq -x+3$.

Aula 16



APLICAÇÕES

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. perceber a importância das funções e de seus gráficos para resolver problemas práticos;
2. poder representar graficamente a função demanda de mercado;
3. poder representar graficamente a função oferta de mercado;
4. ser capaz de resolver problemas relacionados às funções de demanda e de oferta de mercado, bem como encontrar os preços e as quantidades de equilíbrio do mercado.

Nesta aula vamos olhar, como se fosse uma caixa de ferramentas, as técnicas desenvolvidas nas aulas 13 até 15. Com essas ferramentas em mãos, vamos procurar motivar o uso de funções e de gráficos para abordar questões relacionadas com a Lei da Oferta e da Procura, e os assuntos relacionados: demanda de mercado, oferta de mercado e preços.

Para um certo produto colocado no mercado, a Lei da Oferta e da Procura busca regular a relação entre a procura (ou demanda) pelo produto e a quantidade de oferta desse produto. Em linhas gerais, em períodos de grande oferta de um determinado produto, o seu preço cai, provocando um aumento no consumo. E em contrapartida, em face de uma grande demanda por um determinado produto, os preços tendem a subir, ocorrendo uma retração no consumo.

Mas é preciso lembrar que nesta aula trataremos a Lei da Oferta e da Procura como um modelo ideal, para explicar fenômenos complexos do mercado. Por isto, é importante ter em mente que conclusões simplistas freqüentemente não são verdadeiras como a que diz que quanto menor o preço de um determinado produto, maior a quantidade procurada e vendida. Ou que quanto maior o preço, menor a quantidade procurada. No fenômeno da oferta e da demanda, outras variáveis influenciam a equação que traduz a Lei da Oferta e da Procura, tornando-a muito complexa. Entre essas variáveis destacam-se, por exemplo, os desejos e necessidades das pessoas; o poder de compra; o nível de desemprego; a disponibilidade dos serviços; a produção regional e nacional; a sazonalidade da oferta e das condições climáticas, por exemplo, para os produtos agrícolas; fluxo de exportações e de importações e também a intervenção reguladora dos governos, por exemplo, liberando impostos ou incentivando a importação do produto.

Para examinar, ainda que de modo ideal, a Lei da Oferta e da Procura, vamos considerar como exemplo a questão do preço do feijão, um alimento com limitadas possibilidades de armazenamento. O feijão uma vez colhido deve ser consumido dentro de seis meses. A partir desse tempo há um processo de endurecimento do grão, caindo muito a qualidade do produto. Assim, no pico da colheita, a oferta do produto no mercado aumenta muito e nesta ocasião os preços são relativamente menores. Por outro lado, no período que antecede a colheita, a escassez do produto limita sua oferta e pressiona a procura (ou demanda).

Portanto, em linhas gerais, uma oferta menor do feijão aumenta os preços e provoca uma retração na demanda. No entanto, isto não significa, necessariamente, um consumo menor de proteína. O consumidor, pressionado pelo preço alto, procura outras fontes proteicas cujo preço está mais em conta. Por exemplo, nesta situação, pode ocorrer que o preço do frango seja mais em conta na equação da economia doméstica. Assim, idealmente, a população consome mais feijão na época de mais oferta, substituindo o feijão por outros alimentos na época de menos oferta.

DEMANDA DE MERCADO

Considere uma utilidade qualquer U que pode ser um bem ou um serviço. A demanda D dessa utilidade pode ser entendida como a soma de todas as quantidades dessa mesma utilidade que os consumidores estarão dispostos a adquirir a um preço P, num determinado período de tempo, que pode ser um dia, um mês ou um ano.

A função demanda é a função que a cada preço P associa a demanda D correspondente. A representação gráfica dessa função é referida como a curva de demanda ou curva de procura dessa utilidade.

Veja que a demanda (ou procura) a que nos referimos corresponde ao conjunto de todos os compradores da utilidade e não a um comprador individual. Portanto, a demanda de mercado é obtida pelo somatório de todas as demandas de consumidores individuais. Vamos dar um exemplo que pode esclarecer esta situação, considerando primeiramente o caso simples de demanda individual para depois considerar o caso geral.

DEMANDA INDIVIDUAL

Vamos tomar como exemplo a carne de boi e estudar o conceito de demanda individual para este item de consumo. Vamos nos fixar num período de consumo semanal de uma família cuja fonte de renda é o salário do seu chefe, o Sr. Pedro. A demanda da família, durante uma semana, representa a quantidade de carne bovina que Pedro estaria disposto a adquirir a vários preços alternativos. Por exemplo, se o preço for R$ 1,00 por quilo, Pedro estaria disposto a adquirir no máximo 10kg. Se o preço for aumentado para R$ 2,00 o quilo, Pedro estaria disposto a adquirir no máximo 8 quilos por semana. E assim sucessivamente, a medida que o preço de oferta sobe, o chefe de família manifesta menor desejo de adquirir o produto. A **Tabela 16.1** mostra na primeira coluna o preço de oferta do produto e na segunda coluna a quantidade máxima por semana que Pedro estaria disposto a adquirir pelo preço estipulado.

Preço (R$/quilo)	Quantidade (Quilo/semana)
1	10
2	8
3	6
4	4
5	2

Tabela 16.1: Demanda de uma família pela carne de boi.

A primeira coluna representa a oferta, caracterizando o preço P do produto, enquanto que a coluna da direita representa a demanda D pelo produto a um preço P. Portanto, a demanda D é uma função do preço P. A partir dos dados da tabela podemos descrever globalmente a função demanda. A idéia é que uma vez definida a função, ela pode predizer qual é a quantidade de carne de boi que Pedro compraria se o preço fosse um valor não constante na **Tabela 16.1**. Vamos colocar os dados da tabela em um gráfico, obtendo o que denominamos a curva de demanda. Veja a **Figura 16.1**, a seguir.

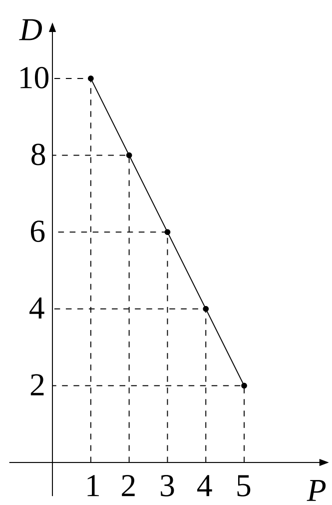


Figura 16.1: Curva de demanda para carne de boi.

Examinando o gráfico, concluímos que a função que traduz a demanda D em função do preço P é dada pela equação:

$$D = -2P + 12\,,$$

onde $P \in (0, +\infty)$.

Note que o preço sendo sempre positivo, o domínio de definição da função é o conjunto dos números maiores que zero.

A construção da curva de demanda, representada pelo gráfico da função demanda, permite prever o comportamento do consumidor. Por exemplo, se a oferta da carne bovina for colocada a R\$ 2,40 o quilo ou a R\$ 5,80 o quilo, então o chefe de família estaria disposto a adquirir no máximo, respectivamente, 7,2 quilos ou 0,40 quilos (400 gramas). Veja as contas.

$$\begin{array}{llllllll} P = 2,40 & \text{em} & D = -2P + 12 & \Rightarrow & D = -2(2,40) + 12 & \Rightarrow & D = 7,20; \\ P = 5,80 & \text{em} & D = -2P + 12 & \Rightarrow & D = -2(5,80) + 12 & \Rightarrow & D = 0,40\,. \end{array}$$

Note que o preço da carne bovina não pode atingir o preço $P =$ R\$ 6,00, sob pena da demanda D ser nula. Examine o gráfico e faça contas com a função demanda para comprovar esse fato.

Com este exemplo que caracterizou uma demanda individual para um certo produto num período determinado, podemos passar ao caso geral da demanda de mercado, que é o conceito correto trabalhado em Economia. Para encontrar a demanda de mercado, basta somar os valores das demandas individuas. Por isto a função demanda de mercado é a soma de todas as funções demandas individuais.

✍

i. No nosso exemplo obtivemos a demanda D como uma função linear afim, cuja variável independente é o preço P. Evidentemente que nos casos concretos esta função é muito complicada, uma vez que é influenciada por fatores de difícil controle como, por exemplo, o desejo subjetivo dos consumidores em adquirir o produto, a renda dos consumidores, a política global do governo, etc.

ii. Em Economia, a representação gráfica da função demanda é costumeiramente realizada invertendo os eixos, colocando preços no eixo vertical e demanda no eixo horizontal. Assim, trabalhando o exemplo anterior, onde $D = -2P + 12$, podemos expressar D em função de P e encontrar que

$$P = -\frac{1}{2}D + 6\,.$$

A representação gráfica com os eixos invertidos fica então como mostrado na **Figura 16.2**.

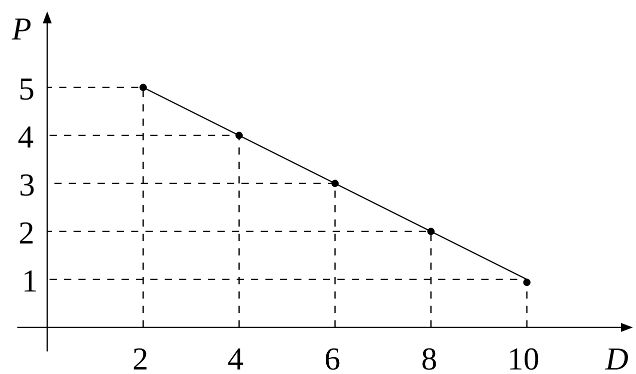


Figura 16.2: O preço como função da demanda.

Vamos ver mais um exemplo.

Exemplo 16.1

A função $D = 16 - P^2$ representa a demanda de mercado D de um produto em função do preço P.

Note que a equação que representa a função demanda só tem sentido econômico, quando os preços e as demandas têm valores positivos. Essas condições determinam o domínio da função demanda. Portanto,

$$P > 0 \quad \text{e} \quad D > 0 \quad \Rightarrow \quad P > 0 \quad \text{e} \quad 16 - P^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad P > 0 \quad \text{e} \quad P < 4\,.$$

Logo, $(0,4)$ é o intervalo de números reais que define o domínio da função demanda D, ou seja, $P \in (0,4)$.

O gráfico da função é parte de uma parábola e representa a curva de demanda. Veja a **Figura 16.3** a seguir.

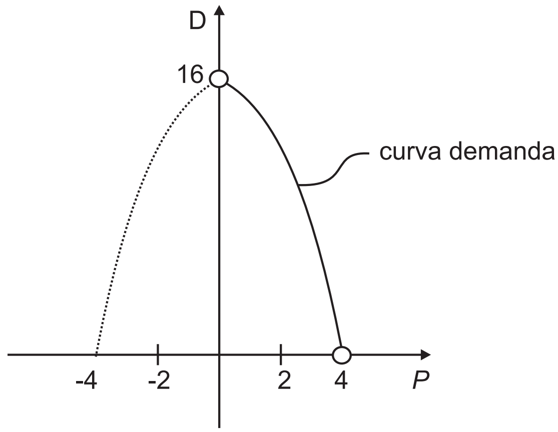


Figura 16.3: Curva de demanda de $D = 16 - P^2$.

Exemplo 16.2

Considere a função quadrática $D = -2P^2 + 9P + 18$, em que P representa o preço unitário de um certo produto, e D a demanda de mercado correspondente num certo período de tempo. Vamos determinar a curva de demanda e analisar seus aspectos principais.

Em primeiro lugar, vamos encontrar as raízes da equação quadrática $-2P^2 + 9P + 18 = 0$.

Temos que $a = -2$, $b = 9$ e $c = 18$. Portanto,

$$\Delta = b^2 - 4ac = 225\,.$$

Então,

$$P = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{-9 \pm 15}{-4} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P_1 = & 6 \\ P_2 = & -\dfrac{3}{2} \end{cases} .$$

O vértice V da parábola é definida por

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right) \Rightarrow V = \left(\frac{9}{4}, \frac{225}{8} \right).$$

Além disso, como a equação que representa a função demanda só tem sentido econômico, quando os preços e as demandas têm valores positivos. Portanto, temos que

$$P > 0 \quad \text{e} \quad D > 0 \quad \Rightarrow \quad P \in (0,6)\,.$$

Logo, $(0,6)$ é o intervalo de números reais que define o domínio da função demanda D.

O gráfico da função é parte de uma parábola e representa a curva de demanda. Veja a **Figura 16.4** a seguir.

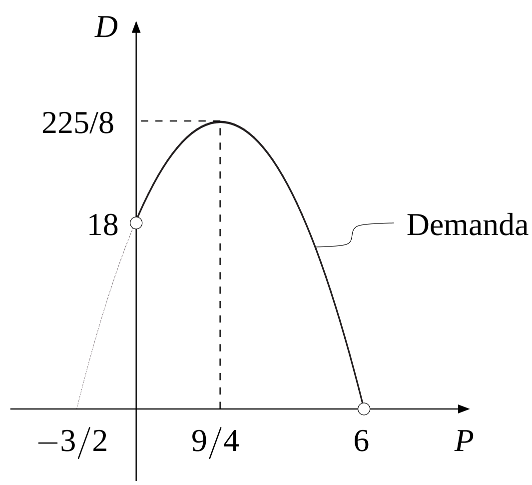


Figura 16.4: Curva de demanda de $D = -2P^2 + 9P + 18$.

Exemplo 16.3

Uma pesquisa de mercado procura estabelecer a curva de demanda para um certo bem de consumo B. Veja a **Tabela 16.2** que assinala os valores da demanda D do mercado correspondentes aos preços de oferta P.

Preço P (R$ por unidade)	Demanda D
20	320
40	250
60	150
80	100

Tabela 16.2: Pesquisa de demanda de mercado.

Dado um conjunto de 4 pontos no plano $A_1 = (20,320)$, $A_2 = (40,250)$, $A_3 = (60,150)$ e $A_4 = (80,100)$, a reta que melhor se aproxima desses pontos é definida por $y = ax + b$, onde,

$$a = \frac{\sum xy - n\overline{x}\overline{y}}{\sum x^2 - n\left(\overline{x}\right)^2} \qquad \text{e} \qquad b = \overline{y} - a\overline{x}\,.$$

Nesta fórmula os símbolos significam:

$\sum xy =$ é a soma dos n produtos $x_i y_i$.

$\sum x^2 =$ é a soma dos n quadrados x_i^2.

$\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$, $\overline{y} = \dfrac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}$ são médias aritméticas.

Para melhor organizar os cálculos, tendo em vista calcular os somatórios, lançamos mão de uma tabela. Veja a tabela a seguir.

Pontos	x_i	y_i	$x_i\,y_i$	x_i^2
A_1	20	320	6400	400
A_2	40	250	10000	1600
A_3	60	150	9000	3600
A_4	80	100	8000	6400
$\sum$	200	820	33400	12000

Também

$$\overline{x} = \frac{200}{40} = 50$$

$$\overline{y} = \frac{820}{4} = 205$$

Então:

$$\sum xy - n\overline{x}\overline{y} = 33400 - 4 \times 50 \times 205 = 33400 - 41000 = -7600$$

$$\sum x^2 - n\left(\overline{x}\right)^2 = 12000 - 4 \times 2500 = 2000$$

Logo,

$$a = \frac{-7600}{2000} = \frac{-38}{10} = -3,8 \qquad \text{e} \qquad b = \overline{y} - a\overline{x} = 205 + \frac{38}{10} \times 50 = 395$$

e então a reta procurada é

$$y = -3,8x + 395\,.$$

Veja a representação da solução do problema na **Figura 16.5** a seguir.

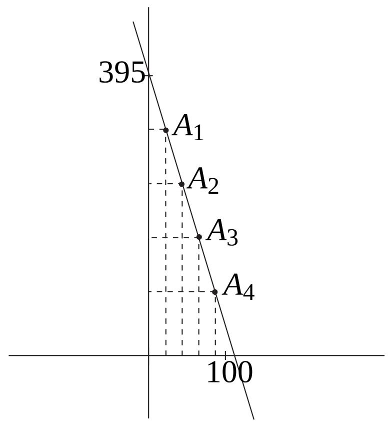


Figura 16.5: Reta que aproxima 4 pontos.

Exemplo 16.4

O diretor de um museu em Londres observou que, aos domingos, quando o preço da entrada é R$ 4,00, em média, o número de visitantes diários é 320 e quando o preço para a entrada de domingo aumenta para R$ 6,00, em média, o número de visitantes cai para 240. Supondo que a demanda D é uma função linear afim do preço P, encontre a função e represente a curva de demanda.

Solução: Como se trata de uma função linear afim, então, para determinados números reais a e b temos que

$$D = aP + b\,.$$

Como $(P,D) = (4,320)$ e $(P,D) = (6,240)$, então, substituindo na função demanda encontramos que

$$320 = 4a + b \quad \text{e} \quad 240 = 6a + b \quad \Rightarrow \quad a = -40 \quad \text{e} \quad b = 480\,.$$

Assim,

$$D = -40P + 480\,,$$

é a função procurada, e o gráfico pode ser observado na **Figura 16.6** a seguir.

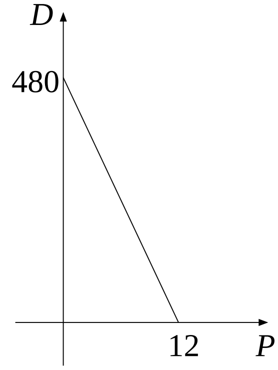


Figura 16.6: Demanda por ingressos no museu.

OFERTA DE MERCADO

Considere uma utilidade qualquer U que pode ser um bem ou um serviço. A oferta Q dessa utilidade pode ser entendida como a soma de todas as quantidades dessa mesma utilidade que os produtores estarão dispostos a colocar à venda no mercado a um preço P, num determinado período de tempo.

A função oferta é uma função que associa a cada preço P fixado a oferta Q correspondente. A representação gráfica dessa função é referida como a curva de oferta dessa utilidade.

Veja que a oferta a que nos referimos corresponde à de todos os produtores da utilidade e não de um produtor individual. Portanto, é evidente que a oferta de mercado é obtida pelo somatório de todas as ofertas dos produtores individuais. Vamos dar um exemplo para esclarecer esta situação.

Exemplo 16.5

A função linear afim $Q = -10 + P$, com $10 < P \leq 40$, representa a oferta de mercado Q de uma certa utilidade ao preço unitário P.

Vamos construir a curva de oferta. Acompanhe pela **Figura 16.7**. Inicialmente, encontramos que se

$$\begin{array}{lcl} P=20 \quad \text{e} \quad Q=-10+P & \Rightarrow & Q=10\,; \\ P=40 \quad \text{e} \quad Q=-10+P & \Rightarrow & Q=30\,. \end{array}$$

Logo, $(P,Q)=(20,10)$ e $(P,Q)=(40,30)$ são pontos da curva de oferta e determinam o gráfico da função oferta. Veja a **Figura 16.7**.

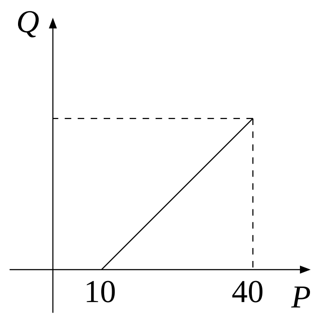


Figura 16.7: Gráfico da oferta $Q=-10+P$.

Exemplo 16.6

A função quadrática $Q=2P^2+5P-3$, representa a oferta de mercado Q de uma certa utilidade ao preço unitário P, em que o preço máximo que os consumidores estão dispostos a pagar é P = R$ 2,00.

Vamos construir a curva de oferta. Acompanhe pela **Figura 16.8**. Inicialmente, vamos resolver a equação $2P^2+5P-3=0$. Temos que

$$\Delta=5^2-4(2)(-3)=49 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=7\,.$$

Logo

$$P=\frac{-5\pm 7}{4} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} P_1= & \dfrac{1}{2} \\ P_2= & -3. \end{array} \right.$$

Note que o vértice $V = (P_v, Q_v)$ tem como abcissa P_v a média aritmética das raízes P_1 e P_2. Ou seja,

$$P_v = \frac{P_1 + P_2}{2} = \frac{-3 + \frac{1}{2}}{2} = -\frac{5}{4}\,.$$

Continuando o cálculo do vértice, encontramos que

$$P_v = -\frac{5}{4} \quad \text{e} \quad Q = 2P^2 + 5P - 3 \quad \Rightarrow \quad Q_v = -\frac{49}{8}\,.$$

Portanto,

$$V = (P_v, Q_v) = \left(-\frac{5}{4}, -\frac{49}{8}\right)$$

é o vértice da parábola.

Com esses dados podemos construir a parábola que representa a curva de oferta. Acompanhe pela **Figura 16.8**.

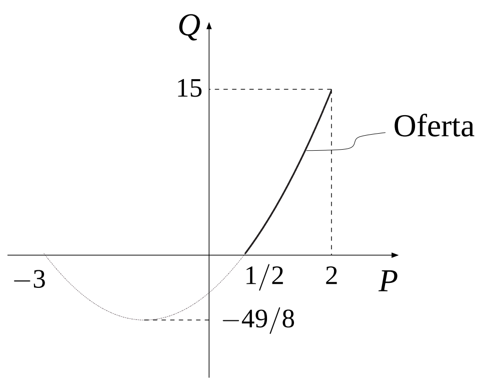


Figura 16.8: Gráfico da oferta $Q = 2P^2 + 5P - 3$.

PREÇO DE EQUILÍBRIO E QUANTIDADE DE EQUILÍBRIO

O preço de equilíbrio P_E para um dado bem ou utilidade é o preço para o qual a demanda e oferta de mercado dessa utilidade coincidem. A quantidade correspondente ao preço de equilíbrio é denominada quantidade de equilíbrio, representada pelo símbolo Q_E. Veja um exemplo.

Exemplo 16.7

Considere a demanda de mercado $D = 225 - 2P$ e a oferta $Q = P - 21$. Vamos determinar os gráficos das curvas de demanda e de oferta e os valores P_E e Q_E, respectivamente, o preço e a quantidade de equilíbrio.

Solução: Para determinar o preço de equilíbrio P_E é suficiente encontrar o preço P para o qual $D = Q$, ou seja,

$$225 - 2P = P - 21 \quad \Rightarrow \quad 225 + 21 = P + 2P \quad \Rightarrow \quad P_E = 82\,.$$

Uma vez determinado o preço de equilíbrio P_E, a quantidade de equilíbrio Q_E pode ser calculada:

$$Q = P - 21 \quad \text{e} \quad P_E = 82 \quad \Rightarrow \quad Q_E = P_E - 21 \quad \Rightarrow \quad Q_E = 61\,.$$

Veja a seguir, na **Figura 16.9**, a representação gráfica das curvas de demanda e de oferta com os valores do preço de equilíbrio e quantidade de equilíbrio assinalados.

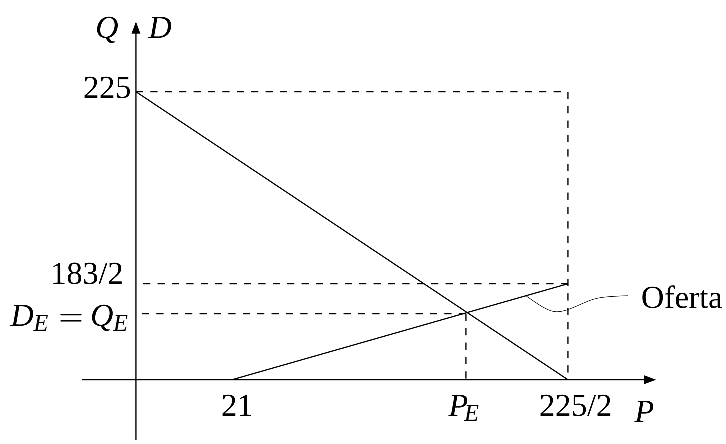


Figura 16.9: O preço e a quantidade de equilíbrio *I*.

Exercício 16.1

Considere a demanda de mercado $D = 136 - 2P$ e a oferta $Q = 10P - 80$. Faça os gráficos das curvas de demanda e de oferta e determine P_E e Q_E, respectivamente, o preço e a quantidade de equilíbrio.

Exemplo 16.8

Considere a demanda de mercado $D = 600 - 2P$ e a oferta $Q = P^2 - 52P$. Vamos determinar os gráficos das curvas de demanda e de oferta e os valores P_E e Q_E, respectivamente, o preço e a quantidade de equilíbrio.

Solução: Para determinar o preço de equilíbrio P_E é suficiente encontrar o preço P para o qual $D = Q$, ou seja,

$$600 - 2P = P^2 - 52P \Rightarrow P^2 - 50P - 600 = 0\,.$$

Resolvendo a equação, encontramos os valores $P = -10$ e $P = 60$. Como o preço deve ser positivo, concluímos que

$$P_E = 60\,.$$

Um vez determinado o preço de equilíbrio P_E, a quantidade de equilíbrio Q_E pode ser calculada:

$$D = 600 - 2P \quad \text{e} \quad P_E = 60 \quad \Rightarrow \quad Q_E = 60 - 2P_E \quad \Rightarrow \quad Q_E = 480\,.$$

Veja a seguir, na **Figura 16.10**, a representação gráfica das curvas de demanda e de oferta com os valores do preço de equilíbrio e a quantidade de equilíbrio assinalados.

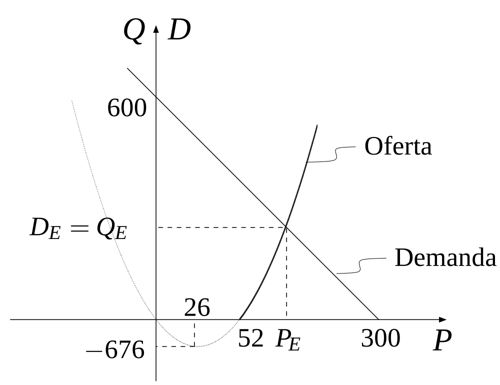


Figura 16.10: O preço e a quantidade de equilíbrio *II*.

Exercício 16.2

Considere a demanda de mercado $D = P^2 - 18P + 10$ e a oferta $Q = 12P - 72$. Faça os gráficos das curvas de demanda e de oferta e determine P_E e Q_E, respectivamente, o preço e a quantidade de equilíbrio.

Respostas

Aula 1

Respostas dos Exercícios

Exercício 1.1

a) F b) V c) F

d) V e) V

Exercício 1.2

Resposta: item c)

Respostas dos Exercícios

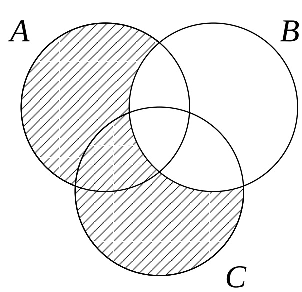
1.1. $A - B = \{-1, 13/3\}$

$$A \times (A-B) = \left\{(-1,-1), \left(-1, \tfrac{13}{3}\right), (1,-1), \left(1, \tfrac{13}{3}\right), \left(\tfrac{2}{3}, -1\right), \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{13}{3}\right), \left(\tfrac{13}{3}, -1\right), \left(\tfrac{13}{3}, \tfrac{13}{3}\right)\right\}$$

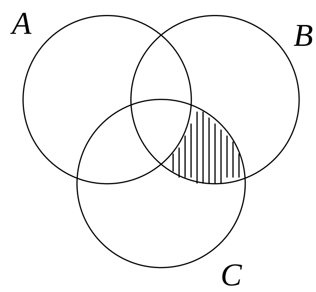
1.2. $B \times (B-A) = \{(4,4),(4,5),(5,4),(5,5)\}$

$$A \times (A-B) = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$$

1.3. a) $(A \cup C) - B$



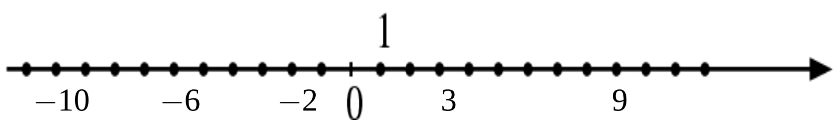
b) $(B \cap C) - A$



Aula 2

Respostas dos Exercícios

Exercício 2.1



Exercício 2.2

a) -1 b) -7 c) Não

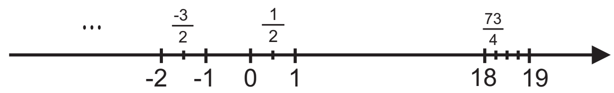
Exercício 2.3

F V V

Exercício 2.4

a) $\dfrac{14}{15}$ b) $-\dfrac{10}{21}$ c) $-\dfrac{25}{21}$

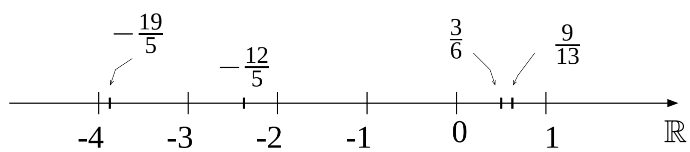
Exercício 2.5



$$\frac{73}{4} = 18 + \frac{1}{4}, \; \frac{-3}{2} = -2 + \frac{1}{2}$$

Exercício 2.6

a) $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \; \frac{-12}{5} = -3 + \frac{3}{5}$ e $\frac{19}{-5} = -4 + \frac{1}{5}$



b) $\frac{19}{-5} < \frac{-12}{5} < \frac{3}{6} < \frac{9}{13}$

c) Basta mostrar que $\frac{4}{20} < \frac{13}{64} \Leftrightarrow \frac{1}{5} < \frac{13}{64} \Leftrightarrow 64 < 65$

Respostas dos Exercícios

2.1. a) $18a$ b) $11x$ c) $-27m$ d) $3x+4y$ e) $14x+11$

2.2. 33

Aula 3

Respostas dos Exercícios

Exercício 3.1

- Proposição
- Proposição
- Proposição
- Não é proposição

- Proposição
- Proposição
- Proposição
- Proposição
- Proposição
- Não é proposição
- Proposição
- Não é proposição
- Proposição
- Não é proposição
- Proposição
- Não é proposição

Exercício 3.2

- A pêra não é uma fruta.
- Todas as pêras não são longas.
- Algumas pessoas não gostam de dançar.
- Todas as pessoas têm carro.
- Algumas pessoas não têm televisores ou não têm aparelhos de vídeo.
- O dinheiro traz a felicidade.
- Há desfiles de escola de samba sem mestre-sala ou sem porta-bandeira.
- Dom Quixote não é um personagem criado por Miguel de Cervantes.
- Existe amor que não é forte.
- Há amor fraco.

Exercício 3.3

- Qualquer que seja o número inteiro inteiro x, $x^2 \leq 0$.
- Para todo número real α, $\mathrm{tg}^2\alpha$ é igual a $\sec^2\alpha$ menos um.
- Existe um número real x cuja raiz quadrada é 4.
- Existe um número natural x tal que 2 divide x ou 3 divide x.
  Solução alternativa: existe um número natural x divisível por 2 ou divisível por 3.
- Existe número real x, tal que $\operatorname{sen} x$ é igual a metade da raiz quadrada de 3.
- Para todo número racional x, existem números inteiros p e q, tais que x é igual a p dividido por q.
- Existe número racional x, tal que x elevado ao quadrado é igual a nove vinte cinco avos.
- Para todo número real r, r maior que zero, existe número natural k, tal que, se n é maior do que k, então 1 dividido por n é menor do que r.

Aula 4

Respostas dos Exercícios

Exercício 4.1

a) $p \vee \sim q$

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$
V	V	F	V
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V

b) $(\sim p) \vee (\sim q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \vee (\sim q)$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

c) $(\sim p) \wedge (\sim q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

d) $\sim (\sim p \wedge q)$

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$\sim (\sim p \wedge q)$
V	V	F	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	F	V

e) $(p \vee \sim q) \wedge \sim p$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$(p \vee \sim q) \wedge (\sim p)$
V	V	F	F	V	F
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

f) $p \wedge (q \vee \sim q)$

p	q	$\sim q$	$(q \vee \sim q)$	$p \wedge (q \vee \sim q)$
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F

g) $(p \wedge \sim q) \vee r$

p	q	r	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$(p \wedge \sim q) \vee r$
V	V	V	F	F	V
V	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	V
F	F	F	V	F	F

h) $(\sim p \vee q) \vee \sim r$

p	q	r	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$\sim r$	$(\sim p \vee q) \wedge \sim r$
V	V	V	F	V	F	F
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Exercício 4.2

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee q$	$p \vee r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	F	F
F	F	V	F	F	V	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Exercício 4.3

Mostrar as leis de Absorção através de tabelas-verdade

$p \vee (p \wedge q) \equiv p$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$	p
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	F	F
F	F	F	F	F

$p \wedge (p \vee q) \equiv p$

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$	p
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	F	F
F	F	F	F	F

Exercício 4.4

a) $\sim (p \wedge \sim p)$

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$\sim (p \wedge \sim p)$
V	F	F	V
F	V	F	V

b) $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

c) $p \Rightarrow (p \vee q)$

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow p \vee q$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

d) $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

p	q	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Aula 5

Respostas dos Exercícios

Exercício 5.1

$p =$ Alfredo come lagosta

$q =$ Alfredo fica feliz

premissas:	conclusão:
$p \Rightarrow q$	q
p	

Este argumento é válido.

Exercício 5.2

$p =$ Eu trabalho com afinco

$q =$ Eu fico batendo papo com os amigos

$r =$ Eu termino de pintar minha cerca

premissas:	conclusão:
$p \Rightarrow r$	q
$\sim q \Rightarrow p$	
$\sim r$	

Verificar que $\underbrace{(p \Rightarrow r)}_{a} \wedge \underbrace{(\sim q \Rightarrow p)}_{b} \wedge \underbrace{(\sim r)}_{c} \Rightarrow q$

p	q	r	$\sim q$	$\sim r$	a	b	$a \wedge b$	$(a \wedge b) \wedge c$	$a \wedge b \wedge c \Rightarrow q$
V	V	V	F	F	V	V	V	F	V
V	V	F	F	V	F	V	F	F	V
V	F	V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	F	V	V	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V	V	F	V
F	V	F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	V	F	F	F	V

O argumento é válido.

Exercício 5.3

$p =$ Eu como agrião todos os dias

$q =$ Eu viverei mais do que 80 anos

premissas:	conclusão:
$p \Rightarrow q$	$\sim q$
$\sim q$	

Verificar $\quad \underbrace{p \Rightarrow q}_{a} \wedge (\sim p) \Rightarrow \sim q$

p	q	$\sim p$	a	$a \wedge (\sim p)$	$a \wedge (\sim p) \Rightarrow \sim q$
V	V	F	V	F	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	F
F	F	V	V	V	V

O argumento não é válido.

Exercício 5.4

$p =$ Eu dirijo meu carro

$q =$ Eu ultrapasso os 80 km/h

$r =$ Eu provocarei acidentes

premissas:	conclusão:
$(p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim r$	r
$p \wedge q$	

Verificar: $\quad ((\underbrace{(p\wedge\sim q)\Rightarrow\sim r)}_{a}\wedge\underbrace{(p\wedge q)}_{b})\Rightarrow r$

p	q	r	$\sim q$	$p\wedge\sim q$	$\sim r$	a	b	$a\wedge b$	$a\wedge b\Rightarrow r$
V	V	V	F	F	F	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	V	V	V	F
V	F	V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	V	V	V	F	F	V
F	V	V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	F	F	F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	F	F	V	F	F	V
F	F	F	V	F	V	V	F	F	V

O argumento não é válido.

Exercício 5.5

$p =$ Faz bom tempo

$q =$ Dá praia

$r =$ Eu levo minha bola de vôlei

$s =$ Mariana fica super feliz

premissas:	conclusão:
$p\Rightarrow q$	$\sim r$
$r\Rightarrow s$	
$q\wedge\sim s$	

Verificar: $\quad (\underbrace{(p\Rightarrow q)}_{a}\wedge\underbrace{(r\Rightarrow s)}_{b}\wedge\underbrace{(q\wedge\sim s)}_{c}\Rightarrow\sim r$

p	q	r	s	$\sim s$	a	b	c	$a \wedge b$	$a \wedge b \wedge c$	$\sim r$	$a \wedge b \wedge c \Rightarrow \sim r$
V	V	V	V	F	V	V	F	V	F	F	V
V	V	V	F	V	V	F	V	F	F	F	V
V	V	F	V	F	V	V	F	V	F	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	F	F	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	F	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V	F	F	F	V	V
V	F	F	F	V	F	V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	V	V	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	F	V	F	F	F	V
F	V	F	V	F	V	V	F	V	F	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	F	V	V	F	F	F	F	F	V
F	F	F	V	F	V	V	F	V	F	V	V
F	F	F	F	V	V	V	F	V	F	V	V

O argumento é válido.

Exercício 5.6

$p =$ Maria vem

$q =$ Joana vem

r Carla vem

premissas:	conclusão:
$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow q$
$\sim r \Rightarrow \sim q$	

Verificar: $\quad ((\underbrace{p \Rightarrow q)}_{a} \wedge \underbrace{(\sim r \Rightarrow \sim q)}_{b} \Rightarrow \underbrace{(p \Rightarrow r)}_{c}$

p	q	r	$(p \Rightarrow q)$	$\sim r$	$\sim q$	$\sim r \Rightarrow \sim q$	$a \wedge b$	$p \Rightarrow r$	$a \wedge b \Rightarrow c$
V	V	V	V	F	F	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	F	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V	V	F	F	V
F	V	V	V	F	F	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V	V

O argumento é válido.

Exercício 5.7

$p =$ Luiz sabe poupar dinheiro

$q =$ Luiz fica rico

$r =$ Luiz compra um carro novo

premissas:	conclusão:
$p \Rightarrow q$	q
$q \Rightarrow r$	
r	

Verificar: $\underbrace{(p \Rightarrow q)}_{a} \wedge \underbrace{(q \Rightarrow r)}_{b} \wedge r \Rightarrow p$

p	q	r	a	b	$a \wedge b$	$a \wedge b \wedge r$	$a \wedge b \wedge r \Rightarrow p$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	F
F	V	F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V	F
F	F	F	V	V	V	F	V

O argumento não é válido.

Aula 6

Respostas dos Exercícios

Exercício 6.1

a) $0,334 = \dfrac{334}{1000} > \dfrac{1}{3}$, uma vez que $3 \times 334 > 1000$

b) $0,334 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{334}{1000} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1002 - 1000}{3000} = \dfrac{2}{3000} < \dfrac{1}{1000}$

c) Basta examinar o resultado em b).

Exercício 6.2

a) $\dfrac{-187}{13} = -15 + \dfrac{8}{13} \Rightarrow q = -15$

Exercício 6.3

A resposta é 24,8%.

Exercício 6.4

Considere que C é o total de clientes. Logo, C corresponde a 100% dos clientes. Então, $(100-32)\% = 68\%$ corresponde ao percentual de pessoas físicas. Segundo o enunciado do exercício, 2040 constitui o total de pessoas físicas, ou seja, 68% do total C de clientes. Essas informações permitem escrever

$$68\% \times C = 2040 \Leftrightarrow \frac{68}{100} \times C = 2040 \Leftrightarrow C = 3000\,.$$

Enfim, a agência possui 3000 clientes.

Exercício 6.5

Seja M o valor obtido após o aumento percentual. Então,

$$(100+3,4)\% = 103,4\% = \frac{103,4}{100} = 1,034\,.$$

Logo,

$$M = 400 \times 1,034 = 413,6\,.$$

Exercício 6.6

O total correspondente ao serviço será de 10% de R$ 26,00, ou seja, o acréscimo é de $0,10 \times 26,00 = 2,60$. Logo, o total da despesa corresponde a

$$26,00 + 2,60 = 28,60 \Leftrightarrow \text{ Total de R\$}28,60\,.$$

Exercício 6.7

Denominando por M o valor final, então

$$M = 0,90 \times 0,80 \times 0,70 \times 2000 = 1008 \Rightarrow M = \text{R\$}1.008,00\,.$$

Exercício 6.8

Representaremos os preços dos produtos A, B e C por a, b e c, respectivamente. Os dados do exercício implicam que

$$a = 1,3b\,;\, b = 0,8c \Rightarrow a = 1,3 \times 0,8c \Leftrightarrow a = 1,04c\,.$$

Além disso, também,

$$a+b+c = 28,40 \Leftrightarrow 1,04c+0,8c+c = 28,40 \Leftrightarrow 2,84c = 28,40\,.$$

Portanto,

$$c = \frac{28,4}{2,84} \Rightarrow c = \text{R\$ } 10,00\,.$$

Usando esse último dado e as equações anteriores, encontramos

$$a = 1,04 \times 10,00 \Leftrightarrow a = \text{R\$ } 10,40 \text{ e } b = 0,8 \times 10,00 \Leftrightarrow b = \text{R\$}8,00\,.$$

Portanto, os preços são: $a = \text{R\$}10,40$, $b = \text{R\$}8,00$ e $c = \text{R\$}10,00$.

Exercício 6.9

O preço final de venda V do carro pode ser calculado através de

$$V = (1-0,05) \times (1-0,1) \times 40000 \Leftrightarrow V = \text{R\$}34.200,00\,.$$

Exercício 6.10

Primeiro, temos que calcular o salário bruto S do vendedor. Como o salário bruto, com um decréscimo de 10%, resulta em R$ 4.500,00, então

$$(1-0,1) \cdot S = 4500 \Leftrightarrow 0,9 \cdot S = 4500 \Leftrightarrow S = \text{R\$}5.000,00\,.$$

Como a parte fixa do salário bruto é de R$ 2.300,00, o valor correspondente ao ganho através de comissões será de R$ 2.700,00. Com estes dados, se o valor das vendas for representado por V, então a aplicação de 3% sobre a parte de V que excede R$ 10.000,00 representa R$ 2.700,00 (a parte da comissão). Logo,

$$3\% \cdot (V - 10000) = 2700 \Leftrightarrow 3V - 30000 = 270000 \Leftrightarrow V = 100000\,.$$

Portanto, o total de vendas correspondeu a R$ 100.000,00.

Respostas dos Exercícios

6.1. a) $-2,25$ b) $-6,\overline{428571}$ c) $4,4\overline{6}$ d) 65,8
e) 0,7

6.2. $-3,22 < -3,\overline{217} < 0,272 < \dfrac{13}{29}$

6.3. $-0,03$

Aula 7

Respostas dos Exercícios

Exercício 7.1

a) 125 b) 625 c) 1000
d) 1

Exercício 7.2

a) 3^{10} b) 2^2 c) 3^4 d) 6^{12}

Exercício 7.3

a) $(\sqrt{2} \div \sqrt{3})^{-4} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^{-4} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^{4} = \dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{9}{4}$

b) $\left((\sqrt{2})^{-2}\right)^{-3} = \left[\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right]^{-3} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$

c) $$\begin{aligned}(\sqrt{2}-5)^2 &= (\sqrt{2})^2+2\cdot\sqrt{2}\cdot(-5)+(-5)^2 = \\ &= 2-10\sqrt{2}+25 = 27-10\sqrt{2}\end{aligned}$$

Exercício 7.4

a) $\sqrt[3]{-250}=\sqrt[3]{-2\cdot 5^3}=\sqrt[3]{2\cdot(-5)^3}=-5\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt[4]{48}=\sqrt[4]{2^4\times 3}=2\sqrt[4]{3}$

c) $\sqrt[5]{-512}=\sqrt[5]{-2^9}=\sqrt[5]{(-2)^5\cdot 2^4}=-2\sqrt[5]{2^4}=-2\sqrt[5]{16}$

Exercício 7.5

a) $(-500)^{\frac{1}{3}}=(-4\cdot 5^3)^{\frac{1}{3}}=[4\cdot(-5)^3]^{\frac{1}{3}}=4^{\frac{1}{3}}\cdot(-5)^{\frac{3}{3}}=-5\sqrt[3]{4}$

b) $(-32)^{-\frac{1}{5}}=(-2^5)^{-\frac{1}{5}}=[(-2)^5]^{-\frac{1}{5}}=(-2)^{-1}=\left(\dfrac{1}{-2}\right)^1=-\dfrac{1}{2}$

Exercício 7.6

a) 26 b) -37 c) 7 d) -32 e) 0

Respostas dos Exercícios

7.1. Observe que:

$$\begin{aligned}E &= \frac{\sqrt{3}}{3}\left[\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}-3\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}-2\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\right] = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\left[-(\sqrt{2}-\sqrt{3}+3)\frac{\sqrt{3}}{3}-2\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}\right] = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}+1-\sqrt{3}-2\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}-9}{3}\end{aligned}$$

7.2. a) $$\begin{aligned}(\sqrt{2}-1)^3 &= (\sqrt{2}-1)^2\cdot(\sqrt{2}-1) = (2-2\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = \\ &= (3-2\sqrt{2})(\sqrt{2}-1) = 5\sqrt{2}-7\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-1\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{2}-2} &= \frac{\sqrt{2}-4}{4}\cdot\frac{2(\sqrt{2}+2)}{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)} = \\ &= \frac{\sqrt{2}-4}{4}\cdot(-\sqrt{2}-2) = \frac{3+\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

7.3. a) $5^{3x-2} = 5^0 \Rightarrow 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2}{3}$

b) $x = -9$

c) $x = 0$ ou $x = 1$

7.4. d

7.5. Verificação.

7.6. Observe que:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{1-\sqrt[3]{a}}\right)^6 &= (1-\sqrt[3]{a})^3 = (1-\sqrt[3]{a})^2 \cdot (1-\sqrt[3]{a}) = \\ &= (1-2\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2})(1-\sqrt[3]{a}) = 1-3\sqrt[3]{a}+3\sqrt[3]{a^2}-a = \\ &= 1+3\sqrt[3]{a}\,(\sqrt[3]{a}-1)-a \end{aligned}$$

7.7. a) Veja que

$$(3-2\sqrt{3})(3+2\sqrt{3}) = 3^2 - (2\sqrt{3})^2 = 9 - 12 = -3$$

é um número negativo. Examine cada um dos fatores do produto anterior. Como $3+2\sqrt{3} > 0$ então $3-2\sqrt{3}$ é negativo.

b) Veja que

$$\left(\sqrt{3+\sqrt{3}} - \sqrt{3\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{3+\sqrt{3}} + \sqrt{3\sqrt{3}}\right) =$$

$$= 3 + \sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 3 - 2\sqrt{3},$$

é um número negativo (use o item a)). Como $\sqrt{3+\sqrt{3}} + \sqrt{3\sqrt{3}}$ é positivo, então $\sqrt{3+\sqrt{3}} - \sqrt{3\sqrt{3}}$ é negativo.

Aula 8

Respostas dos Exercícios

Exercício 8.1

A tecla acima de CH e a tecla à direita de VOL.

Exercício 8.2

a) Se $x \in (-1, \sqrt{2}) \Rightarrow -1 < x < \sqrt{2}$. Em particular, $x < 3$. Logo, $x \in (-\infty, 3)$. Isto prova a).

b) Se $x \in (-\sqrt{3}, 10)$, então $-\sqrt{3} < x < 10$. Se $x \in [0, 10\sqrt{2})$, então $0 \leq x < 10\sqrt{2}$. Como $10 < 10\sqrt{2}$, um número real x, para estar simultaneamente em ambos os conjuntos, deve satisfazer $0 \leq x < 10$.

Exercício 8.3

a) Encontramos que

$$2x < -7 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2x < \frac{1}{2} \cdot (-7) \Rightarrow x < -\frac{7}{2}.$$

Logo, todos os números reais menores que $-7/2$ são soluções. Deste modo, o conjunto solução S é dado por $S = \left(-\infty, -\frac{7}{2}\right)$.

b) Encontramos que

$$-13x < -5 \Leftrightarrow 13x > 5 \Leftrightarrow x > \frac{5}{13}.$$

Logo, $S = \left(\frac{5}{13}, \infty\right)$ é o conjunto solução.

Respostas dos Exercícios

8.1. Note que

$$\frac{-13}{12} = -\frac{13 \times 17}{12 \times 17} = -\frac{221}{12 \times 17} \quad \text{e} \quad -\frac{18}{17} = \frac{-18 \times 12}{17 \times 12} = \frac{-216}{17 \times 12}.$$

Sendo $-221 < -216$, então $\dfrac{-13}{12} < \dfrac{-18}{17}$.

Do mesmo modo, aproveitando as contas já feitas, vem que, $216 < 221$ e, então, $\dfrac{18}{17} < \dfrac{13}{12}$. Logo,

$$\frac{-13}{12} < \frac{-18}{17} < \frac{18}{17} < \frac{13}{12}.$$

8.2. Note que

$$-\frac{1}{2} = \frac{-3}{2\times 3} \quad \text{e} \quad -\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{-2\sqrt{3}}{3\times 2}.$$

Agora, $-2\sqrt{3} < -3$. Portanto, $-\dfrac{\sqrt{3}}{3} < -\dfrac{1}{2}$.

Do mesmo modo $\dfrac{7}{5} < \sqrt{2}$, uma vez que $\left(\dfrac{7}{5}\right)^2 < \left(\sqrt{2}\right)^2$.

Ou seja, $\dfrac{49}{25} < 2$. Portanto,

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} < -\frac{1}{2} < \frac{7}{5} < \sqrt{2}.$$

8.3. Mostrar que $3 < \sqrt{10}$ é equivalente a $3^2 < \left(\sqrt{10}\right)^2$ e isto é verdade, pois $9 < 10$.

Por outro lado, $\sqrt{10} < 3,2$ é equivalente a $\left(\sqrt{10}\right)^2 < (3,2)^2 = 10,24$. Portanto,

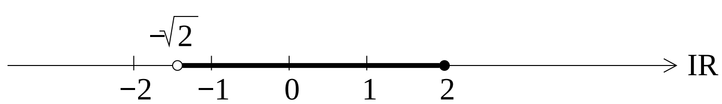
$$3 < \sqrt{10} < 3,2.$$

8.4. Veja que

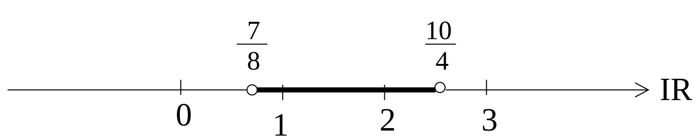
$$\frac{\sqrt{5}}{n} > \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}}{n}\cdot\sqrt{5} > \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{5}{n} > 1.$$

Ou seja, $5 > n$. Portanto, $n = 1, 2, 3$ e 4, satisfazem a desigualdade original.

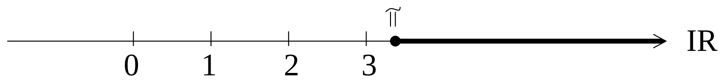
8.5. a) A região da reta é:



b) A região da reta é:



c) A região da reta é:



8.6. a) $[-2,0)$, b) $(-1,1)$, c) $(-\infty,1]$, d) $\left[\frac{-\sqrt{2}}{2},\infty\right)$

8.7. a) $\sqrt{2}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-1\right) < \sqrt{2}\left(\sqrt{2}x-1\right) \Rightarrow x-\sqrt{2} < 2x-\sqrt{2} \Rightarrow -x<0 \Rightarrow x>0.$

Conjunto solução: $S=\{x\in\mathbb{R}; x>0\}=(0,\infty)$.

b) Em primeiro lugar, é obrigatório $x\neq 0$. Temos que

$$\frac{1}{x}-1>0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x}>0\,.$$

As soluções, portanto, ocorrem quando x e $(1-x)$ possuem o mesmo sinal. Vamos fazer a tabela de sinais.

	$-\infty$ a 0	0 a 1	1 a ∞
$1-x$	+	+	−
x	−	+	+
$\frac{1-x}{x}$	−	+	−

Logo, o conjunto solução é $S=\{x\in\mathbb{R}; -1<x<1\}=(-1,1)$.

8.8. a) Falso. Note que $-2\notin(-2,\infty)\cup(-\infty,-2)$.

b) Falso. Note que $\frac{3}{2}\in[1,\infty)$ e $\frac{3}{2}\notin\mathbb{N}$.

c) Verdadeiro. O número 1 pertence a ambos os conjuntos.

8.9. Note que

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}+n<\frac{5}{\sqrt{2}} \iff n<\frac{5}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}} \iff$$

$$n^2<\left(\frac{5}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{25}{2}+\frac{10}{\sqrt{10}}+\frac{1}{5}=\frac{25}{2}+\frac{1}{5}+\sqrt{10}.$$

Ou seja, é preciso encontrar o maior n natural tal que

$$n^2 < \frac{127}{10} + \sqrt{10} \quad (*)$$

Para avaliar o segundo membro da desigualdade, usamos o fato de que $3,2 > \sqrt{10} > 3$ para encontrar que

$$12,7+3 < \frac{127}{10} + \sqrt{10} < 12,7+3,2 \Leftrightarrow 15,7 < \frac{127}{10} + \sqrt{10} < 15,9\,.$$

Com estes dados e usando a desigualdade $(*)$, concluímos que $n = 3$ é o maior número natural tal que $-\frac{1}{\sqrt{5}} + n < \frac{5}{\sqrt{2}}$.

8.10. a) Como os números envolvidos são positivos, multiplicando ambos os membros por $\sqrt{5}+\sqrt{3}$, a desigualdade fica equivalente a

$$1 < 2\sqrt{2}\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right) = 2\left(\sqrt{10}+\sqrt{6}\right).$$

É claro que a desigualdade é verdadeira.

b) $\sqrt{3\sqrt{3}} < \frac{7}{3} \Leftrightarrow 3\sqrt{3} < \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{49}{9}$. Ou ainda,

$$27\sqrt{3} < 49 \Leftrightarrow \left(27\sqrt{3}\right)^2 < 49^2 \Leftrightarrow 27^2 \times 3 < 49^2.$$

A última desigualdade sendo verdadeira, em vista das equivalências, também é verdadeiro que $\sqrt{3\sqrt{3}} < \frac{7}{3}$.

8.11. a) V. Como os números são positivos, é suficiente mostrar que $(a+b)^2 \geq (2\sqrt{a \cdot b})^2$ ou, equivalentemente, que $a^2+2ab+b^2 \geq 4ab$. Ou ainda, que $a^2-2ab+b^2 \geq 0$. Ou seja, $(a-b)^2 \geq 0$. Esta desigualdade vale sempre.

b) F. Tome $a = -1$ e $b = 0$.

c) V. Veja que $a^3 - 1 = (a^2+a+1)(a-1) \geq a^2+a+1$.

Aula 9

Respostas dos Exercícios

Exercício 9.1

Note que

$$c-a=\frac{a+b}{2}-a=\frac{b-a}{2}=r \quad \text{e} \quad b-c=b-\frac{a+b}{2}=\frac{b-a}{2}=r$$

Exercício 9.2

$$r=\frac{1}{2}\left(\frac{36}{25}-\sqrt{2}\right)=\frac{36-25\sqrt{2}}{50}$$

Respostas dos Exercícios

9.1. A igualdade significa que a está igualmente distante dos pontos (números) 2 e -1.

Se $a \leq -1$, a igualdade é equivalente a $-(a-2)=-(a+1) \Rightarrow 2=-1$, sem solução.

Se $-1<a\leq 2$, a igualdade é equivalente a $-(a-2)=a+1 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$.

Se $a>2$, a igualdade é equivalente a $a-2=a+1 \Rightarrow -2=1$, sem solução.

Logo, $a=\frac{1}{2}$ é a única solução.

9.2. $x=-6$ e $x=0$

9.3. a) $I=\left(-\frac{1}{2}-\frac{5}{2},-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\right)$

b) $I=\left(\frac{1}{12}-\frac{31}{12},\frac{1}{12}+\frac{31}{12}\right)$

c) $\left(\frac{4+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2},\frac{4+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}\right)$

9.4. a) 5, b) $\frac{31}{6}$, c) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

9.5. a) $x+\dfrac{1}{5}=2 \Rightarrow x=\dfrac{9}{5}$ ou $-\left(x+\dfrac{1}{5}\right)=2 \Rightarrow x=-\dfrac{11}{5}$

b) $x-3=-1 \Rightarrow x=2$ ou $-(x-3)=-1 \Rightarrow x=4$

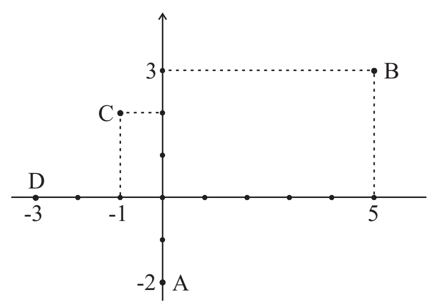
c) $x+6<3 \Rightarrow x<-3$ ou $-(x+6)<3 \Rightarrow x>-9$.
Logo, $x \in (-9,-3)$.

Aula 10

Respostas dos Exercícios

Exercício 10.1

a) A representação dos pontos é:

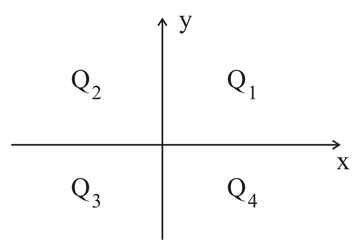


b) 1- F, 2- F, 3- F, 4- V, 5- V

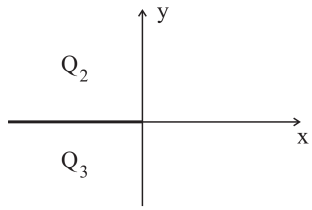
c) $H_+ \cap H_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y=0\}$ é o eixo x.

Exercício 10.2

a) Observe que:

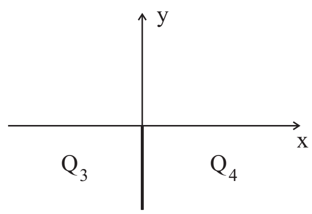


b) (i)



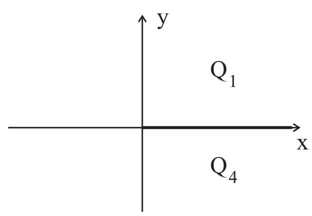
$Q_2 \cap Q_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = 0 \text{ e } x \leq 0\}$, representa o eixo x não positivo.

ii)



$Q_3 \cap Q_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 0 \text{ e } y \leq 0\}$, representa o eixo y não positivo.

iii)



$Q_4 \cap Q_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = 0 \text{ e } x \geq 0\}$, representa o eixo x não negativo.

Respostas dos Exercícios

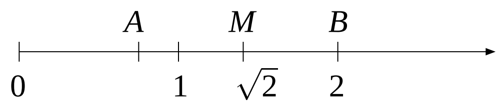
10.1. $(-2,8)$ e $(3,8)$

10.2. $(-2,3)$ e $(2,7)$

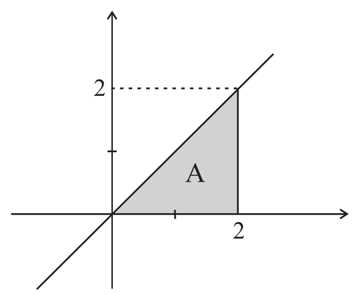
10.3. $P = (1,-1)$

10.4. Temos que:

$$m = \frac{1}{2}\left(-2+2\sqrt{2}+2\right) = \sqrt{2}$$

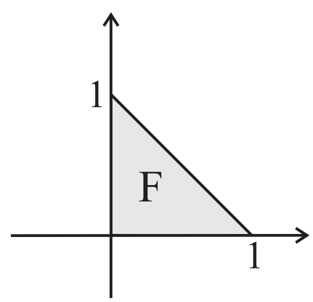


10.5. A região é:



10.6. $a = 3,\ D = (3,2)$

10.7. A região é:



Aula 11

Respostas dos Exercícios

Exercício 11.1

A reta perpendicular ao eixo x e que passa pelo ponto $A = (-2,3)$ encontra o eixo x no ponto $P = (-2,0)$. Então,

$$d(A,P) = \sqrt{[-2-(-2)]^2+(3-0)^2} = 3\,.$$

Exercício 11.2

Os pontos do eixo y são do tipo $P = (0,a)$ onde $a \in \mathbb{R}$. A distância do ponto P procurado até o ponto $\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$ vale 1. Então

$$\left(0+\frac{1}{2}\right)^2 + (a-1)^2 = 1^2 \Rightarrow a = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Logo $\left(0,1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $\left(0,1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ são os pontos procurados.

Exercício 11.3

Temos que

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0\,.$$

Respostas dos Exercícios

11.1. (a) $x = 1$; (b) $x = \dfrac{3}{2}$; (c) $x \geq \dfrac{7}{2}$; (d) $x = -1$

11.2. (a) $3\sqrt{2}$; (b) $B = (2,0)$, (c) $D = (-1,-3)$

11.3. $P = \left(0,\dfrac{2}{3}\right)$

11.4. $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0$

11.5. $C = (-1,0)$, $r = 2$

11.6. a) $C = (0,2)$ e $r = 4$ b) $A = \left(2\sqrt{3}\,,\,0\right)$ e $B = \left(-2\sqrt{3}\,,\,0\right)$

Aula 12

Respostas dos Exercícios

Exercício 12.1

a) $x = 49$

b) -13

c) $x = 19$

d) $\frac{2}{3}$

Exercício 12.2

$x = -3$ e $y = 0$

Exercício 12.3

$x = 3$ e $y = -1$

Exercício 12.4

a) $x_1 = \sqrt{3}$ e $x_2 = -\sqrt{3}$

b) $x = 0$

c) $x_1 = 0$ e $x_2 = -\frac{8}{3}$

d) $x_1 = \sqrt{15}$ e $x_2 = -\sqrt{15}$

e) $x_1 = 1$ e $x_2 = -9$

f) $x_1 = -1$ e $x_2 = -2$

Exercício 12.5

$$-\frac{3\sqrt{10}}{10} < x < \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Exercício 12.6

$x \in (-\infty, -2) \cup (5, +\infty)$

Exercício 12.7

a) $x = 1$ e $y = -2$

b) $x = 12$ e $y = 8$

c) $x = 2$ e $y = 1$ ou $x = 1$ e $y = 2$

d) $x = 4$ e $y = 3$ ou $x = -4$ e $y = -3$

Exercício 12.8

a) $x = 9$

b) $x_1 = 5$ e $x_2 = -\dfrac{5}{2}$

c) $x = -\dfrac{4}{5}$

d) $x_1 = -1$ e $x_2 = -2$

Aula 13

Respostas dos Exercícios

Exercício 13.1

a) $D(f) = \left(0, \sqrt{6}\right) \cup \left(\sqrt{6}, \infty\right)$

b) $D(g) = \mathbb{R}$

c) $D(h) = (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$

d) $D(q) = \left(\dfrac{2}{3}, 3\right]$

Aula 14

Respostas dos Exercícios

Exercício 14.1

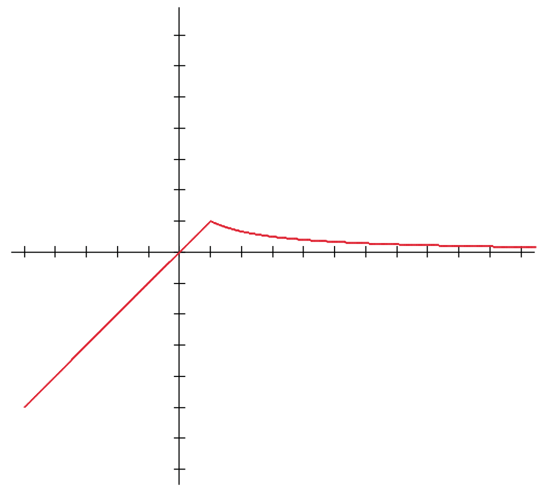
A intercessão com o eixo Ox ocorre quando $y = 0$, logo $A = (-2, 0)$.

Exercício 14.2

a) O gráfico é uma reta que passa pelos pontos $(0, 10)$ e $(10, 0)$.

b) O gráfico é uma reta para $x \leq 1$ e uma hipérbole voltada para cima para $x > 1$. A medida que x aumenta, os valores de y se aproximam de 0, e o gráfico se aproxima do eixo Ox.

x	$y = \frac{2}{x+1}$
1	1
2	$\frac{2}{3}$
3	$\frac{1}{2}$
99	$0,02$
999	$0,002$



Exercício 14.3

a) O gráfico é uma parábola voltada para baixo. Para traçar o gráfico, devemos calcular o vértice e as raízes. Identifica-se da equação:

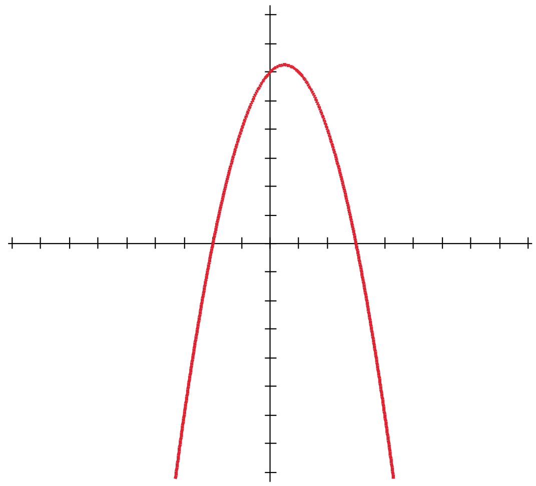
$a = -1$, $b = 1$ e $c = 6$

$\Delta = 1 - 4 \cdot (-1) \cdot 6 = 25$

$V = \left(-\dfrac{1}{-2}, -\dfrac{25}{-4}\right) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{25}{4}\right)$, o vértice é o ponto de máximo, as raízes:

$x = \dfrac{-1 \pm 5}{-2} \Leftrightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 3$

x	y
-2	0
-1	4
0	6
$\frac{1}{2}$	$\frac{25}{4}$
1	6
3	0

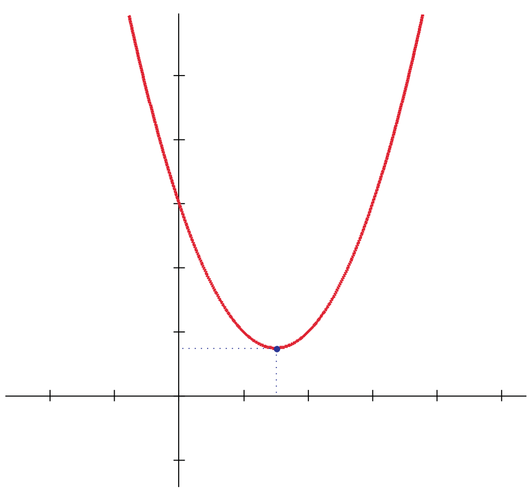


b) O gráfico é uma parábola voltada para cima:

$\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 9 - 12 = -3$

$V = \left(-\dfrac{(-3)}{2}, -\dfrac{(-3)}{4}\right) = \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$

O vértice é o ponto de mínimo, e o gráfico não intercepta o eixo Ox porque a função não possui raízes.



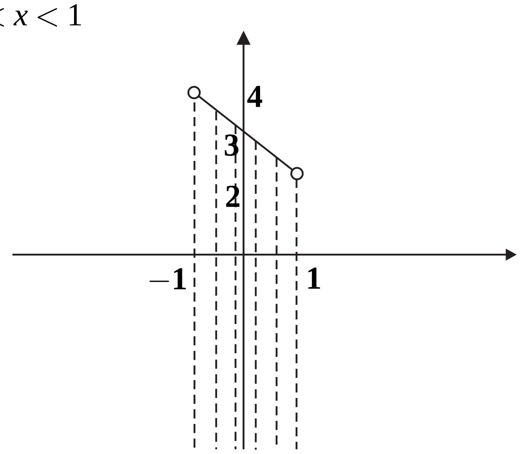
Aula 15

Respostas dos Exercícios

Exercício 15.1

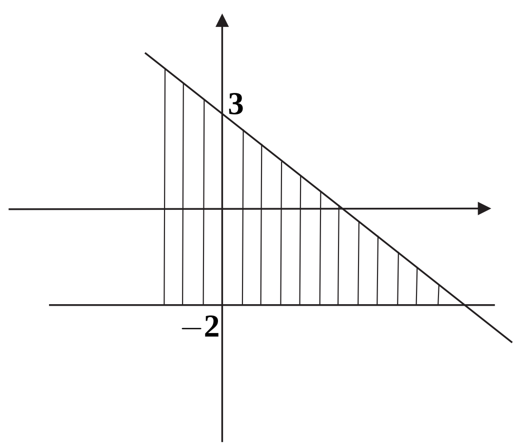
a) $y \leq -x+3$ e $-1 < x < 1$

x	y
-1	1
0	3
1	2



b) $-2 \leq y \leq -x+3$

x	y
-1	4
0	3
1	2



Aula 16

Respostas dos Exercícios

Exercício 16.1

Para determinar o ponto de equilíbrio temos que igualar a demanda e a oferta.

$D = Q \Rightarrow 136 - 2P = 10P - 80 \Rightarrow 12P = 216 \Rightarrow P = 18.$

Portanto, $PE = 18$ e $QE = 180 - 80 = 100$ ponto de equilíbrio $E(18, 100)$.

Exercício 16.2

Considere a demanda de mercado $D = P^2 - 18P + 10$ e a oferta $Q = 12P - 72$.

Faça os gráficos das curvas de demanda e oferta e determine PE e QE, respectivamente, o preço e a quantidade de equilíbrio.

Para determinar o ponto de equilíbrio temos que igualar a demanda e a oferta.

$D = Q \Rightarrow P^2 - 18P + 10 = 12P - 72 \Rightarrow P_1 = 3,04$ ou $P_2 = 26,95.$

Fazendo-se o estudo da função demanda, a demanda é positiva no intervalo $0 < P < 0,57$ ou $P > 17,43$, portanto, o ponto de equilíbrio é $E(26,95\,,\,251,40)$.

ISBN 978-85-7648-496-7
9 788576 484967

UENF
Universidade Estadual
do Norte Fluminense

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
UERJ

Universidade Federal Fluminense
uff

UNIVERSIDADE DO BRASIL

Universidade Federal Rural
do Rio de Janeiro

UNIRIO

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

GOVERNO DO
Rio de Janeiro
SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB
UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL

Ministério
da Educação

BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL